

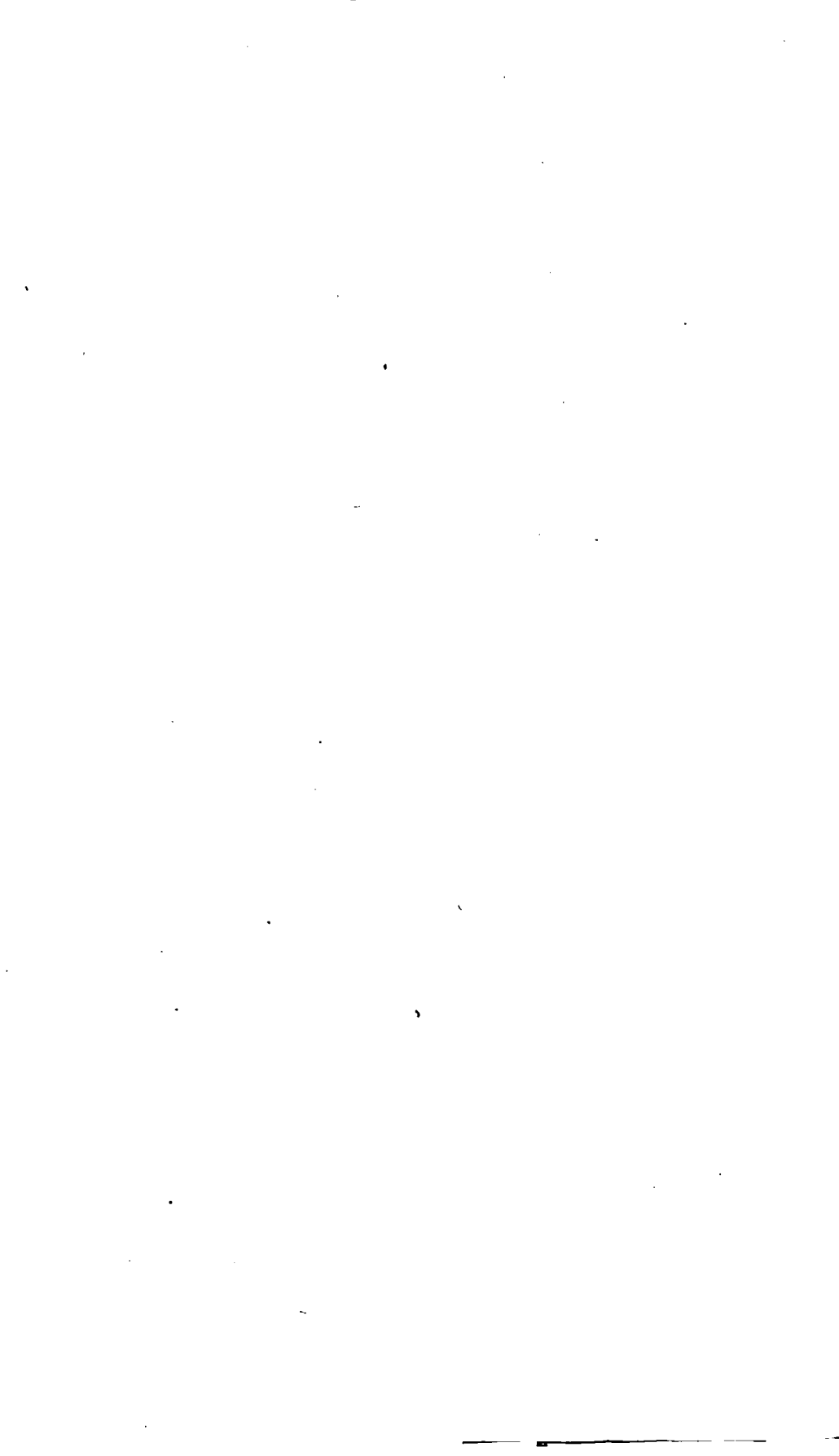
Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES
Google Livres

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBRI PRIORES XII.



**EUCLIDIS
ELEMENTORUM**

LIBRI PRIORES XII.

EX

COMMANDINI ET GREGORII

VERSIONIBUS LATINIS.

IN USUM JUVENTUTIS ACADEMICÆ.

EDIDIT, PLURIBUS IN LOCIS AUXIT,

ET

IN DEPRAVATIS EMENDAVIT

SAMUEL, EPISCOPUS ROFFENSIS.

OXONII:

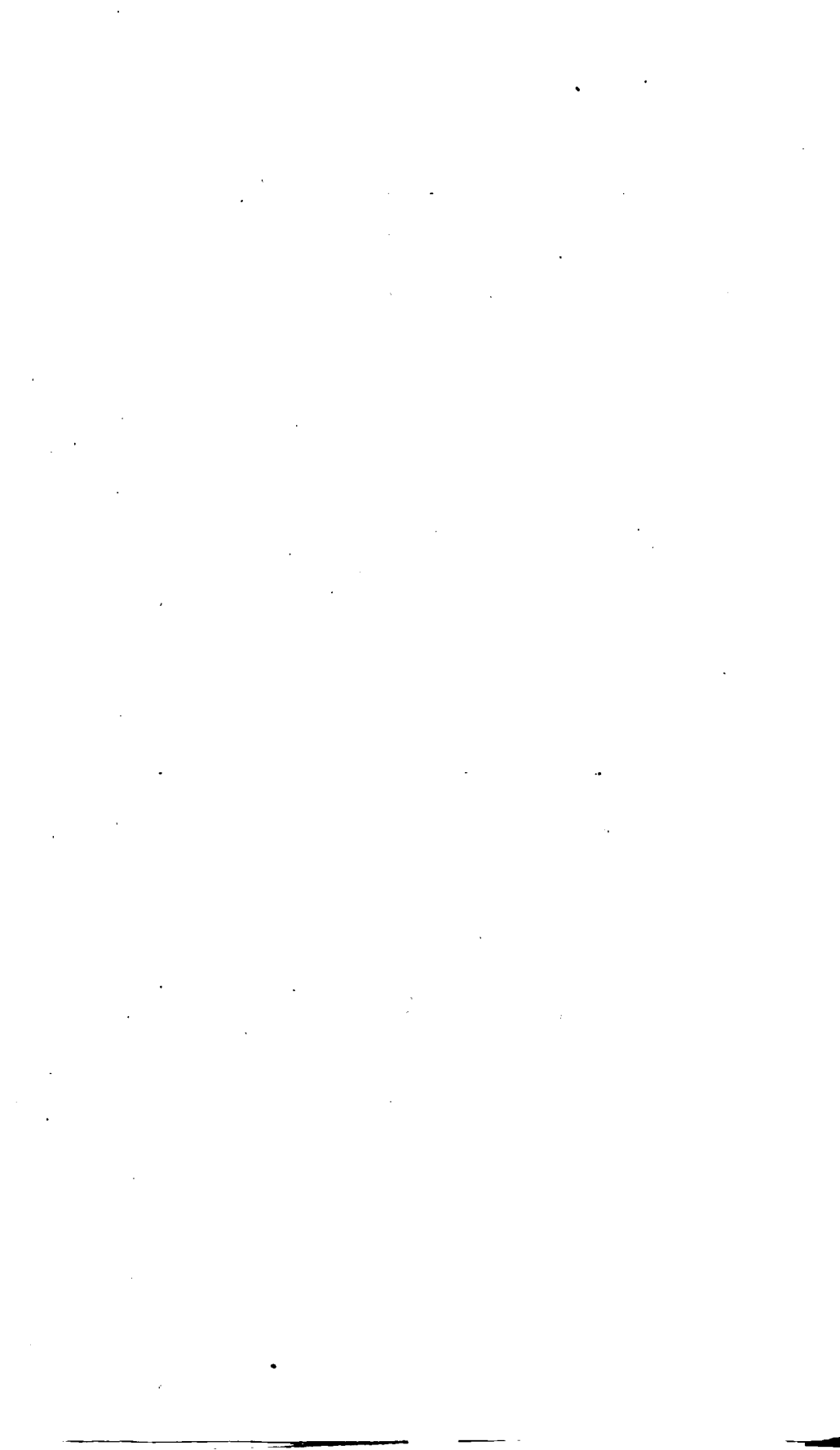
E TYPOGRAPHEO CLARENDONIANO.

M DCCCLII.



Clar. Press.

21. b. 2.



PRÆFATIO.

NIHIL omnino opus est, vel de consiliis nostris hic loci agere, quomodo scilicet Juventutem in disciplinis Mathematicis optime institui posse arbitramur, vel ea singulatim percurrere, quæ in hunc finem conficere, et in lucem emittere nobiscum statuimus. Etenim de omnibus hisce abunde dictum est, in Prolegomenis ad Opuscula ea Mathematica, quæ a nobis concinnata, e **PRÆLO OXONIENSI** nuperrime prodierunt; ubi et Euclidem quoque denuo edere in nos suscepimus, et alteram etiam Diatribarum seriem, in quibus eos gnaviter se exercere necesse est, qui id sibi exoptant, in subtili, siqua alia, scientiâ, recto ingredi tramite, et initia ejus accurate ponere.

Impræsentiarum itaque, quod nostri magis officii est, et Lectori etiam magis intererit, paucis eum edoceri volumus, quid in hac nostrâ Euclidis

Editione a nobis præstitum est, saltem quid ab aliis diversimode, vel posthabitis eorum consiliis; sed neque temere tamen aut infelicitè, uti spes est, nisi fallimur, et magnam in hoc negotio frustra insumpsimus operam.

PRIMO igitur, plerique eorum, qui in usum Studiosæ Juventutis Euclidem ediderunt, secus ac nos fecimus, non nisi priores sex libros cum undecimo et duodecimo typis mandârunt; partim, ut opinamur, quia facile sibi persuaserint, *septimi, octavi, et noni* nullam eos jacturam facturos esse, qui vel in puerorum scholis, vel a quocunque demum præceptore *Arithmeticæ* Elementa didicerint; partim quia omnem libri *decimi* utilitatem parvi penderint, præ *Surdorum* doctrinâ, prout ab iis exponitur qui artem Algebraicam tradunt—quod in erudite magis factum sit, nescio, an oscitanter; tam a ratione alienum est, juniores ad Algebram amandare, priusquam Geometriæ Elementa rite calluerint, e quibus pendet etiam regularum Algebraicarum sive veritas omnis, sive evidentia. Etenim has ut artem quandam, si placeat, absque Geometriâ quis condiscat; ut scientiam non intelliget, nullâ Geometriæ ratione habitâ, quæ et ea amplectitur, e quibus generales Numerorum affectus exoriri compertum est. Rectius itaque nos, ut visum est, et viam melius commonstrantes, tres Euclidis libros qui de Numeris agunt, *septimum* scilicet, *octavum* et *nonum*, Editioni nostræ inseruimus. De *decimo*, ut quod verum est confiteamur,

fitamur, aliquamdiu dubitavimus; quia *Surdorum* doctrina, quatenus ibi traditur, angustior est, nec ullo modo fines eos attingit, ad quos provexerunt eam Scriptores Algebraici. Vicit tamen sententia, et hunc quoque librum ab aliis non divellere, tum ut Elementorum hæc Editio nostra ad libri duodecimi finem omnibus numeris absoluta esset, tum quia *Surdorum* doctrinam mirum est, quanto facilius pro se quisque arrepturus est, qui *Incommensurabilium* Mysteriis prius ab Euclide initiatus fuerit. Ad minimum, *viginti* priorum hujus Libri propositionum notitiam nemo est, qui commode desiderare poterit.

Per priores sex libros, ut et in undecimo et duodecimo, COMMANDINI textum secuti sumus, prout a Cl. *Keil*, Geometriæ Saviliano inter Oxonienses Professore, editus est: quoad libros quatuor intermedios, Latinam eorum versionem dedimus, quæ a GREGORIO concinnata est, eâ tamen ubique lege, ut quæ vel in hac vel illâ manifeste depravata erant, ita a nobis emendarentur, ut res postulare visa est. Quod quidem sæpissime in Libris quinto, decimo, et undecimo faciendum erat. Porro autem vix credibile est, quam frequenter ex obscuris perspicua, et ex depravatis sana elicere datum est, immutatâ tantummodo Propositionum vel Definitionum serie, et in ordinem redactis, quæ, nescio quâ Editorum incuriâ, e locis suis turpiter antea amota erant. Hoc, exempli gratiâ, ipsissimum est, quod præter

A 2

alia

alia de quibus mox dicturi sumus, quoad novem priores *Libri quinti* definitiones, audacter fecimus. Simul autem ut intelligant ii, qui Euclidem nostrum in manus sumpserint, quomodo singula in aliis item editionibus disposita sunt, numeros ordinem apud eas indicantes ad oram libri semper apponi curavimus, quod et semel monuisse satis esto.

Verum in his, de quibus loquimur, definitionibus, ordinem earum immutare tantummodo, non erat statim in solido quoque locare omnia. Definitionem *septimam* Libri quinti, quæ aliter penes nos *nona* fuisset, abjecimus omnino et ablegavimus, et aliam ejus loco adscripsimus, quæ Veterum Geometrarum ἀκρίβεια magis sciret; rem, de quâ agit, dilucidius exponeret; et ex quâ Propositionum, quæ ab ea pendent, demonstrationes, ope emendationis nostræ plus in se elegantiae fusciperent, et etiam perspicuitatis. Cæterum ulterius indaganda res est, et quæ ad quæstionem hanc pertinent, altius eruenda; ne aut nimiae arguamur fiducia, aut etiam consilii, quod minus est, male suscepti.

QUOTIESCUNQUE igitur dicimus duarum magnitudinum proportionem ad se invicem, *majorem* vel *minorem* esse duarum aliarum magnitudinum proportionem, loquimur *Catachrestice*. Proportio, secundum ipsius Euclidis definitionem, sub illam e Categoriiis cadit, quæ vocatur $\pi\rho\omicron\varsigma\ \tau\acute{\iota}$. Porro autem illa, inter quæ intercedit relatio hæc, quam
Propor-

PRÆFATIO.

Y

Proportionem appellamus, quantitates sunt; nequit igitur relatio hæc in se τὸ πᾶν suscipere; nequaquam enim fieri potest, unam eandemque rem simul et *relatum* esse, et *relationem*. Si itaque vocabulis nunquam, nisi legitime, uti concessum foret, nullo modo illud dicere liceret, proportionem quam habet A ad B, vel *majorem* esse vel *minorem* proportionem, quæ inter alias duas magnitudines intercedit. Quam tamen loquendi formulam, quia ita voluit usus, “quem penes arbitrium est,” eo, quem obtinuit, loco non eiecimus; tantummodo, quo sensu accipienda est, ostendere conati sumus, novam rei ipsius definitionem adhibentes, quæ verbis antea tam incongruis, et parum idoneis explicata est. Exinde etiam, ut supra dictum est, propositiones quæ e definitione de quâ agimus, omnino pendent, perspicue magis et dilucide demonstrare licuit. Immo et præter hæc suspicari consuevimus, definitionem a nobis adhibitam, vel eam esse, quam Euclides ipse posuit, vel, ad minimum, ei simillimam. Saltem, quæ toties ab Editoribus hoc in loco repetita est, ab Euclide profluxisse nullo modo censenda est; primo, quod verbis quibus ille nunquam conceptus suos in medium profert, exprimitur; tum autem præcipue, quod disciplinis Mathematicis prima, quod aiunt, labra admoventibus liquido non constet, unam eandemque magnitudinem ad secundam non posse habere *majorem* simul et *minorem* proportionem, (sensu definitionis illius, quæ vulgo circumfertur,) quam habet secunda ad tertiam.

Satis profecto scimus omnino hoc fieri non posse : sed in eo subsistimus, *Tyronibus hoc non constare*, neque rem ita se habere aliquem iis comprobaturum esse, nisi propositionum ope, quæ ex aliquâ *majoris* et *minoris* proportionis definitione demonstrandæ sunt. His interea incommodis omnino vacat definitio nostra. Ipsissimis effertur vocabulis, quibus et alibi Euclides utitur, ubi de re eadem agit, (Vide *Dator. Definit.*) et ambiguitatem, quod maximum est, nullam omnino in se habet.

Cæterum, dum hæc ponimus, litem aliâ ex parte fortasse movebunt aliqui, et Definitioni nostræ objicient, graviter laborare eam, quia *pro concessio sumit*, aliquam semper exstare magnitudinem, quæ ad datam magnitudinem datam quamvis proportionem habeat. Porro ob hoc ipsum inquierent Euclidi eam minime omnium accensendam esse, siquidem ille arbitrio suo nunquam ita utitur, nec a nobis exigit, ut concedamus exstare aliquid, quod prius non docuit quomodo inveniamus, vel quibus artificiis in medium proferre possimus; quod est multorum e recentioribus, qui in eum Commentarios scripserunt, tam fidenter et toties prolatum de Euclide iudicium. Pace autem tantorum virorum, causâ idcirco non cadimus; nam quod asserunt ii, veritatem sibi consentientem non habet. Lege eâ, de quâ certant, Euclides ipse se non obstringit, ubi in Libro Elementorum quinto de illustribus iis et tam late paten-

patentibus relationibus agit, quas inter se habent quantitates continuæ, quicquid illud sit, quod apud eum usitatus est, (sed tamen usitatus tantummodo, non constanter et perpetuo factum) dum figurarum affectus speciales tradit, aut effectiorem problematum ad hos spectantium. Sed ut intra ea, quæ latius patent, diutius me non contineam, *hoc ipsum*, quod in definitione nostrâ *pro concessio sumitur*, ab EUCLIDE IPSO quoque *pro concessio sumptum est*, ubi in secundæ et aliarum Libri duodecimi propositionum demonstratione versatur; sicut et alios omnes facere necesse est, quotiescunque per *Exhaustionum* methodum, aliquid ponere volunt, aut certum esse ostendere; cum istius methodi principium et origo, illud nimirum sine quo nulla omnino esset, hoc ipsum sit, quod et nos in definitione nostrâ usurpavimus. Unde obiter quoque notandum, quam inominato nonnulli e Libro quinto propositionum decimæ octavæ et aliarum quarundam demonstrationes sustulerint, quales in *Commandini* Editione juxta THEONEM extant, et alias earum loco induxerint, non efficaciores, tædii autem et moliminis longe majoris. Et de his quidem hætenus.

Jam autem ex ipsâ ordinis immutatione, quæ nobis complacuit quoad novem priores Libri quinti definitiones, *tertiæ*, *quintæ*, et *sextæ* apud nos, olim *tertiæ*, *octavæ*, et *nonæ*, luce clarior est utilitas, licet ita hallucinentur nonnulli, ut eas prorsus abjiciant, aut nihili pendant. Siquidem omnia a

nobis ita disposita sunt, ut tandem aliquando μετά τινος ὁδῶ καὶ τάξεως explicetur hæc definitionum series, impedita antea, et mire interturbata. Fac enim in iisdem periculum, prout apud alias Elementorum editiones extant, et nihil inveneris, quod aut perspicuum, aut ad doctrinam utile, vel denique iis, quibus interponitur, satis consonum est—Rem ipsam deinde perpendito, et subductis rationibus, quomodo ex salebris hisce quis se expediat aliter quam nos fecimus, ut opinor, vix invenies. Insuper ordinem ipsum a nobis præfinitum aperte comprobant omnia, vel potius eum unice exposcunt. Primo enim de *Proportionum analogiâ* differere insulsum fuisset, nisi prius, ut per definitionem *sextam* factum est, olim *nonam*, ubi eam inveniremus, commoniti fuerimus; quod tamen ipsum, ubinam invenienda esset Analogia, frustra indicasset aliquis, qui illud etiam prius non ostenderat, quidnam Analogia ipsa sit, quod definitionis *quintæ*, olim *octavæ* officium est. Porro effectum hoc, analogiam esse proportionum similitudinem, nihilo magis quam barbare dictum aliquid nos erudivisset, si non antea quoque intellexerimus, *quid esset* proportio, quod edocere, *tertiæ* definitionis est. Totâ enim errant viâ, quod tamen fecerunt nonnulli aliter quidem non ἀγεωμέτρητοι, qui *proportionalitatem* sive *analogiam* cum *proportione* quodammodo confundunt, et naturam ejus *septima* Definitione, olim *quintâ*, satis indicari opinantur. Etenim Definitio ista neque de Analogiæ, neque de Proportionis naturâ quicquam
omnino

omnino agit ἀπλῶς sumptā, et prout per se exstat. Non istiusmodi definitio est, quam summam et optimam esse statuunt Dialectici, et quæ apud eos appellatur, λόγος τῆς ὑσίας. Descriptio rei per certa quædam attributa, quæ assidue eam comitantur, potius est, quam definitio absoluta, et proprie ita dicta. Indicium ponit proculdubio, quo magnitudines proportionales, id est, eæ quæ, binæ comparatæ, similitudine Proportionis inter se gaudent, ab aliis dignoscantur, quæ eandem inter se non habent Proportionis convenientiam; quod tamen *Proportionem ipsā* non prius explicata, nihilo magis profuerat, quam si nobis dixerat aliquis, exempli gratiā, quomodo corpora *vi electricā prædita* ab aliis distingueremus, ignaris interea et omnino indoctis, quid sit, vel in quo constaret ipsa *hæc vis electrica*. Rectissime igitur, et etiam necessario docet Definitio *tertia*, quid sit *Proportio*, et id etiam per λόγον τῆς ὑσίας.

Quæritur a nonnullis etiam, quare ullā omnino opus sit Proportionis definitione, cum nullam exposcant homines, ut ope ejus intelligant, quid a vocabulis “majus” aut “minus;” exempli gratiā, aut “æquale” innuitur. Retorquendum est, quia voces illæ, simplex aliquid, et perspicuum, et nullo negotio intelligendum exprimant; Proportio non item, sed vocabulum sit, quod licet in ore omnium, paucissimis tamen præfinitam aliquam aut perspicuam rei ipsius cognitionem idcirco sufficiat. Quod si aliter esset,
non

non ut supra dictum est, ita omnia permisce-
rent homines, ut interdum etiam *Proportionem*
et *Proportionalitatem* unam eandemque rem esse,
ullo modo existimarent. Ponimus itaque non
commodam tantummodo, sed necessariam esse
Proportionis definitionem; ubi Græco sermone
quis uteretur, præcipue, cum ex omnibus vocis
λόγος significationibus, nullam apud Græcos in se
recipit, vulgo saltem et usitate, quæ proportio-
nem innuere videatur.

Obstrepunt interea alii, et Euclidi obijciunt,
definitionem *Proportionis* quæ ab eo tradita est,
Metaphysicam esse, quod et certissime ita se habet.
Neque tamen sola est, aut unica hujusce generis
definitio, quâ Elementa sua ab Euclide munita
sunt. Quid enim? Unitatis et Numeri apud eum
Definitiones nonne etiam *Metaphysicæ* sunt? Quo-
modo autem sine harum rerum definitionibus, nu-
merorum affectus explicare potuerat, vel quo-
modo res, quæ generis generalissimi tam fere sunt,
aliter definire licuit, nisi *Metaphysice*?—Adde, *Me-
taphysicam* doctissimos e veteribus Geometris non
tam averfari solitos esse, quam e recentioribus
complures, qui tamen sibi mirifice plaudunt, et
propter ingenii sui, et doctrinæ excellentiam.

Nosmet e contra EUCLIDIS causam etiam ul-
terius agere non piget, et efficere, modo poteri-
mus, ut *Definitionem hanc tertiam* in posterum ho-
mines non refugiant, quasi labem aliquam e *Meta-
physicis*

physicis in se contraxerit. Nihil uspiam in Elementis suis ad examen adigit Euclides, nisi cujus antea dederit *definitionem essentiae*, si excipias tres e figuris solidis, Sphæram nimirum, Conum rectum, et Cylindrum rectum; quas, quænam sint, ostendit, illud utique indicando, quomodo per motum generari possint, unde et vera eorum essentia statim mente percipitur. Præter hæc, ut diximus, in aliis omnibus pro definitione utitur λόγῳ αὐτῶν τῆς οὐσίας. Definitiones hujuscemodi omnes eæ sunt, quibus ostendit quid sit Circulus, quid Rhombus aut Quadratum, quid Prisma aut Pyramis, quid denique Angulus Planus. Si de Proportionem igitur disserere inceperat, neque tamen prius illam per λόγον τῆς οὐσίας definierat, aliter et minus accurate egisset in re subtili et difficillimâ, quam pro more suo, in iis, quæ discentibus multo minus molestiæ faceffunt. Quod si, simul ac ad Proportionem devenerit, et antequam de eâ ulterius ageret, definienda esset et ea quoque, prout cætera, per λόγον τῆς οὐσίας, quomodo aliter hoc, quam ab Euclide factum est, fieri potuisset, vellem mortalium aliquis mihi indicaret. *Relatio* enim est hæc Proportio, et nihil aliud, et *quantitatum* quoque, non aliarum rerum relatio. Essentia autem, vel alicujus τὸ τί ἦν εἶναι, alio modo definiri nequit, quam Categoriam indicando sub quam cadit, et enunciando quoque, quomodo ab aliis sub eandem Categoriam cadentibus diversa sit. Quorum utrumque ab Euclide factum est, eâ Proportionis definitione, quæ Libro Elementorum quinto præmittitur.

mittitur. Interea videri hanc definitionem magis *Metaphysicam*, quam eas, quibus Circulus docuit quid esset, aut Quadratum (exemplis tantummodo utimur) evenit propter rei ipsius naturam, tam longe a sensibus remotæ, et a conceptibus quæ per eos intrant. *Figura* scilicet ex eorum genere est, quorum, cum non sint essentia primariæ, ὑσΐαι πρῶται, ut cum Aristotele loquamur, nulla omnino existentia est præter eam quæ est in subiecto, ἐν ὑποκειμένῳ. Subiectum autem *figura* est *Materies*, five ὕλη. *Figura* itaque, Circuli, Quadrati, aut Trianguli existentia unice in *Corpore* est; non tamen in αἰσθητῷ aliquo, (de *figuris* etenim perfectis jam loquimur, quoniam de illis tantummodo Mathesis agit) sed ἐν ὅλῃ πεπερασμένῃ, (siquidem hoc est quod per "Corpus" significare volumus,) qualis *mente intelligenda est*. In hac inquam, et nullibi alias est *figurarum* existentia—inter quæ evenit tamen, ut earum adumbrationes quædam in iis quoque appareant, quæ αἰσθητὰ sunt, et quæ *sensibus subjiciuntur*. Porro quoniam quamplurimis contingit εἶδωλα hæc, five umbras, pro rebus ipsis sumere, Triangulum et aliæ quævis *figuræ* tam per *phantasiam*, quam per *intellectum* agnoscuntur; et in hisce omnibus, λόγος τῆς ὑσΐας *phantasma* rei *perceptioni* necessario objicit, pariter ac *formam* ejus *intellectui*. E quibus, non vulgus tantummodo, sed omnes fere qui Veterum Dialecticâ non imbuti sunt, in *phantasmate* hæere potius quam in *formâ intellectuali* solent, tanquam hoc melius et certius rem

rem ipsam repræsentaret, contra illud quod verum est. Quoad *Proportionem* interea, quæ *mera Relatio* est, *phantasma* ejus nullum omnino exhiberi potest, quod intueamur, et in quo sensuum ope se defigat animus, quod vitio Euclidî vertitur et definitioni ejus; quasi *per eum* proportionis doctrina difficilis esset et obscura, dum tamen *e rei ipsius naturâ* omnino exoritur, si quid hujusmodi sit circa eam incommodum. Neque enim non iisdem opprobriis oneratæ fuissent etiam Circuli apud eum, vel Quadrati definitiones, si similitudinem aut adumbrationem quadrati vel circuli in externis rebus nunquam viderimus. Sed ut post unum jam verbum aut alterum disputatio hæc ad finem perducatur—meditati enim sumus præfationem, scripsimus fere commentarios.

Discrepantibus in tantum et conturbatis hominum de hac Matheseos partitione sententiis, nihil mirum est, si inveteraverint etiam loquendi de eâ formulæ, neque veritati, neque sibi ipsis consonæ. Alii itaque vocabula “rationem” et “proportionem,” alii “proportionem” et “proportionalitatem” promiscue usurparunt, ut si eadem utriusque significatio esset; “rationem” alii dixerunt “proportionem” esse quam habet magnitudo una ad aliam, quasi *Proportio genus* esset, *Ratio interea species*—omnia multo aliter, quam oportuit. Quod verum et legitimum est, λόγον per *Rationem*, et ἀναλογίαν, per *Proportionem*, ubi Græca Latino sermone proferenda sunt, unice exprimere debemus.

Sed

Sed incuriam quæ tam diu invaluit, non nostri est amovere, neque satis commodum esset jam aliter, quam ex recepto more loqui; unde factum est nos etiam Proportionis nomine λόγος indicasse, et ἀναλογίαν, ubi Græco vocabulo non utimur, Proportionalitatem appellasse, vel potius, ubi nosmet ipsi loquimur, Proportionis convenientiam.

Absolutis hisce, in iis quæ de opere hoc nostro etiamnum dicenda restant, Lectorem non diu morabimur. *Decimus* Elementorum Liber, utpote qui minime, vel a doctis, vel a discentibus atrectatur, longe majorem quam alii emendationem postulabat, et operâ nostrâ pluries emendatus est. Neque tamen opus est, ut eorum quæ ibi interjecimus, vel etiam restituimus, ratio a nobis singulatim reddatur. Adeo cuivis, ut opinamur, pro re natâ manifestum erit, quâ de causâ et quibus consiliis hujuscemodi omnia immutavimus. Quod in Libro *undecimo* a nobis factum est, quæ extra dubium desiderabatur, *Parallelismi Rectæ lineæ et Plani* definitionem adjecimus; definitiones ipsas in ordinem redegitur; et *similium Solidarum figurarum* definitionem, (nonam olim, penes nos *undecimam*,) eâ ex parte auximus quâ manca erat et imperfecta; ita ut statim ex illâ, et per consecutarium agnoscenda sit *similium eorum Solidorum* æqualitas, in quibus *latera homologa sunt æqualia*. Quare et omnino quocumque abjecimus eam, quæ in cæteris editionibus tradita.

tradita est, *æqualium et similiarum solidorum* Definitionem; quæ eo nomine etiam appellari nunquam debuit, cum nothum tantummodo Theorema sit, quod fusius ostendit SIMSONUS in Euclide suo Anglice reddito; ubi diserte quoque indicavit, quibus in locis res ita se habitura esset, et novas earum propositionum demonstrationes concinnavit, quæ neque ex accuratâ definitione antea derivatæ erant, neque rectâ ratiocinatione absolutæ. Quin et majus aliquod a nobis, et amplius factum est. Emendatâ *Solidorum similiarum* definitione, et positis accurate iis quæ *æqualitatem* eorum indicare possint, propositiones Libri *undecimi* 25^{am}, 27^{am}, 28^{am}, 29^{am}, 31^{am}, et 33^{iam}, una cum *duodecimi* tertiâ et octavâ, quantum conjecturâ assequi possumus, ita demonstratas dedimus, ut ab Euclide ipso verisimile est eas olim prodixisse. Neque temere hoc a nobis dictum esse quis pro se intelligat. In omnibus enim, quæ ita emendavimus, nihil aliud operâ nostrâ factum est, vel omnino faciendum erat, quam in demonstrationibus reponere, quod in singulis omnino desiderabatur—illud nimirum, quod, nescio quâ incuriâ, e *Solidorum similiarum* definitione pariter excidisse censendum est, utcunque neque in vetustissimis Elementorum Editionibus, neque etiam in Codicibus MSS. inveniatur. Problematis insuper, de quo agit Propositio Libri *undecimi* vicesima sexta, solutionem adjecimus uberiorem multo, quam, quæ ex angustis suis principiis a SIMSONO prolata est.

Corollaria,

Corollaria, Lemmata, et Scholia, quæ locis innumeris in hac nostrâ Euclidis Editione interjecta sunt, et quæ in receptis editionibus non inveniis, five ex aliis desumpta, five a nobis concinnata, asterismo notantur. Quibus auctoris nomen non adscribitur, ea omnia a nobis profecta sunt. Quæcunque autem sint ea, vel quales quales, quæ in Editione hac nostrâ fecimus emendationes, ducem in plerisque eorum SIMSONUM certissime non secuti sumus; propter quod a nonnullis satis certo improbabimur, ab aliis fortasse, ut fieri solet, diversum experiemur iudicium. Aliud interea nobis propositum fuit, et aliud unice in Euclide emendando, Euclide ipso duntaxat magistro uti, per omnia intueri eum, et ad illius mentem, quantum fieri potuit, omnia componere. Porro autem, licet in eandem cum nobis arenam descenderit, cum SIMSONO multoties non sentimus; ubique non astipulamur ejus de aliis Elementorum Editoribus iudicio; quin et ex iis etiam quæ Operi suo inseruit, supervacanea nonnulla, aut infructuosa, impedita alia, et æquo longiora nobis semper visa sunt. Immo hoc ipsum erat, ut rem non diffiteamur, quod primo omnium ad Opus hoc nostrum excitavit nos, et tandem aliquando etiam ad conficiendum impulit — certa nimirum neque unquam immutata opinio, Euclidem a SIMSONO sermone Anglico donatum Juventutis Academicæ institutioni non sufficere, aut satis fideliter Veterum Geometrarum methodum, quæ nunquam non ἀκριβής ἐστιν est, iis in conspectu

PRÆFATIO.

xvii

spectu ponere. Sed neque interea quoque, in egregii istius Viri exercitationibus, non confitemur iidem inesse multa et artificii singularis, et exquisitæ elegantiae, quibus spartam quam nactus est feliciter ornavit, et unde laudem sibi jure adeptus est non mediocrem. Valeas, Lector, et quæ tibi in manus tradita sunt, æqui bonique consulas.

*Dabamus ex Ædibus Bromleianis,
Kal. Mart. MDCCCII.*

S. R.

E U C L I D I S
E L E M E N T O R U M
L I B E R P R I M U S .

D E F I N I T I O N E S .

D E F I N I T I O I .

PUNCTUM est, cujus nulla est pars, vel quod magnitudinem nullam habet.

II.

Linea vero est longitudo latitudinis expers.

III.

Lineæ termini sunt puncta.

IV.

Recta linea est, quæ ex æquo suis interjicitur punctis.

V.

Superficies est id, quod longitudinem, et latitudinem tantum habet.

VI.

Superficiei termini sunt lineæ.

VII.

Plana superficies est, quæ ex æquo suis interjicitur lineis.

VIII.

Planus angulus est duarum linearum in plano sese
B contin-

contingentium, et non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio*.

IX.

Quando autem quæ angulum continent rectæ lineæ fuerint, rectilineus angulus appellatur.

X.

Cum vero recta linea super rectâ lineâ insistsens, eos, qui deinceps sunt, angulos, æquales inter se fecerit, rectus est uterque æqualium angulorum: et quæ insistit recta linea perpendicularis vocatur ad eam, cui insistit.

XI.

Obtusus angulus est, qui major est recto.



XII.

Acutus autem, qui recto est minor.

XIII.

Terminus est, quod alicujus extremum est.

XIV.

Figura est, quæ aliquo, vel aliquibus terminis continetur.

XV.

Circulus est figura plana, unâ lineâ contenta, quæ circumferentia appellatur: ad quam ab uno puncto, intra figuram existente, omnes rectæ lineæ pertingentes sunt æquales.

XVI.

Hoc autem punctum centrum circuli nuncupatur.

XVII.

Diameter circuli est recta quædam linea per centrum ducta, et ex utrâque parte a circumferentiâ circuli terminata, quæ quidem et bifariam circulum secat.

XVIII.

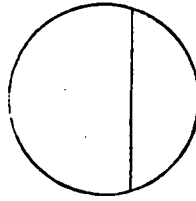
Semicirculus est figura, quæ continetur diametro, et eâ circuli circumferentiâ, quæ a diametro intercipitur.

* Cum plures anguli ad unum punctum existunt, designatur quilibet tribus literis; quarum illa quæ est ad verticem anguli, in medio ponitur, e. g. in Fig. Prop. xiii. libri primi angulus rectus $\angle B$, $\angle C$ comprehensus dicitur angulus $\angle ABC$; et angulus rectus $\angle B$, $\angle C$ contentus dicitur angulus $\angle BAC$.

XIX.

XIX.

Segmentum circuli est figura, quæ rectâ lineâ, et circuli circumferentiâ continetur.



XX.

Rectilineæ figuræ sunt, quæ rectis continentur lineis.

XXI.

Trilateræ quidem, quæ tribus.

XXII.

Quadrilateræ, quæ quatuor.

XXIII.

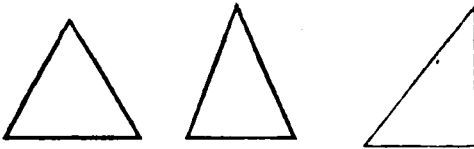
Multilateræ vero, quæ pluribus quam quatuor rectis lineis comprehenduntur.

XXIV.

Trilaterarum figurarum æquilaterum est triangulum, quod tria latera habet æqualia.

XXV.

Isoceles, sive æquicrura, quod duo tantum æqualia latera habet.

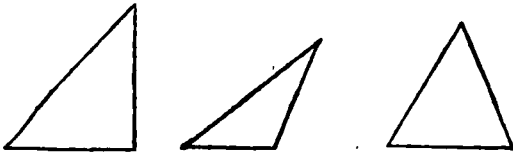


XXVI.

Scalenum vero est, quod tria inæqualia habet latera.

XXVII.

Ad hæc, trilaterarum figurarum, rectangulum quidem est triangulum, quod rectum angulum habet.



XXVIII.

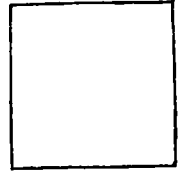
Obtusangulum est, quod obtusum habet angulum.

XXIX.

Acutangulum vero, quod tres acutos angulos habet.

XXX.

Quadrilaterarum figurarum quadratum est, quod et æquilaterum est, et rectangulum.



XXXI.

Alterâ parte longior figura est, quæ rectangula quidem, æquilatera vero non est.

XXXII.

Rhombus, quæ æquilatera quidem, sed rectangula non est.

XXXIII.

Rhomboides, quæ et opposita latera, et oppositos angulos inter se æquales habens, neque æquilatera est, neque rectangula.



XXXIV.

Præter has autem reliquæ quadrilateræ figuræ trapezia vocentur.

XXXV.

Parallelæ, seu æquidistantes rectæ lineæ sunt, quæ cum in eodem sint plano, et ex utrâque parte in infinitum producantur, in neutram partem inter se conveniunt.

POSTULATA.

I.

Postuletur a quovis puncto ad quodvis punctum rectam lineam ducere.

II.

Rectam lineam terminatam, in continuum et directum producere.

III.

Quovis centro, et intervallo, circulum describere.

A X I O M A T A.

I.

Quæ eidem æqualia, et inter se sunt æqualia.

II.

Et si æqualibus æqualia adjiciantur, tota sunt æqualia.

III.

Et si ab æqualibus æqualia auferantur, reliqua sunt æqualia.

IV.

Et si inæqualibus æqualia adjiciantur, tota sunt inæqualia.

V.

Et si ab inæqualibus æqualia auferantur, reliqua sunt inæqualia.

VI.

Et quæ ejusdem duplicia sunt, inter se sunt æqualia.

VII.

Et quæ ejusdem dimidia sunt, inter se sunt æqualia.

VIII.

Et quæ sibi mutuo congruunt, inter se sunt æqualia.

IX.

Totum est suâ parte majus.

X.

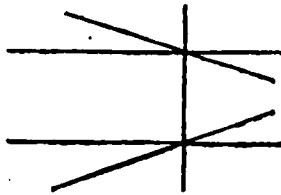
Duæ rectæ lineæ spatium non comprehendunt.

XI.

Omnes anguli recti inter se æquales sunt.

XII.

Et si in duas rectas lineas recta linea incidens, interiores, et ex eâdem parte angulos duobus rectis minores fecerit, rectæ lineæ illæ, in infinitum productæ, inter se conveniunt ex eâ parte, in quâ sunt anguli duobus rectis minores. Vid. Cor. Prop. xxviii. 1^{ma}.

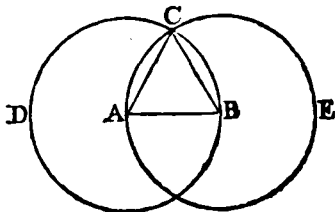


[I.] PROPOSITIO I. PROBLEMA.

Super datâ rectâ lineâ terminatâ, triangulum æquilaterum constituere.

Sit data recta linea terminata AB . Oportet super ipsâ

AB triangulum æquilaterum constituere. Centro quidem A , intervallo autem AB , circulus describatur BCD^a . Et rursus centro B , intervalloque BA , describatur circulus ACE^b , et a puncto C , in quo circuli se in-



^a Post. 3.

^b Post. 1.

^c Def. 15.

vicem secant, ad A , B ducantur rectæ lineæ CA , CB^b . Quoniam igitur A centrum est circuli DBC , erit AC ipsi AB^c æqualis. Rursus quoniam B circuli CAE est centrum, erit BC æqualis BA : ostensa est autem et CA æqualis AB : utraque igitur ipsarum CA , CB ipsi AB est æqualis. Quæ autem eidem sunt æqualia, et inter se æqualia sunt. Ergo CA ipsi CB est æqualis: tres igitur CA , AB , BC inter se sunt æquales; ac propterea triangulum æquilaterum est ABC , et constitutum est super datâ rectâ lineâ terminatâ AB . *Q. E. F.*

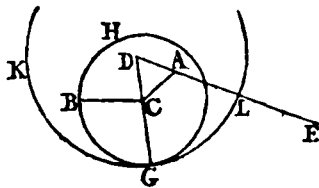
[II.]

PROP. II. PROBL.

Ad datum punctum, datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere.

Sit datum quidem punctum A , data vero recta linea

BC : oportet ad A punctum, ipsi BC rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere. Ducatur a puncto



^a Post. 1.

^b 1. hujus.

^c Post. 2.

^d Post. 3.

^e Def. 15.

ad c recta linea AC^d : et super ipsâ constituatur triangulum æquilaterum $DA C^e$: producanturque in directum ipsis DA , DC rectæ lineæ AE , CG^f . Et centro quidem C , intervallo autem BC , circulus BGH describatur^g. Rursusque centro D , et intervallo DG , describatur circulus GKL . Quoniam igitur punctum C centrum est BGH circuli, erit BC ipsi CG æqualis^h. Et

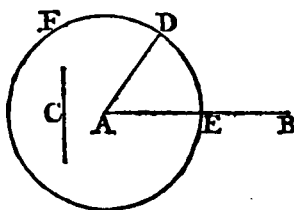
Et rursus quoniam D centrum est circuli GKL , erit DL æqualis DG : quarum DA est æqualis DC : reliqua igitur AL reliquæ GC est æqualis¹. Ostensa autem Axiom. 3. est BC æqualis cG . Quare utraque ipsarum AL , BC est æqualis ipsi cG . Quæ autem eidem æqualia sunt, et inter se sunt æqualia. Ergo, et AL est æqualis BC . Ad datum igitur punctum A datæ rectæ lineæ BC æqualis posita est AL . Q. E. F.

PROP. III. PROBL.

[III.]

Duabus datis rectis lineis inæqualibus, a majore minori æqualem abscindere.

Sint datæ duæ rectæ lineæ inæquales AB et c ; quarum major fit AB : oportet a majore AB minori c æqualem rectam lineam abscindere. Ponatur ad A punctum ipsi c æqualis recta linea AD ^k; et centro quidem A , intervallo autem AD , circulus describatur DEF ^l. Et quoniam A centrum est DEF circuli, erit AE ipsi AD æqualis. Sed et c æqualis AD . Utraque igitur ipsarum AE , c ipsi AD æqualis erit. Quare et AE ipsi c est æqualis^m. Duabus igitur datis Axiom. 1. rectis lineis inæqualibus AB et c , a majore AB minori c æqualis abscissa est AE . Q. E. F.



^k Per antecedentem.

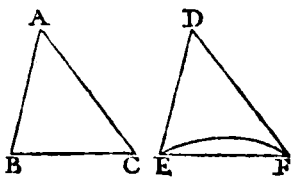
^l Post. 3.

PROP. IV. THEOR.

[IV.]

Si duo triacula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; babeant autem et angulum angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continetur: et basim basi æqualem habebunt; et triangulum triangulo æquale erit; et reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera substantur.

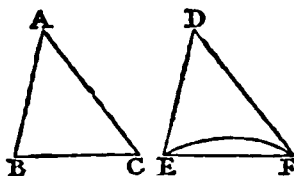
Sint duo triacula ABC , DEF , quæ duo latera AB , AC duobus lateribus DE , DF æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus quidem AB lateri DE æquale, latus vero AC ipsi DF ; et angulum BAC angulo EDF æqualem. Dico,



B 4

et

et basim BC basi EF æqualem esse, et triangulum ABC æquale triangulo DEF , et reliquos angulos reliquis angulis æquales, alterum alteri, quibus æqualia latera subtenduntur; nempe angulum ABC angulo DEF ; et angulum ACB angulo $D FE$.



Triangulo enim ABC applicato ipsi DEF , et puncto quidem A posito in D , rectâ vero lineâ AB ipsi DE applicatâ: et punctum B puncto E congruet; quod AB ipsi DE sit æqualis. Congruente autem AB ipsi DE ; congruet et AC rectâ lineâ rectæ lineæ DF , cum angulus BAC sit æqualis angulo EDF . Quare, et C congruet ipsi F : est enim rectâ lineâ AC æqualis rectæ DF . Sed, et punctum B congruebat puncto E . Ergo, et basim BC basi EF congruet. Nam si puncto quidem B congruente ipsi E , C vero ipsi F , basim BC basi EF non congruat; duæ rectæ lineæ spatium comprehendunt: quodⁿ fieri non potest. Congruet igitur BC basim EF , et ipsi æqualis erit. Quare, et totum ABC triangulum congruet toti triangulo DEF , et ipsi erit æquale; et reliqui anguli reliquis angulis congruent, et ipsis æquales erunt^o. Videlicet angulus ABC angulo DEF , et angulus ACB angulo $D FE$. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, habeant autem et angulum angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continetur: et basim basi æqualem habebunt; et triangulum triangulo æquale erit; et reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. *Q. E. D.*

• Ax. 10.

• Ax. 8.

[V.]

PROP. V. THEOR.

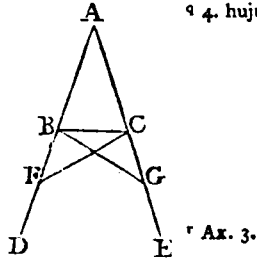
Isoscelium triangulorum qui ad basim sunt anguli inter se sunt æquales; et productis æqualibus rectis lineis, anguli qui sunt sub basi inter se æquales erunt.

Sit isosceles triangulum ABC ; habens AB latus lateri AC æquale, et producantur in directum ipsis AB , AC rectæ lineæ BD , CE . Dico angulum quidem ABC angulo ACB , angulum vero CBD angulo BCE æqualem esse. Sumatur enim in lineâ BD , quodvis punctum F : atque a majore AE minori AF æqualis^p auferatur AG : junganturque FC , GB . Quoniam igitur AF est æqualis AG ; AB vero ipsi AC ; duæ FA , AC , duabus GA ,

• 3. hujus.

AB

AB æquales sunt, altera alteri; et angulum FAG communem continent. Basis igitur FC basi GB est æqualis^q, et triangulum AFC æquale triangulo AGB ; et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur: videlicet angulus quidem ACF æqualis angulo ABG ; angulus vero AFC angulo AGB . Et quoniam tota AF toti AG est æqualis; quarum AB est æqualis AC ; erit^r et reliqua BF reliquæ CG æqualis. Oñsa est autem FC æqualis GB . Duæ igitur BF , FC duabus CG , GB æquales sunt, altera alteri; et angulus BFC æqualis angulo GB : estque basis ipsorum BC communis. Ergo et triangulum BFC triangulo GB æquale erit; et reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. Angulus igitur FBC est æqualis angulo GB ; et angulus BCF angulo CBG . Itaque quoniam totus ABG angulus toti angulo ACF æqualis oñsus est, quorum angulus CBG est æqualis ipsi BCF : erit reliquus^r ABC reliquo^r ACB æqualis: et sunt ad basim ABC trianguli. Oñsus autem est et FBC angulus æqualis angulo GB ; qui sunt sub basi. Isoscelium igitur triangulorum, qui ad basim sunt anguli inter se sunt æquales; et productis æqualibus rectis lineis, anguli, qui sunt sub basi, inter se æquales erunt. *Q. E. D.*



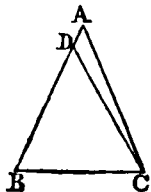
Cor. Hinc omne triangulum æquilaterum est quoque æquiangulum.

PROP. VI. THEOR.

[VI.]

Si trianguli duo anguli inter se sint æquales, et æquales angulos subtendentia latera inter se æqualia erunt.

Sit triangulum ABC , habens angulum ABC angulo ACB æqualem. Dico et AB latus lateri AC æquale esse. Si enim inæqualis est AB ipsi AC ; altera ipsarum est major. Sit major AB ; atque a majori AB minori AC æqualis^r auferatur DB ; et DC jungatur. Quoniam igitur DB est æqualis ipsi AC ; communis autem BC : erunt duæ DB , BC duabus AC , CB æquales, altera al-



teri;

teri; et angulus DBC æqualis angulo ACB , ex hyp.
 " 4. hujus. Basis igitur DC basi AB est^a æqualis, et triangulum DBC æquale triangulo ACB , minus majori; quod est absurdum. Non igitur inæqualia sunt latera AB , AC . Æqualia sunt igitur. Si igitur trianguli duo anguli inter se sint æquales, et æquales angulos subtendentia latera inter se æqualia erunt. Q. E. D.

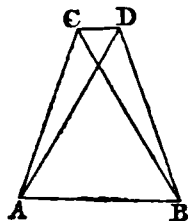
Cor. Hinc omne triangulum æquiangulum est quoque æquilaterum.

[VII.]

PROP. VII. THEOR.

In eâdem rectâ lineâ, duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri, non constituentur ad aliud atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdem, quos primæ rectæ lineæ, terminos habentes.

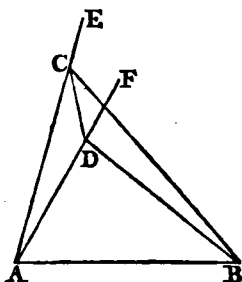
Si enim fieri potest, in eâdem rectâ lineâ AB duabus eisdem rectis lineis AC , CB aliæ duæ rectæ lineæ AD , DB æquales, altera alteri, constituentur, ad aliud atque aliud punctum C et D , ad easdem autem partes C et D , eosdem habentes terminos A et B , quos primæ rectæ lineæ; ita ut CA quidem sit æqualis DA , eundem, quem ipsa DA , terminum habens A ; CB vero sit æqualis DB , eundem habens B terminum; et



^a 5. hujus. et CD jungatur. Itaque quoniam AC est æqualis AD ; erit, et angulus ACD angulo ADC æqualis^a. Major igitur est ADC angulus angulo BCD . Quare angulus BCD angulo BCD multo major erit. Rursus quoniam CB est æqualis DB , et angulus BCD æqualis erit angulo BCD : ostensus autem est ipso multo major; quod fieri non potest. Non igitur in eâdem rectâ lineâ, duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri, constituentur ad aliud atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdem, quos primæ rectæ lineæ, terminos habentes. Q. E. D.

SCHOLION.*

Si punctorum C, D alterum D angulo ACB subfit, rectis ad alterum ductis comprehenso, demonstratio ad exemplum præcedentis instituenda est, ex parte posteriore propositionis quintæ. Productis enim AC, AD , anguli BCD, FDC , qui ad basim trianguli isoscelis CAD sunt externi, inter se æquales erunt¹; angulus igitur BDC , angulo BCD major; angulo igitur BCD ille BDC multo major; sed propter æquales BD, BC , angulus BDC angulo BCD ² æqualis, major minori. = 5. hujus. Quod est absurdum.



1 5. hujus.

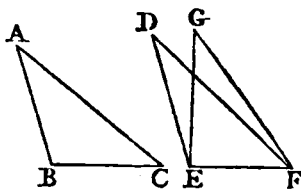
Si autem in alterutrâ ipsarum AC, BC sumatur punctum D , propositio statim constat: aliter enim toti AC vel BC pars ejus AD , vel BD æqualis esset, quod³ fieri = Ax. 9. non potest.

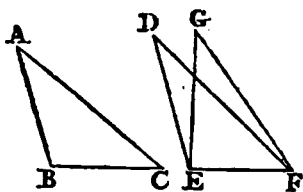
PROP. VIII. THEOR.

[VIII.]

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem et basim basi æqualem; angulum quoque, qui æqualibus lateribus continetur, angulo æqualem habebunt.

Sint duo triangula ABC, DEF , quæ duo latera AB, AC duobus lateribus DE, DF æqualia habeant, alterum alteri; ut sit AB quidem æquale DE ; AC vero ipsi DF : habeant autem et basim BC basi EF æqualem. Dico angulum quoque BAC angulo EDF æqualem esse. Triangulo enim ABC applicato ipsi DEF triangulo, et puncto quidem B posito in E ; rectâ vero lineâ BC ipsi EF applicatâ: congruet et C punctum puncto F , quoniam BC ipsi EF est æqualis. Itaque congruente BC ipsi EF ; congruent et BA, AC ipsis ED, DF : si enim basis quidem BC basi EF congruat; latera autem BA, AC lateribus ED, DF non congruant, sed situm mutant;





tent; ut EG , GF : constituentur in eadem rectâ lineâ, duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri, ad aliud atque aliud punctum; ad easdem partes; eisdem habentes terminos. Non

^b Per 7. hujus.

constituuntur autem; ut demonstratum est^b. Non igitur, si basis BC congruat basi EF , non congruent et BA , AC latera lateribus ED , DF : congruent igitur. Quare et angulus BAC angulo EDF congruet, et ipsi erit æqualis. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem et basim basi æqualem: angulum quoque, æqualibus lateribus contentum, angulo æqualem habebunt. Q. E. D.

[IX.]

PROP. IX. PROBL.

Datum angulum rectilincum bifariam secare.

Sit datus angulus rectilineus BAC : oportet autem ipsum bifariam secare. Sumatur in lineâ AB quodvis punctum D ; et a lineâ AC

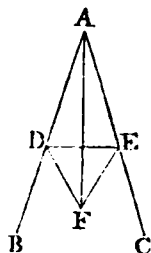
^c 3. hujus.

^d 1. hujus.

ipsi AD æqualis^c auferatur AE ; junctâque DE , constituatur super eâ^d triangulum æquilaterum DEF ; et AF jungatur. Dico angulum BAC a rectâ lineâ AF bifariam secari. Quoniam enim AD est æqualis AE ; communis autem AF : duæ DA , AE duabus EA , AF æquales sunt, altera alteri; et basis DF æqualis

^e 8. hujus.

basi EF : angulus^e igitur DAF angulo EAF est æqualis. Quare datus angulus rectilineus BAC a rectâ lineâ AF bifariam sectus est. Q. E. F.



[X.]

PROP. X. PROBL.

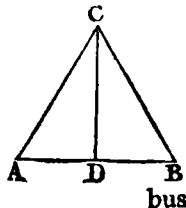
Datam rectam lineam terminatam bifariam secare.

Sit data recta linea terminata AB ; oportet ipsam AB

^f 1. hujus.

^g 9. hujus.

bifariam secare. Constituatur super^f eâ triangulum æquilaterum ABC ; et sectetur ACB angulus^g bifariam rectâ lineâ CD . Dico AB rectam lineam in puncto D bifariam secari. Quoniam enim AC est æqualis CB ; communis autem CD ; duæ AC , CD dua-



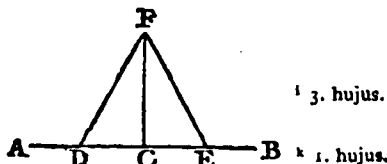
bus BC , CD æquales sunt, altera alteri; et angulus ACD æqualis angulo BCD : basis igitur AD basi BD est ¹ æqualis. Et ob id recta linea terminata AB bi- ² 4. hujus. fariam secta est in puncto D . *Q. E. F.*

PROP. XI. PROBL.

[XI.]

Datæ rectæ lineæ, a puncto in ipsâ dato, ad rectos angulos rectam lineam ducere.

Sit data recta linea AB , et datum in ipsâ punctum C : oportet a puncto C ipsi AB ad rectos angulos rectam lineam ducere. Sumatur in A C quodvis punctum D : ipsique CD æqualis ¹ ponatur CE , et super DE constituitur ² triangulum æquilaterum FDE , et FC jungatur.



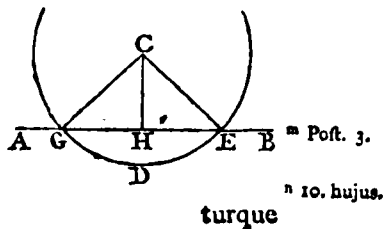
Dico datæ rectæ lineæ AB , a puncto C in ipsâ dato, ad rectos angulos ductam esse FC . Quoniam enim DC est æqualis CE , et FC communis; erunt duæ DC , CF duabus EC , CF æquales, altera alteri; et basis DF est æqualis basi EF : angulus igitur DCF angulo ECF est æqualis; et sunt deinceps. Quando autem recta linea super rectam lineam insistens, eos, qui deinceps sunt, angulos æquales inter se fecerit: rectus ¹ est uterque ² Def. 10. æqualium angulorum: ergo uterque ipsorum DCF , ECF est rectus. Datæ igitur rectæ lineæ AB , a puncto in ipsâ dato C , ad rectos angulos ducta est FC recta linea. *Q. E. F.*

PROP. XII. PROBL.

[XII.]

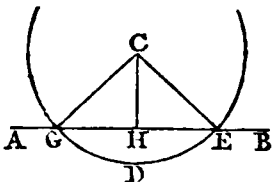
Super datâ rectâ lineâ infinitâ, a dato puncto quod in eâ non est, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit data quidem recta linea infinita AB , datum vero punctum C , quod in eâ non est. Oportet super datâ rectâ lineâ infinitâ AB , a dato puncto C , quod in eâ non est, perpendicularem rectam lineam ducere. Sumatur ad alteras partes ipsius AB rectæ lineæ quodvis punctum D : et centro quidem C , intervallo autem CD , circulus ³ describatur EDG : et EG in H bifariam ⁴ secetur: jungan-



turque

turque $c g$, $c h$, $c e$. Dico super datâ rectâ lineâ infinitâ ab , a dato puncto c , quod in eâ non est, perpendicularem ch ductam esse. Quoniam enim æqualis est gh ipsi he , communis autem hc , duæ gh , hc duabus eh , hc æquales sunt, alter alteri; et basis cg est æqualis basi



- 8. hujus. ce . Angulus igitur chg angulo che est^o æqualis; et sunt deinceps. Cum autem recta linea super rectam lineam insistens, eos, qui deinceps sunt, angulos, æquales inter se fecerit; rectus^p est uterque æqualium angulorum, et quæ insitit recta linea perpendicularis appellatur ad eam, cui insitit: ergo super datâ rectâ lineâ infinitâ ab , a dato puncto c , quod in eâ non est, perpendicularis ducta est gh . Q. E. F.
- Def. 10.

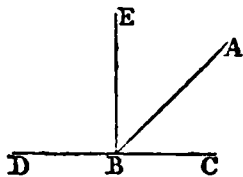
[XIII.]

PROP. XIII. THEOR.

Cum recta linea super rectam consistens lineam angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis æquales efficit.

Recta enim linea quædam ab super rectam cd consistens angulos faciat cba , abd .

Dico cba , abd angulos, vel duos rectos esse, vel duobus rectis æquales. Si enim cba est æqualis ipsi abd ; duo recti^q sunt: sin minus, ducatur a puncto b ipsi



• Def. 10.

• 11. hujus.

cd ad rectos^r angulos be : anguli igitur cbe , dbe sunt duo recti.

Et quoniam cbe duobus cba , abe est æqualis, communis apponatur ebd : ergo anguli duo cbe , ebd tribus angulis cba , abe , ebd sunt^r æquales. Rursum quoniam dba angulus est æqualis duobus dbe , ebe , communis apponatur abc : anguli igitur duo dba , abc tribus dbe , ebe , abc æquales sunt. At ostensum est angulos quoque cbe , ebd eisdem tribus æquales esse: quæ vero eidem sunt æqualia^r, et inter se æqualia sunt: ergo et anguli cbe , ebd ipsis dba , abc sunt æquales: sunt autem cbe , ebd duo recti; anguli igitur dba , abc duobus rectis æquales erunt. Ergo cum recta linea super rectam lineam consistens angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis æquales efficit. Q. E. D.

• Ax. 2.

• Ax. 1.

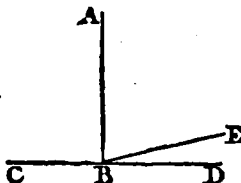
PROP.

PROP. XIV. THEOR.

[XIV.]

Si ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in eâ duæ rectæ lineæ non ad easdem partes positæ, angulos, qui deinceps sunt, duobus rectis æquales fecerint; ipsæ rectæ lineæ in directum sibi invicem erunt.

Ad aliquam enim rectam lineam AB , atque ad punctum in eâ B , duæ rectæ lineæ BC , BD , non ad easdem partes positæ, angulos, qui deinceps sunt, ABC , ABD duobus rectis æquales faciant. Dico BD ipsi CB in directum esse: si enim BD non est in directum ipsi CB , fit ipsi CB in directum BE .



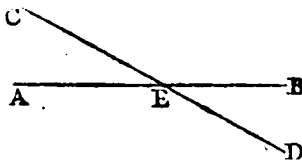
Quoniam igitur recta linea AB , super rectam CBE consistit; anguli ABC , ABE duobus rectis sunt æquales. ^{13. hujus.} Sed et anguli ABC , ABD sunt æquales duobus rectis. Anguli igitur CBA , ABE ipsis CBA , ABD æquales erunt. Communis auferatur ABC . Ergo reliquus ABE reliquo ABD est æqualis, minor majori; quod fieri non potest. Non igitur BE est in directum ipsi BC . Similiter ostendemus neque aliam quampiam esse, præter BD . Ergo CB ipsi BD in directum erit. Si igitur ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in eâ duæ rectæ lineæ non ad easdem partes positæ, angulos, qui deinceps sunt, duobus rectis æquales fecerint, ipsæ rectæ lineæ in directum sibi invicem erunt. *Q. E. D.*

PROP. XV. THEOR.

[XV.]

Si duæ rectæ lineæ se invicem secuerint, angulos, qui ad verticem sunt, inter se æquales efficient.

Duæ enim rectæ lineæ AB , CD se invicem secant in puncto E . Dico angulum quidem AEC angulo DEB ; angulum vero CEB angulo AED æqualem esse. Quoniam enim recta linea AB super rectam CD consistens angulos facit CEA , AED ;



erunt hi ² duobus rectis æquales. Rursus quoniam ^{13. hujus.} recta linea DE super rectam AB consistens facit angulos AED , DEB ; erunt AED , DEB anguli æquales ⁷ duobus ^{13. hujus.} rectis.

rectis. Oñsum autem est angulos quoque CEA , AED duobus rectis esse æquales. Anguli igitur CEA , AED angulis AED , DEB æquales sunt. Communis auferatur AED . Ergo reliquus CEA reliquo BED est æqualis. ^a Ax. 3. Simili ratione, et anguli CEB , DEA æquales ostenduntur. Si igitur duæ rectæ lineæ se invicem secuerint, angulos, qui ad verticem sunt, æquales efficiunt. *Q. E. D.*

Cor. 1. Ex hoc manifeste constat duas rectas lineas, se invicem secantes, facere angulos ad sectionem quatuor rectis æquales.

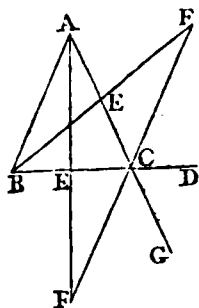
Cor. 2. Omnes anguli circa unum punctum constituti faciunt angulos quatuor rectis æquales.

[XVI.]

PROP. XVI. THEOR.

Omnis trianguli uno latere producto exterior angulus utrovis interiore et opposito est major.

Sit triangulum ABC , et unum ipsius latus BC ad D producatur. Dico exteriorem angulum ACD utrovis interiore, et opposito, videlicet CBA , et BAC majorem esse. Secetur enim AC bifariam ^a in E , et juncta BE producatur ad F ; ponaturque ipsi BE æqualis EF . Jungatur præterea FC , et AC ad G producatur. Quoniam igitur AE quidem est æqualis EC , BE vero ipsi EF ; duæ AE , EB , duabus CE , EF æquales sunt, altera alteri: et angulus AEB angulo FEF est æqualis ^b, ad verticem enim sunt. Basis igitur AB æqualis ^c est basi FC ; et AEB triangulum triangulo FEF , et reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. Ergo angulus BAE est æqualis angulo ECF . Sed ACD angulus major est ipso ECF . Major igitur est angulus ACD angulo BAB . Similiter rectâ lineâ BC bifariam sectâ, ostendetur etiam BCG angulus, hoc est ACD angulus, angulo ABC major. Omnis igitur trianguli uno latere producto exterior angulus utrovis interiore et opposito est major. *Q. E. D.*



PROP.

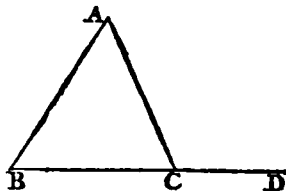
PROP. XVII. THEOR.

[XVII.]

Omnis trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt, quomodocunque sumpti.

Sit triangulum ABC . Dico ipsius ABC trianguli duos angulos, quomodocunque sumptos, duobus rectis minores esse. Producatur enim BC ad D . Et quoniam trianguli

ABC exterior angulus ACD major^c est interiore, et opposito ABC : communis apponatur ACB . Anguli igitur ACD , ACB angulis ABC , ACB majores sunt. Sed ACD , ACB sunt^d æquales duobus rectis. Ergo ABC , BCA ^d 13. hujus. duobus rectis sunt minores. Similiter demonstrabimus angulos quoque BAC , ACB , itemque CAB , ABC duobus rectis minores esse. Omnis igitur trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt, quomodocunque sumpti. *Q. E. D.*



c 16. hujus.

d 13. hujus.

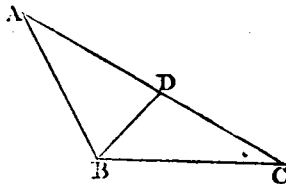
PROP. XVIII. THEOR.

[XVIII.]

Omnis trianguli majus latus majorem angulum subtendit.

Sit triangulum ABC , habens latus AC latere AB

majus. Dico et ABC angulum angulo BCA majorem esse. Quoniam enim AC major est, quam AB , ponatur ipsi AB æqualis AD ; et BD jungatur. Et quoniam trianguli BDC exterior angulus est ADB , erit is major^c interiore, et opposito DCB . Sed ADB æqualis^f est ipsi ABD ,^f 5. hujus. quod et latus AB lateri AD sit æquale; major igitur est et ABD angulus angulo ACB . Quare ABC ipso ACB multo major erit. Omnis igitur trianguli majus latus majorem angulum subtendit. *Q. E. D.*



c 16. hujus.

f 5. hujus.

[XIX.]

PROP. XIX. THEOR.

Omnis trianguli major angulus majus latus subtendit.

Sit triangulum ABC , majorem habens ABC angulum angulo BCA . Dico et latus AC latere AB majus esse. Si enim non est majus AC , vel æquale est ipsi AB , vel

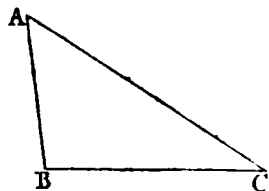
* 5. hujus.

ipso minus; æquale autem non est; nam et angulus ABC angulo ACB æqualis esset²; non est autem. Non igitur AC ipsi AB est æquale. Sed neque

* 18. hujus.

minus; esset enim et angulus ABC angulo ACB minor³; at-

qui non est. Non igitur AC minus est ipso AB . Ostensum autem est neque æquale esse. Ergo AC ipso AB est majus. Omnis igitur trianguli major angulus majus latus subtendit. *Q. E. D.*

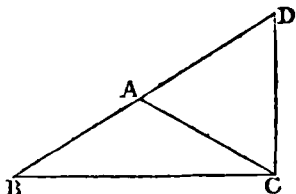


[XX.]

PROP. XX. THEOR.

Omnis trianguli duo latera reliquo majora sunt, quomodocunque sumpta.

Sit enim triangulum ABC . Dico ipsius ABC trianguli duo latera reliquo majora esse, quomodocunque sumpta: videlicet latera quidem BA , AC majora latere BC ; latera vero AB , BC majora latere AC : et latera BC , CA majora ipso AB . Producat enim BA ad pun-



* 3. hujus.

ctum D ; ponaturque ipsi CA æqualis AD ¹; et DC jungatur. Quoniam igitur DA est æqualis AC , erit et

* 5. hujus.

angulus ADC angulo ACD æqualis². Sed BCD angulus major est angulo ACD ; angulus igitur BCD angulo ADC est major. Et quoniam triangulum est DCB habens BCD angulum majorem angulo BDC ;

* 19. hujus.

majorem autem angulum majus latus subtendit³; erit latus DB latere BC majus; sed DB est æquale ipsis BA , AC ; quare latera BA , AC ipso BC majora sunt. Similiter ostendemus et latera quidem AB , BC majora esse latere CA : latera vero BC , CA ipso AB majora. Omnis igitur trianguli duo latera reliquo majora sunt, quomodocunque sumpta. *Q. E. D.*

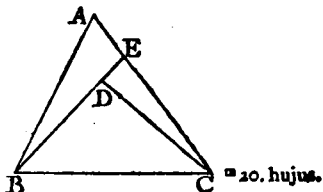
PROP.

PROP. XXI. THEOR.

[XXI.]

Si a terminis unius lateris trianguli duæ rectæ lineæ intra constituantur, hæ reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, majorem vero angulum continebunt.

Trianguli enim ABC in uno latere BC a terminis B , C duæ rectæ lineæ intra constituantur BD , DC . Dico BD , DC reliquis duobus trianguli lateribus BA , AC minores quidem esse, vero continere angulum BDC majorem angulo BAC . Producatur enim BD ad E ; et quoniam omnis trianguli duo latera reliquo sunt majora^m, erunt trianguli ABE duo latera BA , AE majora latere BE . Communis apponatur EC . Ergo BA , AC ipsis BE , EC majoraⁿ sunt. Rursus quoniam CED trianguli^o $AX. 4.$ duo latera CE , ED sunt majora latere CD , communis apponatur DB ; quare CE , EB ipsis CD , DB sunt majoraⁿ. Sed ostensum est BA , AC majora esse BE , EC : multo igitur BA , AC ipsis BD , DC majora sunt. Rursus quoniam omnis trianguli exterior angulus interiore et opposito est major^o; erit trianguli CDE exterior angulus BDC major ipso CED . Eadem ratione et trianguli ABF exterior angulus CED ipso BAC est major^o; sed angulus BDC ostensus est major angulo CED ; multo igitur BDC angulus angulo BAC major erit. Quare si a terminis unius lateris trianguli duæ rectæ lineæ intra constituantur, hæ reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, majorem vero angulum continebunt. *Q. E. D.*



PROP. XXII. PROBL.

[XXII.]

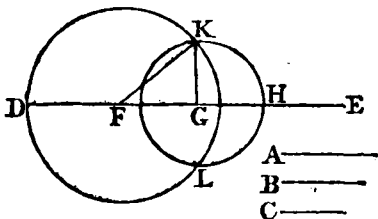
Ex tribus rectis lineis, quæ tribus rectis lineis datis æquales sint, triangulum constituere. Oportet autem duas reliquas majores esse, quomodocunque sumptas; quoniam omnis trianguli duo latera reliquo majora sunt, quomodocunque sumpta.

Sint tres datæ rectæ lineæ A , B , C , quarum duæ reliquæ majores sint, quomodocunque sumptæ, ut scilicet A , B quidem sint majores quam C ; A , C vero majores quam B ; et præterea B , C majores quam A . Itaque oportet ex rectis lineis æqualibus ipsis A , B , C triangulum constituere.

c 2

Exponatur

- ponatur aliqua recta linea DE , terminata quidem ad D , infinita vero ad E ; et ponatur ipsi quidem
- ¶ 3. hujus. A æqualis FD , ipsi vero B æqualis FG , et ipsi C æqualis GH ; et centro F , intervallo autem FD , circulus DKL ; rursusque centro G , et intervallo GH , alius circulus KLH describatur, et jungantur KF , KG . Dico ex tribus rectis lineis æqualibus ipsis A, B, C triangulum KFG constitutum esse. Quoniam enim punctum F centrum est DKL
- Def. 15. circuli, erit FD æqualis FK ; sed FD est æqualis A ; ergo et FK ipsi A est æqualis. Rursum quoniam punctum G centrum est circuli KLH , erit GH æqualis KG ; sed GH est æqualis C ; ergo et KG ipsi C æqualis erit. Est autem et FG æqualis B . Tres igitur rectæ lineæ KF, FG, GK tribus A, B, C æquales sunt. Quare ex tribus rectis lineis KF, FG, GK , quæ sunt æquales tribus datis rectis lineis A, B, C , triangulum constitutum est KFG . *Q. E. F.*

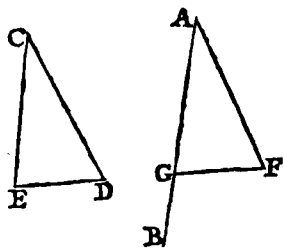


[XXIII.]

PROP. XXIII. PROBL.

Ad datam rectam lineam, et ad datum in eâ punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere.

Sit data quidem recta linea AB , datum vero in ipsâ punctum A ; et datus angulus rectilineus DCE . Oportet igitur ad datam rectam lineam AB , et ad datum in eâ punctum A , dato angulo rectilineo DCE æqualem angulum rectilineum constituere. Sumantur in utrâque ipsarum CD, CE quævis puncta D, E , ducaturque DE ; et ex tribus rectis lineis,



- ¶ 22. hujus. quæ æquales sint tribus CD, DE, EC , triangulum ACD constituatur AFG , ita ut AF sit æqualis CD , et AG ipsi CE , et FG ipsi DE . Itaque quoniam duæ DC, CE duabus FA, AG æquales sunt, altera alteri, et basis DE est æqualis

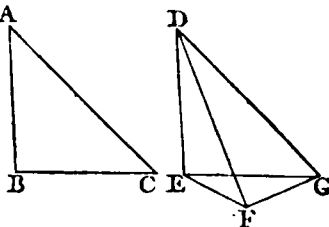
æqualis basi FG ; erit et angulus DCE angulo FAG æqualis¹. Ad datam igitur rectam lineam AB , et ad² 8. hujus. datum in eâ punctum A , dato angulo rectilineo DCE æqualis angulus rectilineus constitutus est FAG . *Q. E. F.*

PROP. XXIV. THEOR.

[XXIV.]

Si duo triângula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, angulum autem angulo majorem, qui æqualibus rectis lineis continetur; et basim basi majorem habebunt.

Sint duo triângula ABC , DEF , quæ duo latera AB , AC duobus lateribus DE , DF æqualia habeant, alterum alteri; videlicet latus quidem AB æquale lateri DE , latus vero AC æquale DF . At angulus BAC angulo EDF fit major. Dico et basim BC basi EF majorem esse.



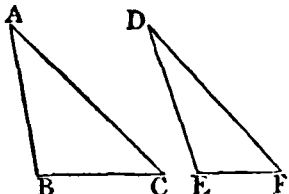
Quoniam enim angulus BAC major est angulo EDF , constituatur³ ad rectam lineam DE , et ad punctum in⁴ 23. hujus. eâ D , angulo BAC æqualis angulus EDG , ponaturque alterutri ipsarum AC , DF æqualis⁵ DG ; et GE , FG ⁶ 3. hujus. jungantur. Itaque quoniam AB quidem est æqualis DE , AC vero ipsi DG ; duæ BA , AC , duabus ED , DG æquales sunt, altera alteri; et angulus BAC est æqualis angulo EDG ; ergo basis BC basi EG est⁷ æqualis.⁸ 4. hujus. Rursus quoniam æqualis est DG ipsi DF ; est angulus DFG angulo DGF ⁹ æqualis; erit itaque DFG angulus¹⁰ 5. hujus. angulo EGF major; multo igitur major est EF angulus ipso EGF . Et quoniam triângulum est EF G , angulum EF G majorem habens angulo EGF ; majori autem angulo latus majus subtenditur¹¹; erit et latus¹² 19. hujus. EG latere EF majus; sed EG latus est æquale lateri BC . Ergo et BC ipso EF majus erit. Si igitur duo triângula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, angulum autem angulo majorem, qui æqualibus rectis lineis continetur; et basim basi majorem habebunt. *Q. E. D.*

[XXV.]

PROP. XXV. THEOR.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, basim vero basi majorem; et angulum angulo, qui æqualibus lateribus continetur, majorem habebunt.

Sint duo triangula ABC , DEF , quæ duo latera AB , AC duobus lateribus DE , DF æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus AB æquale lateri DE , et latus AC lateri DF . Basim autem BC basi EF fit major. Dico et angulum BAC angulo EDF majorem esse. Si enim non est major,



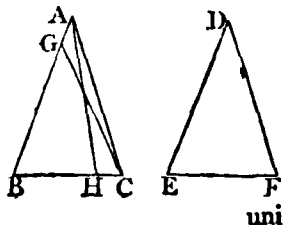
vel æqualis est, vel minor. Æqualis autem non est angulus BAC angulo EDF : esset enim et basis BC basi EF æqualis^b. Non est autem. Non igitur æqualis est BAC angulo angulo EDF . Sed neque minor; minor enim esset^c et basis BC basi EF . Atqui non est. Non igitur angulus BAC angulo EDF est minor. Ostensum autem est neque esse æqualem. Ergo angulus BAC angulo EDF necessario major erit. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, basim vero basi majorem; et angulum angulo, qui æqualibus lateribus continetur, majorem habebunt. Q. E. D.

[XXVI.]

PROP. XXVI. THEOR.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeant, alterum alteri, unumque latus uni lateri æquale, vel quod æqualibus adjacet angulis, vel quod uni æqualium angulorum subtenditur; et reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, et reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

Sint duo triangula ABC , DEF , quæ duos angulos ABC , BCA duobus angulis DEF , EFD æquales habeant, alterum alteri; videlicet angulum quidem ABC æqualem angulo DEF , angulum vero BCA angulo EFD . Habeant autem et unum latus



uni

uni lateri æquale, et primo quod æqualibus adjacet angulis; nempe latus BC lateri EF . Dico et reliqua latera reliquis lateribus æqualia habere, alterum alteri, latus sc. AB lateri DE , et latus AC ipsi DF , et reliquum angulum BAC reliquo angulo EDF æqualem. Si enim inæqualis est AB ipsi DE , una ipsarum major est. Sit major AB , ponaturque GB æqualis DE ; et GC jungatur. Quoniam igitur BG quidem est æqualis DE , BC vero ipsi EF , duæ GB , BC duabus DE , EF æquales sunt, altera alteri; et angulus BCG æqualis angulo DEF . Basis igitur GC basi DF est ^d æqualis; ^d 4. hujus. et BCG triangulum triangulo DEF ; et reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. Ergo GCB angulus est æqualis angulo DFE ; sed angulus DFE angulo BCA æqualis ponitur; quare et BCG angulus angulo BCA est æqualis, minor majori; quod fieri non potest. Non igitur inæqualis est AB ipsi DE : ergo æqualis erit. Est autem et BC æqualis EF . Itaque duæ AB , BC duabus DE , EF æquales sunt, altera alteri, et angulus ABC æqualis angulo DEF . Basis igitur AC basi ^d DF , et reliquus angulus BAC reliquo angulo EDF est æqualis. Sed rursus sint latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur, æqualia, ut AB ipsi DE . Dico rursus et reliqua latera reliquis lateribus æqualia esse; AC quidem ipsi DF , BC vero ipsi EF ; et adhuc reliquum angulum BAC reliquo angulo EDF æqualem. Si enim inæqualis est BC ipsi EF , una ipsarum major est. Sit major BC , si fieri potest, ponaturque BH æqualis EF , et AH jungatur. Quoniam igitur BH quidem est æqualis EF , AB vero ipsi DE ; duæ AB , BH duabus DE , EF æquales sunt, altera alteri, et angulos æquales continent; ergo ^d basis AH basi DF est æqualis; et ABH triangulum triangulo DEF ; et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. Æqualis igitur est angulus BHA angulo EFD . Sed EFD est æqualis ^e angulo BCA . Ergo et BHA ^e ex hyp. angulus angulo BCA est æqualis. Trianguli igitur AHC exterior angulus BHA æqualis est interiori et opposito BCA ; quod fieri non potest ^f. Quare non in- ^f 16. hujus. æqualis est BC ipsi EF ; æqualis igitur. Est autem et AB æqualis DE . Duæ igitur AB , BC duabus DE , EF æquales sunt, altera alteri; angulosque æquales con-

tinent. Quare basis AC æqualis est basi DF , et BAC triangulum triangulo DEF , et reliquus angulus BAC reliquo angulo EDF est æqualis. Si igitur duo trian- gula duos angulos duobus angulis æquales habeant, alterum alteri, unumque latus uni lateri æquale, vel quod æqualibus adjacet angulis, vel quod uni æqualium angulorum subtenditur; et reliqua latera reliquis la- teribus æqualia, alterum alteri, et reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt. *Q. E. D.*

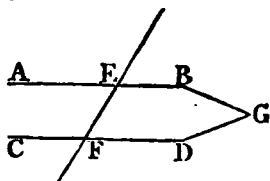
[XXVII.]

PROP. XXVII. THEOR.

Si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos an- gulos inter se æquales fecerit, parallelæ erunt rectæ lineæ.

In duas enim rectas lineas AB , CD recta linea EF in- cidens alternos angulos AEF , EDF æquales inter se faciat.

Dico rectam lineam AB ipsi CD parallelam esse. Si enim non est parallela, productæ AB , CD , vel ad partes B , D conveni- ent, vel ad partes A , C . Produ-



cantur, convenientque ad partes B , D in puncto G . Itaque

^a 16. hujus. GEF trianguli exterior angulus AEF major ^a est inte- riore et opposito EDG ; sed et æqualis ^b; quod fieri non potest.

^b ex hyp. Non igitur AB , CD productæ ad partes B , D convenient. Similiter demonstrabitur neque con- venire ad partes A , C . Quæ vero in neutras partes con- veniunt, parallelæ ^c inter se sunt. Parallela igitur est AB ipsi CD .

^c Def. 35.

Quare si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter se æquales fecerit, paral- lelæ inter se erunt rectæ lineæ. *Q. E. D.*

[XXVIII.]

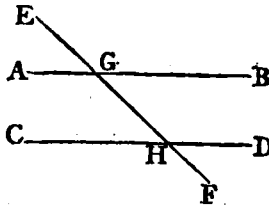
PROP. XXVIII. THEOR.

Si in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem an- gulum interiori et opposito et ad easdem partes æqualem fecerit, vel interiores et ad easdem partes duobus rectis æquales; parallelæ erunt inter se rectæ lineæ.

In duas enim rectas lineas AB , CD recta linea EF incidens exteriorem angulum EGB interiori, et oppo- sito GHF æqualem faciat; vel interiores et ad easdem partes BGH , GHF duobus rectis æquales. Dico rectam lineam AB rectæ CD parallelam esse. Quoniam enim

EGB

$\angle EGB$ angulus æqualis est ^a angulo GHD , angulus autem EGB angulo AGH ¹, erit et angulus AGH angulo GHD æqualis; et sunt alterni. Parallela igitur est AB ipsi CD ^m. Rursum quoniam anguli BGH , GHD duobus rectis sunt æqualesⁿ, et sunt AGH , BGH æquales duobus rectis^o: erunt anguli AGH , BGH angulis BGH , GHD æquales. Communis auferatur BGH . Reliquus igitur AGH est æqualis reliquo GHD ; et sunt alterni. Ergo AB ipsi CD parallela erit. Si igitur in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori et opposito et ad eandem partes æqualem fecerit, vel interiores et ad easdem partes duobus rectis æquales; parallelae erunt inter se rectae lineae. *Q. E. D.*



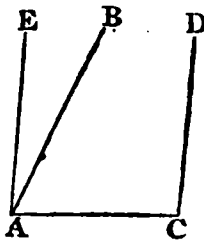
^a ex hyp.
¹ 15. hujus.

^m Ex antecedente.

ⁿ ex hyp.
^o 13. hujus.

*Cor.** Si in duas rectas lineas recta linea incidens interiores et ex eadem parte angulos duobus rectis minores fecerit; rectae lineae in infinitum productae sibi invicem occurrent ex eâ parte, ex quâ sunt anguli duobus rectis minores.

Incidat enim in duas rectas lineas AB , CD recta linea AC , ita ut angulos BAC , DCA duobus rectis minores efficiat: dic rectas lineas AB , CD in infinitum productas ex eâ parte, ex quâ angulos cum AC duobus rectis minores efficiunt, sibi invicem occurrentes esse. Rectae lineae AC ad punctum A applicetur angulus EAC æqualis angulo, qui anguli DCA ad duos rectos complementum est. Itaque anguli EAC , DCA simul sumpti duobus rectis æquales sunt, et recta linea AB ipsi DC parallela erit, per hanc Prop. Anguli autem BAC , DCA , duobus rectis ex hypothesi minores, duobus EAC , DCA minores erunt, qui duobus rectis ostensi sunt æquales. Communis auferatur angulus DCA , erit itaque BAC angulus angulo EAC minor. Igitur recta linea AB rectas AE , AC interjacet, angulum EAC dividens; itaque ab AE versus CD deflectitur; quamobrem producta ipsi CD productae occurret. Recta enim



^p 23. hujus.

ea demum est linea, quæ producta in eâ perstat directione, quam primo habuerit. Directiones autem rectarum AB , CD erant, ut ostensum est, ad se invicem. Itaque &c. *Q. E. D.*

SCHOLION.*

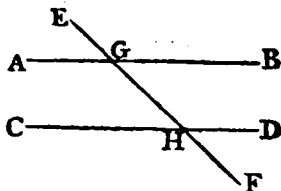
In hoc Corollario verum esse illud demonstravimus, quod in initio libri inter κοινὰς ἐννοίας, sive Axiomata, posuit Euclides. Vid. Ax. 12. hujus.

[XXIX.]

PROP. XXIX. THEOR.

In parallelas rectas lineas recta linea incidens, et alternos angulos inter se æquales, et exteriorem interiori et opposito et ad easdem partes æqualem, et interiores et ad easdem partes duobus rectis æquales efficiet.

In parallelas enim rectas lineas AB , CD recta linea incidat EF . Dico alternos angulos AGH , GHD inter se æquales efficere, et exteriorem EGB interiori, et ad easdem partes GHD æqualem: et interiores et ad easdem partes BGH , GHD duobus rectis æquales. Si enim inæqualis



est AGH ipsi GHD , unus ipsorum major est. Sit major AGH . Et quoniam AGH angulus major est angulo GHD ; communis apponatur BGH . Anguli igitur AGH , BGH angulis BGH , GHD majores sunt. Sed

* 13. hujus. anguli AGH , BGH sunt æquales duobus rectis^r. Ergo BGH , GHD anguli sunt duobus rectis minores. Quæ vero a minoribus, quam sint duo recti, in infinitum

* Ax. 12. producantur rectæ lineæ, inter se conveniunt^r. Ergo rectæ lineæ AB , CD in infinitum productæ convenient inter se. Atqui non conveniunt, cum parallelæ ponantur. Non igitur inæqualis est AGH angulus angulo GHD ; quare necessario est æqualis. Angulus autem

* 15. hujus. AGH æqualis est angulo EGB ^r. Ergo et EGB ipsi GHD æqualis erit. Communis apponatur BGH . Anguli igitur EGB , BGH sunt æquales angulis BGH , GHD ; sed EGB , BGH æquales sunt duobus rectis. Ergo et BGH , GHD duobus rectis æquales erunt. In parallelas igitur rectas lineas recta linea incidens, et alternos angulos inter se æquales, et exteriorem interiori

et

et opposito et ad easdem partes æqualem, et interiores et ad easdem partes duobus rectis æquales efficiet.

Q. E. D.

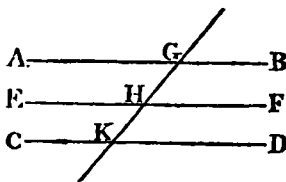
PROP. XXX. THEOR.

[XXX.]

Quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, et inter se parallelæ erunt.

Sit utraque ipsarum AB , CD ipsi EF parallela. Dico et AB ipsi CD parallelam esse.

Incident enim in ipsas rectas lineas AB , EF recta linea GK incidit, angulus AGH angulo GHF est æqualis². Rursus quoniam in parallelas rectas lineas EF , CD recta linea incidit GK , æqualis est GHF angulus angulo GKD ². Ostensus autem est et angulus AGK angulo GHF æqualis; ergo et AGK ipsi GKD æqualis erit; et sunt alterni. Parallela igitur est AB ipsi CD ². Ergo quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ,² 27. hujus. et inter se parallelæ erunt. Q. E. D.



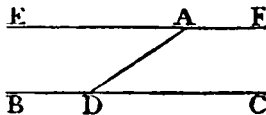
² 29. hujus.

PROP. XXXI. PROBL.

[XXXI.]

Per datum punctum datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

Sit datum quidem punctum A , data vero recta linea BC . Oportet per A punctum ipsi BC rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere. Sumatur in BC quodvis punctum D , et jungatur AD ; constitua-



turque² ad rectam lineam DA , et ad punctum in ipsa², 23. hujus, A , angulo ADC æqualis angulus DAE ; et in directum ipsi EAD recta linea AF producat. Quoniam igitur in duas rectas lineas BC , EF recta linea AD incidens alternos angulos EAD , ADC inter se æquales efficit, EF ipsi BC parallela erit². Per datum igitur punctum² 27. hujus, A datæ rectæ lineæ BC parallela ducta est recta linea EAF . Q. E. F.

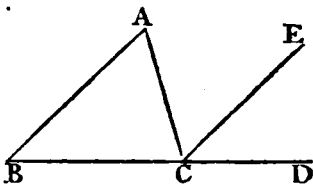
PROP.

[XXXII.]

PROP. XXXII. THEOR.

Omnis trianguli uno latere producto exterior angulus duobus interioribus et oppositis est æqualis, et trianguli tres interiores anguli duobus rectis æquales sunt.

Sit triangulum ABC ; et unum ipsius latus BC in D producat. Dico angulum ACD duobus interioribus et oppositis CAB, ABC æqualem esse; et trianguli tres interiores angulos ABC, BCA, CAB duobus rectis esse æquales.



- ^a 31. hujus. Ducatur ^a enim per punctum C ipsi AB rectæ lineæ parallela CE ; et quoniam AB ipsi CE parallela est, et in ipsas incidit AC , alterni anguli BAC, ACE inter se æquales sunt ^b. Rursum quoniam AB parallela est CE , et in ipsas incidit recta linea BD , exterior angulus ECD interiori et opposito ABC est æqualis ^b. Ostenfus autem est angulus ACE æqualis angulo BAC . Quare totus ACD exterior angulus æqualis est duobus interioribus et oppositis BAC, ABC . Communis apponatur ACB ; anguli igitur ACD, ACB tribus ABC, BAC, ACB æquales sunt; sed anguli ACD, ACB sunt æquales ^c duobus rectis. Ergo et ACB, CBA, CAB duobus rectis æquales erunt. Omnis igitur trianguli uno latere producto exterior angulus duobus interioribus et oppositis est æqualis; et trianguli tres interiores anguli duobus rectis æquales sunt. *Q. E. D.*

Cor. 1. Omnes tres anguli cujusque trianguli sumpti æquales sunt tribus angulis cujusque alterius trianguli simul sumptis.

Cor. 2. Si in uno triangulo duo anguli, aut singuli, aut simul, æquales sint duobus angulis alterius trianguli; erit reliquus angulus reliquo æqualis.

Cor. 3. In triangulo si unus angulus rectus sit, reliqui simul unum rectum conficiunt.

Cor. 4. In triangulo isoscele si angulus æquis cruribus contentus rectus sit, reliqui ad basim sunt semirecti.

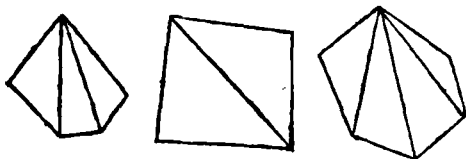
Cor. 5. In triangulo æquilatere angulus quilibet æqualis est $\frac{1}{3}$ duorum rectorum vel $\frac{2}{3}$ unius recti.

THEO-

THEOREMA I.

Omnes simul interiores anguli cujuscunque figuræ rectilineæ conficiunt bis tot rectos, demptis quatuor, quot sunt latera figuræ.

Nam figura unaquæque rectilinea resolvi potest in triangula binario pauciora quam sunt ipsius figuræ latera, c. g. si quatuor latera habeat, resolvitur in duo triangula;



si quinque in tria triangula; si sex in quatuor et sic deinceps; quare per præcedentem omnes horum triangulorum anguli æquantur bis tot rectis quot sunt triangula, sed omnes horum triangulorum anguli æquales sunt angulis figuræ interioribus; quare omnes anguli interiores figuræ æquales sunt bis tot rectis quot sunt triangula, hoc est, bis tot rectis, demptis quatuor, quot sunt latera figuræ.

Q. E. D.

THEOR. II.

Omnes simul exteriores anguli cujuscunque figuræ rectilineæ conficiunt quatuor rectos.

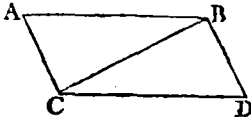
Nam exteriores simul cum interioribus conficiunt bis tot rectos quot sunt latera figuræ; vero ex præcedente Theor. omnes interiores soli conficiunt bis tot rectos, demptis quatuor, quot sunt latera figuræ; quare exteriores conficiunt quatuor rectos. Q. E. D.

PROP. XXXIII. THEOR.

[XXXIII.]

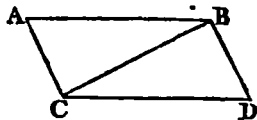
Quæ æquales et parallelas ad easdem partes conjungunt rectæ lineæ, et ipsæ æquales et parallelæ sunt.

Sint æquales et parallelæ AB , CD ; et ipsas conjungant ad easdem partes rectæ lineæ AC , BD . Dico AC , BD æquales, et parallelas esse. Ducatur enim BC ; et quoniam AB parallela est CD , in ipsasque incidit BC , alterni anguli ABC , BCD æquales sunt ^{d. 29. hujus.}



Rursum

Rurfus quoniam AB est æqualis CD , communis autem BC , duæ AB , BC duabus BC , CD sunt æquales; et angulus ABC æqualis angulo BCD . Basi igitur AC basi BD est æqua-



- * 4. hujus. lis^e; triangulumque ABC triangulo BCD ; et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. Ergo angulus ACB angulo CBD est æqualis. Et quoniam in duas rectas lineas AC , BD recta linea BC incidens, alternos angulos ACB , CBD æquales inter se efficit, parallela est AC ipsi BD ^f. Ostensa autem est et ipsi æqualis. Quæ igitur æquales et parallelas ad easdem partes conjungunt rectæ lineæ, et ipsæ æquales et parallelæ sunt. Q. E. D.
- * 27. hujus.

DEFINITIO.

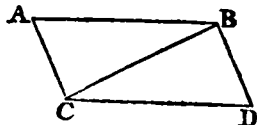
Parallelogrammum est figura quadrilatera, cujus binæ opposita latera sunt parallela.

[XXXIV.]

PROP. XXXIV. THEOR.

Parallelogrammorum spatiorum latera, quæ ex opposito, et anguli, inter se æqualia sunt; et diameter ea bifariam secat.

Sit parallelogrammum $ABDC$, cujus diameter BC . Dico $ACDB$ parallelogrammi latera, quæ ex opposito, et angulos, inter se æqualia esse; et diametrum BC ipsum bifariam secare. Quoniam enim parallela est AB ipsi CD , et in ipsas incidit recta

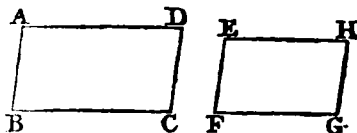


- linea BC ; anguli alterni ABC , BCD inter se æquales sunt^g. Rurfus quoniam AC ipsi BD parallela est, et in ipsas incidit BC , alterni anguli ACB , CBD æquales sunt inter se^h. Duo igitur triangula sunt ABC , BCD , quæ duos angulos ABC , BCA duobus angulis BCD , CBD æquales habent, alterum alteri; et unum latus uni lateri æquale, scil. quod est ad æquales angulos, utrique commune, BC . Ergoⁱ et reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, alterum alteri, et reliquum angulum reliquo angulo æqualem. Æquale igitur est latus quidem AB lateri CD , latus vero AC ipsi BD , et angulus BAC angulo BDC æqualis. Et quoniam
- * 29. hujus. sunt^g.
- * 26. hujus.

quoniam angulus ABC est æqualis angulo BCD , et angulus BCD angulo ACB ; erit totus angulus ABD æqualis toti ACD . Ostensus autem est et angulus BAC angulo BDC æqualis. Parallelogrammorum igitur spatiorum latera, quæ ex opposito, et anguli, inter se æqualia sunt. Dico etiam diametrum ea bifariam secare. Quoniam enim æqualis est AB ipsi CD , communis autem BC , duæ AB , BC duabus DC , CB æquales sunt, altera alteri; et angulus ABC æqualis est angulo BCD . Basis igitur AC basi DB æqualis; et triangulum ABC triangulo BCD æquale. Ergo diameter BC parallelogrammum $ACDB$ bifariam secat. *Q. E. D.*

*Cor. ** Parallelogramma, quæ unum angulum uni angulo æqualem habent, et reliquos reliquis, singulos singulis, æquales habent.

Parallelogramma $ABCD$, $EFGH$ angulos ad A , E æquales habeant. Dico parallelogrammum $ABCD$ reliquos sui angulos reliquis parallelogrammi $EFGH$, singulos singulis, æquales



habere. Nam in parallelogrammo $ABCD$ anguli duo A , B simul sumpti duobus rectis æquales sunt^k. Pari^k 29. hujus. ratione in parallelogrammo $EFGH$, duo E , F simul sumpti duobus rectis sunt æquales. Duo igitur A , B simul duobus E , F simul sunt æquales. Ablatisque æqualibus A , E , reliquus B reliquo F æqualis^l erit.^l *Ax. 3.* Jam vero in parallelogrammo $ABCD$ anguli A , C oppositi inter se æquales sunt, per hanc Prop. et in parallelogrammo $EFGH$ oppositi E , G inter se æquales. Æquales autem A , E ^m. Quare et C , G æquales suntⁿ.^m *ex hyp. Ax. 1.* Pari ratione angulus D , cui oppositus est B , in parallelogrammo $ABCD$, æqualis ostendetur angulo H , cui in parallelogrammo $EFGH$ oppositus est F , ipsius B æqualis.

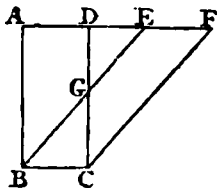
PROP.

[XXXV.]

PROP. XXXV. THEOR.

Parallelogramma super eâdem basi, et in iisdem parallelis constituta, inter se æqualia sunt.

Sint parallelogramma $ABCD$, $EBCF$ super eâdem basi BC , et in eisdem parallelis AF , BC constituta. Dico $ABCD$ parallelogrammum parallelogrammo $EBCF$ æquale esse. Quoniam enim parallelogrammum est $ABCD$, æqualis^o est AD ipsi BC . Eâdem quoque ratione, et EF est æqualis BC . Quare et AD ipsi EF



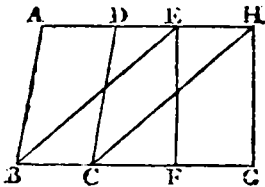
æqualis erit^p; et communis DE .
^p Ax. 1. Tota igitur AE toti DF est æqualis. Est autem et AB æqualis DC . Ergo duæ EA , AB duabus FD , DC æquales sunt, altera alteri, et angulus FDC æqualis angulo EAB , exterior interiori^r; basis igitur EB basi FC est æqualis, et EAB triangulum æquale triangulo FDC . Commune auferatur DGE . Reliquum igitur trapezium $ABGD$ reliquo trapezio $EGCF$ est æquale^t. Commune apponatur GBC triangulum. Ergo totum parallelogrammum $ABCD$ toti parallelogrammo $EBCF$ æquale erit. Parallelogramma igitur super eâdem basi, et in eisdem parallelis constituta, inter se æqualia sunt. $Q. E. D.$

[XXXVI.]

PROP. XXXVI. THEOR.

Parallelogramma super æqualibus basibus, et in eisdem parallelis constituta, inter se æqualia sunt.

Sint parallelogramma $ABCD$, $EFGH$ super æqualibus basibus BC , FG , et in eisdem parallelis AH , BG constituta. Dico parallelogrammum $ABCD$ parallelogrammo $EFGH$ æquale esse. Conjungantur enim BE , CH . Et quoniam æqualis^u est BC ipsi FG , et FG æqualis ipsi EH ; erit et BC ipsi EH æqualis. Sunt parallelæ, et ipsas conjungunt BE , CH . Quæ autem æquales et parallelæ ad easdem partes conjungunt, æquales et parallelæ sunt^x. Ergo EB , CH et æquales sunt, et parallelæ. Quare $EBCH$ paral-



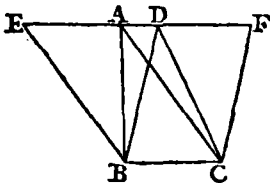
parallelogrammum est, et æquale parallelogrammo $ABCD$ ¹; basim enim eandem habet BC , et in eisdem² 35. hujus. parallelis BC , AD constituitur. Simili ratione, et $EFGH$ parallelogrammum eidem parallelogrammo $EBCH$ est æquale. Basim enim eandem habet EH , et in eisdem parallelis EH , BC constituitur. Ergo parallelogrammum $ABCD$ parallelogrammo $EFGH$ æquale erit. Parallelogramma igitur super æqualibus basibus, et in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia. Q. E. D.

PROP. XXXVII. THEOR.

[XXXVII.]

Triangula super eadem basi, et in eisdem parallelis constituta, inter se æqualia sunt.

Sint triangula ABC , DBC super eadem basi BC , et in eisdem parallelis AD , BC constituta. Dico ABC triangulum triangulo DBC æquale esse. Producatur AD ex utraque parte in E , F puncta; et per B quidem ipsi CA parallela ducatur BE ,² per C vero ipsi BD parallela CF . Parallelo-



* 31. hujus.

grammum igitur est utrumque ipsorum $EBCA$, $DBCF$; et parallelogrammum $EBCA$ est æquale³ parallelo-^{35. hujus.} grammum $DBCF$; etenim super eadem sunt basi BC , et in eisdem parallelis BC , EF . Estque parallelogrammi quidem $EBCA$ dimidium⁴ ABC triangulum, cum dia-^{34. hujus.} meter AB ipsum bifariam secet: parallelogrammi vero $DBCF$ dimidium⁵ triangulum DBC ; diameter enim DC ipsum bifariam secat. Quæ autem⁶ æqualium di-^{6. Ax. 7.} midia sunt, inter se æqualia sunt. Ergo triangulum ABC triangulo DBC est æquale. Triangula igitur super eadem basi, et in eisdem parallelis constituta, inter se æqualia sunt. Q. E. D.

PROP. XXXVIII. THEOR.

[XXXVIII.]

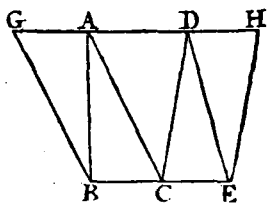
Triangula super basibus æqualibus, et in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.

Sint triangula ABC , DEC super æqualibus basibus BC , CE , et in eisdem parallelis BE , AD constituta. Dico ABC triangulum DEC triangulo æquale esse. Producatur enim AD ex utraque parte in G , H puncta; et per B quidem ipsi CA parallela ducatur BG ¹, per E ^{31. hujus.} vero

D

vero

- * 31. hujus. vero ducatur EH parallela ipsi DC . Parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum $GBCA$, $DCEH$. Atque est parallelogrammum $GBCA$ æ-
 † 36. hujus. quale^f parallelogrammo $DCEH$; in æqualibus enim sunt basibus BC , CE , et in eisdem BE , GH parallelis. Parallelogrammivero
 * 34. hujus. $GBCA$ dimidium^e est ABC triangulum, nam diameter AB ipsum bifariam secat: et parallelogrammi $DCEH$ dimidium^e est triangulum DCE , diameter enim DE ipsum secat bifariam. Quæ autem æqualium dimidia sunt^b, inter se æqualia sunt. Ergo ABC triangulum triangulo DCE est æquale. Triangula igitur super æqualibus basibus, et in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia. Q. E. D.



[XXXIX.]

PROP. XXXIX. THEOR.

Triangula æqualia super eadem basi, et ad easdem partes constituta, in eisdem quoque sunt parallelis.

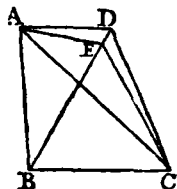
Sint æqualia triangula ABC , DBC super eadem basi BC constituta, et ad easdem partes.

Dico et in eisdem parallelis esse. Ducatur enim AD . Dico AD parallelam esse ipsi BC . Si enim non est parallela,

- † 31. hujus. ducaturⁱ per A punctum ipsi BC parallela recta linea AE , et EC ducatur.

- * 37. hujus. Æquale igitur est ABC triangulum triangulo EBC ^k, super eadem enim

- ^{ex hyp.} est basi BC , et in eisdem BC , AE parallelis. Sed ABC triangulum triangulo DBC ^l est æquale. Ergo et triangulum DBC æquale est ipsi EBC triangulo, majus minori; quod fieri non potest. Non igitur AE ipsi BC parallela est. Similiter ostendemus neque aliam quampiam per A ipsi BC parallelam esse, præter ipsam AD . Ergo AD ipsi BC est parallela. Triangula igitur æqualia super eadem basi, et ad easdem partes constituta, in eisdem quoque sunt parallelis. Q. E. D.



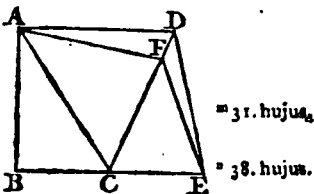
PROP.

PROP. XL. THEOR.

[XL.]

Triangula æqualia super basibus æqualibus, et ad easdem partes constituta, in eisdem quoque sunt parallelis.

Sint æqualia triangula ABC , CDE super æqualibus basibus BC , CE constituta. Dico etiam in eisdem esse parallelis. Ducatur enim AD . Dico AD ipsi BE parallelam esse. Nam si non est, ducatur^m per A ipsi BE parallela AF , et FE ducatur. Triangulum igitur ABC triangulo FCE est æqualeⁿ, cum super æqualibus basibus et in eisdem parallelis BE , AF constituentur. Sed triangulum ABC æquale est triangulo DCE . Ergo et triangulum DCE triangulo FCE æquale erit, majus minori; quod fieri non potest. Non igitur AF ipsi BE est parallela. Similiter demonstrabimus neque aliam quampiam per A ipsi BE parallelam esse, præter AD . Ergo AD ipsi BE parallela erit. Æqualia igitur triangula super basibus æqualibus, et ad easdem partes constituta, etiam in eisdem sunt parallelis. *Q. E. D.*

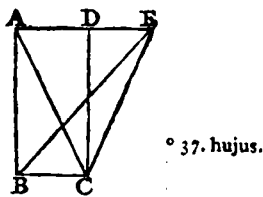


PROP. XLI. THEOR.

[XLI.]

Si parallelogrammum et triangulum eandem basim habeant, in eisdemque sint parallelis; parallelogrammum ipsius trianguli duplum erit.

Parallelogrammum enim $ABCD$, et triangulum EBC , basim habeant eandem BC , et in eisdem sint parallelis BC , AE . Dico parallelogrammum $ABCD$ trianguli EBC duplum esse. Jungatur enim AC . Triangulum igitur ABC triangulo EBC est æquale^o; namque super eadem basi BC et in eisdem BC , AE parallelis constituentur. Sed $ABCD$ parallelogrammum duplum est trianguli ABC ^p, cum diameter AC ipsum^r bisariam secet. Quare et ipsius EBC trianguli duplum erit. Si igitur parallelogrammum et triangulum eandem basim habeant, et in eisdem sint parallelis; duplum erit parallelogrammum ipsius trianguli. *Q. E. D.*

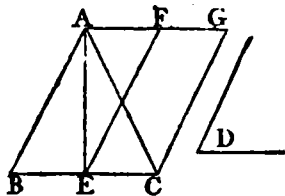


[XLII.]

PROP. XLII. PROBL.

Dato triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

- Sit datum triangulum ABC , datus autem rectilineus angulus D . Itaque oportet dato triangulo ABC æquale parallelogrammum constituere in angulo rectilineo ipsi D
- ^{10.} hujus. æquali. Secetur BC bifariam^a in E ; et junctâ AE , ad rectam lineam EC , atque ad punctum
- ^{23.} hujus. in eâ E , constituatur angulus^c CEF æqualis ipsi D ; et per A quidem ipsi EC parallela
- ^{31.} hujus. ducatur AG ; per C vero ipsi FE ducatur parallela CG . Parallelogrammum igitur est $FECG$. Et quoniam BE
- ^{38.} hujus. est æqualis EC , erit et ABE triangulum^c triangulo AEC æquale, super æqualibus enim sunt basibus BE , EC , et in eisdem BC , AG parallelis. Ergo triangulum ABC trianguli AEC est duplum. Est autem et paralle-
- ^{41.} hujus. logrammum $FECG$ duplum^a trianguli AEC ; basim enim eandem habet, et in eisdem est parallelis. Æquale igitur est $FECG$ parallelogrammum triangulo ABC , habetque CEF angulum^c æqualem angulo D dato. Dato igitur triangulo ABC æquale parallelogrammum $FECG$ constitutum est, in angulo CEF , qui angulo D est æqualis. *Q. E. F.*

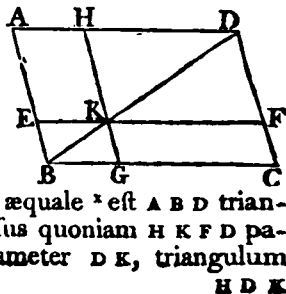


[XLIII.]

PROP. XLIII. THEOR.

Omnis parallelogrammi spatii eorum, quæ circa diametrum sunt, parallelogrammorum complementa inter se sunt æqualia.

- Sit parallelogrammum $ABCD$, cujus diameter BD ; et circa ipsam BD parallelogramma quidem sint FH , EG , quæ vero complementa dicuntur AK , KC . Dico AK complementum complemento KC æquale esse. Quoniam enim parallelogrammum est
- ^{34.} hujus. $ABCD$, et ejus diameter BD , æquale^a est ABD triangulum triangulo BDC . Rursus quoniam $HKFD$ parallelogrammum est, cujus diameter DK , triangulum



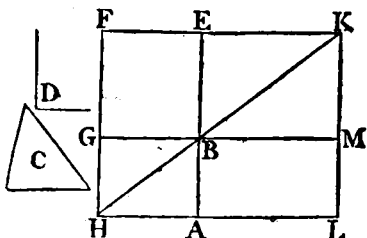
$\triangle HDK$ triangulo $\triangle DFK$ æquale^a erit. Eâdem ratione, ^{34. hujus.} et triangulum $\triangle KGB$ triangulo $\triangle KEB$ est æquale. Cum igitur triangulum quidem $\triangle BEK$ æquale sit triangulo $\triangle BKG$, triangulum vero $\triangle HDK$ ipsi $\triangle DFK$; erit triangulum $\triangle BEK$ una cum triangulo $\triangle HDK$ æquale triangulo $\triangle BKG$ una cum $\triangle DFK$ triangulo. Est autem et totum triangulum $\triangle ABD$ æquale toti $\triangle BDC$. Reliquum igitur $\triangle AK$ complementum reliquo complemento $\triangle KC$ est æquale. Ergo omnis parallelogrammi spatii eorum, quæ circa diametrum sunt, parallelogrammorum complementa inter se æqualia sunt. Q. E. D.

PROP. XLIV. PROBL.

[XLIV.]

Ad datam rectam lineam dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

Sit data quidem recta linea AB ; datum vero triangulum c , et datus angulus rectilineus D . Oportet igitur ad datam rectam lineam AB , dato triangulo c æquale parallelogrammum applicare in angulo ipsi D æquali. Constituatur triangulo c æquale^a parallelogrammum $BEFG$, in angulo EBG , qui est æ-

^a 42. hujus.

qualis D ; et ponatur BE in directum ipsi AB , producat^aurque FG ad H ; et per A alterutri ipsarum BG , EF parallela^a ducatur AH , et HB jungatur. Quoniam^a ^{31. hujus.} igitur in parallelas AH , EF recta linea HF incidit, anguli AHF , HFE duobus rectis æquales^b sunt. Quare^b ^{29. hujus.} BHF , HFE duobus rectis sunt minores. Quæ vero a minoribus, quam sunt duo recti, si in infinitum producantur, convenient^c inter se. Ergo HB , FE pro-^c ^{Ax. 12.} ductæ convenient. Producantur, et convenient in K ; perque K alterutri ipsarum EA , FH parallela^a ducatur KL ; et AH , GB ad L , M puncta producantur. Parallelogrammum igitur est $HLKF$, cujus diameter HK , et circa HK parallelogramma quidem sunt AG , ME ; ea vero, quæ complementa dicuntur, LB , BF ; ergo LB ipsi BF est^d æquale. Sed et BF æquale est trian-^d ^{43. hujus.} gulo c . Quare et LB triangulo c æquale erit. Et quoniam GBE angulus æqualis^e est angulo ABM , fed^e ^{15. hujus.}

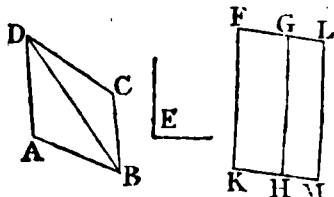
et æqualis angulo D , erit et angulus ABM angulo D æqualis. Ad datam igitur rectam lineam AB , dato triangulo C æquale parallelogrammum constitutum est LB , in angulo ABM , qui est æqualis angulo D . *Q. E. F.*

[XLV.]

PROP. XLV. PROBL.

Rectilineo dato æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

Sit datum rectilineum $ABCD$, datus vero angulus rectilineus E . Oportet rectilineo $ABCD$ æquale parallelogrammum constituere in angulo ipsi E æquali. Coniungantur DB , et constituatur tri-



- ^f 42. hujus. angulo ADB æquale ^f parallelogrammum FH in angulo HKF , qui est æqualis angulo E . Deinde ad rectam lineam GH applicetur triangulo DBC æquale
- ^a 44. hujus. ^a parallelogrammum GM , in angulo GHM , qui angulo E est æqualis. Et quoniam angulus E æqualis est utrique ipsorum HKF , GHM , erit et HKF angulo GHM æqualis. Communis apponatur HKG ; anguli igitur HKF , HKG angulis HKG , GHM æquales sunt. Sed
- ^a 29. hujus. HKF , HKG sunt æquales ^b duobus rectis. Ergo, et HKG , GHM duobus rectis æquales erunt. Itaque ad aliquam rectam lineam GH , et ad datum in eâ punctum H , duæ rectæ lineæ KH , HM non ad easdem partes positæ angulos deinceps duobus rectis æquales efficiunt;
- ⁱ 14. hujus. in directum igitur ⁱ est KH ipsi HM . Et quoniam in parallelas KM , FG recta linea HG incidit, alterni anguli MHG , HGF æquales ^b sunt. Communis apponatur HGL ; anguli igitur MHG , HGL angulis HGF , HGL sunt æquales. At anguli MHG , HGL æquales ^b sunt duobus rectis. Quare et anguli HGF , HGL duobus rectis æquales erunt. In directum ⁱ igitur est FG ipsi GL . Et quoniam KF ipsi HG et æqualis est et
- ^a 30. hujus. parallela; sed et HG ipsi ML ; erit KF ^b ipsi ML et æqualis et parallela. Ipsæque coniungunt rectæ lineæ
- ⁱ 33. hujus. KM , FL ; ergo et KM , FL æquales ⁱ et parallelæ sunt. Parallelogrammum igitur est $KFLM$. At cum triangulum quidem ABD æquale sit parallelogrammo HF ; triangulum vero DBC parallelogrammo GM , erit totum

$ABCD$

$ABCD$ rectilineum toti parallelogrammo $KFLM$ æquale. Dato igitur rectilineo $ABCD$ æquale parallelogrammum constitutum est $KFLM$, in angulo FKM , qui est æqualis angulo E dato. *Q. E. F.*

Cor. Ex jam dictis manifestum est, quomodo ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicari possit in dato angulo rectilineo.

PROP. XLVI. PROBL.

[XLVI.]

Super datâ rectâ lineâ quadratum describere.

Sit data recta linea AB . Oportet super ipsâ AB quadratum describere. Ducatur ^m rectæ lineæ AB a puncto in eâ dato A ad rectos angulos AC ; et ipsi AB æqualis ⁿ ponatur AD ; perque punctum D ducatur ^o DE ipsi AB parallela, et per B ipsi AD parallela ^p ducatur BE . Parallelogrammum igitur est $ADBE$. Et AB quidem est ^r æqualis DE , AD vero ipsi ^s BE ; sed BA ipsi AD est æqualis. Quatuor igitur BA , AD , DE , EB inter se æquales sunt, ideoque æquilaterum est $ADBE$ parallelogrammum. Dico etiam rectangulum esse. Quoniam enim in parallelas AB , DE recta linea incidit AD , anguli BAD , ADE duobus rectis sunt ^t æquales. Rectus ^u BAE autem est BAD , ergo et ADE rectus erit. Parallelogrammorum vero spatiorum quæ ex opposito sunt latera, et anguli, ^v inter se æqualia sunt. Rectus igitur est uterque oppositorum ABE , BED angulorum; et ob id rectangulum est $ADBE$. Ostensum autem est æquilaterum esse. ^w Quadratum igitur sit necesse est, atque est ^{Def. 30.} super rectâ lineâ AB descriptum. *Q. E. F.*

Cor. Hinc omne parallelogrammum, habens unum angulum rectum, est rectangulum.

PROP. XLVII. THEOR.

[XLVII.]

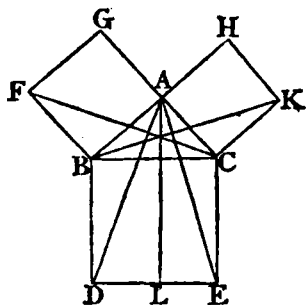
In rectangulis triangulis, quod a latere rectum angulum subtendente describitur quadratum, æquale est quadratis, quæ a lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

Sit triangulum rectangulum ABC , rectum habens BAC angulum. Dico quadratum descriptum a rectâ

D 4

B C

- BC æquale esse quadratis, quæ ab ipsis BA, AC describuntur. Describatur enim a BC quidem quadratum $BDEC$, ab ipsis BA, AC quadrata GB, HC ; perque A alterutri ipsarum BD, CE parallela ducatur AL ; et AD, FC jungantur. Quoniam igitur uterque angulorum BAC, BAG rectus
- ^{Def. 30.} est, ad aliquam rectam lineam BA , et ad datum in eâ punctum A , duæ rectæ lineæ AC, AG non ad easdem partes positæ angulos, qui deinceps sunt, duobus rectis æquales efficiunt. In dictum igitur est CA ipsi AG . Eadem ratione, et AB ipsi AH est in directum. Et quoniam angulus DBC est æqualis angulo FBA , rectus enim uterque est, communis apponatur ABC ; totus igitur DBA angulus toti FBC est æqualis. Quod cum duæ AB, BD duabus FB, BC æquales sint, altera alteri, et angulus DBA æqualis angulo FBC ; erit et basis AD basi FC æqualis¹, et ABD triangulum triangulo FBC æquale.
- ^{4.} hujus. Estque² trianguli quidem ABD duplum BL parallelogrammum, basim enim eandem habent BD , et in eisdem BD, AL sunt parallelis: trianguli² vero FBC duplum est GB quadratum; rursus enim basim habent eandem FB , et in eisdem sunt parallelis FB, GC . Quæ autem æqualium duplicia, inter se æqualia³ sunt. Ergo æquale est parallelogrammum BL ipsi GB quadrato. Similiter junctis AE, BK , ostendetur etiam CL parallelogrammum æquale quadrato HC . Totum igitur $BDEC$ quadratum duobus quadratis GB, HC est æquale. Et describitur quidem $BDEC$ quadratum a rectâ lineâ BC ; quadrata vero GB, HC ab ipsis BA, AC . Quadratum igitur BE , a latere BC descriptum, æquale est quadratis, quæ describuntur a lateribus BA, AC . Ergo in rectangulis triangulis, quadratum, quod describitur a latere rectum angulum subtendente, æquale est quadratis, quæ a lateribus rectum angulum continentibus describuntur. *Q. E. D.*



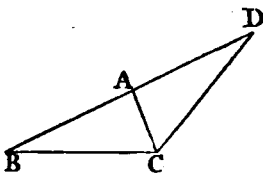
PROP.

PROP. XLVIII. THEOR.

[XLVIII.]

Si quadratum, quod describitur ab uno laterum trianguli, æquale sit quadratis, quæ a reliquis trianguli lateribus describuntur; angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit.

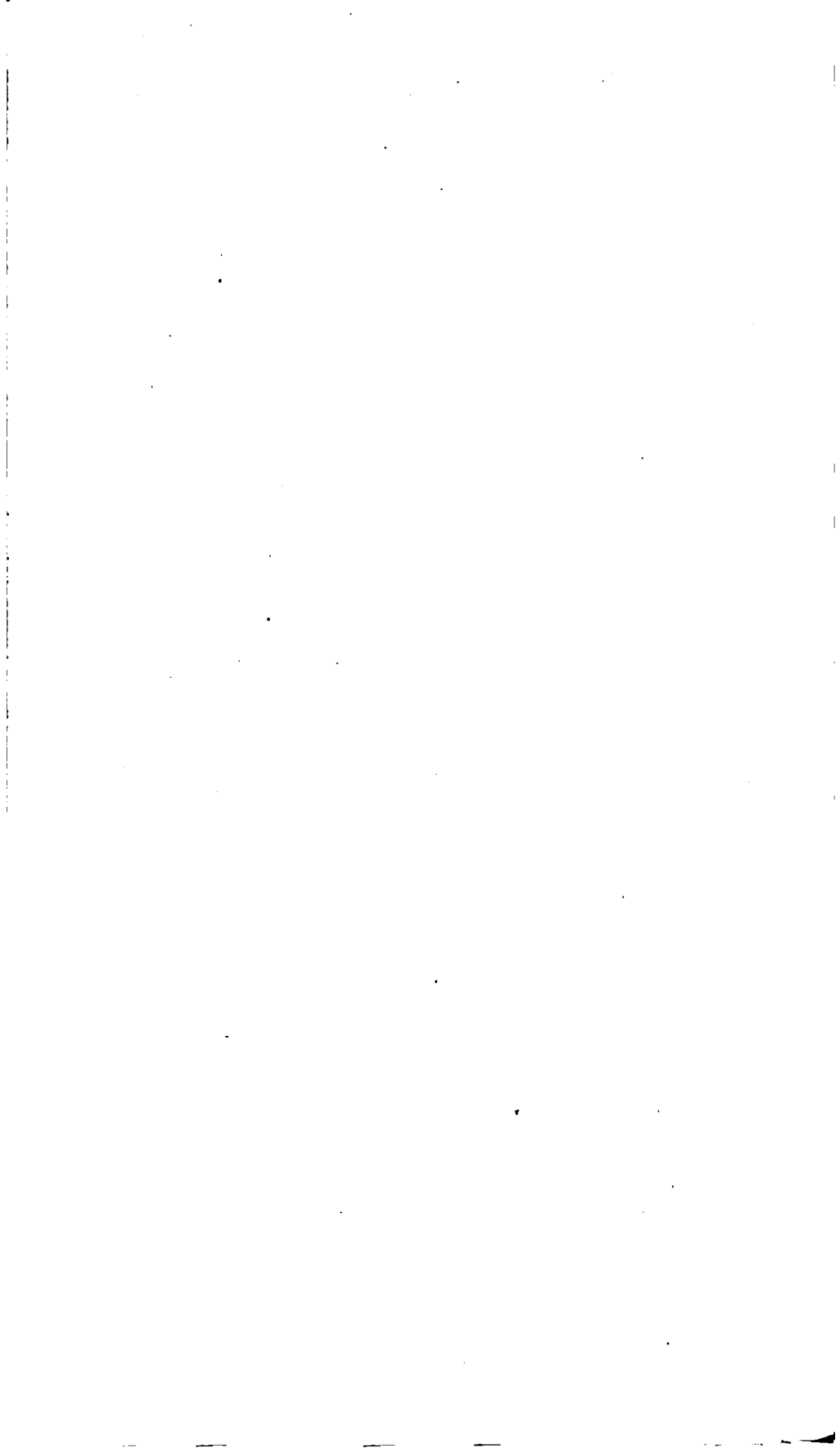
Si trianguli ABC , quod ab uno latere BC describitur quadratum, æquale sit quadratis, quæ a reliquis trianguli lateribus BA , AC describuntur, dico angulum BAC rectum esse. Ducatur enim a puncto A ipsi AC ad rectos angulos AD ; ponaturque AD ipsi BA



æqualis; et DC jungatur. Quoniam igitur DA est æqualis AB , erit et quadratum, quod describitur ex DA , æquale quadrato ex AB . Commune apponatur quadratum, quod ex AC . Ergo quadrata, quæ ex DA , AC , æqualia sunt quadratis, quæ ex BA , AC describuntur. Sed quadratis quidem, quæ ex DA , AC , æquale est quod ex DC quadratum; rectus enim angulus est DAC : quadratis vero, quæ ex BA , AC , æquale ponitur quadratum, quod ex BC . Quadratum igitur, quod ex DC , æquale est ei, quod ex BC , quadrato. Ergo et latus DC lateri CB est æquale. Et quoniam DA est æqualis AB , communis autem AC , duæ DA , AC æquales sunt duabus BA , AC ; et basis DC est æqualis basi CB . Angulus igitur DAC angulo BAC est æqualis. Rectus autem est DAC . Ergo et BAC rectus erit. Si igitur quadratum, quod describitur ab uno laterum trianguli, æquale sit quadratis, quæ a reliquis trianguli lateribus describuntur, angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit. *Q. E. D.*

47. hujus.

8. hujus.



EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER SECUNDUS.

DEFINITIONES.

DEFINITIO I.

OMNE parallelogrammum rectangulum contineri dicitur sub duabus rectis lineis, quæ rectum angulum comprehendunt.

II.

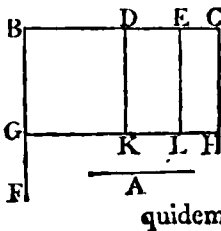
Omnis parallelogrammi spatii, unum quodvis eorum quæ circa diametrum ipsius sunt parallelogrammorum, cum duobus complementis, gnomon vocetur.

PROPOSITIO I. THEOREMA.

[1.]

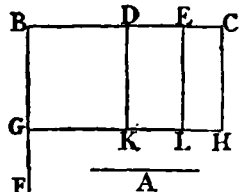
Si sint duæ rectæ lineæ, altera autem ipsarum secta fuerit in quotcunque partes; rectangulum, sub duabus rectis lineis contentum, æquale est eis rectangulis, quæ sub rectâ lineâ insecâ, et singulis partibus continentur.

Sint duæ rectæ lineæ A, BC ; et secta sit BC utcumque in punctis D, E . Dico rectangulum, rectis lineis A, BC contentum, æquale esse rectangulis, quæ sub A et BD , sub A et DE , sub A et EC continentur, simul sumptis. Ducatur enim a puncto B , ipsi BC ad rectos ^a angulos BF ; atque ipsi A ponatur ^b æqualis BG ; et per G



^a 11. primi.
^b 3. primi.

* 31. primi. quidem ipsi BC parallela ^{c} ducatur GH ; per D, E, c vero ducantur DK, EL, CH parallela ^{c} ipsi BG . Rectangulum igitur BH est æquale rectangulis BK, DL, EH simul sumptis. Atque est BH quidem, quod sub A et BC continetur, etenim continetur sub GB, BC ; et BG ipsi A est æqualis. Rectangulum autem BK est quod continetur sub ipsis A et BD ; continetur enim sub GB, BD , quarum GB est æqualis A . Et rectangulum DL est, quod continetur sub A et DE , quoniam DK , hoc est BG , ipsi A est æqualis; et similiter rectangulum EH est, quod sub A et EC continetur. Ergo rectangulum contentum sub A et BC est æquale rectangulis sub A et DB , sub A et DE , et sub A et EC simul sumptis. Si igitur sint duæ rectæ lineæ, altera autem ipsarum secta fuerit in quocunque partes; rectangulum, sub duabus rectis lineis contentum, est æquale eis, quæ sub rectâ lineâ insectâ, et singulis partibus continentur. *Q. E. D.*



[II.]

PROP. II. THEOR.

Si recta linea secta fuerit utcunque; rectangula, quæ sub totâ, et singulis partibus continentur, æqualia sunt ei, quod a totâ fit, quadrato.

Recta enim linea AB secta sit utcunque in puncto c :

Dico rectangulum, quod sub AB, BC continetur, una cum contento sub AB, AC , æquale esse quadrato, quod fit ex

* 46. primi. AB . Describatur ^{c} enim ex AB qua-

* 31. primi. dratum $ADEB$, et per c ducatur ^{c} alterutri ipsarum AD, BE parallela CF .

Æquale igitur est AE rectangulis AF, CE . Atque est AE quidem quadratum,

quod ex AB ; AF vero rectangulum contentum sub BA, AC , etenim sub DA, AC continetur, quarum AD ipsi

AB est æqualis; et rectangulum CE continetur sub

AB, BC , cum BE sit æqualis AB . Ergo rectangulum

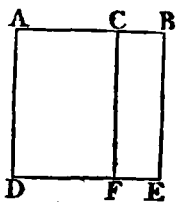
sub AB et AC una cum rectangulo sub AB et BC æquale

est quadrato ex AB . Si igitur recta linea utounque

secta fuerit; rectangula, quæ sub totâ, et singulis parti-

bus continentur, æqualia sunt ei, quod a totâ fit, qua-

drato. *Q. E. D.*



PROP.

PROP. III. THEOR.

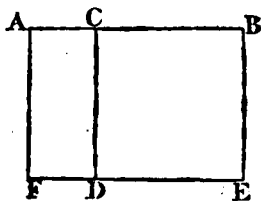
[III.]

Si recta linea utcumque secta fuerit; rectangulum sub totâ, et unâ ejus parte contentum æquale est et rectangulo, quod sub partibus continetur, et ei quod a prædictâ parte fit quadrato.

Recta enim linea AB secta fit utcumque in puncto c .

Dico sub AB et BC rectangulum æquale esse rectangulo sub AC , BC una cum quadrato, quod fit ex BC . Describatur enim ex BC quadratum $CDEB$; producatique ED in F : et per A alterutri ipsarum CD , BE parallela ^{a} ducatur AF . Æquale utique erit rectangulum AE ipsis AD , CE ; et est AE quidem rectangulum contentum sub AB , BC ; etenim sub AB , BE continetur, quarum BE est æqualis BC : rectangulum vero AD est, quod continetur sub AC , CB , cum DC ipsi CB sit æqualis: et DB est quadratum, quod fit ex BC . Ergo rectangulum sub AB , BC est æquale rectangulo sub AC , CB una cum quadrato, quod ex BC .

Si igitur recta linea utcumque secta fuerit; rectangulum sub totâ, et unâ ejus parte contentum æquale est rectangulo, quod sub partibus continetur, et ei quod a prædictâ parte fit quadrato. Q. E. D.

^a 46. primi.^a 31. primi.

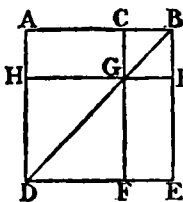
PROP. IV. THEOR.

[IV.]

Si recta linea secta fuerit utcumque; quadratum, quod fit a totâ, æquale erit et quadratis, quæ a partibus fiunt, et ei quod bis sub partibus continetur rectangulo.

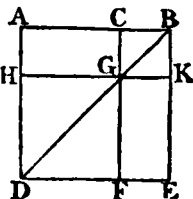
Recta enim linea AB secta fit utcumque in c . Dico quadratum, quod fit ex AB , æquale esse et quadratis ex AC , CB , et ei rectangulo, quod bis sub AC , CB continetur.

Describatur enim ex AB quadratum $ADKB$, jungaturque BD , et per c quidem alterutri ipsarum AD , BE parallela ^{a} ducatur CGF ; per G vero alterutri ipsarum AB , DE ducatur ^{b} parallela HK . Et quoniam CF est parallela ipsi AD , et in ipsas incidit BD : erit exterior angulus BGC interiori

^a 46. primi.^b 31. primi.

- * 29. primi. interiori et opposito $\angle ADB$ æqualis^k; angulus autem
 1 5. primi. $\angle ADB$ est æqualis^l angulo $\angle ABD$, quod
 et latus BA æquale est lateri AD .
 Quare $\angle CGB$ angulus angulo $\angle GBC$ est
 æqualis: ac propterea latus BC lateri
 2 6. primi. CG æquale^m. Sed et latus CB æ-
 3 34. primi. qualeⁿ est lateri GK , et CG ipsi BK ;
 ergo et GK est æquale KB ; et $\angle GKB$
 æquilaterum est. Dico insuper etiam
 rectangulum esse. Sed et rectangulum. Angulus enim
 $\angle KBC$ rectus est. Parallelogrammum autem, habens
 • Cor. 46. unum angulum rectum, est rectangulum^o. Rectangu-
 primi. lum igitur est $\angle GKB$; sed ostensum fuit et æquilaterum
 esse; quadratum igitur est $\angle GKB$, quod quidem fit ex
 BC . Eadem ratione et HG est quadratum, quod fit ex
 HC , hoc est, ex AC . Ergo HG , CK ex ipsis AC , CB
 4 43. primi. quadrata sunt. Et quoniam rectangulum $\angle AG$ est æquale^p
 rectangulo $\angle GE$; atque est AG , quod sub AC , CB con-
 tinetur, est enim GC ipsi CB æqualis; erit et GE æ-
 quale ei, quod continetur sub AC , CB ; quare rectan-
 gula AG , GE æqualia sunt ei, quod bis sub AC , CB
 continetur. Sunt autem et HG , CK quadrata ex AC ,
 CB . Quatuor igitur HG , CK , AG , GE , et quadratis
 ex AC , CB , et ei quod bis sub AC , CB continetur re-
 ctangulo, sunt æqualia; sed HG , CK , AG , GE com-
 ponunt totum $ADBE$ quadratum, quod fit ex AB .
 Quadratum igitur ex AB æquale est et quadratis ex
 AC , CB , et ei quod bis sub AC , CB continetur re-
 ctangulo. Quare si recta linea utcumque secta fuerit;
 quadratum, quod fit a totâ, æquale erit et quadratis,
 quæ a partibus fiunt, et ei rectangulo, quod bis sub
 partibus continetur. Q. E. D.

Cor. Ex hoc perspicue constat in quadratis spatiis pa-
 rallelogramma, quæ sunt circa diametrum, quadrata
 esse.



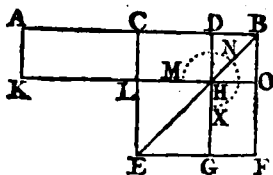
PROP.

PROP. V. THEOR.

IV.]

Si recta linea secta fuerit in partes æquales, et in partes inæquales; rectangulum sub inæqualibus totius partibus contentum una cum quadrato lineæ, quæ inter sectiones interjicitur, æquale est ei quod a dimidiâ fit quadrato.

Recta enim linea quævis AB secta fit in partes æquales ad punctum c , et in partes inæquales ad d . Dico rectangulum contentum sub AD , BD , una cum quadrato, quod fit ex CD , æquale esse ei quod ex CB fit quadrato. Describatur enim ex BC quadratum $CEFB$: ducaturque



BE; et per D quidem alterutri ipſarum CE, BF paral-
lela ducatur DHG; per H vero ducatur KLO paral-
lela alterutri ipſarum CB, EF; et rurfus per A duca-
tur alterutri CL, BO parallela AK. Et quoniam CH
complementum æquale eſt complemento HF, com-
mune apponatur DO; totum igitur CO toti DF eſt æ-
quale. Sed CO eſt æquale AL, quoniam et AC ipſi
CB; ergo et AL æquale eſt DF. Commune appona-
tur CH. Totum igitur AH ipſis FD, DL æquale erit.
Sed AH quidem eſt, quod ſub AD, DB continetur, et-
enim DH ipſi DB eſt æqualis; FD, DL vero eſt gno-
mon MNX. Igitur MNX æqualis eſt ei, quod ſub
AD, DB continetur; commune apponatur LG, æquale
ſcilicet quadrato, quod ex CD. Ergo MNX gnomon,
et LG, æqualia ſunt rectangulo, quod continetur ſub
AD, DB, et ei, quod fit ex CD, quadrato. Sed MNX
gnomon, et LG, ſunt totum quadratum CEFB, quod
quidem fit ex CB. Ergo rectangulum ſub AD, DB,
una cum quadrato, quod ex CD, æquale eſt ei quod ex
CB fit quadrato. Si igitur recta linea ſecta fuerit in
partes æquales, et in partes inæquales; rectangulum
ſub inæqualibus totius partibus contentum una cum
quadrato lineæ, quæ inter ſectiones interjicitur, æquale
eſt ei quod a dimidiâ fit quadrato. Q. E. D.

PROP.

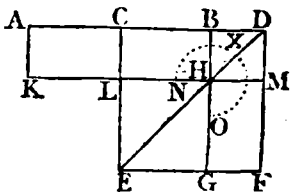
[VI.]

PROP. VI. THEOR.

Si recta linea bifariam secetur, atque ipsi in directum adjiciatur quædam recta linea; rectangulum sub totâ cum adjectâ, et adjectâ contentum, una cum quadrato dimidiæ, æquale est quadrato, quod ab eâ, quæ ex dimidiâ et adjectâ constat, tanquam ab unâ lineâ, describitur.

Recta enim linea quævis AB secetur bifariam in puncto C , et adjiciatur ipsi in directum BD . Dico rectangulum sub AD , DB , una cum quadrato ex BC , æquale esse ei quod fit ex CD quadrato.

* 46. primi. Describatur ^v enim ex CD quadratum $CEFD$, et jungatur DE ; per B alterutri ipsarum



* 31. primi. CE , DF parallela ^x ducatur BHG ; et per H ducatur KLM parallela ^x alterutri ipsarum AD , EF ; et adhuc per A alterutri CL , DM parallela ^x AK . Itaque quoniam AC est æqualis CB , erit et rectangulum AL re-

* 36. primi.

* 43. primi.

ctangulo CH æquale ^v; sed CH æquale ² est HF ; ergo et AL ipsi HF æquale erit. Commune apponatur CM . Totum igitur AM gnomoni NHO est æquale. Atque est AM , quod sub AD , DB continetur, etenim DM est ² æqualis DB . Ergo et gnomon NHO æqualis est rectangulo sub AD , DB . Rursus commune apponatur LG , æquale ² scilicet quadrato, quod ex CB . Rectangulum igitur sub AD , DB una cum quadrato, quod ex BC , æquale est gnomoni NHO et ipsi LG . Sed gnomon NHO , et LG componunt $CEFD$ quadratum, quod quidem fit ex CD . Ergo rectangulum sub AD , DB , una cum quadrato ex BC , æquale est ei quod fit ex CD quadrato. Si igitur recta linea secetur bifariam, adjiciaturque ipsi in directum quædam recta linea; rectangulum sub totâ cum adjectâ, et adjectâ contentum, una cum quadrato dimidiæ, æquale est quadrato, quod ab eâ, quæ ex dimidiâ et adjectâ constat, tanquam ab unâ lineâ, describitur. *Q. E. D.*

* Cor. 4.
hujus.

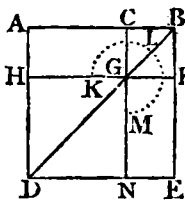
PROP.

PROP. VII. THEOR.

[VII.]

Si recta linea ulcunque secta fuerit; quæ a totâ, et unâ parte fiunt, utraque quadrata æqualia sunt et rectangulo, quod bis sub totâ ac dictâ parte continetur, et ei quod a reliquâ parte fit quadrato.

Recta enim linea quædam AB secta sit utcunque in puncto C . Dico quadrata ex AB , BC æqualia esse et rectangulo, quod bis sub AB , BC continetur, et ei, quod fit ex AC , quadrato. Describatur enim ex AB quadratum $ADBE$, et figura construat^r. Itaque quoniam AG rectangulum æquale est rectangulo GE , commune apponatur CF ; quare totum AF toti CE est æquale. Rectangula igitur AF , CE dupla sunt rectanguli AF . Sed AF , CE sunt KLM gnomon, et quadratum CF ; ergo KLM gnomon, et quadratum CF , dupla erunt rectanguli AF . Est autem id, quod bis sub AB , BC continetur, duplum ipsius AF ; etenim BF est æqualis BC . Gnomon igitur KLM , et quadratum CF , æqualia sunt ei, quod bis sub AB , BC continetur. Commune apponatur HN , quod est ex AC quadratum. Ergo gnomon KLM , et quadrata CF , HN æqualia sunt ei, quod bis sub AB , BC continetur, et quadrato ex AC . Sed gnomon KLM , et quadrata CF , HN componunt $ADBE$, et CF , quæ sunt ex AB , BC quadrata. Quadrata igitur ex AB , BC æqualia sunt rectangulo, quod bis sub AB , BC continetur, una cum eo, quod fit ex AC , quadrato. Ergo si recta linea utcunque secta fuerit; quæ a totâ et unâ parte sunt, utraque quadrata æqualia sunt rectangulo, quod bis sub totâ ac dictâ parte continetur, et ei quod a reliquâ parte fit quadrato. *Q. E. D.*

^b 46. primi,

^c 43. primi.

^d Cor. 4i
hujus.

* *Figura dicitur conftrui, cum in parallelogrammo duæ lineæ lateribus parallelæ, fecantes diametrum in uno puncto, efficiunt duo parallelogramma circa diametrum, et duo complementa. Similiter dupla figura dicitur conftrui, cum duæ res lateribus parallelæ, efficiunt quatuor parallelogramma circa diametrum, et quatuor complementa.*

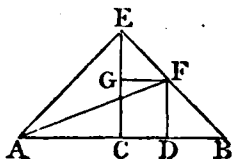
tinetur, una cum quadrato ex $A C$, æquale est ipsi STY gnomoni, et quadrato $X H$. Sed STY gnomon, et $X H$, totum sunt $A E F D$ quadratum, quod describitur ex $A D$. Rectangulum igitur quater sub $A B$, $B C$ contentum, una cum quadrato ex $A C$, æquale est ei, quod ex $A D$, hoc est ex $A B$, $B C$, tanquam ex unâ lineâ, describitur, quadrato. Ergo si recta linea utcunque secta fuerit; quod quater sub totâ, et unâ parte continetur rectangulum, una cum quadrato reliquæ partis, æquale est quadrato, quod ex totâ et dictâ parte, tanquam ex unâ lineâ, describitur. $Q. E. D.$

PROP. IX. THEOR.

[IX.]

Si recta linea in partes æquales, et in partes inæquales secta fuerit; quadrata, quæ ab inæqualibus totius partibus describuntur, dupla sunt et quadrati dimidiæ, et quadrati lineæ ejus, quæ inter sectiones interjicitur.

Recta enim linea quævis $A B$ secta sit in partes æquales ad c , et in partes inæquales ad D . Dico quadrata ex $A D$, $D B$ quadratorum ex $A C$, $C D$ dupla esse. Ducatur enim a puncto C ipsi $A B$ ad rectos angulos $C E$, et utrivis ipsarum $A C$, $C B$ æqualis ponatur; junganturque $E A$, $E B$.



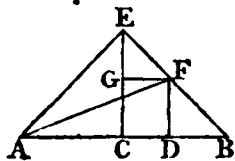
11. primi,

Ac per D quidem ipsi $C B$ parallela^m ducatur $D F$; per^m $31. primi$. F vero ipsi $A B$ parallela^m $F G$; et $A F$ ducatur. Itaque quoniam $A C$ est æqualis $C B$; erit^a et angulus $E A C$ ^a 5. primi. angulo $A E C$ æqualis. Et cum rectus sit angulus ad C , reliqui $A E C$, $E A C$ uni recto æquales^o erunt; et^o 3. Cor. 32. sunt æquales inter sese; utervis igitur ipsorum $A E C$, primi. $E A C$ recti est dimidium. Eâdem ratione, et recti dimidium est utervis ipsorum $C E B$, $E B C$. Quapropter et illi inter se sunt æquales, et totus angulus $A E B$ rectus est. Jam vero, cum in rectas parallelas, $G F$, $C B$ recta $E B$ incidat; angulus exterior $E F G$ interiori $F B D$ æqualis erit^p, cui etiam $F E G$ æqualis. Anguli igitur^p 29. primi. $E F G$, $F E G$ inter se æquales sunt^q, ac proinde in trian-^q Ax. 1.

gulo $G E F$ latera $G E$, $G F$ inter se sunt æqualia^r. Pari^r 6. primi. ratione cum in rectas parallelas $D F$, $C E$ recta $B E$ incidat; angulus exterior $B F D$ interiori $B E C$ æqualis erit, cui etiam angulus $F B D$ æqualis est. Anguli igitur $B F D$, $F B D$ sunt inter se æquales, ac proinde in triangulo $D F B$ latera $D F$, $D B$ sunt inter se æqualia^r.

qualia. Et quoniam AC est æqualis CE , erit et ex AC quadratum æquale quadrato ex CE . Quadrata igitur ex AC , CE dupla sunt quadrati ex AC ; quadratis autem ex

* 47. primi. AC , CE æquale[†] est quadratum ex EA , siquidem rectus est angulus ACE . Ergo quadratum ex EA quadrati ex AC est duplum. Rur-



lus quoniam EG æqualis est GF , et quadratum ex EG quadrato ex GF est æquale. Quadrata igitur ex EG et GF dupla sunt quadrati ex GF ; at quadratis ex EG , GF æquale[†] est quod ex EF quadratum. Ergo quadratum ex EF quadrati ex GF du-

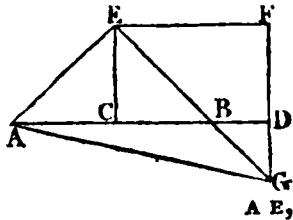
* 34. primi. plum erit. Æqualis[†] autem est GF ipsi CD ; quadratum igitur ex EF duplum est quadrati CD . Sed et quantum ex AE quadrati ex AC est duplum. Ergo quadrata ex AE , EF dupla sunt quadratorum ex AC , CD ; quadratis vero ex AE , EF æquale[†] est ex AF quadratum; quoniam angulus AEF rectus est; quadratum igitur ex AF quadratorum ex AC , CD est duplum. Sed quadrato ex AF æqualia sunt ex AD , DF quadrata; rectus enim est angulus, qui ad D . Ergo ex AD , DF quadrata dupla sunt quadratorum ex AC , CD . Est autem DF ipsi DB æqualis; quadrata igitur ex AD , DB quadratorum ex AC , CD dupla erunt. Quare si recta linea in partes æquales, et in partes inæquales secta fuerit; quæ ab inæqualibus totius partibus describuntur quadrata, dupla sunt et quadrati dimidiæ, et quadrati lineæ ejus, quæ inter sectiones interjicitur. Q. E. D.

[X.]

PROP. X. THEOR.

Si recta linea secetur bifariam, et ipsi in directum quævis recta linea adjiciatur; quæ a totâ cum adjectâ, et adjectâ sunt, utraque quadrata dupla sunt et quadrati dimidiæ, et quadrati, quod ab eâ, quæ ex dimidiâ et adjectâ constat, tanquam ab unâ lineâ, describitur.

Recta enim linea AB secetur bifariam in C , et ipsi in directum adjiciatur quævis recta linea BD . Dico quadrata ex AD , DB quadratorum ex AC , CD dupla esse. Ducatur enim a puncto C ipsi



* 11. primi. AB ad rectos[†] angulos CE , et utrique ipsarum AC , CB æqualis ponatur; junganturque

AE, EB ; et per E quidem ipsi AD parallela^a ducatur^a 31. primi.
 EF ; per D vero ducatur DF parallela^a ipsi CE . Et
 quoniam in parallelas EC, FD recta quædam linea EF
 incidit, anguli CEF, EFD æquales⁷ sunt duobus rectis. 29. primi.
 Anguli igitur FEB, EFD duobus rectis sunt minores.
 Quæ autem a minoribus, quam sunt duo recti, in in-
 finitum producantur, convenient inter se². Ergo EB ,² Ax. 12.
 FD productæ ad partes B, D convenient. Producantur,
 et convenient in puncto G ; et AG ducatur. Itaque
 quoniam AC est æqualis CE , et angulus AEC angulo
 BAC æqualis^a erit; atqui est rectus qui ad C ; uterque^a 5. primi.
 igitur ipsorum CAE, AEC est recti dimidium. Eadem
 ratione, et recti dimidium est uterque CEB, EBC .
 Quapropter et illi inter se sunt æquales, et totus ARB
 est rectus. Jam vero anguli GBD, EBC , cum sint ad
 verticem, sunt inter se æquales^b. Quare et anguli GBD ,^b 15. primi.
 BEC inter se æquales^c. Et præterea, cum in rectas^c Ax. 1.
 parallelas GD, EC recta GE incidat; anguli alterni
 BGD, BEC erunt inter se æquales^d. Quare angulus^d 29. primi.
 DBG angulo DGB æqualis^c. Ac proinde in triangulo
 DBG , latera BD, DG sunt inter se æqualia^c. Rursum^c 6. primi.
 cum in rectas parallelas BD, EF recta GE incidat; angulus
 exterior GBD interiori GEF æqualis erit. Idem autem
 GBD ipsi EGD æqualis. Quare anguli GEF, EGF inter
 se sunt æquales, et in triangulo FGE , latera FG, FE inter
 se æqualia. Et cum EC sit æqualis CA ; et quadratum
 ex EC æquale est ei, quod ex CA sit, quadrato. Ergo
 quadrata ex EC, CA dupla sunt quadrati ex CA . Qua-
 dratis autem ex EC, CA æquale^f est quadratum ex EA ; 47. primi.
 quadratum igitur ex EA quadrati ex AC est duplum.
 Rursum quoniam GF est æqualis FE , æquale est et ex
 GF quadratum quadrato ex FE . Quadrata igitur ex
 GF, FE quadrati ex EF sunt dupla. At quadratis ex
 GF, FE æquale est^f quod ex EG quadratum; ergo
 quadratum ex EG duplum est quadrati ex EF ; æqualis
 autem est EF ipsi CD ; quadratum igitur ex EG qua-
 drati ex CD duplum erit. Sed ostensum est quadratum
 ex EA duplum quadrati ex AC . Ergo ex AE, EG
 quadrata quadratorum ex AC, CD sunt dupla. Qua-
 dratis vero ex AE, EG æquale est^f quod ex AG qua-
 dratum; quadratum igitur ex AG duplum est quadra-
 torum ex AC, CD . At quadrato ex AG æqualia^f sunt
 ex AD, DG quadrata; ergo quadrata ex AD, DG sunt

dupla quadratorum ex AC , CD ; sed DG est æqualis DB ; quadrata igitur ex AD , DB quadratorum ex AC , CD sunt dupla. Ergo si recta linea bifariam secetur, et ipsi in directum quædam recta linea adjiciatur; quæ a totâ cum adjunctâ, et adjunctâ fiunt, utraque quadrata dupla sunt et quadrati dimidiæ, et quadrati quod ab eâ, quæ ex dimidiâ et adjunctâ constiat, tanquam ab unâ lineâ, describitur. *Q. E. D.*

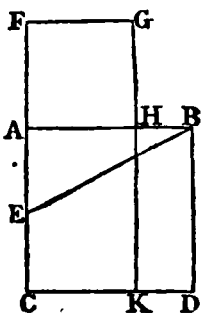
[XI.]

PROP. XI. PROBL.

Datam rectam lineam secare, ita ut quod sub totâ, et alterâ parte continetur rectangulum æquale sit ei, quod a reliquâ parte fit, quadrato.

Sit data recta linea AB . Oportet ipsam AB ita secare, ut quod sub totâ, et alterâ parte continetur rectangulum æquale sit ei, quod a reliquâ parte fit, quadrato.

- ¹ 46. primi. Describatur igitur ex AB quadratum $ABCD$, seceturque AC bifariam in E , et BE ducatur; deinde, productâ CA in F , ponatur ipsi BE æqualis EF ; describaturque ex AF quadratum $FGHA$, et GH ad K producat. Dico AB sectam esse in H , ita ut sub AB , BH rectangulum æquale sit quadrato ex AH . Quoniam enim recta linea AC bifariam secatur in E , adjiciturque ipsi in directum AF ; rectangulum sub CF , FA , una cum quadrato ex AE , æquale erit quadrato ex EF ; sed EF est æqualis EB ; rectangulum igitur sub CF , FA , una cum quadrato ex AE , æquale est ei, quod fit ex EB , quadrato. Quadrato autem ex EB æqualia sunt quadrata ex BA , AE ; etenim angulus ad A rectus est; ergo rectangulum sub CF , FA , una cum quadrato ex AE , æquale est quadratis ex BA , AE . Commune auferatur quod ex AE fit quadratum. Reliquum igitur rectangulum sub CF , FA æquale est quadrato ex AB . Est autem rectangulum FK sub CF , FA ; siquidem AF est æqualis FG : quadratum autem ex AB est ipsum AD . Rectangulum igitur FK æquale est quadrato AD . Commune auferatur AK . Ergo reliquum FH reliquo HD est æquale. Atqui est HD rectangulum sub AB , BH , cum AB sit æqualis BD , et FH est quadratum ex AH .
Rectan-



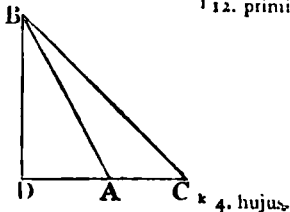
Rectangulum igitur sub AB , BH quadrato ex AH æquale erit. Quare data recta linea AB secta est in H , ita ut sub AB , BH rectangulum quadrato ex AH sit æquale. *Q. E. F.*

PROP. XII. THEOR.

[XII.]

In obtusangulis triangulis, quod a latere obtusum angulum subtendente fit quadratum, majus est quam quadrata, quæ fiunt a lateribus obtusum angulum continentibus, rectangulo contento bis sub uno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod scilicet protractum perpendicularis cadit, et lineâ assumptâ exterius a perpendiculari ad angulum obtusum.

Sit obtusangulum triangulum ABC , obtusum angulum habens BAC ; et ducatur ¹a puncto B ad CA protractam perpendicularis BD . Dico quadratum ex BC majus esse, quam quadrata ex BA , AC , rectangulo quod bis sub CA , AD continetur. Quoniam enim recta linea CD secta est utcumque in puncto A ; erit quadratum ex CD æquale^k et quadratis ex CA , AD , et ei, quod bis sub CA , AD continetur rectangulo. Commune apponatur ex DB quadratum. Quadrata igitur ex CD , DB æqualia sunt et quadratis ex CA , AD , DB , et rectangulo quod bis sub CA , AD continetur. Sed quadratis ex CD , DB æquale est ¹quadratum ex CB , rectus enim est angulus ad D , ¹ 47. primi. cum fit BD perpendicularis. Quadratis vero ex AD , DB æquale est ¹quadratum ex AB . Quadratum igitur ex CB , æquale est et quadratis ex CA , AB , et rectangulo bis sub CA , AD contento. Ergo quadratum ex CB majus est quam quadrata ex CA , AB , rectangulo quod bis sub CA , AD continetur. In obtusangulis igitur triangulis, quadratum, quod fit a latere obtusum angulum subtendente, majus est quam quadrata, quæ fiunt a lateribus obtusum angulum continentibus, rectangulo contento bis sub uno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod protractum perpendicularis cadit, et lineâ assumptâ exterius a perpendiculari ad angulum obtusum. *Q. E. D.*



[XIII.]

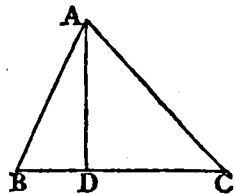
PROP. XIII. THEOR.

In acutangulis triangulis, quod a latere acutum angulum subtendente fit quadratum, minus est quam quadrata, quæ fiunt lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo contento bis sub uno laterum, quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, et lineâ a perpendiculari intus assumptâ ad angulum acutum.

Sit acutangulum triangulum ABC , acutum habens angulum ad B ; et ducatur a pun-

^m 12. primi. to A ^m ad BC perpendicularis AD .

Dico quadratum, quod fit ex AC , minus esse quam quadrata, quæ ex CB , BA fiunt, rectangulo, quod bis sub CB , BD continetur. Quoniam enim recta linea CB secta est ut-



^p 7. hujus. CB , BD æqualia ^a et rectangulo, quod bis sub CB , BD continetur, et quadrato ex DC . Commune apponatur ex AD quadratum. Quadrata igitur ex CB , BD , DA æqualia sunt et rectangulo bis sub CB , BD contento, et quadratis ex AD , DC . Sed quadratis ex

^o 47. primi. BD , DA æquale est ^o ex AB quadratum, rectus enim angulus est qui ad D ; quadratis vero ex AD , DC æquale ^o est quadratum ex AC ; quadrata igitur ex CB , BA sunt æqualia quadrato ex AC , et ei, quod bis sub CB , BD continetur, rectangulo. Quare solum quadratum ex AC minus est quam quadrata ex CB , BA , rectangulo, quod bis sub CB , BD continetur. In acutangulis igitur triangulis, quadratum, quod a latere acutum angulum subtendente fit, minus est quam quadrata, quæ fiunt a lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo contento bis sub uno laterum, quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, et lineâ a perpendiculari intus assumptâ ad angulum acutum.
Q. E. D.

PROP.

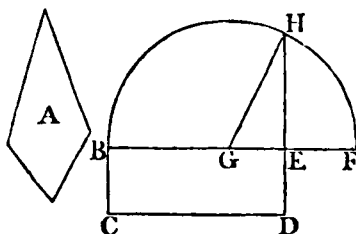
PROP. XIV. PROBL.

[XIV.]

Dato rectilineo æquale quadratum constituere.

Sit datum rectilineum A. Oportet ipsi A rectilineo æ-

quale quadratum con-
stituere. Constituatur
rectilineo A æquale
parallelogrammum re-
ctangulum BCDE. Si
igitur BE est æqualis
ED, factum jam erit
quod proponebatur; et-
enim rectilineo A æ-
quale quadratum con-



P 45. primi.

stitutum est BD. Si BE, ED sint inæquales, produ-
catur earum alterutra ad F, ponaturque ipsi ED æ-
qualis EF. Deinde secta FB bifariam^{10. primi.} in G; centro
quidem G, intervallo autem unius ipsarum GB, GF,
semicirculus describatur BHF; producaturque DE in
H, et GH ducatur. Quoniam igitur recta linea BF
secta est in partes æquales ad G, inæquales ad E; erit
rectangulum sub BE, EF, una cum quadrato, quod sit
ex EG¹, æquale quadrato ex GF. Est autem GF æ-
qualis GH; rectangulum igitur sub BE, EF, una cum
quadrato ex GE, æquale est quadrato ex GH. Sed
quadrato ex GH æqualia^{5. hujus.} sunt ex HE, EG quadrata.^{47. primi.}
Ergo rectangulum sub BE, EF, una cum quadrato
ex EG, æquale est quadratis ex HE, EG. Commune
auferatur ex EG quadratum. Reliquum igitur rectan-
gulum sub BE, EF est æquale quadrato ex EH. Sed
rectangulum sub BE, EF est ipsum BD parallelogram-
mum, quoniam EF est æqualis ED; ergo BD parallelo-
grammum quadrato ex EH est æquale. Parallelogram-
mum autem BD est æquale rectilineo A; rectilineum
igitur A quadrato ex EH descripto æquale erit. Quare
dato rectilineo A æquale quadratum constitutum est,
quod videlicet ex ipsa EH describitur. Q. E. F.



EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER TERTIUS.

DEFINITIONES.

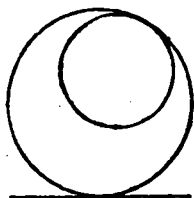
DEFINITIO I.

[II.]

RECTA linea circulum contingere dicitur, quæ circumferentiam circuli in occurſu non ſecat.

II.

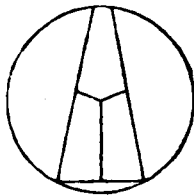
Circuli contingere ſe dicuntur, quorum circumferentiæ in occurſu ſe mutuo non ſecant.



[III.]

III.

In circulo æqualiter diſtare a centro rectæ lineæ dicuntur, quando a centro ad ipſas perpendiculares ductæ ſunt æquales.



[IV.]

IV.

Magis autem diſtare a centro dicitur ea, in quam major perpendicularis cadit.

[V.]

V.

[VI.]

V.

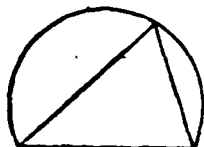
Segmentum circuli est figura, quæ circumferentiâ circulari et lineâ rectâ continetur. Quæ quidem recta basis dicitur segmenti.



[VII.]

VI.

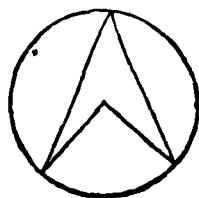
Segmenti autem angulus est, qui basi, et circumferentiâ circulari comprehenditur.



[VIII.]

VII.

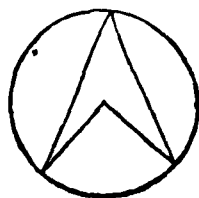
In segmento est angulus, lineis rectis comprehensus a puncto quovis in circumferentiâ segmenti utcumque sumpto ad terminos basis ductis.



[IX.]

VIII.

Quando autem continentes angulum rectæ lineæ intercipiunt circumferentiam; angulus in illâ consistere dicitur.



[X.]

IX.

Sector circuli est, quando angulus ad centrum confiterit, figura contenta rectis lineis angulum comprehendentibus, et circumferentiâ ipsis interceptâ.

[XI.]

X.

Similia circulorum segmenta sunt, quæ angulos suscipiunt æquales, vel in quibus anguli æquales consistunt.



DEF. I.

A X I O M A.

Æquales circuli sunt, quorum diametri sunt æquales, vel quorum quæ ex centris sunt æquales.

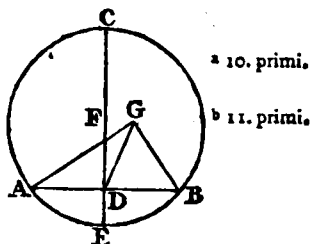
PROPO-

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

[I.]

Dati circuli centrum invenire.

Sit datus circulus ABC ; oportet circuli ABC centrum invenire. Ducatur in ipso recta linea AB utcumque; quæ in puncto D bifariam ^a secetur. A puncto autem D ipsi AB ad rectos angulos ^b ducta DC in E producatur; et secetur CE bifariam ^a in F . Dico punctum F circuli ABC centrum esse. Non enim; sed si fieri potest, sit G centrum, et GA , GD , GB ducantur. Itaque quoniam DA est æqualis DB , communis autem DG , erunt duæ AD , DG duabus DB , GD æquales, altera alteri: et basis GA æqualis ^c est basi GB ; sunt enim ex centro G . Angulus ^c Def. 15. igitur ADG angulo GDB est ^d æqualis. Cum autem ^d 8. primi. recta linea super rectam lineam insistens angulos, qui deinceps sunt, æquales inter se fecerit, ^e rectus est uter- ^e Def. 10. que æqualium angulorum. Ergo angulus GDB est rectus; sed et rectus FDB ; æqualis igitur est angulus FDB angulo GDB , major minori; quod fieri non potest. Quare G non est circuli ABC centrum. Similiter ostendamus neque aliud esse, præter ipsum F . Ergo F centrum est circuli ABC . *Q. E. F.*



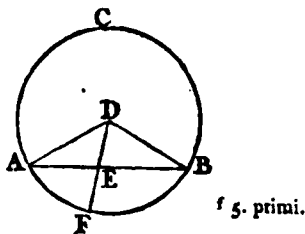
Cor. Si in circulo quævis recta linea lineam quandam bifariam et ad angulos rectos secet, in secante erit centrum circuli.

PROP. II. THEOR.

[II.]

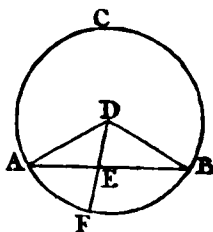
Si in circumferentiâ circuli duo quævis puncta sumantur, quæ ipsa conjungit recta linea, intra circulum cadet.

Sit circulus ABC ; in circumferentiâ ipsius sumantur duo quævis puncta A , B . Dico rectam lineam, quæ a puncto A ad B ducitur, intra circulum cadere. Sumatur enim in recta AB punctum quodvis E ; jungantur DA , DE , DB ; et in DE , si opus sit, producta, capiatur DF ipsi DA vel DB æqualis. Quoniam DA est æqualis DB , erit ^f angulus DAB æqualis angulo DBA ;



et

et quoniam trianguli DAE latus AE producitur, erit
 16. primi. ⁸ angulus DEB angulo DAE major;
 angulus autem DAE æqualis est
 angulo DBE , ergo DEB angulus
 angulo DBE est major. Sed ma-
 jori angulo majus latus subtenditur;
 major igitur est DB ipsa DE . Quare
 et DF , quæ ipsi DB sumpta est æ-
 qualis, major est quam DE . Pun-
 ctum igitur E punctis D, F necessa-
 rio interjacet. Sed propter æquales DB, DF punctum F
 ad ipsam erit circuli circumferentiam. Punctum igitur
 E necesse est intus cadat. Similiter de alio omni pun-
 cto rectæ AB inter ipsa A, B ostendi potest, intra circum-
 ferentiam esse. Si igitur in circumferentiâ &c. *Q. E. D.*



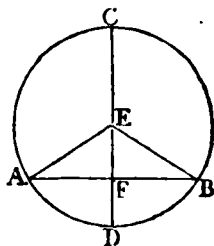
Cor. Hinc si recta circulum tangit, in unico puncto
 eum tangit.

[III.]

PROP. III. THEOR.

*Si in circulo recta linea, per centrum ducta, rectam lineam
 quandam non ductam per centrum bifariam secet, et ad
 angulos rectos ipsam secabit; quod si ad angulos rectos
 ipsam secet, et bifariam secabit.*

Sit circulus ABC ; et in ipso recta linea per centrum
 ducta, CD , rectam lineam quandam,
 AB , non ductam per centrum bifa-
 riam secet in puncto F . Dico ad
 angulos rectos ipsam secare. Su-
 1. hujus. matur enim circuli ABC centrum ^b,
 quod sit E ; et EA, EB jungantur.
 Quoniam igitur AF est æqualis FB ,
 communis autem FE , duæ AF, FE
 duabus BF, FE æquales sunt; et
 basis EA basi EB est æqualis. Ergo



8. primi. et angulus AFE angulo BFE æqualis ¹ erit. Cum au-
 tem recta linea super rectam insitens angulos, qui dein-
 cept sunt, æquales inter se fecerit, rectus est ^k uterque
^k Def. 10. æqualium angulorum; uterque igitur AFE, BFE est
 primi. rectus. Quare recta linea CD per centrum ducta rectam
 lineam AB non ductam per centrum bifariam secans, et
 ad rectos angulos, dico et bifariam ipsam secare, hoc est,

A F

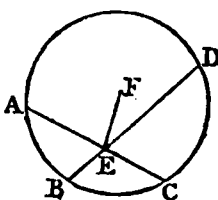
AF ipsi FB æqualem esse. Iisdem enim constructis, quoniam EA , quæ ex centro, est æqualis EB , et angulus EAF angulo EBF æqualis erit; est autem et AFE 5. primi. rectus æqualis recto BFE ; duo igitur triangula EAF , EBF duos angulos duobus angulis æquales habent; unumque latus uni lateri æquale, EF scilicet utrisque commune, quod uni angulorum æqualium subtenditur. Ergo et reliqua latera reliquis lateribus æqualia ^{ha-} 26. primi. bebunt; atque erit AF ipsi FB æqualis. Si igitur in circulo recta linea, per centrum ducta, rectam lineam quandam non ductam per centrum bifariam secet, et ad angulos rectos ipsam secabit; quod si ipsam secet ad rectos angulos, et bifariam secabit. *Q. E. D.*

PROP. IV. THEOR.

[IV.]

Si in circulo duæ rectæ lineæ se invicem secent, non ductæ per centrum; sese bifariam non secabunt.

Sit circulus $ABCD$; et in ipso duæ rectæ lineæ AC , BD se invicem secent in puncto E , non ductæ per centrum. Dico eas sese bifariam non secare. Si enim fieri potest, secent sese bifariam, ita ut AE sit æqualis EC , et BE ipsi ED ; sumaturque^a centrum $ABCD$ circuli, quod sit F ; et EF jungatur.

^a 1. hujus.

Quoniam igitur recta linea FE per centrum ducta rectam lineam quandam AC non ductam per centrum bifariam secat, et ad rectos angulos ipsam secabit^o; quare rectus est FEA angulus. Rursus quoniam recta linea FE rectam lineam quandam BD non ductam per centrum bifariam secat, et ad angulos rectos ipsam^o secabit; rectus igitur angulus est FEB . Ostensus autem est rectus et FEA . Ergo FEA angulus ipsi FEB æqualis erit, minor majori; quod fieri non potest. Non igitur AC , BD sese bifariam secant. Quare si in circulo duæ rectæ lineæ se invicem secent, non ductæ per centrum; sese bifariam non secabunt. *Q. E. D.*

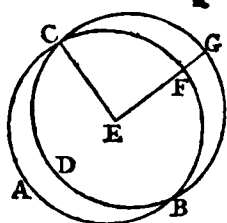
PROP.

[V.]

PROP. V. THEOR.

Si duo circuli se invicem secant, non erit ipsorum idem centrum.

Duo enim circuli ABC , CDG se invicem secant in puncto c . Dico ipsorum idem centrum non esse. Si enim fieri potest, sit centrum E ; jungaturque EC ; et sumatur in circumferentiâ CGD punctum aliquod G , quod non sit circumferentiis utrisque commune. Juncta EG circumferentiâ ACB in F occurrat. Quoniam E centrum est circuli ABC , erit CE ipsi EF æqualis. Rursus quoniam E centrum est CDG circuli, æqualis est CE ipsi EG . Sed ostensa est CE æqualis EF ; ergo EF ipsi EG æqualis erit, minor majori; quod fieri non potest. Non igitur punctum E centrum est circulorum ABC , CDG . Quare si duo circuli se invicem secant, non erit ipsorum idem centrum. *Q. E. D.*

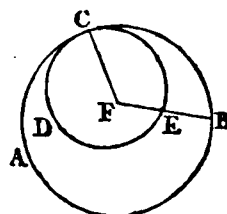


[VI.]

PROP. VI. THEOR.

Si duo circuli sese intra contingant, ipsorum idem centrum non erit.

Duo enim circuli ABC , CDE contingant sese intra in puncto c . Dico ipsorum non esse idem centrum. Si enim fieri potest, sit F ; jungaturque FC , et sumatur in circumferentiâ ABC punctum aliquod B , quod non sit circumferentiis utrisque commune. Juncta FB circumferentiâ CED in E occurrat. Quoniam igitur F centrum est circuli ABC , æqualis est CF ipsi FB . Rursus quoniam F centrum est circuli CDE , erit CF æqualis FE . Ostensa autem est CF æqualis FB ; ergo et FE ipsi FB æqualis, minor majori; quod fieri non potest. Non igitur F punctum centrum est circulorum ABC , CDE . Quare si duo circuli sese intra contingant, ipsorum idem centrum non erit. *Q. E. D.*



PROP.

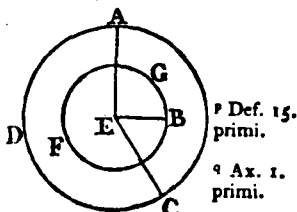
SCHOLION.*

Melius esset, nostro saltem iudicio, si pro duabus propositionibus, quintâ et sextâ, hæc una substitueretur, quæ utramque complexa est.

PROPOSITIO.*

Circuli, eodem centro inæqualibus intervallis descripti, sibi mutuo nullibi occurrunt.

Centro quodam communi E, intervallis inæqualibus EA, EB descripti sint circuli ACD, FGB. Dico circulos illos sibi mutuo non occurrere. Occurant enim, si fieri potest, in c. Jungatur EC. Recta EA ipsi EC æqualis erit^p. Sed eidem EC æqualis erit EB^p. Æquales igitur EA, EB^q. Quod est absurdum, cum ponantur inæquales. Circuli igitur ACD, FGB, sibi mutuo in puncto c non occurrunt. Pari ratione, nec in alio quovis puncto. Nullibi igitur. Q. E. D.



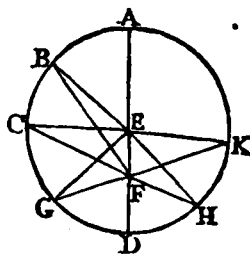
PROP. VII. THEOR.

[VII.]

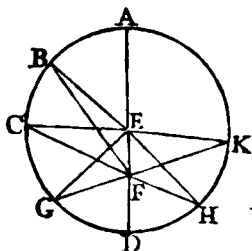
Si in circuli diametro aliquod punctum sumatur, quod non sit centrum circuli, et ab eo in circulum cadant quævis rectæ lineæ; maxima quidem erit in quâ centrum: minima vero reliqua: aliarum autem, propinquior ei, quæ per centrum transit, semper remotiore major est: at duæ tantum æquales ab eodem puncto in circulum cadent ad utrasque partes minimæ.

Sit circulus ABCD, cujus diameter AD, et in ipsâ AD fumatur aliquod punctum F, quod non sit centrum circuli. Sit autem circuli centrum E: et a puncto F in circulum ABCD cadant quædam rectæ lineæ FB, FC, FG. Dico FA maximam esse, et FD minimam: aliarum vero, FB quidem majorem quam FC, et FC majorem quam FG. Jungantur enim BE, CE, GE.

Et quoniam omnis trianguli duo latera reliquo sunt^{20. primi.} majora;



- majora; erunt BE , EF majores quam BF . Est autem AE æqualis BE ; ergo BE , EF ipsi AF sunt æquales; major igitur est AF quam FB . Rursus quoniam BE est æqualis CE , communis autem FE ; duæ BE , EF duabus CE , EF æquales sunt: sed BEF angulus major est angulo CEF : basis igitur BF basi FC est major. Eadem ratione, et CF major est quam FG . Rursus
20. primi. quoniam GF , FE majores sunt quam GE , æqualis autem GE ipsi ED ; erunt GF , FE majores quam ED ; communis auferatur FE ; ergo reliqua GF major est quam reliqua FD . Maxima igitur est FA , et FD minima: major vero BF quam FC , et FC quam FG major. Dico et a puncto F duas tantum rectas lineas æquales cadere in circulum $ABCD$ ad utraq; partes minimæ FD .
23. primi. Constituatur enim ad lineam EF atque ad datum in eâ punctum E , angulo GEF æqualis angulus FEH : et FH jungatur. Quoniam igitur GE est æqualis EH , communis autem EF ; duæ GE , EF duabus HE , EF æquales sunt: et angulus GEF est æqualis angulo HEF ; basis igitur FG basi FH æqualis erit. Dico a puncto F in circulum non cadere aliam ipsi FG æqualem. Si enim fieri potest, cadat FK ; et quoniam FK est æqualis FG , estque ipsi FG æqualis FH , erit et FK ipsi FH æqualis, videlicet propinquior ei, quæ per centrum transit, æqualis remotiori, quod fieri non potest. Si igitur in circuli diametro aliquod punctum sumatur, quod non sit centrum circuli, &c. Q. E. D.

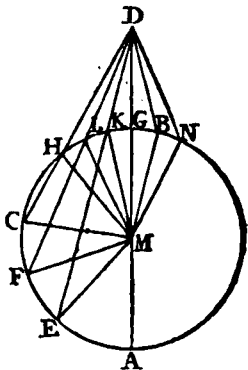


PROP. VIII. THEOR.

[VIII.]

Si extra circulum aliquod punctum sumatur, atque ab eo ad circulum ducantur quædam rectæ lineæ, quarum una per centrum transeat, aliæ vero utcunque: earum quidem, quæ in cavam circumferentiam cadunt, maxima est, quæ per centrum transit; aliarum autem, propinquior ei, quæ per centrum, semper remotiore major est: at earum, quæ in convexam circumferentiam cadunt, minima est, quæ inter punctum et diametrum interjicitur; aliarum vero, quæ propinquior minimæ, semper remotiore est minor: duæ autem tantum æquales a puncto in circulum cadunt ad utrasque partes minimæ.

Sit circulus ABC , et extra circulum sumatur aliquod

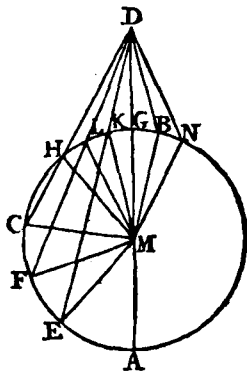


punctum D : ab eo autem in circulum ducantur rectæ lineæ quædam DA , DE , DF , DC : sitque DA per centrum. Dico earum quidem, quæ in cavam AFC circumferentiam cadunt, maximam esse DA , quæ per centrum transit; et minimam, quæ inter punctum D et diametrum AG interjicitur, videlicet DG : majorem autem DE quam DF ; et DF majorem quam DC : earum vero, quæ in convexam circumferentiam HLK cadunt, quæ propinquior est minimæ DG , semper remotiore esse minorem; hoc est, DK minorem quam DL , et DL minorem quam DH . Sumatur enim centrum circuli ABC , γ i. hujus. quod sit M , et jungantur ME , MF , MC , MH , ML , MK . Et quoniam AM est æqualis ME , communis apponatur MD ; ergo AD est æqualis ipsis EM , MD ; sed EM , MD sunt majores* quam ED : ergo et AD quam ED est major. γ 20. primi. Rursum quoniam æqualis est ME ipsi MF , communis apponatur MD ; erunt EM , MD ipsis MF , MD æquales; at angulus EMD major est angulo FMD ; basis igitur ED basi FD major* erit. Similiter demonstrabimus, et FD majorem esse quam CD . Ergo maxima est DA ; major autem DE quam DF , et DF quam DC major. Præterea quoniam MK , KD sunt majores* quam MD , et MK est æqualis

^b Ax. 4. æqualis $\overset{a}{M}G$; erit reliqua KD quam reliqua ^b $G D$ major:
^{primi.} quare $G D$ minor quam $K D$.

Et quoniam trianguli $M L D$ in uno latere $M D$, duæ rectæ lineæ $M K, K D$ intra constituuntur; erunt

^c 21. primi. $M K, K D$ minores ipsis $M L, L D$, quarum $M K$ est æqualis $M L$; reliqua igitur $D K$ minor est quam reliqua $D L$. Similiter ostendemus, et $D L$ quam $D H$ minorem esse. Ergo $D G$ minima est: minor vero $D K$ quam $D L$, et $D L$ minor quam $D H$. Dico etiam duas tantum æquales a puncto D in circulum cadere ad utraq; minimæ partes. Constituatur ad rectam lineam $M D$,



^d 23. primi. ad datumque in eâ punctum M , angulo $K M D$ æqualis ^d angulus $D M B$, et $D B$ jungatur. Itaque quoniam $M K$ est æqualis $M B$, communis autem $M D$; duæ $K M, M D$ duabus $B M, M D$ æquales sunt, altera alteri; et angulus $K M D$ æqualis angulo $B M D$; basis igitur $D K$ basi $D B$ est æ-

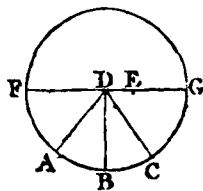
^e 4. primi. qualis ^e. Dico a puncto D aliam ipsi $D K$ æqualem in circulum non cadere. Si enim fieri potest, cadat $D N$: et quoniam $D K$ est æqualis $D N$, et $D K$ ipsi $D B$ est æqualis; erit et $D B$ æqualis $D N$, propinquior scilicet minimæ æqualis remotiori, quod fieri non posse ostensum est. Si igitur extra circulum aliquod punctum sumatur, &c. $Q. E. D.$

[IX.]

PROP. IX. THEOR.

Si intra circulum sumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant plures quam duæ rectæ lineæ æquales; punctum, quod sumitur, circuli centrum erit.

Sumatur enim intra circulum $A B C$ punctum aliquod D : atque a puncto D in circulum $A B C$ cadant plures quam duæ rectæ lineæ æquales $D A, D B, D C$. Dico punctum D , quod sumitur, circuli $A B C$ esse centrum. Non enim; sed si fieri potest, sit E centrum, et juncta $D E$ in F, G producat; ergo $F G$ diameter est $A B C$ circuli. Itaque quoniam in $F G$ diametro circuli $A B C$ sumptum est aliquod



aliquod punctum D , quod non est centrum circuli, maxima quidem erit DG , major^f autem DC quam DB , ^f 7. hujus. et DB quam DA ; sed et æquales^g DC , DB , DA ; ^g ex hyp. quod fieri non potest; non igitur E centrum est circuli ABC . Similiter ostendemus neque aliud punctum centrum esse, præter ipsum D . Ergo D circuli BC centrum erit. *Q. E. D.*

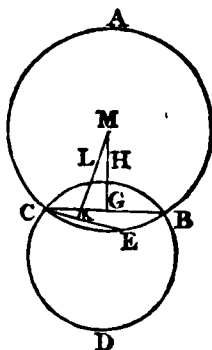
PROP. X. THEOR.

[X.]

Circulus circulum in pluribus, quam duobus punctis non secat.

Nam si fieri potest circuli duo ABC , DBC tribus punctis B , C , et E , se mutuo secant.

Jungantur CB , CE . Media dividatur recta CB in puncto G , et a puncto G ad perpendicularum educatur recta GH . Media etiam dividatur recta CE in puncto K , et a puncto K ad perpendicularum educatur KL . Rectæ GH , KL , duabus CB , CE non parallelis ad perpendicularum ductæ, sibi mutuo non erunt parallelæ. Occurrent igitur. Occursus esto M . Jam cum puncta C , B ad peripheriam sint circuli ABC , recta CB intra circulum erit^h. Recta autem



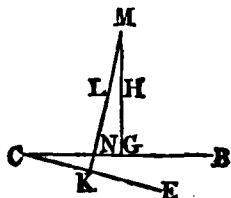
^h 2. hujus. mediam dividit, et ad rectosⁱ. Centrum igitur circuli ABC erit ad rectam GH ^k. Pari ratione centrum circuli ABC erit ad rectam KL , quæ rectam CE circulo inscriptam mediam dividit, et ad rectos. Centrum igitur circuli ABC commune est rectarum GH , KL punctum. Sed harum rectarum solum est commune M , punctum utique concursus. Punctum igitur M centrum est circuli ABC . Sed simili modo ostendemus punctum illud idem M circuli DBC centrum esse. Nimirum ad cujus peripheriam, æque ac alterius ABC , sunt puncta B , C , E ^l. ^l ex hyp. Circulorum igitur ABC , DBC , se mutuo secantium idem est centrum M . Quod est absurdum^m. Duoⁿ 5. hujus. igitur circuli ABC , DBC in punctis tribus B , C , E sibi mutuo non occurrunt. Simili ratione nec in aliis tribus. Circulus igitur circulum &c. *Q. E. D.*

ⁱ Per constructionem.
^k Cor. 1. hujus.

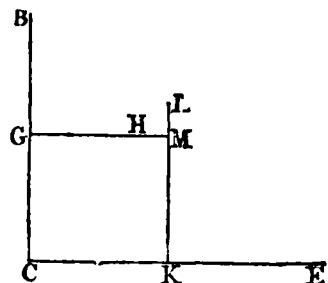
SCHOLION. *

Illud autem quod assumpsimus, duas rectas non esse parallelas, si duabus aliis ad perpendicularum sint non parallelis, sic ostendimus.

Duabus rectis CB , CE non parallelis ad perpendicularum sint duæ GH , KL . Dico duas GH , KL non esse parallelas. Recta enim LK , quæ duarum CB , CE in C occurrentium alteri CE ad perpendicularum est^a, alteri CB vel occurret, vel ei parallela erit. Occurrat primum. Occursus sit N . In triangulo igitur CNK , angulus ad K rectus est. Duo igitur CNK , KCN simul sumpti recto sunt æquales^b. Angulus igitur CNK , et illi æqualis LNG , recto minor. Sed angulus ad G rectus^c. Duo igitur HGN , LNG simul sumpti duobus rectis sunt minores. Rectæ igitur GH , NL , seu KL , productæ inter se convenient^d. Non sunt igitur parallelæ.



CAS. 2. Sed parallela sit KL ipsi CB . Si eadem KL parallela sit ipsi GH , erunt GH , CB inter se parallelæ^e. Quod est absurdum. Cum recta GH illam CB in puncto G ad perpendicularum infingat^f. Non igitur sunt parallelæ GH , KL . Q. E. D.



Cor. * Rectis KL , GH , occursum usque in M productis, angulus ad M angulo ad C æqualis erit. Nam in casu primo, triangulorum MGN , CKN , anguli ad G , K æquales sunt. Uterque enim rectus. Sed anguli MNG , CNK æquales, ad verticem scilicet. Reliquus igitur NMG reliquo NCK æqualis.

In casu secundo, quoniam LK , CB sunt parallelæ, propter angulum ad K rectum^g, rectus erit angulus ad C ^h. Sed angulus ad G rectusⁱ. Rectæ igitur GM , CK sunt inter

^a ex hyp.^b 32. primi.^c ex hyp.^d 30. primi.^e ex hyp.^f 29. primi.^g ex hyp.^h ex hyp.ⁱ ex hyp.

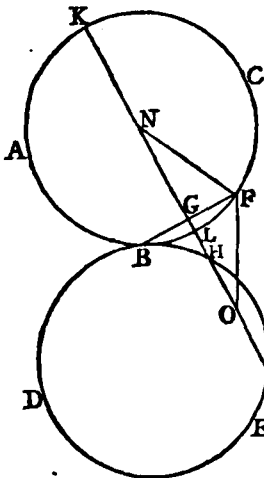
inter se parallelæ γ . Figura igitur $CMKC$ est paral- γ 28. primi.
lelogrammum. Anguli igitur oppositi C et M sunt inter
se æquales ^{2} , et eorum uterque rectus est. ^{2} 34. primi.

PROP. XI. THEOR.

[XIII.]

Circulus circulum non contingit in pluribus punctis quam uno, five intus five extra contingat.

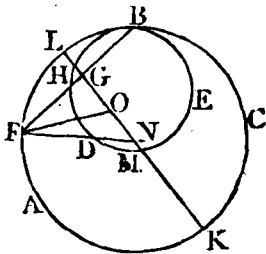
Circuli duo ABC , DBE puncto B se mutuo contingant. Dico in alio præter B puncto sibi mutuo non occurrere. Nam si fieri potest, in alio puncto F occurrant. Juncta BF , media dividatur in puncto G ; rectaque GK ad perpendicularum educta peripheriæ circuli ABC in punctis K , L , circuli autem DBE in H , M occurrat. Jam cum puncta B , F ad peripheriam sint circuli ABC , recta BF intra circulum cadet ^{a} , et ad rectam GK erit centrum circuli ABC ^{b} . Simili modo ostendetur centrum circuli DBE esse ad rectam GK . Media igitur dividatur recta LK puncto N , rectaque HM puncto O . Erit N centrum circuli ABC , et O centrum circuli DBE . Jungantur FN , FO . Circuli ABC , DBE vel extra, vel intus, se mutuo contingunt. Contingant extra primum.

 ^{a} 2. hujus. ^{b} Cor. 1. hujus.

CAS. I. Jam cum N centrum sit circuli ABC , erunt NF , NL inter se æquales. Et cum O centrum sit circuli DBE , erunt OH , OF inter se æquales. Duæ igitur FN , FO simul sumptæ duabus NL , OH simul sumptis sunt æquales. Duæ autem NL , OH simul sumptæ totâ rectâ NO sunt minores. Duæ igitur FN , FO simul sumptæ rectâ NO sunt minores. Trianguli igitur NFO latera duo FN , FO simul reliquo minora. Quod est absurdum ^{c} . Circuli igitur se mutuo extra non con- ^{c} 20. primi.
tingunt plus uno punctis.

CAS. 2. Sed intus contingant. Et interior sit DBE.

Jam cum O centrum sit circuli DBE, æquales erunt inter se OF, OH. Addatur ON. Duæ igitur OF, ON simul sumptæ rectæ NH sunt æquales. Recta autem NH rectâ NL minor, propter peripheriam circuli DBE interiorē. Duæ igitur OF, ON simul sumptæ rectâ NL sunt minores. Sed cum punctum N centrum sit circuli ABC, æquales inter se sunt NL, NF. Duæ igitur OF, ON simul sumptæ rectâ NF sunt minores. Trianguli igitur FON, latera duo OF, ON simul reliquo sunt minora. Quod est absurdum^d. Circuli igitur intus se mutuo non contingunt plus uno punctis. Quare circulus circulum &c. Q. E. D.



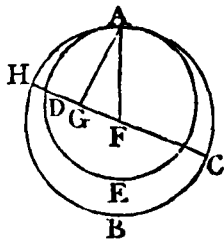
^d 20. primi.

[XI.]

PROP. XII. THEOR.

Si duo circuli sese intus contingant, et sumantur centra ipsorum; recta linea, ipsorum centra jungens, producta, in circulorum contactum cadet.

Duo enim circuli ABC, ADE sese intus contingant in puncto A, et sumatur circuli quidem ABC centrum, quod sit F, circuli vero ADE centrum G. Dico rectam lineam a puncto G ad F ductam, si producat, in punctum A cadere. Non enim; sed si fieri potest, cadat ut FG DH; et AF, AG jungantur. Itaque quoniam



^d 20. primi.

A G, GF majores^d sunt quam FA, hoc est, quam FH, communis auferatur FG; reliqua igitur AG major est quam reliqua GH. Sed AG est æqualis GD; ergo GD ipsa GH est major, minor majore, quod fieri non potest. Non igitur a puncto F ad G ducta recta linea extra contactum A cadet; quare in ipsum cadat necesse est. Si igitur duo circuli sese intus contingant, recta linea, ipsorum centra jungens, si producat, in contactum circulorum cadet. Q. E. D.

PROP.

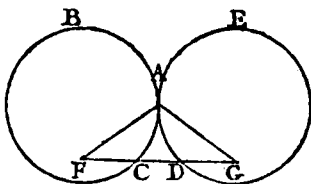
PROP. XIII. THEOR.

[XII.]

Si duo circuli sese extra contingant, recta linea ipsorum centra conjungens per contactum transibit.

Duo enim circuli ABC , ADE sese extra contingant in puncto A ; et sumatur

circuli quidem ABC centrum, quod sit F ; circuli vero ADE centrum G . Dico rectam lineam, quæ a puncto F ad G ducitur, per contactum A transire. Non enim; sed, si fieri potest,



cadat ut $FCDG$; et FA , AG jungantur. Quoniam igitur F centrum est circuli ABC , erit AF æqualis FC . Rursus quoniam G centrum est ADE circuli, erit AG ipsi GD æqualis. Ostensa est autem et AF æqualis FC ; sunt igitur FA , AG ipsis FC , DG æquales, ergo tota FG major est quam FA , AG ; sed et minor^c; quod fieri^c 20. primi non potest. Non igitur a puncto F ad G ducta recta linea per contactum A non transibit; quare per ipsum transeat necesse est. Si igitur duo circuli sese extra contingant, recta linea ipsorum centra conjungens per contactum transibit. *Q. E. D.*

SCHOLION. *

Inversam Theoni Propositionum seriem in melius mutavimus. Primum scilicet docendum erat, circulorum contactus quid sit; merum nempe punctum geometricum; dein demonstrandum, rectam centra jungentem in punctum illud necessario incidere. Hæc nobiscum meditati, in locum undecimæ revocandam judicavimus, quæ Theoni decima tertia est.

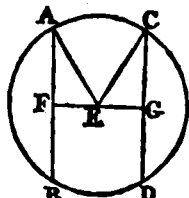
PROP. XIV. THEOR.

[XIV.]

In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter a centro distant; et quæ æqualiter a centro distant, inter se sunt æquales.

Sit circulus $ABDC$, et in ipso æquales rectæ lineæ AB , CD . Dico eas a centro æqualiter distare. Sumatur enim circuli $ABDC$ centrum, quod sit E , et ab ipso ad AB , CD perpendiculares ducantur EF , EG ; et AE , EC jungantur. Quoniam igitur recta linea quædam per centrum ducta EF rectam lineam quandam AB non ductam

ductam per centrum ad rectos angulos secat, et bifariam ipsam secabit^f; quare AF est æqualis FB , ideoque AB ipse AF dupla. Eadem ratione, et CD dupla est CG ; atque est AB ipse CD æqualis; æqualis igitur et AF ipse CG ; et quoniam AE est æqualis EC , erit et quadratum ex AE quadrato ex EC æquale; sed quadrato quidem ex AE æqualia sunt



⁴⁷. primi. ex AF , FE quadrata^g; rectus enim angulus est ad F : quadrato autem ex EC æqualia sunt quadrata ex EG , GC , cum angulus ad G sit rectus. Quadrata igitur ex AF , FE æqualia sunt quadratis ex CG , GE , quorum quadratum ex AF quadrato ex CG æquale, etenim æqualis est AF ipse CG : reliquum igitur quod sit ex FE quadratum, æquale est reliquo quod ex EG ; ac propterea FE ipse EG est æqualis. In circulo autem æqualiter distare a centro rectæ lineæ dicuntur, quando a centro ad ipsas perpendiculares ductæ æquales^h sunt. Ergo AB , CD a centro æqualiter distant. Sed si AB , CD æqualiter distant a centro, hoc est, si æqualis sit FE ipse EG ; dico AB ipse CD æqualem esse. Iisdem enim constructis, similiter ostendemus AB duplam esse ipsius AF , CD duplam ipsius CG . Et quoniam æqualis est AE ipse EC , erit et ex AE quadratum quadrato ex EC æquale; sed quadrato quidem ex AE æqualiaⁱ sunt quadrata ex EF , FA ; quadrato autem ex EC æqualia^j quadrata ex EG , GC . Quadrata igitur ex EF , FA quadratis ex EG , GC æqualia sunt, quorum quadratum ex EG æquale est quadrato ex EF , est enim EG ipse EF æqualis: reliquum igitur ex AF quadratum æquale est reliquo ex CG : ergo AF ipse CG est æqualis. Atqui est AB ipse AF dupla, et CD dupla ipsius CG . In circulo igitur æquales rectæ lineæ æqualiter a centro distant; et quæ æqualiter a centro distant, inter se sunt æquales. *Q. E. D.*

^h Def. 3.
hujus.

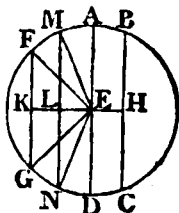
[XV.]

PROP. XV. THEOR.

In circulo maxima quidem est diameter; aliarum vero, semper propinquior ei, quæ per centrum transit, remotiore major est.

Sit circulus $ABCD$, cujus diameter AD , centrum E ; et propinquior quidem diametro AD sit BC ; remotior vero

vero FG . Dico AD maximam esse, et BC maiorem quam FG . Ducantur enim a centro E ad BC , FG perpendiculares EH , EK . Et quoniam BC propinquior est ei, quæ per centrum transit, remotior autem FG ; erit EK quam EH major. Ponatur ipsi EH æqualis EL ; et per L ipsi EK ad rectos angulos ducta LM in N producat; et jungantur EM , EN , EF , EG . Quoniam igitur EH est æqualis EL , erit et BC ipsi MN æqualis¹. Rursus quoniam æqualis¹ 14. hujus. est AE ipsi EM , et DE ipsi EN ; erit et AD ipsis ME , EN æqualis; sed ME , EN ² majores sunt quam MN ; ³ 20. primi. ergo et AD major est quam MN ; et MN est æqualis BC , erit igitur AD quam BC major. Quod eum duæ EM , EN duabus FE , EG æquales sint, angulusque MEN major angulo FEH ; et basis MN basi FG major¹ erit. Oñsa autem est MN æqualis BC ; ergo et BC ¹ 24. primi. quam FG est major. Maxima igitur est AD diameter, et BC major quam FG . Quare in circulo maxima est diameter; aliarum vero, semper propinquior ei, quæ per centrum transit, remotiore est major. Q. E. D.



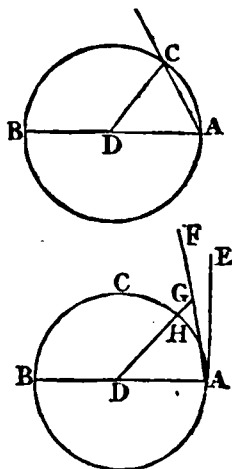
PROP. XVI. THEOR.

[XVI.]

Quæ diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur, cadit extra circulum; et in locum, qui inter rectam lineam et circumferentiam interjicitur, altera recta linea non cadet: et semicirculi angulus omni angulo acuto rectilineo major est; reliquus autem minor.

Sit circulus ABC circa centrum D , et diametrum AB . Dico rectam lineam, quæ a puncto A ipsi AB ad rectos angulos ducitur, extra circulum cadere. Non enim; sed, si fieri potest, cadat intus, ut AC ; et DC jungatur. Itaque quoniam æqualis est DA ipsi DC , erit et angulus DAC angulo ACD æqualis^m; rectus autem est DAC ; ⁿ 5. primi. ergo et ACD est rectus; ac propterea anguli DAC , ACD duabus rectis æquales sunt; quod fieri non potestⁿ. ^o 17. primi. Non igitur a puncto A ipsi BA ad rectos angulos ducta cadet intra circulum. Similiter ostendemus neque in circumferentiam cadere. Extra igitur cadat necesse est. Cadat ut AE . Dico in locum, qui inter rectam lineam AE et circumferentiam CHA interjicitur, alteram rectam lineam non cadere. Si enim fieri potest, cadat ut FA ,
et

- * 12. primi. et a puncto D ad F A perpendicularis^o ducatur D G. Et quoniam rectus est angulus A G D, minor autem recto D A G, erit D A quam D G major^p; æqualis autem est D A ipsi D H; major igitur est D H ipsa D G, minor majore; quod fieri non potest. Non igitur in locum, qui inter rectam lineam et circumferentiam interjicitur, altera recta linea cadet. Dico præterea angulum semicirculi, qui rectâ lineâ B A et circumferentiâ C H A continetur, omni angulo acuto rectilineo majorem esse; reliquum vero contentum circumferentiâ C H A et rectâ lineâ A E omni angulo rectilineo esse minorem. Si enim est aliquis angulus rectilineus acutus major quidem contento rectâ lineâ B A et C H A circumferentiâ, aut aliquis minor contento C H A circumferentiâ et rectâ lineâ A E; in locum, qui inter circumferentiam C H A et rectam lineam A E interjicitur, cadet aliqua recta linea, quæ faciet angulum majorem quidem contento rectâ lineâ B A et C H A circumferentiâ, qui scilicet rectis lineis continetur; minorem vero contento circumferentiâ C H A, et A E rectâ lineâ. Non cadit autem^q; non igitur erit angulus acutus, qui rectis lineis continetur, major angulo contento rectâ lineâ B A et C H A circumferentiâ, neque minor contento circumferentiâ C H A et A E rectâ lineâ. Q. E. D.



^q ex prius demonstratis.

Cor. Ex hoc manifestum est rectam lineam, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, circumulum contingere.

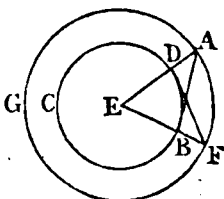
[XVII.]

PROP. XVII. PROBL.

A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum circumulum contingat.

Sit datum quidem punctum A, datus autem circumulus B C D. Oportet a puncto A rectam lineam ducere, quæ circumulum B C D contingat. Sumatur centrum circuli E; et junctâ A E, quæ circumferentiâ B D C in D occurrat, centro quidem E, intervallo autem E A, circumulus A F G describa-

describatur; et a puncto D ipsi EA ad rectos angulos^{11. primi.} ducatur DF, quæ circumferentiæ AFG in F occurrat; jungaturque EF, quæ circumferentiæ CDB in B occurrat; jungatur denique AB. Dico a puncto A ductam esse AB, quæ circum BCD contingit. Quoniam enim E centrum est circum BCD, AFG; erit EA æqualis EF, et ED ipsi EB. Duæ igitur AE, EB duabus FE, ED æquales sunt, et angulum communem continent, qui est ad E. Ergo basis DF basi AB est æ-^{4. primi.} qualis, triangulumque DEF æquale triangulo EBA, et reliqui anguli reliquis angulis. Æqualis igitur est angulus EBA angulo EDF; et EDF rectus est; quare et rectus EBA; atque est EB ex centro. Quæ autem diametro circuli ab extremitate ad rectos angulos ducitur, circum BCD contingit^{16. hujus.}. Ergo AB contingit circum BCD. A dato igitur puncto A ducta est recta linea AB, quæ circum BCD contingit. Q. E. F.



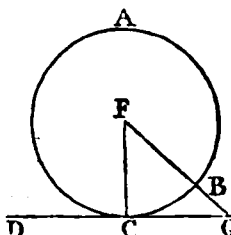
PROP. XVIII. THEOR.

[XVIII.]

Si circum contingat quædam recta linea, a centro autem in contactum recta linea ducatur, ea ad contingentem perpendicularis erit.

Circulum enim ABC contingat quædam recta linea DE in puncto C; et circuli ABC centrum sumatur F, a quo ad C ducatur FC. Dico FC ad ipsam DE perpendicularem esse.

Si enim non ita fit, ducatur a puncto F ad DE perpendicularis^{12. primi.} FG. Quoniam igitur angulus FGC rectus est, erit GCF acutus^{13. primi.}, ac propterea FGC angulus major angulo FCG. Majorem autem angulum majus latus^{19. primi.} subtendit; major igitur est FC quam FG. Æqualis autem FC ipsi FB; ergo FB ipsa FG est major, minor majore; quod fieri non potest. Non igitur FG est perpendicularis ad DE. Similiter ostendemus neque aliam quampiam esse, præter ipsam FC. Ergo FC ad DE est perpendicularis. Si igitur circum contingat quædam recta linea, a centro autem

^{12. primi.}^{13. primi.}^{19. primi.}

autem in contactum recta linea ducatur, ea ad contingentem perpendicularis erit. Q. E. D.

Cor. 1. * Rectæ duæ, quæ in oppositis diametri terminis peripheriam circuli contingunt, inter se sunt parallelæ.

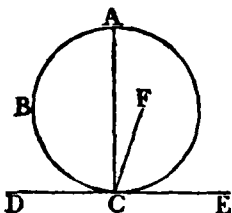
Cor. 2. * Si duæ rectæ parallelæ circulum contingant, in oppositis diametri terminis necessario illum contingunt; neque plures duabus parallelæ eundem circulum contingere possunt.

[XIX.]

PROP. XIX. THEOR.

Si circulum contingat quædam recta linea, a contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur; in eâ circuli centrum erit.

Circulum enim ABC contingat quædam recta linea DE in C , et a puncto C ipsi DE ad rectos angulos ducatur CA . Dico in ipsâ AC circuli centrum esse. Non enim; sed, si fieri potest, sit F centrum, et jungatur CF . Quoniam igitur circulum ABC contingit quædam recta linea DE , et a centro ad contactum ducta est FC ; erit FC ad ipsam DE perpen-



* 18. hujus. dicularis². Rectus igitur angulus est FCE ; est autem
 * ex hyp. et ACE rectus³; ergo FCE angulus est æqualis angulo ACE , minor majori; quod fieri non potest. Non igitur F centrum est ABC circuli. Similiter ostendemus neque aliud aliquod esse, præterquam in ipsâ AC . Quare si circulum contingat quædam recta linea, a contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur; in eâ circuli erit centrum. Q. E. D.

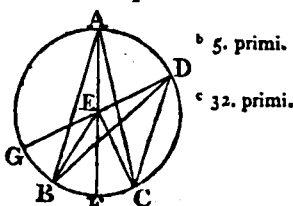
[XX.]

PROP. XX. THEOR.

In circulo angulus, qui ad centrum, duplex est ejus, qui ad circumferentiam est, quando circumferentiam eandem pro basi habeant.

Sit circulus ABC , ad cujus centrum quidem angulus sit BEC , ad circumferentiam vero BAC , et eandem circumferentiam BC pro basi habeant. Dico BEC angulum anguli BAC duplum esse. Jungatur enim AE ,
 et

et ad F producat. Itaque quoniam EA est æqualis EB , erit et angulus EAB angulo EBA ^b æqualis. Anguli igitur EAB , EBA duplices sunt ipsius anguli EAB ; sed angulus BEF est æqualis ^c angulis EAB , EBA ; ergo BEF angulus anguli EAB est duplex. Eadem ratione et angulus FEC duplex est ipsius EAC . Totus igitur BEC totius BAC duplex erit. Rursus inflectatur, et sit alter angulus BDC , junctaque DE ad G producat. Similiter ostendemus angulum GEC anguli GDC duplum esse; quorum GE B duplus est ipsius GDB . Ergo reliquus BEC reliqui BDC est duplus. In circulo igitur angulus, qui ad centrum, duplex est ejus, qui ad circumferentiam est, quando circumferentiam eandem pro basi habeant. Q. E. D.



b 5. primi.

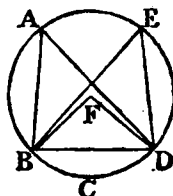
c 32. primi.

PROP. XXI. THEOR.

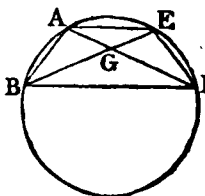
[XXI.]

In circulo qui in eodem segmento sunt anguli, inter se æquales sunt.

Sit circulus $ABCDE$, et in eodem segmento $BAED$ anguli sint BAD , BED . Dico eos inter se æquales esse. Sumatur enim circuli $ABCDE$ centrum, quod sit F ; junganturque BF , FD . Quoniam angulus quidem BFD est ad centrum, angulus vero BAD ad circumferentiam, et circumferentiam eandem BCD pro basi habent; erit BFD angulus ^d anguli BAD duplus. Eadem ratione angulus BFD duplus est etiam anguli BED . Ergo angulus BAD angulo BED æqualis erit. Si anguli BAD , BED sunt in segmento minore semicirculo, ducatur AE , eruntque omnes anguli trianguli ABG æquales ^e omnibus angulis trianguli DEG . Et anguli ABE , ADE sunt æquales per hæcenus demonstrata, et anguli AGB , DGE sunt etiam æquales ^f, ad verticem enim sunt. Quare et reliquus BAG reliquo GED æqualis erit. In circulo igitur qui in eodem segmento sunt anguli, inter se æquales sunt. Q. E. D.



d 20. hujus.



e 32. primi.

f 15. primi.

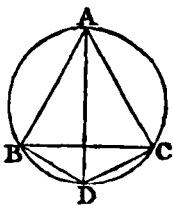
PROP.

[XXII.]

PROP. XXII. THEOR.

Quadrilaterorum, quæ in circulis describuntur, anguli oppositi duobus rectis æquales sunt.

Sit circulus $ABDC$, et in ipso quadrilaterum $ABDC$. Dico angulos ipsius oppositos duobus rectis æquales esse. Jungantur AD , BC . Quoniam igitur omnis trianguli
^{32. primi.} tres anguli duobus rectis sunt æquales^t, erunt trianguli ABC tres anguli CAB , ABC , BCA æquales duobus rectis.
^{21. hujus.} Sed angulus ABC est æqualis^h angulo ADC , in eodem enim sunt segmento $ABDC$. Et angulus ACB æqualis^h ipsi ADB , quod sint in eodem $ACDB$ segmento: totus igitur angulus BDC angulis ABC , ACB æqualis est. Communis apponatur BAC angulus; erunt anguli BAC , ABC , ACB angulis BAC , BDC æquales. Sed BAC , ABC , ACB sunt æquales³ duobus rectis; ergo et anguli BAC , BDC duobus rectis æquales erunt. Similiter ostendemus angulos quoque ABD , ACD duobus rectis esse æquales. Quadrilaterorum igitur, quæ in circulis describuntur, anguli oppositi duobus rectis æquales sunt. *Q. E. D.*

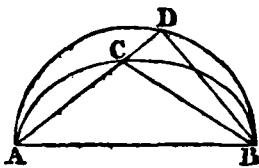


[XXIII.]

PROP. XXIII. THEOR.

Super eadem rectâ lineâ duo circulorum segmenta similia, et incongrua ex eadem parte non constituentur.

Si enim fieri potest, super eadem rectâ lineâ AB duo circulorum segmenta similia, et incongrua constituentur ex eadem parte, ACB , ADB ; circumferentiæ ACB , ADB , cum in punctis duobus A , B sibi mutuo occurrant, nullum aliud punctum præter illa A , B com-



^{10. hujus.} mune habent¹. Sed inter A , B altera omnis interior, altera exterior omnis erit. Capiatur in interiori punctum quodvis C ; junctæque AC exteriori producta in D occurrat; et CB , BD jungantur. Itaque quoniam segmentum ACB simile est segmento ADB , similia autem circulorum segmenta sunt, quæ angulos fuscipiunt
^{Def. 10.} æquales; erit ACB angulus æqualis angulo ADB , exterior
^{hujus.}

terior interiori; quod fieri non potest¹. Non igitur su-^{16. primi.}
per eandem rectâ lineâ, duo circulorum segmenta similia
et incongrua ex eâdem parte constituentur. Q. E. D.

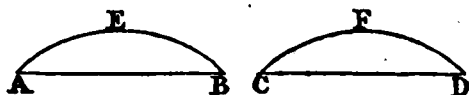
Cor. * Segmentorum inæqualium super eâdem basi
ad partes easdem constitutorum, quod angulum majorem
capit, ejus periphæria interior omnis erit.

PROP. XXIV. THEOR.

[XXIV.]

*Super æqualibus rectis lineis similia circulorum segmenta
inter se æqualia sunt.*

Sint enim super æqualibus rectis lineis AB , CD si-
milia circulorum segmenta AEB , CFD . Dico segmen-
tum AEB segmento CFD æquale esse. Applicato enim



AEB segmento segmento CFD , et posito puncto quidem
 A in C , rectâ vero lineâ AB in CD ; congruet et B
punctum puncto D , propterea quod AB ipsi CD sit
æqualis. Congruente autem rectâ lineâ AB rectæ CD ;
congruet et AEB segmentum segmento CFD ^m; con-^{m 23. hujus.}
gruens autem, ipsi æquale erit. Super æqualibus igitur
rectis lineis similia circulorum segmenta inter se æ-
qualia sunt. Q. E. D.

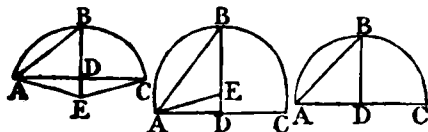
Cor. * Segmentorum similium, basibus æqualibus in-
sistentium, periphæriæ sunt inter se æquales.

PROP. XXV. PROBL.

[XXV.]

*Circuli segmento dato, describere circum cuius est
segmentum.*

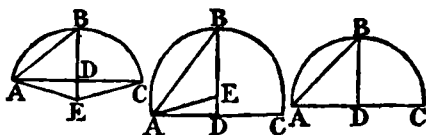
Sit datum circuli segmentum ABC . Oportet de-
scribere circum cuius ABC est segmentum. Secetur



AC bifariam^{10. primi.} in D : et a puncto D ipsi AC ad rectos^{10. primi.}
angulos ducatur^{11. primi.} DB , et AB jungatur. Vel igitur
angulus ABD major est angulo BAD , vel minor, vel
ipsi æqualis. Sit primum major, et ad rectam lineam

G

BA,



- B A, atque ad datum in eâ punctum A constituatur angulus B A E æqualis ^{23. primi.} angulo A B D; productæ autem B D, A E sibi invicem in E occurrant, jungaturque E C. Quoniam igitur angulus A B E est æqualis angulo B A E, ^{6. primi.} erit et B E recta linea ipsi E A æqualis: et quoniam A D est æqualis D C, communis autem D E; duæ A D, D E duabus C D, D E æquales sunt, altera alteri; et angulus A D E æqualis angulo C D E, rectus enim uterque est; ergo et ^{4. primi.} basis A E basi E C est æqualis. Sed ostensa est A E æqualis E B; quare et B E ipsi E C est æqualis, ac propterea tres rectæ linæ A E, E B, E C, inter se æquales sunt. Centro igitur E, intervallo autem unâ ipsarum A E, ^{9. hujus.} E B, E C, circulus descriptus etiam per reliqua ^{transi-}bit puncta, et circulus descriptus erit. Quare circuli segmento dato, descriptus est circulus cujus segmentum est. Sed et illud constat, segmentum A B C semicirculo minus esse; propterea quod centrum ipsius extra cadit. Similiter, et si angulus A B D sit æqualis angulo B A D; recta A D utrique ipsarum B D, D C æqualis erit; tres igitur rectæ linæ A D, D B, D C inter se æquales erunt; quapropter erit D circuli descripti centrum, et segmentum A B C semicirculus. Si vero angulus A B D minor sit angulo B A D; constituatur ad rectam lineam B A, et ad punctum in eâ datum A, angulo A B D æqualis angulus B A E intra segmentum A B C; erit E centrum in ipsâ D B, atque erit A B C segmentum semicirculo majus. Circuli igitur segmento dato, descriptus est circulus cujus segmentum est. Q. E. F.

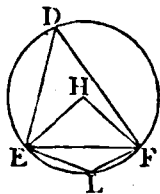
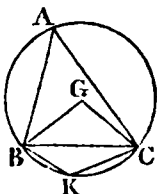
[XXVI.]

PROP. XXVI. THEOR.

In æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus insistant circumferentiis, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant.

Sint æquales circuli A B C, D E F, et in ipsis æquales anguli ad centra quidem B G C, E H F, ad circumferentias vero B A C, E D F. Dico B A C circumferentiam circumferentiæ E D F æqualem esse; jungantur enim B C,

B C, E F. Quoniam æquales sunt $A B C$, $D E F$ circuli, erunt et quæ ex centris æquales; ducæ igitur $B G$, $G C$ duabus $E H$, $H F$ æquales sunt: et angulus ad G æqualis angulo ad H ; ergo et basis $B C$ basi $E F$ est æqualis.



Def. 1.

4. primi.

Rursus quoniam æqualis est angulus ad A angulo ad D , segmentum $B A C$ simile erit segmento $B D F$: et sunt super æqualibus rectis lineis $B C$, $E F$. Segmentorum autem similium, basibus æqualibus insistentium, circumferentiæ æquales sunt. ^{Cor. 24. hujus.}

Æquales sunt igitur circumferentiæ $B A C$, $E D F$. Dico insuper circumferentias $B K C$, $E L F$ inter se æquales. Sumatur enim in circumferentia $B K C$ punctum quodvis K , et in $E L F$ punctum quodvis L . Jungantur $B K$, $C K$, $E L$, $F L$. Quadrilateri $A B K C$ circulo inscripti anguli duo oppositi $B A C$, $B K C$ simul sumpti duobus rectis sunt æquales. Simili ratione, quadrilateri $D E L F$ anguli duo oppositi $E D F$, $E L F$ simul sumpti duobus rectis sunt æquales. Duo igitur $B A C$, $B K C$ simul sumpti duobus $E D F$, $E L F$ simul sumptis sunt æquales. Angulus autem $B A C$ angulo $E D F$ æqualis est. Reliquus igitur $B K C$ reliquo $E L F$ æqualis erit. Similia igitur sunt segmenta $B K C$, $E L F$. Sed rectis æqualibus $B C$, $E F$ insistent. Circumferentias igitur $B K C$, $E L F$ æquales habent. In æqualibus igitur circulis, æquales anguli æqualibus insistent circumferentiis, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant. *Q. E. D.*

PROP. XXVII. THEOR.

[XXVII.]

In æqualibus circulis, anguli, qui æqualibus insistent circumferentiis, inter se æquales sunt, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant.

In æqualibus enim circulis $A B C$, $D E F$, æqualibus circumferentiis $B C$, $E F$ insistent anguli ad centra quidem $B G C$, $E H F$, ad circumferentias vero $B A C$, $E D F$. Dico angulum $B G C$ angulo $E H F$, et angulum $B A C$ angulo $E D F$ æqualem



G 2

esse.

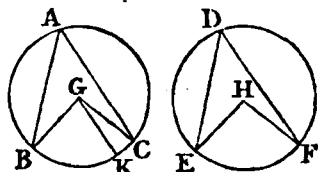
esse. Si quidem inæquales sint anguli BGC , EHF ;

alter ipsorum erit major. Sit major BGC , et constituatur ad rectam lineam BG , et ad punctum in ipsa G , an-

^{23. primi.} gulo EHF æqualis ⁷ angulus BGK . Æquales autem

^{26. hujus.} anguli æqualibus insistant ²

circumferentiis, quando ad centra fuerint; ergo circumferentia BK æqualis est circumferentiæ EF . Sed circumferentia EF æqualis est ipsi BC ; ergo et BK ipsi BC est æqualis, minor majori; quod fieri non potest. Non igitur inæqualis est angulus BGC angulo EHF : ergo est æqualis. Atque est anguli quidem BGC dimidium angulus, qui ad A ; anguli vero EHF dimidium qui ad D ; angulus igitur qui ad A angulo qui ad D est æqualis. In æqualibus igitur circulis, anguli, qui æqualibus insistant circumferentiis, inter se æquales sunt, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant. *Q. E. D.*

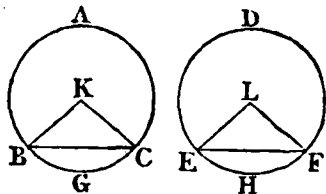


[XXVIII.]

PROP. XXVIII. THEOR.

In æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori.

Sint æquales circuli ABC , DEF ; et in ipsis æquales rectæ lineæ BC , EF , quæ circumferentias quidem BAC , EDF majores auferant, circumferentias vero BGC , EHF minores. Dico circumferentiam BAC majorem majori circumferentiæ EDF , et minorem circumferentiam BGC minori EHF æqualem esse.



^{1. hujus.} Sumantur enim centra ^a circulorum K , L ; junganturque BK , KC , EL , LF . Quoniam circuli æquales sunt, erunt

^b Def. 1. et quæ ex centrīs æquales ^b; duæ igitur BK , KC sunt æquales duabus EL , LF ; et basis BC æqualis est basi

^{8. primi.} EF ; ergo angulus BKC angulo ELF est ^c æqualis: æquales autem anguli æqualibus insistant circumferentiis,

^{26. hujus.} quando ad centra fuerint ^d; quare circumferentia BGC æqualis est circumferentiæ EHF . Sed et totus ABC circulus toti DEF est æqualis; reliqua igitur circumferentia

ferentia BAC reliquæ EDF æqualis erit. Ergo in æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori. *Q. E. D.*

PROP. XXIX. THEOR.

[XXIX.]

In æqualibus circulis, æquales sunt rectæ lineæ quæ circumferentias æquales subtendunt.

Sint æquales circuli ABC , DEF ; et in ipsis æquales
 assumantur circumferentiæ BGC , EHF ; et BC , EF
 jungantur. Dico rectam lineam BC rectæ EF æqualem
 esse. Sumantur enim centra^e circulorum K , L ; et^e 1. hujus.
 jungantur BK , KC , EL , LF . Quoniam igitur circum-
 ferentia BGC est æqualis circumferentiæ EHF , erit et
 angulus BKC angulo ELF æqualis^f; et quoniam cir-^f 27. hujus,
 culi ABC , DEF sunt æquales, et quæ ex centrīs æquales
 erunt^g; duæ igitur BK , KC sunt æquales duobus EL ,^g Def. 1.
 LF ; et æquales angulos continent; quare basis BC ,
 basi EF est^h æqualis. In æqualibus igitur circulis,^h 4. primi.
 æquales circumferentiās æquales rectæ linæ subten-
 dunt. *Q. E. D.*

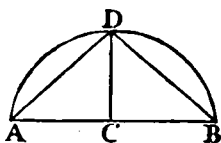
PROP. XXX. PROBL.

[XXX.]

Datam circumferentiam bifariam secare.

Sit data circumferentia $A D B$. Oportet $A D B$ circumferentiam bifariam secare. Jungatur $A B$, et in C bifariam ¹secetur. A puncto autem C ipsi $A B$ ad rectos angulos ducatur $C D$; et jungantur $A D$, $D B$. Quoniam igitur $A C$ est æqualis $C B$, communis autem $C D$; duæ $A C$, $C D$ duabus $B C$, $C D$ æquales sunt; et $\text{angulus } A C D$ æqualis $\text{angulo } B C D$, rectus enim uterque est; ergo basis $A D$, basi $B D$ est ²æqualis. Æquales autem rectæ lineæ circumferentias æquales¹ auferunt. Quare circumferentia $A D$ circumferentiæ $B D$ æqualis erit. Data igitur circumferentia bifariam secta est.

Q. E. F.



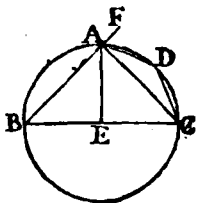
† 10. primi.

[XXXI.]

PROP. XXXI. THEOR.

In circulo angulus, qui in semicirculo, rectus est; qui vero in majori segmento, minor est recto; et qui in minori, major recto: et insuper majoris quidem segmenti angulus, recto major est, minoris vero segmenti angulus, recto minor.

Sit circulus $ABCD$, cujus diameter BC , centrum autem E ; et jungantur BA , AC , AD , DC . Dico angulum quidem, qui est in semicirculo BAC , rectum esse; qui vero in segmento ABC , quod majus est semicirculo, videlicet angulum ABC , minorem esse recto; et qui est in segmento ADC , quod minus est semicirculo, hoc est, angulum ADC , recto majorem. Jungatur AE , et BA ad F producat. Itaque quoniam BE est æqualis



¹ 5. primi.

BA , erit et angulus EAB , angulo EBA æqualis¹. Rursum quoniam AE est æqualis EC , et angulus ACE angulo CAE æqualis¹ erit; totus igitur angulus BAC est æqualis duobus ABC , ACB angulis. Est autem et angulus FAC extra triangulum ABC , duobus ABC ,

^m 32. primi.

ACB æqualis^m; angulus igitur BAC est æqualis an-

^a Def. 10.

gulo FAC ; ac propterea uterque ipsorum rectus^a.

primi.

Quare in semicirculo BAC angulus BAC rectus est. Et quoniam trianguli ABC duo anguli ABC , BAC duobus

^o 17. primi.

rectis sunt^o minores, rectus autem BAC ; erit ABC angulus recto minor, atque est in segmento ABC , quod majus est semicirculo. Quod cum in circulo quadrilaterum sit $ABCD$, quadrilaterorum vero, qui in circulis descri-

^p 22. hujus.

buntur, anguli oppositi duobus rectis sint^p æquales; erunt ABC , ADC anguli æquales duobus rectis, et angulus ABC minor est recto, reliquus igitur ADC recto major erit, atque est in segmento ADC , quod minus est semicirculo. Dico præterea majoris segmenti angulum, qui continetur ABC circumferentiâ et rectâ lineâ AC , recto majorem esse; angulum vero minoris segmenti, contentum circumferentiâ ADC et rectâ lineâ AC , recto minorem. Quod quidem perspicue apparet; quoniam angulus, qui rectis lineis BA , AC continetur, rectus est, erit et contentus ABC circumferentiâ et rectâ lineâ AC recto major. Rursum quoniam angulus, contentus rectis lineis

CA ,

CA, AF , rectus est, erit qui continetur rectâ lineâ CA , et ADC circumferentiâ, minor recto. In circulo igitur angulus, qui in semicirculo, rectus est; qui vero in majore segmento, minor est recto; et qui in minori, major recto: et insuper majoris quidem segmenti angulus, recto major est, minoris vero, recto minor. *Q. E. D.*

Cor. Ex hoc manifestum est, si trianguli unus angulus sit æqualis duobus, eum rectum esse; propterea quod et qui deinceps est, iisdem est æqualis. Quando autem anguli deinceps sunt æquales, necessario recti sunt ⁹.

⁹ Def. 10.
primi.
[XXXII.]

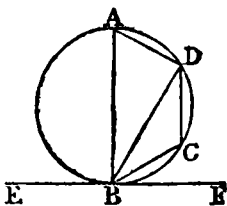
PROP. XXXII. THEOR.

Si circulum contingat quædam recta linea, a contactu autem in circulum ducatur recta linea ipsum secans; anguli, quos ad contingentem facit, æquales erunt iis, qui in alternis circuli segmentis consistunt.

Circulum enim $ABCD$ contingat quædam recta linea EF in B , et a puncto B ad circulum $ABCD$ ducatur recta linea BD ipsum utcumque secans. Dico angulos, quos BD cum EF contingente facit, æquales esse iis, qui in alternis circuli segmentis consistunt; hoc est, angulum FBD esse æqualem angulo, qui constituitur in DAB segmento; angulum vero DBE æqualem angulo, qui in segmento DCB constituitur. Ducatur enim a puncto B ipsi EF ad rectos angulos BA ; et in circumferentiâ BD sumatur ^{11. primi.} quodvis punctum C ; junganturque AD, DC, CB . Quoniam igitur circulum $ABCD$ contingit quædam recta linea EF in puncto B ; et a contactu B ad rectos angulos contingentem ducta est BA , erit in ipsâ BA centrum ^{19. hujus.} $ABCD$ circuli. Quare BA ejusdem circuli diameter est, et angulus ADB in semicirculo est ^{31. hujus.} rectus. Reliqui igitur anguli BAD, ABD uni recto ^{32. primi.} æquales sunt. Sed et ABF est rectus; ergo angulus ABF æqualis est angulis BAD, ABD . Communis auferatur ABD . Reliquus igitur DBF ei, qui in alterno circuli segmento consistit, videlicet angulo BAD , est æqualis. Et quoniam in circulo quadrilaterum est $ABCD$, et anguli ejus oppositi æquales ^{22. hujus.} sunt duobus rectis; erunt

G 4

D B F,

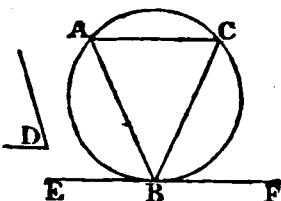


PROP. XXXIV. PROBL.

[XXXIV.]

A dato circulo segmentum abscindere, quod fuscipiat angulum, dato rectilineo æqualem.

Sit datus circulus ABC , datus autem angulus rectilineus, qui ad D . Oportet a circulo ABC segmentum abscindere, quod fuscipiat angulum angulo ad D æqualem. Ducatur^d recta linea EF circulum ABC in puncto B contingens; et ad rectam lineam BF , et ad punctum in eâ B , constituatur angulus FBC angulo, qui est ad D , æqualis^e. * 23. primi. Quoniam igitur circulum ABC contingit quædam recta linea EF in B puncto, et a contactu B ducta est BC , erit angulus FBC æqualis^f ei, qui in alterno circuli segmento^g 32. hujus. BAC constituitur. Sed FBC angulus angulo, qui ad D , est æqualis; ergo et angulus in segmento BAC angulo ad D æqualis erit. A dato igitur circulo ABC abscissum est segmentum quoddam BAC , fuscipiens angulum dato angulo rectilineo, qui est ad D , æqualem. *Q. E. F.*



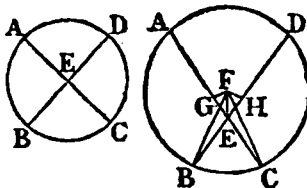
* 17. hujus.

PROP. XXXV. THEOR.

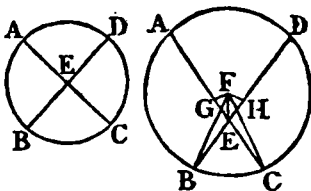
[XXXV.]

Si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secant, rectangulum, sub segmentis unius contentum, æquale est ei, quod sub alterius segmentis continetur, rectangulo.

In circulo enim $ABCD$, duæ rectæ lineæ AC , BD sese mutuo in puncto E secant. Dico rectangulum, contentum sub AE , EC , æquale esse ei, quod sub DE , EB continetur. Si AC , BD per centrum transeant, ita ut E sit centrum $ABCD$ circuli; manifestum est, æqualibus existentibus AE , EC , DE , EB , et rectangulum contentum sub AE , EC æquale esse ei, quod sub DE , EB continetur. Si AC , DB non transeant per centrum, sumatur centrum circuli $ABCD$, quod sit F ; et ab F ad rectas lineas AC , DB perpendiculares ducantur FG , FH ; junganturque FB , FC , FE . Quoniam igitur recta quædam linea GF , per centrum ducta, rectam lineam quandam



quandam AC , non ductam per centrum, ad rectos angulos secat, et bifariam ipsam secabit^e; quare AG ipsi GC est æqualis. Et quoniam recta linea AC secta est in partes æquales in puncto G , et in partes inæquales in E ; erit rectangulum sub AE , EC contentum,



⁵. secundi. una cum ipsius EG quadrato^h, æquale quadrato ex GC ; commune addatur ex GF quadratum. Ergo rectangulum sub AE , EC , una cum iis, quæ ex EG , GF , quadratis, æquale est quadratis ex CG , GF ; sed quadratis,

⁴⁷. primi. quæ ex EG , GF , æqualeⁱ est quadratum ex FE : quadratis vero ex CG , GF æquale estⁱ, quod ex FC fit, quadratum. Rectangulum igitur sub AE , EC , una cum quadrato ex FE , æquale est quadrato ex FC . Est autem CF æqualis FB ; ergo rectangulum sub AE , EC , una cum quadrato ex EF , æquale est ei, quod ex FB fit, quadrato. Eadem ratione et rectangulum sub DE , EB , una cum quadrato ex FE , æquale est quadrato ex FB . Oñsum autem est et rectangulum sub AE , EC , una cum quadrato ex FE , æquale ei, quod fit ex FB , quadrato. Ergo rectangulum sub AE , EC , una cum quadrato ex FE , æquale est rectangulo sub DE , EB , una cum quadrato ex FE ; commune auferatur ex FE quadratum; reliquum igitur rectangulum sub AE , EC , reliquo sub DE , EB rectangulo æquale erit. Quare si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secant, rectangulum, sub segmentis unius contentum, æquale est ei, quod sub alterius segmentis continetur. Q. E. D.

[XXXVI.]

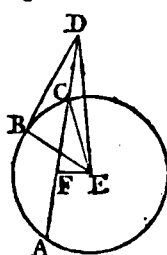
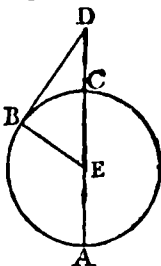
PROP. XXXVI. THEOR.

Si extra circulum aliquod punctum sumatur, et ab eo in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera vero contingat; rectangulum, quod sub totâ secante, et exterius assumptâ inter punctum et convexam circumferentiam, continetur, æquale erit ei, quod a contingente fit, quadrato.

Extra circulum enim ABC sumatur aliquod punctum D , et ab eo ad dictum circulum cadant duæ rectæ lineæ DCA , DB ; et DCA quidem circulum ABC secet; DB vero contingat. Dico rectangulum sub AD , DC quadrato

drato, quod sit ex DB , æquale esse. Namque DCA vel

transit per centrum, vel non transit. Primum transeat DA per centrum circuli ABC , quod sit E ; et EB jungatur. Erit angulus EBD rectus^k; itaque quoniam recta linea AC bifariam secta est in E , et ipsi adjicitur CD ,



^k 18. hujus.

rectangulum sub AD , DC una cum quadrato ex EC , æquale^l erit ei, quod sit ex ED , quadrato; æqualis^{16. secundi.} autem est CE ipsi EB ; ergo rectangulum sub AD , DC una cum quadrato, quod ex EB , æquale est quadrato ex ED ; sed quadratum ex ED est æquale quadratis^m ipsarum EB , BD ; rectus enim angulus est^{m47. primi.} EBD . Rectangulum igitur sub AD , DC , una cum

quadrato ex EB , æquale est ipsarum EB , BD quadratis; commune auferatur quadratum, quod ex EB ; ergo reliquum sub AD , DC rectangulum quadrato, quod sit a contingente DB , æquale erit. Secundo DCA non transeat per centrum ABC circuli: sumaturqueⁿ centrum E , et ad AC perpendicularis agatur EF , et jungantur EB , EC , ED . Rectus igitur est EFD angulus.

Et quoniam recta linea quædam EF per centrum ducta, rectam lineam quandam AC , non ductam per centrum, ad rectos angulos secat, et bifariam ipsam secabit^o; ^{o3. hujus.}

quare AF ipsi FC est æqualis. Rursus quoniam recta linea AC bifariam secta est in F , atque ipsi adjicitur CD , erit rectangulum sub AD , DC , una cum quadrato ex FC , æquale^l quadrato quod ex FD ; commune apponatur quod ex FE quadratum; rectangulum igitur sub AD , DC una cum quadratis ex FC , FE est æquale quadratis ex DF , FE . Sed quadratis quidem ex DF , FE æquale est^m ex DE quadratum; etenim rectus est angulus EFD : quadratis vero ex CF , FE æquale est^m quadratum ex CE . Ergo rectangulum sub AD , DC , una cum quadrato quod ex CE , est æquale quadrato ex ED ; æqualis autem est CE ipsi EB ; rectangulum igitur sub AD , DC , una cum quadrato ex EB , æquale est ex ED quadrato. Sed quadrato ex ED æqualia sunt quadrata^m ex EB , BD ; siquidem rectus est angulus EBD .

Ergo

Ergo rectangulum sub $A D$, $D C$, una cum quadrato ex $E B$ æquale est eis, quæ ex $E B$, $B D$ fiunt, quadratis; commune auferatur quadratum ex $E B$; reliquum igitur sub $A D$, $D C$ rectangulum quadrato, quod fit ex $D B$, æquale erit. Si igitur extra circumulum aliquod punctum fumatur, &c. *Q. E. D.*

*Cor. 1. ** (Clavii) Ex hâc Propositione xxxvi. manifestum est, si a puncto quovis extra circumulum plures lineæ rectæ, circumulum secantes, ducantur; rectangula, comprehensa sub totis lineis et partibus exterioribus, inter se esse æqualia.

*Cor. 2. ** (Clavii) Constat etiam duas rectas, ab eodem puncto ductas, quæ circumulum contingant, inter se esse æquales.

*Cor. 3. ** (Clavii) Perspicuum quoque est, ab eodem puncto duas tantum rectas duci posse, quæ circumulum contingant.

[XXXVII.]

PROP. XXXVII. THEOR.

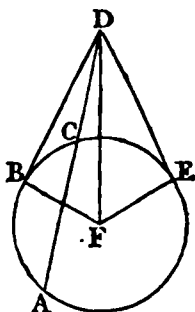
Si extra circumulum fumatur aliquod punctum, atque ab eo in circumulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circumulum secet, altera vero incidat: fit autem, quod sub totâ secante, et exterius assumptâ inter punctum et convexam circumferentiam, continetur, rectangulum æquale ei, quod ab incidente fit, quadrato; incidens lineâ circumulum continget.

Extra circumulum enim $A B C$ fumatur aliquod punctum D , atque ab ipso in circumulum cadant duæ rectæ lineæ $D C A$, $D B$; $D C A$ quidem circumulum secet, $D B$ vero incidat: fitque rectangulum sub $A D$, $D C$ æquale quadrato, quod fit ex $D B$. Dico ipsam $D B$ circumulum $A B C$ contingere.

P 17. hujus. Ducatur enim recta linea $D E$ ^P contingens circumulum $A B C$; et fumatur circuli $A B C$ centrum, quod fit F ; junganturque $F E$, $F B$, $F D$; ergo angulus

q 18. hujus. $F E D$ rectus est^q. Et quoniam $D E$ circumulum $A B C$ contingit, secat autem $D C A$;

^r Ex antecedente. rectangulum sub $A D$, $D C$ æquale erit^r quadrato ex $D E$; sed rectangulum sub $A D$, $D C$ ponitur æquale quadrato ex

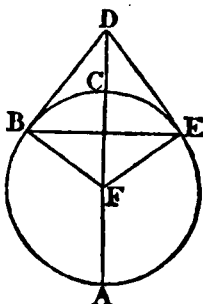


ex DB ; quadratum igitur, quod ex DE , quadrato ex DB æquale erit; ac propterea linea DE erit ipsi DB æqualis; est autem et FE æqualis FB . Duæ igitur DE , EF duabus DB , BF æquales sunt; et basis communis FD ; angulus igitur DEF est æqualis angulo DBF ; rectus autem est DEF , ergo et DBF est rectus; atque est FB producta diameter. Quæ vero ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, * circumulum contingit; * Cor. 16. ergo DB circumulum ABC contingat necesse est. Si igitur hujus. extra circumulum fumatur aliquod punctum, &c. $Q. E. D.$

*Cor. 1. ** (Clavii) Si duæ rectæ æquales ex puncto quopiam extra circumulum in peripheriam incident; earum autem una circumulum contingat; et altera eundem continget.

*Cor. 2. ** Si a puncto quopiam D extra circumulum duæ rectæ ducantur, DB , DE , circumulum in punctis B , E contingentes; recta BE , contactus jungens, peripheriam integram in partes inæquales BCE , BAE dividit; quarum minor est BCE , quæ angulum BDE convexa respicit; major BAE , quæ cava angulo obversa est.

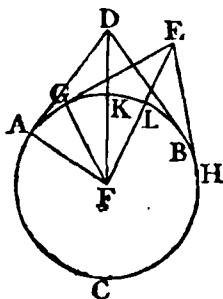
Circuli BAE fumatur centrum F . Juncta FD peripheriæ in punctis A , C occurrat. Jungantur FB , FE . Propter angulum FBD rectum, angulus $BF D$ recto minor erit. Duo autem $BF D$, BFA simul duobus rectis sunt æquales. Angulus igitur BFA recto major. Multo major igitur quam $BF C$. Arcus igitur BA arcu BC major. Simili modo ostendetur arcus EA arcu EC major. Totus igitur BAE , ex duobus BA , EA compositus, toto BCE major, ex duobus BC , EC composito.



*Cor. 3. ** Si a punctis duobus extra circumulum, distantis æqualibus a centro remotis, rectæ ducantur, circumulum contingentes; arcus, contingentibus intercepti, æquales erunt, convexus convexo, cavus cavo.

Extra circumulum ACB , cujus centrum F , sint puncta D , E , distantis æqualibus a centro F remota. A puncto D ducantur DA , DB , quæ in punctis A , B ; et a puncto

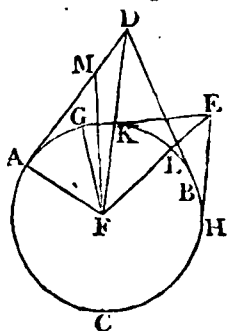
a puncto E ducantur EG, EH, quæ in punctis G, H, circulum contingant. Junctæ autem FD, FE, peripheriæ circuli, quâ parte convexa respicit puncta D, E, in punctis K, L occurrant. Dico arcus AKB, ACB arcubus GLH, GCH æquales: convexum AKB convexo GLH; cavum ACB, cavo GCH. Jungantur enim FA, FG. Anguli FAD, FGE sunt recti. Sed rectæ FA, FD rectis FG, FE, singulæ singulis, æquales. Quare in triangulis DAF, EGF latus



47. primi. DA, lateri EG æquale¹. Latera igitur DF, FA lateribus EF, FG, singula singulis, æqualia; et basis DA basi EG æqualis. Quare angulus DFA angulo EFG æqualis². Arcus igitur AK arcui GL æqualis. Simili modo ostendetur arcus BK æqualis arcui HL. Totus igitur AKB, ex duobus AK, BK compositus, æqualis toti GLH, ex duobus GL, HL composito. Arcus autem AKB, ACB simul integram circuli peripheriam complent; quam similiter complent GLH, GCH. Duo igitur AKB, ACB, simul sumpti, duobus GLH, GCH, simul sumptis, æquales sunt. Ablatisque AKB, GLH æqualibus, relinquentur ACB, GCH inter se æquales. Q. E. D.

Cor. 4. * Si a punctis duobus extra circulum, distantis inæqualibus a centro remotis, rectæ ducantur circulum contingentes; arcus inæquales intercipient; et convexum minorem, majorem vero cavum, quæ a puncto propiore ductæ fuerint.

Extra circulum ACB, cujus centrum sit F, sint puncta duo D, E, distantis inæqualibus a centro remota. Hoc est, junctæ FD, FE inæquales sint. Inæqualium autem altera major erit. Sit FD major. Ducantur a puncto D duæ rectæ DA, DB, quæ in punctis A, B, a puncto autem E, duæ EG, EH, quæ in punctis G, H circulum contingant. Rectæ autem FD, FE circuli peripheriæ, quâ parte puncta D, E convexa respicit, in punctis K, L occurrant. Dico arcus AKB, GLH, necnon ACB,

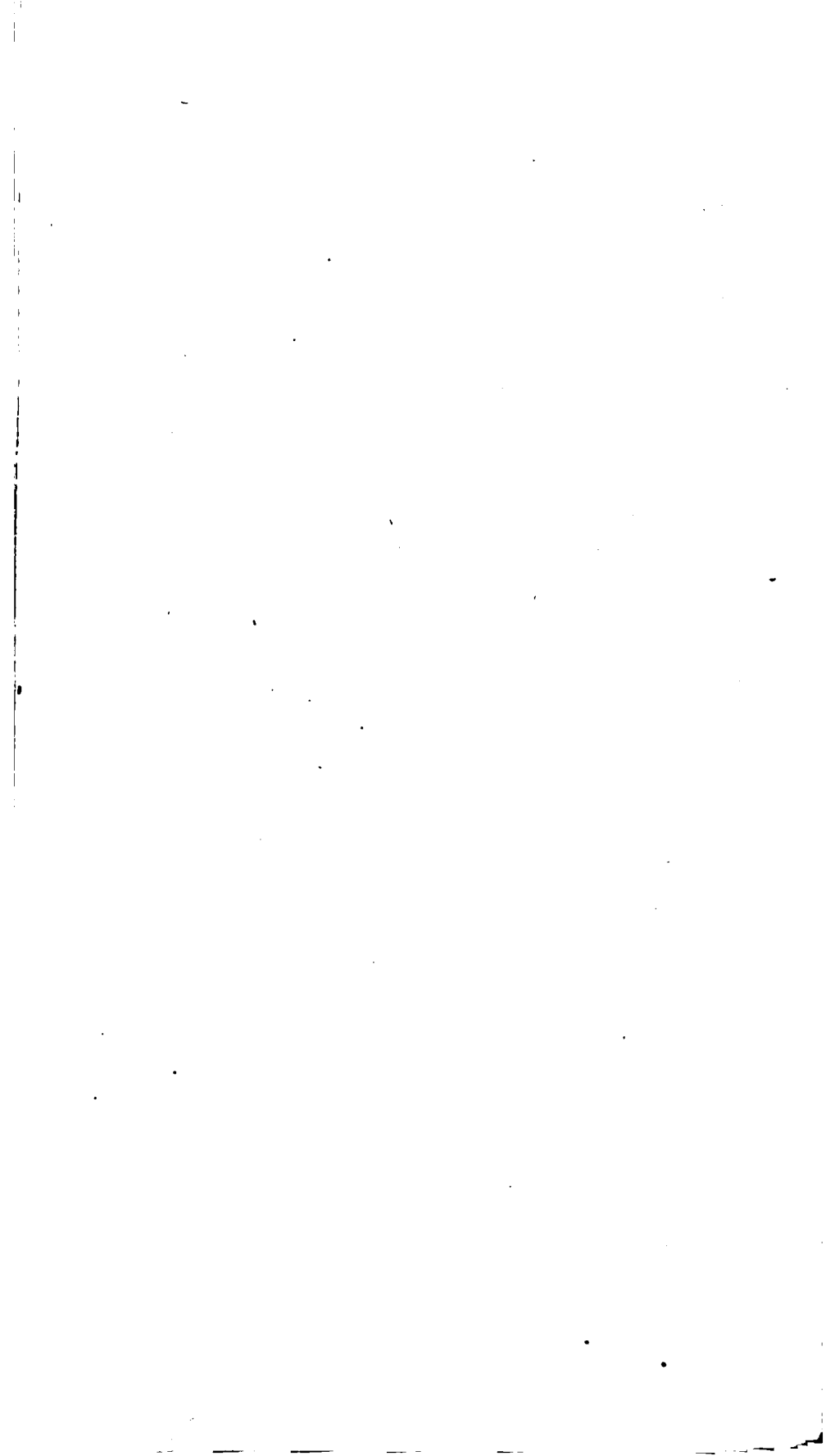


GCH,

GCH esse inæquales, et arcum GLH arcu AKB minorem, arcum autem GCH arcu ACB majorem. Jungantur enim FA, FG ; propter angulum ad A rectum, quadratum ex FD duobus quadratis ex FA, AD est æquale^v. Similiter propter angulum ad G rectum,^{v 47. primi.} quadratum ex FE duobus ex FG, GE est æquale. Sed quadratum ex FE minus erit quadrato ex FD , propter rectam FE rectâ FD ^x minorem. Duo igitur ex FG ,^{x ex hyp.} GE duobus ex FA, AD sunt minora. Auferantur æqualia ex rectis æqualibus FG, FA ; jam reliquum ex EG quadratum reliquo ex DA minus erit. Recta igitur EG rectâ DA minor. In AD igitur a puncto A capiat^rur AM illi EG æqualis. Minor erit AM quam AD , et punctum M duobus A, D necessario interjacebit. Quapropter, si jungatur FM , angulus AFM angulo AFD minor erit. Sed in triangulis FAM, FGE , propter latera FA, AM , lateribus FG, GE , singula singulis, æqualia, et angulos ad A, G æquales (etenim uterque rectus), anguli AFM, EFG erunt inter se æquales^v. Angulus^{v 4. primi.} igitur GFE angulo AFD minor. Quare et arcus GL arcu AK minor. Simili modo ostendetur arcus HL arcu BK minor. Totus igitur GLH toto AKB minor. Et qui reliquus fuerit ex integrâ circuli peripheriâ, ablato GLH , major eo, qui reliquus fuerit, ablato AKB . Arcus nempe GCH arcu ACB major. *Q. E. D.*

*Cor. 5. ** Recta, quæ centrum circuli et contingentium occursum jungit, arcum contingentibus interceptum, necnon rectam contactus jungentem, bifariam dividit.

*Cor. 6. ** Recta, quæ arcum circuli, duabus contingentibus interceptum, in medio ipsius puncto contingit, rectæ, quæ contingentium primo positarum contactus jungit, parallela est.



EUCLIDIS

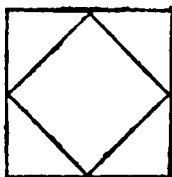
ELEMENTORUM

LIBER QUARTUS.

DEFINITIONES.

DEFINITIO I.

FIGURA rectilinea in figurâ rectilineâ describi dicitur, quando unusquisque figuræ descriptæ angulus unumquodque latus ejus, in quâ describitur, contingit.

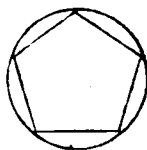


II.

Figura similiter circa figuram describi dicitur, quando unumquodque latus descriptæ, unumquemque angulum ejus, circa quam describitur, contingit.

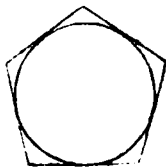
III.

Figura rectilinea in circulo describi dicitur, quando unusquisque descriptæ figuræ angulus circuli circumferentiam contingit.



IV.

Figura rectilinea circa circumulum describi dicitur, quando unumquodque latus descriptæ circuli circumferentiam contingit.



V.

Circulus similiter in figurâ rectilineâ describi dicitur, quando circuli circumferentia unumquodque latus ejus, in quâ describitur, contingit.

VI.

Circulus circa figuram rectilineam describi dicitur, quando circuli circumferentia unumquemque angulum ejus, circa quam describitur, contingit.

VII.

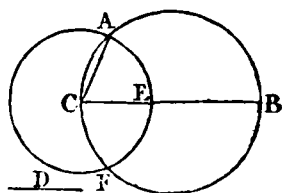
Recta linea in circulo aptari dicitur, quando ejus extrema in circuli circumferentiâ fuerint.

[I.]

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

In dato circulo, datæ rectæ lineæ, quæ diametro ejus major non sit, æqualem rectam lineam aptare.

Sit datus circulus ABC , data autem recta linea, non major circuli diametro, D . Oportet in circulo ABC rectæ lineæ D æqualem rectam lineam aptare. Ducatur circuli ABC diameter BC . Si quidem igitur BC sit æqualis ipsi D , factum jam erit quod proponebatur; etenim in circulo ABC



^a 3. primi.

aptata est BC rectæ lineæ D æqualis. Sin minus, major est BC quam D ; ponatur igitur ^a ipsi D æqualis CE ; et centro quidem C , intervallo autem CE , circulus describatur AEF , qui circulo ABC in A occurrat; et CA jungatur. Itaque quoniam punctum C centrum est AEF circuli; erit CA ipsi CE æqualis; sed D est æqualis CE . Ergo et D ipsi AC æqualis erit. In dato igitur circulo ABC datæ rectæ lineæ D , non majori circuli diametro, æqualis aptata est AC . *Q. E. F.*

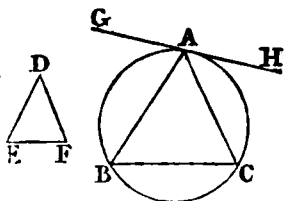
[II.]

PROP. II. PROBL.

In circulo dato, dato triangulo æquiangulum triangulum describere.

Sit datus circulus ABC , datum autem triangulum DEF . Oportet in ABC circulo describere triangulum triangulo DEF æquiangulum. Ducatur recta linea ^b 17. tertii. GAH contingens ^b circulum ABC in puncto A ; et ad rectam lineam AH , et ad punctum in eâ A , angulo DEF æqualis

æqualis ^c angulus constituatur HAC . Rursum ad rectam ^c 23. primi. lineam AG , et ad punctum in ipsâ A , angulo DEF æqualis ^c constituatur angulus GAB ; et BC jungatur. Quoniam igitur circulum ABC contingit quædam recta HAG ; a contactu autem in circulum ducta est AC ; erit HAC angulus æqualis ^d ei, qui in alterno circuli segmento consistit, videlicet ipsi ABC ; sed HAC angulus æqualis est angulo DEF , ergo et angulus ABC angulo DEF est æqualis. Eâdem ratione et angulus ACB est æqualis angulo DFE . Reliquus igitur BAC angulus reliquo EDF æqualis ^e erit. Ergo triangulum ABC triangulo ^e 2. Cor. DEF est æquiangulum, et descriptum est in circulo ^{32. primi.} ABC . In dato igitur circulo dato triangulo æquiangulum triangulum descriptum est. $Q. E. F.$

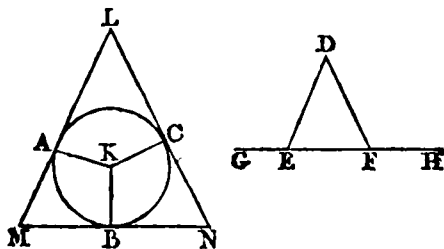


PROP. III. PROBL.

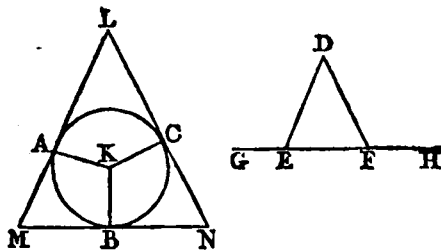
[III.]

Circa datum circulum triangulo datò æquiangulum triangulum describere.

Sit datus circulus ABC , datum autem triangulum DEF . Oportet circa circulum ABC describere triangulum triangulo DEF æquiangulum. Protrahatur EF ex utrâque parte ad puncta H, G , et fumatur circuli ABC centrum K ; et recta linea KB utcunque ducatur:



constituaturque ad rectam lineam KB , et ad punctum in eâ K , angulo quidem DEG æqualis ^f, angulus BKA , ^f 23. primi. angulo autem DFH æqualis, ^f angulus BKC ; et per A, B, C puncta ducantur rectæ lineæ LAM, MBN, NCL circulum ABC contingentes. Jam cum rectæ AK, BK angulo



- angulo AKB sibi invicem inclinantur, angulo DEG æquali, directa non est linea AKB . Rectæ igitur AM , NB , quæ circumulum in punctis A , B , contingunt, ex diametro non oppositis, non erunt inter se parallelæ^h.
- ^h 2. • Cor. Rectæ igitur AM , NB sibi mutuo occurrent. Occurrant in puncto M . Similiter propter angulum BKC angulo DFH æqualemⁱ directa non est linea CKB . Rectæ igitur MB , NC sibi mutuo occurrent. Occurrant in puncto N . Quoniam rectæ MA , MBN , NC circumulum ABC in punctis A , B , C contingunt, a centro autem K ad puncta A , B , C ducuntur rectæ KA , KB , KC ; erunt anguli ad puncta A , B , C recti. In quadrilatero igitur $AMBK$, cujus anguli quatuor rectis sunt æquales (per Theorema primum eorum, quæ Prop. 32. Lib. i. subjunxit Keillius) cum duo KAM , KBM sint recti; erunt reliqui duo AKB , AMB duobus rectis æquales. Duo autem DEG , DEF simul sumpti æquales sunt duobus rectis. Duo igitur AKB , AMB simul sumpti duobus DEG , DEF sunt æquales. Horum autem AKB ipsi DEG est æqualis. Quare et reliquus AMB reliquo DEF æqualis erit. Similiter ostendetur angulus CNB angulo DFE æqualis. Duo igitur AMB , CNM simul sumpti duobus DEF , DFE simul sumptis sunt æquales. Duo autem DEF , DFE duobus rectis sunt minores^k. Duo igitur AMB , CNB duobus rectis sunt minores. Rectæ igitur MA , NC productæ inter se convenient^l. Convenient in puncto L . Triangulum igitur est figura LMN , et propter angulos duos LMN , $LNМ$ duobus DEF , DFE æquales (id enim ostensum) reliquus MLN reliquo EDF æqualis est. Æquiangulum igitur est triangulum LMN triangulo DEF , et circulo ABC circumscriptum est. Q. E. F.

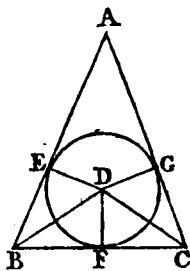
PROP.

PROP. IV. PROBL.

[IV.]

In dato triangulo circulum describere.

Sit datum triangulum ABC . Oportet in triangulo ABC circulum describere. Secentur^m anguli ABC , BCA bifariam rectis lineis BD , CD , quæ convenient inter se in D puncto; et a puncto D ad rectas lineas AB , BC , CA perpendicularesⁿ ducantur DE , DF , DG . Quoniam angulus EBD est æqualis angulo FBD , est autem et rectus BED recto BFD æqualis; duo triangula EBD , DBF duos angulos duobus angulis æquales habent, et unum latus uni lateri æquale; utrique scilicet commune BD , quod uni æqualium angulorum subtenditur. Ergo et reliqua latera reliquis lateribus æqualia^o habebunt, atque erit DE æqualis DF . Et eadem ratione DG æqualis DF . Ergo et DE ipsi DG est æqualis. Tres igitur rectæ lineæ DE , DF , DG inter se æquales sunt; quare centro D , intervallo autem unius ipsarum DE , DF , DG , circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta; et rectas lineas AB , BC , CA continget; propterea quod recti sunt ad E , F , G anguli. Si enim ipsas secet, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, intra circulum cadet, quod est absurdum^p. Non igitur centro D , intervallo autem unius^p ipsarum DE , DF , DG , circulus descriptus secabit rectas lineas AB , BC , CA , quare ipsas continget; atque erit circulus descriptus in triangulo ABC . In dato igitur triangulo ABC circulus EFG descriptus est. *Q. E. F.*

^m 9. primi.ⁿ 12. primi.^o 26. primi.^p 16. tertii.

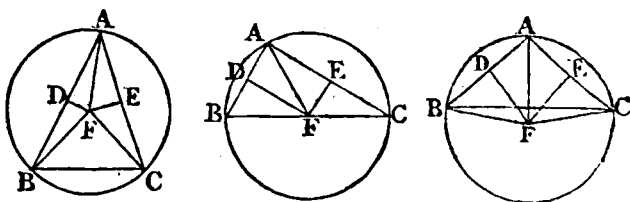
PROP. V. PROBL.

[V.]

Circa datum triangulum circulum describere.

Sit datum triangulum ABC . Oportet circa datum triangulum ABC circulum describere. Secentur AB , AC bifariam^q in D , E punctis; et a punctis D , E ipsis^q AB , AC ad rectos angulos^r ducantur DF , EF , quæ^r quidem vel intra triangulum ABC convenient, vel in rectâ lineâ BC , vel extra ipsam. Convenient primo intra triangulum in puncto F ; et BF , FC , FA jungantur. Quoniam igitur AD est æqualis DB , communis autem;

^q 10. primi.^r 11. primi.



* 4. primi. et ad rectos angulos, DF ; erit basis AF basi FB æqualis*. Similiter ostendetur et CF æqualis FA . Ergo et BF est æqualis FC . Tres igitur FA , FB , FC inter se æquales sunt. Quare centro F , intervallo autem unius ipsarum FA , FB , FC , circulus descriptus etiam per reliqua puncta transibit; atque erit circulus descriptus circa triangulum ABC . Secundo, DF , EF convenient in rectâ lineâ BC , in puncto F , ut in secundâ figurâ; et A F jungatur. Similiter demonstrabimus punctum F centrum esse circuli circa triangulum ABC descripti. Postremo DF , EF convenient extra triangulum ABC rursus in F puncto, ut in tertiâ figurâ; et jungantur AF , FB , FC . Et quoniam rursus AD est æqualis DB , communis autem, et ad rectos angulos, DF ; basis AF basi FB æqualis erit. Similiter demonstrabimus et CF ipsi FA æqualem esse. Quare et BF est æqualis FC . Rursus igitur centro F , intervallo autem unius ipsarum FA , FB , FC , circulus descriptus et per reliqua transibit puncta; atque erit circa triangulum ABC descriptus. Circa datum igitur triangulum circulus descriptus est. *Q. E. F.*

Cor. Si triangulum sit rectangulum, centrum circuli cadet in latus, angulo recto oppositum. Si acutangulum, cadet centrum intra triangulum; si obtusangulum,

* 31. tertii. cadet extra'.

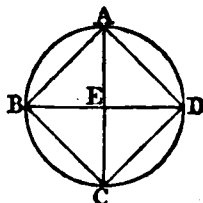
[VI.]

PROP. VI. PROBL.

In dato circulo quadratum describere.

Sit datus circulus $ABCD$. Oportet in $ABCD$ circulo quadratum describere. Ducantur circuli $ABCD$ diametri ad rectos angulos inter se AC , BD ; et AB , BC , CD , DA jungantur. Quoniam igitur BE est æqualis ED , etenim centrum est E , communis autem, et
ad

ad rectos angulos, EA ; erit basis BA æqualis^u basi AD .^u 4. primi. Et eadem ratione utraque ipsarum BC , CD utrique BA , AD est æqualis; æquilaterum igitur est $ABCD$ quadrilaterum. Dico et rectangulum esse. Quoniam enim recta linea BD diameter est $ABCD$ circuli, erit BAD semicirculus; quare angulus BAD rectus^v est. Et eadem ratione unusquisque ipsorum ABC , BCD , CDA est rectus. Rectangulum igitur est $ABCD$ quadrilaterum. Oñsum autem est et æquilaterum esse. Ergo quadratum necessario erit, et descriptum est in circulo $ABCD$. In dato igitur $ABCD$ circulo quadratum $ABCD$ descriptum est. Q. E. F.



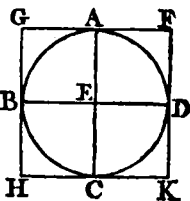
^v 31. tertii.

PROP. VII. PROBL.

[VII.]

Circa datum circulum quadratum describere.

Sit datus circulus $ABCD$. Oportet circa $ABCD$ circulum quadratum describere. Ducantur circuli $ABCD$ duæ diametri AC , BD ad rectos inter se angulos, et per puncta A , B , C , D ducantur circuli $ABCD$ contingentes^x FG , GH , HK , KF . Quoniam igitur FG contingit circulum $ABCD$, a centro autem E ad contactum, qui est ad A , ducitur EA ; erunt^y anguli ad A recti. Eadem ratione, et anguli ad puncta B , C , D , recti sunt. Et quoniam angulus AEB rectus est, est autem et rectus EBG ; erit GH ipsi AC parallela^z. Eadem ratione, et AC parallela est FK . Similiter demonstrabimus et utramque ipsarum GF , HK ipsi BD parallelam esse. Quare et GF est parallela HK . Parallelogramma igitur sunt GK , GC , AK , FB , BK , ac propterea GF quidem est^a æqualis HK ; GH vero ipsi^a FK . Et quoniam AC æqualis est BD ; sed AC quidem utrique ipsarum GH , FK est^a æqualis; BD vero æqualis utrique GF , HK ; et utraque GH , FK utrique GF , HK æqualis erit. Æquilaterum igitur est $FGHK$ quadrilaterum. Dico et rectangulum esse. Quoniam enim parallelogrammum est $GVEA$, atque est rectus AEB angulus, et ipse AGB rectus erit. Similiter demon-



^x 17. tertii.

^y 18. tertii.

^z 28. primi.

^a 34. primi.

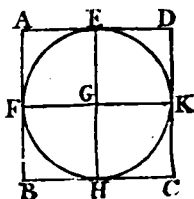
strabimus angulos etiam ad puncta H , K , F , rectos esse. Rectangulum igitur est quadrilaterum $F G H K$. Demonstratum autem est et æquilaterum. Ergo quadratum fit necesse est, et descriptum est circa circulum $A B C D$. Circa datum igitur circulum quadratum descriptum est. *Q. E. F.*

[VIII.]

PROP. VIII. PROBL.

In dato quadrato circulum describere.

Sit datum quadratum $A B C D$. Oportet in quadrato $A B C D$ circulum describere. Secetur utraque ipsarum $A B$, $A D$, bifariam
^b 10. primi. ^b in punctis F , E . Et per E quidem alterutri ipsarum $A B$, $C D$ parallela
^c 31. primi. ^c ducatur $E H$: per F vero ducatur $F K$ parallela ^c alterutri $A D$, $B C$. Parallelogrammum igitur est unumquodque ipsorum $A K$, $K B$, $A H$, $H D$, $A G$, $G C$, $B G$, $G D$; et latera ipsorum, quæ ex opposito,
^d 34. primi. sunt æqualia ^d. Et quoniam $D A$ est æqualis $A B$; et ipsius quidem $A D$ dimidium est $A E$, ipsius vero $A B$ dimidium $A F$; erit $A E$ ipsi $A F$ æqualis; quare et opposita latera æqualia sunt. Ergo $F G$ est æqualis $G E$. Similiter demonstrabimus et utramque ipsarum $G H$, $G K$ utrique $F G$, $G E$ æqualem esse. Quatuor igitur $G E$, $G F$, $G H$, $G K$ inter se sunt æquales. Itaque centro quidem G , intervallo autem unius ipsarum $G E$, $G F$, $G H$, $G K$, circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta; et rectas lineas $A B$, $B C$, $C D$, $D A$ continget, propterea quod anguli ad E , F , H , K recti sunt. Si enim circulus secabit rectas lineas $A B$, $B C$, $C D$, $D A$, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos
^e 16. tertii. ducitur, intra circulum cadet; quod ^e est absurdum. Non igitur centro quidem G , intervallo autem unius ipsarum $G E$, $G F$, $G H$, $G K$, circulus descriptus rectas
^e 16. tertii. lineas $A B$, $B C$, $C D$, $D A$ secabit. Quare ipsas necessario continget; atque erit descriptus in quadrato $A B C D$. In dato igitur quadrato circulus descriptus est. *Q. E. F.*



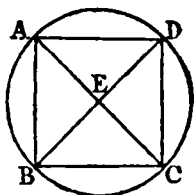
PROP.

PROP. IX. PROBL.

[IX.]

Circa datum quadratum circulum describere.

Sit datum quadratum $ABCD$. Oportet circa $ABCD$ quadratum circulum describere. Jungantur AC , BD , quæ se invicem in puncto E secent. Et quoniam DA est æqualis AB , communis autem AC ; duæ DA , AC duabus BA , AC æquales sunt; et basis DC æqualis basi BC . Angulus igitur DAC angulo BAC æqualis^f. Angulus igitur DAB bifariam sectus est rectâ lineâ AC . Similiter demonstrabimus unumquemque angulorum ABC , BCD , CDA rectis lineis AC , DB bifariam sectum esse. Quoniam igitur angulus DAB angulo ABC est æqualis, atque est anguli quidem DAB dimidium angulus EAB , anguli vero ABC dimidium EBA ; et EAB angulus angulo EBA æqualis erit. Quare et latus EA lateri EB est æquale. Similiter demonstrabimus et utramque re-^g 6. primi. ctarum linearum EC , ED utrique EB , EA æqualem esse. Ergo quatuor rectæ lineæ EA , EB , EC , ED inter se sunt æquales. Centro igitur E , intervallo autem unius ipsarum EA , EB , EC , ED , circulus descriptus etiam per reliqua puncta tranfibit; atque erit descriptus circa $ABCD$ quadratum. Describatur ut $ABCD$. Circa datum igitur quadratum circulus descriptus est. $Q. E. F.$



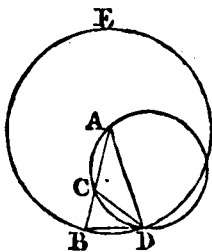
f 8. primi.

PROP. X. PROBL.

[X.]

Isoceles triangulum constitucere, habens utrumque angulorum, qui sunt ad basim, duplum reliqui.

Exponatur recta quædam linea AB , et secetur in C puncto, ita ut rectangulum contentum sub AB , BC æquale^h sit ei quod ex CA describitur quadrato; et centro quidem A , intervallo autem AB , circulus describatur BDE ; apteturque in BDE circulo recta linea BD æqualisⁱ ipsi AC , quæ non est major diametro circuli BDE . Junctâque DA , dico factum esse, quod fieri oportebat. Constitutum est enim triangulum isosceles BAD , habens utrumque angulorum, qui sunt ad basim BD , duplum reliqui BAD . Jungatur enim DC , et circa ADC triangulum^k circulus ACD ^g 5. hujus. describatur.

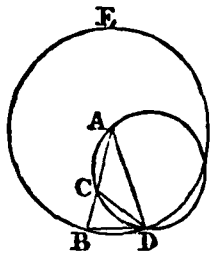


h 11. secundi.

i 1. hujus.

k 5. hujus. describatur.

describatur. Itaque quoniam rectangulum ABC æquale est quadrato, quod fit ex AC ; æqualis autem est AC ipsi BD ; erit sub AB , BC rectangulum quadrato ex BD æquale. Et quoniam extra circulum ACD sumptum est aliquod punctum B , et a puncto B in circulum ACD cadunt duæ rectæ lineæ BCA , BD , quarum altera quidem secatur, altera vero incidit; atque est rectangulum sub AB , BC æquale qua-



- ¹ 37. tertii. drato ex BD : recta linea BD circulum ACD continget. Quoniam igitur BD contingit, et a contactu ad D ducta
² 32. tertii. est DC ; erit BDC angulus æqualis^m ei, qui in alterno circuli segmento constituitur, videlicet angulo DAC . Quod cum angulus BDC æqualis sit ipsi DAC , communis apponatur CDA ; totus igitur BDA est æqualis duobus angulis CDA , DAC . Sed ipsis CDA , DAC exterior angulus
³ 32. primi. BCD estⁿ æqualis. Ergo et BDA æqualis est ipsi BCD .
⁴ 5. primi. Sed BDA angulus est^o æqualis angulo CBD , quoniam et latus AD lateri AB est æquale. Ergo et DBA ipsi BCD æqualis erit. Tres igitur anguli BDA , DBA , BCD inter se æquales sunt. Et quoniam angulus BDC
⁵ 6. primi. æqualis est angulo BCD , et latus BD lateri DC est^p æquale; sed BD ponitur æqualis ipsi CA . Ergo et CA est æqualis CD ; quare et angulus CDA æqualis est angulo DAC . Anguli igitur CDA , DAC simul sumpti ipsius anguli DAC duplices sunt. Est autem et BCD angulus angulis CDA , DAC æqualis; ergo et BCD duplex est ipsius DAC . Sed BCD est æqualis alterutri ipsorum BDA , DBA ; quare et uterque BDA , DBA ipsius DAB est duplex. Isosceles igitur triangulum constitutum est ADB , habens utrumque eorum angulorum, qui sunt ad basim, duplum reliqui. Q. E. F.

[XI.]

PROP. XI. PROBL.

In dato circulo pentagonum æquilaterum et æquiangulum describere.

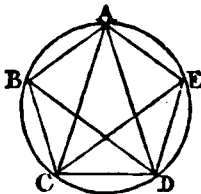
Sit datus circulus $ABCDE$. Oportet in $ABCDE$ circulo pentagonum æquilaterum et æquiangulum describere. Exponatur triangulum isosceles FGH , habens utrumque eorum, qui sunt ad basim GH , angulorum,

¹ 10. hujus. duplum^q anguli, qui est ad F ; et describatur in circulo

² 2. hujus. $ABCDE$ triangulum FGH æquiangulum^r triangulum
 ACD ,

$\triangle ACD$; ita ut angulo quidem, qui est ad F , æqualis sit angulus CAD ; utrique vero ipsorum, qui ad G, H , sit æqualis uterque ACD, CDA .

Et uterque igitur ACD, CDA anguli CAD est duplus. Sectetur uterque ipsorum ACD, CDA bifariam¹ rectis lineis



¹ 9. primi.

CE, DB ; et AB, BC, DE, EA jungantur. Quoniam igitur uterque ipsorum ACD, CDA duplus est ipsius CAD , et secti sunt bifariam rectis lineis CE, DB , quinque anguli DAC, ACE, ECD, CDB, BDA inter se sunt æquales. Æquales autem anguli in æqualibus circumferentiis insunt²; ² 26. tertii. quinque igitur circumferentiæ AB, BC, CD, DE, EA æquales sunt inter se. Sed æquales circumferentias³ æquales rectæ lineæ subtendunt. Ergo et quinque⁴ ³ 29. tertii. rectæ lineæ AB, BC, CD, DE, EA inter se æquales sunt. Æquilaterum igitur est $ABCDE$ pentagonum. Dico et æquiangulum esse. Quoniam enim circumferentiæ AB æqualis est circumferentiæ DE , communis apponatur BCD . Tota igitur $ABCD$ circumferentiæ toti circumferentiæ $EDCB$ est æqualis; et in circumferentiâ quidem $ABCD$ insitit angulus AED , in circumferentiâ vero $EDCB$ insitit BAE . Ergo et BAE angulus est æqualis angulo AED . Eâdem ratione et unusquisque angulorum ABC, BCD, CDE unicuique ipsorum BAE, AED est æqualis. Æquiangulum igitur est $ABCDE$ pentagonum: ostensum autem est et æquilaterum esse. Quare in dato circulo pentagonum æquilaterum et æquiangulum descriptum est. *Q. E. F.*

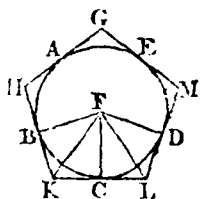
PROP. XII. PROBL.

[XII.]

Circa datum circulum pentagonum æquilaterum et æquiangulum describere.

Sit datus circulus $ABCDE$. Oportet circa circulum $ABCDE$ pentagonum æquilaterum et æquiangulum describere. Intelligentur pentagoni in circulo descripti⁵ angulorum puncta esse A, B, C, D, E , ita ut circumferentiæ AB, BC, CD, DE, EA sint æquales; et per puncta A, B, C, D, E ducantur⁶ circulum contingentes⁷ ⁵ 11. hujus. GH, HK, KL, LM, MG ; et sumpto circuli $ABCDE$ centro F , jungantur FB, FK, FC, FL, FD . Quoniam igitur

- igitur recta linea KL contingit circulum $ABCDE$ in puncto C , et a centro F ad contactum, qui est ad C , ducta est FC , erit FC ad ipsam KL perpendicularis^a. Rectus igitur est uterque angulorum, qui sunt ad C . Eadem ratione et anguli, qui ad puncta B , D , recti sunt. Et quoniam rectus angulus est FKC , quadratum quod sit ex FK æquale^a est quadratis ex FC , CK . Et ob eandem causam quadratis ex FB , BK æquale est ex FK quadratum. Quadrata igitur ex FC , CK quadratis ex FB , BK æqualia sunt; quorum, quod ex FC ei, quod ex FB , est æquale. Ergo reliquum, quod ex CK , reliquo, quod ex BK , æquale erit. Æqualis igitur est BK ipsi CK . Et quoniam FB est æqualis FC , communis autem FK ; duæ BF , FK duabus CF , FK æquales sunt, et basis BK est æqualis basi CK ; erit angulus^b itaque BFK angulo KFC æqualis, angulus vero BKF angulo FKC . Duplus igitur est angulus BFC anguli KFC , et angulus BKC duplus ipsius FKC . Eadem ratione, et angulus CFD anguli CFL est duplus; angulus vero CLD duplus anguli CLF . Et quoniam circumferentia BC circumferentiæ CD est æqualis, et angulus BFC angulo CFD æqualis^c erit. Atque est angulus quidem BFC anguli KFC duplus; angulus vero DFC duplus ipsius LFC : æqualis igitur est angulus KFC angulo CFL . Itaque duo triangula sunt FKC , FLC , duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, et unum latus uni lateri æquale, quod ipsis commune est, FC : ergo et reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt^d, et reliquum angulum reliquo angulo æqualem. Recta igitur linea KC est æqualis rectæ CL , et angulus FKC angulo FLC . Et quoniam KC est æqualis CL , erit KL ipsius KC dupla. Eadem ratione, et HK ipsius BK dupla ostendetur. Rursus quoniam BK ostensa est æqualis ipsi KC , atque est KL quidem dupla KC , HK vero ipsius BK dupla; erit HK ipsi KL æqualis. Similiter et unaquæque ipsarum GH , GM , ML ostendetur æqualis utriusque HK , KL . Æquilaterum igitur est $GHKLM$ pentagonum. Dico etiam æquiangulum esse. Quoniam enim angulus FKC est æqualis angulo FLC ; et ostensus est angulus HKL duplus ipsius FKC ; ipsius vero FLC duplus



duplus $\angle KLM$: erit et $\angle HKL$ angulus angulo $\angle KLM$ æqualis. Simili ratione ostendetur et unusquisque ipsorum $\angle KHG$, $\angle HGM$, $\angle GML$ utrique $\angle HKL$, $\angle KLM$ æqualis. Quinque igitur anguli $\angle GHK$, $\angle HKL$, $\angle KLM$, $\angle LMG$, $\angle MGH$ inter se æquales sunt. Ergo æquiangulum est $\angle GHKLM$ pentagonum. Ostensum autem est etiam æquilaterum esse; et descriptum est circa $ABCDE$ circulum. *Q. E. F.*

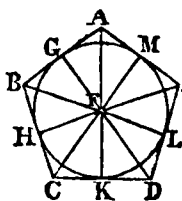
PROP. XIII. PROBL.

[XIII.]

In dato pentagono, quod æquilaterum et æquiangulum sit, circulum describere.

Sit datum pentagonum æquilaterum et æquiangulum

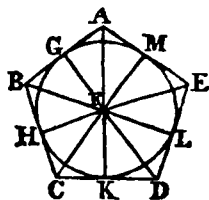
$ABCDE$. Oportet in $ABCDE$ pentagono circulum describere. Secetur uterque angulorum $\angle BCD$, $\angle CDE$ bifariam^e rectis lineis CF , DF ; et a puncto F , in quo conveniunt inter se CF , DF , ducantur rectæ lineæ FB , FA , FE . Quoniam igitur BC est æqualis CD , communis autem CF ; duæ

E^e 9. primi.

BC , CF duabus DC , CF æquales sunt, et angulus $\angle BCF$ est æqualis angulo $\angle DCF$. Basis igitur BF basi FD est æqualis, et $\triangle BFC$ triangulum æquale triangulo $\triangle DCF$,^f 4. primi.

et reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera subtenduntur; angulus igitur $\angle CBF$ angulo $\angle CDF$ æqualis erit. Et quoniam angulus $\angle CDE$ anguli $\angle CDF$ est duplus, et angulus quidem $\angle CDE$ angulo $\angle ABC$ æqualis, angulus vero $\angle CDF$ angulo $\angle CBF$ æqualis; erit et $\angle CBA$ angulus duplus anguli $\angle CBF$; ac propterea angulus $\angle ABF$ angulo $\angle CBF$ æqualis. Angulus igitur $\angle ABC$ bifariam sectus est rectâ lineâ BF . Similiter demonstrabitur unumquemque angulorum $\angle BAE$, $\angle AED$ rectis lineis AF , FE bifariam sectum esse. A puncto F ad rectas lineas AB , BC , CD , DE , EA ducantur^g perpendiculares FG , FH , FK , FL , FM . Et quoniam angulus $\angle HCF$ est æqualis angulo $\angle KCF$; est autem et rectus $\angle FHC$ recto $\angle FKC$ æqualis: duo trianguula $\triangle FHC$, $\triangle FKC$ duos angulos duobus angulis æquales habent, et unum latus uni lateri æquale; commune scilicet utrisque FC , quod uni æqualium angulorum subtenditur. Ergo et reliqua latera reliquis lateribus æqualia^h habebunt; atque erit perpendicularis FH perpendiculi^h 26. primi,

pendiculari FK æqualis. Similiter ostendetur et unaquæque ipsarum FL , FM , FG æqualis utrique FH , FK . Quinque igitur rectæ lineæ FG , FH , FK , FL , FM inter se æquales sunt. Quare centro F , intervallo autem unius ipsarum FG , FH , FK , FL , FM , circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta, et rectas lineas AB , BC , CD , DE , EA continget; propterea quod anguli ad G , H , K , L , M recti sunt. Si enim non continget, sed ipsas secet, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, intra circulum cadet; quod absurdum



¹ 16. tertii.

*Cor. 1. ** (Barrovii) Hinc si duo anguli proximi figuræ cujuscunque æquilateræ et æquiangulæ medii dividantur; rectæ a puncto concursûs dividendium ad reliquos figuræ angulos ductæ, reliquos medios dividunt.

*Cor. 2. ** (Clavii) Si duo anguli proximi figuræ cujuscunque æquilateræ et æquiangulæ medii dividantur; rectæ ex puncto concursûs dividendium in latera figuræ ad perpendicularum deductæ, inter se æquales erunt.

*Cor. 3. ** (Clavii) Eodem igitur modo in omni figurâ æquilaterâ et æquiangulâ circulus describendus est.

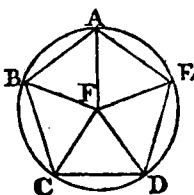
[XIV.]

PROP. XIV. PROBL.

Circa datum pentagonum, quod æquilaterum et æquiangulum sit, circulum describere.

Sit datum pentagonum æquilaterum et æquiangulum $ABCDE$. Oportet circa pentagonum $ABCDE$ circulum describere. Secetur uterque ipforum BCD , CDE angulorum bifariam rectis lineis CF , FD ; et a puncto F , in quo conveniunt rectæ lineæ, ad puncta B , A , E ducantur FB , FA , FE . Et unusquisque angulorum CBA , BAE , AED rectis lineis BF , FA , FE bifariam sectus

* *sectus* erit. Et quoniam *angulus BCD* *angulo CDE* est ^{h Cor. 1. *}
æqualis; atque est *anguli* quidem *BCD*
dimidium *angulus FCD*, *anguli* vero
CDE *dimidium CDF*; erit et *FCD*
angulus æqualis *angulo FDC*; quare
et *latus CF* *lateri FD* est *æquale* ^{13. hujus}.
Similiter demonstrabitur et unaquæ-
que ipsarum *FB*, *FA*, *FE* *æqualis* uni-
cuique *FC*, *FD*. Quinque igitur rectæ
lineæ *FA*, *FB*, *FC*, *FD*, *FE* inter se *æquales* sunt.
Ergo centro *F*, et intervallo unius ipsarum *FA*, *FB*, *FC*,
FD, *FE*, *circulus* descriptus etiam per reliqua transibit
puncta: atque erit descriptus circa pentagonum *ABCDE*,
quod *æquilaterum* est et *æquiangulum*. Describatur, et
sit *ABCDE*. Circa datum igitur pentagonum *æquila-*
terum et *æquiangulum* *circulus* descriptus est. *Q. E. F.*



1 6. primi.

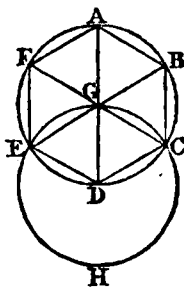
*Cor. ** (Clavii) Eodem prorsus modo circa quamlibet
figuram æquilateram et *æquiangulam* *circulus* descri-
bendus est.

PROP. XV. PROBL.

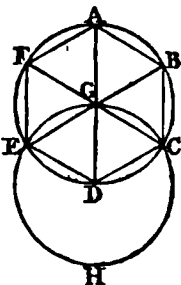
[XV.]

In dato circulo hexagonum æquilaterum et æquiangulum
describere.

Sit *datus* *circulus ABCDEF*. Oportet in *circuli*
ABCDEF *hexagonum æquilaterum*
et *æquiangulum* *describere*. Ducatur
circuli ABCDEF *diameter AD*, su-
maturque *centrum* *circuli G*; et *cen-*
tro quidem *D*, *intervallo* autem *DG*,
circulus descriptur *EGCH*. *Junctæ*
EG, *CG* *ad puncta B*, *F* *producantur*,
et *jungantur* *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF*,
EA. Dico *hexagonum ABCDEF*
æquilaterum et *æquiangulum* *esse*.
Quoniam enim *G* *punctum* *centrum*
est *ABCDEF* *circuli*, erit *GE* ipsi *GD* *æqualis*. Rursus
quoniam D *centrum* est *circuli EGCH*, erit *DE* *æqualis*
eidem *DG*. *Æquilaterum* igitur est *EGD* *triangulum*;
ideoque *tres* ipsius *anguli EGD*, *GDE*, *DEG* inter se
æquales ^a sunt; et sunt *trianguli* *tres anguli æquales* ^a
duobus *rectis*. *Angulus* igitur *EGD* *duorum* *rectorum* ^{m Cor. 5.}
tertia *pars* est. Similiter ostendetur et *DGC* *duorum*
rectorum ^{32. primi.}



- rectorum tertia pars. Et quoniam recta linea $c g$ super rectam EB insistens, angulos, qui deinceps sunt, EGC , CGB , duobus re-
- ° 13. primi. ctis æquales^o efficit; erit et reliquus CGB tertia pars duorum rectorum. Anguli igitur EGD , DGC , CGB inter se sunt æquales. Et qui ipsis ad verticem sunt anguli BGA , AGF ,
- * 18. primi. FGE , æquales^p sunt angulis EGD , DGC , CGB . Quare sex anguli EGD , DGC , CGB , BGA , AGF , FGE inter se æquales sunt. Sed æquales
- * 26. tertii. anguli æqualibus circumferentiis insistant^q. Sex igitur circumferentiæ AB , BC , CD , DE , EF , FA inter se
- * 29. tertii. sunt æquales. Æquales autem circumferentias æquales^r rectæ linæ subtendunt. Ergo et sex rectæ linæ inter se æquales sint necesse est, ac propterea æquilaterum est $ABCDEF$ hexagonum. Dico et æquiangulum esse. Quoniam enim circumferentia AF circumferentiæ ED est æqualis, communis apponatur circumferentia $ABCD$: tota igitur $FABCD$ circumferentia æqualis est toti circumferentiæ $EDCBA$. Et circumferentiæ quidem $FABCD$ angulus FED insistit, circumferentiæ vero $EDCBA$ insistit angulus AFE ; angulus igitur AFE angulo DEF est æqualis. Similiter ostenduntur et reliqui anguli hexagoni $ABCDEF$ sigillatim æquales utrique ipsorum AFE , FED . Ergo æquiangulum est $ABCDEF$ hexagonum. Ostensum autem est et æquilaterum esse; et descriptum est circulo $ABCDEF$. In dato igitur circulo hexagonum æquilaterum et æquiangulum descriptum est. *Q. E. F.*



Ex hoc manifestum est hexagoni latus ei, quæ est ex centro circuli, æquale esse; et si per puncta A , B , C , D , E , F contingentes circumum ducamus, circa circumum describetur hexagonum æquilaterum et æquiangulum, consequenter iis, quæ in pentagono dicta sunt: et præterea similiter in dato hexagono circumum inscribemus, et circumscribemus. *Q. E. F.*

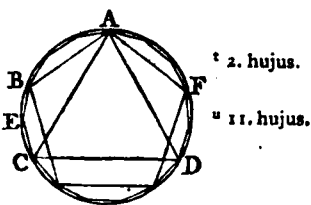
PROP.

PROP. XVI. PROBL.

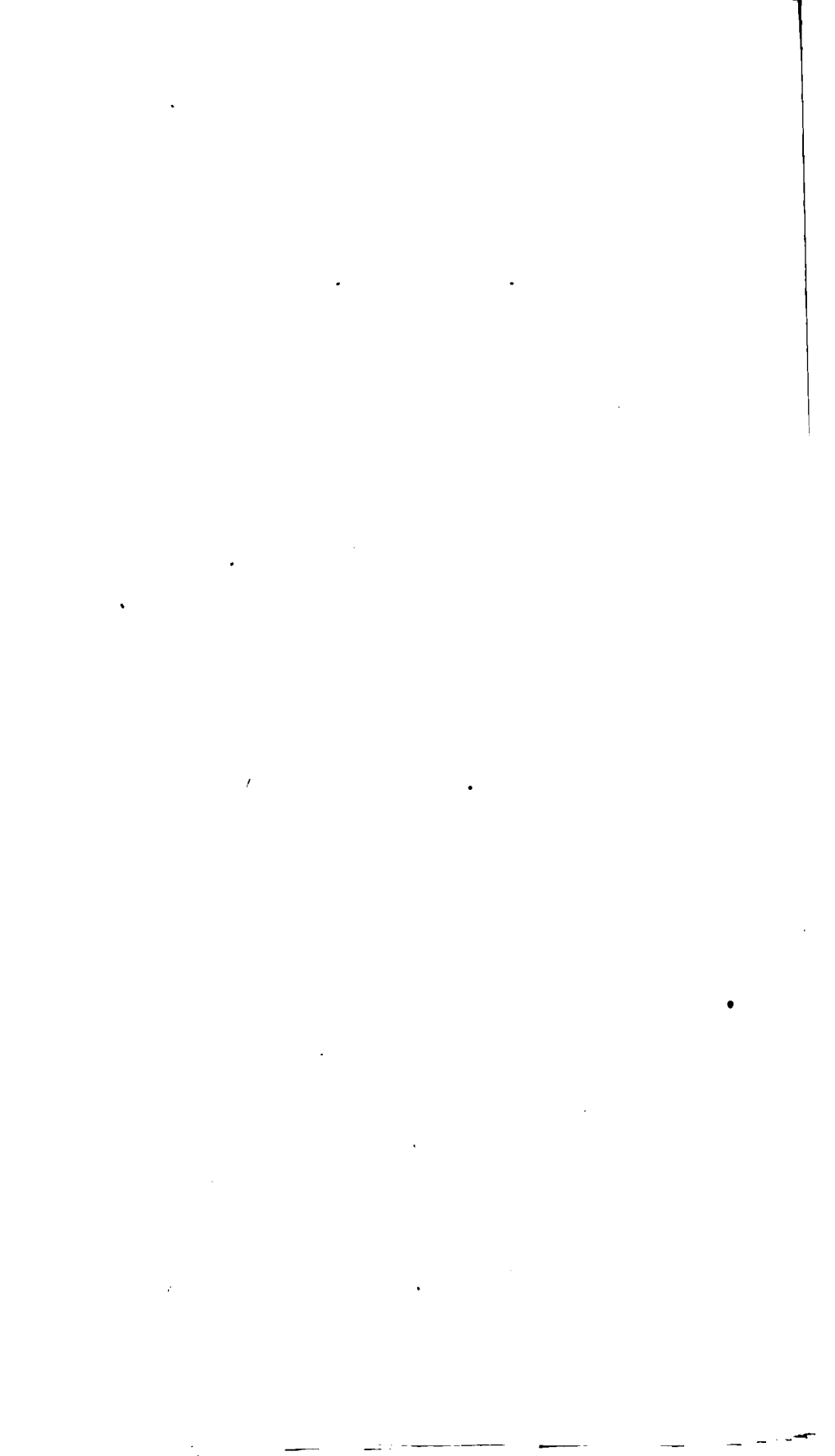
[XVI.]

In dato circulo quindecagonum æquilaterum et æquiangulum describere.

Sit datus circulus $ABCD$. Oportet in $ABCD$ circulo quindecagonum æquilaterum et æquiangulum describere. Sit AC latus trianguli[†] quidem æquilateri, in ipso circulo $ABCD$ descripti; pentagoni[‡] vero æquilateri latus AB . Quarum igitur partium est $ABCD$ circulus quindecim, earum circumferentia quidem ABC , tertia existens circuli, erit quinque; circumferentia vero AB , quæ quinta est circuli, erit trium. Ergo reliqua BC est duarum. Secetur BC bifariam in puncto E [§]. Quare utraque[¶] ipsarum BE , EC circumferentiarum quintadecima pars est $ABCD$ circuli. Si igitur jungentes BE , EC , æquales ipsis in continuum rectas lineas in circulo $ABCD$ aptemus, in ipso quindecagonum æquilaterum et æquiangulum descriptum erit. *Q. E. F.*



Similiter autem iis, quæ dicta sunt in pentagono, si per circuli divisiones, contingentes circulum ducamus, circa ipsum describetur quindecagonum æquilaterum et æquiangulum; et insuper dato quindecagono æquilatero et æquiangulo circulum inscribemus, et circumscribemus.



EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER QUINTUS.

DEFINITIONES.

DEFINITIO I.

[I.]

PARS est magnitudo magnitudinis, minor majoris, quando minor majorem metitur.

II.

[II.]

Multiplex est major minoris, quando majorem minor metitur.

III.

[III.]

Proportio seu ratio est duarum magnitudinum ejusdem generis, secundum quantitatem mutua quædam habitudo.

IV.

[IV.]

Proportionem habere inter se magnitudines dicuntur, quæ multiplicatæ se invicem superare possunt.

V.

[VIII.]

Analogia est proportionum similitudo.

VI.

[IX.]

Analogia vero in tribus ad minimum terminis consistit.

VII.

[V.]

In eadem proportionem magnitudines esse dicuntur, prima ad secundam et tertia ad quartam, quando primæ et tertiæ æquimultiplices, secundæ et quartæ æquimultiplices,

multiplices, juxta quamvis multiplicationem, utraque utramque, vel unà superant, vel unà æquales sunt, vel unà deficiunt, inter se comparatæ.

[VI.]

VIII.

Magnitudines quæ eandem proportionem habent, proportionales vocentur.

*Cor. ** Manifestum est ex definitione septimâ, si quatuor magnitudines sint proportionales, et inverse proportionales esse.

[VII.]

IX.

Prima ad secundam major esse dicitur quam in proportionem tertiæ ad quartam (vel ad secundam majorem proportionem habere quam tertia ad quartam) quando minor aliqua quam prima ad secundam proportionem habet eandem, quam tertia ad quartam.

[X.]

X.

Quando tres magnitudines proportionales sunt, prima ad tertiam, duplicatam proportionem habere dicitur ejus, quam habet ad secundam.

[XI.]

XI.

Quando autem quatuor magnitudines sunt proportionales, prima ad quartam triplicatam habere proportionem dicitur ejus, quam habet ad secundam; et deinceps, uno semper amplius quoadusque analogia processerit.

[XII.]

XII.

Homologæ magnitudines dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, consequentes vero consequentibus.

[XIII.]

XIII.

Alterna seu permutata ratio est sumptio antecedentis ad antecedentem, et consequentis ad consequentem.

[XIV.]

XIV.

Inversa ratio est sumptio consequentis, ceu antecedentis, ad antecedentem ceu consequentem.

[XV.]

XV.

Compositio rationis est sumptio antecedentis unà cum consequente, tanquam unius, ad ipsam consequentem.

[XVI.]

XVI.

Divisio rationis est sumptio excessus, quo antecedens superat consequentem, ad ipsam consequentem.

XVII.

XVII.

[XVII.]

Conversio rationis est sumptio antecedentis ad excessum, quo antecedens ipsam consequentem superat.

XVIII.

[XVIII.]

Ex æquo, sive ex æqualitate, ratio est; cum plures magnitudines extiterint, et aliæ, ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur et in eadem proportionem, fueritque ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, ita in secundis magnitudinibus prima ad ultimam: vel aliter, est sumptio extremarum, omittis mediis.

XIX.

[XIX.]

Ordinata proportio est, quando fuerit ut antecedens ad consequentem, ita antecedens ad consequentem; ut autem consequens ad aliam quampiam, ita consequens ad aliam quampiam.

XX.

[XX.]

Perturbata vero proportio est, quando tribus existentibus magnitudinibus, et aliis, ipsis numero æqualibus, fuerit ut in primis magnitudinibus antecedens ad consequentem, ita in secundis magnitudinibus antecedens ad consequentem, ut autem in primis magnitudinibus consequens ad aliam quampiam, ita in secundis alia quæpiam ad antecedentem.

AXIOMATA.

I.

[I.]

Ejusdem sive æqualium æquimultiples inter se æquales sunt.

II.

[II.]

Quarum eadem æquimultiplex est, vel quarum æquales sunt æquimultiples, et ipsæ inter se sunt æquales.

• III. •

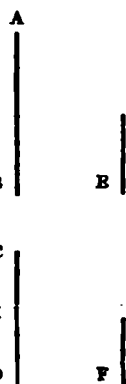
Inæqualium æquimultiples sunt inæquales, et major est majoris multiplex.

[I.]

PROPOSITIO I. THEOREMA.

Si fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, æqualium numero, singulæ singularum æquimultiples; quotuplex est una magnitudo unius, totuplices erunt et omnes omnium.

Sint quotcunque magnitudines AB, CD quotcunque magnitudinum E, F , æqualium numero, singulæ singularum æquimultiples. Dico quotuplex est AB ipsius E , totuplices esse et AB, CD simul ipsarum E, F simul. Quoniam enim AB æquimultiplex est ipsius E , ac CD ipsius F ; quot magnitudines sunt in AB æquales ipsi E , tot erunt et in CD æquales ipsi F . Dividatur AB quidem in partes ipsi E æquales, quæ sint AG, GB ; et CD dividatur in partes æquales ipsi F , videlicet CH, HD . Erit igitur multitudo partium CH, HD æqualis multitudini ipsarum AG, GB . Et quoniam AG est æqualis E , et CH æqualis F ; erunt et AG, CH æquales ipsis E, F . Eadem ratione, quoniam GB est æqualis E , et HD ipsi F ; erunt GB, HD æquales ipsis E, F . Quot igitur sunt in AB æquales ipsi E , tot sunt et in AB, CD æquales ipsis E, F . Ergo quotuplex est AB ipsius E , totuplices erunt et AB, CD simul ipsarum E, F simul. Si igitur fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, æqualium numero, singulæ singularum æquimultiples; quotuplex est una magnitudo unius, totuplices erunt et omnes omnium. Q. E. D.



[II.]

PROP. II. THEOR.

Si prima secundæ æquimultiplex fuerit, ac tertia quartæ; fuerit autem et quinta secundæ æquimultiplex, ac sexta quartæ; erit etiam composita prima cum quintâ secundæ æquimultiplex, ac tertia cum sextâ quartæ.

Sit prima AB secundæ C æquimultiplex, ac tertia DE quartæ F . Sit autem et quinta BG secundæ C æquimultiplex, ac sexta EH quartæ F . Dico et compositam primam cum quintâ, scil. AG , secundæ C æquimultiplicem

multiplicem esse, ac tertiam cum sextâ, sc. DH , quartæ F . Quoniam enim AB æquimultiplex est C , ac DE ipsius F ; quot magnitudines sunt in AB æquales C , tot erunt et in DE æquales F . Eâdem ratione et quot sunt in BG æquales C , tot et in EH erunt æquales F . Quot igitur sunt in totâ AG æquales C , tot erunt et in totâ DH æquales F . Ergo quotuplex est AG ipsius C , totuplex est et DH ipsius F . Et composita igitur prima cum quintâ AG secundæ C æquimultiplex erit, ac tertia cum sextâ DH quartæ F . Quare si prima secundæ æquimultiplex fuerit, ac tertia quartæ, fuerit autem et quinta secundæ æquimultiplex, ac sexta quartæ; erit composita quoque prima cum quintâ æquimultiplex secundæ, ac tertia cum sextâ quartæ.

Q. E. D.

PROP. III. THEOR.

[III.]

Si prima secundæ æquimultiplex fuerit, ac tertia quartæ; sumantur autem æquimultiplices primæ et tertiæ; erit et, ex æquali, sumptarum utraque utriusque æquimultiplex, altera quidem secundæ, altera vero quartæ.

Sit prima A secundæ B æquimultiplex, ac tertia C quartæ D ; et sumantur ipsarum A , C æquimultiplices EF , GH . Dico EF æquimultiplicem esse ipsius B , ac GH ipsius D . Quoniam enim EF æquimultiplex est ipsius A , ac GH ipsius C ; quot magnitudines sunt in EF æquales A , tot erunt et in GH æquales C . Dividatur EF quidem in magnitudines ipsi A æquales EK , KF ; GH vero dividatur in magnitudines æquales C , videlicet GL , LH . Erit igitur ipsarum EK , KF multitudo æqualis multitudini ipsarum GL , LH . Et quoniam æquimultiplex est A ipsius B , ac C ipsius D : æqualis autem EK ipsi A , et GL ipsi C ; erit EK æquimultiplex ipsius B , ac GL ipsius D . Eâdem ratione æquimultiplex erit KF ipsius B , ac LH ipsius D .

Quoniam igitur prima EK secundæ B æquimultiplex est, ac tertia GL quartæ D ; est autem et quinta KF secundæ B æquimultiplex, ac sexta LH quartæ D : erit et composita prima cum quintâ EF secundæ B æquimultiplex^a, ac tertia cum sextâ GH quartæ D . Si igitur prima secundæ fuerit æquimultiplex, ac tertia quartæ, sumantur autem primæ et tertiæ æquimultiplices; erit et, ex æquali, sumptarum utraque utriusque æquimultiplex, altera quidem secundæ, altera vero quartæ. *Q. E. D.*

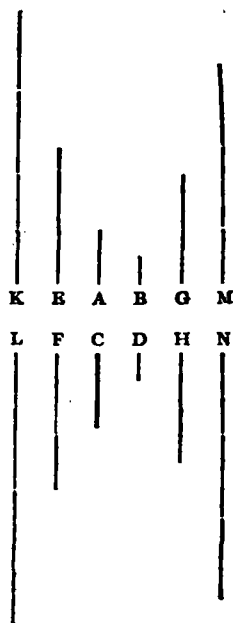
[IV.]

PROP. IV. THEOR.

Si prima ad secundam eandem habet proportionem, quam tertia ad quartam; et æquimultiplices primæ et tertiæ ad æquimultiplices secundæ et quartæ, juxta quamvis multiplicationem, eandem proportionem habebunt, inter se comparatæ.

Prima A ad secundam B eandem proportionem habeat, quam tertia C ad quartam D . Et sumantur ipsarum quidem A , C utcumque æquimultiplices E , F ; ipsarum vero B , D aliæ utcumque æquimultiplices G , H . Dico E ad G ita esse ut F ad H . Sumantur rursus ipsarum E , F utcumque æquimultiplices K , L , et ipsarum G , H utcumque æquimultiplices M , N . Quoniam igitur E æquimultiplex est ipsius A , atque F ipsius C ; sumuntur autem ipsarum E , F æquimultiplices K , L :
^b 3. hujus. erit K æquimultiplex^b ipsius A , atque L ipsius C . Eâdem ratione M æquimultiplex erit ipsius B , atque N ipsius D . Et quoniam est ut A ad B ita C ad D ; sumptæ autem sunt ipsarum A , C æquimultiplices K , L ; et ipsarum B , D aliæ æquimultiplices M , N : si^c K superat M , superabit et L ipsam N ; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Suntque K , L quidem ipsarum E , F utcumque æquimultiplices; M , N vero ipsarum G , H aliæ utcumque æquimultiplices.

^c Def. 5. hujus.



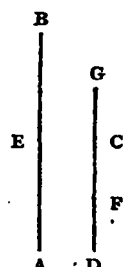
Ut

Ut igitur E ad G ita ^derit F ad H . Quare si prima ad ^d Def. 5.
secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad
quartam; et æquimultiples primæ ac tertiæ ad æqui-
multiples secundæ ac quartæ, juxta quamvis multi-
plicationem, eandem proportionem habebunt, inter se
comparatæ. Q. E. D.

PROP. V. THEOR.

[V.]

*Si magnitudo magnitudinis æquimultiplex sit, atque ab-
lata ablata; et reliqua reliquæ æquimultiplex erit, ac
tota totius.*

Magnitudo AB magnitudinis CD æquimultiplex sit,
atque ablata AE ablata CF . Dico et reliquam EB re-
liquæ FD æquimultiplicem esse, atque totam
 AB totius CD . Quotuplex enim est AE  CF . Totuplex fiat et EB ipse CG .
Et quoniam AE æquimultiplex est CF , at-
que EB ipse CG ; erit ^e AB æquimulti-
plex CF , ac AB ipse GF ; ponitur autem
æquimultiplex AE ipse CF , ac AB ipse
 CD . Æquimultiplex igitur est AB utri-
usque GF , CD ; ac propterea GF ipse CD
est ^f æqualis. Communis auferatur CF .
Reliqua igitur GC æqualis est reliquæ DF .

^e 1. hujus.^f Ax. 2.
hujus.

Itaque quoniam AE æquimultiplex est CF , ac EB ip-
sus CG , estque CG æqualis DF ; erit AB æquimulti-
plex CF , ac EB ipse FD . Æquimultiplex autem po-
nitur AE ipse CF , ac AB ipse CD . Ergo EB est
æquimultiplex FD , ac AB ipse CD . Et reliqua igi-
tur EB reliquæ FD æquimultiplex est, atque tota AB
totius CD . Quare si magnitudo magnitudinis æqui-
multiplex sit, atque ablata ablata; et reliqua reliquæ
erit æquimultiplex, ac tota totius. Q. E. D.

PROP. VI. THEOR.

[VI.]

*Si duæ magnitudines duarum magnitudinum æquimulti-
plices sint, et ablata quædam sint earundem æquimulti-
plices; erunt et reliquæ, vel eisdem æquales, vel ipsarum
æquimultiplices.*

Duæ magnitudines AB , CD duarum magnitudinum
 E , F æquimultiplices sint; et ablata AG , CH earundem
sint æquimultiplices. Dico et reliquas GB , HD vel
ipsis

ipsis E, F æquales esse, vel ipsarum æquimultiplices. Sit enim primo GB æqualis E . Dico et HD ipsi F esse æqualem. Ponatur ipsi F æqualis CK . Et quoniam AG æquimultiplex est E , ac CH ipsius F ; estque GB quidem æqualis E ; CK vero æqualis F : erit AB æquimultiplex E , ac KH ipsius F . Æquimultiplex autem ponitur AB ipsius E , ac CD ipsius F . Ergo KH æquimultiplex est F , ac CD ipsius F . Quoniam igitur utraque ipsarum KH, CD est æquimultiplex F , erit KH æqualis CD . Communis auferatur CH . Ergo reliqua KC reliquæ HD est æqualis. Sed KC est æqualis F . Et HD igitur ipsi F est æqualis; ideoque GB ipsi E , et HD ipsi F æqualis erit. Similiter demonstrabimus si GB multiplex fuerit ipsius E , et HD ipsius F æquimultiplicem esse. Si igitur duæ magnitudines duarum magnitudinum æquimultiplices sint, et ablatae quædam sint earundem æquimultiplices; erunt et reliquæ, vel eisdem æquales, vel ipsarum æquimultiplices. *Q. E. D.*

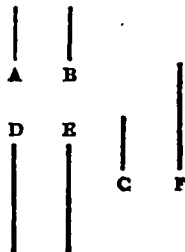
[VII. IX.]

PROP. VII. THEOR.

Æqualium ad eandem eadem est proportio. Et æquales sunt, quarum ad eandem proportio eadem.

Sint æquales A, B , et ejusdem generis tertia quædam C . Dico A ad C eandem proportionem habere, quam B ad C .

Duarum A, B capiantur utcumque æquimultiplices D, E ; et tertiæ C multiplex quælibet F . Æqualium A, B æquimultiplices D, E inter se sunt æquales¹. Quare si D major sit quam F , et E eadem F major erit. Si D, F inter se æquales sint, erunt E, F inter se æquales. Si D minor sit quam F , et E eadem F minor erit. Æquales igitur



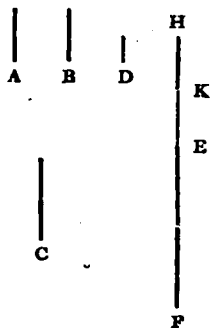
A, B

A, B ad tertiam c eandem utraque proportionem habent¹.

Habeant jam A, B ad tertiam c eandem utraque pro-

¹ Def. 5.
hujus.

portionem. Dico A, B esse inter se æquales. Non enim. Altera igitur major. Major sit A: excessui autem ponatur D æqualis. Multiplicari potest magnitudo D, eo usque ut magnitudine c major evadat. Factam puta multiplicationem, et fit HE multiplex magnitudinis D, magnitudine c major. Capiatur EF toties multiplex magnitudinis B, quoties HE magnitudinis D. Quoniam magnitudo A magnitudinibus



B, D simul æqualis est; erunt HF, FE magnitudinum A, B æquimultiplices^k. Capiatur^k i. hujus.

FK magnitudinis c multiplex, magnitudine FE proxime major. EK igitur non major est quam c. Ast EH major quam c¹. Quare EH major quam EK. Additoque com-¹ Per con-
muni FE, HF major quam KF. FE autem minor est^{strucl.}

quam FK¹. Sed cum A ad c eandem proportionem habeat, quam B ad c; magnitudines autem FE, FH magnitudinum A, B sint æquimultiplices, et FK multiplex sit ipsius c, et FH major sit quam FK; erit FE major quam FK¹. Sed ostensa est minor. Simul igitur major et minor. Quod est absurdum. Non sunt igitur A et B inæquales. Æquales igitur. Æqualium igitur ad eandem &c. Q. E. D.

Cor.* Propositis duabus magnitudinibus inæqualibus A et B, et ejusdem generis tertiâ aliquâ c; inveniri possunt magnitudinum A, B æquimultiplices tales, ut majoris multiplex multiplicem quandam magnitudinis c superet, cum minoris multiplex eadem magnitudinis c multiplici minor sit.

PROP. VIII. THEOR.

[VII. IX.]

Ejusdem ad æquales eadem est proportio. Et æquales sunt, ad quas ejusdem proportio est eadem.

Æquales sint A, B, et generis ejusdem sit tertia quævis c. Dico magnitudinem c ad utramque A, B eandem proportionem habere. Capiantur enim A et B æquimultiplices D, E; et magnitudinis c multiplex quælibet

quælibet F . $\mathcal{A}$ equales erunt D , E , $\mathcal{A}$ equalium $\mathcal{A}$ equi-
^m Ax. 1. multiplices ^m. Quare si F major sit
 hujus. quam D , eadem F major erit quam
 E . Si F , D $\mathcal{A}$ equales sint, $\mathcal{A}$ equales
 erunt F , E . Si F minor quam D ,
 eadem F minor quam E . Magni-
 tudo igitur c ad utramque $\mathcal{A}$ equa-
 lium A , B eandem proportionem
^a Def. 5. habet ⁿ. Quod primum erat de-
 monstrandum.

Habeat jam c ad utramque A , B
 proportionem eandem. Dico A , B
 $\mathcal{A}$ equales. Non enim. In $\mathcal{A}$ equales igitur.
 Inveniri igitur possunt magni-
 tudinum A , B istiusmodi $\mathcal{A}$ equi-
 multiplices, ut majoris multiplex multiplicem quandam
 magnitudinis c superet, cum minoris multiplex eadem
^a Cor. ^a 7. magnitudinis c multiplici minor sit ^o. Non eadem igitur
 hujus. erit magnitudinis c ad A , quæ ipsius ad B proportio.
 Quod hypothefi contrarium est. Non sunt igitur A , B
 in $\mathcal{A}$ equales. $\mathcal{A}$ equales igitur. Quare ejusdem ad $\mathcal{A}$ -
 quales &c. $Q. E. D.$

[VIII. X.]

PROP. IX. THEOR.

*In $\mathcal{A}$ equalium major ad eandem majorem proportionem habet.
 Et major est, cujus proportio ad eandem major.*

In $\mathcal{A}$ equalium A , B , C major sit A , B . Dico A , B ad ter-
 tiam quamlibet D , ejusdem generis,
 proportionem habere majorem, quam c
 ad eandem D habet. Capiatur A , E illi
 c $\mathcal{A}$ equalis. $\mathcal{A}$ equales igitur A , E et c ad
 eandem D eandem proportionem ha-
^a 7. hujus. bent ^p. Sed propter $\mathcal{A}$ equales A , E , c , et
 c minorem quam A , B , erit A , E minor
 quam A , B . Minor igitur quam A , B ha-
 bet ad D proportionem eandem, quam
 c ad D . Ergo A , B ad D majorem habet proportionem
 quam c ad D .

^a Def. 7.
 hujus.

In $\mathcal{A}$ equalium autem A , B , C , habeat A , B ad tertiam ali-
 quam homogeneam D majorem proportionem quam c
 ad D . Dico A , B majorem quam c . Habet enim mi-
 nor quædam quam A , B ad D proportionem eam, quam
 c ad D . Minor illa sit A , E . $\mathcal{A}$ equales igitur sunt

A , E ,

A E, c'. Quare AB, quæ major est quam A E, ejus 9. hujus. æquali c major erit. Quare inæqualium major &c.
Q. E. D.

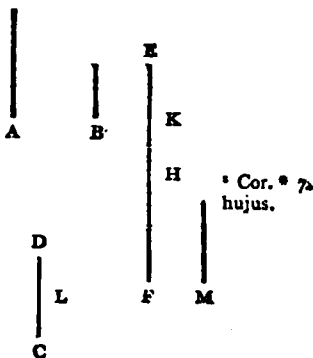
PROP. X. THEOR.

[VIII. X.]

Eadem ad inæqualium minorem majorem proportionem habet. Et minor est, ad quam ejusdem proportio major.

Inæqualium A, B sit B minor. Et ejusdem generis sit alia quævis CD. Dico CD ad B majorem proportionem habere quam ad A. Magnitudinum A, B capiantur æquimultiples FE, FH; magnitudinis etiam CD multiplex FK, quæ minor sit quam FE, major autem quam FH. Namque eo modo multiplices capi possunt*. Habeat CL ad B proportionem eam, quam CD ad A. Quoties autem FK multiplex est magnitudinis CD, toties sit M illius CL. Jam cum CD ad A proportionem habeat, quam CL ad B; magnitudines autem FK, M primæ et tertiæ, CD et CL, sint æquimultiples, et FE, FH secundæ et quartæ A et B; FK autem minor sit quam FE, idcirco M minor erit quam FH'. Multo igitur minor quam FK. Sunt Def. 5. autem M, FK magnitudinum CL, CD æquimultiples: hujus. CL igitur minor erit quam CD". Minor igitur quam Ax. 3. 6 CD habet ad B eandem, quam CD ad A proportionem: hujus. CD igitur majorem habet ad B quam ad A proportionem*. Def. 7. Quod primum erat demonstrandum. hujus.

Habeat jam CD ad B proportionem majorem quam ad A. Dico B minorem quam A. Nam cum CD majorem habeat ad B quam ad A proportionem; minor aliqua quam CD habet ad B proportionem, quam CD ad A*. Sit minor illa CL. Inæqualium CD, CL capiantur FK, M æquimultiples; et magnitudinis B multiplex quædam FH, quæ major sit quam M, minor autem quam FK. Trium enim CD, CL, B eo modo capi possunt multiplices*. Quoties autem est FH multiplex ipsius B, toties sit FE ipsius A. Jam cum CL ad B proportionem habeat eandem, quam CD ad A, et magnitudines M, FK primæ et tertiæ, CL et CD, sint æqui-



æquimultiplices, necnon FH et FE secundæ et quartæ B et A , harum autem M minor sit quam FH ; erit FK minor quam FE . Quare FH multo minor quam FE . Sunt autem FH , FE magnitudinum B , A æquimultiplices. Quare B minor est quam A . Quare eadem ad inæqualium &c. *Q. E. D.*

v Ax. 3.*
hujus.

[XI.]

PROP. XI. THEOR.

Quæ eidem eadem sunt proportionēs, et inter se eadem sunt.

Sint enim ut A ad B ita C ad D ; ut autem C ad D ita E ad F . Dico ut A ad B ita esse E ad F . Sumantur enim

G —————	H —————	K —————
A —————	C —————	E —————
B —————	D —————	F —————
L —————	M —————	N —————

* Def. 5.
hujus.

ipsarum quidem A , C , E utcumque æquimultiplices G , H , K ; ipsarum vero B , D , F aliæ utcumque æquimultiplices L , M , N . Quoniam igitur est ut A ad B ita C ad D ; et sumptæ sunt ipsarum A , C æquimultiplices G , H , et ipsarum B , D aliæ utcumque æquimultiplices L , M ; si G superat L , et H ipsam M superabit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Rursus quoniam est ut C ad D ita E ad F ; et sumptæ sunt ipsarum C , E utcumque æquimultiplices H , K , ipsarum vero D , F aliæ utcumque æquimultiplices M , N ; si H superat M , et K ipsam N superabit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Sed si H superat M , et G superabit L ; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Quare si G superat L , et K ipsam N superabit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Et sunt G , K quidem ipsarum A , E æquimultiplices; L , N vero ipsarum B , F aliæ utcumque æquimultiplices. Ergo A ad B , ita erit E ad F . Quæ igitur eidem eadem sunt proportionēs, et inter se eadem sunt. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. XII. THEOR.

[XII.]

Si quotcunque magnitudines proportionales fuerint ; ut una antecedentium ad unam consequentium, ita erunt antecedentes omnes ad omnes consequentes.

Sint quotcunque magnitudines proportionales A, B, C, D, E, F, et ut A ad B, ita sit C ad D, et E ad F. Dico ut A ad B, ita esse A, C, E, ad B, D, F. Sumantur enim

G —————	H —————	K —————
A —————	C —————	E —————
B —————	D —————	F —————
L —————	M —————	N —————

ipsarum A, C, E utcunque æquimultiplices G, H, K, et ipsarum B, D, F aliæ utcunque æquimultiplices L, M, N. Quoniam igitur ut A ad B, ita est C ad D, et E ad F; et sumptæ sunt ipsarum quidem A, C, E utcunque æquimultiplices G, H, K, ipsarum vero B, D, F aliæ utcunque æquimultiplices L, M, N; si ^a G superat L, et H ipsam M ^a Def. 5. superabit, et K ipsam N; et si æqualis, æqualis; et si ^{hujus} minor, minor. Quare et si G superat L, superabunt et G, H, K ipsas L, M, N; et si æqualis, æquales; et si minor, minores. Suntque G, et G, H, K ipsarum A, et A, C, E æquimultiplices; quoniam si fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, æqualium numero, singulæ singularum æquimultiplices; quotuplex est una magnitudo unius, totuplices ^b erunt et ^b 1. hujus. omnes omnium. Et eâdem ratione L, et L, M, N ipsarum B, et B, D, F sunt æquimultiplices. Est igitur ^a ut A ad B, ita A, C, E ad B, D, F. Quare si quotcunque magnitudines proportionales fuerint; ut una antecedentium ad unam consequentium, ita erunt antecedentes omnes ad omnes consequentes. Q. E. D.

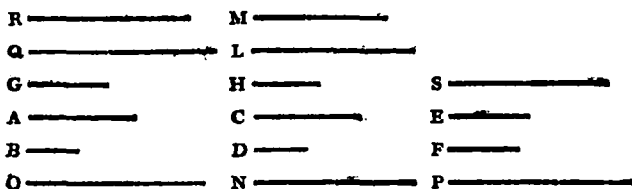
PROP.

[XIII.]

PROP. XIII. THEOR.

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam maiorem proportionem habeat quam quinta ad sextam: et prima ad secundam maiorem habebit proportionem, quam quinta ad sextam.

Sit prima A ad secundam B ut tertia c ad quartam D. Tertia autem c major fit quam ut habeat ad quartam D proportionem eam, quam quinta E ad sextam F. Dico



primam A maiorem esse quam ut habeat ad secundam B proportionem, quam quinta E ad sextam F. Habeat enim G ad B proportionem eam, quam E ad F. Propter c maiorem quam ad D in ratione E ad F, minor aliqua quam c habet ad D proportionem eam, quam B ad F. Sit H minor illa. Inæqualium c, H capiantur L, M æquimultiples; capiatur etiam N multiplex ipsius D, quæ major fit quam M, minor autem quam L. Trium enim c, H, D ita capi possunt multiplices^c. Capiantur etiam Q, R, S magnitudinum A, G, E toties multiplices, quoties L, M magnitudinum sunt c, H. Capiantur denique O, P magnitudinum B, F toties multiplices, quoties N multiplex est ipsius D. Jam cum H sit ad D ut E ad F, harum autem primæ et tertiæ, H et E, sint M et S æquimultiples; secundæ autem et quartæ, D et F, sint N, P æquimultiples; cum præterea harum multiplicium M minor sit quam N, erit S minor quam P^d. Rursum cum G sit ad B ut E ad F, harum autem primæ et tertiæ, G et E, sint R, S æquimultiples, secundæ autem et quartæ, B et F, æquimultiples sint O et P; cum præterea harum multiplicium S minor sit quam P (id enim modo ostensum) erit R minor quam O^d. Rursum cum A sit ad B ut c ad D, harum autem primæ et tertiæ, A

^c Cor. * 7. hujus.

^d Def. 5. hujus.

et

et c, sint a, l æquimultiples; secundæ autem et quartæ, b et d, æquimultiples o et n; præterea cum harum multiplicium l major sit quam n, erit etiam a major quam o^e. Multo major igitur quam r, quæ^e Def. 5. offensa est minor quam o: Magnitudinum autem a, g^{hujus} sunt illæ a, r æquimultiples. Quare a major est quam g^f. Sed g habet ad b proportionem eam, quam^f Ax. 3.* e ad f. Major igitur a ad b quam in ratione e ad f.^{hujus} Quare si prima &c. Q. E. D.

Cor.* Si prima ad secundam major sit quam in ra-

tionem tertiæ ad quartam, invertendo erit quarta ad tertiam major quam in proportionem secundæ ad primam. Sit a ad b major quam in ratione c ad d.

Dico d ad c majorem quam in ratione b ad a.

Sit enim c ad e ut a ad b.

Cum igitur c sit ad e ut a ad b, et a

ad b major quam in ratione c ad d;

erit c ad e major quam in propor-

tionem c ad d^e. Quare e minor erit

quam d^b. Sed cum c ad e ut a ad b,

invertendo erit e ad c ut b ad a¹. Minor igitur

quam d habet ad c proportionem eam, quam b ad a.

Q. E. D.

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; prima autem major sit quam tertia, et secunda quam quarta major erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor.

Prima enim a ad secundam b eandem proportionem

habeat, quam tertia c ad quartam d:

major autem sit a quam c. Dico et

b quam d majorem esse. Quoniam

enim a major est quam c, et alia est

utcumque magnitudo b, habebit^k a

ad b majorem proportionem quam c

ad b; sed ut a ad b ita c ad d. Ergo

et c ad d majorem habebit^l propor-

tionem quam c ad b. Ad quam vero

eadem majorem proportionem habet,

illa minor^m est. Quare d est minor

quam

k

quam

quam

quam

quam

quam

quam

quam

quam



* Per hanc Prop.

^h 10. hujus.

ⁱ Cor.* Def.

⁸ hujus.

⁸ hujus.

⁸ hujus.

⁸ hujus.

⁸ hujus.

⁸ hujus.

⁸ hujus.

⁸ hujus.

⁸ hujus.

⁸ hujus.

⁸ hujus.

⁸ hujus.

⁸ hujus.

⁸ hujus.

⁸ hujus.

⁸ hujus.

⁸ hujus.

⁸ hujus.

⁸ hujus.

⁸ hujus.

⁸ hujus.

⁸ hujus.

⁸ hujus.

⁸ hujus.

⁸ hujus.

⁸ hujus.

⁸ hujus.

⁸ hujus.

⁸ hujus.

quam B; ac propterea B quam D major erit. Similiter demonstrabimus et si A æqualis sit ipsi C, et B ipsi D esse æqualem; et si A sit minor quam C, et B quam D minorem esse. Si igitur prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; prima autem major sit quam tertia, et secunda quam quarta major erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Q. E. D.

SCHOLION.*

Subjungere visum est demonstrationem cognati Theorematis, quod mirum est Euclidem silentio præterisse.

Si prima ad secundam eandem proportionem habeat, quam tertia ad quartam, prima autem secundæ æqualis sit, erit et tertia æqualis quartæ. Quod si prima major sit quam secunda, erit et tertia major quam quarta; si minor, minor.

(Demonstratio Simsoni) Sit prima A ad secundam B, ut tertia C ad quartam D. Quatuor A, B, C, D capiantur E, F, G, H æquimultiples.

Jam si æquales sint A et B, æquales erunt E et F, æqualium utique æquimultiples^a. Sed cum A sit ad B ut C ad D, primæ autem et tertiæ æquimultiples sint, E, G, secundæ item et quartæ, F, H; cum præterea E ostensa sit æqualis ipsi F, erit G æqualis ipsi H^b. Illæ autem G, H tertiæ et quartæ C, D sunt æquimultiples. Æquales igitur sunt C et D^c.

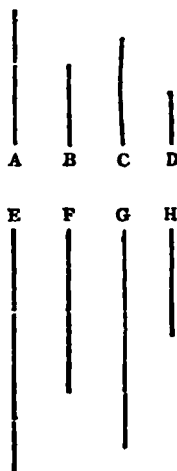
^a Def. 5. hujus.

^b Ax. 2. hujus.

^c Ax. 3.* hujus.

Quod si A major sit quam B, erit E major quam F^d. Quare^e G major quam H. Sed G, H duarum C, D sunt æquimultiples. Quare duarum major est C, cujus multiplex major^f.

Simili modo ostendetur, si A minor sit quam B, minorem esse C quam D. Quare si prima &c. Q. E. D.



PROP.

PROP. XV. THEOR.

[XV.]

Partes inter se comparatæ eandem habent proportionem, quam habent earum æquimultiples.

Sit enim AB æquimultiplex C , ac DE ipsius F . Dico ut C ad F , ita esse AB ad DE . Quoniam enim æquimultiplex est AB ipsius C , ac DE ipsius F ; quot magnitudines sunt in AB æquales ipsi C , totidem erunt et in DE æquales F . Dividatur AB in magnitudines ipsi C æquales, quæ sint AG, GH, HB ; et DE dividatur in magnitudines æquales F , videlicet in DK, KL, LE . Erit igitur ipsarum AG, GH, HB multitudo æqualis multitudi-
 $\begin{array}{ccccccc} & A & & & D & & \\ & | & & & | & & \\ G & | & & & K & & \\ & | & & & | & & \\ H & | & & & L & & \\ & | & & & | & & \\ & B & C & & E & F & \end{array}$

dini DK, KL, LE . Et quoniam æquales sunt AG, GH, HB , suntque DK, KL, LE inter se æquales; ut AG ad DK , ita erit GH ad KL , et HB ad LE . Atque erit ut una antecedentium ad unam consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes: est igitur ut AG ad DK , ita AB ad DE . Sed AG ipsi C est æqualis, et DK ipsi F . Ergo ut C ad F , ita erit AB ad DE . Partes igitur inter se comparatæ eandem habent proportionem, quam habent earum æquimultiples. Q. E. D.

PROP. XVI. THEOR.

[XVI.]

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, et permutatæ proportionales erunt.

Sint quatuor magnitudines A, B, C, D ; sitque ut A ad B , ita C ad D .

Dico et permutatas
 proportionales esse,
 videlicet ut A ad C ,
 ita esse B ad D . Su-

mantur enim ipsarum quidem A, B utcumque æquimultiples E, F ; ipsarum vero C, D aliæ utcumque æquimultiples G, H . Et quoniam æquimultiplex est E ipsius A , ac F ipsius B : partes autem inter se comparatæ eandem habent proportionem
 $\begin{array}{ccccc} E & \text{—————} & G & \text{—————} & \\ A & \text{—————} & C & \text{—————} & \\ B & \text{—————} & D & \text{—————} & \\ F & \text{—————} & H & \text{—————} & \end{array}$

 $\begin{array}{cc} K & 2 \end{array}$

portionem, quam habent earum æquimultiplices; erit ut

A ad B ita E ad F.

Ut autem A ad B

ita C ad D. Ergo

¹¹ hujus. et ut C ad D ita ¹¹ E

ad F. Rursus quo-

niam G, H sunt ipsarum C, D æquimultiplices, partes autem eandem proportionem habent, inter se comparatæ,

¹⁵ hujus. quam habent earum æquimultiplices; erit ² ut C ad D ita G ad H. Sed ut C ad D ita E ad F. Ergo et ut E ad F ita G ad H. Quod si quatuor magnitudines pro-

¹⁴ hujus. portiones sint, prima autem major ¹ sit quam tertia, et secunda quam quarta major erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Si igitur E superat G, et F ipsam H superabit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor; suntque E, F ipsarum A, B utcumque æquimultiplices, et G, H ipsarum C, D aliæ utcumque æquimultiplices; ergo ² ut A ad C ita erit B ad D. Si igitur quatuor magnitudines proportionales fuerint, et permutatæ proportionales erunt. Q. E. D.

Cor. * Si prima ad secundam major sit quam in proportionem tertiæ ad quartam; permutando prima ad tertiam major erit quam in ratione secundæ ad quartam.

Sit A major quam ad B in ratione C ad D. Dico permutando A majorem esse quam ad C

in ratione B ad D. Quoniam enim A major est quam ad B in ratione C ad D; erit minor aliqua quam A ad B ut C ad D: sit E minor illa. Cum igitur sit E ad B ut C ad D; permutando erit

^a Per hanc Prop. E ad C, ut B ad D ^a. Minor igitur quam A habet ad C proportionem eam, quam B ad D. Quare major A quam ad

^b Def. 7. hujus. C in proportionem B ad D ^b. Q. E. D.

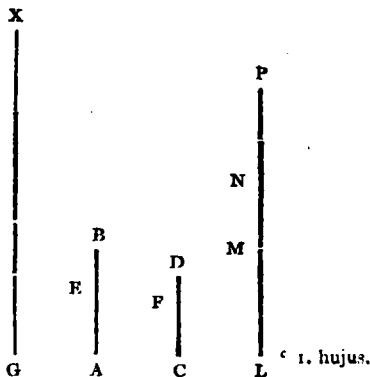


PROP. XVII. THEOR.

[XVII.]

Si composita magnitudines sint proportionales, et divisae proportionales erunt.

Sint compositae magnitudines proportionales $AB, BE,$
 CD, DF ; hoc est, ut AB ad
 BE , ita sit CD ad DF . Dico
etiam divisas proportionales
esse; videlicet ut AE ad EB
ita esse CF ad FD . Sumantur
enim ipsarum quidem $AE,$
 EB, CF, FD utcunque æqui-
multiplices $GH, HK, LM,$
 MN ; ipsarum vero EB, FD
aliae utcunque æquimulti-
plices KX, NP . Quoniam
æquimultiplex est GH ipsius
 AE , ac HK ipsius EB ; erit
 GH ipsius AB æquimulti-
plex, ac GK ipsius AB . Æ-
quimultiplex autem est GH ipsius AE , ac LM ipsius
 CF . Ergo GK æquimultiplex est AB , ac LM ipsius
 CF . Rursus quoniam æquimultiplex est LM ipsius CF ,
ac MN ipsius FD ; erit LM æquimultiplex CF , ac LN
ipsius CD . Sed æquimultiplex erat LM ipsius CF , ac
 GK ipsius AB . Æquimultiplex igitur est GK ipsius
 AB , ac LN ipsius CD . Quare GK, LN ipsarum $AB,$
 CD æquimultiplices erunt. Rursus quoniam æqui-
multiplex est HK ipsius EB , ac MN ipsius FD : est au-
tem et KX ipsius EB æquimultiplex, ac NP ipsius FD ;
et composita HX ipsius EB æquimultiplex est^d, ac MP ^d 2. hujus.
ipsius FD . Quare cum sit ut AB ad BE , ita CD ad
 DF ; et sumptae sint ipsarum quidem AB, CD æqui-
multiplices GK, LN , ipsarum vero EB, FD aliae ut-
cunque æquimultiplices HX, MP : si GK superat HX ,
et LN superabit MP ; et si æqualis, æqualis; et si mi-
nor, minor. Superet igitur GK ipsam HX ; communi-
que ablata HK , et GH ipsam KX superabit. Sed si GK
superat HX , et LN superat MP ; itaque superat LN ip-
sam MP : communique MN ablata, et LM superabit
 NP . Quare si GH superat KX , et LM ipsam NP su-
perabit. Similiter demonstrabimus et si GH sit æqualis



^c 1. hujus.

^d 2. hujus.

^e Def. 5.
hujus.

K 3

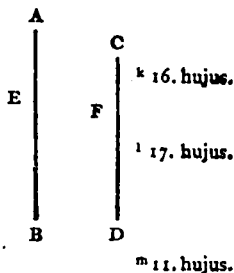
K X,

PROP. XIX. THEOR.

[XIX.]

Si fuerit ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam; et reliqua ad reliquam crit, ut tota ad totam.

Sit enim ut tota AB ad totam CD , ita ablata AE ad ablatam CF . Dico et reliquam EB ad reliquam FD ita esse ut tota AB ad totam CD , ita AE ad CF ; et permutando erit^k ut AB ad AE , ita CD ad CF . Quoniam compositæ magnitudines sunt proportionales, et divisæ proportionales erunt^l; ut igitur BE ad EA , ita DF ad FC : rursusque permutando ut^k BE ad DF , ita EA ad FC . Sed ut EA ad CF , ita posita est AB ad CD . Et reliqua^m igitur EB erit ad reliquam FD , ut tota AB ad totam CD . Quare si fuerit ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam; et reliqua ad reliquam erit, ut tota ad totam. *Q. E. D.*



Cor. Si quatuor magnitudines proportionales sint, per conversionem rationis proportionales erunt. Sit enim ut AB ad BE ita CD ad DF . Dividendo erit AE ad EB ut CF ad FD ^l. Et invertendo BE ad EA ut DF ad FC ⁿ. Quare componendo BA ad AE ut DC ad CF ^o.

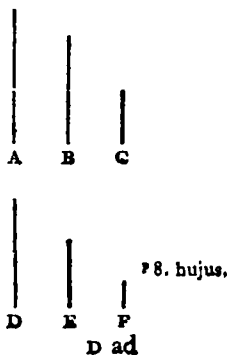
^{Cor.*} Def.
8. hujus.
^o 18. hujus.

PROP. XX. THEOR.

[XX.]

Si sint tres magnitudines, et aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eâdem proportionem; ex æquali autem prima major sit, quam tertia: et quarta quam sexta major erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor.

Sint tres magnitudines A, B, C , et aliæ ipsis numero æquales D, E, F , binæ sumptæ, sint in eâdem proportionem: id est, sit ut A ad B , ita D ad E , et ut B ad C , ita E ad F : ex æquali autem major sit A quam C . Dico et D quam F majorem esse; et si æqualis, æqualem; et si minor, minorem. Quoniam enim A major est quam C , alia vero est utcumque B , et major ad eandem majorem habet^p proportionem quam minor; habebit A ad B majorem proportionem quam C ad B . Sed ut A ad B , ita



K 4

D ad

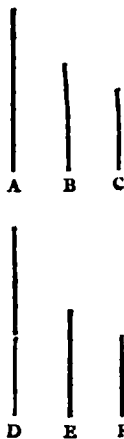
- D ad E; et invertendo ut C ad B, ita F ad E. Ergo
 * 13. hujus. et D ad E majorem habet proportionem quam F ad E.
 Proportionem vero ad eandem habentium, quæ majorem
 * 10. hujus. habet, illa major est. Major igitur est D quam F. Si-
 militer ostendemus et si A sit æqualis C, et D ipsi F æ-
 qualem esse; et si minor, minorem. Si igitur tres mag-
 nitudines fuerint, et aliæ ipsis numero æquales, quæ
 binæ sumantur et in eadem proportionem: ex æquali au-
 tem prima major sit quam tertia; et quarta quam sexta
 major erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor.
 Q. E. D.

[XXI.]

PROP. XXI. THEOR.

Si sint tres magnitudines, et aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur et in eadem proportionem; sit autem perturbata earum analogia; et ex æquali prima major sit quam tertia: et quarta quam sexta major erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor.

- Sint tres magnitudines proportionales A, B, C, et aliæ ipsis numero æquales D, E, F; quæ, binæ sumptæ, in eadem sint proportionem. Sit autem perturbata earum analogia; videlicet ut A quidem ad B, ita E ad F; ut vero B ad C, ita D ad E; et ex æquali A major sit quam C. Dico et D quam F majorem esse; et si æqualis, æqualem; et si minor, minorem. Quoniam enim major est A quam C, alia
 * 8. hujus. vero est B; habebit A ad B majorem proportionem quam C ad B. Sed ut A ad B, ita E ad F; et invertendo ut C ad B, ita E ad D. Quare et E ad F majorem habebit proportionem quam E ad D. Ad quam vero eadem majorem proportionem habet,
 * 10. hujus. illa minor est. Minor igitur est F quam D; ac propterea D quam F major erit. Similiter ostendemus et si A sit æqualis C, et D ipsi F esse æqualem; et si minor, minorem. Si igitur sint tres magnitudines, et aliæ ipsis numero, quæ binæ sumantur et in eadem proportionem; sit autem perturbata earum analogia; et ex æquali autem prima major sit quam tertia: et quarta quam sexta major erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor.
 Q. E. D.



PROP.

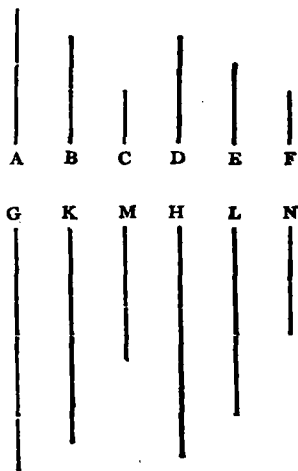
PROP. XXII. THEOR.

[XXII.]

Si sint quotcunque magnitudines, et aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eâdem proportionē; et ex æquali in eâdem proportionē erunt.

Sint quotcunque magnitudines A, B, C, et aliæ ipsis

numero æquales D, E, F, binæ sumptæ in eâdem proportionē; hoc est, ut A quidem ad B, ita D ad E, ut autem B ad C, ita E ad F. Dico et ex æquali in eâdem proportionē esse, ut A ad C, ita D ad F. Sumantur enim ipsarum quidem A, D utcunque æquimultiplices G, H; ipsarum vero B, E aliæ utcunque æquimultiplices K, L, et ipsarum C, F aliæ utcunque æquimultiplices M, N. Quoniam igitur est ut A ad B, ita D ad E, et sumptæ sunt ipsarum A, D æquimultiplices G, H, et ipsarum B, E aliæ utcunque æquimultiplices K, L; erit ut⁴ G ad K,



ita H ad L. Eâdem quoque ratione erit ut K ad M, ita L ad N. Et cum sint tres magnitudines G, K, M, et aliæ ipsis numero æquales H, L, N, binæ sumptæ et in eâdem proportionē; ex æquali²⁰ si G superat M, et H²⁰ ipsam N superabit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Suntque G, H ipsarum A, D æquimultiplices, et M, N ipsarum C, F aliæ utcunque æquimultiplices. Ut igitur A ad C, ita erit²¹ D ad F. Quare si sint quot-²¹ cunque magnitudines, et aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eâdem proportionē, et ex æquali in eâdem proportionē erunt. Q. E. D.

⁴ 4. hujus.²⁰ 20. hujus.²¹ Def. 5.

PROP.

[XXIII.]

PROP. XXIII. THEOR.

Si sint tres magnitudines, et aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eâdem proportione; sit autem perturbata earum analogia: et ex æquali in eâdem proportione erunt.

Sint tres magnitudines *A, B, C*, et aliæ ipsis numero æquales, binæ sumptæ in eâdem proportione, *D, E, F*; sit autem perturbata earum analogia, hoc est, sit ut *A* ad *B*, ita *E* ad *F*, et ut *B* ad *C*, ita *D* ad *E*. Dico ut *A* ad *C*, ita esse *D* ad *F*. Sumantur ipsarum quidem *A, B, D* utcumque æquimultiples *G, H, L*: ipsarum vero *C, E, F* aliæ utcumque æquimultiples *K, M, N*. Et quoniam *G, H* æquimultiples sunt ipsarum *A, B*, partes autem eandem habent proportionem, quam habent ipsarum æquimultiples: erit * ut *A* ad *B*, ita *G* ad *H*. Et simili ratione ut *E* ad *F*, ita *M* ad *N*.

† Atque est ut *A* ad *B*, ita *E* ad *F*. Ut † igitur *G* ad *H*, ita *M* ad *N*. Rursus quoniam est ut *B* ad *C*, ita *D* ad *E*, et sumptæ sunt ipsarum *B, D* æquimultiples *H, L*, ipsarum vero *C, E* aliæ utcumque æquimultiples *K, M*: erit ut *H* ad *K*, ita *L* ad *M*. Ostensum autem est et ut *G* ad *H*, ita esse *M* ad *N*. Quoniam igitur tres magnitudines sunt *G, H, K*, et aliæ ipsis numero æquales *L, M, N*, binæ sumptæ in eâdem proportione,

‡ estque ipsarum perturbata analogia; ex æquali, si ‡ superat *K*, et *L* ipsam *N* superabit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Sunt autem *G, L* ipsarum *A, D* æquimultiples; et *K, N* æquimultiples ipsarum *C, F*. Ut igitur † *A* ad *C*, ita erit *D* ad *F*. Quare si fuerint tres magnitudines, et aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eâdem proportione, sit autem perturbata earum analogia; et ex æquali in eâdem proportione erunt. *Q. E. D.*

* Def. 5. hujus.

PROP.

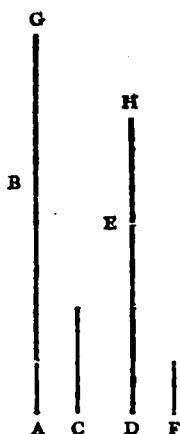
PROP. XXIV. THEOR.

[XXIV.]

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; habeat autem et quinta ad secundam proportionem eandem, quam sexta ad quartam; et composita prima cum quintâ ad secundam eandem proportionem habebit, quam tertia cum sextâ ad quartam.

Prima AB ad secundam C eandem habeat proportionem, quam tertia DE ad quartam F .

Habeat autem et quinta BG ad secundam C proportionem eandem, quam sexta EH ad quartam F . Dico et compositam primam cum quintâ AG ad secundam C eandem proportionem habere, quam tertiam cum sextâ DH ad quartam F . Quoniam enim est ut BG ad C , ita EH ad F ; erit invertendo ut C ad BG , ita F ad EH . Et quoniam ut AB ad C , ita est DE ad F : ut autem C ad BG , ita F ad EH ; erit^b, ex æquali, ut AB ad BG , ita DE ad EH . Quod cum divisæ magnitudines sint proportionales, et compositæ proportionales^c erunt. Ut igitur AG ad B , ita est DH ad E . Sed et ut BG ad C , ita HE ad F . Ergo, ex

^b 22. hujus.^c 18. hujus.^d Hypoth.

æquali, ut AG ad C , ita erit DH ad F . Si igitur prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; habeat autem et quinta ad secundam proportionem eandem, quam sexta ad quartam; et composita prima cum quintâ ad secundam eandem proportionem habebit, quam tertia cum sextâ ad quartam. Q. E. D.

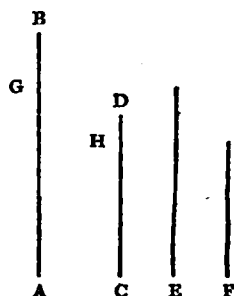
PROP.

[XXV.]

PROP. XXV. THEOR.

Si quatuor magnitudines fuerint proportionales; maxima ipsarum et minima duabus reliquis majores erunt.

Sint quatuor magnitudines proportionales AB, CD, E, F ; et sit ut AB ad CD , ita E ad F . Sit autem maxima ipsarum AB , et F minima. Dico AB et F ipsis CD, E majores esse. Ponatur enim ipsi quidem E æqualis AG , ipsi vero F æqualis CH . Quoniam igitur est ut AB ad CD , ita E ad F ; estque AG æqualis E , et CH æqualis F ; erit ut AB ad DC , ita AG ad CH . Et quoniam ut tota AB ad totam CD , ita ablata AG ad ablatam CH ; et reliqua GB ad reliquam HD erit



- * 19. hujus. ^c ut tota AB ad CD totam. Et permutando GB ad AB
 * 16. hujus. ad HD ad CD ^f. Major autem est AB quam CD . Ergo
 * 14. hujus. et GB quam HD major erit ^e. Quod cum AG sit æqualis ipsi E , et CH ipsi F ; erunt AG et F ipsi CH et E æquales. Si autem inæqualibus æqualia addantur, tota inæqualia erunt. Ergo GB, HD inæqualibus existentibus, quippe cum GB sit major, si ipsi quidem GB addantur AG et F , ipsi vero HD addantur CH et E : fient AB et F ipsis CD et E necessario majores. Si igitur quatuor magnitudines fuerint proportionales; maxima ipsarum et minima duabus reliquis majores erunt. *Q. E. D.*

EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER SEXTUS.

DEFINITIONES.

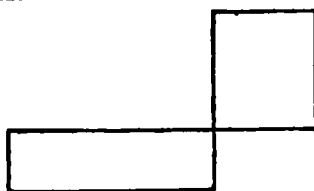
DEFINITIO I.

SIMILES figuræ rectilineæ sunt, quæ et singulos angulos æquales habent, et circa æquales angulos latera proportionalia.



II.

Reciprocae figuræ sunt, quando in utrâque figurâ antecedentes, et consequentes rationum fuerint termini.



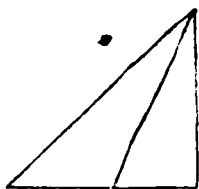
III.

Extremâ ac mediâ ratione secari recta linea dicitur, quando fit ut tota ad majus segmentum, ita majus segmentum ad minus.

IV.

IV.

Altitudo cuiusque figuræ est linea perpendicularis, quæ a vertice ad basim ducitur.



V.

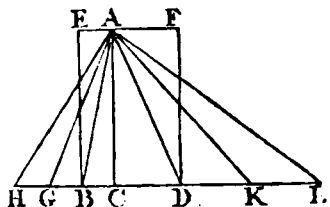
Si fuerint plures magnitudines ejusdem generis, ratio primæ ad ultimam componi dicitur ex rationibus omnibus intermediis.

[I.]

PROPOSITIO I. THEOREMA.

Triangula, et parallelogramma, quæ eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases.

Sint triangula quidem ABC , ACD , parallelogramma vero EC , CF , quæ eandem habeant altitudinem, videlicet perpendicularem a puncto A ad BD ductam. Dico ut basis BC ad CD basim, ita esse triangulum ABC ad triangulum ACD , et parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum.



Producatur BD ex utrâque parte ad puncta H , L ; et ipsi quidem BC basi æquales quotcunque ponantur BG , GH ; ipsi vero basi CD ponantur quotcunque æquales DK , KL ; et AG , AH , AK , AL jungantur. Quoniam igitur CB , BG , GH inter se æquales sunt, erunt et tri-
 * 38. primi. angula AHG , AGB , ABC inter se æqualia. Ergo quotuplex est basis HC ipsius BC basis, totuplex est AHC triangulum trianguli ABC . Eadem ratione quotuplex est LC basis ipsius basis CD , totuplex est et triangulum ALC ipsius ACD trianguli; et si æqualis est HC basis basi CL , et triangulum AHC triangulo ALC est æquale; et si basis HC basim CL superat, et triangulum AHC superabit triangulum ALC ; et si minor, minus. Quatuor igitur magnitudinibus existentibus, videlicet duabus basibus BC , CD , et duobus triangulis ABC , ACD , sumpta sunt æquimultiplicia basis quidem BC , et ABC trianguli, videlicet basis HC , et AHC triangulum:

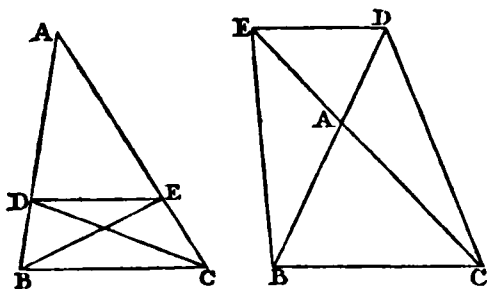
angulum: basis vero CD , et trianguli ACD , alia ut-
 cunque æquimultiplicia, nempe CL basis, et ALC tri-
 angulum; atque ostensum est, si HC basis basim CL su-
 perat, et triangulum AHC superare triangulum ALC ;
 et si æqualis, æquale; et si minor, minus. Est igitur
^b ut BC basis ad basim CD , ita triangulum ABC ad ^b Def. 5.
 ACD triangulum. Et quoniam trianguli ABC duplum ^{quinti.}
 est ^c parallelogrammum EC , et trianguli ACD paral- ^c 41. primi.
 lelogrammum FC duplum ^d, partes autem cum pariter ^d 15. quinti.
 multiplicibus eandem inter se proportionem habent:
 igitur ut ABC triangulum ad triangulum ACD , ita pa-
 rallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. Quo-
 niam igitur ostensum est, ut basis BC ad CD basim, ita
 esse ABC triangulum ad triangulum ACD ; ut autem
 ABC triangulum ad triangulum ACD , ita parallelo-
 grammum EC ad CF parallelogrammum; erit ^e ut BC ^e 11. quinti.
 basis ad basim CD , ita parallelogrammum EC ad FC pa-
 rallelogrammum. Quare triangula, et parallelogramma,
 quæ eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases.
 Q. E. D.

PROP. II. THEOR.

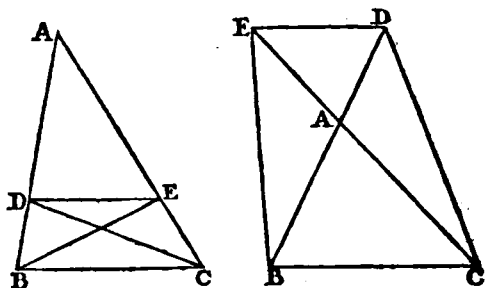
[II.]

*Si uni laterum trianguli parallela quædam recta linea
 ducta fuerit, proportionaliter secabit ipsius trianguli la-
 tera; et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint,
 quæ sectiones conjungit recta linea, reliquo trianguli la-
 teri parallela erit.*

Trianguli enim ABC uni laterum BC parallela du-
 catur DE . Dico ut DB ad DA , ita esse CE ad EA .

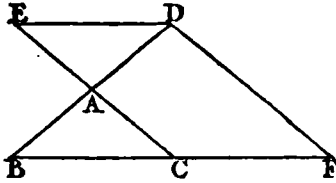
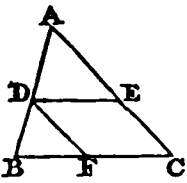


Jungantur BE , CD . Triangulum igitur BDE trian-
 gulo CDE est æquale, in eadem enim sunt basi DE , et ^f 37. primi.
 in



- in eisdem DE et BC parallelis; aliud autem triangulum
 7. quinti. est ADE : sed æqualia ad idem eandem habent^a proportionem; ergo ut triangulum BDE ad triangulum ADE , ita est CDE triangulum ad triangulum ADE .
 1. hujus. Ut autem triangulum BDE ad triangulum ADE , ita^b est BD ad DA ; nam cum eandem altitudinem habeant, videlicet perpendicularem a puncto E ad AB ductam, inter se sunt ut bases. Et ob eandem causam ut CDE triangulum ad triangulum ADE , ita CE ad EA . Et
 11. quinti. igitur ut BD ad DA , ita est^c CE ad EA . Et si trianguli ABC latera AB , AC proportionaliter secta sint, i. e. si ut BD ad DA , ita sit CE ad EA ; et jungatur DE : dico DE ipsi BC parallelam esse. Iisdem constructis, quoniam est ut BD ad DA , ita CE ad EA ; ut autem BD ad DA , ita^b est BDE triangulum ad triangulum ADE ; et ut CE ad EA , ita CDE triangulum^b ad triangulum ADE , erit ut triangulum BDE ad triangulum ADE , ita^c CDE triangulum ad triangulum ADE . Quod cum utrumque triangulorum BDE , CDE ad triangulum ADE eandem habeat proportionem; erit BDE triangulum^b triangulo CDE æquale; et sunt in eadem basi DE . Æqualia autem triangula, et in eadem basi constituta, etiam in eisdem^c sunt parallelis. Ergo DE ipsi BC parallela est. Si igitur uni laterum trianguli parallela quædam recta linea ducta fuerit, proportionaliter secabit ipsius trianguli latera; et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ sectiones conjungit recta linea reliquo trianguli lateri parallela erit. *Q. E. D.*

*Cor. ** Recta DE , basi trianguli ABC parallela, lateribus AB , AC (si opus sit productis) in punctis D , E occurrens triangulum ADE constituit triangulo ABC simile, et homologa



mologa sunt latera, quæ sunt in eadem rectâ. Et si recta DE, lateribus trianguli ABC in punctis D, E occurrens, constituat triangulum ADE ipsi ABC simile, et latera homologa sint in eadem rectâ; recta DE basi BC parallela erit. Angulus enim A triangulis duobus BAC, DAE communis est. Et si DE basi BC parallela sit, erit angulus ADE angulo ABC, necnon AED angulus angulo ACB, æqualis^m. Æquiangula igitur sunt trian-^{m 29. primi.} gula ABC, ADE. Et cum BD sit ad DA ut CE ad EAⁿ,ⁿ Per hanc componendo vel dividendo, erit BA ad AD ut CA ad AE^o. Permutando BA ad AC ut AD ad AE. Trian-^{o 18. vel} gulum igitur BAC, DAE latera, circa angulum com-^{17. quinti.} munem A, sunt proportionalia. Agatur jam per punctum D recta DF, ipsi AC parallela, quæ basi BC (si opus sit productæ) in F occurrat. Erit BF ad FC ut BD ad DAⁿ. Componendo igitur vel dividendo, BC ad CF ut BA ad AD^o. Figura autem DECF est parallelogrammum. Recta igitur FC rectæ DE æqualis est P.^{p 34. primi.} Rectæ igitur BC ad ED eadem, quæ ad FC, est proportio^q. Quare BC ad DE ut BA ad AD^r. Permu-^{q 7. quinti.} tando BC ad BA ut DE ad AD^r. Triangulorum igitur^{11. quinti.} ABC, ADE latera, circa angulos æquales ABC, ADE, sunt proportionalia. Denique cum BC sit ad BA ut DE ad DA, et BA ad AC ut DA ad AE (id enim prius ostensum) ex æquo erit BC ad AC ut DE ad AE. Triangulorum igitur ABC, ADE latera, circa æquales angulos ACB, AED, sunt proportionalia. Triangula igitur ABC, ADE sunt æquiangula, et latera circa æquales angulos proportionalia habent. Similia igitur sunt triangula ABC, ADE, et latera sunt homologa, quæ in eadem sunt rectâ. Quod primum demonstrandum erat.^{16. quinti.}

Jam vero recta DE, lateribus trianguli ABC in punctis D, E occurrens, constituat triangulum ADE simile triangulo ABC, et homologa sint latera, quæ sunt in eadem rectâ. Nempe AB ad AD, ut AC ad AE. Dico rectam DE trianguli

trianguli ABC basi BC esse parallelam. Nam cum similia sint triacula ABC , ADE , æquiangula erunt. Et æquales erunt anguli, circa quos latera sunt proportionalia[†]. Angulus igitur ADE angulo ABC æqualis.

[†] Def. 1.

hujus.

[‡] 28. primi.

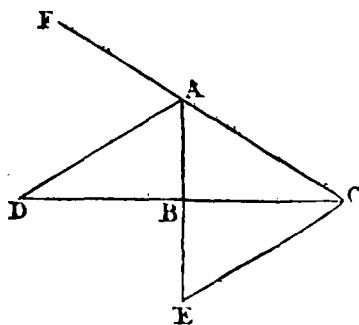
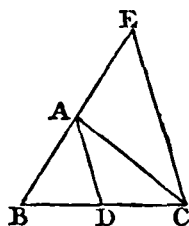
Recta igitur DE rectæ BC parallela[‡]. Q. E. D.

[III.]

PROP. III. THEOR.

Si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta linea secet etiam basim; basis partes eandem proportionem habebunt, quam reliqua trianguli latera; et si basis partes eandem proportionem habeant, quam reliqua trianguli latera; quæ a vertice ad sectionem ducitur recta linea, trianguli angulum bifariam secabit.

Sit triangulum ABC ; et secetur angulus BAC (vel [‡] 9. primi. externus BAF) bifariam[‡] rectâ lineâ AD . Dico ut BD ad DC , ita esse BA ad AC . Ducatur per C ipsi DA pa-



[‡] 31. primi. rallela[‡] CE , et producta BA conveniat cum ipsâ in E puncto. Quoniam igitur in parallelas AD , EC incidit [‡] 29. primi. recta linea quædam AC ; erit[‡] ACE angulus angulo CAD (vel adjacenti DAF , si externus sit angulus, quem AD medium dividit) æqualis. Sed CAD angulus (vel DAF) ponitur æqualis angulo BAD . Ergo et BAD ipsi ACE angulo æqualis erit. Rursus quoniam in parallelas AD , EC recta linea BAE incidit, angulus BAD æqualis est AEC . Ostenfus autem est et angulus ACE angulo BAD æqualis. Ergo et ACE ipsi AEC æqualis erit: ac propterea latus AE æquale[‡] lateri AC . Et quoniam uni laterum trianguli BCE , videlicet ipsi EC , parallela ducta[‡] est AD ; erit[‡] ut BD ad DC , ita BA ad AE ; æqualis autem

autem est $\angle A E$ ipsi $\angle A C$. Est igitur^c ut $B D$ ad $D C$, ita^c 7. quinti. $B A$ ad $A C$. Et si sit ut $B D$ ad $D C$, ita $B A$ ad $A C$, et $A D$ jungatur; dico angulum $B A C$ (vel externum $B A F$, si punctum D sit extra triangulum) bifariam sectum esse rectâ lineâ $A D$. Iisdem enim constructis, quoniam est ut $B D$ ad $D C$, ita $B A$ ad $A C$; sed et ut $B D$ ad $D C$, ita^d $B A$ ad $A E$, etenim uni laterum trianguli $B C E$,^d 2. hujus, videlicet ipsi $\angle E C$, parallela ducta est $A D$; erit et ut $B A$ ad $A C$, ita $B A$ ad $A E$ ^c. Ergo $\angle A C$ est^f æqualis $\angle A E$; ac^c 11. quinti. propterea, et angulus $\angle E C$ angulo $\angle C A$ æqualis^e. Sed^e 9. quinti. angulus quidem $\angle A E C$ est æqualis^h angulo $B A D$; an-^b 5. primi. gulus vero $\angle A C E$ æqualis^h $\angle C A D$ (vel $\angle D A F$). Quare et $B A D$ angulus ipsi $\angle C A D$ (vel $\angle D A F$) æqualis erit. Angulus igitur $B A C$ (vel externus $B A F$) bifariam sectus est rectâ lineâ $A D$. Ergo si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum rectâ linea etiam basim secet; basis partes eandem proportionem habebunt, quam reliqua trianguli latera. Et si basis partes eandem proportionem habeant, quam reliqua trianguli latera; quæ a vertice ad sectionem ducitur rectâ linea, trianguli angulum bifariam secabit. *Q. E. D.*

SCHOLION. *

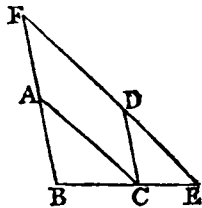
Hanc propositionem tam de externis, quam internis triangulorum angulis accepisse veteres, certissimum est. Quorum utique nemo eam de externo demonstrare aggressus est; tanquam ab Euclide demonstratam usurpant omnes. Neque minus generaliter accipiendam esse Euclides ipse significavit, cum tali eam conditione subjecerit, *ἐὰν ἡ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθείᾳ τέμνῃ καὶ τὴν βάσιν*. Quasi illud perspectum habuerit, rectam, quæ angulum dividat, non semper occursum basi. Atqui basi nequit non occurrere, quæ internum dividit. Quæ medium dividit externum, ita basi occurret, si crura trianguli inæqualia sint. Nam si isosceles fuerit triangulum, quæ angulum, qui ad verticem externus est, medium dividit linea rectâ, basi parallela erit.

[IV.]

PROP. IV. THEOR.

Æquiangulorum triangulorum latera, quæ circum æquales angulos sunt, proportionalia sunt; et homologa, sive ejusdem nominis, sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur.

Sint æquiangula triângula ABC , DCE , quæ angulum quidem ABC angulo DCE , angulum vero ACB angulo DEC æqualem habeant, et præterea angulum BAC angulo CDE . Dico triangulorum ABC , DCE proportionalia esse latera, quæ sunt circa æquales angulos; et homologa, sive ejusdem nominis, latera esse, quæ æqualibus angulis subtenduntur. Ponatur BC in directum ipsi CE . Et quo-



- ¹⁷ 17. primi. niam anguli ABC , ACB duobus rectis minores ¹ sunt, æqualis autem est angulus ACB angulo DEC ; erunt ABC , DEC anguli duobus rectis minores. Quare BA , ^{12. ax.} ED productæ inter se convenient ²; producantur, et convenient in puncto F . Et quoniam angulus DCE ^{28. primi.} est æqualis angulo ABC ; erit ³ BF ipsi DC parallela. Rursus quoniam æqualis est angulus ACB angulo DEC , parallela ⁴ erit AC ipsi FE . Parallelogrammum igitur est $FACD$; ac propterea FA quidem ipsi CD , AC vero ipsi FD , est ¹ æqualis. Et quoniam uni laterum trianguli FBE , videlicet ipsi FE , parallela ducta est AC ; ^{2. hujus.} erit ⁵ ut BA ad AF , ita BC ad CE . Æqualis autem est AF ipsi CD . Ut igitur BA ad CD , ita BC ad CE ; et permutando, ut BA ad BC , ita CD ad CE . Rursus quoniam CD parallela est BF , erit ⁶ ut BC ad CE , ita ^{7. quinti.} FD ad DE . Sed FD est æqualis AC . Ergo ut ¹ BC ad CE , ita AC ad DE . Permutando igitur, ut BC ad CA , ita CE ad ED . Itaque quoniam ostensum est, ut AB ad BC ita DC ad CE , ut autem BC ad CA ita CE ad ED ; erit, ^{22. quinti.} ex æquali, ut BA ad AC ita CD ad DE . Æquiangulorum igitur triangulorum proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos; et homologa, sive ejusdem nominis, latera sunt, quæ æqualibus angulis subtenduntur. Q. E. D.

PROP.

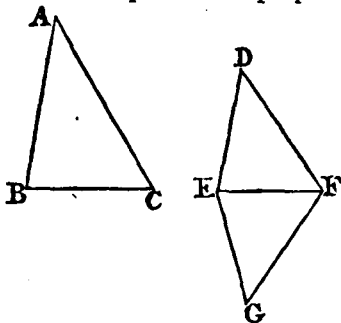
PROP. V. THEOR.

[V.]

Si duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula erunt triangula; et æquales habebunt angulos, quibus homologa latera subtenduntur.

Sint duo triangula ABC , DEF , quæ latera propor-

tionalia habeant; hoc est, fit ut AB quidem ad BC , ita DE ad EF : ut autem BC ad CA , ita EF ad FD ; et adhuc ut BA ad AC , ita ED ad DF . Dico triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum esse, et æquales habere angulos, quibus homologa latera subtenduntur; angulum quidem ABC angulo



DEF , angulum vero BCA angulo EFD , et præterea angulum BAC angulo EDF . Constituat^r enim ad ⁿ 23. primi.

rectam lineam EF , et ad puncta in ipsâ E , F , angulo quidem ABC æqualis angulus FEF ; angulo autem BCA angulus EEG . Quare reliquus BAC angulus $^{\circ}$ reliquo $^{\circ}$ 2. Cor. 32. EGF est æqualis. Ideoque æquiangulum est triangulum primi.

ABC triangulo EGF . Triangulorum igitur ABC , EGF proportionalia sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur. Ergo ut AB ad BC ^p, ita GE ad EF . Sed ^p 4. hujus.

ut AB ad BC , ita DE ad EF . Ut igitur DE ad EF , ita ^q GE ad EF . Quod cum utraque ipsarum DE , EG ^q 11. quinti.

ad EF eandem proportionem habeat, erit ^r DE ipsi EG ^r 9. quinti.

æqualis. Eâdem ratione et DF æqualis FG . Itaque quoniam DE est æqualis EG , communis autem EF ; duæ DE , EF duabus GE , EF æquales sunt, et basis DF basi FG æqualis. Angulus igitur DEF est æqualis ^s an- ^s 8. primi.

angulo GEF , et DEF triangulum æquale triangulo GEF , et reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera subtenduntur. Ergo angulus quidem EDF æqualis angulo EGF . Et quoniam angulus DEF est æqualis angulo GEF , et angulus GEF angulo ABC ; erit et angulus ABC angulo FED æqualis. Eâdem ratione et angulus ACB æqualis est angulo DFE ; et adhuc angulus ad A angulo ad D . Ergo ABC triangulum tri-

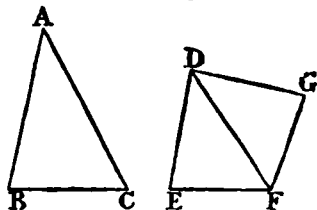
angulo DEF æquiangulum erit. Si igitur duo tri-
angula latera proportionalia habeant, æquiangula erunt
triangula; et æquales habebunt angulos, quibus homo-
loga latera subtenduntur. *Q. E. D.*

[VI.]

PROP. VI. THEOR.

*Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem ba-
beant, circa æquales autem angulos latera proportionalia;
æquiangula erunt triangula, et æquales habebunt an-
gulos, quibus homologa latera subtenduntur.*

Sint duo triangula ABC , DEF , unum angulum BAC
uni angulo EDF æqualem
habentia, circa æquales au-
tem angulos latera propor-
tionalia; hoc est, sit ut BA
ad AC , ita ED ad DF .
Dico triangulum ABC tri-
angulo DEF æquiangulum
esse, et angulum quidem



- ABC habere æqualem angulo DEF ; angulum vero
 * 23. primi. ACB angulo $D FE$. Constituitur enim ad rectam
 lineam DF , et ad puncta in ipsa D , F , alterutri angu-
 lorum BAC , EDF æqualis angulus FDG , angulo au-
 tem ACB æqualis DFG . Reliquus igitur ad B reli-
 * 2. Cor. 32. quo ad G est æqualis. Ergo triangulum ABC tri-
 primi. angulo DGF æquiangulum est; ac propterea ut BA
 * 4. hujus. ad AC , ita æst GD ad DF : ponitur autem et ut BA ad
 * 11. quinti. AC , ita ED ad DF . Ut igitur ED ad DF , ita GD ad
 * 9. quinti. DF . Quare ED æqualis est ipsi DG , et communis
 DF . Ergo duæ ED , DF duabus GD , DF æquales
 sunt, et angulus EDF angulo GDF est æqualis; basis
 * 4. primi. igitur EF est æqualis basi FG , triangulumque DEF
 æquale triangulo GDF , et reliqui anguli reliquis angu-
 lis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subten-
 duntur. Ergo angulus quidem DFG est æqualis an-
 gulo $D FE$; angulus vero ad G angulo ad E . Sed an-
 gulus DFG æqualis est angulo ACB ; et angulus igitur
 ACB angulo $D FE$ est æqualis. Ponitur autem et BAC
 angulus æqualis angulo EDF . Ergo et reliquus, qui
 ad B , æqualis est reliquo ad E . Æquiangulum igitur
 est triangulum ABC triangulo DEF . Quare si duo
 triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant,
 circa

circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula, et æquales habebunt angulos, quibus homologa latera subtenduntur. Q. E. D.

PROP. VII. THEOR.

[VII.]

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, et reliquorum utrumque simul, vel minorem, vel non minorem recto; æquiangula erunt triangula, et æquales habebunt angulos, circa quos latera sunt proportionalia.

Sint duo triangula ABC , DEF , unum angulum uni angulo æqualem habentia, videlicet angulum BAC angulo EDF æqualem, circa alios autem angulos ABC , DEF latera proportionalia, ut sit DE ad EF , sicut AB ad BC ; et reliquorum, qui ad C , F , utrumque simul minorem, vel non minorem recto. Dico triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum esse; angulumque ABC æqualem angulo DEF , et reliquum, videlicet qui ad C , reliquo qui ad F æqualem. Si inæqualis est angulus ABC angulo DEF , unus ipsorum major erit; sit major ABC ; et constituatur^b ad rectam lineam AB , et ad punctum in^b ipsa B , angulo DEF æqualis angulus ABG . Et quoniam angulus quidem A est æqualis angulo D , angulus vero ABG angulo DEF ; erit reliquus AGB reliquo DFE æqualis^c. Æquiangulum igitur est ABG triangulum triangulo DEF . Quare ut^d AB ad BG , sic DE ad EF : utque DE ad EF , sic ponitur AB ad BC . Ut igitur AB ad BC , sic AB ad BG . Quod cum AB ad utramque BC , BG eandem habeat proportionem, erit BC ipsi BG æqualis^e; ac propterea angulus ad C est^e æqualis angulo BGC . Quare uterque angulorum BGC , BGC minor est recto; igitur qui ei deinceps est, AGB , major est recto. Atque ostensus est angulus AGB æqualis angulo, qui ad F . Angulus igitur, qui ad F , recto major est. Atqui ponitur non major, nimirum cum C non est major recto: quod est absurdum. Non igitur inæqualis est angulus ABC angulo DEF . Ergo ipsi est æqualis. Est autem et angulus ad A æqualis ei, qui ad D . Quare et reliquus qui ad C , æqualis reliquo, qui

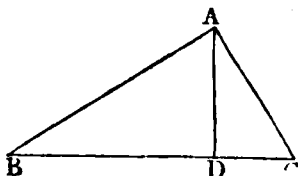
ad *f*. *Æquiangulum igitur est* ABC *triangulum trian-*
gulo DEF . *Si igitur duo triangula unum angulum*
uni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos
latera proportionalia, et reliquorum utrumque simul,
vel minorem, vel non minorem recto; æquiangula
erunt triangula, et æquales habebunt angulos, circa
quos proportionalia sunt latera. *Q. E. D.*

[VIII.]

PROP. VIII. THEOR.

Si in triangulo rectangulo, ab angulo recto ad basim per-
pendicularis ducatur; quæ ad perpendicularem sunt
triangula, et toti, et inter se similia sunt.

Sit triangulum rectangulum ABC , rectum habens
 angulum BAC ; et a puncto
 A ad BC perpendicularis du-
 catur AD . Dico triangula
 ABD , ADC toti triangulo
 ABC , et inter se similia esse.
 Quoniam enim angulus BAC
 est æqualis angulo ADB ,



* 2. Cor. 32.
 primi.

* 4. hujus.

¹ Def. 1.
 hujus.

rectus enim uterque est, et angulus ad B communis
 duobus triangulis ABC , ABD ; erit^{*} reliquus ACB re-
 liquo BAD æqualis. *Æquiangulum igitur est trian-*
gulum ABC *triangulo* ABD . Quare^h ut BC , quæ
 subtendit angulum rectum trianguli ABC , ad BA sub-
 tendentem angulum rectum trianguli ABD , sic ipsa AB ,
 subtendens angulum ad C trianguli ABC , ad DB sub-
 tendentem angulum æqualem angulo ad C , videlicet
 BAD ipsius ABD trianguli; et adhuc AC ad AD sub-
 tendentem angulum ad B communem duobus triangulis.
 Ergo triangulum ABC triangulo ABD æquiangulum
 est, et circa æquales angulos latera habet proportionalia.
 Simile igitur¹ est triangulum ABC triangulo ABD .
 Eadem ratione demonstrabimus etiam ADC triangulum
 triangulo ABC simile esse. Quare utrumque ipsorum
 ABD , ADC toti ABC triangulo est simile. Dico in-
 super triangula ABD , ADC etiam inter se similia esse.
 Quoniam enim angulus BDA rectus est æqualis recto
 ADC ; sed et BAD ostensus est æqualis angulo ad C ;
 erit reliquus ad B reliquo DAC æqualis. *Æquiangulum*
igitur est triangulum ABD *triangulo* ADC . Ergo^h ut
 BD trianguli ABD subtendens BAD angulum, ad DA
 trianguli ADC subtendentem angulum, qui est ad C ,
 æqualem

æqualem angulo BAD , sic ipsa AD trianguli ABD subtendens angulum ad B , ad DC subtendentem angulum DAC ei, qui est ad B , æqualem; et adhuc BA ad AC subtendentem angulum rectum ADC . Simile igitur est ABD triangulum triangulo ADC . Quare si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur; quæ ad perpendicularem sunt triangula, et toti, et inter se similia sunt. *Q. E. D.*

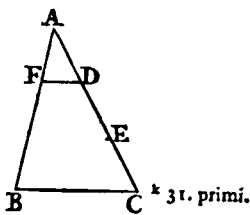
Cor. Ex hoc manifestum est, in triangulo rectangulo, ab angulo recto ad basim perpendicularem ductam, mediam proportionalem esse inter segmenta basis; et præterea inter basim et basis segmentum, latus utrumlibet segmento conterminum, medium esse proportionale.

PROP. IX. PROBL.

[IX.]

A datâ rectâ lineâ imperatam partem abscindere.

Sit data recta linea AB . Oportet ab ipsâ AB imperatam partem abscindere. Ducatur a puncto A quædam recta linea AC , quæ cum ipsâ AB angulum quemlibet contineat; sumaturque in AC quodvis punctum D , et capiatur AE , quæ toties sit multiplex rectæ AD , quoties recta ipsa AB partis abscindendæ; jungatur BC ; et per D ipsi BC parallela^k ducatur DF . Itaque quoniam uni laterum trianguli ABC , videlicet ipsi BC , parallela ducta est DF ; erit^l ut CD ad DA , ita^l 2. hujus. BF ad FA ; componendo ut CA ad AD , ita BA ad AF ^{m. 18. quinti}. Quæ pars igitur est AD rectæ AC , eadem erit AF rectæ AB ⁿ. A datâ igitur rectâ lineâ AB pars imperata est^{15. quinti} abscissa AF . *Q. E. F.*



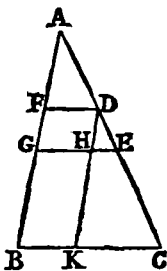
PROP. X. PROBL.

[X.]

Datam rectam lineam infectam, datæ rectæ lineæ sectæ similiter secare.

Sit data quidem recta linea infecta AB , secta vero AC . Oportet rectam lineam AB infectam ipsi AC sectæ similiter secare. Sit secta AC in punctis D et E ; et ponantur ita, ut angulum quemvis contineant; junctæque BC , per puncta quidem D et E ipsi BC parallelæ^o ducantur DF , EG ; per D vero ipsi AB ducatur parallela^{31. primi} DH K .

D H K. Parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum
 34. primi. **F H, H B:** ac propterea **D H** quidem est
 æqualis **F G**, **H K** vero ipsi **G B**. Et quoniam uni laterum trianguli **D K C**, ipsi scilicet **K C**, parallela ducta est **H E**;
 2. hujus. erit ut **C E** ad **E D**, ita **K H** ad **H D**.
 Æqualis autem est **K H** quidem ipsi **B G**, **H D** vero ipsi **G F**. Est igitur ut **C E** ad **E D**, ita **B G** ad **G F**. Rursus quoniam uni laterum trianguli **A G E**, nimirum ipsi **E G**, parallela ducta est **F D**, ut **E D** ad **D A**, ita erit **G F** ad **F A**. Sed ostensum est ut **C E** ad **E D**, ita esse **B G** ad **G F**. Ut igitur **C E** ad **E D**, ita est **B G** ad **G F**; et ut **E D** ad **D A**, ita **G F** ad **F A**. Ergo data recta linea infecta **A B**, datæ rectæ lineæ sectæ **A C** similiter secta est. **Q. E. F.**

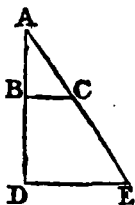


[XI.]

PROP. XI. PROBL.

Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem invenire.

Sint datæ duæ rectæ lineæ **A B, A C**; et ponantur ita, ut angulum quemvis contineant. Oportet ipsis **A B, A C** tertiam proportionalem invenire. Producantur **A B, A C** ad puncta **D, E**; ponaturque ipsi **A C** æqualis **B D**; et
 31. primi. junctâ **B C**, ducatur per **D** ipsi **B C** parallela **D E**. Quoniam igitur uni laterum trianguli **A D E**, videlicet ipsi **D E**, parallela ducta est **B C**, erit ut **A B** ad **B D**, ita **A C** ad **C E**. Æqualis autem est **B D** ipsi **A C**. Ut igitur **A B** ad **A C**, ita est **A C** ad **C E**. Quare datis rectis lineis **A B, A C** tertia proportionalis inventa est **C E**. **Q. E. F.**



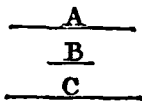
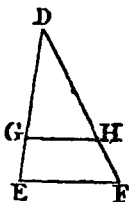
[XII.]

PROP. XII. PROBL.

Tribus datis rectis lineis quartam proportionalem invenire.

Sint datæ tres rectæ lineæ **A, B, C**. Oportet ipsis **A, B, C** quartam proportionalem invenire. Exponantur duæ rectæ lineæ **D E, D F** angulum quemvis **E D F** continentes; et ponatur ipsi quidem **A** æqualis **D G**, ipsi vero **B** æqualis **G E**, et ipsi **C** æqualis **D H**: junctâque
G H,

GH , per B ipsi parallela^a ducatur EF . Itaque quoniam^a 31. primi. uni laterum trianguli DEF , nimirum ipsi EF , parallela ducta est GH , erit ut DG ad GE ita DH ad HF . Est autem DG ipsi A æqualis; GE vero æqualis B ; et DH æqualis C . Ut igitur A ad B , ita C ad HF . Quare datis tribus rectis lineis A , B , C quarta proportionalis inventa est HF . Q. E. F.

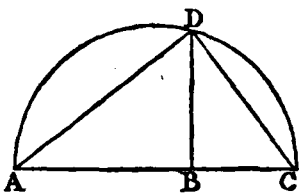


PROP. XIII. PROBL.

[XIII.]

Duabus datis rectis lineis mediam proportionalem invenire.

Sint datæ duæ rectæ lineæ AB , BC . Oportet inter ipsas AB , BC mediam proportionalem invenire. Ponantur in directum, et super ipsâ AC describatur semicirculus ADC ; ducaturque^a a puncto B ipsi AC ad rectos angulos BD ; et AD , DC jungantur. Quoniam igitur in semicirculo est angulus ADC , is rectus^a est. Et^a 31. tertii. quoniam in triangulo rectangulo ADC , ab angulo recto ad basim perpendicularis ducta est DB ; erit DB media proportionalis^a inter segmenta basis AB , BC . Duabus igitur datis rectis lineis AB , BC media proportionalis inventa est DB . Q. E. F.



* 11. primi.

PROP. XIV. THEOR.

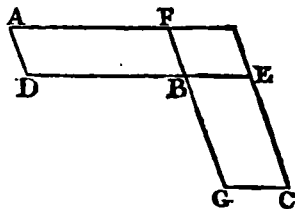
[XIV.]

Æqualium, et unum uni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum latera, quæ sunt circum æquales angulos, reciproca sunt: et quorum parallelogrammorum, unum uni æqualem habentium angulum, latera, quæ circum æquales angulos, sunt reciproca; ea inter se sunt æqualia.

Sint æqualia parallelogramma AB , BC , æquales habentia angulos ad B ; et ponantur in directum DB , BE . Ergo et in directum^a erunt FB , BG . Dico parallelogrammorum AB , BC latera, quæ sunt circum æquales angulos, reciproca esse: hoc est, ut DB ad BE ita esse

14. primi.
 GB

- $\angle B$ ad BF . Compleatur enim parallelogrammum FE .
 Et quoniam parallelogrammum AB æquale est parallelogrammo BC , aliud autem aliquod est FE parallelogrammum; erit ut AB ad FE ^b, ita BC ad FE . Sed ut AB quidem ad FE , ita ^c est DB ad BE ; ut autem BC ad FE ,
^d 11. quinti. ita ^c GB ad BF ; ut igitur^d DB ad BE , ita GB ad BF .
 Ergo parallelogrammorum AB , BC latera, quæ circum æquales angulos, ex contrariâ parte sibi ipsis respondent. Et si reciproca sint, seu ex contrariâ parte sibi ipsis respondeant, latera, quæ sunt circum æquales angulos, nempe si ut BD ad BE , ita sit GB ad BF ; dico parallelogrammum AB parallelogrammo BC æquale esse. Quoniam enim est ut DB ad BE , ita GB ad BF , ut autem DB ad BE , ita ^c AB parallelogrammum ad parallelogrammum FE ; et ut GB ad BF , ita ^c BC parallelogrammum ad parallelogrammum FE ; erit^d et ut AB ad FE , ita BC ad FE . ^e Æquale igitur est AB parallelogrammum parallelogrammo BC . Ergo æqualium et unum uni æqualem habentium angulum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt, seu ex contrariâ parte sibi ipsis respondent; et quorum parallelogrammorum, unum uni æqualem habentium angulum, latera, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt; ea inter se sunt æqualia. Q. E. D.



[XV.]

PROP. XV. THEOR.

Æqualium, et unum uni æqualem habentium angulum triangulorum latera, quæ circum æquales angulos, sunt reciproca. Et quorum triangulorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt, ea inter se sunt æqualia.

Sint æqualia triacula ABC , ADE , unum angulum uni angulo æqualem habentia, angulum scilicet BAC angulo DAE . Dico triangulorum ABC , ADE latera, quæ circum æquales angulos, reciproca esse, hoc est, ut CA ad AD , ita esse EA ad AB . Ponantur enim ita, ut in directum sit CA ipsi AD . Ergo et EA ipsi AB in directum erit; et jungatur BD . Quoniam igitur triangulum ABC æquale est triangulo ADE , aliud autem est

est $\triangle ABD$; erit ut $\triangle CAB$ triangulum ad triangulum

$\triangle BAD$, ita $\triangle ADE$ ad triangulum $\triangle BAD$.

Sed ut triangulum quidem $\triangle CAB$ ad $\triangle BAD$ tri-

angulum, ita $\triangle CA$ ad AD ;

ut autem triangulum $\triangle EAD$

ad ipsum $\triangle BAD$, ita EA ad

AB . Ut igitur CA ad

AD , ita EA ad AB .

Quare triangulorum $\triangle ABC$, $\triangle ADE$

latera, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt.

Et si reciproca sint latera triangulorum $\triangle ABC$, $\triangle ADE$,

scilicet sit ut CA ad AD , ita EA ad AB ; dico triangulum

$\triangle ABC$ triangulo $\triangle ADE$ æquale esse. Junctâ enim rursus

BD , quoniam ut CA ad AD , ita est EA ad AB ; ut au-

tem CA ad AD , ita $\triangle ABC$ triangulum ad triangulum

$\triangle BAD$; et ut EA ad AB , ita $\triangle EAD$ ad

$\triangle BAD$ triangulum, erit ut $\triangle ABC$ triangulum ad triangu-

lum $\triangle BAD$, ita triangulum $\triangle EAD$ ad $\triangle BAD$ triangulum.

Utrumque igitur triangulorum $\triangle ABC$, $\triangle ADE$ ad trian-

gulum $\triangle BAD$ eandem habet proportionem; ac propterea

æquale est $\triangle ABC$ triangulum triangulo $\triangle ADE$. Æqua-

lium igitur, et unum uni æqualem habentium angulum

triangulorum latera, quæ circum æquales angulos, reci-

proca sunt: et quorum triangulorum unum uni æqualem

habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos,

reciproca sunt, ea inter se sunt æqualia. Q. E. D.

PROP. XVI. THEOR.

[XVI.]

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; rectangulum

sub extremis contentum æquale est ei rectangulo, quod

sub mediis continetur: et si rectangulum sub extremis

contentum æquale fuerit ei, quod sub mediis continetur;

quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales AB , CD , E , F ,

fitque ut AB ad CD , ita E

ad F . Dico rectangulum

contentum sub rectis lineis

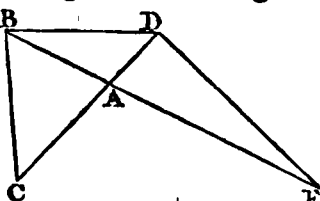
AB , F æquale esse ei, quod

sub ipsis CD , E contine-

tur. Ducanturenim punctis

A , C ipsis AB , CD ad

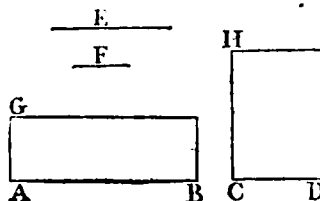
rectos angulos AG , CH ;



d 7. quinti.

e 1. hujus.

f 11. quinti.



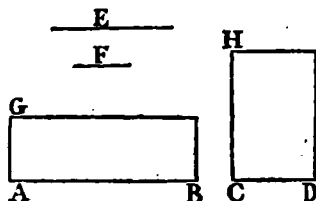
g 11. primi.

ponaturque

ponaturque ipsi quidem F æqualis AG , ipsi vero E æqualis CH ; et compleantur BG , DH parallelogramma.

Quoniam igitur est ut AB ad CD , ita E ad F ; est autem E æqualis CH , et F

* 7. quinti. ipsi AG : erit * ut AB ad CD , ita CH ad AG . Parallelo-



grammorum igitur BG , A DH latera, quæ sunt circum æquales angulos, reciproca sunt. Quorum autem æquiangulorum parallelo-

* 14. hujus. grammorum latera, quæ sunt circum æquales angulos, reciproca sunt, ea inter se sunt ^b æqualia. Ergo paral-

lelogrammum BG æquale est parallelogrammo DH . Atque est parallelogrammum quidem BG , quod sub rectis lineis AB , F continetur, etenim AG est æqualis F ; parallelogrammum vero DH , quod continetur sub ipsis CD , E ; cum CH ipsi E sit æqualis. Rectangulum igitur contentum sub AB et F est æquale ei, quod sub ipsis CD et E continetur. Et si rectangulum contentum sub AB , F sit æquale ei, quod sub CD et E continetur; dico quatuor rectas lineas proportionales esse, videlicet ut AB ad CD , ita E ad F . Iisdem enim constructis, quoniam rectangulum contentum sub AB et F est æquale ei, quod sub CD et E continetur, atque est contentum quidem sub AB , F rectangulum BG , etenim AG est æqualis F : contentum vero sub CD , E est rectangulum DH , cum CH ipsi E sit æqualis: erit parallelogrammum BG æquale parallelogrammo DH . Et sunt æquiangula. Æqualium autem et æquiangulorum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt ^c. Quare ut AB ad CD , ita CH ad AG ; æqualis autem est CH ipsi E , et AG ipsi F . Ut igitur AB ad CD , ita E ad F . Ergo si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; rectangulum sub extremis contentum æquale est ei, quod sub mediis continetur: et si rectangulum sub extremis contentum æquale fuerit ei, quod sub mediis continetur; quatuor rectæ lineæ proportionales erunt. *Q. E. D.*

*Cor. ** Si quatuor rectarum prima major sit quam ad secundam in ratione tertiæ ad quartam; rectangulum sub extremis rectangulo sub mediis majus erit. Et si rectangulum

rectangulum sub extremis majus fuerit rectangulo sub mediis; prima major erit quam ad secundam in ratione tertiæ ad quartam.

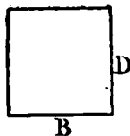
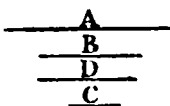
PROP. XVII. THEOR.

[XVII.]

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint; rectangulum sub extremis contentum æquale est ei, quod a mediâ fit, quadrato: et si rectangulum sub extremis contentum, æquale fuerit ei, quod a mediâ fit, quadrato, tres rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint tres rectæ lineæ proportionales A, B, C; et fit ut A ad B ita B ad C. Dico

rectangulum contentum sub A, C æquale esse ei, quod a mediâ B fit, quadrato. Ponatur ipsi B æqualis D. Et quoniam ut A ad B, ita B ad C; æqualis autem B ipsi D;



erit ut A ad B^h, ita D ad C. Si autem quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum sub extremis contentum est æquale ei, quod sub mediis continetur. Ergo rectangulum sub A, C contentum est æquale ei, quod continetur sub B, D. Sed rectangulum contentum sub B, D est æquale quadrato, quod fit ex ipsâ B; etenim B est æqualis D. Rectangulum igitur contentum sub A, C est æquale ei, quod ex B fit, quadrato. Et si rectangulum contentum sub A, C æquale sit quadrato, quod fit ex B; dico ut A ad B, ita esse B ad C. Iisdem enim constructis: quoniam rectangulum contentum sub A, C æquale est quadrato, quod fit ex B; at quadratum quod fit ex B est rectangulum, quod sub ipsis B, D continetur, est enim B æqualis ipsi D; erit rectangulum contentum sub A, C æquale ei, quod sub B, D continetur. Si autem rectangulum, sub extremis contentum, æquale fuerit ei, quod sub mediis continetur, quatuor rectæ lineæ proportionales¹ erunt. Est igitur ut A ad B, ita D ad C; æqualis autem B ipsi D. Ergo ut A ad B, ita B ad C. Si igitur tres rectæ lineæ proportionales fuerint; rectangulum sub extremis contentum est æquale ei, quod a mediâ fit, quadrato: et si rectangulum sub extremis contentum æquale fuerit ei, quod a mediâ fit, quadrato; tres rectæ lineæ proportionales erunt. Q. E. D.

Cor.

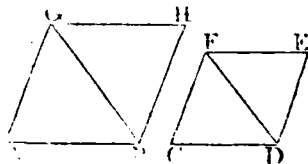
*Cor.** Si trium rectarum prima major sit quam ad secundam in ratione secundæ ad tertiam; rectangulum sub extremis quadrato a mediâ majus erit. Et si rectangulum sub extremis majus fuerit quadrato a mediâ; prima major erit quam ad secundam in ratione secundæ ad tertiam.

[XVIII.]

PROP. XVIII. PROBL.

A datâ rectâ lineâ, dato rectilineo simile et similiter positum, rectilineum describere.

Sit data recta linea AB , datum autem rectilineum $C E$. Oportet a rectâ lineâ AB , rectilineo $C E$ simile et similiter positum, rectilineum describere. Jungatur $D F$, et ad rectam lineam AB , et ad puncta in ipsâ A, B , angulo quidem C æ-



^k 23. primi. qualis angulus ^k constituatur GAB , angulo autem CFD angulus ABG . Reliquus igitur CFD angulus reliquo ^l 2. Cor. 32. AGB est ^l æqualis. Ergo æquiangulum est FCD triangulum triangulo GAB ; ac propterea ^m ut FD ad GB , ita FC ad GA , et CD ad AB . Rursus constituatur ad rectam lineam BG , et ad puncta in ipsâ B, G , angulo quidem DFE æqualis angulus BGH , angulo autem FDE æqualis GBH . Ergo reliquus ¹ ad E reliquo ad H est æqualis. Æquiangulum igitur est triangulum FDE triangulo GBH . Quare ut ^m FD ad GB , ita FE ad GH , et ED ad HB . Ostensum autem est et ut FD ad GB , ita FC ad GA , et CD ad AB ; est igitur ⁿ 11. quinti. ut FC ad AG , ita CD ad AB , et FE ad GH , et adhuc ED ad HB . Itaque quoniam angulus quidem CFD est æqualis angulo AGB , angulus autem DFE angulo BGH ; erit totus CFE angulus toti AGH æqualis. Eadem ratione et CDE est æqualis ipsi ABH ; et præterea angulus quidem ad C angulo ad A æqualis, angulus vero ad E angulo ad H . Æquiangulum igitur est AH ipsi CE , et latera circum æquales ipsius angulos habet proportionalia. Ergo rectilineum AH rectilineo CE simile ^o erit. A datâ igitur rectâ lineâ AB , dato rectilineo CE simile et similiter positum, rectilineum AH descriptum est. *Q. E. F.*

^c Def. 1. hujus.

PROP.

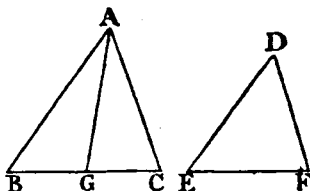
PROP. XIX. THEOR.

[XIX.]

Similia triangula inter se sunt in duplicatâ proportionem laterum homologorum.

Sint similia triangula ABC , DEF habentia angulum ad B æqualem angulo ad E ,

et sit ut AB ad BC , ita DE ad EF , ita ut latus BC homologum sit lateri EF . Dico ABC triangulum ad triangulum DEF duplicatam proportionem habere ejus, quam habet BC ad EF .



Sumatur enim ipsis BC , EF tertia proportionalis BG , ^{p 11. hujus.}

ut sit BC ad EF ita EF ad BG . Et jungatur GA . Quoniam igitur ut AB ad BC , ita est DE ad EF ; erit permutando ut AB ad DE , ita BC ad EF . Sed ut BC ad EF , ita EF ad BG . Ut igitur AB ad DE , ita EF ^{q 11. quinti.}

ad BG . Quare triangulorum ABG , DEF latera, quæ sunt circum æquales angulos, reciproca sunt. Quorum autem triangulorum, unum uni æqualem habentium angulum, latera, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt, ea inter se æqualia sunt. Æquale igitur est ABG ^{15. hujus.}

triangulum triangulo DEF . Et quoniam est ut BC ad EF , ita EF ad BG ; si autem tres rectæ lineæ proportionales sint, prima ad tertiam duplicatam proportionem habet ejus, quam habet ad secundam: habebit igitur ^{Def. 10.}

BC ad BG duplicatam proportionem ejus, quam habet ^{quinti.} BC ad EF . Ut autem BC ad BG , ita ABC triangulum ad triangulum ABG . Ergo et ABC triangulum ad

triangulum ABG duplicatam proportionem habet ejus, quam BC habet ad EF . Est autem ABG triangulum triangulo DEF æquale. Et triangulum igitur ABC ad triangulum DEF duplicatam proportionem habebit ejus, quam habet BC ad EF . Quare similia triangula inter se in duplicatâ sunt proportionem laterum homologorum. Q. E. D.

Cor. Ex hoc manifestum est, si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad tertiam, ita esse triangulum, quod sit a primâ, ad triangulum, quod a secundâ, simile et similiter descriptum; quoniam ostensum est ut CB ad BG , ita ABC triangulum ad triangulum ABG , hoc est, ad triangulum DEF . Q. E. D.

M

PROP.

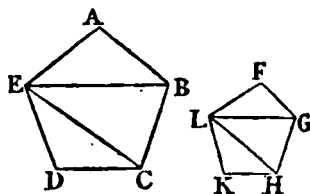
[XX.]

PROP. XX. THEOR.

Similia polygona in similia triangula dividuntur, et numero æqualia, et homologa totis; et polygonum ad polygonum duplicatam proportionem habet ejus, quam latus habet ad homologum latus.

Sint similia polygona $ABCDE$, $FGHKL$, et fit latus AB homologum ipsi FG .

Dico polygonum $ABCDE$, $FGHKL$ in similia triangula dividi, et numero æqualia, et homologa totis; et polygonum $ABCDE$ ad polygonum $FGHKL$ duplicatam proportionem



habere ejus, quam habet AB ad FG . Jungantur BE , EC , GL , LH . Et quoniam simile est $ABCDE$ polygonum polygono $FGHKL$, angulus BAE angulo GFL est æqualis: atque est ut BA ad AE , ita GF ad FL . Quoniam igitur duo triangula sunt ABE , FGL , unum

* 6. hujus. quales autem angulos latera proportionalia: erit[†] triangulum ABE triangulo FGL æquiangulum. Ergo et simile. Angulus igitur ABE æqualis est angulo FGL .

† Def. 1. hujus. Est autem et totus ABC angulus æqualis[‡] toti FGH , propter similitudinem polygonorum. Ergo reliquus EBC reliquo LGH est æqualis. Et quoniam ob similitudinem triangulorum ABE , FGL , est ut EB ad BA , ita LG ad GF ; sed et propter similitudinem polygonorum[§], ut AB ad BC , ita est FG ad GH ; erit ex æquali

‡ 22. quinti. ut EB ad BC , ita LG ad GH . Hoc est, circum æquales angulos EBC , LGH latera triangulorum EBC , LGH sunt proportionalia; æquiangulum igitur est EBC triangulum triangulo LGH . Quare et simile. Eadem ratione et ECD triangulum simile est triangulo LHK . Similia igitur polygona $ABCDE$, $FGHKL$ in similia triangula dividuntur, et numero æqualia: nimirum cum tot sint utriusque polygoni triangula, quot sunt latera, duobus demptis. Dico et homologa totis; hoc est, ut proportionalia sint triangula, et antecedentia quidem sunt ABE , EBC , ECD , consequentia autem ipsorum FGL , LGH , LHK ; et $ABCDE$ polygonum ad polygonum

$FGHKL$

$P G H K L$ duplicatam proportionem habere ejus, quam latus habet ad homologum latus; hoc est, $A B$ ad $F G$. Quoniam enim simile est $A B E$ triangulum triangulo $F G L$; habebit $A B E$ triangulum ad triangulum $F G L$ duplicatam proportionem ^{19. hujus.} ejus, quam habet $B E$ ad $G L$. Eadem ratione, et triangulum $B E C$ ad $G L H$ triangulum duplicatam ^{11. quinti.} proportionem habet ejus, quam $B E$ ad $G L$. Est igitur ut $A B E$ triangulum ad triangulum $F G L$, ita ^{11. quinti.} triangulum $B E C$ ad $G L H$ triangulum. Rursus quoniam simile est triangulum $E B C$ triangulo $L G H$, habebit $E B C$ triangulum ad triangulum $L G H$ duplicatam proportionem ejus, quam recta linea $C E$ habet ad rectam $H L$. Eadem ratione et $E C D$ triangulum ad triangulum $L H K$ duplicatam proportionem habet ejus, quam $C E$ ad $H L$. Est igitur ut triangulum $B E C$ ad triangulum $L G H$, ita $C E D$ triangulum ad triangulum $L H K$. Ostensum autem est et ut $E B C$ triangulum ad triangulum $L G H$, ita triangulum $A B E$ ad triangulum $F G L$. Ergo ut triangulum $A B E$ ad triangulum $F G L$, ita triangulum $B E C$ ad $G H L$ triangulum, et triangulum $E C D$ ad ipsum $L H K$. Et igitur ut unum antecedentium ad unum consequentium ^{12. quinti.}, sic omnia antecedentia ad omnia consequentia. Ergo ut triangulum $A B E$ ad triangulum $F G L$, ita $A B C D E$ polygonum ad polygonum $F G H K L$; sed $A B E$ triangulum ad triangulum $F G L$ duplicatam proportionem habet ejus, quam latus $A B$ habet ad homologum latus $F G$: similia enim triangula in duplicata sunt proportione laterum homologorum. Ergo et $A B C D E$ polygonum ad polygonum $F G H K L$ duplicatam proportionem habet ejus, quam $A B$ latus habet ad $F G$ homologum latus. Similia igitur polygona in similia triangula dividuntur, et numero æqualia, et homologa totis; et polygonum ad polygonum duplicatam habet proportionem ejus, quam habet latus ad homologum latus. *Q. E. D.*

Eodem modo et in similibus quadrilateris ostendetur, ea esse in duplicata proportione laterum homologorum. Ostensum autem est et in triangulis.

Cor. 1. Ergo univærse similes figuræ rectilinéæ inter se sunt in duplicata proportione homologorum laterum.

Cor. 2. Univærse igitur manifestum est, si tres rectæ linéæ proportionales fuerint, ut prima ad tertiam, ita esse

esse figuram, quæ sit a primâ, ad eam, quæ a secundâ, similem et similiter descriptam. Nam si ipsis $A B$, $F G$ figurarum rectilinearum similium lateribus homologis tertiam proportionalem sumamus, quæ sit x ; habebit $A B$ ad x duplicatam proportionem ejus, quam habet $A B$ ad $F G$. Habet autem et figura ad figuram duplicatam proportionem ejus, quam latus $A B$ ad latus homologum $F G$. Figura igitur ad figuram ut $A B$ ad x . *Q. E. D.*



*Cor. 3.** Si similes figuræ rectilinæ sint etiam æquales, earum latera homologa erunt inter se æqualia.

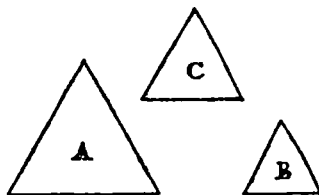
[XXI.]

PROP. XXI. THEOR.

Quæ eidem rectilineo sunt similia, et inter se similia sunt.

Sit enim utrumque rectilineorum A , B simile rectilineo c . Dico et rectilineum A rectilineo B simile esse. Quoniam enim simile est A rectilineo c , et ipsi æquiangulum^b erit, et circum æquales angulos latera habebit proportionalia.

^b Def. 1. hujus.



Rursus quoniam simile est rectilineum B rectilineo c , æquiangulum ipsi erit, et circum æquales angulos latera proportionalia habebit^b. Utrumque igitur rectilineorum A , B ipsi c æquiangulum est, et circum æquales angulos latera habet proportionalia. Quare et rectilineum A ipsi B est æquiangulum, lateraque circum æquales angulos proportionalia habet; ac propterea A ipsi B est simile. *Q. E. D.*

[XXII.]

PROP. XXII. THEOR.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; et rectilinea, quæ ab ipsis fiant, similia et similiter descripta, proportionalia erunt. Et si rectilinea, quæ ab ipsis fiunt, similia et similiter descripta, proportionalia fuerint; et ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales $A B$, $C D$, $E F$, $G H$: nempe ut $A B$ ad $C D$, ita sit $E F$ ad $G H$. Describanturque

scribanturque ^a ab ipsis quidem AB, CD similia et si-^c 18. hujus.

militer posita rectilinea KAB, LCD : ab ipsis vero EF, GH describantur rectilinea similia et similiter posita MF, NH . Dico

ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD , ita esse rectilineum MF ad ipsum NH rectilineum.

Sumatur ipsis ^d quidem AB, CD tertia proportionalis X ; ipsis vero EF, GH tertia proportionalis O .

Et quoniam est ut AB ad CD , ita EF ad GH ; ut autem CD ad X , ita GH ad O ; erit, ex æquali^e

ut AB ad X , ita EF ad O . Sed ut AB quidem ad X , ita est ^f

rectilineum KAB ad LCD rectilineum; ut autem EF ad O , ita ^f rectilineum MF ad rectilineum NH . Ut igitur KAB rectilineum ad rectilineum LCD , ita est ^g re-^h 11. quinti.

ctilineum MF ad NH rectilineum. Et si sit ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD , ita rectilineum MF ad rectilineum NH ; dico ut AB ad CD , ita esse EF ad GH .

Fiat enim ut AB ad CD , ita EF ad ^h PR , et ^h 12. hujus.

describatur ^a ab ipsa PR , alterutri rectilineorum MF, NH simile et similiter positum, rectilineum SR . Quoniam

igitur est ut AB ad CD , ita EF ad PR , et descripta sunt ab ipsis quidem AB, CD similia et similiter posita KAB, LCD rectilinea, ab ipsis vero EF, PR similia et

similiter posita rectilinea MF, SR ; erit ⁱ ut KAB recti-ⁱ ex prius

lineum ad rectilineum LCD , ita rectilineum MF ad SR demonstratis.

rectilineum. Ponitur autem et ut rectilineum KAB ad rectilineum LCD , ita MF rectilineum ad rectilineum NH .

Ergo ut rectilineum MF ad rectilineum NH , ita MF rectilineum ad rectilineum SR . Quod cum recti-

lineum MF ad utrumque ipsorum NH, SR eandem habeat proportionem, erit ^k rectilineum NH ipsi SR æ-^k 9. quinti.

quale. Est autem ipsi simile et similiter positum. Ergo GH est æqualis PR .

Et quoniam ut AB ad CD , ita est ^l 13. Cor.* 20.

EF ad PR ; æqualis autem PR ipsi GH ; erit ut AB ad ^{hujus}

CD , ita EF ad GH . Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; et rectilinea, quæ ab ipsis sunt, similia et similiter descripta, proportionalia erunt: et si rectilinea, quæ ab ipsis sunt, similia et similiter de-

scripta,

scripta, proportionalia fuerint; et ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt. Q. E. D.

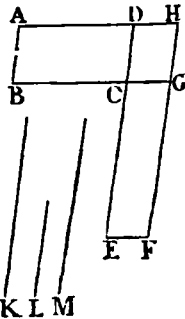
[XXIII.]

PROP. XXIII. THEOR.

Æquiangula parallelogramma inter se proportionem habent ex lateribus compositam.

Sint æquiangula parallelogramma AC , CF æqualem habentia BCD angulum angulo ECG .

Dico parallelogrammum AC ad parallelogrammum CF proportionem habere compositam ex lateribus, videlicet compositam ex proportionem, quam habet BC ad CG , et ex proportionem, quam DC habet ad CE . Ponatur enim, ut BC sit in directum ipsi CG . Ergo et DC ipsi CE in directum



¹ 14. primi. rectum ¹erit; et compleatur DG parallelogrammum: exponaturque recta linea quædam K , et fiat ut BC KL M

^m 12. hujus. ad CG , ita ^m K ad L ; ut autem DC ad CE , ita L ad M . Proportiones igitur ipsius K ad L , et L ad M eadem sunt, quæ proportionem laterum, videlicet BC ad CG , et DC ad CE . Sed proportio K ad M composita est ex proportionem K ad L , et proportionem L ad M . Quare et K ad M proportionem habet ex lateribus compositam.

ⁿ 1. hujus. Et quoniam est ut BC ad CG ⁿ, ita AC parallelogrammum ad parallelogrammum CH ; sed ut BC ad CG , ita ^o 11. quinti. K ad L : erit ^o ut K ad L , ita parallelogrammum AC ad CH parallelogrammum. Rursum quoniam est ut DC ad CE , ita CH parallelogrammum ad parallelogrammum CF ; ut autem DC ad CE , ita L ad M ; ergo ut L ad M , ita erit ^o parallelogrammum CH ad CF parallelogrammum. Itaque cum ostensum sit ut K quidem ad L , ita AC parallelogrammum ad parallelogrammum CH : ut autem L ad M , ita parallelogrammum CH ad CF pa-

^p 22. quinti. rallelogrammum; erit ^p, ex æquali, ut K ad M , ita AC parallelogrammum ad ipsum CF . Habet autem K ad M proportionem ex lateribus compositam. Ergo et AC parallelogrammum ad parallelogrammum CF proportionem habebit compositam ex lateribus. Æquiangula igitur parallelogramma inter se proportionem habent ex lateribus compositam. Q. E. D.

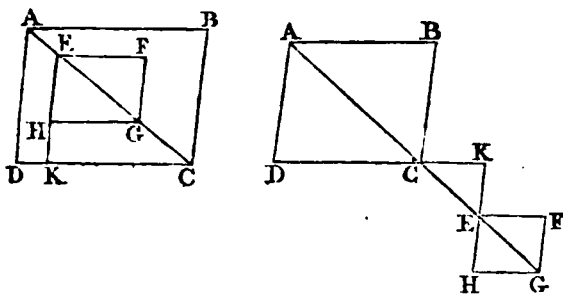
PROP.

PROP. XXIV. THEOR.

[XXIV.]

Parallelogramma, quæ circa eandem sunt diagonalem, et quorum latera duo adjacentia duobus adjacentibus sunt parallela, inter se similia sunt.

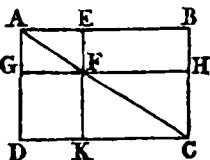
Parallelogrammi $ABCD$ fit AC diagonalis. Circa eandem AC fit aliud parallelogrammum $EFGH$, cujus latera duo adjacentia EF , EH , duobus alterius adjacentibus, AB , AD sint parallela; unde necessario consequetur et reliqua duo adjacentia GF , GH reliquis duobus



CB , CD adjacentibus esse parallela. Dico parallelogramma $ABCD$, $EFGH$ esse inter se similia. Conveniant enim EH , DC (si opus sit productæ) in puncto K . Propter rectas EH , AD parallelas¹, angulus GEH angulo CAD æqualis erit². Pari ratione et propter rectas EF , AB parallelas, angulus GEF angulo CAB æqualis erit. Duo igitur GEH , GEF simul sumpti duobus CAD , CAB simul sumpti sunt æquales. Hoc est, totus FEH toti BAD æqualis erit. Æquiangula igitur sunt parallelogramma $ABCD$, $EFGH$ ³. In triangulo autem ADC , cum recta EK parallela sit basi AD , erit AD ad DC ut EK ad KC ⁴. Pari ratione in triangulo EKC , cum recta HG parallela sit basi, erit EK ad KC ut EH ad HG . Quare AD ad DC ut EH ad HG ⁵. In parallelogrammis igitur æquiangulis $ABCD$, $EFGH$, latera circa angulos æquales D , H sunt proportionalia. Unde efficietur et reliqua latera circa angulos æquales B , F esse proportionalia. Nimirum propter æqualia latera opposita utriusque parallelogrammi⁶, et eandem⁷ æqualium

7. quinti. æqualium ad æqualia proportionem⁷. Parallelogramma
⁸ Def. 1. igitur $ABCD$, $EFGH$ inter se similia sunt⁸. $Q. E. D.$
 hujus.

Cor. * Si per punctum quodvis F in AC , parallelo-
 grammi $ABCD$ diagonali, ducantur
 rectæ GFH , KFE lateribus paral-
 lelogrammi adjacentibus parallelæ,
 parallelogramma $EFGA$, $HFKC$
 circa diagonalem AC constituent
 toti et inter se similia.



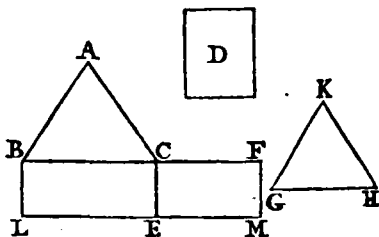
[XXV.]

PROP. XXV. PROBL.

*Dato rectilineo simile, et alteri dato æquale, idem con-
 sistuere.*

Sit datum quidem rectilineum, cui oportet simile con-
 sistuere, ABC ; cui au-
 tem æquale fit, D .

Oportet ipsi ABC
 simile, et ipsi D æ-
 quale, idem constitu-
 ere. Applicetur^a ad
 rectam quidem li-
 nearum BC rectilineo
 ABC æquale paral-
 lelogrammum BE .



^a Cor. 45.
 primi.

Ad rectam vero CE applicetur^a parallelogrammum CM
 æquale ipsi D , in angulo FCE , qui $CBLE$ angulo est

^b 14. primi. æqualis. In directum igitur^b est BC ipsi CF , et LE

^c 13. hujus. ipsi EM . Sumatur^c inter BC , CF media proportio-

^d 18. hujus. nalis GH ; et^d ab ipsâ GH describatur rectilineum KGH

simile et similiter positum rectilineo ABC . Et quo-
 niam est ut BC ad GH , ita GH ad CF , si autem tres

^e 2. Cor. 20. rectæ lineæ proportionales sint, ut prima ad tertiam,
 hujus. ita est figura, quæ sit a primâ, ad eam quæ a secundâ,

similem et similiter descriptam: erit ut BC ad CF , ita

ABC rectilineum ad rectilineum KGH . Sed et ut BC

^f 1. hujus. ad CF , ita^f parallelogrammum BE ad EF parallelo-

^g 11. quinti. grammum. Ut^g igitur rectilineum ABC ad rectilineum

KGH , ita BE parallelogrammum ad parallelogrammum

EF . Est autem rectilineum ABC æquale parallelo-

^h 14. quinti. grammum BE . Æquale igitur est et KGH rectilineum

æquale

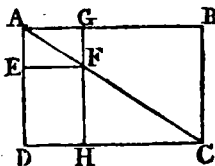
æquale est rectilineo D . Ergo et rectilineum KGH ipsi D est æquale. Est autem GKH simile rectilineo ABC . Dato igitur rectilineo ABC simile, et alteri dato D æquale, idem constitutum est KGH . $Q. E. F.$

PROP. XXVI. THEOR.

[XXVI.]

Si a parallelogrammo parallelogrammum auferatur simile toti et similiter positum, communem ipsi angulem habens, circa eandem diametrum est toti.

A parallelogrammo enim $ABCD$ parallelogrammum AF auferatur, simile ipsi $ABCD$, et similiter positum, communemque ipsi angulum habens DAB . Dico parallelogrammum $ABCD$ circa eandem esse diametrum parallelogrammo AF . Jungantur enim AF , CF , et GF producta ipsi DC in H occurrat.



Cum similia sint parallelogramma EG , DB et similiter posita, angulus AEF angulo ADC æqualis erit; et latera circa æquales angulos proportionalia. Quare AD est ad DC , ut AE ad EF . Sed æquales inter se sunt EF , DH , nempe parallelogrammi $EFHD$ latera opposita¹. Erit igitur AE ad DH , ut AE ad EF ^k. Quare¹ AD erit ad DC , ut AE ad DH . Hoc est, tota AD ad totam DC , ut pars AE ad partem DH . Quare et reliqua ED ad reliquam HC , ut AD ad DC ¹. Illi autem ED ¹ æqualis est HF , nempe cum opposita sint parallelogrammi latera. Quare HF erit ad HC , ut ED ad HC ^k, hoc est, ut AD ad DC . Sed AD ad DC , ut AE ad EF (id enim ostensum.) Quare HF ad HC , ut AE ad EF ^m. Sed propter rectas FH , DE parallelas, angulus FHC angulo AEC æqualis estⁿ: cui æqualis jam initio² ostensus est AEF . Anguli igitur FHC , AEF inter se æquales. Duo igitur triangula AEF , FHC angulos ad E et H æquales habent, et latera circa æquales illos angulos proportionalia. Æquiangula igitur erunt triangula illa, et æquales habebunt angulos, quibus homologa latera subtenduntur^o. Angulus igitur AFE angulo FCH æqualis. Addatur utrique EFC . Duo igitur AFE , CFE simul sumpti duobus FCH , CFE simul sumptis sunt æquales. Sed propter rectas CD , EF parallelas, duo FCH , CFE simul sumpti duobus rectis sunt æqualesⁿ. Duo igitur AFE , CFE simul sumpti duobus

¹ 34. primi.
^k 7. quinti.

¹ 19. quinti.

^m 11. quinti.

² 29. primi.

^o 6. hujus.

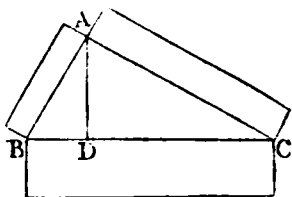
duobus rectis sunt æquales. Directa igitur est linea
 * 14. primi. AFC' , et ipsa est parallelogrammi $ABCD$ diagonalis.
 Parallelogrammum igitur $AGFE$, cum sit circa lineam
 AFC , est circa diagonalem parallelogrammi $ABCD$.
 Si igitur &c. Q. E. D.

[XXXI.]

PROP. XXVII. THEOR.

*In rectangulis triangulis figura, quæ fit a latere rectum
 angulum subtendente, æqualis est eis, quæ a lateribus
 rectum angulum continentibus fiunt, similibus et similiter
 descriptis.*

Sit triangulum rectangulum ABC , rectum habens
 angulum BAC . Dico figu-
 ram, quæ fit ex BC , æqua-
 lem esse eis, quæ ex BA , AC
 fiunt, similibus et similiter
 descriptis. Ducatur per-
 pendicularis AD . Quoniam
 igitur in triangulo rectan-
 gulo ACB ab angulo recto,
 qui est ad A , ad BC basim perpendicularis ducta est AD ;



* 8. hujus. erunt * triacula ABD , ADC , quæ sunt ad perpendi-
 cularem, similia toti ABC , et inter se. Et quoniam si-
 * 4. hujus. mile est ABC triangulum triangulo ABD , erit ut CB
 ad BA , ita BA ad BD . Quod cum tres rectæ lineæ
 * 2. Cor. 20. proportionales sint, ut prima ad tertiam, ita erit * figura,
 hujus. quæ fit ex primâ ad eam, quæ ex secundâ, similem et
 similiter descriptam. Ut igitur CB ad BD , ita figura,
 quæ fit ex CB , ad eam, quæ ex BA , similem et similiter
 descriptam. Eâdem ratione, et ut BC ad CD , ita fi-
 gura, quæ fit ex BC , ad eam, quæ ex CA . Quare et
 * 24. quinti. ut BC ad ipsas BD , DC , ita * figura, quæ ex BC , ad eas,
 quæ ex BA , AC , similes et similiter descriptas. Æqua-
 lis autem est BC ipsis BD , DC . Ergo figura, quæ fit
 ex BC , æqualis est eis, quæ ex BA , AC fiunt, similibus
 et similiter descriptis. In rectangulis igitur triangulis,
 figura, quæ fit a latere rectum angulum subtendente,
 æqualis est eis, quæ a lateribus rectum angulum con-
 tinentibus fiunt, similibus et similiter descriptis. Q. E. D.

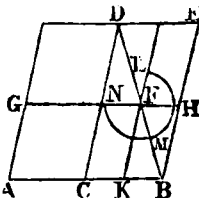
PROP.

PROP. XXVIII. THEOR.

[XXVII.]

Omniū parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, et deficientium figuris parallelogrammis similibus et similiter positis ei, quæ a dimidiâ describitur, maximum est, quod ad dimidiam est applicatum, simile existens defectui.

Sit recta linea AB ; seceturque bifariam in c ; et ad AB rectam lineam applicetur parallelogrammum AD deficiens figurâ parallelogrammâ CE , simili et similiter positâ ei, quæ a dimidiâ ipsius AB descripta est. Dico omnium parallelogrammorum ad rectam lineam AB applicatorum, et deficientium figuris parallelogrammis similibus et similiter positis ipsi CE , maximum esse AD .



Applicetur enim ad rectam lineam AB parallelogrammum AF , deficiens figurâ parallelogrammâ HK simili et similiter positâ ipsi CE . Dico AD parallelogrammum parallelogrammo AF majus esse. Quoniam enim simile est parallelogrammum CE parallelogrammo HK , circa eandem diametrum EB sunt. Ducatur eorum diameter EB , et describatur figura. Quoniam igitur CF est æquale ipsi FE , commune apponatur HK . Totum igitur CH toti KE est æquale. Sed CH est æquale CG , quoniam et recta linea AC ipsi CB . Ergo et GC ipsi EK æquale est. Commune apponatur CF . Totum igitur AF est æquale gnomoni LMN : quare et CE , hoc est, AD parallelogrammum parallelogrammo AF est majus. Omnium igitur parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, et deficientium figuris parallelogrammis similibus et similiter positis ei, quæ a dimidiâ describitur, maximum est, quod ad dimidiam est applicatum. *Q. E. D.*

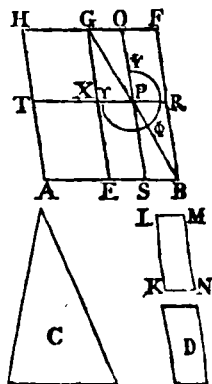
PROP.

[XXVIII.]

PROP. XXIX. PROBL.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, deficiens figurâ parallelogrammâ, quæ similis sit alteri datæ: oportet autem datum rectilinæum, cui æquale applicandum est, non majus esse eo, quod ad dimidiam applicatur; similibus existentibus defectibus, et eo, quod a dimidiâ, et eo, cui oportet simili deficere.

Sit data quidam recta linea AB : datum autem rectilineum, cui oportet æquale ad datam rectam lineam AB applicare, fit C , non majus existens eo, quod ad dimidiam applicatum est, similibus existentibus defectibus: cui autem oportet simili deficere, fit D . Oportet ad datam rectam lineam AB , dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicare, deficiens figurâ parallelogrammâ, quæ similis fit ipsi D . Secetur AB bifariam in E , et ab ipsâ EB describatur rectilineum ^{b} simile et similitur positum ipsi D , quod fit $EBFG$; et compleatur AG parallelogrammum. Itaque AG vel



18. hujus.

18. hujus. ^b simile et similiter positum ipsi D, quod sit E B F G; et compleatur A G parallelogrammum. Itaque A G vel æquale est ipsi C, vel eo majus, ob determinationem; et si quidem A G sit æquale C, factum jam erit, quod proponebatur: etenim ad rectam lineam A B dato rectilineo C æquale parallelogrammum A G applicatum est, deficiens figurâ parallelogrammâ E F ipsi D simili. Si autem non est æquale, erit H E majus quam C. Atqui E F æquale est H E. Ergo et E F quam C est majus. Quo autem E F superat C, ei excessui æquale, ipsi vero D simile et similiter positum, idem ^c constituitur K L M N. Sed D est simile E F. Quare et K M ipsi E F simile erit. Sit igitur recta linea K L homologa ipsi G E, L M vero ipsi G F. Et quoniam æquale est E F ipsis C et K M, erit E F ipso K M majus. Major igitur est recta linea G E ipsâ K L; et G F ipsâ L M. Ponatur G X æqualis K L, et G O æqualis L M, et compleatur X G O P parallelogrammum. Æquale igitur est et simile X O ipsi K M. Sed K M simile

c 25. hujus.

Quare ut BA ad AE , ita AE ad EB . Sed AB major est quam AE . Ergo AE quam EB est ^{o} major. Recta ^{o} 14. quinti. igitur linea AB extremâ ac mediâ ratione secta est in E . Et majus ipsius segmentum est AE . Q. E. F.

Aliter. Sit data recta linea AB . Oportet ipsam AB extremâ ac mediâ ratione secare. Secetur enim AB in C , ita ut rectangulum ^{p} , quod continetur sub AB , BC , ^{p} 11. secundum æquale sit quadrato ex AC . Quoniam igitur rectangulum sub AB , BC æquale ^{q} est quadrato ex AC , erit ^{q} 17. hujus. ut BA ad AC ita AC ad CB . Ergo AB recta linea extremâ ac mediâ ratione secta est. Q. E. F.

SCHOLION. *

Turbatam Theoni Propositionum seriem restituiamus. Nempe quæ vicessimam sextam proxime sequuntur quatuor, tricesimæ primæ, quæ Theoni numerata est, demonstrandæ nihil prorsus inserviunt. In 29^a vero et tricesimâ fieri Euclides jubet, quod quâ ratione efficiendum sit, ex tricesimâ primâ demum intelligitur. Nos igitur, quæ Theoni est tricesima prima, vicessimæ septimæ loco reposuimus. Dein Theoni 27^a, 28^a, 29^a, 30^a, nostræ sunt 28^a, 29^a, 30^a, 31^a. Ita enim ab Euclide propositiones ordinatas fuisse existimamus.

PROP. XXXII. THEOR.

[XXXII.]

Si duo triangula componantur ad unum angulum, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ita ut homologa latera ipsorum etiam sint parallela; reliqua triangulorum latera in directum sibi ipsis constituta erunt.

Sint duo triangula ABC , DEC , quæ duo latera BA ,

AC duobus lateribus CD , DE proportionalia habeant,

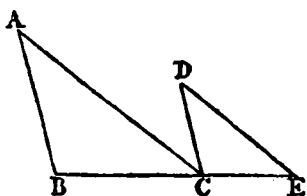
scil. fit sicut BA ad AC , ita CD ad DE ; parallela autem

fit AB ipsi DC , et AC ipsi DE . Dico BC ipsi CE in

directum esse. Quoniam enim AB parallela est DC ,

et in ipsas incidit recta linea AC ; erunt ^{r} anguli alterni ^{r} 29. primi.

BAC , ACD æquales inter se. Eadem ratione, et angulus CDE æqualis est angulo ACD . Quare et BA ^{s} ipsi



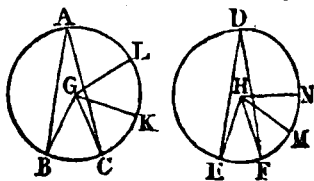
- ipſi CDE eſt æqualis. Et quoniam duo trianguſa ſunt ABC , DCE , unum angulum ad A uni angulo ad D æqualem habentia, circum æquales autem angulos latera proportionalia, quod ſit ut BA ad AC , ita CD ad DE ; erit ABC triangulo DCE æquiangulum. Ergo ABC angulus eſt æqualis angulo DCE . Oſtenſus autem eſt et angulus ACD æqualis angulo BAC . Totus igitur ACE duobus ABC , BAC eſt æqualis. Communis apponatur ACB . Ergo anguli ACE , ACB angulis BAC , ACB , CBA æquales ſunt. Sed BAC , ACB , CBA anguli duobus rectis ſunt æquales. Et anguli igitur ACE , ACB duobus rectis æquales erunt. Itaque ad quandam rectam lineam AC , et ad punctum in ipſa C , duæ rectæ lineæ BC , CE non ad eaſdem partes poſitæ, angulos, qui deinceps ſunt, ACE , ACB duobus rectis æquales efficiunt. Ergo BC ipſi CE in directum erit. Si igitur duo trianguſa componantur ad unum angulum, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ita ut homologa latera ipſorum etiam ſint parallela; reliqua triangulorum latera in directum ſibi ipſis conſtituta erunt. *Q. E. D.*
- * 6. hujus. * 14. primi.

[XXXIII.]

PROP. XXXIII. THEOR.

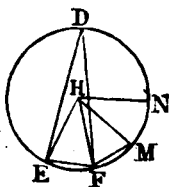
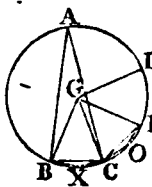
In circulis æqualibus anguli eandem habent proportionem, quam circumferentiæ, quibus inſiſtunt, ſive ad centra, ſive ad circumferentias inſiſtant: adhuc autem et ſectores, quippe qui ad centra ſunt conſtituti.

Sint æquales circuli ABC , DEF ; et ad centra quidem ipſorum G , H ſint anguli BGC , EHF , ad circumferentias vero anguli BAC , EDF . Dico ut circumferentia BC ad EF circumferentiam, ita eſſe, et BGC angulum ad angulum EHF , et angulum BAC ad angulum EDF ; et adhuc ſectorem BGC ad EHF ſectorem. Ponantur enim circumferentiæ quidem BC æquales quocunque deinceps CK , KL ; circumferentiæ vero EF , ruriſ æquales quocunque FM , MN . Et jungantur OK , GL , HM , HN . Quoniam igitur circumferentiæ BC , CK , KL inter ſe ſunt æquales, et anguli BGC , CGK , KGL inter ſe æquales erunt. Quotuplex igitur eſt circumferentia



* 27. tertii.

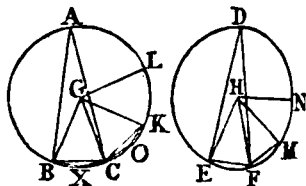
ferentia BL circumferentiæ BC , totuplex est et BGL angulus anguli BGC . Eadem ratione et quotuplex est circumferentia NE circumferentiæ EF , totuplex et EHN angulus anguli EHF . Si vero æqualis est BL circumferentia circumferentiæ EN , et angulus BGL angulo EHN erit æqualis; et si circumferentia BL major est circumferentiâ EN , major erit et BGL angulus angulo EHN ; et si minor, minor. Quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus nimirum circumferentiis BC , EF , et duobus angulis BGC , EHF ; sumpta sunt circumferentiæ quidem BC , et BGC anguli, æquimultiplicia; videlicet circumferentia BL et BGL angulus: circumferentiæ vero EF , et EHF anguli, æquimultiplicia; nempe circumferentia EN et angulus EHN . Atque ostensum est si circumferentia BL superat circumferentiam EN , et BGL angulum superare angulum EHN ; et si æqualis, æqualem; et si minor, minorem esse. Ut igitur circumferentia BC ad EF circumferentiam, ita angulus BGC ad angulum EHF . Sed ut BGC angulus ad angulum EHF , ita $\times$ angulus BAC ^{Def. 5.} ^{quinti.} ^{15. quinti.} ^{20. tertii.} ad EDF angulum. Uterque enim utriusque est duplex. Ut igitur BC circumferentia ad circumferentiam EF , ita et angulus BGC ad angulum EHF , et angulus BAC ad EDF angulum. Quare in circulis æqualibus anguli eandem habent proportionem, quam circumferentiæ quibus insistant, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant. Dico insuper et ut BC circumferentia ad circumferentiam EF , ita esse sectorem GBC ad HFE sectorem. Jungantur enim BC , CK ; et sumptis in circumferentiis BC , CK punctis x , o , jungantur et Bx , xo , co , ok . Itaque quoniam duæ BG , GC duabus CG , GK æquales sunt, et angulos æquales continent; erit et basis BC basi CK æqualis. Æquale igitur est GBC triangulum triangulo GCK . Et quoniam circumferentia BC circumferentiæ CK est æqualis, et reliqua circumferentia, quæ complet totum circulum ABC , æqualis est reliquæ, quæ eundem circulum complet. Quare et angulus Bx angulo co ok est æqualis^a. Simile igitur est Bx ^{27. tertii.} ^{segmentum}



* 4. primi.

^a Def. 11. segmentum^a segmento COK ; et sunt in æqualibus rectis tertii.

^b 24. tertii. rum segmenta, et inter se^b æqualia sunt. Ergo segmentum BXC est æquale segmento COK . Est autem et BGC triangulum



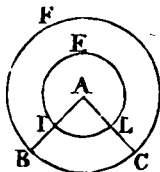
triangulo CGK æquale. Et totus igitur sector BGC sectori CGK æqualis erit. Eadem ratione et GKL sector utrique ipsorum GBC , GCK est æqualis. Sectors igitur BGC , CGK , KGL , quotquot fuerint, æquales sunt inter se. Similiter et sectores HEF , HFM , HMN inter se sunt æquales. Quotuplex igitur est LB circumferentia circumferentiæ BC , totuplex est et GBL sector sectoris GBC . Eadem ratione et quotuplex est circumferentia NE circumferentiæ EF , totuplex est et HEN sector sectoris HEF . Sed si circumferentia BL circumferentiæ EN est æqualis, et sector GBL æqualis est sectori HEN ; et si circumferentia BL superat circumferentiam EN , superat et GBL sector sectorem HEN ; et si minor, minor. Quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus quidem BC , EF circumferentiis, duobus vero sectoribus GBC , HEF ; sumpta sunt æquimultiplicia circumferentiæ quidem BC , et GBC sectoris, circumferentia BL et GBL sector; circumferentiæ vero EF , et sectoris HEF , æquimultiplicia, circumferentia EN et HEN sector: atque ostensum est si BL circumferentia superat circumferentiam EN , et sectorem GBL superare sectorem HEN ; et si æqualis, æqualem esse; et si minor, minorem. Est igitur ut BC circumferentia^c ad circumferentiam EF , ita sector GBC ad HEF sectorem. *Q. E. D.*

^c Def. 5. quinti.

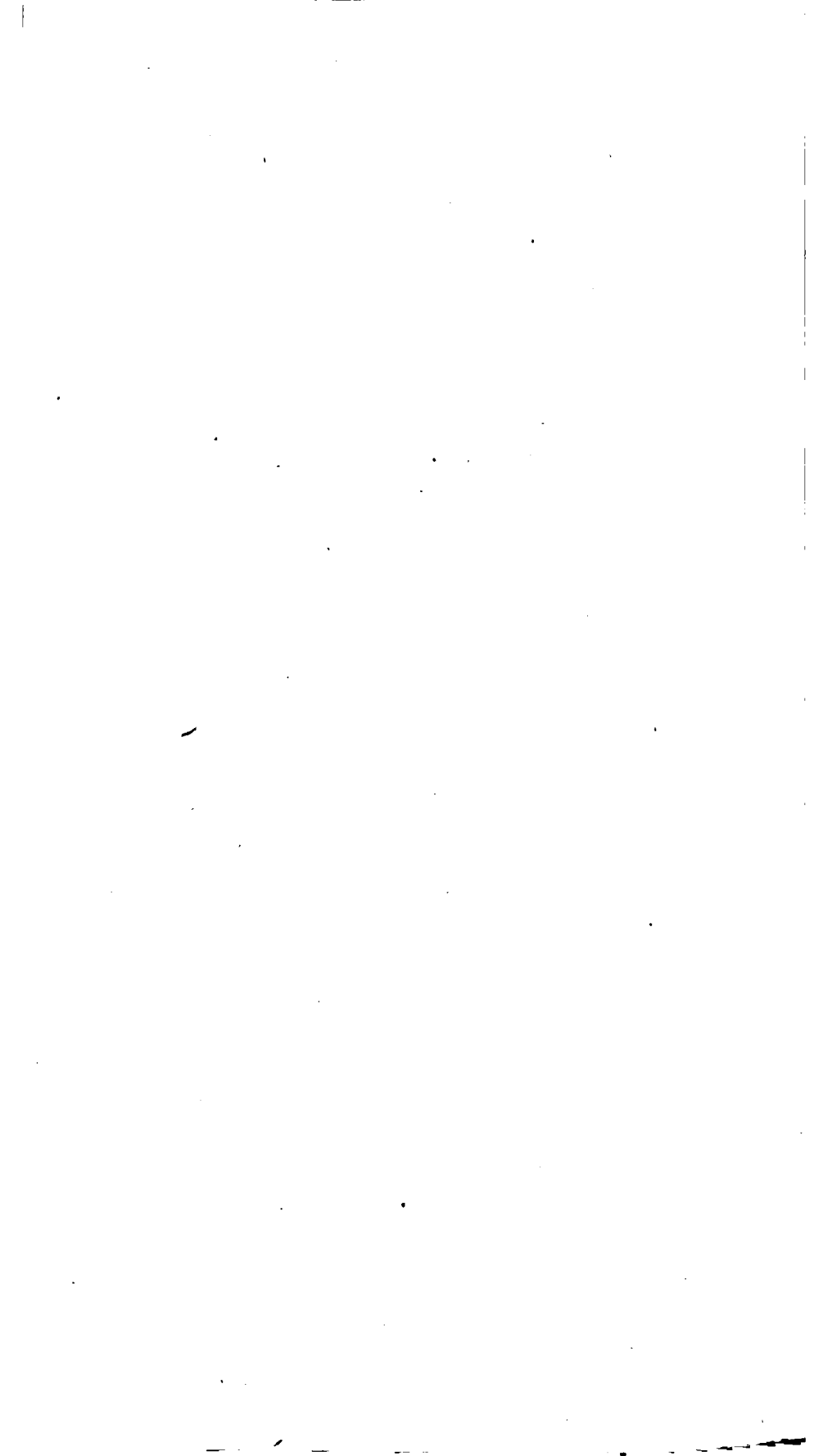
Cor. 1. Angulus ad centrum est ad quatuor rectos, ut arcus, cui insistit, ad totam circumferentiam: nam ut angulus BAC ad rectum, ita BC arcus ad circuli quadrantem; quare quadruplicando consequentes, erit angulus BAC ad quatuor rectos, ut arcus BC ad totam circumferentiam.

Cor. 2. Inæqualium circulorum arcus IL , BC qui æquales

æquales subtendunt angulos, five ad centra, five ad peripherias, sunt similes. Nam est IL ad totam peripheriam ILE , ut angulus IAL ad quatuor rectos: est vero ut IAL seu BAC ad quatuor rectos, ita arcus BC ad totam peripheriam BCF . Quare ut IL ad totam peripheriam ILE , ita BC ad totam peripheriam BCF . Ac proinde arcus IL , BC sunt similes.



Cor. 3. Duæ semidiametri AB , AC a concentricis peripheriis arcus auferunt similes IL , BC .



EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER SEPTIMUS.

DEFINITIONES.

DEFINITIO I.

UNITAS est, secundum quam unumquodque eorum quæ sunt unum dicitur.

II.

Numerus autem, ex unitatibus constans multitudo.

III.

Pars est numerus numeri, minor majoris, cum minor metitur majorem.

IV.

Partes autem, quando non metitur.

V.

Multiplex est major minoris, quando minor majorem metitur.

VI.

Par numerus est, qui bifariam dividitur.

VII.

Impar vero, qui bifariam non dividitur; vel qui a pari numero unitate differt.

VIII.

Pariter par numerus est, quem par numerus per parem numerum metitur.

IX.

Pariter vero impar est, quem par numerus per numerum imparem metitur.

X.

Impariter vero impar numerus est, quem impar numerus per numerum imparem metitur.

XI.

Primus numerus est, quem unitas sola metitur.

XII.

Primi inter se numeri sunt, quos sola unitas communis mensura metitur.

XIII.

Compositus numerus est, quem numerus aliquis metitur.

XIV.

Compositi inter se numeri sunt, quos numerus aliquis communis mensura metitur.

XV.

Numerus numerum multiplicare dicitur, quando quot unitates sunt in ipso, toties componitur multiplicatus, et aliquis gignitur.

XVI.

Quando duo numeri sese multiplicantes aliquem fecerint, qui factus est, planus appellatur; latera vero ipsius, numeri sese multiplicantes.

XVII.

Quando autem tres numeri sese multiplicantes aliquem fecerint, factus solidus appellatur: latera vero ipsius, numeri sese multiplicantes.

XVIII.

Quadratus numerus est, qui æqualiter æqualis; vel qui sub duobus æqualibus numeris continetur.

XIX.

Cubus vero, qui æqualiter æqualis æqualiter; vel qui sub tribus æqualibus numeris continetur.

XX.

Numeri proportionales sunt, quando primus secundi et tertius quarti æquimultiplex est, vel eadem pars, vel eadem partes.

XXI.

XXI.

Similes plani et solidi numeri sunt, qui latera habent proportionalia.

XXII.

Perfectus numerus est, qui suis ipsius partibus est æqualis.

PROPOSITIO I. THEOREMA.

[I.]

Si duobus numeris inæqualibus expositis detracto semper minore de majore, reliquus minime metiatur præcedentem, quoad reliqua fuerit unitas; numeri a principio positi primi inter se erunt.

Duobus enim inæqualibus numeris $A B$, $C D$ detracto semper minore de majore, reliquus minime metiatur præcedentem, quoad reliqua fuerit unitas: dico numeros $A B$, $C D$ inter se primos esse; hoc est, ipsos $A B$, $C D$ unitatem solam metiri.

Si enim $A B$, $C D$ non sint primi inter se, metietur eos aliquis numerus. Metiatur, sitque E ; et $C D$ quidem ipsum $A B$ metiens relinquat seipso minorem $F A$; $A F$ vero metiens $D C$ relinquat seipso minorem $G C$; et $G C$ metiens $F A$ unitatem $H A$ relinquat.

Quoniam igitur numerus E ipsum $C D$ metitur, $C D$ vero metitur $B F$; et E ipsum $B F$ metitur. Metitur autem et totum $B A$; ergo et reliquum $A F$ metietur. Sed $A F$ metitur $D G$: quare et E ipsum $D G$ metietur. Metitur autem et totum $D C$: ergo et reliquum $C G$ metietur. At $C G$ metitur $F H$; et igitur E ipsum $F H$ metietur. Sed et metitur totum $F A$; et igitur numerus E metietur reliquam $A H$ unitatem, quod^a fieri^a Def. 3. non potest: non igitur ipsos $A B$, $C D$ metietur aliquis^{hujus} numerus. Ergo $A B$, $C D$ primi inter se sunt. Q. E. D.

PROP. II. PROBL.

[II.]

Duobus numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram invenire.

Sint dati duo numeri non primi inter se $A B$, $C D$, quorum minor sit $C D$: oportet ipsorum $A B$, $C D$ maximam communem mensuram invenire.

N 4

Si

Si igitur CD metitur AB , cum etiam seipsum metiatur; erit CD ipforum CD , AB communis mensura. Et perspicuum est eam $A \dots \dots B$ maximam esse; nullus enim major $C \dots D$ quam CD ipsum CD metietur.

Si vero CD non metitur AB ; ipforum AB , CD detracto semper minore de majore, unitas nunquam relinquetur. Nam si tandem relinquatur, erunt AB , CD primi inter se: quod hypothefi contrarium est. Relinquetur igitur numerus quidam, qui metietur præcedentem. Et CD quidem ipsum AB metiens relinquat seipso minorem AE ; AE vero metiens CD relinquat seipso minorem CF ; CF vero ipsum AE metiatur. Itaque quoniam CF ipsum AE metitur, AE vero ipsum DF ; et CF ipsum DF metietur. Sed et metitur seipsum; et totum igitur CD metietur. At CD ipsum BE metitur: ergo et CF metitur BE . $A \dots E \dots B$
Metitur autem et EA ; et totum $C \dots F \dots D$
igitur BA metietur. Sed et metitur $G \dots$
 CD : ergo CF ipsos AB , CD metitur; ac propterea CF ipforum AB , CD est communis mensura. Dico etiam maximam esse. Si enim CF non est maxima communis mensura ipforum AB , CD ; ipsos AB , CD metietur aliquis numerus major ipso CF . Metiatur, sitque G . Et quoniam G ipsum CD metitur; CD vero ipsum BE ; et G ipsum BE metitur. Metitur autem et totum BA ; et reliquum igitur AE metietur. Sed AB metitur DF : ergo et G ipsum DF metietur. Metitur autem et totum DC : quare et reliquum CF metietur, major minorem, quod fieri non potest: non igitur ipsos AB , CD numeros metietur numerus aliquis major ipso CF . Ergo CF est ipforum AB , CD maxima communis mensura. *Q. E. D.*

Cor. Ex hoc manifestum est, si numerus duos numeros metiatur, et maximam eorum communem mensuram metiri.

PROP. III. PROBL.

[III.]

Tribus numeris datis non primis inter se, maximam ipsorum communem mensuram invenire.

Sint dati tres numeri non primi inter se A, B, C: oportet ipsorum A, B, C maximam communem mensuram invenire.

Sumatur duorum A, B maxima communis mensura D^b: itaque D vel ipsum C metitur, vel non metitur. Metiatur primum; me-
 titur autem et ipsos A, B: ergo D numeros A, B, C metitur; et ob id ipsorum C....
 est communis mensura. Dico et maximam esse. Si enim D non est ipsorum E----

^b 1. hujus.

A, B, C maxima communis mensura; metietur eos aliquis numerus major ipso D. Metiatur, et fit E. Quoniam igitur E metitur numeros A, B, C, et ipsos A, B metietur, et^c ipsorum A, B maximam communem mensuram. Sed ipsorum A, B maxima communis mensura est D: ergo E ipsum D metitur, major minorem, quod fieri non potest. Non igitur A, B, C numeros numerus aliquis major ipso D metietur: ergo D ipsorum A, B, C maxima est communis mensura.

^c Cor. 2. hujus.

Non metiatur autem D ipsum C. Dico primum numeros D, C non esse primos inter se. Quoniam enim A, B, C non sunt inter se primi, metietur eos aliquis numerus; et qui metitur ipsos A, B, C, et ipsos A, B metietur, et^c ipsorum A, B maximam communem mensuram, videlicet D, metietur. Metitur autem et ipsum C: ergo ipsos D, C numerus aliquis metietur; id-
 eoque D, C non sunt inter se D.....
 primi. Sumatur ipsorum E..
 maxima communis mensura F---

fura E^b. Et quoniam E ipsum D metitur, et D metitur ipsos A, B, et E ipsos A, B metietur. Metitur autem et C; ergo et ipsos A, B, C metietur: eritque E ipsorum A, B, C communis mensura. Dico et maximam esse. Si enim E non est ipsorum A, B, C maxima communis mensura, metietur A, B, C numeros numerus aliquis major ipso E. Metiatur, sitque F. Et quoniam F metitur numeros A, B, C;

A, B, C; et ipsos A, B, et ipsorum A, B maximam communem mensuram metietur. Sed ipsorum A, B
 maxima communis mensura est D: ergo F ipsum D metitur. Metitur autem et ipsum C: quare F et ipsos D, C; et igitur ipsorum D, C maximam communem

mensuram metietur. Sed ipsorum C, D maxima communis mensura est E: ergo F ipsum E metitur, major minorem, quod fieri non potest: non igitur A, B, C numeros numerus aliquis major ipso E metietur. Ergo E ipsorum A, B, C maxima est communis mensura.

Tribus igitur numeris datis non primis inter se, eorum maxima communis mensura inventa est. Q. E. F.

Cor. Ex his manifestum est, si numerus numeros tres metiatur, et ipsorum maximam communem mensuram metiri.

Eodem modo et pluribus numeris datis, maximam communem mensuram inveniemus.

[IV.]

PROP. IV. THEOR.

Omnis numerus omnis numeri, minor majoris, vel pars est vel partes.

Sint duo numeri A, B C, quorum B C sit minor: dico B C ipse A vel partem esse, vel partes.

Numeri enim A, B C vel primi sunt inter se, vel non. Sint prius inter se primi; et diviso B C in

^c Def. 1. & 2. hujus. unitates, quæ in ipso sunt, erit^c unaquæque unitas, earum quæ in B C, pars aliqua ipsius A: ergo B C ipse A partes est.

Sed non sint A, B C inter se primi: itaque B C vel ipsum A metitur, vel non. Et siquidem metitur, erit B C pars ipsius A.

^d 2. hujus. Si vero non; sumatur^d ipsorum A, B C maxima communis mensura D; et dividatur B C

in numeros ipsi D æquales B E, E F, F C. Quoniam igitur D numerum A metitur,

erit D pars ipsius A. Æqualis autem est D unicuique ipsorum B E, E F, F C:

ergo et unusquisque ipsorum B E, E F, F C pars est ipsius A: ac propterea B C ipse A partes est.

Omnis

Omnis igitur numerus omnis numeri, minor majoris, vel pars est vel partes. Q. E. D.

PROP. V. THEOR.

[V.]

Si numerus numeri pars fuerit, et alter alterius eadem pars; et uterque utriusque eadem pars erit, quæ unus unius.

Numerus A numeri B C pars sit, et alter D alterius E F eadem pars, quæ est A ipfius B C: dico et utrumque A, D utriusque B C, E F eandem partem esse, quæ est A ipfius B C.

Quoniam enim quæ pars est A ipfius B C, eadem est et D ipfius E F; quot numeri sunt in B C æquales ipsi A, tot erunt et in E F A . . . numeri æquales ipsi D. Dividatur B . . . G . . . C B C quidem in numeros æquales ipsi D . . . A, videlicet in B G, G C; E F vero E . . . H . . . F dividatur in numeros ipsi D æquales, hoc est, E H, H F; erit utique æqualis multitudo numerorum B G, G C multitudini ipforum E H, H F. Et quoniam æqualis est B G ipsi A, et E H ipsi D; erunt B G, E H ipsi A, D, æquales. Et eadem ratione, cum G C sit æqualis ipsi A, et H F ipsi D; erunt G C, H F ipsi A, D æquales: quot igitur numeri sunt in B C, æquales ipsi A, tot sunt et in E F, æquales ipsi A, D. Ergo quotuplex est B C ipfius A, totuplex erit et uterque B C, E F utriusque A, D. Quæ igitur pars est A ipfius B C, eadem pars erit et uterque A, D utriusque B C, E F. Q. E. D.

PROP. VI. THEOR.

[VI.]

Si numerus numeri partes fuerit, et alter alterius eadem partes; et uterque utriusque eadem partes erit, quæ unus unius.

Numerus enim A B numeri C partes sit, et alter D E alterius F eadem partes, quæ A B ipfius C: dico et utrumque A B, A . . . G . . . B D E utriusque C, F easdem partes C esse, quæ A B ipfius C. D . . . H . . . E

Quoniam enim quæ partes est F A B ipfius C, eadem est D E ipfius F; quot sunt in A B partes ipfius C, tot erunt et in D E partes

partes ipsius F . Dividatur AB quidem in partes ipsius C , videlicet AG , GB ; DE vero dividatur in partes ipsius F , hoc est DH , HE .

Erit ipforum AG , GB multitudo æqualis multitudini ipforum DH , HE . Et quoniam

quæ pars est AG ipsius C , eadem $A \dots G \dots B$

est pars et DH ipsius F ; quæ pars $C \dots \dots \dots$

* 5. hujus. est AG ipsius C , eadem pars erit $D \dots H \dots E$

et uterque AG , DH utriusque C , F . $F \dots \dots \dots$

Simili ratione et quæ pars est GB

ipsius C , eadem pars erit et uterque GB , HE utriusque

C , F . Quæ igitur partes est AB ipsius C , eadem partes

est et uterque AB , DE utriusque C , F . *Q. E. D.*

[VII.]

PROP. VII. THEOR.

Si numerus numeri fuerit pars, quæ ablatus ablati; et reliquus reliqui eadem pars erit, quæ totus totius.

Numerus enim AB numeri CD pars sit, quæ ablatus AE ablati CF : dico et reliquum EB reliqui FD eandem partem esse, quæ est totus AB totius CD .

Quæ enim pars est AE ipsius CF , eadem pars sit et EB ipsius CG . Et quoniam

quæ pars est AB $A \dots E \dots B$

ipsius CF , eadem pars est $G \dots C \dots F \dots D$

et EB ipsius CG ; quæ

* 5. hujus. AE ipsius CF , eadem pars est^f et AB ipsius GF . Quæ

autem pars est AE ipsius CF , eadem pars ponitur et AB

ipsius CD : quæ igitur pars est AB ipsius GF , eadem

est et AB ipsius CD : quare AB utriusque GF , CD eadem

est pars: æqualis igitur est GF ipsi CD . Communis auferatur CF : ergo reliquus GC reliquo FD est æ-

qualis. Et quoniam quæ pars est AE ipsius CF , eadem

est et EB ipsius GC ; æqualis autem est GC ipsi FD ;

quæ pars est AE ipsius CF , eadem erit et EB ipsius FD .

* ex hyp. Sed quæ pars est AE ipsius CF , eadem est^g et AB ipsius

CD ; ergo quæ pars est EB ipsius FD , eadem est et AB

ipsius CD . Et reliquus igitur EB reliqui FD eadem pars

erit, quæ totus AB totius CD . *Q. E. D.*

PROP.

PROP. VIII. THEOR.

[VIII.]

Si numerus numeri fuerit partes, quæ ablati ablati; et reliquus erit reliqui eadem partes, quæ totus totius.

Numerus enim AB numeri CD fit partes, quæ ablati AB ablati CF : dico et reliquum EB reliqui FD eadem partes esse, quæ totus AB totius CD .

Ponatur enim ipsi AB æqualis GH : quæ igitur partes est GH ipsius CD , eadem est et AB ipsius CF . Dividatur GH quidem in partes ipsius CD , videlicet GK , KH ; AB vero dividatur in partes ipsius CF , videlicet

$A \dots L \dots E \dots B$
 $C \dots \dots \dots F \dots \dots D$
 $G \dots M \dots K \dots N \dots H$

AL , LE : erit igitur ipsarum GK , KH multitudo æqualis multitudini ipsarum AL , LE . Et quoniam quæ pars est GK ipsius CD , eadem est et AL ipsius CF , major autem CD quam CF ; et GK quam AL est major. Ponatur ipsi AL æqualis GM : quæ igitur pars est GK ipsius CD , eadem est et GM ipsius CF : quare^b et reli-^{7. hujus.} quus MK reliqui FD eadem pars est, quæ totus GK totius CD . Rursus quoniam quæ pars est KH ipsius CD , eadem est et LE ipsius CF ; major autem CD quam CF : erit et KH quam LE major. Ponatur ipsi LE æqualis KN : quæ igitur pars est KH ipsius CD , eadem est et KN ipsius CF : ergo et reliquus NH reliqui FD eadem pars est, quæ totus KH totius CD . Ostensum autem est et reliquum MK reliqui FD eandem partem esse, quæ totus GK totius DC ; et uterque igitur simul MK , NH ipsius DF eadem partes est, quæ totus HG totius DC .^{6. hujus.} Æqualis autem est uterque simul MK , NH ipsi EB ; nimirum cum HG ipsi BA æqualis sit, et GM , KN simul sumpti simul sumptis AL , LE . Et reliquus igitur EB reliqui FD eadem partes est, quæ totus AB totius CD .
Q. E. D.

PROP. IX. THEOR.

[IX.]

Si numerus numeri pars fuerit, et alter alterius eadem pars; et permutando quæ pars est, vel partes, primus tertii, eadem erit pars, vel eadem partes, et secundus quarti.

Numerus enim A numeri BC pars sit, et alter D alterius EF eadem pars, quæ A ipsius BC ; minor autem sit A quam D : dico et permutando quæ pars est A ipsius D , vel partes, eandem partem esse et BC ipsius EF , vel eandem partes.

Quoniam

Quoniam enim quæ pars est A ipsius B C, eadem est et D ipsius E F; quot numeri sunt in B C æquales ipsi A, tot sunt et in E F æquales ipsi D. Dividatur B C quidem in numeros ipsi A æquales, videlicet in B G, G C; E F vero dividatur in numeros ipsi D æquales, E H, H F: erit ipsorum B G, G C multitudo æqualis multitudini ipsorum E H, H F.

ⁱ 5. & 6. hujus.

Et quoniam numeri B G, G C inter se sunt æquales, sunt autem et æquales E H, H F; atque est ipsorum B G, G C multitudo æqualis multitudini ipsorum E H, H F: quæ pars est B G ipsius E H, vel partes, eadem pars erit et G C ipsius H F, vel eadem partes. Ergoⁱ quæ pars est B G ipsius E H vel partes, eadem pars erit et uterque B C utriusque E F vel eadem partes. Æqualis autem est B G ipsi A, et E H ipsi D. Quæ igitur pars est A ipsius D vel partes, eadem pars erit et B C ipsius E F vel eadem partes. Q. E. D.

[X.]

PROP. X. PROBL.

Si numerus numeri partes fuerit, et alter alterius eadem partes; et permutando quæ partes est primus tertii, vel pars, eadem partes erit et secundus quarti, vel eadem partes.

Numerus enim A B numeri C partes sit, et alter D E alterius F eadem partes; sit autem A B minor quam D E: dico et permutando quæ partes est A B ipsius D E vel pars, eadem partes esse et C ipsius F vel eandem partem.

Quoniam enim quæ partes est A B ipsius C, eadem partes est et D E ipsius F; quot sunt in A B partes ipsius C, tot erunt et in D E partes ipsius F. Dividatur A B quidem in partes ipsius C, videlicet A G, G B; D E vero dividatur in partes ipsius F, hoc est, D H, H E: erit utique ipsarum A G, G B multitudo multitudini ipsarum D H, H E æqualis. Et quoniam quæ pars est A G ipsius C, eadem pars est et D H ipsius F, et permutando^k quæ pars est A G ipsius D H vel partes, eadem pars erit et C ipsius F vel eadem partes. Simili ratione et quæ pars est G B ipsius H E vel

^k 9. hujus.

vel partes, eadem pars erit et c ipsius F vel eadem partes: ergo¹ quæ pars est A G ipsius D H vel partes, eadem pars erit et A B ipsius D E vel eadem partes. Sed^{hujus. 5. & 6.} quæ pars est A G ipsius D H vel partes, eadem pars est et c ipsius F vel eadem partes. Et igitur quæ partes est A B ipsius D E vel pars, eadem partes est et c ipsius F vel eadem pars. Q. E. D.

PROP. XI. THEOR.

[XI.]

Si fuerit ut totus ad totum ita ablatum ad ablatum; et reliquus ad reliquum erit ut totus ad totum.

Sit ut totus A B ad totum C D ita ablatum A E ad ablatum C F: dico et reliquum E B ad reliquum F D ita esse ut totus A B ad totum C D.

Quoniam enim est ut A B ad C D ita A E ad C F^m:^m Def. 20. hujus.
quæ pars est A B ipsius C D vel partes, eadem pars erit et A E ipsius C F vel eadem partes: ergoⁿ C F Dⁿ 7. & 8. hujus.
et reliquus E B reliqui F D eadem pars erit vel eadem partes, quæ A B ipsius C D. Est igitur^m ut E B ad F D ita A B ad C D. Q. E. D.

PROP. XII. THEOR.

[XII.]

Si quotcunque numeri proportionales fuerint; ut unus antecedentium ad unum consequentium, ita erunt omnes antecedentes ad omnes consequentes.

Sint quotcunque numeri proportionales, A, B, C, D; fitque ut A ad B ita C ad D: dico ut A ad B ita esse A, C ad B, D.

Quoniam enim est ut A ad B ita C ad D^o: quæ pars^o Def. 20. hujus.
est A ipsius B vel partes, eadem pars erit et c ipsius D vel partes; A . . . C . . .
et igitur^p uterque A, C utriusque B . . . D . . .^p 5. & 6. hujus.
B, D eadem pars est vel partes, quæ A ipsius B. Ergo^o ut A ad B ita est A, C ad B, D. Q. E. D.

PROP. XIII. THEOR.

[XIII.]

Si quatuor numeri proportionales fuerint; et permutando proportionales erunt.

Sint quatuor numeri proportionales A, B, C, D, fitque ut A ad B ita C ad D: dico et permutando proportionales esse, videlicet ut A ad C ita esse B ad D.

Quoniam

Quoniam enim est ut A ad B ita C ad D , quæ pars est
⁹ Def. 20. A ipsius B vel partes⁹, eadem
 hujus pars erit et C ipsius D vel eæ- $A \dots C \dots$
 dem partes: permutando igitur^r quæ pars est A ipsius C $B \dots D \dots$
^r 9. & 10. hujus. vel partes, eadem pars est et B ipsius D vel partes. Ergo⁹
 ut A ad C ita est B ad D . Q. E. D.

[XIV.]

PROP. XIV. THEOR.

Si fuerint quotcunque numeri, et alii ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur et in eadem ratione; etiam ex æquo in eadem ratione erunt.

Sint enim quotcunque numeri A, B, C , et alii ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur et in eadem ratione, sc. D, E, F ; sitque ut A ad B ita D ad E , ut autem B ad C ita E ad F : dico etiam ex æquo ut A ad C , ita esse D ad F .

Quoniam enim est ut A ad B ita D ad E ; erit permutando^r ut A ad D ita
^r 13. hujus. B ad E . Rursus, quoniam est ut B ad C ita E ad F ; permutando ut
 B ad E ita erit C ad F , ut
 autem B ad E ita est A ad D ; et igitur ut A ad D ita C ad F . Ergo permutando ut A ad C ita D ad F . Q. E. D.

[XV.]

PROP. XV. THEOR.

Si unitas numerum aliquem metiatur, alter autem numerus æqualiter metiatur alium aliquem; et permutando unitas tertium numerum æqualiter metietur atque secundus quartum.

Unitas enim A numerum aliquem BC metiatur, alter autem numerus D æqualiter metiatur alium aliquem EF : dico et permutando unitatem A æqualiter metiri numerum D , atque BC ipsum EF .

Quoniam enim A unitas æqualiter metitur numerum BC , atque D ipsum EF ; quot unitates A $D \dots$
 sunt in BC , tot sunt $B \cdot G \cdot H \cdot C$ $E \dots K \dots L \dots F$
 et in EF numeri æquales ipsi D . Dividatur BC quidem in unitates, quæ in ipso sunt, videlicet BG, GH, HC ; EF vero dividatur in numeros ipsi D æquales, EK, KL, LF . Erit igitur
 ipsorum

ipforum B G, G H, H C multitudo æqualis multitudini ipforum E K, K L, L F. Et quoniam B G, G H, H C unitates inter se æquales sunt, suntque numeri E K, K L, L F inter se æquales; et unitatum B G, G H, H C multitudo æqualis multitudini numerorum E K, K L, L F: erit ut B G unitas ad numerum E K, ita G H unitas ad numerum K L, et unitas H C ad L F numerum. Et^t ut^t 12. hujus. unus antecedentium ad unum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes: est igitur ut unitas B G ad numerum E K ita B C ad E F. Æqualis autem est B G unitas unitati A, et E K numerus numero D: quare ut unitas A ad numerum D, ita est B C ad E F. Igitur^a unitas A numerum D æqualiter metitur, atque^a Def. 20. B C ipsum E F. Q. E. D. hujus.

PROP. XVI. THEOR.

[XVI.]

Si duo numeri sese multiplicantes fecerint aliquos; facti ex ipsis inter se æquales erunt.

Sint duo numeri A, B; et A quidem ipsum B multiplicans faciat C; B vero multiplicans A faciat D: dico C ipsi D æqualem esse.

Quoniam enim A ipsum B multiplicans fecit C; ^ame^a Def. 15. tietur B ipsum C per unitates, hujus.

quæ sunt in A. Metitur autem et E unitas numerum A A . . . B . . . per unitates, quæ in ipso sunt: C D igitur E unitas numerum A

æqualiter metitur, atque B ipsum C: quare permutando^y 15. hujus. unitas E numerum B æqualiter metitur atque A ipsum C. Rursus, quoniam B ipsum A multiplicans fecit D; A metietur ipsum D per unitates, quæ sunt in B. Metitur autem et E unitas numerum B per unitates, quæ in ipso sunt: ergo E unitas numerum B æqualiter metitur, atque A ipsum D. Sed E unitas numerum B æqualiter metitur, atque A ipsum C: igitur A utrumque ipforum C, D æqualiter metitur. Erit ergo C ipsi D æqualis. Q. E. D.

PROP. XVII. THEOR.

[XVII.]

Si numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos; facti ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicati.

Numerus enim A duos numeros B, C multiplicans faciat ipsos D, E: dico ut B ad C ita esse D ad E.

Quoniam enim A ipsum B multiplicans fecit D; me^a tietur
o

* Def. 15. *tietur B ipsum D per unitates, quæ sunt in A^z. Metitur
hujus. autem et F unitas numerum*

*A per unitates, quæ in ipso F .
sunt: igitur F unitas nu- A . .
merum A æqualiter meti- B . . . C . . .*

* Def. 20. *tur, atque B ipsum D. Ergo^a D E
hujus. ut F unitas ad numerum*

*A, ita est B ad D. Eadem ratione ut F unitas ad nu-
merum A, ita c ad E. Quare ut B ad D, ita c ad E;*

^b 13. hujus. *et permutando^b ut B ad c, ita D ad E. Q. E. D.*

[XVIII.]

PROP. XVIII. THEOR.

*Si duo numeri numerum aliquem multiplicantes fecerint
aliquos; facti ex ipsis eandem rationem habebunt, quam
multiplicantes.*

Duo enim numeri A, B numerum aliquem c multi-
plicantes faciant ipsos D, E: dico ut A ad B ita esse D
ad E.

Quoniam enim A ipsum c multiplicans fecit D, et c
^c 16. hujus. multiplicans A^c ipsum D

fecit. Eadem ratione et A . . . B . . .

c ipsum B multiplicans C . .

fecit E: numerus igitur D E

c duos numeros A, B

^d 17. hujus. multiplicans ipsos D, E fecit. Est igitur^d ut A ad B ita
D ad E. Q. E. D.

[XIX.]

PROP. XIX. THEOR.

*Si quatuor numeri proportionales fuerint; qui ex primo et
quarto fit numerus æqualis erit ei, qui fit ex secundo et
tertio: et si numerus, qui fit ex primo et quarto, æqualis
fuerit ei, qui fit ex secundo et tertio; quatuor numeri pro-
portionales erunt.*

Sint quatuor numeri proportionales A, B, C, D; fit-
que ut A ad B, ita C ad D; et A quidem ipsum D mul-
tiplicans faciat E; B vero multiplicans ipsum C faciat F:
dico E esse æqualem ipsi F.

A enim multiplicans C faciat G. Quoniam igitur
A ipsum quidem C multiplicans fecit c, ipsum vero D
multiplicans fecit E; numerus A duos numeros D, C

^e 17. hujus. multiplicans fecit ipsos G, E: est igitur^e ut C ad D,
ita G ad E. Ut autem C ad D, ita A ad B: quare ut A
ad B, ita G ad E. Rursus, quoniam A ipsum C multi-
plicans

plicans fecit G; et B ipsum C multiplicans fecit F:

duo numeri A, B nume-

rum quendam C multi- A

plicantes fecerunt ipsos B

G, F; igitur^f ut A ad C . . .

^f 18. hujus.

B, ita est G ad F. Sed D . .

ut A ad B, ita G ad E: E

ergo ut G ad E, ita est F

G ad F: igitur G ad u- G

trumque ipsorum E, F

eandem rationem habet. Erit igitur E ipsi F æqualis.

Sed sit E æqualis ipsi F: dico ut A ad B ita esse C ad D.

Iisdem enim constructis, quoniam A ipsos C, D multiplicans fecit G, E; erit ut C ad D, ita G ad E. Est autem E ipsi F æqualis: ut igitur G ad E, ita G ad F. Sed ut G ad E, ita C ad D: ergo ut C ad D, ita G ad F. Ut autem G ad F, ita^f A ad B. Quare ut A ad B, ita C ad D. Q. E. D.

Cor. 1. * Si primus sit ad secundum ut tertius ad quartum; factum ex secundo et tertio primus quarto, et quartus primo metietur.

Cor. 2. * Propositis tribus numeris, si factum ex secundo et tertio primus non metiatur, non datur tribus propositis proportione quartus.

PROP. XX. THEOR.

[XX.]

Si tres numeri proportionales fuerint, qui ab extremis fit numerus æqualis erit ei, qui fit a medio: si autem qui ab extremis fit æqualis fuerit ei qui a medio, tres numeri proportionales erunt.

Sint tres numeri proportionales A, B, C; sitque ut A ad B ita B ad C: dico numerum qui fit ex A, C æqualem esse ei, qui fit ex B.

Ponatur enim ipsi B æqualis D; est igitur ut A ad B ita D ad C: ergo^{*} qui fit ex A, C æqualis est ei, qui ex B, D. Qui autem A
fit ex B, D est æqualis ei, qui fit ex B; B
æqualis etenim est B ipsi D. Qui igitur D
fit ex A, C ipsi, qui fit ex B, est æ- C
qualis.

^{*} 19. hujus.

Sed qui fit ex A, C æqualis sit ei, qui ex B: dico ut A ad B ita esse B ad C.

Quoniam enim qui ex A , c fit æqualis est ei, qui fit ex B ; qui autem sit ex B est æqualis ei, qui ex B , d :
¹⁹ hujus. erit ^b ut A ad B ita d ad c . Sed B ipsi d est æqualis.
 Ut igitur A ad B ita est B ad c . *Q. E. D.*

Cor. 1. * Si primus fit ad secundum ut secundus ad tertium, quadratum ex secundo primus metietur tertio, et tertius primo.

Cor. 2. * Duobus propositis, si quadratum secundi primus non metiatur, non datur duobus propositis proportione tertius.

SCHOLION. *

Si numerus numeros multiplicaverit, et compositum ex omnibus idem multiplicaverit; factus multiplicatione compositi composito ex factis omnibus prioribus æqualis erit.

Numeros BC , CD , DE numerus A multiplicans faciat FG , GH , HI .

Idem autem A numerum BE , ex BC ,
 CD , DE compositum, multiplicans
 faciat numerum K .

Dico numerum K numero FI , ex factis FG , GH , HI composito, æqualem esse. Cum enim numerus A , numerum BC multiplicans, numerum FG fecerit; ut unitas ad A , ita erit BC ad FG . Pari ratione ut unitas ad eundem A , ita CD ad GH , et DE ad HI . Est igitur BC ad FG ut CD ad GH , et ut DE ad HI . Quare et BE ,
¹² hujus. ex omnibus BC , CD , DE compositus, ad FI , ex omnibus FG , GH , GI compositum, ut BC ad FG ¹; i. e. ut unitas ad A . Sed cum A multiplicans BE numerum K fecerit; ut unitas ad A , ita erit BE ad K . Quare BE ad K ut BE ad FI . Quare K et FI inter se æquales.
Q. E. D.

Cor. * Hinc quæcunque de reſtangulis ſub ſegmentis lineæ rectæ in ſecundo Elementorum Libro ad Euclide demonſtrata ſunt; ea omnia in numeris etiam planis locum habent ex partibus numeri cujuſvis factis.

PROP. XXI. THEOR.

[XXI.]

Minimi numeri eandem cum ipsis rationem habentium eos, qui eandem habent rationem, æqualiter metiuntur, major majorem et minor minorem.

Sint CD , EF minimi, qui eandem quam A , B inter se rationem habeant. Dico CD æqualiter ipsum A metiri, atque EF ipsum B .

Cum enim numerus A ad B eandem quam CD ad EF rationem habeat; permutando, erit

A ad CD ut B ad EF ^k .	Duo autem	A	^k 13. hujus.
CD , EF duobus A , B singuli singulis sunt minores ^l .		B	
Quæ pars igitur est CD ipsius A , vel quæ partes, eadem pars erit EF ipsius B , vel eadem partes ^m .		C . . . G . . . D	^l ex hyp.
		E . . H . F	

At vero ipsorum A , B neutiquam sunt illi CD , ^m Def. 3, 4. EF partes. Sint enim, si esse possint. Quot sunt igitur in CD partes illius A , tot erunt in EF partes illius B .

Dividatur igitur CD in partes numeri A , quæ sint CG , GD ; et EF dividatur in partes numeri B , quæ sint EH , HF . Jam cum CG , GD sint inter se æquales, necnon EH , HF ; erit CG ad EH ut GD ad HF . Numero autem æquales illi CG , GD illis EH , HF . Erit igitur ut unus antecedentium ad suum consequentem, ita omnes antecedentes ad omnes consequentesⁿ. Quare utⁿ 12. hujus CG ad EH ita CD ad EF . Ac propterea CG , EH , eandem inter se rationem quam CD , EF habent, minores cum sint. Quod fieri nequit. Ponuntur enim CD , EF omnium minimi, qui eandem inter se rationem habent. Numeri igitur A neque partes est CD , neque numeri B ille EF . Pars igitur CD numeri A , numerique B eadem pars EF . Æqualiter igitur CD metitur ipsum A , atque EF ipsum B . Q. E. D.

PROP. XXII. THEOR.

[XXII.]

Si sint tres numeri, et alii ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur et in eadem ratione; sit autem perturbata eorum proportio: etiam ex æquo in eadem ratione erunt.

Sint tres numeri A , B , C , et alii ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur et in eadem ratione sc. D , E , F ; sitque perturbata eorum proportio, ut A quidem ad B ita sit E ad F , ut autem B ad C ita D ad E : dico etiam ex æquo ut A ad C ita esse D ad F .

- Quoniam enim est ut A ad B ita E ad F ; qui fit ex
 * 19. hujus. A, F æqualis erit^o ei,
 qui ex B, E . Rur- $A \dots\dots D \dots\dots$
 fus, quoniam est ut $B \dots\dots E \dots\dots$
 B ad C ita D ad E ; $C \dots\dots F \dots\dots$
 qui fit ex C, D æ-
 qualis erit ei, qui ex B, E . Ostensum autem est et qui
 fit ex A, F æqualem esse ei, qui ex B, E : ergo et qui fit
 ex A, F æqualis est ei, qui fit ex C, D . Igitur^o ut A ad
 C ita D ad F . *Q. E. D.*

[XXIII.]

PROP. XXIII. THEOR.

*Numeri primi inter se minimi sunt omnium eandem cum ip-
 sis rationem habentium.*

Sint numeri A, B primi inter se: dico eos minimos
 esse omnium eandem cum ipsis rationem habentium.

Sint enim C, D minimi omnium in ratione A ad B .

- * 21. hujus. Quoniam igitur^r minimi nu-
 meri eandem cum ipsis rationem $A \dots\dots B \dots\dots$
 habentium, eos qui eandem habent $C \text{ ---- } D \text{ ----}$
 rationem æqualiter metiuntur, ma-
 jor majorem et minor minorem,
 hoc est, antecedens antecedentem et consequens conse-
 quentem; numerus C ipsum A æqualiter metietur, at-
 que D ipsum B . Quoties autem C metitur ipsum A , tot
 unitates sint in E . Ergo quot sunt unitates in numero
 E , toties D metietur B . Sed cum numerus C æqualiter
 * ex hyp. metiatur A , ac unitas numerum E ^q; permutando, E æ-
 * 15. hujus. qualiter metietur A , ac unitas numerum C ^r. Metitur
 igitur E numerum A . Similiter ostendemus E numerum
 B metiri. Est igitur E numerorum A, B mensura com-
 munis. Numeri autem A, B , cum sint inter se primi¹,
 nullam habent mensuram communem præter ipsam uni-
 tatem¹. Unitas igitur est E . Quot vero sunt in E uni-
 tates, tot numeri sunt in A numero C æquales^q. Cum
 igitur unitas sit E , numerus A numero C æqualis erit.
 Similiter ostendetur numerus B numero D æqualis. Sed
 ponuntur C, D minimi omnium in ratione numerorum
 A, B . Ergo et A, B minimi omnium in mutuâ ipso-
 rum ratione. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. XXIV. THEOR.

[XXIV.]

Minimi numeri eorum, qui eandem cum ipsis rationem habent, primi inter se sunt.

Sint A, B minimi numeri eorum, qui eandem cum ipsis rationem habent: dico A, B primos inter se esse.

Si enim non sunt A, B inter se primi, eos aliquis numerus A B metietur. Metiatur, sitque C. C -----
Et quoties C ipsum quidem A D ----- E --- metitur, tot unitates sint in D; quoties vero C metitur ipsum B, tot unitates sint in E.

Et quoniam C ipsum A metitur per unitates, quæ sunt in D; C multiplicans ipsum D fecit A. Eadem ratione et C multiplicans B ipsum B fecit. Itaque cum numerus C duos numeros D, E multiplicans fecerit A, B; erit^a ut^a 17. hujus. D ad E ita A ad B. Ergo D, E in eadem sunt ratione, in quâ A, B, minores ipsis existentes, quod^a fieri non potest^a ex hyp. test. Non igitur A, B numeros numerus aliquis metietur; ac propterea A, B primi inter se sunt. Q. E. D.

PROP. XXV. THEOR.

[XXV.]

Si duo numeri primi inter se fuerint; qui unum ipsorum metitur numerus, ad reliquum primus erit.

Sint duo numeri primi inter se A, B; et aliquis numerus C ipsum A metiatur: dico B, C inter se primos esse.

Si enim B, C non sint inter se primi, metietur eos aliquis numerus. Metiatur, sitque D. Et quoniam D ipsum C metitur, et C ipsum A; A
et D ipsum A metietur. Metitur autem et B
ipsum B. Ergo D numeros A, B metitur C . . .
primos inter se existentes, quod^a fieri non potest^a. Non igitur numeros C, B numerus aliquis metietur; ideoque C B inter se primi sunt. D ---
Q. E. D. ^a Def. 12. hujus.

PROP. XXVI. THEOR.

[XXVI.]

Si duo numeri ad aliquem numerum primi fuerint; et qui sit ex ipsis, ad eum primus erit.

Duo enim numeri A, B ad aliquem numerum C primi sint; et A ipsum B multiplicans faciat D: dico C, D inter se primos esse.

Si enim c, d non sint inter se primi, metietur eos aliquis numerus. Metiatur, sitque E .
 Et quoniam c, a primi inter se sunt, $A \dots B \dots$
 et ipsum c metitur aliquis numerus $C \dots$
^{* 25. hujus.} E ; erunt^{*} E, A inter se primi. Quo- $D \dots$
 ties autem E ipsum d metitur, tot $E \text{ ----}$
 unitates sint in F : quare et F meti- $F \text{ ---}$
 tur ipsum d per unitates, quæ sunt in
 E : ergo E ipsum F multiplicans fecit d . Sed et A
 multiplicans B ipsum d fecit. Qui igitur sit ex E, F , est
 æqualis ei, qui ex A, B . Si vero qui sit ex extremis æ-
^{7 19. hujus.} qualis fuerit ei, qui ex mediis⁷; quatuor numeri pro-
 portionales erunt. Est igitur ut E ad A , ita B ad F . Sunt
^{* 23. hujus.} autem A, B inter se primi; et qui primi etiam^{*} minimi
 sunt; minimi vero eandem cum ipsis rationem haben-
 tium eos, qui eandem habent rationem, æqualiter meti-
^{* 21. hujus.} untur^{*}, major majorem, minor minorem, hoc est, ante-
 cedens antecedentem et consequens consequentem: er-
 go E ipsum B metitur. Metitur autem et ipsum c :
 quare E ipsos B, c metitur, primos inter se existentes:
 quod fieri non potest. Non igitur c, d numeros nu-
 merus aliquis metietur; ac propterea c, d inter se primi
 sunt. Q. E. D.

[XXVII.]

PROP. XXVII. THEOR.

*Si duo numeri primi inter se fuerint; qui sit ab uno ipsorum,
 ad reliquum primus erit.*

Sint duo numeri inter se primi A, B ; et A seipsum
 multiplicans faciat c : dico B, c inter se primos esse.

Ponatur enim ipsi A æqualis d . Et quoniam A, B
 sunt primi inter se, æqualis autem A
 ipsi d ; et d, B inter se primi erunt. $A \dots B \dots$

Uterque igitur ipsorum A, d ad B pri- $C \dots$
^{b 26. hujus.} mus est: ergo et qui ex A, d fit^b, pri- $D \dots$
 mus erit ad B . Sed qui sit ex A, d ,
 est numerus c . Quare c, B inter se primi sunt. Q. E. D.

[XXVIII.]

PROP. XXVIII. THEOR.

*Si duo numeri ad duos numeros, uterque ad utrumque,
 primi fuerint; et qui fiunt ex ipsis, inter se primi
 erunt.*

Duo enim numeri A, B ad duos numeros c, d , uter-
 que ad utrumque, primi sunt; et A quidem ipsum B
 multiplicans

multiplicans faciat E; c vero multiplicans D faciat F: dico E, F inter se primos esse.

Quoniam enim uterque ipsorum A, B ad c primus est; et qui fit ex A, B^c, ad c primus erit. ^{c 26. hujus.}

Qui autem fit ex A, B	A . . .	B
est E: ergo E, c primi inter se sunt. Eadem ratione	E	
et E, D primi sunt inter se.	C . .	D
	F	

Uterque igitur ipsorum c, D ad E primus est: ac propterea^c qui fit ex c, D, primus erit ad E. Qui vero ex c, D fit, est numerus F. Ergo E, F primi inter se erunt. Q. E. D.

PROP. XXIX. THEOR.

[XXIX.]

Si duo numeri primi inter se fuerint, et uterque seipsum multiplicans faciat aliquos; facti ex ipsis primi inter se erunt: et si numeri a principio positi eos, qui facti sunt, multiplicantes aliquos faciant; et ipsi inter se primi erunt; et semper circa extremos hoc continget.

Sint duo numeri inter se primi A, B, et A seipsum quidem multiplicans faciat C, multiplicans vero C faciat E; et B seipsum multiplicans faciat D, multiplicans autem D faciat ipsum F: dico C, D et E, F inter se primos esse.

Quoniam enim A, B primi inter se sunt; et A seipsum multiplicans fecit C; erunt^d C, B primi inter se. ^{d 27. hujus.}

A . .	B . . .
C	D
E	F

Et quoniam C, B inter se primi sunt, et B seipsum multiplicans fecit D; erunt C, D inter se primi. Rursus quoniam A, B primi sunt inter se, et B seipsum multiplicans fecit D; A, D inter se primi erunt. Cum igitur duo numeri A, C ad duos numeros B, D, uterque ad utrumque, primi sint; et qui ex A, C fit ad eum, qui fit ex B, D^f, primus erit. Sed qui fit ex A, C est numerus^e ^{e 28. hujus.} E, qui vero ex B, D fit est F. Ergo E, F primi inter se sunt. Q. E. D.

PROP.

[XXX.]

PROP. XXX. THEOR.

Si duo numeri primi inter se fuerint; et uterque simul ad utrumque ipsorum primus erit: quod si uterque simul ad unum aliquem ipsorum sit primus, et numeri a principio positi inter se primi erunt.

Componantur enim duo numeri inter se primi, A, B , BC : dico et utrumque simul, videlicet AC , ad utrumque ipsorum AB , BC primum esse.

Si enim non sint CA , AB inter se primi, metietur eos numerus aliquis. Metiatur, et sit

D . Quoniam igitur D metitur ip- $A \dots B \dots C$
 sos CA , AB ; et reliquum BC me- $D \text{ -----}$
 tietur. Metitur autem et BA :

ergo D ipsos AB , BC metitur, primos inter se existentes; quod fieri non potest. Non igitur CA , AB numeros numerus aliquis metietur; ac propterea AB , AC inter se primi sunt. Ergo CA ad utrumque ipsorum AB , BC est primus.

Sint rursus CA , AB primi inter se: dico et ipsos AB , BC inter se primos esse.

Si enim AB , BC non sint inter se primi, metietur eos aliquis numerus. Metiatur, sitque D . Et quoniam D metitur utrumque ipsorum AB , BC , et totum CA metietur. Metitur autem et AB : ergo D ipsos CA , AB metitur primos inter se existentes, quod fieri non potest. Non igitur ipsos AB , BC numeros numerus aliquis metietur, ideoque AB , BC inter se primi sunt. *Q. E. D.*

[XXXI.]

PROP. XXXI. THEOR.

Omnis primus numerus ad omnem numerum, quem non metitur, primus est.

Sit primus numerus A , et numerum B non metiatur: dico B , A inter se primos esse.

Si enim non sint B , A inter se primi, metietur eos aliquis numerus. Metiatur, et sit C :

Def. 11. ergo C non est unitas. Et quoniam $A \dots B \dots$
hujus. C ipsum B metitur, A vero non me- $C \text{ ----}$
 titur ipsum B ; non erit C idem qui A .

Et quoniam C ipsos B , A metitur; metietur etiam ipsum A primum existentem, licet non sit idem cum eo; quod fieri

feri non potest. Non igitur ipsos B, A numeros numerus aliquis metietur: quare A, B inter se primi sunt. Q. E. D.

PROP. XXXII. THEOR.

[XXXII.]

Si duo numeri sese multiplicantes aliquem faciant; eum vero, qui ex ipsis fit, metiatur aliquis numerus primus: et unum ipsorum, qui a principio positi sunt, metietur.

Duo enim numeri A, B se invicem multiplicantes faciant c, ipsum vero c metiatur aliquis numerus primus, qui sit d: dico d unum ipsorum A, B metiri.

Ipsum enim A non metiatur, atque est d numerus primus: ergo^s A, d primi inter

§ 31. hujus.

se sunt. Et quoties d ipsum c A . . . B
metitur, tot unitates sint in E. C

Quoniam igitur d metitur ipsum c

sum c per eas quæ sunt in B E

unitates; numerus d ipsum B

multiplicans fecit c. Sed et A multiplicans B ipsum c

fecit. Ergo qui sit ex d, E æqualis est ei, qui ex A, B:

est igitur^k ut d ad A ita B ad E. Et sunt d, A primi^h 19. hujus.

inter se; primi veroⁱ sunt et minimi, sed^k minimi eos^l 23. hujus.

qui eandem habent rationem æqualiter metiuntur, major

majorem et minor minorem, hoc est, antecedens ant-

ecedentem et consequens consequentem; ergo d ipsum

B metitur. Similiter demonstrabimus, si d non metia-

tur B, metiri ipsum A. Quare d metitur unum ipsum

A, B. Q. E. D.

PROP. XXXIII. THEOR.

[XXXIII.]

Omnem numerum compositum primus aliquis numerus metitur.

Sit compositus numerus A: dico primum aliquem numerum metiri ipsum A.

Quoniam enim A est compositus numerus^l, metieturⁱ Def. 13. ipsum aliquis numerus. Metiatur, et

hujus.

fit B. Et si quidem primus est B, A

manifestum est quod quæritur. Si vero B

compositus, ipsum aliquis numerus me-

tietur. Metiatur, sitque c. Et quo-

niam c metitur ipsum B; B vero ipsum A; et c ipsum

A metitur. Et si quidem primus est c, manifestum est

quod quæritur. Si vero compositus, eum aliquis nu-

merus

merus metitur; et hâc consideratione factâ, relinquetur tandem aliquis numerus primus, et qui ipsum A metietur. Si enim non relinquitur, metientur ipsum A infiniti numeri, quorum alter altero est minor, A B C . . .

^m Def. 2. hujus.

quod ^m in numeris fieri non potest; ergo relinquetur aliquis, qui et præcedentem metietur et ipsum A.

Omnem igitur numerum compositum primus aliquis numerus metitur. Q. E. D.

Aliter. Sit compositus numerus A: dico primum aliquem numerum ipsum metiri.

ⁿ Def. 13. hujus.

Quoniam enim A compositus est ⁿ, metietur ipsum aliquis numerus. Sit B minimus eorum, qui ipsum A metiuntur: dico B primum esse.

Si enim non; erit compositus: ergo eum aliquis numerus metietur. Metiatur, sitque C metiens ipsum: erit igitur C minor A quam B. Et quoniam C ipsum B metitur, sed et B ipsum A; et C ipsum A C -- metietur, minor existens ipso B, qui est minimus omnium qui metiuntur A; quod est absurdum: igitur B non est compositus numerus. Ergo est primus. Q. E. D.

[XXXV.]

PROP. XXXIV. PROBL.

Numeris quocunque datis, invenire minimos omnium, qui eandem cum ipsis rationem habeant.

Sint dati quocunque numeri A, B, C: oportet invenire minimos omnium, qui eandem cum ipsis A, B, C rationem habeant.

Vel igitur A, B, C primi inter se sunt, vel non. Si ^o 23. hujus. quidem primi, et minimi erunt ^o omnium eandem cum ipsis rationem habentium.

A	B	C
	D . . .	
E . . .	F	G
H ---	K ----	L -----
	M --	

^p 3. hujus. Si vero non. Sumatur ^p ipsorum A, B, C maxima communis mensura D, et quoties D unumquemque ipsorum

forum A, B, C metitur, tot unitates sint in unoquoque horum E, F, G; et unusquisque igitur ipsorum E, F, G unumquemque ipsorum A, B, C metitur per eas, quæ sunt in D unitates: ergo E, F, G ipsos A, B, C æqualiter metiuntur; ac propterea¹ E, F, G in eadem sunt ratione,¹⁸ hujus. in quâ ipsi A, B, C. Dico eos etiam minimos esse. Si enim E, F, G non sint minimi eandem cum ipsis A, B, C rationem habentium; erunt aliqui, ipsis E, F, G minores, in eadem ratione, in quâ A, B, C. Sint H, K, L: æqualiter igitur¹ H metitur ipsum A, ac uterque ipsorum K, L²¹ hujus. utrumque B, C metitur. Quoties autem H metitur ipsum A, tot unitates sint in M; et uterque igitur K, L utrumque B, C metitur per eas quæ sunt in M unitates. Et quoniam H ipsum A metitur per unitates, quæ sunt in M; et M ipsum A per unitates quæ sunt in H metietur. Eadem ratione et M utrumque ipsorum B, C metietur per unitates, quæ sunt in utroque K, L. Ergo M ipsos A, B, C metitur. Rursum, quoniam H ipsum A metitur per unitates, quæ sunt in M; H ipsum M multiplicans fecit A. Eadem ratione et E multiplicans D ipsum A fecit: ergo qui ex E, D fit ei qui fit ex H, M est æqualis: ut igitur E ad H ita¹ M ad D. Major autem¹⁹ hujus. est E quam H: ergo et M quam D est major, et ipsos A, B, C metitur, quod fieri non potest; ponitur enim D ipsorum A, B, C maxima communis mensura. Non igitur erunt aliqui numeri minores ipsis E, F, G in eadem ratione, in quâ A, B, C: ergo E, F, G minimi sunt eorum, qui eandem cum ipsis A, B, C rationem habent. Q. E. D.

PROP. XXXV. PROBL.

[XXXVI.]

Duobus numeris datis, invenire minimum numerum, quem metiantur.

Sint dati duo numeri A, B: oportet invenire minimum numerum, quem metiantur.

Numeri enim A, B vel primi inter se sunt, vel non.

Sint primum A, B inter se primi,

et A ipsum B multiplicans faciat C;

ergo¹ et B multiplicans A ipsum

C fecit; ac propterea numeri A, B

ipsum C metiuntur. Dico etiam

C minimum esse. Sit enim D

numerus aliquis eorum, quos A, B metiuntur; et quoties A ipsum

A B

C

D -----

E --- F ---

¹⁶ hujus.

ipsum D metitur, tot unitates sint in E , quoties autem B metitur D , tot unitates sint in F :

ergo A quidem ipsum E multiplicans fecit D ; B vero multiplicans F ipsum D fecit. Quare numerus, qui ex A , E fit, est æqualis ei, qui fit ex B , F : ut igitur A ad

^a 19. hujus.

^a 23. hujus. B , ita est ^a F ad E . Et sunt A , B primi, primi autem ^a et

^a 21. hujus. minimi: sed ^a minimi eos, qui eandem habent rationem, æqualiter metiuntur, major majorem et minor minorem.

Ergo B ipsum E metitur consequens consequentem. Et ^a 18. hujus. quoniam A numeros B , E multiplicans fecit c , D , erit ^a ut B ad E , ita c ad D . Metitur autem B ipsum E : ergo et c ipsum D metitur. Est igitur c numero D minor. Similiter ostendetur numerus c alio quolibet eorum, quos numeri A , B metiuntur, minor. Omnium igitur minimus. $Q. E. D.$

^a 35. hujus. Sed non sint A , B primi inter se; et sumantur ^a minimi numeri eandem quam A , B rationem habentium, qui sint F , E : æqualis igitur est ^a qui ex A , E fit ei, qui ex B , F . Et A ipsum E multiplicans faciat c : ergo et B multiplicans F ipsum c fecit: quare A , B ipsum c metiuntur. Dico et minimum esse. Sit enim D alius

quis eorum, quos A , B metiuntur; et quoties A ipsum

D metitur, tot unitates sint

in G , quoties autem B metitur D , tot unitates sint in H :

ergo A quidem ipsum G multiplicans fecit D ; B vero multiplicans H ipsum D fecit: qui igitur ex A , G fit est æqualis ei, qui fit ex B , H : ut igitur A ad B , ita ^a H ad G . Sed ut A ad B , ita F ad E : ergo et ut F ad E , ita H ad G . Et ^b sunt F , E minimi; minimi vero eos, qui eandem habent rationem, æqualiter metiuntur^c, major majorem, et minor minorem: quare E ipsum G metitur.

^b Per construct.

Et quoniam A numeros E , G multiplicans ipso c , D fecit, ut E ad G ita erit ^c c ad D . Sed E metitur ipsum

^c 17. hujus. G : ergo ^d et c ipsum D metitur. Est igitur c numero D minor. Similiter ostendetur numerus c quolibet eorum, quos A , B metiuntur, minor. Omnium igitur minimus. $Q. E. D.$

^d Def. 20. hujus.

PROP.

PROP. XXXVI. THEOR.

[XXXVII.]

Si duo numeri metiantur numerum aliquem; et minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.

Duo enim numeri A, B numerum aliquem C D metiantur, minimum autem ipsum E: dico et E ipsum C D metiri.

Si enim E non metitur C D, E metiens F D relinquat seipso minorem C F. Et quoniam A, B ipsum E metiuntur, A B
E vero ipsum D F; et A, B metiuntur D F. Sed et metiuntur totum C D: ergo et reliquum C F minorem ipso E metientur, quod fieri non potest. Non igitur E non metitur ipsum C D, metitur igitur. Q. E. D.

PROP. XXXVII. PROBL.

[XXXVIII.]

Tribus numeris datis, invenire minimum numerum, quem metiantur.

Sint dati numeri A, B, C: oportet invenire minimum numerum, quem metiantur.

Sumatur numerus D minimus, quem duo A, B³⁶ huius metiuntur. Itaque C vel

metitur D, vel non metitur. Metiatur primum. A B C
D

Sed et A, B metiuntur E

ipsum D: ergo A, B, C

ipsum D metiuntur. Dico illum esse minimum. Sit enim E numerus aliquis eorum, quos A, B, C metiuntur. Quoniam igitur A, B, C metiuntur ipsum E, et A, B ipsum E metiuntur: ergo³⁷ et minimus, quem metiuntur³⁷ huius. A, B, ipsum E metietur. Minimus autem, quem metiuntur A, B, est D: quare D metitur ipsum E. Minor igitur est D numero E. Similiter ostendetur D minor quolibet eorum, quos A, B, C metiuntur. Omnium igitur minimus. Q. E. D.

Non metiatur autem C ipsum D, et sumatur^f minimus numerus E, quem C, D metiantur. Itaque quoniam A, B metiuntur ipsum D; D vero ipsum E: et A, B ipsum E metiuntur. Metitur autem et C ipsum E:
ergo

PROP. XXXIX. THEOR.

[XL.]

Si numerus partem quamcumque habeat; eum numerus a parte denominatus metietur.

Numerus enim A partem habeat quamcumque B, et ab ipsâ parte B denominatus sit numerus C: dico C ipsum A metiri.

Quoniam enim B ipfius A pars est, et denominata ab ipso C; est autem et unitas D ipfius C numeri pars ab ipso de-

A
B . .
C
D .

nominata: quæ igitur pars est unitas D ipfius C numeri, eadem pars est et B ipfius A: ergo unitas D æqualiter metitur ipsum C numerum, atque B ipsum A; et permutando¹ unitas¹⁵ hujus D ipsum B numerum æqualiter metitur, atque C ipsum A. Ergo C ipsum A metitur. Q. E. D.

PROP. XL. PROBL.

[XLI.]

Numerum invenire, qui minimus cum sit datas partes habeat.

Sint datæ partes A, B, C: oportet numerum invenire, qui cum minimus sit habeat datas partes A, B, C.

Sint ab ipsis A, B, C partibus denominati numeri D, E, F, et sumatur^a minimus

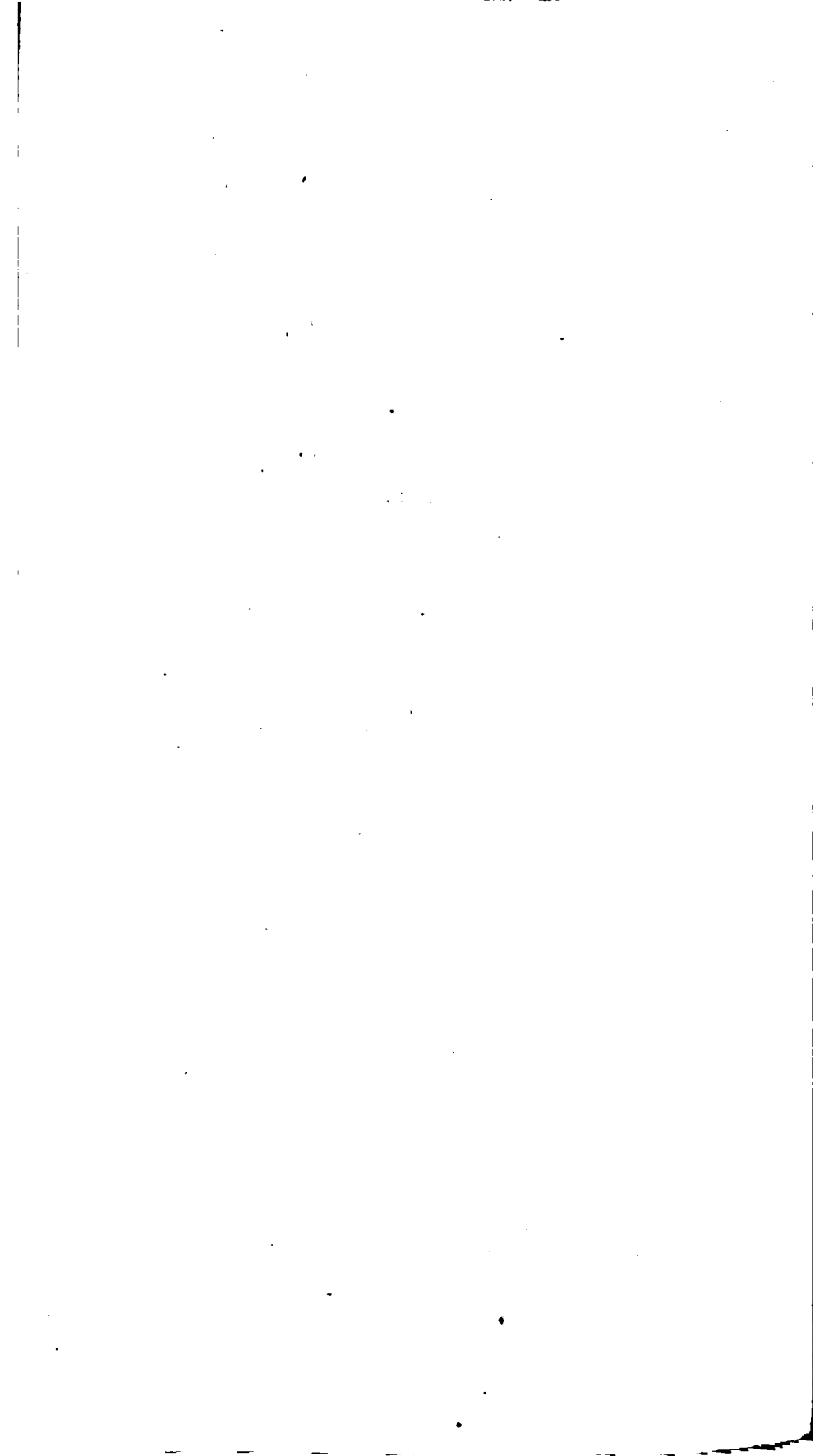
A $\frac{1}{2}$	D . .
B $\frac{1}{3}$	E . . .
C $\frac{1}{4}$	F
G	H -----

numerus G, quem ipsi D, E, F metiuntur. Quoniam igitur D, E, F metiuntur ipsum G; habebit^a G partes ab ipsis D, E, F denominatas. Partes autem denominatæ ab ipsis D, E, F^o sunt

A, B, C; ergo G partes A, B, C habet. Dico et minimum esse. Si enim G non sit minimus, partes habens A, B, C, erit numerus aliquis minor ipso G, qui easdem partes habeat. Sit H. Quoniam igitur H partes habet A, B, C; eum^p metientur numeri ab ipsis A, B, C partibus denominati. Sunt autem hi numeri D, E, F: ergo D, E, F ipsum H metientur minorem ipso G, quod^o fieri non potest. Non igitur erit aliquis numerus minor ipso G, qui partes A, B, C habeat. Q. E. D.

^a 38. hujus.
^o Per construct.

^p 40. hujus.



EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER OCTAVUS.

PROPOSITIO I. THEOREMA.

[I.]

Si sint quotcunque numeri, quorum extremi sint inter se primi; minimi erunt omnium eandem cum ipsis rationem habentium.

SINT quotcunque numeri A, B, C, D , quorum extremi A, D primi inter se sint: dico A, B, C, D minimos esse omnium eandem cum ipsis rationem habentium.

Si enim non, sint minores ipsis A, B, C, D numeri E, F, G, H , et in eadem ratione. Et quoniam A, B, C, D

$A, * 8. \quad B, 12. \quad C, 18. \quad D, 27.$

$E --- \quad F ---- \quad G ----- \quad H -----$

sunt in eadem ratione, in quâ E, F, G, H , atque est ipsorum A, B, C, D multitudo æqualis multitudini ipsorum E, F, G, H : erit ex æquo^a ut A ad D ita E ad H . Et^a 14. sept. sunt A, D primi; primi autem et minimi numeri æqualiter metiuntur eos, qui eandem rationem habent^b,^b 21. sept. antecedens antecedentem et consequens consequentem: ergo A ipsum E metitur, major minorem, quod fieri non potest. Non igitur E, F, G, H minores ipsis A, B, C, D existentes in eadem sunt ratione cum ipsis: ac propterea

^a In hoc et sequenti libro Literis adiecimus numeros illis respondentes; ne ingens punctorum multitudo, quandoque ex necessitate adhibenda, molestiam crearet lectoribus.

A, B, C, D minimi sunt omnium eandem cum ipsis rationem habentium. Q. E. D.

[II.]

PROP. II. PROBL.

Numeros invenire deinceps proportionales minimos, quotcumque quis imperaverit, in datâ ratione.

Sit data ratio in minimis numeris, ea sc. quam habet A ad B: oportet numeros invenire deinceps proportionales minimos, quotcumque quis imperaverit, in ratione A ad B.

Imperentur quatuor; et A seipsum multiplicans faciat C, multiplicans vero B faciat D; et B seipsum multiplicans faciat E; et adhuc A multiplicans C, D, E ipsos F, G, H faciat; B vero multiplicans E faciat K.

Quoniam igitur A seipsum multiplicans fecit C, multiplicans vero B ipsum

D fecit, numerus A A, 2. B, 3.

duos numeros A, B C, 4. D, 6. E, 9.

multiplicans fecit C, D: F, 8. G, 12. H, 18. K, 27.

^c 17. sept. est igitur^c ut A ad B,

ita C ad D. Rursus, quoniam A ipsum B multiplicans fecit D, et B seipsum multiplicans fecit E; uterque ipforum A, B multiplicans B utrumque ipforum D, E fecit:

^d 18. sept. ut igitur A ad B, ita^d D ad E. Sed ut A ad B, ita C ad D: ergo et ut C ad D, ita D ad E. Et quoniam A numeros C, D multiplicans ipsos F, G fecit: ut C ad D, ita erit F ad G. Ut autem C ad D, ita erat A ad B; quare ut A ad B, ita F ad G. Rursus, quoniam A numeros D, E multiplicans fecit G, H: erit ut D ad E, ita G ad H. Sed ut D ad E, ita A ad B: ergo ut A ad B, ita G ad H. Et quoniam A, B ipsum E multiplicantes fecerunt H, K; erit ut A ad B, ita H ad K. Offensum autem est et ut A ad B, ita esse et F ad G, et G ad H: ergo ut F ad G, ita G ad H, et H ad K: numeri igitur C, D, E et etiam F, G, H, K proportionales sunt in ratione, quam habet A ad B. Dico etiam et minimos esse. Nimirum tres

^e ex hyp. C, D, E in ternis minimos, quatuor item F, G, H, K minimos in quaternis. Quoniam enim^e A, B minimi sunt omnium eandem cum ipsis rationem habentium;

^f 23. sept. minimi vero eandem cum ipsis rationem habentium^f et primi sunt inter se: erunt ipsi A, B inter se primi. Et uterque quidem ipforum A, B seipsum multiplicans utrumque C, E fecit; utrumque vero C, E multiplicans fecit

fecit utrumque F, K : ergo C, E et F, K primi inter se^{29. sept.} sunt. Si autem sint quotcunque numeri deinceps proportionales, et eorum extremi sint inter se primi; minimi^h *1. hujus.* erunt omnium eandem cum ipsis rationem habentium: ergo et C, D, F et etiam F, G, H, K minimi sunt omnium eandem cum ipsis A, B rationem habentium. *Q. E. D.*

Cor. 1. Ex hoc manifestum est, si tres numeri deinceps proportionales minimi fuerint omnium eandem cum ipsis rationem habentium, extremos eorum quadratos esse; si vero quatuor, esse cubos.

*Cor. 2. ** Si A, B non sint omnium in datâ ratione minimi, simili tamen modo inveniendi sunt numeri deinceps proportionales, in datâ ratione ipsius A ad B , sed qui minimi non erunt.

PROP. III. THEOR.

[III.]

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium; eorum extremi primi inter se erunt.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D , minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium: dico eorum extremos A, D inter se primos esse.

Sumantur enim¹ duo numeri minimi in ratione ip-^{2. hujus.} forum A, B, C, D , qui

sint E, F ; tres vero $A, 8. B, 12. C, 18. D, 27.$

G, H, K ; et semper deinceps unoplures, quo-

$E, 2. F, 3. G, 4. H, 6. K, 9.$

ad assumpta multitudo $L, 8. M, 12. N, 18. O, 27.$

æqualis fuerit multi-

tudini ipsorum A, B, C, D . Sumantur, et sint L, M, N, O .

Extremi igitur ipsorum L, O primi inter se sunt.

Quoniam enim E, F primi inter se sunt, et uterque ipsorum seipsum multiplicans utrumque G, K fecit; utrumque vero G, K multiplicans fecit utrumque L, O : erunt^k *29. sept.*

et G, K et L, O primi. Et quoniam A, B, C, D minimi

sunt eorum eandem cum ipsis rationem habentium;

sunt autem et L, M, N, O minimi in eadem ratione, in

quâ A, B, C, D ; estque ipsorum A, B, C, D multitudo

æqualis multitudini ipsorum L, M, N, O : erit unus-

quisque ipsorum A, B, C, D unicuique ipsorum L, M, N, O

æqualis: ergo A quidem est æqualis L , et D ipsi O . Et

quoniam L , O primi sunt inter se, L vero ipsi A æqualis, et O ipsi D ; et A , D inter se primi erunt. $Q. E. D.$

[IV.]

PROP. IV. PROBL.

Rationibus datis quotcunque in minimis numeris, numeros invenire deinceps minimos in datis rationibus.

Sint datæ rationes in minimis numeris, videlicet ratio A ad B , et ratio C ad D , et ratio E ad F : oportet numeros invenire deinceps minimos in ratione A ad B , et in ratione C ad D ; et adhuc in ratione E ad F .

¹ 36. sept. Sumatur enim¹ minimus numerus, quem B , C metiuntur; sitque G . Et quoties B metitur G , toties A ipsum H metiatur: quoties vero C ipsum G metitur, toties

A , 2.	B , 5.	C , 3.	D , 4.	E , 5.	F , 6.
H , 6.	G , 15.	K , 20.	L , 24.		
N ---	O -----	M -----	P -----		

et D metiatur K . Itaque E ipsum K vel metitur, vel non metitur. Metiatur primum. Et quoties E metitur K , toties F ipsum L metiatur. Et quoniam A æqualiter
² 13. sept. metitur H , atque B ipsum G ; erit² ut A ad B , ita H ad G . Eâdem ratione et ut C ad D , ita G ad K , et adhuc ut E ad F , ita K ad L . Ergo H , G , K , L deinceps proportionales sunt in ratione A ad B , et in ratione C ad D , et adhuc in ratione E ad F . Dico etiam minimos esse. Si enim non sint H , G , K , L deinceps minimi in rationibus A ad B , et C ad D , et E ad F ; erunt aliqui numeri minores ipsis H , G , K , L deinceps minimi in rationibus A ad B , et C ad D , et E ad F . Sint N , O , M , P . Et quoniam est ut A ad B ita N ad O ; et sunt A , B mini-
³ 21. sept. mi; minimi autem eos, qui eandem habent rationem³, æqualiter metiuntur, major majorem et minor minorem, hoc est, antecedens antecedentem et consequens consequentem: metietur B ipsum O . Eâdem ratione et C ipsum O metietur: quare B , C metiuntur O : ac propterea⁴ minimus, quem metiuntur B , C , ipsum O metietur.
⁵ 37. sept. ⁵ ex hyp. Minimus autem, quem metiuntur B , C ⁵, est G : ergo G metietur O , major minorem; quod fieri non potest. Non igitur erunt aliqui numeri minores ipsis H , G , K , L deinceps minimi in rationibus A ad B , et C ad D , et E ad F .

Sed

Sed non metiatur E ipsum K . Et sumatur ¹ minimus ^{36. sept.} numerus, quem ipsi E , K metiuntur; sitque M . Quoties autem K metitur M , toties et uterque ipsorum H , G utrumque N , O metiatur; et quoties E metitur M , toties et F metiatur P . Quoniam igitur H ipsum N æqualiter metitur, atque G ipsum O ; erit^r ut H ad G , ita N ad O .^r 13. sept. Ut autem H ad G , ita A ad B ; quare ut A ad B , ita N ad O . Eâdem ratione ut C ad D , ita O ad M . Rursus,

A , 4.	B , 5.	C , 2.	D , 3.	E , 4.	F , 3.
H , 8.	G , 10.	K , 15.			
N , 32.	O , 40.	M , 60.	P , 45.		
Q --	R ---	S ----	T ---		

quoniam E ipsum M æqualiter metitur, atque F ipsum P ; erit^r ut E ad F , ita M ad P . Quare N , O , M , P deinceps proportionales sunt in rationibus A ad B , et C ad D , et E ad F . Dico minimos quoque esse. Si enim non sint N , O , M , P deinceps minimi in rationibus A ad B , et C ad D , et E ad F ; erunt aliqui numeri minores ipsis N , O , M , P deinceps minimi in rationibus A ad B , et C ad D , et E ad F . Sint Q , R , S , T . Et cum sit ut Q ad R , ita A ad B ; sintque A , B minimi; minimi vero eos, qui eandem habent rationem^r, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem et consequens consequentem: numerus B ipsum R metietur. Eâdem ratione et C metietur ipsum R ; ergo B , C ipsum R metiuntur; et ob id^r minimus, quem metiuntur B , C , ipsum R metietur.^r 37. sept. Minimus autem, quem metiuntur B , C , est G : ergo G metitur ipsum R . Atque est^r ut G ad R , ita K ad S : quare^r et K ipsum S metitur. Metitur autem et E ipsum S ; ideoque E , K ipsum S metiuntur; et minimus^{sept.} igitur, quem metiuntur E , K , metietur ipsum S . Sed minimus, quem metiuntur E , K ^r, est M : ergo M ipsum S metietur, major minorem, quod fieri non potest. Non igitur erunt aliqui numeri minores ipsis N , O , M , P deinceps minimi in rationibus A ad B , et C ad D , et E ad F ; ergo N , O , M , P deinceps minimi sunt in rationibus A ad B , et C ad D , et E ad F . $Q. E. D.$

[V.]

PROP. V. THEOR.

*Plani numeri inter se rationem habent * ex lateribus compositam.*

Sint plani numeri A, B, et ipsius quidem A latera sint C, D numeri: ipsius vero B latera sint E, F: dico A ad B rationem habere ex lateribus compositam.

⁷ 4. hujus. Rationibus enim datis, videlicet quam habet C ad E, et quam D ad F, fumantur ⁷ numeri deinceps mininū G, H, K in rationibus C ad E, et D ad F; sitque ut C ad

A, 6.

B, 20.

L, 12.

C, 2.

D, 3.

E, 4.

F, 5.

G, 3.

H, 6.

K, 10.

^a Def. 5.
sexti.

^a Def. 16.
sept.

^b 17. sept.

^c Per constructionem.

^d 14. sept.

E, ita G ad H: ut autem D ad F, ita H ad K. Ergo G, H, K inter se rationes habent laterum. Sed ^a ratio G ad K composita est ex ratione G ad H et ratione H ad K: quare G ad K rationem habet ex lateribus compositam. Dico igitur ut A ad B, ita esse G ad K. Numerus D ipsum E multiplicans faciat L. Et quoniam ^a D multiplicans C ipsum A fecit; multiplicans vero E fecit L: erit ^b ut C ad E, ita A ad L. Ut autem C ad E, ita ^c G ad H: ergo et ut G ad H, ita A ad L. Rursus, quoniam E ipsum quidem D multiplicans fecit L; multiplicans vero F ipsum B fecit; ut D ad F, ita erit L ad B. Sed ut D ad F, ita est H ad K; et igitur ut H ad K, ita L ad B. Oñsum autem est et ut G ad H, ita A ad L: quare ex æquo ^d ut G ad K, ita A ad B. Sed ^a G ad K rationem habet compositam ex lateribus. Ergo et A ad B rationem habebit ex lateribus compositam. Q. E. D.

[VI.]

PROP. VI. THEOR.

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundum non metiatur; neque alius aliquis ullum metietur.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D, E, et A ipsum B non metiatur: dico neque alium aliquem ullum metiri.

* Rectius ex laterum rationibus.

Et

Et quidem numeros A, B, C, D, E deinceps sese non metiri, perspicuum est. Neque enim A ipsum B metitur. Dico neque alium aliquem ullum metiri. Dico

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.
F, 4. G, 6. H, 9.

enim A, *ex. g.* non metiri ipsum C. Nam quot sunt A, B, C, tot sumantur^e minimi numeri eandem cum ip-^e 35. sept. sis A, B, C rationem habentes, et sint F, G, H. Quoniam igitur F, G, H in eadem sunt ratione, in qua A, B, C, atque est ipsum A, B, C multitudo æqualis multitudini ipsum F, G, H; erit ex æquo^f ut A ad C, ita F ad^f 14. sept. H. Et quoniam est ut A ad B, ita F ad G, non metitur autem A ipsum B, neque^g F ipsum G metietur: non^h Def. 20. igitur unitas est F; unitas enim^h omnem numerum^{sept.} metitur. Et sunt F, H primi inter se: ergoⁱ neque F^h Def. 1. metitur ipsum H. Atque est ut F ad H, ita A ad C. Ne-ⁱ Def. 12. que igitur A ipsum C metietur. Similiter demonstra-^{sept.} bimus neque alium ullum aliquem metiri. Q. E. D.

PROP. VII. THEOR.

[VII.]

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem metiatur extremum; et secundum metietur.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D; et A ipsum D metiatur: dico A ipsum quoque B metiri.

Si enim A non metitur ipsum B^k, neque alius aliquis^k 6. hujus. ullum metietur, quod est absurdum: ponitur enim A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. A ipsum D metiri. Ergo et A ipsum B metietur. Q. E. D.

PROP. VIII. THEOR.

[VIII.]

Si inter duos numeros numeri deinceps proportionales ceciderint; quot inter eos cadunt numeri deinceps proportionales, totidem et inter alios, eandem cum ipsis rationem habentes, cadent.

Inter duos numeros A, B cadant numeri deinceps proportionales C, D; et fiat ut A ad B, ita E ad F: dico quot numeri deinceps proportionales cadunt inter A, B, totidem et inter E, F deinceps proportionales cadere.

Quot

Quot enim numeri sunt A, C, D, B , totidem sumantur¹ 35. sept. A, C, D, B minimi numeri eandem cum ipsis A, C, D, B rationem habentium G, H, K, L : ergo² 3. hujus. extremi ipsorum G, L primi inter se sunt. Et quoniam A, C, D, B ad

$A, 2.$	$C, 4.$	$D, 8.$	$B, 16.$
$G, 1.$	$H, 2.$	$K, 4.$	$L, 8.$
$E, 3.$	$M, 6.$	$N, 12.$	$F, 24.$

ipsos G, H, K, L in eadem sunt ratione, atque est ipsorum A, C, D, B multitudo æqualis multitudini ipsorum
^{14. sept.} G, H, K, L ; erit ex æquo³ ut A ad B , ita G ad L . Ut autem A ad B , ita E ad F ; et igitur ut G ad L , ita E ad F .
^{23. sept.} Et sunt G, L primi; sed primi⁴ sunt et minimi; minimi
^{21. sept.} vero eos qui eandem rationem habent⁵ æqualiter metiuntur, major majorem et minor minorem: ergo G æqualiter metitur ipsum E , atque L ipsum F . Quoties autem G metitur ipsum E , toties et uterque ipsorum H, K utrumque M, N metiatur. Numeri igitur G, H, K, L ipsos E, M, N, F æqualiter metiuntur: ideoque⁶ G, H, K, L in eadem sunt ratione, in quâ ipsi E, M, N, F . At G, H, K, L in eadem sunt ratione, in quâ A, C, D, B : ergo A, C, D, B in eadem ratione erunt, in quâ E, M, N, F .
^{Def. 20. sept.} Sed⁷ A, C, D, B sunt deinceps proportionales: ergo et E, M, N, F deinceps proportionales erunt. Quot igitur deinceps proportionales cadunt inter A, B , totidem deinceps proportionales et inter E, F cadent. Q. E. D.

Cor. * Hinc datis numeris duobus A, B , aliisque duobus E, F qui eandem quam A, B inter se rationem habeant; datis etiam quocunque inter A, B analogiâ mediis; totidem inter E, F analogiâ mediis quâ ratione inveniantur, satis patet.

[IX.]

PROP. IX. THEOR.

Si duo numeri inter se primi fuerint, et inter ipsos numeri deinceps proportionales ceciderint; quot inter ipsos cadunt numeri deinceps proportionales, totidem et inter utrumque ipsorum et unitatem deinceps proportionales cadent.

Sint duo numeri inter se primi A, B , et inter ipsos deinceps proportionales cadant C, D ; exponaturque unitas E : dico quot numeri deinceps proportionales cadunt inter ipsos A, B , totidem et inter utrumque ipso-
 rum

rum A, B et unitatem E numeros deinceps proportionales cadere.

Sumantur enim * duo quidem numeri minimi F, G in ^{35. sept.} eâdem ratione, in quâ sunt A, C, D, B; tres vero H, I, K, et semper deinceps uno plures, quoad fiat ipsorum multitudo æqualis multitudini ipsorum A, C, D, B, sumantur[†], ^{2. hujus.}

A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.

E, 1.

F, 2. G, 3.

H, 4. I, 6. K, 9.

L, 8. M, 12. N, 18. O, 27.

et sint L, M, N, O. Itaque manifestum est [°] F seipsum [°] Per con- quidem multiplican- tem fecisse H, multiplican- tem vero ^{struct. 2.} H fecisse L; et G seipsum multiplican- tem fecisse K, multiplican- tem vero K fecisse O. Est igitur E ad F, ut F ad H, et H ad L. Item E ad G, ut G ad K, et K ad O. Sunt igitur F, H proportionem medii inter E, L; et G, K totidem proportionem medii inter E, O. Quot vero sunt numeri L, M, N, O, sive A, C, D, B, tot sunt numerorum ordines ab E ultimum usque ordinem L, M, N, O. Quot sunt igitur numeri numerorum A, B intermedii, tot sunt intermedii numerorum ordines, inter E et ultimum ordinem L, M, N, O. At quot sunt inter E et ordinem ultimum intermedii numerorum ordines, tot sunt inter E et L, necnon inter E et O numeri proportionem medii. Tot igitur sunt inter E et L, necnon inter E et O, quot inter ipsos A, B numeri proportionem medii. Et quoniam L, M, N, O minimi sunt eandem cum ipsis F, G rationem habentium; sunt autem et A, C, D, B minimi eandem quam F, G rationem habentium; atque est ipsorum L, M, N, O multitudo æqualis multitudini ipsorum A, C, D, B: erit unusquisque ipsorum L, M, N, O unicuique ipsorum A, C, D, B æqualis: æqualis igitur est L ipsi A, et O ipsi B. At ostensi sunt numeri F, H inter E, L proportionem medii. Idem igitur F, H inter E, A proportionem medii. Similiter G, K inter E, B proportionem medii. Numerorum autem F, H, necnon numerorum G, K numerus numero mediorum inter A, B ostensus est æqualis. Quot igitur numeri deinceps proportionales cadunt inter A, B, totidem et inter utrumque ipsorum A, B, et unitatem E numeri deinceps proportionales cadent. Q. E. D.

Cor.

*Cor. ** Numeri inter se primi, inter quos unus cadit proportionem medius, quadrati sunt. Quibus autem duo intercedunt proportione medii, primis inter se existentibus, ii cubi sunt.

[X.]

PROP. X. THEOR.

Si inter duos numeros et unitatem deinceps proportionales numeri ceciderint; quot inter utrumque ipsorum et unitatem cadunt numeri deinceps proportionales, totidem et inter ipsos numeri proportionales cadent.

Inter duos enim numeros A , B et unitatem C numeri deinceps proportionales cadant D , E , et F , G : dico quot inter utrumque ipsorum A , B et unitatem C cadunt numeri deinceps proportionales, totidem et inter ipsos A , B numeros deinceps proportionales cadere.

Quoniam C unitas est ad D , ut D ad E ; D seipsum multiplicans fecit E . Et cum C unitas sit ad D , ut E ad A ; D multiplicans E fecit A . Simili modo ostendetur, F seipsum multiplicando fecisse G ; et multiplicando G fecisse B . Numeri igitur D , F seipsum quisque, et a se

A , 8. 1, 12. K , 18. B , 27.
 E , 4. H , 6. G , 9.
 D , 2. F , 3.
 C , 1.

factos multiplicando, numeros A , B fecerunt. Si capiuntur igitur primum tres numeri in continuâ numerorum D , F ratione; tum in eâdem continuâ ratione quatuor; dein quinque; atque hoc semper fiat; in ordinem aliquem numerorum tandem devenietur, cujus A , B extremi erunt. Et ordinis illius tot erunt numeri, quot sunt ab unitate C , ordinem illum usque numerorum ordines. Ac proinde inter extremos A , B tot erunt intermedii, quot inter unitatem C et ordinem illum, cujus extremi A , B , intermedii numerorum ordines. At si tot sunt inter unitatem C et A , tot etiam inter unitatem C et B , continuâ proportionem medii, quot inter unitatem C et ordinem illum, cujus extremi sunt A , B , intermedii numerorum ordines. Id enim patet ex 2^a hujus et duobus ejus corollariis. Tot igitur inter A et B continuâ proportionem medii, quot inter unitatem C et A , vel inter unitatem C et B . *Q. E. D.*

PROP.

PROP. XI. THEOR.

[XI.]

Inter duos numeros quadratos unus medius proportionalis cadit; et quadratus ad quadratum duplicatam rationem habet ejus, quam latus habet ad latus.

Sint quadrati numeri A, B et ipsius quidem A latus sit C, ipsius vero B latus D: dico inter ipsos A, B unum medium proportionalem cadere, et A ad B duplicatam rationem habere ejus, quam habet C ad D.

Sit F unitas. Quoniam A numerus quadratus est, cujus latus numerus C; ^{Def. 18.} numerus C seipsum multiplicans A, 4. E, 6. B, 9. ^{sept.} fecit A. Pari ratione D seipsum multiplicans fecit B. Ergo C, 2. D, 3. F, 1.

F unitas est ad C, ut C ad A. Et F unitas ad D, ut D ad B. Unitati igitur et numero A, necnon unitati et numero B, unus intercedit proportionem medius. Quare et numeris A, B unus intercedit proportionem medius ^{10. hujus.}.

Dico præterea proportionem A ad B duplicatam esse proportionem numeri C ad D. Numerus C numerum D multiplicans faciet aliquem. Faciat E. Quoniam C seipsum multiplicans fecit A, et D multiplicans fecit B, erit A ad E ut C ad D ^{17. sept.}. Rursum, quoniam D seipsum multiplicans fecit B, et multiplicans C fecit E; erit E ad B ut C ad D. Sed ut C ad D, ita est A ad E (id enim ostensum.) Quare A est ad E ut E ad B. Continua est igitur trium A, E, B proportio. Proportio igitur A ad B duplicata est A ad E, id est, ipsius C ad D duplicata. Q. E. D.

*Cor.** Proportionem medius inter duos quoscunque quadratos, mutuâ laterum multiplicatione factus est. Continua autem trium ratio, laterum ratio est.

PROP. XII. THEOR.

[XII.]

Inter duos numeros cubos duo medii proportionales cadunt; et cubus ad cubum triplicatam habet rationem ejus, quam latus habet ad latus.

Sint numeri cubi A, B; et ipsius quidem A latus sit C, ipsius vero B latus D: dico inter ipsos A, B duos numeros medios proportionales cadere; et A ad B triplicatam habere rationem ejus, quam C habet ad D.

Sit

Sit κ unitas. Numeri c, d seipsum quisque multiplicando facient aliquos. Faciant e, g . Erit igitur κ unitas ad c , ut c ad e ; et κ unitas ad d , ut d ad g .

$A, 8.$ $H, 12.$ $I, 18.$ $B, 27.$
 $E, 4.$ $F, 6.$ $G, 9.$
 $C, 2.$ $D, 3.$
 $K, 1.$

Quoniam A cubus est cujus latus c ; et E quadratus cujus latus idem c ; idcirco c multiplicans E fecerit A . Pari ratione d multiplicans G fecerit B . Erit igitur κ unitas ad c ut E ad A ; et κ unitas ad d ut G ad B . Sed ostensum est unitatem esse ad c , ut c ad E ; necnon unitatem ad d , ut d ad G . Unitatis igitur et numerorum c, E, A , necnon unitatis et numerorum d, G, B continua est proportio. Unitati igitur et A duo intercedunt proportionem medii, c, E . Unitati quoque et B duo intercedunt d, G . Numeris igitur A, B totidem,
 7 10. hujus. duo nempe, intercedunt proportionem medii 7.

Dico præterea proportionem A ad B , ipsius c ad d triplicatam esse. Numerus c multiplicans d faciet aliquem. Faciat F . Numeri c, d numerum F multiplicantes duos aliquos facient. Facient duos H, I . Inter quadratos E, G est F proportionem medius; et E ad F ,
 * Cor. * 11. necnon F ad G , ut c ad d *. Quoniam vero c multiplicans E fecit A , et multiplicans F fecit H ; erit A ad H ut
 hujus. * 17. sept. E ad F , id est, ut c ad d . Rursum, quoniam c multiplicans F fecit H , et d multiplicans F fecit I , erit H ad I ut
 * 18. sept. c ad d , id est, ex ostensis, ut A ad H . Denique cum d multiplicans F fecit I , et multiplicans G fecit B ; erit I ad B ut F ad G , id est, ut c ad d , id est, ut A ad H . Numerorum igitur quatuor A, H, I, B continua est proportio. Proportio igitur A ad B ipsius A ad H , seu c
 * Def. 11. ad d , triplicata *. Q. E. D.
 quinti.

PROP.

PROP. XIII. THEOR.

[XIII.]

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, et unusquisque seipsum multiplicans faciat aliquos; facti ex ipsis proportionales erunt: et si positi a principio numeri factos multiplicantes alios faciant; et ipsi proportionales erunt; et semper circa extremos hoc contingit.

Sint quotcunque numeri proportionales A, B, C, fitque ut A ad B, ita B ad C, et ipsi A, B, C seipsum multiplicantes faciant D, E, F; ipsos vero D, E, F multiplicantes faciant G, H, K: dico numeros D, E, F et G, H, K deinceps proportionales esse.

Numerus enim A ipsum B multiplicans faciat L; uterque autem ipsorum A, B multiplicans L faciat utrumque M, N. Et rursus, B quidem multiplicans C ipsum O

	A, 2	B, 4.	C, 8.		
	D, 4.	L, 8.	E, 16.	O, 32.	F, 64.
G, 8.	M, 16.	N, 32.	H, 64.	P, 128.	Q, 256. K, 512.

faciat; uterque vero ipsorum B, C multiplicans O faciat utrumque P, Q.

Eodem modo quo prius ostendemus D, L, E et G, M, N, H deinceps proportionales esse in ratione A ad B; et adhuc E, O, F et H, P, Q, K, deinceps esse proportionales in ratione B ad C. Atque est ut A ad B, ita B ad C: ergo et D, L, E in eadem sunt ratione, in qua E, O, F; et præterea G, M, N, H in eadem ratione, in qua H, P, Q, K. Estque ipsorum quidem D, L, E multitudo multitudini ipsorum E, O, F æqualis. Multitudo autem ipsorum G, M, N, H æqualis multitudini ipsorum H, P, Q, K: ex æquo igitur^d ut D ad E, ita E ad F, et ut G ad H, ita^e 14. sept. H ad K. Q. E. D.

PROP. XIV. THEOR.

[XIV.]

Si numerus quadratus metiatur quadratum numerum; et latus latus metietur: et si latus metiatur latus; et quadratus quadratum metietur.

Sint quadrati numeri A, B, quorum latera C, D, et A ipsum B metiatur: dico et latus C ipsum D metiri.

Numerus enim C multiplicans D ipsum E faciat: ergo A, E, B deinceps proportionales sunt in ratione C ad D. • Cor.* 11. Et hujus.

Et quoniam A, E, B deinceps sunt proportionales, metiturque A ipsum B ; et ^b A ipsum E metietur. Atque est $A, 4. E, 8. B, 16.$
^c Def. 20. ut A ad E , ita c ad D : ergo ^c $C, 2. D, 4.$
 sept. et c metitur ipsum D .

Sed c metiatur ipsum D : dico et A ipsum B metiri.

Iisdem enim constructis, similiter ostendemus A, E, B deinceps proportionales esse in ratione c ad D . Et quoniam est ut c ad D , ita A ad E , metitur autem c ipsum D ; et A ipsum E metietur. Et sunt A, E, B deinceps proportionales. Metitur igitur et A ipsum B .

Si igitur numerus quadratus metiatur quadratum numerum; et latus latus metietur: et si latus metiatur latus; et quadratus quadratum metietur. *Q. E. D.*

[XV.]

PROP. XV. THEOR.

Si numerus cubus metiatur cubum numerum; et latus latus metietur: et si latus latus metiatur; et cubus cubum metietur.

Numerus enim cubus A cubum numerum B metiatur, et ipsius quidem A latus sit c , ipsius vero B latus D : dico c ipsum D metiri.

Numerus enim c seipsum multiplicans faciat E , et multiplicans D faciat F ; D vero seipsum multiplicans

$$\begin{array}{cccc} A, 8. & H, 16. & K, 32. & B, 64. \\ E, 4. & F, 8. & G, 16. & \\ C, 2. & D, 4. & & \end{array}$$

faciat G ; et uterque ipsorum c, D multiplicans F utrumque H, K faciat. Manifestum autem est E, F, G et A, H, K, B deinceps proportionales esse in ratione c ad D ; et quoniam A, H, K, B deinceps proportionales sunt, metiturque A ipsum B ^d; et A ipsum H metietur. Est autem ut A ad H , ita c ad D . Ergo ^c c ipsum D metietur.

^d 7. hujus.
^c Def. 20.
 sept.

Sed c metiatur D : dico et A ipsum B metiri.

Iisdem enim constructis, similiter ostendemus A, H, K, B deinceps proportionales esse in ratione c ad D . Et quoniam c ipsum D metitur, estque ut c ad D , ita A ad H ; et A metitur ipsum H . Quare et A ipsum B metietur. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. XVI. THEOR.

[XVI.]

Si numerus quadratus non metiatur quadratum numerum, neque latus latus metietur; et si latus non metiatur latus, neque quadratus quadratum.

Sint quadrati numeri A, B, quorum latera c, d, et A non metiatur ipsum B: dico neque c ipsum d metiri.

Si enim metitur c ipsum d, et A ipsum B metietur^f. Non metitur autem A ipsum B: non igitur c ipsum d metietur.

A, 9. B, 16.
C, 3. D, 4. ^f 14. hujus.

Sed non metiatur c ipsum d: dico neque A ipsum B metiri.

Si enim A metitur ipsum B, et ^f c ipsum d metietur. Atqui c non metitur d; neque igitur A ipsum B metietur. Q. E. D.

PROP. XVII. THEOR.

[XVII.]

Si numerus cubus non metiatur cubum numerum, neque latus latus metietur; et si latus non metiatur latus, neque cubus cubum metietur.

Numerus enim cubus A cubum numerum B non metiatur; et ipsius quidem A latus fit c, ipsius vero B latus d: dico c ipsum d non metiri.

Si enim c metitur ipsum d, et A ipsum B metietur^g. Atqui non metitur A ipsum B: non igitur c ipsum d metietur.

A, 8. B, 27. ^g 15. hujus.
C, 2. D, 3.

Sed non metiatur c ipsum d: dico neque A ipsum B metiri.

Si enim A ipsum B metitur, et ^g c metietur ipsum d. Non metitur autem c ipsum d: neque igitur A ipsum B metietur. Q. E. D.

PROP. XVIII. THEOR.

[XVIII.]

Inter duos similes planos numeros unus medius proportionalis cadit; et planus ad planum duplicatam rationem habet ejus, quam latus homologum habet ad homologum latus.

Sint duo numeri plani inter se similes A, B, et ipsius quidem A latera sint c, d, ipsius vero B latera homologa sint E, F. Et quoniam similes plani sunt, qui latera habent proportionalia^h; erit ut c ad d, ita E ad F. Dico ^a Def. 21. inter sept.

inter ipsos A, B unum medium proportionalem cadere; et A ad B duplicatam rationem habere ejus, quam latus homologum c habet ad homologum latus E , vel D ad F .

¹ 13. sept. Quoniam enim est ut c ad D , ita E ad F ; et permutando ut c ad E , ita erit D ad F ¹. Et quoniam planus numerus est A , cujus latera c, D ; numerus D ipsum c

$A, 6. \quad G, 12. \quad B, 24.$
 $C, 2. \quad D, 3. \quad E, 4. \quad F, 6.$

multiplicans fecit A . Eadem ratione et E multiplicans F ipsum B fecit; numerus autem D ipsum B multiplicans faciat G . Et cum D ipsum quidem c multiplicans fecit A , multiplicans vero E fecit G ; erit ut c ad E , ita A ad G ^k. Sed ut c ad E , ita D ad F ; et igitur ut D ad F , ita A ad G . Rursus, quoniam E ipsum D multiplicans fecit G , multiplicans vero F ipsum B fecit; ut D ad F , ita erit G ad B ^k. Ostensum est autem et ut D ad F , ita esse A ad G ; et igitur ut A ad G , ita G ad B : ergo A, G, B deinceps proportionales sunt. Ac propterea inter A, B unus medius proportionalis cadit.

Dico et A ad B duplicatam rationem habere ejus, quam latus homologum habet ad homologum latus; hoc est, quam c ad E , vel D ad F . Quoniam enim A, G, B deinceps proportionales sunt, A ad B duplicatam rationem habebit ejus, quam habet ad G ¹. Atque est ut A ad G , ita c ad E , et D ad F . Ergo et A ad B duplicatam rationem habet ejus, quam c habet ad E , vel D ad F . *Q. E. D.*

¹ Def. 10.
quinti.

*Cor. ** Inter duos similes planos qui est proportione medius, et ipse planus est, ex lateribus utique numerorum principio positorum non homologis factus.

[XIX.]

PROP. XIX. THEOR.

Inter duos similes solidos numeros duo medii proportionales cadunt; et solidus ad solidum triplicatam rationem habet ejus, quam latus homologum habet ad homologum latus.

Sint duo numeri solidi inter se similes A, B , et ipsius quidem A latera sint c, D, E , ipsius vero B latera homologa sint F, G, H . Et quoniam similes solidi sunt, qui latera habent proportionalia^m; erit ut c ad D , ita F ad G , ut autem D ad E , ita G ad H . Dico inter ipsos A, B duos medios

^m Def. 21.
sept.

medios proportionales cadere; et A ad B triplicatam rationem habere ejus, quam habet C ad F, et D ad G, et adhuc E ad H.

Numerus enim C ipsum D multiplicans faciat K; F vero multiplicans G ipsum L faciat. Et quoniam C, D in eadem sunt ratione, in qua F, G, et ex ipsis C, D fit K,

A, 30. N, 60. O, 120. B, 240.

K, 6. M, 12. L, 24.

C, 2. D, 3. E, 5. F, 4. G, 6. H, 10.

ex ipsis vero F, G fit L; erunt K, L similes plani numeri^m: quare inter ipsos unus medius proportionalis^m Def. 21. cadit*. Sit is numerus M: ergo M fit ex D, F^o. Est au-^{sept.} tem K ad M, ut M ad L. Et quoniam D ipsum C multipli-^{18. hujus.} cans fecit K, multiplicans vero F fecit M; erit ut C ad F, hujus.^{Cor. * 18.} ita K ad M^p. Sed ut K ad M, ita M ad L: ergo K, M, L^p 17. sept. deinceps proportionales sunt in ratione C ad F. Et quoniam ut C ad D, ita F ad G; erit permutando ut C ad F, ita D ad G^q. Rursus, quoniam ut D ad E, ita G ad^{13. sept.} H; et permutando erit ut D ad G, ita E ad H: ergo K, M, L deinceps proportionales sunt in ratione C ad F, et D ad G, et E ad H. Uterque autem ipsorum E, H multiplicans M faciat utrumque N, O. Et quoniam solidus est A, latera autem ipsius C, D, E; numerus E eum, qui fit ex C, D, multiplicans fecit A; qui vero fit ex C, D est K: ergo E multiplicans K ipsum A fecit. Eadem ratione et H multiplicans L, qui fit ex F, G, fecit ipsum B. Et quoniam E ipsum K multiplicans fecit A, sed et multiplicans M fecit N; erit^o ut K ad M, ita A ad N. Ut autem K ad M, ita C ad F, et D ad G, et adhuc E ad H: ergo ut C ad F, et D ad G, et E ad H, ita A ad N. Rursus, quoniam uterque ipsorum E, H multiplicans M fecit utrumque N, O; erit ut E ad H, ita N ad O. Sed ut E ad H, ita C ad F, et D ad G: est igitur ut C ad F, et D ad G, ita et A ad N, et N ad O. Rursus, quoniam H multiplicans M fecit ipsum O, sed et multiplicans L fecit B: erit ut M ad L, ita O ad B. Sed ut M ad L, ita C ad F, et D ad G, et E ad H; et igitur ut C ad F, et D ad G, et E ad H, ita non solum O ad B, sed et A ad N, et N ad O. Ergo A, N, O, B deinceps proportionales sunt in dictis laterum rationibus.

Dico et A ad B triplicatam rationem habere ejus, quam
a 2 habet

habet latus homologum ad homologum latus; hoc est, quam habet numerus C ad F , vel D ad G , vel E ad H . Quoniam enim quatuor numeri proportionales sunt A, N, O, B ; habebit A ad B triplicatam rationem ejus, quam habet A ad N^p . Sed ut A ad N , ita ostensus est et C ad F , et D ad G , et E ad H . Ergo A ad B triplicatam habet rationem ejus, quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc est, quam C habet ad F , et D ad G , et E ad H . *Q. E. D.*

^p Def. 11.
quinti.

[XX.]

PROP. XX. THEOR.

Si inter duos numeros unus medius proportionalis cadat; numeri similes plani erunt.

Inter duos enim numeros A, B unus medius proportionalis cadat C : dico numeros A, B similes planos esse.

Sumantur enim D, E minimi omnium eandem cum
^a 35. sept. ipsis A, C , rationem habentium ^a: æqualiter igitur

$A, 8.$	$C, 12.$	$B, 18.$
$D, 2.$	$E, 3.$	$F, 4.$

^r 21. sept. D ipsum A metitur, atque E ipsum C . Et quoties D metitur A , tot unitates sint in F ; proptereaque F multiplicans D ipsum A fecit, multiplicans vero E fecit C : quare A planus numerus est, cujus latera D, F .

^a Def. 15.
sept.

^t Def. 16. Rursum, quoniam D, E sunt minimi omnium eandem cum C, B rationem habentium; D æqualiter ipsum C metitur, atque E ipsum B . Quoties autem E ipsum B metitur, tot unitates sint in G : quare G ipsum E multiplicans fecit B : ideoque B numerus planus est, cujus latera E, G : ergo numeri A, B sunt plani. Dico et similes esse. Quoniam enim uterque ipsorum F, G multiplicans E utrumque C, B fecit; ut F ad G , ita erit C ad

^v 18. sept. B . Ut autem C ad B , ita D ad E ; et igitur ut D ad E , ita F ad G . Quare A, B similes plani sunt; cum ipso-

^x Def. 21. rum latera sint proportionalia ^x. *Q. E. D.*

sept.

PROP.

PROP. XXI. THEOR.

[XXI.]

*Si inter duos numeros duo medii proportionales cadant;
numeri similes solidi erunt.*

Inter duos enim numeros A, B duo medii proportionales cadant C, D: dico ipsos A, B similes solidos esse.

Sumantur enim numeri tres, minimi trium omnium eandem cum A, C, D rationem habentium, qui sint E, F, G^a: ^{35. sept.}

A, 24.	C, 72.	D, 216.	B, 648.
E, 1.	F, 3.	G, 9.	
H, 1.	K, 1.	N, 24.	L, 3. M, 3. O, 72.

extremi igitur ipsorum E, G primi inter se sunt^r. Et^r 3. hujus.
quoniam inter E, G unus medius proportionalis F cecidit; erunt numeri E, G similes plani². Sint ipsius qui-^{20. hujus.}
dem E latera H, K, ipsius vero G latera homologa sint L, M.
Manifestum igitur est ex antecedente E, F, G deinceps
proportionales esse in ratione H ad L, et in ratione K ad M.
Et quoniam E, F, G minimi sunt eandem quam A, C, D
rationem habentium; erit ex æquo ut E ad G, ita A ad D^a. ^{14. sept.}
Sunt autem E, G inter se primi: sed primi sunt et minimi^b: ^{23. sept.}
minimi vero eos, qui eandem habent rationem, æqualiter
metiuntur, major majorem et minor minorem^c; hoc est, ^{21. sept.}
antecedens antecedentem et consequens consequentem:
ergo E ipsum A æqualiter metitur, atque G ipsum D.
Quoties autem E metitur A, tot unitates sint in N: ergo
N ipsum E multiplicans fecit A. Sed E fit ex H, K: ac
propterea N eum, qui fit ex H, K, multiplicans ipsum A
fecit. Solidus igitur est A, cujus latera H, K, N. Rur-
sus, quoniam E, F, G minimi sunt eandem quam ipsi
C, D, B rationem habentium; E ipsum C æqualiter me-
titur, atque G ipsum B. Et quoties G metitur B, tot
unitates sint in O: ideoque O multiplicans G ipsum B fecit.
At G fit ex L, M: ergo O eum, qui fit ex L, M, multiplicans
fecit B. Solidus igitur est B, et ejus latera L, M, O. Quare
A, B solidi sunt. Dico etiam eos similes esse. Quoniam
enim A ad C ut C ad D, et C ad D ut D ad B; erit ex
æquo ut A ad D, ita C ad B^a. Sed E, G minimi sunt
omnium in ratione numerorum A, D. (Nimirum cum
inter se sint primi.) Minimi igitur in ratione nume-
rorum C, B. Numeri igitur E, G numeros C, B æqua-

A, 24. C, 72. D, 216. B, 648.
 E, 1. F, 3. G, 9.
 H, 1. K, 1. N, 24. L, 3. M, 3. O, 72.

liter metiuntur. Quoties vero G metitur B, tot sunt
 * ex hyp. in O unitates^a. Quoties igitur E metitur C, tot sunt
 in O unitates. Quapropter O multiplicans E ipsum C
 fecerit. Sed ostensum est N multiplicando E fecisse A.
 17. sept. Quare N, O multiplicantes E ipsos A, C fecerunt^b. Ut
 igitur N ad O, ita erit A ad C, hoc est, E ad F. Sed ut
 E ad F, ita H ad L, et K ad M; et igitur ut H ad L, ita
 K ad M, et N ad O. Sunt autem H, K, N latera ipsius
 A, et L, M, O latera ipsius B. Ergo A, B similes solidi
 erunt. Q. E. D.

[XXII.]

PROP. XXII. THEOR.

*Si tres numeri deinceps proportionales fuerint, primus autem
 fit quadratus; et tertius quadratus erit.*

Sint tres numeri deinceps proportionales A, B, C; fit-
 que primus A quadratus: dico et tertium C quadra-
 tum esse.

Numeri quadrati A latus fit numerus D. Et numerus
 B sui multiplicatione nume-
 rum E faciat. Propter pro-
 portionem trium A, B, C con-
 tinuam; illum E, ex secundo
 B factum, primus A metietur^c.

^c 1. Cor.
 20. sept.

Quadratus utique quadratum. Quare et D, qui latus
 14. hujus. est quadrati A, metietur B latus quadrati E^d. Quoties
 igitur D metitur B, tot sint in F unitates. Numerus
 igitur D illum F multiplicans numerum B fecerit. Seip-
 sum multiplicans numerus F faciat G. Jam cum nu-
 merus D seipsum multiplicans fecerit A, et illum F mul-
 tiplicando fecerit B; erit A ad B ut D ad F^e. Sed A ad
 17. sept. B ut B ad C^f. Quare B est ad C ut D ad F. Rursus
 ex hyp. cum numerus F illum D et seipsum multiplicans nume-
 ros B, G fecerit; erit B ad G ut D ad F^e. Est igitur B
 ad G ut idem B ad C. Numeri igitur G, C inter se æ-
 quales: numerus autem G quadratus, ex F scilicet.
 Quadratus igitur C. Q. E. D.

PROP.

PROP. XXIII. THEOR.

[XXIII.]

Si quatuor numeri deinceps proportionales fuerint, primus autem sit cubus; et quartus cubus erit.

Sint quatuor numeri deinceps proportionales A, B, C, D ; et A sit cubus: dico et D cubum esse.

Si quatuor illi A, B, C, D minimi sunt quatuor suæ deinceps analogiæ, res patet ex Corollario 1°. Prop. ii. hujus Libri.

$A, 8.$ $B, 12.$ $C, 18.$ $D, 27.$

Sed A, B, C, D non sint minimi quatuor suæ deinceps analogiæ. Inveniantur igitur minimi illi quatuor E, F, G, H ², quorum extremi necessario cubi erunt.² hujus. Cuborum E, H sint K, L latera. Et cubi A latus sit M .

$A, 64.$	$B, 96.$	$C, 144.$	$D, 216.$
$E, 8.$	$F, 12.$	$G, 18.$	$H, 27.$
$K, 2.$	$L, 3.$		
$M, 4.$	$N, 6.$		
$O, 16.$	$P, 24.$	$Q, 36.$	
$R, 64.$	$S, 96.$	$T, 144.$	$V, 216.$

Quatuor illorum E, F, G, H ac propterea et aliorum quatuor A, B, C, D , perpetua erit in ratione K ad L deinceps analogia (id enim ex constructione 2. hujus manifestum est.) Quatuor autem illi E, F, G, H , cum sint minimi quatuor suæ analogiæ, quatuor illos alios A, B, C, D , singuli singulos æqualiter metientur; antecedens antecedentem, consequens consequentem^{b. h} 21. sept. Numerus igitur E metietur numerum A ; cubus cubum. Quare et K , latus cubi E , metietur M , latus cubi A ^{1. i} 15. hujus. Quoties K metitur M , toties L metiatur N . Erit igitur M ad N ut K ad L . Jam M seipsum multiplicando faciat O . Idem autem M , multiplicando N , faciat P . Et N seipsum multiplicando faciat Q . Ita tres facti fuerint O, P, Q , quorum perpetua, in ratione M ad N , sive K ad L , analogia; et extremi O, Q quadrati sunt ex M, N . Rursum numerus M tres O, P, Q multiplicando faciat tres R, S, T ; et numerus N numerum Q multiplicando faciat V . Ita quatuor facti fuerint R, S, T, V , quorum perpetua, in eadem illa numerorum K, L , ratione, analogia:

$Q 4$

logia: extremi autem R , V cubi sunt ex M , N . Cum vero quatuor A , B , C , D , atque quatuor R , S , T , V , ordine sumpti in eadem sint ratione, ex æquo erit A ad D ut R ad V ^k. Et permutando A ad R ut D ad V ^l. Sed æquales inter se sunt A , R ; nempe cum uterque cubus sit ex M . Quare et D , V inter se æquales. Cubus autem V , nempe ex N . Quare et D cubus. *Q. E. D.*

^k 14. sept.
^l 13. sept.

[XXIV.]

PROP. XXIV. THEOR.

Si duo numeri inter se rationem habeant, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; primus autem sit quadratus, et secundus quadratus erit.

Duo enim numeri A , B inter se rationem habeant, quam numerus quadratus C ad quadratum numerum D ; sitque A quadratus: dico et B quadratum esse.

Quoniam enim C , D quadrati sunt, erunt C , D fimiles plani: ideoque inter ipsos C , D unus
^m 18. hujus. medius proportionalis cadit^m. Est autem A , 4. B , 9.
ut C ad D , ita A ad B : quare etiam C , 16. D , 36.
inter A , B cadit unus medius propor-
ⁿ 8. hujus. tionalisⁿ. Estque A quadratus. Ergo et B quadratus
^o 22. hujus. erit^o. *Q. E. D.*

[XXV.]

PROP. XXV. THEOR.

Si duo numeri inter se rationem habeant, quam numerus cubus ad cubum numerum; primus autem sit cubus, et secundus cubus erit.

Duo enim numeri A , B inter se rationem habeant, quam cubus numerus C ad numerum cubum D ; sitque A cubus: dico et B cubum esse.

Quoniam enim C , D cubi sunt, erunt C , D fimiles solidi: idcirco inter ipsos duo medii proportionales

A , 8. E , 12. F , 18. B , 27.
 C , 64. D , 216.

^p 19. hujus. cadent^p. Quot autem inter C , D cadunt medii proportionales, totidem cadent et inter eos, qui eandem quam
^q 8. hujus. ipsi rationem habent^q: ergo inter A , B duo medii cadent proportionales. Cadant E , F . Quoniam igitur quatuor numeri A , E , F , B deinceps proportionales sunt, estque
^r 23. hujus. A cubus; et B cubus erit^r. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. XXVI. THEOR.

[XXVI.]

Similes plani numeri inter se rationem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum.

Sint fimiles plani numeri A, B: dico A ad B rationem habere, quam numerus quadratus ad quadratum numerum.

Quoniam enim A, B fimiles plani sunt, inter eos cadit unus medius proportionalis¹. Cadat, fitque C; A, 6. C, 12. B, 24.² 18. hujus, et fumantur minimi numeri eandem quam A, C, B rationem habentium sc. D, E, F³: ergo ipsorum extremi⁴ 35. sept. D, F quadrati sunt⁵. Et quoniam est ut D ad F, ita A ad⁶ Cor. 1. 2. B, et sunt D, F quadrati; habebit A ad B rationem, hujus. quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Q. E. D.

PROP. XXVII. THEOR.

[XXVII.]

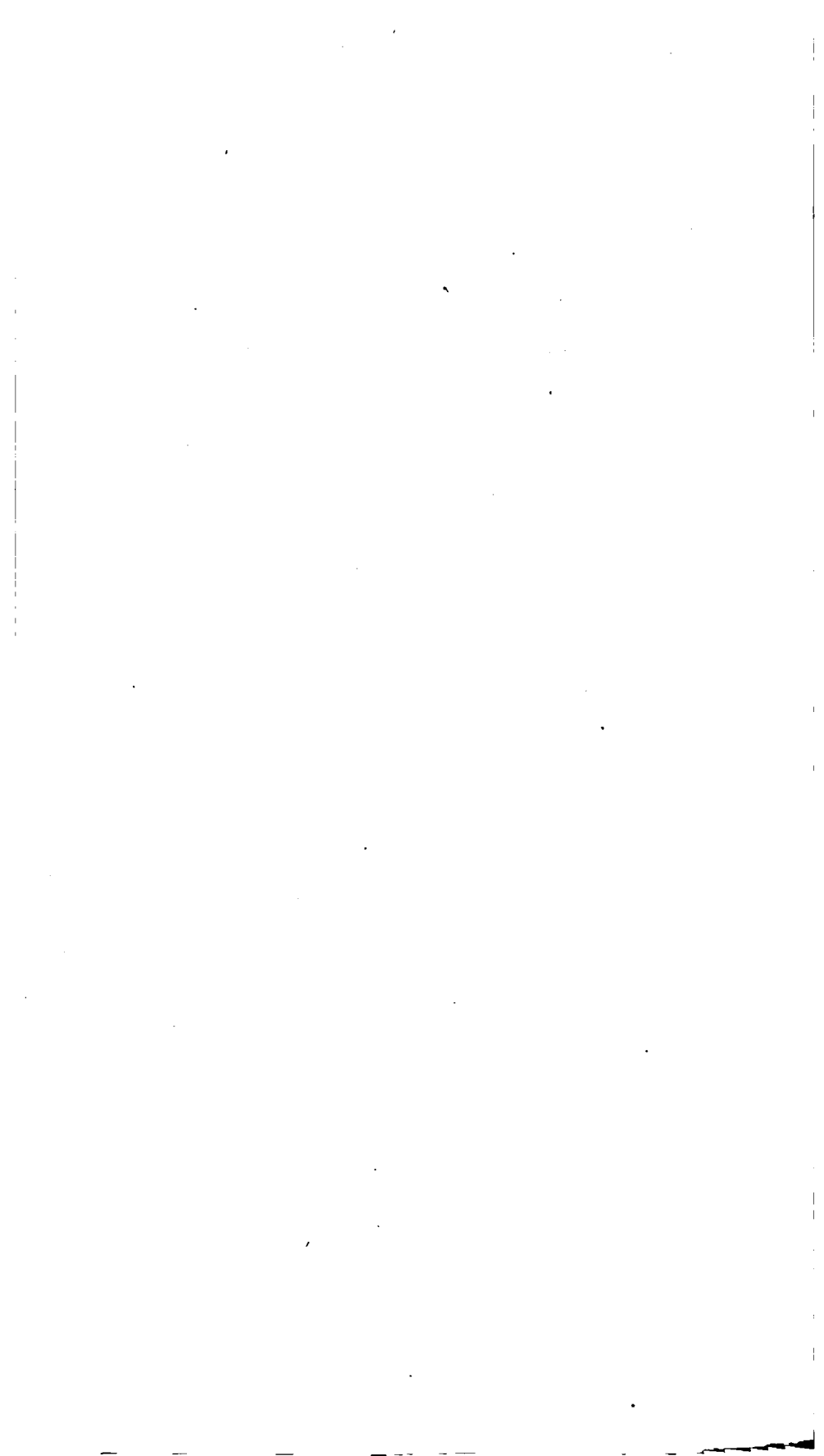
Similes solidi numeri inter se rationem habent, quam numerus cubus ad cubum numerum.

Sint fimiles solidi numeri A, B: dico A ad B rationem habere, quam numerus cubus ad cubum numerum.

Quoniam enim A, B fimiles solidi sunt, inter ipsos¹ 19. hujus. duo medii proportionales cadent². Cadant C, D; et fumantur minimi numeri, qui eandem quam A, C, D, B

A, 16.	C, 24.	D, 36.	B, 54.
E, 8.	F, 12.	G, 18.	H, 27.

rationem habeant, ipfis multitudine æquales E, F, G, H³:⁴ 2. hujus. ergo eorum extremi E, H cubi sunt⁵. Atque est ut E⁶ Cor. 1. 2. ad H, ita A ad B. Habet igitur A ad B rationem, quam hujus. numerus cubus ad cubum numerum. Q. E. D.



EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER NONUS.

PROPOSITIO I. THEOREMA.

[I.]

Si duo similes plani numeri sese multiplicantes aliquem fecerint, factus quadratus erit.

SINT duo similes plani numeri A, B ; et A ipsum B multiplicans faciat c : dico c quadratum esse.

Numerus enim A seipsum multiplicans faciat D : ergo D quadratus est. Quoniam igitur A

seipsum multiplicans fecit D , multi- $A, 6.$ $B, 54.$

plicans vero B ipsum c fecit; ut A $D, 36.$ $c, 324.$

ad B , ita erit D ad c^a . Et quoniam

A, B similes plani sunt; inter ipsos unus medius pro- ^a 17. sept.

portionalis cadet ^b. Si autem inter duos numeros nu- ^b 18. octavi.

meri deinceps proportionales ceciderint; quot inter ip-
sos cadunt, totidem cadent et inter eos, qui eandem ha-
bent rationem ^c: quare et inter D, c unus medius pro- ^c 8. octavi.

portionalis cadit. Atque est D quadratus. Ergo et c
quadratus erit ^d. **Q. E. D.** ^d 22. octavi.

Aliter *. Sint similes plani numeri A, B ; et numerus

A , numerum B multiplicans,

faciat c . Dico numerum c $A, 6.$ $D, 18.$ $B, 54.$

quadratum esse. Numeri $A, B,$ $c, 324.$

cum sint similes plani, unum $E, 324.$

capiunt proportionem medium ^b.

Esto

Est medijs ille D ; et D seipsum multiplicans faciat E . Propter continuam trium A , D , B analogiam, E factus e medio facto ex extremis, C , æqualis erit. Quadratus autem E . Quare et C quadratus. *Q. E. D.*

*Cor. ** Numeri quadrati se mutuo multiplicantes quadratum facient; qui æqualis erit quadrato numeri plani ex lateribus numerorum principio positorum facti.

Quadratus A multiplicet quadratum B , et faciat C .
 Quadratorum A , B latera
 sint E , F . Numeri E , F se
 mutuo multiplicantes fa-
 ciant G . G seipsum mul-
 tiplicans faciat H . Dico
 quadratum esse C , et qua-
 drato H æqualem.

A , 4. G , 14. B , 49.
 C , 196.
 E , 2. F , 7.
 H , 196.

* *Cor. ** 11.
 octavi.

Et quadratum esse C , id quidem hâc ipsâ ex propositione manifestum est. Dico præterea ipsi H æqualem esse. Cum enim numeri E , F quadratorum A , B sint latera; numerus G , mutuâ laterum E , F multiplicatione factus, inter ipsos A , B proportionem medius est*. Et cum perpetua sit trium A , G , B proportio; factus ex extremis A , B facto ex medio G æqualis erit. Sed ex extremis A , B factus est C ; et ex medio G factus est H . Quare C æqualis est ipsi H . *Q. E. D.*

SCHOLION. *

Numeris igitur duobus literis a , b designatis, et plano ex illis facto notis a b designato, quadratum ex a b factum notis a^2 , b^2 , rite exprimit Algebra.

[II.]

PROP. II. THEOR.

Si duo numeri sese multiplicantes quadratum numerum efficiant, similes plani erunt.

Duo enim numeri A , B sese multiplicantes quadratum numerum C efficiant: dico A , B similes planos esse.

Numerus enim A seipsum multiplicans faciat D : ergo D quadratus est. Quoniam igitur A seipsum multiplicans fecit D , multiplicans A , 3. B , 12.
 vero B ipsum C fecit; ut A ad B , ita erit D , 9. C , 36.
 D ad C †. Et quoniam D quadratus est,
 sed et C etiam; erunt D , C similes plani: quare inter
 D , C

† 17. sept.

D, c unus medius proportionalis cadit^g. Atque est ut D¹⁸: 8. octavi. ad c, ita A ad B: ergo et inter A, B cadet unus medius proportionalis^h. Si autem inter duos numeros unus me-^h 8. octavi. dius proportionalis cadat, erunt similes planiⁱ. Ergoⁱ 20. octavi. A, B similes plani sunt. Q. E. D.

PROP. III. THEOR.

[III.]

Si cubus numerus seipsum multiplicans faciat aliquem, factus cubus erit.

Cubus enim numerus A seipsum multiplicans faciat B: dico B cubum esse.

Sumatur enim ipsius A latus c, et c seipsum multipli-

cans faciat D: manifestum

igitur est c multiplican-

A, 8.

tem D facere ipsum A^k. Et

D, 4.

^k Def. 19.
septimi.

quoniam c seipsum multi-

C, 2.

I.

plicans fecit D; metitur c

B, 64.

ipsum D per eas, quæ in ip-

so c sunt, unitates^l. Sed et unitas metitur c per eas, quæ

in ipso c sunt, unitates: est igitur ut unitas ad c, ita c ad

D^m. Rurfus, quoniam c multiplicans D ipsum A fecit, me-

titur D ipsum A per unitates, quæ sunt in c. Metitur

autem et unitas ipsum c per unitates, quæ in ipso sunt:

ergo ut unitas ad c, ita D ad A. Sed ut unitas ad c, ita

c ad D: ut igitur unitas ad c, ita c ad D, et D ad A:

ideoque inter unitatem et numerum A duo medii deinceps

proportionales cadunt c, D. Rurfus, quoniam A

seipsum multiplicans fecit B, et A ipsum B metitur per

eas, quæ in ipso A sunt, unitates^l. Metitur autem et unitas

ipsum A per unitates, quæ sunt in ipso: est igitur ut uni-

tas ad A, ita A ad Bⁿ. Sed inter unitatem et A cadunt

duo medii proportionales: ergo et inter A et B duo

medii proportionales cadentⁿ. Quod si inter duos nu-

meros cadant duo medii proportionales, primus autem

fit cubus; et quartus cubus erit^o. Atque est A cubus.^o 23. octavi.

Ergo et B cubus erit. Q. E. D.

PROP. IV. THEOR.

[IV.]

Si numerus cubus cubum numerum multiplicans faciat aliquem, factus cubus erit.

Cubus enim numerus A cubum numerum B multiplicans ipsum c faciat: dico c cubum esse.

Numerus

Numerus enim A seipsum multiplicans faciat D : ergo

- * 3. hujus. D cubus est^o. Et quoniam A seipsum multiplicans fecit D ; multiplicans vero B ipsum C fecit: ut A ad B , ita D , 64. C , 216.
 * 17. sept. erit D ad C ^p. Et quoniam A , B cubi sunt, erunt similes solidi numeri: ac propterea inter
 * 19. octavi. A , B cadent duo medii proportionales^q: quare et inter
 * 8. octavi. D , C duo medii proportionales cadent^r. Estque D cubus.
 * 23. octavi. ergo et C cubus erit^s. *Q. E. D.*

*Cor. ** Cubus, cuborum multiplicatione factus, cubus erit plani ex lateribus numerorum principio positorum facti.

SCHOLION. *

Literis igitur a , b numeros duos significantibus, cubum ex numero plano a b , notis a^3 b^3 , rite exprimit Algebra. Et progressio infinita est.

[V.]

PROP. V. THEOR.

Si cubus numerus numerum aliquem multiplicans faciat cubum, et multiplicatus cubus erit.

Cubus enim A numerum aliquem B multiplicans faciat cubum C : dico B cubum esse.

- Numerus enim A seipsum multiplicans faciat D : ergo
 * 3. hujus. D cubus est^t. Et quoniam A seipsum quidem multiplicans fecit D , multiplicans vero B ipsum C fecit; ut A ad B , D , 64. C , 216.
 * 17. sept. ita erit D ad C ^u. Et quoniam D , C cubi sunt, similes sunt solidi; ac propterea inter ipsos
 * 19. octavi. cadunt duo medii proportionales^x. Atque est ut D ad C , ita A ad B : ergo et inter A , B duo medii proportionales
 * 8. octavi. cadent^y. Estque A cubus. Ergo et B cubus erit^z.
 * 23. octavi. *Q. E. D.*

[VI.]

PROP. VI. THEOR.

Si numerus seipsum multiplicans cubum faciat, et ipse cubus erit.

Numerus enim A seipsum multiplicans cubum B faciat: dico et A cubum esse.

- Numerus enim A multiplicans B faciat C . Quoniam igitur A seipsum multiplicans fecit B , multiplicans vero B ipsum C fecit, erit C cubus^a. Et quoniam A seipsum quidem
 * Def. 19. sept. A , 8. B , 64. C , 512.

quidem multiplicans fecit B, multiplicans vero B fecit C, ut A ad B, ita erit B ad C^b. Et quoniam B, C cubi^b 17. sept. sunt, similes solidi erunt: ideoque inter B, C duo medii proportionales cadunt^c. Et est ut B ad C, ita A ad^c 19. octavi. B: quare et inter A, B duo medii proportionales cadunt^d. Atque est B cubus. Ergo et A cubus erit^e. 23. octavi. Q. E. D.

PROP. VII. THEOR.

[VII.]

Si compositus numerus numerum aliquem multiplicans quempiam faciat, factus solidus erit.

Compositus enim numerus A numerum aliquem B multiplicans ipsum C faciat: dico C solidum esse.

Quoniam enim A compositus est, eum numerus aliquis metietur^f. Metiatur D. Et quoties D ipsum A^f Def. 13. sept.

A, 6. B, 7. C, 42.
D, 3. E, 2.

metitur, tot unitates sint in E: ergo E multiplicans D fecit A. Et quoniam A ipsum B multiplicans fecit C; estque A, qui fit ex D, E; numerus, qui fit ex D, E, ipsum B multiplicans fecit C: ergo B multiplicans eum, qui fit ex D, E, ipsum C fecit^g. Ac propterea C solidus est, 16. sept. h Def. 17. sept. cujus latera D, E, B^h. Q. E. D.

PROP. VIII. THEOR.

[VIII.]

Si ab unitate quocunque numeri deinceps proportionales fuerint, tertius quidem ab unitate quadratus est, et unum intermittentes omnes; quartus autem est cubus, et duos intermittentes omnes; septimus vero cubus simul et quadratus, et quinque intermittentes omnes.

Sint ab unitate quocunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D, E, F: dico tertium quidem ab unitate sc. B quadratum esse, et unum intermittentes omnes; quartum autem C cubum, et duos intermittentes omnes; septimum vero F cubum simul et quadratum, et quinque intermittentes omnes.

Quoniam enim ut unitas ad A, ita A ad B; unitas æqualiter metitur numerum A, atque A ipsum Bⁱ. Sedⁱ Def. 20. sept.

I. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729.

unitas metitur A per unitates, quæ in ipso sunt: ergo
et

I. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729.

et A ipsum B per unitates, quæ sunt in A, metitur: quare A seipsum multiplicans fecit B; quadratus igitur est B. Et quoniam B, C, D deinceps proportionales sunt, est-
^{22. octavi.} que B quadratus; et D quadratus erit^k. Eadem ratione erit et F quadratus. Similiter demonstrabimus et unum intermittentes omnes quadratos esse. Dico et quartum ab unitate, videlicet C, esse cubum, et duos intermittentes omnes. Quoniam enim est ut unitas ad A, ita B ad C; unitas numerum A æqualiter metitur, atque B ipsum C^l. Sed unitas numerum A metitur per unitates, quæ in A sunt: ergo et B metitur C per unitates, quæ sunt in A; et ob id A multiplicans B ipsum C fecit. Quoniam igitur A seipsum multiplicans fecit B, multi-
^{1 Def. 20. sept.} plicans vero B fecit C; erit C cubus^m. Quod cum C, D, E, F deinceps proportionales sint, sitque C cubus,
^{23. octavi.} et F cubus eritⁿ. Ostensum autem est quadratum esse: septimus igitur ab unitate F et cubus est et quadratus. Similiter quoque demonstrabimus quinque intermittentes omnes et cubos et quadratos esse. Q. E. D.

[IX.]

PROP. IX. THEOR.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero post unitatem sit quadratus; et reliqui omnes quadrati erunt. Si post unitatem sit cubus; et reliqui omnes cubi erunt.

Sint ab unitate numeri quotcunque deinceps proportionales A, B, C, D, E, F, et qui post unitatem A sit quadratus: dico et reliquos omnes quadratos esse.

Tertium quidem ab unitate B esse quadratum, et
^{8. hujus.} unum intermittentes omnes, demonstratum jam est^o.

I. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

Sunt igitur B, D, F &c. quadrati. Dico et reliquos omnes quadratos esse. Quoniam enim A, B, C deinceps sunt proportionales, estque A quadratus; et C quadratus
^{22. octavi.} erit^p. Rursus, quoniam C, D, E deinceps proportionales sunt; est autem C quadratus; et E quadratus erit. Similiter ostendemus et reliquos omnes quadratos esse.

Sit autem A cubus: dico et reliquos cubos esse.

Quartum quidem ab unitate C esse cubum, et duos intermittentes omnes, jam demonstratum est^o. Sunt igitur

igitur c , f &c. cubi. Dico et reliquos omnes cubos esse. Quoniam enim est ut unitas ad A , ita A ad B , unitas numerum A æqualiter metitur, atque A ipsum B .² Def. 20. sept.

1. A , 8. B , 64. C , 512. D , 4096. E , 32768. F , 262144.

Ergo A seipsum multiplicans fecit B . Atqui est A .³ Def. 15. cubus. Si autem cubus numerus seipsum multiplicans^{sept.} fecerit aliquem, factus cubus erit; ergo B est cubus.³ hujus. Et quoniam quatuor numeri A , B , C , D deinceps proportionales sunt, estque A cubus; et D cubus erit.² 23. octavi. Eadem ratione et E est cubus, et similiter reliqui omnes cubi sunt. Q. E. D. [X.]

PROP. X. THEOR.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero post unitatem non sit quadratus; neque alius ullus quadratus erit, præter tertium ab unitate et unum intermittentes omnes. Si qui post unitatem non sit cubus; neque alius ullus cubus erit, præter quartum ab unitate et duos intermittentes omnes.

Sint ab unitate deinceps proportionales numeri A , B , C , D , E , F , et qui post unitatem ipse A non sit quadratus: dico neque alium ullum quadratum esse, præter tertium ab unitate, et unum intermittentes omnes.

Si enim fieri potest, sit c quadratus. Est autem et B quadratus¹: ergo B , c inter se rationem habent, quam² 8. hujus.

1. A , 2. B , 4. C , 8. D , 16. E , 32. F , 64.

numerus quadratus ad quadratum numerum. Atque est ut B ad c , ita A ad B : habent igitur A , B inter se rationem eam, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ideoque A , B similes plani sunt.³ Et est B .⁴ Def. 21. quadratus: ergo et A quadratus est, quod est contra^{septimi.} hypothesin. Non igitur c quadratus erit. Similiter ostendemus neque alium ullum quadratum esse, præter tertium ab unitate, et unum intermittentes omnes.

Sed non sit A cubus. Dico neque alium ullum cubum esse, præter quartum ab unitate, et duos intermittentes omnes.

Si enim fieri potest, sit D cubus. Est autem et cubus c , quartus enim est ab unitate²; et ut c ad D , ita est³ 8. hujus. B ad c : ergo et B ad D rationem habet, quam cubus ad cubum;

I. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32. F, 64.

¹ Def. 21. sept. cubum; ac propterea B, c similes solidi sunt^a. Atque est c cubus; ergo et B cubus erit. Et quoniam est ut

unitas ad numerum A, ita A ad B; A æqualiter metietur B, atque unitas ipsum A⁷. Quare A seipsum multiplicans cubum B fecit². Si autem numerus seipsum mul-

² Def. 15. sept. tiplicans cubum faciat, et ipse cubus erit^a: cubus igitur est A, cujus ponitur contrarium Ergo neque D est cubus.

^a 6. hujus. Similiter demonstrabimus neque alium ullum cubum esse, præter quartum ab unitate et duos intermittentes omnes. Q. E. D.

[XI.]

PROP. XI. THEOR.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; minor maiorem metitur per aliquem eorum, qui sunt in numeris proportionalibus.

Sint ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D, E, F. Dico horum B, C, D, E, F

A, 1. B, 3. C, 9. D, 27. E, 81. F, 243.

quemvis D maiorem quemvis in serie, puta F, metiri, per aliquem eorum, qui sunt in serie. Sit enim c numerus ille unus in proportionalium serie, quem inter et unitatem tot in serie intercedunt medii, quot inter D et F. Et propter continuam numerorum analogiam, erit ex æquali A unitas ad c ut D ad F^b. Quare numerus D metitur F per ipsum c. Q. E. D.

^b 14. sept.

[XII.]

PROP. XII. THEOR.

Si ab unitate quotlibet numeri deinceps proportionales fuerint; quicumque primorum numerorum metiuntur ultimum, iidem et eum, qui unitati proximus est, metiuntur.

Sint ab unitate quotlibet numeri deinceps proportionales A, B, c, D: dico quicumque primorum numerorum metiuntur D, eosdem et ipsum A metiri.

Metiatur enim aliquis primus numerus E ipsum D: dico E ipsum quoque A metiri. Non enim metiatur E ipsum A. Atqui E est primus; omnis autem primus numerus ad omnem numerum, quem non metitur, primus est^c: ergo E, A numeri inter se primi sunt. Et cum E metitur ipsum D, metiatur per unitates, quæ sunt in F:

^c 31. sept.

ergo

ergo E multiplicans F ipsum D fecit. Rursus, quoniam c metitur ipsum D per eas, quæ sunt in A unitates^d; A^d 11. hujus. multiplicans c ipsum D fecit. Sed et E multiplicans F

I. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256.
E, 2. H, 8. G, 32. F, 128.

fecit D: qui igitur fit ex A, c ei, qui fit ex E, F, est æqualis: ergo ut A ad B, ita F ad c^e. Suntque A, E^e 19. sept. primi; primi autem, et minimi^f; minimi vero eos, qui^f 23. sept. eandem habent rationem, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem et consequens consequentem^g: metitur igitur E ipsum c. Metiatur per G: ergo E ipsum G multiplicans fecit c. Sed et A multiplicans B ipsum c fecit: qui igitur fit ex A, B æqualis est ei, qui ex E, G: ergo ut A ad E, ita G ad B. Et sunt A, E primi, sed primi etiam et minimi^f, minimi vero eos, qui eandem habent rationem, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem et consequens consequentem^g: quare et E ipsum B metitur. Metiatur per H: multiplicans igitur E ipsum H fecit B. Sed et A seipsum multiplicans fecit B; ergo qui fit ex H, E est æqualis ei, qui fit ab ipso A: est igitur ut E ad A, ita A ad H^h. Suntque A, E primi,^h 20. sept. sed primi etiam et minimi, minimi vero æqualiter metiuntur eos, qui eandem quam ipsi rationem habent, major majorem et minor minorem, hoc est, antecedens antecedentem et consequens consequentem^g: ergo E metitur ipsum A, quem ponebatur non metiri. Non igitur A, E sunt inter se primi: ergo compositi erunt. Compositos vero primus aliquis numerus metiturⁱ: quareⁱ Def. 14. ipsos A, E metietur aliquis numerus primus. Et quo-^{sept.} niam E primus ponitur, primum autem non metitur alius numerus præter seipsum^k: metitur igitur E ipsos A, E:^k Def. 11. ideoque E ipsum A metitur. Similiter demonstrabimus^{sept.} quicumque primorum numerorum metiuntur ipsum D, eosdem et ipsum A metiri. Q. E. D.

[XIII.]

PROP. XIII. THEOR.

Si ab unitate quocunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero post unitatem primus sit; maximum nullus alius metietur, præter eos qui sunt in numeris proportionalibus.

Sint quocunque numeri ab unitate deinceps proportionales A, B, C, D ; et qui post unitatem, videlicet A , sit primus: dico maximum D nullum alium metiri, præter ipsos A, B, C .

Si enim fieri potest, metiatur E ipsum D , et non sit E idem qui aliquis ipsorum A, B, C : manifestum est E primum non esse. Si enim primus sit, et metiatur D ;

I. $A, 5.$ $B, 25.$ $C, 125.$ $D, 625.$
 $E-----$ $H----$ $G-----$ $F-----$

¹ 12. hujus. ipsum quoque A metietur primum existentem¹, cum non sit idem qui A , quod fieri non potest: non igitur E primus est; ergo compositus: omnem autem compositum

^m 33. sept. numerum primus aliquis numerus metitur^m. Dico nullum alium primum metiri ipsum E , præterquam A . Si enim alius metitur E , et E metitur D , et alius ille ipsum D metietur: quare et ipsum A primum existentem¹, cum non sit idem qui A , quod fieri non potest: ergo A ipsum E metitur. Et quoniam E metitur D , metiatur ipsum per F . Dico non esse F eundem cum aliquo ipsorum A, B, C . Si enim est idem, metiturque ipsum D per E ; et unus ipsorum A, B, C ipsum D per E metietur. Sed quilibet ipsorum A, B, C metitur D

[•] 11. hujus. per aliquem ipsorum A, B, C : quare et E idem erit qui unus ipsorum A, B, C . Similiter ostendetur F non esse primum, et A metiri F . Et quoniam E metitur D per F ; et E multiplicans F ipsum D fecit. Sed

[•] ex hyp. et A multiplicans C fecit D : qui igitur sit ex A, C est æqualis ei, qui ex E, F : ergo ut A ad E , ita est F ad C .

[•] 19. sept. Sed A metitur E : quare et F ipsum C metitur¹. Metiatur per G . Similiter demonstrabimus G non esse eundem qui unus ipsorum A, B , et A ipsum G metiri.

[•] Def. 20. Et quoniam F ipsum C metitur per G , multiplicans F ipsum G fecit C . Sed et A multiplicans B ipsum C fecit: ergo qui sit ex A, B ei, qui ex F, G , est æqualis: ut igitur A ad F , ita est G ad B . Metitur autem A ipsum F : ergo et G ipsum B metietur. Metiatur per H . Similiter demon-

demonstrabimus H non esse eundem qui A . Et quoniam G ipsum B per H metitur, G multiplicans H ipsum B fecit. Sed et A , seipsum multiplicans fecit B' : qui ex hyp. igitur fit ex H , G est æqualis quadrato, qui ex A . Ergo ut H ad A , ita A ad G . Metitur autem A ipsum G ; quare et H ipsum A metietur, primum existentem, cum non fit idem qui A ; quod est absurdum. Non igitur aliquis alius metietur ipsum D maximum, præter ipsos A , B , C . *Q. E. D.*

PROP. XIV. THEOR.

[XIV.]

Si minimum numerum primi numeri metiantur: nullus alius primus numerus metietur ipsum, præter eos qui a principio metiebantur.

Minimum enim numerum A primi numeri B , C , D metiantur: dico nullum alium primum numerum metiri ipsum A , præter ipsos B , C , D .

Si enim fieri potest, metiatur E ipsum A ; et non fit E idem qui aliquis ipsorum B , C , D . Et quoniam E metitur A , ipsum per F metiatur. Ergo E multiplicans F ipsum A fecit. Et metiuntur A primi numeri B , C , D . Si autem duo numeri sese multiplicantes aliquem faciant, et factum ex ipsis metiatur aliquis primus numerus, et unum eorum qui a principio positi sunt metietur. Ergo numeri B , C , D metientur unum ipsorum E , F . Ipsum quidem E non metientur, etenim E primus est; et non idem qui aliquis ipsorum B , C , D . Ergo metientur ipsum F , qui est minor quam A , quod fieri non potest; ponitur enim A minimus eorum, quos B , C , D metiantur. Non igitur ipsum A metietur aliquis primus numerus, præter ipsos B , C , D . *Q. E. D.*

PROP. XV. THEOR.

[XV.]

Si tres numeri deinceps proportionales fuerint, minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium; duo quilibet compositi ad reliquum primi erunt.

Sint A , B , C tres numeri deinceps proportionales, minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium: dico duos quoslibet compositos ad reliquum primos esse, videlicet A , B ad C , et B , C ad A , et A , C ad B .

R 3

Sumantur

- Sumantur enim duo minimi numeri, eandem cum
 ipsis A, B, C rationem ha-
 bentes, DE, EF . Manifestum $A, 9. B, 12. C, 16.$
 est DE seipsum quidem mul- $D \dots E \dots F.$
^{2. octavi.}tiplican-tem facere A^2 ; multi-
 plican-tem vero EF facere B , et EF seipsum multipli-
 cantem facere C . Et quoniam DE, EF , minimi sunt;
^{7. 24. sept.}primi erunt inter se⁷. Si autem duo numeri primi inter
^{2. 30. sept.}se fuerint, et uterque simul ad utrumque primus erit².
 Ergo DF ad utrumque ipsorum DE, EF primus est.
 Sed et DE ad EF est primus. Quare DF, DE ad EF
 primi sunt. Ac propterea qui sit ex FD, DE , primus
^{2. 26. sept.}est ad EF^a . Si autem duo numeri primi inter se fuerint;
^{2. 27. sept.}qui sit ex uno ipsorum ad reliquum primus erit^b. Ergo
 qui sit ex FD, DE ad eum, qui sit ex EF , est primus.
 Sed $\dagger$ qui ex FD, DE est is, qui sit ex DE , una cum
^{2. 3. secundi.}eo, qui ex DE, EF^c . Qui igitur ex DE , una cum eo,
 qui ex DE, EF , primus est ad eum, qui ex EF . Sed
 qui sit ex DE est A ; qui vero ex DE, EF est B , et qui
 ex EF est C . Ergo A, B compositi ad ipsum C primi
 sunt. Similiter ostendemus et B, C , ad A esse primos.
 Dico et A, C ad B primos esse. Quoniam enim DF ,
 ad utrumque ipsorum DE, EF est primus²; et qui sit
^{2. 26. & 27. sept.}ex DF ad eum, qui ex DE, EF , primus erit^d. Sed ei,
 qui sit ex DF , æquales sunt qui ex DE et EF fiunt, una
^{2. 4. secundi.}cum eo, qui bis sit ex DE, EF^e . Qui igitur ex DE et
 EF fiunt, una cum eo, qui bis ex DE, EF , primi sunt ad
 eum, qui ex DE, EF . Ergo et dividendo, qui fiunt ex
 DE et EF , una cum eo, qui semel sit ex DE, EF , primi
 sunt ad eum, qui ex DE, EF ; et rursus dividendo, qui
 fiunt ex DE et EF , ad eum, qui sit ex DE, EF , primi
 sunt. Sed qui sit ex DE , est A ; qui vero ex DE, EF ,
 est B ; et qui ex EF , est C . Ergo A, C compositi ad ip-
 sum B primi erunt. $Q. E. D.$

[†] Hoc ex eis est, quæ ab Euclide in reſtāgulis oſtenſa ſunt ſub partibus lineæ
 rectæ comprehenſis in Libro ii; a nobis autem in numeris planis ex partibus
 numeri ſæſilis in Scholio noſtro ad viceſimam ſeptimi, et ejuſſe Scholii corollario.
 Hic igitur et in ſequentibus, Propoſitiones Libri ii. de reſtāgulis, in numerorum
 materiâ, quando opus ſit, laudamus, ac ſi de numeris planis pronuntiatae eſſent.

PROP. XVI. THEOR.

[XVI.]

Si duo numeri primi inter se fuerint; non erit ut primus ad secundum, ita secundus ad alium ullum.

Duo enim numeri A, B primi inter se sint: dico non esse ut A ad B, ita B ad alium ullum.

Si enim fieri potest, fit ut A ad B, ita B ad C. Et sunt A, B primi; primi vero sunt et minimi^c; minimi vero A, 5. B, 8. C-----^e 23. sept. eos, qui eandem habent rationem, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem, et consequens consequentem. Metitur igitur A ipsum B, ut antecedens antecedentem^f. Sed et ipse seipsum me-^f 21. sept. titur. Ergo A metitur ipsos A, B primos inter se existentes; quod est absurdum. Non igitur est ut A ad B, ita B ad C. Q. E. D.

PROP. XVII. THEOR.

[XVII.]

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipsorum primi inter se sint; non erit ut primus ad secundum, ita ultimus ad alium ullum.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D, extremi autem ipsorum A, D primi sint inter se: dico non esse ut A ad B, ita D ad alium ullum.

Si enim fieri potest, fit ut A ad B, ita D ad E. Quare permutando ut A ad D, ita erit B ad E^g. Et etiam^h 13. sept. sunt A, D primi^h; primi etiam et minimiⁱ; minimi veroⁱ ex hyp. 23. sept.

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27. E-----

eos, qui eandem habent rationem æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem et consequens consequentem^k.^k 21. sept. Metitur igitur A ipsum B. Atque est ut A ad B, ita B ad C. Ergo et B metitur ipsum C, et ob id A quoque ipsum C metitur. Et quoniam est ut B ad C, ita C ad D, metitur autem B ipsum C; et C ipsum D metitur. Sed A metitur C; quare et A metitur ipsum D. Metitur autem et seipsum. Ergo A ipsos A, D primos inter se existentes metitur; quod fieri non potest. Non igitur erit ut A ad B, ita D ad alium ullum. Q. E. D.

[XVIII.]

PROP. XVIII. PROBL.

*Duobus numeris datis considerare, an tertius ipsis proportionalis invenire possit. Vide 2. Cor. * 20. septimi.*

[XIX.]

PROP. XIX. PROBL.

*Tribus numeris datis considerare, an quartus ipsis proportionalis inveniri possit. Vide 2. Cor. * 19. septimi.*

[XX.]

PROP. XX. THEOR.

Primi numeri plures sunt omni propositâ multitudine primorum numerorum.

Sint propositi primi numeri A, B, C : dico ipsis A, B, C plures esse primos numeros.

¹ 38. sept. Sumatur enim minimus, quem ipsi A, B, C metiantur¹, sitque DE ; et ipsi DE apponatur unitas DF . Ergo $EF, A, 2. B, 3. C, 5.$ vel primus est, vel non. Sit primum primus: inventi igitur sunt primi numeri A, B, C, EF plures quam ipsi A, B, C .

² 33. sept. Sed non sit EF primus. Ergo eum primus metitur². Metiatur G : dico G nulli ipsorum A, B, C eundem esse. $A, 2. B, 3. C, 7.$ Si enim G idem sit qui unus ipsorum A, B, C , ipsi autem A, B, C metiantur DE ; et G ipsum DE metietur. Metitur autem et EF ; et reliquam igitur DF unitatem metietur G numerus existens, quod est absurdum. Ergo G non est idem qui unus ipsorum A, B, C . Et ponitur primus. Inventi igitur sunt primi numeri A, B, C, G plures propositâ multitudine primorum numerorum A, B, C . $Q. E. D.$

[XXI.]

PROP. XXI. THEOR.

Si pares numeri quotcunque componantur, totus par erit.

Componantur enim pares numeri quotcunque A, B, B, C, C, D, D, E : dico totum AE , parem esse.

^a Def. 6. Cum enim numeri A, B, B, C seorsim pares sint; numerus binarius utrumque metitur^a. Compositum igitur AC metietur. Metitur autem CD , parem scilicet. Compositum

Compositum igitur AD metietur. Metitur autem DE ,
 $A \dots B \dots C \dots D \dots E$
 parem. Compositum igitur AE . Par igitur est nu-
 merus AE . Q. E. D.

Cor. * Qui imparem metitur numerus impar erit.

PROP. XXII. THEOR.

[XXII.]

*Si impares numeri quocunque componantur, multitudo au-
 tem ipsorum sit par; totus par erit.*

Componantur enim impares numeri quocunque, mul-
 titudine pares, AB , BC , CD , DE : dico totum AE pa-
 rem esse.

CAS. 1. Componantur primum duo numeri impares
 AB , BC . Ab AB auferatur unitas BF , et a BC aufe-
 ratur unitas BG . Numerus AF erit par, necnon GC .

$A \dots F \dots G \dots C \dots D \dots E$

Cæterum FG par, ipse scilicet binarius. Totus igitur
 AE par, ex tribus utique paribus AF , FG , GC com-
 positus*.

* 21. hujus.

CAS. 2. Componantur vero numeri impares quot-
 cunque, multitudine tantum pares, AB , BC , CD , DE .
 Dico totum AE parem. Bini enim AB , BC compositi
 parem efficiunt AC ^p. Similiter bini CD , DE parem
 efficiunt CE . Pares vero AC , CE parem efficiunt
 AE ^q. Et quocunque fuerint numeri AB , BC , CD ,
 DE , modo eorum multitudo sit par, totus AE in binos
 resolvetur. Quilibet vero bini simul sumpti efficiunt
 parem^p. Quotlibet igitur e binis quisque compositi,
 simul sumpti, efficiunt parem^q. Totus igitur AE par.
 Q. E. D.

* 21. hujus.

PROP. XXIII. THEOR.

[XXIII.]

*Si impares numeri quocunque componantur, et multitudo
 ipsorum sit impar; et totus impar erit.*

Componantur enim numeri impares quocunque,
 quorum multitudo sit impar, AB , BC , CD : dico et to-
 tum AD imparem esse.

Auferatur ab ipso CD unitas DE : reliquus igitur CE

$A \dots B \dots C \dots E \dots D$

par est^r. Est autem et AC par^s. Ergo et totus AE
 par^t.

^r Def. 7.^s sept.^t 22. hujus.

¹ 21. hujus. par erit¹. Atque est DE unitas. Impar igitur est AD.
Q. E. D.

[XXIV.]

PROP. XXIV. THEOR.

Si a pari numero par auferatur, et reliquus par erit.

A pari enim numero AB par auferatur BC: dico et reliquum CA parem esse.

Quoniam AB par est, binarius metietur AB. Sed et
² Per hyp. CB, parem scilicet². Quare et
reliquum AC. Par igitur est A.....C....B
AC. Q. E. D.

[XXV.]

PROP. XXV. THEOR.

Si a pari numero impar auferatur, et reliquus impar erit.

A pari enim numero AB impar BC auferatur: dico et reliquum CA imparem esse.

³ Def. 7. Auferatur ab ipso BC unitas CD. Ergo DB par est³.
sept. Est autem par et AB. Et
⁴ 24. hujus. reliquus igitur AD est par⁴. A.....C.D....B
Atque est CD unitas. Ergo
CA impar est. Q. E. D.

[XXVI.]

PROP. XXVI. THEOR.

Si ab impari numero impar auferatur, et reliquus par erit.

Ab impari enim numero AB impar BC auferatur: dico reliquum CA parem esse.

Quoniam enim AB impar est, auferatur unitas BD:
reliquus AD igitur est par.
Eadem ratione et CD est A.....C.....D.B
par. Quare et reliquus AC
⁵ 24. hujus. par est⁵. Q. E. D.

[XXVII.]

PROP. XXVII. THEOR.

Si ab impari numero par auferatur, reliquus impar erit.

Ab impari enim numero AB par auferatur BC: dico reliquum CA imparem esse.

Auferatur enim unitas AD. Ergo DB par est. Est
autem par et BC. Et reliquus
⁶ 24. hujus. igitur CD est par⁶. Atque est A.D.....C....B
DA unitas. Ergo CA impar
⁷ Def. 7. est⁷. Q. E. D.
sept.

PROP.

PROP. XXVIII. THEOR.

[XXVIII.]

Si impar numerus parem multiplicans faciat aliquem, factus par erit.

Impar enim numerus A, parem numerum B multiplicans, faciat c: dico c parem esse.

Quoniam enim A, multiplicans B, ipsum c fecit; componitur c ex tot numeris

æqualibus ipsi B, quot unitates A B
sunt in A. Atque est B par. c

Ergo c ex paribus numeris componitur. Si autem pares numeri quotcunque componantur, totus par erit^c. Ergo c est par. Q. E. D. ^{c 21. hujus.}

PROP. XXIX. THEOR.

[XXIX.]

Si impar numerus imparem numerum multiplicans faciat aliquem, factus impar erit.

Impar enim numerus A, numerum imparem B multiplicans, faciat c: dico c imparem esse.

Quoniam enim A, multiplicans B, ipsum c fecit; componitur c ex tot numeris

æqualibus ipsi B, quot sunt A B
in A unitates. Atque est c

uterque ipsorum A, B impar.

Ergo c ex imparibus numeris componitur, quorum multitudo est impar. Qui autem componitur ex imparibus numeris, quorum multitudo impar, et ipse impar erit^d. Ergo c est impar. Q. E. D. ^{d 23. hujus.}

PROP. XXX. THEOR.

[XXX.]

Si impar numerus parem numerum metiatur, et dimidium ejus metietur.

Impar enim numerus A parem numerum B metiatur: dico et dimidium ejus metiri.

Quoniam enim A metitur B, metiatur ipsum per c: dico c non esse imparem. Nam si fieri potest, sit impar.

A B

C

D E

Et quoniam A ipsum B metitur per c; impar ille A, multiplicans ipsum c imparem, fecit B. Ac propterea
impar

A B
C
D E

- ^c 29. hujus. impar est B^c; quod est absurdum, par enim ponitur. Non igitur c est impar. Ergo par. Paris igitur c fit d dimidius. Impar autem A, numerum d multiplicans, faciat E. A igitur metietur E, ex A et d factum. Sed cum numerus A, numeros c, d multiplicans, fecerit
- ^d 17. sept. B, E; erit B ad E ut c ad d^d. Sed d dimidius est ipse c. Quare et E ipse B dimidius. Numerus igitur A, numerum E metiendo, dimidium ipse B metitur. Q. E. D.

[XXXI.]

PROP. XXXI. THEOR.

Si impar numerus ad aliquem numerum sit primus, et ad ipse duplum primus erit.

Impar enim numerus A ad aliquem numerum B sit primus, et sit c ipse B duplus: dico A etiam ad c primum esse.

Si enim non sint A, c primi, eos aliquis numerus metietur. Metiatur, sitque D. Et

est A impar. Impar igitur est A B

- ^c Cor. ^e 21. et D^e. Et quoniam d impar existens metitur ipsum c, atque C
hujus. D -----

- ^f 30. hujus. dium metietur^f. Sed ipse c dimidium est B. Ergo d ipsum B metitur. Metitur autem et ipsum A. Quare d ipse A, B metitur, primos inter se existentes, quod fieri non potest. Numeros igitur A, c nullus quidem d metitur. Ergo A, c inter se primi sunt. Q. E. D.

[XXXII.]

PROP. XXXII. THEOR.

Numerorum a binario duplatorum unusquisque pariter par est tantum.

A binario enim A duplentur quotlibet numeri B, C, D: dico B, C, D pariter pares esse tantum.

- ^e Def. 8. At vero unumquemque ipsorum B, C, D pariter parem esse manifesto constat^e: a binario namque duplatus est.

E, 1. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.

Dico et tantum. Exponatur enim unitas E. Quoniam igitur ab unitate quotlibet numeri deinceps proportionales

E, 1. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.

tionales sunt, et post unitatem A primus est; maximum ipsorum numerorum A, B, C, D, videlicet D, nullus alius metietur præter ipsos A, B, C^h. Atque est unus-^{13. hujus.} quisque ipsorum A, B, C par. Ergo D pariter par est tantum. Similiter demonstrabimus et unumquemque ipsorum A, B, C pariter parem esse tantum. Q. E. D.

PROP. XXXIII. THEOR.

[XXXIII.]

Si numerus dimidium habeat imparem, pariter impar est tantum.

Numerus enim A dimidium imparem habeat: dico A pariter imparem esse tantum.

At vero pariter imparem esse perspicuum est¹: dimi-^{Def. 9.}
dius enim ipse impar exist-^{sept.}

ens ipsum pariter metitur. B -----

Dico et tantum. Metiatur A

enim, si fieri possit, par nume- C -----

rus B numerum A (cujus di- D ---- E -----

midius est impar) pari C. Pa-

ris C sit D dimidius. Et B multiplicans D faciat E.

Jam cum numerus B numeros C, D multiplicans faciat A, E; erit A ad E, ut C ad D^k. Sed D dimidius est^{17. sept.}

illius C. Ergo et E ipse A dimidius. Sed E factus est ex D et numero pari B. Par igitur est E^l. Numerus^{21. hujus.}

igitur A dimidium parem habet. Quod hypothesei repugnat. Nam imparem habere posuimus. Non igitur pariter par est A. Pariter igitur impar tantum. Q. E. D.

PROP. XXXIV. THEOR.

[XXXIV.]

Si par numerus neque sit a binario duplatus, neque dimidium imparem habeat; pariter par est et pariter impar.

Numerus enim A neque sit a binario duplatus, neque dimidium imparem habeat: dico A et pariter parem, et pariter imparem esse.

At vero A, pariter parem esse manifestum est^m; di-^{Def. 8.}
midium enim imparem non habet.^{sept.}

Dico etiam pariter imparem esse. A

Nam si A bifariam secemus, et

dimidium ipsius bifariam, et hoc semper faciamus, tandem incidemus in aliquem imparem, qui ipsum A per numerum parem metietur. Si enim non incidemus in aliquem

aliquem imparem, qui ipsum A per numerum parem metietur, incidemus in binarium; atque erit A a binario duplatus, quod non ponitur. Quare A pariter impar est. Offensum autem est et pariter esse parem. Est igitur A , et pariter par, et pariter impar. *Q. E. D.*

[XXXV.]

PROP. XXXV. THEOR.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, auferantur autem a secundo et ultimo æquales primo; erit ut secundi excessus ad primum, ita ultimi excessus ad omnes ipsum antecedentes.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D, E, F incipientes a minimo A ; et auferatur ab ipso B, C , et ab E, F , æqualis ipsi A ; videlicet G, C, F, H : dico ut B, G ad A , ita esse E, H ad A, B, C, D .

Ponatur enim ipsi quidem B, C æqualis F, K ; ipsi vero D æqualis F, L . Quoniam igitur F, K est æqualis ipsi B, C ,

$A \dots \dots \dots$

$B \dots \dots G \dots \dots \dots C$

$D \dots \dots \dots \dots \dots \dots$

$E \dots \dots \dots L \dots \dots K \dots \dots H \dots \dots \dots F$

quorum F, H est æqualis G, C ; erit reliquus H, K reliquo G, B æqualis. Et quoniam est ut E, F ad D , ita D ad B, C , et B, C ad A ; æqualis autem est D ipsi F, L , et B, C ipsi F, K , et A ipsi F, H . Erit ut E, F ad L, F , ita L, F ad F, K , et F, K ad F, H . Quare dividendo ut E, L ad L, F , ita L, K ad F, K , et K, H ad F, H ; et ut unus antecedentium ad unum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes^a. Est igitur ut K, H ad F, H , ita E, L , L, K , K, H , ad L, F , K, F , H, F . Atque est K, H quidem æqualis B, G ; F, H vero ipsi A ; et L, F , K, F , H, F æquales ipsis D, B, C, A . Ergo ut B, G ad A , ita est E, H ad D, B, C, A . Est igitur ut secundi excessus ad primum ita excessus ultimi ad omnes ipsum antecedentes. *Q. E. D.*

^a 12. sept.

[XXXVI.]

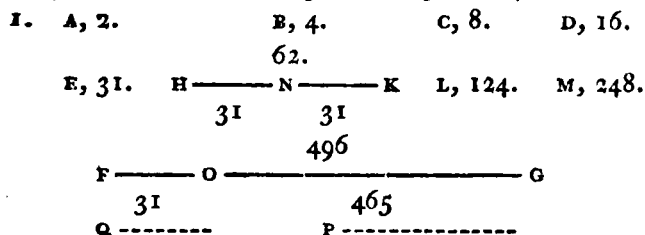
PROP. XXXVI. THEOR.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales exponantur in duplâ analogiâ, quoad totus compositus primus fiat, et totus in ultimum multiplicatus faciat aliquem; factus perfectus erit.

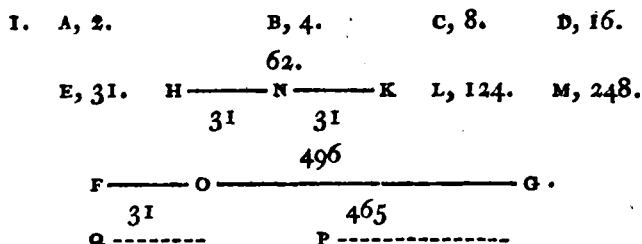
Ab unitate enim exponantur quotcunque numeri deinceps proportionales in duplâ analogiâ, sc. A, B, C, D , quoad totus compositus primus fiat, et toti æqualis sit E ,
et

et E ipsum D multiplicans faciat FG : dico FG perfectum esse.

Quot enim sunt A, B, C, D multitudine, tot sumantur ab ipso E in duplâ analogiâ, qui sint E, HK, L, M . Ergo ex æquo ut A ad D , ita erit E ad M . Ac propterea qui sit ex E, D , est æqualis ei, qui ex A, M . Est^o 19. sept.



autem qui ex E, D ipse FG . Quare FG est qui sit ex A, M . Multiplicans igitur A ipsum M fecit FG . Atqui est A binarius: duplus igitur est FG ipsius M . Sunt autem et M, L, HK, E deinceps dupli inter se. Ergo E, HK, L, M, FG deinceps proportionales sunt in duplâ analogiâ. Ausferatur a secundo HK , et ab ultimo FG ipsi primo E æqualis uterque HN, FO : est igitur ut secundi numeri excessus ad primum, ita excessus ultimi ad omnes ipsum antecedentes^r. Quare ut NK ad E , ita OG ad^r 35. hujus. M, L, HK, E . Atque est NK ipsi E æqualis^r. Ergo^r Per construct.
et OG est æqualis ipsis M, L, HK, E . Est autem FO æqualis ipsi E ^r; atque E ipsis A, B, C, D , et unitati æqualis. Totus igitur FG æqualis est et ipsis E, HK, L, M , et ipsis A, B, C, D et unitati^r; qui omnes ipsum^r Ax. 2. FG metiuntur. Scilicet cum numerus D ipsum FG , primi. ex D et E factum, necessario metiatur. In numeris autem A, B, C, D , quorum continua est ab ipsâ unitate analogia, maximum D præcedentium quisque metitur^r,^r 11. hujus. et quem maximus ille metitur, FG . Numerum igitur FG metitur quisque illorum, A, B, C, D . Rursum in numeris E, HK, L, M, FG , quorum perpetua inde ab E in ratione unitatis ad binarium analogia, metitur quisque proxime sequentem, ac proinde se sequentes omnes. Metitur igitur et eorum unusquisque numerum FG . Omnes igitur A, B, C, D, E, HK, L, M illum FG metiuntur. Dico nullum alium metiri FG præter ipsos A, B, C, D, E, HK, L, M , et unitatem. Si enim fieri potest, metiatur aliquis numerus ipsum FG , qui sit P . Sitque P nulli



nulli ipsorum A, B, C, D, E, H K, L, M idem. Et quoties P ipsum FG metitur, tot unitates sint in a. Ergo a ipsum P multiplicans fecit FG. Sed et E multiplicans D ipsum FG fecit^a: est igitur ut E ad a, ita P ad D^b. Et quoniam ab unitate deinceps proportionales sunt A, B, C, D, et qui unitatem sequitur A primus est; non metietur ipsum D aliquis alius numerus præter ipsos A, B, C^c; et ponitur P nulli ipsorum A, B, C idem. Non igitur P ipsum D metietur. Ut autem P ad D, ita E ad a. Ergo neque E metietur ipsum a^d. Atqui est E primus^e. Omnis autem primus numerus ad omnem numerum, quem non metitur, primus est^f. Quare E, a primi inter se sunt. Sed primi etiam et minimi^g; minimi vero eos, qui eandem quam ipsationem habent, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem et consequens consequentem^h; atque est ut E ad a, ita P ad D. Ergo E æqualiter metitur ipsum P, atque a ipsum D. Sed nullus alius metitur numerum D præter ipsos A, B, C. Quare a idem est qui unus ipsorum A, B, C. Sit idem qui B; et quot sunt B, C, D multitudine, tot ab ipso E sumantur E, H K, L. Suntque E, H K, L in eadem ratione, in qua B, C, Dⁱ. Ex æquo igitur ut B ad D, ita est E ad L. Ergo qui fit ex B, L est æqualis ei, qui ex D, E^j. Sed qui fit ex D, E est æqualis ei, qui ex a, P. Qui igitur fit ex a, P ei, qui ex E, L, æqualis erit. Quare ut c ad B, ita est L ad P^k. Estque a idem qui B. Ergo et L idem erit qui P; quod fieri non potest; etenim P nulli ipsorum expositorum idem ponitur. Non igitur ipsum FG metitur aliquis numerus præter ipsos A, B, C, D, E, H K, L, M, et unitatem. Atque ostensus est FG æqualis ipsis A, B, C, D, E, H K, L, M, et unitati. Perfectus autem numerus est, qui suis ipsius partibus est æqualis^l. Ergo FG perfectus est. Q. E. D.

^a Per construct.

^b 19. sept.

^c 13. hujus.

^d Def. 20. sept.

^e ex hyp.

^f 31. sept.

^g 23. sept.

^h 21. sept.

ⁱ Per construct.

^j 19. sept.

^k Def. 22. sept.

^l 19. sept.

E U C L I D I S

E L E M E N T O R U M

LIBER DECIMUS.

DEFINITIONES.

DEFINITIO I.

COMMENSURABILES magnitudines dicuntur, quas eadem mensura metitur.

II.

Incommensurabiles autem, quarum nullam esse communem mensuram contingit.

III.

Rectæ lineæ potentiâ commensurabiles sunt, cum ea, quæ ab ipsis fiunt, quadrata idem spatium metitur.

IV.

Incommensurabiles autem, cum quadrata, quæ ab ipsis fiunt, nullum commune spatium metiri contingit.

V.

His positis ostenditur, cuicunque rectæ lineæ propositæ rectas lineas, multitudine infinitas, et commensurabiles esse et incommensurabiles; alias quidem longitudine simul et potentiâ commensurabiles, alias vero potentiâ solum. Vocetur autem proposita recta linea, rationalis.

VI.

Et huic commensurabiles, five longitudine et potentiâ, five potentiâ solum, rationales.

VII.

Incommensurabiles vero, irrationales vocentur.

VIII.

Et quadratum, quod a rectâ lineâ propositâ fit, dicatur rationale.

IX.

Et spatia huic commensurabilia quidem, rationalia.

X.

Incommensurabilia vero, dicantur irrationalia.

XI.

Et lineæ, quæ incommensurabilia possunt, vocentur irrationales: si quidem ea quadrata sint, ipsorum latera; si vero alia quæpiam rectilinea, ipsæ a quibus æqualia quadrata describuntur.

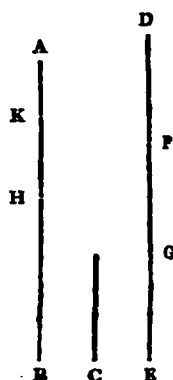
[I.]

PROPOSITIO I. THEOREMA.

Duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, si a majori auferatur majus quam dimidium, et ab eo, quod reliquum est, rursus auferatur majus quam dimidium, et hoc semper fiat; relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minori magnitudine expositâ minor erit.

Sint duæ magnitudines inæquales AB , C , quarum major AB : dico si ab ipsâ AB auferatur majus quam dimidium, et ab eo, quod reliquum est, rursus auferatur majus quam dimidium, atque hoc semper fiat, relinqui tandem magnitudinem quandam, quæ magnitudine C minor erit.

Etenim C multiplicata fiet aliquando major magnitudine AB . Multiplicetur, et fit DE ipsius quidem C multiplex, major autem quam AB ; dividaturque DE in partes ipsi C æquales DF , FG , GE ; et ab ipsâ AB auferatur majus quam dimidium BH , ab ipsâ vero AH rursus majus quam dimidium auferatur HK , atque hoc semper fiat,



quoad

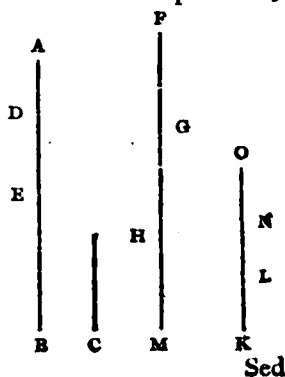
quoad divisiones, quæ sunt in AB , multitudine æquales fiant divisionibus, quæ in DE . Sint igitur divisiones AK , KH , HB divisionibus DF , FG , GE multitudine æquales.

Et quoniam major est DE quam AB , et ablatum est ab ipsâ quidem DE minus quam dimidium, sc. EG , ab ipsâ vero AB majus quam dimidium, sc. BH ; erit reliquum GD reliquo HA majus. Rursus, quoniam major est GD quam HA , et ablatum est ab ipsâ quidem GD dimidium GF , ab ipsâ vero HA majus quam dimidium HK ; reliquum DF reliquo AK majus erit. Estque DF æqualis ipsi C . Ergo C quam AK est major. Minor igitur est AK quam C . Ergo ex magnitudine AB relicta est magnitudo AK , expositâ minori magnitudine C minor. *Q. E. D.*

Similiter autem demonstrabitur, etiam si dimidia ablata fuerint.

Aliter. Exponentur duæ magnitudines inæquales AB , C , sitque C minor; et quoniam minor est C , multiplicata erit aliquando magnitudine AB major. Fiat ut FM , dividaturque in partes ipsi C æquales MH , HG , GF ; et ab ipsâ AB auferatur majus quam dimidium BE , et ab EA majus quam dimidium ED ; atque hoc semper fiat, quoad divisiones, quæ sunt in AB , numero æquales fiant divisionibus, quæ in FM . Fiant igitur ut BE , ED , DA ; et ipsi DA unaquæque ipsarum KL , LN , NO sit æqualis, atque hoc fiat, quoad divisiones ipsius KO numero æquales sint divisionibus ipsius FM .

Et quoniam BE major est quam dimidium ipsius AB , erit BE major quam EA : multo igitur major est BE quam DA . Sed ipsi DA æqualis est ON . Ergo BE major est quam ON . Rursus, quoniam ED major est quam dimidium EA , erit ED major quam DA . Sed ipsi DA est æqualis NL . Quare ED quam NL est major: tota igitur DB major est quam OL . Ipsi vero DA æqualis est LK . Quare tota AB quam tota OK major erit.



Sed MF major est quam BA : multo igitur MF quam OK est major. Et quoniam ON, NL, LK inter se æquales sunt; sunt autem et MH, HG, OF inter se æquales, atque est multitudo earum, quæ sunt in MF , æqualis multitudini ipsarum, quæ in OK : erit ut KL ^{a 12. quinti.} ad FG , ita OK ad FM ^a. Major autem est FM quam ^{b 14. quinti.} OK . Ergo et FG quam LK est major^b. Atqui est FG ipsi C æqualis; et KL æqualis ipsi AD . Ergo C quam AD major erit. *Q. E. D.*

[II.]

PROP. II. THEOR.

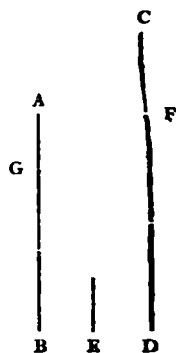
Si duabus magnitudinibus inæqualibus expofitis, detractâ femper minore de majore, reliqua minime præcedentem metiatur; magnitudines incommensurabiles erunt.

Duabus enim magnitudinibus inæqualibus expofitis AB, CD , quarum minor fit AB , et detractâ femper minore de majore, reliqua minime metiatur præcedentem: dico magnitudines AB, CD incommensurabiles esse.

Si enim commensurabiles fint, eas magnitudo quædam metietur. Metiatur, si fieri potest; fitque E ; et AB quidem metiens DF relinquat seipsâ minorem CF ; CF vero metiens BG relinquat seipsâ minorem AG ; et hoc femper fiat, quoad relinquatur quædam magnitudo, quæ sit minor ipsa E . Itaque fiat, et relinquatur AG ipsâ E minor.

Quoniam igitur E metitur AB , AB vero metitur DF ; et E ipsam DF metitur. Sed et metitur totam CD . Ergo et reliquam CF metietur. At CF metitur BG . Quare et E ipsam BG metitur. Metitur autem et totam AB . Et reliquam igitur AG metietur, major minorem, quod fieri non potest. Non igitur magnitudines AB, CD aliqua magnitudo metietur. Ergo AB, CD magnitudines incommensurabiles erunt.

Si igitur duabus magnitudinibus inæqualibus expofitis, detractâ femper minore de majore, reliqua minime præcedentem metiatur; magnitudines incommensurabiles erunt. *Q. E. D.*



PROP.

PROP. III. PROBL.

[III.]

Duabus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram invenire.

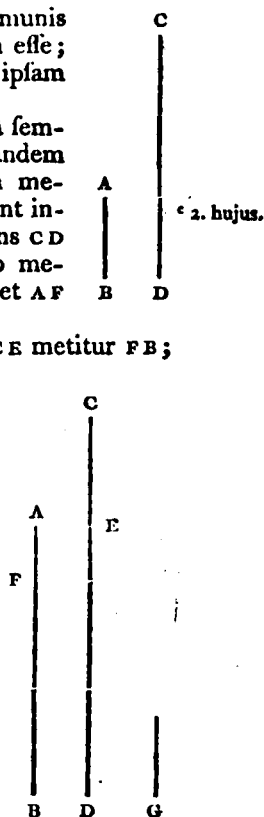
Sint datæ duæ magnitudines commensurabiles AB , CD , quarum minor AB : oportet ipsarum AB , CD maximam communem mensuram invenire.

Vel igitur AB metitur CD , vel non metitur. Et si quidem AB metitur CD , metitur autem et seipsam; erit AB ipsarum AB , CD communis mensura. Et perspicuum est maximam esse; magnitudo enim major magnitudine AB ipsam AB non metietur.

Si vero AB non metitur CD ; detractâ semper minore de majore, relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ præcedentem metitur^c, propterea quod AB , CD non sint incommensurabiles; et AB quidem metiens CD relinquat seipsâ minorem EC ; EC vero metiens AB relinquat seipsâ minorem AF ; et AF ipsam CE metiatur.

Quoniam igitur AF metitur CE , sed CE metitur FB ;

et AF ipsam FB metitur. Metitur autem et seipsam; et totam igitur AB metietur. Sed AB metitur DE . Ergo AF ipsam DE metitur. Metitur autem et CE ; et totam igitur CD metietur. Ergo AF ipsas AB , CD metitur. Ac propterea AF ipsarum AB , CD est communis mensura. Dico et maximam esse. Nisi enim ita sit, erit aliqua magnitudo major ipsâ AF , quæ ipsas AB , CD metietur. Itaque metiatur, et sit G . Et quoniam G metitur AB , AB vero metitur ED ; et G ipsam ED metitur. Metitur autem et totam CD . Ergo et reliquam CE metietur. Sed CE metitur FB . Quare G ipsam FB metitur. Metitur autem et totam AB ; et reliquam igitur AF metietur, major minorem, quod fieri non potest: non igitur magnitudo quædam major ipsâ AF magnitudines AB , CD metietur.



Ergo AF ipsarum AB, CD maxima erit communis mensura.

Duabus igitur magnitudinibus commensurabilibus datis AB, CD , maxima ipsarum communis mensura AF inventa est. $Q. E. F.$

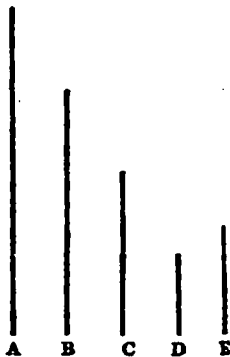
Cor. Ex hoc manifestum est, si magnitudo duas magnitudines metiatur, et maximam ipsarum communem mensuram metiri.

[IV.] PROP. IV. PROBL.

Tribus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam ipsarum communem mensuram invenire.

Sint datæ tres magnitudines commensurabiles A, B, C : oportet ipsarum A, B, C maximam communem mensuram invenire.

Sumatur enim duarum A, B maxima communis
^d 3. hujus. mensura^d, quæ sit D ; itaque D ipsam C vel metitur, vel non metitur. Metiatur primum. Et quoniam D ipsam C metitur, metitur autem et A, B ; et ipsas A, B, C metietur. Quare D ipsarum A, B, C communis est mensura. Et manifestum est maximam esse; magnitudo enim major magnitudine D ipsas A, B, C non metietur. Nam si fieri potest, metiatur eas magnitudo major ipsa D , quæ sit E . Quoniam igitur E magnitudines A, B, C metitur, et ipsas A, B metietur, et ipsarum A, B maximam communem mensuram D ^e, major minorem, quod fieri non potest.



^e Cor. 3. hujus.

Sed non metiatur D ipsam C . Dico primum C, D commensurabiles esse. Quoniam enim commensurabiles sunt A, B, C , metitur eas aliqua magnitudo, quæ scilicet et ipsas A, B metitur; ergo et ipsarum A, B maximam communem mensuram D . Metitur autem et ipsam C . Quare dicta magnitudo ipsas C, D metitur: ideoque C, D commensurabiles sunt^f. Sumatur ipsarum maxima communis mensura^d; et sit E . Quoniam igitur E metitur D , D vero metitur A, B ; et E ipsas A, B metietur.

^f Def. 1. primi.

metietur. Metitur autem et c. Ergo E ipsarum A, B, C communis est mensura. Dico et maximam esse. Si enim fieri potest, fit aliqua magnitudo F major ipsa E, quæ magnitudines A, B, C metiatur. Et quoniam F metitur A, B, C, et ipsas A, B metietur; et igitur ipsarum A, B maximam communem mensuram metietur. Sed D est maxima communis mensura ipsarum A, B: ergo F metitur D. Metitur autem et c: quare F ipsas C, D metitur; et igitur F metitur ipsarum C, D maximam communem mensuram. Sed ipsarum C, D maxima communis mensura est E: ergo F ipsam E metietur, major minorem, quod fieri non potest. Non igitur magnitudo major ipsa E magnitudines A, B, C metietur. Ergo E ipsarum A, B, C maxima erit communis mensura, si D ipsam c non metiatur; si vero metiatur, erit ipsa D.

* Cor. 3.
hujus.

Tribus igitur magnitudinibus commensurabilibus datis, maxima ipsarum communis mensura inventa est. Q. E. F.

Cor. Ex hoc perspicue constat, si magnitudo tres metiatur magnitudines, et ipsarum maximam communem mensuram metiri.

Similiter et in pluribus magnitudinibus maxima communis mensura invenietur, et Corollarium procedet.

PROP. V. THEOR.

[V.]

Commensurabiles magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum.

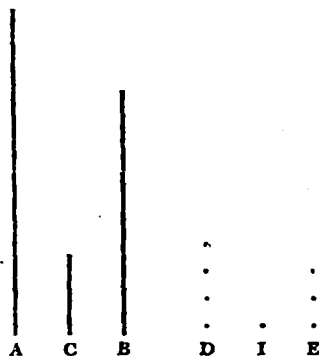
Sint commensurabiles magnitudines A, B: dico magnitudinem A ad B rationem habere, quam numerus ad numerum.

Quoniam enim A, B commensurabiles sunt, metietur ipsas aliqua magnitudo. Metiatur, et fit c. Et quoties

ties c ipsam A metitur, tot unitates sint in D; quoties autem c metitur B, tot unitates sint in E.

Quoniam igitur c ipsam A metitur per unitates, quæ sunt in D, metitur autem

et unitas numerum D per unitates, quæ in ipso sunt; unitas æqualiter metietur numerum D, atque magnitudo c ipsam A. Ergo ut c ad A, ita est unitas ad D, et invertendo ut A ad c, ita D ad unitatem. Rursum, quoniam c ipsam B metitur per unitates, quæ sunt in E, metiturque unitas numerum E per unitates, quæ in ipso sunt;



unitas numerum E æqualiter metietur, atque c ipsam B. Est igitur ut c ad B, ita unitas ad E. Oñsum autem est et ut A ad c, ita esse D ad unitatem. Quare ex æquo ut A ad B, ita numerus D ad E numerum.

Commenfurabiles igitur magnitudines A, B inter se rationem habent, quam D numerus ad numerum E. Q. E. D.

[VI.]

PROP. VI. THEOR.

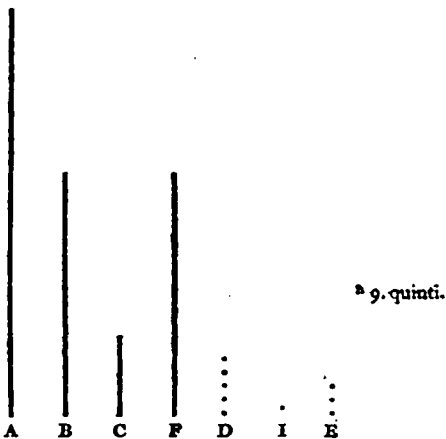
Si duæ magnitudines inter se rationem babeant, quam numerus ad numerum, magnitudines erunt commenfurabiles.

Duæ enim magnitudines A, B inter se rationem habeant, quam D numerus ad numerum E: dico A, B magnitudines commenfurabiles esse.

Quot enim unitates sunt in D, in tot partes æquales dividatur magnitudo A; et uni ipsarum æqualis sit C: quot autem unitates sunt in E, ex tot magnitudinibus, æqualibus ipsi C, componatur magnitudo F.

Quoniam igitur quot sunt in D unitates, tot magnitudines sunt in A ipsi C æquales; quæ pars est unitas ipsius D, eadem pars erit et C ipsius A; ut igitur c ad A, ita est unitas ad D. Erit igitur invertendo ut A ad c, ita D numerus ad unitatem. Rursum, quoniam quot unitates sunt in E, tot sunt et in F magnitudines

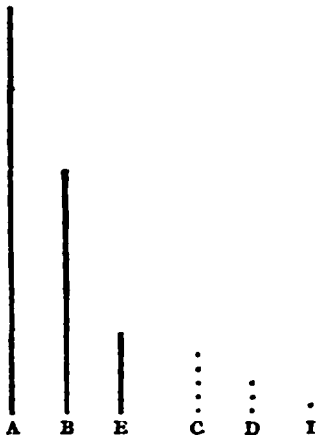
nitudines ipsi c æquales; ut c ad f , ita erit unitas ad e numerum. Offensum autem est et ut a ad c , ita d esse ad unitatem. Ergo ex æquo ut a ad f , ita d ad e . Sed ut d ad e , ita a ad b ; et igitur ut a ad b , ita a ad f . Quod cum a ad utramque ipsarum b , f eandem habeat rationem, erit b ipsi f æqualis^b. Metitur autem c ipsam f . Ergo et ipsam b metietur. Sed et metitur a . Quare c ipsas a , b metitur: commensurabilis igitur est a ipsi b ¹.

^a 9. quinti.¹ Def. 1. hujus.

Quare si duæ magnitudines inter se rationem habeant, quam numerus ad numerum, magnitudines erunt commensurabiles. *Q. E. D.*

Aliter. Duæ enim magnitudines a , b inter se rationem habeant, quam numerus c ad numerum d : dico magnitudines commensurabiles esse.

Quot enim unitates sunt in c , in tot partes æquales dividatur a ; et uni ipsarum æqualis sit e : est igitur ut unitas ad c numerum, ita e ad a . Est autem et ut c ad d , ita a ad b . Ergo ex æquo ut unitas ad d numerum, ita e ad b . Sed unitas metitur d . Ergo et e ipsam b metitur. Metitur autem et e ipsam a , quoniam et unitas metitur c . Quare e utramque ipsarum a , b metietur; ideoque a , b commensurabiles sunt; atque est e communis ipsarum mensura.

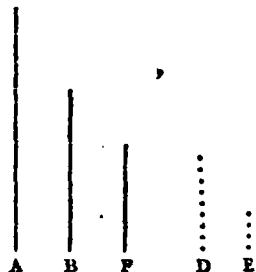


Cor.

Cor. Ex hoc manifestum est, si sint duo numeri ut D, E, et recta linea ut A, inveniri posse aliam rectam F, ad quam A rationem habeat, quam numerus D ad numerum E. Si autem inter ipsas A, F media proportionalis sumatur ut B, erit ut A ad F, ita quod sit ex A ad id quod ex B; hoc est, ut prima ad tertiam, ita figura, quæ sit a primâ, ad eam, quæ a secundâ, similem et similiter de-

^h Cor. 2. 20. sexti.

scriptam ^k. Sed ut A ad F, ita D numerus ad numerum E. Factum igitur est et ut D numerus ad numerum E, ita quod sit ex rectâ lineâ A ad id quod ex rectâ lineâ B.



[VII.]

PROP. VII. THEOR.

Incommensurabiles magnitudines inter se rationem non habent, quam numerus ad numerum.

Sint incommensurabiles magnitudines A, B: dico A ad B rationem non habere, quam numerus ad numerum.

^l 6. hujus. Si enim A ad B rationem habet, quam numerus ad numerum; commensurabilis erit A ipsi B^l. Atqui non est commensurabilis. Non igitur A ad B rationem habet, quam numerus ad numerum.

Quare incommensurabiles magnitudines inter se rationem non habent, quam numerus ad numerum. Q. E. D.



[VIII.]

PROP. VIII. THEOR.

Si duæ magnitudines inter se rationem non habeant, quam numerus ad numerum, incommensurabiles erunt.

Duæ enim magnitudines A, B inter se rationem non habeant, quam numerus ad numerum: dico magnitudines A, B incommensurabiles esse.

^m 5. hujus. Si enim commensurabilis est A ipsi B, rationem habet, quam numerus ad numerum^m. Atqui non habet: incommensurabiles igitur sunt A, B magnitudines.



Ergo

Ergo si duæ magnitudines inter se rationem non habeant, quam numerus ad numerum, incommensurabiles erunt. *Q. E. D.*

* LEMMA I.

Si quatuor quantitatum prima sit ad secundam ut tertia ad quartam; erit et prima ad aliam, primæ utique et secundæ proportionem mediam, ut tertia ad aliam, tertiæ et quartæ proportionem mediam: modo tam tertia et quarta, quam prima et secunda, istiusmodi sint in suo genere quantitates, quæ proportionem mediam capiant.

Sint *A, B, C, D* quatuor quantitates. Quarum prima

A ad secundam *B* rationem habeat eandem, quam tertia *C* ad quartam *D*.

Primæ et secundæ, *A* et *B*, sit *E* proportionem media. Tertiæ item et quartæ,

C et *D*, sit *F* proportionem media. Dico esse *A* ad *E* ut *C* ad *F*. Non enim.

Sed habeat *A* ad aliam quandam *G* proportionem eam, quam *C* ad *F*. Quam

autem *F* ad *D*, eam habeat *G* ad *H*. Trium igitur *A, G, H* continua erit analogia;

propter continuam trium *C, F, D* analogiam. Jam vero cum sit *A* ad *G* ut

C ad *F*, et *G* ad *H* ut *F* ad *D*; ex æquo erit *A* ad *H* ut *C* ad *D*. Sed ut *C* ad *D*,

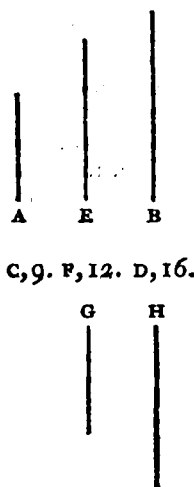
ita *A* ad *B*^a. Erit igitur *A* ad *H* ut eadem *A* ad *B*. Quantitates igitur *H, B*

inter se æquales. Quare *E* quæ duarum *A, B* proportionem media est, ipsi

G æqualis erit, quæ duarum *A, H* proportionem media. Quare *A* ad *E* ean-

dem proportionem habet, quam *A* ad *G*. Est autem *A*

ad *G* ut *C* ad *F*^o. Quare et *A* ad *E* ut *C* ad *F*. *Q. E. D.*^{o Per construct.}



PROP.

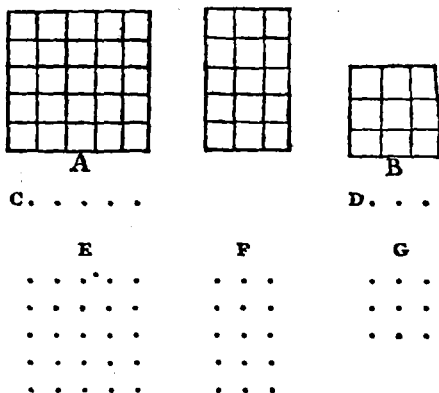
[IX.]

PROP. IX. THEOR.

Quæ a rectis lineis longitudine commensurabilibus sunt quadrata, inter se rationem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: et quadrata inter se rationem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et latera habebunt longitudine commensurabilia. Quadrata vero, quæ a longitudine incommensurabilibus rectis lineis fiunt, inter se rationem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: et quadrata inter se rationem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque latera habebunt longitudine commensurabilia.

Sint rectæ lineæ A, B longitudine commensurabiles: dico quadratum quod fit ex A ad quadratum quod ex B eam rationem habere, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Quoniam enim commensurabilis est A ipsi B longitudine, rationem habet, quam numerus ad numerum^a.



Habeat, quam c ad D; et c seipsum quidem multiplicans faciat E, multiplicans vero D faciat F; et D seipsum multiplicans faciat G. Itaque quoniam c seipsum quidem multiplicans fecit E, multiplicans vero D fecit F; erit ut c ad D, hoc est, ut A ad B^b, ita E ad F^c. Sed ut A ad B, ita quadratum quod fit ex A ad rectangulum, quod fit sub A, B^d. Est igitur ut quadra-

^a Per construct.

^b 17. sept.

^c 1. sexti.

tum quod ex A, ad rectangulum sub A, B, ita E ad F. Rursus, quoniam D seipsum multiplicans fecit G, multiplicans vero C ipsum F fecit; ut C ad D, hoc est, ut A ad B, ita erit F ad G¹⁷. Ut autem A ad B, ita rectan-^{17. sept.} gulum, quod sit sub A, B, ad quadratum, quod sit ex B: ergo ut rectangulum sub A, B ad quadratum, quod ex B, ita F ad G. Sed ut quadratum, quod sit ex A, ad rectangulum sub A, B, ita erat E ad F: ex æquo igitur ut quadratum ex A ad quadratum ex B, ita E ad G. Est autem uterque ipsorum E, G quadratus, et E quidem est a numero C, G vero ab ipso D. Quadratum igitur, quod sit ex A, ad quadratum, quod ex B, rationem habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Q. E. D.

Sed quadratum, quod sit ex A, ad quadratum, quod ex B, rationem habeat, quam quadratus numerus E ad quadratum numerum G: dico A ipsi B longitudine commensurabilem esse. Sit enim ipsius quidem E latus C, ipsius vero G latus D; et C ipsum D multiplicans faciat F: ergo E, F, G deinceps proportionales sunt in ratione ipsius C ad D¹⁸. Et quoniam inter quadrata, quæ sunt ex A, B, medium proportionale est rectangulum sub A, B¹⁹; inter numeros vero quadratos E, G medius^{1. sexti.} proportionalis est F¹⁹: erit ut quadratum, quod sit ex A, ad^{11. octavi.} rectangulum sub A, B, ita E ad F²⁰. Sed ut quadra-^{Lem. 1. 1.} tum ex A, ad rectangulum sub A, B, ita A ad B: ergo^{8. huius.} A, B commensurabiles sunt; rationem enim habent, quam numerus E ad numerum F, hoc est, quam C ad D. Q. E. D.

Sed incommensurabilis sit A ipsi B longitudine: dico quadratum ex A ad quadratum ex B rationem non habere, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Si enim quadratum ex A ad quadratum ex B rationem habeat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, commensurabilis erit A ipsi B longitudine²¹. Non^{ex demon-} est autem. Non igitur quadratum ex A ad quadratum^{stratis.} ex B rationem habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Rursus quadratum ex A ad quadratum ex B rationem non habeat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: dico A ipsi B longitudine incommensurabilem esse. Si enim commensurabilis sit A ipsi B longi-
tudine,

tudine, habebit quadratum ex A ad quadratum ex B rationem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Atqui non habet. Non igitur A ipsi B longitudine est commensurabilis.

Ergo quæ a rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata inter se rationem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, &c. *Q. E. D.*

Cor. Et manifestum est ex jam demonstratis, lineas, quæ longitudine sunt commensurabiles, omnino et potentiâ commensurabiles esse; quæ vero potentiâ commensurabiles, non semper et longitudine; et quæ longitudine incommensurabiles sunt, non semper et potentiâ incommensurabiles; quæ vero potentiâ incommensurabiles, omnino et longitudine incommensurabiles esse.

Quoniam enim quadrata, quæ fiunt a rectis lineis longitudine commensurabilibus, rationem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; quæ vero rationem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, commensurabilia sunt: erunt rectæ lineæ longitudine commensurabiles, non solum longitudine, sed et etiam potentiâ, commensurabiles.

Rursus, quoniam quæcunque quadrata inter se rationem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, latera habent longitudine commensurabilia, ut ostensum est, eorum igitur latera tam longitudine quam potentiâ commensurabilia sunt: quæcunque autem quadrata rationem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sed simpliciter quam aliquis numerus non quadratus ad alium numerum, commensurabilia sunt; hoc est, rectæ lineæ, a quibus ipsa describuntur, commensurabiles sunt potentiâ, non autem et longitudine. Ergo rectæ lineæ longitudine quidem commensurabiles, omnino et potentiâ commensurabiles sunt; potentiâ vero commensurabiles, non semper et longitudine, nisi earum quadrata rationem habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Dico et longitudine incommensurabiles non semper potentiâ incommensurabiles esse. Quoniam potentiâ commensurabiles possunt rationem non habere, quam numerus ad numerum, ideoque cum potentiâ commensurabiles sunt, longitudine sunt incommensurabiles. Ergo
non

non quæ longitudine incommensurabiles sunt, omnino et potentiâ: sed longitudine incommensurabiles existentes aliæ etiam potentiâ aliæ potentiâ commensurabiles erunt.

Potentiâ vero incommensurabiles omnino et longitudine incommensurabiles sunt: si enim longitudine sint commensurabiles, et potentiâ commensurabiles erunt^c. Atqui ponuntur incommensurabiles, quod est^c Ex hæte-
absurdum: potentiâ igitur incommensurabiles omnino nus ostensis.
et longitudine incommensurabiles erunt.

PROP. X. THEOR.

[X.]

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima vero secundæ fuerit commensurabilis; et tertia quartæ commensurabilis crit. Et si prima secundæ fuerit incommensurabilis; et tertia quartæ incommensurabilis crit.

Sint quatuor magnitudines proportionales, A, B, C, D; fitque ut A ad B, ita C ad D, et sit A ipsi B commensurabilis: dico et C ipsi D commensurabilem esse.

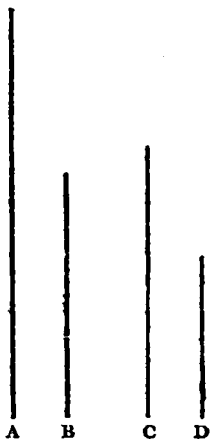
Quoniam enim A commensurabilis est ipsi B, habebit A ad B rationem, quam numerus ad numerum^d. Atque est ut A ad B, ita C ad D: ergo et C ad D rationem habet, quam numerus ad numerum: commensurabilis igitur est C ipsi D^e.

Sed A ipsi B fit incommensurabilis: dico et C ipsi D incommensurabilem esse. Non enim. Commensurabilis igitur. Habet igitur C ad D rationem, quam numerus ad numerum. Sed ut C ad D, ita A ad B. Quare et numerus ad numerum. Si enim C ad D rationem

habeat, quam numerus ad numerum; et A ad B eam, quam numerus ad numerum, rationem habebit^f: atque^g 11. quinti.
erit A ipsi B commensurabilis^h, quod est absurdum; ^h 6. hujus.
incommensurabilis enim ponitur. Ergo C ad D rationem non habet, quam numerus ad numerum. Ideoque C ipsi D est incommensurabilisⁱ.

Si igitur quatuor magnitudines proportionales fuerint, et quæ sequuntur. Q. E. D.

PROP.

^d 5. hujus.^e 6. hujus.ⁱ 8. hujus.

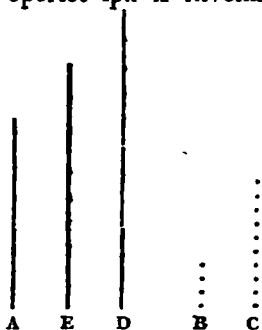
[XI.]

PROP. XI. PROBL.

Propositæ rectæ lineæ invenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentiâ.

Sit proposita recta linea A: oportet ipsi A invenire duas rectas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentiâ.

Exponentur duo numeri B, C, inter se rationem non habentes, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et fiat ut B ad C, ita quadratum ex A ad quadratum ex D, hoc enim ante traditum est¹. Ergo quadratum ex A commensurabile est quadrato ex D. Et quoniam B ad C rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque quadratum ex A ad quadratum ex D rationem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum: incommensurabilis igitur est A ipsi D longitudine². Sumatur inter ipsas A, D media proportionalis E: est igitur ut A ad D, ita quadratum ex A ad quadratum ex E³. Sed A ipsi D longitudine est incommensurabilis: ergo et quadratum ex A quadrato ex E incommensurabile erit⁴: incommensurabilis igitur est A ipsi E potentiâ. Ergo propositæ rectæ lineæ rationali, a qua dicebamus mensuras sumi, nempe A, potentiâ quidem commensurabilis inventa est D, hoc est, rationalis potentiâ tantum commensurabilis, irrationalis vero E⁵. Irrationales enim universæ appellantur, quæ rationali et longitudine et potentiâ incommensurabiles sunt. Q. E. D.



¹ Cor. 6.
hujus.

² 9. hujus.

³ Cor. 2.
20. sexti.

⁴ 10. hujus.

⁵ Def. 5.
hujus.

PROP.

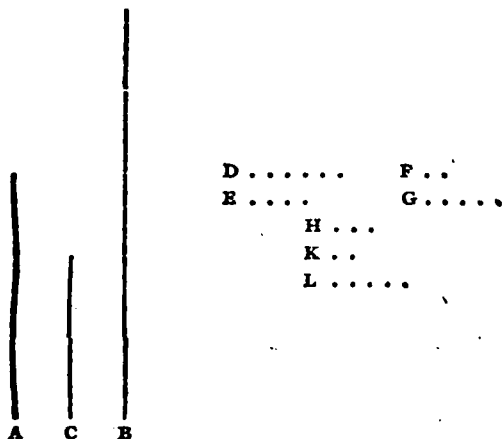
PROP. XII. THEOR.

[XII.]

Quæ eidem magnitudini sunt commensurabiles, et inter se commensurabiles sunt.

Utraque enim ipsarum A, B ipsi c fit commensurabilis: dico et A ipsi B commensurabilem esse.

Quoniam enim A commensurabilis est ipsi c, habebit A ad c rationem, quam numerus ad numerum^p. Habeat, ^p 5. hujus.



quam numerus D ad numerum E. Rursus, quoniam commensurabilis est B ipsi c, habebit c ad B rationem, quam numerus ad numerum. Habeat, quam F ad G. Et rationibus datis quibuscunque, videlicet quam habet D ad E, et quam habet F ad G, sumantur numeri deinceps proportionales H, K, L in datis rationibus^q; sitque ut D^q 2. octavi. ad E, ita H ad K; ut autem F ad G, ita K ad L.

Quoniam igitur est ut A ad c, ita D ad E; sed ut D ad E, ita H ad K: erit et ut A ad c, ita H ad K. Rursus, quoniam est ut c ad B, ita F ad G, sed ut F ad G, ita K ad L; erit et ut c ad B, ita K ad L. Est autem et ut A ad c, ita H ad K: ex æquo igitur ut A ad B, ita H ad L^r: ergo A ad B rationem habet quam numerus H^r 23. quinti. ad L numerum: ac propterea A ipsi B est commensurabilis^s.

^s 6. hujus.

Quæ igitur eidem magnitudini sunt commensurabiles, et inter se commensurabiles sunt. Q. E. D.

T

PROP.

[XIII.]

PROP. XIII. THEOR.

Si sint duæ magnitudines, et altera quidem alii cuidam sit commensurabilis, altera vero eidem incommensurabilis; magnitudines inter se incommensurabiles erunt.

Sint enim duæ magnitudines A, B , alia autem sit c ; et A quidem ipsi c commensurabilis sit, B vero eidem incommensurabilis: dico et A ipsi B incommensurabilem esse.

A —————

c —————

B —————

Si enim commensurabilis est A ipsi B , quoniam et ipsi c commensurabilis est A ; erit et c ipsi

* 12. hujus. B commensurabilis¹. Quod est contra hypothesin.

[XIV.]

PROP. XIV. THEOR.

Si duæ magnitudines commensurabiles sint, altera autem ipsarum alicui magnitudini sit incommensurabilis; et reliqua eidem incommensurabilis erit.

Sint duæ magnitudines commensurabiles A, B ; altera vero ipsarum A alicui magnitudini c sit incommensurabilis: dico et reliquam B ipsi c incommensurabilem esse.

Si enim commensurabilis est B ipsi c , quoniam et ipsi B commensurabilis est A ; et A

* 12. hujus. ipsi c commensurabilis erit².

A —————

Sed et incommensurabilis, quod fieri non potest. Non igitur commensurabilis est B ipsi c : ergo est incommensurabilis.

c —————

B —————

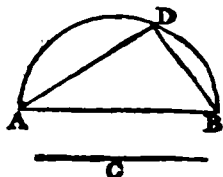
Si igitur duæ magnitudines commensurabiles sint, altera autem ipsarum alicui magnitudini sit incommensurabilis; et reliqua eidem incommensurabilis erit. $Q. E. D.$

LEMMA II.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus, invenire id, quo major plus potest quam minor.

Sint datæ duæ rectæ lineæ inæquales AB, C , quarum major sit AB : oportet invenire id, quo AB plus potest quam C .

Describatur super rectam lineam AB semicirculus ADB ; et in eo ap-



tetur

tetur recta linea AD , ipsi c æqualis ²; et DB jungatur. ² 1. quarti. Perpicuum est angulum ADB rectum esse ¹, et ipsam ² 31. tertii. AB plus posse quam AD , hoc est, quam c , quantum est rectæ lineæ DB quadratum ². ² 47. primi.

Similiter autem et datis duabus rectis lineis, quæ ipsas potest hoc modo inveniatur.

Sint duæ datæ rectæ lineæ AD , DB , et oporteat invenire rectam lineam, quæ ipsas possit. Exponentur enim ita, ut rectum angulum ADB contineant, et AB jungatur: patet rursus rectam lineam AB ipsas AD , DB posse ².

PROP. XV. THEOR.

[XV.]

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, prima vero tanto plus possit quam secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine; et tertia tanto plus poterit quam quarta, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si prima tanto plus possit quam secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine; et tertia quam quarta tanto plus poterit, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

Sint quatuor rectæ lineæ A , B , C , D , fitque ut A ad B , ita C ad D ; et A quidem plus possit quam B quadrato, quod fit ex E ; C vero plus possit quam D quadrato ex F : dico si A ipsi B longitudine fit commensurabilis, et C ipsi D longitudine commensurabilem esse; si vero A ipsi B fit longitudine incommensurabilis, et C ipsi D longitudine incommensurabilem esse.

Quoniam enim est ut A ad B , ita C ad D ; erit ut quadratum ex A ad quadratum ex B , ita quadratum ex C ad id quod ex D fit quadratum ¹. Sed quadrato quidem, quod fit ex A , æqualia sunt quadrata, quæ ex ipsis E , B ²; quadrato autem ex C æqualia sunt quadrata ex F , D : igitur ut quadrata, quæ sunt ex E , B , ad quadratum ex B , ita quadrata, quæ sunt ex F , D , ad quadratum ex D ; et dividendo ut quadra-

¹ 22. sexti.² ex hyp.

- ^d 17. quinti. tum ex E ad quadratum ex B, ita quadratum ex F,
^e 22. sexti. ad quadratum ex D^d. Quare ut E ad B, ita est F ad D^e,
^f 4. quinti. et invertendo ut B ad E, ita D ad F^f. Est autem et
 ut A ad B, ita C ad D: ex æquo igitur ut A ad E, ita
^g 22. quinti. est C ad F^g. Ergo si A longitudine est commensurabilis
 ipsi E, et C ipsi F longitudine erit commensurabilis; si
^h 10. hujus. vero incommensurabilis est A ipsi E, et C ipsi F incommensurabilis erit^h.

Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales sint, &c.
 Q. E. D.

[XVI.]

PROP. XVI. THEOR.

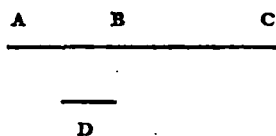
Si duæ magnitudines commensurabiles componantur; et tota magnitudo utrique ipsarum commensurabilis erit. Quod si tota magnitudo uni ipsarum sit commensurabilis; et quæ a principio magnitudines commensurabiles erunt.

Componantur enim duæ magnitudines commensurabiles A B, B C: dico et totam magnitudinem A C utrique ipsarum A B, B C commensurabilem esse.

ⁱ Def. 1.
 hujus.

Quoniam enim commensurabiles sunt A B, B C, metietur eas aliqua magnitudoⁱ.

Metiatur, sitque D. Et quoniam D metitur ipsas A B, B C, et totam A C metietur. Metitur autem et A B, B C: ergo D magnitudines A B, B C et ipsam A C metitur. Commensurabilis igitur est A C utrique ipsarum A B, B C.



Sed A C uni ipsarum A B, B C fit commensurabilis, videlicet ipsi A B: dico et A B, B C commensurabiles esse.

Quoniam enim commensurabiles sunt A C, A B, metietur eas aliqua magnitudo. Metiatur, et sit D. Itaque quoniam D metitur ipsas A C, A B, et reliquam B C metietur. Metitur autem et A B: ergo D ipsas A B, B C metitur. Ac propterea A B, B C commensurabiles sunt.

Si igitur duæ magnitudines commensurabiles componantur; et tota magnitudo utrique ipsarum commensurabilis erit. Quod si &c. Q. E. D.

PROP.

PROP. XVII. THEOR.

[XVII.]

Si duæ magnitudines incommensurabiles componantur; et tota magnitudo utrique ipsarum incommensurabilis erit. Quod si tota magnitudo uni ipsarum fit incommensurabilis; et quæ a principio magnitudines incommensurabiles erunt.

Componantur enim duæ magnitudines incommensurabiles AB , BC : dico et totam magnitudinem AC utrique ipsarum AB , BC incommensurabilem esse.

Si enim non sunt incommensurabiles CA , AB , metietur eas aliqua magnitudo. Metiatur, sitque D , si fieri potest. Quoniam igitur D metitur ipsas CA , AB , et reliquam BC metietur.

Metitur autem et BA : A B C
 ergo D ipsas AB , BC metitur; ac propterea commensurabiles sunt AB , BC ^k. Ponuntur autem D
 et incommensurabiles,

^k Def. 1.
hujus.

quod fieri non potest. Non igitur ipsas CA , AB metietur aliqua magnitudo: quare CA , AB incommensurabiles sunt. Similiter et AC , CB incommensurabiles esse demonstrabimus. Ergo AC utrique ipsarum AB , BC est incommensurabilis.

Sed AC uni ipsarum AB , BC incommensurabilis sit; et primum ipsi AB : dico et AB , BC incommensurabiles esse. Si enim sunt commensurabiles, eas aliqua magnitudo metietur^k. Metiatur, et sit D . Quoniam igitur D metitur ipsas AB , BC , et totam AC metietur. Metitur autem et AB : ergo D ipsas CA , AB metitur: ideoque CA , AB commensurabiles sunt. Ponuntur autem et incommensurabiles, quod fieri non potest. Non igitur ipsas AB , BC metietur aliqua magnitudo: quare AB , BC incommensurabiles erunt. Similiter demonstrabimus, si AC incommensurabilis sit ipsi CB , etiam AB , BC incommensurabiles esse.

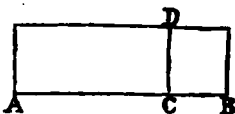
Si igitur duæ magnitudines incommensurabiles componantur, &c. Q. E. D.

LEMMA III.

Si ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum, deficiens figurâ quadratâ; parallelogrammum

num applicatum æquale est ei rectangulo, quod sub partibus rectæ lineæ, ex applicatione factis, continetur.

Ad aliquam enim rectam AB , applicetur AD parallelogrammum, deficiens figurâ quadratâ DB : dico parallelogrammum AD rectangulo sub AC , CB æquale esse.



Atque hoc per se patet: quoniam enim quadratum est DB , erit DC ipsi CB æqualis; atque AD est parallelogrammum, quod sub AC , CB continetur.

Si igitur ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum, &c. Q. E. D.

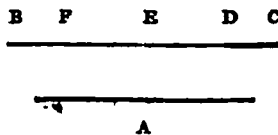
[XVIII.]

PROP. XVIII. THEOR.

Si fiat duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrammum ad majorem applicetur, deficiens figurâ quadratâ, et in partes longitudine commensurabiles ipsam dividat; major tanto plus poterit quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si major tanto plus possit quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrammum ad majorem applicetur, deficiens figurâ quadratâ; in partes longitudine commensurabiles ipsam dividet.

Sint duæ rectæ lineæ inæquales A , BC , quarum major BC ; quartæ autem parti quadrati quod fit a minori A , (hoc est, ei, quod fit a dimidiâ ipsius A) æquale parallelogrammum ad BC applicetur, deficiens figurâ quadratâ; et fit quod continetur sub BD , DC ; sitque BD ipsi DC commensurabilis longitudine: dico BC plus posse quam A quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis.

Secetur enim BC bifariam in puncto E , et ipsi DE æqualis ponatur EF : reliqua igitur DC est æqualis BF . Et quoniam recta linea BC secatur in partes quidem æquales ad E punctum, in partes vero inæquales ad punctum D ; erit rectangulum sub BD , DC unâ



¹ 5. secundi. cum quadrato ex ED , æquale quadrato ex E ^{et} C ;

et eorum quadrupla inter se æqualia erunt. Quod igitur quater sub $B D$, $D C$ continetur unà cum quadrato, quod quater fit ex $E D$, æquale est quadrato, quod quater fit ex $B C$. Sed ei quidem, quod quater sub $B D$, $D C$ continetur, æquale est quadratum ex A ; ei vero, quod quater fit ex $D E$, æquale est quadratum ex $D F$ ^m; et-^m ex hyp. enim $D F$ ipfius $D E$ est dupla; et ei, quod quater fit ex $E C$, æquale est quadratum ex $B C$; rursus enim $B C$ dupla est ipfius $E C$. Ergo quadrata, quæ fiunt ex A , $D F$, æqualia sunt ei quod fit ex $B C$ quadrato: ac propterea quadratum, quod fit ex $B C$, majus est quam quadratum, quod ex A , quadrato ex $D F$. Recta igitur linea $B C$ tanto plus potest quam A , quantum est ipfius $D F$ quadratum. Ostendendum est et $B C$ ipsi $D F$ commensurabilem esse. Quoniam $B D$ commensurabilis est ipsi $D C$ longitudine^m, erit et $B C$ ipsi $D C$ longitudine commensurabilisⁿ. Sed $D C$ ipfis $C D$, $B F$ simul sumptis est^a 16. hujus. commensurabilis longitudine; æqualis enim est $C D$ ipsi $B F$ ^o. Quare et $B C$ ipfis $B F$, $C D$ simul sumptis longi-^o 6. hujus. tudine est commensurabilis; et reliquæ igitur $F D$ longitudine est commensurabilis erit^o. Ergo $B C$ plus potest quam A quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

Sed $B C$ plus possit quam A quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit ex A , æquale parallelogrammum ad $B C$ applicetur, deficiens figurâ quadratâ; et fit quod continetur sub $B D$, $D C$. Ostendendum est $B D$ ipsi $D C$ longitudine commensurabilem esse.

Iisdem enim constructis, similiter demonstrabimus $B C$ plus posse quam A quadrato rectæ lineæ $F D$. Sed $B C$ plus potest quam A quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilisⁿ: ergo $B C$ commensurabilis est ipsi $F D$ longitudine; et reliquæ igitur, duabus scilicet $B F$, $D C$ simul sumptis, longitudine est commensurabilis^o. Sed ex duabus $B F$, $D C$ composita ipsi $D C$ commensurabilis est longitudine, etenim $B F$ est æqualis $D C$; ergo et $B C$ ipsi $D C$ longitudine est commensurabilis. Constat igitur $B D$ ipsi $D C$ longitudine commensurabilem esse^o.

Si igitur duæ rectæ lineæ inæquales sint, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrammum ad majorem applicetur, &c. Q. E. D.

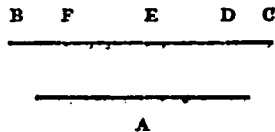
[XIX.]

PROP. XIX. THEOR.

Si sint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrammum ad majorem applicetur, deficiens figurâ quadratâ, et in partes incommensurabiles longitudine ipsam dividat; major tanto plus poterit quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Quod si major tanto plus possit quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrammum ad majorem applicetur, deficiens figurâ quadratâ; in partes longitudine incommensurabiles ipsam dividet.

Sint duæ rectæ lineæ inæquales $A, B C$, quarum major $B C$; quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori A , æquale parallelogrammum ad ipsam $B C$ applicetur, deficiens figurâ quadratâ; et sit quod continetur sub $B D$, $D C$; sitque $B D$ ipsi $D C$ longitudine incommensurabilis: dico $B C$ plus posse quam A , quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

Isdem enim quæ supra constructis, similiter ostendemus ipsam $B C$ plus posse quam A , quadrato rectæ lineæ $D F$. Ostendendum igitur est $B C$ ipsi $D F$ longitudine incommensurabilem esse. Quoniam incommensurabilis est $B D$ ipsi $D C$, erit et $B C$ ipsi



- ¹⁷ hujus. $D C$ longitudine incommensurabilis¹. Sed $D C$ commensurabilis est duabus $B F$, $D C$ simul sumptis: ergo et $B C$ duabus $B F$, $D C$ simul sumptis longitudine est incommensurabilis¹. Ac propterea $B C$ reliquæ $F D$ incommensurabilis est longitudine; et $B C$ plus potest quam A , quadrato ex $F D$ ¹. Igitur $B C$ plus potest quam A , quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

Sed $B C$ rursus plus possit quam A , quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine; quartæ autem parti quadrati, quod fit ex A , æquale parallelogrammum ad $B C$ applicetur, deficiens figurâ quadratâ; et sit quod sub $B D$, $D C$ continetur. Ostendendum est $B D$ ipsi $D C$ longitudine incommensurabilem esse.

Isdem

Iisdem enim constructis, similiter demonstrabimus B C

plus posse quam A, quadrato rectæ lineæ D F. Sed B C

plus potest quam A, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis¹: incommensurabilis igitur est B C ipsi

D F longitudine: quare et reliquæ, videlicet duabus B F, D C simul sumptis, est incommensurabilis¹. Sed ex¹ 17. hujus. duabus B F, D C composita commensurabilis est longitudine ipsi D C². Ergo et B C ipsi D C est incommensurabilis longitudine³; ac propterea dividendo B D⁴ 14. hujus. ipsi D C longitudine incommensurabilis erit¹.

Si igitur duæ rectæ lineæ inæquales sint, &c. Q. E. D.

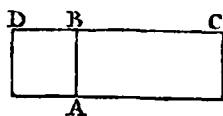
PROP. XX. THEOR.

[XX.]

Quod sub rationalibus longitudine commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, rationale est.

Exponatur recta quædam A B, et longitudine huic commensurabilis alia B C. Dico rectangulum A C, sub duabus A B, B C comprehensum, rationale esse.

Describatur ex A B quadratum A D: ergo A D est rationale⁷. Et quoniam A B commensurabilis est ipsi B C longitudine, atque est A B æqualis B D; erit B D ipsi B C longitudine commensurabilis. Est autem



⁷ Def. 8. hujus.

et ut B D ad B C, ita D A ad A C⁸; et commensurabile est B D ipsi B C: ergo et D A ipsi A C commensurabile erit⁹. Estque rationale D A: quare et A C est¹⁰ rationale¹⁰.

⁸ Def. 9. hujus.

Quod igitur sub rationalibus, &c. Q. E. D.

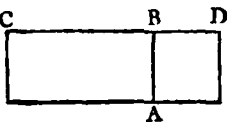
PROP. XXI. THEOR.

[XXI.]

Si rationale ad rationalem applicetur, latitudinem efficit rationalem, et ei, ad quam applicatum est, longitudine commensurabilem.

Rationale enim A C ad rationalem, nempe A B, applicetur, latitudinem faciens B C: dico B C rationalem esse, et ipsi A B longitudine commensurabilem.

Describatur enim ex A B quadratum A D: ergo A D rationale est. Sed et rationale est A C: ergo A D ipsi A C est commensurabile,



* Def. 9. *menfurabile*^a. Atque est ut DA ad AC , ita DB ad BC ^b. Communfurabilis igitur est DB ipsi BC longitudine. Est autem BD æqualis BA : quare AB ipsi BC longitudine communfurabilis est. Sed AB est rationalis. Rationalis igitur est et BC , et ipsi BA longitudine communfurabilis.

hujus.
b 1. sexti.

Si igitur rationale ad rationalem applicetur, &c.
Q. E. D.

[XXII.]

PROP. XXII. THEOR.

*Quod sub rationalibus potentiâ solum communfurabilibus re-
ctis lineis continetur rectangulum, irrationale est; et recta
linea, ipsum potens, est irrationalis, vocetur autem media.*

Vide fig.
Prop. 20.

Sub rationalibus enim potentiâ solum communfurabilibus rectis lineis AB , BC contineatur rectangulum AC : dico AC irrationale esse; et rectam lineam, quæ ipsum potest, irrationalem esse; vocetur autem media.

* Def. 8.
hujus.

Describatur enim ex AB quadratum AD : ergo AD rationale est^c. Et quoniam AB incommunfurabilis est ipsi BC longitudine, potentiâ enim solum ponuntur communfurabiles, atque est AB æqualis BD : incommunfurabilis igitur est DB ipsi BC longitudine. Est autem ut DB ad BC , ita AD ad AC ^d: ergo AC ipsi AD est incommunfurabile. Sed AD rationale est: irrationale igitur est AC ^e: quare et recta linea, quæ ipsum

d 1. sexti.

* Def. 10.
hujus.

AC potest, videlicet, quæ potest quadratum ipsi æquale, est irrationalis^f. Vocetur autem media; propterea quod

f Def. 11.
hujus.

ipsum quadratum est æquale rectangulo, quod sub AB , BC continetur, et inter ipsas AB , BC media sit proportionalis. *Q. E. D.*

[XXIII.]

PROP. XXIII. THEOR.

Quod fit a mediâ ad rationalem applicatum latitudinem efficit rationalem; sed ei, ad quam applicatum est, longitudine incommunfurabilem.

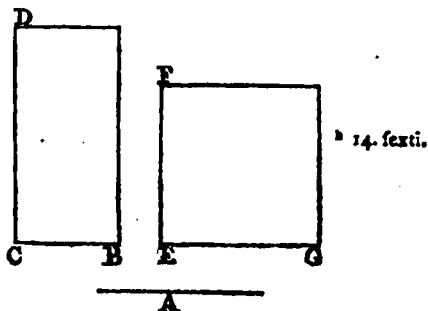
Duarum quarundam rationalium, potentiâ solum communfurabilium, sit media A ; et ad aliquam rationalem, CB , ei quod fit ex A æquale spatium applicetur BD , latitudinem faciens CD : dico CD rationalem esse, sed ipsi BC longitudine incommunfurabilem.

Quoniam enim media est A , potest spatium contentum sub rationalibus potentiâ solum communfurabilibus^g. Possit GF , sub rationalibus potentiâ solum communfurabilibus EG , EF comprehensum. Sed potest et BD .

Æquale

g 22. hujus.

Æquale igitur est BD ipsi GF . Atque est illi æqui-
angulum; æqualium au-
tem et æquiangulorum
parallelogrammorum la-
tera, quæ circum æquales
angulos, sunt reciproce
proportionalia^b: ergo ut
recta BC ad EG rectam,
ita est EF ad CD . Est
igitur et ut quadratum
ex BC ad quadratum ex
 EG , ita quadratum ex EF
ad id quod fit ex CD qua-
dratum^c. Sed quadratum



ex BC commensurabile est quadrato ex EG ^d, utraque enim^e Def. 6.
ipsarum est rationalis: commensurabile igitur est et qua-
dratum ex EF quadrato ex CD ^f. Est autem quadratum^g 10. hujus.
ex EF rationale; nimirum cum EG , EF rationales sint
potentiâ commensurabiles. Ergo et rationale est qua-
dratum ex CD . Ac propterea recta linea CD est ratio-
nalis^h. Præterea quoniam FE incommensurabilis est ipsi
 EG longitudine, potentiâ enim solum commensurabiles
suntⁱ, ut autem FE ad EG , ita quadratum ex EF ad re-^{22. hujus.}
ctangulum sub FE , EG : erit quadratum ex EF in-
commensurabile rectangulo sub FE , EG ^j. Sed qua-
drato quidem ex EF commensurabile est quadratum
ex CD , id enim ostensum: ergo quadratum ex CD in-
commensurabile est rectangulo sub EF , EG . Sed eidem
rectangulo sub EF , EG est commensurabile rectangu-
lum sub DC , CB , utrumque enim est æquale quadrato
ex A : ergo quadratum ex CD incommensurabile est re-
ctangulo sub DC , CB ^k. Sed ut quadratum ex CD ad^{13. hujus.}
rectangulum sub DC , CB , ita est DC ad CB . Ergo DC
ipsi CB incommensurabilis est longitudine; et ob id DC
est rationalis, sed ipsi CB longitudine incommensura-
bilis^l. Q. E. D.

PROP. XXIV. THEOR.

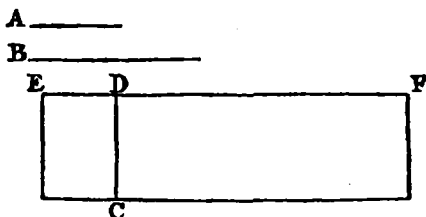
[XXIV.]

*Mediæ commensurabilis, siue longitudine siue potentiâ tan-
tum, media est.*

Sit media A , et ipsi A commensurabilis sit B : dico et
 B mediam esse.

Exponatur enim rationalis CD , et quadrato quidem
ex A æquale ad CD applicetur spatium rectangulum
 CE ,

CE , latitudinem efficiens ED . Rationalis igitur est ED ,



- * 23. hujus. sed ipsi CD longitudine incommensurabilis¹. Quadrato autem ex B æquale ad DC applicetur spatium rectangulum CF , latitudinem efficiens DF . Quoniam igitur recta A potentiâ saltem commensurabilis est ipsi B , erit quadratum ex A quadrato ex B commensurabile². Sed quadrato quidem ex A æquale est rectangulum EC ³; quadrato autem ex B æquale CF . Commensurabile igitur est rectangulum EC rectangulo CF . Atque est ut EC ad CF , ita ED ad DF ⁴: ergo ED ipsi DF longitudine est commensurabilis. Est autem ED rationalis, et longitudine incommensurabilis ipsi DC ⁵: ergo et DF rationalis est, et ipsi DC longitudine incommensurabilis⁶: rationales igitur sunt CD , DF , potentiâ solum commensurabiles. Quod autem sub rationalibus potentiâ solum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, irrationale est; et recta linea ipsum potens est irrationalis, vocaturque media⁷: ergo recta linea quæ potest rectangulum sub CD , DF est media. Sed B potest rectangulum sub CD , DF : quare B media erit.

* DEFINITIO XII.

Spatium medium dicitur, quod quadrato ex mediâ est æquale.

Cor. Ex hoc manifestum est spatium medio spatio commensurabile medium esse. Possunt enim ipsa rectæ lineæ quæ sunt potentiâ commensurabiles, quarum altera media est: ergo et reliqua media erit.

[XXV.]

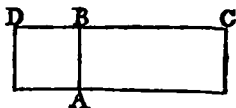
PROP. XXV. THEOR.

Quod sub mediis longitudine commensurabilibus rectis lineis continetur, rectangulum medium est.

Sub mediis enim longitudine commensurabilibus rectis lineis AB , BC contineatur rectangulum AC : dico AC medium esse.

Describatur

Describatur enim ex AB quadratum AD : ergo AD medium est. Et quoniam commensurabilis est AB ipsi BC longitudine, æqualis autem AB ipsi BD ; erit DB ipsi BC longitudine commensurabilis: quare DA commensurabile est ipsi AC . Sed AD est medium: ergo et AC medium erit^a. Q. E. D.



^a Cor. 24. hujus.

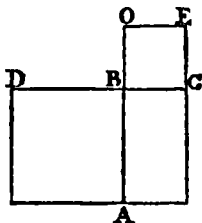
PROP. XXVI. THEOR.

[XXVI.]

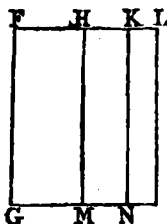
Quod sub mediis potentiâ solum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel rationale est vel medium.

Sub mediis enim potentiâ solum commensurabilibus rectis lineis AB , BC contineatur rectangulum AC : dico AC vel rationale esse, vel medium.

Describantur enim ex AB , BC , quadrata AD , BE : utrumque igitur ipsorum AD , BE medium est. Exponatur rationalis FG ; et ipsi quidem AD æquale ad FG applicetur parallelogrammum rectangulum GH , latitudinem faciens FH ; ipsi vero AC æquale ad HM applicetur rectangulum MK , latitudinem faciens HK ^b; et insuper ipsi BE æquale similiter ad KN applicetur NL , latitudinem faciens KL . In rectâ igitur lineâ sunt FH , HK , KL ^c. Quoniam igitur medium est utrumque ipsorum AD , BE , atque est AD quidem æquale ipsi GH , BE vero ipsi NL ; erit et utrumque ipsorum GH , NL medium, et ad rationalem FG applicata sunt. Ergo et utraque ipsarum FH , KL est rationalis, et ipsi FG longitudine incommensurabilis^d. Et^e quoniam commensurabile est AD ipsi BE ^e; erit et GH ex hyp. ipsi NL commensurabile. Sed est ut GH ad NL , ita FH ad KL ^f. Ergo FH ipsi KL est commensurabilis longitudine^g; ac propterea FH , KL rationales sunt^h longitudine commensurabiles. Rationale igitur est rectangulum, quod sub FH , KL continetur^h. Et quoniamⁱ BD quidem ipsi BA est æqualis, OB vero ipsi BC ; erit ut



^b 45. primâ.



^c 14. primi.

^d 23. hujus.

^e ex hyp.

^f 1. sexti.

^g 10. hujus.

^h 20. hujus.

ⁱ ut

- ut DB ad BC , ita AB ad BO . Sed ut DB ad BC , ita
 * 1. sexti. DA quadratum ad rectangulum AC^2 . Ut autem AB
 ad BO , ita AC rectangulum ad quadratum CO : est igitur
 ut DA ad AC , ita AC ad CO . Aequale autem est
 AD ipsi GH , et AC ipsi MK , et CO ipsi NL . Quare ut
 GH ad MK , ita MK ad NL ; et igitur ut FH ad HK ,
 ita HK ad KL : ideoque quod sub FH , KL continetur
 * 17. sexti. est æquale quadrato, quod fit ex HK ^b. Est autem quod
 * 20. hujus. continetur sub FH , KL rationale¹: ergo et rationale est
 quadratum ex HK ; ac propterea recta linea HK ra-
 tionalis. Et si quidem HK commensurabilis est ipsi
 HM , hoc est, ipsi FG , longitudine, erit rectangulum
 * 22. hujus. NN rationale^k. Si vero HK est incommensurabilis ipsi
 & Def. 12. FG longitudine, KN , HM rationales erunt potentiâ so-
 lum commensurabiles, et ob id rectangulum NN me-
 dium erit^k: ergo NN vel rationale est vel medium. Sed
 NN est, æquale ipsi AC : quare AC vel rationale, vel
 medium est.

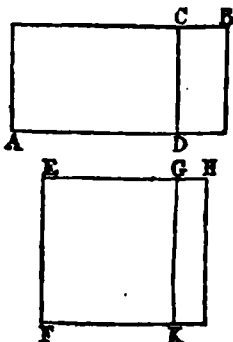
Quod igitur sub mediis potentiâ solum commensura-
 bilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel rationale
 est, vel medium. Q. E. D.

[XXVII.]

PROP. XXVII. THEOR.

Medium non superat medium rationali.

- Si enim fieri potest, medium AB superet medium AC
 rationali DB ; et exponatur ratio-
 nalis EF , atque ipsi quidem AB
 æquale ad EF applicetur paral-
 lelogrammum rectangulum FH ,
 latitudinem faciens EM ; ipsi vero
 * 45. primi. AC æquale auferatur FG ¹: reli-
 quum igitur BD reliquo KN est
 æquale. Quoniam igitur medi-
 um est utrumque ipsorum AB ,
 AC , estque AB æquale FH , et
 AC æquale FG ; erit et utrumque
 ipsorum FH , FG medium. Et
 ad rationalem EF applicata sunt:
 rationalis igitur est utraque ea-
 rum EM , EG , sed ipsi EF longitudine incommensura-
 * 23. hujus. bilis^m. Et quoniam rationale est DB , et ipsi KN æ-
 quale; et KN rationale erit. Est autem ad rationalem
 EF applicatum: rationalis igitur est GN , et ipsi EF
 commen-



commensurabilis longitudine^a. Sed et EG est ratio-^a 21. hujus.
nalis, et ipsi EF longitudine incommensurabilis: ergo
EG incommensurabilis est ipsi GH longitudine^a. At-^a 13. hujus.
que est ut EG ad GH, ita quadratum ex EG ad rectan-
gulum, quod sub EG, GH continetur^o: incommensura-^o 1. sexti.
bile igitur est quadratum ex EG rectangulo sub EG,
GH^p. Sed quadratum quidem ex EG commensura-^p 10. hujus.
bile est quadratis ex EG, GH simul sumptis; nimirum
cum quadrata illa ex EG, GH utraque sunt rationalia.
Rectangulo autem sub EG, GH commensurabile est
quod bis sub EG, GH continetur rectangulum, utpote
illius duplum. Quadratis igitur ex EG, GH simul
sumptis incommensurabile est id, quod bis sub EG, GH
continetur rectangulum^q. Quapropter et quod com-^q 14. hujus.
ponitur ex quadratis ex EG, GH simul sumptis, unà
cum eo, quod bis sub EG, GH continetur, rectangulo,
hoc est, ipsum ex EH quadratum^r, incommensurabile^r 4. secundi.
est quadratis ex EG, GH^r. Sunt autem rationalia quæ^r 17. hujus
sunt ex EG, GH quadrata: irrationale igitur est qua-
dratum ex EH^r: ac propterea EH est irrationalis. Sed^r 10. hujus.
et rationalis, quod fieri non potest.

Non igitur medium superat medium rationali. Q. E. D.

PROP. XXVIII. PROBL.

[XVIII.]

Datis duabus rationalibus potentiâ solum commensurabilibus, medias invenire potentiâ solum commensurabiles, quæ rationale contineant.

Exponentur duæ rationales potentiâ solum commensurabiles A, B, et sumatur inter ipsas A, B media proportionalis C^a, fiatque ut A ad B, ita C ad D^a.

^a 13. sexti.

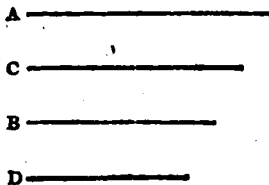
^a 12. sexti.

Quoniam igitur A, B rationales sunt potentiâ solum commensurabiles, erit quod sub

ipsis A, B continetur rectan-
gulum^r, hoc est, quadratum ex

C^r, medium: ergo recta linea
C media est. Et quoniam ut

A ad B, ita est C ad D, suntque
A, B potentiâ solum commensurabiles; et C, D potentiâ solum commensurabiles erunt^a. Est autem recta linea^a 10. hujus.
C media: media igitur est et D^b: quare C, D mediæ^b 24. hujus.
sunt potentiâ solum commensurabiles. Dico etiam ipsas
rationale continere. Quoniam enim est ut A ad B,
ita C ad D, erit permutando ut A ad C, ita B ad D^c.^c 16. quinti.
Sed



Sed ut A ad c , ita c ad B : ergo et ut c ad B , ita B ad D : quod igitur sub ipsis c , D continetur, quadrato ex B est æquale ². Rationale autem est quadratum ex B . Ergo et quod continetur sub c , D , rationale erit.

Inventæ igitur sunt mediæ potentiâ solum commensurabiles, quæ rationale continent. *Q. E. F.*

[XXIX.]

PROP. XXIX. PROBL.

Datis tribus rationalibus potentiâ solum commensurabilibus, medias invenire potentiâ solum commensurabiles, quæ medium contineant.

Exponantur tres rationales potentiâ solum commensurabiles A , B , C , sumaturque inter ipsas A , B media proportionalis D ^d, et fiat ut B ad c , ita D ad E ^e.

Quoniam igitur A , B rationales sunt potentiâ solum commensurabiles, erit quod

sub A , B continetur rectan- A —————

gulum ^f, hoc est, quadratum

ex D , medium ²: ergo D D —————

media est. Et quoniam B , C B —————

sunt rationales potentiâ solum commensurabiles, atque

est ut B ad c , ita D ad E ; C —————

rectæ lineæ D , E potentiâ solum commensurabiles erunt ^h. E —————

Est autem D media: ergo et

E media est ⁱ; ac propterea D , E mediæ sunt potentiâ solum commensurabiles. Dico ipsas etiam medium continere. Quoniam enim est ut B ad c , ita D ad E , erit permutando ut B ad D , ita c ad E . Ut autem B ad D , ita est D ad A : ergo et ut D ad A , ita c ad E . Quod igitur sub A , c continetur rectangulum, est æquale contento sub D , E ^k. Est autem quod continetur sub A , c medium ^f. Ergo et quod continetur sub D , E , medium erit.

Inventæ igitur sunt mediæ potentiâ solum commensurabiles, quæ medium continent. *Q. E. F.*

LEMMA IV.

Invenire duos numeros quadratos, ita ut qui ex ipsis componitur etiam quadratus sit.

Exponantur duo numeri A B , B C , qui vel pares sint

A D C B

utrique, vel utrique impares. Et quoniam sive a pari par auferatur,

auferatur, five ab impari impar, reliquus par est¹; erit AC^1 ^{24. & 26.} numerus par. Secetur AC bifariam in D . Ergo qui fit ^{noni.} sub AB , BC una cum quadrato ex CD est æqualis ei, qui fit ex BD quadrato^m. Sed et similes plani sint^m ^{6. secundi.} AB , BC . Itaque qui fit ex AB , BC est quadratus; ostensum enim est si duo similes plani sese multiplicantes aliquem faciant, factum quadratum esseⁿ. In-^a ^{1. noni.} venti igitur sunt duo quadrati numeri, videlicet qui fit sub AB , BC , et qui fit ex CD , qui quidem inter se compositi quadratum numerum faciunt, nempe eum qui fit ex BD . *Q. E. F.*

Cor. Et manifestum est rursus inventos esse duos numeros quadratos, et qui fit ex BD , et qui ex CD , ita ut ipsorum excessus, videlicet qui fit sub AB , BC , sit quadratus; quando AB , BC similes plani sunt. Quando autem non sunt similes plani, inventi sunt duo quadrati, et qui fit ex BD , et qui ex CD , quorum excessus, nempe qui sub AB , BC , non est quadratus.

LEMMA V.

Invenire duos quadratos numeros, ita ut qui ex ipsis componitur non sit quadratus.

Sit enim qui sub AB , BC quadratus^o, ut dictum est, ^o Lemma et par numerus CA ; seceturque CA bifariam in D . ^{præc.} Perspicuum est quadratum factum ex AB , BC , una cum quadrato ex CD , æqualem esse ei qui fit ex BD quadrato^m. Auferatur unitas DE ; ergo qui sub AB , BC quadratus una cum quadrato ex CE , minor est quadrato ex BD . Dico igitur numerum, ex quadrato sub AB , BC , una cum quadrato ex CE compositum, quadratum non esse.

Vel quod perinde est, si factus sub AB , BC et quadratus ex CE compositi efficiant numerum M , dico M non esse quadratum. Propter æquales AD , DC , major

$A \dots G \dots D \cdot E \dots C \dots B$

M 160.

N —

erit AE quam EC . Majori igitur AE auferatur EG , minori EC æqualis. Et cum EA major sit quam EG , addito communi BE , major erit BA quam BG . Factus igitur ex AB , BC factus ex GB , BC major. Et quadrato

U

ex

A . . . G . . . D . E C B

M 160.

N —

ex CE communiter addito, qui componitur ex facto sub AB , BC una cum quadrato ex CE major erit eo, qui componitur ex facto sub GB , BC una cum quadrato ex CE . Sed composito ex prioribus æqualis est numerus ^{26. secundi.} M ; ex alteris composito, quadratus ex BE ^p. Numerus igitur M quadrato ex BE major erit. Idem vero numerus M , ex facto utique sub AB , BC una cum quadrato CE compositus, quadrato ex BD , ex supra ostensis, minor. Jam vero si quadratus sit numerus M , numerus aliquis seipsum multiplicans illum M fecerit. Sit igitur N numerus, qui, seipsum multiplicans, illum M fecit. Et cum quadratus M quadrato ex BE major, quadrato autem ex BD minor sit, quadrati autem majores ex majoribus necessario fiant; omnino numerus N , ex quo factus est quadratus M , numero BE major, numero autem BD minor erit. Quod est absurdum. Non datur enim numerus minor quam BD , qui major idem sit quam BE . Quando ipsi BD , BE unitate differunt. Non est igitur quadratus M . Inveniuntur igitur quadrati duo, nempe quadratus sub AB , BC factus, et quadratus ex CE , qui compositi non quadratum efficiunt.

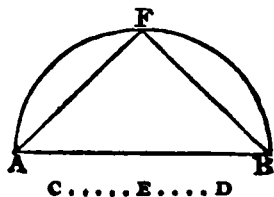
[XXX.]

PROP. XXX. PROBL.

Invenire duas rationales, potentiâ solum commensurabiles, ita ut major plus possit quam minor quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

Exponatur rationalis quædam AB , et duo quadrati numeri CD , DE , ita ut ipforum excessus CE non
^q Cor. Lem. fit quadratus^a: describatur autem super rectam lineam
^{4.} AB semicirculus AFB , fiatque ut DC ad CE , ita ex AB
^r Cor. 6. quadratum ad quadratum ex AF ^r; et FB jungatur.
 hujus.

Quoniam igitur est ut quadratum ex BA ad quadratum ex AF , ita DC ad CE ; habebit quadratum ex BA ad quadratum ex AF rationem eam, quam numerus DC ad CE numerum. Ergo quadratum ex BA quadrato ex AF est commen-



furabile.

abile¹. Sed rationale est quadratum ex AB ²: ergo³ 6. hujus.
 quadratum ex AF rationale erit⁴; ac propterea recta⁵ Def. 8.
 AF est rationalis⁶. Et quoniam DC ad CE ra-⁷ Def. 9.
 tionem non habet, quam quadratus numerus ad qua-⁸ hujus.
 ratum numerum⁹, neque quadratum ex BA ad qua-¹⁰ Def. 6.
 ratum ex AF rationem habebit, quam quadratus nu-¹¹ hujus.
 merus ad quadratum numerum. Incommensurabilis¹² Per con-
 itur est recta linea BA ipsi AF longitudine¹³: ergo¹⁴ 9. hujus.
 BA , AF rationales sunt potentiâ solum commensura-
 les¹⁵. Quod cum sit ut DC ad CE , ita quadratum¹⁶ Def. 3.
 ex BA ad quadratum ex FA ; erit per conversionem¹⁷ hujus.
 rationis ut CD ad DE , ita quadratum ex AB ad qua-
 ratum ex BF ¹⁸. Sed CD ad DE rationem habet,¹⁹ Cor. 19.
 quam quadratus numerus ad quadratum numerum: quinti, &
 ergo et quadratum ex AB ad quadratum ex BF rationem²⁰ 47. primi.
 habebit, quam quadratus numerus ad quadratum nume-
 rum; et ob id recta linea AB ipsi BF longitudine est
 incommensurabilis²¹. Atque est quadratum ex AB æ-
 quale quadratis ex AF , FB : ergo AB plus potest quam
 F , quadrato rectæ lineæ BF sibi commensurabilis lon-
 gitudine.

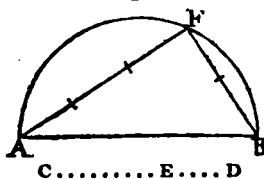
Inventæ igitur sunt duæ rationales potentiâ solum
 incommensurabiles BA , AF , ita ut major BA plus potest
 quam minor AF , quadrato ipsius FB , sibi longitudine
 incommensurabilis. Q. E. F.

PROP. XXXI. PROBL.

[XXXI.]

venire duas rationales, potentiâ solum commensurabiles,
 ita ut major plus possit quam minor quadrato rectæ lineæ
 sibi longitudine incommensurabilis.

Exponatur rationalis AB , et duo numeri quadrati CE ,
 DE , ita ut CD , qui ex ipsis com-
 nitur, non sit quadratus¹; at-
 que super rectam lineam AB
 semicirculus AFB describatur,
 fiat ut DC ad CE , ita qua-
 ratum ex AB ad quadratum
 ex AF ², et jungatur FB . Simi-
 ter quidem ostendemus, ut in antecedente, AB , AF
 rationales esse potentiâ solum commensurabiles. Et
 quoniam est ut DC ad CE , ita quadratum ex BA ad id
 quadratum ex AF ; erit per conversionem rationis
 ut



³ Lemma 5.
 hujus.

⁴ Cor. 6.
 hujus.

ut $c d$ ad $d e$, ita quadratum ex $a b$ ad quadratum ex $b f$. Sed $c d$ ad $d e$ rationem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum^f. Non igitur quadratum ex $a b$ ad quadratum ex $b f$ rationem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Ergo $a b$ ipsi $b f$ longitudine est incommensurabilis^g. Et $a b$ plus potest quam $a f$ quadrato rectæ lineæ $f b$, sibi longitudine incommensurabilis. Q. E. F.

[XXXII.]

PROP. XXXII. PROBL.

Invenire duas medias potentiâ solum commensurabiles, quarum rationale contineant; ita ut major plus possit quam minor quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

Exponentur duæ rationales potentiâ solum commensurabiles A, B , ita ut A major plus possit quam B minor quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis^h.
 Et sit rectangulo sub A, B æquale quadratum, quod sit a rectâ lineâ c . Media igitur est recta c ⁱ. Quadrato vero, quod sit ex B , æquale sit rectangulum sub c, d ; rationale autem est quod ex B : ergo et rectangulum sub c, d est rationale. Et quoniam est ut A ad B , ita rectangulum sub A, c ad quadratum ex B ; sed rectangulo quidem sub A, c æquale est quadratum ex c , quadrato autem ex B æquale rectangulum sub c, d ^k: erit ut A ad B , ita quadratum ex c ad rectangulum sub c, d . Sed quadratum ex c ad rectangulum c, d , ita recta lineâ c ad ipsam d : ut igitur A ad B , ita c ad d . Commensurabilis autem est A ipsi B potentiâ solum: ergo et c ipsi d potentiâ solum est commensurabilis^l. Atque est c media: media igitur est et d ^m. Et quoniam est ut A ad B , ita c ad d , et A plus potest quam B quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine; et c plus poterit quam d quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilisⁿ.

Inventæ igitur sunt duæ mediæ potentiâ solum commensurabiles c, d , quæ rationale continent, et c plus potest quam d quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Q. E. F.

Similiter

Similiter autem ostendetur, inveniri posse duas medias, potentiâ solum commensurabiles, et continentes rationale, ita ut major plus possit quam minor quadrato rectæ sibi incommensurabilis longitudine. Id enim efficietur, si A plus possit quam B quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

PROP. XXXIII. PROBL.

[XXXIII.]

Invenire duas medias potentiâ solum commensurabiles, quæ medium contineant; ita ut major plus possit quam minor quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

Exponentur tres rationales A, B, C potentiâ solum

commensurabiles, quarum A plus possit quam C quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis; et sit rectangulo sub ipsis A, B æquale quadratum, quod sit ex D¹. Itaque recta linea D

A —————

D —————

B —————

E —————

C —————

¹ 14. secundi.² 22. hujus.³ 45. primi.

media¹. Rectangulo autem sub B, C æquale sit rectangulum sub D, E². Quoniam

igitur est ut rectangulum sub A, B ad rectangulum sub B, C, ita recta linea A ad ipsam C³; sed rectangulo quidem sub A, B æquale est quod sit ex D quadratum, rectangulo autem sub B, C æquale rectangulum sub D, E; erit ut A ad C, ita quadratum ex D ad rectangulum sub D, E. Sed ut quadratum ex D ad rectangulum sub D, E, ita D ad E⁴; et igitur ut A ad C, ita D ad E,

Commensurabilis autem est A ipsi C potentiâ solum⁵; ergo et D ipsi E potentiâ solum est commensurabilis⁶.

Atqui est D media: media igitur est et E⁷. Itaque quoniam est ut A ad C, ita D ad E, et A plus potest quam C quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis; et D plus poterit quam E quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine⁸. Dico præ-

terea rectangulum sub D, E medium esse. Quoniam enim rectangulo sub B, C æquale est rectangulum sub D, E⁹; medium autem est quod sub B, C¹⁰: ergo et quod sub D, E medium erit.

Inventæ igitur sunt duæ mediæ potentiâ solum commensurabiles D, E, quæ medium contineant; ita ut

v 3

major

¹¹ 22. &

Def. 12.

hujus.

major plus possit quam minor quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Q. E. F.

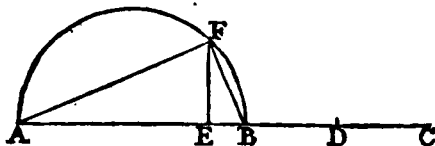
Rursus similiter ostenditur, quomodo inveniatur duæ mediæ potentiâ solum commensurabiles et medium continentes, ita ut major plus possit quam minor quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. Id enim efficietur, si A plus possit quam C quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

[XXXIV.]

PROP. XXXIV. PROBL.

Invenire duas rectas lineas potentiâ incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum vero, quod sub ipsis continetur, medium.

Exponentur duæ rationales potentiâ solum commensurabiles A B, B C, ita ut major A B plus possit quam minor B C quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.



- * 31. hujus. mensurabilis^e; et recta B C secta fit bifariam ad D; et quadrato, quod fit ab alterutrâ ipsarum B D, D C, æquale parallelogrammum ad rectam lineam A B applicetur, deficiens figurâ quadratâ^f, et sit quod continetur sub A E, E B; et describatur super rectam lineam A B semicirculus A F B, ducaturque ipsi A B ad rectos angulos E F; et A F, F B jungantur; quæ, propter semicirculum, angulum A F B rectum continebunt^g.

- Quoniam igitur duæ rectæ lineæ A B, B C inæquales sunt, et A B plus potest quam B C quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis; quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori B C, hoc est, quadrato dimidiæ ipsius, æquale parallelogrammum applicatum est ad A B, deficiens figurâ quadratâ, quod quidem sub A E, E B continetur; erit A E ipsi E B incommensurabilis^b. Et quoniam est ut A E ad E B, ita rectangulum sub B A, A E ad rectangulum sub A B, B Eⁱ; rectangulum autem sub B A, A E, quadrato ex A F est æquale, et rectangulum sub

sub AB , BE æquale quadrato ex BF^k ; quadratum igitur ex AF incommensurabile est quadrato ex FB : ideoque rectæ lineæ AF , FB potentiâ sunt incommensurabiles. Et quoniam AB rationalis est, et quadratum, quod fit ex AB , erit rationale: ergo et rationale compositum ex quadratis ipsarum AF , FB . Nimirum cum ex quadratis illis compositum fit quadratum ipsum ex AB . Rursus, quoniam rectangulum sub AE , EB est æquale quadrato ex EF^k , ponitur autem rectangulum sub AE , EB quadrato etiam ex BD æquale: ergo FE est æqualis BD : ac propterea BC ipsius EF est dupla. Rectangulum igitur sub AB , BC duplum est rectanguli sub AB , EF^m . Sed rectangulum sub AB , BC est medium: ergo et medium est, quod continetur sub AB , EF . Est autem quod sub AB , EF continetur æquale contento sub AF , FB . Nimirum cum utrumque trianguli AFB duplum sit P . Contentum igitur sub AF , FB medium est. Sed et ostensum est, rationale esse quod componitur ex ipsarum quadratis.

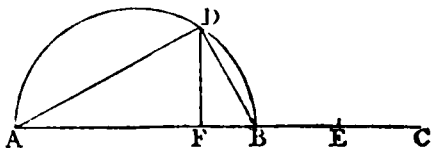
Inventæ igitur sunt duæ rectæ lineæ potentiâ incommensurabiles AF , FB , quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum vero, quod sub ipsis continetur, medium. *Q. E. F.*

PROP. XXXV. PROBL.

[XXXV.]

Invenire duas rectas lineas potentiâ incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, rectangulum vero quod sub ipsis continetur rationale.

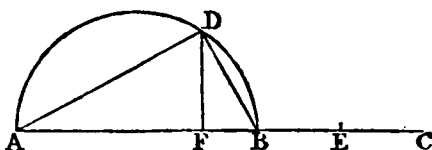
Exponantur duæ mediæ potentiâ solum commensurabiles AB , BC , quæ rationale contineant, ita ut AB plus possit quam BC quadrato rectæ lineæ sibi longi-



tudine incommensurabilis; et super ipsam AB , describatur semicirculus ADB , seceturque BC bifariam in E ; et applicetur ad AB parallelogrammum æquale quadrato ipsius BE , deficientis figurâ quadratâ, et sit quod

U 4

continetur



continetur sub AF , FB . Incommensurabilis igitur est AF ipsi FB longitudine^a. A puncto autem F ipsi AB ad rectos angulos ducatur FD , et AD , DB jungantur: quæ, propter semicirculum, angulum ADB , rectum continebunt.

Itaque quoniam AF est incommensurabilis ipsi FB , erit et rectangulum sub BA , AF rectangulo sub AB , BF incommensurabile^x. Est autem rectangulum quidem sub BA , AF quadrato ipsius AD æquale; rectangulum vero sub AB , BF æquale quadrato ipsius DB ^y. Incommensurabile igitur est quadratum ex AD ipsius DB quadrato; ac propterea rectæ lineæ AD , DB potentiæ sunt incommensurabiles. Et quoniam est medium quadratum ipsius AB , erit et compositum ex quadratis ipsarum AD , DB medium. Nimirum cum ex

quadratis illis compositum sit quadratum ipsum ex AB ^z. Quod cum dupla sit BC ipsius DF , et rectangulum sub AB , BC rectanguli sub AB , FD duplum erit^a: quare et commensurabile. Rationale autem est rectangulum sub AB , FD est rationale. Sed rectangulo sub AB , FD æquale est rectangulum sub AD , DB : nimirum cum

utrumque trianguli ADB duplum sit^b. Quare et ipsum sub AD , DB rectangulum rationale erit.

Inventæ igitur sunt duæ rectæ lineæ potentiæ incommensurabiles AD , DB , quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, rectangulum vero, quod sub ipsis continetur, rationale. *Q. E. F.*

[XXXVI.]

PROP. XXXVI. PROBL.

Invenire duas rectas lineas potentiæ incommensurabiles, quæ faciant et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum quod sub ipsis continetur medium, et adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis.

Exponentur duæ mediæ potentiæ solum commensurabiles AB , BC , quæ medium contineant, ita ut AB plus possit quam BC quadrato rectæ lineæ sibi longitudine

dine incommensurabilis^b; et super AB semicirculus ADB ^b 33. hujus. describatur, et reliqua fiant, ut in iis quæ superius dicta sunt.

Quoniam igitur AF incommensurabilis est ipsi FB longitudine, erit et AD ipsi DB potentiâ incommensurabilis. Et quoniam medium est, quod fit ex AB , et compositum ex quadratis ipsarum DA , DB est medium. Quod cum rectangulum sub AF , FB æquale sit quadrato alterutrius ipsarum BE , DF , erit DF æqualis BE ; ac propterea BC ipsius FD dupla. Rectangulum igitur sub AB , BC duplum est ejus, quod sub AB , FD continetur. Medium autem est rectangulum sub AB , BC ^c; ^c ex hyp. ergo et quod continetur sub AB , FD est medium: atque est æquale contento sub AD , DB . Quare et ipsum sub AD , DB rectangulum medium erit. Et quoniam incommensurabilis est AB ipsi BC longitudine, commensurabilis autem CB ipsi BE ; erit et AB ipsi BE longitudine incommensurabilis: ergo et quadratum ex AB incommensurabile est rectangulo sub AB , BE ^d, ^d 1. sexti. & Sed quadrato quidem ex AB æqualia sunt quæ ex AD , ^{10. hujus.} DB sunt quadrata; rectangulo autem sub AB , BE æquale est rectangulum sub AB , FD , hoc est, rectangulum sub AD , DB . Compositum igitur ex quadratis ipsarum AD , DB rectangulo sub AD , DB est incommensurabile.

Inventæ igitur sunt duæ rectæ lineæ potentiâ incommensurabiles, quæ faciunt compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum quod sub ipsis continetur medium, et adhuc composito ex ipsarum quadratis incommensurabile. *Q. E. F.*

Principium Senariorum per Compositionem.

SCHOLION. *

Monitos Tyrones velim non omnia, quæ Junioribus fermone Algebraico Surdorum nomine veniunt, apud Veteres *ἄλογα*, Latine irrationalia, nuncupari. Etenim illi rectas omnes, quæ expositæ cuidam *ρητῇ*, id est, rationali, seu effabili potius, sive longitudine sive potentiâ tantum, commensurabiles essent, *ρητὰς* seu effabiles statuerunt: cum nobis surdæ sint, quæcunque ipsi expositæ non sunt ipsâ longitudine commensurabiles. Quæ vero tam potentiâ quam longitudine incommensurabiles essent, eas demum Veteres *ἄλογους*, seu irracionales, vocarunt. Quæcunque igitur illis irrationalia, nobis omnino surda sunt. Haud item quæ nobis furda, ea omnia Veteribus irrationalia. Nobis scilicet furda est radix quadratica binarii; $\sqrt{2}$. Veteribus, effabilis. Vel ut magis geometricè loquamur, positâ a effabili, illa quæ potest $2 \cdot a^2$, sive $\sqrt{2} \times a$, nobis furda, illis effabilis. Quæ vero duabus a , $\sqrt{2} \times a$ proportionè media est, cum nobis furda tum illis quoque irrationalis. Quadrati diagoniam, posito latere effabili, nos surdam habemus, quanquam Veteribus effabilem. At si lateri et diagoniæ capiatur proportionè media, ea cum nobis furda tum Veteribus irrationalis. Cum igitur in sequentibus huiusmodi binomia $a + \sqrt{2} \cdot a$, irrationalia esse Euclides statuit, hoc scilicet intelligi vult, ad simplices radices quadraticas talia non posse revocari.

[XXXVII.]

PROP. XXXVII. THEOR.

Si duæ rationales, potentiâ solum commensurabiles, componentur, tota irrationalis erit; vocetur autem ex binis nominibus.

Componentur enim duæ rationales potentiâ solum commensurabiles AB , BC : dico AC irrationalem esse.

Quoniam enim incommensurabilis est AB ipsi BC longitudine, potentiâ enim solum commensurabiles sunt; et ut AB ad BC , ita rectangulum sub AB , BC ad id quod
fit

fit ex BC quadratum^e: erit rectangulum sub AB , BO ^e 1. sexti.
 quadrato ex BC incommen-
 surabile^f. Sed rectangulo 10. hujus.
 quidem sub AB , BC com- A B C
 mensurabile est id quod bis
 sub AB , BC continetur^g; quadrato autem ex BC com-^{6. hujus.}
 mensurabilia sunt quadrata ex AB , BC ^h. Quod igitur^{16. hujus.}
 bis sub AB , BC continetur, incommensurabile est qua-
 dratis ex AB , BC ; et componendo, quod bis sub AB ,
 BC continetur una cum quadratis ex AB , BC , hoc est
 quadratum ex AC ⁱ, incommensurabile est composito ex^{14. secundi.}
 ipsarum AB , BC quadratis. Rationale autem est com-
 positum ex quadratis ipsarum AB , BC . Ergo quadratum
 ex AC irrationale est; et ob id recta linea AC est irra-
 tionalis: vocetur autem ex binis nominibus.

PROP. XXXVIII. THEOR.

XXXVIII.]

*Si duæ mediæ potentiâ solum commensurabiles componantur,
 quæ rationale contineant; tota irrationalis erit: vocetur
 autem ex binis mediis prima.*

Componantur enim duæ mediæ potentiâ solum com-
 mensurabiles AB , BC , quæ rationale contineant: dico
 totam AC irrationalem esse.

Quoniam enim incommensurabilis est AB ipsi BC
 longitudine, et quadrata ex
 AB , BC incommensurabilia 13. hujus.
 erunt rectangulo, quod bis sub A B C
 AB , BC continetur^k. Ergo
 componendo, quadrata ex AB , BC , una cum eo quod
 bis sub AB , BC continetur, quod est ipsius AC qua-
 dratum^l, incommensurabile est rectangulo sub AB , BC .^{14. secundi.}
 Sed rectangulum rationale ponitur. Ergo quadratum ex
 AC irrationale est: igitur et recta linea AC irrationalis:
 vocetur autem ex binis mediis prima.

PROP. XXXIX. THEOR.

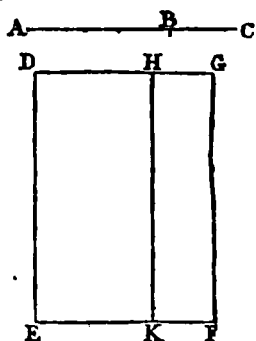
[XXXIX.]

*Si duæ mediæ potentiâ solum commensurabiles componan-
 tur, quæ medium contineant; tota irrationalis erit: vo-
 cetur autem ex binis mediis secunda.*

Componantur enim duæ mediæ potentiâ solum com-
 mensurabiles, AB , BC , quæ medium contineant: dico
 AC irrationalem esse.

Exponatur

- Exponatur rationalis DE , et quadrato ex AC æquale parallelogrammum rectangulum DF ad ipsam DE applicetur, latitudinem faciens DG ^m. Itaque quoniam quadratum ex AC æquale est quadratis ex AB , BC et rectangulo quod bis sub AB , BC contineturⁿ; applicetur ad ipsam DE quadratis ex AB , BC , æquale parallelogrammum rectangulum EH . Reliquum igitur FH æquale est ei, quod bis sub AB , BC continetur. Et quoniam media est utraque ipsarum AB , BC , erunt et quadrata ex AB , BC media. Medium autem ponitur et quod bis continetur sub AB , BC ; atque est quadratis quidem ex AB , BC æquale parallelogrammum EH , rectangulo autem bis sub AB , BC contento æquale est ipsum HF . Medium igitur est utrumque ipsorum EH , HF , et ad rationalem DE applicantur: ergo utraque recta linea DH , HG est rationalis, et ipsi DE longitudine incommensurabilis^o. Et quoniam incommensurabilis est AB ipsi BC longitudine, atque est ut AB ad BC , ita quadratum ex AB ad rectangulum sub AB , BC ^p; erit quadrato ex AB rectangulum sub AB , BC incommensurabile^q. Sed quadrato quidem ex AB commensurabile est compositum ex quadratis ipsarum AB , BC ; rectangulo autem sub AB , BC est commensurabile, quod bis sub AB , BC continetur^r: ergo compositum ex quadratis ipsarum AB , BC incommensurabile erit ei, quod bis continetur sub AB , BC ^s. Sed quadratis ex AB , BC æquale est parallelogrammum EH , et rectangulo quod bis sub AB , BC continetur æquale HF parallelogrammum^t. Quare EH ipsi HF est incommensurabile; et ob id recta linea DH ipsi HG incommensurabilis longitudine. Ostensæ autem sunt rationales: ergo DH , HG rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; ac propterea DG est irrationalis^u. Spatium igitur DF est irrationale. Nam si rationale esset, propter DE rationalem, talis enim ponitur, rationalis etiam esset DG ^x. Irrationale igitur est spatium DF , et ideo quæ ipsum potest est irrationalis. Potest autem ipsum DF recta linea AC ^y: ergo AC irrationalis erit, vocetur autem ex binis mediis secunda,



*Cor.** Quod sub rationali et irrationali continetur rectangulum irrationale est.

PROP. XL. THEOR.

[XL.]

Si duæ rectæ lineæ potentiâ incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem sub ipsis continetur medium; tota recta linea irrationalis erit: vocetur autem major.

Componantur enim duæ rectæ lineæ potentiâ incommensurabiles AB , BC , facientes ea, quæ proposita sunt: dico AC irrationalem esse.

Quoniam enim id, quod sub AB , BC continetur, medium est; et quod bis continetur sub AB , BC medium

erit^a: quapropter et irrationale^v. Compositum autem ex ipsarum AB , BC quadratis est rationale: ergo quod bis sub AB , BC continetur incommensurabile est composito ex quadratis ipsarum AB , BC ; et ob id quadrata ex AB , BC unâ cum eo, quod bis sub AB , BC continetur, quod est quadratum ex AC ², incommensurabile est quadratis ex AB , BC ^a. Rationale autem est compositum ex quadratis AB , BC ^b. Ergo quadratum ex AC irrationale erit; ac propterea recta linea AC est irrationalis, vocetur autem major.

^a Cor. 24.

hujus.

^v 22. hujus.

& Def. 12.

² 4. secundi.^a 17. hujus.^b ex hyp.

PROP. XLI. THEOR.

[XLI.]

Si duæ rectæ lineæ potentiâ incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem sub ipsis continetur, rationale: tota recta linea irrationalis erit, vocetur autem rationale ac medium potens.

Componantur enim duæ rectæ lineæ potentiâ incommensurabiles AB , BC , facientes ea, quæ proposita sunt: dico AC irrationalem esse.

Quoniam enim compositum ex ipsarum AB , BC quadratis medium est, quod autem bis sub AB , BC continetur rationale: erit compositum ex ipsarum AB , BC qua-

dratis incommensurabile ei, quod bis sub AB , BC continetur: quare componendo quadratum ex AC , est incommensurabile ei, quod bis continetur sub AB , BC ^c. Est autem rationale, quod bis sub AB , BC continetur: quadratum

^c 17. hujus.

quadratum igitur ex $A C$ irrationale est. Ideoque recta linea $A C$ est irrationalis, vocetur autem rationale ac medium potens.

[XLII.]

PROP. XLII. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ potentiâ incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum ex ipsarum quadratis medium; et quod sub ipsis continetur medium, et adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis: tota recta linea irrationalis erit, vocetur autem bina media potens.

Componantur enim duæ rectæ lineæ potentiâ incommensurabiles $A B$, $B C$, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum $A B$, $B C$ quadratis medium, et quod sub ipsis continetur medium, et adhuc incommensurabile composito ex ipsarum $A B$, $B C$ quadratis: dico $A C$ irrationalem esse.

Exponatur enim rationalis $D E$, et ad ipsam applicetur parallelogrammum rectangulum $D F$ æquale quadratis

ipsarum $A B$, $B C$, et parallelogrammum $G H$ æquale ei, quod

^{45. primi.} bis sub $A B$, $B C$ continetur^e.

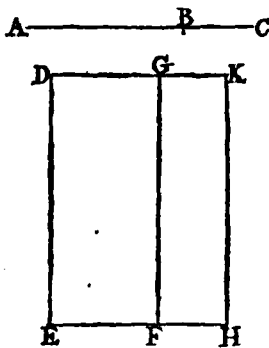
Totum igitur $D H$ quadrato ipsius $A C$ est æquale^f. Et quoniam medium est compositum ex quadratis ipsarum $A B$, $B C$, et æquale parallelogrammo $D F$; erit ipsum quoque $D F$ medium, et ad rationalem $D E$ applicatum est.

^{23. hujus.} Rationalis igitur est $D G$, et ipsi $D E$ longitudine incommensurabilis^g. Ob eandem causam et $G K$ est rationalis, et incommensurabilis longitudine ipsi $F G$, hoc est, ipsi $D E$. Et quoniam compositum ex quadratis ipsarum $A B$, $B C$ incommensurabile est ei, quod bis sub $A B$, $B C$ continetur; erit et parallelogrammum $D F$ ipsi $H G$ incommensurabile: ergo

^{1. sexti.} et recta linea $D G$ incommensurabilis est ipsi $G K$ ^h. Et sunt rationales: quare $D G$, $G K$ rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; ac propterea $D K$ est irrationalis,

^{37. hujus.} quæ ex binis nominibus appellaturⁱ. Rationalis autem

^{Cor. 39.} $D E$: ergo parallelogrammum $D H$ irrationale est^k, et ipsum



sum potens irrationalis. Sed ipsum DB potest recta linea AC^2 ; quare AC irrationalis est, vocetur autem ^o Per construct.

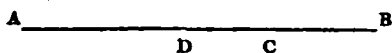
Cor. * Omnis divisio rectæ in nomina fit extra punctum divisionis mediæ.

PROP. XLIII. THEOR.

[XLIII.]

Quæ ex binis nominibus ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina.

Sit ex binis nominibus AB divisa in nomina ad punctum C : ergo AC , CB rationales sunt potentiâ solum



commensurabiles. Dico AB ad aliud punctum non dividi in duas rationales potentiâ solum commensurabiles.

Si enim fieri potest, dividatur in D , ita ut AD , DB rationales sint potentiâ solum commensurabiles. Manifestum est rectam AB , in utroque puncto C , D inæqualiter dividi. Haud enim potentiâ tantum commensurabilia essent segmenta, si in æqualia divisio fieret. Quo igitur differunt quadrata rectarum linearum AC , CB ab ipsarum AD , DB quadratis, hōc differt et quod bis sub AD , DB continetur ab eo, quod bis continetur sub AC , CB ; quoniam et quadrata rectarum linearum AC , CB , unâ cum eo, quod bis continetur sub AC , CB , et quadrata ipsarum AD , DB , unâ cum eo quod bis sub AD , DB continetur, æqualia sunt quadrato ipsius AB^2 . ^o 4. secundi. Sed quadrata ipsarum AC , CB a quadratis ipsarum AD , DB differunt rationali, etenim rationalia utraque sunt: ergo et quod bis sub AD , DB continetur a contento bis sub AC , CB differt rationali; cum ipsa media sint. Atqui medium non superat medium rationali ^p. Non igitur ^p 27. hujus. quæ ex binis nominibus ad aliud atque aliud punctum dividitur: quare ad unum duntaxat dividitur in nomina.

Q. E. D.

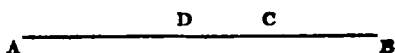
PROP. XLIV. THEOR.

[XLIV.]

Quæ ex binis mediis prima ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina.

Sit ex binis mediis prima AB divisa in puncto C , ita ut AC , CB mediæ sint potentiâ solum commensurabiles, quæ rationale contineant: dico AB in alio puncto non dividi.

Si enim fieri potest, dividatur etiam in D , ita ut AD ,
 DB



DB sint mediæ potentiâ solum commensurabiles, quæ rationale contineant. Quoniam igitur quo differt rectangulum contentum bis sub AD , DB ab eo, quod bis sub AC , CB continetur, hâc differunt etiam quadrata rectarum linearum AC , CB ab ipsarum AD , DB quadratis; rationali autem differt contentum bis sub AD , DB ab eo, quod bis sub AC , CB continetur, utraque enim sunt rationalia; rationali igitur differunt quadrata ipsarum AC , CB a quadratis ipsarum AD , DB , existentia utraque media. Illud autem fieri non potest⁴. Non igitur quæ ex binis mediis prima in alio atque alio puncto dividitur in nomina: quare in uno duntaxat dividatur necesse est. *Q. E. D.*

* LEMMA VI.

Recta quævis linea AB , in punctis C , D utcumque secetur; ita tamen ut in neutro media dividatur. Segmentorum inæqualium AC , CB sit AC majus. Inæ-



qualium item AD , DB sit AD majus. Denique duorum AC , AD sit AC majus. Dico quadrata ex AC , CB simul sumpta quadratis ex AD , DB simul sumptis esse majora.

Media enim dividatur recta AB puncto E . Jam cum⁵ ex hyp. recta AC major est quam AD , ablatâ communi AE , erit EC major quam ED , et quadratum ex EC quadrato ex ED majus. Illud igitur, quo quadratum ex EB superat quadratum ex EC , minus erit illo quo quadratum idem ex EB superat quadratum ex ED . Sed rectangulum sub AC , CB illud est, quo quadratum ex EB superat quadratum ex EC ; et rectangulum sub AD , DB illud est, quo quadratum idem ex EB superat quadratum ex ED . Rectangulum igitur sub AC , CB rectangulo sub AD , DB minus. Quapropter et duplum rectanguli sub AC , CB duplo rectanguli sub AD , DB minus erit. Illud igitur quo quadratum ex AB superat duplum rectanguli sub AC , CB majus erit illo, quo quadratum idem ex AB superat duplum rectanguli sub AD , DB . Sed quadratum ex AB superat duplum rectanguli sub AC , CB quadratis ex AC , CB simul sumptis; et quadratum

dratum idem ex AB superat duplum rectanguli sub AD , DB , quadratis ex AD , DB simul sumptis¹. Qua-^{4. secundi.}
drata igitur ex AC , CB simul sumpta quadratis ex AD ,
 DB simul sumptis sunt majora. *Q. E. D.*

*Cor. ** Iisdem positis, dico quadrata ex AD , DB simul sumpta duplo rectanguli sub AC , CB majora esse.

Nam quadrata ex AD , DB simul sumpta duplo quadrati ex EB sunt majora². Sed rectangulum sub AC ,^{9. secundi.}
 CB quadrato ex EB minus est³. Quare et duplum^{5. secundi.}
rectanguli sub AC , CB duplo quadrati ex EB minus.
Quadrata igitur ex AD , DB simul sumpta duplo re-
ctanguli sub AC , CB multo sunt majora. Pari ratione
quadrata ex AC , CB simul sumpta duplo rectanguli sub
 AD , DB sunt majora.

PROP. XLV. THEOR.

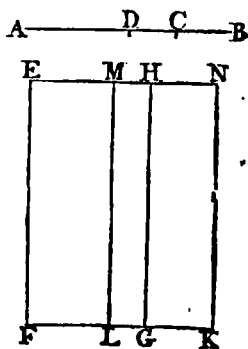
[XLV.]

Quæ ex binis mediis secunda ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina.

Sit ex binis mediis secunda AB divisa in nomina in puncto C ; ita ut AC , CB mediæ sint, potentiâ solum commensurabiles, quæ medium contineant. Dico ipsam AB in alio puncto præter C , in nomina non dividi.

Dividatur enim, si fieri potest, in alio puncto D , ita ut

AD , DB mediæ sint potentiâ solum commensurabiles, quæ medium contineant. Duarum autem AC , CB , necessario utique inæqualium, major sit AC . Duarum item AD , DB , necessario inæqualium, major sit AD . Duarum AC , AD inæqualium altera major erit. Sit AC major. Constat igitur quadrata ex AC , CB simul sumpta quadratis ex AD , DB simul sumptis esse majora¹. Exponatur rationalis EF ; et quadrato quidem ex AB æquale parallelogrammum EK

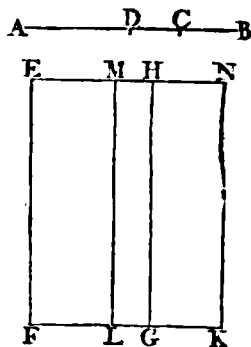
¹ Lemma 6.

ad ipsam EF applicetur; quadratis vero ex AC , CB æquale auferatur EG . Reliquum igitur HK æquale est ei, quod bis sub AC , CB continetur². Rursus, quadratis^{4. secundi.}
ex AD , DB , quæ minora sunt quadratis ex AC , CB ,
ut ostensum est, æquale parallelogrammum auferatur

X

EL:

- EL : ergo reliquum MK est æquale ei, quod bis continetur sub AD , DB . Et quoniam media sunt et commensurabilia quæ ex AC , CB quadrata, erit EG medium; et ad rationalem EF applicatum est: quare EH rationalis est, et ipsi EF longitudine incommensurabilis¹. Eadem ratione et HN est rationalis, et ipsi EF incommensurabilis longitudine. Quod cum AC , CB mediæ sint potentiâ solum commensurabiles; erit AC ipsi CB incommensurabilis longitudine. Ut autem AC ad CB , ita quadratum ex
- ¹ 1. sexti. AC ad id quod sub AC , CB continetur²: quadratum igitur ex AC incommensurabile est ei, quod continetur sub AC , CB ³. Sed quadrato quidem ex AC commensurabilia sunt quadrata ex AC , CB , etenim AC , CB potentiâ sunt commensurabiles⁴; ei vero quod continetur sub AC , CB commensurabile est illud, quod bis sub AC , CB continetur. Ergo et quadrata ex AC , CB incommensurabilia sunt ei, quod bis sub AC , CB continetur. Quadratis autem ex AC , CB æquale est parallelogrammum EG , et ei quod bis continetur sub AC , CB æquale est HK : ergo EG ipsi HK est incommensurabile; et ob id recta linea EH ipsi HN incommensurabilis longitudine, suntque rationales: ergo EH , HN rationales sunt potentiâ solum commensurabiles. Si autem duæ rationales potentiâ solum commensurabiles componantur; tota irrationalis est, quæ ex binis
- ² 37. hujus. nominibus appellatur⁵: quare EN ex binis nominibus est divisa in puncto H . Eadem ratione et EM , MN ostenduntur rationales potentiâ solum commensurabiles. Diverſa autem erunt puncta M et H . Rectangulum enim EG , quod quadratis ex AC , CB factum est æquale, majus erit rectangulo EL , quadratis ex AD , DB æquali; ac propterea rectæ EM , EH inæquales. Recta igitur EN ex binis nominibus ad aliud atque aliud punctum divisa erit in nomina, videlicet ad H et
- ³ 43. hujus. ad M . Quod fieri nequit⁶; nisi forte EN ita sit divisa in punctis illis, ut segmenta alternè sint æqualia: nempe ut EM æquale sit ipsi HN , et NM ipsi EH . Hoc autem fieri



fieri nequit. Nam si fiat, rectangulum EL æquale erit rectangulo HK . Sed rectangulum EL æquale est quadratis ex AD , DB simul sumptis, et rectangulum HK duplum est rectanguli sub AC , CB ^b. Quare quadrata^b ex con-
ex AD , DB simul sumpta duplo rectanguli sub AC , CB ^{fruct.} erunt æqualia. Quod est absurdum. Cum quadrata duplo rectanguli sunt majora^c. Recta igitur ex binis^c Cor. Lem. mediis secunda ad unum duntaxat punctum dividitur⁶. in nomina. Q. E. D.

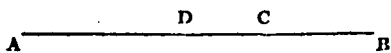
PROP. XLVI. THEOR.

[XLVI.]

Major ad idem duntaxat punctum dividitur in nomina.

Sit major AB divisa in c ; ita ut AC , CB potentiâ incommensurabiles sint, facientes compositum quidem ex ipsarum AC , CB quadratis rationale, rectangulum vero quod sub ipsis continetur medium: dico AB in alio puncto non dividi.

Si enim fieri potest, dividatur in D , ita ut AD , DB potentiâ incommensurabiles sint, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale; quod autem



sub ipsis continetur medium. Et quoniam quo differunt quadrata ex AC , CB a quadratis ex AD , DB ; hoc differt et id, quod bis continetur sub AD , DB , ab eo, quod bis sub AC , CB continetur^b; sed quadrata ex AC , CB ^{4. secundi.} superant quadrata ex AD , DB rationali, etenim utraque rationalia sunt: ergo quod bis continetur sub AD , DB rationali superat id, quod bis sub AC , CB continetur; quod est impossibile, cum media sint^c. Non igitur major^c 27. hujus. ad aliud atque aliud punctum dividitur in nomina. Ergo ad idem duntaxat dividatur necesse est. Q. E. D.

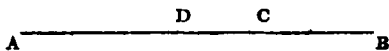
PROP. XLVII. THEOR.

[XLVII.]

Rationale ac medium potens ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina.

Sit rationale ac medium potens AB divisa in c ; ita ut AC , CB potentiâ incommensurabiles sint, faciantque compositum quidem ex ipsarum AC , CB quadratis medium, quod autem sub ipsis continetur rationale: dico AB in alio puncto non dividi.

Si enim fieri potest, dividatur in D ; ita ut etiam AD , DB potentiâ incommensurabiles sint, facientes compositum ex ipsarum quadratis medium, quod autem sub



ipsis continetur rationale. Quoniam igitur quo differt rectangulum bis contentum sub AD , DB ab eo, quod bis sub AC , CB continetur, hoc differunt et quadrata ex AC , CB a quadratis ex AD , DB ^d; rectangulum autem bis contentum sub AD , DB rationali superat id, quod bis sub AC , CB continetur: ergo et quadrata ex AC , CB superant quadrata ex AD , DB rationali; quod est impossibile; cum media sint^e. Non igitur rationale ac medium potens dividitur ad aliud atque aliud punctum. Quare ad unum duntaxat punctum dividetur. *Q. E. D.*

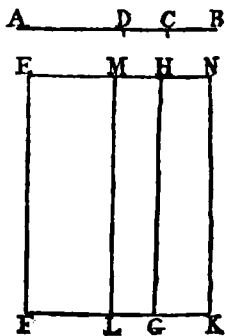
[XLVIII.]

PROP. XLVIII. THEOR.

Bina media potens ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina.

Sit bina media potens AB divisa in C ; ita ut AC , CB potentiâ incommensurabiles sint, facientes compositum ex ipsarum AC , CB quadratis medium; et quod sub ipsis continetur medium; et adhuc compositum ex ipsarum quadratis incommensurable rectangulo sub ipsis: dico AB ad aliud punctum non dividi, ita ut faciat quæ proposita sunt.

Si enim fieri potest, dividatur in D ; ita ut AD , DB potentiâ sint incommensurabiles, facientes compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum sub ipsis medium, et composito ex quadratis incommensurable. Duarum autem AC , CB , necessario inæqualium, major sit AC . Duarum item AD , DB major AD . Duarum denique AC , AD sit major AC . Exponaturque rationalis EF , et ad ipsam EF quadratis quidem ex AC , CB æquale parallelogrammum EG applicetur; rectangulo autem bis con-



tento

tento sub AC , CB æquale applicetur HK . Totum igitur EK est æquale ei quod sit ex AB quadrato^f. Rursum ^{4. secundi.} ad EF applicetur parallelogrammum EI . æquale quadratis ex AD , DB : ergo reliquum quod bis sub AD , DB continetur reliquo MK est æquale^f. Et quoniam compositum ex quadratis ipsarum AC , CB medium ponitur; erit et parallelogrammum EG medium; et ad rationalem EF applicatum est. Rationalis igitur est HE , et ipsi EF longitudine incommensurabilis^g. Eadem ratione et HN est rationalis, ipsique EF incommensurabilis longitudine. Et quoniam compositum ex quadratis ipsarum AC , CB incommensurabile est ei, quod bis sub AC , CB continetur^h, erit et parallelogrammum ^{ex hyp.} EG ipsi HK incommensurabile: ergo et recta linea EH incommensurabilis est rectæ HN ⁱ. Et sunt rationales: quare EH , HN rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; et ob id EN ex binis nominibus est, divisa in puncto H . Similiter ostendemus ipsam in puncto quoque M dividi. Diverſa autem esse puncta M , H eodem modo quo in Prop. xlv. ostendamus: ergo quæ ex binis nominibus ad aliud atque aliud punctum dividitur; quod est absurdum^k. Non igitur bina media^{43. hujus.} potens dividitur ad aliud atque aliud punctum. Quare ad unum duntaxat punctum dividetur. *Q. E. D.*

DEFINITIONES SECUNDÆ.

DEFINITIO I.

Expositâ rationali, et ex binis nominibus quâdam, cujus majus nomen plus possit quam minus quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, in nomina divisa: si quidem majus nomen expositæ rationali commensurabile sit longitudine, tota dicatur ex binis nominibus prima.

II.

Si vero minus nomen expositæ rationali longitudine sit commensurabile, dicatur ex binis nominibus secunda.

x 3

III.

III.

Quod si neutrum ipsorum nominum sit longitudine commensurabile expositæ rationali, vocetur ex binis nominibus tertia.

IV.

Rursum si majus nomen plus possit quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis; si quidem majus nomen expositæ rationali sit commensurabile longitudine, dicatur ex binis nominibus quarta.

V.

Si vero minus, dicatur quinta.

VI.

Quod si neutrum, dicatur sexta.

SCHOLION. *

Literis a, b, c , &c. significantur rectæ lineæ rationales, expositæ cuidam $\rho\eta\tau\tau$, literâ ρ significandæ, longitudine commensurabiles. Literis autem m, n, p , &c. significantur numeri, qui neque quadrati sint, neque quadratorum numerorum inter se rationes habeant.

His positis, quæcunque linea recta hisce notis $\sqrt{\frac{m}{n}} b$,

vel aliis harum similibus, Algebraice designatur, rationalis est; ipsi ρ , et aliis a, c , &c. potentiâ tantum commensurabilis. Et si duæ sint rectæ, formulis ejusmodi

significatæ, $\sqrt{\frac{m}{n}} b$, $\sqrt{\frac{p}{q}} a$, inter se etiam potentiâ,

sed potentiâ solum, commensurabiles erunt; nisi forte coefficientes, qui sunt sub signo radicali, numerorum inter se rationem gerant. Quod si evenerit, rectæ longitudine inter se commensurabiles erunt, quamquam utraque ipsi ρ potentiâ tantum. Ut si m sit 8; $n, 3$; $p, 27$; $q, 2$. Ita

enim $\sqrt{\frac{m}{n}} : \sqrt{\frac{p}{q}} = \sqrt{8 \times 2} : \sqrt{27 \times 3} = 4 : 9$.

Quare $\sqrt{\frac{m}{n}} b : \sqrt{\frac{p}{q}} a = 4 b : 9 a$. Et cum b, a rationales sint longitudine commensurabiles, et $4 b$ longitudine

gitudine commensurabilis sit ipsi b , necnon $9a$ ipsi a ; omnino erunt $4b$, $9a$ longitudine commensurabiles.

2. Quæcunque linea recta hisce notis $\sqrt[n]{\frac{m}{n}}$ b , vel aliis harum similibus, Algebraice designatur, irrationalis est, sed media. Recta enim $\sqrt[n]{\frac{m}{n}}$ b potest spatium $\sqrt[n]{\frac{m}{n}}$ b^2 five rectangulum sub rectis $\sqrt[n]{\frac{m}{n}}$ b , et b : quæ rectæ rationales sunt, potentiâ tantum commensurabiles. Quod si duæ sint rectæ, formulis ejusmodi significatæ, $\sqrt[n]{\frac{m}{n}}$ b , $\sqrt[q]{\frac{p}{q}}$ a , etiam inter se potentiâ erunt incommensurabiles. Nisi forte coefficientes, qui sunt sub signo radicali, in se quisque multiplicati, faciant qui numerorum inter se rationem habeant. Hoc est, nisi $\sqrt[n]{\frac{m}{n}}$ sit ad $\sqrt[q]{\frac{p}{q}}$, ut numerus ad numerum. Quod si evenierit, rectæ illæ inter se potentiâ commensurabiles erunt, quamquam ipsi p utraque incommensurabilis. Quod si ipsi duarum coefficientes sub signo radicali numerorum inter se rationem habeant; rectæ vel longitudine inter se commensurabiles, quamquam πp nedum potentiâ.

Porro ut binominales Euclidæas Algebraice sistamus, literis a , b , c , &c. m , n , p , q quæ prius designantibus, per literas Græcas μ , ν , π , σ , &c. significentur numeri quilibet quadrati.

Et primum, rectæ $\sqrt[n]{\frac{m}{n}}$ a , $\sqrt[n]{\frac{m}{n}}$ a mediæ sunt, potentiâ tantum commensurabiles, quæ rationale continent. Prop. xxviii.

2. Rectæ $\sqrt[n]{\frac{m}{n}}$ a , $\sqrt[q]{\frac{p}{q}}$ $\times \sqrt[m]{\frac{n}{m}}$ a mediæ sunt, potentiâ tantum commensurabiles, quæ medium continent. Prop. xxix.

3. Numerorum ν , μ sit major ν . Numerus autem $\nu - \mu$ non sit quadratus, cum ipsi ν , μ sint quadrati.

x 4

Rectæ

Rectæ a , $\sqrt{\frac{v-\mu}{v}}^{\frac{1}{2}} a$, rationales erunt, potentiâ solum commensurabiles; major autem a plus poterit quam minor quadrato rectæ, quæ ipsi a longitudine commensurabilis erit. Prop. xxx.

4. Numerus $v + \mu$, ex quadratis v , μ compositus, non fit quadratus. Rectæ a , $\sqrt{\frac{v}{v+\mu}}^{\frac{1}{2}} a$, rationales erunt, potentiâ tantum commensurabiles; quarum major a plus poterit quam minor quadrato rectæ, quæ ipsi a longitudine incommensurabilis erit. Prop. xxxi.

5. Posito rursus numero $v - \mu$ non quadrato, existentibus ipsis v , μ quadratis; rectæ $\sqrt{\frac{v-\mu}{v}}^{\frac{1}{2}} a$, $\sqrt{\frac{v-\mu}{v}}^{\frac{1}{2}} a$ mediæ erunt, potentiâ solum commensurabiles, et rationale continentes; quarum major $\sqrt{\frac{v-\mu}{v}}^{\frac{1}{2}} a$ plus poterit quam minor quadrato rectæ, quæ majori longitudine commensurabilis erit. Prop. xxxii.

6. Posito numero $v + \mu$ non quadrato, rectæ $\sqrt{\frac{v}{v+\mu}}^{\frac{1}{2}} a$, $\sqrt{\frac{v}{v+\mu}}^{\frac{1}{2}} a$ mediæ erunt, potentiâ tantum commensurabiles, et rationale continentes; quarum major plus poterit quam minor quadrato rectæ, quæ majori longitudine incommensurabilis erit. Prop. xxxiii.

7. Posito rursus numero $v - \mu$ non quadrato, rectæ $\sqrt{\frac{m}{n}}^{\frac{1}{2}} a$, $\sqrt{\frac{m}{n}}^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{v-\mu}{v}}^{\frac{1}{2}} a$, mediæ erunt, potentiâ tantum commensurabiles, quæ medium continebunt; quarum major plus poterit quam minor quadrato rectæ, majori longitudine commensurabilis. Prop. xxxiiii.

8. Posito autem numero $v + \mu$ non quadrato, rectæ $\sqrt{\frac{m}{n}}^{\frac{1}{2}} a$, $\sqrt{\frac{m}{n}}^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{v}{v+\mu}}^{\frac{1}{2}} a$, mediæ erunt, potentiâ tantum commensurabiles, quæ medium continebunt; quarum major plus poterit quam minor quadrato rectæ majori longitudine incommensurabilis. Prop. xxxv.

9. Posito

9. Posito $v + \mu$ non quadrato, existentibus v, μ quadratis; rectæ $\frac{1}{2} \left| \frac{1}{2} \right| a \times \sqrt{1 + \sqrt{\frac{\mu}{v + \mu}}} +$

$\sqrt{1 - \sqrt{\frac{\mu}{v + \mu}}} \left| \frac{1}{2} \right|$ rectæ erunt potentiâ incommensurabiles, quæ compositum ex ipsarum quadratis rationale efficiunt, rectangulum vero, quod sub ipsis continetur, medium. Prop. xxxiv.

10. Rectæ $\frac{1}{2} \left| \frac{1}{2} \right| \times \frac{v}{v + \mu} \left| \frac{1}{4} \right| a \times$

$\sqrt{1 + \sqrt{\frac{\mu}{v + \mu}}} + \sqrt{1 - \sqrt{\frac{\mu}{v + \mu}}} \left| \frac{1}{2} \right|$ potentiâ sunt in-

commensurabiles, conficientes id, quod ex ipsarum quadratis componitur, medium; rectangulum vero, quod sub ipsis continetur, rationale. Prop. xxxv.

11. Rectæ $\frac{1}{2} \left| \frac{1}{2} \right| \times \frac{m}{n} \left| \frac{1}{4} \right| a \times$

$\sqrt{1 + \sqrt{\frac{\mu}{v + \mu}}} + \sqrt{1 - \sqrt{\frac{\mu}{v + \mu}}} \left| \frac{1}{2} \right|$ rectæ sunt po-

tentiâ incommensurabiles, conficientes id, quod ex ipsarum quadratis componitur, medium; rectangulum etiam, quod sub ipsis continetur, medium, et composito ex ipsarum quadratis incommensurabile. Prop. xxxvi.

Ex hisce autem rectis, binas utique conjungendo, exoriuntur binomjorum series geminæ, quas *ἐξάδας* Euclides nominavit, pro variis scilicet rationum, si ita loqui liceat, speciebus, quas in binomiis suis sex diversas utraque complexa est.

Recensio Algebraica utriusque Ἐξάδος per compositionem.

Per compositionem autem sunt binomia, quorum nomina signo + conjuncta sunt.

Series Prima.

I. Ex binis nominibus; $a + \sqrt{\frac{m}{n}} b$. Vel etiam

$$\sqrt{\frac{m}{n}} a + \sqrt{\frac{p}{q}} b.$$

$$\text{II. Ex binis mediis prima; } \sqrt[n]{\frac{m}{n}}^{\frac{1}{2}} a + \sqrt[n]{\frac{m}{n}}^{\frac{1}{2}} a.$$

$$\text{III. Ex binis mediis secunda; } \sqrt[n]{\frac{m}{n}}^{\frac{1}{2}} a + \sqrt[n]{\frac{p}{q}}^{\frac{1}{2}} \times \sqrt[n]{\frac{n}{m}}^{\frac{1}{2}} a.$$

$$\text{IV. Major; } \sqrt{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} a \times \sqrt{1 + \sqrt{\frac{\mu}{\nu + \mu}}} + \sqrt{1 - \sqrt{\frac{\mu}{\nu + \mu}}}.$$

$$\text{V. Rationale ac medium potens; } \sqrt{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{\nu}{\nu + \mu}}^{\frac{1}{2}} a \times$$

$$\sqrt{1 + \sqrt{\frac{\mu}{\nu + \mu}}} + \sqrt{1 - \sqrt{\frac{\mu}{\nu + \mu}}}.$$

$$\text{VI. Bina media potens; } \sqrt{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{m}{n}}^{\frac{1}{2}} a \times$$

$$\sqrt{1 + \sqrt{\frac{\mu}{\nu + \mu}}} + \sqrt{1 - \sqrt{\frac{\mu}{\nu + \mu}}}.$$

Series Secunda.

(Numerorum μ , ν fit ν major.)

$$\text{I. Ex binis nominibus prima; } a + \sqrt{\frac{\nu - \mu}{\nu}} a.$$

$$\text{II. Ex binis nominibus secunda; } \sqrt{\frac{\nu}{\nu - \mu}} a + a.$$

$$\text{III. Ex binis nominibus tertia; } \sqrt{\frac{\nu - \mu}{\nu}} a + \sqrt{\frac{\pi - \sigma}{\pi}} a.$$

$$\text{IV. Ex binis nominibus quarta; } a + \sqrt{\frac{\nu}{\nu + \mu}}^{\frac{1}{2}} a.$$

$$\text{V. Ex binis nominibus quinta; } \sqrt{\frac{\nu + \mu}{\nu}}^{\frac{1}{2}} a + a.$$

$$\text{VI. Ex binis nominibus sexta; } \sqrt{\frac{\nu}{\nu + \mu}}^{\frac{1}{2}} a + \sqrt{\frac{\pi}{\pi + \sigma}}^{\frac{1}{2}} a;$$

modo $\frac{\sigma \nu - \mu \pi}{\nu + \mu \times \pi + \sigma}$ non fit numerus quadratus, neque

$\sigma \nu - \mu \pi$ ad $\nu + \mu \times \pi + \sigma$ numeri quadrati ad quadratum numerum rationem habeat.

Hæc

Hæc quidem accuratius edifferenda suscepimus, non quod lucis aliquid Euclidæis accessurum putaverimus, si Algebraice exposita essent; quippe quæ, per se quam maximè perspicua, caligine potius premuntur symbolorum involucris conveſtita: sed e contrario, in mediis Algebrae tenebris Geometriæ facem accensuri. Tum ut Algebrae cultores, si quando Euclidem forte evolvere velint, melius et facilius intelligant, subtilissima illa rationalium, irrationalium, mediarumque doctrina quorsum tendat; tum ut mirari instituantur eximiam illam sive perspicuitatem, sive elegantiam, quâcum ille in hoc libro pertractavit, quæ illis, propriâ arte usis, neglecto tanto præceptore et magistro, haud sine sudore et molestiâ calculis eruenda essent.

PROP. XLIX. PROBL.

[XLIX.]

Invenire ex binis nominibus primam.

Exponentur duo numeri quadrati $A B$, $B C$ qui ipso $C A$ non quadrato differunt^a. Et exponatur $A \dots \dots \dots C \dots \dots B^m$ Cor. Lem. 4.
quædam rationalis D , et ipsi D longitudine commensurabilis sit $E F$: ergo $E F$ est rationalis^a. Fiat autem ut $B A$ numerus ad numerum $A C$, ita ipſius $E F$ quadratum ad quadratum $F G$ ^a. Ergo quadratum ipsius $E F$ ad quadratum ipsius $F G$ rationem^a habebit, quam numerus ad numerum: commensurabile igitur est quadratum ex $E F$ quadrato ex $F G$ ^a. Atque^a 6. hujus. est $E F$ rationalis: ergo et rationalis $F G$. Et quoniam $B A$ ad $A C$ rationem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque quadratum ex $E F$ ad quadratum ex $F G$ rationem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: ergo $E F$ ipsi $F G$ incommensurabilis est longitudine^a: et ob id $E F$,^a 9. hujus. $F G$ rationales sunt potentiâ solum commensurabiles: igitur ex binis nominibus est $E G$ ^a. Dico et primam^a 37. hujus. esse.

Quoniam enim est ut $B A$ numerus ad numerum $A C$, ita quadratum ex $E F$ ad id, quod ex $F G$, quadratum; major autem est $B A$ quam $A C$: ergo et quadratum ex

 $E F$

EF quadrato ex FG est majus. Sint quadrato ex EF æqualia quadrata ex FG , H . Quoniam igitur est ut BA ad AC , ita quadratum ex EF ad quadratum ex FG ; erit per conversionem rationis ut AB ad BC , ita quadratum ex EF ad quadratum ex H ^a. Sed AB ad BC rationem habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; et quadratum igitur ex EF ad quadratum ex H rationem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Quare EF ipsi H longitudine est communisurabilis^c: ideoque EF plus potest quam FG quadrato rectæ lineæ sibi communisurabilis longitudine. Sunt autem EF , FG rationales, potentiâ tantum communisurabiles; et majus nomen EF expositæ D longitudine est communisurabile. Ergo EG ex binis nominibus est prima^d. Q. E. D.

^a Cor. 19. quinti.

^c 9. hujus.

^d Def. Secund. 1. hujus.

[L.]

PROP. L. PROBL.

Invenire ex binis nominibus secundam.

Exponentur duo numeri quadrati AB , BC , qui ipsi AC non quadrato differunt^a. Et exponentur rationalis D , et sit FG ipsi D longitudine communisurabilis: ergo FG rationalis est. Fiatque ut CA numerus ad numerum AB , ita quadratum ex GF ad quadratum ex FE ^b: communisurabile igitur est quadratum ex GF quadrato ex FE ^c: ergo et FE est rationalis^d. Et quoniam CA numerus ad ipsum AB rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex GF ad quadratum ex FE rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Incommensurabilis igitur est GF ipsi FE longitudine^b: quare EF , FG rationales sunt potentiâ solum communisurabiles; ac propterea ex binis nominibus est EG ^c. Ostendendum est et secundam esse.

^a Cor. Lem. 4.

^b Cor. 6. hujus.

^c 6. hujus.

^d Def. 6. hujus.

^b 9. hujus.

^c 37. hujus.

A C B

D —————

E ————— G
F

H —————

Quoniam enim invertendo est ut BA numerus ad numerum AC , ita quadratum ex EF ad quadratum ex FG , major autem est BA quam AC : ergo et quadratum ex EF quadrato ex FG est majus. Sint quadrato

ex

ex EF æqualia quadrata ex FG , H : est igitur per conversionem rationis ut AB ad BC , ita quadratum ex EF ad quadratum ex H ^e. Sed AB ad BC rationem habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum : ergo et quadratum ex EF ad quadratum ex H rationem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum ; et ob id EF ipsi H longitudine est commensurabilis^f. Quare EF plus potest quam FG quadrato^g rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. Suntque rationales EF , FG potentiâ solum commensurabiles, et FG minus nomen longitudine commensurabile est ipsi D expositæ rationali. Ergo EG est ex binis nominibus secunda^h. Q. E. D.

^e Cor. 19.
quanti.

^g hujus.

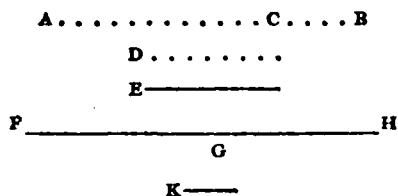
^h Def.
Secund.
2. hujus.

PROP. LI. PROBL.

[LI.]

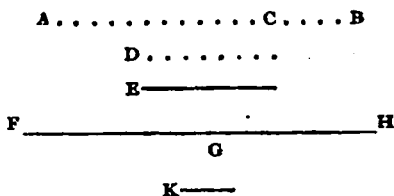
Invenire ex binis nominibus tertiam.

Exponentur ut prius duo numeri quadrati AB , CB , qui ipso CA non quadrato differunt. Exponatur etiam



alius numerus D non quadratus, qui ad neutrum ipsorum BA , AC rationem habeat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Denique exponatur rationalis quædam recta linea E ; fiatque ut D ad AB , ita quadratum ex E ad quadratum ex FG . Quadratum igitur ex E quadrato ex FG est commensurabile. Rationalis autem est E : ergo et FG est rationalis^b. Et quoniam D ad AB rationem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque quadratum ex E ad quadratum ex FG rationem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Incommensurabilis igitur est E ipsi FG longitudine^c. Rursum, fiat ut BA numerus ad numerum AC , ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH : ergo quadratum ex FG quadrato ex GH est commensurabile. Rationalis autem est FG : quare et GH est rationalis. Et quoniam AB ad AC rationem

^b hujus.



rationem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque quadratum ex FG ad quadratum ex GH rationem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Incommensurabilis igitur est
ⁱ 9. hujus. FG ipsi GH longitudine¹: quare FG , GH rationales sunt potentiâ solum commensurabiles: ideoque FH ex
^k 37. hujus. binis nominibus est^k. Dico et tertiam esse.

Quoniam enim est ut D numerus ad AB , ita quadratum ex E ad quadratum ex FG ; ut autem BA ad AC , ita quod fit ex FG quadratum ad quadratum ex GH : erit ex æquo ut D ad AC , ita quadratum ex E ad quadratum ex GH ¹. Sed D ad AC rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ergo E ipsi GH incommensurabilis est longitudine¹. Et quoniam ut BA ad AC , ita quadratum ex FG ad id quod ex GH quadratum; erit quadratum ex FG majus quadrato ex GH . Sint quadrato ex FG æqualia quadrata ex GH , K : per conversionem igitur rationis est ut AB
^m Cor. 19. ad BC , ita quadratum ex FG ad quadratum ex K ^m.
^{quinti.} Sed AB ad BC rationem habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ergo et quadratum ex FG ad quadratum ex K rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Commensurabilis igitur est FG ipsi K longitudine; et ob id FG plus potest quam GH quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Suntque FG , GH rationales potentiâ solum commensurabiles, et neutra ipsarum commensurabilis est ipsi E longitudine. Ergo FH est ex binis nominibus tertiaⁿ. *Q. E. D.*

^a Def.
^{Secund.}
^{3. hujus.}

[LII.]

PROP. LII. PROBL.

Invenire ex binis nominibus quartam.

Exponantur duo numeri AC , CB , ita ut AB ad neutrum ipsorum rationem habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; exponaturque ratio-
 nalis

nalis D , et ipsi D commensurabilis sit EF longitudine: ergo EF est rationalis.

Fiat autem ut BA numerus ad numerum AC , $A \dots\dots\dots C \dots\dots B$

ita quadratum ex EF ad quadratum ex FG . Com-

D —————

mensurabile igitur est quadratum ex EF quadrato ex FG : ideoque

E ————— G

recta linea FG est ratio-

F

nalis. Et quoniam BA

H ————

ad AC rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; erit EF ipsi FG longitudine

incommensurabilis^o. Ergo EF , FG rationales sunt po-^o 9. hujus,

tentiâ solum commensurabiles; et ob id EG ex binis nominibus est^p. Dico eam et quartam esse.

^p 37. hujus.

Quoniam enim est ut BA ad AC , ita quadratum ex

EF ad quadratum ex FG ; major autem est BA quam

AC : erit quadratum ex EF quadrato ex FG majus.

Sint quadrato ex EF æqualia quadrata ex FG , H : per conversionem igitur rationis est ut AB numerus ad numerum

BC , ita quadratum ex EF ad id, quod sit ex H , quadratum.

Sed AB ad BC rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Ergo EF ipsi H longi-

tudine est incommensurabilis: ac propterea EF plus potest quam FG quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. Suntque EF , FG rationales potentiâ

solum commensurabiles; et EF ipsi D commensurabilis est longitudine. Ergo EG ex binis nominibus est quarta^q.

^q Def.

Secund.

4. hujus.

$Q. E. F.$

PROP. LIII. PROBL.

[LIII.]

Invenire ex binis nominibus quintam.

Exponantur duo numeri AC , CB , ita ut AB ad neutrum ipsorum rationem ha-

$A \dots\dots\dots C \dots\dots B$

beat, quam numerus quadratus ad quadratum nume-

D —————

rum; exponaturque recta linea quædam rationalis D ,

E ————— G

et ipsi longitudine commensurabilis sit FG : ergo FG

F

est rationalis. Et fiat ut

H ————

CA ad AB , ita quadratum

ex

ex GF ad id quod fit ex FE quadratum: rationalis igitur est FE . Et quoniam CA numerus ad AB rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex GF ad quadratum ex FE rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Ergo EF , FG rationales sunt potentiâ solum commensurabiles[†]; et ob

$A \dots\dots\dots C \dots\dots B$

$D \text{-----}$

$E \text{-----} G$
 F

$H \text{-----}$

[†] 9. hujus. id EG ex binis nominibus est[†]. Dico eam et quintam esse.

[†] 37. hujus. id EG ex binis nominibus est[†]. Dico eam et quintam esse.

Quoniam enim est ut CA ad AB , ita quadratum ex GF ad quadratum ex FE ; erit invertendo ut BA ad AC , ita quadratum ex EF ad quadratum ex FG : ergo quadratum ex EF quadrato ex FG est majus. Sint quadrato ex EF æqualia quadrata ex FG , H : per conversionem igitur rationis est ut AB numerus ad numerum BC , ita quadratum ex EF ad id quod ex H quadratum. Sed AB ad BC rationem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: ergo neque quadratum ex EF ad quadratum ex H rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ac propterea EF ipsi H longitudine est incommensurabilis. Quare EF plus potest quam FG quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. Suntque EF , FG rationales potentiâ solum commensurabiles, et FG minus nomen expositæ rationali D commensurabilis est longitudine: ergo EG ex binis nominibus est quinta[†]. *Q. E. F.*

[†] Def.
Secund.
5. hujus.

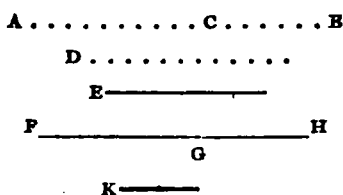
[LIV.]

PROP. LIV. PROBL.

Invenire ex binis nominibus sextam.

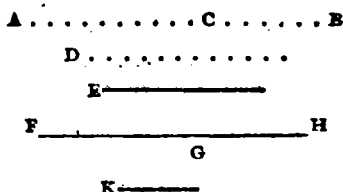
Exponentur duo numeri AC , CB , ita ut AB ad neutrum ipsorum rationem habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Sit etiam alius numerus D , qui ad neutrum ipsorum BA , AC rationem habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, et exponatur rationalis quædam recta linea E , fiatque ut D ad AB , ita quadratum ex E ad quadratum

ex



ex FG : commensurabilis igitur est E ipsi FG potentia. Atque E est rationalis: quare et rationalis est FG^2 . Et quoniam D ad AB rationem non habet,^{x Def. 6.} quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex E ad quadratum ex FG rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ergo E ipsi FG longitudine est incommensurabilis^y. Itaque rursus fiat ut BA ad AC , sic quadratum^{9. hujus.} ex FG ad quadratum ex GH : quadratum igitur ex FG quadrato ex GH est commensurabile. Rationale autem est quadratum ex FG : ergo et quadratum ex GH est rationale; et ob id recta linea GH est rationalis. Et quoniam BA ad AC rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex FG ad quadratum ex GH rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Incommensurabilis igitur est FG ipsi GH longitudine^y; et ideo FG , GH rationales sunt potentia solum commensurabiles. Quare ex binis nominibus est FH^2 . Osten-^{37. hujus.} dendum est et sextam esse.

Quoniam enim ut D ad AB , ita est quadratum ex E ad quadratum ex FG ; est autem et ut BA ad AC , ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH : ex æquo est ut D , ad AC , ita quadratum ex E ad quadratum ex GH . Sed D ad AC rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ergo neque quadratum ex E ad quadratum ex GH rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Incommensurabilis igitur est E ipsi GH longitudine^y. Ostensum autem est et ipsi FG incommensurabilem esse: quare utraque ipsarum FG , GH ipsi E longitudine est incommensurabilis. Et quoniam est ut BA ad AC , ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH , erit quadratum ex FG quadrato ex GH majus. Sint quadrato ex FG æqualia quadrata ex GH , K : ergo per conversionem rationis



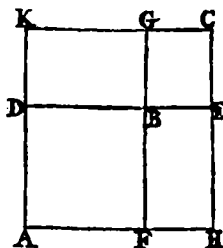
tionis ut $A B$ ad $B C$, ita est quadratum ex $F G$ ad quadratum ex K . Sed $A B$ ad $B C$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: neque igitur quadratum ex $F G$ ad quadratum ex K rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ac propterea $F G$ ipsi K longitudine est incommensurabilis. Ergo $F G$ plus potest quam $G H$ quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. Suntque $F G$, $G H$ rationales potentiâ solum commensurabiles; et neutra ipsarum longitudine commensurabilis est expositæ rationali E . Quare $F H$ est ex binis nominibus sexta^a. Q. E. F.

^a Def.
Secund.
6. hujus.

LEMMA VII.

Sint duo quadrata $A B$, $B C$, et ponantur ita ut $D B$ sit in directum ipsi $B E$: ergo et $F B$ ipsi $B G$ in directum^b 14. primi. erit^b. Et compleatur $A C$ parallelogrammum. Dico $A C$ quadratum esse; et inter quadrata $A B$, $B C$ rectangulum $D G$ medium esse proportionale, itemque inter ipsa $A C$, $C B$ medium proportionale esse $D C$.

Quoniam enim $D B$ quidem est æqualis $F B$, $B E$ vero ipsi $B G$; erit tota $D E$ toti $F G$ æqualis. Sed $D E$ æqualis est utrivis ipsarum $K C$, $A H$; et $F G$ utrivis ipsarum $A K$, $H C$ est æqualis. Ergo et utravis $A H$, $K C$ utrivis $A K$, $H C$ est æqualis; æquilaterum igitur est $A C$ parallelogrammum. Est autem et rectangulum: ergo quadratum est $A C$. Et quoniam est ut $F B$ ad $B G$, ita $D B$ ad $B E$; ut autem $F B$ ad $B G$, ita $A B$ ad $D G$,



^c 1. sexti. et ut $D B$ ad $B E$, ita $D G$ ad $B C$: ut igitur $A B$ ad $D G$,
^d 11. quinti. ita est $D G$ ad $B C$ ^d: ideoque inter $A B$, $B C$ medium proportionale est $D G$. Dico præterea inter ipsa $A C$,
 $C B$

CB medium proportionale esse DC . Nam cum sit ut AD ad DK , ita KG ad GC , est enim utraque utrique æqualis; et componendo erit ut AK ad KD , ita KC ad CG . Sed ut AK ad KD , ita AC ad CD ; et ut KC ad CG , ita DC ad CB ^d. Et igitur ut AC ad CD , ita est DC ad CB ^d 1. sexti. Ac propterea inter ipsa AC , CB medium proportionale est CD . Q. E. D.

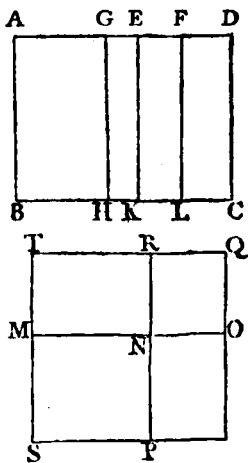
PROP. LV. THEOR.

[LV.]

Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus primâ; recta linea spatium potens irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

Spatium enim $ABCD$ contineatur sub rationali AB , et ex binis nominibus primâ AD : dico rectam lineam, quæ potest spatium AC , irrationalem esse, quæ ex binis nominibus appellatur.

Quoniam enim AD est ex binis nominibus prima, dividatur in nomina ad punctum E ; et sit AE majus nomen. Manifestum est AE , ED rationales esse potentiâ solum commensurabiles, et AE plus posse quam ED quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine^e; et præterea ipsam AE expositæ rationali AB longitudine commensurabilem esse. Secetur ED bifariam in F . Quoniam igitur AE plus potest quam ED quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine; si quartæ parti quadrati, quod sit a minori, hoc est, si quadrato ex EF , æquale parallelogrammum ad majorem AE applicetur, deficiens figurâ quadratâ; in partes commensurabiles ipsam dividet^f. Applicetur igitur ad AE quadrato ipsius EF æquale rectangulum sub AG , GE ^g; et 28. sexti. ergo AG ipsi GE longitudine est commensurabilis. Deinde per puncta G , E , F alterutri ipsarum AB , DC parallelæ ducantur GH , EK , FL ; et parallelogrammo quidem AN æquale quadratum constituatur SN ; parallelogrammo



^e Def. Secund.
1. hujus.

lelogrammo autem GK æquale quadratum NQ . Ita autem ponantur quadrata SN , NQ , ut MN sit in di-

^b 14. secun-
di. rectum ipsi NO ^b: ergo RN ipsi NP in directum erit¹. Et

^c 14. primi. parallelogrammum sa compleatur: quadratum igitur est

^k Lemma 7. sa ^k. Et quoniam rectangulum sub AG , GE est æquale

hujus. quadrato ex EF , erit ut AG ad

^l 17. sexti. EF , ita EF ad EG ^l: quare ut

^m 1. sexti. AH ad EL , ita est EL ad KG ^m:

ac propterea inter parallelogramma AH , GK medium proportionale est EL . Sed parallelogrammo AH æquale est quadratum SN , et GK æquale quadrato NQ ⁿ: ergo inter quadrata SN , NQ medium proportionale est EL . Sed inter eadem SN , NQ medium propor-

^o Lemma 7. tionale est MR ^o: æquale igitur est MR ipsi EL .

^p 43. primi. Sed MR est æquale PO ^p, et EL ipsi FC ¹: ergo totum EC ipsis MR , PO est æquale. Sunt autem et

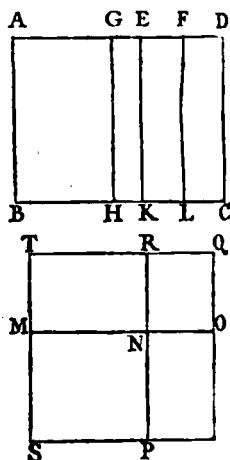
^q 36. primi. AH , GK æqualia ipsis SN , NQ : totum igitur AC est æquale toti sa , hoc est, quadrato ex MO ; ideoque ipsa MO potest parallelogrammum AC . Dico MO ex binis nominibus esse. Quoniam enim AG communisurabilis est ipsi GE ; erit AE utrique ipsarum AG ,

^r 16. hujus. GE communisurabilis^r. Ponitur autem et AE communisurabilis ipsi AB longitudine: ergo et AG , GE ipsi

^s 12. hujus. AB communisurabiles sunt^s. Atque est AB rationalis: rationalis igitur est et utraque ipsarum AG , GE ; et ob

^t 20. hujus. id rationale utrumque ipsorum AH , GK ^t, et AH ipsi

^u 10. hujus. GK est communisurabile^u. Sed AH est æquale ipsi SN , et GK ipsi NQ : ergo et quadrata SN , NQ , videlicet, quæ fiunt ex MN , NO , rationalia sunt et communisurabilia. Et quoniam incommensurabilis est AB ipsi ED longitudine, et AE quidem est communisurabilis ipsi AG , et DE communisurabilis ipsi EF ; erit et AG ipsi EF longitudine incommensurabilis: ergo et AH est incommensurabile ipsi EL . Sed AH est æquale SN , et EL ipsi MR : quare SN est incommensurabile ipsi MR . Ut autem SN ad MR , ita PN ad NR : incommensurabilis



bilis igitur est $P N$ ipsi $N R$ longitudine^a. Est autem^a 10. hujus.
 $P N$ æqualis $M N$, et $N R$ ipsi $N O$; ergo $M N$ ipsi $N O$
 longitudine est incommensurabilis. Atque est quadra-
 tum ex $M N$ commensurabile quadrato ex $N O$; et
 utrumque rationale. Nimirum cum rectangulis $A H$,
 $G K$, rationalibus et inter se commensurabilibus, qua-
 drata illa, ex $M N$, $N O$, singulatim sint æqualia. Quare
 $M N$, $N O$ rationales sunt, potentiâ solum commensura-
 biles. Ideoque $M O$ ex binis nominibus est, et potest
 parallelogrammum $A C$ ^a. Q. E. D.

^a 37. hujus.

PROP. LVI. THEOR.

[LVI.]

*Si spatium contineatur sub rationali et ex binis nominibus
 secundâ; recta linea spatium potens irrationalis est, quæ
 ex binis mediis prima appellatur.*

Spatium enim $A B C D$ contineatur sub rationali $A B$, Vide fig.
 et ex binis nominibus secundâ $A D$: dico rectam lineam, Prop. 55.
 quæ spatium $A C$ potest, ex binis mediis primam esse.

Quoniam enim $A D$ est ex binis nominibus secunda,
 dividatur in nomina ad punctum E , ita ut $A E$ sit majus
 nomen. Ergo $A E$, $E D$ rationales sunt potentiâ solum
 commensurabiles^a, et $A E$ plus potest quam $E D$ qua-
 drato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, et Def.
 minus nomen $E D$ commensurabile est ipsi $A B$ longitu-
 dine. Secetur $E D$ bifariam in F ; et quadrato ipsius $E F$
 æquale parallelogrammum ad rectam lineam $A E$ applice-
 tur, deficiens figurâ quadratâ, rectangulum nempe sub $A G$,
 $G E$. Commensurabilis igitur est $A G$ ipsi $G E$ longitudine^a. 18. hujus.
 Et per puncta G , E , F ipsi $A B$, $D C$ parallelæ ducantur
 $G H$, $E K$, $F L$; parallelogrammo autem $A H$ æquale qua-
 dratum $S N$ constituatur, et parallelogrammo $G K$ æquale
 quadratum $N Q$. Ita autem ponantur quadrata $S N$, $N Q$,
 ut $M N$ sit in directum ipsi $N O$: ergo et $R N$ ipsi $N P$
 in directum erit. Et compleatur $S Q$ quadratum: ma-
 nifestum igitur est ex iis quæ demonstrata sunt^a, paral-
 lelogrammum $M R$ medium esse proportionale inter
 quadrata $S N$, $N Q$, et parallelogrammo $E L$ æquale;
 et præterea rectam lineam $M O$ posse spatium $A C$.
 Ostendendum igitur est ipsam $M O$ ex binis mediis pri-
 mam esse. Quoniam enim incommensurabilis est $A E$
 ipsi $E D$ longitudine, commensurabilis autem $E D$ ipsi
 $A B$ ^b; erit $A E$ ipsi $A B$ longitudine incommensurabilis^c. 37. hujus.
 Et quoniam $A G$ commensurabilis est longitudine ipsi
^c 14. hujus.

$\times 3$

$G E$;

GB; erit AE utrique ipsarum AG, GE longitudine com-
 * 16. hujus. mensurabilis^d. Atque est AE

rationalis: rationalis igitur et
 utraque AG, GE. Quod cum
 AE sit incommensurabilis qui-
 dem ipsi AB longitudine, com-
 mensurabilis autem AE utrique
 ipsarum AG, GE; erunt AG, GE
 ipsi AB longitudine incommen-
 surabiles: quare BA, AG, GE
 rationales sunt potentiâ solum
 commensurabiles. Medium igitur
 est utrumque parallelogram-

* 22. hujus. morum AH, GK^e; et ob id
 utrumque quadratorum SN, NQ
 est medium: ergo rectæ lineæ
 MN, NO mediæ sunt. Rursus,
 quoniam commensurabilis est
 AG ipsi GE longitudine; erit pa-
 rallelogrammum AH parallelo-

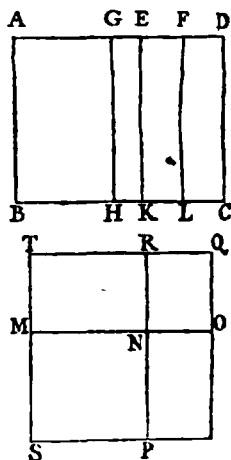
^f 1. sexti, grammo GK commensurabile^f; hoc est, quadratum SN
 & 10. hujus. ipsi NQ; hoc est, quadratum ex MN quadrato ex NO.

Ergo MN, NO potentiâ commensurabiles sunt. Et
 quoniam incommensurabilis est AE ipsi ED longitu-
 dine, et AE quidem est commensurabilis ipsi AG, ED
 vero ipsi EF: erit AG ipsi EF longitudine incommensura-
 bilis. Quare et parallelogrammum AH incommensura-
 bile parallelogrammo EL, hoc est, SN ipsi MR. Quare

* 1. sexti. et recta PN ipsi NR^g, hoc est, MN ipsi NO, incommen-
 surabilis est longitudine. Ostensæ autem sunt MN, NO,
 et mediæ, et potentiâ commensurabiles: ergo MN, NO
 mediæ sunt potentiâ solum commensurabiles. Dico et
 rationale continere. Quoniam enim DE ponitur com-
 mensurabilis utrique ipsarum AB, EF; erit EF ipsi EK
 longitudine commensurabilis. Atque est rationalis utra-

* 20. hujus. que ipsarum: rationale igitur est parallelogrammum EL^h,
 hoc est, MR; estque MR quod sub MN, NO conti-
 netur. Si autem duæ mediæ potentiâ solum commen-
 surabiles componantur, quæ rationale contineant, totæ

* 28. hujus. irrationalis est, quæ ex binis mediis prima appellaturⁱ.
 Ergo MO ex binis mediis est prima. Q. E. D.



PROP. LVII. THEOR.

[LVII.]

Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus tertiâ; recta linea spatium potens irrationalis est, quæ appellatur ex binis mediis secunda.

Spatium enim $A B C D$ contineatur sub rationali $A B$, Vide fig. et ex binis nominibus tertiâ $A D$, divisâ in nomina ad punctum E , quorum majus sit $A E$: dico rectam lineam, quæ potest spatium $A C$, irrationalem esse; quæ ex binis mediis secunda appellatur. Prop. 56.

Construantur enim eadem, quæ supra. Et quoniam $A D$ ex binis nominibus tertia est; erunt $A E$, $E D$ rationales potentiâ solum commensurabiles^k, et $A E$ plus^k poterit quam $E D$ quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine, neutraque ipsarum $A E$, $E D$ ipsi $A B$ longitudine erit commensurabilis. Similiter^l ostendemus $M O$ eam esse, quæ spatium $A C$ potest, et esse ex binis mediis $M N$, $N O$: itaque ostendendum est et secundam esse. Quoniam enim $D E$ incommensurabilis est longitudine ipsi $A B$, hoc est, ipsi $E K$; atque est $D E$ commensurabilis $E F$: erit $E F$ ipsi $E K$ longitudine incommensurabilis. Et sunt rationales: ergo $F E$, $E K$ rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; et ob id $E L$, hoc est, $M R$, medium est; et continetur sub $M N$, $N O$. Medium igitur est quod sub $M N$, $N O$ continetur. Quare $M O$ ex binis mediis est secunda^m. Q. E. D. Atque in præc. 39. hujus.

PROP. LVIII. THEOR.

[LVIII.]

Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus quartâ; recta linea spatium potens irrationalis est, quæ vocatur major.

Spatium enim $A C$ contineatur sub rationali $A B$, et ex binis nominibus quartâ $A D$, divisâ in nomina ad punctum E , quorum $A E$ sit majus: dico rectam lineam, quæ spatium $A C$ potest, irrationalem esse; quæ major appellatur.

Quoniam enim $A D$ ex binis nominibus est quarta; erunt $A E$, $E D$ rationales potentiâ solum commensurabilesⁿ, et $A E$ plus poterit quam $E D$ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, et $A E$ ipsi $A B$ commensurabilis erit longitudine. Dividatur $D E$ bisariam in F , et quadrato ipsius $E F$ æquale parallelogrammum ad $A E$ applicetur, deficiens figurâ quadratâ, rectangulum

gulum nempe sub AG , GE : erit igitur AG ipsi GE longi-
 tudine incommensurabilis^o.

Ducantur ipsi AB parallelæ GH ,
 EK , FL , et eadem fiant, quæ
 supra. Constat igitur MO posse
 spatium AC . Ostendendum au-
 tem est MO irrationalem esse,
 quæ vocatur major. Quoniam
 enim AG ipsi GE incommensu-
 rabilis est longitudine, erit et

AH ipsi GK incommensurable^p,
 hoc est, SN ipsi NQ ^q. Ergo MN ,
 NO potentiâ incommensurabiles
 sunt. Et quoniam AE ipsi AB
 longitudine est commensurabi-
 lis, parallelogrammum AK rati-
 onale est; atqui est æquale
 quadratis ipsarum MN , NO :
 ergo compositum ex quadratis
 ipsarum MN , NO est rationale.

Quod cum DE sit incommensurabilis longitudine ipsi
 AB , hoc est, ipsi EK , sit autem DE commensurabilis
 ipsi EF : erit EF ipsi EK incommensurabilis longi-
 tudine. Quare KE , EF rationales sunt potentiâ solum
 commensurabiles^r; et ob id medium est LE , hoc est,
 MR , quod continetur sub MN , NO . Medium igitur est
 quod sub MN , NO continetur; estque compositum
 ex quadratis ipsarum MN , NO rationale; et MN ipsi
 NO potentiâ incommensurabilis. Si autem duæ rectæ
 lineæ potentiâ incommensurabiles componantur, facientes
 compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod
 autem sub ipsis continetur medium; tota irrationalis
 erit: vocatur autem major^s. Ergo MO irrationalis est,
 quæ major appellatur, et potest spatium AC . *Q. E. D.*

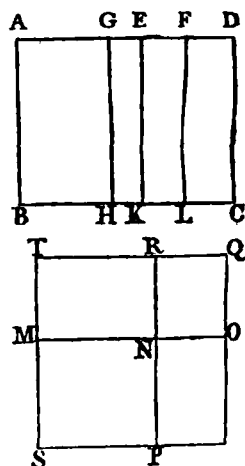
[LIX.]

PROP. LIX. THEOR.

*Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus
 quintâ; recta linea spatium potens irrationalis est, quæ
 vocatur rationale et medium potens.*

Vide fig.
 Prop. 58.

Spatium enim AC contineatur sub rationali AB , et ex
 binis nominibus quintâ AD , divisa in nomina ad pun-
 ctum E , ita ut majus nomen sit AE : dicq rectam lineam,
 quæ



quæ potest spatium $A C$, irrationalem esse; quæ vocatur rationale ac medium potens.

Construantur enim eadem, quæ supra: manifestum igitur est $M O$ posse spatium $A C$. Ostendere autem oportet $M O$ esse, quæ rationale ac medium potest. Quoniam enim $A G$ ipsi $E G$ incommensurabilis est longitudine; et parallelogrammum $A H$ est incommensurabile parallelogrammo $H E'$, hoc est, quadratum ex $M N$ quadrato ex $N O$: ergo $M N$, $N O$ potentiâ incommensurabiles sunt. Et quoniam $A D$ est ex binis nominibus quinta, sitque minor ipsius portio $E D$; erit $E D$ ipsi $A B$ commensurabilis longitudine". Sed $A E$ ipsi $E D$ longitudine est incommensurabilis: ergo et $A B$ incommensurabilis est longitudine ipsi $A E$: ac propterea $B A$, $A E$ rationales sunt potentiâ solum commensurabiles: medium igitur est $A K'$, hoc est, compositum ex quadratis ipsarum $M N$, $N O$. Et quoniam $D E$ commensurabilis est longitudine ipsi $A B$, hoc est, ipsi $E K$, estque $D E$ commensurabilis ipsi $E F$: erit et $E F$ ipsi $E K$ commensurabilis. Rationalis autem est $E K$: rationale igitur est et $E L$, hoc est, $M R$, hoc est, parallelogrammum quod sub $M N$, $N O$ continetur. Quare $M N$, $N O$ potentiâ incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem sub ipsis continetur rationale: ergo $M O$ est rationale ac medium potens, et potest spatium $A C$. Q. E. D.

¹ 41. hujus.

PROP. LX. THEOR.

[LX.]

Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus sextâ; quæ spatium potest recta linea, irrationalis est, quæ vocatur bina media potens.

Spatium enim $A B C D$ contineatur sub rationali $A B$, et ex binis nominibus sextâ $A D$, quæ dividatur in nomina ad punctum E , ita ut $A E$ sit majus nomen: dico rectam lineam, quæ potest spatium $A C$, esse bina media potentem.

Construantur enim eadem, quæ supra. Manifestum igitur est $M O$ posse spatium $A C$, et $M N$ ipsi $N O$ potentiâ incommensurabilem esse. Et quoniam $E A$ ipsi $A B$ incommensurabilis est longitudine, erunt $E A$, $A B$ rationales potentiâ solum commensurabiles: medium igitur est $A K'$, hoc est, compositum ex quadratis ipsarum $M N$, $N O$. Rursus, quoniam incommensurabilis est $E D$ ipsi $A B$ longitudine, erit et $E F$ ipsi $E K$ longitudine incommensurabilis:

commensurabilis: ergo et FE , EK rationales sunt potentia solum commensurabiles; ac propterea medium est EL , hoc est, MR , hoc est, quod sub MN , NO continetur. Et quoniam EA est incommensurabilis ipsi EF longitudine; et parallelogrammum AK parallelogrammo EL incommensurabile erit. Sed AK quidem est compositum ex quadratis ipsarum MN , NO ; EL vero est quod sub MN , NO continetur. Incommensurabile igitur est compositum ex quadratis ipsarum MN , NO ei, quod sub MN , NO continetur. Atque est utrumque ipsorum medium; et MN , NO potentia sunt incommensurabiles: ergo MO est bina media potens, et pot-

* 42. hujus. est spatium AC . Q. E. D.

LEMMA VIII.

Si recta linea in partes inæquales secetur, ipsarum partium quadrata majora sunt rectangulo, quod bis sub dictis partibus continetur.

Demonstratur ex 5^a et 9^a secundi ad modum Corollarii Lemmatis sexti.

[LXI.]

PROP. LXI. THEOR.

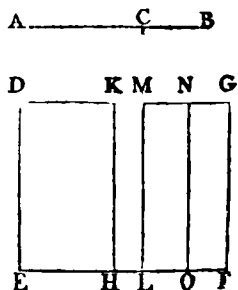
Quadratum ejus, quæ est ex binis nominibus, ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus primam.

Sit ex binis nominibus AB , divisa in nomina ad punctum C , ita ut AC sit majus nomen; exponaturque rationalis DE , et quadrato rectæ lineæ AB æquale ad ipsam DE applicetur rectangulum parallelogrammum $DEFG$, latitudinem faciens DG : dico DG ex binis nominibus primam esse.

Applicetur enim ad rationalem DE quadrato quidem ipsius AC æquale parallelogrammum DH ; quadrato autem ipsius

* 43. primi. BC æquale KL : reliquum igitur quod bis sub AC , CB continetur est æquale parallelo-

* 4. secundi. grammum MF . Secetur MG bifariam in N , et alterutri ipsarum ML , GP parallela ducatur NO : utrumque igitur parallelogrammorum MO , NF est æquale ei, quod semel sub AC , CB continetur. Et quoniam ex binis no-



minibus

minibus est AB , divisa in nomina ad punctum C ; erunt AC , CB rationales potentiâ solum commensurabiles^h.^{37. hujus.} Ergo quadrata ex AC , CB rationalia sunt et commensurabilia inter se; et ob id compositum ex quadratis ipsarum AC , CB commensurabile est ipsarum AC , CB quadratisⁱ: rationale igitur est compositum ex quadratis ipsarum AC , CB . Atqui est æquale parallelogrammo DL . Ergo et DL est rationale, et ad rationalem DE applicatum rationalem efficit DM , et ipsi DE commensurabilem longitudine^k. Rursus, quoniam^l AC , CB rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles; medium est quod bis sub AC , CB continetur, hoc est, rectangulum MF . Et ad rationalem ML applicatum rationalem efficit MG , sed ipsi ML , hoc est, ipsi ED , longitudine incommensurabilemⁱ. Est autem^{23. hujus.} et MD rationalis, et ipsi DE commensurabilis longitudine: ergo DM ipsi MG longitudine est incommensurabilis^m. Suntque rationales: ergo DM , MG rationales sunt^{13. hujus.} potentiâ solum commensurabiles; ac propterea DG est ex binis nominibusⁿ. Ostendendum est et primam esse. Quoniam enim inter quadrata ex AC , CB medium proportionale est, quod sub AC , CB continetur; erit etiam inter parallelogramma DH , KL medium proportionale MO ^o. Est igitur ut DH ad MO , ita MO ad KL ; hoc est, ut^{Lemma 7.} recta linea DK ad MN , ita MN ad MK ^o: ergo rectangulum sub DK , KM quadrato ex MN est æquale^p. Et quo^{19. sexti.} niam quadratum ex AC commensurabile est quadrato ex CB , erit et parallelogrammum DH parallelogrammo KL commensurabile^p: ergo et DK ipsi KM longitudine est^{10. hujus.} commensurabilis. Quod cum quadrata ex AC , CB majora sint eo, quod bis sub AC , CB continetur^q; erit et^{Lem. 8.} parallelogrammum DL majus parallelogrammo MF :^{hujus.} ideoque recta linea DM ipsâ MG est major. Atqui est rectangulum sub DK , KM æquale quadrato ex MN , hoc est, quartæ parti quadrati ex MG ; et DK ipsi KM longitudine est commensurabilis. Si autem sint duæ rectæ lineæ inæquales, et quartæ parti quadrati minoris æquale parallelogrammum ad majorem applicetur, deficiens figurâ quadratâ, et in partes commensurabiles ipsam dividat; major plus poterit quam minor quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine^r. Quare^{18. hujus.} DM plus potest quam MG quadrato rectæ ipsi DM longitudine commensurabilis. Suntque rationales DM ,
 MG ;

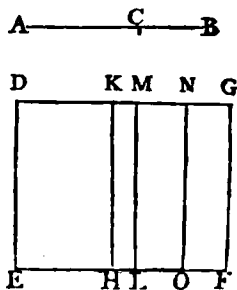
Def. *Secund.* *1. hujus.* MG ; atque DM , quæ est majus nomen, expositæ rationali DE longitudine est commensurabilis: ergo DG est ex binis nominibus prima^a. *Q. E. D.*

[LXII.]

PROP. LXII. THEOR.

Quadratum ejus, quæ est ex binis mediis prima, ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus secundam.

Sit ex binis mediis prima AB , divisa in nomina ad punctum C , ita ut AC sit majus nomen; exponaturque rationalis DE , et ad ipsam DE applicetur parallelogrammum æquale quadrato ipsius AB , quod sit DF , latitudinem faciens DG : dico DG ex binis nominibus secundam esse.



Construanturenim eadem, quæ supra. Et quoniam AB ex binis mediis est prima, divisa ad punctum C ; erunt AC , CB mediæ potentiâ solum commensurabiles, quæ rationale continent¹. Quare et quæ fiunt ex AC , CB quadrata media sunt; ideoque DL est medium, et ad rationalem DE applicatum, rationalem efficit MD , sed ipsi DE longitudine incommensurabilem². Rursus, quoniam rationale est, quod bis sub AC , CB continetur; erit et MF rationale, et ad rationalem ML applicatum efficit MG rationalem, et ipsi ML ³, hoc est, ipsi DE , commensurabilem longitudine. Incommensurabilis igitur est DM ipsi MG ⁴. Sed rationales sunt. Quare DM , MG rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; ac propterea DG est ex binis nominibus. Ostendendum est et secundam esse. Quoniam enim quadrata ex AC , CB majora sunt eo, quod bis sub AC , CB continetur⁵; erit et DL parallelogrammum parallelogrammo MF majus; ergo et recta linea DM major est ipsâ MO . Quod cum quadratum ex AC quadrato ex CB sit commensurabile; et DH parallelogrammum parallelogrammo KL commensurabile erit: quare et DK commensurabilis ipsi KM . Sed rectangulum, quod sub DK , KM continetur, quadrato ipsius MN æquale est. (Id enim ut in præcedente ostendatur.) Ergo DM plus potest

¹ 38. hujus.² 23. hujus.³ 21. hujus.⁴ 13. hujus.⁵ Lem. 8. hujus.

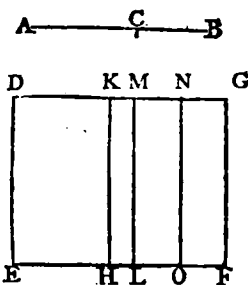
potest quam $M G$ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis ^a. Estque $M G$ commensurabilis lon- ^a 18. hujus.
gitudine ipsi $D E$. Quare $D G$ est ex binis nominibus se- ^b Def.
cunda ^b. Q. E. D. ^{Secund.}
^{2. hujus.}

PROP. LXIII. THEOR.

[LXIII.]

Quadratum ejus, quæ est ex binis mediis secunda, ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

Sit ex binis mediis secunda $A B$, divisa in nomina ad C , ita ut $A C$ sit majus nomen; rationalis autem sit $D E$, et ad ipsam $D E$ quadrato ex $A B$ æquale parallelogrammum $D F$ applicetur, latitudinem faciens $D G$: dico $D G$ ex binis nominibus tertiam esse.



Construantur enim eadem, quæ supra. Et quoniam $A B$ est ex binis mediis secunda, divisa ad punctum C ; erunt $A C$, $C B$ mediæ, potentiâ solum commensurabiles, quæ medium continent ^c: ergo et com- ^c 39. hujus.
positum ex ipsarum $A C$, $C B$ quadratis medium est. Atqui est æquale ipsi $D L$: medium igitur est $D L$. Sed ad rationalem $D E$ applicatur: ergo rationalis est $M D$, sed ipsi $D E$ longitudine incommensurabilis ^d. Rectan- ^d 23. hujus.
gulum autem quod sub $A C$, $C B$ medium est ^e. Illius ^e ex hyp.
autem duplum $M F$. Quare et $M F$ medium, et ad rationalem $M L$ applicatum, efficit $M G$ rationalem, sed ipsi $M L$, seu $D E$, longitudine incommensurabilem ^d. Utraque igitur ipsarum $D M$, $M G$ rationalis est, et ipsi $D E$ longitudine incommensurabilis. Et quoniam incommensurabilis est $A C$ ipsi $C B$ longitudine, ut autem $A C$ ad $C B$ ita quadratum ex $A C$ ad rectangulum sub $A C$, $C B$ ^f; ^f 1. sexti.
erit et quadratum ex $A C$ rectangulo sub $A C$, $C B$ incommensurabile. Ergo compositum ex quadratis ipsarum $A C$, $C B$ incommensurabile est ei, quod bis sub $A C$, $C B$ continetur; hoc est, $D L$ incommensurabile ipsi $M F$; et ob id recta linea $D M$ ipsi $M G$ longitudine est incommensurabilis. Suntque rationales: ergo $D G$ est ex binis nominibus. Ostendendum est et tertiam esse. Similiter enim ac in præcedente concludemus $D M$ ipsa

- ipsa MG majorem esse, et DK ipsi KM commensurabilem. Atqui est rectangulum sub DK , KM quadrato ipsius MN æquale: ergo DM plus potest quam MG quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine^h. Et neutra ipsarum DM , MG est longitudine commensurabilis ipsi DE . Quare DG est ex binis nominibus tertiaⁱ. Q. E. D.

ⁱ Def.
^{Secund.}
^{3. hujus.}

[LXIV.]

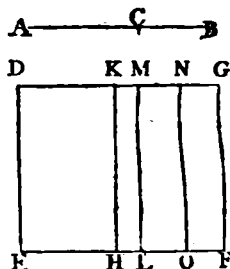
PROP. LXIV. THEOR.

Quadratum majoris ad rationale applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

Sit major AB , divisa in nomina in puncto C , ita ut AC sit majus nomen; rationalis autem quædam sit DE , et quadrato ex AB æquale ad ipsam DE applicetur parallelogrammum DF , latitudinem faciens DG : dico DG esse ex binis nominibus quartam.

Construantur enim eadem, quæ supra. Et quoniam AB est major, divisa in nomina in C ; erunt AC , CB potentiâ in-

- * 40. hujus. commensurabiles^k, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem sub ipsis continetur medium. Itaque quoniam rationale est compositum ex quadratis ipsarum AC , CB , erit et parallelogrammum DL rationale. Ergo et rationalis est recta linea DM , ipsique DE longitudine commen-



- ⁱ 21. hujus. furabilis^l. Rursus, quoniam medium est quod bis sub AC , CB continetur, hoc est, MF , et ad rationale ML est applicatum; erit et MG rationalis, sed ipsi DE in-
- ^m 23. hujus. commensurabilis longitudine^m. Ergo et DM ipsi MG longitudine incommensurabilis est; ac propterea DM , MG rationales sunt potentiâ solum commensurabiles:
- * 37. hujus. quare ex duobus nominibus est DG ⁿ. Ostendendum est et quartam esse. Similiter enim atque in superioribus concludemus DM majorem esse quam MG , et rectangulum sub DK , KM quadrato ex MN æquale. Quoniam igitur quadratum ex AC incommensurabile est quadrato ex CB ; erit et DH parallelogrammum incommensurabile
- * 10. hujus. parallelogrammo KL ^o; et ob id recta linea KD ipsi KM longitudine incommensurabilis. Si autem sint duæ rectæ lineæ

lineæ inæquales, et quartæ parti quadrati minoris æquale parallelogrammum ad majorem applicetur, deficiens figurâ quadratâ, et in partes longitudine incommensurabiles ipsam dividat; major plus poterit quam minor quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis¹⁹. Ergo DM plus potest quam MG quadrato¹⁹ hujus. rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. Suntque DM , MG rationales potentiâ solum commensurabiles, atque est DM commensurabilis expositæ rationali²⁰ Def. DE. Quare DG est ex binis nominibus quarta²¹. Q. E. D. Secund.²²

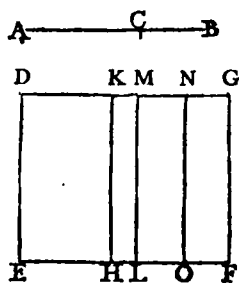
PROP. LXV. THEOR.

[LXV.]

Quadratum ejus, quæ rationale ac medium potest, ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

Sit rationale ac medium potens AB , divisa in nomina ad punctum C , ita ut AC sit majus nomen; exponaturque rationalis DE , et quadrato ipsius AB æquale parallelogrammum DF ad ipsam DE applicetur, latitudinem faciens DG : dico DG esse ex binis nominibus quintam.

Construantur enim, quæ supra. Et quoniam rationale ac medium potens est AB , divisa ad C punctum; erunt AC , CB potentiâ incommensurabiles²³, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem sub ipsis continetur rationale. Quoniam igitur medium est compositum ex ipsarum AC , CB quadratis; erit et parallelogrammum DL medium: ideoque recta linea DM rationalis est, sed ipsi DE longitudine incommensurabilis²⁴. Rursus, quoniam rationale est quod²⁵ bis sub AC , CB continetur, hoc est, parallelogrammum MF ; erit MG rationalis et ipsi DE longitudine commensurabilis²⁶. Incommensurabilis igitur est DM ipsi²⁷ MG longitudine²⁸. Quare DM , MG rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; ac propterea DG est ex binis nominibus²⁹. Dico et quintam esse. Similiter³⁰ enim ac in præcedentibus demonstrabitur rectangulum sub DK , KM quadrato ex MN esse æquale; et DK ipsi KM longitudine esse incommensurabilem. Quare DM plus



- plus potest quam $M G$ quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine γ . Suntque $D M$, $M G$ rationales potentiâ solum commensurabiles, et minor $M G$ commensurabilis est ipsi $D E$ longitudine. Ergo $D G$ est ex binis nominibus quinta^a. Q. E. D.

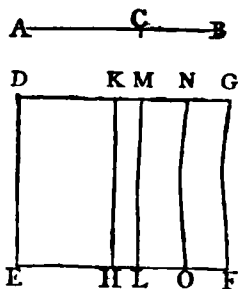
[LXVI.]

PROP. LXVI. THEOR.

Quadratum ejus, quæ bina media potest, ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

Sit bina media potens $A B$, divisa in nomina ad punctum C ; rationalis autem sit $D E$, et ad ipsam $D E$ quadrato ex $A B$ æquale parallelogrammum $D F$ applicetur, latitudinem faciens $D G$: dico $D G$ esse ex binis nominibus sextam.

- Construantur enim eadem, quæ supra. Et quoniam $A B$ est bina media potens, divisa ad C ; erunt $A C$, $C B$ potentiâ incommensurabiles^a, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et quod sub ipsis continetur medium, et adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis. Ergo ex jam demonstratis medium est utrumque parallelogrammorum $D L$, $M F$, et ad rationalem $D E$ applicata sunt: rationalis igitur est et utraque $D M$, $M G$, et ipsi $D E$ longitudine incommensurabilis^b. Et quoniam compositum ex ipsarum $A C$, $C B$ quadratis incommensurabile est ei, quod bis sub $A C$, $C B$ continetur; erit et $D L$ parallelogrammum parallelogrammo $M F$ incommensurabile; et idcirco recta $D M$ longitudine incommensurabilis rectæ $M G$ ^c. Quare $D M$, $M G$ rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles; igitur $D G$ est ex binis nominibus. Dico et sextam esse. Similiter enim atque in præcedentibus rursus ostendemus rectangulum sub $D K$, $K M$ quadrato ex $M N$ æquale, et $D K$ ipsi $K M$ longitudine incommensurabilem esse. Ergo $D M$ plus potest quam $M G$ quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine^d. Et neutra ipsarum $D M$, $M G$ longitudine commensurabilis est expositæ rationali $D E$. Quare $D G$ est ex binis nominibus sexta^e. Q. E. D.



PROP.

PROP. LXVII. THEOR.

[LXVII.]

Ei quæ est ex binis nominibus longitudine commensurabilis, et ipsa ex binis nominibus est, atque ordine eadem.

Sit ex binis nominibus $A B$, et ipsi $A B$ longitudine commensurabilis sit $C D$: dico $C D$ ex binis nominibus esse, et ordine eandem ipsi $A B$.

Quoniam enim ex binis nominibus est $A B$, dividatur in nomina ad punctum E ,

et sit $A E$ majus nomen:

ergo $A E$, $E B$ rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles^f. Fiat ut

AB ad CD , ita AE ad CF ^f; C F D ^{37. hujus. 12. sexti.}

et reliqua igitur $E B$ ad

reliquam FD est ut AB ad CD ^b. Commensurabilis au-^{19. quinti.}

tem est $A B$ ipsi CD longitudine: ergo et $A E$ ipsi CF ,

et $E B$ ipsi FD , longitudine est commensurabilis¹. Sunt-^{10. hujus.}

que rationales $A E$, $E B$: rationales igitur sunt et CF ,

FD . Et quoniam est ut $A E$ ad CF , ita $E B$ ad FD ; erit

permutando ut $A E$ ad $E B$, ita CF ad FD . Sunt autem

$A E$, $E B$ potentiâ solum commensurabiles: ergo et CF ,

FD potentiâ solum commensurabiles erunt¹. Et sunt

rationales: ex binis igitur nominibus est $C D$ ^f. Dico et ipsi $A B$ ordine eandem esse.

Vel enim $A E$ plus potest quam $E B$ quadrato rectæ

lineæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommen-

surabilis. Si quidem igitur $A E$ plus possit quam $E B$

quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, et CF

plus poterit quam FD quadrato rectæ lineæ sibi com-

mensurabilis longitudine^k. Quod si $A E$ expositæ ra-^{15. hujus.}

tionali longitudine sit commensurabilis, et CF eidem

longitudine commensurabilis erit¹: et ob id utraque^{12. hujus.}

ipsarum $A B$, CD , ex binis nominibus est prima, hoc est,

ordine eadem. Si vero $E B$ longitudine sit commensu-

rabilis expositæ rationali, et FD eidem erit longitudine

commensurabilis: eamque ob causam $C D$ ipsi $A B$ or-

dine eadem est, utraque enim est ex binis nominibus

secunda. Quod si neutra ipsarum $A E$, $E B$ sit expositæ

rationali longitudine commensurabilis, et neutra ipsa-

rum CF , FD eidem longitudine commensurabilis erit;

et utraque $A B$, CD est tertia. At si $A E$ plus possit

quam $E B$ quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis

z

longitudine,

longitudine; et CF plus poterit quam FD quadrato rectæ
 * 15. hujus. lineæ sibi longitudine incommensurabilis^k. Et si AE
 longitudine sit commensurabilis expositæ rationali, et
 CF eidem longitudine commensurabilis erit; et est AB ,
 CD utraque quarta. Quod si EB sit, et ipsa FD erit;
 et est utraque AB , CD quinta. Si vero neutra ipsarum
 AE , EB sit, et neutra CF , FD expositæ rationali erit
 longitudine commensurabilis; et est utraque AB , CD
 sexta.

Ergo ei quæ est ex binis nominibus longitudine com-
 mensurabilis, et ipsa ex binis nominibus est et ordine
 eadem. Q. E. D.

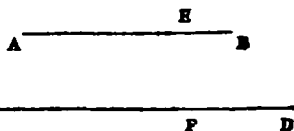
[LXVIII.]

PROP. LXVIII. THEOR.

*Ei quæ est ex binis mediis longitudine commensurabilis, et
 ipsa ex binis mediis est, atque ordine eadem.*

Sit ex binis mediis AB , et ipsi AB commensurabilis
 longitudine sit CD : dico CD ex binis mediis esse, et
 ipsi AB ordine eandem.

Quoniam enim AB ex binis mediis est, dividatur in no-
 mina ad punctum E . Erunt
 igitur AE , EB mediæ, po-
 tentiâ solum commensu-
 rabiles^l. Itaque fiat ut
 AB ad CD , ita AE ad
 CF : ergo et reliqua EB
 ad reliquam FD est ut



^l 38. & 39.
 hujus.

AB ad CD . Commensurabilis autem est AB ipsi CD
 longitudine^m. Quare et AE ipsi CF longitudine com-
 mensurabilis erit, et EB ipsi FD . Suntque mediæ AE ,
 * 24. hujus. EB : mediæ igitur et CF , FD ⁿ. Et quoniam est ut
 AE ad EB , ita CF ad FD , et sunt AE , EB commensu-
 rabiles potentiâ solum; erunt et CF , FD potentiâ solum
 * 10. hujus. commensurabiles^o. Ofsensæ autem sunt et mediæ: ergo
 CD est ex binis mediis^l. Dico et ipsi AB ordine ean-
 dem esse.

Quoniam enim est ut AE ad EB , ita CF ad FD ;
 erit et quadratum ex AE ad rectangulum sub AE , EB ,
 ut quadratum ex CF ad rectangulum sub CF , FD ^p.
 Quare permutando ut quadratum ex AE ad quadratum
 ex CF , ita rectangulum sub AE , EB ad rectangulum
 sub CF , FD . Commensurabile autem est quadratum
 ex

^p 11. quinti.
 & 1. sexti.

ex AE quadrato ex CF : ergo et rectangulum sub AE , EB rectangulo sub CF , FD est commensurabile. Sive igitur rationale est rectangulum sub AE , EB , et rectangulum sub CF , FD rationale erit⁹; atque ob id est utraque AB , CD ex binis mediis prima^o. Sive vero medium est rectangulum sub AE , EB , et ipsum sub CF , FD erit medium^p. Atque est utraque AB , CD ex binis mediis secunda⁹; et propterea CD ipsi AB ordine eadem est. *Q. E. D.*

⁹ Def. 9.
hujus.
^o 38. hujus.
^p Cor. Def.
12. hujus.
⁹ 39. hujus.

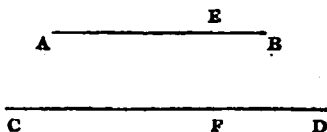
PROP. LXIX. THEOR.

[LXIX.]

Majori commensurabilis et ipsa major est.

Sit major AB ; et ipsi AB commensurabilis longitudine sit CD : dico CD majorem esse.

Dividatur AB in nomina in E : ergo AE , EB potentiâ sunt incommensurabiles^r, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem sub ipsis continetur medium. Et fiant eadem, quæ supra. Quo-



^r 40. hujus.

niam igitur est ut AB ad CD , ita AE ad CF , et EB ad FD ; erit ut AE ad CF , ita EB ad FD ¹¹. Et permutando ut AE ad EB , ita CF ad FD . Sed potentiâ incommensurabiles sunt AE , EB . Quare et CF , FD potentiâ sunt incommensurabiles^r. Commensurabilis autem est AB ipsi CD longitudine: ergo et utraque ipsarum AE , EB utrique CF , FD longitudine est commensurabilis^r. Et quoniam est ut AE ad CF , ita EB ad FD ; permutandoque ut AE ad EB , ita CF ad FD ; erit componendo ut AB ad BE , ita CD ad DF : ut igitur quadratum ex AB ad quadratum ex BE , ita quadratum ex CD ad quadratum ex DF ⁹. Similiter demonstrabimus¹⁰ et ut quadratum ex AB ad quadratum ex AE , ita esse quadratum ex CD ad quadratum ex CF . Ergo ut quadratum ex AB ad quadrata ex AE , EB , ita quadratum ex CD ad quadrata ex CF , FD ¹¹. Permutando igitur ut quadratum ex AB ad quadratum ex CD , ita quadrata ex AE , EB ad quadrata ex CF , FD . Commensurabile autem est quadratum ex AB quadrato ex CD : ergo et quadrata ex AE , EB quadratis ex CF , FD sunt commensurabilia. Atqui est compositum ex quadratis ipsarum

"40. hujus. rum AE, EB rationale": ergo et rationale erit compositum ex quadratis ipsarum CF, FD ^x. Rectangulum autem quod bis continetur sub AE, EB commensurabile est ei, quod bis sub CF, FD continetur. Atqui est medium quod bis continetur sub AE, EB ^u. Medium igitur est et quod bis sub CF, FD continetur^y. Ergo CF, FD potentiâ sunt incommensurabiles, facientes compositum ex ipsarum quadratis rationale, quod autem sub ipsis continetur medium. Tota igitur irrationalis est, quæ vocatur major^u.

Ergo majori commensurabilis et ipsa major est. *Q. E. D.*

* SCHOLION.

Rectangula quæ sub AE, EB ; CF, FD continentur inter se commensurabilia esse sic ostendimus.

Rectæ AB, CD ponuntur longitudine commensurabiles. Erit igitur AB ad CD , ut numerus ad numerum^z; puta ut M ad N . Ut autem $M \dots AB$ ad CD , sic est AE ad CF , et EB ad FD . $N \dots$ Erit igitur tum AE ad CF , tum EB ad FD , ut numerus M ad numerum N ^a. Quapropter rectangulum sub AE, EB , ad rectangulum sub CF, FD rationem habebit, quam quadratus numeri M , ad quadratum numeri N ^b: numeri igitur ad numerum rationem. Rectangulum igitur quod sub AE, EB , illi quod sub CF, FD commensurabile est^c. *Q. E. D.*

Cor.* Rectangula, quorum latera lateribus, singula singulis, longitudine sint commensurabilia, et ipsa inter se commensurabilia erunt.

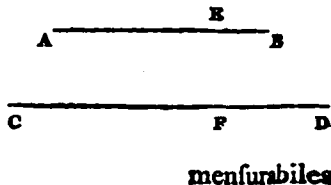
[LXX.]

PROP. LXX. THEOR.

Rationale ac medium potenti commensurabilis et ipsa rationale ac medium potens est.

Sit rationale ac medium potens AB ; et ipsi AB commensurabilis sit CD : ostendendum est et CD rationale ac medium potentem esse.

Dividatur AB in rectas suas ad punctum E : ergo AE, EB potentiâ incom-



mensurabiles sunt^d, facientes compositum ex ipsarum^d 41. hujus. quadratis medium; quod autem sub ipsis continetur rationale: et eadem, quæ prius, construuntur. Similiter ac in præcedente demonstrabimus CF , FD potentiâ esse incommensurabiles; et compositum ex quadratis ipsarum AE , EB commensurabile esse composito ex quadratis ipsarum CF , FD ; quod autem continetur sub AE , EB commensurabile esse ei, quod sub CF , FD continetur. Ergo et compositum ex quadratis ipsarum CF , FD est medium^e, quod autem continetur sub CF , FD rationale^f; et igitur CD est rationale ac medium potens^g. Q. E. D.

Cor. Def.

12.^o hujus.

Def. 9.

hujus.

41. hujus.

PROP. LXXI. THEOR.

[LXXI.]

Bina media potenti commensurabilis et ipsa bina media potens est.

Sit bina media potens AB , et ipsi AB commensurabilis sit CD : ostendendum est CD bina media potentem esse.

Quoniam enim bina media potens est AB , dividatur in rectas suas ad punctum

E . Quare AE , EB potentiâ sunt incommensurabiles^a, quæ faciunt compositum ex ipsarum quadratis medium, quod autem sub ipsis contine-

$A \xrightarrow{\quad E \quad} B$

^b 42. hujus.

$C \xrightarrow{\quad F \quad} D$

tur medium, et adhuc compositum ex quadratis ipsarum AE , EB incommensurabile rectangulo sub ipsis AE , EB : et construuntur eadem, quæ supra. Similiter ac in præcedentibus demonstrabimus CF , FD potentiâ incommensurabiles esse; et compositum ex quadratis ipsarum AE , EB commensurabile composito ex quadratis ipsarum CF , FD ; quod autem sub AE , EB continetur commensurabile esse ei, quod continetur sub CF , FD .

Quare et compositum ex quadratis ipsarum CF , FD medium est; itemque medium quod sub CF , FD continetur¹. Porro compositum ex quadratis ipsarum CF , FD rectangulo sub ipsis CF , FD est incommensurabile. 12.^o hujus.

Nam cum AE sit ad EB , ut CF ad FD ; erit quadratum ex AE ad rectangulum sub AE , EB , ut quadratum ex CF ad rectangulum sub CF , FD . Simili ratione quadratum ex EB ad rectangulum sub AE , EB , ut qua-

dratum ex FD ad rectangulum sub CF , FD . Quare et compositum ex quadratis ipsarum AE , EB ad rectangulum sub AE , EB , ut compositum ex quadratis ipsarum CF , FD ad rectangulum sub CF , FD ^d. Compositum autem ex quadratis ipsarum AE , EB rectangulo sub AE , EB est incommensurabile. Quare et compositum ex quadratis ipsarum CF , FD est incommensurabile rectangulo sub CF , FD ^e. Ergo CD est bina media^f 42. hujus. potens^f. *Q. E. D.*

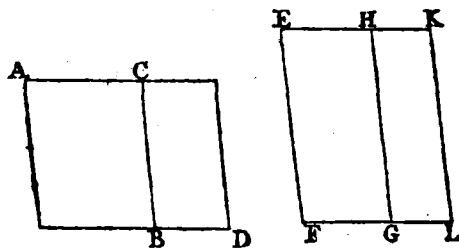
[LXXII.]

PROP. LXXII. THEOR.

Quæ potest spatium ex rationali et medio compositum, ex irrationalibus erit in serie primâ; nimirum vel prima in serie, vel secunda, vel quarta, vel quinta: hoc est, vel ex binis nominibus; vel ex binis mediis prima; vel major; vel rationale ac medium potens.

Sit rationale quidem spatium AB , medium autem CD : dico eam, quæ potest spatium AD , vel esse ex binis nominibus, vel ex binis mediis primam, vel majorem, vel rationale ac medium potentem.

Etenim rationale AB vel majus est medio CD , vel minus. Sit primum majus; exponaturque rationalis EF , et ad ipsam applicetur parallelogrammum EG ipsi



AB æquale, quod latitudinem faciat EH ; ipsi vero CD æquale ad EF , hoc est, ad HG , applicetur HL , latitudinem faciens HK . Et quoniam rationale est AB , et ipsi est æquale EG ; erit et EG rationale; et ad rationalem EF applicatum latitudinem efficiet EH rationalem, et ipsi EF longitudine commensurabilem^e. Rursum quoniam medium est CD , et ipsi est æquale HL ; erit et HL medium; et ad rationalem EF , hoc est, HG , applicatum latitudinem efficiet HK rationalem, sed incommensurabilem

^e 21. hujus.

bilem ipsi EF longitudine^h. Quod cum medium sit²³ hujus. CD , rationale autem AB ; erit AB ipsi CD incommensurabile: ergo et EG incommensurabile est ipsi HL . Ut autem EG ad HL , ita est recta linea EH ad HK ¹:¹ i. sexti. ergo EH ipsi HK longitudine est incommensurabilis. Et sunt ambæ rationales. Quare EH , HK rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles; et ob id ex binis nominibus est EK , divisa ad punctum H . Et quoniam majus est AB quam CD , æquale autem AB ipsi EG , et CD ipsi HL ; erit et EG quam HL majus: ergo et EH major est quam HK . Vel igitur EH plus potest quam HK quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine, vel incommensurabilis. Possit primum quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. Et cum sit major HE expositæ rationali EF commensurabilis: erit EK ex binis nominibus prima^k. Atqui est EF ra-^{Def.} tionalis. Si autem spatium contineatur sub rationali et^{Secund.} ex binis nominibus primâ; recta linea spatium potens^{1. hujus.} ex binis nominibus est^l: ergo quæ potest spatium EL ⁵⁵ hujus. est ex binis nominibus. Quare et ea, quæ potest spatium AD , est ex binis nominibus.

Sed EH plus possit quam HK quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Et cum sit major EH expositæ rationali EF commensurabilis longitu-^m dine; erit EK ex binis nominibus quarta^m. Sed ratio-^{Def.} nalis est EF . Si autem spatium contineatur sub ratio-^{Secund.} nali et ex binis nominibus quartâ; recta linea spatium^{4. hujus.} potens irrationalis est, quæ major appellaturⁿ. Potensⁿ ⁵⁸ hujus. igitur spatium EL major est: ergo et potens spatium AD major.

Sed sit spatium AB minus quam CD : erit igitur et EG quam HL minus; et ob id recta linea EH minor quam recta HK . Vel igitur EH plus potest quam EH quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Possit primum quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. Et cum sit minor EH commensurabilis expositæ rationali EF longi-^{Def.} tudine: erit EK ex binis nominibus secunda^o. Ratio-^{Secund.} nalis autem EF . Quod si spatium contineatur sub ra-^{2. hujus.} tionali et ex binis nominibus secundâ, recta linea spa-^p tium potens est ex binis mediis prima^p. Potens igitur^p ⁵⁶ hujus. spatium

spatium EL est ex binis mediis prima: ergo et potens spatium AD .

¹ Def.
Secund.
5. hujus.

Sed KH plus possit quam EH quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Et cum minor EH expositæ rationali EF commensurabilis sit longitudine; erit EK est ex binis nominibus quinta¹. Atqui est rationalis EF . Si autem spatium contineatur sub rationali et ex binis nominibus quinta; quæ spatium potest recta linea, rationale ac medium potens est¹. Quæ igitur potest spatium EL , rationale et medium potens est; ideoque rationale et medium potens est, quæ potest spatium AD .

¹ 59. hujus.

Quæ potest igitur spatium ex rationali et medio compositum, ex irrationalibus erit in serie primâ; nimirum vel prima in serie, vel secunda, vel quarta, vel quinta; hoc est, vel ex binis nominibus; vel ex binis mediis prima; vel major; vel rationale ac medium potens. Q. E. D.

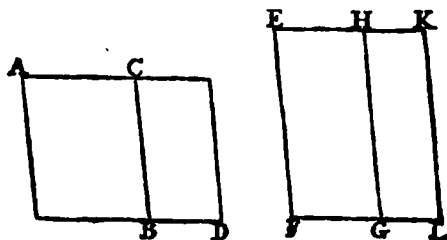
[LXXIII.]

PROP. LXXIII. THEOR.

Quæ potest spatium ex duobus mediis inter se incommensurabilibus compositum, irrationalis erit; reliquarum utique alterutra in serie primâ, vel tertiâ, vel sexta: hoc est, vel ex binis mediis secunda, vel bina media potens.

Componantur enim duo media incommensurabilia inter se AB , CD : dico rectam lineam, quæ spatium AD potest, vel ex binis mediis secundam esse, vel bina media potentem.

Spatium enim AB vel majus est quam CD , vel minus. Sit primum majus; exponaturque rationalis EF ; et ad EF spatio quidem AB æquale applicetur EG ,



latitudinem faciens EH ; ipsi vero CD æquale applicetur HL , latitudinem faciens HK . Et quoniam medium est utrumque ipsorum AB , CD , erit et utrumque EG ,

HL

HL medium. Sed ad rationalem EF applicata sunt. Latitudines igitur EH , HK utramque efficiunt rationalem, et ipsi EF longitudine incommensurabilem¹. 23. hujus.

Quod cum AB incommensurabile sit ipsi CD ; fitque AB quidem æquale ipsi EG ; CD vero ipsi HL : erit et EG ipsi HL incommensurabile. Sed ut EG ad HL , ita est EH ad HK : incommensurabilis igitur est EH ipsi HK longitudine: ideoque EH , HK rationales sunt, potentia solum commensurabiles. Quare ex binis nominibus est EK . Itaque vel EH plus potest quam HK quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine, vel incommensurabilis. Possit primum quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine; et neutra ipsarum EH , HK longitudine commensurabilis est expositæ rationali EF : ergo EK est ex binis nominibus tertia. Sed rationalis est EF . Si autem spatium contineatur sub rationali et ex binis nominibus tertia, recta lineæ spatium potens est ex binis mediis secunda²: ergo quæ³ 57. hujus. potest spatium EL , hoc est, AD , est ex binis mediis secunda.

Sed EH plus possit quam HK quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine; et utraque ipsarum EH , HK longitudine incommensurabilis est expositæ rationali EF . Quare EK est ex binis nominibus sexta⁴. At si spatium contineatur sub rationali et ex⁵ Def. binis nominibus sexta; quæ spatium potest recta lineæ, ^{Secund.} est bina media potens⁶: ergo quæ potest spatium AD , ^{6. hujus.} bina media potest. ^{60. hujus.} Similiter demonstrabimus, si et AB sit minus quam CD , rectam lineam, quæ spatium potest AD , vel ex binis mediis secundam esse, vel bina media potentem.

Quæ potest igitur spatium ex duobus mediis inter se incommensurabilibus compositum, irrationalis erit; reliquarum utique alterutra in serie primâ, vel tertiâ, vel sexta: hoc est, vel ex binis mediis secunda, vel bina media potens. *Q. E. D.*

SCHOLION.

Quæ ex binis nominibus, et quæ post ipsam, sunt irrationales, neque mediæ, neque inter se eadem sunt; quadratum enim quod sit a mediâ, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit rationalem, et ei, ad quam applicatur, longitudine incommensurabilem⁷: quod autem ^{23. hujus.} sit

- fit ab eâ, quæ est ex binis nominibus, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit ex binis nominibus prima, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit ex binis nominibus secunda, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit ex binis nominibus tertia, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit ex binis nominibus quarta, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit ex binis nominibus quinta, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit ex binis nominibus sexta. Quoniam igitur dictæ latitudines differunt et a primâ et inter sese, a primâ quidem quod rationalis sit, inter sese vero quod ordine non sint eadem, constat et ipsas irracionales esse, aliam ab aliâ differentes.

Principium Senariorum per Detractionem †.

[LXXIV.]

PROP. LXXIV. THEOR.

Si a rationali rationalis auferatur, potentiâ solum commensurabilis existens toti; reliqua irrationalis est: vocetur autem Apotome ‡.

A rationali enim A B rationalis auferatur B C, potentiâ solum commensurabilis existens toti: dico reliquam A C irracionalem esse.

Quoniam enim incommensurabilis est A B ipsi B C



- longitudine, atque est ut A B ad B C, ita quadratum ex A B ad id, quod continetur sub A B, B C; erit quadratum

† Per detractionem sunt binomia, quorum nomina signo—conjuncta sunt.

‡ Quam sene Residuum Juniores dicunt.

ex AB incommensurabile ei, quod sub AB , BC , continetur: sed quadrato ex AB commensurabile est compositum ex quadratis ex AB , BC ^f; ei vero quod continetur sub¹⁶ 16. hujus. AB , BC commensurabile est quod bis sub AB , BC continetur. Compositum igitur ex ipsarum AB , BC quadratis ei, quod bis continetur sub AB , BC , est incommensurabile. Ergo reliquo, nempe quadrato ex AC , incommensurabile est compositum ex quadratis ex AB , BC ; quoniam quadrata ex AB , BC simul sumpta æqualia sunt ei, quod bis sub AB , BC continetur una cum quadrato ex AC ¹⁷. Rationale autem est compositum ex qua-^{17. secundi.} dratis ex AB , BC ^{16. &} (nimirum cum ipsa AB rationalis^{16. &} sit, et quadrata ex AB , BC inter se commensurabilia^{17.} Def. 9. hujus. ergo recta linea AC est irrationalis: vocetur autem apotome¹ k. Q. E. D. Def. 11. hujus.

PROP. LXXV. THEOR.

[LXXV.]

Si a mediâ media auferatur, potentiâ solum commensurabilis existens toti, quæ cum totâ rationale continet; reliqua irrationalis est: vocetur autem mediæ apotome prima.

A mediâ enim AB auferatur media BC , potentiâ solum commensurabilis existens ipsi AB , et cum eâ rationale faciens, videlicet quod sub AB , BC continetur: dico reliquam AC irrationalem esse.

Quoniam enim AB , BC mediæ sunt, erunt et quadratorum quæ ex AB , BC utrumque medium. Incommensurabile igitur utrumque ei quod bis continetur



sub AB , BC , rationali. Compositum igitur ex quadratis AB , BC incommensurabile est ei, quod bis sub AB , BC continetur¹: ergo et reliquo, sc. quadrato ex^{16. & 14.} AC , incommensurabile est id, quod bis sub AB , BC continetur^{17. secundi.}: quoniam si tota magnitudo uni componen-^{17. secundi.} tium sit incommensurabilis, et quæ a principio magnitudines incommensurabiles erunt^{17. hujus.}. Rationale autem^{17. hujus.} est, quod bis continetur sub AB , BC . Irrationale igitur est quadratum ex AC : ideoque irrationalis est AC ^{17. hujus.}: vo-^{17. hujus.} cetur autem mediæ apotome prima. Q. E. D. Def. 11. hujus.

PROP.

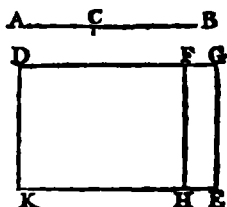
[LXXVI.]

PROP. LXXVI. THEOR.

Si a mediâ media auferatur, potentiâ solum commensurabilis existens toti, quæ cum totâ medium continet; et reliqua irrationalis est: vocetur autem mediâ apotome secunda.

A mediâ enim AB auferatur media BC , potentiâ solum commensurabilis existens toti AB , et cum eâ medium continens, videlicet quod continetur sub AB , BC : dico reliquam AC irrationalem esse.

Exponatur enim rationalis DK , et quadratis quidem ex AB , BC simul sumptis æquale parallelogrammum DE ad ipsam DK applicetur, latitudinem faciens DG ; ei vero quod bis sub AB , BC continetur æquale parallelogrammum DH ad eandem DK applicetur, latitudinem faciens DF : reliquum igitur FE est æquale quadrato ex AC ^m. Et quoniam me-



^m7. secundi

^a 16. &

Cor. Def.

12.^o hujus.

medium est compositum ex quadratis ex AB , BC ^a; (nempe cum quadrata illa media sint inter se commensurabilia) erit et parallelogrammum DE medium. Et ad rationalem DK applicatum est, latitudinem faciens DG : ergo DG est rationalis, sed ipsi DK longitudine in-

^o 23. hujus. commensurabilis^o. Rursus, quoniam medium est quod sub AB , BC continetur; erit et quod bis continetur sub AB , BC medium. Atqui est æquale parallelogrammo DH : ergo et DH est medium, et ad rationalem DK applicatum est, latitudinem faciens DF : rationalis igitur est DF , sed ipsi DK longitudine incommensurabilis. Et quoniam AB , BC potentiâ solum commensurabiles sunt; erit AB ipsi BC incommensurabilis longitudine: ergo quadratum ex AB incommensurabile est ei, quod

^p 1. sexti, sub AB , BC continetur^p. Sed quadrato quidem ex

& 10. hujus. AB commensurabile est compositum ex iis, quæ ex

^q 16. hujus. AB , BC fiunt, quadratis^q; ei vero quod sub AB , BC continetur commensurabile est id quod bis continetur

^r 6. hujus. sub AB , BC ^r. Compositum igitur ex quadratis AB ,

BC incommensurabile est ei, quod bis sub AB , BC continetur. DE autem est æquale quadratis ex AB , BC simul sumptis; et parallelogrammum DH æquale est ei,

^s Per construct. quod bis continetur sub AB , BC ^s: ergo DE ipsi DH est

est incommensurabile. Sed ut DE ad DH , ita recta linea GD ad DF : incommensurabilis igitur est GD i. sexti. ipsi DF longitudine. Sed sunt ambæ rationales: quare GD , DF rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles. Ergo FG apotome est¹. Et DK est rationalis.^{74. hujus.} Quod autem sub rationali et irrationali continetur rectangulum, irrationale est²; ideo et ipsum potens est³ Cor.^{39.} irrationalis. Sed recta linea AC potest FE parallelogrammum: ergo AC est irrationalis: vocetur autem mediæ apotome secunda. Q. E. D.

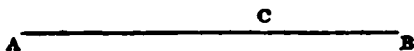
PROP. LXXVII. THEOR.

[LXXVII.]

Si a rectâ lineâ recta linea auferatur, potentiâ incommensurabilis existens toti, quæ cum totâ faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem sub ipsis continetur medium; reliqua irrationalis est: vocetur autem minor.

A rectâ lineâ AB auferatur recta BC , potentiâ incommensurabilis existens toti, faciensque cum totâ AB compositum quidem ex ipsarum AB , BC quadratis rationale, quod autem bis sub AB , BC continetur medium: dico reliquam AC irrationalem esse.

Quoniam enim compositum quidem ex ipsarum AB , BC quadratis rationale est: quod autem bis sub AB ,



BC continetur medium; erit compositum ex quadratis ipsarum AB , BC incommensurabile ei, quod bis continetur sub AB , BC . Ergo per conversionem, compositum ex quadratis ex AB , BC quadrato ex AC est incommensurabile¹. Sed compositum ex quadratis ex AB ,^{17. hujus.} BC rationale est²: irrationale igitur est quadratum ex³ ex hyp. AC ; ideoque recta linea AC est irrationalis: vocetur autem minor. Q. E. D.

PROP.

[LXXVIII.]

PROP. LXXVIII. THEOR.

Si a rectâ lineâ recta linea auferatur, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem sub ipsis continetur rationale; reliqua irrationalis est: vocetur autem cum rationali medium totum efficiens.

A rectâ enim lineâ A B recta linea B C auferatur, incommensurabilis existens toti A B, faciensque compositum quidem ex ipsarum A B, B C quadratis medium; quod autem sub A B, B C continetur, rationale: dico reliquam A C irrationalem esse.

Quoniam enim compositum ex ipsarum A B, B C quadratis medium est, quod autem bis continetur sub A B, B C rationale; erit compositum ex ipsarum A B, B C quadratis in-

commensurabile ei, quod bis sub A B, B C continetur. Et reliquum igitur quadratum ex A C incommensurabile

* 17. hujus. est ei, quod bis continetur sub A B, B C. Atqui est quod bis continetur sub A B, B C rationale: ergo quadratum ex A C irrationale est; et ob id recta linea A C irrationalis: vocetur autem cum rationali medium totum efficiens. Q. E. D.

[LXXIX.]

PROP. LXXIX. THEOR.

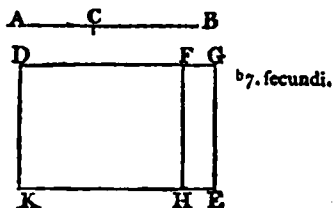
Si a rectâ lineâ recta linea auferatur, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem sub ipsis continetur medium, et adhuc compositum ex ipsarum quadratis incommensurabile ei, quod continetur sub ipsis; reliqua irrationalis est: vocetur autem cum medio medium totum efficiens.

A rectâ enim lineâ A B recta linea B C auferatur, potentiâ incommensurabilis existens toti A B, faciensque compositum quidem ex ipsarum A B, B C quadratis medium, quod autem sub A B, B C continetur medium; et adhuc quadrata ipsarum A B, B C incommensurabilia rectangulo, quod continetur sub A B, B C: dico reliquam A C irrationalem esse.

Exponatur enim rationalis D K, et composito quidem ex quadratis ex A B, B C æquale parallelogrammum D E ad ipsam

ipsam DK applicetur, latitudinem faciens DG ; ei vero

quod bis continetur sub AB , BC æquale auferatur DH , latitudinem faciens DF : ergo reliquum FE est æquale quadrato ex AC ^b; et ob id recta linea AC ipsum FE potest. Itaque quoniam compositum ex ipsarum AB , BC quadratis medium est, et parallelogrammo DE æquale; erit ipsum DE medium.



Sed ad rationalem DK applicatum est, latitudinem faciens DG . Quare DG est rationalis, sed ipsi DK longitudine incommensurabilis^c. Rursus, quoniam id quod bis^c 23. hujus. sub AB , BC , continetur medium est, et æquale parallelogrammo DH , erit DH medium; et ad rationalem DK applicatum est, latitudinem faciens DF . Ergo DF est rationalis, ipsique DK incommensurabilis longitudine. Et quoniam compositum ex quadratis ex AB , BC incommensurable est ei, quod bis sub AB , BC continetur; et parallelogrammum DE ipsi DH est incommensurable. Ut autem DE ad DH , ita est recta linea DG ad ipsam DF ^d: incommensurabilis igitur est DG ipsi DF longitudine^e. Et sunt ambæ rationales. Ergo DG , DF rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles: apotome igitur est FG ^f. Sed FH est rationalis. Quod autem sub ra-^f 74. hujus. tionali et irrationali continetur rectangulum, irrationale est^g; ipsumque potens est irrationalis. Irrationale igitur est rectangulum FE , et quæ potest ipsum AC est hujus. irrationalis. Vocetur autem cum medio medium totum efficiens. Q. E. D.

PROP. LXXX. THEOR.

[LXXX.]

Apotome una tantum congruit† recta linea, potentiâ solum commensurabilis existens toti.

Sit apotome AB , congruens autem ipsi sit BC : ergo AC , CB rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles^h.^h 74. hujus. Dico ipsi AB alteram non congruere rationalem, quæ potentiâ solum sit commensurabilis toti †.

† Congruere (συναρπάζειν) apotome Euclidî dicitur recta, quæ, in binomis per subtractionem, nomen negativum constituit. Contra Totam appellat; quæ nomen positivum. Ut si ponatur $x - y = z$. Tota est x , Apotome z , Congruens y .

‡ Sensus est nullam aliam dari rationalem, quæ ipsi AB addita Totam efficiat ipsi rationali potentiâ solum commensurabilem, præter illam AC .

Si enim fieri potest, congruat BD : ergo AD , DB
^{24. hujus.}rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles¹. Et
 quoniam quo excessu quadrata ex AD , DB excedunt id



quod bis continetur sub AD , DB , eo et quadrata ex
 AC , CB excedunt id quod bis sub AC , CB continetur;
 (utraque enim excedunt eodem quadrato, nempe quod
 fit ex AB) et permutando, quo excessu quadrata ex
 AD , DB excedunt quadrata ex AC , CB , eodem et id,
 quod bis continetur sub AD , DB , excedet id, quod
 bis sub AC , CB continetur. Sed quadrata ex AD , DB
^{ex hyp.}excedunt quadrata ex AC , CB rationali¹: utraque enim
 rectarum linearum DB , CB rationalis est; necnon utra-
 que ipsarum AD , AC . Quod igitur bis continetur sub
 AD , DB excedit id quod bis sub AC , CB continetur ra-
^{27. hujus.}medium autem medium non superat rationali². Ergo
 rectæ lineæ AB altera non congruit rationalis, potentiâ
 solum commensurabilis existens toti.

Igitur apotomæ una tantum congruit rationalis, po-
 tentiâ solum commensurabilis existens toti. *Q. E. D.*

[LXXXI.]

PROP. LXXXI. THEOR.

*Mediæ apotomæ primæ una tantum congruit recta linea
 media, potentiâ solum commensurabilis existens toti, et
 cum totâ rationale continens.*

Sit enim mediæ apotome prima AB , et ipsi AB con-
 gruat BC : ergo AC , CB mediæ sunt potentiâ solum
 commensurabiles, quæ rationale continent, nempe quod
^{25. hujus.}fit sub AC , CB ¹. Dico ipsi AB alteram non congruere
 mediam, quæ potentiâ solum fit commensurabilis toti,
 et cum totâ rationale contineat.

Si enim fieri potest, congruat DB : ergo AD , DB
 mediæ sunt potentiâ solum commensurabiles¹, quæ ra-
 tionale continent, nempe quod fit sub AD , DB . Et



quoniam quo excessu quadrata ex AD , DB excedunt id,
 quod bis continetur sub AD , DB , eodem et quadrata
 ex AC , CB excedunt quod bis sub AC , CB continetur;
^{7. secundi.}(excedunt enim eodem quadrato ex AB ^m;) et permu-
 tando,

tando, quo excessu quadrata ex AD , DB excedunt quadrata ex AC , CB , eodem et quod bis continetur sub AD , DB excedit id, quod bis sub AC , CB continetur. Sed quod bis continetur sub AD , DB excedit id, quod bis sub AC , CB continetur rationali; ambo enim rationalia sunt. Ergo et quadrata ex AD , DB excedunt quadrata ex AC , CB rationali, quod fieri non potest; ambo enim sunt media^a, medium autem medium non^a ex hyp. superat rationali^o. ^{o 27. hujus.}

Quare mediæ apotomæ primæ una tantum congruit recta linea media, quæ potentiâ solum toti sit commensurabilis, et cum totâ rationale contineat. *Q. E. D.*

PROP. LXXXII. THEOR.

[LXXXII.]

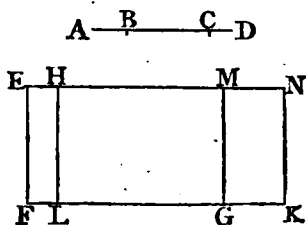
Mediæ apotomæ secundæ una tantum congruit recta linea, potentiâ solum commensurabilis existens toti, et cum totâ medium continens.

Sit mediæ apotome secunda AB , et ipsi AB congruat BC : ergo AC , CB mediæ sunt, potentiâ solum commensurabiles, mediumque continentes sub AC , CB ^{P. 76. hujus.} Dico ipsi AB alteram non congruere mediam, quæ potentiâ solum sit commensurabilis toti, et cum totâ medium contineat.

Si enim fieri potest, congruat BD . Quare AD , DB mediæ sunt, potentiâ solum commensurabiles, quæ medium sub AD , DB continent^{P.} Exponatur rationalis EF , quadratisque ex AC , CB æquale parallelogrammum EG ad ipsam EF applicetur, latitudinem faciens EM ; et ei quod bis continetur sub AC , CB æquale auferatur parallelogrammum HG , latitudinem faciens HM : reliquum igitur EL est æquale ei quod sit ex AB quadrato^r. Ergo AB ipsum EL potest. Rursus, quadratis ex AD , DB æquale parallelogrammum EK ad ipsam EF applicetur, latitudinem faciens EN ; est autem et EL æquale quadrato ex AB : reliquum igitur HK est æquale ei quod bis sub AD , DB continetur^r. Et quoniam mediæ sunt AC , CB , potentiâ commensurabiles; erunt et quadrata ex AC , CB media^a, ^{Def. 12. hujus.} inter se commensurabilia. Quare et compositum ex

A a

quadratis



quadratis $A C, C B$ (utrique scilicet eorum commen-

⁹ 16. hujus. rabile⁹) medium erit^r. Com-

^r Cor. Def.

12.⁹ hujus. posito autem ex quadratis

$A C, C B$ æquale est paral-
lelogrammum $E G$. Quare $E G$
est medium, et ad rationa-
lem $E F$ applicatum est, lati-
tudinem faciens $E M$: ergo
 $E M$ est rationalis, sed ipsi

⁹ 23. hujus. $E F$ longitudine incommen-
surabilis^r. Rursus, quoniam

medium est quod continetur sub $A C, C B$; et quod bis
sub $A C, C B$ continetur medium erit^r. Atque est æquale
parallelogrammo $H G$: ergo et $H G$ est medium, et ad
rationalem $E F$ applicatum est, latitudinem faciens $H M$:
rationalis igitur $H M$, sed ipsi $E F$ incommensurabilis lon-
gitudine^r. Et quoniam $A C, C B$ potentiâ solum sunt
commensurabiles^r; erit $A C$ incommensurabilis ipsi $C B$

^r ex hyp.

⁹ 1. sexti.

longitudine. Ut autem $A C$ ad $C B$, ita quadratum ex
 $A C$ ad id quod continetur sub $A C, C B$ ⁹: incommensura-
bile igitur est et quadratum ex $A C$ ei, quod sub $A C, C B$
continetur. Sed quadrato quidem ex $A C$ commensura-
bilis sunt quadrata ex $A C, C B$ simul sumpta; ei vero,

⁹ 16. hujus. quod continetur sub $A C, C B$, commensurabile est quod
bis sub $A C, C B$ continetur^r: ergo quadrata ex $A C, C B$
simul sumpta incommensurabilia sunt ei, quod bis sub
 $A C, C B$ continetur. Atqui quadratis ex $A C, C B$ simul

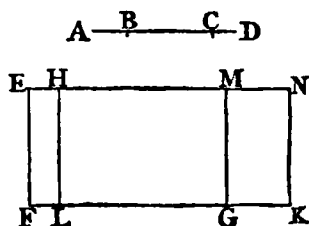
^r Per con-
struct.

sumptis æquale est parallelogrammum $E G$; ei vero,
quod bis sub $A C, C B$ continetur, æquale ipsum $H G$ ^r:
ergo $E G$ ipsi $H G$ est incommensurabile. Sed ut $E G$
ad $H G$, ita est recta linea $E M$ ad ipsam $H M$ ⁹. Quare
 $E M$ ipsi $H M$ est incommensurabilis longitudine. Et
sunt ambæ rationales. Ergo $E M, H M$ rationales sunt,

⁹ 74. hujus. potentiâ solum commensurabiles; ac propterea apo-
tome est $E H$, et ipsi congruens $H M$ ². Similiter de-
monstrabimus et $H N$ ipsi congruere: apotomæ igitur

⁹ 80. hujus. alia atque alia congruit recta linea, potentiâ solum com-
mensurabilis existens toti; quod fieri non potest^r.

Ergo mediæ apotomæ secundæ una tantum congruit
recta linea media, quæ potentiâ solum sit commensurabilis
toti, et cum totâ medium contineat. *Q. E. D.*



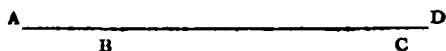
PROP. LXXXIII. THEOR.

[LXXXIII.]

Minori una tantum congruit recta linea, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem sub ipsis continetur medium.

Sit minor AB , et ipsi AB congruat BC : ergo AC , CB potentiâ sunt incommensurabiles, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem sub ipsis continetur medium^c. Dico ipsi AB ^{77. hujus.} alteram non congruere rectam lineam, quæ eadem faciat.

Si enim fieri potest, congruat BD : ergo AD , DB potentiâ sunt incommensurabiles, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale; quod autem



sub ipsis continetur medium^c. Et quoniam quo excessu quadrata ex AD , DB excedunt quadrata ex AC , CB , eodem et quod bis continetur sub AD , DB excedit id, quod bis sub AC , CB continetur^d: quadrata autem ex ^{d 7. secundi.} AD , DB excedunt quadrata ex AC , CB rationali; ambo enim rationalia sunt^e: igitur et quod bis continetur^e ex hyp. sub AD , DB id quod bis sub AC , CB continetur rationali excedet; quod fieri non potest^f; etenim ambo ^{27. hujus.} sunt media^g, nimirum cum mediorum ex hypothesi sint ^{Cor. Def.} dupla. ^{12. hujus.}

Ergo minori una tantum congruit recta linea, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod vero sub ipsis continetur medium. Q. E. D.

PROP. LXXXIV. THEOR.

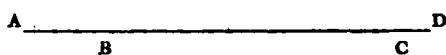
[LXXXIV.]

Ei quæ cum rationali medium totum facit una tantum congruit recta linea, potentiâ incommensurabilis existens toti et cum totâ faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem sub ipsis continetur rationale.

Sit cum rationali medium totum faciens AB , congruens autem ipsi BC : ergo AC , CB potentiâ sunt incommensurabiles, facientes compositum quidem ex ipsarum AC , CB quadratis medium, quod autem sub ipsis

^b 78. hujus. ipsis continetur rationale^b. Dico ipsi $A B$ alteram non congruere, eadem facientem.

Si enim fieri potest, congruat $B D$: ergo $A D$, $D B$ potentiâ sunt incommensurabiles, facientes compositum quidem ex ipsarum $A D$, $D B$ quadratis medium, quod



autem sub ipsis continetur rationale^b. Quoniam igitur quo excessu quadrata ex $A D$, $D B$ excedunt quadrata ex $A C$, $C B$, eodem quod bis continetur sub $A D$,

¹ 7. secundi. $D B$ excedit id, quod bis sub $A C$, $C B$ continetur¹; quod autem bis continetur sub $A D$, $D B$ excedit id quod bis sub $A C$, $C B$ continetur rationali, etenim ambo rationalia sunt, utpote ex hypothesi rationalium dupla: igitur et quadrata ex $A D$, $D B$ rationali excedent qua-

^{*} 27. hujus. drata ex $A C$, $C B$; quod fieri non potest^k; cum ambo sint media. Non igitur ipsi $A B$ altera congruit, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem sub ipsis continetur rationale. Quare ei, quæ cum rationali medium totum facit, una tantum congruet recta linea. *Q. E. D.*

[LXXXV.]

PROP. LXXXV. THEOR.

Ei quæ cum medio medium totum facit una tantum congruit recta linea, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem sub ipsis continetur medium, et adhuc incommensurabile composito ex quadratis ipsarum.

Sit cum medio medium totum faciens $A B$, ipsi vero congruens $B C$: ergo $A C$, $C B$ potentiâ sunt incom-

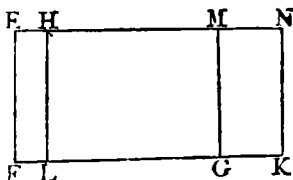
¹ 79. hujus. mensurabiles¹, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem sub ipsis $A C$, $C B$, continetur medium; et adhuc compositum ex quadratis ipsarum $A C$, $C B$ incommensurabile ei, quod continetur sub ipsis $A C$, $C B$. Dico ipsi $A B$ alteram non congruere, potentiâ incommensurabilem toti, et cum totâ facientem ea, quæ proposita sunt.

Si enim fieri potest, congruat $B D$; ita ut $A D$, $D B$ potentiâ incommensurabiles sint, faciantque compositum quidem ex ipsarum $A D$, $D B$ quadratis medium; quod autem sub ipsis $A D$, $D B$ continetur medium; et adhuc

huc compositum ex quadratis ipsarum AD , DB incommensurabile ei, quod continetur sub ipsis AD , DB .

$A \quad B \quad C \quad D$

Exponatur rationalis EF ; et quadratis ipsarum AC , CB æquale parallelogrammum EG ad ipsam EF applicetur, latitudinem faciens EM ; ei vero quod bis continetur sub AC , CB æquale parallelogrammum auferatur HG , latitudinem faciens HM : reliquum igitur quadratum ex AB est æquale parallelogrammo EL ^m. Ergo AB ipsum EL potest. Rursus,



quadratis ex AD , DB æquale parallelogrammum EK ad ipsam EF applicetur, latitudinem faciens EN . Est autem et quadratum ex AB æquale parallelogrammo EL : ergo reliquum quod bis sub AD , DB continetur ipsi HK est æquale^m. Et quoniam compositum ex quadratis ipsarum AC , CB medium estⁿ, et æqualeⁿ ex hyp. parallelogrammo EG ^o; erit et EG medium. Et ad

rationalem EF applicatum est, latitudinem faciens EM ; quare EM est rationalis, sed ipsi EF longitudine incommensurabilis^p. Rursus, quoniam quod bis sub

ⁿ ex hyp.
^o Per construct.

AC , CB continetur est medium, (medii utique duplum) et æquale ipsi HG ; erit et HG medium; et ad

rationalem EF applicatum est, latitudinem faciens HM : rationalis igitur est HM , sed ipsi EF incommensurabilis longitudine^p. Et quoniam compositum ex quadratis

ex AC , CB incommensurabile est ei, quod bis sub AC , CB continetur; erit et EG incommensurabile ipsi HG ; ideoque recta linea EM rectæ MH longitudine est incommensurabilis^q. Et sunt ambæ rationales. Cum

igitur EM , MH rationales sint, potentiâ solum commensurabiles; recta linea EH apotome est, et ipsi congruens HM ^r. Similiter demonstrabimus EH rursus

apotomen esse, ipsique congruentem HN : ergo apotomæ alia atque alia congruit rationalis, potentiâ solum commensurabilis existens toti; quod fieri non posse

ostensum est^s. Non igitur ipsi AB altera congruet recta

linea. Ipsi igitur AB una tantum congruet, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens

compositum quidem ex ipsarum quadratis medium,

quod autem sub ipsis continetur medium, et adhuc compositum ex quadratis ipsarum incommensurabile ei, quod continetur sub ipsis. *Q. E. D.*

DEFINITIONES TERTIÆ.

DEFINITIO I.

Expositâ rationali et apotomâ, si quidem tota plus possit quam congruens quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine; sitque tota expositæ rationali longitudine commensurabilis: vocetur apotome prima.

II.

Si vero congruens sit longitudine commensurabilis expositæ rationali, et tota plus possit quam congruens quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine; vocetur apotome secunda.

III.

Quod si neutra sit longitudine commensurabilis expositæ rationali, et tota plus possit quam congruens quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine; dicatur apotome tertia.

IV.

Rursus si tota plus possit quam congruens quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine, si quidem tota sit longitudine commensurabilis expositæ rationali; vocetur apotome quarta.

V.

Si vero congruens, vocetur apotome quinta.

VI.

Quod si neutra, dicatur apotome sexta.

SCHOLION.*

Manifestum est, geminas esse Binomiorum per detractionem series (*ἐξάδα* utramque) priorum, formâ algebraicâ, signo tantum diffimiles.

Recensio.

Recensio Algebraica utriusque 'Εξάδος per detractionem.

Series Prima.

I. Apotome; $a - \sqrt{\frac{m}{n}} b$. Vel etiam $\sqrt{\frac{m}{n}} a - \sqrt{\frac{p}{q}} b$.

II. Mediæ apotome prima; $\sqrt{\frac{m}{n}}^{\frac{1}{4}} a - \sqrt{\frac{m}{n}}^{\frac{3}{4}} a$.

III. Mediæ apotome secunda; $\sqrt{\frac{m}{n}}^{\frac{1}{4}} a - \sqrt{\frac{p}{q}}^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{m}{n}}^{\frac{1}{4}} a$.

IV. Minor; $\sqrt{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} a \times \sqrt{1 + \sqrt{\frac{\mu}{\nu + \mu}}} - \sqrt{1 - \sqrt{\frac{\mu}{\nu + \mu}}}$.

V. Cum rationali medium totum efficiens;

$\sqrt{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{\nu}{\nu + \mu}}^{\frac{1}{4}} a \times \sqrt{1 + \sqrt{\frac{\mu}{\nu + \mu}}} - \sqrt{1 - \sqrt{\frac{\mu}{\nu + \mu}}}$.

VI. Cum medio medium totum efficiens;

$\sqrt{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{m}{n}}^{\frac{1}{4}} a \times \sqrt{1 + \sqrt{\frac{\mu}{\nu + \mu}}} - \sqrt{1 - \sqrt{\frac{\mu}{\nu + \mu}}}$.

Series Secunda.

I. Apotome prima; $a - \sqrt{\frac{\nu - \mu}{\nu}} a$.

II. Apotome secunda; $\sqrt{\frac{\nu}{\nu - \mu}} a - a$.

III. Apotome tertia; $\sqrt{\frac{\nu - \mu}{\nu}} a - \sqrt{\frac{\pi - \sigma}{\pi}} a$.

IV. Apotome quarta; $a - \sqrt{\frac{\nu}{\nu + \mu}} a$.

V. Apotome quinta; $\sqrt{\frac{\nu + \mu}{\nu}} a - a$.

VI. Apotome sexta; $\sqrt{\frac{\nu}{\nu + \mu}} a - \sqrt{\frac{\pi}{\pi + \sigma}} a$.

Series autem secunda oritur ex divisione irrationalis ejus quæ prima est Seriei primæ in species, quas com-

plexa est, diversas. Quod de Serie secundâ earum quæ per compositionem similiter monendum erat.

Neque illud dissimulandum: tertiam et sextam secundæ utriusque seriei Algebraice aliâ formâ, et elegantiori, repræsentari posse.

Nimirum, Seriei secundæ earum quæ per compositionem

III^a, quæ tertia est ex binis nominibus, hisce notis

$$\text{significabitur; } \sqrt{\frac{\nu}{m}} a + \sqrt{\frac{\nu - \mu}{m}} a.$$

Hisce, autem ejusdem Seriei

VI^a, quæ sexta est ex binis nominibus

$$\sqrt{\frac{\nu + \mu}{m}} a + \sqrt{\frac{\nu}{m}} a.$$

Seriei item secundæ earum, quæ per detractionem, hisce notis

$$\text{III}^a, \text{ quæ tertia est apotome; } \sqrt{\frac{\nu}{m}} a - \sqrt{\frac{\nu - \mu}{m}} a.$$

Hisce denique

$$\text{VI}^a, \text{ quæ sexta est apotome; } \sqrt{\frac{\nu + \mu}{m}} a - \sqrt{\frac{\nu}{m}} a.$$

Literâ scilicet m numerum aliquem non quadratum designante, qui neque ad quadratum ν , neque ad quadratorum ν, μ differentiam $\nu - \mu$, vel summam $\nu + \mu$, numeri quadrati ad quadratum numerum rationem habeat.

[LXXXVI.]

PROP. LXXXVI. PROBL.

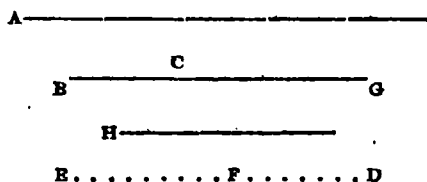
Invenire primam apotomen.

Exponatur rationalis A ; et ipsi A longitudine commensurabilis sit BG : ergo et BG est rationalis. Et exponantur duo quadrati numeri ED, EF , quorum excessus DF non sit quadratus*: neque igitur ED ad DF rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Et fiat ut ED ad DF , ita quadratum ex BG ad quadratum ex GC .

* Cor. Lem.
4. hujus.

Commen-

Commenfurabile igitur est quadratum ex $B G$ quadrato ex $G C$. Rationale autem est quadratum ex $B G$; ergo⁶ 6. hujus. et quadratum ex $G C$ est rationale: ideoque recta linea



$G C$ rationalis est. Et quoniam $E D$ ad $D F$ rationem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque quadratum ex $B G$ ad quadratum ex $G C$ rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: incommensurabilis igitur est $B G$ ipsi $G C$ longitudine⁸. Et sunt ambæ rationales.⁹ 9. hujus. Ergo $B G$, $G C$ rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles; et ob id $B C$ apotome est⁷. Dico et primam⁷ 74. hujus. esse. Sit enim quadratum ex H id, quo quadratum ex $B G$ excedit quadratum ex $G C$. Et quoniam est ut $E D$ ad $D F$, ita quadratum ex $B G$ ad quadratum ex $G C$; erit per conversionem ut $D B$ ad $E F$, ita quadratum ex $B G$ ad quadratum ex H ⁸. Sed $D E$ ad $E F$ rationem⁸ Cor. 19. habet, quam quadratus numerus ad quadratum numeri; uterque enim quadratus est⁸: ergo et quadratum⁸ Per con- ex $B G$ ad quadratum ex H rationem habebit, quam⁸ stru. quadratus numerus ad quadratum numerum. Commen- surabilis igitur est $B G$ ipsi H longitudine⁸. Et $B G$ plus potest quam $G C$ quadrato ex H . Ergo $B G$ plus pot- erit quam $G C$ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Atqui est tota $B G$ expositæ ratio- nali A commensurabilis longitudine. Ergo $B G$ est apo- tome prima⁸.

Inventa igitur est prima apotome. $Q. E. F.$

⁸ Def.
Tert. 1.
hujus.

PROP. LXXXVII. PROBL.

[LXXXVII.]

Invenire secundam apotomen.

Exponatur rationalis A ; et ipsi A longitudine com- menfurabilis sit $C G$; ergo $C G$ est rationalis. Et ex- ponantur duo numeri quadrati $D E$, $E F$ ^d, quorum ex-^d Cor. Lem. cessus⁴ 4. hujus.

cessus DF non sit quadratus. Fiatque ut FD ad DE , ita quadratum ex CG ad quadratum ex GB .

Commenfurabile igitur est quadratum ex CG quadrato ex GB ^e. Sed quadratum

ex CG est rationale: ergo et rationale est quadratum ex GB ;

ac propterea ipsa GB est rationalis. Et quoniam quadratum

ex CG ad quadratum ex GB rationem non habet, quam nu-

merus quadratus ad quadratum numerum; erit CG ipsi GB in-

commenfurabilis longitudine^f.

^g 9. hujus.

Et ambæ sunt rationales. Ergo CG , GB rationales sunt, potentiâ solum commenfurabiles; et ob id BC est apotome^g.

^h 74. hujus.

Dico et secundam esse. Sit enim quadratum ex H illud, quo quadratum ex BG excedit quadratum ex GC . Quoniam igitur est ut quadratum ex BG ad quadratum ex GC , ita ED numerus ad numerum DF ;

erit per conversionem rationis ut quadratum ex BG ad quadratum ex H , ita DE ad EF . Atque est uterque

ⁱ Per con-

struct.

ipsorum DE , EF quadratus^h: quadratum igitur ex BG ad quadratum ex H rationem habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; ideoque BG ipsi H longitudine est commenfurabilisⁱ. Et plus potest BG quam GC quadrato ex H ^h. Ergo BG plus potest quam GC quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commenfurabilis. Atqui est congruens CG expositæ rationali A commenfurabilis longitudine. Ergo BC est apotome secundaⁱ.

^j Def.

Tert. 2.

hujus.

[LXXXVIII.]

Inventa igitur est secunda apotome BC . $Q. E. F.$

PROP. LXXXVIII. PROBL.

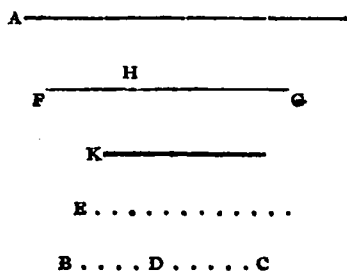
Invenire tertiam apotomen.

Exponantur duo numeri quadrati BC , BD , qui ipso CD , non quadrato, differant. Exponatur alius non quadratus E , qui neque ad ipsum CD rationem habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Denique exponatur rationalis quædam recta linea A ; et fiat ut E ad BC , ita quadratum ex A ad quadratum ex FG ; ut autem BC ad CD , ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH .

Commen-

Commensurabile igitur est quadratum ex A quadrato 5. hujus.

ex FG¹. Atqui est quadratum ex A rationale : ergo et rationale est quadratum ex FG ; ac propterea recta linea FG est rationalis. Et quoniam E ad BC rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum ; neque quadratum ex A ad quadratum ex FG ratio-



nem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Incommensurabilis igitur est A ipsi FG longitudine^m. Rursus, quoniam est ut BC ad CD, ita^m 9. hujus.

quadratum ex FG ad quadratum ex GH ; erit quadratum ex FG quadrato ex GH commensurabile¹. Rationale autem est quadratum ex FG ; ergo et quadratum ex GH est rationale ; et ob id recta linea GH rationalis. Quod cum BC ad CD rationem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum ; neque quadratum ex FG ad quadratum ex GH rationem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Incommensurabilis igitur est FG ipsi GH longitudine^m. Et sunt ambæ rationales. Ergo FG, GH rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles : ac propterea apotome est FH^o. Dico et tertiam esse. Quo-

niam enim est ut E quidem ad BC, ita quadratum ex A ad quadratum ex FG ; ut autem BC ad CD, ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH : erit ex æquo ut E ad CD, ita quadratum ex A ad quadratum ex GH^o. 22. quinti.

Sed E ad CD rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum^p ; neque igitur quadratum ex A ad quadratum ex GH rationem habebit, quam

numerus quadratus ad quadratum numerum. Ergo A ipsi GH longitudine est incommensurabilis^m. Neutra igitur ipsarum FG, GH expositæ rationali A commensurabilis est longitudine. Quo autem recta FG plus potest quam GH, sit illud quod ex K sit quadratum.

Quoniam igitur ut BC ad CD, ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH^p ; erit per conversionem rationis ut C B ad BD, ita quadratum ex FG ad quadratum ex K^q. 19. Cor. 19.

Sed quinti.

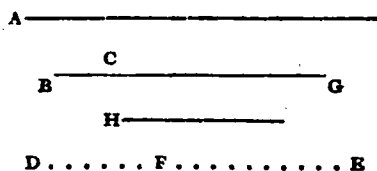
- Sed numeri CB , BD sunt quadrati. Ergo quadratum ex FG ad quadratum ex K rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Com-
- * 9. hujus. mensurabilis igitur est FG ipsi K longitudine¹. Et plus potest FG quam GH quadrato ex K . Ergo FG plus potest quam GH quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. Et neutra ipsarum FG , GH longitudine commensurabilis est expositæ rationali A . Quare FH est apotome tertia².
- * Def. Tert. 3. Inventa igitur est tertia apotome FH . Q. E. F.
hujus.

[LXXXIX.]

PROP. LXXXIX. PROBL.

Invenire quartam apotomen.

Exponatur rationalis A ; et ipsi A longitudine commensurabilis sit BG : ergo BG est rationalis. Exponantur præterea duo numeri DF , FE ; ita ut totus DE ad



- neutrum ipsorum DF , FE rationem habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: et fiat ut DE ad EF , ita quadratum ex BG ad quadratum ex GC .
- * 6. hujus. Commensurabile igitur est quadratum ex BG quadrato ex GC ¹. Est autem quadratum ex BG rationale. Quare et rationale est quadratum ex GC ; ideoque recta linea GC est rationalis. Et quoniam DE ad EF rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex BG ad quadratum ex GC rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Incommensurabilis igitur est BG ipsi GC longitudine². Et sunt ambæ rationales. Ergo BG , GC rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles;
- * 9. hujus. et ob id BC est apotonie³. Dico et quartam esse. Quo enim plus potest BG quam GC , sit illud quadratum ex H . Et quoniam est ut DE ad EF , ita quadratum ex BG ad quadratum ex GC ; erit per conversionem rationis ut ED ad DF , ita quadratum ex BG ad quadratum
- tum

tum ex H . Sed ED ad DF rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque igitur quadratum ex BG ad quadratum ex H rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum⁷. Incommensurabilis igitur est BG ipsi H longitudine^a. Et plus potest BG quam GC quadrato ex H ⁷. ex hyp. Ergo BG plus potest quam GC quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Atqui est tota BG longitudine commensurabilis expositæ rationali A . Ergo BC est apotome quarta².

² Def.
Tert. 4.
hujus.

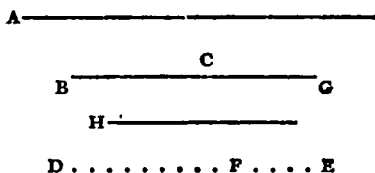
Inventa igitur est quarta apotome BC . Q. E. F.

PROP. XC. PROBL.

[XC.]

Invenire quintam apotomen.

Exponatur rationalis A ; et ipsi A longitudine commensurabilis sit CG : ergo CG est rationalis. Et exponantur duo numeri DF , FE ; ita ut DE ad utrumque



ipsorum DF , FE rationem rursus non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: fiatque ut FE ad ED , ita quadratum ex CG ad quadratum ex GB .

Ergo quadratum ex CG commensurabile est quadrato ex GB ². Est autem quadratum ex CG rationale: ergo et rationale est quadratum ex GB ; et idcirco recta linea GB est rationalis. Et quoniam ut DE ad EF , ita est quadratum ex BG ad quadratum ex GC ; et DE ad EF rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex BG ad quadratum ex GC rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Incommensurabilis igitur est BG ipsi GC longitudine^b. Et sunt ambæ rationales. Ergo BG , GC rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles; et ob id BC est apotome^c. Dico et quintam esse. Quo enim majus est quadratum ex BG quam quadratum ex GC , sit illud quadratum ex H .

6. hujus.

9. hujus.

74. hujus.

Quoniam

Quoniam igitur quadratum ex BG ad quadratum ex GC est ut DE ad EF ; erit per conversionem rationis ut ED ad DF , ita quadratum ex BG ad id quod fit ex H quadratum. Sed ED ad DF rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque igitur quadratum ex BG ad quadratum ex H rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Ideoque recta linea BG ipsi H longitudine est incommensurabilis^b. Et plus potest BG quam GC quadrato ex H . Ergo BG plus potest quam GC quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. Atqui est congruens CG expositæ rationali A longitudine commensurabilis^c. Quare BC est apotome quinta^d.

Inventa igitur est quinta apotome BC . *Q. E. F.*

^c Per construct.

^d Def.

Tert. 5. hujus.

[XCI.]

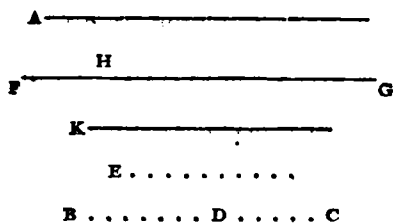
PROP. XCI. PROBL.

Invenire sextam apotomen.

Exponantur duo numeri BD , DC tales, ut compositus ex ipsis, BC , ad neutrum ipsorum rationem habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Exponatur etiam numerus alius E , qui ad neutrum ipsorum BC , CD rationem habeat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Denique exponatur recta linea rationalis A ; et fiat ut E ad BC , ita quadratum ex A ad quadratum ex FG ; ut autem BC ad CD , ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH .

Quoniam igitur est ut E ad BC , ita quadratum ex A ad quadratum ex FG ; erit quadratum ex A quadrato ex FG commensurabile^e. Rationale autem est quadratum

^e 6. hujus.



ex A : ergo et quadratum ex FG rationale erit; et ob id recta linea FG rationalis. Et quoniam E ad BC rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum^f; neque quadratum ex A ad quadratum

^f Per construct.

dratum ex FG rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Incommensurabilis igitur est A ipsi FG longitudine^s. Rursus, quoniam est ut^c 9. hujus. BC ad CD , ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH ; erit quadratum ex FG commensurabile quadrato ex GH ^b. Est autem quadratum ex FG rationale; rationale^b 6. hujus. igitur est et quadratum ex GH ; et ipsa GH rationalis. Quod cum BC ad CD rationem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex FG ad quadratum ex GH rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Ergo FG ipsi GH longitudine est incommensurabilis^s. Et sunt ambae rationales. Quare FG , GH rationales sunt, potentia solum commensurabiles; quapropter apotome est FH ^d. Dico et sextam esse. Quoniam enim est ut E ad^e 24. hujus. BC , ita quadratum ex A ad quadratum ex FG ; ut autem BC ad CD , ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH ; erit ex æquo ut E ad CD , ita quadratum ex A ad quadratum ex GH . Sed E ad CD rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque igitur quadratum ex A ad quadratum ex GH rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Ergo A ipsi GH longitudine est incommensurabilis^s. Quare neutra ipsarum FG , GH expositæ rationali A commensurabilis est longitudine. Quo plus potest recta FG quam GH , sit illud quadratum ex K . Et quoniam est ut BC ad CD , ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH ; erit per conversionem rationis ut CB ad BD , ita quadratum ex FG ad quadratum ex K ^k.^k Cor. 19. At CB ad BD rationem non habet, quam numerus^{quinti} quadratus ad quadratum numerum; neque igitur quadratum ex FG ad quadratum ex K rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Ergo incommensurabilis est FG ipsi K longitudine^l. Et^l 9. hujus. FG plus potest quam GH quadrato ex K . Plus igitur potest FG quam GH quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Et neutra ipsarum FG , GH est longitudine commensurabilis expositæ rationali A . Ergo FH est apotome sexta^m.

Inventa est igitur sexta apotome FH . Q. E. F.

^m Def.
Tert. 6.
hujus.

SCHOLION.

* SCHOLION.

Submonendum videtur in Tyronum gratiam, quod tamen ex Definitionum collatione, tertiarum cum secundis, facile quivis colliget; binomiorum nomina singula, ex quibus constant, eodem modo inter se habere, five per compositionem five per detractionem sint binomia, modo ejusdem sint ordinis in propria cujusque Serie. Nimirum, Majoris quæ vocatur nomina eodem modo inter se habent, ac nomina Minoris. Cum Major quarta sit in Serie primâ irrationalium binominum per compositionem, Minor itidem Seriei secundæ earum quæ per detractionem quarta. Similiter secundæ earum quæ ex binis nominibus eodem modo inter se habent nomina, quo nomina secundæ apotomes. Cum secunda ex binis nominibus secundæ Seriei earum quæ per compositionem sit secunda; secunda autem apotome, Seriei secundæ earum quæ per detractionem secunda.

Hinc autem efficitur eam esse rectarum quæ ex binis nominibus, et earum quæ apotomæ dicuntur, inter se cognationem; ut si duarum irrationalium altera sit ex binis nominibus, altera ejusdem ordinis apotome, si majus nomen ejus quæ ex binis nominibus Tota sit apotomes; minus nomen prioris apotomes Congruens erit. E contrario, si minus nomen sit Congruens, majus Tota erit.

Neque tamen idcirco verum est, quod in Scholio imperiti nescio cujus hominis in libris antehac editis ferebatur, expeditius inveniendas esse sex apotomas, inveniendo eas quæ ex binis sunt nominibus, quam quâ ratione Euclides docuit; cum neque expeditior, neque faciliior, neque alia est omnino, sed eadem plane illas quæ ex binis nominibus, quæ apotomas ipsas inveniendi ratio. Quod cuivis planum et apertum erit, qui problemata sex, quæ Definitiones Secundas subsecuta sunt, cum sex quæ tertias, ordine contulerit. Barrovius sane, nimio brevitatis studio, apotomæ constructiones omisit, utpote ex binominum prius traditis facillime colligendas. Sed de viâ ad apotomas per binomines expeditiori sapientissimo Geometræ tacere placuit.

PROP.

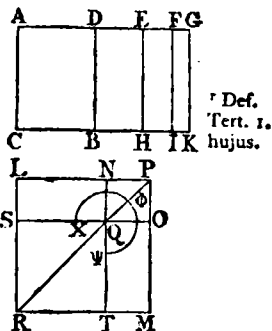
PROP. XCII. THEOR.

[XCII.]

Si spatium contineatur sub rationali et apotomâ primâ, recta linea spatium potens apotome est.

Contineatur enim spatium AB sub rationali AC , et apotomâ primâ AD : dico rectam lineam, quæ potest spatium AB , apotomen esse.

Quoniam enim AD prima apotome est, sit ipsi congruens DG : ergo AG , GD rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles¹. Et tota AG longitudine commensurabilis est expositæ rationali AC ; et præterea AG plus potest quam GD quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. Si igitur quartæ parti quadrati, quod sit ex DG , æquale parallelogrammum ad AG applicetur, deficiens figurâ quadratâ; in partes longitudine commensurabiles ipsam dividet². Secetur DG bifariam in E ; et quadrato ex EG æ-³ 18. hujus quale parallelogrammum ad AG applicetur, deficiens figurâ quadratâ, quod sc. continetur sub AF , FG . Commensurabilis igitur est AF ipsi FG longitudine. Et per E , F , G puncta ipsi AC parallelæ ducantur EH , FI , GK . Et quoniam AF ipsi FG longitudine est commensurabilis; erit et AG utrique ipsarum AF , FG commensurabilis longitudine⁴. Sed AG commensurabilis est ipsi AC : utraque igitur AF , FG ipsi AC longitudine est commensurabilis⁵. Atqui est AC rationalis: ergo et⁶ 12. hujus. rationalis utraque AF , FG ; ac propterea utrumque parallelogrammorum AI , FK est rationale⁷. Cæterum⁸ 20. hujus. DG utrique DE , EG commensurabilis est longitudine nimirum cum utriusque sit dupla. Estque rationalis DG , sed ipsi AC longitudine incommensurabilis: ergo et utraque DE , EG rationalis est, et incommensurabilis ipsi AC longitudine; et ob id utrumque parallelogrammorum DH , EK medium est⁹. Ponatur ipsi quidem AI parallelo-¹⁰ 22. & grammo æquale quadratum LM ¹¹: parallelogrammo¹² Cor. Def. autem FK æquale quadratum auferatur, communem¹³ 14. hujus. cum ipso angulum LFM habens, scilicet NO : ergo di-¹⁴ 16. sexti. quadrata LM , NO circa eandem sunt diametrum¹⁵. Sit ipsorum diameter PR ; et figura describatur. Itaque



B b

quoniam

quoniam rectangulum sub AF , FG est æquale quadrato ex EG , erit ut AF ad EG , ita EG ad

^b 17. sexti. FG ^b. Sed ut AF ad EG , ita est parallelogrammum AI ad ipsum EK ;

et ut EG ad FG , ita parallelogrammum EK ad ipsum FK ^c. Inter parallelogramma igitur AI , FK medium proportionale est EK . Est autem et inter quadrata LM , NO medium proportionale MN , ut superius

^d Lemma 7. ostensum est^d; parallelogrammumque AI est æquale quadrato LM ,

et parallelogrammum FK quadrato NO æquale^e. Ergo et parallelogrammum MN est æquale ipsi EK .

Sed parallelogrammum quidem EK est æquale parallelogrammo DH ^f; parallelogrammum vero MN ipsi

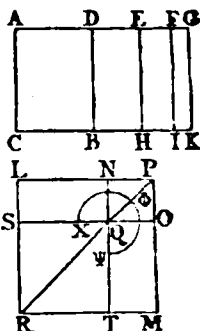
^g 43. primi. LO ^g. Parallelogrammum igitur DK est æquale gnomoni $\varphi\phi x$, et quadrato NO . Est autem et parallelogrammum AK quadratis LM , NO æquale^e: ergo et reliquum AB est æquale quadrato ST . At quadratum ST est id, quod fit ex LN : quadratum igitur ex LN est æquale parallelogrammo AB ; ideoque recta linea LN ipsum AB potest. Dico LN apotomen esse. Quoniam enim rationale est utrumque parallelogrammorum AI , FK , et sunt æqualia quadratis LM , NO ; erit et utrumque LM , NO rationale, hoc est, utrumque ipsorum, quæ fiunt ex LP , PN ; et utraque igitur LP , PN rationalis est. Rursus, quoniam parallelogrammum DH est medium, atque est æquale ipsi LO ; erit et LO medium. Cum igitur LO quidem medium sit, NO vero rationale; incommensurabile est LO ipsi NO ; utque LO ad NO ,

ita est recta linea LP ad PN ^h. Ergo LP ipsi PN longitudine est incommensurabilisⁱ. Et sunt ambæ rationales. Quare LP , PN rationales sunt, potentia solum

commensurabiles: idcirco LN est apotome^k. Et potest spatium AB . Quæ igitur potest spatium AB , est apotome.

Ergo si spatium contineatur sub rationali et apotomâ primâ, recta linea spatium potens apotome est. Q. E. D.

^h 1. sexti. ⁱ 10. hujus. ^k 74. hujus.



PROP. XCIII. THEOR.

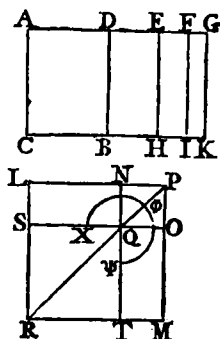
[XCIII.]

Si spatium contineatur sub rationali et apotomâ secundâ, recta linea spatium potens mediæ est apotome prima.

Spatium enim AB contineatur sub rationali AC , et apotomâ secundâ AD : dico rectam lineam, quæ spatium AB potest, esse mediæ apotomen primam.

Sit enim ipsi AD congruens DG : ergo AG , GD rationales sunt, potentiâ solum com-

mensurabiles; et congruens DG commensurabilis est expositæ rationali AC ; totaque AG plus potest quam GD quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine¹. Quoniam igitur AG plus potest quam GD quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis; si quartæ parti quadrati ipsius GD æquale parallelogrammum ad AG applicetur, deficiens figurâ quadratâ, in partes commensurabiles ipsam dividet².



¹ Def. Tert. 2. hujus.

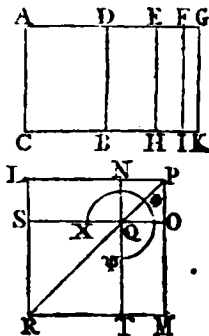
² 18. hujus.

Itaque secetur DG bifariam in E ; et quadrato ipsius EG æquale parallelogrammum ad AG applicetur, deficiens figurâ quadratâ, quod sc. continetur sub AF , FG . Ergo commensurabilis est AF ipsi FG longitudine. Et per puncta E , F , G ipsi AC parallelæ ducantur EH , FI , GK . Quoniam igitur AF ipsi FG longitudine est commensurabilis; erit AG utrique ipsarum AF , FG commensurabilis longitudine³. Rationalis autem est AG , sed ipsi AC longitudine incommensurabilis: ergo et utraque AF , FG est rationalis, ipsique AC incommensurabilis longitudine; et ob id utrumque parallelogrammorum AI , FK medium est⁴. Rursum, ⁵ 22. hujus. quoniam DE commensurabilis est ipsi EG ; erit et DG utrique DE , EG commensurabilis. Sed DG commensurabilis est ipsi AC longitudine. Ergo et utraque DE , EG rationalis est, et ipsi AC longitudine commensurabilis; ac propterea utrumque parallelogrammorum DH , EK est rationale⁶. Constituatur igitur parallelo-⁷ 20. hujus. grammo quidem AI æquale quadratum LM ⁸; paral-⁹ 14. secun- lelogrammo autem FK æquale quadratum auferatur¹⁰.
 NO , communem cum ipso LM angulum LPN habens:

$Bb2$

ergo

- * 26. sexti. ergo circa eandem diametrum sunt quadrata LM , NO .
 Sit ipsorum diameter PR ; et figura describatur. Cum
 igitur parallelogramma AI , FK me-
 dia sint, et sibi ipsis commensura-
 bilia, et æqualia quadratis ex LP ,
 PN ; erunt et quadrata ex LP , PN
 mediæ sunt, potentiâ commensu-
 rabiles. Et quoniam rectangulum
 sub AF , FG est æquale quadrato
 ex EG ; erit ut AF ad EG , ita EG
 ad GF . Sed ut AF ad EG , ita est
 parallelogrammum AI ad ipsum
 * 1. sexti. EK ; ut autem EG ad GF , ita pa-
 rallelogrammum EK ad FK . Inter
 parallelogramma igitur AI , FK me-
 dium proportionale est EK . Est autem et inter qua-



- * Lemma 7. drata LM , NO medium proportionale MN ; et paral-
 lelogrammum AI quidem est æquale quadrato LM ; pa-
 * Per con-
 struct.
 * 36. primi. MN ipsi EK est æquale. Sed EH est æquale ipsi EK ,
 * 43. primi. et LO ipsi MN . Totum igitur DK gnomoni $\varphi\phi x$,
 et quadrato NO æquale erit. Itaque quoniam totum
 AK æquale est quadratis LM , NO , et DK æquale
 gnomoni $\varphi\phi x$ et quadrato NO ; erit reliquum AB æ-
 quale ST , hoc est, ei, quod fit ex LN . Quadratum igitur
 ex LN est æquale spatium AB ; ideoque recta linea LN
 spatium AB potest. Dico LN mediæ apotomen esse
 primam. Quoniam enim rationale est EK , et æquale
 ipsi MN , hoc est, ipsi LO ; erit et LO rationale, illud sc.
 quod sub LP , PN continetur. Medium autem osten-
 sum est NO . Quare LO est incommensurabile ipsi NO ;
 * P. sexti. et ut LO ad NO , ita LP ad PN ; ergo LP , PN lon-
 gitudine sunt incommensurabiles. Ac propterea LP , PN
 mediæ sunt, potentiâ solum commensurabiles, quæ ratio-
 * 75. hujus. nale continent. Quare LN est mediæ apotome prima;
 et potest spatium AB . Recta igitur linea, spatium AB
 potens, est mediæ apotome prima. Q. E. D.

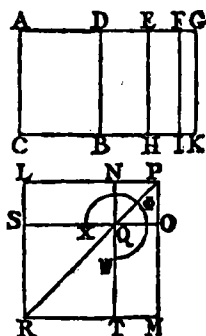
PROP. XCIV. THEOR.

[XCIV.]

Si spatium contineatur sub rationali et apotomâ tertiâ, recta linea spatium potens mediæ est apotome secunda.

Spatium enim AB contineatur sub rationali AC , et apotomâ tertiâ AD : dico rectam lineam, quæ potest spatium AB , mediæ esse apotomen secundam.

Sit enim ipsi AD congruens DG : ergo AG , GD rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles; et neutra ipsarum AG , GD longitudine commensurabilis est expositæ rationali AC ; tota autem AG plus potest quam congruens DG quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine^b. Quoniam ideo recta AG plus potest quam DG quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis: si quartæ parti quadrati ipsius DG æquale parallelogrammum ad AG applicetur, deficiens figurâ quadratâ; in partes commensurabiles ipsam dividet^c.

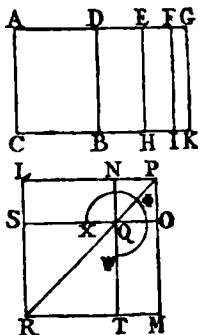


^b Def.
Tert. 3.
hujus.

^c 18. hujus.

Itaque secetur DG bifariam in E ; et quadrato ipsius EG æquale parallelogrammum ad AG applicetur, deficiens figurâ quadratâ, sitque quod continetur sub AF , FG ; et per puncta E , F , G ipsi AC parallelæ ducantur EH , FI , GK . Ergo AF , FG commensurabiles sunt; atque ob id parallelogrammum AI parallelogrammo FK est commensurabile. Et quoniam AF , FG commensurabiles sunt longitudine; erit et AG utrique ipsarum AF , FG longitudine commensurabilis^d. Est autem rationalis^d 16. hujus. AG , sed ipsi AC incommensurabilis longitudine; et utraque igitur AF , FG rationalis est, et ipsi AC longitudine incommensurabilis; ac propterea utrumque parallelogrammorum AI , FK est medium^e. Rursus quoniam^e 22. hujus. DE commensurabilis est ipsi EG longitudine; erit et DG utrique DE , EG commensurabilis. Sed DG rationalis est, et ipsi AC incommensurabilis longitudine: rationalis igitur est et utraque DE , EG , et ipsi AC longitudine incommensurabilis. Ergo utrumque parallelogrammorum DH , EK medium est^e. Quod cum AG , GD potentiâ solum commensurabiles sint; AG ipsi GD longitudine erit incommensurabilis. Sed AG com-

- menfurabilis est ipsi AF longitudine, et DG ipsi GE : est igitur AF ipsi EG longitudine in-
- ^f 13. hujus. commensurabilis^f. Ut autem AF ad EG , ita parallelogrammum AI ad EK
- ^g 1. sexti. parallelogrammum^g: ergo incommensurabile est AI ipsi EK . Constituatur ipsi quidem AI æquale quadratum LM ^h; ipsi vero EK æquale auferatur quadratum NO , angulum habens eundem, quem LM : ergo quadrata LM , NO circa eandem sunt diametrumⁱ. Sit ipsorum diameter PR ; et figura describatur. Quoniam igitur rectangulum sub AF , FG est æquale quadrato ex EG ; erit
- ^k 17. sexti. ut AF ad EG , ita EG ad FG ^k. Ut autem AF ad EG , ita parallelogrammum AI ad EK parallelogrammum^g; et ut EG ad GF , ita EK ad FK . Ergo et ut AI ad EK , ita EK ad FK . Inter parallelogramma igitur AI , FK medium proportionale est EK . Est autem et inter quadrata LM , NO medium proportionale MN ; et parallelogrammum AI quidem æquale est quadrato LM , FK vero ipsi NO ⁱ: ergo et EK est æquale MN . Sed MN æquale est LO ^m, et EK ipsi DH ⁿ. Totum igitur DEK gnomoni $\psi\phi x$ et quadrato NO est æquale. Est autem et parallelogrammum AK æquale quadratis LM , NO . Ergo reliquum AB est æquale ipsi ST , hoc est, quadrato ex LN ; et ob id recta linea LN ipsum AB spatium potest. Dico LN mediæ apotomen esse secundam. Quoniam enim parallelogramma AI , FK ostensa sunt media, et sunt æqualia quadratis ex LP , PN ; erit et utrumque quadratorum ex LP , PN medium; igitur utraque recta linea LP , PN media est. Et quoniam commensurabile est AI ipsi FK ; erit et quadratum ex LP quadrato ex PN commensurabile. Rursus, quoniam ostensum est AI incommensurabile ipsi EK ; et LM ipsi MN incommensurabile erit, hoc est, quadratum ex LP rectangulo sub LP , PN . Quare et recta linea LP longitudine incommensurabilis est ipsi PN . Sunt igitur LP , PN mediæ, potentiâ solum commensurabiles. Dico eas etiam medium continere. Quoniam enim EK demonstratum est medium, atque est æquale rectangulo sub LP , PN ; erit et rectangulum sub LP , PN medium.
- Ergo



ⁱ Per construct.

^m 43. primi.

ⁿ 36. primi.

Ergo LP , PN mediæ sunt, potentiâ solum commensurabiles, quæ medium continent; ac propterea LN est mediæ apotome secunda^o; et potest spatium AB . Recta^o 76. hujus. igitur linea, spatium AB potens, est mediæ apotome secunda. Q. E. D.

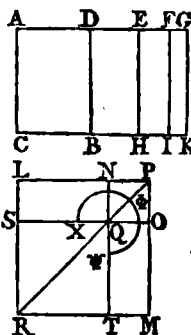
PROP. XCV. THEOR.

[XCV.]

Si spatium contineatur sub rationali et apotomâ quartâ, recta linea spatium potens minor est.

Spatium enim AB contineatur sub rationali AC , et apotomâ quartâ AD : dico rectam lineam, quæ spatium AB potest, minorem esse.

Sit enim ipsi AD congruens DG : ergo AG , GD rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles; et AG longitudine commensurabilis est expositæ rationali AC ; totaque AG plus potest quam GD quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis^p. Quoniam igitur AG plus potest quam GD quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis; si quartæ parti quadrati ex DG æquale parallelogrammum ad AG applicetur, deficiens figurâ quadratâ; in partes incommensurabiles ipsam dividet^q. Itaque secetur DG bifariam in E ; et quadrato ex EG æquale ad ipsam AG applicetur, deficiens figurâ quadratâ, quod sc. continetur sub AF , FG . Ergo AF ipsi FG longitudine est incommensurabilis. Ducantur per puncta E , F , G ipsis AC , BD parallelæ EH , FI , GK . Quoniam igitur AG rationalis est, et ipsi AC longitudine commensurabilis; erit totum parallelogrammum AK rationale^r. Rursus, quoniam incommensurabilis est DG ipsi AC longitudine, et sunt ambæ rationales; erit parallelogrammum DK medium^s. Quod^t 22. hujus. cum AF ipsi FG longitudine sit incommensurabilis; erit et parallelogrammum AI incommensurabile FK ^t. 1. sexti. Constituatur parallelogrammo quidem AI æquale quadratum LM ; parallelogrammo autem FK æquale quadratum NO auferatur, angulum habens eundem LPM , quem LM . Quadrata igitur LM , NO circa eandem sunt diametrum^u. Sit ipsorum diameter PR ; et figura de-



p Def.
Tert. 4.
hujus.

q 19. hujus.

r 20. hujus.

s 22. hujus.

t 1. sexti.

u 36. sexti.

scribatur. Itaque quoniam rectangulum sub AF , $\varphi\theta$ est æquale quadrato ex EG ; ut AF

^{17. sexti.} ad EG , ita erit EG ad GF ^u. Sed ut AF quidem ad EG , ita est paral-

^{1. sexti.} lelogrammum AI ad ipsum EK ^x: ut autem EG ad FG , ita EK ad FK .

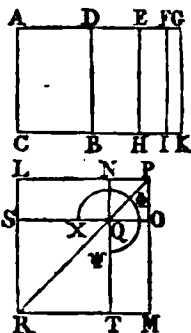
Inter parallelogramma igitur AI , FK medium proportionale est EK . Est autem et inter quadrata LM , NO medium proportionale MN ; atque est parallelogrammum AI æquale quadrato LM , et parallelogrammum FK æquale est ipsi NO ^r: est igitur EK æquale ipsi MN . Sed EK quidem est æquale parallelogrammo

⁷ Per construct.

^{36. primi.} DH ^z; MN vero ipsi LO ^a. Totum igitur parallelogrammum gnomoni $\varphi\theta x$, et quadrato NO est æquale.

^{43. primi.} Et quoniam totum AK æquale est quadratis LM , NO , et DK æquale gnomoni $\varphi\theta x$, et NO quadrato; erit reliquum AB æquale quadrato ST , hoc est, quadrato ex LN : ergo LN spatium AB potest. Dico LN irrationalem esse, quæ minor appellatur. Quoniam enim parallelogrammum AK rationale est, et æquale quadratis ipsarum LP , PN ; erit et compositum ex quadratis ipsarum LP , PN rationale. Rursum, quoniam parallelogrammum DK medium est, atque est æquale ei, quod bis continetur sub LP , PN ; erit et quod bis sub LP , PN continetur medium. Et quoniam ostensum est AI incommensurabile ipsi FK ; erit et quadratum ex LP incommensurabile quadrato ex PN ; ac propterea LP , PN potentiâ sunt incommensurabiles, quæ faciunt compositum ex ipsarum quadratis rationale, quod autem bis sub ipsis continetur medium.

^{77. hujus.} Quare LN irrationalis est, quæ minor appellatur^b. Et potest spatium AB . Recta igitur linea, spatium AB potens, minor est. *Q. E. D.*



PROP. XCVI. THEOR.

[XCVI.]

Si spatium contineatur sub rationali et apotomâ quintâ, recta linea spatium potens est quæ cum rationali medium totum efficit.

Spatium enim AB contineatur sub rationali AC , et apotomâ quintâ AD : dico rectam lineam, quæ spatium AB potest, esse eam quæ cum rationali medium totum efficit.

Sit enim ipsi AD congruens DG : ergo AG , GD rationales sunt, potentiâ solum com-

mensurabiles; et congruens DG longitudine commensurabilis est expositæ rationali AC ; totaque AG plus potest quam DG quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longi-

tudine^c. Si igitur quartæ parti quadrati ex DG æquale parallelogrammum ad AG applicetur, deficiens figurâ quadratâ; in partes incommensurabiles ipsam dividet^d. Itaque secetur DG bifariam in puncto E ; et quadrato ex EG æquale ad ipsam AG applicetur, deficiens figurâ qua-

dratâ, quod sc. continetur sub AF , FG . Ergo AF incommensurabilis est ipsi FG longitudine. Ducantur per puncta E , F , G ipsi AC parallelæ EH , FI , GK . Et quoniam AG incommensurabilis est ipsi AC longitudine, et sunt ambæ rationales; erit parallelogrammum AK medium^e. Rurfus, quoniam rationalis est DG , et ipsi^e AC longitudine commensurabilis; parallelogrammum DK rationale erit^f. Constituatur igitur parallelo-

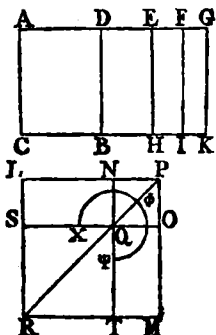
grammo quidem AI æquale quadratum LM ; ipsi vero FK æquale quadratum auferatur NO , angulum habens eundem, quem LM , videlicet LPN : ergo quadrata LM , NO circa eandem sunt diametrum^g. Sit diameter ip-

forum PR ; et figura describatur. Similiter ostendemus rectam lineam LN spatium AB posse. Dico LN esse eam, quæ cum rationali medium totum efficit. Quo-

nam enim ostendimus parallelogrammum AK medium esse; atque est æquale quadratis ipsarum LP , PN ; erit et compositum ex quadratis ipsarum LP , PN medium.

Rurfus, quoniam DK rationale est, et æquale ei, quod

bis



^c Def.
Tert. 5.
hujus.

^d 19. hujus.

^e 22. hujus.

^f 20. hujus.

^g 26. sexti.

bis continetur sub LP , PN ; erit et quod bis sub LP , PN continetur rationale. Et quoniam AI est incommensurabile ipsi FK , incommensurabile igitur est quadratum ex LP quadrato ex PN ; ideoque LP , PN potentiâ incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem sub ipsis bis continetur rationale. Ergo reliqua LN irrationalis est, quæ vocatur cum rationali medium totum efficiens^b; et potest spatium AB . Recta igitur linea, spatium AB potens, est quæ cum rationali medium totum efficit. *Q. E. D.*

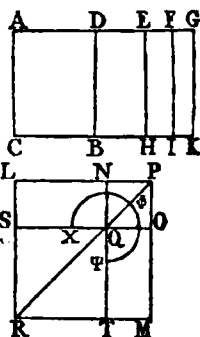
[XCVII.]

PROP. XCVII. THEOR.

Si spatium contineatur sub rationali et apotomâ sextâ, recta linea spatium potens est quæ cum medio medium totum efficit.

Spatium enim AB contineatur sub rationali AC , et apotomâ sextâ AD : dico rectam lineam, quæ spatium AB potest, esse eam quæ cum medio medium totum efficit.

Sit enim ipsi AD congruens DG : ergo AG , GD rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles; et neutra ipsarum AG , GD commensurabilis est longitudine expositæ rationali AC ; totaque AG plus potest quam congruens DG quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis¹. Itaque quoniam AG plus potest quam GD quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis: si quartæ parti quadrati ex DG æquale ad rectam lineam AG applicetur, deficiens figurâ quadratâ; in partes incommensurabiles ipsam



¹ Def.
Tert. 6.
hujus.

² 19. hujus. dividet^k. Itaque secetur DG bifariam in E ; et quadrato ex EG æquale parallelogrammum ad AG applicetur, deficiens figurâ quadratâ, nempe quod continetur sub AF , FG . Incommensurabilis igitur est AF ipsi FG longitudine. Ut autem AF ad FG , ita est AI ad ipsum FK ¹: ergo AI ipsi FK est incommensurabile^m. Et quoniam AG , AC rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles; erit AK mediumⁿ. Rursus, quoniam

¹ 1. sexti.

^m 10. hujus.

ⁿ 22. hujus.

quoniam AC , DG rationales sunt, et incommensurabiles longitudine, medium erit et DK . Quod cum AG , GD potentiâ solum commensurabiles sint; erit AG ipsi GD longitudine incommensurabilis. Sed ut AG ad GD , ita est AK ad KD : incommensurabile igitur est AK ^{1. sexti.} ipsi KD . Itaque constituatur parallelogrammo AI ^{10. hujus.} æquale quadratum LM ; parallelogrammo autem FK ^{14. secund.} æquale auferatur quadratum NO , angulum habens eundem, quem LM . Ergo quadrata LM , NO circa eandem sunt diametrum. Sit eorum diameter PR ; et figura ^{26. sexti.} describatur. Similiter ut supra ostendimus rectam lineam LN posse spatium AB . Dico LN esse eam, quæ cum medio medium totum efficit. Quoniam enim AK ostensum est medium, atque est æquale quadratis ipsarum LP , PN ; erit et compositum ex quadratis ipsarum LP , PN medium. Rursus, quoniam DK ostensum est medium, et est æquale ei, quod bis continetur sub LP , PN ; et quod bis sub LP , PN continetur medium erit. Et quoniam ostensum est AK incommensurabile ipsi KD ; ergo et quadrata ex LP , PN incommensurabilia sunt ei, quod bis sub LP , PN continetur. Et quoniam incommensurabile est AI ipsi FK ; erit et quadratum ex LP quadrato ex PN incommensurabile. Ergo LP , PN potentiâ incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem bis sub ipsis continetur medium, et adhuc quadrata ipsarum incommensurabilia ei, quod bis sub ipsis continetur. Ergo LN irrationalis est, quæ vocatur cum medio medium totum efficiens. Et potest AB spatium. Recta ^{79. hujus.} igitur linea, spatium AB potens, est quæ cum medio medium totum efficit. *Q. E. D.*

PROP. XCVIII. THEOR.

[XCVIII.]

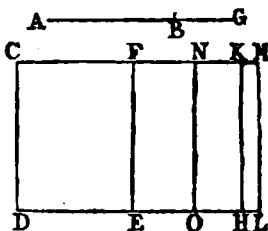
Quadratum apotomæ, ad rationalem applicatum, latitudinem facit apotomen primam.

Sit apotome AB , rationalis autem CD ; et quadrato ex AB æquale parallelogrammum CE ad ipsam CD applicetur, latitudinem faciens CF : dico CF esse apotomen primam.

Sit enim ipsi AB congruens BG : ergo AG , GB rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles. Et ad ^{74. hujus.} ipsam CD applicetur quadrato quidem ex AG æquale CH ;

* 45. primi. CH ; quadrato autem ex BG æquale KL ^a. Totum igitur CL est æquale quadratis ex AG , GB ; ex quibus parallelogrammum CE æquale est quadrato ex AB . Ergo reliquum FL ei, quod bis sub AG ,

* 7. secundi. GB continetur, est æquale^a. Secetur FM bifariam in N ; et per N ipsi CD parallela ducatur NO . Utrumque igitur ipsorum FO , LN est æquale ei, quod sub AG , GB continetur. Et quoniam quadrata ex AG , GB



rationalia sunt, atque est quadratis ex AG , GB æquale parallelogrammum DM ; erit ipsum DM rationale. Et ad rationalem CD applicatum est, latitudinem faciens CM : ergo CM est rationalis, et ipsi CD commensurabilis longitudine^a. Rursus, quoniam medium est quod

* 21. hujus. bis continetur sub AG , GB , estque ei, quod bis sub AG , GB continetur, æquale parallelogrammum LF ; erit ipsum LF medium. Et applicatum est ad rationalem CD , latitudinem faciens FM . Quare FM est rationalis, ipsique CD longitudine incommensurabilis^a.

* 23. hujus. Et quoniam quadrata quidem ex AG , GB rationalia sunt; quod autem bis continetur sub AG , GB medium: quadrata ex AG , GB incommensurabilia sunt ei, quod bis sub AG , GB continetur. Sed quadratis ex AG , GB æquale est parallelogrammum CL , ei vero quod bis continetur sub AG , GB æquale est FL : ergo CL ipsi FL est incommensurabile. Ut autem CL ad FL , ita est

* 1. sexti. recta linea CM ad MF ^a: incommensurabilis igitur est CM ipsi MF longitudine. Et sunt ambæ rationales. Ergo CM , MF rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles; ac propterea CF est apotome^b. Dico et primam esse.

* 74. hujus. Quoniam enim inter quadrata ex AG , GB medium proportionale est, quod sub AG , GB continetur^c; atque est quadrato quidem ex AG æquale parallelogrammum CH ^d; ei vero quod sub AG , GB continetur æquale NL ; et quadrato ex BG æquale KL : erit inter ipsa CH , KL medium proportionale NL . Ut igitur CH ad NL , ita NL ad KL . Sed ut CH ad NL , ita est recta linea CK ad ipsam NM . Ut autem NL ad KL , ita est recta linea NM ad MK : ergo ut CK ad NM , ita est

* Lemma 7. hujus. ^a Per constructionem.

^b Per constructionem.

NM

$ΚΜ$ ad $ΚΜ$; et ob id rectangulum sub CK , $ΚΜ$ est æquale quadrato ex $ΜΝ$ ^d, hoc est, quartæ parti quadrati^d 17. texti. ex FM . Et quoniam quadratum ex AG commensurabile est quadrato ex GB ^e; erit et parallelogrammum^e ex hyp. CH parallelogrammo KL commensurabile. Sed ut CH ad KL , ita est recta linea CK ad ipsam $ΚΜ$; commensurabilis igitur est CK ipsi $ΚΜ$ ^f. Itaque cum duæ^f 10. hujus. rectæ lineæ inæquales sint CM , MF , et quartæ parti quadrati ex FM æquale parallelogrammum ad ipsam CM applicatum sit, deficiens figurâ quadratâ, quod icilicet sub CK , $ΚΜ$ continetur; sitque CK commensurabilis ipsi $ΚΜ$: recta linea CM plus poterit quam MF quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis^e. 18. hujus. Atqui est CM commensurabilis longitudine expositæ rationali CD . Ergo CF est prima apotome^h.

^a Def.^{Tert. 1.}

hujus.

Quadratum igitur apotomæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam. Q. E. D.

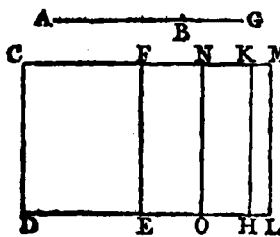
PROP. XCIX. THEOR.

[XCIX.]

Quadratum mediæ apotomæ primæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen secundam.

Sit mediæ apotome prima AB , rationalis autem CD ; et quadrato ex AB æquale parallelogrammum CE ad ipsam CD applicetur, latitudinem faciens CF ; dico CF esse apotomen secundam.

Sit enim ipsi AB congruens BG : ergo AG , GB mediæ sunt, potentiâ solum commensurabiles, quæ rationale continentⁱ. Et quadrato quidem ex AG æquale parallelogrammum CH ad CD applicetur, latitudinem faciens CK ^k; quadrato autem ex GB æquale KL ad eandem applicetur, latitudinem faciens $ΚΜ$. Totum igitur CL

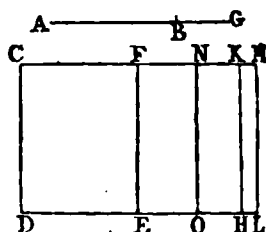


175. hujus.

^k 45. primi.

est æquale quadratis ex AG , GB , quæ media sunt. Quare et CL est medium. Et ad rationalem CD applicatum est, latitudinem faciens CM : rationalis igitur est CM , et ipsi CD longitudine incommensurabilisⁱ. 23. hujus. Itaque quoniam CL est æquale quadratis ex AG , GB , ex quibus quadratum ex AD æquale est parallelogrammo CE ;

- CB ; erit reliquum, sc. quod bis continetur sub AG ,
 7. secundi. GB , æquale ipsi FL^m . Est autem quod bis sub AG ,
 GB continetur rationale. Ra-
 tionale igitur est et FL ; et
 ad rationalem FE applicatum
 est, latitudinem faciens FM .
 Quare FM est rationalis, et
 ipsi CD commensurabilis lon-
 21. hujus. gitudine. Et quoniam qua-
 drata quidem ex AG , GB ,
 hoc est, parallelogrammum
 CL , medium est; quod autem
 bis continetur sub AG , GB , videlicet FL , est rationale:
 erit CL incommensurabile ipsi FL . Ut autem CL ad
 1. sexti. FL , ita recta linea CM ad MF^o : ergo CM ipsi MF
 longitudine est incommensurabilis. Et sunt ambæ ra-
 tionales. Sunt igitur CM , MF rationales, potentia solum
 74. hujus. commensurabiles: ideoque CF est apotome^p. Dico et
 secundam esse. Secetur enim FM bifariam in puncto
 N ; et per N ipsi CD parallela ducatur NO . Alterutrum
 igitur parallelogrammorum FO , NL est æquale ei, quod
 continetur sub AG , GB . Et quoniam inter quadrata
 ex AG , GB medium proportionale est, quod sub AG ,
 GB continetur; estque quadratum ex AG æquale pa-
 rallelogrammo CH , quod autem continetur sub AG ,
 GB æquale parallelogrammo NL , et quadratum ex GB
 æquale ipsi KL ; erit inter parallelogramma CH , KL
 medium proportionale NL . Est igitur ut CH ad NL ,
 ita NL ad KL . Sed ut CH ad NL , ita est recta linea
 CK ad ipsam NM , et ut NL ad KL , ita NM ad KM^o .
 Ergo ut CK ad NM , ita est NM ad KM : ac propterea
 17. sexti. rectangulum sub CK , KM est æquale quadrato ex NM^4 ;
 hoc est, quartæ parti quadrati ex FM . Et quoniam
 quadratum ex AG commensurabile est quadrato ex GB ;
 erit et CH parallelogrammum parallelogrammo KL
 commensurabile, hoc est, recta linea CK commensura-
 bilis ipsi KM . Quoniam itaque duæ rectæ lineæ in-
 æquales sunt CM , MF , quartæ autem parti quadrati ex
 MF æquale ad maiorem CM applicatum sit, deficiens
 figurâ quadratâ, quod sc. continetur sub CK , KM , et
 in partes commensurabiles ipsam dividat; recta linea
 CM plus poterit quam MF quadrato rectæ lineæ sibi
 18. hujus. commensurabilis longitudine^r. Atque est congruens FM
 expostæ



expositæ rationali CD commensurabilis¹. Quare CF est¹ ex hyp. apotome secunda¹.

Quadratum igitur mediæ apotomæ primæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen secundam. ^{Def. Tert. 2. hujus.}
Q. E. D.

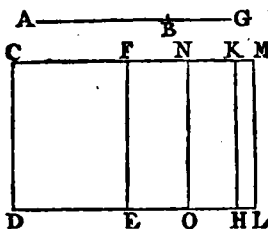
PROP. C. THEOR.

[C.]

Quadratum mediæ secundæ apotomæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen tertiam.

Sit mediæ apotome secunda AB , rationalis autem CD ; et quadrato ex AB æquale parallelogrammum CE ad ipsam CD applicetur, latitudinem faciens CF : dico CF esse apotomen tertiam.

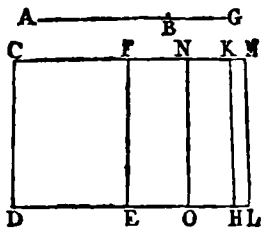
Sit enim ipsi AB congruens BG : ergo AG , GB mediæ sunt, potentiâ solum commensurabiles, quæ medium continent². Et quadrato quidem ex AG æquale ad CD applicetur CH , latitudinem faciens CK ³; quadrato autem ex GB æquale ad CH applicetur KL , latitudinem faciens KM . Totum igitur CL est æquale quadratis ex AG , GB . Et sunt quadrata ex AG , GB media. Ergo et CL est medium;

⁴ 76. hujus,⁵ 45. primi.

et ad rationalem CD applicatum est, latitudinem faciens CM : ergo CM est rationalis, sed ipsi CD incommensurabilis longitudine⁶. Et quoniam totum CL est æquale⁷ 23. hujus. quadratis ex AG , GB , ex quibus CE æquale est quadrato ex AB ; erit reliquum FL æquale ei, quod bis continetur sub AG , GB ⁸. Secetur FM bifariam in N ; ⁹ 7. secundi. et ipsi CD parallela ducatur NO . Alterutrum igitur parallelogrammorum FO , NL est æquale ei, quod sub AG , GB continetur. Est autem quod continetur sub AG , GB medium: ergo et medium est FL ; et ad rationalem EF applicatum est, latitudinem faciens FM . Quare et FM est rationalis, sed ipsi CD longitudine incommensurabilis¹⁰. Et quoniam AG , GB potentiâ solum commensurabiles sunt; erit AG ipsi GB incommensurabilis longitudine: ideoque quadratum ex AG rectangulo sub AG , GB est incommensurabile¹¹. Sed quadrato quidem ex AG commensurabilia sunt ex AG , GB quadrata; rectangulo autem sub AG , GB commensurabile est

¹¹ 1. sexti. & 10. hujus.

est quod bis sub AG , GB continetur: ergo quadrata ex AG , GB sunt incommensurabilia ei, quod bis sub AG , GB continetur. At quadratis ex AG , GB æquale est parallelogrammum CL ^b; ei vero, quod bis continetur sub AG , GB , æquale est FL : incommensurabile igitur est CL ipsi FL . Ut autem CL ad FL , ita est recta linea CM ad FM : ergo CM ipsi FM incommensurabilis



^b Per construct.

^c 10. hujus. est longitudine^c. Et sunt ambæ rationales. Quare CM , FM rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles;

^d 74. hujus. et ob id CF est apotome^d. Dico et tertiam esse. Quoniam enim quadratum ex AG commensurabile est quadrato ex GB ; erit parallelogrammum CH parallelogrammo KL commensurabile: ergo et recta linea CK est commensurabilis ipsi KM . Et quoniam inter quadrata ex AG , GB medium proportionale est rectangulum sub AG , GB ^e; atque est quadrato quidem ex AG æquale parallelogrammum CH ; quadrato autem ex GB æquale KL , et rectangulo sub AG , GB æquale NL ; erit inter parallelogramma CH , KL medium proportionale NL . Est igitur ut CH ad NL , ita NL ad KL .

^e Lemma 7. hujus. Sed ut CH ad NL , ita est recta linea CK ad NM ^f; ut autem NL ad KL , ita NM ad KM ; ergo et ut CK ad NM , ita NM ad KM . Ac propterea rectangulum sub CK , KM est æquale quadrato ex NM ^g, hoc est, quartæ parti quadrati ex FM . Quoniam igitur duæ rectæ lineæ inæquales sunt CM , MF ; et quartæ parti quadrati ex FM æquale ad CM applicatum est, deficiens figurâ quadratâ, quod in partes commensurabiles ipsam dividit; recta linea CM plus poterit quam MF

^f 1. sexti. quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis^h. Et neutra ipsarum CM , MF longitudine commensurabilis est expositæ rationali CD . Ergo CF est apotome tertiaⁱ.

^g 17. sexti. ^h 18. hujus. ⁱ Def. Tert. 3. hujus.

Quadratum igitur mediæ apotomæ secundæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen tertiam. $Q. E. D.$

PROP.

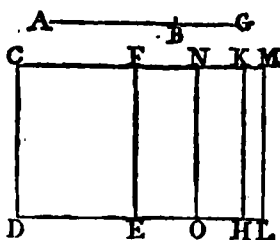
PROP. CI. THEOR.

[CI.]

Quadratum minoris, ad rationalem applicatum, latitudinem facit apotomen quartam.

Sit minor AB , rationalis autem CD ; et quadrato ex AB æquale parallelogrammum CE ad ipsam CD applicetur, latitudinem faciens CF : dico CF esse apotomen quartam.

Sit enim ipsi AB congruens BG : ergo AG , GB potentiâ incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex ipsarum AG , GB quadratis rationale, quod autem sub ipsis continetur medium^k. Quadrato igitur ex AG æquale ad CD applicetur CH , latitudinem faciens CK ^l: quadrato autem ex BG æquale ad KH applicetur KL , latitudinem faciens KM .

^k 77. hujus.^l 45. primi.

Totum igitur CL quadratis ex AG , GB est æquale. Atqui est compositum ex quadratis AG , GB rationale: ergo et rationale est CL ; et ad rationalem CD applicatum est, latitudinem faciens CM . Quare CM est rationalis, et ipsi CD longitudine commensurabilis^m. Etⁿ 21. hujus. quoniam totum CL est æquale quadratis ex AG , GB , CE autem quadrato ex AB æquale; erit reliquum FL æquale ei, quod bis sub AG , GB continetur^p. 7. secundi. Itaque secetur FM bifariam in puncto N ; et per N alterutri ipsarum CD , ML parallela ducatur NO . Utrumque igitur parallelogrammorum FO , NL est æquale ei, quod continetur sub AG , GB . Et quoniam quod bis continetur sub AG , GB medium est, et æquale parallelogrammo LF : erit et LF medium; et ad rationalem FE applicatum est, latitudinem faciens FM . Ergo FM est rationalis, sed ipsi CD longitudine incommensurabilis^o. 23. hujus. Et quoniam compositum ex quadratis ipsarum AG , GB est rationale, quod autem bis sub AG , GB continetur medium; erunt quadrata ex AG , GB ei, quod bis continetur sub AG , GB , incommensurabilia. Quadratis autem ex AG , GB æquale est parallelogrammum CL , et ei, quod bis sub AG , GB continetur, est æquale FL : incommensurabile igitur est CL ipsi LF . Sed ut CL
c c
ad

^r 1. sexti. ad FL , ita est CM ad FM ^p. Quare CM ipsi FM lon-

^q 10. hujus. gitudine est incommensurabilis^q. Et sunt ambæ ra-

tionales. Ergo CM , MF ratio-

nales sunt, potentiâ solum com-

mensurabiles; et igitur CF est

^r 74. hujus. apotome^r. Dico et quartam

esse. Quoniam enim AG , GB

potentiâ sunt incommensura-

biles; erit quadratum ex AG

incommensurable quadrato ex

GB . Et quadrato quidem ex

AG æquale est parallelogram-

um CH ^s; quadrato autem ex GB est æquale KL : in-

commensurable igitur est CH ipsi KL . Sed ut CH ad

KL , ita est CK ad KM . Ergo CK ipsi KM est incom-

mensurabilis longitudine. Et quoniam inter quadrata

ex AG , GB medium proportionale est rectangulum sub

AG , GB ^t; atque est quadrato quidem ex AG æquale

parallelogrammum CH , quadrato autem ex GB æquale

KL , et rectangulo sub AG , GB æquale NL ; erit NL

medium proportionale inter parallelogramma CH , KL .

Est igitur ut CH ad NL , ita NL ad KL . Sed ut CH

ad NL , ita CK ad MN . Et ut NL ad KL , ita MN ad

KM . Ergo ut CK ad MN , ita MN ad KM ; ac pro-

pterea rectangulum sub CK , KM est æquale quadrato

ex MN ^u; hoc est, quartæ parti quadrati ex MF . Itaque

quoniam duæ rectæ lineæ inæquales sunt CM , MF ; et

quartæ parti quadrati ex MF æquale, ad CM applicatum

est, deficiens figurâ quadratâ, sc. contentum sub CK ,

KM ; et in partes incommensurabiles ipsam dividit:

recta linea CM plus poterit quam MF quadrato rectæ

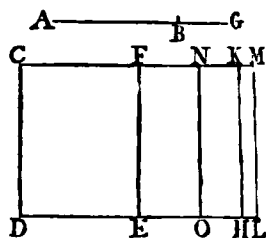
lineæ sibi incommensurabilis longitudine^x. Et est tota

CM longitudine commensurabilis expositæ rationali CD .

Ergo CF est apotome quarta^y.

Quadratum igitur minoris, ad rationalem applicatum,

latitudinem facit apotomen quartam. Q. E. D.



^s Per con-

struâ.

^t Lemma 7.

hujus.

^u 17. sexti.

^x 19. hujus.

^y Def.

Tert. 4.

hujus.

PROP. CII. THEOR.

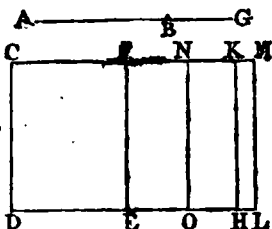
[CII.]

Quadratum ejus, quæ cum rationali medium totum efficit, ad rationalem applicatum, latitudinem facit apotomen quintam.

Sit quæ cum rationali medium totum efficit AB , rationalis autem CD ; et quadrato ex AB æquale ad CD applicetur parallelogrammum CB , latitudinem faciens CF : dico CF apotomen esse quintam.

Sit enim ipsi AB congruens BG : ergo AG , GB rectæ linæ potentiâ sunt in-

commensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem sub ipsis continetur rationale^a. Et quadrato ex AG æquale parallelogrammum CH ad ipsam CD applicetur, latitudinem faciens CK ^a; quadrato autem ex GB æquale applicetur KL , latitudinem faciens KM . Totum igitur CL est æquale quadratis ex AG , GB . Sed compositum ex quadratis ipsarum AG , GB est medium: ergo et medium est parallelogrammum CL . Et ad rationalem CD applicatum est, latitudinem faciens CM . Quare CM est rationalis, sed ipsi CD longitudine incommensurabilis^b. ^a 78. hujus.

^a 78. hujus.^a 45. primi.

Et quoniam totum CL est æquale quadratis ex AG , GB ; CB autem quadrato ex AB æquale; erit reliquum FL æquale ei, quod bis sub AG , GB continetur^c. Ita^c 7. secundi. que secetur FM bifariam in puncto N , et ab ipso N alterutri ipsarum CD , ML parallela ducatur NO . Utrumque igitur FO , NL est æquale ei, quod sub AG , GB continetur. Et quoniam quod bis continetur sub AG , GB rationale est, et æquale parallelogrammo FL ; erit et FL rationale. Et ad rationalem EF applicatum est, latitudinem faciens FM . Ergo FM est rationalis, et ipsi CD commensurabilis longitudine^d. Et quoniam^d 21. hujus. parallelogrammum CL est medium, et FL rationale: incommensurabile est CL ipsi FL . Et ut CL ad FL , ita CM ad MF ^e. Ergo CM ipsi MF longitudine est^e 1. sexti. incommensurabilis^f. Et sunt ambæ rationales; quare^f 10. hujus. CM , MF rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles; ideoque CF est apotome^g. Dico et quintam esse. ^g 74. hujus.

^h Ut in
præc.

Similiter enim demonstrabimus rectangulum sub ck , km esse æquale quadrato ex nm , hoc est, quartæ parti quadrati ex fm ^h. Quod cum quadratum ex ag incommensurabile sit quadrato ex gb ; sitque quadratum ex ag parallelogrammo ch æquale, quadratum autem ex gb parallelogrammo kl : erit ch ipsi kl incommensurabile. Sed ut ch ad kl , ita ck ad km . Ergo ck ipsi km longitudine est incommensurabilis. Quoniam igitur duæ rectæ lineæ cm , mf inæquales sunt; et quartæ parti quadrati ex fm æquale, ad ipsam cm applicatum est, deficiens figurâ quadratâ, et in partes incommensurabiles ipsam dividit; recta lineæ cm plus poterit quam mf quadrato rectæ lineæ sibi longitudine

ⁱ 19. hujus. incommensurabilisⁱ. Atqui est congruens fm commensurabilis longitudine expositæ rationali cd . Ergo cf est apotome quinta^k.

^k Def.
Tert. 5.
hujus.

Quadratum igitur ejus, quæ cum rationali medium totum efficit, ad rationalem applicatum, latitudinem facit apotomen quintam. *Q. E. D.*

[CIII.]

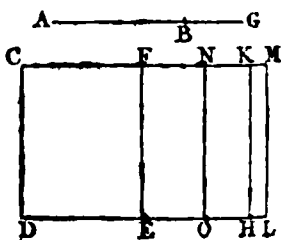
PROP. CIII. THEOR.

Quadratum ejus, quæ cum medio medium totum efficit, ad rationalem applicatum, latitudinem facit apotomen sextam.

Sit quæ cum medio medium totum efficit ab , rationalis autem cd ; et quadrato ex ab æquale parallelogrammum ce ad ipsam cd applicetur, latitudinem faciens cf : dico cf esse apotomen sextam.

Sit enim ipsi ab congruens bg : ergo ag , gb potentia sunt incommensurabiles, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem sub ipsis ag , gb continetur medium, et adhuc quadrata ipsarum ag , gb incommensurabilia rectangulo, quod continetur sub ipsis ag ,

ⁱ 79. hujus. gb ⁱ. Itaque ad cd applicetur quadrato ex ag æquale parallelogrammum ch , latitudinem faciens ck ; quadrato autem ex bg æquale applicetur kl . Totum igitur cl est æquale quadratis ex ag , gb : ac propterea cl est medium. Et ad rationalem cd applicatum est, latitudinem



latitudinem faciens CM : ergo CM rationalis est, sed ipsi CD longitudine incommensurabilis^m. Quoniam igitur CL est æquale quadratis ex AG , GB ; CE autem quadrato ex AB æquale; erit reliquum FL æquale ei, quod bis sub AG , GB contineturⁿ. Atqui est quodⁿ 7. secundi. bis continetur sub AG , GB medium: ergo et FL est medium. Et ad rationalem FE applicatum est, latitudinem faciens FM ; est igitur FM rationalis, sed ipsi CD longitudine incommensurabilis. Et quoniam quadrata ex AG , GB incommensurabilia sunt ei, quod bis sub AG , GB continetur; atque est quadratis quidem ex AG , GB æquale parallelogrammum CL , ei vero quod bis continetur sub AG , GB æquale FL ; erit CL ipsi FL incommensurable. Sed ut CL ad FL , ita est CM ad MF ^o. Quare CM ipsi MF incommensurabilis est^o 1. sexti. longitudine^p. Et sunt ambæ rationales. Ergo CM , MF ^p 10. hujus. rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles; et ob id CF est apotome^q. Dico et sextam esse. Quoniam^q 74. hujus. enim FL est æquale ei, quod bis continetur sub AG , GB , secetur FM bifariam in puncto N ; et per N ipsi CD parallela ducatur NO . Utrumque igitur parallelogrammorum FO , NL est æquale rectangulo sub AG , GB . Et quoniam AG , GB potentiâ sunt incommensurabiles; erit quadratum ex AG incommensurable quadrato ex GB . Sed quadrato quidem ex AG est æquale parallelogrammum CH , quadrato autem ex GB æquale KL ^r. Ergo CH ipsi KL est incommensurable. ^r Per construct. Ut autem CH ad KL , ita est CK ad KM : incommensurabilis igitur est CK ipsi KM ^o. Et quoniam inter quadrata ex AG , GB medium proportionale est rectangulum sub AG , GB ^s; estque quadrato ex AG æquale CH , et^s Lemma 7. quadrato ex GB æquale KL , rectanguloque sub AC , GB æquale NL ; erit et inter parallelogramma CH , KL medium proportionale NL . Et eadem ratione ac in superiori CM plus poterit quam MF quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Et neutra ipsarum est commensurabilis longitudine expositæ rationali CD . Ergo CF est sexta apotome^t.

Quadratum igitur ejus, quæ cum medio medium totum efficit, ad rationalem applicatum, latitudinem facit apotomen sextam. *Q. E. D.*

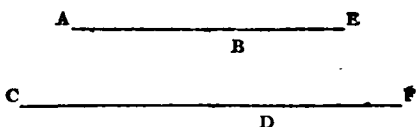
[CIV.]

PROP. CIV. THEOR.

Recta linea apotomæ longitudine commensurabilis, et ipsa apotome est, atque ordine eadem.

Sit apotome AB , et ipsi AB longitudine commensurabilis sit CD : dico CD apotomen esse, atque ordine eandem, quæ AB .

Quoniam enim AB est apotome, sit ipsi congruens BE : ergo AE , EB rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles^a. Et fiat ratio BE ad DF eadem, quæ



est AB ad CD . Quare ut una ad unam, ita erunt
^a 12. quinti. omnes ad omnes^a: est igitur ut tota AE ad totam CF , ita AB ad CD . Commensurabilis autem est AB ipsi CD longitudine. Ergo et AE ipsi CF longitudine commensurabilis erit, et BE ipsi DF ^a. Sunt autem AE , EB rationales, potentiâ solum commensurabiles. Ergo et CF , FD rationales erunt, potentiâ solum commensurabiles^a; ac propterea CD est apotome^a. Dico et ordine eandem esse, quæ AB . Quoniam enim est ut AE ad CF , ita BE ad FD ; erit permutando ut AE ad EB , ita CF ad FD ^b. Vel igitur AE plus potest quam EB quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si quidem AE plus potest quam EB quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, et CF plus poterit quam FD quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Et si quidem AE commensurabilis est longitudine expositæ rationali, et CF etiam erit. Si vero EB est commensurabilis, et DF commensurabilis erit. Et si neutra ipsarum AE , EB commensurabilis est longitudine expositæ rationali, et neutra ipsarum CF , FD eidem longitudine erit commensurabilis. Quod si AE plus possit quam EB quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine, et CF plus poterit quam FD quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Et si quidem AE sit commensurabilis expositæ rationali longitudine, et CF eidem

eidem longitudine commensurabilis erit. Si vero BE , et FD . Et si neutra ipsarum AE , EB , et neutra ipsarum CF , FD erit expositæ rationali longitudine commensurabilis. Ergo CD apotome est, et ordine eadem, quæ AB^c . Q. E. D.

^c Def.
Tert.

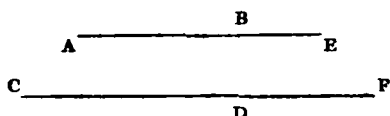
PROP. CV. THEOR.

[CV.]

Recta linea mediæ apotomæ commensurabilis, et ipsa mediæ apotome est, atque ordine eadem.

Sit mediæ apotome AB , et ipsi AB longitudine commensurabilis sit CD : dico CD mediæ apotomen esse, et ordine eandem, quæ AB .

Quoniam enim mediæ apotome est AB , sit BE ipsi AB congruens. Ergo AE , EB mediæ sunt, potentiâ solum commensurabiles^d. Et fiat ut AB ad CD , ita BE ^{d 75. & 76. hujus.}



ad DF . Sunt autem AE , EB mediæ, potentiâ solum commensurabiles. Ergo et CF , FD mediæ potentiâ solum commensurabiles erunt; ac propterea mediæ apotome est CD . Ostendendum est et ordine eandem esse, quæ AB . Quoniam enim ut AE ad EB , ita CF ad FD ; ut autem AB ad EB , ita quadratum ex AE ad rectangulum sub AE , EB^c ; et ut CF ad FD , ita quadratum ex CF ad rectangulum sub CF , FD : erit et ut quadratum ex AE ad rectangulum sub AE , EB , ita quadratum ex CF ad rectangulum sub CF , FD . Permutando igitur est ut quadratum ex AE ad quadratum ex CF , ita rectangulum sub AE , EB ad rectangulum sub CF , FD . Sed quadratum ex AE commensurabile est quadrato ex CF : rectangulum igitur sub AE , EB rectangulo sub CF , FD est commensurabile. Et si quidem rationale est rectangulum sub AE , EB , et rectangulum sub CF , FD rationale erit: si vero rectangulum sub AE , EB medium est, et medium erit rectangulum sub CF , FD . Mediæ igitur apotome est CD , atque ordine eadem, quæ AB . Q. E. D.

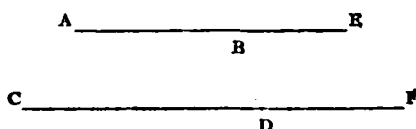
[CVI.]

PROP. CVI. THEOR.

Recta linea minori commensurabilis, et ipsa minor est.

Sit minor AB , et ipsi AB commensurabilis sit CD : dico et CD minorem esse.

Fiant enim eadem, quæ prius. Et quoniam AE , EB potentiâ sunt incommensurabiles, et CF , FD potentiâ incommensurabiles erunt. Quoniam autem est ut AE



- ad EB , ita CF ad FD : erit et ut quadratum ex AE ad quadratum ex EB , ita quadratum ex CF ad quadratum ex FD ^f; et componendo ut quadrata ex AE , EB ad quadratum ex EB , ita quadrata ex CF , FD ad quadratum ex FD , et permutando^g. Commensurabile autem est quadratum ex BE quadrato ex DF . Ergo et compositum ex quadratis ipsarum AE , EB composito ex quadratis ipsarum CF , FD commensurabile erit^h. Sed compositum ex quadratis ipsarum AE , EB est rationale: ergo et rationale erit compositum ex quadratis ipsarum CF , FD . Rursus, quoniam est ut quadratum ex AE ad rectangulum sub AE , EB , ita quadratum ex CF ad rectangulum sub CF , FD , et permutando; commensurabile autem est quadratum ex AE quadrato ex CF : erit igitur et rectangulum sub AE , EB rectangulo sub CF , FD commensurabile. Sed rectangulum sub AE , EB medium est: medium igitur est et rectangulum subⁱ CF , FD ⁱ. Quare CF , FD potentiâ incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem sub ipsis continetur medium.
- ^h 77. hujus. Ergo CD est minor^k. Q. E. D.

Aliter. Sit minor A , et ipsi A commensurabilis sit B : dico B minorem esse.

- Exponatur enim CD rationalis, et quadrato ex A æquale parallelogrammum CE ad ipsam CD applicetur, latitudinem faciens CF . Apotome igitur quarta est CF ^l. Quadrato autem ex B æquale ad FE applicetur FG , latitudinem

latitudinem faciens FH . Quoniam igitur A commen-

surabilis est ipsi B ; erit et quadratum

ex A quadrato ex B commensurabile.

Sed quadrato quidem ex A æquale

est parallelogrammum CE , quadrato

autem ex B æquale FG . Ergo CE

commensurabile est ipsi FG . Ut au-

tem CE ad FG , ita CF ad FH :
commensurabilis igitur est CF ipsi

FH longitudineⁿ. Sed CF est apo-

tome quarta. Ergo et FH apotome

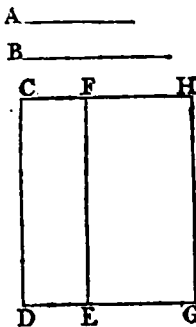
quarta est^o. Ergo et spatium FG

sub rationali et apotomâ quartâ con-

tinetur: recta igitur linea spatium

potens minor est^p. Potest autem spatium FG ipsa B .^{p 95. hujus.}

Ergo B est minor. Q. E. D.



^m 1. sexti.

ⁿ 10. hujus.

^o 104. hu-
jus.

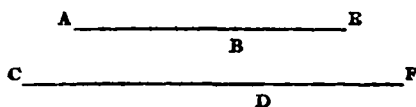
PROP. CVII. THEOR.

[CVII.]

Recta linea commensurabilis ei, quæ cum rationali medium totum efficit, et ipsa cum rationali medium totum efficiens est.

Sit cum rationali medium totum efficiens AB . Et ipsi AB commensurabilis sit CD : dico CD esse eam, quæ cum rationali medium totum efficit.

Sit enim ipsi AB congruens BE . Ergo AE , EB potentiâ incommensurabiles sunt^q, facientes compositum^{q 78. hujus.} quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem sub



ipsis continetur rationale. Et eadem construantur. Similiter demonstrabitur, atque prius, CF , FD in eâdem esse ratione, in quâ AE , EB ; et compositum ex quadratis ipsarum AE , EB commensurabile esse composito ex quadratis ipsarum CF , FD ; rectangulum autem sub AE , EB rectangulo sub CF , FD commensurabile. Quare et CF , FD potentiâ incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex quadratis ipsarum CF , FD medium, quod autem sub ipsis continentur rationale. Ergo CD est, quæ cum rationali medium totum efficit^q. Q. E. D.

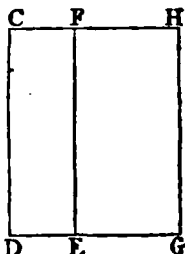
Aliter.

Aliter. Sit cum rationali medium totum efficiens A , et ipsi A sit commensurabilis B : dico B esse eam, quæ cum rationali medium totum efficit.

Exponatur enim rationalis CD , et quadrato quidem ex A æquale parallelogrammum CE ad ipsam CD applicetur, latitudinem faciens CF . Ergo CF est apotome

A _____
 B _____

^{102. hujus.} quinta¹. Quadrato autem ex B æquale FG ad ipsam FE applicetur, latitudinem faciens FH . Quoniam igitur A commensurabilis est ipsi B ; erit et quadratum ex A quadrato ex B commensurable. Sed quadrato ex A æquale est parallelogrammum CE ; quadrato autem ex B æquale FG . Ergo CE est commensurable ipsi FG ; et ob id recta linea CF ipsi FH longitudine est commensurabilis. Apotome autem quinta



^{104. hujus.} est CF . Ergo et FH est apotome quinta²; estque FE rationalis. Si autem spatium contineatur sub rationali et apotomâ quintâ, recta linea spatium potens est quæ ^{96. hujus.} cum rationali medium totum efficit³. Sed ipsa B potest ^{Per construct.} spatium FG ⁴. Ergo ipsa B cum rationali medium totum efficiens est. $Q. E. D.$

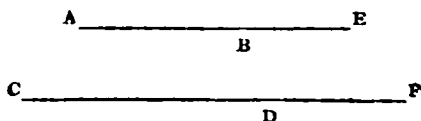
[CVIII.]

PROP. CVIII. THEOR.

Recta linea commensurabilis ei, quæ cum medio medium totum efficit, et ipsa cum medio medium totum efficiens est.

Sit cum medio medium totum efficiens AB , et ipsi AB commensurabilis sit CD : dico CD esse eam, quæ cum medio medium totum efficit.

Sit ipsi AB congruens BE ; et eadem construantur. Ergo AE , EB potentiâ incommensurabiles sunt, facientes



^{79. hujus.} compositum ex quadratis ipsarum medium⁵, quod autem sub ipsis continetur medium, et adhuc compositum ex ipsarum

ipsarum quadratis incommensurabile ei, quod sub ipsis continetur. Et sunt AE, EB commensurabiles ipsis CF, FD ut in superioribus ostensum est; et compositum ex quadratis ipsarum AE, EB commensurabile composito ex quadratis ipsarum CF, FD ; rectangulumque sub AE, EB rectangulo sub CF, FD . Ergo CF, FD potentiâ incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex quadratis ipsarum medium, quod autem sub ipsis continetur medium, et adhuc compositum ex ipsarum quadratis incommensurabile ei, quod sub ipsis continetur. Ergo CD est quæ cum medio medium totum efficit γ . γ 79. hujus. $Q. E. D.$

* SCHOLION.

De mutuo Irrationalium uniuscujusque ἑξἑς inter se commensu, in decem hujus Libri propositionibus Euclides pertractavit: quarum quinque, nimirum quæ septima sexagesima numeratur, quæque ab eâ quatuor sunt proximæ, irrationales per compositionem respiciunt; quinque aliæ, a quartâ post centesimam incipientes, eas quæ per deductionem sunt irrationales. Ad pleniorē subtilissimæ doctrinæ intelligentiam, illud, ut opinor, haud inutile erit, e Clavio monuisse: ex decem propositionibus, quas memoravimus, duas, lxvii^{m} dico et civ^{m} , latius non sumendas quam ab Euclide pronuntiatæ sunt; de rectis scilicet ipsâ longitudine commensurabilibus. Quamquam enim ei quæ ex binis est nominibus, vel ei quæ apotome, vel potentiâ tantum commensurabilis et ipsa ex binis nominibus aut apotome erit; haud tamen necessario ejusdem ordinis, cujus illa cui eo modo est commensurabilis. Propositiones autem octo reliquæ (68, 69, 70, 71; 105, 106, 107, 108.) apud commensurabiles potentiâ tantum æque ac longitudine vigent. Ut demonstrationes, quibus singulæ confirmatæ sunt, accurate perpendenti manifestum erit.

PROP. CIX. THEOR.

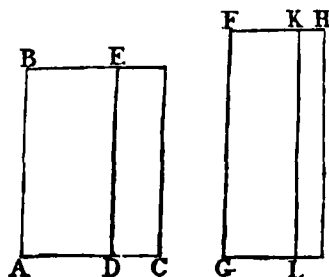
[CIX.]

Medio de rationali detracto, recta linea quæ reliquum spatium potest una ex duabus irrationalibus fit, vel apotome, vel minor.

De rationali enim BC medium BD detrahatur: dico eam quæ reliquum spatium BC potest unam fieri ex duabus irrationalibus, vel apotomen, vel minorem.

Exponatur

Exponatur enim rationalis FG ; et parallelogrammo quidem BC æquale GH ad FG applicetur; parallelogrammo autem BD æquale auferatur GK : reliquum igitur CE est æquale LH . Itaque quoniam rationale est BC , medium autem BD ; atque est BC æquale GH , et BD ipsi GK ; erit GH rationale, medium autem



GK ; et ad rationalem FG utrumque applicatum est. Rationalis igitur est FH , et ipsi FG longitudine commen-

² 21. hujus. rabilis^a, FK vero rationalis et incommensurabilis ipsi FG

^a 23. hujus. longitudine^a. Ergo FH ipsi FK longitudine incommen-

^b 13. hujus. surabilis est^b: quare FH , FK rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles: ac propterea KH est apotome,

^c 74. hujus. ipsi vero congruens KF ^c. HF igitur plus potest quam FK quadrato rectæ lineæ sibi vel commensurabilis longitudine, vel incommensurabilis. Possit primum quadrato rectæ lineæ commensurabilis. Atqui est tota HF commensurabilis longitudine expositæ rationali FG . Ergo KH est apotome prima^d. Recta autem linea, quæ

^d Def. Tert. 1. hujus. potest spatium sub rationali et apotomâ primâ contentum, est apotome^e. Ergo quæ potest LH , hoc est, ipsum CE , apotome est. Quod si HF plus possit quam FK quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine, estque tota HF expositæ rationali FG longitudine commensurabilis; erit KH apotome quarta^f. Et quæ potest spatium sub rationali et apotomâ quartâ contentum

^e Def. Tert. 4. hujus. minor est^g. Quæ igitur potest spatium LH , hoc est, ipsum EC , est minor. Q. E. D.

[CX.]

PROP. CX. THEOR.

Rationali de medio detracto, aliæ duæ irrationales fiunt, vel mediæ apotome prima, vel cum rationali medium totum efficiens.

Vide fig. De medio enim BC rationale BD detrahatur: dico
Prop. 109. rectam lineam, quæ reliquum spatium EC potest, unam duarum irrationalium fieri, vel mediæ apotomen primam, vel eam quæ cum rationali medium totum efficit.

Exponatur

Exponatur enim rationalis FG , et ad ipsam similiter spatia applicentur^b; erit rationalis quidem FH , et ipsi^b FG longitudine incommensurabilis¹. Rationalis autem FK , et commensurabilis ipsi FG longitudine^k: ergo FH , FK rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles; ac propterea HK est apotome, et ipsi congruens FK ¹. FH igitur plus potest quam FK quadrato rectæ¹ lineæ sibi longitudine vel commensurabilis, vel incommensurabilis. Et si quidem HF plus potest quam FK quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; quoniam congruens FK commensurabilis est expositæ rationali FG longitudine: erit HK apotome secunda^m.^m Def. Est autem FG rationalis. Ergo quæ potest spatium LH , hoc est, ipsum CE , est mediæ apotome primaⁿ. Quod si HF plus potest quam FK quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis; quoniam congruens FK commensurabilis est expositæ rationali FG longitudine: erit HK apotome quinta^o. Recta igitur linea potens^o spatium EC est quæ cum rationali medium totum efficit^p. *Q. E. D.*

Ut in præc.
23. hujus.
21. hujus.

74. hujus.

Def.

Tert. 2.

hujus.

93. hujus.

Def.

Tert. 5.

hujus.

96. hujus.

PROP. CXI. THEOR.

[CXI.]

Medio de medio detracto, quod sit incommensurabile toti, reliquæ duæ irrationales fiunt, vel mediæ apotome secunda, vel cum medio medium totum efficiens.

Detrahatur ut in propositis figuris de medio BC medium BD , quod sit incommensurabile toti: dico rectam lineam, quæ potest spatium CE , unam esse ex duabus irrationalibus, vel mediæ apotomen secundam, vel eam quæ cum medio medium totum efficit.

Quoniam enim medium est utrumque ipsorum BC , BD , et BC incommensurabile est ipsi BD , hoc est, GH ipsi GK ; erit HF ipsi FK incommensurabilis longitudine¹. Ergo HF , FK rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles¹; et ob id HK est apotome, et ipsi congruens FK ¹. Itaque HF plus potest quam FK quadrato rectæ lineæ longitudine sibi vel commensurabilis, vel incommensurabilis. Et si quidem HF plus potest quam FK quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; cum neutra ipsarum HF , FK commensurabilis sit expositæ rationali FG longitudine; erit HK apotome tertia¹. Rationalis autem est KL . Quæ vero potest rectangulum, sub rationali et apotomâ tertiâ contentum,

1. sexti,

& 10. hujus.

23. hujus.

74. hujus.

Def.

Tert. 3.

hujus.

- * 94. hujus. tentum, mediæ est apotome secunda^a. Ergo quæ potest spatium LH ; hoc est ipsum CE , mediæ est apotome secunda. Si vero HF plus potest quam FK quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine; cum neutra ipsarum HF , FK longitudine commensurabilis sit expositæ rationali FG ; erit HK apotome sexta^a.
^a Def. Tert. 6. hujus. At recta linea, potens quod sub rationali et apotomâ sextâ continetur, est quæ cum medio medium totum efficit^r. Ergo quæ potest spatium LH ; hoc est, ipsum EC , est cum medio medium totum efficiens. Q. E. D.

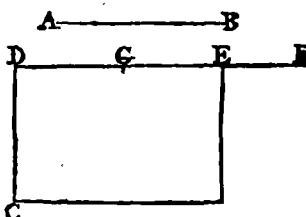
[CXII.]

PROP. CXII. THEOR.

Apotome non est eadem, quæ ex binis nominibus.

Sit apotome AB : dico AB non esse eandem, quæ ex binis nominibus.

Sit enim, si fieri potest; exponaturque rationalis DC , et quadrato ex AB æquale rectangulum CE ad ipsam DC applicetur, latitudinem



- ^a 45. primi. faciens DE ^z. Quoniam igitur AB est apotome, erit
^a 98. hujus. DE apotome prima^a. Sit ipsi congruens EF . Ergo DF , FE rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles^b, et DF plus potest quam FE quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, atque est DF commensurabilis expositæ rationali CD longitudine.
^c ex hyp. Rursum, quoniam AB est ex binis nominibus^c, erit DE
^d 61. hujus. ex binis nominibus prima^d. Dividatur in nomina ad punctum G , sitque DG majus nomen. Ergo DG , GE rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles^e. Et DG plus potest quam GE quadrato rectæ lineæ sibi longitudine, et major DG longitudine commensurabilis est expositæ rationali DC . Quare DF
^f 12. hujus. ipsi DG longitudine est commensurabilis^f; et reliquæ igitur FG commensurabilis erit. Itaque quoniam DF commensurabilis est ipsi FG , atque est rationalis DF ; erit et FG rationalis. Rursum, quoniam DF commensurabilis est ipsi FG longitudine, atque est DF ipsi FE incommensurabilis longitudine; erit et FG ipsi FE longitudine incommensurabilis. Et sunt rationales. Ergo GF , FE rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles;

furabiles; ac propterea $\epsilon \theta$ est apotome ϵ . Sed et rationalis, quod fieri non potest.

Ergo apotome non est eadem, quæ ex binis nominibus.

Q. E. D.

* SCHOLIUM.

Ex demonstratis quoque facile colligere licebit, apotomen, et cæteras ipsam consequentes irrationales lineas, neque medias esse, neque inter se easdem.

Quadratum enim mediæ ad rationalem lineam applicatum, latitudinem efficit rationalem, ipsi rationali longitudine incommensurabilem ^b.

^b 23. hujus.

At quadratum apotomæ ad rationalem applicatum, latitudinem efficit apotomen primam ¹. Et quadratum

¹ 98. hujus.

mediæ apotomæ primæ ad rationalem applicatum, latitudinem efficit apotomen secundam ². Quadratum vero

² 99. hujus.

mediæ apotomæ secundæ ad rationalem applicatum, latitudinem efficit apotomen tertiam ³. Quadratum

³ 100. hujus.

deinde Minoris ad rationalem applicatum, latitudinem efficit apotomen quartam ⁴. At vero quadratum ejus,

⁴ 101. hujus.

quæ cum rationali medium totum efficit, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit apotomen quintam ⁵.

⁵ 102. hujus.

Quadratum denique ejus, quæ cum medio medium totum efficit, ad rationalem applicatum, latitudinem

⁶ 103. hujus.

efficit apotomen sextam ⁶. Itaque cum hæc latitudines

⁷ 104. hujus.

differant et a latitudine mediæ, et inter se; a latitudine quidem mediæ, quod hæc rationalis sit, illæ vero irrationales; inter se autem, quod ordine non sint eadem apotomæ: manifestum est, apotomen, et reliquas irrationales ipsam consequentes, et a mediâ, et inter se differre. Quoniam vero in hoc theoremate demonstravimus, apotomen eandem non esse, quæ ex binis nominibus: et quadrata apotomæ, et cæterarum quinque irrationalium eam consequentium, ad rationalem applicata, latitudines efficiunt apotomen primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, et sextam: at vero quadrata ejus, quæ ex binis nominibus, et reliquarum quinque irrationalium, quæ ipsam sequuntur, ad rationalem applicata, latitudines efficiunt ex binis nominibus primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, ac sextam: liquido constat, latitudines apotomæ, et aliarum irrationalium, quæ post ipsam, eandem non esse latitudinibus ejus, quæ ex binis nominibus, et reliquarum post ipsam

irrati-

irrationalium: quandoquidem nulla apotome eadem est, quæ ex binis nominibus aliqua. Igitur et apotome, et quæ ipsam sequuntur, differunt ab eâ, quæ ex binis nominibus, et quæ post ipsam. Quamobrem cum tam illæ, quam hæ a mediâ sint diversæ; efficitur, rationali quâpiam expositâ, viginti tres numero esse lineas irracionales, inter se diversas, de quibus hætenus Euclides in hoc libro differuit. Sunt autem hæ,

1. Media.
2. Ex binis mediis prima.
3. Ex binis mediis secunda.
4. Major.
5. Rationale ac medium potens.
6. Bina media potens.
7. Ex binis nominibus prima.
8. _____ secunda.
9. _____ tertia.
10. _____ quarta.
11. _____ quinta.
12. _____ sexta.
13. Mediæ apotome prima.
14. Mediæ apotome secunda.
15. Minor.
16. Cum rationali medium totum efficiens.
17. Cum medio medium totum efficiens.
18. Apotome prima.
19. _____ secunda.
20. _____ tertia.
21. _____ quarta.
22. _____ quinta.
23. _____ sexta.

In hac recensione, neque ejus quæ ex binis nominibus simpliciter vocata est, neque ejus quæ simpliciter apotome, quarum altera primæ ἐξάδος earum quæ per compositionem, altera primæ earum quæ per detractionem prima est, ullam seorsum mentionem fecimus. Quoniam utramque in species divisam, ut supra monuimus, ἐξάδες posteriores sistunt. Ne cui igitur mirari subeat numerum linearum, quæ quatuor ἐξάδας conficiunt, accedente mediâ ipsâ extra omnem ἐξάδα, ad viginti quinque non assurgere.

PROP.

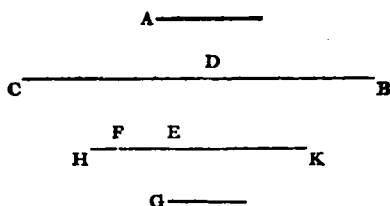
PROP. CXIII. THEOR.

[CXIII.]

Quadratum rationalis, ad eam quæ ex binis nominibus applicatum, latitudinem facit apotomen, cujus nomina commensurabilia sunt nominibus ejus, quæ est ex binis nominibus, et in eâdem ratione; et adhuc apotome, quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea quæ est ex binis nominibus.

Sit rationalis A; ea quæ est ex binis nominibus B C, cujus majus nomen C D; et quadrato ex A æquale rectangulum sit, quod sub B C, E F continetur: dico E F apotomen esse, cujus nomina commensurabilia sunt ipsis C D, D B, et in eâdem ratione; et adhuc E F eundem ordinem habere, quem habet B C.

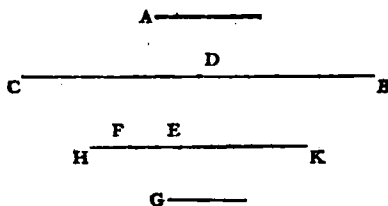
Sit enim rursus quadrato ex A æquale rectangulum, quod sub B D et G continetur. Itaque quoniam rectangulum contentum sub B C, E F est æquale ei, quod



sub B D, G continetur; erit ut C B ad B D, ita G ad E F^{p. 16. sexti.} Major autem est C B quam B D. Ergo et G quam E F major erit. Sit ipsi G æqualis E H. Est igitur ut C B ad B D, ita H E ad E F; et dividendo, ut C D ad D B, ita H F ad F E^{q.} Fiat ut H F ad F E, ita F K ad K E. Ergo^{q. 17. quinti.} et tota H K ad totam K F est ut F K ad K E; ut enim unum antecedentium ad unum consequentium, ita antecedentia omnia ad omnia consequentia^{r.} Sed ut F K^{r. 12. quinti.} ad K E, ita C D ad D B; et igitur ut H K ad K F, ita C D ad D B. Commensurabile autem est quadratum ex C D quadrato ex D B^{r.} Ergo et quadratum ex H K quadrato^{r. 37. hujus.} ex K F est commensurabile^{r.} Atqui est ut quadratum^{r. 10. hujus.} ex H K ad quadratum ex K F, ita recta linea H K ad K E, quoniam tres rectæ lineæ H K, K F, K E deinceps proportionales sunt^{q.}: commensurabilis igitur est H K ipsi^{q. Cor. 2. 20.} K E longitudine. Ergo et H E ipsi E K longitudine est^{sexti.}

D d

commen-



- * 16. hujus. commensurabilis ². Et quoniam quadratum ex A est æquale ei, quod sub HE, BD continetur, rationale autem est quadratum ex A: erit et quod sub HE, BD continetur rationale. Et ad rationalem BD applicatum est; rationalis igitur est HE, et ipsi BD longitudine commensurabilis; ideoque et EK, quæ est commensurabilis ipsi HE, rationalis erit, et ipsi BD commensurabilis longitudine. Quoniam igitur est ut CD ad DB, ita FK ad KE; sunt autem CD, DB potentia solum commensurabiles; et FK, KE potentia solum commensurabiles erunt. Rationalis autem est KE, et ipsi BD commensurabilis longitudine. Quare et FK est rationalis, ipsique CD longitudine commensurabilis. Sunt igitur FK, KE rationales, et potentia solum commensurabiles; et id-
- * 74. hujus. circo EF apotome est ². Jam vero CD plus potest quam DB quadrato rectæ lineæ sibi vel commensurabilis longitudine, vel incommensurabilis. Et si quidem CD plus potest quam DB quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine, etiam FK plus poterit quam KE quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Et si CD est commensurabilis expositæ rationali longitudine, et FK ejdem commensurabilis erit. Si autem BD, et KE. Et si neutra ipsarum CD, DB, et neutra ipsarum FK, KE. Quod si CD plus potest quam DB quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine, et FK plus poterit quam KE quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Et si quidem CD est longitudine commensurabilis expositæ rationali, erit et FK eidem commensurabilis. Et si BD, et KE. At si neutra ipsarum CD, DB, et neutra ipsarum FK, KE. Ergo FE apotome est, cujus nomina FK, KE commensurabilia sunt nominibus CD, DB ejus quæ est ex binis nominibus, et in eadem ratione; et eundem habet ordinem, quem CB. Q. E. D.

PROP.

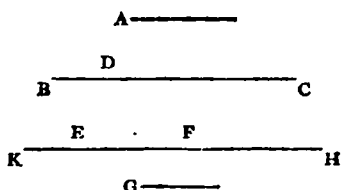
PROP. CXIV. THEOR.

[CXIV.]

Quadratum rationalis, ad apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cujus nomina commensurabilia sunt apotomæ nominibus, et in eâdem ratione; et adhuc quæ ex binis nominibus fit eundem habet ordinem, quem ipsa apotome.

Sit rationalis quidem A, apotome autem BD; et quadrato ex A æquale sit quod sub BD, KH continetur, ita ut quadratum rationalis A, ad BD applicatum, latitudinem faciat KH: dico KH esse ex binis nominibus, cujus nomina commensurabilia sunt nominibus ipsius BD, et in eâdem ratione; et KH eundem habere ordinem, quem habet BD.

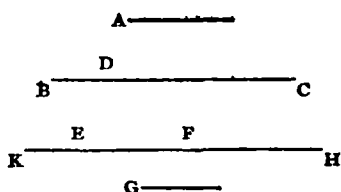
Sit enim ipsi BD congruens DC. Ergo BC, CD rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles^a. Et^{74. hujus.} quadrato ex A æquale sit quod sub BC, G continetur.



Rationale autem est quadratum ex A. Ergo quod sub BC, G continetur est rationale. Et ad rationale BC applicatum est: rationalis igitur est recta linea G, ipsique BC longitudine commensurabilis^b. Sed quoniam^{21. hujus.} rectangulum, contentum sub BC, G, est æquale ei, quod sub BD, KH continetur; erit ut CB ad BD, ita KH ad G^c. Major autem est CB quam BD. Ergo et KH^{16. sexti.} quam G est major. Ponatur ipsi G æqualis KE: commensurabilis igitur est KE ipsi BC longitudine. Et quoniam est ut CB ad BD, ita HK ad KV; erit, per conversionem rationis, ut BC ad CD, ita KH ad HE. Fiat ut KH ad HE, ita HF ad FE; et reliqua igitur KF ad FH est ut KH ad HE, hoc est, ut BC ad CD^d. Sed BC, CD potentiâ solum sunt commensurabiles^{19. quinti.}. Ergo et KF, FH potentiâ solum commensurabiles erunt. Et cum sit ut KH ad HE, ita KF ad FH; ut autem KH ad HE, ita HF ad FE; erit et ut KF ad

D d 2

F H



- FH , ita HF ad FE . Quare ut prima ad tertiam, ita
^{* Cor. 2. 20.} quadratum ex primâ ad quadratum ex secundâ^c: ut
^{fexti.} igitur KF ad FE , ita quadratum ex KF ad id quod fit
 ex FH quadratum. Commensurabile autem est qua-
 dratum ex KF quadrato ex FH ; sunt enim KF , FH
 potentiâ commensurabiles. Ergo et KF ipsi FE com-
 mensurabilis est longitudine: ac propterea FK ipsi KE
^{16. hujus.} longitudine commensurabilis^f. Sed KE rationalis est, et
 ipsi BC longitudine commensurabilis. Ergo et KF ra-
 tionalis erit, et ipsi BC commensurabilis longitudine.
 Et quoniam est ut BC ad CD , ita KF ad FH ; erit per-
 mutando ut BC ad KF , ita DC ad FH . Commensura-
 bilis autem est BC ipsi KF . Quare et CD ipsi FH est
^{10. hujus.} commensurabilis^g. Suntque BC , CD rationales po-
 tentiâ solum commensurabiles. Ergo et KF , FH ra-
 tionales erunt, potentiâ solum commensurabiles: ex
^{37. hujus.} binis igitur nominibus est KH ^h. Et si quidem BC
 plus potest quam CD quadrato rectæ lineæ sibi longi-
 tudine incommensurabilis, et KF plus poterit quam FH
 quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine.
 Et si BC longitudine commensurabilis est expositæ ra-
 tionali, et KF eidem commensurabilis erit. Si vero
 CD est commensurabilis longitudine expositæ rationali,
 erit et ipsa FH eidem commensurabilis. Et si neutra
 ipsarum BC , CD , et neutra ipsarum KF , FH . At si BC
 plus poterit quam CD quadrato rectæ lineæ sibi longi-
 tudine incommensurabilis, et KF plus poterit quam FH
 quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine.
 Et si quidem BC longitudine commensurabilis est expo-
 sitæ rationali, et KF eidem commensurabilis erit. Si
 vero CD , et ipsa FH . Quod si neutra ipsarum BC , CD ,
 et neutra ipsarum KF , FH . Ex binis igitur nominibus
 est KH , cujus nomina KF , FH commensurabilia sunt
 nominibus apotomæ BC , CD , et in eadem ratione; et
 KH eundem tenet ordinem, quem ipsa BC ⁱ. Q. E. D.
 PROP.

¹ Deff.
 Secund.
 et Tert.
 hujus.

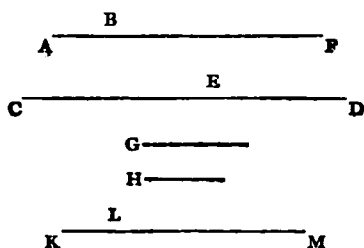
PROP. CXV. THEOR.

[CXV.]

Si spatium contineatur sub apotomâ et eâ, quæ ex binis nominibus, cujus nomina commensurabilia sunt nominibus apotomæ, et in eâdem ratione; recta linea, spatium potens, est rationalis.

Spatium enim contineatur sub AB, CD ; videlicet sub apotomâ AB , et quæ fit ex binis nominibus CD , cujus majus nomen CE ; et sint nomina ejus, quæ ex binis nominibus, CE, ED , commensurabilia nominibus apotomæ AF, FB , et in eâdem ratione; fitque recta lineâ G , potens spatium contentum sub AB, CD : dico ipsam G rationalem esse.

Exponatur enim rationalis H , et quadrato ex H æquale ad ipsam CD applicetur, latitudinem faciens KL^k ; ^k 45. primi.



apotome igitur est κL , cujus nomina κM , $M L$ com-
mensurabilia sunt nominibus ejus, quæ est ex binis no-
minibus, sc. $C E$, $E D$, et in eâdem ratione¹. Sed $C E$,^{113. hujus.}
 $E D$ commensurabiles sunt ipsis $A F$, $F B$, atque in eâdem
ratione^m. Est igitur ut $A F$ ad $F B$, ita κM ad $M L$ ⁿ; et^m ex hyp.
permutando ut $A F$ ad κM , ita $F B$ ad $M L$. Quare etⁿ 11. quinti.
reliqua $A B$ ad reliquam κL est ut $A F$ ad κM ^o. Com-^{19. quinti.}
mensurabilis autem est $A F$ ipsi κM : ergo et $A B$ ipsi
 κL est commensurabilis^p. Estque ut $A B$ ad κL , ita^p 10. hujus.
rectangulum contentum sub $C D$, $A B$ ad id, quod con-
tinetur sub $C D$, κL ¹: commensurabile igitur est re-¹ 1. sexti.
ctangulum contentum sub $C D$, $A B$ rectangulo, quod
sub $C D$, κL continetur. Sed rectangulum contentum
sub $C D$, κL est æquale quadrato ex H ^r: ergo rectan-^r Per con-
gulum, quod continetur sub $C D$, $A B$, quadrato ex H est^{struê.}
commensurabile. Rectangulum autem, quod continetur
sub $C D$, $A B$, est æquale quadrato ex G ^m. Ergo qua-
dratum
dratum

dratum ex G commensurabile est quadrato ex H . Atqui est quadratum ex H rationale: rationale igitur est quadratum ex G ; et idcirco ipsa G , quæ potest quod sub $C D$, $A B$ continetur, est rationalis.

Si igitur spatium contineatur sub apotomâ et eâ, quæ ex binis nominibus, cujus nomina commensurabilia sunt nominibus apotomæ, et in eâdem ratione; recta linea spatium potens est rationalis. *Q. E. D.*

Cor. Ex iis manifesto constat fieri posse, ut spatium rationale sub irrationalibus rectis lineis contineatur.

[CXVI.]

PROP. CXVI. THEOR.

A mediâ infinitæ irrationales fiunt, et nulla alicui antecedentium est eadem.

Sit media A : dico ex ipsâ A infinitas irrationales fieri, et nullam alicui antecedentium eandem esse.

Exponatur rationalis B , et rectangulo, contento sub

A, B , æquale sit quadratum ex

C . Irrationalis igitur est ipsa

A —————

* Def. 11.
hujus.

C : nam quod sub irratio-

nali et rationali continetur

B —————

irrationale est. Et est eadem

C —————

† In hoc
lib.

nulli earum, quæ prius†; non

enim quadratum alicujus an-

D —————

tecedentium, ad rationalem

applicatum, latitudinem ef-

ficit mediam (per 61, 62, 63, 64, 65, 66, et 98, 99, 100, 101, 102, 103. hujus.) Rursus, rectangulo, quod sub

B, C continetur, æquale sit quadratum ex D : irrationale

igitur est quod fit ex D ; et idcirco ipsa D est irratio-

nalis, et nulli antecedentium eadem: neque enim qua-

dratum alicujus earum, quæ prius sunt, ad rationalem

applicatum, latitudinem efficit ipsam C . Similiter et

eodem ordine infinite protracto, manifestum est a mediâ

infinitas irrationales fieri, et nullam alicui antecedentium

eandem esse. *Q. E. D.*

† Aliter. Sit media $A C$: dico ex ipsâ $A C$ infinitas irrationales fieri, et nullam alicui priorum eandem esse.

† Demonstratio hæc, quæ pro aliâ habetur tam in Codd. MSS. quam in editis, parum differt a præcedente. Illam tamen cum Commandino retinimus.

Ducatur

Ducatur ipsi AC ad rectos angulos AB , fitque AB rationalis, et BC compleatur: irrationale igitur est BC , et ipsum potens est irrationalis. Possit autem ipsum recta linea CD ; ergo CD irrationalis est, et nulli priorum eadem; non enim quadratum alicujus priorum, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit mediam. Rursum, compleatur ED , erit ED irrationale; et recta linea ipsum potens irrationalis. Possit ipsum recta linea DF ; ergo DF irrationalis est, et nulli priorum eadem; nullius enim priorum quadratum, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit ipsam CD .

Ergo a mediâ infinitæ irrationales fiunt, et nulla alicui priorum est eadem.

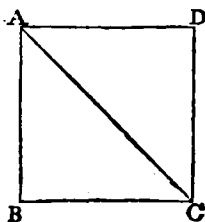
* PROP. CXVII. THEOR.

[CXVII.]

Quadrati cujusque diagonalis lateri ejusdem longitudine est incommensurabilis.

Quadrati $ABCD$, cujus latus AB , diagonalis fit AC . Dico AC ipsi AB longitudine incommensurabilem. Non enim.

Commensurabilis igitur est AC ipsi AB longitudine. AC igitur ad AB rationem habet, quam numerus ad numerum^u. Habeat, quam numerus M ad numerum N . Numerus autem M , seipsum multiplicans, faciat quadratum O . Numerus item N , seipsum multiplicans, faciat quadratum P . Jam cum recta AC ad rectam AB rationem habet, quam numerus M ad numerum N ; quadratum ex AC ad



u 5. hujus.

$$\frac{M}{O} \quad \frac{N}{P}$$

quadratum ex AB rationem habet, quam numerus quadratus O ad numerum quadratum P ². Sed propter⁹ hujus. triangulum isosceles ABC , ad B rectangulum, quadratum ex AC ad quadratum ex AB rationem habet, quam binarius ad unitatem⁷. Numerus igitur quadratus O ad numerum quadratum P rationem habet, quam binarius ad unitatem². Numeris autem O , P quadratis unus¹¹. quinti. intercedit proportione medius². Quare binario etiam¹¹. octav et

* 8. octavi. et unitati unus intercedet proportione medius^a; binario utique minor, major idem unitate. Quod est absurdum. Cum binarius et unitas ipsa tantum unitate differant. Non est igitur A C ipsi A B longitudine commensurabilis. Incommensurabilis igitur longitudine. Quadrati igitur cujusque &c. Q. E. D.

Aliter (e Clavio.) Quoniam quadratum ex diagonali
^a 47. primi. duplum est quadrati ex latere^b, habebit quadratum ex diagonali ad quadratum ex latere rationem binarii ad unitatem, vel quaternarii ad binarium, vel octonarii ad quaternarium, &c. Et quia sumptis in proportione dupla quotcunque numeris ab unitate, 1, 2. 4. 8. 16. 32, &c. solum tertius ab unitate quadratus est, et cæteri omnes unum intermittentes^c, (quia primus ad unitatem, nempe 2, quadratus non fit) erunt solum hi numeri, 4. 16. 64, &c. quadrati, reliqui vero, 2. 8. 32, non quadrati. Quare cum quaternarius quadratus sit et binarius non quadratus, non habebit quaternarius ad binarium proportionem, quam quadratus aliquis numerus ad quadratum^d. Ac propterea neque quadratum ex diagonali ad quadratum ex latere proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Incommensurabilis igitur est diagonalis longitudine ipsi lateri^e. Q. E. D.

* SCHOLION (e Clavio.)

Cæterum in exemplaribus Græcis reperitur hoc loco appendix quædam, cujus intelligentia ex sequentibus Stereometriæ libris pendet, ut merito omitti possit. Verum quia in eâ continetur doctrina non contemnenda, ad commensurabilitatem omnium magnitudinum, et incommensurabilitatem, pertinens; visum est, eam paucis explicare, assignando more nostro solito in margine loca Stereometriæ, quæ ad demonstrationem eorum, quæ hic dicuntur, necessaria sunt.

Est igitur appendix hæc. In-
 ventis lineis rectis longitudine
 incommensurabilibus, inveni-
 entur et aliæ quamplurimæ
 magnitudines, planæ scilicet,
 atque solidæ incommensurabiles inter se. Sint enim
 rectæ A, C, longitudine inter se incommensurabiles, in-
 ter

A —————
 B —————
 C —————

ter quas media proportionalis sit B . Quoniam igitur ut A ad c , ita est figura rectilinea quævis super A constituta ad figuram rectilineam sibi similem, similiterque positam super B ^f; et sunt A et c longitudine incommensurabiles; erunt rectilineæ illæ figuræ super A et B incommensurabiles^g. Rursus, quoniam circuli, quorum diametri A , B proportionem habent, quam quadrata ex A , B descripta: quadrata autem hæc, cum sint figuræ rectilineæ similes, similiterque positæ, proportionem habent, quam rectæ A , c ^f: habebunt quoque circuli diametrorum A , B eandem proportionem, quam rectæ A , c ^h. Sed rectæ A , c incommensurabiles sunt longitudine. Igitur et circuli diametrorum A , B incommensurabiles sunt^g. Jam vero si constituantur solida, nempe pyramides, vel prismata ejusdem altitudinis, quorum bases sint figuræ rectilineæ similes, similiterque descriptæ super A , B , habebunt pyramides atque prismata eandem proportionem, quam bases, hoc est, quam rectilineæ illæ figuræ (5, 6, vel 7. duod.) Quare cum rectilineæ figuræ illæ incommensurabiles sint, ut modo est demonstratum; incommensurabilia etiam erunt ipsa solida, nimirum pyramides, et prismata^g. Quod si coni, vel cylindri æque alti fabricentur, quorum bases circuli sint diametrorum A , B ; habebunt hujusmodi coni et cylindri eandem proportionalem cum basibus, hoc est, cum illis circulis^h. Cum ergo circuli ostensi sint incommensurabiles, erunt quoque incommensurabiles dicti coni, et cylindri^g. Inventæ sunt igitur non solum lineæ et superficies incommensurabiles, verum etiam et corpora, sive solida, incommensurabilia. Quod est propositum.

Eadem autem ratione, si rectæ A et B longitudine commensurabiles sint, ostendemus earum figuras rectilineas similes, similiterque descriptas, necnon et ipsarum circulos commensurabiles esse^g; atque adeo et earundem pyramides et prismata; ac denique conos, et cylindros, si modo eandem habeant altitudinem; ut perspicuum est (5, 6, 7, & 11. duod.)



EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER UNDECIMUS.

DEFINITIONES.

DEFINITIO I.

SOLIDUM est, quod longitudinem, latitudinem, et crassitudinem habet.

[I.]

II.

Solidi terminus est superficies.

[II.]

III.

Recta linea ad planum recta est, quando ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt, et in subiecto sunt plano, rectos angulos efficit.

[III.]

IV.

Planum ad planum rectum est, cum rectæ lineæ, quæ communi planorum sectioni ad rectos angulos in uno plano ducuntur, alteri plano ad rectos sunt angulos.

[IV.]

V.

Rectæ lineæ ad planum inclinatio est, cum a sublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis; atque a puncto, quod perpendicularis in ipso plano effecerit, ad propositæ illius lineæ extremum, quod in eodem est plano, altera recta linea fuerit ad-

[V.]

juncta;

juncta; est, inquam, angulus acutus insistente lineâ et adjunctâ comprehensus.

[VI.]

VI.

Plani ad planum inclinatio est angulus acutus, rectis lineis contentus, quæ, in utroque planorum ad idem communis sectionis punctum ductæ, rectos cum sectione angulos efficiunt.

[VII.]

VII.

Planum ad planum similiter inclinari dicitur, atque alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter se fuerint æquales.

* VIII.

Linea recta plano dicitur parallela, quæ infinite producta infinite producto nusquam occurrit.

[VIII.]

* IX.

Parallela sunt plana, quæ infinite producta nusquam conveniunt.

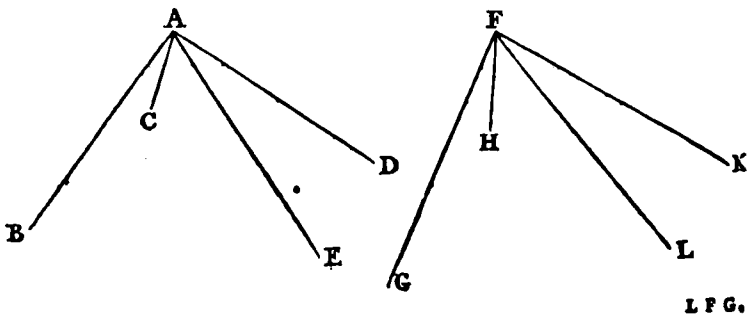
[XI.]

* X.

Solidus est angulus plurium quam duarum linearum, quæ se mutuo contingunt, nec in eâdem sunt superficie, mutua inclinatio. Vel solidus angulus est, qui pluribus quam duobus angulis planis, in eodem non consistentibus plano, sed ad unum punctum constitutis, continetur.

Cor. * Anguli solidi, qui planis angulis æqualibus continentur, quorum æqualium plana, singula singulis, similiter sunt inclinata, inter se æquales sunt.

Sint anguli solidi ad A et F. Quorum ille ad A angulis planis contineatur BAC, CAD, DAE, EAB. Alter autem ad F angulis planis GFH, HFK, KFL,



LFG; qui prioribus, angulum A constituentibus, BAC, CAD, DAE, EAB singuli singulis sint æquales. Plana etiam BAC, CAD, DAE, EAB similiter inter se, atque inter se altera GFH, HFK, KFL, LFG, sint inclinata. Dico angulum solidum ad A solido ad F æqualem.

Admoveatur enim punctum A puncto F. Rectaque AB rectæ FG applicetur. Planum item ABC plano GFH superimponatur. Ita, propter angulum BAC angulo GFH æqualem, recta AC rectæ FH se applicabit. Jam vero plano BAC alteri GFH applicato, cum planis illis, BAC, GFH, altera illa, DAC, KFH, similiter sunt inclinata; omnino planum CAD plano HFK se applicabit. Rectis AC, FH congruentibus, id enim ostensum; propter angulum CAD angulo HFK æqualem, recta AD rectæ FK se applicabit. Rursum plano CAD alteri HFK applicato, cum planis illis, CAD, HFK, altera, DAE, KFL, similiter sunt inclinata, planum DAE plano KFL se applicabit. Rectisque DA, FK congruentibus, id enim ostensum; propter angulum DAE angulo KFL æqualem, recta AE rectæ FL se applicabit. Rectæ igitur AB, AC, AD, AE rectis FG, FH, FK, FL, singulæ singulis, se applicuerint. Quapropter angulus solidus ad A solido ad F congruit, et cui congruit æqualis est. Q. E. D.

* DEFINITIO XI.

[IX.]

Similes sunt figuræ solidæ, quæ planis similibus continentur, multitudine æqualibus, et similiter inter se inclinatis: eâ nempe lege, ut similes sint, planorum in diversis figuris similitum, inclinationes.

Cor. * Similes figuræ solidæ, quarum similia latera plana sunt etiam æqualia, inter se æquales sunt.

Nam si planum unius plano simili et æquali alterius superimponatur, sic ut latera planorum homologa et æqualia congruant, reliqua plana unius similibus et æqualibus alterius, singula singulis, congruent, et anguli solidi unius solidis alterius angulis, singuli quoque singulis, congruent. Quod facile quis intelliget, qui demonstrationem Corollarii decimæ diligenter meditatus fuerit. Inde autem efficietur, figuras ipsas perfecte congruere.

XII.

[XII.]

XII.

Pyramis est figura solida planis comprehensa, quæ ab uno plano ad unum punctum constituuntur.

[XIII.]

XIII.

Prisma est figura solida, quæ planis continetur, quorum adversa duo sunt et æqualia, et similia, et parallela; alia vero parallelogramma.

[XIV.]

XIV.

Sphæra est, quando semicirculi manente diametro, circumductus semicirculus in seipsum rursus revolvitur unde moveri cœperat.

[XV.]

XV.

Axis autem sphæræ est quiescens illa recta linea, circum quam semicirculus convertitur.

[XVI.]

XVI.

Centrum sphæræ est idem, quod et semicirculi.

[XVII.]

XVII.

Diameter autem sphæræ est recta quædam linea per centrum ducta, et utrinque a sphæræ superficie terminata.

[XVIII.]

XVIII.

Conus est, quando rectanguli trianguli manente uno latere eorum quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in seipsum rursus revolvitur, unde moveri cœperat. Atque si quiescens recta linea æqualis sit reliquæ quæ circa rectum angulum continetur, orthogonius erit conus: si vero minor, amblygonius: si vero major, oxygonius.

[XIX.]

XIX.

Axis autem conici est quiescens illa linea, circa quam triangulum vertitur.

[XX.]

XX.

Basis vero conici est circulus, qui a circumductâ rectâ lineâ describitur.

[XXI.]

XXI.

Cylindrus est, quando rectanguli parallelogrammi manente uno latere eorum quæ circa rectum angulum, circumductum parallelogrammum in seipsum rursus revolvitur, unde cœperat moveri.

XXII.

XXII.

[XXII.]

Axis autem cylindri est quiescens illa recta linea, circum quam parallelogrammum convertitur.

XXIII.

[XXIII.]

Bases vero cylindri sunt circuli a duobus adversis lateribus, quæ circumaguntur, descripti.

XXIV.

[XXIV.]

Similes coni et cylindri sunt, quorum et axes, et basium diametri proportionales sunt.

XXV.

[XXV.]

Cubus est figura solida sub sex quadratis æqualibus contenta.

XXVI.

[XXVI.]

Tetraedrum est figura solida sub quatuor triangulis æqualibus et æquilateris contenta.

XXVII.

[XXVII.]

Octaedrum est figura solida sub octo triangulis æqualibus et æquilateris contenta.

XXVIII.

[XXVIII.]

Dodecaedrum est figura solida sub duodecim pentagonis æqualibus et æquilateris et æquiangulis contenta.

XXIX.

[XXIX.]

Icosaedrum est figura solida sub viginti triangulis æqualibus et æquilateris contenta.

XXX.

[XXX.]

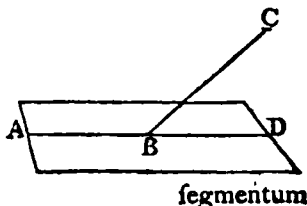
Parallelepipedum est figura solida sex figuris quadrilateris, quarum quæ ex adverso parallelæ sunt, contenta.

PROPOSITIO I. THEOREMA.

[I.]

Rectæ lineæ pars quædam non est in subiecto plano, quædam vero in sublimi.

Si enim fieri potest, rectæ lineæ AB pars quidem AB sit in subiecto plano, pars vero BC in sublimi. Erit recta linea quædam ipsi AB in directum continuata in subiecto plano. Sit DB . Duabus igitur datis rectis lineis ABC , ABD commune



segmentum est AB ; quod fieri non potest $\dagger$. Non igitur rectæ linæ pars quædam est in subiecto plano, quædam vero in sublimi. *Q. E. D.*

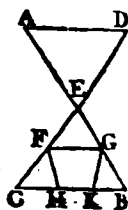
[II.]

PROP. II. THEOR.

Si duæ rectæ linæ se invicem secant, in uno sunt plano; et omne triangulum in uno plano consistit.

Duæ enim rectæ linæ AB , CD se invicem in puncto E secant. Dico ipsas AB , CD in uno esse plano, et omne triangulum in uno plano consistere. Sumantur enim in ipsis EB , EC quævis puncta B , C , et jungatur BC . Dico primum triangulum $EB C$ consistere in uno plano. Sumantur enim in ipsis EB , EC puncta quævis alia G , F ; et in rectâ CB puncta quævis H , K ; et FG , FH , GK jungantur. Si trianguli $EB C$ pars quædam FHC , vel $G B K$, in subiecto plano est, reliqua vero in alio plano; erit et linæ EB , vel EC , pars in subiecto plano, et pars in alio. Quod si trianguli $EC B$ pars $FCBG$, sit in subiecto plano, reliqua vero in alio; utrumque rectarum linearum EC , EB quædam pars erit in subiecto plano, quædam vero in alio. Quod absurdum esse ostendimus*. Triangulum igitur $EB C$ in uno est plano. In quo autem plano est $BC E$ triangulum, in hoc est utraque ipsarum EC , EB ; in quo autem utraque ipsarum EC , EB , in hoc et AB , CD . Ergo rectæ linæ AB , CD in uno sunt plano; et omne triangulum in uno plano consistit. *Q. E. D.*

* i. hujus.

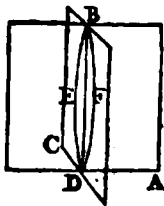


[III.]

PROP. III. THEOR.

Si duo plana se invicem secant, communis ipsorum sectio recta linea erit.

Duo plana AB , BC se invicem secant, communis autem ipsorum sectio sit DB linea. Dico lineam DB rectam esse. Si enim non ita sit, ducatur a puncto D ad B , in plano quidem AB recta linea DEB ; in plano autem BC , recta linea DFB . Erunt utique duarum rectarum linearum DEB , DFB iidem termini, et ipsæ spatium continebunt; quod est ab-



$\dagger$. Cum naturæ Recti (ῥῆσιδος) in lineis apertis contrarium esset.

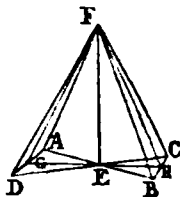
absurdum.

[IV.]

PROP. IV. THEOR.

Si recta linea duabus rectis lineis, se invicem secantibus, in communi sectione ad rectos angulos insilfat, etiam ducto per ipsas plano ad rectos angulos erit.

Recta linea quædam EF duabus rectis lineis AB, CD , se invicem secantibus in E puncto, in ipso E ad rectos angulos insilfat. Dico EF etiam plano per AB, CD ducto ad rectos angulos esse. Sumantur rectæ lineæ EA, EB, CE, DE inter se æquales: perque E ducatur recta linea GEH utcunque; et jungantur AD, CB ; deinde a quovis puncto F ducantur



- FA, FG, FD, FC, FH, FB . Et quoniam duæ rectæ lineæ AE, ED duabus rectis lineis BE, EC æquales
 * 15. primi. sunt, et angulos æquales AED, CEB continent^c; erit
^f 4. primi. AD basis basi CB æqualis, et triangulum AED trian-
 gulo CEB æquale^f. Ergo et angulus DAE æqualis est
 angulo $EB C$. Est autem et angulus AGE æqualis
 angulo BEH ^c. Duo igitur triangula sunt AGE, BEH ,
 duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum
 alteri, et unum latus AE uni lateri EB æquale, quod est
 ad æquales angulos. Quare et reliqua latera reliquis
 * 26. primi. lateribus æqualia habebunt^e. Ergo GE quidem est
 æqualis ipsi EH ; AG vero ipsi BH . Quod cum AE sit
 æqualis EB , communis autem et ad rectos angulos FE ;
 erit basis AF basi FB æqualis^f. Eadem quoque ratione,
 et CF æqualis erit FD . Præterea quoniam AD est æ-
 qualis CB , et AF ipsi FB , erunt duæ FA, AD duabus
 FB, BC æquales, altera alteri; et ostensa est basis DF
 æqualis basi FC . Angulus igitur FAD angulo FBC
 est æqualis^h. Rursus ostensa est AG æqualis BH ; sed
 et AF ipsi FB æqualis. Duæ igitur FA, AG duabus
 FB, BH æquales sunt, et angulus FAG æqualis est
 angulo FBH , ut demonstratum fuit; basis igitur GF
 basi FH est æqualis^f. Rursus quoniam GE ostensa est
 æqualis EH , communis autem EF ; erunt duæ GE, EF
 æquales duabus HE, EF ; et basis HF est æqualis basi
 FG . Angulus igitur $G E F$, angulo $H E F$ est æqualis^h;
 et idcirco rectus est uterque angulorum $G E F, H E F$.
 Ergo FE ad GH , utcunque per E ductam, rectos efficit
 angulos. Similiter ostendemus FE etiam ad omnes
 rectas

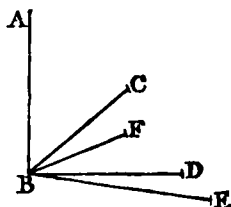
rectas lineas, quæ ipsam contingunt, et in subiecto sunt plano, rectos angulos efficere. Recta autem ad planum recta est, quando ad omnes rectas lineas, ipsam contingentes, et eodem existentes plano, rectos efficit angulos¹. Quare FE subiecto plano ad rectos angulos insistit. ^{Def. 3.} At subiectum planum est, quod per AB , CD rectas lineas ^{hujus.} ducitur. Ergo FE ad rectos angulos erit ducto per AB , CD plano. Si igitur recta linea duabus rectis lineis, se invicem secantibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat; etiam ducto per ipsas plano ad rectos angulos erit. *Q. E. D.*

PROP. V. THEOR.

[V.]

Si recta linea tribus rectis lineis, sese tangentibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat, tres illæ rectæ lineæ in uno plano erunt.

Recta linea quædam AB tribus rectis lineis BC , BD , BE , in contactu B , ad rectos angulos insistat. Dico BC , BD , BE in uno plano esse. Non enim. Sed si fieri potest, sint BD , BE quidem in subiecto plano; BC vero in sublimi: et planum per AB , BC producat. Communem utique sectionem in subiecto plano faciet rectam lineam^k; faciat BF . In uno igitur sunt plano, per AB , BC ducto, tres rectæ lineæ AB , BC , BF . Et quoniam AB utrique ipsarum BD , BE ad rectos angulos insistit, et ducto per ipsas DB , BE plano ad rectos angulos erit. Planum autem per DB , BE est subiectum planum. Ergo AB ad subiectum planum recta est¹. Quare et ad omnes rectas⁴ ^{hujus.} lineas ipsam contingentes, quæ in eodem plano sunt, rectos faciet angulos^m; sed ipsam tangit BF in sub-^m ^{Def. 3.} jecto existens plano. Ergo angulus ABF rectus est. ^{hujus.} Ponitur autem et ABC angulus rectus. Aequalis igitur est angulus ABF angulo ABC . Et in eodem sunt plano; quod fieri non potest. Recta igitur linea BC non est in sublimi. Quare tres rectæ lineæ BC , BD , BE in uno sunt plano. Si igitur recta linea tribus rectis lineis, sese tangentibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat, tres illæ rectæ lineæ in uno plano erunt. *Q. E. D.*

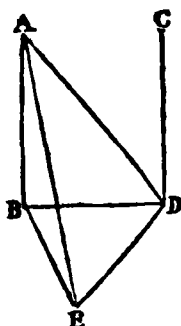


[VI.]

PROP. VI. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint, illæ inter sese parallelæ erunt.

Duæ enim rectæ lineæ AB , CD subjecto plano sint ad rectos angulos. Dico AB ipsi CD parallelam esse. Occurrant enim subjecto plano in punctis B , D ; jungaturque BD recta linea, cui ad rectos angulos in subjecto plano ducatur DE ; et posita DE ipsi AB æquali, jungantur BE , AE , AD . Quoniam igitur AB recta est ad subjectum planum, et ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt et in subjecto sunt plano, rectos angulos efficit^a. Contingit autem AB utraque ipsarum BD , BE , existens in subjecto plano. Ergo



^a Def. 3. hujus.

- uterque angulorum ABD , ABE rectus est. Eadem ratione rectus etiam est uterque ipsorum $CD B$, CDE . Et quoniam AB æqualis est ipsi DE , communis autem BD ; erunt duæ AB , BD duabus ED , DB æquales; et rectos angulos continent; basis igitur AD basi BE est æqualis^o. Rursus quoniam AB est æqualis DE , et AD ipsi BE ; duæ AB , BE duabus ED , DA æquales sunt, et basis ipsarum AE communis; ergo angulus ABE angulo EDA est æqualis^o. Sed ABE rectus est. Rectus igitur et EDA ; et idcirco ED ad DA est perpendicularis. Sed et perpendicularis est ad utramque ipsarum BD , DC . Quare ED tribus rectis lineis BD , DA , DC in contactu ad rectos insistit angulos. Tres igitur rectæ lineæ BD , DA , CD in uno sunt plano^o. In quo autem sunt BD , DA , in eo est AB , omne enim triangulum in uno est plano^o. Ergo AB , BD , DC in uno plano sint necesse est: atque est uterque angulorum ABD , DBC rectus. Parallela igitur est AB ipsi CD ^o. Quare si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint, illæ inter se parallelæ erunt. *Q. E. D.*

^o 4. primi.

^o 8. primi.

^o 5. hujus.

^o 2. hujus.

^o 28. primi.

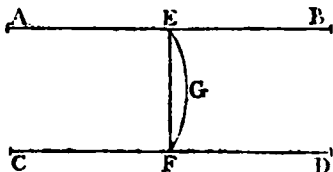
PROP.

PROP. VII. THEOR.

[VII.]

Si duæ rectæ lineæ parallelæ sint, sumantur autem in utràque ipsarum quælibet puncta; quæ dicta puncta conjungit recta, in eodem erit plano, in quo et parallelæ.

Sint duæ rectæ lineæ parallelæ AB, CD ; et in utràque ipsarum sumantur quælibet puncta E, F . Dico rectam lineam, quæ puncta E, F conjungit, in eodem plano esse,



in quo sunt parallelæ. Non enim; sed si fieri potest, sit in sublimi, ut EGF ; et per EGF planum ducatur, quod in subiecto plano sectionem faciet rectam lineam¹; faciat ut EF . Ergo duæ rectæ lineæ $EGF, E F$ spatium continebunt; quod fieri non potest². Non igitur quæ a puncto E ad F ducitur recta linea, in sublimi est plano; quare erit in eo, quod per AB, CD parallelas transit. Si igitur duæ rectæ lineæ parallelæ sint, &c. Q. E. D.

PROP. VIII. THEOR.

[VIII.]

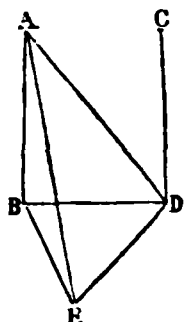
Si duæ rectæ lineæ parallelæ sint, altera autem ipsarum plano alicui sit ad rectos angulos; et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

Sint duæ rectæ lineæ parallelæ AB, CD , et altera ipsarum AB subiecto plano sit ad rectos angulos. Dico et reliquam CD eidem plano ad rectos angulos esse. Occurrant enim AB, CD subiecto plano in punctis B, D ; et BD jungatur. Ergo AB, CD, BD in uno sunt plano¹. Ducatur ipsi BD ad rectos angulos in subiecto plano DE ; et ponatur DE ipsi AB æqualis: junganturque BE, AE, AD . Et quoniam AB perpendicularis est ad subiectum planum; et ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt, suntque in subiecto plano, perpendicularis erit². Rectus igitur est uterque angulorum ABD, ABE . Quod cum in parallelas rectas lineas AB, CD recta incidit BD , erunt anguli ABD, CDB duobus rectis æquales³. Rectus autem est ABD . Ergo et CDB est rectus; ac propterea CD perpendicularis est ad BD . Et quoniam AB est æqualis DE , communis autem BD ; Vide fig. Prop. 6.

E c 3

duæ

- duæ AB , BD duabus ED , DB æquales sunt; et angulus ABD est æqualis angulo EDB , rectus enim uterque est; basis igitur AD basi BE est æqualis^a. Rursus quoniam AB æqualis est DE , et BE ipsi AD ; erunt duæ AB , BE duabus ED , DA æquales, altera alteri; et basis earum communis AE . Quare angulus ABE est æqualis angulo EDA ^b. Rectus autem est ABE . Ergo et EDA est rectus, et ED ad DA perpendicularis. Sed et perpendicularis est ad BD . Ergo ED etiam ad planum per BD , DA perpendicularis erit^c; et ad omnes rectas lineas, quæ in eodem existentes plano ipsam contingunt, rectos faciet angulos^d. At in plano per BD , DA est DC , quoniam tam BD , quam BA est in plano parallelarum BA , DC . Quare ED ipsi DC est ad rectos angulos: ideoque CD ad rectos angulos est ipsi DE ; sed et etiam ipsi DB . Ergo CD duabus rectis lineis DE , DB se mutuo secantibus in communi sectione D ad rectos angulos insistit; ac propterea plano per DE , DB est ad rectos angulos^e. Planum autem per DE , DB est subjectum planum. Ergo CD subjecto plano ad rectos angulos erit. *Q. E. D.*

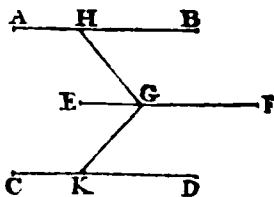


[IX.]

PROP. IX. THEOR.

Quæ eadem rectæ lineæ sunt parallelæ, non existentes in eodem in quo ipsa plano; etiam inter se parallelæ erunt.

- Sit utraque ipsarum AB , CD parallela ipsi EF , non existentes in eodem in quo ipsa plano. Dico AB ipsi CD parallelam esse. Sumatur in EF quodvis punctum G , a quo ipsi EF , in plano quidem per EF , AB transeunte, ad rectos angulos ducatur GH ; in plano autem transeunte per EF , CD , rursus ducatur ipsi EF ad rectos angulos GK . Et quoniam EF ad utramque ipsarum GH , GK est perpendicularis, erit EF etiam ad rectos angulos plano per GH , GK transeunti^a. Atque est EF ipsi AB parallela. Ergo et AB plano per GH , GK ad rectos angulos est^b. Eadem ratione et CD plano per GH , GK est ad rectos



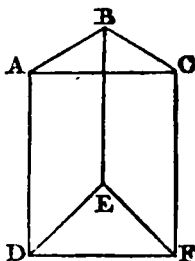
rectos angulos. Utraque igitur ipsarum AB, CD plano per H, G, K ad rectos angulos erit. Si autem duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint; parallelæ erunt inter se^t. Ergo AB ipsi CD est parallelæ. *Q. E. D.* ^{6. hujus.}

PROP. X. THEOR.

[X.]

Si duæ rectæ lineæ sese contingentes duabus rectis lineis sese contingentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; æquales angulos continebunt.

Duæ rectæ lineæ sese contingentes AB, BC , duabus rectis lineis DE, EF sese contingentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano. Dico angulum ABC , angulo DEF æqualem esse. Assumantur enim BA, BC, ED, EF inter se æquales; et jungantur AD, CF, BE , AC, DF . Quoniam igitur BA ipsi ED æqualis est, et parallelæ; erit et AD æqualis, et parallelæ ipsi BE ^h. Eadem ratione et CF ipsi BE æqualis, et parallelæ erit. Utraque igitur ipsarum AD, CF ipsi BE æqualis est, et parallelæ. Quæ autem eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, non existentes in eodem plano, et inter se parallelæ eruntⁱ. Ergo AD ^{9. hujus.} parallelæ est ipsi CF , et æqualis. Atque ipsas conjungunt AC, DF ; et AC igitur ipsi DF æqualis est, et parallelæ^h. Et quoniam duæ rectæ lineæ AB, BC duabus DE, EF æquales sunt, et basis AC est æqualis basi DF ; erit angulus ABC angulo DEF æqualis^k. Si ^{8. primi.} igitur duæ rectæ lineæ sese contingentes duabus rectis lineis sese contingentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; æquales angulos continebunt. *Q. E. D.*

^h 33. primi.

PROP. XI. PROBL.

[XI.]

A dato puncto in sublimi ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

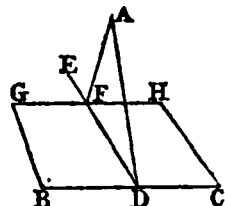
Sit datum quidem punctum in sublimi A , datum autem subiectum planum BH . Oportet a puncto A ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere. In subiecto plano ducatur quædam recta linea utcunque BC ; et a puncto A ad BC perpendicularis agatur AD ⁱ. Siquidem igitur AD perpendicularis sit ^{33. primi} etiam ad subiectum planum, factum jam erit, quod
E e 4 propone-

proponetur. Sin minus; ducatur a puncto D ipsi BC in subiecto plano ad rectos angulos

^m 11. primi. DE ^m; et a puncto A ad DE per-

ⁿ 12. primi. pendicularis ducatur AF ⁿ. Dico

AF subiecto plano BH perpendiculari esse. Ducatur enim per F ipsi BC parallela GH . Quoniam BC utrique ipsarum DA , DE est ad rectos angulos; erit et BC ad rectos angulos plano per ED , DA transeunti^o. Quin ipsi BC parallela est GH . Si autem sint duæ rectæ lineæ parallelæ, quarum una plano alicui sit ad rectos angulos; et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit^p. Quare et GH plano per ED , DA transeunti ad rectos angulos est: ac propterea ad omnes rectas lineas, quæ in eodem plano existentes ipsam contingunt, est perpendicularis^q. Contingit autem ipsam AF existens in plano per ED , DA . Ergo GH perpendicularis est ad AF . Et ob id AF est perpendicularis ad GH . Est autem AF ad DE perpendicularis. Ergo AF perpendicularis est ad utramque ipsarum HG , DE . Si autem recta linea duabus rectis lineis sese contingentibus in communi sectione ad rectos angulos insistat; etiam plano per ipsas ducto ad rectos angulos erit^o. Quare AF plano per ED , GH ducto est ad rectos angulos. Planum autem per ED , GH est subiectum planum BH . Ergo AF ad subiectum planum est perpendicularis. A dato igitur puncto sublimi A ad subiectum planum perpendicularis recta linea ducta est AF . $Q. E. F.$



^o 4. hujus.

^p 8. hujus.

^q Def. 3. hujus.

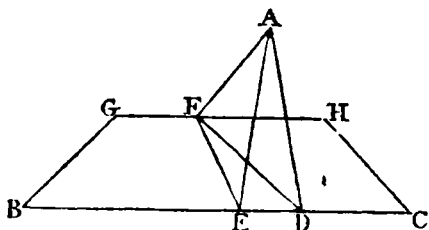
Cor. 1. * Si a puncto in sublimi A in planum subiectum $BCHG$ recta AF ad perpendicularum deducta sit; et a puncto F , ubi recta deducta incidit plano, ad rectam quamlibet in plano BC ad perpendicularum ducatur FD , rectæ illi BC in D occurrens; juncta AD eidem rectæ BC ad perpendicularum erit.

Ducatur enim in plano $BCHG$ recta GH ipsi BC parallela. Recta igitur FD , quæ ad perpendicularum est rectæ BC , rectæ etiam GH ad perpendicularum erit^r. Eadem autem GF ad perpendicularum rectæ AF ^q. Recta igitur GF , quæ duabus rectis DF , FA in puncto F occurrentibus ad perpendicularum est, plano trianguli AFD ad

ad perpendicularum erit¹. Recta autem BD rectæ GF 4. hujus. parallela. Quare BD eidem plano AFD ad perpendi- 5. hujus. culum erit¹. Angulus igitur BDA rectus². Q. E. D. 1. hujus. Def. 3.

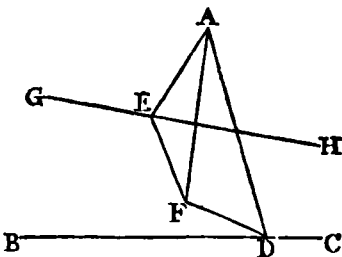
Cor. 2. * Si a puncto in sublimi A in planum sub-
jectum $BCGH$ recta AF ad perpendicularum deducatur,
et si in rectam quamlibet in eodem plano BC alia ad
perpendicularum deducatur AD ; juncta DF eidem BC
ad perpendicularum erit.

Non enim. A puncto igitur F in rectam BC ad per-
pendicularum deducatur FE . Juncta AE rectæ BC ad



perpendicularum erit³. Trianguli igitur AED anguli 3. Cor. 1. duo ADE , AED duobus rectis sunt æquales. Quod est absurdum.

Cor. 3. * Si a puncto in sublimi A in rectas duas BC ,
 GH in subjecto plano,
quæ non sunt inter se
parallelæ, rectæ AD ,
 AE ad perpendicularum
deducantur; et a punctis
 D , E eisdem rectis BC ,
 GH ad perpendicularum
educantur in subjecto
plano DF , EF , quæ sibi
mutuo in F occurrant; B
recta AF , quæ jungit
punctum mutui occurſus F , et punctum in sublimi A , ad
perpendicularum erit subjecto plano. Nam recta, a puncto
 A in subjectum planum $BCGH$ ad perpendicularum de-
ducta, occurreret plano in puncto aliquo rectæ DF . Et Per con-
ob eandem rationem in puncto aliquo rectæ EF . In 1. Per con-
puncto igitur F , duarum DF , EF communi. Q. E. D. 1. Per con-
1. Per con-
1. Per con-



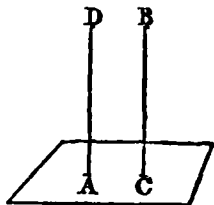
PROP.

[XII.]

PROP. XII. PROBL.

Dato plano, a puncto quod in ipso datum est, ad rectos angulos rectam lineam constituere.

Sit datum quidem planum subjectum; punctum autem, quod in ipso sit, A. Oportet a puncto A subjecto plano ad rectos angulos rectam lineam constituere. Intelligatur aliquod punctum sublinee B, a quo ad subjectum planum
 * 11. hujus. agatur perpendicularis BC^a; et per
 † 31. primi. A ipsi BC parallela ducatur AD[†].
 Quoniam igitur duæ rectæ lineæ parallelæ sunt A D, C B, una autem ipsarum B C subjecto plano est ad rectos angulos; et reliqua A D subjecto plano ad rectos angulos erit^a. Dato igitur plano a puncto quod in ipso est datum, ad rectos angulos recta linea constituta est. Q. E. F.

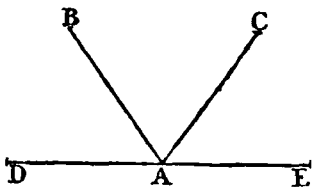


[XIII.]

PROP. XIII. THEOR.

Dato plano, a puncto quod in ipso est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non constituentur ex eadem parte.

Si enim fieri potest, dato plano, a puncto quod in ipso est A, duæ rectæ lineæ A B, A C ad rectos angulos constituentur ex eadem parte; et ducatur planum per B A, A C, quod faciet sectionem per A in subjecto plano rectam lineam^a. Faciat D A E. Ergo rectæ lineæ A B, A C, D A E in uno sunt plano. Et quoniam C A subjecto plano ad rectos angulos est; et ad omnes rectas lineas, quæ in subjecto plano existentes ipsam contingunt, rectos faciet angulos^b. Contingit autem ipsam D A E, quæ est in subjecto plano. Angulus igitur C A E rectus est. Eadem ratione et rectus est B A E. Ergo angulus C A E ipsi B A E est æqualis. Et in uno sunt plano; quod fieri non potest. Non igitur dato plano, a puncto quod in ipso est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos constituentur ex eadem parte. Q. E. D.



PROP.

PROP. XIV. THEOR.

[XIV.]

Ad quæ plana eadem recta linea est perpendicularis, ea parallela sunt.

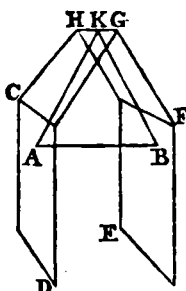
Recta quædam linea AB ad utrumque ipsorum planorum CD , EF sit perpendicularis.

Dico ea plana parallela esse. Si enim non ita sit, producta convenient inter se: convenient, et communem sectionem faciant rectam lineam GH ; et in ipsa GH sumpto quovis puncto K ,

jungatur AK , BK . Quoniam igitur AB perpendicularis est ad EF planum; erit et perpendicularis ad ipsam BK rectam lineam in plano EF producto existentem. Quare angulus ABK rectus est. Eadem ratione et BAK

est rectus: ideoque trianguli ABK duo anguli ABK , BAK duobus rectis sunt æquales; quod fieri non potest^{c. 17. primi.}

Non igitur plana CD , EF producta inter se convenient. Quare CD , EF parallela sint necesse est. Ad quæ igitur plana eadem recta linea est perpendicularis, ea parallela sunt. *Q. E. D.*



*Cor. ** Et e converso, si sint duo plana parallela, quæ alteri ipsorum ad perpendicularum est linea recta, ea alteri etiam ad perpendicularum erit. Plano enim DC ad perpendicularum sit recta BA . Dico plano alteri EF , priori parallelo, eandem AB ad perpendicularum esse. Non enim. Duci igitur poterit in plano EF recta, quæ angulum cum AB obliquum faciat^d. Ducatur BK . Duarum autem AB , BK planum secabit planum BC in hujus lineâ rectâ^e. Secet in AK . Angulus igitur BAK rectus^{e. 3. hujus.} est^d. Angulus autem ABK obliquus^f. Duo igitur^{Per con-} BAK , ABK duobus rectis non sunt æquales. Rectæ^{struct.} igitur AK , BK , cum in eodem sint plano, in puncto aliquo convenient^g. Concurfus sit punctum K . Jam^{Ar. 12.} cum omne punctum in rectâ AK sit in plano DC , et^{primi.} omne punctum in rectâ BK in plano EF ; punctum K , quod in utraqûe est rectâ, planis duobus DC , EF commune erit. Plana igitur DC , EF non sunt inter se parallela. Quod hypothese contrarium est. Si sint igitur duo plana parallela &c. *Q. E. D.*

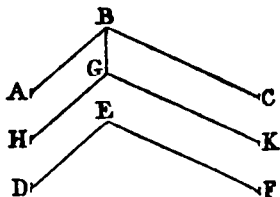
PROP.

[XV.]

PROP. XV. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ sese tangentes duabus rectis lineis sese tangentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; et quæ per ipsas transeunt plana parallelæ erunt.

Duæ rectæ lineæ sese tangentes AB , BC duabus rectis lineis sese tangentibus DE , EF parallelæ sint, et non in eodem plano. Dico plana, quæ per AB , BC , DE , EF transeunt, si producantur, inter se non convenire. Ducatur a puncto B ad planum, quod per DE , EF transit, perpendicularis BG , quæ plano in puncto G occurrat; et per G ducatur ipsi quidem BD parallela GH ; ipsi vero EF parallela GK . Itaque quoniam BG perpendicularis est ad planum per DE , EF ; et ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt, et in eodem sunt plano, rectos faciet angulos^d. Contingit autem ipsam utraque earum GH , GK , quæ sunt in eodem plano. Rectus igitur est uterque angulorum BGH , BGK . Et quoniam BA parallela est ipsi GH , (nimirum cum utraque earum ipsi DE parallela sit)



^d Def. 3. hujus.

^e 29. primi. anguli GBA , BGH duobus rectis sunt æquales^e. Rectus autem est BGH . Ergo et GBA rectus erit, ideoque GB ad BA est perpendicularis. Eadem ratione et GB est perpendicularis ad BC . Cum igitur recta linea BG duabus rectis lineis BA , BC se invicem secantibus ad rectos angulos infistat; erit BG etiam ad planum per BA , BC ductum perpendicularis^f. Atqui est ad planum per DE , EF perpendicularis. Ergo BG perpendicularis est ad utrumque planorum, quæ per AB , BC , DE , EF transeunt. Ad quæ vero plana eadem

^f 4. hujus. recta linea est perpendicularis, ea parallela sunt^g. Parallelum igitur est planum per AB , BC plano per DE , EF . Quare si duæ rectæ lineæ sese tangentes duabus rectis lineis sese tangentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; et quæ per ipsas transeunt plana, parallelæ erunt. *Q. E. D.*

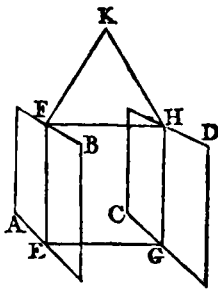
PROP.

PROP. XVI. THEOR.

[XVI.]

Si duo plana parallela ab aliquo plano secantur, communes ipsorum sectiones parallelæ erunt.

Duo plana parallela AB, CD a plano aliquo EFG secantur; communes autem ipsorum sectiones sint EF, GH . Dico EF ipsi GH parallelam esse. Si enim non sint parallelæ, EF, GH productæ inter se convenient, vel ad partes FH , vel ad partes EG . Producantur prius ad partes FH , et convenient in K . Quoniam igitur EFK est in plano AB ; et omnia quæ in EFK sumuntur puncta, in eodem plano erunt: unum autem punctorum quæ sunt in EFK , est ipsum K punctum. Ergo K est in plano AB . Eadem ratione et K est in CD plano. Ergo plana AB, CD producta inter se convenient. Non convenient autem, cum parallelæ ponantur. Non igitur EF, GH rectæ lineæ productæ convenient ad partes F, H . Similiter demonstrabimus neque ad partes E, G convenire, si producantur. Quæ autem neutrâ ex parte convenient, parallelæ sunt. Ergo EF ipsi GH est parallela. Si igitur duo plana parallela ab aliquo plano secantur, communes ipsorum sectiones parallelæ erunt. *Q. E. D.*

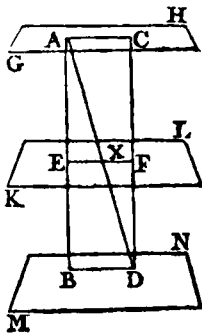


PROP. XVII. THEOR.

[XVII.]

Si duæ rectæ lineæ a parallelis secantur planis, in easdem proportionibus secabuntur.

Duæ rectæ lineæ AB, CD a parallelis planis GH, KL, MN secantur in punctis A, E, B, C, F, D . Dico ut AE recta linea ad ipsam EB , ita esse CF ad FD . Jungantur enim AC, BD, AD ; et occurrat AD plano KL in puncto X ; et EX, XF jungantur. Quoniam igitur duo plana parallela KL, MN a plano $EBDX$ secantur, communes ipsorum sectiones EX, BD parallelæ sunt^a. Eadem ratione, quoniam duo plana parallela GH, KL a plano $AXFC$ secantur, communes ipsorum sectiones AC, FX sunt parallelæ.

^a 16. hujus.

Et

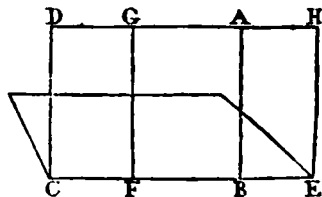
Et quoniam uni laterum trianguli ABD , videlicet ipsi BD , parallela ducta est EX , ut AE ad EB , ita erit AX ad XD^1 . Rursum, quoniam uni laterum trianguli ADC , nempe ipsi AC , parallela ducta est XF , erit ut AX ad XD , ita CF ad FD^1 . Ostensum autem est ut AX ad XD , ita esse AE ad EB . Ut igitur AE ad EB , ita est CF ad FD^2 . Quare si duæ rectæ lineæ a parallelis secantur planis, in eadem proportionem secabuntur. *Q. E. D.*

[XVIII.]

PROP. XVIII. THEOR.

Si recta linea plano alicui sit ad rectos angulos; et omnia quæ per ipsam transeunt plana, eidem plano ad rectos angulos erunt.

Recta linea quædam AB subjecto plano sit ad rectos angulos. Dico et omnia plana, quæ per ipsam AB transeunt, subjecto plano ad rectos angulos esse. Producatur enim per AB planum DE , sitque plani DE , et subjecti plani communis sectio CE ; et sumatur in CE quodvis punctum F ; a quo ipsi CE ad rectos angulos, in DE plano, ducatur FG . Quoniam igitur AB ad subjectum planum est perpendicularis; et ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt et in eodem sunt plano, perpendicularis erit¹. Quare etiam ad CE est perpendicularis. Angulus igitur ABF rectus est: sed et GFB est rectus. Ergo AB parallela est ipsi FG . Est autem AB subjecto plano ad rectos angulos.



¹ Def. 3. hujus.

² 8. hujus.

³ Def. 4. hujus.

Et FG igitur eidem plano ad rectos angulos erit². At planum ad planum rectum est, quando communi planorum sectioni ad rectos angulos ductæ rectæ lineæ in uno planorum, reliquo plano ad rectos angulos sint³: at communi planorum sectioni CE , in uno plano DE , ad rectos angulos ducta FG , ostensa est subjecto plano ad rectos esse angulos. Ergo planum DEF rectum est ad subjectum planum. Similiter demonstrabuntur et omnia quæ per AB transeunt plana subjecto plano recta esse. Si igitur recta linea plano alicui sit ad rectos angulos; et omnia quæ per ipsam transeunt plana, eidem plano ad rectos angulos erunt. *Q. E. D.*

PROP.

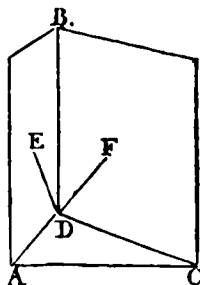
PROP. XIX. THEOR.

[XIX.]

Si duo plana, se invicem secantia, plano alicui sint ad rectos angulos, et communis ipsorum sectio eidem plano ad rectos angulos erit.

Duo plana se invicem secantia AB , BC subjecto plano sint ad rectos angulos: communis autem ipsorum sectio sit BD . Dico BD subjecto plano ad rectos angulos esse. Non enim. Plana AB , BC secant sub-

jectum planum, secundum rectas AD , CD . Jam neutri illarum ad rectos erit illa BD . Nam si alterutri illarum ad rectos esset, esset etiam ad rectos subjecto plano ADC° ; cujus contrarium posuimus. A puncto igitur D ducatur, in plano quidem AB , ipsi AD rectæ lineæ ad rectos angulos DE : in plano autem BC ducatur ipsi CD ad rectos angulos DF . Et quoniam planum AB ad subjectum planum rectum est, et



$^\circ$ Def. 4.
hujus.

communi ipsorum sectioni AD ad rectos angulos in plano AB ducta est DE ; erit DE ad subjectum planum perpendicularis $^\circ$. Similiter ostendemus et DF perpendicularem esse ad subjectum planum. Quare ab eodem puncto D subjecto plano duæ rectæ lineæ ad rectos angulos constitutæ sunt ex eadem parte; quod fieri non potest $^\circ$. Recta igitur BD subjecto plano non est non $^\circ$ 13. hujus. ad rectos. Quare DB subjecto plano est perpendicularis. Ergo si duo plana, se invicem secantia, plano alicui sint ad rectos angulos, et communis ipsorum sectio eidem plano ad rectos angulos erit. Q. E. D.

PROP. XX. THEOR.

[XX.]

Si solidus angulus tribus angulis planis contineatur, duo quilibet reliquo majores sunt, quomodocunque sumpti.

Solidus angulus ad A tribus angulis planis BAC , CAD , DAB contineatur. Dico angulorum BAC , CAD , DAB duos quoslibet reliquo majores esse, quomodocunque sumptos. Si enim BAC , CAD , DAB anguli inter se æquales sint, perspicuum est duos quoslibet reliquo majores esse, quomodocunque sumptos. Sin minus, trium maximus sit BAC . Manifestum est maximum

BAC ,

BAC cum reliquorum alterutro, tertio majorem esse. Sed dico duos BAD , CAD simul sumptos, maximo BAC majores esse. Ad rectam enim lineam AB , et ad punctum in ipsa A , constituatur angulo DAB , in plano per BA , AC trans-

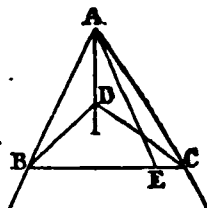
* 23. primi. eunte, æqualis angulus BAE .*

In recta AD sumatur utcumque punctum D , ponaturque ipsi AD æqualis AE ; et per E ducta BEC fecet rectas lineas AB , AC in punctis B , C ; et DB , DC jungantur. Itaque quoniam DA est æqualis AE , communis autem AB ; duæ DA , AB æquales sunt duabus AE , AB ; et angulus DAB æqualis est angulo BAE .

* 4. primi. Basis igitur DB basi BE est æqualis.*

* 20. primi. DB , DC ipsa BC majores sunt*, quarum DB æqualis ostensa est ipsi BE ; erit reliqua DC quam reliqua EC major. Quod cum DA sit æqualis AE , communis autem AC , et basis DC major basi EC ; erit angulus DAC

* 25. primi. angulo EAC major*. Sed ex constructione est DAB angulus æqualis ipsi BAE . Quare DAB , DAC anguli angulo BAC majores sunt. Si igitur solidus angulus tribus angulis planis contineatur, duo quilibet reliqui majores sunt, quomodocunque sumpti. *Q. E. D.*



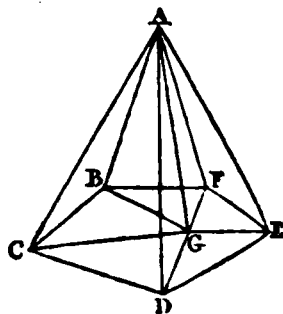
[XXI.]

PROP. XXI. THEOR.

Omnis solidus angulus minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur.

Sit angulus solidus ad A planis BAC , CAD , DAE , EAF , FAB comprehensus.

Dicoplanos illos, simul sumptos, quatuor rectis esse minores. Plana angulorum omnium, qui solidum ad A comprehendunt, secantur plano, cujus communes cum illis intersectiones sint rectæ BC , CD , DE , EF , FB , quæ figuram aliquam rectilineam (trigonam, tetragonam, vel etiam polygoniam, prout numerus angulorum fuerit qui solidum componunt) in plano illo secante formabunt.



A puncto

A puncto A in planum illud ad perpendicularum deducatur AG, quæ plano in G occurrat¹. Jungantur GB, GC, GD, ^{11. hujus.} GE, GF. Jam quot sunt triangula ABC, ACD, ADE, AEF, AFB vertice communi A, tot erunt in plano GBC, GCD, GDE, GEF, GFB vertice communi G. Quapropter anguli omnes omnium triangulorum, vertice communi A, simul sumpti, angulis omnibus omnium triangulorum in plano, vertice communi G, simul sumptis, æquales erunt. Sed anguli omnes omnium triangulorum in plano, vertice communi G, anguli sunt figuræ rectilinearis BCDEF cum angulis omnibus circa punctum G. Anguli igitur omnes omnium triangulorum vertice communi A, angulis omnibus figuræ BCDEF cum angulis circa punctum G æquales sunt. Jam vero cum solidus angulus ad B tribus planis angulis contineatur, ABF, ABC, CBF, duo quilibet eorum reliquo majores erunt¹. Duo igitur ABC, ABF reliquo CBF majores. ^{20. hujus.} Eodem modo ostendemus (propter angulum solidum ad C tribus ACB, ACD, BCD comprehensum) duos ACB, ACD simul reliquo BCD majores. Et sic per angulos reliquos omnes ad puncta D, E, F pergendo, efficiemus tandem angulos omnes ad bases triangulorum omnium ABC, ACD, ADE, AEF, AFB, quorum vertex communis A, angulis omnibus figuræ BCDEF majores esse. Jam vero cum anguli omnes triangulorum omnium, vertice communi A, angulis omnibus figuræ planæ BCDEF cum omnibus circa punctum G æquales sint, (id enim ostensum) omnes autem ad bases triangulorum omnibus figuræ planæ majores; omnino omnes ad verticem triangulorum communem A, qui sunt omnes, qui solidum ad A comprehendunt, omnibus circa punctum G minores erunt. Omnes autem circa G quatuor rectis sunt æquales². Omnes igitur, qui solidum ad A com- ^{Cor. 2.}prehendunt, simul sumpti, quatuor rectis sunt minores. ^{15. primæ} Q. E. D.

* SCHOLION.

Theonis demonstrationem repudiavimus, utpote propositionis generalis minime generalem. Demonstrationi huic nostræ haud absimilem, collatione factâ angulorum planorum solidum continentium cum angulis figuræ in plano polygoniæ, sed alio modo concinnatam, et ante nos Simplicius protulit; qui tamen casum anguli solidi, tribus planis comprehensi, ab aliis inutiliter separavit.

F f

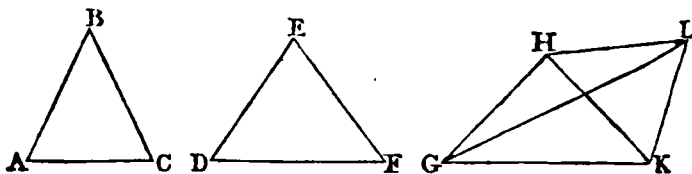
PROP

[XXII.]

PROP. XXII. THEOR.

Si sint tres anguli plani, quorum duo reliquo sint majores, quomodocunque sumpti, contineant autem ipsos rectæ lineæ æquales; fieri potest, ut ex iis, quæ rectas æquales conjungunt, triangulum constituatur.

Sint tres anguli plani, ABC , DEF , GHK , quorum duo reliquo sint majores, quomodocunque sumpti. Et æquales sint lineæ rectæ AB , BC , DE , EF , GH , HK .



Jungantur autem AC , DF , GK . Dico, ex tribus lineis rectis, quæ sint tribus illis AC , DF , GK singulæ singulis æquales, triangulum posse constitui. Et primum, si æquales inter se sint anguli tres, ABC , DEF , GHK , manifestum est, cum in hoc casu æquales sint rectæ AC , DF , GK , ex tribus, quæ illis æquales sint, triangulum posse constitui. Sed anguli illi ad B , E , H non sint inter se æquales. Et ad rectam HK , ad punctum H , constituatur angulus KHL , angulo ABC æqualis. Capiatur HL , uni ipsarum AB , BC , DE , EF , GH , HK æqualis, et jungantur GL , KL . Jam in triangulis ABC , KHL , cum sint duæ AB , BC duabus KH , HL æquales, et angulus ABC angulo KHL æqualis; erit basis AC , æqualis basi KL ^{*}. Et quoniam anguli ABC , GHK , simul sumpti, angulo DEF sunt majores; erit angulus GHL (qui duobus illis ABC , GHK , simul sumptis, est æqualis) angulo DEF major. Rursum quoniam duæ GH , HL duabus DE , EF , singulæ singulis, sunt æquales, et angulus GHL major angulo DEF ; erit basis GL basi DF major[†]. Sed duæ GK , KL simul ipsâ GL sunt majores[‡]. Multo igitur majores quam DF . Sed AC æqualis est ipsi KL . Duæ igitur GK , AC simul ipsâ DF sunt majores. Similiter demonstrabimus, et AC , DF simul ipsâ GK majores. Et DF , GK simul ipsâ AC majores. Fieri igitur potest, ut ex tribus lineis rectis, quæ tribus illis AC , DF , GK , singulæ singulis, sint æquales, triangulum constituatur. Q. E. D.

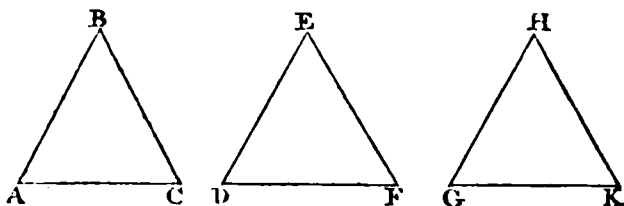
PROP.

PROP. XXIII. PROBL.

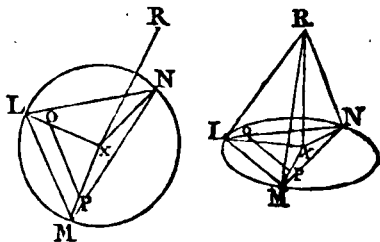
[XXIII.]

Ex tribus angulis planis, quorum duo reliquo sint majores, quomodocunque sumpti, solidum angulum constituere. Oportet autem tres angulos quatuor rectis esse minores.

Sint dati tres anguli plani ABC , DEF , GHK , quorum duo reliquo sint majores, quomodocunque sumpti, sintque tres anguli quatuor rectis minores. Oportet ex



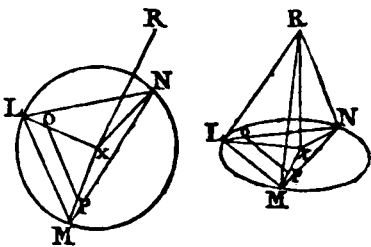
angulis, qui ipsis ABC , DEF , GHK æquales sint, solidum angulum constituere. Abscindantur æquales AB , BC , DR , EF , GH , HK ; et AC , DF , GK jungantur. Fieri igitur potest ut ex rectis lineis, quæ ipsis AC , DF , GK æquales sint, constituatur triangulum^a. Itaque^a 22. hujus. constituatur LMN ; ita ut LM quidem sit æqualis ipsi AC , MN vero ipsi DF ; et præterea LN ipsi GK ^b; et circa^b 22. primi. LMN triangulum circulus LMN describatur^c: sumatur^c 5. quarti. que ipsius centrum x , quod vel erit intra triangulum LMN , vel in laterum ejus uno, vel extra. Sit primo intra; et Lx , Mx , Nx jungantur. Dico AB majorem esse ipsa Lx . Si enim non ita sit, vel AB erit æqualis ipsi Lx , vel eâ minor. Sit primo æqualis. Quoniam igitur AB est æqualis Lx , atque est AB ipsi BC æqualis; erit Lx æqualis BC . Est autem Lx æqualis xm . Duæ igitur AB , BC



duabus Lx , xm æquales sunt, altera alteri; et AC basis basi LM æqualis ponitur. Quare angulus ABC angulo Lxm est æqualis^d. Eadem ratione et angulus quidem^d 8. primi. DEF est æqualis angulo mxn , angulus vero GHK an-

gulo NXL . Tres igitur anguli ABC , DEF , GHK tribus LXM , MXN , NXL æquales sunt. Sed tres LXM , MXN , NXL quatuor rectis sunt æquales^c. Ergo et tres ABC , DEF , GHK æquales erunt quatuor rectis. Atqui ponuntur quatuor rectis minores; quod est absurdum. Non igitur AB ipsi LX est æqualis.

^c Cor. 2. 15. primi.



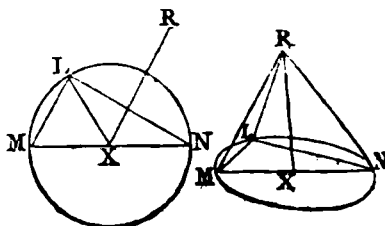
Dico præterea neque AB minorem esse ipsâ LX . Si enim fieri potest, sit minor, et ponatur ipsi quidem AB æqualis xo , ipsi vero BC æqualis xP ; et OP jungatur. Quoniam igitur AB est æqualis BC , et xo ipsi xP æqualis erit. Ergo et reliqua OL reliquæ PM est æqualis; ac propterea LM parallela est ipsi OP ^f; et LMx triangulum triangulo OPx æquiangulum. Est igitur ut xL ad LM , ita xo ad OP ^g; et permutando ut xL ad xo , ita LM ad OP . Major autem est Lx quam xo . Ergo et LM quam OP est major. Sed LM posita est æqualis AC . Et AC igitur quam OP major erit. Itaque quoniam duæ rectæ lineæ AB , BC duabus ox , xP æquales sunt, et basis AC major basi OP ; erit angulus ABC angulo oxP major^h. Similiter demonstrabimus et DEF angulum majorem esse angulo mxN , et angulum GHK angulo NXL ; tres igitur anguli ABC , DEF , GHK tribus LXM , MXN , NXL sunt majores. At anguli ABC , DEF , GHK quatuor rectis minores ponuntur. Multo igitur anguli LXM , MXN , NXL minores erunt quatuor rectis. Sed et æqualesⁱ; quod est absurdum. Non igitur AB minor est quam Lx . Oñsum autem est neque esse æqualem. Ergo major sit necesse est.

^f 2. sexti.

^g 4. sexti.

^h 25. primi.

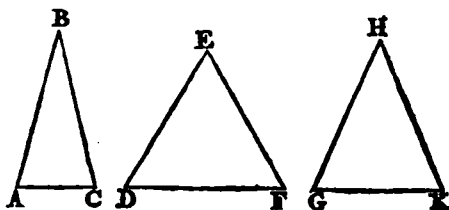
Sed sit centrum circuli in uno laterum trianguli, videlicet in MN , quod sit x , et xL jungatur. Dico rursus AB majorem esse ipsâ Lx . Si enim non



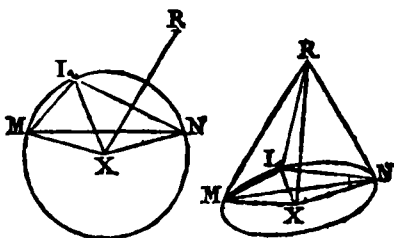
ita

ita fit, vel AB est æqualis LX , vel ipsa minor. Sit primo æqualis. Duæ igitur AB, BC , hoc est, DE, EF , duabus MX, XL , hoc est, ipsi MN æquales sunt. Sed MN ponitur æqualis DF . Ergo DE, EF ipsi DF sunt æquales; quod fieri non potest ^p. Non igitur AB est æ-^p 20. primi. qualis LX . Similiter neque minor. Multo enim magis id, quod fieri non potest, sequeretur. Ergo AB ipsa LX major est.

Sed sit centrum circuli extra triangulum LMN , quod fit X ; et LX, MX, NX jungantur. Dico et sic AB ipsa LX maiorem esse. Si enim non ita fit, vel æqualis est, vel minor. Sit primo æqualis. Ergo duæ AB, BC duabus MX, XL æquales sunt, altera alteri; et basis AC est æqualis basi ML . Angulus igitur ABC æqualis est angulo MXL . Eadem ratione et GHK angulus ipsi LXN est æqualis; ac propterea totus MXN



æqualis duobus ABC, GHK . Sed et anguli ABC, GHK angulo DEF majores sunt. Et angulus igitur MXN ipso DEF est major. At quoniam duæ $DE,$



EF duabus MX, XN æquales sunt, et basis DF æqualis basi MN ; erit MXN angulus angulo DEF æqualis. Ostensus autem est major; quod est absurdum. Non igitur AB est æqualis LX .

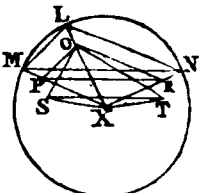
ff 3

Dico

Dico vero neque minorem esse AB ipsâ LX . Si enim fieri potest, sit minor; et ipsi quidem AB æqualis ponatur xO , ipsi vero BC æqualis xP ; et OP jungatur. Quoniam igitur AB ipsi BC est æqualis; erit xO æqualis xP . Ergo et reliqua OL reliquæ PM æqualis.

^{2. sexti.} Parallela igitur est LM ipsi BO ^k; et triangulum LMX triangulo PXO æquiangulum est. Quare ut XL ad LM , ita xO ad OP ^l; et permutando ut LX ad xO , ita LM ad OP . Major autem est LX quam xO . Ergo LM quam OP est major. Sed LM est æqualis AC . Et AC igitur quam OP major erit. Itaque quoniam duæ AB , BC duabus OX , xP sunt æquales, altera alteri; et basis AC major est basi OP ; erit angulus ABC angulo OPX major^m. Similiter si xR sumatur æqualis utriusque ipsarum xO , xP , et jungatur OR ; ostendemus angulum GHK angulo ORX majorem. Constituatur ad rectam lineam LX , et punctum in ipsâ x , angulo quidem ABC æqualis angulus LXS , angulo autem GHK æqualis LXT ; et ponatur utraque xS , xT ipsi OX æqualis; junganturque OS , OT , ST . Et quoniam duæ AB , BC duabus OX , xS æquales sunt, et angulus ABC æqualis angulo OXs ; erit basis AC , hoc est, LM basi OS æqualis. Eadem ratione, et LN est æqualis ipsi OT . Quod cum duæ ML , LN duabus OS , OT sint æquales; et angulus MLN major angulo SOT [†]; erit et basis MN basi ST major. Sed MN est æqualis DF . Ergo et DF quam ST major erit. Quoniam igitur duæ DE , EF duabus sx , xT æquales sunt, et basis DF major basi ST ; erit angulus DEF angulo sxt major. Æqualis autem est angulus sxt angulis ABC , GHK . Ergo DEF angulus angulis ABC , GHK major est; sed et minor; quod fieri non potest.

Utcunque igitur cadat centrum circuli, recta AB major erit quam LX .



[†] Angulus autem MLN angulo SOT major sic ostenditur. In triangulo isoscele LXM , angulus ad verticem LXM angulo OXs , ad verticem isoscelis OXs , minor est^v. Quapropter angulus MLM ad basin isoscelis LXM angulo OXs ad basin isoscelis OXs major erit^p. Simili modo ostendatur angulus MLN angulo XOT major. Totus igitur MLN , ex duobus MLM , MLN compositus, toto SOT , ex duobus OXs , XOT composito, major. Q. E. D.

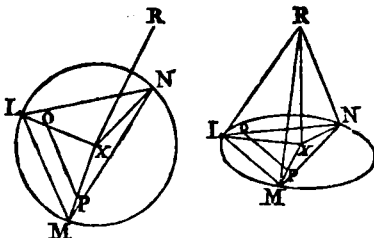
• Ex construct.
p. 5. & 32. primi.

Confi-

Constituatur a puncto x circuli LMN plano ad re-

^a 12. hujus.

ctos angulos xR^n . Et excessui, quo quadratum ex AB superat quadratum ex Lx , ponatur æquale quadratum, quod fit ex Rx ; et RL , RM , RN jungantur. Quoniam igitur Rx perpendicularis est ad planum



LMN circuli, et ad unamquamque ipsarum Lx , Mx , Nx erit perpendicularis°. Et quoniam Lx est æqualis xM ,^o Def. 3. communis autem et ad rectos angulos xR ; erit basis LR hujus. æqualis basi RM . Eadem ratione, et RN utrique ip-^a 4. primi. farum RL , RM est æqualis. Tres igitur rectæ lineæ RL , RM , RN inter se æquales sunt. Et quoniam quadratum ex xR ponitur æquale excessui, quo quadratum ex AB superat quadratum ex Lx ; erit quadratum ex AB quadratis ex Lx , xR æquale. Quadratis autem ex Lx , xR æquale est quadratum ex RL ;^q 47. primi. enim angulus est LxR . Ergo quadratum ex AB quadrato ex RL æquale erit; ideoque AB ipsi RL est æqualis. Sed ipsi quidem AB æqualis est unaquæque ipsarum BC , DE , EF , GH , HK : ipsi vero RL æqualis utraque ipsarum RM , RN . Unaquæque igitur ipsarum AB , BC , DE , EF , GH , HK unicuique ipsarum RL , RM , RN est æqualis. Quod cum duæ RL , RM duabus AB , BC æquales sint, et basis LM ponatur æqualis basi AC : erit angulus LRM æqualis angulo ABC .^r 8. primi. Eadem ratione, et angulus quidem $M RN$ angulo DEF , angulus autem LRN angulo $G HK$ est æqualis. Ex tribus igitur angulis planis LRM , $M RN$, LRN , qui æquales sunt tribus datis ABC , DEF , $G HK$, solidus angulus constitutus est ad R . Q. E. F.

PROP. XXIV. THEOR.

[XXIV.]

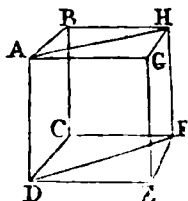
Si solidum parallelis planis contineatur, opposita ipsius plana, et æqualia, et parallelogramma erunt.

Solidum enim $CDGH$ parallelis planis AC , GF ; BG , CE ; FB , AE contineatur. Dico opposita ejus plana, et æqualia, et parallelogramma esse. Quoniam enim duo plana parallela BG , CE a plano AC secantur, communes

ff 4

ipsorum

- * 16. hujus. ipforum sectiones parallelæ sunt¹: ergo AB ipsi CD est parallela. Rursus quoniam duo plana parallela BF , AE secantur a plano AC , communes ipforum sectiones parallelæ sunt²: parallela igitur est AD ipsi BC . Ostenſa autem est et AB parallela CD . Ergo AC parallelogrammum erit. Similiter demonstrabimus, et unumquodque ipforum CE , FG , GB , BF , AE parallelogrammum esse. Junguntur AH , DF . Et quoniam parallela est AB quidem ipsi DC ; BH vero ipsi CF ; erunt duæ AB , BH , sese tangentes, duabus DC , CF , sese tangentibus, parallelæ; et non in eodem plano: quare æquales
- * 10. hujus. angulos continebunt³. Angulus igitur ABH angulo DCF est æqualis. Et quoniam duæ AB , BH duabus
- * 34. primi. DC , CF æquales sunt⁴; et angulus ABH æqualis
- * 4. primi. angulo DCF ; erit basis AH basi DF æqualis⁵; et ABH triangulum æquale triangulo DCF . Quod cum ipsius quidem ABH trianguli duplum sit BG parallelogrammum; ipsius vero DCF trianguli, duplum parallelogrammum CE ⁶: erit BG parallelogrammum æquale parallelogrammo CE . Similiter demonstrabimus et AC parallelogrammum parallelogrammo GF ; et parallelogrammum AE parallelogrammo BF æquale esse. Si igitur solidum parallelis planis contineatur, opposita ipsius plana, et æqualia, et parallelogramma sunt. *Q. E. D.*



Cor. Ex jam demonstratis constat, si solidum parallelis contineatur planis, opposita ipsius plana, et æqualia esse, et similia; quippe quæ et singulos angulos æquales, et circa æquales angulos latera proportionalia habeant.

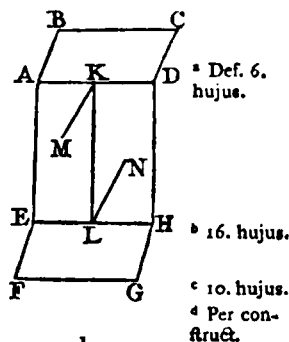
* LEMMA.

Si quo plana parallela secentur plano, similiter ei inclinata sunt.

- Plana parallela $ABCD$, $EFGH$ plano $AEND$ secantur. Dico plana $ABCD$, $EFGH$ plano $AEND$ similiter inclinata esse. Sint rectæ AD , EH communes plani $AEND$ cum planis parallelis intersectiones. Rectæ
- * 16. hujus. igitur AD , EH erunt inter se parallelæ⁷. In rectâ AD sumatur punctum quodvis K . A puncto K , in plano $AEND$, rectæ AD ad perpendicularum educatur KL , quæ rectæ

rectæ EH , ipsi AD parallelæ, in L occurrat. Ab eodem puncto K , in plano $ABCD$, ad perpendicularum rectæ AD educatur KM .

Angulus LKM planorum $AEDH$, $ABCD$ mutua erit inclinatio^a. Planum rectarum MK , KL secet planum $EFGH$ in rectâ LN . Rectæ igitur KM , LN , quæ communes sunt plani MKL cum planis parallelis $ABCD$, $EFGH$ intersectiones, inter se parallelæ erunt^b. Sed AK , EL parallelæ; id enim ostensum. Angulus igitur NLE angulo AKM æqualis^c. Angulus autem AKM rectus^d. Rectus igitur NLE . Recta igitur NL in plano $EFGH$ ad perpendicularum est rectæ EH . Sed recta KL in plano $AEDH$ ad perpendicularum erit eidem EH , cum ad perpendicularum sit rectæ AD ^d, cui parallela est EH . Angulus igitur KLN planorum $AEDH$, $EFGH$ est mutua inclinatio^e. Sed angulus LKM planorum $AEDH$, $ABCD$ est mutua inclinatio; id enim ostensum. Et propter parallelas KM , LN , anguli LKM , KLN sunt inter se æquales^f. Plana igitur $ABCD$, $EFGH$ plano^g 29. primi. $AEDH$ similiter sunt inclinata. *Q. E. D.*



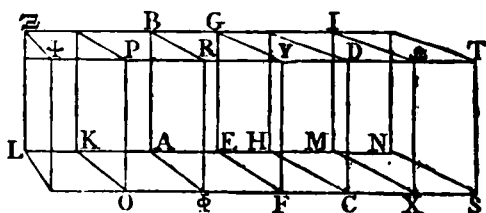
*Cor. **. Parallela plana parallelis planis similiter sunt inclinata.

PROP. XXV. THEOR.

[XXV.]

Si solidum parallelepipedum plano secetur oppositis planis parallelo, erit ut basis ad basim, ita solidum ad solidum.

Solidum enim parallelepipedum $ABCD$ plano YE secetur, oppositis planis RA , DH parallelo. Dico ut $EFOA$ basis ad basim $EHCF$, ita esse $ABFY$ solidum ad solidum $EGCD$. Producat enim AH ex utrâque parte; et ponantur ipsi quidem EH æquales quotcunque HM , MN ; ipsi vero AE , æquales quotcunque AK , KL ; et compleantur parallelogramma LO , $K\Phi$, HX , MS ; et solida LP , KR , $H\Omega$, MT . Quoniam igitur æquales inter se sunt LK , KA , AE rectæ lineæ; erunt et parallelogramma LO , $K\Phi$, AF inter se æqualia^a; quin^b 1. sexti. et



et similia esse manifestum est: itemque æqualia et similia inter se parallelogramma KZ , KB , AG ; et adhuc parallelogramma LY , KP , AR , inter se æqualia; opposita enim sunt; et hæc quoque inter se similia. Quoniam et plana parallela LY , KP , AR , EY parallelis YG , LF similiter esse inclinata; parallela item FY , HZ parallelis YZ , PL ; necnon parallelis YL , YE similiter esse inclinata, ex Lemmate et Corollario ejus manifestum est. Eadem ratione, et parallelogramma EC , HX , MS æqualia inter se sunt, et similia: itemque parallelogramma HG , HI , IN inter se æqualia, et similia. Et horum omnium, sicut priorum, plana parallela parallelis aliis similiter sunt inclinata. Et insuper parallelogramma DH , MQ , NT . Tria igitur plana solidorum LP , KR , AY tribus planis æqualia sunt, et similia, et similiter inclinata. Sed tria tribus oppositis sunt æqualia, et similia, et similiter inclinata. Ergo solida LP , KR , AY inter se æqualia erunt^a. Eadem ratione, et solida ED , HQ , MT sunt æqualia inter se. Quotuplex igitur est basis LF ipsius AF basis, totuplex est et LY solidum solidi AY . Eadem ratione, quotuplex est NF basis ipsius basis HF , totuplex est et solidum NY ipsius ED solidi. Et si basis LF est æqualis basi NF , et solidum LY solidum NY æquale erit; et si basis LF superat NF basim, et LY solidum NY superabit; et si minor, minus. Quatuor igitur magnitudinibus existentibus, duabus scilicet basibus AF , FH , et duobus solidis AY , ED ; sumpta sunt æquimultiplicia, basis quidem AF , et AY solidi, videlicet basis LF , et solidum LY ; basis vero HF , et ED solidi, nempe basis NF , et solidum NY . Et demonstratum est, si basis LF superat basim NF , et LY solidum solidum NY superare; et si æqualis, æquale; et si minor minus. Est igitur ut AF basis ad basim FH , ita AY solidum ad solidum ED ^b. Quare si solidum parallelepipedum plano secetur, oppositis

^a Cor. •
Def. 11.
hujus.

^b Def. 5.
quinti.

fitis planis parallelo; erit ut basis ad basim, ita solidum ad solidum. Q. E. D.

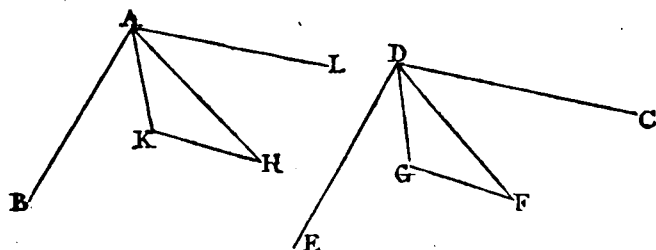
Cor. * Omnis parallelepipedum parallelogramma contigua similiter inter se, atque opposita contigua, inclinata sunt.

PROP. XXVI. PROBL.

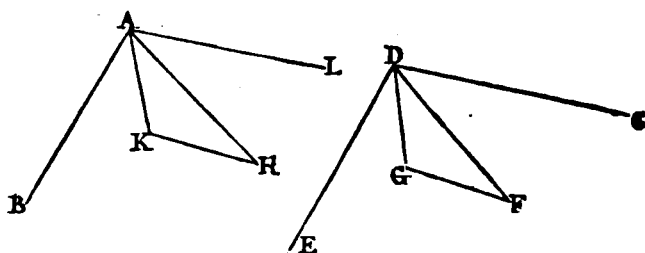
[XXVI.]

Ad datam rectam lineam, et ad datum in ipsâ punctum, dato angulo solido æqualem solidum angulum constituere.

Sit data quidem recta linea AB , datum autem in ipsâ punctum A , et datus solidus angulus ad D . Oportet



ad datam rectam lineam AB , et ad datum in ipsâ punctum A , dato angulo solido ad D æqualem solidum angulum constituere. Solidus ad D vel tribus angulis planis continetur, vel pluribus. Primum tribus contineatur EDC , EDF , FDC . Sumatur in lineâ DF quodvis punctum F ; a quo ad planum per ED , DC transiens ducatur perpendicularis FG^k , quæ plano in puncto G occurrat; jungaturque DG : et ad rectam lineam AB ,^{k 11. hujus.} et ad datum in ipsâ punctum A , angulo quidem EDC æqualis angulus constituatur BAL^l ; angulo autem EDG^l 23. primi. in ipso plano BAL constituatur æqualis BAK . Deinde ipsi DG ponatur æqualis AK , et a puncto K , plano per BAL ad rectos angulos, erigatur HK^m ; ponaturque ipsi^{m 10. hujus.} GF æqualis KH ; et HA jungatur. Dico angulum solidum ad A , qui angulis BAL , BAH , HAL continetur, æqualem esse solido angulo ad D , angulis EDC , EDF , FDC contento. Admoveatur enim punctum A puncto D ; recta autem AB rectæ DE applicetur, et planum BAL plano EDC superimponatur. Ita propter angulos BAL , EDC æqualesⁿ, recta AL rectæ DC seⁿ Per con- applicabit; æruet.

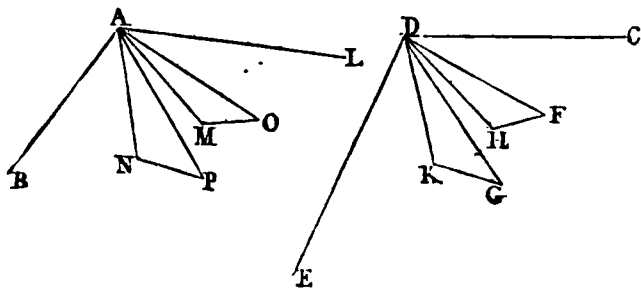


* Per con-
struct.

applicabit; et propter æquales angulos BAK , EDG , recta AK rectæ DG . Sed recta AK æqualis rectæ DG ⁿ. Punctum igitur K puncto G incidet. Planis autem BAL , EDC congruentibus, punctis etiam K , G in unum convenientibus, rectæ KH , GF , quæ a punctis illis ad perpendicularumeductæ sunt congruentibus planis, et ipsæ congruent. Et cum KH ipsi GF æqualis sitⁿ, punctum H ipsi F incidet. Et punctis A , D in unum quoque compositis, rectæ AH , DF congruent. Tribus autem rectis AB , AL , AH tribus DE , DC , DF singulatim congruentibus, angulus solidus ad A solido ad D congruet, et, congruendo, ei æqualis erit. *Q. E. D.*

CAS. 2. Jam vero solidus ad D contineatur angulis planis plus tribus. Puta, planis EDC , CDF , FDE , GDE .

Sumantur in rectis DF , DG , puncta quælibet F , G . Et a punctis F , G in planum EDC ad perpendicularum



- 11. hujus. deducantur rectæ FH , GK ⁿ, quæ plano illi in punctis H , K occurrant. Jungantur DH , DK . Jam vero ad rectam AB , ad punctum in eâ A , angulo EDC æqualis confi-

constituatur BAL ; item in plano BAL angulo EDH æqualis BAM ; et angulo EDK æqualis BAN . Capiantur AM , AN illis DH , DK singulatim æquales. A punctis M , N plano BAL ad perpendicularum educantur MO , NP ; capiantur NP , MO illis KG , HF singulatim 12. hujus. æquales. Denique jungantur AP , AO . Dico factum esse, quod fieri oportuit. Nempe ad rectam AB , et punctum in eâ A , constitutum esse angulum solidum, planis angulis BAL , LAO , OAP , PAB contentum, æqualem solido ad D , planis EDC , CDF , FDG , GDE contento.

Puncto enim A , ut in casu priore, puncto D admoto, rectâ AB rectæ DE applicatâ, planoque BAL plano EDC superimposito; propter angulos BAL , BAM , BAN angulis EDC , EDH , EDK , singulos singulis, æquales¹, rectæ AL , AM , AN rectis DC , DH , DK Per construct. singulatim se applicabunt. Unde propter rectas AM , AN rectis DH , DK , singulas singulis, æquales, puncta M , N punctis H , K singulatim incident. Unde propter rectas MO , NP plano BAL , rectasque HF , KG plano EDC , ad perpendicularum eductas; et propter illas MO , NP alteris HF , KG æquales; efficietur puncta O , P punctis F , G singulatim incidere. Quapropter rectæ AO , AP rectis DF , DG singulatim congruent. Ita vero rectæ AB , AL , AO , AP rectis DE , DC , DF , DG , singulæ singulis, congruent. Angulus igitur solidus ad A solido ad D congruet, et, congruendo, illi æqualis erit. Ad datam igitur rectam lineam &c. *Q. E. F.*

*Cor.** Ex constructione manifestum est angulos planos, qui solidum ad A constituunt, planis, qui solidum ad D , æquales esse; et plana planis similiter esse inclinata. Rectis enim AB , AL , AO , AP rectis DE , DC , DF , DG congruentibus, congruent tum anguli plani, tum angulorum plana. Hoc tamen haud ita intelligendum est, quasi solidi anguli æquales esse nesciant, nisi planis angulis æqualibus, et planis similiter inclinatis continentur; sed eâ conditione futuros solidos, qui ope hujus problematis constituuntur æquales.

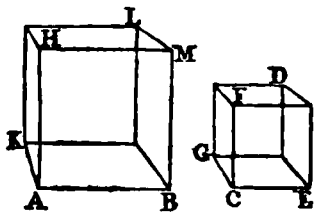
PROP.

[XXVII.]

PROP. XXVII. PROBL.

Ad datam rectam lineam dato solido parallelepipedo simile, et similiter positum, solidum parallelepipedum describere.

Sit recta quidem linea AB ; datum vero solidum parallelepipedum CD . Oportet ad datam rectam lineam AB , dato solido parallelepipedo CD simile, et similiter positum, solidum parallelepipedum describere. Constituitur ad rectam lineam AB , et ad datum in ipsa punctum A , angulo solido ad c æqualis angulus, qui angulis planis



- * 26. hujus. BAH , HAK , KAB contineatur⁹. Hi plani planis solidum ad c continentibus, singuli singulis, æquales
 * Cor. * 26. erunt, et æqualium plana similiter inclinata erunt⁹.
 hujus. Sunt æquales BAH , ECF ; HAK , FCG ; BAK , ECG . Et fiat ut EC ad CG , ita BA ad AK ; ut autem
 * 12. sexti. GC ad CF , ita KA ad AH ⁹. Ergo ex æquali ut EC ad CF , ita erit BA ad AH . Compleatur parallelogrammum BH , et AL solidum. Quoniam igitur est ut EC ad CG , ita BA ad AK ; erit parallelogrammum KB parallelogrammo GE simile: nempe, cum circa æquales angulos ECG , BAK latera sunt proportionalia. Eadem quoque ratione parallelogrammum KH simile est parallelogrammo GF , et parallelogrammum HB parallelogrammo FE . Tria igitur parallelogramma solidi AL tribus parallelogrammis solidi CD similia sunt, et similiter inclinata: sed tria tribus oppositis in utroque solido sunt æqualia, et similia⁹, et similiter inclinata⁹. Ergo totum AL solidum toti solido CD simile erit. Ad datam igitur rectam lineam AB , dato solido parallelepipedo CD simile, et similiter positum, solidum parallelepipedum AL descriptum est. $Q. E. F.$

* Cor. 24.
 hujus.
 * Cor. * 25.
 hujus.

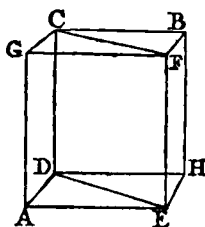
[XXVIII.]

PROP. XXVIII. THEOR.

Si solidum parallelepipedum plano secetur per diagonales oppositorum planorum, ab ipso plano bifariam secabitur.

Sit solidum parallelepipedum AB . Oppositorum ejus parallelogrammorum $CGFB$, $DAEH$ ducantur diagonales CF , DE . Jam cum recta CD parallela et æqualis sit rectæ GA (nempe cum opposita sint parallelogrammi

lelogrammi CA latera) cum eidem GA recta FE parallela et æqualis sit; rectæ CD , FE inter se sunt parallelæ et æquales¹. In plano igitur sunt rectæ quatuor CF , DE , CD , FE ². Dico solidum AB a plano $CDEF$ bifariam secari. Quoniam enim æquale et simile est CGF triangulum triangulo CBF , triangulum vero ADE triangulo DEH ³; est autem et CA parallelogrammum parallelogrammo BE æquale et simile⁴, oppositum enim est; et parallelogrammum GE æquale et simile parallelogrammo CH : quoniam etiam parallelepipedum AB contigua quælibet parallelogramma similiter oppositis inter se sunt inclinata⁵: quoniam denique planum $CDEF$ parallelis planis GB , AH similiter est inclinatum, necnon parallelis AF , CH ; AC , EB : erit prisma contentum duobus triangulis OGF , ADE , et tribus parallelogrammis GE , AC , CE , æquale prismati, quod continetur duobus triangulis CFB , DEH , et tribus parallelogrammis CH , BE , CE ; etenim planis, et numero et magnitudine æqualibus, et similibus, et similiter inclinatis, continentur. Ergo totum AB solidum a plano $CDEF$ bifariam secatur. *Q. E. D.*



¹ 9. hujus, et Ax. 1. primi.

² 7. hujus.

³ 34. primi.

⁴ 24. hujus.

⁵ Cor. 25.

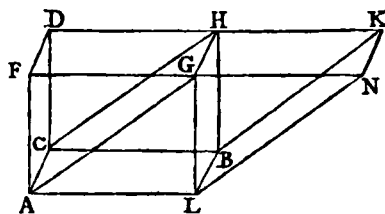
hujus.

PROP. XXIX. THEOR.

[XXIX.]

Solida parallelepipeda, quæ in eadem sunt basi, et eadem altitudine, quorum stantes lineæ sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia.

Sint enim in eadem basi AB solida parallelepipida AH , AK , eadem altitudine; quorum stantes AF , AG , LG , LN ; CD , CH , BH , BK sint in eisdem rectis lineis FN , DK . Dico solidum AH solido AK æquale esse. Parallelepipedum AK stans parallelogrammum CG stanti LH opposito alterius parallelepipedum AH , vel ad ipsum planum DN occurrit, vel productum supra ipsum, vel infra.

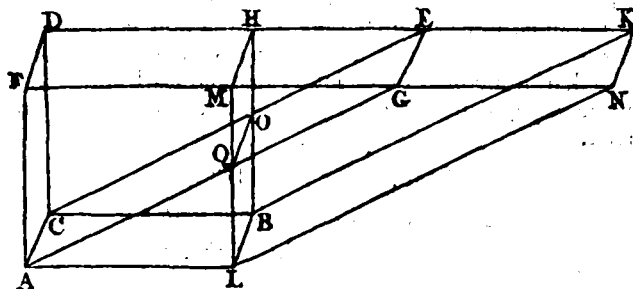


CAS.

* Per Lem.
et Cor. *
24. hujus.

lelogrammis AD , DG , GC est æquale prismati, quod duobus triangulis LMN , HBK et tribus parallelogrammis BM , NH , BN continetur. Commune apponatur solidum, cujus basis quidem parallelogrammum AB , oppositum autem ipsi $GEHM$. Ergo totum AH solidum parallelepipedum toti solido parallelepipedo AK est æquale. *Q. E. D.*

CAS. 3. * Denique convenient flantia CG , LH infra planum DN , sitque communis eorum intersectio OQ ,



quæ rectæ CA , ac proinde rectis HM , EG parallela erit. (Nimirum cum OQ , CA communes sint plani CG cum parallelis planis AD , LH intersectiones, et CA rectæ FD , atque idcirco utrique illarum HM , EG sit parallela.) Prisma duobus triangulis AFG , CDE et tribus parallelogrammis AD , DG , GC comprehensum æquale esse prismati, duobus triangulis LMN , HBK et tribus parallelogrammis BM , NH , BN comprehenso, eodem modo ostendetur, quo in casu priori. Æqualibus hisce auferatur pars communis, prisma utique, quod duobus triangulis QMG , OHE et tribus parallelogrammis QH , HG , GO continetur. Quæ reliqua fuerint inter se æqualia erunt. Id est, solidum, trapeziis duobus $QMPA$, $OHDC$ et parallelogrammis quatuor OM , CF , MD , QC comprehensum, solido, trapeziis duobus $LQGN$, $BOEK$ et parallelogrammis quatuor BQ , EN , OG , BN comprehenso, æquale erit. Hisce solidis æqualibus commune apponatur prisma, duobus triangulis ALQ , CBO et tribus parallelogrammis AB , QC , CL comprehensum, fiet solidum totum AH toti CK æquale. *Q. E. D.*

GG

Ubicunque

Ubiunque igitur conveniant stantia CO , LH , parallelepipedum parallelepipedo æquale erit. Solida igitur parallelepipeda, quæ in eadem sunt basi, et eadem altitudine, quorum stantes sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia. *Q. E. D.*

* SCHOLION.

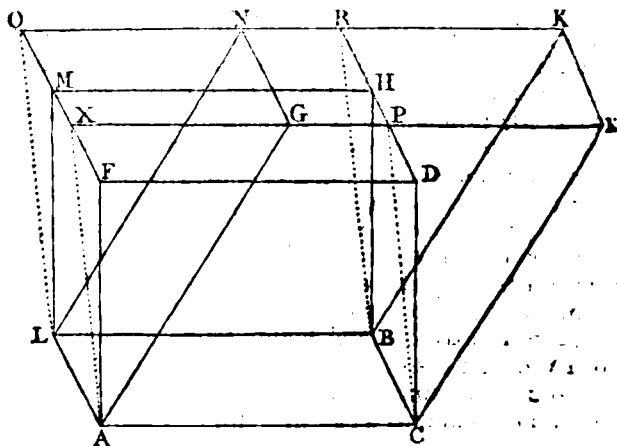
Propositionem universam in casus tres distribuendam Simpsonus primus, juniorum saltem, intellexit. Casus secundi et tertii elegantissimam sane Viri magni demonstrationem nos lubenter certe in nostras schedas transfulsemus, nisi Euclidis ipsius vestigia non persequi religio esset. Secundi autem casus demonstrationem (qualem nunc eam emendatam damus) ab Euclide minime abjudicamus, licet ita Simpsonus sententiam tulerit.

[XXX.]

PROP. XXX. THEOR.

Solida parallelepipeda, quæ in eadem sunt basi, et eadem altitudine, quorum stantes non sunt in iisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia.

Sint in eadem basi AB solida parallelepipeda CM , CN , et eadem altitudine, quorum stantes AF , AG , LM ,



LN ; CD , CE , BH , BK non sint in eisdem rectis lineis. Dico solidum CM solido CN æquale esse. Recta enim DH ,

DH, si opus sit producta, rectis GE, NK, si opus sit productis, in punctis P, R occurrat. Recta item FM, si opus sit producta, eisdem GE, NK, si opus sit productis, in X, O occurrat. Et AX, LO, CP, BR jungantur. Solidum CM, cujus basis quidem ACBL parallelogrammum, oppositum autem ipsi FDHM, est æquale solido CO, cujus basis parallelogrammum ACBL et ei oppositum XPRO; in eadem enim sunt basi ACBL, et ipsorum stantes AF, AX, LM, LO; CD, CP, BH, BR sunt in eisdem rectis lineis FO, DR^f. Sed solidum CO, ^f 29. hujus cujus basis quidem parallelogrammum ACBL, oppositum autem ipsi XPRO, est æquale solido CN, cujus basis ACBL parallelogrammum, et ipsi oppositum QEKN^f. Etenim in eadem sunt basi ACBL, et eorum stantes AG, AX, CE, CP; LN, LO, BK, BR sunt in eisdem rectis lineis GP, NR. Quare et CM solidum solido CN æquale erit. Solida igitur parallelepipedæ, quæ in eadem sunt basi, et eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia. Q. E. D.

PROP. XXXI. THEOR.

[XXXI.]

Solida parallelepipedæ, quæ in æqualibus sunt basibus, et eadem altitudine, inter se sunt æqualia.

Sint in æqualibus basibus AB, CD solida parallelepipedæ AE, CF, et eadem altitudine. Dico solidum

AE solido CF æquale esse.

Sint primo stantes † HK,

BE, AG, LM; OP, DF,

CE, RS ad rectos angulos

basibus AB, CD: angulus

autem ALB angulo CRD

sit inæqualis, et producat ipsi CR in directum RT:

constituaturque ad rectam lineam RT, et ad punctum

in ipsa R, angulo ALB æqualis angulus TRY². Et ^{23. primi.}

ponatur ipsi quidem AL æqualis RT, ipsi vero LB æ-

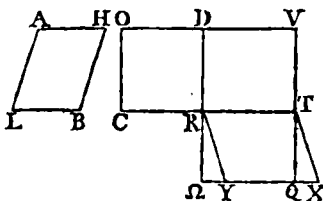
qualis RY; et ad punctum Y ipsi RT parallela ducatur

XY, compleaturque parallelogrammum RX, et YY so-

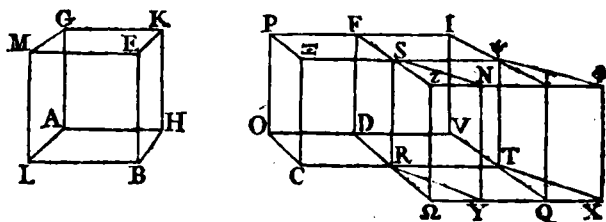
lidum. Quoniam igitur duæ TR, RY duabus AL, LB

æquales sunt, et angulos continent æquales; erit pa-

rallelogrammum RX æquale et simile parallelogrammo



† Vide diagramma pagina sequentis.



HL ; et quoniam rursus AL est æqualis RT , et LM ipsi RS , angulosque æquales continent, parallelogrammum RY parallelogrammo AM æquale et simile erit. Eadem ratione LE parallelogrammum ipsi SY æquale est et simile. Tria igitur parallelogramma solidi AE tribus parallelogrammis solidi YY æqualia et similia sunt. Præterea cum rectæ ML , SR plana LH , RX ad perpendicularum insistant; plano LH plana omnia per ML ,
 * 18. hujus. plano autem RX omnia per RS , ad perpendicularum erunt¹. Plano igitur LH ad perpendicularum sunt LE , LG plana; plano item RX plana RN , RY . Rursum recta LM , cum ad perpendicularum sit plano LH , rectarum LA , LB utrique, cum sint in illo plano, ad perpendicularum erit. Est autem illa LM planorum LE , LG communis intersectio. Quare angulus ALB mutua est planorum LG , LE inclinatio². Similiter ostendemus angulum YRT planorum RN , RY mutuam esse inclinationem. Anguli autem ALB , YRT sunt inter se æquales. Plana igitur LG , LE similiter inter se, ac plana RN , RY inclinata sunt. Solidi igitur AE tria contigua parallelogramma LH , LG , LE , quæ tribus solidi YY contiguis RX , RY , RN ostensa sunt æqualia et similia, eadem tria inter se similiter eisdem tribus inclinata erunt; homologa utique homologis. Sed et tria tribus opposita, et æqualia sunt, et similia³, et similiter inclinata⁴. Totum igitur AE solidum parallelepipedum toti solido parallelepipedo YY est æquale. Producantur DR , XY , convenientque inter se in puncto Ω ; et per T ipsi $D\Omega$ parallela ducatur TQ ; et producantur TQ , OD , et convenient in V ; compleanturque solida ΩY , RI . Solidum igitur $Y\Omega$, cujus basis est RY parallelogrammum, oppositum autem ipsi ΩI , est æquale solido $Y Y$, cujus basis est RY parallelogrammum, et oppositum ipsi $Y\Phi$; in eadem enim sunt basi RY , et eadem altitudine, et eorum stantes $R\Omega$, RY , TQ , TX ;
 s 2.

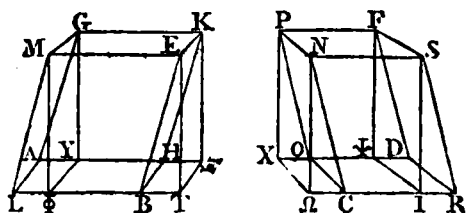
¹ Cor. 24.

hujus.

² Cor. * 25.

hujus.

$s z, s n, \psi \phi$ in eisdem sunt rectis lineis $\Omega x, z \phi$.¹ 29. hujus.
 Sed solidum $\psi \gamma$ æquale est solido ΛE . Ergo et $\gamma \Omega$
 solido ΛE est æquale. Præterea quoniam parallelo-
 grammum $R Y X T$ est æquale parallelogrammo ΩT ,³⁵ primi.
 (etenim in eadem est basi $R T$, et in eisdem parallelis
 $R T, \Omega x$) et parallelogrammum $R Y X T$ parallelogrammo
 $c d$ æquale (quoniam utrumque est æquale ipsi ΛB)
 idcirco parallelogrammum ΩT æquale est parallelo-
 grammum $c d$. Est autem aliud parallelogrammum $D T$.
 Est igitur ut $c d$ basis ad basim $D T$, ita ΩT ad ipsam $D T$.⁷ quinti.
 Et quoniam solidum parallelepipedum $c i$ secatur plano
 $R F$, planis oppositis parallelo; erit ut $c d$ basis ad basim
 $D T$, ita solidum $c f$ ad $R i$ solidum°. Eadem ratione,²⁵ hujus.
 quoniam solidum parallelepipedum Ωi secatur plano $R \gamma$,
 oppositis planis parallelo; ut ΩT basis ad basim $D T$, ita
 erit solidum $\Omega \gamma$ ad $R i$ solidum°. Sed ut $c d$ basis ad
 basim $D T$, ita basis ΩT ad ipsam $T D$. Ut igitur so-
 lidum $c f$ ad $R i$ solidum, ita solidum $\Omega \gamma$ ad solidum
 $R i$. Quod cum utrumque solidorum $c f, \Omega \gamma$ ad so-
 lidum $R i$ eandem habeat proportionem, solidum $c f$
 solido $\Omega \gamma$ est æquale². Solidum autem $\Omega \gamma$ ostensum est⁹ 29. quinti.
 est æquale solido ΛE . Ergo et ΛE ipsi $c f$ æquale erit.



Sed non sint stantes $\Lambda G, H K, B E, L M, C N, O P,$
 $D F, R s$ ad rectos angulos ipsis $\Lambda B, c d$ basibus. Dico
 rursus solidum ΛE æquale esse solido $c f$. Ducantur a
 punctis $K, E, G, M; P, F, N, s$ ad subiectum planum per-
 pendiculares $K E, E T, G Y, M \phi; S I, F \psi, N \Omega, P X$, quæ
 plano in punctis $\Xi, T, Y, \phi; \psi, x, \Omega, i$ occurrant; et jungan-
 ture $\Xi T, Y \phi, \Xi Y, T \phi; X \psi, x \Omega, \Omega i, \psi i$. Æquale igitur est
 $K \phi$ solidum solido $P i$; in æqualibus enim sunt basibus
 $K M, P s$, et eadem altitudine, et utriusque stantes ad
 rectos angulos sunt basibus. Sed $K \phi$ solidum solido ΛE
 est æquale¹: siquidem in eadem sunt basi, et eadem²⁹ hujus.
 altitudine, et utriusque stantes sunt in eisdem rectis
 lineis.

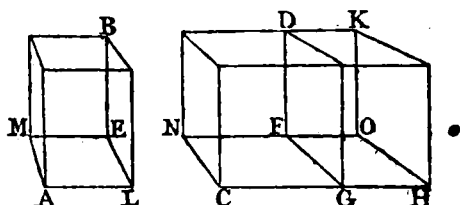
lineis. Pari ratione solidum PI solido CF est æquale. Ergo et solidum AE solido CF æquale erit. Solida igitur parallelepipeda, quæ in æqualibus sunt basibus, et eadem altitudine, inter se sunt æqualia. *Q. E. D.*

[XXXII.]

PROP. XXXII. THEOR.

Solida parallelepipeda, quæ eandem habent altitudinem inter se sunt, ut bases.

Sint solida parallelepipeda AB , CD , quæ eandem altitudinem habeant. Dico inter se esse, ut bases; hoc est, ut AE basis ad basim CF , ita solidum AB ad CD



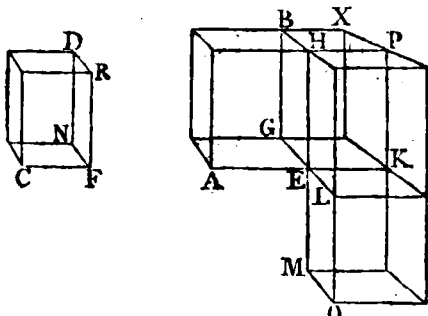
solidum. Applicetur enim ad rectam lineam FG parallelogrammum AE æquale FH , in angulo FGH ipsi GCN æquali. Et a basi FH eadem altitudine ipsi CD solidum parallelepipedum GK compleatur. Solidum igitur AB solido GK est æquale^p; in æqualibus enim sunt basibus AE , EH , et eadem altitudine. Itaque quoniam solidum parallelepipedum CK plano DG secatur oppositis planis parallelo; erit ut HF basis ad basim FC , ita solidum HD ad DC solidum^q; atqui est basis quidem FH basi AE æqualis, solidum vero GK æquale solido AB . Est igitur et ut AE basis ad basim CF , ita solidum AB ad solidum CD . Quare solida parallelepipeda, quæ eandem habent altitudinem, inter se sunt, ut bases. *Q. E. D.*

[XXXIII.]

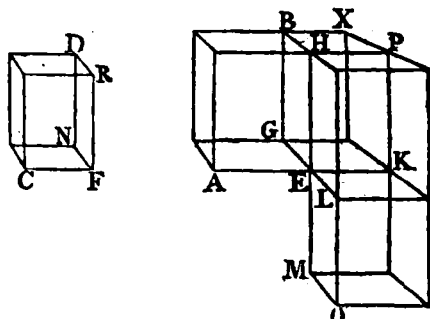
PROP. XXXIII. THEOR.

Similia solida parallelepipeda inter se sunt in triplicatâ proportionem homologorum laterum.

Sint similia solida parallelepipeda AB , CD . Latus autem AE homologum sit lateri CF . Dico solidum AB ad CD solidum triplicatam proportionem habere ejus, quam habet AE ad CF . Producantur enim EK , EL , EM in directum ipsis AE , GB , HE ; et ipsi quidem



dem CF æqualis ponatur EK , ipsi vero FN æqualis EL ; et adhuc ipsi FR æqualis EM ; et KL parallelogrammum, et KO solidum compleatur. Quoniam igitur duæ KE , EL duabus CF , FN æquales sunt; sed et angulus KEL angulo CFN æqualis; quia et angulus LEG ipsi CFN ob similitudinem solidorum AB , CD : erit et KL parallelogrammum simile et æquale parallelogrammo CN . Eadem ratione, et parallelogrammum KM æquale est et simile parallelogrammo CR ; et adhuc parallelogrammum OE ipsi DF parallelogrammo. Tria igitur parallelogramma solidi KO tribus parallelogrammis CD solidi æqualia et similia sunt. Eadem autem tria inter se similiter eisdem tribus inclinata esse, manifestum est. Cum ex ipsa constructione figuræ, solidi KO plana illa tria KL , KM , OE solidi AB sint plana ipsa AG , AH , EB . Quæ quidem similiter inter se ac solidi CD tria illa CN , CR , DF inclinata sunt, propter solidorum similitudinem. Sed in utroque solido tria tribus oppositis æqualia sunt, et similia, et similiter inclinata. Cor. 24. Totum igitur KO solidum æquale est et simile toti solido CD . Compleatur GK parallelogrammum; et a basibus quidem GK , KL parallelogrammis, altitudine vero eadem ipsi AB , solida compleantur EX , LP . Et quoniam ob similitudinem solidorum AB , CD , est ut AE ad CF , ita EG ad FN ; et EH ad FR ; æqualis autem FC ipsi EK , et FN ipsi EL , et FR ipsi EM ; erit ut AE ad EK , ita GE ad EL , et HE ad EM . Sed ut AE quidem ad EK , ita AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK : ut autem GE ad EL , ita GK ad KL ; et ut HE ad EM , ita PE ad KM . Ut igitur AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK , ita GK ad KL . 1. sexti.



GK ad KL , et PE ad KM . Sed ut AG quidem ad $32. hujus, GK$, ita AB solidum ad solidum EX : ut autem GK ad KL , ita solidum EX ad PL solidum; et ut PE ad KM , ita PL solidum ad solidum KO . Et ut igitur solidum AB ad solidum EX , ita EX ad PL , et PL ad KO . Si autem quatuor sint magnitudines deinceps proportionales, prima ad quartam triplicatam proportionem habet ejus, quam habet ad secundam*. Ergo et AB solidum ad solidum KO triplicatam habet proportionem ejus, quam AB ad EX . Sed ut AB ad EX , ita AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK ; et AE recta linea ad ipsam EK . Quare et AB solidum ad solidum KO triplicatam proportionem habebit ejus, quam AE habet ad EK . Æquale autem est solidum KO solidum CD , et recta linea EK rectæ CF est æqualis. Ergo et AB solidum ad solidum CD triplicatam habet proportionem ejus, quam latus ipsius homologum AE habet ad CF homologum latus. *Q. E. D.*

Cor. Ex hoc manifestum est, si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad quartam, ita esse solidum parallelepipedum, quod sit a primâ, ad solidum, quod a secundâ, simile, et similiter descriptum; quoniam et prima ad quartam triplicatam proportionem habet ejus, quam habet ad secundam.

* SCHOLIUM.

Quod in hac propositione demonstrandâ Euclides assumpsit, proportionum, quæ eadem inter se sunt, earum triplicatas quoque inter se easdem esse; ut et ejus contrarium, proportionem inter se easdem esse, quarum triplicatæ

A ————— B ————— C ————— D —————
 E ————— F ————— G ————— H —————

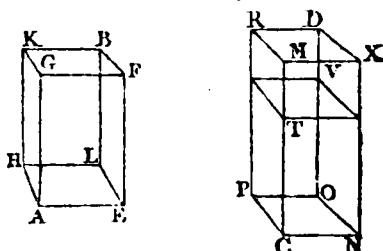
plicatæ sunt eædem; operæ pretium facturi sumus, si brevi demonstratione utrumque confirmemus, cum sine confirmatione temere assumi nonnulli judicarint. Primum dico, proportionum, quæ inter se eædem sunt, easdem esse triplicatas. Sint quatuor A, B, C, D continue proportionales, et aliæ quatuor E, F, G, H continue proportionales. Ita proportio primæ A ad quartam D triplicata erit ejus, quam prima A habet ad secundam B; et proportio primæ E ad quartam H triplicata ejus, quam prima eadem E habet ad secundam F ^{7. Def. 11.} Sit autem A ad B, ut E ad F. Erit igitur et B ad C, ut ^{quinti.} F ad G; et C ad D ut G ad H. Quare ex æquo A ad D ut E ad H ^{2.} Proportionum igitur, quæ eædem inter se sunt, earum eædem erunt triplicatæ. Sed positis ut prius quatuor proportionalibus A, B, C, D, item aliis quatuor E, F, G, H; sit A ad D, ut E ad H. Dico et A ad B ut E ad F. Non enim. A igitur vel major vel minor quam ad B in ratione E ad F. Sit major primum. Erit igitur et B major quam ad C ut F ad G; et C major quam ad D ut G ad H ^{3.} Minor itaque ali- ^{13. quinti.} qua quam A habet ad B rationem eam, quam E ad F ^b; ^b Def. 7. et B ad majorem quam C rationem eam, quam F ad G ^c. ^{quinti.} Ex æquo igitur minor quam A ad majorem quam C rationem habet, quam E ad G. A igitur ad majorem quam C majorem rationem habet, quam E ad G. Omnino igitur ad ipsam C longe majorem. Pari ratione, cum major sit A ad C, quam ut E ad G, et C major quam ad D ut G ad H, ostendetur A longe major quam ad D ut E ad H. Quod est absurdum; cum A sit ad D, ut E ad H. Non igitur minor quam A habebit ad B rationem eam, quam E ad F. Eodemque modo ostendetur neque major. Est igitur A ad B, ut E ad F. Proportionibus igitur, quarum triplicatæ sunt eædem, inter se eædem erunt.

[XXXIV.]

PROP. XXXIV. THEOR.

Æqualium solidorum parallelepipedorum reciprocantur bases et altitudines; et quorum solidorum parallelepipedorum reciprocantur bases et altitudines, ea inter se sunt æqualia.

Sint æqualia solida parallelepipeda AB , CD . Dico ipsorum bases et altitudines reciprocari, hoc est, ut EH basis ad basim NP , ita esse altitudinem solidi CD ad solidi AB altitudinem. Sint enim primo stantes AG , EF , LB , HK ; CM , NX , OD , PR ad rectos angulos basibus ipsorum. Dico ut EH basis ad basim NP , ita esse CM ad AG .



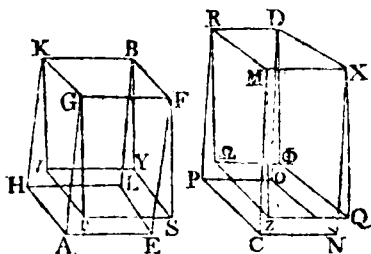
Capiatur enim in CM ipsi AG æqualis CT ; et a basi quidem NP , altitudine autem CT , solidum parallelepipedum VC compleatur. Quoniam igitur solidum AB solidi CD est æquale, aliud autem aliquod est VC , et
^e 7. quinti. æqualia ad idem eandem habent proportionem^e; erit ut AB solidum ad solidum CV , ita CD solidum ad solidum CV . Sed ut AB solidum ad solidum CV , ita basis EH
^e 32. hujus. ad NP basim^d; æque alta enim sunt AB , CV solida. Ut autem solidum CD ad ipsum CV , ita MP basis ad
^e 25. hujus. basim PT ^e, et MC ad CT ^f. Et igitur ut basis EH ad
^f 1. sexti. NP basim, ita MC ad CT . Est autem CT æqualis AG . Ergo et ut EH basis ad basim NP , ita MC ad AG . Quare solidorum parallelepipedorum AB , CD bases et altitudines reciprocantur.

Rursum solidorum parallelepipedorum AB , CD bases et altitudines reciprocantur: sitque ut EH basis ad basim NP , ita solidi CD altitudo ad altitudinem solidi AB . Dico solidum AB solidi CD æquale esse. Ponatur ipsi AG æqualis rursus CT , et similiter solidum CV compleatur. Itaque quoniam est ut EH basis ad basim NP , ita MC ad ipsam AG ; æqualis autem est AG ipsi CT : erit ut basis EH ad NP basim, ita MC ad CT . Sed ut
^e 32. hujus. basis EH ad NP basim, ita AB solidum ad solidum VC ^e;

æq^u

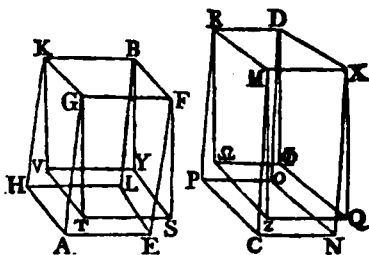
æque alta enim sunt solida AB , CV . Ut autem MC ad CT , ita et MP basis ad basim PT , et solidum CD ad CV solidum^h. Et igitur ut solidum AB ad solidum CV , ^{h. i. sexti, et} ita CD solidum ad solidum CV ⁱ. Quod cum utrumque ^{25. hujus.} solidorum AB , CD ad ipsum CV eandem proportionem ^{11. quinti.} habeat; erit AB solidum solido CD æquale^k. $Q. E. D.$ ^{k. 9. quinti.}

Non sint autem stantes FE , BL , GA , KH ; XN , DO , MC , RP ad rectos angulos basibus solidorum. Dico et



fic, æqualibus existentibus solidis AB , CD , bases et altitudines reciprocari. Scilicet ut EH basis ad basim NP , ita esse altitudinem solidi CD ad solidi AB altitudinem. Ducantur enim a punctis F , G , B , K ; X , M , D , R ad plana basium EH , NP perpendiculares, quæ planis in punctis s , t , y , v ; q , z , q , ϕ occurrant; et compleantur solida FV , XQ . Itaque solidum AB solido BT est æquale; in eadem namque sunt basi FK , et eadem altitudine, stantes autem non sunt in eisdem rectis lineis^l. Pari ratione solidum DC est æquale solido DZ . Erit igitur et solidum BT solido DZ æquale. Æqualium autem solidorum parallelepipedorum, quorum altitudines basibus ipsorum sunt ad rectos angulos, bases et altitudines reciprocantur^m. Est igitur ut FK basis ad basim XR , itaⁿ Ex ante solidi DZ altitudo ad altitudinem solidi BT . Atqui est ^{demon-}stratis. basis quidem FK basi EH æqualis, basis vero XR æqualis basi NP ^o. Quare ut EH basis ad basim NP , ita^p 24. hujus. est altitudo solidi DZ ad solidi BT altitudinem. Eadem autem sunt altitudines solidorum DZ , DC , itemque solidorum BT , BA . Est igitur ut EH basis ad basim NP , ita solidi DC altitudo ad altitudinem solidi AB . Ergo solidorum parallelepipedorum AB , CD bases et altitudines reciprocantur.

Rurfus solidorum parallelepipedorum AB , CD bases
et



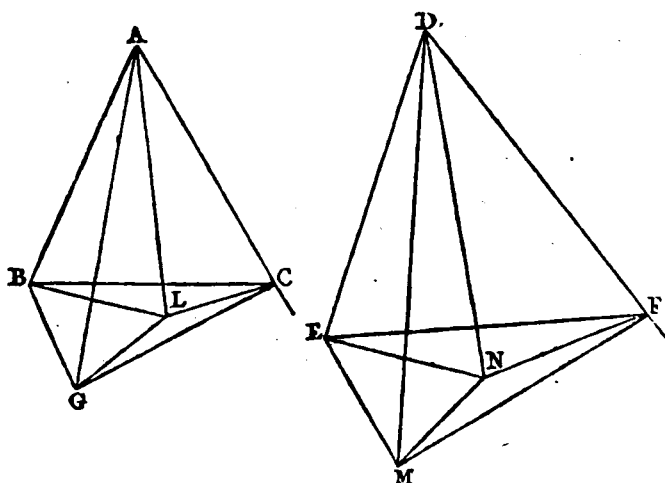
et altitudines reciprocentur; fitque ut EH basis ad basim NP , ita altitudo solidi CD ad solidi AB altitudinem. Dico solidum AB solido CD æquale esse. Iisdem namque constructis, quoniam ut EH basis ad basim NP , ita solidi CD altitudo ad altitudinem solidi AB ; et basis quidem EH est æqualis basi FK ; NP vero ipsi XR : erit ut FK basis ad basim XR , ita altitudo solidi CD ad solidi AB altitudinem. Eadem autem sunt altitudines solidorum AB , BT ; necnon ipsorum CD , DZ . Est igitur ut FK basis ad basim XR , ita solidi DZ altitudo ad altitudinem solidi BT . Quare solidorum BT , DZ parallelepipedorum bases et altitudines reciprocantur. Quorum autem solidorum parallelepipedorum altitudines sunt ad rectos angulos basibus ipsorum, et bases et altitudines reciprocantur; ea inter se sunt æqualia. Ergo BT solidum solido DZ est æquale. Sed solidum quidem BT æquale est solido BA , etenim in eadem sunt basi FK , et eadem altitudine, stantes autem non sunt in eisdem rectis lineis. Pari autem ratione solidum DZ est æquale solido DC . Ergo et solidum AB solido CD est æquale. *Q. E. D.*

[XXXV.]

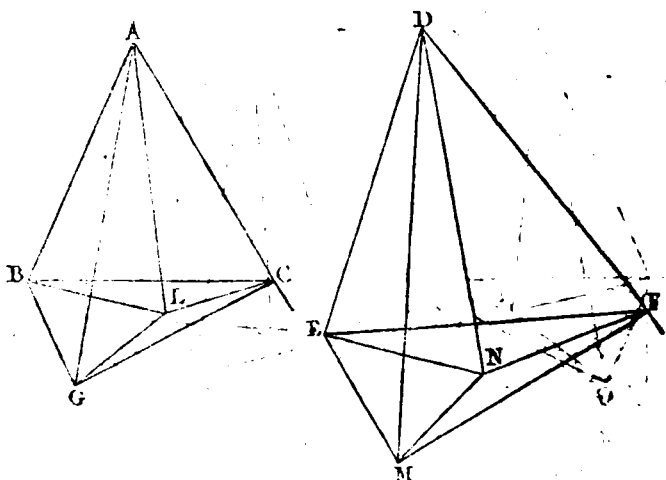
PROP. XXXV. THEOR.

Si sint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ insistant, quæ cum rectis lineis a principio positis angulos contineant æquales, alterum alteri; in sublimibus autem sumantur quævis puncta, atque ab ipsis ad plana, in quibus sunt anguli, perpendiculares ducantur; et a punctis, quæ a perpendicularibus sunt in planis, ad primos angulos jungantur rectæ lineæ: cum sublimibus æquales angulos continebunt.

Sint duo anguli rectilinei æquales BAC , EDF ; et a punctis A , D sublimes rectæ lineæ AG , DM constituentur, quæ



quæ cum rectis lineis a principio positis æquales angulos contineant, alterum alteri: angulum quidem MDE æqualem angulo GAB , angulum vero MDF angulo GAC æqualem; et sumantur in ipsis AG, DM quævis puncta G, M , a quibus ad plana per BAC, EDF ducantur perpendiculares GL, MN , occurrentes planis in punctis L, N ; et LA, ND jungantur. Dico angulum GAL angulo MDN æqualem esse. A puncto enim L ad rectas AB, AC deducantur ad perpendiculum LB, LC . A puncto quoque N in rectas DE, DF deducantur ad perpendiculum NE, NF . Et jungantur $GB, GC; ME, MF$. Jungantur quoque BC, EF . Ita rectæ GB, GC rectis AB, AC , necnon ME, MF rectis DE, DF , ad perpendiculum erunt¹. In^{Cor. 1.^a} triangulis igitur ABG, DEM æquales sunt anguli^{11. hujus.} ABG, DEM ; rectus enim uterque. Angulus autem BAG angulo EDM æqualis^k. Reliquus igitur AGB ^k ex hyp. reliquo DMR æqualis, et triangulum ABG triangulo DEM simile¹. Quare AB ad DE , et BG ad EM ,^{4. sexti.} ut AG ad DM . Pari ratione, propter angulos GCA, MFD rectos, angulosque CAG, FDM inter se æquales, simile erit triangulum ACG triangulo DFM ; et AC ad DF , et CG ad FM , ut AG ad DM . Jam vero cum sit AB ad AG , ut DE ad DM , et AG ad AC , ut DM ad DF ; ex æquo erit AB ad AC , ut DE ad DF . Angulus autem BAC angulo EDF æqualis^k. Triangula igitur $BAC,$



- BAC, EDF habent angulum angulo æqualem, et latera circa æquales angulos proportionalia. *Æquiangula igitur sunt triangu-
la BAC, EDF , et æquales habent angulos, quibus latera homologa subtenduntur^a. Angulus igitur ABC angulo DEF est æqualis, et angulus ACB angulo DFE . Præterea latus BC erit ad latus EF , ut AB ad DE , et AC ad DF ^a. Rursum cum æquales sint anguli ABL, DEN , rectus enim uterque^o, æquales item ABC, DEF , et reliquus CBL reliquo FEN æqualis erit. Pari ratione propter angulos ACL, DFN rectos, angulosque ACB, DFE æquales, anguli BCL, FEN inter se æquales erunt. *Æquiangula igitur sunt triangu-
la BLC, ENF . Latera igitur circa æquales angulos proportionalia habent^a. Quare BL est ad EN , ut BC ad EF . Sed BC est ad EF , ut AB ad DE , et AB ad DE , ut BG ad EM . Est igitur BL ad EN , ut BG ad EM ^b. Sed cum rectæ GL, MN ad perpendicularum sint planis BAC, EDF , in quibus sunt rectæ LB, NE , recti sunt anguli GLB, MNE ^c. Dico igitur triangu-
la GLB, MNE angulum angulo æqualem habent (rectum utique GLB recto MNE), et circa alios GBL, MEN latera proportionalia, nempe BL ad EN , ut BG ad EM ; reliquos autem angulos BGL, EMN , rectis singulatim minores. *Æquiangula igitur sunt triangu-
la GLB, MNE , et æquales habent angulos, circa quos latera sunt proportionalia^d; angulum scilicet GBL angulo MEN , et reliquum***
6. sexti.
4. sexti.
- Per con-
struct.
11. quinti.
- Def. 3.
hujus.
7. sexti.

reliquum BGL reliquo EMN ¹. Similia igitur sunt tri- 7. sexti.
 angula OLB , MNE , et GB est ad ME , ut GL ad MN ¹. 4. sexti.
 Sed GB est ad ME , ut AG ad DM (id enim initio
 ostensum.) Quare GL est ad MN , ut AG ad DM ¹. 11. quinti.
 Sed cum rectæ GL , MN ad perpendicularum sint planis
 BAC , EDF , in quibus sunt rectæ LA , ND , recti sunt
 anguli GLA , MND . Duo igitur triangula GLA , MND
 angulum angulo æqualem habent (rectum utique GLA
 recto MND) et circa alios angulos AGL , DMN latera
 proportionalia; nempe AG ad DM , ut GL ad MN ;
 angulos autem reliquos GAL , MDN rectis singulatim
 minores. Æquiangula igitur sunt triangula GLA ,
 MND , et æquales habent angulos, circa quos latera sunt
 proportionalia¹. Nempe angulum AGL angulo DMN ,
 et reliquum GAL reliquo MDN æqualem. Anguli
 igitur GAL , MDN sunt inter se æquales. Si sint igitur
 duo anguli plani &c. *Q. E. D.*

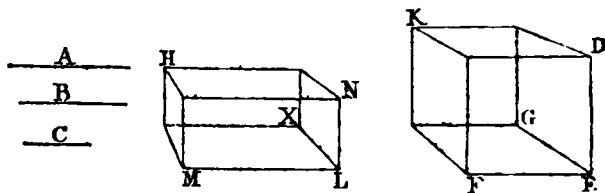
Cor. Ex hoc manifestum est, si sint duo anguli plani
 rectilinei æquales, ab ipsis autem constituentur sublimes
 rectæ lineæ æquales, quæ cum rectis lineis a principio
 positis æquales contineant angulos, alterum alteri; per-
 pendiculares, quæ ab ipsis ad plana, in quibus sunt primi
 anguli, ducantur, inter se æquales esse. Nam triangu-
 lorum similium GAL , MDN si latera homologa GA ,
 MD inter se æqualia sint; homologa etiam GL , MN
 erunt inter se æqualia.

PROP. XXXVI. THEOR.

[XXXVI.]

*Si tres rectæ lineæ proportionales sint; solidum parallele-
 pipedum, quod a tribus fit, æquale est solidi parallepipedo,
 quod fit a mediâ, æquilatere quidem, æquiangulo autem
 antedicto.*

Sint tres rectæ lineæ proportionales A , B , C ; fit scilicet
 ut A ad B , ita B ad C . Dico solidum, quod fit ex ipsis
 A , B , C , æquale esse solidi, quod fit ex B , æquilatere qui-
 dem, æquiangulo autem antedicto. Exponatur solidus
 angulus ad E , contentus tribus angulis planis DEG , GEF ,
 FED ; et ipsi quidem B ponatur æqualis unaquæque
 ipsarum DE , GE , EF ; et solidum parallelepipedum EK
 compleatur. Rectæ autem A ponatur æqualis LM ; et ad
 rectam lineam LM , et ad punctum in ipsa L , constituatur
 angulo solidi ad E æqualis angulus, contentus tribus
 planis



- * 26. hujus. planis $N L X$, $X L M$, $M L N$ ²; et ponatur ipsi quidem B æqualis $L N$, ipsi vero C æqualis $L X$. Quoniam igitur est ut A ad B , ita B ad C , æqualis autem est A ipsi $L M$, et B unicuique ipsarum $L N$, $E F$, $E G$, $E D$, et C ipsi $L X$; erit ut $L M$ ad $E F$, ita $G E$ ad $L X$; et circum æquales angulos $M L X$, $G E F$ latera sunt reciproca. Ergo $M X$ parallelogrammum parallelogrammo
- * 14. sexti. $G F$ est æquale⁷. Et quoniam duo anguli plani rectilinei æquales sunt $G E F$, $X L M$, et in ipsis sublimes rectæ lineæ constituuntur $L N$, $E D$ æquales inter se, et cum rectis lineis a principio positis æquales continentes angulos, alterum alteri; erunt perpendiculares, quæ a punctis N , D ad plana per $X L M$, $G E F$ ducuntur, inter se æquales². Ergo solida $L H$, $E K$ eadem sunt altitudine. Quæ vero in æqualibus basibus sunt solida parallelepipeda, et eadem altitudine, inter se sunt æ-
- * Cor. 35. qualia⁸. Ergo solidum $H L$ æquale est solido $E K$. Atqui est solidum quidem $H L$, quod fit a tribus A , B , C , solidum vero $E K$, quod fit ex B . Si igitur tres rectæ lineæ proportionales sint, solidum parallelepipedum, quod fit a tribus, æquale est solido parallelepipedo, quod fit &c. Q. E. D.

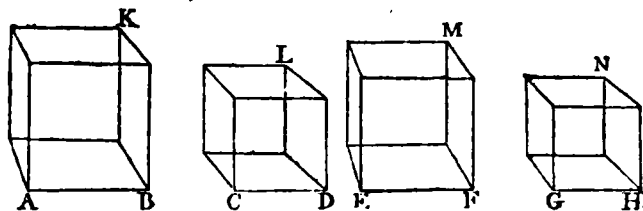
[XXXVII.]

PROP. XXXVII. THEOR.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales sint; et quæ ab ipsis fiunt solida parallelepipeda similia et similiter descripta proportionalia erunt. Et si quæ ab ipsis fiunt solida parallelepipeda similia et similiter descripta proportionalia sint; et ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales $A B$, $C D$, $E F$, $G H$, sit scilicet ut $A B$ ad $C D$, ita $E F$ ad $G H$, et describantur ab ipsis $A B$, $C D$, $E F$, $G H$ similia et similiter posita solida parallelepipeda $K A$, $L C$, $M E$, $N G$. Dico ut $K A$ ad $L C$, ita esse $M E$ ad $N G$. Quoniam enim solidum parallelepipedum $K A$ simile est ipsi $L C$, habebit

K A



KA ad LC triplicatam proportionem ejus, quam AB habet ad CD ^b. Eadem ratione, et solidum ME ad ipsum NG triplicatam proportionem habebit ejus, quam habet EF ad GH ^b. Atqui est ut AB ad CD , ita EF ad GH . Ut igitur AK ad LC , ita ME ad NG .

Sed fit ut solidum AK ad solidum LC , ita ME solidum ad solidum NG . Dico, ut recta linea AB ad rectam CD , ita esse rectam EF ad ipsam GH . Quoniam enim rursus AK ad LC triplicatam proportionem habet ejus, quam AB habet ad CD ^b; habet autem et ME ad NG triplicatam proportionem ejus, quam EF ad GH ; atque ut AK ad LC , ita ME ad NG : erit ut AB ad CD , ita EF ad GH . Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales sint, &c. *Q. E. D.*

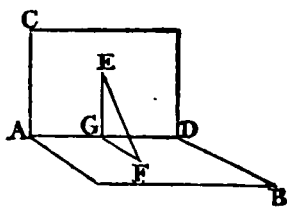
PROP. XXXVIII. THEOR.

XXXVIII.]

Si planum ad planum rectum sit; et ab aliquo puncto eorum quæ sunt in uno plano, ad alterum planum perpendicularis ducatur: ea in communem planorum sectionem cadet.

Planum nempe CD ad planum AB rectum sit, communis autem eorum sectio sit AD , et in ipso CD plano, quodvis punctum E sumatur.

Dico perpendicularem, quæ a puncto E ad planum AB ducitur, cadere in ipsam AD . Non enim; sed, si fieri potest, cadat extra, ut EF ; et plano



AB in puncto F occurrat: a puncto autem F ad DA in plano AB perpendicularis ducatur FG , quæ quidem et plano CD ad rectos angulos erit^c; et EG jungatur. Quoniam igitur recta FG plano CD est ad rectos angulos; contingit autem ipsam recta linea EG , quæ est in eodem

H h

C D

^c Def. 4. hujus.

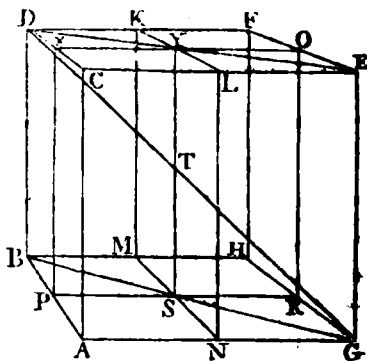
- ^d Def. 3. CD plano: erit angulus FGE rectus^d. Sed et EF plano AB ad rectos angulos est; rectus igitur est angulus EPG . Quare trianguli EPG duo anguli duobus rectis sunt æquales; quod est absurdum^e. Non igitur a puncto E ad AB planum perpendicularis ducta extra rectam lineam DA cadet. Ergo in ipsam cadat necesse est. Si igitur planum ad planum rectum sit, &c. $Q. E. D.$

[XXXIX.]

PROP. XXXIX. THEOR.

Si in solido parallelepipedo oppositorum planorum latera secantur bifariam, per sectiones vero plana ducantur; communis planorum sectio, et solidi parallelepipedi diagonalis, sese bifariam secabunt.

In solido enim parallelepipedo AF , oppositorum planorum CF , AH latera bifariam secantur in punctis



- K, L, M, N, X, O, P, R . Et jungantur $KL, MN; KM, LN; XO, PR; XP, OR$. Æquales sunt rectæ DK, CL , æqualium utique DF, CE dimidiæ. Sed et paralleleæ. Paralleleæ igitur et æquales KL, DC , quæ illas^f DK, CL conjungunt^f. Simili modo ostenduntur MN, BA paralleleæ et æquales. Jam vero cum KL parallela sit ipsi DC , erit et BA , quæ eidem DC est parallela, parallela ipsi KL . Sed eadem BA ipsi MN est parallela. Quare KL, MN inter se sunt paralleleæ. Quare et rectæ KM, LN , quæ puncta $K, M; L, N$, in parallelis KL, MN sumpta, conjungunt, in eodem sunt, in quo ipsæ paralleleæ, plano^h. Plana igitur est figura $KMNL$. Simili modo plana ostendetur figura $XPOR$. Oppositorum

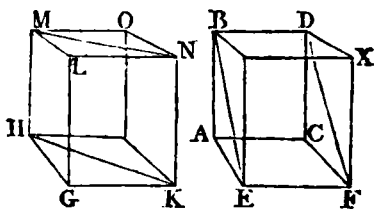
fitorum igitur planorum CF , AH lateribus in punctis
 K , L , M , N , X , O , P , R bifariam divisus, per sectiones
 plana ducuntur KN , XR . Communis planorum sectio
 sit YS , et solidi parallelepipedī diagonalis sit DG . Dico
 YS , DG sese bifariam secare. Jungantur enim DY , YE ,
 BS , SG . Quoniam igitur DX parallela est ipsi OE , al-
 terni anguli DXY , YOE inter se æquales sunt^a. Et^a 29. primi.
 quoniam DX quidem est æqualis OE , XY vero ipsi YO ,
 et angulos æquales continent; erit basis DY æqualis
 basi YE ; et triangulum DXY triangulo YOE , et re-
 liqui anguli reliquis angulis æquales¹. Angulus igitur¹ 4. primi.
 XYD est æqualis angulo OYE , et ob id recta linea est
 DYE ^k, et DY , YE sunt æquales. Eadem ratione, et^k 14. primi.
 BSG recta est, et BS æqualis SG . Et quoniam CA
 ipsi DB æqualis est et parallela, et eadem CA æqualis et
 parallela ipsi EG ; erit et DB ipsi EG æqualis et paral-
 lela; et ipsas conjungunt rectæ lineæ DE , GB : parallela
 igitur est DE ipsi BG ^l. Et sumpta sunt in utrāque ip-^l 33. primi.
 sarum quævis puncta D , Y , G , S , et junctæ sunt DG ,
 YS . Ergo DG , YS in uno sunt plano^m; neque tamen^m 7. hujus.
 inter se parallelæ; nimirum cum YS (ipsi KM paral-
 lela) parallela erit DB , cui non est parallela DG . Rectæ
 igitur DG , YS , quæ in eodem plano non sunt parallelæ,
 sibi invicem in puncto aliquo occurrent. Occurrant in
 T . Dico igitur in T bifariam dividi; hoc est, YT ipsi
 TS , DT vero ipsi TG æqualem esse. Nam cum DE sit
 parallela BG , erit et EDT angulus angulo BGT æqualis,
 alterni enim sunt^b. Est autem et DTY angulus æqualis
 ipsi GTS ^a. Duo igitur sunt triangula DTY , GTS duos^a 15. primi.
 angulos duobus angulis æquales habentia, et unum
 latus uni lateri æquale, quod uni æqualium angulorum
 subtenditur, videlicet DY ipsi GS : dimidia enim sunt
 ipsorum DE , BG . Ergo et reliqua latera reliquis late-
 ribus æqualia habebunt^o. Quare DT quidem est æ-^o 26. primi.
 qualis TG , YT vero ipsi TS . Si igitur in solido paral-
 lelepipedo, &c. *Q. E. D.*

[XL.]

PROP. XL. THEOR.

Si sint duo prismata æque alta, quorum unum quidem basim habeat parallelogrammum, alterum vero triangulum, et parallelogrammum duplum sit trianguli; ea inter se æqualia erunt.

Sint prismata æque alta $ABCDEF$, $GHKLMN$.
Et unum quidem basim habeat parallelogrammum AF ,



alterum vero GHK triangulum, et duplum sit AF parallelogrammum trianguli GHK . Dico prisma $ABCDEF$ prismati $GHKLMN$ æquale esse. Compleantur enim AX , GO solida. Et quoniam parallelogrammum AF trianguli GHK est duplum; est autem et HK parallelogrammum duplum trianguli GHK : erit AF parallelogrammum parallelogrammo HK æquale. Quæ vero in æqualibus sunt basibus solida parallelepipeda, et eadem altitudine, inter se æqualia sunt⁴¹. Æquale igitur AX solidum solido GO . Atque est solidi quidem AX dimidium $ABCDEF$ prisma, solidi vero GO dimidium est prisma $GHKLMN$ ³¹. Ergo $ABCDEF$ prisma prismati $GHKLMN$ est æquale. Si igitur sint duo prismata æque alta, &c. Q. E. D.

EUCLIDIS

ELEMENTORUM

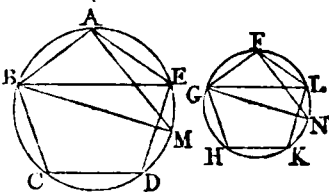
LIBER DUODECIMUS.

PROPOSITIO I. THEOREMA.

[I.]

Similia polygona circulis inscripta inter se sunt, ut diametrorum quadrata.

SINT circuli $ABCDE$, $FGHKL$, et in ipsis similia polygona $ABCDE$, $FGHKL$; diametri autem circulorum sint BM , GN . Dico ut quadratum ex BM ad quadratum ex GN , ita esse $ABCDE$ polygonum ad polygonum $FGHKL$.



Jungantur enim BE , AM , GL , FN . Et quoniam polygonum $ABCDE$ simile est polygono $FGHKL$; idcirco BAE angulus angulo GFL est æqualis, atque ut BA ad AE , ita est GF ad FL . Duo igitur triacula sunt BAE , GFL , unum angulum uni angulo æqualem habentia, videlicet angulum BAE angulo GFL ; circa æquales autem angulos latera proportionalia. Quare triangulum ABE triangulo FGI æquiangulum est^a; ac propterea angulus AEB æqualis^a 6. sexti. est angulo FLG . Sed angulus quidem AEB angulo AMB est æqualis^b; in eadem enim circumferentiâ^b 31. terti. consistunt. Angulus autem FLG æqualis est angulo FNG ^b. Ergo et AMB angulus est æqualis angulo FNG . Est autem et rectus angulus BAM æqualis recto GFN ^c. Quare et reliquus trianguli AMB angulus re-^c 31. terti. liquo trianguli FGN æqualis. Æquiangulum igitur est triangulum AMB triangulo FGN . Ergo ut BM ad GN , ita BA ad GF ^d. Sed proportionis quidem^d 4. sexti. BM ad GN duplicata est proportio quadrati ex BM ad quadratum ex GN ; proportionis vero BA ad GF du-

h h 3

plicata

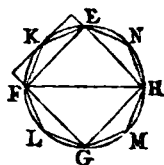
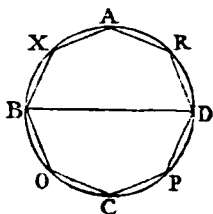
- 20. sexti. $FGHKL$: est igitur ut quadratum ex BM ad quadratum ex GN , ita polygonum $ABCDE$ ad $FGHKL$ polygonum. Quare similia polygona, quæ in circulis describuntur, inter se sunt, ut diametrorum quadrata. Q. E. D.

[II.]

PROP. II. THEOR.

Circuli inter se sunt, ut diametrorum quadrata.

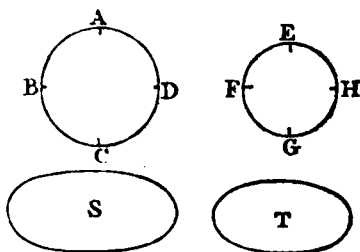
Sint circuli $ABCD$, $EFGH$, diametri autem ipsorum sint BD , FH . Dico ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH , ita esse circumulum $ABCD$ ad $EFGH$ circumulum. Si enim non ita fit; erit ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH , ita circulus $ABCD$, vel ad spatium aliquod minus circulo $EFGH$, vel ad majus. Sit primum ad minus, quod fit s . Et in circulo $EFGH$ describatur quadratum $EFGH$. Itaque descriptum in circulo quadratum majus est dimidio circuli $EFGH$; quoniam si per puncta E , F , G , H contingentes circumulum ducamus, erit descripti circa circumulum quadrati dimidium $EFGH$ †. Descripto autem circa circumulum quadrato minor est circulus. Ergo quadratum $EFGH$ majus est dimidio circuli $EFGH$. Secentur bifariam circumferentiæ EF , FG , GH , HE in punctis K , L , M , N : et EK , KF , FL , LG , GM , MH , HN , NE jungantur. Unumquodque igitur triangulorum EKF , FLG , GMH , $HN E$ majus est dimidio segmenti circuli, in quo consistit: quoniam si per puncta K , L , M , N contingentes circumulum ducamus, et parallelogramma, quæ sunt in rectas lineas EF , FG ,



† Nimirum quadratum circulo circumscriptum quadrato ex diametro circuli est æquale. Id enim ex constructione septimæ quarti manifestum est. Quadratum igitur circulo $EFGH$ circumscriptum quadrato ex FH est æquale. 31. tertii. Sed, propter angulum FEN in semicirculo rectum¹, quadratum ex FH quod 47. primi. dratis duobus ex FE , EN , simul sumptis, est æquale². Et cum æquales inter se sint rectæ FE , EN (quadrati utique inscripti latera) duo ex FE , EN quadrata, quadrati ex alterutro, id est, inscripti quadrati, duplo sunt æqualia. Quadratum igitur ex diametro FH , ac proinde quadratum circulo circumscriptum, inscripti duplum est. Et inscriptum vicissim dimidium circumscripti. GH ,

GH, HE, compleamus; erit unumquodque triangulorum EKF, FLG, GMH, HNE dimidium parallelogrammi, quod ad ipsum est^r. Sed segmentum minus^r 41. primi. est parallelogrammo. Quare unumquodque triangulorum EKF, FLG, GMH, HNE majus est dimidio segmenti circuli, in quo consistit. Hasce igitur circumferentias bifariam secantes, et jungentes rectas lineas, atque hoc semper facientes, relinquemus tandem quædam circuli segmenta, quæ minora erunt excessu, quo circulus EFGH ipsum s spatium superat. Etenim duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, si a majori auferatur majus quam dimidium, et ab eo, quod relinquitur, rursus majus quam dimidium, et hoc semper fiat; relinquetur tandem magnitudo aliqua, quæ minori magnitudine exposita sit minor^r. Itaque relictas^r 1. decimi. sint segmenta circuli EFGH in rectis lineis EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE, quæ minora sint excessu, quo circulus EFGH ipsum s spatium superat. Ergo reliquum EKFLGMHN polygonum majus erit spatium s. Describatur etiam in circulo ABCD, polygono EKFLGMHN simile polygonum AXBOCPDR. Est igitur ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita polygonum AXBOCPDR ad EKFLGMHN polygonum^b. Sed et ut quadratum ex BD ad quadratum^a 1. hujus. ex FH, ita ABCD circulus ad spatium s. Ergo et ut circulus ABCD ad spatium s, ita polygonum AXBOCPDR ad EKFLGMHN polygonum¹. 11. quinti. Major autem est circulus ABCD eo, quod in ipso est polygono. Quare et spatium s majus est polygono EKFLGMHN^k. Sed et minus^l. Quod fieri non^k 14. quinti. potest. Non igitur est ut quadratum ex BD ad¹ ex hyp. quadratum ex FH, ita

ABCD circulus ad spatium aliquod minus circulo EFGH. Similiter ostendemus neque esse ut quadratum ex FH ad quadratum ex BD, ita circulum EFGH ad aliquod spatium minus circulo ABCD. Dico igitur neque esse ut quadratum ex BD ad



H h 4 A B C D

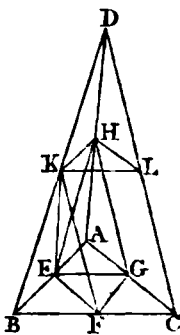
$A B C D$ ad aliquod spatium majus circulo $E F G H$. Si enim fieri potest, sit ad majus spatium s . Erit igitur invertendo ut quadratum ex $F H$ ad quadratum ex $B D$, ita spatium s ad $A B C D$ circulum. Sed quoniam s majus est $E F G H$ circulo; erit ut spatium s ad $A B C D$ circulum, ita circulus $E F G H$ ad aliquod spatium minus circulo $A B C D$. Ergo et ut quadratum ex $F H$ ad quadratum ex $B D$, ita $E F G H$ circulus ad aliquod spatium minus circulo $A B C D$, quod fieri non posse ostensum est. Non igitur ut quadratum ex $B D$ ad quadratum ex $F H$, ita est circulus $A B C D$ ad spatium aliquod majus $E F G H$ circulo. Ostensum autem est neque ad minus. Quare ut quadratum ex $B D$ ad quadratum ex $F H$, ita erit $A B C D$ circulus ad circulum $E F G H$. Circuli igitur inter se sunt, ut diametrorum quadrata. *Q. E. D.*

[III.]

PROP. III. THEOR.

Omnis pyramis, triangularem habens basim, dividitur in duas pyramides æquales et similes inter se, quæ triangulares bases habent, simileque toti; et in duo prismata æqualia; quæ quidem prismata dimidio totius pyramidis sunt majora.

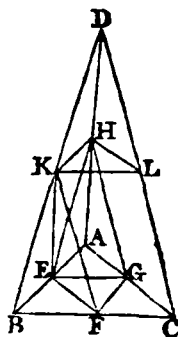
Sit pyramis, cujus basis quidem $A B C$ triangulum; vertex autem punctum D . Dico pyramidem $A B C D$ dividi in duas pyramides æquales et similes inter se, triangulares bases habentes, et similes toti; et in duo prismata æqualia; et duo prismata dimidio totius pyramidis esse majora. Secentur enim $A B$, $B C$, $C A$, $A D$, $D B$, $D C$ bitariam in punctis E , F , G , H , K , L ; et $E H$, $E G$, $G H$, $H K$, $K L$, $L H$, $E K$, $K F$, $F G$ jungantur. Quoniam igitur $A E$ quidem est æqualis $E B$, $A H$ vero ipsi $H D$; erit $E H$ ipsi $D B$ parallela¹. Eadem ratione et $H K$ est parallela ipsi $A B$. Parallelogramum igitur est $H E B K$. Quare $H K$ est æqualis $E B$. Sed $E B$ ipsi $A E$ est æqualis. Ergo et $A E$ ipsi $H K$ æqualis erit. Est autem et $A H$ æqualis $H D$. Duæ igitur $A E$, $A H$ duabus $K H$, $H D$ æquales sunt, altera² alteri, et angulus $E A H$ æqualis angulo $K H D$ ³; basis igitur



igitur EH basi KD est æqualis⁹. Quare triangulum⁴ 4. primi. AEH æquale est et simile triangulo HKD . Eadem ratione et triangulum AHG triangulo $HL D$ æquale est et simile. Et quoniam duæ rectæ lineæ sese tangentes EH , HG duabus rectis lineis sese tangentibus KD , DL parallelæ sunt, non autem in eodem plano, æquales angulos continebunt⁷. Ergo angulus EHG est æqualis¹⁰ 10. undecimi. angulo KDL . Rursus quoniam duæ rectæ lineæ EH , HG duabus KD , DL æquales sunt, altera alteri, et angulus EHG æqualis angulo KDL ; erit basis EG basi KL æqualis¹: æquale igitur est et simile triangulum⁴ 4. primi. EHG triangulo KDL . Eadem ratione et AEG triangulum est æquale et simile triangulo HKL . Planum autem DBA , seu DKH , planis parallelis HKL , ABC similiter est inclinatum. Et eisdem planis parallelis planum DCA , seu DLH , similiter est inclinatum. Eisdem etiam planum DBC , seu DKL , similiter est inclinatum. Quare pyramis, cujus basis quidem est AEG triangulum, vertex autem punctum H , æqualis et similis est pyramidi, cujus basis est triangulum HKL , et vertex D punctum. Simili modo ostendetur pyramis, cujus basis quidem triangulum ABC , vertex autem punctum D , similis pyramidi, cujus basis triangulum HKL , et vertex punctum D . Planis enim numero æqualibus et similibus et similiter inclinatis continentur. Sed pyramis, cujus basis quidem HKL triangulum, vertex autem punctum D , ostensa est similis pyramidi, cujus basis triangulum AEG , et vertex H punctum. Quare et pyramis, cujus basis triangulum ABC , et vertex punctum D , similis est pyramidi, cujus basis AEG triangulum, et vertex punctum H . Utraque igitur ipfarum $AEGH$, $HKLD$ pyramidum similis est toti pyramidi $ABCD$. Et quoniam BF est æqualis FC , erit $EBFG$ parallelogrammum duplum trianguli GFC ¹. 41. primi. Et quoniam duo prismata æque alta sunt, quorum unum quidem basim habet parallelogrammum, alterum vero triangulum, estque parallelogrammum duplum trianguli; erunt ea prismata inter se æqualia². Ergo prisma, 40. undecimi. contentum duobus triangulis BKF , EHG , et tribus^{decimi}. parallelogrammis $EBFG$, $EBKH$, $KHGF$, est æquale prismati, quod duobus triangulis GFC , HKL , et tribus parallelogrammis $KFCL$, $LCGH$, $HKFG$ continetur. Et manifestum est utrumque ipforum prismaticum, et cujus basis est $EBFG$ parallelogrammum, opposita autem ipsi HK recta linea, et cujus basis est GFC triangulum,

^a Def. 10.
undecimi.

gulum, et oppositum ipsi triangulum $K L H$, majus esse utraq̃ue pyramidum, quarum bases quidem $A E G$, $H K L$ triangu-
la, vertices autem puncta H , D : quoniam si jungamus $E F$, $E H$ rectas lineas, prisma quidem, cujus basis est $E B F G$ parallelogrammum, et opposita ipsi recta linea $K H$, majus est pyramide, cujus basis $E B F$ triangulum, vertex autem punctum K . Sed pyramis, cujus basis triangulum $A E G$, et vertex punctum H ^a; æqualibus enim et similibus planis continentur, et similiter inclinatis. Quare et prisma, cujus basis parallelogrammum $E B F G$, opposita autem ipsi recta linea $H K$, majus est pyramide, cujus basis $A E G$ triangulum, et vertex punctum H . Prisma vero, cujus basis parallelogrammum $E B F G$, et opposita ipsi recta linea $H K$, est æquale prismati, cujus basis $G F C$ triangulum, et ipsi oppositum triangulum $H K L$: et pyramis, cujus basis triangulum $A E G$, vertex autem H punctum, est æqualis pyramidi, cujus basis $H K L$ triangulum, et vertex punctum D . Ergo duo prismata, de quibus dictum est, sunt majora duabus dictis pyramidibus, quarum bases triangu-
la $A E G$, $H K L$, vertices autem H , D puncta. Tota igitur pyramis, cujus basis $A B C$ triangulum, vertex autem punctum D , divisa est in duas pyramides æquales, et similes inter se, et similes toti: et in duo prismata æqualia: suntque duo prismata æqualia dimidio totius pyramidis majora. Q. E. D.



[IV.]

PROP. IV. THEOR.

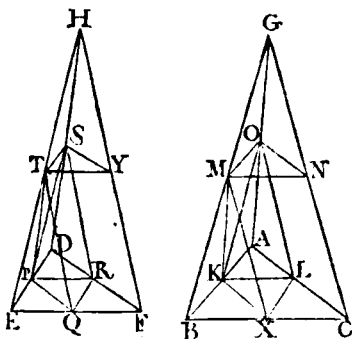
Si sint duæ pyramides æque altæ, quæ triangulares bases habeant, dividatur autem utraq̃ue ipsarum, et in duas pyramides æquales inter se, similesque toti, et in duo prismata æqualia; et factarum pyramidum utraq̃ue eodem modo dividatur, atque hoc semper fiat: erit ut unius pyramidis basis ad basim alterius, ita et in unâ pyramide prismata omnia ad prismata omnia in alterâ pyramide multitudine æqualia.

Sint duæ pyramides æque altæ, quæ triangulares bases habeant $A B C$, $D E F$, vertices autem sint puncta G , H ;
et

et dividatur utraque ipsarum in duas pyramides æquales

inter se, simileque toti, et in duo prismata æqualia; et factarum pyramidum utraque eodem modo divisa intelligatur: atque hoc semper fiat.

Dico ut ABC basis ad basim DEF , ita esse prismata omnia, quæ sunt in pyramide $ABCG$ ad prismata omnia, quæ in pyramide $DEFH$, multitudine æqualia. Quoniam enim BX quidem



est æqualis XC , AL vero æqualis LC ; erit XL ipsi AB parallela², et triangulum ABC triangulo LXC simile.² 2. sexti.

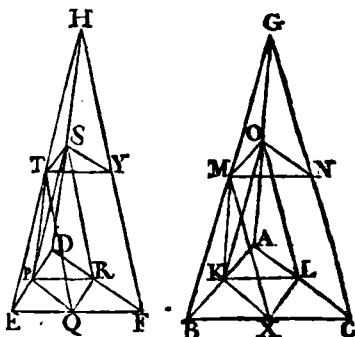
Eadem ratione et triangulum DEF simile est triangulo RQF . Et quoniam BC quidem est dupla CX , EF vero dupla ipsius FQ , ut BC ad CX , ita erit EF ad FQ . Et descripta sunt ab ipsis BC , CX similia et similiter posita rectilinea ABC , LXC ; ab ipsis vero EF , FQ similia et similiter posita rectilinea DEF , RQF . Est igitur ut BAC triangulum ad triangulum LXC , ita triangulum DEF ad RQF triangulum⁷; et permutando ut trian-^{22. sexti.}

gulum ABC ad triangulum DEF , ita LXC triangulum ad triangulum RQF . Sed ut LXC triangulum ad triangulum RQF , ita prisma, cujus basis est triangulum LXC , oppositum autem ipsi OMN , ad prisma, cujus basis RQF triangulum, et oppositum ipsi STY ². Ut^{28. et 32. undecimi.}

igitur ABC triangulum ad triangulum DEF , ita prisma, cujus basis est triangulum LXC , oppositum autem ipsi OMN , ad prisma, cujus basis RQF triangulum, et oppositum ipsi STY ². Et quoniam duo prismata, quæ in^{11. quinti.} pyramide $ABCG$ inter se æqualia sunt, sed et quæ in pyramide $DEFH$ prismata inter se sunt æqualia; erit ut prisma, cujus basis parallelogrammum $KLXB$, opposita vero ipsi recta linea MO , ad prisma, cujus basis LXC triangulum, et oppositum ipsi OMN , ita prisma, cujus basis parallelogrammum $EPRQ$, et opposita recta linea ST , ad prisma, cujus basis RQF triangulum, oppositum vero ipsi STY . Quare componendo, ut prismata $KBXLMO$, $LXCMNO$ ad prisma $LXCMNO$, ita

ita prismata $PEQRST$, $RQFSTY$ ad prismata $RQFSTY$.

Et permutando, ut prismata $KBXLMO$, $LXCOMN$ ad prismata $PEQRST$, $RQFSTY$, ita prismata $LXCMNO$ ad prismata $RQFSTY$. Ut autem prismata $LXCMNO$ ad prismata $RQFSTY$, ita ostensa est basis LXC ad RQF basim, et ABC basis ad basim DEF . Ergo et ut triangulum ABC ad triangulum



DEF , ita quæ in pyramide $ABCG$ duo prismata ad duo prismata, quæ in pyramide $DEFH$. Similiter autem, et si factas pyramides dividamus eodem modo velut $OMNG$, $STYH$, erit ut OMN basis ad basim STY , ita quæ in pyramide $OMNG$ duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide $STYH$. Sed ut OMN basis ad basim STY , ita basis ABC ad DEF basim. Et ut igitur ABC basis ad basim DEF , ita quæ in pyramide $ABCG$ duo prismata ad duo prismata, quæ in pyramide $DEFH$; et quæ in pyramide $OMNG$ duo prismata ad duo prismata, quæ in pyramide $STYH$; et quatuor ad quatuor. Eadem autem ostendentur et in factis prismatibus ex divisione pyramidum $AKLO$, et $DPRS$, et omnium simpliciter multitudine æqualium. $Q. E. D.$

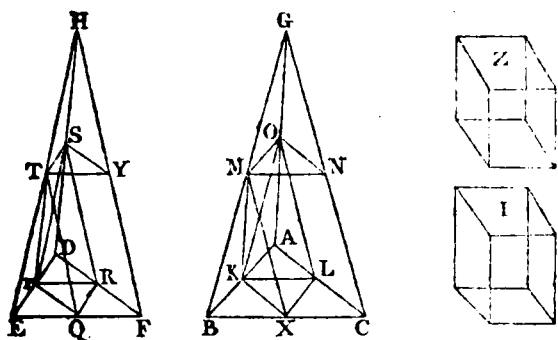
[V.]

PROP. V. THEOR.

Pyramides, quæ eâdem sunt altitudine, et triangulares bases habent, inter se sunt ut bases.

Sint eâdem altitudine pyramides, quarum bases quidem triangula ABC , DEF , vertices autem puncta G , H . Dico ut ABC basis ad basim DEF , sic esse pyramidem $ABCG$ ad $DEFH$ pyramidem. Si enim non ita sit, erit ut ABC basis ad basim DEF , sic $ABCG$ pyramis, vel ad solidum minus pyramide $DEFH$, vel ad majus. Sit primum ad solidum minus, sitque Z . Et dividatur pyramis $DEFH$ in duas pyramides æquales inter se, et similes toti, et in duo prismata æqualia. Sunt duo igitur prismata dimidio totius pyramidis majora^a. Et rur-

^a 3. hujus.



fus pyramides ex divisione factæ similiter dividantur,
 atque hoc semper fiat, quoad sumantur quædam pyra-
 mides a pyramide $DEFH$, quæ sint minores excessu,
 quo pyramis $DEFH$ solidum z superat. Itaque suman-
 tur, et sint exempli causâ, pyramides $DP RS$, $ST YH$.
 Erunt igitur reliqua in pyramide $DEFH$ prismata so-
 lido z majora. Dividatur etiam $ABCG$ pyramis in
 totidem partes similes pyramidi $DEFH$. Ergo ut ABC
 basis ad basim DEF , ita quæ in pyramide $ABCG$ pris-
 mata ad prismata, quæ in pyramide $DEFH$ ^b. Sed ut ^{4. hujus.}
 ABC basis ad basim DEF , ita pyramis $ABCG$ ad soli-
 dum z . Et igitur ut $ABCG$ pyramis ad solidum z , ita
 quæ in pyramide $ABCG$ prismata ad prismata, quæ in
 pyramide $DEFH$. Major autem est pyramis $ABCG$
 prismatibus, quæ in ipsâ sunt. Ergo et solidum z
 prismatibus, quæ sunt in pyramide $DEFH$, est majus.
 Sed et minus ^c; quod fieri non potest. Non igitur ut ^{c ex prius}
 ABC basis ad basim DEF , ita est pyramis $ABCG$ ad ^{demon-}
 solidum aliquod minus pyramide $DEFH$. Similiter ^{stratis.}
 ostendemus neque ut DEF basis ad basim ABC , ita esse
 pyramidem $DEFH$ ad solidum aliquod pyramide $ABCG$
 minus. Dico igitur neque esse ut ABC basis ad basim
 DEF , ita $ABCG$ pyramidem ad aliquod solidum majus
 pyramide $DEFH$. Si enim fieri potest, sit ad majus,
 videlicet ad solidum I . Erit igitur invertendo ut DEF
 basis ad basim ABC , ita solidum I ad $ABCG$ pyramidem.
 Cum autem solidum I majus est pyramide $DEFH$, erit
 ut solidum I ad $ABCG$ pyramidem, ita $DEFH$ pyramis
 ad solidum aliquod minus pyramide $ABCG$. Et ut igi-
 tur DEF basis ad basim ABC , ita pyramis $DEFH$ ad
 solidum

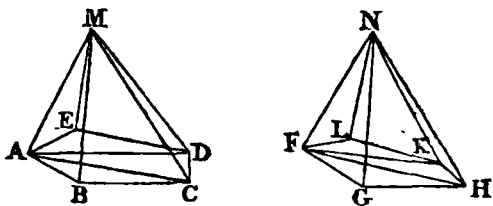
solidum aliquod pyramide $ABC G$ minus, quod est absurdum, ut modo ostensum est. Non igitur ut ABC basis ad basim DEF , ita est $ABC G$ pyramis ad solidum aliquod majus pyramide $DEF H$. Ostensum autem est, neque ad minus. Quare ut ABC basis ad basim DEF , ita est pyramis $ABC G$ ad $DEF H$ pyramidem. Pyramides igitur, quæ eâdem sunt altitudine, et triangulares bases habent, inter se sunt ut bases. *Q. E. D.*

[VI.]

PROP. VI. THEOR.

Pyramides, quæ eâdem sunt altitudine, et polygonas bases habent, inter se sunt ut bases.

Sint eâdem altitudine pyramides, quæ polygonas bases habeant $ABCDE$, $FGHKL$; vertices autem M , N puncta. Dico ut $ABCDE$ basis ad basim $FGHKL$,



ita esse $ABCDE M$ pyramidem ad pyramidem $FGHKL N$. Dividatur enim basis quidem $ABCDE$ in triangula ABC , ACD , ADE ; basis vero $FGHKL$ dividatur in triangula FGH , FGK , FKL . Et in uno quoque triangulo intelligantur pyramides æque altæ atque pyramides, quæ a principio. Quoniam igitur est ut triangulum ABC ad triangulum ACD , ita $ABCM$ pyramis ad pyramidem $ACDM$ ⁴: et componendo ut $ABCD$ trapezium ad triangulum ACD , ita $ABCD M$ pyramis ad pyramidem $ACDM$. Sed et ut ACD triangulum ad ADE , ita pyramis $ACDM$ ad $ADEM$ pyramidem⁴. Ergo ex æquali, ut $ABCD$ basis ad basim ADE , ita $ABCD M$ pyramis ad pyramidem $ADEM$. Et rursus componendo ut $ABCDE$ basis ad basim ADE , ita $ABCDE M$ pyramis ad pyramidem $ADEM$. Eâdem ratione, et ut $FGHKL$ basis ad basim FKL , ita et $FGHKL N$ pyramis ad $FKLN$ pyramidem. Et quodiam duæ pyramides sunt $ADEM$, $FKLN$, quæ triangulares bases habent, et eâdem sunt altitudine; erit
ut

⁴ 5. hujus.

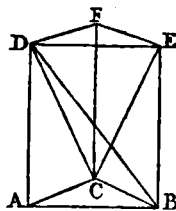
ut ADE basis ad basim FKL , ita $ADEM$ pyramis ad pyramidem $FKLN$. Quod cum sit ut $ABCDE$ basis ad basim ADE , ita $ABCDEM$ pyramis ad pyramidem $ADEM$; ut autem ADE basis ad basim FKL , ita $ADEM$ pyramis ad pyramidem $FKLN$: erit ex æquali, ut basis $ABCDE$ ad FKL basim, ita $ABCDEM$ pyramis ad pyramidem $FKLN$. Sed et ut FKL basis ad basim $FGHKL$, ita erat et $FKLN$ pyramis ad pyramidem $FGHKLN$. Quare rursus ex æquali, ut $ABCDE$ basis ad basim $FGHKL$, ita est $ABCDEM$ pyramis ad pyramidem $FGHKLN$. Pyramides igitur, quæ eâdem sunt altitudine, et polygonas bases habent, inter se sunt ut bases. *Q. E. D.*

PROP. VII. THEOR.

[VII.]

Omne prisma triangularem habens basim, dividitur in tres pyramides æquales inter se, quæ triangulares bases habent.

Sit prisma, cujus basis quidem triangulum ABC , oppositum autem ipsi DEF . Dico prisma $ABCDEF$ dividi in tres pyramides æquales inter se, quæ triangulares habent bases. Jungantur enim BD , EC , CD . Et quoniam parallelogrammum est $ABED$, cujus diagonalis BD ; erit ABD triangulum triangulo EBD æquale^f. Ergo pyramis, cujus basis triangulum ABD , vertex autem punctum C , æqualis est pyramidi, cujus basis EDB triangulum, et vertex punctum C . Sed pyramis, cujus basis EDB triangulum, et vertex punctum C , eadem est cum pyramide, cujus basis triangulum EBD , et vertex D punctum: iisdem enim planis continentur. Ergo et pyramis, cujus basis triangulum ABD , vertex autem punctum C , æqualis est pyramidi, cujus basis EBD triangulum, et vertex punctum D . Rursus quoniam $FCEB$ parallelogrammum est, cujus diagonalis CE , triangulum ECF triangulo CBE est æquale^f. Ergo et pyramis, cujus basis BEC triangulum, vertex autem punctum D , æqualis est pyramidi, cujus basis triangulum ECF , et vertex punctum D . Sed pyramis, cujus basis quidem BCE triangulum, vertex autem punctum D , ostensa est æqualis pyramidi, cujus basis triangulum ABD , et vertex

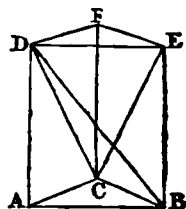


f 34. primi.

5. hujus.

tex

tex c punctum. Quare et pyramis, cujus basis triangulum CEF , et vertex punctum D , æqualis est pyramidi, cujus basis triangulum ABD , et vertex c punctum. Prisma igitur $ABCDEF$ dividitur in tres pyramides inter se æquales, quæ triangulares bases habent. Et quoniam pyramis, cujus basis ABD triangulum, vertex autem punctum C , eadem est cum pyramide, cujus basis triangulum CAB , et vertex D punctum, iisdem namque planis continetur; pyramis autem, cujus basis triangulum ABD , et vertex punctum C , tertia pars ostensa est prismatis, cujus basis ABC triangulum, et oppositum ipsi DEF : pyramis igitur, cujus basis triangulum ABC , vertex autem D punctum, tertia pars est prismatis eandem basim habentis, videlicet ABC triangulum, et oppositum ipsi triangulum DEF . *Q. E. D.*



Cor. 1. Ex hoc manifestum est omnem pyramidem tertiam partem esse prismatis basim habentis eandem, et altitudinem æqualem; quoniam si basis prismatis aliam quandam figuram rectilineam obtineat, et oppositam ipsi eandem, dividitur in prismata, quæ triangulares bases habent, et quæ ipsis opponuntur.

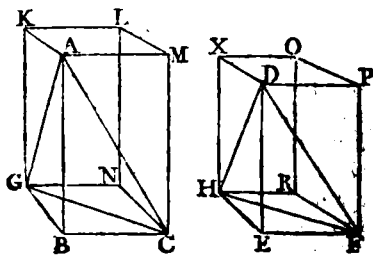
Cor. 2. Prismata æque alta sunt inter se ut bases.

[VIII.]

PROP. VIII. THEOR.

Similes pyramides, quæ triangulares bases habent, in triplicatâ sunt proportionem homologorum laterum.

Sint similes et similiter positæ pyramides, quarum bases quidem triacula ABC , DEF ; vertex autem



G, H , puncta. Dico ABC pyramidem ad pyramidem $DEFH$,

DEFH triplicatam proportionem habere ejus, quam BC habet ad EF. Compleantur enim BGML, EHPO solida parallelepipeda. Et quoniam pyramis ABCG similis est pyramidi DEFH, triangula tria ABC, ABG, GBC, tribus DEF, DEH, HEF singula singulis similia erunt, et similes similibus inclinationes^b. Sed propter^h Def. 9. similia triangula ABC, DEF, angulus ABC æqualis est^{undecimi.} angulo DEF, et AB ad BC ut DE ad EFⁱ. Quoniam igiturⁱ Def. 1. est ut AB ad DE, ita BC ad EF, et circum æquales angulos latera sunt proportionalia, parallelogrammum BM parallelogrammo EP simile erit. Eadem ratione, et parallelogrammum BN simile est parallelogrammo ER, et parallelogrammum BK ipsi EX parallelogrammo. Tria igitur parallelogramma BM, KB, BN tribus EP, EX, ER sunt similia. Sed et plana similia similiter inclinata. Et tria quidem MB, BK, BN tribus oppositis æqualia et similia sunt, et similiter inclinata, tria vero EP, EX, ER tribus oppositis æqualia et similia, et similiter inclinata^k. Quare solida BGML, EHPO similibus planis et numero æqualibus et similiter inclinat^k 24. undecimi. natis continentur; ac propterea simile est BGML solidum solido EHPO^h. Similia autem solida parallelepipeda in triplicatâ sunt proportionem homologorum laterumⁱ. Ergo solidum BGML ad solidum EHPOⁱ 33. undecimi. triplicatam habet proportionem ejus, quam habet latus homologum BC ad EF homologum latus. Sed ut BGML solidum ad solidum EHPO, ita ABCG pyramis ad pyramidem DEFH^m; pyramis enim sexta pars est ipsius^m 15. quinti. solidi, cum prisma, quod est dimidium solidi parallelepipedi, sit pyramidis triplumⁿ. Quare et pyramis ABCG ad pyramidem DEFH triplicatam proportionemⁿ Cor. 1. 7. hujus. habebit ejus, quam BC habet ad EF. Q. E. D.

Cor. Ex hoc perspicuum est, et similes pyramides, quæ multangulas bases habent, inter se esse in triplicatâ proportionem homologorum laterum. Ipsi enim divisus in similes pyramides triangulares bases habentes: quoniam et similia polygoni, quæ sunt in basibus, in similia triangula dividuntur, et numero æqualia et homologa totis; erit ut una pyramis in unâ pyramide, triangularem habens basim, ad pyramidem in alterâ, triangularem basim habentem, ita et omnes pyramides in unâ pyramide, triangulares habentes bases, ad omnes in alterâ, triangulares bases habentes; hoc est, ita pyramis ipsa, multangulam

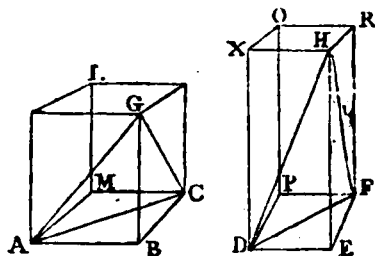
angulam habens basim, ad pyramidem, quæ multangulam basim habet. Sed pyramis, triangularem habens basim, ad pyramidem, quæ triangularem basim habet, est in triplicatâ proportionem homologorum laterum. Et pyramis igitur, polygonam habens basim, ad pyramidem, similem basim habentem, triplicatam proportionem habebit ejus, quam latus homologum habet ad homologum latus.

[IX.]

PROP. IX. THEOR.

Æqualium pyramidum, et triangulares bases habentium, bases et altitudines reciproce sunt proportionales: et quarum pyramidum, triangulares bases habentium, bases et altitudines reciproce sunt proportionales; illæ sunt æquales.

Sint nempe pyramides æquales, quæ triangulares bases habeant ABC , DEF , vertices vero G , H puncta. Dico pyramidum $ABCG$, $DEFH$ bases et altitudines



reciprocari; scilicet ut ABC basis ad basim DEF , ita esse pyramidis $DEFH$ altitudinem ad altitudinem pyramidis $ABCG$. Compleantur enim $BGML$, $EHPO$ solida parallelepipeda. Et quoniam pyramis $ABCG$ est æqualis pyramidi $DEFH$, atque est pyramidis quidem $ABCG$ sextuplum $BGML$ solidum, pyramidis vero $DEFH$ sextuplum solidum $EHPO$; erit solidum $BGML$ solido $EHPO$ æquale^m. Æqualium autem solidorum parallelepipedorum bases et altitudines reciprocantur^a. Est igitur ut BM basis ad basim EP , ita $EHPO$ solidi altitudo ad altitudinem solidi $BGML$. Sed ut BM basis ad basim EP , ita ABC triangulum ad triangulum DEF ^a. Ergo et ut ABC triangulum ad triangulum DEF , ita solidi $EHPO$ altitudo ad altitudinem solidi $BGML$. Sed solidi quidem $EHPO$ altitudo eadem est cum altitudine pyramidis $DEFH$; solidi vero $BGML$ altitudo eadem

^m 15. quinti.
^a 34. undecimi.

eadem est cum altitudine pyramidis $ABCG$: est igitur ut ABC basis ad basim DEF , ita pyramidis $DEFH$ altitudo ad altitudinem pyramidis $ABCG$. Quare pyramidum $ABCG$, $DEFH$ bases et altitudines reciproce sunt proportionales. Et si pyramidum $ABCG$, $DEFH$ bases et altitudines reciproce sunt proportionales, sitque ut ABC basis ad basim DEF , ita pyramidis $DEFH$ altitudo ad altitudinem pyramidis $ABCG$: dico $ABCG$ pyramidem pyramidi $DEFH$ æqualem esse. Iisdem enim constructis, quoniam ut ABC basis ad basim DEF , ita est $DEFH$ pyramidis altitudo ad altitudinem pyramidis $ABCG$; ut autem ABC basis ad basim DEF , ita BM parallelogrammum ad parallelogrammum EP : erit et ut parallelogrammum BM ad EP parallelogrammum, ita pyramidis $DEFH$ altitudo ad altitudinem pyramidis $ABCG$. Sed pyramidis quidem $DEFH$ altitudo eadem est cum altitudine solidi parallelepipedi $EHPO$; pyramidis vero $ABCG$ altitudo eadem est cum altitudine solidi parallelepipedi $BGML$: est igitur ut BM basis ad basim EP , ita $EHPO$ solidi parallelepipedi altitudo ad altitudinem solidi parallelepipedi $BGML$. Quorum autem solidorum parallelepipedorum bases et altitudines reciprocantur, ea sunt æqualia°. Solidum igitur pa^o 34. un-
rallelepipedum $BGML$ æquale est solido parallelepipedo^{decimi.} $EHPO$. Atque est solidi quidem $BGML$ sexta pars pyramis $ABCG$: solidi vero $EHPO$ itidem sexta pars pyramis $DEFH$. Ergo pyramis $ABCG$ pyramidi $DEFH$ est æqualis. Æqualium igitur pyramidum, et triangulares bases habentium, bases et altitudines reciproce sunt proportionales: et quarum pyramidum, triangulares bases habentium, bases et altitudines reciproce sunt proportionales; illæ sunt æquales. *Q. E. D.*

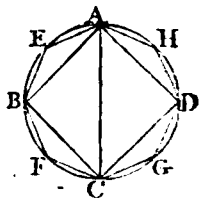
PROP. X. THEOR.

[X.]

Omnis conus tertia pars est cylindri, qui eandem basim habet et altitudinem æqualem.

Habeat conus eandem basim, quam cylindrus, videlicet circulum $ABCD$, et altitudinem æqualem. Dico conum tertiam partem esse cylindri, hoc est, cylindrum coni triplum esse. Si enim cylindrus non sit triplus coni, vel major erit quam triplus, vel minor. Sit primo major quam triplus. Et describatur in $ABCD$ circulo quadratum $ABCD$. Ergo quadratum $ABCD$ majus est
112
quam

quam dimidium $A B C D$ circuli. Et a quadrato $A B C D$ erigatur prisma æque altum cylindro. Quod quidem prisma majus erit quam cylindri dimidium; quoniam si circa circulum $A B C D$ quadratum describatur, erit inscriptum quadratum dimidium circumscripti. Et sint ab eisdem basibus erecta solida parallelepipeda æque alta, nimirum prismata ipsa. Quare prismata inter se sunt ut



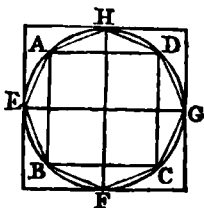
¶ Cor. 2.

7. hujus.

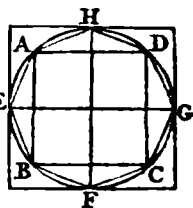
Et prisma igitur erectum a quadrato $A B C D$ dimidium est prismatis erecti a quadrato, quod circa circulum $A B C D$ describitur. Atqui est cylindrus minor prismate erecto a quadrato, quod describitur circa circulum $A B C D$. Prisma igitur erectum a quadrato $A B C D$ æque altum cylindro, dimidio cylindri est majus. Secentur circumferentiæ $A B$, $B C$, $C D$, $D A$ bifariam in punctis E , F , G , H ; et $A E$, $E B$, $B F$, $F C$, $C G$, $G D$, $D H$, $H A$ jungantur. Unumquodque igitur triangulorum $A E B$, $B F C$, $C G D$, $D H A$ majus est dimidio portionis circuli $A B C D$, in quâ consistit¹. Erigantur ab unoquoque triangulorum $A E B$, $B F C$, $C G D$, $D H A$ prismata æque alta cylindro. Ergo et unumquodque erectorum prismatum majus est dimidio portionis cylindri, quæ ad ipsum est. Quoniam si per puncta E , F , G , H parallelæ ipsis $A B$, $B C$, $C D$, $D A$ ducantur, et compleantur in ipsis $A B$, $B C$, $C D$, $D A$ parallelogramma, a quibus solida parallelepipeda æque alta cylindro erigantur: erunt uniuscujusque erectorum dimidia prismata ea, quæ sunt in triangulis $A E B$, $B F C$, $C G D$, $D H A$. Et sunt cylindri portiones erectis solidis parallelepipedis minores. Ergo et prismata, quæ in triangulis $A E B$, $B F C$, $C G D$, $D H A$, majora sunt dimidio portionum cylindri, quæ ad ipsa sunt. Itaque reliquas circumferentias secantes bifariam, jungentesque rectas lineas, et ab unoquoque triangulorum erigentes prismata æque alta cylindro, et hoc semper facientes, tandem relinquemus quasdam portiones cylindri, quæ sint minores excessu, quo cylindrus coni triplum superat. Relinquantur jam, et sint $A E$, $E B$, $B F$, $F C$, $C G$, $G D$, $D H$, $H A$. Reliquum igitur prisma, cujus basis quidem polygonum $A E B F C G D H$, altitudo autem eadem, quæ cylindri, majus est quam triplum coni. Sed prisma, cujus

¹ ostenditur
ad 2. hujus.

cujus basis $AEBFCGDH$ polygonum, et altitudo eadem, quæ cylindri, triplum est pyramidis, cujus basis polygonum $AEBFCGDH$, vertex autem idem, qui conus. Et pyramis igitur cujus basis polygonum $AEBFCGDH$, vertex autem idem, qui conus, major est cono, qui basim habet $ABCD$ circulum. Sed et minor: (ab ipso enim comprehenditur.) Quod fieri non potest. Non igitur cylindrus major erit quam triplus coni. Dico insuper neque cylindrum minorem esse quam triplum coni. Si enim fieri potest, sit cylindrus minor quam triplus coni. Erit invertendo conus major quam tertia pars cylindri. Describatur in $ABCD$ circulo quadratum $ABCD$. Ergo quadratum $ABCD$ majus est quam dimidium $ABCD$ circuli. Et a quadrato $ABCD$ erigatur pyramis, verticem habens eundem, quem conus; pyramis igitur erecta major est quam coni dimidium: quoniam, ut ante demonstravimus, si circa circulum quadratum describatur, erit quadratum $ABCD$ dimidium ejus, quod circa circulum descriptum est; et si a quadratis erigantur solida parallelepipeda æque alta cono, quæ et prismata appellantur, erit quod a quadrato $ABCD$ erigitur, dimidium ejus, quod erectum est a quadrato circa circulum descripto; etenim inter se sunt ut bases. Quare et tertiæ partes ipsarum. Pyramis igitur, cujus basis quadratum $ABCD$, dimidia est ejus pyramidis, quæ a quadrato circa circulum descripto erigitur. Sed pyramis, erecta a quadrato descripto circa circulum, major est cono; ipsum namque comprehendit. Ergo pyramis, cujus basis $ABCD$ quadratum, vertex autem idem, qui coni, major est quam coni dimidium. Secentur circumferentiæ AB , BC , CD , DA bifariam in punctis E , F , G , H . Et jungantur AE , EB , BF , FC , CG , GD , DH , HA . Et unumquodque igitur triangulorum AEB , BFC , CGD , DHA majus est quam dimidium portionis circuli $ABCD$, in quâ consistit. Eri-gantur ab unoquoque triangulorum AEB , BFC , CGD , DHA pyramides, verticem habentes eundem, quem conus. Ergo et unaquæque pyramidum eodem modo erectarum major est quam dimidium portionis coni, quæ est ad ipsam. Itaque reliquas circumferentias secantes bifariam, jungentesque rectas lineas, et ab uno-



quoque triangulorum erigentes pyramides, verticem habentes eundem, quem conus, et hoc semper facientes, relinquemus tandem quādam coni portiones, quæ minores erunt excessu, quo conus tertiam cylindri partem ^{r. i. decimi.} superat. Relinquantur; et sint quæ in ipsis $A E, E B, B F, F C, C G, G D, D H, H A$. Reliqua igitur pyramis, cujus basis polygonum $A E B F C G D H$, et vertex idem, qui coni, major est quam tertia cylindri pars. Sed pyramis, cujus basis polygonum $A E B F C G D H$, vertex autem idem, qui coni, tertia pars est prismatis, cujus basis polygonum $A E B F C G D H$, altitudo autem eadem, quæ cylindri. Prisma igitur, cujus basis $A E B F C G D H$ polygonum, et altitudo eadem, quæ cylindri, majus est cylindro, cujus basis est circulus $A B C D$. Sed et minus: (ab ipso enim comprehenditur.) Quod fieri non potest. Non igitur cylindrus minor est quam triplus coni. Ostensum autem est neque majorem esse quam triplum. Ergo cylindrus coni triplus sit necesse est; ac propterea conus tertia pars cylindri. Omnis igitur conus tertia pars est cylindri, eandem quam ipse basim habentis, et altitudinem æqualem. *Q. E. D.*

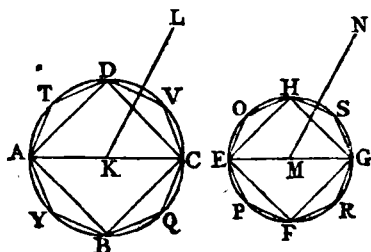


[XI.]

PROP. XI. THEOR.

Coni et cylindri, qui eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases.

Sint in eadem altitudine coni et cylindri, quorum bases circuli $A B C D, E F G H$, axes autem $K L, M N$, et diametri basium $A C, E G$. Dico ut $A B C D$ circulus



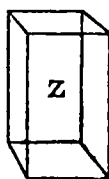
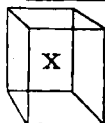
ad circulum $E F G H$, ita esse conum $A L$ ad $E N$ conum. Si enim non ita sit; erit ut $A B C D$ circulus ad circulum $E F G H$, ita conus $A L$ ad aliquod solidum minus cono

E N,

EN, vel ad majus. Sit primo ad minus, quod sit x. Et quo minus est solidum x cono EN, ei æquale sit i

solidum. Conus igitur EN ipſis ſolidis x, i eſt æqualis.

Deſcribatur in EFGH circulo quadratum EFGH, quod majus eſt dimidio circuli. Erigatur a quadrato EFGH pyramis æque alta cono. Pyramis igitur erecta



major eſt cono dimidio. Nam ſi circa circulum quadratum deſcribamus, et ab ipſo erigamus pyramidem æque altam cono; erit inſcripta pyramis pyramidis circumſcriptæ dimidium: etenim inter ſe ſunt ut baſes¹.

6. hujus.

Conus autem circumſcripta pyramide eſt minor. Ergo pyramis, cujus baſis quadratum EFGH, vertex autem idem, qui cono, major eſt cono dimidio. Secentur circumferentiæ EF, FG, GH, HE bifariam in punctis P, R, S, O; et OE, EP, PF, FR, RG, GS, SH, HO jungantur. Unumquodque igitur triangulorum HOE, EPF, FRG, GSH majus eſt quam dimidium ſegmenti circuli, in quo conſiſtit. Erigatur ab unoquoque triangulorum HOE, EPF, FRG, GSH pyramis æque alta cono. Ergo et unaquæque erectarum pyramidum major eſt dimidio portionis cono, quæ eſt ad ipſam. Itaque reliquas circumferentias ſecantes bifariam, et jungentes rectas lineas, et ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides æque altas cono, atque hoc ſemper facientes,

relinquemus tandem aliquas portiones cono, quæ ſolido i minores erunt¹. Relinquantur, et ſint quæ in ipſis¹.

1. decimi.

HO, OE, EP, PF, FR, RG, GS, SH. Reliqua igitur pyramis, cujus baſis polygonum HOEPFRGS, altitudo autem eadem, quæ cono, major eſt ſolido x. Deſcribatur in circulo ABCD polygono HOEPFRGS ſimile et ſimiliter poſitum polygonum DTA YBQCV, et ab ipſo erigatur pyramis æque alta cono AL. Quoniam igitur eſt ut quadratum ex AC ad quadratum ex EG, ita

DTA YBQCV polygonum ad polygonum HOEPFRGS²;

1. hujus.

ut autem quadratum ex AC ad quadratum ex EG, ita ABCD circulus ad circulum EFGH²;

2. hujus.

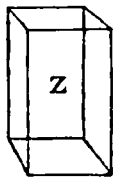
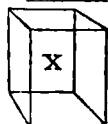
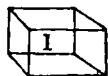
erit ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita polygonum DTA YBQCV ad polygonum HOEPFRGS³.

11. quinti

Sed ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad x ſolidum; et

ut polygonum DTA YBQCV ad polygonum HOEPFRGS,

ita pyramis, cujus basis $DTAYBQCV$ polygonum, vertex autem punctum L , ad pyramidem, cujus basis polygonum $HOEPFRGS$, et vertex punctum N . Ut igitur conus AL ad x solidum, ita pyramis, cujus basis polygonum $DTAYBQCV$, et vertex punctum L , ad pyramidem, cujus basis poly-



gonum $HOEPFRGS$, et vertex N punctum. Conus autem AL major est pyramide, quæ est in ipso. Majus igitur est solidum x pyramide, quæ est in cono EN . Sed et ostensum est minus. Quod fieri non potest. Non igitur ut $ABCD$ circulus ad circulum $EFGH$, ita est AL conus ad solidum aliquod minus cono EN . Similiter demonstrabitur neque ut $EFGH$ circulus ad circulum $ABCD$, ita esse conum EN ad aliquod solidum minus cono AL . Dico præterea neque esse ut $ABCD$ circulus ad circulum $EFGH$, ita AL conum ad aliquod solidum majus cono EN . Si enim fieri potest, sit ad solidum majus, quod sit z . Ergo invertendo ut $EFGH$ circulus ad circulum $ABCD$, ita erit solidum z ad AL conum. Sed cum sit solidum z majus cono EN ; erit ut solidum z ad AL conum, ita conus EN ad aliquod solidum minus cono AL . Et igitur ut $EFGH$ circulus ad circulum $ABCD$, ita conus EN ad aliquod solidum minus cono AL , quod fieri non posse ostensum est. Non igitur ut $ABCD$ circulus ad circulum $EFGH$, ita conus AL ad aliquod solidum majus cono EN . Ostensum autem est neque esse ad minus. Ergo ut $ABCD$ circulus ad circulum $EFGH$, ita est conus AL ad EN conum. Sed ut conus ad conum, ita est cylindrus ad cylindrum^{*}; est enim uterque utriusque triplus[†]. Et igitur ut $ABCD$ circulus ad circulum $EFGH$, ita in ipsis cylindri æque alti conis. Ergo coni et cylindri, qui eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases. *Q. E. D.*

* 15. quinti.

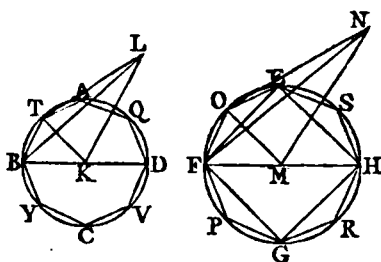
† 10. hujus.

[XII.]

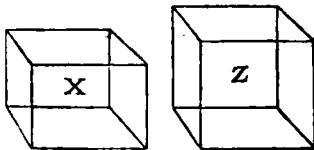
PROP. XII. THEOR.

Similes coni et cylindri inter se sunt in triplicatâ proportionē diametrorum, quæ sunt in basibus.

Sint similes coni et cylindri, quorum bases quidem circuli $ABCD$, $EFGH$, diametri vero basium BD , PH ,
et

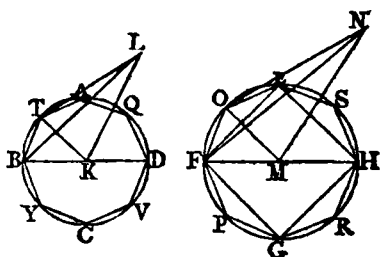


et axes conorum vel cylindrorum KL , MN . Dico conum, cujus basis $ABCD$ circulus, vertex autem punctum L , ad conum, cujus basis circulus $EFGH$, vertex autem N punctum, triplicatam habere proportionem ejus, quam habet BD ad FH . Si enim non habet conus $ABCDL$ ad conum $EFGHN$ triplicatam proportionem ejus, quam BD habet ad FH , habebit $ABCDL$ conus ad aliquod solidum minus cono $EFGHN$ triplicatam proportionem, vel ad majus. Habeat primo ad minus, quod sit X . Et describatur in $EFGH$ circulo quadratum $EFGH$.



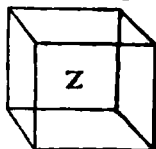
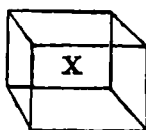
Quadratum igitur $EFGH$ majus est dimidio $EFGH$ circuli. Et erigatur a quadrato $EFGH$ pyramis æque alta cono. Ergo erecta pyramis major est quam cono dimidium. Itaque secantur EF , EG , GH , HE circumferentiæ bifariam in punctis O , P , R , S , et jungantur EO , OF , FP , PG , GR , RH , HS , SE . Unumquodque igitur triangulorum EOF , FPG , GRH , HSE majus est dimidio segmenti circuli $EFGH$, in quo consistit. Et erigatur ab unoquoque triangulorum EOF , FPG , GRH , HSE pyramis, eundem verticem habens, quem conus. Ergo et unaquæque erectarum pyramidum major est quam dimidium portionis cono, quæ est ad ipsam. Secantes igitur reliquas circumferentias bifariam, jungentesque rectas lineas, et ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides, eundem habentes verticem, quem conus, atque hoc semper facientes, tandem relinquemus quasdam cono portiones, quæ minores erunt excessu, quo conus $EFGHN$ ipsum X solidum superat². Relinquantur, et² 1. decimi.

Reliqua igitur pyramis, cujus basis quidem polygonum $EOF-$



$E O F P G R H S$, vertex autem N punctum, major est solido x . Describatur etiam in circulo $A B C D$, polygono $E O F P G R H S$ simile et similiter positum polygonum $A T B Y C V D Q$:

a quo erigatur pyramis, eundem verticem habens, quem conus; et triangulorum continentium pyramidem, cujus basis quidem



est polygonum $A T B Y C V D Q$, vertex autem punctum L , unum sit $L B T$; triangulorum vero continentium pyramidem, cujus basis $E O F P G R H S$ polygonum, et vertex punctum N , unum sit $N F O$; et jungantur $K T$, $M O$. Quoniam igitur conus $A B C D L$ similis est cono $E F G H N$, erit ut $B D$ ad $F H$, ita $K L$ axis ad axem $M N$ ¹. Ut autem $B D$ ad $F H$, ita $B K$ ad $F M$ ². Itaque ut $B K$ ad $F M$, ita $K L$ ad $M N$; et permutando ut $B K$ ad $K L$, ita $F M$ ad $M N$. Et cum perpendicularis utraque est, et circa æquales angulos $B K L$, $F M N$ latera sunt proportionalia: simile igitur est $B K L$ triangulum triangulo $F M N$ ³. Rursus, quoniam est ut $B K$ ad $K T$, ita $F M$ ad $M O$, et circa æquales angulos $B K T$, $F M O$ latera sunt proportionalia (etenim quæ pars est angulus $B K T$ quatuor rectorum, qui sunt ad K centrum, eadem est pars et angulus $F M O$ quatuor rectorum, qui sunt ad centrum M) erit triangulum $B K T$ triangulo $F M O$ simile⁴. Et quoniam ostensum est ut $B K$ ad $K L$, ita esse $F M$ ad $M N$; æqualis autem est $B K$ ipsi $K T$, et $F M$ ipsi $M O$: erit ut $T K$ ad $K L$, ita $O M$ ad $M N$; et circa æquales angulos $T K L$, $O M N$ latera sunt proportionalia; recti enim sunt: triangulum igitur $L K T$ simile est triangulo $M N O$. Quod cum ob similitudinem triangulorum $B K L$, $F M N$, sit ut $L B$ ad $B K$, ita $N F$ ad $F M$; ob similitudinem vero triangulorum $B K T$, $F M O$, ut

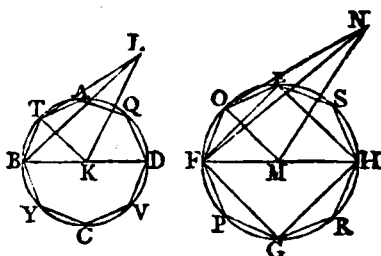
$K B$

¹ Def. 24. undecimi.

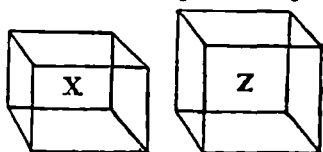
² 15. quinti.

³ 6. sexti.

KB ad BT , ita MF ad FO : erit ex æquali ut LB ad BT , ita NF ad FO . Rursus cum ob similitudinem triangulorum LTK , NOM , sit ut LT ad TK , ita NO ad OM ; et ob similitudinem triangulorum KBT , OMF , ut KT ad TB , ita MO ad OF : ex æquali erit ut LT ad TB , ita NO ad OF . • Ostensum autem est et ut TB ad BL , ita OF ad FN . Quare rursus ex æquali ut TL ad LB , ita ON ad NF . Triangulorum igitur LTB , NOF proportionalia sunt latera, ideoque æquiangula sunt LTB , NOF triacula, et inter se similia¹. Sed² 5. sexti. cum angulorum planorum æqualium TBK , OFM verticibus rectæ sublines BL , FN insistant, quæ cum rectis BT , FO ; BK , FM angulos æquales faciunt; angulum scilicet TBL angulo OFN æqualem, et angulum KBL angulo MFN : similes erunt planorum LBT , LBK inter se et tertio TBK , atque planorum NFO , NFM inter se et tertio OFM , inclinationes³. Quare et pyramis, ² 2 Cor. 30. hujus. Vide Addenda. cujus basis triangulum BKT , vertex autem L punctum, similis est pyramidi, cujus basis $FM O$ triangulum, et vertex punctum N ; similibus enim planis continentur, et multitudine æqualibus, et similiter inclinatis. Pyramides autem similes, et quæ triangulares bases habent, in triplicatâ sunt proportionem homologorum laterum⁴. Ergo⁵ 8. hujus. pyramis $BKTL$ ad pyramidem $FMON$ triplicatam habet proportionem ejus, quam BK habet ad FM . Similiter a punctis quidem A , Q , D , V , C , Y ad K , a punctis vero E , S , H , R , G , P ad M ducentes rectas lineas, et a triangulis erigentes pyramides, vertices eosdem habentes, quos coni; ostendemus et unamquamque pyramidum ejusdem ordinis ad unamquamque alterius ordinis triplicatam proportionem habere ejus, quam habet BK latus ad homologum latus MF , hoc est, quam BD ad FH . Sed ut unum antecedentium ad unum consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequentia⁶. ⁶ 12. quinti. Est igitur et ut $BKTL$ pyramis ad pyramidem $FMON$, ita tota pyramis, cujus basis $ATBYCVDQ$ polygonum, vertex autem punctum L , ad totam pyramidem, cujus basis polygonum $EOFPGRHS$, et vertex punctum N . Quare et pyramis, cujus basis $ATBYCVDQ$ polygonum, vertex autem punctum L , ad pyramidem, cujus basis polygonum $EOFPGRHS$, et vertex punctum N , triplicatam proportionem habet ejus, quam BD habet ad FH . Ponitur autem conus, cujus basis circulus $ABCD$, vertex autem punctum L , ad solidum x triplicatam



catam proportionem habere ejus, quam BD ad FH . Ut igitur conus, cujus basis circulus $ABCD$, vertex autem punctum L , ad solidum x , ita est pyramis, cujus basis $ATBYCVDQ$ polygonum, vertex autem punctum L , ad pyramidem, cujus basis polygonum $EOFPGRHS$, et vertex punctum N . Dictus autem conus major est pyramide, quæ in ipso; etenim eam comprehendit. Majus igitur est et solidum x pyramide, cujus basis polygonum $EOFPGRHS$, vertex autem punctum N . Sed et minus. Quod fieri non potest. Non igitur conus, cujus basis $ABCD$ circulus, et vertex punctum L , ad aliquod solidum minus cono, cujus basis circulus $EFGH$, et vertex N punctum, triplicatam proportionem habet ejus, quam BD habet ad FH . Similiter demonstrabimus neque conum $EFGHN$ ad aliquod solidum minus cono $ABCDL$ triplicatam proportionem habere ejus, quam habet FH ad BD . Itaque dico neque $ABCDL$ conum ad solidum majus cono $EFGHN$ triplicatam habere proportionem ejus, quam BD habet ad FH . Si enim fieri potest, habeat ad aliquod solidum majus, quod sit z . Invertendo igitur, solidum z ad conum $ABCDL$ triplicatam proportionem habet ejus, quam FH ad BD . Cum autem est solidum z majus cono $EFGHN$; erit ut solidum z ad conum $ABCDL$, ita $EFGHN$ conus ad aliquod solidum minus cono $ABCDL$. Ergo et conus $EFGHN$ ad solidum aliquod minus cono $ABCDL$ triplicatam proportionem habebit ejus, quam FH habet ad BD , quod fieri non posse demonstratum est. Non igitur $ABCDL$ conus ad solidum aliquod majus cono $EFGHN$ triplicatam proportionem habet ejus, quam BD ad FH . Ostensum autem est neque



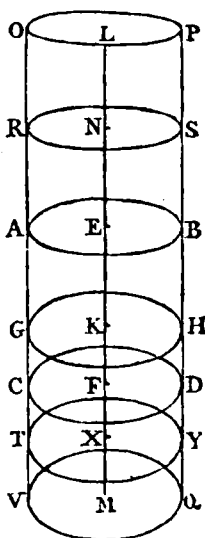
neque ad minus. Quare conus $ABCDL$ ad $EFGHN$ conum triplicatam proportionem habet ejus, quam BD ad FH . Ut autem conus ad conum, ita cylindrus ad cylindrum^c. Cylindrus enim in eadem existens basi, in^c 15. quinti. quâ conus, et ipsi æque altus, conus triplus est^d. Cum^d 10. hujus. ostensum sit, omnem conum tertiam partem esse cylindri, eandem quam ipse basim habentis, et æqualem altitudinem. Ergo et cylindrus ad cylindrum triplicatam proportionem habebit ejus, quam BD habet ad FH . Similes igitur conus et cylindri inter se sunt in triplicatâ proportionem diametrorum, quæ sunt in basibus. *Q. E. D.*

PROP. XIII. THEOR.

[XIII.]

Si cylindrus plano secetur oppositis planis parallelo, erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.

Cylindrus enim AD plano GH secetur oppositis planis AB , CD parallelo. Planum autem GH occurrat axi EF in K puncto. Dico ut BG cylindrus ad cylindrum GD , ita esse EK axem ad axem KF . Producaturs enim EF axis ex utrâque parte ad puncta L , M ; et ipsi quidem EK axi ponantur æquales quotcunque EN , NL ; ipsi vero FK æquales quotcunque FX , XM ; et per puncta L , N , X , M , ducantur plana ipsis AB , CD parallela: atque in planis per L , N , X , M circa centra L , N , X , M intelligantur circuli OP , RS , TY , VQ æquales ipsis AB , CD ; et cylindri PR , RB , DT , TQ intelligantur. Quoniam igitur axes LN , NE , EK inter se sunt æquales, erunt cylindri PR , RB , BG inter se ut bases^c. Æquales autem sunt bases. Ergo et cylindri PR , RB , BG sunt æquales. Quod cum axes LN , NE , EK inter se æquales sint, itemque cylindri PR , RB , BG inter se æquales; sitque ipsorum LN , NE , EK multitudo æqualis multitudini ipsorum PR , RB , BG : quotuplex est axis KL ipsius EK axis, totuplex erit et PG cylindrus cylindri GB . Eadem ratione et quotuplex est MK axis ipsius axis KF , totuplex est et QG cylindrus cylindri GD . Et si quidem
axis



* 11. hujus.

axis KL sit æqualis axi KM , erit et PG cylindrus cylindro GQ æqualis; si autem axis LK major sit axe KM , et cylindrus PG major erit cylindro GQ ; et si minor, minor. Quatuor igitur existentibus magnitudinibus, videlicet axibus EK , KF , et cylindris BG , GD , sumpta sunt æquimultiplicia axis quidem EK , et BG cylindri, nempe axis KL , et cylindrus PG ; axis vero KF , et cylindri GD æquimultiplicia, axis scilicet KM , et GQ cylindrus; et demonstratum est, si LK axis superat axem KM , et PG cylindrum superare cylindrum GQ ; et si æqualis, æqualem; et si minor, minorem. Est igitur axis EK ad axem KF , ut BG cylindrus ad cylindrum GD ^f. Quare si cylindrus plano secetur oppositis planis parallelo, erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. *Q. E. D.*

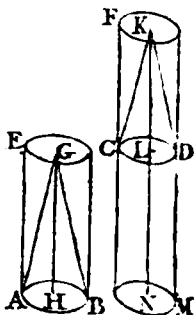
^f Def. 5.
quinti.

[XIV.]

PROP. XIV. THEOR.

In æqualibus basibus existentes coni et cylindri, inter se sunt ut altitudines.

Sint enim in æqualibus basibus AB , CD cylindri EB , FD . Dico ut EB cylindrus ad cylindrum FD , ita esse GH axem ad axem KL . Producatur enim KL , axis ad punctum N ; ponaturque ipsi GH axi æqualis LN ; et circa axem LN intelligatur cylindrus CM . Quoniam igitur cylindri EB , CM eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases^g. Bases autem sunt æquales. Ergo et cylindri EB , CM inter se æquales erunt. Et quoniam cylindrus FM secatur plano CD , oppositis planis parallelo, erit ut CM cylindrus ad cylindrum FD , ita axis LN ad KL axem^h. Æqualis autem est cylindrus quidem CM cylindro EB ; axis vero LN axi GH . Est igitur ut EB cylindrus ad cylindrum FD , ita axis GH ad KL axem. Ut autem EB cylindrus ad cylindrum FD , ita ABG conus ad conum CDK ⁱ; cylindri sunt enim conorum tripli^k. Ergo et ut GH axis ad axem KL , ita est ABG conus ad conum CDK , et cylindrus EB ad FD cylindrum. In basibus igitur æqualibus existentes coni et cylindri, inter se sunt ut altitudines. *Q. E. D.*



^g 11. hujus.

^h 13. hujus.

ⁱ 15. quinti.

^k 10. hujus.

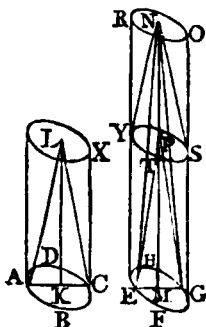
PROP.

PROP. XV. THEOR.

[XV.]

Æqualium conorum et cylindrorum bases et altitudines reciproce sunt proportionales; et quorum conorum et cylindrorum bases et altitudines reciproce sunt proportionales, illi inter se sunt æquales.

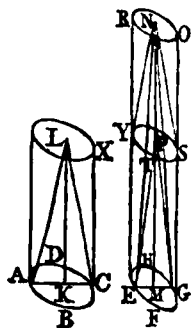
Sint æquales conus et cylindri, quorum bases quidem sint $ABCD$, $EFGH$ circuli, diametris AC , EG ; axes autem KL , MN ; qui quidem et conorum vel cylindrorum sunt altitudines. Dico cylindrorum AX , EO bases et altitudines reciproce proportionales esse, hoc est, ut $ABCD$ basis ad basim $EFGH$, ita esse altitudinem MN ad altitudinem KL . Altitudo enim KL vel æqualis est altitudini MN , vel non æqualis. Sit primo æqualis. Atque est AX cylindrus æqualis cylindro EO . Qui autem eandem



habent altitudinem conus et cylindri, inter se sunt ut bases'. Æqualis igitur est basis $ABCD$ basi $EFGH$. Est' ^{11. hujus.} igitur ut basis $ABCD$ ad $EFGH$ basim, ita MN altitudo ad altitudinem KL . Non fit autem altitudo KL altitudini MN æqualis. Altera igitur ipsarum major. Major fit MN ; et auferatur ab ipsa MN altitudini LK æqualis PM , et per P secetur EO cylindrus plano $TY S$, oppositis planis circulorum $EFGH$, RO parallelo; intelligaturque cylindrus ES , cujus basis quidem $EFGH$ circulus, altitudo autem PM . Quoniam igitur AX cylindrus æqualis est cylindro EO , alius autem aliquis est cylindrus ES ; erit ut AX cylindrus ad cylindrum ES , ita cylindrus EO ad ES cylindrum. Sed ut AX cylindrus ad cylindrum ES , ita basis $ABCD$ ad $EFGH$ basim'; cylindri enim AX , ES eandem habent altitudinem: ut autem cylindrus EO ad ES cylindrum, ita MN altitudo ad altitudinem MP ^m; nam cylindrus EO ^{m 13. hujus.} secatur plano $TY S$, oppositis planis parallelo. Est igitur ut $ABCD$ basis ad basim $EFGH$, ita altitudo MN ad MP altitudinem. Æqualis autem est MP altitudo altitudini KL . Quare ut basis $ABCD$ ad $EFGH$ basim, ita MN altitudo ad altitudinem KL . Æqualium igitur

igitur cylindrorum $A X$, $E O$ bases et altitudines reciproce sunt proportionales.

Sed si cylindrorum $A X$, $E O$ bases et altitudines sunt reciproce proportionales: hoc est, ut $A B C D$ basis ad basim $E F G H$, ita altitudo $M N$ ad $K L$ altitudinem. Dico $A X$ cylindrum cylindro $E O$ æqualem esse. Iisdem enim constructis; quoniam ut $A B C D$ basis ad basim $E F G H$, ita altitudo $M N$ ad $K L$ altitudinem; altitudo autem $K L$ æqualis est altitudini $M P$: erit ut $A B C D$ basis ad basim $E F G H$, ita $M N$ altitudo ad altitudinem $M P$. Sed ut $A B C D$ basis ad basim $E F G H$, ita $A X$ cylindrus ad cylindrum $E S$;



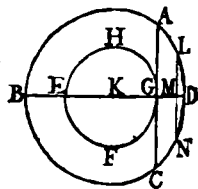
ⁿ 11. hujus. eandem enim habent altitudinemⁿ. Ut autem $M N$ altitudo ad altitudinem $M P$, ita cylindrus $E O$ ad $E S$ cylindrum. Est igitur ut $A X$ cylindrus ad cylindrum $E S$, ita cylindrus $E O$ ad $E S$ cylindrum. Cylindrus igitur $A X$ cylindro $E O$ est æqualis. Similiter autem et in conis. *Q. E. D.*

[XVI.]

PROP. XVI. PROBL.

Duobus circulis circa idem centrum existentibus, in majori polygonum æquilaterum, et pari laterum numero describere, quod minorem circulum non tangat.

Sint dati duo circuli $A B C D$, $E F G H$ circa idem centrum K . Oportet in majori circulo $A B C D$ polygonum æquilaterum et pari laterum numero describere, non tangens minorem circulum $E F G H$. Ducatur per K centrum recta linea $B D$, atque a puncto G ipsi $B D$ ad rectos angulos ducatur $A G$, et ad C producat, quæ $A C$ circulum $E F G H$ tanget^o. Itaque circumferentiam $B A D$ bifariam secantes, et ejus dimidium rursus bifariam, et hoc semper facientes, tandem relinquemus circumferentiam minorem ipsa $A D$. Relinquatur, sitque $L D$: et a puncto L ad $B D$ perpendicularis agatur $L M$, et ad N producat; junganturque



^o 16. tertii.

quæ $A C$ circulum $E F G H$ tanget^o. Itaque circumferentiam $B A D$ bifariam secantes, et ejus dimidium rursus bifariam, et hoc semper facientes, tandem relinquemus circumferentiam minorem ipsa $A D$. Relinquatur, sitque $L D$: et a puncto L ad $B D$ perpendicularis agatur $L M$, et ad N producat; junganturque

$L D$,

LD, DN . Ergo LD ipsi DN est æqualis^p, et quoniam^p 29. tertii. LN parallela est AC , et AC tangit circulum $EFGH$; ipsa LN circulum $EFGH$ non tanget. Et multo minus tangent circulum $EFGH$ rectæ lineæ LD, DN . Quod si ipsi LD æquales deinceps circulo $ABCD$ aptabimus, describetur in eo polygonum æqualium et numero parium laterum non tangens minorem circulum $EFGH$. $Q.E.F.$

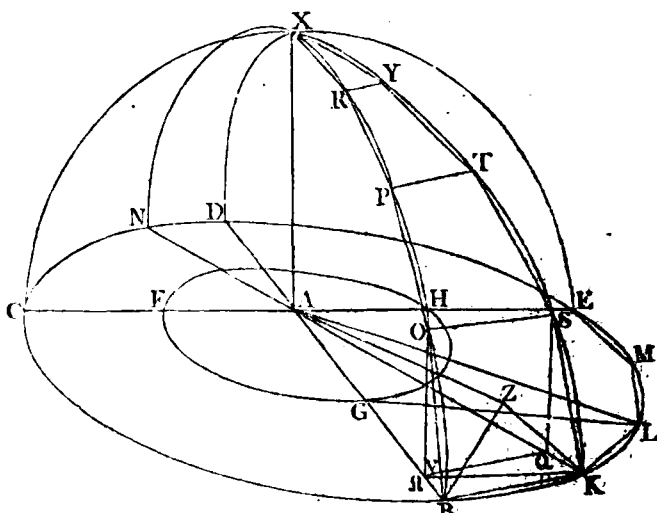
PROP. XVII. PROBL.

[XVII.]

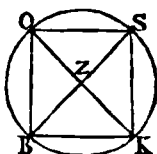
Duabus sphæris circa idem centrum existentibus, in majori solidum polyhedrum describere, quod suâ superficie minorem non contingat.

Intelligentur duæ sphæræ circa idem centrum A . Oportet in majori sphærâ describere solidum polyhedrum, quod suâ superficie minorem non contingat. Secentur sphæræ plano aliquo per centrum ducto: sectiones erunt circuli; quoniam diametro manente et semicirculo circumducto sphæra facta est^q. Ergo in quâcun-^{Def. 14.} que positione semicirculum intelligamus, quod per centrum producit^{undecimi.}ur planum in superficie sphæræ circulum efficiet; et constat circulum esse maximum, cum diameter sphæræ, quæ et semicirculi diameter est, maxima sit rectarum, quæ in circulo vel sphærâ ducuntur^r.^{15. tertii.} Sit igitur in majori quidem sphærâ circulus $BCDE$, in minori autem circulus $FUGH$; et ducantur ipsorum duæ diametri ad rectos inter se angulos BD, CE . Occurrat BD minori circulo in G ; ducatur a puncto G ipsi AG ad rectos angulos GL , et jungatur AL . Itaque circumferentiam EB bifariam secantes, et dimidium ipsius bifariam, atque hoc semper facientes, tandem relinquemus quandam circumferentiam minorem eâ parte circumferentiæ circuli BCD , quæ subten-
ditur a rectâ æquali ipsi GL . Relinquatur, sitque circumferentia BK . Minor igitur est recta BK quam GL ; eritque BK latus polygoni æqualium et parium numero laterum non tangentis minorem circulum. Sint igitur polygoni latera in quadrante circuli BE , rectæ BK, KL, LM, ME ; et juncta KA producat^rur ad N ; et a puncto A plano circuli $BCDE$ ad rectos angulos constituat^rur AX , quæ superficie sphæræ in puncto X oc-^{12. undec.}currat, et per AX et utramque ipsarum BD, KN plana ducantur, quæ ex jam dictis efficiant in superficie sphæræ maximos circulos. Itaque efficiant, et sint in diametris BD, KN eorum semicirculi BXD, KXN . Quoniam
 BK igitur

lelæ^a. Et quoniam av parallela est ipsi so , sed et pa-^{33. primi.}
 rallela ipsi kb ; erit et so ipsi kb parallela^a; et ipsas^{9. unde-}
 conjungunt bo , ks . Ergo et kbo quadrilaterum^{cimi.}
 est in uno plano: nam si duæ rectæ lineæ parallelæ
 sint, et in utrâque ipsarum quævis puncta sumantur,
 quæ dicta puncta conjungit recta linea in eodem est
 plano, in quo parallelæ^b. Et eadem ratione ipsorum^{7. unde-}
 quadrilaterorum $sopt$, $tpry$ utrumque in uno est^{cimi.}
 plano. Est autem in uno plano et triangulum yrx ^c,^{2. unde-}
 Si igitur a punctis o , s , p , t , r , y ad a ductas rectas^{cimi.}
 lineas intelligamus, constituetur quædam figura solida
 polyhedra inter circumferentias bx , kx , ex pyramidi-
 bus composita, quarum bases quidem kbo , $sopt$,
 $tpry$ quadrilatera, et triangulum yrx ; vertex au-
 tem punctum a . Quod si in unoquoque laterum kl ,
 lm , me , quemadmodum in kb eadem construamus;
 et in reliquis tribus quadrantibus, et in reliquo hemi-
 sphærio constituetur figura quædam polyhedra in sphæra
 descripta, et composita ex pyramidibus, quarum bases
 sunt quadrilatera jam dicta, et yrx triangulum, et
 aliæ ejusdem ordinis simili modo constructæ, cum vertex
 omnium communis sit punctum a . Dico dictam figu-
 ram polyhedram suâ superficie non contingere mino-
 rem sphæram, in quâ est circulus fgh . Ducatur a
 puncto a ad planum quadrilateri kbo perpendicu-
 laris az ^d, quæ plano in puncto z occurrat; et bz , zk ^{11. unde-}
 jungantur. Itaque quoniam az recta est ad quadrilateri^{cimi.}
 kbo planum, et ad omnes rectas lineas, quæ ipsam
 contingunt, et in eodem sunt plano, rectos angulos fa-
 ciet^e. Ergo az ad utramque ipsarum bz , zk est per-^{Def. 3.}
 pendicularis. Et quoniam ab est æqualis ak , erit et undecimi.
 quadratum ex ab quadrato ex ak æquale; et sunt
 quadrato quidem ex ab æqualia quadrata ex az , zb ,
 angulus enim ad z rectus est^f; quadrato autem ex ak ^{47. primi.}
 æqualia ex az , zk quadrata. Ergo quadrata ex az ,
 zb quadratis ex az , zk æqualia sunt. Commune
 auferatur quadratum ex az . Reliquum igitur quod
 ex bz reliquo quod ex zk est æquale. Ergo recta
 bz rectæ zk æqualis. Similiter ostendemus, et quæ
 a puncto z ad puncta o , s ducuntur utrique ipsarum
 bz , zk æquales esse. Circulus igitur centro z et in-
 tervallo unâ ipsarum bz , zk descriptus etiam per pun-
 cta o , s transibit. Et quoniam in circulo est bks
 quadrilaterum, et sunt æquales ob , bk , ks , et minor
 kk 2 os;



os; erit angulus BZK obtusus†; ideoque BK major quam BZ . Sed et GL quam BK est major. Multo igitur major est GL quam BZ ; et quadratum ex GL quadrato ex BZ majus. Et cum æqualis sit AL ipsi AB , erit quadratum ex AL quadrato ex AB æquale: sed quadrato quidem ex AL æqualia sunt quadrata ex AG , GL , quadrato autem ex AB , æqualia quadrata ex BZ , ZA ; quadrata igitur ex AG , GL æqualia sunt quadratis ex BZ , ZA : quorum quadratum ex BZ minus est quadrato ex GL . Ergo reliquum ex ZA quadratum majus est quadrato ex AG ; et ob id recta linea ZA major est recta AG . Sed punctum G est ad superficiem sphaeræ minoris. Quare punctum Z extra illam sphaeram. Recta autem AZ , in planum $BOKS$ ad perpendicularum deducta, minima est rectarum omnium, quæ a puncto A in planum illud deduci poterunt. Quare aliud omne punctum plani $BOKS$, vel magis etiam quam punctum Z , extra sphaeram minorem erit. Totum igitur planum $BOKS$ extra sphaeram minorem. Similiter et de alio quovis polyhedri plano ostendetur extra sphaeram minorem esse.



† Nimirum cum tres BK , BO , KS circulo $BKSO$ inscriptæ, inter se æquales sint, quarta autem OS unaquæque trium minor, erit arcus BK quadrante major. Quapropter angulus BZK , ad circuli centrum Z arcui BK insistenti, recto major erit.

Tota

Tota igitur polyhedri superficies extra sphæram illam. Duabus igitur sphæris circa idem centrum existentibus, in majori solidum descriptum est, quod suâ superficie minorem non contingit. *Q. E. F.*

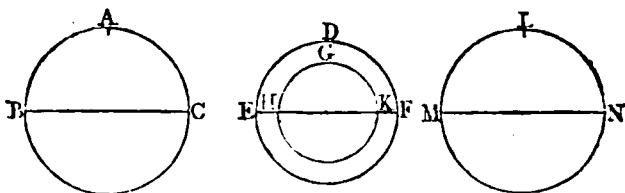
Cor. Quod si etiam in alterâ sphærâ solido polyhedro descripto, in sphærâ $B C D E$ simile solidum polyhedrum describatur; habebit solidum polyhedrum in sphærâ $B C D E$ ad solidum polyhedrum in alterâ sphærâ triplicatam proportionem ejus, quam diameter sphæræ $B C D E$ habet ad alterius sphæræ diametrum. Divisis enim solidis in pyramides numero æquales, et ejusdem ordinis: erunt pyramides similes. Similes autem pyramides inter se in triplicatâ sunt proportionem homologorum laterum. Ergo pyramis, cujus basis est $\kappa \nu \sigma$ quadrilaterum, vertex autem punctum Λ , ad pyramidem in alterâ sphærâ ejusdem ordinis triplicatam proportionem habet ejus, quam latus homologum habet ad homologum latus; hoc est, quam habet ΛB ex centro sphæræ, circa centrum Λ existentis, ad eam, quæ est ex centro alterius sphæræ. Similiter et unaquæque pyramis earum, quæ sunt in sphærâ circa centrum Λ , ad unamquamque pyramidum ejusdem ordinis, quæ sunt in alterâ sphærâ, triplicatam proportionem habebit ejus, quam habet ΛB ad eam, quæ est ex centro alterius sphæræ. Et ut unum antecedentium ad unum consequentium, ita antecedentia omnia ad omnia consequentia. Quare totum solidum polyhedrum, quod est in sphærâ circa centrum Λ , ad totum solidum polyhedrum, quod in alterâ sphærâ, triplicatam proportionem habebit ejus, quam habet ΛB ad eam, quæ est ex centro alterius sphæræ, hoc est, quam habet $B D$ diameter ad alterius sphæræ diametrum.

PROP. XVIII. THEOR.

[XVIII.]

Sphæræ inter se in triplicatâ sunt proportionem suarum diametrorum.

Intelligentur sphæræ $A B C$, $D E F$; quarum diametri $B C$, $E F$. Dico $A B C$ sphæram ad sphæram $D E F$ triplicatam proportionem habere ejus, quam habet $B C$ ad $E F$. Si enim non ita est, sphæra $A B C$ ad sphæram minorem ipsâ $D E F$, vel ad majorem, triplicatam proportionem habebit ejus, quam habet $B C$ ad $E F$. Habeat primo ad minorem, videlicet ad $G H K$. Et intelligatur sphæra $D E F$ circa idem centrum, circa quod sphæra $G H K$: describaturque in majori sphærâ $D E F$ solidum



• 17. hujus. solidum polyhedrum superficie suâ non contingens mi-
 norem sphaeram $G H K$ ^b; et in sphaerâ $A B C$ describatur
 solidum polyhedrum simile ei, quod in sphaerâ $D E F$ de-
 scriptum est. Solidum igitur polyhedrum, quod in
 sphaerâ $A B C$, ad solidum polyhedrum, quod in sphaerâ
 $D E F$, triplicatam proportionem habet ejus, quam $B C$ ad
 $E F$ ^a. Habet autem $A B C$ sphaera ad sphaeram $G H K$ tripli-
 catam proportionem ejus, quam $B C$ ad $E F$. Ergo ut $A B C$
 sphaera ad sphaeram $G H K$, ita solidum polyhedrum in
 sphaerâ $A B C$ ad solidum polyhedrum in sphaerâ $D E F$; et
 permutando, ut $A B C$ sphaera ad solidum polyhedrum, quod
 in ipsâ est, ita $G H K$ sphaera ad solidum polyhedrum,
 quod in sphaerâ $D E F$. Major autem est sphaera $A B C$
 solido polyhedro, quod est in ipsâ. Ergo et $G H K$
 sphaera polyhedro, quod in sphaerâ $D E F$, est major.
 Sed et minor, ab ipso enim comprehenditur; quod fieri
 non potest. Non igitur $A B C$ sphaera ad sphaeram mi-
 norem ipsâ $D E F$ triplicatam proportionem habet ejus,
 quam $B C$ ad $E F$. Similiter ostendemus neque $D E F$
 sphaeram ad sphaeram minorem ipsâ $A B C$ triplicatam
 habere proportionem ejus, quam habet $E F$ ad $B C$.
 Dico insuper sphaeram $A B C$ neque ad majorem sphaeram
 ipsâ $D E F$ triplicatam proportionem habere ejus, quam
 $B C$ ad $E F$. Si enim fieri potest, habeat ad majorem
 $L M N$. Invertendo igitur, sphaera $L M N$ ad $A B C$
 sphaeram triplicatam proportionem habet ejus, quam
 diameter $E F$ ad $B C$ diametrum. Ut autem sphaera
 $L M N$ ad $A B C$ sphaeram, ita sphaera $D E F$ ad sphaeram
 quandam minorem ipsâ $A B C$, quoniam sphaera $L M N$
 major est ipsâ $D E F$. Ergo et $D E F$ sphaera ad sphaeram
 minorem ipsâ $A B C$ triplicatam proportionem habet ejus,
 quam $E F$ ad $B C$; quod fieri non posse ostensum est.
 Non igitur $A B C$ sphaera ad sphaeram majorem ipsâ $D E F$
 triplicatam proportionem habet ejus, quam $B C$ ad $E F$.
 Ostensum autem est neque ad minorem. Ergo $A B C$
 sphaera ad sphaeram $D E F$ triplicatam proportionem ha-
 bebitor ejus, quam $B C$ ad $E F$. *Q. E. D.*

AD-

A D D E N D A.

LIB. V. PROP. XXVI.

*Cor. ** (Clavii) Si prima ad secundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam, habeat autem et quinta quædam, primæ detracta, ad secundam eandem proportionem quam sexta quædam, tertiæ detracta, ad quartam; et reliqua primæ ad secundam eandem proportionem habet, quam reliqua tertiæ ad quartam.

LIB. X. PROP. X.

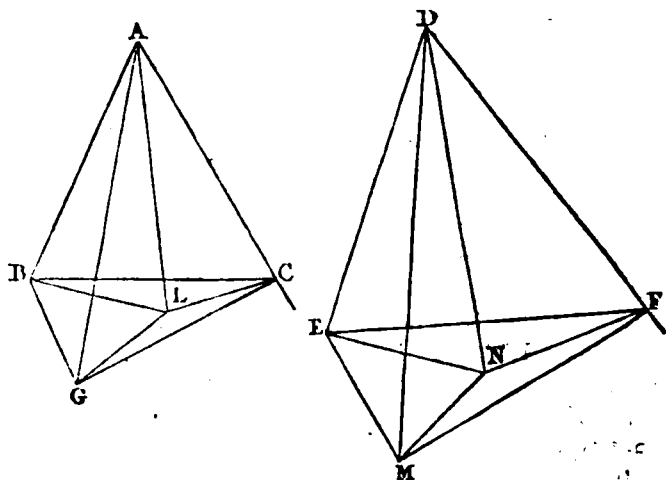
*Cor. ** Si quatuor rectæ proportionales fuerint, prima autem secundæ potentiâ tantum fit commensurabilis; tertia quoque quartæ potentiâ tantum commensurabilis erit.

LIB. XI. PROP. XXXV.

*Cor. 2. ** Si sint duo anguli plani æquales (BAC , EDF) quorum verticibus (A , D) sublimes rectæ lineæ (AG , DM) insistant, quæ cum rectis principio positis (AB , DE , AC , DF) angulos æquales, alterum alteri, contineant; angulum quidem MDE angulo GAB , et angulum MDF angulo GAC æqualem; plana angulorum BAG , CAG similiter inter se, et tertio anguli BAC plano, sunt inclinata, atque plana angulorum EDM , FDM inter se, et tertio anguli EDF plano. Et solidus angulus ad A solido ad D æqualis est.

Sumptis enim AG , DM æqualibus, et a punctis G , M rectis GL , MN in plana BAC , EDF ad perpendicularum demissis; rectæ illæ GL , MN inter se æquales erunt ^a. *Cor. 1.* Junctisque LA , ND , anguli GAL , MDN inter se æquales ^b. Et figuris ut prius constructis, in triangulis

Per hanc
 ABL , Prop.



ABL, DEN , ad B et E rectangulis, erit BL ad EN , ut AB ad DE . Sic enim ostensum. Similia igitur sunt triangula ABL, DEN , et æquales habent angulos, quibus latera homologa subtenduntur. Anguli igitur BAL, EDN inter se æquales. Hæc cum ita sint, plana BAG, CAG similiter inter se, et tertio ABC , atque plana EDM, FDM inter se, et tertio EDF inclinari, et angulum solidum ad A solido ad D æqualem esse, ex constructione vicesimæ sextæ hujus libri manifestum est. *Q. E. D.*

LIB. XI. PROP. XXXIX.

*Cor. 1. ** Duæ parallelepipedî cujusque diagonales se mutuo medias dividunt.

*Cor. 2. ** Parallelepipedî cujusque rectanguli diagonales inter se æquales sunt.

Ea autem parallelepipeda voco *rectangula*, quorum stantes rectæ lineæ ad perpendicularum sunt basium planis.

CORRIGENDA.

Pag.	14	lin.	17,	pro	OH	lege	CH
—	15	—	10,	pro	duabus	lege	duobus
—	20	—	1,	pro	ponatur	lege	Exponatur
—	46	—	10,	dele	Sed et	rectangulum	
—	56	—	4,	pro	fiunt	lateribus	lege fiunt a lateribus
—	63	—	24,	pro	z	lege	r
—	75	—	36,	pro	duabus	lege	duobus
—	80	—	34,	pro	habent.	Sed	lege habent; sed
—	130	—	26,	pro	O	lege	M
—	147	—	28,	pro	conditione	lege	conditioni
—	167	—	17,	pro	sumpti	lege	sumptis
—	169	—	7,	pro	angulem	lege	angulum
—	262	—	39,	pro	Def. 1. primi	lege	Def. 1. hujus.
—	267	—	25,	pro	cirt	lege	erit
—	281	—	18,	pro	quædam	A B	lege quædam rationalis A B
—	291	—	23,	pro	potest	lege	possit
—	347	—	24,	pro	erunt	lege	erit
—	393	—	penult.	pro	continentur	lege	continetur
—	408	—	14,	pro	ad	lege	ab
—	412	—	21,	pro	superficie,	mutua	lege superficie planâ, mutua †
—	427	—	30,	pro	B C	lege	D C
—	433	—	penult.	pro	Simpsonus	lege	Simfonus
—	477	—	18,	pro	A B C G	lege	A B C G.

† * Nempe in Græcis, in definitione anguli solidi excidisse arbitramur adjectivum *intraidæ*, substantivo *intrapavla* apponendum, ut definitio generalis fiat. Et enim ad Coni verticem (ex. gr.) angulus proculdubio est solidus, quem rectæ lineæ innumerae constituunt, ad punctum unum, conii verticem, collectæ; quæ quidem rectæ in eadem omnes sunt superficie, minime vero in eadem planâ, in conicâ enim superficie: et alii complures sunt anguli solidi, quorum par est ratio. Quos tamen definitione suâ Euclidem excludere voluisse haud putamus; præsertim cum angulus quisque solidus ad conii verticem, aliique complures qui superficiebus non planis continentur, aliis, qui planis continentur, æquales sint.

Illud autem accurate animadvertendum—Alteram, quæ ponitur anguli solidi, definitionem, utpote planis comprehensâ, ita ad conicum accommodari, si angulorum planorum numerus infinite augeri intelligatur, magnitudine cujusque singulatiim infinite immutâ. Cæterum incite admodum Simfonus definitionem anguli solidi, quas duas Euclides posuit, alterâ repudiât, alteram illam retinere maluit, quæ vel minus universalis est, vel, si aliter, ea saltem de quâ, universalem esse, non aequè manifestum est.