ELEMENTORVM
EVCLIDIS
LIBRI XV

AD GRAECI CONTEXTVS
FIDEM RECENSITI
ET AD VSVM TIRONVM
ACCOMMODATI

LIPSIAE
SVMTV IO. FRIDER. GLEDITSCHII
MDCCLXIX


LIBERTÉ ET PATRIE
DON FAIT À LA
Bibliothèque Cantonale
en 1826.
par feu monsieur Henri
Struve
profess. de chimie et de
minéralogie
J. SIBER

LECTORI

S. D.

GEORG. FRID. BAERMANNUS

Euclidis Elementa omnibus, quotquot ad mathesin discendam animum appellunt, non legenda solum, sed & fere tota ediscenda esse, communis olim fuit magistrorum huius artis sententia, & hac nostra etiam aetate, in qua tanta Elementorum Geometriae copia instructi dicam an obruti sumus, omnes mecum confitebuntur, qui in Euclideorum Elementorum lectione ea, qua par eſt, diligentia ſunt verſati. Neque hoc tam ſuſcepti operis amore, quam idoneis rationibus inductus iudico, quibus exponendis & his id perſuadere poſſem, qui haec Elementa nondum legerunt, & eorum quoque criminationibus occurrere, qui, quum Euclidis hos libros ſiue carptim ſiue certe oſcitanter legerint, neſcio quem commodiorem in tradendis propoſitionibus ordinem, quam faciliorem & breuiorem in demonſtrationibus viam iure deſiderare poſſe ſibi videntur. Verum quia horum argumentorum longior foret tractatio, quam praefandi breuitas patitur: vnam tantum rationem commemoraſſe ſufficiet, ob quam horum Elementorum lectio tironibus non vtilis ſolum, ſed & neceſſaria ſit dicenda. Scilicet omnes, qui poſt Euclidis tempora aliquid in Geometria

ſub-

ſublimiori, vel in Mechanica, Optica, aut Aſtronomia a ſe inuentum litteris prodiderunt, quemadmodum demonſtrationum ſuarum plurimas ex iis duxerunt, quae in his Elementis ab Euclide ſunt oſtenſa, ita & ſaepe ad eorum tanquam fontes lectores amandarunt. Cuius rei quae ſint rationes, intellectu non eſt difficile. Namque veteres Geometrae alium Auctorem citare non poterant: quum multis poſt Euclidem ſeculis nemo fuiſſet, qui tanta arte detextam Euclidis telam retexere, & ſub noua quadam forma tironum oculis ſiſtere vellet. Ii vero, qui noſtrae aetati propiores fuerunt, his tantum exceptis, qui ipſi vniuerſae matheſeos elementa conſcripſerunt, ad alium elementorum Geometriae ſcriptorem lectores ſuos commode non potuerunt ablegare, cum alias ob cauſſas, tum ob hanc potiſſimum, quod nullius Auctoris elementa Geometriae aeque vulgata sunt, atque haec Euclidea, quae in omnes terrarum regiones, simul ac ad eas Geometria accessit, perlata esse constat, & ex quibus, tanquam fontibus, ceteri riuulos suos deduxerunt. Quae caussa, sicut plerosque recentiorum Mathematicorum impulisse videtur, vt Euclidea Elementa, vbi opus erat, in demonstrationibus suis citarent, ita & eos, opinor, qui posthac scribent, commouebit, certe commouere debet, vt hunc veterum morem sequantur. Quum ergo ad tot tam admirabilia excellentissimorum ingeniorum inuenta aditus iis sit praeclusus, qui Euclidis Elementis sunt destituti, vel eorum lectionem negligunt: neminem fore confido, qui non intelligat, quam sit necessarium matheseos amatoribus, vt in Euclidea schola tirocinium ponant. Quae

Quae quum ita ſint, communi vtilitati me aliquo modo conſulere poſſe putabam, ſi hosce Euclideos libros, quorum exemplaria in noſtris bibliopoliis inde ab aliquot annis deſiderabantur, denuo edendos curarem. Vt autem haec noua editio quam plurimorum vſibus inſeruire poſſet: operam mihi dandam eſſe intelligebam, vt talia exemplaria ederentur, quae neque mole ſua neque pretio emtores deterrerent. Quare quum ea horum Elementorum editio, quam eximius, dum viueret, Geometra, Iſaacus Barrowius, iuuenis olim Cantabrigiae parauerat, breuitate ita ſe commendaſſet, vt & in Germania typis quondam recuſa, & plurimorum manibus huc vsque trita eſſet: in animum iuducebam, huius editionis aliquod exemplar typis iterum deſcribendum dare. Sed poſtea mutaui conſilium, quum perpenderem, huic quamuis elegantissimae editioni inesse tamen aliquid, quod aliquos lectores offendere meminerim, & quod editioni, aliqua saltim ex parte meliori, locum relinquat. Scilicet qui Barrowianam Euclidis editionem cum Graecis codicibus contulerunt, non ignorant, in ea multarum propositionum demonstrationes immutatas, nonnullarum quoque omnino sublatas esse, aliis, quas Graecus Euclides non habet, in earum locum substitutis. Quod quanquam apud multos Lectores facile excusatur breuitatis studio: sunt tamen harum rerum intelligentes, qui id factum non esse malint. Dicunt enim primo, difficillimum esse, Euclideis demonstrationibus alias substituere, quae, quum breuiores sint, genio horum Elementorum, & purae simplicitati huius Geometriae aeque conueniant; idque ipsum illum celeberrimum Euclidis

editorem

editorem ſuo exemplo docuiſſe in demonſtrationibus, quas plurimis Libri II. propoſitionibus adiunxit. Deinde negant, illum, qui ſe Euclidem edere profiteatur, munere ſuo rite fungi, ſi lectoribus alia tradat, quam quae ipſi legerent, ſi Graecis codicibus vterentur. Quae quum non exiguam veri ſpeciem habere mihi viderentur; neque ego in tanti viri opere aliquid immutare auderem: ſtatui, de noua prorſus editione Latina Euclidis paranda mihi cogitandum eſſe, quae Graeci textus demonſtrationes ſatis fideliter exhiberet, in ceteris vero Barrowianam breuitatem, quantum eius fieri poſſet, imitaretur.

Sumta itaque in manus praeſtantiſſima Operum Euclidis editione, quae cura doctiſſimi viri, Dauidis Gregorii, Oxoniae prodiit, ex ea textum Latinum definitionum & propoſitionum de-

descripsi ad verbum, paucissimis * exceptis, in quibus siue sensus siue Graecus contextus aliquam mutationem postulabat. Deinde perlecta vniuscuiusque propositionis demonstratione, eam sic reddere studui, vt, seruato eodem ordine, quo Euclides syllogismorum seriem instruxerat, totam tamen demonstrationem in arctius quasi spatium cogerem. Hoc autem quatuor potissimum modis efficere volui, quibus & Isaacum Barrowium vsum esse videbam. Nam primo ἔκθεσιν, quam Euclides singulis propositionibus subiungit, & in qua, quidquid in propositionibus vniuersaliter enunciatum fuit, ad singulares schematum appositorum lineas applicat, ipsis propositionibus inclusi, ita tamen, vt ne ἔκθεσις cum propositione commisceretur, sed vt quaeque propositio absolutum sensum haberet,

* Sunt illae prop. 7 L. I. prop. 28. L. VI. prop. 10. L. VIII. & prop. 26. L. XI.

haberet, etiam ſi inter legendum litterae illae maiuſculae, quae ad ſchema referuntur, & ἔκθεσιν continent, omitterentur. Quod ita fieri in propoſitionibus mathematicis, ſaltim ſi tironibus ſcribatur, conſultum eſſe exiſtimo, propterea quod propoſitiones ipſae memoriae mandandae ſunt, non autem earum ἐκθέσεις, quippe quae ſolis demonſtrationibus inſeruiunt. Secundo, ſyllogiſmorum maiores, quas vocant, propoſitiones, quae in omni demonſtratione ex ſuperioribus ſumuntur, & quas Euclides ſolet totidem verbis plerumque repetere, omiſi; indicaui tamen per numeros, alphabeti Graeci litteris in margine adſcriptos, ea loca, in quibus eas, ſi ſponte non ſuccurrant, lector euoluere poteſt.* Tertio pro quibusdam verbis notas

* Videlicet horum numerorum poſterior deſignat Librum, prior huius libri propoſitionem. Praeterea def. ſignificat definitionem, ax. axioma, & poſt. poſtulatum.

notas illas adhibui, quae apud Mathematicos dudum vſu receptae ſunt. Habent autem harum notarum pleraeque non hunc ſolum vſum, vt tanquam ſcripturae compendia textum breuiorem reddant, ſed &, ſi quis iis ſemel adſueuerit, quod fieri poteſt facillime, menti in cogitando non exiguo ſunt adiumento, quia quantitatum, de quibus cogitandum eſt, mutuam relationem citius longe & diſtinctius, quam litterae vel vocabula, animo intuendam praebent. Propterea veniam mihi, vt ſpero, dabunt aequi lectores, quod in X. Libro horum Elementorum quatuor nouis notis vſus fui, quum eae, quae in Barrowiana editione ibi occurrunt, nimis incommodae ſint. Eſt enim earum vna alteri adeo ſimilis, vt inter legendum facillime poſſint confundi. Quare quum his, ſine lectorum incommodo, me vti vix poſſe intelligerem, neque apud alium Auctorem alias ipſis pares reperiſſem: auſus ſum nouas iſtas effingere, quas in limine dicti Libri expoſui. Perpaucae quum ſint, facile poterit lector earum poteſtatem memoria retinere, praeſertim vbi animaduerterit, eas ex initialibus litteris Graecorum, quibus ſubſtituuntur, vocabulorum σύμμετρα, ἀσύμμετρα, ἄλογα, leuiter inflexis litterarum ductibus, vel lineola appoſita, eſſe efformatas. Quartum denique, quod mihi in contrahendis Euclidis demonſtrationibus nonnunquam auxilio fuit, hoc eſt, quod quibusdam propoſitionibus ſubiunxi ſcholia vel corollaria, in quibus eiusmodi propoſitiones oſtenſae ſunt, quae multorum ſequentium theorematum & problematum demonſtrationes iterum tanquam principia ingrediuntur.

Sed praeter haec ſcholia & corollaria, viſum etiam eſt, alia addere, in

quibus

quibus ex Euclidis propoſitionibus aliae, quarum vel ad inuentionem, vel ad aliorum Auctorum demonſtrationes intelligendas, frequentiſſimus vſus eſt, & quae in vulgatis aliorum Auctorum Elementis Geometriae habentur, ſine longa ratiocinatione colliguntur. Pleraque horum ſcholiorum e Barrowiana editione huc transſcripſi, nonnulla, ſed perpauca, ipſe addidi. Nam omnium horum ſcholiorum numerum mediocrem eſſe volui, memor quippe, non theſaurum geometricarum propoſitionum mihi condendum, ſed Elementa Geometriae edenda fuiſſe. Singula autem haec, ſiue ſcholia, ſiue corollaria, ſiue alia, quae in Graecis exemplaribus horum Elementorum vel omnino non leguntur, vel ſaltim aliis in locis, demonſtrationum contextui interſperſa, reperiuntur, aſteriſcis notaui. Erunt forſitan, qui mirabuntur

buntur, cur talibus propoſitionibus ſcholiorum titulum adſcripſerim, quibus corollariorum potius nomen conuenire exiſtimabunt. His autem reſpondeo, me in his quoque minutiis ad indolem Euclidei operis, quantum poſſem, accedere voluiſſe; in quo video, eas fere ſolas propoſitiones corollariorum vel πορισμάτων titulo inſignitas eſſe, quae, quum in demonſtratione alicuius theorematis vel problematis obiter oſtenſae ſint, dein ex ea quaſi excerpuntur, &, abſoluta demonſtratione, ſeparatim enunciantur, quo earum ad ſequentes demonſtrationes expeditior ſit vſus. Quod tandem ad ſchemata attinet, ligno inciſa, etſi curaui, vt ea illis, quae Oxonienſis Operum Euclidis editio habet, ſimilia eſſent; fateor tamen, nos illarum non aſſequi potuiſſe elegantiam.

Haec ſunt, quae de inſtituti operis ratione lectores monere volui, et ex quibus ſatis, opinor, apparebit, me omne conſilium operamque in hoc intendiſſe, vt & verum & integrum Euclidem ipſis in manus traderem. Vt autem hi, qui ad eius lectionem primum accedunt, aliquam eius notitiam afferant, non erit alienum, huius Geometriae ideam breuiter adumbrare. Totum hoc opus duabus conſtat partibus; quarum altera contemplationem ſuperficierum, altera ſolidorum complectitur. Et in quatuor quidem primis libris traduntur, quae figuris planis, circulo puta & rectilineis, abſolute ſpectatis conueniunt, & quae ad earum aequalitatem, ac angulorum laterumque in illis magnitudinem cognoſcendam conducunt. Sextus liber de ſimilitudine figurarum planarum agit, earumque, item angulorum & rectarum linearum, ad ſe inuicem rationes inueſtigare docet. Eius gratia in quinto libro tradita eſt proportionum, quae inter

inter magnitudines esse possunt, vniuersalis θεωρία. Hisce prima pars huius Geometriae absoluitur. Solidorum contemplatio commensurabilium & incommensurabilium notitiam requirit, ad quam doctrina de numeris opus est. Eorum itaque librorum, qui sextum sequuntur, tres priores de numeris copiose exponunt, ac ob id arithmetici vocari solent. Decimus rectarum linearum & spatiorum irrationalium, hoc est, datis rectis lineis vel spatiis incommensurabilium, doctrinam tradit. Postremi quinque in solidorum contemplatione versantur, & ea docent, quae ad illorum tam dimensionem, quam proportionem & in se inuicem inscriptionem spectant. Nunc reliquum esset, vt singulorum etiam librorum argumenta commemorarem. Sed praeterquam quod hac enarratione facile carere poterunt, quibus animus est, integra haec Elementa a capite

pite

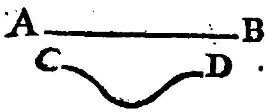
pite vsque ad calcem perſpicere (quod vt tirones faciant, maximopere ſuadeo): vereor, ne, ſi ea percurram, haec praefatio, quae iam praeter opinionem longiuſcula facta eſt, iuſtos limites excedat. Vnum hoc addam, ſi hanc meam operam doctis viris probari intellexero, curaturum me eſſe, vt Euclidis Liber Datorum, Theodoſii ſphaerici, & Archimedis Geometrici libri eodem, quo haec Elementa, habitu veſtiti poſthac in lucem prodeant.

ELEMENTORVM EVCLIDIS
LIBER I.

DEFINITIONES.

1. *Punctum* eſt, cuius pars nulla eſt.

2. *Linea* autem eſt longitudo non lata.



3. *Lineae* vero *extrema* (A, B, vel D, C) ſunt puncta.

4. *Recta* quidem *linea* AB eſt, quae ex aequo ſua interiacet puncta.

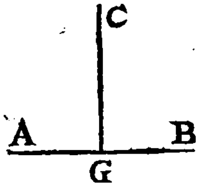
5. *Superficies* autem eſt, quod longitudinem & latitudinem tantum habet.

6. *Superficiei* vero *extrema* ſunt lineae.

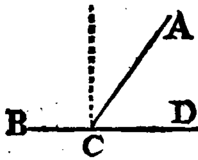
7. *Plana* quidem *ſuperficies* eſt, quae ex aequo ſuas lineas rectas interiacet.

8. *Planus* vero *angulus* eſt duarum linearum, in plano ſeſe tangentium, & non in directum iacentium, mutua inclinatio.

9. Quando autem lineae DE, DF, angulum comprehendentes, rectae fuerint, *angulus* ipſe EDF appellatur *rectilineus*.



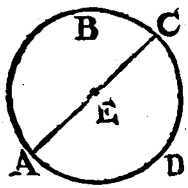
10. Quum vero recta linea CG, ſuper rectam lineam A B inſiſtens, angulos deinceps AGC, BGC inter ſe aequales fecerit: *rectus* eſt vterque aequalium angulorum; & quae inſiſtit recta linea C G *perpendicularis* vocatur ad eam AB, ſuper quam inſiſtit.



11. *Obtuſus angulus* ACB eſt, qui maior eſt recto.

12. *Acutus* autem ACD, qui eſt recto minor.

13. *Terminus* eſt, quod alicuius eſt extremum.



14. *Figura* eſt, quae aliquo vel aliquibus terminis comprehenditur.

15. *Circulus* eſt figura plana, vna linea AB CD A comprehenſa, quae *circumferentia* appellatur, ad quam ab vno puncto E eorum, quae intra figuram ſunt poſita, cadentes omnes rectae lineae, E C, E A, inter ſe ſunt aequales.

16. Hoc autem punctum E *centrum circuli* nuncupatur.

17. *Diameter* vero *circuli* eſt recta quaedam linea AC, per centrum E ducta, & ex vtraque parte circuli circumferentia ABCDA terminata. Quae etiam circulum bifariam ſecat.

18. *Semicirculus* eſt figura ACBA comprehenſa ſub diametro A C, & ea circuli circumferentia ABC, quae a diametro intercipitur.

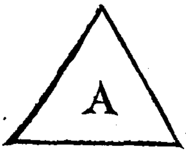
19. *Recti-*

19. *Rectilineae figurae* sunt, quae rectis lineis comprehenduntur.

20. *Trilaterae* quidem, quae tribus.

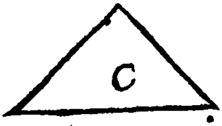
21. *Quadrilaterae*, quae quatuor.

22. *Multilaterae* vero, quae pluribus, quam quatuor rectis lineis comprehenduntur.

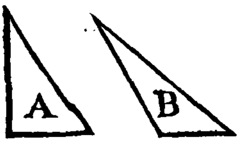


23. E trilateris autem figuris, *aequilaterum triangulum* A est, quod tria latera habet aequalia.

24. *Isosceles* autem B, quod duo tantum aequalia habet latera.



25. *Scalenum* C vero, quod tria latera habet inaequalia.



26. Adhaec, e trilateris figuris, *rectangulum* quidem *triangulum* est A, quod rectum angulum habet.

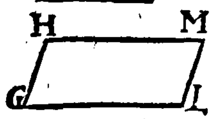
27. *Amblygonium* autem B, quod habet angulum obtusum.

28. *Oxygonium* C vero, quod tres habet angulos acutos.

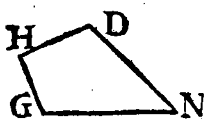
29. E figuris autem quadrilateris, *quadratum* quidem eſt ABCD, quod & aequilaterum eſt, & rectangulum.

30. *Oblongum* E, quod rectangulum quidem eſt, ſed non aequilaterum.

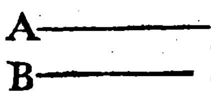
31. *Rhombus* A, quod aequilaterum quidem eſt, ſed non rectangulum.



32. *Rhomboides* GHML, quod habet oppoſita & latera & angulos inuicem aequalia, ſed nec aequilaterum eſt, nec rectangulum.



33. Reliqua autem quadrilatera, praeter haec, vocentur *trapezia*. Vt GNDH.



34. *Parallelae* rectae lineae A, B ſunt, quae in eodem iacentes plano, atque ex vtraque parte in infinitum productae, in neutram ſibi coincidunt.

POSTVLATA.

1. Poſtulatur, a quouis puncto ad quoduis punctum rectam lineam ducere.

2. Item, rectam lineam finitam continue in directum producere.

3. Item, quouis centro & interuallo circulum deſcribere.

COM-

COMMVNES NOTIONES, *siue AXIOMATA.*

1. Quae eidem aequalia, inter se sunt aequalia.

2. Si aequalibus aequalia addantur, tota sunt aequalia.

3. Si ab aequalibus aequalia auferantur, reliqua sunt aequalia.

4. Si inaequalibus aequalia addantur, tota sunt inaequalia.

5. Si ab inaequalibus aequalia (*vel ab aequalibus inaequalia*) auferantur, reliqua sunt inaequalia. * Et id quidem, quod ex maiori inaequalium, demtis aequalibus, relinquitur, maius est; quod vero, demto maiori inaequalium ab aequalibus, relinquitur, minus est.

6. Quae eiusdem (*vel aequalium*) sunt duplicia, inter se sunt aequalia. * Idem de vtcunque aeque multiplicibus intelligendum est.

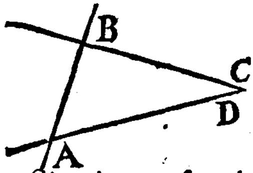
7. Quae eiusdem (*vel aequalium*) sunt dimidia, inter se aequalia sunt. * Idem de vtcunque aeque submultiplicibus intellige.

8. Quae sibi mutuo congruunt, sunt aequalia.

* Hoc axioma in rectis lineis & angulis valet conuersum: sed non congruunt aequales figurae, nisi & similes fuerint. Ceterum *congruere* dicuntur, quorum partes applicari partibus sic possunt, vt tota eundem locum occupent.

9. Totum sua parte maius est.

10. Omnes anguli recti inter se aequales sunt.



11. Si in duas rectas lineas AD, BC recta BA incidens augulos interiores BAD, ABC, & ad easdem partes, duobus rectis minores fecerit: duae illae rectae AD, BC, in infinitum productae, coincident inter se ex ea parte, ad quam sunt anguli duobus rectis minores.

12. Duae rectae lineae spatium non comprehendunt.

13. * Omne totum aequale est omnibus suis partibus simul sumtis.

14. * Quod vni aequalium maius vel minus est, idem & altero maius vel minus est. Et quo vnum aequalium maius est vel minus, eodem alterum quoque maius vel minus est.

In hoc libro notae, quibus breuitatis causa vtimur, hae fere sunt.

$=$ Notat aequalitatem. E. g. Ang. $A = B = C$, lege, angulus A aequalis est angulo B, & hic angulo C. Sed saepe trium quantitatum, hac nota iunctarum, primam etiam tertiae aequalem intelligendam esse, per ax. 1. supponitur.

$>$ notat maioritatem. E. g. Recta $AB > CD$, lege, recta AB maior est quam recta CD.

$<$ notat

$<$ notat minoritatem. $A < B$, lege A minor eſt quam B.

$+$ notat duas magnitudines pluresue, inter quas haec nota reperitur, iunctim ſumendas eſſe. E. gr. $A + B$, lege, A vna cum B.

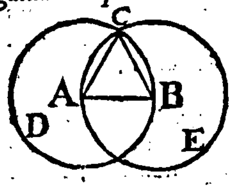
$-$ notat ſubtractionem. E. gr. Rectus $-$ ang. ABC, lege, Exceſſus recti anguli ſuper angulum ABC, vel, vt vulgo pronunciant, rectus minus angulo ABC.

$\triangle$ notat triangulum.

ACq notat quadratum, a recta AC deſcriptum, vel cuius latus eſt recta AC.

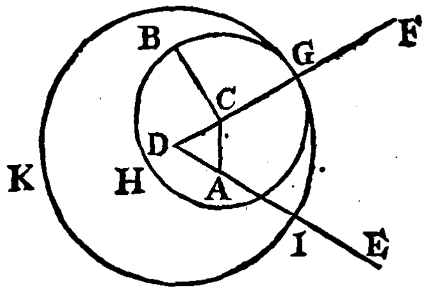
PROPOSITIO I. PROBLEMA.

Super datam rectam, terminatam AB, *triangulum aequilaterum constituere.*



α. 3. post. Centro A, interuallo AB describatur α circulus BCD; & rursus centro B, interuallo BA, circulus ACE; & a puncto C, in quo circuli sese mutuo
β. 1. post. secant, ad puncta A,B ducantur β rectae CA,CB.
γ. 15. def. Quoniam igitur γ AC=AB, & BC=BA:
δ. 1. ax. erit δ AC=BC. Quare tres rectae AC, AB, BC aequales sunt. Est igitur ACB triangu-
ε. 23. def. lum aequilaterum ε super AB constitutum. Quod Erat Faciendum.

PROP. II. PROBL.



Ad datum punctum A *datae rectae* BC *aequalem rectam ponere.*

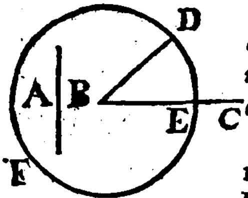
ζ. 1. post. Ducatur ζ recta AC; et super eam constitua-
η. l. 1. tur η triangulum aequilaterum ADC; & pro-
θ. 2. post. ducanur θ DA, DC ad E & F. Dein centro C,
ι. 3. post. interuallo CB, describatur ι circulus GBH, & rursus centro D, interuallo DG, circulus GIK.

Quo-

Quoniam igitur [κ] DI = DG, & [λ] DA = DC, erit [μ] AI = CG. Sed [κ] CB = CG. Ergo AI =[ν] CB. Q. E. F.

κ. 15. def.
λ. 23. def.
μ. 3. ax.
ν. 1. ax.

PROP. III. PROBL.



Datis duabus rectis inaequalibus, A & BC, *a maiore* BC *auferre rectam aequalem minori* A.

Ponatur [ξ] ad punctum B recta BD = A, & centro B, interuallo BD, describatur [ο] circulus DEF. Et, quoniam [π] BE = BD, & [ρ] A = BD, erit [σ] BE = A. Ergo ab BC ablata est BE, minori A aequalis. Q. E. F.

ξ. 2. 1.
ο. 3. post.
π. 15. def.
ρ. construct.
σ. 1. ax.

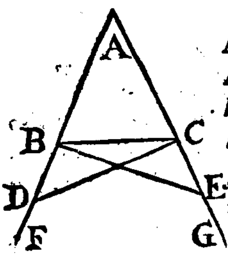
PROP. IV. THEOREMA.

Si duo triangula A B C, D E F *habuerint duo latera, duobus lateribus aequalia, alterum alteri* (AB = DE, & AC = DF), *& angulum* A *aequalem angulo* D, *qui ab aequalibus rectis comprehenditur*: *habebunt & basin* B C *basi* EF *aequalem*; *& triangulum* A B C *erit triangulo* D E F *aequale*; *& reliqui anguli* B, C, *reliquis angulis* E, F *aequabuntur*, *alter alteri*, *quibus aequalia latera subtenduntur* (B = E, & C = F).

Nam si triangulum A B C applicetur triangulo EDF, posito puncto A super D, & recta

τ. hypoth. AB super DE: quia AB = DE τ, cadet υ pun-
υ. 8. ax. ctum B in E. Congruente autem recta AB rectae DE; quia τ ang. A = D, cadet υ recta AC in DF; & τ quia AC = DF: punctum C cadet υ in F. Iam si BC ipsi EF non congruat: necesse est duae rectae comprehendant spatium; quod fieri nequit φ. Ergo basis BC congruet
φ. 12. ax. basi EF, & ergo υ BC = EF. Quare & tota triangula ABC, DEF congruent, & aequalia erunt; itemque anguli B ac E, nec non anguli C ac F congruent, & aequales erunt. Quod Erat Demonstrandum.

PROP. V. THEOR.



Triangulorum isoscelium ABC *anguli ad basin* ABC, ACB, *sunt inter se aequales; & productis aequalibus rectis* AB, AC, *anguli sub basi* FBC, GCB *erunt inter se aequales.*

Sumto enim in recta BF
χ. 3. 1. puncto quolibet D, fiat χ AE = AD, & ducantur rectae CD, BE.

Quoniam ergo in triangulis ABE & ACD
ψ. constr. est ψ AE = AD, & ω AB = AC, & angulus A
ω. hyp. communis: erit α ang. ABE = ang. ACD, &
α. 4. 1. ang. BEC = ang. BDC, & BE = CD. Quum autem

autem ψ AE = AD, & ω AC = AB, ideoque β CE = BD: erit in triangulis BEC & BDC ω ang. CBE = ang. BCD, & ang. BCE = ang. DBC. Sed erat γ ang. ABE = ang. ACD. Ergo β anguli ad basin ABC, ACB aequales sunt, item anguli sub basi GCB, FBC aequales sunt. Q. E. D.

β. 3. ax.

γ. per dem.

* *Scholium.* Hinc omne triangulum aequilaterum est quoque aequiangulum.

PROP. VI. THEOR.

Si trianguli ABC *duo anguli* ABC, ACB *sint inter se aequales: latera* AB, AC, *aequalibus angulis subtensa, inter se aequalia erunt.*

Si enim non est AB = AC, vtrauis AB > AC erit. Fiat ergo δ BD = AC, & ducatur CD. δ. 3. 1.

In triangulis ergo DBC, ABC est BD = AC, & BC latus commune, & ε ang. DBC = ang. ACB. Quare ζ triangulum DBC = triangulo ABC, pars toti. Quod Est Absurdum η. Non est ergo recta AB rectae AC inaequalis; ergo aequales sunt. Q. E. D.

ε. hyp.

ζ. 4. 1.

η. 9. ax.

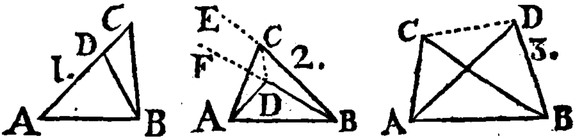
* *Scholium.* Hinc omne triangulum aequiangulum est quoque aequilaterum.

PROP. VII. THEOR.

Super eandem rectam AB *duabus iisdem rectis* AC, BC *duae aliae rectae* AD, BD *aequales altera alteri, eosdem terminos habentes,* (AD =

AC

AC, & BD = AC) *non constituentur ad aliud punctum* D *atque aliud* C *in easdem partes.*



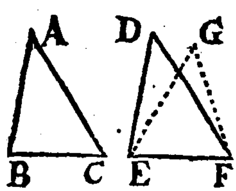
* 1. *Casus.* Si punctum D statuatur in AC:
9. 9. ax. liquet [9] non esse AD = AC.

* 2. *Cas.* Si punctum D ponatur intra triangulum ACB: ducatur CD, & producantur BD
e. 5. 1. ad F, & BC ad E. Iam si sit AD = AC: erit [e] ang. ADC = ACD. Sed si BD = BC: erit [e]
x. 9. & 14. ax. ang. ECD = FDC. Ergo ang. ACD [x] > FDC, & multo magis ang. ECD > FDC. Q. E. A.

3. *Cas.* Si D sit extra △ACB: ducatur recta CD. Iam si sit AD = AC: erit [e] ang. ACD = ADC. Quare ang. ADC > [x] DCB, & multo magis ang. BDC > DCB. Sed quia etiam ponitur BD = BC: erit [e] ang. BDC = DCB. Q. E. A.

Ergo non potest esse AD = AC, & simul BD = BC. Q. E. D.

PROP. VIII. THEOR.



Si duo triangula ABC, DEF *habeant duo latera* AB, AC, *duobus lateribus* DE, DF *aequalia, alterum alteri; habeant etiam basin* BC *basi* EF *aequalem: angulum quoque* A *angulo* D *aequalem habebunt, ab aequalibus rectis comprehensum.*

Si

Si enim △ ABC applicetur △o DEF, & punctum B ponatur in E, & recta BC super rectam EF: cadet [λ] punctum C in F, quia [μ] BC = EF. Iam si punctum A non caderet in D, sed in aliud, velut G: super eadem recta EF duabus iisdem rectis ED, FD aliae duae rectae EG, FG, aequales [μ], altera alteri, habentes eosdem terminos, constitutae essent ad aliud punctum G et aliud D in easdem partes. Sed hoc fieri nequit [ν]. Ergo punctum A cadet in punctum D, & ergo congruet latus BA lateri ED, & latus AC lateri DF; quare & angulus A congruet angulo D. Ergo [λ] ang. A = D. Q.E.D.

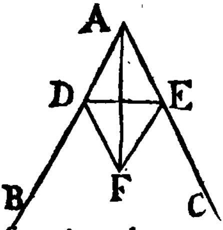
λ. 8. ax.
μ. hyp.
ν. 7. 1.

* *Schol.* 1. Hinc triangula sibi mutuo aequilatera etiam sibi mutuo aequiangula sunt [ξ].

* *Schol.* 2. Triangula sibi mutuo aequilatera aequantur inter se [ξ].

ξ. 4. 1.

PROP. IX. PROBL.



Datum angulum rectilineum BAC *bifariam secare.*

Sumatur in recta AB punctum quodvis D, & capiatur [ο] AE = AD, & ducatur DE, super qua fiat triangulum aequilaterum DFE. Ducatur AF. Dico AF bifariam secare ang. BAC.

Quoniam enim est AE = AD, & AF latus commune, & basis EF = [π] basi DF: est [ρ] ang. EAF = DAF. Ergo AF bifariam secat angulum BAC. Q. E. F.

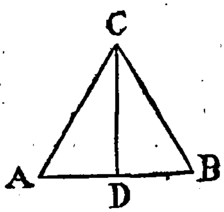
ο. 3. 1.
π. constr. & 23. def.
ρ. 8. 1.

* Schol.

* *Scholium.* Hinc patet, quomodo angulus ſecari poſſit in aequales partes 4, 8, 16, 32 &c. ſingulas nimirum partes iterum biſecando. Methodus vero, recta & circulo angulos ſecandi in partes aequales quotcunque, *e.* gr. 3, 5, 7, nulla datur.

PROP. X. PROBL.

Datam rectam lineam terminatam AB *biſariam ſecare.*

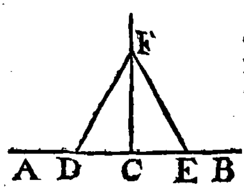


σ. 1. 1. Fiat ſuper AB σ △ aequi-
τ. 9. 1. laterum, & biſecetur τ ang. ACB recta CD. Dico, rectam AB biſecari in puncto D.

υ. 23. def. Nam υ AC = BC, & CD latus △is ADC & BDC
φ. conſtr. commune, & ang. ACD = BCD φ. Ergo χ
χ. 4. 1. AD = DB. Q. E. F.

PROP. XI. PROBL.

Datae rectae lineae AB, *a puncto in ipſa dato* C, *ad rectos angulos rectam lineam ducere.*



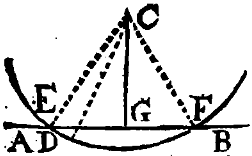
Sumatur in recta AC punctum quoduis D, &
ψ. 3. 1. ponatur ψ CE = CD, &
ω. 1. 1. conſtituatur ω ſuper DE △ aequilaterum DFE, & ducatur recta FC, quae erit rectae AB ad angulos rectos.

α. conſtr. Quoniam enim in △is FEC & FDC α eſt
β. 23. def. CE = CD, & β EF = DF, & FC communis:
γ. 8. 1. ang. γ ECF = DCF. Ergo δ anguli ECF, DCF
δ. 10. def. recti ſunt. Q. E. F.

PROP.

PROP. XII. PROBL.

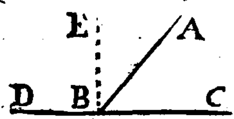
Super datam rectam lineam infinitam AB, *a dato puncto* C, *quod non est in eadem, perpendicularem lineam rectam ducere.*



Sumatur ex altera parte rectae AB punctum quoduis D, & centro C, interuallo CD, describatur [ε] circulus EDF, & secetur [ζ] recta EF bifariam in G. Ducatur recta CG, quae in AB erit perpendicularis. ε. 3. post. ζ. 10. 1.

Nam ductis rectis CE, CF, quoniam [η] EG = GF, & CG communis, & [θ] CE = CF: erit [ι] ang. EGC = FGC. Ergo CG est in AB perpendicularis [κ]. Q. E. F. η. constr. θ. 15. def. ι. 8. 1. κ. 10. def.

PROP. XIII. THEOR.



Si recta AB *insistens rectae* DC, *faciat angulos* ABD, ABC: *vel duos rectos faciet, vel duobus rectis aequales.*

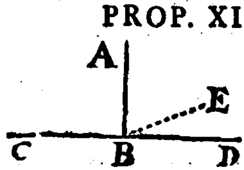
Si enim ang. ABD = ABC: duo [λ] hi anguli recti sunt. Sin minus: ducatur [μ] a puncto B recta BE in DC perpendicularis. Quare ang. CBE + EBD [λ] = 2 rectis. Et quoniam CBE = [ν] GBA + ABE: erit [ξ] CBE + EBD = CBA + ABE + EBD. Item quoniam ang. DBA = ABE + EBD; erit [ξ] DBA + CBA = CBA + ABE + EBD. Ergo [ο] DBA + CBA = CBE + EBD = 2 rectis. Q. E. D. λ. 10. def. μ. 11. 1. ν. 2. ax. ξ. 1. ax. ο. 13. ax.

[*] 1. *Schol.*

* 1. *Schol.* Hinc si vnus angulorum EBD rectus sit: alter EBC etiam rectus erit. Si ille ABD obtusus: hic ABC acutus erit; & contra.

* 2. *Schol.* Si plures rectae, quam vna, ad idem punctum eidem rectae insistant: anguli fient duobus rectis aequales.

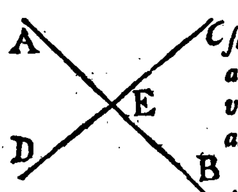
PROP. XIV. THEOR.



Si ad aliquam rectam AB, *& ad punctum in ea* B, *duae rectae* BC, BD, *non ad easdem partes positae, faciant angulos deinceps* CBA, DBA, *duobus rectis aequales: ipsae rectae* BC, BD *in directum sibi inuicem erunt.*

Si enim BD non sit in directum ipsi CB:
π. 1. post. sit [π] ei in directum quaeuis BE. Ergo [ρ] ang.
ρ. 13. 1. CBA + ABE = 2 rectis. Sed & CBA + DBA
σ. hyp. = [σ] 2 rectis. Ergo CBA + ABE = CBA +
τ. 3. ax. DBA. Ergo [τ] ang. ABE = DBA. [υ] Q. E. A.
υ. 9. ax.

PROP. XV. THEOR.



Si duae rectae AB, CD *sese mutuo secent in* E; *angulos* AEC, DEB *ad verticem facient inter se aequales.*

φ. 13. 1. Nam [φ] ang. AEC + AED = 2 rectis = DEB
χ. 3. ax. + AED. Ergo [χ] ang. AEC = DEB. Q. E. D.

* 1. *Schol.* Hinc manifestum est, quotcunque rectis sese mutuo secantibus, angulos ad punctum sectionis aequales esse 4 rectis.

2. *Schol.*

* 2. *Schol.* Et ergo omnes anguli, circa vnum punctum constituti, efficiunt quatuor rectos.

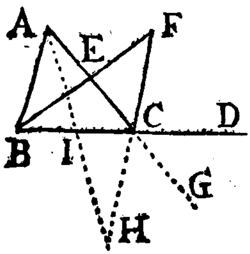
* 3. *Schol.* Si ad aliquam rectam lineam AB, atque ad eius punctum E, duae rectae EC, ED, non ad easdem partes sumtae, angulos ad verticem AEC, DEB aequales fecerint: ipsae rectae CE, ED in directum sibi inuicem erunt.

Nam 2 recti $=$ ψ AEC $+$ CEB $=$ ω DEB $+$ CEB. Ergo α CE, ED sunt in directum. ψ. 13. 1. ω. hyp. & 2. ax. α. 14. 1.

* 4. *Schol.* Si quatuor rectae EA, EB, EC, ED, ab vno puncto E exeuntes, angulos oppositos ad verticem aequales inter se fecerint: erunt quaelibet duae lineae AE, EB, & CE, ED in directum positae.

Nam quia ang. AEC $+$ AED $+$ CEB $+$ DEB $=$ β 4 rectis: AEC $+$ AED $=$ γ DEB $+$ CEB $=$ δ 2 rectis. Ergo CED & AEB ε sunt rectae lineae. β. 2. schol. γ. hyp. & 2. ax. δ. 7. ax. ε. 14. 1.

PROP. XVI. THEOR.



Omnis trianguli ABC *vno latere* BC *producto ad* D: *angulus exterior* ACD *maior est vtrolibet interiorum & oppositorum* BAC, ABC.

Secetur AC bifariam ζ in E, & ducta recta BE producatur ad F, & ponatur η EF $=$ EB, & ducatur FC. Quoniam igitur AE $=$ EC, & EB $=$ EF, & ang. ϑ AEB $=$ FEC: erit ang. ι BAE $=$ ACF. Sed ang. ACD κ $>$ ACF. Ergo λ ang. ACD $>$ BAE. ζ. 10. 1. η. 3. 1. ϑ. 15. 1. ι. 4. 1. κ. 9. ax. λ. 14. ax.

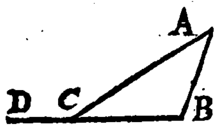
Eodem modo, si BC bisecetur in I, & recta AI producatur, donec IH $=$ IA, & iungatur

 HC,

HC, & producatur etiam AC ad G, demonstrabitur esse ang. BCG, vel ACD > ABC. Q. E. D.

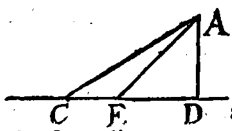
PROP. XVII. THEOR.

Omnis trianguli ABC *duo anguli duobus rectis sunt minores, quomodocunque sumti.*



Producatur enim BC ad D. Et quia ang. ACD
μ. 16. 1. > [μ] ABC: erit ACD +
ν. 4. ax. ACB > [ν] ABC + ACB.
ξ. 13. 1. Sed ACD + ACB = [ξ] 2 rectis. Ergo ang.
ο. 14. ax. ABC + ACB < [ο] 2 rectis. Eódem modo, producta CA, demonstrabitur esse ACB + CAB < 2 rectis; item, producta AB, esse CAB + ABC < 2 rectis. Q. E. D.

* 1. *Schol.* Hinc in omni triangulo, cuius vnus angulus est rectus, vel obtusus, reliqui acuti sunt.



* 2. *Schol.* Si recta AE cum alia CD angulos inaequales faciat, vnum AED acutum, & alterum AEC obtusum: linea perpendicularis AD, ex quouis eius puncto A ad aliam illam CD demissa, cadet ad partes anguli acuti AED.

Nam si AC, ad partes anguli obtusi ducta, dicatur perpendicularis: in △ AEC erit ang. AEC +
π. 10. & 11. def. ACE > [π] 2 rectis. Quod fieri nequit [ρ].

ρ. 17. 1. * 3. *Schol.* Omnes anguli trianguli aequilateri, & duo anguli trianguli isoscelis ad basin, [σ] acuti
σ. 5. 1. sunt.

PROP.

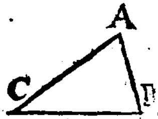
PROP. XVIII. THEOR.

Omnis trianguli ABC *maius latus* AC *maiorem angulum* ABC *subtendit.*

Quum enim AC > AB: fiat [τ] AD = AB, & iun- τ. 3. 1.
gatur BD. Iam est [υ] ang. υ. 16. 1.
ADB > ACB, & ang.
ABD = [φ] ADB: ergo ang. ABD > [χ] ACB, & a φ. 5. 1.
potiori ang. ABC > ACB, Q. E. D. χ. 14. ax.

PROP. XIX. THEOR.

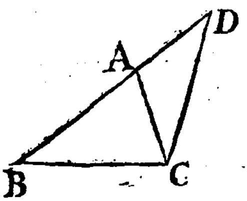
Omnis trianguli ABC *maiori angulo* B *maius latus* AC *subtenditur.*



Si enim ang. B > C, nec tamen AC > AB: aut erit AC = AB, aut AC < AB. Si esset AC = AB: foret ang. B = [ψ] C; contra ψ. 5. 1.
hypothesin. Et si AC < AB, foret ang. C > [ω] ω. 18. 1.
B; etiam contra hypothesin. Ergo AC > AB. Q. E. D.

PROP. XX. THEOR.

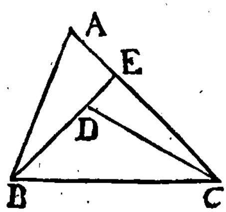
Omnis trianguli ABC *duo latera sunt maiora reliquo, quomodocunque sumta.*



Sumantur BA, AC, & in producta BA capiatur [α] AD = AC; duca- α. 3. 1.
tur DC. Ergo angulus ADC = [β] ACD. Sed β. 5. 1.
ang. BCD > [γ] ACD. γ. 9. ax.
δ. 19. 1.
Quare BCD > [ζ] BDC. ε. constr. &
Ergo [δ] BD > BC, ideoque quum BD [ε] = BA 2. ax.
+ AC, erit BA + AC > [ζ] BC. Eodem mo- ζ. 14. ax.
do ostendemus, esse AB + BC > AC, & AC + BC > AB. Q. E. D.

PROP. XXI. THEOR.

Si a terminis B, C *unius lateris trianguli* ABC *duae rectae* BD, CD *intus constituantur: hae reliquis duobus trianguli* ABC *lateribus* AB, AC, *minores quidem erunt, angulum vero* BDC *maiorem,* quam A, *comprehendent.*



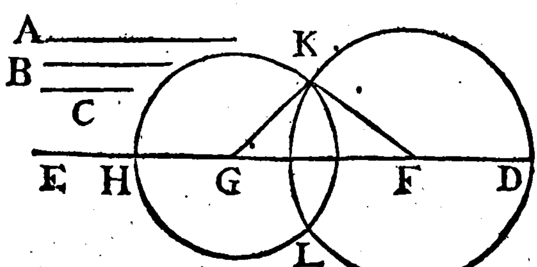
Producatur enim BD ad E. Et quum ABE fiat

a. 20. I. △: erit AB + AE > [a] EB; ideoque [b] AB +

b. 4. ax. AC > EB + EC. In △ EDC est CE + ED > [a] CD; ideoque [b] CE + EB > CD + DB. Quare multo magis AB + AC > CD + BD. Q. E. Imum.

c. 16. I. Angulus BDC > [c] CED > [c] A. Ergo & ang. BDC > A. Q. E. IIdum.

PROP. XXII. PROBL.



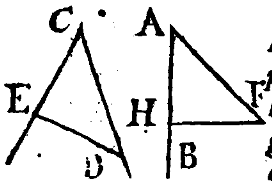
E tribus rectis, quae tribus rectis datis A, B, C *sint aequales, triangulum constituere. Oportet autem duas, utcunque sumtas, maiores esse reliqua.*

Pona-

Ponatur recta DE, finita quidem ad D, infinita vero versus E, & fiat [κ] DF = A, & FG = B, & GH = C. Centro F, interuallo FD describatur [λ] circulus DKL, item centro G, interuallo GH, circulus HLK; & ducantur rectae KF, KG. κ. 3. 1. λ. 3. post

Quoniam ergo [μ] KF = FD = [ν] A; & GK = [μ] GH = [ν] C; & GF = [ν] B: ex tribus rectis KF, GK, GF, tribus A, C, B, aequalibus, constitutum est triangulum KGF. Q. E. F. μ. 15. def ν. constr.

PROP. XXIII. PROBL.



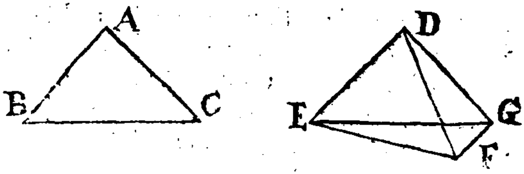
Ad datam rectam AB, *& ad datum in ea punctum* A, *dato angulo rectilineo* DCE *angulum rectilineum aequalem constituere.*

Sumantur in vtraque recta CD & CE puncta quaeuis D, E, & ducatur recta DE, & e tribus rectis lineis, quae tribus CE, CD, DE aequales sint, constituatur [o] △ AHF, ita vt AF = CD, & AH = CE, & HF = DE. o. 22. 1.

Quia ergo AF = CD, & AH = CE, & basis HF = basi ED: erit ang. A = [π] DCE. Q. E. F. π. 8. 1.

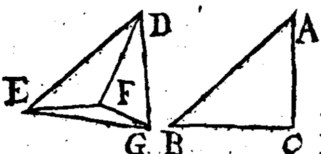
PROP. XXIV. THEOR.

Si duo triangula ABC, DEF *habeant duo latera* AB, AC, *duobus lateribus* DE, DF *aequalia, alterum alteri; angulum autem* A *angulo* EDF *maiorem, ab aequalibus rectis comprehensum: etiam basin* BC *basi* EF *maiorem habebunt.*



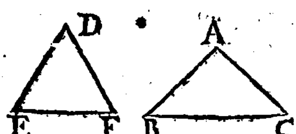
Quoniam enim ang. A > EDF, conſtituatur[ρ] ad rectam DE, & ad eius punctum D ang.
ρ. 23. 1. EDG = A, & capiatur[σ] DG = AC vel = DF.
σ. 3. 1. Ducantur FG, EG. 1. *Caſ.* Si EG cadit ſupra EF; quum in $\triangle$is ABC, DEG praeterea ſit AB
τ. hyp. = DE[τ]: erit baſis[υ] BC = baſi EG. Rurſus
υ. 4. 1. quia DG = DF, ideoque[φ] ang. DFG =
φ. 5. 1. DGF: erit ang. DFG > EGF, & multo magis EFG > EGF. Quare in $\triangle$ EGF erit[χ] latus
χ. 19. 1. EG > EF. Ergo & BC > EF. Q. E. D.

ψ. 9. ax. * 2. *Caſ.* Si EG cadit in EF: liquet,[ψ] eſſe EG > EF, ideoque BC > EF. Q. E. D.



* 3. *Caſ.* Si EG cadit infra EF.
ω. 21. 1. Quoniam[ω] DG + GE > DF + FE; ſi hinc inde
α. 5. ax. auferantur aequales DG, DF: manet[α] GE > FE. Ergo & BC > EF. Q. E. D.

PROP. XXV. THEOR.



Si duo triangula ABC, DEF *habeant duo latera* AB, AC, *duobus lateribus* DE, DF *aequalia, alterum alteri, baſin autem* BC *habeant*

beant basi EF *maiorem: habebunt etiam angulum* A *maiorem angulo* D, *qui ab aequalibus rectis comprehenditur.*

Nam si ang. A non maior est quam D: aut est $A = D$, aut $A < D$. Sed si $A = D$: [β] erit BC = EF; contra hypothesin. Si ang. $A < D$: erit [γ] $BC < EF$; etiam contra hypothesin. Ergo ang. $A > D$. Q. E. D. β. 4. 1. γ. 24. 1.

PROP. XXVI. THEOR.

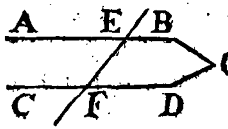
Si duo triangula ABC, DEF *duos angulos* B, ACB, *duobus angulis* E, F *aequales habeant, alterum alteri, vnumque latus vni lateri aequale, vel quod aequalibus adiacet angulis, vel quod vni aequalium angulorum subtenditur: & reliqua latera reliquis lateribus aequalia, alterum alteri, & reliquum angulum* BAC *reliquo* D *aequalem habebunt.*

1. *Hyp.* Sit B = E, ACB = F, & BC = EF. Dico AB = DE, & AC = DF, & ang. BAC = D. Si enim non est AB = DE, sit alterutra $AB > DE$, & fiat [δ] BG = DE, & iungatur GC. δ. 3. 1.
Quoniam ergo BC = EF, & BG = DE, & ang. B = E: erit [ε] GCB = DFE = [ζ] ACB. Q. E. A [η]. ε. 4. 1.
2. *Hyp.* Sit AB = DE. Dico, fore BC = EF, & AC = DF, & ang. BAC = D. Nam si dicatur $BC > EF$, ponatur [δ] BH = EF & ducatur AH. Et quia [ζ] AB = DE, & BH = EF, ζ. hyp. η. 9. ax.

 & ang.

e. 4. I. & ang. B = E; erit [e] ang. BHA = F = ACB.
9. 16. I. Q. E. A [9]. Ergo BC = EF, ideoque [f] & AC = DF, & ang. BAC = D. Q. E. D.

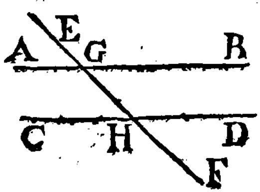
PROP. XXVII. THEOR.



Si in duas rectas lineas AB, CD *recta linea* EF *incidens alternos angulos* AEF, EFD *inter se aequales fecerit; parallelae erunt rectae lineae* AB, CD.

Si enim non sint parallelae; productae ad
i. 34. def. alterutram partem [i] conueniant, velut in puncto G. Ergo ang. AEF extra triangulum
k. 16. I. EGF maior [k] erit interno EFD; contra hypothesin. Ergo AB, CD sunt parallelae. Q. E. D.

PROP. XXVIII. THEOR.



Si in duas lineas AB, CD *recta linea* EF *incidens exteriorem angulum* EGB *interiori & opposito ad easdem partes* EHC *aequalem fecerit; vel interiores & ad easdem partes* AGH, GHC *duobus rectis aequales; rectae lineae* AB, CD *erunt inter se parallelae.*

λ. 15. I. & 1. ax. 1. *Hyp.* Quia ang. EGA = EHC; erit [λ] & ang. BGH = EHC alterno. Parallelae igitur [μ]
μ. 27. I. sunt rectae AB & CD. Q. E. D.

ν. 13. I. 2. *Hyp.* Quia ang. AGH + GHC = 2 rectis = [ν] AGH + BGH: erit, ablato communi ni AGH, ang. BGH = [ξ] alterno GHC. Ergo [μ] AB, CD sunt parallelae. Q. E. D.

ξ. 1. ax.
μ. 27. 1.

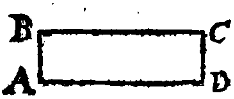
PROP. XXIX. THEOR.

In parallelas rectas lineas AB, CD *recta linea* EF *incidens, & alternos angulos* BGH, GHC *inter se aequales, & exteriorem* EGA *interiori & opposito ad easdem partes* GHC *aequalem, & interiores ad easdem partes* AGH, GHC *duobus rectis aequales efficit.*

Figura propos. 28.

Si enim ang. BGH & GHC inaequales sint: alter e. gr. BGH maior erit. Ergo erit [ο] BGH + AGH > GHC + AGH. Sed BGH + AGH = [π] 2 rectis. Ergo ang. GHC + AGH < 2 rectis. Quare [ρ] rectae AB, CD productae versus A concurrent, ideoque [σ] non erunt parallelae. Quod est contra hypothesin. Ergo ang. BGH = GHC. Ergo quum ang. EGA [τ] = BGH, erit etiam [υ] ang. EGA = GHC. Hinc [φ] ang. EGA + AGH = AGH + GHC. Sed [*] ang. EGA + AGH = 2 rectis. Ergo & [*] ang. AGH + GHC = 2 rectis. Q. E. D.

ο. 4. ax.
π. 13. 1.
ρ. 11. ax.
σ. 34. def.
τ. 15. 1.
υ. 1. ax.
φ. 2. ax.

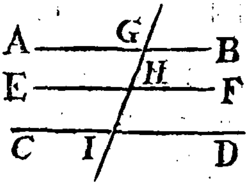


* *Schol.* Hinc omne parallelogrammum AC, habens vnum angulum rectum A, est rectangulum.

Nam A + B = [χ] 2 rectis. Ergo quum A rectus sit, B etiam rectus [ψ] erit. Eodem argumento D & C recti sunt.

χ. 29. 1.
ψ. 3. ax.

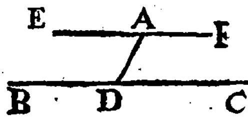
PROP. XXX. THEOR.



Quae AB, CD, *eidem rectae lineae* EF *parallelae ſunt, & inter ſe ſunt parallelae.*

Incidat enim in ipſas recta GHI. Et quia AB,
α. 29. I. EF parallelae ſunt: α ang. AGH = GHF.
Rurſus quia EF, CD parallelae: ang. HID =
α. I. ax. GHF. Ergo α ang. AGH = alterno HID,
β. 27. I. ideoque β rectae AB, CD parallelae. Q. E. D.

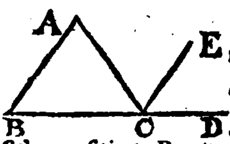
PROP. XXXI. PROBL.



Per datum punctum A *datae rectae lineae* BC *parallelam rectam lineam ducere.*

Sumatur in BC punctum quoduis D, & iun-
γ. 23. I. gatur AD, & fiat ang. γ EAD = ADC, &
δ. 27. I. producatur EA ad F. Erunt δ EF, BC parallelae. Q. E. F.

PROP. XXXII. THEOR.



Omnis trianguli ABC *uno latere* BC *producto, exterior angulus* ACD *angulis duobus interioribus & oppoſitis* A, B, *eſt aequalis; & trianguli tres interiores anguli* A, B, ACB *duobus rectis ſunt aequales.*

Ducatur enim per C ipſi AB ε parallela CE:
ε. 31. I. & erit ang. ACE = ζ A; item ζ ang. ECD = B.
ζ. 29. I. Quare η ACD = A + B. *Quod erat unum.*
η. 2. ax.

Iam

Iam addito communi angulo ACB, erit $ACD + ACB =$ * $A + B + ACB$. Sed ACD x. 2. ax.
$+ ACB =$ 9 2 rectis. Ergo & c anguli $A +$ 9. 13. 1.
$B + ACB = 2$ rectis. *Quod erat alterum.* c. 1. ex.

* *Scholia.*

1. Tres ſimul anguli cuiusuis trianguli aequales ſunt tribus ſimul cuiuscunque alterius. Vnde

2. Si in vno triangulo duo anguli (aut ſinguli, aut ſimul) aequales ſint duobus angulis in altero triangulo: etiam reliquus reliquo aequalis eſt. Item, ſi duo triangula vnum angulum vni aequalem habeant: reliquorum ſummae aequantur.

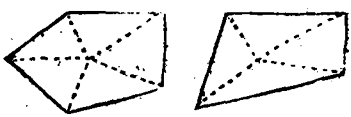
3. In triangulo ſi vnus angulus rectus ſit: reliqui vnum rectum conficiunt.

4. Si in iſoſcele angulus, aequis cruribus contentus, rectus eſt: reliqui ad baſin ſunt ſemirecti.

5. Trianguli aequilateri angulus facit duas tertias vnius recti. Nam $\frac{1}{3}$ 2 rect. $=$ $\frac{2}{3}$ recti.

6. Huius propoſitionis beneficio, cuiuslibet figurae rectilineae tam interni quam externi anguli quot rectos conficiant, innoteſcet per duo ſequentia theoremata.

Theor. I.



Omnes ſimul anguli cuiuscunque figurae rectilineae conficiunt bis tot rectos, demtis quatuor, quot ſunt latera figurae.

Ex quouis puncto intra figuram ducantur ad omnes figurae angulos rectae, quae figuram reſoluent in tot triangula, quot habet latera. Quare quum ſingula triangula conficiant duos rectos: omnia ſimul conficient bis tot rectos, quot ſunt latera. Sed anguli circa dictum punctum conficiunt

ciunt quatuor rectos. Ergo si ab omnium triangulorum angulis demas angulos circa id punctum: anguli reliqui, qui componunt angulos figurae, conficiunt bis tot rectos, demtis quatuor, quot sunt latera figurae. Q. E. D.

Hinc omnes eiusdem speciei rectilineae figurae aequales habent angulorum summas.

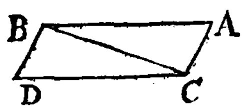
Theor. II.

Omnes simul externi anguli cuiuscunque figurae rectilineae conficiunt quatuor rectos.

Nam singuli interni figurae anguli, cum singulis externis, conficiunt duos rectos. Ergo interni simul omnes, cum omnibus simul externis, conficiunt bis tot rectos, quot sunt latera figurae. Sed (vt modo ostensum est) interni simul omnes etiam, cum quatuor rectis, efficiunt bis tot rectos, quot sunt latera figurae. Ergo externi anguli quatuor rectis aequantur. Q. E. D.

Hinc omnes cuiuscunque speciei rectilineae figurae aequales habent externorum angulorum summas.

PROP. XXXIII. THEOR.



Quae rectae AC, BD *aequales & parallelas* AB, CD *ad easdem partes coniungunt, ipsae etiam sunt aequales & parallelae.*

κ. 29. I. Iungatur enim BC: & quia κ ang. ABC = BCD, & per hyp. AB = CD, & latus BC
λ. 4. I. commune; erit λ AC = BD, & ang. ACB =
μ. 27. I. CBD, ideoque μ rectae AC & BD parallelae erunt. Q. E. D.

PROP.

PROP. XXXIV. THEOR.

Parallelogrammorum spatiorum ABCD *tam latera opposita* (AB = CD, AC = BD), *quam anguli oppositi* (A = D, ABD = ACD) *inter se aequantur; & ipsa diameter* BC *bifariam secat.* Fig. prop. 33.

Quoniam AB, CD parallelae[ν] sunt: [ξ] erit ang. ABC = DCB. Rursus ob [ν] AC, DB parallelas, erit [ξ] ang. DBC = BCA. Et latus BC est commune. Quare [ο] AC = BD, & AB = CD, & ang. A = D. Et quia erat ang. ABC = DCB, & ang. DBC = BCA: toti ang. [π] ABD, ACD aequantur. Denique, quum sit AC = BD, & BC latus commune, & ang. BCA = DBC: tota [ρ] △a. ACB, BCD aequantur. Q. E. D.

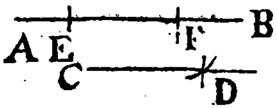
ν. hyp.
ξ. 29. 1.
ο. 26. 1.
π. 2. ax.
ρ. 4. 1.

* Scholium.

Omni quadrilaterum ABDC, *habens latera opposita aequalia, est parallelogrammum.*

Nam per 8. 1. ang. ABC = BCD. Ergo [α] AB, CD parallelae sunt. Eadem ratione ang. BCA = DBC. Quare AC, BD etiam parallelae sunt. Ergo ABDC est parallelogrammum. Q. E. D.

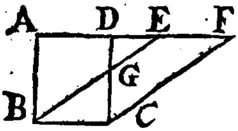
α. 27. 1.



Hinc expeditius per datum punctum C datae rectae AB ducetur parallela CD. Sume in AB quodvis punctum E. Centris E & C, intervallo quovis, duc aequales circulos F, D. Centro vero F, spatio EC, duc circulum FD, qui priorem CD secet in D. Erit ducta CD parallela. Nam, vt modo demonstratum est, ECDF est Pgr.

PROP.

PROP. XXXV. THEOR.

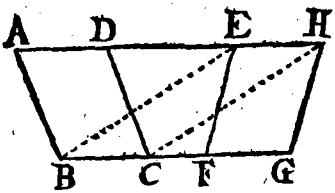


Parallelogramma ABCD *&* EBCF, *super eadem basi* BC, *& in iisdem parallelis* AF, BC *constituta, inter se sunt aequalia.*

σ. 34. 1. Nam quia ABCD, EBCF Pgra sunt: est σ
AD = BC = EF. Adde communem DE, &
τ. 2. ax. erit τ AE = DF. Sed & σ AB = DC, & ang.
υ. 29. 1. A = υ CDF. Ergo △ ABE = φ △ DCF.
φ. 4. 1. Auferatur commune DGE: erit χ trapezium
χ. 3. ax. ADGB = EGCF. Adde commune BGC:
erit τ Pgr. ABCD = EBCF. Q.E.D.

* Reliquorum casuum, si E in D, vel inter D & A cadit, non dissimilis, sed simplicior & facilior est demonstratio.

PROP. XXXVI. THEOR.

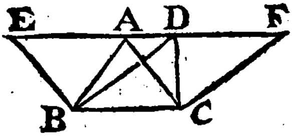


Parallelogramma ABCD, EFGH, *super aequalibus basibus* BC, FG, *& in iisdem parallelis* AH, BG *constituta, inter se sunt aequalia.*

Iungantur enim BE, CH. Et quia per hyp.
ψ. 34. 1. BC = FG = ψ EH; BC & EH sunt aequales.
ω. 33. 1. Sunt vero & parallelae (hyp.). Ergo ω BE &
CH quoque sunt aequales ac parallelae. Qua-
α. 35. 1. re EBCH est Pgr. & aequale α Pgro ABCD.
Sed est etiam α Pgr. EBCH = Pgrò EFGH.
β. 1. ax. Ergo β Pgr. ABCD = EFGH. Q.E.D.

PROP.

PROP. XXXVII. THEOR.

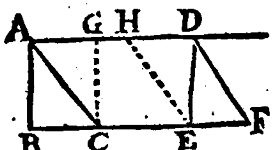


Triangula ABC, DBC, *super eadem basi* BC, *& in iisdem parallelis* AD, BC *constituta, sunt inter se aequalia.*

Producatur [γ] AD in E, F, & ducatur [δ] BE parallela CA, & CF parall. BD. Erit [ε] Pgr. BCAE = DBCF. Sed △ABC [ζ] = ½ Pgr. BCAE, item △DBC = ½ Pgr. DBCF. Ergo △ABC [η] = DBC. Q. E. D.

γ. 1. post.
δ. 31. 1.
ε. 35. 1.
ζ. 34. 1.
η. 7. ax.

PROP. XXXVIII. THEOR.



Triangula ABC, DEF, *super basibus aequalibus* BC, EF, *& in iisdem parallelis* BF, AD *constituta, sunt inter se aequalia.*

Ducatur [θ] CG ipsi BA, & EH ipsi DF parallela. Pgra ergo sunt ABCG & DFEH, & [ι] aequalia. Sed △ABC [κ] est ½ Pgri ABCG, & △DEF est ½ Pgri DFEH. Ergo [λ] △ABC = △DEF. Q. E. D.

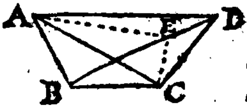
θ. 31. 1.
ι. 36. 1.
κ. 34. 1.
λ. 7. ax.

** Scholium.*

Si basis BC > EF: liquet △BAC > △EDF.
Et si basis BC < EF: erit △BAC < △EDF.

PROP.

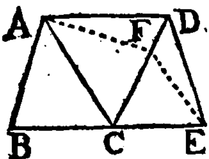
PROP. XXXIX. THEOR.



Triangula ABC, DBC *aequalia, super eadem basi* BC, *& ad easdem partes constituta, sunt in iisdem parallelis* AD, BC.

μ. 31. 1. Si enim AD, BC non sunt parallelae: du-
ν. 37. 1. catur per A ipsi BC parallela μ AE, & ducatur
ξ. hyp. EC. Quare △ BEC = ν △ ABC = ξ △ DBC.
ο. 1. ax. Ergo ο triangula BEC, DBC aequalia sunt.
π. 9. ax. Q.E.A π. Similiter ostendemus, neque vllam
aliam parallelam esse praeter rectam AD.
Ergo AD est ipsi BC parallela. Q.E.D.

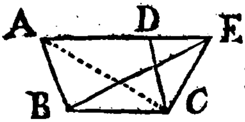
PROP. XL. THEOR.



Triangula ABC, DCE *aequalia, super basibus* BC, CE † *aequalibus, & ad easdem partes constituta, sunt in iisdem parallelis* AD, BE.

ρ. 31. 1. Sin minus: ducatur ρ per A ipsi BE paral-
σ. 37. 1. lela AF, & iungatur FE. Ergo △ FCE = σ
τ. hyp. & 1. ax. △ ABC. Ergo & △ FCE = τ △ DCE.
υ. 9. ax. Q.E.A υ.

PROP. XLI. THEOR.



Si parallelogrammum ABCD, *& triangulum* BEC *eandem habeant basin* BC, *sintque in iisdem parallelis* AE, BC: *parallelogrammum* ABCD *ipsius trianguli* EBC *duplum erit.*

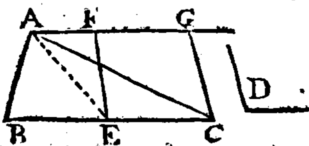
† Puta, in eadem recta positis.

Ducatur

Ducatur enim AC: & erit $^{\phi}$ △ ABC = △ EBC. Sed Pgr. ABCD eſt $^{\chi}$ duplum △ ABC. Ergo Pgr. ABCD eſt $^{\psi}$ duplum △ EBC. Q.E.D. ϕ. 37. 1. χ. 34. 1. ψ. 1. & 6. ax.

PROP. XLII. PROBL.

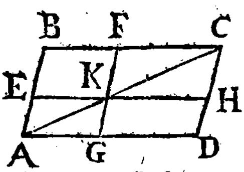
Dato triangulo ABC *aequale parallelogrammum conſtituere in dato angulo rectilineo* D.



Secetur BC bifariam $^{\omega}$ in E, & ω. 10. 1.
fiat $^{\alpha}$ ang. CEF = D. Ducatur α. 23. 1.
AG $^{\beta}$ ipſi BC, & CG ipſi EF parallela. Erit β. 31. 1.
FECG Pgr. aequale △ ABC.

Nam ducta AE, erit $^{\gamma}$ △ ABE = △ AEC. γ. 38. 1.
Ergo △ ABC $^{\delta}$ = 2 △ AEC = $^{\varepsilon}$ Pgr. FECG. δ. 2. ax.
Ergo $^{\zeta}$ Pgr. FECG = △ ABC. Q.E.F. ε. 41. 1. ζ. 1. ax.

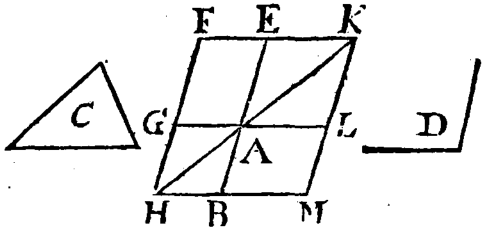
PROP. XLIII. THEOR.



In omni parallelogrammo ABCD *complementa* EF, DK *eorum, quae circa diametrum* AC *ſunt, parallelogrammorum* EG, FH, *inter ſe ſunt aequalia.*

Nam $^{\eta}$ △ ABC = △ ACD. Et quia etiam η. 34. 1.
EG & FH ſunt Pgra, quorum diametri ſunt AK, KC: erit ſimiliter △ AEK = △ AKG, & △ FKC = △ KCH. Quare $^{\vartheta}$ △ AEK + ϑ. 2. ax.
FKC = △ AKG + KCH. Ergo $^{\iota}$ reliquum ι. 3. ax.
Pgr. BK = reliquo KD. Q.E.D.

PROP. XLIV. PROBL.



Ad datam rectam lineam AB *dato triangulo* C *aequale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo* D.

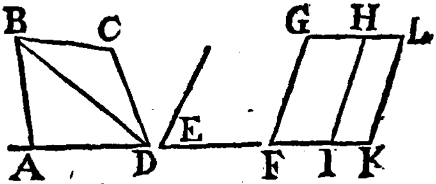
κ. 42. 1. Fiat κ triangulo C = Pgr. AEFG in angulo GAE, dato D aequali, & ponatur AE in directum ipsi AB, & producatur FG ad H, & per B ipsi FE vel GA ducatur parallela BH, & iungatur HA. Et quia ang. EFH + FHB
λ. 29. 1. = λ 2 rectis, ideoque ang. EFH + FHA <
μ. 11. ax. 2 rectis: recta HA producta occurret μ productae FE in K. Per K agatur ipsi FH vel EB parallela, quae rectis GA, HB productis occurrat in L & M. Dico, AM esse Pgr. desideratum.

ν. 43. 1. Nam ν Pgr. AM = AF ξ = △o C. Et ang.
ξ. constr. LAB = GAE = ξ D. Ergo ad datam rectam AB in dato angulo D applicatum est Pgr. AM, triangulo C aequale. Q.E.F.

PROP. XLV. PROBL.

Dato rectilineo ABCD *aequale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo* E.

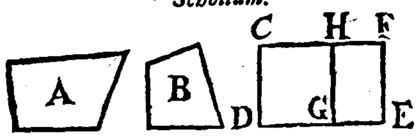
Datum



Datum rectilineum resolue in triangula BAD, BCD, & fac ° Pgr. FH = △ BAD, ita vt ang. F = E. Deinde ad HI fac π Pgr. HK = △ BCD, vt dato angulo E aequalis sit HIK. o. 42. I. π. 44. I.

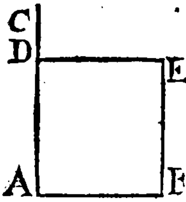
Quia ang F = E = HIK: erit ang. F + FIH = ϱ HIK + FIH. Sed F + FIH = σ 2 rectis. Ergo τ & ang. HIK + FIH = 2 rectis, & IK est in directum υ ipsi FI. Ergo ang. HIK = σ alterno GHI, & adeo ang. HIK + IHL = ϱ GHI + IHL. Quare quum sint ang. HIK + IHL = σ 2 rectis: erunt & GHI + IHL = τ 2 rectis, & erit υ HL ipsi GH in directum. Hinc, ob GH, FK parallelas φ, etiam GL, FK parallelae sunt; nec non GF, LK eidem φ HI parallelae, ipsae χ sunt parallelae. Ergo FGLK est Pgr. & φ quia FH = △ ABD, & HK = △ BCD: totum Pgr. FGLK = ϱ toti rectilineo ABCD. Q. E. F. ϱ. 2. ax. σ. 29. I. τ. I. ax. υ. 14. I. φ. constr. & dem. χ. 30. I.

** Scholium.*



Hinc facile inuenitur excessus HE, quo rectilineum aliquod A superat rectilineum minus B: nimirum si ad quamuis rectam CD applicentur Pgr. DF = A, & DH = B.

PROP. XLVI. PROBL.



A data recta linea AB *quadratum describere.*

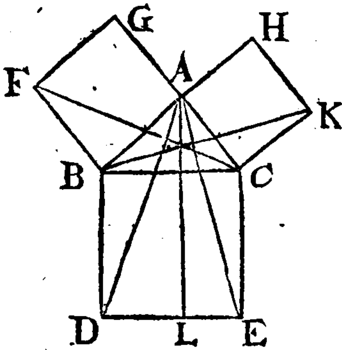
Ducatur ex A in AB perpendicularis
ψ. 11. 1. pendicularis ψ AC, in qua
ω. 3. 1. capiatur ω AD = AB. Per
D ipsi AB, & per B ipsi AC
α. 31. 1. ducantur α parallelae DE, BE. Erit BD quadratum, a data recta AB descriptum.

β. 34. 1. Est enim BD parallelogrammum. Ideo & β AB = DE, & AD = EB. Sed AD = AB.
γ. 1. ax. Ergo γ singula latera AD, AB, BE, DE inter se aequalia sunt. Quare BD est quadrilaterum aequilaterum. Et quoniam BD est Pgr.
δ. sch. 29. 1. habens vnum rectum angulum A: δ anguli reliqui D, E, B etiam recti erunt. Ergo BD
ε. 29. def. est ε quadratum. Q. E. F.

* *Scholium.*

Eodem modo facile describes rectangulum, quod sub datis duabus rectis contineatur.

PROP. XLVII. THEOR.



In rectangulis triangulis ABC *quadratum* BC ED, *quod a latere* BC *rectum angulum* A *subtendente describitur, aequale est quadratis* BG, CH, *quae a lateribus* AB, AC, *rectum*

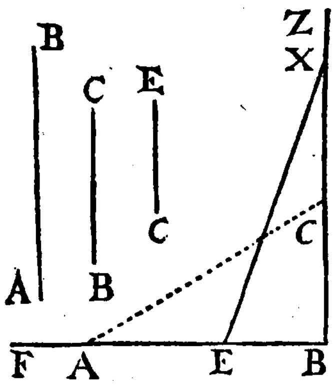
rectum angulum comprehendentibus, describuntur.

Per A ipsi BD vel CE ducatur ζ parallela ζ. 31. 1.
AL, & iungantur AD, FC. Quoniam ergo
vterque ang. BAC, BAG rectus est: AC &
AG erunt η in directum. Eadem ratione & η. 14. 1.
BA, AH sunt in directum. Iam ang. DBC
= θ FBA, ideoque ang. DBA = ι FBC, & θ. 10. ax.
DB = κ BC, ac BA = FB: ergo λ △ ABD ι. 2. ax.
= FBC. Sed Pgr. BL, quod cum △ ABD κ. 29. def.
est in eadem basi BD & in iisdem parallelis λ. 4. 1.
BD, AL, est duplum μ △i ABD; & quadra- μ. 41. 1.
tum BG, quod cum △ FBC est in eadem basi
FB & in iisdem parallelis FB, GC, est μ du-
plum △FBC. Ergo ν Pgr. BL = BG. Simi- ν. 6. ax.
liter ductis AE, BK, ostendetur Pgr. CL =
CH. Totum ergo ξ quadratum BCED = ξ. 2. ax.
quadratis BG + CH. Q. E. D.

* *Scholium.*

Hoc nobilissimum & vtilissimum theorema ab inuentore *Pythagora* Pythagoricum dici meruit. Eius beneficio quadratorum additio & subtractio perficitur, quo spectant duo sequentia problemata.

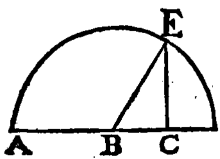
Problema I.



Datis quotcunque quadratis, vnum omnibus aequale constituere.

Dentur quadrata tria: quorum latera sint AB, BC, CE.
a. 11. 1. Fac [a] ang. rectum FBZ, infinita habentem latera, in eaque transfer BA, & BC, &
π. 47. 1. iunge AC: erit [π] ACq = ABq + BCq. Tum AC transfer ex B in X, & CE tertium latus datum transfer ex B in E, & iunge EX: erit [π] EXq = EBq (vel CEq) + BXq
ρ. 2. ax. (vel ACq) = [ρ] CEq + BCq + ABq. Q. E. F.

Problema II.



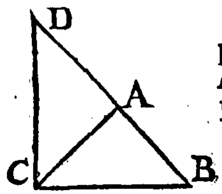
Datis duabus rectis inaequalibus AB, BC, exhibere quadratum, quo quadratum maioris AB excedit quadratum minoris BC.

Centro B, interuallo BA describe circulum. Ex C erige perpendicularem CE, occurrentem peripheriae in E. Ducatur BE. Erit BEq
σ. 47. 1. (vel BAq) = [σ] BCq + CEq. Ergo [τ]
τ. 3. ax. BAq — BCq = CEq. Q. E. F.

PROP.

PROP. XLVIII. THEOR.

Si quadratum, quod describitur ab uno BC *laterum trianguli* ABC, *aequale sit quadratis, quae a reliquis trianguli lateribus* AB, AC *describuntur: angulus* B A C, *a reliquis duobus trianguli lateribus* AB, AC *comprehensus, rectus erit.*



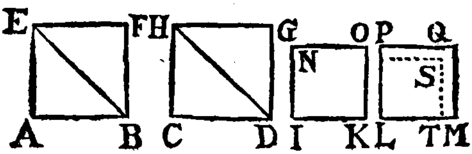
Ducatur enim [υ] ad AC perpendicularis AD, & fiat AD = AB, & iungatur DC. υ. 11. 1.

Quoniam ergo DA = AB: erit & DAq = ABq, ideoque DAq + ACq = [φ] ABq + ACq. Sed DAq + ACq = [χ] DCq, & ABq + ACq = [ψ] CBq. Ergo DCq = CBq, ideoque DC = CB. Hinc quoniam AD = AB, & latus AC commune: erit [ω] ang. BAC = CAD. Rectus autem est [α] CAD. Quare & ang. BAC rectus est. Q. E. D. φ. 2. ax. χ. 47. 1. ψ. hyp. ω. 8. 1. α. 10. def.

* *Scholium.*

Sumtum est in demonstratione, ex eo, quod DA = AB, sequi DAq = ABq; & ex eo, quod DCq = CBq, sequi DC = CB. Hoc vero manifestum fiet ex sequenti theoremate.

* *Theorema.*



Linearum rectarum aequalium AB, CD *aequalia sunt quadrata* AF, CG. *Et quadratorum aequalium* NK, PM *aequalia sunt latera* IK, LM.

Pro 1. Hyp. Duc diametros EB, HD. Liquet
β. 34. 1. AF $=^{\beta}$ duplo Δ EAB $=^{\gamma}$ 2 Δ HCD $=^{\beta}$ CG.
γ. 4. 1. & 6. ax. Ergo AF $=$ CG. Q.E.D.

Pro 2. Hyp. Si fieri potest, sit LM $>$ IK: fac
δ. 46. 1. LT $=$ IK, sitque $^{\delta}$ LS $=$ LTq. Ergo LS $=^{\epsilon}$
ε. 1. part. NK $=^{\zeta}$ LQ. Q.E.A $^{\eta}$. Ergo LM $=$ IK.
ζ. hyp. Q. E. D.
η. 9. ax.

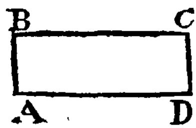
* *Schol.*

Eodem modo quaelibet rectangula, inter se aequilatera, aequalia ostendentur.

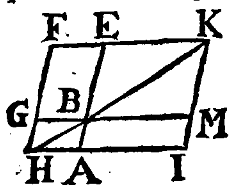
EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER II.

DEFINITIONES.



1. Omne *parallelogrammum rectangulum* ABCD *contineri* dicitur *sub duabus rectis lineis* AB, AD, quae rectum angulum A comprehendunt.



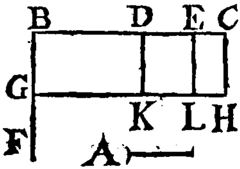
2. Omnis parallelogrammi FHIK vnumquodque eorum, quae circa HK diametrum ipsius sunt, parallelogrammorum EM, GA, cum duobus complementis FB, BI, *Gnomon* vocatur. (Hoc est, figura FHIMBEF vocatur gnomon, item figura FKIABGF.)

Breuitatis gratia has duas notas in hoc libro adhibemus.

Rgl. notat parallelogrammum rectangulum, veluti Rgl. BAD, lege rectangulum BAD.

$\times$ indicat etiam rectangulum, contentum sub duabus rectis, inter quas haec nota scripta est. E. gr. BA $\times$ AD indicat rectangulum, sub rectis BA & AD contentum.

PROPOSITIO I. THEOR.



Si sint duae rectae lineae A, BC, *altera autem ipsarum* BC *secta fuerit in quotcunque partes* BD, DE, EC: *rectangulum, sub duabus rectis* A, BC *contentum, aequale est iis rectangulis* $A \times BD, + A \times DE, + A \times EC$, *quae sub recta linea non secta* A *& singulis alterius* BC *segmentis continentur.*

α. 11. 1. Ducatur enim [α] a puncto B ipsi BC perpen-
β. 3. 1. dicularis BF, atque [β] fiat $BG = A$, & per G
γ. 31. 1. ipsi BC parallela sit [γ] GH, per puncta vero D, E, C ipsi BG parallelae sint DK, EL, CH. Er-
δ. sch. 29. 1. go [δ] $Rgl. BH = Rgl. BK + DL + EH$. Sed
ε. constr. quia [ε] $BG = A$: erit $Rgl. BH =$ [ζ] $A \times BC$, &
ζ. 1. def. 2.
η. 34. 1. $Rgl. BK = A \times BD$. Et quia [η] $DK = EL = BG = A$: erit $Rgl. DL = A \times DE$, & $Rgl. EH = A \times EC$. Quare $A \times BC = A \times BD, + A \times DE, + A \times EC$. Q. E. D.

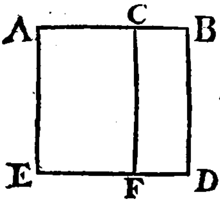
* *Scholium.*

Hinc si fuerint duae rectae Y, Z, secenturque ambae in quotcunque partes; rectangulum sub totis aequale est rectangulis sub partibus.

Nam sint rectae Z partes A, B, C, & rectae Y partes D, E. Quia $D \times Z = D \times A + D \times B, + D \times C$; & $E \times Z = E + A, + E \times B, + E \times C$; & $Y \times Z = D \times Z, + E \times Z$:
θ. 2. ax. erit [θ] $Y \times Z = D \times A, + D \times B, + D \times C, + E \times A, + E \times B, + E \times C$. Q. E. D.

PROP.

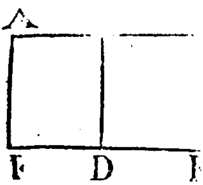
PROP. II. THEOR.



Si recta linea AB *secetur vtcunque in* C: *rectangula, sub tota* AB *& vtroque segmento* AC, CB *contenta, aequantur quadrato totius* AB.

Describatur ex AB quadratum [ι] ABDE, ι. 46. 1.
& per C ducatur [κ] alterutri AE, BD parallela κ. 31. 1.
CF. Est igitur $AD = \text{Rgl.}\, AF + CD = AE \times AC, + BD \times CB = AB \times AC, + AB \times CB$, quia [λ] $AE = BD = AB$. Ergo λ. 29. def. 1.
$\text{Rgl.}\, AB \times AC, + AB \times CB =$ quadrato totius AD. Q. E. D.

PROP. III. THEOR.

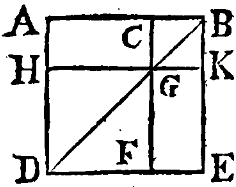


Si recta linea AB *secetur vtcunque in* C: *rectangulum, sub tota* AB *& vno segmento* BC *contentum, aequatur rectangulo sub segmentis* AC, CB *contento, & praedicti segmenti* CB *quadrato.*

Describatur [μ] ex CB quadratum BCDE, μ. 46. 1.
& producatur ED in F, & per A alterutri CD, BE ducatur parallela AF. Ergo $\text{Rgl.}\, AE = \text{Rgl.}\, AD +$ quadrato CE. Et quia [ν] $BE =$ ν. 29. def. 1.
CB: est $\text{Rgl.}\, AE = AB \times BC$; item quia $CD = BC$: est $\text{Rgl.}\, AD = AC \times CB$. Quare $AB \times BC = AC \times CB, + CB\,q$. Q. E. D.

PROP.

PROP. IV. THEOR.



Si recta linea AB *secetur vtcunque in* C: *quadratum totius* AB *aequatur quadratis segmentorum* AC, CB, *& rectangulo bis contento sub segmentis* AC, CB.

ξ. 46. 1. Describatur [ξ] ex AB quadratum ADEB, iungatur BD, & per C alterutri AD, BE ducatur parallela CGF, per G vero alterutri
ο. 29. 1. AB, DE parallela HK. Erit ergo [ο] ang. BGC
π. 29. def. 1. = ADB. Sed quia [π] AD = AB: ang. [ρ]
ρ. 5. 1. ABD = ADB; quare ang. BGC = [σ] CBG,
σ. 1. ax. & ideo CB = [τ] CG. Est vero [υ] CB = GK,
τ. 6. 1.
υ. 34. 1. & CG = BK. Ergo CGKB est aequilaterum.
φ. sch. 29. 1. Sed est quoque [φ] rectangulum, ob angulum ABE [π] rectum. Quare CGKB est CBq. Eadem ratione HF est HGq, id est [υ] ACq. Et
χ. 43. 1. quoniam Rgl. AG = [χ] Rgl. GE, & ob CG = CB, Rgl. AG = AC × CB: erit & Rgl. GE = AC × CB. Ergo AG × GE = 2. AC × CB. Ergo ABq = CK + HF + AG + GE = CBq + ACq + 2. AC × CB. Q. E. D.

Aliter.

Quoniam ang. BAD [π] = recto: ang. ABD
ψ. 32. 1. + ADB = [ψ] recto. Sed quum sit [π] AB = AD, ideoque [ω] ang. ABD = ADB; erit ang.
ω. 5. 1. ABD = ½ recto. Et quoniam ang. BAD re-
α. 29. 1. ctus est: ang. BCG etiam [α] rectus erit. Quare in △ BCG reliquus angulus BGC etiam = [ψ] ½ recto.

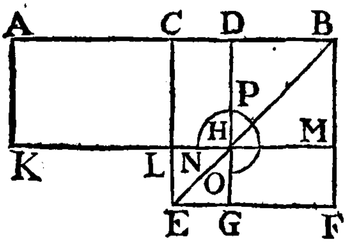
ψ $\frac{1}{2}$ recto. Hinc β GC $=$ CB; & quia GC ψ. 32. 1.
$=$ γ BK, ac CB $=$ GK: erit CK aequilaterum. β. 6. 1.
Est vero & rectangulum, ob ang. ABE γ. 34. 1.
rectum. Ergo CK est CBq. Eadem ratione
&c. vt supra.

Coroll. 1. Ex his manifestum est, in quadratis parallelogramma, quae sunt circa diametrum, esse quadrata.

* *Cor.* 2. Item, diametrum cuiusuis quadrati angulos eius bisecare.

* *Schol.* Si AC $= \frac{1}{2}$ AB: erit ABq $=$ 4 ACq, & ACq $= \frac{1}{4}$ ABq. Et contra, si ABq $=$ 4 ACq: erit AC $= \frac{1}{2}$ AB.

PROP. V. THEOR.



Si recta linea AB *secetur in aequalia* AC, CB, *& inaequalia* AD, DB: *rectangulum* AD $\times$ DB *sub inaequalibus totius segmentis contentum una cum quadrato rectae* CD *inter puncta sectionum aequatur quadrato dimidiae* BC.

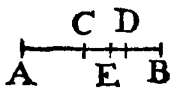
Describatur δ ex CB quadratum CBFE, δ. 46. 1.
iungatur BE, & per D alterutri CE, BF parallela DHG, ac per H alterutri AB, EF parallela KLM, per A denique alterutri CL, BF parallela AK ducatur. Et quia ε CH $=$ HF: ε. 43. 1.
erit ζ CM $=$ DF. Sed CM $=$ η AL: quare ζ. 2. ax.
AL $=$ DF, &, addito communi CH, AH ζ $=$ η. 36. 1.
gnomoni

gnomoni NPO, &, tandem addito communi LG, $AH + LG = CBq$. Est autem ob
9. 1. cor. 4. 2. $DH =$ [9] DB, Rgl. $AH = AD \times DB$, & LG
ι. 34. 1. & est [9] $LHq =$ [ι] CDq. Ergo $AD \times DB +$
schol. 48. 1. $CDq = CBq$. Q. E. D.

* *Scholia.*

1. Hoc theorema paullo aliter sic effertur: *Rectangulum sub summa* AD *& differentia* DB *duarum rectarum* AC (vel CB) & CD, *aequatur differentiae quadratorum ex ipsis.*

2. *Si* AB *aliter diuidatur, propius scilicet puncto bisectionis, in* E: *dico* $AE \times EB > AD \times DB$. Nam $AE \times EB + CEq =$ [κ] CBq
κ. 5. 2. $=$ [κ] $AD \times DB + CDq$.
Ergo quum $CEq < CDq$:
λ. 5. ax. erit [λ] $AE \times EB > AD \times DB$. Q. E. D.

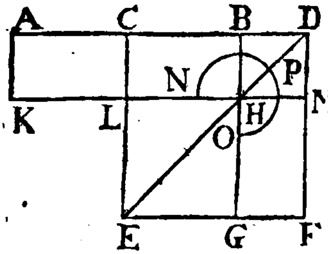


3. Hinc $ADq + DBq > AEq + EBq$. Nam
μ. 4. 2. $ADq + DBq + 2\,AD \times DB =$ [μ] $ABq =$ [μ] $AEq + EBq + 2\,AE \times EB$. Ergo quum $2\,AE \times EB > 2\,AD \times DB$: erit $ADq + DB > AEq + EBq$. Q. E. D.

ν. 3. ax. 4. Ex quibus simul patet, esse [ν] $ADq + DBq - AEq - EBq = 2\,AE \times EB - 2\,AD \times DB$.

PROP.

PROP. VI. THEOR.

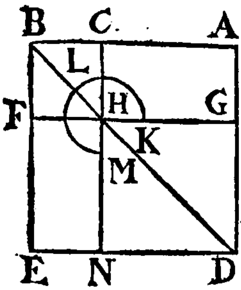


Si recta linea AB *secetur bifariam in* C, *&* *illi recta quaecunque linea* BD *in directum adiiciatur: rectangulum* AD × BD *contentum sub composita ex tota cum adiecta & adiecta, una cum quadrato dimidiae* CB, *aequatur quadrato compositae* CD *ex dimidia & adiecta tanquam unius lineae.*

Describatur ex CD quadratum CDFE, iungatur ED, per B alterutri CE, DF; sit parallela BHG, & per H ipsi AD vel EF parallela KLM, & adhuc per A ipsi CL vel DM parallela AK. Itaque quia AC = CB, Rgl. AL =
ξ CH = ο HF. Addito communi CM, erit ξ. 36. 1.
AM = gnom. NPO. Atqui ob DM π ο. 43. 1.
= DB est AM = AD × DB. Ergo AD π. 1. cor. 4. 2.
× DB = gnom. NPO. Sed ob CB = ς
LH, est CBq = π LG. Ergo AD × DB ς. 34. 1.
+ CBq = gnom. NPO + LG = CDq.
Q.E.D.

PROP.

PROP. VII. THEOR.



Si recta linea AB secetur vtcunque in C: quadrata totius AB & vnius e segmentis BC simul sumta aequantur rectangulo 2 AB $\times$ BC *bis contento sub tota & dicto segmento, vna cum* ACq *quadrato reliqui segmenti.*

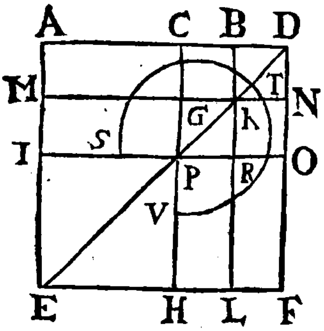
Describantur enim ex AB quadratum AE, & in eo reliquae figurae, vt antea. Quoniam
σ. 43. 1. AH = σ HE: erit τ AF = CE, & AF + CE
τ. 2. ax. = 2 AF. Sed AF + CE = gnom. KLM + CF: ergo gnomon KLM + CF = 2 AF. Iam
υ. 1. corol. quum υ CF sit CBq, & hinc BF = BC: erit
4. 2. 2 AB $\times$ BC = 2 AF, ideoque gnomon KLM + BCq = 2 AB $\times$ BC. Ergo addito vtrinque GN = ACq, erit ABq + BCq = 2 AB $\times$ BC + ACq. Q. E. D.

* *Scholium.*

Hinc quadratum differentiae duarum rectarum AB, BC, aequale est quadratis vtriusque minus duplo rectangulo sub ipsis. Nam
φ. 3. ax. ABq + BCq — 2 AB $\times$ BC = φ ACq = (AB — BC) q.

PROP.

PROP. VIII. THEOR.



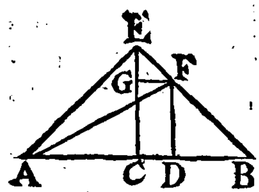
Si recta linea AB *secetur utcunque in* C: *rectangulum, quater contentum sub tota* AB *&* *uno e segmentis* BC, *una cum quadrato reliqui segmenti* AC, *aequatur quadrato compositae ex tota* AB *& praedicto segmento* BC *tanquam unius lineae.*

In producta AB fiat BD = BC, & describatur ex AD quadratum AEFD, & reliquae figurae describantur bis, quae in praecedente propositione. Ergo quia CB = BD, & [χ] CB χ. 34. 1.
= GK, ac BD = KN: erit GK = KN. Eadem ratione PR = RO. Hinc [ψ] Rgl. CK ψ. 36. 1.
= Rgl. BN, & Rgl. GR = Rgl. KO. Sed Rgl. CK = [ω] Rgl. KO. Quare & Rgl. BN ω. 43. 1.
= Rgl. GR; ideoque CK + BN + GR + KO = 4 CK. Porro GC [χ] = BK = [α] BD, α. 1. coroll.
& BC = BD; ideoque CG = CB. Sed & [α] 4. 2.
GP = GK = CB. Ergo CG = GP, & Rgl. AG = [ψ] Rgl. MP. Eadem ratione ob PR = RO est Rgl. PL = Rgl. RF. Quum autem in Pgr. ML sit MP = [ω] PL: erit AG = RF; hinc AG + MP + PL + RF = 4 AG. Sed ostensum est, quod CK + BN + GR + KO = 4 CK. Quare [β] totus gnomon STV β. 2. ax.

 = 4

$= 4$ AK. Sed ob BK $=$ BD $=$ BC est AK $=$ AB $\times$ BC. Ergo gnomon STV $= 4$ AB $\times$ BC. Denique quia IP $=$ [x] AC: est IH vel [a] IPq $=$ ACq. Quare [β] totum quadratum AF, id est (AB $+$ BCq) $= 4$ AB $\times$ BC $+$ ACq. Q.E.D.

PROP. IX. THEOR.



Si recta linea AB *secetur in aequalia* AC, CB, *& inaequalia* AD, DB: *quadrata inaequalium segmentorum* ADq $+$ DBq *sunt dupla quadratorum a dimidia, & a recta inter puncta sectionum,* 2 ACq $+$ 2 CDq.

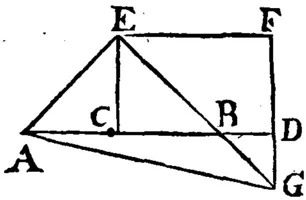
γ. 11. 1. Ex C ducatur [γ] in AB perpendicularis, in
δ. 3. 1. qua fiat [δ] CE $=$ AC. Iungantur AE, EB, &
ε. 31. 1. per D ipsi CE [ε] parallela DF, & per F ipsi AB parallela FG agantur, iungaturque AF.
ζ. 5. 1. Itaque quia [ζ] EAC $=$ AEC, &, ob ang. ACE
η. 3. schol. rectum, EAC $+$ AEC $=$ [η] recto: vterque
32. 1. ang. EAC, AEC $= \frac{1}{2}$ rect. Eadem ratione vterque ang. EBC, BEC $= \frac{1}{2}$ rect. Ergo totus ang. AEB rectus est. Et quia ang. GEF
θ. 29. 1. $= \frac{1}{2}$ recti, EGF vero [θ] $=$ ECB $=$ recto: re-
ι. 32. 1. liquus EFG etiam [ι] $= \frac{1}{2}$ recti. Hinc ang.
κ. 6. 1. GEF $=$ EFG, & [κ] GF $=$ EG. Eadem ratione DF $=$ DB. Et quoniam AC $=$ CE, ideo-
λ. sch. 48. 1. que [λ] ACq $=$ CEq: erit ACq $+$ CEq $= 2$ ACq. Est vero ACq $+$ CEq $=$ [μ] AEq. Ergo AEq

go AEq = 2 ACq. Eadem ratione est EFq = μ 2 GFq = 2 CDq. Quare AEq + EFq, μ. 47. 1.
id est λ AFq = 2 ACq + 2 CDq. Sed AFq = μ ADq + DFq = ADq + DBq.
Ergo ADq + DBq = ν 2 ACq + 2 CDq. ν. 2. ax.
Q. E. D.

** Scholium.*

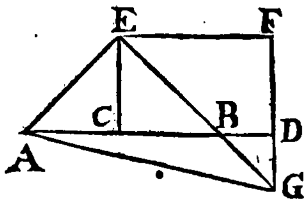
Aliter effertur sic: *Aggregatum quadratorum ex summa* AD *&* *differentia* DB *duarum rectarum* AC, CD *aequatur duplo quadratorum ex ipsis* AC, CD.

PROP. X. THEOR.



Si recta linea AB *secetur bifariam in* C, *&* *illi recta quaecunque linea* BD *in directum adiiciatur: quadratum compositae* AD *ex tota & adiecta, & quadratum adiectae* BD *simul sumta sunt dupla & quadrati ex dimidia* AC, *& quadrati compositae* CD *ex dimidia & adiecta, tanquam unius lineae.*

Ducatur enim ξ ex C ipsi AD perpendicularis CE, & fiat alterutri AC, CB aequalis, ξ. 11. 1.
o. 31. 1.
iunganturque AE, EB, & per E quidem o ducatur ipsi AD parallela EF, per D vero ipsi π. 29. 1.
CE parallela DF. Et quoniam anguli FEC + EFD = π 2 rectis: ang. FEB + EFD < 2 rect.

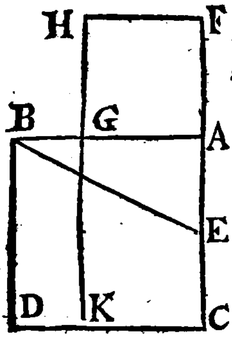


2 rect. ideoque rectae EB, FD productae conuenient ρ ad partes
ρ. 11. ax. BD. Producantur, & conueniant in G, & iungatur AG.

σ. 5. 1. Itaque quia EAC $=$ σ CEA, & ob ang.
τ. 32. 1. ACE rectum, EAC $+$ CEA $=$ τ recto: erit vterque ang. EAC, CEA $= \frac{1}{2}$ recti. Eadem ratione vterque ang. CEB, EBC $= \frac{1}{2}$
υ. 2. ax. recti. Ergo υ AEB $=$ recto. Quia φ DBG
φ. 15. 1. $=$ EBC, & hinc DBG $= \frac{1}{2}$ recti, BDG vero $=$ τ ECB $=$ recto: erit τ ang. BGD
χ. 6. 1. $= \frac{1}{2}$ recti $=$ DBG, ideoque DG $=$ χ BD. Et quum ergo BGD $= \frac{1}{2}$ recti, ac ang. EFG
ψ. 34. 1. $=$ ψ ECD $=$ recto: erit quoque τ ang. FEG $= \frac{1}{2}$ recti $=$ EGF, & hinc χ EF $=$ FG. Porro quia, ob AC $=$ CE, est ACq
ω. sch. 48. 1. $=$ ω CEq, & ACq $+$ CEq $=$ 2 ACq:
α. 47. 1. erit α AEq $=$ 2 ACq. Simili ratione EGq
β. 34. 1. & $=$ 2 EFq $=$ β 2 CDq. Quare υ AGq
sch. 48. 1. ($=$ α AEq $+$ EGq) $=$ 2 ACq $+$ 2 CDq. Sed AGq $=$ α ADq $+$ DGq $=$ ADq $+$ BDq. Ergo ADq $+$ BDq $=$ 2 ACq $+$ 2 CDq. Q. E. D.

PROP.

PROP. XI. PROBL.



Datam rectam lineam AB ita secare, vt rectangulum sub tota AB & altero segmento aequetur quadrato reliqui segmenti.

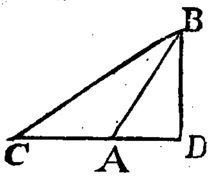
Describatur γ ex AB quadratum ABDC, seceturque δ AC bifariam in E, ducatur EB, & in producta EA fiat EF = ε EB, ac describatur ex AF quadratum AFHG, & producatur HG ad K. Dico, AB ita sectam esse in G, vt sit AB × BG = AGq.

γ. 46. 1.
δ. 10. 1.
ε. 3. 1.

Nam ζ CF × FA + AEq = EFq = η EBq. Sed EBq = θ ABq + AEq. Ergo CF × FA + AEq = ABq + AEq, & hinc ι CF × FA = ABq. Iam quia κ AF = FH: erit CF × FA = Rgl. FK. Est vero ABq = AD (per constr.) Ergo Rgl. FK = AD. Hinc ablato communi GC, erit FG = GD. Sed FG est AGq, &, ob BD = κ AB, est GD = AB × BG. Ergo AB × BG = AGq. Q.E.F.

ζ. 6. 2.
η. sch. 48. 1.
θ. 47. 1.
ι. 3. ax.
κ. 29. def. 1.

PROP. XII. THEOR.



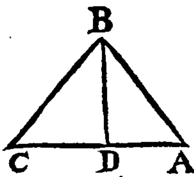
In triangulis amblygoniis ABC *quadratum lateris* BC, *subtendentis angulum obtusum* A, *maius est quam quadrata laterum* AC, AB, *angulum obtusum* A *comprehendentium, rectangulo bis contento sub vno laterum* CA, *circa angulum obtusum, in quod productum perpendicularis* BD *cadit, & recta* AD *extra intercepta a perpendiculari* BD *ad angulum obtusum.* (Hoc est: $BCq = CAq + ABq + 2\,CA \times AD$.)

λ. 4. 2. Nam λ $CDq = CAq + ADq + 2\,CA \times AD$, ideoque μ $CDq + DBq = CAq + ADq + DBq + 2\,CA \times AD$. Sed $CDq + DBq$ ν $= CBq$, & $ADq + DBq = ABq$. Ergo $CBq = CAq + ABq + 2\,CA \times AD$. Q.E.D.

μ. 2. ax.

ν. 47. I.

PROP. XIII. THEOR.

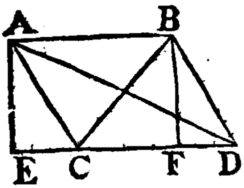


In triangulis oxygoniis ABC *quadratum lateris* BC, *subtendentis angulum acutum* A, *minus est quam quadrata laterum* AC, AB, *comprehendentium angulum acutum, rectangulo bis contento sub vno laterum circa angulum acutum* CA, *in quod perpendicularis* BD *cadit, & recta* AD *intus intercepta a perpendiculari ad angulum acutum*

acutum. (Hoc eſt: $BCq + 2\,CA \times AD = CAq + ABq$.)

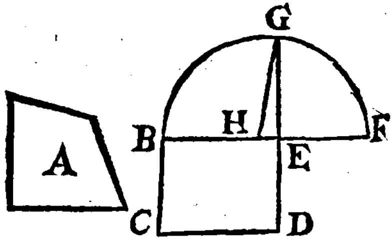
Nam [ξ] $CAq + ADq = 2\,CA \times AD + CDq$; hinc [o] $CAq + ADq + BDq = 2\,CA + AD + CDq + BDq$. Iam [π] $ABq = ADq + BDq$, & $BCq = CDq + BDq$. Ergo $CAq + ABq = BCq + 2\,CA \times AD$. Q. E. D. ξ. 7. 2. o. 2. ax. π. 47. I.

* *Schol.* Hinc demonſtratur, *in omni parallelogrammo* A B D C *quadrata e diametris* AD, BC *aequalia eſſe quadratis laterum ſimul ſumtis.* Nam ductis perpendicularibus A E, B F, eſt $ADq =$ [ρ] $DCq + CAq + 2\,DC \times CE$, & ρ. 12. 2.



$BCq + 2\,DC \times DF =$ [σ] $CDq + BDq$. Eſt autem $CDq =$ [τ] ABq; & ob ang. $AEC =$ [υ] BFD, ac $ACE =$ [φ] BDF, ac $AC =$ [τ] BD, eſt $CE =$ [χ] DF: ergo $BCq + 2\,DC \times CE = ABq + BDq$. Quare [ψ] $ADq + BCq + 2\,DC \times CE = ABq + BDq + DCq + CAq + 2\,DC \times CE$, & ergo [ω] $ADq + BCq = ABq + BDq + DCq + CAq$. Q. E. D. σ. 13. 2. τ. 34. I. υ. 10.def.I. & 10. ax. φ. 29. I. χ. 26. I. ψ. 2. ax. ω. 3. ax.

PROP. XIV. PROBL.



Dato rectilineo A *aequale quadratum constituere.*

α. 45. 1. Constituatur rectilineo A aequale α Pgr. rectangulum BD. Si igitur BE = ED: erit
β. 29. def. BD quadratum β desideratum. Sin minus:
& 34. 1. erit alterutrum latus BE > ED, & tunc pro-
γ. 3. 1. ducatur BE, donec EF = γ ED, & bisecta δ
δ. 10. 1. BF in H describatur circulus interuallo HB vel HF, & producatur DE in G. Dico, fore EGq = A.

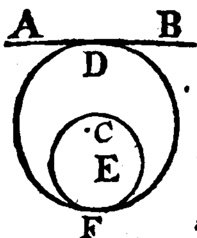
ε. 5. 2. Nam iungatur HG: & est ε BE × EF +
ζ. 15. def. & HEq = HFq = ζ HGq. Sed ob ang. HEG η
sch. 48. 1. rectum, est θ HGq = EGq + HEq. Qua-
η. 1. sch. 13. re EGq + HEq = ι BE × EF + HEq,
θ. 47. 1. atque EGq = κ BE × EF. Est autem ob λ
ι. 1. ax. EF = ED, BE × EF = Rgl. BD = λ A.
κ. 3. ax.
λ. constr. Ergo EGq = ι A. Q.E.F.

EVCLI-

EVCLIDIS
ELEMENTORVM
LIBER III.

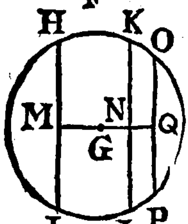
DEFINITIONES.

1. *Aequales circuli* sunt, quorum diametri sunt aequales, vel quorum lineae ex centris sunt aequales.



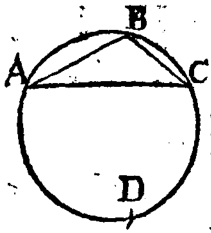
2. *Recta linea* AB *circulum* C *contingere* dicitur, quae, contingens circulum (in D) & producta, ipsum non secat.

2. *Circuli* C, & E *contingere sese* dicuntur, qui, contingentes se mutuo (in F), se non secant.



4. In circulo *aequaliter distare a centro* G *rectae* lineae HI, KL dicuntur, quando a centro ad ipsas perpendiculares GM, GN ductae sunt aequales.

5. *Magis* autem *distare a centro* G dicitur ea OP, in quam maior perpendicularis GQ cadit.

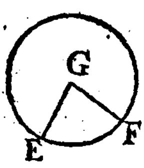


6. *Segmentum circuli* eſt figura ACBA, quae ſub recta linea AC & circuli circumferentia ABC comprehenditur.

7. *Angulus ſegmenti* eſt ACD, qui recta linea AC & circuli circumferentia C D comprehenditur.

8. *Angulus in ſegmento* ACBA eſt, quando in circumferentia ABC ſegmenti ſumitur aliquod punctum B, atque ab ipſo ad terminos A, C, lineae eius AC, quae baſis eſt ſegmenti, rectae lineae BA, BC ducuntur, angulus ABC a ductis lineis BA, BC comprehenſus.

9. Quando autem comprehendentes angulum ABC rectae lineae BA, BC intercipiunt circumferentiam ADC: illi *circumferentiae* ADC *inſiſtere angulus* ABC dicitur.



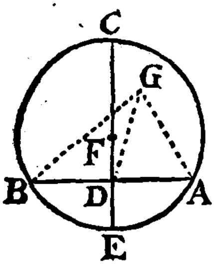
10. *Sector circuli* eſt, quando angulus EGF ad centrum G conſtiterit, figura GEFG contenta rectis lineis GE, GF angulum comprehendentibus, & circumferentia EF ab ipſis intercepta.

12. *Similia circulorum ſegmenta* ſunt, quae angulos capiunt aequales: vel in quibus anguli ſunt inter ſe aequales.

PROP.

PROPOSITIO I. PROBL.

Dati circuli A C B *centrum inuenire.*

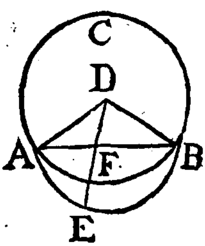


Ducatur in ipſo recta AB vtcunque, quae biſecetur α in D. Ex puncto D α. 10. 1.
ipſi AB ad rectos β ducta β. 11. 1.
DC producatur in E, & biſecetur CE in F. Dico, punctum F centrum eſſe circuli ABC.

Si negas: centrum eſto G extra rectam CE. (Nam in ea praeter F nullum γ eſſe γ. 15. def. 1.
poteſt.) Ducantur GA, GD, GB. Ergo GA = γ GB, & AD = δ DB; latus vero δ. conſtr.
GD commune: hinc ε ang. GDA = GDB. ε. 8. 1.
Eſt ergo ζ ang. GDA rectus, ideoque η angulo CDA aequalis. Q.E. A ϑ. ζ. 10. def. 1. η. 10. ax. ϑ. 9. ax.

Coroll. Ex hoc perſpicuum eſt, *ſi in circulo recta linea* CD *rectam* AB *bifariam & ad angulos rectos ſecet, circuli centrum eſſe in ſecante* CD.

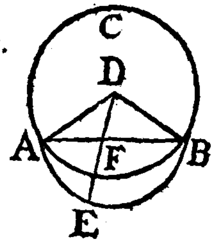
PROP. II. THEOR.



Si in circumferentia circuli ABC *duo quaelibet puncta* A, B *ſumantur: quae ipſa coniungit recta linea* AB *intra circulum cadit.*

Si enim non: cadet extra, vt AEB. Sumatur ι circuli ι. 1. 3.
centrum D, & ducantur rectae DA, DB,

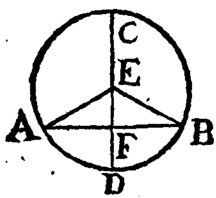
DFE.



κ. 15. def. I. λ. 5. I. μ. 16. I. ν. 14. ax. ξ. 19. I.

DFE. Quoniam ergo DA $=$ κ DB: erit ang. DAE $=$ λ DBE. Et quum trianguli ADE latus AE productum sit in B: erit μ ang. DEB $>$ DAE, ergo & ang. DEB $>$ ν DBE, & DB $>$ ξ DE. Sed DB $=$ κ DF. Quare ν DF $>$ DE. Quod fieri nequit, quia E extra circulum esse ponitur. Similiter ostendemus, rectam A B nec in circumferentiam cadere. Ergo intus cadat necesse est. Q. E. D.

PROP. III. THEOR.



Si in circulo ABC *recta linea* CD *per centrum* E *ducta rectam lineam* AB, *non ductam per centrum, bifariam secat* in F: *& ad angulos rectos ipsam secabit. Quod si ad angulos rectos ipsam* AB *secet: & bifariam secabit.*

Ducantur EA, EB.

ο. 15. def. I. 1. *Hyp.* Quoniam AF $=$ FB, & EA $=$ ο EB,
π. 8. I. & latus EF commune: est π ang. AFE $=$ BFE,
ρ. 10. def. I. & ergo ρ vterque rectus. Q. E. D.

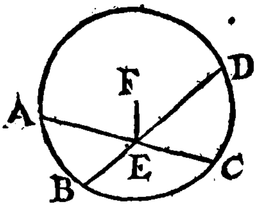
σ. 10. ax. 2. *Hyp.* Quoniam ang. AFE $=$ σ BFE, &
τ. 5. I. EA $=$ EB, & ~~ergo~~ τ ang. EAF $=$ EBF: est ergo
υ. 26. I. υ AF $=$ FB. Q. E. D.

* *Coroll.* Hinc *in omni triangulo aequilatero & isosceli linea recta ab angulo verticis bisecans basin* perpen-

perpendicularis est basi; & contra perpendicularis ab angulo verticis bisecat basin; & perpendicularis e puncto medio basis angulum ad verticem bisecat.

PROP. IV. THEOR.

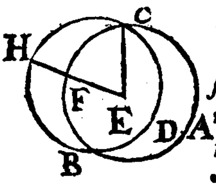
Si in circulo ABCD *duae rectae* AC, BD, *non ductae per centrum, se inuicem secent* in E: *sese bifariam non secabunt.*



Si enim fieri potest, sit AE = E C, & B E = E D. Sumatur φ centrum circuli F, iungaturque FE. Erit ergo χ ang. F EA rectus, nec non ang. F E B rectus erit. Quare erit ψ ang. FEA = FEB. Q. E. A ω.

φ. 1. 3.
χ. 3. 3.
ψ. 10. ax.
ω. 9. ax.

PROPOSITIO V. THEOR.



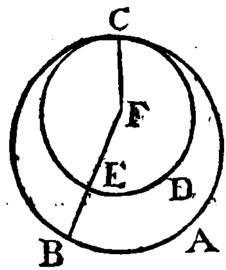
Si duo circuli ABC, CDH *se inuicem secent* in B, C: *non erit ipsorum idem centrum.*

Nam si fieri potest, sit E commune centrum. Iungatur CE, & ducatur recta E F H vtcunque. Erit ergo α, in circulo ABC, EF = EC, & in altero circulo, EH = EC, ideoque EF = EH. Q. F. N β.

α. 15. def. 1.
β. 9. ax.

PROP.

PROP. VI. THEOR.



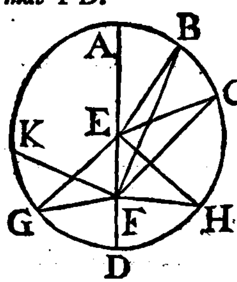
Si duo circuli ABC, CDE *sese intra contingunt in* C: *ipsorum idem centrum non erit.*

Si enim fieri potest, sit eorum idem centrum F. Iungatur CF, & ducatur vtcunque FEB. Foret γ FB = FC = FE. Q. E. A δ.

γ. 15. def. 1.
δ. 9. ax.

PROP. VII. THEOR.

Si in circuli ABCD *diametro* AD *aliquod punctum* F *sumatur, quod non sit centrum circuli, & ab eo* F *in circulum cadant quaedam rectae lineae* AFD, FB, FC, FH: *maxima quidem erit* FA, *in qua centrum* E, *reliqua vero* FD *minima; aliarum autem semper propinquior* FB *ei* FC, *quae per centrum, maior est remotiore* FC; *duaeque tantum aequales ab eodem puncto* F *in circulum cadent ex vtraque parte minimae* FD.



1. Iungantur EB, EC, EH. Et quia ε FE + EB > FB, ac FE + EB = ζ FA: erit FA > η FB. Rursus quia EB = EC, & EF latus commune, & ang. BEF > CEF: est θ FB > FC. Eadem ratione & FC > FH. Rursus quia FH

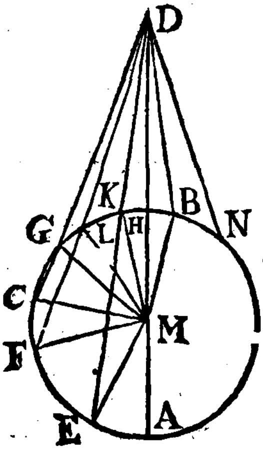
ε. 20. 1.
ζ. 15. def. 1. & 2. ax.
η. 14. ax.
θ. 24. 1.

FH + FE > [ι] EH, & ED = EH: eſt FH + FE > [η] ED, ac ergo FH > [θ] FD. Maxima ergo eſt FA, minima FD, & FB > FC > FH. Q.E.D. θ. 5. ax.

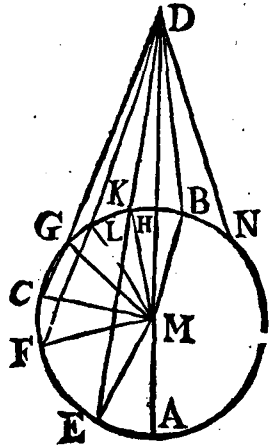
2. Fiat [ι] ang. DEG = DEH, & ducatur FG; et quum praeterea EG = EH, & communis EF: erit [κ] FG = FH. Omnis autem alia vt FK aut maior aut minor erit [λ], quam FG. Ergo duae tantum aequales FH, FG in circulum cadent. Q.E.D.

ι. 23. 1.
κ. 4. 1.
λ. per partem. 1.

PROP. VIII. THEOR.



Si extra circulum ABC *aliquod punctum* D *ſumatur, atque ab eo ad circulum ducantur quaedam rectae lineae, quarum vna* DA *per centrum* M *tranſeat, reliquae vero* DE, DF, *vtcunque: earum quidem, quae in concavam circumferentiam cadunt, maxima eſt* DA, *quae per centrum tranſit, aliarum autem* DE, DF, DC *ſemper propinquior ei* DA, *quae per centrum, maior eſt remotiore; earum vero, quae in connexam circumferentiam cadunt, minima eſt* DH, *quae inter punctum* D *&* *diametrum* HA *interiicitur, aliarum autem* DK, DL,



DL, DG *semper quae propinquior minimae* DH *minor est remotiore; duaeque tantum aequales a puncto* D *in circulum cadunt ex vtraque parte minimae* DH.

1. Iungantur ME, MF, MC, MG, ML, MK. Et quia [μ] DM + ME > DE, atque DM + ME = [ν] DA: est DA > [ξ] DE. Rursus quia ME = MF, & communis MD, & ang. DME > DMF: est DE > [o] DF. Similiter DF > DC. Maxima ergo est DA, & huic propinquior remotiore semper maior. Q. E. D.

μ. 20. I.
ν. 15. def. I. & 2. ax.
ξ. 14. ax.
o. 24. I.

2. Quia MK + DK > [μ] MD, & MK = MH: est DK > [π] DH, vel DH < DK. Porro quum [ρ] DK + KM < DL + LM, & KM = LM: est DK < DL. Eadem ratione DL < DG. Minima ergo est DH, & huic propinquior remotiore minor. Q. E. D.

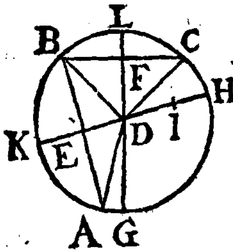
π. 5. ax.
ρ. 21. I.

3. Ponatur [σ] ang. BMD = KMD; & quia KM = BM, ac communis DM: est [τ] DK = DB. Et omnis alia vt DN in circulum cadens aut maior est aut minor [υ], quam DB vel DK. Quare duae tantum rectae DK, DB, aequales ex D in circulum cadunt. Q. E. D.

σ. 23. I.
τ. 4. I.
υ. per partem 2.

PROP.

PROP. IX. THEOR.



Si intra circulum ABC *sumatur aliquod punctum* D, *atque ab eo in circulum cadant plures, quam duae rectae lineae* DA, DB, DC *aequales: punctum* D, *quod sumitur, erit centrum circuli.*

Iungantur enim AB, BC, & bisecentur in E, F, & iunctae DE, DF ad K, H, L, G producantur. Quia ergo AE = EB, ED = ED, & basis AD = BD: est φ ang. AED = BED. Ergo KH ipsam AB bifariam & ad angulos rectos χ secat, & ergo ψ in KH centrum circuli est. Eadem ratione & in LG est centrum circuli ABC. Nullum autem punctum praeter D commune habent ω rectae KH, LG. Ergo D est centrum circuli ABC. Q. E. D.

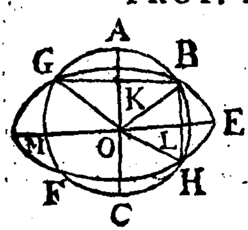
φ. 8. 1.
χ. 10. def. 1.
ψ. cor. 1. 3.
ω. 12. ax.

Aliter.

Si D non sit centrum circuli ABC: sit illud I. Ducatur recta HIDK. Erit ergo DC α > DB. Sed & DC = DB β. Q. E. A.

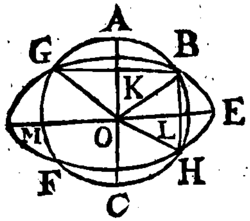
α. 7. 3.
β. hyp.

PROP. X. THEOR.



Circulus circulum in pluribus quam duobus punctis non secat.

Si enim fieri potest, circulus ABC circulum BEF secet in punctis



ctis B, H, G. Iunctae

γ. 10. 1. BG, BH bisectae sint γ in K, L punctis, a quibus ipsis BG, BH ad rectos angulos ductae sint AKOC, ELOM.

δ. cor. 1. 3. Erit ergo δ in vtraque AC, EM centrum circuli ABC, ideoque O erit centrum circuli ABC. Eadem ratione O est centrum circuli BEF.

ε. 5. 3. Q. F. N ε.

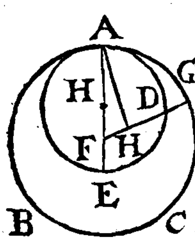
Aliter.

ζ. 1. 3. Circuli ABC centrum sumatur ζ, quod

η. 15. def. 1. sit O. Iungantur OG, OB, OH, quae η aequales erunt. Erit ergo O quoque cen-

θ. 9. 3. trum θ circuli BEF. Q. F. N θ.

PROP. XI. THEOR.



Si duo circuli ABC, ADE *sese intus contingant, & sumantur centra ipsorum* F, H: *recta linea ipsorum centra coniungens producta in circulorum contactum* A *cadet.*

Si negas: sint centra F, H in alia recta FDG, quae non cadat in contactum A. Iungantur

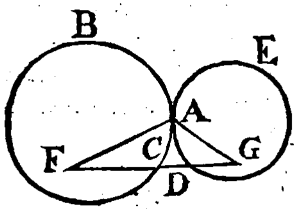
ι. 20. 1. AF, AH. Erit ergo ι AH + HF > AF

κ. 5. ax. vel FG, & proinde κ AH > HG. Sed

λ. 15. def. 1. AH λ = HD. Ergo HD > μ HG.

μ. 14. ax. Q. F. N.

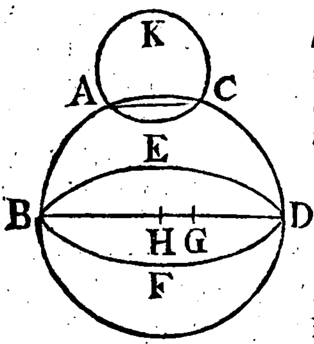
PROP. XII. THEOR.



Si duo circuli ABC, ADE *sese extra contingant* in A: *recta linea, ipsorum centra coniungens, per contactum transibit.*

Si enim centra F & G essent in alia recta F C D G, per contactum A non transeunte: iunctis AF, AG, foret, ob FC = [ν] FA, & GD = AG, tota FG > FA + AG. Q.E.A [ξ]. ν. 15. def. 1. ξ. 20. 1.

PROP. XIII. THEOR.



Circulus circulum non contingit in pluribus punctis quam uno, siue intus, siue extra contingat.

1. Si enim fieri potest, contingat circulum ABDC circulus BEDF intus in duobus punctis B, D. Sumantur centra horum circulorum [o] H, G, & iungatur HG, quae producta [π] in puncta B & D cadet. Sed quia BH [ρ] = HD: erit BH > [σ] GD, & a potiori BG > GD. Est vero [ρ] & BG = GD. Q.E.A. o. 1. 3. π. 11. 3. ρ. 15. def. 1. σ. 14. ax.

2. Si fieri potest, contingat circulus ACK circulum ABC in duobus punctis A, C. extra.

 Iungaτ. 2. 3. Iungatur AC, quae τ intra vtrumque circulum cadet. Sed quia circulus AKC circulum ABC extra υ contingit: recta intra circulum AKC ducta extra circulum ABC φ cadet. Ergo AC ſimul intra & extra circulum AKC cadet. Q. E. A.

υ. hyp.
φ. 3. def. 3.

PROP. XIV. THEOR.

In circulo ABDC *aequales rectae lineae* AB, CD *aequaliter diſtant a centro* E. *Et quae* AB, CD *aequaliter diſtant a centro* E, *ſunt inter ſe aequales.*

χ. 12. 1. Ex centro E ad rectas AB, CD demittantur χ perpendiculares EF, EH, & iungantur EA, EC.

ψ. 3. 3. 1. Quia ergo ψ AF = FB: erit ½ AB = AF. Eadem ratione ½ CD = HC. Et

ω. 7. ax. quia AB = CD: erit ω AF = HC. Deinde

α. 15. def. 1. quia AE = α EC, & hinc β AEq =

β. ſch. 48. 1. ECq: erit γ AFq + EFq = HCq +

γ. 47. 1. & 1. ax. EHq. Sed AFq = β HCq. Ergo δ EFq

δ. 3. ax. = EHq, ideoque β EF = EH. Rectae

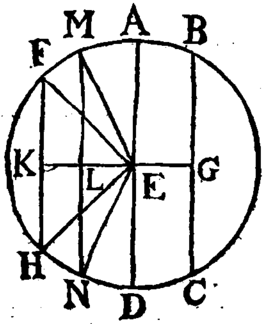
ε. 4. def. 3. ergo AB, CD a centro E ε aequaliter diſtant. Q. E. D.

2. Quia ε EF = EH, & hinc EFq = EHq; & praeterea EFq + AFq = γ EHq + CHq: erit AFq = δ CHq, & hinc AF = β CH,

ζ. 6. ax. & AB = ζ CD. Q. E. D.

PROP.

PROP. XV. THEOR.

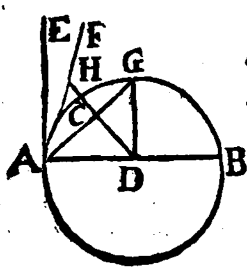


In circulo maxima quidem est diameter A D, *aliarum vero semper propinquior* B C *centro* E *maior est remotiore* F H.

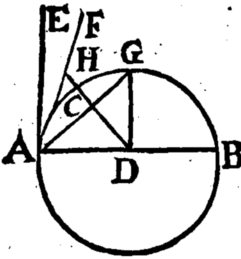
Ducantur a centro ad B C, F H perpendiculares EG, EK: & erit $EK >$ [η] EG. Ponatur $EL = EG$, & per L ipsi E K perpendicularis [ϑ] ducatur MLN, & iungantur EM, EN, EF, EH. Quoniam $EL = EG$: erit [ι] $MN = BC$. Quia $ME = AE$, & $NE = ED$: erit [κ] $ME + EN = AD$. Sed $ME + EN >$ [λ] MN. Ergo $AD >$ [μ] MN, & $AD > BC$. Deinde quia $ME = FE$, & $NE = HE$, ang. vero $MEN > FEH$: erit [ν] basis $MN > FH$, ergo & $BC >$ [μ] FH. Maxima ergo est AD, & BC maior quam FH. Q. E. D.

η. 5. def. 3
ϑ. 11. 1.
ι. 14. 3.
κ. 2. ax.
λ. 20. 1.
μ. 14. ax.
ν. 24. 1.

PROP. XVI. THEOR.



Recta EA *diametro* AB *circuli* ABC *ad rectos angulos ab extremitate* A *ducta cadit extra circulum. Et in locum, qui inter rectam lineam* AE, *&* *circumferentiam interiicitur, altera recta linea* non



non cadet. Et semicirculi angulus CAB *maior est quouis angulo rectilineo acuto, reliquus autem* CAE *minor.*

1. Si fieri potest, cadat recta E A intus, & secet circulum in G. Ex
ξ. 5. 1. centro ducatur D G. Quoniam D A =
ο. 17. 1. D G: erit ang. A G D = ξ G A D = recto. Q. E. A ο. Similiter ostenditur, EA nec in circumferentiam cadere posse. Ergo extra circulum cadet. Q. E. D.

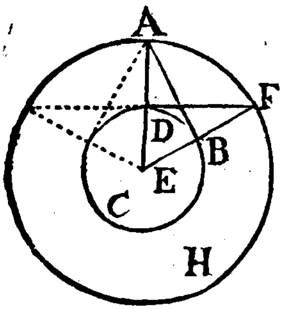
2. Si fieri potest, cadat recta FA inter EA, & circumferentiam AC. Ex centro D ad AF
π. 10. def. 1. ducatur perpendicularis D H. Et quoniam
ρ. 10. & 14. ax. ang. A H D rectus π est, & ang. D A H recto D A E minor: erit ang. D A H < ρ A H D, &
σ. 19. 1. ergo H D < σ A D. Sed A D = D C: ergo
τ. 9. ax. H D < D C. Q. E. A. τ.

3. Si quis angulus rectilineus acutus, vt F A B, maior esset angulo semicirculi CAB, vel aliquis angulus, vt F A E, minor angulo C A E: recta F A caderet inter perpendicularem E A, & circumferentiam A C. Q. F. N.

υ. 2. def. 3. & 2. 3. *Coroll.* Hinc, υ *recta linea, quae ad rectos angulos ducitur diametro circuli ab extremitate eiusdem, circulum tangit, & quidem in vnico puncto.*

PROP.

PROP. XVII. PROBL.

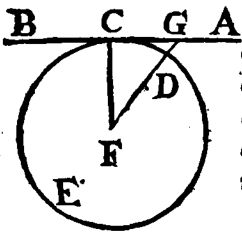


A dato puncto A *rectam lineam ducere, quae datum circulum* BCD *contingat.*

Sumatur centrum φ circuli E, & iungatur ADE, & centro E interuallo EA describatur circulus AHF, & a puncto D ipsi AE ad angulos rectos ducatur DF. Iungantur EBF, ac AB, quae circulum continget. φ. 1. 3.

Nam EA=EF, & EB=ED, & communem angulum AEB continent. Ergo χ ang. EBA=FDE=recto. Ergo ψ AB circulum BDC tangit. Q.E.F. χ. 4. 1. ψ. cor. 16. 3.

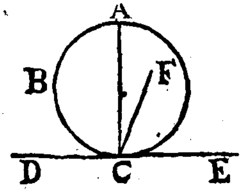
PROP. XVIII. THEOR.



Si recta linea AB *circulum* CDE *contingat; a centro* F *autem ad contactum* C *recta linea* FC *ducatur: ea perpendicularis erit tangenti* AB.

Si enim non sit ita: ducatur ex F ad AB α perpendicularis FDG. Quia ergo FGC rectus est: erit α ang. GCF minor recto, quare & FG < β FC. Sed FD = FC: ergo FG < FD. Q.E.A γ. α. 12. 1. α. 17. 1. β. 19. 1. γ. 9. ax. & 2. def. 3.

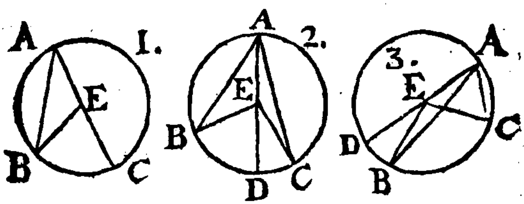
PROP. XIX. THEOR.



Si recta linea DE *circulum* ABC *contingat, a contactu autem* C *recta linea* CA *ducatur ad angulos rectos tangenti* DE: *centrum circuli erit in eadem* CA.

Si enim non: ſit centrum in alia recta CF.
δ. 18. 3. Erit ergo [δ] FCE rectus. Eſt autem & ACE
ε. hyp. rectus [ε]. Q. E. A [ζ].
ζ. 9. ax.

PROP. XX. THEOR.



In circulo ABC *angulus* BEC, *qui ad centrum* E, *duplus eſt eius* BAC, *qui ad circumferentiam; quando circumferentiam eandem* BC *habent pro baſi.*

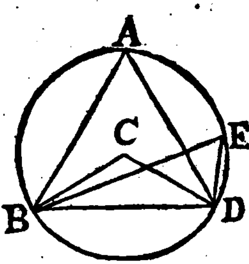
Caſ. 1. Si E cadit in AC. Quoniam EA
η. 5. 1. = EB: erit ang. BAC = [η] ABE, ideoque 2
θ. 32. 1. BAC = BAC + ABE. Sed ang. BEC = [θ] BAC + ABE. Ergo BEC = 2 BAC. Q. E. D.

Caſ. 2. Si E intra ang. BAC cadit. Iunga-
ι. caſ. 1. tur AED: & erit BED = [ι] 2 BAD, & DEC
κ. 2. ax. = 2 DAC; quare ang. BEC = [κ] 2 BAC. Q. E. D.

Caſ.

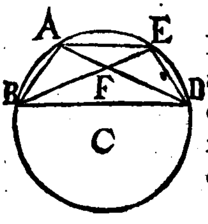
Caſ. 3. Si E extra ang. BAC cadit: ſimiliter oſtenditur, eſſe ang. BEC = λ 2 BAC. λ. 3. ax.
Q. E. D.

PROP. XXI. THEOR.



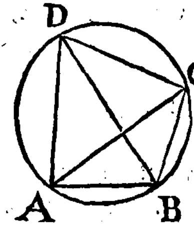
Anguli BAD, BED *in eodem circuli ſegmento* BAED *ſunt inter ſe aequales.*

Caſ. 1. Si ſegmentum BAED ſit ſemicirculo maius: ſumatur μ circuli centrum C, & iungantur CB, CD. Quia ergo ang. BAD = ν ½ BCD, & ang. BED = ν ½ BCD: erit ξ ang. BAD = BED. μ. 1. 3. ν. 20. 3. ξ. 7. ax.
Q. E. D.



* *Caſ.* 2. Si ſegmentum BAED ſemicirculo maius non ſit: iungatur AE. Et quia ſegmentum ABDE ſemicirculo maius erit: per caſ. 1. erit angul. ABE = ADE. Sed & ang. BFA = ο EFD. Subtractis ergo his angulis ab aequalibus π ſummis angulorum in triangulis ABF, EDF: remanebit ang. BAD = BED. Q. E. D. ο. 15. 1. π. 32. 1.

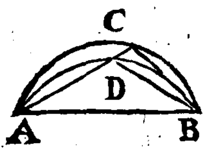
PROP. XXII. THEOR.



Quadrilaterorum ADCB, *quae circulis inscribuntur, anguli oppositi* ADC, ABC *sunt duobus rectis aequales.*

Iungantur AC, BD. Quoniam ϛ ang. CAB = CDB,
ϛ. 21. 3. & ang. ACB = ADB:
σ. 2. ax. erit σ ang. CAB + ACB = ADC. Sed ang. CAB + ACB + ABC = τ 2 rectis. Er-
τ. 32. 1. go ang. ADC + ABC = 2 rectis. Similiter ostenditur, ang. DAB + DCB = 2 rectis. Q.E.D.

PROP. XXIII. THEOR.



Super eadem recta linea duo circulorum segmenta similia & inaequalia ex eadem parte non constituentur.

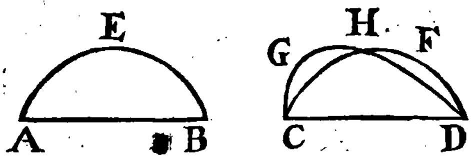
Si enim fieri potest, sint super recta AB duo segmenta circulorum ACB, ADB inaequalia, sed similia ex eadem parte constituta. Ducatur ADC, & iungantur CB,
υ.10.def.3. DB. Erit ergo υ ang. ADB = ACB.
φ. 16.1. Q. E. A φ.

PROP. XXIV. THEOR.

Super aequalibus rectis lineis AB, CD *similia circulorum segmenta* ABE, CDF *sunt inter se aequalia.*

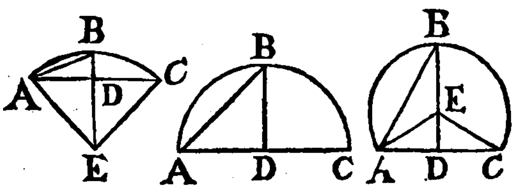
Ponatur enim segmentum ABE in segmento CDF sic, vt A in C & AB in CD cadat.

Et



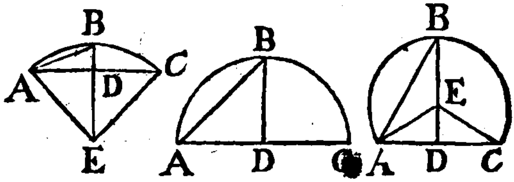
Et quia AB = CD: punctum B cadet in D. Iam ſi circumferentia AEB non congrueret circumferentiae CFD: aut extra hanc caderet, aut eam ſecaret, veluti CGHD. Atqui ſi circumferentia AEB extra vel intra ſegmentum CDF caderet: foret ſegmentum ABE ſegmento CDF maius minusue, & eidem ſimile. Quod fieri nequit χ. Si circumferen- χ. 23. 3.
tia AEB caderet in CGHD: duo circuli ſe in pluribus quam duobus punctis C, H, D, ſecarent; quod etiam abſurdum eſt ψ. Quum ψ. 10. 3.
ergo circumferentia AEB nec extra circumferentiam CFD cadat, nec eam ſecet: ipſi congruat neceſſe eſt. Congruent ergo tota ſegmenta ABE, CDF, & erunt proinde aequalia. Q. E. D.

PROP. XXV. PROBL.



Dato circuli ſegmento ABC *deſcribere circulum, cuius eſt ſegmentum.*

Secetur



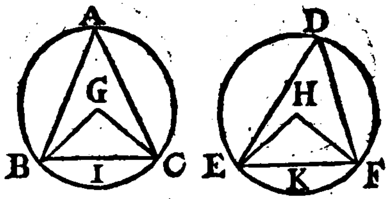
α. 10. 1. Secetur α AC bifariam in D, & ipsi ex
α. 11. 1. D ad rectos ducatur α DB, & iungatur AB. Et si ang. ABD = BAD: erit D centrum circuli, cuius est segmentum ACB. Sin
β. 23. 1. ang. ABD maior vel minor angulo BAD; fiat β angul. BAE = ABD; & erit E centrum circuli, interuallo EA, vel EB, vel EC describendi.

Cas. 1. Nam si ang. ABD = BAD: erit
γ. 6. 1. AD = γ DB. Sed & AD = DC δ. Quare
δ. constr. D erit centrum circuli complendi ε. Q.E.F.
ε. 9. 3. *Simul patet, hoc in casu segmentum* ACB *esse semicirculum.*

Cas. 2. Si ang. BAE aequalis est constitutus ang ABD: erit iterum γ EB = EA. Sed ob AD = δ DC, & angulos ad D aequales,
ζ. 4. 1. est etiam EA ζ = EC. Ergo ε circuli complendi centrum erit E. Q.E.F. *Constat simul, si ang.* ABD > BAD, *segmentum* ACB *semicirculo minus esse, quoniam centrum* E *extra cadit; & si ang.* ABD < BAD, *segmentum* ACB *maius esse semicirculo, quoniam centrum* E *intra cadit.*

PROP.

PROP. XXVI. THEOR.

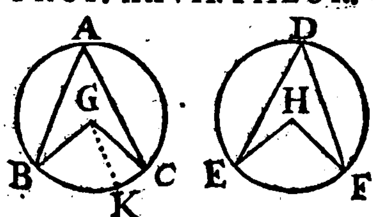


In aequalibus circulis ABC, DEF, *anguli aequales aequalibus insistunt circumferentiis* BIC, EKF, *siue ad centra*, (vt BGC, EHF) *siue ad circumferentias* (vt BAC, EDF) † *insistant*.

Iungantur enim BC, EF. Quia circuli ABC, EDF aequales sunt: erunt & quae ex centris aequales, id est, GB = HE, GC = HF. Et quia praeterea ang. BGC = EHF: erit BC = [n] EF. Et quoniam ang. BAC = EDF: segmentum BCA simile est [9] segmento EFD. Ergo [t] segm. BCA = segm. EFD. Totus autem circulus ABC = circulo DEF. Ergo [x] segm. BCI = segm. EFK, ideoque circumferentia BIC = EKF. Q.E.D.

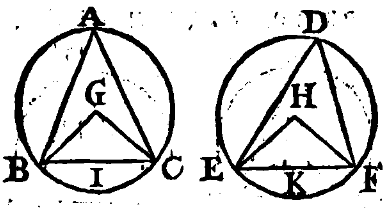
n. 4. 1.
9. 11. def. 3.
t. 24. 3.
x. 3. ax.

PROP. XXVII. THEOR.



In aequalibus circulis ABC, DEF, *anguli*, *qui*

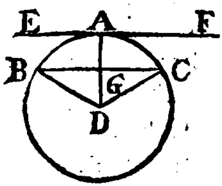
† Supple, *constituti*.



qui aequalibus insistunt circumferentiis B C, E F, *sunt inter se aequales siue ad centra,* (vti B G C, E H F) *siue ad circumferentias* (vti B A C, E D F) † *insistant.*

Si enim non sit ang B G C = E H F: alteruter, veluti B G C, maior erit. Fiat ang.
λ. 23. 1. B G K = λ E H F: & erit μ BK = EF = BC.
μ. 26. 3. Quod fieri ν nequit. Est ergo ang. B G C
ν. 9. ax.
ξ. 20. 3. & = E H F, & hinc etiam ξ ang. BAC = EDF.
7. ax. Q. E. D.

* *Scholium.*



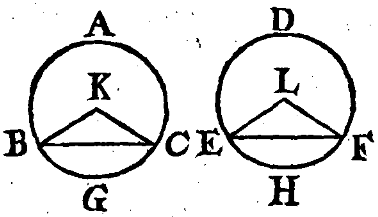
Linea recta E F, *quae ducta ex* A *medio puncto circumferentiae alicuius* B A C *circulum tangit, parallela est rectae lineae* B C, *quae peripheriam illam subtendit.*

Duc e centro D ad contactum A rectam DGA, & connecte D B, D C. Latus D G commune est,
ο. 27. 3. & D B = D C, atque ang. B D A = ο A D C, ob π
π. hyp. peripherias B A, A C aequales. Ergo ρ ang. B G D
ρ. 4. 1.
σ. 18. 3. = C G D, & proinde vterque rectus est. Sed in-
τ. 28. 1. & terni anguli E A D, F A D etiam σ recti sunt. Ergo
10. ax. E F, B C parallelae τ sunt. Q. E. D.

PROP.

† Supple, *constituti.*

PROP. XXVIII. THEOR.



In aequalibus circulis ABC, DEF, *aequales rectae lineae* BC, EF *circumferentias aequales auferunt, maiorem quidem* BAC *maiori* EDF, *minorem vero* BGC *minori* EHF.

Sumantur centra K, L, & iungantur KB, KC, LE, LF. Quoniam circuli aequales sunt: erit KB = LE, & KC = LF. Basis vero BC = EF: ergo ang. BKC = υ ELF, & hinc φ BGC = EHF. Sed & totae circumferentiae aequales sunt. Ergo & reliquae BAC, EDF aequantur. Q. E. D. υ. 8. 1. φ. 26. 3.

PROP. XXIX. THEOR.

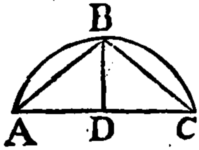
In aequalibus circulis ABC, DEF, *aequales circumferentias* BGC, EHF *aequales rectae lineae* BC, EF *subtendunt.* fig. propos. praeced.

Quoniam BGC = EHF: ductis e centris KB, KC, LE, LF, erit χ ang. BKC = ELF. Praeterea, quia circuli aequales ponuntur, est KB = LE, & KC = LF. Ergo ψ BC = EF. Q. E. D. χ. 27. 3. ψ. 4. 1.

* *Nota*. Haec & tres praecedentes intelligantur etiam de eodem circulo.

PROP.

PROP. XXX. PROBL.

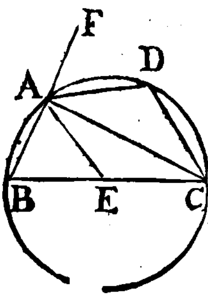


Datam circumferentiam ABC *bifariam secare.*

Duc AC, quam biseca in D. Ex D duc DB perpendicularem in AC. Dico, fore AB = BC. Iungantur enim AB, BC. Et quia AD = DC, & latus DB commune, & ang. ADB = α BDC: erit α AB = BC, & ergo β circumferentia AB = circumf. BC, quoniam vtraque semicirculo minor est. Q. E. F.

α. 10. def. 1.
α. 4. 1.
β. 28. 3.

PROP. XXXI. THEOR.



In circulo ABCD *angulus* BAC, *qui in semicirculo, rectus est; qui vero* ABC *in maiori segmento, minor est recto; & qui* ADC *in minori, maior recto. Et insuper angulus maioris segmenti recto maior est; minoris vero segmenti angulus recto minor.*

1. Ex centro E ducatur EA, & BA producatur in F. Quoniam BE = EA: erit γ ang. BAE = ABC. Rursus quia EA = EC: erit γ ang. BCA = CAE. Ergo δ ang. BAC = ABC + BCA. Est autem & ang. FAC = ε ABC + BCA. Ergo ang. BAC = FAC. Ergo ang. BAC ζ rectus est. Q.E.D.

γ. 5. 1.
δ. 2. ax.
ε. 32. 1.
ζ. 10. def. 1.

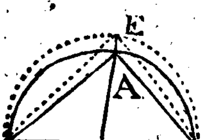
2. Quo-

2. Quoniam [ν] ang. ABC + BAC < 2 rectis, & BAC = recto: erit [ϑ] ang. ABC < recto. Q.E.D. ν. 17. 1. ϑ. 5. ax.

3. Quum quadrilaterum ABCD in circulo habeat [ι] angulos oppositos ABC & ADC 2 rectis aequales; ABC vero minor sit recto: reliquus [ι] ADC maior recto erit. Q.E.D. ι. 22. 3.

4. Quia angulus rectilineus BAC rectus est: patet, angulum a circumferentia CBA & recta AC comprehensum maiorem recto esse. Rursus quia FAC rectus est: patet, angulum minoris segmenti DAC minorem esse recto. Q.E.D.

Corollar. Hinc manifestum est, quod *si vnus angulus trianguli duobus reliquis aequalis sit, est rectus.*



* *Scholia.*

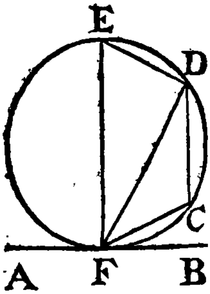
1. *In triangulo rectangulo* BAC *si hypotenusa* BC *bisecetur in* D: *circulus, interuallo* DB *descriptus, per* A *etiam transibit.*

Si enim non transeat per A, vt BEC: iuncta DA, quae circulo occurrat ad E, ducantur EB, EC. Erit ergo [κ] angulus BEC in semicirculo rectus, & proinde [λ] ang. BAC aequalis. Q. F. N [μ]. κ. 31. 3. λ. 10. ax. μ. 21. 1.

2. *Si quis angulus in segmento circuli rectus est: segmentum semicirculus est. Si vero obtusus est, segmentum minus: sin acutus, segmentum maius est semicirculo.* Si enim negas: angulus ille tantus non erit, quantus ponebatur.

F PROP.

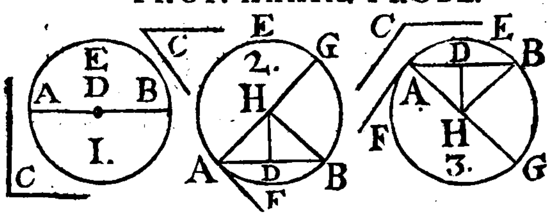
PROP. XXXII. THEOR.



Si recta linea A B *circulum* C D E F *contingat, a contactu* F *autem ducatur recta linea* F D, *circulum secans: anguli* D F B, D F A, *quos haec cum contingente facit, aequales erunt iis, qui in alternis circuli segmentis consistunt*, D E F, D C F.

Ducatur enim ipsi A B ad rectos angulos F E; iungatur ED, & sumto quouis puncto C in circumferentia D F, iungantur CD, CF.
ν. 19. 3. Quoniam igitur [ν] in F E centrum circuli est:
ξ. 18. def. 1. & 7. def. 3. E D F est angulus [ξ] in semicirculo, & proinde [ο] rectus. Hinc ang. E F D + D E F = [π] recto.
ο. 31. 3
π. 32. 1. Sed & ang. E F B = recto. Quare [ρ] ang.
ρ. 1. & 3. ax. D F B = D E F. Deinde quoniam D F A +
σ. 13. 1. D F B = [σ] 2 rectis = [τ] D C F + D E F : erit
τ. 22. 3. ang. D F A = [υ] D C F. Q.E.D.
υ. 3. ax.

PROP. XXXIII. PROBL.



Super data recta linea A B *describere segmentum circuli, quod capiat angulum, dato angulo rectilineo* C *aequalem*.

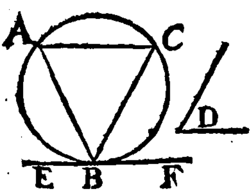
Cas. 1.

Caſ. 1. Si datus angulus C ſit rectus (fig. 1.): biſeca AB in D, & ſuper AB, centro D, intervallo DA vel DB deſcribe ſegmentum circuli AEB, quod capiet [φ] angulum rectum, qui [χ] dato C aequalis erit. Q. E. F. φ. 31. 3. χ. 10. ax.

Caſ. 2. Si datus angulus C ſit acutus (fig. 2.), vel obtuſus (fig. 3.): fac ang. BAF = C, & ex A excita ſuper AF perpendicularem AG; biſeca AB in D, & per D duc DH ipſi AB ad rectos angulos; centro H, interuallo HA deſcripti circuli ſegmentum AEB erit id, quod deſcribendum erat.

Nam, iuncta HB, quia AD = DB, DH communis, & ang. ADH = [χ] HDB: erit AH = [ψ] HB, & ergo circulus, centro H per ψ. 4. 1. A deſcriptus, tranſibit etiam per B. Et quoniam AF circulum [ω] tangit, AB vero ſecat: ω. cor. 16. 3 erit angulus in ſegmento AEB = [α] ang. BAF α. 32. 3. = C. Q. E. F.

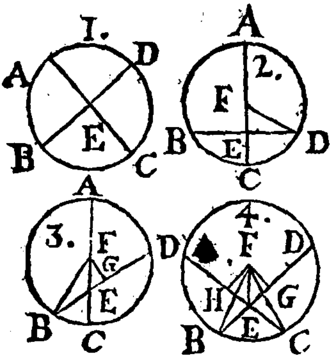
PROP. XXXIV. PROBL.



A dato circulo ABC *ſegmentum abſcindere, quod capiat angulum, dato angulo rectilineo* D *aequalem.*

Ducatur [β] recta EF, circulum tangens in B, & ad punctum B fiat [γ] ang. CBF = D: β. 17. 3. ſegmentum BAC capiet angulum [δ], angulo γ. 23. 1. CBF, vel dato D aequalem. Q. E. Q. δ. 32. 3.

PROP. XXXV. THEOR.



Si in circulo ABCD *duae rectae lineae* AC, BD *sese mutuo secent: rectangulum, sub segmentis unius* AE, EC *comprehensum, aequale est ei, quod sub alterius segmentis* BE, ED *comprehenditur.*

Cas. 1. Si AC, BD per centrum E transeunt: manifestum est, quum AE, EB, DE,
e. 36. 1. EC aequales sint, esse AE $\times$ EC $=$ [e] BE $\times$ ED. Q.E.D.

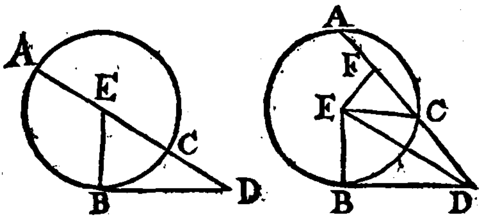
* *Cas.* 2. Si alterutra AC per centrum F transit, & alteram BD ad angulos rectos secat
ζ. 5. 2. in E: iungatur FD. Est [ζ] AE $\times$ EC $+$ FEq
η. 3. 3. $=$ FCq $=$ FDq. Sed quia [η] BE $=$ ED, ideoque BE $\times$ ED $=$ EDq: est quoque BE
9. 47. 1. $\times$ ED $+$ FEq $=$ [9] FDq. Ergo [ι] AE $\times$
ι. 1. & 3. ax. EC $=$ BE $\times$ ED vel EDq.

* *Cas.* 3. Si alterutra AC per centrum F quidem transit, sed alteram BD non ad rectos secat: ex F in BD ducatur perpendicularis FG. Est ergo [η] BG $=$ GD, & [ζ] BE $\times$ ED $+$ EGq $=$ BGq. Iungatur FB, & addito communi FGq, erit BE $\times$ ED $+$ EGq $+$ FGq $=$ [9] FBq. Sed EGq $+$ FGq $=$ [9] FEq. Ergo BE $\times$ ED $+$ FEq $=$ FBq $=$ FCq.

FCq. Eſt vero & $AE \times EC + FEq =$ ζ FCq. Ergo ι $AE \times EC = BE \times ED$. Q. E. D.

Caſ. 4. Si neutra per centrum F tranſit: iungantur FE, FB, FC, & ex F in AC, BD demittantur perpendiculares FH, FG. Oſtenditur, vti antea, $BE \times ED + FEq = FBq$, & $AE \times EC + FEq = FCq$. Eſt vero $FBq = FCq$. Ergo ι $AE \times EC = BE \times ED$. Q. E. D.

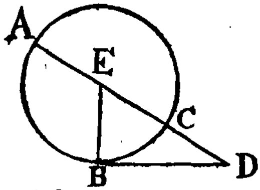
PROP. XXXVI. THEOR.

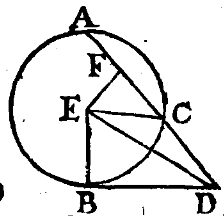


Si extra circulum ABC *aliquod punctum* D *ſumatur, & ab eo in circulum cadant duae rectae lineae, quarum altera* DA *circulum ſecet in* C, A, *altera* DB *vero contingat: rectangulum comprehenſum ſub tota ſecante* DA, *& exteriore ſegmento* DC, *inter punctum* D *& conuexam circumferentiam, aequale erit ei, quod a contingente* DB *fit, quadrato.*

Caſ. 1. Si DA tranſit per centrum E circuli: iungatur EB, & ang. EBD erit * rectus. κ. 18. 3
Sed λ $AD \times DC + CEq = DEq$, & μ DBq λ. 6. 2.
$+ BEq = DEq$. Ergo $AD \times DC + CEq$ μ. 47. 1.
$= DBq + BEq$. Ergo, quum $CEq = BEq$, $AD \times DC = DBq$. Q. E. D.

 Caſ. 2.





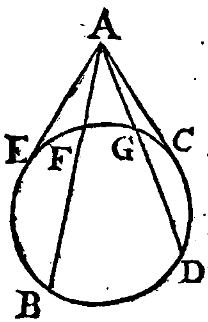
Caſ. 2. Si DA non tranſit per centrum E: in AD ex E ducatur perpendicularis EF, iunganturque EB, EC, ED. Ergo quum

ν. 3. 3. AC biſecta ν ſit in F: erit $AD \times DC +$

λ. 6. 2. $FCq = $ λ FDq. Commune addatur FEq:

μ. 47. 1. erit $AD \times DC +$ μ $ECq = DEq$. Sed & $DBq + EBq = $ ϑ DEq, & $CEq = EBq$. Ergo $AD \times DC = DBq$. Q.E.D.

* *Scholia.*



1. Si a puncto quouis A, extra circulum aſſumto, plures rectae lineae AB, AD circulum ſecantes ducantur: rectangula, comprehenſa ſub totis lineis AB, AD, & partibus externis AF, AG, inter ſe ſunt aequalia. Nam ſi ducatur tangens AC: erit $BA \times AF = $ ξ

ξ. 36. 3. $ACq = $ ξ $DA \times AG$.

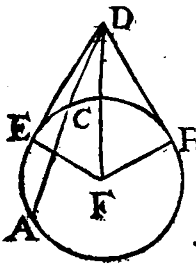
2. Conſtat etiam, duas rectas AE, AC, ab eodem puncto A ductas, quae circulum tangant, inter ſe aequales eſſe. Nam ſi ducatur AB ſecans circulum: erit $AEq = $ ξ $BA \times AF = $ ξ ACq.

3. Perſpicuum quoque eſt, ab eodem puncto A, extra circulum aſſumto, duci tantum poſſe duas lineas rectas AE, AC, quae circulum tangant.

Nam

Nam si tertia AG tangere dicatur, erit AG = *o. 2. sch.
AE = AC. Q.F.N[π]. π. 8. 3.

PROP. XXXVII. THEOR.



Si extra circulum ABC *sumatur aliquod punctum* D, *atque ab eo in circulum cadant duae rectae lineae* DA, DB, *quarum altera quidem* DA *circulum secet in* C, *altera vero* DB *in eum incidat; sit autem rectangulum comprehensum sub tota secante* DA, *& exteriore segmento* DC *inter punctum* D *& conuexam circumferentiam, aequale ei, quod ab incidente* DB *sit quadrato: incidens linea* DB *circulum continget.*

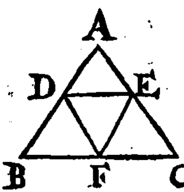
Ducatur enim [ρ] tangens circulum DE, sumatur centrum [σ] F, & iungantur FE, FB, FD. Ergo $AD \times DC =$ [τ] DEq. Ergo DEq = DBq, & DE = DB. Sed quia praeterea FE = FB, & DF = DF: erit ang. DEF = [υ] DBF. Est vero DEF rectus [φ]; ergo & DBF; & igitur DB [χ] circulum tangit. Q.E.D.

ρ. 17. 3.
σ. 1. 3.
τ. 36. 3.
υ. 8. 1.
φ. 18. 3.
χ. cor. 16. 3.

* *Coroll.* Hinc constat, si duae rectae aequales DE, DB ex puncto quopiam D in conuexam peripheriam incidant, & earum vna DE circulum tangat: alteram quoque DB circulum tangere.

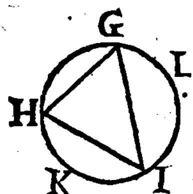
EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER IV.

DEFINITIONES.

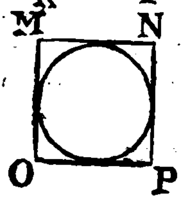


1. *Figura rectilinea in figura rectilinea inſcribi* dicitur, quando vnusquisque figurae inſcriptae D E F angulus D, E, F contingit vnumquodque latus AB, AC, BC eius A B C, in qua inſcribitur.

2. *Figura* ſimiliter *circa figuram circumſcribi* dicitur, quando vnumquodque latus circumſcriptae A B C contingit vnumquemque angulum eius D E F, circa quam circumſcribitur.



3. *Figura rectilinea in circulo inſcribi* dicitur, quando vnusquisque inſcriptae figurae G H I angulus circuli G K L circumferentiam contingit.



4. *Figura rectilinea circa circulum circumſcribi* dicitur, quando vnumquodque latus circumſcriptae N M O P circuli circumferentiam contingit.

Cir-

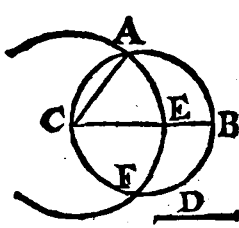
5. *Circulus* ſimiliter *in figura rectilinea inſcribi* dicitur, quando circuli circumferentia vnumquodque latus eius MNPO, in qua inſcribitur, contingit.

6. *Circulus circa figuram rectilineam circumſcribi* dicitur, quando circuli circumferentia GKL vnumquemque angulum eius GHI, circa quam circumſcribitur, contingit.

7. *Recta linea* GH *in circulo* GKL *aptari* dicitur, quando eius termini G, H in circuli circumferentia fuerint.

PROP. I. PROBL.

In dato circulo ABC *datae rectae lineae* D, *quae diametro eius* BC *maior non ſit, aequalem rectam lineam aptare.*

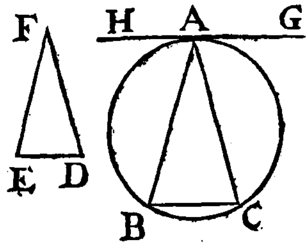


Ducatur circuli diameter BC. Et ſi D = BC: factum iam erit propoſitum [a]. a. 7. def. 4.

Si D < BC, ponatur [β] ipſi D = CE, & β. 3. 1.
centro C, interuallo CE, circulus AEF deſcribatur, & CA iungatur. Quae erit ipſi D aequalis [γ], & in dato circulo aptata [a]. γ. 1. ax.
Q. E. F.

PROP. II. PROBL.

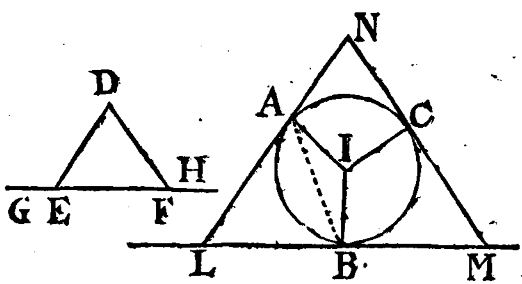
In dato circulo ABC *inscribere triangulum, aequiangulum dato triangulo* DEF.



δ. 23. 1. Ducatur recta linea HAG tangens circulum in A, & fiat δ angulus GAC = DEF, ac angul. HAB = EDF, & BC iungatur.

ε. 32. 3. Quoniam igitur ε ang. ABC = GAC, &
ζ. 1. ax. ang. ACB = HAB: erit ζ ang. ABC = DEF, & ang. ACB = EDF. Ergo & reliquus BAC
η. 32. 1. reliquo EFD aequalis erit η; & △ ABC aequi-
θ. 3. def. 4. angulum erit ipsi DEF, & in circulo θ inscriptum. Q. E. F.

PROP. III. PROBL.



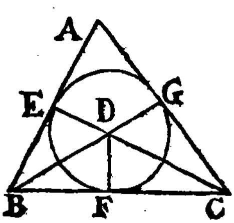
Circa datum circulum ABC *circumscribere triangulum, aequiangulum dato triangulo* DEF.

Produc

Produc latus E F ad G & H. Cape ι centrum circuli I, ex quo duc rectam I B vtcunque, & fac κ ang. BIA = DEG, & ang. BIC = DFH, & per A, B, C duc λ rectas NL, LM, NM, circulum tangentes. Dico factum. ι. 1. 3. κ. 23. 1. λ. cor. 16. 3.

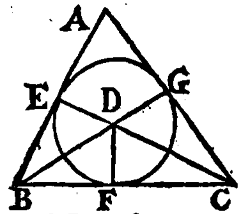
Quia enim μ anguli ad puncta A, B, C recti sunt: erunt ang. IAL + IBL = 2 rectis. (* Ducta ergo AB, erunt ang. LAB + LBA < 2 rectis, ideoque rectae NL, ML concurrent ν in L.) Quum autem in quadrilatero LAIB quatuor anguli ξ sint = 4 rectis, e quibus anguli IAL, IBL = 2 rectis: erunt & reliqui AIB + ALB = ο 2 rectis. Sunt autem & ang. DEG + DEF = π 2 rectis. Ergo ang. BIA + ALB = DEG + DEF. Quare ° ang. ALB = DEF. Similiter demonstrabitur, ang. NMB = DFE. Ergo & reliquus MNL = ς FDE. Est igitur △ LMN aequiangulum dato DEF, & circumscriptum σ circa circulum ABC. Q.E.F. μ. 18. 3. ν. ax. 11. ξ. 6. schol. 32. 1. ο. 3. ax. π. 13. 1. ς. 32. 1. σ. 4. def. 4.

PROP. IV. PROBL.



In dato triangulo ABC *circulum inscribere.*

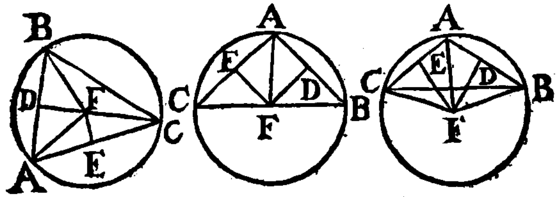
Bisecentur τ ang. ABC, ACB rectis, quae conueniant in puncto D, ex quo duc υ perpendiculares τ. 9. 1. υ. 12. 1.



res DE, DF, DG. Circulus centro D per E, vel F, vel G descriptus, erit is, quem describere oportebat.

Nam quum ang. ABD
φ. 10. ax. = DBC, & ang. DEB = φ DFB, & latus
χ. 26. 1. DB commune: erit χ DE = DF. Eadem ratione DF = DG. Circulus ergo ex D per E, vel F, vel G descriptus per reliqua etiam puncta transibit, &, quia rectas AB,
ψ. 16. 3. BC, CA secare nequit ψ, ipsas continget.
α. 5. def. 4. Erit ergo inscriptus α in triangulo ABC. Q. E. F.

PROP. V. PROBL.



Circa datum triangulum ABC *circulum circumscribere.*

α. 10. 1. Biseca α AB, AC in D, E, & duc per-
β. 11. 1. pendiculares β DF, EF, coeuntes in F, ex quo centro per A, vel B, vel C describe circulum.

Siue enim F intra triangulum ABC, siue in basin BC, siue extra triangulum cadat: du-
γ. 4. 1. ctis rectis FA, FB, FC, erit γ BF = AF = FC. Ergo circulus ex F per vnum punctorum

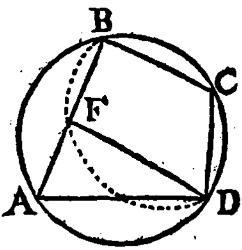
rum A, B, C descriptus, per reliqua etiam transibit, & circumscriptus erit circa [δ] triangulum ABC. Q. E. F. δ. 6. def. 4.

Corollar.

Si datum triangulum sit oxygonium, DF & EF intra triangulum conuenient [ε]; sin amblygonium, extra; si vero rectangulum sit, conuenient in tertio latere BC, quod angulum rectum subtendit. ε. 2. schol. 31. 3.

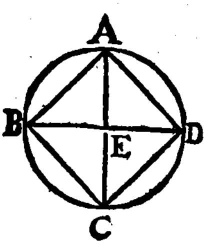
* *Scholia.*

1. Eadem ratione circulus describitur per tria puncta, non in eadem recta existentia.



2. Si in quadrilatero ABCD anguli A & C, qui ex aduerso, duobus rectis aequantur, circa quadrilaterum circulus circumscribi potest. Describi enim per tres quosuis angulos B, C, D circulus potest. Iam si negas, eundem transiturum esse per quartum A: secet rectam AB in quouis alio puncto F. Ducta ergo DF, erit ang. C + F = [ζ] 2 rectis. Sed ponitur etiam C + A = 2 rectis. Ergo ang. F = A. Q. E. A [η]. ζ. 22. 3. η. 16. 1.

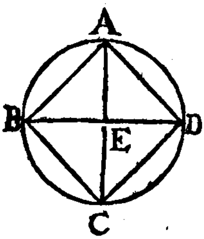
PROP. VI. PROBL.



In dato circulo ABCD quadratum inscribere.

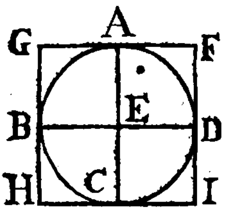
Ducantur [ϑ] diametri AEC, BED ad rectos angulos, & iungantur AB, BC, CD, DA. ϑ. 1. 3. & 11. 1.

Nam quia BE = ED, & communis EA, & ang. BEA, AED



ι. 4. 1. AED recti: erit ι AB = DA. Eadem ratione BC = AB, & CD = DA. Er-
κ. 1. ax. go κ quadrilaterum ABCD aequilaterum est. Est vero & rectangulum, quo-
λ. 31. 3. niam λ quilibet angulorum A, B, C, D, in semicirculo est. Igitur quadratum est, inscriptum in dato circulo. Q.E.F.

PROP. VII. PROBL.



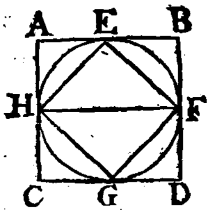
Circa datum circulum ABCD quadratum circumscribere.

Ducantur diametri AEC, BED ad rectos angulos, & per puncta A, B, C, D, tangentes circu-
μ. cor. 16. 3. lum GF, GH, HI, FI μ.

ν. 18. 3. Igitur quum ν anguli ad A, B, C, D recti
ξ. 28. 1. sint, nec non (per hyp.) anguli ad E: erunt ξ rectae FG, HI, BD, & rectae GH, FI, AC parallelae. Ergo Pgra sunt GI, GC, FB, GE,
ο. 34. 1. FE, HE & EI, ac propterea ο GF = HI, & GH = FI, & GH = AC, & GF = BD. Hinc ob AC = BD, erit quadrilaterum FGHI aequilaterum. Et quoniam GE est Pgr. & ang. AEB rectus: erit ο & ang. G rectus. Similiter reliqui H, I, F recti demonstrantur. Ergo figura FGHI est quoque rectangula, & propterea quadratum, ac circa circulum descripta. Q.E.F.

* *Scholium.*

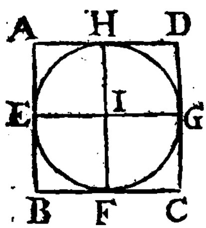
* *Scholium.*



Quadratum circulo circumscriptum ABCD duplum est inscripti quadrati EGHF.

Nam Rgl. HB = π 2 △ π. 41. 1. HEF, & Rgl. HD = 2 △ HGF. Ergo totum ABCD = 2 EHGF.

PROP. VIII. PROBL.



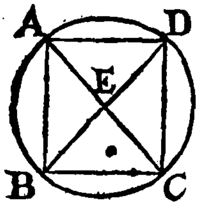
In dato quadrato ABCD *circulum inscribere.*

Bisecetur vtraque AB, AD in E, H, & per E alterutri ipsarum AD, BC parallela EG, per H vero alterutri ipsarum AB, DC parallela HIF agatur. Centro I interuallo IH, vel IE, vel IG describatur circulus.

Quoniam ergo Pgra sunt AG, GB, AF, FD, AI, IC, IB & ID: erit ρ AE = HI, & AH ρ. 34. 1.
= EI. Sed quoniam σ AB = AD: est τ AE σ. 29. def. 1.
= AH, & ergo HI = EI. Similiter demon- τ. 7. ax.
strabitur HI = IG, & EI = IF. Ergo IE, IF, IG, IH aequales sunt inter se, & propterea circulus, centro I, interuallo vni ipsarum aequali, descriptus, etiam per reliquarum extrema transibit, & quoniam rectas AB, BC, CD, DA secare υ nequit (sunt enim anguli ad H, υ. 16. 3.
E, F & G recti φ), ipsas tanget, & proinde φ. sch. 29. 1.
quadrato χ inscriptus erit. Q. E. F. χ. 5. def. 4.

PROP.

PROP. IX. PROBL.

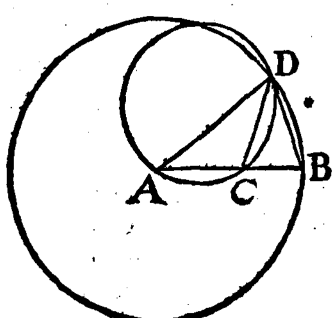


Circa datum quadratum ABCD *circulum circumscribere.*

Iungantur AC, BD. Ex puncto E, in quo se secant, interuallo EA, vel EB, vel ED, vel EC describatur circulus.

Quoniam DA = AB, DC = CB, & communis AC: anguli A & C per rectam AC bi-
ψ. 8. 3. secantur ψ. Similiter ostenditur, angulos B & D bisecari per rectam BD. Et quia ang. A = B, & hinc dimidius EAB = dimidio
α. 6. 1. EBA: erit α EA = EB. Similiter demonstrabimus, esse EB = EC, & EC = ED. Sunt ergo EA, EB, EC, ED inter se aequales, & circulus, centro E, interuallo vni harum aequali, descriptus, per puncta A, D, C, B transit, & ergo circa quadratum ABDC cir-
α. 6. def. 4. cumscriptus α est. Q. E. F.

PROP. X. PROBL.



Isosceles triangulum constituere, habens alterutrum angulorum, qui sunt ad basin, duplum reliqui.

Ponatur recta quaedam AB, & secetur β in C sic,
β. 11. 2. vt AB × BC = ACq.

AC q. Centro A, interuallo AB describatur circulus, in quo aptetur γ recta BD aequalis ipsi AC, quae diametro circuli maior non est. Iuncta AD, erit DAB triangulum isosceles, in quo ang. BDA vel ABD = 2 DAB. γ. 1. 4.

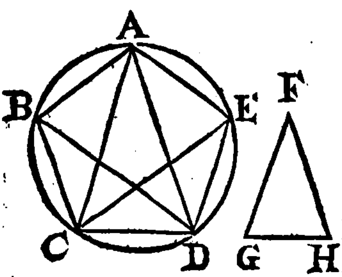
Nam circumscripto circulo δ circa △ ACD, quoniam AB × BC = ACq = BDq, patet BD circulum ADC ε tangere, & propterea ζ ang. BDC = DAC. Hinc η ang. BDA = DAC + CDA = θ BCD. Sed quum sit ι AB = AD: erit ang. BDA = κ CBD. Quare ang. BCD = λ CBD, & DC μ = BD = CA. Hinc ang. CDA = κ CAD, & additis ang. BDC = ν CAD: erit ang. BDA = 2 DAB Q. E. F.

δ. 5. 4.
ε. 37. 3.
ζ. 32. 3.
η. 2. ax.
θ. 32. 1.
ι. 15. def. 1.
κ. 5. 1.
λ. 1. ax.
μ. 6. 1.
ν. per dem.

* *Scholium.*

Quia ergo ang. DAB + ADB + ABD = 5 DAB = 2 rectis: liquet, esse ang. DAB quintam partem duorum rectorum.

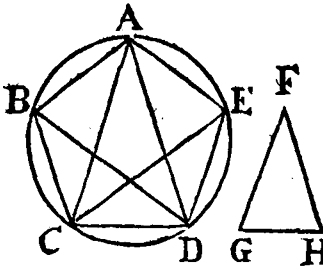
PROP. XI. PROBL.



In dato circulo ABCDE *pentagonum aequilaterum & aequiangulum describere.*

ξ Fiat triangulum FGH isosceles, habens alterutrum ξ. 10. 4.

G



o. 2. 4. terutrum angulorum ad basin GH duplum reliqui F, & * inscribatur in circulo A B C D E triangulum A C D, triangulo F G H aequiangulum, ita vt angulo F = DAC,
π. 9. 1. G = ACD, & H = ADC. Secetur* vterque ipsorum ACD, ADC bifariam a rectis CE, BD, & ducantur AB, BC, DE, EA: dico factum.

Nam ex constructione liquet, quinque angulos ACE, ECD, DAC, BDC, BDA esse inter
ρ. 26. 3. se aequales. Hinc peripheriae, ρ & his subtensae
σ. 29. 3. σ rectae AE, ED, DC, CB, BA sibi mutuo aequantur. Aequilaterum ergo est pentagonum ABCDE. Et quia peripheria AB = per. DE: addita communi BCD, erit per. ABCD = per. BCDE, ideoque τ ang. AED
τ. 27. 3. = BAE. De reliquis angulis similiter ostenditur, quod sint angulo BAE vel AED aequales. Ergo & aequiangulum est pentagonum ABCDE. Q. E. F.

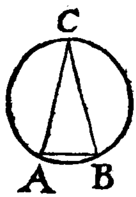
* *Scholia.*

1. Praxis facilior huius problematis tradetur ad 10. 13.

υ. 27. 3. 2. Quoniam ang. BAE = 3 CAD υ: angulus
φ. sch. 10. 4. pentagoni aequilateri & aequianguli aequatur φ tribus quintis duorum rectorum, vel sex quintis recti.

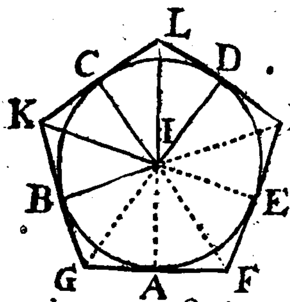
3. Vni-

3. Vniuersaliter figurae imparium laterum inscribuntur in circulis ope triangulorum isoscelium, quorum anguli aequales ad basin multiplices sunt eorum, qui ad verticem sunt, angulorum. Parium vero laterum figurae in circulo inscribuntur ope isoscelium triangulorum, quorum anguli ad basin multiplices sesquialteri sunt eorum, qui ad verticem sunt angulorum.



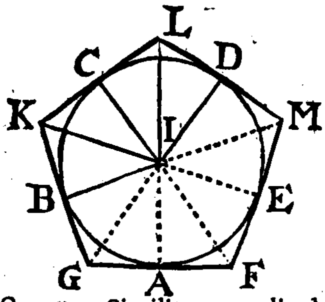
Vt in triangulo isosceli CAB, si ang. A $=$ 3 C $=$ B: AB erit latus heptagoni. Si A $=$ 4 C: erit AB latus enneagoni &c. Sin vero A $=$ $= 1\frac{1}{2}$ C: erit AB latus quadrati. Et si A $= 2\frac{1}{2}$ C: subtendet AB sextam partem circumferentiae. Paritérque si A $= 3\frac{1}{2}$ C: erit AB latus octogoni &c.

PROP. XII. PROBL.



Circa datum circulum ABC DE pentagonum aequilaterum & aequiangulum circumscribere.

Intelligantur pentagoni in circulo ϰ descripti angulorum puncta A, B, C, D, E, ita vt circumferentiae AB, BC, CD, DE, EA sint aequales; & per puncta A, B, C, D, E ducantur circulum contingentes FG, GK, KL, LM, MF. Erit FGKLM pentagonum desideratum. ϰ. 11. 4.



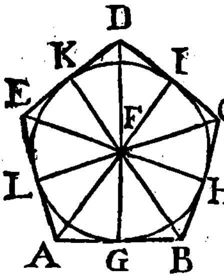
Sumto enim circuli centro I, ducantur IB, IK, IC, IL, ID. Et quia IC in tangentem KL est ψ perpendicularis: erit vterque angulorum ad C rectus ω. Similiter anguli ad B & D recti sunt. Ergo α IKq = ICq + KCq = IBq + BKq. Sed ICq = IBq. Ergo KCq = BKq, & KC = BK. Est autem praeterea IC = IB, & communis IK: quare β ang. CIK = BIK, & ang. IKC = IKB. Hinc ang. BIC = 2 KIC, & ang. BKC = 2 IKC. Eadem ratione & ang. CID = 2 CIL, & ang. CLD = 2 CLI. Sed quum sit circumf. BC = CD γ, & ergo δ ang. BIC = CID: erit & ε ang. KIC = CIL. Sunt vero recti ad G aequales, & praeterea latus IC commune. Ergo ζ KC = CL, & ang. IKC = ILC. Hinc KL = 2 KC. Eadem ratione GK = 2 BK. Erat autem KC = BK. Ergo η KL = GK. Similiter vnumquodque ipsorum GF, FM, ML ipsi GK vel KL aequale ostenditur. Ergo pentagonum FGKLM aequilaterum est, Deinde, quum ostensus sit ang. IKC = ILC, & BKC = 2 IKC, & CLD = 2 ILC: patet η, esse ang. BKC = CLD. Similiter ostendetur quilibet angulorum ad G, F, M aequalis ipsi BKC vel CLD. Ergo pentagonum FGKLM etiam aequiangulum est. Q. E. F.

ψ. 18. 3.
ω. 10. def. 1.
α. 47. 1.
β. 8. 1.
γ. hyp.
δ. 27. 3.
ε. 7. ax.
ζ. 26. 1.
η. 6. ax.

* *Scholium.*

Eodem pacto, si in circulo quaecunque figura aequilatera & aequiangula describatur, & ad extrema semidiametrorum ex centro ad angulos ductarum excitentur lineae perpendiculares: hae perpendiculares constituent figuram totidem laterum & angulorum aequalium circulo circumscriptam.

PROP. XIII. PROBL.



In dato pentagono aequilatero & aequiangulo ABCDE *circulum inscribere.*

Duos pentagoni angulos A & B biseca [9] rectis AF, BF, concurrentibus in F. A puncto F ad AB duc perpendicularem [ι] FG, & ex F interuallo FG describe circulum. Dico factum. [9. 9. 1.] [ι. 12. 1.]

Ducantur in reliqua latera lineae perpendiculares FH, FI, FK, FL, & iungantur FC, FD, FE. Et quia AB = [π] BC, & communis FB, & ang. ABF = FBC: erit [λ] ang. FAB = FCB. Ergo ang. EAB = [κ] 2 FAB = [μ] 2 FCB. Sed ang. EAB = [ξ] DCB. Ergo ang. DCB = 2 FCB. Recta ergo FC bisecat angulum DCB. Similiter ostendetur, reliquos angulos EDC, DEA etiam bisecari a rectis FD, FE. Et quia ang. FBG = FBH, item ang. FGB = [ν] FHB, & communis FB: est FH = [ξ] FG. Eadem ratione reliquae FI, [π. hyp.] [λ. 4. 1.] [μ. 6. ax.] [ν. 10. ax.] [ξ. 26. 1.]

FK, FL ipſi FH vel FG aequales oſtendentur. Ergo circulus, centro F interuallo FG deſcriptus, per H, I, K, L puncta tranſibit, & ibi latera pentagoni continget, quia illa ſecare ne-
o. 16. 3. quit°. In dato igitur pentagono ABCDE circulus GHIKL inſcriptus eſt. Q. E. F.

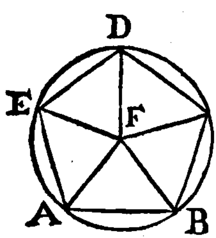
* *Coroll.*

Hinc ſi duo anguli proximi figurae aequilaterae & aequiangulae biſecentur, & a puncto, in quo coëunt lineae angulos biſecantes, ducantur rectae lineae ad reliquos figurae angulos: omnes anguli figurae erunt biſecti.

* *Schol.*

Eadem methodo in qualibet figura aequilatera & aequiangula circulus deſcribetur.

PROP. XIV. PROBL.



Circa datum pentagonum aequilaterum & aequiangulum ABCDE *circulum circumſcribere.*

Duos pentagoni angulos A, B biſeca rectis AF, BF, coeuntibus in F. Circulus, centro F interullo FA deſcriptus, pentagono circumſcriptus eſt.

Ductis enim FC, FD, FE, reliqui omnes
π. cor. 13. 4 anguli C, D, E biſecti erunt π. Et quoniam
ρ. 7. ax. ang. EAB = ABC: erit ang. FAB =ρ FBA.
σ. 6. 1. Ergo FB =σ FA. Similiter quaelibet FC, FD, FE ipſi FB vel FA aequalis oſtendetur.

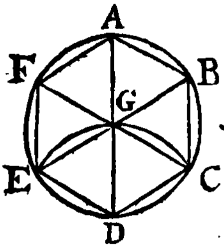
Circulus

Circulus ergo, centro F interuallo F A descrptus, per angulos pentagoni A, B, C, D, E transibit. Q. E. F.

** Scholium.*

Eadem arte circa quamlibet figuram aequilateram & aequiangulam circulus circumscribetur.

PROP. XV. PROBL.

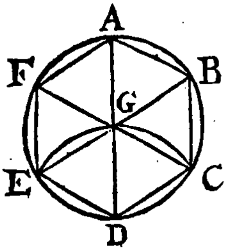


In dato circulo ABCD EF *hexagonum aequilaterum & aequiangulum inscribere.*

Ducatur circuli diameter AD, posito in G centro [τ]. Ex centro D in- τ. 1. 3.
teruallo DG describatur alius circulus EGC, iunctaeque EG, CG producantur in B & F; & iungantur AB, BC, CD, DE, EF, FA. Dico factum.

Nam quia in circulo AED est GE = GD, & in circulo EGC, GD = DE: erit △ EGD aequilaterum, ideoque [υ] aequiangu- υ. sch. 5. 1.
lum. Quare ang. EGD est tertia pars [φ] duo- φ. 32. 1.
rum rectorum. Similiter ang. DGC est tertia pars 2 rectorum. Et quoniam ang. EGD + DGC + CGB = [χ] 2 rectis: erit & ang. χ. 2. sch.
CGB tertia pars 2 rectorum, & aequalis an- 13. 1.
gulo EGD, & ang. DGC. Hinc [ψ] & anguli ψ. 15. 1.
AGB, AGF, FGE & inter se & reliquis aequales erunt. Sex igitur [ω] circumferentiae ω. 26. 3.
ED, DC, CB, BA, AF, FE inter se sunt aequales, ergo & [α] sex subtensae rectae. Quare α. 29. 3.

 aequi-



aequilaterum eſt hexagonum ABCDEF. Deinde quia circumf. AF = ED: communi addita AB CD: erit tota circumfer. FABCD = ABCDE, & proinde ang. FED = β AFE. Similiter reliqui anguli hexagoni ſingillatim aequales ipſi FED, vel AFE oſtendentur. Ergo & aequiangulum eſt hexagonum ABCDEF, & dato circulo inſcriptum. Q. E. F.

β. 27. 3.

Corollar.

Ex hoc manifeſtum eſt, hexagoni latus circuli ſemidiametro aequale eſſe.

Circumſcriptio hexagoni circa circulum, nec non circuli inſcriptio vel circumſcriptio in vel circa datum hexagonum eodem modo fiant, quem de pentagono docuimus.

* *Scholia.*

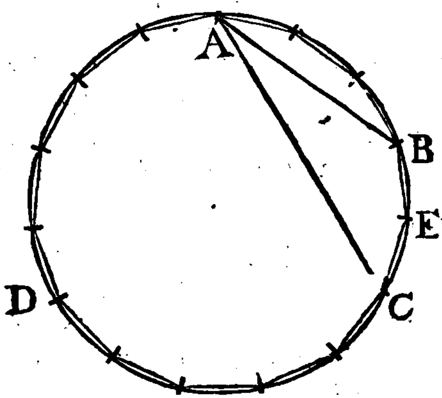
Hinc & facile triangulum aequilaterum ACE in dato circulo inſcribetur.

Hexagonum autem regulare (i. e. aequilaterum & aequiangulum) *ſuper data recta* CD *ita conſtrues.* Fac ſuper CD triangulum aequilaterum CGD. Centro G interuallo GC deſcribe circulum. Is capiet hexagonum ſuper data CD deſcribendum.

PROP. XVI. PROBL.

In dato circulo ABCD *quindecagonum aequilaterum & aequiangulum inſcribere.*

Inſcri-



Inscribatur circulo trianguli aequilateri ipsi inscripti latus AC [γ], item pentagoni aequilateri latus AB [δ]. Bisecetur BC in E [ε]. Iunctis rectis CE, EB aequales in continuum [ζ] rectae circulo aptentur: erit in ipso quindecagonum aequilaterum & aequiangulum inscriptum. Nam qualium partium circulus ABCD est quindecim, talium circumferentia ABC, tertia pars exsistens circuli, erit quinque. Circumferentia vero AB, quinta circuli pars, erit trium. Ergo reliqua BC est duarum, & huius dimidium BE vel EC est decima quinta pars circuli ABCD. Ergo si rectae EB aequales circulo in continuum aptentur: describetur quindecagonum aequilaterum & aequiangulum. Q. E. F.

γ. 2. 4.
δ. 11. 4.
ε. 30. 3.

Ad modum eorum, quae de pentagono dicta sunt, reliqua problemata de quindecagono soluentur.

Scholium.

Circulus diuiditur geometrice in partes.	{	4, 8, 16, &c. per 6, 4. & 9, 1.
		3, 6, 12, &c. per 15, 4. & 9, 1.
		5, 10, 20, &c. per 11, 4. & 9, 1.
		15, 30, 60, &c. per 16, 4. & 9, 1.

Ceterum diuiſio circumferentiae in partes quotuis aequales etiamnum deſideratur. Quare pro figurarum quarumcunque ordinatarum vel regularium conſtructionibus ſaepe ad mechanica artificia recurrendum eſt, de quibus Geometrae practici conſulendi ſunt.

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER V.

DEFINITIONES.

1. *Pars* eſt magnitudo *magnitudinis*, minor maioris, quando minor maiorem metitur.

2. *Multiplex* eſt maior minoris, quando minor maiorem metitur.

3. *Ratio* eſt duarum magnitudinum eiusdem generis, ſecundum quantiplicitatem, mutua quaedam habitudo (ſeu relatio.)

4. *Rationem inter ſe magnitudines habere* dicuntur, quae multiplicatae ſe inuicem ſuperare poſſunt.

* In omni ratione ea quantitas, quae ad aliam refertur, *antecedens* dicitur, haec altera *conſequens*. Vt ſi A ad B refertur, ſiue magnitudines ſint eae quantitates, ſiue numeri, ita vt conſideres, quomodo A habeat ſe ad B quoad quantiplicitatem: antecedens eſt A, B vero conſequens. Signum rationis magnitudinis A ad B eſt nobis hoc A : B.

5. *In eadem ratione magnitudines eſſe* dicuntur *prima ad ſecundam & tertia ad quartam*, quando primae & tertiae aeque multiplices ſecundae & quartae aeque multiplices, iuxta quamuis multiplicationem, vtraque vtramque, vel una ſuperant, vel vna aequales ſunt, vel vna deficiunt, inter ſe comparatae.

6. Ma-

6. Magnitudines, quae eandem rationem habent, *proportionales* vocantur.

7. Quando autem aeque multiplicium multiplex primae ſuperauit multiplicem ſecundae, multiplex autem tertiae non ſuperauerit multiplicem quartae: tunc *prima ad ſecundam maiorem habere* dicitur *rationem, quam tertia ad quartam.*

8. *Proportio* eſt rationum ſimilitudo.

* Signum, quo notamus proportionem, vel quod magnitudines A, B eandem rationem habeant, quam magnitudines C D, eſt hoc $A : B = C : D$. Sed $A : B > C : D$ denotat, inter A & B maiorem quam inter C & D rationem eſſe. Similiter $C : D < A : B$ ſignificat, rationem C ad D minorem eſſe ratione $A : B$.

9. Proportio in tribus ad minimum *terminis* conſiſtit.

10. Si tres magnitudines ſunt proportionales: prima ad tertiam *duplicatam* habere dicitur *rationem* eius, quam habet ad ſecundam.

11. Si quatuor magnitudines ſunt proportionales: prima ad quartam *triplicatam* habere dicitur *rationem* eius, quam habet ad ſecundam. Et ſic deinceps vno amplius, quamdiu proportio exſtiterit.

* Talium proportionum, quae *continuae* appellantur, ſignum eſt $\div\!\div$. E. gr. $\div\!\div$ A, B, C notat, eſſe magnitudinem A ad B in eadem ratione, ac B ad C; & $\div\!\div$ A, B, C, D notat, rationes $A : B$, $B : C$, $C : D$ easdem vel ſimiles eſſe. Deinde ſi $\div\!\div$ A, B, C, hoc quod ratio $A : C$ ſit duplicata rationis

A;

A : B, sic exprimemus, $A : C = (A : B)^2$. Et si A, B, C, D fuerint continue proportionales, rationem A ad D triplicatam esse rationis A ad B, sic significabimus, $A : D = (A : B)^3$.

12. *Homologae magnitudines* dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, consequentes vero consequentibus.

* Si $A : B = C : D$, vocatur A ipsi C homologa, item B & D homologae dicuntur.

13. *Alterna ratio* est sumtio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.

14. *Inuersa ratio* est sumtio consequentis, vt antecedentis, ad antecedentem, vt consequentem.

15. *Compositio rationis* est sumtio antecedentis vna cum consequente, tanquam vnius, ad ipsam consequentem.

16. *Diuisio rationis* est sumtio excessus, quo antecedens superat consequentem, ad ipsam consequentem.

17. *Conuersio rationis* est sumtio antecedentis ad excessum, quo antecedens ipsam consequentem superat.

18. *Ex aequalitate ratio* est, quando, pluribus exsistentibus magnitudinibus, & aliis, ipsis numero aequalibus, fuerit vt, in primis magnitudinibus, prima ad vltimam, sic in secundis magnitudinibus, prima ad vltimam. Vel aliter, sumtio extremarum per subtractionem mediarum.

19. Or-

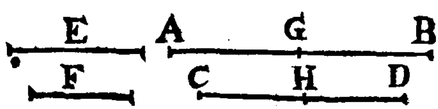
19. *Ordinata proportio* eſt, quando fuerit, vt antecedens ad conſequentem, ita antecedens ad conſequentem; vt autem conſequens ad aliam quampiam, ita conſequens ad aliam quampiam.

* Si fuerit A : B = C : D, & deinde ſit B : E = D : F.

20. *Perturbata* vero *proportio* eſt, quando, tribus exiſtentibus magnitudinibus, & aliis, ipſis numero aequalibus, fuerit, vt, in primis magnitudinibus, antecedens ad conſequentem, ita, in ſecundis magnitudinibus, antecedens ad conſequentem; vt autem, in primis magnitudinibus, conſequens ad aliam quampiam, ita, in ſecundis magnitudinibus, alia quaepiam ad antecedentem.

* Vt ſi ſint magnitudines A, B, C, & totidem aliae D, E, F, & fuerit A : B = E : F; ſit autem deinde B : C = D : E.

PROP. I. THEOR.



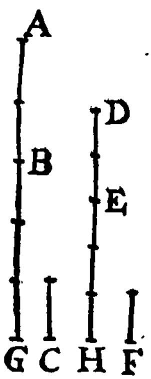
Si fuerint quotcunque magnitudines AB, CD *quotcunque magnitudinum aequalium numero* E, F, *ſingulae ſingularum, aeque multiplices: quam multiplex eſt vna magnitudo* AB *vnius* E, *tam multiplices erunt & omnes* AB + CD *omnium* E + F.

Quia enim AB aeque multiplex eſt ipſius E, ac CD ipſius F: quot magnitudines ſunt in

A B

AB ipsi E aequales, tot erunt & in CD ipsi F aequales. Sint partes, in quas AB diuidi potest, ipsi E aequales, AG, GB, & partes ipsius CD sint CH = HD = F. Ergo multitudo harum partium in AB aequalis erit multitudini in CD. Praeterea est AG + CH =[α] E + F, & GB + HD = E + F. α. 2. ax. Ergo quot sunt in AB aequales ipsi E, tot sunt in AB + CD aequales ipsis E + F. Ergo quam multiplex est AB ipsius E, tam multiplices erunt & AB + CD ipsarum E + F. Q. E. D.

PROP. II. THEOR.



Si prima AB *secundae* C *aeque multiplex fuerit, atque tertia* DE *quartae* F; *fuerit autem & quinta* BG *secundae* C *aeque multiplex, atque sexta* EH *quartae* F: *erunt etiam prima & quinta simul sumtae* AG *secundae* C *aeque multiplices, atque tertia & sexta* DH *quartae* F.

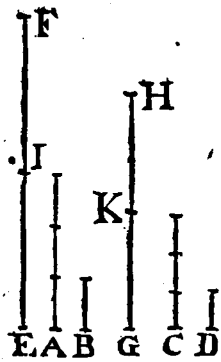
Nam [β] quot in AB sunt magnitudines ipsi C aequales, tot sunt in DE aequales ipsi F. Et quot in BG sunt ipsi C aequales, tot sunt in EH ipsi F aequales. Ergo [γ] quot in AG sunt magnitudines ipsi C aequales, totidem DH continet

β. hyp.

γ. 2 ax.

tinet ipsi F aequales. Hinc AG aeque multiplex est ipsius C, ac DH ipsius F. Q. E. D.

PROP. III. THEOR.



Si prima A *secundae* B *aeque multiplex fuerit atque tertia* C *quartae* D; *sumantur autem* EF, GH *aeque multiplices primae* A *& tertiae* C: *erit & ex aequo sumtarum vtraque vtriusque aeque multiplex, altera quidem* EF *secundae* B *altera vero* GH *quartae* D.

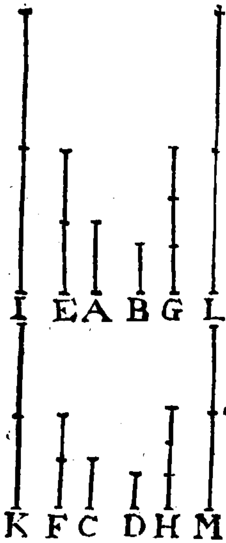
Sint enim in EF partes quotcunque EI, IF ipsi A aequales, & in GH partes GK, KH ipsi C aequales. Harum numerus illarum numero[δ] aequalis erit. Porro quia EI = A, & GK = D: erit EI ipsius B aeque multiplex[δ], ac GK ipsius D. Similiter IF ipsius B aeque multiplex erit, ac KH ipsius D. Ergo[ε] EF ipsius B aeque multiplex erit, ac GH ipsius D. Q. E. D.

δ. hyp.

ε. 2. 5.

PROP.

PROP. IV. THEOR.



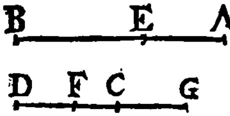
Si prima A *ad secundam* B *eandem habeat rationem, quam tertia* C *ad quartam* D: *& aeque multiplices* E, F *primae & tertiae ad aeque multiplices* G, H *secundae & quartae, iuxta quamuis multiplicationem, eandem rationem habebunt inter se comparatae.*

Sumantur enim ipsarum E, F aeque multiplices I, K, & ipsarum G, H aeque multiplices L, M. Erit ergo ζ I aeque multiplex ipsius A, ac L ipsius C. ζ. 3. 5.
Item L aeque multiplex ipsius B erit, ac M ipsius D. Et quum sit A : B = C : D: si I superat L, superabit & η K ipsam M, si aequalis, aequalis, & si minor, minor erit. η. 5. def. 5.
Sunt autem I, K ipsarum E, F aeque multiplices, & L, M ipsarum G, H aliae vtcunque aeque multiplices ϑ. Ergo η E : G = F : H. ϑ. hyp.
Q. E. D.

Cor. Quoniam demonstratum est, si fuerit I > vel = vel < L, fore & K >, =, < M: constat etiam, si L >, =, < I, fore M >, =, < K; ac propterea fore G: E = H : F. *Si ergo quatuor magnitudines proportionales sunt, & inuerse proportionales erunt.*

* *Schol.* Similiter demonstratur, esse E : B = F : D, item A : G = C : H.

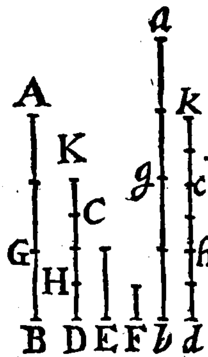
PROP. V. THEOR.



Si magnitudo AB *magnitudinis* CD *aeque multiplex ſit, atque ablata* AE *ablatae* CF: *erit & reliqua* EB *reliquae* FD *aeque multiplex, atque tota* AB *totius* CD.

Ponatur alia CG, cuius EB ſit aeque multiplex ac AE eſt ipſius CF. Ergo ι AB ipſius
ι. 1. 5. GF erit aeque multiplex ac AE ipſius CF. Sed & AB ipſius CD aeque multiplex erat ac AE ipſius CF. Ergo AB ipſarum GF & CD aeque multiplex erit. Quare κ eſt GF = CD,
κ. 7. ax. & ergo λ CG = FD. Ergo EB ipſius FD
λ. 3. ax. aeque multiplex eſt, quam AE ipſius CF, vel quam tota AB totius CD. Q. E. D

PROP. VI. THEOR.



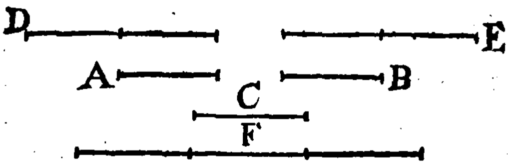
Si duae magnitudines AB, CD *duarum magnitudinum* E, F *aeque multiplices ſint; & ablatae quaedam* AG, CH *ſint earundem* E, F *aeque multiplices: erunt & reliquae* GB, HD *vel iisdem* E, F *aequales, vel ipſarum* E, F *aeque multiplices.*

Sit enim primum GB = E: dico, etiam fore HD = F. Ponatur enim ipſi F aequalis CK. Et quia AG, CH ipſarum E, F ſunt aeque multiplices:

plices: erunt adhuc A B, KH ipſarum E, F aeque multiplices. Sed & AB, CD earundem E, F aeque multiplices erant. Ergo KH & CD eiusdem F aeque multiplices erunt. Quare [μ] K H $=$ CD, & KC $=$ [ν] HD. Sed KC $=$ F. Ergo HD $=$ F. μ. 6. ax. ν. 3. ax.

Similiter demonſtrabimus, [ξ] ſi gb fuerit ipſius E multiplex, & hd ipſius F aeque multiplicem eſſe, poſita ck ipſius F aeque multiplici, ac gb ipſius E. Q. E. D. ξ. 2. 5.

PROP. VII. THEOR.



Aequales magnitudines A, B *eandem habent rationem ad eandem* C; *&* *eadem* C *ad aequales* A, B.

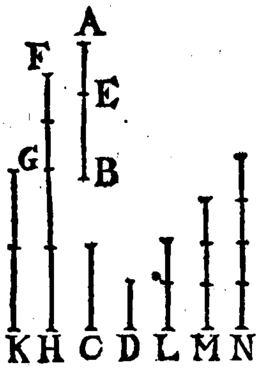
Sumantur ipſarum A, B aeque multiplices D, E, & ipſius C alia vtcunque multiplex F. Et quoniam A$=$B: erit & D$=$E. Quare ſi D$>$, $=$, $<$F: erit [ο] quoque E$>$, $=$, $<$F. Ergo [π] erit A : C $=$ B : C. Q. E. D. ο. 1. & 14. ax. π. 5. def. 5.

Similiter demonſtratur, eſſe C : A $=$ C : B. Q. E. D.

* Scholium.

Eodem modo demonſtrabis, aequalia ad aequalia eandem rationem habere.

PROP. VIII. THEOR.



Inaequalium magnitudinum A B, C *maior* AB *ad eandem* D *maiorem habet rationem, quam minor* C. *Et eadem* D *ad minorem* C *maiorem habet rationem, quam ad maiorem* A B.

Cas 1. Sumta in AB ipsi C = BE, sit AE < EB. Capi potest ε ipsius AE multiplex, maior quam D, quae sit FG. Et quantiplex FG est ipsius AE, tantiplex fiat GH ipsius EB, & K ipsius C. Sumantur etiam ipsius D dupla L, tripla M, & sic deinceps, quoad perueniatur ad primam multiplicium ipsius D, ipsa K maiorem. Sit ea N, quadrupla ipsius D. Quia ergo N prima est, qua K facta est minor: nondum erit K < M. Et quum FG, GH ipsarum AE, EB aeque multiplices sint: erunt & σ FH, FG ipsarum AB, AE aeque multiplices. Sunt vero FG & K ipsarum A E, C aeque multiplices. Ergo FH & K ipsarum AB & C aeque multiplices erunt. Sed quia GH & K aequalium EB & C aeque sunt multiplices; est GH = τ K. Ergo non est GH < M. Hinc, ob FG > D, erit GH + FG, id est FH, maior quam M + D, id est N. K autem, quum sit minor

ε. 4. def. 5.

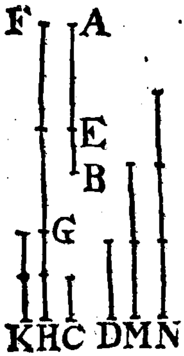
σ. 1. 5.

τ. 6. ax.

quam

quam N, non superat ipsam N. Ergo [v] AB : D > C : D. *v. 7. def. 5.*

Similiter ostenditur, esse D : C > D : AB. Q. E. D.



Cas. 2. Si AE > EB. Sumatur ipsius EB multiplex GH > D, & quantiplex est GH ipsius EB, tantiplex fiat FG ipsius AE, & K ipsius C. Erunt ergo vt antea FH, K ipsarum AB, C aeque multiplices. Sit inter ipsius D multiplices N primo maior quam FG, M proxime praecedens. Ergo, quod rursus eodem modo ostendetur, FH superabit ipsam N. Denique quum rursus sit K = GH, FG autem, quae ipsa GH maior est, non superet N: patet K non superare ipsam N. Ergo AB : D > C : D; &, quod pari modo demonstratur, D : C > D : AB. Q. E. D.

* *Cas.* 3. Si AE = EB, idem eodem modo demonstrari potest, quo in casu 1.

PROP. IX. THEOR.

Quae A, B, *eandem rationem habent ad eandem* C, *sunt inter se aequales. Et ad quas* A, B, *eadem* C *eandem habet rationem, ipsae etiam sunt inter se aequales.*

Si

1. Si enim non esset $A = B$; nec foret$^{\varphi}$ $A : C = B : C$. Quod est contra hypothesin. Ergo $A = B$. Q. E. D.

φ. 8. 5.

2. Si sit $C : A = C : B$, nec tamen $A = B$: non$^{\varphi}$ erit $C : A = C : B$; contra hypothesin. Ergo $A = B$. Q. E. D.

PROP. X. THEOR.

Magnitudinum A, B *rationem habentium ad eandem* C, *quae maiorem habet rationem* A, *est maior. Ad quam vero* B *eadem* C *maiorem habet rationem, illa est minor.*

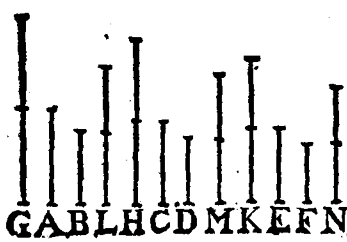
1. Sit $A : C > B : C$. Jam si non sit $A > B$: aut aequalis, aut minor erit. Si esset $A = B$:

κ. 7. 5. foret $A : C =$ $^{\varkappa}$ $B : C$. Si $A < B$: foret$^{\psi}$ $A :$

ψ. 8. 5. $C < B : C$. Vtrumque contra hypothesin. Ergo $A > B$. Q. E. D.

2. Sit $C : B > C : A$. Jam si non sit $B < A$: aut aequalis erit, aut maior. Si $B = A$: erit$^{\varkappa}$ $C : B = C : A$. Si $B > A$: erit$^{\psi}$ $C : B < C : A$. Quia vtrumque contra hypothesin est: necesse est vt sit $B < A$. Q. E. D.

PROP. XI. THEOR.

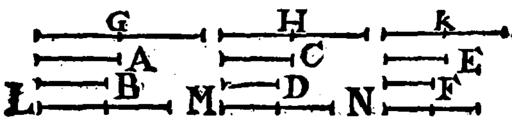


Quae eidem sunt eaedem rationes, & inter se sunt eaedem.

Sit $A : B = C : D$. & $C : D = E : F$. Dico

Dico fore $A : B = E : F$. Sumantur enim ipsarum A, C, E aeque multiplices G, H, K; ipsarum vero B, D, F aeque multiplices L, M, N. Ergo si fuerit $G >, =, < L$: erit [α] & $H >, =, < M$; item si fuerit $H >, =, < M$: erit & $K >, =, < N$. Quare si fuerit $G >, =, < L$: erit & $K >, =, < N$. Hinc erit [α] $A : B = E : F$. Q. E. D. α. 5. def. 5

PROP. XII. THEOR.



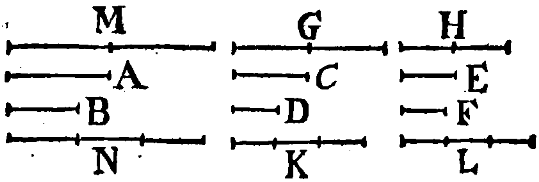
Si quotcunque magnitudines proportionales fuerint $A : B = C : D = E : F$: *ut una* A *antecedentium ad unam* B *consequentium, ita erunt omnes antecedentes* $A + C + E$ *ad omnes consequentes* $B + D + F$.

Sumantur ipsarum A, C, E aeque multiplices G, H, K, & ipsarum B, D, F aliae utcunque aeque multiplices L, M, N. Jam [α] si $G >, =, < L$: erit & $H >, =, < M$, atque $K >, =, < N$. Quare si $G >, =, < L$: erunt & $G + H + K >, =, < L + M + N$. Sunt autem G, & $G + H + K$ ipsarum A, & $A + C + E$ [β] aeque multiplices; item L ac $L + M + N$ sunt ipsarum B ac $B + D + F$ aeque multiplices. Ergo [α] est $A : B = A + C + E : B + D + F$. Q. E. D.

α. 5. def. 5.

β. 1. 5.

PROP. XIII. THEOR.



Si prima A *ad secundam* B *eandem habeat rationem, quam tertia* C *ad quartam* D; *tertia autem* C *ad quartam* D *maiorem habeat rationem, quam quinta* E *ad sextam* F: *& prima* A *ad secundam* B *maiorem habebit rationem, quam quinta* E *ad sextam* F.

Sume ipsarum C, E aeque multiplices G, H, & ipsarum D, F alias quasdam aeque multiplices K, L, ita vt G quidem superet K, sed
γ. 7. def. 5. H non superet L, quod semper fieri potest γ. Deinde quantiplex G est ipsius C, tantiplex fiat M ipsius A, & quantiplex K est ipsius D, tantiplex N ipsius B. Ergo quum sit A : B = C : D; si fuerit G >, =, < K: erit & M >, =, < N. Sed G > K. Ergo & M > N. Atqui H non > L. Sunt vero M & H ipsarum A & E aeque multiplices, nec non N & L ipsarum B, F (per constr.). Ergo γ A : B > E : F. Q. E. D.

* *Schol.* Si vero fuerit C : D < E : F : erit quoque A : B < E : F. Item si A : B > C : D > E : F : erit A : B > E : F. Et si A : B < C : D < E : F : erit A : B < E : F.

PROP.

PROP. XIV. THEOR.

Si prima A *ad secundam* B *eandem habeat rationem, quam tertia* C *ad quartam* D; *prima autem* A *maior sit quam tertia* C: *& secunda* B, *quam quarta* D, *maior erit. Et si aequalis: aequalis. Et si minor: minor.*

1. Quia enim A > C: erit δ A: B > C: B. δ. 8. 5.
Sed A: B = C: D. Ergo ε C: D > C: B. Er- ε. 13. 5.
go ζ D < B, vel B > D. Q. E. D. ζ. 10. 5.

2. 3. Similiter demonstrabitur, si A = C, fore B = D, & si A < C, fore B < D. Q. E. D.

* *Schol.* A fortiori, si A: B < C: D, & A > C: erit η B > D. Si fuerit A = B, & A: B = C: D: erit & C = D. Sumtis enim ipsarum A, B, C, D, aeque multiplicibus E, F, G, H: quia θ E = F, erit ι G = H, & proinde κ C = D.

η. sch. praec.
θ. 6. ax.
ι. 5. def. 5.
κ. 7. ax.

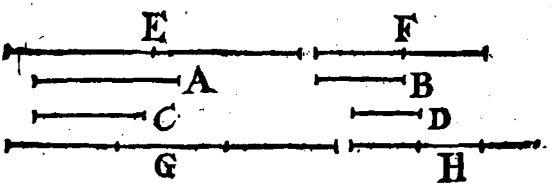
PROP. XV. THEOR.

Partes A, B *inter se comparatae eandem habent rationem, quam habent earum aeque multiplices* CD, EF.

Sint CG, GH, HD partes multiplicis CD ipsi A, aequales, & EK, KL, LF partes multiplicis EF ipsi B aequales. Erit ergo multitudo ipsarum CG, GH, HD aequalis multitudini ipsarum EK, KL, LF. Et quia CG = GH = HD, & EK = KL = LF: λ. 7. 5.
erit λ CG : EK = GH : KL = HD : LE. Qua- & 11. 5.

μ. 12. 5. re μ CG : EK = CD : EF. Est vero A : B = ν
ν. 7. 5. CG : EK. Ergo A : B = ξ CD : EF. Q. E. D.
ξ. 11. 5.

PROP. XVI. THEOR.



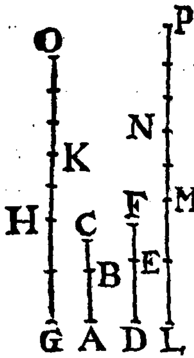
Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, A : B = C : D : *& alterne proportionales erunt* A : C = B : D.

Sint ipsarum A, B aeque multiplices E, F, & ipsarum C, D aliae aeque multiplices G, H.
ο. 15. 5. Hinc A : B = ο E : F. Sed A : B = C : D (*hyp.*).
π. 11. 5. Ergo π C : D = E : F. Rursus C : D = ο G : H; hinc π E : F = G : H. Quare si E >, =, < G :
ρ. 14. 5. erit ρ & F >, =, < H. Ergo A : C = σ B : D.
σ. 5. def. 5. Q. E. D.

* *Schol.* Haec propositio & 14. locum tantum habent, si magnitudines proportionales eiusdem generis sunt. Ceterum ex hac demonstrare possumus, *si sit A : B = C : D, & A >< B, esse &* C >< *D*. Nam sumtis ipsarum A, B, C, D aeque multiplicibus E, F, G, H : quia ο A : B = E : F, &
τ. 16. 5. ergo τ A : E = B : F, & A >< B; erit E >< F. Hinc & σ G >< H. Sed quum sit ο G : H = C : D, & ergo τ G : C = H : D : erit ρ C >< D. Q. E. D.

PROP.

PROP. XVII. PROBL.



Si compositae magnitudines sint proportionales (AC : BC = DF : EF): *& diuisae proportionales erunt* (AB : BC = DE : EF).

Sumantur enim ipsarum quidem AB, BC, DE, EF aeque multiplices GH, HK, LM, MN, ipsarum vero BC, EF aliae vtcunque aeque multiplices KO, NP. Tota KG totius AC tam multiplex [υ] est, quam HG ipsius AB, vel LM ipsius DE. Sed quam multiplex est LM ipsius DE, tam multiplex est [υ] LN ipsius DF. Ergo GK & LN ipsarum AC, DF aeque sunt multiplices. Rursus [φ] HK + KO id est HO, & MN + NP id est MP, aeque multiplices erunt ipsarum BC, EF. Est vero AC : BC = DF : EF. Ergo si GK >, =, < HO; erit quoque LN >, =, < MP. Si vero GK >, =, < HO: erit &, communi HK ablata, adhuc GH >, =, < KO. Et si LN >, =, < MP; erit, communi MN ablata, adhuc LM >, =, < NP. Ergo si GH >, =, < KO: erit & LM >, =, < NP. Quare [χ] AB : BC = DE : EF. Q. E. D.

υ. 1. 5.
φ. 2. 5.
χ. 5. def. 5.

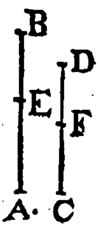
PROP.

PROP. XVIII. THEOR.

Si diuisae magnitudines sint proportionales ($AB : BC = DE : EF$): *& compositae proportionales erunt* ($AC : BC = DF : EF$).

Si negas: erit AC ad BC vt DF ad aliam FG ipsa FE minorem vel maiorem. Sit primo $FG < FE$.
ψ. 17. 5. Sed quum sit ψ $AB : BC = DG : FG =$ α $DE : EF$, & $DG > DE$:
α. 11. 5. erit α $FG > FE$. Q. E. A.
α. 14. 5. Similiter nec potest esse AC ad BC vt DF ad maiorem quam FE. Ergo $AC : BC = DF : FE$. Q. E. D.

PROP. XIX. THEOR.



Si fuerit vt tota AB *ad totam* CD, *ita ablata* AE *ad ablatam* CF: *erit reliqua* EB *ad reliquam* FD, *vt tota* AB *ad totam* CD.

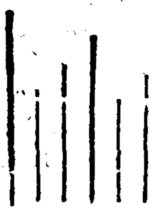
Nam quia $AB : CD = AE : CF$:
β. 16. 5. erit alterne β $AB : AE = CD : CF$, &
γ. 17. 5. diuidendo γ $BE : EA = DF : FC$, & rursus alterne $BE : DF = EA : FC = AB : CD$. Q. E. D.

Corollar.

Quoniam ostensum est, si fuerit $AB : AE$
δ. 17. def. 5. $= CD : FC$, fore $AB : CD = BE : DF$: erit alterne $AB : BE = CD : DF$. Hinc δ *si compositae magnitudines proportionales fuerint, conuertendo etiam proportionales erunt.*

PROP.

PROP. XX. THEOR.



A B C D E F

Si ſint tres magnitudines A, B, C, *& aliae ipſis numero aequales* D, E, F, *quae binae ſumantur in eadem ratione* ($A : B = D : E$, & $B : C = E : F$); *ex aequo autem prima* A *maior ſit quam tertia* C: *& quarta* D *quam ſexta* F *maior erit; & ſi aequalis, aequalis; & ſi minor, minor.*

Quum enim $A > C$: erit $A : B >$ ε $C : B$. ε. 8. 5.
Sed (hyp.) $A : B = D : E$, atque $C : B =$ ζ $F : E$. ζ. hyp. &
Ergo $D : E >$ η $F : E$. Ergo $D >$ θ F. Si- cor. 4. 5.
militer oſtenditur, ſi $A =, < C$, fore $D =,$ η. 13. 5.
$< F$. Q. E. D. θ. 10. 5.

PROP. XXI. THEOR.

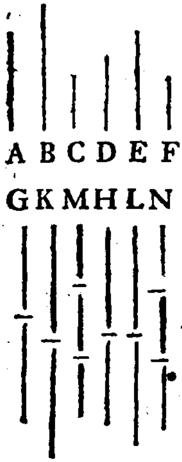
A B C D E F

Si ſint tres magnitudines A, B, C, *& aliae ipſis numero aequales* D, E, F, *quae binae ſumantur, & in eadem ratione; ſit autem perturbata earum proportio* ($A : B = E : F$, & $B : C = D : E$), *& ex aequo prima* A *maior ſit quam tertia* C: *& quarta* D *quam ſexta* F *maior erit; & ſi aequalis, aequalis; & ſi minor, minor.*

Quia $A > C$: eſt $A : B >$ ι $C : B$. Sed eſt $A :$ ι. 8. 5.
$B = E : F$, & inuertendo $C : B = E : D$. Ergo κ κ. 13. 5.
$E : F > E : D$. Ergo λ $F < D$, vel $D > F$. λ. 10. 5.
Similiter oſtenditur, ſi $A =, < C$, fore $D =,$
$< F$. Q. E. D.

PROP.

PROP. XXII. THEOR.



Si sint quotcunque magnitudines A, B, C, *& aliae ipsis numero aequales* D, E, F, *quae binae sumantur, in eadem ratione* (A : B = D : E, & B : C = E : F): *& ex aequo in eadem ratione erunt* (A : C = D : F).

Sumantur G, H ipsarum A, D aeque multiplices, & K, L ipsarum B, E aliae vtcunque aeque multiplices, necnon M, N ipsarum C, F. Ergo [μ] G : K = H : L, & K : M = L : N.
μ. 4. 5. Quare si sit G >, =, < M: erit & [ν] H >, =, < N. Ergo A : C = [ξ] D : F.
ν. 20. 5.
ξ. 5. def. 5. Q. E. D.

* *Schol.*

1. Ergo rationum aequalium duplicatae, triplicatae &c. etiam aequales sunt.

2. Et vice versa, quarum rationum duplicatae, vel triplicatae &c. aequales sunt, eae inter se aequales sunt. Sint e. gr. ∺ a, b, c, d, & ∺ e, f, g, h, & sit a : d = e : h: erit a : b = e : f. Si negas: sit a : b = e : p, & p > f, & pone ∺ e, p, s, t. Igitur quia e : p < e : f: erit p : s < f : g, & s : t < g : h, ideoque s > g, & t > h (sch. 14. 5.). Sed quia a : d = e : t, (per sch. 1.) & a : d = e : h: erit quoque t = h. Q. E. A.

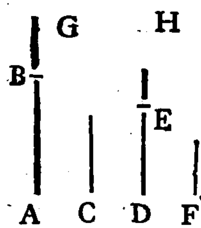
PROP.

PROP. XXIII. THEOR.

Si sint tres magnitudines A, B, C, *& aliae ipsis numero aequales* D, E, F, *quae binae sumantur, in eadem ratione, sit autem perturbata earum proportio* ($A : B = E : F$, & $B : C = D : E$)*: & ex aequo in eadem ratione erunt* ($A : C = D : F$).

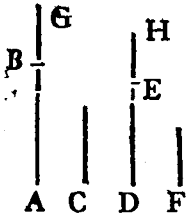
Sumtis G, H, K, ipsarum A, B, D aeque multiplicibus, & aliis L, M, N ipsarum C, E, F vtcunque aeque multiplicibus, erit [a] $A : B = G : H$, & $E : F$ a. 15. 5.
$= M : N$. Sed ponitur $A : B = E : F$. Ergo $G : H$ [π] $=$ π. 11. 5.
$M : N$. Et quia $B : C = D : E$: erit $H : L =$ [ς] $L : M$. Quare [σ] si $G >, =, < L$: erit & $K >, =, < N$, & propterea [τ] $A : C = D : F$. Q. E. D. ς. 4. 5. σ. 21. 5. τ. 5. def. 5.

PROP. XXIV. THEOR.



Si prima A B *ad secundam* C *eandem habeat rationem, quam tertia* DE *ad quartam* F; *habeat autem & quinta* BG *ad secundam* C *eandem rationem, quam sexta* EH *ad quartam* F: *& composita e prima & quinta* A G *ad secundam* C *eandem rationem habebit, quam composita e tertia & sexta* DH *ad quartam* F.

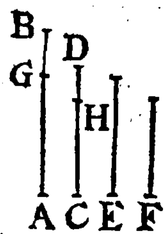
Quum



ν. cor. 4. 5.
φ. 22. 5.
χ. 18. 5.

Quum enim $BG : C = EH : F$: erit inuertendo $C : BG =$ ν $F : EH$. Et quia $AB : C = DE : F$: erit ex aequo φ $AB : BG = DE : EH$; ergo componendo χ $AG : GB = DH : HE$. Hinc quum praeterea sit $GB : C = HE : F$: erit ex aequo φ $AG : C = DH : F$. Q. E. D.

PROP. XXV. THEOR.



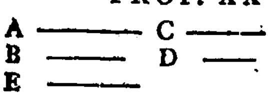
Si quatuor magnitudines fuerint proportionales ($AB : CD = E : F$): *maxima ipsarum* AB, & *minima* F *duabus reliquis* $CD + E$ *maiores erunt.*

ψ. hyp.
ω. 7. 5.
α. 19. 5.
β. sch. 14. 5.
γ. 2. ax.
δ. 4. ax.

Fiat enim $AG = E$, & $CH = F$. Quoniam ergo $AB : CD =$ ψ $E : F =$ ω $AG : CH$: erit $GB : HD =$ α $AB : CD$. Sed AB ψ $> CD$. Ergo $GB >$ β HD. Quare, quia $AG + F =$ γ $CH + E$: erit δ $AG + GB + F > CH + HD + E$, id est, $AB + F > CD + E$. Q. E. D.

* Quae sequuntur propositiones non sunt Euclidis, sed ex aliis desumtae. Ob frequentem tamen earum vsum eas Euclideis subiungere, Isaacum Barrow secuti, voluimus.

* PROP. XXVI. THEOR.

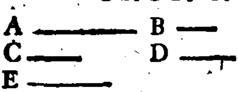


Si prima ad secundam habuerit maiorem rationem, quam tertia ad quartam: habebit inuertendo, secunda ad primam minorem rationem, quam quarta ad tertiam.

Sit

Sit $A:B > C:D$. Dico $B:A < D:C$. Nam concipe $C:D = E:B$. Ergo [ε] $A:B > E:B$; quare [ζ] $A > E$; ergo [η] $B:A < B:E$ vel [θ] $D:C$. Q. E. D. ε. 13. 5. ζ. 10. 5. η. 8. 5. θ. cor. 4. 5.

*PROP. XXVII. THEOR.

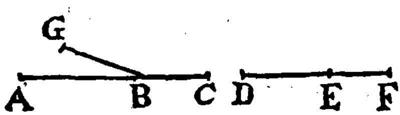


Si prima ad secundam habuerit maiorem rationem, quam tertia ad quartam: habebit quoque vicissim prima ad tertiam maiorem rationem, quam secunda ad quartam.

Sit $A:B > C:D$. Dico $A:C > B:D$. Nam puta $E:B = C:D$: ergo [ι] $A > E$. Ergo $A:C >$ [κ] $E:C$, vel [λ] $B:D$. Q. E. D. ι. 10. 5. κ. 8. 5. λ. 16. 5.

* PROP. XXVIII. THEOR.

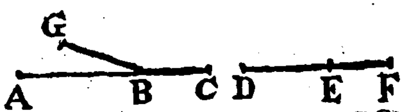
Si prima ad secundam habuerit maiorem rationem, quam tertia ad quartam: habebit quoque composita prima cum secunda ad secundam maiorem rationem, quam composita tertia cum quarta ad quartam.



Sit $AB:BC > DE:EF$. Dico $AC:BC > DF:EF$. Nam cogita $GB:BC = DE:EF$. Ergo [μ] $AB > GB$; adde vtrinque BC, erit [ν] $AC > GC$: ergo [ξ] $AC:BC > GC:BC$, id est [ο] $DF:EF$. Q. E. D. μ. 10. 5. ν. 4. ax. ξ. 8. 5. ο. 18. 5.

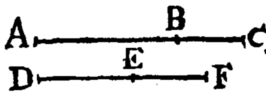
* PROP. XXIX. THEOR.

Si composita prima cum secunda ad secundam maiorem habuerit rationem, quam composita tertia cum quarta ad quartam: habebit quoque diuidendo prima ad secundam maiorem rationem, quam tertia ad quartam.



Sit AC : BC > DF : EF : dico AB : BC > DE :
π. 10. 5. EF. Intellige GC : BC = DF : EF. Ergo π AC
ρ. 5. ax. > GC. Aufer communem BC : erit ρ AB > GB.
σ. 8. 5. Ergo AB : BC > σ GB : BC, vel τ DE : EF.
τ. 17. 5. Q. E. D.

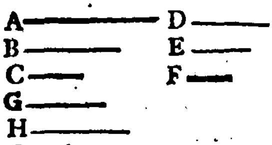
*PROP. XXX. THEOR.



Si composita prima cum secunda ad secundam habuerit maiorem rationem, quam composita tertia cum quarta ad quartam: habebit per conuersionem rationis prima cum secunda ad primam minorem rationem, quam tertia cum quarta ad tertiam.

Sit AC : BC > DF : EF : dico AC : AB < DF : DE.
υ. hyp. Nam quia υ AC : BC > DF : EF : erit diuidendo AB :
φ. 29. 5. BC > φ DE : EF ; inuertendo igitur χ BC : AB <
χ. 26. 5. EF : DE ; ergo componendo AC : AB ψ < DF : DE.
ψ. 28. 5. Q. E. D.

*PROP. XXXI. THEOR.

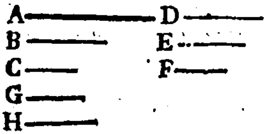


Si sint tres magnitudines A, B, C, *& aliae ipsis aequales numero* D, E, F; *sitque maior ratio primae priorum ad secundam, quam primae posteriorum ad secundam* (A : B > D : E); *item secundae priorum ad tertiam maior, quam secundae posteriorum ad tertiam* (B : C > E : F) : *erit quoque ex aequo maior ratio primae priorum ad tertiam, quam primae posteriorum ad tertiam* (A : C > D : F).

α. 10. 5. Concipe G : C = E : F. Ergo α B > G, ergo α
α. 8. 5. A : G > A : B. Rursus puta H : G = D : E : ergo

go [β] H: G < A: B, & fortius [γ] H: G < A: G. β. 13. 5.
Quare [α] A > H. Proinde A: C > [α] H: C γ. sch. 13. 5.
vel [δ] D: F. Q.E.D. δ. 22. 5.

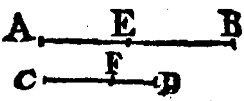
* PROP. XXXII. THEOR.



Si sint tres magnitudines A, B, C, *& aliae ipsis numero aequales* D, E, F; *sitque maior ratio primae priorum ad secundam, quam secundae posteriorum ad tertiam* (A: B > E: F); *item secundae priorum ad tertiam, quam primae posteriorum ad secundam* (B: C > D: E): *erit quoque ex aequo maior ratio primae priorum ad tertiam, quam primae posteriorum ad tertiam* (A: C > D: F).

Huiusce demonstratio plane similis est demonstrationi praecedentis.

*PROP. XXXIII. THEOR.



Si fuerit maior ratio totius AB *ad totum* CD, *quam ablati* AE *ad ablatum* CF: *erit & reliqui* EB *ad reliquum* FD *maior ratio, quam totius* AB *ad totum* CD.

Quoniam AB: CD > AE: CF: erit [ε] permutando AB: AE > CD: CF; ergo conuertendo [ζ] AB: EB < CD: DF; permutando igitur [ε] AB: CD < EB: DF. Q.E.D. ε. 27. 5. ζ. 30. 5.

* PROP. XXXIV. THEOR.

Si sint quotcunque magnitudines, & aliae ipsis aequales numero, sitque maior ratio primae priorum ad *ad primam posteriorum, quam secundae ad secundam, & haec maior, quam tertiae ad tertiam, & sic deinceps: habebunt omnes priores simul ad omnes posteriores simul maiorem rationem, quam omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores, relicta quoque prima; minorem autem, quam prima priorum ad primam posteriorum; maiorem denique etiam, quam vltima priorum ad vltimam posteriorum.*

Horum demonstratio est penes interpretes, quos adeat, qui eam desiderat. Nos omisimus, breuitatis studio, & quia eorum nullus vsus in his elementis.

EVCLIDIS ELEMENTORVM
LIBER VI.

DEFINITIONES.

1. *Similes figurae rectilineae* ſunt, quae & ſingulos angulos ſingulis aequales habent, & circa aequales angulos latera proportionalia.

* Nota ſimilitudinis eſt haec $\sim$.

2. *Reciprocae figurae* ſunt, quando in vtraque figura antecedentes & conſequentes rationum termini fuerint.

3. *Secundum extremam & mediam rationem recta linea ſecta* eſſe dicitur, quando vt tota ad maius ſegmentum, ita maius ſegmentum ad minus ſe habuerit.

4. *Altitudo cuiusque figurae* eſt linea perpendicularis, a vertice ad baſin ducta.

5. *Ratio ex rationibus componi* dicitur, quando rationum quantitates, inter ſe multiplicatae, illius faciunt quantitatem.

* Signum quantitatis rationis A : B eſt $\frac{B}{A}$, ſcilicet ſignum quoti, qui indicat, quoties antecedens contineat conſequentem vel aliquotam eius partem. Iam quia rationum A : B & B : C quantitates $\frac{A}{B}$ & $\frac{B}{C}$ inter ſe multiplicatae faciunt $\frac{A}{C}$, quae quantitas eſt rationis A : C: dicimus rationem A : C componi ex rationibus A : B & B : C, quod ſic ſcribimus (A : C) = (A : B) + (B : C).

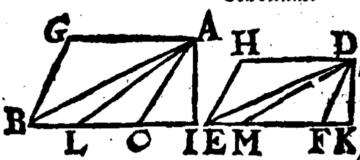
PROP. I. THEOR.

Triangula ABC, ACD, *& parallelogramma* EC, CF, *quae eandem habent altitudinem, sunt inter se vt bases* BC, CD.

1. In BD producta sumantur BG = GH = BC, & DK = KL = CD, & iungantur AH, AG,
α. 38. 1. AK, AL. Ergo [α] △ ABG = △ AGH = △ ABC, & sunt proinde basis HC & △ ACH basis BC & trianguli ABC aeque multiplicia. Similiter patet, esse basin CL & △ ACL basis CD & △ ACD aeque multiplicia. Iam si HC >, =, < CL: erit & [α] △ ACH >, =, <
β. 5. def. 5. △ ACL. Ergo BC : CD = [β] △ ACB : △ ACD. Q.E.D.

γ. 41. 1. 2. Quia Pgra. EC : CF sunt dupla [γ] △rum
δ. 15. 5. ABC, ACD, & hinc [δ] EC : CF = △ ABC : △
ε. 11. 5. ACD : erit [ε] EC : CF = BC : CD. Q. E. D.

* *Scholium.*

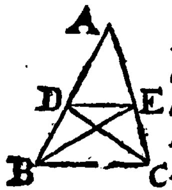


Hinc trianguli ABC, DEF, *&* *Pgra.* GC, HF, *quorum aequales sunt bases* BC, EF, *ita se habent vt altitudines* AI, DK.

Sume IL = CB, & KM = FE, ac iunge LA,
ζ. 1. 6. MD. Quia ergo IL = KM: erit [ζ] △ ALI : △
η. 38. 1. DMK = AI : DK. Sed △ ALI = [η] △ ABC, &
θ. 7. & 11. 5. △ DMK = △ DEF. Ergo △ ABC : △ DEF = [θ]
ι. 15. 5. AI : DK = [ι] Pgr. GC : Pgr. HF. Q. E. D.

PROP.

PROP. II. THEOR.



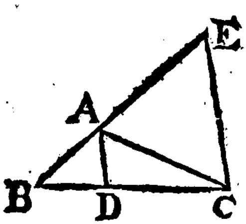
Si uni laterum BC *trianguli* ABC *parallela recta linea* DE *ducatur: haec proportionaliter secabit ipsius trianguli latera* AB, AC. *Et si trianguli* ABC *latera* AB, AC *proportionaliter secta fuerint: quae sectiones coniungit recta linea* DE *reliquo trianguli lateri* BC *parallela erit.*

1. Sit DE ad BC parallela: dico fore BD: DA = CE: EA. Iungantur enim DC, BE. Et quia [x] DE, BC parallelae: erit △ BDE =[λ] △ CDE. Ergo △ BDE : △ ADE =[μ] △ CDE : △ ADE. Atqui △ BDE : △ ADE =[ν] BD : DA, & △ CDE : △ ADE = CE : EA. Ergo BD : DA =[ξ] CE : EA. Q. E. D.

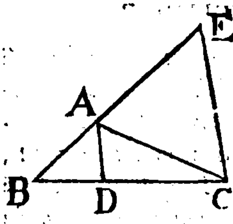
2. Quia [o] BD : DA = CE : EA, & BD : DA =[π] △ BDE : △ EDA, & CE : EA = △ CDE : △ EDA: erit [ρ] △ BDE : △ EDA = △ CDE : △ EDA, & hinc △ BDE =[σ] △ CDE. Quare [τ] ED, BC parallelae sunt. Q. E. D.

x. hyp.
λ. 37. 1.
μ. 7. 5.
ν. 1. 6.
ξ. 11. 5.
o. hyp.
π. 1. 6.
ρ. 11. 5.
σ. 9. 5.
τ. 39. 1.

PROP. III. THEOR.



Si trianguli ABC *angulus* A *bifariam secetur, secans autem angulum recta linea* AD *secet etiam basin* BC: *basis segmenta* BD, DC *eandem rationem habebunt, quam reliqua trianguli latera* BA, AC.

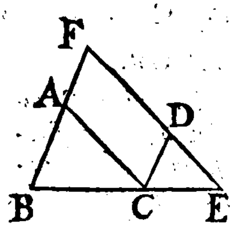


Et si basis BC segmenta BD, DC eandem habeant rationem, quam reliqua trianguli ABC latera BA, AC: quae a vertice A ad sectionem D ducitur recta linea AD, trianguli angulum A bifariam secabit.

1. Ducatur enim ad AD parallela CE, & producatur BA in E. Quia ergo ang. ACE
v. 29. 1. = v CAD, & AEC = v BAD, & CAD = φ
φ. hyp. BAD: erit ACE = AEC, & AC = χ AE.
χ. 6. 1. Hinc ψ BD: DC = BA: AC. Q. E. D.
ψ. 2. 6.

2. Iisdem constructis, si BD: DC = BA: AC: quia BD: DC = ψ BA: AE, erit BA: AC
ω. 11. 5. = ω BA: AE, & ergo AC = α AE, & ang.
α. 9. 5. ACE = β AEC. Sed ang. ACE = v DAC.
β. 5. 1. & ang. AEC = v BAD. Ergo ang. BAD = DAC. Angulus igitur A bisectus est a recta AD. Q. E. D.

PROP. IV. THEOR.



Aequiangulorum triangulorum ABC, DCE proportionalia sunt latera, quae circum aequales angulos; & homologa sunt latera, quae aequalibus angulis subtenduntur.

Sit ang. A = D, B = DCE, & ACB = E, dico fore BA : AC = CD : DE, item BC : CA = CE : ED, & AB : BC = DC : CE.

Posita

Posita enim CE ipsi BC in directum, produc BA & ED, quae in F concurrent: quia ang. B + E =[γ] B + ACB <[δ] 2 rectis. γ. hyp.
Et quia ergo CD ad BF, & AC ad FE parallela[ε] est: erit[ζ] AF = CD, & FD = AC. Sed[η] BA : AF = BC : CE, & alterne AB : BC = AF : CE, & DC : CE =[θ] AF : CE. Ergo AB : BC = DC : CE. δ. 17. 1. ε. 28. 1. ζ. 34. 1. η. 2. 6. θ. 7. 5.

Rursus ob CD, BF parallelas est[η] BC : CE = FD : DE = AC : DE. Ergo alterne BC : CA = CE : ED.

Et quia erat AB : BC = DC : CE : erit ex aequo[ι] BA : AC = CD : DE. Q.E.D. ι. 22. 5.

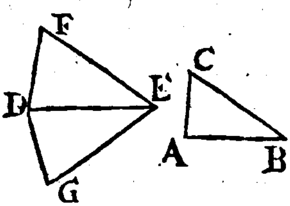
Scholia.

1. Hinc AB : DC =[κ] BC : CE = AC : DE. κ. 16. 5.

2. Si in △ EFB ducitur basi BF parallela CD; est BF : CD[λ] = BE : EC = FE : ED. λ. 18. 5.

3. Triangula aequiangula similia sunt.

PROP. V. THEOR.



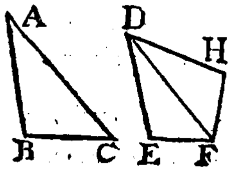
Si duo triangula ABC, DEF latera habeant proportionalia: aequiangula erunt triangula, & aequales habebunt angulos, quibus homologa latera subtenduntur.

Fac ad rectae DE[μ] punctum quidem D ang. EDG = CAB, ad punctum vero E ang. DEG = CBA: & reliqui G, C aequales erunt[ν]. Ergo[ξ] AB : BC = DE : EG. Sed[ο] AB : BC = DE : EF. Ergo EG =[π] EF. Similiter quia μ. 23. 1. ν. 32. 1. ξ. 4. 6. ο. hyp. π. 9. 5.

ED : DG = [δ] AB : AC = [ε] ED : DF, erit DG
[ζ. 8. 1.] = DF. Quare [ζ] ang. F = G = C, & ang. FDE = EDG = A, & ang. FED = DEG = B. Q. E. D.

* *Schol.* Talia ergo triangula similia sunt. (3. sch. 4. 6.)

PROP. VI. THEOR.

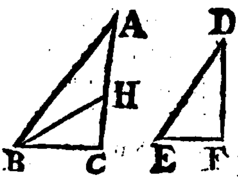


Si duo triangula ABC, DEF *unum angulum* A *uni angulo* FDE *aequalem habeant; circa aequales autem angulos latera proportionalia* (BA : AC = ED : DF): *aequiangula erunt triangula, & aequales habebunt angulos, quibus homologa latera* BA, ED, & AC, DF *subtenduntur* (B = DEF, & C = DFE).

[σ. 32. 1.] Ad rectam DF fiant ang. HDF = A vel
[τ. 4. 6.] FDE, & ang. DFH = C. Erit ergo [σ] ang. H
[υ. hyp.] = B, & HD : DF = [τ] BA : AC = [υ] ED : DF.
[φ. 9. 5.] Quare [φ] HD = ED, ideoque [χ] ang. DEF =
[χ. 4. 1.] H = B, & ang. DFE = DFH = C. Q. E. D.

* *Schol.* Talia ergo triangula similia sunt.

PROP. VII. THEOR.



Si duo triangula ABC, DEF *unum angulum* A *uni* D *aequalem habeant; circa alios autem angulos* ABC & E *latera proportionalia*

tionalia (AB : BC $=$ DE : EF); *reliquorum vero* C, F *vtrumque simul vel minorem vel non minorem recto: aequiangula erunt triangula, & aequales habebunt angulos* ABC & E, *circa quos latera sunt proportionalia.*

1. Si enim non est ABC $=$ E: sit alteruter ABC maior, & ponatur $^{\psi}$ ang. ABH $=$ E. Sint C, F acuti. Iam quia & A $=$ D: erit in aequiangulis $^{\alpha}$ triangulis ABH, DEF, AB : BH $=$ $^{\alpha}$ DE : EF. Sed $^{\beta}$ AB : BC $=$ DE : EF. Ergo $^{\gamma}$ BH $=$ BC, ideoque $^{\delta}$ ang. BHC $=$ C $<$ $^{\beta}$ recto. Quare $^{\epsilon}$ ang. BHA $>$ recto, & proinde ang. F $>$ recto; contra hypothesin.

ψ. 23. 1.
α. 32. 1.
α. 4 6.
β. hyp.
γ. 9. 5.
δ. 5. 1.
ϵ. 13. 1.

2. Pone autem vtrumque C, F non esse recto minorem, & tamen ABC $>$ E. Quia ang. BHC $=$ C: ang. BHC $+$ C non essent duobus rectis minores. Q. E. A. $^{\zeta}$ Ergo in vtroque casu ang. ABC $=$ E; & hinc ang. C $=$ F. Q. E. D.

ζ. 17. 1.

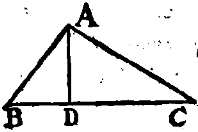
* *Scholia.*

1. Talia ergo triangula etiam similia sunt (3. sch. 4. 6.).

2. Eodem prorsus modo ex 26. 1. in locum 4. 6. substituta demonstrari potest hoc theorema: *Si duo triangula vnum angulum vni aequalem habeant, circa alios autem angulos latera aequalia, reliquorum vero angulorum vtrumque simul aut minorem aut non minorem recto: aequalia erunt triangula, & aequales habebunt angulos, circa quos sunt aequalia latera, & tertium latus tertio aequale habebunt.*

PROP.

PROP. VIII. THEOR.



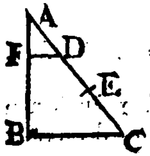
Si in triangulo rectangulo ABC *ab angulo recto* A *ad basin* BC *perpendicularis* AD *ducatur: quae ad perpendicularem sunt triangula* ADB, CDA *&* *toti* ABC *&* *inter se sunt similia.*

ν. 10. ax. Nam ang. BDA = ν CDA = BAC, & ang.
ϑ. 32. 1. BAD = ϑ C, ob communem B, item ang. CAD = B, ob communem C. Ergo Δa. ADB,
ι.3.sch.4.6. CDA, & ABC sunt aequiangula, & proinde ι similia. Q. E. D.

Coroll.

Ex hoc manifestum est, *in triangulo rectangulo perpendicularem, ab angulo recto ad basin ductam, mediam proportionalem esse inter segmenta basis* (÷ BD, DA, DC); & praeterea, *inter basin & basis segmentum vtrumlibet, latus segmento conterminum medium esse proportionale* (÷ BC, CA, CD, & ÷ CB, BA, BD).

PROP. IX. PROBL.



A data recta linea AB *imperatam partem* (e. gr. tertiam) *abscindere.*

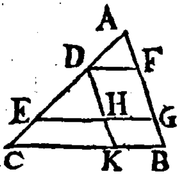
Ducatur ex A sub quouis angulo recta AC, & in ea sumatur punctum D vtcunque, & ipsi AD aequales fiant DE, EC. Iunctae BC parallela fiat DF.

κ. 2. 6. Erit ergo κ BF : FA = CD : DA. Sed DC
λ.8.def.5. = 2 DA, ergo BF = λ 2 AF, & AB = 3 AF, id est AF = $\frac{1}{3}$ AB. Q. E. F.

Scholium.

* *Schol.* Sumitur in hac demonstratione, si quatuor magnitudinum proportionalium (CD : DA = BF : FA) prima secundae sit multiplex, tertiam quartae aeque multiplicem esse. Cuius veritas, si cui ex 3. & 8. def. 5. non pateret, sic ostendi posset. Sumatur aliqua G, quae sit aeque multiplex ipsius FA ac CD ipsius DA: erit (15. 5.) G : CD = FA : DA, & alterne G : FA = CD : DA = BF : FA. Ergo BF = G, & ideo BF tam multiplex ipsius FA, quam CD ipsius DA.

PROP. X. PROBL.



Datam rectam lineam insectam AB *similiter secare, vt data recta* AC *secta est* (in D, E).

Pone datas AB, AC ita, vt quemuis angulum A comprehendant; iunge BC, & huic duc parallelas EG, DF.

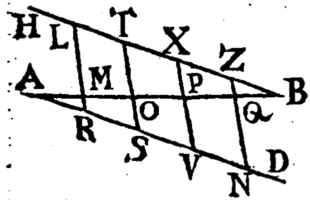
Iam, si praeterea ipsi AB ducta fuerit parallela DHK, erit [μ] DH = FG & HK = GB. μ. 34. 1.
Porro in △ KDC est [ν] CE : ED = KH : HD ν. 2. 6.
= [ξ] BG : GF. Et in △GAE est ED : DA = [ν] ξ. 7. 5.
GF : FA. Ergo segmenta rectae AB se habent vt segmenta rectae AC. Q. E. F.

Corollar.

Ergo *si ad vnum trianguli latus plures parallelae ductae fuerint: erunt omnia laterum reliquorum segmenta proportionalia.*

* *Scholium.*

* *Scholium.*

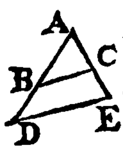


Hinc discimus *rectam datam* AB *in quotuis aequales partes* (puta 5) *secare*, id quod facilius praestatur sic: Duc infinitam AD, eique parallelam BH etiam infinitam. Ex his cape partes aequales AR, RS, SV, VN, & BZ, ZX, XT, TL, in singulis vna pauciores, quam desiderantur in AB. Tum rectae ducantur LR, TS, XV, ZN, hae quinquisecabunt

o. 33. 1. datam AB. Nam RL, ST, VX, NZ * parallelae sunt; ergo quum AR, RS, SV, VN aequales

π. cor. hui. & sch. 14. 5. sint: erunt *π* AM, MO, OP, PQ aequales. Similiter quia BZ = ZX: erit BQ = QP. Ergo AB quinquisecta est.

PROP. XI. PROBL.

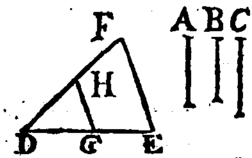


Duabus datis rectis lineis AB, AC, *tertiam proportionalem inuenire.*

Datas rectas sub quouis angulo A positas produc, & in AB producta cape BD = AC, iunge BC, cui parallelam age DE.

g. 2. 6. Sic erit AB : BD id est AB : AC = *g* AC : CE. Q. E. F.

PROP. XII. PROBL.



Tribus datis rectis lineis A, B, C, *quartam proportionalem inuenire.*

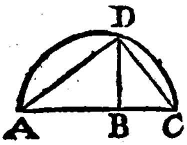
Sub angulo quouis D ducantur rectae infinitae DE, DF, in quibus

capia-

capiatur DG = A, GE = B, DH = C; iunctae GH parallela ducatur EF.

His enim factis, erit [r] DG : GE = DH : HF, id est A : B = C : HF. Q.E.F. *r. 2. 6.*

PROP. XIII. PROBL.



Duabus datis rectis lineis AB, BC, *mediam proportionalem inuenire.*

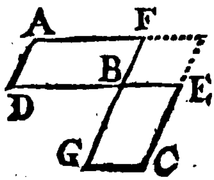
Ponatur in directum, & super AC describatur semicirculus ADC, ducaturque a puncto B ipsi AC ad rectos angulos BD.

Ductis enim AD, DC, erit, ob ang. ADC [s] rectum, ∻ AB ; BD, BC [v]. Q. E. F. *s. 31. 3.* *v. cor. 8. 6.*

* *Scholium.*

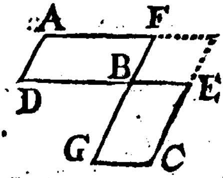
Et (per 1. sch. 31. 3.) *si recta* BD, *rectae* AC *ad rectos insistens, sit media proportionalis inter huius segmenta* AB, BC : *semicirculus super hac* AC *descriptus, per extremum illius* D *transibit.* Nam quia (per 6. 6.) ang. A = BDC, & C = ADB : erit ADC rectus (per cor. 31. 3.).

PROP. XIV. THEOR.



Parallelogrammorum AB, BC *aequalium, & vnum angulum* B *vni* B *aequalem habentium, reciproce proportionalia sunt latera, quae circum aequales angulos* (DB : BE = GB : BF). *Et quorum parallelogrammorum* AB, BC, *vnum angulum* B *vni* B *aequalem habentium, reciproce proportionalia sunt latera, quae circum aequaes angulos* B, *illa inter se sunt aequalia.*

Positis

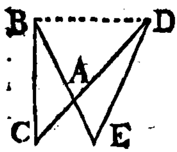


φ. 3. sch. 15. 1. Positis in directum DB & BE: erunt & FB, BG[φ] in directum. Compleatur Pgr. FE.

χ. 7. 5. ψ. 1. 6. ω. 11. 5. 1. Iam quia Pgr. AB = BC: erit AB : FE = [χ] BC : FE. Sed AB : FE = [ψ] DB : BE, & BC : FE = GB : BF. Ergo DB : BE = [ω] GB : BF. Q. E. D.

α. 9. 5. 2. Quia per hyp. DB : BE = GB : BF; & DB : BE = [ψ] Pgr. AB : FE; & GB : BF = BC : FE: erit Pgr. AB : FE = [ω] BC : FE; quare Pgr. AB = [α] BC. Q. E. D.

PROP. XV. THEOR.



Triangulorum aequalium ABC, ADE, *& unum angulum* BAC *uni* DAE *aequalem habentium, reciproce proportionalia sunt latera, quae circum aequales angulos* (CA : AD = EA : AB). *Et quorum triangulorum* ABC, ADE, *unum angulum* BAC *uni* DAE *aequalem habentium, reciproce proportionalia sunt latera, quae circum aequales angulos, illa sunt inter se aequalia.*

β. 3. sch. 15. 1. Ponantur in directum latera CA, AD, quo facto & BA, AE in directum [β] erunt. Iungatur quoque BD.

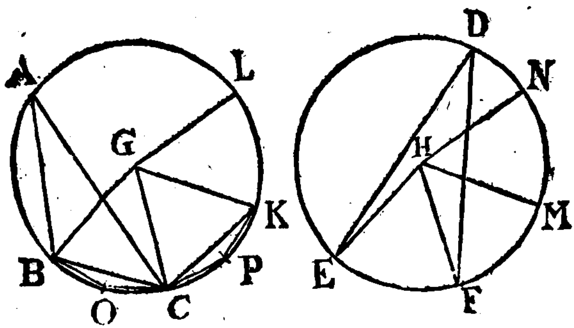
γ. 7. 5. δ. 1. 6. 1. Iam quia △ ABC = ADE per hyp. erit[γ] △ ABC : △ ABD = △ ADE : △ ABD. Atqui △ ABC : △ ABD = [δ] CA : AD, & △ ADE:

triangulorum latera BC, CE *in directum sibi invicem erunt.*

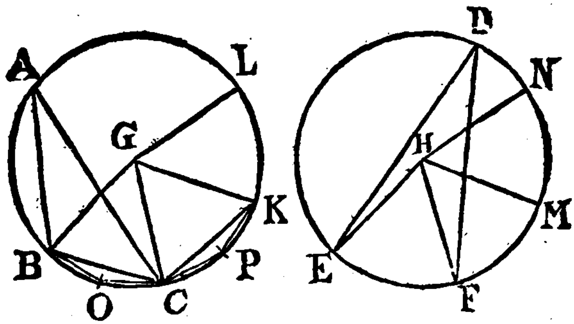
Quia enim [κ] ang. BAC = BCD = CDE, κ. 29. 1.
& BA : AC = CD : DE : erit ang. B = [ϑ] DCE, ϑ. 6. 6.
& hinc ang. ACE = B + BAC, ideoque ang.
ACE + ACB = B + BAC + ACB = [ι] 2 ι. 32. 1.
rectis. Ergo [κ] BC, CE in directum erunt. κ. 14. 1.
Q. E. D.

PROP. XXXIII. THEOR.

In circulis aequalibus ABC, DEF *anguli eandem habent rationem, quam circumferentiae* BC, EF, *quibus insistunt, siue ad centra* G, H, vt BGC, EHF, *siue ad circumferentias,* vt BAC, EDF, *insistant; adhuc etiam & sectores* GBC, HEF, *quippe qui ad centra sunt constituti.*



1. Sint circumferentiae BC deinceps quotcunque aequales CK, KL, & ipsi EF rursus totidem aequales FM, MN. Iungantur GK, GL, HM, HN. Erit ergo ang. BGC = [λ] CGK λ. 27. 3.
= KGL. Hinc circumferentia BKL & ang. BGL aeque multiplices erunt circumferentiae



BC & anguli BGC. Eadem ratione circumf. EMN & ang. EHN aeque erunt multiplices circumferentiae EF & anguli EHF. Et si circ. BKL >, =, < circ. EMN: erit quoque ang. BGL >, =, < ang. EHN. Ergo circ. BC;
μ. 5. def. 5. circ. EF = μ ang. BGC: ang. EHF = ν ang.
ν. 15. 5. & BAC: ang. EDF. Q. E. D.
20. 3. 2. Iungantur BC, CK, & sumtis in circumferentiis BC, CK punctis O, P, iungantur & BO, OC, CP, PK. Et quia ang. BGC = CGK,
ξ. 4. 1. & BG = CG, & CG = GK: est △ BGC = ξ △ CGK, & basis BC = CK. Et quum sit circ. BC = circ. CK: erit & reliqua BAKC = reliquae CALK, & ergo ang. BOC = λ CPK, &
λ. 27. 3.
ο. 11. def. 3. segmentum BCO ∾ ο segm. CKP. Quare quum haec segmenta sint super aequales rectas
π. 24. 3. BC, CK: aequalia π erunt. Erant vero & △a BGC, CGK aequalia: ergo totus sector GBC = GCK. Similiter ostenditur sector GKL = GCK = GBC, & sector HMN = HFM = EHF. Quam multiplex ergo circ. BKL circumferentiae BC, tam multiplex est sector GBL

sectoris

ſectoris GBC; & quam multiplex circ. EMN circ. EF, tam multiplex ſector HEN ſectoris HEF; & ex modo oſtenſis, ſi circumf. BCL >, =, < circ. EMN, eſt quoque ſector GBL >, =, < ſectore HEN. Ergo circumf. DC: circ. EF =[e] ſector GBC : ſect. HEF. Q. E. D.

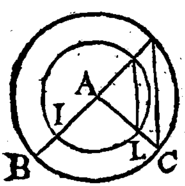
Corollar.

Perſpicuum etiam eſt [e], *vt ſector ad ſectorem, ita eſſe angulum ad angulum.* e. 11. 5.

* *Schol.*

1. Hinc *ang.* BGC *ad centrum eſt ad* 4 *rectos, vt arcus* BC *ad totam peripheriam.* Nam ang. BGC ad rectum, vt arcus BC ad quadrantem. Ergo BGC ad 4 rectos, vt arcus BC ad 4 quadrantes ſeu totam circumferentiam (ſch. 4. 5.).

Item ang. ad peripheriam A eſt ad 2 rectos, vt arcus BC ad totam peripheriam.



2. *Inaequalium circulorum arcus* IL, BC, *qui aequales ſubtendunt angulos, ſiue ad centra, vt* IAL & BAC, *ſiue ad peripherias, ſunt ſimiles: Et vice verſa, arcus ſimiles aequales angulos ſubtendunt.*

Nam IL: periph. = ang. IAL (vel BAC): 4 rect; item arc. BC: periph. = ang. BAC: 4 rect: ergo IL: periph. = BC: periph. Proinde arcus IL & BC ſunt ſimiles. Vnde

3. *Duae ſemidiametri* AB, AC *a concentricis peripheriis arcus auferunt ſimiles* IL, BC.

 4. Hisce

4. Hisce innititur vulgaris ratio angulos metiendi per arcus, qui illos ſubtendunt. Si enim, datis toti circumferentiae omnis circuli aliquot partibus ſcilicet 360, qui *gradus* vocantur, diſquiritur ope inſtrumenti goniometrici, quot gradus ſint in arcu BC, quot ſint in arcu EF: patet per prop. 33. rationem angulorum BGC, EHF, quos hi arcus ſubtendunt, in numeris exhiberi poſſe. Et ſi vnus angulus IAL conſideratur, & numerus graduum in arcu ad eum pertinente IL vel BC inuentus eſt: conſtat ratio anguli IAL ad 4 rectos, per ſchol. 1. Sit e. gr. numerus graduum in arcu IL = 100: erit IAL : 4 rect. = 100 : 360.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTORVM

LIBER VII.

DEFINITIONES.

1. *Vnitas* est, secundum quam vnumquodque eorum, quae sunt, vnum dicitur.

2. *Numerus* autem, ex vnitatibus constans multitudo.

3. *Pars* est *numerus numeri*, minor maioris, quum minor metitur maiorem.

* Omnis pars ab eo numero nomen sibi sumit, per quem ipsa numerum, cuius est pars, metitur; vt 4 dicitur pars tertia numeri 12, quia eum metitur per 3. Hinc 3 dicitur eadem pars numeri 6, quae 5 numeri 10, quia 3 & 5 ipsos 6 & 10 per eundem numerum 2 metiuntur, vel in ipsis aeque multoties continentur.

4. *Partes* autem, quando non metitur.

* Partes quaecunque nomen accipiunt a duobus illis numeris, per quos maxima communis duorum numerorum mensura vtrumque eorum metitur; vt 10 dicitur $\frac{2}{3}$ numeri 15, eo quod maxima communis mensura, nempe 5, metitur 10 per 2, & 15 per 3. Eaedem partes est numerus 4 numeri 6, quae numerus 10 ipsius 15, si numeri 4, 10 aequali multitudine continent duo numeros 2, 5, qui ipsorum 6, 15 eadem pars sunt.

5. *Multiplex* est maior minoris, quando minor maiorem metitur.

6. *Par numerus* est, qui bifariam diuiditur (vt 8).

7. *Impar* vero, qui bifariam non diuiditur, vel qui a pari numero vnitate differt (vti 9).

8. *Pariter par* numerus est, quem par numerus per parem numerum metitur (vti 16).

9. *Pariter* vero *impar* est, quem par numerus per numerum imparem metitur (vt 6).

10. *Impariter* vero *impar* numerus est, quem impar numerus per numerum imparem metitur (vt 15).

11. *Primus numerus* est, quem vnitas sola metitur (vt 3).

12. *Primi inter se numeri* sunt, quos sola vnitas, communis mensura, metitur (vt 5, 7).

13. *Compositus numerus* est, quem numerus aliquis metitur (9).

14. *Compositi inter se numeri* sunt, quos numerus aliquis, communis mensura, metitur (6, 8).

15. *Numerus numerum multiplicare* dicitur, quando, quot vnitates sunt in ipso, toties componitur multiplicatus, & aliquis gignitur.

* Numerum A per numerum B multiplicandum esse, sic indicamus, vt literas A, B coniungamus. Hinc AB notat numerum productum ex A per B multiplicato. In numeris productus scribitur sic 2×3.

16. Quando duo numeri sese multiplicantes aliquem fecerint, qui factus est, *planus* appellatur; *Latera* vero *ipsius*, numeri sese multiplicantes. (10 est planus, latera eius sunt 2 & 5).

17. Quando

17. Quando autem tres numeri sese multiplicantes aliquem fecerint: factus *solidus* appellatur; *latera* vero *ipsius*, numeri sese multiplicantes. (30 est solidus, latera ipsius sunt 2, 3, 5).

18. *Quadratus numerus* est, qui aequaliter aequalis; vel qui sub duobus aequalibus numeris continetur.

* Sit A latus: quadratus numerus, id est A A, sic scribitur A^2. Item 9, id est 3×3, sic 3^2.

19. *Cubus* vero, qui aequaliter aequalis aequaliter; vel qui sub tribus aequalibus numeris continetur.

* Sit A latus: cubus numerus scribitur sic A^3, id est AAA. Item $3 \times 3 \times 3$, id est 27, est cubus, qui sic designatur 3^3.

20. *Numeri proportionales* sunt, quando primus secundi, & tertius quarti aeque multiplex est, vel eadem pars, vel eaedem partes. (* e. gr. $12 : 3 = 8 : 2$; $2 : 6 = 5 : 15$; $10 : 15 = 12 : 18$; $8 : 6 = 16 : 12$).

21. *Similes plani & solidi numeri* sunt, qui latera habent proportionalia.

* E. gr. $6 \backsim 24$; quia $2 : 3 = 4 : 6$. Item solidus $30 \backsim$ solido 240; quia $2 : 3 = 4 : 6$ & $3 : 5 = 6 : 10$.

22. *Perfectus numerus* est, qui suis ipsius partibus est aequalis.

* Sic $6 = 1 + 2 + 3$ est perfectus. Numerus vero, qui suis ipsius partibus minor est, *abundans*, appellatur, vt 12. Qui vero maior, *diminutus*, vt 15.

* 23. *Numerus numerum metiri* dicitur *per* illum *numerum*, a quo multiplicatus, illum producit.

In diuisione vnitas est ad quotientem, vt diuidens ad diuisum. Nota, numerum alteri lineola interiecta subscriptum diuisionem denotare. Sic $\frac{A}{B}$ *est* A *diuisus per* B, *item* $\frac{CA}{B}$ *est* C *in* A *diuisus per* B.

* *Postulata.*

1. Postuletur, cuilibet numero quotlibet sumi posse aequales, vel multiplices.

2. Quolibet numero sumi posse maiorem.

3. Additio, subtractio, multiplicatio, diuisio, extractionesque radicum seu laterum ex numeris quadratis seu cubis concedantur etiam, tanquam possibilia.

* *Axiomata.*

1. Quicquid conuenit vni aequalium numerorum, conuenit & reliquis aequalibus numeris.

2. In omni additione, subtractione, multiplicatione, vel diuisione toti numero singulae suae partes simul sumtae substitui possunt.

3. Qui numeri aequalium numerorum, vel eiusdem; eaedem partes fuerint, aequales inter se sunt.

4. Quorum idem numerus, vel aequales, eaedem partes fuerint, aequales inter se sunt.

5. Maioris pars parte eadem minoris maior est.

6. Vnitas omnem numerum per vnitates, quae in ipso sunt, hoc est per ipsummet numerum, metitur.

7. Omnis numerus se ipsum metitur per vnitatem.

8. Si numerus, numerum multiplicans, aliquem produxerit: multiplicatus metietur eundem per vnitates in multiplicante, vel per ipsum multiplicantem (def. 15. & 23).

Hinc nullus numerus primus planus est, vel solidus, vel quadratus, vel cubus.

9. Si

9. Si numerus, numerum metiens, ab eo, per quem metitur, multiplicetur: illum, quem metitur, producit.

10. Numerus, quotcunque numeros metiens, compositum quoque ex ipsis metitur.

11. Numerus, quemcunque numerum metiens, metitur quoque omnem numerum, quem ille metitur.

12. Numerus metiens totum, & ablatum, metitur & reliquum.

13. Numerus numerum metiens eodem maior esse non potest.

14. Numerus, pariter metiens totum, dimidium quoque metitur.

15. Quae rationes eidem eaedem sunt, & inter se sunt eaedem (def. 20).

16. Si quatuor numeri proportionales sunt, inuerse quoque sunt proportionales.

PROP. I. THEOR.

B.....F..H.A
D...G..C
E---

Si duobus numeris inaequalibus AB, CD *expositis, detracto semper minore de maiore* (CD de BA, & reliquo FA de DC), *reliquus* GC *minime metiatur praecedentem, quoad assumta fuerit vnitas* HA: *numeri a principio positi* AB, CD *primi inter se erunt.*

Si negas: metietur [α] eos aliquis numerus, qui sit E. Quia CD metitur [β] BF: & E ipsum BF [γ] metietur, ergo & [δ] reliquum FA. Sed FA metitur [β] DG: ergo & [γ] E metitur DG ideoque etiam reliquum [δ] GC. Sed GC metitur [β] FH:

α. 12. def. 7.
β. hyp.
γ. 11. ax. 7.
δ. 12. ax. 7.

β FH: quare E quoque γ metitur FH. Metiebatur autem E totum FA: ergo metitur &
δ. 13. ax. 7. reliquam δ HA vnitatem. Ergo E maior non
ζ. 2. def. 7. est ε vnitate. Q. E. A ζ.

PROP. II. PROBL.

Duobus numeris datis AB, CD, *non primis inter se, maximam eorum communem mensuram inuenire.*

A......B
C...D

Caſ. 1. Si CD metitur AB: quum etiam se ipse metiatur; erit CD ipsorum CD, AB communis mensura, & maxima quidem, quia nullus maior ipso CD eum metitur.

A....E......B
C..F....D
G---

Caſ. 2. Si CD non metitur AB: detrahe semper minorem de maiore, CD de AB, quoties fieri potest, & reliquum AE de CD similiter, & sic porro, quoad relinquatur aliquis numerus CF metiens praecedentem AE. Dico, fore CF numerum, qui maxima est communis mensura ipsorum AB, CD.

Nam primo, semper relinqui aliquem CF, qui metiatur praecedentem, & qui non sit
η. 1. 7. vnitas, patet ex eo, quod, si secus esset, η numeri AB, CD primi inter se essent; contra hypothesin. Deinde quia CF metitur AE,
ϑ. 11. ax. 7. AE vero FD: metietur & ϑ CF ipsum FD.
ι. 7. ax. 7. CF autem se ipsum quoque ι metitur: ergo
κ. 10. ax. 7. CF metitur κ CD. At CD ipsum BE metitur; ergo ϑ CF eundem BE, ideoque κ & AB

meti-

metitur. Quare CF est communis mensura. Si maximam esse negas: sit maior quaedam G. Ergo G, metiens CD, metitur ϑ BE, & λ reliquum AE, ipsumque ϑ DF; proinde & reliquum λ CF, maior minorem. Q. E. A μ. Quare numerus CF est maxima communis mensura datorum. Q. E. F.

λ. 12. ax. 7.
μ. 13. ax. 7.

Coroll.

Hinc *numerus, duos numeros metiens, & maximam eorum communem mensuram metitur.*

PROP. III. PROBL.

Tribus datis numeris A, B, C, *non primis inter se, maximam ipsorum communem mensuram inuenire.*

A	8
B	6
C	4
D	2

1. Sume duorum A, B maximam communem mensuram D: & si D metitur C, erit communis trium mensura, & maxima quidem. Si qua enim esset maior; metiretur eadem ν numerum D. Q. E. A ξ.

ν. cor. 2. 7.
ξ. 13. ax. 7.

A	18
B	12
C	4
D	6
E	2

2. Si vero D non metitur C: sume ipsorum C, D maximam ο communem mensuram E; quod fieri potest, quia C, D primi inter se esse nequeunt, vtpote quos idem numerus π metietur, qui ipsos A, B, C metiri ponitur. Dico, E esse maximam communem mensuram trium A, B, C.

ο. 2. 7.
π. cor. 2. 7.

Nam E, metiens D, metitur quoque ρ A, & B; & quia σ metitur C, metitur singulos A, B, C. At nullus maior quam E eosdem metitur. Si quis

ρ. 11. ax. 7.
σ. constr.

quis enim maior eos metiretur: idem meti-
π. cor. 2. 7. retur π etiam D & C, ideoque τ etiam E.
τ. 13. ax. 7. Q. E. A.

Corollar.

Hinc, *si numerus numeros tres metiatur: & ipsorum maximam communem mensuram metitur.*

Schol.

Eodem modo & pluribus numeris datis, maximam communem mensuram inueniemus.

PROP. IV. THEOR.

Omnis numerus BC *omnis numeri* A, *minor maioris, vel pars est vel partes.*

A . . . . .
B . . . C

Caſ. 1. Si A, BC primi sunt inter se. Quia vnaquaeque vnitatum, quas continet BC, est υ pars numeri A: BC ipsius A partes esse patet. Q. E. D.

υ. 3. def. & 6. ax. 7.

A . . . .
B . . E . . F . . C
D . .

Caſ. 2. Si A & BC non sunt primi inter se: aut BC metitur A, & tunc φ pars ipsius est; aut non metitur. Quo in casu sume eorum maximam χ communem mensuram D, & diuide BC in numeros BE = EF = FC = D. Et quia D est φ pars ipsius A: erit ψ quoque tam BE, quam EF, quam FC pars ipsius A, & ergo totus BC partes ipsius A erit. Q. E. D.

φ. 3. def. 7.
χ. 2. 7.
ψ. 1. ax. 7.

PROP. V. THEOR.

A . . .
B . . . G . . . C
D . . . .
E . . . . H . . . . F

Si numerus A *numeri* BC *pars fuerit; & alter* D *alterius* EF *eadem pars: & vterque* A + D *vtriusque* BC + EF *eadem pars erit, quae vnus* A *vnius* BC.

Nam

Nam diuisus [α] sit BC in numeros BG GC ipsi A, EF vero in numeros EH, HF ipsi D aequales: & erit multitudo [α] numerorum BG, GC aequalis multitudini numerorum EH, HF; & ergo aequalis multitudini numerorum BG + EH, GC + HF. Sed BG + EH = [β] A + D = GC + HF; & BG + EH + GC + HF = BC + EF: ergo BC + EF constat ex tot numeris, ipsis BG + EH, vel A + D aequalibus, ex quot ipsi BG, vel A aequalibus constat BC. Hinc ipsos BC + EF & BC numeri A + D & A per eundem numerum [γ] metiuntur. Ergo [δ] A + D numeri BC + EF eadem pars est, quae A ipsius BC. Q. E. D.

α. 3. post. 7.
α. 3. def. 7. & hyp.
β. 2. ax. 1.
γ. 15. & 23. def. 7.
δ. 3. def. 7.

PROP. VI. THEOR.

A...G...B
C.........
D....H.....E
F............

Si numerus AB *numeri* C *partes fuerit; & alter* DE *alterius* F *eaedem partes: & vterque* AB + DE *vtriusque* C + F *eaedem partes erit, quae vnus* AB *vnius* C.

Diuide AB in ipsius C partes AG, GB; DE vero in ipsius F partes DH, HE. Quia AB tot continet partes ipsius C, [ε] quot DE continet partes ipsius F: est multitudo partium AG, GB = multitudini ipsarum DH, HE. Et quum [ε] eadem pars sit AG ipsius C, quae DH ipsius F: [ζ] vterque AG + DH vtriusque C + F eadem pars est, quae AG ipsius C. Simili ratione GB + HE ipsius C + F eadem pars est, quae GB ipsius C. Quare quum AG +

ε. hyp.
ζ. 5. 7.

A...G...B
C.........
D....H....E
F............

DH + GB + HE = AB + DE, & AG + DH = GB + HE, & multitudo ipsorum AG + DH, GB + HE aequalis multitudini ipsorum AG, GB: patet, AB + DE vtriusque C + F easdem esse partes, quas AB ipsius C. Q. E. D.

PROP. VII. THEOR.

A...E..B
G....C......F....D

Si numerus AB *numeri* CD *fuerit pars, quae ablatus* AE *ablati* CF: *& reliquus* EB *reliqui* FD *eadem pars erit, quae totus* AB *totius* CD.

Quae enim pars est AE ipsius CF, eadem sit
η. 5. 7. EB ipsius CG: ergo & [η] AB ipsius FG eadem pars erit. Sed AB ipsius CD eadem pars [θ]
θ. hyp. erat, quae AE ipsius CF: ergo AB ipsius FG eadem pars est, quae ipsius CD. Quum er-
ι. 4. ax. 7. go [ι] FG = CD, & hinc [κ] CG = FD: patet [λ] esse
κ. 3. ax. 1. EB ipsius FD eandem partem, quae AE ipsius
λ. 1. ax. 7. & constr. CF, vel quae est AB ipsius CD. Q. E. D.

PROP. VIII. THEOR.

A......L......E....B
C..................F......D
G.....M..K......N..H

Si numerus AB *numeri* CD *fuerit partes, quae ablatus* AE *ablati* CF: *& reliquus* EB *reliqui* FD *eaedem partes erit, quae totus* AB *totius* CD.

Ponatur enim numero AB aequalis GH:
μ. 1. ax. 7. ergo GH numeri CD eaedem partes est [μ], quae
ν. 3. post. 7. AE ipsius CF. Diuidatur [ν] GH in partes GK, KH

KH numeri CD, AE vero in partes AL, LE numeri CF: aequalis ergo erit multitudo partium GK, KH multitudini partium AL, LE. Et quia ξ AL ipsius CF eadem pars est, quae GK ipsius CD; & CD > CF: erit ο GK > AL. Sume GM = AL. Quae ergo π pars est GK ipsius CD, eadem est GM ipsius CF, & eadem ergo π MK ipsius FD. Sume KN = LE: & eodem modo patet, quae pars est KH numeri CD, eandem esse NH ipsius FD. Quare quae partes est GK + KH, id est AB, ipsius CD, eaedem partes est MK + NH, id est ρ EB, ipsius FD. Q.E.D.

ξ. constr. & hyp.
ο. 5. ax. 7.
π. 7. 7.
ρ. 3. ax. 1.

PROP. IX. THEOR.

A....
B....G....C
D.....
E.....H.....F

Si numerus A *numeri* BC *pars fuerit, & alter* D *alterius* EF *eadem pars: & permutando, quae pars est vel partes primus* A *tertii* D, *eadem erit pars vel eaedem partes & secundus* BC, *quarti* EF.

Sit A < D, & sit BG = GC = A, & EH = HF = D, multitudo ergo partium BG, GC aequalis erit multitudini partium EH, HF. Et quia BG = GC, & EH = HF: quae pars est BG ipsius EH vel partes, eadem σ pars erit & GC ipsius HF vel eaedem partes. Ergo τ quae pars vel partes est BG, id est A, ipsius EH, id est D, eadem pars vel eaedem partes erit BG + GC, id est BC, ipsius EH + HF, id est EF. Q.E.D.

σ. 1. ax. 7.
τ. 5. & 6. 7.

* *Schol.*

* *Schol.*

Si ergo duo numeri duos numeros aequaliter metiuntur: illi cum his eandem rationem habent.

PROP. X. THEOR.

A.. G.. B
C......
D.....H.....E
F..............

Si numerus AB *numeri* C *partes fuerit, & alter* DE *alterius* F *eaedem partes: & permutando, quae partes est primus* AB *tertii* DE, *vel pars, eaedem partes erit & secundus* C *quarti* F, *vel eadem pars.*

Diuide AB in partes numeri C, quae sint AG, GB, & DE in partes ipsius F, quae sint DH, HE: erit multitudo partium AG, GB = ω multitudini partium DH, HE. Et quia φ AG ipsius C eadem pars est, quae DH ipsius F: erit χ AG ipsius DH eadem pars vel eadem partes, quae C ipsius F. Similiter GB ipsius HE erit eadem pars vel eaedem partes, quae C ipsius F. Quare ψ erit AG + GB, id est AB, ipsius DH + HE, id est DE, eadem pars vel partes eaedem, quae AG ipsius DH, hoc est ω, quae C ipsius F. Q. E. D.

ω. hyp.
φ. constr. & hyp.
χ. 9. 7.
ψ. 5. vel 6. 7.
ω. dem.

PROP. XI. THEOR.

A....E..B
C......F...D

Si fuerit vt totus AB *ad totum* CD, *ita ablatus* AE *ad ablatum* CF: *& reliquus* EB *ad reliquum* FD *erit, vt totus* AB *ad totum* CD.

α. 20. def. 7. Quia enim α quae pars vel partes est AB ipsis CD, eadem pars vel eaedem partes est

AE

AF ipſius GF: etiam EB ipſius FD eadem pars vel eaedem partes erit [β], quae AB ipſius CD. β. 7. vel
Ergo [α] EB : FD = AB : CD. Q. E. D. 8. 7.

* Si AB & AE ipſorum CD, CF aeque ſunt multiplices: CD ipſius AB eadem pars eſt, quae CF ipſius AE. Quare demonſtratio etiam ad hunc caſum applicari poteſt, per ax. 16. 7; quod & in ſequentibus notandum.

PROP. XII. THEOR.

A.. C....
B...D......

Si quotcunque numeri proportionales fuerint (A : B = C : D): *ut unus antecedentium* A *ad unum conſequentium* B, *ita erunt omnes antecedentes* A + C *ad omnes conſequentes* B + D.

Quia enim, [γ] quae pars eſt A ipſius B vel γ. 20. def. 7.
partes, eadem pars eaedemue partes eſt C ipſius D: quae pars vel partes eſt A ipſius B, eadem pars vel eaedem partes [δ] eſt A + C ipſius B + δ. 5. vel 6. 7.
D; ideoque [γ] eſt A : B = A + C : B + D. Q. E. D.

PROP. XIII. THEOR.

A.. C......
B...D.........

Si quatuor numeri proportionales fuerint (A : B = C : D): *& permutando proportionales erunt* (A : C = B : D).

Quia enim, [ε] quae pars vel partes eſt A ε. 20. def. 7.
ipſius B, talis talesue eſt C ipſius D: & permutando [ζ] quae pars vel partes eſt A ipſius C, ζ. 9. 7. vel
talis vel tales eſt B ipſius D; & ergo [ε] A : C = 10. 7.
B : D. Q. E. D.

* *Schol.* Ergo si quatuor numeri proportionales sunt: etiam conuertendo vel diuidendo proportionales erunt; per hanc & 11. 7.

PROP. XIV. THEOR.

A. . . . . D. . . .
B. . . . . .   E. . .
C. . . .   F. .

Si fuerint quotcunque numeri A, B, C, *& alii ipsis multitudine aequales* D, E, F, *qui bini sumantur & in eadem ratione* (A : B = D : E, & B : C = E : F): *etiam ex aequo in eadem ratione erunt* (A : C = D : F).

u. 13. 7. Nam permutando [u] A : D = B : E = C : F, & iterum permutando A : C = D : F. Q. E. D.

PROP. XV. THEOR.

A.   D. .
B.G.H.C. E. . K. . L. . F

Si vnitas A *numerum aliquem* BC *metiatur; alter autem numerus* D *aequaliter metiatur alium aliquem* EF: *& permutando vnitas* A *tertium numerum* D *aequaliter metietur, atque secundus* BC *quartum* EF.

Diuide BC in suas vnitates BG, GH, HC, & EF in numeros ipsi D aequales, puta EK, KL, LF. Et quoniam BG = GH = HC, & EK = KL = LF; vnitatum autem multitudo = [9] multitudini numerorum EK, KL, LF: erit

9. hyp.

. 12. 7. BG : EK = GH : HL = HC : LF; & [.] BG : EK, id est, A : D = BC : EF. Ergo [x] A numerum D aequaliter metitur atque BC ipsum EF. Q. E. D.

x. 20. def. 7.

PROP.

PROP. XVI. THEOR.

E.
A.. B...
C......D......

Si duo numeri A, B *sese multiplicantes fecerint aliquos* C, D: *facti ex ipsis* C, D *inter se aequales erunt.*

Si enim A ipsum B multiplicans produxit C: λ metitur B ipsum C per vnitates, quae sunt in A. Metitur autem & E vnitas numerum A per vnitates μ quae sunt in A. Ergo B ipsum C metitur aequaliter, ac E vnitas ipsum A. Hinc ν E ipsum B aequaliter metitur ac A ipsum C. Similiter si B ipsum A multiplicans produxit D: E ipsum B metitur aequaliter, ac A ipsum D. Quare quum ξ A ipsius C eadem pars sit quae ipsius D: patet ο esse C = D. Q. E. D.

λ. 8. ax. 7. μ. 6. ax. 7. ν. 15. 7. ξ. 3. def. 7. ο. 4. ax. 7.

* *Cor.* 1. Multiplicans metitur factum per multiplicatum.

* *Cor.* 2. Si numerus B numerum C metiatur: & ille A per quem metitur, eundem C metietur per ipsum numerum metientem B.

PROP. XVII. THEOR.

A 2
B 3 C 4
D 6 E 8

Si numerus A *duos numeros* B, C *multiplicans fecerit aliquos* D, E: *facti ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicati* (D : E = B : C).

Nam B metitur D π per vnitates in A. Metitur autem & 1 numerum A per vnitates in A. Ergo 1 ipsum A aequaliter metitur ac B ipsum D & hinc ρ 1 : A = B : D. Eadem ratione 1 : A = C : E. Quare σ B : D = C : E, & permutando τ B : C = D : E. Q. E. D.

π. 8. ax. 7. ρ. 20. def. 7. τ. 13. 7.

* *Cor.* In multiplicatione est vt vnitas ad multiplicantem A, ita multiplicatus B ad factum D.

PROP. XVIII. THEOR.

A 3		B 4	
	C 5		
D 15		E 20	

Si duo numeri A, B, *numerum aliquem* C *multiplicantes, fecerint aliquos* D, E: *facti ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicantes* (D : E = A : B).

τ. 16. 7. Quia enim AC =[τ] CA = D, & BC = CB
υ. 17. 7. = E : erit D : E =[υ] A : B. Q. E. D.

PROP. XIX. THEOR.

A	6		
B	4	AD	12
C	3	BC	12
D	2	AC	18

Si quatuor numeri proportionales fuerint (A : B = C : D) : *qui ex primo & quarto fit numerus, aequalis erit ei, qui fit ex secundo & tertio* (AD = BC). *Et si numerus* AD, *qui fit ex primo* A *& quarto* D, *aequalis fuerit ei* BC, *qui fit ex secundo* B *& tertio* C: *quatuor numeri proportionales erunt* (A : B = C : D).

1. Nam sit alius AC factus ex A & C: erit
φ. 18. 7. AC : AD =[φ] C : D = A : B. Rursus AC : BC
χ. 17. 7. =[χ] A : B. Ergo AC : AD =[ψ] AC : BC, &
ψ. 15. ax. 7. hinc AD =[ω] BC. Q. E. D.
ω. 3. 4. ax. 7.

2. Quia C : D =[φ] AC : AD =[α] AC : BC;
α. 1. ax. 7. & AC : BC =[χ] A : B : erit A : B =[ψ] C : D. Q. E. D.

PROP.

PROP. XX. THEOR.

A 4
B 6 D 6
C 9

Si tres numeri proportionales fuerint (∻ A, B, C): *qui ab extremis fit numerus, aequalis erit ei, qui fit a medio* ($AC = B^2$).
Si autem qui ab extremis fit AC, *aequalis fuerit ei* B^2, *qui a medio: tres numeri proportionales erunt* (∻ A, B, C).

1. Ponatur ipsi $B = D$. Quia ergo $A : B = D : C$: erit[β] $AC = BD =$[γ] B^2. Q. E. D. β. 19. 7.

2. Quia $AC = B^2 =$ γ BD: erit[β] $A : B =$ γ. 18. def. 7.
$D : C = B : C$. Q. E. D.

PROP. XXI. THEOR.

A 10 C 5
B 6 D 3

Minimi numeri C, D *omnium eandem cum ipsis rationem habentium, eos, qui eandem rationem habent,* A, B *aequaliter metiuntur, maior* C *maiorem* A, *& minor* D *minorem* B.

1. Dico C ipsum A metiri, quia eius partes non est. Si enim fieri potest, sit C partes ipsius A. Quia est $C : D = A : B$: erit[δ] D ipsius δ. 20. def. 7.
B eaedem partes, quae C ipsius A. Quot & 9. 10. 7.
igitur in C sunt partes ipsius A, tot & in D erunt partes ipsius B. Sint E, F partes ipsius A in C, & G, H partes ipsius B in D: Quia ergo $E = F$, & $G = H$: erit $E : G =$[ε] $F : H$. ε. 1. ax. 7.
Et quia ipsorum E, F multitudo aequalis est ipsorum G, H multitudini: erit $E : G =$[ζ] $C :$ ζ. 12. 7.
D. Sed $E < C$, & $G < D$. Ergo C, D non sunt minimi eorum, qui eandem rationem habent; contra hypothesin. Non est ergo C

 partes

A	10	C	5
B	6	D	3

partes ipsius A, nec D ipsius B.
ν. 47. Quare quum ν C ipsius A, & D
9. 3. def. 7. ipsius B pars sit: metitur 9 C ipsum A, & D ipsum B.

2. Quia autem C: D = A: B, & C: A =
ι. 20. def. 7. D: B, & C pars ipsius A: erit ι & D eadem pars ipsius B. Quare C & D ipsos A, B aequaliter 9 metiuntur. Q. E. D.

* *Cor.* Minimi numeri eandem rationem habentium eosdem metiuntur, antecedens antecedentes, & consequens consequentes.

PROP. XXII. THEOR.

A	6	D	12
B	4	E	9
C	3	F	6

Si sint tres numeri A, B, C, *& alii ipsis multitudine aequales* D, E, F, *qui bini sumantur & in eadem ratione; sit autem perturbata eorum proportio* (A: B = E: F, & B: C = D: E) : *etiam ex aequo in eadem ratione erunt* (A: C = D: F).

κ. 19. 7. Est enim κ AF = BE = CD. Ergo κ A: C = D: F. Q. E. D.

PROP. XXIII. THEOR.

Numeri primi inter se, A, B, *minimi sunt omnium eandem cum ipsis rationem habentium.*

Si fieri potest, sint C, D eandem rationem habentes quam A, B, & ipsis A, B minores, minimi omnium. Ergo λ C ipsum
λ. 21. 7. A aequaliter metietur, ac D ipsum B. Iam quoties C ipsum A metitur, tot vnitates sint in E: ergo & D ipsum B metietur per numerum

numerum E. Quare [μ] etiam E metietur A per C, & E ipsum B per D. Quum itaque idem E duos A, B metiatur: A, B non erunt [ν] primi inter se; contra hypothesin. Minimi ergo sunt A, B. Q.E.D.

μ. 2. cor. 16. 7.
ν. 12. def. 7.

PROP. XXIV. THEOR.

Minimi numeri A, B eorum, qui eandem cum ipsis rationem habent, primi inter se sunt.

Si negas: metiatur [ξ] eos numerus C, ipsum A nempe per numerum aliquem D, & alterum B per E. Ergo [ο] CD = A, & CE = B; & inde A : B = [π] D : E. Quum autem sit D < A, & E < B: non erunt A, B minimi; contra hypothesin. Ergo A, B primi inter se sunt. Q. E. D.

ξ. 12. def. 7.
ο. 9. ax. 7.
π. 18. 7.

PROP. XXV. THEOR.

A 6
B 5
C 3

Si duo numeri A, B primi inter se fuerint, qui unum ipsorum A metitur numerus C, ad reliquum B primus erit.

Si enim B, C inter se primi non sint: metiatur eos numerus D. Idem D metietur [ρ] ipsum A. Ergo A, B non [σ] erunt primi inter se; contra hypothesin. Ergo C ad B primus est. Q. E. D.

ρ. 11. ax. 7.
σ. 12. def. 7.

PROP. XXVI. THEOR.

A 2 B 3
C 5
D 6

Si duo numeri A, B ad aliquem numerum C primi fuerint: & qui fit ex ipsis D ad eum C primus erit.

Si negas; metiatur ipsos C & D idem aliquis E. Ergo [τ] E & A primi inter se sunt: τ. 25. 7.

 Metia-

A 2 B 3
C 5
D 6

Metiatur autem E ipſum D per numerum F: ergo ν F ipſum D quoque metietur per E; & EF = φ D = χ AB. Quare ψ E: A = B: F. Quum autem E, A primi inter ſe ideoque ω minimi ſint: E ipſum B α metietur. Metitur autem E quoque ipſum C: ergo B, C non erunt primi inter ſe; contra hypotheſin. Quare D & C primi inter ſe ſunt. Q. E. D.

ν. 2. cor. 16. 7.
φ 9. ax. 7.
χ. hyp.
ψ. 19. 7.
ω. 23. 7.
α. cor. 21. 7.

PROP. XXVII. THEOR.

A . . B . . .
A² . . . .
D . .

Si duo numeri A, B primi inter ſe fuerint: qui fit ab vno ipſorum A² ad reliquum B primus erit.

Sit enim ipſi A = D: erunt & D, B primi inter ſe; & ergo β AD id eſt γ A² ad B primus erit. Q. E. D.

β. 26. 7.
γ. 18. def. 7.

PROP. XXVIII. THEOR.

A 3 B 5
E 15
C 2 D 4
F 8

Si duo numeri A, B ad duos numeros C, D, vterque ad vtrumque primi fuerint: & qui fiunt ex ipſis E, F inter ſe primi erunt.

Nam quia A, B ad C primi ſunt: E δ etiam ad C primus erit. Eadem ratione E, D inter ſe primi ſunt. Quare quum C, D ad E primi ſint: erunt & δ F ac E primi inter ſe. Q. E. D.

δ. 26. 7.

PROP.

PROP. XXIX. THEOR.

A 2	B 3
A^2 4	B^2 9
A^3 8	B^3 27

Si duo numeri A, B *primi inter se fuerint, & vterque se ipsum multiplicans faciat aliquos* A^2, B^2: *facti ex ipsis* A^2, B^2 *primi inter se erunt; & si numeri a principio positi* A, B, *eos qui facti sunt* A^2, B^2 *multiplicantes, aliquos* A^3, B^3 *faciant: & ipsi inter se primi erunt; & semper circa extremos hoc continget.*

Quia enim [e] A^2, B primi sunt: erunt & [e] A^2, B^2 primi. Iam quum & A. B^2 primi sint, & ergo duo A. A^2 ad duos B, B^2 vterque ad vtrumque primi sint: erunt quoque [ζ] A^3, B^3 primi inter se Q. E. D. e. 27. 7. ζ. 28. 7.

PROP. XXX. THEOR.

A 3	B 5
A+B 8	

Si duo numeri A, B *primi inter se fuerint: & vterque simul* A+B *ad vtrumque ipsorum & A & B primus erit. Quod si vterque simul* A+B *ad vnum aliquem ipsorum sit primus? & numeri* A, B *a principio positi inter se primi erunt*

1. Si negas, A+B ad A vel B primum esse: metiatur ipsos A+B & A aliquis C: qui ergo [η] & B metietur. Quare A & B non sunt primi inter se; contra hyp. η. 12. ax. 7.

2. Si negas, A, B primos esse: metiatur eos aliquis C. Quum ergo idem C [θ] ipsum A+B metiatur: A+B ad neutrum ipsorum A, B primus erit; contra hyp. θ. 10. ax. 7.

PROP. XXXI. THEOR.

A 3 B 7

Omnis primus numerus A *ad omnem numerum* B, *quem non metitur, primus est.*

Si negas: metiatur eos aliquis C praeter vnitatem. Et quia A non metitur B: erit C diuersus a numero A. Ergo quum A metiatur aliquis, qui nec vnitas nec ipsi A idem est:
ι. 11. def. 7. A primus ι non erit; contra hyp.

PROP. XXXII. THEOR.

A 2	B 6
AB	12
C	3
D	4

Si duo numeri A, B, *sese multiplicantes, aliquem faciant; eum vero* AB, *qui ex ipsis fit, metiatur aliquis numerus primus* C: *& vnum ipsorum* A, B, *qui a principio positi sunt, metietur.*

κ. 31. 7. Nam C ipsum A non metiatur: ergo κ C & A primi inter se sunt. Metiatur autem C
λ. 9. ax. 9. ipsum AB per D: erit CD = λ AB, ideoque
μ. 19. 7. C : A = μ B : D. Quare quum C, A minimi
ν. 23. 7. sint eorum ν, qui rationem C : A habent: C
ξ. cor. 21. 7. ipsum B ξ metietur.

Similiter demonstrabitur, si C ipsum B non metiretur, metiri ipsum A. Quare C metitur vnum ipsorum A, B. Q. E. D.

PROP. XXXIII. THEOR.

Omnem numerum compositum A *primus aliquis numerus metitur.*

Quia

A	12
B	4
C	2

Quia enim A compositus est: metitur eum ᵒ aliquis B, qui si primus sit, patet propositio. Si vero B etiam compositus est: metiatur eum C, qui etiam metietur ᵖ ipsum A. Quare si hic C nondum primus est, metietur ipsum alius, & sic progrediendo tandem ad primum peruenietur, qui metietur tam antecedentem quam A. Nisi enim tandem ad primum perueniretur: metirentur ipsum A infiniti numeri, quorum alter altero minor. Q.E.A ᵠ. ᵒ. 13. def. 7. ᵖ. 11. ax. 7. ᵠ. 2. def. 7.

Aliter. Sit C minimus omnium ipsum A metientium: erit idem primus. Si enim non: metiatur illum numerus D < C; quare quum idem D metiatur etiam ᵖ A, non est C minimus metientium ipsum A; contra hyp.

PROP. XXXIV. THEOR.

Omnis numerus A *vel primus est, vel eum primus aliquis numerus metitur.*

Si enim A primus est: manifesta est propositio. Sin A compositus: metietur eum aliquis ᵟ primus. Ergo A aut primus est, aut eum primus metitur. Q.E.D. ᵟ. 33. 7.

PROP. XXXV. PROBL.

A	6	B	15	C	21
		D	3		
E	2	F	6	G	7

Numeris quotcunque A, B, C *datis, inuenire minimos omnium, qui eandem cum ipsis rationem habeant.*

Si ipsi A, B, C primi inter se sunt: minimi iam erunt ᵗ omnium eandem rationem habentium. ᵗ. 23. 7.

Si

A	6	B	15	C	21
		D	3		
E	2	F	5	G	7

ν. 3. 7. Si vero non: sume ν ipsorum maximam communem mensuram D, per quam diuide ipsos A, B, C. Numeri E, F, G, per quos D ipsos A, B, C metitur, erunt quaesiti.

φ. 2. cor. 16. 7. χ. sch. 9. 7. Nam quia vnusquisque ipsorum E, F, G vnumquemque ipsorum A, B, C per D φ metitur, id est aequaliter: ipsi E, F, G in eadem χ sunt ratione cum numeris A, B, C. Dico etiam E, F, G minimos fore eandem cum A, B, C rationem habentium. Si enim negas: erunt alii H, K, L, ipsis E, F, G minores, minimi eandem cum A, B, C rationem habentium.

ψ. 21. 7. Ergo ψ H, K, L ipsos A, B, C aequaliter metientur, id est per eundem numerum, qui sit M. Igitur M metietur φ ipsum A per H, ipsum B per K, & ipsum C per L; & MH = ω

ω. 9. ax. 7. α. 19. 7. β. 20. def. 7. A. Sed est etiam ED = ω A. Ergo ED = MH, & E : H = α M : D. Sed E > H: ergo M > β D. Quare quum M ipsos A, B, C metiatur: non erit D maxima ipsorum A, B, C mensura; contra hyp. Ergo E, F, G minimi sunt eandem cum A, B, C rationem habentium. Q. E. D.

PROP. XXXVI. PROBL.

Duobus numeris A, B *datis, inuenire minimum numerum, quem metiantur.*

A	3	B	4
AB	12		

1. Sint dati A, B primi inter se. Multiplicetur A per B, factus AB erit quaesitus.

Nam

Nam vterque A, B metitur [γ] AB. Est autem & AB minimus eorum, quem A & B metiuntur. Si negas: metiantur illi numerum C<AB; & A quidem ipsum C metiatur per D, B vero per E. Ergo erit AD =[δ] C =[δ] BE, & hinc A : B =[ε] E : D. Sunt autem A, B primi inter se, ideoque minimi[ζ]: ergo B [η] metietur ipsum D. Sed numeri B, D ipsum A multiplicantes fecerunt ipsos AB, C: ergo erit[θ] B : D = AB : C, & ideo AB metietur [ι] ipsum C, minor maiorem. Q. E. A [κ].

γ. 8. ax. 7. & 1. cor. 16. 7.
δ. 9. ax. 7.
ε. 19. 7.
ζ. 23. 7.
η. 21. 7.
θ. 18. 7.
ι. 20. def. 7.
κ. 13. ax. 7.

A	4	B	6
C	2	D	3
AD	12		

2. Non sint A, B primi inter se: sume [λ] minimos C, D in eadem ratione cum A, B: & multiplica extremos vel medios per se inuicem. Factus AD erit quaesitus.

λ. 35. 7.

Nam quia A per D, & B per C multiplicatus eundem [μ] AD producunt: tam A, quam B eundem AD metietur [ν]. Dico etiam AD minimum esse. Si enim non: metientur A, B aliquem E minorem quam AD, & metiatur quidem A ipsum E per F, B vero per G. Quare erit AF =[ξ] E =[ξ] BG, & A : B =[μ] G : F. Sed [ο] A : B = C : D. Ergo C : D = G : F. Quia autem C, D minimi [ο] sunt: D ipsum F [π] metietur. Sed D : F =[ρ] AD : AF id est E: igitur AD metietur E, maior minorem. Q. E. A [σ].

μ. 19. 7.
ν. 7. ax. 7.
ξ. 9. ax. 7.
ο. constr.
π. cor. 21. 7.
ρ. 18. 7.
σ. 13. ax. 7.

PROP. XXXVII. THEOR.

A	2	B	3
C	18		
D	6		

Si duo numeri A, B metiantur numerum aliquem C: & minimus, quem illi A, B metiuntur, D eundem C metietur.

Si

A 2 B 3
C 18
D 6

Si negas: D diuidens C relinquat se minorem E. Quia igitur D metitur C — E; & A, B ipsum D metiuntur: metientur quoque [r] ipsum C — E, & [v] hinc etiam ipsum E, qui minor est quam D. Ergo D non erit minimus eorum, quos A, B metiuntur; contra hyp.

r. 11. ax. 7.
v. 12. ax. 7.

PROP. XXXVIII. PROBL.

Tribus numeris A, B, C *datis, inuenire minimum numerum, quem metiantur.*

φ. 36. 7.

A 3 B 4 C 6
D 12

1. Sume [φ] minimum D, quem duo A, B metiuntur. Si C etiam metiatur ipsum D: erit D quaesitus.

Nam quod tres A, B, C ipsum D metiantur, patet. Quod autem minimus sit, sic ostenditur. Si negas: metiantur A, B, C alium numerum E ipso D minorem. Ergo & D metietur [χ] ipsum E, maior minorem. Q.E.A.

χ. 37. 7.

A 2 B 3 C 4
D 6
E 12

2. Si autem C non metiatur D: sume minimum [φ] E, quem C & D metiantur. Qui erit quaesitus.

Nam A, B, qui ipsum D metiuntur, metientur quoque [ψ] ipsum E. Ergo tres A, B, C ipsum E metientur. E autem minimus erit. Si enim non: metiantur A, B, C alium $F < E$. Ergo & D [χ] metietur ipsum F. Quare quum C & D ipsum F metiantur: metietur

ψ. 11. ax. 7.

tietur eundem $^{\varkappa}$ etiam E, minorem maior. $\varkappa$. 37. 7.
Q.E.A $^{\omega}$. ω. 13. ax. 7

PROP. XXXIX. THEOR.

A 12 B 4
C 3

Si numerum A *numerus aliquis* B *metiatur, ille* A, *quem metitur* B, *partem habebit* C *a metiente* B *denominatam.*

Metiatur enim B ipsum A per vnitates in C: ergo, quum $^{\alpha}$ etiam 1 metiatur C per vnitates in eodem, 1 ipsum C aequaliter metietur, ac B ipsum A. Quare 1 ipsum B aequaliter $^{\beta}$ metietur ac C ipsum A; id est $^{\gamma}$ C ipsius A eadem pars est, quae 1 ipsius B. Sed 1 est pars numeri B ab ipso B denominata: ergo A partem habet C ab ipso B denominatam. Q.E.D.

α. 5. ax. 7. β. 15. 7. γ. 3. def. 7.

PROP. XL. THEOR.

A 8 B 2
C 4

Si numerus A *partem quamcunque* B *habeat: eum numerus* C *a parte* B *denominatus metietur.*

Quia $^{\delta}$ numerus C tot vnitates habet, quota pars B est ipsius A: erit 1 eadem pars ipsius C, quae B ipsius A; id est $^{\epsilon}$ 1 ipsum C aequaliter metietur, ac B ipsum A. Hinc & 1 ipsum B aequaliter $^{\zeta}$ metietur, ac C ipsum A. Ergo C metietur A. Q.E.D.

δ. hyp. ϵ. 3. def. 7. ζ. 15. 7.

PROP.

PROP. XLI. PROBL.

Numerum inuenire, qui, minimus quum sit, datas partes A, B, C *habeat.*

A	$\frac{1}{2}$	D	2
B	$\frac{1}{3}$	E	3
C	$\frac{1}{4}$	F	4
		G	12

a. 38. 7. Sint ab ipsis partibus A, B, C denominati numeri D, E, F, & sumatur [a] minimus eorum, quos D, E, F metiuntur, qui sit G. Dico factum.

b. 39. 7. Nam [b] patet, numerum G partes habere, a metientibus D, E, F denominatas, id est, partes A, B, C. Dico autem G etiam esse minimum. Nam si quis minor H partes haberet A, B, C: metirentur eum [c] numeri D, E, F. Ergo G non esset minimus, quem D, E, F metiuntur; contra hypothesin.

c. 40. 7.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTORVM

LIBER VIII.

PROP. I. THEOR.

A 8, B 12, C 18, D 27

Si sint quotcunque numeri A, B, C, D deinceps proportionales, quorum extremi A, D sint inter se primi: minimi erunt omnium eandem cum ipsis rationem habentium.

Si negas: sint totidem alii E, F, G, H minores in eadem ratione. Ergo ex aequo [α] A : D = E : H. Quare quum A, D primi inter se, sint quoque [β] minimi: [γ] metientur illi ipsos E, H, se ipsis minores. Q. E. A.

α. 14. 7.
β. 23. 7.
γ. cor. 21. 7.

PROP. II. PROBL.

Numeros inuenire deinceps proportionales minimos, quotcunque quis imperauerit, in data ratione.

A 2, B 3

A^2 4, AB 6, B^2 9

A^3 8, A^2B 12, AB^2 18, B^3 27

1. Sint A, B minimi [δ] in data ratione: erunt A^2, AB, B^2 tres deinceps proportionales minimi in data ratione.

δ. 35. 7.

 Nam

$A\ 2,\quad B\ 3$

$A^2\ 4,\quad AB\ 6,\quad B^2\ 9$

ε. 18. 7. $A^3\ 8,\quad A^2B\ 12,\quad AB^2\ 18,\quad B^3\ 27$

ζ. 24. 7. Nam $A^2 : AB =$ [ε] $A : B =$ [ε] $AB : B^2$.

η. 29. 7. Et quia A, B primi inter se [ζ] sunt, ideo-

θ. 1. 8. que etiam A^2, B^2 primi [η] sunt inter se: patet [θ], A^2, AB, B^2 minimos esse in ratione A : B. Q. E. F.

2. Sint iterum A, B minimi in data ratione: erunt A^3, A^2B, AB^2 & B^3 quatuor minimi in data ratione deinceps proportionales.

Nam similes sunt eidem rationi A : B sequen-

κ. 17. 7. tes [κ] $A^3 : A^2B$, $A^2B : AB^2$, $AB^2 : B^3$. Quum

λ. 24. & igitur A^3, B^3 inter se [λ] primi sint: erunt A^3,

29. 7. A^2B, AB^2, B^3 quatuor minimi in data ratione continue proportionales. Et eodem modo quotcunque proportionales inuestigantur. Q. E. F.

Corollaria.

1. Ex hoc manifestum est, si tres numeri deinceps proportionales minimi fuerint omnium eandem cum ipsis rationem habentium; extremos eorum quadratos esse; si vero quatuor; esse cubos.

* 2. Et patet simul, latera extremorum esse duos illos numeros, qui minimi sunt in data ratione.

PROP. III. THEOR.

Si sint quotcunque numeri A, B, C, D *deinceps proportionales minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium: eorum extremi* A, D *primi inter se erunt.*

Sumtis

A 8, B 12, C 18, D 27
E 2, F 3
G 4, H 6, K 9
L 8, M 12, N 18, O 27

Sumtis enim μ duobus minimis numeris E, F, & tribus G, H, K, & sic deinceps pluribus minimis continue proportionalibus in eadem ratione A: B, donec peruentum sit ad totidem L, M, N, O, quot sunt propositi A, B, C, D: erit vnusquisque ipsorum L, M, N, O vnicuique ipsorum A, B, C, D aequalis. Sed $L = E^3$, & $O = F^3$. Ergo quia ν L, O primi inter se sunt: etiam A, D inter se primi erunt. Q. E. D. μ. 35. 7. & 2. 8. ν. 29. 7. & 24. 7.

PROP. IV. PROBL.

Rationibus datis quotcunque, A: B, C: D, E: F *in minimis numeris, numeros inuenire deinceps minimos in datis rationibus.*

A 2, B 5, C 3, D 4, E 5, F 6
H 6, G 15, K 20, L 24
N O M P

Sume ξ minimum G, quem B & C metiantur, & duos alios H, K quos ipsi A, D aeque metiantur, ac ipsi B & C numerum G. ξ. 36. 7.

Cas. 1. Iam si E quoque metitur ipsum K, sume numerum L, quem F toties metiatur, quoties E ipsum K. Dico factum.

Nam ο est H: G = A: B, & G: K = C: D, & K: L = E: F. Si vero neges H, G, K, L minimos esse eorum, qui in rationibus propositis sunt deinceps proportionales: sint alii N, O, M, P minimi. Et quia est A: B = N: O; A vero ο. 20. def. 7. & 13. 7.

A 2, B 5, C 3, D 4, E 5, F 6
H 6, G 15, K 20, L 24
N O M P

π. cor. 21. 7. & B minimi sunt: B metietur π O. Eadem ratione C metietur ipsum O. Quare ϱ etiam
ϱ. 37. 7. G metietur numerum O, maior minorem. Q. E. A.

A 4, B 5, C 2, D 3, E 4, F 3
H 8, G 10, K 15
N 32, O 40, M 60, P 45
Q R S T

Caſ. 2. At ſi non metiatur E ipſum K: ſume minimum M, quem E & K metiantur; & duos N, O, quos ipſi H, G aeque metiantur, ac K ipſum M, item quartum P, quem F aeque metiatur, ac E ipſum M. Dico factum.

ϱ. 20. def. 7. & 13. 7. Eſt enim ϱ A : B = H : G = N : O, item C : D = G : K = O : M, & E : F = M : P. Si vero neges: minimos eſſe N, O, M, P: ſint Q, R, S, T minimi in datis rationibus. Quum ergo ſit A : B = Q : R; & A, B minimi ſint: B metietur π R. Eadem ratione C metietur R: ergo & ϱ G metietur eundem R. Quare quum ſit G : K = C : D = R : S: numerus K ϱ metietur S. Sed quia E : F = S : T, & E, F minimi ſunt: metitur quoque E ipſum S. Ergo ϱ tandem M metiretur S, maior minorem. Q. E. A.

PROP.

PROP. V. THEOR

A 2 C 4 BC 12
B 3 D 5

AB 6 CD 20
E 3, F 6, G 10

Plani numeri AB, CD *rationem habent ex lateribus* A, C, *&* B, D *compositam*. AB : CD = (A : C) + (B : D).

Nam sumtis[σ] deinceps minimis E, F, G in datis rationibus A : C & B : D; quia E : G =[τ] (E : F) + (F : G): erit E : G = (A : C) + (B : D). Iam B, ipsum C multiplicans, faciat BC: & erit AB : BC =[υ] A : C =[φ] E : F. Similiter BC : CD =[υ] B : D =[φ] F : G. Ergo ex aequo AB : CD =[χ] E : G = (A : C) + (B : D). Q.E.D.

σ. 4. 8.
τ. 5. def. 6.
υ. 17. 7.
φ. constr.
χ. 14. 7.

PROP. VI. THEOR.

A 16, B 24, C 36, D 54, E 81
F 4, G 6, H 9

Si fuerint quotcunque numeri A, B, C, D, E *deinceps proportionales; primus autem* A *secundum* B *non metiatur: neque alius aliquis ullum metietur.*

1. Numeros hos deinceps se non metiri patet: quia si B metiretur C, A etiam metiretur[α] ipsum B, contra hypothesin.

2. Nec ullus, ut A, ullum, ut C, metietur. Quot enim sint sumti A, B, C, tot sumantur minimi[β] numeri in eadem ratione, qui sint F, G, H: hinc erit[γ] A : C = F : H. Sed quia A : B = F : G, & A non metitur B:[α] neque F metietur G; quare F unitas esse[δ] nequit. Hinc, quum F & H primi[ε] sint inter se,

α. 20. def. 7.
β. 35. 7.
γ. 14. 7.
δ. 6. ax. 7.
ε. 3. 8.

ζ.12.def.7. se, F nequit [ζ] metiri ipsum H. Ergo nec A
α.20.def.7. metiri potest [α] ipsum C. Q.E.D.

PROP. VII. THEOR.

A 2, B 4, C 8, D 16

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales (∴ A, B, C, D), *primus autem* A *metiatur extremum* D: *& secundum* B *metietur.*

ν. 6. 8. Si negas: neque alius aliquis vllum [ν] metietur, ergo nec A ipsum D; contra hypothesin.

PROP. VIII. THEOR.

A 2, C 4, D 8, B 16
G 1, H 2, K 4, L 8
E 3, M 6, N 12, F 24

Si inter duos numeros A, B *numeri deinceps proportionales* C, D *ceciderint: quot inter eos cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter alios* E, F, *eandem cum ipsis* A, B *rationem habentes, cadent.*

θ. 35. 7. Sumtis enim [θ] totidem minimis G, H, K, L,
ι. 3. 8. quot sunt numeri A, B, C, D, & in eadem ra-
κ. 14. 7. tione: erunt G & L [ι] primi inter se, & ex
λ. hyp. aequo erit [κ] G : L = A : B = [λ] E : F. Sunt
μ. 23. 7. autem [μ] G & L minimi: ergo [ν] G aequaliter
ν. 21. 7. metitur ipsum E, atque L ipsum F. Sed quoties G metitur E, toties numeri H, K metiantur ipsos M, N. Numeri ergo G, H, K, L ipsos E, M, N, F aequaliter metientur; ideo-
ξ. 20. def. 7. que [ξ] numeri G, H, K, L in eadem ratione
& 13. 7. erunt, in qua sunt E, M, N, F. Ergo E, M, N, F

N, F eandem cum ipsis A, C, D, B rationem habebunt, & ergo deinceps proportionales erunt. Tot igitur inter E, F cadunt deinceps proportionales, quot inter A & B. Q. E. D.

PROP. IX. THEOR.

A 8, C 12, D 18, B 27	
E 1	
F 2, G 3	
H 4, K 6, L 9	
M 8, N 12, O 18, P 27	

Si duo numeri A, B *inter se primi fuerint, & inter ipsos numeri deinceps proportionales* C, D *ceciderint: quot inter ipsos* A, B *cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter utrumque ipsorum* A, B *& unitatem* E *deinceps proportionales cadent.*

Sume enim * in eadem ratione, in qua sunt A, C, D, B, duos minimos F, G, & tres minimos H, K, L, & sic porro, donec sumtorum M, N, O, P multitudo aequalis fiat multitudini datorum A, C, D, B. Hinc, quia & A, C, D, B minimi * sunt in eadem ratione, erit $A = M, C = N, D = O, B = P$. Et quia * $H = F^2$: erit $E : F = {}^{*}F : H$. Similiter quia $A = M = HF$: erit $E : F = H : A$. Ergo ∻ E, F, H, A. Eodem modo demonstratur, esse ∻ E, G, L, B. Q. E. D.

*. 35. 7. & 3. 8.

*. 1. 8.

*. cor. 2. 8.

*. cor. 17. 7.

PROP. X. THEOR.

Si inter duos numeros A, B, *& unitatem* C *deinceps proportionales numeri* D, E, & F, G *ceciderint: quot inter utrumque ipsorum* A, B *& unitatem* C *cadunt numeri deinceps proportionales,*

tionales, totidem & inter ipsos A, B numeri deinceps proportionales cadent.

A 8, K 12, L 18, B 27	
E 4, H 6, G 9	
D 2, F 3	
C 1	

Numerus enim D ipsum F multiplicans faciat H, & sumatur K = HD, & L = HF. Et quia ponitur C : D = D :
τ. 5. ax. 7. E; C vero ipsum D metitur[τ] per D: metie-
υ. 20. def. 7. tur[υ] quoque D ipsum E per D; & ergo
φ. 9. ax. 7. E =[φ] D^2. Rursus quia ponitur C : D = E : A: erit A = ED. Eadem ratione G = F^2, & B = GF. Quum ergo sit E = D^2 & H = FD: erit D : F =[χ] E : H. Item quia H = FD, & G = F^2: erit D : F = H : G. Ergo E : H = H : G. Rursus quia K = HD, &
χ. 17. 7. L = HF: erit A : K =[χ] E : H = D : F =[ψ]
ψ. 18. 7. K : L. Similiter quia L = HF, & B = GF: erit L : B =[χ] H : G = E : H. Quare ∻ A, K, L, B. Q. E. D.

PROP. XI. THEOR.

A^2 4, AB 6, B^2 9	
A 2, B 3	

Inter duos numeros quadratos A^2, B^2, *unus medius proportionalis* AB *cadit. Et quadratus* A^2 *ad quadratum* B^2 *duplicatam rationem habet eius, quam latus* A *habet ad latus* B.

α. 18. 7. 1. Est enim A^2 : AB =[α] A : B =[β] AB : B^2.
β. 17. 7. Q. E. D.

2. Quia (per dem.) ∻ A^2, AB, B^2:
γ. 10. def. 5. erit $A^2 : B^2 =$[γ] $(A^2 : AB)^2 = (A : B)^2$. Q. E. D.

PROP.

PROP. XII. THEOR.

$A^3 8,\ A^2B\ 12,\ AB^2 18,\ B^3 27$

$A^2\ 4,\quad AB\ 6,\quad B^2\ 9$

$A\ 2,\quad B\ 3$

Inter duos numeros cubos A^3, B^3, *duo medii proportionales* A^2B, AB^2 *cadunt. Et cubus* A^3 *ad cubum* B^3 *triplicatam habet rationem eius, quam latus* A *habet ad latus* B.

1. Nam $A : B = {}^{\delta} A^2 : AB$, & $A : B = {}^{\epsilon} AB :$ δ. 18. 7.
B^2. Sed $A^3 : A^2B = {}^{\delta} A^2 : AB = A : B$. Rursus $A^2B : AB^2 = {}^{\epsilon} A : B$, item $AB^2 : B^3 = {}^{\epsilon}$ ε. 17. 7.
$AB : B^2 = A : B$. Ergo $\ddot{\div} A^3, A^2B, AB^2, B^3$.
Q. E. D.

2. Quia (per dem.) $\ddot{\div} A^3, A^2B, AB^2, B^3$; erit $A^3 : B^3 = {}^{\zeta} (A^3 : A^2B)^3 = (A : B)^3$. ζ. 11. def. 5.
Q. E. D.

PROP. XIII. THEOR.

$A\ 2,\quad B\ 4,\quad C\ 8$

$A^2\ 4,\ AB\ 8,\ B^2\ 16,\ BC\ 32,\ C^2\ 64$

$A^3 8, A^2B 16, AB^2 32, B^3 64, B^2C 128, BC^2 256, C^3 512$

Si sint quotcunque numeri A, B, C *deinceps proportionales, & unusquisque, se ipsum multiplicans, faciat aliquos* A^2, B^2, C^2: *facti ex ipsis proportionales erunt. Et si positi a principio numeri* A, B, C *factos* A^2, B^2, C^2 *multiplicantes, alios* A^3, B^3, C^3 *faciant, & ipsi proportionales erunt. Et semper circa extremos hoc contingit.*

Expositis enim numeris AB, BC, A^2B, AB^2
B^2C & BC^2: erit ${}^{\eta} \ddot{\div} A^2, AB, B^2$, item $\ddot{\div} A^3$, η. 2. 8.
A^2C, AB^2, B^3, & erunt omnium horum numerorum rationes eaedem rationi A : B. Similiter B^2, BC, C^2 sunt deinceps proportionales

 in

A 2, B 4, C 8
A^2 4, AB 8, B^2 16, BC 32, C^2 64
A^3 8, A^2B 16, AB^2 32, B^3 64, B^2C 128, BC^2 256, C^3 512

in ratione B : C, pariterque B^3, B^2C, BC^2, C^3 in eadem ratione deinceps proportionales. Ergo quia, $A : B = B : C$, erunt A^2, AB, B^2 in eadem ratione, in qua B^2, BC, C^2; nec non A^3, A^2B, AB^2, B^3 in eadem ratione, in qua B^3, B^2C, BC^2, C^3. Sunt autem tam illi quam hi inter se multitudine pares. Ergo ex aequo ϑ $A^2 : B^2$
ϑ. 14. 7. $= B^2 : C^2$; & $A^3 : B^3 = B^3 : C^3$. Q. E. D.

PROP. XIV. THEOR.

A 2, B 4
A^2 4, AB 8, B^2 16

Si numerus quadratus A^2 *metiatur quadratum numerum* B^2: *&* *latus* A *latus* B *metietur. Et si latus* A *metiatur latus* B: *& quadratus* A^2 *quadratum* B^2 *metietur.*

κ. 2. 8. 1. Sumto enim numero AB, erunt κ deinceps proportionales A^2, AB, B^2 in ratione A
λ. 7. 8. ad B. Ergo A^2 metietur λ AB. Hinc quia
μ. 20. def. 7. $A^2 : AB = A : B$, metietur etiam μ A ipsum B. Q. E. D.

ν. 18. 7. 2. Si A metitur B: quia $A : B$ ν $= A^2 : AB$, A^2 quoque metietur μ AB. Et quia $A^2 : AB =$ κ $AB : B^2$: metietur μ & AB
ξ. 11. ax. 7. ipsum B^2. Ergo ξ A^2 metietur B^2. Q. E. D.

PROP.

PROP. XV. THEOR.

A^3 8, A^2B 16, AB^2 32, B^3 64
A^2 4, AB 8, B^2 16
A 2, B 4

Si numerus cubus A^3 metiatur cubum numerum B^3: & latus A latus B metietur. Et si latus A latus B metiatur: & cubus A^3 cubum B^3 metietur.

1. Sumtis enim numeris A^2B, AB^2, quia [o] deinceps in ratione A ad B proportionales sunt A^3, A^2B, AB^2, B^3, & A^3 ipsum B^3 metitur; metietur & A^3 ipsum A^2B. Quare quum sit $A^3 : A^2B = A : B$: metietur & A [π] ipsum B. Q. E. D. o. 2. 8. π. 20. def. 7.

2. Quia, iisdem sumtis, est [o] $A : B = A^3 : A^2B$, & A ipsum B metiri ponitur: metietur [π] & A^3 ipsum A^2B. Quare quum sit $\div A^3$, A^2B, AB^2, B^3: patet [ρ] & A^3 ipsum B^3 metiri. Q. E. D. ρ. 11. ax. 7.

PROP. XVI. THEOR.

A^2 9, B^2 16
A 3, B 4

Si numerus quadratus A^2 non metiatur quadratum numerum B^2: neque latus A latus B metietur. Et si latus A non metiatur latus B: neque hic quadratus A^2 quadratum B^2.

1. Si enim A metiretur B: A^2 etiam metiretur [σ] B^2; contra hypothesin. σ. 14. 8.

2. Et si A^2 metiretur B^2: A etiam [σ] metiretur B; contra hypothesin.

PROP.

PROP. XVII. THEOR.

A^3 8, B^3 27
A 2, B 3

Si numerus cubus A^3 *non metiatur cubum numerum* B^3: *neque latus* A *latus* B *metietur. Et si latus* A *non metiatur latus* B: *neque cubus* A^3 *cubum* B^3 *metietur.*

1. Si enim A metiretur B: A^3 quoque metiretur [τ] B^3; contra hypothesin.

τ. 15. 8.

2. Si A^3 metiretur B^3: [τ] etiam A metiretur B; contra hypothesin.

PROP. XVIII. THEOR.

A 2, B 3, C 4, D 6
AB 6, BC 12, CD 24

Inter duos similes planos numeros AB, CD, *vnus medius proportionalis* BC *cadit. Et planus* AB *ad planum* CD *duplicatam rationem habet eius, quam latus homologum* A *habet ad homologum latus* C.

υ. 17. 7.
φ. 13. 7. & 21. def. 7.

1. Quia enim AB: BC $=$ [υ] A: C, & A: C $=$ [φ] B: D: erit AB: BC $=$ B: D $=$ [υ] BC: CD. Q. E. D.

2. Quum $\div$ AB, BC, CD (per dem.); erit AB: CD $= (AB:BC)^2 = (A:C)^2 = (B:D)^2$. Q. E. D.

* *Cor.* Hinc inter duos similes planos cadit vnus medius proportionalis in ratione laterum homologorum.

PROP. XIX. THEOR.

A 2, B 3, C 5, D 4, E 6, F 10
ABC 30, BCD 60, BDF 120, DEF 240
AB 6, BD 12, DE 24

Inter

Inter duos similes solidos numeros ABC, DEF *duo medii proportionales* BCD, BDF *cadunt. Et solidus* ABC *ad similem solidum* DEF *triplicatam rationem habet eius, quam latus homologum* A, vel B, vel C *habet ad homologum latus* D, vel E, vel F.

1. Capiantur enim numeri AB, BD, DE, BCD, BDF. Et quia A : B $=$ [κ] D : E : erunt [ψ] κ. hyp.
AB, DE similes plani, & ÷÷ [α] AB, BD, DE in ψ.21.def.7.
ratione A : D, vel B : E, vel C : F. Est autem α. 18. 8.
ABC : BCD $=$ [α] AB : BD, & BDF : DEF $=$ [α] α. 17. 7.
BD : DE. Quare ABC : BCD $=$ BDF : DEF $=$ C : F. Denique BCD : BDF $=$ [α] C : F. Ergo ÷÷ ABC, BCD, BDF, DEF. Q. E. D.

2. Quia ergo ÷÷ ABC, BCD, BDF, DEF : erit ABC : DEF $=$ [β] (ABC : BCD)^3 $=$ [γ] (C : β.11. def.5.
F)^3 $=$ (B : E)^3 $=$ (A : D)^3. Q. E. D. γ. dem.

* *Cor.* Ergo inter duos similes solidos cadunt duo medii proportionales in ratione laterum homologorum.

PROP. XX. THEOR.

A 8, C 12, B 18
D 2, E 3, F 4, G 6

Si inter duos numeros A, B *vnus medius proportionalis cadat: numeri* A, B *similes plani erunt.*

Sume minimos D, E in ratione A ad C. Ergo [δ] D ipsum A aequaliter metietur, ac E δ.21.7.
ipsum C. Metiatur D ipsum A per F. Ergo DF $=$ [ε] A, & EF $=$ [ε] C. Ergo A planus [ζ] ε.9.ax.7.
numerus est, cuius latera sunt D, F. Rursus ζ. 16.def.7.
quia A : G $=$ [η] C : B ; minimi quoque D, E η. hyp.
sunt

A 8, C 12, B 18
D 2, E 3, F 4, G 6

sunt in ratione C : B. Hinc si D metiatur ipsum C per G; E metietur quoque B per G. Ergo DG = C, & EG = B. Quare & B est numerus pla-
ϑ. 17. 7. nus. Et quia DG = C = EF, ideoque ϑ D :
κ. 21. def. 7. F = E : G : erunt A & B similes κ numeri plani. Q. E. D.

PROP. XXI. THEOR.

A 24, C 72, D 216, B 648
E 1, F 3, G 9
H 1, K 1, N 24, L 3, M 3, O 72

Si inter duos numeros A, B *duo medii proportionales* C, D *cadant: numeri* A, B *similes solidi erunt.*

λ. 35. 7. Sume λ tres minimos E, F, G, eandem cum A, C, D rationem habentes, & ergo deinceps
μ. 3. 8. proportionales: & erunt E, G primi μ inter se,
ν. 20. 8. & similes plani ν numeri. Sint H, K latera ipsius E, & L, M latera ipsius G. Erunt ergo
ξ. cor. 18. 8. E, F, G proportionales in ratione ξ H : L vel K : M. Iam quum E, F, G eandem cum A,
ο. 14. 7. C, D rationem habeant: erit E : G = ο A : D.
π. 23. 7. Et quia E, G primi sunt, ideoque π minimi:
ρ. 21. 7. ρ metientur ipsos A, D aequaliter. Metiatur
σ. 9. ax. 7. E ipsum A per N: ergo EN = σ A. Sed E = HK: ergo A est solidus τ numerus, cuius
τ. 17. def. 7. latera H, K, N. Rursus quia E, F, G minimi sunt eandem rationem habentium, quam C, D, B: E ipsum C aequaliter metitur, ac G ipsum B. Metiatur E ipsum C per O. Ergo GO = B.

Sed

Sed G = LM. Quare B est solidus, cuius latera L, M, O. Denique quia A = EN, & C = EO : erit [v] N : O = A : C = E : F = H : L = K : M. Quare similes [φ] solidi sunt A, B numeri. Q. E. D. v. 17. 7. φ. 21. def. 7.

PROP. XXII. THEOR.

A 4, B 6, C 9

Si tres numeri A, B, C *deinceps proportionales fuerint primus* A *autem sit quadratus: & tertius* C *quadratus erit.*

Nam A, C similes [χ] sunt plani numeri. Ergo quum [ψ] latera ipsius A aequalia sint: [ω] erunt & latera ipsius B aequalia, ideoque [ψ] erit & C quadratus. Q. E. D. χ. 20. 8. ψ. 18. def. 7. ω. 21. def. 7.

PROP. XXIII. THEOR.

A 8, B 12, C 18, D 27

Si quatuor numeri A, B, C, D *deinceps proportionales fuerint, primus autem* A *sit cubus: & quartus* D *cubus erit.*

Nam A, D sunt [α] similes solidi. Ergo & D cubus est. Q. E. D. α. 21. 8.

PROP. XXIV. THEOR.

A 4, B 9
C 16, D 36

Si duo numeri A, B *inter se rationem habeant, quam numerus quadratus* C *ad quadratum numerum* D, *primus autem* A *sit quadratus: & secundus* B *quadratus erit.*

Quia enim inter similes planos C, D vnus medius proportionalis [β] cadit; & A : B = C : D : β. 18. 8.

cadet

γ. 8. 8. cadet quoque inter A, B vnus γ medius
δ. 22. 8. proportionalis. Ergo & B δ est quadratus. Q.E.D.

* *Schol.* 1. Ergo ratio numeri quadrati ad non quadratum nequit exhiberi per duos quadratos numeros.

* *Schol.* 2. Et si A numerus ad numerum B est vt quadratus ad quadratum: numeri A, B similes plani sunt. (per 20. 8. & dem. huius). Et hinc dissimiles plani non sunt vt quadratus ad quadratum.

PROP. XXV. THEOR.

A 64, B 216
C 8, D 27

Si duo numeri A, B *inter se rationem habeant, quam numerus cubus* C *ad cubum numerum* D, *primus autem* A *sit cubus: & secundus* B *cubus erit.*

Quia enim C, D similes solidi sunt: duo
ε. 19. 8. medii proportionales inter ε eos cadunt. Er-
ζ. 8. 8. go & inter A, B duo medii proportionales ζ
η. 23. 8. cadunt. Quare quum A cubus sit: etiam η cubus erit. Q.E.D.

* Ergo ratio numeri cubi ad non cubum reperiri nequit in duobus numeris cubis.

PROP. XXVI. THEOR.

A 6, C 12, B 24
D 1, E 2, F 4

Similes plani numeri A, B *inter se rationem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum.*

Medius proportionalis, inter A, B cadens θ,
θ. 18. 8. sit C, & sumantur κ minimi D, E, F eandem
κ. 2. 8. quam

quam A, C, B rationem habentium. Ergo $^{\lambda}$ D, F quadrati erunt. Et quia D : F = $^{\mu}$ A : B : habebit A ad B rationem quadrati ad quadratum. Q. E. D.

λ. 1. cor. 2. 8.
μ. 14. 7.

PROP. XXVII. THEOR.

A 16,	C 24,	D 36,	B 54
E 8,	F 12,	G 18,	H 27

Similes solidi numeri A, B *inter se rationem habent, quam numerus cubus ad cubum numerum.*

Nam medii duo proportionales inter A, B cadentes $^{\nu}$ sint C, D, & sint E, F, G, H totidem $^{\xi}$ minimi & in eadem ratione ac A, C, D, B. Ergo ^{o} eorum extremi E, H cubi erunt. Hinc, quia A : B = $^{\pi}$ E : H, patet, esse A ad B, vt cubus ad cubum. Q. E. D.

ν. 19. 8.
ξ. 2. 8.
o. 1. cor. 2. 8.
π. 14. 7.

EVCLIDIS ELEMENTORVM
LIBER IX.

PROP. I. THEOR.

A 6, B 54
AB 324
A^2 36

Si duo similes plani numeri A, B *sese multiplicantes, aliquem fecerint: factus* AB *quadratus erit.*

Nam numerus A, se ipsum multiplicans,
α. 17. 7. faciat quadratum A^2. Ergo [α] $A : B = A^2 : AB$. Et quia inter A & B vnus medius pro-
β. 18. 8. portionalis [β] cadit: cadet etiam [γ] inter A^2 &
γ. 8. 8. AB vnus medius proportionalis. Ergo AB
δ. 22. 8. est [δ] quadratus. Q. E. D.

PROP. II. THEOR.

A 3, B 12
AB 36
A^2 9

Si duo numeri, sese multiplicantes A, B, *quadratum numerum* AB *efficiant: similes plani erunt.*

Sumatur numerus quadratus A^2. Ergo
ε. 17. 7. $A : B =$ [ε] $A^2 : AB$. Et quia quadrati A^2, AB similes plani numeri sunt, & ergo inter
ζ. 18. 8. eos vnus medius proportionalis [ζ] cadit: cadet
η. 8. 8. quoque inter A & B vnus [η] medius propor-
θ. 20. 8. tionalis. Ergo A & B similes plani sunt [θ] numeri. Q. E. D.

PROP.

PROP. III. THEOR.

A^3 8 A^6 64
A^2 4
A 2
1

Si cubus numerus A^3 se ipsum multiplicans faciat aliquem A^6: factus A^6 cubus erit.

Sumatur enim cubi A^3 latus A, & huius quadratum $A^2 =$ ι AA. Ergo $A^3 =$ κ A^2A. Quare λ 1 : A = A : A^2, & 1 : A = A^2 : A^3. Ergo inter 1 & A^3 duo medii proportionales cadunt. Quia vero λ 1 : $A^3 = A^3$: A^6, totidem etiam μ inter A^3 & A^6 cadunt. Ergo A^6 cubus ν est. Q.E.D.

ι. 18. def. 7
κ. 18. & 19. def. 7.
λ. cor. 17. 7.
μ. 8. 8.
ν. 23. 8.

PROP. IV. THEOR.

A 8, B 27
A^2 64 AB 216

Si numerus cubus A, cubum numerum B multiplicans, faciat aliquem: factus AB cubus erit.

Sumatur numerus A^2, qui etiam ο cubus erit. Et quia A : B = π A^2 : AB : cubus erit ρ ipse AB. Q. E. D.

ο. 3. 9.
π. 18. 7.
ρ. 25. 8.

PROP. V. THEOR.

A 8, B 27
A^2 64, AB 216

Si cubus numerus A, numerum aliquem B multiplicans, faciat cubum AB: & multiplicatus B cubus erit.

Sumatur numerus A^2, qui cubus σ erit. Et quia A : B = τ A^2 : AB : erit υ B cubus. Q. E. D.

σ. 3. 9.
τ. 18. 7.
υ. 25. 8.

PROP. VI. THEOR.

A 8, A^2 64, A^3 512

Si numerus A, se ipsum multiplicans, cubum A^2 faciat: & ipse A cubus erit.

φ. 17. 7. Sumto enim cubo numero A^3, quia
χ. 25. 8. $A^3 : A^2 = ^{\varphi} A^2 : A$: erit A $^{\chi}$ cubus. Q. E. D.

PROP. VII. THEOR.

A 6, B 7
AB 42
C 3, D 2

Si compositus numerus A, numerum aliquem B multiplicans, quempiam faciat: factus AB solidus erit.

ψ. 13 def. 7. Numerum enim A metiatur $^{\psi}$ numerus C
ω. 9. ax. 7. per D. Ergo $A = ^{\omega} CD$. Ergo $AB = CDB$
α. 17. def. 7. solidus $^{\alpha}$ est. Q. E. D.

PROP. VIII. THEOR.

∺ 1. A 3. B 9. C 27. D 81. E 243. F 729

Si ab unitate quotcunque numeri A, B, C, D, E, F deinceps proportionales fuerint: tertius quidem ab unitate B quadratus est, & unum intermittentes omnes D, F; quartus autem C est cubus, & duos intermittentes omnes F; septimus vero F cubus simul & quadratus, & quinque intermittentes omnes.

1. Quia enim $1 : A = A : B$: vnitas ipsum
β. 20. def. A aequaliter metitur $^{\beta}$ ac A ipsum B. Ergo
7. A per se ipsum metitur $^{\gamma}$ numerum B, & hinc
γ. 6. ax. 7. $B = ^{\delta} A^2$ quadratus est. Et quoniam ∺ B,
δ. 9. ax. 7. C, D: erit $^{\epsilon}$ & D quadratus. Eadem ratione
ε. 22. 8. & F quadratus erit, & vnum intermittentes omnes quadrati erunt. Q. E. D.

2. Quia

2. Quia est 1 : A = B : C : metietur B ipsum C per A, & ergo C = [δ] AB = A^3 cubus erit. Et quum sint ∺ C, D, E, F : erit [ζ] & F cubus. Et similiter omnes duos intermittentes cubi erunt. Q. E. D. δ. 9. ax. 7. ζ. 23. 8.

3. Et quia F etiam ostensus est quadratus: septimus F & quadratus & cubus simul est; idemque pariter demonstratur de omni quinque intermittente. Q. E. D.

PROP. IX. THEOR.

∺ 1, A 4, B 16, C 64, D 256, E 1024, F 4096

∺ 1, A 8, B 64, C 512, D 4096, E 32768, F 262144

Si ab vnitate quotcunque numeri A, B, C, D, E, F *deinceps proportionales fuerint, qui vero post vnitatem* A *sit quadratus; & reliqui omnes quadrati erunt: si qui post vnitatem* A *sit cubus; & reliqui omnes cubi erunt.*

1. Sit enim A quadratus. Iam tertius B, & vnum intermittentes omnes D, F, quadrati [η] sunt. Sed quia sunt ∺ 1, A, B, C, & A quadratus est: erit [ϑ] C quadratus, hinc & E &c. Omnes ergo quadrati sunt. Q. E. D. η. 8. 9. ϑ. 22. 8.

2. Sit A cubus. Iam quartus C, & omnes F, qui duos intermittunt, [η] cubi sunt. Et quia 1 : A = A : B; & ergo B = [ι] A^2: erit & [κ] B cubus; quare & E cubus [λ] erit. Et ob ∺ A, B, C, D, erit & [λ] D cubus. Et similiter reliqui omnes cubi sunt. Q. E. D. ι. 20. def. 7. & 9. ax. 7. κ. 3. 9. λ. 23. 8.

PROP. X. THEOR.

1, A 2, B 4, C 8, D 16, D 32, F 64

Si ab vnitate quotcunque numeri A, B, C, D, E, F *deinceps proportionales fuerint, qui vero post vnitatem* A *non sit quadratus; neque alius vllus quadratus erit, praeter tertium ab vnitate* B, *& vnum intermittentes omnes* D, F: *si, qui post vnitatem*, A *non sit cubus; neque alius vllus cubus erit, praeter quartum ab vnitate* C, *& duos intermittentes omnes* F.

1. Non sit A quadratus, & tamen C quadratus sit, si fieri potest. Ergo quia & B quadratus μ est: A ad B eam rationem habet, quam quadratus B ad quadratum C, & hinc A quadratus ν erit; *contra hypothesin.* Similiter ostendemus, nullum alium quadratum esse praeter B, D, F &c. Q. E. D.

μ. 8. 9.
ν. 24. 8.

2. Si A cubus non sit, & tamen D cubus esset: quoniam C cubus μ est; haberet & B ad C rationem, quam cubus C ad cubum D, & ergo ipse B cubus ο esset. Hinc quia, ob $1 : A = A : B$, est $B = ^{\pi} A^2$, esset & A cubus ρ; *contra hyp.* Similiter ostendemus, nec vllum alium cubum esse praeter C & F &c. Q. E. D.

ο. 25. 8.
π. 20. def. & 9. ax. 7.
ρ. 6. 9.

PROP. XI. THEOR.

∺ 1, A 3, B 9, C 27, D 81, E 243

Si ab vnitate quotcunque numeri A, B, C, D, E *deinceps proportionales fuerint: minor* A *maiorem* D *metitur per aliquem* C *eorum, qui sunt in numeris proportionalibus.*

Quia

Quia enim est $1 : A = C : D$: aeque me-
titur C ipsum D [σ] ac 1 ipsum A. Ergo & A σ.20.def.7.
ipsum D aeque [τ] metitur ac 1 ipsum C, id τ.15.7.
est [υ] A metitur D per C. υ.9.ax.7.

* Pariter, si sumantur B & E, demonstratur, B metiri ipsum E per aliquem C inter propor- φ.14.7.
tionales: quia [φ] $1 : B = C : E$. Q.E.D.

* *Cor.* In serie numerorum ab vnitate deinceps proportionalium secundus A quemuis D metitur per proxime praecedentem C.

* *Schol.* 1. Et hinc secundus A, quemuis C multiplicans, facit proxime sequentem D.

* *Schol.* 2. Si numerus, qui metitur aliquem ex proportionalibus, non sit vnus proportionalium: neque is, per quem metitur, vnus ex proportionalibus erit [χ]. χ.2.cor, 16.7

PROP. XII. THEOR.

÷ 1, A 4, B 16, C 64, D 256
E 2, H 8, G 32, F 128

Si ab vnitate quotlibet numeri* A, B, C, D *deinceps proportionales fuerint: quicunque primorum numerum* E *metiuntur vltimum* D, *iidem & eum* A, *qui vnitati proximus est, metientur.

Si negas, E metiri ipsum A: erunt [ψ] E & A ψ.31.7.
primi inter se. Metiatur autem E ipsum D
per F: & erit $EF = $ [ω] $D = $ [ω] AC. Quare [α] ω.9.ax.7.
$A : E = $ [β] $F : C$. Sunt autem A, E primi α.1.sch.11.9.
inter se, & [γ] minimi: hinc E metitur [δ] etiam β.19.7.
C. Metiatur per G. Ergo $EG = $ [ω] $C = $ [ω] γ.23.7.
AB. Quare $A : E = $ [β] $G : B$. Hinc E meti- δ.cor.21.7.
tur [δ] ipsum B. Metiatur eum per H. Ergo
$EH = $ [ω] $B = $ [ω] A^2. Hinc $A : E = $ [β] $H : A$. Ergo
E metietur quoque [δ] ipsum A. Q.E.D.

* *Schol.* 1. Numerus primus, vltimum metiens, metitur omnes ultimum praecedentes, per cor. 11.9. & 11. ax. 7.

* *Schol.* 2. Si quis numerus, proximum vnitati non metiens, vltimum metiatur, numerus erit compositus. Si enim primus esset, metiretur proximum vnitati.

* *Schol.* 3. Si proximus vnitati sit numerus primus: nullus alius numerus primus vltimum metietur. Si enim alius metiretur, vnitati proximum quoque metiretur, qui ergo primus non foret.

PROP. XIII. THEOR.

÷÷ 1, A 5, B 25, C 125, D 625
E... H... G... F...

Si ab vnitate quotcunque numeri A, B, C, D *deinceps proportionales fuerint, qui vero post vnitatem* A *primus sit; maximum* D *nullus alius metietur, praeter eos* A, B, C, *qui sunt in numeris proportionalibus.*

Si enim fieri potest: metiatur vltimum D aliquis numerus E, qui non idem sit cum aliquo ipsorum A, B, C. Ergo quia E numerus primus esse ζ nequit: compositus erit.
ζ. 3. schol. 12. 9.
Quare ipsum E metietur η aliquis primus, qui nullus erit praeter A. Si quis enim alius metiretur ipsum E: idem θ quoque ipsum D metiretur; quod fieri nequit ζ. Ergo A metietur E. Iam metiatur E ipsum D per F: & F nullus ex ipsis A, B, C esse ι poterit. Sed quia F metietur κ D; eodem modo, quo ante, demonstrabitur, F compositum esse, quem A metiatur. Et quia, ob EF = λ D = μ AC, est A : E = ν F : C; A vero ipsum E metitur: F quo-

η. 33. 7.
θ. ax. 7.
ι. 2. sch. 11. 9.
κ. 2 cor. 16. 7.
λ. 9. ax. 7.
μ. 1. schol. 11. 9.
ν. 19. 7.

F quoque ipſum C ξ metietur. Metiatur per G, qui nullus ex ipſis A, B eſſe ι poterit. Et quia, ob FG = λ C = μ AB, eſt A : F = ν G : B; A vero ipſum F metitur: metietur ξ & G ξ. 20.def.7.
ipſum B. Metiatur per H. Quum vero G nullus ſit ex proportionalibus : neque H idem ι erit, qui A. Sed quum, ob GH = λ B = μ A², ſit A : G = ν H : A, eodem vero, quo ante modo, demonſtratur, A ipſum G metiri, quia G ipſum C* metitur: patet, H metiri ipſum ν A, & ergo A non eſſe ο primum; *contra* ο. 11.def.7.
hypotheſin.

* *Schol.* Quia ſimiliter demonſtratur, quod ipſum C nullus numerus metiatur, praeter A vel B: patet, quod numeros ab vnitate deinceps proportionales, ſi proximus vnitati primus ſit, nullus numerus metiatur, niſi qui inter ipſos proportionales habetur.

PROP. XIV. THEOR.

A 30
B 2, C 3, D 5
E.. F..

Si minimum numerum A *primi numeri* B, C, D *metiantur: nullus alius numerus primus metietur ipſum* A *praeter eos, qui a principio metiebantur*, B, C, D.

Si fieri poteſt, metiatur ipſum A alius E; per F. Ergo E & F facient π numerum A. π. 9. ax. 7.
Quare quum B, C, & D metiantur ipſum A: metientur quoque vnum ρ ipſorum E, F. Non ρ. 32. 7.
autem metiri poſſunt σ primum E: ergo alterum F metientur. σ. 11.def.7.
Eſt autem F < A. Quare A non erit minimus, quem B, C, D metiantur; *contra hypotheſin.*

PROP. XV. THEOR.

∺ A 9, B 12, C 16
D 3, E 4

Si tres numeri A, B, C, *deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium: duo quilibet compositi ad reliquum primi erunt* (A + B ad C, B + C ad A, & A + C ad B).

ν. 35. 7. Sumantur duo numeri ν D, E, minimi eandem cum A, B, C rationem habentium.
φ. 2. 8. Ergo φ $A = D^2$, $B = DE$, & $C = E^2$. Et
χ. 24. 7. quia D, E primi χ inter se sunt: erit & D +
ψ. 30. 7. E ad vtrumque ψ ipsorum D, E primus. Ergo quia numeri D + E & D ad ipsum E pri-
ω. 26. 7. mi sunt, erit ω & $(D + E) \times D$ ad eundem
α. 2. ax. 7. E primus. Sed $(D + E) \times D =$ α $D^2 + ED$. Ergo $D^2 + ED$ primus est ad E, hinc
β. 27. 7. quoque β ad E^2. Patet igitur, A + B esse
γ. 1. ax. 7. primum γ ad C. Similiter ostenditur, esse B + C primum ad A. Denique quia D +
δ. 26. 27. 7. E, D, & E primi sunt inter se: erit δ $(D + E)^2$ ad DE primus. Sed α $(D + E)^2 = D^2 + 2\,DE + E^2$. Ergo $D^2 + 2\,DE + E^2$ primus est γ ad ipsum DE, & hinc ψ etiam $D^2 + DE + E^2$ ad ipsum DE, & pari ratione ψ $D^2 + E^2$ ad eundem DE primus erit. Quare & γ A + C ad ipsum B primus est. Q. E. D.

PROP. XVI. THEOR.

A 5, B 8, C---

Si duo numeri A, B *primi inter se fuerint: non erit vt primus* A *ad secundum* B, *ita secundus* B *ad alium vllum.*

Si

Si enim fieri poteſt: ſit C numerus talis, vt ſit A : B = B : C. Quia autem A & B minimi [ε] ſunt eandem cum ipſis rationem haben- ε. 23. 7.
tium: A metietur [ζ] ipſum B. Hinc quum A ζ. 21. 7.
quoque ſe ipſum metiatur: non erunt A, B primi inter ſe; *contra hypotheſin.*

PROP. XVII. THEOR.

A 8, B 12, C 18, D 27, E---

Si fuerint quotcunque numeri A, B, C, D *deinceps proportionales; extremi autem ipſorum,* A, D, *primi inter ſe ſint: non erit vt primus* A *ad ſecundum* B, *ita vltimus* D *ad alium vllum.*

Si negas: ſit A : B = D : E. Quia ergo A : D = [η] B : E, & A, D minimi [θ]; A η. 13. 7. θ. 23. 7.
ipſum B [ι] metietur. Ergo, quum ſit A : B ι. 21. 7.
= B : C = C : D; metietur B [κ] ipſum C, & κ. 20. def. 7.
ergo ipſum [λ] D. Quare & A ipſum D λ. 11. ax. 7.
metietur, & hinc A, D primi non erunt; *contra hypotheſin.*

PROP. XVIII. PROBL.

Duobus numeris A, B *datis, conſiderare, an tertius ipſis proportionalis inueniri poſſit.*

1. *Caſ.* Si A, B primi inter ſe ſunt: oſtenſum iam [μ] eſt, tertium proportionalem inue- μ. 16. 9.
niri non poſſe.

A 4, B 6, C 9
B^2 36

2. *Caſ.* Si A, B non ſunt primi, & A metitur B^2: metiatur per C, qui erit tertius proportionalis. Quia enim AC = [ν] ν. 9. ax. 7.
B^2: erit A : B = [ξ] B : C. ξ. 20. 7.

3. *Caſ.*

A 6, B 4, C --
B² 16

3. *Caſ.* Si vero A, B primi non ſunt, nec A ipſum B² metitur: nequit tertius proportionalis inueniri. Si negas: ſit inuen-
ξ. 20. 7. tus C. Quia ergo AC = ξ B²; A meti-
ο. 23. def. 7. tur ο B²; *contra hypotheſin.*

PROP. XIX. PROBL.

Tribus numeris datis A, B, C, *conſiderare, an quartus ipſis proportionalis inueniri poſſit.*

A 3, B 7, C 6, D 14
BC 42

1. *Caſ.* Si A metitur BC: poteſt inueniri quartus proportionalis D, is nempe, per quem A ipſum BC
π. 9. ax. 7. metitur. Nam quia AD = π BC: erit A:
ρ. 19. 7. B = ρ C: D.

A 3, B 5, C 7, D --
BC 35

2. *Caſ.* Si A non metitur BC: non poteſt quartus proportionalis inueniri. Si quis enim eſſet D: ob A: B = C: D, foret AD = ρ BC, & igitur
σ. 23. def. 7. A metiretur σ BC; *contra hypotheſin.*

PROP. XX. THEOR.

Primi numeri plures ſunt omni propoſita multitudine primorum numerorum A, B, C.

τ. 38. 7. Sumatur enim τ minimus

A 2, B 3, C 5
D 30

D, quem ipſi A, B, C metiantur, & apponatur vnitas. Iam ſi D + 1 primus eſt: patet propoſitio.

A 5, B 3, C 7
υ. 33. 7. E 53, D 105

Si vero D + 1 primus non eſt: metietur eum υ primus aliquis E, qui nulli ipſorum A, B, C

B, C idem esse potest. Si enim alicui eorum idem esset: metiretur E quoque ipsum D, ergo & φ vnitatem. Q. E. A. Ergo nouus numerus primus E inuentus est. Q.E.D. φ. 12. ax. 7.

PROP. XXI. THEOR.

A 4, B 6, C 8, A + B + C 18

Si pares numeri quotcunque A, B, C *componantur: totus* A + B + C *par erit.*

Quia enim vnusquisque ipsorum A, B, C partem χ dimidiam habet: totus etiam A + B + C partem dimidiam ψ habebit, & igitur par erit. Q.E.D. χ. 6. def. 7. ψ. 2. ax. 7.

PROP. XXII. THEOR.

A 5, B 3, C 7, D 9, A + B + C + D 24

Si impares numeri A, B, C, D *quotcunque componantur; multitudo autem ipsorum sit par: totus* A + B + C + D *par erit.*

Quia enim A — 1, B — 1, C — 1, D — 1 sunt numeri[a] pares, & multitudo vnitatum detractarum etiam par est: erit summa numerorum A — 1, B — 1, C — 1, D — 1 & vnitatum residuarum, id est summa A + B + C + D, numerus[a] par. Q.E.D. a. 7. def. 7. a. 21. 9.

PROP. XXIII. THEOR.

A 11, B 5, C 3, A + B + C 19

Si impares numeri A, B, C *quotcunque componantur; & multitudo ipsorum sit impar: & totus* A + B + C *impar erit.*

Nam

A 11, B 5, C 3, A + B + C 19

Nam quia C — 1 par [β] est, & A + B itidem
β.7. def. 7. par [γ] est: erit & A + B + C — 1 numerus [δ]
γ. 22. 9. par. Ergo [β] patet, numerum A + B + C im-
δ. 21. 9. parem esse. Q. E. D.

PROP. XXIV. THEOR.

A 12
B 4
A — B 8

Si a pari numero A par auferatur B: & reliquus A—B par erit.

ε. 6. def. 7. Quum enim tam A, quam B habeat partem dimidiam [ε]: habebit etiam A — B partem dimidiam, & igitur [ε] par erit. Q. E. D.

PROP. XXV. THEOR.

A 12 C 4
B 5
A — B 7

Si a pari numero A impar B auferatur: reliquus A — B impar erit.

ζ. 7. def. 7.
η. 24. 9. Quum enim B [ζ] constet ex pari C & vnitate; A — C autem [η] par sit: erit A — C — 1, id est A — B, numerus [ζ] impar. Q. E. D.

PROP. XXVI. THEOR.

A . . . . C . . D . B

Si ab impari numero AB impar BC auferatur: reliquus AC par erit.

Ab vtroque auferatur vnitas BD. Ergo
θ. 7. def. 7. tam AD quam DC par [θ] erit; ergo & [ι] reli-
ι. 24. 7. quus AC. Q. E. D.

PROP. XXVII. THEOR.

A . D . . . . C . . B

Si ab impari numero AB par BC auferatur: reliquus AC impar erit.

Nam

Nam ablata vnitate AD, erit DB par *. Ergo κ. 7. def. 7
DB — BC = DC par quoque λ est, & proinde * λ. 24. 7.
AC = DC + 1, impar. Q. E. D.

PROP. XXVIII. THEOR.

A... B..
C.. .. ..

Si impar numerus A, *parem* B *multiplicans, faciat aliquem: factus* C *par erit.*

Nam quum C componatur μ ex tot numeris aequalibus ipsi B, quot in A sunt vnitates: patet, C componi ex numeris paribus, ergo ipsum parem ν esse. Q. E. D. μ. 15. def. 7. ν. 21. 9.

* *Schol.* Eadem ratione, si A & B pares sunt: factus AB par est.

PROP. XXIX. THEOR.

A... B.....
C..... ....

Si impar numerus A, *imparem numerum* B *multiplicans, faciat aliquem: factus* C *impar erit.*

Quia enim C componitur ξ ex tot numeris ipsi B aequalibus, quot A vnitates habet: patet, C componi ex multitudine impari numerorum imparium, ideoque imparem ο esse. Q. E. D. ξ. 15. def. 7. ο. 23. 9.

* *Schol.* 1. *Numerus* A, *numerum imparem* C *metiens, impar est, & per imparem* B *metitur.* Si enim negas: aut neuter ipsorum A, B impar esset, ideoque nec C = AB impar π esse posset; contra hypothesin: aut alteruter tantum ipsorum A, B esset impar, & neque sic C posset ρ impar esse; etiam contra hypothesin. Quare vterque A, B impar est. π. sch. 28. 9. ρ. 28. 9.

2. Paris numeri quadrati latus par est.

PROP.

PROP. XXX. THEOR.

A 3, B 12
C 4.

Si impar numerus A *parem numerum* B *metiatur: & dimidium eius metietur.*

Metiatur enim A ipsum B per C: dico, C non imparem esse; quia, C posito impari, etiam
ε. 29. 9. AC = B impar ε esset, contra hypothesin. Ergo C par erit; & A ipsum B pariter me-
τ. ax. 7. tietur, & ob id eius dimidium quoque τ metietur. Q. E. D.

* *Cor.* Impar numerus parem metitur per parem.

PROP. XXXI. THEOR.

A 3 B 5
2 B 10
C...

Si impar numerus A *ad aliquem numerum* B *sit primus: & ad ipsius duplum* 2 B *primus erit.*

Si negas, A & 2 B primos esse
υ. 12. def. 7. inter se: metiatur υ eos idem numerus C. Et
φ. sch. 29. 9. quia A impar est: C quoque impar φ erit.
χ. 6. def. 7. Sed quia C metitur ipsum 2 B, qui par χ est:
ψ. 30. 9. metietur C etiam ψ dimidium eius, nempe B. Ergo A & B non ψ erunt primi inter se; *contra hypothesin.*

PROP. XXXII. THEOR.

1, A 2, B 4, C 8, D 16

Numerorum B, C, D, *a binario* A *duplatorum, unusquisque pariter par est tantum.*

Nam quia ω singuli B, C, D e binario facti
ω. hyp. sunt: pares eos esse α constat. Et quum prae-
α. 6. def. 7.
β. 20. def. 7. terea β ∺ 1, A, B, C, D: binarius A singulos

B, C

B, C, D metitur γ per aliquem ipsorum A, B, C, D. Ergo singuli B, C, D pariter pares δ sunt. Denique quia A primus est, ideoque ipsos B, C, D nullus numerus ε metiri potest, qui non vnus ex ipsis A, B, C, D sit: singuli B, C, D pariter pares sunt tantum. Q. E. D.

γ. cor. 11. 9.
δ. 8. def. 7.
ε. sch. 13. 9.

PROP. XXXIII. THEOR.

A 10
$\frac{1}{2}$A 5

Si numerus A dimidium $\frac{1}{2}$ A habeat imparem: pariter impar est tantum.

Quia enim $\frac{1}{2}$ A metitur ipsum A per 2: patet, A esse ζ pariter imparem. Dico & tantum: quia si etiam A ponas pariter parem, metietur η eum aliquis par pariter, ideoque idem par eius dimidium $\frac{1}{2}$ A, qui impar est, metietur θ. Q. E. A ι.

ζ. 9. def. 7.
η. 8. def. 7.
θ. ax. 7.
ι. sch. 29. 9.

PROP. XXXIV. THEOR.

A 20
$\frac{1}{2}$A 10
$\frac{1}{4}$A 5

Si par numerus A neque sit a binario duplatus, neque dimidium $\frac{1}{2}$ A imparem habeat: pariter par est, & pariter impar.

Nam A pariter parem esse, κ manifestum est, quia $\frac{1}{2}$ A par est. Secundo, si $\frac{1}{2}$ A iterum bifariam diuiditur, & huius dimidium rursus bifariam, & sic porro, tandem proueniet numerus $\frac{1}{4}$ A impar, qui ipsum A per parem 4 metietur λ. Nam si secus esset: perueniretur tandem ad binarium; & A foret a binario duplatus. Quod est contra hypothesin. Ergo μ A est etiam pariter impar. Q. E. D.

κ. 8. def. 7.
λ. cor. 30. 9.
μ. 9. def. 7.

PROP. XXXV. THEOR.

A........
B....G........C
D..................
E.........L......K....H.......F

Si sint quotcunque numeri A, BC, D, EF *deinceps proportionales; auferantur autem a secundo* BC *& vltimo* EF *aequales primo* CG, FH: *erit vt secundi excessus* B G *ad primum* A, *ita vltimi excessus* EH *ad omnes ipsum antecedentes* A+BC+D.

Ponatur FK=BC, & FL=D. Hinc quia
v. 3. ax. 1. FH=CG, erit HK = v GB. Et quum ξ sit
ξ. 16. ax. 7. EF : D=D : BC=BC : A : erit EF : FL=
o. sch. 13. 7. FL : FK=FK : FH, ideoque diuidendo o EL :
LF=LK : FK=KH : FH, & ergo BG : A=
π. 12. 7. KH : FH=π EH : LF+FK+FH=EH :
A+BC+D. Q. E. D.

PROP. XXXVI. THEOR.

∺ 1, A 2, B 4, C 8, D 16
E(=1+A+B+C+D) 31, ED 496
∺ E 31, F 62, G 124, H 248
K--- L----

Si ab vnitate quotcunque numeri A, B, C, D, *deinceps proportionales, exponantur in dupla analogia, quoad totus compositus* E *primus fiat; & totus* E, *in vltimum* D *multiplicatus, faciat aliquem: factus* ED *perfectus erit.*

Quot enim sunt A, B, C, D, tot sumantur ab E deinceps proportionales & in eadem ra-
ρ. 14. 7. tione dupla, E, F, G, H. Ergo ρ A : D =
E : H.

E : H. Hinc ob ED $=^{\sigma}$ AH $=$ 2 H: erunt σ. 19. 7.
adhuc $\div$ E, F, G, H, ED; & ergo F $-$ E :
E $=^{\tau}$ ED $-$ E : E $+$ F $+$ G $+$ H. Est τ. 35. 9.
autem $^{\upsilon}$ F $-$ E $=$ 2 E $-$ E $=$ E. Quare υ. constr.
ED $-$ E $=$ E $+$ F $+$ G $+$ H, & addito E $=$ 1 $+$ A $+$ B $+$ C $+$ D, erit ED $=$ 1 $+$ A $+$ B $+$ C $+$ D $+$ E $+$ F $+$ G $+$ H, qui singuli numeri partes sunt ipsius ED, quia ipsum ED tam numerus $^{\varphi}$ D, ideoque $^{\chi}$ A, B, C, quam $^{\psi}$ H, ideoque E, F, G $^{\omega}$ metiuntur. Denique dico, nullum alium, praeter eos, metiri ipsum ED. Pone enim alium K, qui ipsum ED metiatur per L. Quia igitur ob KL $=^{\alpha}$ ED est E : L $=$ K : D; K autem ipsum D non $^{\beta}$ metitur: neque E ipsum L $^{\gamma}$ metietur. Erunt itaque $^{\delta}$ E, L primi inter se, ideoque $^{\varepsilon}$ minimi eandem rationem habentium. Quare, quum fuerit E : L $=$ K : D, L metietur $^{\zeta}$ ipsum D, & proinde erit aliquis $^{\beta}$ ipsorum A, B, C. Sit L $=$ B. Sed quia E, F, G sunt in eadem ratione, in qua B, C, D: erit ex aequo $^{\varepsilon}$ B : D $=$ E : G, & hinc BG $=^{\sigma}$ ED $=^{\psi}$ KL. Quare quum sit B : L $=^{\sigma}$ K : G, & B $=$ L: erit & $^{\gamma}$ K $=$ G; contra hypothesin. Ergo nullus alius numerus praeter A, B, C, D, E, F, G & H ipsius ED pars $^{\eta}$ est. Quare ED $=$ A $+$ B $+$ C $+$ D $+$ E $+$ F $+$ G $+$ 1 perfectus $^{\vartheta}$ numerus est. Q. E. D.

φ. 8. ax. 7.
χ. 11. 9. & 11. ax. 7.
ψ. dem.
ω. constr. & 11. ax. 7.
α. 9. ax. 7.
β. 13. 9.
γ. 20. def. 7.
δ. 31. 7.
ε. 23. 7.
ζ. cor. 21. 7.
η. 3. def. 7.
θ. 22. def. 7.

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER X.

DEFINITIONES.

1. *Commensurabiles magnitudines* dicuntur, quas eadem mensura metitur.

2. *Incommensurabiles* autem, quarum nullam esse communem mensuram contingit.

3. *Rectae lineae potentia commensurabiles* sunt, quum ea, quae ab ipsis fiunt, quadrata idem spatium metitur;

4. *Incommensurabiles* autem, quum quadrata, quae ab ipsis fiunt, nullum commune spatium metiri contingit.

5. His positis, ostenditur, cuicunque rectae lineae propositae rectas lineas, multitudine infinitas, & commensurabiles esse & incommensurabiles, alias quidem longitudine & potentia, alias vero potentia solum. Vocetur autem proposita *recta linea rationalis;*

6. Et huic commensurabiles, siue longitudine & potentia, siue potentia solum, *rationales;*

7. Incommensurabiles vero *irrationales* vocentur.

8. Et *quadratum,* quod a recta linea proposita fit, dicatur *rationale;*

9. Et huic commensurabilia quidem *rationalia;*

10. In-

10. Incommensurabilia vero dicantur *irrationalia.*

11. Et *lineae*, quae † incommensurabilia possunt, vocentur *irrationales;* si quidem ea quadrata sint, ipsorum latera; si vero alia quaepiam rectilinea, ipsae a quibus aequalia quadrata describuntur.

† Puta irrationalia.

* Scilicet recta posse spatium dicitur, si quadratum ab ea descriptum spatio illi aequale est.

* In locum terminorum hic definitorum sequentes notas breuitatis studio substituimus.

Σ est nota commensurabilium. Si quando scriptum fuerit AB Σ CD, leges: rectae AB, CD longitudine commensurabiles sunt. Et si inter plurium magnitudinum binas quasuis proximas hanc notam deprehenderis, cogitabis, eas omnes sibi inuicem commensurabiles esse. Sed, A non Σ B notat, spatia A, B incommensurabilia, vel rectas A, B longitudine incommensurabiles esse.

Є nota est rectarum linearum potentia solum commensurabilium, siue longitudine tantum incommensurabilium.

ӨЄ est nota rectarum potentia & longitudine incommensurabilium.

ῥ notat quamuis magnitudinem rationalem.

ἀλ quamuis irrationalem magnitudinem designat.

√ indicat rectam, quae spatium quoddam potest. E. gr. √ EF est recta quae spatium EF potest. √ (ABq — BCq) est recta, cuius quadrato recta AB plus potest quam recta BC.

** Postulatum.*

Postulatur, quamlibet magnitudinem toties posse multiplicari, donec quamlibet magnitudinem eiusdem generis excedat.

** Axiomata.*

1. Magnitudo, quotcunque magnitudines metiens, compositam quoque ex ipsis metitur.

2. Magnitudo, quamcunque magnitudinem metiens, metitur quoque omnem magnitudinem, quam illa metitur.

3. Magnitudo, metiens totam magnitudinem & ablatam, metitur & reliquam.

4. Omnis magnitudo se ipsam metitur.

5. Maior magnitudo minorem metiri nequit.

6. Si magnitudo toties magnitudinem continet, vel in ea continetur, quoties numerus vnitatem, vel vnitas in numero: magnitudinis ad magnitudinem eadem ratio est, quae numeri ad vnitatem, vel vnitatis ad numerum.

PROP. I. THEOR.

Duabus magnitudinibus AB, C *expositis, si a maiori* AB *auferatur maius quam dimidium, & ab eo, quod reliquum est, rursus auferatur maius quam dimidium, & hoc semper fiat: relinquetur tandem quaedam magnitudo, quae minori magnitudine exposita* C *minor erit.*

a. post. 10.

Sit enim a DE ipsius C multiplex ipsa AB maior, & sint eius partes DF = FG = GE = C. Auferatur ab AB dimidia maior BH, & a reliqua AH dimidia maior HK, & sic deinceps, donec in AB partes AK, KH, HB aeque multae sint partibus DF, FG, GE. Jam quia

DE

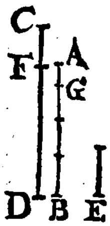
$DE > AB$, & ablata $EG < \frac{1}{2} DE$, & ablata $BH > \frac{1}{2} AB$: erit reliqua $DG > AH$. Eadem ratione erit $DF > AK$. Ergo $AK < C$. Q.E.D.

Aliter.

Fiant eadem, quae antea, & praeterea in recta quadam capiantur relictae AK aequales tot partes LM, MN, NO, quot sunt diuisiones in AB. Et quia $BH > \frac{1}{2} AB$: erit $BH > HA > KA$; ideoque $BH > ON$. Simili ratione est $HK > NM$. Ergo tota $AB > OL$. Hinc & $DE > AB > OL$. Est autem [β] $DE : OL$ β. 15. 5.
$= DF : LM$. Quare [γ] $DF > LM$, id est, C γ.sch. 16.5.
$> AK$. Q.E.D.

Idem demonstrabitur, etiamsi non maius dimidio, sed ipsum dimidium, continue auferatur.

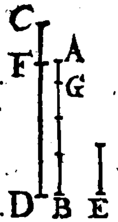
PROP. II. THEOR.



Si duabus magnitudinibus inaequalibus AB, CD *expositis, detracta semper minore de maiore, reliqua minime praecedentem metiatur: magnitudines* AB, CD *incommensurabiles erunt.*

Si negas: sit [δ] ipsarum AB, CD δ.1.def. 10.
communis mensura E. Iam quia AB diuidens ipsam CD relinquit aliquam CF se ipsa minorem, & haec CF diuidens alteram AB etiam se ipsa minorem AG, & hoc semper fieri ponitur: relinquetur tandem aliqua $AG < E$. Quum vero E metiatur ipsam AB, & AB ipsam DF: E metietur [ε] quoque ipsam DF. ε. 2. ax. 10.

 Sed



Sed & totam C D metiri ponitur: ergo ζ & reliquam F C metietur, & hinc quoque ε ipsam B G, quam C F metiebatur. Quare E, metiens A B, & B G, metietur quoque se ipsa minorem A G. Q. E. A η.

ζ. 3. ax. 10.
ε. 2. ax. 10.
η. 5. ax. 10.

PROP. III. PROBL.

Duabus magnitudinibus commensurabilibus A B, C D *datis, maximam earum communem mensuram inuenire.*

Cas. 1. Si minor AB maiorem CD metitur: liquet ϑ, ipsam AB esse maximam communem mensuram. Q. E. F.

ϑ. 4. & 5. ax. 10.

Cas. 2. Si minor A B maiorem C D non metitur: detrahatur, quoties fieri potest, A B de C D, & reliqua EC de AB, & sic deinceps, donec relinquatur aliqua A F, quae metiatur praecedentem E C; id quod tandem fiat ι necesse est.

ι. 2. 10.

Quum ergo AF ipsam E C, & haec ipsam BF metiatur: AF quoque κ ipsam BF, & ergo λ totam AB, ideoque κ ipsam ED metietur. Sed eadem AF metitur ipsam EC: ergo μ totam CD quoque metitur. Est ergo AF ipsarum AB, CD communis mensura. Dico autem & maximam esse. Si enim alia G > AF metiretur vtramque AB, CD: eadem G metiretur quoque ν ipsam E D, ergo & ν ipsam

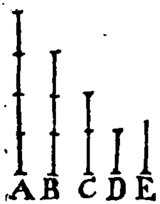
κ. 2. ax. 10.
λ. 4. & 1. ax. 10.
μ. 1. ax. 10.
ν. 3. ax. 10.

ipſam EC, & ν ipſam BF, & ν ipſam AF. Q. E. A ξ. Ergo AF eſt maxima vtriusque AB, CD menſura. Q. E. F. ξ. 5. ax. 10.

Cor. Ex hoc manifeſtum eſt, ſi magnitudo G duas magnitudines AB, CD metitur, & maximam ipſarum communem menſuram AF metiri.

PROP. IV. PROBL.

Tribus magnitudinibus commenſurabilibus A, B, C *datis, maximam ipſarum communem menſuram inuenire.*



Sumatur o duarum A, B maxima communis menſura D. o. 3. 10.

Caſ. 1. Si haec D metitur tertiam C: erit factum.

Nam D communem eſſe menſuram patet. Si vero maximam eſſe negas: ſit ea E > D. Ergo E metietur π ipſam D. Q. E. A ρ. Quare D maxima communis menſura erit. Q. E. F. π. cor. 3. 10. ρ. 5. ix. 10.

Caſ. 2. Si vero D tertiam C non metitur: ſumatur o ipſarum C, D maxima communis menſura E. Dico factum.

Primo enim ſumi poſſe communem menſuram ipſarum C, D, ſic liquet. Quia A, B, C commenſurabiles ponuntur: erit earum σ aliqua communis menſura. Haec, ipſas A, B metiens, metietur quoque π ipſam D, & ergo erit ipſarum C, D communis menſura σ. 1. def. 10.

 ſura

τ. 2. ax. 10. ſura. Sit ea igitur E: & τ patet, E eſſe communem trium A, B, C menſuram. Deinde ſi ponas aliam F > E pro communi earundem menſura: metietur π F ipſam D, & υ ipſam
π. cor. 3. 10. C, ideoque π ipſam E. Q. E. A ρ. Ergo E eſt maxima trium A, B, C menſura.
υ. hyp.

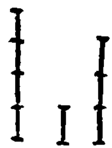
ABCDEF

Q. E. F.

Coroll. Hinc ſi magnitudo F tres metiatur magnitudines A, B, C: & ipſarum maximam communem menſuram E metietur.

PROP. V. THEOR.

Commenſurabiles magnitudines A, B *inter ſe rationem habent, quam numerus ad numerum.*



A C B

4. 1. 3.
D E

φ. 1. def. 10. Quoniam A ⊂ B: metietur φ eas aliqua C. Et quoties C metitur A, tot vnitates ſint in numero D, quoties autem C metitur B, tot ſint vnitates in E. Hinc
χ. 6. ax. 10. eſt χ A : C = D : 1, & C : B = 1 : E, & ergo ex aequo A : B = D : E. Q. E. D.

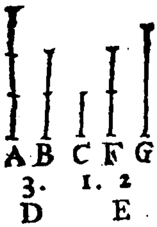
PROP. VI. THEOR.

Fig. prop. V. *Si duae magnitudines* A, B *inter ſe rationem habeant, quam numerus* D *ad numerum* E: *magnitudines* A, B *erunt commenſurabiles.*

Quot enim vnitates ſunt in D, in tot aequales partes diuidatur A, & vni harum ſit
ψ. 6. ax. 10. = C. Eſt ψ ergo 1 : D = C : A. Sed ponitur D : E = A : B. Quare ex aequo 1 : E = C : B.

$C : B$, ideoque C metitur B. Metiebatur autem A. Ergo $A \precsim B$. Q.E.D.

Aliter.



Quot vnitates sunt in D, in tot partes aequales diuide A, earumque vni sit $=$ C. Et quot vnitates sunt in E, ex tot magnitudinibus ipsi C aequalibus componatur F. Ergo est[ψ] $A : C = D : 1$, & $C : F = 1 : E$, & ergo ex aequo $A : F = D : E$. Sed erat $A : B = D : E$. Quare $A : B = A : F$. Ergo[α] $B = F$. Metitur autem C ipsam F, ergo & ipsam B. Sed eadem C metitur A. Ergo $A \precsim C$. Q.E.D. α. 9. 5.

Coroll. Ex hoc manifestum est, si sint duo numeri D, E, & recta linea A, fieri posse, vt numerus D ad E numerum ita rectam A ad rectam F. Si autem inter ipsas A, F media proportionalis G sumatur, fieri poterit, vt numerus D ad E numerum, ita figura, quae fit a recta A, ad figuram similem similiterque descriptam a recta G. Nam[α] figura quae fit ab A est ad similem similiterque descriptam a $G = A : F = D : E$. α. 2. cor. 20. 6.

PROP. VII. THEOR.

Incommensurabiles magnitudines A, B inter se rationem habent, quam numerus ad numerum.

Si enim A ad B haberet rationem numeri ad numerum; foret[β] $A \precsim B$; contra hyp. β. 6. 10.

PROP.

PROP. VIII. THEOR.*

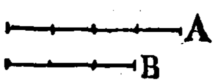
Si duae magnitudines A, B *inter se rationem non habeant, quam numerus ad numerum: incommensurabiles erunt.*

γ.5.10. Si enim esset $A \lesssim B$: foret [γ] A ad B, vt numerus ad numerum; contra hyp.

PROP. IX. THEOR.

Quae a rectis lineis A, B *longitudine commensurabilibus fiunt quadrata inter se rationem habent, quam quadratus numerus* C^2 *ad quadratum numerum* D^2. *Et quadrata* Aq, Bq, *inter se rationem habentia, quam quadratus numerus* C^2 *ad quadratum numerum* D^2, *&* *latera* A, B *habebunt longitudine commensurabilia. Quadrata vero, quae a longitudine incommensurabilibus rectis lineis* E, F *fiunt, inter se rationem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Et quadrata* Eq, Fq, *inter se rationem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque latera habebunt longitudine commensurabilia.*

δ.5.10.
ε.1.cor.20.6.
ζ.11.8.



C 4. C^2 16.
D 3. D^2 9.
CD 12.

1. Sit $A \lesssim B$, & [δ] $A : B = C : D$. Quia $Aq : Bq$ [ε] $= (A : B)^2$, & $C^2 : D^2 =$ [ζ] $(C : D)^2$: erit $Aq : Bq = C^2 : D^2$. Q. E. D.

Aliter.

Sit $A \lesssim B$, & $A : B = C : D$, & sumatur Rgl. sub A, B, nec non numerus CD. Ergo erit

erit $A:B = C:D =$ [n] $C^2:CD$. Sed [9] $A:B = Aq:A \times B$. Quare $Aq:A \times B = C^2:CD$. Rursus, quia $A:B = C:D =$ [t] $CD:D^2$, & $A:B =$ [9] $A \times B:Bq$: erit $A \times B:Bq = CD:D^2$. Ergo ex aequo $Aq:Bq = B^2:D^2$. Q.E.D. n. 17. 7. 9. 1. 6. t. 18. 7.

2. Sit $Aq:Bq = C^2:D^2$: dico fore $A \lesssim B$. Quia enim $Aq:Bq =$ [e] $(A:B)^2$, & $C^2:D^2 =$ [ζ] $(C:D)^2$: erit $A:B = C:D$, & ergo [x] $A \lesssim B$. Q.E.D. x. 6. 10.

Aliter.

Nam [n] C^2, CD, D^2 deinceps proportionales sunt in ratione $C:D$. Et [9] $\div Aq, A \times B, Bq$ in ratione $A:B$. Ergo $A:B = C^2:CD$. Ergo $A \lesssim B$. Q.E.D.

E ———

F ———

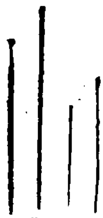
3. Non sit $E \lesssim F$. Iam si dicas, Eq ad Fq esse vt numerus quadratus ad quadratum: erit [λ] $E \lesssim F$; contra hyp. Quare non est Eq ad Fq vt numerus quadratus ad quadratum. Q.E.D. λ. per partem 2.

4. Non sit Eq ad Fq vt quadratus numerus ad quadratum. Iam si dicas $E \lesssim F$: erit Eq ad Fq vt quadratus numerus ad quadratum [μ]; contra hyp. Ergo E non $\lesssim$ F. Q.E.D. μ. part. 1.

Corollar. Et manifestum est, ex iam demonstratis, lineas, quae longitudine sunt commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles [v] esse; quae vero potentia commensurabiles, non semper & longitudine (quum earum quadrata possint esse inter se vt numeri non quadrati); & hinc, quae longitudine incommensurabiles sunt, non semper & potentia incommensurabiles esse; quae vero potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles esse. v. 6. 10. & 3. def. 10.

PROP.

PROP. X. THEOR.



A B C D

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, A: B = C: D; *prima vero* A *secundae* B *fuerit commensurabilis; &* *tertia* C *quartae* D *commensurabilis erit. Et si prima* A *secundae* B *fuerit incommensurabilis: &* *tertia* C *quartae* D *incommensurabilis erit.*

ξ. 5. 10. 1. Quia A $\precsim$ B: [ξ] A ad B, ergo etiam C ad D, rationem habet, quam numerus ad numerum. Ergo est [ο] C $\precsim$ D. Q. E. D.

ο. 6. 10.

π. 7. 10. 2. Quia A non $\precsim$ B: non habet A ad B rationem [*], quam numerus ad numerum. Sed A : B = C : D : ergo nec C ad D rationem habet numeri ad numerum. Ergo [ρ] C non $\precsim$ D. Q. E. D.

ρ. 8. 10.

* 1. *Schol.* Hinc si quatuor rectarum proportionalium prima A secundae B est potentia solum commensurabilis: tertia C quartae D etiam potentia solum commensurabilis erit. Quia enim Aq : Bq = Cq : Dq (22. 6.): erit Cq $\precsim$ Dq. Et quia non est C $\precsim$ D, patet esse C $\in$ D.

* 2. *Schol.* Et si rectarum proportionalium prima A $\ominus\in$ secundae B: erit & tertia C $\ominus\in$ quartae D.

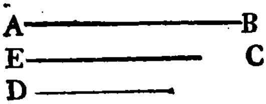
L E M M A.

Dissimiles plani numeri inter se rationem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Hoc manifestum est per 2. sch. 24. 8. & 26. 8.

PROP.

PROP. XI. PROBL.



Propositae rectae lineae A inuenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentia.

Exponantur σ duo numeri B, C, dissimi- σ. 21. def. 7.
les plani, & fiat τ B: C = Aq : Dq. Erit τ. cor. 6. 10.
D $\in$ A. Sumatur υ inter A, D media pro-
portionalis E. Dico fore E $\in\!\in$ A. υ. 13. 6.

Nam quia B ad C non φ habet ratio- φ. lem. hui.
nem numeri quadrati ad quadratum: nec
Aq ad Dq eam rationem habebit. Ergo χ χ. 9. 10.
D ipsi A longitudine incommensurabilis
erit. Quia tamen Aq ad Dq rationem nu-
meri ad numerum habet; erit ψ D ipsi ψ. 6. 10. & 3.
A potentia commensurabilis. Quare D def. 10.
$\in$ A.

Secundo quia A: D = ω Aq: Eq, & A ω. 2. cor.
non $\lesssim$ D: erit α quoque Aq non $\lesssim$ Eq, & 20. 6.
hinc β E $\in\!\in$ A. Q. E. F. α. 10. 10.
β. 4. def. 10.

* *Cor.* Patet etiam, si duarum rectarum quadrata habeant rationem numeri ad numerum, nec tamen quadrati numeri ad quadratum, rectas potentia solum commensurabiles esse.

* *Schol.* Simili ratione plures inueniri possunt, expositae rectae potentia solum commensurabiles.

PROP. XII. THEOR.

Quae A, B *eidem magnitudini* C *sunt commensurabiles; & inter se commensurabiles sunt.*

D 35. E 26.
F 52. G 61.
H 910. I 676. K 793.

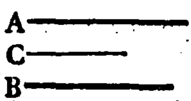
γ. 5. 10 Quia A ≾ C, & B ≾ C; [γ] sit A : C = D : E, & C : B = F : G. Sumantur ∺ H, I, K, minimi [δ] in rationibus D ad E & F ad G. Ergo, quia H : I = D : E, erit A : C = H : I. Et quia I : K = F : G, erit C : B = I : K. Ergo ex aequo A : B = H : K. Quare [ε] A ≾ B. Q. E. D.

δ. 4. 8.

ε. 6. 10

* *Schol.* Hinc omnis recta linea, rationali lineae commensurabilis, est quoque rationalis (6. def. 10). Et quae rationalia spatia possunt, rationales sunt. Et omnes rectae rationales inter se commensurabiles sunt, saltem potentia. Item omne spatium, rationali spatio commensurabile, est quoque rationale (9. def. 10.), & omnia spatia rationalia inter se commensurabilia sunt.

PROP. XIII. THEOR.



Si sint duae magnitudines A, B, *& altera quidem* A *eidem* C *sit commensurabilis, altera vero* B *incommensurabilis: magnitudines* A, B *inter se incommensurabiles erunt.*

ζ. 12. 10. Si enim esset B ≾ A: quia & C ≾ A, foret [ζ] B ≾ C; contra hypothesin.

* *Schol.* Magnitudines ergo, quarum altera est rationalis, altera irrationalis, sunt inter se incommensurabiles.

PROP.

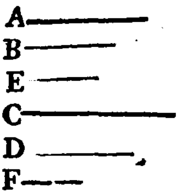
PROP. XIV. THEOR.

Si duae magnitudines A, B *commensurabiles sint; altera autem ipsarum* A *alicui magnitudini* C *sit incommensurabilis: & reliqua* B *eidem* C *incommensurabilis erit.*

Si enim esset B $\lesssim$ C: quia A $\lesssim$ B, foret [a] A $\lesssim$ C; contra hypothesin. a 12. 10.

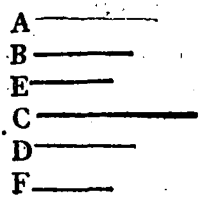
* *Schol.* Hinc si duae rectae sint longitudine commensurabiles, altera autem ipsarum alicui rectae sit potentia solum commensurabilis: & reliqua eidem potentia solum commensurabilis * erit.

PROP. XV. THEOR.



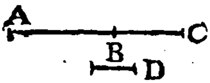
Si quatuor rectae lineae A, B, C, D *proportionales fuerint; prima vero* A *tanto plus possit quam secunda* B, *quantum est quadratum rectae lineae* E, *sibi commensurabilis longitudine; & tertia* C *tanto plus poterit quam quarta* D, *quantum est quadratum rectae lineae* F, *sibi longitudine commensurabilis. Quod si prima* A *tanto plus possit quam secunda* B, *quantum est quadratum rectae lineae* E *sibi incommensurabilis longitudine: & tertia* C *quam quarta* D *tanto plus poterit, quantum est quadratum rectae lineae* F, *sibi longitudine incommensurabilis.*

Quoniam A : B = C : D : erit Aq : Bq = [b] Cq : Dq. Sed Aq = [c] Bq + Eq, & Cq = [c] b 22. 6.
c hyp.
Q Dq



$Dq + Fq$: ergo $Bq + Eq : Bq = Dq + Fq : Dq$; &
κ. 17. 5. diuidendo $Eq : Bq$ [κ] $= Fq$:
θ. 22. 6. Dq. Quare $E : B =$ [θ] F:
λ. cor. 4. 5. D, & inuerse $B : E =$ [λ] D:
F. Sed $A : B = C : D$:
ergo ex aequo $A : E = C : F$. Hinc si sit $A \preceq E$,
μ. 10. 10. erit & [μ] $F \preceq C$. Si vero non sit $A \preceq E$, nec
erit [μ] $F \preceq C$. Q. E. D.

PROP. XVI. THEOR.



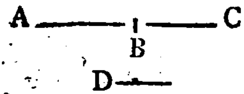
Si duae magnitudines commensurabiles AB, BC *componantur: & tota magnitudo* AC *vtrique ipsarum* AB, BC *commensurabilis erit. Quod si tota magnitudo* AC *vni ipsarum* AB, BC *sit commensurabilis: & quae a principio magnitudines* AB, BC *commensurabiles erunt.*

ν. 1. def. 10. 1. Quia $AB \preceq BC$: sit [ν] earum communis
ξ. 1. ax. 10. mensura D. Ergo [ξ] D metietur totam AC; & hinc [ν] $AB \preceq AC \preceq BC$. Q. E. D.

2. Quia $AC \preceq AB$: sit earum mensura D,
ο. 3. ax. 10. quae etiam [ο] metietur ipsam BC. Frgo $AB \preceq$ [ν] BC. Q. E. D.

* *Cor.* Et simul patet, totam magnitudinem AC, quae vni partium AB commensurabilis sit, reliquae BC etiam commensurabiles esse.

PROP. XVII. THEOR.



Si duae magnitudines incommensurabiles AB, BC *componantur: &*

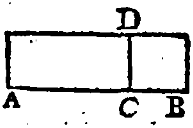
& tota magnitudo AC *vtrique ipsarum* AB, BC *incommensurabilis erit. Quod si tota magnitudo* AC *vni ipsarum* AB, BC *sit incommensurabilis: & quae a principio magnitudines* AB, BC *incommensurabiles erunt.*

1. Si enim esset AC $\lesssim$ AB: metiretur eas [π] aliqua D, quae & [ε] reliquam BC metiretur. Ergo esset AB $\lesssim$ [π] BC; contra hypothesin. Quare AC non $\lesssim$ AB. Et eadem ratione AC non $\lesssim$ BC. Q. E. D. π. 1. def. 10. ε. 3. ax. 10.

2. Si AC non $\lesssim$ AB; & tamen AB $\lesssim$ BC: metietur eas aliqua D. Ergo eadem D [σ] metietur totam AC, ideoque erit AC $\lesssim$ AB; contra hypothesin. Ergo AB non $\lesssim$ BC; quod etiam demonstrabitur similiter, si posita fuerit AC non $\lesssim$ BC. Q. E. D. σ. 1. ax. 10.

* *Coroll.* Et manifestum est [τ], magnitudinem AC, quae vni suarum partium AB incommensurabilis est, reliquae etiam BC incommensurabilem esse. τ. cor. 16. 10.

LEMMA.



Si ad aliquam rectam lineam AB *applicetur parallelogrammum* AD *deficiens figura quadrata* DB, *parallelogrammum* DA *applicatum aequale est ei rectangulo, quod sub partibus* AC, CB *rectae lineae* AB, *ex applicatione factis, continetur.*

Hoc per se patet, quia CD = CB.

PROP. XVIII. THEOR.

Si sint duae rectae lineae inaequales A, B C, *quartae autem parti quadrati, quod fit a minori* A, *aequale parallelogrammum ad maiorem* BC *applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commensurabiles* BD, DC *ipsam* BC *diuidat: maior* B C *tanto plus poterit quam minor* A, *quantum est quadratum rectae lineae sibi longitudine commensurabilis. Quod si maior* B C *tanto plus possit quam minor* A, *quantum est quadratum rectae lineae sibi longitudine commensurabilis; quartae autem parti quadrati, quod fit a minori* A, *aequale parallelogrammum ad maiorem* BC *applicetur, deficiens figura quadrata: in partes* BD, DC *longitudine commensurabiles ipsam* BC *diuidet.*

1. Bisecetur enim BC in E, & fiat EF = ED. Ergo FB = DC; & 4 BD × DC
v. 5. 2. + 4 EDq = ν 4 ECq. Sed φ 4 BD × DC
φ. hyp. & lemma. = Aq, & 4 EDq = χ FDq, & 4 ECq = χ BCq. Ergo Aq + FDq = BCq, & hinc BCq
χ. sch. 4. 2. — Aq = FDq. Et quum sit BD ψ Σ DC, ac
ψ. hyp.
ω. 16. 10. ideo ω BC Σ DC Σ DC + FB: patet esse BC α
α. cor. 16. 10. Σ FD. Q. E. D.

2. Sit BD × DC = ¼ Aq, & sit BCq — Aq = quadrato rectae ipsi BC commensurabilis longitudine. Dico BD Σ DC. Nam, vt antea, ostenditur, esse FD rectam, cuius quadrato BC plus potest quam A. Quia ergo BC Σ FD: erit α & BC Σ BF + DC. Sed

BF

BF + DC$^{\alpha}$ ⪯ DC. Ergo BC ⪯ $^{\beta}$ DC, ac ideo BD$^{\alpha}$ ⪯ DC. Q.E.D. β. 12. 10.

PROP. XIX. THEOR.

Si sint duae rectae lineae inaequales A, BC, *quartae autem parti quadrati, quod sit a minori* A, *aequale parallelogrammum ad maiorem* BC *applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes incommensurabiles longitudine* BD, DC *ipsam* BC *diuidat: maior* BC *tanto plus poterit quam* A *minor, quantum est quadratum rectae lineae sibi longitudine incommensurabilis. Quod si maior* BC *tanto plus possit quam minor* A, *quantum est quadratum rectae lineae sibi longitudine incommensurabilis; quartae autem parti quadrati, quod fit a minori* A, *aequale parallelogrammum ad maiorem* BC *applicetur, deficiens figura quadrata: in partes* BD, DC *longitudine incommensurabiles ipsam* BC *diuidet.* Fig. prop. XVIII.

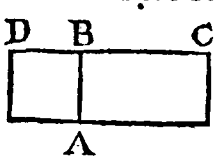
1. Iisdem enim, quae supra, constructis, similiter ostendemus, BCq — Aq = DFq. Iam quia BD $^{\gamma}$ non ⪯ DC: nec est $^{\delta}$ BC ⪯ DC. γ. hyp. Sed DC ⪯ FB + DC: ergo BC non ⪯ $^{\epsilon}$ FB + δ. 17. 10. DC, & hinc $^{\zeta}$ BC non ⪯ DF. Q. E. D. ε. 14. 10.

2. Quia $^{\gamma}$ BC non ⪯ DF: nec erit BC ⪯ $^{\zeta}$ DC ζ. cor. 17. 10. + BF. Sed DC + BF ⪯ DC. Ergo BC$^{\epsilon}$ non ⪯ DC, nec $^{\delta}$ BD ⪯ DC. Q.E.D.

Schol. Tria sunt genera linearum rectarum rationalium, inter se commensurabilium. Aut enim duarum rectarum rationalium, longitudine inter se commensurabilium, altera aequalis est expositae rationali; aut neutra expositae rationali aequalis eſt, longitudine tamen ei vtraque eſt commenſurabilis; aut denique vtraque expoſitae rationali commenſurabilis eſt ſolum potentia.

* Hi ſunt illi modi, quos innuunt ſequentia theoremata, vel ſupponunt. Notet hic etiam legens, ſi rectis lineis notam hanc ρ ⪯ apponamus, nos intelligere rectas rationales longitudine & potentia commenſurabiles; ſin ipſis adſcribamus notam ρ Є, intelligendas eſſe rationales, potentia ſolum commenſurabiles.

PROP. XX. THEOR.



Quod ſub rationalibus longitudine commenſurabilibus rectis lineis AB, BC *ſecundum aliquem praedictorum modorum, continetur rectangulum* AC, *rationale eſt.*

ν. 8. vel 9. def. 10. Deſcribatur ex AB quadratum AD, quod ν ρ erit. Atque, quum ſit ϑ AB ⪯ BC, & DB
ϑ. hyp. = AB: erit DB ⪯ BC. Hinc, quia BD: BC
ι. 1. 6. = ι AD: AC, eſt κ AD ⪯ AC, ideoque λ
κ. 10. 10. AC ρ. Q. E. D.
λ. 9. def. 10.

PROP. XXI. THEOR.

Fig. prop. praec. *Si rationale ad rationalem* AB *applicetur: latitudinem* BC *efficit rationalem, & ei* AB, *ad quam applicatum eſt, longitudine commenſurabilem.*

μ. 8. def. 10. Deſcribatur ex AB quadratum AD, quod μ
ν. 9. def. 10. rationale erit. Ergo AC ⪯ ν AD; hinc, quia
ξ. 1. 6. AC: AD = ξ BC : BD vel AB, erit & BC ο ⪯
ο. 10. 10. AB, ideoque BC π ρ. Q. E. D.
π. 6. def. 10.

* Schol.

* *Schol.* Hinc quod ſub rationali & irrationali continetur rectangulum, irrationale eſt.

PROP. XXII. THEOR.

Quod ſub rationalibus potentia ſolum com- Fig. prop. XX.
menſurabilibus rectis lineis AB, BC *continetur rectangulum* AC, *irrationale eſt; & recta linea, ipſum potens, eſt irrationalis; vocetur autem* media.

Deſcriptum enim ab AB quadratum AD rationale erit. Et quia AB = BD: erit BD ∈ BC. Hinc, quum ſit BD : BC = [ρ] AD : AC, ρ. 1. 6.
erit AD [σ] non ⊏ AC. Quare AC [τ] eſt αλ, & σ. 10. 10.
recta, quae ipſum AC poteſt, [υ] eſt αλ. Q. τ. 10. def. 10.
E. D. υ. 11. def. 10.

Schol. Media autem vocatur propterea, quod ipſius quadratum eſt rectangulo AC aequale, & ipſa media proportionalis eſt inter AB, BC latera.

* Rgl. etiam ſub ρ ∈ contentum, & ſpatium omne, quod media poteſt, *medium* vocatur.

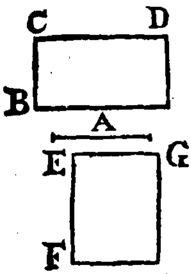
LEMMA.

Si ſint duae rectae lineae AB, BC: *erit,* Fig. prop.
vt prima AB *ad ſecundam* BC, *ita quadra-* XX.
tum AD, *quod ſit a prima, ad rectangulum* AC *quod ſub duabus rectis lineis* AB, BC *continetur.*

Deſcripto quadrato ex AB, compleatur Rgl. AC: & propoſitio manifeſta erit ex 1. 6.

* *Schol.* Et ergo, vt vna BC ad alteram AB, ita AB×BC ad quadratum alterius AB.

PROP. XXIII. THEOR.

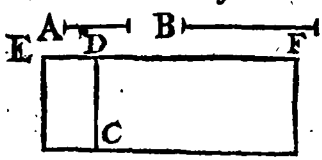


Quod ſit a media A, ad rationalem BC applicatum, latitudinem CD efficit rationalem, & ei BC, ad quam applicatum eſt, longitudine incommenſurabilem.

Poſſit enim A Rgl. FG.
φ. hyp. Sed poteſt etiam φ BD. Ergo FG = BD. Et quia vtrumque ſpatium rectangulum φ eſt: erit BC : EG
κ. 16. 6. = κ EF : CD, ac ideo BCq : EGq = ψ EFq :
ψ. 22. 6. CDq. Iam quum ω FE, EG ſint ρ Є, & BC φ
ω. 22. 10. & hyp. etiam ρ ſit: erit α BCq ≾ EGq, & hinc β EFq
α. ſch. 12. 10. ≾ CDq. Quare, quum EF ſit ρ, erit α & CD ρ. Deinde quia FE Є EG, & FE : EG γ =
β. 10. 10. FEq : FG : erit β FEq non ≾ FG. Ergo quum
γ. lem. pr. EFq ≾ CDq, & FG ≾ BD : erit δ CDq non ≾ BD,
δ. 13. 10. & hinc β CD non ≾ BC, quia CDq : BD = γ CD : BC. Q.E.D.

PROP. XXIV. THEOR.

Media A commenſurabilis B media eſt.



Exponatur CD ρ, ad quam appli-
ε. 23. 10. cetur Rgl. CE =
ζ. hyp. vel cor. 9. 10. Aq, & Rgl. CF = Bq. Ergo ε
η. 1. 6. & 10. 10. ED ρ Є CD. Iam quia ζ Aq ≾ Bq : eſt & CE
θ. ſch. 12. 10. ≾ CF, & hinc ED η ≾ DF. Quare DF eſt θ ρ
ι. 13. 10. & Є ι CD. Hinc patet κ, CF eſſe ρ, &, quae
κ. 22. 10. ipſum poteſt, B mediam eſſe. Q.E.D.

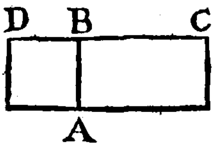
Coroll.

Coroll. Ex hoc manifeſtum eſt, ſpatium CF, medio ſpatio CE commenſurabile, medium eſſe: nam quae ipſum poteſt B etiam media ſit, neceſſe eſt.

Schol. Eſt autem cum mediis, ſicut cum rationalibus, comparatum. Aliae mediae commenſurabiles ſunt potentia tantum; aliae vero longitudine, & ergo potentia ſimul.

* Et praeterea notandum eſt, hoc theorema verum eſſe, ſiue B mediae A longitudine & potentia commenſurabilis ſit, ſiue potentia ſolum.

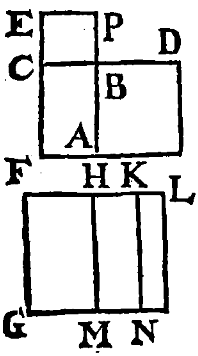
PROP. XXV. THEOR.



Quod ſub mediis longitudine commenſurabilibus rectis lineis AB, BC *continetur rectangulum, medium eſt.*

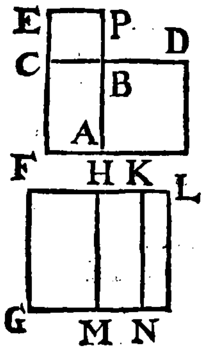
Fiat ex AB quadratum AD, quod medium erit, quia AB media eſt. Iam eſt DB $=$ AB $\lesssim$ BC, & BC : BD $=$ [λ] AC : DA : ergo AC $\lesssim$ medio DA. λ. 1. 6.
Quare [μ] AC medium eſt. Q. E. D. μ. cor. 24. 10.

PROP. XXVI. THEOR.



Quod ſub mediis potentia ſolum commenſurabilibus rectis lineis AB, BC *continetur rectangulum* AC, *vel rationale eſt, vel medium.*

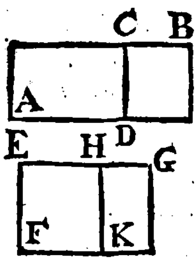
Deſcribantur ex AB, BC quadrata AD, BE, quae media erunt. Exponatur FG ρ, ad quam [ν] applicetur Rgl. GH $=$ AD; & ad HM applicetur Rgl. MK $=$ AC, & ν. 45. 1.



ad KN Rgl. NL = BE. Sunt
ξ. 14. 1. ergo [ξ] FH, HK, KL in directum, & GH, NL media.
Porro, quia FG = KN est
ο. 23. 10. ρ, etiam FH, KL [ο] sunt ρ ∈
π. hyp. FG. Sed est AD ∑ [π] BE,
ideoque GH ∑ NL, &, quum
ρ. 1. 6. sit GH : NL = [ρ] FH : KL,
σ. 10. 10. erit FH [σ] ∑ KL. Quare
τ. 20. 10. quum FH, KL sint ρ ∑ : erit [τ]
FH × KL ρ. Et quoniam
DB : BC = AB : BP, & AD :
AC = [ρ] DB : BC & AC : BE = [ρ] AB : BP :
erit AD : AC = AC : BE, id est GH : MK
υ. 22. 6. = MK : NL, ac ergo, FH : HK = [υ] HK :
φ. 17. 6. KL. Hinc erit & [φ] HKq ρ, & ipsa [χ] HK ρ.
χ. 6. def. 10. Ergo si sit HK ∑ FG, erit [τ] MK id est AC ρ :
ψ. 22. 10. si vero sit HK ∈ FG : erit [ψ] AC medium.
Q. E. D.

PROP. XXVII. THEOR.

Medium AB *non superat medium* AC *rationali* DB.



Si negas : sit DB ρ. Exponatur ρ EF, ad quam applicetur [ω] Rgl. FG = AB, & Rgl.
ω. 45. 1. α. sch. 12. 10. FH = AC. Erit ergo KG
= DB, ideoque KG ρ [α]; FH
β. cor. 24. 10. vero & FG erunt [β] media.
γ. 23. 10. Hinc [γ] EH & EG sunt ρ ∈ EF,
δ. 21. 10. HG autem [δ] est ρ ∑ EF. Quare
ε. lem. 23. 10. EH ∈ HG. Et quia EH :
ζ. 10. 10. HG = [ε] EHq : EH × GH : erit EHq [ζ] non ∑
EH

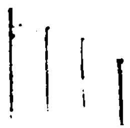
EH×HG. Sed quum EH, HG sint Є : erit EHq+HGq Σ [η] EHq. Et est 2 EH×HG Σ [θ] EH×HG. Quare [θ] EHq+HGq non Σ 2 EH ×HG, & ergo [ι] EHq+HGq+2 EH×HG [κ] non Σ EHq+HGq, id est, [*] EGq non Σ EHq +HGq. Est vero EHq+HGq ρ. Ergo EGq [λ] est αλ, ac ipsa [μ] EG αλ. Sed erat quoque EG ρ. Q.E.A.

η. 16. 10.
θ. 14. 10.
ι. 17. 10.
κ. 4. 2.
λ. 10. def. 10.
μ. 11. def. 10.

* *Corollar.* Euidens est ex ostensis, si sint duae rectae EH, HG Є, esse EHq+HGq non Σ 2 EH×HG.

* *Schol.* Manifestum autem est, rationale superare rationale rationali, & rationale cum rationali facere rationale (per 1. & 3. ax. 10).

PROP. XXVIII. PROBL.



A C B D

Medias inuenire, potentia solum commensurabiles, quae rationale contineant.

Exponantur [ν] duae rationales A, B Є, & fiat [ξ] A: C = C: B, nec non [ο] A: B = C: D. Dico C Є D esse, & mediam vtramque, & C×D ρ.

ν. 11. 10.
ξ. 13. 6.
ο. 12. 6.

Nam quia [π] A×B medium est, erit & Cq [ρ] medium, & C media. Et quum sit A: B = C: D, ac A Є B: erit [σ] C Є D. Hinc & [τ] D media est. Praeterea quum sit permutando A: C = B: D: erit C: B = B: D, & Bq = C×D. Quare, ob Bq ρ [υ] erit & C×D ρ. Q.E.F.

π. 22. 10.
ρ. 17. 6.
σ. sch. 10. 10.
τ. 24. 10.
υ. 9. def. 10.

PROP.

PROP. XXIX. PROBL.

Medias inuenire potentia solum commensurabiles, quae medium contineant.

φ. 11. 10. Exponantur φ tres rationales ϵ, A, B, C, & fiat χ A:
χ. 13 6. D = D: B, & ψ B : C = D : E.
ψ. 12. 6. Dico D, E esse quaesitas.

υ. 17. 6. Nam quia A, B ρ ϵ, ac A $\times$ B = υ Dq:
α. 22. 10. erit α Dq medium, & D media. Et quoniam
β. sch. 10. 10. B : C = D : E, ac B ϵ C : erit D β ϵ E. Ergo
γ. 24. 10. E etiam γ media est. Ostensum igitur est, D, E medias ϵ esse.

Praeterea quia est alternando B : D = C : E, & inuerse B : D = D : A, ideoque D : A = C : E : erit D $\times$ E = A $\times$ C. Est vero A $\times$ C α medium: ergo & D $\times$ E medium est. Q. E. F.

LEMMA I.

Inuenire duos numeros quadratos, ita vt qui ex ipsis componitur etiam quadratus sit.

A....D.....C........B

Exponantur duo numeri plani similes vel quadrati, AB, BC: & sit vterque par, vel vterque impar. Nam ablato BC ex BA, relin-
δ. 24. & 26. 9. quetur δ par AC, qui bisecari potest in D. Sed
ε. 6. 2. ε qui fit sub AB, BC vna cum quadrato ex CD est aequalis quadrato ex BD, & is qui fit sub
ζ. 1. 9. AB, BC ipse ζ quadratus est: inuenti igitur sunt duo quadrati, nempe factus ex AB, BC,
&

& quadratus ex CD, qui compositi producunt quadratum ex BD. Q. E. F.

Coroll. Et simul patet, quomodo inueniantur duo numeri quadrati, quorum excessus sit quadratus: si nimirum AB, BC similes plani sumantur. Sin dissimiles sumantur: possunt pari ratione haberi duo quadrati numeri, qui fiunt ex BD, BC, quorum excessus sit numerus sub AB, BC non quadratus.

LEMMA 2.

Inuenire duos quadratos numeros, ita vt qui ex ipsis componitur non sit quadratus.

A..G..H.D.E.F...C........B

Factis omnibus quae in antecedenti Lemmate, & praeterea ex numero DC ablata vnitate DE; dico, quadratum, factum ex AB per BC multiplicato vna cum quadrato ex CE, non esse quadratum.

Quum enim, sicut antea, factus ex AB, BC sit quadratus, & hic vna cum CD componat quadratum ex BD: erit factus ex AB, BC, vna cum quadrato ex CE minor quadrato ex BD. Iam, si fieri potest, sit idem quadratus. Ergo aut quadrato maiori quam quadratus ex BE, aut minori, aut ipsi quadrato ex BE aequalis erit. Sed quadratus proxime maior, quam quadratus ex BE, est quadratus ex BD; & hoc is qui fit ex AB, BC vna cum quadrato ex CE minor est ostensus: ergo idem nulli quadrato maiori, eo qui fit ex BE, aequalis esse potest. Deinde ponatur aequalis quadrato ex BE; & capiatur GA duplus vnitatis DE. Et quia

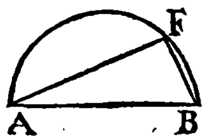
AC

A..G..H.D.E.F...C........B

x. 6. 2. AC = 2 DC: erit GC = 2 EC, & igitur[x] factus ex GB, BC cum quadrato ex CE = quadrato ex BE. Hinc erit factus ex AB, BC aequalis facto ex GB, BC, & AB = BG. Q. E. A. Quare AB per BC multiplicatus cum quadrato ex CE non est aequalis ipsi quadrato ex BE. Si tandem ponas eundem aequalem quadrato minori quam quadratum ex BE, velut quadrato ex BF: sit HA = 2 DF; & erit rursus HC = 2 CF, & ideo[x] factus ex HB, BC cum quadrato ex CF = quadrato ex BF. Hinc foret factus ex AB, BC + quadrato ex CE = facto ex HB, BC + quadrato ex CF. Q. E. A. Ergo tandem patet, quadratum factum ex AB, BC cum quadrato ex CE non quadratum esse. Q. E. F.

PROP. XXX. PROBL.

Inuenire duas rationales, potentia solum commensurabiles, ita vt maior plus possit, quam minor, quadrato rectae lineae sibi longitudine commensurabilis.



C 9 . D 4

9. cor. lem. 1. Exponatur ρ AB, & sumantur[9] duo quadrati numeri C, D, ita vt C — D non sit quadratus, & in descripto super AB semicirculo aptetur AF, vt

ι. cor. 6.10. AFq sit[ι] ad ABq vti numerus C—D ad numerum C. Jungatur FB. Dico factum.

Quia enim AFq ad ABq rationem habet numeri ad numerum, non autem quadrati ad qua-

quadratum: erit [κ] AF ϵ AB, ideoque [λ] AF, κ.cor. 11. 10.
AB sunt ρ ϵ. Sed quia C : C — D $=$ ABq : λ.6.def. 10.
AFq : erit conuertendo [μ] C : D $=$ ABq : μ.cor. 19. 5.
ABq — AFq id est [ν] BFq. Ergo $\surd$ (ABq — ν. 31. 3. & 47. 1.
AFq) $=$ BF [ξ] $\precsim$ AB. Q.E.F. ξ. 9. 10.

PROP. XXXI. PROBL.

Inuenire duas rationales, potentia solum commensurabiles, ita vt maior plus possit, quam minor, quadrato rectae lineae sibi longitudine incommensurabilis. Fig. prop. XXX.

Exponantur ρ AB, & duo quadrati numeri C, D [ο], qui nullum quadratum componant, ο. lem. 2.
& super AB describatur semicirculus, & [π] fiat π. cor. 6. 10.
vti C + D ad C ita ABq ad AFq, & iungatur FB. Dico factum.

Nam primo, vt antea, ostendetur, AF, AB esse ρ ϵ. Secundo quia C + D : C $=$ ABq : AFq, erit conuertendo C + D : D $=$ ABq :
ABq — AFq id est BFq [ρ]. Ergo $\surd$ (ABq — ρ. 31. 3. & 47. 1.
AFq) $=$ BF [σ] non $\precsim$ AB. Q.E.F. σ. 9. 10.

PROP. XXXII. PROBL.


A C B D

Inuenire duas medias, potentia solum commensurabiles, quae rationale contineant, ita vt maior plus possit, quam minor, quadrato rectae lineae sibi longitudine commensurabilis.

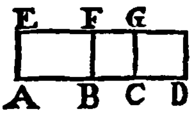
Exponantur [τ] duae rationales A, B ϵ, ita vt τ. 30. 10.
$\surd$(Aq — Bq) $\precsim$ A. Sit [υ] A $\times$ B $=$ Cq, & [φ] υ. 13. 6.
Bq $=$ C $\times$ D. Dico C, D esse quaesitas. φ. 45. 1.

Nam

κ. 22. 10. Nam quia κ $A \times B$ medium est ∴ C media erit. Et quia Bq est ρ: etiam $C \times D$ erit ρ.
ψ. sch. lem. 23. 10. Quia vero $A : B =$ ψ $A \times B$: Bq = Cq : $C \times D =$ ω $C : D$;
ω. lem. 23. 10. & A Є B: erit quoque ω D Є C, ideoque
α. sch. 10. 10. erunt C & D β mediae Є. Denique quia $A : B = C : D$, γ erit $\sqrt{(Cq - Dq)}$ Є C.
β. 24. 10. Q.E.F.
γ. 15. 10.

Similiter autem ostendetur, *inueniri posse duas medias, potentia solum commensurabiles, & continentes rationale, ita vt maior plus possit, quam minor, quadrato rectae lineae sibi* incom-
δ. 31. 10. mensurabilis *longitudine* δ.

LEMMA.



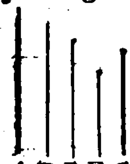
Si fuerint tres rectae lineae AB, BC, CD *in ratione aliqua: erit, vt prima* AB *ad tertiam* CD, *ita rectangulum, contentum sub prima* AB *& media* BC, *ad id, quod sub media* BC *& tertia* CD *continetur.*

Ponantur AB, BC, CD in directum, & ducatur perpendicularis AE = BC, & compleantur Pgra EB, FC, GD, quae Rgla erunt. Et quia ergo BC = EA = FB = GC, erit
ε. 1. 6. AB : BC = ε EB : FC = $AB \times BC$: FC, similiter BC : CD = FC : GD = FC : $BC \times CD$. Ergo ex aequo AB : CD = $AB \times BC$: $BC \times CD$. Q. E. D.

PROP.

PROP. XXXIII. PROBL.

Inuenire duas medias, potentia solum commensurabiles, quae medium contineant, ita vt maior plus possit, quam minor, quadrato rectae lineae sibi longitudine commensurabilis.

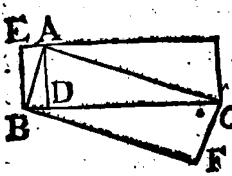


Exponantur ᵉ tres rationales Є A, B, C, ita vt $\sqrt{(Aq - Cq)}$ ⋜ A, & fiat $Dq =$ ᶻ $A \times B$, & $D \times E$ ᵑ $= B \times C$: erunt D, E quaesitae. ε. 11.10. & 30.10. ζ. 14.2. η. 45.1. θ. 22.10. ι. 1.6.

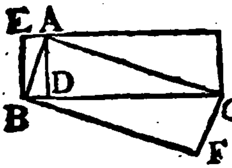
Nam quia A, B ῥ Є: erit ᶿ D media. Et quoniam $A : C =$ ᶥ $A \times B : C \times B = Dq : D \times E =$ ᵏ $D : E$: erit D ᵡ Є E. Hinc D, E ᵘ sunt mediae Є, atque $\sqrt{(Dq - Eq)}$ ᵛ ⋜ D. Patet etiam, quia ᵡ $B \times C$ medium est, esse & $D \times E$ ᵒ medium. Q. E. F. κ. lemma 23.10. λ. 1.sch.10.10. μ. 24.10. ν. 15.10. ξ. sch.22.10.

Similiter ostenditur, ᵖ quomodo *inueniantur duae mediae, potentia solum commensurabiles, & medium continentes, ita vt maior plus possit, quam minor, quadrato rectae lineae sibi* incommensurabilis *longitudine.* ο. cor. 24.10. π. 31.10.

LEMMA.



Sit triangulum rectangulum ABC, *rectum habens angulum* BAC, *& ducatur* AD *perpendicularis: dico* $CB \times BD = ABq$ *&* $BC \times CD = ACq$. *&* $BD \times DC = DAq$, *& denique* $BC \times AD = BA \times AC$.

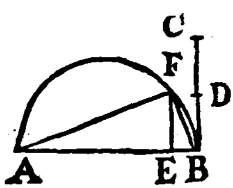


Nam tres priores partes huius propositionis patent ex corollario 8.6. & ex 17.6. Vltima demonstratur, descripto Rglo EC = BC $\times$ AD,
ε. 41. 1. & Rglo AF = BA $\times$ AC. Nam EC = [ε] 2 △.
σ. 34. 1. ABC = [σ] AF. Q.E.D.

PROP. XXXIV. PROBL.

Inuenire duas rectas lineas, potentia incommensurabiles, quae faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum vero, quod sub ipsis continetur, medium.

τ. 31. 10. Exponantur [τ] AB, BC ρ ⊏, ita vt $\sqrt{}$(ABq — BCq) non ⊏ AB. Bisecetur BC in D, & ipsi BDq vel DCq aequale Pgr. ad
υ. 28. 6. rectam AB applicetur [υ], deficiens figura quadrata, & sint AE, EB partes ex applicatione factae. Describatur super AB semicirculus AFB, & ex E ducatur in AB perpendicularis EF, & iungantur AF, BF; quae erunt quaesitae.



φ. 4. 2. Quum enim sit BDq = [φ] ¼ BCq: erit [χ] BE
χ. 19. 10. non ⊏ EA. Et quia AE : EB = [ψ] BA $\times$ AE :
ψ. 1. 6. AB $\times$ BE = [ω] AFq : BFq : erit [α] AF ⋲ BF.
ω. lem. pr. Porro, quia AFq + BFq = [β] ABq, AFq +
α. 10. 10. BFq est ρ. Denique quia EFq = [γ] AE $\times$
β. 31. 3. EB = [γ] BDq, ideoque BD = EF & BC =
γ. lem. 18. 10 2 EF : erit AB $\times$ BC = [δ] 2 AB $\times$ EF = [ω] 2
δ. 1. 6.

AF

AF $\times$ FB. Sed AB $\times$ BC medium [ε] ε. 22. 10.
est: ergo & AF $\times$ FB medium [ζ] erit. ζ. cor. 24. 10.
Q.E.F.

PROP. XXXV. PROBL.

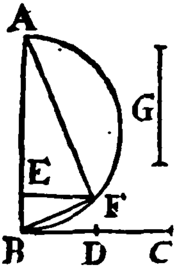
Inuenire duas rectas lineas, potentia in commensurabiles, quae faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, rectangulum vero, quod sub ipsis continetur, rationale. Fig. prop. XXXIV.

Exponantur AB, BC [η] mediae $\sqsubseteq$ & rationale continentes, ita vt $\surd$ (ABq — BCq) non $\sqsubseteq$ AB, & reliqua fiant, vt in praecedente. η. 32. 10.
Erunt AF, FB quaesitae.

Nam quia AE [θ] non $\sqsubseteq$ EB: erit & [ι] BA $\times$ AE non $\sqsubseteq$ AB $\times$ BE, ideoque [κ] AFq non $\sqsubseteq$ BFq, & propterea AF $\mathrm{C\!E}$ BF. Et patet, AFq + BFq = ABq medium [λ] esse. Denique quum BC = 2 EF, & hinc AB $\times$ BC = [μ] 2 AB $\times$ EF: erit AB $\times$ EF ρ, vtpote rationali AB $\times$ BC commensurabile [ν]. Ergo & [ξ] AF $\times$ BF est ρ. Q.E.F. θ. 19. 10. ι. 1. 6. & 10. 10. κ. lem. 34. 10. λ. sch. 22. 10. μ. 1. 6. ν. sch. 12. 10.

PROP. XXXVI. PROBL.

Inuenire duas rectas lineas, potentia incommensurabiles, quae faciant & compositum ex ipsarum quadratis medium, & rectangulum, quod sub ipsis continetur, medium & adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis.



ξ. 33. 10. Exponantur[ξ] duae mediae €, AB, BC, medium continentes, ita vt $\surd$(ABq − BCq) non Σ AB. Reliqua fiant vt in prop. 34. Dico AF, FB esse quaesitas.

ο. 19. 10. Nam AE non Σ[ο] EB, ideoque AF θ€ BF. Et quoniam ABq medium[π] est: AFq + FBq medium esse patet. Porro quia AE $\times$ EB =[ρ] BDq =[σ] EFq, erit AB $\times$ BC = 2 AB $\times$ EF, & ideo[σ] medium erit AB $\times$ EF, & propterea etiam[τ] AF $\times$ FB. Denique quia AB non Σ[υ] BC, & BC Σ[υ] BD, & hinc AB non Σ[φ] BD: erit[χ] ABq non Σ AB $\times$ BD. Sed AB $\times$ BD = AB $\times$ EF = AF $\times$ FB, & ABq = AFq + FBq. Ergo AF $\times$ FB non Σ AFq + FBq. Q. E. F.

π. sch. 22. 10.
ρ. constr. & lem. 18. 10.
σ. cor. 24. 10.
τ. lem. 34. 10.
υ. constr.
φ. 13. 10.
χ. 1. 6. & 10. 10.

* *Schol.* Ex his manifestum est, quomodo *inueniri possint duae mediae, longitudine & potentia incommensurabiles.* Factis enim omnibus, quae in propositione iussa sunt, & capta insuper G media proportionali inter AF, BF: erunt G & AB mediae θ€. Nam quia Gq =[ψ] AF $\times$ BF medio: erit G media, & θ€ mediae AB.

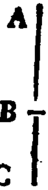
ψ. 17. 6.

Principium Senariorum per compositionem.

PROP. XXXVII. THEOR.

Si duae rationales, potentia solum commensurabiles, AB, BC, *componantur: tota* AC *irrationalis erit. Vocetur autem* ex binis nominibus.

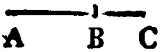
Quia



Quia enim AB $\in$ BC, erit 2 AB $\times$ BC [α] non $\preceq$ ABq + BCq. & proinde 2 AB $\times$ BC + ABq + BCq $=$ [β] ACq non $\preceq$ [γ] ABq + BCq. Quare quum ABq + BCq [δ] sit $\dot{\rho}$: erit ACq [ε] $\alpha\lambda$, & [ζ] AC $\alpha\lambda$. Q. E. D.

α. cor. 27. 10.
β. 4. 2.
γ. 17. 10.
δ. sch. 27. 10.
ε. sch. 12. 10.
ζ. 11. def. 10.

PROP. XXXVIII. THEOR.

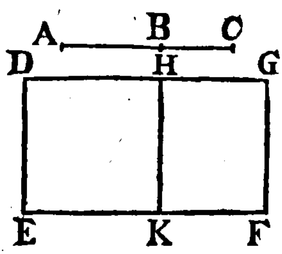


Si duae mediae potentia solum commensurabiles AB, BC *componantur, quae rationale contineant: tota* AC *irrationalis erit. Vocetur autem* ex binis mediis prima.

Nam quum sit [η] ABq + BCq non $\preceq$ 2 AB $\times$ BC: erit ABq + BCq + 2 AB $\times$ BC $=$ ACq non $\preceq$ [θ] AB $\times$ BC: hinc [ι] ACq $\alpha\lambda$, & ergo AC $\alpha\lambda$. Q. E. D.

η. cor. 27. 10.
θ. 17. 10. & 14. 10.
ι. sch. 12. 10.

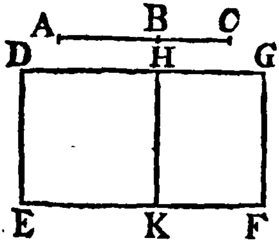
PROP. XXXIX. THEOR.



Si duae mediae potentia solum commensurabiles AB, BC *componantur, quae medium contineant: tota irrationalis erit. Vocetur autem* ex binis mediis secunda.

Sit DE $\dot{\rho}$, & fiat [κ] Rgl. DEF $=$ ACq, & Rgl. DEK $=$ ABq + BCq. Ergo Rgl. HF $=$ [λ] 2 AB $\times$ BC. Et quia ABq, BCq media [μ] sunt; ac propterea ABq + BCq medium [ν] est, medium vero est & AB $\times$ BC [ξ]: erit vtrumque Rgl.

κ. 45. 1.
λ. 4. 2.
μ. sch. 22. 10.
ν. 16. 10. & cor. 24. 10.
ξ. hyp.



o. cor. 24. 10.
π. 23. 10.
ρ. cor. 27. 10.

Rgl. DK, HF [o] medium. Ergo EK, KF erunt [π] ῥ. Sed quia AB Є BC, erit ABq + BCq non ⊏ [ρ] 2 AB × BC. id est Rgl. DK non ⊏ HF. Quare est EK non ⊏ KF, & ideo EK, KF ῥ Є [σ] sunt, & [τ] DG vel EF ἄλ. Patet ergo DF esse [υ] ἄλ, & ipsam AC [φ] ἄλ. Q. E. D.

σ. sch. 12. 10.
τ. 37. 10.
υ. sch. 21. 10.
φ. 11. def. 10.

PROP. XL. THEOR.

Si duae rectae lineae potentia incommensurabiles AB, BC *componantur, quae faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem sub ipsis continetur medium: tota recta linea* AC *irrationalis erit. Vocetur autem* maior.

χ. 22. 10. & sch. 13. 10.
ψ. 17. 10.
ω. 10. def. 10.

Nam AB × BC non ⊏ [χ] ABq + BCq. Ergo 2 AB × BC + ABq + BCq = ACq non ⊏ [ψ] ABq + BCq; & hinc [ω] ACq ἄλ, ac AC ἄλ. Q. E. D.

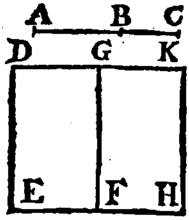
PROP. XLI. THEOR.

Si duae rectae lineae potentia incommensurabiles AB, BC *componantur, quae faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem sub ipsis continetur rationale: tota recta linea* AC *irrationalis erit. Vocetur autem* rationale ac medium potens.

Nam,

Nam, quia AB $\times$ BC non $\asymp$ [α] ABq α. sch. 13. 10. & 22. 10.
+ BCq, ideoque ACq non $\asymp$ [β] AB $\times$ β. 4. 2. & 17. 10.
BC: erit ACq αλ [γ], ac ergo AC αλ. γ. 10. def. 10.
Q. E. D.

PROP. XLII. THEOR.



Si duae rectae lineae potentia incommensurabiles AB, BC *componantur, quae faciant compositum ex ipsarum quadratis medium, & quod sub ipsis continetur medium, & adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis: tota recta linea* AC *irrationalis erit. Vocetur autem* bina media potens.

Exponatur ρ DE, & fiat [δ] Rgl. DEF δ. 45. 1.
= ABq + BCq, & Rgl. GFH = 2 ε. 4. 2.
AB $\times$ BC. Totum ergo DH [ε] = ACq, ζ. cor. 24. 10.
& [ζ] DF medium, ideoque [η] EF ρ. Eadem η. 23. 10.
ratione FH ρ. Sed quia DF non $\asymp$ [θ] GH: θ. hyp.
erit EF non $\asymp$ [ι] FH, & ergo EF, FH ρ Є ι. 10. 10.
erunt, atque [κ] EH αλ ex binis nominibus κ. 37. 10.
erit. Hinc, quia DE ρ, est DH [λ] αλ, & λ. sch. 21. 10.
AC [μ] αλ. Q. E. D. μ. 11. def. 10.

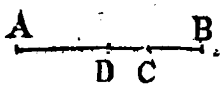
Schol. At vero dictas irrationales vno tantum modo diuidi in rectas lineas, ex quibus componuntur, & quae propositas species constituunt, mox demonstrabimus.

PROP. XLIII. THEOR.

Quae ex binis nominibus AB *ad vnum duntaxat punctum* C *diuiditur in nomina* AC, CB.

Si negas; diuidatur etiam ad D in nomina. Sed nequit esse DB = AC. Sic enim foret BC = AD, & AC : CB = BD : DA, hoc est AB in D similiter foret diuisa ac in C; id quod non ponitur. Quum ergo AB in partes inaequales ad C, & D secta
υ. 4. sch. 5. 2. sit, quarum maior sit AC: υ erit 2 AD × DB
− 2 AC × CB = ACq + CBq − (ADq +
ξ. hyp. & 37. 10. DBq). Sunt autem ξ ACq, CBq, ADq,
ο. sch. 27. 10. DBq ρ, ideoque ACq + CBq, & ADq +
DBq ο differunt rationali. Quare & media 2
π. 37. 10. & 22. 10. AD × DB ac 2 AC × CB π different rationali. Q.E.A ς.
ρ. 27. 19.

PROP. XLIV. THEOR.



Quae ex binis mediis prima AB *ad vnum duntaxat punctum* C *diuiditur in nomina* AC, CB.

Si negas, sit AB etiam in D diuisa in alia
σ. 38. 10. nomina AD, DB, quae erunt σ mediae (&
τ. 4. sch. 5. 2. continentes ρ. Sunt vero & AC, CB σ mediae
rationale continentes, & differentiae inter 2
υ. sch. 27. 10. AD × DB & 2 AC × CB = τ differentia inter summam ACq + CBq & summam ADq
φ. 27. 10. & cor. 24. 10. + DBq. Ergo erit haec differentia υ rationale spatium. Q.E.A φ.

PROP.

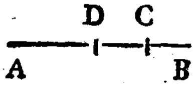
PROP. XLV. THEOR.

Quae ex binis mediis secunda AB *ad vnum duntaxat punctum* C *diuiditur in nomina* AC, CB.

Si negas, diuidatur etiam in D, & sit AC non aequalis ipsi BD, sed ea e. gr. maior. Ergo tam AC & CB, quam AD & DB sunt [κ] mediae Є, & media continentes; ac $ACq + CBq >$ [ψ] $ADq + DBq$. Exponatur ρ EF, ad quam applicetur Rgl. $EK = ABq$, & Rgl. $EG = ACq + CBq$, & Rgl. $EL = ADq + DBq$. Ex quo sequitur Rgl. $HK =$ [ω] $2\, AC \times BC$, & Rgl. $MK = 2\, AD \times DB$. Quia autem mediae Є sunt AC, CB: erit EC [α] medium, ideoque [β] EH ρ Є EF. Eadem ratione HN est ρ Є EF. Verum AC Є CB, & proinde $ACq + CBq$ id est EG non ≤ [γ] ipsi $2\, AC \times CB$ id est ipsi HK, & idcirco EH non ≤ HN. Patet itaque EH, HN esse ρ Є, & ergo [δ] EN ∝ ex binis nominibus, & diuisam in nomina in puncto H. Sed eodem modo ostendetur, EN etiam ad M diuisam esse in nomina. Neque tamen est $MN = EH$, quoniam $EG = ACq + CBq > ADq + DBq > 2\, AD \times DB = MK$. Ergo EN quae ex binis nominibus ad duo puncta in nomina diuisa est. Q.E.A. [ε]

κ. 39. 10.
ψ. 3. sch. 5. 2.
ω. 4. 2.
α. cor. 24. 10. & 16. 10.
β. 23. 10.
γ. cor. 27. 10.
δ. 37. 10.
ε. 43. 10.

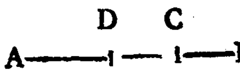
PROP. XLVI. THEOR.



Maior AB *ad idem duntaxat punctum* C *diuiditur in nomina* AC, CB.

Si negas: diuidatur ad aliud punctum D in nomina AD, DB, ab ipsis CB, AC diuersa.
ζ. 40. 10. Erit ergo ζ ACq + CBq ρ, item ADq + DBq ρ, media vero erunt AC × CB, & AD × DB. Proinde, quum ACq + CBq
η. sch. 27. 10. — (ADq + DBq) η sit ρ, & = θ 2 AD ×
θ. 4. schol. 5. 2. DB — 2 AC × CB; erit differentia inter media AD × DB & AC × CB rationale spa-
ι. 27. 10. tium. Q. E. Aι.

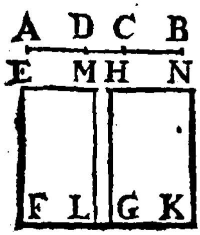
PROP. XLVII. THEOR.



Rationale ac medium potens AB *ad vnum duntaxat punctum* C *diuiditur in nomina* AC, CB.

Si negas: diuidatur etiam ad D. Erunt
κ. 41. 10. ergo ACq + CBq, & ADq + DBq media κ, sed AC × CB, ac AD × DB rationalia. Quare, quum ACq + CBq — (ADq + DBq)
λ. 4. sch. 5. 2. = λ 2 AD × DB — 2 AC × CB, haec autem
μ. sch. 27. 10. differentia μ sit ρ: erit & illa ρ. Q. E. Aν.
ν. 27. 10.

PROP. XLVIII. THEOR.



Bina media potens AB *ad vnum duntaxat punctum* C *diuiditur in nomina* AC, CB.

Si negas: diuidatur etiam in nomina AD, DB, diuersa ab illis, ita vt sit e. gr. AC > DB. Ad rationalem EF appli-

applicentur Rgl. $EG = ACq + CBq$, $EK = ABq$, & $EL = ADq + DBq$. Ergo $HK =$ [ξ] ξ. 4. 2.
$2\, AC \times CB$, & $MK = 2\, AD \times DB$. Sed quia ponitur [ο] $ACq + CBq$ medium, erit & ο. 42. 10.
EG medium, & proinde [π] HE ρ. Eodem argu- π. 23. 10.
mento HN est ρ. Quia vero & ponitur $ACq + CBq$ non Σ [ο] $2\, AC \times CB$: erit EH non Σ [ρ] ρ. 10. 10. & 1. 6.
HN. Itaque EH, HN erunt ρ $\in$ [σ]; & EN ex binis nominibus est [τ], atque diuisa in nomina σ. sch. 12. 10.
in puncto H. Atqui similiter ostendetur, quia τ. 37. 10.
& $ADq + DBq$ nec non $AD \times DB$ media non Σ ponuntur, eandem EN etiam ad M in nomina diuidi, ita vt MN, EH inaequalia sint. Q. E. A [υ]. υ. 43. 10.

DEFINITIONES SECVNDAE.

1. Exposita rationali, & quae ex binis nominibus diuisa in nomina, cuius maius nomen plus possit, quam minus, quadrato rectae lineae sibi longitudine commensurabilis: si quidem maius nomen expositae rationali commensurabile sit longitudine, tota dicatur *ex binis nominibus prima;*

2. Si vero minus nomen expositae rationali longitudine sit commensurabile, dicatur *ex binis nominibus secunda;*

3. Quod si neutrum ipsorum nominum sit longitudine commensurabile expositae rationali, vocetur *ex binis nominibus tertia.*

4. Rursus, si maius nomen plus possit, quam minus, quadrato rectae lineae sibi longitudine incommensurabilis: si quidem maius nomen

nomen expositae rationali sit commensurabile longitudine, dicatur *ex binis nominibus quarta;*

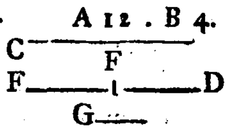
5. Si vero minus, dicatur *quinta;*

6. Quod si neutrum, dicatur *sexta.*

PROP. XLIX. PROBL.

Inuenire ex binis nominibus primam.

φ. cor. lem. 1. 30. 10.



Exponantur φ duo numeri A, B, ita vt A + B ad B quidem habeat rationem numeri quadrati ad quadratum, sed non ad A. Exponatur quoque ρ C, & ei ≍ DE, & fiat ϰ A + B : A = DEq : EFq; erit DF quaesita.

ϰ. cor. 6. 10.

Nam quia ratio numeri A + B ad A non est ratio quadrati ad quadratum: erit EF ∈ α DE. Et quia DE ρ est β: erunt DE, EF ρ∈; & idcirco DF erit γ ex binis nominibus. Porro quia A + B : A = DEq : EFq, & A + B > A: erit DEq > δ EFq, & DE > EF. Sit Gq = DEq − EFq. Et quia est conuertendo A + B : B = DEq : Gq: erit G id est √(DEq − EFq) ≍ ε DE. Est vero etiam DE ≍ C. Ergo DF est ex binis nominibus ζ prima. Q. E. F.

α. cor. 11. 10.
β. 6. def. 10.
γ. 37. 10.
δ. sch. 16. 5.
ε. 9. 10.
ζ. 1. def. sec.

PROP. L. PROBL.

Inuenire ex binis nominibus secundam.

η. cor. lem. 1. 30. 10.

Exponantur η duo numeri A, B, ita vt A + B ad B quidem rationem habeat numeri quadrati ad

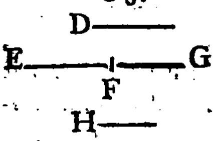
ad quadratum, non autem ad A, & sint C, FE ρ Σ, & fiat [ϑ] $A : A + B = FEq : EDq$. ϑ.cor.6.10.
Erit FD quaesita.

Quoniam enim ratio $A + B$ ad A non est quadrati numeri ad quadratum: erit [ι] ED $\in$ ι.sch.11.10.
FE, & ergo [κ] erunt ED, FE ρ $\in$. Ex binis κ.6.def.10.
ergo nominibus erit FD. Praeterea vero quum, ob $A < A + B$, sit FE $<$ [λ] ED, & sit inuerse λ.sch.16.5.
$A + B : A = DEq : FEq$, & conuertendo $A + B : B = EDq : EDq - FEq$; posito $Gq = EDq - FEq$, erit G id est $\surd(EDq - FEq)$ Σ [μ] ED. Est autem & minus nomen FE μ.9.10.
Σ C. Quare FD est ex binis nominibus secunda [ν]. Q. E. F. ν.2.def.sec.

PROP. LI. PROBL.

Inuenire ex binis nominibus tertiam.

A 12. B 4.
C 8.



Cape [ξ] tres numeros A, B, C, tales, vt $A + B$ ad B quidem rationem quadrati numeri ad quadratum habeat, non autem ad A, C vero ad neutrum ipsorum A, $A + B$ talem habeat rationem. Accipe ρ D, & fac $C : A + B =$ [ο] $Dq : EFq$, & $A + B : A = EFq : FGq$. Erit EG quaesita. ξ.cor.lem.1.30.10. ο.cor.6.10.

Etenim quia [π] D $\in$ EF, & [π] FG $\in$ EF, & hinc EF, FG ρ sunt, erit EG ex binis nominibus [ρ]. Et quum sit $C : A + B = Dq : EFq$, atque $A + B : A = EFq : FGq$, ideoque ex aequo $C : A = Dq : FGq$: erit [σ] FG non Σ D. Sed & EF non Σ D. Ergo neutrum nomen EF, FG Σ ρ D. Deinde quia $A + B > A$, erit [τ] EF $>$ FG. π.sch.11.10. ρ.37.10. σ.9.10. τ.sch.16.5.

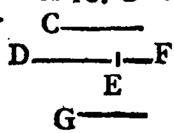
Sit

Sit autem $Hq = EFq - FGq$. Et quia
ε. 9. 10. est conuertendo $A + B : B = EFq :$
υ. 3. def. sec. Hq, erit H id est $\sqrt{(EFq - FGq)}$ ξ [ε]
EF. Quare [υ] EG est ex binis nominibus
tertia. Q. E. F.

PROP. LII. PROBL.

Inuenire ex binis nominibus quartam.

φ. cor. lem. 1. 30. 10. A 10. B 6.



Sume [φ] duo numeros A, B ita, vt $A + B$ neque ad A neque ad B rationem quadrati numeri ad quadratum habeat, & expositae ρ C sume
χ. cor. 6. 10. ξ DE, & fac [χ] $A + B : A = DEq : EFq$.
Erit DF quaesita.
ψ. 6. def. 6. Nam erit [ψ] DE ρ, & EF $\in$ [ω] DE, & ergo
ω. sch. 10. 10. erunt DE, EF [α] ρ $\in$. Hinc DF erit [β] ex binis nominibus. Porro quia $A + B > A$, erit
α. sch. 12. 10. $DEq >$ [γ] EFq. Sit $Gq = DEq - EFq$. Ergo quia conuertendo $A + B : B = DEq : Gq$,
β. 37. 10. non erit G id est $\sqrt{(DEq - EFq)}$ [δ] ξ DE. Est
γ. sch. 16. 5. autem & DE ξ C. Ergo DF [ε] est ex binis no-
δ. 9. 10. minibus quarta. Q. E. F.
ε. 4. def. sec.

PROP. LIII. PROBL.

Inuenire ex binis nominibus quintam.

Fig. prop. praec. Expositis numeris A, B talibus, quales in praecedente erant, & recta ρ C, sume FE ξ C, & fac $A : A + B = FEq : EDq$: erit FD quaesita.

ζ. 6. def. 6. Etenim erit [ζ] FE ρ, & ED $\in$ [η] FE, ideoque [θ]
η. sch. 11. 10. FE, ED erunt ρ $\in$. Hinc FD erit ex binis [ι]
θ. sch. 12. 10. nominibus. Dein quia est inuertendo $A + B :$
ι. 37. 10. $A =$

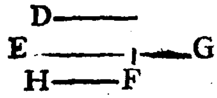
$A = EDq : FEq$: erit EDq [x] $> FEq$. Sit $EDq - FEq = Gq$. Conuertendo igitur erit $A + B : B = EDq : Gq$, & propterea G id est $\sqrt{(EDq - FEq)}$ non $\lesssim$ [λ] ED. Sed est quoque FE $\lesssim$ C. Ergo FD erit [μ] ex binis nominibus quinta. Q. E. F.

x. sch. 16. 5.
λ. 9. 10.
μ. 5. def. sec.

PROP. LIV. PROBL.

Inuenire ex binis nominibus sextam.

A 16. B 4.
C 12.



Exponantur duo numeri A, B ita [ν], vt $A + B$ ad neutrum habeat rationem numeri quadrati ad quadratum, & alius C [ξ] non quadratus, qui nec ad A nec ad $A + B$ rationem quadrati ad quadratum habeat. Exponatur etiam rationalis D, & fiat [o] $C : A + B = Dq : EFq$, & $A + B : A = EFq : FGq$. Erit EG quaesita.

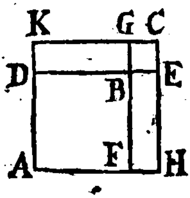
ν. 2. lem. 30. 10. & 1. sch. 24. 8.
ξ. 2. sch. 24. 8.
o. cor. 6. 10.

Erit enim [π] EF $\in$ D, & FG $\in$ EF, ideoque, quum D ρ sit, EF, FG ρ $\in$ erunt. Propterea [ρ] EG erit ex binis nominibus. Et quia $A + B > A$, erit EFq [σ] $> FGq$. Sit $EFq - FGq = Hq$. Iam conuertendo est $A + B : B = EFq : Hq$. Ergo H id est $\sqrt{(EFq - FGq)}$ non $\lesssim$ [τ] EF. Et quia ex aequo $C : A = Dq : FGq$, erit FG $\in$ [π] D. Ergo neutrum nominum EF, FG $\lesssim$ D. Quare EG est ex binis nominibus [υ] sexta. Q. E. F.

π. sch. 11. 10.
ρ. 37. 10.
σ. sch. 16. 5.
τ. 9. 10.
υ. 6. def. sec.

LEMMA.

LEMMA.



Si duo quadrata AB, BC *ponantur ita, vt* DB *ſit in directum ipſi* BE, *& compleatur* AC *parallelogrammum: dico,* AC *quadratum eſſe, & inter quadrata* AB, BC *rectangulum* DG *medium eſſe proportionale, itemque inter ipſa* AC, CB *medium eſſe proportionale* DC.

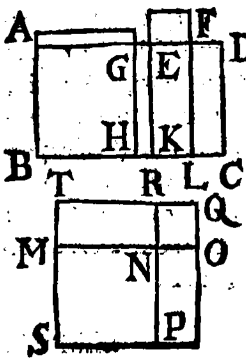
Quia enim DB, BE in directum ſunt: erunt

φ. 14. 1. & FB, BG [φ] in directum. Et quia DB = FB, & BE = BG, erit DE = FG. Sed quum AC Pgr. ſit, erit AH = KC = DE, & AK = CH = FG. Ergo AC aequilaterum eſt. Sed &

χ. ſch. 29. 1. rectangulum [χ]. Ergo AC eſt quadratum. Se-

ψ. 1. 6. cundo, quia AB : DG = [ψ] FB : BG = DB : BE = DG : BC, patet DG eſſe medium proportionale inter AB, BC. Tertio, quia AC : DC = [ψ] AK : KD = KC : GC = DC : CB, patet ∻ AC, DC, CB. Q.E.D.

PROP. LV. THEOR.



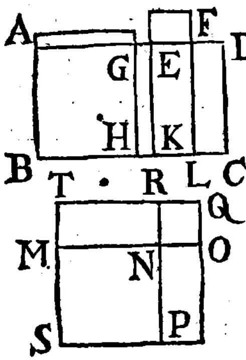
Si ſpatium ABCD *contineatur ſub rationali* AB *& ex binis nominibus prima* AD: *recta linea ſpatium* ABCD *potens irrationalis eſt, quae ex binis nominibus appellatur.*

Diuide AD in nomina ad E, & ſit AE > ED.

ω. 1. def. ſec. Ergo [ω] AE, ED ρ E, & √ (AEq

(AEq — EDq) ≾ AE, & AE ≾ AB.
Biseca ED in F, & ad AE applica Rgl.
= EFq, & deficiens figura quadrata.
Fiant ex applicatione partes AG, GE.
Ergo AG × GE = [α] EFq, & AG ≾ [β] α. 1. def. sec.
GE. Duc ad AB parallelas GH, EK, FL, β. 18. 10.
& pone quadratum SN = AH, & quadratum NQ = GK, ita vt MN, NO
sint in directum, & comple Pgr. SQ. Ergo [γ] SQ = MOq, & ÷ SN, MR, NQ. γ. lemma praec.
Atqui quum sit AG × GE = EFq, &
ergo AG : EF [δ] = EF : GE : erit AH : δ. 17. 6.
EL = [ε] EL : GK, id est ÷ SN, EL, ε. 1. 6.
NQ. Ergo EL = MR. Sed FC =
EL = MR = [ζ] OP. Ergo totum AC ζ. 43. 1.
= toti SQ, ideoque recta MO potest AC.
Et quia AG ≾ GE: erunt AG, GE ≾ [η] η. 16. 10.
AE, ergo & ipsi AB; & ergo AG, GE
erunt ρ, & ob id AH, GK [θ] ρ. Quo- θ. 20. 10.
niam igitur & SN, NQ ρ sunt, erunt MN,
NO ρ. Quia vero AE ≾ AG, & ED ≾
EF, sed AE non ≾ ED: nec erit AG ≾ [ι] ι. 13. 10.
EF. Ergo AH non ≾ [κ] EL, & SN non κ. 10. 10.
≾ MR. Hinc, quia SN : MR = MN :
NO, non erit MN ≾ [κ] NO. Quare
MN, NO erunt ρ ∈, & MO id est √
AC ex binis nominibus erit. Q. E. D.

PROP. LVI. THEOR.



Si spatium ABCD *contineatur sub rationali* AB *& ex binis nominibus secunda* AD: *recta linea spatium* AC *potens irrationalis est, quae ex binis mediis prima appellatur.*

Iisdem enim constructis, quae in praecedente, eodem modo ostendetur MO posse AC; & constabit etiam, AE, ED esse ρ Є, & ED ≾ AB, & AG ≾ GE. Quum ergo [λ] AE Є AB, & AE ≾ [μ] vtrique ipsarum
λ. sch. 14. 10. AG, GE: erunt [λ] AB, AG, GE ρ Є, ideo-
μ. 16. 10. que [ν] AH, GK media; & proinde etiam quadrata SN, NQ media erunt, & MN,
ν. sch. 22. 10. NO mediae [ν]. Dein ob AG ≾ GE, erit
ξ. 10. 10. AH ≾ [ξ] GK, id est SN ≾ NQ, vel MNq ≾ NOq. Sed quia AE ≾ AG, & ED ≾ EF, non tamen AE ≾ ED: nec erit AG ≾ EF; & hinc AH non ≾ [ξ] EL, vel SN non ≾ PO, ideoque non erit MN ≾ [ξ] NO. Erat autem MNq ≾ NOq. Quare MN, NO sunt mediae Є. Denique ob ED ≾
ο. 12. 10. AB, erunt [ο] EF, AB ρ ≾, ideoque [π] EL
π. 20. 10. ρ, & proinde MR = MN × NO ρ erit. Ex quibus omnibus patet, MO, id
ρ. 38. 10. est √ AC, esse [ρ] ex binis mediis primam. Q.E.D.

PROP.

PROP. LVII. THEOR.

Si spatium AC *contineatur sub rationali* AB *& ex binis nominibus tertia* AD: *recta linea spatium* AC *potens irrationalis est, quae appellatur ex binis mediis secunda.* Fig. prop. LVI.

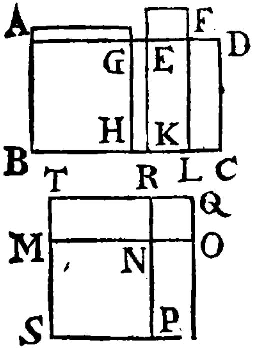
Iisdem constructis, quae in prop. 55. eodem modo, quo antea, patebit esse MO $= \sqrt{}$ AC, & MN, NO medias. Sed quia ῥ ED non est ⪤ [σ] AB, EF autem ⪤ ED, & AB $=$ EK: [σ] hyp. erunt EF, EK ῥ ϵ, ideoque erit EL $=$ MR medium [τ]. Est autem MR $=$ MN $\times$ NO. [τ] sch. 22. 10. Ergo $\sqrt{}$ AC est ex binis mediis secunda [υ]. [υ] 39. 10. Q. E. D.

PROP. LVIII. THEOR.

Si spatium AC *contineatur sub rationali* AB *& ex binis nominibus quarta* AD: *recta linea spatium* AC *potens irrationalis est, quae vocatur maior.* Fig. prop. LVI.

Quoniam AD est ex binis nominibus quarta: [φ] erunt AE, ED ῥ ϵ, & $\sqrt{}$ (AEq ED q) [φ] 4. def. sec. non erit ⪤ AE, AE vero ⪤ AB. Biseca ED in F, & fac omnia, quae in prop. 55. Constat ergo MO $= \sqrt{}$ AC, & [χ] GE non ⪤ AG. Hinc [χ] 19. 10. GK non ⪤ [ψ] AH, id est [ω] NOq non ⪤ MNq, [ψ] 1. 6. & 10. 10. ideoque MN ⪪ NO. Porro quia ῥ AE ⪤ [ω] constr. AB: erit AK $=$ AH $+$ GK $=$ [ω] MNq $+$ NOq rationale [α]. Denique quia AE ⪤ AB, [α] 20. 10. & ED ⪤ EF, non autem AE ⪤ ED: non [β] 14. 10. erit [β] EF ⪤ AB vel EK, ergo erunt [γ] EF, EK [γ] sch. 12. 10. ῥ ϵ, & ergo EF $\times$ EK [ω] $=$ MN $\times$ NO erit medium [δ]. [δ] 22. 10. Vnde patet, $\sqrt{}$ AC esse [ε] irrationalem maiorem. [ε] 40. 10. Q. E. D.

PROP. LIX. THEOR.



Si ſpatium A C *contineatur ſub rationali* AB *& ex binis nominibus quinta* A D: *recta linea ſpatium potens irrationalis eſt, quae vocatur rationale & medium potens.*

Conſtructis iisdem, iterum conſtat MO $=\sqrt{}$ AC, & MN $\Theta\epsilon$ NO. Porro, quia ED eſt minor portio ex binis

ζ. 5. def. ſec. nominibus quintae, eſt ED $\precsim$ [ζ] AB, non
η. 13. 10. & ſch. 12. 10. autem AE $\precsim$ ED, ſunt tamen AE, ED, AB ρ. Ergo [η] AE, AB $\rho\,\epsilon$. Ergo AK
θ. conſtr. $=$ [θ] MNq $+$ NOq medium [ι] erit. Deni-
ι. 22. 10.
κ. 20. 10. que, quia EF, AB $\rho \precsim$, erit MN $\times$ NO $=$ [θ] EL [κ] rationale. Quapropter $\sqrt{}$ AC
λ. 41. 10. erit irrationalis rationale ac medium [λ] potens. Q. E. D.

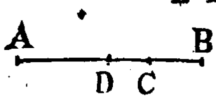
PROP. LX. THEOR.

Fig. prop. LIX. *Si ſpatium* A C *contineatur ſub rationali* AB *& ex binis nominibus ſexta* AD: *quae ſpatium* AC *poteſt recta linea irrationalis eſt, quae vocatur bina media potens.*

Conſtructis iisdem, quae ſupra, patet eſſe
μ. 6. def. ſec. MO $=\sqrt{}$ AC, & MN $\Theta\epsilon$ NO, & nec AE nec ED $\precsim$ [μ] AB; itaque AE. AB $\rho\,\epsilon$ [ν], & MNq $+$ NOq
ν. ſch. 12. 10. $=$ [ξ] AE $\times$ AB medium [ο]. Et, quia EF $\precsim$ ED,
ξ. conſtr.
ο. ſch. 22. 10. non autem EK $\precsim$ ED, erunt [ν] EK, EF $\rho\,\epsilon$, ideoque MN $\times$ NO $=$ [ξ] EK $\times$ EF medium [ο] erit.

erit. Porro, quia AE non $\preceq$ [μ] EF, erit $MNq + NOq$ non $\preceq$ MR. Quare MO irrationalem esse bina media potentem [π] patet. π. 42. 10.
Q. E. D.

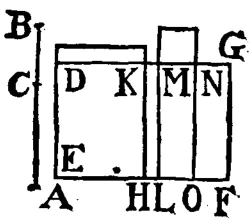
LEMMA.



Si recta linea AB *in partes inaequales* AC, CB *secetur: ipsarum partium quadrata* $ACq + CBq$ *maiora sunt rectangulo* $2\,AC \times CB$, *quod bis sub dictis partibus continetur.*

Bisecetur enim AB in D: & erit [ρ] $AC \times$ ρ. 5. 2.
$CB + CDq = ADq$. Hinc $2\,AC \times CB$ $< 2\,ADq$, &, quia $ACq + CBq$ [σ] $= 2\,ADq$ σ. 9. 2.
$+ 2\,DCq$ $ACq + CBq > 2\,AC \times CB$.
Q. E. D.

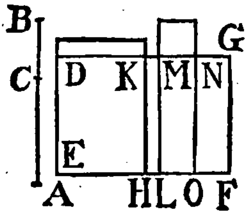
PROP. LXI. THEOR.



Quadratum eius AB, *quae est ex binis nominibus, ad rationalem* DE *applicatum, latitudinem* DG *facit ex binis nominibus primam.*

Sit AC maius CB minus nomen rectae AB.
Fiat Rgl. $DH = ACq$, & Rgl. $KL = BCq$.
Hinc erit $MF =$ [τ] $2\,AC \times CB$. Bisecetur τ. 4. 2.
MG in N, & ad ML ducatur parallela NO.
Ergo MO [υ] $= NF = AC \times CB$. Sed, quia υ. 36. 1.
[φ] AC, CB sunt ρ Є, erunt ACq, CBq ρ $\preceq$, φ. 37. 10.
ideoque $ACq + CBq$ $\preceq$ [χ] vtrique ACq, BCq. χ. 16. 10.
Quoniam ergo $ACq + CBq$, id est DL, ρ [ψ] ψ. sch. 12. 10.
est [ψ]: erit DM ρ [ω] & $\preceq$ DE. Dein quia AC, ω. 21. 10.

 CB



α. sch. 22. 10. β. 23. 10. γ. 13. 10. φ. 37. 10. δ. lem. 55. 10. ε. 1. 6. ζ. 17. 6. η. 10. 10. θ. lem. hui. ι. 18. 10. κ. 1. def. sec.

CB ρ ϵ, erit MF medium [α], & proinde MG [β] ρ non Σ ML vel DE. Quare, quum DM ρ & Σ DE, erunt DM, MG ρ ϵ [γ], & DG [φ] erit ex binis nominibus. Insuper, quia $\div$ [δ] ACq, AC $\times$ CB, CBq, ideoque $\div$ DH, MO, KL: erit DK : MN $=$ [ε] MN : KM, & ergo DK $\times$ KM $=$ [ζ] MNq $= \frac{1}{4}$ MGq. Quia vero ACq Σ CBq, & inde DH Σ KL: erit DK Σ [η] KM. Et quia ACq $+$ CBq [θ] $>$ 2 AC $\times$ CB, ideoque DL $>$ MF: patet, esse DM $>$ MG. Ergo [ι] $\sqrt{}$ (DMq $-$ MGq) Σ DM. Quare DG est ex binis nominibus prima [κ]. Q. E. D.

PROP. LXII. THEOR.

Fig. prop. LXI.

Quadratum eius AB, *quae est ex binis mediis prima, ad rationalem* DE *applicatum, latitudinem* DG *facit ex binis nominibus secundam.*

λ. 38. 10. μ. 23. 10. ν. 21. 10. ξ. sch. 14. 10. ο. 37. 10. π. 2. def. sec.

Constructis, quae in praecedenti propositione, erunt AC, CB mediae ϵ [λ], & AC $\times$ CB ρ. Ergo DL medium est, & DM ρ ϵ DE [μ]. Rursus quia MF $=$ 2 AC $\times$ CB est ρ, erit [ν] MG ρ Σ DE. Hinc [ξ] DM, MG erunt ρ ϵ: & ergo DG erit [ο] ex binis nominibus. Et quoniam, vt in antecedente, ostendetur DM $>$ MG, & $\sqrt{}$ (DMq $-$ MGq) Σ DM: erit DG ex binis nominibus [π] secunda. Q. E. D.

PROP.

PROP. LXIII. THEOR.

Quadratum eius AB, *quae est ex binis mediis secunda, ad rationalem* DE *applicatum, latitudinem* DG *facit ex binis nominibus tertiam.* Fig. prop. LXI.

Constructis iisdem, quae ante, [ρ] erunt AC, CB mediae ∈, & erit DL = ACq + CBq medium, & hinc DM ρ ∈ DE. Similiter, quia AC × CB [ς] medium est, erit MG ρ ∈ DE. Sed, quia AC ∈ CB, erit DL = ACq + CBq non ≍ [σ] MF = 2 AC × CB, & ob id DM non ≍ MG. Sunt autem DM, MG ρ. Ergo DG est ex binis nominibus. Ostendetur autem, vt antea, DM > MG, & √(DMq − MGq) ≍ DM. Ergo erit DG [τ] ex binis nominibus tertia. Q. E. D.

ρ. 39. 10.
σ. cor. 27. 10.
τ. 3. def. sec.

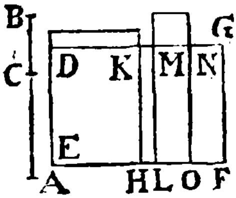
PROP. LXIV. PROBL.

Quadratum maioris AB, *ad rationalem* DE *applicatum, latitudinem* DG *facit ex binis nominibus quartam.* Fig. prop. LXI.

Construantur eadem. Iam erit [υ] AC ∉∈ CB, & ACq + CBq ideoque DL ρ, & AC × CB ideoque MF medium. Hinc DM, DE sunt ρ ≍ [φ], sed ϰ MG, DE ρ ∈. Quare DM, MG sunt [ψ] ρ ∈, & DG est [ω] ex binis nominibus. Sed, vt ante, ostendetur, esse DM > MG, & DK × KM = ¼ MGq. Quare quum ACq non ≍ CBq, & ergo DK non ≍ [α] KM, ideoque √(DMq − MGq) [β] non ≍ DM: erit DG ex binis nominibus quarta [γ]. Q.E.D.

υ. 40. 10.
φ. 21. 10.
χ. 23. 10.
ψ. sch. 14. 10.
ω. 37. 10.
α. 10. 10. & 1. 6.
β. 19. 10.
γ. 4. def. sec.

PROP. LXV. THEOR.



Quadratum eius AB, *quae rationale ac medium potest, ad rationalem* DE *applicatum, latitudinem* DG *facit ex binis nominibus quintam.*

Nam iisdem constructis, constat DL = ACq + CBq medium esse [δ], MF vero = 2 AC × CB ρ, & hinc DM ρ non ⊏ DE, & MG ⊏ DE, ideoque DM, MG ρ ϛ. Ergo, reliquis vt in praecedente ostensis, patebit, DG esse ex binis nominibus quintam. Q. E. D.

δ. 41. 10.

PROP. LXVI. THEOR.

Fig. prop. LXV.

Quadratum eius AB, *quae bina media potest, ad rationalem* DE *applicatum, latitudinem* DG *facit ex binis nominibus sextam.*

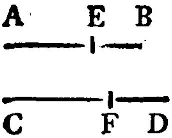
Nam quia DL, MF media [ε] sunt, & ob id DM, MG ρ ϛ & non ⊏ ipsi DE; quia praeterea DL non ⊏ [ζ] MF, & ob id DM, MG ρ ϵ, & DG ex binis nominibus; reliqua vero vt in prop. 64. ostenduntur: erit DG ex binis nominibus sexta [η]. Q. E. D.

ε. 42. 10.
ζ. 23. 10.
η. 6. def. sec.

PROP. LXVII. THEOR.

Ei AB, *quae est ex binis nominibus, longitudine commensurabilis* CD *& ipsa ex binis nominibus est ordine eadem.*

Sit



Sit enim AE maius nomen rectae AB. Ergo ϑ AE, EB sunt ρ Є. Fiat ι AB : CD = AE : CF. Ergo EB : FD = κ AB : CD. Hinc λ AE ⪯ CF, & EB ⪯ FD, & ergo μ CF, FD ρ. Et quoniam AE : CF = EB : FD, & permutando AE : EB = CF : FD, & AE Є EB : erit ν CF Є FD. Quare CD est ϑ ex binis nominibus. Iam ξ si √ (AEq − EBq) ⪯ AE, erit & √ (CFq − FDq) ⪯ CF; si vero √ (AEq − EBq) non ⪯ AE, neque √ (CFq − FDq) ⪯ CF erit; & si AE ⪯ expositae rationali, erit & ο CF ⪯ eidem; si EB ⪯ expositae ρ, erit & ο FD ⪯ eidem; si neutra AE, EB ⪯ expositae rationali, nec CF, FD ⪯ π eidem erunt. Ergo CD ex binis nominibus ordine eadem erit ipsi AB ρ. Q. E. D.

ϑ. 37. 10.
ι. 12. 6.
κ. 19. 5.
λ. 10. 10.
μ. sch. 12. 10.
ν. sch. 10. 10.
ξ. 15. 10.
ο. 12. 10.
π. 14. 10.
ρ. def. sec.

PROP. LXVIII. THEOR.

Ei AB, *quae est ex binis mediis, longitudine commensurabilis* CD *& ipsa ex binis mediis est, atque ordine eadem.*

Fig. prop. LXVII.

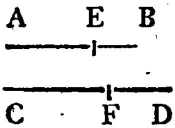
Sint AE, EB mediae in AB. Ergo σ AE Є EB. Fiat AB : CD = AE : CF. Ergo EB : FD = AB : CD = AE : CF. Hinc erit EB ⪯ FD, & AE ⪯ CF, ideoque τ CF, FD mediae erunt. Et quoniam AE : EB = CF : FD, erunt CF, FD υ mediae Є, & ob id CD ex binis mediis erit σ. Iam, quia AE : EB = CF : FD, erit AEq : AE × EB = φ CFq : CF × FD, & permutando AEq : CFq = AE × EB : CF × FD, ideoque χ AE × EB ⪯ CF × FD. Si igitur

σ. 38. & 39. 10.
τ. 24. 10.
υ. 1. sch. 10. 10.
φ. 1. 6. & 11. 5.
χ. 10. 10.

ψ. sch. 12. 10. igitur $AE \times EB$ ρ: erit & ψ $CF \times FD$ ρ: sin $AE \times EB$ medium; erit & $CF \times FD$ me-
ω. cor. 24. 10. dium ω. Ergo CD est ex binis mediis σ ordine eadem ipsi AB. Q. E. D.

PROP. LXIX. THEOR.

Maiori AB commensurabilis CD & ipsa maior est.



α. 10. 10. Factis enim iisdem, quae supra, erit $AE : CF = EB : FD = AB : CD$. Ergo α $AE \asymp CF$, & $EB \asymp FD$.
Et quia permutando $AE : AB = CF : CD$:
β. 22. 6. erit $AEq : ABq =$ β $CFq : CDq$. Simili-
γ. 24. 5. ter $EBq : ABq = FDq : CDq$. Ergo γ $AEq + EBq : ABq = CFq + FDq : CDq$, & permutando $AEq + EBq : CFq + FDq = ABq : CDq$. Ergo $AEq + FBq \asymp$ α
δ. 40. 10. $CFq + FDq$. Est autem $AEq + EBq$ ρ δ.
ε. sch. 12. 10. Ergo ε $CFq + FDq$ ρ erit. Ostenditur autem, vt in praecedente, $CF \times FD \asymp AE \times EB$. Medium vero est $AE \times EB$ δ. Ergo
ζ. cor. 24. 10. & $CF \times FD$ medium ζ erit. Denique, quia
η. 2. sch. 10. 10. AE ⊖ε δ EB, erit & η CF ⊖ε FD. Ergo δ CD maior erit. Q. E. D.

PROP. LXX. THEOR.

Fig. prop. LXIX. *Rationale ac medium potenti AB commensurabilis CD & ipsa rationale ac medium potens est.*

Constructis iisdem, similiter ostendemus CF ⊖ε FD, & $CFq + FDq \asymp AEq + EBq$,
ι. 41. 10. & $CF \times FD \asymp AE \times EB$. Iam $AEq + EBq$ ι medium

medium eſt; ergo & [κ] $CFq + FDq$. Et quia κ. cor. 24.
$AE \times EB$ [ι] ρ: erit $CF \times FD$ ρ [λ]. Et igi- 10.
tur CD erit rationale ac medium potens [ι]. λ. ſch. 12.
Q. E. D. 10.

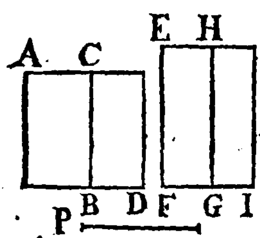
PROP. LXXI. THEOR.

Bina media potenti AB *commenſurabilis* CD Fig. prop.
& ipſa bina media potens eſt. LXIX.

Nam vt in 69. demonſtrabimus, $CF \ominus FD$, & $CFq + FDq \Sigma AEq + EBq$, & $CF \times FD \Sigma AE \times EB$. Iam quia $AEq + EBq$, & $AE \times EB$ media [μ] ſunt, & $AEq + EBq$ non Σ μ. 42. 10.
$AE \times EB$: erunt $CFq + FDq$ & $CF \times FD$
[ν] media, & erit $CFq + FDq$ non Σ [ξ] $CF \times$ ν. cor. 24.
FD. Ergo CD erit bina media potens [μ]. 10.
Q. E. D. ξ. 14. 10.

PROP. LXXII. THEOR.

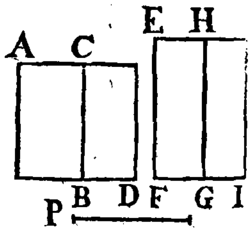
Si rationale AB *& medium* CD *componantur: quatuor irrationales fiunt, vel quae ex binis nominibus, vel quae ex binis mediis prima, vel maior, vel rationale ac medium potens.*



Sit $P = \sqrt{(AB + CD}$. Dico, P fore vnam ex quatuor dictis irrationalibus.

Caſ. 1. Sit $AB < CD$. Ad EF ρ applicetur Rgl $EFG = AB$, & Rgl. $HGI = CD$. Ergo erit EG ρ & $FG \rho \not\Sigma EF$ [ο]. HI vero erit ο. 21. 10.
medium, & GI ρ non ΣEF [π]. Eſt vero EG π. 23. 10.
non

ρ.cor.24.10. & hyp.



non $\preceq$ ρ HI, & EG : HI = FG : GI. Ergo FG non $\preceq$ GI, & idcirco FG GI sunt ῥ Є, & FI est ex binis nominibus. Et quia EG > HI : erit & FG > GI. Iam ponatur √ (FGq — GIq $\preceq$ FG : & erit FI ex binis nominibus

σ.1.def. sec. prima σ; & √ EI = √ AD = P ex binis no-

τ.55.10. minibus τ. Ponatur √ (FGq — GIq) non $\preceq$

υ.4.def. sec. FG : & erit FI ex binis nominibus quarta υ;

φ.58.10. & P maior φ.

Cas. 2. Sit AB < CD : & erit FG < GI; FI autem vt antea ex binis nominibus. Quare. posita √ (GIq — FGq) $\preceq$ GI, erit P ex

χ.56.10. binis mediis χ prima. Posita autem √ (GIq — FGq) non $\preceq$ GI, erit P rationale ac me-

ψ.59.10. dium potens ψ. Q. E. D.

PROP. LXXIII. THEOR.

Fig. prop. LXXII. *Si duo media inter se incommensurabilia* AB, CD *componantur: duae reliquae irrationales fiunt; vel ex binis mediis secunda; vel bina media potens.*

ω.23.10. Factis iisdem, quae in praecedente, ω erit nec FG nec GI $\preceq$ EF, vtraque tamen erit ῥ.

α.hyp. Et quia EG non $\preceq$ α HI, ideoque FG non

β.10.10. $\preceq$ β GI : erunt FG, GI ῥ Є, & hinc FI ex binis nominibus erit, quorum neutrum $\preceq$ rationali EF.

Cas. 1.

Caf. 1. Iam fi fuerit AB $>$ CD, ideoque FG $>$ GI, & $\sqrt{}$ (FGq $-$ GIq) ɛ FG: erit FI ex binis nominibus tertia, & hinc P [γ] ex binis γ. 57. 10.
mediis fecunda. Sin $\sqrt{}$(FGq $-$ GIq) non ɛ FG: erit P bina media [δ] potens. δ. 60. 10.

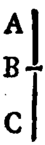
Caf. 2. Si fuerit AB $<$ CD: fimiliter demonftrabitur, P aut ex binis mediis fecundam, aut bina media potentem effe. Q.E.D.

Corollarium.

Quae ex binis nominibus, & quae poft ipfam funt (prop. 38. 39. 40. 41. 42.) irrationales, neque mediae neque inter fe eaedem funt. Quadratum enim quod fit a media, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit rationalem; quod autem fit ab ea, quae eft ex binis nominibus, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit ex binis nominibus primam: quod ab ea, quae eft ex binis mediis prima, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit ex binis nominibus fecundam; & fic deinceps (prop. 63. 64. 65. 66). Quoniam igitur dictae latitudines differunt, & a prima, & inter fefe, a prima quidem, quod rationalis fit, inter fefe vero, quod ordine non fint eaedem: conftat & ipfas irrationales inter fe differentes effe.

Principium Senariorum per detractionem.

PROP. LXXIV. THEOR.



Si a rationali AC *rationali* AB *auferatur, potentia folum commenfurabilis exiftens toti* AC: *reliqua* BC *irrationalis eft. Vocetur autem* apotome.

Nam

ε. cor. 27. 10 Nam 2 AC × AB non Σ [ε] ACq + ABq, & ob id [ζ] BCq non Σ ACq + ABq. Hinc,
ζ. 7. 2. & cor. 17. 10. quia ACq + ABq ρ [η] est, erit BCq αλ, & ergo
η. sch. 27. 10. BC αλ Q. E. D.

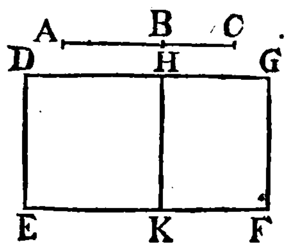
PROP. LXXV. THEOR.

Si a media AC *media* BC *auferatur, potentia solum commensurabilis existens toti* AC, *quae cum tota* AC *rationale continet: reliqua* AB *irrationalis est. Vocetur autem* mediae apotome prima.

θ. cor. 27. 10. Nam ACq + BCq [θ] non Σ 2 AC × CB, &
ι. 7. 2. & 17. 10. ergo ABq non Σ [ι] 2 AC × CB, ac ob id AB [κ]
κ. 11. def. 10. αλ. Q. E. D.

PROP. LXXVI. THEOR.

Si a media AC *media* CB *auferatur, potentia solum commensurabilis existens toti* AC, *quae cum tota* AC *medium continet: & reliqua* AB *irrationalis est. Vocetur autem* mediae apotome secunda.



Exponatur ρ DE, ad quam applicetur Rgl DEK = 2 AC × BC, & Rgl. DEF = ACq + CBq.
λ. 7. 2. Erit itaque [λ] HF = ABq. Et quia ACq
μ. 16. 10. & cor. 24. 10. + CBq medium [μ]
ν. 23. 10. est, nec non AC × CB: erunt DF, DK me-
ξ. cor. 27. 10. dia, & proinde [ν] EF, EK ρ. Sed quia AC Є
ο. 1. 6. & CB, & ob id [ξ] ACq + CBq non Σ 2 AC ×
10. 10. CB: erit [ο] FE non Σ EK. Ergo EF, EK erunt

ρ Є,

ρ ε, & ergo KF $^{\pi}$ αλ, & ipsum HF $^{\varrho}$ αλ, & ob id quoque AB $^{\sigma}$ αλ erit. Q.E.D.

π. 74. 10.
ϱ. sch. 21. 10.
σ. 11. def. 10.

PROP. LXXVII. THEOR.

A B C

Si recta linea AC *recta linea* CB *auferatur, potentia incommensurabilis existens toti* AC, *quae cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis* ACq + CBq *rationale, quod autem sub ipsis continetur* AC × CB *medium: reliqua* AB *irrationalis est. Vocetur autem* minor.

Nam quia ACq + CBq non ⊆ $^{\tau}$ 2 AC × CB, erit & ACq + CBq non ⊆ $^{\upsilon}$ ABq. Quare AB $^{\varphi}$ erit αλ. Q. E. D.

τ. sch. 13. 10.
υ. cor. 17. 10.
φ. 11. def. 10.

PROP. LXXVIII. THEOR.

A B C

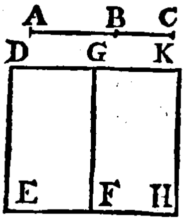
Si a recta linea AC *recta linea* CB *auferatur potentia incommensurabilis existens toti* AC, *& cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis* ACq + CBq *medium, quod autem sub ipsis bis continetur* 2 AB × CB *rationale: reliqua* AB *irrationalis est. Vocetur autem* cum rationali medium totum efficiens.

Nam quia ACq + CBq non ⊆ $^{\chi}$ 2 AC × CB: erit ABq non ⊆ $^{\psi}$ 2 AC × CB, & hinc AB $^{\omega}$ αλ. Q. E. D.

χ. sch. 13. 10.
ψ. 17. 10.
ω. 11. def. 10.

PROP.

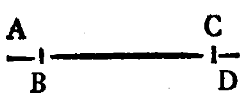
PROP. LXXIX. THEOR.



Si a recta linea AC *recta linea* CB *auferatur potentia incommensurabilis existens toti* AC, *& cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis* ACq + CBq *medium, quod autem sub ipsis bis continetur* 2 AC × CB *medium, & adhuc ipsarum quadrata* ACq + CBq *incommensurabilia ei* 2 AC + CB, *quod bis continetur sub ipsis: reliqua* AB *irrationalis est. Vocetur autem* cum medio medium totum efficiens.

α.7.2. Ad ρ DE applica Rgl. DEH = ACq +
β.23.10. CBq, & Rgl. DEF = 2 AC × CB. Ergo GH
γ.10.10.& 1.6. = [α] ABq, & EH, EF sunt ρ [β], & DH non ⊂ DF. Propterea EH non ⊂ [γ] EF, ideoque EH,
δ.74.10. EF ρ ∈ sunt; ex quo sequitur, FH [δ] esse αλ,
ε.sch.21.10. & GH [ε] αλ, & AB [ζ] αλ. Q. E. D.
ζ.11.def.10.

PROP. LXXX. THEOR.



Apotomae AB *vna tantum congruit recta linea* BC *potentia solum commensurabilis existens toti* AC.

η.74.10. Si negas: congruat alia BD, ita vt [η] AD, DB sint ρ ∈. Et quia ADq + DBq = 2 AD ×
θ.7.2. DB + [θ] ABq, ACq + CBq = 2 AC × CB + ABq: erit ADq + DBq − (ACq + CBq) = 2 AD × DB − 2 AC × CB. Sed quia
ι.sec.27.10. etiam AC, CB sunt [η] ρ ∈, & hinc [ι] ADq + DBq − (ACq + CBq) ρ: erit & 2 AD ×

DB

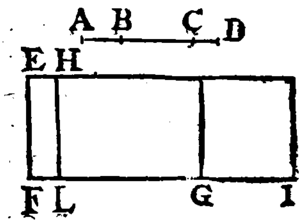
DB — 2 AC ⨯ CB ρ. Q. E. A [κ], quia AD ⨯DB & AC ⨯ CB media [λ] sunt. κ. 27. 10. λ. sch. 22. 10.

PROP. LXXXI. THEOR.

Mediae apotomae primae AB *vna tantum congruit recta linea media* BC, *potentia solum commensurabilis existens toti* AC, *& cum tota rationale continens.* Fig. prop. LXXX.

Si negas: sit AB etiam mediae AD apotome prima. Ergo erunt [μ] AD, DB mediae ϵ, & AD ⨯ DB ρ. Erit autem, vt antea, ADq + DBq — (ACq + CBq) = 2 AD ⨯ DB — 2 AC ⨯ CB. Et quia ADq + DBq medium [ν] est, nec non ACq + CBq [ξ]; rationalia autem sunt 2 AD ⨯ DB & [ο] 2 AC ⨯ CB: medium superat medium rationali [π]. Q. E. A [ρ]. μ. 75. 10. ν. cor. 24. 10. ξ. 24. 10. & cor. eiusd. ο. hyp. π. sch. 27. 10. ρ. 27. 10.

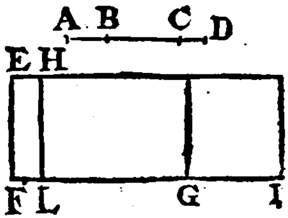
PROP. LXXXII. THEOR.



Mediae apotomae secundae AB *vna tantum congruit recta linea media* BC, *potentia solum commensurabilis existens toti* AC, *& cum tota medium continens.*

Si negas: sit AB etiam apotome secunda mediae AD, id est, sint [σ] AD, DB mediae ϵ, & medium continentes. Ad ρ EF applicetur Rgl. EFG = ACq + CBq, & auferatur Rgl. HLG = 2 AC ⨯ CB, vel EL = [τ] ABq. Ad eandem EF applicetur quoque Rgl. EFI σ. 76. 10. τ. 7. 2.

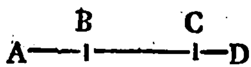
T = ADq



$= ADq + DBq$: & erit $HI =$ [τ] $2\ AD \times DB$. Et quia AC, CB mediae Є [υ] sunt: erit $ACq + CBq$ medium [φ], & ergo EG medium erit, & FG ρ [χ]. Rursus quia $AC \times CB$, & hinc etiam HG medium est: erit LG ρ [χ]. Sed quia AC Є CB: erit [ψ] $ACq + CBq$ non ≤ $2\ AC \times CB$, id est, EG non ≤ HG; & ob id FG non ≤ [ω] LG. Quare FG, LG sunt ρ Є. Proinde [α] FL est apotome rectae FG. Similiter autem demonstrabimus, esse & FL apotomen rectae FI. Q. E. A [β].

τ. 7. 2.
υ. hyp. & 24. 10.
φ. 16. 10. & cor. 24. 10.
χ. 23. 10.
ψ. cor. 27. 10.
ω. 1. 6. & 10. 10.
α. 74. 10.
β. 80. 10.

PROP. LXXXIII. THEOR.



Minori AB *una tantum congruit recta linea* BC, *potentia incommensurabilis existens toti* AC, *& cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis* $ACq + CBq$ *rationale, quod autem bis sub ipsis continetur* $2\ AC \times CB$ *medium.*

γ. 77. 10. Si negas: congruat BD. Ergo [γ] AD ӨЄ DB, & $ADq + DBq$ ρ, & $2\ AD \times DB$ medium erit. Et quia $ADq + DBq =$ [δ] $2\ AD \times DB + ABq$, & $ACq + CBq = 2\ AC \times CB + ABq$: erit $ADq + DBq - (ACq + CBq) = 2\ AD \times DB - 2\ AC \times CB$. Ergo medium $2\ AD \times DB$ superabit medium $2\ AC \times CB$ rationali [ε]. Q. E. A [ζ].

δ. 7. 2.
ε. sch. 27. 10.
ζ. 27. 10.

PROP.

PROP. LXXXIV. THEOR.

Ei AB, *quae cum rationali medium totum facit, una tantum congruit recta linea* BC, *potentia incommensurabilis existens toti* AC, *& cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis* ACq + CBq *medium, quod autem bis sub ipsis continetur* 2 AC × CB *rationale.* Fig. prop. LXXXIII.

Si negas: congruat quoque BD. Ergo [a] ADq + DBq medium, & 2 AD × DB ρ erit. Et quia, vt antea, ADq + DBq − (ACq + CBq) = 2 AD × DB − 2 AC × CB = [b] ρ: medium ADq + DBq superabit medium ACq + CBq rationali. Q. E. A [c].

a. 78. 10.
b. sch. 27. 10.
c. 27. 10.

PROP. LXXXV. THEOR.

Ei AB, quae cum medio medium totum facit, una tantum congruit recta linea BC, *potentia incommensurabilis existens toti* AC, *& cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis* ACq + CBq *medium, quod autem bis sub ipsis continetur* 2 AC × CB *medium, & adhuc incommensurabile composito ex quadratis ipsarum.* Fig. prop. LXXX.

Si negas: congruat etiam BD, ita vt AD ⪤ DB, & medium 2 AD × DB non ∑ medio ADq + DBq. Fiant eadem, quae in propositione LXXXII; & simili ratione, ac ibi, demonstrabitur, eandem FL esse apotomen duarum FG, FI. Q. E. A [a].

a. 80. 10.

DEFINITIONES TERTIAE.

1. Expoſita rationali & apotoma, ſi quidem tota plus poſſit, quam congruens, quadrato rectae lineae ſibi commenſurabilis longitudine; ſitque tota expoſitae rationali longitudine commenſurabilis: vocetur *apotome prima.*

2. Si vero congruens ſit longitudine commenſurabilis expoſitae rationali; & tota plus poſſit, quam congruens, quadrato rectae lineae ſibi commenſurabilis longitudine: vocetur *apotome ſecunda.*

3. Quod ſi neutra ſit longitudine commenſurabilis expoſitae rationali; & tota plus poſſit, quam congruens, quadrato rectae lineae ſibi commenſurabilis longitudine: dicatur *apotome tertia.*

4. Rurſus ſi tota plus poſſit, quam congruens, quadrato rectae lineae ſibi incommenſurabilis longitudine: ſi quidem tota ſit longitudine commenſurabilis expoſitae rationali, vocetur *apotome quarta.*

5. Si vero congruens, vocetur *apotome quinta;*

6. Quod ſi neutra, dicatur *apotome ſexta.*

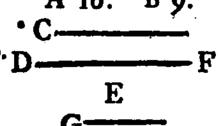
PROP. LXXXVI. PROBL.

Inuenire primam apotomen.

A 16. B 9.

λ. cor. 1. lem. 30. 10.

μ. cor. 6. 10.



Expoſitae rationali C fiat $\asymp$ DF. Capiantur λ duo numeri A, B quadrati, ita vt A — B non ſit quadratus, & fiat μ A : A — B

A — B = DFq : FEq. Dico, DE esse apotomen primam.

Nam quia DF ≾ C: erit DF ρ. Et quia DFq ad EFq rationem numeri ad numerum, sed non quadrati ad quadratum, habet: erit ν EF ϵ DF; & ergo erunt EF, DF ρ ϵ, & DE apotome ξ erit. Sit autem G = √(DFq — FEq). Iam quia A : A — B = DFq : EFq, erit conuertendo A : B = DFq : Gq, & ob id ο G = √(DFq — FEq) ≾ DF. Ergo DE est apotome prima π. Q. E. F.

ν v. cor. 11. 10.
ξ 74. 10.
ο 9. 10.
π 1. def. tert.

PROP. LXXXVII. PROBL.

Inuenire secundam apotomen. Fig. prop. LXXXVI.

Expositae ρ C sit ≾ EF, & exponantur numeri A, B quadrati, ita vt A — B non sit quadratus, & fiat A — B : A = EFq : FDq. Erit DE apotome secunda.

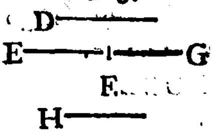
Nam, quia EF ≾ C, erit EF ρ; &, vt antea, ostendemus, DE apotomen esse, atque √(DFq — FEq) ≾ DF. Quare patet, DE esse apotomen secundam ϱ. Q. E. F.

ϱ 2. def. tert.

PROP. LXXXVIII. PROBL.

Inuenire tertiam apotomen.

A 16. B 12.
C 8.



Exponantur ρ D, & tres numeri A, B, C non habentes inter se rationem quadrati ad quadratum; A vero ad A — B habeat talem rationem. Fiat C : A = Dq : EGq, & A : B = EGq : GFq. EF erit apotome tertia.

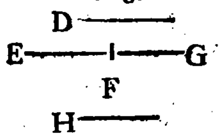
 Nam

σ. 6. 10.

τ. cor. 11. 10.

υ. 74. 10.

A 16. B 12. C 8.



Nam quia EGq ≤ [σ] Dq: erit EG ρ. Hinc, quia GF € [τ] EG, erunt EG, GF ρ €, & EF erit [υ] apotome. Deinde quia ex aequo C: B = Dq: GFq, non erit GF

φ. 9. 10.

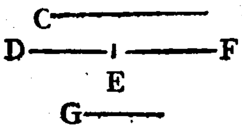
≤ D [φ]. Similiter quia C: A = Dq: EGq, nec EG ≤ D. Sit autem Hq = EGq − GFq. Et quia conuertendo A: A − B = EGq: Hq, erit H id est √(EGq − GFq) ≤ [φ] EG. Ex quibus omnibus sequitur, EF esse apotomen quartam [χ]. Q.E.F.

χ. 4. def. tert.

PROP. LXXXIX. PROBL.

Inuenire quartam apotomen.

A 6. B 10.



Exponantur duo numeri A, B tales, vt A + B ad neutrum rationem quadrati ad quadratum habeat. Expositae ρ C fiat ≤ DF, & A + B: B = DFq: FEq: erit DE quaesita.

ψ. 6. def. 10.

ω. 6. 10. & sch. 12. 10.

α. cor. 11. 10.

β. 74. 10.

γ. 9. 10.

δ. 4. def. tert.

Quia enim DF ρ [ψ] est: erit & FE ρ [ω]; & ob id DF, FE erunt ρ € [ω]. Erit ergo DE [β] apotome. Sit Gq = DFq − FEq. Et quia est conuertendo A + B: A = DFq: Gq: erit G id est √(DFq − FEq) non ≤ [γ] DF. Ergo DE erit apotome [δ] quarta. Q.E.F.

PROP. XC. PROBL.

Inuenire quintam apotomen.

Fig. prop. LXXXIX.

Exponantur duo numeri A, B, ita vt A + B ad neutrum habeat rationem quadrati ad quadratum.

dratum. Expositae ρ C fiat ≍ EF, & B : A + B = FEq : FDq. Erit DE quaesita.

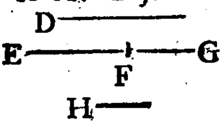
Quia enim, vt in praecedente, patet DE apotomen esse, & $\surd$(DFq − FEq) non ≍ DF; EF autem ≍ ρ C facta est: erit DE apotome quinta [ε]. Q.E.F. ε. 5. def. tert.

PROP. XCI. PROBL.

Inuenire sextam apotomen.

Exponantur ρ D, & tres numeri A, B, C, tales vt nec inter se rationem numeri quadrati ad quadratum habeant, nec A ad A − B eam habeat rationem; & fiat C : A = D q : EGq, & vt A : B = EGq : GFq: erit EF quaesita.

A 12. B 5. C 10.



Ostendetur enim, vt in prop. 88. EF apotomen, & nec EG nec GF ipsi D ≍ esse. Sit autem H = $\surd$(EGq − GFq). Atqui quum sit A : B = EGq : GFq, & ergo conuertendo A : A − B = EGq : Hq: patet etiam, non [ζ] esse H id est $\surd$(EGq − GFq) ≍ EG. Ergo EF erit [η] apotome sexta. Q.E.F. ζ. 9. 10. η. 6. def. tert.

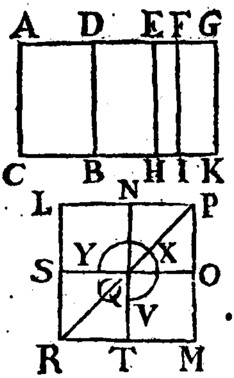
Scholium.

Sed & expeditius sex dictarum linearum inuentionem ostendere licet. Si enim oporteat inuenire primam apotomen: exponatur [θ] ex binis nominibus prima AB, cuius maius nomen sit AC, & fiat CD = CB. Ergo [ι] AC, CB hoc est AC, CD sunt ρ ⊖, & $\surd$(ACq − CDq) ≍ AC, & AC expositae rationali ≍ est; & igitur [κ] AD est apotome prima. Similiter θ. 49. 10. ι. 1. def. sec. κ. 1. def. tert.

militer & reliquas apotomas inueniemus eas, quæ sunt ex binis nominibus eiusdem ordinis exponentes.

PROP. XCII. THEOR.

Si spatium AB *continetur sub rationali* AC *& apotoma prima* AD: *recta linea spatium* AB *potens apotome est.*



λ. 74. 10. Sit ipsi AD congruens
μ. 1. def. tert. DG. Ergo λ AG, GD sunt ρ €, & AG Σ μ ρ AC, & $\sqrt{(AGq - GDq)}$ Σ AG. Ad AG applicetur Rgl. $= \frac{1}{4}$ DGq $=$ DEq deficiens figura quadrata. Secet hoc ipsam AH in partes AF,
ν. 18. 10. FG. Ergo AF Σ ν FG,
ξ. 16. 10. & ob id AG Σ ξ tam AF quam FG. Quare tam
ο. 12. 10. AF quam FG Σ ο AC erit ρ π, & ergo AI, FK
π. 6. def. 6. ρ erunt ρ. Deinde quia DE $= \frac{1}{2}$ EG: erunt
ρ. 20. 10. DE, EG Σ DG. Sed DG ρ non Σ μ AC: ergo DE, EG, AC erunt ρ €, & ergo DH, EK
σ. sch. 22. 10. media σ. Fiat quadratum LM $=$ AI, & auferatur quadratum NO $=$ FK, communem cum toto angulum LPM habens. Erunt ergo LM,
τ. 26. 6. NO circa eandem τ diametrum RQP. Descri-
υ. 1. cor. 4. 2. pta ergo reliqua figura, erit & ST quadratum υ.
φ. lem. 18. 10. Iam, quia φ AF $\times$ FG $=$ EDq $=$ EGq, erit
χ. 17. 6. AF : EG $=$ χ EG : FG, & ob id $\div$ AI, EK, FK.
ψ. lem. 55. 10. Sed sunt quoque ψ $\div$ LM, MN, NO. Quare MN ($=$ LO) $=$ EK $=$ DH, & proinde DK

$=$ gnom.

≐ gnom. VXY + NO. Sed AK ≐ LM + NO. Ergo AB ≐ ST ≐ LNq. Denique quia AI, FK ρ sunt: erunt &, quae illa possunt, LP, PN ρ α. Sed quia LO ≐ EK medium non ⋦ α NO, & propterea LP non ⋦ α PN: erunt LP, PN ρ ∈, α & ergo LN id est √ AB apotome erit. Q. E. D.

α. sch. 12. 10. 1. 6. & 10. 10.

PROP. XCIII. THEOR.

Si spatium AB *contineatur sub rationali* AC *& apotoma secunda* AD: *recta linea spatium* AB *potens mediae est apotome prima.*

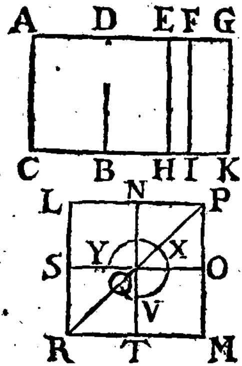
Fig. prop. XCII.

Sit enim ipsi AD congruens DG. Ergo β AG, GD sunt ρ ∈, & DG est ⋦ AC, & √(AGq − GDq) ⋦ AG, & AG non ⋦ AC. Iam factis iisdem, quae in propositione praecedente: erit tam AF quam FG ⋦ AG, sed non ⋦ γ AC, & proinde AF, AC erunt ρ ∈, item FG, AC; & igitur δ AI, FK, & iis aequalia LM, NO media erunt, & LP, PN mediae. Et quia AF: FG ≐ AI: FK ≐ LM: NO, AF vero ⋦ FG ε: erunt PL, PN mediae ∈ ζ. Denique quum ob EG ⋦ DG ⋦ ρ AC, sit EK ρ; &, vt antea, demonstretur LO ≐ EK: patet, LP, PN rationale continere. Quare LN id est √ AB erit mediae apotome prima η. Q. E. D.

β. 2. def. tert.
γ. 14. 10.
δ. sch. 22. 10.
ε. 18. 10.
ζ. 10. 10.
η. 75. 10.

PROP. XCIV. THEOR.

Si spatium AB *contineatur sub rationali* AC *& apotome tertia* AD: *recta linea spatium potens mediae est apotome secunda.*



Nam primo, vt in praecedente propositione, ostendetur, LP, PN esse medias ∈. Deinde quia DG ρ est non ≍ ϑ AC, EG vero ≍ ι DG; erunt EG, AC ρ ∈, & EK κ medium erit, & igitur ι quoque LO. Quare quum LP, PN medium contineant: erit LN id est √ AB mediae apotome secunda λ. Q.E.D.

ϑ. 3. def. tert.
ι. constr.
κ. sch. 22. 10.
λ. 76. 10.

PROP. XCV. THEOR.

Fig. prop. XCIV. *Si spatium* AB *contineatur sub rationali* AC, *& apotoma quarta* AD: *recta linea spatium* AB *potens minor est.*

μ. 4. def. tert. Sit enim DG congruens ipsi AD: & erunt μ AG, GD ρ ∈, eritque AG ≍ AC, sed DG non ≍ AC, nec √(AGq — GDq) ≍ AG. Construantur eadem quae in praecedentibus: & patet, AK ν esse ρ, DK vero medium ξ, & AF non ≍ ο FG, & ergo AI non ≍ π FK. Sed ρ AK = LPq + PNq, & ½ DK = EK = LO = LP × PN, & AI = LPq, & FK = PNq. Quare LP ⌣ PN, & LPq + PNq est ρ, 2 LP × PN autem medium; & proinde σ LN id est √ AB minor. Q.E.D.

ν. 20. 10.
ξ. sch. 22. 10.
ο. 19. 10.
π. 10. 10.
ρ. constr.
σ. 77. 10.

PROP. XCVI. THEOR.

Fig. prop. XCIV. *Si spatium* AB *contineatur sub rationali* AC *& apotoma quinta* AD: *recta linea spatium* AB

AB potens est quae cum rationali medium totum efficit.

Sit enim DG congruens ipsi AD; & erunt [τ] AG, GD ρ Є, eritque GD ⋢ AC, sed AG non ⋢ AC, & √(AGq — GDq) non ⋢ AG. Constructis iisdem, quae antea, eodem modo ostendetur, DK vel EK esse ρ, AK vero medium, & AI non ⋢ FK. Quare erit LP ⋢ PN, & LPq + PNq medium, 2 LP × PN vero ρ; & ob id LN id est √AB, quae [υ] cum rationali medium totum efficit. Q. E. D.

τ. 5. def. tert.

υ. 78. 10.

PROP. XCVII. THEOR.

Si spatium AB *contineatur sub rationali* AC *& apotoma sexta* AD: *recta linea spatium* AB *potens est, quae cum medio medium totum efficit.*

Fig. prop. XCIV.

Sit iterum ipsi AD congruens DG: & erunt [υ] AG, GD ρ Є, & √(AG—GDq) non ⋢ AG, & nec AG nec GD ⋢ AC. Constructis iisdem, quae antea, similiter demonstrabimus tam LPq + PNq, quam 2 LP × PN esse medium & LP ⋢ PN. Sed praeterea, quia AG non ⋢ EG, & ergo AK [φ] non ⋢ EK: erit LPq + PNq non ⋢ 2 LP × PN. Ergo LN id est √AB est ea, quae cum medio medium totum efficit [χ]. Q. E. D.

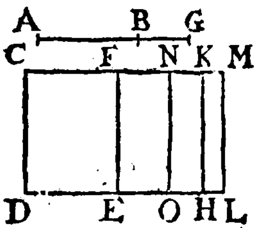
υ. 6. def. tert.

φ. 10. 10.

χ. 79. 10.

PROP.

PROP. XCVIII. THEOR.



Quadratum apotomae AB *ad rationalem* CD *applicatum latitudinem* CF *facit apotomen primam.*

ψ.74. 10. Sit enim BG ipsi AB congruens. Ergo AG, GB sunt ψ $\rho\,\in$. Fiat Rgl. CH $=$ AGq, & Rgl. KL $=$ BGq. Er-
α. 7. 2. go, quia CE $=$ ABq, erit FL $=$ α 2 AG $\times$ GB. Biseca FM in N, & duc NO parallelam ad CD; ac erit FO $=$ NL $=$ AG $\times$ GB.
α. sch. 12. 10. & 16. 10. Iam quia DM $=$ AGq $+$ GBq est ρ α, erit CM ρ β Σ CD. Et quia FL $=$ 2 AG $\times$ GB
β. 21. 10. medium γ est, erit FM ρ non Σ CD δ. Porro
γ. sch. 22. 10. quia AGq $+$ GBq non Σ ε 2 AG $\times$ GB, ideoque
δ. 23. 10. que CL non Σ FL: erit FM non Σ ζ CM, &
ε. cor. 27. 10. proinde FM, CM erunt $\rho\,\in$, ac CF apoto-
ζ. 10. 10. me ψ erit. Praeterea quum sit $\div\div$ η CH, NL,
η. lem. 55. 10. KL, ideoque $\div\div$ CK, NM, KM: erit CK $\times$ KM $=$ NMq $= \frac{1}{4}$ FMq. Sed quia CH Σ KL, est & CK Σ KM ζ. Quare $\sqrt{}$(CMq $-$
θ. 18. 10. MFq) Σ CM θ. Ergo CF est apotome prima. Q.E.D.

PROP. XCIX. THEOR.

Fig. prop. XCVIII. *Quadratum mediae apotomae primae* AB *ad rationalem* CD *applicatum latitudinem facit* CF *apotomen secundam.*

ι. 75. 10. Sit iterum BG congruens ipsi AB: ι & erunt AG, GB mediae $\in$, & AG $\times$ GB ρ. Ergo factis

factis, quae in propof. praec. erunt CH, KL, CL media, fed NL, FL ρ; ideoque CM erit ρ non ≾ CD[κ], FM autem[λ] κ. 23. 10.
ρ ≾ CD. Reliqua autem vt fupra oftendentur. λ. 21. 10.
Ergo CF eft apotome fecunda. Q. E. D.

PROP. C. THEOR.

Quadratum mediae fecundae apotomae AB *ad rationalem* CD *applicatum latitudinem* CF *facit apotomen tertiam.* Fig. prop. XCVIII.

Factis iisdem, quae antea: quoniam[μ] AG, GB mediae Є funt, & AG × GB medium eft, erunt CL & FL media, ideoque erit tam CM, quam FM ρ non ≾ CD, & erunt CM, FM ρ Є. Oftenfis ergo reliquis, quae in praecedentibus, patebit, CF effe apotomen tertiam. Q. E. D. μ. 76. 10.

PROP. CI. THEOR.

Quadratum minoris AB *ad rationalem* CD *applicatum latitudinem* CF *facit apotomen quartam.* Fig. prop. XCVIII.

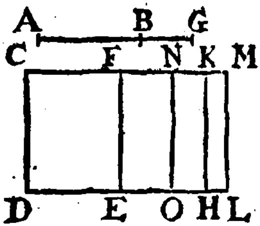
Iisdem conftructis: quia[ν] AG ϴЄ GB, & AGq + GBq ρ, & AG × GB medium, eodem modo, quo in prop. 98. patet, effe CM ≾ CD, & CF apotomen, & CK × KM = $\frac{1}{4}$ EMq, fed, ob AG ϴЄ GB, CK non ≾ KM, ideoque[ξ] √ (CMq — MFq) non ≾ CM. Ergo CF eft apotome quarta. Q. E. D. ν. 77. 10. ξ. 19. 10.

PROP. CII. THEOR.

Quadratum eius A B, *quae cum rationali medium totum efficit, ad rationalem* CD *applicatum*

plicatum latitudinem CF *facit apotomen quintam.*

s. 78. 10.



Conſtructis iisdem; quia s AG, ⟗ GB, & AGq + GBq medium, & AG × GB ρ, eadem ratione ac antea oſtendetur, eſſe CM ρ non ≍ CD, ſed FM ρ ≍ CD, & CF apotomen quintam. Q. E. D.

PROP. CIII. THEOR.

Fig. prop. CII.

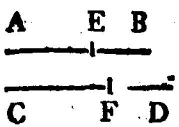
Quadratum eius AB, *quae cum medio medium totum efficit, ad rationalem* CD *applicatum latitudinem* CF *facit apotomen ſextam.*

r. 79. 10. Conſtructis enim iisdem; quia r AG ⟗ GB, & AGq + GBq, AG × GB media, & AG × GB non ≍ AGq + GBq: patet, vt antea,

ς. 23. 10. CM, FM ς eſſe ρ non ≍ CD, atque, reliquis ſimiliter vt antea oſtenſis, CF eſſe apotomen ſextam. Q. E. D.

PROP. CIV. THEOR.

Recta linea AE, *apotomae* CF *longitudine commenſurabilis, & ipſa apotome eſt, atque ordine eadem.*



t. 74. 10. Sit enim ipſi CF congruens FD: ergo t CD, DF ρ ⟗. Fiat EB : FD = AE : CF.

v. 12. 5. Erit ergo v AB : CD = EB :

x. 10. 10. FD = AE : CF; & proinde AB ≍ CD x, & EB

EB ≤ FD. Quare AB, BE erunt ρ φ, &, quia CD ∈ DF, erunt AB, BE ρ ∈ κ, ideoque AE apotome erit τ. Secundo quia AB : CD = EB : FD, & permutando AB : EB = CD : FD : si √(CDq — CFq) ≤ vel non ≤ CD, erit ψ & √(ABq — BEq) ≤ vel non ≤ AB. Et si CD ≤ vel non ≤ expositae rationali, erit ω & AB ≤ vel non ≤ eidem; nec non, si DF ≤ vel non ≤ ρ expositae, erit ω BE ≤ vel non ≤ eidem. Ergo cuius ordinis apotome est CF, eiusdem est α quoque apotome AE. Q. E. D.

φ. sch. 12. 10.
κ. 1. sch. 10. 10.
ψ. 15. 10.
ω. 12. 14. 10.
α. def. tert.

PROP. CV. THEOR.

Recta linea AE, *mediae apotomae* CF *commensurabilis, & ipsa mediae apotome est, atque ordine eadem.*

Fig. prop. CIV.

Factis iisdem, quae in praecedente, quia β CD, DF sunt mediae ∈, similiter demonstrabitur, AB ≤ CD, & AB, BE esse medias ∈ γ. Ergo AE est mediae β apotome. Deinde quia CDq : CD × DF = δ CD : DF = AB : BE = δ ABq : AB × BE, & ergo permutando CDq : ABq = CD × DF : AB × BE : erit ε CD × DF ≤ AB × BE. Quare si CD × DF est ρ vel medium, erit ζ & AB × BE ρ vel medium. Hinc patet β, esse AE mediae apotomen eiusdem ordinis, cuius est CF. Q. E. D.

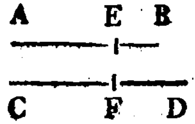
β. 75. 76. 10.
γ. 24. 10. & 1. sch. 10. 10.
δ. 1. 6.
ε. 10. 10.
ζ. sch. 12. 10. cor. 24. 10.

PROP. CVI. THEOR.

Recta linea AE, *minori* CF *commensurabilis, & ipsa minor est.*

Fiant

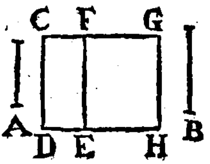
μ. 77. 10.
ϑ. 2. sch.
10. 10.



Fiant eadem, quae prius: & quia CD, DF ӨЄ [ν], erunt & [ϑ] AB, BE ӨЄ. Et quoniam CD : DF = AB : BE, ideoque CDq : DFq = [ι] ABq : BEq & componendo ac permutando CDq + DFq : ABq + BEq = DFq : BEq; DF autem $<$ BE: erit CDq + DFq $<$ ABq + BEq. Quare, quum CDq + DFq sit ρ [κ], erit & ABq + BEq ρ [κ]. Denique quia vt in praec. patet esse CD × DF $<$ AB × BE, & CD × DF medium [ν] est: est & AB × BE medium [λ]. Ergo AE minor [μ] est. Q. E. D.

ι. 22. 6.
κ. sch. 12. 10.
λ. cor. 24. 10.

Aliter.



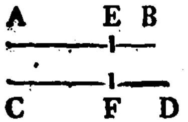
μ. 101. 10.

Sit minori A $<$ B. Dico, B minorem esse.

Ad expositam rationalem CD applicetur Rgl. CE = Aq. Erit itaque [μ] CF apotome quarta. Fiat Rgl. FH = Bq. Igitur, quia A $<$ B, erit CE $<$ [ν] FH, & CF $<$ [ξ] FG. Hinc FG erit [ο] apotome quarta, & √FH = B erit [π] minor. Q. E. D.

ν. cor. 9. 10.
ξ. 10. 10.
ο. 104. 10.
π. 95. 10.

PROP. CVII. THEOR.



Recta linea AE commensurabilis ei CF, quae cum rationali medium totum efficit, & ipsa cum rationali medium totum efficiens est.

Constructis iisdem, quae antea, similiter demonstrabitur AB : BE = CD : DF, & ABq + BEq

$BEq \leq CDq + DFq$, & $AB \times BE \leq CD \times DF$. Iam [ρ] $CDq + DFq$ est medium, & $CD \times DF$ ρ, & CD ⋲ DF. Ergo AB ⋲ [σ] BE, & $ABq + BEq$ est [τ] medium, & $AB \times BE$ ρ [υ] ideoque AE est cum rationali medium totum efficiens [ρ]. Q. E. D. ρ. 78. 10. σ. 2. sch. 10. τ. sch. 24. 10. υ. sch. 12. 10.

Aliter.

Factis iisdem, quae in demonstratione altera praecedentis, erit CF apotome [φ] quinta, ideoque χ & FG. Hinc, ob FE ρ, erit √ FH = B cum rationali medium totum efficiens [ψ]. Q. E. D. φ. 102. 10. χ. 104. 10. ψ. 96. 10.

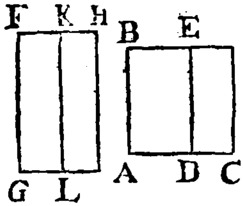
PROP. CVIII. THEOR.

Recta linea AE, *commensurabilis ei* CF, *quae cum media medium totum efficit, & ipsa cum medio medium totum efficiens est.* Fig. prop. CVII.

Constructis iisdem quae supra, erit iterum $AB : EB = CD : DF$, & $ABq + BEq \leq CDq + DFq$, & $AB \times BE \leq CD \times DF$. Iam [α] CD ⋲ DF, & $CDq + DFq$ medium, & $CD \times DF$ medium, & $CD \times DF$ non $\leq CDq + DFq$. Ergo AB ⋲ BE [α], & tam $ABq + BEq$ quam $AB \times BE$ medium [β], & $ABq + BEq$ non $\leq$ [γ] $AB \times BE$, ideoque AE est [α] cum medio medium totum efficiens. Q. E. D. α. 79. 10. α. 2. sch. 10. β. sch. 24. 10. γ. 14. 10.

PROP. CIX. THEOR.

Medio BD *de rationali* BC *detracto, recta linea, quae reliquum spatium* EC *potest, una ex duabus irrationalibus fit, vel apotome, vel minor.*



Expofita enim ρ FG, fiat Rgl. GH = BC, & Rgl. GK = BD. Ergo LH ≐ EC, & GH ρ, & GK medium. Quare

δ. 21. 10. [δ] erit FH ρ ≍ FG, & FK

ε. 23. 10. ρ [ε] non ≍ FG, ideoque

ζ. 74. 10. FH, FK ρ ∈, ac ob id KH apotome [ζ], & ipsi congruens FK. Iam fi fit √ (FHq — FKq)

η. 92. 10. ≍ FH, erit KH apotome prima, & [η] √ HL = √ EC apotome. Si non fit √ (FHq — FKq)

θ. 95. 10. ≍ FH, erit KH apotome quarta, ideoque [θ] √ EC minor. Q.E.D.

PROP. CX. THEOR.

Fig. prop. praec. *Rationali* BD *de medio* BC *detracto, aliae duae irrationales fiunt, vel mediae apotome prima, vel cum rationali medium totum efficiens.*

Constructis iisdem, quae prius, erit FH ρ non ≍ FG, & FK ρ ≍ FG. Erunt ergo iterum FH, FK ρ ∈, & KH apotome erit, ipsique congruens FK. Iam fi fuerit √ (FHq — FKq) ≍ FH: erit KH apotome

ι. 93. 10. fecunda, & √ LH id eft √ EC mediae [ι] apotome prima. Si fuerit √ (FHq — FKq) non ≍ FH: erit KH apotome quinta, & ergo √

κ. 96. 10. EC erit [κ] cum rationali medium totum efficiens. Q.E.D.

PROP. CXI. THEOR.

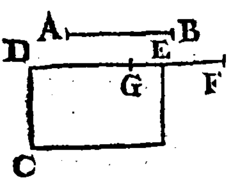
Fig. prop. CIX. *Medio* BD *de medio* BC *detracto, quod fit incommenfurabile toti, reliquae duae irrationales fiunt, vel mediae apotome fecunda, vel cum medio medium totum efficiens.*

Quia

Quia enim GH non ε FL, erit FH non ε FK. Quare FH, FK erunt ρ Є, & ergo erit FH apotome, & ipsi congruens KF. Nunc si $\surd$ (FHq — FKq) ε FH: quia FH, FK non ε [λ] FG, erit KH apoto- λ. 23. 10.
me tertia, & hinc $\surd$ LH id est $\surd$ EC me- μ. 94. 10.
diae [μ] apotome secunda. Si $\surd$ (FHq — FKq) non ε FH: erit KH apotome sexta, ideoque $\surd$ EC cum medio medium totum efficiens [ν]. Q. E. D. ν. 97. 10.

PROP. CXII. THEOR.

Apotome AB *non est eadem quae ex binis nominibus.*



Si negas: exponatur ρ CD, & fiat Rgl. CE = ABq. Ergo DE erit [ξ] apo- ξ. 98. 10.
tome prima. Sit ipsi congruens EF. Ergo DF, FE ρ Є [ο], & DF ε CD. Sed ο. 1. def. tert.
quia AB etiam ponitur ex binis nominibus: erit DE ex binis nominibus [π] prima. Sit eius π. 61. 10.
maius nomen DG. Ergo [ρ] DG, GE ρ Є, & [ρ] ρ. 1. def. sec.
DG ε CD. Hinc erit [σ] DF ε DG, & er- σ. 12. 10.
go [τ] FG ε DF, & FG ρ [υ]. Verum quia DF τ. cor. 16. 10.
non ε FE, erit FG non [φ] ε FE, & hinc erunt FG, FE ρ Є, ac GE apotome [χ] erit. Sed υ. sch. 12. 10.
est quoque GE ρ. Q. E. A. φ. 14. 10. χ. 74. 10.

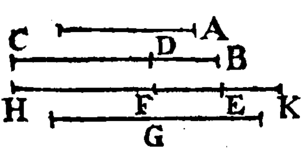
Corollarium.

Apotome, & quae ipsam consequuntur, (prop. 75. 76. 77. 78. 79.) irrationales, neque mediae neque inter se eaedem sunt. Quadratum enim, quod a media fit, ad rationalem applicatum, latitudinem facit rationalem. Quod autem ab apotoma fit, ad ratio-

rationalem applicatum, latitudinem facit apotomen primam; quod fit a mediae apotome prima, apotomen secundam; & sic deinceps (prop. 100. 101. 102. 103.). Quoniam igitur dictae latitudines differunt tum a prima tum inter sese; a prima quidem, quod illa rationalis sit, inter se vero, quod ordine non sint eaedem: manifestum est, & ipsas hasce irrationales inter se differentes esse.

Et quoniam ostensum est, apotomen non esse eandem, quae ex binis nominibus; & quadrata quidem apotomae & earum, quae sequuntur apotomen, ad rationalem applicata, latitudines facere apotomas; quadrata vero eius, quae ex binis nominibus est, & hanc sequentium, ad rationalem applicata facere latitudines, quae ex binis nominibus (prop. 61. 62 —— 66.): ergo rectae lineae, quae sequuntur apotomen, & quae sequuntur eam quae ex binis nominibus est, inter se diuersae erunt, ita vt omnes irrationales sint numero tredecim. 1. *Media.* 2. *Quae ex binis nominibus.* 3. *Quae ex binis mediis prima.* 4. *Quae ex binis mediis secunda.* 5. *Maior.* 6. *Rationale ac medium potens.* 7. *Bina media potens.* 8. *Apotome.* 9. *Mediae apotome prima.* 10. *Mediae apotome secunda.* 11. *Minor.* 12. *Cum rationali medium totum efficiens.* 13. *Cum medio medium totum efficiens.*

PROP. CXIII. THEOR.



Quadratum rationalis A, *ad eam quae ex binis nominibus* BC *applicatum, latitudinem* EF *facit apotomen, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus* CD, DB *eius, quae est ex binis nominibus.* & *in eadem ratione;* & *adhuc apotome* EF, *quae fit, eundem habet ordinem,*

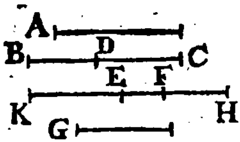
ordinem, quem ea BC *quae est ex binis nominibus.*

Sit enim etiam BD $\times$ G = Aq. Ergo ψ ψ. 16. 6.
BC : DB = G : EF, ideoque G > EF. Fiat EH = G. Quare CB : BD = HE : EF, & diuidendo CD : DB = HF : FE. Fiat HF : FE = FK : KE. Est ergo HK : KF = ω FK : KE ω. 12. 5.
= HF : FE = CD : DB. Iam quia CDq ⊻ α DBq, est & HKq ⊻ KFq. Et quo- α. 37. 10.
niam β HKq : KFq = HK : KE, erit HK ⊻ KE, β. 2. cor. 20.
ideoque & γ HE ⊻ EK. Et quia BD $\times$ HE 6.
= Aq est ῥ, nec non BD ῥ δ: erit & HE ῥ δ γ. 16. 16.
⊻ BD, & ob id & EK ῥ ⊻ BD ac FK ⊻ CD ε. δ. 21. 10.
Deinde quia CD ε ∈ DB, erit & ζ FK ∈ KE, & ε. 10. 10.
ergo FK, KE erunt ῥ ∈, & η FE erit apoto- ζ. 1. sch. 10. 10
me. Sed CD maius est nomen ipsius CB. η. 74. 10.
Iam si $\sqrt{}$ (CDq — DBq) ⊻ vel non ⊻ CD, erit & $\sqrt{}$ (FKq — KEq) ⊻ vel non ⊻ FK θ; & si θ. 15. 10.
CD fuerit ⊻ vel non ⊻ ῥ expositae, erit & ι ι. 12. 14. 10.
FK ⊻ vel non ⊻ eidem; atque si DB ⊻ vel non ⊻ eidem ῥ, erit & EK ⊻ vel non ⊻ eidem. Ergo FE apotome erit, cuius nomina FK, KE commensurabilia sunt nominibus CD, DB eius &c. Q. E. D.

PROP. CXIV. THEOR.

Quadratum rationalis A, *ad apotomen* BD *applicatum, latitudinem* KH *facit eam, quae ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt apotomae* BD *nominibus* BC, CD *& in eadem ratione; & adhuc quae ex binis nominibus fit* KH *eundem habet ordinem, quem ipsa* BD *apotome.*

 Nam



Nam quia DC congruens est ipsi BD, erunt [κ] BC, CD ρ ∈. Fiat BC × G = Aq: & erit BC × G ρ,

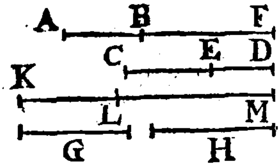
κ. 74. 10.

λ. 21. 10. ac ideo G ρ [λ] ≍ BC, ac praeterea CB: BD [μ]
μ. 16. 6. = KH: G, ideoque KH > [ν] G. Ponatur
ν. 14. 5. KE = G: ergo KE ρ ≍ BC, & CB: BD
= HK: KE, & conuertendo igitur BC:
ξ. 10. 6. CD = KH: HE. Fiat KH: HE = [ξ] HF:
ο. 19. 5. FE. Igitur KF: FH = [ο] KH: HE =
π. 1. sch. 10. HF: FE = BC: CD. Hinc KF ∈ [π] FH, &
10. KFq: FHq = [ρ] KF: FE, & ergo KF ≍ [σ] FE,
ρ. 2. cor. 20. 6. hinc & KE ≍ [τ] KF, & KF ρ ≍ BC [υ], &
σ. 10. 10. proinde etiam FH ρ ≍ CD [φ]. Quum er-
τ. cor. 16. 10. go sint KF, FH ρ ∈: erit KH [χ] ex binis
υ. 12. 10. & sch. eiusd. nominibus, quae erunt ≍ ipsius BD nominibus BC, CD, & in eadem ratione. Denique
φ. sch. 12. 10 & 10. 10. patet, si √(BCq — CDq) ≍ vel non ≍ BC, esse & [ψ] √(KFq — FHq) ≍ vel non ≍ KF, & si BC, CD fuerint ≍ vel non
χ. 37. 10. ≍ expositae ρ, fore & KF, FH ≍ vel non
ψ. 15. 10. ≍ eidem ρ; & ergo [ω] KH esse ex binis no-
ω. def. sec. & tert. minibus eiusdem ordinis, cuius est apotome BD. Q. E. D.

PROP. CXV. THEOR.

Si spatium contineatur sub apotoma AB *&* *ea* CD *quae ex binis nominibus, cuius nomina* CE, ED *commensurabilia sunt nominibus* AF, FB *apotomae* AB, *& in eadem ratione: recta linea* G *spatium potens est rationalis.*

Exponatur



Exponatur ρ H, & fiat CD × KL = Hq. Apotome ergo est [α] KL, cuius nomina KM, ML $\preceq$ CE, ED & in eadem ratione. Est ergo AF : FB = [β] KM : ML, & permutando AF : KM = FB : ML, & ergo [γ] AB : KL = AF : KM. Et quia [δ] CE, ED $\preceq$ ipsis AF, FB, ideoque & AF $\preceq$ [ε] KM: erit AB $\preceq$ [ζ] KL. Hinc quia AB : KL = AB × CD : KL × CD = Gq : Hq: erit [ζ] Gq $\preceq$ Hq, & ob id [η] G ρ. Q. E. D.

α. 113. 10.
β. 11. 5.
γ. 19. 5.
δ. hyp.
ε. 12. 10.
ζ. 10. 10.
η. sch. 12. 10.

PROP. CXVI. THEOR.

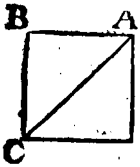
A media A infinitae irrationales fiunt; & nulla alicui antecedentium est eadem.

A ———
B ———
C ———
D ———

Exponatur ρ B, & sit Cq = A × B. Erit ergo [θ] Cq μ, & ipsa C μ, neque vlli hactenus commemoratarum eadem. Nullius enim antecedentium quadratum ad ρ applicatum latitudinem facit mediam. Rursus sit Dq = B × C: & erit iterum [θ] D μ, nulli tamen antecedentium eadem; quia nullius earundem quadratum ad ρ applicatum talem [ι] facit latitudinem, qualis est C. Similiter & eodem ordine in infinitum protracto manifestum est, a media infinitas irrationales fieri, nulli antecedentium easdem. Q. E. D.

θ. sch. 21. 10.
ι. per dem.

PROP. CXVII. THEOR.



Propositum sit nobis ostendere, in quadratis figuris diametrum AC lateri AB incommensurabilem esse longitudine.

E--H--F

G---

Si negas: sit $AC \underline{\Sigma} AB$. Ergo habebit AC ad AB rationem numeri ϰ ad numerum. Habeat quam EF ad G; & sint EF, G minimi in data ratione. Non ergo vnitas erit EF: quia, quum $AC > AB$, foret vnitas μ maior quam numerus, si EF vnitas esset. Quare EF numerus sit necesse est. Et quia $ACq : ABq$ ν $= EF^2 : G^2$, & $ACq =$ ξ $2\,ABq$: erit $EF^2 =$ ο $2\,G^2$, & ergo EF^2 est par, & EF par π. Iam quia EF, G minimi sunt in data ratione, & ergo inter se primi; EF autem par est: nequit G par esse; si enim ita, vtrumque EF, G idem numerus 2 metiretur. Ergo G erit impar. Verum ipsius EF paris dimidium sit EH: & erit $EF^2 =$ ρ $4\,EH^2 = 2\,G^2$, ideoque $G^2 =$ σ $2\,EH^2$, & G par. Erat autem idem G & impar. Q. E. A.

ϰ. 5. 10.
λ. 35. 7.
μ. 14. 5.
ν. 1. cor. 20. 6. & 11. 8.
ξ. 47. 1.
ο. 6. def 7.
π. 2. sch 29. 9.
ρ. 11. 8.
σ. 7. ax. 1.

Aliter.

Si dicas $AC \underline{\Sigma} AB$: sint rursus EF, G numeri minimi in ratione $AC : AB$ & erunt ergo EF, G primi inter se τ. Iam nequit G esse vnitas. Nam quia $ACq : ABq = EF^2 : G^2$; & $ACq = 2\,ABq$: si G esset vnitas, foret $EF^2 = 2$, quod fieri nequit. Sed quia G est numerus, & $EF^2 = 2\,G^2$: G numerus υ metietur numerum EF, & ideo EF ac G non erunt primi inter se. Erant autem & primi inter se. Q.E.A.

τ. 24. 7.
υ. 14. 8.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTORVM
LIBER XI.

DEFINITIONES.

1. *Solidum* eſt, quod longitudinem & latitudinem & craſſitudinem habet.

2. *Solidi* autem *terminus* eſt ſuperficies.

3. *Recta linea ad planum rectum* eſt, quando ad rectas omnes lineas, quae ipſam contingunt & in ſubiecto plano iacent, rectos angulos efficiat.

4. *Planum ad planum rectum* eſt, quando rectae lineae, quae communi planorum ſectioni ad rectos angulos & in vno plano ducuntur, alteri plano ad angulos rectos fuerint.

5. *Rectae lineae ad planum inclinatio* eſt, quando a ſublimi termino rectae illius lineae ad planum acta perpendiculari, a puncto facto ad terminum lineae, qui eſt in plano, recta linea iuncta fuerit, angulus nempe acutus, qui iuncta linea & inſiſtente continetur.

6. *Plani ad planum inclinatio* eſt angulus acutus rectis lineis contentus, quae ad rectos angulos communi planorum ſectioni ad vnum ipſius punctum in vtroque planorum ducuntur.

7. *Planum ad planum ſimiliter inclinari* dicitur *atque alterum ad alterum*, quando dicti

 incli-

inclinationem anguli inter ſe fuerint aequales.

8. *Plana parallela* ſunt, quae inter ſe non conueniunt.

9. *Similes figurae ſolidae* ſunt, quae ſimilibus planis ac multitudine aequalibus continentur.

10. *Aequales* vero *&* *ſimiles figurae ſolidae* ſunt, quae ſimilibus planis, multitudine ſimul & magnitudine aequalibus, continentur.

11. *Solidus angulus* eſt plurium, quam duarum, linearum, quae ſeſe contingant, & non in eadem ſint ſuperficie, ad omnes lineas inclinatio. *Aliter.* Solidus angulus eſt, qui pluribus, quam duobus, planis angulis, in eodem non iacentibus plano, atque ad vnum punctum conſtitutis, comprehenditur.

12. *Pyramis* eſt figura ſolida planis comprehenſa, quae ab vno plano ad vnum punctum conſtituitur.

13. *Priſma* eſt figura ſolida planis comprehenſa, quorum aduerſa duo aequalia & ſimilia parallela ſunt, reliqua vero parallelogramma.

14. *Sphaera* eſt figura quidem comprehenſa, quum circa manentem diametrum ſemicirculus conuertitur, donec, in eundem locum, a quo moueri coeperat, rurſus reſtituatur.

15. *Axis* vero *ſphaerae* eſt manens illa recta linea, circa quam ſemicirculus conuertitur.

16. *Cen-*

16. *Centrum* autem *sphaerae* est idem illud, quod & semicirculi.

17. *Diameter* vero *sphaerae* est recta linea quaedam per centrum ducta, & ex vtraque parte a sphaerae superficie terminata.

18. *Conus* est figura quidem comprehensa, quum rectanguli trianguli manente vno latere eorum, quae circa rectum angulum sunt, triangulum ipsum conuertitur, donec in eundem locum, a quo moueri coeperat, rursus restituatur. Verum si manens recta linea aequalis fuerit reliquo lateri, quod circa rectum angulum conuertitur, *conus orthogonius* erit: si vero minor, *amblygonius*: & si maior, *oxygonius*,

19. *Axis* autem *coni* est manens illa recta linea, circa quam triangulum conuertitur.

20. *Basis* vero circulus a conuersa recta linea descriptus.

21. *Cylindrus* est figura comprehensa, quando rectanguli parallelogrammi manente vno latere eorum, quae circa rectum angulum sunt, parallelogrammum ipsum conuertitur, donec in eundem locum, a quo moueri coeperat, rursus restituatur.

22. *Axis* vero *cylindri* est manens illa recta linea, circa quam parallelogrammum conuertitur.

23. *Bases* autem sunt circuli, qui a duobus ex aduerso circumactis lateribus describuntur.

24. *Similes*

24. *Similes coni & cylindri* ſunt, quorum & axes & baſium diametri proportionales ſunt.

25. *Cubus* eſt figura ſolida, ſex quadratis aequalibus contenta.

26. *Tetraedrum* eſt figura ſolida, quatuor triangulis aequalibus & aequilateris comprehenſa.

27. *Octaedrum* eſt figura ſolida, octo triangulis aequalibus & aequilateris comprehenſa.

28. *Dodecaedrum* eſt figura ſolida, quae duodecim pentagonis aequalibus & aequilateris & aequiangulis continetur.

29. *Icoſaedrum* eſt figura ſolida, quae viginti triangulis aequalibus & aequilateris comprehenditur.

* 30. *Parallelepipedum* eſt figura ſolida, ſex planis, quorum quae ex aduerſo parallela ſunt, contenta.

* 31. *Solida figura in ſolida figura* dicitur *inſcribi*, quando omnes anguli figurae inſcriptae conſtituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis figurae, cui inſcribitur.

* 32. *Solida figura ſolidae figurae* viciſſim *circumſcribi* dicitur, quando vel anguli, vel latera vel denique plana figurae circumſcriptae tangunt omnes angulos figurae, circum quam deſcribitur.

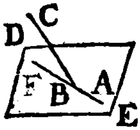
* AXIOMA.

Anguli ſolidi, qui ſub aeque multis aequalibus ac eodem ordine poſitis angulis planis continentur, aequales ſunt.

PROP.

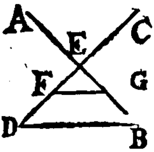
PROP. I. THEOR.

Rectae lineae ABC *pars quaedam non est in subiecto plano* DE, *quaedam vero in sublimi.*



Si enim fieri potest, sit pars AB in plano DE, pars BC autem extra. Iam, quia omnis recta in dato plano in directum continuari potest $^{\alpha}$, sit BF in α.2.post.1.
directum ipsi AB, in plano DE. Ergo rectae ABF, ABC segmentum commune BA β.12.ax.1.
habebunt. Q. E. A $^{\beta}$.

PROP. II. THEOR.

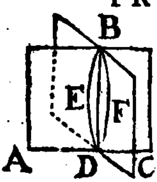


Si duae rectae lineae AB, CD *se inuicem secent, in vno sint plano. Item, omne triangulum* DEB *in vno plano consistit*

1. Si △ DEB non sit in vno plano: erit pars eius, velut EFG, in alio plano, quam reliqua; ideoque rectarum ED, EB vniuscuiusuis pars erit in plano subiecto, pars in sublimi. Q. E. A $^{\gamma}$. γ.1.11.

2. Ergo quum ED, EB sint in eodem plano, CD autem sit $^{\gamma}$ in plano, in quo est ED, & AB in plano $^{\gamma}$ illo, in quo est EB: necesse est, vt AB, CD sint in eodem plano. Q. E. D.

PROP. III. THEOR.



Si duo plana AB, BC *se inuicem secent: communis ipsorum sectio* DB *est linea recta.*

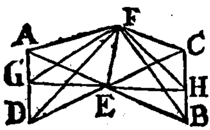
Si enim linea DB, in qua plana se inuicem secant, non sit recta: ducatur a puncto B ad D

in

δ.1. post. 1. in plano AB alia recta [δ] BED, in plano autem BC recta BFD; & recta BFD cum recta BED spatium comprehendet.

ε. 12. ax. 1. Q. E. A [ε].

PROP. IV. THEOR.



Si recta linea EF *duabus rectis lineis* AB, CD, *se inuicem secantibus in communi sectione* E *ad rectos angulos insistat, etiam ducto per ipsas* AB, CD *plano ad rectos angulos erit.*

Sumatur AE = EB = CE = ED, & iungantur AD, CB, & per E ducatur in plano ACBD vtcunque recta GEH, & a quouis puncto F in sublimi ducantur rectae FA,

ζ. 4. 1. FG, FD, FB, FH, FC. Iam quia in Δis

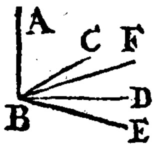
η. 26. 1. AED, CEB est [ζ] AD = CB, & ang. EAD = EBC: erit [η] in Δis AEG, HEB latus AG = HB, & GE = EH. Praeterea quum in Δis AEF, BEF sit [ζ] FA = FB, & in Δis FED, FEC pari ratione [ζ] FD = FC: erit in Δis AFD, BFC ang. FAD = [θ] FBC. Hinc ob AG = HB, & FA = FB, erit [ζ] FG = FH; &

θ. 8. 1. ob id in Δis GEF, HFE erunt [θ] anguli ad E aequales, id est recti. Similiter ostenditur EF ad omnes alias rectas in plano ACBD per E ductas angulos rectos efficere. Er-

ι. 3. def. 11. go [ι] FE plano per AB, CD ad rectos angulos est. Q. E. D.

PROP.

PROP. V. THEOR.

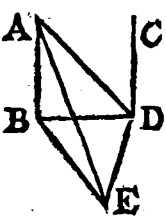


Si recta linea AB *tribus rectis lineis*, BC, BD, BE, *sese tangentibus, in communi sectione* B *ad rectos angulos insistat: tres illae rectae lineae* BC, BD, BE *in uno plano erunt.*

Si fieri potest, sint BD, BE quidem in subiecto plano, BC vero in sublimi. Planum per AB, BC producatur, donec subiectum secet in ϰ recta BF. Iam quia AB ipsis BD, BE ad rectos insistit, erit eadem ad planum subiectum recta λ, ideoque ipsi BF, quae etiam in plano subiecto est, ad rectum μ angulum insistet. Sed ponitur quoque ang. ABC rectus. Ergo ang. ABF = ABC. Sed hi anguli sunt in eodem plano per AB, BC. Ergo totus ABF aequalis est parti ABC. Q. E. A.

ϰ. 3. 11.
λ. 4. 11.
μ. 3. def. 11.

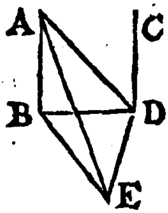
PROP. VI. THEOR.



Si duae rectae lineae AB, CD *eidem plano ad rectos angulos fuerint, parallelae erunt ipsae rectae lineae* AB, CD.

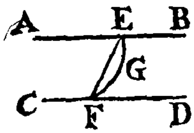
Insistant AB, CD subiecto plano in punctis B, D. Iunctae BD ducatur in eodem plano perpendicularis DE, quae fiat = AB, & iungantur BE, AE, AD. Et quia AB est ad planum subiectum recta: erunt ang. ABD, ABE recti ν. Similiter ang. CDB, CDE recti erunt. Quum itaque ang. ABD = ξ BDE, & AB = DE,

ν. 3. def. 11.
ξ. 10. ax. 1.



DE, & BD communis: erit
π. 4. 1. AD = π BE. Ergo in Δis
ρ. 8. 1. BAE, DAE erit ang. ABE = ρ
EDA; ideoque EDA rectus
erit. Sunt autem & ang. EDC,
EDB recti. Ergo rectae CD,
DA, DB erunt σ in vno plano.
σ. 5. 11. Sed AB est in eodem plano ς, in quo sunt
ς. 2. 11. DA, DB. Ergo AB, CD sunt in eodem
plano. Quare, quum ang. ABD, CDB
τ. 28. 1. recti sint, ipsae AB, CD parallelae τ sunt.
Q. E. D.

PROP. VII. THEOR.



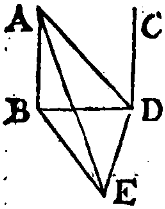
Si duae rectae lineae AB, CD *parallelae sint; sumantur autem in vtraque ipsarum quaelibet puncta* E, F: *quae dicta puncta coniungit recta linea in eodem cum parallelis plano erit.*

Si fieri potest, sit recta EGF in sublimi.
Ducatur per eam planum vtcunque, quod
υ. 3. 11. secabit planum subiectum in recta υ EF. Ergo duae rectae EF, EGF spatium comprehendent. Q. E. A.

PROP. VIII. THEOR.

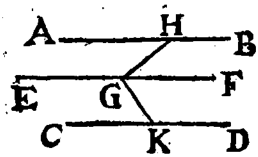
Si fuerint duae rectae lineae AB, CD *parallelae, atque altera earum* AB *plano alicui sit ad rectos angulos: & reliqua* CD *quoque eidem plano ad rectos angulos erit.*

Insistant AB, CD plano subiecto in punctis B, D. Iungatur BD. Ergo AB, BD, DC erunt



erunt [φ] in vno plano. Duca- φ. 7. 11.
tur in subiecto plano ipsi BD ad
rectos DE, & fiat = AB, iun-
ganturque AD, AE, EB. Quia
AB recta est ad subiectum pla-
num: erunt ang. ABD, ABE re-
cti [χ]. Sed ang. ABD + CDB [ψ] χ. 3. def. 11.
= 2 rectis. Ergo CDB erit rectus. Et quia DE ψ. 29. 1.
= AB & BD communis, & ang. EDB = ABD:
erit BE [ω] = AD. Hinc in △is DAE, EAB ω. 4. 1.
erit ang. EDA [α] = ABE = recto. Sed & α. 8. 1.
ang. EDB rectus est. Ergo [β] ED est ad pla- β. 4. 11.
num per BD, DA recta. Iam quia in plano
per BD, DA sunt ipsae AB [γ], BD: patet, CD γ. 2. 11.
in eodem plano esse. Itaque & ang. EDC
rectus [χ] erit. Sed & ang. CDB rectus erat.
Ergo [β] CD est ad planum subiectum recta.
Q. E. D.

PROP: IX. THEOR.

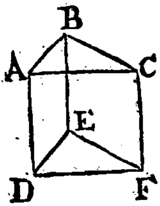


Quae AB, CD eidem rectae lineae EF sunt parallelae, sed non in eodem cum illa plano, etiam inter se parallelae sunt.

Sume in EF punctum G, ex quo duc ad EF
in plano per AB, EF perpendicularem GH,
in plano autem per EF, CD perpendicularem
GK. Quia ergo ang. EGH, EGK recti sunt:
erit [δ] EF ad planum per HG, GK recta. Ita- δ. 4. 11.
que AB, CD ad idem planum rectae [ε] erunt, ε. 8. 11.
ideoque [ζ] parallelae. Q. E. D. ζ. 6. 11.

X PROP.

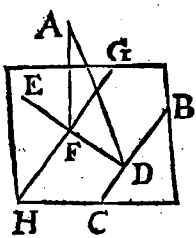
PROP. X. THEOR.



Si duae rectae lineae sese tangentes AB, BC *duabus rectis lineis sese tangentibus* DE, EF *sint parallelae, non autem in eodem plano: illae aequales angulos* ABC, DEF *continebunt.*

Sume AB = DE, & BC = EF, & iunge
ϑ. 33. 1. AD, BE, CF, AC, DF. Ergo erunt ϑ AD, CF aequales & parallelae ipsi BE, & ideo
ϑ. 9. 11. AD, CF inter se aequales & parallelae ϑ erunt.
ι. 8. 1. Quare & AC = ι DF, & ang. ABC = ι DEF.
Q.E.D.

PROP. XI. PROBL.



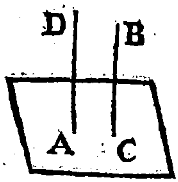
A dato puncto A *in sublimi ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.*

In subiecto plano duc vtcunque rectam BC, & ab
κ. 12. 1. & 2. 11. A ad BC κ demitte perpendicularem AD. Si AD ad planum subiectum perpendicularis est: factum iam erit propositum. Sin minus: duc ex D in subiecto plano ad BC perpendicularem DE, ad quam in plano EDA ex A κ demitte perpendicularem AF. Haec erit desiderata.

Nam in subiecto plano ducatur per F ipsi
λ. constr. BC parallela GH. Et quia λ ang. BDA, BDE
μ. 4. 11. recti sunt, ideoque BC in planum EDA μ recta

cta est: erit & GH ad idem planum recta, & ergo ang. GFA ξ rectus. Sed est etiam ang. DFA λ rectus. Ergo recta AF est ad planum subiectum μ perpendicularis. Q. E. F. ν. 8. 11. ξ. 3. def. 11.

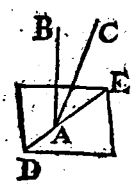
PROP. XII. PROBL.



Dato plano, a puncto A, *quod in ipso datum est, ad rectos angulos rectam lineam constituere.*

Intelligatur punctum B sublime, a quo ad datum planum agatur ο perpendicularis BC, & huic parallela π AD ducatur, quae erit plano dato recta ρ. Q. E. F. ο. 11. 11. π. 31. 1. ρ. 8. 11.

PROP. XIII. THEOR.

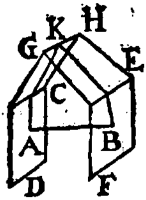


Dato plano a puncto A, *quod in ipso est, duae rectae lineae* AB, AC *ad rectos angulos non constituentur ab eadem parte.*

Si enim AB, AC simul essent perpendiculares plano A: ducto per BA, AC plano, quod planum A secet in recta DAE, forent ang. BAD & CAD σ recti, ideoque aequales; pars & totum. Q. E. A. σ. 3. def. 11.

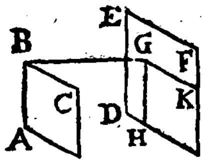
PROP. XIV. THEOR.

Ad quae plana CD, EF *eadem recta linea* AB *est perpendicularis, ea parallela sunt.*



Si negas: pone illa producta se secare in recta G H, in qua sumto puncto K, iunge KA, KB. Ergo KAB erit triangulum. Et quia AB est in planum D H perpendicularis, in
τ.3.def.11. quo ducta est AK: erit τ ang. BAK rectus. Similiter ang. ABK rectus
υ.17.1. erit. Q. E. A υ.

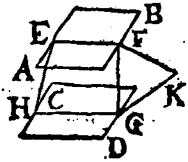
PROP. XV. THEOR.



Si duae rectae lineae AB, BC sese tangentes duabus rectis lineis DE, EF sese tangentibus sint parallelae, non autem in eodem plano: & quae per ipsas transeunt plana AC, DF parallela erunt.

Duc enim ex B in planum DF perpendicularem BG, & per G ipsi ED parallelam HG,
φ.3.def.11. ipsi EF vero parallelam GK. Recti ergo φ erunt ang. BGH, BGK. Et quia AB, BG ipsis
χ.9.11. GH, HK sunt χ parallelae: erunt & ang. GBA,
ψ.29.1. GBC recti ψ. Ergo GB ad planum AC etiam
ω.4.11. ω recta erit, & hinc plana AC, DF erunt
α.14.11. parallela α. Q. E. D.

PROP. XVI. THEOR.

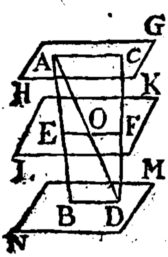


Si duo plana parallela AB, CD ab aliquo plano EFGH secentur: communes ipsorum sectiones FE, GH sunt etiam parallelae.

Si

Si non ſint parallelae: productae alicubi conuenient, vt in K. Sed quia recta EFK eſt in [β] plano AB: erit & punctum K in plano AB. Similiter idem K erit & in plano CD. Ergo plana AB, CD producta conuenient, nec ergo parallela [γ] erunt; contra hyp. β. 1. 11. γ. 8. def. 11.

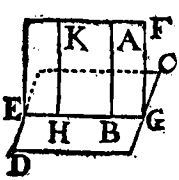
PROP. XVII. THEOR.



Si duae rectae lineae AB, CD *a parallelis planis* GH, KL, MN *ſecentur, in eadem ratione ſecabuntur* (AE : EB = CF : FD).

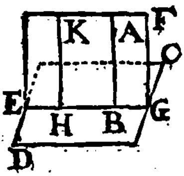
Iungantur AC, BD, AD. Occurrat autem AD plano KL in O, & iungantur OE, OF. Ergo quia plana parallela KL, MN a plano EODB ſecantur: erunt [δ] EO, BD parallelae. Eadem ratione OF, AC parallelae erunt. Ergo AE : EB = [ε] AO : OD = [ε] CF : FD. Q. E. D. δ. 16. 11. ε. 2. 6.

PROP. XVIII. THEOR.



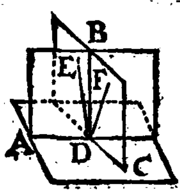
Si recta linea AB *plano alicui* CD *ſit ad rectos angulos: & omnia quae per ipſam* AB *tranſeunt plana* EF *eidem plano* CD *ad rectos angulos erunt.*

Sit planorum CD, EF communis ſectio recta EBG, & ex eius puncto quouis H in plano EF ducatur ipſi GE perpendicularis HK. Iam quia & ang. ABH rectus [ζ] eſt; erunt [η] AB, KH ζ. 3. def. 11. η. 28. 1.



9. 8. 11. KH parallelae; & hinc KH erit [9] ad planum CD recta. Sed & item & de reliquis ostendetur, quae vt KH in plano EF ad ipsam EG perpendiculares duci possunt. Ergo planum EF plano CD re-
ι 4. def. 11. ctum [ι] erit. Similiter demonstrabimus, quod-uis aliud planum per AB ductum plano CD rectum fore. Q.E.D.

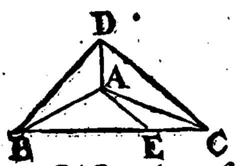
PROP. XIX. THEOR.



Si duo plana se inuicem secantia AB, BC *plano alicui* AC *sint ad rectos angulos: communis ipsorum sectio* BD *eidem plano* AC *ad rectos angulos erit.*

Si negas: duc ex in D plano quidem AB ad AD perpendicularem DE, in plano autem BC perpendicularem DF ad DC. Sunt autem AD, DC communes sectiones planorum AB, BC cum plano AC. Ergo duae rectae ED,
κ 4. def. 11. FD ad angulos rectos [κ] constitutae erunt plano AC ab vno puncto D & ab vna parte.
λ. 13. 11. Q.E.A [λ].

PROP. XX. THEOR.



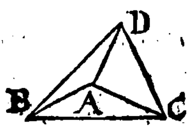
Si solidus angulus A *sub tribus angulis planis* BAC, CAD, BAD *contineatur: duo quilibet* CAD, BAD *reliquo* BAC *maiores sunt, quomodocunque sumti.*

Cas. 1.

Cas. 1. Si ang. BAC, CAD, BAD aequales sunt: euidens est propositio.

Cas. 2. Sed si non sint aequales: sit eorum maximus BAC. In plano per BA, AC fiat ang. BAD = BAE. & capiatur AE = AD, & per E ducatur recta secans ipsas AB, AC in B, C, & iungantur BD, DC. Erit ergo in △is BAD, BAE basis BD = [μ] BE. μ. 4. 1.
Et quia BD + DC [ν] > BC, erit DC [ξ] > EC, ν. 20. 1.
& ergo in △is ADC, AEC ang. DAC > [ο] ξ. 5. ax. 1.
EAC. Quare DAC + BAD > [π] BAC. ο. 25. 1.
Q. E. D. π. 4. ax. 1.

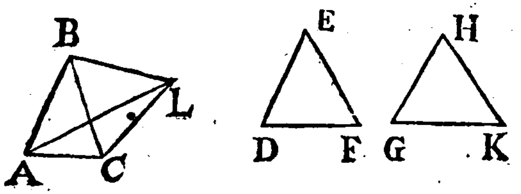
PROP. XXI. THEOR.



Omnis solidus angulus A sub minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur.

In rectis enim, angulos planos BAC, CAD, DAB continentibus, sumtis quibusuis punctis B, C, D, iungantur BC, CD, DB. Quia ergo solidus ang. B continetur sub 3 planis ang. ABC, ABD, DBC: erunt ang. ABC + ABD [ρ] ρ. 20. 11.
> DBC. Eadem ratione in solido ang. C erunt BCA + ACD > BCD, & in solido ang. D erunt CDA + ADB > CDB. Ergo ABC + ABD + BCA + ACD + CDA + ADB > DBC + BCD + CDB id est [σ] 2 rectis. σ. 32. 1.
Sunt autem ang. ABC + ABD + BCA + ACD + CDA + ADB + BAC + CAD + DAB = [σ] 6 rectis. Ergo ang. BAC + CAD + DAB < [τ] 4 rectis. Q. E. D. τ. 5. ax. 1.

PROP. XXII. THEOR.



Si sint tres anguli plani A B C, E, H, *quorum duo reliquo sunt maiores quomodocunque sumti; contineant autem ipsos rectae lineae aequales* AB, BC, DE, EF, GH, HK: *fieri potest, vt ex iis* AC, DF, GK, *quae rectas aequales coniungunt, triangulum constituatur.*

υ. 4. I. *Cas.* 1. Si ang. ABC = E = H: erit υ AC = DF = GK, ideoque duae quaeuis ipsarum tertia maiores erunt, vt ergo ex ipsis triangulum constitui queat. Q. E. D.

Cas. 2. Si praedicti anguli non fuerint aequales inter se: fiat ang. CBL = E, & BL = AB, & iungantur AL, LC. Est itaque CL

φ. 24. I. = υ DF, & CL + AC > χ AL. Iam quia

χ. 20. I. ang. E + ABC > H, & E = CBL, patet

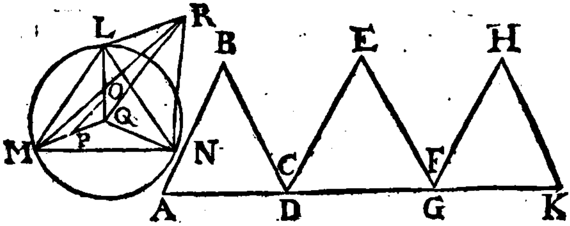
ψ. 5. ax. I. esse ψ ang. LBA > H, ideoque AL > φ GK. Ergo DF + AC > AL > GK. Similiter ostendentur AC + GK > DF, & DF + GK > AC. Quum itaque ipsarum AC, DF, GK duae quaeuis tertia sint

ω. 22. I. maiores: triangulum ω ex iisdem construi potest. Q. E. D.

PROP.

PROP. XXIII. PROBL.

Ex tribus angulis planis ABC, DEF, GHK, *quorum duo reliquo sunt maiores quomodocunque sumti, solidum angulum constituere: oportet autem tres angulos quatuor rectis esse minores.*



Abscinde aequales BA, BC, ED, EF, HG, HK, & iunge AC, DF, GK, ex quibus construe △ LMN ita, vt LM = AC, & MN = DF, & LN = GK, quod semper [α] fieri poterit. Dein △o LMN circumscribe [β] circulum, & eius plano ex centro Q ad rectos angulos constitue [γ] rectam, in qua cape [δ] QR = √(ABq — LQq), & iunge RL, RM, RN. Factum erit.

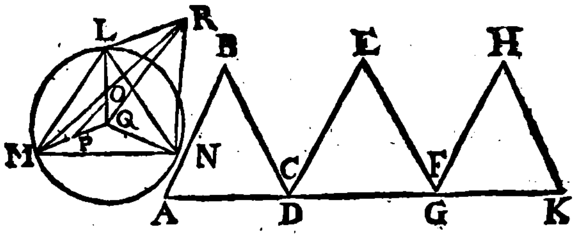
α. 22. 11. β. 5. 4. γ. 12. 11. δ. sch. 47. 1.

Primo demonstrabimus, semper esse AB > LQ.

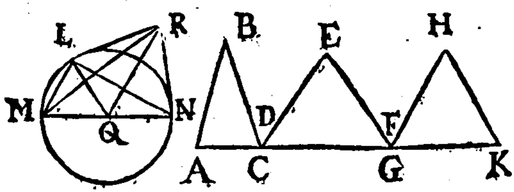
Cas. 1. Cadat centrum Q intra △ LMN. Iam si non sit AB > QL: erit AB = QL aut < QL. Sit AB = QL. Iunge QM, QN. Quia ergo BC = AB = QL = QM, & [ε] AC = LM: erit ang. B = [ζ] LQM. Similiter patet, esse ang. E = MQN, & ang. H = LQN. Ergo erit B + E + H = LQM + MQN +

ε. constr. ζ. 8. 1.

 LQN

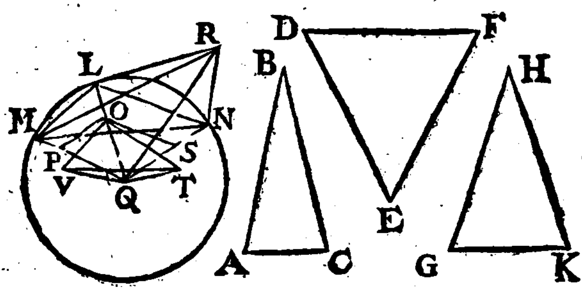


μ. 2. sch. LQN = μ 4 rectis; contra hypothesin. Sit
15. 1. vero AB < QL. Cape QO = QP = AB, & iunge OP. Erit ergo OL = PM, & QO:
θ. 2. 6. OL = QP : PM. Quare θ OP, LM erunt parallelae, & ergo in aequiangulis △ LMQ,
ι. 4. 6. OPQ erit ι QL : LM = QO : OP. Sed
κ. 14. 5. QL > QO. Ergo LM κ > OP. Quia igi-
λ. 25. 1. tur & AC > OP, erit λ ang. B > OQP. Eadem ratione ang. E > MQN, & H > LQN. Ergo erit B + E + H > 4 rectis; contra hyp. Igitur quia AB nec = nec < QL: erit AB > LQ.



Cas. 2. Cadat centrum Q in latus MN. Iam si dicas AB = QL: erunt DE = EF = AB = QL = QM = QN, ideoque DE + EF
μ. 20. 1. = MN = DF. Q. E. A μ. Si dicas AB < LQ: erunt DE + EF < DF. Q. E. A μ. Ergo AB > LQ.

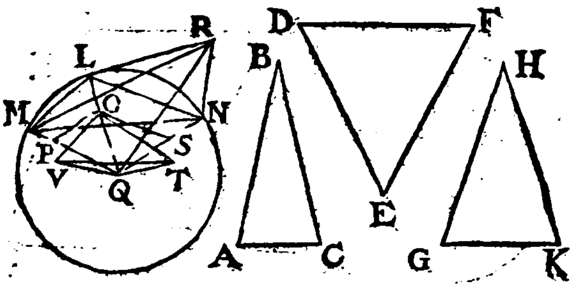
Cas.



Caf. 3. Sit centrum Q extra △ LMN. Iam
si dicas AB = LQ: erit ang. B [ζ] = LQM, ζ. 8. 1.
& H = LQN. Ergo B + H = MQN = [ζ]
E; contra hyp. Si dicas AB < QL: fac
QO = AB, & QP = BC, QS = HK, & iun-
ge OP, OS. Ergo QO = QP = QS, & vti
in Casu 1. demonstrabitur LM > OP, & LN
> OS. Ergo AC > OP, & GK > OS, & ang.
B [λ] > OQP, & ang. H > OQS. Fiat ang. λ. 25. 1.
OQT = H, & OQV = B, & QT = QV =
QO, & iungantur OV, OT, TV. Erit itaque
[ν] OV = AC = LM, & OT = GK = LN. ν. 4. 1.
Sed quia ang. POQ > VOQ, & SOQ > TOQ:
erit POT vel MLN > VOT, & hinc [ξ] MN ξ. 24. 1.
> VT, ideoque DF > VT. Quum autem
QV = ED & QT = EF, erit ang. E > [λ]
VQT, id est E > B + H; etiam contra hy-
pothesin. Itaque BA > LQ.

Secundo dico, ang. solidum R esse ex tribus planis B, E, H constitutum. Quia enim QR plano circuli recta est: erunt ang. RQL, RQM, RQN recti. Sunt autem aequales LQ, MQ, NQ. Ergo [ν] RL = RM = RN. Et quia

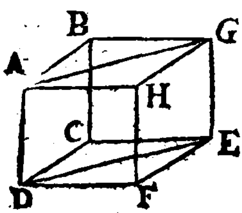
QRq



QRq = ABq — LQq, ac ob id QRq + LQq = ABq: erit * LR = AB, & ergo RM = BC, atque, ob ML = AC, ang. LRM = B. Eadem ratione ang. LRN = H, & ang. MRN = E. Quare ex tribus planis B, E, H constitutus est solidus angulus R. Q. E. F.

* 47. 1.

PROP. XXIV. THEOR.



Si solidum parallelis planis contineatur: opposita ipsius plana & aequalia & parallelogramma sunt.

1. Nam quia plana parallela BH, CF secantur a plano AC in rectis AB, DC: erunt * AB, CD parallelae. Similiter quia plana AF, BE parallela secantur a plano AC: erunt * AD, BG parallelae. Ergo AC est Pgr. Similiter ostenditur, reliqua plana AF, HE, BE, BH, FC esse Pgra. Q. E. D.

* 16. 11.

2. Iungantur AG, DE. Quia AB, BG ipsis DC, CE sunt parallelae: est ang. ABG * = DCE.

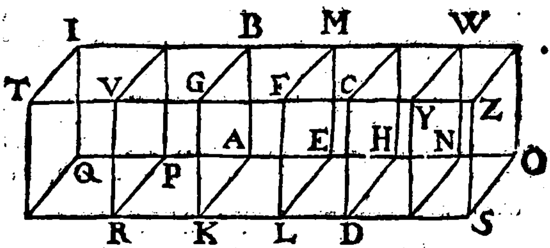
* 10. 11.

DCE. Sed AB * = DC, & BG = CE. Ergo * 34. 1.
△ AGB = DEC, & igitur Pgr. BH = Pgr. CF.
Similiter ostendetur Pgr. AC = HE, & Pgr.
AF = BE. Q.E.D.

Scholium.

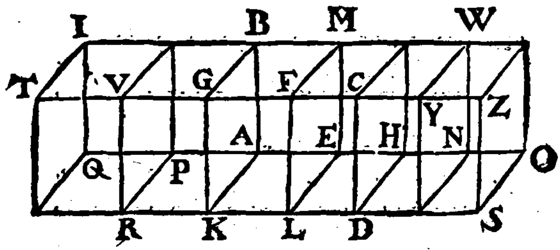
Et quia ostensum est, ang. ABG = DCE, & AB : BG = DC : CE : patet aequiangula esse Pgra opposita, & latera circum aequales angulos proportionalia habere, ideoque etiam similia esse.

PROP. XXV. THEOR.



Si solidum parallelepipedum ABCD *plano* EF *secetur oppositis planis* AG, CH *parallelo: erit vt basis* AELK *ad basin* EHDL, *ita solidum* ABFL *ad solidum* EMCD.

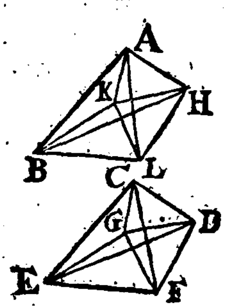
Produc enim AH vtrinque, & pone ipsi EH aequales quotcunque HN, NO, & ipsi EA aequales AP, PQ quotuis, & comple Pgra QR, PK, DN, NS, & Ppda PT, AV, HY, NZ. Iam quia QP = PA = AE: erit * Pgr. QR * 38. 1.
= PK = AL, & Pgr. PI = PB = BE. Erit quoque Pgr. TQ = * VP = GA. Ergo tria * 24. 11.
plana solidorum PT, AV, EG tribus planis aequantur. Sed tria tribus oppositis * aequantur. Ergo * tria solida PT, AV, EG aequa- * 10. def. 11.
lia



lia sunt. Similiter ostendetur tria solida OY, NC, HF aequalia esse. Ergo basis QL aeque multiplex est basis AL ac solidum TE solidi GE; & eadem ratione basis OL aeque est multiplex basis HL ac solidum OF solidi HF. Porro si basis QL > = < OL: est & φ solidum TE > = < solido OF. Quare vt basis

x. 5. def. 5. AL est ad basin HL x ita solidum GE ad solidum HF. Q.E.D.

PROP. XXVI. PROBL.



Ad datam rectam lineam AB *& ad datum in ipsa punctum* A *dato angulo solido* C *aequalem angulum solidum constituere.*

Sint DCE, ECF, FCD anguli plani solidum C continentes. Ex quouis puncto F in recta CF de-

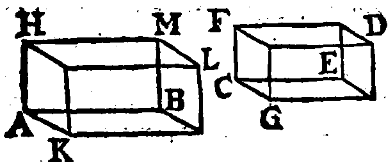
ψ. 11. 11. mitte in planum ECD perpendicularem ψ FG, quae ipsi occurrat in G, & iunge CG. Dein fac ang. BAH = ECD, & ang. BAK = ECG, & AK = CG; atque ex K plano BAH erige per-

perpendicularem [α] KL, quam fac = GF, & α. 12. 11.
iunge AL. Dico factum.

Nam fiat AB = CE, & iungantur KB, BL, GE, EF. Et quia rectae KL, GF planis BAH, ECD perpendiculares sunt: erunt ang. AKL, BKL, CGF, EGF recti. Dein quia KA = GC, & AB = CE, & ang. BAK = ECG: erit [α] BK = EG. Sed KL = GF. Er- α. 4. 1.
go AL = [α] CF, & BL = [α] EF; ac inde ang. BAL [β] = ECF. Similiter, sum- β. 8. 1.
ta AH = CD & iunctis HK, HL, DG, DF ostendemus ang. LAH = FCD. Ergo tres ang. plani BAH, BAL, LAH anguli solidi A tribus planis ECD, ECF, FCD solidi C aequantur. Hinc ang. solidus A = [γ] C. Q.E.F.

γ. ax. 11.

PROP. XXVII. PROBL.



A data recta linea AB dato solido parallelepipedo CD simile & similiter positum solidum parallelepipedum describere.

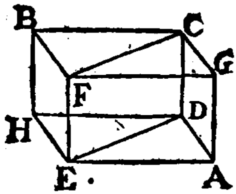
Fac [δ] angulo solido C = A, ita vt angulo δ. 26. 11.
GCE = KAB, & ang. FCE = HAB, & ang. GCF = KAH. Dein fac EC : CG = [ε] BA : ε. 12. 6.
AK, ac GC : CF = KA : AH, & comple Pgr. BH, ac solidum AL.

Etenim [ζ] Pgr. KB ∾ GE, & Pgr. KH ∾ ζ. 1. def. 6.
GF, &, quia ex aequo EC : CF = BA : AH, & constr.
Pgr. BH ∾ EF. Ergo & tria reliqua Pgra

HL;

ι.sch.24.11. HL, LB, LK ∾ ι tribus reliquis DF,
&21.6. DE, DG. Quare Ppd. AL ∾ ϑ Ppdo CD.
ϑ. 9. def.11. Q. E. D.

PROP. XXVIII. THEOR.



Si solidum parallelepipedum AB *plano* CDEF *secetur per diagonales* CF, DE *oppositorum planorum: solidum* AB *ab ipso plano* CDEF *bifariam secabitur.*

ι. 34. 1. Quia enim △GCF = ι △CFB, & △ADE
κ. 24. 11. = △DEH, & Pgr. AC = κ BE & Pgr. GE
λ. 10. def. = CH: Prisma GCFEDA = λ prismati
11. CFBHDE. Q.E.D.

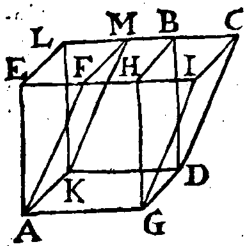
** Scholium.*

Prismata vero esse illas duas dimidias partes Ppdi AB patet ex 24. 11. & schol. eiusdem, & ex eo, quod (per 16.11.) planum CFED parallelogrammum est. Constat itaque, prisma triangularem basin habens dimidium esse parallelepipedi aeque alti & in eadem basi GE constituti, vel in basi AH basis triangularis dupla.

PROP. XXIX. THEOR.

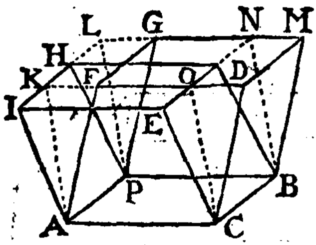
Solida parallelepipeda AB, AC *in eadem basi* AD *eademque altitudine, quorum insistentes lineae* AE, AF, GH, GI, KL, KM, DB, DC *in eisdem rectis lineis* EI, LC *collocantur, inter se sunt aequalia.*

Quia KB & KC sunt Pgra & inde LB =
μ. 3. ax. 1. KD = MC: erit LM = μ BC, & ergo △
LKM



LKM = l BDC, nec l. 8. 1.
non Pgr. EM = k HC. k. 36. 1.
Eadem ratione △ AEF
= GHI. Est autem°
Pgr. LA = BG, & o. 24. 11.
Pgr. MA = CG. Ergo Prisma AEFMLK
= * Prism. GHICBD. *. 10. def. 11.
Hinc addito communi solido AKDGHFMB, tota Ppda AB, AC aequalia erunt. Q. E. D.

PROP. XXX. THEOR.

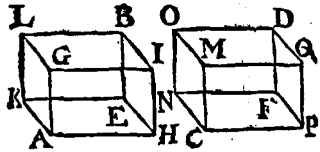


Solida parallelepipeda ABEH, ABDG *in eadem basi eademque altitudine, quorum lineae insistentes in eisdem lineis rectis non collocantur, inter se aequalia sunt.*

Producantur enim DF, MG, IH, EO, vt se inuicem secent in K, L, N, & iungantur KA, LP, OC, NB. Ergo Ppd. ABEH = e e. 29. 11.
ABNK = e ABDG. Q. E. D.

PROP. XXXI. THEOR.

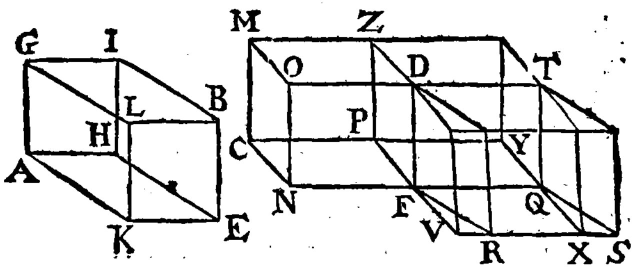
Solida parallelepipeda AB, CD, *quae in aequalibus sunt basibus* AE, CF, *& eadem altitudine, inter se sunt aequalia.*



Caf. 1. Sint insistentes lineae AG, BE, HI, KL, CM, DF, NO, PQ ad rectos angulos basibus AE, CF, & sit ang. PFN = HEK, NF = KE, & FP = EH. Erit ergo Pgr.

σ. 1. def. 6. CF = & ∾ σ Pgro AE. Eadem ratione quia altitudines NO, KL aequales, & ang. ONF, ONC, LKE, LKA recti sunt: erit Pgr. ND = & ∾ ipsi KB, & Pgr. CO = & ∾ AL. Quare & reliqua Pgra reliquis aequalia & si-

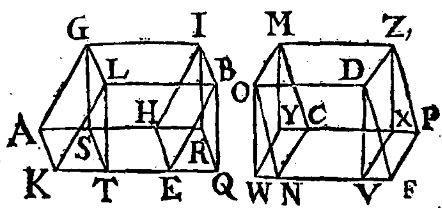
τ. 10. def. 11. milia erunt, & ergo Ppd. CD = τ ipsi AB. Q. E. D.



Caf. 2. Sint iterum insistentes perpendiculares, sed ang. PFN non = HEK. Produc NF in Q, & fac ang. QFR = HEK, & FQ = HE, & FR = EK, & comple Pgr. QR ac

υ. caf. 1. solidum TR. Ergo erit Ppd. TR υ = Ppdo AB. Produc PF, SR, quae conueniant in V, & per Q duc ipsi PV parallelam QX, quam produc, donec productae CP occurrat in Y, & comple Ppda TV, TP, quorum bases sunt Pgra VQ, VQ, PQ. Iam Ppda TV, TR, eandem basin TF habentia, aequalia φ sunt; & hinc Ppd. TV = AB. Sed quia Pgr. FX = χ FS = ψ AE = ω CF: erit Pgr. FX: FY = CF: FY. Atqui Ppd. TV: TP = α Pgr. FX: FY, nec non Ppd. CD: TP = Pgr. CF: FY. Ergo Ppd. TV: TP = Ppd. CD: TP. Quare Ppd. TV = β CD, ideoque Ppd. CD = AB. Q. E. D.

φ. 29. 11. χ. 35. 1. ψ. constr. ω. hyp. α. 25. 11. β. 9. 5.



Cas. 3. Non sint insistentes AG, BE, HI, KL, CM, PZ, FD, NO perpendiculares basibus. Duc a punctis B, I, G, L, D, Z, M, O ad bases perpendiculares BQ, IR, GS, LT, DV, ZX, MY, OW, & iunge ST, QR, TQ, RS, XV, YW, YX, VW. Erit ergo Ppd. MV = γ GQ. Atqui Ppd. CD = δ MV, & Ppd. AB = δ GQ. Ergo Ppd. CD = AB. Q. E. D

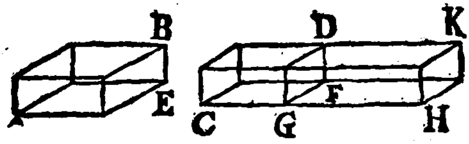
γ. casus praec. δ. 29. vel 30. 11.

* *Schol.* Itaque Parallelepipeda aequalia AB, CD aequalium basium aeque alta sunt. Nam si alterius AB altitudo maior esset: quia ipsius AB pars capi posset aeque alta ipsi CD, foret pars Ppdi AB = Ppdo CD. Ergo Ppda AB, CD inaequalia forent.

† Reliqui casus demonstrationem Lector facile addet. Similis enim est demonstrationi casus secundi.

PROP. XXXII. THEOR.

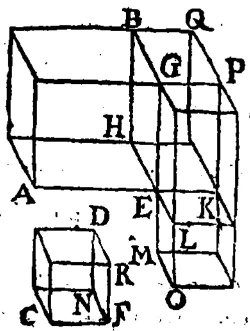
Solida parallelepipeda AB, CD, *quae eandem habent altitudinem, inter se sunt vt bases* AE, CF.



ε. 45. 1. Applicetur ad FG Pgr. FH = ε AE,
ζ. 31. 11. & compleatur Ppd. DH = ζ AB. Quia
η. 25. 11. autem totum Ppd. CK secatur plano DG: erit η Ppd. DH vel AB ad Ppd. CD sicut basis FH vel AE ad basin CF. Q. E. D.

* *Schol.* Hinc parallelepipedorum aequalium quod maiorem basin habet, minorem habet altitudinem. Non enim eandem; quia sic Ppd inaequalia erunt: nec maiorem; quia sic pars illius Ppdi reliquo aeque alta eodem maior, & a potiori totum eodem maius erit.

PROP. XXXIII. THEOR.



Similia solida parallelepipeda AB, CD *inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum* AE, CF.

In productis AE, HE, GE cape EK = CF, EL = FN, EM = FR. Comple Pgr. KL, & Ppd. KO. Iam quia Ppd.

Ppd. AB ∾ CD, ideoque [9] ang. AEH = CFN: erit ang. KEL = CFN, ac propterea Pgr. KL = & ∾ [ι] CN. Eadem ratione Pgr. KM = ∾ CR, & Pgr. OE = ∾ DF. Quoniam ergo & tria reliqua Pgra tribus reliquis aequalia & similia [κ] sunt: erit Ppd. KO = ∾ [λ] CD. Comple Pgr. HK, & fac Ppda HP, PL eiusdem altitudinis EG cum Ppdo AB. Et quia [9] AE : CF = EH : FN = EG : FR : erit AE : EK = HE : EL = GE : EM. Est vero [μ] AE : EK = AH : HK, & HE : EL [μ] = HK : KL, & GE : EM = [μ] PE : KM. Quare AH : HK = HK : KL = PE : KM. Porro AH : HK = [ν] Ppd. AB : Ppd. BK; & HK : KL = [ν] Ppd. BK : PL; & PE : KM = Ppd. PL : KO. Ergo ∺ Ppda AB, BK, PL, KO, ideoque AB : KO = [ξ] (AB : BK)³ = (AH : HK)³ = (AE : EK)³ = (AE : CF)³. Q. E. D.

9. 9. def. 11. & 1. def. 6.
ι. 4. 1. & 34. 1. & 1. def. 6.
κ. sch. 24. 11.
λ. 10. def. 11.
μ. 1. 6.
ν. 32. 11.
ξ. 11. def. 5.

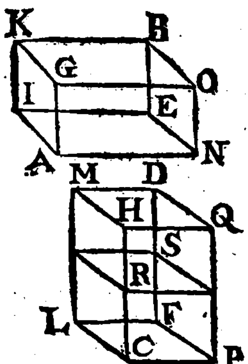
Corollarium.

Hinc, si quatuor rectae lineae continue proportionales fuerint, est vt prima ad quartam, ita solidum parallelepipedum, quod fit a prima, ad solidum, a secunda simile & similiter descriptum [ξ].

PROP. XXXIV. THEOR.

Aequalium solidorum parallelepipedorum AB, CD *bases* AE, CF *sunt reciproce proportionales altitudinibus* AG, CH. *Et quorum solidorum parallelepipedorum* AB, CD *bases* AE, CF *sunt reciproce proportionales altitudinibus* AG, CH, *ea inter se sunt aequalia.*

 Cas.



Caſ. 1. Si inſiſtentes rectae AG, EB, IK, NO, CH, LM, FD, PQ ſunt baſibus AE, CF perpendiculares.

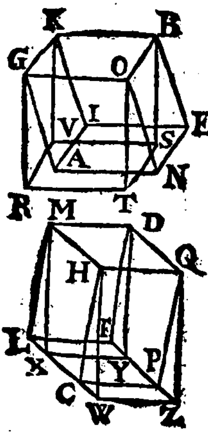
Hyp. 1. Si Ppd. AB = CD, & baſis AE = CF: erit & alt. AG = [s] CH. Ergo AE: CF = CH: AG. Sin autem alterutra baſis AE > altera CF: quia tunc altitudo AG < [τ] CH, cape CR = AG, & comple Ppd. SC. Iam quia AB = CD: erit AB: CS = CD: CS. Sed AB: CS = [φ] AE: CF, & CD: CS = [ς] Pgr. CM: Pgr. RL = [ς] CH: CR = CH: AG. Quare iterum eſt AE: CF = CH: AG. Q. E. D.

s. ſch. 31. 11.
τ. ſch. 32. 11.
φ. 32. 11.
ς. 1. 6.

Hyp. 2. Sit AE: CF = CH: AG. Iam ſi baſis AE = CF: erit & AG = CH, ideoque Ppd. AB = [τ] CD. Si vero AE > CF: erit CH > [υ] AG. Pone rurſus CR = AG, & comple Ppd. CS. Ergo AE: CF = CH: CR. Sed AE: CF = [φ] AB: CS, & CH: CR = [ς] CM: RL = [ς] CD: CS. Ergo AB: CS = CD: CS. Igitur iterum AB = [φ] CD. Q. E. D.

τ. 31. 11.
υ. ſch. 32. 11.
φ. 9. 5.

Caſ.



Cas. 2. Si insistentes AG, EB, CH &c. basibus AE, CF non sunt perpendiculares: demitte, ϰ in bases perpendiculares GR, BS, OT, KV, HW, MX, DY, QZ, & completa intellige Ppda KT, MZ. ϰ. 11. 11.

Hyp. 1. Iam si Ppd. AB = CD: quia Ppd. AB = ψ KT, & Ppd. CD = MZ, erit Ppd. KT = MZ. Quum itaque sit α BG: DH = DY: BS: erit α AE: CF = DY: BS. Q. E. D. ψ. 30. & 29. 11. α. cas. 1.

Hyp. 2. Deinde si basis AE: CF = alt. DY: BS: erit & α BG: DH = DY: BS. Ergo Ppd. KT = α MZ, ideoque Ppd. AB = ψ CD. Q. E. D. α. 24. 11.

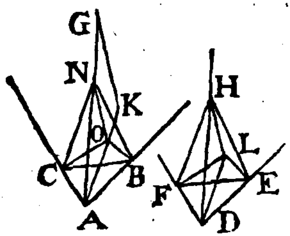
* *Caroll.*

Ostensum est sub hyp. 1. cas. 1. Ppda recta CD, CS aequalium & similium basium esse inter se vt altitudines CH, CR. Et quia his duobus Ppdis quaeuis alia duo aequalia & aeque alta sumi possunt (per 31. 11.): patet in vniuersum, duo quaecunque Ppda aequalium basium esse in ratione altitudinum.

* *Schol.*

Propositiones 31. 32. 33. 34. cum suis scholiis & corollariis valent quoque de Prismatis triangularibus, propter ea, quae ostensa sunt in prop. 28.

PROP. XXXV. THEOR.



Si sint duo anguli plani BAC, EDF *aequales; & in ipsorum verticibus* A, D *rectae sublimes* AG, DH *constituantur, quae cum rectis lineis a principio positis angulos contineant aequales, alterum* GAB, GAC *alteri* HDE, HDF; *in sublimibus autem sumantur quaevis puncta* G, H, *atque ab ipsis ad plana, in quibus sunt angu i primi* BAC, EDF, *perpendiculares ducantur* GK, HL; *& a punctis* K, L, *quae a perpendicularibus fiunt in planis, ad primos angulos iungantur rectae lineae* KA, KD: *cum sublimibus aequales angulos* KAG, LDH *continebunt.*

Pone AN = DH, & in plano AGK duc NO parallelam ad GK, quae ergo plano BAC
β. 8. 11. perpendicularis [β] erit. A punctis O, L duc ad rectas AB, AC, DE, DF perpendiculares OB, OC, LE, LF, & iunge NC, NB, HE, HF,
γ. 47. 1. CB, FE. Iam quia ANq = [γ] NOq + OAq, & OAq = [γ] OCq + ACq, & NOq + OCq = [γ] NCq: erit ANq = NCq + CAq, ideo-
δ. 48. 1. que [δ] ang. NCA rectus. Similiter ostenditur ang. HFD rectus. Quare ang. NCA = HFD. Et quia NAC = HDF, ac AN = DH: erit
ε. 26. 1. AC = [ε] DF. Eadem ratione AB = DE.
ζ. 4. 1. Quare CB = [ζ] FE, & ang. ACB = DFE, &
η. 3. ax. 1. ang. ABC = DEF. Hinc [η] ang. OCB = LFE,

&

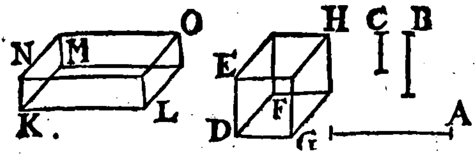
& ang. OBC = LEF, & ob CB = FE, est CO = [f] FL. Vnde patet [g] AO = DL. Hinc quoniam $NOq + OAq = ANq = DHq = HLq + LDq$: erit $ONq = HLq$, & NO = HL. Igitur constat, ang. KAG = [a] LDH. Q. E. D. a 9. 8. 1.

Corollar.

Ex hoc vero manifestum est, si sint duo anguli plani rectilinei aequales, ab ipsis autem constituantur sublimes rectae lineae aequales, quae cum rectis lineis a principio positis aequales contineant angulos, alterum alteri, perpendiculares NO, HL, quae ab ipsis ad plana, in quibus sunt primi anguli, ducuntur, inter se aequales esse.

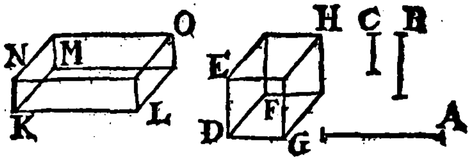
PROP. XXXVI. THEOR.

Si tres rectae lineae A, B, C *proportionales sint: solidum parallelepipedum, quod a tribus fit, aequale est solido parallelepipedo, quod fit a media* B, *aequilatero quidem, aequiangulo autem antedicto.*



Exponatur angulus solidus D, & ipsi B aequales fiant DE, DG, DF, & compleatur Ppd. DH, quod erit factum a B. Ponatur KL = A, & ad punctum K fiat [a] ang. solidus K = D, ac KM = B, & KN = C, & compleatur Ppd. KO, quod erit factum a tribus A, B, C, & a 26. 11.

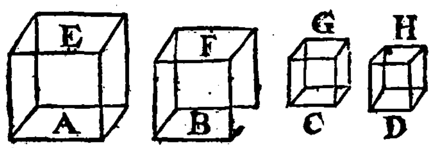
 aequi-



κ. ax. 11. & aequiangulum ipsi DH κ. Et quia λ KL : DG
29. 1. = DE : KN, & ang. LKN = GDE: erit Pgr.
λ. constr. NL = μ EG. Deinde quia & λ ang. MKN
μ. 14. 6. = FDE, & ang. MKL = FDG, & KM = DF:
erunt perpendiculares, a punctis M, F ad
ν. cor. 35. 11. plana NL, EG ductae, aequales ν; id est,
Ppda DH, KO, aequales bases habentia EG,
ξ. 4. def. 6. NL, aeque alta ξ erunt, ac ergo aequalia ο.
ο. 31. 11. Q. E. D.

PROP. XXXVII. THEOR.

Si quatuor rectae lineae A, B, C, D *proportionales sint: & quae ab ipsis fiunt solida parallelepipeda* E, F, G, H *similia & similiter descripta proportionalia erunt. Et si quae ab ipsis fiunt solida parallelepipeda* E, F, G, H *similia & similiter descripta proportionalia sint: & ipsae rectae lineae* A, B, C, D *proportionales erunt.*



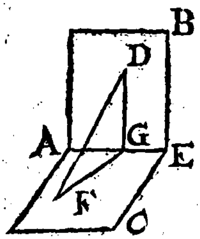
π. 33. 11. 1. Nam quia Ppd. E ∾ F: erit E : F = π (A : B) 3. Eodem argumento erit G : H = (C : D) 3. Sed (A : B) 3 = ρ (C : D) 3. Ergo
ρ. hyp. & 1. sch. 22. 5. E : F = G : H. Q. E. D.

2. Quia,

2. Quia, vt antea, $E:F=(A:B)^3$, & $G:H=(C:D)^3$, atque $E:F=G:H$: erit $(A:B)^3=(C:D)^3$, ideoque $A:B=$ [σ] $C:D$. Q.E.D. σ. 2. sch. 22. 5.

PROP. XXXVIII. THEOR.

Si planum AB ad planum AC rectum sit, & ab vno puncto D eorum, quae sunt in vno plano AB, ad alterum planum AC perpendicularis ducatur: ea in communem planorum sectionem AE



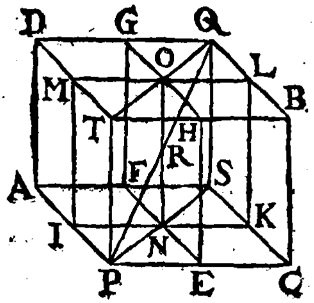
Si negas, cadat extra, vt DF, & a puncto F in plano AC duc ad AE perpendicularem FG, & iunge DG. Iam quia FG perpendicularis [τ] est plano AB: erit ang. FGD rectus [υ]. Sed & ang. DFG rectus [υ] est. Quare in △ GDF duo recti sunt. Q.E.A.

τ. 4. def. 11.
υ. 3. def. 11.

PROP. XXXIX. THEOR.

Si in solido parallelepipedo AB oppositorum planorum AC, BD latera secentur bifariam; per sectiones vero plana ducantur EFGH, IKLM: communis planorum sectio NO & solidi parallelepipedi diameter PQ se mutuo bifariam secabunt.

Iungan-



Iungantur QO, OT, PN, NS. Quoniam QB, DT sunt parallelae; erit ang. QLO = φ OMT. Praeterea QL χ = TM. Et quia ψ ML, DQ parallelae sunt, item DT, GH, QB: erit MO = χ DG = ω GQ = χ OL. Quare α QO = OT, & ang. QOL = MOT, & ob id β QOT recta. Similiter demonstratur, SN = NP, & SNP rectam esse. Et quia PT, SQ, ipsi CB aequales χ & parallelae, ipsae aequales & parallelae sunt: erunt & TQ, PS aequales ψ & parallelae. Ergo rectae NO, PQ sunt in eodem γ plano TS, & se mutuo secabunt in R. Sed quia φ ang. OQR = RPN, & ang. QOR = PNR, & QO = δ PN: erit ε OR = RN, & QR = RP. Q. E. D.

φ. 29. 1.
χ. 34. 1.
ψ. 33. 1.
ω. constr.
α. 4. 1.
β. 3. sch. 15. 1.
γ. 7. 11.
δ. 7. ax. 1.
ε. 26. 1.

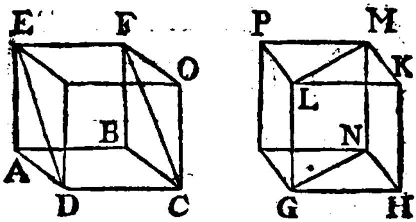
* *Schol.*

Hinc in omni parallelepipedo diametri omnes se mutuo bisecant in vno puncto R.

PROP. XL. THEOR.

Si sint duo prismata ABCDEF, GHKLMN *aeque alta, quorum vnum quidem basin habeat parallelogrammum* ABCD, *alterum vero triangulum* GHN, *& parallelogrammum* ABCD *duplum sit trianguli* GHN: *aequalia erunt ipsa prismata.*

Com-

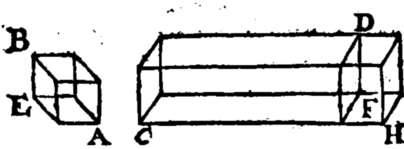


Compleantur enim Ppda AO, HP. Et quoniam Pgr. AC = ² △ GNH = ζ Pgr. GN, atque solida aeque alta sunt: erit Ppd. AO = η HP, ideoque Pr. ABCDEF = ϑ Pr. GHKLMN. Q. E. D.

ζ. 34. 1.
η. 31. 11.
ϑ. 28. 11.

* *Scholium.*

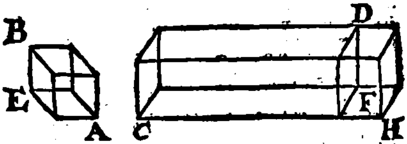
Ex iis, quae hactenus ostensa sunt, demonstrari potest, *parallelepipeda quaevis* AB, CD, *nec non prismata triangularia, esse in ratione composita basium* AE, CF *& altitudinum* BE, DF.



Intelligatur enim aliud Ppd. DH, cuius basis FH = basi AE Ppdi AB, & altitudo DF = altitudini Ppdi CD. Et quoniam est AB: HD = ι BE: FD, & HD: CD = κ FH: CF = AE: CF: erit AB: CD = λ (AE: CF) + (BE: DF). Ergo Parallelepipeda, & triangularia prismata, Parallelepipedorum dimidia, sunt inter se vt bases & altitudines. Q. E. D.

ι. cor. 34. 11.
κ. 32. 11.
λ. 5. def. 6.

Quae

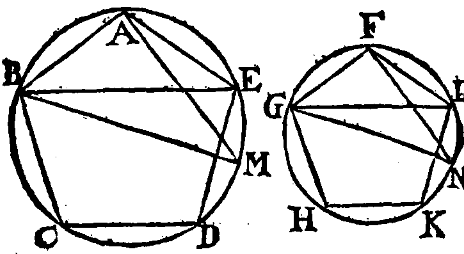


Quae quum ita sint, patet fundamentum methodi, qua parallelepipeda & prismata in Geometria practica metiuntur. Sumunt enim cubum AB, & latus eius BE pro vnitate, qua metiuntur basin Ppdi CD & altitudinem: & ex multiplicatione numerorum, qui basin & altitudinem exprimunt, gignitur numerus, qui soliditatem Ppdi CD exprimit. Sit (per 4. sch. 23. 6.) basis CF = 9 AE, & altitudo DF = 2·BE: & quia CD : AB = (CF: AE) + (DF: BE) = (9 : 1) + (2 : 1) = 18 : 1; erit CD = 18 AB.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER XII.

PROP. I. THEOR.



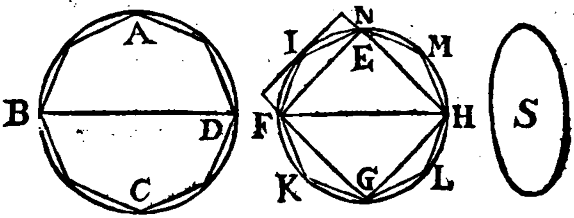
Similia polygona ABCDE, FGHKL *circulis inscripta inter se sunt vt quadrata a diametris* BM, GN.

Iungantur BE, AM, GL, FN. Quia po-
lygona similia sunt: est [α] ang. BAE = GFL, α. 1. def. 6.
& BA : AE = GF : FL; ideoque [β] ang. AEB β. 6. 6.
= FLG. Ergo ang. AMB = [γ] FNG; et, γ. 21. 3. &
quia praeterea ang. BAM = [δ] GFN, est BM : 1. ax. 1. δ. 31. 3.
GN = [ε] BA : GF. Hinc pol. ABCDE : pol. ε. 4. 6.
FGHKL = [κ] $(BA:GF)^2$ = [λ] $(BM : GN)^2$ = [*] κ. 20. 6.
BMq : GNq. Q. E. D. λ. 1. sch. 22. 5.

* *Schol.* Et quia AB : GF = BC : GH &c. =
BM : GN : patet, [μ] similium polygonorum circulis μ. 12. 5.
inscriptorum perimetros AB + BC + CD + DE
+ EA, & FG + GH + HK + KL + LF, esse in
ratione diametrorum.

PROP.

PROP. II. THEOR.



Circuli ABCD, EFGH *inter se sunt vt quadrata a diametris* BD, FH.

Si negas: erit vt BDq ad FHq, ita circulus ABCD ad spatium S circulo EFGH minus vel maius. Sit primo S < EFGH. In circulo

ν. 6. 4. EFGH descriptum sit [ν] quadratum HGFE,

ξ. sch. 7. 4. quod [ξ] maius erit dimidio circulo. Circum-

ο. 30. 3. ferentiae EF, FG, GH, HE bisectae [ο] sint in I, K, L, M, & iungantur EI, IF, FK, KG, GL, LH, HM, ME. Erit similiter quodlibet △ EIF > ½ segmento EIF, quoniam, ducta per I parallela ad EF & completo pgro rectangulo NF, est △ EIF ≐ ½ NF. Reliquis ergo circumferentiis semper bisectis, & talibus triangulis a reliquis segmentis semper ablatis: relinquentur tandem segmenta, quae simul sum-

π. 1. 10. ta erunt [π] < EFGH — S. Sint reliqua haec segmenta, quae sunt super rectis EI, IF, FK, KG, GL, LH, HM, ME. Ergo polygonum

ρ. 5. ax. 1. EIFKGLHM > [ρ] S. Describe in circulo ABCD polygonum ABCD ∾ ipsi EIFKGLHM. Erit ergo illud polygonum ad hoc,

σ. 1. 12. vt [σ] BDq ad FHq, siue vt [τ] circulus ABCD

τ. hyp. ad spatium S. Minus autem est pol. AB-

CD

CD circulo, in quo inscriptum est: ergo & polyg. EIFKGLHM < [u] S. Q. E. A. Non ergo est vt BDq ad FHq ita circ. ABCD ad spatium minus circulo EFGH. u. 14. 5.

2. Si ponis S > EFGH: quia sic erit vt FHq ad BDq ita S ad circ. ABCD, atque S ad circ. ABCD [φ] vt circulus EFGH ad spatium minus circulo ABCD: erit vt FHq ad BDq ita circ. EFGH ad spatium minus circulo ABCD. Q. F. N. Quare vt BDq ad FHq ita circ. ABCD ad circ. EFGH. Q. E. D. φ. per part. 1.

* *Schol.*

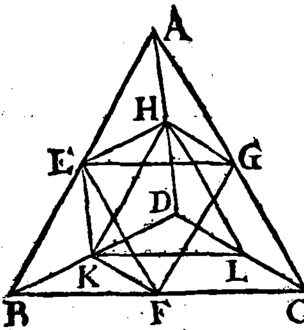
Similia ergo [r] polygona, in circulis inscripta, sunt vt iidem circuli. r. 1. 18.

PROP. III. THEOR.

Omnis pyramis ABCD †, *triangularem habens basin* ABC, *diuiditur in duas pyramides aequales & similes inter se, quae triangulares bases habent, easque similes toti, nec non in duo prismata aequalia, quae dimidio quidem totius pyramidis sunt maiora.*

Biseca

† Nota, litterarum pyramidem designantium vltimam nobis semper eam esse, quae vertici est apposita, tres autem priores eas, quae ad basin pertinent. Contra, in angulo solido designando prima est, quae ad verticem.



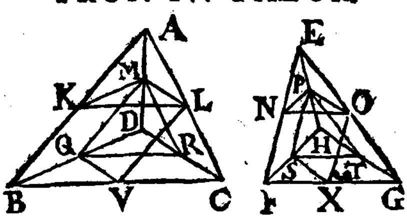
Biſeca enim AB, BC, CA, AD, DB, DC, in punctis E, F, G, H, K, L, & iunge EG, EH, HG, per quas ductum planum abſcindet pyramid. AEGH. Iunge etiam HK, KL, LH, & ducto per has plano a reliquo ſolido abſcindetur pyr. HKLD. Iam quia AE = EB, & AH = HD: erunt EH, BD κ parallelae. Simili-
ter quia AH = HD, & BK = KD: erunt &
κ. 2. 6. HK, AB κ parallelae. Quare HK = ψ BE
ψ. 34. 1. = EA. Sed eſt ω ang. KHD = EAH. Er-
ω. 29. 1. go Δ KDH = $\sim$ α Δo EHA & EH =
α. 4. 1. & ſch. 6. 6. KD. Eodem modo patet Δ HDL = $\sim$ Δo HAG, & DL = GH. Et quia ob parallelas EH, BD, & HG, DC, ang. KDL
β. 10. 11. = β EHG; erit Δ KDL α = $\sim$ Δo EHG. Eadem ratione oſtenditur Δ KHL = $\sim$ Δo
γ. 10. def. 11. EAG. Ergo pyr. HKLD = $\sim$ γ pyr. AEGH. Porro, quum AB, HK parallelae ſint, Δa
δ. 3. ſch. 4. 6. ADB, HDK ω aequiangula, ideoque δ ſimilia ſunt; & eadem ratione Δ BDC $\sim$ δ Δo KDL; nec non Δ ADC $\sim$ δ Δo HDL; atque, quum
ε. 2. ſch. 4. 6. ſit ang. BAC = KHL, & BA : KH = ε AD : DH
ζ. 6. 6. = AC : HL, Δ BAC $\sim$ ζ Δo KHL. Hinc erit pyr. BACD γ $\sim$ pyr. KHLD $\sim$ pyr. AEGH.

Deinde iunctis KF, FG, reliquum ſolidum diuidi poterit in duo priſmata, quorum vnum habet

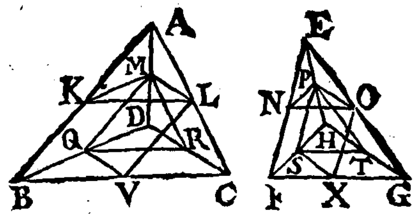
habet basin Pgr. EGFB, & lineam basi oppositam HK, alterum basin $\triangle$ GFC & oppositam basin $\triangle$ HKL. Sunt ergo haec prismata aeque alta, &, quia Pgr. EGFB = [x] 2 $\triangle$ i GFC, aequalia [y]. Sed pyramide EFBK, quae fit iunctis EK, EF, maius est prisma EGFBKH; & pyr. EBFK = [z] pyr. AEGH (aequalibus enim & similibus triangulis continentur): ergo Pr. EGFBKH + Pr. GFCLKH > pyr. AEGH + pyr. HKLD. Est autem Pr. EGFBKH + Pr. GFCLKH + pyr. AEGH + pyr. HKLD = pyr. ABCD. Ergo pr. EGFBKH + pr. GFCLKH > $\frac{1}{2}$ pyr. ABCD. Q. E. D.

x. 41. I.
y. 40. II.

PROP. IV. THEOR.



Si sint duae pyramides aeque altae ABCD, EFGH, *quae triangulares bases habent* ABC, EFG; *diuidatur autem vtraque ipsarum & in duas pyramides* AKLM, MQRD, ENOP, PSTH, *aequales inter se similesque toti, & in duo prismata aequalia* KLVBQM, LVCRQM, NOXFSP, OXGTSP; *atque ortarum pyramidum vtraque eodem modo diuidatur, idque semper fiat: erit vt vnius pyramidis basis* ABC *ad basin* EFG *alterius, ita prismata omnia in* *vna pyramide* A B C D *ad prismata omnia in altera pyramide* E F G H *numero aequalia.*



ι. 15. 5. Quia BC = 2 CV, & FG = 2 GX: erit ι BC: CV = FG : GX. Sed quum, vt in praecedenti propositione, constet, △ ABC ∾ △o VLC, & △FEG ∾ △o XOG: erit △ABC: △VLC
κ. 22. 6. = κ △ FEG: △ XOG, & alternando △ ABC: △FEG = △VLC: △XOG. Sed △LVC:
λ. Lemma sequens. △XOG = λ pr. VLCRQM: Pr. XOGTPS = μ pr. KLVBQM: pr. NOXFSP. Ergo △
μ. 7. 5. ABC: △FEG = ν pr. VLCRQM + pr.
ν. 12. 5. KLVBQM: pr. XOGTPS + pr. NOXFSP. Idem vero demonstrabitur de pyramidibus AKLM, ENOP, scilicet vt basis AKL ad basin ENO ita esse duo prismata aequalia in pyr. AKLM ad duo prismata aequalia in pyr. ENOP. Itaque, quia eodem, quo modo vsi sumus, argumento, patet esse κ △ ABC: △EFG = △AKL: △ENO: erunt ν vt △ABC ad △EFG sic 4 prismata in pyr. ABCD ad 4 prismata in pyr. EFGH. Et similiter procedit demonstratio ad quotcunque paria prismatum in vtraque pyramide. Q. E. D.

LEM-

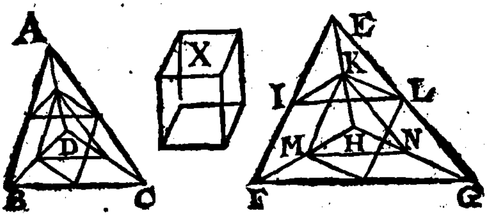
LEMMA.

Ostendendum est, vti △ LVC ad △ XOG, ita esse prisma VLCRQM ad prisma OXGTPS.

Intelligantur enim ex punctis D, H in bases VLC, XOG demissa perpendicula, quae [o] aequalia erunt. Iam quia perpendicularis ex D demissa, & recta DC secantur a planis QMR, VLC, quae ob parallelas [π] MR & AC, RQ & CV parallela [ρ] sunt: erit pars perpendicularis inter D & planum MQR ad partem reliquam [σ], vt DR ad RC. Sed DR = [τ] RC: quare pars perpendiculi inter basin VLC & basin oppositam QMR prismatis VLCRMQ erit dimidium perpendiculi totius ex D demissi. Eadem ratione pars perpendiculi ex H cadentis, quae est inter bases prismatis OXGTSP dimidium erit totius. Erunt ergo prismata VLCRMQ & OGXSTP [υ] aeque alta, ac ob id in ratione [φ] basium VLC, OXG. Q.E.D.

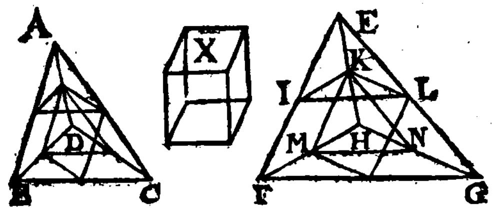
o. hyp. & 4. def. 6.
π. dem. 3. 12.
ρ. 15. 11.
σ. 17. 11.
τ. hyp.
υ. 7. ax. 1.
φ. 32. 11.

PROP. V. THEOR.



Pyramides ABCD, EFGH, *quae in eadem sunt altitudine, & triangulares bases* ABC, EFG *habent, inter se sunt vt bases* ABC, EFG.

Si



Si negas: sit ABC: EFG = ABCD : X, sitque primo X < pyr. EFGH. Diuidatur pyr. EFGH vt in prop. III. & rursus pyramides ortae eodem modo diuidantur, fiatque hoc

z. 1. 10. semper, vsque dum z duae reliquae pyramides EILK + KMNH < pyr. EFGH — X. Erunt itaque reliqua duo prismata in pyr. EF-

ψ. 5. ax. 1. GH > ψ solido X. Diuidatur etiam pyr. ABCD similiter & in totidem partes ac pyr. EFGH. Ergo prismata in pyr. ABCD erunt

α. 4. 12. ad prismata in pyr. EFGH = α ABC: EFG = ABCD: X. Quare quum pyr. ABCD sit maior prismatis, quae in ipsa sunt: erit & so-

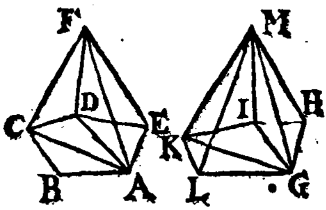
α. 14. 5. lidum X maius α quam prismata in pyr. EFGH, & ergo quam ipsa pyramis EFGH; contra hypothesin.

Sed pone X > pyr. EFGH. Erit ergo vt X ad pyr. ABCD, ita α pyr. EFGH ad solidum pyramide ABCD minus. Sed inuertendo est EFG: ABC = X: ABCD. Ergo vt EFG ad ABC, ita pyr. EFGH ad solidum py-

β. per part. 1. ramide ABCD minus. Q. E. A β. Erit itaque X nec < nec > pyr. EFGH, sed ipsi aequale. Ergo ABC: EFG = ABCD: EFGH. Q. E. D.

PROP.

PROP. VI. THEOR.

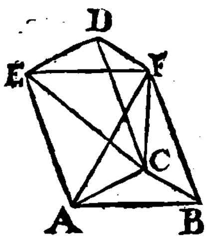


Pyramides ABCDEF, GHIKLM, *quae in eadem sunt altitudine, & polygonas bases habent, inter se sunt vt bases.*

Bases diuidantur in triangula ABC, ACD, ADE, GHI, GIK, GKL, super quibus intelligantur pyramides aeque altae ipsis ABCDEF, GHIKLM. Iam quia pyr. ABCF : ACDF = ✗ △ ABC : △ ACD : erit componendo pyr. ABCDF : pyr. ACDF = ABCD : ACD. ✗ 5. 12.
Sed pyr. ACDF : ADEF = ✗ ACD : ADE. Ergo ex aequo pyr. ABCDF : ADEF = bas. ABCD : ADE, & componendo pyr. ABCDEF : ADEF = bas ABCDE : ADE. Eadem ratione pyr. GHIKLM : GKLM = bas. GHIKL : GKL. Sed pyr. ADEF : GKLM = ✗ bas. ADE : GKL. Ergo ex aequo pyr. ABCDEF : GKLM = bas. ABCDE : GKL. Atqui est inuertendo pyr. GKLM : GHIKLM = bas. GKL : GHIKL. Quare ex aequo pyr. ABCDEF : GHIKLM = bas. ABCDE : GHIKL. Q.E.D.

PROP. VII. THEOR.

Omne prisma ABCDEF, *triangularem habens basin* ABC, *diuiditur in tres pyramides aequales inter se, quae triangulares bases habent.*



Iungantur enim AF, CE, CF: & orientur tres pyramides, triangulares bases habentes, A B F C, EAFC, CDEF. Iam quia ABFE est Pgr. eiusque diameter AF: erit △ABF

ε. 34. 1. ε = △ EAF. Ergo pyr.

ζ. 5. 12. ABFC = ζ pyr. EAFC. Sed pyr. E A F C eadem est quae pyr. AECF; atque pyramides AECF, CDEF, aequales ε bases ACE, CDE & eundem verticem F habentes, aequales ζ sunt. Ergo pyr. ABFC = pyr. EAFC = pyr. CDEF. Q. E. D.

Cor. Et quia pyr. ABFC eadem est cum pyr. ABCF: manifestum est, pyramidem ABCF, quae cum prismate ABCDEF eandem habet triangularem basin ABC & eandem altitudinem,

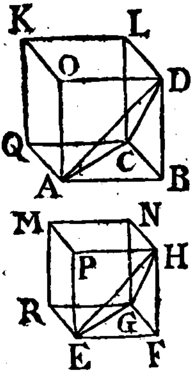
η. 2. ax. 1. tertiam partem esse prismatis. Ergo η omnis pyramis tertia pars est prismatis, basin habentis eandem, & altitudinem aequalem: quoniam, si basis prismatis aliam quandam figuram rectilineam obtineat, diuiditur in prismata, quae triangulares habent bases.

PROP. VIII. THEOR.

Similes pyramides ABCD, EFGH, *quae triangulares bases* ABC, EFG *habent, sunt in triplicata ratione homologorum laterum* AB, EF.

Compleantur solida Ppda ABKL, EFMN.

ϑ. 9 def. 11. Et quia pyr. ABCD ∾ pyr. EFGH; erit ϑ ang. ABD = EFH, & ang. ABC = EFG, & ang.



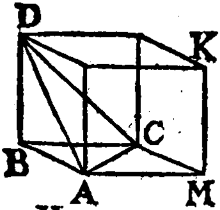
ang. DDC = HFG, & DB : HF = BA : FE = BC : FG. Ergo erit Pgr. BQ ∾ ι Pgr. FP, & Pgr. BL ∾ Pgr. FN, & Pgr. BQ ∾ Pgr. FR. Tria ergo reliqua Pgra. KC, AK, KD tribus reliquis Pgris MG, EM, MH similia [*] erunt. Hinc Ppd. BK ∾ [ϑ] Ppdo FM, ac ergo Ppd. BK : Ppd. FM = [λ] (AB : EF)3; Sed quia pyramides ABCD, EFGH sunt sextae partes [μ] Ppdorum BK, FM: erit [ν] Pyr. ABCD : Pyr. EFGH = Ppd. BK : Ppd. FM. Ergo Pyr. ABCD : Pyr. EFGH = (AB : EF)3. Q. E. D.

ι. 1. def. 6.
ϰ. sch. 24. 11.
λ. 33. 11.
μ. cor. 7. 12. & sch. 28. 11.
ν. 15. 5.

Coroll. Ex hoc perspicuum est, similes pyramides, quae polygonas habent bases, inter se esse in triplicata ratione homologorum laterum. Ipsis enim diuisis in pyramides, triangulares bases habentes; quoniam & similia polygona basium in triangula numero aequalia & homologa totis [ξ] diuiduntur: erit [o] vt vna pyramis in altera pyramide triangularem basin habens ad vnam pyramidem in altera triangularem basin habentem, ita tota illa pyramis polygonam basin habens ad totam hanc. Sed pyramides istae triangularium basium sunt in triplicata ratione laterum homologorum: ergo & pyramides polygonarum basium.

ξ. 20. 6.
o. 6. 12. & 11. 5. & 16. 5.

PROP. IX. THEOR.



Aequalium pyramidum ABCD, EFGH, *triangulares bases habentium, bases* ABC, EFG *sunt altitudinibus* DB, HF *reciproce proportionales. Et quarum pyramidum, triangulares bases habentium, bases* ABC, EFG *sunt altitudinibus* DB, HF *reciproce proportionales, illae inter se aequales sunt.*

Hyp. 1. Compleantur enim solida parallelepipeda BK, FL pyramidibus aeque alta. Et quia Ppd. BK = 6 pyr. ABCD = 6 pyr. EFGH = Ppd. FL: erit
π. 34. 11. vt HF: DB = π BM: FN = ρ ABC: EFG.
ρ. 34. 1. Q. E. D.

Hyp. 2. Quia vt HF: DB = ABC: EFG = ρ BM: FN: erit Ppd. BK = π
σ. 6. ax. 1. Ppdo FL, ergo Pyr. ABCD = σ Pyr. EFGH. Q. E. D.

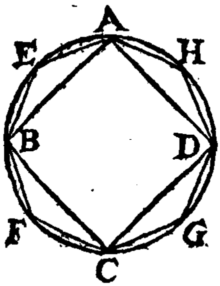
* *Schol.* 1. Idem de pyramidibus polygonarum basium valet (per cor. 7. 12. & sch. 34. 11): quia in pyramides triangularium basium diuidi possunt.

* 2. Quae de pyramidibus demonstrata sunt in prop. 6. 8. 9, ea & quibuscunque prismatis conueniunt, quippe quae tripla sunt pyramidum, easdem bases & altitudines habentium.

* 3. Hinc autem per se patet ex sch. 40. 11. dimensio quorumuis prismatum & pyramidum.

PROP.

PROP. X. THEOR.

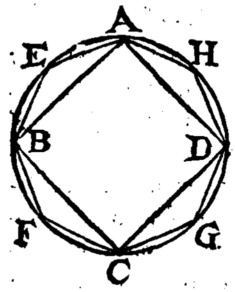


Omnis conus tertia pars est cylindri, qui eandem basin ABCD *habet, & altitudinem aequalem.*

1. Si negas: sit cylindrus > triplo coni. Describatur in circulo quadratum ABCD, super quo intelligatur prisma aeque altum cylindro. Et quia hoc prisma dimidium est prismatis aeque alti [τ], super quadrato circa circulum circumscripto erecti; dimidium autem huius prismatis > dimidio cylindro: erit & illud prisma > dimidio cylindro. Bisecentur peripheriae in punctis E, F, G, H, quae connectantur rectis, atque a Δis AEB, BFC, CGD, DHA intelligantur erecta prismata cylindro aeque alta. Et quoniam vnumquodque horum prismatum dimidium est [υ] Ppdi aeque alti erecti super Pgro, rectangulo trianguli duplo; hoc autem Ppdum > respectiuo segmento cylindri: patet, vnumquodque horum prismatum > esse dimidio respectiui segmenti cylindri. Igitur reliquas circumferentias bisecantes, et super singulis, quae orientur, triangulis prismata erigentes, & hoc semper facientes, relinquemus tandem [φ] segmenta cylindri, quae simul sumta minora erunt excessu cylindri supra triplum coni. Sint reliqua haec segmenta, quae super segmentis circuli AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH,

τ. 32. 11.
υ. sch. 28. 11.
φ. 1. 10.

HA



HA consistunt. Igitur prisma, quod basin polygonam AEBFCGDH habet, & cylindro aeque altum est, erit > triplo coni; ideoque pyramis, cuius basis est AEBFCGDH, & vertex idem qui coni ϰ, > erit cono; pars toto. Q. E. A.

ϰ. cor. 7. 12.

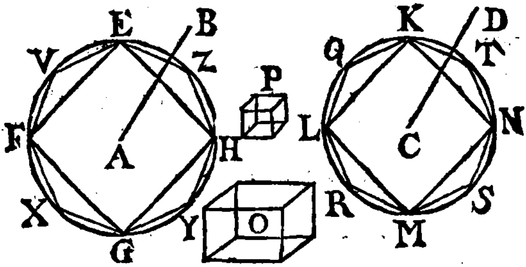
2. Sit cylindrus < triplo coni: erit conus > $\frac{1}{3}$ cylindri. Sed quia iisdem, quibus modo vsi sumus, argumentis ψ, euincitur, pyramidem cono aeque altam, & cuius basis est quadratum ABCD > esse dimidio coni, & vnamquamque pyramidum cono aeque altarum super triangulis AEB, BFC &c. > esse dimidio respectiui segmenti coni: iterum patet, circumferentias semper bisecando, & super ortis sic triangulis pyramides semper erigendo, relictum iri segmenta coni minora excessu coni supra $\frac{1}{3}$ cylindri. Sint haec segmenta, quae sunt super segmentis circuli AE, EB, BF &c. Quare quum reliqua pyramis, cuius basis est polyg. AEBFCGDH, & vertex idem qui coni > sit $\frac{1}{3}$ cylindri: erit prisma cono vel cylindro aeque altum, & basin polyg. AEBFCGDH habens maius ϰ quam cylindrus; pars quam totum. Q. E. A.

ψ. 6. 12.

PROP. XI. THEOR.

Coni & cylindri, qui eandem habent altitudinem AB, CD, *inter se sunt vt bases* EFGH, KLMN.

1. Sit



1. Sit vt circ. EFGH ad circ. KLMN ita conus FB ad aliud solidum O, quod sit $<$ cono LD; & sit LD — O = P. Supposita praeparatione & argumentatione praecedentis propositionis, erunt segmenta coni, quae in ipsis QL, LR, RM &c. $<$ P. Ergo pyr. KQLRMSNTD $>$ O. Fiat in circ. EFGH simile polygonum EVFXGYHZ. Iam quia

pyr. EVFXGYHZB : pyr. KQLRMSNTD $=^{\alpha}$ α. 6. 12.
polyg. EVFXGYHZ : pol. KQLRMSNT $=^{\alpha}$ α. sch. 2. 12.
circ. EFGH : circ. KLMN $=^{\beta}$ conus FB : O; β. hyp.
atque pyr. EVFXGYHZB $<^{\gamma}$ cono FB : erit γ. 9. ax. 1.
& pyr. KQLRMSNTD $<^{\delta}$ solido O; quod δ. 14. 5.
repugnat ostensis. Non ergo est vt basis A ad basin C ita conus A ad solidum cono C minus.

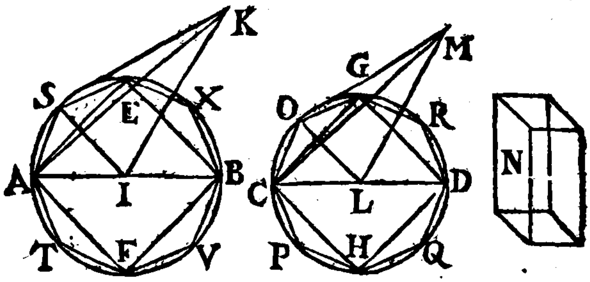
2. Si ponas O $>$ cono LD: erit vt O ad conum FB, ita conus LD ad solidum [δ] minus cono FB, & ergo vt circ. KLMN ad circ. EFGH, ita conus LD ad solidum minus cono FB. Q. F. N [ε]. Itaque coni aeque alti, & proinde cylindri [ζ] aeque alti, sunt inter se vt bases. Q. E. D. ε. part. 1. ζ. 10. 12.

* Schol.

* *Schol.* 1. Coni ergo, item cylindri, quorum tam bases quam altitudines aequales sunt, ipsi inter se aequales sunt.

* 2. Quare conorum, item cylindrorum, aequales bases habentium, qui maiorem axin habet, maior est.

PROP. XII. THEOR.



Similes coni & cylindri inter se sunt in triplicata ratione diametrorum basium AB, CD.

Sint bases circuli AEBF, CGDH, & axes IK LM; & sit conus AEBFK ad solidum quoddam N in triplicata ratione ipsius AB ad CD.

1. Pone N $<$ cono CGDHM. Factis iisdem, quae in praecedentibus, eodem modo ostendemus, esse aliquam pyramidem GOCPHQDRM in cono CDM, quae maior sit quam N. Fiat in circ. I simile polygonum ASEXBVFT, quod sit basis pyramidis, verticem cum cono ABK communem habentis. Sint in his duabus pyramidibus triangula CMO, AKS quaedam ex iis, quae pyramides continent, &

a. 24. def. 11. iunctae sint LO, IS. Iam quia conus ABK $\sim$ cono CDM, est a AB : CD = IK : LM, ac ergo

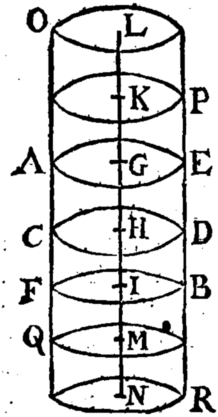
go AI : IK = CL : LM. Sed [ϑ] ang. KIA, ϑ. 11. def.
MLC recti sunt: ergo △ AKI ∾ [ι] △ CML. 11.
Similiter, quia AI : IS = CL : LO, & ang. ι. 6. 6.
AIS [κ] = CLO, erit △ ASI ∾ △ COL; & κ. 2. sch. 33. 6.
iterum similiter patet, esse △ SKI ∾ △ OML.
Hinc quia [λ] KA : AI = MC : CL, & AI : AS λ. 1. def. 6.
= CL : CO : erit ex aequo KA : AS = MC :
CO. Similiter quia KS : SI = MO : OL, & SI :
SA = OL : OC : erit ex aequo KS : SA = MO :
OC. Ergo △ ASK ∾ [μ] △o OMC. Quoniam μ. sch. 5. 6.
igitur pyr. ASIK ∾ [ν] pyr. COLM: erit pyr. ν. 9. def. 11.
ASIK : pyr. COLM = [ξ] $(AI : CL)^3$. Sed idem ξ. 8. 12.
de reliquis pyramidibus ATIK, CPLM &c.
ostendemus. Ergo [ο] pyr. ASEXBVFT : pyr. ο. 12. 5.
GOCPHQDRM = $(AI : CL)^3$ = [π] (AB : π. 1. sch.
$CD)^3$ = [ρ] con. AEBFK : N. Quare pyr. GO- 22. 5.
CPHQDRM < [σ] solido N; contra mo- ρ. hyp.
do dicta. σ. 14. 5.

2. *Si* ponas N > cono CGDHM : quia N :
AEBFK = [ρ] $(CD : AB)^3$, & [σ] N ad AEBFK
vti conus CGDHM ad solidum cono AEBFK
minus: erit conus CGDHM ad solidum quod-
dam cono AEBFK minus in triplicata ratione
ipsius CD ad AD. Q. F. N. [τ] Ergo tam co- τ. part. 1.
ni, quam [υ] cylindri, sunt in triplicata ratione υ. 10. 12.
diametrorum basium. Q. E. D.

PROP. XIII. THEOR.

Si cylindrus AB *plano* CD *secetur, oppositis planis* AE, FB *parallelo: erit vt cylindrus* AD *ad cylindrum* DF *ita axis* GH *ad axem* HI.

Pro-



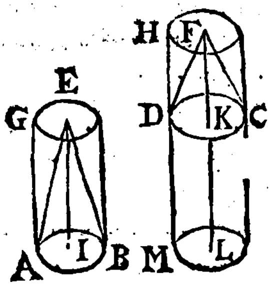
Producatur vtrinque axis GI, & fiant ipsi GH aequales quotcunque GK, KL, & ipsi HI aequales quotuis IM, MN. Per puncta L, K, M, N ducantur plana ipsis AE, CD parallela, in quibus fiant circa centra L, K, M, N circuli ipsis AE, FB aequales; & inter hos circulos intelligantur cylindri OP, PA, BQ, QR constituti. Quia cylindri OP, PA,

φ. 1. sch. 11. 12. AD inter se φ aequales sunt; quotuplex est axis LH ipsius GH, totuplex est cyl. OD ipsius AD. Similiter, quotuplex est axis HN ipsius HI, totuplex est cyl. CR cylindri DF. Praeterea si axis LH $>=<$

χ. 2. sch. 11. 12. HN: erit χ & cyl. OD $>=<$ cyl. CR. Ergo cyl. AD: cyl. DF $=$ ψ ax. GH: ax. HI.

ψ. 4. def. 5. Q. E. D.

PROP. XIV. THEOR.

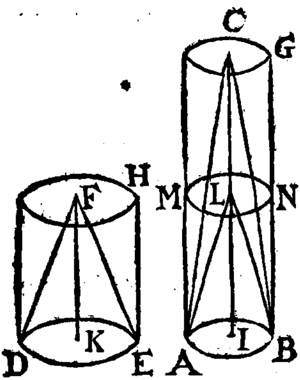


Aequalibus basibus AB, CD *insistentes coni* ABE, CDF, *aut cylindri* BG, CH *inter se sunt vt altitudines* EI, FK.

Producatur axis FK, vt fiat KL $=$ EI, & circa axem KL in basi

basi CD sit cyl. CM, qui erit = [a] cyl. a. 1. sch. 11.
BG. Ergo cyl. BG : cyl. CH = cyl. CM : 12.
cyl. CH = [α] KL : FK = EI : FK. Quare α. 13. 12.
re & conus ABE : con. CDF [β] = EI : FK. β. 15. 5.
Q. E. D.

PROP. XV. THEOR.



Aequalium conorum ABC, DEF *aut cylindrorum* AG, DH *bases* AB, DE *sunt altitudinibus* CI, FK *reciproce proportionales. Item quorum conorum aut cylindrorum bases* AB, DE *altitudinibus* CI, FK *reciproce proportionales sunt, illi inter se sunt aequales.*

Cas. 1. Si altitudines aequales sunt: patet, in vtraque hypothesi etiam bases aequales esse; & constat ergo propositio.

Cas. 2. Sit CI > FK. Fiat LI = FK, & per L secetur cylindrus AG plano MN basibus parallelo.

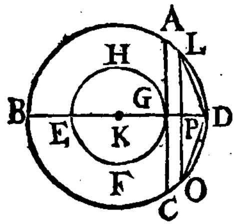
Hyp. 1. Et quia cyl. AG = DH: erit cyl. AN : cyl. AG = cyl. AN : cyl. DH = [γ] bas. γ. 11. 12.
AB : DE. Sed cyl. AN : cyl. AG = [δ] LI : δ. 13. 12. &
CI = FK : CI. Ergo AB : DE = FK : CI. 18. 5.
Q. E. D.

Hyp. 2. Sit bas. AB : bas. DE = alt. FK : alt. CI. Est autem bas. AB : bas. DE = cyl.

AN : cyl. DH, & FK : CI = LI : CI = cyl.
ε. 9. 5. AN : cyl. AG. Ergo cyl. DH = [ε] cyl. AG.
Q.E.D.

Similiter autem & in conis.

PROP. XVI. PROBL.



Duobus circulis ABCD, EFGH *circa idem centrum* K *consistentibus, in maiori* ABCD *polygonum aequalium ac parium numero laterum describere, quod minorem circulum* EFGH *non tangat.*

Duc diametrum BEGD, & per G ipsi per-
ζ. 30. 3. pendicularem AGC. Biseca semicirculum [ζ]
BAD, ac eius semissem, atque ita perge do-
η. 1. 10. nec relinquatur [η] circumferentia LD minor
ipsa AD. Ab L in BD duc perpendicularem
θ. 3. 3. & 4. 1. LPO. Iunge LD, DO, quae [θ] aequales erunt.
ι. cor. 16. 3. Iam quia AC circulum EFGH tangit, LO vero ipsi AC parallela est extra hunc circulum: LO eum non tanget; multoque minus rectae LD, DO eundem tangent. Si ergo ipsi LD aequales deinceps in circulo ABC aptaue-
κ. 1. 4. rimus [κ]: fiet polygonum aequalium & parium laterum (quia circumf. LD est pars aliquota semicirculi), circulum EFGH non tangens. Q.E.F.

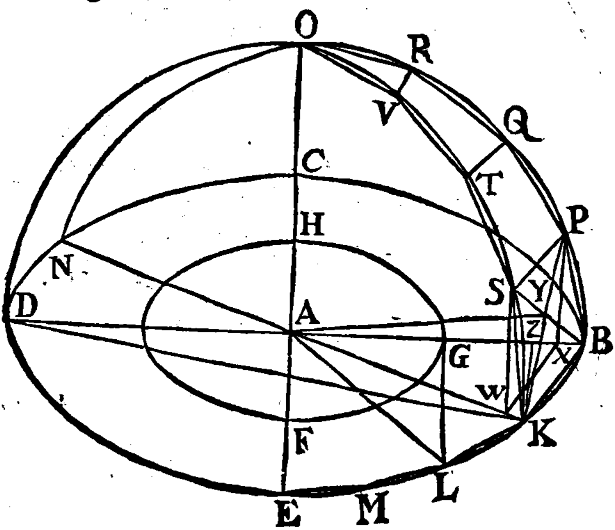
* Coroll.

Ergo recta KG < KP.

PROP.

PROP. XVII. PROBL.

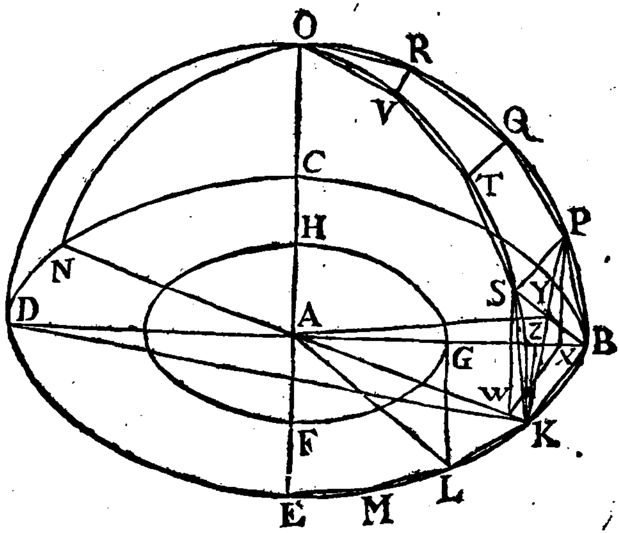
Duabus sphaeris circa idem centrum A consistentibus, in maiori solidum polyedrum describere, quod minoris sphaerae superficiem non tangat.



Secentur sphaerae plano aliquo per centrum. Quia [λ] semicirculi sphaeram generantis planum productum in superficie sphaerae circulum efficit maximum, siue qui diametrum sphaerae habet: sectiones erunt circuli maximi. Sint illi BCDE, FGHF, & eorum diametri ad rectos angulos ducantur BD, CE. In maiori circulo BCDE polygonum aequalium & parium laterum [μ] describatur, non tangens minorem FGH. Sint in quadrante BE ea

λ. 14. def. 11. & seq. & 15. 3.

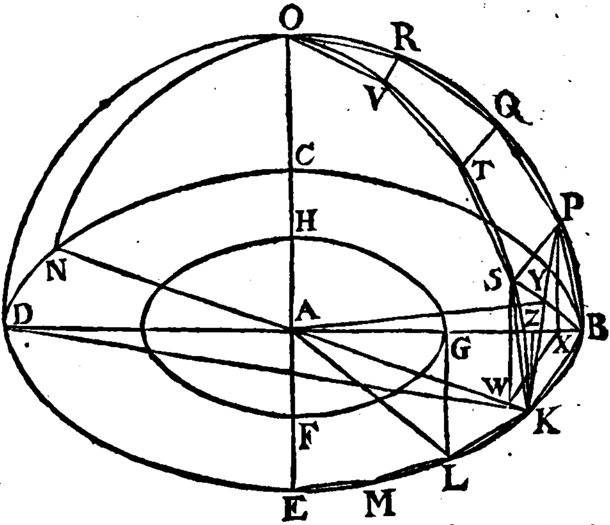
μ. 16. 12.



latera BK, KL, LM, ME, & iuncta KA producatur ad N. Ex A in planum BCDE erigatur
ʸ.12.11. perpendicularis ʸ AO, superficiei sphaerae maioris occurrens in O, & per AO ac vtramque BD, KN ducantur plana, quae in superficie sphaerae efficient maximos circulos, quorum semisses sint DOB, NOK. Quia AO
ᶻ.3.def.11. ipsis BD, KN ad rectos ᶻ est: erunt OB, OK
ᵃ.1.def.3. quadrantes circulorum, & aequales ᵃ, quia circuli aequales diametros BD, KN habent. Quot ergo latera polygoni sunt in quadrante BE, tot aptari possunt illis aequalia in quadrante BO, quae sint BP, PQ, QR, RO, & in quadrante KO, quae sint KS, ST, TV, VO. Iungantur SP, TQ, VR. Ex P, S in planum BCDE demit-

mittantur [π] perpendiculares PX, SW, quae π. 11. 11.
occurrent [ρ] rectis BA, KA. Et quia BP, KS ρ. 38. 11.
sunt aequales partes aequalium circulorum,[σ] σ. 26. 1.
anguli vero PXB, SWK [ξ] recti: erit [τ] PX = τ. 3. ax. 1.
SW, & BK = KW, ideoque AX = [υ] AW, & υ. 2. 6.
XW ipsi KB [φ] parallela. Sed quum aequa- φ. 6. 11.
les [χ] PX, SW etiam parallelae [φ] sint: erunt χ. 33. 1.
XW, PS parallelae [χ] & aequales. Ergo & PS, ψ. 9. 11.
BK erunt parallelae [ψ]. Hinc [ω] quadrilaterum ω. 7. 11.
PS, KB est in vno plano. Idem similiter constat de quadrilateris QTSP, RVTQ. Sed & △ ROV planum [α] est. Ductis ergo a pun- α. 2. 11.
ctis P, S, T, Q, R, V ad A rectis, constituetur figura solida polyedra inter quadrantes circ. BO, KO, ex pyramidibus composita, quarum vertex communis A, & bases plana BKSP, PSTQ. QTVR, VOR. In vnoquoque laterum KL, LM, ME eadem quae in KB construantur, & etiam in reliquis tribus quadrantibus, & in reliquo hemisphaerio. Sic fiet solidum polyedrum maiori sphaerae inscriptum, compositum ex pyramidibus, quarum vertex communis A. Dico, huius solidi superficiem non tangere superficiem minoris sphaerae.

Ducatur enim in planum PSKB ex A perpendicularis AY, & KY, BY iungantur. Et quoniam ob ang. AYB, AYK rectos [ξ], BYq + AYq = [β] ABq = AKq = KYq + AYq; β. 47. 1.
erit BY = KY. Similiter patet, esse SY = PY = BY. Ergo PSKB est quadrilaterum in circulo, [γ] centro Y interuallo YB, descripto. γ. 15. def. 1.
Et quia BK > [δ] XW, ideoque > PS; BK δ. 2. sch. 4. 6. & 14. 5.



vero $= KS = PB$: erit circumferentia huius
ε.28.3. circuli, quam recta BK ſubtendit, quadrante [ε]
ζ.33.6. maior, hinc ang. KYB recto [ζ] maior, & KBq [η]
η.12.2. > 2 BYq. Ducatur a K ad BD perpendicularis KZ, & iungatur DK. Quoniam $AB < AB + 2\,AZ$: erit $DB < 2\,DZ$. Hinc quia
θ.1.6. $DB : 2DZ =$ [θ] $DB \times BZ : 2DZ \times BZ =$ [ι]
ι.cor.8.6. $BKq : 2KZq$: erit $BKq < 2KZq$, & ergo $KZq > BYq$. Sed $KZq + AZq = AKq = BYq + AYq$. Ergo $AZ < AY$, & a
κ.cor.16.12. potiori [κ] $AG < AY$. Ergo polyedri ſuperficies non tangit minoris ſphaerae ſuperficiem. Q. E. F.

Aliter.

Et breuius oſtendemus, eſſe $AG < AY$, excitato ex G in AB perpendiculo GL, & iuncta AL.

AL. Nam bisecta circ. BE, & huius semisse, & sic porro, relinquetur tandem circumferentia minor ea, quam recta ipsi GL aequalis in circulo BCE subtendit. Sit illa BK. Ergo recta BK $<$ GL. Sed vt antea patet esse BK $>$ BY. Ergo GL $>$ BY. Sed GLq $+$ AGq $=$ ALq $=$ ABq $=$ BYq $+$ AYq. Quare GA $<$ AY. Q. E. D.

Corollar.

Si in quauis alia sphaera describatur solidum polyedrum, praedicto polyedro in sphaera BCDEO *simile: habebunt baec duo solida polyedra triplicatam rationem eius quam diametri sphaerarum habent.* Diuisis enim solidis in pyramides numero aequales & eiusdem ordinis: erunt hae pyramides similes. Ergo pyr. BPSKA erit ad pyramidem eiusdem ordinis in altera sphaera in triplicata ratione [λ] eius quam latus homologum ad homologum habet, id est, quam habet semidiameter sphaerae A ad semidiametrum alterius sphaerae. Idem de quibusuis duabus pyramidibus in vtraque sphaera eiusdem ordinis intelligendum est. Sed [μ] vt vna pyramis in sphaera A ad vnam in altera, ita solidum polyedrum in sphaera A ad solidum polyedrum in altera sphaera. Ergo solida polyedra sunt in triplicata ratione semidiametrorum, vel diametrorum. Q. E. D.

λ. cor. 8. 12.

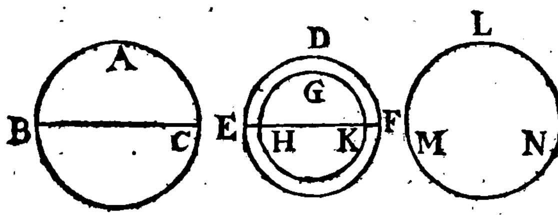
μ. 12. 5.

PROP. XVIII. THEOR.

Sphaerae ABC, DEF *inter se sunt in triplicata ratione suarum diametrorum* BC, EF.

1. Si enim non: sit sph. ABC ad sphaeram GHK ipsa DEF minorem in triplicata ratione BC ad EF. In sph. DEF describatur [ν] solidum polye-

ν. 17. 12.



polyedrum, quod non tangat minorem GHK, circa commune cum illa centrum constitutam, & in sph. ABC huic polyedro simi-
k. cor. 17. 12. le describatur, quod erit k ad polyedrum in sph. DEF in triplicata ratione BC ad FE, ideoque in eadem ratione, in qua sph. ABC ad sph. GHK. Igitur sph. GHK
l. 14. 5. > l polyedro in sphaera DEF descripto, pars toto. Q. E. A.

2. Si ponas, sph. ABC ad sph. LMN ipsa DEF maiorem esse in triplicata ratione BC ad EF: erit sph. LMN: sph. ABC = (EF: BC) 3. Sed sph. LMN ad sph. ABC vt sph. DEF ad sphaeram * ipsa ABC minorem. Ergo sph. DEF erit ad sphaeram ipsa ABC minorem in triplicata ratione diametri EF ad diametrum
*. part. 1. BC. Q. F. N *.

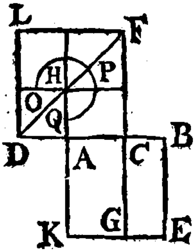
Corollar.

Hinc vt sphaera ad sphaeram, ita est polyedrum solidum in illa ad polyedrum in hac simile & similiter descriptum.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER XIII.

PROP. I. THEOR.



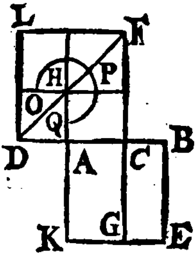
Si recta linea AB *extrema ac media ratione secta fuerit: maior portio* AC *assumens dimidiam* AD *totius* AB *quintuplum potest eius, quod a dimidia* AD *totius fit, quadrati.*

Describantur ex AB, DC quadrata AE, DF. Deinde in DF describatur figura, & producatur FC ad G. Est ergo $CE = AB \times BC =^{\alpha} ACq =^{\gamma} HF$. α. 3.def. &
Iam quia $AK = AB =^{\beta} 2\,AD =^{\gamma} 2\,AH$, & 17. 6.
$AK : AH =^{\delta} AG : CH$: erit $AG = 2\,CH$ β. hyp.
$=^{\varepsilon} CH + HL$, ideoque $AE =^{\zeta}$ gnomoni γ. 1. cor. 4. 2.
OPQ. Sed $AE = ABq =^{\eta} 4\,ADq = 4$ δ. 1. 6.
DH. Ergo gn. $OPQ = 4\,DH$, & proin- ε. 43. 1.
de $^{\zeta}$ DF, id est $CDq = 5\,DH$ vel $5\,ADq$. ζ. 2. ax. 1.
Q. E. D. η. sch. 4. 2.

PROP. II. THEOR.

Si recta linea CD *partis sui ipsius* AD *quintuplum possit, atque duplum* AB *dictae partis* AD *extrema ac media ratione secetur: maior portio est pars reliqua* CA *eius quae a principio rectae lineae* CD. Fig. prop. praec.

 De-



Descriptis enim iisdem, quae antea, quia DF $=$ CDq $=$ 5 ADq $=$ 5 DH: erit ϑ gnomon OPQ $=$ 4 DH. Sed 4 DH $=$ 4 ADq $=$ ι ABq $=$ AE. Ergo gn. OPQ $=$ AE. Deinde quia vt in praec. ostenditur AG $=$ CH $+$ HL: erit ϑ quadratum HF $=$ CE, id est κ ACq $=$ AB $\times$ BC. Quare λ $\div$ AB, AC, BC; & quia μ AB $>$ AC, erit AC $>$ CB. Igitur si recta AB extrema ac media ratione secatur: ν maior eius portio est CA. Q. E. D.

ϑ. 3. ax. 1.
ι. sch. 4. 2.
κ. constr.
λ. 17. 6.
μ. lem. seq.
ν. 3. def. 6.

LEMMA.

At vero *duplam ipsius* AD, *quae est* AB, *maiorem esse quam* AC, sic demonstrabitur.

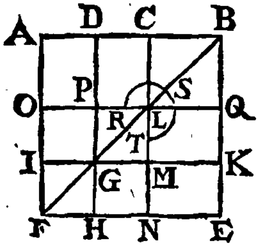
Si negas: sit AC $=$ 2 AD. Erit ergo ACq $=$ 4 ADq, & ACq $+$ ADq $=$ 5 ADq $=$ ξ CDq, pars toti. Q. E. A. Si ponas 2 AD $<$ AC, similiter ostendemus, totum esse parte sua minus. Q. E. A. Ergo 2 AD $>$ AC. Q. E. D.

ξ. hyp.

PROP. III. THEOR.

Si recta linea AB *extrema ac media ratione secta fuerit: portio minor* CB *assumens dimidiam* CD *maioris portionis* AC *quintuplum potest eius, quod a dimidia* CD *maioris portionis fit, quadrati.*

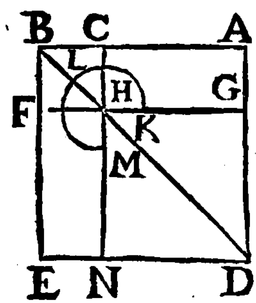
Describatur enim ex AB quadratum AE, & figura compleatur. Ergo, quia AC $=$ 2 CD:



CD: erit ON = ACq = 4 CDq = 4 PM. Et quia AB × BC [o] = ACq, & AB × BC = CE: erit CE = 4 PM. Rursus quoniam AD = DC, & proinde IG = [π] GM: erit PM = [ρ] HI, & PG = GH, vel [π] QK = KE. Quare [σ] Pgr. ME = MQ = [τ] LD, ideoque gnomon RST = [υ] CE = 4 PM, ac ob id [υ] totum DK id est DBq = 5 CDq. Q.E.D.

o. 3. def. 6.
π. 34. 1.
ρ. 1. cor. 4. 2.
σ. 36. 1.
τ. 43. 1.
υ. 2. ax. 1.

PROP. IV. THEOR.



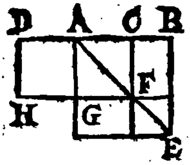
Si recta linea AB *extrema ac media ratione secta fuerit: totius* AB *& minoris portionis* BC *utraque simul quadrata tripla sunt quadrati eius, quod a maiori fit portione* AC.

Descripto enim ex AB quadrato AE, & completa figura: erit, vt antea, AF = [φ] GN. Sed AF = [χ] CE, ideoque AF + CE id est gnom. KLM + CF = 2 AF = 2 GN. Ergo addito communi GN, erit AE + CF = 3 GN, id est, ABq + BCq = 3 ACq. Q.E.D.

φ. 3. def. 6.
χ. 43. 1.

PROP.

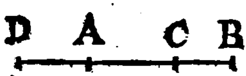
PROP. V. THEOR.



Si recta linea AB *extrema ac media ratione secetur, adiiciaturque ipsi* AD *aequalis maiori portioni* AC: *erit tota linea* BD *extrema ac media ratione secta, & maior portio erit ea, quae a principio posita est, recta linea* AB.

Descripto enim ex AB quadrato AE, &
ψ. 3. def. 6. completa figura: erit CE = ψ CG. Sed
ω. sch. 48. 1. CE = GE, & CG = ω GD. Ergo GD =
GE, & hinc HB = AE, id est BD × DA =
α. 17. 6. ABq. Quare α BD : AB = AB : DA, & AB
> AD, quia BD > AB. Hinc patet ψ
Q. E. D.

PROP. VI. THEOR.

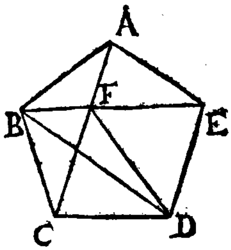


Si recta linea rationalis AB *extrema ac media ratione secta fuerit: vtraque portio* AC, CB *irrationalis est, quae apotome appellatur.*

Producatur CA, & sit AD = ½ AB. Er-
β. 1. 13. go CDq = β 5 ADq. Hinc, quia AD est ρ,
γ. 9. def. & erit γ CDq ρ, ac ergo ipsa CD ρ. Sed δ CD
6. 10. non ⋝ AD. Ergo CD, DA erunt ρ ⋶. ideo-
δ. 9. 10. que AC apotome ε erit. Deinde quia AB
ε. 74. 10. × BC = ζ ACq: ACq ad ρ AB applicatum
ζ. 3. def. 6. latitudinem faciet BC, quae proinde η erit apo-
η. 98. 10. tome prima. Q. E. D.

PROP.

PROP. VII. THEOR.



Si pentagoni aequilateri ABCDE *tres anguli, siue deinceps siue non deinceps, inter se fuerint aequales: aequiangulum erit pentagonum.*

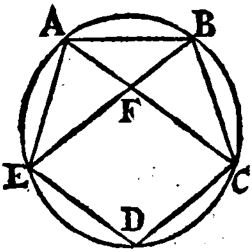
1. Sint anguli deinceps A, B, C aequales. Iungantur AC, BE, FD. In $\triangle$is BAE, ABC erit [ϑ] BE = AC, & ang. AEB = ACB, & ang. ABE = BAC. Ergo BF = [ι] AF, & FE = [κ] FC. ϑ. 4. 1.
Sed praeterea ED = DC. Ergo [λ] ang. ι. 6. 1.
FED = FCD, ideoque [μ] ang. AED = κ. 3. ax. 1.
BCD = A = B. Similiter demonstrabi- λ. 8. 1.
tur, ang. CDE = B = cuique reliquorum. μ. 2. ax. 1.
Q. E. D.

2. Sit ang. A = C = D. Iungatur BD. Et quia AB = BC, & AE = CD, & ang. A = C: erit [ϑ] ang. AEB = CDB, & BE = BD, ideoque ang. BED = BDE. Hinc [μ] totus AED = CDE = A = C. Idem de ang. B similiter ostendetur. Q. E. D.

PROP. VIII. THEOR.

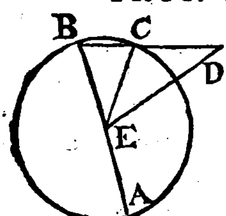
Si pentagoni aequilateri & aequianguli ABCDE *duos, qui deinceps sunt, angulos* A, B *subtendunt rectae lineae* BE, AC: *extrema ac media ratione se mutuo secant; & maiores ipsarum portiones* EF, FC *pentagoni lateri* AE *sunt aequales.*

Describatur



ν. 14. 4. Deſcribatur [ν] circa pentagonum circulus. Primo in triangulis
ξ. 4. 1. AEB & ACB eſt [ξ] BE = AC, & ang. EBA = CAB. Hinc ang. AFE = [ο] 2 CAB
ο. 32. 1. = [π] CAE. Igitur
π. 33. 6.
ρ. 6. 1. EF = [ρ] AE. Deinde quia ang. FAB =
σ. 5. 1. FBA = [σ] AEB, & ang. B communis Δis AFB, AEB: erunt [π] Δa iſta aequiangula, & erit EB : BA = BA : BF, id eſt ob AB = AE = EF, EB : EF = EF : FB. Eſt vero EF > FB, quia EB > EF. Ergo BE in F ſecatur extrema ac media ratione, & maior portio EF aequalis eſt lateri pentagoni AE. Idem ſimiliter de recta AC oſtendemus. Q. E. D.

PROP. IX. THEOR.



Si latera hexagoni DC *& decagoni* CB *in eodem circulo* ACB *deſcriptorum componantur: erit tota recta* BD *extrema ac media ratione ſecta, & maior ipſius portio erit hexagoni latus* CD.

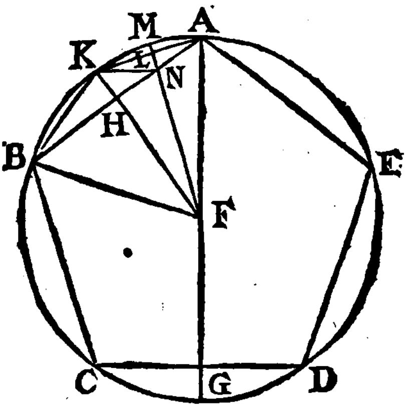
Sit centrum circuli E. Quia BC eſt latus decagoni aequilateri: erit circumf. ACB = 5
τ. 33. 6. BC, ergo AC = 4 CB. Hinc & ang. AEC [τ]
υ. 32. 1. = 4 BEC. Sed ang. AEC = [υ] BCE + CBE
φ. 5. 1. = [φ] 2 BCE; &, ob DC = [χ] CE, eſt ang. BCE
χ. cor. 15. 4. = 2

$= 2$ CDE: quare AEC $= 4$ CDE. Eſt ergo ang. BDE $=$ BEC. Sed ang. B eſt communis $\triangle$is BED, BEC. Quare ♆ BD : BE $=$ BE : BC, hoc eſt BD : DC $=$ DC : CB. Eſt autem DC $>$ CB, quia BD $>$ DC. Ergo patet Q. E. D. ♆. 4. 6.

* *Schol.*

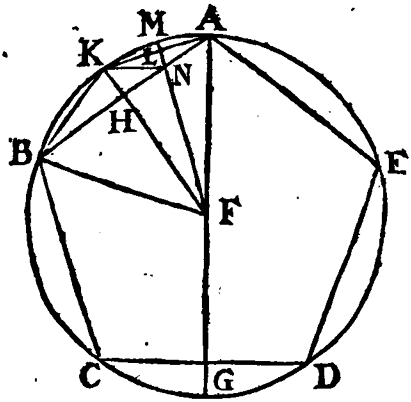
Et conuerſim, ſi qua recta BD extrema ac media ratione ſecetur: erit minor portior BC latus decagoni in eo circulo, in quo maior CD eſt latus hexagoni. Nam, eadem deſcripta figura, quia ang. AEC $=$ 2 BCE, & ang. BCE $=$ 2 CDE $=$ 2 BEC (per 6. 6.): erit circumf. AC $=$ 4 BC, ideoque recta BC latus decagoni.

PROP. X. THEOR.



Si in circulo ABCDE *pentagonum aequilaterum deſcribatur: latus pentagoni* AB *poteſt & hexagoni & decagoni latus in eodem circulo deſcriptorum.*

Suma

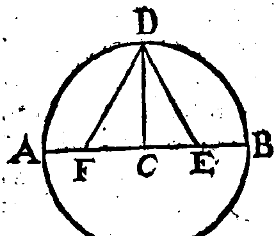


Sumatur centrum circuli F, & ducatur diameter AFG, & iungatur FB. Ab F ad AB ducatur perpendicularis FHK, & iungantur AK, KB. Rursus ab F ad AK ducatur perpendicularis FNLM, & iungatur KN. Igitur quia circ. ABCG = AEDG, & circ. ABC = AED: erit circ. CG = GD, ideoque CGD = 2 CG. Rursus quia BF = AF, & anguli
α. 5. & 26. 1. ad H aequales sunt: erit [α] ang. BFH = AFH,
α. 26. 3. ideoque circumf. BK = [α] KA, & AKB = 2 BK, & hinc AK erit latus decagoni. Similiter patet, esse circ. BK = AMK = 2 KM. Iam,
β. 7. ax. 1. quia CGD = AKB: erit [β] circ. CG = BK = 2 KM. Sed circ. CB = AKB = 2 BK. Er-
γ. 2. ax. 1. go [γ] circ. BCG = 2 BKM, & ob id ang. BFG
δ. 33. 6. = [δ] 2 BFM. Sed ang. BFG = [ε] BAF +
ε. 32. 1. ABF = [ζ] 2 BAF. Ergo [β] ang. BAF = BFM.
ζ. 5. 1. Quum igitur Δa BFA, BFN sint aequiangula:
η. 4. 6. erit [η] AB : BF = BF : BN, & proinde AB $\times$ BN

$BN = $ [ϑ] BFq. Rursus quia ang. ad L re- ϑ. 17. 6.
cti sunt, & [ι] $AL = LK$: erit [κ] ang. LAN ι. 3. 3.
$= LKN$. Sed quia recta AK [λ] $= KB$, est κ. 4. 1.
ang. $LAN =$ [ξ] KBA. Ergo ang. KBA λ. 29. 3.
$= AKN$. Quare in $\Delta$is aequiangulis ANK, ABK erit $BA : AK =$ [ο] $KA : AN$, & hinc $AB \times AN =$ [ϑ] AKq. Ergo $ABq =$ [μ] AB μ. 2. 2.
$\times BN + AB \times AN = BFq + AKq$. Est ν. cor. 15. 4.
autem BF latus [ν] hexagoni, & AK decagoni. Q.E.D.

* *Schol.*

Hic praxin faciliorem trademus problematis 11. 4. *In dato circulo pentagonum aequilaterum & aequiangulum describere.*

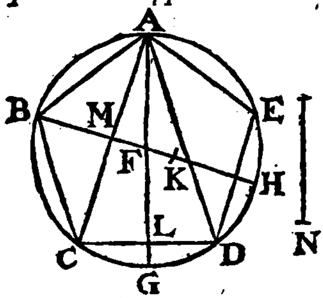


Super diametro AB ex centro C erigatur perpendicula is CD. Bisecetur BC in E, & iungatur ED, cui capiatur aequalis EF. Iuncta FD erit latus pentagoni in circulo ABD describendi.

Nam quia (per 6. 2.) $BF \times FC + CEq = EFq = EDq = CDq + CEq$: erit $BF \times FC = CDq = BCq$. Quum ergo sit $BF : BC = BC : CF$: erit BF extrema ac media ratione secta. Sed maior portio BC est latus hexagoni in circulo ABD. Ergo CF est latus decagoni in eodem (per sch. praec.); & hinc $DF = \sqrt{(DCq + CFq)}$ latus pentagoni. Q.E.F.

PROP. XI. THEOR.

Si in circulo ABCDE, *rationalem diametrum habente, pentagonum aequilaterum describatur: pentagoni latus* AB *est linea irrationalis, quae minor appellatur.*

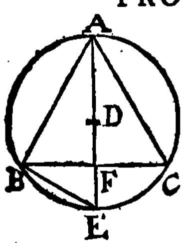


Sumatur enim circuli centrum F, & ducantur diametri AG, BH, & iungatur AC, & capiatur FK $= \frac{1}{4}$ AF, quae erit ῥ, quia AF ῥ. Sed & BF est rationa-
ξ. 16. 10. lis. Ergo ξ BK est ῥ. Et quia circumf. ABG $=$ AEG, & ABC $=$ AED: erit circ. CG $=$ GD, & ο
ο. 27. 3. ang. CAG $=$ GAD, item ang. ACL $=$ ο ADL.
π. 32. 1. Ergo π anguli ad L sunt recti, & hinc ρ CL $=$ LD,
ρ. 3. 3. & CD $= 2$ CL. Eadem ratione & anguli ad M recti sunt, & AC est $= 2$ CM. Quia igitur Δa
σ. 4. 6. ALC, AFM aequiangula sunt: erit σ LC : CA $=$
τ. sch. 4. 5. MF : FA, & τ 2 LC : CA $=$ 2 MF : FA, $=$ υ MF : $\frac{1}{2}$
υ. 15. 5. FA; ideoque 2 LC : $\frac{1}{2}$ CA $=$ MF : $\frac{1}{4}$ FA, id est CD : CM $=$ MF : FK. Hinc componendo
ν. 22. 6. do DC + CM : CM $=$ MK : KF, & ν (DC + CM) q : CMq $=$ MKq : KFq. Iam si AC extrema ac media ratione secetur, erit maior
φ. 8. 13. eius portio φ $=$ CD; ideoque erit χ (DC +
χ. 1. 13. CM) q $= 5$ CMq. Hinc & MKq $= 5$ KFq;
ψ. sch. 12. 10. ideoque ψ MKq est ῥ, & MK ῥ. Et quoniam BF $= 4$ FK: erit BK $= 5$ FK, & BKq $= 25$
ω. 9. 10. FKq. Hinc 5 MKq $=$ BKq, & ob id ω BK non

non $\lesssim$ MK. Vtraque tamen ρ existente, erunt BK, KM ρ ϵ. Quare MB est apotome [α] & ipsi congruens MK. Dico, & MB esse apotomen quartam. Sit enim $\sqrt{}$ (BKq — KMq) $=$ N. Et quia KF $\lesssim$ FB; erit KB $\lesssim$ [β] FB $\lesssim$ BH rationali expositae. Deinde quia BKq : KMq $=$ 5 ; 1, & conuertendo BKq : Nq $=$ 5 : 4 : erit [α] N non $\lesssim$ BK. Ergo [γ] MB erit apotome quarta. Hinc, quum sit ABq $=$ [δ] MB $\times$ BH, erit [ε] AB $\alpha\lambda$ quae vocatur minor. Q.E.D. α. 74. 10. β. 16. 10. γ. 4. def. terr. 10. δ. cor. 8. 6. & 31. 3. ε. 95. 10.

* *Cor.* Diameter circuli AG ex angulo A pentagoni regularis ducta & arcum CD a latere opposito subtensum, & latus ipsum oppositum CD ad angulos rectos bisecat.

PROP. XII. THEOR.



Si in circulo ABC *triangulum aequilaterum* ABC *describatur: trianguli latus* AB *potentia triplum est eius* DA *quae ex circuli centro* D.

Nam, producta AD in E, quia circumf. BEC est tertia pars circuli, & BE $=$ [ζ] EC : erit BE sexta pars circuli, ideoque recta BE latus hexagoni $=$ [η] DA. Et quia ABq $+$ BEq $=$ [θ] AEq $=$ 4 DAq : erit ABq $=$ [ζ] 3 DAq. Q.E.D. ζ. 3. ax. 1. η. cor. 15. 4. θ. 31. 3.

* *Schol.*

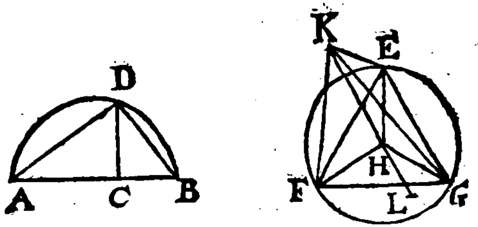
1. AEq : ABq $=$ 4 : 3.

2. ABq : AFq $=$ 4 : 3. Nam [ι] AEq : ABq $=$ ABq : AFq. ι. cor. 8. 6. & 22. 6.

3. DF $=$ FE. Nam $\triangle$ EBD aequilaterum est, & ADF ad BC perpendicularis [κ]. Ergo [λ] DF $=$ FE. κ. 4. 1. λ. cor. 3. 3.

4. Hinc AF $=$ 3 FD.

PROP. XIII. PROBL.



Pyramidem † *constituere, & sphaera comprehendere data; atque etiam demonstrare, quod sphaerae diameter* AB *est potentia sesquialtera lateris ipsius pyramidis.*

μ. 9. 6. Secetur AB in C[μ] ita, vt AC = 2 CB. Super AB describatur semicirculus ADB, & ex C ad AB ducatur perpendicularis CD, & iungatur AD. Fiat circulus EFG centro H inter-
ν. 2. 4. uallo CD, & in eo describatur [ν] triangulum aequilaterum EFG. Iungantur HE, HF, HG. Ex H plano huius circuli excitetur ad rectos HK, quae fiat = AC, & iungantur KE, KF, KG, EFGK erit tetraedrum desideratum.

ξ. 3. def. 11. 1. Etenim quia ang. KHE est [ξ] rectus, ideoque = ACD, & KH = AC, HE = CD: erit [ο]
ο. 4. 1. KE = AD. Similiter KF = AD = KG.
π. lemma sequens. Et quoniam AB = 3 BC, & AB : BC = [π] ADq :
ρ. constr. DCq: erit ADq = 3 DCq = [ρ] 3 HEq = [σ] EFq.
σ. 12. 13. Hinc EF = AD; & ergo FG = GE = EF = AD = KE = KF = KG. Sunt ergo Δa EFG,
τ. 26. def. 11. EKG, FKG, EKF aequilatera & aequalia. Ergo EFGK est [τ] tetraedrum.

2. Pro-

† Vel potius *tetraedrum:* quod & in sequentibus intellige.

2. Producatur KH in L, vt sit HL = CB. Quia [v] AC : CD = CD : CB : erit KH : HE = EH : HL. Ergo semicirculus super KL descriptus [φ] transibit per E, &, manente KL, conuersus transibit etiam per G & F, quod eodem modo ostendetur. Ergo [χ] sphaera data, cuius diameter est AB = KL, comprehendet tetraedrum EFGK. Q. E. F. v. cor. 8. 6. φ. sch. 13. 6. χ. 14. def. 11.

3. Quia AB : BC = [ε] 3 : 1 : erit conuertendo AB : AC = 3 : 2. Est vero BA : AD [v] = AD : AC, & hinc AB : AC = [ψ] ABq : ADq. Ergo ABq = $\frac{3}{2}$ ADq = $\frac{3}{2}$ KEq. Q. E. D. ψ. 2. cor. 20. 6.

LEMMA.

Demonstrandum autem est, esse AB : BC = ADq : DCq.

Nam quia BA : AD = [v] AD : AC : erit BA × AC = ADq. Et quia AC : CD = [v] CD : BC : erit AC × CB = CDq. Hinc AB : BC = [ω] AB × AC : AC × BC = ADq : CDq. Q. E. D. ω. 1. 6.

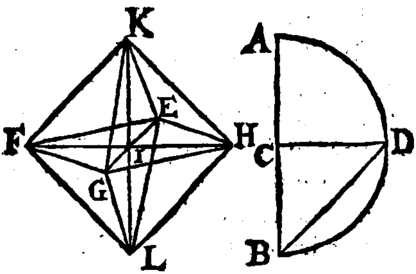
* *Coroll.* Diameter sphaerae KL est sesquialtera altitudinis KH tetraedri inscripti.

* *Schol.* Latus tetraedri FG potentia est sesquialterum altitudinis tetraedri HK. Nam FGq : HKq = ADq : ACq = ABq : ADq = 3 : 2.

PROP. XIV. PROBL.

Octaedrum constituere, & eadem sphaera comprehendere, qua & pyramidem; atque demonstrare, sphaerae diametrum AB *potentia duplam esse lateris ipsius octaedri.*

 Data



Data diameter AB bisecetur in C, & describatur super AB semicirculus, & ex C in AB ducatur perpendicularis CD, & DB iungatur. Fiat quadratum EFGH, cuius latus = BD. Ex puncto I intersectionis diametrorum EG, FH plano EFGH ad rectos ducatur KIL, & fiat KI = IL = IE, & iungantur KE, KF, KG, KH, LE, LF, LG, LH.

α. 9. 4. 1. Nam quia [α] EI = IH, & ang. EIH rectus:
β. 47. 1. erit [β] EHq = 2 EIq. Et quum KI = IE, ac ang.
γ. 3. def. 11. KIE rectus [γ]: erit & KEq = 2 EIq. Hinc EH = KE. Similiter KH = HE. Ergo △ EKH est aequilaterum. Eodem modo ostendemus, reliqua triangula, quorum bases sunt EF, FG, GH, HE & vertices K, L, esse aequilatera. Et patet, omnia haec △a inter se aequa-
δ. 2. sch. 8. 1. lia [δ] esse. Ergo KEFGHL est [ε] octaedrum.
ε. 27. def. 11. Q. E. F.

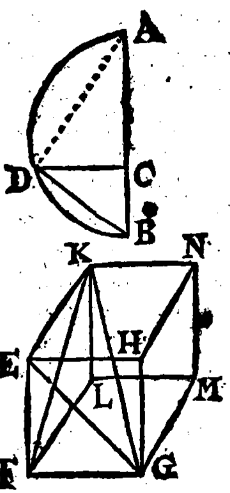
2. 3. Quia KI = IE = IL: semicirculus super KL descriptus transibit per E. Et manente KL, conuersus hic semicirculus transibit etiam per F, G, H. Ergo sphaera diametri KL comprehendet hoc octaedrum. Sed & data sphaera. Nam quia KE = EL, & ang. in

semi-

ſemicirculo KEL [ζ] rectus eſt, erit KL q = 2 KE q. Eſt vero AB = 2 BC, & [η] AB : BC = ABq : BDq. Ergo ABq = 2 BDq = 2 KEq = KLq. Hinc diametro datae AB aequalis eſt ipſa KL, ideoque octaedrum ſphaera data comprehenditur; & AB potentia dupla eſt lateris octaedri KE. Q. F. F. & D. ζ. 31. 3. η. cor. 8. & 20. 6.

* *Coroll.* Octaedrum conſtat ex duabus pyramidibus aequalibus, baſin quadratam habentibus, & altitudinem aequalem ſemidiametro ſphaerae circumſcriptae.

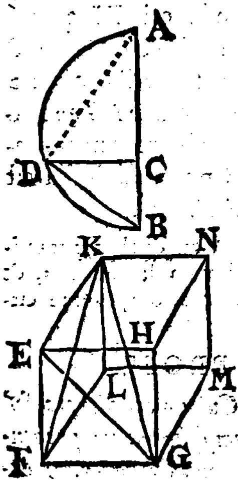
PROP. XV. PROBL.



Cubum conſtituere, & eadem ſphaera comprehendere, qua & priores; atque demonſtrare, ſphaerae diametrum AB *lateris potentia triplam eſſe.*

Ex AB auferatur pars tertia BC, & ſuper AB deſcripto ſemicirculo, ducatur ad AB perpendicularis CD, & iungatur DB. Fiat quadratum EFGH habens latus = DB. Ex punctis E, F, G, H plano EFGH ad rectos [ϑ] excitentur EK, FL, GM, HN, quarum quaeque fiat = EF. Iungantur KL, LM, MN, KN. ϑ. 12. 11.

1. Quidem ex conſtructione ſatis patet, ſolidum genitum eſſe [ι] cubum. Q. E. F. ι. 25. def. 11.



2. 3. Iungantur EG, KF, KG. Et quia ang. KEG rectus * est: semicirculus super KG transibit λ per E. Rursus quia μ anguli GFE, GFL recti sunt, ideoque GF plano EL recta ν est, & hinc * ang. GFK rectus; alius semicirculus super KG transibit λ per F. Idem de reliquis punctis H, N, M, L ostendetur. Quare semicirculus super KG, manente KG, conuersus faciet sphaeram, quae cubum EM comprehendet. Dico autem, diametrum KG = AB. Nam quia EGq =ξ 2 EFq = 2 EKq: & KGq ξ = EGq + EKq: erit KGq = 3 EKq = μ 3 BDq. Sed quum sit AB = 3 BC, & ABq: BDq: erit ABq = 3 BDq = KGq. Ergo KG = AB. Itaque cubus factus est, quem data sphaera comprehendit, & diameter AB potentia tripla est lateris eius FG. Q. E. F. & D.

κ. 3. def. 11.
λ. sch. 13. 6.
μ. constr.
ν. 4. 11.
ξ 47. 1.
ο. cor. 8. & 20. 6.

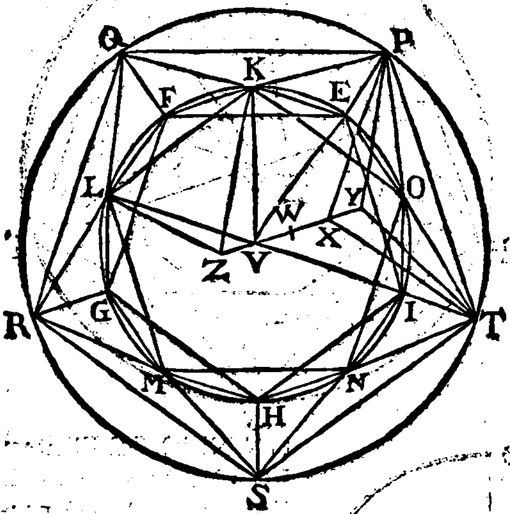
* *Schol.* Quia AD erat π latus tetraedri sphaerae datae inscripti: patet, diametrum sphaerae AB posse latera tetraedri & cubi in eadem inscriptorum.

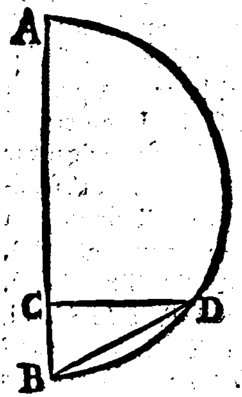
π. 13. 13.

PROP. XVI. PROBL.

Icosaedrum constituere, & eadem sphaera comprehendere, qua & praedictas figuras; atque

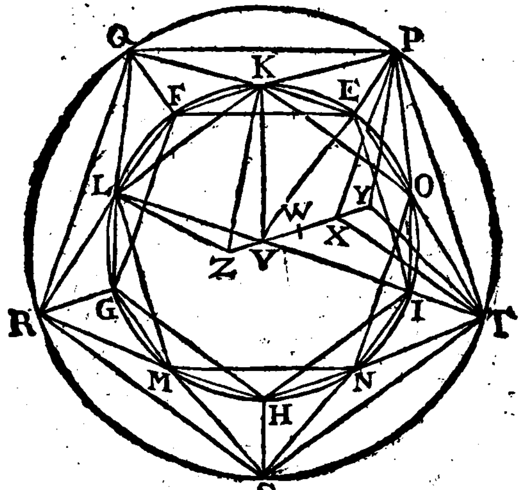
que etiam demonstrare, icosaedri latus irrationalem esse lineam, quae minor appellatur.

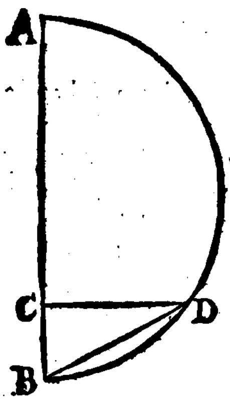




1. A datae sphaerae diametro AB abscindatur pars quinta BC, & super AB descripto semicirculo, ducatur ad AB perpendicularis CD, & BD iungatur, quo interuallo describatur circulus EFGHI. Huic inscribatur pentagonum aequilaterum & aequiangulum EFGHI. Circumferentiae EF, FG, GH, HI, IE bisecentur in K, L, M, N, O, & iunganturKF, FL, LG, GM, MH,

 HN,





HN, NI, IO, OE, EK, item KL, LM, MN, NO, OK. Erit ergo KLMNO pentagonum aequilaterum & aequiangulum, & EO decagoni latus. A punctis E, F, G, H, I ipsi circuli plano ad rectos erigantur EP, FQ, GR, HS, IT, semidiametro VK singillatim aequales, & iungantur PQ, QR, RS, ST, TP, PK, PQ, QL, LR, RM, MS, SN,

e. 6. 11. NT, TO, OP. Iam quia EP, IT parallelae e

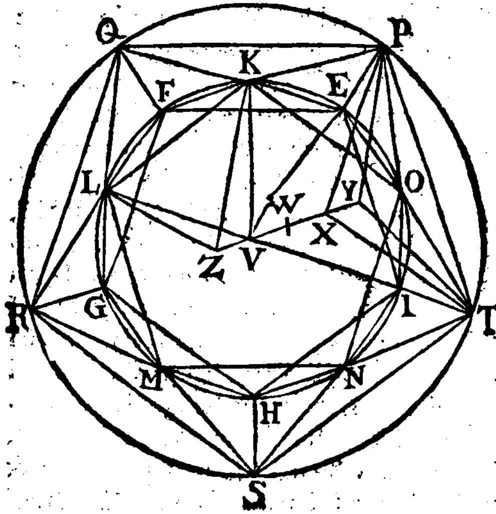
f. 33. 1. sunt, erit PT = EI f, & hinc PT erit latus pentagoni aequilateri in circulo QRSTP ipsi EFGHI aequali. Idem de reliquis PQ, QR,

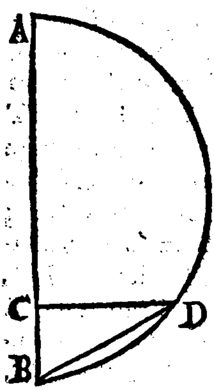
RS,

RS, ST demonstrabitur eodem modo. Erit ergo PQRST pentagonum aequilaterum. Et quia PE est latus hexagoni, EO vero decagoni: erit, ob ang. PEO rectum [τ], PQ latus [υ] pentagoni in eodem circulo. Idem patet de OT. Ergo POT erit △ aequilaterum. Similiter ostenditur, ipsa PKQ, QLR, RMS, SNT esse △a aequilatera. Patet etiam ex dictis KPO, OTN, NSM, MRL & LQK △a aequilatera esse. Ex V centro circuli EFGHI ipsius plano ad rectos ducatur recta, in qua ex vna parte puncti V capiantur VX = lateri hexagoni, & XY = lateri decagoni, & ex altera VZ = XY. Iungantur PY, PX, YT, EV, KZ. Quia VX, PE sunt [ς] parallelae & aequales [φ]: erit PX parallela & = [σ] EV lateri hexagoni, & ang. PXV rectus [χ], hinc & PXV rectus. Quare, quum XY sit decagoni latus, erit PY = lateri pentagoni = PT. Idem iunctis TX, VI patet de recta YT. Ergo PYT est △ aequilaterum. Similiter aequilatera sunt △a reliqua, quorum vertex est Y, & bases sunt TS, SR, RQ, QP. Rursus quia [φ] KZq = KVq + VZq: erit KZ = lateri pentagoni = KL. Eodem modo, iunctis LV, LZ, ostendetur LZ = KL. Ergo △ LZK aequilaterum est. Idem ostendetur de singulis △is, quorum bases sunt LM, MN, NO, OK & vertex communis est Z. Constitutum ergo est solidum viginti triangulis aequilateris contentum, quorum aequalitas etiam patet. Q. E. F.

τ. 3. def. 11.
υ. 10. 13.
φ. constr.
χ. sch. 29. 1

2. Quia





2. Quia VX, XY sunt latera hexagoni & decagoni: erit ψ YV : VX = VX : XY. Hinc φ YV : VK = KV : VZ. Ergo super YZ descriptus semicirculus ω transibit per K. Similiter quia ZX = YV, & PX = VX, erit ZX : XP = PX : XY, & hinc, ob ang. ad X rectos, semicirculus super ZY transibit etiam per P. Quare quum idem similiter de reliquis verticibus angulorum icosaedri ostendi possit; constat, semicirculum circa ZY manentem rotatum transitu-

ψ. 9. 13.
φ. constr.
ω. sch. 13. 6.

transiturum esse per vertices omnium angulorum icosaedri, & ergo hoc icosaedrum comprehensum iri sphaera diametri ZY. Et quoniam, bisecta VX in W, WYq [α] = 5 WXq; ZY vero = 2 WY, ac VX = 2 WX: erit [β] ZYq = 5 VXq. Est autem AB = 5 BC, & ABq : BDq = [γ] AB : BC. Ergo quia ABq = 5 BDq = [φ] 5 VXq = ZYq; sphaera diametri ZY icosaedrum comprehendens erit datae sphaerae aequalis. Q. E. F.

α. 3. & 9.
β. 13.
β. 15. 5.
γ. cor. 8. & 20. 6.

3. Denique quia diameter data AB est ρ, & ABq = 5 BDq: erit [δ] & BD ideoque tota diameter circuli EFGHI rationalis. Hinc quum latus pentagoni KL sit [ε] minor; & eadem KL sit quoque latus icosaedri: patet, latus icosaedri esse irrationalem, quae minor vocatur. Q. E. D.

δ. 6. def. 10.
ε. 11. 13.

* *Corollar.*

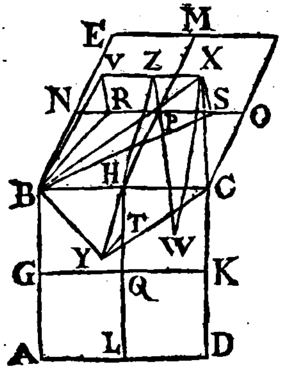
Sphaerae diameter potest quintuplum eius quae ex centro circuli quinque icosaedri latera ambientis. Et diameter sphaerae icosaedro circumscriptae composita est ex latere hexagoni & duplo latere decagoni, quae in eodem circulo describuntur.

PROP. XVII. PROBL.

Dodecaedrum constituere, & eadem sphaera comprehendere qua & praedictas figuras; atque etiam demonstrare, dodecaedri latus esse irrationalem, quae apotome appellatur.

1. Exponantur praedicti cubi [ζ] duo plana ABCD, BCFE, quae sibi inuicem recta sunt, & eorum singula latera bisecentur, & iungantur

ζ. 15. 13.



tur GK, HL, HM, NO. Rectae NP, PO, HQ secentur extrema[n] & media
n. 30. 6. ratione in R, S, T punctis, in quibus ad plana cubi & ad exteriores eius partes excitentur perpendiculares RV, SX, TY, quae fiant aequales ipsis RP, PS, QT. Iungantur VB, BY, YC, CX, VX, quae terminabunt pentagonum dodecaedri. Nam,
9.4. 13. iuncta RB, quia [9] PNq + NRq = 3 RPq, &
BN = PN, ac RP = RV: est BRq = [ι] BNq
ι.47. 1. + NRq = 3 RVq, ideoque BVq = [ι] BRq
+ RVq = 4 RVq. Hinc BV = 2 RV. Sed
τ.7. 14. quia PN = PO, ac ob id RP = [τ] PS: est VX
κ. 33. 1. = [κ] RS = 2 PR = 2 RV. Ergo BV = VX.
Similiter BY, YC, & CX ipsis BV, VX aequales ostendentur. Sunt autem hae quinque rectae in vno plano. Nam ipsi RV vel SX ducatur parallela PZ ad exteriores cubi partes,
λ. 3. def. 6. & iungantur ZH, HY. Et quia [λ] HQ : QT
= QT : TH, & HQ = HP, ac TY = QT =
PZ; est HP : PZ = YT : TH. Sed HP, YT,
μ. 6. 11. eidem plano BD ad rectos insistentes, sunt [μ]
ν. 32. 6. parallelae. Ergo ZHY est [ν] vna recta, & pro-
ξ. 1. 11. inde [ξ] in vno plano. Pentagonum [ο] ergo est
ο. 2. & 7. 11. BYCXV, & aequilaterum. Dico etiam aequiangulum esse. Iungantur enim BX, BS. Quoniam NP secta est in R extrema ac media ratione,

tione, & $SP = PR$: erit [π] $NSq + SPq = 3$ π. 5. 13. &
PNq. Hinc $NSq + SXq = 3\,NBq$, & $NSq +$ 4. 13.
$SXq + BNq = 4\,NBq$, id est [s] $SBq + SXq =$
$BXq = 4\,NBq$. Ergo $BX = 2\,NB = BC$.
Quare in △is BVX, BYC erit [ρ] ang. $BVX =$ ρ. 8. 1.
BYC. Similiter ostendetur ang. $VXC = BYC$.
Ergo pentagonum $BYCXV$ est [σ] aequiangulum. σ. 7. 13.
Si igitur ita ad vnumquodque duodecim laterum cubi eadem construantur, quae hic ad latus BC: figura solida constituetur, duodecim pentagonis aequilateris & aequiangulis & aequalibus contenta. Q. E. F.

2. Producatur ZP intra cubum. Occurret ergo diametro cubi, & ambae se bisecabunt [τ], τ. 39. 11.
quod fiat in W. Est ergo W centrum [υ] sphae- υ. 15. 13.
rae cubum comprehendentis, & dupla $PW =$
[φ] lateri cubi, ideoque $PW = PN$. Et quia φ. 34. 1.
$PZ = PS$, erit $ZW = NS$. Iam quum praeterea $ZX = PS$, & $NSq + SPq = 3\,PNq$: erit
$3\,PNq = ZWq + ZXq =$ [ι] XWq. Sed semi- ι. 47. 1.
diameter sphaerae cubum comprehendentis potest etiam [υ] triplum dimidii lateris cubi PN. Ergo XW est semidiametro sphaerae cubo circumscriptae aequalis. Quare quia W est centrum; erit X in superficie sphaerae. Similiter vertex cuiuslibet reliquorum angulorum dodecaedri in superficie sphaerae esse demonstratur. Ergo dodecaedrum sphaera comprehensum est data. Q. E. F.

3. Quoniam [λ] $NP : PR = PR : RN$, ideo- λ. 3. def. 6.
que [χ] $NO : RS = RS : 2\,RN = RS : RN + SO$; χ. 15. 5.
NO autem $> RS$, ideoque $RS > NR + SO$:
erit [λ] rectae NO extrema ac media ratione se-

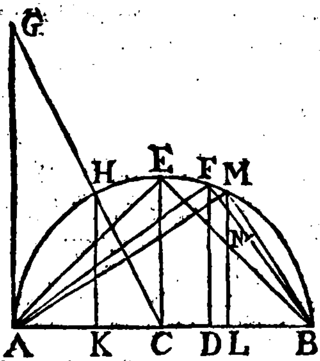
ctae

ctae maior portio ipsa R S = V X. Et quia sphaerae diameter, quae [ν] potest triplum
ψ. 6. 13. ipsius NO, est ρ: erit & NO ρ; ergo [ψ] VX apotome. Q. E. D.

1. *Coroll.* Ergo latere cubi extrema ac media ratione secto, eius portio maior est dodecaedri latus.

* 2. *Coroll.* Liquet etiam, rectam subtendentem angulum pentagoni in dodecaedro esse latus cubi in eadem sphaera inscripti.

PROP. XVIII. PROBL.



Latera quinque figurarum exponere, & inter se comparare.

1. Exponatur datae sphaerae diameter AB, & secetur in C, D sic, vt AC = CB,
α. 9. 6. & [α] AD = 2 DB. Fiat semicirculus AEB, & in AB perpendiculares ducantur CE, DF, & AF, FB iungantur. Et quia AB = 3
α. cor. 19. 5. BD: est [α] AB = $\frac{3}{2}$ AD. Hinc quia AB: AD
β. cor. 8. 20. 6. & = [β] ABq: AFq: est ABq = $\frac{3}{2}$ AFq. Ergo AF est [γ] latus tetraedri.
γ. 13. 13.

2. Quia ABq: BFq = [β] AB: BD = 3: 1:
δ. 15. 13. BF est latus cubi [δ].

3. Iunctis AE, EB, est ABq: BEq = [β] AB:
ε. 14. 13. BC = 2: 1. Ergo BE est latus octaedri [ε].

4. In AB ducatur perpendicularis AG = AB. Iuncta GC, a puncto H ducatur in AB

per-

perpendicularis HK. Iam quia HK : KC $=$ [ζ] GA : AC $= 2 : 1$: erit HKq $= 4$ KCq, ideoque 5 KCq $=$ CHq $=$ CBq. Et quoniam AB $= 2$ BC, & AD $= 2$ DB : erit DB [η] $= 2$ CD, ideoque CB $= 3$ CD, & CBq $= 9$ CDq. Ergo KC $>$ CD. Fac CL $=$ KC, & in AB duc perpendicularem LM, iunge MB. Quia CBq $= 5$ KCq; est [θ] ABq $= 5$ KLq. Ergo KL est latus hexagoni [ι] in circulo quinque icosaedri latera ambientis, ideoque AK $=$ LB $=$ [ι] lateri decagoni in eodem circulo. Sed ML $=$ [κ] HK $= 2$ KC $=$ KL $=$ lateri hexagoni. Ergo MB est [λ] latus pentagoni in eodem circulo, ideoque latus [μ] icosaedri.

ζ. 4. 6.
η. 5. 5.
θ. 15. 5.
ι. cor. 16. 13.
κ. 14. 3.
λ. 10. 13.
μ. 16. 13.

5. Secetur BF extrema ac media ratione: erit maior eius portio BN latus dodecaedri [ν].

ν. 1. cor. 17. 13.

6. Ex his liquet, latera tetraedri, octaedri, & cubi esse ρ Є diametro AB sphaerae. Nam quarum partium 6 est ABq, earum 4 est AFq, trium BEq, & duarum BFq. Ergo [ξ] AFq $= \frac{4}{3}$ BEq $= 2$ BFq, & BEq $= \frac{3}{2}$ BFq. Icosaedri vero & dodecaedri latera nec inter se nec ad praedictarum figurarum latera sunt in rationibus rationalibus: quia illius latus [μ] est minor, huius apotome [ο].

ξ. 22. 5.
ο. 17. 13.

7. Dico, MB icosaedri latus maius esse latere dodecaedri BN. Nam [β] FBq : BDq $=$ AB : BD $= 3 : 1$. Sed ADq $= 4$ BDq. Ergo AD $>$ FB, ideoque AL $>$ FB. Iam AL secta est extrema ac media ratione [π], & maior eius portio est KL; hinc quia & FB extrema ac

β. cor. 8. & 20. 6.
π. 9. 13.

media ratione secta est, & eius maior portio
ς. 3. def. 6. BN est: erit KL ς > BN. Ergo ML =
vel 7. 14. KL > BN, ideoque ϛ MB > BN. Q. E. F.
ϛ. 19. I.

Schol.

Dico, praeter iam dictas quinque figuras non constitui aliam figuram †, quae sub figuris aequilateris & aequiangulis, inter se aequalibus, contineatur.

σ. 11. def. 11. Ex duobus enim angulis planis σ non constituitur angulus solidus. Ex tribus autem triangulis aequilateris & aequalibus constituitur angulus tetraedri, ex quatuor octaedri, ex quinque icosaedri: ex sex autem pluribusue nullus constituetur τ, quia sex anguli △ aequilateri = υ 4 rectis. Porro sub tribus quadratis continetur angulus cubi. Sub qua-
τ. 21. 11. tuor autem pluribusue τ nullus angulus soli-
υ. 5. sch. 32. 1. dus contineri potest. Sub tribus pentagonis aequilateris & aequiangulis ac aequalibus continetur angulus dodecaedri. Sub quatuor autem pluribusue nullus comprehendetur τ
φ. 2. sch. 11. 4. angulus solidus: quia 4 in iis angulorum summa φ > 4 rectis. Ob eandem rationem ex aliis figuris polygonis aequilateris & aequiangulis nullus solidus angulus constitui potest. Ergo nec fieri potest figura solida ex figuris planis aequilateris & aequiangulis praeter quinque dictas. Q. E. D.

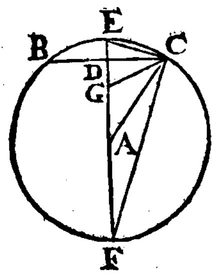
EVCLI-

† Talem autem intelligit figuram, cuius singuli solidi anguli sub aeque multis planis angulis continentur.

EVCLIDIS ELEMENTORVM

LIBER XIV. †

PROP. I. THEOR.



Quae a centro A circuli alicuius ad latus BC pentagoni aequilateri in eodem circulo descripti perpendicularis ducitur AD, dimidia est utriusque & eius AC quae ex centro, & lateris decagoni in eodem circulo descripti.

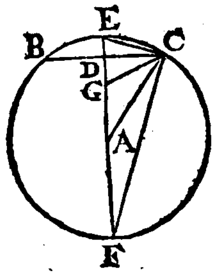
Nam producatur DA in F & E; fiat $DG = ED$, & iungantur CE, GC. Iam quia tota circumferentia circuli $= 5$ BEC: erit dimidia FCE $= 5$ CE, quae dimidia est [α] ipsius BEC. Hinc quia $FC = 4$ CE: erit [β] ang. FAC $= 4$ DAC. Sed FAC $=$ [γ] 2 DEC. Ergo 2 DAC $=$ DEC $=$ [δ] DGC. Quare AG $=$ [ε] GC $=$ CE, ideoque $AD = CE + ED$, & $2\,AD = CE + AE$, id est, $AD = \frac{1}{2}\,CE + \frac{1}{2}\,AC$. Est autem CE latus decagoni. Q. E. D.

α. 3. & 30. 3.
β. 33. 6.
γ. 20. 3.
δ. 4. 1.
ε. 32. & 6. 1.

LEMMA.

Si in circulo pentagonum aequilaterum describatur: quadratum, quod fit ex latere BC

† Vel verius Hypsiclis Alexandrini de quinque corporibus liber prior.



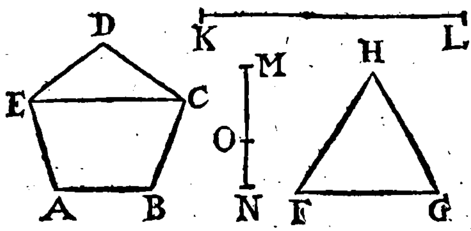
pentagoni, una cum quadrato quod fit ex recta, quae duobus pentagoni lateribus subtenditur, quintuplum erit quadrati eius, quae est ex circuli centro A.

Ex centro circuli A ducatur in BC perpendicularis FADE, & iungatur CE, quae erit ζ latus decagoni, item CF, quae duo pentagoni latera subtendet.
ζ. 3. & 30. 3.

Et quia FE = 2 AE: erit 4 AEq = FEq
η. 31. 3. = η ECq + CFq. Ergo 5 AEq =
θ. 10. 13. AEq + ECq + CFq = θ BCq + CFq. Q.E.D.

PROP. II. THEOR.

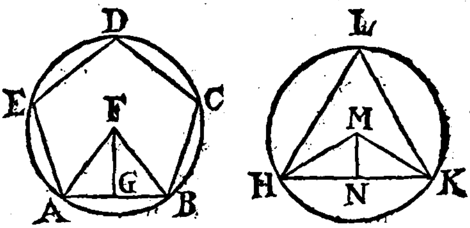
Idem circulus comprehendit dodecaedri pentagonum ABCDE, *& icosaedri triangulum* FGH, *in eadem sphaera descriptorum.*



Sit sphaerae diameter KL. Iungatur EC,
ι. cor. 6. & exponatur ι recta MN talis, vt KLq = 5
10. MNq. Ergo κ MN erit quae ex centro cir-
κ. cor. 16. culi, per quem icosaedrum describitur. Se-
13. cetur MN extrema & media ratione, &
segmen-

segmentum maius sit MO, quae ergo erit [λ] λ. 5. & sch.
latus decagoni in eodem circulo. Iam 9. 13.
quia $5\ MNq = KLq =$ [μ] $3\ CEq$; & 3 μ. 2. cor. 17.
$CEq : 5\ MNq =$ [ν] $3\ ABq : 5\ MOq$: erit & 15. 13.
$3\ ABq = 5\ MOq$. Sed quia FG est [ξ] ν. 8. 13. & 7. 14.
latus pentagoni in praedicto circulo: erit ξ. 16. 13.
$5\ FGq =$ [ο] $5\ MNq + 5\ MOq = 3\ CEq$ ο. 10. 13.
$+ 3\ ABq =$ [π] 15 quadratis eius, quae est ex π. lemma praec.
centro circuli, circa ABCDE circumscripti. ρ. 12. 13.
Atqui $5\ FGq =$ [ρ] 15 quadratis eius, quae est ex centro circuli, circa FGH descripti. Ergo circuli, circa ABCDE & FGH circumscripti, aequales sunt. Q. E. D.

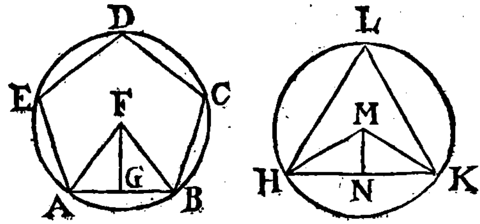
PROP. III. THEOR.



Si fuerit pentagonum aequilaterum & aequiangulum ABCDE, *& circa ipsum circulus; a centro* F *autem ad unum latus* AB *perpendicularis* FG *ducta fuerit: quod tricies sub uno latere* AB *& perpendiculari* FG *continetur superficiei dodecaedri est aequale.* Item

Si fuerit triangulum aequilaterum HKL, *& circa ipsum circulus, cuius centrum* M, *& ab eo perpendicularis* MN: *quod tricies sub* HK, MN *continetur superficiei icosaedri aequale est.*

 1. Iun-



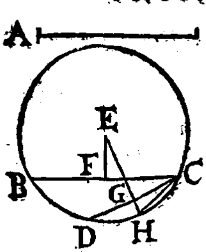
1. Iungantur AF, FB. Quia 5 AB $\times$ FG $=$ σ 10 $\triangle$ AFB $=$ 2 pentagonis ABCDE: erit 30 AB $\times$ FG $=$ 12 ABCDE $=$ ſuperficiei dodecaedri.

e. 41. 1. 2. Iungantur HM, MK. Quia σ 3 HK $\times$ MN $=$ 6 $\triangle$ HMK $=$ 2 $\triangle$ HLK: erit 30 HK $\times$ MN $=$ 20 $\triangle$ HKL $=$ ſuperficiei icoſaedri. Q. E. D.

Corollarium.

Ergo ſuperficies dodecaedri eſt ad ſuperficiem icoſaedri in eadem ſphaera, vt rectangulum ſub latere pentagoni & perpendiculari ex centro circuli circumſcripti ad illud ducta ad rectangulum ſub latere trianguli & perpendiculari ex centro circuli circa triangulum deſcripti.

PROP. IV. THEOR.



Vt dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita eſt latus cubi A *ad icoſaedri latus* BC.

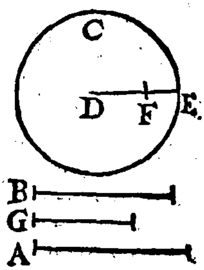
Circulo BCD, qui icoſaedri triangulum, ideoque & dodecaedri pentagonum r comprehendit, inſcribatur

r. 2. 14. pentagoni latus CD, et trianguli CB. Ex

centro

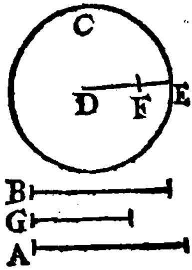
centro E ad BC; CD ducantur perpendiculares EF, EG. Producatur EG in H, & iungatur CH, quae erit latus decagoni. Hinc si EH + HC extrema ac media ratione secetur: erit [τ] EH maior portio. Sed EG = [υ] $\frac{1}{2}$ EH + $\frac{1}{2}$ τ. 9. 13.
HC; & EF = [φ] $\frac{1}{2}$ EH. Ergo duplae ipsius EG υ. 1. 14.
extrema ac media ratione sectae maior portio φ. 3. sch. 12. 13.
erit 2 EF. Sed ipsius A extrema & media ratione sectae maior portio [χ] est CD. Quare [ψ] χ. 1. cor. 17. 13.
A : CD = EG : EF; ideoque A $\times$ EF = ψ. 7. 14.
CD $\times$ EG. Est ergo A : BC = [ω] A $\times$ EF :
BC $\times$ EF = CD $\times$ EG : BC $\times$ EF = [α] do- ω. 1. 6.
decaedri superficies ad icosaedri superficiem. Q. E. D. α. cor. praec.

PROP. V. THEOR.



Qualibet recta linea extrema ac media ratione secta, quam rationem habet ea, quae potest quadratum totius & quadratum maioris portionis, ad eam, quae potest quadratum totius & quadratum minoris portionis, eandem habet cubi latus A *ad latus icosaedri* B.

Sit enim circulus C is, qui capit icosaedri triangulum & dodecaedri pentagonum, in eadem sphaera descriptorum. Ex eius centro D ducatur vtlibet recta DE, quae extrema & media ratione secetur, vt maior eius portio sit FD. Sit G latus dodecaedri, quae [β] erit β. 1. cor.
maior portio rectae A extrema mediaque ra- 17. 13.



tione sectae. Et quoniam B latus trianguli icosaedri in circulo C est: erit Bq = γ 3 DEq. Sed DEq + EFq = δ 3 DFq. Ergo Bq : DEq + EFq = DEq : DFq = ε Aq : Gq, & hinc Aq : Bq = Gq : DEq + EFq. Sed quum G sit latus pentagoni

γ. 12. 13.
δ. 4. 13.
ε. 7. 14.

ζ. sch. 9. & dodecaedri in circulo C; & ζ DF latus decagoni in eodem: erit Gq = η DEq + DFq.

5. 13.
η. 10. 13.

Quare A : B = √ (DEq + DFq) : √ (DEq + EFq), & ergo θ, qualibet recta extrema & media ratione secta, quam rationem habet ea quae potest &c. Q. E. D.

PROP. VI. THEOR.

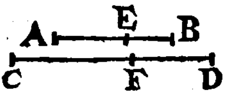
Vt latus cubi ad icosaedri latus, ita est dodecaedri solidum ad solidum icosaedri.

Quia enim idem circulus pentagonum dodecaedri & triangulum icosaedri ϑ in eadem sphaera capit: si e centro sphaerae in planum huius circuli intelligatur ducta perpendicularis; erunt pyramides, quae pentagonum & triangulum bases habent, aeque altae. Vt ergo pentagonum ad triangulum, ita est ι dodecaedri pyramis ad pyramidem icosaedri; ac proinde vt 12 pentagona ad 20 triangula, id est, vt superficies dodecaedri ad superficiem icosaedri, ita dodecaedrum est ad icosaedrum. Nam quia perpendiculares, ex centro sphaerae in circulos in sphaera aequales ductae, in centra eorum circulorum incidunt, & ergo aequales sunt:

ϑ. 2. 14.
ι. 6. 12.

funt: dodecaedrum in 12, icofaedrum in 20 aequales [t] pyramides, in centro fphaerae vertices habentes, diuiditur. Eft ergo [x] vt latus cubi ad icofaedri latus, ita x. 4. 14
dodecaedrum ad icofaedrum. Q. E. D.

PROP. VII. THEOR.



Si duae rectae lineae AB, CD *extrema ac media ratione fectae fuerint: erunt maiores portiones* AE, CF *vt totae* AB, CD.

Nam quia [λ] AEq = AB × BE, & λ. 17. 6.
CFq = CD × DF: erit 4 AB × BE: AEq = 4 CD × DF: CFq, & componendo [μ] (AB + BE)q: AEq = (CD μ. 8. 2.
+ DF)q: CFq. Quare [ν] AB + BE: AE ν. 22. 6.
= CD + DF: CF, & componendo 2 AB: AE = 2 CD: CF, & alterne AB: CD = AE: CF. Q.E.D.

Corollar.

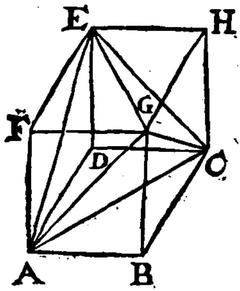
Dodecaedrum & icofaedrum in eadem fphaera eandem inter fe rationem habent, quam, fi recta linea extrema ac media ratione fecetur, habet ea, quae poteft quadrata totius & maioris portionis, ad eam, quae poteft quadrata totius & minoris portionis.

):(o):(

EVCLIDIS ELEMENTORVM

LIBER XV.

PROP. I. PROBL.



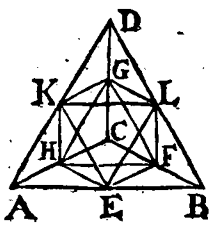
In dato cubo ABCDEFGH *pyramidem describere.*

Ducantur diametri quadratorum GA, GE, GC, EA, EC, CA, quae omnes α inter se aequales sunt. Ergo triangula EGC, EAG, AGC, EAC sunt aequilatera, & aequalia. Proinde EGCA tetraedrum est, cubi angulis insistens, & ergo ipsi inscriptum β. Q.E.F.

α. 4. I.

β. 31. def. II.

PROP. II. PROBL.



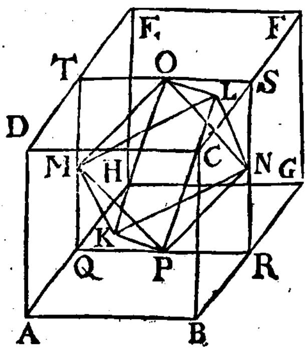
In data pyramide ABCD *octaedrum describere.*

* Bisecentur latera tetraedri in punctis E, F, G. H, K, L. Haec puncta connectantur 12 rectis, quae omnes inter se γ aequales erunt. Quare octo triangula, quae bases habent rectas HG, GL, LE, EH & vertices K, F, aequilatera erunt & aequalia; & solidum sub ipsis com-

γ. 4. I.

comprehensum octaedrum erit, dato tetraedro inscriptum. Q. E. F.

PROP. III. PROBL.



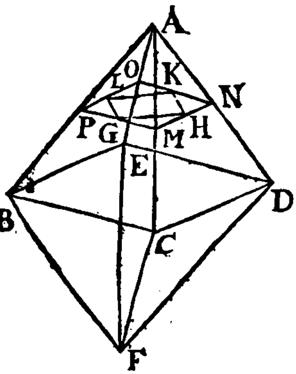
In dato cubo ABCDEFG *octaedrum describere.*

Sumantur[δ] quadratorum centra K, L, M, N, O, P. Iunctae 12 rectae ML, LN, NP &c. constituent octaedrum. Nam per P, N, O, M ducantur lateribus quadrati AC parallelae QR, RS, ST, MQ, quae iisdem lateribus, & ergo inter se aequales erunt. (*Patet vero, has rectas se mutuo tangere; quia[δ] QT, ST eandem ED, & QR, SR eandem GB, & NR, QR eandem AH &c. bisecant). Ergo anguli MQP, NRP[ε] sunt recti. Hinc quia MQ, QP, PR, NR, quippe aequalium TQ, QR, RS dimidia, aequantur: erit MP =[ζ] PN. Similiter ostenditur, MP, OM, NK, NL & reliquas aequari. Ergo 8 triangula, quorum vertices L, K, bases latera quadrati MONP, sunt aequilatera & aequalia, & constituunt ergo octaedrum, cubo inscriptum. Q. E. F.

δ. 8. 4.
ε. 10. 11.
ζ. 4. 1.

PROP.

PROP. IV. PROBL.



In dato octaedro ABCDEF cubum describere.

* Latera quatuor triangulorum pyramidis BCDEA bisecentur in M, N, O, P, & iungantur MN, NO, OP, PM, quae aequales [η] sunt inter se, & paralle-

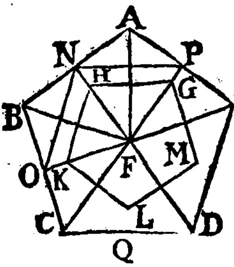
η. 41.

θ. 2. 6. lae [θ] lateribus quadrati [ι] BCDE, & proin-
ι. 14. 13. de [κ] angulos rectos inter se comprehendunt.
κ. 10. 11. Quare MNOP est quadratum. Deinde bisectis lateribus huius quadrati in G, H, K, L, iungantur GH, HK, KL, LG, quae [η] sunt aequa-
λ. 2. sch. les, & angulos rectos [λ] comprehendunt; quia
13. 1. anguli, quos cum rectis MN, NO, OP, PM
μ. 4. sch. faciunt, semirecti [μ] sunt. Ergo GHKL est
32. 1. quadratum. Si in reliquis 5 pyramidibus octaedri eadem fiant: constituentur 5 alia quadrata ipsi GHKL aequalia, & cum ipso cubum terminantia, dato octaedro inscriptum. Q. E. F.

PROP. V. PROBL.

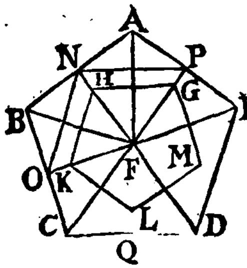
In dato icosaedro dodecaedrum describere.

Sit ABCDEF pyramis icosaedri, cuius basis pentagonum ABCDE. Iungantur centra circulorum, in triangulis AFB &c. inscriptorum, rectis GH, HK, KL, LM. Dico, GHKLM esse



esse pentagonum dodecaedri inscribendi. Nam rectae FG, FH, FK &c. productae bisecabunt [ν] latera pentagoni in P, N, O, &c. quia [ξ] bisecant angulos ad vertices F triangulorum. Iungantur PN, NO, quae proinde aequales erunt [ο]. Iam quia [ο] FP = FN = FO, ac FG = FH = FK: erunt GH, HK ipsis PN, NO [π] parallelae, ac inde erit [ρ] PN : GH = NF : FH = NO : HK, ideoque GH = HK. Similiter HK = KL &c. Porro quia ang. GHK [σ] = PNO, ac HKL = NOQ &c. ang. autem PNO = [τ] NOQ, quia ambo sunt complementa aequalium [τ] angulorum in N, O ad duos rectos: erit ang. GHK = HKL &c. Denique ex puncto sublimi F in planum ABCDE ductum intelligatur perpendiculum, & a puncto, in quo plano occurrit, ductae sint rectae ad puncta P, N, O, Q, quae cum perpendiculari angulos [υ] rectos facient. Illi, quae per P ducta est, parallela intelligatur alia per G, & a puncto, in quo haec dictae perpendiculari occurrit, ducantur rectae ad H, K, L, &c. Iam quia [π] perpendicularis illa a recta per G ducta secatur in ratione FP : FG = FN : FH = FO : FK &c. patet, reliquas rectas, a punctis H, K, L ad perpendicularem ductas, parallelas [π] esse illis, quae in plano ABCDE ad eandem ductae sunt, ac ob id angulos rectos cum perpendi-

ν. 4. 1.
ξ. 4. 3.
ο. 26. 1. & 4. 3.
π. 2. 6.
ρ. 2. sch. 4. 6.
σ. 10. 11.
τ. 2. sch. 13. 1.
υ. 4. 11.



4.5.11. pendiculari facere, & proinde in vno omnes plano esse. Vnde patet, GHKLM esse pentagonum aequilaterum & aequiangulum, ideoque, si in reliquis vndecim pyramidibus icosaedri eadem construxerimus, proditura esse 12 pentagona huiusmodi, quae constituent dodecaedrum, icosaedro inscriptum. Q. E. F.

PROP. VI. PROBL.

Quinque figurarum latera & angulos inuenire.

1. Quia icosaedrum continetur 20 triangulis, & vnum triangulum 3 lateribus; singula vero latera bis sumuntur: numerus laterum erit dimidius facti ex 20 & 3, qui est 30. Similiter dodecaedri laterum numerus est dimidius facti ex 12 & 5, qui est 30. Et sic porro in cubo, & reliquis inueniemus numerum laterum, sumentes dimidium facti ex numero planorum & numero laterum vniuscuiusque plani.

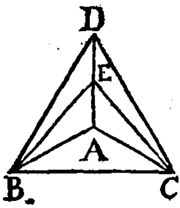
2. Numerum autem augulorum solidorum in his figuris habebimus, factum ex numero figurarum planarum & numero angulorum planorum in vnaqualibet diuidentes per numerum angulorum planorum in quolibet solido angulo. Sic in icosaedro factum ex 20 &

& 3, quod est 60, partientes per 5, habebimus 12 angulos solidos. Q. E. F.

PROP. VII. PROBL.

Planorum, quae singulas quinque figuras continent, inclinationem inuenire.

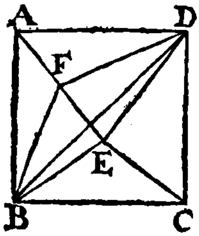
1. De cubo manifestum est, eius plana ad se inuicem recta esse.



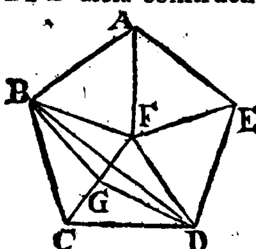
2. Sit tetraedri ABCD expositum vnum triangulum ABD, in quo a vertice B ad latus AD ducta sit perpendicularis BE. Si centris A, D, interuallo BE describantur duo circuli, & a puncto sectionis ad centra A, D iungantur rectae: angulus, quem continebunt, erit inclinatio planorum. Nam iungatur in altero triangulo ACD recta CE. Et quia [χ] DE = EA: erit CE etiam in AD perpendicularis. Sed quia BCq = ABq = [ψ] AEq + EBq, & EAq < [α] CEq: erit BCq < CEq + EBq, & ergo [α] ang. CEB acutus. Quare CEB erit inclinatio [β] planorum tetraedri. Hinc quum sit CE = EB, & BC = AD, manifestum est, praedicta constructione inueniri angulum [γ] = BEC = inclinationi planorum. Q. E. F.

χ. sch. 3. 3.
ψ. 47. 1.
α α. 2. sch. 12. 13.
α. 13. 2.
β. 6. def. 11.
γ. 22. & 8. 1.

3. A latere octaedri describatur quadratum, ducatur eius diameter BD, & centris B, D, interuallo perpendiculari, quae a vertice ad basin

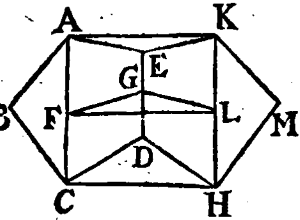


basin trianguli in octaedro ducitur, describantur duo circuli. Rectae a sectione circulorum ad B, D iunctae continebunt angulum aequalem complemento inclinationis ad 2 rectos. Sit enim ABCDE pyramis octaedri, & BF perpendicularis in $\triangle$o ABE. Iuncta DF erit perpendicularis in AE & = ipsi BF.
δ. 19. 1. Hinc BFq + FDq = 2 BFq [δ] < 2 ABq. Sed BDq = 2 ABq. Ergo BDq > BFq + FDq,
ε. 12. 2. ac ob id [ε] ang. DFB obtusus. Ergo BFD [ζ]
ζ. 6. def. 11. = complemento inclinationis planorum
η. 22. & 8. 1. octaedri ad 2 rectos. Datur [η] autem ang. BFD dicta constructione. Q. E. F.



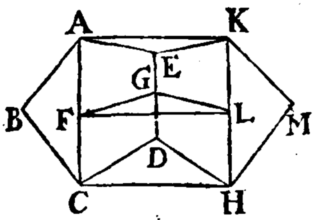
4. A latere icosaedri, descripto pentagono aequilatero & aequiangulo ABCDE, ducatur recta BD, angulum pentagoni C subtendens, & centris B, D, interuallo perpendiculari cuiusuis e triangulis icosaedri, describantur duo circuli, a quorum sectione ad B, D iunctae rectae continebunt complementum inclinationis planorum ad 2 rectos. Sit enim ABCDEF pyramis icosaedri, & BG perpendicularis vnius trianguli: erit DG per-
ϑ. 19. 1. pendicularis proximi trianguli. Et quia BG < [ϑ]
ι. 21. 1. BC: erit [ι] ang. BGD > obtuso BCD, ideoque ipse obtusus. Quare BGD complementum in-

erit inclinationis planorum icosaedri. Et manifestum est, hunc angulum dari praedicta constructione. Q. E. F.



ς. Exposito pentagono dodecaedri ABCDE, & iuncta recta AC, angulum pentagoni subtendente, centris AC, interuallo FG rectae a puncto F bipartitae sectionis ipsius AC in latus pentagoni parallelum ED perpendicularis describantur duo circuli. & rectae a sectione ad terminos A, C ductae comprehendent complementum inclinationis planorum dodecaedri. Nam quia [κ] AC est latus cubi, a quo dodecaedrum describitur: ponatur, ACHK esse vnum quadratorum illius cubi. Ergo erit KH recta, subtendens angulum in pentagono adiacente, quod sit EKMHD. Ex G ad ED ducatur perpendicularis GL, & iungatur FL. Et quia ED AC sunt parallelae: erit GF in AC perpendicularis, ergo per centrum circuli, pentagono ABCDE circumscripti, transibit [λ], & ED bisecabit [μ] in G. Hinc similiter GL bisecabit ipsam KH. Quare FL = [ν] AK = AC. Et quia perpendicularis ex G in FL cadens = [*] $\frac{1}{2}$ AE, & $\frac{1}{2}$ FL = $\frac{1}{2}$ AC [ξ] > $\frac{1}{2}$ AE: erit $\frac{1}{2}$ FL maior perpendiculari ex G in FL ducta, & ergo angulus, quem ea cum GF continet, maior ipso GFL. Hinc quia [*] haec perpendicularis bi-

κ. 17. 13.
λ. cor. 1. 3.
μ. 3. 3.
ν. 33. 1.
ξ. 8. 13.



e. 4. 1. secat ipsam FL, erit ang. LGF > GFL + GLF, ideoque obtusus, & ob id complementum inclinationis pentagonorum dodecaedri. Sed quia ex modo dictis est FG = GL; atque ostensa est FL = AC: patet, dari ang. FGL per traditam constructionem. Q.E.F.

FINIS

ELEMENTORVM EVCLIDIS

CORRIGENDA.

Pag. 6. lin. 17 *vni* leg. *vno*.
p. 11. lin. vltima post *habentes* interferantur verba, *cum rectis AC, BC initio ductis.*
p. 63. lin. antepenult. *connexam* l. *conuexam.*
p. 68 lin. 7. AKC leg. ABC.