EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBRI PRIORES SEX,

ITEM

UNDECIMUS & DUODECIMUS.

Ex Versione Latina

FREDERICI COMMANDINI.

QUIBUS ACCEDUNT.

Trigonometriæ Planæ & Sphæricæ Elementa.

Item Tractatus de Natura & Arithmetica Logarithmorum.

In usum Juventutis Academicæ.

EDITIO QUINTA, Auctior & Emendatior.

OXONIÆ,
E THEATRO SHELDONIANO, MDCCXLVII. 1747
Impensis *Ric. Clements* Bibliop. *Oxon.*
Prostat apud *J.* & *J. Knapton, S. Birt,* & *J.* & *J. Rivington,*
Bibliop. *London.*

Imprimatur,

BER. GARDINER,

Vic. Can. *OXON.*

March 25. 1715.

PRÆFATIO.

P*OST tot nova Geometriæ Elementa, non ita pridem in lucem emissa, est fortasse quod miretur Tyro Mathematicus, annosa hæc, & (ut quibusdam videntur) obsoleta* Euclidis *ϛοιχεῖα è prelo denuo prodire: præsertim cum non pauca in illis vitia detexisse sibi visi sint, qui Geometriam Elementarem novâ quadam methodo excolendam proponunt. Hi enim Lyncei Philosophi* Euclidis *Definitiones parum perspicuas, demonstrationes vix evidentes, res omnes malo ordine dispositas, aliasque mendas innumeras, per omnem antiquitatem ad sua usque tempora latentes, se invenisse jactant.*

At tantorum virorum pace, audacter assero, Euclidem ab iis immerito reprehensum esse, ejusque Definitiones distinctas & claras, è primis & simplicioribus principiis petitas esse, & conceptibus nostris faciliores; demonstrationes Elegantes perspicuas & concinnas; ratiocinandi vim adeo evidentem & nervosam, ut facile inducar credere obscuritatem istam à sciolis illis toties insimulatam, confusis potius & perplexis eorum ideis, quam demonstrationibus ipsis imputandum esse. Et utcunque nonnulli querantur de malâ rerum dispositione, & iniquo ordine, quem tenet Euclides; aliam tamen methodum magis idoneam, & discentibus faciliorem inter omnia hoc genus scripta invenio nullam.

Non meum est hîc loci hypercriticis Horum captiunculis sigillatim respondere: sed in his Elementis vel mediocriter versato, statim patebit, Calumniatores hos suam potius oscitantiam monstrare, quam veros in nostro authore lapsus arguere; imo ne hoc quidem dicere vereor, quod vix, & ne vix quidem unum, aut alterum è tot novis systematibus inveniri potest, in quibus plures non sunt labes, imo fœdiores paralogismi, quam in Euclidem vel fingere potuerunt.

Post tot infelices in Geometriâ reformandâ conatus, quidam non infimi Geometræ Elementa de novo construere non ausi, ipsum Euclidem omnibus aliis Elementorum Scriptoribus merito prælutterunt, eique edendo suas curas impenderunt; hi tamen ipsi nescio quibus opinionibus ducti, alias propositiones prorsus omittunt, aliarumque demonstrationes in pejus mutant. Inter illos eminent Tacquetus & Deschalles, quorum utrique malo quodam fato contigit, ut elegantes quasdem & in Elementis optimo jure ponendas propositiones quasi ineptas & inutiles rejecerint, quales sunt propositiones 27, 28, 29. libri sexti, cum aliis nonnullis quarum usus fortasse illos latebat. Insuper quandocunque ipsas Euclidis demonstrationes deserunt, multum in argumentando peccant, & à concinnitate Veterum recedunt.

In libro quinto demonstrationes Euclidis in totum repudierunt, & Proportionis definitionem aliis terminis conceptam attulerunt; at quæ unam tantum è duabus proportionalium speciebus comprehendit, & quantitatibus commensurabilibus solummodo competit: nihilominus suas, quæ sunt de proportione, demonstrationes omni quantitati tam

incom-

incommensurabili quam commensurabili in sequentibus libris applicant. Hunc tam turpem lapsum nec Logici nec Geometræ facile condonassent, nisi hi authores in aliis suis scriptis de Scientiis Mathematicis benè meruissent. Hoc quidem commune est iis vitium cum omnibus hodiernis Elementorum Scriptoribus, qui in eundem impingunt scopulum, & ut suam in hac materia ostentent peritiam, authorem nostrum in re minime culpandâ imo laudandâ reprehendunt; Quantitatum proportionalium definitionem intelligo: in quâ intellectu facilem proportionalium proprietatem exponit, quæ quantitatibus omnibus tam incommensurabilibus quam commensurabilibus æque convenit, & à quâ cæteræ omnes proportionalium proprietates facile consequuntur.

Hujus proprietatis demonstrationem in Euclide desiderant Egregii hi Geometræ, atque defectum demonstratione suâ supplendum suscipiunt. Hic iterum contemplari licet insignem eorum in Logicâ peritiam, qui definitionis nominis demonstrationem expectant: talis enim est hæc Euclidis definitio; qui illas quantitates proportionales vocat, quæ conditiones in definitione suâ allatas obtinent. Quidni primo Elementorum authori licebat, quælibet nomina quantitatibus hæc requisita habentibus, arbitrio suo affigere? Licebat proculdubio; suo igitur utitur jure, & eas proportionales vocat.

Sed operæ pretium erit, methodum, quâ hanc proprietatem demonstrare conantur, perpendere. Affectionem quandam uni tantum proportionalium generi, viz. commensurabilium, congruentem assumunt; & exinde multis ambagibus longâque conclusionum

clusionum serie universalem, quam Euclides posuit, proportionalium proprietatem deducunt; quod certe tam methodo quam argumentationis regulis satis alienum esse videtur. At longe rectius fecissent, si proprietatem universalem ab Euclide assignatam primo posuissent, & exinde particularem illam & uni tantum proportionalium speciei congruentem deduxissent. Quoniam vero hanc respuerunt methodum, talem demonstrationem ad definitiones libri quinti attexere libuit. Qui Euclidem ulterius defensum videre cupiunt, consulant eruditas & summo judicio conscriptas Lectiones Mathematicas Cl. Barovii an. 1666.

Cum vero tanti Geometræ incidit mentio, præterire non possum Elementa ab eo edita, in quibus plerumque ipsius Euclidis constructiones & demonstrationes retinet, ne unâ quidem omissa propositione. Hinc oritur major in demonstrando vis, pulchrior construendi methodus, & ubique Veterum Geometrarum genius clarius elucet, quam in libris istius generis fieri solet. Plura præterea Corollaria & Scholia adjecit, non modo breviori sequentium demonstrationi inservientia, verum etiam aliis in rebus perutilia.

Nihilominus, demonstrationes ejus eâ brevitate laborant, tot symbolis notisque implicantur, ut in Geometriâ parum versato difficiles & obscuræ fiant. Multæ propositiones quæ ipsum Euclidem legenti perspicuæ viderentur, Algebraicâ hac demonstrandi methodo tyronibus nodosæ & vix intelligibiles redduntur; qualis est V. G. 13. primi Elementi. Demonstrationum, quas in Elemento secundo attulit, difficilis admodum tyronibus est intelligentia; re-

ctius

ctius multo Euclides ipse earum evidentiam (ut in re Geometricâ fieri debet) à figurarum contemplatione petit. Scientiarum omnium Elementa simplicissimâ methodo tradenda sunt, nec symbolis nec notis nec obscuris principiis aliunde petitis involvenda.

Ut Elementa Barovii nimiâ brevitate, sic ea, quæ à Clavio traduntur, molestâ prolixitate peccant. Scholiis enim Commentariisque abundat nimis & luxuriat. Vix equidem arbitror Euclidem tam obscuram esse, ut tantâ farraigne notarum indigeat; nec dubito quin tyrones omnes Euclidem ipsum omnibus suis Commentatoribus faciliorem inventuri sint. In demonstrationibus Geometricis ut nimia brevitas tenebras parit, sic nimia verbositas plus tædii & confusionis quam lucis affert.

Hisce præcipue inductus rationibus, prima sex Euclidis Elementa cum undecimo & duodecimo, ex versione Frederici Commandini *in usum Juventutis Celeberrimæ hujus Academiæ per se edenda curavi; à cæteris abstinui tum quia hæc, quæ jam damus, ad alias plerasque Matheseos partes, quæ nunc vulgo traduntur, intelligendas, sufficiant, tum etiam quia omnia Euclidis opera, Græce & Latine nitidissimis Characteribus adornata summaque cura & fide emendata nuper è prælo Academico prodiere.*

Porro in gratiam eorum, qui Geometriam Elementarem ad Praxes vitæ commodis inservientes applicare desiderant, Trigonometriæ Planæ & Sphæricæ compendium adjunxi, cujus Artis ope, magnitudines Geometricæ mensurantur, ipsarumque dimensiones numeris subjiciuntur.

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER PRIMUS.

DEFINITIONES.

I.

PUnctum est, cujus nulla est pars, vel quod magnitudinem nullam habet.

II.

Linea vero est longitudo latitudinis expers.

III.

Lineæ termini sunt puncta.

IV.

Recta linea est, quæ ex æquo suis interjicitur punctis.

V.

Superficies est id, quod longitudinem, & latitudinem tantum habet.

VI.

Superficiei termini sunt lineæ.

VII.

Plana superficies est quæ ex æquo suis interjicitur lineis.

VIII.

Planus angulus est duarum linearum in plano sese contingentium, & non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio.

IX.

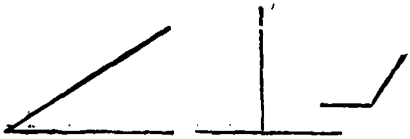
Quando autem quæ angulum continent rectæ lineæ fuerint, rectilineus angulus appellatur.

X

Cum vero recta linea ſuper rectâ lineâ inſiſtens, eos, qui deinceps ſunt angulos, æquales inter ſe fecerit, rectus eſt uterque æqualium angulorum: & quæ inſiſtit recta linea perpendicularis vocatur ad eam, cui inſiſtit.

XI.

Obtuſus angulus eſt, qui major eſt recto.



XII.

Acutus autem, qui recto eſt minor.

XIII.

Terminus eſt, quod alicujus extremum eſt.

XIV.

Figura eſt, quæ aliquo, vel aliquibus terminis continetur.

XV.

Circulus eſt figura plana, una linea contenta, quæ circumferentia appellatur: ad quam ab uno puncto intra figuram exiſtente omnes rectæ lineæ pertingentes ſunt æquales.

XVI.

Hoc autem punctum centrum circuli nuncupatur.

XVII.

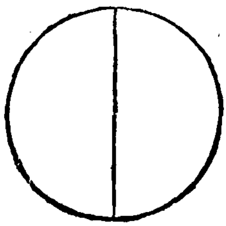
Diameter circuli eſt recta quædam linea per centrum ducta, & ex utraque parte à circumferentia circuli terminata, quæ quidem, & bifariam circulum ſecat.

XVIII.

Semicirculus eſt figura, quæ continetur diametro, & ea quæ ex ipſa circuli circumferentia intercipitur.

XIX.

Segmentum circuli eſt figura, quæ recta linea, & circuli circumferentia continetur.



XX.

XX.

Rectilineæ figuræ ſunt, quæ rectis continentur lineis.

XXI.

Trilateræ quidem, quæ tribus.

XXII.

Quadrilateræ, quæ quatuor.

XXIII.

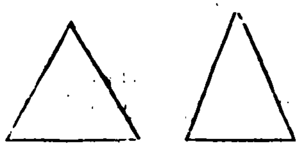
Multilateræ vero, quæ pluribus, quam quatuor rectis lineis comprehenduntur.

XXIV.

Trilaterarum figurarum æquilaterum eſt triangulum, quod tria latera habet æqualia.

XXV.

Iſoſceles, ſive æquicrure, quod duo tantum æqualia latera habet.

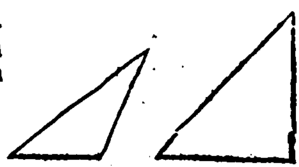


XXVI.

Scalenum vero eſt, quod tria inæqualia habet latera.

XXVII.

Ad hæc, trilaterarum figurarum, rectangulum quidem eſt triangulum, quod rectum angulum habet.



XXVIII.

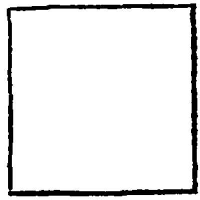
Obtuſangulum eſt, quod obtuſum habet angulum.

XXIX.

Acutangulum vero, quod tres acutos angulos habet.

XXX.

Quadrilaterarum figurarum quadratum eſt, quod & æquilaterum eſt, & rectangulum.



XXXI.

Altera parte longior figura eſt, quæ rectangula quidem æquilatera vero non eſt.

XXXII.

Rhombus, quæ æquilatera quidem, ſed rectangula non eſt.

XXXIII.

Rhomboides, quæ, & oppoſita latera, & oppoſitos angulos inter ſe æquales habens, neque æquilatera eſt, neque rectangula.

XXXIV.

Præter has autem reliquæ quadrilateræ figuræ trapezia vocentur.

XXXV.

Parallelæ, ſeu æquidiſtantes rectæ lineæ ſunt, quæ cum in eodem ſint plano, & ex utraque parte in infinitum producantur, in neutram partem inter ſe conveniunt.

POSTULATA.

I.

Poſtuletur à quovis puncto ad quodvis punctum rectam lineam ducere.

II.

Rectam lineam terminatam, in continuum & directum producere.

III.

Quovis centro, & intervallo circulum deſcribere.

AXIOMATA.

AXIOMATA.

I.

Quæ eidem æqualia, & inter ſe ſunt æqualia.

II.

Et ſi æqualibus æqualia adjiciantur tota ſunt æqualia.

III.

Et ſi ab æqualibus æqualia auferantur, reliqua ſunt æqualia.

IV.

Et ſi inæqualibus æqualia adjiciantur, tota ſunt inæqualia.

V.

Et ſi ab inæqualibus æqualia auferantur, reliqua ſunt inæqualia.

VI.

Et quæ ejuſdem duplicia ſunt, inter ſe ſunt æqualia.

VII.

Et quæ ejuſdem dimidia ſunt, inter ſe ſunt æqualia.

VIII.

Et quæ ſibi mutuo congruunt, inter ſe ſunt æqualia.

IX.

Totum eſt ſua parte majus.

X.

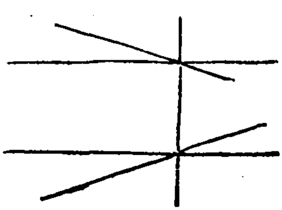
Duæ rectæ lineæ ſpatium non comprehendunt.

XI.

Omnes anguli recti inter ſe æquales ſunt.

XII.

Et ſi in duas rectas lineas recta linea incidens, interiores, & ex eadem parte angulos duobus rectis minores fecerit, rectæ lineæ illæ in infinitum productæ, inter ſe conveniunt ex ea parte, in qua ſunt anguli duobus rectis minores.



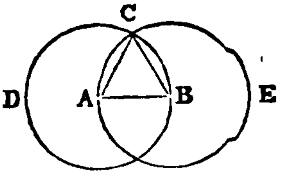
Not. *Cum plures anguli ad unum punctum exiſtunt deſignatur quilibet tribus literis, quarum illa quæ eſt ad verticem anguli, in medio ponitur.* V.G. *in figura Prop.* 13. *libri primi angulus à rectis* AB, BC *comprehenſus dicitur angulus* ABC, *& angulus à rectis* AB, BE *contentus dicitur angulus* ABE.

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

Super datâ rectâ lineâ terminatâ, triangulum æquilaterum constituere.

Sit data recta linea terminata A B, oportet super ipsa A B triangulum æquilaterum constituere. Centro quidem A intervallo autem A B circulus describatur B C D [a]. Et rursus centro B, intervalloque B A describatur circulus A C E [a], & a puncto C, in quo circuli se invicem secant, ad A B ducantur rectæ lineæ C A C B [b]. Quoniam igitur A centrum est circuli D B C, erit A C ipsi A B [c] æqualis, rursus quoniam B circuli C A E est centrum, erit B C æqualis B A: ostensa est autem & C A æqualis A B: utraque igitur ipsarum C A C B ipsi A B est æqualis. Quæ autem eidem sunt æqualia, & inter se æqualia sunt. Ergo C A ipsi C B est æqualis tres igitur C A A B, B C inter se sunt æquales; ac propterea triangulum æquilaterum est A B C, & constitutum est super data recta linea terminata A B. quod fecisse oportebat.

a 3. Post.
b 1. Post.
c 15. Def.

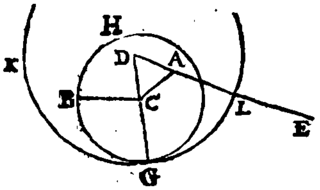


PROP. II. PROBL.

Ad datum punctum, data rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere

Sit datum quidem punctum A, data vero recta linea B C. oportet ad A punctum, ipsi B C rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere. Ducatur à puncto A ad C recta linea A C [a]: & super ipsâ constituatur triangulum æquilaterum D A C [b]. producanturque in directum ipsis D A D C rectæ lineæ A E C G [c]. & centro quidem C, intervallo autem B C circulus B G H describatur [d]. Rursusque centro D, & intervallo D G describatur circulus G K L. Quoniam igitur punctum C centrum est B G H circuli, erit B C ipsi C G æqualis [e]. Et rursus quoniam D centrum est circuli G K L, erit D L æqualis D G: quarum D A est æqualis D C. reliqua igitur A L reliquæ G C est æqualis [f]. Ostensa autem

a Postul. 1.
b Prima hujus.
c Postul. 2.
d 3. Post.
e Def. 15.
f Axiom. 3.

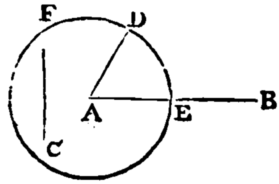


autem est B C æqualis C G. Quare utraque ipsarum A L B C est æqualis ipsi C G. Quæ autem eidem æqualia sunt & inter se sunt æqualia. Ergo, & A L est æqualis B C. Ad datum igitur punctum A datæ rectæ lineæ B C æqualis posita est A L. Quod facere oportebat.

PROP. III. PROBL.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus à majore minori æqualem abscindere.

Sint datæ duæ rectæ lineæ inæquales A B & C; quarum major sit A B. oportet à majore A B minori C æqualem rectam lineam abscindere. Ponatur ad A punctum ipsi C æqualis recta linea A D [a], & centro quidem A, intervallo autem A D circulus describatur D E F [b]. Et quoniam A centrum est D E F circuli, erit A E ipsi A D æqualis. Sed & C æqualis A D. Utraque igitur ipsarum A E, C ipsi A D æqualis erit. Quare & A E ipsi C est æqualis [c]. Duabus igitur datis rectis lineis inæqualibus A B & C à majore A B minori C æqualis Abscissa est: Quod fecisse oportebat.

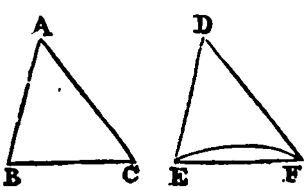


[a] Per antecedentem.
[b] Post. 3.
[c] Axiom. 1.

PROP. IV. THEOR.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem, & angulum angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continetur: Et basim basi æqualem habebunt; & triangulum triangulo æquale erit; & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur.

Sint duo triangula A B C D E F, quæ duo latera A B A C duobus lateribus D E D F æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus quidem A B lateri D E æquale, latus vero A C ipsi D F; & angulum B A C angulo E D F æqualem. Dico, & basim B C basi E F æqualem esse, & triangulum A B C æquale triangulo D E F, & reliquos angulos reliquis angulis æquales,



quales, alterum alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur; nempe angulum A B C angulo D E F: & angulum A C B angulo D F E. Triangulo enim A B C applicato ipſi D E F, & puncto quidem A poſito in D, recta vero linea A B in ipſa D E: & punctum B puncto E congruet; quod A B ipſi D E ſit æqualis. Congruente autem A B ipſi D E; congruet & A C recta linea rectæ lineæ D F cum angulus B A C ſit æqualis angulo E D F. Quare, & C congruet ipſi F; eſt enim recta linea A C æqualis rectæ D F. Sed, & punctum B congruebat puncto E. Ergo, & baſis B C baſi E F congruet. Nam ſi puncto quidem B congruente ipſi E, C vero ipſi F; baſis B C baſi E F non congruit; duæ rectæ lineæ ſpatium comprehendent: quod [a] fieri non poteſt. Congruet igitur B C baſis, baſi E F, & ipſi æqualis erit. Quare & totum A B C triangulum congruet toti triangulo D E F, & ipſi erit æquale; & reliqui anguli reliquis angulis congruent, & ipſis æquales [b] erunt. Videlicet angulus A B C angulo D E F, & angulus A C B angulo D F E. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, habeant autem & angulum angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continetur: & baſim baſi æqualem habebunt; & triangulum triangulo æquale erit; & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur: quod oſtendere oportebat.

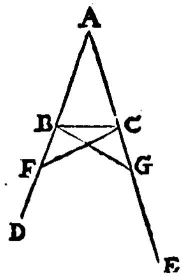
a Ax. 10.
b Axiom. 8.

PROP. V. THEOR.

Iſoſcelium triangulorum qui ad baſim ſunt anguli inter ſe ſunt æquales, & productis æqualibus rectis lineis anguli qui ſunt ſub baſi inter ſe æquales erunt.

Sit iſoſceles triangulum A B C; habens A B latus lateri A C æquale, & producantur in directum ipſis A B A C rectæ lineæ B D C E. Dico angulum quidem A B C angulo A C B, angulum vero C B D angulo B C E æqualem eſſe. Sumatur enim in linea B D, quodvis punctum F; atque à majore A E minori A F æqualis [a] auferatur A G; junganturque F C, G B. Quoniam igitur A F eſt æqualis A G; A B vero ipſi A C; duæ F A A C, duabus G A A B æquales ſunt, altera alteri; & angulum F A G communem continent, baſis igitur F C baſi G B eſt [b] æqualis, & triangulum A F C æquale triangulo A G B; & reliqui anguli, reliquis angulis æquales erunt, alter alteri; quibus æqualia latera

a 3. hujus.
b 4. hujus.



latera ſubtenduntur: Videlicet angulus quidem ACF æqualis angulo ABG; angulus vero AFC angulo AGB. Et quoniam tota AF toti AG eſt æqualis; quarum AB eſt æqualis AC; erit [c] & reliqua BF reliquæ CG æqualis. Oſtenſa eſt autem FC æqualis GB. duæ igitur BF, FC duabus CG GB æquales ſunt, altera alteri; & angulus BFC æqualis angulo CGB: eſtque baſis ipſorum BC communis. Ergo & triangulum BFC triangulo CGB æquale erit; & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri; quibus æqualia latera ſubtenduntur. Angulus igitur FBC eſt æqualis angulo GCB; & angulus BCF angulo CBG. Itaque quoniam totus ABG angulus toto angulo ACF æqualis oſtenſus eſt, quorum angulus CBG eſt æqualis ipſi BCF: erit reliquus [d] ABC reliquo ACB æqualis; & ſunt ad baſim ABC trianguli: oſtenſus autem eſt & FBC angulus æqualis angulo GCB; qui ſunt ſub baſi. Iſoſcelium igitur triangulorum, qui ad baſim ſunt anguli inter ſe ſunt æquales, & productis æqualibus rectis lineis anguli, qui ſunt ſub baſi, inter ſe æquales erunt. Quod oſtendiſſe oportebat.

[c] Axiom. 3.

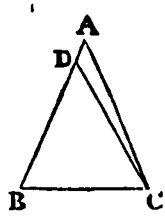
[d] Axiom. 3.

Cor. Hinc omne triangulum æquilaterum eſt quoque æquiangulum.

PROP. VI. THEOR.

Si trianguli duo anguli inter ſe ſint æquales, & æquales angulos ſubtendentia latera inter ſe æqualia erunt.

Sit triangulum ABC, habens angulum ABC angulo ACB æqualem. Dico & AB latus lateri AC æquale eſſe: Si enim inæqualis eſt AB ipſi AC; altera ipſarum eſt major. Sit major AB; atque à majori AB minori AC æqualis [a] auferatur DB; & DC jungatur. Quoniam igitur DB eſt æqualis ipſi AC; communis autem BC: erunt duæ DB BC duabus AC CB æquales, altera alteri; & angulus DBC æqualis angulo ACB ex hyp. Baſis igitur DC baſi AB eſt [b] æqualis, & triangulum DBC æquale triangulo ACB, minus majori; quod eſt abſurdum. Non igitur inæqualis eſt AB ipſi AC. Ergo æqualis erit. Si igitur trianguli duo anguli inter ſe ſint æquales, & æquales angulos ſubtendentia latera inter ſe æqualia erunt: quod monſtraſſe oportuit.



[a] 3. hujus.

[b] 4. hujus.

Cor. Hinc omne triangulum æquiangulum eſt quoque æquilaterum.

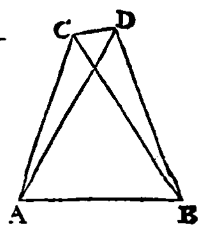
PROP.

PROP. VII. THEOR.

In eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis, aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri non constituentur ad aliud atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdem quos prima recta linea, terminos habentes.

Si enim fieri potest, in eadem recta linea AB duabus eisdem rectis lineis AC CB, aliæ duæ rectæ lineæ AD. DB æquales, altera alteri constituantur ad aliud atque aliud punctum C & D, ad easdem partes ut ad C & D, eosdem habentes terminos A & B quos primæ rectæ lineæ, ita ut CA quidem sit æqualis DA, eundem, quem ipsa terminum, habens A; CB vero sit æqualis DB, eundem habens B terminum; & CD jungatur. Itaque quoniam AC est æqualis AD; erit, & angulus ACD angulo ADC æqualis *. Major igitur est ADC angulus angulo BCD. Quare angulus BDC angulo BCD multo major erit. Rursus quoniam CB est æqualis DB & angulus BDC æqualis erit angulo BCD: ostensus autem est ipso multo major; quod fieri non potest. Non igitur in eadem recta linea duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri constituentur ad aliud atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdem, quos primæ rectæ lineæ, terminos habentes; quod ostendisse oportebat.

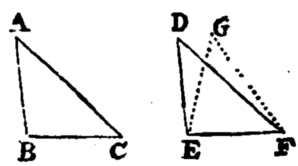
* 5. hujus.



PROP. VIII. THEOR.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem & basim basi æqualem; angulum quoque, qui æqualibus lateribus continetur, angulo æqualem habebunt.

Sint duo triangula ABC, DEF, quæ duo latera AB, AC, duobus lateribus DE DF æqualia habeant alterum alteri; ut sit AB quidem æquale DE; AC vero ipsi DF; habeant autem, & basim BC basi EF æqualem.



Dico

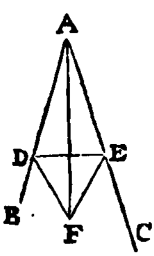
Dico angulum quoque BAC angulo EDF æqualem esse. Triangulo enim ABC applicato ipsi DEF triangulo, & puncto quidem B posito in E; recta vero linea BC in EF: congruet & C punctum puncto F, quoniam BC ipsi EF est æqualis. Itaque congruente BC ipsi EF; congruent & BA AC ipsis ED DF. si enim basis quidem BC basi EF congruit; latera autem BA AC lateribus ED DF non congruunt, sed situm mutant; ut EG GF: constituentur in eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis, aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri, ad aliud atque aliud punctum; ad easdem partes; eosdem habentes terminos. non constituuntur autem; ut demonstratum [a] est. non igitur, si basis BC congruit basi EF, non congruent & BA AC latera lateribus ED DF. congruent igitur. Quare & angulus BAC angulo EDF congruet, & ipsi erit æqualis. Si igitur duo triangula, duo latera, duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem & basim basi æqualem: angulum quoque æqualibus lateribus contentum angulo æqualem habebunt: quod demonstrare opportebat.

[a] per 7. hujus.

PROP. IX. PROBL.

Datum angulum rectilineum bifariam secare.

Sit datus angulus rectilineus BAC; itaque oportet ipsum bifariam secare. Sumatur in linea AB quodvis punctum D; & à linea AC ipsi AD æqualis [a] auferatur AE; junctaque DE constituatur super ea [b] triangulum æquilaterum DEF; & AF jungatur. Dico angulum BAC à recta linea AF bifariam secari. Quoniam enim AD est æqualis AE: communis autem AF. duæ DA AF duabus EA AF æquales sunt, altera alteri; & basis DF æqualis basi EF. angulus [c] igitur DAF angulo EAF est æqualis. quare datus angulus rectilineus BAC à recta linea AF bifariam sectus est; quod facere oportebat.



[a] 3. hujus.
[b] 1. hujus.
[c] 8. hujus.

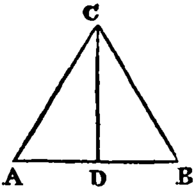
PROP. X. PROBL.

Datam rectam lineam terminatam bifariam secare.

Sit data recta linea terminata AB; oportet ipsam AB bifariam secare. constituatur super [a] ea triangulum æquilaterum ABC;

[a] 1. hujus.

b 9. hujus. ABC; & secetur ACB angulus [b] bifariam recta linea CD. Dico AB rectam lineam in puncto D bifariam secari. Quoniam enim AC est æqualis CB; communis autem CD; duæ AC CD duabus BC CD æquales sunt; altera alteri; & angulus ACD æqualis angulo BCD. basis igi-

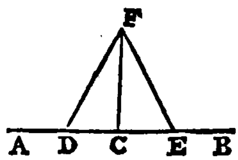


c 4. hujus. tur AD basi BD est [c] æqualis. Et ob id recta linea terminata AB bifariam secta est in puncto D: quod facere oportebat.

PROP. XI. PROBL.

Data recta linea à puncto in ipsa dato ad rectos angulos rectam lineam ducere.

Sit data recta linea AB, & datum in ipsa punctum C. oportet à puncto C ipsi AB ad rectos angulos rectam lineam ducere. Sumatur in AC quodvis punctum D: ipsique CD
a 3. hujus. æqualis [a] ponatur CE, & super
b 1. hujus. DE constituatur [b] triangulum æqualilaterum FDE, & FC jungatur. Dico datæ rectæ lineæ AB à puncto C in ipsa dato, ad rectos angulos ductam esse FC. Quoniam enim DC est æqualis CE, & FC communis; erunt



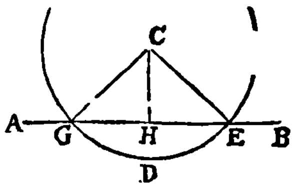
duæ DC CF duabus EC CF æquales, altera alteri; & basis DF est æqualis basi FE, angulus igitur DCF angulo ECF
c 8. hujus. est [c] æqualis, & sunt deinceps. Quando autem recta linea super rectam lineam insistens, eos qui deinceps sunt angu-
d Def. 10. los æquales inter se fecerit; rectus [d] est uterque æqualium angulorum. ergo uterque ipsorum DCF FCE est rectus. Datæ igitur rectæ lineæ AB à puncto in ipsa dato C ad rectos angulos ducta est FC recta linea. Quod fecisse oportuit.

PROP. XII. PROBL.

Super data recta linea infinita, à dato puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit data quidem recta linea infinita AB, datum vero punctum C, quod in ea non est. Oportet super data recta linea

linea infinita AB, à dato puncto C, quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam ducere. Sumatur enim ad alteras partes ipsius AB rectæ lineæ quodvis punctum D: & centro quidem C, intervallo autem CD circulus [a] describatur EDG: & EG in H bifariam [b] secetur: junganturque CG CH CE. Dico super data recta linea infinita AB, à dato puncto C, quod in ea non est, perpendicularem CH ductam esse. Quoniam enim æqualis est GH ipsi HE, communis autem HC, duæ GH HC, duabus EH HC æquales sunt, altera alteri; & basis CG est æqualis basi CE. Angulus igitur CHG angulo CHE est [c] æqualis, & sunt deinceps. cum autem recta linea super rectam lineam insistens, eos qui deinceps sunt angulos, æquales inter se fecerit; rectus [d] est uterque æqualium angulorum & quæ insistit recta linea perpendicularis appellatur ad eam, cui insistit. ergo super data recta linea infinita AB à dato puncto C, quod in ea non est, perpendicularis ducta est CH. Quod facere oportebat.

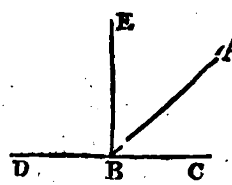


a Postul. 3.
b 10. hujus.
c 8. hujus.
d Def. 10.

PROP. XIII. THEOR.

Cum recta linea super rectam consistens lineam angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis æquales efficiet.

Recta enim linea quædam AB super rectam CD consistens angulos faciat CBA ABD. Dico CBA ABD angulos vel duos rectos esse, vel duobus rectis æquales; si enim CBA est æqualis ipsi ABD; duo recti [a] sunt; sin minus, ducatur à puncto B ipsi CD ad rectos [b] angulos BE. anguli igitur CBE EBD sunt duo recti. Et quoniam CBE, duobus CBA ABE est æqualis, communis apponatur EBD: ergo anguli CBE EBD tribus angulis CBA ABE EBD sunt [c] æquales. Rursus quoniam DBA angulus est æqualis duobus DBE EBA, communis apponatur ABC. anguli igitur DBA ABC tribus DBE EBA ABC æquales sunt. At ostensum est angulos quoque CBE EBD eisdem tribus æquales esse: quæ vero eidem sunt æqualia, [d] & inter se æqualia sunt: ergo & anguli CBE EBD [d] ipsis DBA ABC sunt æquales, suntque CBE EBD duo recti anguli



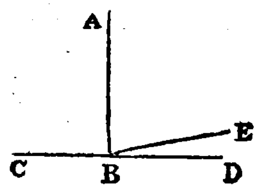
a Def. 10.
b 11. hujus.
c Axiom. 2.
d Axiom. 1.

anguli, igitur DBA ABC duobus rectis æquales erunt. ergo cum recta linea super rectam lineam consistens angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis æquales efficiet. Quod oportebat demonstrare

PROP. XIV. THEOR.

Si ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in ea duæ rectæ lineæ non ad easdem partes positæ, angulos qui deinceps sunt, duobus rectis æquales fecerint; ipsæ rectæ lineæ in directum sibi invicem erunt.

Ad aliquam enim rectam lineam AB, atque ad punctum in ea B, duæ rectæ lineæ BC BD non ad easdem partes positæ angulos, qui deinceps sunt, ABC ABD duobus rectis æquales faciant. Dico BD ipsi CB in directum esse. si enim BD non est in directum ipsi CB, sit ipsi CB in directum BE. Quoniam igitur recta linea AB super rectam CBE consistit; anguli ABC ABE [a] duobus rectis sunt æquales. Sed & angnli ABC ABD sunt æquales duobus rectis. Anguli igitur CBA ABE ipsis CBA ABD æquales erunt. Communis auferatur ABC. Ergo reliquus ABE reliquo ABD est æqualis, minor majori quod fieri non potest. Non igitur BE est in directum ipsi BC. Similiter ostendemus neque aliam quampiam esse, præter BD. Ergo CB ipsi BD in directum erit. Si igitur ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in ea duæ rectæ lineæ non ad easdem partes positæ angulos, qui deinceps sunt, duobus rectis æquales fecerint, ipsæ rectæ lineæ in directum sibi invicem erunt. Quod demonstrare oportebat.

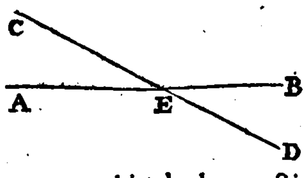


[a] 13. hujus.

PROP. XV. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ se invicem secuerint, angulos qui ad verticem sunt, inter se æquales efficient.

Duæ enim rectæ lineæ AB CD se invicem secent in puncto E. Dico angulum quidem AEC angulo DEB; angulum vero CEB angulo AED æqualem esse. Quoniam enim recta linea AE super rectam CD consistens angulos facit CEA AED; erunt hi [a] duobus rectis æquales



[a] 13. hujus.

æquales. Rursus quoniam recta linea DE super rectam AB consistens facit angulos AED DEB; erunt AED DEB anguli æquales [a] duobus rectis. Ostensum autem est angulos quoque CEA AED duobus rectis esse æquales. Anguli igitur CEA AED angulis AED DEB æquales sunt. Communis auferatur AED. Ergo reliquus [b] CEA reliquo BED est æqualis. Simili ratione, & anguli CEB DEA æquales ostenduntur. Si igitur duæ rectæ lineæ se invicem secuerint, angulos, qui ad verticem sunt, æquales efficient. Quod ostendere oportebat. [b] Axiom. 3.

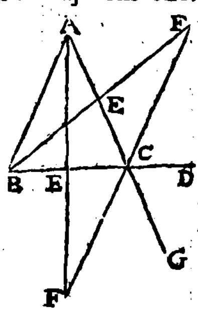
Cor. 1. Ex hoc manifeste constat duas rectas lineas se invicem secantes, facere angulos ad sectionem quatuor rectis æquales.

Cor. 2. Omnes anguli circa unum punctum constituti conficiunt angulos quatuor rectis æquales.

PROP. XVI. THEOR.

Omnis trianguli uno latere producto exterior angulus utrovis interiore, & opposito est major.

Sit triangulum ABC, & unum ipsius latus BC ad D producatur. Dico exteriorem angulum ACD utrovis interiore, & opposito, videlicet CBA, & BAC majorem esse. Secetur enim AC bifariam [a] in E, & juncta BE producatur ad F; ponaturque ipsi BE æqualis EF. Jungatur præterea FC & AC ad G producatur. Quoniam igitur AE quidem est æqualis EC, BE vero ipsi EF, duæ AE EB duabus CE EF æquales sunt, altera alteri: & angulus AEB angulo FEC est æqualis [b], ad verticem enim sunt. Basis igitur AB æqualis [c] est basi FC; & AEB triangulum triangulo FEC & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. Ergo angulus BAE est æqualis angulo ECF. Sed ECD angulus major est ipso ECF. Major igitur est angulus ACD angulo BAE. Similiter recta linea BC bifariam secta, ostendetur etiam BCG angulus, hoc est ACD angulus angulo ABC major. Omnis igitur trianguli uno latere producto exterior angulus utrovis interiore, & opposito major est. Quod oportebat demonstrare.



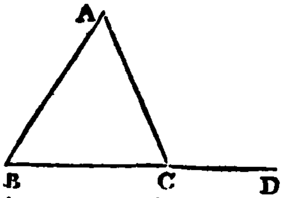
[a] 10. hujus.
[b] 15. hujus.
[c] 4. hujus.

PROP.

PROP. XVII. THEOR.

Omnis trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt, quomodocunque sumpti.

Sit triangulum ABC. Dico ipsius ABC trianguli duos angulos quomodocunque sumptos duobus rectis minores esse. Producatur enim BC ad D. Et quoniam trianguli ABC exterior angulus ACD major [a] est interiore, & opposito ABC: communis apponatur ACB. Anguli igitur ACD ACB angulis ABC ACB majores sunt. Sed ACD ACB sunt [b] æquales duobus rectis. Ergo ABC BCA duobus rectis sunt minores. Similiter demonstrabimus angulos quoque BAC ACB itemque CAB ABC duobus rectis minores esse. Omnis igitur trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt; quomodocunque sumpti. Quod demonstrare oportebat.

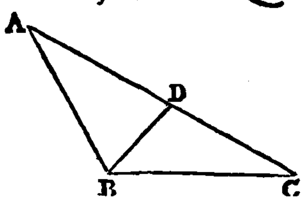


a 16. hujus.
b 13. hujus.

PROP. XVIII. THEOR.

Omnis trianguli majus latus majorem angulum subtendit.

Sit triangulum ABC habens latus AC latere AB majus. Dico, & ABC angulum angulo BCA majorem esse. Quoniam enim AC major est, quam AB, ponatur ipsi AB æqualis AD; & BD jungatur. Et quoniam trianguli BDC exterior angulus est ADB, erit is major [a] interiore, & opposito DCB. Sed ADB æqualis [b] est ipsi ABD, quod & latus AB lateri AD sit æquale, major igitur est & ABD angulus angulo ACB, quare ABC ipso ACB multo major erit. Omnis igitur trianguli majus latus majorem angulum subtendit: quod oportebat demonstrare.



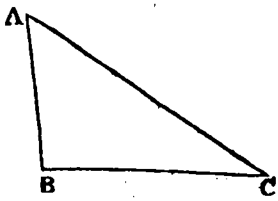
a 16. hujus.
b 5. hujus.

PROP. XIX. THEOR.

Omnis trianguli major angulus majus latus subtendit.

Sit triangulum ABC majorem habens ABC angulum angulo BCA. Dico & latus AC latere AB majus esse. Si enim non

non est majus, vel AC est æquale ipsi AB, vel ipso minus, æquale igitur non est, nam & angulus ABC angulo ACB æqualis [a] esset; non est autem. Non igitur AC ipsi AB est æquale. Sed neque minus. esset enim & angulus ABC angulo ACB minor [b]. atqui non est, non igitur AC minus est ipso AB. Ostensum autem est neque æquale esse: ergo AC ipso AB est majus. Omnis igitur trianguli major angulus majus latus subtendit. Quod oportebat demonstrare



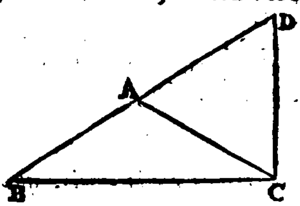
a 5. hujus.

b 18. hujus.

PROP. XX. THEOR.

Omnis trianguli duo latera reliquo majora sunt, quomodocunque sumpta.

Sit enim triangulum ABC. Dico ipsius ABC trianguli duo latera reliquo majora esse, quomodocunque sumpta: videlicet latera quidem BA AC majora latere BC; latera vero AB BC majora latere AC; & latera BC CA majora ipso AB. Producatur enim BA ad punctum D; ponaturque ipsi CA æqualis AD [a]; & DC jungatur. Quoniam igitur DA est æqualis AC erit & angulus ADC angulo ACD æqualis [b]. Sed BCD angulus major est angulo ACD. Angulus igitur BCD angulo ADC est major; Et quoniam triangulum est DCB habens BCD angulum majorem angulo BDC; majorem autem angulum majus latus subtendit [c]: erit latus DB latere BC majus. sed DB est æquale ipsis BA AC. quare latera BA AC ipso BC majora sunt. similiter ostendemus, & latera quidem AB BC majora esse latere CA: latera vero BC CA ipso AB majora. Omnis igitur trianguli duo latera reliquo majora sunt, quomodocunque sumpta. Quod ostendere oportebat.



a 3. hujus.

b 5. hujus.

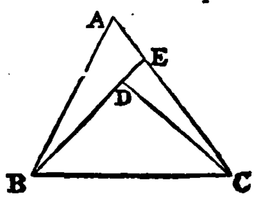
c 19. hujus.

PROP. XXI. THEOR.

Si à terminis unius lateris trianguli duæ rectæ lineæ intra constituantur, hæ reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, majorem vero angulum continebunt.

 Trian-

Trianguli enim ABC in uno latere BC à terminis B, C duæ rectæ lineæ intra constituantur BD DC. Dico BD DC reliquis duobus trianguli lateribus BA AC minores quidem esse, vero continere angulum BDC majorem angulo BAC. Producatur enim BD ad E. & quoniam omnis trianguli duo



a 20. hujus. latera reliquo sunt majora, [a] erunt trianguli ABE duo latera BA AE majora latere BE. communis apponatur EC. ergo

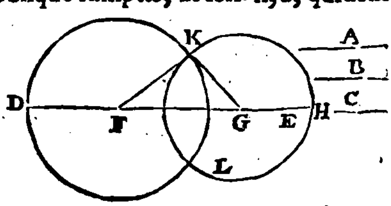
b Axiom. 4. BA AC ipsis BE EC majora [b] sunt. rursus quoniam CED trianguli duo latera CE ED sunt majora latere CD, communis apponatur DB. quare CE EB ipsis CD DB sunt majora [b]. Sed ostensum est BA AC majora esse BE EC. multo igitur BA AC ipsis BD DC majora sunt. rursus quoniam omnis trianguli exterior angulus interiore & opposito est major [c]: erit trianguli CDE exterior angulus BDC major ipso CED. Eadem ratione & trianguli ABE exterior angulus CEB ipso

c 16. hujus. BAC est major [c] sed angulus BDC ostensus est major angulo CEB. multo igitur BDC angulus angulo BAC major erit. Quare si à terminis unius lateris trianguli duæ rectæ lineæ intra constituantur, hæ reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, majorem vero angulum continebunt. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXII. PROBL.

Ex tribus rectis lineis, quæ tribus rectis lineis datis æquales sunt, triangulum constituere. Oportet autem duas reliqua majores esse, quomodocunque sumptas; quoniam omnis trianguli duo latera reliquo majora sunt, quomodocunque sumpta.

Sint tres datæ rectæ lineæ A, B, C, quarum duæ reliqua majores sint, quomodocunque sumptæ, ut scil. A, B, quidem sint majores quam C, A, C, vero majores quam B, & præterea B, C, majores quam A. Itaque oportet ex rectis lineis æqualibus ipsis A, B, C, triangulum constituere. Exponatur aliqua



recta linea DE, terminata quidem ad D, infinita vero ad E, & ponatur

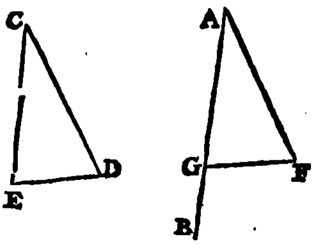
ponatur ipsi quidem A æqualis [a] DF, ipsi vero B æqualis FG, [a] & ipsi C æqualis GH: & centro F, intervallo autem FD circulus [b] describatur DKL. rursusque centro G, & intervallo GH alius circulus KLH, describatur, & jungantur KF KG. Dico ex tribus rectis lineis æqualibus ipsis A, B, C, triangulum KFG constitutum esse, quoniam enim punctum F centrum est DKL circuli; erit FD æqualis [c] FK. sed FD est æqualis A. Ergo & FK ipsi A est æqualis. rursus quoniam punctum G centrum est circuli LKH, erit GH æqualis [c] GK. sed GH est æqualis C. ergo & GK ipsi C æqualis erit. est autem & FG æqualis B: tres igitur rectæ lineæ KF FG GK tribus A, B, C, æquales sunt. Quare ex tribus rectis lineis KF FG GK, quæ sunt æquales tribus datis rectis lineis A, B, C, triangulum constitutum est KFG. Quod facere oportebat.

[a] 3. hujus.
[b] 3. Postul.
[c] Def. 15.

PROP. XXIII. PROBL.

Ad datam rectam lineam, & ad datum in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere.

Sit data quidem recta linea AB, datum vero in ipsa punctum A; & datus angulus rectilineus DCE. Oportet igitur ad datam rectam lineam AB, & ad datum in ea punctum A, dato angulo rectilineo DCE, æqualem angulum rectilineum constituere. Sumantur in utraque ipsarum CD CE quævis puncta D, E, ducaturque DE, & ex tribus rectis lineis, quæ æquales sint tribus CD DE EC triangulum [a] constituatur AFG, ita ut CD sit æqualis AF, & CE ipsi AG, & DE ipsi FG. Itaque quoniam duæ DC CE duabus FA AG æquales sunt, altera alteri, & basis DE est æqualis basi FG: erit & angulus DCE angulo FAG æqualis [b]. Ad datam igitur rectam lineam AB, & ad datum in ea punctum A, dato angulo rectilineo DCE æqualis angulus rectilineus constitutus est FAG. Quod facere oportebat.

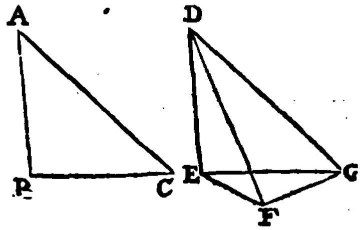


[a] 22. hujus.
[b] 8. hujus.

PROP. XXIV. THEOR.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, angulum autem angulo majorem, *qui æqualibus rectis lineis continetur: & basim basi majorem habebunt.*

Sint duo triangula ABC DEF, quæ duo latera AB AC duobus lateribus DE DF æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus quidem AB æquale lateri DE; latus vero AC æquale DF: At angulus BAC angulo EDF sit major. Dico, & basim BC basi EF majorem esse. Quoniam enim angulus BAC major est angulo



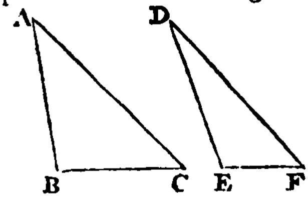
a 23. hujus. EDF, constituatur [a] ad rectam lineam DE, & ad punctum in ea D, angulo BAC æqualis an-
b 3. hujus. gulus EDG, ponaturque alterutri ipsarum AC DF æqualis [b] DG, & GE FG jungantur. itaque quoniam AB quidem est æqualis DE, AC vero ipsi DG, duæ BA AC duabus ED DG æquales sunt, altera alteri; & angulus BAC est æqualis an-
c 4. hujus. gulo EDG. ergo basis BC basi EG est [c] æqualis. rursus quoniam æqualis est DG ipsi DF; est angulus DFG angulo DGF
d 5. hujus. [d] æqualis: erit itaque DFG angulus angulo EGF major. multo igitur major est EFG angulus ipso EGF. & quoniam triangulum est EFG, angulum EFG majorem habens angu-
e 19. hujus. lo EGF; majori autem angulo latus majus subtenditur [e]; erit & latus EG latere EF majus. sed EG latus est æquale lateri BC. Ergo, & BC ipso EF majus erit. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, angulum autem angulo majorem, qui æqualibus rectis lineis continetur: & basim basi majorem habebunt. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXV. THEOR.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, basim vero basi majorem: & angulum angulo, qui æqualibus lateribus continetur, majorem habebunt.

Sint duo triangula ABC DEF, quæ duo latera AB AC duobus lateribus DE DF æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus AB æquale lateri DE, & latus AC lateri DF; basis autem BC basi EF sit major. Dico, & angulum

BAC angulo EDF majorem esse. Si enim non est major, vel æqualis est, vel minor. Æqualis autem non est angulus BAC angulo EDF: esset enim & basis BC basi EF æqualis [a]. Non est autem. Non igitur æqualis est BAC angulus angulo EDF. Sed neque minor. minor enim esset [b] & basis BC basi EF. Atqui non est. Non igitur angulus BAC angulo EDF est minor. ostensum autem est neque esse æqualem. Ergo angulus BAC angulo EDF necessario major erit. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, basim vero basi majorem; & angulum angulo qui æqualibus lateribus continetur, majorem habebunt. Quod demonstrare oportebat.



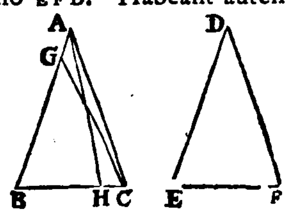
a 4. hujus.

b 24. hujus.

PROP. XXVI. THEOR.

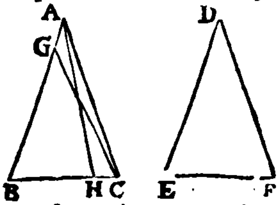
Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeant, alterum alteri, unumque latus uni lateri æquale, vel quod æqualibus adjacet angulis, vel quod uni æqualium anglorum subtenditur; & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

Sint duo triangula ABC DEF, quæ duos angulos ABC BCA duobus angulis DEF EFD æquales habeant, alterum alteri, videlicet angulum quidem ABC æqualem angulo DEF; angulum vero BCA angulo EFD. Habeant autem, & unum latus uni lateri æquale, & primo quod æqualibus adjacet angulis; nempe latus BC lateri EF. Dico, & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habere, alterum alteri, latus sc. AB lateri DE; & latus AC ipsi DF, & reliquum angulum BAC reliquo angulo EDF æqualem. Si enim inæqualis est AB ipsi DE, una ipsarum major est. Sit major AB, ponaturque GB æqualis DE; & GC jungatur. Quoniam igitur BG quidem est æqualis DE, BC vero ipsi EF, duæ GB BC duabus DE EF æquales sunt, altera alteri: & angulus GBC æqualis angulo DEF. basis igitur GC basi DF est [a] æqualis: & GBC triangulum triangulo DEF, & reliqui



a 4. hujus.

liqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. ergo GCB angulus est æqualis angulo DFE. sed angulus DFE angulo BCA æqualis ponitur. quare, & BCG angulus angulo BCA est æqualis, minor majori, quod fieri non potest. non igitur inæqualis est AB ipsi DE. ergo æqualis erit. est autem, & BC æqualis EF. Itaque duæ AB BC duabus DE EF æquales sunt, altera alteri, & angulus ABC, æqualis angulo DEF. Basis
a 4. hujus. igitur AC basi [a] DF, & reliquus angulus BAC reliquo angulo EDF est æqualis. Sed rursus sint latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur æqualia, ut AB ipsi DE. Dico rursus, & reliqua latera reliquis lateribus æqualia esse; AC quidem ipsi DF, BC vero ipsi EF: & adhuc reliquum angulum BAC reliquo angulo EDF æqualem. Si enim inæqualis est BC ipsi EF, una ipsarum major est. Sit major BC, si fieri



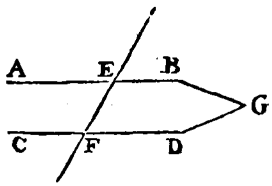
potest, ponaturque BH æqualis EF, & AH jungatur. Quoniam igitur BH quidem est æqualis EF, AB vero ipsi DE; duæ AB BH duabus DE EF æquales sunt, altera alteri, & angulos æquales continent; ergo [a] basis AH basi DF est æqualis: & ABH triangulum triangulo DEF & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. Æqualis igitur est angulus BHA
b ex hyp. angulo EFD. sed EFD est æqualis [b] angulo BCA. Ergo, & BHA angulus angulo BCA est æqualis. trianguli igitur AHC exterior angulus BHA æqualis est interiori & op-
c 16. hujus. posito BCA, quod fieri non potest [c]. quare non inæqualis est BC ipsi EF. æqualis igitur. est autem & AB æqualis DE. duæ igitur AB BC duabus DE EF æquales sunt, altera alteri; angulosque æquales continent. quare basis AC æqualis est basi DF, & ABC triangulum triangulo DEF, & reliquus angulus BAC reliquo angulo EDF est æqualis. Si igitur duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeant, alterum alteri, unumque latus uni lateri æquale, vel quod æqualibus adjacet angulis, vel quod uni æqualium angulorum subtenditur; & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt. Quod oportebat demonstrare.

PROP.

PROP. XXVII. THEOR.

Si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter se æquales fecerit, parallelæ erunt rectæ lineæ.

In duas enim rectas lineas AB CD, recta linea EF incidens alternos angulos AEF EFD æquales inter se faciat. Dico rectam lineam AB ipsi CD parallelam esse. Si enim non est parallela, productæ AB, CD, vel ad partes BD convenient, vel ad partes AC. producantur, conveniantque ad partes B D in puncto G. itaque GEF trianguli exterior angulus AEF major [a] est interiore & opposito EFG. sed & æqualis [b], quod fieri non potest. non igitur AB CD productæ ad partes BD convenient. similiter demonstrabitur neque convenire ad partes AC. quæ vero in neutras partes conveniunt, parallelæ [c] inter se sunt. parallela igitur est AB ipsi CD. Quare si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter se æquales fecerit, parallelæ inter se erunt rectæ lineæ. Quod ostendere oportebat.

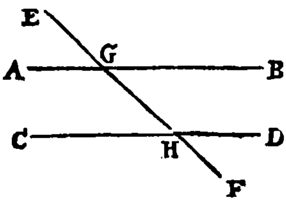


[a] 16. hujus.
[b] ex hyp.
[c] Def. 35.

PROP. XXVIII. THEOR.

Si in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori, & opposito, & ad easdem partes æqualem fecerit, vel interiores, & ad easdem partes duobus rectis æquales; parallelæ erunt inter se rectæ lineæ.

In duas enim rectas lineas AB CD recta linea EF incidens exteriorem angulum EGB interiori, & opposito GHD æqualem faciat; vel interiores & ad easdem partes BGH GHD, duobus rectis æquales. Dico rectam lineam AB rectæ CD parallelam esse. Quoniam enim EGB angulus æqualis est [a] angulo GHD, angulus autem EGB angulo AGH [b], erit & angulus AGH angulo GHD æqualis: & sunt alterni. parallela igitur est AB ipsi CD [c]. rursus quoniam anguli BGH GHD duobus rectis sunt æquales [a], & sunt AGH BGH æ-



[a] Ex hyp.
[b] 15. hujus.
[c] Ex antecedente.

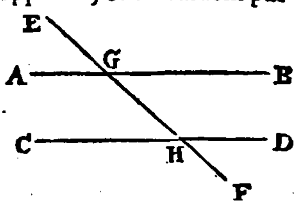
 quales

d 13. hujus. quales duobus rectis [d]: erunt anguli AGH BGH angulis BGH GHD æquales. communis auferatur BGH. reliquus igitur AGH est æqualis reliquo GHD: & sunt alterni. ergo AB ipsi CD parallela erit [e]. Si igitur in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori, & opposito, & ad easdem partes æqualem fecerit, vel interiores, & ad easdem partes duobus rectis æquales; parallelæ erunt inter se rectæ lineæ. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXIX. THEOR.

In parallelas rectas lineas recta linea incidens, & alternos angulos inter se æquales, & exteriorem interiori & opposito & ad easdem partes æqualem, & interiores, & ad easdem partes duobus rectis æquales efficiet.

In parallelas enim rectas lineas AB CD recta linea incidat EF. Dico alternos angulos AGH GHD inter se æquales efficere, & exteriorem EGB interiori, & opposito, & ad easdem partes GHD æqualem: & interiores, & ad easdem pates BGH GHD duobus rectis æquales. Si enim inæqualis est AGH ipsi GHD, unus ipsorum major est. sit major AGH. & quoniam AGH angulus major est angulo GHD; communis apponatur BGH. anguli igitur AGH BGH angulis BGH GHD majores sunt.



a 13. hujus. sed anguli AGH BGH sunt æquales duobus rectis [a]. ergo BGH GHD anguli sunt duobus rectis minores. quæ vero à minoribus, quam sunt duo recti, in infinitum producuntur

b Axiom. 12. rectæ lineæ, inter se conveniunt [b]. ergo rectæ lineæ AB CD in infinitum productæ convenient inter se. atqui non conveniunt cum parallelæ ponantur. non igitur inæqualis est AGH angulus angulo GHD. quare necessario est æqualis.

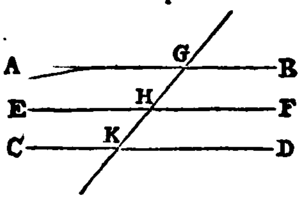
c 15. hujus. angulus autem AGH æqualis est angulo EGB [c]. ergo, & EGB ipsi GHD æqualis erit. communis apponatur BGH. anguli igitur EGB BGH sunt æquales angulis BGH GHD. sed EGB BGH æquales sunt duobus rectis: Ergo, & BGH GHD duobus rectis æquales erunt. In parallelas igitur rectas lineas recta linea incidens, & alternos angulos inter se æquales & exteriorem interiori, & opposito, & ad easdem partes æqualem; & interiores, & ad easdem partes duobus rectis æquales efficiet. Quod oportebat demonstrare.

PROP.

PROP. XXX. THEOR.

Quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, & inter se parallelæ erunt.

Sit utraque ipsarum AB CD ipsi EF parallela. Dico & AB ipsi CD parellelam esse. Incidat enim in ipsas recta linea GK. & quoniam in parallelas rectas lineas AB EF, recta linea GK incidit, angulus AGH angulo GHF est æqualis [a]. rursus quoniam in parallelas rectas lineas EF CD, recta linea incidit GK, æqualis est GHF angulus angulo GKD [a]. ostensus autem est, & angulus AGK angulo GHF æqualis. ergo, & AGK ipsi GKD æqualis erit. & sunt alterni. parallela igitur est AB ipsi CD [b]. ergo quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, & inter se parallelæ erunt. Quod oportebat demonstrare.



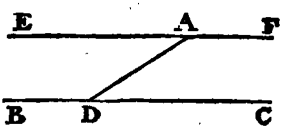
a 29. hujus.

b 27. hujus.

PROP. XXXI. PROBL.

Per datum punctum datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

Sit datum quidem punctum A, data vero recta linea BC oportet per A punctum ipsi BC rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere. Sumatur in BC quodvis punctum D, & jungatur AD: constituaturque [a] ad rectam lineam DA, & ad punctum in ipsa A, angulo ADC æqualis angulus DAE: & in directum ipsi EA recta linea AF producatur. Quoniam igitur in duas rectas lineas BC EF recta linea AD incidens alternos angulos EAD ADC inter se æquales efficit, EF ipsi BC parallela erit [b]. Per datum igitur punctum A datæ rectæ lineæ BC parallela ducta est recta linea EAF. Quod facere oportebat.



a 23. hujus.

b 27. hujus.

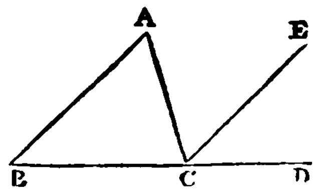
PROP. XXXII. THEOR.

Omnis trianguli uno latere producto exterior angulus duobus interioribus, & oppositis est æqualis, & trianguli tres interiores anguli duobus rectis æquales sunt.

Sit

Sit triangulum ABC: & unum ipsius latus BC in D producatur. Dico angulum exteriorem ACD duobus interioribus, & oppositis CAB ABC æqualem esse; & trianguli tres interiores angulos ABC BCA CAB duobus rectis esse æquales.

a 13. hujus. Ducatur [a] enim per punctum C ipsi AB rectæ lineæ parallela CE. & quoniam AB ipsi CE parallela est, & in ipsas incidit AC, alterni anguli BAC ACE inter se æquales sunt [b]. rursus quoniam AB parallela est CE & in ipsas



incidit recta linea BD, exterior angulus ECD interiori &

b 29. hujus. opposito ABC est æqualis [b]. ostensus autem est angulus ACE æqualis angulo BAC. quare totus ACD exterior angulus æqualis est duobus interioribus, & oppositis BAC ABC. communis apponatur ACB. anguli igitur ACD ACB tribus ABC BAC ACB æquales sunt. sed anguli ACD ACB sunt

c 13. hujus. æquales [c] duobus rectis. ergo & ACB CBA CAB duobus rectis æquales erunt. Omnis igitur trianguli uno latere producto exterior angulus duobus interioribus, & oppositis est æqualis; & trianguli tres interiores anguli duobus rectis æquales sunt. Quod demonstrare oportebat.

COROLLARIA.

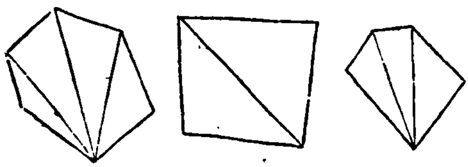
1. Omnes tres anguli cujusque trianguli simul sumpti æquales sunt tribus angulis cujusque alterius trianguli simul sumptis.
2. Si in uno triangulo duo anguli aut singuli aut simul æquales sint duobus angulis alterius trianguli, erit reliquus angulus reliquo æqualis.
3. In triangulo si unus angulus rectus sit, reliqui simul unum rectum conficiunt.
4. In triangulo Isoscele si angulus æquis cruribus contentus rectus sit, reliqui ad basim sunt semirecti.
5. In triangulo æquilatero angulus quilibet æqualis est $\frac{1}{3}$ duorum rectorum vel $\frac{2}{3}$ unius recti.

THEOREMA.

Omnes simul interiores anguli cujuscunque figuræ recti-lineæ conficient bis tot rectos demptis quatuor quot sunt latera figuræ.

Nam figura unaquæque rectilinea resolvi potest in triangula binario pauciora quam sunt ipsius figuræ latera, V. G. *si quatuor latera habeat resolvitur in duo triangula, si quinque in tria*

tria triangula, si sex in quatuor, & sic deinceps; quare per præcedentem omnes horum triangulorum anguli æquantur bis tot rectis quot sunt triangula, sed omnes horum triangulorum



anguli æquales sunt angulis figuræ interioribus; quare omnes anguli interiores figuræ æquales sunt bis tot rectis quot sunt triangula, hoc est bis tot rectis demptis quatuor quot sunt latera figuræ. Q. E. D.

THEOR. II.

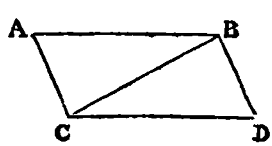
Omnes simul exteriores anguli cujusque figuræ rectilineæ conficiunt quatuor rectos.

Nam exteriores simul cum interioribus conficiunt bis tot rectos quot sunt latera figuræ; vero ex precedente Theor. omnes interiores soli conficiunt bis tot rectos demptis quatuor quot sunt latera figuræ, quare exteriores conficiunt quatuor rectos. Q. E. D.

PROP. XXXIII. THEOR.

Quæ æquales, & parallelas ad easdem partes conjungunt recta lineæ, & ipsa æquales, & parallelæ sunt.

Sint æquales, & parallelæ AB CD: & ipsas conjungant ad easdem partes rectæ lineæ AC BD. Dico AC BD æquales, & parallelas esse. Ducatur enim BC, & quoniam AB parallela est CD, in ipsaque incidit BC; alterni anguli ABC BCD æquales sunt[a]. rursus quoniam AB est æqualis CD, communis autem BC, duæ AB BC duabus BC CD sunt æquales; & angulus ABC æqualis angulo BCD; basis igitur AC basi BD est æqualis[b]: triangulumque ABC triangulo BCD:[b] & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. ergo angulus ACB angulo CBD est æqualis. & quoniam in duas rectas lineas AC BD recta linea BC incidens, alternos angulos ACB OBD æquales



[a] 29. hujus.

[b] 4. hujus.

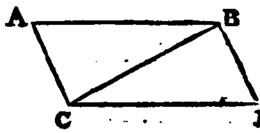
c 27. hujus. les inter se efficit, parallela est AC ipsi BD c, Ostensa autem est & ipsi æqualis. Quæ igitur æquales, & parallelas ad easdem partes conjungunt rectæ lineæ, & ipsæ æquales, & parallelæ sunt. Quod oportebat demonstrare.

Defin. *Parallelogrammum est figura quadrilatera cujus bina opposita latera sunt parallela.*

PROP. XXXIV. THEOR.

Parallelogrammorum spatiorum latera, quæ ex opposito, & anguli, inter se æqualia sunt; & diameter ea bifariam secat.

Sit parallelogrammum ABDC, cujus diameter BC. Dico ACDB parallelogrammi latera, quæ ex opposito, & angulos inter se æqualia esse; & diametrum BC ipsum bifariam secare. Quoniam enim parallela est AB ipsi CD, & in ipsas incidit recta linea BC; anguli alterni ABC BCD inter se æquales sunt a. rursus quoniam AC ipsi BD parallela est, & in ipsas incidit BC; alterni anguli ACB CBD æquales sunt



a 29. hujus. inter se a. duo igitur triangula sunt ABC CBD, quæ duos angulos ABC BCA duobus angulis BCD CBD æquales habent, alterum alteri; & unum latus uni lateri æquale, scil. quod

b 26. hujus. est ad æquales angulos, utrique commune BC. ergo, b & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem, æquale igitur est latus quidem AB lateri CD: latus vero AC ipsi BD, & angulus BAC angulo BDC æqualis. & quoniam angulus ABC est æqualis angulo BCD; & angulus CBD, angulo ACB; erit totus angulus ABD æqualis toti ACD. ostensus autem est, & angulus BAC angulo BDC æqualis. parallelogrammorum igitur spatiorum latera, quæ ex opposito, & anguli, inter se æqualia sunt. Dico etiam diametrum ea bifariam secare. Quoniam enim æqualis est AB ipsi CD communis autem BC. duæ AB BC duabus DC CB æquales sunt, altera alteri, & angulus ABC æqualis est angulo BCD;

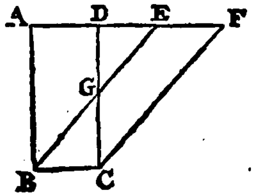
c 4. hujus. basis igitur c AC basi DB æqualis. quare, & triangulum ABC triangulo BCD æquale erit. ergo diameter BC parallelogrammum ACDB bifariam secat. Quod oportebat demonstrare.

PROP.

PROP. XXXV. THEOR.

Parallelogramma super eadem basi, & in iisdem parallelis constituta, inter se æqualia sunt.

Sint parallelogramma ABCD, EBCF super eadem basi BC, & in eisdem parallelis AF BC constituta. Dico parallelogrammum ABCD parallelogrammo EBCF æquale esse. Quoniam enim parallelogrammum est ABCD, æqualis [a] est AD ipsi BC. eadem quoque ratione, & EF est æqualis BC. quare &, AD ipsi EF æqualis erit [b]: & communis DE. tota igitur AE [c] toti DF est æqualis. est autem, & AB æqualis DC. ergo duæ EA AB duabus FD DC æquales sunt, altera alteri, & angulus FDC æqualis angulo EAB, exterior interiori [d], basis igitur EB basi FC est [e] æqualis, & EAB triangulum æquale triangulo FDC. commune auferatur DGE. reliquum igitur trapezium ABGD reliquo trapezio EGCF est æquale [f]. commune apponatur GBC triangulum. ergo totum parallelogrammum ABCD toti parallelogrammo EBCF æquale erit. Parallelogramma igitur super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta inter se æqualia sunt. Quod oportebat demonstrare.

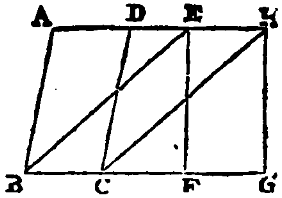


[a] 34. hujus.
[b] Axiom. 1.
[c] Axiom. 2.
[d] 29. hujus.
[e] 4. hujus.
[f] Axiom. 3.

PROP. XXXVI. THEOR.

Parallelogramma super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta inter se æqualia sunt.

Sint parallelogramma ABCD EFGH super æqualibus basibus BC FG, & in eisdem parallelis AH BG constituta. Dico parallelogrammum ABCD parallelogrammo EFGH æquale esse. Conjungantur enim BE CH. & quoniam æqualis [a] est BC ipsi FG, & FG æqualis ipsi EH; erit & BC ipsi EH æqualis. suntque parallelæ, & ipsas conjungunt BE CH; quæ autem æquales, & parallelas ad easdem partes conjungunt, æquales, & parallelæ sunt [b]. ergo EB, CH & æquales sunt, & parallelæ: quare EBCH parallelogrammum est, & æquale parallelogrammo ABCD [c]; basim enim eandem habet BC,



[a] Hyp.
[b] 33. hujus.
[c] 35. hujus.

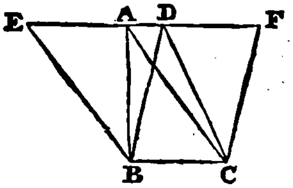
&

& in eisdem parallelis BC, AD constituitur. simili ratione, & EFGH parallelogrammum eidem parallelogrammo EBCH est æquale. ergo parallelogrammum ABCD parallelogrammo EFGH æquale erit. Parallelogramma igitur super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta inter se sunt æqualia. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXXVII. THEOR.

Triangula super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta inter se æqualia sunt.

Sint triangula ABC, DBC super eadem basi BC, & in eisdem parallelis AD BC constituta. Dico ABC triangulum triangulo DBC æquale esse. Producatur AD ex utraque parte in E, F puncta: & per B quidem ipsi CA parallela ducatur BE, a per C vero ipsi BD parallela CF. parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum EBCA DBCF, & parallelogrammum EBCA est æquale c parallelogrammo DBCF, etenim super eadem sunt basi BC, & in eisdem parelleli BC EF: estque parallelogrammi quidem EBCA dimidium b ABC triangulum, cum diameter AB ipsum bifariam secet: parallelogrammi vero DBCF dimidium b triangulum DBC; diameter enim DC ipsum bifariam secat. quæ autem c æqualium dimidia sunt inter se æqualia sunt. ergo triangulum ABC triangulo DBC est æquale. Triangula igitur super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta inter se æqualia sunt. Quod oportebat demonstrare.

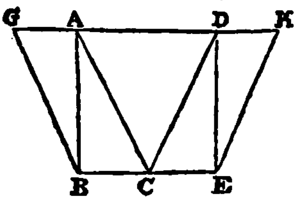


a 31. hujus.
c 35. hujus.
b 34. hujus.
c Axiom. 7.

PROP. XXXVIII. THEOR.

Triangula super basibus æqualibus, & in eisdem parallelis constituta inter se sunt æqualia.

Sint triangula ABC DCE super æqualibus basibus, BC CE & in eisdem parallelis BE AD constituta. Dico ABC triangulum DCE triangulo æquale esse. Producatur enim AD ex utraque parte in G, H puncta: & per B quidem ipsi CA parallela ducatur BG a: per E vero ducatur EH parallela ipsi DC a. parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum GBCA DCEH.



a 31. hujus.

atque

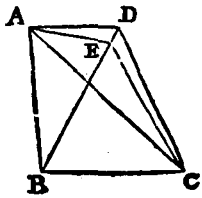
atque est parallelogrammum GBCA æquale [b] parallelogrammo DCEH: in æqualibus enim sunt basibus BC CE, & in eisdem BE GH parallelis. parallelogrammi vero GBCA dimidium [c] est ABC triangulum, nam diameter AB ipsum bifariam secat. & parallelogrammi DCEH dimidium [c] est triangulum DCE, diameter enim DE ipsum secat bifariam. quæ autem æqualium dimidia sunt [d], inter se æqualia sunt. ergo ABC triangulum triangulo DCE est æquale. Triangula igitur super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia. Quod demonstrare oportebat.

b 36. hujus.
c 34. hujus.
d Axiom. 7.

PROP. XXXIX. THEOR.

Triangula æqualia super eadem basi, & ad easdem partes constituta, in eisdem quoque sunt parallelis.

Sint æqualia triangula ABC DBC super eadem basi BC constituta, & ad easdem partes. Dico, & in eisdem parallelis esse. Ducatur enim AD. Dico AD parallelam esse ipsi BC. Si enim non est parallela, ducatur [a] per A punctum ipsi BC parallela recta linea AE, & EC ducatur. æquale igitur est ABC triangulum triangulo EBC [b], super eadem enim est basi BC, & in eisdem BC, AE parallelis. sed ABC triangulum triangulo DBC [c] est æquale. ergo & triangulum DBC æquale est ipsi EBC triangulo, majus minori, quod fieri non potest. non igitur AE ipsi BC parallela est. similiter ostendemus neque aliam quampiam parallelam esse, præter ipsam AD, ergo AD ipsi est parallela. Triangula igitur æqualia super eadem basi, & ad easdem partes constituta in eisdem quoque sunt parallelis. Quod oportebat demonstrare.



a 31. hujus.
b 37. hujus.
c Ex hyp.

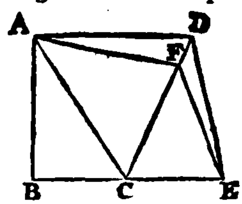
PROP. XL. THEOR.

Triangula æqualia super basibus æqualibus, & ad easdem partes constituta in eisdem quoque sunt parallelis.

Sint æqualia triangula ABC CDE super æqualibus basibus BC CE constituta. Dico etiam in eisdem esse parallelis. Ducatur enim AD. Dico AD ipsi BE parallelam esse. Nam si non est, ducatur per A ipsi BE parallela AF, [a] & FE ducatur.

a 31. hujus.

b 38. hujus. catur. triangulum igitur ABC triangulo FCE est æquale [b], cum super æqualibus basibus & in eisdem parallelis BE AF constituantur. sed triangulum ABC æquale est triangulo DCE. ergo & triangulum DCE triangulo FCE æquale erit, majus minori, quod fieri non potest. non igitur AF ipsi BE est parallela. similiter demonstrabimus neque aliam quampiam parallelam esse, præter AD. ergo AD ipsi BE parallela erit. Æqualia igitur triangula super basibus æqualibus, & ad easdem partes constituta, etiam in eisdem sunt parallelis. Quod demonstrare oportebat.



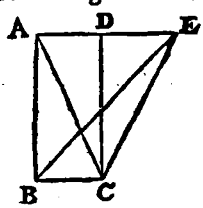
PROP. XLI. THEOR.

Si parallelogrammum, & triangulum eandem basim habeant in eisdemque sint parallelis; parallelogrammum ipsius trianguli duplum erit.

Parallelogrammum enim ABCD, & triangulum EBC, basim habeant eandem BC, & in eisdem sint parallelis BC AE. Dico parallelogrammum ABCD trianguli EBC duplum esse. Jungatur enim AC. triangulum igitur ABC triangulo

a 37. hujus. EBC est æquale [a]; namque super eadem basi BC, & in eisdem BC AE parallelis constituuntur. sed ABCD parallelogrammum duplum est trianguli

b 34. hujus. ABC [b], cum diameter AC ipsum bifariam secet. quare & ipsius EBC trianguli duplum erit. Si igitur parallelogrammum, & triangulum eandem basim habeant, & in eisdem sint parallelis; duplum erit parallelogrammum ipsius trianguli. Quod demonstrare oportebat.



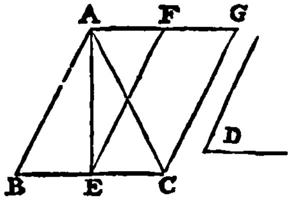
PROP. XLII. PROBL.

Dato triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

Sit datum triangulum ABC, datus autem rectilineus angulus D. Itaque oportet, dato triangulo ABC æquale parallelogrammum constituere in angulo rectilineo ipsi D æquali.

Secetur

Secetur BC bifariam [a] in E, & juncta AE, ad rectam lineam EC, atque ad punctum in ea E, constituatur angulus [b] CEF æqualis ipsi D: & per A quidem ipsi EC parallela ducatur [c] AG; per C vero ipsi FE ducatur parallela [c] CG. parallelogrammum igitur est FECG. & quoniam BE est æqualis EC, erit & ABE triangulum [d] triangulo AEC æquale, super æqualibus enim sunt basibus BE EC, & in eisdem BC AG parallelis. ergo triangulum AEC trianguli ABC est duplum. est autem, & parallelogrammum FECG duplum [e] trianguli AEC; basim enim eandem habet, & in eisdem est parallelis. æquale igitur est FECG parallelogrammum triangulo ABC habetque CEF angulum æqualem angulo D dato. Dato igitur triangulo ABC æquale parallelogrammum FECG constitutum est, in angulo CEF, qui angulo D est æqualis. Quod quidem facere oportebat.

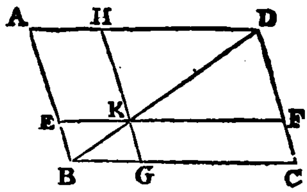


a 10. hujus.
b 23. hujus.
c 31. hujus.
d 38. hujus.
e 41. hujus.

PROP. XLIII. THEOR.

Omnis parallelogrammi spatii, eorum, quæ circa diametrum sunt, parallelogrammorum complementa inter se sunt æqualia.

Sit parallelogrammum ABCD, cujus diameter BD, & circa ipsam BD parallelogramma quidem sint FH EG, quæ vero complementa dicuntur AK KC. Dico AK complementum complemento KC æquale esse Quoniam enim parallelogrammum est ABCD, & ejus diameter BD, æquale [a] est ABD triangulum triangulo BDC. rursus quoniam HKFD parallelogrammum est, cujus diameter DK, triangulum HDK triangulo DFK æquale [a] erit. eadem ratione, & triangulum KGB triangulo KEB est æquale. cum igitur triangulum quidem BEK æquale sit triangulo BGK triangulum vero HDK ipsi DFK; erit triangulum BEK una cum triangulo HDK æquale triangulo BGK una cum DFK triangulo. est autem & totum triangulum ABD æquale toti BDC. reliquum igitur AK complementum reliquo complemento KC est æquale. Ergo omnis parallelogrammi spatii, eorum, quæ



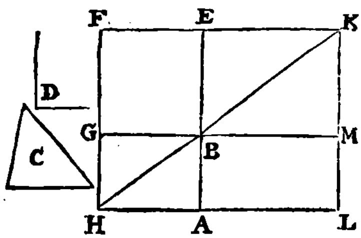
a 34. hujus.

circa diametrum ſunt, parallelogrammorum complementa inter ſe æqualia ſunt. Quod oportebat demonſtrare.

PROP. XLIV. PROBL.

Ad datam rectam lineam dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

Sit data quidem recta linea AB; datum vero triangulum C, & datus angulus rectilineus D. Oportet igitur ad datam rectam lineam, AB dato triangulo C æquale parallelogrammum applicare in angulo ipſi D æquali. Conſtituatur trian-
a 42 hujus. gulo C æquale [a] parallelogrammum BEFG, in angulo EBG qui eſt æqualis D. & ponatur BE in directum ipſi AB, producaturque FG ad H: & per A alterutri ipſarum BG EF
b 31. hujus. parallela [b] ducatur AH, & HB jungatur. Quoniam igitur in parallelas AH EF recta linea HF incidit, anguli AHF HFE
c 29. hujus. duobus rectis æquales [c] ſunt. quare BHF HFE duobus rectis ſunt minores. quæ vero à minoribus, quam ſunt duo recti, in infinitum produ-
d Axio. 12. cuntur, conveniunt [d] inter ſe. ergo HB FE productæ convenient. producantur, & convenient



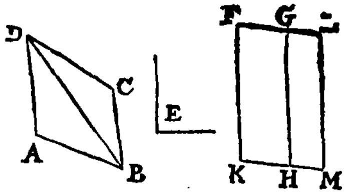
in K; perque K alterutri ipſarum EA FH parallela [b] ducatur KL, & AH GB ad L, M puncta producantur. parallelogrammum igitur eſt HLKF, cujus diameter HK, & circa HK parallelogramma quidem ſunt AG ME; ea vero quæ comple-
e 43. hujus. menta dicuntur LB BF: ergo LB ipſi BF eſt [e] æquale. ſed,
f 15. hujus. & BF æquale eſt triangulo C. quare, & LB triangulo C æquale erit. & quoniam GBE angulus æqualis [f] eſt angulo ABM, ſed & æqualis angulo D, erit & angulus ABM angulo D æqualis. Ad datam igitur rectam lineam AB, dato triangulo C æquale parallelogrammum conſtitutum eſt LB, in angulo ABM, qui eſt æqualis angulo D. Quod facere oportebat.

PROP. XLV. PROBL.

Rectilineo dato æquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo rectilineo.

Sit datum rectilineum ABCD, datus vero angulus rectilineus E. Oportet rectilineo ABCD æquale parallelogrammum

mum constituere in angulo ipsi E æquali. Conjungantur enim DB, & constituatur triangulo ADB æquale [a] parallelogrammum FH: in angulo HKF, qui est æqualis angulo E. [a] 42. hujus. deinde ad rectam lineam GH applicetur triangulo DBC æquale [b] parallelogrammum GM, in angulo GHM qui angulo E est æqualis. [b] 44. hujus. & quoniam angulus E æqualis est utrique ipsorum HKF GHM, erit & HKF angulo GHM æqualis. communis apponatur KHG, anguli igitur HKF KHG angulis KHG GHM æquales sunt. sed HKF KHG sunt æquales [c] duobus rectis. ergo, [c] 29. hujus. & KHG GHM duobus rectis æquales erunt. itaque ad aliquam rectam lineam GH, & ad datum in ea punctum H duæ rectæ lineæ KH HM non ad easdem partes positæ angulos deinceps duobus rectis æquales efficiunt;



in directum igitur [d] est KH ipsi HM. & quoniam in parallelas KM FG recta linea HG incidit, alterni anguli MHG HGF æquales [c] sunt. [d] 14. hujus. communis apponatur HGL. anguli igitur MHG HGL, angulis HGF HGL sunt æquales. at anguli MHG HGL æquales [c] sunt duobus rectis. quare & anguli HGF HGL duobus rectis æquales erunt; in directum [d] igitur est FG ipsi GL. & quoniam KF ipsi HG & æqualis est, & parallela, sed & HG ipsi ML; erit KF [e] ipsi ML & æqualis, & parallela. [e] 30. hujus. ipsasque conjungunt rectæ lineæ KM FL. ergo & KM FL æquales [f] & parallelæ sunt. parallelogrammum igitur est KFLM. [f] 33. hujus. at cum triangulum quidem ABD æquale sit parallelogrammo HF: triangulum vero DBC parallelogrammo GM; erit totum ABCD rectilineum toti parallelogrammo KFLM æquale. Dato igitur rectilineo ABCD æquale parallelogrammum constitutum est KFLM in angulo FKM, qui est æqualis angulo E dato. Quod facere oportebat.

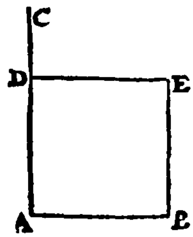
Cor. Ex jam dictis manifestum est, quomodo ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicari possit in dato angulo rectilineo.

PROP. XLVI. PROBL.

Super data recta linea quadratum describere.

Sit data recta linea AB. Oportet super ipsa AB quadratum descri-

a 11. hujus. describere. Ducatur a rectæ lineæ AB à puncto in ea dato
b 3. hujus. A ad rectos angulos AC; & ipsi AB æqualis b ponatur AD: perque punctum D ducatur c DE ipsi AB parallela, & per B
c 33. hujus. ipsi AD parallela c ducatur BE. parallelogrammum igitur est ADEB. & AB quidem est d æqualis DE,
d 34. hujus. AD vero ipsi d BE. sed BA ipsi AD est æqualis. quatuor igitur BA AD DE EB inter se æquales sunt, ideoque æquilaterum est ADEB parallelogrammum. Dico etiam rectangulum esse. Quoniam enim in parallelas AB DE recta linea incidit AD,
e 29. hujus. anguli BAD ADE duobus rectis sunt e æquales. rectus autem est BAD, ergo, & ADE rectus erit. parallelogrammorum vero spatiorum, quæ ex opposito sunt la-
f 34. hujus. tera, & anguli f inter se æqualia sunt. rectus igitur est uterque oppositorum ABE BED angulorum: & ob id rectangulum est ADEB. Ostensum autem est æquilaterum esse. Quadratum igitur sit necesse est, atque est super recta linea AB descriptum. Quod ipsum facere oportebat.

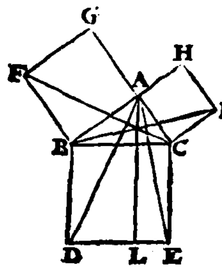


Cor. Hinc omne parallelogrammum habens unum angulum rectum est rectangulum.

PROP. XLVII. THEOR.

In rectangulis triangulis, quod à latere rectum angulum subtendente describitur quadratum, æquale est quadratis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens BAC angulum. Dico quadratum descriptum à recta BC æquale esse quadratis, quæ ab ipsis BA AC describuntur. Describatur a enim à BC quidem quadratum BDEC, ab ipsis
a 46. hujus. BA AC quadrata a GB HC, perque A alterutri ipsarum BD CE parallela ducatur AL; & AD FC jungantur. Quoniam igitur uterque angulorum BAC
b Def. 30. BAG rectus b est, ad aliquam rectam lineam BA, & ad datum in ea punctum A duæ rectæ lineæ AC AG non ad easdem partes positæ, angulos qui deinceps sunt duobus rectis æquales
c 14. hujus. efficiunt; in directum igitur c est CA ipsi AG. eadem ratione,



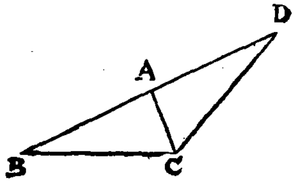
tione, & AB ipsi AH est in directum. & quoniam angulus DBC est æqualis angulo FBA, rectus enim uterque est, communis apponatur ABC, totus igitur DBA angulus toti FBC est [d] æqualis. quòd cum duæ AB BD duabus FB BC æquales [d] sint, altera alteri, & angulus DBA æqualis angulo FBC; erit & basis AD basi FC æqualis [e], & ABD triangulum triangulo FBC æquale. estque [f] trianguli quidem ABD duplum BL parallelogrammum, basim enim eandem habent BD, & in eisdem BD AL sunt parallelis: trianguli [f] vero FBC duplum est GB quadratum, rursus enim basim habent eandem FB, & in eisdem sunt parallelis FB GC. quæ autem æqualium duplicia inter se æqualia [g] sunt. ergo æquale est parallelogrammum BL ipsi GB quadrato. Similiter junctis AE BK, ostendetur etiam CL parallelogrammum æquale quadrato HC. totum igitur BDEC quadratum duobus quadratis GB HC est æquale. & describitur quidem DBEC quadratum à recta linea BC, quadrata vero GB HC ab ipsis BA AC. quadratum igitur BE, à latere BC descriptum æquale est quadratis, quæ describuntur à lateribus BA AC. Ergo in rectangulis triangulis, quadratum, quod describitur à latere rectum angulum subtendente, æquale est quadratis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur. Quod oportebat demonstrare.

[d] Axiom. 2.
[e] 4. hujus.
[f] 41. hujus.
[g] Axiom. 6.

PROP. XLVIII. THEOR.

Si quadratum, quod describitur ab uno laterum trianguli, æquale sit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur; angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit.

Si trianguli ABC, quod ab uno latere BC describitur quadratum æquale sit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus BA AC discribuntur, Dico angulum BAC rectum esse. Ducatur enim à puncto A ipsi AC ad rectos angulos AD; ponaturque AD ipsi BA æqualis, & DC jungatur. Quoniam igitur DA est æqualis AB, erit & quadratum quod describitur ex DA æquale quadrato ex AB. commune apponatur quadratum, quod ex AC. ergo quadrata, quæ ex DA AC æqualia sunt quadratis quæ ex BA AC describuntur. sed quadratis quidem, quæ ex DA AC æquale [a] est quod ex DC quadratum; rectus enim angulus est DAC: quadratis



[a] 47. hujus.

dratis vero, quæ ex BA AC æquale ponitur quadratum, quod ex BC: quadratum igitur, quod ex DC æquale est ei, quod ex BC quadrato. ergo & latus DC lateri CB est æquale. & quoniam DA est æqualis AB, communis autem AC, duæ DA AC æquales sunt duabus BA AC; & basis DC est æqualis basi CB: angulus [b] igitur DAC angulo BAC est æqualis. rectus autem est DAC. ergo & BAC rectus erit. Si igitur quadratum quod describitur ab uno laterum trianguli, æquale sit quadratis quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur, angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit. Quod oportebat demonstrare.

b 8. hujus.

EUCLIDIS

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER SECUNDUS.

DEFINITIONES.

I.

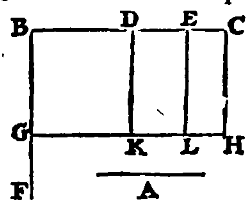
OMNE parallelogrammum rectangulum contineri dicitur sub duabus rectis lineis, quæ rectum angulum comprehendunt.

II.

Omnis parallelogrammi spatii, unumquodvis eorum quæ circa diametrum ipsius sunt parallelogrammorum, cum duobus complementis, gnomon vocetur.

PROPOSITIO I. THEOREMA.

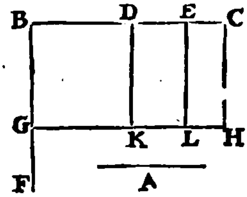
Si sint duæ rectæ lineæ, altera autem ipsarum secta fuerit in quotcunque partes; rectangulum sub duabus rectis lineis contentum æquale est eis rectangulis, quæ sub recta linea insecta, & singulis partibus continentur.



Sint duæ rectæ lineæ A, BC; & secta sit BC utcunque in punctis D, E. Dico rectangulum rectis lineis A, BC contentum æquale esse rectangulo quod continetur sub A & BD, & rectangulo quod sub A & DE, & ei quod sub A & EC continetur. Ducatur enim à puncto B ipsi BC ad rectos [a] angulos BF: atque ipsi A ponatur [b] æqualis BG: & per G quidem

[a] 11. primi.
[b] 3. primi.

c 31.primi. quidem ipsi BC parallela [c] ducatur GH: per D, E, C vero ducantur DK EL CH parallelæ [c] ipsi BG. rectangulum igitur BH est æquale rectangulis BK DL EH: atque est BH quidem quod sub A & BC continetur; etenim continetur sub GB BC; & BG ipsi A est æqualis; rectangulum autem BK est quod continetur sub ipsis A & BD; continetur enim sub GB BD, quarum GB est æqualis A; & rectangulum DL est quod continetur sub A & DE, quoniam DK,



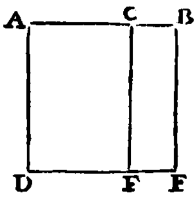
d 34.primi. hoc est [d] BG ipsi A est æqualis; & similiter rectangulum EH est quod sub A & EC continetur. ergo rectangulum contentum sub A & BC est æquale rectangulo contento sub A & BD, & contento sub A & DE, & adhuc contento sub A & EC. Si igitur sint duæ rectæ lineæ, altera autem ipsarum secta fuerit in quotcunque partes; rectangulum sub duabus rectis lineis contentum est æquale eis, quæ sub recta linea insecta, & singulis partibus, continentur. Quod oportebat demonstrare.

PROP. II. THEOR.

Si recta linea secta fuerit utcunque; rectangula quæ sub tota, & singulis partibus continentur, æqualia sunt ei quod à tota fit quadrato.

Recta enim linea AB secta sit utcunque in puncto C, Dico rectangulum quod sub AB BC continetur, unà cum contento sub AB AC æquale esse quadrato, quod fit ex AB.

a 46.primi. Describatur [a] enim ex AB quadratum ADEB, & per C du-
b 31.primi. catur [b] alterutri ipsarum AD BE parallela CF. æquale igitur est AE rectangulis AF CE. atque est AE quidem quadratum, quod ex AB; AF vero rectangulum contentum sub BA AC; etenim sub DA AC continetur, quarum AD ipsi AB est æqualis; & rectangulum CE continetur sub AE BC, cum BE sit æqualis AB. ergo rectangulum sub AB & AC unà cum rectangulo sub AB & BC æquale est quadrato ex AB. Si igitur recta linea utcunque secta fuerit, rectangula, quæ sub tota & singulis partibus continentur, æqualia sunt ei, quod à tota fit quadrato. Quod demonstrare oportebat.

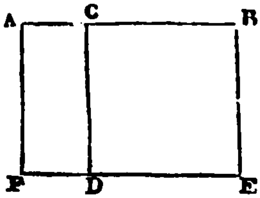


PROP.

PROP. III. THEOR.

Si recta linea utcunque secta fuerit; rectangulum sub tota, & una ejus parte contentum æquale est & rectangulo, quod sub partibus continetur, & ei quod à prædicta parte fit quadrato.

Recta enim linea AB secta sit utcunque in puncto C. Dico sub AB & BC rectangulum æquale esse rectangulo sub AC BC unà cum quadrato, quod fit ex BC. Describatur [a] enim ex BC quadratum CDEB; producaturque ED in F: & per A alterutri ipsarum CD BE parallela [b] ducatur AF. æquale utique erit rectangulum AE ipsis AD CE: & est AE quidem rectangulum contentum sub AB BC; etenim sub AB BE continetur, quarum BE est æqualis BC: rectangulum vero AD est quod continetur sub AC CB, cum DC ipsi CB sit æqualis: & DB est quadratum, quod fit ex BC. ergo rectangulum sub AB BC est æquale rectangulo sub AC CB unà cum quadrato quod ex BC. Si igitur recta linea utcunque secta fuerit; rectangulum sub tota, & una ejus parte contentum æquale est rectangulo, quod sub partibus continetur, & ei quod à prædicta parte fit quadrato.



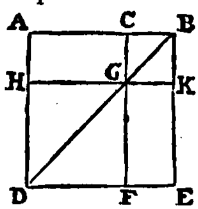
[a] 46. primi.

[b] 31. primi.

PROP. IV. THEOR.

Si recta linea secta fuerit utcunque; quadratum quod fit à tota æquale erit, & quadratis quæ à partibus fiunt, & ei quod bis sub partibus continetur rectangulo.

Recta enim linea AB secta sit utcunque in C. Dico quadratum quod fit ex AB æquale esse, & quadratis ex AC CB & ei rectangulo quod bis sub AC CB continetur. Describatur [a] enim ex AB quadratum ADEB, jungaturque BD, & per C quidem alterutri ipsarum AD BE parallela [b] ducatur CGF; per G vero alterutri ipsarum AB DE ducatur [b] parallela HK. & quoniam CF est parallela ipsi AD, & in ipsas incidit BD: erit exterior angulus BGC interiori & opposito ADB æqualis [c]: angulus

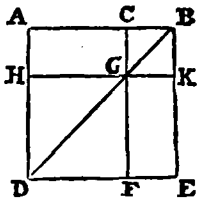


[a] 46. primi.

[b] 41. primi.

[c] 29. primi.

d 5. primi. angulus autem ADB est æqualis [d] angulo ABD, quod & latus BA æquale est lateri AD. quare CGB angulus angulo
e 6. primi. GBC est æqualis: ac propterea latus BC lateri CG æquale [e].
f 34. primi. sed & latus CB æquale [f] est lateri GK & CG ipsi BK. ergo & GK est æquale KB, & CGKB æquilaterum est. Dico insuper etiam rectangulum esse. Quoniam enim CG est parallela ipsi BK & in ipsas incidit CB; anguli KBC GCB duobus rectis sunt æquales [c]. rectus autem est KBC angulus. ergo & rectus GCB, & anguli oppositi CGK GKB recti erunt. rectangulum igitur est CGKB. sed ostensum fuit & æquilaterum esse, quadratum igitur est CGKB, quod quidem fit ex BC. eadem ratione & HF est quadratum quod fit ex HG, hoc est ex AC. ergo HF CK ex ipsis AC CB quadrata sunt. &
g 43. primi. quoniam rectangulum AG est æquale [g] rectangulo GE; atque est AG quod sub AC CB continetur, est enim GC ipsi CB æqualis: erit & GE æquale ei quod continetur sub AC CB, quare rectangula AG GE æqualia sunt ei quod bis sub AC CB continetur. sunt autem & HF CK quadrata ex AC CB. quatuor igitur HF CK AG GE, & quadratis ex AC CB, & ei quod bis sub AC CB continetur rectangulo, sunt æqualia; sed HF CK AG GE componunt totum ADEB quadratum quod fit ex AB. quadratum igitur ex AB æquale est & quadratis ex AC CB, & ei quod bis sub AC CB continetur rectangulo. Quare si recta linea utcunque secta fuerit; quadratum quod fit à tota æquale erit & quadratis quæ à partibus fiunt, & ei rectangulo quod bis sub partibus continetur. Atque illud est quod demonstrare oportebat.



Cor. Ex hoc perspicue constat, in quadratis spatiis parallelogramma quæ sunt circa diametrum, quadrata esse.

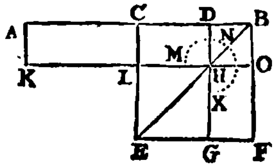
PROP. V. THEOR.

Si recta linea secta fuerit in partes æquales, & in partes inæquales; rectangulum sub inæqualibus totius partibus contentum unà cum quadrato lineæ quæ inter sectiones interjicitur, æquale est ei quod à dimidia fit quadrato.

Recta enim linea quævis AB secta sit in partes æquales ad punctum C, & in partes inæquales ad D. Dico rectangulum contentum sub AD BD, unà cum quadrato quod fit ex

CD

CD æquale esse ei quod ex CB fit quadrato. Describatur [a] enim ex BC quadratum CEFB: ducaturque BE: & per D quidem alterutri ipsarum CE BF parallela [b] ducatur DHG; per H vero ducatur KLO parallela [b] alterutri ipsarum CB EF: & rursus per A ducatur alterutri CL BO parallela [b] AK. & quoniam CH complementum æquale [c] est complemento HF, commune apponatur DO, totum igitur CO toti DF est æquale. sed CO est æquale [d] AL, quoniam & AC ipsi CB. ergo & AL æquale est DF. commune apponatur CH. totum igitur AH ipsis FD DL æquale erit. sed AH quidem est quod sub AD DB continetur, etenim DH ipsi DB est æqualis [e]; FD DL vero est gnomon MNX. igitur MNX æqualis est ei quod sub AD DB continetur, commune apponatur LG, æquale [e] scilicet quadrato quod ex CD, ergo MNX gnomon, & LG æqualia sunt rectangulo, quod continetur sub AD DB, & ei, quod fit ex CD quadrato. sed MNX gnomon, & LG sunt totum quadratum CEFB, quod quidem fit ex CB. ergo rectangulum sub AD DB, una cum quadrato quod ex CD, æquale est ei quod ex CB fit quadrato. Si igitur recta linea secta fuerit in partes æquales, & in partes inæquales; rectangulum sub inæqualibus totius partibus contentum unà cum quadrato lineæ quæ inter sectiones interjicitur, æquale est ei quod à dimidia fit quadrato. Quod demonstrare oportebat.



[a] 46. primi.
[b] 31. primi.
[c] 43. primi.
[d] 36. primi.
[e] Cor. 4. hujus.

PROP. VI. THEOR.

Si recta linea bifariam secetur, atque ipsi in directum adjiciatur quadam recta linea; rectangulum sub tota cum adjecta, & adjecta contentum, unà cum quadrato dimidia, aquale est quadrato quod ab ea, qua ex dimidia, & adjecta constat, tanquam ab una linea, describitur.

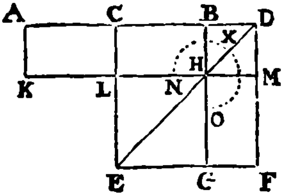
Recta enim linea quævis AB secetur bifariam in puncto C, & adjiciatur ipsi in directum BD. Dico rectangulum sub AD DB unà cum quadrato ex BC æquale esse ei quod fit ex CD quadrato. Describatur [a] enim ex CD quadratum CEFD, & jungatur DE; per B alterutri ipsarum CE DF parallela [b] ducatur BHG; & per H ducatur KLM parallela [b] alterutri ipsarum AD EF; & adhuc per A alterutri CL DM

[a] 46. primi.
[b] 31. primi.

pa-

parallela [b] AK. Itaque quoniam AC est æqualis CB, erit & rectangulum AL rectangulo CH æquale [c]. sed CH æquale [d] est HF. ergo & AL ipsi HF æquale erit. commune apponatur CM. totum igitur AM gnomoni NXO est æquale. atque est AM, quod sub AD DB continetur, etenim DM est [e] æqualis DB. ergo & gnomon NXO æqualis est rectangulo sub AD DB. rursus commune apponatur LG, æquale [e] scilicet quadrato quod ex CB. rectangulum igitur sub AD DB unà cum quadrato quod ex BC æquale est gnomoni NXO & ipsi LG. sed gnomon NXO, & LG componunt CEFD quadratum, quod quidem fit ex CD. ergo rectangulum sub AD DB unà cum quadrato ex BC æquale est ei, quod fit ex CD quadrato. Si igitur recta linea secetur bifariam, adjiciaturque ipsi in directum quædam recta linea; rectangulum sub tota cum adjecta, & adjecta contentum, unà cum quadrato dimidiæ, æquale est quadrato quod ab ea, quæ ex dimidia & adjecta constat, tanquam ab una linea, describitur. Quod oportebat demonstrare.

[c] 36.primi.
[d] 43 primi.
[e] Cor. 4. hujus.

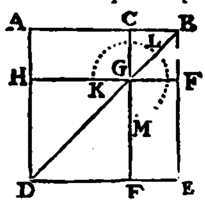


PROP. VII. THEOR.

Si recta linea utcunque secta fuerit; quæ à tota, & una parte fiunt utraque quadrata æqualia sunt, & rectangulo, quod bis sub tota, ac dicta parte continetur, & ei quod à reliqua parte fit quadrato.

Recta enim linea quædam AB secta sit utcunque in puncto C. Dico quadrata ex AB BC æqualia esse, & rectangulo quod bis sub AB BC continetur, & ei quod fit ex AC quadrato. Describatur [a] enim ex AB quadratum ADEB, & figura construatur *. Itaque quoniam AG rectangulum æquale [b] est rectangulo

[a] 46.primi.
[b] 43.primi.



* *Figura dicitur construi, cum in parallelogrammo ductæ lineæ lateribus parallelæ secantes diametrum in uno puncto, efficiunt duo parallelogramma circa diametrum, & duo complementa. Similiter dupla figura dicitur construi, cum ductæ rectæ lateribus parallelæ, efficiunt quatuor parallelogramma circa diametrum, & quatuor complementa.*

GE.

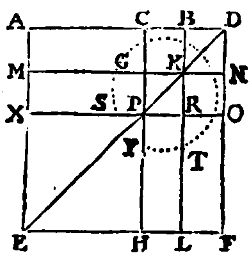
GE, commune apponatur CF; quare totum AF toti CE est æquale. rectangula igitur AF CE dupla sunt rectanguli AF. sed AF CE sunt KLM gnomon, & quadratum CF; ergo KLM gnomon, & quadratum CF dupla erunt rectanguli AF. est autem id, quod bis sub AB BC continetur, duplum ipsius AF; etenim BF est [c] æqualis BC. gnomon igitur KLM, & quadratum CF æqualia sunt ei quod bis sub AB BC continetur. commune apponatur HF, quod est ex AC quadratum. ergo gnomon KLM, & quadrata CF HF æqualia sunt ei quod bis sub AB BC continetur, & quadrato ex AC. sed gnomon KLM, & quadrata CF HF componunt ADEB, & CF, quæ sunt ex AB BC quadrata. quadrata igitur ex AB BC æqualia sunt rectangulo, quod bis sub AB BC continetur unâ cum eo quod fit est AC quadrato. Ergo si recta linea utcunque secta fuerit; quæ à tota, & una parte fiunt utraque quadrata, æqualia sunt rectangulo quod bis sub tota, ac dicta parte continetur, & ei quod à reilqua parte fit quadrato. Quod ostendere oportebat.

[c] Cor. 4. hujus.

PROP. VIII. THEOR.

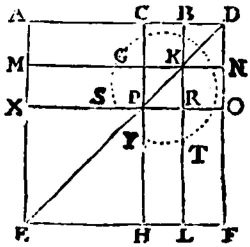
Si recta linea utcunque secta fuerit; quod quater sub tota, & una parte continetur rectangulum unà cum quadrato reliquæ partis, æquale est quadrato quod ex tota, & dicta parte tanquam ex una linea, describitur.

Recta enim linea AB secta sit utcunque in C. Dico rectangulum quater sub AB BC contentum unà cum quadrato quod ex AC æquale esse quadrato, quod ex AB BC tanquam ex una linea describitur. Producatur enim recta linea AB in D; & ipsi CB ponatur æqualis BD; describaturque ex AD quadratum AE FD; & dupla figura construatur. quoniam igitur CB est [a] æqualis BD, atque est CB ipsi GK æqualis [b]; BD vero ipsi KN: erit & GK æqualis KN. eadem ratione, & PR ipsi RO est æqualis. & quoniam CB est æqualis BD, & GK ipsi KN; erit rectangulum [c] quidem CK rectangulo BN; rectangulum vero GR ipsi RN æquale [c]. sed CK est [d] æquale RN, complementa enim sunt parallelogrammi CO, ergo & BN æquale est GR, & quatuor rectan-



[a] hyp.
[b] 34. primi.
[c] 36. primi.
[d] 43. primi.

rectangula BN KC GR RN inter se æqualia; ideoque quadrupla sunt rectanguli CK. rursus quoniam CB est æqualis BD, & BD quidem ipsi BK, hoc est ipsi CG æqualis; CB vero ipsi GK, hoc est GP: erit & CG æqualis GP. est autem & PR ipsi RO æqualis. rectangulum igitur AG rectangulo MP, & rectangulum PL ipsi RF æquale erit. sed MP [d] est æquale PL, complementa enim sunt ML parallelogrammi; quare & AG ipsi RF est æquale. quatuor igitur AG MP PL RF inter se æqualia sunt, ac propterea ipsius AG quadrupla. ostensum autem est, & quatuor CK BN GR RN quadrupla esse CK. quare octo continentia gnomonem STY ipsius AK quadrupla sunt, & quoniam AK est quod sub AB BC continetur; etenim BK est æqualis BC; erit contentum quater sub AB BC ipsius AK quadruplum. at demonstratus est gnomon STY quadruplus ipsius AK. quod igitur quater sub AB BC continetur æquale est gnomoni STY. commune apponatur XH, quod quidem quadrato ex AC est [e] æquale. ergo quod quater sub AB BC continetur una cum quadrato ex AC æquale est ipsi STY gnomoni, & quadrato XH. sed STY gnomon, & XH totum sunt AEFD quadratum, quod describitur ex AD: rectangulum igitur quater sub AB BC contentum unà cum quadrato ex AC æquale est ei, quod ex AD, hoc est ex AB BC tanquam ex una linea describitur, quadrato. Ergo si recta linea utcunque secta fuerit; quod quater sub toto, & una parte continetur rectangulum, unà cum quadrato reliquæ partis, æquale est quadrato, quod ex tota & dicta parte, tanquam ex una linea describitur. Quod ostendendum fuerat.



[d] 43. primi.

[e] Cor. 4. hujus.

PROP. IX. THEOR.

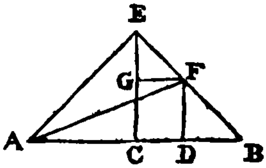
Si recta linea in partes æquales, & in partes inæquales secta fuerit; quadrata quæ ab inæqualibus totius partibus describuntur, dupla sunt & quadrati dimidiæ, & quadrati lineæ ejus quæ inter sectiones interjicitur.

Recta enim linea quævis AB secta sit in partes æquales ad C, & in partes inæquales ad D. Dico quadrata ex AD DB, quadratorum ex AC CD dupla esse. Ducatur [a] enim à puncto C ipsi AB ad rectos angulos CE, & utrivis ipsarum

[a] 11. primi.

AC

AC CB æqualis ponatur, junganturque EA EB. ac per D quidem ipsi CE parallela [b] ducatur DF; per F vero ipsi AB [b] 31.primi parallela [b] FG; & AF ducatur. Itaque quoniam AC eſt æqualis CE; erit [c] & angulus EAC angulo AEC æqualis. [c] 5. primi. & cum rectus ſit angulus ad C, reliqui AEC EAC uni recto æquales [d] erunt. & ſunt æquales inter ſeſe. utervis [d] 3.Cor.32. primi. igitur ipſorum AEC EAC recti eſt dimidium. eadem ratione, & recti dimidium eſt utervis ipſorum CEB EBC. ergo totus angulus AEB rectus eſt. & quoniam angulus GEF dimidium eſt recti, rectus autem EGF, æqualis enim [e] eſt interiori & oppoſito ECB, erit, & reliquus EFG recti dimidium: [e] 29.primi. æqualis igitur eſt GEF angulus ipſi EFG. quare & latus EG lateri GF eſt [f] æquale. rurſus quoniam angulus ad B dimi- [f] 6. primi. dium eſt recti, rectus autem FDB, quòd ſit æqualis interiori & oppoſito ECB; reliquus BFD recti erit dimidium. angulus igitur ad B æqualis eſt angulo BFD; ideoque latus DF lateri DB æquale. & quoniam AC eſt æqualis CE, erit & ex AC quadratum æquale quadrato ex CE. quadrata igitur ex AC CE dupla ſunt quadrati ex AC; quadratis autem ex AC CE æquale [g] eſt quadratum ex EA, ſiquidem rectus [g] 47.primi. eſt angulus ACE. ergo quadratum ex EA quadrati ex AC eſt duplum. rurſus quoniam EG æqualis eſt GF, & quadratum ex EG quadrato ex GF eſt æquale. quadrata igitur ex EG & GF dupla ſunt quadrati ex GF. at quadratis ex EG GF æquale [g] eſt quod ex EF quadratum. ergo quadratum ex EF quadrati ex GF duplum erit. æqualis [h] autem eſt GF ipſi CD. [h] 34.primi. quadratum igitur ex EF duplum eſt quadrati CD. ſed & quadratum ex AE quadrati ex AC eſt duplum. ergo quadrata ex AE EF dupla ſunt quadratorum ex AC CD. quadratis vero ex AE EF æquale [g] eſt ex AF quadratum; quoniam angulus AEF rectus eſt. quadratum igitur ex AF quadratorum ex AC CD eſt duplum. ſed quadrato ex AF æqualia ſunt ex AD DF quadrata. rectus enim eſt angulus qui ad D. ergo ex AD DF quadrata dupla ſunt quadratorum ex AC CD. eſt autem DF ipſi DB æqualis. quadrata igitur ex AD DB quadratorum ex AC CD dupla erunt. Quare ſi recta linea in partes æquales, & in partes inæquales, ſecta fuerit; quæ ab inæqualibus totius partibus deſcribuntur quadrata, dupla ſunt & quadrati dimidiæ, & quadrati lineæ ejus quæ inter ſectiones interjicitur. Quod oſtendere oportebat.

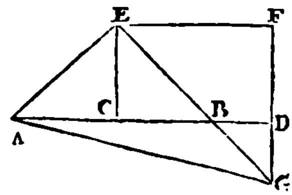


PROP.

PROP. X. THEOR.

Si recta linea secetur bifariam, & ipsi in directum quævis recta linea adjiciatur; quæ à tota cum adjecta, & adjecta fiunt utraque quadrata, dupla sunt & quadrati dimidiæ, & quadrati quod ab ea, quæ ex dimidia, & adjecta constat, tanquam ab una linea, describitur.

Recta enim linea AB secetur bifariam in C, & ipsi in directum adjiciatur quævis recta linea BD. Dico quadrata ex AD DB quadratorum ex AC CD dupla esse. Ducatur enim à
a 11. primi. puncto C, ipsi AB ad rectos a angulos CE, & utrivis ipsarum AC CB æqualis ponatur; ducaturque AE EB, & per E qui-
b 31. primi. dem ipsi AD parallela b ducatur EF; per D vero ducatur DF parallela b ipsi CE. & quoniam in parallelas EC FD recta
c 29. primi. quædam linea EF incidit, anguli CEF EFD æquales c sunt duobus rectis. anguli igitur FEB EFD duobus rectis sunt minores. quæ autem à minoribus quam sunt duo recti in infinitum producuntur, con-
d Axio. 12. veniunt inter se d. ergo EB FD productæ ad partes BD convenient. prodncantur, & conveniant in puncto G, & AG ducatur. itaque quoniam AC est æqualis CE, & angulus AEC angulo EAC æqualis
e 5. primi. e erit: atque est rectus qui ad C. uterque igitur ipsorum CAE AEC est recti dimidium. eadem ratione, & recti dimidium est uterque CEB EBC. ergo AEB est rectus. &
f 15. primi. quoniam EBC est dimidium recti, erit & recti f dimidium DBG; cum sit ad verticem. sed & BDG rectus est; etenim est c æqualis ipsi DCE alterno. reliquus igitur DGB dimidium est recti, & ob id ipsi DBG æqualis. ergo & latus BD
g 6. primi. æquale g lateri DG. rursus quoniam EGF est dimidium recti, rectus autem qui ad F, est enim angulo opposito qui ad C æqualis; erit, & reliquus FEG recti dimidium, & æqualis ipsi EGF. quare & latus GF lateri EF est æquale g. & cum EC sit æqualis CA; & quadratum ex EC æquale est ei quod ex CA fit quadrato. ergo quadrata ex EC CA dupla
h 47. primi. sunt quadrati ex CA. quadratis autem ex EC CA æquale h est quadratum ex EA. quadratum igitur ex EA quadrati ex AC est duplum. rursus quoniam GF est æqualis FE, æquale est, & ex GF quadratum quadrato ex FE. quadrata igitur ex GF FE quadrati ex EF sunt dupla. at quadratis ex GF FE æquale est

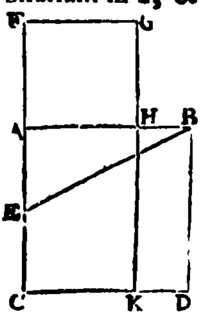


est *b* quod ex EG quadratum. ergo quadratum ex EG duplum est quadrati ex EF. æqualis autem est EF ipsi CD. quadratum igitur ex EG quadrati ex CD duplum erit. sed ostensum est quadratum ex EA duplum quadrati ex AC. ergo ex AE EG quadrata, quadratorum ex AC CD sunt dupla. quadratis vero ex AE EG æquale est *b* quod ex AG quadratum. *b* 47.primi. quadratum igitur ex AG duplum est quadratorum ex AC CD. at quadrato ex AG æqualia *b* sunt ex AD DG quadrata. ergo quadrata ex AD DG sunt dupla quadratorum ex AC CD. sed DG est æqualis DB. quadrata igitur ex AD DB quadratorum ex AC CD sunt dupla. Ergo si recta linea bifariam secetur, & ipsi in directum quædam recta linea adjiciatur; quæ à tota cum adjecta, & adjecta fiunt utraque quadrata, dupla sunt & quadrati dimidiæ, & quadrati quod ab ea quæ ex dimidia & adjecta constat tanquam ab una linea describitur. Quod ostendere oportebat.

PROP. XI. PROBL.

Datam rectam lineam secare, ita ut quod sub tota, & altera parte continetur rectangulum æquale sit ei, quod à reliqua parte fit, quadrato.

Sit data recta linea AB. Oportet ipsam AB ita secare, ut quod sub tota,& altera parte continetur rectangulum æquale sit ei, quod à reliqua parte fit, quadrato. Describatur *a* enim *a* 46.primi. ex AB quadratum ABCD, seceturque AC bifariam in E, & BE ducatur: deinde producta CA in F, ponatur ipsi BE æqualis EF: describaturque ex AF quadratum FGHA, & GH ad K producatur. Dico AB sectam esse in H, ita ut sub AB BH rectangulum æquale sit quadrato ex AH. Quoniam enim recta linea AC bifariam secatur in E, adjiciturque ipsi in directum AF, rectangulum sub CF FA, una cum quadrato ex AE, æquale *b* erit quadrato ex EF. sed EF est *b* 6. hujus. æqualis EB. rectangulum igitur sub CF FA, una cum quadrato ex AE æquale est ei, quod fit ex EB, quadrato. quadrato autem ex EB æqualia sunt *c* quadrata ex BA AE: etenim angulus ad A rectus est. *c* 47.primi. ergo rectangulum sub CF FA, una cum quadrato ex AE æquale est quadratis ex AB AE; commune auferatur quod ex AE fit quadratum; reliquum igitur rectangulum sub CF FA æquale est quadrato ex AB. est autem rectangulum FK sub

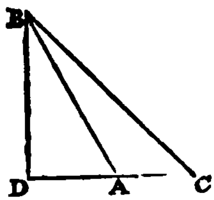


CF FA; siquidem AF est æqualis FG; quadratum autem ex AB est ipsum AD. rectangulum igitur FK æquale est quadrato AD. commune auferatur AK. ergo reliquum FH reliquo HD est æquale. atque est HD rectangulum sub AB BH, cum AB sit æqualis BD, & FH est quadratum ex AH. rectangulum igitur sub AB BH quadrato ex AH æquale erit. Quare data recta linea AB secta est in H, ita ut sub AB BH rectangulum quadrato ex AH sit æquale. Quod facere oportebat.

PROP. XII. THEOR.

In obtusangulis triangulis, quod à latere obtusum angulum subtendente fit quadratum, majus est quam quadrata, quæ fiunt à lateribus obtusum angulum continentibus, rectangulo contento bis sub uno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod scilicet protractum perpendicularis cadit, & linea assumpta exterius à perpendiculari ad angulum obtusum.

Sit obtusangulum triangulum ABC, obtusum angulum
a 12. primi. habens BAC: & ducatur [a] à puncto B ad CA protractum perpendicularis BD. Dico quadratum ex BC majus esse, quam quadrata ex BA AC, rectangulo quod bis sub CA AD continetur. Quoniam enim recta linea CD secta est utcunque in puncto A, erit quadratum ex
b 4. hujus. CD æquale [b], & quadratis ex CA AD, & ei, quod bis sub CA AD continetur, rectangulo. commune apponatur ex DB quadratum. quadrata igitur ex CD DB æqualia sunt & quadratis ex CA AD DB, & rectangulo quod bis sub CA AD continetur. sed quadratis ex CD DB æquale est [c] quadratum ex CB, rectus enim est angulus ad D, cum sit BD perpendicularis. quadratis vero ex AD DB æqua-
c 47. primi. le est [c] quadratum ex AB. Quadratum igitur ex CB æquale est, & quadratis ex CA AB, & rectangulo bis sub CA AD contento. ergo quadratum ex CB majus est quam quadrata ex CA AB, rectangulo, quod bis sub CA AD continetur. In obtusangulis igitur triangulis, quadratum, quod fit à latere obtusum angulum subtendente, majus est quam quadrata, quæ fiunt à lateribus obtusum angulum continentibus, rectangulo contento bis sub uno laterum, quæ sunt circa obtusum



sum

ſum angulum, in quod protractum perpendicularis cadit, & linea aſſumpta exterius à perpendiculari ad angulum obtuſum. Quod demonſtrare oportebat.

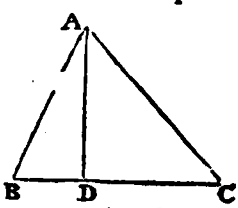
PROP. XIII. THEOR.

In acutangulis triangulis, quod à latere acutum angulum ſubtendente fit quadratum, minus eſt quam quadrata quæ fiunt à lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo contento bis ſub uno laterum, quæ ſunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & linea à perpendiculari intus aſſumpta ad angulum acutum.

Sit acutangulum triangulum ABC, acutum habens angulum ad B: ducatur à puncto A [a] ad BC perpendicularis AD. [a] 12. primi. Dico quadratum quod fit ex AC minus eſſe quam quadrata quæ ex CB BA fiunt, rectangulo quod bis ſub CB BD continetur. Quoniam enim recta linea CB ſecta eſt utcunque in D, erunt quadrata ex CB BD æqualia [b], & rectangulo quod bis ſub CB BD continetur, & quadrato ex DC. commune apponatur ex AD quadratum. quadrata igitur ex CB BD DA æqualia ſunt, & rectangulo bis ſub CB BD contento, & quadratis ex AD DC. ſed quadratis ex BD DA æquale eſt [c] ex AB quadratum; rectus enim angulus eſt qui ad D. quadratis vero ex AD DC æquale [c] eſt quadratum ex AC, quadrata igitur ex CB BA ſunt æqualia quadrato ex AC, & ei quod bis ſub CB BD continetur rectangulo. quare ſolum quadratum ex AC minus eſt quam quadrata ex CB BA, rectangulo quod bis ſub CB BD continetur. In acutangulis igitur triangulis quadratum quod à latere acutum angulum ſubtendente fit, minus eſt quam quadrata quæ fiunt à lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo contento bis ſub uno laterum quæ ſunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & linea à perpendiculari intus aſſumpta ad angulum acutum. Quod demonſtrare oportebat.

[b] 7. hujus.

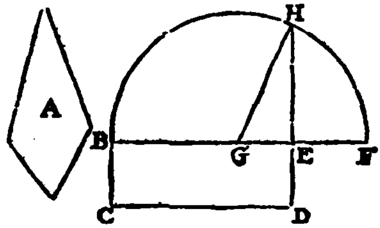
[c] 47. primi.



PROP. XIV. PROBL.

Dato rectilineo æquale quadratum constituere.

Sit datum rectilineum A. Oportet ipsi A rectilineo æquale quadratum constituere. Constituatur [a] rectilineo A æquale parallelogrammum rectangulum BC DE. si igitur BE est æqualis ED, factum jam erit quod proponebatur, etenim rectilineo A æquale quadratum constitutum est BD: sin minus, una ipsarum BE ED major est. sit BE major; & producatur ad F, ponaturque ipsi ED æqualis EF. deinde secta FB bifariam [b] in G: centro quidem G, intervallo autem unius ipsarum GB GF semicirculus describatur BHF; producaturque DE in H, & GH ducatur. Quoniam igitur recta linea BF secta est in partes æquales ad G, inæquales ad E; erit rectangulum sub BE EF, una cum quadrato quod fit ex EG [c], æquale quadrato ex GF. est autem GF æqualis GH. rectangulum igitur sub BE EF una cum quadrato ex EG, æquale est quadrato ex GH. sed quadrato ex GH æqualia [d] sunt ex HE EG quadrata. ergo rectangulum sub BE EF una cum quadrato ex EG æquale est quadratis ex HE EG. commune auferatur ex EG quadratum. reliquum igitur rectangulum sub BE EF est æquale quadrato ex EH. sed rectangulum sub BE EF est ipsum BD parallelogrammum, quoniam EF est æqualis ED. ergo BD parallelogrammum quadrato ex EH est æquale. parallelogrammum autem BD est æquale rectilineo A. rectilineum igitur A quadrato ex EH descripto æquale erit. Quare dato rectilineo A æquale quadratum constitutum est, quod videlicet ex ipsa EH describitur. Quod facere oportebat.



[a] 45. primi.
[b] 10. primi.
[c] 5. hujus.
[d] 47. primi.

EUCLIDIS

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER TERTIUS.

DEFINITIONES.

I.

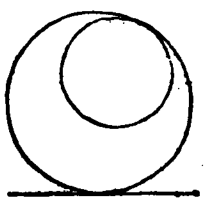
ÆQUALES circuli ſunt, quorum diametri ſunt æquales, vel quorum quæ ex centris ſunt æquales.

II

Recta linea circulum contingere dicitur, quæ contingens circulum, & producta, ipſum non ſecat.

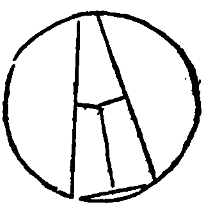
III.

Circuli contingere ſe dicuntur, qui contingentes, ſe ipſos non ſecant.



IV.

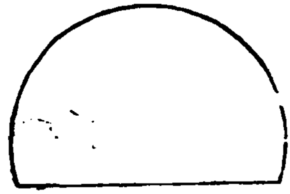
In circulo æqualiter diſtare à centro rectæ lineæ dicuntur, quando à centro ad ipſas perpendiculares ductæ ſunt æquales.



V.

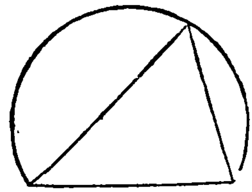
Magis autem diſtare à centro dicitur ea, in quam major perpendicularis cadit.

VI.



Segmentum circuli eſt figura, quæ recta linea, & circuli circumferentia continetur.

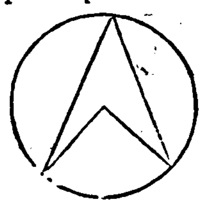
VII.



Segmenti autem angulus eſt, qui recta linea, & circuli circumferentia comprehenditur.

VIII.

In ſegmento angulus eſt, quando in circumferentia ſegmenti ſumatur aliquod punctum, atque ab ipſo ad terminos lineæ ejus, quæ baſis eſt ſegmenti, rectæ lineæ ducantur, angulus ductis lineis contentus.



IX.

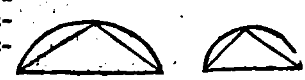
Quando autem continentes angulum rectæ lineæ aſſumunt circumferentiam, in illa conſiſtere angulus dicitur.

X.

Sector circuli eſt, quando angulus ad centrum conſtiterit, figura contenta rectis lineis angulum comprehendentibus, & circumferentia ab ipſis aſſumpta.

XI.

Similia circulorum ſegmenta ſunt, quæ angulos ſuſcipiunt æquales, vel in quibus anguli æquales conſiſtunt.

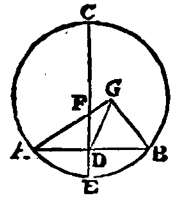


PROP.

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

Dati circuli centrum invenire.

Sit datus circulus ABC, oportet circuli ABC centrum invenire. Ducatur in ipso quædam recta linea AB utcunque, & in puncto D bifariam [a] secetur, à puncto autem D ipsi AB ad rectos angulos [b] ducta DC in E producatur; & secetur CE bifariam [a] in F. Dico punctum F circuli ABC centrum esse. Non enim; sed si fieri potest, sit G centrum, & GA GD GB ducantur. itaque quoniam DA est æqualis DB, communis autem DG, erunt duæ AD DG duabus GD DB æquales, altera alteri: & basis GA æqualis [c] est basi GB; sunt enim ex centro G. angulus igitur ADG angulo GDB est [d] æqualis cum autem recta linea super rectam lineam insistens, angulos qui deinceps sunt, æquales inter se fecerit, [e] rectus est uterque æqualium angulorum. ergo angulus GDB est rectus. sed & rectus FDB. æqualis igitur est angulus FDB angulo GDB, major minori, quod fieri non potest. quare G non est circuli ABC centrum. similiter ostendemus neque aliud esse, præter ipsum F. ergo F centrum est circuli ABC. Quod invenire oportebat.



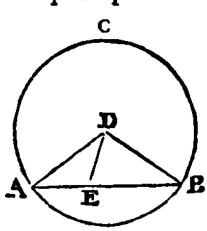
[a] 10. primi.
[b] 11. primi.
[c] Def. 15. primi.
[d] 8. primi.
[e] Def. 10. primi.

Cor. Si in circulo quævis recta linea, lineam quandam bifariam & ad angulos rectos secet, in secante erit centrum circuli.

PROP. II. THEOR.

Si in circumferentia circuli duo quævis puncta sumantur, quæ ipsa conjungit recta linea intra circulum cadet.

Sit circulus ABC; in circumferentia ipsius sumantur duo quævis puncta A B. Dico rectam lineam quæ à puncto A ad B ducitur, intra circulum cadere. Sumatur enim in recta A B punctum quodvis E, & jungantur DA DE DB. Quoniam DA est æqualis DB, erit [a] angulus DAB æqualis angulo DBA, & quoniam trianguli DAE latus AE producitur, erit [b] angulus DEB angulo DAE major, angulus autem DAE æqualis est angulo DBE, ergo DEB angulus angulo DBE est



[a] 5. primi.
[b] 16. primi.

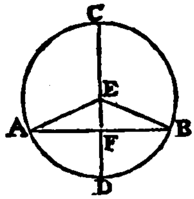
c 19. primi. est major. sed majori c angulo majus latus subtenditur. major igitur est DB ipsa DE. sed DB ad circumferentiam tantum pertingit. ergo DE non eo usque protenditur. adeoque punctum E cadet intra circulum. Si igitur in circumferentia &c. Quod oportebat demonstrare.

Cor. Hinc si recta circulum tangat, in unico puncto eum tangit.

PROP. III. THEOR.

Si in circulo recta linea per centrum ducta, rectam lineam quandam non ductam per centrum bifariam secet, & ad angulos rectos ipsam secabit; quod si ad angulos rectos ipsam secet, & bifariam secabit.

Sit circulus ABC, & in ipso recta linea per centrum ducta CD rectam lineam quandam AB non ductam per centrum bifariam secet in puncto F. Dico ad angulos rectos ipsam secare. Sumatur enim circuli



a 1. hujus. ABC centrum a quod sit E, & EA EB jungantur. Quoniam igitur AF est æqualis FB, communis autem FE, duæ AF FE duabus BF FE æquales sunt, & basis EA basi EB est æqualis. ergo & angulus AFE angulo BFE

b 8. primi. æqualis b erit. cum autem recta linea super rectam insistens

c Def. 10. primi. angulos, qui deinceps sunt, æquales inter se fecerit, rectus est c uterque æqualium angulorum. uterque igitur AFE BFE est rectus. quare recta linea CD per centrum ducta rectam lineam AB non ductam per centrum bifariam secans, & ad angulos rectos ipsam secabit. Si vero CD secet AB ad rectos angulos, dico & bifariam ipsam secare, hoc est AF ipsi FB æqualem esse. Iisdem enim constructis, quoniam EA, quæ

d 5. primi. ex centro, est æqualis EB, & angulus EAF angulo d EBF æqualis erit; est autem & AFE rectus æqualis recto BFE. duo igitur triangula EAF EBF duos angulos duobus angulis æquales habent, unumque latus uni lateri æquale, EF commune scilicet utrisque, quod uni angulorum æqualium subtenditur. ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia

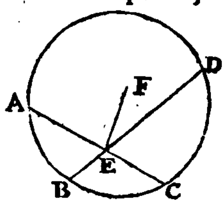
e 26. primi. e habebunt. atque erit AF ipsi FB æqualis. Si igitur in circulo recta linea per centrum ducta rectam lineam quandam non ductam per centrum bifariam secet, & ad angulos rectos ipsam secabit. quod si ipsam secet ad rectos angulos, & bifariam secabit. Quod oportebat demonstrare.

PROP.

PROP. IV. THEOR.

Si in circulo duæ rectæ lineæ se invicem secent non ductæ per centrum, sese bifariam non secabunt.

Sit circulus ABCD; & in ipso duæ rectæ lineæ AC BD se invicem secent in puncto E, non ductæ per centrum. Dico eas sese bifariam non secare. Si enim fieri potest, secent sese bifariam, ita ut AE sit æqualis EC & BE ipsi ED: sumaturque [a] centrum ABCD circuli, quod sit F, & EF jungatur. Quoniam igitur recta linea FE per centrum ducta rectam lineam quandam AC non ductam per centrum bifariam secat, & ad rectos angulos ipsam secabit [b]. quare rectus est FEA angulus. rursus quoniam recta linea FE rectam lineam quandam BD non ductam per centrum bifariam secat, & ad angulos rectos ipsam [b] secabit. rectus igitur angulus est FEB. ostensus autem est rectus & FEA. ergo FEA angulus ipsi FEB æqualis erit, minor majori, quod fieri non potest. non igitur AC BD sese bifariam secant. Quare si in circulo duæ rectæ lineæ se invicem secent non ductæ per centrum, sese bifariam non secabunt. Quod ostendere oportebat.



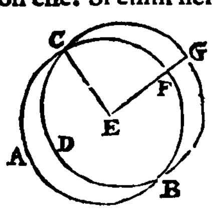
[a] 1. hujus.

[b] 3. hujus.

PROP. V. THEOR.

Si duo circuli se invicem secent, non erit ipsorum idem centrum.

Duo enim circuli se invicem secent ABC CDG in punctis B, C. Dico ipsorum idem centrum non esse. Si enim fieri potest, sit centrum E; jungaturque EC, & EFG utcunque ducatur. Quoniam E centrum est circuli ABC, erit CE ipsi EF æqualis. rursus quoniam E centrum est CDG circuli, æqualis est CE ipsi EG. sed ostensa est CE æqualis EF. ergo EF ipsi EG æqualis erit, minor majori, quod fieri non potest. non igitur punctum E centrum est circulorum ABC CDG. Quare si duo circuli se invicem secent, non erit ipsorum idem centrum. Quod ostendendum fuit.

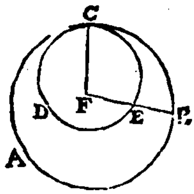


PROP.

PROP. VI. THEOR.

Si duo circuli sese intra contingant, ipsorum idem centrum non erit.

Duo enim circuli ABC CDE contingant sese intra in puncto C. Dico ipsorum non esse idem centrum. Si enim fieri potest, sit F, jungaturque FC, & FEB utcunque ducatur. Quoniam igitur F centrum est circuli ABC, æqualis est CF ipsi FB. rursus quoniam F centrum est circuli CDE, erit CF æqualis FE. ostensa autem est CF æqualis FB. ergo & FE ipsi FB est æqualis, minor majori, quod fieri non potest. non igitur F punctum centrum est circulorum ABC CDE. Quare si duo circuli sese intra contingant, ipsorum idem centrum non erit. Quod demonstrare oportebat.

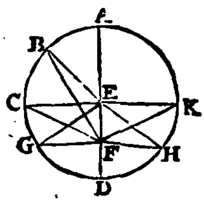


PROP. VII. THEOR.

Si in circuli diametro aliquod punctum sumatur, quod non sit centrum circuli, & ab eo in circulum cadant quævis rectæ lineæ; maxima quidem erit in qua centrum: minima vero reliqua: aliarum autem propinquior ei quæ per centrum transit, semper remotiore major est. at duæ tantum æquales ab eodem puncto in circulum cadent ad utrasque partes minimæ.

Sit circulus ABCD, cujus diameter AD, & in ipsa AD sumatur aliquod punctum F, quod non sit centrum circuli. Sit autem circuli centrum E: & à puncto F in circulum ABCD cadant quædam rectæ lineæ FB FC FG. Dico FA maximam esse, & FD minimam: aliarum vero, FB quidem majorem quam FC, & FC majorem quam FG. jungantur enim BE CE GE. Et quoniam omnis trianguli duo latera a reliquo sunt majora; erunt BE EF majores quàm BF. est autem AE æqualis BE. ergo BE EF ipsi AF sunt æquales. major igitur est AF quàm FB. rursus quoniam BE est æqualis CE, communis autem FE, duæ BE EF duabus CE EF æquales

a 20. primi.



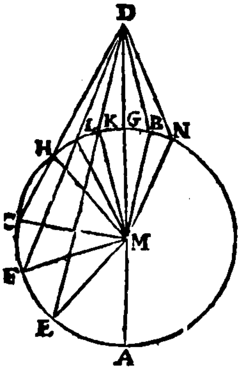
quales sunt. sed BEF angulus major est angulo CEF: basis igitur BF basi FC est *b* major. eadem ratione & CF major *b* 24.primi. est quam FG. rursus quoniam GF FE majores *a* sunt quam *a* 20.primi. GE, æqualis autem GE ipsi ED; erunt GF FE majores quam ED. communis auferatur FE. ergo reliqua GF major est quam reliqua FD. maxima igitur est FA, & FD minima: major vero BF quam FC, & FC quam FG major. Dico & à puncto F duas tantum rectas lineas æquales cadere in circulum ABCD ad utrasque partes minimæ FD. constituatur *c* enim ad lineam EF atque ad datum in ea punctum E, angulo *c* 23.primi. GEF æqualis angulus FEH: & FH jungatur. Quoniam igitur GE est æqualis EH, communis autem EF, duæ GE EF duabus HE EF æquales sunt: & angulus GEF est æqualis angulo HEF. basis igitur FG basi FH æqualis *d* erit. Dico à puncto *d* 4. primi. F in circulum non cadere aliam ipsi FG æqualem. si enim fieri potest, cadat FK & quoniam FK est æqualis FG, estque ipsi FG æqualis FH; erit & FK ipsi FH æqualis, videlicet propinquior ei, quæ per centrum transit æqualis remotiori, quod fieri non potest. Si igitur in circuli diametro aliquod punctum sumatur, quod non sit centrum circuli, &c. Quod demonstrare oportebat.

PROP. VIII. THEOR.

Si extra circulum aliquod punctum sumatur, atque ab eo ad circulum ducantur quædam rectæ lineæ quarum una per centrum transeat, aliæ vero utcunque: earum quidem, quæ in concavam circumferentiam cadunt, maxima est quæ per centrum transit; aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum, semper remotiore major est. at earum, quæ in convexam circumferentiam cadunt, minima est quæ inter punctum & diametrum interjicitur: aliarum vero quæ propinquior minimæ, semper remotiore est minor. duæ autem tantum æquales à puncto in circulum cadunt ad utrasque partes minimæ.

Sit circulus ABC, & extra circulum sumatur aliquod punctum D: ab eo autem in circulum ducantur rectæ lineæ quædam DA DE DF DC: sitque DA per centrum. Dico earum quidem, quæ in concavam AEFC circumferentiam cadunt, maximam esse DA, quæ per centrum transit; & minimam, quæ inter punctum D & diametrum AG interjicitur, videlicet DG: majorem autem DE quam DF; & DF majorem

majorem quam DC: earum vero quæ in convexam circumferentiam HLKG cadunt, quæ propinquior est minimæ DG semper remotiore esse minorem; hoc est DK minorem
a 1. hujus. quam DL, & DL minorem quam DH. Sumatur a enim centrum circuli ABC, quod sit M, & jungantur ME MF MC MH ML. & quoniam AM est æqualis ME, communis apponatur MD. ergo AD est æqualis ipsis EM MD. sed EM MD
b 20. primi. sunt majores b quam ED. ergo & AD quam ED est major. rursus quoniam æqualis est ME ipsi MF, communis apponatur MD. erunt EM MD ipsi MF MD æquales; at angulus EMD major est angulo FMD. basis igitur
c 24. primi. ED basi FD major c erit. similiter demonstrabimus, & FD majorem esse quam CD. ergo maxima est DA; major autem DE quam DF, & DF quam DC major. Præterea quoniam



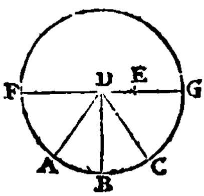
MK KD sunt majores b quam MD, & MG est æqualis MK;
d Axiom. 4. erit reliqua KD quam reliqua d GD major. quare GD minor quam KD, & idcirco GD minima est. & quoniam trianguli MLD in uno latere MD, duæ rectæ lineæ MK KD in-
e 21. primi. tra constituantur, erunt e MK KD minores ipsis ML LD, quarum MK est æqualis ML. reliqua igitur DK minor est quam reliqua DL. similiter ostendemus, & DL quam DH minorem esse. ergo DG minima est. minor vero DK quam DL, & DL minor quàm DH. Dico etiam duas tantum æquales à puncto D in circulum cadere ad utrasque minimæ partes. constituatur ad rectam lineam MD, ad datumque in ea
f 23. primi. punctum M, angulo KMD æqualis f angulus DMB, & DB jungatur. itaque quoniam MK est æqualis MB, communis autem MD, duæ KM MD duabus BM MD æquales sunt, altera alteri, & angulus KMD æqualis angulo BMD, basis igi-
g 4. primi. tur DK basi DB est æqualis g. Dico à puncto D aliam ipsi DK æqualem in circulum non cadere. si enim fieri potest, cadat DN. & quoniam DK est æqualis DN, & DK ipsi DB est æqualis; erit & DB æqualis DN, propinquior scilicet minimæ æqualis remotiori, quod fieri non posse ostensum est. Si igitur extra circulum aliquod punctum sumatur, &c. quod ostendere oportebat.

PROP.

PROP. IX. THEOR.

Si intra circulum sumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant plures quàm duæ rectæ lineæ æquales; punctum, quod sumitur, circuli centrum erit.

Sumatur enim intra circulum ABC punctum aliquod D: atque à puncto D in circulum ABC cadant plures quam duæ rectæ lineæ æquales DA DB DC. Dico punctum D, quod sumitur, circuli ABC esse centrum. Non enim; sed, si fieri potest, sit E centrum, & juncta DE in FG producatur. ergo FG [a] diameter est ABC circuli. itaque quoniam in FG diametro circuli ABC sumptum est aliquod punctum D quod non est centrum circuli, maxima quidem erit DG, major [b] autem DC quam DB, & DB quam DA. sed & æquales, [c] quod fieri non potest. non igitur E centrum est circuli ABC. similiter ostendemus neque aliud punctum centrum esse præter ipsum D. ergo D circuli BC centrum erit. Quod oportebat demonstrare.

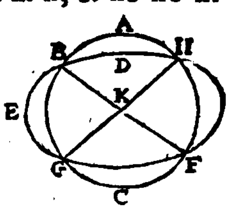


[a] Def. 17. primi.
[b] 7. hujus.
[c] ex hyp.

PROP. X. THEOR.

Circulus circulum in pluribus, quàm duobus punctis non secat.

Si enim fieri potest circulus ABC circulum DEF secet in pluribus punctis, quam duobus; nempe in B, G, F, & circuli ABC centrum sumatur, quod sit K, & KB KG KF jungantur. Quoniam igitur intra circulum DEF sumptum est aliquod punctum K, à quo in circulum DEF incidant plures quam duæ rectæ lineæ KB KG KF æquales, erit punctum K circuli DEF centrum [a]. est autem & circuli ABC centrum [b] K duorum igitur circulorum, qui sese secant, idem erit centrum, quod fieri non potest. Quare circulus circulum in pluribus,



[a] 9. hujus.
[b] Ex hyp.

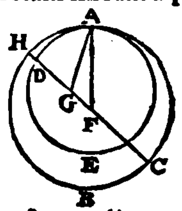
pluribus quam duobus punctis non secat. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XI. THEOR.

Si duo circuli sese intus contingant, & sumantur centra ipsorum: recta linea ipsorum centra conjungens producta in circulorum contactum cadet.

Duo enim circuli ABC ADE sese intus contingant in puncto A, & sumatur circuli quidem ABC centrum quod sit F; circuli vero ADE centrum G. Dico rectam lineam à puncto G ad F ductam, si producatur, in punctum A cadere. Non enim; sed si fieri potest, cadat ut FGDH. & AF AG jungantur. Itaque quoniam AG GF majores [a] sunt quam FA, hoc est quam FH, communis auferatur FG. reliqua igitur AG major est quam reliqua GH. sed AG est æqualis GD, ergo GD ipsa GH est major, minor majore, quod fieri non potest. non igitur à puncto F ad G ducta recta linea extra contactum A cadet. quare in ipsum cadat necesse est. Si igitur duo circuli sese intus contingant, recta linea ipsorum centra conjungens, si producatur, in contactum circulorum cadet. Quod oportebat demonstrare.

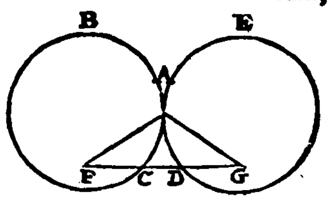
[a] 20. primi.



PROP. XII. THEOR.

Si duo circuli sese extra contingant, recta linea ipsorum centra conjungens per contactum transibit.

Duo enim circuli ABC ADE sese extra contingant in puncto A; & sumatur circuli quidem ABC centrum quod sit F; circuli vero ADE centrum G. Dico rectam lineam, quæ à puncto F ad G ducitur, per contactum A transire. Non enim; sed, si fieri potest, cadat ut FCDG: & FA AG jungantur. Quoniam igitur F centrum est circuli ABC, erit AF æqualis FC. rursus quoniam G centrum est ADE circuli, erit AG ipsi GD æqualis. ostensa est autem, & AF æqualis FC. sunt igitur FA AG ipsis FC DG æquales, ergo tota FG major est quam FA AG. sed & minor,

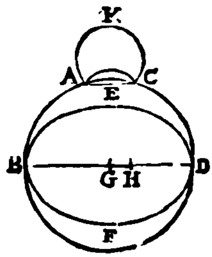


minor [a], quod fieri non poteſt. non igitur à puncto F ad C ducta recta linea per contactum A non tranſibit. quare per ipſum tranſeat neceſſe eſt. Si igitur duo circuli ſeſe extra contingant, recta linea ipſorum centra conjungens per contactum tranſibit. Quod oportebat demonſtrare. a 20. primi.

PROP. XIII. THEOR.

Circulus circulum non contingit in pluribus punctis quàm uno, ſive intus ſive extra contingat.

Si enim fieri poteſt, circulum ABCD circulus EBFD contingat, primum intus, in pluribus punctis quam uno, videlicet in B, D: & ſumatur circuli quidem ABDC centrum G, circuli vero EBFD centrum H. ergo recta linea quæ à puncto G ad H ducitur, in puncta [a] B, D cadet. cadat ut BGHD. Et quoniam G centrum eſt circuli ABDC, erit BG ipſi GD æqualis. major igitur eſt BG quam HD: & BH quam HD multo major. rurſus quoniam H centrum eſt EBFD circuli, æqualis eſt BH ipſi HD. atqui oſtenſa eſt ipſa multo major, quod fieri non poteſt. non igitur circulus circulum intus contingit in pluribus punctis, quam uno. Dico etiam neque extra contingere. ſi enim fieri poteſt, circulus ACK circulum ABDC extra contingat in pluribus punctis quàm uno, videlicet in A C, & AC jungatur. itaque quoniam in circumferentia utrorumque circulorum ABCD ACK ſumpta ſunt duo puncta A, C; recta linea, quæ ipſa conjungit intra utrumque ipſorum cadet [b]. ſed intra circulum quidem ABDC cadit, extra circulum vero ACK, quod eſt abſurdum. Non igitur circulus circulum extra contingit in pluribus punctis quàm uno. oſtenſum autem eſt neque intus contingere. Circulus igitur circulum non contingit in pluribus punctis quàm uno, ſive intus, ſive extra contingat. Quod oportebat demonſtrare. a 11. hujus. b 2. hujus.



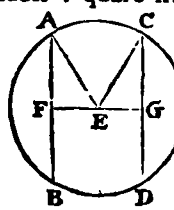
PROP. XIV. THEOR.

In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter à centro diſtant: & quæ æqualiter à centro diſtant, inter ſe ſunt æquales.

Sit circulus ABDC, & in ipſo æquales rectæ lineæ AB CD. Dico eas à centro æqualiter diſtare. Sumatur enim circuli

ABDC

ABDC centrum quod sit E, & ab ipso ad AB CD perpendiculares ducantur EF EG, & AE EC jungantur. Quoniam igitur recta linea quædam per centrum ducta EF rectam lineam quandam AB non ductam per centrum ad rectos angulos secat, & bifariam ipsam secabit[a]. quare AF est æqualis FB, ideoque AB ipsius AF dupla. eadem ratione, & CD dupla est CG. atque est AB ipsi CD æqualis. æqualis igitur & AF ipsi CG. & quoniam AE est æqualis EC, erit & quadratum ex AE quadrato ex EC æquale. sed quadrato quidem ex AE æqualia sunt ex AF FE quadrata[b]; rectus enim angulus est ad F: quadrato autem ex EC æqualia sunt quadrata ex EG GC, cum angulus ad G sit rectus. quadrata igitur ex AF FE æqualia sunt quadratis ex CG GE, quorum quadratum ex AF quadrato ex CG æquale, etenim æqualis est AF ipsi CG. reliquum igitur quod fit ex FE quadratum æquale est reliquo quod ex EG; ac propterea FE ipsi EG est æqualis. in circulo autem æqualiter distare à centro rectæ lineæ dicuntur, quando à centro ad ipsas perpendiculares ductæ æquales[c] sunt. ergo AB CD à centro æqualiter distant. Sed si AB CD æqualiter distent à centro, hoc est, æqualis sit FE ipsi EG; dico AB ipsi CD æqualem esse. Iisdem enim constructis, similiter ostendemus AB duplam esse ipsius AF, CD duplam ipsius CG. & quoniam æqualis est AE ipsi EC, erit & ex AE quadratum quadrato ex EC æquale. sed quadrato quidem ex AE æqualia[b] sunt quadrata ex EF FA: quadrato autem ex EC æqualia[b] quadrata ex EG GC. quadrata igitur ex EF FA quadratis ex EG GC æqualia sunt; quorum quadratum ex EG æquale est quadrato ex EF, est enim EG ipsi EF æqualis: reliquum igitur ex AF quadratum æquale est reliquo ex CG. ergo AF ipsi CG est æqualis. atque est AB ipsius AF dupla, & CD dupla ipsius CG. In circulo igitur æquales rectæ lineæ æqualiter à centro distant. Et quæ æqualiter à centro distant, inter se sunt æquales. Quod oportebat demonstrare.



a 3. hujus.

b 47. primi.

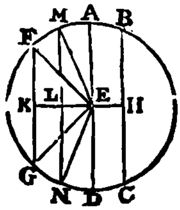
c 4. def. hujus.

PROP.

PROP. XV. THEOR.

In circulo maxima quidem est diameter: aliarum vero semper propinquior ei qua per centrum transit, remotiore major est.

Sit circulus ABCD, cujus diameter AD, centrum E; & propinquior quidem diametro AD sit BC; remotior vero FG. Dico AD maximam esse, & BC majorem quam FG. Ducantur enim à centro E ad BC FG perpendiculares EH EK. & quoniam BC propinquior est ei quæ per centrum transit, remotior autem FG; erit EK quam EH major. ponatur ipsi EH æqualis EL, & per L ipsi EK ad rectos angulos ducta LM in N producatur, & jungatur EM EN EF EG. quoniam igitur EH est æqualis EL, erit & BC ipsi MN æqualis [a]. rursus quoniam æqualis est AE ipsi EM, & DE ipsi EN, erit & AD ipsis ME EN æqualis. sed ME EN [b] majores sunt quam MN; ergo & AD major est quam MN: & MN est æqualis BC, erit igitur AD quam BC major. quod cum duæ EM EN duabus FE EG æquales sint, angulusque MEN major angulo FEG, & basis MN basi FG major [c] erit. ostensa autem est MN æqualis BC. ergo & BC quam FG est major. maxima igitur est AD diameter, & BC major quam FG. Quare in circulo maxima est diameter, aliarum vero semper propinquior ei, quæ per centrum transit, remotiore est major. Quod demonstrare oportebat.



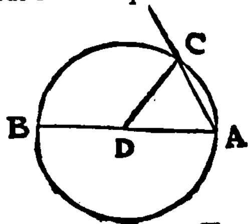
a 14. hujus.
b 20. primi.
c 24. primi.

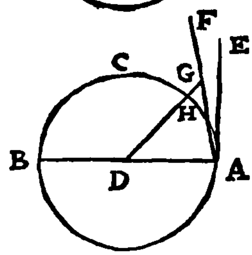
PROP. XVI. THEOR.

Quæ diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur, cadit extra circulum: & in locum qui inter rectam lineam, & circumferentiam interjicitur altera recta linea non cadet: & semicirculi angulus omni angulo acuto rectilineo major est; reliquus autem minor.

Sit circulus ABC circa centrum D, & diametrum AB. Dico rectam lineam, quæ à puncto A ipsi AB ad rectos angulos ducitur extra circulum cadere. Non enim; sed, si fieri

poteſt, cadat intus, ut AC, & DC jungatur. itaque quoniam æqualis eſt DA ipſi DC, erit & angulus DAC angulo ACD
a 5. primi. æqualis [a]. rectus autem eſt DAC [b]; ergo & ACD eſt rectus;
b ex hyp. ac propterea anguli DAC ACD duabus rectis æquales ſunt.
c 17. primi. quod fieri non poteſt [c]. non igitur à puncto A ipſi BA ad rectos angulos ducta cadet intra circulum. ſimiliter oſtendemus neque in circumferentiam cadere. Extra igitur cadat neceſſe eſt. cadat ut AE. Dico in locum qui inter rectam lineam AE & circumferentiam CHA interjicitur, alteram rectam lineam non cadere.





Si enim fieri poteſt, cadat ut FA, & à puncto D ad FA perpendicula-
d 12 primi. ris [d] ducatur DG. & quoniam rectus eſt angulus AGD, minor autem recto
e 19 primi. DAG, erit DA quàm DG major [e]. æqualis autem eſt DA ipſi DH. major igitur eſt DH ipſa DG, minor majore, quod fieri non poteſt. non igitur in locum qui inter rectam lineam & circumferentiam interjicitur, altera recta linea cadet. Dico præterea angulum ſemicirculi, qui recta linea BA, & circumferentia CHA continetur, omni angulo acuto rectilineo majorem eſſe; reliquum vero contentum circumferentia CHA, & recta linea AE omni angulo rectilineo eſſe minorem. Si enim eſt aliquis angulus rectilineus acutus major quidem contento recta linea BA, & CHA circumferentia, aut aliquis minor contento CHA circumferentia, & recta linea AE, in locum qui inter circumferentiam CHA, & rectam lineam AE interjicitur, cadet aliqua recta linea quæ faciet angulum majorem quidem contento recta linea BA & CHA circumferentia, qui ſcilicet rectis lineis continetur, minorem vero contento circumferentia CHA, & AE
f ex prius demonſtratis. recta linea, non cadit autem [f]: non igitur erit angulus acutus qui rectis lineis continetur, major angulo contento recta linea BA, & CHA circumferentia; neque minor contento circumferentia CHA, & AE recta linea.

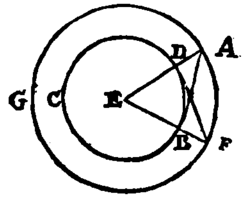
Cor. Ex hoc manifeſtum eſt rectam lineam quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, circulum contingere, & rectam lineam contingere circulum in uno tantum puncto, quoniam quæ occurrit in duobus punctis intra ipſum cadit, ut oſtenſum eſt.

PROP.

PROP. XVII. PROBL.

A dato puncto rectam lineam ducere quæ datum circulum contingat.

Sit datum quidem punctum A, datus autem circulus BCD. Oportet à puncto A rectam lineam ducere, quæ circulum BCD contingat. Sumatur enim centrum circuli E; & juncta AE, centro quidem E, intervallo autem EA circulus AFG describatur: & à puncto D ipsi EA ad rectos angulos [a] ducatur DF: junganturque EBF AB. Dico à puncto A ductam esse AB quæ circulum BCD contingit. Quoniam enim E centrum est circulorum BCD AFG, erit EA æqualis EF, & ED ipsi EB. duæ igitur AE EB duabus FE ED æquales sunt, & angulum communem continent, qui est ad E. ergo basis DF basi AB est [b] æqualis, triangulumque DEF æquale triangulo EBA, & reliqui anguli reliquis angulis. æqualis igitur est angulus EBA angulo EDF. & EDF rectus est. quare & rectus EBA: atque est EB ex centro. quæ autem diametro circuli ab extremitate ad rectos angulos ducitur, circulum contingit [c]. ergo AB contingit circulum. A dato igitur puncto A ducta est recta linea AB quæ circulum BCD contingit. Quod facere oportebat.

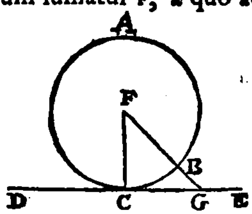


[a] 11.primi.
[b] 4. hujus.
[c] Cor. 16. hujus.

PROP. XVIII. THEOR.

Si circulum contingat quædam recta linea, à centro autem in contactum recta linea ducatur, ea ad contingentem perpendicularis erit.

Circulum enim ABC contingat quædam recta linea DE in puncto C: & circuli ABC centrum sumatur F, à quo ad C ducatur FC. Dico FC ad ipsam DE perpendicularem esse. Si enim non ita sit, ducatur à puncto F ad DE perpendicularis [a] FG. Quoniam igitur angulus FGC rectus est, erit GCF acutus [b], ac propterea FGC angulus major angulo FCG. majorem autem angulum majus latus [c] subtendit. major igitur est FC quàm FG. æqualis autem FC ipsi FB ergo



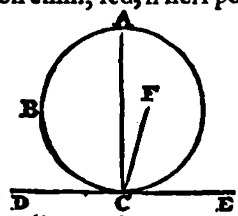
[a] 12.primi.
[b] 32.primi.
[c] 19.primi.

ergo FB ipsa FG est major, minor majore, quod fieri non potest. non igitur FG est perpendicularis ad DE. similiter ostendemus neque aliam quampiam esse præter ipsam FC. ergo FC ad DE est perpendicularis. Si igitur circulum contingat quædam recta linea, à centro autem in contactum recta linea ducatur, ea ad contingentem perpendicularis erit. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XIX. THEOR.

Si circulum contingat quædam recta linea, à contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur: in ea circuli centrum erit.

Circulum enim ABC contingat quædam recta linea DE in C, & à puncto C ipsi DE ad rectos angulos ducatur CA. Dico in ipsa AC circuli centrum esse. Non enim; sed, si fieri potest, sit F centrum, & jungatur CF. Quoniam igitur circulum ABC contingit quædam recta linea DE, & à centro ad contactum ducta est FC; erit FC ad ipsam DE perpendicularis [a]. rectus igitur angulus est FCE. est autem & ACE rectus [b]. ergo FCE angulus est æqualis angulo ACE, minor majori, quod fieri non potest. non igitur F centrum est ABC circuli. similiter ostendemus neque aliud aliquod esse præterquam in ipsa AC. Quare si circulum contingat quædam recta linea, à contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur; in ea circuli erit centrum. Quod demonstrare oportebat.



a 18. hujus.
b Ex hyp.

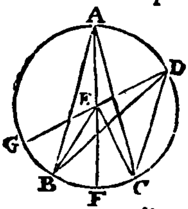
PROP. XX. THEOR.

In circulo angulus, qui ad centrum, duplex est ejus qui ad circumferentiam est, quando circumferentiam eandem pro basi habeant.

Sit circulus ABC, ac cujus centrum quidem angulus sit BEC, ad circumferentiam vero BAC, & eandem circumferentiam BC pro basi habeant. Dico BEC angulum anguli BAC duplum esse. Jungatur enim AE, & ad F producatur. itaque quoniam EA est æqualis EB, erit & angulus EAB angulo EBA [a] æqualis. anguli igitur EAB EBA duplices sunt ipsius

a 5. primi.

ipsius anguli EAB; sed angulus BEF est æqualis *b* angulis EAB EBA; ergo BEF angulus anguli EAB est duplex. eadem ratione & angulus FEC duplex est ipsius EAC. totus igitur BEC totius BAC duplex erit. rursus inflectatur, & sit alter angulus BDC, junctaque DE ad G producatur. similiter ostendemus angulum GEC anguli GDC duplum esse; quorum GEB duplus est ipsius GDB. ergo reliquus BEC reliqui BDC est duplus. In circulo igitur angulus qui ad centrum, duplex est ejus qui ad circumferentiam est, quando circumferentiam eandem pro basi habeant. Quod oportebat demonstrare. *b* 32.primi.

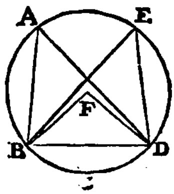


PROP. XXI. THEOR.

In circulo, qui in eodem segmento sunt, anguli inter se æquales sunt.

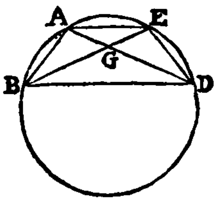
Sit circulus ABCDE, & in eodem segmento BAED anguli sint BAD BED. Dico eos inter se æquales esse. Sumatur enim circuli ABCDE centrum quod sit F: junganturque BF FD. Quoniam angulus quidem BFD est ad centrum, angulus vero BAD ad circumferentiam, & circumferentiam eandem BCD pro basi habent; erit BFD angulus *a* anguli BAD duplus. eadem ratione angulus BFD duplus est etiam anguli BED. ergo angulus BAD angulo BED æqualis erit. Si anguli BAD BED sunt in segmento minore semicirculo, ducatur AE, eruntque omnes anguli trianguli ABG æquales *b* omnibus angulis trianguli DEG. & anguli ABE ADE sunt æquales per hactenus demonstrata, & anguli AGB DGE sunt etiam æquales *c*, ad verticem enim sunt: quare & reliquus BAG reliquo GED æqualis erit. In circulo, igitur qui in eodem segmento sunt anguli inter se æquales sunt. Quod oportebat demonstrare.

a 20. hujus.



b 32.primi.

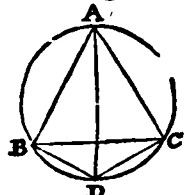
c 15.primi.



PROP. XXII. THEOR.

Quadrilaterorum quæ in circulis describuntur, anguli oppositi duobus rectis æquales sunt.

Sit circulus ABDC, & in ipso quadrilaterum ABDC. Dico angulos ipsius oppositos duobus rectis æquales esse. Jungantur AD BC: quoniam igitur omnis trianguli tres anguli duo-
a 32.primi. bus rectis sunt æquales [a], erunt trianguli ABC tres anguli CAB ABC BCA æquales duobus rectis. sed angulus ABC est
b 21.primi. æqualis [b] angulo ADC, in eodem enim sunt segmento AB DC. & angulus ACB æqualis [b] ipsi ADB, quod sunt in eodem ACDB segmento: totus igitur angulus BDC angulis ABC ACB æqualis est. communis apponatur BAC angulus; erunt

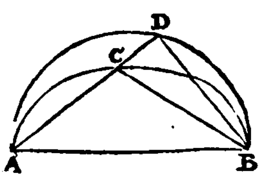


anguli BAC ABC ACB angulis BAC BDC æquales. sed BAC ABC ACB sunt æquales [a] duobus rectis. ergo & anguli BAC BDC duobus rectis æquales erunt. similiter ostendemus angulos quoque ABD ACD duobus rectis esse æquales. Quadrilaterorum igitur, quæ in circulis describuntur, anguli oppositi duobus rectis æquales sunt. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXIII. THEOR.

Super eadem recta linea duo circulorum segmenta similia, & inæqualia ex eadem parte non constituentur.

Si enim fieri potest, super eadem recta linea AB duo circulorum segmenta similia, & inæqualia constituantur ex eadem parte ACB ADB; ducaturque ACD, & CB BD jungantur. Itaque quoniam segmentum ACB simile est segmento ADB, similia autem circulorum segmenta sunt quæ
a Def. 11. hujus. angulos suscipiunt [a] æquales; erit ACB angulus æqualis an-



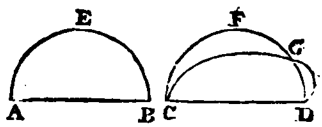
b 16.primi. gulo ADB, exterior interiori, quod fieri non potest [b]. Non igitur super eadem recta linea, duo circulorum segmenta similia, & inæqualia ex eadem parte constituentur. Quod demonstrare oportebat.

PROP.

PROP. XXIV. THEOR.

Super æqualibus rectis lineis similia circulorum segmenta inter se æqualia sunt.

Sint enim super æqualibus rectis lineis AB CD similia circulorum segmenta AEB CFD. Dico segmentum AEB segmento CFD æquale esse. Applicato enim AEB segmento segmento CFD, & posito puncto quidem A in C, recta vero linea AB in CD; congruet & B punctum puncto D, propterea quod AB ipsi CD sit æqualis. congruente autem recta linea AB rectæ CD; congruet & AEB segmentum segmento CFD.

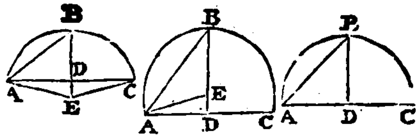


si enim AB congruet ipsi CD, segmentum autem AEB segmento CFD non congruet, sed permutabitur ut CGD, circulus circulum in pluribus quàm duobus punctis secabit. etenim circulus CGD circulum CFD secat in pluribus punctis quàm duobus, videlicet in punctis C, G, D, quod fieri non [a] potest. non igitur congruente recta [a] 10. hujus.
linea AB rectæ CD, non congruet & AEB segmentum segmento CFD. quare congruet, & ipsi æquale erit. Super æqualibus igitur rectis lineis similia circulorum segmenta inter se æqualia sunt. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXV. PROBL.

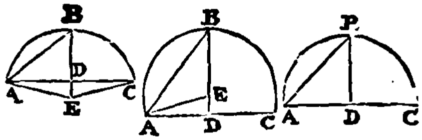
Circuli segmento dato describere circulum cujus est segmentum.

Sit datum circuli segmentum ABC. Oportet describere circulum cujus ABC est segmentum. Secetur AC bifariam [a] in D: & à puncto D ipsi AC ad rectos [a] 10.primi.
angulos ducatur [b] DB, & AB jungatur. [b] 11.primi.
Vel igitur angulus ABD major est angulo BAD, vel minor, vel ipsi æqualis. Sit primum major, & ad rectam lineam BA, atque ad datum in ea punctum A constituatur [c] 23.primi.
angulus BAE æqualis [c] angulo ABD; & DB ad E producatur, jungaturque EC. Quoniam igitur angulus ABE est æqualis



d 6. primi. angulo BAE, d erit & BE recta linea ipsi EA æqualis: & quoniam AD est æqualis DC, communis autem DE, duæ AD DE duabus CD DE æquales sunt, altera alteri; & angulus ADE æqualis angulo CDE, rectus enim uterque est. ergo & basis AE basi

e 4. primi. EC est æqualis e sed ostensa est AE æqualis EB. quare & BE ipsi EC est æqualis, ac propterea tres rectæ lineæ AE EB EC inter se æquales sunt. centro igitur E, intervallo autem unâ ipsarum AE EB EC circulus descriptus etiam per reliqua



f 9. hujus. f transibit puncta, & circulus descriptus erit. quare circuli segmento dato descriptus est circulus cujus segmentum est. sed & illud constat, segmentum ABC semicirculo minus

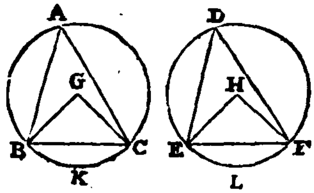
g Cas. 3. fig. 3. esse; propterea quod centrum ipsius extra cadit. g Similiter, & si angulus ABD sit æqualis angulo BAD, facta AD æquali utrique ipsarum BD DC, erunt tres rectæ lineæ AD DB DC inter se æquales, atque erit D circuli descripti centrum, &

h Cas. 2. fig. 2. segmentum ABC semicirculus. h Si vero angulus ABD minor sit angulo BAD; constituatur ad rectam lineam BA, & ad punctum in ea datum A, angulo ABD æqualis angulus BAE intra segmentum ABC. erit E centrum in ipsa DB, atque erit ABC segmentum semicirculo majus. Circuli igitur segmento dato descriptus est circulus cujus segmentum est. Quod facere oportebat.

PROP. XXVI. THEOR

In æqualibus circulis æquales anguli æqualibus insistunt circumferentiis, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant.

Sint æquales circuli ABC DEF, & in ipsis æquales anguli ad centra quidem BGC EHF, ad circumferentias vero BAC EDF. Dico BKC circumferentiam circumferentiæ ELF æqualem esse. Jungantur enim BC EF. Quoniam æquales sunt ABC DEF circuli, erunt & quæ ex centris æquales. duæ igitur BG GC duabus EH HF æquales sunt; & angulus ad G æqualis angulo ad H. ergo & basis

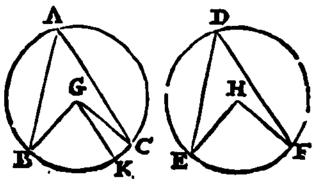


basis BC basi EF est [a] æqualis. rursus quoniam æqualis est [a] 4. primi.
angulus ad A angulo ad D, segmentum BAC simile [b] erit [b] Def. 11.
segmento EDF: & sunt super æqualibus rectis lineis BC EF. hujus.
quæ autem super æqualibus rectis lineis similia sunt circulorum segmenta, inter se æqualia [c] sunt. segmentum igitur [c] 24. hujus.
BAC segmento EDF est æquale. sed & totus ABC circulus æqualis est toti DEF. ergo & reliqua circumferentia BKC reliquæ ELF æqualis erit. In æqualibus igitur circulis æquales anguli æqualibus insistunt circumferentiis, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXVII. THEOR.

In æqualibus circulis anguli qui æqualibus insistunt circumferentiis inter se æquales sunt, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant.

In æqualibus enim circulis ABC DEF, æqualibus circumferentiis BC EF insistant anguli ad centra quidem BGC EHF, ad circumferentias vero BAC EDF. Dico angulum BGC angulo EHF, & angulum BAC angulo EDF æqualem esse. Si quidem igitur angulus BGC æqualis sit angulo EHF, manifestum est angulum quoque BAC angulo EDF [a] esse æqualem. sin minus, unus ipsorum est major. sit



[a] 20. hujus.

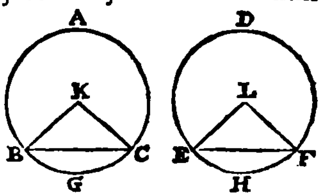
major BGC, & constituatur ad rectam lineam BG, & ad punctum in ipsa G, angulo EHF æqualis [b] angulus BGK. æ- [b] 23. primi.
quales autem anguli æqualibus insistunt [c] circumferentiis, [c] 26. hujus.
quando ad centra fuerint. ergo circumferentia BK æqualis est circumferentiæ EF. sed circumferentia EF æqualis est ipsi BC. ergo & BK ipsi BC est æqualis. minor majori, quod fieri non potest. non igitur inæqualis est angulus BGC angulo EHF: ergo est æqualis. atque est anguli quidem BGC dimidium angulus qui ad A; anguli vero EHF dimidium qui ad D. angulus igitur qui ad A angulo qui ad D est æqualis. In æqualibus igitur circulis, anguli qui æqualibus insistunt circumferentiis inter se æquales sunt, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant. Quod oportebat demonstrare.

PROP.

PROP. XXVIII. THEOR.

In æqualibus circulis æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori.

Sint æquales circuli ABC DEF; & in ipsis æquales rectæ lineæ BC EF, quæ circumferentias quidem BAC EDF majores auferant, circumferentias vero BGC EHF minores. Dico circumferentiam BAC majorem majori circumferentiæ EDF, & minorem circumferentiam BGC minori EHF æqualem esse. Sumantur enim centra [a] circulorum K, L, junganturque BK KC EL LF. Quoniam circuli æquales sunt, erunt & quæ ex centris æquales [b].



duæ igitur BK KC sunt æquales duabus EL LF: & basis BC æqualis est basi EF, ergo angulus BKC angulo ELF est [c] æqualis: æquales autem anguli æqualibus insistunt circumferentiis, quando ad centra fuerint [d]. quare circumferentia BGC æqualis est circumferentiæ EHF, sed & totus ABC circulus toti DEF est æqualis. reliqua igitur circumferentia BAC reliquæ EDF æqualis erit. Ergo in æqualibus circulis æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori. Quod demonstrare oportebat.

[a] 1. hujus. [b] Def. 1. hujus. [c] 8. primi. [d] 26. hujus.

PROP. XXIX. THEOR.

In æqualibus circulis, æquales circumferentias æquales rectæ lineæ subtendunt.

Sint æquales circuli ABC DEF: & in ipsis æquales assumantur circumferentiæ BGC EHF, & BC EF jungantur. Dico rectam lineam BC rectæ EF æqualem esse. Sumantur enim centra [a] circulorum K, L, & jungantur BK KC EL LF. Quoniam igitur circumferentia BGC est æqualis circumferentiæ EHF, erit & angulus BKC angulo ELF æqualis [b]. & quoniam circuli ABC DEF sunt æquales, & quæ ex centris æquales erunt [c]. duæ igitur BK KC sunt æquales duabus EL LF; & æquales angulos continent. quare basis BC basi EF est [d] æqualis. In æqualibus igitur circulis æquales circumferentias æquales rectæ lineæ subtendunt. Quod oportebat demonstrare.

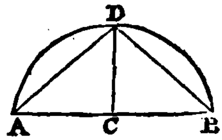
Vide figur. Prop. præcedentis. [a] 1. hujus. [b] 27. hujus. [c] Def. 1. hujus. [d] 4. primi.

PROP.

PROP. XXX. PROBL.

Datam circumferentiam bifariam secare.

Sit data circumferentia ADB. oportet ADB circumferentiam bifariam secare. Jungatur AB, & in C bifariam [a] secetur: à puncto autem C ipsi AB ad rectos angulos ducatur CD. & jungantur AD DB. quoniam igitur AC est æqualis CB, communis autem CD, duæ AC CD duabus BC CD æquales sunt: & angulus ACD æqualis angulo BCD, rectus enim uterque est: ergo basis AD basi BD est [b] æqualis. æquales autem rectæ lineæ [c] cricumferentias æquales auferunt, quare circumferentia AD circumferentiæ BD æqualis erit. Data igitur circumferentia bifariam secta est. Quod facere oportebat.

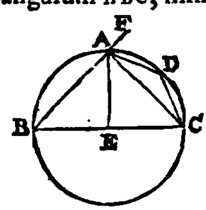


a 10. primi.
b 4. primi.
c 28. hujus.

PROP. XXXI. THEOR.

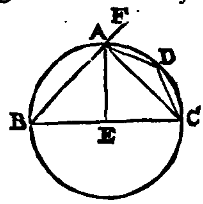
In circulo angulus, qui in semicirculo, rectus est, qui vero in majori segmento, minor est recto, & qui in minori, major recto; & insuper majoris quidem segmenti angulus recto major est, minoris vero segmenti angulus recto minor.

Sit circulus ABCD cujus diameter BC, centrum autem E; & jungantur BA AC AD DC. Dico angulum quidem qui est in semicirculo BAC rectum esse, qui vero in segmento ABC majore semicirculo, videlicet angulum ABC, minorem esse recto, & qui est in segmento ADC minore semicirculo, hoc est angulum ADC, recto majorem. Jungatur AE, & BA ad F producatur. Itaque quoniam BE est æqualis EA, erit & angulus EAB, angulo EBA æqualis [a]. rursus quoniam AE est æqualis EC, & angulus ACE angulo CAE æqualis [a] erit. totus igitur angulus BAC est æqualis duobus ABC ACB angulis, est autem, & angulus FAC extra triangulum ABC, duobus ABC ACB æqualis [b]. angulus igitur BAC est æqualis angulo FAC; ac propterea uterque ipsorum rectus [c]. quare in semicirculo BAC angulus CAB rectus est.



a 5. primi.
b 32. primi
c Def. 10. primi.

eſt. & quoniam trianguli ABC duo anguli ABC BAC duobus rectis ſunt [d] minores, rectus autem BAC, erit ABC angulus recto minor, atque eſt in ſegmento ABC majore ſemicirculo. quod cum in circulo quadrilaterum ſit ABCD, quadrilaterorum vero qui in circulis deſcribuntur, anguli oppoſiti duobus rectis ſunt [e] æquales: erunt ABC ADC anguli æquales duobus rectis, & angulus ABC minor eſt recto, reliquus igitur ADC recto major erit, atque eſt in ſegmento ADC minore ſemicirculo. Dico præterea majoris ſegmenti angulum qui continetur ABC circumferentia, & recta linea AC recto majorem eſſe; angulum vero minoris ſegmenti, contentum circumferentia ADC, & recta linea AC recto minorem. quod quidem perſpicue apparet. Quoniam angulus qui rectis lineis BA AC continetur rectus eſt, erit & contentus ABC circumferentia, & recta linea AC recto major. rurſus quoniam angulus contentus rectis lineis CA AF rectus eſt, erit qui continetur recta linea CA, & ADC circumferentia, minor recto. In circulo igitur angulus qui in ſemicirculo, rectus eſt, qui vero in majore ſegmento, minor eſt recto, & qui in minori, major recto: & inſuper majoris quidem ſegmenti angulus recto major eſt, minoris vero recto minor. Quod demonſtrare oportebat.



d 17. primi.

e 22. hujus.

Cor. Ex hoc manifeſtum eſt, ſi trianguli unus angulus ſit æqualis duobus, eum rectum eſſe; propterea quòd & qui deinceps eſt, iiſdem eſt æqualis. quando autem anguli deinceps ſunt æquales, neceſſario recti ſunt [f].

f Def. 10. primi.

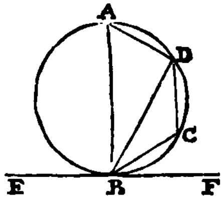
PROP. XXXII. THEOR.

Si circulum contingat quædam recta linea, à contactu autem in circulum ducatur recta linea ipſum ſecans; anguli quos ad contingentem facit, æquales erunt iis qui in alternis circuli ſegmentis conſiſtunt.

Circulum enim ABCD contingat quædam recta linea EF in B, & à puncto B ad circulum ABCD ducatur recta linea BD ipſum utcunque ſecans. Dico angulos quos BD cum EF contingente facit, æquales eſſe iis qui in alternis circuli ſegmentis conſiſtunt. hoc eſt angulum FBD eſſe æqualem angulo qui conſtituitur in DAB ſegmento, videlicet ipſi

DAB;

DAB; angulum vero DBE æqualem angulo DCB qui in ſegmento BCD conſtituitur. Ducatur enim à puncto B ipſi EF ad rectos [a] angulos BA: & in circumferentia BD ſumatur quodvis punctum C; junganturque AD DC CB. Quoniam igitur circulum ABCD contingit quædam recta linea EF in puncto B, & à contactu B ad rectos angulos contingenti ducta eſt BA; erit in ipſa BA centrum [b] ABCD circuli; quare BA ejuſdem circuli [c] diameter eſt, & angulus ADB in ſemicirculo eſt [d] rectus. reliqui igitur anguli BAD ABD uni recto [e] æquales ſunt. ſed & ABF [f] eſt rectus. ergo angulus ABF æqualis eſt angulis BAD ABD. communis auferatur ABD. reliquus igitur DBF ei, qui in alterno circuli ſegmento conſiſtit, videlicet angulo BAD, eſt æqualis. & quoniam in circulo quadrilaterum eſt ABCD, & anguli ejus oppoſiti æquales [g] ſunt duobus rectis; erunt DBF DBE anguli angulis BAD BCD æquales. quorum BAD oſtenſus eſt æqualis ipſi DBF; ergo reliquus DBE ei, qui in alterno circuli ſegmento DCB conſtituitur, videlicet ipſi DCB, æqualis erit. Si igitur circulum contingat quædam recta linea, à contactu vero in circulum ducatur recta linea ipſum ſecans; anguli quos facit ad contingentem, æquales erunt iis qui in alternis circuli ſegmentis conſiſtunt. Quod oportebat demonſtrare.

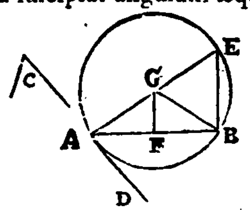


a 11. primi.
b 19. hujus.
c Def. 17. primi.
d 31. hujus.
e 32. primi.
f ex conſtr.
g 22. hujus.

PROP. XXXIII. PROBL.

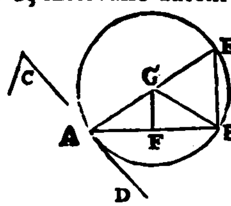
Super data recta linea deſcribere ſegmentum circuli, quod ſuſcipiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.

Sit data recta linea AB, datus autem angulus rectilineus, qui ad C. Itaque oportet ſuper data recta linea AB deſcribere ſegmentum circuli, quod ſuſcipiat angulum æqualem angulo qui eſt ad C. Ad rectam lineam AB, & ad punctum in ea datum A, conſtituatur angulus BAD angulo qui eſt ad C æqualis [a]. & à puncto A ipſi AD ad rectos angulos [b] ducatur AE; ſecetur autem AB bifariam [c] in F, atque à puncto F ducatur FG ad rectos angulos ipſi AB; & GB jungatur. Quoniam igitur AF eſt æqualis FB, communis



a 23. primi.
b 11. primi.
c 10. primi.

munis autem FG, duæ AF FG duabus BF FG æquales ſunt: & angulus AFG æqualis angulo BFG. ergo baſis AG baſi
d 4. hujus. GB eſt [d] æqualis. itaque centro G, intervallo autem AG circulus deſcriptus tranſibit etiam per B. deſcribatur, & ſit ABE, jungaturque EB. Quoniam igitur ab extremitate diametri AB, & à puncto A, ipſi AE ad rectos angulos ducta eſt AD; ipſa AD circulum [e] continget. & quo-

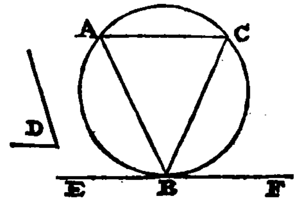


e Cor. 16. hujus. niam circulum ABE contingit quædam recta linea AD, & à contactu qui eſt ad A, in circulum ABE ducta eſt recta
f 32. hujus. linea AB: erit angulus DAB æqualis [f] angulo qui in alterno circuli ſegmento conſtituitur, videlicet ipſi AEB. ſed angulus DAB, angulo ad C eſt æqualis. ergo & angulus ad C angulo AEB æqualis erit. Super data igitur recta linea AB, ſegmentum circuli deſcriptum eſt AEB ſuſcipiens angulum AEB, dato angulo qui eſt ad C, æqualem. Quod facere oportebat.

PROP. XXXIV. PROBL.

A dato circulo ſegmentum abſcindere quod ſuſcipiat angulum dato rectilineo æqualem.

Sit datus circulus ABC, datus autem angulus rectilineus qui ad D. Oportet à circulo ABC ſegmentum abſcindere,
a 17. hujus. quod ſuſcipiat angulum angulo ad D æqualem. Ducatur [a] recta linea EF circulum ABC in puncto B contingens: & ad rectam lineam BF, & ad punctum in ea B, conſtituatur angulus FBC angulo qui eſt
b 23. primi. ad D æqualis [b]. Quoniam igitur circulum ABC contingit quædam recta linea EF in B



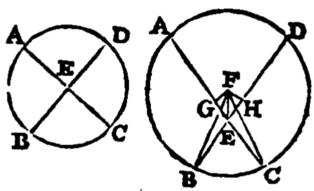
puncto, & à contactu B ducta eſt BC, erit angulus FBC æ-
c 32. hujus. qualis [c] ei qui in alterno circuli ſegmento conſtituitur. ſed FBC angulus angulo qui ad D eſt æqualis. ergo & angulus in ſegmento BAC angulo ad D æqualis erit. A dato igitur circulo ABC, abſciſſum eſt ſegmentum quoddam BAC, ſuſcipiens angulum dato angulo rectilineo qui eſt ad D, æqualem. Quod facere oportebat.

PROP.

PROP. XXXV. THEOR.

Si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secent, rectangulum sub segmentis unius contentum, æquale est ei, quod sub alterius segmentis continetur, rectangulo.

In circulo enim ABCD, duæ rectæ lineæ AC BD sese mutuo in puncto E secent. Dico rectangulum contentum sub AE EC æquale esse ei quod sub DE EB continetur. Si AC BD per centrum transeant, ita ut E sit centrum ABCD circuli; manifestum est æqualibus existentibus AE EC DE EB, & rectangulum contentum sub AE EC æquale esse ei quod sub DE EB continetur. Si AC DB non transeant per centrum, sumatur centrum circuli ABCD quod sit F: & ab F ad rectas lineas AC DB perpendiculares ducantur FG FH: junganturque FB FC FE. Quoniam igitur recta quædam linea GF per centrum ducta rectam lineam quandam AC non ductam per centrum ad rectos angulos secat, & bifariam ipsam secabit [a]. quare AG ipsi GC est æqualis. & quoniam recta linea AC secta est in partes æquales in puncto G, & in partes inæquales in E, erit rectangulum sub AE EC contentum, una cum ipsius EG quadrato [b], æquale quadrato ex GC. commune addatur ex GF quadratum. ergo rectangulum sub AE EC, una cum iis quæ ex EG GF quadratis, æquale est quadratis ex CG GF. sed quadratis quæ ex EG GF æquale [c] est quadratum ex FE: quadratis vero ex CG GF æquale est [c] quod ex FC fit quadratum. rectangulum igitur sub AE EC, una cum quadrato ex FE, æquale est quadrato ex FC. est autem CF æqualis FB. ergo rectangulum sub AE EC, unà cum quadrato ex EF, æquale est ei quod ex FB fit quadrato. eadem ratione & rectangulum sub DE EB unà cum quadrato ex FE, æquale est quadrato ex FB. ostensum autem est & rectangulum sub AE EC, unà cum quadrato ex FE, æquale ei quod fit ex FB quadrato. ergo rectangulum sub AE EC, unà cum quadrato ex FE, æquale est rectangulo sub DE EB, unà cum quadrato ex FE. commune auferatur FE quadratum. reliquum igitur rectangulum sub AE EC, reliquo sub DE EB rectangulo æquale erit. Quare si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secent, rectangulum sub segmentis unius contentum æquale est ei quod sub alterius segmentis continetur. Quod demonstrare oportebat.



a 3. hujus.

b 5. secundi.

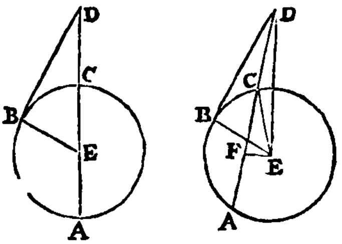
c 47. primi.

PROP.

PROP. XXXVI. THEOR.

Si extra circulum aliquod punctum sumatur, & ab eo in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secat, altera vero contingat; rectangulum quod sub tota secante, & exterius assumpta inter punctum & curvam circumferentiam continetur, æquale erit ei, quod à contingente fit, quadrato.

Extra circulum enim ABC sumatur aliquod punctum D, & ab eo ad dictum circulum cadant duæ rectæ lineæ DCA DB: & DCA quidem circulum ABC secet; DB vero contingat. Dico rectangulum sub AD DC, quadrato, quod fit ex DB, æquale esse. Vel igitur DCA per centrum transit, vel non transit. Primum transeat per centrum circuli ABC, quod sit E, & EB jungatur. erit angulus EBD rectus [a]. itaque quoniam recta linea AC bifariam secta est in E, & ipsi adjicitur CD, rectangulum sub AD DC, una cum quadrato ex EC, æquale [b] erit ei quod fit ex ED quadrato. æqualis autem est CE ipsi EB, ergo rectangulum sub AD DC, unà cum quadrato quod ex EB, æquale est quadrato ex ED. sed quadratum ex ED est æquale quadratis [c] ipsarum EB BD, rectus enim angulus est EBD. rectangulum igitur sub AD DC, una cum quadrato ex EB, æquale est ipsarum EB, BD quadratis. commune auferatur quadratum quod ex EB; ergo reliquum sub AD DC rectangulum, quadrato quod fit à contingente DB æquale erit. Secundo DCA non transeat per centrum ABC circuli: sumaturque [d] centrum E, & ad AC perpendicularis agatur EF, & jungantur EB EC ED, rectus igitur est EFD angulus. & quoniam recta linea quædam EF per centrum ducta, rectam lineam quandam AC non ductam per centrum ad rectos angulos secat, & bifariam ipsam secabit [e]. quare AF ipsi FC est æqualis. rursus quoniam recta linea AC bifariam secta est in F, atque ipsi adjicitur CD, erit rectangulum sub AD DC, unà cum quadrato ex FC, æquale [b] quadrato quod ex FD. commune apponatur quod ex FE quadratum. rectangulum igitur sub

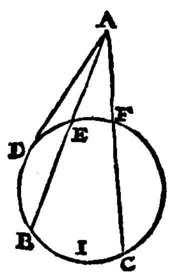


a 18. hujus
b 6. secundi.
c 47. primi.
d 1. hujus.
e 3. hujus.

AD DC

AD DC unà cum quadratis ex FC FE est æquale quadratis ex DF FE. sed quadratis quidem ex DE FE æquale est [c] ex DE quadratum; etenim rectus est angulus EFD: quadratis vero ex CF FE æquale est [c] quadratum ex CE. [c] 47. primi.
ergo rectangulum sub AD DC, una cum quadrato quod ex CE, est æquale quadrato ex ED; æqualis autem est CE ipsi EB; rectangulum igitur sub AD DC, una cum quadrato ex EB, æquale est ex ED quadrato. sed quadrato ex ED æqualia sunt quadrata [c] ex EB BD, siquidem rectus est angulus EBD. ergo rectangulum sub AD DC, una cum quadrato ex EB æquale est eis quæ ex EB BD fiunt quadratis. commune auferatur quadratum ex EB. reliquum igitur sub AD DC rectangulum quadrato quod fit ex DB æquale erit. Si igitur extra circulum aliquod punctum sumatur, &c. Quod oportebat demonstrare.

Cor. Hinc si à puncto quovis extra circulum assumpto, plures lineæ rectæ AB AC circulum secantes ducantur; rectangula comprehensa sub totis lineis AB AC, & partibus externis AE AF, inter se sunt æqualia. Nam si ducatur tangens AD, erit rectangulum sub BA AE æquale quadrato ex AD; & rectangulum sub CA AF eidem quadrato ex AD erit æquale. unde rectangula hæc æqualia erunt.

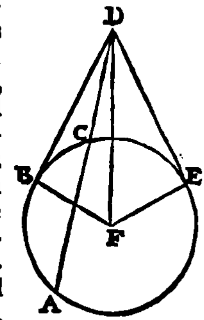


PROP. XXXVII. THEOR.

Si extra circulum sumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera vero incidat: sit autem, quod sub tota secante, & exterius assumpta inter punctum, & curvam circumferentiam continetur rectangulum, æquale ei quod ab incidente fit quadrato; incidens linea circulum continget.

Extra circulum enim ABC sumatur aliquod punctum D, atque ab ipso in circulum cadant duæ rectæ lineæ DCA, DB;

DB; DCA quidem circulum ſecet, DB vero incidat; ſitque rectangulum ſub AD DC æquale quadrato quod fit ex DB. Dico ipſam DB circulum ABC contingere. Ducatur enim



a 17. hujus. recta linea DE a contingens circulum ABC, & ſumatur circuli ABC centrum, quod ſit F, junganturque FE FB FD. ergo an-
b 18. hujus. gulus FED rectus eſt b. & quoniam DE circulum ABC contingit, ſecat autem DCA; rectangulum ſub AD DC æquale
c ex antecedente. erit c quadrato ex DE. ſed rectangulum ſub AD DC ponitur æquale quadrato ex DB. quadratum igitur quod ex DE quadrato ex DB æquale erit. ac propterea linea DE erit ipſi DB æqualis. eſt autem & FE æqualis FB. duæ igitur DE EF duabus DB BF æquales
d 8. primi. ſunt; & baſis communis FD; angulus igitur DEF eſt d æqualis angulo DBF; rectus autem eſt DEF, ergo & DBF eſt rectus. atque eſt FB producta diameter. quæ vero ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, circulum con-
e Cor. 16. hujus. tingit e. ergo DB circulum ABC contingat neceſſe eſt. ſimiliter demonſtrabitur & ſi centrum ſit in ipſa AC. Si igitur extra circulum ſumatur aliquod punctum, &c. Quod demonſtrare oportebat.

EUCLIDIS

EUCLIDIS

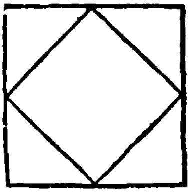
ELEMENTORUM

LIBER QUARTUS.

DEFINITIONES.

I.

FIGURA rectilinea in figura rectilinea deſcribi dicitur, quando unuſquiſque figuræ deſcriptæ angulus, unumquodque latus ejus in qua deſcribitur, contingit.

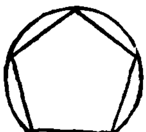


II.

Figura ſimiliter circa figuram deſcribi dicitur, quando unumquodque latus deſcriptæ, unumquemque angulum ejus circa quam deſcribitur, contingit.

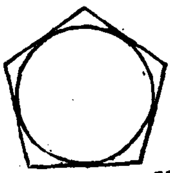
III.

Figura rectilinea in circulo deſcribi dicitur, quando unuſquiſque deſcriptæ figuræ angulus circuli circumferentiam contingit.



IV.

Figura rectilinea circa circulum deſcribi dicitur, quando unumquodque latus deſcriptæ, circuli circumferentiam contingit.



V.

Circulus similiter in figura rectilinea describi dicitur, quando circuli circumferentia unumquodque latus ejus in qua describitur, contingit.

VI.

Circulus circa figuram rectilineam describi dicitur, quando circuli circumferentia unumquemque angulum ejus circa quam describitur, contingit.

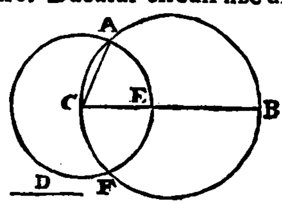
VII.

Recta linea in circulo aptari dicitur, quando ejus extrema in circuli circumferentia fuerint.

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

In dato circulo, data recta linea quæ diametro ejus major non sit, æqualem rectam lineam aptare.

Sit datus circulus ABC, data autem recta linea non major circuli diametro D. Oportet in circulo ABC rectæ lineæ D æqualem rectam lineam aptare. Ducatur circuli ABC diameter BC. Siquidem igitur BC sit æqualis ipsi D, factum jam erit quod proponebatur. etenim in circulo ABC aptata est BC rectæ lineæ D æqualis. sin minus, major est BC quam D, ponaturque a ipsi D æqualis CE: & centro quidem C intervallo autem CE circulus describatur AEF: & CA jungatur. itaque quoniam punctum C centrum est AEF circuli; erit CA ipsi CE æqualis. sed D est æqualis CE. ergo & D ipsi AC æqualis erit. In dato igitur circulo ABC datæ rectæ lineæ D, non majori circuli diametro, æqualis aptata est AC. Quod facere oportebat.



a 3. primi.

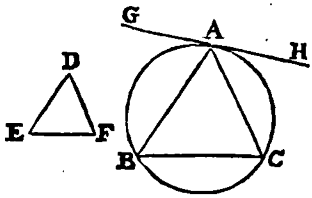
PROP. II. PROBL.

In circulo dato, dato triangulo æquiangulum triangulum describere.

Sit datus circulus ABC, datum autem triangulum DEF. Oportet in ABC circulo describere triangulum triangulo DEF æquiangulum. Ducatur recta linea GAH contingens a circulum

a 17. tertii.

lum ABC in puncto A: & ad rectam lineam AH, & ad punctum in ea A, angulo DEF æqualis [b] angulus constituatur HAC. rursus ad rectam lineam AG, & ad punctum in ipsa A, angulo DFE æqualis [b] constituatur angulus GAB; & BC jungatur. Quoniam igitur circulum ABC contingit quædam recta HAG; à contactu autem in circulum



b 23. primi.

ducta est AC: erit HAC angulus æqualis [c] ei qui in alterno circuli segmento consistit, videlicet ipsi ABC. sed HAC angulus æqualis est angulo DEF, ergo & angulus ABC angulo DEF est æqualis. eadem ratione & angulus ACB est æqualis angulo DFE. reliquus igitur BAC angulus reliquo EDF æqualis [d] erit. ergo triangulum ABC triangulo DEF est æquiangulum, & descriptum est in circulo ABC. In dato igitur circulo dato triangulo æquiangulum triangulum descriptum est. Quod facere oportebat.

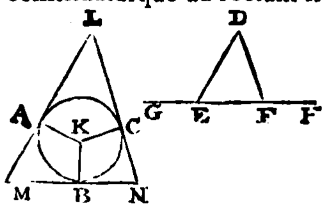
c 32. tertii.

d 2. Cor. 32. primi.

PROP. III. PROBL.

Circa datum circulum triangulo dato æquiangulum triangulum describere.

Sit datus circulus ABC, datum autem triangulum DEF. Oportet circa circulum ABC describere triangulum triangulo DEF æquiangulum. Protrahatur ex utraque parte EF ad puncta H, G, & sumatur circuli ABC centrum K: & recta linea KB utcunque ducatur: constituaturque ad rectam lineam KB, & ad punctum in ea K, angulo quidem DEG æqualis [a] angulus BKA, angulo autem DFH æqualis [a] angulus BKC, & per A, B, C, puncta ducantur rectæ lineæ LAM MBN NCL circulum ABC contingentes [b].



a 23. primi.

b 17. tertii.

Quoniam igitur circulum ABC contingunt LM MN NL in punctis A, B, C, à centro autem K ad A B C puncta ducuntur KA KB KC; erunt anguli ad puncta A B C recti [c]. & quoniam quadrilateri AMBK anguli quatuor quatuor rectis æquales sunt; etenim in duo triangula dividitur, quorum anguli KAM KBM sunt recti; erunt reliqui AKB AMB duobus rectis æquales. sunt autem & DEG DEF æquales duobus rectis. anguli igitur AKB AMB angulis DEG DEF

c 18. tertii.

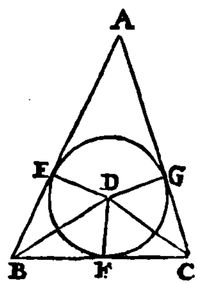
æquales sunt, quorum AKB ipsi DEG est æqualis. ergo reliquus AMB reliquo DEF æqualis erit. similiter demonstrabitur angulus LNB ipsi DFE æqualis. ergo & reliquus

d 2. Cor. 32. primi. MLN est æqualis [d] reliquo EDF. æquiangulum igitur est LMN triangulum triangulo DEF; & descriptum est circa circulum ABC. Quare circa datum circulum triangulo dato æquiangulum triangulum descriptum est. Quod facere oportebat.

PROP. IV. PROBL.

In dato triangulo circulum describere.

Sit datum triangulum ABC; Oportet in triangulo ABC circulum describere. Secentur [a] anguli ABC BCA bifariam rectis lineis BD CD quæ conveniant inter se in D puncto: & à puncto D ad rectas lineas AB BC CA perpendiculares [b] ducantur DE DF DG. Quoniam angulus EBD est æqualis angulo FBD, est autem & rectus BED recto BFD æqualis: erunt duo triangula EBD DBF, duos angulos duobus angulis æquales habentia, & unum latus uni lateri æquale utrique commune BD, quod scilicet uni æqualium angulorum subtenditur. ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia [c] habebunt, atque erit DE æqualis DF. & eadem ratione DG æqualis DF. ergo & DE ipsi DG est æqualis. tres igitur rectæ lineæ DE DF DG inter se æquales sunt; quare centro D intervallo autem unius ipsarum DE DF DG circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta; & rectas lineas AB BC CA continget; propterea quòd recti sunt ad E F G anguli. si enim ipsas secet, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur intra circulum cadet, quod est absurdum [d]. non igitur centro D, intervallo autem unius ipsarum DE DF DG circulus descriptus secabit rectas lineas AB BC CA, quare ipsas continget; atque erit circulus descriptus in triangulo ABC. In dato igitur triangulo ABC circulus EFG descriptus est. Quod facere oportebat.



a 9. primi.
b 12. primi.
c 26. primi.
d 16. tertii.

PROP.

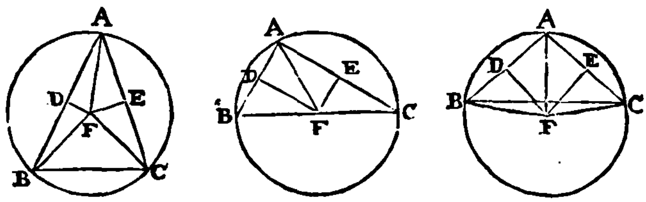
PROP. V. PROBL.

Circa datum triangulum circulum describere.

Sit datum triangulum ABC. Oportet circa datum triangulum ABC circulum describere. Secentur AB AC bifariam[a] in D, E punctis: & à punctis D E ipsis AB AC ad rectos angulos [b] ducantur DF EF quæ quidem vel intra triangulum ABC conveniant, vel in recta linea BC, vel extra ipsam. Conveniant primo intra triangulum in puncto F: &

a 10. primi.

b 11. primi.



BF FC FA jungantur. Quoniam igitur AD est æqualis DB, communis autem & ad rectos angulos DF; erit basis AF basi FB æqualis [c]. similiter ostendetur & CF æqualis FA. ergo & BF est æqualis FC. tres igitur FA FB FC inter se æquales sunt. quare centro F, intervallo autem unius ipsarum FA FB FC circulus descriptus etiam per reliqua puncta transibit: atque erit circulus descriptus circa triangulum ABC. & describatur ut ABC. Secundo DF EF conveniant in recta linea BC, in puncto F, ut in secunda figura, & AF jungatur. similiter demonstrabimus punctum F centrum esse circuli circa triangulum ABC descripti. Postremo DF EF conveniant extra triangulum ABC rursus in F puncto, ut in tertia figura: & jungantur AF FB FC. & quoniam rursus AD est æqualis DB, communis autem & ad rectos angulos DF, basis AF basi FB æqualis erit. similiter demonstrabimus & CF ipsi FA æqualem esse. quare & BF est æqualis FC. rursus igitur centro F, intervallo autem unius ipsarum FA FB FC circulus descriptus & per reliqua transibit puncta; atque erit circa triangulum ABC descriptus. Circa datum igitur triangulum circulus descriptus est. Quod facere oportebat.

c 4. primi.

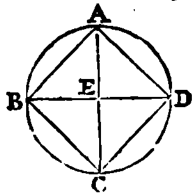
Cor. Si triangulum sit rectangulum centrum circuli cadet in latus angulo recto oppositum. si acutangulum cadet centrum intra triangulum. si obtusangulum cadet extra [a].

a 31. tertii.

PROP. VI. PROBL.

In dato circulo quadratum describere.

Sit datus circulus ABCD. Oportet in ABCD circulo quadratum describere. Ducantur circuli ABCD diametri ad rectos angulos inter se AC BD: & AB BC CD DA jungantur. Quoniam igitur BE est æqualis ED, etenim centrum est E, communis autem, & ad rectos angulos EA; erit basis BA æqualis [a] basi AD. & eadem ratione utraque ipsarum BC CD utriq; BA AD est æqualis; æquilaterum igitur est ABCD quadrilaterum. Dico & rectangulum esse. Quoniam enim recta linea BD diameter est ABCD circuli, erit BAD semicirculus. quare angulus BAD rectus [b] est. & eadem ratione unusquisque ipsorum ABC BCD CDA est rectus. rectangulum igitur est ABCD quadrilaterum. ostensum autem est, & æquilaterum esse. ergo quadratum necessario erit, & descriptum est in circulo ABCD. In dato igitur ABCD circulo quadratum ABCD descriptum est. Quod facere oportebat.



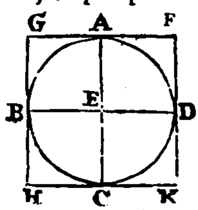
[a] 4. primi.

[b] 31. tertii.

PROP. VII. PROBL.

Circa datum circulum quadratum describere.

Sit datus circulus ABCD. Oportet circa ABCD circulum quadratum describere. Ducantur circuli ABCD duæ diametri AC BD ad rectos inter se angulos, & per puncta A, B, C, D ducantur circulum ABCD contingentes [a] FG GH HK KF. Quoniam igitur FG contingit circulum ABCD, à centro autem E ad contactum qui est ad A ducitur EA; erunt [b] anguli ad A recti. eadem ratione, & anguli ad puncta B, C, D recti sunt. & quoniam angulus AEB rectus est, est autem & rectus EBG; erit GH ipsi AC parallela [c]. eadem ratione, & AC parallela est FK. similiter demonstrabimus & utramque ipsarum GF HK ipsi BED parallelam esse. quare & GF est parallela HK. [d] parallelogramma igitur sunt GK GC AK FB BK, ac propterea GF quidem est [e] æqualis HK, GH vero ipsi FK, & quoniam AC æqualis est BD; sed AC quidem utrique ipsa-



[a] 17. tertii.

[b] 18. tertii.

[c] 28. primi.

[d] 30. primi.

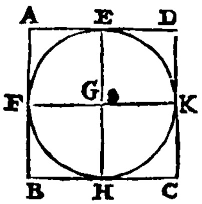
[e] 34. primi.

ipsarum GH FK est [d] æqualis; BD vero æqualis utrique GF HK, & utraque GH FK utrique GF HK æqualis erit. æquilaterum igitur est FGHK quadrilaterum. Dico & rectangulum esse. Quoniam enim parallelogrammum est GBEA, atque est rectus AEB angulus, & ipse AGB rectus erit [e]. Similiter demonstrabimus angulos etiam ad puncta H K F rectos esse. rectangulum igitur est quadrilaterum FGHK. demonstratum autem est & æquilaterum. ergo quadratum sit necesse est, & descriptum est circa circulum ABCD. Circa datum igitur circulum quadratum descriptum est. Quod facere oportebat.

PROP. VIII. PROBL.

In dato quadrato circulum describere.

Sit datum quadratum ABCD. Oportet in quadrato ABCD circulum describere. Secetur utraque ipsarum AB AD bifariam [a] in punctis F, E. & per E quidem alterutri ipsarum [a] AB CD parallela [b] ducatur EH: per F vero ducatur FK parallela [b] alterutri AD BC. parallelogrammum igitur est unumquodque ipsorum AK KB AH HD AG GC BG GD: & latera ipsorum quæ ex opposito, sunt æqualia [c]. Et quoniam DA est æqualis AB; & ipsius quidem AD dimidium est AE; ipsius vero AB dimidium AF; erit AE ipsi AF æqualis. quare & opposita latera æqualia sunt. ergo FG est æqualis GE. similiter demonstrabimus, & utramque ipsarum GH GK utrique FG GE æqualem esse. quatuor igitur GE GF GH GK inter se sunt æquales. itaque centro quidem G, intervallo autem unius ipsarum GE GF GH GK circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta, & rectas lineas AB BC CD DA continget; propterea quod anguli ad E, F, H, K, recti sunt: si enim circulus secabit rectas lineas AB BC CD DA, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur intra circulum cadet; quod [d] est absurdum. non igitur centro quidem G intervallo autem unius ipsarum GE GF GH GK circulus descriptus rectas lineas AB BC CD DA secabit. quare ipsas necessario continget; atque erit descriptus in quadrato ABCD. In dato igitur quadrato circulus descriptus est. Quod facere oportebat.



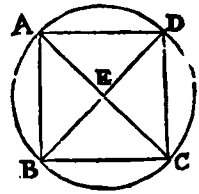
a 10. primi.
b 31. primi.
c 34. primi.
d 16. tertii.

PROP.

PROP. IX. PROBL.

Circa datum quadratum circulum describere.

Sit datum quadratum ABCD. Oportet circa ABCD quadratum circulum describere. Jungantur AC BD, quæ se invicem in puncto E secent. Et quoniam DA est æqualis AB, communis autem AC; duæ DA AC duabus BA AC æquales sunt; & basis DC æqualis basi BC; erit angulus DAC angulo BAC æqualis[a]. angulus igitur DAB bifariam sectus est recta linea AC. similiter demonstrabimus unumquemque angulorum ABC BCD CDA rectis lineis AC DB bifariam sectum esse. quoniam igitur angulus DAB angulo ABC est æqualis, atque est anguli quidem DAB dimidium angulus EAB, anguli vero ABC dimidium EBA; & EAB angulus angulo EBA æqualis erit. quare & latus EA lateri EB est[b] æquale. similiter demonstrabimus & utramque rectarum linearum EC ED utrique EA EB æqualem esse. ergo quatuor rectæ lineæ EA EB EC ED inter se sunt æquales. centro igitur E, intervallo autem unius ipsarum EA EB EC ED circulus descriptus etiam per reliqua puncta transibit; atque erit descriptus circa ABCD quadratum. describatur ut ABCD. Circa datum igitur quadratum circulus descriptus est. Quod facere oportebat.



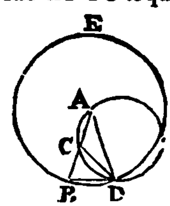
a 8. primi.

b 6. primi.

PROP. X. PROBL.

Isosceles triangulum constituere, habens utrumque angulorum qui sunt ad basim, duplum reliqui.

Exponatur recta quædam linea AB, & secetur in C puncto, ita ut rectangulum contentum sub AB BC æquale[a] sit ei, quod ex CA describitur, quadrato: & centro quidem A, intervallo autem AB circulus describatur BDE; apteturque in BDE circulo recta linea BD æqualis[b] ipsi AC quæ non est major diametro circuli BDE: & junctis DA DC, circa ADC triangulum[c] circulus ACD describatur. itaque quoniam rectangulum AB BC æquale est quadrato quod fit ex AC;



a 11. secundi.

b 1. hujus.

c 5. hujus.

AC; æqualis autem eſt AC ipſi BD; erit ſub AB BC rectangulum quadrato ex BD æquale. & quoniam extra circulum ACD ſumptum eſt aliquod punctum B, & à puncto B in circulum ACD cadunt duæ rectæ lineæ BCA BD, quarum altera quidem ſecat, altera vero incidit; atque eſt rectangulum ſub AB BC æquale quadrato ex BD: recta linea BD circulum ACD [d] continget. quoniam igitur BD con- d 37. tertii.
tingit, & à contacta ad D ducta eſt DC; erit BDC angulus æqualis [e] ei qui in alterno circuli ſegmento conſti- e 32. tertii.
tuitur, videlicet angulo DAC. quod cum angulus BDC æqualis ſit ipſi DAC, communis apponatur CDA; totus igitur BDA eſt æqualis duobus angulis CDA DAC. ſed ipſis CDA DAC exterior angulus BCD eſt [f] æqualis. ergo & BDA æ- f 32. primi.
qualis eſt ipſi BCD. ſed BDA angulus eſt [g] æqualis angulo g 5. primi.
CBD, quoniam & latus AD lateri AB eſt æquale. ergo & DBA ipſi BCD æqualis erit. tres igitur anguli BDA DBA BCD inter ſe æquales ſunt. & quoniam angulus DBC æqualis eſt angulo BCD, & latus BD lateri DC eſt [h] æquale. ſed BD h 6. primi.
ponitur æqualis ipſi CA. ergo & CA eſt æqualis CD. quare & angulus CDA æqualis eſt angulo DAC. anguli igitur CDA DAC ſimul ſumpti ipſius anguli DAC duplices ſunt. eſt autem & BCD angulus angulis CDA DAC æqualis; ergo & BCD duplex eſt ipſius DAC. ſed BCD eſt æqualis alterutri ipſorum BDA DBA. quare & uterque BDA DBA ipſius DAB eſt duplex. Iſoſceles igitur triangulum conſtitutum eſt ADB habens utrumque eorum angulorum qui ſunt ad baſim, duplum reliqui. Quod facere oportebat.

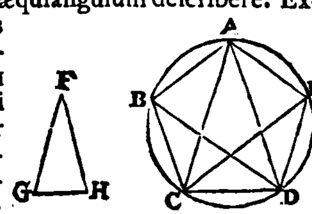
PROP. XI. PROBL.

In dato circulo pentagonum æquilaterum & æquiangulum deſcribere.

Sit datus circulus ABCDE. Oportet in ABCDE circulo pentagonum æquilaterum & æquiangulum deſcribere. Exponatur triangulum iſoſceles FGH habens utrumque eorum qui ſunt ad baſim GH angulorum, duplum [a] anguli qui eſt ad F: & deſcribatur in circulo ABCDE triangulo FGH æquiangulum [b] triangulum ACD, ita ut angulo

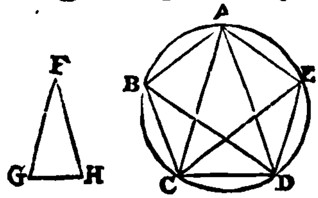
a 10 hujus.

b 2. hujus.



quidem qui eſt ad F æqualis ſit angulus CAD; utrique vero ipſorum qui ad G H, ſit æqualis uterque ACD CDA. & uterque

uterque igitur ACD CDA anguli CAD est duplus. secetur uterque ipsorum ACD CDA bifariam [e] rectis lineis CE DB: & AB BC DE EA jungantur. Quoniam igitur uterque ipsorum ACD CDA duplus est ipsius CAD, & secti sunt bifariam rectis lineis CE DB, quinque anguli DAC ACE ECD CDB BDA inter se sunt æquales. æquales autem anguli in æqualibus circumferentiis insistunt [d]. quinque igitur circumferentiæ AB BC CD DE EA æquales sunt inter se. sed æquales circumferentias [e] æquales rectæ lineæ subtendunt. ergo & quinque rectæ lineæ AB BC CD DE EA inter se æquales sunt. æquilaterum igitur est ABCDE pentagonum. Dico & æquiangulum esse. Quoniam enim circumferentia AB æqualis est circumferentiæ DE, communis apponatur BCD. tota igitur ABCD circumferentia toti circumferentiæ EDCB est æqualis, & in circumferentia quidem ABCD insistit angulus AED, in circumferentia vero EDCB insistit BAE. ergo & BAE angulus est æqualis angulo AED [f]. eadem ratione & unusquisque angulorum ABC BCD CDE unicuique ipsorum BAE AED est æqualis. æquiangulum igitur est ABCDE pentagonum: ostensum autem est & æquilaterum esse. Quare in dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum descriptum est. Quod facere oportebat.



e 9. primi.
d 26. tertii.
e 29. tertii.
f 27. tertii.

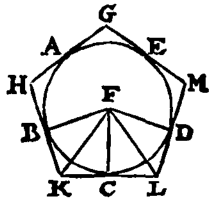
PROP. XII. PROBL.

Circa datum circulum pentagonum æquilaterum & æquiangulum describere.

Sit datus circulus ABCDE. Oportet circa circulum ABCDE pentagonum æquilaterum & æquiangulum describere. Intelligantur pentagoni in circulo descripti [a] angulorum puncta esse ABCDE, ita ut circumferentiæ AB BC CD DE EA sint æquales; & per puncta A,B,C,D,E, ducantur [b] circulum contingentes GH HK KL LM MG, & sumpto circuli ABCDE centro F, jungantur FB FK FC FL FD. Quoniam igitur recta linea KL contingit circulum ABCDE in puncto C, & à centro F ad contactum qui est ad C ducta est FC, erit FC ad ipsam KL perpendicularis [c]. rectus igitur est uterque angulorum qui sunt ad C. eadem ratione & anguli qui ad puncta B D recti sunt. & quoniam rectus angulus est FCK, quadra-

a per 11. hujus.
b 17. tertii.
c 18. tertii.

quadratum quod fit ex FK æquale d eſt quadratis ex FC CK. & ob eandem cauſam quadratis ex FB BK æquale eſt ex FK quadratum. quadrata igitur ex FC CK quadratis ex FB BK æqualia ſunt, quorum quod ex FC ei quod ex FB eſt æquale. ergo reliquum quod ex CK reliquo quod ex BK æquale erit. æqualis igitur eſt BK ipſi CK. & quoniam FB eſt æqualis FC, communis autem FK, duæ BF FK duabus CF FK æquales ſunt; & baſis BK eſt æqualis baſi KC; erit angulus e itaque BFK angulo KFC æqualis, angulus vero BKF angulo FKC. duplus igitur eſt angulus BFC anguli KFC, & angulus BKC duplus ipſius FKC. eadem ratione, & angulus CFD anguli CFL eſt duplus: angulus vero CLD duplus anguli CLF. & quoniam circumferentia BC circumferentiæ CD eſt æqualis, & angulus BFC angulo CFD æqualis f erit. atque eſt angulus quidem BFC anguli KFC duplus: angulus vero DFC duplus ipſius LFC. æqualis igitur eſt angulus KFC angulo CFL. itaque duo triangula ſunt FKC FLC, duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & unum latus uni lateri æquale quod ipſis commune eſt FC: ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt g, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem. recta igitur linea KC eſt æqualis rectæ CL, & angulus FKC angulo FLC. & quoniam KC eſt æqualis CL, erit KL ipſius KC dupla. eadem ratione, & HK ipſius BK dupla oſtendetur. rurſus quoniam BK oſtenſa eſt æqualis ipſi KC, atque eſt KL quidem dupla KC, HK vero ipſius BK dupla: erit HK ipſi KL æqualis. ſimiliter & unaquæque ipſarum GH GM ML oſtendetur æqualis utrique HK KL. æquilaterum igitur eſt GHKLM pentagonum. Dico etiam æquiangulum eſſe. Quoniam enim angulus FKC eſt æqualis angulo FLC; & oſtenſus eſt angulus HKL duplus ipſius FKC; ipſius vero FLC duplus KLM: erit & HKL angulus angulo KLM æqualis. ſimili ratione oſtendetur & unuſquiſque ipſorum KHG HGM GML utrique HKL KLM æqualis. quinque igitur anguli GHK HKL KLM LMG MGH inter ſe æquales ſunt. Ergo æquiangulum eſt GHKLM pentagonum. oſtenſum autem eſt etiam æquilaterum eſſe: & deſcriptum eſt circa ABCDE circulum. Quod facere oportebat.



d 47. primi.

e 8. primi.

f 27. tertii.

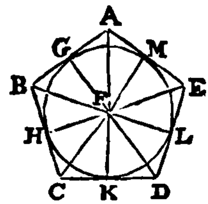
g 26. primi.

PROP.

PROP. XIII. PROBL.

In dato pentagono, quod æquilaterum & æquiangulum sit, circulum describere.

Sit datum pentagonum æquilaterum & æquiangulum ABCDE. Oportet in ABCDE pentagono circulum descri-
a 9. primi. bere. Secetur uterque angulornm BCD CDE bifariam a rectis lineis CF DF; & à puncto F in quo conveniunt inter se CF DF ducantur rectæ lineæ FB FA FE. Quoniam igitur BC est æqualis CD, communis autem CF, duæ BC CF, duabus DC CF æquales sunt, & angulus BCF est æqualis angulo DCF. basis igi-



b 4. primi. tur BF basi FD est b æqualis, & BFC triangulum æquale triangulo DCF, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera subtenduntur; angulus igitur CBF angulo CDF æqualis erit. & quoniam angulus CDE anguli CDF est duplus, & angulus quidem CDE angulo ABC æqualis, angulus vero CDF angulo CBF æqualis; erit & CBA angulus duplus anguli CBF; ac propterea angulus ABF angulo CBF æqualis. angulus igitur ABC bifariam sectus est recta linea BF. similiter demonstrabitur unumquemque angulorum BAE AED rectis lineis AF FE bifariam sectum esse. à puncto F ad rectas lineas AB BC CD DE EA ducantur
c 12. primi. c perpendiculares FG FH FK FL FM. & quoniam angulus HCF est æqualis angulo KCF; est autem & rectus FHC recto FKC æqualis: erunt duo triangula FHC FKC, duos angulos duobus angulis æquales habentia, & unum latus uni lateri æquale, commune scilicet utrisque FC, quod uni æqualium angulorum subtenditur. ergo & reliqua latera
d 26. primi. reliquis lateribus æqualia d habebunt, atque erit perpendicularis FH perpendiculari FK æqualis. similiter ostendetur & unaquæque ipsarum FL FM FG æqualis utrique FH FK. quinque igitur rectæ lineæ FG FH FK FL FM inter se æquales sunt. quare centro F intervallo autem unius ipsarum FG FH FK FL FM, circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta, & rectas lineas AB BC CD DE EA continget; propterea quod anguli ad GHKLM recti sunt. si enim non continget, sed ipsas secet, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, intra circulum cadet,
e 16. tertii. quod absurdum e esse ostensum est. non igitur centro F, & inter-

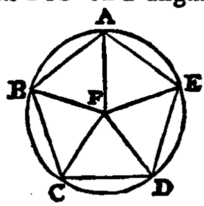
intervallo uno ipſorum punctorum GHKLM circulus deſcriptus rectas lineas AB BC CD DE EA ſecabit. quare ipſas contingat neceſſe eſt. deſcribatur ut GHKLM. In dato igitur pentagono quod eſt æquilaterum, & æquiangulum circulus deſcriptus eſt. Quod facere oportebat.

Cor. Si duo anguli proximi figuræ æquilateræ & æquiangulæ biſecentur,& à puncto in quo coeunt lineæ angulum biſecantes,ducantur rectæ lineæ ad reliquos figuræ angulos, omnes anguli figuræ erunt biſecti.

PROP. XIV. PROBL.

Circa datum pentagonum quod æquilaterum & æquiangulum ſit, circulum deſcribere.

Sit datum pentagonum æquilaterum & æquiangulum ABCDE. Oportet circa pentagonum ABCDE circulum deſcribere. Secetur uterque ipſorum BCD CDE angulorum bifariam [a] rectis lineis CF FD: & à puncto F in quo conveniunt rectæ lineæ, ad puncta B A E ducantur FB FA FE. & unuſquiſque angulorum CBA BAE AED rectis lineis BF FA FE bifariam [b] ſectus erit. Et quoniam angulus BCD angulo CDE eſt æqualis; atque eſt anguli quidem BCD dimidium angulus FCD, anguli vero CDE dimidium CDF; erit & FCD angulus æqualis angulo FDC, quare & latus CF lateri FD eſt æquale [c]. ſimiliter demonſtrabitur & unaquæque ipſarum FB FA FE æqualis unicuique FC FD. quinque igitur rectæ lineæ FA FB FC FD FE inter ſe æquales ſunt. ergo centro F, & intervallo unius ipſorum FA FB FC FD FE, circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta: atque erit deſcriptus circa pentagonum ABCDE quod æquilaterum eſt & æquiangulum. deſcribatur, & ſit ABCDE. Circa datum igitur pentagonum æquilaterum & æquiangulum circulus deſcriptus eſt. Quod facere oportebat.



a 9. primi.

b Cor. præcedente.

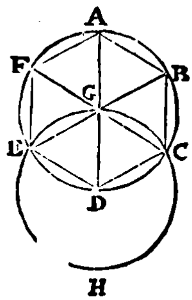
c 6. primi.

PROP. XV. PROBL.

In dato circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere.

Sit datus circulus ABCDEF. Oportet in circuli ABCDEF hexagonum æquilaterum & æquiangulum deſcribere. Ducatur

catur circuli ABCDEF diameter AD, ſumaturque centrum circuli G; & centro quidem D, intervallo autem DG circulus deſcribatur EGCH, junctæ EG CG ad puncta B F producantur, & jungantur AB BC CD DE EF FA. Dico hexagonum ABCDEF æquilaterum & æquiangulum eſſe. Quoniam enim G punctum centrum eſt ABC DEF circuli, erit GE ipſi GD æqualis. rurſus quoniam D centrum eſt circuli EGCH, erit DE æqualis DG: ſed GE ipſi GD æqualis oſtenſa eſt. ergo GE ipſi ED eſt æqualis. æquilaterum igitur eſt EGD triangulum, ideoque tres ipſius anguli EGD GDE DEG inter ſe æquales [a] ſunt; & ſunt trianguli tres anguli æquales [b] duobus rectis. angulus igitur EGD duorum rectorum tertia pars eſt. ſimiliter oſtendetur & DGC duorum rectorum tertia pars. & quoniam recta linea CG ſuper rectam EB inſiſtens, angulos qui deinceps ſunt EGC CGB duobus rectis æquales [c] efficit; erit & reliquus CGB tertia pars duorum rectorum. anguli igitur EGD DGC CGB inter ſe ſunt æquales. & qui ipſis ad verticem ſunt anguli BGA AGF FGE æquales [d] ſunt angulis EGD DGC CGB. quare ſex anguli EGD DGC CGB BGA AGF FGE inter ſe æquales ſunt. ſed æquales anguli æqualibus circumferentiis inſiſtunt [e]. ſex igitur circumferentiæ AB BC CD DE EF FA inter ſe ſunt æquales: æquales autem circumferentias æquales [f] rectæ lineæ ſubtendunt. ergo & ſex rectæ lineæ inter ſe æquales ſint neceſſe eſt. ac propterea æquilaterum eſt ABCDEF hexagonum. Dico & æquiangulum eſſe. Quoniam enim circumferentia AF circumferentiæ ED eſt æqualis, communis apponatur circumferentia ABCD: tota igitur FABCD circumferentia æqualis eſt toti circumferentiæ EDCBA. & circumferentiæ quidem FABCD angulus FED inſiſtit, circumferentiæ vero EDCBA inſiſtit angulus AFE. angulus igitur AFE angulo DEF eſt [g] æqualis. ſimiliter oſtendentur & reliqui anguli hexagoni ABCDEF ſigillatim æquales utrique ipſorum AFE FED. ergo æquiangulum eſt ABCDEF hexagonum. oſtenſum autem eſt & æquilaterum eſſe: & deſcriptum eſt circulo ABCDEF. In dato igitur circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcriptum eſt. Quod facere oportebat.



a Cor. 5. primi.
b 32. primi.
c 13. primi.
d 15. primi.
e 26. tertii.
f 29. tertii.
g 27. tertii.

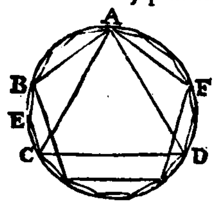
Ex hoc manifeſtum eſt hexagoni latus, ei quæ eſt ex centro circuli æquale eſſe. & ſi per puncta ABCDFF contingentes circulum ducamus, circa circulum deſcribetur hexa-

hexagonum æquilaterum & æquiangulum, conſequenter iis quæ in pentagono dicta ſunt: & præterea ſimiliter in dato hexagono circulum inſcribemus, & circumſcribemus. Quod facere oportebat.

PROP. XVI. PROBL.

In dato circulo quindecagonum æquilaterum & æquiangulum deſcribere.

Sit datus circulus ABCD. Oportet in ABCD circulo quindecagonum æquilaterum & æquiangulum deſcribere. Sit AC latus trianguli [a] quidem æquilateri in ipſo circulo ABCD [a] 2. hujus.
*deſcripti, pentagoni [b] vero æquilateri latus AB, quarum igi- [b] 11. hujus.
tur partium eſt ABCDF circulus quindecim, earum circumferentia quidem ABC, tertia exiſtens circuli, erit quinque; circumferentia vero AB, quæ quinta eſt circuli, erit trium. ergo reliqua BC eſt duarum. ſecetur BC bifariam



in puncto E [c]. quare utraque ipſarum BE EC circumferentia- [c] 30. tertii.
rum quintadecima pars eſt ABCD circuli. ſi igitur jungentes BE EC, æquales ipſis in continuum rectas lineas in circulo [d] ABCD aptemus, in ipſo quindecagonum æquilate- [d] 1. hujus.
rum & æquiangulum deſcriptum erit. Quod facere oportebat.

Similiter autem iis quæ dicta ſunt in pentagono, ſi per circuli diviſiones, contingentes circulum ducamus, circa ipſum deſcribetur quindecagonum æquilaterum & æquiangulum. & inſuper dato quindecagono æquilatero & æquiangulo circulum inſcribemus, & circumſcribemus.

* *Facilimè deſcribitur latus* AC *per prop. præced. ſi enim duo latera hexagoni circulo inſcribantur ab* A *verſus* C, *horum oppoſita extrema incident in puncta* A, C *extrema lateris trianguli quæſiti.*

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER QUINTUS.

DEFINITIONES.

I.

PARS est magnitudo magnitudinis, minor majoris, quando minor majorem metitur.

II.

Multiplex est major minoris, quando majorem minor metitur.

III.

Proportio seu ratio est duarum magnitudinum ejusdem generis, secundum quantitatem, mutua quædam habitudo.

IV.

Proportionem habere inter se magnitudines dicuntur, quæ multiplicatæ se invicem superare possunt.

V.

In eadem proportione magnitudines esse dicuntur, prima ad secundam & tertia ad quartam, quando primæ & tertiæ æque multiplices, secundæ & quartæ æque multiplices, juxta quamvis multiplicationem, utraque utramque, vel unà superant, vel unà æquales sunt, vel unà deficiunt, inter se comparatæ.

VI.

Magnitudines quæ eandem proportionem habent, proportionales vocentur.

Ea

Ea magnitudinum Proportionalium definitio vulgo apud Interpretes traditur, quam Euclides in Elemento septimo, pro numeris solum posuit. scil.

Magnitudines dicuntur esse proportionales, quando Prima Secundæ & Tertia Quartæ æquemultiplex est, vel eadem pars, vel eædem partes.

Sed hæc definitio Numeris & quantitatibus commensurabilibus tantum competit; Adeoque cum Universalis non sit, recte ab Euclide in hoc elemento omnium Proportionalium proprietates tradituro rejicitur; & alia generalis substituitur cuivis magnitudinum speciei congruens. Interim multum laborant Interpretes ut Definitionem hic loci ab Euclide expositam, ex vulgo recepta numerorum Proportionalium definitione demonstrent; sed facilius multo hæc ab illa fluit quam illa ab hac. Quod sic ostendetur.

Primo *Sint* A B C D *quatuor magnitudines quæ sunt in eadem ratione; prout in definitione* 5^{ta} *magnitudines in eadem ratione esse exponuntur. Sitque Prima multiplex secundæ, dico & tertiam eandem esse multiplicem Quartæ. Sit ex. gr.* A *æqualis* 5 B, *erit* C *æqualis* 5 D. *Capiatur numerus quilibet v. gr.* 2. *per quem multiplicetur* 5 *& productus sit* 10: *Et magnitudinum* A *&* C *Primæ & Tertiæ capiantur æque multiplices* 2A 2C. *Item magnitudinum* B *&* D *Secundæ & Quartæ capiantur æque multiplices* 10B, *&* 10D. *Et per defin. quintam, si* 2A *sint æquales* 10B, *erunt* 2C. *æquales* 10D. *at quia* A *est quintuplex ex hypothesi ipsius* B, *erunt* 2A *æquales* 10B. *unde &* 2C *æquales* 10D. *&* C *æqualis* 5D, *hoc est erit* C *quintuplex ipsius* D. *q. e. d.*

A:	B::	C:	D
2A	10B	2C	10D

 Se-

Secundo. *Si* A *ſit pars quævis ipſius* B, *erit* C *eadem pars ipſius* D. *Nam quia eſt* A *ad* B, *ſicut* C *ad* D. *cumque* A *ſit pars quædam ipſius* B, *erit* B *multiplex ipſius* A; *adeoque per priorem caſum* D *erit eadem multiplex ipſius* C, & *proinde* C *eadem pars erit magnitudinis* D, *ac eſt* A *ipſius* B. *q. e. d.*

Tertio. *Sit* A *æqualis quotlibet quarumvis partium ipſius* B. *dico* & C *eſſe æqualem totidem ſimilium partium ipſius* D. *v. gr.* A *in ſe contineat quartam partem ipſius* B *quinquies; hoc eſt, ſit* A *æqualis* $\frac{5}{4}$B, *dico* & C *eſſe æqualem* $\frac{5}{4}$D. *Nam quoniam* A *eſt æqualis* $\frac{5}{4}$B; *multiplicando utramque per* 4, *erunt* 4A *æquales* 5B. *Capiantur itaque æque multiplices Primæ* & *Tertiæ ſcil.* 4A & 4C; *item aliæ æque multiplices Secundæ* & *Quartæ ſcil.* 5B 5D. & *per definitionem, ſi* 4A *ſint æquales* 5B, *erunt* 4C *æquales* 5D. *at oſtenſum eſt* 4A *æquales eſſe* 5B. *adeoque* & 4C *æquales erunt* 5D, & C *æqualis* $\frac{5}{4}$D. *q. e. d.*

A: B:: C: D.
4A 5B 4C 5D

Univerſaliter ſit A *æqualis* $\frac{n}{m}$B, *erit* C *æqualis* $\frac{n}{m}$D. *multiplicentur enim* A & C *per* m. *Et* B & D *per* n. *Et quoniam eſt* A *æqualis* $\frac{n}{m}$B, *erit* mA *æqualis* nB; *unde per def.* 5tam *erit* mC *æqualis* nD; & C *æqualis* $\frac{n}{m}$D. *q. e. d.*

A: B:: C: D.
mA nB mC nD

VII.

VII.

Quando autem æque multiplicium, multiplex quidem primæ ſuperaverit multiplicem ſecundæ, multiplex vero tertiæ non ſuperaverit multiplicem quartæ, tunc prima ad ſecundam majorem proportionem habere dicitur quam tertia ad quartam.

VIII.

Analogia eſt proportionum ſimilitudo.

IX.

Analogia vero in tribus terminis ad minimum conſiſtit.

X

Quando tres magnitudines proportionales ſunt, prima ad tertiam, duplicatam proportionem habere dicetur ejus quàm habet ad ſecundam.

XI.

Quando autem quatuor magnitudines ſunt proportionales, prima ad quartam, triplicatam habere proportionem dicetur ejus quam habet ad ſecundam, & ſemper deinceps, una amplius, quoad analogia proceſſerit.

XII.

Homologæ, vel ſimilis rationis magnitudines, dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, conſequentes vero conſequentibus.

XIII.

Alterna ſeu permutata ratio eſt ſumptio antecedentis ad antecedentem, & conſequentis ad conſequentem.

XIV.

Inverſa ratio eſt ſumptio conſequentis ut antecedentis, ad antecedentem, ut ad conſequentem.

XV.

Compoſitio rationis eſt ſumptio antecedentis unà cum conſequente, tanquam unius, ad ipſam conſequentem.

XVI.

Diviſio rationis eſt ſumptio exceſſus quo antecedens ſuperat conſequentem, ad ipſam conſequentem.

XVII.

Conversio rationis est sumptio antecedentis ad excessum quo antecedens ipsam consequentem superat.

XVIII.

Ex æquo sive ex æqualitate ratio est, cum plures magnitudines extiterint, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur & in eadem proportione, fueritque ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, ita in secundis magnitudinibus prima ad ultimam: vel aliter, est sumptio extremarum per subtractionem mediarum.

XIX.

Ordinata proportio est, quando fuerit ut antecedens ad consequentem, ita antecedens ad consequentem; ut autem consequens ad aliam quampiam, ita consequens ad aliam quampiam.

XX.

Perturbata vero proportio est, quando tribus existentibus magnitudinibus, & aliis ipsis numero æqualibus, fuerit ut in primis magnitudinibus antecedens ad consequentem, ita in secundis magnitudinibus antecedens ad consequentem, ut autem in primis magnitudinibus consequens ad aliam quampiam, ita in secundis alia quæpiam ad antecedentem.

AXIOMATA.

I.

Ejusdem sive æqualium æque multiplices inter se æquales sunt.

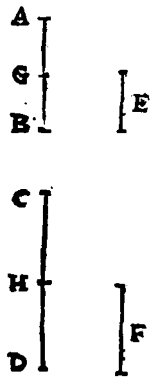
II.

Quarum eadem æque multiplex est, vel quarum æquales sunt æque multiplices, & ipsæ inter se sunt æquales.

PROPOSITIO I. THEOREMA.

Si fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, æqualium numero, singulæ singularum æque multiplices; quotuplex est una magnitudo unius, totuplices erunt & omnes omnium.

Sint quotcunque magnitudines AB CD, quotcunque magnitudinum E F, æqualium numero, singulæ singularum æque multiplices. Dico quotuplex est AB ipsius E, totuplices esse & AB CD simul ipsarum E F simul. Quoniam enim AB æque multiplex est ipsius E, ac CD ipsius F; quot magnitudines sunt in AB æquales ipsi E, tot erunt & in CD æquales ipsi F. Dividatur AB quidem in partes ipsi E æquales, quæ sint AG GB; & CD dividatur in partes æquales ipsi F, videlicet CH HD. erit igitur multitudo partium CH HD æqualis multitudini ipsarum AG GB. & quoniam AG est æqualis E, & CH æqualis F; erunt & AG CH æquales [a] ipsis E F. eadem ratione quoniam GB est æqualis E, & HD ipsi F; erunt GB HD æquale [a] ipsis E F. quot sunt itaque in AB æquales ipsi E, tot sunt & in AB CD æquales ipsis E F. ergo quotuplex est AB ipsius E, totuplices erunt & AB CD simul ipsarum E F simul. Si igitur fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, æqualium numero, singulæ singularum æque multiplices; quotuplex est una magnitudo unius, totuplices erunt & omnes omnium. Quod demonstrare oportebat.

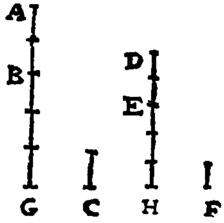


[a] Axiom.2. primi.

PROP. II. THEOR.

Si prima secundæ æque multiplex fuerit ac tertia quartæ, fuerit autem & quinta secundæ æque multiplex ac sexta quartæ; erit etiam composita prima cum quinta secundæ æque multiplex ac tertia cum sexta quartæ.

Sit prima AB secundæ C æque multiplex, ac tertia DE quartæ F. Sit autem & quinta BG secundæ C æque multiplex, ac sexta EH quartæ F. Dico & compositam primam cum quinta scil. AG secundæ C æque multiplicem esse, ac tertiam cum sexta sc. DH quartæ F. Quoniam enim AB æque multiplex est C, ac DE ipsius F; quot magnitudines sunt in AB æquales C, tot erunt & in DE æquales F. eadem ratione & quot sunt in BG æquales C, tot & in EH erunt æquales F. quot igitur sunt in tota AG æquales C, tot erunt & in tota DH æquales F. ergo quotuplex ex AG ipsius C, totuplex est &



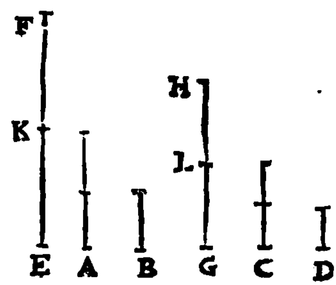
DH

DH ipsius F. & composita igitur prima cum quinta AG secundæ C æque multiplex erit, ac tertiam cum sexta DH quartæ F. Quare si prima secundæ æque multiplex fuerit, ac tertia quartæ, fuerit autem & quinta secundæ æque multiplex, ac sexta quartæ; erit composita quoque prima cum quinta æque multiplex secundæ, ac tertia cum sexta quartæ. Quod oportebat demonstrare.

PROP. III. THEOR.

Si prima secundæ æque multiplex fuerit ac tertia quartæ; sumantur autem æque multiplices primæ & tertiæ; erit & ex æquali, sumptarum utraque utriusque æque multiplex, altera quidem secundæ, altera vero quartæ.

Sit prima A secundæ B æque multiplex ac tertia C quartæ D: & sumantur ipsarum A C æque multiplices EF GH. Dico EF æque multiplicem esse ipsius B, ac GH ipsius D. Quoniam enim EF æque multiplex est ipsius A, ac GH ipsius C; quot magnitudines sunt in EF æquales A, tot erunt & in GH æquales C, dividatur EF quidem in magnitudines ipsi A æquales EK KF; GH vero dividatur in magnitudines æquales C, videlicet GL LH. erit igitur ipsarum EK KF multitudo æqualis multitudini ipsarum GL LH. & quoniam æque multiplex est A ipsius B ac C ipsius D; æqualis autem EK ipsi A, & GL ipsi C; erit EK æque multiplex ipsius B, ac GL ipsius D. eadem ratione æque multiplex erit KF ipsius B, ac LH ipsius D. quoniam igitur prima EK secundæ B æque multiplex est, ac tertia GL quartæ D; est autem & quinta KF secundæ B æque multiplex ac sexta LH quartæ D: erit & composita prima cum quinta EF, secundæ B æque multiplex [a], ac tertia cum sexta GH, quartæ D. Si igitur prima secundæ æque fuerit multiplex ac tertia quartæ, sumantur autem primæ & tertiæ æque multiplices: erit & ex æquali, sumptarum utraque utriusque æque multiplex, altera quidem secundæ, altera vero quartæ. Quod ostendisse oportuit.



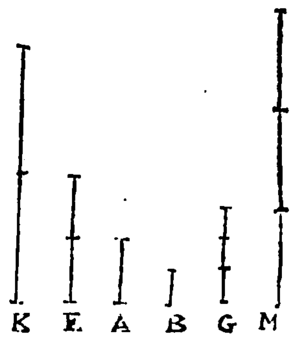
a 2. hujus.

PROP.

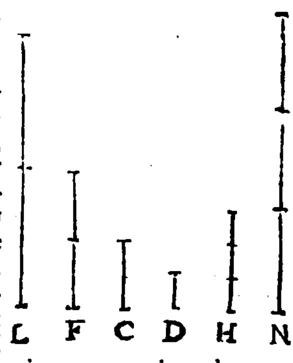
PROP. IV. THEOR.

Si prima ad secundam eandem habet proportionem quam tertia ad quartam: & æque multiplices primæ & tertiæ ad æque multiplices secundæ & quartæ, juxta quamvis multiplicationem, eandem proportionem habebunt, inter se comparatæ.

Prima A ad secundam B eandem proportionem habeat quam tertia C ad quartam D: & sumantur ipsarum quidem A C utcunque æque multiplices E F; ipsarum vero B D aliæ utcunque æque multiplices G H. Dico E ad G ita esse ut F ad H. Sumantur rursus ipsarum E F æque multiplices K L, & ipsarum G H æque multiplices M N. Quoniam igitur E æque multiplex est ipsius A, atque F ipsius C; sumuntur autem ipsarum E F æque multiplices K L: erit K æque multiplex [a] ipsius A, atque L ipsius C. eadem ratione M æque multiplex erit ipsius B, atque N ipsius D. & quoniam est ut A ad B ita C ad D. sumptæ autem sunt ipsarum A C æque multiplices K L; & ipsarum B D aliæ utcunque æque multiplices M N: si [b] K superat M, superabit & L ipsam N; & si æqualis æqualis; & si minor minor. suntque K L quidem ipsarum E F æque multiplices; M N vero ipsarum G H aliæ utcunque æque multiplices. ut igitur E ad G ita [b] erit F ad H. Quare si prima ad secundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam: & æque multiplices primæ ac tertiæ ad æque multiplices secundæ ac quartæ, juxta quamvis multiplicationem, eandem proportionem habebunt, inter se comparatæ. Quod demonstrare oportebat.



a 3. hujus.



b 5. Defin. hujus.

Quoniam igitur demonstratum est si K superat M, & L ipsam N superare; & si æqualis, æqualem esse, & si minor, minorem;

minorem; constat etiam si M superat K, & N superare ipsam L; & si æqualis, æqualem esse; & si minor, minorem; ac propterea ut G ad E [c] ita esse H ad F.

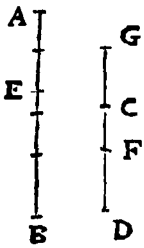
[c] 5. Defin. hujus.

Cor. Ex hoc manifestum est, si quatuor magnitudines sint proportionales, & inverse proportionales esse.

PROP. V. THEOR.

Si magnitudo magnitudinis æque multiplex sit atque ablata ablatæ: & reliqua reliquæ æque multiplex erit ac tota totius.

Magnitudo AB magnitudinis CD æque multiplex sit atque ablata AE ablatæ CF. Dico & reliquam EB reliquæ FD æque multiplicem esse atque totam AB totius CD. Quotuplex enim est AE ipsius CF, totuplex fiat & EB ipsius CG. & quoniam AE æque multiplex est CF atque EB ipsius CG; erit [a] AE æque multiplex CF, ac AB ipsius GF; ponitur autem æque multiplex AE ipsius CF, ac AB ipsius CD. æque multiplex igitur est AB utriusque GF CD; ac propterea GF ipsi CD est [b] æqualis. communis auferatur CF. reliqua igitur GC æqualis est reliquæ DF. itaque quoniam AE æque multiplex est CF, ac EB ipsius CG, estque CG æqualis DF; erit AE æque multiplex CF, ac EB ipsius FD. æque multiplex autem ponitur AE ipsius CF, ac AB ipsius CD. ergo EB est æque multiplex FD, ac AB ipsius CD. & reliqua igitur EB reliquæ FD æque multiplex est, atque tota AB totius CD. Quare si magnitudo magnitudinis æque multiplex sit atque ablata ablatæ: & reliqua reliquæ æque erit multiplex, ac tota totius. Quod oportebat demonstrare.



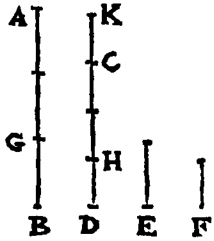
[a] 1. hujus.
[b] 2. Axiom. hujus.

PROP. VI. THEOR.

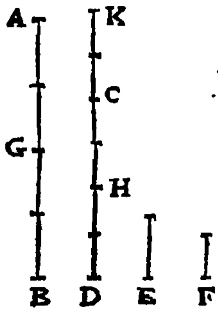
Si duæ magnitudines duarum magnitudinum æque multiplices sint, & ablatæ quædam sint earundem æque multiplices: erunt & reliquæ vel eisdem æquales, vel ipsarum æque multiplices.

Duæ magnitudines AB CD duarum magnitudinum E F æque multiplices sint, & ablatæ AG CH earundem sint æque multiplices. Dico & reliquas GB HD vel ipsis E F æquales esse,

esse, vel ipsarum æque multiplices. Sit enim primo GB æqualis E. Dico & HD ipsi F esse æqualem. Ponatur ipsi F æqualis CK. & quoniam AG æque multiplex est E ac CH ipsius F; estque GB quidem æqualis E; CK vero æqualis F; erit AB æque multiplex [a] E, ac KH ipsius F. æque autem multiplex ponitur AB ipsius E, ac CD ipsius F. egro KH æque multiplex est F, ac CD ipsius F. quoniam igitur utraque ipsarum KH CD est æque multiplex F, erit KH æqualis [b] CD. communis auferatur CH. ergo reliqua KC reliquæ HD est æqualis. sed KC est æqualis F. & HD igitur ipsi F est æqualis; ideoque GB ipsi E, & HD ipsi F æqualis erit. Similiter demonstrabimus si GB multiplex fuerit ipsius E; & HD ipsius F æque multiplicem esse. Si igitur duæ magnitudines duarum magnitudinum æque multiplices sint, & ablatæ quædam sint earundem æque multiplices; erunt & reliquæ, vel eisdem æquales, vel ipsarum æque multiplices. Quod demonstrare oportebat.



[a] 2. hujus.

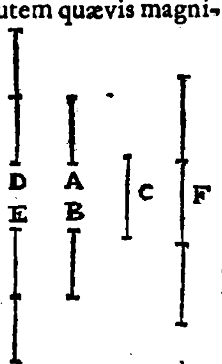


[b] 1. Axiom. hujus.

PROP. VII. THEOR.

Æquales ad eandem, eandem habent proportionem, & eadem ad æquales.

Sint æquales magnitudines A B, alia autem quævis magnitudo C. Dico utramque ipsarum A B ad C eandem proportionem habere: & C ad utramqne A B similiter eandem habere proportionem. Sumantur ipsarum A B æque multiplices D E, & ipsius C alia utcunque multiplex F. Quoniam igitur æque multiplex est D ipsius A, ac E ipsius B, estque A ipsi B æqualis; erit & D æqualis [a] E; alia autem utcunque multiplex ipsius C est F. ergo si D superat F, & E ipsam F superabit, & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. & sunt D E quidem



[a] 1. Axiom. hujus.

b 5. Defin. hujus.

dem ipsarum A B æque multiplices: F vero alia utcunque multiplex ipsius C. erit igitur [b] ut A ad C, ita B ad C. Dico insuper C ad utramque ipsarum A B eandem habere proportionem. Iisdem enim constructis similiter ostendemus D ipsi E æqualem esse, si igitur F superat D, ipsam quoque E superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. atque est F quidem ipsius C multiplex; D E vero aliæ utcunque æque multiplices ipsarum A B. ergo [b] ut C ad A, ita erit C ad B. Æquales igitur ad eandem, eandem habent proportionem, & eadem ad æquales. Quod ostendere oportebat.

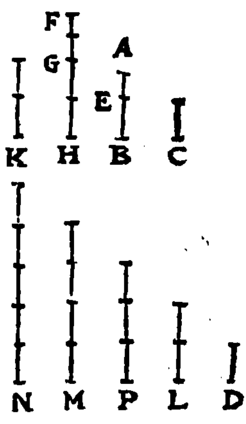
PROP. VIII. THEOR.

Inæqualium magnitudinum major ad eandem, majorem habet proportionem, quam minor: & eadem ad minorem, majorem proportionem habet, quam ad majorem.

a 4. Def. hujus.

b 1. hujus.

Sint inæquales magnitudines, AB, C, & sit AB major. sit alia vero utcunque D. Dico AB ad D majorem habere proportionem quam C ad D. & D ad C majorem habere proportionem quam ad AB. Quoniam AB major est quam C, ponatur ipsi C æqualis B E, hoc est AB excedat C per AE. itaque AE aliquoties multiplicata major [a] erit quam D. multiplicetur AE quoad fiat major quam D. sitque ipsius multiplex FG ipsa D major. quotuplex autem est FG ipsius AE, totuplex fiat GH ipsius EB, & K ipsius C. sumatur etiam ipsius D dupla quidem L, tripla P, & sic deinceps una amplius, quoad ea quæ sumitur multiplex ipsius D, fiat prima quæ sit major quam K; sit illa N. sitque M multiplex ipsius D proxime minor quam N. quoniam itaque N prima multiplex est ipsius D quæ major est quam K; erit M non major quam K, hoc est K non erit minor quam M. & cum æque multiplex sit FG ipsius AE ac GH ipsius EB. erit FG æque multiplex AE ac FH ipsius AB [b]. æque autem multiplex est FG ipsius AE ac K ipsius C, ergo FH æque multiplex est AB, ac K ipsius C; hoc est FH, K ipsarum AB & C



sunt

sunt æque multiplices. rursus quoniam GH æque multiplex est ipsius EB ac K ipsius C, estque EB æqualis C, erit & GH ipsi K æqualis [c]. sed K non minor est quam M. non igitur GH minor erit quam M, sed est FG major quam D, ergo tota FH major erit quam M & D. sed M & D simul sunt æquales ipsi N, quia M est multiplex ipsius D ipsi N proxime minor, quare FH major erit quam N. unde cum FH superat N, K vero ipsam N non superat, & sunt FH & K æque multiplices ipsarum AB & C, & est N ipsius D alia multiplex, ergo [d] AB ad D majorem rationem habebit quam C ad D. Dico præterea & D ad C majorem habere proportionem, quam D ad AB. iisdem enim constructis similiter ostendemus N superare K, ipsam vero FH non superare. atque est N multiplex ipsius D, & FH K aliæ utcunque ipsarum AB C æque multiplices. ergo D ad C majorem proportionem habet [d], quam D ad AB. Inæqualium igitur magnitudinum major ad eandem majorem habet proportionem, quam minor: & eadem ad minorem, majorem proportionem habet, quam ad majorem. Quod ostendere oportebat.

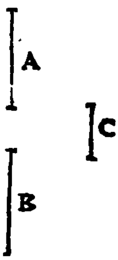
[c] 1. Axiom. hujus.

[d] 7. Defin. hujus.

PROP. IX. THEOR.

Quæ eandem proportionem habent ad eandem, inter se sunt æquales; & ad quas eadem, eandem habet proportionem, ipsæ etiam inter se sunt æquales.

Habeat enim utraque ipsarum A B ad C eandem proportionem. Dico A ipsi B æqualem esse. Nam si non esset æqualis, non haberet [a] utraque ipsarum A B ad eandem, eandem proportionem. habet autem. æqualis igitur est A ipsi B. Habeat rursus C ad utramque ipsarum A B eandem proportionem. Dico A æqualem esse ipsi B. nisi enim ita sit, non [a] habebit C ad utramque A B eandem proportionem. habet autem. ergo A ipsi B necessario est æqualis. Quæ igitur ad eandem, eandem proportionem habent, æquales inter se sunt: & ad quas eadem, eandem habet proportionem, ipsæ inter se sunt æquales. Quod demonstrare oportebat.



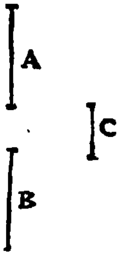
[a] 8. hujus.

PROP.

PROP. X. THEOR.

Magnitudinum proportionem habentium ad eandem, quæ majorem proportionem habet, illa major est; ad quam vero eadem majorem habet proportionem, illa minor est.

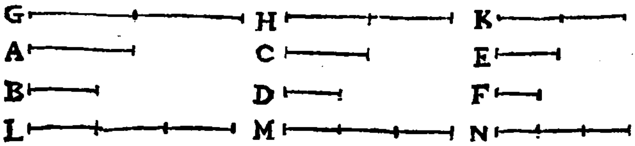
Habeat enim A ad C majorem proportionem, quam B ad C. Dico A quam B majorem esse. Si enim non est major, vel æqualis est, vel minor. æqualis autem non est A ipsi B utraque enim ipsarum A B ad C eandem habe-
a 7. hujus. ret a proportionem. atqui eandem non habet. non est igitur A ipsi B æqualis. sed
b 8. hujus. neque minor est quam B, haberet b enim A ad C minorem proportionem, quam B. atqui non habet minorem. non igitur A minor est, quam B. ostensum autem est neque esse æqualem. ergo A quam B major erit. Habeat rursus C ad B majorem proportionem quam C ad A. Dico B minorem esse quam A. Si enim non est minor, vel æqualis est, vel major. æqualis utique non est B ipsi A, etenim C ad utramque ipsarum A B eandem proportionem a haberet. non habet autem. ergo A ipsi B non est æqualis. sed neque major est B quam A, haberet enim C ad B minorem b proportionem quàm ad A. atqui non habet. non est igitur B major quam A. ostensum autem est neque æqualem esse. ergo B minor erit quam A. Ad eandem igitur proportionem habentium, quæ majorem proportionem habet, illa major est; & ad quam eadem majorem habet proportionem, illa minor est. Quod oportebat demonstrare.



PROP. XI. THEOR.

Quæ eidem eadem sunt proportiones, & inter se eadem sunt.

Sint enim ut A ad B ita C ad D: ut autem C ad D ita E ad F. Dico ut A ad B, ita esse E ad F. Sumantur enim ipsa-



rum quidem A C E æque multiplices G H K; ipsarum vero B D F aliæ utcunque æque multiplices L M N. Quoniam igi-

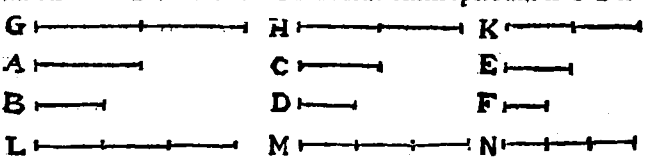
tur

tur est ut A ad B, ita C ad D, & sumptæ sunt ipsarum A C æque multiplices G H, & ipsarum B D aliæ utcunque æque multiplices L M; si [a] G superat L, & H ipsam M superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor minor. rursus quoniam est ut C ad D, ita E ad F, & sumptæ sunt ipsarum C E æque multiplices H K, ipsarum vero D F aliæ utcunque æque multiplices M N; si [a] H superat M, & K ipsam N superabit; [a] 5. Def. hujus.
& si æqualis, æqualis; & si minor, minor. sed si H superat M, & G superabit L; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor; quare si G superat L, & K ipsam N superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. & sunt G K quidem ipsarum A E æque multiplices; L N vero ipsarum B F aliæ utcunque æque multiplices. ergo [a] ut A ad B, ita erit E ad F Quæ igitur eidem eædem sunt proportiones, & inter se eædem sunt. Quod ostendisse oportuit.

PROP. XII. THEOR.

Si quotcunque magnitudines proportionales fuerint; ut una antecedentium ad unam consequentium, ita erunt antecedentes omnes ad omnes consequentes.

Sint quotcunque magnitudines proportionales A B C D E F, & ut A ad B, ita sit C ad D, & E ad F. Dico ut A ad B, ita esse A C E ad B D F. Sumantur enim ipsarum A C E æ-



que multiplices G H K, & ipsarum B D F aliæ utcunque æque multiplices L M N. Quoniam igitur ut A ad B, ita est C ad D, & E ad F, & sumptæ sunt ipsarum quidem A C E æque multiplices G H K, ipsarum vero B D F aliæ utcunque æque multiplices L M N; si [a] G superat L, & H ipsam M superabit, [a] 5. Def. hujus.
& K ipsam N; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. quare & si G superat L, superabunt & G H K ipsas L M N; & si æqualis, æquales; & si minor, minores. suntque G, & G H K ipsarum A, & A C E æque multiplices; quoniam si fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, æqualium numero, singulæ singularum æque multiplices; quotuplex est una magnitudo unius, totuplices [b] erunt & omnes omnium. [b] 1. hujus.
Et eadem ratione L & L M N ipsarum B, & B D F sunt æque multiplices. est igitur [a] ut A ad

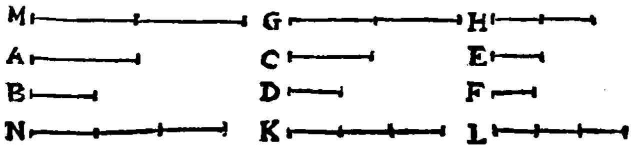
B,

A C E ad B D F. Quare si quotcunque magnitudines proportionales fuerint, ut una antecedentium ad unam consequentium, ita erunt antecedentes omnes ad omnes consequentes. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XIII. THEOR.

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam, tertia autem ad quartam majorem proportionem habet quam quinta ad sextam; & prima ad secundam majorem habebit proportionem quam quinta ad sextam.

Prima enim A ad secundam B eandem proportionem habeat quam tertia C ad quartam D, tertia autem C ad quartam D majorem habeat proportionem quam quinta E ad sextam F. Dico & primam A ad secundam B majorem proportionem



habere, quam quinta E ad sextam F. Quoniam enim C ad D majorem proportionem habet quam E ad F, sunt quædam ipsarum C E æque multiplices, & ipsarum D F aliæ utcunquæ æque multiplices; & multiplex [a] quidem C superat multiplicem D; multiplex vero E non superat multiplicem F. Sumantur; & sint ipsarum C E æque multiplices G H, & ipsarum D F aliæ utcunque æque multiplices K L, ita ut G quidem superet K, H vero ipsam L non superet: & quotuplex est G ipsius C, totuplex sit & M ipsius A; quotuplex autem K ipsius D, totuplex sit & N ipsius B. & quoniam est ut A ad B ita C ad D, & sumptæ sunt ipsarum A C æque multiplices M G, & ipsarum B D aliæ utcunque æque multiplices N K: si [b] M superat N, & G ipsam K superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. sed G superat K. ergo & M ipsam N superabit. H vero non superat L. suntque M H ipsarum A E æque multiplices, & N L ipsarum B F aliæ utcunque æque multiplices. ergo A ad B majorem proportionem habebit [a] quàm E ad F. Si igitur prima ad secundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam; tertia vero ad quartam majorem proportionem habeat quam quinta ad sextam: & prima ad secundam majorem habebit proportionem quam quinta ad sextam. Quod ostendere oportebat.

[a] 7. Def. hujus.

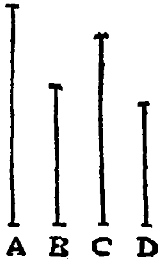
[b] 5. Def. hujus.

PROP.

PROP. XIV. THEOR.

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam; prima autem major sit quam tertia; & secunda quam quarta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor.

Prima enim A ad secundam B eandem proportionem habeat quam tertia C ad quartam D: major autem sit A quàm C. Dico & B quam D majorem esse. Quoniam enim A major est quam C, & alia est utcunque magnitudo B, habebit [a] A ad B majorem proportionem quàm C ad B; sed ut A ad B ita C ad D. ergo & C ad D majorem habebit [b] proportionem quàm C ad B. ad quam vero eadem majorem proportionem habet, illa minor [c] est. quare D est minor quàm B, ac propterea B quam D major erit. similiter demonstrabimus & si A æqualis sit ipsi C, & B ipsi D esse æqualem; & si A sit minor quam C, & B quàm D minorem esse. Si igitur prima ad secundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam; prima autem major sit quàm tertia, & secunda quàm quarta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. Quod demonstrare oportebat.

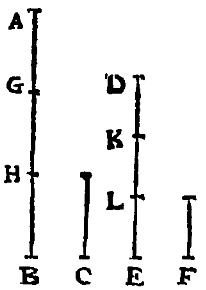


[a] 8. hujus.
[b] 13. hujus.
[c] 10. hujus.

PROP. XV. THEOR.

Partes inter se comparatæ eandem habent proportionem, quam habent earum æque multiplices.

Sit enim AB æque multiplex C, ac DE ipsius F. Dico ut C ad F, ita esse AB ad DE. Quoniam enim æque multiplex est AB ipsius C, ac DE ipsius F; quot magnitudines sunt in AB æquales ipsi C, totidem erunt & in DE æquales F. Dividatur AB in magnitudines ipsi C æquales, quæ sint AG GH HB; & DE dividatur in magnitudines æquales F, videlicet in DK KL LE; erit igitur ipsarum AG GH HB multitudo æqualis multitudini DK KL LE. & quoniam æquales sunt AG GH HB, suntque DK KL



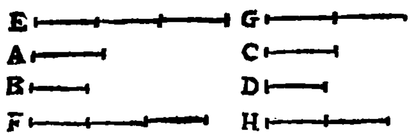
H LE

a 7. hujus. LE inter se æquales; ut AG ad DK, ita [a] erit GH ad KL, &
b 12. hujus. HB ad LE. atque erit [b] ut una antecedentium ad unam consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes: est igitur ut AG ad DK, ita AB ad DE. sed AG ipsi C est æqualis, & DK ipsi F. ergo ut C ad F, ita erit AB ad DE. Partes igitur inter se comparatæ eandem habent proportionem quam habent earum æquæ multiplices. Quod ostendendum fuit.

PROP. XVI. THEOR.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & permutatæ proportionales erunt.

Sint quatuor magnitudines proportionales A B C D, sitque ut A ad B, ita C ad D. Dico & permutatas proportionales esse, videlicet ut A ad C, ita esse B ad D. Sumantur enim ipsarum quidem A B æque multiplices E F, ipsarum vero C D aliæ utcunque æque multiplices G H. Et quoniam



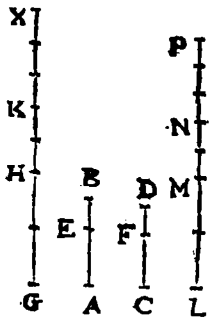
æque multiplex est E ipsius A, ac F ipsius B: partes autem
a 15. hujus. inter se comparatæ eandem habent [a] proportionem quam habent earum æque multiplices; erit ut A ad B ita E ad F.
b 11. hujus. ut autem A ad B ita C ad D. ergo & ut C ad D ita [b] E ad F. rursus quoniam G H sunt ipsarum C D æque multiplices, partes autem inter se comparatæ eandem habent proportionem, quam habent earum æque multiplices; erit [a] ut C ad D ita G ad H. sed ut C ad D ita E ad F. ergo [b] & ut E ad F ita G ad H. quod si quatuor magnitudines proportionales
c 14. hujus. sint, prima autem major sit quàm tertia; [c] & secunda quam quarta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. si igitur E superat G, & F ipsam H superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor; suntque E F ipsarum A B æque multiplices, & G H ipsarum C D aliæ utcunque
d 5. Def. hujus. æque multiplices, ergo [d] ut A ad C ita B ad D. Si igitur quatuor magnitudines proportionales fuerint, & permutatæ proportionales erunt. Quod ostendere oportebat.

PROP.

PROP. XVII. THEOR.

Si compositæ magnitudines sint proportionales, & divisæ proportionales erunt.

Sint compositæ magnitudines proportionales AB BE CD DF. Hoc est ut AB ad BE, ita sit CD ad DF. Dico etiam divisas proportionales esse, videlicet ut AE ad EB ita esse CF ad FD. Sumantur enim ipsarum quidem AE EB CF FD æque multiplices GH HK LM MN, ipsarum vero EB FD aliæ utcunque æque multiplices KX NP. Quoniam æque multiplex est GH ipsius AE, ac HK ipsius EB; erit [a] GH ipsius AE æque multiplex, ac GK ipsius AB. æque autem multiplex est GH ipsius AE, ac LM ipsius CF. ergo GK æque multiplex est AB, ac LM ipsius CF. rursus quoniam æque multiplex est LM ipsius CF, ac MN ipsius FD; erit [a] LM æque multiplex CF, ac LN ipsius CD. sed æque multiplex erat LM ipsius CF, ac GK ipsius AB. æque igitur multiplex est GK ipsius AB, ac LN ipsius CD. quare GK LN ipsarum AB CD æque multiplices erunt. rursus quoniam æque multiplex est HK ipsius EB, ac MN ipsius FD: est autem & KX ipsius EB æque multiplex, ac NP ipsius FD; & composita HX ipsius EB æque multiplex est [b] ac MP ipsius FD. quare cum sit ut AB ad BE, ita CD ad DF; & sumptæ sint ipsarum quidem AB CD æque multiplices GK LN, ipsarum vero EB FD aliæ utcunque æque multiplices HX MP: si [c] GK superat HX, & LN superabit MP; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. superet igitur GK ipsam HX, communique ablata HK, & GH ipsam KX superabit. sed si GK superat HX, & LN superat MP: itaque superat LN ipsam MP: communique MN ablata, & LM superabit NP. quare si GH superat KX, & LM ipsam NP superabit. similiter demonstrabimus & si GH sit æqualis KX, & LM ipsi NP esse æqualem; & si minor, minorem. sunt autem GH LM ipsarum AE CF æque multiplices, & ipsarum EB FD aliæ utcunque æque multiplices KX NP. ergo [c] ut AE ad EB ita erit CF ad FD. Si igitur compositæ magnitudines sint proportionales, & divisæ proportionales erunt. Quod demonstrare oportebat.



a 1. hujus.

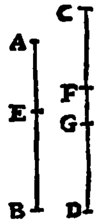
b 2. hujus.

c 5. Def. hujus.

PROP. XVIII. THEOR.

Si divisæ magnitudines sint proportionales, & compositæ proportionales erunt.

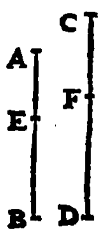
Sint divisæ magnitudines proportionales AE EB CF FD: hoc est ut AE ad EB, ita CF ad FD. Dico etiam compositas proportionales esse, videlicet ut AB ad BE, ita esse CD ad DF. Si enim non est ut AB ad BE, ita CD ad DF; erit ut AB ad BE, ita CD vel ad minorem quàm FD, vel ad majorem. sit primo ad minorem, nempe ad DG. & quoniam est ut AB ad BE, ita CD ad DG, compositæ magnitudines sunt proportionales; ergo & divisæ proportionales
a 17. hujus. erunt a. est igitur ut AE ad EB, ita CG ad GD. ponitur autem ut AE ad EB, ita CF ad
b 11. hujus. FD. quare & b ut CG ad GD, ita CF ad FD. at CG prima major est quam tertia CF. ergo & secunda
c 14. hujus. DG quàm quarta DF major c erit. sed & minor, quod fieri non potest. Non igitur est ut AB ad BE, ita CD ad DG. similiter ostendemus neque esse ad majorem quàm DF. ad ipsam igitur DF sit necesse est. Quare si divisæ magnitudines sint proportionales, & compositæ proportionales erunt. Quod oportebat demonstrare.



PROP. XIX. THEOR.

Si fuerit ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam: & reliqua ad reliquam erit ut tota ad totam.

Sit enim ut tota AB ad totam CD, ita ablata AE ad ablatam CF. Dico & reliquam EB ad reliquam FD ita esse ut tota AB ad totam CD. Quoniam enim est ut tota AB ad totam CD, ita
a 16. hujus. AE ad CF. & permutando erit a ut AB ad AE, ita CD ad CF. quoniam vero compositæ magnitudines sunt proportionales, & divisæ
b 17. hujus. proportionales erunt b, ut igitur BE ad EA, ita DF ad FC: rursusque permutando ut a BE ad DF, ita EA ad FC. sed ut AE ad CF,
c 11. hujus. ita posita est AB ad CD. & reliqua c igitur EB erit ad reliquam FD, ut tota AB ad totam CD. Quare si fuerit ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam: & reliqua ad reliquam erit ut tota ad totam. Quod demonstrare oportebat.



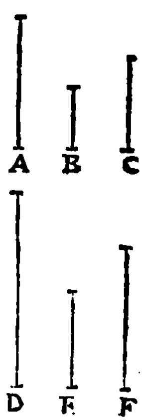
Cor.

Cor. Si quatuor magnitudines proportionales ſint, per converſionem rationis proportionales erunt. Sit enim ut AB ad BE, ita CD ad DF, erit permutando AB ad CD, ita BE ad DF. quare cum eſt tota AB ad totam CD, ut ablata BE ad ablatam DF, erit & reliqua AE ad reliquam CF, ut tota AB ad totam CD. quare rurſus permutando & invertendo erit ut AB ad AE, ita CD ad CF. quod eſt per converſionem rationis [d] *. d 17. Def. hujus.

PROP. XX. THEOR.

Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur in eadem proportione; ex æquali autem prima major ſit, quam tertia; & quarta quàm ſexta major erit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor.

Sint tres magnitudines A B C, & aliæ ipſis numero æquales D E F binæ ſumptæ ſint in eadem proportione; ſitque ut A ad B, ita D ad E, & ut B ad C, ita E ad F; ex æquali autem major ſit A quam C. Dico & D quam F majorem eſſe; & ſi æqualis, æqualem; & ſi minor, minorem. Quoniam enim A major eſt quàm C, alia vero eſt utcunque B, & major ad eandem majorem habet [a] proportionem quàm minor; habebit A ad B majorem proportionem quam C ad B. ſed ut A ad B, ita D ad E; & invertendo ut C ad B, ita F ad E. ergo & D ad E majorem habet proportionem quam F ad E. ad eandem vero proportionem habentium, quæ majorem habet proportionem, illa major [b] eſt. major igitur eſt D quam F. ſimiliter oſtendemus & ſi A ſit æqualis C, & D ipſi F æqualem eſſe; & ſi minor, minorem. Si igitur tres magnitudines fuerint, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur, & in eadem proportione: ex æquali autem prima major ſit quam tertia; & quarta quam ſexta major erit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. Quod oſtendere oportebat.



a 8. hujus.

b 10. hujus.

* *Hæc eſt magis legitima Demonſtratio Converſionis rationis. Si ſit* AB *ad* BE *ut* CD *ad* DF, *erit, dividendo,* AE *ad* BE *ut* CF *ad* DF: *& invertendo, ut* BE *ad* AE *ita* DF *ad* CF: *&, componendo, erit* AB *ad* AE *ut* CD *ad* CF: *quod eſt per Converſionem Rationis.*

PROP. XXI. THEOR.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur & in eadem proportione; sit autem perturbata earum analogia, & ex æquali prima major sit quam tertia: & quarta quam sexta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor.

Sint tres magnitudines A B C, & aliæ ipsis numero æquales D E F, binæ sumptæ & in eadem proportione. Sit autem perturbata earum analogia, videlicet ut A quidem ad B, ita E ad F; ut vero B ad C, ita D ad E; & ex æquali A major sit quam C. Dico & D quam F majorem esse; & si æqualis, æqualem; & si minor, minorem. Quoniam enim major est A quam C, alia vero est B; habebit [a] A ad B majorem proportionem quam C ad B. sed ut A ad B, ita E ad F: & invertendo ut C ad B, ita E ad D. quare & E ad F majorem habebit proportionem quam E ad D. ad quam vero eadem majorem proportionem habet illa minor est [b]. minor igitur est F quam D; ac propterea D quam F major erit. similiter ostendemus & si A sit æqualis C, & D ipsi F esse æqualem; & si minor, minorem. Si igitur sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ sumantur & in eadem proportione; sit autem perturbata earum analogia, & ex æquali autem prima major sit quam tertia: & quarta quam sexta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. Quod demonstrare oportebat.

[a] 8. hujus.

[b] 10. hujus.

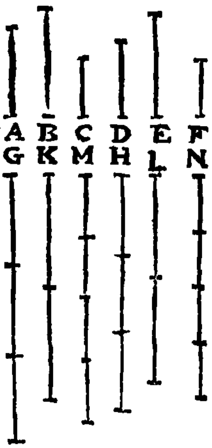
PROP. XXII. THEOR.

Si sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem proportione: & ex æquali in eadem proportione erunt.

Sint quotcunque magnitudines A B C, & aliæ ipsis numero æquales D E F, binæ sumptæ in eadem proportione, hoc est ut A quidem ad B, ita D ad E, ut autem B ad C, ita E ad F. Dico & ex æquali in eadem proportione esse, ut A ad C, ita D ad F. Sumantur enim ipsarum quidem A D æque multiplices G H; ipsarum vero B E aliæ utcunque æque multi-

plices

plices KL, & ipſarum CF aliæ utcunque æque multiplices MN. Quoniam igitur eſt ut A ad B, ita D ad E, & ſumptæ ſunt ipſarum A D æque multiplices G H, & ipſarum B E aliæ utcunque æque multiplices K L; erit ut [a] G ad K, ita H ad L. eadem quoque ratione erit ut K ad M, ita L ad N. & cum ſint tres magnitudines G K M, & aliæ ipſis numero æquales H L N, binæ ſumptæ & in eadem proportione; ex æquali [b] ſi G ſuperat M, & H ipſam N ſuperabit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. ſuntque G H ipſarum A D æque multiplices, & M N ipſarum C F aliæ utcunque æque multiplices. ut igitur A ad C, ita erit [c] D ad F. Quare ſi ſint quotcunque magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur in eadem proportione: & ex æquali in eadem proportione erunt. Quod demonſtrare oportebat.



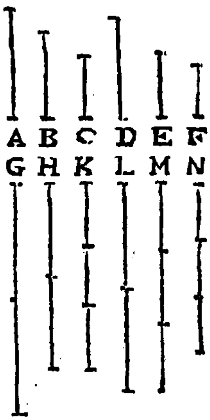
a 4. hujus.

b 20. hujus.

c 5. Defin. hujus.

PROP. XXIII. THEOR.

Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur in eadem proportione; ſit autem perturbata earum analogia: & ex æquali in eadem proportione erunt.



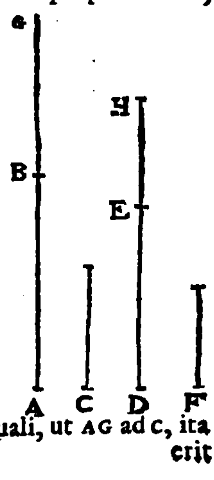
Sint tres magnitudines A B C, & aliæ ipſis numero æquales, binæ ſumptæ in eadem proportione, D E F, ſit autem perturbata earum analogia, hoc eſt ſit ut A ad B, ita E ad F, & ut B ad C, ita D ad E. Dico ut A ad C, ita eſſe D ad F. Sumantur ipſarum quidem A B D æque multiplices G H L: ipſarum vero C E F aliæ utcunque æque multiplices K M N. Et quoniam G H æque multiplices ſunt ipſarum A B, partes autem eandem habent proportionem quam habent æque

a 15. hujus. ipsarum multiplices: erit a ut A ad B, ita G ad H. & simili ratione ut E ad F, ita M ad N. atque est ut A ad B, ita E ad
b 11. hujus. F. ut b igitur G ad H, ita M ad N. rursus quoniam est ut B ad C ita D ad E, & sumptæ sunt ipsarum B D æque multiplices H L, ipsarum vero C E aliæ utcunque æque multiplices K M: erit
c 4. hujus. ut H ad K, ita L ad M c. ostensum autem est & ut G ad H, ita esse M ad N. quoniam igitur tres magnitudines proportionales sunt G H K, & aliæ ipsis numero æquales L M N, binæ sumptæ in eadem proportione, estque ipsarum pertur-
d 21. hujus. bata analogia; ex æquali, si d G superat K, & L ipsam N superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. sunt autem G L ipsarum A D æque multiplices: & K N æque
e 5. Def. hujus. multiplices ipsarum C F. ut igitur e A ad C, ita erit D ad F. Quare si fuerint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem proportione, sit autem perturbata earum analogia: & ex æquali in eadem proportione erunt. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXIV. THEOR.

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; habeat autem & quinta ad secundam proportionem eandem, quam sexta ad quartam: & composita prima cum quinta ad secundam eandem proportionem habebit, quam tertia cum sexta ad quartam.

Prima AB ad secundam C eandem habeat proportionem, quam tertia DE ad quartam F; habeat autem & quinta BG ad secundam C proportionem eandem quam sexta EH ad quartam F; Dico & compositam primam cum quinta AG ad secundam C eandem proportionem habere, quam tertiam cum sexta DH ad quartam F. Quoniam enim est ut BG ad C, ita EH ad F; erit invertendo ut C ad BG, ita F ad EH. & quoniam ut AB ad C, ita est DE ad F; ut autem C ad BG, ita
a 22. hujus. F ad EH; erit a ex æquali ut AB ad BG, ita DE ad EH. quod cum divisæ magnitudines sint proportionales, & com-
b 18. hujus. positæ proportionales b erunt. ut igitur AG ad GB, ita est DH ad HE. sed &
c hypoth. ut c GB ad C, ita HE ad F, ergo, ex a æquali, ut AG ad C, ita erit

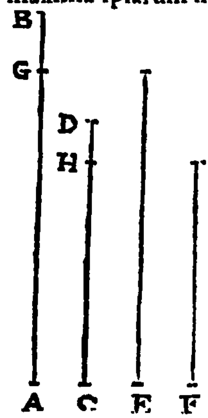


erit DH ad F. Si igitur prima ad secundam eandem habeat proportionem quàm tertia ad quartam: habeat autem & quinta ad secundam proportionem eandem quam sexta ad quartam: & composita prima cum quinta ad secundam eandem proportionem habebit quam tertia cum sexta ad quartam. Quod ostendere oportebat.

PROP. XXV. THEOR.

Si quatuor magnitudines fuerint proportionales, maxima ipsarum & minima, duabus reliquis majores erunt.

Sint quatuor magnitudines proportionales AB, CD, E, F; & sit ut AB ad CD, ita E ad F. sit autem maxima ipsarum AB, & F minima. Dico AB & F ipsis CD & E majores esse. Ponatur enim ipsi quidem E æqualis AG, ipsi vero F æqualis CH. Quoniam igitur est ut AB ad CD, ita E ad F: estque AG æqualis E, & CH æqualis F; erit ut AB ad DC, ita AG ad CH. & quoniam est ut tota AB ad totam CD, ita ablata AG ad ablatam erit CH; & reliqua GB ad reliquam HD [a] ut tota AB ad CD totam. major autem est AB quam CD. ergo & GB quam HD major erit. quod cum AG sit æqualis ipsi E, & CH ipsi F; erunt AG & F ipsi CH & E æquales. [b] si autem inæqualibus æqualia addantur, tota inæqualia erunt. ergo GB HD inæqualibus existentibus, quippe cum GB sit major, si ipsi quidem GB addantur AG & F, ipsi vero HD addantur CH & E: fient AB & F, ipsis CD & E necessario majores. Si igitur quatuor magnitudines fuerint proportionales, maxima ipsarum & minima, duabus reliquis majores erunt. Quod demonstrare oportebat.



a 19. hujus.

b 4. Ax. primi.

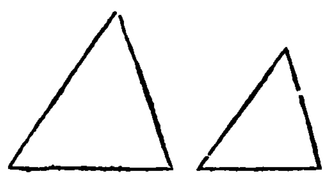
EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER SEXTUS.

DEFINITIONES.

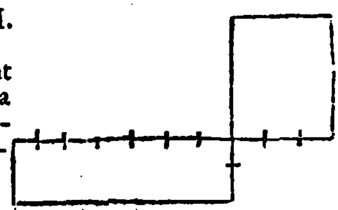
I.

Similes figuræ rectilineæ sunt quæ & singulos angulos æquales habent, & circa æquales angulos latera proportionalia.



II.

Reciprocæ figuræ sunt quando in utraque figura antecedentes, & consequentes rationum fuerint termini,

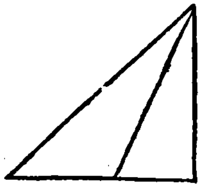


III.

Extrema ac media ratione secari recta linea dicitur, quando sit ut tota ad majus segmentum, ita majus segmentum ad minus.

IV.

IV.



Altitudo cujusque figuræ est linea penpendicularis, quæ à vertice ad basim ducitur.

V.

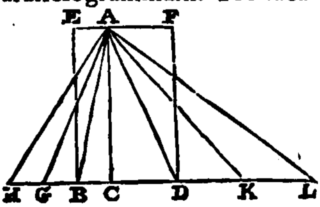
Ratio ex rationibus componi dicitur, quando rationum quantitates inter se multiplicatæ, aliquam efficiunt rationem.

PROPOSITIO I.

THEOREMA.

Triangula, & parallelogramma quæ eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases.

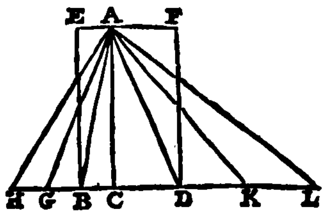
Sint triangula quidem ABC ACD, parallelogramma vero EC CF, quæ eandem habent altitudinem, videlicet perpendicularem à puncto A ad BD ductam. Dico ut basis BC ad CD basim, ita esse triangulum ABC ad triangulum ACD, & parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. Producatur BD ex utraque parte ad puncta HL, & ipsi quidem BC basi æquales quotcunque ponantur BG GH, ipsi vero basi CD ponantur quotcunque æquales DK KL, & AG AH AK AL jungantur. Quoniam igitur CB BG GH inter se æquales sunt, erunt & triangula AHG AGB ABC inter [a] se æqualia. ergo quotuplex est basis HC ipsius BC basis, totuplex est AHC triangulum trianguli ABC. eadem ratione quotuplex est LC basis ipsius basis CD, totuplex est & triangulum ALC ipsius ACD trianguli: & si æqualis est HC basis basi CL, & triangulum AHC triangulo ALC est [a] æquale: & si basis HC basim CL superat, & triangulum AHC superabit triangulum ALC: & si minor, minus. quatuor igitur magnitudinibus existentibus, videlicet duabus basibus BC CD, & duobus triangulis ABC ACD, sumpta sunt æque multiplicia basis quidem BC, & ABC, trianguli



[a] 38. primi.

vide-

videlicet basis HC, & AHC triangulum: basis vero CD & trianguli ACD, alia utcunque æque multiplicia, nempe CL basis, & ALC triangulum; atque ostensum est si HC basis basim CL superat, & triangulum AHC superare triangulum ALC; & si æqualis, æquale; & si minor, minus. est igitur [b] ut BC basis ad basim CD, ita triangulum ABC ad ACD triangulum. Et quoniam trianguli ABC duplum est [c] parallelogrammum EC, & trianguli ACD parallelogrammum FC duplum [c], partes [d] autem cum pariter multiplicibus eandem inter se proportionem habent: igitur ut ABC triangulum ad triangulum ACD, ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. quoniam igitur ostensum est ut basis BC ad CD basim, ita esse ABC triangulum ad triangulum ACD; ut autem ABC triangulum ad triangulum ACD, ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum; erit [e] ut BC basis ad basim CD, ita parallelogrammum EC ad FC parallelogrammum. Quare triangula & parallelogramma quæ eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases. Quod demonstrare oportebat.



b Def. 5. quinti.
c 41. primi.
d 15. quinti.
e 11. quinti.

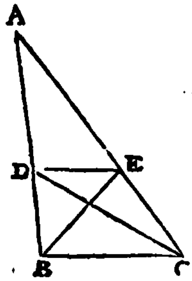
PROP. II. THEOR.

Si uni laterum trianguli parallela quædam recta linea ducta fuerit, proportionaliter secabit ipsius trianguli latera. & si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ sectiones conjungit recta linea, reliquo trianguli lateri parallela erit.

Trianguli enim ABC uni laterum BC, parallela ducatur DE. Dico ut BD ad DA, ita esse CE ad EA. Jungantur BE CD. Triangulum igitur BDE triangulo CDE est [a] æquale, in eadem enim sunt basi DE, & in eisdem DE & BC parallelis; aliud autem triangulum est ADE: sed æqualia ad idem eandem habent [b] proportionem; ergo ut triangulum BDE ad triangulum ADE, ita est CDE triangulum ad triangulum ADE. ut autem triangulum BDE ad triangulum ADE, ita [c] est BD ad DA; nam cum eandem altitudinem habent, videlicet perpendicularem à puncto E ad AB ductam, inter se sunt ut bases. & ob eandem causam ut CDE triangulum ad triangulum ADE, ita CE ad EA. & igitur ut BD ad DA, ita est [d] CE ad EA. Et si trianguli ABC latera AB AC pro-

a 37. primi.
b 7. quinti.
c 1. hujus.
d 11 quinti.

proportionaliter secta sunt, *i. e.* ut BD ad DA, ita sit CE ad EA; jungatur DE. Dico DE ipsi BC parallelam esse. Iisdem constructis, quoniam est ut BD ad DA, ita CE ad EA; ut autem BD ad DA, ita [e] est BDE triangulum ad triangulum ADE; & ut CE ad EA, ita CDE triangulum [e] ad triangulum ADE, erit ut triangulum BDE ad triangulum ADE, ita [e] CDE triangulum ad triangulum ADE. quod cum utrumque triangulorum BDE CDE ad triangulum ADE eandem habeat proportionem; erit BDE triangulum [f] triangulo CDE æquale; & sunt in eadem basi DE. æqualia autem triangula, & in eadem basi constituta, etiam in eisdem [g] sunt parallelis. ergo [g] DE ipsi BC parallela est. Si igitur uni laterum trianguli parallela quædam recta linea ducta fuerit, proportionaliter secabit ipsius trianguli latera. & si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ sectiones conjungit recta linea reliquo trianguli lateri parallela erit. Quod oportebat demonstrare.

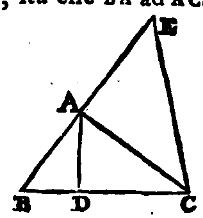


[e] 11. quinti.
[f] 9. quinti.
[g] 39. primi.

PROP. III. THEOR.

Si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta linea secet etiam basim; basis partes eandem proportionem habebunt, quam reliqua trianguli latera. & si basis partes eandem proportionem habeant, quam reliqua trianguli latera; quæ à vertice ad sectionem ducitur recta linea, trianguli angulum bifariam secabit.

Sit triangulum ABC, & secetur angulus BAC bifariam [a] recta linea AD. Dico ut BD ad CD, ita esse BA ad AC. Ducatur per C ipsi DA parallela [b] CE, & producta BA conveniat cum ipsa in E puncto. Quoniam igitur in parallelas AD EC incidit recta linea quædam AC, erit [c] ACE angulus angulo CAD æqualis. sed CAD angulus ponitur æqualis angulo BAD. ergo & BAD ipsi ACE angulo æqualis erit. rursus quoniam in parallelas AD EC recta linea



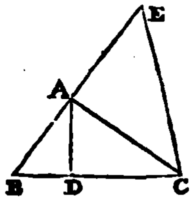
[a] 9. primi.
[b] 31. primi.
[c] 29. primi.

linea BAE incidit, exterior angulus BAD æqualis est [c] interiori ABC. ostensus autem est & angulus ACE angulo BAD æqualis. ergo & ACE ipsi AEC æqualis erit: ac propterea

d 6. primi. latus AE æquale [d] lateri AC. & quoniam uni laterum trianguli BCE, videlicet ipsi EC

e 2. hujus. parallela ducta est AD; erit [e] ut BD ad DC, ita BA ad AE; æqualis autem est AE ipsi AC.

f 7. quinti. est igitur [f] ut BD ad DC, ita BA ad AC. Et si sit ut BD ad DC, ita BA ad AC, & AD jungatur. Dico angulum BAC bifariam sectum esse recta linea AD. Iisdem enim constructis, quoniam est ut BD ad DC, ita AB ad AC; sed & ut



g 2. hujus. BD ad DC, ita [g] BA ad AE, etenim uni laterum trianguli

h 11. quinti. BCE, videlicet ipsi EC parallela ducta est AD, erit [h] & ut

i 9. quinti. BA ad AC, ita BA ad AE. ergo AC est [i] æqualis AE, ac

k 5. primi. propterea & angulus AEC angulo ACE [k] æqualis. sed angulus quidem AEC est æqualis angulo exteriori BAD; an-

l 29. primi. gulus vero ACE æqualis [l] alterno CAD. quare & BAD angulus ipsi CAD æqualis erit. angulus igitur BAC bifariam sectus est recta linea AD. Ergo si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta linea etiam basim secet; basis partes eandem proportionem habebunt, quam reliqua trianguli latera. & si basis partes eandem proportionem habent, quam reliqua trianguli latera; quæ à vertice ad sectionem ducitur recta linea, trianguli angulum bifariam secabit. Quod oportebat demonstrare.

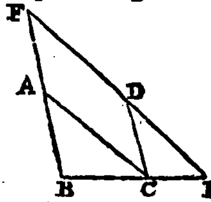
PROP. IV. THEOR.

Æquiangulorum triangulorum latera quæ circum æquales angulos sunt, proportionalia sunt. & homologa, sive ejusdem rationis sunt latera quæ æqualibus angulis subtenduntur.

Sint æquiangula triangula ABC DCE, quæ angulum quidem ABC angulo DCE, angulum vero ACB angulo DEC æqualem habeant, & præterea angulum BAC angulo CDE. Dico triangulorum ABC DCE proportionalia esse latera quæ sunt circa æquales angulos; & homologa, sive ejusdem rationis latera esse quæ æqualibus angulis subtenduntur. Ponatur BC in directum ipsi CE. Et quoniam

a 17. primi. anguli ABC ACB duobus rectis minores [a] sunt, æqualis autem est angulus ACB angulo DEC; erunt ABC DEC anguli

guli duobus rectis minores. quare BA ED productæ inter se conveniant [b]; producantur, & conveniant in puncto F. & quoniam angulus DCE est æqualis angulo ABC; erit [c] BF ipsi DC parallela. rursus quoniam æqualis est angulus ACB angulo DEC, parallela [c] erit AC ipsi FE. parallelogrammum igitur est FACD; ac propterea FA quidem ipsi CD, AC vero ipsi FD est [d] æqualis. & quoniam uni laterum trianguli FBE, videlicet ipsi FE, parallela ducta est AC; erit [e] ut BA ad AF, ita BC ad CE. æqualis autem est AF ipsi CD. ut igitur [f] BA ad CD ita BC ad CE. & permutando ut BA ad BC ita CD ad CE. rursus quoniam CD parallela est BF, erit [e] ut BC ad CE, ita FD ad DE. sed FD est æqualis AC. ergo ut [f] BC ad CE, ita AC ad DE. permutando igitur, ut BC ad CA ita CE ad ED. itaque quoniam ostensum est, ut AB ad BC ita DC ad CE, ut autem BC ad CA ita CE ad ED: erit [g] ex æquali; ut BA ad AC ita CD ad DE. Æquiangulorum igitur triangulorum proportionalia sunt latera quæ circum æquales angulos. & homologa, sive ejusdem rationis, latera sunt quæ æqualibus angulis subtenduntur. Quod demonstrare oportebat.

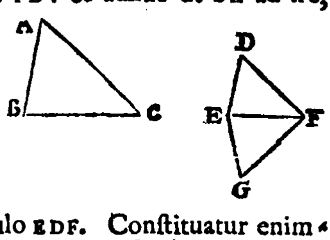


b 12. axio. primi.
c 28. primi.
d 34. primi.
e 2. hujus.
f 7. quinti.
g 22. quinti.

PROP. V. THEOR.

Si duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos quibus homologa latera subtenduntur.

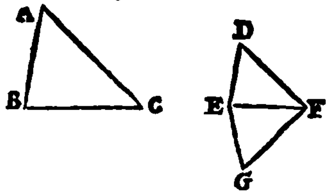
Sint duo triangula ABC DEF, quæ latera proportionalia habeant, hoc est, sit ut AB quidem ad BC, ita DE ad EF: ut autem BC ad CA, ita EF ad FD: & adhuc ut BA ad AC, ita ED ad DF. Dico triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum esse, & æquales habere angulos quibus homologa latera subtenduntur, angulum quidem ABC angulo DEF, angulum vero BCA angulo EFD, & præterea angulum BAC angulo EDF. Constituatur enim [aa] ad rectam lineam EF, & ad puncta in ipsa EF, angulo quidem ABC æqualis angulus FEG; angulo autem BCA angulus



aa 23. primi.

gulus

gulus EFG. quare reliquus BAC angulus[b] reliquo EGF est æqualis. ideoque æquiangulum est triangulum ABC triangulo EGF. triangulorum igitur ABC EGF proportionalia sunt latera quæ æqualibus angulis subtenduntur. ergo ut AB ad BC[c], ita GE ad EF. sed ut AB ad BC, ita DE ad EF. ut igitur DE ad EF, ita[d] GE ad EF. quod cum utraque ipsarum DE EG ad EF eandem proportionem habeat, erit[e] DE ipsi EG æqualis. Eadem ratione & DF æqualis FG. itaque quoniam DE est æqualis EG, communis autem EF; duæ DE EF duabus GE EF æquales sunt, & basis DF basi FG æqualis. angulus igitur DEF est æqualis[f] angulo GEF, & DEF triangulum æquale triangulo GEF, & reliqui anguli reliquis angulis æqualis, quibus æqualia latera subtenduntur. ergo angulus quidem DEF est æqualis angulo GEF, angulus vero EDF æqualis angulo EGF; & quoniam angulus DEF est æqualis angulo GEF, & angulus GEF angulo ABC, erit & angulus ABC angulo FED æqualis. eadem ratione & angulus ACB æqualis est angulo DFE, & adhuc angulus ad A angulo ad D. ergo ABC triangulum triangulo DEF æquiangulum erit. Si igitur duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula erunt triangula; & æquales habebunt angulos quibus homologa latera subtenduntur. Quod oportebat demonstrare.



b 1. Cor. 32. primi.
c 4. hujus.
d 11. quinti.
e 9. quinti.
f 8. primi.

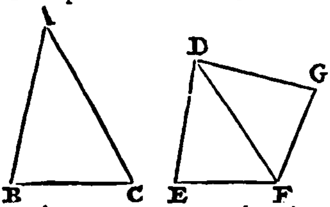
PROP. VI. THEOR.

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos quibus homologa latera subtenduntur.

Sint duo triangula ABC DEF, unum angulum BAC uni angulo EDF æqualem habentia, circa æquales autem angulos latera proportionalia, hoc est, sit ut BA ad AC, ita ED ad FD. Dico triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum esse, & angulum quidem ABC habere æqualem angulo DEF; angulum vero ACB angulo DFE. Constituatur[a] enim ad rectam lineam DF, & ad puncta in ipsa DF, alterutri angulorum BAC EDF æqualis angulus FDG, angulo autem ACB æqualis DFG. reliquus igitur

a 23. primi.

igitur ad B reliquo ad G est [b] æqualis. ergo triangulum ABC triangulo DGF æquiangulum est; ac propterea ut BA ad AC ita [c] est GD ad DF: ponitur autem & ut BA ad AC, ita ED ad DF. ut igitur [d] ED ad DF, ita GD ad DF. quare ED æqualis est [e] ipsi DG, & communis DF. ergo duæ ED DF duabus GD DF æquales sunt & angulus EDF angulo GDF est æqualis; basis igitur EF est [f] æqualis basi FG, triangulumque DEF æquale triangulo GDF, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. ergo angulus quidem DFG est æqualis angulo DFE; angulus vero ad G angulo ad E. sed angulus DFG æqualis est angulo ACB: & angulus igitur ACB angulo DFE est æqualis. ponitur autem & BAC angulus æqualis angulo EDF, ergo & reliquus qui ad B æqualis [b] est reliquo ad E. æquiangulum igitur est triangulum ABC triangulo DEF. Quare si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos quibus homologa latera subtenduntur. Quod ostendere oportebat.



[b] 2. Cor. 32. Primi.
[c] 4. hujus.
[d] 11. quinti.
[e] 9. quinti.
[f] 4. primi.

PROP. VII. THEOR.

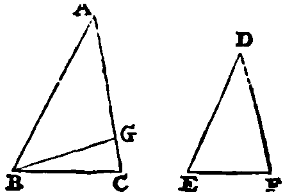
Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, & reliquorum utrumque simul, vel minorem, vel non minorem recto: æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos circa quos latera sunt proportionalia.

Sint duo triangula ABC DEF, unum angulum uni angulo æqualem habentia, videlicet angulum BAC angulo EDF æqualem, circa alios autem angulos ABC DEF latera proportionalia, ut sit DE ad EF, sicut AB ad BC: & reliquorum qui ad C F utrumque simul minorem vel non minorem recto. Dico triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum esse; angulumque ABC æqualem angulo DEF, & reliquum videlicet qui ad C reliquo qui ad F æqualem. Si inæqualis est angulus ABC angulo DEF, unus ipsorum major erit; sit major ABC: & constituatur [a] ad rectam lineam AB, & ad punctum in ipsa B, angulo DEF æqualis angulus ABG. &

[a] 23. primi.

I quo-

quoniam angulus quidem A est æqualis angulo D, angulus vero ABG angulo DEF: erit reliquus AGB reliquo DFE æqualis[b]. æquiangulum igitur est ABG triangulum triangulo DEF. quare ut[c] AB ad GB, sic DE ad EF: utque DE ad EF, sic ponitur AB ad BC. ut igitur AB ad BC, sic AB ad BG. quod cum AB ad utramque BC BG eandem habeat proportionem, erit BC ipsi BG æqualis[d]: ac propterea angulus ad C est æqualis[e] angulo BGC. quare uterque angulorum BCG BGC minor est recto, igitur qui ei deinceps est AGB major est recto. atque ostensus est angulus AGB æqualis angulo qui ad F. angulus igitur qui ad F recto major est. atqui ponitur non major: cum C non est major recto, quod est absurdum. non igitur inæqualis est angulus ABC angulo DEF, ergo ipsi est æqualis. est autem & angulus ad A æqualis ei qui ad D. quare & reliquus qui ad C æqualis[b] reliquo qui ad F. æquiangulum igitur est ABC triangulum triangulo DEF. Si igitur duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, & reliquorum utrumque simul, vel minorem, vel non minorem recto: æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos circa quos proportionalia sunt latera. Quod oportebat demonstrare.

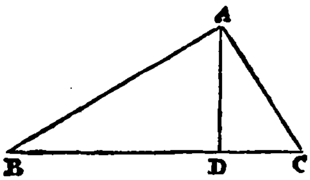


b 2. Cor. 32. primi.
c 4. hujus.
d 9 quinti.
e 5. primi.

PROP. VIII. THEOR.

Si in triangulo rectangulo, ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur: quæ ad perpendicularem sunt triangula, & toti, & inter se similia sunt.

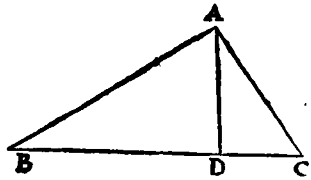
Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens angulum BAC: & à puncto A ad BC perpendicularis ducatur AD. Dico triangula ABD ADC toti triangulo ABC, & inter se similia esse. Quoniam enim angulus BAC est æqualis angulo ADB, rectus enim uterque est, & angulus ad B communis duobus triangulis ABC ABD; erit[a] reliquus ACB reliquo BAD æqualis. æquiangulum igitur est triangulum ABC triangulo ABD. quare[b] ut BC quæ subtendit angulum rectum trianguli ABC, ad BA subtendentem



a 2. Cor. 32. primi.
b 4. hujus.

tem

tem angulum rectum trianguli ABD, sic ipsa AB subtendens angulum ad C trianguli ABC, ad DB subtendentem angulum æqualem angulo ad C, videlicet BAD ipsius ABD trianguli; & adhuc AC ad AD subtendentem angulum ad B communem duobus triangulis. ergo triangulum ABC triangulo ABD æquiangulum est [c]; & circa æquales angulos latera habet proportionalia. simile igitur [a] est triangulum ABC triangulo ABD. eadem ratione demonstrabimus etiam ADC triangulum triangulo ABC simile esse. quare utrumqne ipsorum ABD ADC toti ABC triangulo est simile. Dico insuper triangula ABD ADC etiam inter se similia esse. Quoniam enim angulus BDA rectus est æqualis recto ADC; sed & BAD ostensus est æqualis angulo ad C; erit reliquus ad B reliquo DAC æqualis [a]. æquiangulum igitur est triangulum ABD triangulo ADC. ergo [b] ut BD trianguli ABD subtendens BAD angulum, ad DA trianguli ADC subtendentem angulum qui est ad C, æqualem angulo BAD, sic ipsa AD trianguli ABD subtendens angulum ad B, ad DC subtendentem angulum DAC ei qui est ad B æqualem; & adhuc BA ad AC subtendentem angulum rectum ADC. simile igitur est ABD triangulum triangulo ADC. Quare si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur; quæ ad perpendicularem sunt triangula, & toti, & inter se similia sunt. Quod oportebat demonstrare.



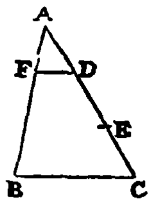
c 1. Def. hujus.

Cor. Ex hoc manifestum est, in triangulo rectangulo, ab angulo recto ad basim perpendicularem ductam, mediam proportionalem esse inter segmenta basis: & præterea inter basim & basis segmentum utrumlibet, latus segmento conterminum medium esse proportionale.

PROP. IX. PROBL.

A data recta linea imperatam partem abscindere.

Sit data recta linea AB. Oportet ab ipsa AB imperatam partem abscindere. Imperetur pars tertia; & ducatur à puncto A quædam recta linea AC, quæ cum ipsa AB angulum quemlibet contineat; sumaturque in AC quodvis punctum D, & ipsi AD æquales [a] ponantur DE EC, deinde [a] 3. primi. jungаb 31.primi. jungatur BC; per D ipsi BC parallela b ducatur DF. Itaque quoniam uni laterum trianguli ABC, videlicet ipsi BC,

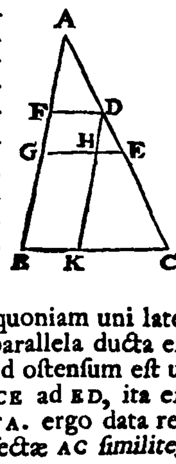


c 2. hujus. parallela ducta est FD; erit c ut CD ad DA, ita BF ad FA; dupla autem est CD ipsius DA. ergo & BF ipsius FA dupla erit. tripla igitur est BA ipsius AF. quare à data recta linea AB imperata tertia pars AF abscissa est. Quod facere oportebat.

PROP. X. PROBL.

Datam rectam lineam insectam, data recta linea secta similiter secare.

Sit data quidem recta linea insecta AB, secta vero AC oportet rectam lineam AB insectam ipsi AC sectæ similiter secare. Sit secta AC in punctis D & E, & ponantur ita, ut angulum quemvis contineant, junctaque BC per puncta quidem



a 31.primi. D & E ipsi BC parallelæ a ducantur DF EG: per D vero ipsi AB ducatur parallela DHK. parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum FH HB: ac pro-
b 34.primi. pterea DH quidem est b æqualis FG, HK, vero ipsi GB. & quoniam uni laterum trianguli DKC, ipsi scilicet KC, parallela
c 2. hujus. ducta est HE; erit c ut CE ad ED, ita KH ad HD. æqualis autem est KH quidem ipsi BG, HD vero ipsi GF. est igitur ut CE ad ED, ita BG ad GF. rursus quoniam uni laterum trianguli AGE, nimirum ipsi EG, parallela ducta est FD, ut ED ad DA, ita c erit GF ad FA. sed ostensum est ut CE ad ED, ita esse BG ad GF. ut igitur CE ad ED, ita est BG ad GF, & ut ED ad DA, ita GF ad FA. ergo data recta linea insecta AB, datæ rectæ lineæ sectæ AC similiter secta est. Quod facere oportebat.

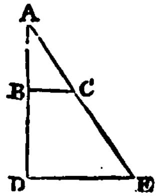
PROP. XI. PROBL.

Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem invenire.

Sint datæ duæ rectæ lineæ AB AC, & ponantur ita ut angulum quemvis contineant. Oportet ipsis AB AC

tertiam

tertiam proportionalem invenire. Producantur AB AC ad puncta D E: ponaturque ipsi AC æqualis BD; & juncta BC, ducatur [a] per D ipsi BC parallela DE. quoniam igitur uni laterum trianguli ADE, videlicet ipsi DE parallela ducta est BC, erit [b] ut AB ad BD, ita AC ad CE. æqualis autem est BD ipsi AC, ut igitur AB ad AC, ita est AC ad CE. quare datis rectis lineis AB AC tertia proportionalis inventa est CE. Quod facere oportebat.



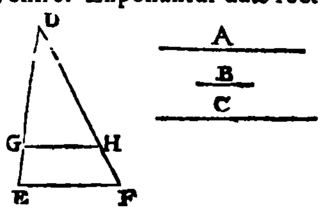
a 31. primi.

b 2. hujus.

PROP. XII. PROBL.

Tribus datis rectis lineis quartam proportionalem invenire.

Sint datæ tres rectæ lineæ A B C. Oportet ipsis A B C quartam proportionalem invenire. Exponantur duæ rectæ lineæ DE DF angulum quemvis EDF continentes: & ponatur ipsi quidem A æqualis DG, ipsi vero B æqualis GE, & ipsi C æqualis DH: junctaque GH, per E ipsi parallela [a] ducatur EF. itaque quoniam uni laterum trianguli DEF, nimirum ipsi EF, parallela ducta est GH, erit ut DG ad GE ita [b] DH ad HF. est autem DG ipsi A æqualis; GE vero æqualis B, & DH æqualis C, ut igitur A ad B, ita C ad HF. quare datis tribus rectis lineis A B C quarta proportionalis inventa est HF. Quod facere oportebat.



a 31. primi.

b 2. hujus.

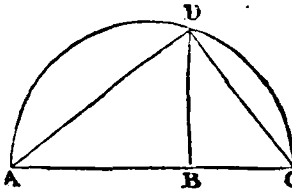
PROP. XIII. PROBL.

Duabus datis rectis lineis mediam proportionalem invenire.

Sint datæ duæ rectæ lineæ AB BC. Oportet inter ipsas AB BC mediam proportionalem invenire. Ponantur in directum, & super ipsa AC describatur semicirculus ADC, ducaturque [a] à puncto B ipsi AC ad rectos angulos BD, & AD DC jungantur. Quoniam igitur angulus ADC est in semicirculo, is rectus [b] est. & quoniam in triangulo rectan- a 11. primi. b 31. tertii.

 gulo

gulo ADC, ab angulo recto ad basim perpendicularis ducta est DB, erit DB media proportionalis [c] inter segmenta basis AB BC. duabus igitur datis rectis lineis AB BC media proportionalis inventa est. Quod facere oportebat.

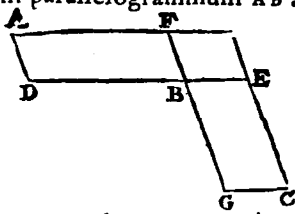


c Cor. 8. hujus.

PROP. XIV. THEOR.

Æqualium, & unum uni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum latera quæ sunt circum æquales angulos, reciproca sunt: Et quorum parallelogrammorum unum uni æqualem habentium angulum, latera quæ circum æquales angulos, sunt reciproca; ea inter se sunt æqualia.

Sint æqualia parallelogramma AB BC, æquales habentia angulos ad B, & ponantur in directum DB BE. ergo & in directum [a] erunt FB BG. Dico parallelogrammorum AB BC latera quæ sunt circum æquales angulos reciproca esse: hoc est ut DB ad BE ita esse GB ad BF. Compleatur enim parallelogrammum FE. & quoniam parallelogrammum AB æquale est parallelogrammo BC, aliud autem aliquod est FE parallelogrammum, erit ut AB ad FE [b], ita BC ad FE. sed ut AB quidem ad FE, ita [c] est DB ad BE; ut autem BC ad FE, it [c] GB ad BF; ut igitur [d] DB ad BE, ita GB ad BF. ergo parallelogrammorum AB BC latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte sibi ipsius respondent. Et si reciproca sunt seu ex contraria parte sibi ipsis respondeant latera quæ sunt circum æquales angulos, sit nempe ut DB ad BE, ita GB ad BF. Dico parallelogrammum AB parallelogrammo BC æquale esse. Quoniam enim est ut DB ad BE, ita GB ad BF; ut autem DB ad BE, ita [c] AB parallelogrammum ad parallelogrammum FE, & ut GB ad BF, ita [c] BC parallelogrammum ad parallelogrammum FE; erit [d] & ut AB ad FE, ita BC ad FE. æquale igitur est AB [e] parallelogrammum parallelogrammo BC. Ergo æqualium & unum uni



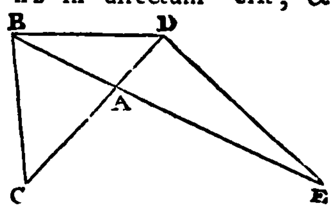
a 14 primi.
b 7. quinti.
c 1. hujus.
d 11. hujus.
e 9. quinti.

uni æqualem habentium angulum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt, seu ex contraria parte sibi ipsis respondent: & quorum parallelogrammorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt, ea inter se sunt æqualia. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XV. THEOR.

Æqualium, & unum uni æqualem habentium angulum triangulorum latera, quæ circum æquales angulos, sunt reciproca: Et quorum triangulorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales augulos reciproca sunt, ea inter se sunt æqualia.

Sint æqualia triangula ABC ADE unum angulum uni angulo æqualem habentia, angulum scilicet BAC angulo DAE. Dico triangulorum ABC ADE latera quæ circum æquales angulos reciproca esse, hoc est ut CA ad AD, ita esse EA ad AB. ponantur enim ita ut in directum sit CA ipsi AD. ergo & EA ipsi AB in directum [a] erit; & jungatur BD. Quoniam igitur triangulum ABC æquale est triangulo ADE, aliud autem est ABD; erit ut CAB triangulum ad triangulum BAD, ita [b] triangulum ADE ad triangulum BAD. sed ut triangulum quidem CAB ad BAD triangulum, ita [c] CA ad AD; ut autem triangulum EAD ad ipsum BAD, ita [c] EA ad AB. ut [d] igitur CA ad AD, ita EA ad AB. quare triangulorum ABC ADE latera, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt. Et si reciproca sunt latera triangulorum ABC ADE, scil. sit ut CA ad AD, ita EA ad AB. Dico triangulum ABC triangulo ADE æquale esse. juncta enim rursus BD, quoniam ut CA ad AD, ita est EA ad AB, ut autem CA ad AD, ita [c] ABC triangulum ad triangulum BAD; & ut EA ad AB, ita [c] triangulum EAD ad BAD triangulum, erit [d] ut ABC triangulum ad triangulum BAD, ita triangulum EAD ad BAD triangulum. utrumque igitur triangulorum ABC ADE ad triangulum BAD eandem habet proportionem; ac propterea [e] æquale est ABC triangulum



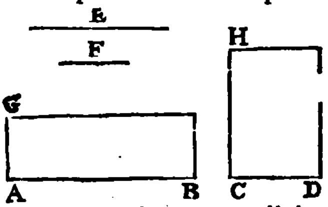
[a] 14 primi.
[b] 7. quinti.
[c] 1. hujus.
[d] 11. quinti.
[e] 9. quinti.

gulum triangulo ADE. Æqualium igitur, & unum uni æqualem habentium angulum triangulorum latera quæ circum æquales angulos, reciproca sunt: & quorum triangulorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos reciproca sunt, ea inter se sunt æqualia. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XVI. THEOR.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum sub extremis contentum æquale est ei rectangulo quod sub mediis continetur: Et si rectangulum sub extremis contentum æquale fuerit ei quod sub mediis continetur, quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales AB CD E F, sitque ut AB ad CD, ita E ad F. Dico rectangulum contentum sub rectis lineis AB F æquale esse ei quod sub ipsis CD E
a 11. primi. continetur. Ducantur enim [a] à punctis A C ipsis AB CD ad rectos angulos AG CH; ponaturque ipsi quidem F æqualis AG, ipsi vero E æqualis CH, & compleantur BG DH parallelogramma. Quoniam igitur est ut AB ad CD, ita E ad F; est autem E æqualis
b 7. quinti. CH, & F ipsi AG: erit [b] ut AB ad CD, ita CH ad AG. parallelogrammorum igitur BG DH latera, quæ sunt circum æquales angulos, reciproca sunt; quoniam autem æquiangulorum parallelogrammorum latera, quæ sunt circum æquales angulos,
c 14. hujus. reciproca sunt, ea inter se sunt [c] æqualia. ergo parallelogrammum BG æquale est parallelogrammo DH. atque est parallelogrammum quidem BG, quod sub rectis lineis AB F continetur, etenim AG est æqualis F; parallelogrammum vero DH, quod continetur sub ipsis CD E, cum CH ipsi E sit æqualis. rectangulum igitur contentum sub AB & F est æquale ei quod sub ipsis CD & E continetur. Et si rectangulum contentum sub AB F sit æquale ei quod sub CD & E continetur. Dico quatuor rectas lineas proportionales esse, videlicet ut AB ad CD, ita E ad F. iisdem enim constructis quoniam rectangulum contentum sub AB & F est æquale ei quod sub CD & E continetur, atque est contentum quidem sub A B F rectangulum BG, etenim AG



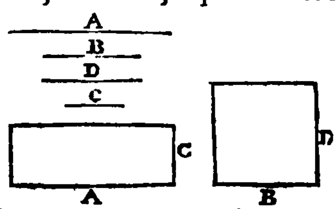
est

est æqualis F; contentum vero sub CD E est rectangulum DH, quòd CH ipsi E sit æqualis. erit parallelogrammum BG æquale parallelogrammo DH; & sunt æquiangula. æqualium autem & æquiangulorum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt. [c] quare ut AB ad CD, ita CH ad AG, æqualis autem est CH ipsi E, & AG ipsi F. ut igitur AB ad CD, ita E ad F. Ergo si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum sub extremis contentum æquale est ei est quod sub mediis continetur: & si rectangulum sub extremis contentum æquale fuerit ei quod sub mediis continetur, quatuor rectæ lineæ proportionales erunt. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XVII. THEOR.

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum sub extremis contentum æquale est ei quod à media fit quadrato: Et si rectangulum sub extremis contentum æquale fuerit ei quod à media fit quadrato, tres rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint tres rectæ lineæ proportionales A B C; & sit ut A ad B, ita B ad C. Dico rectangulum contentum sub AC æquale esse ei quod à media B fit quadrato. Ponatur ipsi B æqualis D. Et quoniam ut A ad B, ita B ad C, æqualis autem B ipsi D; erit ut A ad B[a], ita D ad C. si autem quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint rectangulum sub extremis contentum est [b] æquale ei quod sub mediis continetur. ergo rectangulum sub AC contentum est æquale ei quod continetur sub B D. sed rectangulum contentum sub B D est æquale quadrato quod fit ex ipsa B; etenim B est æqualis D. rectangulum igitur contentum sub AC est æquale ei quod ex B fit quadrato. Et si rectangulum contentum sub A C æquale sit quadrato quod fit ex B. Dico ut A ad B, ita esse B ad C. Iisdem enim constructis, quoniam rectangulum contentum sub A C æquale est quadrato quod fit ex B; at quadratum quod fit ex B est rectangulum quod sub ipsis B D continetur, est enim B æqualis ipsi D; erit rectangulum contentum sub A C æquale ei quod sub B D continetur. si autem rectangulum sub extremis contentum æquale fuerit ei quod sub mediis continetur, quatuor rectæ lineæ



a 7. quinti.

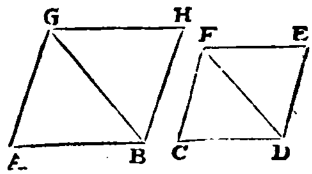
b 16. hujus.

lineæ proportionales [b] erunt. eſt igitur ut A ad B, ita D ad C; æqualis autem B ipſi D. ergo ut A ad B, ita B ad C. Si igitur tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum ſub extremis contentum eſt æquale ei quod à media fit quadrato. Et ſi rectangulum ſub extremis contentum æquale fuerit ei quod à media fit quadrato, tres rectæ lineæ proportionales erunt. Quod oportebat demonſtrare.

PROP. XVIII. PROBL.

A data recta linea dato rectilineo ſimile & ſimiliter poſitum rectilineum deſcribere.

Sit data recta linea AB, datum autem rectilineum CE. Oportet à recta linea AB rectilineo CE ſimile, & ſimiliter poſitum rectilineum deſcribere. Jungatur DF, & ad rectam lineam AB, & ad puncta in ipſa A B, angulo quidem C æ-
a 23.primi. qualis angulus [a] conſtituatur GAB, angulo autem CDF angulus ABG. reliquus igitur CFD angulus reliquo AGB
b 2.Cor.32. primi. eſt [b] æqualis. ergo æquiangulum eſt FCD triangulum triangulo GAB; ac propte-
c 4. hujus. rea [c] ut FD ad GB, ita FC ad GA, & CD ad AB. rurſus conſtituatur ad rectam lineam BG, & ad puncta in ipſa B G, angulo quidem DFE æqualis angulus BGH, angulo quidem FDE æqualis GBH. ergo reliquus [b] ad E reliquo ad H eſt æqualis. æquiangulum igitur eſt triangulum FDE triangulo GBH. quare ut [c] FD ad GB, ita FE ad GH, & ED ad HB. oſtenſum autem eſt & ut FD
d 11.quinti. ad GB, ita FC ad GA, & CD ad AB: & ut igitur [b] FC ad AG, ita CD ad AB, & FE ad GH, & adhuc ED ad HB. itaque quoniam angulus quidem CFD eſt æqualis angulo AGB; angulus autem DFE angulo BGH. erit totus CFE angulus toti AGH æqualis. eadem ratione & CDE eſt æqualis ipſi ABH, & præterea angulus quidem ad C angulo ad A æqualis, angulus vero ad E angulo ad H. æquiangulum igitur eſt AH ipſi CE, & latera circum æquales ipſis angulos habet proportionalia. ergo rectilineum AH rectilineo CE ſi-
e 1. Def. hujus. mile [e] erit: A data igitur recta linea AB dato rectilineo CE ſimile, & ſimiliter poſitum rectilineum AH deſcriptum eſt. Quod facere oportebat.

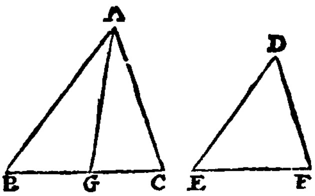


PROP.

PROP. XIX. THEOR.

Similia triangula inter se sunt in duplicata proportione laterum homologorum.

Sint similia triangula ABC DEF habentia angulum ad B æqualem angulo ad E, & sit ut AB ad BC, ita DE ad EF, ita ut latus BC homologum sit lateri EF. Dico ABC triangulum ad triangulum DEF duplicatam proportionem habere ejus quam habet BC ad EF. Sumatur enim ipsis [a] BC EF tertia proportionalis BG, ut sit BC ad EF ita EF ad BG. & jungatur GA. Quoniam igitur ut AB ad BC, ita est DE ad EF; erit permutando ut AB ad DE, ita BC ad EF. sed ut BC ad EF, ita EF ad BG. ut [b] igitur AB ad DE, ita EF ad BG. quare triangulorum ABG DEF latera, quæ sunt circum æquales angulos, reciproca sunt. quorum autem triangulorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt, ea inter se æqualia [c] sunt. æquale igitur est ABG triangulum triangulo DEF. & quoniam est ut BC ad EF, ita EF ad BG; si autem tres rectæ lineæ proportionales sint, prima ad tertiam duplicatam proportionem [d] habet ejus quam habet ad secundam: habebit igitur BC ad BG duplicatam proportionem ejus quam habet BC ad EF. ut autem BC ad BG, ita ABC triangulum ad triangulum ABG [e]. ergo & ABC triangulum ad triangulum ABG duplicatam proportionem habet ejus quam BC habet ad EF. est autem ABG triangulum triangulo DEF æquale. & triangulum igitur ABC [f] ad triangulum DEF duplicatam proportionem habebit ejus quam habet BC ad EF. Quare similia triangula inter se sunt in duplicata proportione laterum homologorum. Quod ostendere oportebat.



[a] 11. hujus.
[b] 11. quinti.
[c] 15. hujus.
[d] 10. Def. quinti.
[e] 1. hujus.
[f] 7. quinti.

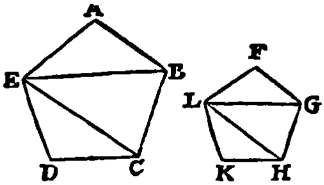
Cor. Ex hoc manifestum est, si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad tertiam, ita esse triangulum, quod fit à prima ad triangulum quod à secunda simile, & similiter descriptum; quoniam ostensum est ut CB ad BG, ita ABC triangulum ad triangulum ABG, hoc est ad triangulum DEF. Quod ostendere oportebat.

PROP.

PROP. XX. THEOR.

Similia polygona in similia triangula dividuntur, & numero æqualia, & homologa totis; & polygonum ad polygonum duplicatam proportionem habet ejus quam latus homologum habet ad homologum latus.

Sint similia polygona ABCDE FGHKL, & sit AB homologum ipsi FG. Dico polygona ABCDE FGHKL in similia triangula dividi, & numero æqualia, & homologa totis; & polygonum ABCDE ad polygonum FGHKL duplicatam proportionem habere ejus quam habet AB ad FG. Jungantur BE EC GL LH. Et quoniam simile est ABCDE polygonum polygono FGHKL, angulus BAE angulo GFL est [a] æqualis, atque est ut BA ad AE, ita GF ad FL. quoniam igitur duo triangula sunt ABE FGL unum angulum uni angulo æqualem habentia, circum æquales autem angulos latera proportionalia. erit [b] triangulum ABE triangulo FGL æquiangulum; ergo [c] & simile. angulus igitur ABE æqualis est angulo FGL. est autem & totus ABC angulus æqualis [a] toti FGH, propter similitudinem polygonorum. ergo reliquus EBC reliquo LGH est æqualis. & quoniam ob similitudinem triangulorum ABE FGL, est [c] ut EB ad BA, ita LG ad GF. sed & propter similitudinem polygonorum [a], ut AB ad BC, ita est FG ad GH; erit ex æquali ut [d] EB ad BC, ita LG ad GH. hoc est circum æquales angulos EBC LGH latera sunt proportionalia; æquiangulum igitur [b] est EBC triangulum triangulo LGH. quare & [c] simile. eadem ratione & ECD triangulum simile est triangulo LHK. similia igitur polygona ABCDE FGHKL in similia triangula dividuntur, & numero æqualia. Dico & homologa totis: hoc est ut proportionalia sint triangula, & antecedentia quidem sunt ABE EBC ECD, consequentia autem ipsorum FGL LGH LHK; & ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL duplicatam proportionem habere ejus quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc est AB ad FG. quoniam enim simile est ABE triangulum triangulo FGL, habebit ABE triangulum ad triangulum FGL duplicatam proportionem [e] ejus quam habet BE ad GL. eadem ratione, & triangulum BEC ad GLH triangulum duplicatam [d] proportionem habet ejus quam BE ad GL. est [f] igitur ut ABE trian-

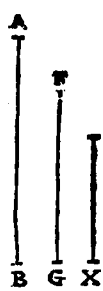


a 1. Def. hujus.
b 6. hujus.
c 4. hujus.
d 22. quinti.
e 19. hujus.
f 11 quinti.

triangulum ad triangulum FGL, ita triangulum BEC ad GLH triangulum. rursus quoniam simile est triangulum EBC triangulo LGH, habebit EBC triangulum ad triangulum LGH duplicatam proportionem *e* ejus quam recta linea CE habet ad rectam HL. eadem ratione & ECD triangulum ad triangulum LHK duplicatam proportionem habet ejus quam CE ad HL. est *f* igitur ut triangulum BEC ad triangulum LGH, ita CED triangulum ad triangulum LHK. ostensum autem est & ut EBC triangulum ad triangulum LGH, ita triangulum ABE ad triangulum FGL. ergo ut triangulum ABE ad triangulum FGL, ita triangulum BEC ad GHL triangulum, & triangulum ECD ad ipsum LHK. & igitur ut unum antecedentium ad unum consequentium *g*, *g* 12. quinti.
sic omnia antecedentia ad omnia consequentia. ergo ut triangulum ABE ad triangulum FGL, ita ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL: sed ABE triangulum ad triangulum FGL duplicatam proportionem habet ejus quam latus homologum AB habet ad homologum latus FG, similia enim triangula in duplicata *b* sunt proportione laterum ho- *b* 19. hujus.
mologorum. ergo & ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL duplicatam proportionem habet ejus quam AB latus homologum habet ad FG homologum latus. Similia igitur polygona in similia triangula dividuntur, & numero æqualia, & homologa totis; & polygonum ad polygonum duplicatam habet proportionem ejus quam habet latus homologum ad homologum latus. Quod demonstrare oportebat.

Eodem modo & in similibus quadrilateris ostendetur ea esse in duplicata proportione laterum homologorum. ostensum autem est in triangulis.

COROLL.



1. Ergo universæ similes figuræ rectilineæ inter se sunt in duplicata proportione homologorum laterum. & si ipsis AB FG tertiam proportionalem sumamus, quæ sit X; habebit AB ad X duplicatam proportionem ejus quam habet AB ad FG. habet autem & polygonum ad polygonum, & quadrilaterum ad quadrilaterum duplicatam proportionem ejus quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc est AB ad FG. atque ostensum est hoc in triangulis.

2. Uni-

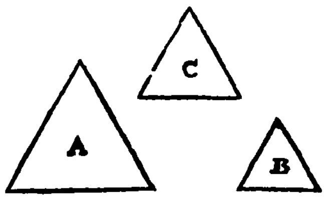
2. Universe igitur manifestum est, si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad tertiam, ita esse figuram quæ fit à prima, ad eam quæ à secunda, similem & similiter descriptam. Quod ostendere oportebat.

PROP. XXI. THEOR.

Quæ eidem rectilineo sunt similia, & inter se similia sunt.

Sit enim utrumque rectilineorum A B simile rectilineo C. Dico & rectilineum A rectilineo B simile esse. Quoniam enim simile est A rectilineum rectilineo C, & ipsi æquiangulum [a] erit, & circum æquales angulos latera habebit proportionalia. rursus quoniam simile est rectilineum B rectilineo C, æquiangulum ipsi erit, & circum æquales angulos latera proportionalia habebit [a]. utrumque igitur rectilineorum A B ipsi C æquiangulum est & circum æquales angulos latera habet proportionalia. quare & rectilineum A ipsi B est æquiangulum, lateraque circum æquales angulos proportionalia habet; ac propterea [a] A ipsi B est simile. Quod demonstrare oportebat.

a 1. Def. hujus.



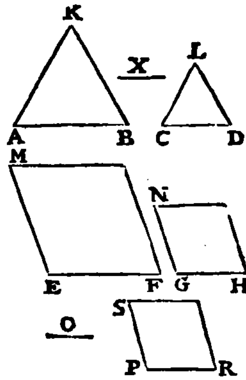
PROP. XXII. THEOR.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, & rectilinea quæ ab ipsis fiunt, similia, & similiter descripta proportionalia erunt. & si rectilinea quæ ab ipsis fiant, similia, & similiter descripta, proportionalia fuerint, & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales AB CD EF GH, & ut AB ad CD, ita sit EF ad GH. Describanturque [a] ab ipsis quidem AB CD similia, & similiter posita rectilinea KAB LCD: ab ipsis vero EF GH describantur rectilinea similia, & similiter posita MF NH. Dico ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita esse rectilineum MF ad ipsam NH rectilineum. Sumatur ipsis [b] quidem AB CD tertia proportionalis X; ipsis vero EF GH tertia proportionalis O. Et quoniam est ut AB ad CD, ita EF ad GH: ut autem CD ad X, ita GH ad O; erit ex æquali [c] ut AB ad X, ita EF ad O. sed ut AB quidem ad X, ita est [d] rectilineum KAB ad LCD rectilineum

a 18. hujus
b 11. hujus.
c 22. quinti.
d 2. Cor. 20. hujus.

lineum, ut autem EF ad O, ita [d] rectilineum MF ad rectilineum NH. ut igitur KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita est [e] rectilineum MF ad NH rectilineum. Et si sit ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita rectilineum MF ad rectilineum NH. Dico ut AB ad CD, ita esse EF ad GH. fiat enim ut AB ad CD, ita EF ad [f] PR, & describatur [a] ab ipsa PR alterutri rectilineorum MF NH simile, & similiter positum rectilineum SR. quoniam igitur est ut AB ad CD, ita EF ad PR, & descripta sunt ab ipsis quidem AB CD similia, & similiter posita KAB LCD rectilinea, ab ipsis vero EF PR similia & similiter posita rectilinea MF SR, erit [g] ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita rectilineum MF ad SR rectilineum: ponitur autem & ut rectilineum KAB ad rectilineum LCD, ita MF rectilineum ad rectilineum NH. ergo ut rectilineum MF ad rectilineum NH, ita MF rectilineum ad rectilineum SR. quod cum rectilineum MF ad utrumque ipsorum NH SR eandem habeat proportionem, erit [h] rectilineum NH ipsi SR æquale. est autem ipsi simile, & similiter positum. ergo GH est æqualis PR. & quoniam ut AB ad CD, ita est EF ad PR: æqualis autem PR ipsi GH; erit ut AB ad CD, ita EF ad GH. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, & rectilinea quæ ab ipsis fiunt, similia, & similiter descripta proportionalia erunt: & si rectilinea quæ ab ipsis fiunt, similia, & similiter descripta proportionalia fuerint, & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt. Quod oportebat demonstrare.



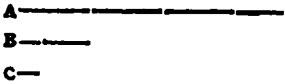
[e] 11. quinti.
[f] 12. hujus.
[g] ex prius demonstratis.
[h] 9. quinti.

LEMMA.

Positis tribus rectis quibuscunque A, B *&* C; *ratio prima* A *ad tertiam* C, *æqualis est rationi composita ex ratione prima* A *ad secundam* B, *&* *ratione secunda* B *ad tertiam* C.

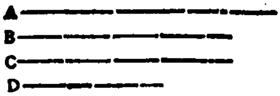
Sit V. G. *numerus ternarius exponens seu denominator rationis* A *ad* B, *hoc est sit* A *tripla ipsius* B, *&* *sit numerus quaternarius exponens rationis* B *ad* C, *erit numerus duodenarius ex numeri ternarii &* *quaternarii multiplicatione compo-*

compositus exponens rationis A *ad* C; *nam quia* A *continet* B *ter*, & B *continet* C *quater*, *continebit* A *ipsum* C *ter quater*, *seu duodecies. idem de aliis multiplicibus vel submultiplicibus verum est. Universalis vero hujus Theorematis demonstratio talis est; Quantitas rationis* A *ad* B *est numerus* $\frac{A}{B}$, *scil. qui multiplicans consequentem producit antecedentem. Et similiter quantitas rationis* B *ad* C *est* $\frac{B}{C}$ *Atque hæ duæ quantitates inter se multiplicatæ efficiunt numerum* $\frac{A \times B}{B \times C}$ *qui est quantitas rationis quam rectangulum comprehensum sub rectis* A & B *habet ad rectangulum sub* B & C *rectis. Adeoque dicta ratio rectanguli sub* A & B, *ad rectangulum sub* B & C *ea est quæ in sensu def.* 5. *hujus, componitur ex rationibus* A *ad* B & B *ad* C. *sed per* 1. 6. *rectangulum sub* A & B, *est ad rectangulum sub* B & C, *ut* A *ad* C. & *igitur ratio* A *ad* C *æqualis est rationi compositæ ex rationibus* A *ad* B, & B *ad* C.



Positis vero quatuor rectis quibuscunque A, B, C, & D; *Ratio primæ* A *ad quartam* D *æqualis est rationi compositæ ex ratione primæ* A *ad secundam* B, & *ratione secundæ* B *ad tertiam* C, & *ratione tertiæ* C *ad quartam* D.

Nam in tribus rectis A, C, & D, *ratio* A *ad* D *æqualis est rationi compositæ ex rationibus* A *ad* C, & C *ad* D. *Et hactenus est ostensum rationem* A *ad* C *æqualem esse rationi compositæ ex rationibus* A *ad* B & B *ad* C. *Et igitur ratio* A *ad* D *æqualis est rationi compositæ ex rationibus* A *ad* B, B *ad* C & C *ad* D. *Similiter ostendetur, in quotcunque rectis, rationem primæ ad ultimam æqualem esse rationi compositæ ex rationibus primæ ad secundam, secundæ ad tritiam, tertiæ ad quartam, & ita deinceps usque ad ultimam.*



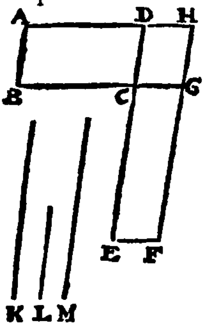
Si exponantur aliæ magnitudines quælibet, præter rectas, idem obtinebit. Quod constabit si concipiantur tot rectæ A, B, C &c. *ordine positæ quot sunt magnitudines, & in eadem ratione: ita* viz. *ut recta* A *sit ad rectam* B *ut prima magnitudo ad secundam, & recta* B *ad rectam* C *ut secunda magnitudo ad tertiam, & ita porro. Manifestum est per* 22. 5. *esse ex æquo rectam* A *ad ultimam rectam sicut prima magnitudo ad ultimam. Sed ratio rectæ* A *ad ultimam rectam æqualis est rationi compositæ ex rationibus* A *ad* B, B *ad* C, & *ita*

ita porro usque ad ultimam rectam. Et, ex hypothesi, ratio cujuslibet rectæ ad sibi proximam, eadem est cum ratione magnitudinis ejusdem ordinis ad sibi proximam. Et igitur ratio primæ magnitudinis ad ultimam, æqualis est rationi compositæ ex rationibus primæ magnitudinis ad secundam, secundæ ad tertiam, & ita deinceps usque ad ultimam. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXIII. THEOR.

Æquiangula parallelogramma inter se proportionem habent ex lateribus compositam.

Sint æquiangula parallelogramma AC CF æqualem habentia BCD angulum angulo ECG. Dico parallelogrammum AC ad parallelogrammum CF proportionem habere compositam ex lateribus, videlicet compositam ex proportione quam habet BC ad CG, & ex proportione quam DC habet ad CE. Ponatur enim ut BC sit in directum ipsi CG. ergo & DC ipsi CE in directum [a] erit: & compleatur DG parallelogrammum: exponaturque recta linea quædam K, & fiat ut BC ad CG, ita [b] K ad L, ut autem DC ad CE, ita L ad M. proportiones igitur ipsius K ad L, & L ad M eædem sunt quæ proportiones laterum videlicet BC ad CG, & DC ad CE. sed proportio K ad M composita est [c] ex proportione K ad L, & proportione L ad M. quare & K ad M proportionem habet ex lateribus compositam.



a 14. primi.

b 12. hujus.

c per Lemma superius.

& quoniam est ut BC ad CG [d], ita AC parallelogrammum ad parallelogrammum CH; sed ut BC ad CG, ita K ad L: erit [e] ut K ad L, ita parallelogrammum AC ad CH parallelogrammum. rursus quoniam est ut DC ad CE, ita CH parallelogrammum ad parallelogrammum CF: ut autem DC ad CE, ita L ad M. ergo ut L ad M, ita erit [e] parallelogrammum CH ad CF parallelogrammum. itaque cum ostensum sit ut K quidem ad L ita AC parallelogrammum ad parallelogrammum CH: ut autem L ad M, ita parallelogrammum CH ad CF parallelogrammum; erit [f] ex æquali ut K ad M, ita AC parallelogrammum ad ipsum CF. habet autem K ad M proportionem ex lateribus compositam. ergo & AC parallelogrammum ad parallelogrammum CF proportionem habebit compositam ex lateribus. Æquiangula igitur parallelogramma

d 1. hujus.

e 11. quinti.

f 22. quinti.

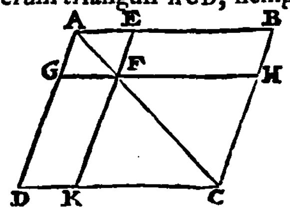
K

lelogramma inter se proportionem habent ex lateribus compositam. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXIV. THEOR.

Omnis parallelogrammi, quæ circa diametrum sunt parallelogramma, & toti, & inter se similia sunt.

Sit parallelogrammum ABCD, cujus diameter AC: circa diametrum vero AC parallelogramma sint EG HK. Dico parallelogramma EG HK & toti ABCD, & inter se similia esse. Quoniam enim uni laterum trianguli ABC, videlicet ipsi BC parallela ducta est EF, erit [a] ut BE ad EA, ita CF ad FA. quoniam rursus uni laterum trianguli ACD, nempe ipsi CD ducta est parallela



a 2. hujus. FG, ut CF ad FA, ita [a] erit DG ad GA. sed ut CF ad FA ita ostensa est & BE ad EA. ergo & ut BE ad

b 11 quinti. EA, ita [b] DG ad GA, com-

c 18. quinti. ponendoque [c] ut BA ad AE, ita DA ad AG. & permutando ut BA ad AD, ita EA ad AG. parallelogrammorum igitur ABCD & EG latera, quæ circa communem angulum BAD, proportionalia sunt. & quoniam parallela est GF ipsi

d 29. primi. DC, angulus quidem AGF est [d] æqualis angulo ADC, angulus vero GFA æqualis angulo DCA, & angulus DAC est communis duobus triangulis ADC AGF; erit igitur triangulum ADC triangulo AGF æquiangulum. eadem ratione & triangulum ACB æquiangulum est triangulo AFE. totum igitur parallelogrammum ABCD parallelogrammo EG est æ-

e 4. hujus. quiangulum. ergo ut AD ad DC, ita [e] AG ad GF, ut autem DC ad CA, ita GF ad FA, & ut AC ad CB, ita AF ad FE, & præterea ut CB ad BA, ita FE ad EA. itaque quoniam ostensum est ut DC ad CA, ita esse GF ad FA, ut autem

f 22. quinti. AC ad CB, ita AF ad FE; erit [f] ex æquali ut DC ad CB, ita GF ad FE. ergo parallelogrammorum ABCD & EG proportionalia sunt latera quæ circum æquales angulos, ac propte-

g 1. Def. hujus. rea [g] parallelogrammum ABCD parallelogrammo EG est simile. eadem ratione, & parallelogrammum ABCD simile est parallelogrammo KH. utrumque igitur ipsorum EG HK parallelogrammorum, parallelogrammo ABCD est simile. quæ autem eidem rectilineo sunt similia, & inter se similia

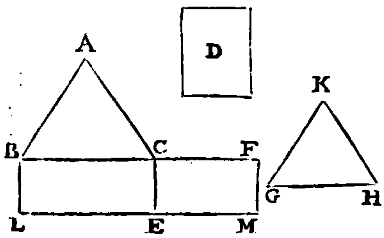
h 21. hujus. [h] sunt. parallelogrammum igitur EG simile est parallelogrammo HK. Quare omnis parallelogrammi, quæ circa diametrum

metrum sunt parallelogramma, & toti, & inter se sunt similia. Quod ostendere oportebat.

PROP. XXV. PROBL.

Dato rectilineo, simile, & alteri dato æquale idem constituere.

Sit datum quidem rectilineum cui oportet simile constituere ABC, cui autem æquale sit D. Oportet ipsi ABC simile, & ipsi D æquale idem constituere. Applicetur[a] ad rectam quidem lineam BC rectilineo ABC æquale parallelogrammum BE. ad rectam vero CE applicetur[b] parallelogrammum CM æquale ipsi D, in angulo FCE, qui CBL angulo est æqualis. in directum igitur[c] est BC ipsi CF, & LE ipsi EM. sumantur[d] inter BC CF media proportionalis GH, &[e] ab ipsa GH describatur rectilineum KGH simile & similiter positum rectilineo ABC. Et quoniam est ut BC ad GH, ita GH ad CF, si autem tres rectæ lineæ proportionales sint, ut prima ad tertiam[f], ita est figura quæ sit à prima, ad eam quæ à secunda, similem & similiter descriptam: erit ut BC ad CF. ita ABC rectilineum ad rectilineum KGH. sed & ut BC ad CF, ita[g] parallelogrammum BE ad EF parallelogrammum, ut[h] igitur rectilineum ABC ad rectilineum KGH, ita BE parallelogrammum ad parallelogrammum EF. quare[i] permutando ut ABC rectilineum ad parallelogrammum BE, ita rectilineum KGH ad FE parallelogrammum. est autem rectilineum ABC æquale parallelogrammo BE. æquale igitur est & KGH rectilineum parallelogrammo EF. sed EF parallelogrammum æquale est rectilineo D. ergo & rectilineum KGH ipsi D est æquale: est autem GKH simile rectilineo ABC. Dato igitur rectilineo ABC simile, & alteri dato D æquale idem constitutum est KGH. Quod facere oportebat.

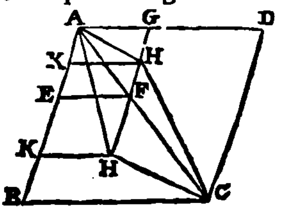


a 44. primi.
b 45. primi.
c 14. primi.
d 13. hujus.
e 18. hujus.
f 2. Cor. 20. hujus.
g 1. hujus.
h 11. quinti.
i 16. quinti.

PROP. XXVI. THEOR.

Si à parallelogrammo parallelogrammum auferatur simile toti, & similiter positum, communem ipsi angulum habens, circa eandem diametrum est toti.

A parallelogrammo enim ABCD parallelogrammum AF auferatur, simile ipsi ABCD, & similiter positum communem ipsi angulum habens DAB. Dico parallelogrammum ABCD circa eandem esse diametrum parallelogrammo AF. Non enim, sed si fieri potest, sit parallelogrammi BD diameter AHC, & producatur GF usque ad H; ducaturque per H alterutri ipsarum AD BC parallela HK. Quoniam igitur circa eandem diametrum est ABCD parallelogrammum parallelogrammo KG; & erit [a] parallelogrammum ABCD parallelogrammo KG simile. ergo ut [b] DA ad AB, ita GA ad AK. est autem & propter similitudinem parallelogrammorum ABCD EG, ut DA ad AB, ita GA ad AE. & [c] igitur ut GA ad AE, ita GA ad AK. quòd cum GA ad utramque ipsarum AK AE eandem proportionem habeat; erit [d] AE ipsi AK æqualis, minor majori, quod fieri non potest. non igitur circa eandem diametrum est ABCD parallelogrammum parallelogrammo AH. quare circa eandem diametrum erit ipsi AF. Si igitur à parallelogrammo parallelogrammum auferatur simile toti, & similiter positum, communem ipsi angulum habens, circa eandem diametrum est toti. Quod demonstrare oportebat.



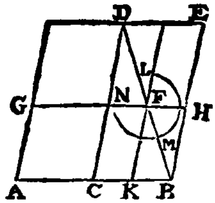
[a] 24. hujus
[b] 1. Def. hujus.
[c] 11. quinti.
[d] 9. quinti.

PROP. XXVII. THEOR.

Omnium parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis, similibus & similiter positis ei quæ à dimidia describitur, maximum est quod ad dimidiam est applicatum, simile existens defectui.

Sit recta linea AB; seceturque bifariam in C; & ad AB rectam lineam applicetur parallelogrammum AD deficiens figura parallelogramma CE, simili & similiter posita ei quæ à dimidia ipsius AB descripta est. Dico omnium paralle-

parallelogrammorum ad rectam lineam AB applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis ſimilibus, & ſimiliter poſitis ipſi CE, maximum eſſe AD. Applicetur enim ad rectam lineam AB parallelogrammum AF, deficiens figura parallelogramma HK ſimili, & ſimiliter poſita ipſi CE. Dico AD parallelogrammum parallelogrammo AF majus eſſe.



Quoniam enim ſimile eſt parallelogrammum CE parallelogrammo HK, circa eandem diametrum [a] ſunt. ducatur eorum diameter DB, & deſcribatur figura. quoniam igitur CF [b] eſt æquale ipſi FE, commune apponatur HK. totum igitur CH toti KE eſt æquale. ſed CH eſt [c] æquale GC, quoniam & recta linea AC ipſi CB. ergo & GC ipſi EK æquale eſt. commune apponatur CF. totum igitur AF eſt æquale gnomoni LMN: quare & CE, hoc eſt AD parallelogrammum parallelogrammo AF eſt majus. Omnium igitur parallelogrammorum ſecundum eandem rectam lineam applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis ſimilibus, & ſimiliter poſitis ei quæ à dimidia deſcribitur, maximum eſt quod ad dimidiam eſt applicatum. Quod demonſtrare oportebat..

[a] 26. hujus. [b] 43. primi. [c] 36. primi.

PROP. XXVIII. PROBL.

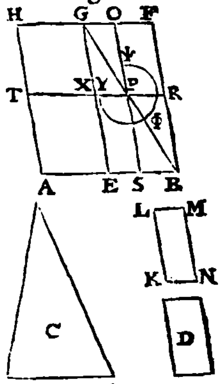
Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma quæ ſimilis ſit alteri datæ: oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum eſt, non majus eſſe eo quod ad dimidiam applicatur, ſimilibus exiſtentibus defectibus, & eo quod à dimidia, & eo cui oportet ſimile deficere.

Sit data quidem recta linea AB: datum autem rectilineum, cui oportet æquale ad datam rectam lineam AB applicare, ſit C, non majus exiſtens eo quod ad dimidiam applicatum eſt, ſimilibus exiſtentibus defectibus: cui autem oportet ſimile deficere ſit D. Oportet ad datam rectam lineam AB, dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, quæ ſimilis ſit ipſi D. Secetur AB bifariam in E, & ab ipſa EB deſcribatur [a] ſimile, & ſimiliter poſitum ipſi D; quod ſit EBFG, & compleatur AG parallelogrammum. itaque AG vel æquale eſt ipſi C, vel eo

[a] 18. hujus.

 majus,

majus, ob determinationem: & si quidem AG sit æquale C, factum jam erit quod proponebatur: etenim ad rectam lineam AB dato rectilineo C æquale parallelogrammum AG applicatum est, deficiens figura parallelogramma EF ipsi D simili. si autem non est æquale, erit HE majus quàm C; atque EF æquale est HE. ergo, & EF quàm C est majus. quo autem EF superat C, ei excessui æquale, ipsi vero D simile & similiter positum, idem[a] constituatur KLMN. sed D est simile EF. quare & KM ipsi EF simile erit. sit igitur recta linea KL homologa ipsi GE, LM vero ipsi GF. & quoniam æquale est EF ipsis C & KM, erit EF ipso KM majus. major[b] igitur est recta linea GE ipsa KL & GF ipsa LM. ponatur GX æqualis KL, & GO æqualis LM, & compleatur XGOP parallelogrammum. æquale igitur est & simile XO ipsi KM. sed KM simile est EF. ergo &[c] XO ipsi EF est simile. circa eandem igitur est[d] diametrum XO ipsi EF. sit ipsorum diameter GPB & figura describatur. itaque quoniam EF est æquale ipsis C & KM simul, quorum XO est æquale KM, erit reliquus ΥΦΨ gnomon æqualis reliquo C. & quoniam OR est[e] æquale XS, commune apponatur SR. totum igitur OB toti XB est æquale. sed XB est[f] æquale TE, quoniam & latus AE lateri EB. quare & TE ipsi OB æquale. commune apponatur XS. ergo totum TS est æquale toti gnomoni ΥΦΨ. at ΥΦΨ gnomon ipsi C ostensus est æqualis: & TS igitur ipsi C æquale erit. Quare ad datam rectam lineam AB, dato rectilineo C, æquale parallelogrammum TS applicatum est, deficiens figura parallelogramma SR ipsi D simili, quoniam & SR simile est ipsi GB. Quod facere oportebat.



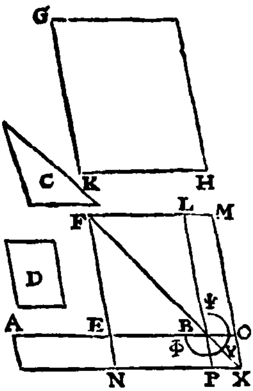
a 25. hujus.
b Cor. 20. hujus.
c 21. hujus.
d 26. hujus.
e 43. primi.
f 36. primi.

PROP. XXIX. PROBL.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri datæ.

Sit data recta linea AB, datum vero rectilineum, cui oportet æquale ad ipsam AB applicare, sit C; cui autem oportet simile excedere D. Oportet ad rectam lineam dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicare, excedens figura

figura parallelogramma simili D. Secetur AB bifariam in E, atque ex EB ipsi D simile, & similiter [a] positum parallelogrammum describatur EL. & utriusque quidem EL & C æquale, ipsi vero D simile, & similiter positum idem [b] constituatur GH. simile igitur est GH ipsi EL. sitque KH quidem latus homologum lateri FL, KG vero ipsi FE. & quoniam parallelogrammum GH majus est ipso EL, erit recta linea KH major quàm FL, & KG major quàm FE. producantur FL FE, & ipsi quidem KH æqualis sit FLM, ipsi vero KG æquails FEN, & compleatur MN parallelogrammum. ergo MN æquale est & simile ipsi GH. sed GH est simile EL; MN igitur ipsi EL simile [c] erit; ac propterea circa eandem diametrum [d] est EL ipsi MN. ducatur ipsorum diameter FX, & figura describatur. itaque quoniam GH ipsi EL & C est æquale, sed GH est æquale MN; erit & MN æquale ipsi EL & C. commune auferatur EL. reliquus igitur ΦΥΨ gnomon ipsi C est æqualis. sed quoniam AE est æqualis EB, æquale [e] erit & AN parallelogrammum parallelogrammo EP, hoc est ipsi [f] LO. commune apponatur EX. totum igitur AX æquale est gnomoni ΦΥΨ. sed ΦΥΨ gnomon est æqualis C. ergo & AX ipsi C erit æquale. Ad datam igitur rectam lineam AB dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicatum est AX, excedens figura parallelogramma PO, ipsi D simili, quoniam & ipsi EL simile [g] est OP. Quod fecisse oportebat.



a 18. hujus.
b 25. hujus.
c 21. hujus.
d 26. hujus.
e 36. primi.
f 43. primi.
g 24. hujus.

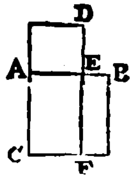
PROP. XXX. PROBL.

Datam rectam lineam terminatam extrema ac media ratione secare.

Sit data recta linea terminata AB oportet ipsum AB extrema ac media ratione secare. Describatur [a] ex AB quadratum BC, & ad AC ipsi BC æquale parallelogrammum [b] applicetur CD, excedens [b] figura AD ipsi BC simili. quadratum autem est BC, ergo & AD quadratum erit. & quoniam BC est æquale CD; commune auferatur CE. reliquum igitur BF reliquo AD est æquale. est autem & ipsi æquiangulum. ergo ipsorum BF AD latera, quæ circum æquales

a 46. primi.
b 29. hujus.

c 14. hujus. angulos, reciproce sunt c proportionalia. ut igitur FE ad ED, ita est AB ad EB. est
d 34. primi. autem FE æqualis d AC, hoc est ipsi AB; & ED ipsi AE. quare ut BA ad AE, ita AE ad EB. sed AB major est quam AE. ergo AE quam
e 14. quinti. EB est e major. recta igitur linea AB extrema, ac media ratione secta est in E. & majus ipsius segmentum est AE. Quod facere oportebat.

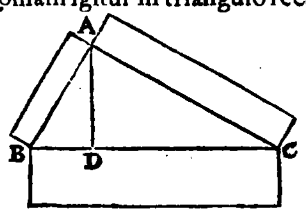


Aliter. Sit data recta linea AB. Oportet ipsam AB extrema ac media ratione secare. Secetur enim AB in C, ita ut
f 11. secundi. rectangulum f quod continetur sub AB BC æquale sit quadrato ex AC. Quoniam igitur rectangulum sub AB BC æ-
g 17. hujus. quale est quadrato ex AC, erit g ut BA ad AC ita AC ad CB. ergo AB recta linea extrema ac media ratione secta est. Quod facere oportebat.

PROP. XXXI. THEOR.

In rectangulis triangulis figura quæ fit à latere rectum angulum subtendente, æqualis est eis quæ à lateribus rectum angulum contentibus fiunt, similibus, & similiter descriptis.

Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens angulum BAC. Dico figuram, quæ fit ex BC æqualem esse eis quæ ex BA AC fiunt similibus, & similiter descriptis. Ducatur perpendicularis AD. Quoniam igitur in triangulo rectangulo ACB ab angulo recto, qui est ad A, ad BC basim perpendicularis ducta
a 8. hujus. est AD, erunt a triangula ABD ADC quæ sunt ad perpendicularem similia toti ABC, & inter se. & quoniam simile est ABC triangulum triangulo ABD, erit ut a CB ad BA, ita BA ad BD. quod cum tres rectæ lineæ proportionales sint, ut prima
b 2. Cor. 20. hujus. ad tertiam, ita erit b figura quæ fit ex prima ad eam quæ ex secunda, similem, & similiter descriptam. ut igitur CB ad BD, ita figura quæ fit ex CB ad eam quæ ex BA, similem & similiter descriptam. eadem ratione, & ut BC ad CD, ita figura quæ fit ex BC ad eam quæ ex CA. quare & ut BC ad ipsas,

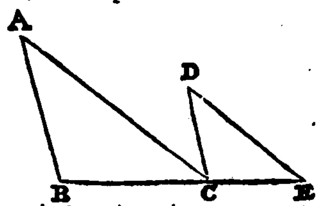


ipſas BD DC, ita [c] figura quæ ex BC ad eas quæ ex BA AC, ſimiles, & ſimiliter deſcriptas. æqualis autem eſt BC ipſis BD DC. ergo figura quæ fit ex BC æqualis eſt eis quæ ex BA AC fiunt, ſimilibus, & ſimiliter deſcriptis. In rectangulis igitur triangulis, figura quæ fit à latere rectum angulum ſubtendente, æqualis eſt eis quæ à lateribus rectum angulum continentibus fiunt, ſimilibus, & ſimiliter deſcriptis. Quod oſtendere oportebat. [c] 24. quinti.

PROP. XXXII. THEOR.

Si duo triangula componantur ad unum angulum, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ita ut homologa latera ipſorum etiam ſint parallela, reliqua triangulorum latera in directum ſibi ipſis conſtituta erunt.

Sint duo triangula ABC DCE quæ duo latera BA AC duobus lateribus CD DE proportionalia habeant, ſcil. ſit ſicut BA ad AC, ita CD ad DE; parallela autem ſit AB ipſi DC & AC ipſi DE. Dico BC ipſi CE in directum eſſe. Quoniam enim AB parallela eſt DC, & in ipſas incidit recta linea AC; erunt [a] anguli alterni BAC ACD æquales inter ſe. eadem ratione, & angulus CDE æqualis eſt angulo ACD. quare & BAC ipſi CDE eſt æqualis. & quoniam duo triangula ſunt ABC DCE, unum angulum ad A, uni angulo ad D æqualem habentia, circum æquales autem angulos latera proportionalia, quod ſit ut BA ad AC, ita CD ad DE; erit [b] triangulum ABC triangulo DCE æquiangulum. ergo ABC angulus eſt æqualis angulo DCE. oſtenſus autem eſt & angulus ACD æqualis angulo BAC. totus igitur ACE duobus ABC BAC eſt æqualis. communis apponatur ACB. ergo anguli ACE ACB angulis BAC ACB CBA æquales ſunt. ſed BAC ACB CBA anguli duobus rectis [c] ſunt æquales. & anguli igitur ACE ACB duobus rectis æquales erunt. itaque ad quandam rectam lineam AC, & ad punctum in ipſa C, duæ rectæ lineæ BC CE non ad eaſdem partes poſitæ, angulos qui deinceps ſunt ACE ACB duobus rectis æquales efficiunt. ergo BC ipſi CE in directum [d] erit. Si igitur duo triangula componantur ad unum angulum quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant



[a] 29. primi.
[b] 6. hujus.
[c] 32. primi.
[d] 14. primi.

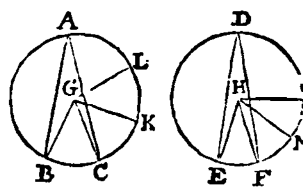
beant

beant, ita ut homologa latera ipsorum etiam sunt parallela; reliqua triangulorum latera in directum sibi ipsis constituta erunt. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXXIII. THEOR.

In circulis æqualibus anguli eandem habent proportionem, quam circumferentiæ quibus insistunt, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant: adhuc autem & sectores, quippe qui ad centra sunt constituti.

Sint æquales circuli ABC DEF; & ad centra quidem ipsorum G H sint anguli BGC EHF, ad circumferentias vero anguli BAC EDF. Dico ut circumferentia BC ad EF circumferentiam, ita esse & BGC angulum ad angulum EHF, & angulum BAC ad angulum EDF: & adhuc sectorem BGC ad EHF sectorem. Ponantur enim circumferentiæ quidem BC æquales quotcunque deinceps CK KL; circumferentiæ vero EF, rursus æquales quotcunque FM MN. & jungantur GK GL, HM HN. Quoniam igitur circumferentiæ BC CK KL inter se sunt æquales, & anguli

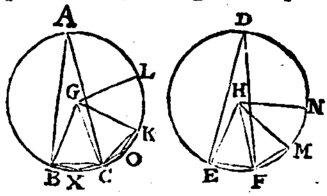


a 27. tertii. BGC CGK KGL inter se æquales [a] erunt. quotuplex igitur est circumferentia BL circumferentiæ BC, totuplex est & BGL angulus anguli BGC. eadem ratione & quotuplex est circumferentia NE circumferentiæ EF, totuplex & EHN angulus anguli EHF. si vero æqualis est BL circumferentia circumferentiæ EN; & angulus BGL angulo EHN erit æqualis; & si circumferentia BL major est circumferentia EN, major erit & BGL angulus angulo EHN; & si minor, minor. quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus nimirum circumferentiis BC EF, & duobus angulis BGC EHF; sumptæ sunt circumferentiæ quidem BC, & BGC anguli, æque multiplicia, videlicet circumferentia BL & BGL angulus; circumferentiæ vero EF, & EHF anguli, æque multiplicia, nempe circumferentia EN, & angulus EHN. atque ostensum est si circumferentia BL superat circumferentiam EN, & BGL angulum superare angulum EHN; & si æqualis, æqualem; & si minor, minorem esse. ut [b] igitur circumferentia BC ad EF circumferentiam, ita angulus BGC ad angulum EHF. sed ut BGC angulus ad angulum EHF, ita

b Def. 5. quinti.

angulus

[c] angulus BAC ad EDF angulum, uterque enim utriusque [c 15. quinti.]
est [d] duplex. & ut igitur BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita & angulus BGC ad angulum EHF, & angulus BAC ad EDF angulum. Quare in circulis æqualibus anguli eandem habent proportionem quàm circumferentiæ quibus insistunt, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant. Dico insuper & ut BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita esse sectorem GBC ad HEF sectorem. Jungantur enim BC CK, & sumptis in circumferentiis BC CK punctis XO, jungantur & BX XC CO OK. itaque quoniam duæ BG GC duabus CG GK æquales sunt, & angulos æquales continent; erit & basis BC basi CK æqualis. æquale [e] igitur est GBC triangulum triangulo GCK. & quoniam circumferentia BC circumferentiæ CK est æqualis, & reliqua circumferentia quæ complet totum circulum ABC æqualis est reliquæ quæ eundem circulum complet. quare & angulus BXC angulo COK est [f] æqualis. simile igitur est BXC segmentum [g] segmento COK: & sunt in æqualibus rectis lineis BC CK. quæ autem in æqualibus rectis lineis similia circulorum segmenta, & inter se [h] æqualia sunt. ergo segmentum BXC est æquale segmento COK. est autem & BGC triangulum triangulo CGK æquale. & totus igitur sector BGC sectori CGK æqualis erit. Eadem ratione & GKL sector utrique ipsorum GBC GCK est æqualis. tres igitur sectores BGC CGK KGL æquales sunt inter se. similiter & sectores HEF HFM HMN inter se sunt æquales. quotuplex igitur est LB circumferentia circumferentiæ BC, totuplex est & GBL sector sectoris GBC. eadem ratione & quotuplex est circumferentia NE circumferentiæ EF, totuplex est & HEN sector sectoris HEF. Sed si circumferentia BL circumferentiæ EN est æqualis, & sector BGL æqualis est sectori EHN; & si circumferentia BL superat circumferentiam EN, superat & BGL sector sectorem EHN; & si minor, minor. quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus quidem BC EF circumferentiis, duobus vero sectoribus GBC EHF, sumpta, sunt æque multiplicia circumferentiæ quidem BC & GBC sectoris, circumferentia BL, & GBL sector. circumferentiæ vero EF, & sectoris HEF, æque multiplicia, circumferentia EN, & HEN sector, atque ostensum est si BL circumferentia superat circumferentiam EN, & sectorem BGL superare sectorem EHN; & si æqualis, æqualem esse; & si minor, minorem.



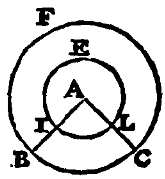
[e 4. primi.] [f 27. tertii.] [g 11. Def. tertii.] [h 24. tertii.]

b Def. 5. quinti. minorem. est [b] igitur ut BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita sector GBC ad HEF sectorem. Quod ostendere oportebat.

COROLL.

1. Angulus ad centrum est ad quatuor rectos, ut arcus cui insistit ad totam circumferentiam: nam ut angulus BAC ad rectum, ita BC arcus ad circuli quadrantem; quare quadruplicando consequentes, erit angulus BAC ad quatuor rectos, ut arcus BC ad totam circumferentiam.

2. Inæqualium circulorum arcus IL BC qui æquales subtendunt angulos, sive ad centra, sive ad peripherias, sunt similes. Nam est IL ad totam peripheriam ILE, ut angulus IAL ad quatuor rectos: est vero ut IAL seu BAC ad quatuor rectos, ita arcus BC ad totam peripheriam BCF. quare ut IL ad totam peripheriam ILE, ita BC ad totam peripheriam BCF. ac proinde arcus IL BC sunt similes.



3. Duæ semidiametri AB AC à concentricis peripheriis arcus auferunt similes IL BC.

EUCLIDIS

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER UNDECIMUS.

DEFINITIONES.

I.

SOlidum eſt, quod longitudinem, latitudinem & craſſitudinem habet.

II.

Solidi terminus eſt ſuperficies.

III.

Recta linea ad planum recta eſt, quando ad omnes rectas lineas quæ ipſam contingunt, & in ſubjecto ſunt plano, rectos angulos efficit.

IV.

Planum ad Planum rectum eſt, cum rectæ lineæ quæ communi planorum ſectioni ad rectos angulos in uno plano ducuntur, alteri plano ad rectos ſunt angulos.

V.

Rectæ lineæ ad planum inclinatio eſt, cum à ſublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis; atque à puncto quod perpendicularis in ipſo plano effecerit, ad propoſitæ illius lineæ extremum, quod in eodem eſt plano, altera recta linea fuerit adjuncta; eſt, inquam, angulus acutus inſiſtente linea, & adjuncta comprehenſus.

VI.

VI.

Plani ad planum inclinatio eſt, angulus acutus rectis lineis contentus, quæ in utroque planorum ad idem communis ſectionis punctum ductæ, rectos cum ſectione angulos efficiunt.

VII.

Planum ad planum ſimiliter inclinari dicitur, atque alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter ſe fuerint æquales.

VIII.

Parallela plana ſunt, quæ inter ſe non conveniunt.

IX.

Similes ſolidæ figuræ ſunt, quæ ſimilibus planis continentur, multitudine æqualibus.

X

Æquales & ſimiles ſolidæ figuræ ſunt, quæ ſimilibus planis multitudine & magnitudine æqualibus continentur.

XI.

Solidus angulus eſt, plurium quàm duarum linearum quæ ſe mutuo contingunt, nec in eadem ſunt ſuperficie, ad omnes lineas inclinatio. Vel ſolidus angulus eſt, qui pluribus quàm duobus planis angulis in eodem non conſiſtentibus plano, ſed ad unum punctum conſtitutis continetur.

XII.

Pyramis eſt figura ſolida planis comprehenſa, quæ ab uno plano ad unum punctum conſtituuntur.

XIII.

Priſma eſt figura ſolida quæ planis continetur, quorum adverſa duo ſunt & æqualia & ſimilia, & parallela; alia vero parallelogramma.

XIV.

Sphæra eſt, quando ſemicirculi manente diametro, circumductus ſemicirculus in ſeipſum rurſus revolvitur unde moveri cœperat.

XV.

XV.

Axis autem ſphæræ eſt quieſcens illa recta linea, circum quam ſemicirculus convertitur.

XVI.

Centrum ſphæræ eſt idem quod & ſemicirculi.

XVII.

Diameter autem ſphæræ eſt recta quædam linea per centrum ducta, & utrinque à ſphæræ ſuperficie terminata.

XVIII.

Conus eſt, quando rectanguli trianguli manente uno latere eorum quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in ſeipſum rurſus revolvitur, unde moveri cœperat. Atque ſi quieſcens recta linea æqualis ſit reliquæ quæ circa rectum angulum continetur, orthogonius erit conus: ſi vero minor, amblygonius: ſi vero major, oxygonius.

XIX.

Axis autem coni eſt quieſcens illa linea, circa quam triangulum vertitur.

XX.

Baſis vero coni eſt circulus qui à circumducta recta linea deſcribitur.

XXI.

Cylindrus eſt, quando rectanguli parallelogrammi manente uno latere eorum quæ circa rectum angulum, circumductum parallelogrammum in ſeipſum rurſus revolvitur, unde cœperat moveri.

XXII.

Axis autem cylindri eſt quieſcens illa recta linea, circum quam parallelogrammum convertitur.

XXIII.

Baſes vero cylindri ſunt circuli à duobus adverſis lateribus, quæ circumaguntur, deſcripti.

XXIV.

Similes coni & cylindri ſunt, quorum & axes, & baſium diametri proportionales ſunt.

XXV.

Cubus eſt figura ſolida ſub ſex quadratis æqualibus contenta.

XXVI.

Tetraedrum eſt figura ſolida ſub quatuor triangulis æqualibus & æquilateris contenta.

XXVII.

Octaedrum eſt figura ſolida ſub octo triangulis æqualibus & æquilateris contenta.

XXVIII.

Dodecaedrum eſt figura ſolida ſub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis contenta.

XXIX.

Icoſaedrum eſt figura ſolida ſub viginti triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

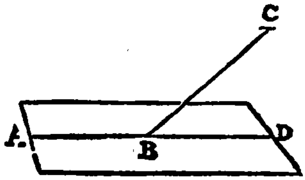
XXX.

Parallelipipedum eſt figura ſolida ſex figuris quadrilateris, quarum quæ ex adverſo parallelæ ſunt, contenta.

PROPOSITIO I. THEOREMA.

Rectæ lineæ pars quædam non eſt in ſubjecto plano, quædam vero in ſublimi.

Si enim fieri poteſt, rectæ lineæ AB pars quidem AB ſit in ſubjecto plano, pars vero BC in ſublimi. erit recta linea quædam ipſi AB in directum continuata in ſubjecto plano. ſitque DB. duabus igitur datis rectis lineis ABC ABD commune ſegmentum eſt AB, quod fieri non poteſt: recta enim linea cum recta linea non convenit in pluribus punctis, quàm uno. Non igitur rectæ lineæ pars quædam eſt in ſubjecto plano, quædam vero in ſublimi. Quod demonſtrare oportebat.

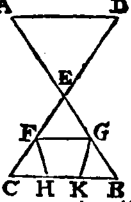


PROP.

PROP. II. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ se invicem secent, in uno sunt plano, & omne triangulum in uno plano consistit.

Duæ enim rectæ lineæ AB CD se invicem in puncto E secent. Dico ipsas AB CD in uno esse plano, & omne triangulum in uno plano consistere. Sumantur enim in ipsis EB EC quævis puncta F G; junganturque CB FG, & FH GK ducantur. Dico primum EBC triangulum consistere in uno plano. si enim trianguli EBC pars quædam FHC, vel GBK in subjecto plano est, reliqua vero in alio plano; erit & linearum EB EC pars in subjecto plano, & pars in alio. quod si trianguli ECB pars FCBG sit in subjecto plano, reliqua vero in alio, utrarumque rectarum linearum EC EB quædam pars erit in subjecto plano, quædam vero in alio. quod absurdum esse [a] ostendimus. triangulum igitur EBC in uno est plano. in quo autem plano est BCE triangulum, in hoc est utraque ipsarum EC EB: in quo autem utraque ipsarum EC EB, in hoc [a] sunt & AB CD. Ergo rectæ lineæ AB CD in uno sunt plano, & omne triangulum in uno plano consistit. Quod erat demonstrandum.

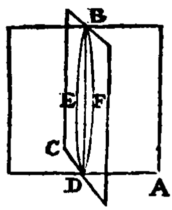


[a] 1. hujus.

PROP. III. THEOR.

Si duo plana se invicem secent, communis ipsorum sectio recta linea erit.

Duo plana AB BC se invicem secent, communis autem ipsorum sectio sit DB linea. Dico lineam DB rectam esse. Si enim non ita sit, ducatur à puncto D ad B in plano quidem AB recta linea DEB; in plano autem BC recta linea DFB. erunt utique duarum rectarum linearum DEB DFB iidem termini, & ipsæ spatium continebunt, quod est absurdum [a]. non igitur DEB DFB rectæ lineæ sunt. similiter ostendemus neque aliam quampiam, quæ à puncto D ab B ducitur rectam esse, præter ipsam DB communem scilicet planorum AB BC sectionem. Si igitur duo plana se invicem secent, communis ipsorum sectio recta linea erit. Quod ostendere oportebat.

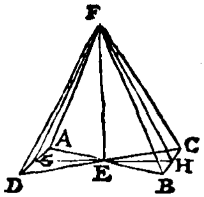


[a] Axio. 10. primi.

PROP. IV. THEOR.

Si recta linea duabus rectis lineis se invicem secantibus in communi sectione ad rectos angulos insistat, etiam ducto per ipsas plano ad rectos angulos erit.

Recta linea quædam EF duabus rectis lineis AB CD se invicem secantibus in E puncto, ab ipso E ad rectos angulos insistat. Dico EF etiam plano per AB CD ducto ad rectos angulos esse. Sumantur rectæ lineæ EA EB CE DE inter se æquales: perque E ducatur recta linea GEH utcunque: & jungantur AD CB; deinde à quovis puncto F ducantur FA FG FD FC FH FB. & quoniam duæ rectæ lineæ AE ED duabus rectis lineis CE EB æquales sunt, &



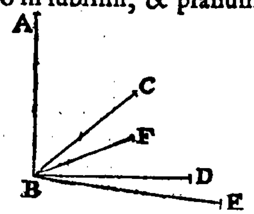
a 15.primi. angulos [a] æquales AED CEB continent, erit [b] AD basis basi
b 4. primi. CB æqualis, & triangulum AED triangulo CEB æquale. ergo & angulus DAE æqualis est angulo EBC. est autem & angulus AEG [a] æqualis angulo BEH. duo igitur triangula sunt AGE BEH, duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & unum latus AE uni lateri EB æquale quod est ad æquales angulos. quare & reliqua latera
c 26.primi. reliquis lateribus æqualia habebunt [c]. ergo GE quidem est æqualis EH; AG vero ipsi BH. quod cum AE sit æqualis EB, communis autem, & ad rectos angulos FE; erit [b] basis AF basi FB æqualis; eadem quoque ratione & CF æqualis erit FD. præterea quoniam AD est æqualis CB, & AF ipsi FB, erunt duæ FA AD duabus FB BC æquales, altera al-
d 8 primi. teri; & ostensa est basis DF æqualis basi FC. angulus [d] igitur FAD angulo FBC est æqualis. rursus ostensa est AG æqualis BH, sed & AF ipsi FB est æqualis. duæ igitur FA AG duabus FB BH æquales sunt, & angulus FAG æqualis est angulo FBH; ut demonstratum fuit, basis igitur GF basi FH est [b] æqualis. rursus quoniam GE ostensa est æqualis EH, communis autem EF; erunt duæ GE EF æquales duabus HE EF; & basis HF est æqualis basi FG. angulus [d] igitur GEF angulo HEF est æqualis, & idcirco rectus est uterque angulorum GEF HEF. ergo FE ad GH utcunque per E ductam rectos efficit angulos. similiter ostendemus FE etiam ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt, & in subjecto sunt plano, rectos angulos efficere. recta autem ad
e 3. Def. hujus. planum recta est [e] quando ad omnes rectas lineas ipsam contingentes,

tingentes, & eodem existentes plano rectos efficit angulos. quare FE subjecto plano ad rectos angulos insistit. at subjectum planum est quod per AB CD rectas lineas ducitur. ergo FE ad rectos angulos erit ducto per AB CD plano. Si igitur recta linea duabus rectis lineis se invicem secantibus in communi sectione ad rectos angulos insistat, etiam ducto per ipsas plano ad rectos angulos erit. Quod demonstrare oportebat.

PROP. V. THEOR.

Si recta linea tribus rectis lineis sese tangentibus, in communi sectione, ad rectos angulos insistat, tres illæ rectæ lineæ in uno plano erunt.

Recta linea quædam AB tribus rectis lineis BC BD BE, in contactu B, ad rectos angulos insistat. Dico BC BD BE in uno plano esse. Non enim, sed si fieri potest, sint BD BE quidem in subjecto plano; BC vero in sublimi, & planum per AB BC producatur. communem utique sectionem in subjecto plano faciet [a] rectam lineam; faciat BF. in uno igitur sunt plano per AB BC ducto, tres rectæ lineæ AB BC BF. & quoniam AB utrique ipsarum BD BE ad rectos angulos insistit, & ducto per ipsas DB BE plano [b] ad rectos angulos erit. planum autem per DB BE est subjectum planum. ergo AB ad subjectum planum recta est. quare & ad [c] omnes rectas lineas ipsam contingentes, quæ in eodem plano sunt, rectos faciet angulos; sed ipsam tangit BF in subjecto existens plano. ergo angulus ABF rectus est. ponitur autem & ABC angulus rectus. æqualis igitur est angulus ABF angulo ABC, & in eodem sunt plano; quod fieri non potest. recta igitur linea BC non est in sublimi; quare tres rectæ lineæ BC BD BE in uno sunt plano. Si igitur recta linea tribus rectis lineis sese tangentibus, in communi sectione, ad rectos angulos insistat, tres illæ rectæ lineæ in uno plano erunt. Quod demonstrare oportebat.

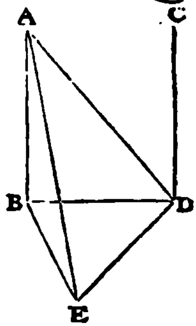


[a] 3. hujus.
[b] 4. hujus.
[c] 3. Def. hujus.

PROP. VI. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint, illæ inter sese parallelæ erunt.

Duæ enim rectæ lineæ AB CD subjecto plano sint ad rectos angulos. Dico AB ipsi CD parallelam esse. Occurrant enim subjecto plano in punctis B D, jungaturque BD recta linea, cui ad rectos angulos in subjecto plano ducatur DE, & posita DE ipsi AB æquali, jungantur BE AE AD. Quoniam igitur AB recta est ad subjectum planum, & ad omnes rectas lineas quæ ipsam contingunt, & in subjecto sunt plano, rectos angulos *a* efficiet. contingit autem AB utraque ipsarum BD BE existens in subjecto plano. ergo uterque angulorum ABD ABE rectus est. eadem ratione rectus etiam est uterque ipsorum CDB CDE. & quoniam AB æqualis est ipsi DE, communis autem BD. erunt duæ AB BD duabus ED DB æquales, & rectos angulos continent; basis igitur AD basi BE est *b* æqualis.



a 3. Def. hujus.

b 4. primi.

rursus quoniam AB est æqualis DE, & AD ipsi BE, duæ AB BE duabus ED DA æquales sunt, & basis ipsarum AE communis; ergo angulus ABE angulo EDA est *c* æqualis. sed ABE rectus est. rectus igitur & EDA; & idcirco ED ad DA est perpendicularis. sed & perpendicularis est ad utramque ipsarum BD DC. quare ED tribus rectis lineis BD DA DC in contactu ad rectos insistit angulos. tres igitur rectæ lineæ BD DA DC in uno sunt *d* plano. in quo autem sunt BD DA, in eo est AB, omne enim triangulum in uno *e* est plano. ergo AB BD DC in uno plano sint necesse est; atque est uterque angulorum ABD BDG rectus. parallela igitur *f* est AB ipsi CD. Quare si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint, illæ inter se parallelæ erunt. Q.E.D.

c 8. primi.

d 5. hujus.

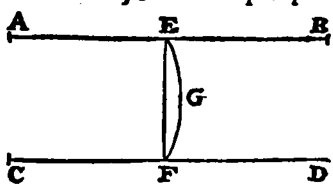
e 2. hujus.

f 28. primi.

PROP. VII. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ parallelæ sint, sumantur autem in utraque ipsarum qualibet puncta; quæ dicta puncta conjungit recta in eodem erit plano, in quo & parallelæ.

Sint duæ rectæ lineæ parallelæ AB CD, & in utraque ipsarum sumantur quælibet puncta E F. Dico rectam lineam quæ puncta E F conjungit, in eodem plano esse, in quo sunt parallelæ. Non enim, sed si fieri potest, sit in sublimi, ut EGF, & per EGF, planum ducatur quod in subjecto plano sectionem faciet *a* rectam lineam; faciat ut



a 3. hujus.

ut EF. ergo duæ rectæ lineæ EGF EF spatium continebunt, quod fieri non [b] potest. non igitur quæ à puncto E ad F ducitur recta linea in sublimi est plano, quare erit in eo quod per AE CD parallelas transit. Si igitur duæ rectæ lineæ parallelæ sint, &c. Quod oportebat demonstrare. [b] 10. axio. primi.

PROP. VIII. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ parallelæ sint, altera autem ipsarum plano alicui sit ad rectos angulos, & reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

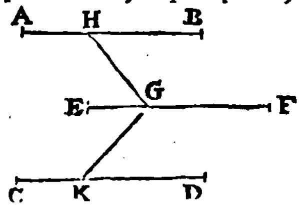
Sint duæ rectæ lineæ parallelæ AB CD, & altera ipsarum AB subjecto plano sit ad rectos angulos. Dico & reliquam CD eidem plano ad rectos angulos esse. Occurrant enim AB CD subjecto plano in punctis B D, & BD jungatur. ergo AB CD BD in uno sunt [a] plano. ducatur ipsi BD ad rectos angulos in subjecto plano DE: & ponatur DE ipsi AB æqualis: junganturque BE AE AD. & quoniam AB perpendicularis est ad subjectum planum, & ad omnes rectas lineas quæ ipsam contingunt suntque in subjecto plano, perpendicularis [b] erit. rectus igitur est uterque angulorum ABD ABE. quod cum in parallelas rectas lineas AB CD recta incidit BD, erunt anguli ABD CDB duobus rectis [c] æquales. rectus autem est ABD. ergo & CDB est rectus; ac propterea CD perpendicularis est ad BD. & quoniam AB est æqualis DE, communis autem BD, duæ AB BD duabus ED DB æquales sunt; & angulus ABD est æqualis angulo EDB, rectus enim uterque est, basis igitur AD basi BE est [d] æqualis. rursus quoniam AB æqualis est DE, & BE ipsi AD; erunt duæ AB BE duabus ED DA æquales, altera alteri; & basis earum communis AE. quare angulus ABE est [e] æqualis angulo EDA. rectus autem est ABE. ergo & EDA est rectus, & ED ad DA perpendicularis. sed & perpendicularis est ad BD. ergo ED etiam ad planum per BD DA perpendicularis [f] erit, & ad omnes rectas lineas quæ in eodem existentes plano ipsam contingunt, rectos [g] faciet angulos. at in plano per BD DA est DC, quoniam in plano per BD DA sunt [h] AB BD: in quo autem sunt AB BD in eodem [i] est ipsa DC. quare ED ipsi CD est ad rectos angulos: ideoque CD ad rectos angulos est ipsi DE; sed & etiam ipsi DB. ergo CD duabus rectis lineis DE DB se mutuo secantibus in communi sectione D ad rectos angulos insistit; ac propterea plano per DE DB est [f] ad rectos angulos. planum autem per DE DB est subjectum planum. Ergo CD subjecto plano ad rectos angulos erit. Quod demonstrare oportebat.

Vide figuram Prop. sextæ. [a] 7. hujus. [b] 3. Def. hujus. [c] 29. primi. [d] 4. primi. [e] 8. primi. [f] 4. hujus. [g] 3. Def. hujus. [h] 2. hujus. [i] 7. hujus.

PROP. IX. THEOR.

Quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, non existentes in eodem in quo ipsa plano, etiam inter se parallelæ erunt.

Sit utraque ipsarum AB CD parallela ipsi EF, non existentes in eodem, in quo ipsa plano. Dico AB ipsi CD parallelam esse. Sumatur in EF quodvis punctum G, à quo ipsi EF, in plano quidem per EF AB transeunte, ad rectos angulos ducatur GH; in plano autem transeunti per EF CD, rursus ducatur ipsi EF ad rectos angulos GK. & quoniam EF ad utramque ipsarum GH GK est perpendicularis, erit EF etiam ad rectos [a] angulos plano per GH GK transeunte. atque est EF ipsi AB parallela. ergo & AB plano per HGK ad rectos angulos [b] est. eadem ratione & CD plano per HGK est ad rectos angulos. utraque igitur ipsarum AB CD plano per HGK ad rectos angulos erit. Si autem duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint, parallelæ [c] erunt inter se. Ergo AB ipsi CD est parallela. Quod demonstrare oportebat.

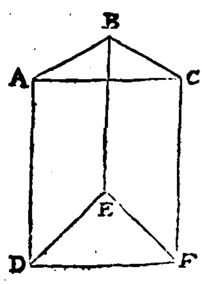


a 4. hujus.
b 8. hujus.
c 6. hujus.

PROP. X. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ sese contingentes, duabus rectis lineis sese contingentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; æquales angulos continebunt.

Duæ rectæ lineæ sese contingentes AB BC, duabus rectis lineis DE EF sese contingentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano. Dico angulum ABC angulo DEF æqualem esse. Assumantur enim BA BC ED EF inter se æquales; & jungantur AD CF BE AC DF. quoniam igitur BA ipsi ED æqualis est & parallela, erit & [a] AD æqualis & parallela ipsi BE. eadem ratione & CF ipsi BE æqualis & parallela erit. utraque igitur ipsarum AD CF ipsi BE æqualis est & parallela. quæ autem eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, non existentes in eodem plano; & in-



a 33. primi.

ter

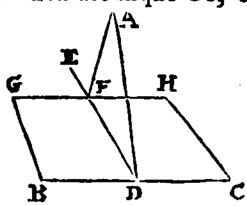
ter se parallelæ [b] erunt. ergo AD parallela est ipsi CF &[b] æqualis. atque ipsas conjungunt AC DF; & AC igitur ipsi DF æqualis est & [c] parallela. & quoniam duæ rectæ lineæ [c] AB BC duabus DE EF æquales sunt, & basis AC est æqualis basi DF; erit [d] angulus ABC angulo DEF æqualis. Si igitur [d] duæ rectæ lineæ sese contingentes, duabus rectis lineis sese contingentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; æquales angulos continebunt. Quod oportebat demonstrare.

[b] 9. hujus. [c] 33. primi. [d] 8. primi.

PROP. XI. PROBL.

A dato puncto in sublimi, ad subjectum planum, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit datum quidem punctum in sublimi A, datum autem subjectum planum BH. Oportet à puncto A ad subjectum planum perpendicularem rectam lineam ducere. In subjecto plano ducatur quædam recta linea utcunque BC, & à puncto A ad BC perpendicularis agatur [a] AD. siquidem igitur AD perpendicularis sit etiam ad subjectum planum; factum jam erit, quod proponebatur: sin minus; ducatur à puncto D ipsi BC, in subjecto plano, ad rectos [b] angulos DE: & à puncto A ad DE perpendicularis [a] ducatur AF. denique per F ducatur GH ipsi BC [c] parallela. Quoniam BC utrique ipsarum DA DE est ad rectos angulos, erit [d] & BC ad rectos angulos plano per DA DE transeunti. quin ipsi BC parallela est GH; si autem sint duæ rectæ lineæ parallelæ, quarum una plano alicui sit ad rectos angulos; & reliqua [e] eidem plano ad rectos angulos erit. quare & GH plano per ED DA transeunti ad rectos angulos est: ac propterea ad omnes rectas lineas, quæ in eodem plano existentes ipsam contingunt est [f] perpendicularis. contingit autem ipsam AF existens in plano per ED DA. ergo GH perpendicularis est ad AF. & ob id AF est perpendicularis ad GH: est autem AF ad DE perpendicularis. ergo AF perpendicularis est ad utramque ipsarum HG DE. si autem recta linea duabus rectis lineis sese contingentibus, in communi sectione, ad rectos angulos insistat, etiam plano per ipsas ducto ad rectos angulos [d] erit. quare AF plano per ED GH ducto est ad rectos angulos. planum autem per ED GH est subjectum planum. ergo AF ad subjectum planum est perpendicularis. A dato igitur puncto sublimi A, ad



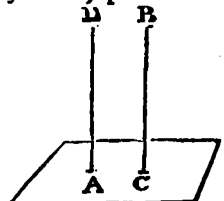
[a] 12. primi. [b] 11. primi. [c] 31. primi. [d] 4. hujus. [e] 8. hujus. [f] 3 Def. hujus.

subjectum planum, perpendicularis recta linea ducta est AF. Quod facere oportebat.

PROP. XII. PROBL.

Dato plano, à puncto quod in ipso datum est, ad rectos angulos rectam lineam constituere.

Sit datum quidem planum subjectum, punctum autem quod in ipso sit A. Oportet à puncto A subjecto plano ad rectos angulos rectam lineam constituere. Intelligatur aliquod punctum sublime B, à quo ad subjectum planum agatur [a] perpendicularis BC; & per A ipsi BC parallela [b] ducatur AD. quoniam igitur duæ rectæ lineæ parallelæ sunt AD CB, una autem ipsarum BC subjecto plano est ad rectos angulos; & reliqua [c] AD subjecto plano ad rectos angulos erit. Dato igitur plano à puncto quod in ipso est datum, ad rectos angulos recta linea constituta est. Quod facere oportebat.

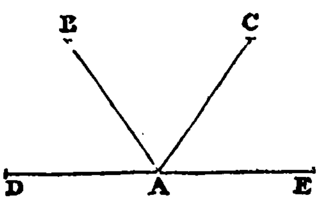


a 11. hujus.
b 31. primi
c 8. hujus.

PROP. XIII. THEOR.

Dato plano, à puncto quod in ipso est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non constituentur ex eadem parte.

Si enim fieri potest, dato plano, à puncto quod in ipso est A, duæ rectæ lineæ AB AC ad rectos angulos constituantur ex eadem parte: & ducatur planum per BA AC, quod faciet sectionem per A in subjecto plano [a] rectam lineam. faciat DAE. ergo rectæ lineæ AB AC DAE in uno sunt plano. & quoniam CA subjecto plano ad rectos angulos est, & ad [b] omnes rectas lineas, quæ in subjecto plano existentes ipsam contingunt, rectos faciet angulos. contingit autem ipsam DAE, quæ est in subjecto plano. angulus igitur CAE rectus est. eadem ratione & rectus est BAE. ergo angulus CAE ipsi BAE est æqualis. & in uno sunt plano, quod fieri non [c] potest. Non igitur dato plano, à puncto, quod in ipso est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos constituentur ex eadem parte. Quod oportebat demonstrare.



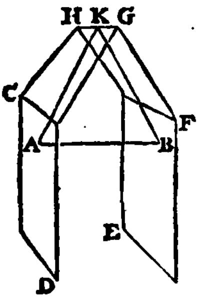
a 3. hujus.
b 3. Def. hujus.
c 9. axiom. primi.

PROP.

PROP. XIV. THEOR.

Ad quæ plana, eadem recta linea est perpendicularis, ea parallela sunt.

Recta quædam linea AB ad utrumque ipsorum planorum CD EF sit perpendicularis. Dico ea plana parallela esse. Si enim non ita sit, producta convenient inter se: conveniant, & communem sectionem faciant rectam lineam GH; & in ipsa GH sumpto quovis puncto K, jungatur AK BK. Quoniam igitur AB perpendicularis est ad EF planum; erit & perpendicularis ad ipsam BK [a] rectam lineam in plano EF producto existentem. quare angulus ABK rectus est. eadem ratione & BAK est rectus: ideoque trianguli ABK duo anguli ABK BAK duobus rectis sunt æquales, quod fieri non [b] potest. non igitur plana CD EF producta inter se convenient. quare CD EF parallela sint necesse est. Ad quæ igitur plana, eadem recta linea est perpendicularis, ea parallela sunt. Quod demonstrare oportebat.



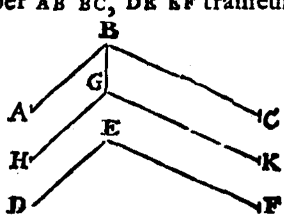
[a] 3. Def. hujus.

[b] 17. primi.

PROP. XV. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ sese tangentes duabus rectis lineis sese tangentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; & quæ per ipsas transeunt plana parallela erunt.

Duæ rectæ lineæ sese tangentes AB BC, duabus rectis lineis sese tangentibus DE EF parallelæ sint, & non in eodem plano. Dico plana quæ per AB BC, DE EF transeunt, si producantur, inter se non convenire. Ducatur à puncto B ad planum, quod per DE EF transit, perpendicularis BG, quæ plano in puncto G occurrat, & per G ducatur ipsi quidem ED parallela GH; ipsi vero EF parallela GK. itaque quoniam BG perpendicularis est ad planum per DE EF; & ad omnes rectas lineas quæ ipsam contingunt, & in eodem sunt plano, rectos faciet [a] angulos. contingit autem ipsam utraque earum GH GK, quæ sunt in eodem



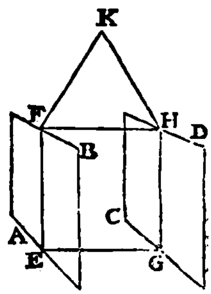
[a] 3. Def. hujus.

eodem plano. rectus igitur est uterque angulorum BGH BGK. & quoniam BA parallela est ipsi GH, anguli GBA
b 29. primi. BGH duobus rectis sunt [b] æquales. rectus autem est BGH. ergo & GBA rectus erit, ideoque GB ad BA est perpendicularis. eadem ratione & GB est perpendicularis ad BC. cum igitur recta linea BG duabus rectis lineis BA BC se invicem secantibus ad rectos angulos insistat; erit BG etiam
c 4. hujus. ad planum per BA BC ductum [c] perpendicularis. atque est ad planum per DE EF perpendicularis. ergo BG perpendicularis est ad utrumque planorum quæ per AB BC, DE EF transeunt. Ad quæ vero plana eadem recta linea est per-
d 14. hujus. pendicularis, ea parallela [d] sunt. parallelum igitur est planum per AB BC plano per DE EF. Quare si duæ rectæ lineæ sese tangentes duabus rectis lineis sese tangentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano, & quæ per ipsas transeunt plana parallela erunt. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XVI. THEOR.

Si duo plana parallela ab aliquo plano secentur, communes ipsorum sectiones parallelæ erunt.

Duo plana parallela AB CD à plano aliquo EFGH secentur; communes autem ipsorum sectiones sint EF GH. Dico EF ipsi GH parallelam esse. Si enim non est parallela, productæ EF GH inter se convenient, vel ad partes F H, vel ad partes EG. producantur prius ut ad partes F H, & conveniant in K. quoniam igitur EFK est in plano AB, & omnia quæ in EFK sumuntur puncta in eodem plano erunt: unum autem punctorum quæ sunt in EFK, est ipsum K punctum. ergo K est in plano AB. eadem ratione & K est in CD plano. ergo plana AB CD producta inter se convenient. non conveniunt autem, cum parallela ponantur. non igitur EF GH rectæ lineæ productæ convenient ad partes F H. similiter demonstrabimus neque ad partes E G convenire, si producantur. quæ autem neutra ex parte conveniunt parallelæ sunt. ergo EF ipsi GH est parallela. Si igitur duo plana parallela ab aliquo plano secentur, communes ipsorum sectiones parallelæ erunt. Quod demonstrare oportebat.

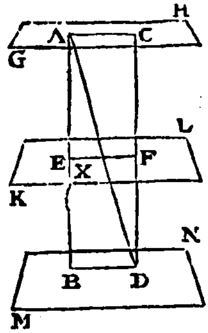


PROP.

PROP. XVII. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ à parallelis secentur planis, in easdem proportiones secabuntur.

Duæ rectæ lineæ AB CD à parallelis planis GH KL MN secentur in punctis A, E, B, C, F, D. Dico ut AE recta linea ad ipsam EB, ita esse CF ad FD. Jungantur enim AC BD AD: & occurrat AD plano KL in puncto X: & EX XF jungantur. Quoniam igitur duo plana parallela KL MN à plano EBDX secantur, communes ipsorum sectiones EX BD parallelæ [a] sunt. eadem ratione quoniam duo plana parallela GH KL à plano AXFC secantur, communes ipsorum sectiones AC FX sunt parallelæ. & quoniam uni laterum trianguli ABD, videlicet ipsi BD parallela ducta est EX, ut AE ad EB ita [b] erit AX ad XD. rursus quoniam uni laterum trianguli ADC, nempe ipsi AC parallela ducta est XF, erit ut AX ad XD [b], ita CF ad FD. ostensum autem est ut AX ad XD, ita esse AE ad EB. ut igitur AE ad EB, ita est [c] CF ad FD. Quare si duæ rectæ lineæ à parallelis secentur planis, in easdem proportiones secabuntur. Quod demonstrare oportebat.



[a] 16. hujus.

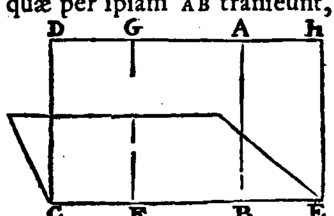
[b] 2. sexti.

[c] 11. quinti.

PROP. XVIII. THEOR.

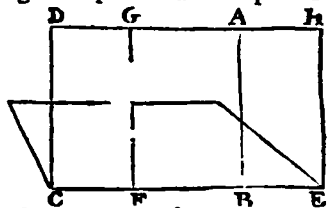
Si recta linea plano alicui sit ad rectos angulos, & omnia quæ per ipsam transeunt plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

Recta linea quædam AB subjecto plano sit ad rectos angulos. Dico & omnia plana quæ per ipsam AB transeunt, subjecto plano ad rectos angulos esse. Producatur enim per AB planum DE, sitque plani DE, & subjecti plani communis sectio CE: & sumatur in CE quodvis punctum F; à quo ipsi CE ad rectos angulos, in DE plano, ducatur FG. quoniam igitur AB ad subjectum planum est perpendicularis; & ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt & in eodem sunt plano perpendicularis [a] erit. quare etiam



[a] 3. Def. hujus.

etiam ad CE est perpendicularis. angulus igitur ABF rectus
b 28. primi. est: sed & GFB est rectus. ergo AB parallela b est ipsi FG. est autem AB subjecto plano ad rectos angulos, & FG igitur eidem plano ad rectos
c 8. hujus. angulos c erit. at planum ad planum rectum est, quando communi planorum sectioni ad rectos angulos ductæ rectæ lineæ in uno

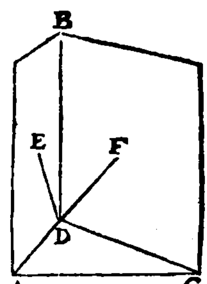


d 4. Def. hujus. planorum, reliquo plano ad rectos angulos d sunt: communi vero planorum sectioni CE in uno plano DE ad rectos angulos ducta FG, ostensa est subjecto plano ad rectos esse angulos. ergo planum DE rectum est ad subjectum planum. similiter demonstrabuntur & omnia quæ per AB transeunt plana subjecto plano recta esse. Si igitur recta linea plano alicui sit ad rectos angulos, & omnia quæ per ipsam transeunt plana eidem plano ad rectos angulos erunt. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XIX. THEOR.

Si duo plana se invicem secantia plano alicui sint ad rectos angulos; & communis ipsorum sectio eidem plano ad rectos angulos erit.

Duo plana se invicem secantia AB BC subjecto plano sint ad rectos angulos: communis autem ipsorum sectio sit BD. Dico BD subjecto plano ad rectos angulos esse. Non enim, sed si fieri potest; non sit BD ad rectos angulos subjecto plano; & à puncto D ducatur in plano quidem AB, rectæ lineæ AD ad rectos angulos ipsa DE: in plano autem BC ducatur ipsi CD ad rectos angulos DF. Et quoniam planum AB ad subjectum planum rectum est, & communi ipsorum sectioni AD ad rectos angulos in plano AB ducta est
a 4. Def. hujus. DE, erit a DE ad subjectum planum perpendicularis. similiter ostendemus & DF perpendicularem esse ad subjectum planum. quare ab eodem puncto D subjecto plano duæ rectæ lineæ ad rectos angulos constitutæ



b 13. hujus. sunt ex eadem parte, quod fieri non b potest. non igitur subjecto plano à puncto D ad rectos angulos constituentur aliæ rectæ lineæ, præter ipsam DB, communem planorum

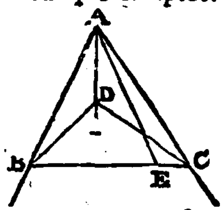
AB BC

AB BC sectionem. quare DB subjecto plano est perpendicularis. Ergo si duo plana se invicem secantia plano alicui sint ad rectos angulos; & communis ipsorum sectio eidem plano ad rectos angulos erit. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XX. THEOR.

Si solidus angulus tribus angulis planis contineatur, duo quilibet reliquo majores sunt, quomodocunque sumpti.

Solidus angulus ad A tribus angulis planis BAC CAD DAB contineatur. Dico angulorum BAC CAD DAB duos quoslibet reliquo majores esse, quomodocunque sumptos. Si enim BAC CAD DAB anguli inter se æquales sint, perspicuum est duos quoslibet reliquo majores esse, quomodocunque sumptos. sin minus, sit major BAC. & ad rectam lineam AB, & ad punctum in ipsa A, constituatur [a] angulo DAB, in plano per BA AC transeunte, æqualis angulus BAE; ponaturque ipsi AD æqualis AE; & per E ducta BEC secet rectas lineas AB AC in punctis BC, & DB DC jungantur. itaque quoniam DA est æqualis AE, communis autem AB, duæ DA AB æquales sunt duabus AE AB; & angulus DAB æqualis est angulo BAE. basis igitur DB basi BE est [b] æqualis. & quoniam duæ DB DC ipsa BC majores [b] sunt [c], quarum DB æqualis ostensa est ipsi BE; erit reliqua DC quam reliqua EC major. quòd cum DA sit æqualis AE, communis autem AC & basis DC major basi EC; erit [d] angulus DAC angulo EAC major. sed ex constructione est DAB angulus æqualis ipsi BAE. quare DAB DAC anguli, angulo BAC majores sunt. similiter demonstrabimus, & si duo quilibet alii sumantur, eos reliquo esse majores. Si igitur solidus angulus tribus angulis planis contineatur; duo quilibet reliquo majores sunt, quomodocunque sumpti. Quod demonstrare oportebat.



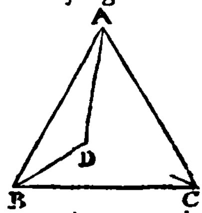
[a] 23. primi.
[b] 4. primi.
[c] 20. primi.
[d] 25. primi.

PROP. XXI. THEOR.

Omnis solidus angulus, minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur.

Sit solidus angulus ad A, planis angulis BAC CAD DAB con-

contentus. Dico angulos BAC CAD DAB quatuor rectis esse minores. Sumantur enim in unaquaque ipsarum AB AC AD quævis puncta B C D, & BC CD DB jungantur. Quoniam igitur solidus angulus ad B, tribus angulis planis continetur CBA ABD CBD, duo



a 20. hujus. quilibet reliquo majores[a] sunt: anguli igitur CBA ABD, angulo CBD sunt majores. eadem ratione, & anguli quidem BCA ACD majores sunt angulo BCD; anguli vero CDA ADB majores angulo CDB. quare sex anguli CBA ABD BCA ACD CDA ADB tribus angulis CBD BCD CDB sunt majores. sed tres anguli CBD

b 32. primi. BDC DCB sunt[b] æquales duobus rectis. sex igitur anguli CBA ABD BCA ACD CDA ADB duobus rectis majores sunt. quod cum singulorum triangulorum ABC ACD ADB tres anguli sint æquales duobus rectis, erunt trium triangulorum novem anguli CBA ACB BAC ACD DAC CDA ADB DBA BAD æquales sex rectis. quorum sex anguli ABC BCA ACD CDA ADB DBA duobus rectis sunt majores. reliqui igitur BAC CAD DAB tres anguli, qui solidum continent angulum, quatuor rectis minores erunt. Quare omnis solidus angulus, minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXII. THEOR.

Si sint tres anguli plani, quorum duo reliquo sint majores, quomodocunque sumpti, contineant autem ipsos rectæ lineæ æquales; fieri potest, ut ex iis quæ rectas æquales conjungunt, triangulum constituatur.

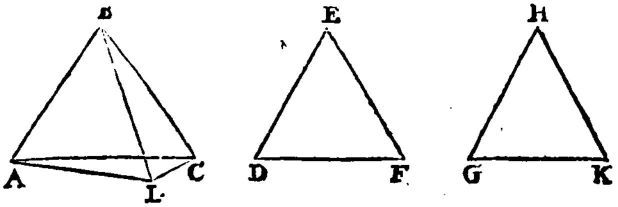
Sint dati tres anguli plani ABC DEF GHK, quorum duo reliquo sint majores, quomodocunque sumpti: contineant autem ipsos æquales rectæ lineæ AB BC, DE EF, GH HK, & AC DF GK jungantur. Dico fieri posse ut ex æqualibus ipsis AC DF GK triangulum constituatur: hoc est duas reliqua majores esse quomodocunque sumptas. Si igitur anguli

a 4. primi. ad B E H sint æquales, & AC DF GK æquales[a] erunt, & duæ reliqua majores. sin minus, sint inæquales anguli ad B E H, & major sit angulus ad B utrovis ipsorum qui sunt

b 24. primi. ad E H. major igitur est &[b] recta linea AC utravis ipsarum DF GK. & manifestum est ipsam AC unà cum altera ipsarum DF GK, reliqua esse majorem. Dico & DF GK ipsa AC

majores

majores esse. constituatur [c] ad rectam lineam AB, & ad punctum in ea B, angulo GHK æqualis angulus ABL, & uni [c] 23.primi.

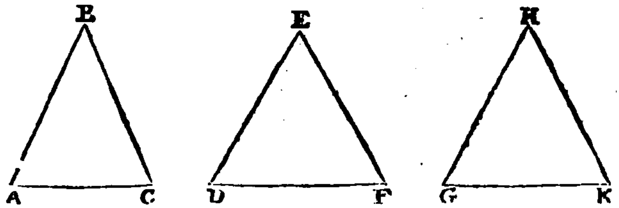


ipsarum AB BC, DE EF, GH HK ponatur æqualis BL, & AL CL jungantur. Quoniam igitur duæ AB BL duabus GH HK æquales sunt, altera alteri, & angulos æquales continent; erit basis AL basi GK æqualis. & quoniam anguli ad E H, angulo ABC majores sunt, quorum angulus GHK est æqualis ipsi ABL; erit reliquus qui ad E, angulo LBC major. quod cum duæ LB BC duabus DE EF æquales sunt, altera alteri; & angulus DEF angulo LBC major; basis DF basi LC major [d] erit. ostensa est autem GK æqualis AL. [d] 24.primi. ergo DF GK ipsis AL LC sunt majores; sed AL LC majores [e] sunt ipsa AC. multo igitur DF GK, ipsa AC majores [e] 20.primi. erunt. Quare rectarum linearum AC DF GK duæ reliqua majores sunt, quomodocunque sumptæ; ac propterea [f] fieri [f] 22.primi. potest ut ex æqualibus ipsis AC DF GK triangulum constituatur. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXIII. PROBL.

Ex tribus angulis planis, quorum duo reliquo sunt majores, quomodocunque sumpti, solidum angulum constituere. Oportet autem tres angulos quatuor rectis esse minores.

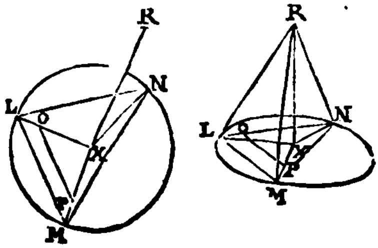
Sint dati tres anguli plani ABC DEF GHK, quorum duo reliquo sint majores, quomodocunque sumpti, sintque tres



anguli quatuor rectis minores. Oportet ex æqualibus ipsis ABC DEF GHK solidum angulum constituere. abscindantur æquales AB BC, DE EF, GH HK; & AC DF GK jungantur.

fieri

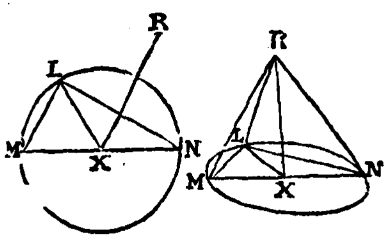
fieri igitur potest ut ex æqualibus ipsis AC DF GK constituatur [a] triangulum. Itaque [b] constituatur LMN, ita ut AC quidem sit æqualis LM, DF vero ipsi MN: & præterea GK ipsi LN, & circa LMN triangulum circulus LMN [c] describatur: sumaturque ipsius centrum X, quod vel erit intra triangulum LMN, vel in uno ejus latere, vel extra. sit primo intra: & LX MX NX jungantur. Dico AB majorem esse ipsa LX. Si enim non ita sit, vel AB erit æqualis LX, vel ea minor. sit primo æqualis. quoniam igitur AB est æqualis LX, atque est AB ipsi BC æqualis; erit LX æqualis BC, est autem LX æqualis XM. duæ igitur AB BC duabus LX XM æquales sunt, altera alteri; & AC basis basi LM æqualis ponitur. quare [d] angulus ABC angulo LXM est æqualis: eadem ratione & angulus quidem DEF est æqualis angulo MXN, angulus vero GHK angulo NXL. tres igitur anguli ABC DEF GHK tribus LXM MXN NXL æquales sunt. sed tres LXM MXN NXL quatuor rectis sunt [e] æquales. ergo & tres ABC DEF GHK æquales erunt quatuor rectis. atqui ponuntur quatuor rectis minores, quod est absurdum. non igitur AB ipsi LX est æqualis. Dico præterea neque AB minorem esse ipsa LX. si enim fieri potest, sit minor, & ponatur ipsi quidem AB æqualis XO, ipsi vero BC æqualis XP, & OP jungatur. quoniam igitur AB est æqualis BC, & XO ipsi XP æqualis erit. ergo & reliqua OL reliquæ PM est æqualis; ac propterea LM parallela [f] est ipsi OP; & LMX triangulum triangulo OPX æquiangulum. est [g] igitur ut XL ad LM, ita XO ad OP; & permutando ut XL ad XO, ita LM ad OP. major autem est LX, quam XO. ergo & LM quam OP est major. sed LM posita est æqualis AC. & AC igitur quam OP major erit. itaque quoniam duæ rectæ lineæ AB BC duabus OX XP æquales sunt, & basis AC major basi OP; erit [h] angulus ABC angulo OXP major. similiter demonstrabimus & DEF angulum majorem esse angulo MXN, & angulum GHK angulo NXL; tres igitur anguli ABC DEF GHK tribus LXM MXN NXL sunt majores. at anguli ABC DEF GHK quatuor rectis minores ponuntur. multo igitur anguli LXM MXN NXL minores erunt quatuor rectis. sed & [i] æquales. quod est absurdum. non igitur AB minor est, quam LX.



[a] 22. hujus.
[b] 22. primi.
[c] 5. quarti.
[d] 8. primi.
[e] 2. Cor. 15. primi.
[f] 2. sexti.
[g] 4. sexti.
[h] 25. primi.
[i] 2. Cor. 15. primi.

LX. ostensum autem est neque esse æqualem. ergo major sit necesse est. constituatur *k* à puncto X circuli LMN plano ad *k* 12. hujus.
rectos angulos XR. & excessui quo quadratum ex AB superat quadratum ex LX, ponatur æquale quadratum quod fit ex RX, & RL RM RN jungantur. quoniam igitur RX perpendicularis est ad planum DMN circuli, & ad unamquamque ipsarum LX MX NX erit *l* perpendicularis. & *l* 3. Def. hujus.
quoniam LX est æqualis XM, communis autem & ad rectos angulos XR, erit basis LR æqualis *m* basi RM. eadem ratione *m* 4. primi.
& RN utrique ipsarum RL RM est æqualis. tres igitur rectæ lineæ RL RM RN inter se æquales sunt. & quoniam quadratum XR ponitur æquale excessui, quo quadratum ex AB superat quadratum ex LX; erit quadratum ex AB quadratis ex LX XR æquale. quadratis autem ex LX XR æquale est *n* quadratum ex RL; rectus enim angulus est *n* 47. primi.
LXR. ergo quadratum ex AB quadrao ex RL æquale erit; ideoque AB ipsi RL est æqualis. sed ipsi quidem AB æqualis est unaquæque ipsarum BC DE EF GH HK: ipsi vero RL æqualis utraque ipsarum RM RN. unaquæque igitur ipsarum AB BC DE EF GH HK unicuique ipsarum RL RM RN est æqualis. quod cum duæ RL RM duabus AB BC æquales sint, & basis LM ponatur æqualis basi AC: erit *o* angulus LRM æqualis angulo ABC. eadem ratione & an- *o* 8. primi.
gulus quidem MRN angulo DEF, angulus autem LRN angulo GHK est æqualis. Ex tribus igitur angulis planis LRM MRN LRN, qui æquales sunt tribus datis ABC DEF GHK solidus angulus constitutus est ad R.

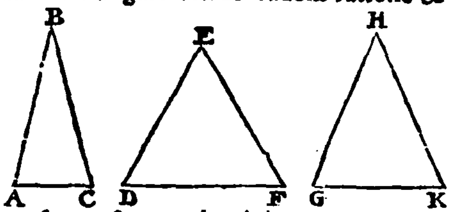
Sed sit centrum circuli in uno laterum trianguli, videlicet in MN, quod sit X, & XL jungatur. Dico rursus AB majorem esse ipsa LX. Si enim non ita sit, vel AB est æqualis LX vel ipsa minor. sit primo æqualis. duæ igitur AB BC, hoc est DE EF duabus MX XL, hoc est ipsi MN æquales sunt. sed MN ponitur æqualis DF.



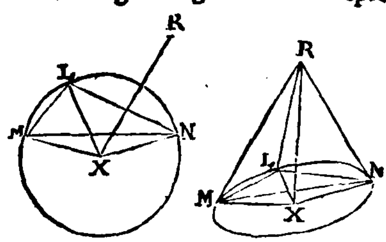
ergo DE EF ipsi DF sunt æquales. quod fieri non *p* potest *p* 20. primi.
non igitur AB est æqualis LX. similiter neque minor. multo enim majus id, quod fieri non potest, sequeretur. ergo AB ipsa LX major est. & similiter si excessui quo quadratum ex AB superat quadratum ex LX æquale ponatur quadratum

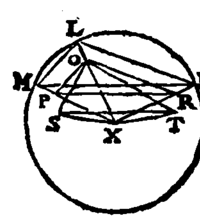
ex RX, & ipsa RX circuli plano ad rectos angulos constituatur, fiet problema.

Sed sit centrum circuli extra triangulum LMN, quod sit X, & LX MX NX jungantur. Dico & sic AB ipsa LX majorem esse. Si enim non ita sit, vel æqualis est, vel minor. sit primo æqualis. ergo duæ AB BC duabus MX XL æquales sunt, altera alteri; & basis AC est æqualis basi ML, angulus igitur ABC æqualis est angulo MXL. eadem ratione & GHK angulus ipsi LXN est æqualis; ac propterea totus MXN æqualis duobus ABC GHK. sed & anguli ABC GHK angulo DEF majores sunt. & angulus igitur MXN ipso DEF est major.



at quoniam duæ DE EF duabus MX XN æquales sunt, & basis DF æqualis basi MN, erit MXN angulus angulo DEF æqualis ᵖ. ostensus autem est major, quod est absurdum. non igitur AB est æqualis LX: deinceps vero ostendemus neque minorem esse. quare major necessario erit. & si rursus circuli plano ad rectos angulos constituamus XR, & ipsam æqualem ponamus lateri quadrati ejus, quo quadratum ex AB superat quadratum ex LX, problema constituetur. Dico vero neque minorem esse AB ipsa LX. Si enim fieri potest, sit minor; & ipsi quidem AB æqualis ponatur XO, ipsi vero BC æqualis XP, & OP jungatur. quoniam igitur AB ipsi BC est æqualis, erit OX æqualis XP. ergo & reliqua OL reliquæ PM æqualis. parallela igitur ᑫ est LM ipsi PO, & triangulum LMX triangulo PXO æquiangulum est: quare ʳ ut XL ad LM, ita XO ad OP: & permutando ut LX ad XO ita LM ad OP. major autem est LX quam XO. ergo LM quam OP est major. sed LM est æqualis AC. & AC igitur quam OP major erit





ᑫ 2. sexti.

ʳ 4. sexti.

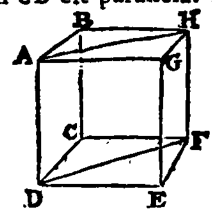
rit

rit. itaque quoniam duæ AB BC duabus OX XP sunt æquales altera alteri; & basis AC major est basi OP; erit *f* angulus ABC angulo OXP major. similiter & si XR su- *f* 25. primi. matur æqualis utrivis ipsarum XO XP, & jungatur OR, ostendemus angulum GHK angulo OXR majorem. constituatur ad rectam lineam LX, & punctum in ipsa X angulo quidem ABC æqualis angulus LXS, angulo autem GHK æqualis LXT, & ponatur utraque XS XT ipsi OX æqualis: junganturque OS OT ST. & quoniam duæ AB BC duabus OX XS æquales sunt, & angulus ABC æqualis angulo OXS erit basis AC, hoc est LM, basi OS æqualis. eadem ratione, & LN est æqualis ipsi OT. quod cum duæ ML LN duabus OS OT sint æquales, & angulus MLN major angulo SOT; erit *f* & basis MN basi ST major. sed MN est æqualis DF. *f* 24. primi. ergo & DF quam ST major erit. quoniam igitur duæ DE EF duabus SX XT æquales sunt, & basis DF major basi ST; erit angulus DEF angulo SXT major *f*. æqualis autem est angulus SXT angulis ABC GHK. ergo DEF angulus angulis ABC GHK major est: sed & minor. Quod fieri non potest. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXIV. THEOR.

Si solidum parallelis planis contineatur, opposita ipsius plana, & æqualia, & parallelogramma erunt.

Solidum enim CDGH parallelis planis AC GF BG CE FB AE contineatur. Dico opposita ejus plana, & æqualia, & parallelogramma esse. Quoniam enim duo plana parallela BG CE, à plano AC secantur, communes ipsorum sectiones *a* parallelæ sunt: ergo AB ipsi CD est parallela. rursus *a* 16. hujus. quoniam duo plana parallela BF AE secantur à plano AC, communes ipsorum sectiones parallelæ *a* sunt: parallela igitur est AD ipsi BC. ostensa autem est & AB parallela CD. ergo AC parallelogrammum erit. similiter demonstrabimus, & unumquodque ipsorum CE FG GB BF AE parallelogrammum esse. jungantur AH DF. & quoniam parallela est AB quidem ipsi DC; BH vero ipsi CF, erunt AB BH sese tangentes, duabus DC CF sese tangentibus parallelæ, & non in eodem plano: quare æquales *b* angulos *b* 10. hujus. continebunt. angulus igitur ABH angulo DCF est æqualis. Et quoniam duæ AB BH duabus DC CF æquales *c* sunt, & *c* 34. primi.



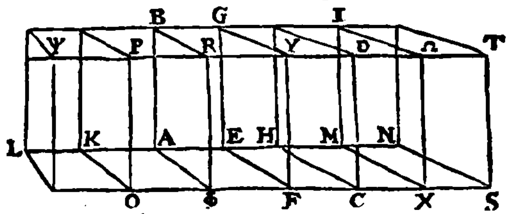
d 4. primi. angulus ABG æqualis angulo DCF, erit [d] basis AH basi DF æqualis: & ABH triangulum æquale triangulo DCF. quod
e 34. primi. cum ipsius quidem ABH trianguli duplum [e] sit BG parallelogrammum: ipsius vero DCF trianguli duplum parallelogrammum CE: erit BG parallelogrammum æquale parallelogrammo CE. similiter demonstrabimus & AC parallelogrammum parallelogrammo GF, & parallelogrammum AE parallelogrammo BF æquale esse. Si igitur solidum parallelis planis contineatur, opposita ipsius plana, & æqualia, & parallelogramma sunt. Quod oportebat demonstrare.

Cor. Ex jam demonstratis constat, si solidum parallelis contineatur planis, opposita ipsius plana, & æqualia esse, & similia, quippe quæ & singulos angulos æquales, & circa æquales angulos latera proportionalia habeant.

PROP. XXV. THEOR.

Si solidum parallelepipedum plano secetur oppositis planis parallelo, erit ut basis ad basim, ita solidum ad solidum.

Solidum enim parallelepipedum ABCD plano YE secetur, oppositis planis RA DH parallelo. Dico ut EFΦA basis ad basim EHCF, ita esse ABFY solidum ad solidum EGCD. Producatur enim AH ex utraque parte: & ponantur ipsi



quidem EH æquales quotcunque HM MN; ipsi vero AE æquales quotcunque AK KL, & compleantur parallelogramma LO KΦ HX MS, & solida LP KR HΩ MT. quoniam igitur æquales inter se sunt LK KA AE rectæ lineæ;
a 36. primi. erunt & parallelogramma LO KΦ AF inter se [a] æqualia: itemque æqualia inter se parallelogramma KΞ KB AG, & adhuc
b 24. hujus. parallelogramma LΨ KP AR inter se [b] æqualia; opposita enim sunt. eadem ratione & parallelogramma EC HX MS æqualia inter se sunt; itemque parallelogramma HG HI IN inter se æqualia: & insuper parallelogramma DH MΩ NT. tria igitur plana solidi LP æqualia sunt tribus planis solidi
c 29. primi. KR, atque etiam solidi AY, [c] similia quoque sunt: sed tria tribus

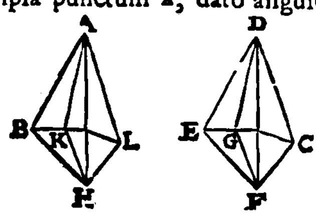
tribus oppositis [d] sunt similia & æqualia. ergo tria solida LP KR AY inter se æqualia [e] erunt. eadem ratione & tria solida ED HΩ MT sunt æqualia inter se. quotuplex igitur est basis LF ipsius AF basis, totuplex est & LY solidum solidi AY. eadem ratione quotuplex est NF basis ipsius basis HF, totuplex est & solidum NY ipsius ED solidi: & si basis LF est æqualis basi NF, & solidum LY solido NY æquale erit; & si basis LF superat NF basim, & LY solidum NY superabit; & si minor, minus. quatuor igitur magnitudinibus existentibus, duabus scilicet basibus AF FH, & duobus solidis AY ED; sumpta sunt æque multiplicia, basis quidem AF, & AY solidi, videlicet basis LF, & solidum LY: basis vero HF, & ED solidi, nempe basis NF, & solidum NY. & demonstratum est si basis LF superat basim NF, & LY solidum solidum NY superare; & si æqualis æquale; & si minor minus. est igitur [f] ut AF basis ad basim FH, ita AY solidum ad solidum ED. Quare si solidum parallelepipedum plano secetur, oppositis planis parallelo; erit ut basis ad basim, ita solidum ad solidum. Quod oportebat demonstrare.

[d] Cor. antecedent.
[e] 10. Def. hujus.
[f] 5. Def. quinti.

PROP. XXVI. PROBL.

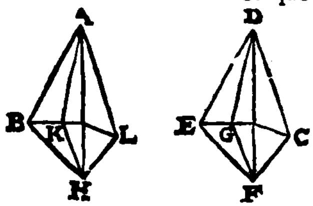
Ad datam rectam lineam, & ad datum in ipsa punctum dato angulo solido æqualem solidum angulum constituere.

Sit data quidem recta linea AB, datum autem in ipsa punctum A, & datus solidus angulus ad D qui EDC EDF FDC angulis planis continetur. Oportet ad datam rectam lineam AB, & ad datum in ipsa punctum A, dato angulo solido ad D æqualem solidum angulum constituere. Sumatur in linea DF quodvis punctum F, à quo ad planum per ED DC transiens ducatur [a] perpendicularis FG, & plano in puncto G occurrat; jungaturque DG, & ad rectam lineam AB, & ad datum in ipsa punctum A, angulo quidem EDC æqualis angulus [b] constituatur BAL; angulo autem EDG constituatur æqualis BAK. deinde ipsi DG ponatur æqualis AK, & à puncto K plano per BAL ad rectos angulos [c] erigatur HK; ponaturque ipsi GF æqualis KH, & HA jungatur. Dico angulum solidum ad A qui angulis BAL BAH HAL, continetur, æqualem esse solido angulo ad D, angulis EDC EDF FDC contento. Sumantur



[a] 11. hujus.
[b] 23. primi.
[c] 12. hujus.

mantur enim æquales rectæ lineæ AB DE, & jungantur HB KB FE GE. quoniam igitur FG perpendicularis est ad subjectum planum, & ad omnes rectas lineas quæ ipsam contingunt, suntque in subjecto plano, rectos faciet [d] angulos. uterque igitur angulorum FGD FGE rectus est. eadem ratione, & uterque ipsorum HKA HKB est rectus. & quoniam duæ KA AB duabus GD DE æquales sunt altera alteri, & angulos æquales continent; erit [e] basis BK basi EG æqualis. est autem & KH æqualis GF, atque angulos rectos continent. æqualis [e] igitur erit HB ipsi FE. rursus quoniam duæ AK KH duabus DG GF æquales sunt, & rectos continent angulos; erit basis AH basi DF æqualis: estque AB æqualis DE. duæ igitur HA AB duabus FD DE sunt æquales; & basis HB est æqualis basi FE, ergo angulus [f] BAH angulo EDF æqualis erit. eadem ratione, & angulus HAL angulo FDC est æqualis, quandoquidem si assumamus æquales AL DC, & jungamus KL HL GC FC, quoniam totus BAL est æqualis toti EDC, quorum BAK ipsi EDG ponitur æqualis; erit reliquus KAL æqualis reliquo GDC. & quoniam duæ KA AL duabus GD DC æquales sunt, & angulos æquales continent; basis KL basi GC [e] æqualis erit. est autem & KH æqualis GF, duæ igitur LK KH, duabus CG GF sunt æquales; angulosque rectos continent: ergo basis HL æqualis est basi CF. rursus quoniam duæ HA AL, duabus FD DC æquales sunt, & basis HL æqualis basi FC; erit angulus HAL [f] æqualis angulo FDC. atque factus est angulus BAL angulo EDC æqualis. Ad datam igitur rectam lineam, & ad datum in ipsa punctum, dato angulo solido æqualis angulus solidus constitutus est. Quod facere oportebat.



[d] 3. Def. hujus.

[e] 4. primi.

[f] 8. primi.

PROP. XXVII. PROBL.

Ad datam rectam lineam dato solido parallelepipedo simile, & similiter positum solidum parallelepipedum describere.

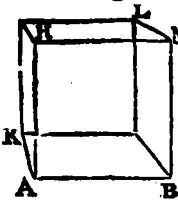
Sit recta quidem linea AB; datum vero solidum parallelepipedum CD. Oportet ad datam rectam lineam AB dato solido parallelepipedo CD simile, & similiter positum solidum parallelepipedum describere. Constituatur ad rectam lineam

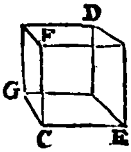
neam AB, & ad datum in ipsa punctum A angulo solido ad C æqualis [a] angulus, qui angulis BAH HAK KAB contineatur, ita ut angulus quidem BAH æqualis sit angulo ECF, angulus vero BAK angulo ECG, & adhuc angulus HAK angulo GCF, & fiat [b] ut EC ad CG, ita BA ad AK, ut autem GC ad CF, ita KA ad AH. ergo ex æquali ut EC ad CF, ita erit BA ad AH. compleatur parallelogrammum BH, & AL solidum. quoniam igitur est ut EC ad CG, ita BA ad AK, nempe, circa æquales angulos ECG BAK latera sunt proportionalia; erit parallelogrammum KB parallelogrammo GE simile. eadem quoque ratione parallelogrammum KH simile est parallelogrammo GF, & parallelogrammum HB parallelogrammo FE. tria igitur parallelogramma solidi AL tribus parallelogrammis solidi CD similia sunt: sed tria tribus oppositis sunt [c] æqualia, & similia. ergo totum AL solidum toti solido CD simile erit. Ad datam igitur rectam lineam AB dato solilo parallelepipedo CD simile, & similiter positum solidum parallelepipedum AL descriptum est. Quod facere oportebat.

a 26. hujus.

b 12. sexti.

c Cor. 24. hujus.





PROP. XXVIII. THEOR.

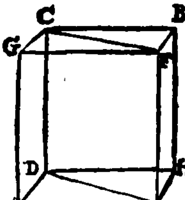
Si solidum parallelepipedum plano secetur per diagonales oppositorum planorum, ab ipso plano bifariam secabitur.

Solidum enim parallelepipedum AB plano CDEF secetur per diagonales oppositorum planorum, videlicet CF DE. Dico solidum AB à plano CDEF bifariam secari.

Quoniam enim æquale [a] est CGF triangulum triangulo CBF, triangulum vero ADE triangulo DEH; est autem & CA parallelogrammum parallelogrammo BE æquale [b], oppositum enim est; & parallelogrammum GE æquale parallelogrammo CH; erit prisma contentum duobus triangulis CGF ADE, & tribus parallelogrammis GE AC CE æquale prismati, quod continetur duobus triangulis CFB DEH, & tribus parallelogrammis CH & BE CE: etenim planis, & numero & magnitudine æqualibus continentur. Ergo totum AB solidum

a 34. primi.

b 24. hujus.

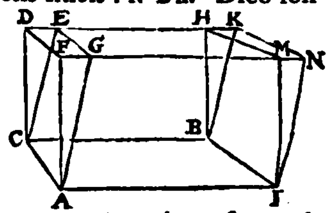


dum à plano CDEF bifariam secatur. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXIX. THEOR.

Solida parallelepipeda quæ in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes lineæ sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia.

Sint enim in eadem basi AB solida parallelepipeda CM CN, eadem altitudine, quorum stantes AF AG LM LN CD CE BH BK sint in eisdem rectis lineis FN DK. Dico solidum CM solido CN æquale esse. Quoniam enim parallelogrammum est utrumque ipsorum CH CK; erit CB, utrique ipsarum DH EK[a] æqualis, ergo & DH est æqualis EK. communis auferatur EH. reliqua igitur DE æqualis est reliquæ HK. quare &[b] DEC triangulum est æquale triangulo HKB. parallelogrammum autem DG est æquale parallelogrammo HN. eadem ratione & AFG triangulum æquale est triangulo LMN. est autem parallelogrammum CF parallelogrammo[c] BM, & parallelogrammum CG parallelogrammo BN æquale: oppcsita enim sunt. ergo & prisma contentum duobus triangulis AFG DEC, & tribus parallelogrammis AD DG GC est æquale prismati, quod duobus triangulis LMN HBK, & tribus parallelogrammis BM NH BN continetur. commune apponatur solidum, cujus basis quidem parallelogrammum AB, oppositum autem ipsi GEHM. ergo totum CM solidum parallelepipedum toti solido parallelepipedo CN est æquale. Solida igitur parallelepipeda quæ in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes lineæ sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia. Quod demonstrare oportebat.



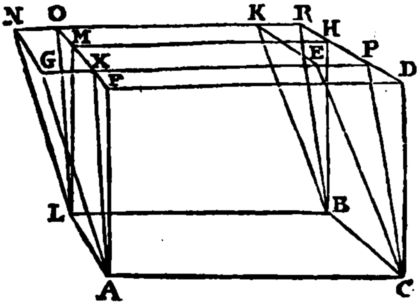
a 34. primi.
b 8. primi.
c 24. hujus.

PROP. XXX. THEOR.

Solida parallelepipeda quæ in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes lineæ non sunt in iisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia.

Sint in eadem basi AB solida parallelepipeda CM CN & eadem altitudine, quorum stantes AF AG LM LN CD CE BH

BH BK non sint in eisdem rectis lineis. Dico solidum CM solido CN æquale esse. Producantur enim NK DH, & GE FM, conveniantque inter se punctis R X; & adhuc producantur FM GE ad O P puncta: & AX LO CP BR jungantur. solidum CM, cujus basis quidem ACBL parallelogrammum, oppositum autem ipsi FDHM est



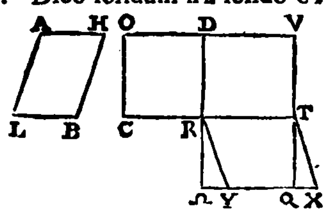
[a] æquale solido CO, cujus basis parallelogrammum ACBL & ei oppositum XPRO, in eadem enim sunt basi ACBL, & ipsorum stantes AF AX LM LO CD CP BH BR sunt in eisdem rectis lineis FO DR. sed solidum CO, cujus basis quidem parallelogrammum ACBL, oppositum autem ipsi XPRO est [a] æquale solido CN, cujus basis ACBL parallelogrammum, & ipsi oppositum GEKN. etenim in eadem sunt basi ACBL, & eorum stantes AG AX CE CP LN LO BK BR sunt in eisdem rectis lineis GP NR. quare & CM solidum solido CN æquale erit. Solida igitur parallelepipeda quæ in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes lineæ non sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia. Quod demonstrare oportebat.

[a] 29. hujus.

PROP. XXXI. THEOR.

Solida parallelepipeda quæ in æqualibus sunt basibus, & eadem altitudine, inter se sunt æqualia.

Sint in æqualibus basibus AB CD solida parallelepipeda AE CF, & eadem altitudine. Dico solidum AE solido CF æquale esse. Sint primo stantes HK BE AG LM OP DF CZ RS ad rectos angulos basibus AB CD: angulus autem ALB angulo CRD sit inæqualis, & producatur ipsi CR in directum RT: constituaturque ad rectam



lineam RT, & ad punctum in ipsa R, angulo ALB æqualis [a] angulus TRY. & ponatur ipsi quidem AL æqualis

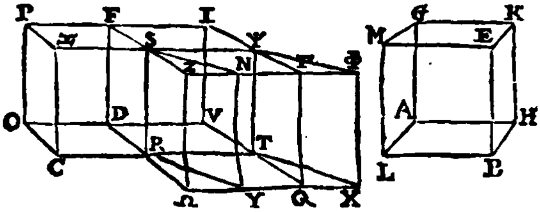
[a] 23. primi.

RT,

RT, ipsi vero LB æqualis RY, & ad punctum Y ipsi RT parallela ducatur XY, compleaturque parallelogrammum RX, & ΨY solidum. quoniam igitur duæ TR RY duabus AL LB æquales sunt, & angulos continent æquales; erit parallelogrammum RX æquale & simile parallelogrammo HL: & quoniam rursus AL est æqualis RT, & LM ipsi RS, angulosque æquales continent, parallelogrammum RΨ parallelogrammo AM æquale & simile erit. eadem ratione LE parallelogrammum ipsi SY æquale est & simile. tria igitur parallelogramma solidi AE tribus parallelogrammis solidi ΨY æqualia & similia sunt. sed & tria tribus opposita &

b Cor. 24. hujus. [b] æqualia sunt & similia. totum igitur AE solidum parallelepipedum toti solido parallelepipedo ΨY est æquale. producantur DR XY, conveniantque inter se in puncto Ω, & per T ipsi DΩ parallela ducatur TQ, & producantur TQ OD, & conveniant in V, compleaturque solida ΩΨ RI. solidum igitur ΨΩ cujus basis est RΨ parallelogrammum, oppositum

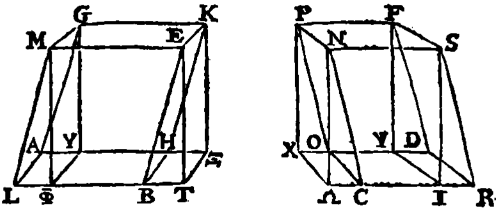
c 29. hujus. autem ipsi ΩΓ, est [c] æquale solido ΨY, cujus basis est RΨ parallelogrammum, & oppositum ipsi YΦ, *in eadem enim*



sunt basi RΨ, & eadem altitudine, & eorum stantes RΩ RY TQ TX SZ SN ΨΓ ΨΦ in eisdem sunt rectis lineis ΩX ZΦ. sed solidum ΨY æquale est solido AE. ergo & ΨΩ solido AE est æquale. præterea quoniam parallelogrammum RYXT est æquale parallelogrammo ΩT, etenim in eadem est basi RT, & in eisdem parallelis RT ΩX. & parallelogrammum RYXT parallelogrammo CD est æquale, quoniam & ipsi AB est æquale; parallelogrammum ΩT æquale est parallelogrammo CD: aliud autem est parallelogrammum DT. est igitur ut CD basis ad basim DT, ita ΩT ad ipsam DT. & quoniam solidum parallelepipedum CI secatur plano RF planis oppositis parallelo; erit ut [d] CD basis ad basim DT, ita solidum CF ad RI solidum. eadem ratione quoniam solidum parallelepipedum ΩI secatur plano RΨ oppositis pla-

d 25. hujus. nis parallelo, ut ΩT basis [d] ad basim DT, ita erit solidum ΩΨ ad RI solidum. sed ut CD basis ad basim DT, ita basis ΩT ad ipsam TD. ut igitur solidum CF ad RI solidum ita solidum

solidum ΩΨ ad solidum RI. quod cum utrumque solidorum CF ΩΨ ad solidum RI eandem habet proportionem, solidum CF solido ΩΨ est æquale. solidum autem ΩΨ ostensum est æquale solido AE. ergo & [e] AE ipsi CF æquale erit. [e] 9. quinti.

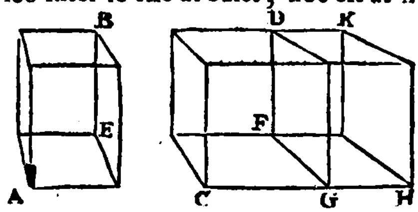


Sed non sint stantes AG HK BE LM CN OP DF RS ad rectos angulos ipsis AB CD basibus. Dico rursus solidum AE æquale esse solido CF. Ducantur [f] à punctis K E G M, P F N S [f] 11. hujus. ad subjectum planum perpendiculares KΞ ET GY MΦ, SI FΨ NΩ PX, & plano in punctis Ξ T Y Φ, Ψ X Ω I occurrant, & jungantur ΞT YΦ ΞY TΦ XΨ XΩ ΩI ΨI. æquale igitur est KΦ solidum solido PI; in æqualibus enim sunt basibus KM PS, & eandem altitudine, quorum stantes ad rectos angulos sunt basibus. sed KΦ solidum solido AE est [g] æquale: solidum vero PI æquale [g] solido CF. si quidem [g] 30. hujus. in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis. ergo & solidum AE solido CF æquale erit. Solida igitur parallelepipeda quæ in æqualibus sunt basibus & eadem altitudine, inter se sunt æqualia. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXXII. THEOR.

Solida parallelepipeda quæ eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases.

Sint solida parallelepipeda AB CD, quæ eandem altitudinem habeant. Dico inter se esse ut bases; hoc est ut AE basis ad basim CF ita solidum AB ad CD solidum. applicetur enim ad rectam lineam FG parallelogrammo AE æquale FH, & à basi FH eadem



altitudine ipsi CD solidum parallelepipedum GK compleatur. solidum igitur AB solido GK est [a] æquale; in æqualibus [a] 31. hujus. enim

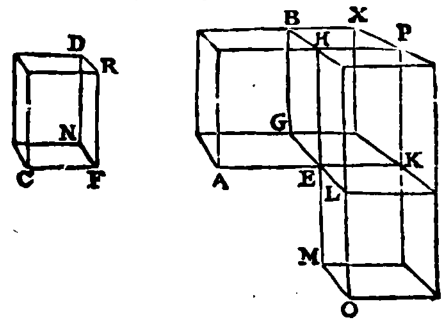
enim sunt basibus AE FH, & eadem altitudine. itaque quoniam solidum parallelepipednm CK plano DG secatur oppositis planis parallelo; erit ut [b] HF basis ad basim FC, ita solidum HD ad DC solidum; atque est basis quidem FH basi AE æqualis, solidum vero GK æquale solido AB. est igitur & ut AE basis ad basim CF, ita solidum AB ad solidum CD. Quare solida parallelepipeda quæ eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases. Quod demonstrare oportebat.

b 25. hujus.

PROP. XXXIII. THEOR.

Similia solida parallepipeda inter se sunt in triplicata proportione homologorum laterum.

Sint similia solida parallelepipeda AB CD. latus autem AE homologum sit lateri CF. Dico solidum AB ad CD solidum triplicatam proportionem habere ejus, quam habet AE ad CF. Producantur enim EK EL EM in directum ipsis AE GE HE: & ipsi quidem CF æqualis ponatur EK, ipsi vero FN æqualis EL; & adhuc ipsi FR æqualis EM, & KL parallelogrammum, & KO solidum compleantur. quoniam igitur duæ KE EL duabus CF FN æquales sunt: sed & angulus KEL angulo CFN est æqualis; quia & angulus AEG ipsi CFN ob similitudinem solidorum AB CD: erit & KL parallelogrammum simile & æquale parallelogrammo CN. eadem ratione, & parallelogrammum KM æquale est & simile parallelogrammo CR, & adhuc parallelogrammum OE ipsi DF parallelogrammo. tria igitur parallelogramma solidi KO tribus parallelogrammis CD solidi æqualia & similia sunt. sed tria tribus oppositis æqualia [a] sunt & similia. totum igitur KO solidum æquale est & simile toti solido CD. compleatur GK parallelogrammum; & à basibus quidem GK KL parallelogrammis, altitudine vero eadem ipsi AB, solida compleantur EX LP. & quoniam ob similitudinem solidorum AB CD est ut AE ad CF, ita EG ad FN; & EH ad FR: æqualis autem FC ipsi EK, & FN ipsi EL, &



a Cor. 24. hujus.

FR ipsi EM. erit ut AE ad EK, ita GE ad EL, & HE ad EM. sed ut AE quidem ad EK, [b] ita AG parallelogrammum [b] ad parallelogrammum GK: ut autem GE ad EL, ita GK ad KL: & ut [b] HE ad EM, ita PE ad KM. & ut igitur AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK, ita GK ad KL, & PE ad KM. sed ut AG quidem ad GK, ita [c] AB solidum [c] ad solidum EX: ut autem GK ad KL, ita solidum EX ad PL solidum: & ut PE ad KM, ita PL solidum ad solidum KO. & ut igitur solidum AB ad solidum EX, ita [d] EX ad PL, [d] & PL ad KO. si autem quatuor sint magnitudines deinceps proportionales, prima ad quartam triplicatam proportionem [e] habet ejus, quam habet ad secundam. ergo & AB solidum ad [e] solidum KO triplicatam habet proportionem ejus, quam AB ad EX. sed ut AB ad EX, ita AC parallelogrammum ad parallelogrammum GK; & AE recta linea ad ipsam EK. quare & AB solidum ad solidum KO triplicatam proportionem habebit ejus, quam AK habet ad EK. æquale autem est solidum KO solido CD, & recta linea EK rectæ CF est æqualis. Ergo & AB solidum ad solidum CD triplicatam habet proportionem ejus, quam latus ipsius homologum AE habet ad CF homologum latus. Quod demonstrare oportebat.

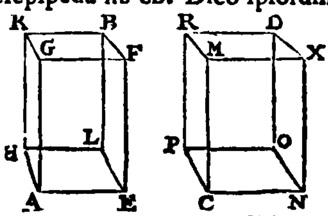
[b] 1. sexti.
[c] 32. hujus.
[d] 11. quinti.
[e] 11. Def. quinti.

Cor. Ex hoc manifestum est, si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad quartam, ita esse solidum parallepipedum quod fit à prima ad solidum quod à secunda, simile, & similiter descriptum; quoniam & prima ad quartam triplicatam proportionem habet ejus, quam habet ad secundam.

PROP. XXXIV. THEOR.

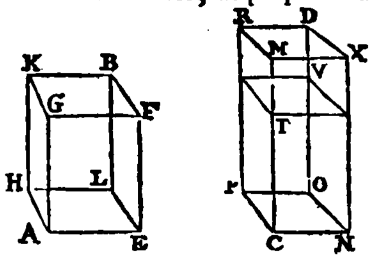
Æqualium solidorum parallelepipedorum reciprocantur bases & altitudines; & quorum solidorum parallelepipedorum reciprocantur bases & altitudines, ea inter se sunt æqualia.

Sint æqualia solida parallelepipeda AB CD. Dico ipsorum bases & altitudines reciprocari, hoc est ut EH basis ad basim NP, ita esse altitudinem solidi CD ad solidi AB altitudinem. Sint enim primo stantes AG EF LB HK CM NX OD PR ad rectos angulos basibus ipsorum.



Dico ut EH basis ad basim NP, ita esse CM ad AG. Si igitur basis

basis EH basi NP sit æqualis, est autem & AB solidum æquale solido CD; erit & CM æqualis ipsi AG. si [d] enim basibus EH NP æqualibus existentibus non sint AG CM altitudines æquales, neque AB solidum solido CD æquale erit. ponitur autem æquale. non igitur inæqualis est altitudo CM altitudini AG. ergo æqualis sit necesse est; ac propterea ut

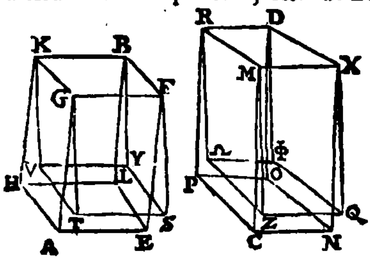


EH basis ad basim NP, ita erit CM ad AG. At vero non sit basis EH æqualis basi NP. sed EH sit major. est autem & AB solidum solido CD æquale. ergo major est CM ipsa AG; alioqui rursus sequeretur solida AB CD æqualia non esse, quæ ponuntur æqualia. itaque ponatur CT æqualis ipsi AG: & à basi quidem NP, altitudine autem CT solidum parallelepipedum VC compleatur. quoniam igitur solidum AB solido CD est æquale, aliud
[a] 7. quinti. autem aliquod est VC, & æqualia [a] ad idem eandem habent proportionem; erit ut AB solidum ad solidum CV, ita CD solidum ad solidum CV. sed ut AB solidum ad solidum CV,
[b] 32. hujus. ita [b] basis EH ad NP basim; æque alta enim sunt AB CV solida.
[c] 25. hujus. ut autem solidum CD ad ipsum CV, ita [c] MP basis ad basim
[d] 1. sexti. PT, & MC [d] ad CT. & igitur ut basis EH ad NP basim, ita MC ad CT. est autem CT æqualis AG. ergo & ut EH basis ad basim NP, ita MC ad AG. quare solidorum parallelepipedorum AB CD bases & altitudines reciprocantur. Rursus solidorum parallelepipedorum AB CD bases & altitudines reciprocentur: sitque ut EH basis ad basim NP, ita solidi CD altitudo ad altitudinem solidi AB. Dico solidum AB solido CD æquale esse. sint enim rursus stantes ad rectos angulos basibus. & si quidem basis EH sit æqualis basi NP, estque ut EH basis ad basim NP, ita altitudo solidi CD ad solidi AB altitudinem: erit solidi CD altitudo altitudini solidi AB æqualis. solida autem parallelepipeda, quæ sunt in
[e] 31. hujus. æqualibus basibus & eadem altitudine inter se [e] æqualia sunt ergo solidum AB solido CD est æquale. Sed non sit EH basis æqualis basi NP, & sit EH major. major igitur est & solidi CD altitudo altitudine solidi AB, hoc est CM ipsa AG. ponatur ipsi AG æqualis rursus CT, & similiter solidum CV compleatur. itaque quoniam est ut EH basis ad basim NP, ita MC ad ipsam AG; æqualis autem est AG ipsi CT: erit ut basis EH ad NP basim, ita MC ad CT. sed ut basis EH ad

NP

NP basim, ita AB solidum ad solidum CV; æque alta enim sunt solida AB CV. ut autem MC ad CT, ita & MP basis ad basim PT, & solidum CD ad CV solidum. & igitur ut solidum AB ad solidum CV, ita CD solidum ad solidum CV. quòd cum utrumque solidorum AB CD ad ipsum CV eandem proportionem habeat; erit AB solidum solido CD æquale. Quod demonstrare oportebat.

Non sint autem stantes FE BL GA KH, XN DO MC RP ad rectos angulos basibus ipsorum: & à punctis F G B K, X M D R ad plana basium EH NP ducantur perpendiculares, quæ planis in punctis S T Y V, Q Z Ω Φ occurrant & compleantur solida FV XΩ. Dico & sic æqualibus existentibus solidis AB CD, bases & altitudines reciprocari, scil. ut EH basis ad basim NP, ita esse altitudinem solidi CD ad solidi AB altitudinem. quoniam enim solidum AB solido CD est æquale; solido autem AB æquale est *f* solidum BT; in eadem namque sunt basi FK, & eadem altitudine; quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis: & solidum DC est *f* æquale solido DZ, quòd in eadem sint basi XR, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis; erit & solidum BT solido DZ æquale. æqualium autem solidorum parallelepipedorum, quorum altitudines basibus ipsorum sunt ad rectos angulos, bases *g* & altitudines reciprocantur. est igitur ut FK basis ad basim XR, ita solidi DZ altitudo ad altitudinem solidi BT. atque est basis quidem FK basi EH æqualis, basis vero XR æqualis basi NP. quare ut EH basis ad basim NP. ita est altitudo solidi DZ ad solidi BT altitudinem. eædem autem sunt altitudines solidorum DZ DC, itemque solidorum BT BA. est igitur ut EH basis ad basim NP, ita solidi DC altitudo ad altitudinem solidi AB. ergo solidorum parallelepipedorum AB CD bases & altitudines reciprocantur. Rursus solidorum parallelepipedorum AB CD bases & altitudines reciprocentur, sitque ut EH basis ad basim NP, ita altitudo solidi CD ad solidi AB altitudinem. Dico solidum AB solido CD æquale esse. Iisdem namque constructis, quoniam ut EH basis ad basim NP, ita solidi CD altitudo ad altitudinem solidi AB; & basis quidem EH est æqualis basi FK; NP vero ipsi XR: erit ut FK basis ad basim XR, ita altitudo



f 30. hujus.

g Ex ante demonstratis.

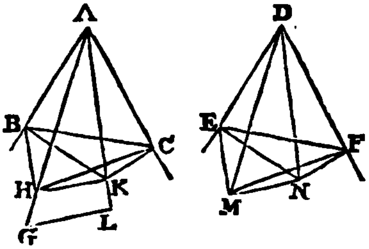
altitudo solidi CD ad solidi AB altitudinem. eædem autem sunt altitudines solidorum AB BT, & ipsorum CD DZ. est igitur ut FK basis ad basim XR, ita solidi DZ altitudo ad altitudinem solidi BT. quare solidorum BT DZ parallelepipedorum bases & altitudines reciprocantur, quorum autem solidorum parallelepipedorum altitudines sunt ad rectos angulos basibus ipsorum, & bases & altitudines reciprocantur, ea inter se sunt æqualia[b]. ergo BT solidum solido DZ est æquale. sed solidum quidem BT æquale est solido BA[i], etenim in eadem sunt basi FK, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis: solidum vero DZ est æquale solido DC, si quidem in eadem sunt basi XR, & eadem altitudine, & non in eisdem rectis lineis. ergo & solidum AB solido CD est æquale. Quod demonstrare oportebat.

b Ex ante demonstratis.
i 30. hujus.

PROP. XXXV. THEOR.

Si sint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ insistant, quæ cum rectis lineis à principio positis angulos contineant æquales, alterum alteri; in sublimibus autem sumantur quævis puncta, atque ab ipsis ad plana, in quibus sunt anguli, perpendiculares ducantur; & à punctis, quæ à perpendicularibus fiunt in planis ad primos angulos jungantur rectæ lineæ: cum sublimibus æquales angulos continebunt.

Sint duo anguli rectilinei æquales BAC EDF: & à punctis A D sublimes rectæ lineæ AG DM constituantur, quæ cum rectis lineis à principio positis æquales angulos contineant, alterum alteri: angulum quidem MDE æqualem angulo GAB, angulum vero MDF angulo GAC æqualem: & sumantur in ipsis AG DM quævis puncta G, M, à quibus ad plana per BAC EDF ducantur perpendiculares GL MN occurrentes planis in punctis L N; & LA ND jungantur.



Dico angulum GAL angulo MDN æqualem esse. Ponatur ipsi DM æqualis AH, & per H ipsi GL parallela ducatur HK. est autem GL perpendicularis ad planum

per

per BAC. ergo & HK ad [a] planum per BAC perpendicularis [a] 8. hujus.
erit. ducantur à punctis K N ad rectas lineas AB AC DF DE perpendiculares KC NF KB NE, & HC CB MF FE jungantur. Quoniam igitur quadratum ex HA æquale [b] est quadratis ex HK KA; quadrato autem ex KA æqualia [b] sunt ex [b] 47. primi.
KC CA quadrata: erit quadratum ex HA quadratis ex HK KC CA æquale. quadratis autem ex HK KC æquale est quadratum est HC. quadratum igitur ex HA quadratis ex HC CA æquale erit: & idcirco angulus HCA [c] est rectus. eadem [c] 48. primi.
ratione & angulus DFM rectus est. ergo angulus ACH ipsi DFM est æqualis. est autem & HAC angulus æqualis angulo MDF. duo igitur triangula sunt MDF HAC duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & unum latus uni lateri æquale, quod uni æqualium angulorum subtenditur; videlicet HA ipsi DM. ergo & reliqua latera reliquis lateribus [d] æqualia habebunt, alterum alteri. [d] 26. primi.
quare AC est æqualis DF. similiter demonstrabimus & AB ipsi DE æquale esse. jungantur enim HB ME. & quoniam quadratum ex AH est æquale quadratis ex AK KH; quadrato autem ex AK æqualia sunt quadrata ex AB BK: erunt quadrata ex AB BK KH quadrato ex AH æqualia. sed quadratis ex BK KH æquale est ex BH quadratum; rectus enim angulus est HKB, propterea quòd & HK perpendicularis est ad subjectum planum. quadratum igitur ex AH æquale est quadratis ex AB BH. quare angulus ABH [c] rectus est. eadem ratione & angulus DEM est rectus. est autem & BAH angulus æqualis angulo EDM, ita enim ponitur: atque est AH æqualis DM. ergo & AB ipsi DE [d] est æqualis. quoniam igitur AC quidem est æqualis DF, AB vero ipsi DE; erunt duæ CA AB duabus FD DE æquales. sed & angulus BAC angulo FDE est æqualis. basis [e] igitur BC basi EF, & trian- [e] 4. primi.
gulum triangulo, & reliqui anguli reliquis angulis æquales sunt. ergo angulus ACB angulo DFE est æqualis. est autem & rectus ACK æqualis recto DFN. quare & reliquus BCK reliquo EFN æqualis. eadem ratione, & CBK angulus est æqualis angulo FEN. itaque duo triangula sunt BCK EFN, duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & unum latus uni lateri æquale, quod est ad æquales angulos, videlicet BC ipsi EF. ergo & [d] reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt. æqualis igitur est CK ipsi FN. est autem & AC ipsi DF æqualis. quare duæ AC CK duabus DF FN æquales sunt: & rectos continent angulos. basis igitur AK est æqualis basi DN. & cum AH sit æqualis DM, erit & quod fit ex AH quadratum quadrato ex DM æquale. sed quadrato ex AH æqualia sunt ex AK KH quadrata; [b] ete-

 nim

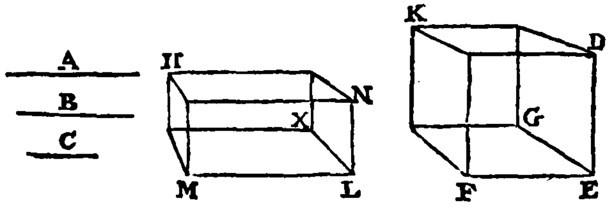
nim rectus est angulus AKH. quadrato autem ex DM æqualia sunt quadrata ex DN NM, quòd angulus DNM rectus sit. quadrata igitur ex AK KH quadratis ex DN NM sunt æqualia. quorum quadratum ex AK æquale est quadrato ex DN. ergo reliquum ex KH quadratum reliquo quadrato ex NM est æquale. & ideo recta linea HK ipsi MN æqualis. quod cum duæ HA AK duabus MD DN æquales sint, altera alteri, & basis HK basi NM ostensa sit æqualis; angulus HAK
ſ 8. primi. angulo MDN æqualis ſ erit. Quod oportebat demonstrare.

Cor. Ex hoc manifestum est, si sint duo anguli plani rectilinei æquales, ab ipsis autem constituantur sublimes rectæ lineæ æquales, quæ cum rectis lineis à principio positis æquales contineant angulos, alterum alteri, perpendiculares, quæ ab ipsis ad plana, in quibus sunt primi anguli, ducantur, inter se æquales esse.

PROP. XXXVI. THEOR.

Si tres rectæ lineæ proportionales sint, solidum parallelepipedum quod à tribus fit, æquale est solido parallelepipedo quod fit à media, æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto.

Sint tres rectæ lineæ proportionales A B C, sit scil. ut A ad B ita B ad C. Dico solidum quod fit ex ipsis A B C, æquale esse solido quod fit ex B, æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto. Exponatur solidus angulus ad E contentus tribus angulis planis DEG GEF FED; & ipsi quidem B ponatur æqualis unaquæque ipsarum DE GE EF; & solidum



parallelepipedum EK compleatur: ipsi vero A ponatur æqualis LM; & ad rectam lineam LM, & ad punctum in
a 26. hujus. ipsa L, constituatur a angulo solido ad E æqualis angulus contentus NLX XLM MLN; & ponatur ipsi quidem B æqualis LN, ipsi vero C æqualis LX. quoniam igitur est ut A ad B ita B ad C, æqualis autem est A ipsi LM, & B unicuique ipsarum LN EF EG ED, & C ipsi LX; erit ut LM ad EF ita

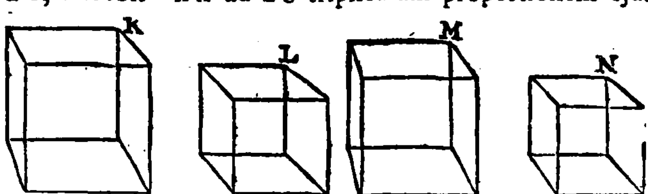
ita GE ad LX. & circum æquales angulos MLX GEF, latera sunt reciproca. ergo MX parallelogrammum parallelogrammo GF est [b] æquale. & quoniam duo anguli plani rectilinei æquales sunt GEF XLM, & in ipsis sublimes rectæ lineæ constituuntur LN ED æquales inter se, & cum rectis lineis à principio positis æquales continentes angulos, alterum alteri; erunt [c] perpendiculares quæ à punctis N D ad plana per XLM GEF ducuntur, inter se æquales. ergo solida LH EK eadem sunt altitudine. quæ vero in æqualibus basibus sunt solida parallelepipeda, & eadem altitudine, inter se [d] sunt æqualia. ergo solidum HL æquale est solido EK. atque est solidum quidem HL quod fit à tribus A B C, solidum vero EK quod fit ex B. Si igitur tres rectæ lineæ proportionales sint, solidum parallelepipedum quod fit à tribus, æquale est solido parallelepipedo quod fit, &c. Quod demonstrare oportebat.

[b] 14. sexti. [c] Cor. 35. hujus. [d] 31. hujus.

PROP. XXXVII. THEOR.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales sint, & quæ ab ipsis fiunt solida parallelepipeda similia & similiter descripta proportionalia erunt. Et si quæ ab ipsis fiunt solida parallelepipeda similia & similiter descripta proportionalia sint; & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales AB CD EF GH, sit scil. ut AB ad CD, ita EF ad GH, & describantur ab ipsis AB CD EF GH similia & similiter posita solida parallelepipeda KA LC ME NG. Dico ut KA ad LC, ita esse ME ad NG. Quoniam enim solidum parallelepipedum KA simile est ipsi LC, habebit [a] KA ad LC triplicatam proportionem ejus



quam AB habet ad CD. eadem ratione & solidum ME ad ipsum NG [a] triplicatam proportionem habebit ejus quam habet EF ad GH. atque est ut AB ad CD, ita EF ad GH. ut igitur AK ad LC, ita ME ad NG. Sed sit ut solidum AK ad solidum LC, ita ME solidum ad solidum NG. Dico, ut

[a] 33. hujus.

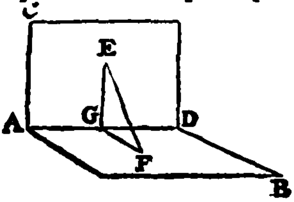
 recta

recta linea AB ad rectam CD, ita esse rectam EF ad ipsam
b 33. hujus. GH. quoniam enim rursus AK ad LC triplicatam b proportionem habet ejus quam AB habet ad CD; habet autem & ME ad NG triplicatam proportionem ejus quam EF ad GH; atque ut AK ad LC, ita ME ad NG: erit ut AB ad CD, ita EF ad GH. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales sint, &c. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXXVIII. THEOR.

Si planum ad planum rectum sit; & ab aliquo puncto eorum quæ sunt in uno plano, ad alterum planum perpendicularis ducatur: ea in communem planorum sectionem cadet.

Planum nempe CD ad planum AB rectum sit, communis autem eorum sectio sit AD, & in ipso CD plano, quodvis punctum E sumatur. Dico perpendicularem quæ à puncto E ad planum AB ducitur, cadere in ipsam AD. Non enim; sed si fieri potest, cadat extra, ut EF; & plano AB in puncto F occurrat: à puncto autem F ad DA in plano AB perpendicula-



a 10 primi. ris a ducatur FG, quæ quidem
b 4. Def. hujus. & plano CD ad b rectos angulos erit; & EG jungatur. quoniam igitur FG plano CD est ad rectos angulos; contingit autem ipsam recta linea EG quæ est in eodem CD plano:
c 3. Def. hujus. erit angulus FGE c rectus. sed & EF plano AB ad rectos angulos est: rectus igitur est angulus EFG. quare trianguli
d 17. primi. EFG duo anguli duobus rectis sunt æquales; quod est d absurdum. non igitur à puncto E ad AB planum perpendicularis ducta extra rectam lineam DA cadet. ergo in ipsam cadat necesse est. Si igitur planum ad planum rectum sit, &c. Quod oportebat demonstrare.

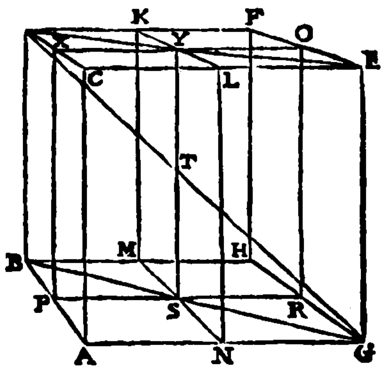
PROP. XXXIX. THEOR.

Si in solido parallelepipedo oppositorum planorum latera secentur bifariam, per sectiones vero plana ducantur; communis planorum sectio, & solidi parallelepipedi diameter, sese bifariam secabunt.

In solido enim parallelepipedo AF, oppositorum planorum CF AH latera bifariam secentur in punctis KLMNXORP.

&

& per sectiones plana ducantur KN XR; communis autem planorum sectio sit YS, & solidi parallelepipedi diameter sit DG. Dico YS DG sese bifariam secare, hoc est YT quidem ipsi TS, DT vero ipsi TG æqualem esse. Jungantur enim DY YE BS SG. quoniam igitur DX parallela est ipsi OE, alterni anguli DXY YOE inter se æquales [a] sunt. & quoniam [a] 29. primi.



DX quidem est æqualis OE, XY vero ipsi YO, & angulos æquales continent; erit [b] basis DY æqualis basi YE. & triangulum DXY triangulo YOE, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, angulus igitur XYD est æqualis angulo OYE, & ob id [c] recta linea est DYE. eadem ratione, & BSG recta est, atque est BS æqualis SG. & quoniam CA ipsi DB æqualis est & parallela, & CA est æqualis & parallela ipsi EG; erit & DB ipsi EG æqualis & parallela; & ipsas conjungunt rectæ lineæ DE GB: parallela igitur [d] est DE ipsi BG. & sumpta sunt in utraque ipsarum quævis puncta D Y G S, & junctæ sunt DG YS. ergo DG YS in uno [e] sunt plano. quod cum DE sit parallela BG, erit & EDT angulus angulo BGT æqualis [a], alterni enim sunt. est autem & DTY angulus æqualis [f] ipsi GTS. duo igitur sunt triangula DTY GTS duos angulos duobus angulis æquales habentia, & unum latus uni lateri æquale, quod uni æqualium angulorum subtenditur, videlicet DY ipsi GS: dimidia enim sunt ipsorum DE BG. ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt. [g] quare DT quidem est æqualis TG, YT vero ipsi TS. Si igitur in solido parallelepipedo, &c. Quod oportebat demonstrare.

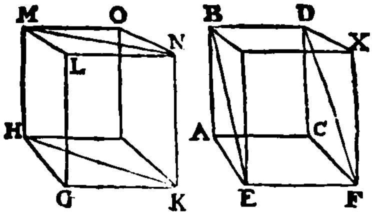
[b] 4. primi.
[c] 14. primi.
[d] 33. primi.
[e] 7. hujus.
[f] 15 primi.
[g] 26. primi.

PROP. XL. THEOR.

Si sint duo prismata æque alta, quorum unum quidem basim habeat parallelogrammum, alterum vero triangulum, & parallelogrammum duplum sit trianguli; ea inter se æqualia erunt.

Sint prismata æquæ alta ABCDEF GHKLMN. & unum quidem basim habeat parallelogrammum AF, alterum vero

GHK triangulum, & duplum ſit AF parallelogrammum trianguli GHK. Dico priſma ABCDEF priſmati GHKLMN æquale eſſe. Compleantur enim AX GO ſolida. & quoniam parallelogrammum AF trianguli GHK eſt duplum; eſt autem & HK parallelogrammum



a 41. primi. duplum [a] trianguli GHK: erit AF parallelogrammum parallelogrammo HK æquale. quæ vero in æqualibus ſunt baſibus ſolida pa-
b 31. hujus. rallelepipeda, & eadem altitudine, inter ſe æqualia [b] ſunt. æquale igitur AX ſolidum ſolido GO. atque eſt ſolidi qui-
c 28. hujus. dem AX dimidium [c] ABCDEF priſma, ſolidi vero GO dimidium [c] eſt priſma GHKLMN. ergo ABCDEF priſma priſmati GHKLMN eſt æquale. Si igitur ſint duo priſmata æque alta, &c. Quod demonſtrare oportebat.

EUCLIDIS

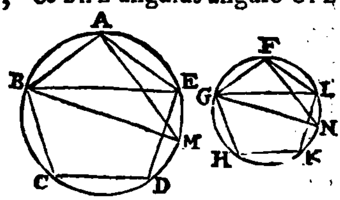
EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER DUODECIMUS.

PROPOSITIO I. THEOREMA.

Similia polygona circulis inscripta inter se sunt ut diametrorum quadrata.

Sint circuli ABCDE FGHKL, & in ipsis similia polygona ABCDE FGHKL; diametri autem circulorum sint BM GN. Dico ut quadratum ex BM ad quadratum ex GN, ita esse ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL. Jungantur enim BE AM GL FN. & quoniam polygonum ABCDE simile est polygono FGHKL; [a] & BAE angulus angulo GFL est æqualis: atque est ut BA ad AE, ita GF ad FL. duo igitur triangula sunt BAE GFL unum angulum uni angulo æqualem habentia, videlicet angulum BAE angulo GFL, circa æquales autem angulos latera proportionalia: quare triangulum ABE triangulo FGL æquiangulum [b] est; ac propterea angulus AEB æqualis est angulo FLG. sed angulus quidem AEB angulo AMB est [c] æqualis; in eadem enim circumferentia consistunt. angulus autem FLG æqualis [c] est angulo FNG. ergo & AMB angulus est æqualis angulo FNG. est autem & rectus [d] angulus BAM æqualis recto GFN. quare & reliquus reliquo æqualis. æquiangulum igitur est triangulum AMB triangulo FGN. ergo [e] ut BM ad GN ita BA ad GF. sed proportionis quidem BM ad GN duplicata est proportio quadrati ex BM ad



a 1. Def. sexti.
b 6. sexti.
c 21. tertii.
d 31. tertii.
e 4. sexti.

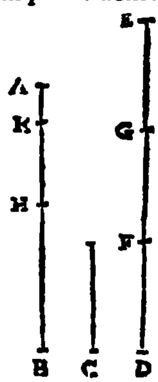
 quadratum

a 20. sexti. quadratum ex GN; proportionis vero AB ad GF duplicata a est proportio ABCDE polygoni ad polygonum FGHKL:
b 11. quinti. & ut igitur quadratum ex BM b ad quadratum ex GN, ita polygonum ABCDE ad FGHKL polygonum. Quare similia polygona quæ in circulis describuntur, inter se sunt ut diametrorum quadrata. Quod demonstrare oportebat.

LEMMA.

Duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, si à majori auferatur majus quàm dimidium, & ab eo quod reliquum est, rursus auferatur majus quàm dimidium; & hoc semper fiat; relinquetur tandem quædam magnitudo quæ minori magnitudine expositâ minor erit.

Sint duæ magnitudines inæquales AB, C, quarum major AB. Dico si ab ipsa AB auferatur majus quàm dimidium, & ab eo quod reliquum est, rursus auferatur majus quàm dimidium, atque hoc semper fiat, relinqui tandem magnitudinem quandam, quæ magnitudine C minor erit. Etenim C multiplicata, fiet aliquando major magnitudine AB. multiplicetur, & sit DE ipsius quidem C multiplex, major autem quam AB: dividaturque DE in partes ipsi C æquales DF FG GE. & ab ipsa AB auferatur majus quam dimidium BH, ab ipsa vero AH rursus majus quam dimidium auferatur HK, atque hoc semper fiat, quoad divisiones, quæ sunt in AB, multitudine æquales fiunt divisionibus quæ in DE: sint igitur



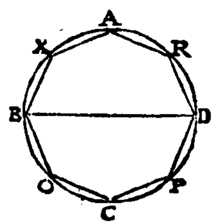
divisiones AK KH HB, divisionibus DF FG GE multitudine æquales. & quoniam major est DE quam AB, & ablatum est ab ipsa quidem DE minus quam dimidium EG: ab ipsa vero AB majus quam dimidium BH: erit reliquum GD reliquo HA majus. rursus quoniam major est GD, quam HA: & ablatum est ab ipsa quidem GD dimidium GF: ab ipsa vero HA majus quam dimidium HK: reliquum FD reliquo AK majus erit. estque FD æqualis ipsi C ergo C quam AK est major. minus igitur est AK quam C. ergo ex magnitudine AB relicta est magnitudo AK, exposita minori magnitudine

tudine c minor. Quod demonstrare oportebat. Similiter autem demonstrabitur, etiam si dimidia ablata fuerint. *Est prima decimi.*

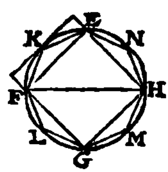
PROP. II. THEOR.

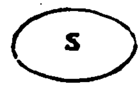
Circuli inter se sunt ut diametrorum quadrata.

Sint circuli ABCD EFGH, diametri autem ipsorum sint BD FH. Dico ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita esse circulum ABCD ad EFGH circulum. Si enim non ita sit; erit ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita circulus ABCD vel ad spatium aliquod minus circulo EFGH, vel ad majus. Sit primum ad minus quod sit S. & in circulo EFGH describatur quadratum EFGH. itaque descriptum in circulo quadratum majus est dimidio circuli EFGH, quoniam si per puncta E F G H contingentes circulum ducamus, erit descripti circa circulum quadrati [a] dimidium EFGH. descripto autem circa circulum quadrato minor est circulus. ergo quadratum EFGH majus est dimidio circuli EFGH. secentur bifariam circumferentiæ EF FG GH HE in punctis K L M N: & EK KF FL LG GM MH HN NE jungantur. unumquodque igitur triangulorum EKF FLG GMH HNE majus est dimidio segmenti circuli in quo consistit: quoniam si per puncta K L M N contingentes circulum ducamus, & parallelogramma, quæ sunt in rectas lineas EF FG GH HE compleamus; erit [b] unumquodque triangulorum EKF FLG GMH HNE dimidium parallelogrammi, quod ad ipsum est.



[a] 47. primi. & 31. tertii.

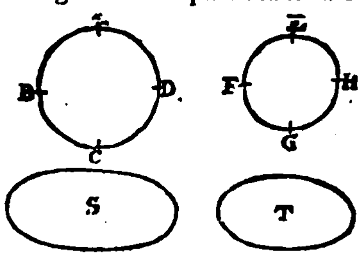




[b] 41. primi.

sed segmentum minus est parallelogrammo. quare unumquodque triangulorum EKF FLG GMH HNE majus est dimidio segmenti circuli, in quo consistit. Hasce igitur circumferentias bifariam secantes, & jungentes rectas lineas, atque hoc semper facientes, relinquemus tandem quædam circuli segmenta. quæ minora erunt excessu, quo circulus EFGH ipsum S spatium superat. etenim ostensum est in præcedenti Lemmate, duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, si à majori auferatur majus quam dimidium, & ab eo quod relinquitur, rursus majus quam dimidium,

dium, & hoc ſemper fiat; relinqui tandem magnitudinem aliquam, quæ minori magnitudine expoſita ſit minor. itaque relicta ſint ſegmenta circuli EFGH in rectas lineas EK KF FL LG GM MH HN NE, quæ minora ſint exceſſu, quo circulus EFGH ipſum S ſpatium ſuperat. ergo reliquum EKFLGMHN polygonum majus erit ſpatio S. Deſcribatur etiam in circulo ABCD, polygono EKFLGMHN ſimile polygonum AXBOCPDR. eſt igitur ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, [c] ita polygonum AXBOCPDR ad EKFLGMHN polygonum. ſed & ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita ABCD circulus ad ſpatium S. ergo & [d] ut circulus ABCD ad ſpatium S, ita polygonum AXBOCPDR ad EKFLGMHN polygonum. major autem eſt circulus ABCD eo quod in ipſo eſt polygono. quare & ſpatium S majus eſt [e] polygono EKFLGMHN. ſed & [f] minus. quod fieri non poteſt. Non igitur eſt ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH ita ABCD circulus ad ſpatium aliquod minus circulo EFGH. Similiter oſtendemus neque eſſe ut quadratum ex FH ad quadratum ex BD, ita circulum EFGH ad aliquod ſpatium minus circulo ABCD. Dico igitur neque eſſe ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita circulum ABCD ad aliquod ſpatium majus circulo EFGH. ſi enim fieri poteſt, ſit ad majus ſpatium S. erit igitur invertendo ut quadratum ex FH ad quadratum ex BD, ita ſpatium S ad ABCD circulum. ſed quoniam S majus eſt EFGH circulo; erit ut ſpatium S ad ABCD circulum, ita circulus EFGH ad aliquod ſpatium minus circulo ABCD. [e] ergo & ut quadratum ex FH ad quadratum ex BD, ita EFGH circulus ad aliquod ſpatium minus [e] circulo ABCD, quod fieri non poſſe oſtenſum eſt. non igitur ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita eſt circulus ABCD ad ſpatium aliquod majus EFGH circulo. oſtenſum autem eſt neque ad minus. quare ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita erit ABCD circulus ad circulum EFGH. Circuli igitur inter ſe ſunt ut diametrorum quadrata. Quod oſtendere oportebat.



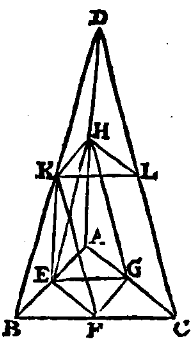
c 1. hujus.
d 11. quinti.
e 14. quinti.
f Ex hypotheſi.

PROP.

PROP. III. THEOR.

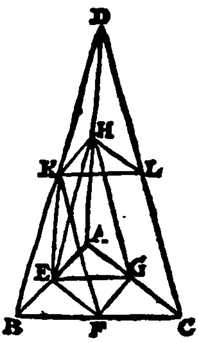
Omnis pyramis triangularem habens basim dividitur in duas pyramides æquales & similes inter se, quæ triangulares bases habent, similesque toti, & in duo prismata æqualia, quæ quidem prismata dimidio totius pyramidis sunt majora.

Sit pyramis, cujus basis quidem ABC triangulum; vertex autem punctum D. Dico pyramidem ABCD dividi in duas pyramides æquales & similes inter se, triangulares bases habentes, & similes toti, & in duo prismata æqualia; & duo prismata dimidio totius pyramidis esse majora. Secentur enim AB BC CA AD DB DC bifariam in punctis E F G H K L, & EH EG GH HK KL LH EK KF FG jungantur. quoniam igitur AE quidem est æqualis EB, AH vero ipsi HD; erit [a] HE ipsi DB parallela. eadem ratione & HK est parallela ipsi AB. parallelogrammum igitur est HEBK. quare HK est [b] æqualis EB. sed EB ipsi AE est æqualis. ergo & AE ipsi HK æqualis erit. est autem & AH æqualis HD. duæ igitur AE AH duabus KH HD æquales sunt, altera alteri, & angulus EAH æqualis [c] angulo KHD; basis igitur [d] EH basi KD est æqualis: quare triangulum AEH æquale est & simile triangulo HKD. eadem ratione & triangulum AHG triangulo HLD æquale est & simile. & quoniam duæ rectæ lineæ sese tangentes EH HG duabus rectis lineis sese tangentibus KD DL parallelæ sunt, non autem in eodem plano, æquales angulos [e] continebunt. ergo angulus EHG est æqualis angulo KDL. rursus quoniam duæ rectæ lineæ EH HG duabus KD DL æquales sunt, altera alteri, & angulus EHG est æqualis angulo KDL; erit [d] basis EG basi KL æqualis: æquale igitur est & simile triangulum EHG triangulo KDL. eadem ratione & AEG triangulum est æquale & simile triangulo HKL. quare pyramis cujus basis quidem est AEG triangulum, vertex autem punctum H, æqualis & similis est pyramidi cujus basis est triangulum KHL, & vertex D punctum. & quoniam uni laterum trianguli ADB, videlicet ipsi AB, parallela ducta est HK; erit triangulum ADB triangulo DKH æquiangulum,



[a] 2. sexti.
[b] 34. primi.
[c] 29. primi.
[d] 4. primi.
[e] 10. undecimi.

angulum, & latera habent proportionalia. simile igitur est ADB triangulum triangulo DHK. & eadem ratione triangulum quidem DBC simile est triangulo DKL; triangulum vero ADC triangulo DHL. & cum duæ rectæ lineæ sese tangentes BA AC duabus rectis lineis sese tangentibus KH HL parallelæ sint, non existentes in eodem plano, hæ æquales angulos f continebunt. angulus igitur BAC angulo HKL est æqualis. atque est ut BA ad AC, ita KH ad HL, ergo ABC triangulum g simile est triangulo HKL; ideoque pyramis, cujus basis quidem triangulum ABC, vertex autem punctum D, similis est pyramidi, cujus basis triangulum HKL, & vertex punctum D. sed pyramis cujus basis quidem HKL triangulum, vertex autem punctum D, ostensa est similis pyramidi, cujus basis triangulum AEG, & vertex H punctum. quare & pyramis cujus basis triangulum ABC & vertex punctum D, similis est pyramidi cujus basis A E G triangulum, & vertex punctum H. utraque igitur ipsarum AEGH HKLD pyramidum similis est toti pyramidi ABCD. & quoniam BF est æqualis FC, erit EBFG parallelogrammum h duplum trianguli GFC. & quoniam duo prismata æque alta sunt, quorum unum quidem basim habet parallelogrammum, alterum vero triangulum. estque parallelogrammum duplum trianguli; erunt ea prismata inter se æqualia i. ergo prisma contentum duobus triangulis BKF EHG, & tribus parallelogrammis EBFG EBKH KHGF, est æquale prismati quod duobus triangulis GFC HKL, & tribus parallelogrammis KFCL LCGH HKFG continetur. & manifestum est utrumque ipsorum prismatum, & cujus basis est EBFG parallelogrammum, opposita autem ipsi HK recta linea, & cujus basis est GFC triangulum, & oppositum ipsi triangulum KLH, majus esse utraque pyramidum, quarum bases quidem AEG HKL triangula, vertices autem puncta H D: quoniam si jungamus EF EH rectas lineas, prisma quidem, cujus basis est EBFG parallelogrammum, & opposita ipsi recta linea KH, majus est pyramide cujus basis EBF triangulum, vertex autem punctum K. sed pyramis, cujus basis triangulum EBF, & vertex K punctum, est k æqualis pyramidi cujus basis AEG triangulum, & vertex punctum H; æqualibus enim & similibus planis continentur. quare & prisma cujus basis parallelogrammum EBFG, opposita autem ipsi



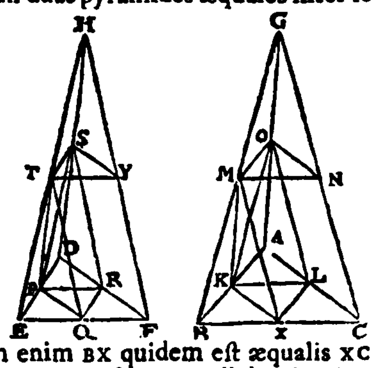
f 10. undecimi.
g 6. sexti. & 1. Def. ejusdem.
h 41. primi.
i 40. undecimi.
k 10. Def. undecimi.

ipsi recta linea HK, majus est pyramide cujus basis AEG triangulum & vertex punctum H. prisma vero cujus basis parallelogrammum EBFG, & opposita ipsi recta linea HK est æquale prismati cujus basis GFC triangulum, & ipsi oppositum triangulum HKL; & pyramis cujus basis triangulum AEG, vertex autem H punctum, est æqualis pyramidi cujus basis HKL triangulum, & vertex punctum D. ergo duo prismata de quibus dictum est, sunt majora duabus dictis pyramidibus quarum bases triangula AEG HKL, vertices autem H D puncta. Tota igitur pyramis cujus basis ABC triangulum, vertex autem punctum D, divisa est in duas pyramides æquales, & similes inter se, & similes toti: & in duo prismata æqualia: suntque duo prismata dimidio totius pyramidis majora. Quæ ostendere oportebat.

PROP. IV. THEOR.

Si sint duæ pyramides æque altæ, quæ triangulares bases habeant, dividatur autem utraque ipsarum, & in duas pyramides æquales inter se, similesque toti, & in dua prismata æqualia; & factarum pyramidum utraque eodem modo dividatur, atque hoc semper fiat: erit ut unius pyramidis basis ad basim alterius, ita & in una pyramide prismata omnia ad prismata omnia in altera pyramide multitudine æqualia.

Sint duæ pyramides æque altæ quæ triangulares bases habeant ABC DEF, vertices autem sint puncta G H, & dividatur utraque ipsarum in duas pyramides æquales inter se, similesque toti, & in duo prismata æqualia; & factarum pyramidum utraque eodem modo divisa intelligatur: atque hoc semper fiat. Dico ut ABC basis ad basim DEF, ita esse prismata omnia quæ sunt in pyramide ABCG ad prismata omnia quæ in pyramide DEFH multitudine æqualia.



Quoniam enim BX quidem est æqualis XC, AL vero æqualis LC; erit [a] XL ipsi AB parallela, & triangulum ABC triangulo LXC simile. eadem ratione & trian- [a] 2. sexti.

gulum

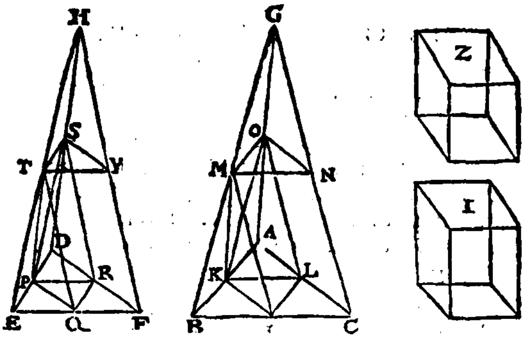
gulum DEF simile est triangulo RQF. & quoniam BC quidem est dupla CX, EF vero dupla ipsius FQ, ut BC ad CX, ita erit EF ad FQ. & descripta sunt ab ipsis BC CX similia & similiter posita rectilinea ABC LXC; ab ipsis vero EF FQ similia & similiter posita rectilinea DEF RQF. est
b 22. sexti. igitur [b] ut ABC triangulum ad triangulum LXC, ita triangulum DEF ad RQF triangulum; & permutando ut triangulum ABC ad triangulum DEF, ita LXC triangulum ad triangulum RQF. sed ut LXC triangulum ad triangulum
c 28. & 31. undecimi. RQF, ita [c] prisma cujus basis est triangulum LXC, oppositum autem ipsi OMN, ad prisma cujus basis RQF triangulum &
d 11. quinti. oppositum ipsi STY. ut igitur [d] ABC triangulum ad triangulum DEF, ita prisma cujus basis est triangulum LXC, oppositum autem ipsi OMN, ad prisma cujus basis RQF triangulum, & oppositum ipsi STY. & quoniam duo prismata quæ in pyramide ABCG inter se æqualia sunt, sed & quæ in pyramide DEFH prismata inter se sunt æqualia; erit ut prisma cujus basis parallelogrammum KLXB, opposita vero ipsi recta linea MO, ad prisma cujus basis LXC triangulum, & oppositum ipsi OMN, ita prisma cujus basis parallelogrammum EPRQ, & opposita recta linea ST, ad prisma cujus basis RQF triangulum, oppositum vero ipsi STY. quare componendo, ut prismata KBXLMO LXCMNO ad prisma LXCMNO, ita prismata PEQRST RQFSTY ad prisma RQFSTY. & permutando, ut prismata KBXLMO LXCOMN ad prismata PEQRST RQFSTY, ita prisma LXCMNO ad prisma RQFSTY. ut autem prisma LXCMNO ad prisma RQFSTY, ita ostensa est basis LXC ad RQF basim, & ABC basis ad basim DEF. ergo & ut triangulum ABC ad triangulum DEF, ita quæ in pyramide ABCG duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide DEFH. similiter autem, & si factas pyramides dividamus eodem modo velut OMNG STYH, erit ut OMN basis ad basim STY, ita quæ in pyramide OMNG duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide STYH. sed ut OMN basis ad basim STY, ita basis ABC ad DEF basim. & ut igitur ABC basis ad basim DEF, ita quæ in pyramide ABCG duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide DEFH; & quæ in pyramide OMNG duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide STYH; & quatuor ad quatuor. eadem autem ostendentur & in factis prismatibus ex divisione pyramidum AKLO, & DPRS, & omnium simpliciter multitudine æqualium. Quod demonstrare oportebat.

PROP.

PROP. V. THEOR.

Pyramides quæ eadem sunt altitudine, & triangulares bases habent, inter se sunt ut bases.

Sint eadem altitudine pyramides, quarum bases quidem triangula ABC DEF, vertices autem puncta G H. Dico ut ABC basis ad basim DEF, sic esse pyramidem ABCG ad DEFH pyramidem. Si enim non ita sit, erit ut ABC basis ad basim DEF, sic ABCG pyramis, vel ad solidum minus pyramide DEFH, vel ad majus. Sit primum ad solidum minus, sitque Z. & dividatur pyramis DEFH in duas pyramides æquales inter se, & similes toti, & in duo prismata æqualia. sunt duo igitur prismata [a] dimidio totius pyramidis majora. & rursus pyramides ex divisione factæ similiter dividantur, atque hoc semper fiat, quoad sumantur quædam pyramides à pyramide DEFH, quæ sint minores excessu quo pyramis DEFH solidum Z superat. itaque sumantur, & [a] 3. hujus.



sint exempli causa, pyramides DPRS STYH. erunt igitur reliqua in pyramide DEFH prismata solido Z majora. dividatur etiam ABCD pyramis in totidem partes similes pyramidi DEFH. ergo [b] ut ABC basis ad basim DEF, ita quæ in pyramide ABCG prismata ad prismata quæ in pyramide DEFH. sed ut ABC basis ad basim DEF, ita pyramis ABCG ad solidum Z. & igitur ut ABCG pyramis ad solidum Z. ita quæ in pyramide ABCG prismata ad prismata quæ in pyramide DEFH. major autem est pyramis ABCG prismatibus quæ in ipsa sunt. ergo & solidum Z prismatibus, quæ sunt in pyramide DEFH, est majus. sed & [c] minus. quod fieri non potest. non igitur ut ABC basis ad basim DEF, ita est pyramis ABCG ad solidum aliquot minus pyramide DEFH. similiter ostendemus neque ut DEF basis ad basim

[b] 4. hujus.

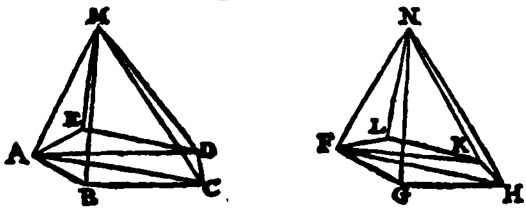
[c] Ex prius demonstratis.

basim ABC, ita esse pyramidem DEFH ad solidum aliquod pyramide ABCG minus. Dico igitur neque esse ut ABC basis ad basim DEF, ita ABCG pyramidem ad aliquod solidum majus pyramide DEFH. Si enim fieri potest, sit ad majus, videlicet ad solidum I. erit igitur invertendo ut DEF basis ad basim ABC, ita solidum I ad ABCG pyramidem. cum autem solidum I majus est pyramide EDFH, erit ut solidum I ad ABCG pyramidem, ita DEFH pyramis ad solidum aliquod minus pyramide ABCG, ut proxime ostensum fuit. & ut igitur DEF basis ad basim ABC, ita pyramis DEFH ad solidum aliquod pyramide ABCG minus, quod est absurdum non igitur ut ABC basis ad basim DEF, ita est ABCG pyramis ad solidum aliquod majus pyramide DEFH. ostensum autem est, neque ad minus. quare ut ABC basis ad basim DEF, ita est pyramis ABCG ad DEFH pyramidem. Pyramides igitur quæ eadem sunt altitudine, & triangulares bases habent, inter se sunt ut bases. Quod demonstrare oportebat.

PROP. VI. THEOR.

Pyramides, quæ eadem sunt altitudine, & polygonas bases habent, inter se sunt ut bases.

Sint eadem altitudine pyramides, quæ polygonas bases habeant ABCDE FGHKL: vertices autem M N puncta. Dico ut ABCDE basis ad basim FGHKL, ita esse ABCDEM pyramidem ad pyramidem FGHKLN. Dividatur enim basis quidem ABCDE in triangula ABC ACD ADE; basis vero



FGHKL dividatur in triangula FGH FHK FKL. & in uno quoque triangulo intelligantur pyramides æque altæ atque pyramides quæ à principio. quoniam igitur est ut triangulum ABC ad triangulum ACD, [a] ita ABCM pyramis ad pyramidem ACDM: & componendo ut ABCD trapezium ad triangulum ACD, ita ABCDM pyramis ad pyramidem ACDM. sed & ut ACD triangulum ad ADE, ita [a] pyramis ACDM ad ADEM pyramidem. ergo ex æquali, ut ABCD basis ad basim ADE, ita ABCDM pyramis ad pyramidem ADEM.

a 5. hujus.

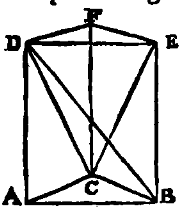
&

& rurſus componendo ut ABCDE baſis ad baſim ADE, ita ABCDEM pyramis ad pyramidem ADEM. eadem ratione, & ut FGHKL baſis ad baſim FKL, ita & FGHKLN pyramis ad FKLN pyramidem. & quoniam duæ pyramides ſunt ADEM FKLN, quæ triangulares baſes habent, & eadem ſunt altitudine; erit [a] ut ADE baſis ad baſim FKL, ita ADEM pyramis ad pyramidem FKLN. quòd cum ſit ut ABCDE baſis ad baſim ADE, ita ABCDEM pyramis ad pyramidem ADEM; ut autem ADE baſis ad baſim FKL, ita ADEM pyramis ad pyramidem FKLN: erit ex æquali, ut baſis ABCDE ad FKL baſim, ita ABCDEM pyramis ad pyramidem FKLN. ſed & ut FKL baſis ad baſim FGHKL, ita erat & FKLN pyramis ad pyramidem FGHKLN. quare rurſus ex æquali, ut ABCDE baſis ad baſim FGHKL, ita eſt ABCDEM pyramis ad pyramidem FGHKLN. Pyramides igitur quæ eadem ſunt altitudine, & polygonas baſes habent, inter ſe ſunt ut baſes. Quod demonſtrare oportebat.

PROP. VII. THEOR.

Omne priſma triangularem habens baſim, dividatur in tres pyramides æquales inter ſe, quæ triangulares baſes habent.

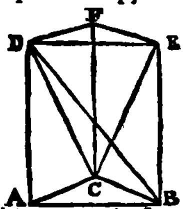
Sit priſma cujus baſis quidem triangulum ABC, oppoſitum autem ipſi DEF. Dico priſma ABCDEF dividi in tres pyramides æquales inter ſe, quæ triangulares habent baſes. Jungantur enim BD EC CD. & quoniam parallelogrammum eſt ABED cujus diameter BD, erit ABD triangulum triangulo EBD [a] æquale. ergo pyramis cujus baſis triangulum ABD, vertex autem punctum C, æqualis [b] eſt pyramidi, cujus baſis EDB triangulum, & vertex punctum C. ſed pyramis cujus baſis EDB triangnlum, & vertex punctum C, eadem eſt cum pyramide cujus baſis triangulum EBC, & vertex D punctum: iiſdem enim planis continentur. ergo & pyramis cujus baſis triangulum ABD, vertex autem punctum C, æqualis eſt pyramidi cujus baſis EBC triangulum, & vertex punctum D. rurſus quoniam FCBE parallelogrammum eſt cujus diameter CE, triangulum ECF triangulo CBE eſt [a] æquale. ergo & pyramis cujus baſis BEC triangulum, vertex autem punctum D, æqualis eſt [b] pyramidi cujus baſis triangulum ECF, & vertex punctum D. ſed pyramis cujus



[a] 34. primi.

[b] 5. hujus.

basis quidem BCE triangulum, vertex autem punctum D ostensa est æqualis pyramidi cujus basis triangulum ABD, & vertex C punctum. quare & pyramis cujus basis triangulum CEF, & vertex punctum D, æqualis est pyramidi cujus basis triangulum ABD, & vertex C punctum. prisma igitur ABCDEF dividitur in tres pyramides inter se æquales, quæ triangulares bases habent. Et quoniam pyramis cujus basis ABD triangulum, vertex autem punctum C, eadem est cum pyramide, cujus basis triangulum CAB, & vertex D punctum, iisdem namque planis continetur: pyramis autem, cujus basis triangulum ABD, & vertex punctum C, tertia pars ostensa est prismatis cujus basis ABC triangulum, & oppositum ipsi DEF: & pyramis igitur, cujus basis triangulum ABC, vertex autem D punctum, tertia pars est prismatis eandem basim habentis, videlicet ABC triangulum, & oppositum ipsi triangulum DEF. Quod demonstrare oportebat.



COROLL.

1. Ex hoc manifestum est omnem pyramidem tertiam partem esse prismatis basim habentis eandem, & altitudinem æqualem; quoniam si basis prismatis aliam quandam figuram rectilineam obtineat, & oppositam ipsi eandem; dividitur in prismata quæ triangulares bases habent, basibusque opposita etiam triangula.

2. Prismata æque alta sunt inter se ut bases.

PROP. VIII. THEOR.

Similes pyramides quæ triangulares bases habent, in triplicata sunt proportione homologorum laterum.

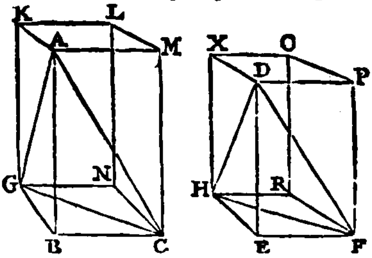
Sint similes & similiter positæ pyramides, quarum bases quidem triangula ABC DEF, vertices autem G H puncta. Dico ABCG pyramidem ad pyramidem DEFH, triplicatam proportionem habere ejus quam BC habet ad EF. Compleantur enim BGML EHPO solida parallelepipeda. & quoniam pyramis ABCG similis est pyramidi DEFH, erit [a] angulus ABC angulo DEF æqualis, angulusque GBC æqualis angulo HEF, & angulus ABG angulo DEH. atque [b] est ut AB ad DE, ita BC ad EF, & BG ad EH. quoniam igitur est

[a] 9. Def. undecimi.

[b] 1. Def. sexti.

ut

ut AB ad DE, ita BC ad EF, & circum æquales angulos latera sunt proportionalia, parallelogrammum BM parallelogrammo EP simile erit. eadem ratione, & parallelogrammum NB simile est parallelogrammo ER, & parallelogrammum BK ipsi EX parallelogrammo. tria igitur parallelogramma BM KB BN. tribus EP EX ER sunt similia. sed tria quidem MB BK BN tribus oppositis [c] æqualia & similia sunt, tria vero EP EX ER tribus oppositis æqualia & similia. quare solida BGML EHPO similibus planis & numero æqualibus continentur; ac propterea [d] simile est BGML solidum solido EHPO. similia autem solida parallelepipeda in [e] triplicata sunt proportione homologorum laterum. ergo solidum BGML ad solidum EHPO triplicatam habet proportionem ejus quam habet latus homologum BC ad EF homologum latus. sed [f] ut BGML solidum ad solidum EHPO, ita ABCG pyramis ad pyramidem DEFH; pyramis enim sexta pars est ipsius solidi, cum prisma quod est dimidium solidi parallelepipedi, sit pyramidis [g] triplum. quare & pyramis ABCG ad pyramidem DEFH triplicatam proportionem habebit ejus quàm BC habet ad EF. Quod demonstrare oportebat.



c 24. undecimi.
d 9. Def. undecimi.
e 33. undecimi.
f 15. quinti.
g 1. Cor. antecedentis.

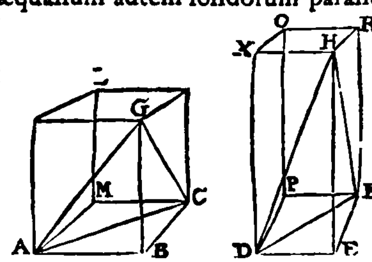
Cor. Ex hoc perspicuum est, & similes pyramides quæ multangulas bases habent, inter se esse in triplicata proportione homologorum laterum. ipsis enim divisis in pyramides triangulares bases habentes: quoniam & similia polygona quæ sunt in basibus, in similia triangula dividuntur, [h] & numero æqualia & homologa totis; erit ut una pyramis in una pyramide triangularem habens basim ad pyramidem in altera triangularem basim habentem, ita & omnes pyramides in una pyramide triangulares habentes bases ad omnes in altera triangulares bases habentes; hoc est, ita pyramis ipsa multangulam habens basim ad pyramidem quæ multangulam basim habet. sed pyramis triangularem habens basim ad pyramidem quæ triangularem basim habet, est in triplicata proportione homologorum laterum. & pyramis igitur polygonam habens basim ad pyramidem similem basim habentem, triplicatam proportionem habebit ejus quam latus homologum habet ad homologum latus.

h 20. sexti.

PROP. IX. THEOR.

Æqualium pyramidum, & triangulares bases habentium, bases & altitudines reciproce sunt proportionales: & quarum pyramidum triangulares bases habentium, bases & altitudines reciproce sunt proportionales, illæ sunt æquales.

Sint nempe pyramides æquales, quæ triangulares bases habeant ABC DEF, vertices vero G H puncta. Dico pyramidum ABCG DEFH bases & altitudines reciprocari; scil. ut ABC basis ad basim DEF, ita esse pyramidis DEFH altitudinem ad altitudinem pyramidis ABCG. Compleantur enim BGML EHPO solida parallelepipeda. & quoniam pyramis ABCG est æqualis pyramidi DEFH, atque est pyramidis quidem ABCG sextuplum BGML solidum, pyramidis vero DEFH sextuplum solidum EHPO; erit [a] solidum BGML solido EHPO æquale. æqualium autem solidorum parallelepipedorum bases & altitudines reciprocantur [b]. est igitur ut BM basis ad basim EP, ita EHPO solidi altitudo ad altitudinem solidi BGML. sed ut BM basis ad basim EP, ita [a] ABC triangulum ad triangulum DEF. ergo & ut ABC triangulum ad triangulum DEF, ita solidi EHPO altitudo ad altitudinem solidi BGML. sed solidi quidem EHPO altitudo eadem est cum altitudine pyramidis DEFH; solidi vero BGML altitudo eadem est cum altitudine pyramidis ABCG: est igitur ut ABC basis ad basim DEF, ita pyramidis DEFH altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG. quare pyramidum ABCG DEFH bases & altitudines reciproce sunt proportionales. Et si pyramidum ABCG DEFH bases & altitudines reciproce sunt proportionales, sitque ut ABC basis ad basim DEF, ita pyramidis DEFH altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG. Dico ABCG pyramidem pyramidi DEFH æqualem esse. Iisdem enim constructis, quoniam ut ABC basis ad basim DEF, ita est DEFH pyramidis altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG; ut autem ABC basis ad basim DEF, ita BM parallelogrammum ad parallelogrammum EP: erit & ut parallelogrammum BM ad EP parallelogrammum, ita pyramidis DEFH altitudo ad altitudinem



[a] 15. quinti.

[b] 34. undecimi.

nem

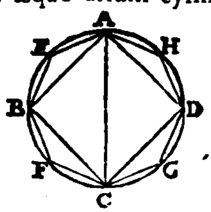
nem pyramidis ABCG. ſed pyramidis quidem DEFH altitudo eadem eſt cum altitudine ſolidi parallelepipedi EHPO; pyramidis vero ABCG altitudo eadem eſt cum altitudine ſolidi parallelepipedi BGML: eſt igitur ut BM baſis ad baſim EP, ita EHPO ſolidi parallelepipedi altitudo ad altitudinem ſolidi parallelepipedi BGML. quorum autem ſolidorum parallelepipedorum baſes & altitudines reciprocantur, ea [c] ſunt æqualia. ſolidum igitur parallelepipedum BGML æquale eſt ſolido parallelepipedo EHPO. atque eſt ſolidi quidem BGML ſexta pars pyramis ABCG: ſolidi vero EHPO itidem ſexta pars pyramis DEFH. ergo pyramis ABCG pyramidi DEFH eſt æqualis. Æqualium igitur pyramidum, & triangulares baſes habentium, baſes & altitudines reciproce ſunt proportionales: & quarum pyramidum triangulares baſes habentium baſes & altitudines reciproce ſunt proportionales, illæ ſunt æquales. Quod oportebat demonſtrare.

[c] 34. undecimi.

PROP. X. THEOR.

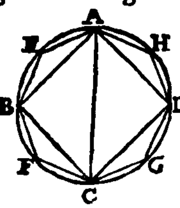
Omnis conus tertia pars eſt cylindri, qui eandem baſim habet & altitudinem æqualem.

Habeat conus eandem baſim quam cylindrus, videlicet circulum ABCD, & altitudinem æqualem. Dico conum tertiam partem eſſe cylindri, hoc eſt cylindrum coni triplum eſſe. Si enim cylindrus non ſit triplus coni, vel major erit quam triplus, vel minor. ſit primo major quam triplus. & deſcribatur in ABCD circulo quadratum ABCD. ergo quadratum ABCD majus eſt quam dimidium ABCD circuli. & à quadrato ABCD erigatur priſma æque altum cylindro. quod quidem priſma majus erit quam cylindri dimidium; quoniam ſi circa circulum ABCD quadratum deſcribatur, erit inſcriptum quadratum dimidium circumſcripti. & ſint ab eiſdem baſibus erecta ſolida parallelepipeda æque alta, nimirum priſmata ipſa. quare priſmata inter ſe ſunt [a] ut baſes. & priſma igitur erectum à quadrato ABCD dimidium eſt priſmatis erecti à quadrato quod circa circulum ABCD deſcribitur. atque eſt cylindrus minor priſmate erecto à quadrato quod deſcribitur circa circulum ABCD. priſma igitur erectum à quadrato ABCD æque altum cylindro, dimidio cylindri eſt majus. ſecentur circumferentiæ AB BC CD DA bifariam in punctis E F G H, & AE EB BF FC CG GD DH



[a] 2. Cor. 7. hujus.

HA jungantur. unumquodque igitur triangulorum AEB BFC CGD DHA majus [b] est dimidio portionis circuli ABCD, in qua consistit. erigantur ab unoquoque triangulorum AEB BFC CGD DHA prismata æque alta cylindro. ergo & unumquodque erectorum prismatum majus est dimidio portionis cylindri quæ ad ipsum est. quoniam si per puncta E F G H parallelæ ipsis AB BC CD DA ducantur, & compleantur in ipsis AB BC CD DA parallelogramma, à quibus solida parallelepipeda æque alta cylindro erigantur: erunt uniuscujusque erectorum dimidia prismata ea [a] quæ sunt in triangulis AEB BFC CGD DHA. & sunt cylindri portiones erectis solidis parallelepipedis minores. ergo & prismata quæ in triangulis AEB BFC CGD DHA majora sunt dimidio portionum cylindri quæ ad ipsa sunt. itaque reliquas circumferentias secantes bifariam, jungentesque rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes prismata æque alta cylindro, & hoc semper facientes, tandem relinquemus quasdam portiones cylindri quæ [c] minores erunt excessu, quo cylindrus coni triplum superat. relinquantur jam, & sint AE EB BF FC CG GD DH HA. reliquum igitur prisma, cujus basis quidem polygonum AEBFCGDH, altitudo autem eadem quæ cylindri, majus est quam triplum coni. sed prisma cujus basis AEBFCGDH polygonum, & altitudo eadem quæ cylindri, triplum [d] est pyramidis, cujus basis polygonum AEBFCGDH, vertex autem idem qui coni. & pyramis igitur cujus basis polygonum AEBFCGDH, vertex autem idem qui coni, major est cono qui basim habet ABCD circulum. sed & minor: (ab ipso enim comprehenditur.) quod fieri non potest. non igitur cylindrus major erit quam triplus coni. Dico insuper neque cylindrum minorem esse quam triplum coni. Si enim fieri potest, sit cylindrus minor quam triplus coni. erit invertendo conus major quam tertia pars cylindri, describatur in ABCD circulo quadratum ABCD. ergo quadratum ABCD majus est quam dimidium ABCD circuli. & à quadrato ABCD erigatur pyramis, verticem habens eundem quem conus; pyramis igitur erecta major est quam coni dimidium: quoniam, ut ante demonstravimus, si circa circulum quadratum describatur, erit quadratum ABCD dimidium ejus quod circa circulum descriptum est: & si à quadratis erigantur solida parallelepipeda æque alta cono, quæ & prismata appellantur

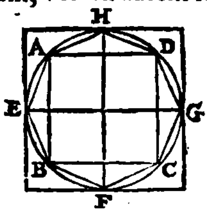


[b] ostenditur. ad 2. hujus.

[c] Lemma hujus.

[d] 1. Cor. 7. hujus.

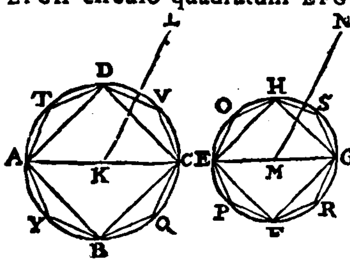
pellantur erit [a] quod à quadrato ABCD erigitur, dimidium ejus, quod erectum est à quadrato circa circulum descripto; etenim inter se sunt ut bases. quare & tertiæ partes ipsarum. pyramis igitur cujus basis quadratum ABCD, dimidia est ejus pyramidis quæ à quadrato circa circulum descripto erigitur. sed pyramis erecta à quadrato descripto circa circulum, major est cono; ipsum namque comprehendit. ergo pyramis cujus basis ABCD quadratum, vertex autem idem qui coni, major est quam coni dimidium. secentur circumferentiæ AB BC CD DA bifariam in punctis E F G H. & jungantur AE EB BF FC CG GD DH HA. & unumquodque igitur triangulorum AEB BFC CGD DHA majus est quam dimidium portionis circuli ABCD, in qua consistit. erigantur ab unoquoque triangulorum AEB BFC CGD DHA pyramides verticem habentes eundem quem conus. ergo & unaquæque pyramidum eodem modo eractarum major est quàm dimidium portionis coni quæ est ad ipsam. itaque reliquas circumferentias secantes bifariam, jungentesque rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides verticem habentes eundem quem conus, & hoc semper facientes, [c] relinquemus tandem quasdem coni portiones quæ minores erunt excessu quo conus tertiam cylindri partem superat. relinquantur; & sint quæ in ipsis AE EB BF FC CG GD DH HA. reliqua igitur pyramis cujus basis polygonum AEBFCGDH, & vertex idem qui coni, major est quam tertia cylindri pars. sed pyramis cujus basis polygonum AEBFCGDH, vertex autem idem qui coni, tertia pars est prismatis cujus basis polygonum AEBFCGDH, altitudo autem eadem quæ cylindri. prisma igitur cujus basis AEBFCGDH polygonum, & altitudo eadem quæ cylindri, majus est cylindro cujus basis est circulus ABCD. sed & minus: (ab ipso enim comprehenditur.) quod fieri non potest. non igitur cylindrus minor est quam triplus coni. ostensum autem est neque majorem esse quam triplum. ergo cylindrus coni triplus sit necesse est; ac propterea conus tertia pars cylindri. Omnis igitur conus tertia pars est cylindri, eandem quam ipse basim habentis, & altitudinem æqualem. Quod demonstrare oportebat.



PROP. XI. THEOR.

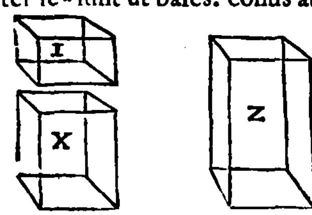
Coni & cylindri qui eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases.

Sint in eadem altitudine coni & cylindri, quorum bases circuli ABCD EFGH, axes autem KL MN, & diametri basium AC EG. Dico ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita esse conum AL ad EN conum. Si enim non ita sit; erit ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad aliquod solidum minus cono EN, vel ad majus. sit primo ad minus quod sit X. & quo minus est solidum X cono EN, ei æquale sit I solidum. conus igitur EN ipsis solidis X I est æqualis. describatur in EFGH circulo quadratum EFGH, quod majus est dimidio circulo. erigatur à quadrato EFGH pyramis æque alta cono. pyramis igitur erecta major est coni dimidio. nam si circa circulum quadratum describamus, & ab ipso erigamus pyramidem



æque altam cono; erit inscripta pyramis pyramidis circumscriptæ dimidium: etenim inter se [a] sunt ut bases. conus autem circumscripta pyramide est minor. ergo pyramis cujus basis quadratum EFGH, vertex autem idem qui coni, major est coni dimidio. secentur circumferentiæ EF FG GH HE bsiariam in punctis P R S O; & OE EP

[a] 6. hujus.



PF FR RG GS SH HO jungantur. unumquodque igitur triangulorum HOE EPF FRG GSH majus est quam dimidium segmenti circuli in quo consistit. erigatur ab unoquoque triangulorum HOE EPF FRG GSH pyramis æque alta cono. ergo & unaquæque erectarum pyramidum major est dimidio portionis coni, quæ est ad ipsam. itaque reliquas circumferentias secantes bifariam, & jungentes rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides æque altas cono, atque hoc semper facientes, [b] relinquemus tandem aliquas portiones coni, quæ solido I minores erunt. relinquantur, & sint quæ in ipsis HO OE EP PF FR RG GS SH.

[b] Lemma hujus.

SH. reliqua igitur pyramis cujus basis polygonum HOEPFRGS, altitudo autem eadem quæ coni, major est solido X. describatur in circulo ABCD polygono HOEPFRGS simile & similiter positum polygonum DTAYBQCV, & ab ipso erigatur pyramis æque alta cono AL. quoniam igitur est ut quadratum ex AC ad quadratum ex EG, ita [c] DTAYBQCV polygonum ad polygonum HOEPFRGS; ut autem quadratum ex AC ad quadratum ex EG, ita ABCD circulus [d] ad circulum EFGH: erit ut ABCD circulus ad circulum EFGH, [e] ita polygonum DTAYBQCV ad polygonum HOEPFRGS. sed ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad X solidum: & ut polygonum DTAYBQCV ad polygonum HOEPFRGS, [a] ita pyramis cujus basis DTAYBQCV polygonum, vertex autem punctum L, ad pyramidem cujus basis polygonum HOEPFRGS, & vertex punctum N. ut igitur conus AL ad X solidum, ita pyramis, cujus basis polygonum DTAYBQCV, & vertex punctum L, ad pyramidem cujus basis polygonum HOEPFRGS, & vertex N punctum. conus autem AL major est pyramide quæ est in ipso. majus igitur est solidum X pyramide quæ est in cono EN. sed & ostensum est minus. quod fieri non potest. non igitur ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita est AL conus ad solidum aliquod minus cono EN. similiter demonstrabitur neque ut EFGH circulus ad circulum ABCD, ita esse conum EN ad aliquod solidum minus cono AL. Dico præterea neque esse ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita AL conum ad aliquod solidum majus cono EN. Si enim fieri potest, sit ad solidum majus, quod sit Z. ergo invertendo ut EFGH circulus ad circulum ABCD ita erit solidum Z ad AL conum. sed cum sit solidum Z majus cono EN; erit ut solidum Z ad AL conum, ita conus EN ad aliquod solidum minus cono AL. & igitur ut EFGH circulus ad circulum ABCD, ita conus EN ad aliquod solidum minus cono AL, quod fieri non posse ostensum est. non igitur ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad aliquod solidum majus cono EN. ostensum autem est neque esse ad minus. ergo ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita est conus AL ad EN conum. sed ut conus ad conum, ita [f] est cylindrus ad cylindrum; est enim uterque [f] utriusque [g] triplus. & igitur ut ABCD circulus ad circulum [g] EFGH, ita in ipsis cylindri æque alti conis. Ergo coni & cylindri qui eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases. Quod demonstrare oportebat.

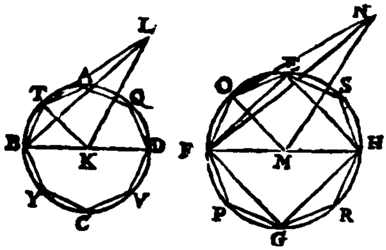
c 1. hujus.
d 2. hujus.
e 11. quinti.
f 15. quinti.
g 10. hujus.

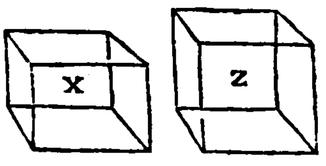
PROP.

PROP. XII. THEOR.

Similes coni & cylindri inter se sunt in triplicata proportione diametrorum quæ sunt in basibus.

Sint ſimiles coni & cylindri, quorum baſes quidem circuli ABCD EFGH, diametri vero baſium BD FH, & axes conorum vel cylindorum KL MN. Dico conum cujus baſis ABCD circulus, vertex autem punctum L, ad conum cujus baſis circulus EFGH, vertex autem N punctum, triplicatam habere proportionem ejus quam habet BD ad FH. Si enim non habet conus ABCDL ad conum EFGHN triplicatam proportionem ejus quam BD habet ad FH, habebit ABCDL conus ad aliquod ſolidum minus cono EFGHN triplicatam proportionem, vel, ad majus. Habeat primo ad minus, quod ſit X. & deſcribatur in EFGH. circulo quadratum EFGH. quadratum igitur EFGH majus eſt dimidio EFGH circuli. & erigatur à quadrato EFGH pyramis æque alta cono. ergo erecta pyramis major eſt quam coni dimidium. itaque ſecentur EF FG GH HE circumferentiæ bifariam in punctis O P R S, & jungantur EO OF FP PG GR RH HS SE. unumquodque igitur triangulorum EOF FPG GRH HSE majus eſt dimidio ſegmenti circuli EFGH, in quo conſiſtit. & erigatur ab unoquoque triangulorum EOF FPG GRH HSE pyramis eundem verticem habens quem conus. ergo & unaquæque erectarum pyramidum major eſt quam dimidium portionis coni, quæ eſt ad ipſam. ſecantes igitur reliquas circumferentias bifariam, jungenteſque rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides eundem habentes verticem quem conus, atque hoc ſemper facientes, [a] tandem relinquemus quaſdam coni portiones quæ minores erunt exceſſu quo conus EFGHN ipſum X ſolidum ſuperat. relinquantur, & ſint quæ in ipſis EO OF FP PG GR RH HS SE. reliqua igitur pyramis cujus baſis quidem polygonum





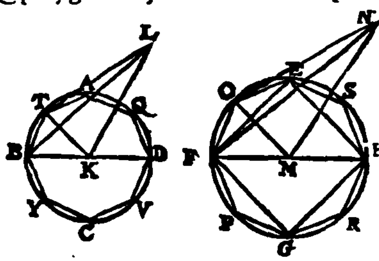
a Lemma hujus.

gonum EOFPGRHS, vertex autem N punctum, major est solido X. describatur etiam in circulo ABCD, polygono EOFPGRHS simile & similiter positum polygonum ATBYCVDQ: à quo erigatur pyramis eundem verticem habens quem conus: & triangulorum continentium pyramidem cujus basis quidem est polygonum ATBYCVDQ, vertex autem punctum L, unum sit LBT; triangulorum vero continentium pyramidem cujus basis EOFPGRHS polygonum, & vertex punctum N, unum sit NFO: & jungantur KT MO. quoniam igitur conus ABCDL similis est cono EFGHN, erit [b] ut BD ad FH, ita KL axis ad axem MN, ut autem BD ad FH, [c] ita BK ad FM. itaque ut BK ad FM ita KL ad MN: & permutando ut BK ad KL, ita FM ad MN. & cum perpendicularis utraque est, & circa æquales angulos BKL FMN latera sunt proportionalia: simile igitur [d] est BKL triangulum triangulo FMN. Rursus quoniam est ut BK ad KT, ita FM ad MO, & circa æquales angulos BKT FMO latera sunt proportionalia; etenim quæ pars est angulus BKT quatuor rectorum qui sunt ad K centrum, eadem est pars & angulus FMO quatuor rectorum qui sunt ad centrum M; erit [b] triangulum BKT triangulo FMO simile. & quoniam ostensum est ut BK ad KL, ita esse FM ad MN; æqualis autem est BK ipsi KT, & FM ipsi MO: erit ut TK ad KL, ita OM ad MN: & circa æquales angulos TKL OMN latera sunt proportionalia; recti enim sunt: triangulum igitur LKT simile est triangulo MNO. quod cum ob similitudinem triangulorum BKL FMN, sit ut LB ad BK, ita NF ad FM; ob similitudinem vero triangulorum BKT FMO, ut KB ad BT, ita MF ad FO: erit ex æquali ut LB ad BT, ita NF ad FO. rursus cum ob similitudinem triangulorum LTK NOM, sit ut LT ad TK, ita NO ad OM; & ob similitudinem triangulorum KBT OMF, ut KT ad TB, ita MO ad OF: ex æquali erit ut LT ad TB, ita NO ad OF, ostensum autem est & ut TB ad BL, ita OF ad FN. quare rursus ex æquali ut TL ad LB, ita ON ad NF. triangulorum igitur LTB NOF proportionalia sunt latera, ideoque æquiangula sunt LTB NOF triangula, & inter se [e] similia. quare & pyramis cujus basis triangulum BKT, vertex autem L punctum, similis est pyramidi cujus basis FMO triangulum, & vertex punctum N; similibus enim planis continentur, & multitudine æqualibus. pyramides autem similes, & quæ triangulares bases habent, in [f] triplicata sunt proportione homologorum laterum. ergo pyramis BKTL ad pyramidem FMON triplicatam habet proportionem ejus quam BK habet ad FM. similiter à punctis quidem A Q D V C Y ad K, à punctis vero E S H R G P ad M ducentes rectas lineas

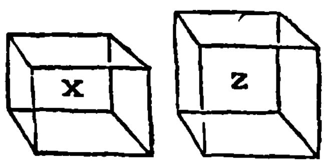
[b] 24. Def. undecimi.
[c] 15. quinti.
[d] 6. sexti.
[e] 5. sexti.
[f] 8. hujus.

lineas, & à triangulis erigentes pyramides vertices eosdem habentes quos coni, ostendemus & unamquamque pyramidum ejusdem ordinis ad unamquamque alterius ordinis triplicatam proportionem habere ejus quam habet BK latus ad homologum latus MF, hoc est quam BD ad

ſ 12. quinti. FH. sed ut unum antecedentium ſ ad unum consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequentia. est igitur & ut BKTL pyramis ad pyramidem FMON, ita tota pyramis cujus basis ATBYCVDQ polygonum, vertex autem punctum L, ad totam pyramidem cujus basis polygonum EOFPGRHS, & vertex punctum N. quare & pyramis cujus basis ATBYCVDQ polygonum, vertex autem punctum L, ad pyramidem cujus basis polygonum,



EOFPGRHS, & vertex punctum N, triplicatam proportionem habet ejus quam BD habet ad FH. ponitur autem conus cujus basis circulus ABCD vertex autem punctum L, ad solidum X triplicatam proportionem habere ejus quam BD ad FH. ut igitur conus cujus basis circulus ABCD, vertex autem punctum L, ad solidum X, ita est



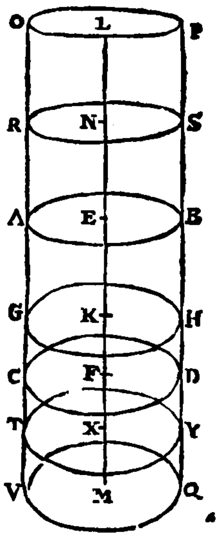
pyramis cujus basis ATBYCVDQ polygonum, vertex autem punctum L, ad pyramidem cujus basis polygonum EOFPGRHS, & vertex punctum N. dictus autem conus major est pyramide quæ in ipso; etenim eam comprehendit. majus igitur est & solidum X pyramide cujus basis polygonum EOFPGRHS, vertex autem punctum N. sed & minus. quod fieri non potest. non igitur conus cujus basis ABCD circulus, & vertex punctum L, ad aliquod solidum minus cono cujus basis circulus EFGH, & vertex N punctum, triplicatam proportionem habet ejus quam BD habet ad FH. Similiter demonstrabimus neque conum EFGHN ad aliquod solidum minus cono ABCDL triplicatam proportionem habere ejus quam habet FH ad BD. Itaque dico neque ABCDL conum ad solidum majus cono EFGHN triplicatam habere proportionem ejus quam BD habet ad FH. Si enim fieri potest, habeat ad aliquod solidum majus, quod sit Z. invertendo

vertendo igitur, solidum Z ad conum ABCDL triplicatam proportionem habet ejus quam FH ad BD. cum autem est solidum Z majus cono EFGHN; erit ut solidum Z ad conum ABCDL, ita EFGHN conus ad aliquod solidum minus cono ABCDL. ergo & conus EFGHN ad solidum aliquod minus cono ABCDL triplicatam proportionem habebit ejus quam FH habet ad BD, quod fieri non posse demonstratum est. non igitur ABCDL conus ad solidum aliquod majus cono EFGHN, triplicatam proportionem habet ejus quam BD ad FH. ostensum autem est neque ad minus. Quare conus ABCDL ad EFGHN conum triplicatam proportionem habet ejus quam BD ad FH. ut autem conus ad conum, ita [h] cylindrus ad cylindrum. cylindrus enim in eadem existens basi in qua conus, & ipsi æque altus, coni [i] triplus est, cum [i] ostensum sit, omnem conum tertiam partem esse cylindri eandem quam ipse basim habentis, & æqualem altitudinem. ergo & cylindrus ad cylindrum triplicatam proportionem habebit ejus quam BD habet ad FH. Similes igitur coni & cylindri inter se sunt in triplicata proportione diametrorum quæ sunt in basibus. Quod demonstrare oportebat.

[h] 15. quint.
[i] 10. hujus.

PROP. XIII. THEOR.

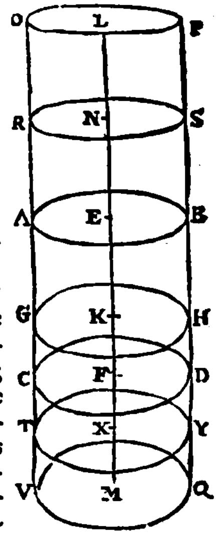
Si cylindrus plano secetur oppositis planis parallelo, erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.



Cylindrus enim AD plano GH secetur oppositis planis AB CD parallelo, & occurrat axi EF in K puncto. Dico ut BG cylindrus ad cylindrum GD, ita esse EK axem ad axem KF. Producatur enim EF axis ex utraque parte ad puncta L, M; & ipsi quidem EK axi ponantur æquales quotcunque EN NL; ipsi vero FK æquales quotcunque FX XM: & per puncta L N X M ducantur plana ipsis AB, CD parallela: atque in planis per L N X M circa centra L N X M intelligantur circuli OP RS TY VQ æquales ipsis AB CD; & cylindri PR RB DT TQ intelligantur. quoniam igitur axes LN NE EK inter se sunt æquales, erunt cylindri PR RB BG inter se [a] ut bases. æquales autem sunt bases. ergo & cylindri PR RB BG sunt æquales. quod cum axes LN NE EK inter se

[a] 11. hujus.

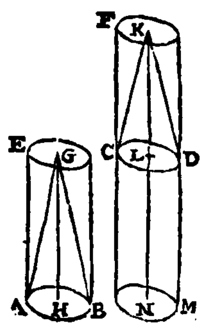
se æquales sint, itemque cylindri PR RB BG inter se æquales; sitque ipsorum LN NE EK multitudo æqualis multitudini ipsorum PR RB BG: quotuplex est axis KL ipsius EK axis, totuplex erit & PG cylindrus cylindri GB. eadem ratione & quotuplex est MK axis ipsius axis KF, totuplex est & QG cylindrus cylindri GD. & si quidem axis KL sit æqualis axi KM, erit & PG cylindrus cylindro GQ æqualis; si autem axis LX major sit axe KM, & cylindrus PG major erit cylindro GQ; & si minor, minor. quatuor igitur existentibus magnitudinibus, videlicet axibus EK KF, & cylindris BG GD, sumpta sunt æque multiplicia, axis quidem EK, & BG cylindri, nempe axis KL, & cylindrus PG; axis vero KF, & cylindri GD æque multiplicia, axis scilicet KM, & GQ cylindrus: & demonstratum est si LK axis superat autem KM, & PG cylindrum superare cylindrum GQ; & si æqualis æqualem; & si minor minorem. est b igi-
b 5. Def. quinti. tur axis EK ad axem KF, ut BG cylindrus ad cylindrum GD. Quare si cylindrus plano secetur oppositis planis parallelo, erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. Quod demonstrare oportebat.



PROP. XIV. THEOR.

In æqualibus basibus existentes coni & cylindri, inter se sunt ut altitudines.

Sint enim in æqualibus basibus AB CD, cylindri EB FD. Dico ut EB cylindrus ad cylindrum FD, ita esse GH axem ad axem KL. Producatur enim KL axis ad punctum N, ponaturque ipsi GH axi æqualis LN; & circa axem LN intelligatur cylindrus CM. quoniam igitur cylindri EB CM eandem habent al-
a 11. hujus. titudinem, inter se a sunt ut bases. bases autem sunt æquales. ergo & cylindri EB CM inter se æquales erunt. & quoniam cylindrus FM secatur plano CD,
b 13. hujus. oppositis planis parallelo, erit b ut CM



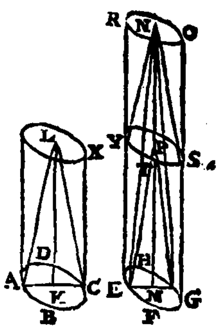
cylin-

cylindrus ad cylindrum FD, ita axis LN ad KL axem. æqualis autem eſt cylindrus quidem CM cylindro EB; axis vero LN axi GH. eſt igitur ut EB cylindrus ad cylindrum FD, ita axis GH ad KL axem. ut autem EB cylindrus ad cylindrum FD, ita [c] ABG conus ad conum CDK; cylindri ſunt c 15. quinti.
enim conorum [d] tripli. ergo & ut GH axis ad axem KL, ita d 10. hujus.
eſt ABG conus ad conum CDK, & cylindrus EB ad FD cylindrum. In baſibus igitur æqualibus exiſtentes coni & cylindri, inter ſe ſunt ut altitudines. Quod demonſtrare oportebat.

PROP. XV. THEOR.

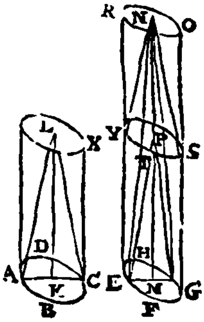
Æqualium conorum & cylindrorum baſes & altitudines reciproce ſunt proportionales; & quorum conorum & cylindrorum baſes & altitudines reciproce ſunt proportionales, illi inter ſe ſunt æquales.

Sint æquales coni & cylindri, quorum baſes quidem ABCD EFGH circuli, & diametri ipſorum AC EG; axes autem KL MN; qui quidem & conorum vel cylindorum ſunt altitudines: & compleantur cylindri AX EO. Dico cylindrorum AX EO baſes & altitudines reciproce proportionales eſſe, hoc eſt, ut ABCD baſis ad baſim EFGH, ita eſſe altitudinem MN ad altitudinem KL. altitudo enim KL vel æqualis eſt altitudini MN, vel non æqualis. Sit primo æqualis. atque eſt AX cylindrus æqualis cylindro EG. qui autem eandem habent altitudinem coni & cylindri inter ſe ſunt [a] ut baſes. æqualis a 11. hujus.
igitur eſt baſis ABCD baſi EFGH. eſt igitur ut baſis ABCD ad EFGH baſim, ita MN altitudo ad altitudinem KL. Non ſit autem altitudo KL altitudini MN æqualis, ſed major ſit MN, & auferatur, ab ipſa MN altitudini LK æqualis PM,



& per P ſecetur EO cylindrus plano TYS oppoſitis planis circulorum EFGH RO parallelo, intelligaturque cylindrus ES cujus baſis quidem EFGH circulus, altitudo autem PM. quoniam igitur AX cylindrus æqualis eſt cylindro EO, alius autem aliquis eſt cylindrus ES; erit ut AX cylindrus ad cylindrum ES, [b] ita cylindrus EO ad ES cylin- b 7. quinti.
drum. ſed ut AX cylindrus ad cylindrum ES, [a] ita baſis ABCD ad EFGH baſim; cylindri enim AX ES eandem habent altitudinem: ut autem cylindrus EO ad ES cylindrum

c 13 hujus. drum [c], ita MN altitudo ad altitudinem MP; nam cylindrus EO secatur plano TYS, oppositis planis parallelo. est igitur ut ABCD basis ad basim EFGH, ita altitudo MN ad MP altitudinem. æqualis autem est MP altitudo altitudini KL. quare ut basis ABCD ad EFGH basim, ita MN altitudo ad altitudinem KL. æqualium igitur cylindrorum AX EO bases & altitudines reciproce sunt proportionales.

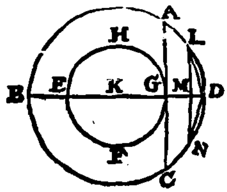


Sed si cylindrorum AX EO bases & altitudines sunt reciproce proportionales: hoc est, ut ABCD basis ad basim EFGH, ita altitudo MN ad KL altitudinem. Dico AX cylindrum cylindro EO æqualem esse. Iisdem enim constructis; quoniam ut ABCD basis ad basim EFGH, ita altitudo MN ad KL altitudinem; altitudo autem KL æqualis est altitudini MP: erit ut ABCD basis ad basim EFGH, ita MN altitudo ad altitudinem MP.
d 11. hujus. sed ut ABCD basis ad basim EFGH, [d] ita AX cylindrus ad cylindrum ES; eandem enim habent altitudinem: ut autem MN altitudo ad altitudinem MP, ita [c] cylindrus EO ad ES cylindrum. est igitur ut AX cylindrus ad cylindrum ES, ita cylindrus EO ad ES cylindrum. cylindrus igitur AX cylin-
e 9. quinti. dro EO est [e] æqualis. similiter autem & in conis. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XVI. PROBL.

Duobus circulis circa idem centrum existentibus, in majori polygonum æqualium & numero parium laterum describere, quod minorem circulum non tangat.

Sint dati duo circuli ABCD EFGH circa idem centrum K. Oportet in majori circulo ABCD polygonum æqualium & numero parium laterum describere, non tangens minorem circulum EFGH. Ducatur per K centrum recta linea BD, atque à puncto G ipsi BD ad rectos angulos ducatur AG, & ad C producatur, quæ
a 16. tertii. AC circulum EFGH [a] tanget.



Itaque circumferentiam BAD bifariam secantes, & ejus di-
b Lemma hujus. midium rursus bifariam, & hoc semper facientes, [b] tandem relinquemus

relinquemus circumferentiam minorem ipsa AD. relinquatur sitque LD: & à puncto L ad BD perpendicularis [c] agatur LM, & ad N producatur; junganturque LD DN. ergo LD ipsi DN est [d] æqualis, & quoniam LN parallela est AC, & AC tangit circulum EFGH; ipsa LN circulum EFGH non tanget. & multo minus tangent circulum EFGH rectæ lineæ LD DN. quod si ipsi LD æquales deinceps circulo ABCD aptabimus, describetur in eo polygonum æqualium & numero parium laterum non tangens minorem circulum EFGH. Quod facere oportebat.

c 12. primi.
d 3. & 29. tertii.

PROP. XVII. PROBL.

Duabus sphæris circa idem centrum existentibus, in majori solidum polyhedrum describere, quod minoris sphæræ superficiem non tangat.

Intelligantur duæ sphæræ circa idem centrum A. Oportet in majori sphæra describere solidum polyhedrum minoris sphæræ superficiem non tangens. Secentur sphæræ plano aliquo per centrum ducto: sectiones erunt circuli; quoniam diametro manente & semicirculo circumducto sphæra facta [a] est: ergo in quacunque positione semicirculum intelligamus, quod per ipsum producitur planum in superficie sphæræ circulum efficiet; & constat circulum esse maximum, cum diameter sphæræ, quæ & semicirculi diameter est; major [b] sit omnibus rectis lineis quæ in circulo vel sphæra ducuntur. sit igitur in majori quidem sphæra circulus BCDE, in minori autem circulus FGH; & ducantur ipsorum duæ diametri ad rectos inter se angulos BD CE. occurrat BD minori circulo in G; ducatur à puncto G ipsi AG ad rectos angulos GL, & jungatur AL. Itaque circumferentiam EB bifariam secantes, & dimidium ipsius bifariam, atque hoc semper facientes, tandem relinquemus quandam circumferentiam minorem ea parte circumferentiæ circuli BCD, quæ subtenditur à recta æquali ipsi GL. relinquatur, sitque circumferentia BK. minor igitur est recta BK quam GL; eritque BK latus polygoni æqualium & parium numero laterum non tangentis minorem circulum. sint igitur polygoni latera in quadrante circuli BE, rectæ BK KL LM ME; & juncta K A producatur ad N: & à puncto A plano circuli BCDE ad rectos angulos [c] constituatur AX, quæ superficiei sphæræ in puncto X occurrat, & per AX & utramque ipsarum BD KN plana ducantur, quæ ex jam dictis efficient in superficie sphæræ

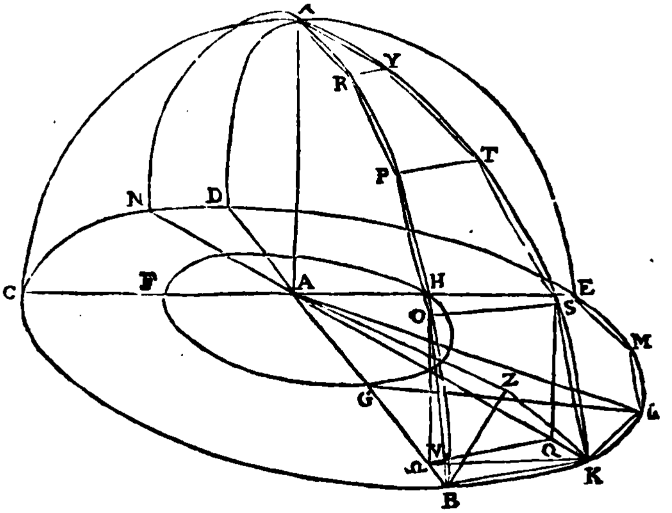
a Def. 14. undecimi.
b 15. tertii.
c 12. undecimi.

 maxi-

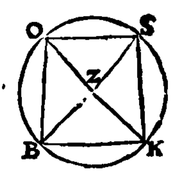
maximos circulos. itaque efficiant, & ſint in diametris BD KN eorum ſemicirculi BXD KXN. quoniam igitur XA recta eſt ad planum circuli BCDE, erunt omnia plana quæ per ipſam XA tranſeunt, ad idem circuli planum d recta: quare & ſemicirculi BXD KXN recti ſunt ad idem planum. & quoniam ſemicirculi BED BXD KXN æquales ſunt in æqualibus enim conſiſtunt BD KN diametris; erunt & eorum quadrantes BE BX KX inter ſe æquales. quot igitur latera polygoni ſunt in quadrante BE, tot erunt & in quadrantibus BX KX, æqualia ipſis BK KL LM ME. deſcribantur, & ſint BO OP PR RX, KS ST TY YX: junganturque SO TP YR; & ab ipſis OS ad planum circuli BCDE perpendiculares ducantur. cadent hæ in e communes plano-

d 18. undecimi.

e 38. undecimi.



rum ſectiones BD KN, quoniam & plana ſemicirculorum BXD KXN ad planum circuli BCDE recta ſunt. itaque cadant, ſintque OV SQ, & VQ jungatur. cum igitur in æqualibus ſemicirculis BXD KXN, æquales circumferentiæ ſumptæ ſint BO KS, & ductæ perpendiculares OV SQ, erit OV quidem ipſi SQ æqualis, BV vero æqualis KQ. eſt autem & tota BA æqualis toti KA. ergo & reliqua VA reliquæ QA eſt æqualis. igitur ut BV ad VA, ita KQ ad QA: ideoque VQ ipſi BK parallela f eſt. quod cum



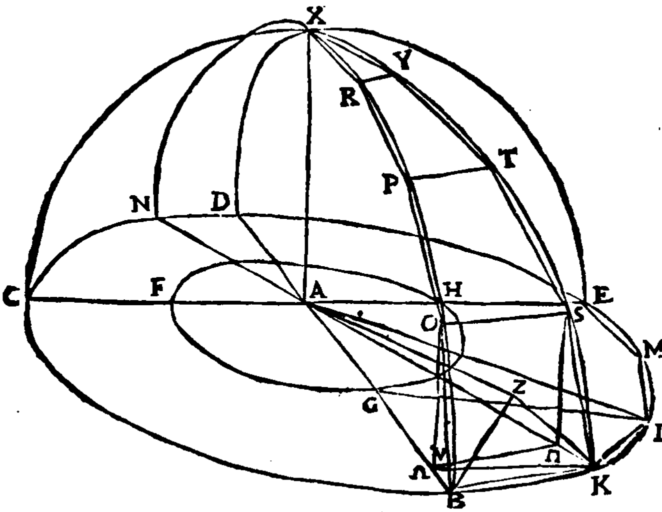
f 2. ſexti.

utra-

utraque ipsarum OV SQ recta sit ad circuli BCDE planum, erit OV ipsi SQ *g* parallela. ostensa autem est & ipsi æqualis. ergo QV SO æquales *h* sunt & parallelæ. & quoniam QV parallela est ipsi SO, sed & parallela ipsi KB; erit & *i* SO ipsi KB parallela; & ipsas conjungunt BO KS. ergo & KBOS quadrilaterum est in uno *k* plano; nam si duæ rectæ lineæ parallelæ sint, & in utraque ipsarum quævis puncta sumantur, quæ dicta puncta conjungit recta linea in eodem est plano, in quo parallelæ. & eadem ratione utraque ipsorum quadrilaterorum SOPT TPRY in uno sunt plano. est autem in *l* uno plano & triangulum YRX. si igitur à punctis O S P T R Y ad A ductas rectas lineas intelligamus, constituetur quædam figura solida polyhedra inter circumferentias BX KX, ex pyramidibus, composita, quarum bases quidem KBOS SOPT TPRY quadrilatera, & triangulum YRX; vertex autem punctum A. quòd si in unoquoque latere KL LM ME, quemadmodum in KB eadem construamus, & in reliquis tribus quadrantibus, & in reliquo hemisphærio, constituetur figura quædam polyhedra in sphæra descripta, & composita ex pyramidibus, quarum bases sunt quadrilatera jam dicta, & YRX triangulum, & quæ ejusdem ordinis sunt, vertex autem A punctum. Dico dictam figuram polyhedram non tangere superficiem minoris sphæræ, in qua est circulus FGH. Ducatur à *m* puncto A ad planum quadrilateri KBSO perpendicularis AZ, cui in puncto Z occurrat, & BZ ZK jungantur. itaque quoniam AZ recta est ad quadrilateri KBSO planum, & ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt, & in eodem sunt plano *n* rectos angulos faciet. ergo AZ ad utramque ipsarum BZ ZK est perpendicularis. & quoniam AB est æqualis AK, erit & quadratum ex AB quadrato ex AK æquale: & sunt quadrato quidem ex AB æqualia *o* quadrata ex AZ ZB, angulus enim ad Z rectus est; quadrato autem ex AK æqualia ex AZ ZK quadrata. ergo quadrata ex AZ ZB quadratis ex AZ ZK æqualia sunt. commune auferatur quadratum ex AZ. reliquum igitur quod ex BZ reliquo quod ex ZK est æquale: ergo recta BZ rectæ ZK æqualis. Similiter ostendemus, & quæ à puncto Z ad puncta O S ducuntur utrique ipsarum BZ ZK æquales esse. circulus igitur centro Z & intervallo una ipsarum ZB ZK descriptus etiam per puncta O S transibit. & quoniam in circulo est BKSO quadrilaterum, & sunt æquales OB BK KS & minor OS, erit angulus BZK obtusus; ideoque BK major quam BZ. sed & GL quam BK est major multo. igitur major est GL quam BZ. & quadratum ex GL quadrato ex BZ majus. & cum æqualis AL ipsi

g 6. undecimi.
h 33. primi.
i 9. undecimi.
k 7. undecimi.
l 2. undecimi.
m 11. undecimi.
n 3. Def. undecimi.
o 47. primi.

ipsi AB, erit quadratum ex AL quadrato ex AB æquale: sed quadrato quidem ex AL æqualia sunt quadrata ex AG GL, quadrato autem ex AB æqualia quadrata ex BZ ZA; quadrata igitur ex AG GL æqualia sunt quadratis ex BZ ZA; quorum quadratum ex BZ minus est quadrato ex GL: ergo reliquum ex ZA quadratum majus est quadrato ex AG;



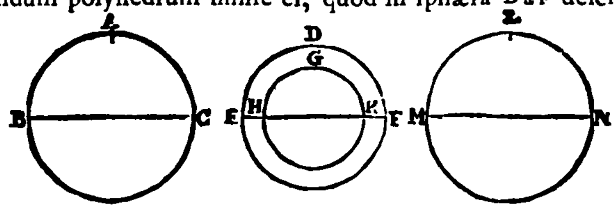
& ob id recta linea ZA major est recta AG. atque est AZ quidem ad unam polyhedri basim, AG vero ad superficiem minoris sphæræ perpendicularis. quare polyhedrum minoris sphæræ superficiem non tanget. Duabus igitur sphæris circa idem centrum existentibus, in majori solidum descriptum est minoris sphæræ superficiem non tangens. Quod facere oportebat.

Cor. Quod si etiam in altera sphæra solido polyhedro descripto, in sphæra BCDE simile solidum polyhedrum describatur; habebit solidum polyhedrum in sphæra BCDE ad solidum polyhedrum in altera sphæra triplicatam proportionem ejus, quam diameter sphæræ BCDE habet ad alterius sphæræ diametrum. divisis enim solidis in pyramides numero æquales, & ejusdem ordinis: erunt pyramides similes. similes autem pyramides inter se in triplicata sunt proportione homologorum laterum. ergo pyramis cujus basis est KBOS quadrilaterum, vertex autem punctum A, ad ad pyramidem in altera sphæra ejusdem ordinis triplicatam proportionem habet ejus, quam latus homologum habet ad homologum latus; hoc est, quam habet AB ex centro sphæræ circa centrum A existentis, ad eam, quæ est ex centro alterius sphæræ. similiter & unaquæque pyramis earum, quæ sunt in sphæra circa centrum A, ad unamquamque pyramidum ejusdem ordinis, quæ sunt in altera sphæra, triplicatam proportionem habebit ejus, quam habet AB ad eam, quæ est ex centro alterius sphæræ. Et ut unum antecedentium ad unum consequentium, ita antecedentia omnia ad omnia consequentia. quare totum solidum polyhedrum, quod est in sphæra circa centrum A, ad totum solidum polyhedrum, quod in altera sphæra, triplicatam proportionem habebit ejus, quam habet AB ad eam quæ est ex centro alterius sprææ, hoc est, quam habet BD diameter ad alterius sphæræ diametrum.

PROP. XVIII. THEOR.

Sphæræ inter se in triplicata sunt proportione suarum diametrorum.

Intelligantur sphæræ ABC DEF; quarum diametri BC EF. Dico ABC sphæram ad sphæram DEF triplicatam proportionem habere ejus, quam habet BC ad EF. Si enim non ita est, sphæra ABC ad sphæram minorem ipsa DEF, vel ad majorem, triplicatam proportionem habebit ejus, quam habet BC ad EF. Habeat primo ad minorem, videlicet ad GHK. & intelligatur sphæra DEF circa idem centrum, circa quod sphæra GHK: describaturque in majori sphæra DEF solidum polyhedrum non tangens [a] minorem sphæram GHK in superficie; & in sphæra ABC describatur solidum polyhedrum simile ei, quod in sphæra DEF descri- [a] 17. hujus.



ptum est. solidum igitur polyhedrum, quod in sphæra ABC, ad solidum polyhedrum, quod in sphæra DEF, triplicatam [b] proportionem habet ejus, quam BC ad EF. habet autem ABC sphæra ad sphæram GHK triplicatam proportionem ejus, quam BC ad EF. ergo ut ABC sphæra ad sphæram [b] Cor. antecedente.

GHK,

GHK, ita solidum polyhedrum in sphæra ABC ad solidum polyhedrum in sphæra DEF; & permutando, ut ABC sphæra ad solidum polyhedrum, quod in ipsa est, ita GHK sphæra ad solidum polyhedrum, quod in sphæra DEF. major autem est sphæra ABC solido polyhedro, quod est in ipsa. ergo & GHK sphæra polyhedro, quod in sphæra DEF, est major. sed & minor, ab ipso enim comprehenditur, quod fieri non potest. non igitur ABC sphæra ad sphæram minorem ipsa DEF triplicatam proportionem habet ejus, quam BC ad EF. similiter ostendemus neque DEF sphæram ad sphæram minorem ipsa ABC triplicatam habere proportionem ejus, quam habet EF ad BC. Dico insuper sphæram ABC neque ad majorem sphæram ipsa DEF triplicatam proportionem habere ejus, quam BC ad EF. Si enim fieri potest, habeat ad majorem LMN. invertendo igitur, sphæra LMN ad ABC sphæram triplicatam proportionem habet ejus, quam diameter EF ad BC diametrum. ut autem sphæra LMN ad ABC sphæram, ita sphæra DEF ad sphæram quandam minorem ipsa ABC, quoniam sphæra LMN major est ipsa DEF. ergo & DEF sphæra ad sphæram minorem ipsa ABC triplicatam proportionem habet ejus, quam EF ad BC; quod fieri non posse ostensum est. non igitur ABC sphæra ad sphæram majorem ipsa DEF triplicatam proportionem habet ejus, quam BC ad EF. ostensum autem est neque ad minorem. ergo ABC sphæra ad sphæram DEF triplicatam proportionem habebit ejus, quam BC ad EF. Quod demonstrare oportebat.

FINIS.