Euclides

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBRI PRIORES SEX,

ITEM

UNDECIMUS & DUODECIMUS.

Ex Versione Latina

FREDERICI COMMANDINI.

QUIBUS ACCEDUNT.

Trigonometriæ Planæ & Sphæricæ Elementa.

Item Tractatus de Natura & Arithmetica Logarithmorum.

In usum Juventutis Academicæ.

EDITIO QUINTA, Auctior & Emendatior.

OXONIÆ,

E THEATRO SHELDONIANO, MDCCXLVII.

Impensis *Ric. Clements* Bibliop. *Oxon.*

Prostat apud *J.* & *J. Knapton*, *S. Birt*, & *J.* & *J. Rivington*, Bibliop. *London.*

Imprimatur,

BER. GARDINER,

Vic. Can. *OXON.*

March 25. 1715.

W. W. Beman
6-18-1923

PRÆFATIO.

POST tot nova Geometriæ Elementa, non ita pridem in lucem emissa, est fortasse quod miretur Tyro Mathematicus, annosa hæc, & (ut quibusdam videntur) obsoleta Euclidis στοιχεῖα è prelo denuo prodire: præsertim cum non pauca in illis vitia detexisse sibi visi sint, qui Geometriam Elementarem novâ quadam methodo excolendam proponunt. Hi enim Lyncei Philosophi Euclidis Definitiones parum perspicuas, demonstrationes vix evidentes, res omnes malo ordine dispositas, aliasque mendas innumeras, per omnem antiquitatem ad sua usque tempora latentes, se invenisse jactant.

At tantorum virorum pace, audacter assero, Euclidem ab iis immerito reprehensum esse, ejusque Definitiones distinctas & claras, è primis & simplicioribus principiis petitas esse, & conceptibus nostris faciliores; demonstrationes Elegantes perspicuas & concinnas; ratiocinandi vim adeo evidentem & nervosam, ut facile inducar credere obscuritatem istam à sciolis illis toties insimulatam, confusis potius & perplexis eorum ideis, quam demonstrationibus ipsis imputandum esse. Et utcunque nonnulli quærantur de malâ rerum dispositione, & iniquo ordine, quem tenet Euclides; aliam tamen methodum magis idoneam, & discentibus faciliorem inter omnia hoc genus scripta invenio nullam.

Non meum est hîc loci hypercriticis Horum captiunculis sigillatim respondere: sed in his Elementis vel mediocriter versato, statim patebit, Calumniatores hos suam potius oscitantiam monstrare, quam veros in nostro authore lapsus arguere; imo ne hoc quidem dicere vereor, quod vix, & ne vix quidem unum, aut alterum è tot novis systematibus inveniri potest, in quibus plures non sunt labes, imo fœdiores paralogismi, quam in Euclidem vel fingere potuerunt.

Post tot infelices in Geometriâ reformandâ conatus, quidam non infimi Geometræ Elementa de novo construere non ausi, ipsum Euclidem omnibus aliis Elementorum Scriptoribus merito prælutulerunt, eique edendo suas curas impenderunt; hi tamen ipsi nescio quibus opinionibus ducti, alias propositiones prorsus omittunt, aliarumque demonstrationes in pejus mutant. Inter illos eminent Tacquetus & Deschalles, quorum utrique malo quodam fato contigit, ut elegantes quasdem & in Elementis optimo jure ponendas propositiones quasi ineptas & inutiles rejecerint, quales sunt propositiones 27, 28, 29. libri sexti, cum aliis nonnullis quarum usus fortasse illos latebat. Insuper quandocunque ipsas Euclidis demonstrationes deserant, multum in argumentando peccant, & à concinnitate Veterum recedunt.

In libro quinto demonstrationes Euclidis in totum repudierunt, & Proportionis definitionem aliis terminis conceptam attulerunt; at quæ unam tantum è duabus proportionalium speciebus comprehendit, & quantitatibus commensurabilibus solummodo competit: nihilominus suas, quæ sunt de proportione, demonstrationes omni quantitati tam

incom-

incommensurabili quam commensurabili in sequentibus libris applicant. Hunc tam turpem lapsum nec Logici nec Geometræ facile condonassent, nisi hi authores in aliis suis scriptis de Scientiis Mathematicis benè meruissent. Hoc quidem commune est iis vitium cum omnibus hodiernis Elementorum Scriptoribus, qui in eundem impingunt scopulum, & ut suam in hac materia ostentent peritiam, authorem nostrum in re minime culpandâ imo laudandâ reprehendunt; Quantitatum proportionalium definitionem intelligo: in quâ intellectu facilem proportionalium proprietatem exponit, quæ quantitatibus omnibus tam incommensurabilibus quam commensurabilibus æque convenit, & à quâ cæteræ omnes proportionalium proprietates facile consequuntur.

Hujus proprietatis demonstrationem in Euclide desiderant Egregii hi Geometræ, atque defectum demonstratione suâ supplendum suscipiunt. Hic iterum contemplari licet insignem eorum in Logicâ peritiam, qui definitionis nominis demonstrationem expectant: talis enim est hæc Euclidis definitio; qui illas quantitates proportionales vocat, quæ conditiones in definitione suâ allatas obtinent. Quidni primo Elementorum authori licebat, quælibet nomina quantitatibus hæc requisita habentibus, arbitrio suo affigere? Licebat proculdubio; suo igitur utitur jure, & eas proportionales vocat.

Sed operæ pretium erit, methodum, quâ hanc proprietatem demonstrare conantur, perpendere. Affectionem quandam uni tantum proportionalium generi, viz. commensurabilium, congruentem assumunt; & exinde multis ambagibus longâque con-

clusionum

clusionum serie universalem, quam Euclides posuit, proportionalium proprietatem deducunt; quod certe tam methodo quam argumentationis regulis satis alienum esse videtur. At longe rectius fecissent, si proprietatem universalem ab Euclide assignatam primo posuissent, & exinde particularem illam & uni tantum proportionalium speciei congruentem deduxissent. Quoniam vero hanc respuerunt methodum, talem demonstrationem ad definitiones libri quinti attexere libuit. Qui Euclidem ulterius defensum videre cupiunt, consulant eruditas & summo judicio conscriptas Lectiones Mathematicas Cl. Barovii an. 1666.

Cum vero tanti Geometræ incidit mentio, præterire non possum Elementa ab eo edita, in quibus plerumque ipsius Euclidis constructiones & demonstrationes retinet, ne unâ quidem omissa propositione. Hinc oritur major in demonstrando vis, pulchrior construendi methodus, & ubique Veterum Geometrarum genius clarius elucet, quam in libris istius generis fieri solet. Plura præterea Corollaria & Scholia adjecit, non modo breviori sequentium demonstrationi inservientia, verum etiam aliis in rebus perutilia.

Nihilominus, demonstrationes ejus eâ brevitate laborant, tot symbolis notisque implicantur, ut in Geometriâ parum versato difficiles & obscuræ fiant. Multæ propositiones quæ ipsum Euclidem legenti perspicuæ viderentur, Algebraicâ hac demonstrandi methodo tyronibus nodosæ & vix intelligibiles redduntur; qualis est V. G. 13. primi Elementi. Demonstrationum, quas in Elemento secundo attulit, difficilis admodum tyronibus est intelligentia; rectius

ctius multo Euclides ipse earum evidentiam (ut in re Geometricâ fieri debet) à figurarum contemplatione petit. Scientiarum omnium Elementa simplicissimâ methodo tradenda sunt, nec symbolis nec notis nec obscuris principiis aliunde petitis involvenda.

Ut Elementa Barovii nimiâ brevitate, sic ea, quæ à Clavio traduntur, molestâ prolixitate peccant. Scholiis enim Commentariisque abundat nimis & luxuriat. Vix equidem arbitror Euclidem tam obscuram esse, ut tantâ farraigne notarum indigeat; nec dubito quin tyrones omnes Euclidem ipsum omnibus suis Commentatoribus faciliorem inventuri sint. In demonstrationibus Geometricis ut nimia brevitas tenebras parit, sic nimia verbositas plus tædii & confusionis quam lucis affert.

Hisce præcipue inductus rationibus, prima sex Euclidis Elementa cum undecimo & duodecimo, ex versione Frederici Commandini *in usum Juventutis Celeberrimæ hujus Academiæ per se edenda curavi; à cæteris abstinui tum quia hæc, quæ jam damus, ad alias plerasque Matheseos partes, quæ nunc vulgo traduntur, intelligendas, sufficiant, tum etiam quia omnia Euclidis opera, Græce & Latine nitidissimis Characteribus adornata summaque cura & fide emendata nuper è prælo Academico prodiere.*

Porro in gratiam eorum, qui Geometriam Elementarem ad Praxes vitæ commodis inservientes applicare desiderant, Trigonometriæ Planæ & Sphæricæ compendium adjunxi, cujus Artis ope, magnitudines Geometricæ mensurantur, ipsarumque dimensiones numeris subjiciuntur.

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER PRIMUS.

DEFINITIONES.

I.

PUnctum est, cujus nulla est pars, vel quod magnitudinem nullam habet.

II.

Linea vero est longitudo latitudinis expers.

III.

Lineæ termini sunt puncta.

IV.

Recta linea est, quæ ex æquo suis interjicitur punctis.

V.

Superficies est id, quod longitudinem, & latitudinem tantum habet.

VI.

Superficiei termini sunt lineæ.

VII.

Plana superficies est quæ ex æquo suis interjicitur lineis.

VIII.

Planus angulus est duarum linearum in plano sese contingentium, & non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio.

IX.

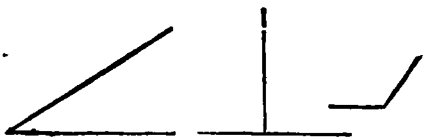
Quando autem quæ angulum continent rectæ lineæ fuerint, rectilineus angulus appellatur.

X

Cum vero recta linea ſuper rectâ lineâ inſiſtens, eos, qui deinceps ſunt angulos, æquales inter ſe fecerit, rectus eſt uterque æqualium angulorum: & quæ inſiſtit recta linea perpendicularis vocatur ad eam, cui inſiſtit.

XI.

Obtuſus angulus eſt, qui major eſt recto.



XII.

Acutus autem, qui recto eſt minor.

XIII.

Terminus eſt, quod alicujus extremum eſt.

XIV.

Figura eſt, quæ aliquo, vel aliquibus terminis continetur.

XV.

Circulus eſt figura plana, una linea contenta, quæ circumferentia appellatur: ad quam ab uno puncto intra figuram exiſtente omnes rectæ lineæ pertingentes ſunt æquales.

XVI.

Hoc autem punctum centrum circuli nuncupatur.

XVII.

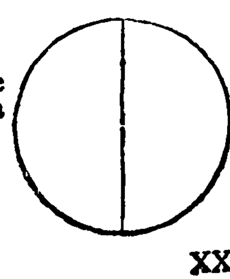
Diameter circuli eſt recta quædam linea per centrum ducta, & ex utraque parte à circumferentia circuli terminata, quæ quidem, & bifariam circulum ſecat.

XVIII.

Semicirculus eſt figura, quæ continetur diametro, & ea quæ ex ipſa circuli circumferentia intercipitur.

XIX.

Segmentum circuli eſt figura, quæ recta linea, & circuli circumferentia continetur.



XX.

XX.

Rectilineæ figuræ sunt, quæ rectis continentur lineis.

XXI.

Trilateræ quidem, quæ tribus.

XXII.

Quadrilateræ, quæ quatuor.

XXIII.

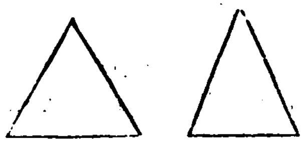
Multilateræ vero, quæ pluribus, quam quatuor rectis lineis comprehenduntur.

XXIV.

Trilaterarum figurarum æquilaterum est triangulum, quod tria latera habet æqualia.

XXV.

Isosceles, sive æquicrure, quod duo tantum æqualia latera habet.

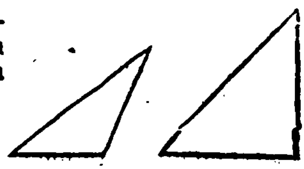


XXVI.

Scalenum vero est, quod tria inæqualia habet latera.

XXVII.

Ad hæc, trilaterarum figurarum, rectangulum quidem est triangulum, quod rectum angulum habet.



XXVIII.

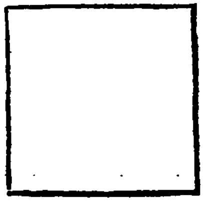
Obtusangulum est, quod obtusum habet angulum.

XXIX.

Acutangulum vero, quod tres acutos angulos habet.

XXX.

Quadrilaterarum figurarum quadratum eſt, quod & æquilaterum eſt, & rectangulum.



XXXI.

Altera parte longior figura eſt, quæ rectangula quidem æquilatera vero non eſt.

XXXII.

Rhombus, quæ æquilatera quidem, ſed rectangula non eſt.

XXXIII.

Rhomboides, quæ, & oppoſita latera, & oppoſitos angulos inter ſe æquales habens, neque æquilatera eſt, neque rectangula.

XXXIV.

Præter has autem reliquæ quadrilateræ figuræ trapezia vocentur.

XXXV.

Parallelæ, ſeu æquidiſtantes rectæ lineæ ſunt, quæ cum in eodem ſint plano, & ex utraque parte in infinitum producantur, in neutram partem inter ſe conveniunt.

POSTULATA.

I.

Poſtuletur à quovis puncto ad quodvis punctum rectam lineam ducere.

II.

Rectam lineam terminatam, in continuum & directum producere.

III.

Quovis centro, & intervallo circulum deſcribere.

AXIOMATA.

AXIOMATA.

I.

Quæ eidem æqualia, & inter se sunt æqualia.

II.

Et si æqualibus æqualia adjiciantur tota sunt æqualia.

III.

Et si ab æqualibus æqualia auferantur, reliqua sunt æqualia.

IV.

Et si inæqualibus æqualia adjiciantur, tota sunt inæqualia.

V.

Et si ab inæqualibus æqualia auferantur, reliqua sunt inæqualia.

VI.

Et quæ ejusdem duplicia sunt, inter se sunt æqualia.

VII.

Et quæ ejusdem dimidia sunt, inter se sunt æqualia.

VIII.

Et quæ sibi mutuo congruunt, inter se sunt æqualia.

IX.

Totum est sua parte majus.

X.

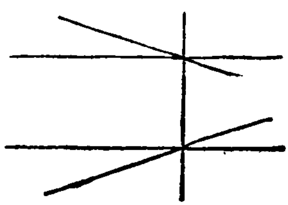
Duæ rectæ lineæ spatium non comprehendunt.

XI.

Omnes anguli recti inter se æquales sunt.

XII.

Et si in duas rectas lineas recta linea incidens, interiores, & ex eadem parte angulos duobus rectis minores fecerit, rectæ lineæ illæ in infinitum productæ, inter se conveniunt ex ea parte, in qua sunt anguli duobus rectis minores.



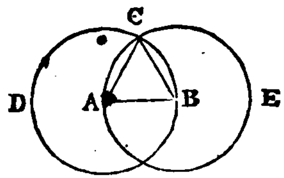
Not. *Cum plures anguli ad unum punctum existunt designatur quilibet tribus literis, quarum illa quæ est ad verticem anguli, in medio ponitur.* V.G. *in figura Prop.* 13. *libri primi angulus à rectis* AB, BC *comprehensus dicitur angulus* ABC, *& angulus à rectis* AB, BE *contentus dicitur angulus* ABE.

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

Super datâ rectâ lineâ terminatâ, triangulum æquilaterum constituere.

Sit data recta linea terminata A B, oportet super ipsa A B triangulum æquilaterum constituere. Centro quidem A intervallo autem A B circulus describatur B C D [a]. Et rursus centro B, intervalloque B A describatur circulus A C E [a], & a puncto C, in quo circuli se invicem secant, ad A B ducantur rectæ lineæ C A C B [b]. Quoniam igitur A centrum est circuli D B C, erit A C ipsi A B [c] æqualis, rursus quoniam B circuli C A E est centrum, erit B C æqualis B A: ostensa est autem & C A æqualis A B: utraque igitur ipsarum C A C B ipsi A B est æqualis. Quæ autem eidem sunt æqualia, & inter se æqualia sunt.[d] Ergo C A ipsi C B est æqualis tres igitur C A A B, B C inter se sunt æquales; ac propterea triangulum æquilaterum est A B C, & constitutum est super data recta linea terminata A B. quod fecisse oportebat.

a 3. Post.
b 1. Post.
c 15. Def.
d Ax. 1.

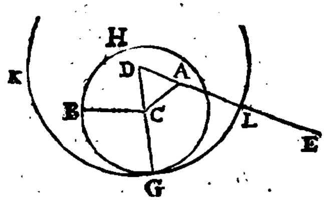


PROP. II. PROBL.

Ad datum punctum, data recta linea æqualem rectam lineam ponere

Sit datum quidem punctum A, data vero recta linea B C. oportet ad A punctum, ipsi B C rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere. Ducatur à puncto A ad C recta linea A C [a]: & super ipsâ constituatur triangulum æquilaterum D A C [b]. producanturque in directum ipsis D A D C rectæ lineæ A E C G [c]. & centro quidem C, intervallo autem B C circulus B G H describatur [d]. Rursusque centro D, & intervallo D G describatur circulus G K L. Quoniam igitur punctum C centrum est B G H circuli, erit B C ipsi C G æqualis [e]. Et rursus quoniam D centrum est circuli G K L, erit D L æqualis D G: quarum D A est æqualis D C. reliqua igitur A L reliquæ G C est æqualis [f]. Ostensa autem

a Postul. 1.
b Prima hujus.
c Postul. 2.
d 3. Post.
e Def. 15.
f Axiom. 3.

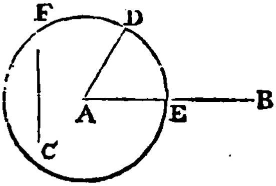


autem est BC æqualis CG. Quare utraque ipsarum AL BC est æqualis ipsi CG. Quæ autem eidem æqualia sunt & inter se sunt æqualia. Ergo, & AL est æqualis BC. Ad datum igitur punctum A datæ rectæ lineæ BC æqualis posita est AL. Quod facere oportebat.

PROP. III. PROBL.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus à majore minori æqualem abscindere.

Sint datæ duæ rectæ lineæ inæquales AB & C; quarum major sit AB. oportet à majore AB minori C æqualem rectam lineam abscindere. Ponatur ad A punctum ipsi C æqualis recta linea AD [a], & centro quidem A, intervallo autem AD circulus describatur DEF [b]. Et quoniam A centrum est DEF circuli, erit AE ipsi AD æqualis. Sed & C æqualis AD. Utraque igitur ipsarum AE, C ipsi AD æqualis erit. Quare & AE ipsi C est æqualis [c]. Duabus igitur datis rectis lineis inæqualibus AB & C à majore AB minori C æqualis Abscissa est: Quod fecisse oportebat.

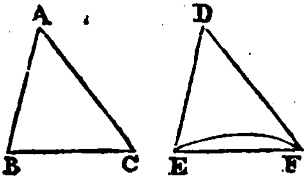


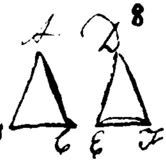
[a] Per antecedentem.
[b] Post. 3.
[c] Axiom. 1.

PROP. IV. THEOR.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem, & angulum angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continetur: Et basim basi æqualem habebunt; & triangulum triangulo æquale erit; & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur.

Sint duo triangula ABC DEF, quæ duo latera AB AC duobus lateribus DE DF æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus quidem AB lateri DE æquale, latus vero AC ipsi DF; & angulum BAC angulo EDF æqualem. Dico, & basim BC basi EF æqualem esse, & triangulum ABC æquale triangulo DEF, & reliquos angulos reliquis angulis æ-





quales, alterum alteri, quibus æqualia latera subtenduntur; nempe angulum ABC angulo DEF: & angulum ACB angulo DFE. Triangulo enim ABC applicato ipsi DEF, & puncto quidem A posito in D, recta vero linea AB in ipsa DE: & punctum B puncto E congruet; quod AB ipsi DE sit æqualis. Congruente autem AB ipsi DE; congruet & AC recta linea rectæ lineæ DF cum angulus BAC sit æqualis angulo EDF. Quare, & C congruet ipsi F; est enim recta linea AC æqualis rectæ DF. Sed, & punctum B congruebat puncto E. Ergo, & basis BC basi EF congruet. Nam si puncto quidem B congruente ipsi E, C vero ipsi F; basis BC basi EF non congruit; duæ rectæ lineæ spatium comprehendent: quod *a* fieri non potest. Congruet igitur BC basis, basi EF, & ipsi æqualis erit. Quare & totum ABC triangulum congruet toti triangulo DEF, & ipsi erit æquale; & reliqui anguli reliquis angulis congruent, & ipsis æquales *b* erunt. Videlicet angulus ABC angulo DEF, & angulus ACB angulo DFE. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, habeant autem & angulum angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continetur; & basim basi æqualem habebunt; & triangulum triangulo æquale erit; & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur: quod ostendere oportebat.

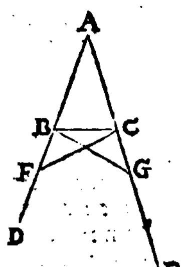
a Ax. 10.

b Axiom. 8.

PROP. V. THEOR.

Isoscelium triangulorum qui ad basim sunt anguli inter se sunt æquales, & productis æqualibus rectis lineis anguli qui sunt sub basi inter se æquales erunt.

Sit isosceles triangulum ABC; habens AB latus lateri AC æquale, & producantur in directum ipsis AB AC rectæ lineæ BD CE. Dico angulum quidem ABC angulo ACB, angulum vero CBD angulo BCE æqualem esse. Sumatur enim in linea BD, quodvis punctum F; atque à majore AE minori AF æqualis *a* auferatur AG; junganturque FC, GB. Quoniam igitur AF est æqualis AG; AB vero ipsi AC; duæ FA AC, duabus GA AB æquales sunt, altera alteri; & angulum FAG communem continent, basis igitur FC basi GB est *b* æqualis, & triangulum AFC æquale triangulo AGB; & reliqui anguli, reliquis angulis æquales erunt, alter alteri; quibus æqualia latera



a 3. hujus.

b 4. hujus.

latera ſubtenduntur: Videlicet angulus quidem ACF æqualis angulo ABG; angulus vero AFC angulo AGB. Et quoniam tota AF toti AG eſt æqualis; quarum AB eſt æqualis AC; erit [c] & reliqua BF reliquæ CG æqualis. Oſtenſa eſt autem FC æqualis GB. duæ igitur BF, FC duabus CG GB æquales ſunt, altera alteri; & angulus BFC æqualis angulo CGB: eſtque baſis ipſorum BC communis. Ergo & triangulum BFC triangulo CGB æquale erit; & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri; quibus æqualia latera ſubtenduntur. Angulus igitur FBC eſt æqualis angulo GCB; & angulus BCF angulo CBG. Itaque quoniam totus ABG angulus toto angulo ACF æqualis oſtenſus eſt, quorum angulus CBG eſt æqualis ipſi BCF: erit reliquus [d] ABC reliquo ACB æqualis; & ſunt ad baſim ABC trianguli: oſtenſus autem eſt & FBC angulus æqualis angulo GCB; qui ſunt ſub baſi. Iſoſcelium igitur triangulorum, qui ad baſim ſunt anguli inter ſe ſunt æquales, & productis æqualibus rectis lineis anguli, qui ſunt ſub baſi, inter ſe æquales erunt. Quod oſtendiſſe oportebat.

[c] Axiom. 3.

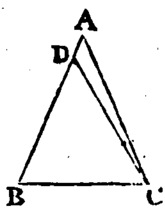
[d] Axiom. 3.

Cor. Hinc omne triangulum æquilaterum eſt quoque æquiangulum.

PROP. VI. THEOR.

Si trianguli duo anguli inter ſe ſint æquales, & æquales angulos ſubtendentia latera inter ſe æqualia erunt.

Sit triangulum ABC, habens angulum ABC angulo ACB æqualem. Dico & AB latus lateri AC æquale eſſe: Si enim inæqualis eſt AB ipſi AC; altera ipſarum eſt major. Sit major AB; atque à majori AB minori AC æqualis [a] auferatur DB; & DC jungatur. Quoniam igitur DB eſt æqualis ipſi AC; communis autem BC: erunt duæ DB BC duabus AC CB æquales, altera alteri; & angulus DBC æqualis angulo ACB ex hyp. Baſis igitur DC baſi AB eſt [b] æqualis, & triangulum DBC æquale triangulo ACB, minus majori; quod eſt abſurdum. Non igitur inæqualis eſt AB ipſi AC. Ergo æqualis erit. Si igitur trianguli duo anguli inter ſe ſint æquales, & æquales angulos ſubtendentia latera inter ſe æqualia erunt: quod monſtraſſe oportuit.



[a] 3. hujus.

[b] 4. hujus.

Cor. Hinc omne triangulum æquiangulum eſt quoque æquilaterum.

a ex. hyp.

PROP.

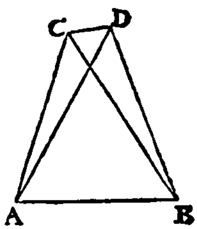
Quoniam DB=AC & communis BC } DB, BC=AC, CB altera alteri & angulus DBC =[a] ang. ACB } ergo basis DC=AB & triangulum DBC = triangulo ACB minus majori est absurd.

PROP. VII. THEOR.

In eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis, aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri non constituentur ad aliud atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdem quos prima recta linea, terminos habentes.

Si enim fieri potest, in eadem recta linea AB duabus eisdem rectis lineis AC CB, aliæ duæ rectæ lineæ AD DB æquales, altera alteri constituantur ad aliud atque aliud punctum C & D, ad easdem partes ut ad C & D, eosdem habentes terminos A & B quos primæ rectæ lineæ, ita ut CA quidem sit æqualis DA, eundem, quem ipsa terminum, habens A; CB vero sit æqualis DB, eundem habens B terminum; & CD jungatur. Itaque quoniam AC est æqualis AD; erit, & angulus ACD angulo ADC æqualis [a]. Major igitur est ADC angulus angulo BCD. Quare angulus BDC angulo BCD multo major erit. Rursus quoniam CB est æqualis DB & angulus BDC æqualis erit angulo BCD: ostensus autem est ipso multo major; quod fieri non potest. Non igitur in eadem recta linea duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri constituentur ad aliud atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdem, quos primæ rectæ lineæ, terminos habentes; quod ostendisse oportebat.

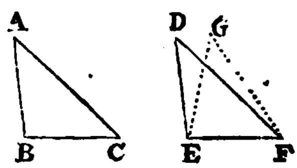
[a] 5. hujus.



PROP. VIII. THEOR.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem & basim basi æqualem; angulum quoque, qui æqualibus lateribus continetur, angulo æqualem habebunt.

Sint duo triangula ABC, DEF, quæ duo latera AB, AC, duobus lateribus DE DF æqualia habeant alterum alteri; ut sit AB quidem æquale DE; AC vero ipsi DF; habeant autem, & basim BC basi EF æqualem.



Dico

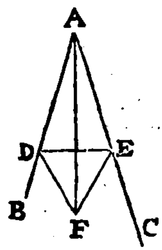
Dico angulum quoque BAC angulo EDF æqualem esse. Triangulo enim ABC applicato ipsi DEF triangulo, & puncto quidem B posito in E; recta vero linea BC in EF: congruet & C punctum puncto F, quoniam BC ipsi EF est æqualis. Itaque congruente BC ipsi EF; congruent & BA AC ipsis ED DF. si enim basis quidem BC basi EF congruit; latera autem BA AC lateribus ED DF non congruunt, sed situm mutant; ut EG GF: constituentur in eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis, aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri, ad aliud atque aliud punctum; ad easdem partes; eosdem habentes terminos. non constituuntur autem; ut demonstratum [a] est. non igitur, si basis BC congruit basi EF, non congruent & BA AC latera lateribus ED DF. congruent igitur. Quare & angulus BAC angulo EDF congruet, & ipsi erit æqualis. Si igitur duo triangula, duo latera, duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem & basim basi æqualem: angulum quoque æqualibus lateribus contentum angulo æqualem habebunt: quod demonstrare oportebat.

[a] per 7. hujus.

PROP. IX. PROBL.

Datum angulum rectilineum bifariam secare.

Sit datus angulus rectilineus BAC; itaque oportet ipsum bifariam secare. Sumatur in linea AB quodvis punctum D; & à linea AC ipsi AD æqualis [a] auferatur AE; junctaque DE constituatur super ea [b] triangulum æquilaterum DEF; & AF jungatur. Dico angulum BAC à recta linea AF bifariam secari. Quoniam enim AD est æqualis AE: communis autem AF. duæ DA AF duabus EA AF æquales sunt, altera alteri; & basis DF æqualis basi EF. angulus [c] igitur DAF angulo EAF est æqualis. quare datus angulus rectilineus BAC à recta linea AF bifariam sectus est; quod facere oportebat.



[a] 3. hujus.
[b] 1. hujus.
[c] 8. hujus.

PROP. X. PROBL.

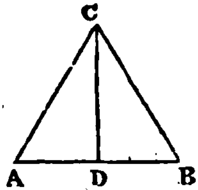
Datam rectam lineam terminatam bifariam secare.

Sit data recta linea terminata AB; oportet ipsam AB bifariam secare. constituatur super [a] ea triangulum æquilaterum

[a] 1. hujus.

ABC;

b 9. hujus. ABC; & secetur ACB angulus [b] bifariam recta linea CD. Dico AB rectam lineam in puncto D bifariam secari. Quoniam enim AC est æqualis CB; communis autem CD; duæ AC CD duabus BC CD æquales sunt; altera alteri; & angulus ACD æqualis angulo BCD. basis igi-



c 4. hujus. tur AD basi BD est [c] æqualis. Et ob id recta linea terminata AB bifariam secta est in puncto D: quod facere oportebat.

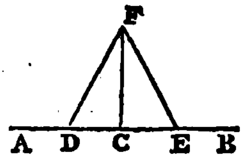
PROP. XI. PROBL.

Data recta linea à puncto in ipsa dato ad rectos angulos rectam lineam ducere.

Sit data recta linea AB, & datum in ipsa punctum C. oportet à puncto C ipsi AB ad rectos angulos rectam lineam ducere. Sumatur in AC quodvis punctum D: ipsique CD

a 3. hujus. æqualis [a] ponatur CE, & super

b 1. hujus. DE constituatur [b] triangulum æqualilaterum FDE, & FC jungatur. Dico datæ rectæ lineæ AB à puncto C in ipsa dato, ad rectos angulos ductam esse FC. Quoniam enim DC est æqualis CE, & FC communis; erunt



duæ DC CF duabus EC CF æquales, altera alteri; & basis DF est æqualis basi FE, angulus igitur DCF angulo ECF

c 8. hujus. est [c] æqualis, & sunt deinceps. Quando autem recta linea super rectam lineam insistens, eos qui deinceps sunt angu-

d Def. 10. los æquales inter se fecerit; rectus [d] est uterque æqualium angulorum. ergo uterque ipsorum DCF FCE est rectus. Datæ igitur rectæ lineæ AB à puncto in ipsa dato C ad rectos angulos ducta est FC recta linea. Quod fecisse oportuit.

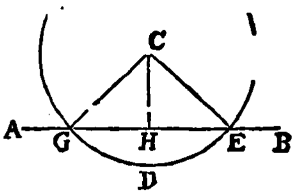
PROP. XII. PROBL.

Super data recta linea infinita, à dato puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit data quidem recta linea infinita AB, datum vero punctum C, quod in ea non est. Oportet super data recta

linea

linea infinita AB, à dato puncto C, quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam ducere. Sumatur enim ad alteras partes ipsius AB rectæ lineæ quodvis punctum D: & centro quidem C, intervallo autem CD circulus [a] describatur EDG: & EG in H bifariam [b] secetur: junganturque CG CH CE, Dico super data recta linea infinita AB, à dato puncto C, quod in ea non est, perpendicularem CH ductam esse. Quoniam enim æqualis est GH ipsi HE, communis autem HC, duæ GH HC, duabus EH HC æquales sunt, altera alteri; & basis CG est æqualis basi CE. Angulus igitur CHG angulo CHE est [c] æqualis, & sunt deinceps. cum autem recta linea super rectam lineam insistens, eos qui deinceps sunt angulos, æquales inter se fecerit; rectus [d] est uterque æqualium angulorum & quæ insistit recta linea perpendicularis appellatur ad eam, cui insistit. ergo super data recta linea infinita AB à dato puncto C, quod in ea non est, perpendicularis ducta est CH. Quod facere oportebat.

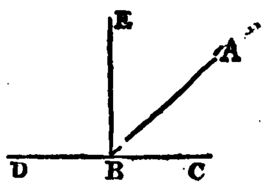


[a] Postul. 3.
[b] 10. hujus.
[c] 8. hujus.
[d] Def. 10.

PROP. XIII. THEOR.

Cum recta linea super rectam consistens lineam angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis æquales efficiet.

Recta enim linea quædam AB super rectam CD consistens angulos faciat CBA ABD. Dico CBA ABD angulos vel duos rectos esse, vel duobus rectis æquales; si enim CBA est æqualis ipsi ABD; duo recti [a] sunt; sin minus, ducatur à puncto B ipsi CD ad rectos [b] angulos BE. anguli igitur CBE EBD sunt duo recti. Et quoniam CBE, duobus CBA ABE est æqualis, communis apponatur EBD: ergo anguli CBE EBD tribus angulis CBA ABE EBD sunt [c] æquales. Rursus quoniam DBA angulus est æqualis duobus DBE EBA, communis apponatur ABC. anguli igitur DBA ABC tribus DBE EBA ABC æquales sunt. At ostensum est angulos quoque CBE EBD eisdem tribus æquales esse: quæ vero eidem sunt æqualia, [d] & inter se æqualia sunt: ergo & anguli CBE EBD ipsis DBA ABC sunt æquales, suntque CBE EBD duo recti anguli



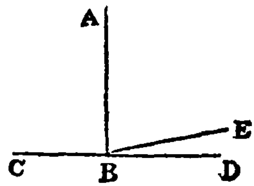
[a] Def. 10.
[b] 11. hujus.
[c] Axiom. 2.
[d] Axiom. 1.

anguli, igitur DBA ABC duobus rectis æquales erunt. ergo cum recta linea super rectam lineam consistens angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis æquales efficiet. Quod oportebat demonstrare

PROP. XIV. THEOR.

Si ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in ea duæ recta lineæ non ad easdem partes posita, angulos qui deinceps sunt, duobus rectis æquales fecerint; ipsæ rectæ lineæ in directum sibi invicem erunt.

Ad aliquam enim rectam lineam AB, atque ad punctum in ea B, duæ rectæ lineæ BC BD non ad easdem partes positæ angulos, qui deinceps sunt, ABC ABD duobus rectis æquales faciant. Dico BD ipsi CB in directum esse. si enim BD non est in directum ipsi CB, sit ipsi CB in directum BE. Quoniam igitur recta linea AB super rectam CBE consistit; anguli ABC ABE [a] duobus rectis sunt æquales. Sed & angnli ABC ABD sunt æquales duobus rectis. Anguli igitur CBA ABE ipsis CBA ABD æquales erunt. Communis auferatur ABC. Ergo reliquus ABE reliquo ABD est æqualis, minor majori quod fieri non potest. Non igitur BE est in directum ipsi BC. Similiter ostendemus neque aliam quampiam esse, præter BD. Ergo CB ipsi BD in directum erit. Si igitur ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in ea duæ rectæ lineæ non ad easdem partes positæ angulos, qui deinceps sunt, duobus rectis æquales fecerint, ipsæ rectæ lineæ in directum sibi invicem erunt. Quod demonstrare oportebat.

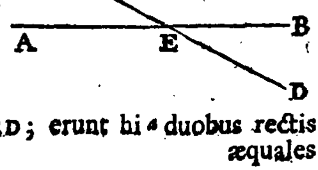


[a] 13. hujus.

PROP. XV. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ se invicem secuerint, angulos qui ad verticem sunt, inter se æquales efficient.

Duæ enim rectæ lineæ AB CD se invicem secent in puncto E. Dico angulum quidem AEC angulo DEB; angulum vero CEB angulo AED æqualem esse. Quoniam enim recta linea AE super rectam CD consistens angulos facit CEA AED; erunt hi [a] duobus rectis æquales



[a] 13. hujus.

æquales. Rursus quoniam recta linea DE super rectam AB consistens facit angulos AED DEB; erunt AED DEB anguli æquales [a] duobus rectis. Ostensum autem est angulos quoque CEA AED duobus rectis esse æquales. Anguli igitur CEA AED angulis AED DEB æquales sunt. Communis auferatur AED. Ergo reliquus [b] CEA reliquo BED est æqualis. Simili ratione, & anguli CEB DEA æquales ostenduntur. Si igitur duæ rectæ lineæ se invicem secuerint, angulos, qui ad verticem sunt, æquales efficient. Quod ostendere oportebat. [b] Axiom. 3.

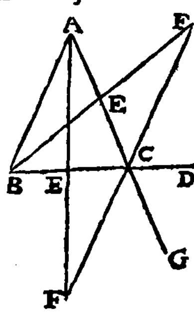
Cor. 1. Ex hoc manifeste constat duas rectas lineas se invicem secantes, facere angulos ad sectionem quatuor rectis æquales.

Cor. 2. Omnes anguli circa unum punctum constituti conficiunt angulos quatuor rectis æquales.

PROP. XVI. THEOR.

Omnis trianguli uno latere producto exterior angulus utrovis interiore, & opposito est major.

Sit triangulum ABC, & unum ipsius latus BC ad D producatur. Dico exteriorem angulum ACD utrovis interiore, & opposito, videlicet CBA, & BAC majorem esse. Secetur enim AC bifariam [a] in E, & juncta BE producatur ad F; ponaturque ipsi BE æqualis EF. Jungatur præterea FC & AC ad G producatur. Quoniam igitur AE quidem est æqualis EC, BE vero ipsi EF, duæ AE EB duabus CE EF æquales sunt, altera alteri: & angulus AEB angulo FEC est æqualis [b], ad verticem enim sunt. Basis igitur AB æqualis [c] est basi FC; & AEB triangulum triangulo FEC & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. Ergo angulus BAE est æqualis angulo ECF. Sed ECD angulus major est ipso ECF. Major igitur est angulus ACD angulo BAE. Similiter recta linea BC bifariam secta, ostendetur etiam BCG angulus, hoc est ACD angulus angulo ABC major. Omnis igitur trianguli uno latere producto exterior angulus utrovis interiore, & opposito major est. Quod oportebat demonstrare.



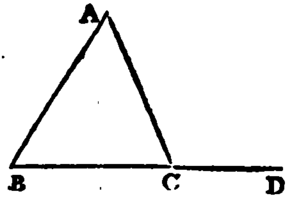
[a] 10. hujus.
[b] 15. hujus.
[c] 4. hujus.

PROP.

PROP. XVII. THEOR.

Omnis trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt, quomodocunque sumpti.

Sit triangulum ABC. Dico ipsius ABC trianguli duos angulos quomodocunque sumptos duobus rectis minores esse. Producatur enim BC ad D. Et quoniam trianguli ABC exterior angulus ACD major [a] est interiore, & opposito ABC: communis apponatur ACB. Anguli igitur ACD ACB angulis ABC ACB majores sunt. Sed ACD ACB sunt [b] æquales duobus rectis. Ergo ABC BCA duobus rectis sunt minores. Similiter demonstrabimus angulos quoque BAC ACB itemque CAB ABC duobus rectis minores esse. Omnis igitur trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt; quomodocunque sumpti. Quod demonstrare oportebat.

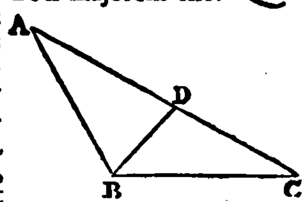


[a] 16. hujus.
[b] 13. hujus.

PROP. XVIII. THEOR.

Omnis trianguli majus latus majorem angulum subtendit.

Sit triangulum ABC habens latus AC latere AB majus. Dico, & ABC angulum angulo BCA majorem esse. Quoniam enim AC major est, quam AB, ponatur ipsi AB æqualis AD; & BD jungatur. Et quoniam trianguli BDC exterior angulus est ADB, erit is major [a] interiore, & opposito DCB. Sed ADB æqualis [b] est ipsi ABD, quod & latus AB lateri AD sit æquale, major igitur est & ABD angulus angulo ACB, quare ABC ipso ACB multo major erit. Omnis igitur trianguli majus latus majorem angulum subtendit: quod oportebat demonstrare.



[a] 16. hujus.
[b] 5. hujus.

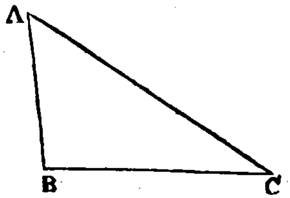
PROP. XIX. THEOR.

Omnis trianguli major angulus majus latus subtendit.

Sit triangulum ABC majorem habens ABC angulum angulo BCA. Dico & latus AC latere AB majus esse. Si enim

non

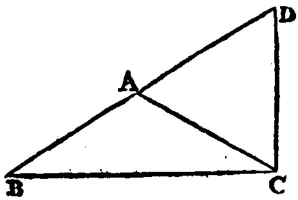
non est majus, vel AC est æquale ipsi AB, vel ipso minus, æquale igitur non est, nam & angulus ABC angulo ACB æqualis [a] esset; non est autem. a 5. hujus. Non igitur AC ipsi AB est æquale. Sed neque minus. esset enim & angulus ABC angulo ACB minor [b]. b 18. hujus. atqui non est, non igitur AC minus est ipso AB. Ostensum autem est neque æquale esse: ergo AC ipso AB est majus. Omnis igitur trianguli major angulus majus latus subtendit. Quod oportebat demonstrare



PROP. XX. THEOR.

Omnis trianguli duo latera reliquo majora sunt, quomodocunque sumpta.

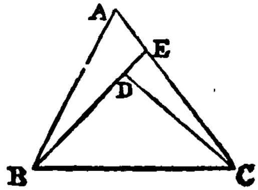
Sit enim triangulum ABC. Dico ipsius ABC trianguli duo latera reliquo majora esse, quomodocunque sumpta: videlicet latera quidem BA AC majora latere BC; latera vero AB BC majora latere AC; & latera BC CA majora ipso AB. Producatur enim BA ad punctum D; ponaturque ipsi CA æqualis AD [a]; & DC jungatur. a 3. hujus. Quoniam igitur DA est æqualis AC erit & angulus ADC angulo ACD æqualis [b]. b 5. hujus. Sed BCD angulus major est angulo ACD. Angulus igitur BCD angulo ADC est major; Et quoniam triangulum est DCB habens BCD angulum majorem angulo BDC; majorem autem angulum majus latus subtendit [c]: erit latus c 19. hujus. DB latere BC majus. sed DB est æquale ipsis BA AC. quare latera BA AC ipso BC majora sunt. similiter ostendemus, & latera quidem AB BC majora esse latere CA: latera vero BC CA ipso AB majora. Omnis igitur trianguli duo latera reliquo majora sunt, quomodocunque sumpta. Quod ostendere oportebat.



PROP. XXI. THEOR.

Si à terminis unius lateris trianguli duæ rectæ lineæ intra constituantur, hæ reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, majorem vero angulum continebunt.

Trianguli enim ABC in uno latere BC à terminis B, C duæ rectæ lineæ intra constituantur BD DC. Dico BD DC reliquis duobus trianguli lateribus BA AC minores quidem esse, vero continere angulum BDC majorem angulo BAC. Producatur enim BD ad E. & quoniam omnis trianguli duo

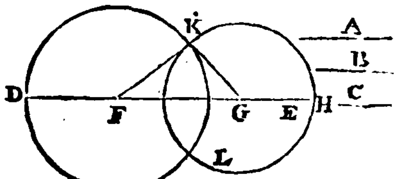


a 20. hujus. latera reliquo sunt majora, [a] erunt trianguli ABE duo latera BA AE majora latere BE. communis apponatur EC. ergo
b Axiom. 4. BA AC ipsis BE EC majora [b] sunt. rursus quoniam CED trianguli duo latera CE ED sunt majora latere CD, communis apponatur DB. quare CE EB ipsis CD DB sunt majora [b]. Sed ostensum est BA AC majora esse BE EC. multo igitur BA AC ipsis BD DC majora sunt. rursus quoniam omnis trianguli exterior angulus interiore & opposito est major [c]: erit trianguli CDE exterior angulus BDC major ipso CED. Eadem ratione & trianguli ABE exterior angulus CEB ipso
c 16. hujus. BAC est major [c] sed angulus BDC ostensus est major angulo CEB. multo igitur BDC angulus angulo BAC major erit. Quare si à terminis unius lateris trianguli duæ rectæ lineæ intra constituantur, hæ reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, majorem vero angulum continebunt. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXII. PROBL.

Ex tribus rectis lineis, quæ tribus rectis lineis datis æquales sunt, triangulum constituere. Oportet autem duas reliqua majores esse, quomodocunque sumptas; quoniam omnis trianguli duo latera reliquo majora sunt, quomodocunque sumpta.

Sint tres datæ rectæ lineæ A, B, C, quarum duæ reliqua majores sint, quomodocunque sumptæ, ut scil. A, B, quidem sint majores quam C, A, C, vero majores quam B, & præterea B, C, majores quam A. Itaque oportet ex rectis lineis æqualibus ipsis A, B, C, triangulum constituere. Exponatur aliqua



recta linea DE, terminata quidem ad D, infinita vero ad E, & ponatur

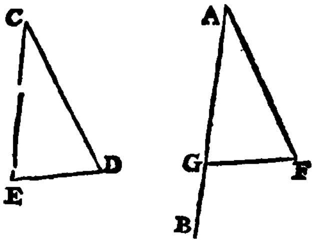
ponatur ipsi quidem A æqualis [a] DF, ipsi vero B æqualis FG, & ipsi C æqualis GH: & centro F, intervallo autem FD circulus [b] describatur DKL. rursusque centro G, & intervallo GH alius circulus KLH, describatur, & jungantur KF KG. Dico ex tribus rectis lineis æqualibus ipsis A, B, C, triangulum KFG constitutum esse, quoniam enim punctum F centrum est DKL circuli; erit FD æqualis [c] FK. sed FD est æqualis A. Ergo & FK ipsi A est æqualis. rursus quoniam punctum G centrum est circuli LKH, erit GH æqualis [c] GK. sed GH est æqualis C. ergo & GK ipsi C æqualis erit. est autem & FG æqualis B: tres igitur rectæ lineæ KF FG GK tribus A, B, C, æquales sunt. Quare ex tribus rectis lineis KF FG GK, quæ sunt æquales tribus datis rectis lineis A, B, C, triangulum constitutum est KFG. Quod facere oportebat.

[a] 3. hujus.
[b] 3. Postul.
[c] Def. 15.

PROP. XXIII. PROBL.

Ad datam rectam lineam, & ad datum in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere.

Sit data quidem recta linea AB, datum vero in ipsa punctum A; & datus angulus rectilineus DCE. Oportet igitur ad datam rectam lineam AB, & ad datum in ea punctum A, dato angulo rectilineo DCE, æqualem angulum rectilineum constituere. Sumantur in utraque ipsarum CD CE quævis puncta D, E, ducaturque DE, & ex tribus rectis lineis, quæ æquales sint tribus CD DE EC triangulum [a] constituatur AFG, ita ut CD sit æqualis AF, & CE ipsi AG, & DE ipsi FG. Itaque quoniam duæ DC CE duabus FA AG æquales sunt, altera alteri, & basis DE est æqualis basi FG: erit & angulus DCE angulo FAG æqualis [b]. Ad datam igitur rectam lineam AB, & ad datum in ea punctum A, dato angulo rectilineo DCE æqualis angulus rectilineus constitutus est FAG. Quod facere oportebat.



[a] 22. hujus.
[b] 8. hujus.

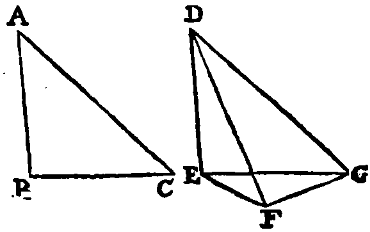
PROP. XXIV. THEOR.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, angulum autem angulo majorem,

 qui

qui æqualibus rectis lineis continetur: & basim basi majorem habebunt.

Sint duo triangula ABC DEF, quæ duo latera AB AC duobus lateribus DE DF æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus quidem AB æquale lateri DE; latus vero AC æquale DF: At angulus BAC angulo EDF sit major. Dico, & basim BC basi EF majorem esse. Quoniam enim angulus BAC major est angulo



a 23. hujus. EDF, constituatur [a] ad rectam lineam DE, & ad punctum in ea D, angulo BAC æqualis an-

b 3. hujus. gulus EDG, ponaturque alterutri ipsarum AC DF æqualis [b] DG, & GE FG jungantur. itaque quoniam AB quidem est æqualis DE, AC vero ipsi DG, duæ BA AC duabus ED DG æquales sunt, altera alteri; & angulus BAC est æqualis an-

c 4. hujus. gulo EDG. ergo basis BC basi EG est [c] æqualis. rursus quoniam æqualis est DG ipsi DF; est angulus DFG angulo DGF

d 5. hujus. [d] æqualis: erit itaque DFG angulus angulo EGF major. multo igitur major est EFG angulus ipso EGF. & quoniam triangulum est EFG, angulum EFG majorem habens angu-

e 19. hujus. lo EGF; majori autem angulo latus majus subtenditur [e]; erit & latus EG latere EF majus. sed EG latus est æquale lateri BC. Ergo, & BC ipso EF majus erit. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, angulum autem angulo majorem, qui æqualibus rectis lineis continetur: & basim basi majorem habebunt. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXV. THEOR.

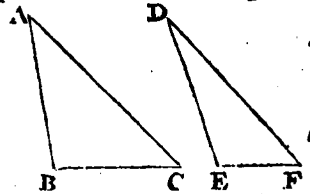
Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, basim vero basi majorem: & angulum angulo, qui æqualibus lateribus continetur, majorem habebunt.

Sint duo triangula ABC DEF, quæ duo latera AB AC duobus lateribus DE DF æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus AB æquale lateri DE, & latus AC lateri DF;

* EF basis autem BC basi BF* sit major. Dico, & angulum

BAC

BAC angulo EDF majorem esse. Si enim non est major, vel æqualis est, vel minor. Æqualis autem non est angulus BAC angulo EDF: esset enim & basis BC basi EF æqualis [a]. Non est autem. Non igitur æqualis est BAC angulus angulo EDF. Sed neque minor. minor enim esset [b] & basis BC basi EF. Atqui non est. Non igitur angulus BAC angulo EDF est minor. ostensum autem est neque esse æqualem. Ergo angulus BAC angulo EDF necessario major erit. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, basim vero basi majorem; & angulum angulo qui æqualibus lateribus continetur, majorem habebunt. Quod demonstrare oportebat.



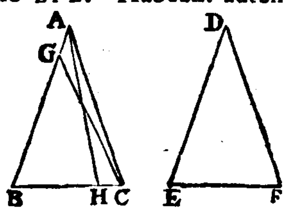
[a] 4. hujus.

[b] 24. hujus.

PROP. XXVI. THEOR.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeant, alterum alteri, unumque latus uni lateri æquale, vel quod æqualibus adjacet angulis, vel quod uni æqualium anglorum subtenditur; & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

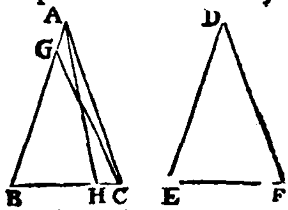
Sint duo triangula ABC DEF, quæ duos angulos ABC BCA duobus angulis DEF EFD æquales habeant, alterum alteri, videlicet angulum quidem ABC æqualem angulo DEF; angulum vero BCA angulo EFD. Habeant autem, & unum latus uni lateri æquale, & primo quod æqualibus adjacet angulis; nempe latus BC lateri EF. Dico, & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habere, alterum alteri, latus sc. AB lateri DE; & latus AC ipsi DF, & reliquum angulum BAC reliquo angulo EDF æqualem. Si enim inæqualis est AB ipsi DE, una ipsarum major est. Sit major AB, ponaturque GB æqualis DE; & GC jungatur. Quoniam igitur BG quidem est æqualis DE, BC vero ipsi EF, duæ GB BC duabus DE EF æquales sunt, altera alteri: & angulus GBC æqualis angulo DEF. basis igitur GC basi DF est [a] æqualis: & GBC triangulum triangulo DEF, & reliqui



[a] 4. hujus.

liqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. ergo GCB angulus est æqualis angulo DFE. sed angulus DFE angulo BCA æqualis ponitur. quare, & BCG angulus angulo BCA est æqualis, minor majori, quod fieri non potest. non igitur inæqualis est AB ipsi DE. ergo æqualis erit. est autem, & BC æqualis EF. Itaque duæ AB BC duabus DE EF æquales sunt, altera alteri, & angulus ABC, æqualis angulo DEF. Basis

a 4. hujus. igitur AC basi a DF, & reliquus angulus BAC reliquo angulo EDF est æqualis. Sed rursus sint latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur æqualia, ut AB ipsi DE. Dico rursus, & reliqua latera reliquis lateribus æqualia esse; AC quidem ipsi DF, BC vero ipsi EF: & adhuc reliquum angulum BAC reliquo angulo EDF æqualem. Si enim inæqualis est BC ipsi EF, una ipsarum major est. Sit major BC, si fieri



potest, ponaturque BH æqualis EF, & AH jungatur. Quoniam igitur BH quidem est æqualis EF, AB vero ipsi DE; duæ AB BH duabus DE EF æquales sunt, altera alteri, & angulos æquales continent; ergo a basis AH basi DF est æqualis: & ABH triangulum triangulo DEF & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. Æqualis igitur est angulus BHA

b ex hyp. angulo EFD. sed EFD est æqualis b angulo BCA. Ergo, & BHA angulus angulo BCA est æqualis. trianguli igitur AHC exterior angulus BHA æqualis est interiori & op-

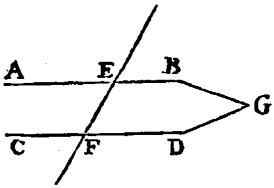
c 16. hujus. posito BCA, quod fieri non potest c. quare non inæqualis est BC ipsi EF. æqualis igitur. est autem & AB æqualis DE. duæ igitur AB BC duabus DE EF æquales sunt, altera alteri; angulosque æquales continent. quare basis AC æqualis est basi DF, & ABC triangulum triangulo DEF, & reliquus angulus BAC reliquo angulo EDF est æqualis. Si igitur duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeant, alterum alteri, unumque latus uni lateri æquale, vel quod æqualibus adjacet angulis, vel quod uni æqualium angulorum subtenditur; & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt. Quod oportebat demonstrare.

PROP.

PROP. XXVII. THEOR.

Si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter se æquales fecerit, parallelæ erunt rectæ lineæ.

In duas enim rectas lineas AB CD, recta linea EF incidens alternos angulos AEF EFD æquales inter se faciat. Dico rectam lineam AB ipsi CD parallelam esse. Si enim non est parallela, productæ AB, CD, vel ad partes B D convenient, vel ad partes A C. producantur, conveniantque ad partes B D in puncto G. itaque GEF trianguli exterior angulus AEF major [a] est interiore & opposito EFG. sed & æqualis [b], quod fieri non potest. non igitur AB CD productæ ad partes BD convenient. similiter demonstrabitur neque convenire ad partes AC. quæ vero in neutras partes conveniunt, parallelæ [c] inter se sunt. parallela igitur est AB ipsi CD. Quare si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter se æquales fecerit, parallelæ inter se erunt rectæ lineæ. Quod ostendere oportebat.

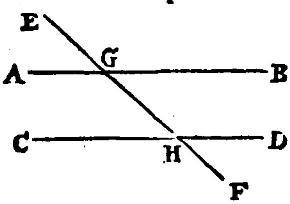


a 16. hujus.
b ex hyp.
c Def. 35.

PROP. XXVIII. THEOR.

Si in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori, & opposito, & ad easdem partes æqualem fecerit, vel interiores, & ad easdem partes duobus rectis æquales; parallelæ erunt inter se rectæ lineæ.

In duas enim rectas lineas AB CD recta linea EF incidens exteriorem angulum EGB interiori, & opposito GHD æqualem faciat; vel interiores & ad easdem partes BGH GHD, duobus rectis æquales. Dico rectam lineam AB rectæ CD parallelam esse. Quoniam enim EGB angulus æqualis est [a] angulo GHD, angulus autem EGB angulo AGH [b], erit & angulus AGH angulo GHD æqualis: & sunt alterni. parallela igitur est AB ipsi CD [c]. rursus quoniam anguli BGH GHD duobus rectis sunt æquales [a], & sunt AGH BGH æ-



a Ex hyp.
b 15. hujus.
c Ex antecedente.

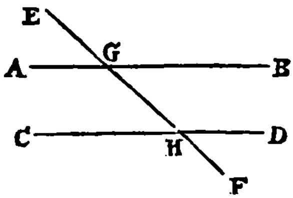
 quales

d 13. hujus. quales duobus rectis [d]: erunt anguli AGH BGH angulis BGH GHD æquales. communis auferatur BGH. reliquus igitur AGH est æqualis reliquo GHD: & sunt alterni. ergo AB ipsi CD parallela erit [c]. Si igitur in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori, & opposito, & ad easdem partes æqualem fecerit, vel interiores, & ad easdem partes duobus rectis æquales; parallelæ erunt inter se rectæ lineæ. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXIX. THEOR.

In parallelas rectas lineas recta linea incidens, & alternos angulos inter se æquales, & exteriorem interiori & opposito & ad easdem partes æqualem, & interiores, & ad easdem partes duobus rectis æquales efficiet.

In parallelas enim rectas lineas AB CD recta linea incidat EF. Dico alternos angulos AGH GHD inter se æquales efficere, & exteriorem EGB interiori, & opposito, & ad easdem partes GHD æqualem: & interiores, & ad easdem pates BGH GHD duobus rectis æquales. Si enim inæqualis est AGH ipsi GHD, unus ipsorum major est. sit major AGH. & quoniam AGH angulus major est angulo GHD; communis apponatur BGH. anguli igitur AGH BGH angulis BGH GHD majores sunt.



a 13. hujus. sed anguli AGH BGH sunt æquales duobus rectis [a]. ergo BGH GHD anguli sunt duobus rectis minores. quæ vero à minoribus, quam sunt duo recti, in infinitum producuntur

b Axiom. 12. rectæ lineæ, inter se conveniunt [b]. ergo rectæ lineæ AB CD in infinitum productæ convenient inter se. atqui non conveniunt cum parallelæ ponantur. non igitur inæqualis est AGH angulus angulo GHD. quare necessario est æqualis.

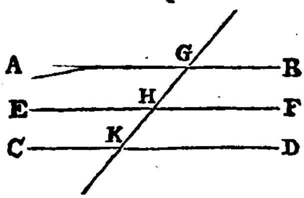
c 15. hujus. angulus autem AGH æqualis est angulo EGB [c]. ergo, & EGB ipsi GHD æqualis erit. communis apponatur BGH. anguli igitur EGB BGH sunt æquales angulis BGH GHD. sed EGB BGH æquales sunt duobus rectis: Ergo, & BGH GHD duobus rectis æquales erunt. In parallelas igitur rectas lineas recta linea incidens, & alternos angulos inter se æquales & exteriorem interiori, & opposito, & ad easdem partes æqualem; & interiores, & ad easdem partes duobus rectis æquales efficiet. Quod oportebat demonstrare.

PROP.

PROP. XXX. THEOR.

Quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, & inter se parallelæ erunt.

Sit utraque ipsarum AB CD ipsi EF parallela. Dico & AB ipsi CD parellelam esse. Incidat enim in ipsas recta linea GK. & quoniam in parallelas rectas lineas AB EF, recta linea GK incidit, angulus AGH angulo GHF est æqualis [a]. rursus quoniam in parallelas rectas lineas EF CD, recta linea incidit GK, æqualis est GHF angulus angulo GKD [a]. ostensus autem est, & angulus AGK angulo GHF æqualis. ergo, & AGK ipsi GKD æqualis erit. & sunt alterni. parallela igitur est AB ipsi CD [b]. ergo quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, & inter se parallelæ erunt. Quod oportebat demonstrare.



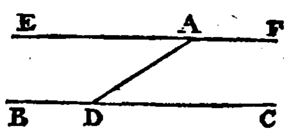
[a] 29. hujus.

[b] 27. hujus.

PROP. XXXI. PROBL.

Per datum punctum datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

Sit datum quidem punctum A, data vero recta linea BC oportet per A punctum ipsi BC rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere. Sumatur in BC quodvis punctum D, & jungatur AD: constituaturque [a] ad rectam lineam DA, & ad punctum in ipsa A, angulo ADC æqualis angulus DAE: & in directum ipsi EA recta linea AF producatur. Quoniam igitur in duas rectas lineas BC EF recta linea AD incidens alternos angulos EAD ADC inter se æquales efficit, EF ipsi BC parallela erit [b]. Per datum igitur punctum A datæ rectæ lineæ BC parallela ducta est recta linea EAF. Quod facere oportebat.



[a] 23. hujus.

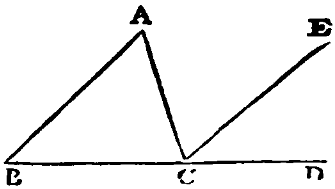
[b] 27. hujus.

PROP. XXXII. THEOR.

Omnis trianguli uno latere producto exterior angulus duobus interioribus, & oppositis est æqualis, & trianguli tres interiores anguli duobus rectis æquales sunt.

Sit

Sit triangulum ABC: & unum ipsius latus BC in D producatur. Dico angulum exteriorem ACD duobus interioribus, & oppositis CAB ABC æqualem esse; & trianguli tres interiores angulos ABC BCA CAB duobus rectis esse æquales. Ducatur [a] enim per punctum C ipsi AB rectæ lineæ parallela CE. & quoniam AB ipsi CE parallela est, & in ipsas incidit AC, alterni anguli BAC ACE inter se æquales sunt [b]. rursus quoniam AB parallela est CE & in ipsas incidit recta linea BD, exterior angulus ECD interiori & opposito ABC est æqualis [b]. ostensus autem est angulus ACE æqualis angulo BAC. quare totus ACD exterior angulus æqualis est duobus interioribus, & oppositis BAC ABC. communis apponatur ACB. anguli igitur ACD ACB tribus ABC BAC ACB æquales sunt. sed anguli ACD ACB sunt æquales [c] duobus rectis. ergo & ACB CBA CAB duobus rectis æquales erunt. Omnis igitur trianguli uno latere producto exterior angulus duobus interioribus, & oppositis est æqualis; & trianguli tres interiores anguli duobus rectis æquales sunt. Quod demonstrare oportebat.



a 13. hujus.
b 29. hujus.
c 13. hujus.

COROLLARIA.

1. Omnes tres anguli cujusque trianguli simul sumpti æquales sunt tribus angulis cujusque alterius trianguli simul sumptis.

2. Si in uno triangulo duo anguli aut singuli aut simul æquales sint duobus angulis alterius trianguli, erit reliquus angulus reliquo æqualis.

3. In triangulo si unus angulus rectus sit, reliqui simul unum rectum conficiunt.

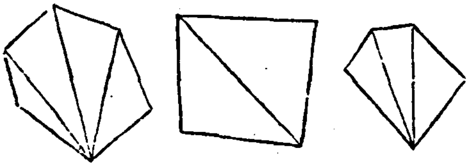
4. In triangulo Isoscele si angulus æquis cruribus contentus rectus sit, reliqui ad basim sunt semirecti.

5. In triangulo æquilatero angulus quilibet æqualis est $\frac{1}{3}$ duorum rectorum vel $\frac{2}{3}$ unius recti.

THEOREMA.

Omnes simul interiores anguli cujuscunque figuræ recti-lineæ conficient bis tot rectos demptis quatuor quot sunt latera figuræ.

Nam figura unaquæque rectilinea resolvi potest in triangula binario pauciora quam sunt ipsius figuræ latera, V. G. *si quatuor latera habeat resolvitur in duo triangula, si quinque in tria* *triæ triangula, si sex in quatuor, & sic deinceps; quare per præcedentem omnes horum triangulorum anguli æquantur bis tot rectis quot sunt triangula, sed omnes horum triangulorum*



anguli æquales sunt angulis figuræ interioribus; quare omnes anguli interiores figuræ æquales sunt bis tot rectis quot sunt triangula, hoc est bis tot rectis demptis quatuor quot sunt latera figuræ. Q. E. D.

THEOR. II.

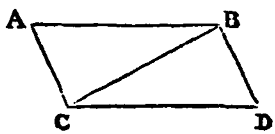
Omnes simul exteriores anguli cujusque figuræ rectilineæ conficiunt quatuor rectos.

Nam exteriores simul cum interioribus conficiunt bis tot rectos quot sunt latera figuræ; vero ex precedente Theor. omnes interiores soli conficiunt bis tot rectos demptis quatuor quot sunt latera figuræ, quare exteriores conficiunt quatuor rectos. Q. E. D.

PROP. XXXIII. THEOR.

Quæ æquales, & parallelas ad easdem partes conjungunt rectæ lineæ, & ipsæ æquales, & parallelæ sunt.

Sint æquales, & parallelæ AB CD: & ipsas conjungant ad easdem partes rectæ lineæ AC BD. Dico AC BD æquales, & parallelas esse. Ducatur enim BC, & quoniam AB parallela est CD, in ipsaque incidit BC; alterni anguli ABC BCD æquales sunt [a]. rursus quoniam AB est æqualis CD, communis autem BC, duæ AB BC duabus BC CD sunt æquales; & angulus ABC æqualis angulo BCD; basis igitur AC basi BD est æqualis [b]: triangulumque ABC triangulo BCD: & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. ergo angulus ACB angulo CBD est æqualis. & quoniam in duas rectas lineas AC BD recta linea BC incidens, alternos angulos ACB CBD æquales



a 29. hujus.

b 4. hujus.

les

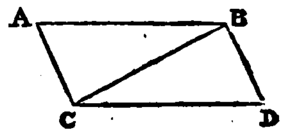
c 27. hujus. les inter se efficit, parallela est AC ipsi BD [c], Ostensa autem est & ipsi æqualis. Quæ igitur æquales, & parallelas ad easdem partes conjungunt rectæ lineæ, & ipsæ æquales, & parallelæ sunt. Quod oportebat demonstrare.

Defin. *Parallelogrammum est figura quadrilatera cujus bina opposita latera sunt parallela.*

PROP. XXXIV. THEOR.

Parallelogrammorum spatiorum latera, quæ ex opposito, & anguli, inter se æqualia sunt; & diameter ea bifariam secat.

Sit parallelogrammum ABDC, cujus diameter BC. Dico ACDB parallelogrammi latera, quæ ex opposito, & angulos inter se æqualia esse; & diametrum BC ipsum bifariam secare. Quoniam enim parallela est AB ipsi CD, & in ipsas incidit recta linea BC; anguli alterni ABC BCD inter se æquales sunt [a]. rursus quoniam AC ipsi BD parallela est, & in ipsas incidit BC; alterni anguli ACB CBD æquales sunt



a 29. hujus. inter se [a]. duo igitur triangula sunt ABC CBD, quæ duos angulos ABC BCA duobus angulis BCD CBD æquales habent, alterum alteri; & unum latus uni lateri æquale, scil. quod

b 26. hujus. est ad æquales angulos, utrique commune BC. ergo, [b] & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem, æquale igitur est latus quidem AB lateri CD: latus vero AC ipsi BD, & angulus BAC angulo BDC æqualis. & quoniam angulus ABC est æqualis angulo BCD; & angulus CBD, angulo ACB; erit totus angulus ABD æqualis toti ACD. ostensus autem est, & angulus BAC angulo BDC æqualis. parallelogrammorum igitur spatiorum latera, quæ ex opposito, & anguli, inter se æqualia sunt. Dico etiam diametrum ea bifariam secare. Quoniam enim æqualis est AB ipsi CD communis autem BC. duæ AB BC duabus DC CB æquales sunt, altera alteri, & angulus ABC æqualis est angulo BCD:

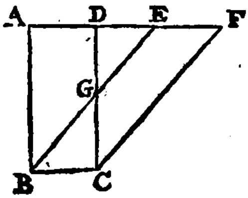
c 4. hujus. basis igitur [c] AC basi DB æqualis. quare, & triangulum ABC triangulo BCD æquale erit. ergo diameter BC parallelogrammum ACDB bifariam secat. Quod oportebat demonstrare.

PROP.

PROP. XXXV. THEOR.

Parallelogramma super eadem basi, & in iisdem parallelis constituta, inter se æqualia sunt.

Sint parallelogramma ABCD, EBCF super eadem basi BC, & in eisdem parallelis AF BC constituta. Dico parallelogrammum ABCD parallelogrammo EBCF æquale esse. Quoniam enim parallelogrammum est ABCD, æqualis [a] est AD ipsi BC. eadem quoque ratione, & EF est æqualis BC. quare &, AD ipsi EF æqualis erit [b]: & communis DE. tota igitur AE [c] toti DF est æqualis. est autem, & AB æqualis DC. ergo duæ EA AB duabus FD DC æquales sunt, altera alteri, & angulus FDC æqualis angulo EAB, exterior interiori [d], basis igitur EB basi FC est [e] æqualis, & EAB triangulum æquale triangulo FDC. commune auferatur DGE. reliquum igitur trapezium ABGD reliquo trapezio EGCF est æquale [f]. commune apponatur GBC triangulum. ergo totum parallelogrammum ABCD toti parallelogrammo EBCF æquale erit. Parallelogramma igitur super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta inter se æqualia sunt. Quod oportebat demonstrare.

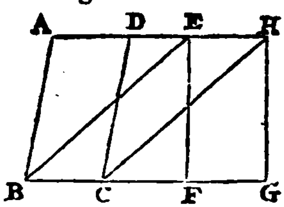


a 34. hujus.
b Axiom. 1.
c Axiom. 2.
d 29. hujus.
e 4. hujus.
f Axiom. 3.

PROP. XXXVI. THEOR.

Parallelogramma super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta inter se æqualia sunt.

Sint parallelogramma ABCD EFGH super æqualibus basibus BC FG, & in eisdem parallelis AH BG constituta. Dico parallelogrammum ABCD parallelogrammo EFGH æquale esse. Conjungantur enim BE CH. & quoniam æqualis [a] est BC ipsi FG, & FG æqualis ipsi EH; erit & BC ipsi EH æqualis. suntque parallelæ, & ipsas conjungunt BE CH; quæ autem æquales, & parallelas ad easdem partes conjungunt, æquales, & parallelæ sunt [b]. ergo EB, CH & æquales sunt, & parallelæ: quare EBCH parallelogrammum est, & æquale parallelogrammo ABCD [c]; basim enim eandem habet BC,



a Hyp.
b 33. hujus.
c 35. hujus.

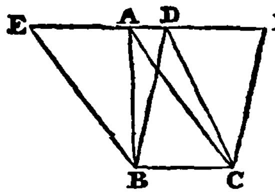
&

& in eiſdem parallelis BC, AD conſtituitur. ſimili ratione, & EFGH parallelogrammum eidem parallelogrammo EBCH eſt æquale. ergo parallelogrammum ABCD parallelogrammo EFGH æquale erit. Parallelogramma igitur ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta inter ſe ſunt æqualia. Quod oportebat demonſtrare.

PROP. XXXVII. THEOR.

Triangula ſuper eadem baſi, & in eiſdem parallelis conſtituta inter ſe æqualia ſunt.

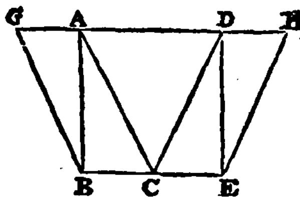
Sint triangula ABC, DBC ſuper eadem baſi BC, & in eiſdem parallelis AD BC conſtituta. Dico ABC triangulum triangulo DBC æquale eſſe. Producatur AD ex utraque parte in E, F puncta: & per B quidem ipſi CA parallela ducatur BE, a 31. hujus. a per C vero ipſi BD parallela CF. parallelogrammum igitur eſt utrumque ipſorum EBCA DBCF, & parallelogrammum c 35. hujus. EBCA eſt æquale c parallelogrammo DBCF, etenim ſuper eadem ſunt baſi BC, & in eiſdem parellelis BC EF: eſtque pa- b 34. hujus. rallelogrammi quidem EBCA dimidium b ABC triangulum, cum diameter AB ipſum bifariam ſecet: parallelogrammi vero DBCF dimidium b triangulum DBC; diameter enim DC c Axiom. 7. ipſum bifariam ſecat. quæ autem c æqualium dimidia ſunt inter ſe æqualia ſunt. ergo triangulum ABC triangulo DBC eſt æquale. Triangula igitur ſuper eadem baſi, & in eiſdem parallelis conſtituta inter ſe æqualia ſunt. Quod oportebat demonſtrare.



PROP. XXXVIII. THEOR.

Triangula ſuper baſibus æqualibus, & in eiſdem parallelis conſtituta inter ſe ſunt æqualia.

Sint triangula ABC DCE ſuper æqualibus baſibus, BC CE & in eiſdem parallelis BE AD conſtituta. Dico ABC triangulum DCE triangulo æquale eſſe. Producatur enim AD ex utraque parte in G, H puncta: & per B quidem ipſi CA parallela ducatur BG a: per E vero ducatur a 31. hujus. EH parallela ipſi DC a. parallelogrammum igitur eſt utrumque ipſorum GBCA DCEH.



atque

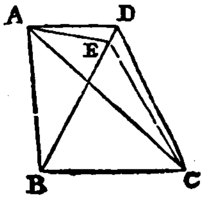
atque est parallelogrammum GBCA æquale [b] parallelo-grammo DCEH: in æqualibus enim sunt basibus BC CE, & in eisdem BE GH parallelis. parallelogrammi vero GBCA dimidium [c] est ABC triangulum, nam diameter AB ipsum bifariam secat. & parallelogrammi DCEH dimidium [c] est triangulum DCE, diameter enim DE ipsum secat bifariam. quæ autem æqualium dimidia sunt [d], inter se æqualia sunt. ergo ABC triangulum triangulo DCE est æquale. Triangula igitur super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia. Quod demonstrare oportebat.

[b] 36. hujus. [c] 34. hujus. [d] Axiom.7.

PROP. XXXIX. THEOR.

Triangula æqualia super eadem basi, & ad easdem partes constituta, in eisdem quoque sunt parallelis.

Sint æqualia triangula ABC DBC super eadem basi BC constituta, & ad easdem partes. Dico, & in eisdem parallelis esse. Ducatur enim AD. Dico AD parallelam esse ipsi BC. Si enim non est parallela, ducatur [a] per A punctum ipsi BC parallela recta linea AE, & EC ducatur. æquale igitur est ABC triangulum triangulo EBC [b], super eadem enim est basi BC, & in eisdem BC, AE parallelis. sed ABC triangulum triangulo DBC [c] est æquale. ergo & triangulum DBC æquale est ipsi EBC triangulo, majus minori, quod fieri non potest. non igitur AE ipsi BC parallela est. similiter ostendemus neque aliam quampiam parallelam esse, præter ipsam AD, ergo AD ipsi est parallela. Triangula igitur æqualia super eadem basi, & ad easdem partes constituta in eisdem quoque sunt parallelis. Quod oportebat demonstrare.



[a] 31. hujus. [b] 37. hujus. [c] Ex hyp.

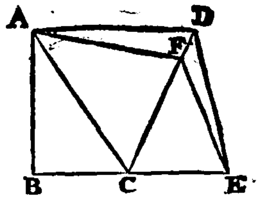
PROP. XL. THEOR.

Triangula æqualia super basibus æqualibus, & ad easdem partes constituta in eisdem quoque sunt parallelis.

Sint æqualia triangula ABC CDE super æqualibus basibus BC CE constituta. Dico etiam in eisdem esse parallelis. Ducatur enim AD. Dico AD ipsi BE parallelam esse. Nam si non est, ducatur per A ipsi BE parallela AF, [a] & FE ducatur.

[a] 31. hujus.

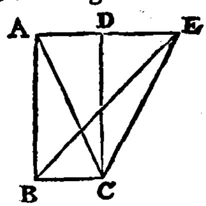
[b] 38. hujus. catur. triangulum igitur ABC triangulo FCE est æquale [b], cum super æqualibus basibus & in eisdem parallelis BE AF constituantur. sed triangulum ABC æquale est triangulo DCE. ergo & triangulum DCE triangulo FCE æquale erit, majus minori, quod fieri non potest. non igitur AF ipsi BE est parallela. similiter demonstrabimus neque aliam quampiam parallelam esse, præter AD. ergo AD ipsi BE parallela erit. Æqualia igitur triangula super basibus æqualibus, & ad easdem partes constituta, etiam in eisdem sunt parallelis. Quod demonstrare oportebat.



PROP. XLI. THEOR.

Si parallelogrammum, & triangulum eandem basim habeant in eisdemque sint parallelis; parallelogrammum ipsius trianguli duplum erit.

Parallelogrammum enim ABCD, & triangulum EBC, basim habeant eandem BC, & in eisdem sint parallelis BC AE. Dico parallelogrammum ABCD trianguli EBC duplum esse. Jungatur enim AC. triangulum igitur ABC triangulo [a] 37. hujus. EBC est æquale [a]; namque super eadem basi BC, & in eisdem BC AE parallelis constituuntur. sed ABCD parallelogrammum duplum est trianguli ABC [b], [b] 34. hujus. cum diameter AC ipsum bifariam secet. quare & ipsius EBC trianguli duplum erit. Si igitur parallelogrammum, & triangulum eandem basim habeant, & in eisdem sint parallelis; duplum erit parallelogrammum ipsius trianguli. Quod demonstrare oportebat.



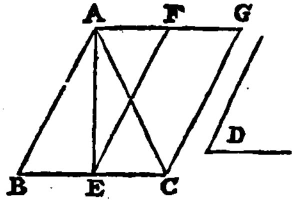
PROP. XLII. PROBL.

Dato triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

Sit datum triangulum ABC, datus autem rectilineus angulus D. Itaque oportet, dato triangulo ABC æquale parallelogrammum constituere in angulo rectilineo ipsi D æquali.

Secetur

Secetur BC bifariam [a] in E, & juncta AE, ad rectam lineam EC, atque ad punctum in ea E, constituatur angulus [b] CEF æqualis ipsi D: & per A quidem ipsi EC parallela ducatur [c] AG; per C vero ipsi FE ducatur parallela [c] CG. parallelogrammum igitur est FECG. & quoniam BE est æqualis EC, erit & ABE triangulum [d] triangulo AEC æquale, super æqualibus enim sunt basibus BE EC, & in eisdem BC AG parallelis. ergo triangulum AEC trianguli ABC est duplum. est autem, & parallelogrammum FECG duplum [e] trianguli AEC; basim enim eandem habet, & in eisdem est parallelis. æquale igitur est FECG parallelogrammum triangulo ABC habetque CEF angulum æqualem angulo D dato. Dato igitur triangulo ABC æquale parallelogrammum FECG constitutum est, in angulo CEF, qui angulo D est æqualis. Quod quidem facere oportebat.

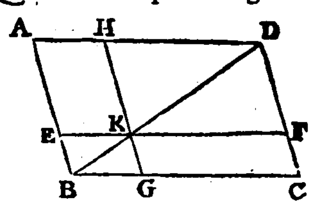


[a] 10. hujus.
[b] 23. hujus.
[c] 31. hujus.
[d] 38. hujus.
[e] 41. hujus.

PROP. XLIII. THEOR.

Omnis parallelogrammi spatii, eorum, quæ circa diametrum sunt, parallelogrammorum complementa inter se sunt æqualia.

Sit parallelogrammum ABCD, cujus diameter BD, & circa ipsam BD parallelogramma quidem sint FH EG, quæ vero complementa dicuntur AK KC. Dico AK complementum complemento KC æquale esse. Quoniam enim parallelogrammum est ABCD, & ejus diameter BD, æquale [a] est ABD triangulum triangulo BDC. rursus quoniam HKFD parallelogrammum est, cujus diameter DK, triangulum HDK triangulo DFK æquale [a] erit. eadem ratione, & triangulum KGB triangulo KEB est æquale. cum igitur triangulum quidem BEK æquale sit triangulo BGK triangulum vero HDK ipsi DFK; erit triangulum BEK una cum triangulo HDK æquale triangulo BGK una cum DFK triangulo. est autem & totum triangulum ABD æquale toti BDC. reliquum igitur AK complementum reliquo complemento KC est æquale. Ergo omnis parallelogrammi spatii, eorum, quæ



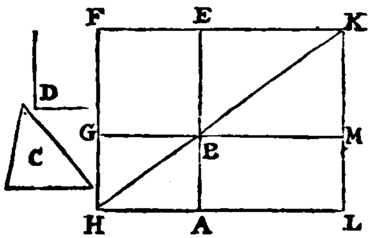
[a] 34. hujus.

circa diametrum sunt, parallelogrammorum complementa inter se æqualia sunt. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XLIV. PROBL.

Ad datam rectam lineam dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

Sit data quidem recta linea AB; datum vero triangulum C, & datus angulus rectilineus D. Oportet igitur ad datam rectam lineam, AB dato triangulo C æquale parallelogrammum applicare in angulo ipsi D æquali. Constituatur trian-
a 42. hujus. gulo C æquale [a] parallelogrammum BEFG, in angulo EBG qui est æqualis D. & ponatur BE in directum ipsi AB, producaturque FG ad H: & per A alterutri ipsarum BG EF
b 31. hujus. parallela [b] ducatur AH, & HB jungatur. Quoniam igitur in parallelas AH EF recta linea HF incidit, anguli AHF HFE
c 29. hujus. duobus rectis æquales [c] sunt. quare BHF HFE duobus rectis sunt minores. quæ vero à minoribus, quam sunt duo recti, in infinitum produ-
d Axio. 12. cuntur, conveniunt [d] inter se. ergo HB FE productæ convenient. producantur, & convenient



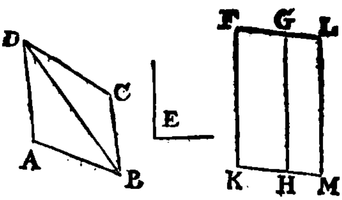
in K; perque K alterutri ipsarum EA FH parallela [b] ducatur KL, & AH GB ad L, M puncta producantur. parallelogrammum igitur est HLKF, cujus diameter HK, & circa HK parallelogramma quidem sunt AG ME; ea vero quæ comple-
e 43. hujus. menta dicuntur LB BF: ergo LB ipsi BF est [e] æquale. sed,
f 15. hujus. & BF æquale est triangulo C. quare, & LB triangulo C æquale erit. & quoniam GBE angulus æqualis [f] est angulo ABM, sed & æqualis angulo D, erit & angulus ABM angulo D æqualis. Ad datam igitur rectam lineam AB, dato triangulo C æquale parallelogrammum constitutum est LB, in angulo ABM, qui est æqualis angulo D. Quod facere oportebat.

PROP. XLV. PROBL.

Rectilineo dato æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

Sit datum rectilineum ABCD, datus vero angulus rectilineus E. Oportet rectilineo ABCD æquale parallelogrammum

mum constituere in angulo ipsi E æquali. Conjungantur enim DB, & constituatur triangulo ADB æquale [a] parallelogrammum FH: in angulo HKF, qui est æqualis angulo E. deinde ad rectam lineam GH applicetur triangulo DBC æquale [b] parallelogrammum GM, in angulo GHM qui angulo E est æqualis. & quoniam angulus E æqualis est utrique ipsorum HKF GHM, erit & HKF angulo GHM æqualis. communis apponatur KHG, anguli igitur HKF KHG angulis KHG GHM æquales sunt. sed HKF KHG sunt æquales [c] duobus rectis. ergo, & KHG GHM duobus rectis æquales erunt. itaque ad aliquam rectam lineam GH, & ad datum in ea punctum H duæ rectæ lineæ KH HM non ad easdem partes positæ angulos deinceps duobus rectis æquales efficiunt; in directum igitur [d] est KH ipsi HM. & quoniam in parallelas KM FG recta linea HG incidit, alterni anguli MHG HGF æquales [e] sunt. communis apponatur HGL. anguli igitur MHG HGL, angulis HGF HGL sunt æquales. at anguli MHG HGL æquales [c] sunt duobus rectis. quare & anguli HGF HGL duobus rectis æquales erunt; in directum [d] igitur est FG ipsi GL. & quoniam KF ipsi HG & æqualis est, & parallela, sed & HG ipsi ML; erit KF [e] ipsi ML & æqualis, & parallela. ipsasque conjungunt rectæ lineæ KM FL. ergo & KM FL æquales [f] & parallelæ sunt. parallelogrammum igitur est KFLM. at cum triangulum quidem ABD æquale sit parallelogrammo HF: triangulum vero DBC parallelogrammo GM; erit totum ABCD rectilineum toti parallelogrammo KFLM æquale. Dato igitur rectilineo ABCD æquale parallelogrammum constitutum est KFLM in angulo FKM, qui est æqualis angulo E dato. Quod facere oportebat.



[a] 42. hujus.
[b] 44. hujus.
[c] 29. hujus.
[d] 14. hujus.
[e] 30. hujus.
[f] 33. hujus.

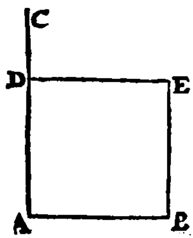
Cor. Ex jam dictis manifestum est, quomodo ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicari possit in dato angulo rectilineo.

PROP. XLVI. PROBL.

Super data recta linea quadratum describere.

Sit data recta linea AB. Oportet super ipsa AB quadratum descri-

[a] 11. hujus. describere. Ducatur [a] rectæ lineæ AB à puncto in ea dato
[b] 3. hujus. A ad rectos angulos AC; & ipsi AB æqualis [b] ponatur AD: perque punctum D ducatur [c] DE ipsi AB parallela, & per B
[c] 33. hujus. ipsi AD parallela [c] ducatur BE. parallelogrammum igitur est ADEB. & AB quidem est [d] æqualis DE,
[d] 34. hujus. AD vero ipsi [d] BE. sed BA ipsi AD est æqualis. quatuor igitur BA AD DE EB inter se æquales sunt, ideoque æquilaterum est ADEB parallelogrammum. Dico etiam rectangulum esse. Quoniam enim in parallelas AB DE recta linea incidit AD,
[e] 29. hujus. anguli BAD ADE duobus rectis sunt [e] æquales. rectus autem est BAD, ergo, & ADE rectus erit. parallelogrammorum vero spatiorum, quæ ex opposito sunt la-
[f] 34. hujus. tera, & anguli [f] inter se æqualia sunt. rectus igitur est uterque oppositorum ABE BED angulorum: & ob id rectangulum est ADEB. Ostensum autem est æquilaterum esse. Quadratum igitur sit necesse est, atque est super recta linea AB descriptum. Quod ipsum facere oportebat.

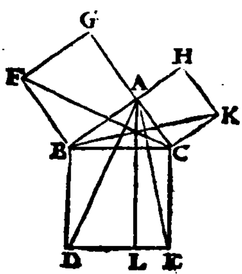


Cor. Hinc omne parallelogrammum habens unum angulum rectum est rectangulum.

PROP. XLVII. THEOR.

In rectangulis triangulis, quod à latere rectum angulum subtendente describitur quadratum, æquale est quadratis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens BAC angulum. Dico quadratum descriptum à recta BC æquale esse quadratis, quæ ab ipsis BA AC describuntur. Describatur [a] enim à BC quidem quadratum BDEC, ab ipsis
[a] 46. hujus. BA AC quadrata [a] GB HC, perque A alterutri ipsarum BD CE parallela ducatur AL; & AD FC jungantur. Quoniam igitur uterque angulorum BAC
[b] Def. 30. BAG rectus [b] est, ad aliquam rectam lineam BA, & ad datum in ea punctum A duæ rectæ lineæ AC AG non ad easdem partes positæ, angulos qui deinceps sunt duobus rectis æquales
[c] 14. hujus. efficiunt; in directum igitur [c] est CA ipsi AG. eadem ratione,



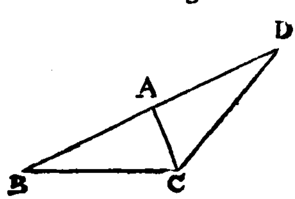
tione, & AB ipsi AH est in directum. & quoniam angulus DBC est æqualis angulo FBA, rectus enim uterque est, communis apponatur ABC, totus igitur DBA angulus toti FBC est *d* æqualis. quòd cum duæ AB BD duabus FB BC æquales *d* sint, altera alteri, & angulus DBA æqualis angulo FBC; erit & basis AD basi FC æqualis *e*, & ABD triangulum triangulo FBC æquale. estque *f* trianguli quidem ABD duplum BL parallelogrammum, basim enim eandem habent BD, & in eisdem BD AL sunt parallelis: trianguli *f* vero FBC duplum est GB quadratum, rursus enim basim habent eandem FB, & in eisdem sunt parallelis FB GC. quæ autem æqualium duplicia inter se æqualia *g* sunt. ergo æquale est parallelogrammum BL ipsi GB quadrato. Similiter junctis AE BK, ostendetur etiam CL parallelogrammum æquale quadrato HC. totum igitur BDEC quadratum duobus quadratis GB HC est æquale. & describitur quidem DBEC quadratum à recta linea BC, quadrata vero GB HC ab ipsis BA AC. quadratum igitur BE, à latere BC descriptum æquale est quadratis, quæ describuntur à lateribus BA AC. Ergo in rectangulis triangulis, quadratum, quod describitur à latere rectum angulum subtendente, æquale est quadratis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur. Quod oportebat demonstrare.

d Axiom. 2.
e 4. hujus.
f 41. hujus.
g Axiom 6.

PROP. XLVIII. THEOR.

Si quadratum, quod describitur ab uno laterum trianguli, æquale sit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur; angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit.

Si trianguli ABC, quod ab uno latere BC describitur quadratum æquale sit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus BA AC discribuntur, Dico angulum BAC rectum esse. Ducatur enim à puncto A ipsi AC ad rectos angulos AD; ponaturque AD ipsi BA æqualis, & DC jungatur. Quoniam igitur DA est æqualis AB, erit & quadratum quod describitur ex DA æquale quadrato ex AB. commune apponatur quadratum, quod ex AC. ergo quadrata, quæ ex DA AC æqualia sunt quadratis quæ ex BA AC describuntur. sed quadratis quidem, quæ ex DA AC æquale *a* est quod ex DC quadratum; rectus enim angulus est DAC: quadratis



a 47. hujus.

dratis vero, quæ ex BA AC æquale ponitur quadratum, quod ex BC: quadratum igitur, quod ex DC æquale est ei, quod ex BC quadrato. ergo & latus DC lateri CB est æquale. & quoniam DA est æqualis AB, communis autem AC, duæ DA AC æquales sunt duabus BA AC; & basis DC est æqualis basi CB: angulus [b] igitur DAC angulo BAC est æqualis. rectus autem est DAC. ergo & BAC rectus erit. Si igitur quadratum quod describitur ab uno laterum trianguli, æquale sit quadratis quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur, angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit. Quod oportebat demonstrare.

b 8. hujus.

EUCLIDIS

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER SECUNDUS.

DEFINITIONES.

I.

OMNE parallelogrammum rectangulum contineri dicitur sub duabus rectis lineis, quæ rectum angulum comprehendunt.

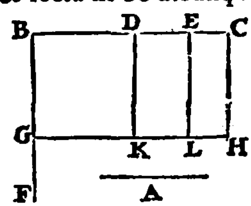
II.

Omnis parallelogrammi spatii, unumquodvis eorum quæ circa diametrum ipsius sunt parallelogrammorum, cum duobus complementis, gnomon vocetur.

PROPOSITIO I. THEOREMA.

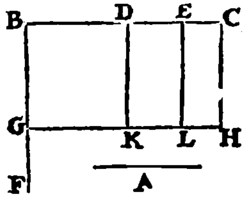
Si sint duæ rectæ lineæ, altera autem ipsarum secta fuerit in quotcunque partes; rectangulum sub duabus rectis lineis contentum æquale est eis rectangulis, quæ sub recta linea insecta, & singulis partibus continentur.

Sint duæ rectæ lineæ A, BC; & secta sit BC utcunque in punctis D, E. Dico rectangulum rectis lineis A, BC contentum æquale esse rectangulo quod continetur sub A & BD, & rectangulo quod sub A & DE, & ei quod sub A & EC continetur. Ducatur enim à puncto B ipsi BC ad rectos [a] angulos BF: atque ipsi A ponatur [b] æqualis BG: & per G quidem



[a] 11. primi.
[b] 3. primi.

c 31.primi. quidem ipsi BC parallela c ducatur GH: per D, E, C vero ducantur DK EL CH parallelæ c ipsi BG. rectangulum igitur BH est æquale rectangulis BK DL EH: atque est BH quidem quod sub A & BC continetur; etenim continetur sub GB BC; & BG ipsi A est æqualis; rectangulum autem BK est quod continetur sub ipsis A & BD; continetur enim sub GB BD, quarum GB est æqualis A; & rectangulum DL est quod continetur sub A & DE, quoniam DK,



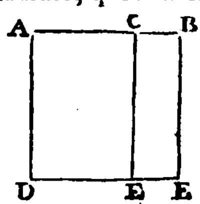
d 34 primi. hoc est d BG ipsi A est æqualis; & similiter rectangulum EH est quod sub A & EC continetur. ergo rectangulum contentum sub A & BC est æquale rectangulo contento sub A & BD, & contento sub A & DE, & adhuc contento sub A & EC. Si igitur sint duæ rectæ lineæ, altera autem ipsarum secta fuerit in quotcunque partes; rectangulum sub duabus rectis lineis contentum est æquale eis, quæ sub recta linea insecta, & singulis partibus, continentur. Quod oportebat demonstrare.

PROP. II. THEOR.

Si recta linea secta fuerit utcunque; rectangula quæ sub tota, & singulis partibus continentur, æqualia sunt ei quod à tota fit quadrato.

Recta enim linea AB secta sit utcunque in puncto C, Dico rectangulum quod sub AB BC continetur, unà cum contento sub AB AC æquale esse quadrato, quod fit ex AB.

a 46.primi. Describatur a enim ex AB quadratum ADEB, & per C du-
b 31.primi. catur b alterutri ipsarum AD BE parallela CF. æquale igitur est AE rectangulis AF CE. atque est AE quidem quadratum, quod ex AB; AF vero rectangulum contentum sub BA AC; etenim sub DA AC continetur, quarum AD ipsi AB est æqualis; & rectangulum CE continetur sub AB BC, cum BE sit æqualis AB. ergo rectangulum sub AB & AC unà cum rectangulo sub AB & BC æquale est quadrato ex AB. Si igitur recta linea utcunque secta fuerit, rectangula, quæ sub tota & singulis partibus continentur, æqualia sunt ei, quod à tota fit quadrato. Quod demonstrare oportebat.

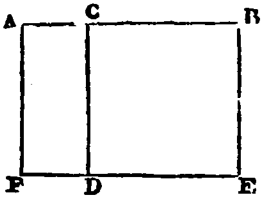


PROP.

PROP. III. THEOR.

Si recta linea utcunque secta fuerit; rectangulum sub tota, & una ejus parte contentum æquale est & rectangulo, quod sub partibus continetur, & ei quod à prædicta parte fit quadrato.

Recta enim linea AB secta sit utcunque in puncto C. Dico sub AB & BC rectangulum æquale esse rectangulo sub AC BC unà cum quadrato, quod fit ex BC. Describatur [a] enim ex BC quadratum CDEB; producaturque ED in F: & per A alterutri ipsarum CD BE parallela [b] ducatur AF. æquale utique erit rectangulum AE ipsis AD CE: & est AE quidem rectangulum contentum sub AB BC; etenim sub AB BE continetur, quarum BE est æqualis BC: rectangulum vero AD est quod continetur sub AC CB, cum DC ipsi CB sit æqualis: & DB est quadratum, quod fit ex BC. ergo rectangulum sub AB BC est æquale rectangulo sub AC CB unà cum quadrato quod ex BC. Si igitur recta linea utcunque secta fuerit; rectangulum sub tota, & una ejus parte contentum æquale est rectangulo, quod sub partibus continetur, & ei quod à prædicta parte fit quadrato.



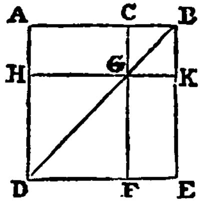
[a] 46. primi.

[b] 31. primi.

PROP. IV. THEOR.

Si recta linea secta fuerit utcunque; quadratum quod fit à tota æquale erit, & quadratis quæ à partibus fiunt, & ei quod bis sub partibus continetur rectangulo.

Recta enim linea AB secta sit utcunque in C. Dico quadratum quod fit ex AB æquale esse, & quadratis ex AC CB & ei rectangulo quod bis sub AC CB continetur. Describatur [a] enim ex AB quadratum ADEB, jungaturque BD, & per C quidem alterutri ipsarum AD BE parallela [b] ducatur CGF; per G vero alterutri ipsarum AB DE ducatur [b] parallela HK. & quoniam CF est parallela ipsi AD, & in ipsas incidit BD: erit exterior angulus BGC interiori & opposito ADB æqualis [c]: angulus

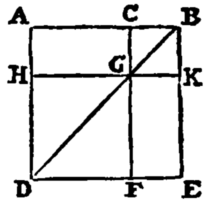


[a] 46. primi.

[b] 41. primi.

[c] 29. primi.

d 5. primi. angulus autem ADB eſt æqualis [d] angulo ABD, quod & latus BA æquale eſt lateri AD. quare CGB angulus angulo
e 6. primi. GBC eſt æqualis: ac propterea latus BC lateri CG æquale [e].
f 34. primi. ſed & latus CB æquale [f] eſt lateri GK & CG ipſi BK. ergo & GK eſt æquale KB, & CGKB æquilaterum eſt. Dico inſuper etiam rectangulum eſſe. Quoniam enim CG eſt parallela ipſi BK & in ipſas incidit CB; anguli KBC GCB duobus rectis ſunt æquales [e]. rectus autem eſt KBC angulus. ergo & rectus GCB, & anguli oppoſiti CGK GKB recti erunt. rectangulum igitur eſt CGKB. ſed oſtenſum fuit & æquilaterum eſſe, quadratum igitur eſt CGKB, quod quidem fit ex BC. eadem ratione & HF eſt quadratum quod fit ex HG, hoc eſt ex AC. ergo HF CK ex ipſis AC CB quadrata ſunt. &
g 43. primi. quoniam rectangulum AG eſt æquale [g] rectangulo GE; atque eſt AG quod ſub AC CB continetur, eſt enim GC ipſi CB æqualis: erit & GE æquale ei quod continetur ſub AC CB, quare rectangula AG GE æqualia ſunt ei quod bis ſub AC CB continetur. ſunt autem & HF CK quadrata ex AC CB. quatuor igitur HF CK AG GE, & quadratis ex AC CB, & ei quod bis ſub AC CB continetur rectangulo, ſunt æqualia; ſed HF CK AG GE componunt totum ADEB quadratum quod fit ex AB. quadratum igitur ex AB æquale eſt & quadratis ex AC CB, & ei quod bis ſub AC CB continetur rectangulo. Quare ſi recta linea utcunque ſecta fuerit; quadratum quod fit à tota æquale erit & quadratis quæ à partibus fiunt, & ei rectangulo quod bis ſub partibus continetur. Atque illud eſt quod demonſtrare oportebat.



Cor. Ex hoc perſpicue conſtat, in quadratis ſpatiis parallelogramma quæ ſunt circa diametrum, quadrata eſſe.

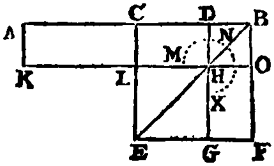
PROP. V. THEOR.

Si recta linea ſecta fuerit in partes æquales, & in partes inæquales; rectangulum ſub inæqualibus totius partibus contentum unà cum quadrato lineæ quæ inter ſectiones interjicitur, æquale eſt ei quod à dimidia fit quadrato.

Recta enim linea quævis AB ſecta ſit in partes æquales ad punctum C, & in partes inæquales ad D. Dico rectangulum contentum ſub AD BD, unà cum quadrato quod fit ex

CD

CD æquale esse ei quod ex CB fit quadrato. Describatur [a] enim ex BC quadratum CEFB: ducaturque BE: & per D quidem alterutri ipsarum CE BF parallela [b] ducatur DHG; per H vero ducatur KLO parallela [b] alterutri ipsarum CB EF: & rursus per A ducatur alterutri CL BO parallela [b] AK. & quoniam CH complementum æquale [c] est complemento HF, commune apponatur DO, totum igitur CO toti DF est æquale. sed CO est æquale [d] AL, quoniam & AC ipsi CB. ergo & AL æquale est DF. commune apponatur CH. totum igitur AH ipsis FD DL æquale erit. sed AH quidem est quod sub AD DB continetur, etenim DH ipsi DB est æqualis [e]; FD DL vero est gnomon MNX. igitur MNX æqualis est ei quod sub AD DB continetur, commune apponatur LG, æquale [e] scilicet quadrato quod ex CD, ergo MNX gnomon, & LG æqualia sunt rectangulo, quod continetur sub AD DB, & ei, quod fit ex CD quadrato. sed MNX gnomon, & LG sunt totum quadratum CEFB, quod quidem fit ex CB. ergo rectangulum sub AD DB, una cum quadrato quod ex CD, æquale est ei quod ex CB fit quadrato. Si igitur recta linea secta fuerit in partes æquales, & in partes inæquales; rectangulum sub inæqualibus totius partibus contentum unà cum quadrato lineæ quæ inter sectiones interjicitur, æquale est ei quod à dimidia fit quadrato. Quod demonstrare oportebat.



a 46. primi.
b 31. primi.
c 43. primi.
d 36. primi.
e Cor. 4. hujus.

PROP. VI. THEOR.

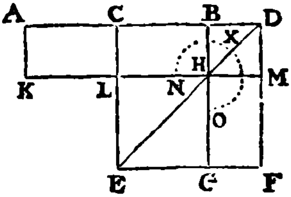
Si recta linea bifariam secetur, atque ipsi in directum adjiciatur quædam recta linea; rectangulum sub tota cum adjecta, & adjecta contentum, unà cum quadrato dimidiæ, æquale est quadrato quod ab ea, quæ ex dimidia, & adjecta constat, tanquam ab una linea, describitur.

Recta enim linea quævis AB secetur bifariam in puncto C, & adjiciatur ipsi in directum BD. Dico rectangulum sub AD DB unà cum quadrato ex BC æquale esse ei quod fit ex CD quadrato. Describatur [a] enim ex CD quadratum CEFD, & jungatur DE; per B alterutri ipsarum CE DF parallela [b] ducatur BHG; & per H ducatur KLM parallela [b] alterutri ipsarum AD EF; & adhuc per A alterutri CL DM pa-

a 46. primi.
b 31. primi.

parallela [b] AK. Itaque quoniam AC est æqualis CB, erit & rectangulum AL rectangulo CH æquale [c]. sed CH æquale [d] est HF. ergo & AL ipsi HF æquale erit. commune apponatur CM. totum igitur AM gnomoni NXO est æquale. atque est AM, quod sub AD DB continetur, etenim DM est [e] æqualis DB. ergo & gnomon NXO æqualis est rectangulo sub AD DB. rursus commune apponatur LG, æquale [e] scilicet quadrato quod ex CB. rectangulum igitur sub AD DB unà cum quadrato quod ex BC æquale est gnomoni NXO & ipsi LG. sed gnomon NXO, & LG componunt CEFD quadratum, quod quidem fit ex CD. ergo rectangulum sub AD DB unà cum quadrato ex BC æquale est ei, quod fit ex CD quadrato. Si igitur recta linea secetur bifariam, adjiciaturque ipsi in directum quædam recta linea; rectangulum sub tota cum adjecta, & adjecta contentum, unà cum quadrato dimidiæ, æquale est quadrato quod ab ea, quæ ex dimidia & adjecta constat, tanquam ab una linea, describitur. Quod oportebat demonstrare.

[c] 36. primi.
[d] 43 primi.
[e] Cor. 4. hujus.

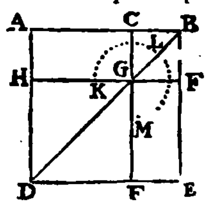


PROP. VII. THEOR.

Si recta linea utcunque secta fuerit; quæ à tota, & una parte fiunt utraque quadrata æqualia sunt, & rectangulo, quod bis sub tota, ac dicta parte continetur, & ei quod à reliqua parte fit quadrato.

Recta enim linea quædam AB secta sit utcunque in puncto C. Dico quadrata ex AB BC æqualia esse, & rectangulo quod bis sub AB BC continetur, & ei quod fit ex AC quadrato. Describatur [a] enim ex AB quadratum ADEB, & figura construatur *. Itaque quoniam AG rectangulum æquale [b] est rectangulo

[a] 46. primi.
[b] 43. primi.



* *Figura dicitur construi, cum in parallelogrammo ductæ lineæ lateribus parallelæ secantes diametrum in uno puncto, efficiunt duo parallelogramma circa diametrum, & duo complementa. Similiter dupla figura dicitur construi, cum ductæ rectæ lateribus parallelæ, efficiunt quatuor parallelogramma circa diametrum, & quatuor complementa.*

GE.

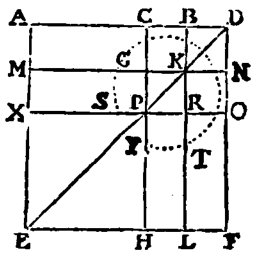
GE, commune apponatur CF; quare totum AF toti CE est æquale. rectangula igitur AF CE dupla sunt rectanguli AF. sed AF CE sunt KLM gnomon, & quadratum CF; ergo KLM gnomon, & quadratum CF dupla erunt rectanguli AF. est autem id, quod bis sub AB BC continetur, duplum ipsius AF; etenim BF est [c] æqualis BC. gnomon igitur KLM, & quadratum CF æqualia sunt ei quod bis sub AB BC continetur. commune apponatur HF, quod est ex AC quadratum. ergo gnomon KLM, & quadrata CF HF æqualia sunt ei quod bis sub AB BC continetur, & quadrato ex AC. sed gnomon KLM, & quadrata CF HF componunt ADEB, & CF, quæ sunt ex AB BC quadrata. quadrata igitur ex AB BC æqualia sunt rectangulo, quod bis sub AB BC continetur unâ cum eo quod fit est AC quadrato. Ergo si recta linea utcunque secta fuerit; quæ à tota, & una parte fiunt utraque quadrata, æqualia sunt rectangulo quod bis sub tota, ac dicta parte continetur, & ei quod à reilqua parte fit quadrato. Quod ostendere oportebat.

c Cor. 4. hujus.

PROP. VIII. THEOR.

Si recta linea utcunque secta fuerit; quod quater sub tota, & una parte continetur rectangulum unà cum quadrato reliquæ partis, æquale est quadrato quod ex tota, & dicta parte tanquam ex una linea, describitur.

Recta enim linea AB secta sit utcunque in C. Dico rectangulum quater sub AB BC contentum unà cum quadrato quod ex AC æquale esse quadrato, quod ex AB BC tanquam ex una linea describitur. Producatur enim recta linea AB in D; & ipsi CB ponatur æqualis BD; describaturque ex AD quadratum AEFD; & dupla figura construatur. quoniam igitur CB est [a] æqualis BD, atque est CB ipsi GK æqualis [b]; BD vero ipsi KN: erit & GK æqualis KN. eadem ratione, & PR ipsi RO est æqualis. & quoniam CB est æqualis BD, & GK ipsi KN; erit rectangulum [c] quidem CK rectangulo BN; rectangulum vero GR ipsi RN æquale [c]. sed CK est [d] æquale RN, complementa enim sunt parallelogrammi CO, ergo & BN æquale est GR, & quatuor recta-

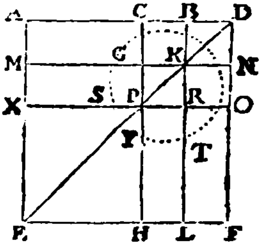


a hyp.
b 34. primi.
c 36. primi.
d 43. primi.

rectangula BN KC GR RN inter se æqualia; ideoque quadrupla sunt rectanguli CK. rursus quoniam CB est æqualis BD, & BD quidem ipsi BK, hoc est ipsi CG æqualis; CB vero ipsi GK, hoc est GP: erit & CG æqualis GP. est autem & PR ipsi RO æqualis. rectangulum igitur AG rectangulo MP, & rectangulum PL ipsi RF æquale erit. sed MP [d] est æquale PL, complementa enim sunt ML parallelogrammi; quare & AG ipsi RF est æquale. quatuor igitur AG MP PL RF inter se æqualia sunt, ac propterea ipsius AG quadrupla. ostensum autem est, & quatuor CK BN GR RN quadrupla esse CK. quare octo continentia gnomonem STY ipsius AK quadrupla sunt, & quoniam AK est quod sub AB BC continetur; etenim BK est æqualis BC; erit contentum quater sub AB BC ipsius AK quadruplum. at demonstratus est gnomon STY quadruplus ipsius AK. quod igitur quater sub AB BC continetur æquale est gnomoni STY. commune apponatur XH, quod quidem quadrato ex AC est [e] æquale. ergo quod quater sub AB BC continetur una cum quadrato ex AC æquale est ipsi STY gnomoni, & quadrato XH. sed STY gnomon, & XH totum sunt AEFD quadratum, quod describitur ex AD. rectangulum igitur quater sub AB BC contentum unà cum quadrato ex AC æquale est ei, quod ex AD, hoc est ex AB BC tanquam ex una linea describitur, quadrato. Ergo si recta linea utcunque secta fuerit; quod quater sub toto, & una parte continetur rectangulum, unà cum quadrato reliquæ partis, æquale est quadrato, quod ex tota & dicta parte, tanquam ex una linea describitur. Quod ostendendum fuerat.

d 43. primi.

e Cor. 4. hujus.



PROP. IX. THEOR.

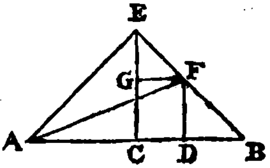
Si recta linea in partes æquales, & in partes inæquales secta fuerit; quadrata quæ ab inæqualibus totius partibus describuntur, dupla sunt & quadrati dimidiæ, & quadrati lineæ ejus quæ inter sectiones interjicitur.

Recta enim linea quævis AB secta sit in partes æquales ad C, & in partes inæquales ad D. Dico quadrata ex AD DB, quadratorum ex AC CD dupla esse. Ducatur [a] enim à puncto C ipsi AB ad rectos angulos CE, & utrivis ipsarum

a 11. primi.

AC

AC CB æqualis ponatur, junganturque EA EB. ac per D quidem ipsi CE parallela [b] ducatur DF; per F vero ipsi AB[b] parallela [b] FG; & AF ducatur. Itaque quoniam AC est æqualis CE; erit [c] & angulus EAC angulo AEC æqualis.[c] & cum rectus sit angulus ad C, reliqui AEC EAC uni recto æquales [d] erunt. & sunt æquales inter sese. utervis [d] igitur ipsorum AEC EAC recti est dimidium. eadem ratione, & recti dimidium est utervis ipsorum CEB EBC. ergo totus angulus AEB rectus est. & quoniam angulus GEF dimidium est recti, rectus autem EGF, æqualis enim [e] est interiori & opposito ECB, erit, & reliquus EFG recti dimidium: æqualis igitur est GEF angulus ipsi EFG. quare & latus EG lateri GF est [f] æquale. rursus quoniam angulus ad B dimidium est recti, rectus autem FDB, quòd sit æqualis interiori & opposito ECB; reliquus BFD recti erit dimidium. angulus igitur ad B æqualis est angulo BFD; ideoque latus DF lateri DB æquale. & quoniam AC est æqualis CE, erit & ex AC quadratum æquale quadrato ex CE. quadrata igitur ex AC CE dupla sunt quadrati ex AC; quadratis autem ex AC CE æquale [g] est quadratum ex EA, siquidem rectus [g] est angulus ACE. ergo quadratum ex EA quadrati ex AC est duplum. rursus quoniam EG æqualis est GF, & quadratum ex EG quadrato ex GF est æquale. quadrata igitur ex EG & GF dupla sunt quadrati ex GF. at quadratis ex EG GF æquale [g] est quod ex EF quadratum. ergo quadratum ex EF quadrati ex GF duplum erit. æqualis [h] autem est GF ipsi CD.[h] quadratum igitur ex EF duplum est quadrati CD. sed & quadratum ex AE quadrati ex AC est duplum. ergo quadrata ex AE EF dupla sunt quadratorum ex AC CD. quadratis vero ex AE EF æquale [g] est ex AF quadratum; quoniam angulus AEF rectus est. quadratum igitur ex AF quadratorum ex AC CD est duplum. sed quadrato ex AF æqualia sunt ex AD DF quadrata. rectus enim est angulus qui ad D. ergo ex AD DF quadrata dupla sunt quadratorum ex AC CD. est autem DF ipsi DB æqualis. quadrata igitur ex AD DB quadratorum ex AC CD dupla erunt. Quare si recta linea in partes æquales, & in partes inæquales, secta fuerit; quæ ab inæqualibus totius partibus describuntur quadrata, dupla sunt & quadrati dimidiæ, & quadrati lineæ ejus quæ inter sectiones interjicitur. Quod ostendere oportebat.



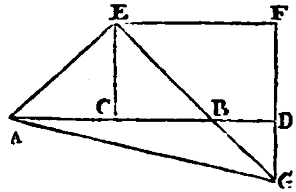
[b] 31. primi
[c] 5. primi.
[d] 2. Cor. 32. primi.
[e] 29. primi.
[f] 6. primi.
[g] 47. primi.
[h] 34. primi.

PROP.

PROP. X. THEOR.

Si recta linea secetur bifariam, & ipsi in directum quævis recta linea adjiciatur; quæ à tota cum adjecta, & adjecta fiunt utraque quadrata, dupla sunt & quadrati dimidiæ, & quadrati quod ab ea, quæ ex dimidia, & adjecta constat, tanquam ab una linea, describitur.

Recta enim linea AB secetur bifariam in C, & ipsi in directum adjiciatur quævis recta linea BD. Dico quadrata ex AD DB quadratorum ex AC CD dupla esse. Ducatur enim à
a 11.primi. puncto C, ipsi AB ad rectos [a] angulos CE, & utrivis ipsarum AC CB æqualis ponatur; ducaturque AE EB, & per E qui-
b 31.primi. dem ipsi AD parallela [b] ducatur EF; per D vero ducatur DF parallela [b] ipsi CE. & quoniam in parallelas EC FD recta
c 29.primi. quædam linea EF incidit, anguli CEF EFD æquales [c] sunt duobus rectis. anguli igitur FEB EFD duobus rectis sunt minores. quæ autem à minoribus quam sunt duo recti in infinitum producuntur, con-
d Axio. 12. veniunt inter se [d]. ergo EB FD productæ ad partes BD convenient. prodncantur, & conveniant in puncto G, & AG ducatur. itaque quoniam AC est æqualis CE, & angulus AEC angulo EAC æqualis
e 5. primi. [e] erit: atque est rectus qui ad C. uterque igitur ipsorum CAE AEC est recti dimidium. eadem ratione, & recti dimidium est uterque CEB EBC. ergo AEB est rectus. &
f 15.primi. quoniam EBC est dimidium recti, erit & recti [f] dimidium DBG; cum sit ad verticem. sed & BDG rectus est; etenim est [c] æqualis ipsi DCE alterno. reliquus igitur DGB dimidium est recti, & ob id ipsi DBG æqualis. ergo & latus BD
g 6. primi. æquale [g] lateri DG. rursus quoniam EGF est dimidium recti, rectus autem qui ad F, est enim angulo opposito qui ad C æqualis; erit, & reliquus FEG recti dimidium, & æqualis ipsi EGF. quare & latus GF lateri EF est æquale [g]. & cum EC sit æqualis CA; & quadratum ex EC æquale est ei quod ex CA fit quadrato. ergo quadrata ex EC CA dupla
h 47.primi. sunt quadrati ex CA. quadratis autem ex EC CA æquale [h] est quadratum ex EA. quadratum igitur ex EA quadrati ex AC est duplum. rursus quoniam GF est æqualis FE, æquale est, & ex GF quadratum quadrato ex FE. quadrata igitur ex GF FE quadrati ex EF sunt dupla. at quadratis ex GF FE æquale est

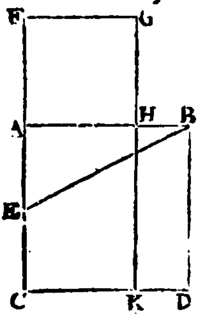


est ^{b} quod ex EG quadratum. ergo quadratum ex EG duplum est quadrati ex EF. æqualis autem est EF ipsi CD. quadratum igitur ex EG quadrati ex CD duplum erit. sed ostensum est quadratum ex EA duplum quadrati ex AC. ergo ex AE EG quadrata, quadratorum ex AC CD sunt dupla. quadratis vero ex AE EG æquale est ^{b} quod ex AG qua- *b* 47.primi.
dratum. quadratum igitur ex AG duplum est quadratorum ex AC CD. at quadrato ex AG æqualia ^{b} sunt ex AD DG quadrata. ergo quadrata ex AD DG sunt dupla quadratorum ex AC CD. sed DG est æqualis DB. quadrata igitur ex AD DB quadratorum ex AC CD sunt dupla. Ergo si recta linea bifariam secetur, & ipsi in directum quædam recta linea adjiciatur; quæ à tota cum adjecta, & adjecta fiunt utraque quadrata, dupla sunt & quadrati dimidiæ, & quadrati quod ab ea quæ ex dimidia & adjecta constat tanquam ab una linea describitur. Quod ostendere oportebat.

PROP. XI. PROBL.

Datam rectam lineam secare, ita ut quod sub tota, & altera parte continetur rectangulum æquale sit ei, quod à reliqua parte fit, quadrato.

Sit data recta linea AB. Oportet ipsam AB ita secare, ut quod sub tota, & altera parte continetur rectangulum æquale sit ei, quod à reliqua parte fit, quadrato. Describatur ^{a} enim *a* 46.primi.
ex AB quadratum ABCD, seceturque AC bifariam in E, & BE ducatur: deinde producta CA in F, ponatur ipsi BE æqualis EF: describaturque ex AF quadratum FGHA, & GH ad K producatur. Dico AB sectam esse in H, ita ut sub AB BH rectangulum æquale sit quadrato ex AH. Quoniam enim recta linea AC bifariam secatur in E, adjiciturque ipsi in directum AF, rectangulum sub CF FA, una cum quadrato ex AE, æquale ^{b} erit quadrato ex EF. sed EF est *b* 6. hujus.
æqualis EB. rectangulum igitur sub CF FA, una cum quadrato ex AE æquale est ei, quod fit ex EB, quadrato. quadrato autem ex EB æqualia sunt ^{c} quadrata ex BA AE: etenim angulus ad A rectus est. *c* 47.primi.
ergo rectangulum sub CF FA, una cum quadrato ex AE æquale est quadratis ex AB AE; commune auferatur quod ex AE fit quadratum; reliquum igitur rectangulum sub CF FA æquale est quadrato ex AB. est autem rectangulum FK sub

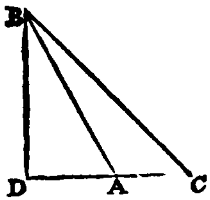


CF FA; siquidem AF est æqualis FG; quadratum autem ex AB est ipsum AD. rectangulum igitur FK æquale est quadrato AD. commune auferatur AK. ergo reliquum FH reliquo HD est æquale. atque est HD rectangulum sub AB BH, cum AB sit æqualis BD, & FH est quadratum ex AH. rectangulum igitur sub AB BH quadrato ex AH æquale erit. Quare data recta linea AB secta est in H, ita ut sub AB BH rectangulum quadrato ex AH sit æquale. Quod facere oportebat.

PROP. XII. THEOR.

In obtusangulis triangulis, quod à latere obtusum angulum subtendente fit quadratum, majus est quam quadrata, quæ fiunt à lateribus obtusum angulum continentibus, rectangulo contento bis sub uno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod scilicet protractum perpendicularis cadit, & linea assumpta exterius à perpendiculari ad angulum obtusum.

Sit obtusangulum triangulum ABC, obtusum angulum
a 12. primi. habens BAC: & ducatur a à puncto B ad CA protractum perpendicularis BD. Dico quadratum ex BC majus esse, quam quadrata ex BA AC, rectangulo quod bis sub CA AD continetur. Quoniam enim recta linea CD secta est utcunque in puncto A, erit quadratum ex
b 4. hujus. CD æquale b, & quadratis ex CA AD, & ei, quod bis sub CA AD continetur, rectangulo. commune apponatur ex DB quadratum. quadrata igitur ex CD DB æqualia sunt & quadratis ex CA AD DB, & rectangulo quod bis sub CA AD continetur. sed quadratis ex CD DB æquale est c quadratum ex CB, rectus enim est angulus ad D, cum sit BD perpendicularis. quadratis vero ex AD DB æqua-
c 47. primi. le est c quadratum ex AB. Quadratum igitur ex CB æquale est, & quadratis ex CA AB, & rectangulo bis sub CA AD contento. ergo quadratum ex CB majus est quam quadrata ex CA AB, rectangulo, quod bis sub CA AD continetur. In obtusangulis igitur triangulis, quadratum, quod fit à latere obtusum angulum subtendente, majus est quam quadrata, quæ fiunt à lateribus obtusum angulum continentibus, rectangulo contento bis sub uno laterum, quæ sunt circa obtusum



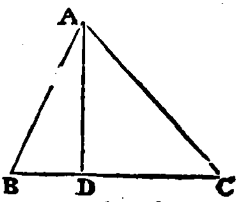
ſum angulum, in quod protractum perpendicularis cadit, & linea aſſumpta exterius à perpendiculari ad angulum obtuſum. Quod demonſtrare oportebat.

PROP. XIII. THEOR.

In acutangulis triangulis, quod à latere acutum angulum ſubtendente fit quadratum, minus eſt quam quadrata quæ fiunt à lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo contento bis ſub uno laterum, quæ ſunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & linea à perpendiculari intus aſſumpta ad angulum acutum.

Sit acutangulum triangulum ABC, acutum habens angulum ad B: ducatur à puncto A [a] ad BC perpendicularis AD. [a] 12. primi. Dico quadratum quod fit ex AC minus eſſe quam quadrata quæ ex CB BA fiunt, rectangulo quod bis ſub CB BD continetur. Quoniam enim recta linea CB ſecta eſt utcunque in D, erunt quadrata ex CB BD æqualia [b], & rectangulo quod bis ſub CB BD continetur, & quadrato ex DC. commune apponatur ex AD quadratum. quadrata igitur ex CB BD DA æqualia ſunt, & rectangulo bis ſub CB BD contento, & quadratis ex AD DC. ſed quadratis ex BD DA æquale eſt [c] ex AB quadratum; rectus enim angulus eſt qui ad D. quadratis vero ex AD DC æquale [c] eſt quadratum ex AC, quadrata igitur ex CB BA ſunt æqualia quadrato ex AC, & ei quod bis ſub CB BD continetur rectangulo. quare ſolum quadratum ex AC minus eſt quam quadrata ex CB BA, rectangulo quod bis ſub CB BD continetur. In acutangulis igitur triangulis quadratum quod à latere acutum angulum ſubtendente fit, minus eſt quam quadrata quæ fiunt à lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo contento bis ſub uno laterum quæ ſunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & linea à perpendiculari intus aſſumpta ad angulum acutum. Quod demonſtrare oportebat.

[b] 7. hujus.

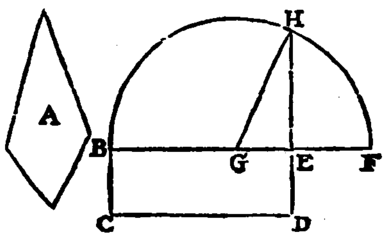


[c] 47. primi.

PROP. XIV. PROBL.

Dato rectilineo æquale quadratum constituere.

Sit datum rectilineum A. Oportet ipsi A rectilineo æquale quadratum constituere. Constituatur [a] rectilineo A æquale parallelogrammum rectangulum BC DE. si igitur BE est æqualis ED, factum jam erit quod proponebatur, etenim rectilineo A æquale quadratum constitutum est BD: sin minus, una ipsarum BE ED major est. sit BE major; & producatur ad F, ponaturque ipsi ED æqualis EF. deinde secta FB bifariam [b] in G: centro quidem G, intervallo autem unius ipsarum GB GF semicirculus describatur BHF; producaturque DE in H, & GH ducatur. Quoniam igitur recta linea BF secta est in partes æquales ad G, inæquales ad E; erit rectangulum sub BE EF, una cum quadrato quod fit ex EG [c], æquale quadrato ex GF. est autem GF æqualis GH. rectangulum igitur sub BE EF una cum quadrato ex EG, æquale est quadrato ex GH. sed quadrato ex GH æqualia [d] sunt ex HE EG quadrata. ergo rectangulum sub BE EF una cum quadrato ex EG æquale est quadratis ex HE EG. commune auferatur ex EG quadratum. reliquum igitur rectangulum sub BE EF est æquale quadrato ex EH. sed rectangulum sub BE EF est ipsum BD parallelogrammum, quoniam EF est æqualis ED. ergo BD parallelogrammum quadrato ex EH est æquale. parallelogrammum autem BD est æquale rectilineo A. rectilineum igitur A quadrato ex EH descripto æquale erit. Quare dato rectilineo A æquale quadratum constitutum est, quod videlicet ex ipsa EH describitur. Quod facere oportebat.



[a] 45. primi.
[b] 10. primi.
[c] 5. hujus.
[d] 47. primi.

EUCLIDIS

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER TERTIUS.

DEFINITIONES.

I.

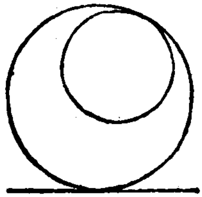
ÆQUALES circuli sunt, quorum diametri sunt æquales, vel quorum quæ ex centris sunt æquales.

II

Recta linea circulum contingere dicitur, quæ contingens circulum, & producta, ipsum non secat.

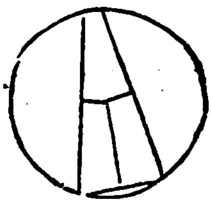
III.

Circuli contingere se dicuntur, qui contingentes, se ipsos non secant.



IV.

In circulo æqualiter distare à centro rectæ lineæ dicuntur, quando à centro ad ipsas perpendiculares ductæ sunt æquales.

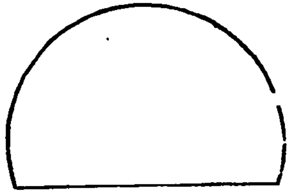


V.

Magis autem distare à centro dicitur ea, in quam major perpendicularis cadit.

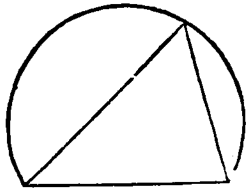
VI.

Segmentum circuli eſt figura, quæ recta linea, & circuli circumferentia continetur.



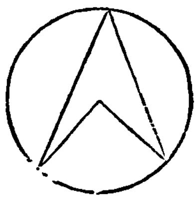
VII.

Segmenti autem angulus eſt, qui recta linea, & circuli circumferentia comprehenditur.



VIII.

In ſegmento angulus eſt, quando in circumferentia ſegmenti ſumatur aliquod punctum, atque ab ipſo ad terminos lineæ ejus, quæ baſis eſt ſegmenti, rectæ lineæ ducantur, angulus ductis lineis contentus.



IX.

Quando autem continentes angulum rectæ lineæ aſſumunt circumferentiam, in illa conſiſtere angulus dicitur.

X.

Sector circuli eſt, quando angulus ad centrum conſtiterit, figura contenta rectis lineis angulum comprehendentibus, & circumferentia ab ipſis aſſumpta.

XI.

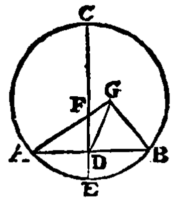
Similia circulorum ſegmenta ſunt, quæ angulos ſuſcipiunt æquales, vel in quibus anguli æquales conſiſtunt.

PROP.

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

Dati circuli centrum invenire.

Sit datus circulus ABC, oportet circuli ABC centrum invenire. Ducatur in ipso quædam recta linea AB utcunque, & in puncto D bifariam [a] secetur, à puncto autem D ipsi AB ad rectos angulos [b] ducta DC in E producatur; & secetur CE bifariam [a] in F. Dico punctum F circuli ABC centrum esse. Non enim; sed si fieri potest, sit G centrum, & GA GD GB ducantur. itaque quoniam DA est æqualis DB, communis autem DG, erunt duæ AD DG duabus GD DB æquales, altera alteri: & basis GA æqualis [c] est basi GB; sunt enim ex centro G. angulus igitur ADG angulo GDB est [d] æqualis cum autem recta linea super rectam lineam insistens, angulos qui deinceps sunt, æquales inter se fecerit, [e] rectus est uterque æqualium angulorum. ergo angulus GDB est rectus. sed & rectus FDB. æqualis igitur est angulus FDB angulo GDB, major minori, quod fieri non potest. quare G non est circuli ABC centrum. similiter ostendemus neque aliud esse, præter ipsum F. ergo F centrum est circuli ABC. Quod invenire oportebat.



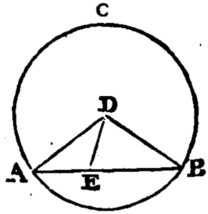
[a] 10. primi.
[b] 11. primi.
[c] Def. 15. primi.
[d] 8. primi.
[e] Def. 10. primi.

Cor. Si in circulo quævis recta linea, lineam quandam bifariam & ad angulos rectos secet, in secante erit centrum circuli.

PROP. II. THEOR.

Si in circumferentia circuli duo quævis puncta sumantur, quæ ipsa conjungit recta linea intra circulum cadet.

Sit circulus ABC; in circumferentia ipsius sumantur duo quævis puncta A B. Dico rectam lineam quæ à puncto A ad B ducitur, intra circulum cadere. Sumatur enim in recta AB punctum quodvis E, & jungantur DA DE DB. Quoniam DA est æqualis DB, erit [a] angulus DAB æqualis angulo DBA, & quoniam trianguli DAE latus AE producitur, erit [b] angulus DEB angulo DAE major, angulus autem DAE æqualis est angulo DBE, ergo DEB angulus angulo DBE est



[a] 5. primi.
[b] 16. primi.

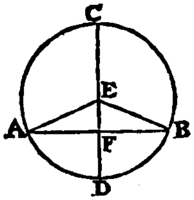
e 19. primi. eſt major. ſed majori [e] angulo majus latus ſubtenditur. major igitur eſt DB ipſa DE. ſed DB ad circumferentiam tantum pertingit. ergo DE non eo uſque protenditur. adeoque punctum E cadet intra circulum. Si igitur in circumferentia &c. Quod oportebat demonſtrare.

Cor. Hinc ſi recta circulum tangat, in unico puncto eum tangit.

PROP. III. THEOR.

Si in circulo recta linea per centrum ducta, rectam lineam quandam non ductam per centrum biſariam ſecet, & ad angulos rectos ipſam ſecabit; quod ſi ad angulos rectos ipſam ſecet, & biſariam ſecabit.

Sit circulus ABC, & in ipſo recta linea per centrum ducta CD rectam lineam quandam AB non ductam per centrum biſariam ſecet in puncto F. Dico ad angulos rectos ipſam ſecare. Sumatur enim circuli



a 1. hujus. ABC centrum [a] quod ſit E, & EA EB jungantur. Quoniam igitur AF eſt æqualis FB, communis autem FE, duæ AF FE duabus BF FE æquales ſunt, & baſis EA baſi EB eſt æqualis. ergo & angulus AFE angulo BFE

b 8. primi. æqualis [b] erit. cum autem recta linea ſuper rectam inſiſtens

c Def. 10. primi. angulos, qui deinceps ſunt, æquales inter ſe fecerit, rectus eſt [c] uterque æqualium angulorum. uterque igitur AFE BFE eſt rectus. quare recta linea CD per centrum ducta rectam lineam AB non ductam per centrum biſariam ſecans, & ad angulos rectos ipſam ſecabit. Si vero CD ſecet AB ad rectos angulos, dico & biſariam ipſam ſecare, hoc eſt AF ipſi FB æqualem eſſe. Iiſdem enim conſtructis, quoniam EA, quæ

d 5. primi. ex centro, eſt æqualis EB, & angulus EAF angulo [d] EBF æqualis erit; eſt autem & AFE rectus æqualis recto BFE. duo igitur triangula EAF EBF duos angulos duobus angulis æquales habent, unumque latus uni lateri æquale, EF commune ſcilicet utriſque, quod uni angulorum æqualium ſubtenditur. ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia

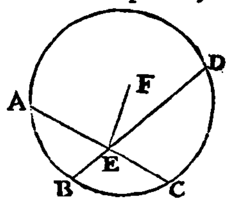
e 26. primi. [e] habebunt. atque erit AF ipſi FB æqualis. Si igitur in circulo recta linea per centrum ducta rectam lineam quandam non ductam per centrum biſariam ſecet, & ad angulos rectos ipſam ſecabit. quod ſi ipſam ſecet ad rectos angulos, & biſariam ſecabit. Quod oportebat demonſtrare.

PROP.

PROP. IV. THEOR.

Si in circulo duæ rectæ lineæ se invicem secent non ductæ per centrum, sese bifariam non secabunt.

Sit circulus ABCD; & in ipso duæ rectæ lineæ AC BD se invicem secent in puncto E, non ductæ per centrum. Dico eas sese bifariam non secare. Si enim fieri potest, secent sese bifariam, ita ut AE sit æqualis EC & BE ipsi ED: sumaturque [a] centrum ABCD circuli, quod sit F, & EF jungatur. Quoniam igitur recta linea FE per centrum ducta rectam lineam quandam AC non ductam per centrum bifariam secat, & ad rectos angulos ipsam secabit [b]. quare rectus est FEA angulus. rursus quoniam recta linea FE rectam lineam quandam BD non ductam per centrum bifariam secat, & ad angulos rectos ipsam [b] secabit. rectus igitur angulus est FEB. ostensus autem est rectus & FEA. ergo FEA angulus ipsi FEB æqualis erit, minor majori, quod fieri non potest. non igitur AC BD sese bifariam secant. Quare si in circulo duæ rectæ lineæ se invicem secent non ductæ per centrum, sese bifariam non secabunt. Quod ostendere oportebat.



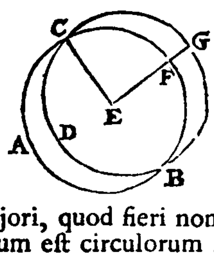
[a] 1. hujus.

[b] 3. hujus.

PROP. V. THEOR.

Si duo circuli se invicem secent, non erit ipsorum idem centrum.

Duo enim circuli se invicem secent ABC CDG in punctis B, C. Dico ipsorum idem centrum non esse. Si enim fieri potest, sit centrum E; jungaturque EC, & EFG utcunque ducatur. Quoniam E centrum est circuli ABC, erit CE ipsi EF æqualis. rursus quoniam E centrum est CDG circuli, æqualis est CE ipsi EG. sed ostensa est CE æqualis EF. ergo EF ipsi EG æqualis erit, minor majori, quod fieri non potest. non igitur punctum E centrum est circulorum ABC CDG. Quare si duo circuli se invicem secent, non erit ipsorum idem centrum. Quod ostendendum fuit.

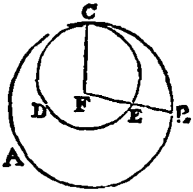


PROP.

PROP. VI. THEOR.

Si duo circuli sese intra contingant, ipsorum idem centrum non erit.

Duo enim circuli ABC CDE contingant sese intra in puncto C. Dico ipsorum non esse idem centrum. Si enim fieri potest, sit F, jungaturque FC, & FEB utcunque ducatur. Quoniam igitur F centrum est circuli ABC, æqualis est CF ipsi FB. rursus quoniam F centrum est circuli CDE, erit CF æqualis FE. ostensa autem est CF æqualis FB. ergo & FE ipsi FB est æqualis, minor majori, quod fieri non potest. non igitur F punctum centrum est circulorum ABC CDE. Quare si duo circuli sese intra contingant, ipsorum idem centrum non erit. Quod demonstrare oportebat.

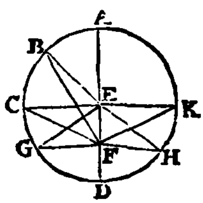


PROP. VII. THEOR.

Si in circuli diametro aliquod punctum sumatur, quod non sit centrum circuli, & ab eo in circulum cadant quævis recta lineæ; maxima quidem erit in qua centrum: minima vero reliqua: aliarum autem propinquior ei quæ per centrum transit, semper remotiore major est. at duæ tantum æquales ab eodem puncto in circulum cadent ad utrasque partes minimæ.

Sit circulus ABCD, cujus diameter AD, & in ipsa AD sumatur aliquod punctum F, quod non sit centrum circuli. Sit autem circuli centrum E: & à puncto F in circulum ABCD cadant quædam rectæ lineæ FB FC FG. Dico FA maximam esse, & FD minimam: aliarum vero, FB quidem majorem quam FC, & FC majorem quam FG. jungantur enim BE CE GE. Et quoniam omnis trianguli duo latera *a* reliquo sunt majora; erunt BE EF majores quàm BF. est autem AE æqualis BE. ergo. BE EF ipsi AF sunt æquales. major igitur est AF quàm FB. rursus quoniam BE est æqualis CE, communis autem FE, duæ BE EF duabus CE EF æquales

a 20. primi.



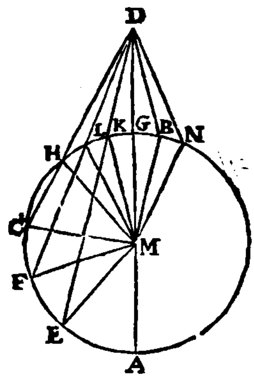
quales sunt. sed BEF angulus major est angulo CEF: basis igitur BF basi FC est [b] major. eadem ratione & CF major [b] 24.primi. est quam FG. rursus quoniam GF FE majores [a] sunt quam [a] 20.primi. GE, æqualis autem GE ipsi ED; erunt GF FE majores quam ED. communis auferatur FE. ergo reliqua GF major est quam reliqua FD. maxima igitur est FA, & FD minima: major vero BF quam FC, & FC quam FG major. Dico & à puncto F duas tantum rectas lineas æquales cadere in circulum ABCD ad utrasque partes minimæ FD. constituatur [c] e- [c] 23.primi. nim ad lineam EF atque ad datum in ea punctum E, angulo GEF æqualis angulus FEH: & FH jungatur. Quoniam igitur GE est æqualis EH, communis autem EF, duæ GE EF duabus HE EF æquales sunt: & angulus GEF est æqualis angulo HEF. basis igitur FG basi FH æqualis [d] erit. Dico à puncto [d] 4. primi. F in circulum non cadere aliam ipsi FG æqualem. si enim fieri potest, cadat FK & quoniam FK est æqualis FG, estque ipsi FG æqualis FH; erit & FK ipsi FH æqualis, videlicet propinquior ei, quæ per centrum transit æqualis remotiori, quod fieri non potest. Si igitur in circuli diametro aliquod punctum sumatur, quod non sit centrum circuli, &c. Quod demonstrare oportebat.

PROP. VIII. THEOR.

Si extra circulum aliquod punctum sumatur, atque ab eo ad circulum ducantur quædam rectæ lineæ quarum una per centrum transeat, aliæ vero utcunque: earum quidem, quæ in concavam circumferentiam cadunt, maxima est quæ per centrum transit; aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum, semper remotiore major est. at earum, quæ in convexam circumferentiam cadunt, minima est quæ inter punctum & diametrum interjicitur: aliarum vero quæ propinquior minimæ, semper remotiore est minor. duæ autem tantum æquales à puncto in circulum cadunt ad utrasque partes minimæ.

Sit circulus ABC, & extra circulum sumatur aliquod punctum D: ab eo autem in circulum ducantur rectæ lineæ quædam DA DE DF DC: sitque DA per centrum. Dico earum quidem, quæ in concavam AEFC circumferentiam cadunt, maximam esse DA, quæ per centrum transit; & minimam, quæ inter punctum D & diametrum AG interjicitur, videlicet DG: majorem autem DE quam DF; & DF majorem

majorem quam DC: earum vero quæ in convexam circumferentiam HLKG cadunt, quæ propinquior eſt minimæ DG ſemper remotiore eſſe minorem; hoc eſt DK minorem
a 1. hujus. quam DL, & DL minorem quam DH. Sumatur a enim centrum circuli ABC, quod ſit M, & jungantur ME MF MC MH ML. & quoniam AM eſt æqualis ME, communis apponatur MD. ergo AD eſt æqualis ipſis EM MD. ſed EM MD
b 20. primi. ſunt majores b quam ED. ergo & AD quam ED eſt major. rurſus quoniam æqualis eſt ME ipſi MF, communis apponatur MD. erunt EM MD ipſi MF MD æquales; at angulus EMD major eſt angulo FMD. baſis igitur
c 24. primi. ED baſi FD major c erit. ſimiliter demonſtrabimus, & FD majorem eſſe quam CD. ergo maxima eſt DA; major autem DE quam DF, & DF quam DC major. Præterea quoniam



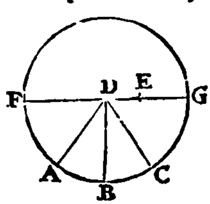
MK KD ſunt majores b quam MD, & MG eſt æqualis MK;
d Axiom. 4. erit reliqua KD quam reliqua d GD major. quare GD minor quam KD, & idcirco GD minima eſt. & quoniam trianguli MLD in uno latere MD, duæ rectæ lineæ MK KD in-
e 21. primi. tra conſtituantur, erunt e MK KD minores ipſis ML LD, quarum MK eſt æqualis ML. reliqua igitur DK minor eſt quam reliqua DL. ſimiliter oſtendemus, & DL quam DH minorem eſſe. ergo DG minima eſt. minor vero DK quam DL, & DL minor quàm DH. Dico etiam duas tantum æquales à puncto D in circulum cadere ad utraſque minimæ partes. conſtituatur ad rectam lineam MD, ad datumque in ea
f 23. primi. punctum M, angulo KMD æqualis f angulus DMB, & DB jungatur. itaque quoniam MK eſt æqualis MB, communis autem MD, duæ KM MD duabus BM MD æquales ſunt, altera alteri, & angulus KMD æqualis angulo BMD, baſis igi-
g 4. primi. tur DK baſi DB eſt æqualis g. Dico à puncto D aliam ipſi DK æqualem in circulum non cadere. ſi enim fieri poteſt, cadat DN. & quoniam DK eſt æqualis DN, & DK ipſi DB eſt æqualis; erit & DB æqualis DN, propinquior ſcilicet minimæ æqualis remotiori, quod fieri non poſſe oſtenſum eſt. Si igitur extra circulum aliquod punctum ſumatur, &c. quod oſtendere oportebat.

PROP.

PROP. IX. THEOR.

Si intra circulum sumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant plures quàm duæ rectæ lineæ æquales; punctum, quod sumitur, circuli centrum erit.

Sumatur enim intra circulum ABC punctum aliquod D: atque à puncto D in circulum ABC cadant plures quam duæ rectæ lineæ æquales DA DB DC. Dico punctum D, quod sumitur, circuli ABC esse centrum. Non enim; sed, si fieri potest, sit E centrum, & juncta DE in FG producatur. ergo FG [a] diameter est ABC circuli. itaque quoniam in FG diametro circuli ABC sumptum est aliquod punctum D quod non est centrum circuli, maxima quidem erit DG, major [b] autem DC quam DB, & DB quam DA. sed & æquales, [c] quod fieri non potest. non igitur E centrum est circuli ABC. similiter ostendemus neque aliud punctum centrum esse præter ipsum D. ergo D circuli BC centrum erit. Quod oportebat demonstrare.

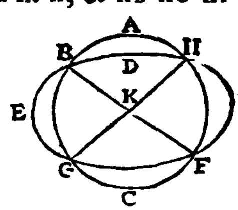


a Def. 17. primi.
b 7. hujus.
c ex hyp.

PROP. X. THEOR.

Circulus circulum in pluribus, quàm duobus punctis non secat.

Si enim fieri potest circulus ABC circulum DEF secet in pluribus punctis, quam duobus; nempe in B, G, F, & circuli ABC centrum sumatur, quod sit K, & KB KG KF jungantur. Quoniam igitur intra circulum DEF sumptum est aliquod punctum K, à quo in circulum DEF incidant plures quam duæ rectæ lineæ KB KG KF æquales, erit punctum K circuli DEF centrum [a]. est autem & circuli ABC centrum [b] K duorum igitur circulorum, qui sese secant, idem erit K centrum, quod fieri non potest. Quare circulus circulum in pluribus,



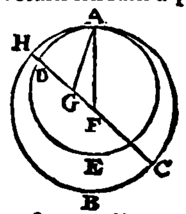
a 9. hujus.
b Ex hyp.

pluribus quam duobus punctis non secat. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XI. THEOR.

Si duo circuli sese intus contingant, & sumantur centra ipsorum: recta linea ipsorum centra conjungens producta in circulorum contactum cadet.

Duo enim circuli A B C A D E sese intus contingant in puncto A, & sumatur circuli quidem A B C centrum quod sit F; circuli vero A D E centrum G. Dico rectam lineam à puncto G ad F ductam, si producatur, in punctum A cadere. Non enim; sed si fieri poteſt, cadat ut F G D H. & A F A G jungantur. Itaque quoniam A G G F majores [a] sunt quam F A, hoc eſt quam F H, communis auferatur F G. reliqua igitur A G major eſt quam reliqua G H. ſed A G eſt æqualis G D, ergo G D ipſa G H eſt major, minor majore, quod fieri non poteſt. non igitur à puncto F ad G ducta recta linea extra contactum A cadet. quare in ipſum cadat neceſſe eſt. Si igitur duo circuli ſeſe intus contingant, recta linea ipſorum centra conjungens, ſi producatur, in contactum circulorum cadet. Quod oportebat demonſtrare.

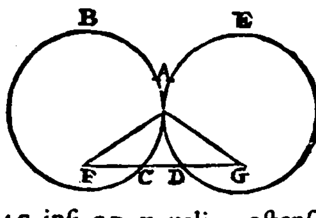


[a] 20. primi.

PROP. XII. THEOR.

Si duo circuli sese extra contingant, recta linea ipsorum centra conjungens per contactum transibit.

Duo enim circuli A B C A D E ſeſe extra contingant in puncto A; & ſumatur circuli quidem A B C centrum quod ſit F; circuli vero A D E centrum G. Dico rectam lineam, quæ à puncto F ad G ducitur, per contactum A tranſire. Non enim; ſed, ſi fieri poteſt, cadat ut F C D G: & F A A G jungantur. Quoniam igitur F centrum eſt circuli A B C, erit A F æqualis F C. rurſus quoniam G centrum eſt A D E circuli, erit A G ipſi G D æqualis. oſtenſa eſt autem, & A F æqualis F C. ſunt igitur F A A G ipſis F C D G æquales, ergo tota F G major eſt quam F A A G. ſed & minor,

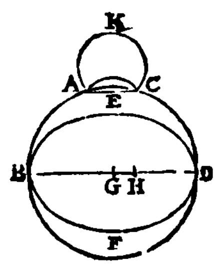


minor [a], quod fieri non poteſt. non igitur à puncto F ad C ducta recta linea per contactum A non tranſibit. quare per ipſum tranſeat neceſſe eſt. Si igitur duo circuli ſeſe extra contingant, recta linea ipſorum centra conjungens per contactum tranſibit. Quod oportebat demonſtrare. [a] 20. primi.

PROP. XIII. THEOR.

Circulus circulum non contingit in pluribus punctis quàm uno, ſive intus ſive extra contingat.

Si enim fieri poteſt, circulum ABCD circulus EBFD contingat, primum intus, in pluribus punctis quam uno, videlicet in B, D: & ſumatur circuli quidem ABDC centrum G, circuli vero EBFD centrum H. ergo recta linea quæ à puncto G ad H ducitur, in puncta [a] B, D cadet. cadat ut BGHD. Et quoniam G centrum eſt circuli ABDC, erit BG ipſi GD æqualis. major igitur eſt BG quam HD: & BH quam HD multo major. rurſus quoniam H centrum eſt EBFD circuli, æqualis eſt BH ipſi HD. atqui oſtenſa eſt ipſa multo major, quod fieri non poteſt. non igitur circulus circulum intus contingit in pluribus punctis, quam uno. Dico etiam neque extra contingere. ſi enim fieri poteſt, circulus ACK circulum ABDC extra contingat in pluribus punctis quàm uno, videlicet in A, C, & AC jungatur. itaque quoniam in circumferentia utrorumque circulorum ABCD ACK ſumpta ſunt duo puncta A, C; recta linea, quæ ipſa conjungit intra utrumque ipſorum cadet [b]. ſed intra circulum quidem ABDC cadit, extra circulum vero ACK, quod eſt abſurdum. Non igitur circulus circulum extra contingit in pluribus punctis quàm uno. oſtenſum autem eſt neque intus contingere. Circulus igitur circulum non contingit in pluribus punctis quàm uno, ſive intus, ſive extra contingat. Quod oportebat demonſtrare. [a] 11. hujus. [b] 2. hujus.



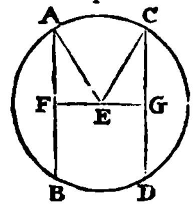
PROP. XIV. THEOR.

In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter à centro diſtant: & quæ æqualiter à centro diſtant, inter ſe ſunt æquales.

Sit circulus ABDC, & in ipſo æquales rectæ lineæ AB CD. Dico eas à centro æqualiter diſtare. Sumatur enim circuli

ABDC

ABDC centrum quod ſit E, & ab ipſo ad AB CD perpendiculares ducantur EF EG, & AE EC jungantur. Quoniam igitur recta linea quædam per centrum ducta EF rectam lineam quandam AB non ductam per centrum ad rectos
a 3. hujus. angulos ſecat, & bifariam ipſam ſecabit a. quare AF eſt æqualis FB, ideoque AB ipſius AF dupla. eadem ratione, & CD dupla eſt CG. atque eſt AB ipſi CD æqualis. æqualis igitur & AF ipſi CG. & quoniam AE eſt æqualis EC, erit & quadratum ex AE quadrato ex EC æquale. ſed quadrato



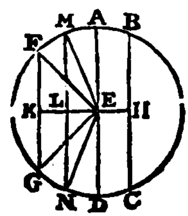
b 47. primi. quidem ex AE æqualia ſunt ex AF FE quadrata b; rectus enim angulus eſt ad F: quadrato autem ex EC æqualia ſunt quadrata ex EG GC, cum angulus ad G ſit rectus. quadrata igitur ex AF FE æqualia ſunt quadratis ex CG GE, quorum quadratum ex AF quadrato ex CG æquale, etenim æqualis eſt AF ipſi CG. reliquum igitur quod ſit ex FE quadratum æquale eſt reliquo quod ex EG; ac propterea FE ipſi EG eſt æqualis. in circulo autem æqualiter diſtare à centro rectæ lineæ dicuntur, quando à centro ad ipſas perpen-
c 4. def. hujus. diculares ductæ æquales c ſunt. ergo AB CD à centro æqualiter diſtant. Sed ſi AB CD æqualiter diſtent à centro, hoc eſt, æqualis ſit FE ipſi EG; dico AE ipſi CD æqualem eſſe. Iiſdem enim conſtructis, ſimiliter oſtendemus AB duplam eſſe ipſius AF, CD duplam ipſius CG. & quoniam æqualis eſt AE ipſi EC, erit & ex AE quadratum quadrato ex EC æquale. ſed quadrato quidem ex AE æqualia b ſunt quadrata ex EF FA: quadrato autem ex EC æqualia b quadrata ex EG GC. quadrata igitur ex EF FA quadratis ex EG GC æqualia ſunt; quorum quadratum ex EG æquale eſt quadrato ex EF, eſt enim EG ipſi EF æqualis: reliquum igitur ex AF quadratum æquale eſt reliquo ex CG. ergo AF ipſi CG eſt æqualis. atque eſt AB ipſius AF dupla, & CD dupla ipſius CG. In circulo igitur æquales rectæ lineæ æqualiter à centro diſtant. Et quæ æqualiter à centro diſtant, inter ſe ſunt æquales. Quod oportebat demonſtrare.

PROP.

PROP. XV. THEOR.

In circulo maxima quidem est diameter: aliarum vero semper propinquior ei quæ per centrum transit, remotiore major est.

Sit circulus ABCD, cujus diameter AD, centrum E; & propinquior quidem diametro AD sit BC; remotior vero FG. Dico AD maximam esse, & BC majorem quam FG. Ducantur enim à centro E ad BC FG perpendiculares EH EK. & quoniam BC propinquior est ei quæ per centrum transit, remotior autem FG; erit EK quam EH major. ponatur ipsi EH æqualis EL, & per L ipsi EK ad rectos angulos ducta LM in N producatur, & jungatur EM EN EF EG. quoniam igitur EH est æqualis EL, erit & BC ipsi MN æqualis [a]. rursus quoniam æqualis est AE ipsi EM, & DE ipsi EN, erit & AD ipsis ME EN æqualis. sed ME EN [b] majores sunt quam MN; ergo & AD major est quam MN: & MN est æqualis BC, erit igitur AD quam BC major. quod cum duæ EM EN duabus FE EG æquales sint, angulusque MEN major angulo FEG, & basis MN basi FG major [c] erit. ostensa autem est MN æqualis BC. ergo & BC quam FG est major. maxima igitur est AD diameter, & BC major quam FG. Quare in circulo maxima est diameter, aliarum vero semper propinquior ei, quæ per centrum transit, remotiore est major. Quod demonstrare oportebat.



a 14. hujus.
b 20. primi.
c 24. primi.

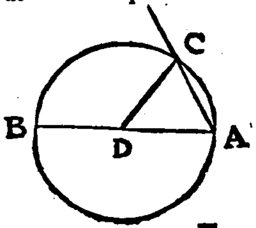
PROP. XVI. THEOR.

Quæ diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur, cadit extra circulum: & in locum qui inter rectam lineam, & circumferentiam interjicitur altera recta linea non cadet: & semicirculi angulus omni angulo acuto rectilineo major est; reliquus autem minor.

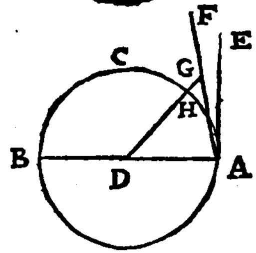
Sit circulus ABC circa centrum D, & diametrum AB. Dico rectam lineam, quæ à puncto A ipsi AB ad rectos angulos ducitur extra circulum cadere. Non enim; sed, si fieri

potest,

potest, cadat intus, ut AC, & DC jungatur. itaque quoniam æqualis est DA ipsi DC, erit & angulus DAC angulo ACD
[a] 5. primi. æqualis [a]. rectus autem est DAC [b]; ergo & ACD est rectus;
[b] ex hyp. ac propterea anguli DAC ACD duabus rectis æquales sunt.
[c] 17. primi. quod fieri non potest [c]. non igitur à puncto A ipsi BA ad rectos angulos ducta cadet intra circulum. similiter ostendemus neque in circumferentiam cadere. Extra igitur cadat necesse est. cadat ut AE. Dico in locum qui inter rectam lineam AE & circumferentiam CHA interjicitur, alteram rectam lineam non cadere.



Si enim fieri potest, cadat ut FA, & à puncto D ad FA perpendicula-
[d] 12 primi. ris [d] ducatur DG. & quoniam rectus est angulus AGD, minor autem recto
[e] 19. primi. DAG, erit DA quàm DG major [e]. æqualis autem est DA ipsi DH. major igitur est DH ipsa DG, minor majore, quod fieri non potest. non igitur in locum qui inter rectam lineam & circumferentiam interjicitur, altera recta linea cadet. Dico præterea angulum semicirculi, qui recta linea BA, & circumferentia CHA continetur, omni angulo acuto rectilineo majorem esse; reliquum vero contentum circumferentia CHA, & recta linea AE omni angulo rectilineo esse minorem. Si enim est aliquis angulus rectilineus acutus major quidem contento recta linea BA, & CHA circumferentia, aut aliquis minor contento CHA circumferentia, & recta linea AE, in locum qui inter circumferentiam CHA, & rectam lineam AE interjicitur, cadet aliqua recta linea quæ faciet angulum majorem quidem contento recta linea BA & CHA circumferentia, qui scilicet rectis lineis continetur, minorem vero contento circumferentia CHA, & AE
[f] ex prius demonstratis. recta linea, non cadit autem [f]: non igitur erit angulus acutus qui rectis lineis continetur, major angulo contento recta linea BA, & CHA circumferentia; neque minor contento circumferentia CHA, & AE recta linea.



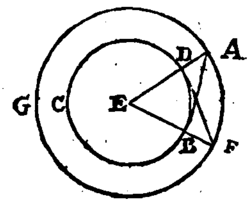
Cor. Ex hoc manifestum est rectam lineam quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, circulum contingere, & rectam lineam contingere circulum in uno tantum puncto, quoniam quæ occurrit in duobus punctis intra ipsum cadit, ut ostensum est.

PROP.

PROP. XVII. PROBL.

A dato puncto rectam lineam ducere quæ datum circulum contingat.

Sit datum quidem punctum A, datus autem circulus BCD. Oportet à puncto A rectam lineam ducere, quæ circulum BCD contingat. Sumatur enim centrum circuli E; & juncta AE, centro quidem E, intervallo autem EA circulus AFG describatur: & à puncto D ipsi EA ad rectos angulos [a] ducatur DF: junganturque EBF AB. Dico à puncto A ductam esse AB quæ circulum BCD contingit. Quoniam enim E centrum est circulorum BCD AFG, erit EA æqualis EF, & ED ipsi EB. duæ igitur AE EB duabus FE ED æquales sunt, & angulum communem continent, qui est ad E. ergo basis DF basi AB est [b] æqualis, triangulumque DEF æquale triangulo EBA, & reliqui anguli reliquis angulis. æqualis igitur est angulus EBA angulo EDF. & EDF rectus est. quare & rectus EBA: atque est EB ex centro. quæ autem diametro circuli ab extremitate ad rectos angulos ducitur, circulum contingit [c]. ergo AB contingit circulum. A dato igitur puncto A ducta est recta linea AB quæ circulum BCD contingit. Quod facere oportebat.



a 11.primi.

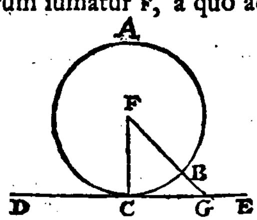
b 4. hujus.

c Cor. 16. hujus.

PROP. XVIII. THEOR.

Si circulum contingat quædam recta linea, à centro autem in contactum recta linea ducatur, ea ad contingentem perpendicularis erit.

Circulum enim ABC contingat quædam recta linea DE in puncto C: & circuli ABC centrum sumatur F, à quo ad C ducatur FC. Dico FC ad ipsam DE perpendicularem esse. Si enim non ita sit, ducatur à puncto F ad DE perpendicularis [a] FG. Quoniam igitur angulus FGC rectus est, erit GCF acutus [b], ac propterea FGC angulus major angulo FCG. majorem autem angulum majus latus [c] subtendit. major igitur est FC quàm FG. æqualis autem FC ipsi FB



a 12.primi.

b 32.primi.

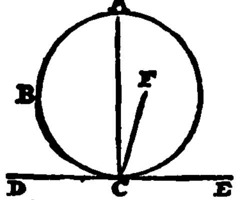
c 19.primi.

ergo FB ipsa FG est major, minor majore, quod fieri non potest. non igitur FG est perpendicularis ad DE. similiter ostendemus neque aliam quampiam esse præter ipsam FC. ergo FC ad DE est perpendicularis. Si igitur circulum contingat quædam recta linea, à centro autem in contactum recta linea ducatur, ea ad contingentem perpendicularis erit. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XIX. THEOR.

Si circulum contingat quædam recta linea, à contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur: in ea circuli centrum erit.

Circulum enim ABC contingat quædam recta linea DE in C, & à puncto C ipsi DE ad rectos angulos ducatur CA. Dico in ipsa AC circuli centrum esse. Non enim; sed, si fieri potest, sit F centrum, & jungatur CF.



Quoniam igitur circulum ABC contingit quædam recta linea DE, & à centro ad contactum ducta est FC; erit FC ad ipsam DE perpendicularis [a]. rectus igitur angulus est FCE. est autem & ACE rectus [b]. ergo FCE angulus est æqualis angulo ACE, minor majori, quod fieri non potest. non igitur F centrum est ABC circuli. similiter ostendemus neque aliud aliquod esse præterquam in ipsa AC. Quare si circulum contingat quædam recta linea, à contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur; in ea circuli erit centrum. Quod demonstrare oportebat.

a 18. hujus.

b Ex hyp.

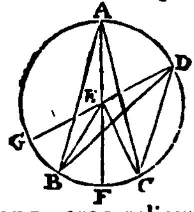
PROP. XX. THEOR.

In circulo angulus, qui ad centrum, duplex est ejus qui ad circumferentiam est, quando circumferentiam eandem pro basi habeant.

Sit circulus ABC, ac cujus centrum quidem angulus sit BEC, ad circumferentiam vero BAC, & eandem circumferentiam BC pro basi habeant. Dico BEC angulum anguli BAC duplum esse. Jungatur enim AE, & ad F producatur. itaque quoniam EA est æqualis EB, erit & angulus EAB angulo EBA [a] æqualis. anguli igitur EAB EBA duplices sunt ipsius

a 5. primi.

ipsius anguli EAB; sed angulus BEF est æqualis *b* angulis *b* 32.primi.
EAB EBA; ergo BEF angulus anguli EAB est duplex. eadem ratione & angulus FEC duplex est ipsius EAC. totus igitur BEC totius BAC duplex erit. rursus inflectatur, & sit alter angulus BDC, junctaque DE ad G producatur. similiter ostendemus angulum GEC anguli GDC duplum esse; quorum GEB duplus est ipsius GDB. ergo reliquus BEC reliqui BDC est duplus. In circulo igitur angulus qui ad centrum, duplex est ejus qui ad circumferentiam est, quando circumferentiam eandem pro basi habeant. Quod oportebat demonstrare.

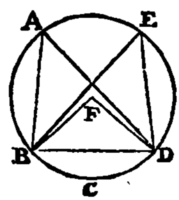


PROP. XXI. THEOR.

In circulo, qui in eodem segmento sunt, anguli inter se æquales sunt.

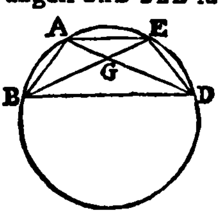
Sit circulus ABCDE, & in eodem segmento BAED anguli sint BAD BED. Dico eos inter se æquales esse. Sumatur enim circuli ABCDE centrum quod sit F: junganturque BF FD. Quoniam angulus quidem BFD est ad centrum, angulus vero BAD ad circumferentiam, & circumferentiam eandem BCD pro basi habent; erit BFD angulus *a* anguli BAD duplus. eadem ratione angulus BFD duplus est etiam anguli BED. ergo angulus BAD angulo BED æqualis erit. Si anguli BAD BED sunt in segmento minore semicirculo, ducatur AE, eruntque omnes anguli trianguli ABG æquales *b* omnibus angulis trianguli DEG. & anguli ABE ADE sunt æquales per hactenus demonstrata, & anguli AGB DGE sunt etiam æquales *c*, ad verticem enim sunt: quare & reliquus BAG reliquo GED æqualis erit. In circulo, igitur qui in eodem segmento sunt anguli inter se æquales sunt. Quod oportebat demonstrare.

a 20. hujus.



b 32.primi.

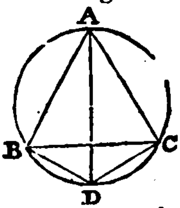
c 15.primi.



PROP. XXII. THEOR.

Quadrilaterorum quæ in circulis describuntur, anguli oppositi duobus rectis æquales sunt.

Sit circulus ABDC, & in ipso quadrilaterum ABDC. Dico angulos ipsius oppositos duobus rectis æquales esse. Jungantur AD BC: quoniam igitur omnis trianguli tres anguli duobus rectis sunt æquales [a], erunt trianguli ABC tres anguli CAB ABC BCA æquales duobus rectis. sed angulus ABC est æqualis [b] angulo ADC, in eodem enim sunt segmento AB DC. & angulus ACB æqualis [b] ipsi ADB, quod sunt in eodem ACDB segmento: totus igitur angulus BDC angulis ABC ACB æqualis est. communis apponatur BAC angulus; erunt anguli BAC ABC ACB angulis BAC BDC æquales. sed BAC ABC ACB sunt æquales [a] duobus rectis. ergo & anguli BAC BDC duobus rectis æquales erunt. similiter ostendemus angulos quoque ABD ACD duobus rectis esse æquales. Quadrilaterorum igitur, quæ in circulis describuntur, anguli oppositi duobus rectis æquales sunt. Quod oportebat demonstrare.

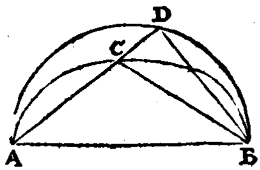


[a] 32. primi.
[b] 21. primi.

PROP. XXIII. THEOR.

Super eadem recta linea duo circulorum segmenta similia, & inæqualia ex eadem parte non constituentur.

Si enim fieri potest, super eadem recta linea AB duo circulorum segmenta similia, & inæqualia constituantur ex eadem parte ACB ADB; ducaturque ACD, & CB BD jungantur. Itaque quoniam segmentum ACB simile est segmento ADB, similia autem circulorum segmenta sunt quæ angulos suscipiunt [a] æquales; erit ACB angulus æqualis angulo ADB, exterior interiori, quod fieri non potest [b]. Non igitur super eadem recta linea, duo circulorum segmenta similia, & inæqualia ex eadem parte constituentur. Quod demonstrare oportebat.



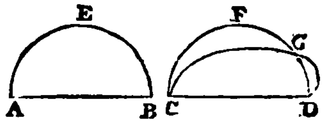
[a] Def. 11. hujus.
[b] 16. primi.

PROP.

PROP. XXIV. THEOR.

Super æqualibus rectis lineis similia circulorum segmenta inter se æqualia sunt.

Sint enim super æqualibus rectis lineis AB CD similia circulorum segmenta AEB CFD. Dico segmentum AEB segmento CFD æquale esse. Applicato enim AEB segmento segmento CFD, & posito puncto quidem A in C, recta vero linea AB in CD; congruet & B punctum puncto D, propterea quod AB ipsi CD sit æqualis. congruente autem recta linea AB rectæ CD; congruet & AEB segmentum segmento CFD. si enim AB congruet ipsi CD, segmentum autem AEB segmento CFD non congruet, sed permutabitur ut CGD, circulus circulum in pluribus quàm duobus punctis secabit. etenim circulus CGD circulum CFD secat in pluribus punctis quàm duobus, videlicet in punctis C, G, D, quod fieri non [a] potest. non igitur congruente recta linea AB rectæ CD, non congruet & AEB segmentum segmento CFD. quare congruet, & ipsi æquale erit. Super æqualibus igitur rectis lineis similia circulorum segmenta inter se æqualia sunt. Quod oportebat demonstrare.

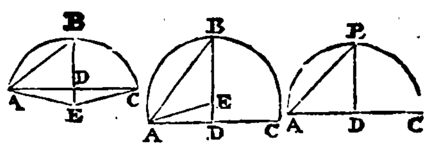


[a] 10. hujus.

PROP. XXV. PROBL.

Circuli segmento dato describere circulum cujus est segmentum.

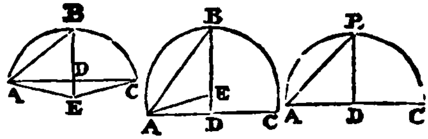
Sit datum circuli segmentum ABC. Oportet describere circulum cujus ABC est segmentum. Secetur AC bifariam [a] in D: & à puncto D ipsi AC ad rectos angulos ducatur [b] DB, & AB jungatur. Vel igitur angulus ABD major est angulo BAD, vel minor, vel ipsi æqualis. Sit primum major, & ad rectam lineam BA, atque ad datum in ea punctum A constituatur angulus BAE æqualis [c] angulo ABD; & DB ad E producatur, jungaturque EC. Quoniam igitur angulus ABE est æqualis



[a] 10. primi.
[b] 11. primi.
[c] 23. primi.

 angulo

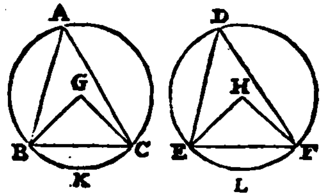
d 6. primi. angulo BAE, d erit & BE recta linea ipsi EA æqualis: & quoniam AD est æqualis DC, communis autem DE, duæ AD DE duabus CD DE æquales sunt, altera alteri; & angulus ADE æqualis angulo CDE, rectus enim uterque est. ergo & basis AE basi e 4. primi. EC est æqualis e sed ostensa est AE æqualis EB. quare & BE ipsi EC est æqualis, ac propterea tres rectæ lineæ AE EB EC inter se æquales sunt. centro igitur E, intervallo autem unâ ipsarum AE EB EC circulus descriptus etiam per reliqua f 9. hujus. f transibit puncta, & circulus descriptus erit. quare circuli segmento dato descriptus est circulus cujus segmentum est. sed & illud constat, segmentum ABC semicirculo minus g Cas. 3. fig. 3. esse; propterea quod centrum ipsius extra cadit. g Similiter, & si angulus ABD sit æqualis angulo BAD, facta AD æquali utrique ipsarum BD DC, erunt tres rectæ lineæ AD DB DC inter se æquales, atque erit D circuli descripti centrum, & h Cas. 2. fig. 2. segmentum ABC semicirculus. h Si vero angulus ABD minor sit angulo BAD; constituatur ad rectam lineam BA, & ad punctum in ea datum A, angulo ABD æqualis angulus BAE intra segmentum ABC. erit E centrum in ipsa DB, atque erit ABC segmentum semicirculo majus. Circuli igitur segmento dato descriptus est circulus cujus segmentum est. Quod facere oportebat.



PROP. XXVI. THEOR

In æqualibus circulis æquales anguli æqualibus insistunt circumferentiis, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant.

Sint æquales circuli ABC DEF, & in ipsis æquales anguli ad centra quidem BGC EHF, ad circumferentias vero BAC EDF. Dico BKC circumferentiam circumferentiæ ELF æqualem esse. Jungantur enim BC EF. Quoniam æquales sunt ABC DEF circuli, erunt & quæ ex centris æquales. duæ igitur BG GC duabus EH HF æquales sunt: & angulus ad G æqualis angulo ad H. ergo & basis



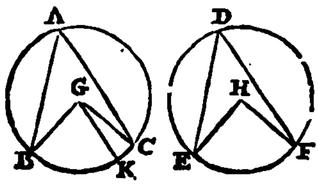
basis BC basi EF est a æqualis. rursus quoniam æqualis est angulus ad A angulo ad D, segmentum BAC simile b erit segmento EDF: & sunt super æqualibus rectis lineis BC EF. quæ autem super æqualibus rectis lineis similia sunt circulorum segmenta, inter se æqualia c sunt. segmentum igitur BAC segmento EDF est æquale. sed & totus ABC circulus æqualis est toti DEF. ergo & reliqua circumferentia BKC reliquæ ELF æqualis erit. In æqualibus igitur circulis æquales anguli æqualibus insistunt circumferentiis, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant. Quod oportebat demonstrare.

a 4. primi.
b Def. 11. hujus.
c 24. hujus.

PROP. XXVII. THEOR.

In æqualibus circulis anguli qui æqualibus insistunt circumferentiis inter se æquales sunt, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant.

In æqualibus enim circulis ABC DEF, æqualibus circumferentiis BC EF insistant anguli ad centra quidem BGC EHF, ad circumferentias vero BAC EDF. Dico angulum BGC angulo EHF, & angulum BAC angulo EDF æqualem esse. Si quidem igitur angulus BGC æqualis sit angulo EHF, manifestum est angulum quoque BAC angulo EDF a esse æqualem. sin minus, unus ipsorum est major. sit



a 20. hujus.

major BGC, & constituatur ad rectam lineam BG, & ad punctum in ipsa G, angulo EHF æqualis b angulus BGK: æquales autem anguli æqualibus insistunt c circumferentiis, quando ad centra fuerint. ergo circumferentia BK æqualis est circumferentiæ EF. sed circumferentia EF æqualis est ipsi BC. ergo & BK ipsi BC est æqualis. minor majori, quod fieri non potest. non igitur inæqualis est angulus BGC angulo EHF: ergo est æqualis. atque est anguli quidem BGC dimidium angulus qui ad A; anguli vero EHF dimidium qui ad D. angulus igitur qui ad A angulo qui ad D est æqualis. In æqualibus igitur circulis, anguli qui æqualibus insistunt circumferentiis inter se æquales sunt, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant. Quod oportebat demonstrare.

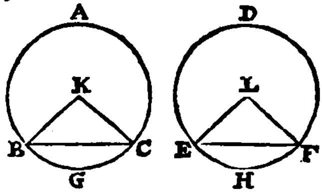
b 23. primi.
c 26. hujus.

PROP.

PROP. XXVIII. THEOR.

In æqualibus circulis æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori.

Sint æquales circuli ABC DEF; & in ipsis æquales rectæ lineæ BC EF, quæ circumferentias quidem BAC EDF majores auferant, circumferentias vero BGC EHF minores. Dico circumferentiam BAC majorem majori circumferentiæ EDF, & minorem circumferentiam BGC minori EHF æqualem esse. Sumantur



a 1. hujus. enim centra [a] circulorum K, L, junganturque BK KC EL LF. Quoniam circuli æquales sunt, erunt &

b Def. 1. hujus. quæ ex centris æquales [b]. duæ igitur BK KC sunt æquales duabus EL LF: & basis BC æqualis est basi EF, ergo angulus BKC angulo ELF est

c 8. primi. [c] æqualis: æquales autem anguli æqualibus insistunt circum-

d 26. hujus. ferentiis, quando ad centra fuerint [d]. quare circumferentia BGC æqualis est circumferentiæ EHF, sed & totus ABC circulus toti DEF est æqualis. reliqua igitur circumferentia BAC reliquæ EDF æqualis erit. Ergo in æqualibus circulis æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXIX. THEOR.

In æqualibus circulis, æquales circumferentias æquales rectæ lineæ subtendunt.

Vide figur. Prop. præcedentis. Sint æquales circuli ABC DEF: & in ipsis æquales assumantur circumferentiæ BGC EHF, & BC EF jungantur. Dico rectam lineam BC rectæ EF æqualem esse. Suman-

a 1. hujus. tur enim centra [a] circulorum K, L, & jungantur BK KC EL LF. Quoniam igitur circumferentia BGC est æqualis circumferentiæ EHF, erit & angulus BKC angulo

b 27. hujus. ELF æqualis [b]. & quoniam circuli ABC DEF sunt æquales,

c Def. 1. hujus. & quæ ex centris æquales erunt [c]. duæ igitur BK KC sunt æquales duabus EL LF; & æquales angulos continent. quare

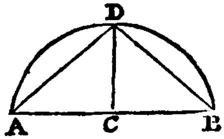
d 4. primi. basis BC basi EF est [d] æqualis. In æqualibus igitur circulis æquales circumferentias æquales rectæ lineæ subtendunt. Quod oportebat demonstrare.

PROP.

PROP. XXX. PROBL.

Datam circumferentiam bifariam secare.

Sit data circumferentia ADB. oportet ADB circumferentiam bifariam secare. Jungatur AB, & in C bifariam [a] secetur: à puncto autem C ipsi AB ad rectos angulos ducatur CD. & jungantur AD DB. quoniam igitur AC est æqualis CB, communis autem CD, duæ AC CD duabus BC CD æquales sunt: & angulus ACD æqualis angulo BCD, rectus enim uterque est: ergo basis AD basi BD est [b] æqualis. æquales autem rectæ lineæ [c] cricumferentias æquales auferunt, quare circumferentia AD circumferentiæ BD æqualis erit. Data igitur circumferentia bifariam secta est. Quod facere oportebat.

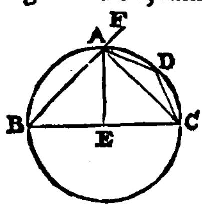


[a] 10.primi.
[b] 4. primi.
[c] 28. hujus.

PROP. XXXI. THEOR.

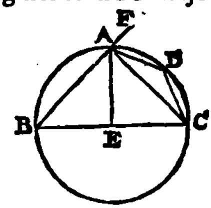
In circulo angulus, qui in semicirculo, rectus est, qui vero in majori segmento, minor est recto, & qui in minori, major recto; & insuper majoris quidem segmenti angulus recto major est, minoris vero segmenti angulus recto minor.

Sit circulus ABCD cujus diameter BC, centrum autem E; & jungantur BA AC AD DC. Dico angulum quidem qui est in semicirculo BAC rectum esse, qui vero in segmento ABC majore semicirculo, videlicet angulum ABC, minorem esse recto, & qui est in segmento ADC minore semicirculo, hoc est angulum ADC, recto majorem. Jungatur AE, & BA ad F producatur. Itaque quoniam BE est æqualis EA, erit & angulus EAB, angulo EBA æqualis [a]. rursus quoniam AE est æqualis EC, & angulus ACE angulo CAE æqualis [a] erit. totus igitur angulus BAC est æqualis duobus ABC ACB angulis, est autem, & angulus FAC extra triangulum ABC, duobus ABC ACB æqualis [b]. angulus igitur BAC est æqualis angulo FAC; ac propterea uterque ipsorum rectus [c]. quare in semicirculo BAC angulus CAB rectus est.



[a] 5. primi.
[b] 32.primi
[c] Def. 10. primi.

eſt. & quoniam trianguli ABC duo anguli ABC BAC duobus rectis ſunt [d] minores, rectus autem BAC, erit ABC angulus recto minor, atque eſt in ſegmento ABC majore ſemicirculo. quod cum in circulo quadrilaterum ſit ABCD, quadrilaterorum vero qui in circulis deſcribuntur, anguli oppoſiti duobus rectis ſunt [e] æquales: erunt ABC ADC anguli æquales duobus rectis, & angulus ABC minor eſt recto, reliquus igitur ADC recto major erit, atque eſt in ſegmento ADC minore ſemicirculo. Dico præterea majoris ſegmenti angulum qui continetur ABC circumferentia, & recta linea AC recto majorem eſſe; angulum vero minoris ſegmenti, contentum circumferentia ADC, & recta linea AC recto minorem. quod quidem perſpicue apparet. Quoniam angulus qui rectis lineis BA AC continetur rectus eſt, erit & contentus ABC circumferentia, & recta linea AC recto major. rurſus quoniam angulus contentus rectis lineis CA AF rectus eſt, erit qui continetur recta linea CA, & ADC circumferentia, minor recto. In circulo igitur angulus qui in ſemicirculo, rectus eſt, qui vero in majore ſegmento, minor eſt recto, & qui in minori, major recto: & inſuper majoris quidem ſegmenti angulus recto major eſt, minoris vero recto minor. Quod demonſtrare oportebat.



d 17. primi.

e 22. hujus.

Cor. Ex hoc manifeſtum eſt, ſi trianguli unus angulus ſit æqualis duobus, eum rectum eſſe; propterea quòd & qui deinceps eſt, iiſdem eſt æqualis. quando autem anguli deinceps ſunt æquales, neceſſario recti ſunt [f].

f Def. 10. primi.

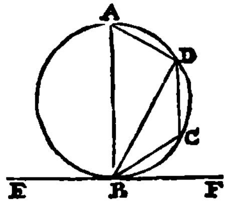
PROP. XXXII. THEOR.

Si circulum contingat quædam recta linea, à contactu autem in circulum ducatur recta linea ipſum ſecans; anguli quos ad contingentem facit, æquales erunt iis qui in alternis circuli ſegmentis conſiſtunt.

Circulum enim ABCD contingat quædam recta linea EF in B, & à puncto B ad circulum ABCD ducatur recta linea BD ipſum utcunque ſecans. Dico angulos quos BD cum EF contingente facit, æquales eſſe iis qui in alternis circuli ſegmentis conſiſtunt. hoc eſt angulum FBD eſſe æqualem angulo qui conſtituitur in DAB ſegmento, videlicet ipſi

DAB;

DAB; angulum vero DBE æqualem angulo DCB qui in ſegmento BCD conſtituitur. Ducatur enim à puncto B ipſi EF ad rectos [a] angulos BA: & in circumferentia BD ſumatur quodvis punctum C; junganturque AD DC CB. Quoniam igitur circulum ABCD contingit quædam recta linea EF in puncto B, & à contactu B ad rectos angulos contingenti ducta eſt BA; erit in ipſa BA centrum [b] ABCD circuli; quare BA ejuſdem circuli [c] diameter eſt, & angulus ADB in ſemicirculo eſt [d] rectus. reliqui igitur anguli BAD ABD uni recto [e] æquales ſunt. ſed & ABF [f] eſt rectus. ergo angulus ABF æqualis eſt angulis BAD ABD. communis auferatur ABD. reliquus igitur DBF ei, qui in alterno circuli ſegmento conſiſtit, videlicet angulo BAD, eſt æqualis. & quoniam in circulo quadrilaterum eſt ABCD, & anguli ejus oppoſiti æquales [g] ſunt duobus rectis; erunt DBF DBE anguli angulis BAD BCD æquales. quorum BAD oſtenſus eſt æqualis ipſi DBF; ergo reliquus DBE ei, qui in alterno circuli ſegmento DCB conſtituitur, videlicet ipſi DCB, æqualis erit. Si igitur circulum contingat quædam recta linea, à contactu vero in circulum ducatur recta linea ipſum ſecans; anguli quos facit ad contingentem, æquales erunt iis qui in alternis circuli ſegmentis conſiſtunt. Quod oportebat demonſtrare.

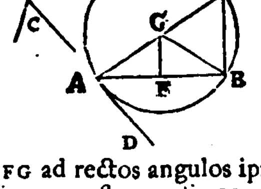


[a] 11.primi.
[b] 19. hujus.
[c] Def. 17. primi.
[d] 31. hujus.
[e] 32.primi.
[f] ex conſtr.
[g] 22. hujus.

PROP. XXXIII. PROBL.

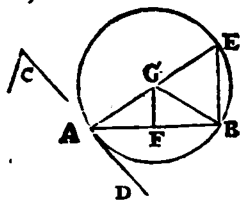
Super data recta linea deſcribere ſegmentum circuli, quod ſuſcipiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.

Sit data recta linea AB, datus autem angulus rectilineus, qui ad C. Itaque oportet ſuper data recta linea AB deſcribere ſegmentum circuli, quod ſuſcipiat angulum æqualem angulo qui eſt ad C. Ad rectam lineam AB, & ad punctum in ea datum A, conſtituatur angulus BAD angulo qui eſt ad C æqualis [a]. & à puncto A ipſi AD ad rectos angulos [b] ducatur AE; ſecetur autem AB bifariam [c] in F, atque à puncto F ducatur FG ad rectos angulos ipſi AB; & GB jungatur. Quoniam igitur AF eſt æqualis FB, communis



[a] 23.primi.
[b] 11.primi.
[c] 10.primi.

munis autem FG, duæ AF FG duabus BF FG æquales sunt: & angulus AFG æqualis angulo BFG. ergo basis AG basi
d 4. hujus. GB est d æqualis. itaque centro G, intervallo autem AG circulus descriptus transibit etiam per B. describatur, & sit ABE, jungaturque EB. Quoniam igitur ab extremitate diametri AB, & à puncto A, ipsi AE ad rectos angulos ducta est AD; ipsa AD circulum

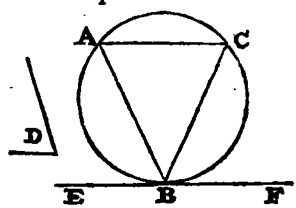


e Cor. 16. hujus. e continget. & quoniam circulum ABE contingit quædam recta linea AD, & à contactu qui est ad A, in circulum ABE ducta est recta
f 32. hujus. linea AB: erit angulus DAB æqualis f angulo qui in alterno circuli segmento constituitur, videlicet ipsi AEB. sed angulus DAB, angulo ad C est æqualis. ergo & angulus ad C angulo AEB æqualis erit. Super data igitur recta linea AB, segmentum circuli descriptum est AEB suscipiens angulum AEB, dato angulo qui est ad C, æqualem. Quod facere oportebat.

PROP. XXXIV. PROBL.

A dato circulo segmentum abscindere quod suscipiat angulum dato rectilineo æqualem.

Sit datus circulus ABC, datus autem angulus rectilineus qui ad D. Oportet à circulo ABC segmentum abscindere,
a 17. hujus. quod suscipiat angulum angulo ad D æqualem. Ducatur a recta linea EF circulum ABC in puncto B contingens: & ad rectam lineam BF, & ad punctum in ea B, constituatur angulus FBC angulo qui est
b 23. primi. ad D æqualis b. Quoniam igitur circulum ABC contingit quædam recta linea EF in B



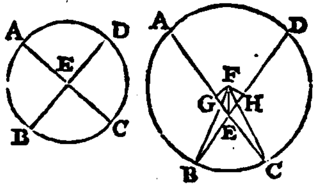
puncto, & à contactu B ducta est BC, erit angulus FBC æ-
c 32. hujus. qualis c ei qui in alterno circuli segmento constituitur. sed FBC angulus angulo qui ad D est æqualis. ergo & angulus in segmento BAC angulo ad D æqualis erit. A dato igitur circulo ABC, abscissum est segmentum quoddam BAC, suscipiens angulum dato angulo rectilineo qui est ad D, æqualem. Quod facere oportebat.

PROP.

PROP. XXXV. THEOR.

Si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secent, rectangulum sub segmentis unius contentum, æquale est ei, quod sub alterius segmentis continetur, rectangulo.

In circulo enim ABCD, duæ rectæ lineæ AC BD sese mutuo in puncto E secent. Dico rectangulum contentum sub AE EC æquale esse ei quod sub DE EB continetur. Si AC BD per centrum transeant, ita ut E sit centrum ABCD circuli; manifestum est æqualibus existentibus AE EC DE EB, & rectangulum contentum sub AE EC æquale esse ei quod sub DE EB continetur. Si AC DB non transeant per centrum, sumatur centrum circuli ABCD quod sit F: & ab F ad rectas lineas AC DB perpendiculares ducantur FG FH: junganturque FB FC FE. Quoniam igitur recta quædam linea GF per centrum ducta rectam lineam quandam AC non ductam per centrum ad rectos angulos secat, & bifariam ipsam secabit [a]. quare AG ipsi GC est æqualis. & quoniam recta linea AC secta est in partes æquales in puncto G, & in partes inæquales in E, erit rectangulum sub AE EC contentum, una cum ipsius EG quadrato [b], æquale quadrato ex GC. commune addatur ex GF quadratum. ergo rectangulum sub AE EC, una cum iis quæ ex EG GF quadratis, æquale est quadratis ex CG GF. sed quadratis quæ ex EG GF æquale [c] est quadratum ex FE: quadratis vero ex CG GF æquale est [c] quod ex FC fit quadratum. rectangulum igitur sub AE EC, una cum quadrato ex FE, æquale est quadrato ex FC. est autem CF æqualis FB. ergo rectangulum sub AE EC, unà cum quadrato ex EF, æquale est ei quod ex FB fit quadrato. eadem ratione & rectangulum sub DE EB unà cum quadrato ex FE, æquale est quadrato ex FB. ostensum autem est & rectangulum sub AE EC, unà cum quadrato ex FE, æquale ei quod fit ex FB quadrato. ergo rectangulum sub AE EC, unà cum quadrato ex FE, æquale est rectangulo sub DE EB, unà cum quadrato ex FE. commune auferatur FE quadratum. reliquum igitur rectangulum sub AE EC, reliquo sub DE EB rectangulo æquale erit. Quare si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secent, rectangulum sub segmentis unius contentum æquale est ei quod sub alterius segmentis continetur. Quod demonstrare oportebat.



a 3. hujus.

b 5. secundi.

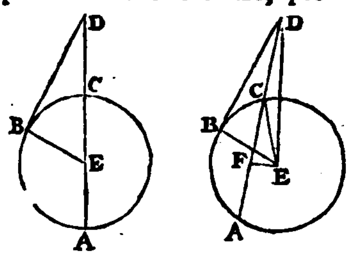
c 47. primi.

PROP.

PROP. XXXVI. THEOR.

Si extra circulum aliquod punctum sumatur, & ab eo in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secat, altera vero contingat; rectangulum quod sub tota secante, & exterius assumpta inter punctum & curvam circumferentiam continetur, æquale erit ei, quod à contingente fit, quadrato.

Extra circulum enim ABC sumatur aliquod punctum D, & ab eo ad dictum circulum cadant duæ rectæ lineæ DCA DB: & DCA quidem circulum ABC secet; DB vero contingat. Dico rectangulum sub AD DC, quadrato, quod fit ex DB, æquale esse. Vel igitur DCA per centrum transit, vel non transit. Primum transeat per centrum circuli ABC, quod sit E, & EB jungatur. erit

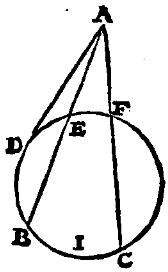


a 18. hujus angulus EBD rectus [a]. itaque quoniam recta linea AC bifariam secta est in E, & ipsi adjicitur CD, rectangulum sub AD DC, una cum quadrato ex EC, æ-
b 6. secundi. quale [b] erit ei quod fit ex ED quadrato. æqualis autem est CE ipsi EB, ergo rectangulum sub AD DC, unà cum quadrato quod ex EB, æquale est quadrato ex ED.
c 47. primi. sed quadratum ex ED est æquale quadratis [c] ipsarum EB BD, rectus enim angulus est EBD. rectangulum igitur sub AD DC, una cum quadrato ex EB, æquale est ipsarum EB, BD quadratis. commune auferatur quadratum quod ex EB; ergo reliquum sub AD DC rectangulum, quadrato quod fit à contingente DB æquale erit. Secundo DCA non transeat
d 1. hujus. per centrum ABC circuli: sumaturque [d] centrum E, & ad AC perpendicularis agatur EF, & jungantur EB EC ED, rectus igitur est EFD angulus. & quoniam recta linea quædam EF per centrum ducta, rectam lineam quandam AC non ductam per centrum ad rectos angulos secat, & bifa-
e 3. hujus. riam ipsam secabit [e]. quare AF ipsi FC est æqualis. rursus quoniam recta linea AC bifariam secta est in F, atque ipsi adjicitur CD, erit rectangulum sub AD DC, unà cum quadrato ex FC, æquale [b] quadrato quod ex FD. commune apponatur quod ex FE quadratum. rectangulum igitur sub

AD DC

AD DC unà cum quadratis ex FC FE est æquale quadratis ex DF FE. sed quadratis quidem ex DE FE æquale est [c] ex DE quadratum; etenim rectus est angulus EFD: quadratis vero ex CF FE æquale est [c] quadratum ex CE. [c] 47. primi. ergo rectangulum sub AD DC, una cum quadrato quod ex CE, est æquale quadrato ex ED; æqualis autem est CE ipsi EB; rectangulum igitur sub AD DC, una cum quadrato ex EB, æquale est ex ED quadrato. sed quadrato ex ED æqualia sunt quadrata [c] ex EB BD, siquidem rectus est angulus EBD. ergo rectangulum sub AD DC, una cum quadrato ex EB æquale est eis quæ ex EB BD fiunt quadratis. commune auferatur quadratum ex EB. reliquum igitur sub AD DC rectangulum quadrato quod fit ex DB æquale erit. Si igitur extra circulum aliquod punctum sumatur, &c. Quod oportebat demonstrare.

Cor. Hinc si à puncto quovis extra circulum assumpto, plures lineæ rectæ AB AC circulum secantes ducantur; rectangula comprehensa sub totis lineis AB AC, & partibus externis AE AF, inter se sunt æqualia. Nam si ducatur tangens AD, erit rectangulum sub BA AE æquale quadrato ex AD; & rectangulum sub CA AF eidem quadrato ex AD erit æquale. unde rectangula hæc æqualia erunt.



PROP. XXXVII. THEOR.

Si extra circulum sumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera vero incidat: sit autem, quod sub tota secante, & exterius assumpta inter punctum, & curvam circumferentiam continetur rectangulum, æquale ei quod ab incidente fit quadrato; incidens linea circulum continget.

Extra circulum enim ABC sumatur aliquod punctum D, atque ab ipso in circulum cadant duæ rectæ lineæ DCA, DB; DCA quidem circulum secet, DB vero incidat; sitque rectangulum sub AD DC æquale quadrato quod fit ex DB. Dico ipsam DB circulum ABC contingere. Ducatur enim

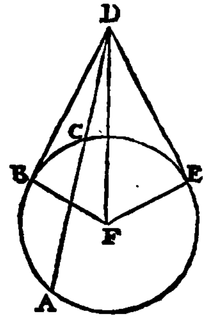
a 17. hujus. recta linea DE a contingens circulum ABC, & sumatur circuli ABC centrum, quod sit F, junganturque FE FB FD. ergo an-

b 18. hujus. gulus FED rectus est b. & quoniam DE circulum ABC contingit, secat autem DCA; rectangulum sub AD DC æquale

c ex antecedente. erit c quadrato ex DE. sed rectangulum sub AD DC ponitur æquale quadrato ex DB. quadratum igitur quod ex DE quadrato ex DB æquale erit. ac propterea linea DE erit ipsi DB æqualis. est autem & FE æqualis FB. duæ igitur DE EF duabus DB BF æquales

d 8. primi. sunt; & basis communis FD; angulus igitur DEF est d æqualis angulo DBF; rectus autem est DEF, ergo & DBF est rectus, atque est FB producta diameter. quæ vero ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, circulum con-

e Cor. 16. hujus. tingit e. ergo DB circulum ABC contingat necesse est. similiter demonstrabitur & si centrum sit in ipsa AC. Si igitur extra circulum sumatur aliquod punctum, &c. Quod demonstrare oportebat.



EUCLIDIS

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER QUARTUS.

DEFINITIONES.

I.

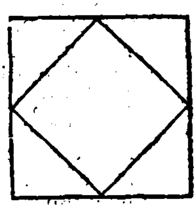


FIGURA rectilinea in figura rectilinea describi dicitur, quando unusquisque figuræ descriptæ angulus, unumquodque latus ejus in qua describitur, contingit.*

II.

Figura similiter circa figuram describi dicitur, quando unumquodque latus descriptæ, unumquemque angulum ejus circa quam describitur, contingit.*

III.

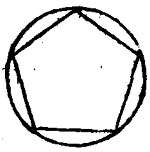


Figura rectilinea in circulo describi dicitur, quando unusquisque descriptæ figuræ angulus circuli circumferentiam contingit.*

IV.

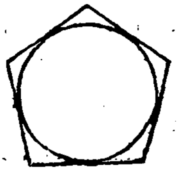


Figura rectilinea circa circulum describi dicitur, quando unumquodque latus descriptæ, circuli circumferentiam contingit.

V.

Circulus ſimiliter in figura rectilinea deſcribi dicitur, quando circuli circumferentia unumquodque latus ejus in qua deſcribitur, contingit.

VI.

Circulus circa figuram rectilineam deſcribi dicitur, quando circuli circumferentia unumquemque angulum ejus circa quam deſcribitur, contingit.

VII.

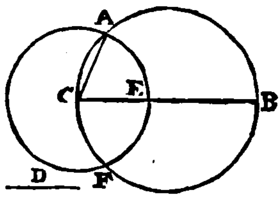
Recta linea in circulo aptari dicitur, quando ejus extrema in circuli circumferentia fuerint.

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

In dato circulo, data recta linea quæ diametro ejus major non ſit, æqualem rectam lineam aptare.

Sit datus circulus ABC, data autem recta linea non major circuli diametro D. Oportet in circulo ABC rectæ lineæ D æqualem rectam lineam aptare. Ducatur circuli ABC diameter BC. Siquidem igitur BC ſit æqualis ipſi D, factum jam erit quod proponebatur. etenim in circulo ABC aptata eſt BC rectæ lineæ D æqualis. ſin minus, major eſt BC quam D, ponaturque

a 3. primi. a ipſi D æqualis CE: & centro quidem C intervallo autem CE circulus deſcribatur AEF: & CA jungatur. itaque quoniam punctum C centrum eſt AEF circuli; erit CA ipſi CE æqualis. ſed D eſt æqualis CE. ergo & D ipſi AC æqualis erit. In dato igitur circulo ABC datæ rectæ lineæ D, non majori circuli diametro, æqualis aptata eſt AC. Quod facere oportebat.



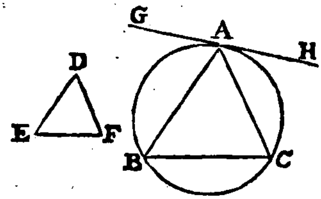
PROP. II. PROBL.

In circulo dato, dato triangulo æquiangulum triangulum deſcribere.

Sit datus circulus ABC, datum autem triangulum DEF. Oportet in ABC circulo deſcribere triangulum triangulo DEF

a 17. tertii. æquiangulum. Ducatur recta linea GAH contingens a circulum

lum ABC in puncto A: & ad rectam lineam AH, & ad punctum in ea A, angulo DEF æqualis [b] angulus constituatur HAC. rursus ad rectam lineam AG, & ad punctum in ipsa A, angulo DFE æqualis [b] constituatur angulus GAB; & BC jungatur. Quoniam igitur circulum ABC contingit quædam recta HAG; à contactu autem in circulum ducta est AC: erit HAC angulus æqualis [c] ei qui in alterno circuli segmento consistit, videlicet ipsi ABC. sed HAC angulus æqualis est angulo DEF, ergo & angulus ABC angulo DEF est æqualis. eadem ratione & angulus ACB est æqualis angulo DFE. reliquus igitur BAC angulus reliquo EDF æqualis [d] erit. ergo triangulum ABC triangulo DEF est æquiangulum, & descriptum est in circulo ABC. In dato igitur circulo dato triangulo æquiangulum triangulum descriptum est. Quod facere oportebat.



b 23. primi.

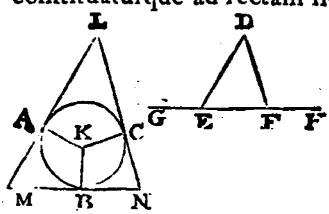
c 32. tertii.

d 2. Cor. 32. primi.

PROP. III. PROBL.

Circa datum circulum triangulo dato æquiangulum triangulum describere.

Sit datus circulus ABC, datum autem triangulum DEF. Oportet circa circulum ABC describere triangulum triangulo DEF æquiangulum. Protrahatur ex utraque parte EF ad puncta H, G, & sumatur circuli ABC centrum K: & recta linea KB utcunque ducatur: constituaturque ad rectam lineam KB, & ad punctum in ea K, angulo quidem DEG æqualis [a] angulus BKA, angulo autem DFH æqualis [a] angulus BKC, & per A, B, C, puncta ducantur rectæ lineæ LAM MBN MCL circulum ABC contingentes [b].



a 23. primi.

b 17. tertii.

Quoniam igitur circulum ABC contingunt LM MN NL in punctis A, B, C, à centro autem K ad A B C puncta ducuntur KA KB KC; erunt anguli ad puncta A B C recti [c]. & quoniam quadrilateri AMBK anguli quatuor quatuor rectis æquales sunt; etenim in duo triangula dividitur, quorum anguli KAM KBM sunt recti; erunt reliqui AKB AMB duobus rectis æquales. sunt autem & DEG DEF æquales duobus rectis. anguli igitur AKB AMB angulis DEG DEF

c 18. tertii.

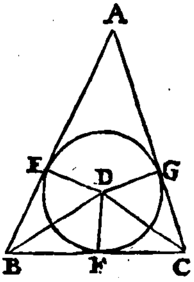
 æquales

æquales sunt, quorum AKB ipsi DEG est æqualis. ergo reliquus AMB reliquo DEF æqualis erit. similiter demonstrabitur angulus LNB ipsi DFE æqualis. ergo & reliquus
d 2. Cor. 32. primi. MLN est æqualis [d] reliquo EDF. æquiangulum igitur est LMN triangulum triangulo DEF; & descriptum est circa circulum ABC. Quare circa datum circulum triangulo dato æquiangulum triangulum descriptum est. Quod facere oportebat.

PROP. IV. PROBL.

In dato triangulo circulum describere.

Sit datum triangulum ABC; Oportet in triangulo ABC cir-
a 9. primi. culum describere. Secentur [a] anguli ABC BCA bifariam rectis lineis BD CD quæ conveniant inter se in D puncto: & à puncto D ad rectas lineas AB BC CA perpendiculares
b 12. primi. [b] ducantur DE DF DG. Quoniam angulus EBD est æqualis angulo FBD, est autem & rectus BED recto BFD æqualis: erunt duo triangula EBD DBF, duos angulos duobus angulis æquales habentia, & unum latus uni lateri æquale utrique commune BD, quod scilicet uni æqualium angulorum subtenditur. ergo & reliqua latera reliquis late-
c 26. primi. ribus æqualia [c] habebunt, atque erit DE æqualis DF. & eadem ratione DG æqualis DF. ergo & DE ipsi DG est æqualis. tres igitur rectæ lineæ DE DF DG inter se æquales sunt; quare centro D intervallo autem unius ipsarum DE DF DG circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta; & rectas lineas AB BC CA continget; propterea quòd recti sunt ad E F G anguli. si enim ipsas se-
d 16. tertii. cet, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur intra circulum cadet, quod est absurdum [d]. non igitur centro D, intervallo autem unius ipsarum DE DF DG circulus descriptus secabit rectas lineas AB BC CA, quare ipsas continget; atque erit circulus descriptus in triangulo ABC. In dato igitur triangulo ABC circulus EFG descriptus est. Quod facere oportebat.

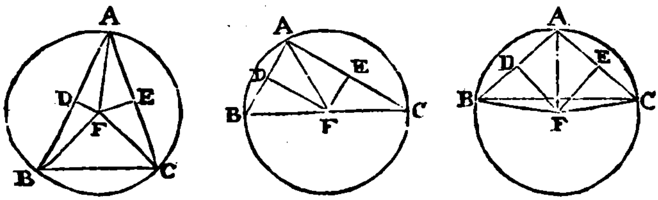


PROP.

PROP. V. PROBL.

Circa datum triangulum circulum describere.

Sit datum triangulum ABC. Oportet circa datum triangulum ABC circulum describere. Secentur AB AC bifariam [a] in D, E punctis: & à punctis D E ipsis AB AC ad rectos angulos [b] ducantur DF EF quæ quidem vel intra triangulum ABC conveniant, vel in recta linea BC, vel extra ipsam. Conveniant primo intra triangulum in puncto F: & [a] 10. primi. [b] 11. primi.



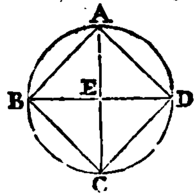
BF FC FA jungantur. Quoniam igitur AD est æqualis DB, communis autem & ad rectos angulos DF; erit basis AF basi FB æqualis [c]. similiter ostendetur & CF æqualis FA. [c] ergo & BF est æqualis FC. tres igitur FA FB FC inter se æquales sunt. quare centro F, intervallo autem unius ipsarum FA FB FC circulus descriptus etiam per reliqua puncta transibit: atque erit circulus descriptus circa triangulum ABC. & describatur ut ABC. Secundo DF EF conveniant in recta linea BC, in puncto F, ut in secunda figura, & AF jungatur. similiter demonstrabimus punctum F centrum esse circuli circa triangulum ABC descripti. Postremo DF EF conveniant extra triangulum ABC rursus in F puncto, ut in tertia figura: & jungantur AF FB FC. & quoniam rursus AD est æqualis DB, communis autem & ad rectos angulos DF, basis AF basi FB æqualis erit. similiter demonstrabimus & CF ipsi FA æqualem esse. quare & BF est æqualis FC. rursus igitur centro F, intervallo autem unius ipsarum FA FB FC circulus descriptus & per reliqua transibit puncta; atque erit circa triangulum ABC descriptus. Circa datum igitur triangulum circulus descriptus est. Quod facere oportebat. [c] 4. primi.

Cor. Si triangulum sit rectangulum centrum circuli cadet in latus angulo recto oppositum. si acutangulum cadet centrum intra triangulum. si obtusangulum cadet extra [a]. [a] 31. tertii.

PROP. VI. PROBL.

In dato circulo quadratum describere.

Sit datus circulus ABCD. Oportet in ABCD circulo quadratum describere. Ducantur circuli ABCD diametri ad rectos angulos inter se AC BD: & AB BC CD DA jungantur. Quoniam igitur BE est æqualis ED, etenim centrum est E, communis autem, & ad rectos angulos EA; erit basis BA æqualis [a] basi AD. & eadem ratione utraque ipsarum BC CD utriq; BA AD est æqualis; æquilaterum igitur est ABCD quadrilaterum. Dico & rectangulum esse. Quoniam enim recta linea BD diameter est ABCD circuli, erit BAD semicirculus. quare angulus BAD rectus [b] est. & eadem ratione unusquisque ipsorum ABC BCD CDA est rectus. rectangulum igitur est ABCD quadrilaterum. ostensum autem est, & æquilaterum esse. ergo quadratum necessario erit, & descriptum est in circulo ABCD. In dato igitur ABCD circulo quadratum ABCD descriptum est. Quod facere oportebat.

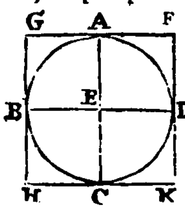


a 4. primi.
b 31. tertii.

PROP. VII. PROBL.

Circa datum circulum quadratum describere.

Sit datus circulus ABCD. Oportet circa ABCD circulum quadratum describere. Ducantur circuli ABCD duæ diametri AC BD ad rectos inter se angulos, & per puncta A, B, C, D ducantur circulum ABCD contingentes [a] FG GH HK KF. Quoniam igitur FG contingit circulum ABCD, à centro autem E ad contactum qui est ad A ducitur EA; erunt [b] anguli ad A recti. eadem ratione, & anguli ad puncta B, C, D recti sunt. & quoniam angulus AEB rectus est, est autem & rectus EBG; erit GH ipsi AC parallela [c]. eadem ratione, & AC parallela est FK. similiter demonstrabimus & utramque ipsarum GF HK ipsi BED parallelam esse. quare & GF est parallela HK. [d] parallelogramma igitur sunt GK GC AK FB BK, ac propterea GF quidem est [e] æqualis HK, GH vero ipsi FK. & quoniam AC æqualis est BD; sed AC quidem utrique ipsa-



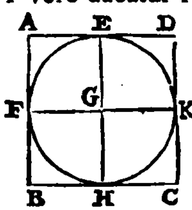
a 17. tertii.
b 18. tertii.
c 28. primi.
d 30. primi.
e 34. primi.

ipsarum GH FK est[d] æqualis; BD vero æqualis utrique GF HK, & utraque GH FK utrique GF HK æqualis erit. æquilaterum igitur est FGHK quadrilaterum. Dico & rectangulum esse. Quoniam enim parallelogrammum est GBEA, atque est rectus AEB angulus, & ipse AGB rectus erit[e]. Similiter demonstrabimus angulos etiam ad puncta H K F rectos esse. rectangulum igitur est quadrilaterum FGHK. demonstratum autem est & æquilaterum. ergo quadratum sit necesse est, & descriptum est circa circulum ABCD. Circa datum igitur circulum quadratum descriptum est. Quod facere oportebat.

PROP. VIII. PROBL.

In dato quadrato circulum describere.

Sit datum quadratum ABCD. Oportet in quadrato ABCD circulum describere. Secetur utraque ipsarum AB AD bifariam[a] in punctis F, E. & per E quidem alterutri ipsarum AB CD parallela[b] ducatur EH: per F vero ducatur FK parallela[b] alterutri AD BC. parallelogrammum igitur est unumquodque ipsorum AK KB AH HD AG GC BG GD: & latera ipsorum quæ ex opposito, sunt æqualia[c]. Et quoniam DA est æqualis AB; & ipsius quidem AD dimidium est AE; ipsius vero AB dimidium AF; erit AE ipsi AF æqualis. quare & opposita latera æqualia sunt. ergo FG est æqualis GE. similiter demonstrabimus, & utramque ipsarum GH GK utrique FG GE æqualem esse. quatuor igitur GE GF GH GK inter se sunt æquales. itaque centro quidem G, intervallo autem unius ipsarum GE GF GH GK circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta, & rectas lineas AB BC CD DA continget; propterea quod anguli ad E, F, H, K, recti sunt: si enim circulus secabit rectas lineas AB BC CD DA, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur intra circulum cadet; quod[d] est absurdum. non igitur centro quidem G intervallo autem unius ipsarum GE GF GH GK circulus descriptus rectas lineas AB BC CD DA secabit. quare ipsas necessario continget; atque erit descriptus in quadrato ABCD. In dato igitur quadrato circulus descriptus est. Quod facere oportebat.



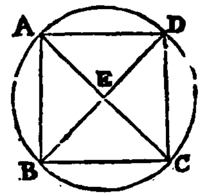
a 10. primi.
b 31. primi.
c 34. primi.
d 16. tertii.

PROP.

PROP. IX. PROBL.

Circa datum quadratum circulum describere.

Sit datum quadratum ABCD. Oportet circa ABCD quadratum circulum describere. Jungantur AC BD, quæ se invicem in puncto E secent. Et quoniam DA est æqualis AB, communis autem AC; duæ DA AC duabus BA AC æquales sunt; & basis DC æqualis basi BC; erit angulus



a 8. primi. DAC angulo BAC æqualis [a]. angulus igitur DAB bifariam sectus est recta linea AC. similiter demonstrabimus unumquemque angulorum ABC BCD CDA rectis lineis AC DB bifariam sectum esse. quoniam igitur angulus DAB angulo ABC est æqualis, atque est anguli quidem DAB dimidium angulus EAB, anguli vero ABC dimidium EBA; & EAB angulus angulo EBA æqualis erit. quare & latus EA

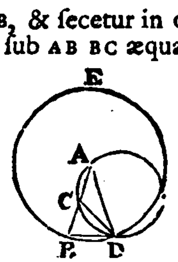
b 6. primi. lateri EB est [b] æquale. similiter demonstrabimus & utramque rectarum linearum EC ED utrique EA EB æqualem esse. ergo quatuor rectæ lineæ EA EB EC ED inter se sunt æquales. centro igitur E, intervallo autem unius ipsarum EA EB EC ED circulus descriptus etiam per reliqua puncta transibit; atque erit descriptus circa ABCD quadratum. describatur ut ABCD. Circa datum igitur quadratum circulus descriptus est. Quod facere oportebat.

PROP. X. PROBL.

Isosceles triangulum constituere, habens utrumque angulorum qui sunt ad basim, duplum reliqui.

Exponatur recta quædam linea AB, & secetur in C puncto,

a 11. secundi. ita ut rectangulum contentum sub AB BC æquale [a] sit ei, quod ex CA describitur, quadrato: & centro quidem A, intervallo autem AB circulus describatur BDE; apteturque in BDE circulo recta linea



b 1. hujus. BD æqualis [b] ipsi AC quæ non est major diametro circuli BDE: & junctis DA DC, circa ADC triangulum

c 5. hujus. [c] circulus ACD describatur. itaque quoniam rectangulum AB BC æquale est quadrato quod fit ex

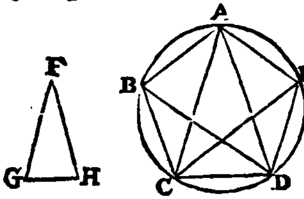
AC;

AC; æqualis autem eſt AC ipſi BD; erit ſub AB BC rectangulum quadrato ex BD æquale. & quoniam extra circulum ACD ſumptum eſt aliquod punctum B, & à puncto B in circulum ACD cadunt duæ rectæ lineæ BCA BD, quarum altera quidem ſecat, altera vero incidit; atque eſt rectangulum ſub AB BC æquale quadrato ex BD: recta linea BD circulum ACD *d* continget. quoniam igitur BD con- *d* 37. tertii.
tingit, & à contacta ad D ducta eſt DC; erit BDC angulus æqualis *e* ei qui in alterno circuli ſegmento conſti- *e* 32. tertii.
tuitur, videlicet angulo DAC. quod cum angulus BDC æqualis ſit ipſi DAC, communis apponatur CDA; totus igitur BDA eſt æqualis duobus angulis CDA DAC. ſed ipſis CDA DAC exterior angulus BCD eſt *f* æqualis. ergo & BDA æ- *f* 32. primi.
qualis eſt ipſi BCD. ſed BDA angulus eſt *g* æqualis angulo *g* 5. primi.
CBD, quoniam & latus AD lateri AB eſt æquale. ergo & DBA ipſi BCD æqualis erit. tres igitur anguli BDA DBA BCD inter ſe æquales ſunt. & quoniam angulus DBC æqualis eſt angulo BCD, & latus BD lateri DC eſt *h* æquale. ſed BD *h* 6. primi.
ponitur æqualis ipſi CA. ergo & CA eſt æqualis CD. quare & angulus CDA æqualis eſt angulo DAC. anguli igitur CDA DAC ſimul ſumpti ipſius anguli DAC duplices ſunt. eſt autem & BCD angulus angulis CDA DAC æqualis; ergo & BCD duplex eſt ipſius DAC. ſed BCD eſt æqualis alterutri ipſorum BDA DBA. quare & uterque BDA DBA ipſius DAB eſt duplex. Iſoſceles igitur triangulum conſtitutum eſt ADB habens utrumque eorum angulorum qui ſunt ad baſim, duplum reliqui. Quod facere oportebat.

PROP. XI. PROBL.

In dato circulo pentagonum æquilaterum & æquiangulum deſcribere.

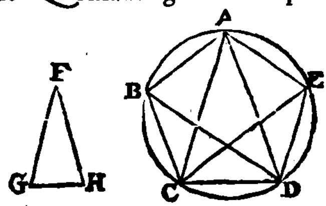
Sit datus circulus ABCDE. Oportet in ABCDE circulo pentagonum æquilaterum & æquiangulum deſcribere. Exponatur triangulum iſoſceles FGH habens utrumque eorum qui ſunt ad baſim GH angulorum, duplum *a* anguli qui eſt ad F: & deſcribatur in circulo ABCDE triangulo FGH æquiangulum *b* triangulum ACD, ita ut angulo



a 10 hujus.
b 2. hujus.

quidem qui eſt ad F æqualis ſit angulus CAD; utrique vero ipſorum qui ad G H, ſit æqualis uterque ACD CDA. & uterque

uterque igitur ACD CDA anguli CAD est duplus. secetur
c 9. primi. uterque ipsorum ACD CDA bifariam c rectis lineis CE DB: & AB BC DE EA jungantur. Quoniam igitur uterque ipsorum ACD CDA duplus est ipsius CAD, & secti sunt bifariam rectis lineis CE DB, quinque anguli DAC ACE ECD CDB BDA inter se sunt æquales. æquales autem anguli in æqualibus circumfe-
d 26. tertii. rentiis insistunt d. quinque



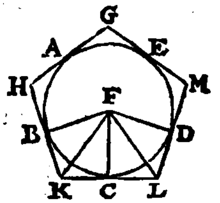
igitur circumferentiæ AB BC CD DE EA æquales sunt in-
e 29. tertii. ter se. sed æquales circumferentias e æquales rectæ lineæ subtendunt. ergo & quinque rectæ lineæ AB BC CD DE EA inter se æquales sunt. æquilaterum igitur est ABCDE pentagonum. Dico & æquiangulum esse. Quoniam enim circumferentia AB æqualis est circumferentiæ DE, communis apponatur BCD. tota igitur ABCD circumferentia toti circumferentiæ EDCB est æqualis, & in circumferentia quidem ABCD insistit angulus AED, in circumferentia vero EDCB insistit BAE. ergo & BAE angulus est æqualis an-
f 27. tertii. gulo AED f. eadem ratione & unusquisque angulorum ABC BCD CDE unicuique ipsorum BAE AED est æqualis. æquiangulum igitur est ABCDE pentagonum: ostensum autem est & æquilaterum esse. Quare in dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum descriptum est. Quod facere oportebat.

PROP. XII. PROBL.

Circa datum circulum pentagonum æquilaterum & æquiangulum describere.

Sit datus circulus ABCDE. Oportet circa circulum ABCDE pentagonum æquilaterum & æquiangulum describere. In-
a per 11. hujus. telligantur pentagoni in circulo descripti a angulorum puncta esse ABCDE, ita ut circumferentiæ AB BC CD DE EA sint
b 17. tertii. æquales; & per puncta A,B,C,D,E, ducantur b circulum contingentes GH HK KL LM MG, & sumpto circuli ABCDE centro F, jungantur FB FK FC FL FD. Quoniam igitur recta linea KL contingit circulum ABCDE in puncto C, & à centro F ad contactum qui est ad C ducta est FC, erit
c 18. tertii. FC ad ipsam KL perpendicularis c. rectus igitur est uterque angulorum qui sunt ad C. eadem ratione & anguli qui ad puncta B D recti sunt. & quoniam rectus angulus est FCK, quadra-

quadratum quod fit ex FK æquale [d] est quadratis ex FC CK. & ob eandem causam quadratis ex FB BK æquale est ex FK quadratum. [d 47. primi.] quadrata igitur ex FC CK quadratis ex FB BK æqualia sunt, quorum quod ex FC ei quod ex FB est æquale. ergo reliquum quod ex CK reliquo quod ex BK æquale erit: æqualis igitur est BK



ipsi CK. & quoniam FB est æqualis FC, communis autem FK, duæ BF FK duabus CF FK æquales sunt; & basis BK est æqualis basi KC; erit angulus [e] itaque BFK angulo [e] KFC æqualis, angulus vero BKF angulo FKC. duplus igitur est angulus BFC anguli KFC, & angulus BKC duplus ipsius FKC. eadem ratione, & angulus CFD anguli CFL est duplus: angulus vero CLD duplus anguli CLF. & quoniam circumferentia BC circumferentiæ CD est æqualis, & angulus BFC angulo CFD æqualis [f] erit. atque est angulus quidem BFC anguli KFC duplus: angulus vero DFC duplus ipsius LFC. æqualis igitur est angulus KFC angulo CFL. itaque duo triangula sunt FKC FLC, duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & unum latus uni lateri æquale quod ipsis commune est FC: ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt [g], & reliquum angulum reliquo angulo æqualem. recta igitur linea KC est æqualis rectæ CL, & angulus FKC angulo FLC. & quoniam KC est æqualis CL, erit KL ipsius KC dupla. eadem ratione, & HK ipsius BK dupla ostendetur. rursus quoniam BK ostensa est æqualis ipsi KC, atque est KL quidem dupla KC, HK vero ipsius BK dupla: erit HK ipsi KL æqualis. similiter & unaquæque ipsarum GH GM ML ostendetur æqualis utrique HK KL. æquilaterum igitur est GHKLM pentagonum. Dico etiam æquiangulum esse. Quoniam enim angulus FKC est æqualis angulo FLC; & ostensus est angulus HKL duplus ipsius FKC; ipsius vero FLC duplus KLM: erit & HKL angulus angulo KLM æqualis. simili ratione ostendetur & unusquisque ipsorum KHG HGM GML utrique HKL KLM æqualis. quinque igitur anguli GHK HKL KLM LMG MGH inter se æquales sunt. Ergo æquiangulum est GHKLM pentagonum. ostensum autem est etiam æquilaterum esse: & descriptum est circa ABCDE circulum. Quod facere oportebat.

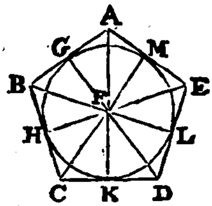
[e 8. primi.]
[f 27. tertii.]
[g 26. primi.]

PROP.

PROP. XIII. PROBL.

In dato pentagono, quod æquilaterum & æquiangulum sit, circulum describere.

Sit datum pentagonum æquilaterum & æquiangulum ABCDE. Oportet in ABCDE pentagono circulum descri-
a 9. primi. bere. Secetur uterque angulornm BCD CDE bifariam a rectis lineis CF DF; & à puncto F in quo conveniunt inter se CF DF ducantur rectæ lineæ FB FA FE. Quoniam igitur BC est æqualis CD, communis autem CF, duæ BC CF, duabus DC CF æquales sunt, & angulus BCF est æqualis angulo DCF. basis igi-
b 4. primi. tur BF basi FD est b æqualis, & BFC triangulum æquale triangulo DCF, & reliqui anguli reliquis angulis æquales,



quibus æqualia latera subtenduntur; angulus igitur CBF angulo CDF æqualis erit. & quoniam angulus CDE anguli CDF est duplus, & angulus quidem CDE angulo ABC æqualis, angulus vero CDF angulo CBF æqualis; erit & CBA angulus duplus anguli CBF; ac propterea angulus ABF angulo CBF æqualis. angulus igitur ABC bifariam sectus est recta linea BF. similiter demonstrabitur unumquemque angulorum BAE AED rectis lineis AF FE bifariam sectum esse. à puncto F ad rectas lineas AB BC CD DE EA ducantur
c 12. primi. c perpendiculares FG FH FK FL FM. & quoniam angulus HCF est æqualis angulo KCF; est autem & rectus FHC recto FKC æqualis: erunt duo triangula FHC FKC, duos angulos duobus angulis æquales habentia, & unum latus uni lateri æquale, commune scilicet utrisque FC, quod uni æqualium angulorum subtenditur. ergo & reliqua latera
d 26. primi. reliquis lateribus æqualia d habebunt, atque erit perpendicularis FH perpendiculari FK æqualis. similiter ostendetur & unaquæque ipsarum FL FM FG æqualis utrique FH FK. quinque igitur rectæ lineæ FG FH FK FL FM inter se æquales sunt. quare centro F intervallo autem unius ipsarum FG FH FK FL FM, circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta, & rectas lineas AB BC CD DE EA continget; propterea quod anguli ad GHKLM recti sunt. si enim non continget, sed ipsas secet, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, intra circulum cadet,
e 16. tertii. quod absurdum e esse ostensum est. non igitur centro F, &

inter-

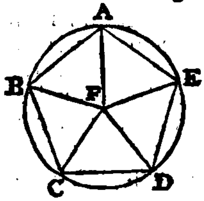
intervallo uno ipsorum punctorum GHKLM circulus descriptus rectas lineas AB BC CD DE EA secabit. quare ipsas contingat necesse est. describatur ut GHKLM. In dato igitur pentagono quod est æquilaterum, & æquiangulum circulus descriptus est. Quod facere oportebat.

Cor. Si duo anguli proximi figuræ æquilateræ & æquiangulæ bisecentur, & à puncto in quo coeunt lineæ angulum bisecantes, ducantur rectæ lineæ ad reliquos figuræ angulos, omnes anguli figuræ erunt bisecti.

PROP. XIV. PROBL.

Circa datum pentagonum quod æquilaterum & æquiangulum sit, circulum describere.

Sit datum pentagonum æquilaterum & æquiangulum ABCDE. Oportet circa pentagonum ABCDE circulum describere. Secetur uterque ipsorum BCD CDE angulorum bifariam [a] rectis lineis CF FD: & à puncto F in quo conveniunt rectæ lineæ, ad puncta B A E ducantur FB FA FE. & unusquisque angulorum CBA BAE AED rectis lineis BF FA FE bifariam [b] sectus erit. Et quoniam angulus BCD angulo CDE est æqualis; atque est anguli quidem BCD dimidium angulus FCD, anguli vero CDE dimidium CDF; erit & FCD angulus æqualis angulo FDC, quare & latus CF lateri FD est æquale [c]. similiter demonstrabitur & unaquæque ipsarum FB FA FE æqualis unicuique FC FD. quinque igitur rectæ lineæ FA FB FC FD FE inter se æquales sunt. ergo centro F, & intervallo unius ipsorum FA FB FC FD FE, circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta: atque erit descriptus circa pentagonum ABCDE quod æquilaterum est & æquiangulum. describatur, & sit ABCDE. Circa datum igitur pentagonum æquilaterum & æquiangulum circulus descriptus est. Quod facere oportebat.



[a] 9. primi.

[b] Cor. præcedente.

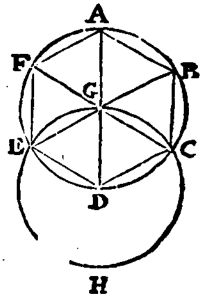
[c] 6. primi.

PROP. XV. PROBL.

In dato circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

Sit datus circulus ABCDEF. Oportet in circulo ABCDEF hexagonum æquilaterum & æquiangulum describere. Ducatur

catur circuli ABCDEF diameter AD, sumaturque centrum circuli G; & centro quidem D, intervallo autem DG circulus describatur EGCH, junctæ EG CG ad puncta B F producantur, & jungantur AB BC CD DE EF FA. Dico hexagonum ABCDEF æquilaterum & æquiangulum esse. Quoniam enim G punctum centrum est ABCDEF circuli, erit GE ipsi GD æqualis. rursus quoniam D centrum est circuli EGCH, erit DE æqualis DG: sed GE ipsi GD æqualis ostensa est. ergo GE ipsi ED est æqualis. æquilaterum igitur est EGD triangulum, ideoque tres ipsius anguli EGD GDE DEG inter se æquales a sunt; & sunt trianguli tres anguli æquales b duobus rectis. angulus igitur EGD duorum rectorum tertia pars est. similiter ostendetur & DGC duorum rectorum tertia pars. & quoniam recta linea CG super rectam EB insistens, angulos qui deinceps sunt EGC CGB duobus rectis æquales c efficit; erit & reliquus CGB tertia pars duorum rectorum. anguli igitur EGD DGC CGB inter se sunt æquales. & qui ipsis ad verticem sunt anguli BGA AGF FGE æquales d sunt angulis EGD DGC CGB. quare sex anguli EGD DGC CGB BGA AGF FGE inter se æquales sunt. sed æquales anguli æqualibus circumferentiis insistunt e. sex igitur circumferentiæ AB BC CD DE EF FA inter se sunt æquales: æquales autem circumferentias æquales f rectæ lineæ subtendunt. ergo & sex rectæ lineæ inter se æquales sint necesse est. ac propterea æquilaterum est ABCDEF hexagonum. Dico & æquiangulum esse. Quoniam enim circumferentia AF circumferentiæ ED est æqualis, communis apponatur circumferentia ABCD: tota igitur FABCD circumferentia æqualis est toti circumferentiæ EDCBA. & circumferentiæ quidem FABCD angulus FED insistit, circumferentiæ vero EDCBA insistit angulus AFE. angulus igitur AFE angulo DEF est g æqualis. similiter ostendentur & reliqui anguli hexagoni ABCDEF sigillatim æquales utrique ipsorum AFE FED. ergo æquiangulum est ABCDEF hexagonum. ostensum autem est & æquilaterum esse: & descriptum est circulo ABCDEF. In dato igitur circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum descriptum est. Quod facere oportebat.



a Cor. 5. primi.
b 32. primi.
c 13. primi.
d 15. primi.
e 26. tertii.
f 29. tertii.
g 27. tertii.

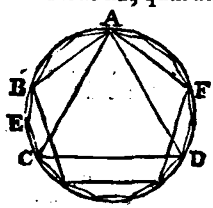
Ex hoc manifestum est hexagoni latus, ei quæ est ex centro circuli æquale esse. & si per puncta ABCDFF contingentes circulum ducamus, circa circulum describetur hexa-

hexagonum æquilaterum & æquiangulum, conſequenter iis quæ in pentagono dicta ſunt: & præterea ſimiliter in dato hexagono circulum inſcribemus, & circumſcribemus. Quod facere oportebat.

PROP. XVI. PROBL.

In dato circulo quindecagonum æquilaterum & æquiangulum deſcribere.

Sit datus circulus ABCD. Oportet in ABCD circulo quindecagonum æquilaterum & æquiangulum deſcribere. Sit AC latus trianguli [a] quidem æquilateri in ipſo circulo ABCD [a] 2. hujus.
*deſcripti, pentagoni [b] vero æquilateri latus AB, quarum igi- [b] 11. hujus.
tur partium eſt ABCDF circulus quindecim, earum circumferentia quidem ABC, tertia exiſtens circuli, erit quinque; circumferentia vero AB, quæ quinta eſt circuli, erit trium. ergo reliqua BC eſt duarum. ſecetur BC bifariam



in puncto E [c]. quare utraque ipſarum BE EC circumferentia- [c] 30. tertii.
rum quintadecima pars eſt ABCD circuli. ſi igitur jungentes BE EC, æquales ipſis in continuum rectas lineas in circulo [d] ABCD aptemus, in ipſo quindecagonum æquilate- [d] 1. hujus.
rum & æquiangulum deſcriptum erit. Quod facere oportebat.

Similiter autem iis quæ dicta ſunt in pentagono, ſi per circuli diviſiones, contingentes circulum ducamus, circa ipſum deſcribetur quindecagonum æquilaterum & æquiangulum. & inſuper dato quindecagono æquilatero & æquiangulo circulum inſcribemus, & circumſcribemus.

---

* *Facilimè deſcribitur latus* AC *per prop. præced. ſi enim duo latera hexagoni circulo inſcribantur ab* A *verſus* C, *horum oppoſita extrema incident in puncta* A, C *extrema lateris trianguli quæſiti.*

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER QUINTUS.

DEFINITIONES.

I.

PARS eſt magnitudo magnitudinis, minor majoris, quando minor majorem metitur.

II.

Multiplex eſt major minoris, quando majorem minor metitur.

III.

Proportio ſeu ratio eſt duarum magnitudinum ejuſdem generis, ſecundum quantitatem, mutua quædam habitudo.

IV.

Proportionem habere inter ſe magnitudines dicuntur, quæ multiplicatæ ſe invicem ſuperare poſſunt.

V.

In eadem proportione magnitudines eſſe dicuntur, prima ad ſecundam & tertia ad quartam, quando primæ & tertiæ æque multiplices, ſecundæ & quartæ æque multiplices, juxta quamvis multiplicationem, utraque utramque, vel unà ſuperant, vel unà æquales ſunt, vel unà deficiunt, inter ſe comparatæ.

VI.

Magnitudines quæ eandem proportionem habent, proportionales vocentur.

Ea

Ea magnitudinum Proportionalium definitio vulgo apud Interpretes traditur, quam Euclides in Elemento septimo, pro numeris solum posuit. scil.

Magnitudines dicuntur esse proportionales, quando Prima Secundæ & Tertia Quartæ æquemultiplex est, vel eadem pars, vel eædem partes.

Sed hæc definitio Numeris & quantitatibus commensurabilibus tantum competit; Adeoque cum Universalis non sit, recte ab Euclide in hoc elemento omnium Proportionalium proprietates traditurо rejicitur; & alia generalis substituitur cuivis magnitudinum speciei congruens. Interim multum laborant Interpretes ut Definitionem hic loci ab Euclide expositam, ex vulgo recepta numerorum Proportionalium definitione demonstrent; sed facilius multo hæc ab illa fluit quam illa ab hac. Quod sic ostendetur.

Primo *Sint* ABCD *quatuor magnitudines quæ sunt in eadem ratione; prout in definitione* 5[ta] *magnitudines in eadem ratione esse exponuntur. Sitque Prima multiplex secundæ, dico & tertiam eandem esse multiplicem Quartæ. Sit ex. gr.* A *æqualis* 5 B, *erit* C *æqualis* 5 D. *Capiatur numerus quilibet v. gr.* 2. *per quem multiplicetur* 5 *& productus sit* 10: *Et magnitudinum* A *&* C *Primæ & Tertiæ capiantur æque multiplices* 2A 2C. *Item magnitudinum* B *&* D *Secundæ & Quartæ capiantur æque multiplices* 10B, *&* 10D. *Et per defin. quintam, si* 2A *sint æquales* 10B, *erunt* 2C. *æquales* 10D. *at quia* A *est quintuplex ex hypothesi ipsius* B, *erunt* 2A *æquales* 10B. *unde &* 2C *æquales* 10D. *&* C *æqualis* 5D, *hoc est erit* C *quintuplex ipsius* D. *q. e. d.*

A:	B::	C:	D
2A	10B	2C	10D

Secundo. *Si* A *sit pars quævis ipsius* B, *erit* C *eadem pars ipsius* D. *Nam quia est* A *ad* B, *sicut* C *ad* D. *cumque* A *sit pars quædam ipsius* B, *erit* B *multiplex ipsius* A; *adeoque per priorem casum* D *erit eadem multiplex ipsius* C, & *proinde* C *eadem pars erit magnitudinis* D, *ac est* A *ipsius* B. *q. e. d.*

Tertio. *Sit* A *æqualis quotlibet quarumvis partium ipsius* B. *dico* & C *esse æqualem totidem similium partium ipsius* D. *v. gr.* A *in se contineat quartam partem ipsius* B *quinquies; hoc est, sit* A *æqualis* $\frac{5}{4}$B, *dico* & C *esse æqualem* $\frac{5}{4}$D. *Nam quoniam* A *est æqualis* $\frac{5}{4}$B; *multiplicando utramque per* 4, *erunt* 4A *æquales* 5B. *Capiantur itaque æque multiplices Primæ & Tertiæ scil.* 4A & 4C; *item aliæ æque multiplices Secundæ & Quartæ scil.* 5B 5D. & *per definitionem, si* 4A *sint æquales* 5B, *erunt* 4C *æquales* 5D. *at ostensum est* 4A *æquales esse* 5B. *adeoque* & 4C *æquales erunt* 5D, & C *æqualis* $\frac{5}{4}$D. *q. e. d.*

A:	B::	C:	D.
4A	5B	4C	5D

Universaliter sit A *æqualis* $\frac{n}{m}$B, *erit* C *æqualis* $\frac{n}{m}$D. *multiplicentur enim* A & C *per* m. *Et* B & D *per* n. *Et quoniam est* A *æqualis* $\frac{n}{m}$B, *erit* mA *æqualis* nB; *unde per def.* 5tam *erit* mC *æqualis* nD; & C *æqualis* $\frac{n}{m}$D. *q. e. d.*

A:	B::	C:	D.
mA	nB	mC	nD

VII.

Quando autem æque multiplicium, multiplex quidem primæ ſuperaverit multiplicem ſecundæ, multiplex vero tertiæ non ſuperaverit multiplicem quartæ, tunc prima ad ſecundam majorem proportionem habere dicitur quam tertia ad quartam.

VIII.

Analogia eſt proportionum ſimilitudo.

IX.

Analogia vero in tribus terminis ad minimum conſiſtit.

X

Quando tres magnitudines proportionales ſunt, prima ad tertiam, duplicatam proportionem habere dicetur ejus quàm habet ad ſecundam.

XI.

Quando autem quatuor magnitudines ſunt proportionales, prima ad quartam, triplicatam habere proportionem dicetur ejus quam habet ad ſecundam, & ſemper deinceps, una amplius, quoad analogia proceſſerit.

XII.

Homologæ, vel ſimilis rationis magnitudines, dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, conſequentes vero conſequentibus.

XIII.

Alterna ſeu permutata ratio eſt ſumptio antecedentis ad antecedentem, & conſequentis ad conſequentem.

XIV.

Inverſa ratio eſt ſumptio conſequentis ut antecedentis, ad antecedentem, ut ad conſequentem.

XV.

Compoſitio rationis eſt ſumptio antecedentis unà cum conſequente, tanquam unius, ad ipſam conſequentem.

XVI.

Diviſio rationis eſt ſumptio exceſſus quo antecedens ſuperat conſequentem, ad ipſam conſequentem.

XVII.

Conversio rationis est sumptio antecedentis ad excessum quo antecedens ipsam consequentem superat.

XVIII.

Ex æquo sive ex æqualitate ratio est, cum plures magnitudines extiterint, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur & in eadem proportione, fueritque ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, ita in secundis magnitudinibus prima ad ultimam: vel aliter, est sumptio extremarum per subtractionem mediarum.

XIX.

Ordinata proportio est, quando fuerit ut antecedens ad consequentem, ita antecedens ad consequentem; ut autem consequens ad aliam quampiam, ita consequens ad aliam quampiam.

XX.

Perturbata vero proportio est, quando tribus existentibus magnitudinibus, & aliis ipsis numero æqualibus, fuerit ut in primis magnitudinibus antecedens ad consequentem, ita in secundis magnitudinibus antecedens ad consequentem, ut autem in primis magnitudinibus consequens ad aliam quampiam, ita in secundis alia quæpiam ad antecedentem.

AXIOMATA.

I.

Ejusdem sive æqualium æque multiplices inter se æquales sunt.

II.

Quarum eadem æque multiplex est, vel quarum æquales sunt æque multiplices, & ipsæ inter se sunt æquales.

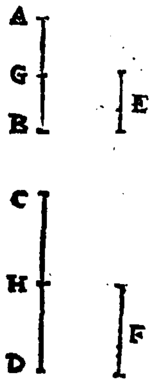
PROPOSITIO I. THEOREMA.

Si fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, æqualium numero, singulæ singularum æque multiplices; quotuplex est una magnitudo unius, totuplices erunt & omnes omnium.

Sint quotcunque magnitudines AB CD, quotcunque magnitudinum E, F, æqualium numero, singulæ singularum æque

que

multiplices. Dico quotuplex est AB ipsius E, totuplices esse & AB CD simul ipsarum E F simul. Quoniam enim AB æque multiplex est ipsius E, ac CD ipsius F; quot magnitudines sunt in AB æquales ipsi E, tot erunt & in CD æquales ipsi F. Dividatur AB quidem in partes ipsi E æquales, quæ sint AG GB; & CD dividatur in partes æquales ipsi F, videlicet CH HD. erit igitur multitudo partium CH HD æqualis multitudini ipsarum AG GB. & quoniam AG est æqualis E, & CH æqualis F; erunt & AG CH æquales [a] ipsis E F. eadem ratione quoniam GB est æqualis E, & HD ipsi F; erunt GB HD æquale [a] ipsis E F. quot sunt itaque in AB æquales ipsi E, tot sunt & in AB CD æquales ipsis E F. ergo quotuplex est AB ipsius E, totuplices erunt & AB CD simul ipsarum E F simul. Si igitur fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, æqualium numero, singulæ singularum æque multiplices; quotuplex est una magnitudo unius, totuplices erunt & omnes omnium. Quod demonstrare oportebat.

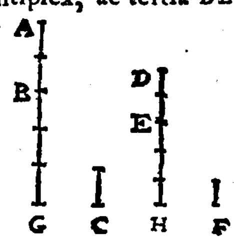


[a] Axiom.1. primi.

PROP. II. THEOR.

Si prima secundæ æque multiplex fuerit ac tertia quartæ, fuerit autem & quinta secundæ æque multiplex ac sexta quartæ; erit etiam composita prima cum quinta secundæ æque multiplex ac tertia cum sexta quartæ.

Sit prima AB secundæ C æque multiplex, ac tertia DE quartæ F. Sit autem & quinta BG secundæ C æque multiplex, ac sexta EH quartæ F. Dico & compositam primam cum quinta scil. AG secundæ C æque multiplicem esse, ac tertiam cum sexta sc. DH quartæ F. Quoniam enim AB æque multiplex est C, ac DE ipsius F; quot magnitudines sunt in AB æquales C, tot erunt & in DE æquales F. eadem ratione & quot sunt in BG æquales C, tot & in EH erunt æquales F. quot igitur sunt in tota AG æquales C, tot erunt & in tota DH æquales F. ergo quotuplex ex AG ipsius C, totuplex est &



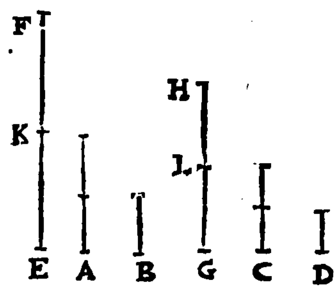
DH

DH ipsius F. & composita igitur prima cum quinta AG secundæ C æque multiplex erit, ac tertiam cum sexta DH quartæ F. Quare si prima secundæ æque multiplex fuerit, ac tertia quartæ, fuerit autem & quinta secundæ æque multiplex, ac sexta quartæ; erit composita quoque prima cum quinta æque multiplex secundæ, ac tertia cum sexta quartæ. Quod oportebat demonstrare.

PROP. III. THEOR.

Si prima secundæ æque multiplex fuerit ac tertia quartæ; sumantur autem æque multiplices primæ & tertiæ; erit & ex æquali, sumptarum utraque utriusque æque multiplex, altera quidem secundæ, altera vero quartæ.

Sit prima A secundæ B æque multiplex ac tertia C quartæ D: & sumantur ipsarum A C æque multiplices EF GH. Dico EF æque multiplicem esse ipsius B, ac GH ipsius D. Quoniam enim EF æque multiplex est ipsius A, ac GH ipsius C; quot magnitudines sunt in EF æquales A, tot erunt & in GH æquales C. dividatur EF quidem in magnitudines ipsi A æquales EK KF; GH vero dividatur in magnitudines æquales C, videlicet GL LH. erit igitur ipsarum EK KF multitudo æqualis multitudini ipsarum GL LH. & quoniam æque multiplex est A ipsius B ac C ipsius D; æqualis autem EK ipsi A, & GL ipsi C; erit EK æque multiplex ipsius B, ac GL ipsius D. eadem ratione æque multiplex erit KF ipsius B, ac LH ipsius D. quoniam igitur prima EK secundæ B æque multiplex est, ac tertia GL quartæ D; est autem & quinta KF secundæ B æque multiplex ac sexta LH quartæ D: erit & composita prima cum quinta EF, secundæ B æque multiplex[a], ac tertia cum sexta GH, quartæ D. Si igitur prima secundæ æque fuerit multiplex ac tertia quartæ, sumantur autem primæ & tertiæ æque multiplices: erit & ex æquali, sumptarum utraque utriusque æque multiplex, altera quidem secundæ, altera vero quartæ. Quod ostendisse oportuit.



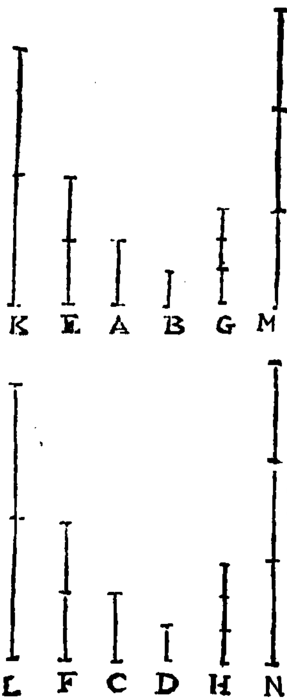
a 2. hujus.

PROP.

PROP. IV. THEOR.

Si prima ad ſecundam eandem habet proportionem quam tertia ad quartam: & æque multiplices prima & tertia ad æque multiplices ſecunda & quarta, juxta quamvis multiplicationem, eandem proportionem habebunt, inter ſe comparata.

Prima A ad ſecundam B eandem proportionem habeat quam tertia C ad quartam D: & ſumantur ipſarum quidem A C utcunque æque multiplices E F; ipſarum vero B D aliæ utcunque æque multiplices G H. Dico E ad G ita eſſe ut F ad H. Sumantur rurſus ipſarum E F æque multiplices K L, & ipſarum G H æque multiplices M N. Quoniam igitur E æque multiplex eſt ipſius A, atque F ipſius C; ſumuntur autem ipſarum E F æque multiplices K L: erit K æque multiplex [a] ipſius A, atque L ipſius C. eadem ratione M æque multiplex erit ipſius B, atque N ipſius D. & quoniam eſt ut A ad B ita C ad D. ſumptæ autem ſunt ipſarum A C æque multiplices K L; & ipſarum B D aliæ utcunque æque multiplices M N: ſi [b] K ſuperat M, ſuperabit & L ipſam N; & ſi æqualis æqualis; & ſi minor minor. ſuntque K L quidem ipſarum E F æque multiplices; M N vero ipſarum G H aliæ utcunque æque multiplices. ut igitur E ad G ita [b] erit F ad H. Quare ſi prima ad ſecundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam: & æque multiplices primæ ac tertiæ ad æque multiplices ſecundæ ac quartæ, juxta quamvis multiplicationem, eandem proportionem habebunt, inter ſe comparatæ. Quod demonſtrare oportebat.



[a] 3. hujus.

[b] 5. Defin. hujus.

Quoniam igitur demonſtratum eſt ſi K ſuperat M, & L ipſam N ſuperare; & ſi æqualis, æqualem eſſe, & ſi minor, minorem;

minorem; constat etiam si M superat K, & N superare ipsam L; & si æqualis, æqualem esse; & si minor, minorem; ac propterea ut G ad E [c] ita esse H ad F.

c 5. Defin. hujus.

Cor. Ex hoc manifestum est, si quatuor magnitudines sint proportionales, & inverse proportionales esse.

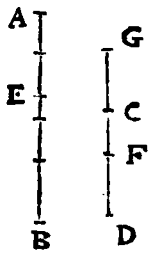
PROP. V. THEOR.

Si magnitudo magnitudinis æque multiplex sit atque ablata ablatæ: & reliqua reliquæ æque multiplex erit ac tota totius.

Magnitudo AB magnitudinis CD æque multiplex sit atque ablata AE ablatæ CF. Dico & reliquam EB reliquæ FD æque multiplicem esse atque totam AB totius CD. Quotuplex enim est AE ipsius CF, totuplex fiat & EB ipsius CG. & quoniam AE æque multiplex est CF atque EB ipsius CG; erit [a] AE æque multiplex CF, ac AB ipsius GF; ponitur autem æque multiplex AE ipsius CF, ac AB ipsius CD. æque multiplex igitur est AB utriusque GF CD; ac propterea GF ipsi CD est [b] æqualis. communis auferatur CF. reliqua igitur GC æqualis est reliquæ DF. itaque quoniam AE æque multiplex est CF, ac EB ipsius CG, estque CG æqualis DF; erit AE æque multiplex CF, ac EB ipsius FD. æque multiplex autem ponitur AE ipsius CF, ac AB ipsius CD. ergo EB est æque multiplex FD, ac AB ipsius CD. & reliqua igitur EB reliquæ FD æque multiplex est, atque tota AB totius CD. Quare si magnitudo magnitudinis æque multiplex sit atque ablata ablatæ: & reliqua reliquæ æque erit multiplex, ac tota totius. Quod oportebat demonstrare.

a 1. hujus.

b 2. Axiom. hujus.

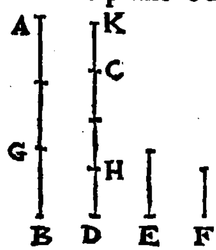


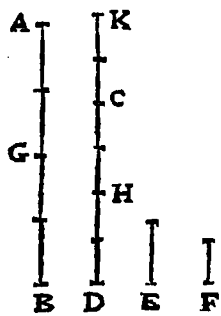
PROP. VI. THEOR.

Si duæ magnitudines duarum magnitudinum æque multiplices sint, & ablatæ quædam sint earundem æque multiplices: erunt & reliquæ vel eisdem æquales, vel ipsarum æque multiplices.

Duæ magnitudines AB CD duarum magnitudinum E F æque multiplices sint, & ablatæ AG CH earundem sint æque multiplices. Dico & reliquas GB HD vel ipsis E F æquales esse,

esse, vel ipsarum æque multiplices. Sit enim primo GB æqualis E. Dico & HD ipsi F esse æqualem. Ponatur ipsi F æqualis CK. & quoniam AG æque multiplex est E ac CH ipsius F; estque GB quidem æqualis E; CK vero æqualis F; erit AB æque multiplex [a] E, ac KH ipsius F. a 2. hujus. æque autem multiplex ponitur AB ipsius E, ac CD ipsius F. egro KH æque multiplex est F, ac CD ipsius F. quoniam igitur utraque ipsarum KH CD est æque multiplex F, erit KH æqualis [b] CD. communis auferatur CH. b 1.Axiom. hujus. ergo reliqua KC reliquæ HD est æqualis. sed KC est æqualis F. & HD igitur ipsi F est æqualis; ideoque GB ipsi E, & HD ipsi F æqualis erit. Similiter demonstrabimus si GB multiplex fuerit ipsius E; & HD ipsius F æque multiplicem esse. Si igitur duæ magnitudines duarum magnitudinum æque multiplices sint, & ablatæ quædam sint earundem æque multiplices; erunt & reliquæ, vel eisdem æquales, vel ipsarum æque multiplices. Quod demonstrare oportebat.

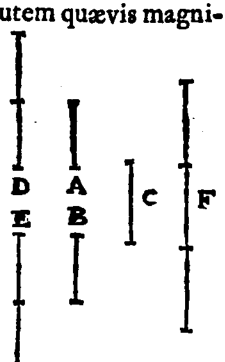




PROP. VII. THEOR.

Æquales ad eandem, eandem habent proportionem, & eadem ad æquales.

Sint æquales magnitudines A B, alia autem quævis magnitudo C. Dico utramque ipsarum A B ad C eandem proportionem habere: & C ad utramqne A B similiter eandem habere proportionem. Sumantur ipsarum A B æque multiplices D E, & ipsius C alia utcunque multiplex F. Quoniam igitur æque multiplex est D ipsius A, ac E ipsius B, estque A ipsi B æqualis; erit & D æqualis [a] E; alia autem utcunque a 1.Axiom. hujus. multiplex ipsius C est F. ergo si D superat F, & E ipsam F superabit, & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. & sunt D E qui-



dem

dem ipsarum A B æque multiplices: F vero alia utcunque multiplex ipsius C. erit igitur [b] ut A ad C, ita B ad C. Dico insuper C ad utramque ipsarum A B eandem habere proportionem. Iisdem enim constructis similiter ostendemus D ipsi E æqualem esse, si igitur F superat D, ipsam quoque E superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. atque est F quidem ipsius C multiplex; D E vero aliæ utcunque æque multiplices ipsarum A B. ergo [b] ut C ad A, ita erit C ad B. Æquales igitur ad eandem, eandem habent proportionem, & eadem ad æquales. Quod ostendere oportebat.

b 5. Defin. hujus.

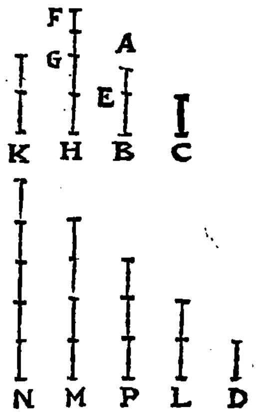
PROP. VIII. THEOR.

Inæqualium magnitudinum major ad eandem, majorem habet proportionem, quam minor: & eadem ad minorem, majorem proportionem habet, quam ad majorem.

Sint inæquales magnitudines, AB, C, & sit AB major. sit alia vero utcunque D. Dico AB ad D majorem habere proportionem quam C ad D. & D ad C majorem habere proportionem quam ad AB. Quoniam AB major est quam C, ponatur ipsi C æqualis B E, hoc est AB excedat C per AE. itaque A E aliquoties multiplicata major [a] erit quam D. multiplicetur A E quoad fiat major quam D. sitque ipsius multiplex FG ipsa D major. quotuplex autem est FG ipsius AE, totuplex fiat GH ipsius EB, & K ipsius C. sumatur etiam ipsius D dupla quidem L, tripla P, & sic deinceps una amplius, quoad ea quæ sumitur multiplex ipsius D, fiat prima quæ sit major quam K; sit illa N. sitque M multiplex ipsius D proxime minor quam N. quoniam itaque N prima multiplex est ipsius D quæ major est quam K; erit M non major quam K, hoc est K non erit minor quam M. & cum æque multiplex sit FG ipsius AE ac GH ipsius EB. erit FG æque multiplex AE ac FH ipsius AB [b]. æque autem multiplex est FG ipsius AE ac K ipsius C, ergo FH æque multiplex est AB, ac K ipsius C; hoc est FH, K ipsarum AB & C sunt

a 4. Def. hujus.

b 1. hujus.



sunt æque multiplices. rursus quoniam GH æque multiplex est ipsius EB ac K ipsius C, estque EB æqualis C, erit & GH ipsi K æqualis [e]. sed K non minor est quam M. non igitur GH minor erit quam M, sed est FG major quam D, ergo tota FH major erit quam M & D. sed M & D simul sunt æquales ipsi N, quia M est multiplex ipsius D ipsi N proxime minor, quare FH major erit quam N. unde cum FH superat N, K vero ipsam N non superat, & sunt FH & K æque multiplices ipsarum AB & C, & est N ipsius D alia multiplex, ergo [d] AB ad D majorem rationem habebit quam C ad D. Dico præterea & D ad C majorem habere proportionem, quam D ad AB. iisdem enim constructis similiter ostendemus N superare K, ipsam vero FH non superare. atque est N multiplex ipsius D, & FH K aliæ utcunque ipsarum AB C æque multiplices. ergo D ad C majorem proportionem habet [d], quam D ad AB. Inæqualium igitur magnitudinum major ad eandem majorem habet proportionem, quam minor: & eadem ad minorem, majorem proportionem habet, quam ad majorem. Quod ostendere oportebat.

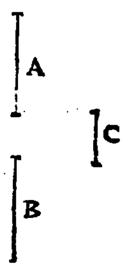
[e] 1. Axiom. hujus.

[d] 7. Defin. hujus.

PROP. IX. THEOR.

Quæ eandem proportionem habent ad eandem, inter se sunt æquales; & ad quas eadem, eandem habet proportionem, ipsæ etiam inter se sunt æquales.

Habeat enim utraque ipsarum A B ad C eandem proportionem. Dico A ipsi B æqualem esse. Nam si non esset æqualis, non haberet [a] utraque ipsarum A B ad eandem, eandem proportionem. habet autem. æqualis igitur est A ipsi B. Habeat rursus C ad utramque ipsarum A B eandem proportionem. Dico A æqualem esse ipsi B. nisi enim ita sit, non [a] habebit C ad utramque A B eandem proportionem. habet autem. ergo A ipsi B necessario est æqualis. Quæ igitur ad eandem, eandem proportionem habent, æquales inter se sunt: & ad quas eadem, eandem habet proportionem, ipsæ inter se sunt æquales. Quod demonstrare oportebat.

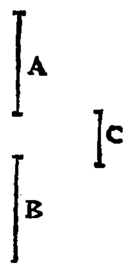


[a] 8. hujus.

PROP. X. THEOR.

Magnitudinum proportionem habentium ad eandem, quæ majorem proportionem habet, illa major est; ad quam vero eadem majorem habet proportionem, illa minor est.

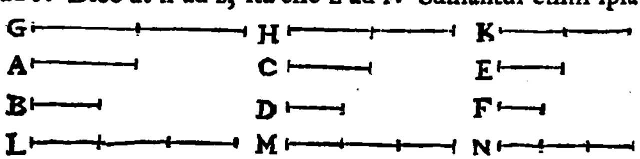
Habeat enim A ad C majorem proportionem, quam B ad C. Dico A quam B majorem esse. Si enim non est major, vel æqualis est, vel minor. æqualis autem non est A ipsi B utraque enim ipsarum A B ad C eandem habe-
a 7. hujus. ret [a] proportionem. atqui eandem non habet. non est igitur A ipsi B æqualis. sed
b 8. hujus. neque minor est quam B, haberet [b] enim A ad C minorem proportionem, quam B. atqui non habet minorem. non igitur A minor est, quam B. ostensum autem est neque esse æqualem. ergo A quam B major erit. Habeat rursus C ad B majorem proportionem quam C ad A. Dico B minorem esse quam A. Si enim non est minor, vel æqualis est, vel major. æqualis utique non est B ipsi A, etenim C ad utramque ipsarum A B eandem proportionem [a] haberet. non habet autem. ergo A ipsi B non est æqualis. sed neque major est B quam A, haberet enim C ad B minorem [b] proportionem quàm ad A. atqui non habet. non est igitur B major quam A. ostensum autem est neque æqualem esse. ergo B minor erit quam A. Ad eandem igitur proportionem habentium, quæ majorem proportionem habet, illa major est; & ad quam eadem majorem habet proportionem, illa minor est. Quod oportebat demonstrare.



PROP. XI. THEOR.

Quæ eidem eædem sunt proportiones, & inter se eædem sunt.

Sint enim ut A ad B ita C ad D: ut autem C ad D ita E ad F. Dico ut A ad B, ita esse E ad F. Sumantur enim ipsa-



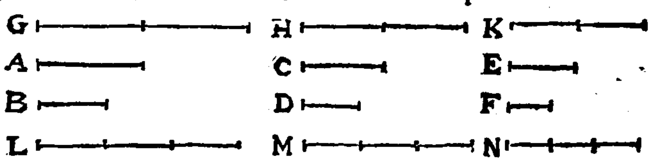
rum quidem A C E æque multiplices G H K; ipsarum vero B D F aliæ utcunque æque multiplices L M N. Quoniam igitur

tur est ut A ad B, ita C ad D, & sumptæ sunt ipsarum A C æque multiplices G H, & ipsarum B D aliæ utcunque æque multiplices L M; si [a] G superat L, & H ipsam M superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor minor. rursus quoniam est ut C ad D, ita E ad F, & sumptæ sunt ipsarum C E æque multiplices H K, ipsarum vero D F aliæ utcunque æque multiplices M N; si [a] H superat M, & K ipsam N superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. sed si H superat M, & G superabit L; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor; quare si G superat L, & K ipsam N superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. & sunt G K quidem ipsarum A E æque multiplices; L N vero ipsarum B F aliæ utcunque æque multiplices. ergo [a] ut A ad B, ita erit E ad F Quæ igitur eidem eædem sunt proportiones, & inter se eædem sunt. Quod ostendisse oportuit. [a] 5. Def. hujus.

PROP. XII. THEOR.

Si quotcunque magnitudines proportionales fuerint; ut una antecedentium ad unam consequentium, ita erunt antecedentes omnes ad omnes consequentes.

Sint quotcunque magnitudines proportionales A B C D E F, & ut A ad B, ita sit C ad D, & E ad F. Dico ut A ad B, ita esse A C E ad B D F. Sumantur enim ipsarum A C E æ-



que multiplices G H K, & ipsarum B D F aliæ utcunque æque multiplices L M N. Quoniam igitur ut A ad B, ita est C ad D, & E ad F, & sumptæ sunt ipsarum quidem A C E æque multiplices G H K, ipsarum vero B D F aliæ utcunque æque multiplices L M N; si [a] G superat L, & H ipsam M superabit, & K ipsam N; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. quare & si G superat L, superabunt & G H K ipsas L M N; & si æqualis, æquales; & si minor, minores. suntque G, & G H K ipsarum A, & A C E æque multiplices; quoniam si fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, æqualium numero, singulæ singularum æque multiplices; quotuplex est una magnitudo unius, totuplices [b] erunt & omnes omnium. Et eadem ratione L & L M N ipsarum B, & B D F sunt æque multiplices. est igitur [a] ut A ad [a] 5. Def. hujus. [b] 1. hujus.

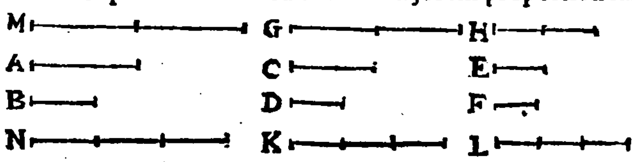
B,

A C E ad B D F. Quare si quotcunque magnitudines proportionales fuerint, ut una antecedentium ad unam consequentium, ita erunt antecedentes omnes ad omnes consequentes. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XIII. THEOR.

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam, tertia autem ad quartam majorem proportionem habet quam quinta ad sextam; & prima ad secundam majorem habebit proportionem quam quinta ad sextam.

Prima enim A ad secundam B eandem proportionem habeat quam tertia C ad quartam D, tertia autem C ad quartam D majorem habeat proportionem quam quinta E ad sextam F. Dico & primam A ad secundam B majorem proportionem



habere, quam quinta E ad sextam F. Quoniam enim C ad D majorem proportionem habet quam E ad F, sunt quædam ipsarum C E æque multiplices, & ipsarum D F aliæ utcunquæ æque multiplices; & multiplex [a] quidem C superat multiplicem D; multiplex vero E non superat multiplicem F. Sumantur; & sint ipsarum C E æque multiplices G H, & ipsarum D F aliæ utcunque æque multiplices K L, ita ut G quidem superet K, H vero ipsam L non superet: & quotuplex est G ipsius C, totuplex sit & M ipsius A; quotuplex autem K ipsius D, totuplex sit & N ipsius B. & quoniam est ut A ad B ita C ad D, & sumptæ sunt ipsarum A C æque multiplices M G, & ipsarum B D aliæ utcunque æque multiplices N K: si [b] M superat N, & G ipsam K superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. sed G superat K. ergo & M ipsam N superabit. H vero non superat L. suntque M H ipsarum A E æque multiplices, & N L ipsarum B F aliæ utcunque æque multiplices. ergo A ad B majorem proportionem habebit [a] quàm E ad F. Si igitur prima ad secundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam; tertia vero ad quartam majorem proportionem habeat quam quinta ad sextam: & prima ad secundam majorem habebit proportionem quam quinta ad sextam. Quod ostendere oportebat.

[a] 7. Def. hujus.

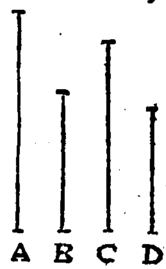
[b] 5. Def. hujus.

PROP.

PROP. XIV. THEOR.

Si prima ad ſecundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam; prima autem major ſit quam tertia; & ſecunda quam quarta major erit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor.

Prima enim A ad ſecundam B eandem proportionem habeat quam tertia C ad quartam D: major autem ſit A quàm C. Dico & B quam D majorem eſſe. Quoniam enim A major eſt quam C, & alia eſt utcunque magnitudo B, habebit [a] A ad B majorem proportionem quàm C ad B; ſed ut A ad B ita C ad D. ergo & C ad D majorem habebit [b] proportionem quàm C ad B. ad quam vero eadem majorem proportionem habet, illa minor [c] eſt. quare D eſt minor quàm B, ac propterea B quam D major erit. ſimiliter demonſtrabimus & ſi A æqualis ſit ipſi C, & B ipſi D eſſe æqualem; & ſi A ſit minor quam C, & B quàm D minorem eſſe. Si igitur prima ad ſecundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam; prima autem major ſit quàm tertia, & ſecunda quàm quarta major erit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. Quod demonſtrare oportebat.

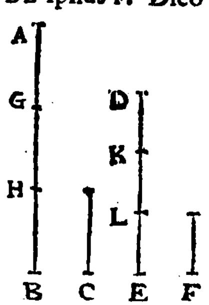


[a] 8. hujus.
[b] 13. hujus.
[c] 10. hujus.

PROP. XV. THEOR.

Partes inter ſe comparatæ eandem habent proportionem, quam habent earum æque multiplices.

Sit enim AB æque multiplex C, ac DE ipſius F. Dico ut C ad F, ita eſſe AB ad DE. Quoniam enim æque multiplex eſt AB ipſius C, ac DE ipſius F; quot magnitudines ſunt in AB æquales ipſi C, totidem erunt & in DE æquales F. Dividatur AB in magnitudines ipſi C æquales, quæ ſint AG GH HB; & DE dividatur in magnitudines æquales F, videlicet in DK KL LE; erit igitur ipſarum AG GH HB multitudo æqualis multitudini DK KL LE. & quoniam æquales ſunt AG GH HB, ſuntque DK KL

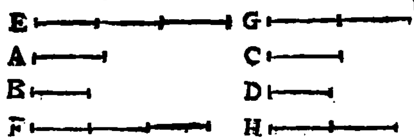


a 7. hujus. LE inter se æquales; ut AG ad DK, ita[a] erit GH ad KL, & b 12. hujus. HB ad LE. atque erit[b] ut una antecedentium ad unam consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes: est igitur ut AG ad DK, ita AB ad DE. sed AG ipsi C est æqualis, & DK ipsi F. ergo ut C ad F, ita erit AB ad DE. Partes igitur inter se comparatæ eandem habent proportionem quam habent earum æquæ multiplices. Quod ostendendum fuit.

PROP. XVI. THEOR.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & permutata proportionales erunt.

Sint quatuor magnitudines proportionales A B C D, sitque ut A ad B, ita C ad D. Dico & permutatas proportionales esse, videlicet ut A ad C, ita esse B ad D. Sumantur enim ipsarum quidem A B æque multiplices E F, ipsarum vero C D aliæ utcunque æque multiplices G H. Et quoniam



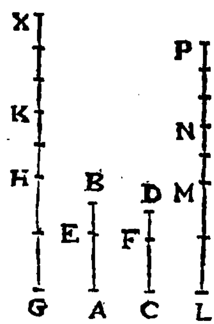
æque multiplex est E ipsius A, ac F ipsius B: partes autem a 15. hujus. inter se comparatæ eandem habent[a] proportionem quam habent earum æque multiplices; erit ut A ad B ita E ad F. b 11. hujus. ut autem A ad B ita C ad D. ergo & ut C ad D ita[b] E ad F. rursus quoniam G H sunt ipsarum C D æque multiplices, partes autem inter se comparatæ eandem habent proportionem, quam habent earum æque multiplices; erit[a] ut C ad D ita G ad H. sed ut C ad D ita E ad F. ergo[b] & ut E ad F ita G ad H. quod si quatuor magnitudines proportionales c 14. hujus. sint, prima autem major sit quàm tertia; [c] & secunda quam quarta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. si igitur E superat G, & F ipsam H superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor; suntque E F ipsarum A B æque multiplices, & G H ipsarum C D aliæ utcunque d 5. Def. hujus. æque multiplices, ergo[d] ut A ad C ita B ad D. Si igitur quatuor magnitudines proportionales fuerint, & permutatæ proportionales erunt. Quod ostendere oportebat.

PROP.

PROP. XVII. THEOR.

Si compositæ magnitudines sint proportionales, & divisæ proportionales erunt.

Sint compositæ magnitudines proportionales AB BE CD DF. Hoc est ut AB ad BE, ita sit CD ad DF. Dico etiam divisas proportionales esse, videlicet ut AE ad EB ita esse CF ad FD. Sumantur enim ipsarum quidem AE EB CF FD æque multiplices GH HK LM MN, ipsarum vero EB FD aliæ utcunque æque multiplices KX NP. Quoniam æque multiplex est GH ipsius AE, ac HK ipsius EB; erit [a] GH ipsius AE æque multiplex, ac GK ipsius AB. æque autem multiplex est GH ipsius AE, ac LM ipsius CF. ergo GK æque multiplex est AB, ac LM ipsius CF. rursus quoniam æque multiplex est LM ipsius CF, ac MN ipsius FD; erit [a] LM æque multiplex CF, ac LN ipsius CD. sed æque multiplex erat LM ipsius CF, ac GK ipsius AB. æque igitur multiplex est GK ipsius AB, ac LN ipsius CD. quare GK LN ipsarum AE CD æque multiplices erunt. rursus quoniam æque multiplex est HK ipsius EB, ac MN ipsius FD: est autem & KX ipsius EB æque multiplex, ac NP ipsius FD; & composita HX ipsius EB æque multiplex est [b] ac MP ipsius FD. quare cum sit ut AB ad BE, ita CD ad DF; & sumptæ sint ipsarum quidem AB CD æque multiplices GK LN, ipsarum vero EB FD aliæ utcunque æque multiplices HX MP: si [c] GK superat HX, & LN superabit MP; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. superet igitur GK ipsam HX, communique ablata HK, & GH ipsam KX superabit. sed si GK superat HX, & LN superat MP: itaque superat LN ipsam MP: communique MN ablata, & LM superabit NP. quare si GH superat KX, & LM ipsam NP superabit. similiter demonstrabimus & si GH sit æqualis KX, & LM ipsi NP esse æqualem; & si minor, minorem. sunt autem GH LM ipsarum AE CF æque multiplices, & ipsarum EB FD aliæ utcunque æque multiplices KX NP. ergo [e] ut AE ad EB ita erit CF ad FD. Si igitur compositæ magnitudines sint proportionales, & divisæ proportionales erunt. Quod demonstrare oportebat.



[a] 1. hujus.

[b] 2. hujus.

[c] 5. Def. hujus.

PROP. XVIII. THEOR.

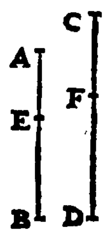
Si divisæ magnitudines sint proportionales, & compositæ proportionales erunt.

Sint divisæ magnitudines proportionales AE EB CF FD: hoc est ut AE ad EB, ita CF ad FD. Dico etiam compositas proportionales esse, videlicet ut AB ad BE, ita esse CD ad DF. Si enim non est ut AB ad BE, ita CD ad DF; erit ut AB ad BE, ita CD vel ad minorem quàm FD, vel ad majorem. sit primo ad minorem, nempe ad DG. & quoniam est ut AB ad BE, ita CD ad DG, compositæ magnitudines sunt proportionales; ergo & divisæ proportionales
a 17. hujus. erunt a. est igitur ut AE ad EB, ita CG ad GD. ponitur autem ut AE ad EB, ita CF ad
b 11. hujus. FD. quare & b ut CG ad GD, ita CF ad FD. at CG prima major est quam tertia CF. ergo & secunda
c 14. hujus. DG quàm quarta DF major c erit. sed & minor, quod fieri non potest. Non igitur est ut AB ad BE, ita CD ad DG. similiter ostendemus neque esse ad majorem quàm DF. ad ipsam igitur DF sit necesse est. Quare si divisæ magnitudines sint proportionales, & compositæ proportionales erunt. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XIX. THEOR.

Si fuerit ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam: & reliqua ad reliquam erit ut tota ad totam.

Sit enim ut tota AB ad totam CD, ita ablata AE ad ablatam CF. Dico & reliquam EB ad reliquam FD ita esse ut tota AB ad totam CD. Quoniam enim est ut tota AB ad totam CD, ita
a 16. hujus. AE ad CF. & permutando erit a ut AB ad AE, ita CD ad CF. quoniam vero compositæ magnitudines sunt proportionales, & divisæ
b 17. hujus. proportionales erunt b, ut igitur BE ad EA, ita DF ad FC: rursusque permutando ut a BE ad DF, ita EA ad FC. sed ut AE ad CF,
c 11. hujus. ita posita est AB ad CD. & reliqua c igitur EB erit ad reliquam FD, ut tota AB ad totam CD. Quare si fuerit ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam: & reliqua ad reliquam erit ut tota ad totam. Quod demonstrare oportebat.



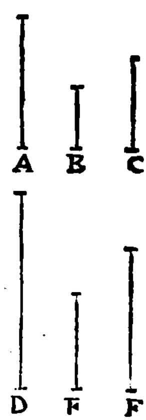
Cor.

Cor. Si quatuor magnitudines proportionales ſint, per converſionem rationis proportionales erunt. Sit enim ut AB ad BE, ita CD ad DF, erit permutando AB ad CD, ita BE ad DF. quare cum eſt tota AB ad totam CD, ut ablata BE ad ablatam DF, erit & reliqua AE ad reliquam CF, ut tota AB ad totam CD. quare rurſus permutando & invertendo erit ut AB ad AE, ita CD ad CF. quod eſt per converſionem rationis [d] *. d 17. Def. hujus.

PROP. XX. THEOR.

Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, quæ bina ſumantur in eadem proportione; ex æquali autem prima major ſit, quam tertia; & quarta quàm ſexta major erit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor.

Sint tres magnitudines A B C, & aliæ ipſis numero æquales D E F binæ ſumptæ ſint in eadem proportione; ſitque ut A ad B, ita D ad E, & ut B ad C, ita E ad F; ex æquali autem major ſit A quam C. Dico & D quam F majorem eſſe; & ſi æqualis, æqualem; & ſi minor, minorem. Quoniam enim A major eſt quàm C, alia vero eſt utcunque B, & major ad eandem majorem habet [a] proportionem quàm minor; habebit A ad B majorem proportionem quam C ad B. ſed ut A ad B, ita D ad E; & invertendo ut C ad B, ita F ad E. ergo & D ad E majorem habet proportionem quam F ad E. ad eandem vero proportionem habentium, quæ majorem habet proportionem, illa major [b] eſt. major igitur eſt D quam F. ſimiliter oſtendemus & ſi A ſit æqualis C, & D ipſi F æqualem eſſe; & ſi minor, minorem. Si igitur tres magnitudines fuerint, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur, & in eadem proportione: ex æquali autem prima major ſit quam tertia; & quarta quam ſexta major erit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. Quod oſtendere oportebat.



a 8. hujus.

b 10. hujus.

---

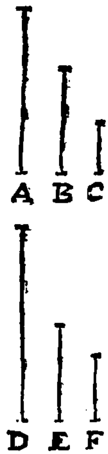
* *Hæc eſt magis legitima Demonſtratio Converſionis rationis. Si ſit* AB *ad* BE *ut* CD *ad* DF, *erit, dividendo,* AE *ad* BE *ut* CF *ad* DF: *& invertendo, ut* BE *ad* AE *ita* DF *ad* CF: *&, componendo, erit* AB *ad* AE *ut* CD *ad* CF: *quod eſt per Converſionem Rationis.*

 PROP.

PROP. XXI. THEOR.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur & in eadem proportione; sit autem perturbata earum analogia, & ex æquali prima major sit quam tertia: & quarta quam sexta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor.

Sint tres magnitudines A B C, & aliæ ipsis numero æquales D E F, binæ sumptæ & in eadem proportione. Sit autem perturbata earum analogia, videlicet ut A quidem ad B, ita E ad F; ut vero B ad C, ita D ad E; & ex æquali A major sit quam C. Dico & D quam F majorem esse; & si æqualis, æqualem; & si minor, minorem. Quoniam enim major est A quam
a 8. hujus. C, alia vero est B; habebit [a] A ad B majorem proportionem quam C ad B. sed ut A ad B, ita E ad F: & invertendo ut C ad B, ita E ad D. quare & E ad F majorem habebit proportionem quam E ad D. ad quam vero eadem majorem proportionem habet illa mi-
b 10. hujus. nor est [b]. minor igitur est F quam D; ac propterea D quam F major erit. similiter ostendemus & si A sit æqualis C, & D ipsi F esse æqualem; & si minor, minorem. Si igitur sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ sumantur & in eadem proportione; sit autem perturbata earum analogia, & ex æquali autem prima major sit quam tertia: & quarta quam sexta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. Quod demonstrare oportebat.



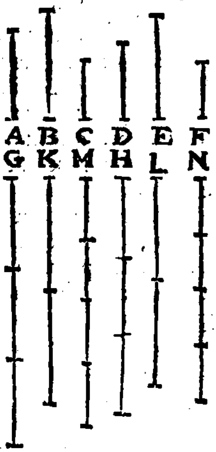
PROP. XXII. THEOR.

Si sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem proportione: & ex æquali in eadem proportione erunt.

Sint quotcunque magnitudines A B C, & aliæ ipsis numero æquales D E F, binæ sumptæ in eadem proportione, hoc est ut A quidem ad B, ita D ad E, ut autem B ad C, ita E ad F. Dico & ex æquali in eadem proportione esse, ut A ad C, ita D ad F. Sumantur enim ipsarum quidem A D æque multiplices G H; ipsarum vero B E aliæ utcunque æque multi-

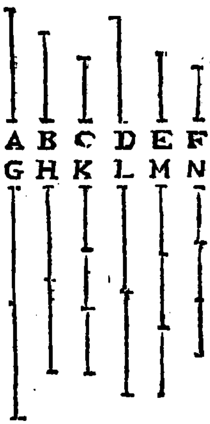
plices

plices KL, & ipsarum CF aliæ utcunque æque multiplices MN. Quoniam igitur est ut A ad B, ita D ad E, & sumptæ sunt ipsarum A D æque multiplices G H, & ipsarum B E aliæ utcunque æque multiplices K L; erit ut [a] G ad K, ita H ad L. eadem a 4. hujus.
quoque ratione erit ut K ad M, ita L ad N. & cum sint tres magnitudines G K M, & aliæ ipsis numero æquales H L N, binæ sumptæ & in eadem proportione; ex æquali [b] si G superat M, & H b 20. hujus.
ipsam N superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. suntque G H ipsarum A D æque multiplices, & M N ipsarum C F aliæ utcunque æque multiplices. ut igitur A ad C, ita erit [c] D ad F. c 5. Defin. hujus.
Quare si sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem proportione: & ex æquali in eadem proportione erunt. Quod demonstrare oportebat.



PROP. XXIII. THEOR.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem proportione; sit autem perturbata earum analogia: & ex æquali in eadem proportione erunt.



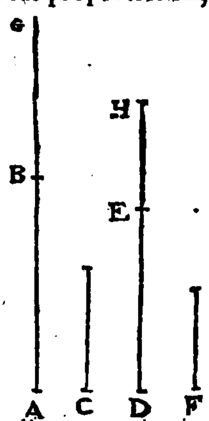
Sint tres magnitudines A B C, & aliæ ipsis numero æquales, binæ sumptæ in eadem proportione, D E F, sit autem perturbata earum analogia, hoc est sit ut A ad B, ita E ad F, & ut B ad C, ita D ad E. Dico ut A ad C, ita esse D ad F. Sumantur ipsarum quidem A B D æque multiplices G H L: ipsarum vero C E F aliæ utcunque æque multiplices K M N. Et quoniam G H æque multiplices sunt ipsarum A B, partes autem eandem habent proportionem quam habent æque

 ipsa-

a 15. hujus. ipsarum multiplices: erit a ut A ad B, ita G ad H. & simili ratione ut E ad F, ita M ad N. atque est ut A ad B, ita E ad
b 11. hujus. F. ut b igitur G ad H, ita M ad N. rursus quoniam est ut B ad C ita D ad E, & sumptæ sunt ipsarum B D æque multiplices H L, ipsarum vero C E aliæ utcunque æque multiplices K M: erit
c 4. hujus. ut H ad K, ita L ad M c. ostensum autem est & ut G ad H, ita esse M ad N. quoniam igitur tres magnitudines proportionales sunt G H K, & aliæ ipsis numero æquales L M N, binæ sumptæ in eadem proportione, estque ipsarum pertur-
d 21. hujus. bata analogia; ex æquali, si d G superat K, & L ipsam N superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. sunt autem G L ipsarum A D æque multiplices: & K N æque
e 5. Def. hujus. multiplices ipsarum C F. ut igitur e A ad C, ita erit D ad F. Quare si fuerint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem proportione, sit autem perturbata earum analogia: & ex æquali in eadem proportione erunt. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXIV. THEOR.

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; habeat autem & quinta ad secundam proportionem eandem, quam sexta ad quartam: & composita prima cum quinta ad secundam eandem proportionem habebit, quam tertia cum sexta ad quartam.



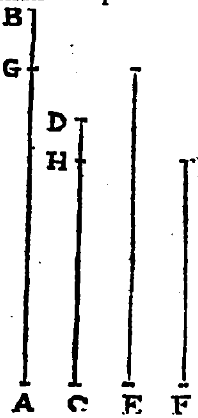
Prima AB ad secundam C eandem habeat proportionem, quam tertia DE ad quartam F; habeat autem & quinta BG ad secundam C proportionem eandem quam sexta EH ad quartam F: Dico & compositam primam cum quinta AG ad secundam C eandem proportionem habere, quam tertiam cum sexta DH ad quartam F. Quoniam enim est ut BG ad C, ita EH ad F; erit invertendo ut C ad BG, ita F ad EH. & quoniam ut AB ad C, ita est DE ad F: ut autem C ad BG, ita
a 22. hujus. F ad EH; erit a ex æquali ut AB ad BG, ita DE ad EH. quod cum divisæ magnitudines sint proportionales, & com-
b 18. hujus. positæ proportionales b erunt. ut igitur AG ad GB, ita est DH ad HE. sed &
c hypoth. ut c GB ad C, ita HE ad F. ergo, ex a æquali, ut AG ad C, ita erit

erit DH ad F. Si igitur prima ad ſecundam eandem habeat proportionem quàm tertia ad quartam: habeat autem & quinta ad ſecundam proportionem eandem quam ſexta ad quartam: & compoſita prima cum quinta ad ſecundam eandem proportionem habebit quam tertia cum ſexta ad quartam. Quod oſtendere oportebat.

PROP. XXV. THEOR.

Si quatuor magnitudines fuerint proportionales, maxima ipſarum & minima, duabus reliquis majores erunt.

Sint quatuor magnitudines proportionales AB, CD, E, F; & ſit ut AB ad CD, ita E ad F. ſit autem maxima ipſarum AB, & F minima. Dico AB & F ipſis CD & E majores eſſe. Ponatur enim ipſi quidem E æqualis AG, ipſi vero F æqualis CH. Quoniam igitur eſt ut AB ad CD, ita E ad F: eſtque AG æqualis E, & CH æqualis F; erit ut AB ad DC, ita AG ad CH. & quoniam eſt ut tota AB ad totam CD, ita ablata AG ad ablatam erit CH; & reliqua GB ad reliquam HD [a] ut tota AB ad CD totam. major autem eſt AB quam CD. ergo & GB quam HD major erit. quod cum AG ſit æqualis ipſi E, & CH ipſi F; erunt AG & F ipſi CH & E æquales. [b] ſi autem inæqualibus æqualia addantur, tota inæqualia erunt. ergo GB HD inæqualibus exiſtentibus, quippe cum GB ſit major, ſi ipſi quidem GB addantur AG & F, ipſi vero HD addantur CH & E: fient AB & F, ipſis CD & E neceſſario majores. Si igitur quatuor magnitudines fuerint proportionales, maxima ipſarum & minima, duabus reliquis majores erunt. Quod demonſtrare oportebat.



a 19. hujus.

b 4. Ax. primi.

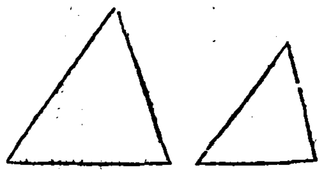
EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER SEXTUS.

DEFINITIONES.

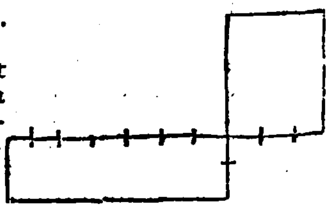
I.

Similes figuræ rectilineæ sunt quæ & singulos angulos æquales habent, & circa æquales angulos latera proportionalia.



II.

Reciprocæ figuræ sunt quando in utraque figura antecedentes, & consequentes rationum fuerint termini.

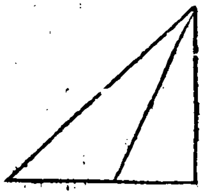


III.

Extrema ac media ratione secari recta linea dicitur, quando sit ut tota ad majus segmentum, ita majus segmentum ad minus.

IV.

IV.



Altitudo cujusque figuræ est linea penpendicularis, quæ à vertice ad basim ducitur.

V.

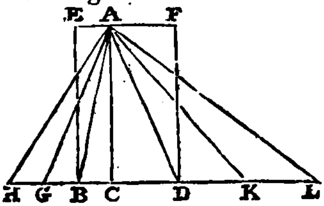
Ratio ex rationibus componi dicitur, quando rationum quantitates inter se multiplicatæ, aliquam efficiunt rationem.

PROPOSITIO I.

THEOREMA.

Triangula, & parallelogramma quæ eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases.

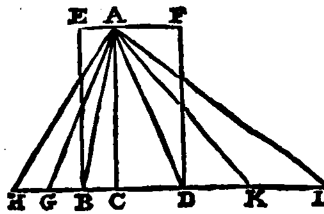
Sint triangula quidem ABC ACD, parallelogramma vero EC CF, quæ eandem habent altitudinem, videlicet perpendicularem à puncto A ad BD ductam. Dico ut basis BC ad CD basim, ita esse triangulum ABC ad triangulum ACD, & parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. Producatur BD ex utraque parte ad puncta HL, & ipsi quidem BC basi æquales quotcunque ponantur BG GH, ipsi vero basi CD ponantur quotcunque æquales DK KL, & AG AH AK AL jungantur. Quoniam igitur CB BG GH inter se æquales sunt, erunt & triangula AHG AGB ABC inter [a] se æqualia. ergo quotuplex est basis HC ipsius BC basis, totuplex est AHC triangulum trianguli ABC. eadem ratione quotuplex est LC basis ipsius basis CD, totuplex est & triangulum ALC ipsius ACD trianguli: & si æqualis est HC basis basi CL, & triangulum AHC triangulo ALC est [a] æquale: & si basis HC basim CL superat, & triangulum AHC superabit triangulum ALC: & si minor, minus. quatuor igitur magnitudinibus existentibus, videlicet duabus basibus BC CD, & duobus triangulis ABC ACD, sumpta sunt æque multiplicia basis quidem BC, & ABC, trianguli



[a] 38.primi.

vide-

videlicet basis HC, & AHC triangulum: basis vero CD & trianguli ACD, alia utcunque æque multiplicia, nempe CL basis, & ALC triangulum; atque ostensum est si HC basis basim CL superat, & triangulum AHC superare triangulum ALC; & si æqualis, æquale; & si minor, minus. est igitur [b] ut BC basis ad basim CD, ita triangulum ABC ad ACD triangulum. Et quoniam trianguli ABC duplum est [c] parallelogrammum EC, & trianguli ACD parallelogrammum FC duplum [c], partes [d] autem cum pariter multiplicibus eandem inter se proportionem habent: igitur ut ABC triangulum ad triangulum ACD, ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. quoniam igitur ostensum est ut basis BC ad CD basim, ita esse ABC triangulum ad triangulum ACD; ut autem ABC triangulum ad triangulum ACD, ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum; erit [e] ut BC basis ad basim CD, ita parallelogrammum EC ad FC parallelogrammum. Quare triangula & parallelogramma quæ eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases. Quod demonstrare oportebat.



b Def. 5. quinti.
c 41. primi.
d 15. quinti.
e 11. quinti.

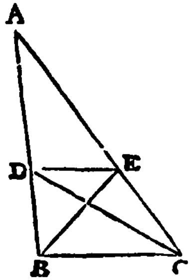
PROP. II. THEOR.

Si uni laterum trianguli parallela quædam recta linea ducta fuerit, proportionaliter secabit ipsius trianguli latera. & si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ sectiones conjungit recta linea, reliquo trianguli lateri parallela erit.

Trianguli enim ABC uni laterum BC, parallela ducatur DE. Dico ut BD ad DA, ita esse CE ad EA. Jungantur BE CD. Triangulum igitur BDE triangulo CDE est [a] æquale, in eadem enim sunt basi DE, & in eisdem DE & BC parallelis; aliud autem triangulum est ADE: sed æqualia ad idem eandem habent [b] proportionem; ergo ut triangulum BDE ad triangulum ADE, ita est CDE triangulum ad triangulum ADE. ut autem triangulum BDE ad triangulum ADE, ita [c] est BD ad DA; nam cum eandem altitudinem habent, videlicet perpendicularem à puncto E ad AB ductam, inter se sunt ut bases. & ob eandem causam ut CDE triangulum ad triangulum ADE, ita CE ad EA. & igitur ut BD ad DA, ita est [d] CE ad EA. Et si trianguli ABC latera AB AC pro-

a 37. primi.
b 7. quinti.
c 1. hujus.
d 11 quinti

proportionaliter secta sunt, *i. e.* ut BD ad DA, ita sit CE ad EA; jungatur DE. Dico DE ipsi BC parallelam esse. Iisdem constructis, quoniam est ut BD ad DA, ita CE ad EA; ut autem BD ad DA, ita [e] est BDE triangulum ad triangulum ADE; & ut CE ad EA, ita CDE triangulum [e] ad triangulum ADE, erit ut triangulum BDE ad triangulum ADE, ita [e] CDE triangulum ad triangulum ADE. quod cum utrumque triangulorum BDE CDE ad triangulum ADE eandem habeat proportionem; erit BDE triangulum [f] triangulo CDE æquale; & sunt in eadem basi DE. æqualia autem triangula, & in eadem basi constituta, etiam in eisdem [g] sunt parallelis. ergo [g] DE ipsi BC parallela est. Si igitur uni laterum trianguli parallela quædam recta linea ducta fuerit, proportionaliter secabit ipsius trianguli latera. & si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ sectiones conjungit recta linea reliquo trianguli lateri parallela erit. Quod oportebat demonstrare.



e 11. quinti.

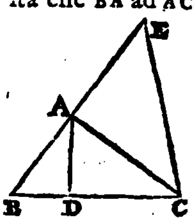
f 9. quinti.

g 39. primi.

PROP. III. THEOR.

Si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta linea secet etiam basim; basis partes eandem proportionem habebunt, quam reliqua trianguli latera. & si basis partes eandem proportionem habeant, quam reliqua trianguli latera; quæ à vertice ad sectionem ducitur recta linea, trianguli angulum bifariam secabit.

Sit triangulum ABC, & secetur angulus BAC bifariam [a] recta linea AD. Dico ut BD ad CD, ita esse BA ad AC. Ducatur per C ipsi DA parallela [b] CE, & producta BA conveniat cum ipsa in E puncto. Quoniam igitur in parallelas AD EC incidit recta linea quædam AC, erit [c] ACE angulus angulo CAD æqualis. sed CAD angulus ponitur æqualis angulo BAD. ergo & BAD ipsi ACE angulo æqualis erit. rursus quoniam in parallelas AD EC recta linea



a 9. primi.

b 31. primi.

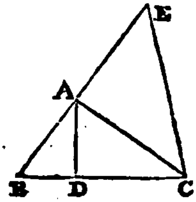
c 29. primi.

linea BAE incidit, exterior angulus BAD æqualis est [c] interiori AEC. ostensus autem est & angulus ACE angulo BAD æqualis. ergo & ACE ipsi AEC æqualis erit: ac propterea

d 6. primi. latus AE æquale [d] lateri AC. & quoniam uni laterum trianguli BCE, videlicet ipsi EC

e 2. hujus. parallela ducta est AD; erit [e] ut BD ad DC, ita BA ad AE; æqualis autem est AE ipsi AC.

f 7. quinti. est igitur [f] ut BD ad DC, ita BA ad AC. Et si sit ut BD ad DC, ita BA ad AC, & AD jungatur. Dico angulum BAC



bifariam sectum esse recta linea AD. Iisdem enim constructis, quoniam est ut BD ad DC, ita AB ad AC; sed & ut

g 2. hujus. BD ad DC, ita [g] BA ad AE, etenim uni laterum trianguli

h 11. quinti. BCE, videlicet ipsi EC parallela ducta est AD, erit [h] & ut

i 9. quinti. BA ad AC, ita BA ad AE. ergo AC est [i] æqualis AE, ac

k 5. primi. propterea & angulus AEC angulo ACE [k] æqualis. sed angulus quidem AEC est æqualis angulo exteriori BAD; an-

l 29. primi. gulus vero ACE æqualis [l] alterno CAD. quare & BAD angulus ipsi CAD æqualis erit. angulus igitur BAC bifariam sectus est recta linea AD. Ergo si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta linea etiam basim secet; basis partes eandem proportionem habebunt, quam reliqua trianguli latera. & si basis partes eandem proportionem habent, quam reliqua trianguli latera; quæ à vertice ad sectionem ducitur recta linea, trianguli angulum bifariam secabit. Quod oportebat demonstrare.

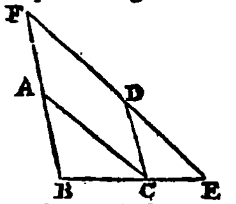
PROP. IV. THEOR.

Æquiangulorum triangulorum latera quæ circum æquales angulos sunt, proportionalia sunt. & homologa, sive ejusdem rationis sunt latera quæ æqualibus angulis subtenduntur.

Sint æquiangula triangula ABC DCE, quæ angulum quidem ABC angulo DCE, angulum vero ACB angulo DEC æqualem habeant, & præterea angulum BAC angulo CDE. Dico triangulorum ABC DCE proportionalia esse latera quæ sunt circa æquales angulos; & homologa, sive ejusdem rationis latera esse quæ æqualibus angulis subtenduntur. Ponatur BC in directum ipsi CE. Et quoniam

a 17. primi. anguli ABC ACB duobus rectis minores [a] sunt, æqualis autem est angulus ACB angulo DEC; erunt ABC DEC anguli

guli duobus rectis minores. quare BA ED productæ inter se conveniant[b]; producantur, & conveniant in puncto F. & quoniam angulus DCE est æqualis angulo ABC; erit [c] BF ipsi DC parallela. rursus quoniam æqualis est angulus ACB angulo DEC, parallela [c] erit AC ipsi FE. parallelogrammum igitur est FACD; ac propterea FA quidem ipsi CD, AC vero ipsi FD est [d] æqualis. & quoniam uni laterum trianguli FBE, videlicet ipsi FE, parallela ducta est AC; erit [e] ut BA ad AF, ita BC ad CE. æqualis autem est AF ipsi CD. ut igitur [f] BA ad CD ita BC ad CE. & permutando ut BA ad BC ita CD ad CE. rursus quoniam CD parallela est BF, erit [e] ut BC ad CE, ita FD ad DE. sed FD est æqualis AC. ergo ut [f] BC ad CE, ita AC ad DE. permutando igitur, ut BC ad CA ita CE ad ED. itaque quoniam ostensum est, ut AB ad BC ita DC ad CE, ut autem BC ad CA ita CE ad ED: erit [g] ex æquali; ut BA ad AC ita CD ad DE. Æquianglorum igitur triangulorum proportionalia sunt latera quæ circum æquales angulos. & homologa, sive ejusdem rationis, latera sunt quæ æqualibus angulis subtenduntur. Quod demonstrare oportebat.

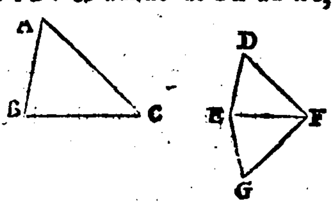


b 12. axio. primi.
c 28. primi.
d 34. primi.
e 2. hujus.
f 7. quinti.
g 22. quinti.

PROP. V. THEOR.

Si duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos quibus homologa latera subtenduntur.

Sint duo triangula ABC DEF, quæ latera proportionalia habeant, hoc est, sit ut AB quidem ad BC, ita DE ad EF: ut autem BC ad CA, ita EF ad FD: & adhuc ut BA ad AC, ita ED ad DF. Dico triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum esse, & æquales habere angulos quibus homologa latera subtenduntur, angulum quidem ABC angulo DEF, angulum vero BCA angulo EFD, & præterea angulum BAC angulo EDF. Constituatur enim [a] ad rectam lineam EF, & ad puncta in ipsa EF, angulo quidem ABC æqualis angulus FEG; angulo autem BCA angulus



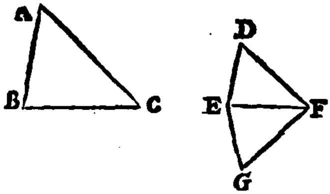
a 23. primi.

b 2. Cor. 32. primi. gulus EFG. quare reliquus BAC angulus *b* reliquo EGF est æqualis. ideoque æquiangulum est triangulum ABC triangulo EGF. triangulorum igitur ABC EGF proportionalia sunt latera quæ æqualibus angulis subtenduntur. ergo ut AB

c 4. hujus. ad BC *c*, ita GE ad EF. sed ut AB ad BC, ita DE ad EF. ut

d 11. quinti. igitur DE ad EF, ita *d* GE ad EF. quod cum utraque ipsarum DE EG ad EF eandem

e 9. quinti. proportionem habeat, erit *e* DE ipsi EG æqualis. Eadem ratione & DF æqualis FG. itaque quoniam DE est æqualis EG, communis autem EF; duæ DE EF duabus GE EF æquales sunt, & basis DF basi FG



f 8. primi. æqualis. angulus igitur DEF est æqualis *f* angulo GEF, & DEF triangulum æquale triangulo GEF, & reliqui anguli reliquis angulis æqualis, quibus æqualia latera subtenduntur. ergo angulus quidem DEF est æqualis angulo GEF, angulus vero EDF æqualis angulo EGF; & quoniam angulus DEF est æqualis angulo GEF, & angulus GEF angulo ABC, erit & angulus ABC angulo FED æqualis. eadem ratione & angulus ACB æqualis est angulo DFE, & adhuc angulus ad A angulo ad D. ergo ABC triangulum triangulo DEF æquiangulum erit. Si igitur duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula erunt triangula; & æquales habebunt angulos quibus homologa latera subtenduntur. Quod oportebat demonstrare.

PROP. VI. THEOR.

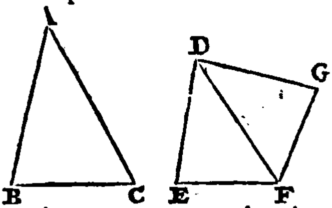
Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos quibus homologa latera subtenduntur.

Sint duo triangula ABC DEF, unum angulum BAC uni angulo EDF æqualem habentia, circa æquales autem angulos latera proportionalia, hoc est, sit ut BA ad AC, ita ED ad FD. Dico triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum esse, & angulum quidem ABC habere æqualem angulo DEF; angulum vero ACB angulo DFE.

a 23. primi. Constituatur *a* enim ad rectam lineam DF, & ad puncta in ipsa DF, alterutri angulorum BAC EDF æqualis angulus FDG, angulo autem ACB æqualis DFG. reliquus igitur

igitur ad B reliquo ad G est [b] æqualis. ergo triangulum ABC triangulo DGF æquiangulum est; ac propterea ut BA ad AC ita [c] est GD ad DF: ponitur autem & ut BA ad AC, ita ED ad DF. ut igitur [d] ED ad DF, ita GD ad DF. quare ED æqualis est [e] ipsi DG, & communis DF. ergo duæ ED DF duabus GD DF æquales sunt & angulus EDF angulo GDF est æqualis; basis igitur EF est [f] æqualis basi FG, triangulumque DEF æquale triangulo GDF, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. ergo angulus quidem DFG est æqualis angulo DFE; angulus vero ad G angulo ad E. sed angulus DFG æqualis est angulo ACB: & angulus igitur ACB angulo DFE est æqualis. ponitur autem & BAC angulus æqualis angulo EDF, ergo & reliquus qui ad B æqualis [b] est reliquo ad E. æquiangulum igitur est triangulum ABC triangulo DEF. Quare si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos quibus homologa latera subtenduntur. Quod ostendere oportebat.

[b] 2. Cor. 32. primi. [c] 4. hujus. [d] 11. quinti. [e] 9. quinti. [f] 4. primi.



PROP. VII. THEOR.

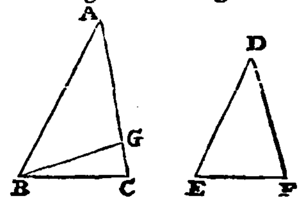
Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, & reliquorum utrumque simul, vel minorem, vel non minorem recto: æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos circa quos latera sunt proportionalia.

Sint duo triangula ABC DEF, unum angulum uni angulo æqualem habentia, videlicet angulum BAC angulo EDF æqualem, circa alios autem angulos ABC DEF latera proportionalia, ut sit DE ad EF, sicut AB ad BC: & reliquorum qui ad C F utrumque simul minorem vel non minorem recto. Dico triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum esse; angulumque ABC æqualem angulo DEF, & reliquum videlicet qui ad C reliquo qui ad F æqualem. Si inæqualis est angulus ABC angulo DEF, unus ipsorum major erit; sit major ABC: & constituatur [a] ad rectam lineam AB, & ad punctum in ipsa B, angulo DEF æqualis angulus ABG. &

[a] 23. primi.

quoniam angulus quidem A est æqualis angulo D, angulus vero ABG angulo DEF: erit reliquus AGB reliquo DFE æqualis [b]. æquiangulum igitur est ABG triangulum triangulo DEF. quare ut [c] AB ad GB, sic DE ad EF: utque DE ad EF, sic ponitur AB ad BC. ut igitur AB ad BC, sic AB ad BG. quod cum AB ad utramque BC BG eandem habeat proportionem, erit BC ipsi BG æqualis [d]: ac propterea angulus ad C est æqualis [e] angulo BGC. quare uterque angulorum BCG BGC minor est recto, igitur qui ei deinceps est AGB major est recto. atque ostensus est angulus AGB æqualis angulo qui ad F. angulus igitur qui ad F recto major est. atqui ponitur non major: cum C non est major recto, quod est absurdum. non igitur inæqualis est angulus ABC angulo DEF. ergo ipsi est æqualis. est autem & angulus ad A æqualis ei qui ad D. quare & reliquus qui ad C æqualis [b] reliquo qui ad F. æquiangulum igitur est ABC triangulum triangulo DEF. Si igitur duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, & reliquorum utrumque simul, vel minorem, vel non minorem recto: æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos circa quos proportionalia sunt latera. Quod oportebat demonstrare.

b 2. Cor. 32. primi.
c 4. hujus.
d 9 quinti.
e 5. primi.

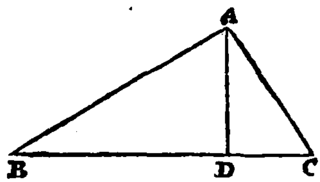


PROP. VIII. THEOR.

Si in triangulo rectangulo, ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur: quæ ad perpendicularem sunt triangula, & toti, & inter se similia sunt.

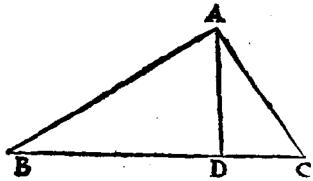
Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens angulum BAC: & à puncto A ad BC perpendicularis ducatur AD. Dico triangula ABD ADC toti triangulo ABC, & inter se similia esse. Quoniam enim angulus BAC est æqualis angulo ADB, rectus enim uterque est, & angulus ad B communis duobus triangulis ABC ABD; erit [a] reliquus ACB reliquo BAD æqualis. æquiangulum igitur est triangulum ABC triangulo ABD. quare [b] ut BC quæ subtendit angulum rectum trianguli ABC, ad BA subtendentem

a 2. Cor. 32. primi.
b 4. hujus.



tem

tem angulum rectum trianguli ABD, sic ipsa AB subtendens angulum ad C trianguli ABC, ad DB subtendentem angulum æqualem angulo ad C, videlicet BAD ipsius ABD trianguli; & adhuc AC ad AD subtendentem angulum ad B communem duobus triangulis. ergo triangulum ABC triangulo ABD æquiangulum est[c]; & circa æquales angulos latera habet proportionalia. simile igitur[a] est triangulum ABC triangulo ABD. eadem ratione demonstrabimus etiam ADC triangulum triangulo ABC simile esse. quare utrumque ipsorum ABD ADC toti ABC triangulo est simile. Dico insuper triangula ABD ADC etiam inter se similia esse. Quoniam enim angulus BDA rectus est æqualis recto ADC; sed & BAD ostensus est æqualis angulo ad C; erit reliquus ad B reliquo DAC æqualis[a]. æquiangulum igitur est triangulum ABD triangulo ADC. ergo[b] ut BD trianguli ABD subtendens BAD angulum, ad DA trianguli ADC subtendentem angulum qui est ad C, æqualem angulo BAD, sic ipsa AD trianguli ABD subtendens angulum ad B, ad DC subtendentem angulum DAC ei qui est ad B æqualem; & adhuc BA ad AC subtendentem angulum rectum ADC. simile igitur est ABD triangulum triangulo ADC. Quare si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur; quæ ad perpendicularem sunt triangula, & toti, & inter se similia sunt. Quod oportebat demonstrare.



c 1. Def. hujus.

Cor. Ex hoc manifestum est, in triangulo rectangulo, ab angulo recto ad basim perpendicularem ductam, mediam proportionalem esse inter segmenta basis: & præterea inter basim & basis segmentum utrumlibet, latus segmento conterminum medium esse proportionale.

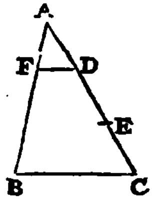
PROP. IX. PROBL.

A data recta linea imperatam partem abscindere.

Sit data recta linea AB. Oportet ab ipsa AB imperatam partem abscindere. Imperetur pars tertia; & ducatur à puncto A quædam recta linea AC, quæ cum ipsa AB angulum quemlibet contineat; sumaturque in AC quodvis punctum D, & ipsi AD æquales[a] ponantur DE EC, deinde junga-

a 3. primi.

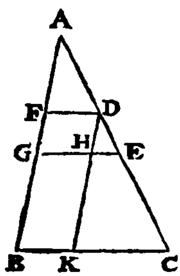
b 31.primi. jungatur BC; per D ipsi BC parallela b ducatur DF. Itaque quoniam uni laterum trianguli ABC, videlicet ipsi BC, c 2. hujus. parallela ducta est FD; erit c ut CD ad DA, ita BF ad FA; dupla autem est CD ipsius DA. ergo & BF ipsius FA dupla erit. tripla igitur est BA ipsius AF. quare à data recta linea AB imperata tertia pars AF abscissa est. Quod facere oportebat.



PROP. X. PROBL.

Datam rectam lineam insectam, data recta linea secta similiter secare.

Sit data quidem recta linea insecta AB, secta vero AC oportet rectam lineam AB insectam ipsi AC sectæ similiter secare. Sit secta AC in punctis D & E, & ponantur ita, ut angulum quemvis contineant, junctaque BC per puncta qui- a 31.primi. dem D & E ipsi BC parallelæ a ducantur DF EG: per D vero ipsi AB ducatur parallela DHK. parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum FH HB: ac pro- b 34.primi. pterea DH quidem est b æqualis FG, HK, vero ipsi GB. & quoniam uni laterum trianguli DKC, ipsi scilicet KC, parallela c 2. hujus. ducta est HE; erit c ut CE ad ED, ita KH ad HD. æqualis autem est KH quidem ipsi BG, HD vero ipsi GF. est igitur ut CE ad ED, ita BG ad GF. rursus quoniam uni laterum trianguli AGE, nimirum ipsi EG, parallela ducta est FD, ut ED ad DA, ita c erit GF ad FA. sed ostensum est ut CE ad ED, ita esse BG ad GF. ut igitur CE ad ED, ita est BG ad GF, & ut ED ad DA, ita GF ad FA. ergo data recta linea insecta AB, datæ rectæ lineæ sectæ AC similiter secta est. Quod facere oportebat.



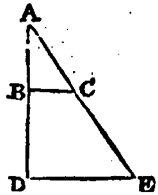
PROP. XI. PROBL.

Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem invenire.

Sint datæ duæ rectæ lineæ AB AC, & ponantur ita ut angulum quemvis contineant. Oportet ipsis AB AC

tertiam

tertiam proportionalem invenire. Producantur AB AC ad puncta D E: ponaturque ipsi AC æqualis BD; & juncta BC, ducatur [a] per D ipsi BC parallela DE. quoniam igitur uni laterum trianguli ADE, videlicet ipsi DE parallela ducta est BC, erit [b] ut AB ad BD, ita AC ad CE. æqualis autem est BD ipsi AC, ut igitur AB ad AC, ita est AC ad CE. quare datis rectis lineis AB AC tertia proportionalis inventa est CE. Quod facere oportebat.



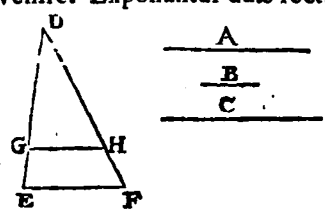
[a] 31. primi.

[b] 2. hujus.

PROP. XII. PROBL.

Tribus datis rectis lineis quartam proportionalem invenire.

Sint datæ tres rectæ lineæ A B C. Oportet ipsis A B C quartam proportionalem invenire. Exponantur duæ rectæ lineæ DE DF angulum quemvis EDF continentes: & ponatur ipsi quidem A æqualis DG, ipsi vero B æqualis GE, & ipsi C æqualis DH: junctaque GH, per E ipsi parallela [a] ducatur EF. itaque quoniam uni laterum trianguli DEF, nimirum ipsi EF, parallela ducta est GH, erit ut DG ad GE ita [b] DH ad HF. est autem DG ipsi A æqualis; GE vero æqualis B, & DH æqualis C, ut igitur A ad B, ita C ad HF. quare datis tribus rectis lineis A B C quarta proportionalis inventa est HF. Quod facere oportebat.



[a] 31. primi.

[b] 2. hujus.

PROP. XIII. PROBL.

Duabus datis rectis lineis mediam proportionalem invenire.

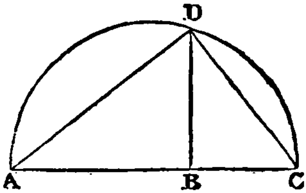
Sint datæ duæ rectæ lineæ AB BC. Oportet inter ipsas AB BC mediam proportionalem invenire. Ponantur in directum, & super ipsa AC describatur semicirculus ADC, ducaturque [a] à puncto B ipsi AC ad rectos angulos BD, & AD DC jungantur. Quoniam igitur angulus ADC est in semicirculo, is rectus [b] est. & quoniam in triangulo rectan- gulo

[a] 11. primi.

[b] 31. tertii.

gulo ADC, ab angulo recto ad basim perpendicularis ducta est DB, erit DB media proportionalis [c] inter segmenta basis AB BC. duabus igitur datis rectis lineis AB BC media proportionalis inventa est. Quod facere oportebat.

[c] Cor. 8. hujus.

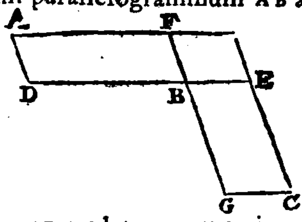


PROP. XIV. THEOR.

Æqualium, & unum uni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum latera quæ sunt circum æquales angulos, reciproca sunt: Et quorum parallelogrammorum unum uni æqualem habentium angulum, latera quæ circum æquales angulos, sunt reciproca; ea inter se sunt æqualia.

Sint æqualia parallelogramma AB BC, æquales habentia angulos ad B, & ponantur in directum DB BE. ergo & in directum [a] erunt FB BG. Dico parallelogrammorum AB BC latera quæ sunt circum æquales angulos reciproca esse: hoc est ut DB ad BE ita esse GB ad BF. Compleatur enim parallelogrammum FE. & quoniam parallelogrammum AB æquale est parallelogrammo BC, aliud autem aliquod est FE parallelogrammum, erit ut AB ad FE [b], ita BC ad FE. sed ut AB quidem ad FE, ita [c] est DB ad BE; ut autem BC ad FE, it [c] GB ad BF; ut igitur [d] DB ad BE, ita GB ad BF. ergo parallelogrammorum AB BC latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte sibi ipsius respondent. Et si reciproca sunt seu ex contraria parte sibi ipsis respondeant latera quæ sunt circum æquales angulos, sit nempe ut DB ad BE, ita GB ad BF. Dico parallelogrammum AB parallelogrammo BC æquale esse. Quoniam enim est ut DB ad BE, ita GB ad BF; ut autem DB ad BE, ita [c] AB parallelogrammum ad parallelogrammum FE, & ut GB ad BF, ita [c] BC parallelogrammum ad parallelogrammum FE; erit [d] & ut AB ad FE, ita BC ad FE. æquale igitur est AB [e] parallelogrammum parallelogrammo BC. Ergo æqualium & unum uni

[a] 14 primi.
[b] 7. quinti.
[c] 1. hujus.
[d] 11. hujus.
[e] 9. quinti.



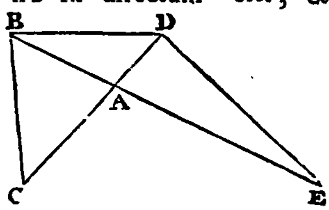
uni

uni æqualem habentium angulum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt, seu ex contraria parte sibi ipsis respondent: & quorum parallelogrammorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt, ea inter se sunt æqualia. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XV. THEOR.

Æqualium, & unum uni æqualem habentium angulum triangulorum latera, quæ circum æquales angulos, sunt reciproca: Et quorum triangulorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales augulos reciproca sunt, ea inter se sunt æqualia.

Sint æqualia triangula ABC ADE unum angulum uni angulo æqualem habentia, angulum scilicet BAC angulo DAE. Dico triangulorum ABC ADE latera quæ circum æquales angulos reciproca esse, hoc est ut CA ad AD, ita esse EA ad AB. ponantur enim ita ut in directum sit CA ipsi AD. ergo & EA ipsi AB in directum [a] erit; & [a] 14 primi. jungatur BD. Quoniam igitur triangulum ABC æquale est triangulo ADE, aliud autem est ABD; erit ut CAB triangulum ad triangulum BAD, ita [b] triangulum ADE ad triangulum BAD. sed ut triangulum quidem CAB ad BAD triangulum, ita [c] CA ad AD; ut autem triangulum EAD ad ipsum BAD, ita [c] EA ad AB. ut [d] igitur CA ad AD, ita EA ad AB. quare triangulorum ABC ADE latera, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt. Et si reciproca sunt latera triangulorum ABC ADE, scil. sit ut CA ad AD, ita EA ad AB. Dico triangulum ABC triangulo ADE æquale esse. juncta enim rursus BD, quoniam ut CA ad AD, ita est EA ad AB, ut autem CA ad AD, ita [c] ABC triangulum ad triangulum BAD; & ut EA ad AB, ita [c] triangulum EAD ad BAD triangulum, erit [d] ut ABC triangulum ad triangulum BAD, ita triangulum EAD ad BAD triangulum. utrumque igitur triangulorum ABC ADE ad triangulum BAD eandem habet proportionem; ac propterea [e] æquale est ABC triangulum



[b] 7. quinti.

[c] 1. hujus.

[d] 11. quinti

[e] 9. quinti.

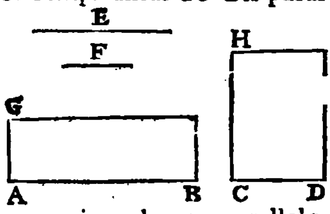
I 4

gulum triangulo ADE. Æqualium igitur, & unum uni æqualem habentium angulum triangulorum latera quæ circum æquales angulos, reciproca sunt: & quorum triangulorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos reciproca sunt, ea inter se sunt æqualia. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XVI. THEOR.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum sub extremis contentum æquale est ei rectangulo quod sub mediis continetur: Et si rectangulum sub extremis contentum æquale fuerit ei quod sub mediis continetur, quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales AB CD E F, sitque ut AB ad CD, ita E ad F. Dico rectangulum contentum sub rectis lineis AB F æquale esse ei quod sub ipsis CD E continetur. Ducantur enim [a] à punctis A C ipsis AB CD ad rectos angulos AG CH; ponaturque ipsi quidem F æqualis AG, ipsi vero E æqualis CH, & compleantur BG DH parallelogramma. Quoniam igitur est ut AB ad CD, ita E ad F; est autem E æqualis CH, & F ipsi AG: erit [b] ut AB ad CD, ita CH ad AG. parallelogrammorum igitur BG DH latera, quæ sunt circum æquales angulos, reciproca sunt; quoniam autem æquiangulorum parallelogrammorum latera, quæ sunt circum æquales angulos, reciproca sunt, ea inter se sunt [c] æqualia. ergo parallelogrammum BG æquale est parallelogrammo DH. atque est parallelogrammum quidem BG, quod sub rectis lineis AB F continetur, etenim AG est æqualis F; parallelogrammum vero DH, quod continetur sub ipsis CD E, cum CH ipsi E sit æqualis. rectangulum igitur contentum sub AB & F est æquale ei quod sub ipsis CD & E continetur. Et si rectangulum contentum sub AB F sit æquale ei quod sub CD & E continetur. Dico quatuor rectas lineas proportionales esse, videlicet ut AB ad CD, ita E ad F. iisdem enim constructis quoniam rectangulum contentum sub AB & F est æquale ei quod sub CD & E continetur, atque est contentum quidem sub A B F rectangulum BG, etenim AG est



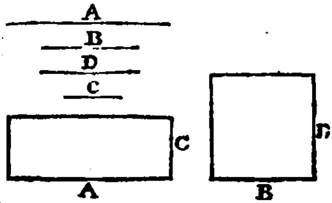
[a] 11. primi.
[b] 7. quinti.
[c] 14. hujus.

eſt æqualis F; contentum vero ſub CD E eſt rectangulum DH, quòd CH ipſi E ſit æqualis. erit parallelogrammum BG æquale parallelogrammo DH; & ſunt æquiangula. æqualium autem & æquiangulorum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca ſunt. [c] quare ut AB ad CD, ita CH ad AG, æqualis autem eſt CH ipſi E, & AG ipſi F. ut igitur AB ad CD, ita E ad F. Ergo ſi quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum ſub extremis contentum æquale eſt ei eſt quod ſub mediis continetur: & ſi rectangulum ſub extremis contentum æquale fuerit ei quod ſub mediis continetur, quatuor rectæ lineæ proportionales erunt. Quod oportebat demonſtrare.

PROP. XVII. THEOR.

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum ſub extremis contentum æquale eſt ei quod à media fit quadrato: Et ſi rectangulum ſub extremis contentum æquale fuerit ei quod à media fit quadrato, tres rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint tres rectæ lineæ proportionales A B C; & ſit ut A ad B, ita B ad C. Dico rectangulum contentum ſub AC æquale eſſe ei quod à media B fit quadrato. Ponatur ipſi B æqualis D. Et quoniam ut A ad B, ita B ad C, æqualis autem B ipſi D; erit ut A ad B[a], ita D ad C. ſi autem quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint rectangulum ſub extremis contentum eſt [b] æquale ei quod ſub mediis continetur. ergo rectangulum ſub AC contentum eſt æquale ei quod continetur ſub B D. ſed rectangulum contentum ſub B D eſt æquale quadrato quod fit ex ipſa B; etenim B eſt æqualis D. rectangulum igitur contentum ſub AC eſt æquale ei quod ex B fit quadrato. Et ſi rectangulum contentum ſub A C æquale ſit quadrato quod fit ex B. Dico ut A ad B, ita eſſe B ad C. Iiſdem enim conſtructis, quoniam rectangulum contentum ſub A C æquale eſt quadrato quod fit ex B; at quadratum quod fit ex B eſt rectangulum quod ſub ipſis B D continetur, eſt enim B æqualis ipſi D; erit rectangulum contentum ſub A C æquale ei quod ſub B D continetur. ſi autem rectangulum ſub extremis contentum æquale fuerit ei quod ſub mediis continetur, quatuor rectæ



a 7. quinti.

b 16. hujus.

lineæ

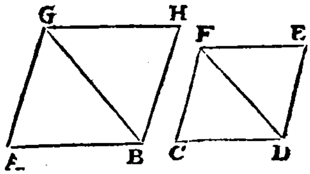
lineæ proportionales [b] erunt. eſt igitur ut A ad B, ita D ad C; æqualis autem B ipſi D. ergo ut A ad B, ita B ad C. Si igitur tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum ſub extremis contentum eſt æquale ei quod à media fit quadrato. Et ſi rectangulum ſub extremis contentum æquale fuerit ei quod à media fit quadrato, tres rectæ lineæ proportionales erunt. Quod oportebat demonſtrare.

PROP. XVIII. PROBL.

A data recta linea dato rectilineo ſimile & ſimiliter poſitum rectilineum deſcribere.

Sit data recta linea AB, datum autem rectilineum CE. Oportet à recta linea AB rectilineo CE ſimile, & ſimiliter poſitum rectilineum deſcribere. Jungatur DF, & ad rectam lineam AB, & ad puncta in ipſa A B, angulo quidem C æ-

[a] 23. primi. qualis angulus [a] conſtituatur GAB, angulo autem CDF angulus ABG. reliquus igitur CFD angulus reliquo AGB



[b] 2. Cor. 32. primi. eſt [b] æqualis. ergo æquiangulum eſt FCD triangulum triangulo GAB; ac propte-

[c] 4. hujus. rea [c] ut FD ad GB, ita FC ad GA, & CD ad AB. rurſus conſtituatur ad rectam lineam BG, & ad puncta in ipſa B G, angulo quidem DFE æqualis angulus BGH, angulo quidem FDE æqualis GBH. ergo reliquus [b] ad E reliquo ad H eſt æqualis. æquiangulum igitur eſt triangulum FDE triangulo GBH. quare ut [c] FD ad GB, ita FE ad GH, & ED ad HB. oſtenſum autem eſt & ut FD

[d] 11. quinti. ad GB, ita FC ad GA, & CD ad AB: & ut igitur [b] FC ad AG, ita CD ad AB, & FE ad GH, & adhuc ED ad HB. itaque quoniam angulus quidem CFD eſt æqualis angulo AGB; angulus autem DFE angulo BGH. erit totus CFE angulus toti AGH æqualis. eadem ratione & CDE eſt æqualis ipſi ABH, & præterea angulus quidem ad C angulo ad A æqualis, angulus vero ad E angulo ad H. æquiangulum igitur eſt AH ipſi CE, & latera circum æquales ipſis angulos habet proportionalia. ergo rectilineum AH rectilineo CE ſi-

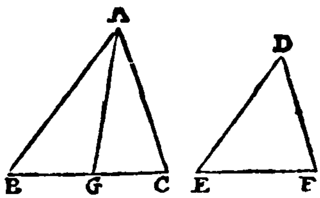
[e] 1. Def. hujus. mile [e] erit: A data igitur recta linea AB dato rectilineo CE ſimile, & ſimiliter poſitum rectilineum AH deſcriptum eſt. Quod facere oportebat.

PROP.

PROP. XIX. THEOR.

Similia triangula inter se sunt in duplicata proportione laterum homologorum.

Sint similia triangula ABC DEF habentia angulum ad B æqualem angulo ad E, & sit ut AB ad BC, ita DE ad EF, ita ut latus BC homologum sit lateri EF. Dico ABC triangulum ad triangulum DEF duplicatam proportionem habere ejus quam habet BC ad EF. Sumatur enim ipsis [a] BC EF tertia proportionalis BG, ut sit BC ad EF ita EF ad BG. & jungatur GA. Quoniam igitur ut AB ad BC, ita est DE ad EF; erit permutando ut AB ad DE, ita BC ad EF. sed ut BC ad EF, ita EF ad BG. ut [b] igitur AB ad DE, ita EF ad BG. quare triangulorum ABG DEF latera, quæ sunt circum æquales angulos, reciproca sunt. quorum autem triangulorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt, ea inter se æqualia [c] sunt. æquale igitur est ABG triangulum triangulo DEF. & quoniam est ut BC ad EF, ita EF ad BG; si autem tres rectæ lineæ proportionales sint, prima ad tertiam duplicatam proportionem [d] habet ejus quam habet ad secundam: habebit igitur BC ad BG duplicatam proportionem ejus quam habet BC ad EF. ut autem BC ad BG, ita ABC triangulum ad triangulum ABG [e]. ergo & ABC triangulum ad triangulum ABG duplicatam proportionem habet ejus quam BC habet ad EF. est autem ABG triangulum triangulo DEF æquale. & triangulum igitur ABC [f] ad triangulum DEF duplicatam proportionem habebit ejus quam habet BC ad EF. Quare similia triangula inter se sunt in duplicata proportione laterum homologorum. Quod ostendere oportebat.



[a] 11. hujus.
[b] 11. quinti.
[c] 15. hujus.
[d] 10. Def. quinti.
[e] 1. hujus.
[f] 7. quinti.

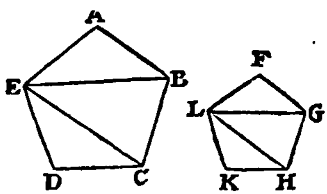
Cor. Ex hoc manifestum est, si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad tertiam, ita esse triangulum, quod fit à prima ad triangulum quod à secunda simile, & similiter descriptum; quoniam ostensum est ut CB ad BG, ita ABC triangulum ad triangulum ABG, hoc est ad triangulum DEF. Quod ostendere oportebat.

PROP.

PROP. XX. THEOR.

Similia polygona in similia triangula dividuntur, & numero æqualia, & homologa totis; & polygonum ad polygonum duplicatam proportionem habet ejus quam latus homologum habet ad homologum latus.

Sint similia polygona ABCDE FGHKL, & sit AB homologum ipsi FG. Dico polygona ABCDE FGHKL in similia triangula dividi, & numero æqualia, & homologa totis; & polygonum ABCDE ad polygonum FGHKL duplicatam proportionem habere ejus quam habet AB ad FG. Jungantur BE EC GL LH. Et quoniam simile est ABCDE polygonum polygono FGHKL, angulus BAE angulo GFL est [a] æqualis, atque est ut BA ad AE, ita GF ad FL. quoniam igitur duo triangula sunt ABE FGL unum angulum uni angulo æqualem habentia, circum æquales autem angulos latera proportionalia. erit [b] triangulum ABE triangulo FGL æquiangulum; ergo [c] & simile. angulus igitur ABE æqualis est angulo FGL. est autem & totus ABC angulus æqualis [a] toti FGH, propter similitudinem polygonorum. ergo reliquus EBC reliquo LGH est æqualis. & quoniam ob similitudinem triangulorum ABE FGL, est [a] ut EB ad BA, ita LG ad GF. sed & propter similitudinem polygonorum [a], ut AB ad BC, ita est FG ad GH; erit ex æquali ut [d] EB ad BC, ita LG ad GH. hoc est circum æquales angulos EBC LGH latera sunt proportionalia; æquiangulum igitur [b] est EBC triangulum triangulo LGH. quare & [c] simile. eadem ratione & ECD triangulum simile est triangulo LHK. similia igitur polygona ABCDE FGHKL in similia triangula dividuntur, & numero æqualia. Dico & homologa totis: hoc est ut proportionalia sint triangula, & antecedentia quidem sunt ABE EBC ECD, consequentia autem ipsorum FGL LGH LHK; & ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL duplicatam proportionem habere ejus quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc est AB ad FG. quoniam enim simile est ABE triangulum triangulo FGL, habebit ABE triangulum ad triangulum FGL duplicatam proportionem [e] ejus quam habet BE ad GL. eadem ratione, & triangulum BEC ad GLH triangulum duplicatam [d] proportionem habet ejus quam BE ad GL. est [f] igitur ut ABE trian-



a 1. Def. hujus.
b 6. hujus.
c 4. hujus.
d 22. quinti.
e 19. hujus.
f 11 quinti.

triangulum ad triangulum FGL, ita triangulum BEC ad GLH triangulum. rursus quoniam simile est triangulum EBC triangulo LGH, habebit EBC triangulum ad triangulum LGH duplicatam proportionem e ejus quam recta linea CE habet ad rectam HL. eadem ratione & ECD triangulum ad triangulum LHK duplicatam proportionem habet ejus quam CE ad HL. est f igitur ut triangulum BEC ad triangulum LGH, ita CED triangulum ad triangulum LHK. ostensum autem est & ut EBC triangulum ad triangulum LGH, ita triangulum ABE ad triangulum FGL. ergo ut triangulum ABE ad triangulum FGL, ita triangulum BEC ad GHL triangulum, & triangulum ECD ad ipsum LHK. & igitur ut unum antecedentium ad unum consequentium g, g 12. quinti.
sic omnia antecedentia ad omnia consequentia. ergo ut triangulum ABE ad triangulum FGL, ita ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL: sed ABE triangulum ad triangulum FGL duplicatam proportionem habet ejus quam latus homologum AB habet ad homologum latus FG, similia enim triangula in duplicata h sunt proportione laterum ho- h 19. hujus.
mologorum. ergo & ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL duplicatam proportionem habet ejus quam AB latus homologum habet ad FG homologum latus. Similia igitur polygona in similia triangula dividuntur, & numero æqualia, & homologa totis; & polygonum ad polygonum duplicatam habet proportionem ejus quam habet latus homologum ad homologum latus. Quod demonstrare oportebat.

Eodem modo & in similibus quadrilateris ostendetur ea esse in duplicata proportione laterum homologorum. ostensum autem est in triangulis.

COROLL.

1. Ergo universæ similes figuræ rectilineæ inter se sunt in duplicata proportione homologorum laterum. & si ipsis AB FG tertiam proportionalem sumamus, quæ sit X; habebit AB ad X duplicatam proportionem ejus quam habet AB ad FG. habet autem & polygonum ad polygonum, & quadrilaterum ad quadrilaterum duplicatam proportionem ejus quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc est AB ad FG. atque ostensum est hoc in triangulis.

2. Uni-

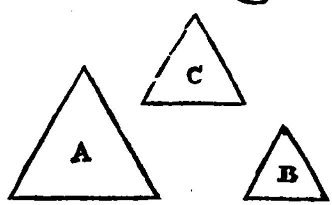
2. Universe igitur manifestum est, si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad tertiam, ita esse figuram quæ fit à prima, ad eam quæ à secunda, similem & similiter descriptam. Quod ostendere oportebat.

PROP. XXI. THEOR.

Quæ eidem rectilineo sunt similia, & inter se similia sunt.

Sit enim utrumque rectilineorum A B simile rectilineo C. Dico & rectilineum A rectilineo B simile esse. Quoniam enim simile est A rectilineum rectilineo C, & ipsi æquiangulum [a] erit, & circum æquales angulos latera habebit proportionalia. rursus quoniam simile est rectilineum B rectilineo C, æquiangulum ipsi erit, & circum æquales angulos latera proportionalia habebit [a]. utrumque igitur rectilineorum A B ipsi C æquiangulum est & circum æquales angulos latera habet proportionalia. quare & rectilineum A ipsi B est æquiangulum, lateraque circum æquales angulos proportionalia habet; ac propterea [a] A ipsi B est simile. Quod demonstrare oportebat.

a 1. Def. hujus.



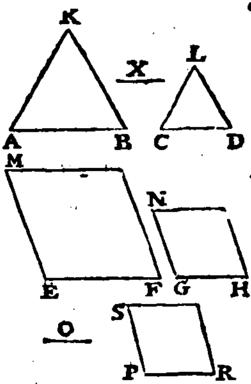
PROP. XXII. THEOR.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, & rectilinea quæ ab ipsi fiunt, similia, & similiter descripta proportionalia erunt. & si rectilinea quæ ab ipsis fiant, similia, & similiter descripta, proportionalia fuerint, & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales AB CD EF GH, & ut AB ad CD, ita sit EF ad GH. Describanturque [a] ab ipsis quidem AB CD similia, & similiter posita rectilinea KAB LCD: ab ipsis vero EF GH describantur rectilinea similia, & similiter posita MF NH. Dico ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita esse rectilineum MF ad ipsam NH rectilineum. Sumatur ipsis [b] quidem AB CD tertia proportionalis X; ipsis vero EF GH tertia proportionalis O. Et quoniam est ut AB ad CD, ita EF ad GH: ut autem CD ad X, ita GH ad O; erit ex æquali [c] ut AB ad X, ita EF ad O. sed ut AB quidem ad X, ita est [d] rectilineum KAB ad LCD rectilineum

a 18. hujus
b 11. hujus.
c 22. quinti.
d 2. Cor. 20. hujus.

lineum, ut autem EF ad O, ita [d] rectilineum MF ad rectilineum NH. ut igitur KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita est [e] rectilineum MF ad NH rectilineum. Et si sit ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita rectilineum MF ad rectilineum NH. Dico ut AB ad CD, ita esse EF ad GH. fiat enim ut AB ad CD, ita EF ad [f] PR, & describatur [a] ab ipsa PR alterutri rectilineorum MF NH simile, & similiter positum rectilineum SR. quoniam igitur est ut AB ad CD, ita EF ad PR, & descripta sunt ab ipsis quidem AB CD similia, & similiter posita KAB LCD rectilinea, ab ipsis vero EF PR similia & similiter posita rectilinea MF SR, erit [g] ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita rectilineum MF ad SR rectilineum: ponitur autem & ut rectilineum KAB ad rectilineum LCD, ita MF rectilineum ad rectilineum NH. ergo ut rectilineum MF ad rectilineum NH, ita MF rectilineum ad rectilineum SR. quod cum rectilineum MF ad utrumque ipsorum NH SR eandem habeat proportionem, erit [h] rectilineum NH ipsi SR æquale. est autem ipsi simile, & similiter positum. ergo GH est æqualis PR. & quoniam ut AB ad CD, ita est EF ad PR: æqualis autem PR ipsi GH; erit ut AB ad CD, ita EF ad GH. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, & rectilinea quæ ab ipsis fiunt, similia, & similiter descripta proportionalia erunt: & si rectilinea quæ ab ipsis fiunt, similia, & similiter descripta proportionalia fuerint, & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt. Quod oportebat demonstrare.



[e] 11. quinti.

[f] 12. hujus.

[g] ex prius demonstratis.

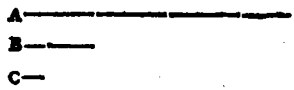
[h] 9. quinti.

LEMMA.

Positis tribus rectis quibuscunque A, B *&* C; *ratio primæ* A *ad tertiam* C, *æqualis est rationi compositæ ex ratione primæ* A *ad secundam* B, *& ratione secundæ* B *ad tertiam* C.

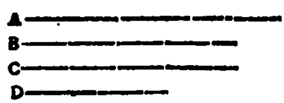
Sit V. G. *numerus ternarius exponens seu denominator rationis* A *ad* B, *hoc est sit* A *tripla ipsius* B, *& sit numerus quaternarius exponens rationis* B *ad* C, *erit numerus duodenarius ex numeri ternarii & quaternarii multiplicatione compo-*

compositus exponens rationis A *ad* C; *nam quia* A *continet* B *ter,* & B *continet* C *quater, continebit* A *ipsum* C *ter quater, seu duodecies. idem de aliis multiplicibus vel submultiplicibus verum est. Universalis vero hujus Theorematis demonstratio talis est; Quantitas rationis* A *ad* B *est numerus* $\frac{A}{B}$, *scil. qui multiplicans consequentem producit antecedentem. Et similiter quantitas rationis* B *ad* C *est* $\frac{B}{C}$ *Atque hæ duæ quantitates inter se multiplicatæ efficiunt numerum* $\frac{A \times B}{B \times C}$ *qui est quantitas rationis quam rectangulum comprehensum sub rectis* A & B *habet ad rectangulum sub* B & C *rectis. Adeoque dicta ratio rectanguli sub* A & B, *ad rectangulum sub* B & C *ea est quæ in sensu def.* 5. *hujus, componitur ex rationibus* A *ad* B & B *ad* C. *sed per* 1. 6. *rectangulum sub* A & B, *est ad rectangulum sub* B & C, *ut* A *ad* C. & *igitur ratio* A *ad* C *æqualis est rationi compositæ ex rationibus* A *ad* B, & B *ad* C.



Positis vero quatuor rectis quibuscunque A, B, C, & D; *Ratio primæ* A *ad quartam* D *æqualis est rationi compositæ ex ratione primæ* A *ad secundam* B, & *ratione secundæ* B *ad tertiam* C, & *ratione tertiæ* C *ad quartam* D.

Nam in tribus rectis A, C, & D, *ratio* A *ad* D *æqualis est rationi compositæ ex rationibus* A *ad* C, & C *ad* D. *Et hactenus est ostensum rationem* A *ad* C *æqualem esse rationi compositæ ex rationibus* A *ad* B & B *ad* C. *Et igitur ratio* A *ad* D *æqualis est rationi compositæ ex rationibus* A *ad* B, B *ad* C & C *ad* D. *Similiter ostendetur, in quotcunque rectis, rationem primæ ad ultimam æqualem esse rationi compositæ ex rationibus primæ ad secundam, secundæ ad tritiam, tertiæ ad quartam,* & *ita deinceps usque ad ultimam.*

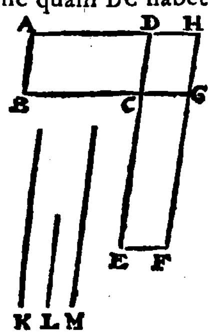


Si exponantur aliæ magnitudines quælibet, præter rectas, idem obtinebit. Quod constabit si concipiantur tot rectæ A, B, C &c. *ordine positæ quot sunt magnitudines,* & *in eadem ratione: ita* viz. *ut recta* A *sit ad rectam* B *ut prima magnitudo ad secundam,* & *recta* B *ad rectam* C *ut secunda magnitudo ad tertiam,* & *ita porro. Manifestum est per* 22. 5. *esse ex æquo rectam* A *ad ultimam rectam sicut prima magnitudo ad ultimam. Sed ratio rectæ* A *ad ultimam rectam æqualis est rationi compositæ ex rationibus* A *ad* B, B *ad* C, & *ita*

ita porro usque ad ultimam rectam. Et, ex hypothesi, ratio cujuslibet rectæ ad sibi proximam, eadem est cum ratione magnitudinis ejusdem ordinis ad sibi proximam. Et igitur ratio primæ magnitudinis ad ultimam, æqualis est rationi compositæ ex rationibus primæ magnitudinis ad secundam, secundæ ad tertiam, & ita deinceps usque ad ultimam. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXIII. THEOR.

Æquiangula parallelogramma inter se proportionem habent ex lateribus compositam.



Sint æquiangula parallelogramma AC CF æqualem habentia BCD angulum angulo ECG. Dico parallelogrammum AC ad parallelogrammum CF proportionem habere compositam ex lateribus, videlicet compositam ex proportione quam habet BC ad CG, & ex proportione quam DC habet ad CE. Ponatur enim ut BC sit in directum ipsi CG. ergo & DC ipsi CE in directum [a] erit: & compleatur DG parallelogrammum: exponaturque recta linea quædam K, & fiat ut BC ad CG, ita [b] K ad L, ut autem DC ad CE, ita L ad M. proportiones igitur ipsius K ad L, & L ad M eædem sunt quæ proportiones laterum videlicet BC ad CG, & DC ad CE. sed proportio K ad M composita est [c] ex proportione K ad L, & proportione L ad M. quare & K ad M proportionem habet ex lateribus compositam. & quoniam est ut BC ad CG [d], ita AC parallelogrammum ad parallelogrammum CH; sed ut BC ad CG, ita K ad L: erit [e] ut K ad L, ita parallelogrammum AC ad CH parallelogrammum. rursus quoniam est ut DC ad CE, ita CH parallelogrammum ad parallelogrammum CF: ut autem DC ad CE, ita L ad M. ergo ut L ad M, ita erit [e] parallelogrammum CH ad CF parallelogrammum. itaque cum ostensum sit ut K quidem ad L ita AC parallelogrammum ad parallelogrammum CH: ut autem L ad M, ita parallelogrammum CH ad CF parallelogrammum; erit [f] ex æquali ut K ad M, ita AC parallelogrammum ad ipsum CF. habet autem K ad M proportionem ex lateribus compositam. ergo & AC parallelogrammum ad parallelogrammum CF proportionem habebit compositam ex lateribus. Æquiangula igitur parallelogramma

[a] 14. primi.
[b] 12. hujus.
[c] per Lemma superius.
[d] 1. hujus.
[e] 11. quinti.
[f] 22. quinti.

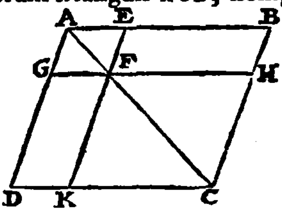
K

lelogramma inter se proportionem habent ex lateribus compositam. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXIV. THEOR.

Omnis parallelogrammi, quæ circa diametrum sunt parallelogramma, & toti, & inter se similia sunt.

Sit parallelogrammum ABCD, cujus diameter AC: circa diametrum vero AC parallelogramma sint EG HK. Dico parallelogramma EG HK & toti ABCD, & inter se similia esse. Quoniam enim uni laterum trianguli ABC, videlicet ipsi BC parallela ducta est EF, erit [a] ut BE ad EA, ita CF ad FA. quoniam rursus uni laterum trianguli ACD, nempe ipsi CD ducta est parallela



[a] 2. hujus. FG, ut CF ad FA, ita [a] erit DG ad GA. sed ut CF ad FA ita ostensa est & BE ad EA. ergo & ut BE ad

[b] 11 quinti. EA, ita [b] DG ad GA, com-

[c] 18. quinti. ponendoque [c] ut BA ad AE, ita DA ad AG. & permutando ut BA ad AD, ita EA ad AG. parallelogrammorum igitur ABCD & EG latera, quæ circa communem angulum BAD, proportionalia sunt. & quoniam parallela est GF ipsi

[d] 29. primi. DC, angulus quidem AGF est [d] æqualis angulo ADC, angulus vero GFA æqualis angulo DCA, & angulus DAC est communis duobus triangulis ADC AGF; erit igitur triangulum ADC triangulo AGF æquiangulum. eadem ratione & triangulum ACB æquiangulum est triangulo AFE. totum igitur parallelogrammum ABCD parallelogrammo EG est æ-

[e] 4. hujus. quiangulum. ergo ut AD ad DC, ita [e] AG ad GF, ut autem DC ad CA, ita GF ad FA, & ut AC ad CB, ita AF ad FE, & præterea ut CB ad BA, ita FE ad EA. itaque quoniam ostensum est ut DC ad CA, ita esse GF ad FA, ut autem

[f] 22. quinti. AC ad CB, ita AF ad FE; erit [f] ex æquali ut DC ad CB, ita GF ad FE. ergo parallelogrammorum ABCD & EG proportionalia sunt latera quæ circum æquales angulos, ac propte-

[g] 1. Def. hujus. rea [g] parallelogrammum ABCD parallelogrammo EG est simile. eadem ratione, & parallelogrammum ABCD simile est parallelogrammo KH. utrumque igitur ipsorum EG HK parallelogrammorum, parallelogrammo ABCD est simile. quæ autem eidem rectilineo sunt similia, & inter se similia

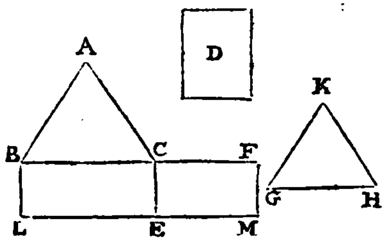
[h] 21. hujus. [h] sunt. parallelogrammum igitur EG simile est parallelogrammo HK. Quare omnis parallelogrammi, quæ circa diametrum

metrum sunt parallelogramma, & toti, & inter se sunt similia. Quod ostendere oportebat.

PROP. XXV. PROBL.

Dato rectilineo, simile, & alteri dato æquale idem constituere.

Sit datum quidem rectilineum cui oportet simile constituere ABC, cui autem æquale sit D. Oportet ipsi ABC simile, & ipsi D æquale idem constituere. Applicetur [a] ad rectam quidem lineam BC rectilineo ABC æquale parallelogrammum BE. ad rectam vero CE applicetur [b] parallelogrammum CM æquale ipsi D, in angulo FCE, qui CBL angulo est æqualis. in directum igitur [c] est BC ipsi CF, & LE ipsi EM. sumantur [d] inter BC CF media proportionalis GH, & [e] ab ipsa GH describatur rectilineum KGH simile & similiter positum rectilineo ABC. Et quoniam est ut BC ad GH, ita GH ad CF, si autem tres rectæ lineæ proportionales sint, ut prima ad tertiam [f], ita est figura quæ fit à prima, ad eam quæ à secunda, similem & similiter descriptam: erit ut BC ad CF. ita ABC rectilineum ad rectilineum KGH. sed & ut BC ad CF, ita [g] parallelogrammum BE ad EF parallelogrammum, ut [h] igitur rectilineum ABC ad rectilineum KGH, ita BE parallelogrammum ad parallelogrammum EF. quare [i] permutando ut ABC rectilineum ad parallelogrammum BE, ita rectilineum KGH ad FE parallelogrammum. est autem rectilineum ABC æquale parallelogrammo BE. æquale igitur est & KGH rectilineum parallelogrammo EF. sed EF parallelogrammum æquale est rectilineo D. ergo & rectilineum KGH ipsi D est æquale: est autem GKH simile rectilineo ABC. Dato igitur rectilineo ABC simile, & alteri dato D æquale idem constitutum est KGH. Quod facere oportebat.

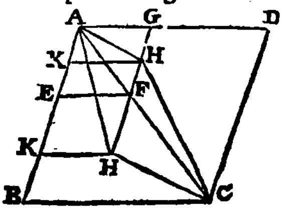


a 44. primi.
b 45. primi.
c 14. primi.
d 13. hujus.
e 18. hujus.
f 2. Cor. 20. hujus.
g 1. hujus.
h 11. quinti.
i 16. quinti.

PROP. XXVI. THEOR.

Si à parallelogrammo parallelogrammum auferatur ſimile toti, & ſimiliter poſitum, communem ipſi angulum habens, circa eandem diametrum eſt toti.

A parallelogrammo enim ABCD parallelogrammum AF auferatur, ſimile ipſi ABCD, & ſimiliter poſitum communem ipſi angulum habens DAB. Dico parallelogrammum ABCD circa eandem eſſe diametrum parallelogrammo AF. Non enim, ſed ſi fieri poteſt, ſit parallelogrammi BD diameter AHC, & producatur GF uſque ad H; ducaturque per H alterutri ipſarum AD BC parallela HK. Quoniam igitur circa eandem diametrum eſt ABCD parallelogrammum



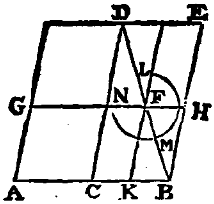
a 24. hujus parallelogrammo KG; & erit a parallelogrammum ABCD
b 1. Def. hujus. parallelogrammo KG ſimile. ergo ut b DA ad AB, ita GA ad AK. eſt autem & propter ſimilitudinem parallelogrammo-
c 11. quinti. rum ABCD EG, ut DA ad AB, ita GA ad AE. & c igitur ut GA ad AE, ita GA ad AK. quòd cum GA ad utramque
d 9. quinti. ipſarum AK AE eandem proportionem habeat; erit d AE ipſi AK æqualis, minor majori, quod fieri non poteſt. non igitur circa eandem diametrum eſt ABCD parallelogrammum parallelogrammo AH. quare circa eandem diametrum erit ipſi AF. Si igitur à parallelogrammo parallelogrammum auferatur ſimile toti, & ſimiliter poſitum, communem ipſi angulum habens, circa eandem diametrum eſt toti. Quod demonſtrare oportebat.

PROP. XXVII. THEOR.

Omnium parallelogrammorum ſecundum eandem rectam lineam applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis, ſimilibus & ſimiliter poſitis ei quæ à dimidia deſcribitur, maximum eſt quod ad dimidiam eſt applicatum, ſimile exiſtens defectui.

Sit recta linea AB; ſeceturque bifariam in C; & ad AB rectam lineam applicetur parallelogrammum AD deficiens figura parallelogramma CE, ſimili & ſimiliter poſita ei quæ à dimidia ipſius AB deſcripta eſt. Dico omnium paralle-

parallelogrammorum ad rectam lineam AB applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis similibus, & similiter positis ipsi CE, maximum esse AD. Applicetur enim ad rectam lineam AB parallelogrammum AF, deficiens figura parallelogramma HK simili, & similiter posita ipsi CE. Dico AD parallelogrammum parallelogrammo AF majus esse.



Quoniam enim simile est parallelogrammum CE parallelogrammo HK, circa eandem diametrum [a] sunt. ducatur eorum diameter DB, & describatur figura. quoniam igitur CF [b] est æquale ipsi FE, commune apponatur HK. totum igitur CH toti KE est æquale. sed CH est [c] æquale GC, quoniam & recta linea AC ipsi CB. ergo & GC ipsi EK æquale est. commune apponatur CF. totum igitur AF est æquale gnomoni LMN: quare & CE, hoc est AD parallelogrammum parallelogrammo AF est majus. Omnium igitur parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis similibus, & similiter positis ei quæ à dimidia describitur, maximum est quod ad dimidiam est applicatum. Quod demonstrare oportebat..

[a] 26. hujus.
[b] 43. primi.
[c] 36. primi.

PROP. XXVIII. PROBL.

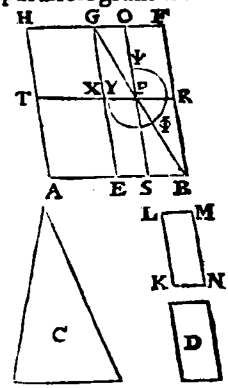
Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma quæ similis sit alteri datæ: oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non majus esse eo quod ad dimidiam applicatur, similibus existentibus defectibus, & eo quod à dimidia, & eo cui oportet simile deficere.

Sit data quidem recta linea AB: datum autem rectilineum, cui oportet æquale ad datam rectam lineam AB applicare, sit C, non majus existens eo quod ad dimidiam applicatum est, similibus existentibus defectibus: cui autem oportet simile deficere sit D. Oportet ad datam rectam lineam AB, dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit ipsi D. Secetur AB bifariam in E, & ab ipsa EB describatur [a] simile, & similiter positum ipsi D; quod sit EBFG, & compleatur AG parallelogrammum. itaque AG vel æquale est ipsi C, vel eo

[a] 18. hujus.

 majus,

majus, ob determinationem: & si quidem AG sit æquale C, factum jam erit quod proponebatur: etenim ad rectam lineam AB dato rectilineo C æquale parallelogrammum AG applicatum est, deficiens figura parallelogramma EF ipsi D simili. si autem non est æquale, erit HE majus quàm C; atque EF æquale est HE. ergo, & EF quàm C est majus. quo autem EF superat C, ei excessui æquale, ipsi vero D simile & similiter
a 25. hujus. positum, idem [a] constituatur KLMN. sed D est simile EF. quare & KM ipsi EF simile erit. sit igitur recta linea KL homologa ipsi GE, LM vero ipsi GF. & quoniam æquale est EF ipsis C & KM, erit EF ipso KM ma-
b Cor. 20. hujus. jus. major [b] igitur est recta linea GE ipsa KL & GF ipsa LM. ponatur GX æqualis KL, & GO æqualis LM, & compleatur XGOP parallelogrammum. æquale igitur est & simile XO ipsi KM.
c 21. hujus. sed KM simile est EF. ergo & [c] XO ipsi EF est simile. circa
d 26. hujus. eandem igitur est [d] diametrum XO ipsi EF. sit ipsorum diameter GPB & figura describatur. itaque quoniam EF est æquale ipsis C & KM simul, quorum XO est æquale KM, erit reliquus ΥΦΨ gnomon æqualis reliquo C. & quoniam
e 43. primi. OR est [e] æquale XS, commune apponatur SR. totum igitur
f 36. primi. OB toti XB est æquale. sed XB est [f] æquale TE, quoniam & latus AE lateri EB. quare & TE ipsi OB æquale. commune apponatur XS. ergo totum TS est æquale toti gnomoni ΥΦΨ. at ΥΦΨ gnomon ipsi C ostensus est æqualis: & TS igitur ipsi C æquale erit. Quare ad datam rectam lineam AB, dato rectilineo C, æquale parallelogrammum TS applicatum est, deficiens figura parallelogramma SR ipsi D simili, quoniam & SR simile est ipsi GB. Quod facere oportebat.

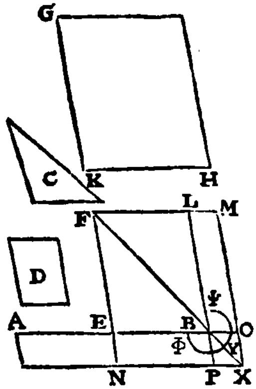


PROP. XXIX. PROBL.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri datæ.

Sit data recta linea AB, datum vero rectilineum, cui oportet æquale ad ipsam AB applicare, sit C; cui autem oportet simile excedere D. Oportet ad rectam lineam dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicare, excedens figura

figura parallelogramma simili D. Secetur AB bifariam in E, atque ex EB ipsi D simile, & similiter [a] positum parallelogrammum describatur EL. & utriusque quidem EL & C æquale, ipsi vero D simile, & similiter positum idem [b] constituatur GH. simile igitur est GH ipsi EL. sitque KH quidem latus homologum lateri FL, KG vero ipsi FE. & quoniam parallelogrammum GH majus est ipso EL, erit recta linea KH major quàm FL, & KG major quàm FE. producantur FL FE, & ipsi quidem KH æqualis sit FLM, ipsi vero KG æquails FEN, & compleatur MN parallelogrammum. ergo MN æquale est & simile ipsi GH. sed GH est simile EL; MN igitur ipsi EL simile [c] erit; ac propterea circa eandem diametrum [d] est EL ipsi MN. ducatur ipsorum diameter FX, & figura describatur. itaque quoniam GH ipsi EL & C est æquale, sed GH est æquale MN; erit & MN æquale ipsi EL & C. commune auferatur EL. reliquus igitur ΦΥΨ gnomon ipsi C est æqualis. sed quoniam AE est æqualis EB, æquale [e] erit & AN parallelogrammum parallelogrammo EP, hoc est ipsi [f] LO. commune apponatur EX. totum igitur AX æquale est gnomoni ΦΥΨ. sed ΦΥΨ gnomon est æqualis C. ergo & AX ipsi C erit æquale. Ad datam igitur rectam lineam AB dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicatum est AX, excedens figura parallelogramma PO, ipsi D simili, quoniam & ipsi EL simile [g] est OP. Quod fecisse oportebat.



a 18. hujus.
b 25. hujus.
c 21. hujus.
d 26. hujus.
e 36. primi.
f 43. primi.
g 24. hujus.

PROP. XXX. PROBL.

Datam rectam lineam terminatam extrema ac media ratione secare.

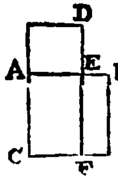
Sit data recta linea terminata AB oportet ipsum AB extrema ac media ratione secare. Describatur [a] ex AB quadratum BC, & ad AC ipsi BC æquale parallelogrammum [b] applicetur CD, excedens [b] figura AD ipsi BC simili. quadratum autem est BC, ergo & AD quadratum erit. & quoniam BC est æquale CD; commune auferatur CE. reliquum igitur BF reliquo AD est æquale. est autem & ipsi æquiangulum. ergo ipsorum BF AD latera, quæ circum æquales

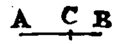
a 46. primi.
b 29. hujus.

e 14. hujus. angulos, reciproce sunt e proportionalia. ut igitur FE ad ED, ita est AE ad EB. est autem FE æqualis d AC, hoc est ipsi AB; & ED ipsi AE. quare ut BA ad AE, ita AE ad EB. sed AB major est quam AE. ergo AE quam EB est e major. recta igitur linea AB extrema, ac media ratione secta est in E. & majus ipsius segmentum est AE. Quod facere oportebat.

d 34. primi.

e 14. quinti.





Aliter. Sit data recta linea AB. Oportet ipsam AB extrema ac media ratione secare. Secetur enim AB in C, ita ut rectangulum f quod continetur sub AB BC æquale sit quadrato ex AC. Quoniam igitur rectangulum sub AB BC æquale est quadrato ex AC, erit g ut BA ad AC ita AC ad CB. ergo AB recta linea extrema ac media ratione secta est. Quod facere oportebat.

f 11. secundi.

g 17. hujus.

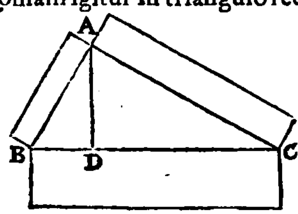
PROP. XXXI. THEOR.

In rectangulis triangulis figura quæ fit à latere rectum angulum subtendente, æqualis est eis quæ à lateribus rectum angulum contentibus fiunt, similibus, & similiter descriptis.

Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens angulum BAC. Dico figuram, quæ fit ex BC æqualem esse eis quæ ex BA AC fiunt similibus, & similiter descriptis. Ducatur perpendicularis AD. Quoniam igitur in triangulo rectangulo ACB ab angulo recto, qui est ad A, ad BC basim perpendicularis ducta est AD, erunt a triangula ABD ADC quæ sunt ad perpendicularem similia toti ABC, & inter se. & quoniam simile est ABC triangulum triangulo ABD, erit ut a CB ad BA, ita BA ad BD. quod cum tres rectæ lineæ proportionales sint, ut prima ad tertiam, ita erit b figura quæ fit ex prima ad eam quæ ex secunda, similem, & similiter descriptam. ut igitur CB ad BD, ita figura quæ fit ex CB ad eam quæ ex BA, similem & similiter descriptam. eadem ratione, & ut BC ad CD, ita figura quæ fit ex BC ad eam quæ ex CA. quare & ut BC ad ipsas,

a 8. hujus.

b 2. Cor. 20. hujus.

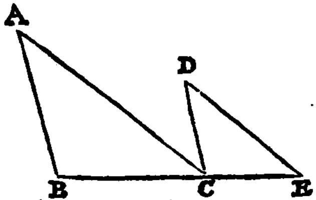


ipsas BD DC, ita [c] figura quæ ex BC ad eas quæ ex BA AC, similes, & similiter descriptas. æqualis autem est BC ipsis BD DC. ergo figura quæ fit ex BC æqualis est eis quæ ex BA AC fiunt, similibus, & similiter descriptis. In rectangulis igitur triangulis, figura quæ fit à latere rectum angulum subtendente, æqualis est eis quæ à lateribus rectum angulum continentibus fiunt, similibus, & similiter descriptis. Quod ostendere oportebat. c 24.quinti.

PROP. XXXII. THEOR.

Si duo triangula componantur ad unum angulum, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ita ut homologa latera ipsorum etiam sint parallela, reliqua triangulorum latera in directum sibi ipsis constituta erunt.

Sint duo triangula ABC DCE quæ duo latera BA AC duobus lateribus CD DE proportionalia habeant, scil. sit sicut BA ad AC, ita CD ad DE; parallela autem sit AB ipsi DC & AC ipsi DE. Dico BC ipsi CE in directum esse. Quoniam enim AB parallela est DC, & in ipsas incidit recta linea AC; erunt [a] anguli alterni BAC ACD æquales inter se. eadem ratione, & angulus CDE æqualis est angulo ACD. quare & BAC ipsi CDE est æqualis. & quoniam duo triangula sunt ABC DCE, unum angulum a 29.primi.



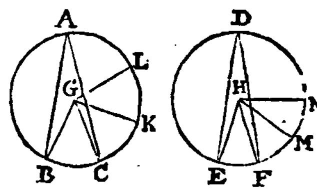
ad A, uni angulo ad D æqualem habentia, circum æquales autem angulos latera proportionalia, quod sit ut BA ad AC, ita CD ad DE; erit [b] triangulum ABC triangulo DCE b 6. hujus.
æquiangulum. ergo ABC angulus est æqualis angulo DCE. ostensus autem est & angulus ACD æqualis angulo BAC. totus igitur ACE duobus ABC BAC est æqualis. communis apponatur ACB. ergo anguli ACE ACB angulis BAC ACB CBA æquales sunt. sed BAC ACB CBA anguli duobus rectis [c] sunt æquales. & anguli igitur ACE ACB duobus rectis æquales erunt. itaque ad quandam rectam lineam AC, & ad punctum in ipsa C, duæ rectæ lineæ BC CE non ad easdem partes positæ, angulos qui deinceps sunt ACE ACB duobus rectis æquales efficiunt. ergo BC ipsi CE in directum [d] erit. Si igitur duo triangula componantur ad unum angulum quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant c 32.primi. d 14.primi.

beant, ita ut homologa latera ipsorum etiam sunt parallela; reliqua triangulorum latera in directum sibi ipsis constituta erunt. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXXIII. THEOR.

In circulis æqualibus anguli eandem habent proportionem, quam circumferentiæ quibus insistunt, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant: adhuc autem & sectores, quippe qui ad centra sunt constituti.

Sint æquales circuli ABC DEF; & ad centra quidem ipsorum G H sint anguli BGC EHF, ad circumferentias vero anguli BAC EDF. Dico ut circumferentia BC ad EF circumferentiam, ita esse & BGC angulum ad angulum EHF, & angulum BAC ad angulum EDF: & adhuc sectorem BGC ad EHF sectorem. Ponantur enim circumferentiæ quidem BC æquales quotcunque deinceps CK KL; circumferentiæ vero EF, rursus æquales quotcunque FM MN. & jungantur GK GL, HM HN. Quoniam igitur circumferentiæ BC CK KL inter se sunt æquales, & anguli

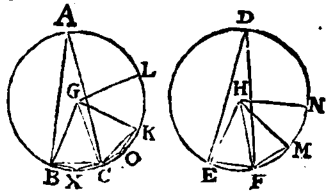


a 27. tertii. BGC CGK KGL inter se æquales a erunt. quotuplex igitur est circumferentia BL circumferentiæ BC, totuplex est & BGL angulus anguli BGC. eadem ratione & quotuplex est circumferentia NE circumferentiæ EF, totuplex & EHN angulus anguli EHF. si vero æqualis est BL circumferentia circumferentiæ EN; & angulus BGL angulo EHN erit æqualis; & si circumferentia BL major est circumferentia EN, major erit & BGL angulus angulo EHN; & si minor, minor. quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus nimirum circumferentiis BC EF, & duobus angulis BGC EHF; sumptæ sunt circumferentiæ quidem BC, & BGC anguli, æque multiplicia, videlicet circumferentia BL & BGL angulus; circumferentiæ vero EF, & EHF anguli, æque multiplicia, nempe circumferentia EN, & angulus EHN. atque ostensum est si circumferentia BL superat circumferentiam EN, & BGL angulum superare angulum EHN; & si æqualis, æqualem; & si minor, minorem esse. ut b igitur circumferentia BC ad EF circumferentiam, ita angulus BGC ad angulum EHF. sed ut BGC angulus ad angulum EHF, ita

b Def. 5. quinti.

angulus

[e] angulus BAC ad EDF angulum, uterque enim utriusque est [d] duplex. & ut igitur BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita & angulus BGC ad angulum EHF, & angulus BAC ad EDF angulum. Quare in circulis æqualibus anguli eandem habent proportionem quàm circumferentiæ quibus insistunt, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant. Dico insuper & ut BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita esse sectorem GBC ad HEF sectorem. Jungantur enim BC CK, & sumptis in circumferentiis BC CK punctis XO, jungantur & BX XC CO OK. itaque quoniam duæ BG GC duabus CG GK æquales sunt, & angulos æquales continent; erit & basis BC basi CK æqualis. æquale [e] igitur est GBC triangulum triangulo GCK. & quoniam circumferentia BC circumferentiæ CK est æqualis, & reliqua circumferentia quæ complet totum circulum ABC



æqualis est reliquæ quæ eundem circulum complet. quare & angulus BXC angulo COK est [f] æqualis. simile igitur est BXC segmentum [g] segmento COK: & sunt in æqualibus rectis lineis BC CK. quæ autem in æqualibus rectis lineis similia circulorum segmenta, & inter se [h] æqualia sunt. ergo segmentum BXC est æquale segmento COK. est autem & BGC triangulum triangulo CGK æquale. & totus igitur sector BGC sectori CGK æqualis erit. Eadem ratione & GKL sector utrique ipsorum GBC GCK est æqualis. tres igitur sectores BGC CGK KGL æquales sunt inter se. similiter & sectores HEF HFM HMN inter se sunt æquales. quotuplex igitur est LB circumferentia circumferentiæ BC, totuplex est & GBL sector sectoris GBC. eadem ratione & quotuplex est circumferentia NE circumferentiæ EF, totuplex est & HEN sector sectoris HEF. Sed si circumferentia BL circumferentiæ EN est æqualis, & sector BGL æqualis est sectori EHN; & si circumferentia BL superat circumferentiam EN, superat & BGL sector sectorem EHN; & si minor, minor. quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus quidem BC EF circumferentiis, duobus vero sectoribus GBC EHF, sumpta, sunt æque multiplicia circumferentiæ quidem BC & GBC sectoris, circumferentia BL, & GBL sector. circumferentiæ vero EF, & sectoris HEF, æque multiplicia, circumferentia EN, & HEN sector, atque ostensum est si BL circumferentia superat circumferentiam EN, & sectorem BGL superare sectorem EHN; & si æqualis, æqualem esse; & si minor, minorem.

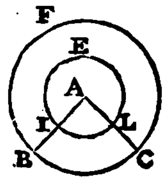
[e] 15. quinti.
[d] 20. tertii.
[e] 4. primi.
[f] 27. tertii.
[g] 11. Def. tertii.
[h] 24. tertii.

b Def. 5. quinti. minorem. est [b] igitur ut BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita sector GBC ad HEF sectorem. Quod ostendere oportebat.

COROLL.

1. Angulus ad centrum est ad quatuor rectos, ut arcus cui insistit ad totam circumferentiam: nam ut angulus BAC ad rectum, ita BC arcus ad circuli quadrantem; quare quadruplicando consequentes, erit angulus BAC ad quatuor rectos, ut arcus BC ad totam circumferentiam.

2. Inæqualium circulorum arcus IL BC qui æquales subtendunt angulos, sive ad centra, sive ad peripherias, sunt similes. Nam est IL ad totam peripheriam ILE, ut angulus IAL ad quatuor rectos: est vero ut IAL seu BAC ad quatuor rectos, ita arcus BC ad totam peripheriam BCF. quare ut IL ad totam peripheriam ILE, ita BC ad totam peripheriam BCF. ac proinde arcus IL BC sunt similes.



3. Duæ semidiametri AB AC à concentricis peripheriis arcus auferunt similes IL BC.

EUCLIDIS

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER UNDECIMUS.

DEFINITIONES.

I.

Solidum est, quod longitudinem, latitudinem & crassitudinem habet.

II.

Solidi terminus est superficies.

III.

Recta linea ad planum recta est, quando ad omnes rectas lineas quæ ipsam contingunt, & in subjecto sunt plano, rectos angulos efficit.

IV.

Planum ad Planum rectum est, cum rectæ lineæ quæ communi planorum sectioni ad rectos angulos in uno plano ducuntur, alteri plano ad rectos sunt angulos.

V.

Rectæ lineæ ad planum inclinatio est, cum à sublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis; atque à puncto quod perpendicularis in ipso plano effecerit, ad propositæ illius lineæ extremum, quod in eodem est plano, altera recta linea fuerit adjuncta; est, inquam, angulus acutus insistente linea, & adjuncta comprehensus.

VI.

Plani ad planum inclinatio eſt, angulus acutus rectis lineis contentus, quæ in utroque planorum ad idem communis ſectionis punctum ductæ, rectos cum ſectione angulos efficiunt.

VII.

Planum ad planum ſimiliter inclinari dicitur, atque alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter ſe fuerint æquales.

VIII.

Parallela plana ſunt, quæ inter ſe non conveniunt.

IX.

Similes ſolidæ figuræ ſunt, quæ ſimilibus planis continentur, multitudine æqualibus.

X

Æquales & ſimiles ſolidæ figuræ ſunt, quæ ſimilibus planis multitudine & magnitudine æqualibus continentur.

XI.

Solidus angulus eſt, plurium quàm duarum linearum quæ ſe mutuo contingunt, nec in eadem ſunt ſuperficie, ad omnes lineas inclinatio. Vel ſolidus angulus eſt, qui pluribus quàm duobus planis angulis in eodem non conſiſtentibus plano, ſed ad unum punctum conſtitutis continetur.

XII.

Pyramis eſt figura ſolida planis comprehenſa, quæ ab uno plano ad unum punctum conſtituuntur.

XIII.

Priſma eſt figura ſolida quæ planis continetur, quorum adverſa duo ſunt & æqualia & ſimilia, & parallela; alia vero parallelogramma.

XIV.

Sphæra eſt, quando ſemicirculi manente diametro, circumductus ſemicirculus in ſeipſum rurſus revolvitur unde moveri cœperat.

XV.

XV.

Axis autem ſphæræ eſt quieſcens illa recta linea, circum quam ſemicirculus convertitur.

XVI.

Centrum ſphæræ eſt idem quod & ſemicirculi.

XVII.

Diameter autem ſphæræ eſt recta quædam linea per centrum ducta, & utrinque à ſphæræ ſuperficie terminata.

XVIII.

Conus eſt, quando rectanguli trianguli manente uno latere eorum quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in ſeipſum rurſus revolvitur, unde moveri cœperat. Atque ſi quieſcens recta linea æqualis ſit reliquæ quæ circa rectum angulum continetur, orthogonius erit conus: ſi vero minor, amblygonius: ſi vero major, oxygonius.

XIX.

Axis autem coni eſt quieſcens illa linea, circa quam triangulum vertitur.

XX.

Baſis vero coni eſt circulus qui à circumducta recta linea deſcribitur.

XXI.

Cylindrus eſt, quando rectanguli parallelogrammi manente uno latere eorum quæ circa rectum angulum, circumductum parallelogrammum in ſeipſum rurſus revolvitur, unde cœperat moveri.

XXII.

Axis autem cylindri eſt quieſcens illa recta linea, circum quam parallelogrammum convertitur.

XXIII.

Baſes vero cylindri ſunt circuli à duobus adverſis lateribus, quæ circumaguntur, deſcripti.

XXIV.

Similes coni & cylindri ſunt, quorum & axes, & baſium diametri proportionales ſunt.

XXV.

XXV.

Cubus eſt figura ſolida ſub ſex quadratis æqualibus contenta.

XXVI.

Tetraedrum eſt figura ſolida ſub quatuor triangulis æqualibus & æquilateris contenta.

XXVII.

Octaedrum eſt figura ſolida ſub octo triangulis æqualibus & æquilateris contenta.

XXVIII.

Dodecaedrum eſt figura ſolida ſub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis contenta.

XXIX.

Icoſaedrum eſt figura ſolida ſub viginti triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

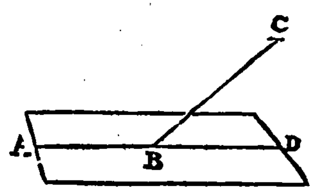
XXX.

Parallelipipedum eſt figura ſolida ſex figuris quadrilateris, quarum quæ ex adverſo parallelæ ſunt, contenta.

PROPOSITIO I. THEOREMA.

Recta lineæ pars quædam non eſt in ſubjecto plano, quædam vero in ſublimi.

Si enim fieri poteſt, rectæ lineæ AB pars quidem AB ſit in ſubjecto plano, pars vero BC in ſublimi. erit recta linea quædam ipſi AB in directum continuata in ſubjecto plano. ſitque DB. duabus igitur datis rectis lineis ABC ABD commune ſegmentum eſt AB, quod fieri non poteſt: recta enim linea cum recta linea non convenit in pluribus punctis, quàm uno. Non igitur rectæ lineæ pars quædam eſt in ſubjecto plano, quædam vero in ſublimi. Quod demonſtrare oportebat.

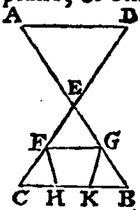


PROP.

PROP. II. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ se invicem secent, in uno sunt plano, & omne triangulum in uno plano consistit.

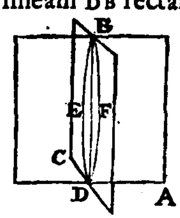
Duæ enim rectæ lineæ AB CD se invicem in puncto E secent. Dico ipsas AB CD in uno esse plano, & omne triangulum in uno plano consistere. Sumantur enim in ipsis EB EC quævis puncta F G; junganturque CB FG, & FH GK ducantur. Dico primum EBC triangulum consistere in uno plano. si enim trianguli EBC pars quædam FHC, vel GBK in subjecto plano est, reliqua vero in alio plano; erit & linearum EB EC pars in subjecto plano, & pars in alio. quod si trianguli ECB pars FCBG sit in subjecto plano, reliqua vero in alio, utrarumque rectarum linearum EC EB quædam pars erit in subjecto plano, quædam vero in alio. quod absurdum esse [a] ostendimus. triangulum igitur EBC in uno est plano. in quo autem plano est BCE triangulum, in hoc est utraque ipsarum EC EB: in quo autem utraque ipsarum EC EB, in hoc [a] sunt & AB CD. Ergo rectæ lineæ AB CD in uno sunt plano, & omne triangulum in uno plano consistit. Quod erat demonstrandum. [a] 1. hujus.



PROP. III. THEOR.

Si duo plana se invicem secent, communis ipsorum sectio recta linea erit.

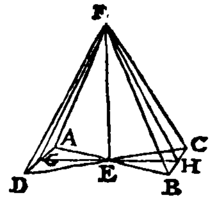
Duo plana AB BC se invicem secent, communis autem ipsorum sectio sit DB linea. Dico lineam DB rectam esse. Si enim non ita sit, ducatur à puncto D ad B in plano quidem AB recta linea DEB; in plano autem BC recta linea DFB. erunt utique duarum rectarum linearum DEB DFB iidem termini, & ipsæ spatium continebunt, quod est absurdum [a]. non igitur DEB DFB rectæ lineæ sunt. similiter ostendemus neque aliam quampiam, quæ à puncto D ab B ducitur rectam esse, præter ipsam DB communem scilicet planorum AB BC sectionem. Si igitur duo plana se invicem secent, communis ipsorum sectio recta linea erit. Quod ostendere oportebat. [a] Axio. 10. primi.



PROP. IV. THEOR.

Si recta linea duabus rectis lineis se invicem secantibus in communi sectione ad rectos angulos insistat, etiam ducto per ipsas plano ad rectos angulos erit.

Recta linea quædam EF duabus rectis lineis AB CD se invicem secantibus in E puncto, ab ipso E ad rectos angulos insistat. Dico EF etiam plano per AB CD ducto ad rectos angulos esse. Sumantur rectæ lineæ EA EB CE DE inter se æquales: perque E ducatur recta linea GEH utcunque: & jungantur AD CB; deinde à quovis puncto F ducantur FA FG FD FC FH FB. & quoniam duæ rectæ lineæ AE ED duabus rectis lineis CE EB æquales sunt, &



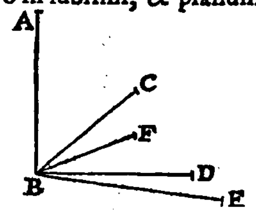
a 15.primi. angulos [a] æquales AED CEB continent, erit [b] AD basis basi
b 4. primi. CB æqualis, & triangulum AED triangulo CEB æquale. ergo & angulus DAE æqualis est angulo EBC. est autem & angulus AEG [a] æqualis angulo BEH. duo igitur triangula sunt AGE BEH, duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & unum latus AE uni lateri EB æquale quod est ad æquales angulos. quare & reliqua latera
c 26.primi. reliquis lateribus æqualia habebunt [c]. ergo GE quidem est æqualis EH; AG vero ipsi BH. quod cum AE sit æqualis EB, communis autem, & ad rectos angulos FE; erit [b] basis AF basi FB æqualis; eadem quoque ratione & CF æqualis erit FD. præterea quoniam AD est æqualis CB, & AF ipsi FB, erunt duæ FA AD duabus FB BC æquales, altera al-
d 8 primi. teri; & ostensa est basis DF æqualis basi FC. angulus [d] igitur FAD angulo FBC est æqualis. rursus ostensa est AG æqualis BH, sed & AF ipsi FB est æqualis. duæ igitur FA AG duabus FB BH æquales sunt, & angulus FAG æqualis est angulo FBH; ut demonstratum fuit, basis igitur GF basi FH est [b] æqualis. rursus quoniam GE ostensa est æqualis EH, communis autem EF; erunt duæ GE EF æquales duabus HE EF; & basis HF est æqualis basi FG. angulus [d] igitur GEF angulo HEF est æqualis, & idcirco rectus est uterque angulorum GEF HEF. ergo FE ad GH utcunque per E ductam rectos efficit angulos: similiter ostendemus FE etiam ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt, & in subjecto sunt plano, rectos angulos efficere. recta autem ad
e 3. Def. hujus. planum recta est [e] quando ad omnes rectas lineas ipsam contingentes,

tingentes, & eodem existentes plano rectos efficit angulos. quare FE subjecto plano ad rectos angulos insistit. at subjectum planum est quod per AB CD rectas lineas ducitur. ergo FE ad rectos angulos erit ducto per AB CD plano. Si igitur recta linea duabus rectis lineis se invicem secantibus in communi sectione ad rectos angulos insistat, etiam ducto per ipsas plano ad rectos angulos erit. Quod demonstrare oportebat.

PROP. V. THEOR.

Si recta linea tribus rectis lineis sese tangentibus, in communi sectione, ad rectos angulos insistat, tres illæ rectæ lineæ in uno plano erunt.

Recta linea quædam AB tribus rectis lineis BC BD BE, in contactu B, ad rectos angulos insistat. Dico BC BD BE in uno plano esse. Non enim, sed si fieri potest, sint BD BE quidem in subjecto plano; BC vero in sublimi, & planum per AB BC producatur. communem utique sectionem in subjecto plano faciet [a] rectam lineam; faciat BF. in uno igitur sunt plano per AB BC ducto, tres rectæ lineæ AB BC BF. & quoniam AB utrique ipsarum BD BE ad rectos angulos insistit, & ducto per ipsas DB BE plano [b] ad rectos angulos erit. planum autem per DB BE est subjectum planum. ergo AB ad subjectum planum recta est. quare & ad [c] omnes rectas lineas ipsam contingentes, quæ in eodem plano sunt, rectos faciet angulos; sed ipsam tangit BF in subjecto existens plano. ergo angulus ABF rectus est. ponitur autem & ABC angulus rectus. æqualis igitur est angulus ABF angulo ABC, & in eodem sunt plano; quod fieri non potest. recta igitur linea BC non est in sublimi; quare tres rectæ lineæ BC BD BE in uno sunt plano. Si igitur recta linea tribus rectis lineis sese tangentibus, in communi sectione, ad rectos angulos insistat, tres illæ rectæ lineæ in uno plano erunt. Quod demonstrare oportebat.



[a] 3. hujus.
[b] 4. hujus.
[c] 3. Def. hujus.

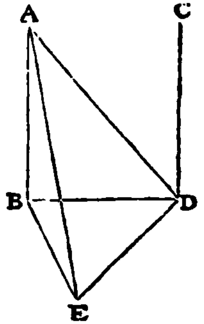
PROP. VI. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint, illæ inter sese parallelæ erunt.

Duæ enim rectæ lineæ AB CD subjecto plano sint ad rectos angulos. Dico AB ipsi CD parallelam esse. Occurrant

 enim

enim subjecto plano in punctis B D, jungaturque BD recta linea, cui ad rectos angulos in subjecto plano ducatur DE, & posita DE ipsi AB æquali, jungantur BE AE AD. Quoniam igitur AB recta est ad subjectum planum, & ad omnes rectas lineas quæ ipsam contingunt, & in subjecto sunt plano, rectos angulos [a] efficiet. contingit autem AB utraque ipsarum BD BE existens in subjecto plano. ergo uterque angulorum ABD ABE rectus est. eadem ratione rectus etiam est uterque ipsorum CDB CDE. & quoniam AB æqualis est ipsi DE, communis autem BD. erunt duæ AB BD duabus ED DB æquales, & rectos angulos continent; basis igitur AD basi BE est [b] æqualis. rursus quoniam AB est æqualis DE, & AD ipsi BE, duæ AB BE duabus ED DA æquales sunt, & basis ipsarum AE communis; ergo angulus ABE angulo EDA est [c] æqualis. sed ABE rectus est. rectus igitur & EDA; & idcirco ED ad DA est perpendicularis. sed & perpendicularis est ad utramque ipsarum BD DC. quare ED tribus rectis lineis BD DA DC in contactu ad rectos insistit angulos. tres igitur rectæ lineæ BD DA DC in uno sunt [d] plano. in quo autem sunt BD DA, in eo est AB, omne enim triangulum in uno [e] est plano. ergo AB BD DC in uno plano sint necesse est; atque est uterque angulorum ABD BDC rectus. parallela igitur [f] est AB ipsi CD. Quare si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint, illæ inter se parallelæ erunt. Q.E.D.

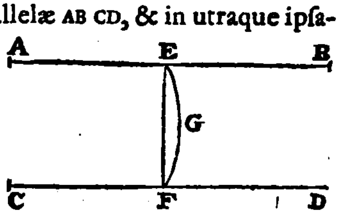


[a] 3. Def. hujus.
[b] 4. primi.
[c] 8. primi.
[d] 5. hujus.
[e] 2. hujus.
[f] 28. primi.

PROP. VII. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ parallelæ sint, sumantur autem in utraque ipsarum qualibet puncta; quæ dicta puncta conjungit recta in eodem erit plano, in quo & parallelæ.

Sint duæ rectæ lineæ parallelæ AB CD, & in utraque ipsarum sumantur quælibet puncta EF. Dico rectam lineam quæ puncta E F conjungit, in eodem plano esse, in quo sunt parallelæ. Non enim, sed si fieri potest, sit in sublimi, ut EGF, & per EGF, planum ducatur quod in subjecto plano sectionem faciet [a] rectam lineam; faciat ut



[a] 3. hujus.

ut EF. ergo duæ rectæ lineæ EGF EF spatium continebunt, quod fieri non [b] potest. non igitur quæ à puncto E ad F ducitur recta linea in sublimi est plano, quare erit in eo quod per AB CD parallelas transit. Si igitur duæ rectæ lineæ parallelæ sint, &c. Quod oportebat demonstrare. [b] 10. axio. primi.

PROP. VIII. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ parallelæ sint, altera autem ipsarum plano alicui sit ad rectos angulos, & reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

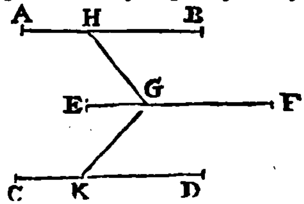
Sint duæ rectæ lineæ parallelæ AB CD, & altera ipsarum AB subjecto plano sit ad rectos angulos. Dico & reliquam CD eidem plano ad rectos angulos esse. Occurrant enim AB CD subjecto plano in punctis B D, & BD jungatur. ergo AB CD BD in uno sunt [a] plano. ducatur ipsi BD ad rectos angulos in subjecto plano DE: & ponatur DE ipsi AB æqualis: junganturque BE AE AD. & quoniam AB perpendicularis est ad subjectum planum, & ad omnes rectas lineas quæ ipsam contingunt suntque in subjecto plano, perpendicularis [b] erit. rectus igitur est uterque angulorum ABD ABE. quod cum in parallelas rectas lineas AB CD recta incidit BD, erunt anguli ABD CDB duobus rectis [c] æquales. rectus autem est ABD. ergo & CDB est rectus; ac propterea CD perpendicularis est ad BD. & quoniam AB est æqualis DE, communis autem BD, duæ AB BD duabus ED DB æquales sunt; & angulus ABD est æqualis angulo EDB, rectus enim uterque est, basis igitur AD basi BE est [d] æqualis. rursus quoniam AB æqualis est DE, & BE ipsi AD; erunt duæ AB BE duabus ED DA æquales, altera alteri; & basis earum communis AE. quare angulus ABE est [e] æqualis angulo EDA. rectus autem est ABE. ergo & EDA est rectus, & ED ad DA perpendicularis. sed & perpendicularis est ad BD. ergo ED etiam ad planum per BD DA perpendicularis [f] erit, & ad omnes rectas lineas quæ in eodem existentes plano ipsam contingunt, rectos [g] faciet angulos. at in plano per BD DA est DC, quoniam in plano per BD DA sunt [h] AB BD: in quo autem sunt AB BD in eodem [i] est ipsa DC. quare ED ipsi CD est ad rectos angulos: ideoque CD ad rectos angulos est ipsi DE; sed & etiam ipsi DB. ergo CD duabus rectis lineis DE DB se mutuo secantibus in communi sectione D ad rectos angulos insistit; ac propterea plano per DE DB est [f] ad rectos angulos. planum autem per DE DB est subjectum planum. Ergo CD subjecto plano ad rectos angulos erit. Quod demonstrare oportebat.

Vide figuram Prop. sextæ.
[a] 7. hujus.
[b] 3. Def. hujus.
[c] 29. primi.
[d] 4. primi.
[e] 8. primi.
[f] 4. hujus.
[g] 3. Def. hujus.
[h] 2. hujus.
[i] 7. hujus.

PROP. IX. THEOR.

Quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, non existentes in eodem in quo ipsa plano, etiam inter se parallelæ erunt.

Sit utraque ipsarum AB CD parallela ipsi EF, non existentes in eodem, in quo ipsa plano. Dico AB ipsi CD parallelam esse. Sumatur in EF quodvis punctum G, à quo ipsi EF, in plano quidem per EF AB transeunte, ad rectos angulos ducatur GH; in plano autem transeunti per EF CD, rursus ducatur ipsi EF ad rectos angulos GK. & quoniam EF ad utramque ipsarum GH GK est perpendicularis, erit EF etiam ad rectos [a] angulos plano per GH GK transeunte. atque est EF ipsi AB parallela. ergo & AB plano per HGK ad rectos angulos [b] est. eadem ratione & CD plano per HGK est ad rectos angulos. utraque igitur ipsarum AB CD plano per HGK ad rectos angulos erit. Si autem duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint, parallelæ [c] erunt inter se. Ergo AB ipsi CD est parallela. Quod demonstrare oportebat.

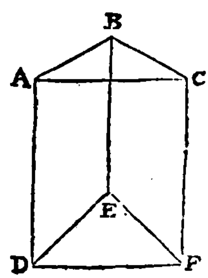


a 4. hujus.
b 8. hujus.
c 6. hujus.

PROP. X. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ sese contingentes, duabus rectis lineis sese contingentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; æquales angulos continebunt.

Duæ rectæ lineæ sese contingentes AB BC, duabus rectis lineis DE EF sese contingentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano. Dico angulum ABC angulo DEF æqualem esse. Assumantur enim BA BC ED EF inter se æquales; & jungantur AD CF BE AC DF. quoniam igitur BA ipsi ED æqualis est & parallela, erit & [a] AD æqualis & parallela ipsi BE. eadem ratione & CF ipsi BE æqualis & parallela erit. utraque igitur ipsarum AD CF ipsi BE æqualis est & parallela. quæ autem eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, non existentes in eodem plano; & inter



a 33. primi.

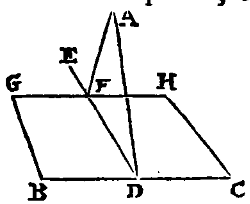
ter se parallelæ [b] erunt. ergo AD parallela est ipsi CF & [b] æqualis. atque ipsas conjungunt AC DF; & AC igitur ipsi DF æqualis est & [c] parallela. & quoniam duæ rectæ lineæ AB BC duabus DE EF æquales sunt, & basis AC est æqualis basi DF; erit [d] angulus ABC angulo DEF æqualis. Si igitur duæ rectæ lineæ sese contingentes, duabus rectis lineis sese contingentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; æquales angulos continebunt. Quod oportebat demonstrare.

b 9. hujus.
c 33. primi.
d 8. primi.

PROP. XI. PROBL.

A dato puncto in sublimi, ad subjectum planum, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit datum quidem punctum in sublimi A, datum autem subjectum planum BH. Oportet à puncto A ad subjectum planum perpendicularem rectam lineam ducere. In subjecto plano ducatur quædam recta linea utcunque BC, & à puncto A ad BC perpendicularis agatur [a] AD. siquidem igitur AD perpendicularis sit etiam ad subjectum planum; factum jam erit, quod proponebatur: sin minus; ducatur à puncto D ipsi BC, in subjecto plano, ad rectos [b] angulos DE: & à puncto A ad DE perpendicularis [a] ducatur AF. denique per F ducatur GH ipsi BC [c] parallela. Quoniam BC utrique ipsarum DA DE est ad rectos angulos, erit [d] & BC ad rectos angulos plano per DA DE transeunti. quin ipsi BC parallela est GH; si autem sint duæ rectæ lineæ parallelæ, quarum una plano alicui sit ad rectos angulos; & reliqua [e] eidem plano ad rectos angulos erit. quare & GH plano per ED DA transeunti ad rectos angulos est: ac propterea ad omnes rectas lineas, quæ in eodem plano existentes ipsam contingunt est [f] perpendicularis. contingit autem ipsam AF existens in plano per ED DA. ergo GH perpendicularis est ad AF. & ob id AF est perpendicularis ad GH: est autem AF ad DE perpendicularis. ergo AF perpendicularis est ad utramque ipsarum HG DE. si autem recta linea duabus rectis lineis sese contingentibus, in communi sectione, ad rectos angulos insistat, etiam plano per ipsas ducto ad rectos angulos [d] erit. quare AF plano per ED GH ducto est ad rectos angulos. planum autem per ED GH est subjectum planum. ergo AF ad subjectum planum est perpendicularis. A dato igitur puncto sublimi A, ad



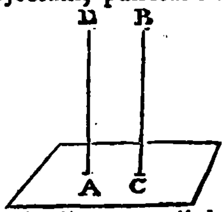
a 12. primi.
b 11. primi.
c 31. primi.
d 4. hujus.
e 8. hujus.
f 3 Def. hujus.

subjectum planum, perpendicularis recta linea ducta est AF. Quod facere oportebat.

PROP. XII. PROBL.

Dato plano, à puncto quod in ipso datum est, ad rectos angulos rectam lineam constituere.

Sit datum quidem planum subjectum, punctum autem quod in ipso sit A. Oportet à puncto A subjecto plano ad rectos angulos rectam lineam constituere. Intelligatur aliquod punctum sublime B, à quo ad subjectum planum agatur [a] perpendicularis BC; & per A ipsi BC parallela [b] ducatur AD. quoniam igitur duæ rectæ lineæ parallelæ sunt AD CB, una autem ipsarum BC subjecto plano est ad rectos angulos; & reliqua [c] AD subjecto plano ad rectos angulos erit. Dato igitur plano à puncto quod in ipso est datum, ad rectos angulos recta linea constituta est. Quod facere oportebat.

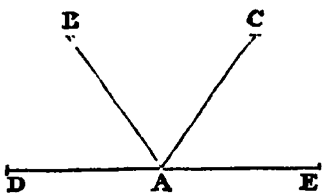


a 11. hujus.
b 31. primi
c 8. hujus.

PROP. XIII. THEOR.

Dato plano, à puncto quod in ipso est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non constituentur ex eadem parte.

Si enim fieri potest, dato plano, à puncto quod in ipso est A, duæ rectæ lineæ AB AC ad rectos angulos constituantur ex eadem parte: & ducatur planum per BA AC, quod faciet sectionem per A in subjecto plano [a] rectam lineam. faciat DAE. ergo rectæ lineæ AB AC DAE in uno sunt plano. & quoniam CA subjecto plano ad rectos angulos est, & ad [b] omnes rectas lineas, quæ in subjecto plano existentes ipsam contingunt, rectos faciet angulos. contingit autem ipsam DAE, quæ est in subjecto plano. angulus igitur CAE rectus est. eadem ratione & rectus est BAE. ergo angulus CAE ipsi BAE est æqualis. & in uno sunt plano, quod fieri non [c] potest. Non igitur dato plano, à puncto, quod in ipso est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos constituentur ex eadem parte. Quod oportebat demonstrare.



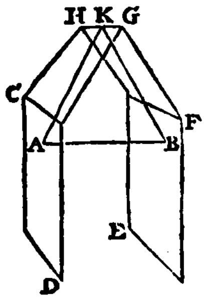
a 3 hujus.
b 3. Def. hujus.
c 9. axiom. primi.

PROP.

PROP. XIV. THEOR.

Ad quæ plana, eadem recta linea est perpendicularis, ea parallela sunt.

Recta quædam linea AB ad utrumque ipsorum planorum CD EF sit perpendicularis. Dico ea plana parallela esse. Si enim non ita sit, producta convenient inter se: conveniant, & communem sectionem faciant rectam lineam GH; & in ipsa GH sumpto quovis puncto K, jungatur AK BK. Quoniam igitur AB perpendicularis est ad EF planum; erit & perpendicularis ad ipsam BK [a] rectam lineam in plano EF producto existentem. quare angulus ABK rectus est. eadem ratione & BAK est rectus: ideoque trianguli ABK duo anguli ABK BAK duobus rectis sunt æquales, quod fieri non [b] potest. non igitur plana CD EF producta inter se convenient. quare CD EF parallela sint necesse est. Ad quæ igitur plana, eadem recta linea est perpendicularis, ea parallela sunt. Quod demonstrare oportebat.



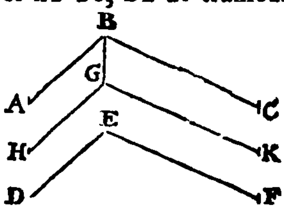
[a] 3. Def. hujus.

[b] 17. primi.

PROP. XV. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ sese tangentes duabus rectis lineis sese tangentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; & quæ per ipsas transeunt plana parallela erunt.

Duæ rectæ lineæ sese tangentes AB BC, duabus rectis lineis sese tangentibus DE EF parallelæ sint, & non in eodem plano. Dico plana quæ per AB BC, DE EF transeunt, si producantur, inter se non convenire. Ducatur à puncto B ad planum, quod per DE EF transit, perpendicularis BG, quæ plano in puncto G occurrat, & per G ducatur ipsi quidem ED parallela GH; ipsi vero EF parallela GK. itaque quoniam BG perpendicularis est ad planum per DE EF; & ad omnes rectas lineas quæ ipsam contingunt, & in eodem sunt plano, rectos faciet [a] angulos. contingit autem ipsam utraque earum GH GK, quæ sunt in eodem



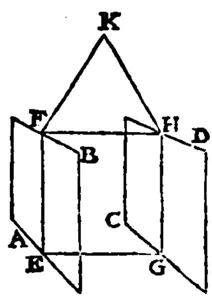
[a] 3. Def. hujus.

eodem plano. rectus igitur est uterque angulorum BGH BGK. & quoniam BA parallela est ipsi GH, anguli GBA
b 29. primi. BGH duobus rectis sunt b æquales. rectus autem est BGH. ergo & GBA rectus erit, ideoque GB ad BA est perpendicularis. eadem ratione & GB est perpendicularis ad BC. cum igitur recta linea BG duabus rectis lineis BA BC se invicem secantibus ad rectos angulos insistat; erit BG etiam
c 4. hujus. ad planum per BA BC ductum c perpendicularis. atque est ad planum per DE EF perpendicularis. ergo BG perpendicularis est ad utrumque planorum quæ per AB BC, DE EF transeunt. Ad quæ vero plana eadem recta linea est per-
d 14. hujus. pendicularis, ea parallela d sunt. parallelum igitur est planum per AB BC plano per DE EF. Quare si duæ rectæ lineæ sese tangentes duabus rectis lineis sese tangentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano, & quæ per ipsas transeunt plana parallela erunt. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XVI. THEOR.

Si duo plana parallela ab aliquo plano secentur, communes ipsorum sectiones parallelæ erunt.

Duo plana parallela AB CD à plano aliquo EFGH secentur; communes autem ipsorum sectiones sint EF GH. Dico EF ipsi GH parallelam esse. Si enim non est parallela, productæ EF GH inter se convenient, vel ad partes F H, vel ad partes EG. producantur prius ut ad partes F H, & conveniant in K. quoniam igitur EFK est in plano AB, & omnia quæ in EFK sumuntur puncta in eodem plano erunt: unum autem punctorum quæ sunt in EFK, est ipsum K punctum. ergo K est in plano AB. eadem ratione & K est in CD plano. ergo plana AB CD producta inter se convenient. non conveniunt autem, cum parallela ponantur. non igitur EF GH rectæ lineæ productæ convenient ad partes F H. similiter demonstrabimus



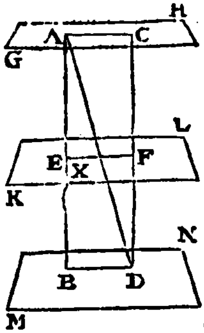
neque ad partes E G convenire, si producantur. quæ autem neutra ex parte conveniunt parallelæ sunt. ergo EF ipsi GH est parallela. Si igitur duo plana parallela ab aliquo plano secentur, communes ipsorum sectiones parallelæ erunt. Quod demonstrare oportebat.

PROP.

PROP. XVII. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ à parallelis secentur planis, in easdem proportiones secabuntur.

Duæ rectæ lineæ AB CD à parallelis planis GH KL MN secentur in punctis A, E, B, C, F, D. Dico ut AE recta linea ad ipsam EB, ita esse CF ad FD. Jungantur enim AC BD AD: & occurrat AD plano KL in puncto X: & EX XF jungantur. Quoniam igitur duo plana parallela KL MN à plano EBDX secantur, communes ipsorum sectiones EX BD parallelæ [a] sunt. eadem ratione quoniam duo plana parallela GH KL à plano AXFC secantur, communes ipsorum sectiones AC FX sunt parallelæ. & quoniam uni laterum trianguli ABD, videlicet ipsi BD parallela ducta est EX, ut AE ad EB ita [b] erit AX ad XD. rursus quoniam uni laterum trianguli ADC, nempe ipsi AC parallela ducta est XF, erit ut AX ad XD [b], ita CF ad FD. ostensum autem est ut AX ad XD, ita esse AE ad EB. ut igitur AE ad EB, ita est [c] CF ad FD. Quare si duæ rectæ lineæ à parallelis secentur planis, in easdem proportiones secabuntur, Quod demonstrare oportebat.



a 16. hujus.

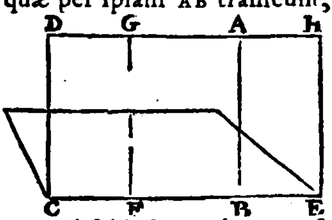
b 2. sexti.

c 11. quinti.

PROP. XVIII. THEOR.

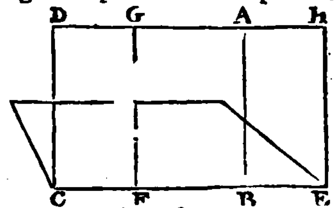
Si recta linea plano alicui sit ad rectos angulos, & omnia quæ per ipsam transeunt plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

Recta linea quædam AB subjecto plano sit ad rectos angulos. Dico & omnia plana quæ per ipsam AB transeunt, subjecto plano ad rectos angulos esse. Producatur enim per AB planum DE, sitque plani DE, & subjecti plani communis sectio CE: & sumatur in CE quodvis punctum F; à quo ipsi CE ad rectos angulos, in DE plano, ducatur FG. quoniam igitur AB ad subjectum planum est perpendicularis; & ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt & in eodem sunt plano perpendicularis [a] erit. quare etiam



a 3. Def. hujus.

etiam ad CE est perpendicularis. angulus igitur ABF rectus
b 28.primi. est: sed & GFB est rectus. ergo AB parallela b est ipsi FG.
est autem AB subjecto plano ad rectos angulos, & FG igitur eidem plano ad rectos
c 8. hujus. angulos c erit. at planum ad planum rectum est, quando communi planorum sectioni ad rectos angulos ductæ rectæ lineæ in uno

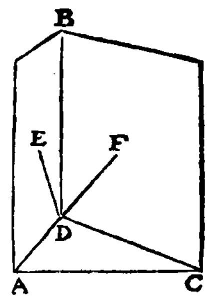


d 4. Def. hujus. planorum, reliquo plano ad rectos angulos d sunt: communi vero planorum sectioni CE in uno plano DE ad rectos angulos ducta FG, ostensa est subjecto plano ad rectos esse angulos. ergo planum DE rectum est ad subjectum planum. similiter demonstrabuntur & omnia quæ per AB transeunt plana subjecto plano recta esse. Si igitur recta linea plano alicui sit ad rectos angulos, & omnia quæ per ipsam transeunt plana eidem plano ad rectos angulos erunt. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XIX. THEOR.

Si duo plana se invicem secantia plano alicui sint ad rectos angulos; & communis ipsorum sectio eidem plano ad rectos angulos erit.

Duo plana se invicem secantia AB BC subjecto plano sint ad rectos angulos: communis autem ipsorum sectio sit BD. Dico BD subjecto plano ad rectos angulos esse. Non enim, sed si fieri potest; non sit BD ad rectos angulos subjecto plano; & à puncto D ducatur in plano quidem AB, rectæ lineæ AD ad rectos angulos ipsa DE: in plano autem BC ducatur ipsi CD ad rectos angulos DF. Et quoniam planum AB ad subjectum planum rectum est, & communi ipsorum sectioni AD ad rectos angulos in plano AB ducta est



a 4. Def. hujus. DE, erit a DE ad subjectum planum perpendicularis. similiter ostendemus & DF perpendicularem esse ad subjectum planum. quare ab eodem puncto D subjecto plano duæ rectæ lineæ ad rectos angulos constitutæ
b 13. hujus. sunt ex eadem parte, quod fieri non b potest. non igitur subjecto plano à puncto D ad rectos angulos constituentur aliæ rectæ lineæ, præter ipsam DB, communem planorum

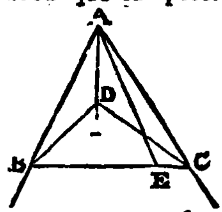
AB BC

AB BC sectionem. quare DB subjecto plano est perpendicularis. Ergo si duo plana se invicem secantia plano alicui sint ad rectos angulos; & communis ipsorum sectio eidem plano ad rectos angulos erit. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XX. THEOR.

Si solidus angulus tribus angulis planis contineatur, duo quilibet reliquo majores sunt, quomodocunque sumpti.

Solidus angulus ad A tribus angulis planis BAC CAD DAB contineatur. Dico angulorum BAC CAD DAB duos quoslibet reliquo majores esse, quomodocunque sumptos. Si enim BAC CAD DAB anguli inter se æquales sint, perspicuum est duos quoslibet reliquo majores esse, quomodocunque sumptos. sin minus, sit major BAC. & ad rectam lineam AB, & ad punctum in ipsa A, constituatur [a] angulo DAB, in plano per BA AC transeunte, æqualis angulus BAE; ponaturque ipsi AD æqualis AE; & per E ducta BEC secet rectas lineas AB AC in punctis BC, & DB DC jungantur. itaque quoniam DA est æqualis AE, communis autem AB, duæ DA AB æquales sunt duabus AE AB; & angulus DAB æqualis est angulo BAE. basis igitur DB basi BE est [b] æqualis. & quoniam duæ DB DC ipsa BC majores sunt [c], quarum DB æqualis ostensa est ipsi BE; erit reliqua DC quam reliqua EC major. quòd cum DA sit æqualis AE, communis autem AC & basis DC major basi EC; erit [d] angulus DAC angulo EAC major. sed ex constructione est DAB angulus æqualis ipsi BAE. quare DAB DAC anguli, angulo BAC majores sunt. similiter demonstrabimus, & si duo quilibet alii sumantur, eos reliquo esse majores. Si igitur solidus angulus tribus angulis planis contineatur; duo quilibet reliquo majores sunt, quomodocunque sumpti. Quod demonstrare oportebat.



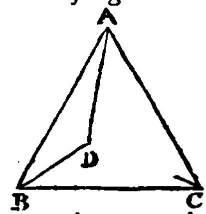
[a] 23.primi.
[b] 4.primi.
[c] 20.primi.
[d] 25.primi.

PROP. XXI. THEOR.

Omnis solidus angulus, minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur.

Sit solidus angulus ad A, planis angulis BAC CAD DAB con-

contentus. Dico angulos BAC CAD DAB quatuor rectis esse minores. Sumantur enim in unaquaque ipsarum AB AC AD quævis puncta B C D, & BC CD DB jungantur. Quoniam igitur solidus angulus ad B, tribus angulis planis continetur CBA ABD CBD, duo quilibet reliquo majores [a] sunt: anguli igitur CBA ABD, angulo CBD sunt majores. eadem ratione, & anguli quidem BCA ACD majores sunt angulo BCD; anguli vero CDA ADB majores angulo CDB. quare sex anguli CBA ABD BCA ACD CDA ADB tribus angulis CBD BCD CDB sunt majores. sed tres anguli CBD BDC DCB sunt [b] æquales duobus rectis. sex igitur anguli CBA ABD BCA ACD CDA ADB duobus rectis majores sunt. quod cum singulorum triangulorum ABC ACD ADB tres anguli sint æquales duobus rectis, erunt trium triangulorum novem anguli CBA ACB BAC ACD DAC CDA ADB DBA BAD æquales sex rectis. quorum sex anguli ABC BCA ACD CDA ADB DBA duobus rectis sunt majores. reliqui igitur BAC CAD DAB tres anguli, qui solidum continent angulum, quatuor rectis minores erunt. Quare omnis solidus angulus, minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur. Quod oportebat demonstrare.



a 20. hujus.

b 32. primi.

PROP. XXII. THEOR.

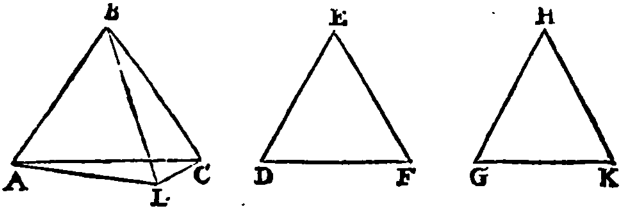
Si sint tres anguli plani, quorum duo reliquo sint majores, quomodocunque sumpti, contineant autem ipsos rectæ lineæ æquales; fieri potest, ut ex iis quæ rectas æquales conjungunt, triangulum constituatur.

Sint dati tres anguli plani ABC DEF GHK, quorum duo reliquo sint majores, quomodocunque sumpti: contineant autem ipsos æquales rectæ lineæ AB BC, DE EF, GH HK, & AC DF GK jungantur. Dico fieri posse ut ex æqualibus ipsis AC DF GK triangulum constituatur: hoc est duas reliqua majores esse quomodocunque sumptas. Si igitur anguli ad B E H sint æquales, & AC DF GK æquales [a] erunt, & duæ reliqua majores. sin minus, sint inæquales anguli ad B E H, & major sit angulus ad B utrovis ipsorum qui sunt ad E H. major igitur est & [b] recta linea AC utravis ipsarum DF GK. & manifestum est ipsam AC unà cum altera ipsarum DF GK, reliqua esse majorem. Dico & DF GK ipsa AC majores

a 4 primi.

b 24. primi.

majores esse. constituatur [e] ad rectam lineam AB, & ad pun- e 23.primi.
ctum in ea B, angulo GHK æqualis angulus ABL, & uni

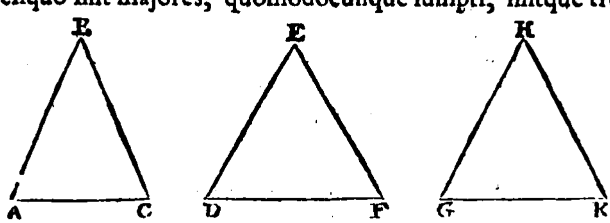


ipsarum AB BC, DE EF, GH HK ponatur æqualis BL, & AL CL jungantur. Quoniam igitur duæ AB BL duabus GH HK æquales sunt, altera alteri, & angulos æquales continent; erit basis AL basi GK æqualis. & quoniam anguli ad E H, angulo ABC majores sunt, quorum angulus GHK est æqualis ipsi ABL; erit reliquus qui ad E, angulo LBC major. quod cum duæ LB BC duabus DE EF æquales sunt, altera alteri; & angulus DEF angulo LBC major; basis DF basi LC major [d] erit. ostensa est autem GK æqualis AL. d 24.primi.
ergo DF GK ipsis AL LC sunt majores; sed AL LC majores [e] sunt ipsa AC. multo igitur DF GK, ipsa AC majores e 20.primi.
erunt. Quare rectarum linearum AC DF GK duæ reliqua majores sunt, quomodocunque sumptæ; ac propterea [f] fieri f 22.primi.
potest ut ex æqualibus ipsis AC DF GK triangulum constituatur. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXIII. PROBL.

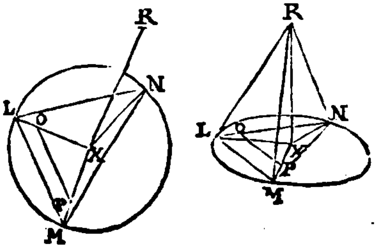
Ex tribus angulis planis, quorum duo reliquo sunt majores, quomodocunque sumpti, solidum angulum constituere. oportet autem tres angulos quatuor rectis esse minores.

Sint dati tres anguli plani ABC DEF GHK, quorum duo reliquo sint majores, quomodocunque sumpti, sintque tres



anguli quatuor rectis minores. Oportet ex æqualibus ipsis ABC DEF GHK solidum angulum constituere. abscindantur æquales AB BC, DE EF, GH HK; & AC DF GK jungantur. fieri

fieri igitur poteſt ut ex æqualibus ipſis AC DF GK conſti-
a 22. hujus. tuatur a triangulum. Itaque b conſtituatur LMN, ita ut AC
b 22. primi. quidem ſit æqualis LM, DF vero ipſi MN: & præterea GK
c 5. quarti. ipſi LN, & circa LMN triangulum circulus LMN c deſcribatur: ſumaturque ipſius centrum X, quod vel erit intra triangulum LMN, vel in uno ejus latere, vel extra. ſit primo intra: & LX MX NX jungantur. Dico AB majorem eſſe ipſa LX. Si enim non ita ſit, vel AB erit æqualis LX, vel ea minor. ſit primo æqualis. quoniam igitur AB eſt æqualis LX, atque eſt AB ipſi BC æqualis; erit LX æqualis BC, eſt autem LX æqualis

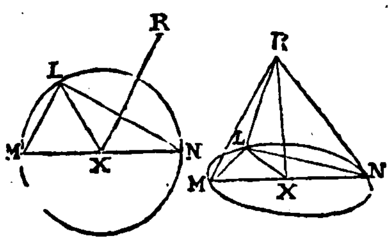


XM. duæ igitur AB BC duabus LX XM æquales ſunt, altera alteri; & AC baſis baſi LM æqualis ponitur. quare
d 8. primi. d angulus ABC angulo LXM eſt æqualis: eadem ratione & angulus quidem DEF eſt æqualis angulo MXN, angulus vero GHK angulo NXL. tres igitur anguli ABC DEF GHK tribus LXM MXN NXL æquales ſunt. ſed tres LXM MXN
e 2. Cor. 15. primi. NXL quatuor rectis ſunt e æquales. ergo & tres ABC DEF GHK æquales erunt quatuor rectis. atqui ponuntur quatuor rectis minores, quod eſt abſurdum. non igitur AB ipſi LX eſt æqualis. Dico præterea neque AB minorem eſſe ipſa LX. ſi enim fieri poteſt, ſit minor, & ponatur ipſi quidem AB æqualis XO, ipſi vero BC æqualis XP, & OP jungatur. quoniam igitur AB eſt æqualis BC, & XO ipſi XP æqualis erit. ergo & reliqua OL reliquæ PM eſt æqualis; ac propterea
f 2. ſexti. LM parallela f eſt ipſi OP; & LMX triangulum triangulo
g 4. ſexti. OPX æquiangulum. eſt g igitur ut XL ad LM, ita XO ad OP; & permutando ut XL ad XO, ita LM ad OP. major autem eſt LX, quam XO. ergo & LM quam OP eſt major. ſed LM poſita eſt æqualis AC. & AC igitur quam OP major erit. itaque quoniam duæ rectæ lineæ AB BC duabus
h 25. primi. OX XP æquales ſunt, & baſis AC major baſi OP; erit h angulus ABC angulo OXP major. ſimiliter demonſtrabimus & DEF angulum majorem eſſe angulo MXN, & angulum GHK angulo NXL; tres igitur anguli ABC DEF GHK tribus LXM MXN NXL ſunt majores. at anguli ABC DEF GHK quatuor rectis minores ponuntur. multo igitur anguli
i 2. Cor. 15. primi. LXM MXN NXL minores erunt quatuor rectis. ſed & i æquales. quod eſt abſurdum. non igitur AB minor eſt, quam LX.

LX. ostensum autem est neque esse æqualem. ergo major sit necesse est. constituatur *k* à puncto X circuli LMN plano ad rectos angulos XR. & excessui quo quadratum ex AB superat quadratum ex LX, ponatur æquale quadratum quod fit ex RX, & RL RM RN jungantur. quoniam igitur RX perpendicularis est ad planum DMN circuli, & ad unamquamque ipsarum LX MX NX erit *l* perpendicularis. & quoniam LX est æqualis XM, communis autem & ad rectos angulos XR, erit basis LR æqualis *m* basi RM. eadem ratione & RN utrique ipsarum RL RM est æqualis. tres igitur rectæ lineæ RL RM RN inter se æquales sunt. & quoniam quadratum XR ponitur æquale excessui, quo quadratum ex AB superat quadratum ex LX; erit quadratum ex AB quadratis ex LX XR æquale. quadratis autem ex LX XR æquale est *n* quadratum ex RL; rectus enim angulus est LXR. ergo quadratum ex AB quadrao ex RL æquale erit; ideoque AB ipsi RL est æqualis. sed ipsi quidem AB æqualis est unaquæque ipsarum BC DE EF GH HK: ipsi vero RL æqualis utraque ipsarum RM RN. unaquæque igitur ipsarum AB BC DE EF GH HK unicuique ipsarum RL RM RN est æqualis. quod cum duæ RL RM duabus AB BC æquales sint, & basis LM ponatur æqualis basi AC: erit *o* angulus LRM æqualis angulo ABC. eadem ratione & angulus quidem MRN angulo DEF, angulus autem LRN angulo GHK est æqualis. Ex tribus igitur angulis planis LRM MRN LRN, qui æquales sunt tribus datis ABC DEF GHK solidus angulus constitutus est ad R.

k 12. hujus.
l 3. Def. hujus.
m 4. primi.
n 47. primi.
o 8. primi.

Sed sit centrum circuli in uno laterum trianguli, videlicet in MN, quod sit X, & XL jungatur. Dico rursus AB majorem esse ipsa LX. Si enim non ita sit, vel AB est æqualis LX vel ipsa minor. sit primo æqualis. duæ igitur AB BC, hoc est DE EF duabus MX XL, hoc est ipsi MN æquales sunt. sed MN ponitur æqualis DF.



ergo DE EF ipsi DF sunt æquales. quod fieri non *p* potest non igitur AB est æqualis LX. similiter neque minor. multo enim majus id, quod fieri non potest, sequeretur. ergo AB ipsa LX major est. & similiter si excessui quo quadratum ex AB superat quadratum ex LX æquale ponatur quadratum

p 20. primi.

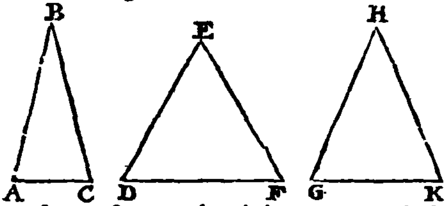
M ex

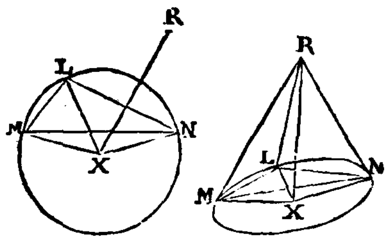
ex RX, & ipsa RX circuli plano ad rectos angulos constituatur, fiet problema.

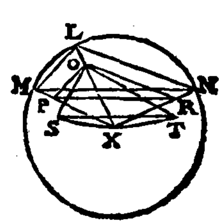
Sed sit centrum circuli extra triangulum LMN, quod sit X, & LX MX NX jungantur. Dico & sic AB ipsa LX majorem esse. Si enim non ita sit, vel æqualis est, vel minor. sit primo æqualis. ergo duæ AB BC duabus MX XL æquales sunt, altera alteri; & basis AC est æqualis basi ML, angulus igitur ABC æqualis est angulo MXL. eadem ratione & GHK angulus ipsi LXN est æqualis; ac propterea totus MXN æqualis duobus ABC GHK. sed & anguli ABC GHK angulo DEF majores sunt. & angulus igitur MXN ipso DEF est major. at quoniam duæ DE EF duabus MX XN æquales sunt, & basis DF æqualis basi MN, erit MXN angulus angulo DEF æqualis *. ostensus autem est major, quod est absurdum. non igitur AB est æqualis LX: deinceps vero ostendemus neque minorem esse. quare major necessario erit. & si rursus circuli plano ad rectos angulos constituamus XR, & ipsam æqualem ponamus lateri quadrati ejus, quo quadratum ex AB superat quadratum ex LX, problema constituetur. Dico vero neque minorem esse AB ipsa LX. Si enim fieri potest, sit minor; & ipsi quidem AB æqualis ponatur XO, ipsi vero BC æqualis XP, & OP jungatur. quoniam igitur AB ipsi BC est æqualis, erit OX æqualis XP. ergo & reliqua OL reliquæ PM æqualis. parallela igi-

q 2. sexti. tur q est LM ipsi PO, & triangulum LMX triangulo PXO æquiangulum est:

r 4. sexti. quare r ut XL ad LM, ita XO ad OP: & permutando ut LX ad XO ita LM ad OP. major autem est LX quam XO. ergo LM quam OP est major. sed LM est æqualis AC. & AC igitur quam OP major erit





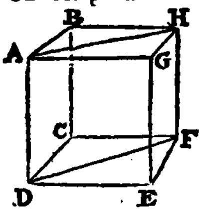


tit. itaque quoniam duæ AB BC duabus OX XP sunt æquales altera alteri; & basis AC major est basi OP; erit *f* angulus ABC angulo OXP major. similiter & si XR su- *f* 25. primi.
matur æqualis utrivis ipsarum XO XP, & jungatur OR, ostendemus angulum GHK angulo OXR majorem. constituatur ad rectam lineam LX, & punctum in ipsa X angulo quidem ABC æqualis angulus LXS, angulo autem GHK æqualis LXT, & ponatur utraque XS XT ipsi OX æqualis: junganturque OS OT ST. & quoniam duæ AB BC duabus OX XS æquales sunt, & angulus ABC æqualis angulo OXS erit basis AC, hoc est LM, basi OS æqualis. eadem ratione, & LN est æqualis ipsi OT. quod cum duæ ML LN duabus OS OT sint æquales, & angulus MLN major angulo SOT; erit *t* & basis MN basi ST major. sed MN est æqualis DF. *t* 24. primi.
ergo & DF quam ST major erit. quoniam igitur duæ DE EF duabus SX XT æquales sunt, & basis DF major basi ST; erit angulus DEF angulo SXT major *f*. æqualis autem est angulus SXT angulis ABC GHK. ergo DEF angulus angulis ABC GHK major est: sed & minor. Quod fieri non potest. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXIV. THEOR.

Si solidum parallelis planis contineatur, opposita ipsius plana, & æqualia, & parallelogramma erunt.

Solidum enim CDGH parallelis planis AC GF BG CE FB AE contineatur. Dico opposita ejus plana, & æqualia, & parallelogramma esse. Quoniam enim duo plana parallela BG CE, à plano AC secantur, communes ipsorum sectiones *a* parallelæ sunt: ergo AB ipsi CD est parallela. rursus *a* 16. hujus.
quoniam duo plana parallela BF AE secantur à plano AC, communes ipsorum sectiones parallelæ *a* sunt: parallela igitur est AD ipsi BC. ostensa autem est & AB parallela CD. ergo AC parallelogrammum erit. similiter demonstrabimus, & unumquodque ipsorum CE FG GB BF AE parallelogrammum esse. jungantur AH DF. & quoniam parallela est AB quidem ipsi DC; BH vero ipsi CF, erunt AB BH sese tangentes, duabus DC CF sese tangentibus parallelæ, & non in eodem plano: quare æquales *b* angulos *b* 10. hujus.
continebunt. angulus igitur ABH angulo DCF est æqualis.



Et quoniam duæ AB BH duabus DC CF æquales *c* sunt, & *c* 34. primi.

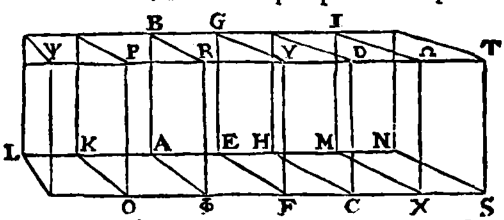
d 4. primi. angulus ABG æqualis angulo DCF, erit [d] basis AH basi DF æqualis: & ABH triangulum æquale triangulo DCF. quod
e 34. primi. cum ipsius quidem ABH trianguli duplum [e] sit BG parallelogrammum: ipsius vero DCF trianguli duplum parallelogrammum CE: erit BG parallelogrammum æquale parallelogrammo CE. similiter demonstrabimus & AC parallelogrammum parallelogrammo GF, & parallelogrammum AE parallelogrammo BF æquale esse. Si igitur solidum parallelis planis contineatur, opposita ipsius plana, & æqualia, & parallelogramma sunt. Quod oportebat demonstrare.

Cor. Ex jam demonstratis constat, si solidum parallelis contineatur planis, opposita ipsius plana, & æqualia esse, & similia, quippe quæ & singulos angulos æquales, & circa æquales angulos latera proportionalia habeant.

PROP. XXV. THEOR.

Si solidum parallelepipedum plano secetur oppositis planis parallelo, erit ut basis ad basim, ita solidum ad solidum.

Solidum enim parallelepipedum ABCD plano YE secetur, oppositis planis RA DH parallelo. Dico ut EFΦA basis ad basim EHCF, ita esse ABFY solidum ad solidum EGCD. Producatur enim AH ex utraque parte: & ponantur ipsi



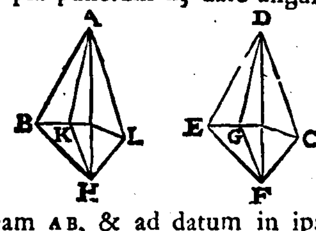
quidem EH æquales quotcunque HM MN; ipsi vero AE æquales quotcunque AK KL, & compleantur parallelogramma LO KΦ HX MS, & solida LP KR HΩ MT. quoniam igitur æquales inter se sunt LK KA AE rectæ lineæ;
a 36. primi. erunt & parallelogramma LO KΦ AF inter se [a] æqualia: itemque æqualia inter se parallelogramma KΞ KB AG, & adhuc
b 24. hujus. parallelogramma LΨ KP AR inter se [b] æqualia; opposita enim sunt. eadem ratione & parallelogramma EC HX MS æqualia inter se sunt; itemque parallelogramma HG HI IN inter se æqualia: & insuper parallelogramma DH MΩ NT. tria igitur plana solidi LP æqualia sunt tribus planis solidi
c 29. primi. KR, atque etiam solidi AY, [c] similia quoque sunt: sed tria tribus

tribus oppositis [d] sunt similia & æqualia. ergo tria solida [d] Cor. antecedent.
LP KR AY inter se æqualia [e] erunt. eadem ratione & tria [e] 10. Def. hujus.
solida ED HΩ MT sunt æqualia inter se. quotuplex igitur est basis LF ipsius AF basis, totuplex est & LY solidum solidi AY. eadem ratione quotuplex est NF basis ipsius basis HF, totuplex est & solidum NY ipsius ED solidi: & si basis LF est æqualis basi NF, & solidum LY solido NY æquale erit; & si basis LF superat NF basim, & LY solidum NY superabit; & si minor, minus. quatuor igitur magnitudinibus existentibus, duabus scilicet basibus AF FH, & duobus solidis AY ED; sumpta sunt æque multiplicia, basis quidem AF, & AY solidi, videlicet basis LF, & solidum LY: basis vero HF, & ED solidi, nempe basis NF, & solidum NY. & demonstratum est si basis LF superat basim NF, & LY solidum solidum NY superare; & si æqualis æquale; & si minor minus. est igitur [f] ut AF basis ad basim FH, ita AY solidum [f] 5. Def. quinti.
ad solidum ED. Quare si solidum parallelepipedum plano secetur, oppositis planis parallelo; erit ut basis ad basim, ita solidum ad solidum. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXVI. PROBL.

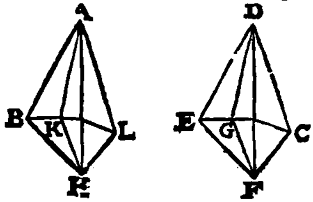
Ad datam rectam lineam, & ad datum in ipsa punctum dato angulo solido æqualem solidum angulum constituere.

Sit data quidem recta linea AB, datum autem in ipsa punctum A, & datus solidus angulus ad D qui EDC EDF FDC angulis planis continetur. Oportet ad datam rectam lineam AB, & ad datum in ipsa punctum A, dato angulo solido ad D æqualem solidum angulum constituere. Sumatur in linea DF quodvis punctum F, à quo ad planum per ED DC transiens ducatur [a] perpendicularis FG, & plano in puncto G occurrat; jungaturque [a] 11. hujus.



DG, & ad rectam lineam AB, & ad datum in ipsa punctum A, angulo quidem EDC æqualis angulus [b] constituatur BAL; angulo autem EDG constituatur æqualis BAK. [b] 23. primi.
deinde ipsi DG ponatur æqualis AK, & à puncto K plano per BAL ad rectos angulos [c] erigatur HK; ponaturque ipsi [c] 12. hujus.
GF æqualis KH, & HA jungatur. Dico angulum solidum ad A qui angulis BAL BAH HAL, continetur, æqualem esse solido angulo ad D, angulis EDC EDF FDC contento. Sumantur

mantur enim æquales rectæ lineæ AB DE, & jungantur HB KB FE GE. quoniam igitur FG perpendicularis est ad subjectum planum, & ad omnes rectas lineas quæ ipsam contingunt, suntque in subjecto plano, rectos faciet [d] angulos, uterque igitur angulorum FGD FGE rectus est. eadem ratione, & uterque ipsorum HKA HKB est rectus. & quoniam duæ KA AB duabus GD DE æquales sunt altera alteri, & angulos æquales continent; erit [e] basis BK basi EG æqualis. est autem & KH æqualis GF, atque angulos rectos continent. æqualis [e] igitur erit HB ipsi FE. rursus quoniam duæ AK KH duabus DG GF æquales sunt, & rectos continent angulos; erit basis AH basi DF æqualis: estque AB æqualis DE. duæ igitur HA AB duabus FD DE sunt æquales; & basis HB est æqualis basi FE, ergo angulus [f] BAH angulo EDF æqualis erit. eadem ratione, & angulus HAL angulo FDC est æqualis, quandoquidem si assumamus æquales AL DC, & jungamus KL HL GC FC, quoniam totus BAL est æqualis toti EDC, quorum BAK ipsi EDG ponitur æqualis; erit reliquus KAL æqualis reliquo GDC. & quoniam duæ KA AL duabus GD DC æquales sunt, & angulos æquales continent; basis KL basi GC [e] æqualis erit. est autem & KH æqualis GF, duæ igitur LK KH, duabus CG GF sunt æquales; angulosque rectos continent: ergo basis HL æqualis est basi CF. rursus quoniam duæ HA AL, duabus FD DC æquales sunt, & basis HL æqualis basi FC; erit angulus HAL [f] æqualis angulo FDC. atque factus est angulus BAL angulo EDC æqualis. Ad datam igitur rectam lineam, & ad datum in ipsa punctum, dato angulo solido æqualis angulus solidus constitutus est. Quod facere oportebat.



[d] 3. Def. hujus.

[e] 4. primi.

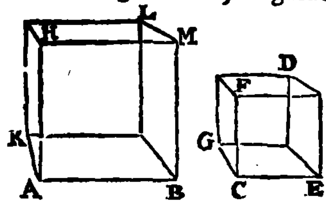
[f] 8. primi.

PROP. XXVII. PROBL.

Ad datam rectam lineam dato solido parallelepipedo simile, & similiter positum solidum parallelepipedum describere.

Sit recta quidem linea AB; datum vero solidum parallelepipedum CD. Oportet ad datam rectam lineam AB dato solido parallelepipedo CD simile, & similiter positum solidum parallelepipedum describere. Constituatur ad rectam lineam

neam AB, & ad datum in ipsa punctum A angulo solido ad C æqualis [a] angulus, qui angulis BAH HAK KAB contineatur, ita ut angulus quidem BAH æqualis sit angulo ECF, angulus vero BAK angulo ECG, & adhuc angulus HAK angulo GCF, & fiat [b] ut EC ad CG, ita BA ad AK, ut autem GC ad CF, ita KA ad AH. ergo ex æquali ut EC ad CF, ita erit BA ad AH. compleatur parallelogrammum BH, & AL solidum. quoniam igitur est ut EC ad CG, ita BA ad AK, nempe, circa æquales angulos ECG BAK latera sunt proportionalia; erit parallelogrammum KB parallelogrammo GE simile. eadem quoque ratione parallelogrammum KH simile est parallelogrammo GF, & parallelogrammum HB parallelogrammo FE. tria igitur parallelogramma solidi AL tribus parallelogrammis solidi CD similia sunt: sed tria tribus oppositis sunt [c] æqualia, & similia. ergo totum AL solidum toti solido CD simile erit. Ad datam igitur rectam lineam AB dato solilo parallelepipedo CD simile, & similiter positum solidum parallelepipedum AL descriptum est. Quod facere oportebat.

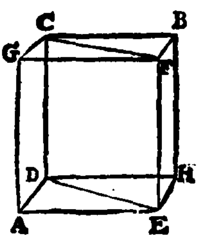


a 26. hujus.
b 12. sexti.
c Cor. 24. hujus.

PROP. XXVIII. THEOR.

Si solidum parallelepipedum plano secetur per diagonales oppositorum planorum, ab ipso plano bifariam secabitur.

Solidum enim parallelepipedum AB plano CDEF secetur per diagonales oppositorum planorum, videlicet CF DE. Dico solidum AB à plano CDEF bifariam secari. Quoniam enim æquale [a] est CGF triangulum triangulo CBF, triangulum vero ADE triangulo DEH; est autem & CA parallelogrammum parallelogrammo BE æquale [b], oppositum enim est; & parallelogrammum GE æquale parallelogrammo CH; erit prisma contentum duobus triangulis CGF ADE, & tribus parallelogrammis GE AC CE æquale prismati, quod continetur duobus triangulis CFB DEH, & tribus parallelogrammis CH & BE CE: etenim planis, & numero & magnitudine æqualibus continentur. Ergo totum AB solidum



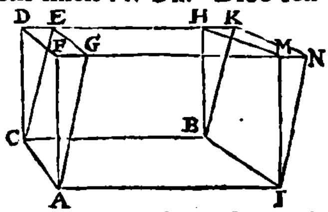
a 34. primi.
b 24. hujus.

dum à plano CDEF bifariam secatur. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXIX. THEOR.

Solida parallelepipeda quæ in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes lineæ sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia.

Sint enim in eadem basi AB solida parallelepipeda CM CN, eadem altitudine, quorum stantes AF AG LM LN CD CE BH BK sint in eisdem rectis lineis FN DK. Dico solidum CM solido CN æquale esse. Quoniam enim parallelogrammum est utrumque ipsorum CH CK; erit CB, utrique ipsarum DH EK [a] æqualis, ergo & DH est æqualis EK. communis auferatur EH. reliqua igitur DE æqualis est reliquæ HK. quare & [b] DEC triangulum est æquale triangulo HKB. parallelogrammum autem DG est æquale parallelogrammo HN. eadem ratione & AFG triangulum æquale est triangulo LMN. est autem parallelogrammum CF parallelogrammo [c] BM, & parallelogrammum CG parallelogrammo BN æquale: opposita enim sunt. ergo & prisma contentum duobus triangulis AFG DEC, & tribus parallelogrammis AD DG GC est æquale prismati, quod duobus triangulis LMN HBK, & tribus parallelogrammis BM NH BN continetur. commune apponatur solidum, cujus basis quidem parallelogrammum AB, oppositum autem ipsi GEHM. ergo totum CM solidum parallelepipedum toti solido parallelepipedo CN est æquale. Solida igitur parallelepipeda quæ in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes lineæ sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia. Quod demonstrare oportebat.



a 34. primi.
b 8. primi.
c 24. hujus.

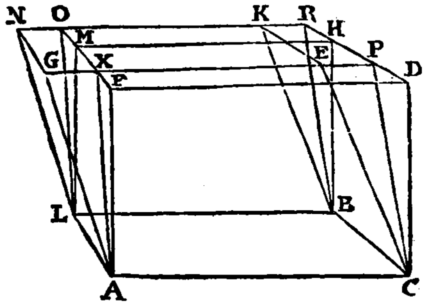
PROP. XXX. THEOR.

Solida parallelepipeda quæ in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes lineæ non sunt in iisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia.

Sint in eadem basi AB solida parallelepipeda CM CN & eadem altitudine, quorum stantes AF AG LM LN CD CE

BH

BH BK non sint in eisdem rectis lineis. Dico solidum CM solido CN æquale esse. Producantur enim NK DH, & GE FM, conveniantque inter se punctis R X; & adhuc producantur FM GE ad O P puncta: & AX LO CP BR jungantur. solidum CM, cujus basis quidem ACBL parallelogrammum, oppositum autem ipsi FDHM est

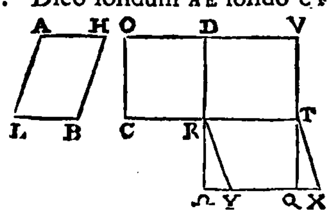


ª æquale solido CO, cujus basis parallelogrammum ACBL ª 29. hujus. & ei oppositum XPRO, in eadem enim sunt basi ACBL, & ipsorum stantes AF AX LM LO CD CP BH BR sunt in eisdem rectis lineis FO DR. sed solidum CO, cujus basis quidem parallelogrammum ACBL, oppositum autem ipsi XPRO est ª æquale solido CN, cujus basis ACBL parallelogrammum, & ipsi oppositum GEKN. etenim in eadem sunt basi ACBL, & eorum stantes AG AX CE CP LN LO BK BR sunt in eisdem rectis lineis GP NR. quare & CM solidum solido CN æquale erit. Solida igitur parallelepipeda quæ in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes lineæ non sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXXI. THEOR.

Solida parallelepipeda quæ in æqualibus sunt basibus, & eadem altitudine, inter se sunt æqualia.

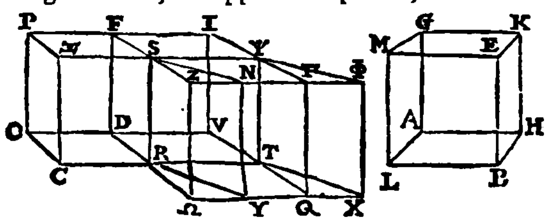
Sint in æqualibus basibus AB CD solida parallelepipeda AE CF, & eadem altitudine. Dico solidum AE solido CF æquale esse. Sint primo stantes HK BE AG LM OP DF CZ RS ad rectos angulos basibus AB CD: angulus autem ALB angulo CRD sit inæqualis, & producatur ipsi CR in directum RT: constituaturque ad rectam



lineam RT, & ad punctum in ipsa R, angulo ALB æqualis ª angulus TRY. & ponatur ipsi quidem AL æqualis ª 23. primi. RT, RT, ipsi verò LB æqualis RY, & ad punctum Y ipsi RT parallela ducatur XY, compleaturque parallelogrammum RX, & ΨY solidum. quoniam igitur duæ TR RY duabus AL LB æquales sunt, & angulos continent æquales; erit parallelogrammum RX æquale & simile parallelogrammo HL: & quoniam rursus AL est æqualis RT, & LM ipsi RS, angulosque æquales continent, parallelogrammum RΨ parallelogrammo AM æquale & simile erit. eadem ratione LE parallelogrammum ipsi SY æquale est & simile. tria igitur parallelogramma solidi AE tribus parallelogrammis solidi ΨY æqualia & similia sunt. sed & tria tribus opposita & [b] æqualia sunt & similia. totum igitur AE solidum parallelepipedum toti solido parallelepipedo ΨY est æquale. producantur DR XY, conveniantque inter se in puncto Ω, & per T ipsi DΩ parallela ducatur TQ, & producantur TQ OD, & conveniant in V, compleaturque solida ΩΨ RI. solidum igitur ΨΩ cujus basis est RΨ parallelogrammum, oppositum autem ipsi ΩΓ, est [c] æquale solido ΨY, cujus basis est RΨ parallelogrammum, & oppositum ipsi YΦ, in eadem enim

[b] Cor. 24. hujus.

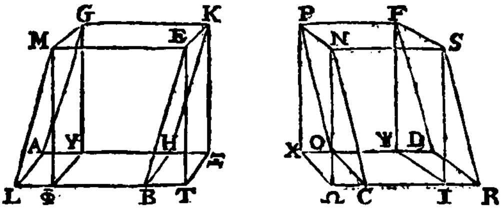
[c] 29. hujus.



sunt basi RΨ, & eadem altitudine, & eorum stantes RΩ RY TQ TX SZ SN ΨΓ ΨΦ in eisdem sunt rectis lineis ΩX ZΦ. sed solidum ΨY æquale est solido AE. ergo & ΨΩ solido AE est æquale. præterea quoniam parallelogrammum RYXT est æquale parallelogrammo ΩT, etenim in eadem est basi RT, & in eisdem parallelis RT ΩX. & parallelogrammum RYXT parallelogrammo CD est æquale, quoniam & ipsi AB est æquale; parallelogrammum ΩT æquale est parallelogrammo CD: aliud autem est parallelogrammum DT. est igitur ut CD basis ad basim DT, ita ΩT ad ipsam DT. & quoniam solidum parallelepipedum CI secatur plano RF planis oppositis parallelo; erit ut [d] CD basis ad basim DT, ita solidum CF ad RI solidum. eadem ratione quoniam solidum parallelepipedum ΩI secatur plano RΨ oppositis planis parallelo, ut ΩT basis [d] ad basim DT, ita erit solidum ΩΨ ad RI solidum. sed ut CD basis ad basim DT, ita basis ΩT ad ipsam TD. ut igitur solidum CF ad RI solidum ita solidum

[d] 25. hujus.

solidum ΩΨ ad solidum RI. quod cum utrumque solidorum CF ΩΨ ad solidum RI eandem habet proportionem, solidum CF solido ΩΨ est æquale. solidum autem ΩΨ ostensum est æquale solido AE. ergo & [e] AE ipsi CF æquale erit. [e] 9. quinti.



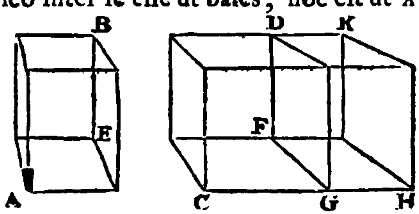
Sed non sint stantes AG HK BE LM CN OP DF RS ad rectos angulos ipsis AB CD basibus. Dico rursus solidum AE æquale esse solido CF. Ducantur [f] à punctis K E G M, P F N S ad subjectum planum perpendiculares KΞ ET GY MΦ, SI FΨ NΩ PX, & plano in punctis Ξ T Y Φ, Ψ X Ω I occurrant, & jungantur ΞT YΦ ΞY TΦ XΨ XΩ ΩI ΨI. æquale igitur est KΦ solidum solido PI; in æqualibus enim sunt basibus KM PS, & eandem altitudine, quorum stantes ad rectos angulos sunt basibus. sed KΦ solidum solido AE est [g] æquale: solidum vero PI æquale [g] solido CF. si quidem in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis. ergo & solidum AE solido CF æquale erit. Solida igitur parallelepipeda quæ in æqualibus sunt basibus & eadem altitudine, inter se sunt æqualia. Quod demonstrare oportebat.

[f] 11. hujus.
[g] 30. hujus.

PROP. XXXII. THEOR.

Solida parallelepipeda quæ eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases.

Sint solida parallelepipeda AB CD, quæ eandem altitudinem habeant. Dico inter se esse ut bases; hoc est ut AE basis ad basim CF ita solidum AB ad CD solidum. applicetur enim ad rectam lineam FG parallelogrammo AE æquale FH, & à basi FH eadem



altitudine ipsi CD solidum parallelepipedum GK compleatur. solidum igitur AB solido GK est [a] æquale; in æqualibus enim

[a] 31. hujus.

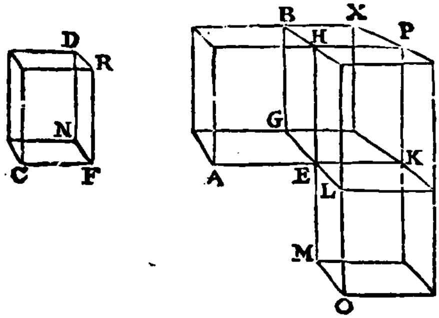
enim sunt basibus AE FH, & eadem altitudine. itaque quoniam solidum parallelepipednm CK plano DG secatur oppositis planis parallelo; erit ut [b] HF basis ad basim FC, ita solidum HD ad DC solidum; atque est basis quidem FH basi AE æqualis, solidum vero GK æquale solido AB. est igitur & ut AE basis ad basim CF, ita solidum AB ad solidum CD. Quare solida parallelepipeda quæ eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases. Quod demonstrare oportebat.

b 25. hujus.

PROP. XXXIII. THEOR.

Similia solida parallepipeda inter se sunt in triplicata proportione homologorum laterum.

Sint similia solida parallelepipeda AB CD. latus autem AE homologum sit lateri CF. Dico solidum AB ad CD solidum triplicatam proportionem habere ejus, quam habet AE ad CF. Producantur enim EK EL EM in directum ipsis AE GE HE: & ipsi quidem CF æqualis ponatur EK, ipsi vero FN æqualis EL; & adhuc ipsi FR æqualis EM, & KL parallelogrammum, & KO solidum compleantur. quoniam igitur duæ KE EL duabus CF FN æquales sunt: sed & angulus KEL angulo CFN est æqualis; quia & angulus AEG ipsi CFN ob similitudinem solidorum AB CD: erit & KL parallelogrammum simile & æquale parallelogrammo CN. eadem ratione, & parallelogrammum KM æquale est & simile parallelogrammo CR, & adhuc parallelogrammum OE ipsi DF parallelogrammo. tria igitur parallelogramma solidi KO tribus parallelogrammis CD solidi æqualia & similia sunt. sed tria tribus oppositis æqualia [a] sunt & similia. totum igitur KO solidum æquale est & simile toti solido CD. compleatur GK parallelogrammum; & à basibus quidem GK KL parallelogrammis, altitudine vero eadem ipsi AB, solida compleantur EX LP. & quoniam ob similitudinem solidorum AB CD est ut AE ad CF, ita EG ad FN; & EH ad FR: æqualis autem FC ipsi EK, & FN ipsi EL, &



a Cor. 24. hujus.

FR

FR ipsi EM. erit ut AE ad EK, ita GE ad EL, & HE ad EM. sed ut AE quidem ad EK, [b] ita AG parallelogrammum [b] ad parallelogrammum GK: ut autem GE ad EL, ita GK ad KL: & ut [b] HE ad EM, ita PE ad KM. & ut igitur AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK, ita GK ad KL, & PE ad KM. sed ut AG quidem ad GK, ita [c] AB solidum [c] ad solidum EX: ut autem GK ad KL, ita solidum EX ad PL solidum: & ut PE ad KM, ita PL solidum ad solidum KO. & ut igitur solidum AB ad solidum EX, ita [d] EX ad PL, [d] & PL ad KO. si autem quatuor sint magnitudines deinceps proportionales, prima ad quartam triplicatam proportionem [e] habet ejus, quam habet ad secundam. ergo & AB solidum ad [e] solidum KO triplicatam habet proportionem ejus, quam AB ad EX. sed ut AB ad EX, ita AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK; & AE recta linea ad ipsam EK. quare & AB solidum ad solidum KO triplicatam proportionem habebit ejus, quam AE habet ad EK. æquale autem est solidum KO solido CD, & recta linea EK rectæ CF est æqualis. Ergo & AB solidum ad solidum CD triplicatam habet proportionem ejus, quam latus ipsius homologum AE habet ad CF homologum latus. Quod demonstrare oportebat.

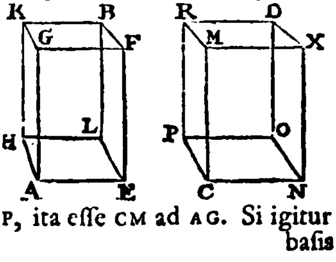
[b] 1. sexti.
[c] 32. hujus.
[d] 11. quinti.
[e] 11. Def. quinti.

Cor. Ex hoc manifestum est, si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad quartam, ita esse solidum parallepipedum quod fit à prima ad solidum quod à secunda, simile, & similiter descriptum; quoniam & prima ad quartam triplicatam proportionem habet ejus, quam habet ad secundam.

PROP. XXXIV. THEOR.

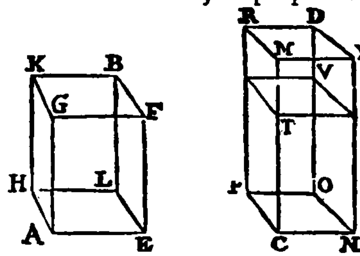
Æqualium solidorum parallelepipedorum reciprocantur bases & altitudines; & quorum solidorum parallelepipedorum reciprocantur bases & altitudines, ea inter se sunt æqualia.

Sint æqualia solida parallelepipeda AB CD. Dico ipsorum bases & altitudines reciprocari, hoc est ut EH basis ad basim NP, ita esse altitudinem solidi CD ad solidi AB altitudinem. Sint enim primo stantes AG EF LB HK CM NX OD PR ad rectos angulos basibus ipsorum.



Dico ut EH basis ad basim NP, ita esse CM ad AG. Si igitur basis

basis EH basi NP sit æqualis, est autem & AB solidum æquale solido CD; erit & CM æqualis ipsi AG. si [d] enim basibus EH NP æqualibus existentibus non sint AG CM altitudines æquales, neque AB solidum solido CD æquale erit. ponitur autem æquale. non igitur inæqualis est altitudo CM altitudini AG. ergo æqualis sit necesse est; ac propterea ut EH basis ad basim NP, ita erit CM ad AG. At vero non sit basis EH æqualis basi NP. sed EH sit major. est autem & AB solidum solido CD æquale. ergo major est CM ipsa AG; alioqui rursus sequeretur solida AB CD æqualia non esse, quæ ponuntur æqualia.. itaque ponatur CT æqualis ipsi AG: & à basi quidem NP, altitudine autem CT solidum parallelepipedum VC compleatur. quoniam igitur solidum AB solido CD est æquale, aliud

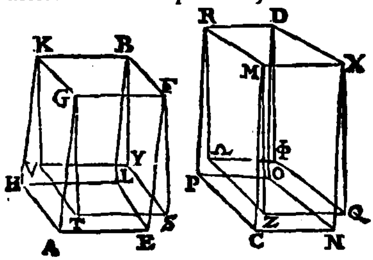


[a] 7. quinti. autem aliquod est VC, & æqualia [a] ad idem eandem habent proportionem; erit ut AB solidum ad solidum CV, ita CD solidum ad solidum CV. sed ut AB solidum ad solidum CV,
[b] 32. hujus. ita [b] basis EH ad NP basim; æque alta enim sunt AB CV solida.
[c] 25. hujus. ut autem solidum CD ad ipsum CV, ita [c] MP basis ad basim
[d] 1. sexti. PT, & MC [d] ad CT. & igitur ut basis EH ad NP basim, ita MC ad CT. est autem CT æqualis AG. ergo & ut EH basis ad basim NP, ita MC ad AG. quare solidorum parallelepipedorum AB CD bases & altitudines reciprocantur. Rursus solidorum parallelepipedorum AB CD bases & altitudines reciprocentur: sitque ut EH basis ad basim NP, ita solidi CD altitudo ad altitudinem solidi AB. Dico solidum AB solido CD æquale esse. sint enim rursus stantes ad rectos angulos basibus. & si quidem basis EH sit æqualis basi NP, estque ut EH basis ad basim NP, ita altitudo solidi CD ad solidi AB altitudinem: erit solidi CD altitudo altitudini solidi AB æqualis. solida autem parallelepipeda, quæ sunt in
[e] 31. hujus. æqualibus basibus & eadem altitudine inter se [e] æqualia sunt ergo solidum AB solido CD est æquale. Sed non sit EH basis æqualis basi NP, & sit EH major. major igitur est & solidi CD altitudo altitudine solidi AB, hoc est CM ipsa AG. ponatur ipsi AG æqualis rursus CT, & similiter solidum CV compleatur. itaque quoniam est ut EH basis ad basim NP, ita MC ad ipsam AG; æqualis autem est AG ipsi CT: erit ut basis EH ad NP basim, ita MC ad CT. sed ut basis EH ad

NP

NP basim, ita AB solidum ad solidum CV; æque alta enim sunt solida AB CV. ut autem MC ad CT, ita & MP basis ad basim PT, & solidum CD ad CV solidum. & igitur ut solidum AB ad solidum CV, ita CD solidum ad solidum CV. quòd cum utrumque solidorum AB CD ad ipsum CV eandem proportionem habeat; erit AB solidum solido CD æquale. Quod demonstrare oportebat.

Non sint autem stantes FE BL GA KH, XN DO MC RP ad rectos angulos basibus ipsorum: & à punctis F G B K, X M D R ad plana basium EH NP ducantur perpendiculares, quæ planis in punctis S T Y V, Q Z Ω Φ occurrant & compleantur solida FV XΩ. Dico & sic æqualibus existentibus solidis AB CD, bases & altitudines reciprocari, scil. ut EH basis ad basim NP, ita esse altitudinem solidi CD ad solidi AB altitudinem. quoniam enim solidum AB solido CD est æquale; solido autem AB æquale est *f* solidum BT; in eadem namque sunt basi FK, & eadem altitudine; quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis: & solidum DC est *f* æquale solido DZ, quòd in eadem sint basi XR, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis; erit & solidum BT solido DZ æquale. æqualium autem solidorum parallelepipedorum, quorum altitudines basibus ipsorum sunt ad rectos angulos, bases *g* & altitudines reciprocantur. est igitur ut FK basis ad basim XR, ita solidi DZ altitudo ad altitudinem solidi BT. atque est basis quidem FK basi EH æqualis, basis vero XR æqualis basi NP. quare ut EH basis ad basim NP. ita est altitudo solidi DZ ad solidi BT altitudinem. eædem autem sunt altitudines solidorum DZ DC, itemque solidorum BT BA. est igitur ut EH basis ad basim NP, ita solidi DC altitudo ad altitudinem solidi AB. ergo solidorum parallelepipedorum AB CD bases & altitudines reciprocantur. Rursus solidorum parallelepipedorum AB CD bases & altitudines reciprocentur, sitque ut EH basis ad basim NP, ita altitudo solidi CD ad solidi AB altitudinem. Dico solidum AB solido CD æquale esse. Iisdem namque constructis, quoniam ut EH basis ad basim NP, ita solidi CD altitudo ad altitudinem solidi AB; & basis quidem EH est æqualis basi FK; NP vero ipsi XR; erit ut FK basis ad basim XR, ita altitudo



f 30. hujus.

g Ex ante demonstratis.

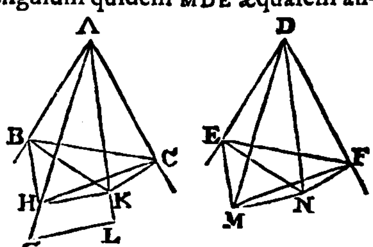
altitudo solidi CD ad solidi AB altitudinem. eædem autem sunt altitudines solidorum AB BT, & ipsorum CD DZ. est igitur ut FK basis ad basim XR, ita solidi DZ altitudo ad altitudinem solidi BT. quare solidorum BT DZ parallelepipedorum bases & altitudines reciprocantur, quorum autem solidorum parallelepipedorum altitudines sunt ad rectos angulos basibus ipsorum, & bases & altitudines reciprocantur, ea inter se sunt æqualia[h]. ergo BT solidum solido DZ est æquale. sed solidum quidem BT æquale est solido BA[i], etenim in eadem sunt basi FK, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis: solidum vero DZ est æquale solido DC, si quidem in eadem sunt basi XR, & eadem altitudine, & non in eisdem rectis lineis. ergo & solidum AB solido CD est æquale. Quod demonstrare oportebat.

h Ex ante demonstratis.
i 30. hujus.

PROP. XXXV. THEOR.

Si sint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ insistant, quæ cum rectis lineis à principio positis angulos contineant æquales, alterum alteri; in sublimibus autem sumantur quævis puncta, atque ab ipsis ad plana, in quibus sunt anguli, perpendiculares ducantur; & à punctis, quæ à perpendicularibus fiunt in planis ad primos angulos jungantur rectæ lineæ: cum sublimibus æquales angulos continebunt.

Sint duo anguli rectilinei æquales BAC EDF: & à punctis A D sublimes rectæ lineæ AG DM constituantur, quæ cum rectis lineis à principio positis æquales angulos contineant, alterum alteri: angulum quidem MDE æqualem angulo GAB, angulum vero MDF angulo GAC æqualem: & sumantur in ipsis AG DM quævis puncta G, M, à quibus ad plana per BAC EDF ducantur perpendiculares GL MN occurrentes planis in punctis L N; & LA ND jungantur.



Dico angulum GAL angulo MDN æqualem esse. Ponatur ipsi DM æqualis AH, & per H ipsi GL parallela ducatur HK. est autem GL perpendicularis ad planum

per

per BAC. ergo & HK ad [a] planum per BAC perpendicularis [a] erit. ducantur à punctis K N ad rectas lineas AB AC DF DE perpendiculares KC NF KB NE, & HC CB MF FE jungantur. Quoniam igitur quadratum ex HA æquale [b] est quadratis ex HK KA; quadrato autem ex KA æqualia [b] sunt ex KC CA quadrata: erit quadratum ex HA quadratis ex HK KC CA æquale. quadratis autem ex HK KC æquale est quadratum est HC. quadratum igitur ex HA quadratis ex HC CA æquale erit: & idcirco angulus HCA [c] est rectus. eadem ratione & angulus DFM rectus est. ergo angulus ACH ipsi DFM est æqualis. est autem & HAC angulus æqualis angulo MDF. duo igitur triangula sunt MDF HAC duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & unum latus uni lateri æquale, quod uni æqualium angulorum subtenditur; videlicet HA ipsi DM. ergo & reliqua latera reliquis lateribus [d] æqualia habebunt, alterum alteri. quare AC est æqualis DF. similiter demonstrabimus & AB ipsi DE æquale esse. jungantur enim HB ME. & quoniam quadratum ex AH est æquale quadratis ex AK KH; quadrato autem ex AK æqualia sunt quadrata ex AB BK: erunt quadrata ex AB BK KH quadrato ex AH æqualia. sed quadratis ex BK KH æquale est ex BH quadratum; rectus enim angulus est HKB, propterea quòd & HK perpendicularis est ad subjectum planum. quadratum igitur ex AH æquale est quadratis ex AB BH. quare angulus ABH [c] rectus est. eadem ratione & angulus DEM est rectus. est autem & BAH angulus æqualis angulo EDM, ita enim ponitur: atque est AH æqualis DM. ergo & AB ipsi DE [d] est æqualis. quoniam igitur AC quidem est æqualis DF, AB vero ipsi DE; erunt duæ CA AB duabus FD DE æquales. sed & angulus BAC angulo FDE est æqualis. basis [e] igitur BC basi EF, & triangulum triangulo, & reliqui anguli reliquis angulis æquales sunt. ergo angulus ACB angulo DFE est æqualis. est autem & rectus ACK æqualis recto DFN. quare & reliquus BCK reliquo EFN æqualis. eadem ratione, & CBK angulus est æqualis angulo FEN. itaque duo triangula sunt BCK EFN, duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & unum latus uni lateri æquale, quod est ad æquales angulos, videlicet BC ipsi EF. ergo & [d] reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt. æqualis igitur est CK ipsi FN. est autem & AC ipsi DF æqualis. quare duæ AC CK duabus DF FN æquales sunt: & rectos continent angulos. basis igitur AK est æqualis basi DN. & cum AH sit æqualis DM, erit & quod fit ex AH quadratum quadrato ex DM æquale. sed quadrato ex AH æqualia sunt ex AK KH quadrata; [b] etenim

[a] 8. hujus.
[b] 47. primi.
[c] 48. primi.
[d] 26. primi.
[e] 4. primi.

nim rectus est angulus AKH. quadrato autem ex DM æqualia sunt quadrata ex DN NM, quòd angulus DNM rectus sit. quadrata igitur ex AK KH quadratis ex DN NM sunt æqualia. quorum quadratum ex AK æquale est quadrato ex DN. ergo reliquum ex KH quadratum reliquo quadrato ex NM est æquale. & ideo recta linea HK ipsi MN æqualis. quod cum duæ HA AK duabus MD DN æquales sint, altera alteri, & basis HK basi NM ostensa sit æqualis; angulus HAK

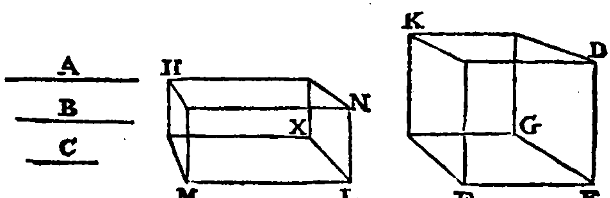
f 8. primi. angulo MDN æqualis f erit. Quod oportebat demonstrare.

Cor. Ex hoc manifestum est, si sint duo anguli plani rectilinei æquales, ab ipsis autem constituantur sublimes rectæ lineæ æquales, quæ cum rectis lineis à principio positis æquales contineant angulos, alterum alteri, perpendiculares, quæ ab ipsis ad plana, in quibus sunt primi anguli, ducantur, inter se æquales esse.

PROP. XXXVI. THEOR.

Si tres rectæ lineæ proportionales sint, solidum parallelepipedum quod à tribus fit, æquale est solido parallelepipedo quod fit à media, æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto.

Sint tres rectæ lineæ proportionales A B C, sit scil. ut A ad B ita B ad C. Dico solidum quod fit ex ipsis A B C, æquale esse solido quod fit ex B, æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto. Exponatur solidus angulus ad E contentus tribus angulis planis DEG GEF FED; & ipsi quidem B ponatur æqualis unaquæque ipsarum DE GE EF; & solidum



parallelepipedum EK compleatur: ipsi vero A ponatur æqualis LM; & ad rectam lineam LM, & ad punctum in

a 26. hujus. ipsa L, constituatur a angulo solido ad E æqualis angulus contentus NLX XLM MLN; & ponatur ipsi quidem B æqualis LN, ipsi vero C æqualis LX. quoniam igitur est ut A ad B ita B ad C, æqualis autem est A ipsi LM, & B unicuique ipsarum LN EF EG ED, & C ipsi LX; erit ut LM ad EF ita

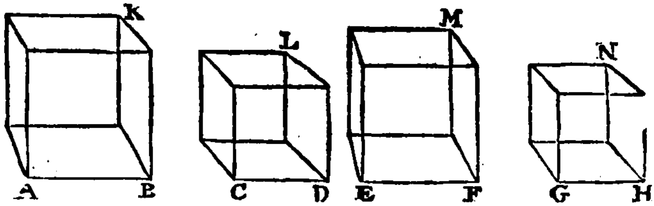
ita GE ad LX. & circum æquales angulos MLX GEF, latera sunt reciproca. ergo MX parallelogrammum parallelogrammo GF est [b] æquale. & quoniam duo anguli plani rectilinei æquales sunt GEF XLM, & in ipsis sublimes rectæ lineæ constituuntur LN ED æquales inter se, & cum rectis lineis à principio positis æquales continentes angulos, alterum alteri; erunt [c] perpendiculares quæ à punctis N D ad plana per XLM GEF ducuntur, inter se æquales. ergo solida LH EK eadem sunt altitudine. quæ vero in æqualibus basibus sunt solida parallelepipeda, & eadem altitudine, inter se [d] sunt æqualia. ergo solidum HL æquale est solido EK. atque est solidum quidem HL quod fit à tribus A B C, solidum vero EK quod fit ex B. Si igitur tres rectæ lineæ proportionales sint, solidum parallelepipedum quod fit à tribus, æquale est solido parallelepipedo quod fit, &c. Quod demonstrare oportebat.

b 14. sexti.
c Cor. 35. hujus.
d 31. hujus.

PROP. XXXVII. THEOR.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales sint, & quæ ab ipsis fiunt solida parallelepipeda similia & similiter descripta proportionalia erunt. Et si quæ ab ipsis fiunt solida parallelepipeda similia & similiter descripta proportionalia sint; & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales AB CD EF GH, sit scil. ut AB ad CD, ita EF ad GH, & describantur ab ipsis AB CD EF GH similia & similiter posita solida parallelepipeda KA LC ME NG. Dico ut KA ad LC, ita esse ME ad NG. Quoniam enim solidum parallelepipedum KA simile est ipsi LC, habebit [a] KA ad LC triplicatam proportionem ejus



quam AB habet ad CD. eadem ratione & solidum ME ad ipsum NG [a] triplicatam proportionem habebit ejus quam habet EF ad GH. atque est ut AB ad CD, ita EF ad GH. ut igitur AK ad LC, ita ME ad NG. Sed sit ut solidum AK ad solidum LC, ita ME solidum ad solidum NG. Dico, ut

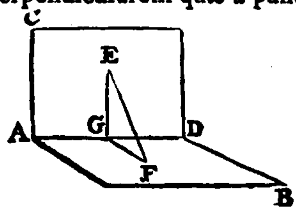
a 33. hujus.

recta linea AB ad rectam CD, ita esse rectam EF ad ipsam
b 33. hujus. GH. quoniam enim rursus AK ad LC triplicatam b proportionem habet ejus quam AB habet ad CD; habet autem & ME ad NG triplicatam proportionem ejus quam EF ad GH; atque ut AK ad LC, ita ME ad NG: erit ut AB ad CD, ita EF ad GH. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales sint, &c. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXXVIII. THEOR.

Si planum ad planum rectum sit; & ab aliquo puncto eorum quæ sunt in uno plano, ad alterum planum perpendicularis ducatur: ea in communem planorum sectionem cadet.

Planum nempe CD ad planum AB rectum sit, communis autem eorum sectio sit AD, & in ipso CD plano, quodvis punctum E sumatur. Dico perpendicularem quæ à puncto E ad planum AB ducitur, cadere in ipsam AD. Non enim; sed si fieri potest, cadat extra, ut EF; & plano AB in puncto F occurrat: à puncto autem F ad DA in plano AB perpendicula-



a 10. primi. ris a ducatur FG, quæ quidem
b 4. Def. hujus. & plano CD ad b rectos angulos erit; & EG jungatur. quoniam igitur FG plano CD est ad rectos angulos; contingit autem ipsam recta linea EG quæ est in eodem CD plano:
c 3. Def. hujus. erit angulus FGE c rectus. sed & EF plano AB ad rectos angulos est: rectus igitur est angulus EFG. quare trianguli
d 17. primi. EFG duo anguli duobus rectis sunt æquales; quod est d absurdum. non igitur à puncto E ad AB planum perpendicularis ducta extra rectam lineam DA cadet. ergo in ipsam cadat necesse est. Si igitur planum ad planum rectum sit, &c. Quod oportebat demonstrare.

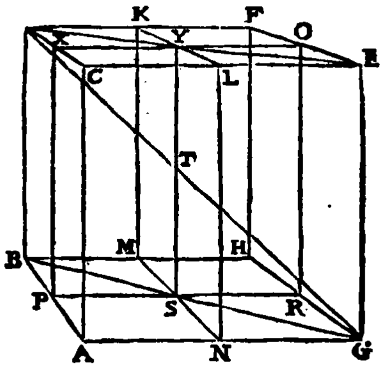
PROP. XXXIX. THEOR.

Si in solido parallelepipedo oppositorum planorum latera secentur bifariam, per sectiones vero plana ducantur; communis planorum sectio, & solidi parallelepipedi diameter, sese bifariam secabunt.

In solido enim parallelepipedo AF, oppositorum planorum CF AH latera bifariam secentur in punctis KLMNXORP.

&

& per sectiones plana ducantur KN XR; communis autem planorum sectio sit YS, & solidi parallelepipedi diameter sit DG. Dico YS DG sese bifariam secare, hoc est YT quidem ipsi TS, DT vero ipsi TG æqualem esse. Jungantur enim DY YE BS SG. quoniam igitur DX parallela est ipsi OE, alterni anguli DXY YOE inter se æquales [a] sunt. & quoniam [a] 29. primi.



DX quidem est æqualis OE, XY vero ipsi YO, & angulos æquales continent; erit [b] basis DY æqualis basi YE. & triangulum DXY triangulo YOE, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, angulus igitur XYD est æqualis angulo OYE, & ob id [c] recta linea est DYE. eadem ratione, & BSG recta est, atque est BS æqualis SG. & quoniam CA ipsi DB æqualis est & parallela, & CA est æqualis & parallela ipsi EG; erit & DB ipsi EG æqualis & parallela; & ipsas conjungunt rectæ lineæ DE GB: parallela igitur [d] est DE ipsi BG. & sumpta sunt in utraque ipsarum quævis puncta D Y G S, & junctæ sunt DG YS. ergo DG YS in uno [e] sunt plano. quod cum DE sit parallela BG, erit & EDT angulus angulo BGT æqualis [a], alterni enim sunt. est autem & DTY angulus æqualis [f] ipsi GTS. duo igitur sunt triangula DTY GTS duos angulos duobus angulis æquales habentia, & unum latus uni lateri æquale, quod uni æqualium angulorum subtenditur, videlicet DY ipsi GS: dimidia enim sunt ipsorum DE BG. ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt. [g] quare DT quidem est æqualis TG, YT vero ipsi TS. Si igitur in solido parallelepipedo, &c. Quod oportebat demonstrare.

[b] 4. primi.

[c] 14. primi.

[d] 33. primi.

[e] 7. hujus.

[f] 15 primi.

[g] 26. primi.

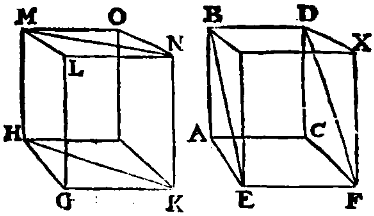
PROP. XL. THEOR.

Si sint duo prismata æque alta, quorum unum quidem basim habeat parallelogrammum, alterum vero triangulum, & parallelogrammum duplum sit trianguli; ea inter se æqualia erunt.

Sint prismata æquæ alta ABCDEF GHKLMN. & unum quidem basim habeat parallelogrammum AF, alterum vero

 GHK

GHK triangulum, & duplum sit AF parallelogrammum trianguli GHK. Dico prisma ABCDEF prismati GHKLMN æquale esse. Compleantur enim AX GO solida. & quoniam parallelogrammum AF trianguli GHK est duplum; est autem & HK parallelogrammum duplum [a] trianguli GHK: erit AF parallelogrammum parallelogrammo HK æquale. quæ vero in æqualibus sunt basibus solida parallelepipeda, & eadem altitudine, inter se æqualia [b] sunt. æquale igitur AX solidum solido GO. atque est solidi quidem AX dimidium [c] ABCDEF prisma, solidi vero GO dimidium [c] est prisma GHKLMN. ergo ABCDEF prisma prismati GHKLMN est æquale. Si igitur sint duo prismata æque alta, &c. Quod demonstrare oportebat.



a 41. primi.
b 31. hujus.
c 28. hujus.

EUCLIDIS

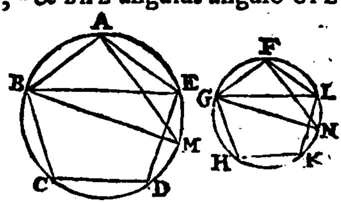
EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER DUODECIMUS.

PROPOSITIO I. THEOREMA.

Similia polygona circulis inscripta inter se sunt ut diametrorum quadrata.

Sint circuli ABCDE FGHKL, & in ipsis similia polygona ABCDE FGHKL; diametri autem circulorum sint BM GN. Dico ut quadratum ex BM ad quadratum ex GN, ita esse ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL. Jungantur enim BE AM GL FN. & quoniam polygonum ABCDE simile est polygono FGHKL; [a] & BAE angulus angulo GFL est æqualis: atque est ut BA ad AE, ita GF ad FL. duo igitur triangula sunt BAE GFL unum angulum uni angulo æqualem habentia, videlicet angulum BAE angulo GFL, circa æquales autem angulos latera proportionalia: quare triangulum ABE triangulo FGL æquiangulum [b] est; ac propterea angulus AEB æqualis est angulo FLG. sed angulus quidem AEB angulo AMB est [c] æqualis; in eadem enim circumferentia consistunt, angulus autem FLG æqualis [c] est angulo FNG. ergo & AMB angulus est æqualis angulo FNG. est autem & rectus [d] angulus BAM æqualis recto GFN. quare & reliquus reliquo æqualis. æquiangulum igitur est triangulum AMB triangulo FGN. ergo [e] ut BM ad GN ita BA ad GF. sed proportionis quidem BM ad GN duplicata est proportio quadrati ex BM ad



a 1. Def. sexti.

b 6. sexti.

c 21. tertii.

d 31. tertii.

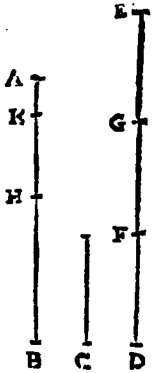
e 4. sexti.

a 20. sexti. quadratum ex GN; proportionis vero AB ad GF duplicata a est proportio ABCDE polygoni ad polygonum FGHKL: b 11. quinti. & ut igitur quadratum ex BM b ad quadratum ex GN, ita polygonum ABCDE ad FGHKL polygonum. Quare similia polygona quæ in circulis describuntur, inter se sunt ut diametrorum quadrata. Quod demonstrare oportebat.

LEMMA.

Duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, si à majori auferatur majus quàm dimidium, & ab eo quod reliquum est, rursus auferatur majus quàm dimidium; & hoc semper fiat; relinquetur tandem quædam magnitudo quæ minori magnitudine expositâ minor erit.

Sint duæ magnitudines inæquales AB, C, quarum major AB. Dico si ab ipsa AB auferatur majus quàm dimidium, & ab eo quod reliquum est, rursus auferatur majus quàm dimidium, atque hoc semper fiat, relinqui tandem magnitudinem quandam, quæ magnitudine C minor erit. Etenim C multiplicata, fiet aliquando major magnitudine AB. multiplicetur, & fit DE ipsius quidem C multiplex, major autem quam AB: dividaturque DE in partes ipsi C æquales DF FG GE. & ab ipsa AB auferatur majus quam dimidium BH, ab ipsa vero AH rursus majus quam dimidium auferatur HK, atque hoc semper fiat, quoad divisiones, quæ sunt in AB, multitudine æquales fiunt divisionibus quæ in DE: sint igitur divisiones AK KH HB, divisionibus DF FG GE multitudine æquales. & quoniam major est DE quam AB, & ablatum est ab ipsa quidem DE minus quam dimidium EG: ab ipsa vero AB majus quam dimidium BH: erit reliquum GD reliquo HA majus. rursus quoniam major est GD, quam HA; & ablatum est ab ipsa quidem GD dimidium GF: ab ipsa vero HA majus quam dimidium HK: reliquum FD reliquo AK majus erit. estque FD æqualis ipsi C ergo C quam AK est major. minus igitur est AK quam C. ergo ex magnitudine AB relicta est magnitudo AK, exposita minori magnitudine



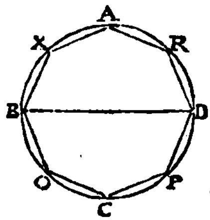
tudine

tudine c minor. Quod demonstrare oportebat. Similiter autem demonstrabitur, etiam si dimidia ablata fuerint. *Est prima decimi.*

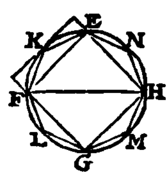
PROP. II. THEOR.

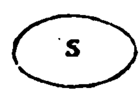
Circuli inter se sunt ut diametrorum quadrata.

Sint circuli ABCD EFGH, diametri autem ipsorum sint BD FH. Dico ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita esse circulum ABCD ad EFGH circulum. Si enim non ita sit; erit ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita circulus ABCD vel ad spatium aliquod minus circulo EFGH, vel ad majus. Sit primum ad minus quod sit S. & in circulo EFGH describatur quadratum EFGH. itaque descriptum in circulo quadratum majus est dimidio circuli EFGH, quoniam si per puncta E F G H contingentes circulum ducamus, erit descripti circa circulum quadrati [a] dimidium EFGH. descripto autem circa circulum quadrato minor est circulus. ergo quadratum EFGH majus est dimidio circuli EFGH. secentur bifariam circumferentiæ EF FG GH HE in punctis K L M N: & EK KF FL LG GM MH HN NE jungantur. unumquodque igitur triangulorum EKF FLG GMH HNE majus est dimidio segmenti circuli in quo consistit: quoniam si per puncta K L M N contingentes circulum ducamus, & parallelogramma, quæ sunt in rectas lineas EF FG GH HE compleamus; erit [b] unumquodque triangulorum EKF FLG GMH HNE dimidium parallelogrammi, quod ad ipsum est. sed segmentum minus est parallelogrammo. quare unumquodque triangulorum EKF FLG GMH HNE majus est dimidio segmenti circuli, in quo consistit. Hasce igitur circumferentias bifariam secantes, & jungentes rectas lineas, atque hoc semper facientes, relinquemus tandem quædam circuli segmenta. quæ minora erunt excessu, quo circulus EFGH ipsum S spatium superat. etenim ostensum est in præcedenti Lemmate, duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, si à majori auferatur majus quam dimidium, & ab eo quod relinquitur, rursus majus quam dimidium,



[a] 47. primi. & 31. tertii.





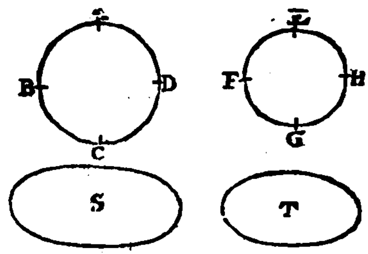
[b] 41. primi.

dium, & hoc ſemper fiat; relinqui tandem magnitudinem aliquam, quæ minori magnitudine expoſita ſit minor. itaque relicta ſint ſegmenta circuli EFGH in rectas lineas EK KF FL LG GM MH HN NE, quæ minora ſint exceſſu, quo circulus EFGH ipſum S ſpatium ſuperat. ergo reliquum EKFLGMHN polygonum majus erit ſpatio S. Deſcribatur etiam in circulo ABCD, polygono EKFLGMHN ſimile polygonum AXBOCPDR. eſt igitur ut quadratum ex BD

c 1. hujus. ad quadratum ex FH, c ita polygonum AXBOCPDR ad EKFLGMHN polygonum. ſed & ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita ABCD circulus ad ſpatium S. ergo &

d 11. quinti. d ut circulus ABCD ad ſpatium S, ita polygonum AXBOCPDR ad EKFLGMHN polygonum. major autem eſt circulus ABCD eo quod in ipſo eſt polygono. quare & ſpa-

e 14. quinti. f Ex hypotheſi. tium S majus eſt e polygono EKFLGMHN. ſed & f minus. quod fieri non poteſt. Non igitur eſt ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH ita ABCD circulus ad ſpatium aliquod minus circulo EFGH. Similiter oſtendemus neque eſſe ut quadratum ex FH ad quadratum ex BD, ita circulum EFGH ad aliquod ſpatium minus circulo



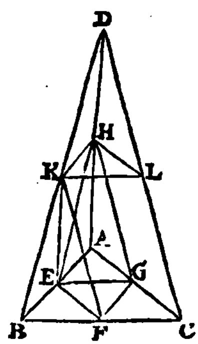
ABCD. Dico igitur neque eſſe ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita circulum ABCD ad aliquod ſpatium majus circulo EFGH. ſi enim fieri poteſt, ſit ad majus ſpatium S. erit igitur invertendo ut quadratum ex FH ad quadratum ex BD, ita ſpatium S ad ABCD circulum. ſed quoniam S majus eſt EFGH circulo; erit ut ſpatium S ad ABCD circulum, ita circulus EFGH ad aliquod ſpatium minus circulo ABCD. e ergo & ut quadratum ex FH ad quadratum ex BD, ita EFGH circulus ad aliquod ſpatium minus e circulo ABCD, quod fieri non poſſe oſtenſum eſt. non igitur ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita eſt circulus ABCD ad ſpatium aliquod majus EFGH circulo. oſtenſum autem eſt neque ad minus. quare ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita erit ABCD circulus ad circulum EFGH. Circuli igitur inter ſe ſunt ut diametrorum quadrata. Quod oſtendere oportebat.

PROP.

PROP. III. THEOR.

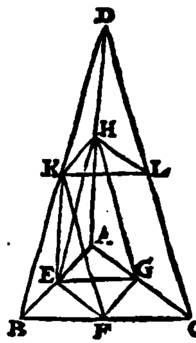
Omnis pyramis triangularem habens basim dividitur in duas pyramides æquales & similes inter se, quæ triangulares bases habent, similesque toti, & in duo prismata æqualia, quæ quidem prismata dimidio totius pyramidis sunt majora.

Sit pyramis, cujus basis quidem ABC triangulum; vertex autem punctum D. Dico pyramidem ABCD dividi in duas pyramides æquales & similes inter se, triangulares bases habentes, & similes toti, & in duo prismata æqualia; & duo prismata dimidio totius pyramidis esse majora. Secentur enim AB BC CA AD DB DC bifariam in punctis E F G H K L, & EH EG GH HK KL LH EK KF FG jungantur. quoniam igitur AE quidem est æqualis EB, AH vero ipsi HD; erit [a] HE ipsi DB parallela. eadem ratione & HK [a] a 2. sexti. est parallela ipsi AB. parallelogrammum igitur est HEBK. quare HK est [b] æqualis EB. sed EB ipsi b 34. primi. AE est æqualis. ergo & AE ipsi HK æqualis erit. est autem & AH æqualis HD. duæ igitur AE AH duabus KH HD æquales sunt, altera alteri, & angulus EAH æqualis [c] angulo KHD; basis igi- c 29. primi. tur [d] EH basi KD est æqualis: quare tri- d 4. primi. angulum AEH æquale est & simile triangulo HKD. eadem ratione & triangulum AHG triangulo HLD æquale est & simile. & quoniam duæ rectæ lineæ sese tangentes EH HG duabus rectis lineis sese tangentibus KD DL parallelæ sunt, non autem in eodem plano, æquales



angulos [e] continebunt. ergo angulus EHG est æqualis angu- e 10. undecimi. lo KDL. rursus quoniam duæ rectæ lineæ EH HG duabus KD DL æquales sunt, altera alteri, & angulus EHG est æqualis angulo KDL; erit [d] basis EG basi KL æqualis: æquale igitur est & simile triangulum EHG triangulo KDL. eadem ratione & AEG triangulum est æquale & simile triangulo HKL. quare pyramis cujus basis quidem est AEG triangulum, vertex autem punctum H, æqualis & similis est pyramidi cujus basis est triangulum KHL, & vertex D punctum. & quoniam uni laterum trianguli ADB, videlicet ipsi AB, parallela ducta est HK; erit triangulum ADB triangulo DKH æquiangulum,

angulum, & latera habent proportionalia. ſimile igitur eſt ADB triangulum triangulo DHK. & eadem ratione triangulum quidem DBC ſimile eſt triangulo DKL; triangulum vero ADC triangulo DHL. & cum duæ rectæ lineæ ſeſe tangentes BA AC duabus rectis lineis ſeſe tangentibus KH HL parallelæ ſint, non exiſtentes in eodem plano, hæ æquales angulos f continebunt. angulus igitur BAC angulo HKL eſt æqualis. atque eſt ut BA ad AC, ita KH ad HL, ergo ABC triangulum g ſimile eſt triangulo HKL; ideoque pyramis, cujus baſis quidem triangulum ABC, vertex autem punctum D, ſimilis eſt pyramidi, cujus baſis triangulum HKL, & vertex punctum D. ſed pyramis cujus baſis quidem HKL triangulum, vertex autem punctum D, oſtenſa eſt ſimilis pyramidi, cujus baſis triangulum AEG, & vertex H punctum. quare & pyramis cujus baſis triangulum ABC & vertex punctum D, ſimilis eſt pyramidi cujus baſis A E G triangulum, & vertex punctum H. utraque igitur ipſarum AEGH HKLD pyramidum ſimilis eſt toti pyramidi ABCD. & quoniam BF eſt æqualis FC, erit EBFG parallelogrammum h duplum trianguli GFC. & quoniam duo priſmata æque alta ſunt, quorum unum quidem baſim habet parallelogrammum, alterum vero triangulum. eſtque parallelogrammum duplum trianguli; erunt ea priſmata inter ſe æqualia i. ergo priſma contentum duobus triangulis BKF EHG, & tribus parallelogrammis EBFG EBKH KHGF, eſt æquale priſmati quod duobus triangulis GFC HKL, & tribus parallelogrammis KFCL LCGH HKFG continetur. & manifeſtum eſt utrumque ipſorum priſmatum, & cujus baſis eſt EBFG parallelogrammum, oppoſita autem ipſi HK recta linea, & cujus baſis eſt GFC triangulum, & oppoſitum ipſi triangulum KLH, majus eſſe utraque pyramidum, quarum baſes quidem AEG HKL triangula, vertices autem puncta H D: quoniam ſi jungimus EF EH rectas lineas, priſma quidem, cujus baſis eſt EBFG parallelogrammum, & oppoſita ipſi recta linea KH, majus eſt pyramide cujus baſis EBF triangulum, vertex autem punctum K. ſed pyramis, cujus baſis triangulum EBF, & vertex K punctum, eſt k æqualis pyramidi cujus baſis AEG triangulum, & vertex punctum H; æqualibus enim & ſimilibus planis continentur. quare & priſma cujus baſis parallelogrammum EBFG, oppoſita autem ipſi



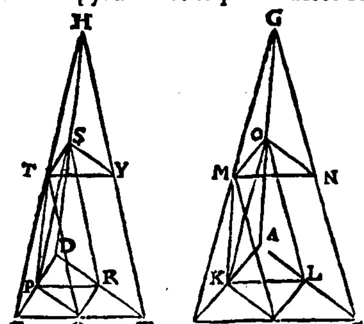
f 10. undecimi.
g 6. ſexti. & 1. Def. ejuſdem.
h 41. primi.
i 40. undecimi.
k 10. Def. undecimi.

ipsi recta linea HK, majus est pyramide cujus basis AEG triangulum & vertex punctum H. prisma vero cujus basis parallelogrammum EBFG, & opposita ipsi recta linea HK est æquale prismati cujus basis GFC triangulum, & ipsi oppositum triangulum HKL; & pyramis cujus basis triangulum AEG, vertex autem H punctum, est æqualis pyramidi cujus basis HKL triangulum, & vertex punctum D. ergo duo prismata de quibus dictum est, sunt majora duabus dictis pyramidibus quarum bases triangula AEG HKL, vertices autem H D puncta. Tota igitur pyramis cujus basis ABC triangulum, vertex autem punctum D, divisa est in duas pyramides æquales, & similes inter se, & similes toti: & in duo prismata æqualia: suntque duo prismata dimidio totius pyramidis majora. Quæ ostendere oportebat.

PROP. IV. THEOR.

Si sint duæ pyramides æque altæ, quæ triangulares bases habeant, dividatur autem utraque ipsarum, & in duas pyramides æquales inter se, similesque toti, & in dua prismata æqualia; & factarum pyramidum utraque eodem modo dividatur, atque hoc semper fiat: erit ut unius pyramidis basis ad basim alterius, ita & in una pyramide prismata omnia ad prismata omnia in altera pyramide multitudine æqualia.

Sint duæ pyramides æque altæ quæ triangulares bases habeant ABC DEF, vertices autem sint puncta G H, & dividatur utraque ipsarum in duas pyramides æquales inter se, similesque toti, & in duo prismata æqualia; & factarum pyramidum utraque eodem modo divisa intelligatur: atque hoc semper fiat. Dico ut ABC basis ad basim DEF, ita esse prismata omnia quæ sunt in pyramide ABCG ad prismata omnia quæ in pyramide DEFH multitudine æqualia. Quoniam enim BX quidem est æqualis XC, AL vero æqualis LC; erit [a] XL ipsi AB parallela, & triangulum ABC triangulo LXC simile. eadem ratione & triangulum



[a] 2. sexti.

gulum DEF simile est triangulo RQF. & quoniam BC quidem est dupla CX, EF vero dupla ipsius FQ, ut BC ad CX, ita erit EF ad FQ. & descripta sunt ab ipsis BC CX similia & similiter posita rectilinea ABC LXC; ab ipsis vero EF FQ similia & similiter posita rectilinea DEF RQF. est

b 22. sexti. igitur [b] ut ABC triangulum ad triangulum LXC, ita triangulum DEF ad RQF triangulum; & permutando ut triangulum ABC ad triangulum DEF, ita LXC triangulum ad triangulum RQF. sed ut LXC triangulum ad triangulum

c 28. & 32. undecimi. RQF, ita [c] prisma cujus basis est triangulum LXC, oppositum autem ipsi OMN, ad prisma cujus basis RQF triangulum &

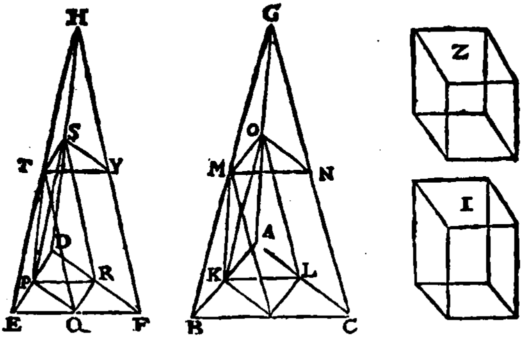
d 11. quinti. oppositum ipsi STY. ut igitur [d] ABC triangulum ad triangulum DEF, ita prisma cujus basis est triangulum LXC, oppositum autem ipsi OMN, ad prisma cujus basis RQF triangulum, & oppositum ipsi STY. & quoniam duo prismata quæ in pyramide ABCG inter se æqualia sunt, sed & quæ in pyramide DEFH prismata inter se sunt æqualia; erit ut prisma cujus basis parallelogrammum KLXB, opposita vero ipsi recta linea MO, ad prisma cujus basis LXC triangulum, & oppositum ipsi OMN, ita prisma cujus basis parallelogrammum EPRQ, & opposita recta linea ST, ad prisma cujus basis RQF triangulum, oppositum vero ipsi STY. quare componendo, ut prismata KBXLMO LXCMNO ad prisma LXCMNO, ita prismata PEQRST RQFSTY ad prisma RQFSTY. & permutando, ut prismata KBXLMO LXCOMN ad prismata PEQRST RQFSTY, ita prisma LXCMNO ad prisma RQFSTY. ut autem prisma LXCMNO ad prisma RQFSTY, ita ostensa est basis LXC ad RQF basim, & ABC basis ad basim DEF. ergo & ut triangulum ABC ad triangulum DEF, ita quæ in pyramide ABCG duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide DEFH. similiter autem, & si factas pyramides dividamus eodem modo velut OMNG STYH, erit ut OMN basis ad basim STY, ita quæ in pyramide OMNG duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide STYH. sed ut OMN basis ad basim STY, ita basis ABC ad DEF basim. & ut igitur ABC basis ad basim DEF, ita quæ in pyramide ABCG duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide DEFH; & quæ in pyramide OMNG duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide STYH; & quatuor ad quatuor. eadem autem ostendentur & in factis prismatibus ex divisione pyramidum AKLO, & DPRS, & omnium simpliciter multitudine æqualium. Quod demonstrare oportebat.

PROP.

PROP. V. THEOR.

Pyramides quæ eadem sunt altitudine, & triangulares bases habent, inter se sunt ut bases.

Sint eadem altitudine pyramides, quarum bases quidem triangula ABC DEF, vertices autem puncta G H. Dico ut ABC basis ad basim DEF, sic esse pyramidem ABCG ad DEFH pyramidem. Si enim non ita sit, erit ut ABC basis ad basim DEF, sic ABCG pyramis, vel ad solidum minus pyramide DEFH, vel ad majus. Sit primum ad solidum minus, sitque Z. & dividatur pyramis DEFH in duas pyramides æquales inter se, & similes toti, & in duo prismata æqualia. sunt duo igitur prismata [a] dimidio totius pyramidis majora. & rursus pyramides ex divisione factæ similiter dividantur, atque hoc semper fiat, quoad sumantur quædam pyramides à pyramide DEFH, quæ sint minores excessu quo pyramis DEFH solidum Z superat. itaque sumantur, & [a] 3. hujus.



sint exempli causa, pyramides DPRS STYH. erunt igitur reliqua in pyramide DEFH prismata solido Z majora. dividatur etiam ABCD pyramis in totidem partes similes pyramidi DEFH. ergo [b] ut ABC basis ad basim DEF, ita quæ [b] in pyramide ABGG prismata ad prismata quæ in pyramide DEFH. sed ut ABC basis ad basim DEF, ita pyramis ABCG ad solidum Z. & igitur ut ABCG pyramis ad solidum Z. ita quæ in pyramide ABCG prismata ad prismata quæ in pyramide DEFH. major autem est pyramis ABCG prismatibus quæ in ipsa sunt. ergo & solidum Z prismatibus, quæ sunt in pyramide DEFH, est majus. sed & [c] minus. quod fieri non potest. non igitur ut ABC basis ad basim DEF, ita est pyramis ABCG ad solidum aliquot minus pyramide DEFH. similiter ostendemus neque ut DEF basis ad basim

[b] 4. hujus.

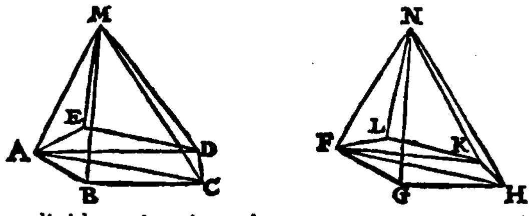
[c] Ex prius demonstratis.

basim ABC, ita esse pyramidem DEFH ad solidum aliquod pyramide ABCG minus. Dico igitur neque esse ut ABC basis ad basim DEF, ita ABCG pyramidem ad aliquod solidum majus pyramide DEFH. Si enim fieri potest, sit ad majus, videlicet ad solidum I. erit igitur invertendo ut DEF basis ad basim ABC, ita solidum I ad ABCG pyramidem. cum autem solidum I majus est pyramide EDFH, erit ut solidum I ad ABCG pyramidem, ita DEFH pyramis ad solidum aliquod minus pyramide ABCG, ut proxime ostensum fuit. & ut igitur DEF basis ad basim ABC, ita pyramis DEFH ad solidum aliquod pyramide ABCG minus, quod est absurdum non igitur ut ABC basis ad basim DEF, ita est ABCG pyramis ad solidum aliquod majus pyramide DEFH. ostensum autem est, neque ad minus. quare ut ABC basis ad basim DEF, ita est pyramis ABCG ad DEFH pyramidem. Pyramides igitur quæ eadem sunt altitudine, & triangulares bases habent, inter se sunt ut bases. Quod demonstrare oportebat.

PROP. VI. THEOR.

Pyramides, quæ eadem sunt altitudine, & polygonas bases habent, inter se sunt ut bases.

Sint eadem altitudine pyramides, quæ polygonas bases habeant ABCDE FGHKL: vertices autem M N puncta. Dico ut ABCDE basis ad basim FGHKL, ita esse ABCDEM pyramidem ad pyramidem FGHKLN. Dividatur enim basis quidem ABCDE in triangula ABC ACD ADE; basis vero



FGHKL dividatur in triangula FGH FHK FKL. & in uno quoque triangulo intelligantur pyramides æque altæ atque pyramides quæ à principio. quoniam igitur est ut triangulum ABC ad triangulum ACD, [a] ita ABCM pyramis ad pyramidem ACDM: & componendo ut ABCD trapezium ad triangulum ACD, ita ABCDM pyramis ad pyramidem ACDM. sed & ut ACD triangulum ad ADE, ita [a] pyramis ACDM ad ADEM pyramidem. ergo ex æquali, ut ABCD basis ad basim ADE, ita ABCDM pyramis ad pyramidem ADEM.

a 5. hujus.

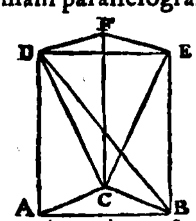
&

& rursus componendo ut ABCDE basis ad basim ADE, ita ABCDEM pyramis ad pyramidem ADEM. eadem ratione, & ut FGHKL basis ad basim FKL, ita & FGHKLN pyramis ad FKLN pyramidem. & quoniam duæ pyramides sunt ADEM FKLN, quæ triangulares bases habent, & eadem sunt altitudine; erit [a] ut ADE basis ad basim FKL, ita ADEM pyramis ad pyramidem FKLN. quòd cum sit ut ABCDE basis ad basim ADE, ita ABCDEM pyramis ad pyramidem ADEM; ut autem ADE basis ad basim FKL, ita ADEM pyramis ad pyramidem FKLN: erit ex æquali, ut basis ABCDE ad FKL basim, ita ABCDEM pyramis ad pyramidem FKLN. sed & ut FKL basis ad basim FGHKL, ita erat & FKLN pyramis ad pyramidem FGHKLN. quare rursus ex æquali, ut ABCDE basis ad basim FGHKL, ita est ABCDEM pyramis ad pyramidem FGHKLN. Pyramides igitur quæ eadem sunt altitudine, & polygonas bases habent, inter se sunt ut bases. Quod demonstrare oportebat.

PROP. VII. THEOR.

Omne prisma triangularem habens basim, dividatur in tres pyramides æquales inter se, quæ triangulares bases habent.

Sit prisma cujus basis quidem triangulum ABC, oppositum autem ipsi DEF. Dico prisma ABCDEF dividi in tres pyramides æquales inter se, quæ triangulares habent bases. Jungantur enim BD EC CD. & quoniam parallelogrammum est ABED cujus diameter BD, erit ABD triangulum triangulo EBD [a] æquale. ergo pyramis cujus basis triangulum ABD, vertex autem punctum C, æqualis [b] est pyramidi, cujus basis EDB triangulum, & vertex punctum C.



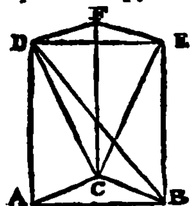
a 34. primi.

b 5. hujus.

sed pyramis cujus basis EDB triangnlum, & vertex punctum C, eadem est cum pyramide cujus basis triangulum EBC, & vertex D punctum: iisdem enim planis continentur. ergo & pyramis cujus basis triangulum ABD, vertex autem punctum C, æqualis est pyramidi cujus basis EBC triangulum, & vertex punctum D. rursus quoniam FCBE parallelogrammum est cujus diameter CE, triangulum ECF triangulo CBE est [a] æquale. ergo & pyramis cujus basis BEC triangulum, vertex autem punctum D, æqualis est [b] pyramidi cujus basis triangulum ECF, & vertex punctum D. sed pyramis cujus

O basis

basis quidem BCE triangulum, vertex autem punctum D ostensa est æqualis pyramidi cujus basis triangulum ABD, & vertex C punctum. quare & pyramis cujus basis triangulum CEF, & vertex punctum D, æqualis est pyramidi cujus basis triangulum ABD, & vertex C punctum. prisma igitur ABCDEF dividitur in tres pyramides inter se æquales, quæ triangulares bases habent. Et quoniam pyramis cujus basis ABD triangulum, vertex autem



punctum C, eadem est cum pyramide, cujus basis triangulum CAB, & vertex D punctum, iisdem namque planis continetur: pyramis autem, cujus basis triangulum ABD, & vertex punctum C, tertia pars ostensa est prismatis cujus basis ABC triangulum, & oppositum ipsi DEF: & pyramis igitur, cujus basis triangulum ABC, vertex autem D punctum, tertia pars est prismatis eandem basim habentis, videlicet ABC triangulum, & oppositum ipsi triangulum DEF. Quod demonstrare oportebat.

COROLL.

1. Ex hoc manifestum est omnem pyramidem tertiam partem esse prismatis basim habentis eandem, & altitudinem æqualem; quoniam si basis prismatis aliam quandam figuram rectilineam obtineat, & oppositam ipsi eandem; dividitur in prismata quæ triangulares bases habent, basibusque opposita etiam triangula.

2. Prismata æque alta sunt inter se ut bases.

PROP. VIII. THEOR.

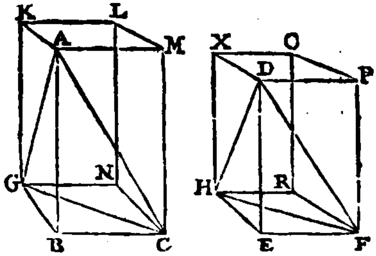
Similes pyramides quæ triangulares bases habent, in triplicata sunt proportione homologorum laterum.

Sint similes & similiter positæ pyramides, quarum bases quidem triangula ABC DEF, vertices autem G H puncta. Dico ABCG pyramidem ad pyramidem DEFH, triplicatam proportionem habere ejus quam BC habet ad EF. Complentur enim BGML EHPO solida parallelepipeda. & quoniam pyramis ABCG similis est pyramidi DEFH, erit [a] angulus ABC angulo DEF æqualis, angulusque GBC æqualis angulo HEF, & angulus ABG angulo DEH. atque [b] est ut AB ad DE, ita BC ad EF, & BG ad EH. quoniam igitur est ut

a 9. Def. undecimi.

b 1. Def. sexti.

ut AB ad DE, ita BC ad EF, & circum æquales angulos latera sunt proportionalia, parallelogrammum BM parallelogrammo EP simile erit. eadem ratione, & parallelogrammum NB simile est parallelogrammo ER, & parallelogrammum BK ipsi EX parallelogrammo. tria igitur parallelogramma BM KB BN. tribus EP EX ER sunt similia. sed tria quidem MB BK BN tribus oppositis [c] æqualia & similia sunt, tria vero EP EX ER tribus oppositis æqualia & similia. quare solida BGML EHPO similibus planis & numero æqualibus continentur; ac propterea [d] simile est BGML solidum solido EHPO. similia autem solida parallelepipeda in [e] triplicata sunt proportione homologorum laterum. ergo solidum BGML ad solidum EHPO triplicatam habet proportionem ejus quam habet latus homologum BC ad EF homologum latus. sed [f] ut BGML solidum ad solidum EHPO, ita ABCG pyramis ad pyramidem DEFH; pyramis enim sexta pars est ipsius solidi, cum prisma quod est dimidium solidi parallelepipedi, sit pyramidis [g] triplum. quare & pyramis ABCG ad pyramidem DEFH triplicatam proportionem habebit ejus quàm BC habet ad EF. Quod demonstrare oportebat.



c 24. undecimi.

d 9. Def. undecimi.

e 33. undecimi.

f 15. quinti.

g 1. Cor. antecedentis.

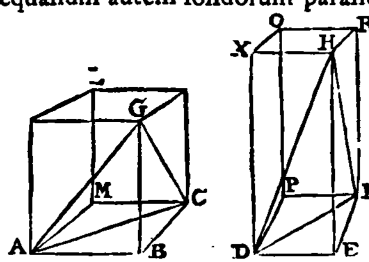
Cor. Ex hoc perspicuum est, & similes pyramides quæ multangulas bases habent, inter se esse in triplicata proportione homologorum laterum. ipsis enim divisis in pyramides triangulares bases habentes: quoniam & similia polygona quæ sunt in basibus, in similia triangula dividuntur, [h] & numero æqualia & homologa totis; erit ut una pyramis in una pyramide triangularem habens basim ad pyramidem in altera triangularem basim habentem, ita & omnes pyramides in una pyramide triangulares habentes bases ad omnes in altera triangulares bases habentes; hoc est, ita pyramis ipsa multangulam habens basim ad pyramidem quæ multangulam basim habet. sed pyramis triangularem habens basim ad pyramidem quæ triangularem basim habet, est in triplicata proportione homologorum laterum. & pyramis igitur polygonam habens basim ad pyramidem similem basim habentem, triplicatam proportionem habebit ejus quam latus homologum habet ad homologum latus.

h 20. sexti.

PROP. IX. THEOR.

Æqualium pyramidum, & triangulares bases habentium, bases & altitudines reciproce sunt proportionales: & quarum pyramidum triangulares bases habentium, bases & altitudines reciproce sunt proportionales, illa sunt æquales.

Sint nempe pyramides æquales, quæ triangulares bases habeant ABC DEF, vertices vero G H puncta. Dico pyramidum ABCG DEFH bases & altitudines reciprocari; scil. ut ABC basis ad basim DEF, ita esse pyramidis DEFH altitudinem ad altitudinem pyramidis ABCG. Compleantur enim BGML EHPO solida parallelepipeda. & quoniam pyramis ABCG est æqualis pyramidi DEFH, atque est pyramidis quidem ABCG sextuplum BGML solidum, pyramidis vero DEFH sextuplum solidum EHPO; erit [a] solidum BGML solido EHPO æquale. æqualium autem solidorum parallelepipedorum bases & altitudines reciprocantur [b]. est igitur ut BM basis ad basim EP, ita EHPO solidi altitudo ad altitudinem solidi BGML. sed ut BM basis ad basim EP, ita [a] ABC triangulum ad triangulum DEF. ergo & ut ABC triangulum ad triangulum DEF, ita solidi EHPO altitudo ad altitudinem solidi BGML. sed solidi quidem EHPO altitudo eadem est cum altitudine pyramidis DEFH; solidi vero BGML altitudo eadem est cum altitudine pyramidis ABCG: est igitur ut ABC basis ad basim DEF, ita pyramidis DEFH altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG. quare pyramidum ABCG DEFH bases & altitudines reciproce sunt proportionales. Et si pyramidum ABCG DEFH bases & altitudines reciproce sunt proportionales, sitque ut ABC basis ad basim DEF, ita pyramidis DEFH altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG. Dico ABCG pyramidem pyramidi DEFH æqualem esse. Iisdem enim constructis, quoniam ut ABC basis ad basim DEF, ita est DEFH pyramidis altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG; ut autem ABC basis ad basim DEF, ita BM parallelogrammum ad parallelogrammum EP: erit & ut parallelogrammum BM ad EP parallelogrammum, ita pyramidis DEFH altitudo ad altitudinem



[a] 15. quinti.
[b] 34. undecimi.

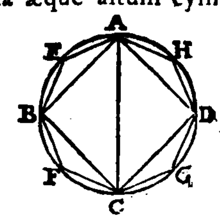
nem pyramidis ABCG. ſed pyramidis quidem DEFH altitudo eadem eſt cum altitudine ſolidi parallelepipedi EHPO; pyramidis vero ABCG altitudo eadem eſt cum altitudine ſolidi parallelepipedi BGML: eſt igitur ut BM baſis ad baſim EP, ita EHPO ſolidi parallelepipedi altitudo ad altitudinem ſolidi parallelepipedi BGML. quorum autem ſolidorum parallelepipedorum baſes & altitudines reciprocantur, ea [e] ſunt æqualia. ſolidum igitur parallelepipedum BGML æquale eſt ſolido parallelepipedo EHPO. atque eſt ſolidi quidem BGML ſexta pars pyramis ABCG: ſolidi vero EHPO itidem ſexta pars pyramis DEFH. ergo pyramis ABCG pyramidi DEFH eſt æqualis. Æqualium igitur pyramidum, & triangulares baſes habentium, baſes & altitudines reciproce ſunt proportionales: & quarum pyramidum triangulares baſes habentium baſes & altitudines reciproce ſunt proportionales, illæ ſunt æquales. Quod oportebat demonſtrare.

[e] 34. undecimi.

PROP. X. THEOR.

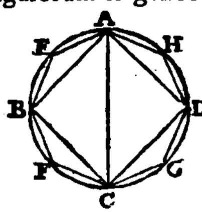
Omnis conus tertia pars eſt cylindri, qui eandem baſim habet & altitudinem æqualem.

Habeat conus eandem baſim quam cylindrus, videlicet circulum ABCD, & altitudinem æqualem. Dico conum tertiam partem eſſe cylindri, hoc eſt cylindrum coni triplum eſſe. Si enim cylindrus non ſit triplus coni, vel major erit quam triplus, vel minor. ſit primo major quam triplus. & deſcribatur in ABCD circulo quadratum ABCD. ergo quadratum ABCD majus eſt quam dimidium ABCD circuli. & à quadrato ABCD erigatur priſma æque altum cylindro, quod quidem priſma majus erit quam cylindri dimidium; quoniam ſi circa circulum ABCD quadratum deſcribatur, erit inſcriptum quadratum dimidium circumſcripti. & ſint ab eiſdem baſibus erecta ſolida parallelepipeda æque alta, nimirum priſmata ipſa. quare priſmata inter ſe ſunt [a] ut baſes. & priſma igitur erectum à quadrato ABCD dimidium eſt priſmatis erecti à quadrato quod circa circulum ABCD deſcribitur. atque eſt cylindrus minor priſmate erecto à quadrato quod deſcribitur circa circulum ABCD. priſma igitur erectum à quadrato ABCD æque altum cylindro, dimidio cylindri eſt majus. ſecentur circumferentiæ AB BC CD DA biſariam in punctis E F G H, & AE EB BF FC CG GD DH, HA



[a] 2. Cor. 7. hujus.

HA jungantur. unumquodque igitur triangulorum AEB BFC CGD DHA majus [b] est dimidio portionis circuli ABCD, in qua consistit. erigantur ab unoquoque triangulorum AEB BFC CGD DHA prismata æque alta cylindro. ergo & unumquodque erectorum prismatum majus est dimidio portionis cylindri quæ ad ipsum est. quoniam si per puncta E F G H parallelæ ipsis AB BC CD DA ducantur, & compleantur in ipsis AB BC CD DA parallelogramma, à quibus solida parallelepipeda æque alta cylindro erigantur: erunt uniuscujusque erectorum dimidia prismata ea [a] quæ sunt in triangulis AEB BFC CGD DHA. & sunt cylindri portiones erectis solidis parallelepipedis minores. ergo & prismata quæ in triangulis AEB BFC CGD DHA majora sunt dimidio portionum cylindri quæ ad ipsa sunt. itaque reliquas circumferentias secantes bifariam, jungentesque rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes prismata æque alta cylindro, & hoc semper facientes, tandem relinquemus quasdam portiones cylindri quæ [c] minores erunt excessu, quo cylindrus coni triplum superat. relinquantur jam, & sint AE EB BF FC CG GD DH HA. reliquum igitur



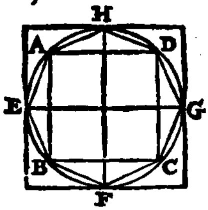
prisma, cujus basis quidem polygonum AEBFCGDH, altitudo autem eadem quæ cylindri, majus est quam triplum coni. sed prisma cujus basis AEBFCGDH polygonum, & altitudo eadem quæ cylindri, triplum [d] est pyramidis, cujus basis polygonum AEBFCGDH, vertex autem idem qui coni. & pyramis igitur cujus basis polygonum AEBFCGDH, vertex autem idem qui coni, major est cono qui basim habet ABCD circulum. sed & minor: (ab ipso enim comprehenditur.) quod fieri non potest. non igitur cylindrus major erit quam triplus coni. Dico insuper neque cylindrum minorem esse quam triplum coni. Si enim fieri potest, sit cylindrus minor quam triplus coni. erit invertendo conus major quam tertia pars cylindri. describatur in ABCD circulo quadratum ABCD. ergo quadratum ABCD majus est quam dimidium ABCD circuli. & à quadrato ABCD erigatur pyramis, verticem habens eundem quem conus; pyramis igitur erecta major est quam coni dimidium: quoniam, ut ante demonstravimus, si circa circulum quadratum describatur, erit quadratum ABCD dimidium ejus quod circa circulum descriptum est: & si à quadratis erigantur solida parallelepipeda æque alta cono, quæ & prismata appellantur

b ostenditur. ad 2. hujus.

c Lemma hujus.

d 1. Cor. 7. hujus.

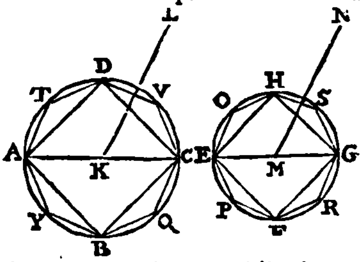
pellantur erit [a] quod à quadrato ABCD erigitur, dimidium ejus, quod erectum est à quadrato circa circulum descripto; etenim inter se sunt ut bases. quare & tertiæ partes ipsarum. pyramis igitur cujus basis quadratum ABCD, dimidia est ejus pyramidis quæ à quadrato circa circulum descripto erigitur. sed pyramis erecta à quadrato descripto circa circulum, major est cono; ipsum namque comprehendit. ergo pyramis cujus basis ABCD quadratum, vertex autem idem qui coni, major est quam coni dimidium. secentur circumferentiæ AB BC CD DA bifariam in punctis EFGH. & jungantur AE EB BF FC CG GD DH HA. & unumquodque igitur triangulorum AEB BFC CGD DHA majus est quam dimidium portionis circuli ABCD, in qua consistit. erigantur ab unoquoque triangulorum AEB BFC CGD DHA pyramides verticem habentes eundem quem conus. ergo & unaquæque pyramidum eodem modo eractarum major est quàm dimidium portionis coni quæ est ad ipsam. itaque reliquas circumferentias secantes bifariam, jungentesque rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides verticem habentes eundem quem conus, & hoc semper facientes, [c] relinquemus tandem quasdem coni portiones quæ minores erunt excessu quo conus tertiam cylindri partem superat. relinquantur; & sint quæ in ipsis AE EB BF FC CG GD DH HA. reliqua igitur pyramis cujus basis polygonum AEBFCGDH, & vertex idem qui coni, major est quam tertia cylindri pars. sed pyramis cujus basis polygonum AEBFCGDH, vertex autem idem qui coni, tertia pars est prismatis cujus basis polygonum AEBFCGDH, altitudo autem eadem quæ cylindri. prisma igitur cujus basis AEBFCGDH polygonum, & altitudo eadem quæ cylindri, majus est cylindro cujus basis est circulus ABCD. sed & minus: (ab ipso enim comprehenditur.) quod fieri non potest. non igitur cylindrus minor est quam triplus coni. ostensum autem est neque majorem esse quam triplum. ergo cylindrus coni triplus sit necesse est; ac propterea conus tertia pars cylindri. Omnis igitur conus tertia pars est cylindri, eandem quam ipse basim habentis, & altitudinem æqualem. Quod demonstrare oportebat.



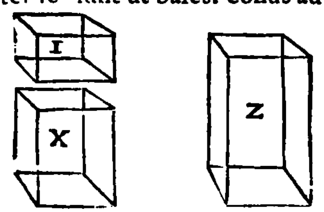
PROP. XI. THEOR.

Coni & cylindri qui eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases.

Sint in eadem altitudine coni & cylindri, quorum bases circuli ABCD EFGH, axes autem KL MN, & diametri basium AC EG. Dico ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita esse conum AL ad EN conum. Si enim non ita sit; erit ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad aliquod solidum minus cono EN, vel ad majus. sit primo ad minus quod sit X. & quo minus est solidum X cono EN, ei æquale sit I solidum. conus igitur EN ipsis solidis X I est æqualis. describatur in EFGH circulo quadratum EFGH, quod majus est dimidio circulo. erigatur à quadrato EFGH pyramis æque alta cono. pyramis igitur erecta major est coni dimidio. nam si circa circulum quadratum describamus, & ab ipso erigamus pyramidem



æque altam cono; erit inscripta pyramis pyramidis circumscriptæ dimidium: etenim inter se [a] sunt ut bases. conus autem circumscripta pyramide est minor. ergo pyramis cujus basis quadratum EFGH, vertex autem idem qui coni, major est coni dimidio. secentur circumferentiæ EF FG GH HE bifariam in punctis P R S O; & OE EP



PF FR RG GS SH HO jungantur. unumquodque igitur triangulorum HOE EPF FRG GSH majus est quam dimidium segmenti circuli in quo consistit. erigatur ab unoquoque triangulorum HOE EPF FRG GSH pyramis æque alta cono. ergo & unaquæque erectarum pyramidum major est dimidio portionis coni, quæ est ad ipsam. itaque reliquas circumferentias secantes bifariam, & jungentes rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides æque altas cono, atque hoc semper facientes, [b] relinquemus tandem aliquas portiones coni, quæ solido I minores erunt. relinquantur, & sint quæ in ipsis HO OE EP PF FR RG GS SH.

[a] 6. hujus.

[b] Lemma hujus.

SH. reliqua igitur pyramis cujus basis polygonum HOEPFRGS, altitudo autem eadem quæ coni, major est solido X. describatur in circulo ABCD polygono HOEPFRGS simile & similiter positum polygonum DTAYBQCV, & ab ipso erigatur pyramis æque alta cono AL. quoniam igitur est ut quadratum ex AC ad quadratum ex EG, ita [c] DTAYBQCV polygonum ad polygonum HOEPFRGS; ut autem quadratum ex AC ad quadratum ex EG, ita ABCD circulus [d] ad circulum EFGH; erit ut ABCD circulus ad circulum EFGH, [e] ita polygonum DTAYBQCV ad polygonum HOEPFRGS. sed ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad X solidum: & ut polygonum DTAYBQCV ad polygonum HOEPFRGS, [e] ita pyramis cujus basis DTAYBQCV polygonum, vertex autem punctum L, ad pyramidem cujus basis polygonum HOEPFRGS, & vertex punctum N. ut igitur conus AL ad X solidum, ita pyramis, cujus basis polygonum DTAYBQCV, & vertex punctum L, ad pyramidem cujus basis polygonum HOEPFRGS, & vertex N punctum. conus autem AL major est pyramide quæ est in ipso. majus igitur est solidum X pyramide quæ est in cono EN. sed & ostensum est minus. quod fieri non potest. non igitur ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita est AL conus ad solidum aliquod minus cono EN. similiter demonstrabitur neque ut EFGH circulus ad circulum ABCD, ita esse conum EN ad aliquod solidum minus cono AL. Dico præterea neque esse ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita AL conum ad aliquod solidum majus cono EN. Si enim fieri potest, sit ad solidum majus, quod sit Z. ergo invertendo ut EFGH circulus ad circulum ABCD ita erit solidum Z ad AL conum. sed cum sit solidum Z majus cono EN; erit ut solidum Z ad AL conum, ita conus EN ad aliquod solidum minus cono AL. & igitur ut EFGH circulus ad circulum ABCD, ita conus EN ad aliquod solidum minus cono AL, quod fieri non posse ostensum est. non igitur ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad aliquod solidum majus cono EN. ostensum autem est neque esse ad minus. ergo ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita est conus AL ad EN conum. sed ut conus ad conum, ita [f] est cylindrus ad cylindrum; est enim uterque [g] utriusque triplus. & igitur ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita in ipsis cylindri æque alti conis. Ergo coni & cylindri qui eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases. Quod demonstrare oportebat.

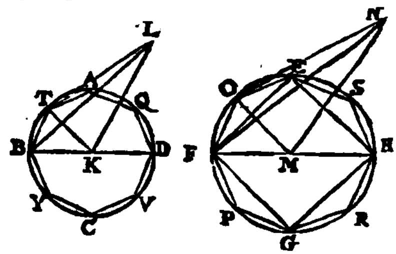
[c] 1. hujus.
[d] 2. hujus.
[e] 11. quinti.
[f] 15. quinti.
[g] 10. hujus.

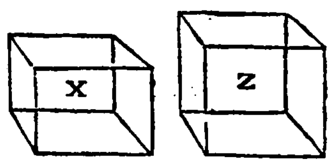
PROP.

PROP. XII. THEOR.

Similes coni & cylindri inter se sunt in triplicata proportione diametrorum qua sunt in basibus.

Sint similes coni & cylindri, quorum bases quidem circuli ABCD EFGH, diametri vero basium BD FH, & axes conorum vel cylindorum KL MN. Dico conum cujus basis ABCD circulus, vertex autem punctum L, ad conum cujus basis circulus EFGH, vertex autem N punctum, triplicatam habere proportionem ejus quam habet BD ad FH. Si enim non habet conus ABCDL ad conum EFGHN triplicatam proportionem ejus quam BD habet ad FH, hababit ABCDL conus ad aliquod solidum minus cono EFGHN triplicatam proportionem, vel, ad majus. Habeat primo ad minus, quod sit X. & describatur in EFGH. circulo quadratum EFGH. quadratum igitur EFGH majus est dimidio EFGH circuli. & erigatur à quadrato EFGH pyramis æque alta cono. ergo erecta pyramis major est quam coni dimidium. itaque secentur EF FG GH HE circumferentiæ bifariam in punctis O P R S, & jungantur EO OF FP PG GR RH HS SE. unumquodque igitur triangulorum EOF FPG GRH HSE majus est dimidio segmenti circuli EFGH, in quo consistit. & erigatur ab unoquoque triangulorum EOF FPG GRH HSE pyramis eundem verticem habens quem conus. ergo & unaquæque erectarum pyramidum major est quam dimidium portionis coni, quæ est ad ipsam. secantes igitur reliquas circumferentias bifariam, jungentesque rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides eundem habentes verticem quem conus, atque hoc semper facientes, [a] tandem relinquemus quasdam coni portiones quæ minores erunt excessu quo conus EFGHN ipsum X solidum superat. relinquantur, & sint quæ in ipsis EO OF FP PG GR RH HS SE. reliqua igitur pyramis cujus basis quidem polygonum





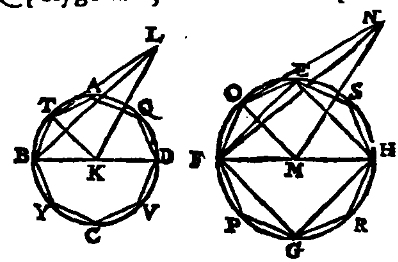
[a] Lemma hujus.

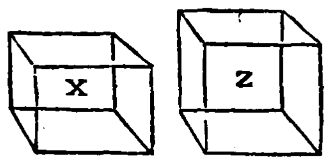
gonum EOFPGRHS, vertex autem N punctum, major est solido X. describatur etiam in circulo ABCD, polygono EOFPGRHS simile & similiter positum polygonum ATBYCVDQ: à quo erigatur pyramis eundem verticem habens quem conus: & triangulorum continentium pyramidem cujus basis quidem est polygonum ATBYCVDQ, vertex autem punctum L, unum sit LBT; triangulorum vero continentium pyramidem cujus basis EOFPGRHS polygonum, & vertex punctum N, unum sit NFO: & jungantur KT MO. quoniam igitur conus ABCDL similis est cono EFGHN, erit [b] ut BD ad FH, ita KL axis ad axem MN, ut autem BD ad FH, [c] ita BK ad FM. itaque ut BK ad FM ita KL ad MN: & permutando ut BK ad KL, ita FM ad MN. & cum perpendicularis utraque est, & circa æquales angulos BKL FMN latera sunt proportionalia: simile igitur [d] est BKL triangulum triangulo FMN. Rursus quoniam est ut BK ad KT, ita FM ad MO, & circa æquales angulos BKT FMO latera sunt proportionalia; etenim quæ pars est angulus BKT quatuor rectorum qui sunt ad K centrum, eadem est pars & angulus FMO quatuor rectorum qui sunt ad centrum M; erit [d] triangulum BKT triangulo FMO simile. & quoniam ostensum est ut BK ad KL, ita esse FM ad MN; æqualis autem est BK ipsi KT, & FM ipsi MO: erit ut TK ad KL, ita OM ad MN: & circa æquales angulos TKL OMN latera sunt proportionalia; recti enim sunt: triangulum igitur LKT simile est triangulo MNO. quod cum ob similitudinem triangulorum BKL FMN, sit ut LB ad BK, ita NF ad FM; ob similitudinem vero triangulorum BKT FMO, ut KB ad BT, ita MF ad FO: erit ex æquali ut LB ad BT, ita NF ad FO. rursus cum ob similitudinem triangulorum LTK NOM, sit ut LT ad TK, ita NO ad OM; & ob similitudinem triangulorum KBT OMF, ut KT ad TB, ita MO ad OF: ex æquali erit ut LT ad TB, ita NO ad OF, ostensum autem est & ut TB ad BL, ita OF ad FN. quare rursus ex æquali ut TL ad LB, ita ON ad NF. triangulorum igitur LTB NOF proportionalia sunt latera, ideoque æquiangula sunt LTB NOF triangula, & inter se [e] similia. quare & pyramis cujus basis triangulum BKT, vertex autem L punctum, similis est pyramidi cujus basis FMO triangulum, & vertex punctum N; similibus enim planis continentur, & multitudine æqualibus. pyramides autem similes, & quæ triangulares bases habent, in [f] triplicata sunt proportione homologorum laterum. ergo pyramis BKTL ad pyramidem FMON triplicatam habet proportionem ejus quam BK habet ad FM. similiter à punctis quidem A Q D V C Y ad K, à punctis vero E S H R G P ad M ducentes rectas lineas

[b] 24. Def. undecimi.
[c] 15. quinti.
[d] 6. sexti.
[e] 5. sexti.
[f] 8. hujus.

lineas, & à triangulis erigentes pyramides vertices eosdem habentes quos coni, ostendemus & unamquamque pyramidum ejusdem ordinis ad unamquamque alterius ordinis triplicatam proportionem habere ejus quam habet BK latus ad homologum latus MF, hoc est quam BD ad FH. sed ut unum antecedentium g ad unum consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequentia. est igitur & ut BKTL pyramis ad pyramidem FMON, ita tota pyramis cujus basis ATBYCVDQ polygonum, vertex autem punctum L, ad totam pyramidem cujus basis polygonum EOFPGRHS, & vertex punctum N. quare & pyramis cujus basis ATBYCVDQ polygonum, vertex autem punctum L, ad pyramidem cujus basis polygonum, EOFPGRHS, & vertex punctum N, triplicatam proportionem habet ejus quam BD habet ad FH. ponitur autem conus cujus basis circulus ABCD vertex autem punctum L, ad solidum X triplicatam proportionem habere ejus quam BD ad FH. ut igitur conus cujus basis circulus ABCD, vertex autem punctum L, ad solidum X, ita est pyramis cujus basis ATBYCVDQ polygonum, vertex autem punctum L, ad pyramidem cujus basis polygonum EOFPGRHS, & vertex punctum N. dictus autem conus major est pyramide quæ in ipso; etenim eam comprehendit. majus igitur est & solidum X pyramide cujus basis polygonum EOFPGRHS, vertex autem punctum N. sed & minus. quod fieri non potest. non igitur conus cujus basis ABCD circulus, & vertex punctum L, ad aliquod solidum minus cono cujus basis circulus EFGH, & vertex N punctum, triplicatam proportionem habet ejus quam BD habet ad FH. Similiter demonstrabimus neque conum EFGHN ad aliquod solidum minus cono ABCDL triplicatam proportionem habere ejus quam habet FH ad BD. Itaque dico neque ABCDL conum ad solidum majus cono EFGHN triplicatam habere proportionem ejus quam BD habet ad FH. Si enim fieri potest, habeat ad aliquod solidum majus, quod sit Z. invertendo

g 11. quinti.





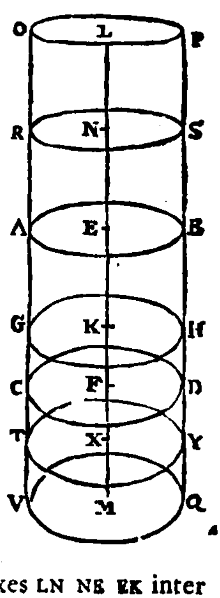
vertendo igitur, solidum Z ad conum ABCDL triplicatam proportionem habet ejus quam FH ad BD. cum autem est solidum Z majus cono EFGHN; erit ut solidum Z ad conum ABCDL, ita EFGHN conus ad aliquod solidum minus cono ABCDL. ergo & conus EFGHN ad solidum aliquod minus cono ABCDL triplicatam proportionem habebit ejus quam FH habet ad BD, quod fieri non posse demonstratum est. non igitur ABCDL conus ad solidum aliquod majus cono EFGHN, triplicatam proportionem habet ejus quam BD ad FH. ostensum autem est neque ad minus. Quare conus ABCDL ad EFGHN conum triplicatam proportionem habet ejus quam BD ad FH. ut autem conus ad conum, ita [b] cylindrus ad cylindrum. cylindrus enim in eadem existens basi in qua conus, & ipsi æque altus, coni [i] triplus est, cum[i] ostensum sit, omnem conum tertiam partem esse cylindri eandem quam ipse basim habentis, & æqualem altitudinem. ergo & cylindrus ad cylindrum triplicatam proportionem habebit ejus quam BD habet ad FH. Similes igitur coni & cylindri inter se sunt in triplicata proportione diametrorum quæ sunt in basibus. Quod demonstrare oportebat.

[b] 15. quinti.

[i] 10. hujus.

PROP. XIII. THEOR.

Si cylindrus plano secetur oppositis planis parallelo, erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.

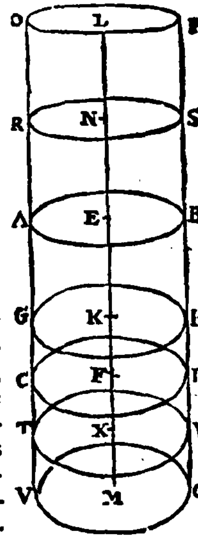


Cylindrus enim AD plano GH secetur oppositis planis AB CD parallelo, & occurrat axi EF in K puncto. Dico ut BG cylindrus ad cylindrum GD, ita esse EK axem ad axem KF. Producatur enim EF axis ex utraque parte ad puncta L, M; & ipsi quidem EK axi ponantur æquales quotcunque EN NL; ipsi vero FK æquales quotcunque FX XM: & per puncta L N X M ducantur plana ipsis AB, CD parallela: atque in planis per L N X M circa centra L N X M intelligantur circuli OP RS TY VQ æquales ipsis AB CD; & cylindri PR RB DT TQ intelligantur. quoniam igitur axes LN NE EK inter se sunt æquales, erunt cylindri PR RB BG inter se [a] ut bases. æquales autem sunt bases. ergo & cylindri PR RB BG sunt æquales. quod cum axes LN NE EK inter

[a] 11. hujus.

se

se æquales sint, itemque cylindri PR RB BG inter se æquales; sitque ipsorum LN NE EK multitudo æqualis multitudini ipsorum PR RB BG: quotuplex est axis KL ipsius EK axis, totuplex erit & PG cylindrus cylindri GB. eadem ratione & quotuplex est MK axis ipsius axis KF, totuplex est & QG cylindrus cylindri GD. & si quidem axis KL sit æqualis axi KM, erit & PG cylindrus cylindro GQ æqualis; si autem axis LX major sit axe KM, & cylindrus PG major erit cylindro GQ; & si minor, minor. quatuor igitur existentibus magnitudinibus, videlicet axibus EK KF, & cylindris BG GD, sumpta sunt æque multiplicia, axis quidem EK, & BG cylindri, nempe axis KL, & cylindrus PG; axis vero KF, & cylindri GD æque multiplicia, axis scilicet KM, & GQ cylindrus: & demonstratum est si LK axis superat autem KM, & PG cylindrum superare cylindrum GQ; & si æqualis æqualem; & si minor minorem. est [b] igitur axis EK ad axem KF, ut BG cylindrus ad cylindrum GD. Quare si cylindrus plano secetur oppositis planis parallelo, erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. Quod demonstrare oportebat.

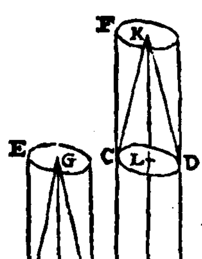


b 5. Def. quinti.

PROP. XIV. THEOR.

In æqualibus basibus existentes coni & cylindri, inter se sunt ut altitudines.

Sint enim in æqualibus basibus AB CD, cylindri EB FD. Dico ut EB cylindrus ad cylindrum FD, ita esse GH axem ad axem KL. Producatur enim KL axis ad punctum N, ponaturque ipsi GH axi æqualis LN; & circa axem LN intelligatur cylindrus CM. quoniam igitur cylindri EB CM eandem habent altitudinem, inter se [a] sunt ut bases. bases autem sunt æquales. ergo & cylindri EB CM inter se æquales erunt. & quoniam cylindrus FM secatur plano CD, oppositis planis parallelo, erit [b] ut CM



a 11. hujus.
b 13. hujus.

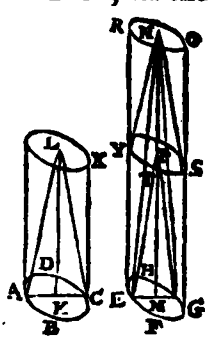
cylin-

cylindrus ad cylindrum FD, ita axis LN ad KL axem. æqualis autem est cylindrus quidem CM cylindro EB; axis vero LN axi GH. est igitur ut EB cylindrus ad cylindrum FD, ita axis GH ad KL axem. ut autem EB cylindrus ad cylindrum FD, ita [c] ABG conus ad conum CDK; cylindri sunt enim conorum [d] tripli. ergo & ut GH axis ad axem KL, ita est ABG conus ad conum CDK, & cylindrus EB ad FD cylindrum. In basibus igitur æqualibus existentes coni & cylindri, inter se sunt ut altitudines. Quod demonstrare oportebat. c 15. quinti. d 10. hujus.

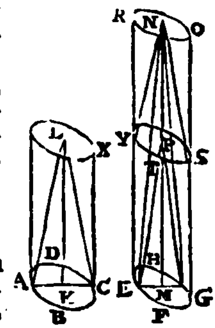
PROP. XV. THEOR.

Æqualium conorum & cylindrorum bases & altitudines reciproce sunt proportionales; & quorum conorum & cylindrorum bases & altitudines reciproce sunt proportionales, illi inter se sunt æquales.

Sint æquales coni & cylindri, quorum bases quidem ABCD EFGH circuli, & diametri ipsorum AC EG; axes autem KL MN; qui quidem & conorum vel cylindorum sunt altitudines: & compleantur cylindri AX EO. Dico cylindrorum AX EO bases & altitudines reciproce proportionales esse, hoc est, ut ABCD basis ad basim EFGH, ita esse altitudinem MN ad altitudinem KL. altitudo enim KL vel æqualis est altitudini MN, vel non æqualis. Sit primo æqualis. atque est AX cylindrus æqualis cylindro EG. qui autem eandem habent altitudinem coni & cylindri inter se sunt [a] ut bases. æqualis igitur est basis ABCD basi EFGH. est igitur ut basis ABCD ad EFGH basim, ita MN altitudo ad altitudinem KL. Non sit autem altitudo KL altitudini MN æqualis, sed major sit MN, & auferatur, ab ipsa MN altitudini LK æqualis PM, & per P secetur EO cylindrus plano TYS oppositis planis circulorum EFGH RO parallelo, intelligaturque cylindrus ES cujus basis quidem EFGH circulus, altitudo autem PM. quoniam igitur AX cylindrus æqualis est cylindro EO, alius autem aliquis est cylindrus ES; erit ut AX cylindrus ad cylindrum ES, [b] ita cylindrus EO ad ES cylindrum. sed ut AX cylindrus ad cylindrum ES, [a] ita basis ABCD ad EFGH basim; cylindri enim AX ES eandem habent altitudinem: ut autem cylindrus EO ad ES cylindrum a 11. hujus. b 7. quinti.



e 13 hujus. drum c, ita MN altitudo ad altitudinem MP; nam cylindrus EO secatur plano TYS, oppositis planis parallelo. est igitur ut ABCD basis ad basim EFGH, ita altitudo MN ad MP altitudinem. æqualis autem est MP altitudo altitudini KL. quare ut basis ABCD ad EFGH basim, ita MN altitudo ad altitudinem KL. æqualium igitur cylindrorum AX EO bases & altitudines reciproce sunt proportionales.



Sed si cylindrorum AX EO bases & altitudines sunt reciproce proportionales: hoc est, ut ABCD basis ad basim EFGH, ita altitudo MN ad KL altitudinem. Dico AX cylindrum cylindro EO æqualem esse. Iisdem enim constructis; quoniam ut ABCD basis ad basim EFGH, ita altitudo MN ad KL altitudinem; altitudo autem KL æqualis est altitudini MP: erit ut ABCD basis ad basim EFGH, ita MN altitudo ad altitudinem MP.

d 11. hujus. sed ut ABCD basis ad basim EFGH, d ita AX cylindrus ad cylindrum ES; eandem enim habent altitudinem: ut autem MN altitudo ad altitudinem MP, ita e cylindrus EO ad ES cylindrum. est igitur ut AX cylindrus ad cylindrum ES, ita cylindrus EO ad ES cylindrum. cylindrus igitur AX cylin-

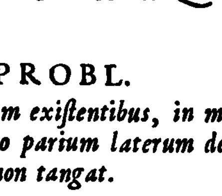
e 9. quinti. dro EO est e æqualis. similiter autem & in conis. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XVI. PROBL.

Duobus circulis circa idem centrum existentibus, in majori polygonum æqualium & numero parium laterum describere, quod minorem circulum non tangat.

Sint dati duo circuli ABCD EFGH circa idem centrum K. Oportet in majori circulo ABCD polygonum æqualium & numero parium laterum describere, non tangens minorem circulum EFGH. Ducatur per K centrum recta linea BD, atque à puncto G ipsi BD ad rectos angulos ducatur AG, & ad C producatur, quæ

a 16. tertii. AC circulum EFGH a tanget.



Itaque circumferentiam BAD bifariam secantes, & ejus di-

b Lemma hujus. midium rursus bifariam, & hoc semper facientes, b tandem relinquemus

relinquemus circumferentiam minorem ipsa AD. relinquatur sitque LD: & à puncto L ad BD perpendicularis [c] agatur LM, & ad N producatur; junganturque LD DN. ergo LD ipsi DN est [d] æqualis, & quoniam LN parallela est AC, & AC [d] tangit circulum EFGH; ipsa LN circulum EFGH non tanget. & multo minus tangent circulum EFGH rectæ lineæ LD DN. quod si ipsi LD æquales deinceps circulo ABCD aptabimus, describetur in eo polygonum æqualium & numero parium laterum non tangens minorem circulum EFGH. Quod facere oportebat.

c 12. primi.

d 3. & 29. tertii.

PROP. XVII. PROBL.

Duabus sphæris circa idem centrum existentibus, in majori solidum polyhedrum describere, quod minoris sphæræ superficiem non tangat.

Intelligantur duæ sphæræ circa idem centrum A. Oportet in majori sphæra describere solidum polyhedrum minoris sphæræ superficiem non tangens. Secentur sphæræ plano aliquo per centrum ducto: sectiones erunt circuli; quoniam diametro manente & semicirculo circumducto sphæra facta [a] est: ergo in quacunque positione semicirculum intelligamus, quod per ipsum producitur planum in superficie sphæræ circulum efficiet; & constat circulum esse maximum, cum diameter sphæræ, quæ & semicirculi diameter est; major [b] sit omnibus rectis lineis quæ in circulo vel sphæra ducuntur. sit igitur in majori quidem sphæra circulus BCDE, in minori autem circulus FGH; & ducantur ipsorum duæ diametri ad rectos inter se angulos BD CE. occurrat BD minori circulo in G; ducatur à puncto G ipsi AG ad rectos angulos GL, & jungatur AL. Itaque circumferentiam EB bifariam secantes, & dimidium ipsius bifariam, atque hoc semper facientes, tandem relinquemus quandam circumferentiam minorem ea parte circumferentiæ circuli BCD, quæ subtenditur à recta æquali ipsi GL. relinquatur, sitque circumferentia BK. minor igitur est recta BK quam GL; eritque BK latus polygoni æqualium & parium numero laterum non tangentis minorem circulum. sint igitur polygoni latera in quadrante circuli BE, rectæ BK KL LM ME; & juncta KA producatur ad N: & à puncto A plano circuli BCDE ad rectos angulos [c] constituatur AX, quæ superficiei sphæræ in puncto X occurrat, & per AX & utramque ipsarum BD KN plana ducantur, quæ ex jam dictis efficient in superficie sphæræ,

a Def. 14. undecimi.

b 15. tertii.

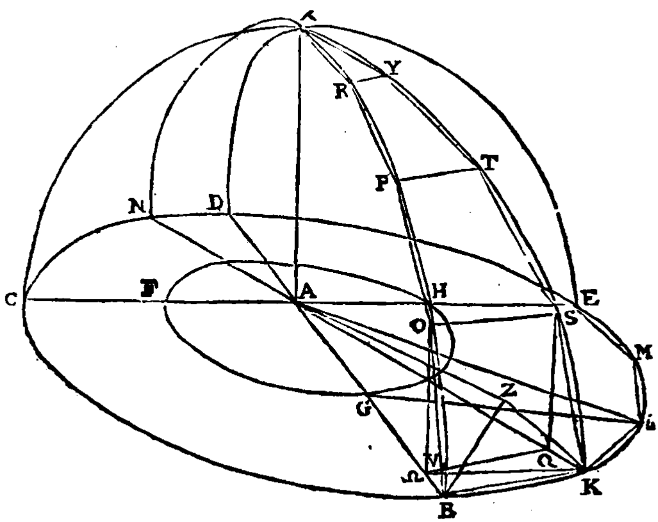
c 12. undecimi.

P maxi-

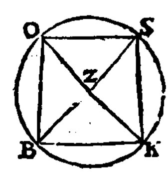
maximos circulos. itaque efficiant, & sint in diametris BD KN eorum semicirculi BXD KXN. quoniam igitur XA recta est ad planum circuli BCDE, erunt omnia plana quæ per ipsam XA transeunt, ad idem circuli planum [d] recta: quare & semicirculi BXD KXN recti sunt ad idem planum. & quoniam semicirculi BED BXD KXN æquales sunt in æqualibus enim consistunt BD KN diametris; erunt & eorum quadrantes BE BX KX inter se æquales. quot igitur latera polygoni sunt in quadrante BE, tot erunt & in quadrantibus BX KX, æqualia ipsis BK KL LM ME. describantur, & sint BO OP PR RX, KS ST TY YX: junganturque SO TP YR; & ab ipsis OS ad planum circuli BCDE perpendiculares ducantur. cadent hæ in [e] communes plano-

[d] 18. undecimi.

[e] 38. undecimi.



rum sectiones BD KN, quoniam & plana semicirculorum BXD KXN ad planum circuli BCDE recta sunt. itaque cadant, sintque OV SQ, & VQ jungatur. cum igitur in æqualibus semicirculis BXD KXN, æquales circumferentiæ sumptæ sint BO KS, & ductæ perpendiculares OV SQ, erit OV quidem ipsi SQ æqualis, BV vero æqualis KQ. est autem & tota BA æqualis toti KA. ergo & reliqua VA reliquæ QA est æqualis. igitur ut BV ad VA, ita KQ ad QA: ideoque VQ ipsi BK parallela [f] est. quod cum



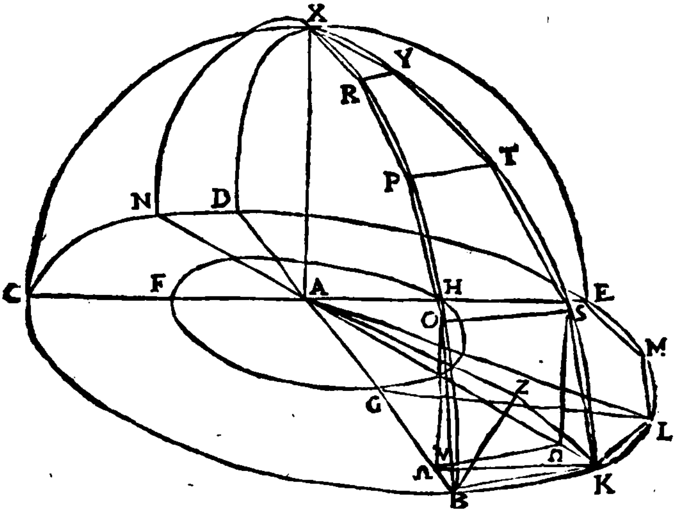
[f] 2. sexti.

utra-

utraque ipsarum OV SQ recta sit ad circuli BCDE planum, erit OV ipsi SQ [g] parallela. ostensa autem est & ipsi æqualis. ergo QV SO æquales [h] sunt & parallelæ. & quoniam QV parallela est ipsi SO, sed & parallela ipsi KB; erit & [i] SO ipsi KB parallela; & ipsas conjungunt BO KS. ergo & KBOS quadrilaterum est in uno [k] plano; nam si duæ rectæ lineæ parallelæ sint, & in utraque ipsarum quævis puncta sumantur, quæ dicta puncta conjungit recta linea in eodem est plano, in quo parallelæ. & eadem ratione utraque ipsorum quadrilaterorum SOPT TPRY in uno sunt plano. est autem in [l] uno plano & triangulum YRX. si igitur à punctis O S P T R Y ad A ductas rectas lineas intelligamus, constituetur quædam figura solida polyhedra inter circumferentias BX KX, ex pyramidibus, composita, quarum bases quidem KBOS SOPT TPRY quadrilatera, & triangulum YRX; vertex autem punctum A. quòd si in unoquoque latere KL LM ME, quemadmodum in KB eadem construamus, & in reliquis tribus quadrantibus, & in reliquo hemisphærio, constituetur figura quædam polyhedra in sphæra descripta, & composita ex pyramidibus, quarum bases sunt quadrilatera jam dicta, & YRX triangulum, & quæ ejusdem ordinis sunt, vertex autem A punctum. Dico dictam figuram polyhedram non tangere superficiem minoris sphæræ, in qua est circulus FGH. Ducatur à [m] puncto A ad planum quadrilateri KBSO perpendicularis AZ, cui in puncto Z occurrat, & BZ ZK jungantur. itaque quoniam AZ recta est ad quadrilateri KBSO planum, & ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt, & in eodem sunt plano [n] rectos angulos faciet. ergo AZ ad utramque ipsarum BZ ZK est perpendicularis. & quoniam AB est æqualis AK, erit & quadratum ex AB quadrato ex AK æquale: & sunt quadrato quidem ex AB æqualia [o] quadrata ex AZ ZB, angulus enim ad Z rectus est; quadrato autem ex AK æqualia ex AZ ZK quadrata. ergo quadrata ex AZ ZB quadratis ex AZ ZK æqualia sunt. commune auferatur quadratum ex AZ. reliquum igitur quod ex BZ reliquo quod ex ZK est æquale: ergo recta BZ rectæ ZK æqualis. Similiter ostendemus, & quæ à puncto Z ad puncta O S ducuntur utrique ipsarum BZ ZK æquales esse. circulus igitur centro Z & intervallo una ipsarum ZB ZK descriptus etiam per puncta O S transibit. & quoniam in circulo est BKSO quadrilaterum, & sunt æquales OB BK KS & minor OS, erit angulus BZK obtusus; ideoque BK major quam BZ. sed & GL quam BK est major multo. igitur major est GL quam BZ. & quadratum ex GL quadrato ex BZ majus. & cum æqualis AL ipsi

[g] 6. undecimi.
[h] 33. primi.
[i] 9. undecimi.
[k] 7. undecimi.
[l] 2. undecimi.
[m] 11. undecimi.
[n] 3. Def. undecimi.
[o] 47. primi.

ipsi AB, erit quadratum ex AL quadrato ex AB æquale: sed quadrato quidem ex AL æqualia sunt quadrata ex AG GL, quadrato autem ex AB æqualia quadrata ex BZ ZA; quadrata igitur ex AG GL æqualia sunt quadratis ex BZ ZA; quorum quadratum ex BZ minus est quadrato ex GL: ergo reliquum ex ZA quadratum majus est quadrato ex AG;



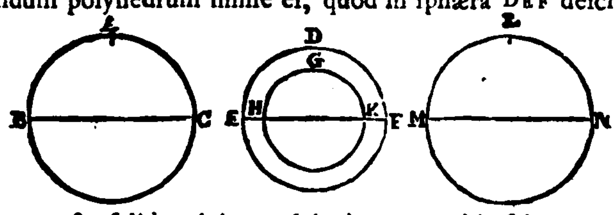
& ob id recta linea ZA major est recta AG. atque est AZ quidem ad unam polyhedri basim, AG vero ad superficiem minoris sphæræ perpendicularis. quare polyhedrum minoris sphæræ superficiem non tanget. Duabus igitur sphæris circa idem centrum existentibus, in majori solidum descriptum est minoris sphæræ superficiem non tangens. Quod facere oportebat.

Cor. Quod si etiam in altera sphæra solido polyhedro descripto, in sphæra BCDE simile solidum polyhedrum describatur; habebit solidum polyhedrum in sphæra BCDE ad solidum polyhedrum in altera sphæra triplicatam proportionem ejus, quam diameter sphæræ BCDE habet ad alterius sphæræ diametrum. divisis enim solidis in pyramides numero æquales, & ejusdem ordinis: erunt pyramides similes. similes autem pyramides inter se in triplicata sunt proportione homologorum laterum. ergo pyramis cujus basis est KBOS quadrilaterum, vertex autem punctum A, ad ad pyramidem in altera sphæra ejusdem ordinis triplicatam proportionem habet ejus, quam latus homologum habet ad homologum latus; hoc est, quam habet AB ex centro sphæræ circa centrum A existentis, ad eam, quæ est ex centro alterius sphæræ. similiter & unaquæque pyramis earum, quæ sunt in sphæra circa centrum A, ad unamquamque pyramidum ejusdem ordinis, quæ sunt in altera sphæra, triplicatam proportionem habebit ejus, quam habet AB ad eam, quæ est ex centro alterius sphæræ. Et ut unum antecedentium ad unum consequentium, ita antecedentia omnia ad omnia consequentia. quare totum solidum polyhedrum, quod est in sphæra circa centrum A, ad totum solidum polyhedrum, quod in altera sphæra, triplicatam proportionem habebit ejus, quam habet AB ad eam quæ est ex centro alterius spræræ, hoc est, quam habet BD diameter ad alterius sphæræ diametrum.

PROP. XVIII. THEOR.

Sphæræ inter se in triplicata sunt proportione suarum diametrorum.

Intelligantur sphæræ ABC DEF; quarum diametri BC EF. Dico ABC sphæram ad sphæram DEF triplicatam proportionem habere ejus, quam habet BC ad EF. Si enim non ita est, sphæra ABC ad sphæram minorem ipsa DEF, vel ad majorem, triplicatam proportionem habebit ejus, quam habet BC ad EF. Habeat primo ad minorem, videlicet ad GHK. & intelligatur sphæra DEF circa idem centrum, circa quod sphæra GHK: describaturque in majori sphæra DEF solidum polyhedrum non tangens [a] minorem sphæram GHK in superficie; & in sphæra ABC describatur solidum polyhedrum simile ei, quod in sphæra DEF descri- [a] 17. hujus.



ptum est. solidum igitur polyhedrum, quod in sphæra ABC, ad solidum polyhedrum, quod in sphæra DEF, triplicatam [b] proportionem habet ejus, quam BC ad EF. habet autem ABC sphæra ad sphæram GHK triplicatam proportionem ejus, quam BC ad EF. ergo ut ABC sphæra ad sphæram [b] Cor. antecedente.

GHK,

GHK, ita solidum polyhedrum in sphæra ABC ad solidum polyhedrum in sphæra DEF; & permutando, ut ABC sphæra ad solidum polyhedrum, quod in ipsa est, ita GHK sphæra ad solidum polyhedrum, quod in sphæra DEF. major autem est sphæra ABC solido polyhedro, quod est in ipsa. ergo & GHK sphæra polyhedro, quod in sphæra DEF, est major. sed & minor, ab ipso enim comprehenditur, quod fieri non potest. non igitur ABC sphæra ad sphæram minorem ipsa DEF triplicatam proportionem habet ejus, quam BC ad EF. similiter ostendemus neque DEF sphæram ad sphæram minorem ipsa ABC triplicatam habere proportionem ejus, quam habet EF ad BC. Dico insuper sphæram ABC neque ad majorem sphæram ipsa DEF triplicatam proportionem habere ejus, quam BC ad EF. Si enim fieri potest, habeat ad majorem LMN. invertendo igitur, sphæra LMN ad ABC sphæram triplicatam proportionem habet ejus, quam diameter EF ad BC diametrum. ut autem sphæra LMN ad ABC sphæram, ita sphæra DEF ad sphæram quandam minorem ipsa ABC, quoniam sphæra LMN major est ipsa DEF. ergo & DEF sphæra ad sphæram minorem ipsa ABC triplicatam proportionem habet ejus, quam EF ad BC; quod fieri non posse ostensum est. non igitur ABC sphæra ad sphæram majorem ipsa DEF triplicatam proportionem habet ejus, quam BC ad EF. ostensum autem est neque ad minorem. ergo ABC sphæra ad sphæram DEF triplicatam proportionem habebit ejus, quam BC ad EF. Quod demonstrare oportebat.

FINIS.

BOOKS *Printed and Sold by* Richard Clements *Bookseller in* Oxford.

1 FOUR Sermons, by the Rev. George Fothergill, B.D. Fellow of Queen's College, Oxon. on publick occasions, preach'd at Oxford: 1 At the Assizes held there, March 6. 1734-5. 2 On the Martyrdom of K. Charles I. 1744-5. 3 On a General Fast-Day, Jan. 9. 1744-5. 4 And on the General Thanksgiving, Oct. 9. 1746.

2 The Four Gospels in the Malayan Tongue, with a Preface, &c. by Dr Hyde.

3 Rogeri Aschami Epistolarum, Libri Quatuor. Accessit Joannis Sturmii, aliorumque ad Aschamum, anglosque alios eruditos Epistolarum Liber unus. 8vo.

4 Glossarium Antiquitatum Britannicarum, sive Syllabus Etymologicus Antiquitatum veteris Britanniæ atque Iberniæ, Temporibus Romanorum Auctore Willielmo Baxter.

5 Institutio Logicæ ad Communes Usus accommodata, per Johannem Wallis, S.T.D. Geometriæ Professorem Savilianum. Oxoniæ Editio Quinta, auctior & emendatior. 8vo.

6 De Antiquitate, Elegantia, Utilitate Linguæ Arabicæ, Oratio habita Oxonii, in Schola Linguarum VII Kalend. Augusti, 1738. A Thoma Hunt, D.D. ex Aula Cervina, Linguæ Arabicæ Professore.

7 A Dissertation on Proverbs VII. 22, 23. being a Specimen of Critical Dissertations on the Proverbs of Solomon: Addres'd to the Students in Arabic, and the other Oriental Languages, in the University of Oxford. By Thomas Hunt, D.D. of Hertford College, Professor of Arabic. Price 6d.

8 Two Sermons preach'd before the University of Oxford. By Thomas Hutchinson, D.D. of Hertford College, and Prebendary of Chichester.

9 Job's Expectations of a Resurrection consider'd. In Three Sermons preach'd before the University of Oxford. By Richard Brown, B.D. Fellow of Trinity College.

10 The Case of Naaman considered. A Sermon preach'd before the University of Oxford, by Richard Brown, B.D. Fellow of Trinity College.

11 Theodosii Sphæricorum libri tres, Græce & Latine. Cura Jos. Hunt è Coll. Bal.

12 The true Intellectual System of the Universe, by Ralph Cudworth, D.D. 2 vol. 4to.

13 Two

13 Two Dissertations: the first, on The Tree of Life in Paradise, with Observations on the Fall of Man; the second, on the Oblations of Cain and Abel. By Benjamin Kennicott, of Wadham College in Oxford. 8vo.

14 Caspari Bartholini. Thom. S. Specimen Philosophiæ Naturalis, præcipua Physices Capita exponens, in gratiam Juventutis Academicæ. Accedit de Fontium Fluviorumque Origine ex pluviis Dissertatio Physica. 12°. Oxon. 1713.

15 The Works of the late Right Reverend and Learned Dr Francis Hare, 4 vol. 8vo.

16 Aristotelis de Rhetorica seu Arte Dicendi Libri Tres, Gr. Lat. Cantab. 1728.

17 Dionysii Halicarnassei de Structura Orationis Liber. Ex Recensione Jacobi Upton. Gr. & Lat. 8vo.

18 Flavii Josephi Opera, quæ reperiri potuerunt, omnia. Cum Notis Johann. Hudson. Gr. Lat. 2 vol. fol.

19 Eusebius: or the True Christian's Defence against a late Book entitul'd The Moral Philosopher. By John Chapman, D.D. 2 vol. 8vo.

20 Epicteti quæ supersunt Dissertationes ab Arriano Collectæ, nec non Enchiridion & Fragmenta, Græce & Latine, in duos Tomos distributa. Cum integris Jacobi Schegkii & Hieronymi Wolffii selectisque aliorum Doctorum Annotationibus. Recensuit, notis & Indice illustravit Joannes Uptonus. Præbend. Roffensis, 2 vol. 4to.

21 Pope's Homer's Iliad, 6 vol. fol.

22 Pope's Homer's Odyssey, 5 vol. fol.

23 Grammatica Rationis sive Institutiones Logicæ. 12°. Oxonii, è Theatro Sheldoniano.

24 Synopsis Metaphysicæ Andreæ Fromenii, Editio ultima, Oxon.

25 Synopsis Communium Locorum, præcipuæ ad mores spectantium: ex poetis Latinis tum antiquioribus tum recentioribus collecta: & in capita cuique propria digesta. Editio quinta accuratius recognita & castigata, 12mo.

26 Bibliotheca Biblica: Being a Commentary upon all the Books of the Old and New Testament, 5 vol. 4to. containing the 5 Books of Moses, 5 vol. 4to.

27 Logicæ Artis Compendium. Authore Roberto Sandersono, Episc. Lincoln. 12mo.

TRIGONOMETRIÆ

Planæ & Sphæricæ

ELEMENTA.

ITEM

DE NATURA

ET

ARITHMETICA

LOGARITHMORUM

TRACTATUS BREVIS.

OXONIÆ,

E THEATRO SHELDONIANO MDCCXLVII.

Impensis *Ric. Clements* Bibliop. *Oxoniensis*.

TRIGONOMETRIÆ
Planæ & Sphæricæ
ELEMENTA.

DEFINITIONES.

EX datis Trianguli lateribus angulos, & ex angulis latera laterumve rationes, & mixtim assequi, Trigonometriæ munus est. Ad quod præstandum, necesse est, ut non tantum Peripheriæ circulares, sed & rectæ lineæ circulis adscriptæ, in notas aliquot & certas partes secari supponantur.

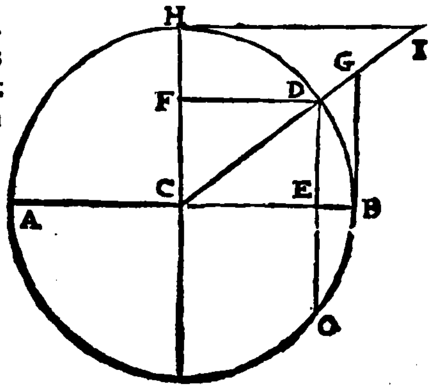
Placuit itaque Veteribus Mathematicis, peripheriam circuli in 360 partes (quos gradus appellant) dividere; & unumquemque gradum in 60 minuta prima, & hæc singula in 60 secunda, & rursus horum unumquodque in 60 minuta Tertia, & ita continuo partiri. Et angulus quilibet dicitur esse tot graduum & minutorum, quot sunt in arcu qui angulum illum metitur.

Quidam gradum in partes centesimas, potius quam sexagesimas partiri volunt: & utilius fortasse esset, non gradus sed & ipsum circulum in decupla ratione secare; quæ divisio forsan aliquando obtinebit. Verum si circulus constet 360 gradibus, ejus quadrans quæ est mensura anguli recti, erit harum partium 90. Si circulus in 100 partes secetur, Quadrans erit 25 partium.

Complementum Arcus, est differentia ejus à Quadrante.

Chorda sive *subtensa* est recta linea ab uno Arcûs termino ad alterum ducta.

Sinus rectus alicujus arcus qui & ſimpliciter ſinus dici ſolet, eſt perpendicularis cadens ab uno arcus termino ad radium per alterum terminum ejuſdem Arcus ductum. Eſt igitur ſemiſubtenſa dupli Arcus; ſcil. eſt DE = ½ DO, & eſt arcus DO duplus ipſius DB. Hinc ſinus arcus 30. gr. æqualis eſt dimidio radii, nam per 15 El. 4. Latus Hexagoni circulo inſcripti, hoc eſt, ſubtenſa 60 gr. æqualis eſt radio. Sinus dividit Radium in duo ſegmenta CE EB; quorum unum CE quod centro & ſinu recto intercipitur, eſt ſinus complementi arcûs DB ad quadrantem (nam eſt CE = FD qui eſt ſinus arcus DH) & vocatur *Coſinus*. Alterum ſegmentum EB quod ſinu recto & peripheria intercipitur, vocatur *Sinus verſus*: aliquando dicitur Arcûs *Sagitta*.



Quod ſi per unum Arcus terminum D producatur à centro recta CG, donec occurrat rectæ BG ſuper diametro ad ejus terminum B perpendiculari; vocabitur in Trigonometria CG *Secans*, & BG *Tangens* arcus DB.

Coſecans & Cotangens Arcûs eſt ſecans vel tangens Arcus, qui eſt complementum alterius ad Quadrantem. *Nota*. Sicut eadem eſt Chorda Arcûs & ejuſdem complementi ad circulum. Sic idem eſt Sinus, eadem Tangens, eademque Secans Arcûs & ejuſdem complementi ad ſemicirculum.

Sinus Totus eſt ſinus maximus, ſeu ſinus 90 graduum qui circuli radio æqualis eſt.

Canon Trigonometricus eſt Tabula, quæ à minuto incipiens, ſeriatim exhibet quas habent longitudines ſinguli Sinus Tangentes & Secantes, reſpectu radii, qui unitatis

loco

loco ponitur, & in partes 10 000 000 vel plures decimales dividi intelligitur. Adeo ut ope hujus Tabulæ, cujuslibet Arcûs vel anguli Sinus Tangens vel Secans haberi potest; Et vicissim ex dato Sinu Tangente vel Secante dabitur qui iis respondet arcus vel angulus. Observandum est in sequentibus R esse notam Radii, S notam sinus, coS cosinus, T notam Tangentis, & coT coTangentis.

CONSTRUCTIO CANONIS.

PROP. I. THEOREMA.

Datis duobus quibuslibet Trianguli rectanguli lateribus, reliquum quoque dabitur.

Vide figuram propositionis tertiæ.

Est enim per 47 Elementi primi $ACq = ABq + BCq$ & $ACq - BCq = ABq$, & vicissim $ACq - ABq = BCq$. unde per extractionem Radicis quadratæ, dabitur $AC = \sqrt{ABq + BCq}$ & $AB = \sqrt{ACq - BCq}$. & $BC = \sqrt{ACq - ABq}$.

PROP. II. PROBL.

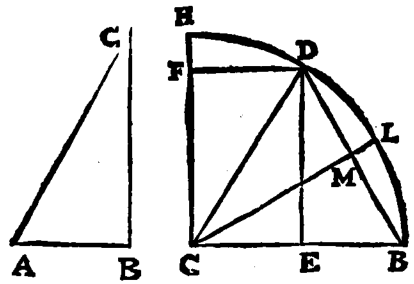
Dato DE sinu arcus DB. Invenire Cosinum DF.

Ex datis CD radio & DE sinu, in Triangulo rectangulo CDE dabitur per præcedentem $CE = \sqrt{CDq - DEq} = DF$

PROP. III. PROBL.

Dato DE ſinu arcus cujuſvis DB. Invenire DM vel BM ſinum arcus dimidii.

Dato DE dabitur per præcedentem CE, ac proinde EB quæ eſt differentia inter coſinum & Radium. In Tri-



angulo igitur rectangulo DBE datis DE & EB dabitur DB cujus ſemiſſis DM eſt ſinus arcus DL $= \frac{1}{2}$ arcus DB.

PROP. IV. PROBL.

Dato BM ſinu arcus BL invenire ſinum dupli Arcus.

Dato BM ſinu, dabitur per Prop. 2. coſinus CM. Sunt autem Triangula CBM DBE æquiangula, ob angulos ad E & M rectos & angulum ad B communem, quare (per 4. 6.) erit CB : CM : : BD vel 2 BM : DE. Unde cum dantur tres priores hujus Analogiæ termini, quartus quoque qui eſt ſinus arcus DB innoteſcet.

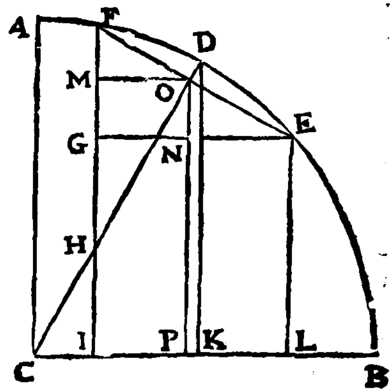
Corol. Et CB : 2 CM : : BD : 2 DE, hoc eſt, Radius ad duplum coſinus arcus $\frac{1}{2}$ DB ut ſubtenſa arcus DB ad ſubtenſam dupli arcus. Item eſt CB : 2 CM : : (2 BM : 2 DE : :) BM : DE : : $\frac{1}{2}$ CB : CM. unde dato ſinu arcus alicujus & ſinu arcus dupli, dabitur coſinus arcus ſimpli.

PROP.

PROP. V.

Datis sinubus duorum arcuum BD FD, Invenire FI sinum summæ arcuum, Item EL sinum differentiæ eorundem.

Ducatur Radius CD, & sit CO cosinus arcus FD, qui proinde dabitur; per O agatur OP parallela ad DK. Item ducantur OM GE parallelæ ad CB. Et ob æquiangula triangula CDK COP CHI FOH FOM. Est primò CD : DK : : CO : OP, quæ itaque innotescet. Item est CD : CK : : FO : FM, adeoque & illa nota erit. sed ob FO = EO erit FM = MG = ON. Est itaque OP + FM = FI = sinui summæ arcuum : & OP − FM, hoc est, OP − ON = EL sinui differentiæ arcuum. Q. E. I.



Coroll. Quia arcuum BE BD BF differentiæ sunt æquales, Erit BD arcus medius arithmeticus inter arcus BE BF.

PROP. VI.

Iisdem positis, Radius est ad duplum cosinus arcus medii, ut sinus differentiæ ad differentiam sinuum extremorum.

Nam est CD : CK : : FO : FM, unde duplicando consequentes CD : 2 CK : : FO : 2 FM vel ad FG; quæ est differentia sinuum EL FI. Q. E. D.

Cor. 1. Si arcus BD sit 60 grad. Erit differentia sinuum FI EL æqualis FO sinui distantiæ. Nam in eo casu sit CK sinus 30 grad. cujus duplum æquale est radio, adeoque ob $CD = 2\,CK$ erit $FO = FG$. Adeoque si duo arcus BE BF ab arcu 60 gr. æquidistent, erit differentia sinuum æqualis sinui distantiæ FD.

Cor. 2. Hinc si dentur sinus omnium arcuum, dato intervallo à se invicem distantium ab initio quadrantis usque ad 60 gradus, facile inveniuntur reliqui per unicam additionem. Est enim sinus 61 gr. = sinui 59 gr. + sin 1 gr. & sinus 62 gr. = sinui 58 gr. + sin 2 gr. Item sinus 63 gr. = sinui 57 gr. + sin 3 gr. & ita deinceps.

Cor. 3. Si habeantur sinus omnium arcuum ab initio quadrantis, dato intervallo à se invicem distantium, usque ad datam quamvis quadrantis partem, dabuntur exinde sinus omnes usque ad hujus partis duplum *ex. g.* Dentur omnes sinus usque ad 15 gr. per præcedentem Analogiam inveniri possunt sinus omnes usque ad 30 gr. Nam est radius ad duplum cosinus 15 gr. ut sinus unius gradus ad differentiam sinuum 14 gr. & 16 gr. ita etiam est sinus 2 gr. ad differentiam sinuum 13 & 17 gr. & ita sinus 3 gr. ad differentiam sinuum 12 & 18 gr. atque sic continuo usque dum pervenietur ad sinum 30 gr.

Similiter ut Radius ad duplum cosinus 30 gr. seu ad duplum sinus 60 gr. ita sinus 1 gr. ad differentiam sinuum 29 & 31 gr. : : sin 2 gr. ad Differentiam sinuum 28 & 32 gr. : : sin 3 gr. ad differentiam sinuum 27 & 33 gr. sed in hoc casu est [a] Radius ad duplum cosinus 30 gr. ut 1 ad $\sqrt{3}$. ac proinde si multiplicentur sinus distantiarum ab arcu 30 gr. per $\sqrt{3}$ dabuntur differentiæ sinuum.

Similiter in ipso initio quadrantis minutim exquirere possumus sinus, datis sinubus & cosinubus unius & duorum minutorum. Nam ut Radius ad duplum cosinus $2'$: : sin $1'$: differentiam sinuum $1'$ & $3'$: : Sin $2'$: differentiam sinuum $0'$ & $4'$ hoc est, ad ipsum sinum $4'$. Et

---

[a] Sit DB Arcus 30 gr. $CD = \text{Rad.} = 1$ erit duplum $DK = \frac{1}{2}$. Deinde $\sqrt{CDq - DKq} = CK = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}}$. Sed (per 14tam 5ti) $CD : CK : : 1 : \sqrt{\frac{3}{4}}$. & duplicando consequentes CD (Rad.) : $2\,CK$ (dupl. Cos. 30 gr.) : : $1 : 2\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$.

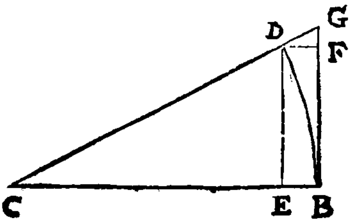
similiter

ſimiliter ex datis ſinubus priorum 4′ inveniuntur ſinus reliqui uſque ad 8′ & exinde ad 16′ & ita deinceps.

PROP. VII. THEOREMA.

In arcubus exiguis Sinus & Tangens ejuſdem arcus ſunt quam proxime ad ſe invicem, in ratione æqualitatis.

Nam ob æquiangula triangula CED CBG, erit CE : CB : : ED : BG. ſed accedente puncto D ad B, evaneſcit EB reſpectu arcus BD : unde fit CE fere æqualis CB. adeoque & ED fere æqualis BG. Si EB ſit minor radii parte $\frac{1}{10\,000\,000}$ erit differentia inter ſinum & tangentem, minor quoque tangentis parte $\frac{1}{10\,000\,000}$.



Cor. Cum Arcus ſit tangente minor, ſinu autem ſuo major; & exigui arcus ſinus & tangens ſunt fere æquales, erit etiam arcus ſuo ſinui vel tangenti fere æqualis, Adeoque in exiguis arcubus, erit ut arcus ad arcum ita ſinus ad ſinum.

PROP. VIII.

Invenire ſinum Arcus unius minuti.

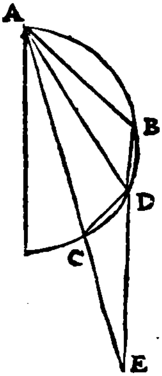
Latus Hexagoni circulo inſcripti, hoc eſt, ſubtenſa 60 graduum æqualis eſt Radio, (*per* 15tam 4ti) Radii itaque ſemiſſis erit ſinus Arcus 30 gr. Dato itaque ſinu Arcus 30 grad. invenitur ſinus arcus 15 gr., (*per* 3tiam hujus.) Item ex dato ſinu 15 gr. per eandem invenitur ſinus 7 gr. 30 min. & ſinus hujus dimidii 3 gr. 45′ ſimiliter invenitur; & ita deinceps, donec duodecima peracta biſectione, perveniatur ad arcum 52″ 44‴ 3⁗ 45′′′′′ cujus coſinus fere æqualis eſt radio, in quo caſu (uti conſtat ex prop. 7.) ſunt ſinus arcubus ſuis proportionales; adeoque ut arcus 52″ 44‴. 3⁗. 45′′′′′ ad arcum unius minuti ita erit

erit ſinus prius inventus ad ſinum arcus unius minuti, qui igitur dabitur.

Dato ſinu unius minuti, invenietur per prop. 2. & 4, ſinus duorum minutorum ejuſque coſinus.

PROP. IX. THEOREMA.

Si angulus BAC in peripheria circuli exiſtens, biſecetur rectâ AD, Et producatur AC quoad DE = AD ipſi occurrat in E: erit CE = AB.



In Quadrilatero ABDC (per 22. 3.) ſunt anguli B & ACD æquales duobus rectis = DCE + DCA (per 13. 1.) unde erit angulus B = DCE. Quin etiam eſt angulus E = DAC (per 5. 1.) = DAB & eſt DC = DB. quare Triangula BAD & CED ſunt congrua & CE eſt æqualis AB. Q. E. D.

PROP. X. THEOREMA.

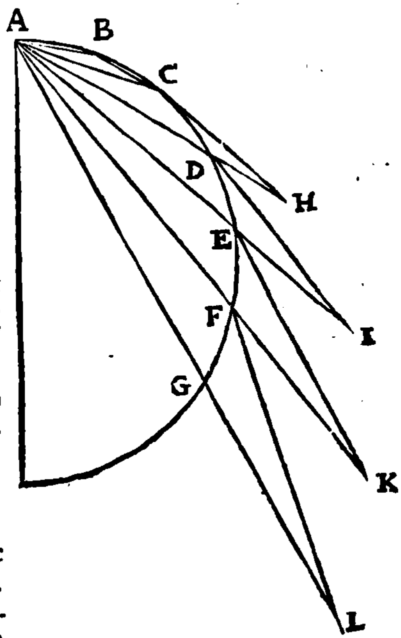
Sint arcus AB BC CD DE EF &c. æquales; Arcuumque AB AC AD AE &c. ſubtenſæ ducantur, erit AB : AC : : AC : AB + AD : : AD : AC + AE : : AE : AD + AF : : AF : AE + AG.

Producantur AD in H, AE in I, AF in K, & AG in L, ut triangula ACH ADI AEK AFL ſint Iſoſcelia. Et quoniam angulus BAD biſectus eſt, fiet DH = AB per precedentem. Smiliter erit EI = AC, FK = AD, item GL = AE.

Sed Triangula Iſoſcelia ABC CAH DAI EAK FAL, ob angulos ad baſes æquales, ſunt æquiangula. Quare erit ut AB : AC : : AC : AH = AB + AD : : AD : AI = AC + AE : : AE : AK = AD + AF : : AF : AL = AE + AG. Q. E. D.

Corol.

Corol. Quoniam eſt A B ad A C ut Radius ad duplum coſinus Arcus $\frac{1}{2}$ A B, (per corol. prop. 4.) erit quoque ut Radius ad duplum coſinus arcus $\frac{1}{2}$ A B ita $\frac{1}{2}$ A B : $\frac{1}{2}$ A C : : $\frac{1}{2}$ A C : $\frac{1}{2}$ A B + $\frac{1}{2}$ AD : : $\frac{1}{2}$ AD : $\frac{1}{2}$ AC + $\frac{1}{2}$ AE : : $\frac{1}{2}$ AE : $\frac{1}{2}$ AD + $\frac{1}{2}$ A F &c. Sint jam arcus A B B C C D &c. ſinguli 2′. Erit $\frac{1}{2}$ A B ſinus unius minuti, $\frac{1}{2}$ A C ſinus 2′. $\frac{1}{2}$ A D ſinus 3′ $\frac{1}{2}$ A F ſinus 4′ &c. Unde datis ſinubus unius & duorum minutorum ſinus omnes reliqui ſic facillime habentur.



Dicatur coſinus arcus unius minuti, hoc eſt, ſinus arcus 89 gr. 59′, Q; & fient ſequentes Analogiæ, R : 2 Q : : Sin 2′ : S 1′ + S 3′. quare dabitur ſinus 3′. Item R : 2 Q : : S. 3′ : S. 2′ + S. 4. quare dabitur S 4′.

Item R : 2 Q : : S. 4′ : S. 3′ + S. 5′. quare habetur ſinus 5′.

R : 2 Q : : S. 5′ : S 4′ + S 6′ proinde dabitur S 6′. Atque ita deinceps ad ſingula quadrantis minuta dabuntur ſinus. Et quoniam Radius ſeu primus Analogiæ terminus eſt Unitas; operationes per multiplicationem contractam & ſubductionem facillime expediuntur.

Inventis ſinubus, uſque ad gradum ſexageſimum. Reliqui ſinus per ſolam additionem habentur (per cor. 2. pr. 6.)

Datis ſinubus, Tangentes & ſecantes ex Analogiis ſequentibus inveniri poſſunt. In fig. Definitionum) ob æquiangula Triangula C E D C B G C H I.

CE :

CE : ED : : CB : BG. hoc eſt, coS : S : : R : T.
GB : BC : : CH : HI. h. e. T : R : : R : coT.
CE : CD : : CB : CG. h. e. coS : R : : R : Secant.
DE : CD : : CH : CI. h. e. S : R : : R : co Secant.

SCHOLIUM.

Magnus ille Geometra, ſummuſque Philoſophus Dominus Newtonus *Primus ſeries in infinitum convergentes exhibuit, quibus ex datis arcubus, eorum ſinus computari poſſint. Nam ſi Arcus dicatur* A *& Radius ſit unitas invenit ejus ſinum fore.*

$$A-\frac{A^3}{1.2.3}+\frac{A^5}{1.2.3.4.5}-\frac{A^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\frac{A^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}$$

&c. Coſinum autem eſſe

$$1-\frac{A^2}{1.2}+\frac{A^4}{1.2.3.4}-\frac{A^6}{1.2.3.4.5.6}+\frac{A^8}{1.2.3.4.5.6.7.8}\ \&c.$$

Hæ ſeries initio quadrantis cum Arcus A *parvus eſt celerrime convergunt. Nam in ſerie pro ſinu, ſi* A *non ſuperet decem minuta, duo primi ejus termini ſcil.* $A-\frac{1}{6}A^3$ *dant ſinum ad* 15 *figuararum loca, ſi Arcus* A *non major ſit gradu, tres primi exhibent ſinum ad totidem loca, adeoque pro primis & ultimis Quadrantis ſinubus hæ ſeries ſunt admodum utiles. ſed quo major ſit arus* A, *eo pluribus opus eſt terminis ut inveniatur ſinus in numeris qui ſunt veri ad datum figurarum locum. Tandem autem lentiſſime convergunt ſeries cum Arcus fere æqualis eſt Radio. Cui rei ut remedium adferatur, ego alias excogitavi ſeries* Newtonianis *ſimiles, in quibus ſuppono arcum cujus ſinus quæritur eſſe ſummam vel differentiam duorum arcuum ſcil. eſſe* A + z *vel* A — z : *notoſque eſſe ſinum & coſinum arcus* A. *ſcil. ſit* a *ſinus arus* A *&* b *ejus coſinus. Sinus Arcus* A + z *per hanc ſeriem exprimetur*

$$1.\quad a+\frac{bz}{1}-\frac{az^2}{1.2}-\frac{bz^3}{1.2.3}+\frac{az^4}{1.2.3.4}+\frac{bz^5}{1.2.3.4.5}\ \&c.$$

Ejus

2. *Ejus Cosinus* $b - \frac{az}{1} - \frac{bz^2}{1.2} + \frac{az^3}{1.2.3} + \frac{bz^4}{1.2.3.4} - \frac{az^5}{1.2.3.4.5} - \frac{bz^6}{1.2.3.4.5.6}$ *&c.*

Similiter sinus Arcus $A - z$ *est*

3. $a - \frac{bz}{1} - \frac{az^2}{1.2} + \frac{bz^3}{1.2.3} + \frac{az^4}{1.2.3.4} - \frac{bz^5}{1.2.3.4.5} - \frac{az^6}{1.2.3.4.5.6}$ *&c.*

Et cosinus est

4. $b + \frac{az}{1} - \frac{bz^2}{1.2} - \frac{az^3}{1.2.3} + \frac{bz^4}{1.2.3.4} + \frac{az^5}{1.2.3.4.5}$ *&c.*

Arcus A *est medius Arithmeticus inter arcus* $A - z$ *&* $A + z$. *Differentiæ sinuum sunt*

5. $\frac{bz}{1} - \frac{az^2}{1.2} - \frac{bz^3}{1.2.3} + \frac{az^4}{1.2.3.4} + \frac{bz^5}{1.2.3.4.5} - \frac{az^6}{1.2.3.4.5.6}$ *&c.*

6. $\frac{bz}{1} + \frac{az^2}{1.2} - \frac{bz^3}{1.2.3} - \frac{az^4}{1.2.3.4} + \frac{bz^5}{1.2.3.4.5} + \frac{az^6}{1.2.3.4.5.6}$ *&c.*

Unde differentiarum differentia seu differentia secunda

7. *Prodit* $\frac{2az^2}{1.2} - \frac{2az^4}{1.2.3.4} + \frac{2az^6}{1.2.3.4.5.6}$ *&c.*

Seu $2a \times \frac{z^2}{1.2} - \frac{z^4}{1.2.3.4} + \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6}$ *&c.*

Quæ series æqualis est duplo sinus arcus medii ducto in sinum versum arcus z *& celerrime convergit. Adeo ut si* z *sit minutum primum, terminus seriei primus dat differentiam secundam ad* 15 *figurarum loca; secundus autem terminus ad* 25 *loca.*

Hinc datis sinubus duorum quorumvis arcuum intervallo minuti distantium, facili admodum operatione inveniri possint sinus reliquorum omnium arcuum qui sunt in eadem progressione.

In

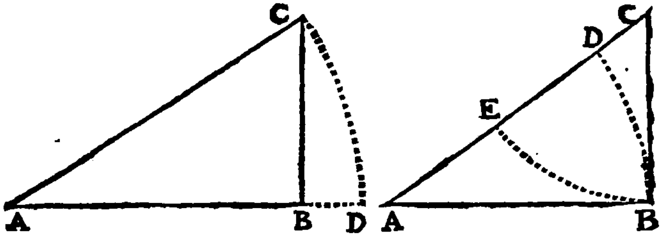
In ſerie prima & ſecunda ſi Arcus A *ſit* = 0, *erit* a = 0 *&* b *ejus coſinus ſit radius ſeu* 1. *& hinc deſtructis terminis ubi eſt* a *& pro* b *poſito* 1 *ſeries deveniunt* Newtonianæ. *In ſerie tertia & quarta. ſi* A *ſit* 90 *gr. fiet* b = 0 *&* a = 1 *unde quoque deſtructis terminis ubi eſt* b *& pro* a *poſito* 1 *rurſus prodibunt ſeries* Newtonianæ.

Omnes hæ ſeries ex Newtonianis *facile fluunt per prop.* 5. *hujus.*

PROP. XI.

In Triangulo Rectangulo, ſi Hypotenuſa ſit Radius, latera ſunt ſinus angulorum oppoſitorum; ſi vero crus alterum fiat Radius, crus reliquum eſt Tangens anguli oppoſiti, & Hypotenuſa eſt anguli ſecans.

Manifeſtum eſt CB eſſe ſinum arcus CD, ejuſque coſinum eſſe AB, ſed arcus CD eſt menſura anguli A, & complementum menſuræ anguli C. Præterea in ſecunda figura poſito AB radio, eſt BC, Tangens & AC ſecans ar-



cus BD, qui eſt menſura anguli A, & ſimiliter in eadem figura poſito BC radio, eſt BA Tangens & AC ſecans arcus BE vel anguli C. Q. E. D.

Eſt igitur, ut AC ſecundum datam quamvis menſuram æſtimata ad BC in eadem menſura æſtimatam, ita erit 10000000 numerus partium in quas dividi ſupponitur Radius, ad numerum qui exprimit in iiſdem partibus longitudinem quam habet ſinus anguli A, hoc eſt,

Erit

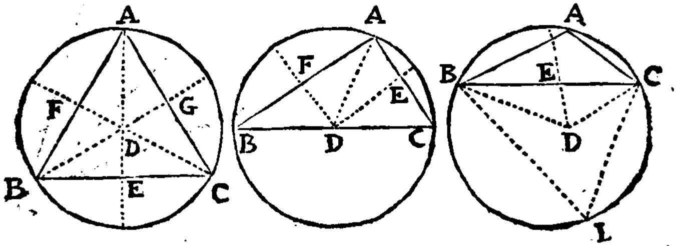
Erit A C : B C : : R : S, A
Simili ratione erit A C : B A : : R : S, C
Item A B : B C : : R : T, A
Et B C : B A : : R : T, C

In his itaque proportionalibus ſi dantur tres quælibet, per Regulam Trium invenietur quarta.

PROP. XII.

Trianguli plani latera ſunt ut ſinus angulorum oppoſitorum.

Trianguli circulo inſcripti latera perpendicularibus radiis biſecentur. Et erunt ſemilatera ſinus angulorum ad peripheriam. Eſt enim angulus B D C ad centrum du-



plex anguli B A C ad peripheriam (per 20. El. 3.) cujus itaque dimidium ſc. B D E æquale eſt B A C, atque ejus ſinus eſt B E. Eadem ratione erit B F ſinus anguli B C A. Et AG erit ſinus anguli A B C.

In Triangulo rectangulo eſt BD $=\frac{1}{2}$ BC $=$ Radio (per 31. El. 3.) ſed Radius eſt ſinus anguli recti unde $\frac{1}{2}$ BC eſt ſinus anguli A.

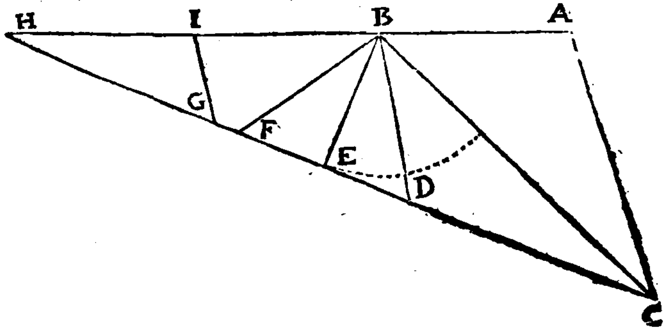
In Triangulo Amblygonio, ductis BL, CL, erit angulus L complementum anguli A ad duos rectos (per 22. El. 3.) ac proinde idem erit utriuſque anguli ſinus. Eſt autem B D E (cujus ſinus eſt B E) $=$ angulo L. quare erit & B E ſinus anguli B A C. Sunt itaque in omni triangulo ſemiſſes laterum ſinus angulorum oppoſitorum, manifeſtum autem eſt latera eſſe inter ſe ut ipſorum ſemiſſes. Q. E. D.

PROP.

PROP. XIII.

In Triangulo Plano summa Crurum, Differentia Crurum, Tangens semisummæ angulorum ad basim, & Tangens semidifferentiæ eorundem sunt proportionales.

Sit Triangulum ABC cujus crura AB BC & Basis AC. producatur AB ad H ut sit BH = BC. erit AH summa crurum; fiat BI = BA, & erit IH differentia cru-



rum. Item est HBC angulus = angulis A + ACB (per 32. El. 1.) cujus itaque dimidium EBC = semisummæ angulorum A & ACB, ejusque Tangens (posito Radio = EB) est EC. Ducatur BD ad AC parallela, fiatque HF = CD. Et ob HB = CB erit (per 4. El. 1.) angulus HBF = CBD = BCA (per 29. El. 1.) Est etiam angulus HBD = angulo A. unde erit FBD differentia angulorum A & ACB: Et EBD eorum semidifferentia, cujus tangens est ED. per I ducatur IG parallela ad AC vel BD & fiet (per 2. El. 6.) AB : BI :: CD : DG. At est AB = BI, unde erit & CD = DG. at est CD = HF, unde HF = DG & proinde HG = DF & $\frac{1}{2}$ HG = $\frac{1}{2}$ DF = DE. Et quia triangula AHC IHG sunt æquiangula, erit AH : IH :: HC : HG :: $\frac{1}{2}$ HC : $\frac{1}{2}$ HG :: EC : ED. hoc est, erit AH summa crurum ad IH differentiam crurum, ut EC Tangens semissis summæ

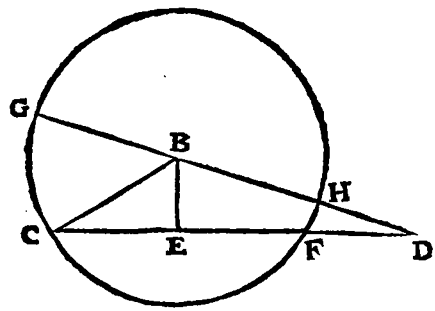
angulorum

angulorum ad Basim, ad E D Tangentem semissis differentiæ eorundem. Q. E. D.

PROP. XIV.

In Triangulo Plano, Basis, summa laterum, Differentia laterum, Differentia segmentorum basis sunt proportionales.

Trianguli BCD basis esto DC, centro B radio BC describatur circulus, & producatur DB in G, ex puncto B in basim cadat perpendicularis BE, erit DG = DB +



BC = summæ laterum, & DH = differentiæ laterum, & segmenta basis sunt DE CE quorum differentia est DF. Quoniam (per cor. prop. 36. El. 3.) rectangulum sub DC DF æquale est rectangulo sub DG DH, erit (per 16. El. 6.) DC : DG : : DH : DF.

PROBLEMA.

Datis duarum quarumvis quantitatum summa & differentia, ipsas quantitates invenire.

D E B
A|———|———|———|———|C

Si ad semisummam addatur semidifferentia, aggregatum erit æquale majori; si autem à semisummâ subducatur semidifferentia, residuum erit æquale minori. Sint enim AB BC duæ quantitates; & capiatur AD = BC. Fiet DB differentia. Quarum summa est AC, quæ bisecta in

B E dat

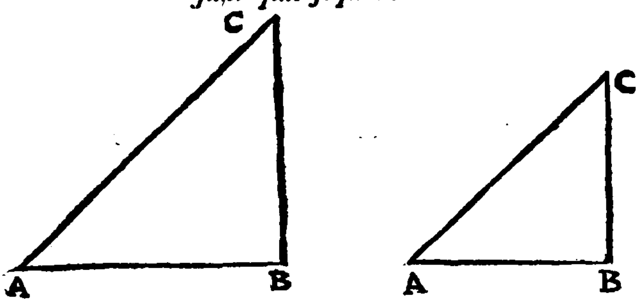
E dat A E vel E C ſemiſummam & D E vel E B ſemidifferentiam. Porro eſt A B = A E + E B = ſemiſummæ + ſemidifferentia, & B C = C E — E B = ſemiſummæ — ſemidifferentia.

IN quovis Triangulo plano datis duobus angulis, datur tertius qui eſt ſummæ duorum reliquorum complementum ad duos rectos.

In Triangulo autem rectangulo dato alterutro angulo acuto,datur reliquus,qui eſt dati complementum ad rectum.

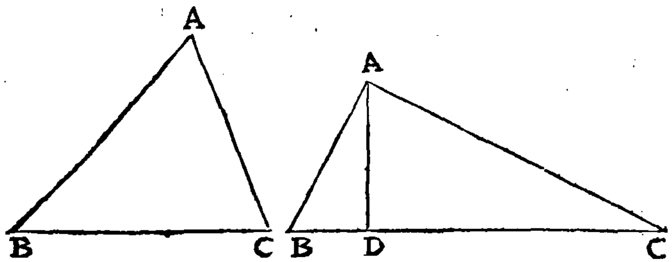
Datis autem duobus trianguli rectanguli lateribus, ut inveniatur reliquum non opus eſt canone ſed perficitur ope prop. primæ hujus.

Trianguli Rectanguli ſolutiones Trigonometricæ ſunt quæ ſequuntur.



	Datis.	Quær.	Fiat.
1	A B B C cruribus,	Anguli.	A B : B C : : R : T anguli A. Cujus complementum eſt Angulus C.
2	A B A C crure & Hypoten.	Anguli.	A C : A B : : R : S, C cujus complementum eſt angulus A.
3	A B & A crure & angulo.	BC crus alterum	R : T, A : : A B : B C.
4	A B & C crure & angulo.	AC Hypotenuſa.	S, C : R : : A B : A C.

In



In Triangulis obliquangulis.

	Datis.	Quær.	Fiat.
1	A. B. C & A B angulis & latere.	B C & A C latera.	S,C:S,A::AB:BC. Item S,C:S,B::AB : A C; datis duobus angulis datur tertius, unde casus cum dentur duo anguli & latus; reliqua quærantur, recidit in hunc casum.
2	A.B.C. omnibus angulis.	AB.AC. B C omnia latera.	S, C : S, A : : AB : BC. Et S, C : S, B : : A B : A C. unde datis angulis invenire licet proportiones laterum, at non ipsa latera, nisi ipsorum unum prius innotescat.
3	AB.BC,&C duobus lateribus & angulo uni opposito.	A & B anguli.	A B : B C : : S, C : S, A, qui proinde inveniatur. Sed quia idem est sinus anguli & ejus complementi ad duos rectos, prænoscenda est anguli A Species.
4	A B BC & B. lateribus duobus & angulo interjecto.	Anguli. A & C.	B C + A B : B C — A B : : T, $\frac{A+C}{2}$: T, $\frac{A-C}{2}$ unde datur differentia angulorum A & C quorum summa quoque est nota; & proinde per *Problema post prop.* 14. dabuntur ipsi anguli.

	Datis.	Quær.	Fiat.
5	A B. B C A C omnibus lateribus.	Anguli.	Demiſſo à vertice in Baſim perpendiculo. Quærantur ſegmenta baſis per prop. 14. Fiat ſcil. BC : AC + AB : : AC — AB : DC — DB, & ex hac analogia dabuntur BD. DC. & proinde per reſolutionem triangulorum rectangulorum ABD ADC dabuntur anguli.

TRIGO-

TRIGONOMETRIÆ Sphæricæ ELEMENTA.

DEFINITIONES.

1. SPhæræ Poli, ſunt duo puncta in ſuperficie Sphæricâ, quæ ſunt Axis extrema.

2. Polus circuli in Sphæra, eſt punctum in ſuperficie Sphæræ, à quo omnes rectæ lineæ ad circuli circumferentiam tendentes, ſunt inter ſe æquales.

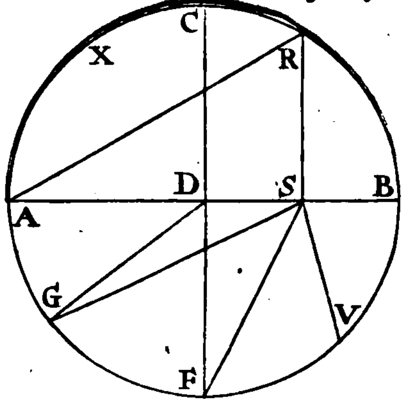
3. Circulus in ſphæra maximus eſt, cujus planum tranſit per ſphæræ centrum, & cujus centrum idem eſt cum centro Sphæræ.

4. Triangulum Sphæricum eſt figura comprehenſa ſub arcubus trium maximorum in Sphæra circulorum.

5. Angulus Sphæricus eſt is qui in ſuperficie ſphæricâ, continetur ſub duobus arcubus maximorum circulorum; qui æqualis eſt inclinationi planorum iſtorum circulorum.

PROP. I.

Circuli maximi ACB AFB se bifariam secant.



Cum enim circuli habent idem centrum, communis eorum sectio erit utriusque circuli diameter, quæ eos bifariam secabit.

Cor. Hinc in superficie sphæræ, duo maximorum circulorum Arcus semicirculis minores, spatium non comprehendunt, non enim possunt, nisi in duobus punctis semicirculo oppositis, sibi invicem occurrere.

PROP. II.

Si à polo C circuli cujusvis AFB, ducatur ad ejus centrum recta CD, ea ad planum istius circuli perpendicularis erit.

In circulo AFB ducantur diametri quævis EF GH; Et quoniam in triangulis CDF CDE, sunt CD DF æquales CD DE, & basis CF æqualis basi CE (per def.2.) erit (per 8. El. 1.) angulus CDF = angulo CDE, ac proinde uterque rectus erit; similiter demonstrabitur, angulos

angulos CDG CDH esse rectos; unde (per 4. El. 11.) erit CD perpendicularis ad planum circuli AFE. Q.E.D.

Cor. 1. Circulus maximus distat à polo suo invervallo Quadrantis; nam ob angulos CDG CDF rectos, erunt ipsorum mensuræ, sc. arcus CG CF quadrantes.

Cor. 2. Circuli maximi per polum alterius circuli transeuntes cum ipso faciunt angulos rectos; & vicissim, si cum altero circulo faciunt angulos rectos; transibunt per polum alterius istius circuli; nam per rectam DC eos transire necesse est.

PROP. III.

Si polo A describatur maximus circulus ECF, arcus CF interceptus inter AC AF, est mensura anguli CAF vel CDF.

Per *corol.* 1. præcedentis, sunt arcus AC AF quadrantes, ac proinde anguli ADC ADF sunt recti, quare (per defin. 6. El. 11.) angulus CDF (cujus mensura est arcus CF) æqualis est inclinationi planorum ACB AFB, æqualis quoque angulo Sphærico CAF vel CBF. Q.E.D.

Cor. 1. Si arcus AC AF sunt Quadrantes, erit A polus circuli per puncta C & F transeuntis, est enim AD ad planum FDC normalis, (per 4. El. 11.)

Cor. 2. Anguli ad verticem sunt æquales, uterque enim est æqualis inclinationi circulorum. Item anguli qui sunt deinceps sunt æquales duobus rectis.

PROP. IV.

Triangula erunt æqualia & congrua, si duo latera habeant duobus lateribus æqualia, & angulos æqualibus lateribus comprehensos etiam æquales.

PROP. V.

Item Triangula erunt æqualia & congrua, si latus cum angulis adjacentibus in uno triangulo sit æquale lateri cum angulis adjacentibus in altero triangulo.

PROP. VI.

Triangula æquilatera sunt etiam æquiangula.

PROP. VII.

In Triangulis Isoscelibus, anguli ad basim sunt æquales.

PROP. VIII.

Si anguli ad basim fuerint æquales, erit Triangulum Isosceles.

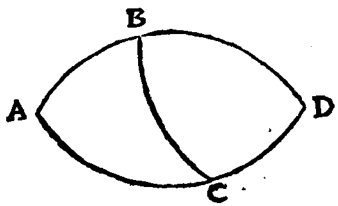
Eodem modo demonstrantur quinque propositiones præcedentes ut in triangulis planis.

PROP. IX.

Quælibet duo trianguli latera reliquo sunt majora.

Nam arcus circuli maximi, inter duo quælibet in superficie sphæræ puncta, est via brevissima.

PROP. X.



Quodlibet trianguli latus minus est semicirculo.

Producantur trianguli ABC latera AC AB, donec conveniunt in D, erit arcus ACD semicirculus, qui major est quam AC.

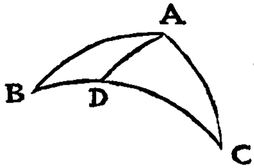
PROP. XI.

Trianguli latera sunt circulo minora.

Est enim DB + DC major quam BC, (per prop. 9.) & utrinque addendo BA + AC, erit DBA + DCA, hoc est, circulus major quam AB + BC + AC, quæ sunt tria latera trianguli ABC.

PROP. XII.

In triangulo ABC, major angulus A majori lateri ſubtenditur.



Fiat angulus B A D = angulo B, & erit A D = B D (per 8. hujus) unde B D C = D A + D C, & hi arcus majores ſunt quam A C, eſt itaque latus B C, quod ſubtendit angulum B A C, majus quam A C, quod ſubtendit angulum B.

PROP. XIII.

In quolibet triangulo ABC, ſi ſumma Crurum AB BC ſit major æqualis vel minor ſemicirculo; internus angulus ab baſim AC erit major æqualis aut minor externo & oppoſito BCD, ideoque ſumma angulorum A & ACB major erit, aut æqualis, aut minor duobus rectis.

Vide Fig. Prop. 10.

Sit primò A B + BC = ſemicirculo = A D, erit B C = B D; & anguli B C D & D æquales, (per 7 hujus) unde & angulus B C D erit = angulo A.

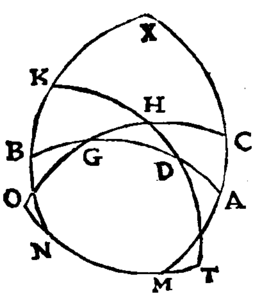
Sit ſecundò A B + B C majores quam A B D, erit B C major quam B D; unde & angulus D, hoc eſt angulus A) major erit angulo B C D. (per 12. hujus) Similiter oſtendetur, ſi A B + B C ſint ſimul minores ſemicirculo, fore angulum A minorem angulo B C D. & quoniam anguli B C D & B C A ſunt = duobus rectis; ſi angulus A ſit major B C D, erit A & B C A majores duobus rectis. Si A ſit = B C D erit A & B C A æquales duobus rectis. Si vero A ſit minor quam B C D, erunt A & B C A minores duobus rectis. Q. E. D.

PROP.

PROP. XIV.

In quolibet triangulo GHD, laterum poli, ductis circulis maximis, constituunt aliud triangulum XMN, quod supplementum est trianguli GHD; nempe latera NX XM & NM erunt supplementa ad semicirculos arcuum qui sunt mensuræ angulorum D, G, H. Quin etiam mensuræ angulorum M, X, N, erunt supplementa ad semicirculos, laterum GH GD & HD.

Polis G, H, D, describantur maximi circuli XCAM TMNO XKBN. Et quia G est polus circuli XCAM, erit GM = Quadranti, (per cor. 1. prop. 2.) & ob H polum circuli TMO, erit HM quoque Quadrans; Quare (per corol. 1. prop. 3.) erit M polus circuli GH. Similiter quia D est polus circuli XBN, & H polus circuli TMN, erunt arcus DN HN Quadrantes; ac proinde (per cor. 1. prop. 3.) N erit polus circuli HD. Et eadem ratione, ob GX DX quadrantes, erit X polus circuli GD. Hisce præmissis.



Quoniam est NK = Quadranti, (cor. 1. prop. 2.) & XB = Quadranti, erunt NK + XB hoc est NX + KB = duobus Quadrantibus seu semicirculo; adeoque est NX supplementum arcus KB seu mensuræ anguli HDG ad semicirculum. Similiter quia est MC = Quadranti, & XA = Quadranti; erunt MC + XA, hoc est, XM + AC = duobus quadrantibus seu semicirculo, & proinde XM est supplementum arcûs AC qui est mensura anguli HGD. Quinetiam, ob MO, NT Quadrantes, erunt MO + NT = OT + NM = semicirculo. itaque est NM supplementum ad semicirculum arcûs OT seu mensuræ anguli GHD. Q. E. D.

Præterea

Præterea quia DK HT sunt quadrantes, erunt DK + HT seu KT + HD æquales duobus quadrantibus, seu semicirculo. Est ergo KT, seu mensura anguli XNM, supplementum lateris HD ad semicirculum. Nec dissimili methodo ostendetur OC mensuram anguli XMN esse supplementum lateris GH. Et BA mensuram anguli X esse supplementum lateris GD. Q.E.D.

PROP. XV.

Triangula æquiangula sunt etiam æquilatera.

Nam eorum supplementa sunt æquilatera, (per 14. hujus) ergo & æquiangula, quare & ipsa sunt æquilatera, per prop. 14. partem secundam.

PROP. XVI.

Trianguli tres anguli sunt majores duobus rectis, & minores sex rectis.

Vide fig. Prop. 14.

Nam tres mensuræ angulorum G, H, D, una cum tribus lateribus trianguli XNM faciunt tres semicirculos, (per 14. hujus) sed tria latera trianguli XNM minora sunt duobus semicirculis, (per 11. hujus) quare tres mensuræ angulorum GHD majores sunt semicirculo, & proinde anguli GHD majores erunt duobus rectis.

Propositionis secunda pars patet, nam in quolibet triangulo, externi & interni anguli simul tantum faciunt sex rectos, unde interni sunt minores quam sex recti.

PROP. XVII.

Si à puncto R quod circuli AFBE polus non est, in circumferentiam cadant arcus maximorum circulorum RA RB RG RV, maximus est RA, qui per ejus polum C incedit; reliquus vero minimus, cæteri prout à maximo recedunt minores sunt, faciuntque

ciuntque cum priore circulo AFB angulum obtusum ex parte maximi arcus.

Vide Fig. Prop. 1.

Quia C est polus circuli A F B, erunt C D & huic parallela R S perpendiculares ad planum AFB; Ductis autem S A S G S V; erit (per 7. El. 3.) SA major quam SG, & SG major quam S V. unde in Triangulis rectangulis planis R S A R S G R S V, erunt R S q + S A q seu RA q majora quam R S q + S G q seu R G q, & proinde R A major erit R G; & arcus R A major arcu R G. Similiter erunt R S q + S G q seu R G q majora quam RS q + S V q seu RV q; & proinde RG major RV, & arcus R G major arcu RV.

2*do*. Est angulus R G A major angulo C G A qui rectus est, (per corol. prop. 2.) Et angulus RVA major angulo C V A qui quoque rectus est, quare anguli R G A R V A sunt obtusi.

PROP. XVIII.

In triangulo rectangulo ad A, crura angulum rectum continentia sunt ejusdem affectionis cum angulis oppositis, hoc est, si crura sint majora aut minora Quadrantibus, anguli illis oppositi erunt majores aut minores rectis angulis. Vide Fig. prop. primæ.

Nam si A C sit Quadrans, C erit polus circuli A F B, & anguli A G C vel A V C erunt recti. Si crus A R sit majus quadrante, erit angulus AGR major recto (per 17. hujus.) Si crus sit minus quadrante ut A X, angulus A G X erit minor recto.

PROP. XIX.

Si duo crura trianguli rectanguli (& consequenter anguli) sint ejusdem affectionis, id est, utrumque vel majus

majus vel minus Quadrante, hypotenusa erit minor quadrante.

Vide Fig. Prop. 1.

In triangulo ARV vel BRV, sit F polus cruris AR, & erit RF quadrans, qui major est quam RV (per 17. hujus.)

PROP. XX.

Si sint diversæ affectionis, hypotenusa erit major Quadrante.

Nam in triangulo ARG, est RG major quam RF qui est quadrans.

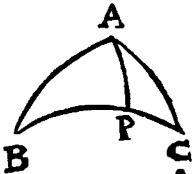
PROP. XXI.

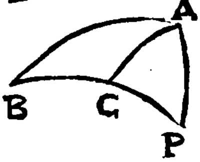
Si Hypotenusa sit major Quadrante, crura anguli recti, ideoque & anguli oppositi sunt diversæ affectionis; si minor, ejusdem.

Hæc propositio est priorum conversa; & facile ex iisdem sequitur.

PROP. XXII.

In quovis triangulo ABC, si anguli B & C ad basim sunt ejusdem affectionis, perpendicularis AP cadet intra triangulum; si sint diversæ affectionis, perpendicularis cadet extra triangulum.





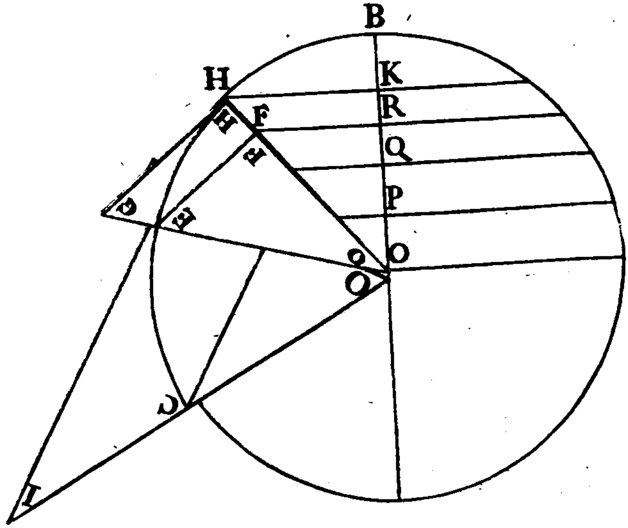
In primo casu si perpendicularis non cadat intra, cadat extra triangulum, (ut in fig. 2.) Tum in triangulo ABP, est AP ejusdem affectionis cum angulo B; & similiter in triangulo ACP, est AP ejusdem affectionis cum angulo ACP; ergo cum ABC & ACP sunt ejusdem affectionis,

nis, erunt anguli ABC & ACB diversæ affectionis; quod est contra hypothesim.

In 2do Casu si perpendicularis non cadat extra, cadet intra, (in fig. 1.) Et in triangulo ABP, est angulus B ejusdem affectionis cum crure AP, & similiter in triangulo ACP est angulus C ejusdem affectionis cum AP, unde anguli B & C sunt ejusdem affectionis, quod est contra hypothesim.

PROP. XXIII.

In Triangulis BAC BHE rectangulis ad A & H, si idem fuerit angulus acutus B ad basim BA vel BH, Sinus hypotenusarum erunt sinubus arcuum perpendicularium proportionales.



Nam rectæ CD EF perpendiculariter insistentes eidem plano sunt parallelæ. Item FR DP radio OB perpendiculares, sunt quoque parallelæ; unde & plana triangulorum EFR CDP sunt parallela (per 15. El. 11.) Quare & CP ER horum planorum communes sectiones

sectiones cum plano per BE CO transeunte parallelæ erunt (per 16. El. 11.) Triangula igitur CDP EFR æquiangula erunt. Quare CP sinus Hypotenusæ BC est ad CD sinum arcus perpendicularis CA; ut ER sinus hypotenusæ BE est ad EF sinum arcus perpendicularis EH. Q.E.D.

PROP. XXIV.

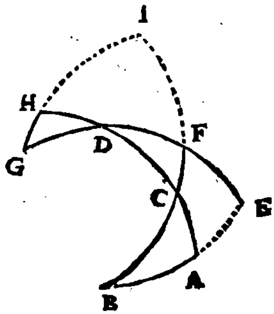
Iisdem positis, AQ HK sinus basium, tangentibus IA GH arcuum perpendicularium, sunt proportionales.

Nam similiter ut in præcedente propositione, ostendetur triangula QAI KHG esse æquiangula; unde QA : AI : : KH : HG.

PROP. XXV.

In Triangulo ABC rectangulo ad A. Ut cosinus anguli B existentis ad Basim BA ad sinum anguli verticalis ACB, ita cosinus arcûs perpendicularis ad Radium.

Præparatio. Producantur latera BA BC CA ita ut BE BF CI CH sint Quadrantes, polis B & C ducantur circuli maximi EFDG IHG. & erunt anguli ad E, F, I & H recti. Quare D est polus BAE (per cor. 2. pr. 2 hujus) & G polus IFCB, erit etiam AE = complemento arcûs BA. Item FE mensura anguli B = GD, & DF eorum complementum. erit quoque BC = FI = mensuræ anguli G, & CF eorum complementum. Item est CA = HD, & DC utriusque complementum. Hisce præmissis, in triangulis HIC DCF rectangulis ad I & F & habentibus eundem angulum



gulum C acutum, ob B A minorem quadrante, erit S, D F : S, H I : : S, D C : S, H C id est, cosinus anguli B est ad sinum anguli verticalis B C A ut cosinus C A ad Radium. Q. E. D.

PROP. XXVI.

Cosinus basis : cosin. Hypotenusæ : : R : coS perpendicularis.

Nam in Triangulis A E D C F D rectangulis ad E & F; habentibus eundem angulum D acutum: ob A E quadrante minorem, est S, E A : S, C F : : S, D A : S, D C. Q. E. D.

PROP. XXVII.

S, Baseos : R : : T, perpendicularis : T, anguli ad basim.

Nam in Triangulis B A C B E F rectangulis ad A & E & habentibus eundem angulum B acutum, ob A C minorem quadrante, S, B A : S, B E : : T, AC : T, E F. Q.E.D.

PROP. XXVIII.

CoS, anguli verticalis : R : : T, perpendicularis : T, Hypotenusæ.

In Triangulis G I F G H D rectangulis ad I & H, & habentibus eundem angulum G acutum, ob H D minorem H C seu quadrante, est S, G H : S, G I : : T, H D : T, I F.

PROP. XXIX.

S, Hypotenusæ : R : : S, perpendicularis : S, anguli ad basim.

In Triangulis præcedentibus, est S, I F : S, G F : : S. H D : S, G D.

PROP.

PROP. XXX.

Radius : coS. Hypotenusæ : : T, anguli verticalis : coT, anguli ad basim.

In Triangulis H I C D F C rectangulis ad I & F, & habentibus eundem angulum C acutum, ob D F minorem quadrante, Est S, C I : S, C F : : T, H I : T, D F. hoc est, R: coS, B C : : Tang, C : coT, anguli B.

Propositiones sex præcedentes ad omnes casus triangulorum rectangulorum resolvendos sufficiunt, sequuntur illi numero sedecim cum suis analogiis ex hisce deductis.

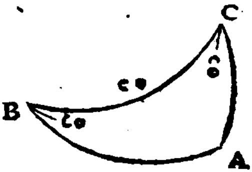
	Datis præter ang. rectum.	Quær.		
1	A C & C	B	R : coS, C A : : S, C : coS, B ejusdem speciei cum C A.	per 25 inverse
2	A C & B	C	coS, C A : R : : coS, B : S, C ambigui.	per 25
3	B & C	A C	S, C : coS, B : : R : coS, C A ejusdem speciei cum ang. B.	per 25 & 18
4	B A C A	B C	R : coS, B A : : coS, A C : coS B C. Si B A A C fuerint ejusdem affectionis nec Quadrantes, erit B C minor quadrante; si diversæ, erit B C quadrante major.	per 26 & 19 20
5	B A B C	A C	coS, B A : R : : coS, B C : coS, C A. Si B C sit minor quadrante, B A, & C A erunt ejusdem affectionis, si major, diversæ, sed datur B A ejusque Species, ergo &c.	per 26 & 21
6	B A C A	B	S, B A : R : : T, C A : T, B ejusdem affectionis cum latere opposito C A.	per 27 & 18
7	B A B	A C	R : S, B A : : T, B : T, A C, ejusdem speciei cum B.	per 27 & 18

	Datis præter ang. rectum.	Quær.		
8	A C B	B A	T, B : R : : T, C A : S, B A ambigui.	per 27
9	B C C	A C	R : coS, C : : T, B C : T, C A. Si B C ſit minor quadrante, anguli C & B ſunt ejuſdem affectionis, ſi major diverſæ, quare data ſpecie ang. B dabitur AC.	per 28 & 21
10	A C C	B C	coS, C : R : : T, AC : T, BC. prout ang. C & A C fuerint ejuſdem aut diverſæ affectionis, B C erit minor aut major quadrante.	per 28, 20, 21
11	B C A C	C	T, B C : R : : T, C A : coS, C. Si B C fuerit minor Quadrante, C A & B A & proinde anguli C & B erunt ejuſdem affectionis, ſi major diverſæ, ſed datur ſpecies C A, ergo dabitur ſpecies anguli C.	per 28 21
12	B C B	A C	R : S, BC : : S, B : S, AC ejuſdem ſpeciei cum B.	per 29 & 18
13	A C B	B C	S, B : S, AC : : R : S, BC ambigui.	per 29
14	B C A C	B	S, BC : R : : S, AC : S, B ejuſdem ſpeciei cum C A.	per 29
15	B C	B C	T, C : R : coT, B : coS, BC. prout anguli B & C ejuſdem aut diverſæ affectionis fuerint, erint BC minor aut major quadrante.	per 30 19 20
16	B C C	B	R : coS, BC : : T, C : coT, B. prout B C fuerit minor aut major quadrante; anguli C & B erunt ejuſdem aut diverſæ affectionis. Sed datur ſpecies anguli C. quare dabitur ſpecies auguli B.	per 30 21

De

De Resolutione Triangulorum Rectangulorum Sphæricorum, per quinque partes circulares.

PErpensis Analogiis, quibus Triangula Sphærica Rectangula solvuntur, Dominus *Neperus*, nobilis ille Logarithmorum Inventor, duas excogitavit Regulas memoriâ facile retinendas, quarum ope omnes sedecim casus resolvi possunt; Nam cum in hisce triangulis, præter angulum rectum, sint tria latera & duo anguli, latera angulum rectum comprehendentia, hypotenusa autem & reliquorum angulorum complementa, vocavit *Neperus partes circulares*. Et cum datæ sunt duæ quælibet partes, & quæritur Tertia, Harum trium una, quæ dicitur *pars media*, vel adjacet duobus reliquis partibus, quæ itaque vocantur *extremæ adjacentes*; vel neutri adjacet, in quo casu, dicuntur *extremæ oppositæ*; Sic si complementum angli B ponatur pars media, Crus A B & complementum Hypotenusæ B C sunt partes extremæ adjacentes; At complementum anguli C, & latus A C sunt extremæ oppositæ. Item posito complemento hypotenusæ B C parte media, complementa angulorum B & C sunt extremæ adjacentes; & A B A C crura sunt extremæ oppositæ. Sic etiam posito crure A B parte media, complementum anguli B, & A C sunt extremæ adjacentes; Nam angulus rectus A non intercipit adjacentiam, quia non est pars circularis. At eidem parti mediæ complementum anguli C & complementum hypotenusæ B C sunt extremæ oppositæ. Hisce præmissis.



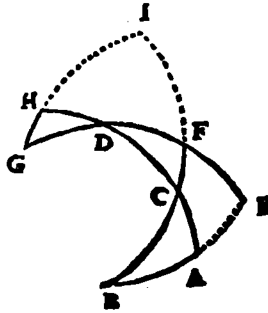
REGULA PRIMA.

In Triangulo Rectangulo Sphærico, Rectangulum sub Radio & sinu partis mediæ, æquale est rectangulo sub Tangentibus partium Adjacentium.

REGULA SECUNDA.

Rectangulum sub radio & sinu partis mediæ, æquale est rectangulo sub cosinubus partium oppositarum.

Utriusque Regulæ tres sunt casus. Nam pars media vel potest esse complementum anguli B vel C, vel complementum hypotenusæ BC; vel denique unum ex cruribus scil. AB vel AC.



Casus 1. Sit complementum anguli C pars media. Et erunt AC & complementum hypotenusæ BC extremæ adjacentes. Per pr. 28. Est ut cosinus anguli verticalis C ad Radium, Ita Tangens CA ad Tangentem Hypotenusæ BC. permutando erit coS, C : T, CA :: R : T, BC. sed ut notum est, R : T, BC :: coT, BC : R. quare coS, C : T, AC :: coT, BC : R; Unde R x coS, C = T, AC x coT, BC.

Eidem complemento anguli C parti mediæ, extremæ oppositæ sunt complementum anguli B & AB, & (per prop. 25.) coSinus anguli C est ad sinum anguli CDF ut coSinus DF ad Radium, est vero Sinus CDF = S, AE = coS, BA, & coS, DF = S, EF = S, ang. B. unde erit coS, C: coS, BA :: S, B: R. & R x coS, C = coS. BA x S, B hoc est, Radius ductus in sinum partis mediæ, æquatur rectangulo sub cosinubus extremarum oppositarum.

Casus 2. Sit complementum hypotenusæ BC pars media, & complementa angulorum B & C erunt extremæ adjacentes. In triangulo DCF (per prop. 27.) Est S, CF: R :: T, DF : T, C. unde permutando S, CF : T, DF :: (R : T, C ::) coT, C : R. est autem S, CF = coS, BC & T, DF = coT, B. quare est R x coS, BC = coT, C x coT, B. hoc est, Radius ductus in sinum partis mediæ æquatur

producto

producto ex Tangentibus partium adjacentium extremarum.

Eidem parti mediæ, scil. complemento B C, adsunt extremæ oppositæ A B A C, & (per prop. 26.) est coS, B A : coS, B C : : R : coS, A C. quare erit R x coS, B C = coS, B A x coS, A C.

Cas. 3. Sit denique A B pars media, & erunt complementum anguli B & A C extremæ adjacentes, (& per pr. 27.) S, A B : R : : T, C A : T, B. unde erit S, A B : T, C A : : (R : T,B : :) coT, B : R. adeoque erit R x S, A B = T,C A x coT, B.

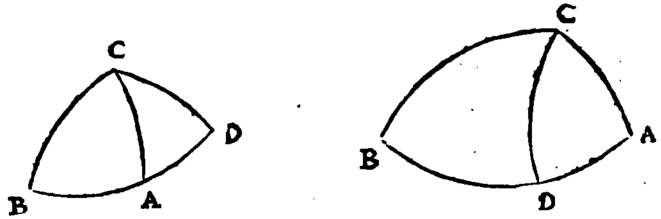
Præterea parti mediæ A B, complementum B C, & complementum anguli C sunt extremæ oppositæ; & in triangulo G H D (per prop. 25.) Est coS, D : S, D G H : : coS, G H : R. est vero coS, D = coS, A E = S, A B, & S. G = S, I F = S, B C. Item est coS, G H = S, H I = S, C. quare erit S, A B : S, B C : S, C : R. & hinc R x S, A B = S, B C x S, C.

Itaque in omni casu, rectangulum sub radio & sinu partis mediæ æquale erit tam rectangulo sub cosinubus extremarum oppositarum, quam rectangulo sub tangentibus extremarum adjacentium. Et proinde si æquationes illæ resolvantur in Analogias (per 16. Elem. 6.) ope regulæ Proportionis, partes ignotæ innotescent. Et si pars quæsita sit media, primus Analogiæ terminus erit Radius, secundum & tertium occupant locum tangentes vel cosinus partium extremarum. Si vero quæratur extremarum una, Analogia incipi debet cum altera, atque Radius sinusque partis mediæ, in mediis ponantur locis, ut quartum teneat pars quæsita.

IN Triangulis Sphæricis obliquangulis B C D, demisso arcu perpendiculari A C, ab angulo C in Basim B D, (productam si opus fuerit,) ut duo fiant Triangula B A C D A C rectangula; eorum ope resolvi possunt plerique casus Triangulorum obliquangulorum.

PROP. XXXI.

Cosinus angulorum B & D ad basim B D, sinubus angulorum verticalium B C A D C A sunt proportionales.



Nam coS, ang. B : S, B C A : : (coS, C A : R : :) coS, D : S, D C A (per 25. hujus.)

PROP. XXXII.

Cosinus laterum B C D C sunt proportionales cosinubus basium B A D A.

Est enim coS, B C : coS, B A : : (coS, C A : R : :) coS, D C : coS, D A. (per 26. hujus.)

PROP. XXXIII.

Sinus basium B A D A, sunt in reciproca proportione tangentium angulorum B & D ad Basim B D.

Quia per 27. hujus est, S, B A : R : : T, A C : T, anguli B. Item per eandem, inverse R : S, D A : : T, ang. D : T, A C. erit ex æquo in perturbata ratione (per 23. El. 5.) S, B A : S, D A : : T, ang. D : T, ang. B.

PROP. XXXIV.

Tangentes laterum B C D C sunt in reciproca proportione cosinuum angulorum verticalium B C A, D C A.

Quia

Quia per 28. hujus permutando, Est

T, BC : R :: T, CA : coS, BCA.

& per eandem R : coS, DCA :: T, DC : T, CA

quare ex æquo in perturbata ratione est.

T, BC : coS, DCA :: T, DC coS, BCA.

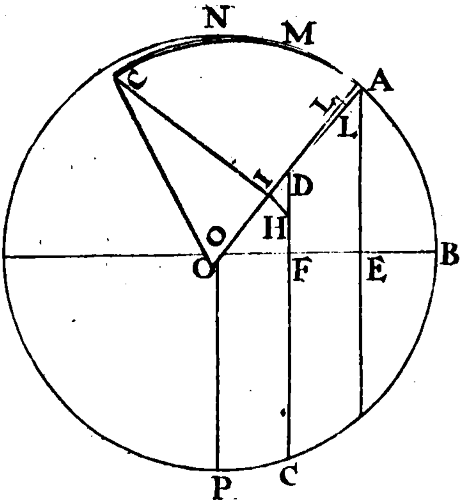
PROP. XXXV.

Sinus laterum BC DC sinubus angulorum oppositorum B & D sunt proportionales.

Quia per 29. hujus S, BC : R :: S, CA : S, ang. B. & per eandem inverse R : S, DC :: S, ang. D : S, CA erit ex æquo in perturbata ratione S, BC : S, DC :: S, D : S, B.

PROP. XXXVI.

In Triangulo quovis Sphærico ABC, CF × AE vel FM × AE, rectangulum sub sinubus crurum BC BA est ad radii quadratum, ut IL seu IA — LA differentia sinuum versorum Basis AC, & differentiæ crurum AM, ad GN sinum versum angli B.



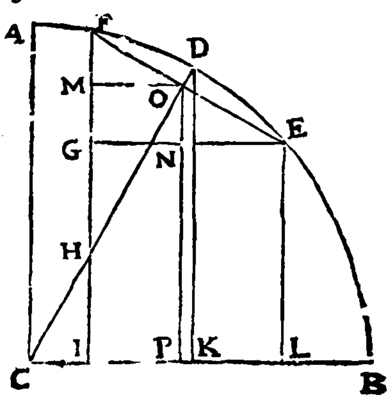
Polo B describatur circulus maximus PN; sintque BP

 BN

BN quadrantes; & PN eſt menſura anguli B; eodem polo B per C deſcribatur circulus minor CFM; horum circulorum plana recta erunt plano BON, (per 2. h.) & PG CH perpendiculares in idem planum, cadent in communes ſectiones ON FM puta in G & H. ducatur HI perpendicularis ad AO, & planum per CH HI perpendiculare erit plano AOB, unde AI perpendicularis ad HI, erit perpendicularis ad rectam CI, (per def. 4. El. 11.) eſt itaque AI ſinus verſus arcus AC, & AL ſinus verſus arcus AM = BM — BA = BC — BA. Triangula Iſoſcelia CFM PON ſunt æquiangula ob MF NO item CF PO parallelas (per 16. El. 11.) quare demiſſis perpendiculis CH PG in latera FM ON, ſimiliter diviſa erunt Triangula; & erit FM : ON :: MH : GN. Itemque ob triangula AOE DIH DLM æquiangula erit AE : AO :: IL : MH at oſtenſum eſt, eſſe FM : ON :: MH : GN quare erit AE × FM ad AO × ON ut IL × MH, ad MH × GN ſeu ut IL ad GN. hoc eſt rectangulum ſub ſinubus crurum eſt ad quadratum Radii ut differentia ſinuum verſorum baſis & differentiæ crurum BC BA ad ſinum verſum anguli B. Q. E. D.

PROP. XXXVII.

Differentia Sinuum verſorum duorum arcuum ducta in dimidium radii, æqualis eſt rectangulo ſub ſinu ſemiſummæ & ſinu ſemidifferentiæ eorundem arcuum.



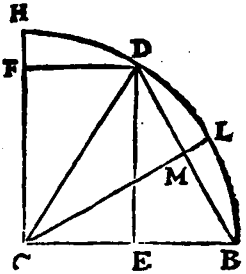
Sint duo arcus BE BF, quorum differentia EF ſit biſecta in D, & erit BD ſemiſumma arcuum, & FD ſemidifferentia.

Eſt

Est $GE = IL$ differentiæ sinuum versorum arcuum BE BF; Item est FO sinus semidifferentiæ arcuum. Ob æquiangula triangula CDK FEG; erit $DK : GE :: (CD : FE ::) \frac{1}{2} CD : \frac{1}{2} FE$. Unde est $DK \times \frac{1}{2} FE$ seu $DK \times FO = GE \times \frac{1}{2} CD = IL \times \frac{1}{2} CD$. Q. E. D.

PROP. XXXVIII.

Sinus versus cujusvis arcus, ductus in dimidium Radii, æqualis est quadrato sinus dimidii ejusdem arcus.



Triangula CBM DEB sunt æquiangula ob angulos ad M & E rectos & angulum ad B communem. Quare est $EB : BD :: BM : BC$ erit itaque $EB \times BC = BM \times BD$ & $EB \times \frac{1}{2} BC = BM \times \frac{1}{2} BD = BMq$. Q. E. D.

PROP. XXXIX.

In quolibet Triangulo ABC, cujus crura angulum B continentia sint BC AB, & basis AC eundem angulum subtendat; si capiatur AM arcus = differentiæ crurum $= BC - AB$. erit Rectangulum sub sinubus crurum BC BA ad quadratum Radii ut Rectangulum sub sinu arcus $\frac{AC + AM}{2}$ & sinu arcus $\frac{AC - AM}{2}$ ad Quadratum sinus dimidii anguli B.

Vide Fig. Prop. 36. hujus.

Quoniam est rectangulum sub sinubus crurum AB BC ad quadratum radii, ut IL ad sinum versum anguli B vel ut $\frac{1}{2} R \times IL$ ad $\frac{1}{2} R$ ductum in sinum versum anguli B (per prop. 36. hujus) Est autem $\frac{1}{2} R \times IL =$ rectangulo

sub

ſub ſinubus arcuum $\frac{AC+AM}{2}$ & $\frac{AC-AM}{2}$ (per pr. 37. hujus.) Item eſt $\frac{1}{2}$ R ductus in ſinum verſum anguli B æqualis Quadrato ſinus dimidii anguli B. Quare erit Rectangulum ſub ſinubus crurum, ad Radii quadratum ut Rectangulum ſub ſinubus arcuum $\frac{AC+AM}{2}$ & $\frac{AC-AM}{2}$ ad Quadratum ſinus dimidii anguli B. Q. E. D.

Sequuntur duodecim Caſus Triangulorum Sphæricorum obliquangulorum.

	Datis.	Quær.	Fiat. *Vide Fig. Prop.* 31.
1	Ang. B, D. & BC.	Ang. C.	R : coS, BC : : T, B : coT, BCA (per 30. hujus.) Item coS, B : S, BCA : : coS, D : S, DCA (per 31. hujus.) Horum angulorum BCA DCA ſumma, ſi perpendicularis cadat intra triangulum, vel differentia, ſi extra cadat; erit = BCD. Num perpendicularis cadat intra vel extra, cognoſcitur ex affectione angulorum B & D (per 22. hujus) quod ſemel monuiſſe ſufficiat.
2	Ang. B, C, & latere BC.	Ang. D.	R : coS, BC : : T, B : coT, BCA (per 30. hujus) & S, BCA : S, DCA : : coS, B : coS, D (per 31, hujus.) Si BCA ſit minor BCD, angulus D erit ejuſdem affectionis cum angulo B. Sin BCA ſit major BCD, anguli B & D erunt affectionis diverſæ per converſam pr. 22.
3	BC CD lateribus & ang. B.	BD latus.	R : coS, B : : T, BC : T, BA. (per 28. hujus) & coS, BC : coS, BA : : coS, DC : coS, DA (per 32. hujus) horum BA DA ſumma vel differentia, prout perpendicularis cadit intra, vel extra Triangulum, eſt æqualis BD; quod cognoſci nequit niſi cognita ſit ſpecies alterius anguli D.

Datis

	Datis.	Quær.	Fiat.
4	BC DB lateribus & ang. B.	CD latus.	R : coS, B : : T, BC : T, BA (per 28. hujus.) Et coS, BA : coS, BC : : coS, DA : coS, DC. (per 32. h.) Prout DA similis est aut dissimilis CA vel ang. BDC, erit DC minor aut major Quadrante (per 19 & 20 hujus.)
5	B, D, ang. & BC latere.	BD latus.	R : coS, B : : T, BC : T, BA (per 28. hujus.) Et T, D : T, B : : S, BA : S, DA (per 33. hujus.) quorum BA DA summa vel differentia = BD.
6	BC BD lateribus & ang. B.	Ang. D.	R : coS, B : : T, BC : T, BA. (per 28. hujus.) Et S, DA : S, BA : : T, B : T, D (per 33. hujus.) Prout BD minor est aut major quam BA, angulus D similis aut dissimilis erit angulo B. (per 22. hujus.)
7	BC DC lateribus & ang. B.	Ang. C.	coS, BC : R : : coT, B : T, BCA (per 30. h.) Et T, DC : T, BC : : coS, BCA : coS, DCA (per 34. hujus.) Angulorum BCA DCA summa aut differentia, prout perpendicularis cadit intra vel extra triangulum, est æqualis angulo BCD.
8	B, C, ang. & BC latere.	DC latus.	coS, BC : R : : coT, B : T, BCA. (per 30. hujus.) Item coS, DCA : coS, BCA : T, BC : T, DC (per 34. h.) Si angulus DCA similis sit angulo B (hoc est, si AD sit similis CA) erit DC minor quadrante. Si anguli DCA & B sint dissimiles, erit DC quadrante major, quod sequitur (ex pr. 18 19 & 20 h.)
9	BC DC lat. & ang. B.	D. ang.	S, CD : S, B : : S, BC : S, D qui ambiguus est. Analogia sequitur (ex prop. 35. hujus.)
10	B D ang. & BC lat.	DC	S, D : S, BC : : S, B : S, DC quod latus ambiguum est.

Datis.

	Datis.	Quær.	Fiat.
11	AB BC CA omnibus lateribus *vide fig. pr.* 36.	Ang. B.	Rectangulum ſub ſinubus crurum A B BC:quadratum Radii : : rectangulum ſub ſinubus arcuum $\frac{AC+AM}{2}$ $\frac{AC-AM}{2}$: Quadrato ſinus ½ ang. B. per prop. 39.
12	G H D omnibus. ang.	G D latus.	*Vide fig. prop.* 14. In Triangulo XNM, Eſt MN complementum anguli GHD ad ſemicirculum. XM complementum anguli G & XN complementum anguli D. & angulus X complementum eſt lateris G D ad ſemicirculum. Quare mutatis angulis in latera, & lateribus in angulos; eadem eſt operatio quæ eſt in caſu 11 hujus, cum arcus & eorum complementa ad ſemicirculos habeant eoſdem ſinus.

DE

DE
Natura & Arithmetica
LOGARITHMORUM
PRÆFATIO.

INgens olim compendium accepit Mathesis, primo characterum Indicorum, deinde Fractionum decimalium introductione; non minus tamen adjumenti ex Logarithmis, quam ex utroque invento, ei accessit: quorum quidem usum, per omnes disciplinas mathematicas latissime patentem, quis iis studiis vel leviter imbutus ignorat? Horum ope numeri fere immensi & aliâs plane intractabiles sine ullo tædio in ordinem coguntur: præsentissimum horum auxilium ubique conspicitur, sive cursum navis dirigat Nauta, sive curvarum altiorum indolem investiget Geometra, sive stellarum loca exquirat Astronomus, sive alia naturæ phænomena explicet Physicus, sive demum pecuniæ ex usuris incrementum computet Nummatus.

Argumento, in quo versatur hic libellus, illustrando non defuerunt viri in re Mathematica primarii. Sed eorum alii omnem illius ambitum complexi, doctissimè illi quidem, sed magistris solum scripserunt: alii ad Tyronum captum se accommodantes, certas quasdam, easque magis obvias Logarithmorum proprietates selegerunt, intimam eorum naturam non aperuerunt. Quod igitur adhuc desiderari videbatur, mihi in animo erat supplere hoc tractatu; qui in id præcipue collimat, ut Logarithmorum scientia iis, qui ultra Arithmeticæ speciosæ & Geometriæ elementa non processerunt, penitus aliquando pateat.

Mirabile

Mirabile Logarithmorum Inventum Nepero Scoto Merchestonii *Baroni debetur, qui primus canonem Logarithmorum descripsit, construxit, & edidit,* Edinburgi *Anno* 1614. *Hunc statim omnes Mathematici, ejus utilitatem suspicientes, gratè arripuerunt. Et cum de aliis fere omnibus præclaris Inventis plures contendunt Gentes, omnes tamen* Neperum *Logarithmorum authorem agnoscunt, qui tanti inventi gloria solus sine æmulo fruitur.*

Aliam deinde magis commodam Logarithmorum formam Neperus *excogitavit, & communicato consilio cum Domino* Henrico Briggio, *Geometriæ in Academia* Oxoniensi *Professore, hunc socium operis sibi adjunxit, ut Logarithmos in meliorem formam reductos compleret. Sed* Nepero *demortuo, totum quod restabat onus in* Briggium *devolutum est, qui magno labore, & summa qua pollebat ingenii subtilitate, canonem Logarithmicum secundum novam illam formam composuit, pro viginti primis numerorum chiliadibus (seu ab* 1 *usque ad* 20000) *aliisque undecim ab* 90000 *usque ad* 101000, *pro quibus omnibus numeris, supputavit Logarithmos quatuordecim figurarum locis constantes. Hic canon editus est* Londini *anno* 1624.

Eundem Canonem iteratò edidit Goudæ *apud* Batavos *anno* 1628. Adrianus Vlacq, *suppletis, ut docuerat* Briggius, *chiliadibus intermediis prius omissis; sed brevioribus usus est Logarithmis, utpote qui ad decem tantum figurarum loca continuantur.*

Computavit etiam Briggius *Logarithmos Sinuum & Tangentium, pro singulis Gradibus graduumque centesimis, ad* 15 *figurarum loca, quibus adjunxit Sinus Tangentes & Secantes veros seu naturales, quos prius ad totidem loca supputaverat. Logarithmi Sinuum & Tangentium dicuntur Sinus & Tangentes Artificiales. ipsi vero Sinus & Tangentes, naturales vocantur. Has Tabulas simul cum Tractatu de Tabularum constructione & usu, post mortem* Briggii, *sub nomine* Trigonometriæ Britannicæ *edidit* Henricus Gelibrand Londini *Anno* 1633.

Post illud tempus, pluribus in locis Tabularum compendia

dia prodiere. In quibus Sinus Tangentes, eorumque Logarithmi, tantum constant septem notarum locis, & numerorum Logarithmi exhibentur tantum pro numeris ab 1 *usque ad* 10000, *qui pro plerisque casibus sufficere possunt.*

Harum Tabularum dispositio ea mihi videtur optima, quam primus excogitavit Nathaniel Roe Anglus Suffolciensis, *quamque, quibusdam in melius mutatis, sequitur* Sherwinus *in Tabulis suis Mathematicis* Londini *Anno* 1705 *editis, in quibus habentur Logarithmi Numerorum omnium ab unitate usque ad* 101000 *septem figurarum notis constantes, Logarithmorum quoque differentiæ partesque proportionales adscribuntur, quarum ope Logarithmi numerorum usque ad* 10000000 *facile haberi possunt; quatenus scil. hi Logarithmi septem tantum figurarum notis exprimantur. Præterea in iisdem prostant Sinus Tangentes & Secantes, cum eorum Logarithmis & differentiis pro quolibet gradu & minuto Quadrantis, cum aliis quibusdam tabulis Mathesi Practicæ inservientibus.*

CAPUT

CAPUT I.

De ortu & natura Logarithmorum.

QUemadmodum in Geometria, linearum magnitudines numeris sæpe definiuntur; ita quoque in Arithmetica vicissim expedit, ut numeri aliquando per lineas exponantur, assumendo scil. lineam aliquam quæ ipsam unitatem repræsentet, ejus dupla numerum binarium, tripla ternarium, dimidia fractionem $\frac{1}{2}$, & ita deinceps, exponet. Hac ratione quorundam numerorum Genesis & proprietates melius concipiuntur, clariusque in animo versantur, quam per abstractos numeros fieri possit.

Hinc si quælibet linea a in seipsam ducatur, (*Fig.* 1.) quæ exinde prodit quantitas a^2, non æstimanda est tanquam duarum dimensionum, sive ut Quadratum Geometricum cujus latus est linea a, sed tanquam linea quæ sit tertia proportionalis lineæ pro unitate assumptæ, & lineæ a. Sic etiam si a^2 per a multiplicetur, quæ prodit a^3, non erit trium dimensionum quantitas, seu cubus Geometricus, sed linea quæ est quartus terminus in progressione Geometrica cujus primus terminus est 1, secundus a. Nam termini 1 a a^2 a^3 a^4 a^5 a^6 a^7 &c. sunt in continua ratione 1 ad a: & indices terminis affixi ostendunt locum seu distantiam, quam quisque terminus ab unitate obtinet. v. gr. a^5 est in quinto loco ab unitate, a^6 in sexto seu sexies magis distans ab unitate quam a seu a^1, qui immediate sequitur unitatem.

Si inter terminos 1 & a inferatur medius proportionalis qui est $\sqrt{a}$, ejus index erit $\frac{1}{2}$, nam ejus distantia ab unitate erit semissis distantiæ a ab unitate, adeoque pro $\sqrt{a}$ scribi potest $a^{\frac{1}{2}}$. Et si inter a & a^2 inferatur medius proportionalis, ejus index erit $1\frac{1}{2}$ seu $\frac{3}{2}$, nam ejus distantia erit sesquialtera distantiæ ipsius a ab unitate.

Si inter 1 & a inferantur duo medii proportionales; horum

horum primus eſt radix cubica ipſius a, cujus index debet eſſe $\frac{1}{3}$. Nam terminus ille diſtat ab unitate tertiâ tantum parte diſtantiæ ipſius a, adeoque radix cubica ſcribi debet per $a^{\frac{1}{3}}$. Hinc Index ipſius Unitatis eſt o, nam unitas non diſtat à ſeipsâ.

Eadem ſeries quantitatum Geometrice proportionalium continuari poteſt utrinque, tam deſcendendo verſus ſiniſtram, quam aſcendendo verſus dextram; termini enim $\frac{1}{a^5}\ \frac{1}{a^4}\ \frac{1}{a^3}\ \frac{1}{a^2}\ \frac{1}{a}\ 1\ a\ a^2\ a^3\ a^4\ a^5$ &c. ſunt omnes in eadem progreſſione Geometrica. Adeoque cum diſtantia ipſius a ab unitate ſit verſus dextram & poſitiva ſeu $+1$, diſtantia æqualis in contrariam partem, ſcil. diſtantia termini $\frac{1}{a}$ erit negativa ſeu -1, qui erit index termini $\frac{1}{a}$ pro quo itaque ſcribi poteſt a^{-1}. Similiter in termino a^{-2}, index -2 oſtendit terminum in ſecundo loco ab unitate verſus ſiniſtram locari, idemque valet terminus a^{-2} ac $\frac{1}{a^2}$. Item a^{-3} eſt idem ac $\frac{1}{a^3}$. Indices enim hi negativi oſtendunt terminos ad quos pertinent, in partem diſcedere contrariam ei, quâ ab unitate progrediuntur termini, quorum indices ſunt poſitivi. Hiſce præmiſſis.

Si ſuper linea AN utrinque indefinite extensâ, (*Fig.* 2.) capiantur AC CE EG GI IL dextrorſum. Item AΓ ΓΠ &c. ſiniſtrorſum, omnes inter ſe æquales: & ad puncta Π Γ A C E G I L erigantur ſuper AN perpendiculares rectæ ΠΣ ΓΔ AB CD EF GH IK LM quæ ſint omnes continue proportionales, numeroſque repreſentent, quorum AB ſit unitas. Lineæ AC AE AG AI AL—AΓ—AΠ diſtantias numerorum ab unitate reſpective exponent, ſive locum & ordinem quem quiſque numerus in ſerie Geometrice proportionalium obtinet, prout ab unitate diſtat. Ita AG cum ſit tripla rectæ AC, erit numerus GH in tertio ab unitate loco, ſi modo CD ſit in primo, ſic LM erit in quinto loco cum ſit AL $=5$ AC.

Quod si proportionalium extremitates $\Sigma \Delta$ B D F H K M rectis lineis jungantur; figura $\Sigma \Pi$ L M fit polygonum pluribus aut paucioribus constans lateribus, prout plures aut pauciores in progressione fuerint termini.

Si partes A C C E E G G I I L bisecentur in punctis *c e g i l* & rursus excitentur perpendiculares *c d e f g h i k l m*, quæ sint mediæ proportionales inter A B C D, C D E F, E F G H, G H I K, I K L M, nova orietur proportionalium series, cujus termini incipiendo ab eo qui proxime sequitur unitatem duplo plures sunt, quam in prima serie, & terminorum differentiæ minores fiunt, propiusque ad rationem æqualitatis accedunt termini, quam prius; quin etiam in hac nova serie, rectæ A L A C distantias terminorum L M C D ab unitate exponent, scil. cum A L decies major sit quam A *c*; erit L M decimus seriei terminus ab unitate, & ob A *e* triplo majorem quam A *c*, erit *e f* tertius seriei terminus, modo *c d* sit primus: & inter A B & *e f* erunt duo medii proportionales, inter A B vero & L M erunt novem termini medii proportionales.

Quod si linearum extremitates B *d* D *f* F *h* H &c. rectis jungantur, fiet novum polygonum, pluribus quidem, at brevioribus constans lateribus.

Si rursus distantiæ A *c* *c* C C *e* *e* E &c. bisecari concipiantur, & inter binos quosque terminos, ad medias illas distantias inseri intelligantur medii proportionales, alia nova orietur proportionalium series, terminos ab unitate duplo plures continens quam prior. Terminorum vero differentiæ minores erunt; junctisque terminorum extremitatibus, numerus laterum polygoni augetur secundum numerum terminorum, minora autem erunt latera, ob diminutas terminorum à se invicem distantias.

Quin in hac nova serie, distantiæ A L A C &c. determinabunt terminorum ordines seu locos, nempe si sit A L quintuplo major quam A C; sitque C D quartus ab unitate seriei terminus: erit L M istius seriei terminus vicesimus ab unitate.

Si sic continuo inter binos quosque terminos inserantur medii proportionales, fiet tandem numerus termino-

rum

rum seriei, sicut & laterum polygoni major quolibet dato numero seu infinitus; latera vero singula magnitudine diminuta fient quavis datâ rectâ lineâ minora; Adeoque mutabitur polygonum in figuram curvilineam. Nam quælibet figura curvilinea considerari potest, tanquam polygonum cujus latera sunt numero infinita, & magnitudine minima.

Curva sic descripta dicitur *Logarithmica*, in qua si numeri per rectas ad axem A N normaliter insistentes, repræsententur; portio Axis inter numerum quemlibet, & Unitatem intercepta, ostendit locum seu ordinem quem numerus ille obtinet in serie Geometrice proportionalium, & æqualibus intervallis ab invicem distantium. Verbi gratia, si A L sit quintuplo major quam A C, sintque ab unitate ad L M mille termini continue proportionales, erunt ab unitate ad C D ducenti termini ejusdem seriei, seu erit C D terminus seriei ducentesimus ab unitate; & quicunque supponatur numerus terminorum ab A B ad L M, erit istius numeri pars quinta numerus terminorum ab A B ad C D.

Curva Logarithmica potest etiam concipi duobus motibus describi, quorum unus æquabilis est, alter vero in data quadam ratione acceleratur, vel retardatur: v. gr. si recta A B super A N uniformiter incedat adeo ut terminus ejus A æqualibus temporibus æqualia spatia describat, interea tamen ita crescat A B, ut æqualibus etiam temporibus incrementa capiat, quæ sint toti lineæ crescenti proportionalia, hoc est si A B progrediendo in *c d*, augeatur parte sui *o d*, & hinc æquali tempore quando in C D pervenerit, augeatur simili parte D*p*, quæ sit ad *d c* ut incrementum *d o* ad A B, similiter, dum æquali tempore ad *e f* pervenerit, crescat parte *f q*, quæ sit ad D C ut D*p* ad *d c* seu ut *d o* ad A B, id est, in æqualibus temporibus incrementa facta sint semper totis proportionalia.

Vel si linea A B regrediendo in contrariam partem, in constanti ratione minuatur, ita ut, dum æqualia spatia A Γ Γ Π pertransit, decrementa patiatur A B — Γ Δ Γ Δ — Π Σ quæ sint ipsis A B Γ Δ proportionalia. Lineæ sic crescentis aut decrescentis terminus Logarithmicam describet.

 Nam

Nam cum sit AB : *do* : : *dc* : D*p* : : DC : *fq* erit componendo AB : *dc* : : *dc* : DC : : DC : *fe* & ita deinceps.

Per hos duos motus, unum scil. æquabilem, alterum proportionaliter acceleratum aut retardatum, ipse *Neperus* Logarithmorum originem exposuit. Logarithmum sinus cujusque arcus vocavit, *Numerum qui quam proxime definit lineam quæ æqualiter crevit, interea dum sinûs totius linea proportionaliter in sinum illum decrevit.*

Ex hac Logarithmicæ descriptione constat, numeros omnes in æqualibus distantiis, esse continue proportionales. Quin etiam patet, quod si sint quatuor numeri AB CD IK LM tales, ut distantia inter primum & secundum sit æqualis distantiæ inter tertium & quartum, qualiscunque sit distantia secundi à tertio, erunt illi numeri proportionales. Nam quia distantiæ AC IL sunt æquales, erit AB ad incrementum D*s* ut IK ad incrementum MT; unde componendo AB : DC : : IK : ML. Et vicissim, si quatuor numeri sint proportionales, erit distantia inter primum & secundum, æqualis distantiæ inter tertium & quartum.

Distantia inter duos quoslibet numeros, dicitur Logarithmus rationis istorum numerorum, & metitur non quidem ipsam rationem, sed numerum terminorum in data serie Geometrice proportionalium progredientium ab uno numero ad alterum, definitque numerum rationum æqualium, quarum compositione efficitur numerorum ratio.

Si distantia inter duos quosvis numeros sit dupla distantiæ inter alios duos numeros; Ratio duorum priorum numerorum erit duplicata rationis posteriorum. Sit enim distantia IL inter numeros IK LM dupla distantiæ A*c* quæ est inter numeros AB *cd*, bisecta IL in *l* ob A*c* = I*l* = *l*L, erit ratio IK ad *lm* æqualis rationi AB ad *cd*, adeoque ratio IK ad LM quæ est duplicata rationis IK ad *lm*, (per *defin.* 10. *El.* 5.) erit etiam duplicata rationis AB ad *cd*.

Similiter si distantia EL sit tripla distantiæ AC; erit Ratio EF ad LM triplicata rationis AB ad CD. Nam ob distantiam triplam, triplo plures erunt proportionales ab ab E F ad L M quam sunt ejusdem rationis termini ab A B ad C D: at tam ratio E F ad L M, quam ratio A B ad C D, componitur ex rationibus æqualibus intermediis, (per 5. *defin. El.* 6.) Adeoque ratio E F ad L M ex triplo pluribus rationibus composita, Triplicata erit rationis A B ad C D. Similiter si sit G L distantia quadrupla distantiæ A *c*, erit ratio G H ad L M Quadruplicata rationis A B ad *c d*. & ita deinceps.

Numeri cujuslibet Logarithmus, est Logarithmus rationis Unitatis ad ipsum numerum, vel est distantia inter unitatem & illum numerum. Logarithmi itaque exponunt dignitatem, locum, seu ordinem, quem quisque numerus obtinet ab unitate in serie Geometrice proportionalium. Verbi gratia si ab unitate ad numerum 10 sint proportionales numeri 10 000 000 hoc est si sit numerus 10 in loco 10 000 000mo; per computationem invenietur, esse in eadem serie ab unitate usque ad 2 proportionales terminos numero 3 010 300, hoc est numerus binarius stabit in loco 3 010300mo. Similiter ab unitate usque ad 3, invenientur termini proportionales 4 771 213, qui numerus definit locum numeri ternarii. Numeri 10 000000, 3 010300, 4771213. erunt Logarithmi numerorum 10, 2, & 3.

Si primus seriei terminus ab unitate dicatur y, erit secundus terminus y^2, tertius y^3, &c. cumque ponitur numerus denarius seriei terminus 10 100 000^{mus}, erit $y^{10000000} = 10$. Item erit $y^{3010300} = 2$. Item $y^{4771213} = 3$, & ita deinceps.

Omnes itaque numeri erunt potestates aliquæ illius numeri, qui est ab unitate primus. Et potestatum indices sunt numerorum Logarithmi.

Cum Logarithmi sint distantiæ numerorum ab unitate, ut superius ostensum est. Erit Logarithmus ipsius unitatis 0, nam unitas non distat à seipsa. At fractionum Logarithmi sunt negativi seu infra nihil descendentes, hi enim in contrariam discedunt partem; adeoque si numeri ab unitate proportionaliter crescentes habeant Logarithmos positivos, seu signo + affectos, Numeri ab unitate similiter decrescentes, seu fractiones habebunt Logarithmos negativos, seu signo — affectos. Quod verum est quando Logarithmi æstimantur per distantias numerorum ab unitate.

At si initium capiunt Logarithmi non ab unitate integrali, sed ab unitate quæ est in loco aliquo fractionum decimalium, verbi gratia à fractione $\frac{1}{1\,00000\,00000}$; tunc omnes fractiones hac majores habebunt Logarithmos positivos, reliquæ minores, obtinebunt Logarithmos negativos, sed de hac re plura postea dicentur.

Cum in numeris continue proportionalibus D C E F G H I K &c. distantiæ C E E G G I &c. sint æquales, erunt horum numerorum logarithmi A C A E A G A I &c. æquidifferentes, seu Logarithmorum differentiæ erunt æquales. Numerorum itaque proportionalium Logarithmi sunt omnes in progressione Arithmetica. Atque hinc oritur vulgaris illa Logarithmorum definitio, viz. Logarithmi sunt numeri qui proportionalibus adjuncti, æquales servant differentias.

In prima quam *Neperus* edidit Logarithmorum specie, posuit terminorum proportionalium ab unitate primum, tantum ab unitate distare, quantum ipse terminus unitatem superabat. h. e. Si vn sit primus seriei terminus ab unitate A B, ejus Logarithmum seu distantiam A n vel B y æqualem esse voluit ipsi vy, seu incremento numeri supra unitatem, ut si vy sit 1, 0000001, ejus Logarithmum A n ponebat 0, 0000001, & hinc computatione factâ Numerus Denarius seu 10 erit 23025850^{us} seriei terminus, qui itaque numerus est Logarithmus denarii in hac Logarithmorum forma, & exprimit ejus distantiam ab unitate in partibus quarum vy vel A n est una.

At hæc positio omnino arbitraria fuit, potest enim distantia primi termini, ad ipsius excessum supra unitatem, datam quamvis habere proportionem, & pro varia illa ratione, quæ pro arbitrio supponi potest, esse inter vy & B y, incrementum primi termini supra unitatem & ejusdem

dem ab unitate distantiam, diversæ provenient Logarithmorum formæ.

Primam hanc Logarithmorum speciem in aliam magis commodam postea mutavit *Neperus*, in qua posuit numerum denarium non esse 23025850^{mum} seriei terminum, sed terminum 10000000^{mum}, inque hac Logarithmorum forma, primum incrementum vy erit ad distantiam By vel An, ut unitas seu AB ad fractionem decimalem, 0, 4342994, quæ itaque exponet Longitudinem subtangentis AT. *In Fig.* 4ta.

Post mortem *Neperi*, vir summus Dominus *Henricus Briggius*, immenso labore, Logarithmorum Tabulas ad hanc formam construxit & edidit. In hisce tabulis cum logarithmus denarii seu ejus distantia ab unitate ponatur 1, 0000000, sintque 1, 10, 100, 1000, 10000 &c. continue proportionales, erunt æquidistantes. Quare numeri 100 Logarithmus erit 2, 0000000. millenarii 3, 0000000 & numeri 10000 Logarithmus fiet 4, 0000000 & ita deinceps.

Hinc Logarithmi omnium numerorum inter 1 & 10 incipere debent per 0, seu debet esse 0 in primo loco versus sinistram, sunt enim minores quam Logarithmus numeri 10 cujus initium est unitas; & Logarithmi numerorum inter 10 & 100 unitate incipiunt, sunt enim majores quam 1. 0000000 & minores quam 2. 0000000. Item Logarithmi numerorum inter 100 & 1000 binario incipiunt, sunt enim majores quam logarithmus numeri 100, quem incipit 2, & minores logarithmo numeri 1000 qui incipit per 3; eodem modo ostendetur in Logarithmis numerorum inter 1000 & 10000, primam figuram versus sinistram debere esse 3; & in Logarithmis numerorum ab 10000 usque ad 100000 prima versus sinistram figura erit 4, & ita deinceps.

Prima cujusque logarithmi figura versus sinistram dicitur characteristica seu index; quia ostendit altissimum seu remotissimum locum numeri à loco unitatum. v. gr. Si index logarithmi sit 1, numeri respondentis altissimus seu remotissimus versus sinistram ab unitate locus, erit

locus

locus decadum. Si index 2, remotiſſima numeri reſpondentis figura erit in ſecundo ab unitatum loco, hoc eſt erit centenariorum aliquis. Et index Logarithmi 3 denotat altiſſimam numeri ſui figuram eſſe in tertio ab unitatum loco, & inter millenarios locari.

Logarithmi numerorum omnium qui ſunt in progreſſione decupla aut ſubdecupla, characteriſticis ſeu indicibus ſuis tantum differunt; in reliquis omnibus locis, iiſdem ſcribuntur notis, v. gr. Logarithmi numerorum 17, 170, 1700, 17000. nam cum ſit 1 ad 17, ut 10 ad 170, ut 100 ad 1700, ut 1000 ad 17000; diſtantiæ inter 1 & 17, inter 10 & 170, inter 100 & 1700, inter 1000 & 17000 erunt omnes æquales, ideoque cum diſtantia inter 1 & 17 ſeu Logarithmus numeri 17 ſit 1. 2304489 erit logarithmus numeri 170 = 2. 2304489, & Logarithmus numeri 1700 erit 3. 2304489 ob numeri 100 Logarithmum = 2. 0000000, & ſimiliter ob numeri 1000 Logarithmum = 3. 0000000 Logarithmus numeri 17000 erit 4. 2304489.

Sic etiam numeri 6748. 674, 8. 67, 48. 6, 748. 0,6748, 0, 06748. ſunt continue proportionales ſcil. in ratione 10 ad 1, eorum itaque à ſe invicem diſtantiæ æquales erunt diſtantiæ ſeu Logarithmo numeri 10, ſeu æquales 1, 0000000. quare cum Logarithmus numeri 6748 ſit 3, 8291751, reliquorum logarithmi erunt ut in margine.

6748	3,8291751
674,8	2,8291751
67,48	1,8291751
6,748	0,8291751
0,6748	—1,8291751
0,06748	—2,8291751

In duobus ultimis logarithmis, Indices tantum ſunt negativi, reliquis figuris poſitivis manentibus, adeoque cum reliquæ figuræ addendæ ſunt, ſubtrahendi erunt indices, & vice verſa.

CAPUT

CAPUT II.

De Logarithmorum Arithmetica ubi numeri ſunt integri, vel integri cum decimalibus adjunctis.

QUoniam in multiplicatione, unitas eſt ad multiplicatorem ut multiplicandus ad productum, diſtantia inter Unitatem & multiplicatorem æqualis erit diſtantiæ inter multiplicandum & productum; ſi itaque numerus GH per numerum EF eſſet multiplicandus, diſtantia inter GH & productum debet eſſe æqualis diſtantiæ AE, ſeu Logarithmo multiplicatoris, ſi itaque capiatur GL æqualis AE, erit numerus LM productus, hoc eſt, ſi ad AG logarithmum multiplicandi addatur AE Logarithmus multiplicatoris, ſumma erit logarithmus producti.

In Diviſione Unitas eſt ad diviſorem, ut quotus ad dividendum; adeoque diſtantia inter diviſorem & unitatem æqualis erit diſtantiæ inter dividendum & quotum. Sic ſi LM per EF eſſet dividendus, erit diſtantia EA æqualis diſtantiæ inter LM & quotum, adeoque ſi capiatur LG æqualis EA, ad G erit quotus. Hoc eſt, ſi ab AL logarithmo Dividendi, auferatur GL ſeu AE Logarithmus diviſoris, reſtabit AG Logarithmus quotientis.

Atque hinc adeo, quæcunque operationes in communi Arithmetica perficiuntur multiplicando aut dividendo numeros majores, eæ omnes facilius multo, & expeditius fiunt, per additionem aut ſubductionem Logarithmorum.

Sit exempli gratia numerus 7589 multiplicandus per 6757 addendo Logarithmos ut in margine videre eſt, habetur Logarithmus producti, cujus index 7 monſtrat eſſe in producto ſeptem locos præter unitatum locum; & quærendo in tabulis Logarithmum hunc, vel proxime æqualem, invenio

Log. 3. 8801846
Log. 3. 8297539
Log. 7. 7099385

venio numerum respondentem minorem producto esse 51278000 & numerum producto majorem esse 51279000, quin capiendo differentias adjunctas, & partes proportionales; invenio notas ante-penultimam & penultimam esse 87, in ultimo autem seu in unitatum loco, necessario erit 3, ob septies novem = 63 adeoque verus productus erit 51278873. Si index Logarithmi esset 8 vel 9, ultima vel penultima notæ obtineri non possunt ex tabulis ubi Logarithmi tantum constat 7 figurarum locis præter characteristicam, adeoque ubi opus est, Tabulæ *Ulacquianæ*, in quibus Logarithmi sunt omnes decem notarum; vel *Briggianæ*, in quibus Logarithmi sunt quatuordecim, adeundæ erunt.

	Si numerus 78596 dividendus sit
Log. 4. 8954004	per 278, substrahendo Logarithmum
Log. 2. 4440448	divisoris ex Logarithmo dividendi
Log. 2. 4513556	habetur Logarithmus quotientis, cui
	Logarithmo respondet, Numerus 282

,719 qui itaque erit quotiens.

Cum unitas, numerus quilibet assumptus, ejus quadratus, cubus, Biquadratus, &c. sint continue proportionales, eorum à se invicem distantiæ æquales erunt. Manifestum itaque est Quadrati distantiam ab unitate, duplam esse distantiæ radicis ab eadem: distantiam cubi triplam distantiæ radicis suæ, Biquadrati distantiam esse distantiæ radicis suæ ab unitate quadruplam &c. Adeoque si duplicetur logarithmus numeri, dabitur logarithmus Quadrati; si triplicetur, logarithmus cubi; si quadruplicetur, prodit Logarithmus Biquadrati. Et vice versa si Logarithmus numeri alicujus bisecetur, habebitur Logarithmus Radicis quadratæ ejusdem numeri; Quin & ejusdem logarithmi tertia pars erit logarithmus Radicis Cubicæ; & pars quarta Logarithmus Radicis biquadraticæ, & ita deinceps.

Hinc Radicum omnium extractiones facillime perficiuntur, secando Logarithmum in tot partes, quot sunt unitates in indice potestatis. Sic ut habeatur Radix quadrata numeri 5, ejus Logarithmi capiatur pars dimi-

dia

dia 0. 3494850, erit hæc Logarithmus radicis quadratæ numeri 5, ſeu Logarithmus numeri $\sqrt{5}$, cui reſpondet numerus 2, 23606 quam proxime.

CAPUT III.

De Arithmetica Logarithmorum, ubi numeri ſunt Fractiones.

Vide Fig. 3.

QUotieſcunque Fractiones per Logarithmos tractandæ fuerint, ad vitandum laborem addendi unam Logarithmi pertem, & ſubducendi alteram, expedit ut Logarithmi incipiant non ab unitate integrali, ſed ab unitate, quæ ſit in decimo vel centeſimo loco fractionum decimalium, v. gr. pone P O eſſe $\frac{1}{1\,00000\,00000}$ & Logarithmos ab ejus loco incipere. Hæc fractio decies magis diſtabit ab unitate verſus ſiniſtram, quam numerus 10 ab eadem diſtat verſus dextram, ſunt enim Decem termini proportionales in ratione 10 ad 1 ab unitate uſque ad P O. Adeoque ſi A B ſit unitas, ejus Logarithmus in hac ſuppoſitione non erit 0, ſed erit O A = 10. 0000000, Nam diſtantia denarii ab unitate eſt 1. 0000000, unde diſtantia numeri 10 à P O erit 11. 0000000. Item diſtantia numeri 100 à P O, ſeu ejus Logarithmus à P O incipiens, erit 12. 000 0000 & numeri 1000 Logarithmus ſeu diſtantia à P O erit 13. 000 0000; atque hac ratione Logarithmorum omnium indices augentur numero 10. & Fractiones quarum indices fuerunt — 1, aut — 2, aut — 3 &c. fiunt 9, 8, aut 7 &c.

At ſi Logarithmi incipiunt à loco Fractionis cujus numerator eſt unitas; denominator unitas centum cyphris adjectis (quod faciendum eſt quoties fractiones occurrunt minores quam P O) illa Fractio centies plus diſtabit ab unitate quam 10 ab ea diſtat, adeoque Unitatis Logarithmus habebit Indicem 100. Numeri Denarii Logarithmus Indicem habebit 101. Et numeri centenarii Logarithmo

rithmo congruet Index 102, & ita deinceps Indices omnes augentur numero 100.

Fractionum omnium quæ sunt majores P O (à quo initium ducitur) Logarithmi erunt positivi. Et cum numeri, 10, 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, &c. sunt in continua progressione Geometrica, æqualiter à se invicem distabunt, & eorum proinde Logarithmi erunt æquidifferentes; Adeoque cum Logarithmus denarii sit 11. 0000000, & unitatis Logarithmus sit 10. 0000000 erit Logarithmus fractionis $\frac{1}{10}$ = 9. 0000000; & fractionis $\frac{1}{100}$ Logarithmus erit 8, 0000000; & similiter index Logarithmi numeri $\frac{1}{1000}$ erit 7. Quin etiam eadem ratione si index Logarithmicus Unitatis sit 100 & denarii 101, Erit index Logarithmi Fractionis $\frac{1}{10}$, 99, & Fractionis $\frac{1}{100}$ Index Logarithmi erit 98; & Fractionis $\frac{1}{1000}$ index Logarithmicus erit 97 &c. Hi indices ostendunt in quo loco ab unitate prima fractionis figura quæ cyphra non sit, ponenda fuerit. v. gr. Si index sit 4 ejus differentia ab indice unitatis quæ est 10 scil. 6 ostendit primam decimalis figuram significativam esse in 6^{to} ab unitate loco; ergo quinque cyphræ versus sinistram ei præponendæ sunt. Ita si Unitatis index sit 100 & fractionis index sit 80, erit prima ejus figura in vicesimo ab unitatis loco seu 19 cyphræ præponendæ erunt.

Sit jam Fractio G H per fractionem D C multiplicanda. Quia unitas est ad multiplicatorem ut multiplicandus ad productum; erit distantia inter Unitatem & multiplicatorem æqualis distantiæ inter multiplicandum & productum. Quare si capiatur G I = A C, ad I erit productus I K. Et proinde si ab O G Logarithmo multiplicandi, auferatur G I vel A C, restabit O I Logarithmus producti. Est vero A C = O A — O C, quæ ablata ab O G, relinquetur O G + O C — O A = O I, hoc est, si simul addantur Logarithmi multiplicatoris & multiplicandi, & è summa auferatur Logarithmus unitatis (qui semper scribitur per 10 aut 100 cum cyphris) habebitur logarithmus producti. ex. gr. Sit Fractio decimalis 0,00734 per fractionem 0,000876 multiplicanda, pono unitatis indicem Logarithmicum esse 100, & fractionum Logarithmi erunt

ut

ut in margine, qui additi, & rejecto Logarithmo Unitatis, dant Logarithmum producti, cujus index 94 ostendit primam producti figuram esse in sexto ab unitatum loco, quinque itaque cyphræ præponendæ sunt, & productus erit ,00000642984.

97, 8656961
96, 9425041
94, 8082002

In Divisione, Divisor est ad unitatem, ut dividendus ad quotum, & proinde distantia inter divisorem & unitatem, æqualis erit distantiæ inter dividendum & quotum. Itaque si fractio IK dividenda esset per DC, capienda erit IG = CA & locus quoti erit G. Est vero CA = OA — OC quæ ad OI addita fit OA + OI — OC = OG. hoc est si addatur Logarithmus unitatis ad Logarithmum dividendi, & è summa auferatur Logarithmus divisoris, restabit logarithmus quotientis; sic si numerus CD per IK esset dividendus, capienda erit distantia CS = IA, & erit ST quotiens; cujus Logarithmus est OA + OC — OI. Sit CD = 0, 347 IK = 0, 00478. ad logarithmum ipsius CD addatur Logarithmus Unitatis, hoc est ejus Indici præponatur 1 aut 10, & ex eo subducatur logarithmus divisoris, restabit Logarithmus quotientis, cujus index 11 monstrat quotientem esse inter numeros qui sunt à 10 ad 100. quæro itaque numerum logarithmo respondentem, quem invenio esse 72 ,594.

19, 5403295
7, 6794279
11, 8609016

Si fractionis vulgaris verbi gr. $\frac{7}{8}$ logarithmus desideretur, ad Logarithmum numeri 7 addatur Logarithmus unitatis, vel quod idem est, ejus indici præponatur 1 aut 10 & subducatur ab eo logarithmus denominatoris 8, restabit logarithmus fractionis $\frac{7}{8}$ vel fractionis decimalis ,875.

10, 8450980
0, 9030900
9, 9420080

Ut Fractionis cujuslibet DC potestates habeantur, Capiendæ sunt EC EG GI IL singulæ æquales AC, & EF erit quadratus, GH Cubus, IK biquadratus numeri DC, sunt enim ab unitate continue proportionales. Est præterea AE = 2 AC = 2 OA — 2 OC, unde OE = OA — AE = 2 OC — OA, hoc est logarithmus quadrati

drati eſt duplus logarithmi radicis, minus Logarithmo unitatis. Similiter ob $AG = 3\,AC = 3\,OA - 3\,OC$ erit $OG = OA - AG = 3\,OC - 2\,OA =$ Logarithmo cubi $=$ Triplo Logarithmi lateris minus duplo logarithmi unitatis. Eadem ratione, quia $AI = 4\,AC = 4\,OA - 4\,OC$, erit $OI = 4\,OC - 3\,OA$; qui eſt Logarithmus Biquadrati. Et univerſaliter fractionis poteſtas ſit n, logarithmus L, erit logarithmus poteſtatis $n = n\,L - n\,OA + OA$. hoc eſt multiplicando logarithmum fractionis per n, & è producto abjiciendo logarithmum unitatis multiplicatum per $n - 1$, habebitur logarithmus poteſtatis n ejuſdem fractionis.

Ex. gr. ſit Fractio $\frac{1}{20} =$,05 cujus quæratur poteſtas 6ta; hujus fractionis logarithmus eſt 8, 6989700 qui multiplicatus per 6 dat numerum 52, 1938200, & ex 52 ablato numero 50 qui eſt index Logarithmi unitatis in 5 ductus, reſtabit logarithmus poteſtatis 6tæ ſcil. 2, 1938200 cui reſpondet numerus 0 ,00 0000 15625. nam index 2 oſtendit ſeptem cyphras primæ figuræ præponendas eſſe.

Si Fractionis ,05 poteſtas octava deſideretur, multiplicando logarithmum per 8, prodit 69, 5917600, at cum ex numero 69 auferri non poteſt 70, qui eſt ſepties index logarithmi unitatis, quin in numeros negativos deveniatur, pono indicem logarithmi unitatis eſſe 100. & index logarithmicus fractionis, erit 98. hic logarithmus in 8 ductus dat 789. 5917600 & ex numero 789 rejecto numero 700, qui utpote cum cyphris annexis, eſt ſepties logarithmus unitatis, reſtabit 89. 5917600 logarithmus poteſtatis 8væ Fractionis $\frac{1}{20}$ cui congruens numerus eſt ,00000 00000 39062, nam cum Index ſit 89 & ejus differentia ab 100 eſt 11; figura prima fractionis ſignificativa erit in undecimo ab unitatis loco, adeoque decem cyphræ præponendæ erunt.

Si in fractionibus, radices poteſtatum deſiderentur. v. gr. Fractionis EF, quæratur radix quadrata. Quoniam Radix eſt media proportionalis inter Fractionem & unitatem; biſectâ AE in C, erit CD radix quadrata fra-

ctionis

ctionis EF. Est vero $AC = \frac{1}{2} AE = \frac{OA - OE}{2}$, Adeoque OC Logarithmus Radicis $= OA - AC = \frac{OA + OE}{2}$. Si fractionis GH radix cubica quæratur; Radix illa erit prima duarum mediarum proportionalium inter unitatem & GH, secetur itaque AG in tres partes æquales, quarum prima sit AC, erit CD radix quæsita, & quoniam est $AC = \frac{1}{3} AG = \frac{OA - OG}{3}$ si hæc subducatur ab OA, restabit $\frac{2OA + OG}{3} = OC$ scil. Logarithmo Radicis cubicæ fractionis GH. Sic etiam fractionis IK radix biquadratica habetur, secando AI in quatuor partes æquales. Nam Radix est prima trium mediarum proportionalium inter unitatem & Fractionem. Sit itaque $AC = \frac{1}{4} AI$, & erit CD Radix biquadratica Fractionis IK. Sed est $\frac{1}{4} AI = \frac{OA - OI}{4}$ adeoque $OC = OA - AC = \frac{3OA + OI}{4}$.

Universaliter si fractionis LM desideretur radix potestatis n, ejus radicis Logarithmus erit $\frac{nOA - OA + OL}{n}$, hoc est si indici Logarithmico fractionis, præponatur numerus $n - 1$, & logarithmus sic auctus dividatur per n, quotus dabit Logarithmum radicis quæsitæ. Sic si quæratur radix cubica fractionis $\frac{1}{2}$ sive ,5 hujus Logarithmo præponatur $2 = n - 1$, quia radix cubica desideratur, & fiet 29.6989700 cujus numeri triens est 9,8996566 æqualis Logarithmo radicis cubicæ fractionis $\frac{1}{2}$ & congruens Logarithmo numerus est ,7937 qui erit radix quæsita.

CAPUT

CAPUT IV.

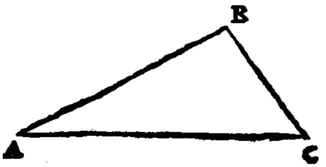
De Regula Proportionis seu Aurea Logarithmica.

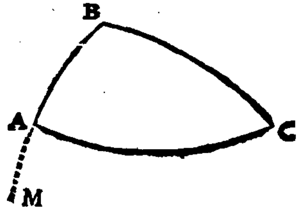
DAtis tribus numeris, qua ratione quartus proportionalis inveniendus sit, nos docet proportionis Regula; scil. termini secundus & tertius in se invicem ducendi sunt, & productus dividendus est per primum, qui prodit quotus, exhibebit quartum terminum proportionalem quæsitum. At per logarithmos minore labore habebitur ille quartus; Nam si è summa Logarithmorum secundi & tertii auferatur logarithmus primi, qui restat numerus est logarithmus quarti proportionalis.

Quin etiam & hic labor minui aliquantulum potest, si loco logarithmi primi capiatur ejus complementum Arithmeticum, seu differentia logarithmi à numero 10 0000000, & obtinetur si pro singulis logarithmi figuris scribantur earum differentiæ à 9, Complementum hoc Arithmeticum cum reliquis duobus logarithmis in unam summam conjiciatur, & è summa, unitatis nota in primo versus sinistram loco sita abjiciatur, restabit logarithmus quarti termini quæsiti; atque hoc modo per unicam Numerorum trium additionem invenitur logarithmus termini quæsiti. Hujus rei causa hinc patebit. Sint tres numeri A B C & è summa secundi & tertii subducendus est primus, non tantum operatio communi modo perficitur, sed etiam si assumatur numerus quivis E, & ab ea auferatur A, restabit E — A si numeri B C & E — A in unam summam addantur, & è summa trium rejiciatur E, restabit B + C — A. sic si subducendus est numerus 15 ex 23 capio numeri 15 complementum ad 100 quod est 85, hunc numerum addo ad 23 & summa fit 108 ex quo sublato 100 restabit numerus 8. sequuntur Exempla Trigonometrica Regulæ proportionis per Logarithmos soluta.

$$\begin{array}{r} 85 \\ \underline{23} \\ 108 \end{array}$$

Sit





Sit Triangulum A B C rectilineum, in quo dantur angulus A 36 gr. 46'. angulus B 98 gr. 32'. & latus B C, 3478. & quæritur latus AC. Fiat (per *caſ.* 1. Trigon. Planæ) Sinus ang. A ad Sinum ang. B ut B C ad A C. Et quia Log. ſinus anguli A eſt primus analogiæ terminus ejus vice ſubſtituo complementum Arithmeticum ejuſdem, & addo Log. B C, Log. S, B & prædictum complementum in unam ſummam, & è ſumma rejecta unitate quæ eſt in primo verſus ſiniſtram loco, dabitur Logarithmus lateris A C, cui congruens numerus eſt 5746, 309 æqualis A C lateri quæſito.

Arith. comp. S.A.	0.2228940
Log. Sin. B.	9.9951654
Log. B C	3.5413296
Log. A C.	13.7593890

Sit Triangulum Sphæricum A B C, in quo dantur omnia latera ſcil. B C = 30 grad. A B = 24 gr. 4'. & A C = 42 gr. 8'. quæritur angulus B. Producatur B A ad M ut ſit B M = B C erit A M differentia laterum B C B A æqualis 5 gr. 56'. (Per *caſ.* 11. in Triangulis obliquangulis Sphæricis.) Fiat ut rectangulum ſub ſinubus crurum A B B C ad quadratum Radii ita Rectangulum ſub ſinubus Arcuum $\frac{AC + AM}{2}$ $\frac{AC - AM}{2}$ ad quadratum ſinus anguli $\frac{1}{2}$ B.

Eſt vero $\frac{AC + AM}{2} = 24$ gr. 2'. & $\frac{AC - AM}{2} = 18$ gr. 6'. Et quia primus analogiæ terminus eſt rectangulum

E ſub

sub sinubus A B B C, & secundus terminus est quadratum Radii; Summa Log. Sin. A B B C subducenda erit ex duplo Log. Radii & qui restat numerus addendus est ad summam Log. S $\frac{AC+AM}{2}\ \frac{AC-AM}{2}$. Quod idem erit ac si singuli Log. Sinus arcuum A B B C subducerentur à Logarith. Radii, vel si horum sinuum capiantur complementa Arithmetica, Atq; complementa illa & prædicti sinus in unam conjicerentur summam. Summa illa erit Logarithmus quadrati sinus dimidii anguli B.

Log. S,B C comp. Arith.	0. 3010300
Log. S,A B comp. Arith.	0. 3895535
Log. S $\frac{AC+AM}{2}$	9. 6098803
Log. S, $\frac{AC-AM}{2}$	9. 4923083
2 Log. S, Ang. B.	19. 7927721

Logarithmi itaque dimidium 9. 8963860 est Log. Sinus anguli $\frac{1}{2}$ B = 51 gr. 58′. 31″. & hujus anguli duplum erit 103 gr. 57′. 02″ = angulo E qui erat inveniendus.

CAPUT V.

De Proportionalium Quantitatum continuis Incrementis, Et de modo inveniendi per Logarithmos, Terminum quemlibet in serie Proportionalium, sive crescente, sive decrescente.

SI in Axe Logarithmicæ ubivis capiantur partes quot volueris S V V Y Y Q &c. æquales, & ad puncta S V Y Q &c. erigantur perpendiculares S T V X Y Z Q π &c. ex natura curvæ, erunt omnes continuè proportionales; quin etiam continua incrementa X x Z z $\Pi\,\varpi$ erunt totis proportionalia. Nam ob S T : V X :: V X : Y Z :: Y Z : Q π erit dividendo *Vide Fig. 3.*

videndo $ST : X x :: VX : Z z :: YZ : \Pi \pi$, & componendo $VX : X x :: YZ : Z z :: Q\Pi : \Pi \pi$. Hinc si $X x$ sit pars quælibet rectæ ST, erit $Z z$ eadem pars rectæ VX, & $\Pi \pi$ quoque eadem pars rectæ YZ. ex. gr. Si $X x$ sit $\frac{1}{20}$ ST, erit $Z z = \frac{1}{20} VX$, & $\Pi \pi = \frac{1}{20} YZ$; seu quod eodem redit, erit $VX = ST + \frac{1}{20} ST$. $YZ = VX + \frac{1}{20} VX$, item $Q\Pi = YZ + \frac{1}{20} YZ$.

Fiat ut ST ad VX, ita AB unitas ad NR; erit $AN = SV$; adeoque rectæ SV VY YQ &c. erunt singulæ æquales logarithmo ipsius RN, & AV Logarithmus termini VX erit æqualis $AS + AN =$ Logarithmo ipsius $ST +$ Logarithmo ipsius NR. Item AY Logarithmus termini YZ æqualis erit $AS + 2\,AN =$ Log. $ST + 2$ Log. NR, & AQ logarithmus Termini $Q\Pi$ æqualis erit $AS + 3\,AN =$ Log. $ST + 3$ Log. NR. Et universaliter si Logarithmus numeri NR multiplicetur per numerum, qui exprimit termini cujusvis distantiam à termino primo, & productus addatur Logarithmo termini primi, dabitur logarithmus istius termini. At si series proportionalium sit decrescens; seu si termini in continua ratione minuantur, & $Q\Pi$ sit primus, habebitur Logarithmus alterius cujusvis termini, multiplicando Logarithmum numeri NR per numerum qui exponit ejus termini distantiam à primo, & subducendo productum è Logarithmo primi. Quod si productus ille sit major Logarithmo primi termini initio ab unitate ducto; in eo casu ponendi sunt Logarithmi incipere ab unitate in aliquo fractionum Decimalium loco detrusâ, verbi gratia ab OP ita Logarithmus numeri $Q\Pi$ erit OQ.

Exponat jam LM quamvis pecuniam, seu pecuniæ summam à creditore Fœnori elocatam, ea lege ut singulis annis Usura annua sorti annumeretur, & finito primo anno, sit usura seu lucrum $K k$, & IK aggregatum sortis & lucri pariat usuram $H h$ quæ sit ipsi IK proportionalis, seu in ratione constanti. Hæc usura $H h$ finito anno secundo, sorti accedat, & sors ea fit GH, quæ ad finem anni tertii pariat usuram $F f$, ipsi GH proportionalem; Ponamus sortem singulis annis augeri parte sui vicesima,

sima, $\frac{1}{20}$, adeoque erit I K = L M + $\frac{1}{20}$ L M, G H = I K + $\frac{1}{20}$ I K. E F = G H + $\frac{1}{20}$ G H, & ita deinceps. Erunt proinde termini L M I K G H E F &c. continue proportionales. Quæritur quantum aucta fuerit pecunia ad finem quotlibet annorum.

Sit L M semiobolus, Anglice *A farthing*. Ob L M ad I K ut 1 ad 1 + $\frac{1}{20}$ vel ut 1 ad 1,05. ut A B ad N R, erit N R = 1,05, cujus Logarithmus A N est 0. 0211893, vel magis accurate 0. 021189299 1. Quæritur quantum lucri accedat semiobolo, qui sexcentis annis fænori expositus est. Multiplicetur AN per 600 productus erit 12. 7135794. Huic producto addatur Logarithmus fractionis $\frac{1}{960}$ nempe 97, 0177288. (nam est semibolus pars libræ $\frac{1}{960}$) summa 109. 7313082 erit Logarithmus numeri quæsiti, cumque index 109 superat indicem Unitatis novenario seu 9, erunt in numero respondente novem figurarum loca supra locum Unitatum, & numerus ille in tabulis quæsitus invenietur major quam 5386500000, & minor quam 5386600000. Unus itaque semiobolus fænori datus, finitis sexcentis Annis, pariet libras Anglicanas plures quam 5386500000; Cui summæ solvendæ vix par erit omnis illa Auri Argentique copia, quæ ab ipsa rerum origine ad hunc usque diem ex terrarum visceribus eruta est.

Exponat Q Π quamvis pecuniæ summam quam post exactum integrum annum debitor creditori solvere tenetur, sed sine usurâ. Certum est si Debitor nunc totam solveret, illum amissurum jus quod habet in usuram annuam quæ ex pecunia illa prodiret; Quin & minor summa fœnori exposita, potest post annum cum sua usura, summam Q Π adæquare. Minor illa pecuniæ summa, quæ cum sua Usura pecuniam Q Π adæquat, præsens pecuniæ Q Π valor dicitur. Sit A N Logarithmus Rationis quam sors habet ad aggregatum sortis & usuræ, hoc est, si sors sit Usuræ annuæ Vigecupla, sit A N Logarithmus numeri 1 + $\frac{1}{20}$ seu 1, 05, & capiatur Q Y æqualis A N; erit A Y Logarithmus præsentis valoris pecuniæ Q Π. Patet enim pecuniam Y Z fœnori expositam finito anno parituram pecuniam Q Π, adeoque ut habeatur logarithmus præsentis

valoris,

valoris, seu Y Z; ex Logarithmo A Q detrahi debet Logarithmus A N, & restabit A Y logarithmus præsentis valoris, vel Y Z. Si summa Q π non nisi post duos annos exactos debeatur; à logarithmo A Q subtrahendus est numerus 2 A N, & manebit A V logarithmus præsentis valoris, seu summæ quæ pro pecunia Q π solvi statim debeat. Nam manifestum est pecuniam V X fœnori expositam, spatio duorum annorum, pecuniam Q π procreaturam. Eadem ratione, si summa Q π non nisi post tres annos debetur, à logarithmo Q π subtrahendus erit numerus 3 A N, & qui restat A S, erit logarithmus numeri S T, seu erit S T præsens valor summæ Q π post tres annos solvendæ. Et universaliter, si logarithmus A N multiplicetur per numerum annorum, quibus exactis debetur summa Q π, & productus numerus ex logarithmo A Q subducatur, hac ratione dabitur logarithmus numeri, qui erit præsens valor summæ Q π. Hinc patet si 538650000 libræ Angl. societati alicui finitis sexcentum annis solvendæ fuerint; tantæ pecuniæ præsentem valorem, vix unum semiobolum adæquaturum.

Si in axe Logarithmicæ ordinentur ad curvam rectæ H G E F, A B C D quæ sint proportionales, & extremitates ipsarum F H D B rectis jungantur, quæ productæ cum Axe conveniant in P & K, erunt rectæ G P A K semper æquales. Nam ob G H : E F :: A B : C D. erit G H : F s :: A B : D R. Sed ob æquiangula triangula P G H H s F, Item K A B B R D æquiangula erit P G : H s :: (G H : F s :: A B : D R ::) K A : B R. Quarum proportionalium consequentes H s B R æquales sunt, Antecedentes igitur P G K A æquales erunt. Q.E.D. *Fig.* 4.

Si rectæ C D E F ad A B G H æqualiter accedant, ut tandem punctum D coincidat cum B, & punctum F cum H, rectæ D B K F H P quæ prius secabant curvam, vertentur in Tangentes B T, H V; & rectæ A T G V semper sibi invicem æquales erunt, hoc est, portio Axis A T vel G V intercepta inter ordinatam & Tangentem quæ Subtangens dicitur, erit ubique constantis & datæ longitudinis quæ est præcipua Logarithmicæ Proprietas. Nam in diversis logarithmicis, subtangentes curvarum species seu formas determinabunt.

In duabus diversæ speciei logarithmicis, ejusdem numeri logarithmi, seu distantiæ ab unitate, erunt subtangentibus suarum curvarum proportionales. Sint enim curvæ HBD SNY, quarum subtangentes sint AT MX, sitque AB = MN = unitati, item DC = QY; erit AC logarithmus numeri CD, in logarithmica HD, ad MQ logarithmum numeri QY, seu ejusdem CD in logarithmica SY, ut subtangens AT ad subtangentem MX. Concipiatur interseri inter AB CD vel MN QY, infinitos terminos continue proportionales, in ratione AB ad *ab* vel MN ad *mn*; & ob AB = MN erit *ab* = *mn*. item erit *bc* = *no*. Et termini proportionales cum in utraque figura sint numero æquales, divident lineas AC MQ in partes numero æquales, quarum primæ sint A*a* M*m*, partes itaque illæ erunt totis proportionales, hoc est, erit A*a* : M*m* :: AC : MQ. Quoniam autem triangula TAB B*cb* sunt similia (nam pars curvæ B*b* coincidet fere cum portione tangentis) item triangula XMN, N*on* sunt similia. Erit A*a* vel B*c* : *bc* :: TA : AB

Fig. 4. & 5.

Item est *no* vel *bc* : N*o* : MN vel AB : MX.

Unde erit ex æquo, B*c* : N*o* :: TA : MX :: A*a* : M*m* :: AC : MQ. Q.E.D. Si AT vocetur *a*, ob AB : AT :: *bc* : B*c*; erit $Bc = \frac{a \times bc.}{AB}$

Hinc si detur logarithmus numeri, qui sit unitati proximus, vel illam minimo excessu superat, dabitur logarithmicæ subtangens, est enim excessus *bc* ad logarithmum B*c* ut AB unitas ad subtangentem AT. Vel etiam si sint duo quilibet numeri quam proxime æquales, erit differentia numerorum ad differentiam logarithmorum, ut alteruter numerorum ad subtangentem. v. gr. Si incrementum *bc* sit ,00000 00000 ,00001 02255 31945 60259, & B*c* vel *Aa* logarithmus numeri *ab* sit ,00000 00000 00000 44408 92098 50062. duobus his numeris & unitati inveniatur quartus proportionalis, scilicet

43429 44819 03251, is numerus dabit longitudinem subtangentis AT, quæ est subtangens logarithmicæ quæ exhibet logarithmos *Briggianos*.

Si Creditor Pecuniæ summam fœnori exponat, ea lege, ut singulis temporis momentis, pars proportionalis usuræ annuæ sorti annumeretur, ita scil. ut post finitum primum temporis momentum, seu exactam anni particulam indefinite exiguam, usuram poscat tempori proportionalem, quæ sorti adjecta, unà cum ipsa, usuram pariat, finito secundo temporis momento, sorti pariter accessuram, & ita deinceps. Quæritur quantum creditori finito anno debeatur? Sit a usura annua Unitatis, seu unius libræ. & si integer annus seu 1 dat usuram a, particula anni indefinite exigua Mm dabit usuram ipsi Mm proportionalem $Mm \times a$; & proinde si Unitas per MN exponatur, ejus incrementum primum erit $no = Mm \times a$. Per puncta Nn concipiatur logarithmica describi, cujus Axis est OMQ. In hac curva, si portio Axis MQ tempus exponat, ordinata QY pecuniam repræsentabit quæ usque ad illud tempus, singulis momentis, proportionaliter crevit. Nam si capiantur ml &c. $=$ Mm, ordinatæ lp &c. erunt in serie continue proportionalium in ratione MN ad mn, id est crescent eâdem ratione, qua pecunia crescit.

Tangat logarithmicam in N recta NX, ejus subtangens MX erit constans & invariabilis, & triangulum minimum Non simile erit triangulo XMN. At ostensum est, esse incerementum $no = Mm \times a = No \times a$ erit itaque $no : No :: No \times a : No :: a : 1$. Sed ut no ad No, ita erit NM ad MX. Quare erit, ut a ad 1, ita NM seu 1 ad

$MX = \frac{1}{a}$ subtangenti.

Quod si Usura annua sit pars sortis vicesima, seu si sit

$a = \frac{1}{20} = ,05$, erit $MX = \frac{1}{a} = 20$.

Quia in diversis logarithmorum formis, ejusdem numeri logarithmi sunt subtangentibus suarum curvarum,

pro-

proportionales: si MQ tempus Annuum, seu unitatem, exponat; QY erit pecunia quæ finito anno debetur. Ut verò innotescat QY; Fiat ut MX seu 20 ad 0, 4342944 (qui numerus exponit subtangentem logarithmicæ, quæ exhibet logarithmos *Briggianos*) ita annus, sive unitas, ad logarithmum *Briggianum*, qui numero QY congruit; logarithmus autem ille invenietur 0.0217147 cui respondens numerus $=$ QY est 1,05127, cujus incrementum supra unitatem sive sortem ,05127 pauxillum superat annuam usuram ,05. Adeo ut si usura annua centum librarum sit quinque libræ, usura proportionalis singulis anni momentis sorti 100 adjecta, pariet tantum ad finem anni, *lib.* 5 : *sol.* 2 : *d.* $6\frac{1}{2}$

Si quæratur usura ejusmodi, ut singulis momentis pars ipsius sorti continue crescenti proportionalis, ad sortem accedat ea lege ut finito anno producat incrementum quod sit sortis pars quælibet data v. gr. vicesima. Fiat ut log. numeri 1,05 ad 1, hoc est ut 0,0211893 ad 1; ita subtangens 0,4342944 ad $\frac{1}{a} = 20{,}49$, & erit $a = \frac{1}{20{,}49}$ $= {,}0488$. Nam si concipiatur pars usuræ ,0481 momento respondens, hoc est eandem habens rationem ad ,0488 quam habet momentum ad annum, & fiat ut unitas ad illam usuræ partem, ita sors ad ejus incrementum momentaneum; quæ hac ratione continuò crescit pecunia, ad finem anni augebitur vicesima sui parte.

CAPUT VI.

De Methodo qua Henricus Briggius *Logarithmos suos supputavit, ejusque Demonstratio.* *Vide Fig.* 4.

QUamvis *Briggius* lineam Logarithmicam nusquam descripsit, quem tamen in calculo adhibuit operandi modum, modique Rationem ex contemplatione Logarithmicæ

micæ evidentissime patebit. In qualibet Logarithmica HBD sint tres ordinatæ AB $a\,b$ $q\,s$ quam proxime æquales, hoc est earum differentiæ exiguam admodum ad ipsas lineas habeant rationem; Erunt Logarithmorum differentiæ differentiis linearum proportionales. Nam cum lineæ sunt quam proxime æquales, propinquissime sibi invicem erunt, & pars curvæ B s ab iis intercepta cum recta linea fere coincidet, certe tam prope possunt ordinatæ sibi invicem admoveri, ut differentia curvæ, à recta ipsam subtendente, habeant ad ipsam subtensam, minorem qualibet datâ rationem. Triangula igitur B c b B r s pro rectilineis assumi possunt, & erunt æquiangula. Quare est $s\,r : b\,c :: Br : Bc :: Aq : Aa$: hoc est excessus linearum supra minimam AB, erunt logarithmorum differentiis proportionales. Hinc patet ratio istius methodi qua tam numeri quam Logarithmi per differentias & partes proportionales corriguntur. Quod si AB sit unitas, erunt numerorum logarithmi differentiis numerorum proportionales.

Si intra numeros denarium & unitatem capiatur medius proportionalis, seu quod idem est, numeri denarii extrahatur Radix quadratica, Radix illa seu numerus in medio erit loco intra denarium & Unitatem. & ejus Logarithmus erit dimidius Logarithmi qui denario competit ac proinde dabitur. Si inter numerum prius inventum & unitatem, iterum inveniatur medius proportionalis quod fit extrahendo numeri inventi Radicem quadraticam, hic numerus Unitati duplo vicinior erit quam prior, ejusque logarithmus erit prioris logarithmi semissis, seu Logarithmi denario competentis pars quarta. Si hac ratione continuo extrahatur Radix quadratica & bisecentur Logarithmi, pervenietur tandem ad numerum cujus distantia ab unitate minor erit parte $\frac{1}{1\ 00000\ 00000\ 00000}$ istius logarithmi qui Denario tribuitur. *Briggius* peractis 54 Radicum extractionibus; Invenit numerum 1, 00000 00000 00000 12781 91493 20032 3442 ejusque logarithmum fore 0, 00000 00000 00000 05551 11512 31257 82702.

suppo-

supponatur Logarithmus hic æqualis A *q* sive B *r*, & sit *q s* numerus radicum extractione inventus; erit differentia *r s* qua unitatem superat = ,00000 00000 00000 12781 91493 20032 35.

Horum numerorum ope, logarithmi reliquorum omnium inveniri poterunt ad hunc modum. Inter datum numerum (cujus logarithmus inveniendus sit) & unitatem quærantur (ut superius ostensum est) medii proportionales, donec tandem inveniatur numerus tantillo unitatem superans ut unitas præcedat quindecim cyphras, quas totidem vel plures notæ significativæ sequantur. Sit numerus ille *ab*, & notæ significativæ, præfixis cyphris differentiam *b c* denotabunt. Deinde fiat ut differentia *r s* ad differentiam *b c* ita B *r* Logarithmus datus ad B *c* vel A *a* Logarithmum numeri *a b*; qui itaque dabitur. Hic Logarithmus toties continue duplicatus quoties extractiones factæ sunt, tandem dabit Logarithmum numeri quæsiti. Hac etiam ratione Inveniri possit Subtangens Logarithmicæ nempe si fiat *r s* : B *r* : : AB seu unitas : AT subtangenti, quæ itaque invenietur 0, 43429 44819 03251, per quam denique reliquorum numerorum logarithmi innotescent, nempe si detur numerus quivis NM ejusque Logarithmus & quæratur alterius numeri logarithmus qui ad NM satis accedat, fiat ut NM ad subtangentem XM ita *n o* differentia numerorum ad N *o* differentiam Logarithmorum. Quod si NM sit Unitas = AB dabuntur logarithmi multiplicando differentias minimas *b c* per subtangentem constantem AT.

Fig. 5.

Hac ratione Invenientur Logarithmi numerorum 2 3 & 7, & inde dabuntur Logarithmi numerorum 4 8 16 32 64 &c. 9 27 81 243 &c. item 7 49 343 &c. Si à logarithmo denarii auferatur binarii Logarithmus restabit logarithmus Quinarii. & proinde dabuntur Logarithmi numerorum 25 125 625 &c.

Numeri ex his compositi, nempe 6 12 14 15 18 20 21 24 28 &c. facile logarithmis suis instruuntur, addendo logarithmos numerorum componentium.

At numerorum primorum logarithmos, per tot Radicum

cum extractiones invenire, molestum admodum & laboriosum fuit opus. Nec quidem facile fuit, interpolando per differentias Primas, Secundas, & Tertias &c. Logarithmos supputare. Quo itaque absque tanta molestia Numerorum logarithmi obtineantur, Magni viri *Newtonus*, *Mercator*, *Gregorius*, *Wallisius*, & nuper *Halleius* series infinitas convergentes dederunt, quibus expeditius & certius logarithmi, ad quot volueris loca supputati haberi possunt; De hisce seriebus, eruditum Tractatum scripsit peritissimus Geometra *Halleius* inter Acta Philosophica Societatis Regiæ extantem, ubi series illas nova methodo demonstrat, modumque computandi logarithmos per eas docuit. Liceat hic subjungere novam seriem, ex qua expedite & facile fluunt Logarithmi saltem pro numeris majoribus.

Sit z numerus impar, cujus quæritur Logarithmus, Numeri $z - 1$ $z + 1$ erunt pares, & proinde dabuntur eorum logarithmi, & Logarithmorum differentia, quæ dicatur y; Quin etiam datur Logarithmus numeri qui est medius Geometricus inter numeros $z - 1$ & $z + 1$ æqualis scil. semisummæ logarithmorum. Series $y \times \frac{1}{4z} + \frac{1}{24z^3} + \frac{7}{360z^5} + \frac{181}{15120z^7} + \frac{13}{25200z^9}$ &c. erit æqualis logarithmo Rationis quam habet Geometricus medius inter numeros $z - 1$ & $z + 1$ ad Arithmeticum medium scil. numerum z.

Si Numerus superat 1000, Primus seriei terminus $\frac{y}{4z}$ sufficit ad producendum logarithmum ad tredecim vel quatuordecim notarum loca, secundus terminus dabit logarithmi loca viginti. At si z major sit quam 10000, primus terminus Logarithmum exhibet ad octodecim figurarum loca, & hinc ejus usus optimus erit, in supplendis logarithmis Chiliadum à *Briggio* prætermissis; Hujus rei capiamus exemplum, sit inveniendus logarithmus numeri 20001. Logarithmus numeri 20000 idem est ac logarithmus

mus binarii præfixo Indice 4. & differentia Logarithmorum 20000 & 20002, idem eſt ac differentia Logarithmorum pro numeris 10000 & 10001, ſcil. 0, 00004 34272 7687. Hæc differentia ſi per 4 z ſeu 80004 dividatur

Quotiens $\frac{y}{4z}$ erit — — —	0, 00000 00005 42813
Huic quoto addatur log. numeri Geometrici medii, ſumma	4, 30105 17093 02416
	4, 30105 17098 45230

erit Logarithmus numeri 20001. Hinc patet, ut habeatur logarithmus ad quatuordecim loca non opus eſſe producere quotum ultra ſex loca. At ſi logarithmus ad decem tantum figurarum loca habere velis, ut à *Vlacquo* in ſuis Tabulis factum eſt, duæ primæ quotientis notæ ſufficiunt. Et ſi hac methodo computentur Logarithmi pro numeris ſupra 20000; labor omnis vix pluris erit, quam qui in exſcribendis numeris impenditur. Hæc Series ex iis quæ ab *Halleio* inventæ ſunt, facile ſequitur, qui autem plura de iis ſcire cupit, Præfatum Tractatum adeat & diſcat.

FINIS.

Fig. 1.

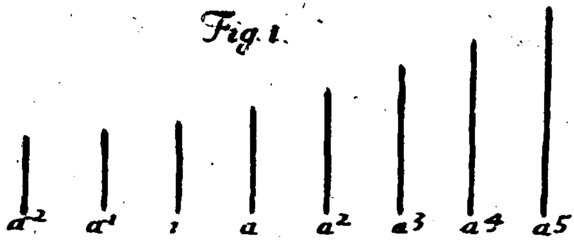


Fig. 2.

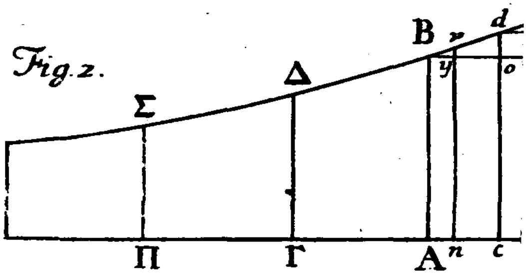
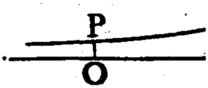


Fig. 3.



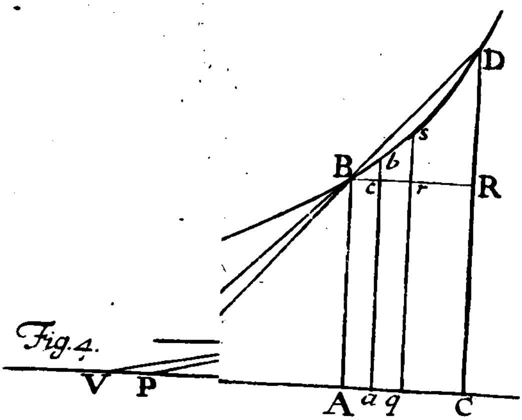


Fig. 4.

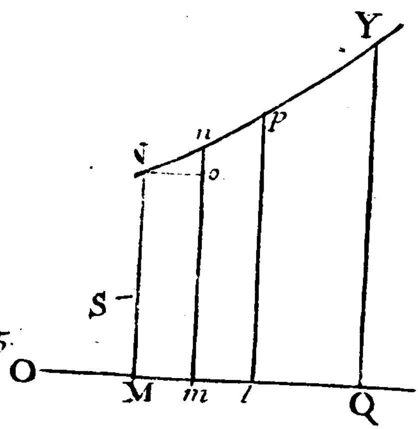


Fig. 5.

10 The Caſe of Naaman conſidered. A ... before the Univerſity of Oxford, by Richard Brown, B.D. Fellow of Trinity College.

11 Theodoſii Sphæricorum libri tres, Græce & Latine. Cura Joſ. Hunt è Coll. Bal.

12 The true Intellectual Syſtem of the Univerſe, by Ralph Cudworth, D.D. 2 vol. 4to.

13 Two