

Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

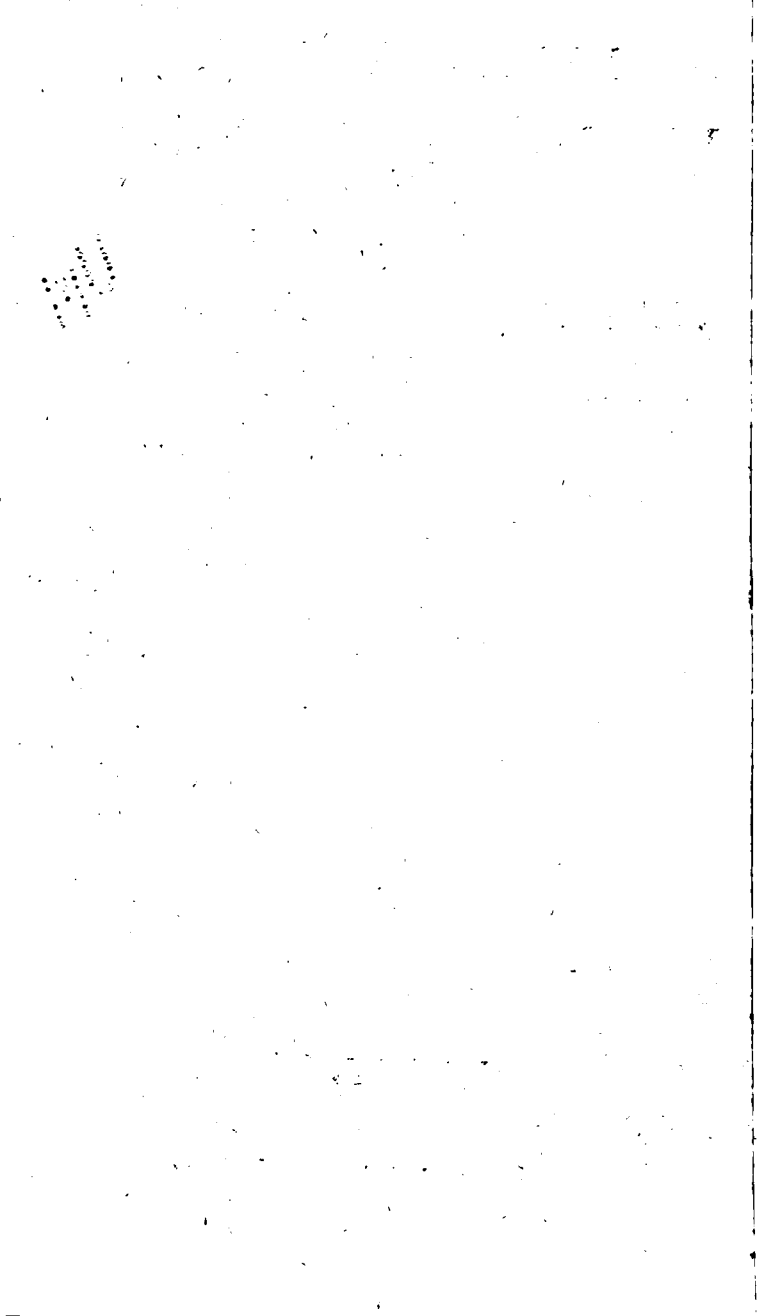
Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES
Google Livres

^{Euclidis}
ELEMENTORVM
EVCLIDIS
LIBRI XV
AD GRAECI CONTEXTVS
FIDEM RECENSITI
ET AD VSVM TIRONVM
ACCOMMODATI



LIPSIÆ
SVMTV IO. FRIDER. GLEDITSCHII
MDCCLXIX





Hist. Sci.

Havr.

5-5-24

9831

LECTORI

S. D.

GEORG. FRID. BAERMANNVS



Euclidis Elementa omnibus, quotquot ad mathesin discendam animum appellant, non legenda solum, sed & fere tota ediscenda esse, communis olim fuit magistrorum huius artis sententia, & hac nostra etiam aetate, in qua tanta Elementorum Geometriae copia instructi dicam an obruti sumus, omnes mecum confitebuntur, qui in Euclideorum Elementorum lectione ea, qua

22 My 24 KHw

PRAEFATIO

par est, diligentia sunt versati. Neque hoc tam suscepti operis amore, quam idoneis rationibus indutus iudico, quibus exponendis & his id persuadere possem, qui haec Elementa nondum legerunt, & eorum quoque criminationibus occurrere, qui, quum Euclidis hos libros siue carptim siue certe oscitanter legerint, nescio quem commodiorem in tradendis propositionibus ordinem, quam faciliorem & breuiorem in demonstrationibus viam iure desiderare posse sibi videntur. Verum quia horum argumentorum longior foret tractatio, quam praefandi breuitas patitur: vnā tantum rationem commemorasse sufficiet, ob quam horum Elementorum lectio tironibus non utilis solum, sed & necessaria sit dicenda. Scilicet omnes, qui post Euclidis tempora aliquid in Geometria
sub-

PRAEFATIO

sublimiori, vel in Mechanica, Optica, aut Astronomia a se inuentum litteris prodiderunt, quemadmodum demonstrationum suarum plurimas ex iis duxerunt, quae in his Elementis ab Euclide sunt ostensa, ita & saepe ad eorum tanquam fontes lectores amandarunt. Cuius rei quae sint rationes, intellectu non est difficile. Namque veteres Geometrae alium Auctorem citare non poterant: quum multis post Euclidem seculis nemo fuisset, qui tanta arte detextam Euclidis telam retexere, & sub noua quadam forma tironum oculis sistere vellet. Li vero, qui nostrae aetati propiores fuerunt, his tantum exceptis, qui ipsi vniuersae matheseos elementa conscripserunt, ad alium elementorum Geometriae scriptorem lectores suos commodè non potuerunt ablegare, cum alias ob causas, tum ob hanc potissi-

PRAEFATIO

num, quod nullius Auctoris elementa Geometriae aequè vulgata sunt, atque haec Euclidea, quae in omnes terrarum regiones, simul ac ad eas Geometria accessit, perlata esse constat, & ex quibus, tanquam fontibus, ceteri riuulos suos deduxerunt. Quae causa, sicut plerosque recentiorum Mathematicorum impulisse videtur, ut Euclidea Elementa, ubi opus erat, in demonstrationibus suis citarent, ita & eos, opinor, qui posthac scribent, commouebit, certe commouere debet, ut hunc veterum morem sequantur. Quum ergo ad tot tam admirabilia excellentissimorum ingeniorum inuenta aditus iis sit praecclusus, qui Euclidis Elementis sunt destituti, vel eorum lectionem negligunt: neminem fore confido, qui non intelligat, quam sit necessarium matheseos amatoribus, ut in Euclidea schola tirocinium ponant. Quae

PRAEFATIO

Quae quum ita sint, communi vtilitati me aliquo modo consulere posse putabam, si hosce Euclideos libros, quorum exemplaria in nostris bibliopoliis inde ab aliquot annis desiderabantur, denuo edendos curarem. Vt autem haec noua editio quam plurimorum vñbus inferuire posset: operam mihi dandam esse intelligebam, vt talia exemplaria ederentur, quae neque mole sua neque pretio emtores deterrent. Quare quum ea horum Elementorum editio, quam eximius, dum viueret, Geometra, Isaacus Barrowius, iuuenis olim Cantabrigiae parauerat, breuitate ita se commendasset, vt & in Germania typis quondam re-
cusa, & plurimorum manibus huc vsque trita esset: in animum iuducebam, huius editionis aliquod exemplar typis iterum describendum dare. Sed postea mutauì consilium, quum per-

PRAEFATIO

penderem, huic quamvis elegantissimae editioni inesse tamen aliquid, quod aliquos lectores offendere meminero, & quod editioni, aliqua saltem ex parte meliori, locum relinquat, Scilicet qui Barrowianam Euclidis editionem cum Graecis codicibus contulerunt, non ignorant, in ea multarum propositionum demonstrationes immutatas, nonnullarum quoque omnino sublatas esse, aliis, quas Graecus Euclides non habet, in earum locum substitutis. Quod quanquam apud multos Lectores facile excusatur brevitatis studio; sunt tamen harum rerum intelligentes, qui id factum non esse malint. Dicunt enim primo, difficillimum esse, Euclideis demonstrationibus alias substituere, quae, quum breviores sint, genio horum Elementorum, & purae simplicitati huius Geometriae aequae conveniant; idque ipsum illum celeberrimum Euclidis editorem

PRAEFATIO

editorem suo exemplo docuisse in demonstrationibus, quas plurimis Libri II. propositionibus adiunxit. Deinde negant, illum, qui se Euclidem edere profiteatur, munere suo rite fungi, si lectoribus alia tradat, quam quae ipsi legerent, si Graecis codicibus vterentur. Quae quum non exiguam veri speciem habere mihi viderentur; neque ego in tanti viri opere aliquid immutare auderem: statui, de noua prorsus editione Latina Euclidis paranda mihi cogitandum esse, quae Graeci textus demonstrationes satis fideliter exhiberet, in ceteris vero Barrowianam breuitatem, quantum eius fieri posset, imitaretur.

Sumta itaque in manus praestantissima Operum Euclidis editione, quae cura doctissimi viri, Dauidis Gregorii, Oxoniae prodit, ex ea textum Latinum definitionum & propositionum de-

P R A E F A T I O

descripsi ad verbum, paucissimis * exceptis, in quibus siue sensus siue Graecus contextus aliquam mutationem postulabat. Deinde perfecta vniusque propositionis demonstratione, eam sic reddere studui, vt, seruato eodem ordine, quo Euclides syllogismorum seriem instruxerat, totam tamen demonstrationem in arctius quasi spatium cogerem. Hoc autem quatuor potissimum modis efficere volui, quibus & Isaacum Barrowium vsu esse videbam. Nam primo ἐκθεσις, quam Euclides singulis propositionibus subiungit, & in qua, quidquid in propositionibus vniuersaliter enunciatum fuit, ad singulares schematum appositorum lineas applicat, ipsis propositionibus inclusi, ita tamen, vt ne ἐκθεσις cum propositione commisceretur, sed vt quaeque propositio absolutum sensum haberet,

* Sunt illae prop. 7. L. I. prop. 28. L. VI. prop. 16. L. VIII. & prop. 26. L. XI.

PRAEFATIO

haberet, etiam si inter legendum litterae illae maiusculae, quae ad schema referuntur, & *ἐξ ὧν* continent, omitterentur. Quod ita fieri in propositionibus mathematicis, saltem si tiro-nibus scribatur, consultum esse existimo, propterea quod propositiones ipsae memoriae mandandae sunt, non autem earum *ἐκ δεικνόντες*, quippe quae solis demonstrationibus inferuiunt. Secundo, syllogismorum maiores, quas vocant, propositiones, quae in omni demonstratione ex superioribus sumuntur, & quas Euclides solet totidem verbis plerumque repetere, omisi; indicaui tamen per numeros, alphabeti Graeci litteris in margine adscriptos, ea loca, in quibus eas, si sponte non succurrant, lector euoluere potest. * Tertio pro quibusdam verbis
notas

- * Videlicet horum numerorum posterior designat Librum, prior huius libri propositionem. Praeterea def. significat definitionem, ax. axioma, & post. postulatam,

PRAEFATIO

notas illas adhibui, quae apud Mathematicos dudum vsu receptae sunt. Habent autem harum notarum pleraeque non hunc solum vsu, vt tanquam scripturae compendia textum breuiorem reddant, sed &, si quis iis semel adsueuerit, quod fieri potest facillime, menti in cogitando non exiguo sunt adiumento, quia quantitatam, de quibus cogitandum est, mutuam relationem citius longe & distinctius, quam litterae vel vocabula, animo intuentiam praebent. Propterea veniam mihi, vt spero, dabunt aequi lectores, quod in X. Libro horum Elementorum quatuor nouis notis vsus fui, quum eae, quae in Barrowiana editione ibi occurrunt, nimis incommodae sint. Est enim earum vna alteri adeo similis, vt inter legendum facillime possint confundi. Quare quum his, sine lectorum incommodo, me vti vix posse intelligerem, neque apud alium Auctorem

PRAEFATIO

Etorem alias ipsis pares reperissem: ausus sum novas istas effingere, quas in limine dicti Libri exposui. Perpaucæ quum sint, facile poterit lector earum potestatem memoria retinere, præsertim ubi animaduernerit, eas ex initialibus litteris Graecorum, quibus substituantur, vocabulorum σύμμετρα, ἀσύμμετρα, ἄλογα, leuiter inflexis litterarum ductibus, vel lineola apposita, esse efformatas. Quartum denique, quod mihi in contrahendis Euclidis demonstrationibus nonnunquam auxilio fuit, hoc est, quod quibusdam propositionibus subiunxi scholia vel corollaria, in quibus eiusmodi propositiones ostensæ sunt, quæ multorum sequentium theorematum & problematum demonstrationes iterum tanquam principia ingrediuntur.

Sed præter hæc scholia & corollaria, visum etiam est, alia addere, in quibus

PRAEFATIO

quibus ex Euclidis propositionibus aliae, quarum vel ad inuentionem, vel ad aliorum Auctorum demonstrationes intelligendas, frequentissimus usus est, & quae in vulgatis aliorum Auctorum Elementis Geometriae habentur, sine longa ratiocinatione colliguntur. Pleraque horum scholiorum e Barrowiana editione huc transcripsi, nonnulla, sed perpauca, ipse addidi. Nam omnium horum scholiorum numerum mediocre esse volui, memor quippe, non thesaurum geometricarum propositionum mihi condendum, sed Elementa Geometriae edenda fuisse. Singula autem haec, siue scholia, siue corollaria, siue alia, quae in Graecis exemplaribus horum Elementorum vel omnino non leguntur, vel saltem aliis in locis, demonstrationum contextui interspersa, reperiuntur, asteriscis notavi. Erunt forsitan, qui mirabuntur

PRAEFATIO

buntur, cur talibus propositionibus scholiorum titulum adscripserim, quibus corollariorum potius nomen convenire existimabunt. His autem respondeo, me in his quoque minutis ad indolem Euclidei operis, quantum possem, accedere voluisse; in quo video, eas fere solas propositiones corollariorum vel *πορισμάτων* titulo insignitas esse, quae, quum in demonstratione alicuius theorematis vel problematis obiter ostensae sint, dein ex ea quasi excerpuntur, &, absoluta demonstratione, separatim enunciantur, quo earum ad sequentes demonstrationes expeditior sit usus. Quod tandem ad schemata attinet, ligno incisa, etsi curavi, ut ea illis, quae Oxoniensis Operum Euclidis editio habet, similia essent; fateor tamen, nos illarum non assequi potuisse elegantiam.

Haec sunt, quae de instituti operis ratione lectores monere volui, et ex

b

quibus

PRAEFATIO

quibus satis, opinor, apparebit, me omne consilium operamque in hoc intendisse, ut & verum & integrum Euclidem ipsis in manus traderem. Ut autem hi, qui ad eius lectionem primum accedunt, aliquam eius notitiam afferant, non erit alienum, huius Geometriae ideam breuiter adumbrare. Totum hoc opus duabus constat partibus; quarum altera contemplationem superficierum, altera solidorum complectitur. Et in quatuor quidem primis libris traduntur, quae figuris planis, circulo puta & rectilineis, absolute spectatis conueniunt, & quae ad earum aequalitatem, ac angulorum laterumque in illis magnitudinem cognoscendam conducunt. Sextus liber de similitudine figurarum planarum agit, earumque, item angulorum & rectarum linearum, ad se inuicem rationes inuestigare docet. Eius gratia in quinto libro tradita est proportionum, quae
inter

P R A E F A T I O

inter magnitudines esse possunt, vniuersalis *Singula*. Hisce prima pars huius Geometriae absoluitur. Solidorum contemplatio commensurabilium & incommensurabilium notitiam requirit, ad quam doctrina de numeris opus est. Eorum itaque librorum, qui sextum sequuntur, tres priores de numeris copiose exponunt, ac ob id arithmetici vocari solent. Decimus rectarum linearum & spatiorum irrationalium, hoc est, datis rectis lineis vel spatiis incommensurabilium, doctrinam tradit. Postremi quinque in solidorum contemplatione versantur, & ea docent, quae ad illorum tam dimensionem, quam proportionem & in se inuicem inscriptionem spectant. Nunc reliquum esset, vt singulorum etiam librorum argumenta commemorarem. Sed praeterquam quod hac enarratione facile carere poterunt, quibus animus est, integra haec Elementa a capite

pite

PRAEFATIO

pite vsque ad calcem perspicere (quod vt tirones faciant , maximopere suadeo): vereor, ne, si ea percurram, haec praefatio, quae iam praeter opinionem longiuscula facta est, iustos limites excedat. Vnum hoc addam, si hanc meam operam doctis viris probari intellexero, curaturum me esse, vt Euclidis Liber Datorum, Theodossii sphaerici, & Archimedis Geometrici libri eodem, quo haec Elementa, habitu vestiti posthac in lucem prodeant.

ELEMEN-



ELEMENTORVM E V C L I D I S L I B E R I.

DEFINITIONES.

1. *P*unctum est, cuius pars nulla est.

2. *Linea* autem est longitudo non lata.



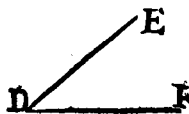
3. *Lineae* vero *extrema* (A, B, vel D, C) sunt puncta.

4. *Recta* quidem *linea* AB est, quae ex aequo sua interiacet puncta.

5. *Superficies* autem est, quod longitudinem & latitudinem tantum habet.

6. *Superficie*i vero *extrema* sunt lineae.

7. *Plana* quidem *superficies* est, quae ex aequo suas lineas rectas interiacet.

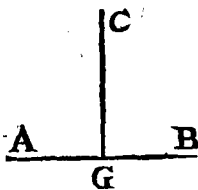


8. *Planus* vero *angulus* est duarum linearum, in plano sese tangentium, & non in directum iacentium, mutua inclinatio.

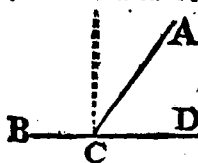
9. Quando autem lineae DE, DF, angulum comprehendentes, rectae fuerint, *angulus* ipse EDF appellatur *rectilineus*.

A

10. Quum

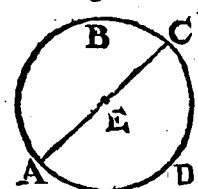


10. Quum vero recta linea CG, super rectam lineam AB insistens, angulos deinceps AGC, BGC inter se aequales fecerit: *rectus* est vterque aequalium angulorum; & quae insistit recta linea CG *perpendicularis* vocatur ad eam AB, super quam insistit.



11. *Obtusus* angulus ACB est, qui maior est recto.

12. *Acutus* autem ACD, qui est recto minor.



13. *Terminus* est, quod alicuius est extremum.

14. *Figura* est, quae aliquo vel aliquibus terminis comprehenditur.

15. *Circulus* est figura plana, vna linea ABCDA comprehensa, quae *circumferentia* appellatur, ad quam ab vno puncto E eorum, quae intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectae lineae, EC, EA, inter se sunt aequales.

16. Hoc autem punctum E *centrum circuli* nuncupatur.

17. *Diameter* vero circuli est recta quaedam linea AC, per centrum E ducta, & ex vtraque parte circuli circumferentia ABCDA terminata. Quae etiam circulum bifariam secat.

18. *Semicirculus* est figura ACBA comprehensa sub diametro AC, & ea circuli circumferentia ABC, quae a diametro intercipitur.

19. *Recti-*

19. *Rectilineae figurae* sunt, quae rectis lineis comprehenduntur.

20. *Trilaterae* quidem, quae tribus.

21. *Quadrilaterae*, quae quatuor.

22. *Multilaterae* vero, quae pluribus, quam quatuor rectis lineis comprehenduntur.



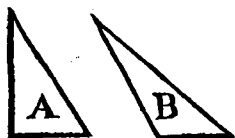
23. E trilateris autem figuris, *aequilaterum triangulum* A est, quod tria latera habet aequalia.



24. *Isoceles* autem B, quod duo tantum aequalia habet latera.



25. *Scalenum* C vero, quod tria latera habet inaequalia.

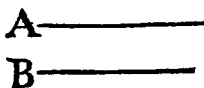
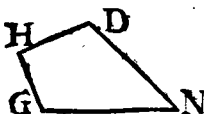
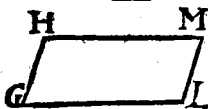


26. Adhaec, e trilateris figuris, *rectangulum* quidem *triangulum* est A, quod rectum angulum habet.



27. *Amblygonium* autem B, quod habet angulum obtusum.

28. *Oxygonium* C vero, quod tres habet angulos acutos.



29. E figuris autem quadrilateris, *quadratum* quidem est ABCD, quod & aequilaterum est, & rectangulum.

30. *Oblongum* E, quod rectangulum quidem est, sed non aequilaterum.

31. *Rhombus* A, quod aequilaterum quidem est, sed non rectangulum.

32. *Rhomboides* GHML, quod habet opposita & latera & angulos inuicem aequalia, sed nec aequilaterum est, nec rectangulum.

33. Reliqua autem quadrilatera, praeter haec, vocentur *trapezia*. Vt GNDH.

34. *Parallelae rectae* lineae A, B sunt, quae in eodem iacentes plano, atque ex vtraque parte in infinitum productae, in neutram sibi coincidunt.

POSTVLATA.

1. Postulatur, a quouis puncto ad quoduis punctum rectam lineam ducere.

2. Item, rectam lineam finitam continue in directum producere.

3. Item, quouis centro & intervallo circulum describere.

COMMUNES NOTIONES,
sive AXIOMATA.

1. Quae eidem aequalia, inter se sunt aequalia.

2. Si aequalibus aequalia addantur, tota sunt aequalia.

3. Si ab aequalibus aequalia auferantur, reliqua sunt aequalia.

4. Si inaequalibus aequalia addantur, tota sunt inaequalia.

5. Si ab inaequalibus aequalia (*vel ab aequalibus inaequalia*) auferantur, reliqua sunt inaequalia. * Et id quidem, quod ex maiori inaequalium, demtis aequalibus, relinquitur, maius est; quod vero, demto maiori inaequalium ab aequalibus, relinquitur, minus est.

6. Quae eiusdem (*vel aequalium*) sunt duplicia, inter se sunt aequalia. * Idem de utrumque aequemultiplicibus intelligendum est.

7. Quae eiusdem (*vel aequalium*) sunt dimidia, inter se aequalia sunt. * Idem de utrumque aequemultiplicibus intellige.

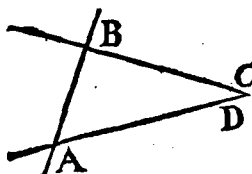
8. Quae sibi mutuo congruunt, sunt aequalia.

* Hoc axioma in rectis lineis & angulis valet conuersum: sed non congruunt aequales figurae, nisi & similes fuerint. Ceterum *congruere* dicuntur, quorum partes applicari partibus sic possunt, ut tota eundem locum occupent.

9. Totum sua parte maius est.

6 EVCLIDIS ELEMENT.

10. Omnes anguli recti inter se aequales sunt.



11. Si in duas rectas lineas AD, BC recta BA incidens angulos interiores BAD, ABC, & ad easdem partes, duobus rectis minores fecerit: duae illae rectae AD, BC, in infinitum productae, coincident inter se ex ea parte, ad quam sunt anguli duobus rectis minores.

12. Duae rectae lineae spatium non comprehendunt.

13. * Omne totum aequale est omnibus suis partibus simul sumtis.

14. * Quod vni aequalium maius vel minus est, idem & altero maius vel minus est. Et quo vnum aequalium maius est vel minus, eodem alterum quoque maius vel minus est.

In hoc libro notae, quibus breuitatis causa utimur, hae fere sunt.

= Notat aequalitatem. E. g. Ang. $A=B=C$, lege, angulus A aequalis est angulo B, & hic angulo C. Sed saepe trium quantitatum, hac notaiunctarum, primam etiam tertiae aequalem intelligendam esse, per ax. 1. supponitur.

> notat maioritatem. E. g. Recta $AB > CD$, lege, recta AB maior est quam recta CD.

< notat

$\angle$ notat minoritatem. $A \angle B$, lege A minor est quam B.

$+$ notat duas magnitudines pluresue, inter quas haec nota reperitur, iunctim sumendas esse. E. gr. $A + B$, lege, A vna cum B.

$-$ notat subtractionem. E. gr. Rectus $-$ ang. ABC, lege, Excessus recti anguli super angulum ABC, vel, vt vulgo pronunciant, rectus minus angulo ABC.

Δ notat triangulum.

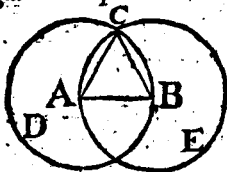
AC^2 notat quadratum, a recta AC descriptum, vel cuius latus est recta AC.



PROPOSITIO I. PROBLEMA.

Super datam rectam, terminatam AB, triangulum aequilaterum constituere.

α. 3. post.



Centro A, interuallo A B describatur ^α circulus BCD; & rursus centro B, interuallo BA, circulus ACE; & a puncto C, in quo circuli sese mutuo

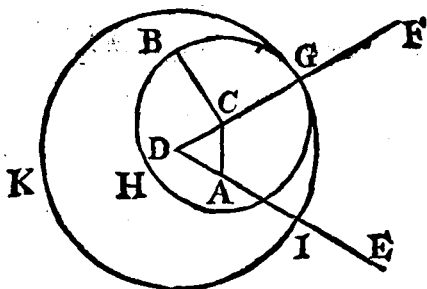
β. 1. post. secant, ad puncta A, B ducantur ^β rectae CA, CB.

γ. 15. def. Quoniam igitur ^γ $AC = AB$, & $BC = BA$:

δ. 1. ax. erit ^δ $AC = BC$. Quare tres rectae AC, AB, BC aequales sunt. Est igitur ACB triangu-

ι. 23. def. lum aequilaterum ^ι super AB constitutum. Quod Erat Faciendum.

PROP. II. PROBL.



Ad datum punctum A datae rectae BC aequalem rectam ponere.

ζ. 1. post.

η. 1. 1.

θ. 2. post.

ι. 3. post.

Ducatur ^ζ recta AC; et super eam constituitur ^η triangulum aequilaterum ADC; & producantur ^θ DA, DC ad E & F. Dein centro C, interuallo CB, describatur ^ι circulus GBH, & rursus centro D, interuallo DG, circulus GIK.

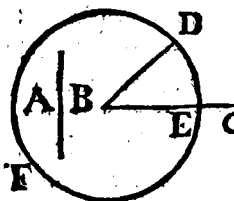
Quo-

Quoniam igitur $DI = DG$, & $DA = DC$, κ . 15. def.
erit $AI = CG$. Sed $CB = CG$. Ergo λ . 23. def.
 $AI = CB$. Q. E. F. μ . 3. ax.

μ. 3. 2X.

v. I. ax.

PROP. III. PROBL.



Datis duabus rectis inaequalibus, A & BC, a maiore BC auferre rectam aequalem minori A.

Ponatur $\frac{1}{2}$ ad punctum B §. 2. I.

retta $BD = A$, & centro
B, intervallo BD , describa-

tur° circulus DEF. Et, quoniam BE = BD, . 3. post.
 & A = BD, erit BE = A. Ergo ab BC . 15. def.
 ablata est BE, minori A aequalis, Q. E. F. . construct.
 . 1. ax.

6. 1. 2X.

PROP. IV. THEOREMA.



Si duo triangula ABC, DEF habuerint duo latera, duobus lateribus aequalia, alterum alteri ($AB=DE$, & $AC=DF$), & angulum A aequalem angulo D, qui ab aequalibus rectis comprehenditur: habebunt & basin BC basi EF aequalem; & triangulum ABC erit triangulo DEF aequale; & reliqui anguli B, C, reliquis angulis E, F aequabuntur, alter alteri, quibus aequalia latera subtenduntur ($B=E$, & $C=F$).

Nam si triangulum ABC applicetur trian-
gulo EDF , posito puncto A super D , & recta

A S

AB

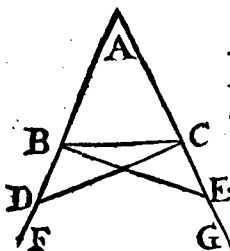


7. hypoth.
8. ax.

AB super DE: quia $AB = DE$, cadet punctum B in E. Congruente autem recta AB rectae DE; quia $\angle A = \angle D$, cadet recta AC in DF; & quia $AC = DF$: punctum C cadet in F. Iam si BC ipsi EF non congruat: necesse est duae rectae comprehendant spatium; quod fieri nequit. Ergo basis BC congruet basi EF, & ergo $BC = EF$. Quare & tota tria-
gula ABC, DEF congruent, & aequalia erunt; itemque anguli B ac E, nec non anguli C ac F congruent, & aequales erunt. Quod Erat Demonstrandum.

12. ax.

PROP. V. THEOR.



Triangulorum isoscelium ABC anguli ad basin ABC, ACB, sunt inter se aequales; Et productis aequalibus rectis AB, AC, anguli sub basi FBC, GCB erunt inter se aequales.

3. I.

Sumto enim in recta BF puncto quolibet D, fiat $AE = AD$, & ducantur rectae CD, BE.

4. constr.
hyp.
4. I.

Quoniam ergo in triangulis ABE & ACD est $AE = AD$, & $AB = AC$, & angulus A communis: erit $\angle ABE = \angle ACD$, & $\angle BEC = \angle BDC$, & $BE = CD$. Quum autem

autem $\angle A E = A D$, & $\angle A C = A B$, ideoque β . 3. ax.
 $C E = B D$: erit in triangulis $B E C$ & $B D C$
 $\angle C B E = \angle B C D$, & $\angle B C E = \angle$
 $D B C$. Sederat γ $\angle A B E = \angle A C D$. Ergo γ . per dem.
 β anguli ad basin $A B C$, $A C B$ aequales sunt, item
anguli sub basi $G C B$, $F B C$ aequales sunt. $\cdot Q$.
 $E. D.$

* *Scholium.* Hinc omne triangulum aequilate-
rum est quoque aequiangulum.

PROP. VI. THEOR.



*Si trianguli ABC duo
anguli ABC, ACB sint
inter se aequales: latera
AB, AC, aequalibus an-
gulis subtensa, inter se aequalia erunt.*

Si enim non est $A B = A C$, vtravis $A B >$
 $A C$ erit. Fiat ergo β $B D = A C$, & ducatur $C D$. β . 3. $\cdot 1$

In triangulis ergo $D B C$, $A B C$ est $B D = A C$,
& $B C$ latus commune, & $\angle D B C = \angle$. ϵ . hyp.
 $A C B$. Quare ζ triangulum $D B C =$ triangulo ζ . 4. $\cdot 1$.
 $A B C$, pars toti. Quod Est Absurdum γ . Non γ . 9. ax.
est ergo recta $A B$ rectae $A C$ inaequalis; ergo
aequales sunt. $\cdot Q. E. D.$

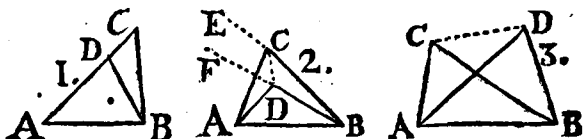
* *Scholium.* Hinc omne triangulum aequiangula-
rum est quoque aequilaterum.

PROP. VII. THEOR.

*Super eandem rectam AB duabus iisdem re-
ctis AC, BC duae aliae rectae AD, BD aequales
altera alteri, eisdem terminos habentes, ($A D =$
 $A C$*

12 EVCLIDIS ELEMENT.

AC, & BD = AC non constituentur ad aliud punctum D atque aliud C in easdem partes.



* 1. *Casus*. Si punctum D statuatur in AC:
 §. 9. ax. liquet [§] non esse $AD = AC$.

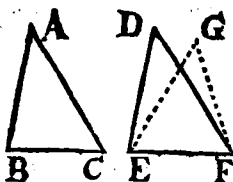
* 2. *Casus*. Si punctum D ponatur intra triangulum ACB: ducatur CD, & producantur BD ad F, & BC ad E. Iam si sit $AD = AC$: erit ^{*} ang. ADC = ACD. Sed si $BD = BC$: erit ^{*} ang. ECD = FDC. Ergo ang. ACD ^{*} > FDC, & multo magis ang. ECD > FDC. Q. E. A.

3. *Casus*. Si D sit extra $\triangle ACB$: ducatur recta CD. Iam si sit $AD = AC$: erit ^{*} ang. ACD = ADC. Quare ang. ADC > ^{*} DCB, & multo magis ang. BDC > DCB. Sed quia etiam ponitur $BD = BC$: erit ^{*} ang. BDC = DCB. Q. E. A.

Ergo non potest esse $AD = AC$, & simul $BD = BC$. Q. E. D.

PROP. VIII. THEOR.

Si duo triangula ABC, DEF habeant duo latera AB, AC, duobus lateribus DE, DF aequalia, alterum alteri; habeant etiam basim BC basi EF aequalem: angulum quoque A angulo D aequalem habebunt, ab aequalibus rectis comprehensum.



Si

Si enim $\triangle ABC$ applicetur $\triangle DEF$, & punctum B ponatur in E, & recta BC super rectam EF: cadet $\wedge$ punctum C in F, quia μ BC λ . 8. ax. $\equiv$ EF. Iam si punctum A non caderet in D, μ . hyp. sed in aliud, velut G: super eadem recta EF duabus iisdem rectis ED, FD aliae duae rectae EG, FG, aequales μ , altera alteri, habentes eosdem terminos, constitutae essent ad aliud punctum G et aliud D in easdem partes. Sed hoc fieri nequit. Ergo punctum A cadet in punctum D, ν . 7. I. & ergo congruet latus BA lateri ED, & latus AC lateri DF; quare & angulus A congruet angulo D. Ergo $\wedge$ ang. $A = D$. Q. E. D.

* Schol. 1. Hinc triangula sibi mutuo aequilatera etiam sibi mutuo aequiangula sunt ξ . ξ . 4. I.

* Schol. 2. Triangula sibi mutuo aequilatera aequantur inter se ξ .

PROP. IX. PROBL.



Datum angulum rectilineum BAC bifariam secare.

Sumatur in recta AB punctum quodvis D, & capiatur $\circ$ AE $\equiv$ AD, & $\circ$. 3. I. ducatur DE, super qua fiat triangulum aequilaterum DFE. Ducatur AF. Dico AF bifariam secare ang. BAC.

Quoniam enim est AE $\equiv$ AD, & AF latus commune, & basis EF $\equiv$ μ basi DF: est $\circ$ ang. π . constr. EAF $\equiv$ DAF. Ergo AF bifariam secat $\circ$ 23. def. angulum BAC. Q. E. F. ξ . 8. I.

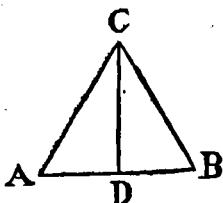
* Schol.

* *Scholium.* Hinc patet, quomodo angulus secari possit in aequales partes 4, 8, 16, 32 &c. singulas nimirum partes iterum bisecando. Methodus vero, recta & circulo angulos secandi in partes aequales quotcunque, e. gr. 3, 5, 7, nulla datur.

PROP. X. PROBL.

Datam rectam lineam terminatam AB bisariam secare.

ε. 1. I.
τ. 9. I.



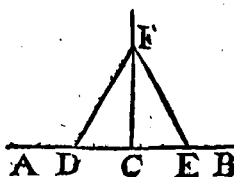
Fiat super AB^r Δ aequilaterum, & bisecetur^r ang. ACB recta CD. Dico, rectam AB bisecari in puncto D.

Nam^r AC=BC, & CD
latus Δis ADC & BDC
commune, & ang. ACD=BCD^φ. Ergo^z
AD=DB. Q. E. F.

PROP. XI. PROBL.

Datae rectae lineae AB, a puncto in ipsa dato C, ad rectos angulos rectam lineam ducere.

ψ. 3. I.
ω. 1. I.



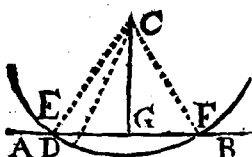
Sumatur in recta AC punctum quodvis D, & ponatur^ψ CE=CD, & constituatur^r super DE Δ aequilaterum DFE, & ducatur recta FC, quae erit rectae AB ad angulos rectos.

Quoniam enim in Δis FEC & FDC^α est
CE=CD, &^β EF=DF, & FC communis:
ang.^γ ECF=DCF. Ergo^δ anguli ECF, DCF
recti sunt. Q. E. F.

PROP.

PROP. XII. PROBL.

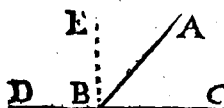
Super datam rectam lineam infinitam AB, a dato puncto C, quod non est in eadem, perpendicularem lineam rectam ducere.



Sumatur ex altera parte rectae AB punctum quodvis D, & centro C, interuallo CD, describatur ¹ circulus ². 3. post. EDF, & secetur ² recta EF bifariam in G. ². 10. 1. Ducatur recta CG, quae in AB erit perpendicularis.

Nam ductis rectis CE, CF, quoniam ¹ EG ¹. constr. = GF, & CG communis, & ² CE = CF: erit ². 9. 15. def. ang. EGC = FGC. Ergo CG est in AB per- ¹. 8. 1. pendicularis ². Q. E. F. ². 10. def.

PROP. XIII. THEOR.



Si recta AB insistens rectae DC, faciat angulos ABD, ABC: vel duos rectos faciet, vel duobus rectis aequales.

Si enim ang. ABD = ABC: duo ¹ hi anguli ¹. 10. def. recti sunt. Sin minus: ducatur ¹ a puncto B ¹. 11. 1. recta BE in DC perpendicularis. Quare ang. CBE + EBD ¹ = 2 rectis. Et quoniam CBE = CBA + ABE: erit ¹ CRE + EBD = CBA ¹. 2. ax. + ABE + EBD. Item quoniam ang. DBA ¹. 1. ax. = ABE + EBD; erit ¹ DBA + CBA = CBA ¹. 13. ax. + ABE + EBD. Ergo ¹ DBA + CBA = CBE + EBD = 2 rectis. Q. E. D.

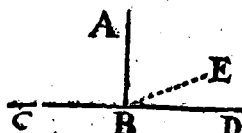
* 1. Schol.

* 1. *Schol.* Hinc si unus angulorum EBD rectus sit: alter EBC etiam rectus erit. Si ille ABD obtusus: hic ABC acutus erit; & contra.

* 2. *Schol.* Si plures rectae, quam una, ad idem punctum eidem rectae insistant: anguli fient duobus rectis aequales.

PROP. XIV. THEOR.

Si ad aliquam rectam AB, & ad punctum in ea B, duae rectae BC, BD, non ad easdem partes positaе, faciant angulos deinceps CBA, DBA, duobus rectis aequales: ipsae rectae BC, BD in directum sibi inuicem erunt.

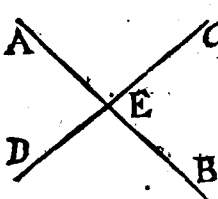


Si enim BD non sit in directum ipsi CB: sit π ei in directum quaecumque BE. Ergo $\angle$ CBA + ABE = 2 rectis. Sed & CBA + DBA = 2 rectis. Ergo CBA + ABE = CBA + DBA. Ergo $\angle$ ABE = DBA. Q. E. A.

π . 1. post.
 ϕ . 13. 1.
 σ . hyp.
 τ . 3. ax.
 ν . 9. ax.

PROP. XV. THEOR.

Si duae rectae AB, CD sese mutuo secant in E: angulos AEC, DEB ad verticem facient inter se aequales.



Nam $\angle$ AEC + AED = 2 rectis = DEB + AED. Ergo $\angle$ AEC = DEB. Q. E. D.

ϕ . 13. 1.

π . 3. ax.

* 1. *Schol.* Hinc manifestum est, quocumque rectis sese mutuo secantibus, angulos ad punctum sectionis aequales esse 4 rectis.

2. *Schol.*

* 2. *Schol.* Et ergo omnes anguli, circa vnum punctum constituti, efficiunt quatuor rectos.

* 3. *Schol.* Si ad aliquam rectam lineam AB, atque ad eius punctum E, duae rectae EC, ED, non ad easdem partes sumtae, angulos ad verticem AEC, DEB aequales fecerint: ipsae rectae CE, ED in directum sibi inuicem erunt.

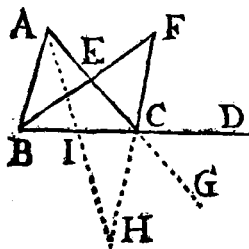
Nam 2 recti $= \psi$ AEC + CEB $=$ "DEB + ψ . 13. 1.
CEB. Ergo "CE, ED sunt in directum. α hyp. & 2.

* 4. *Schol.* Si quatuor rectae EA, EB, EC, ED, ab vno puncto E exeuntes, angulos oppositos ad verticem aequales inter se fecerint: erunt quaelibet duae lineae AE, EB, & CE, ED in directum positae.

Nam quia ang. AEC + AED + CEB + DEB $=$ β 4 rectis: AEC + AED $=$ γ DEB + β . 2. schol.
CEB $=$ δ 2 rectis. Ergo CED & AEB $\doteq$ sunt re- γ . hyp. &
ctae lineae. δ ax.

PROP. XVI. THEOR.

δ . 7. ax.
 δ . 14. 1.



Omnis trianguli ABC vno latere BC producto ad D: angulus exterior ACD maior est utrolibet interiorum & oppositorum BAC, ABC.

Secetur AC bifariam in E, & ducta recta BE δ . 10. 1.

producatur ad F, & ponatur "EF $=$ EB, & ducatur FC. Quoniam igitur AE $=$ EC, & EB $=$ EF, & ang. δ AEB $=$ FEC: erit ang. δ BAE δ . 15. 1. δ . 15. 1.
 $=$ ACF. Sed ang. ACD $\doteq$ > ACF. Ergo δ . 4. 1.
 δ ang. ACD > BAE. α . 9. ax. δ . 14. ax.

Eodem modo, si BC bifecetur in I, & recta AI producatur, donec IH $=$ IA, & iungatur HC,

18 EVCLIDIS ELEMENT.

HC, & producat^r etiam AC ad G, demonstra-
bitur esse ang. BCG, vel ACD > ABC.
Q. E. D.

PROP. XVII. THEOR.

*Omnis trianguli ABC duo anguli duobus re-
ctis sunt minores, quomocunque sumti.*

μ. 16. I.
γ. 4. ax.



Producatur enim BC
ad D. Et quia ang. ACD
> * ABC: erit ACD +
ACB > * ABC + ACB.

ξ. 13. I.
ο. 14. ax.

Sed ACD + ACB = 2 rectis. Ergo ang.
ABC + ACB < 2 rectis. Eodem modo, pro-
ducta CA, demonstrabitur esse ACB + CAB
< 2 rectis; item, producta AB, esse CAB +
ABC < 2 rectis. Q. E. D.

* 1. Schol. Hinc in omni triangulo, cuius vnus
angulus est rectus, vel obtusus, reliqui acuti sunt.



* 2. Schol. Si recta AE
cum alia CD angulos inae-
quales faciat, vnum AED
acutum, & alterum AEC
obtusum: linea perpendicularis AD, ex quouis eius
puncto A ad aliam illam CD demissa, cadet ad partes
anguli acuti AED.

Nam si AC, ad partes anguli obtusi ducta, di-
catur perpendicularis: in Δ AEC erit ang. AEC +
ACE > 2 rectis. Quod fieri nequit.

def.
π. 10. & II.
ρ. 17. I.
σ. 5. I.

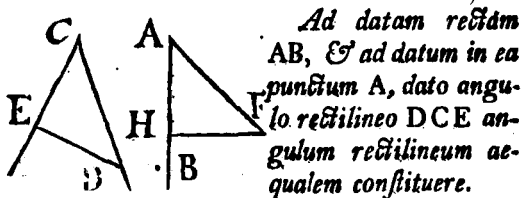
* 3. Schol. Omnes anguli trianguli aequilateri,
& duo anguli trianguli isoscelis ad basin, * acuti
sunt.

PROP.

Ponatur recta DE, finita quidem ad D, infinita vero versus E, & fiat $\angle DFE = A$, & $FG = B$, & $GH = C$. Centro F, intervallo FD describatur Δ circulus DKL, item centro G, Δ 3. post intervallo GH, circulus HLK; & ducantur rectae KF, KG.

Quoniam ergo $KF = FD = A$; & $GK = GH = C$; & $GF = B$: ex tribus rectis. constr. KF, GK, GF, tribus A, C, B, aequalibus, constitutum est triangulum KGF. Q. E. F.

PROP. XXIII. PROBL.



Ad datam rectam AB, & ad datum in ea punctum A, dato angulo rectilineo DCE angulum rectilineum aequalem constituere.

Sumantur in vtraque recta CD & CE puncta quaevis D, E, & ducatur recta DE, & e tribus rectis lineis, quae tribus CE, CD, DE aequales sint, constituatur Δ AHF, ita vt $AF = CD$, & $AH = CE$, & $HF = DE$.

Quia ergo $AF = CD$, & $AH = CE$, & basibus $HF =$ basi ED : erit ang. $A = \angle DCE$. Q. E. F.

PROP. XXIV. THEOR.

Si duo triangula ABC, DEF habeant duo latera AB, AC, duobus lateribus DE, DF aequalia, alterum alteri; angulum autem A angulo EDF maiorem, ab aequalibus rectis comprehensum: etiam basin BC basi EF maiorem habebunt.

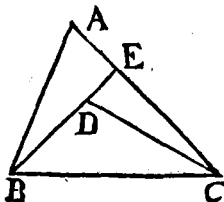
B 3

Quoniam

PROP. XXI. THEOR.

Si a terminis B, C unius lateris trianguli ABC duae rectae BD, CD intus constituentur: hae reliquis duobus trianguli ABC lateribus AB, AC, minores quidem erunt, angulum vero BDC maiorem, quam A, comprehendent.

1. 20. I.
2. 4. 2X.

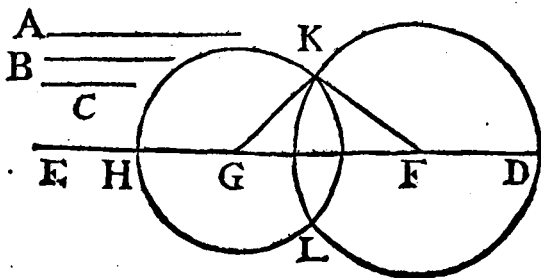


Producatur enim BD ad E. Et quum ABE fiat Δ : erit $AB + AE > EB$; ideoque $AB + AC > EB + EC$. In Δ EDC est $CE + ED > CD$; ideoque $CE + EB > CD + DB$. Quare multo magis $AB + AC > CD + BD$. Q. E. Imum.

1. 16. I.

Angulus $BDC > CED > A$. Ergo & ang. $BDC > A$. Q. E. Idum.

PROP. XXII. PROBL.



F. tribus rectis, quae tribus rectis datis A, B, C sint aequales, triangulum constituere. Oportet autem duas, utcumque sumtas, maiores esse reliqua.

Pona-

beant basi EF maiorem: habebunt etiam angulum A maiorem angulo D, qui ab aequalibus rectis comprehenditur.

Nam si ang. A non maior est quam D: aut est $A = D$, aut $A < D$. Sed si $A = D$: β exite. 4. 1. $BC = EF$; contra hypothesin. Si ang. $A < D$: erit γ $BC < EF$; etiam contra hypothesin. γ . 24. 1. Ergo ang. $A > D$. Q.E.D.

PROP. XXVI. THEOR.

Si duo triangula ABC, DEF duos angulos B, ACB, duobus angulis E, F aequales habeant, alterum alteri, unumque latus uni lateri aequale, vel quod aequalibus adiacet angulis, vel quod uni aequalium angulorum subtenditur: Et reliqua latera reliquis lateribus aequalia, alterum alteri, Et reliquum angulum BAC reliquo D aequalem habebunt.

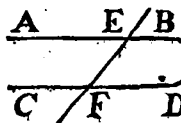


1. Hyp. Sit $B = E$, $ACB = F$, & $BC = EF$. Dico $AB = DE$, & $AC = DF$, & ang. $BAC = D$. Si enim non est $AB = DE$, sit alterutra $AB > DE$, & fiat β $BG = DE$, & iungatur GC. β . 3. 1. Quoniam ergo $BC = EF$, & $BG = DE$, & ang. $B = E$: erit γ $GCB = DFE = \gamma$ ACB . Q. E. A γ .

2. Hyp. Sit $AB = DE$. Dico, fore $BC = EF$, & $AC = DF$, & ang. $BAC = D$. Nam si γ $BC > EF$, ponatur δ $BH = EF$ & ducatur AH. Et quia γ $AB = DE$, & $BH = EF$,
B 4 & ang.

4. I. & ang. $B = E$; erit' ang. $BHA = F = ACB$.
 9. 16. I. Q. E. A⁹. Ergo $BC = EF$, ideoque' & $AC = DF$, & ang. $BAC = D$. Q. E. D.

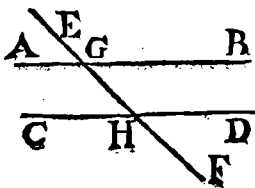
PROP. XXVII. THEOR.



Si in duas rectas lineas AB, CD recta linea EF incidens alternos angulos AEF, EFD inter se aequales fecerit: parallelae erunt rectae lineae AB, CD.

- Si enim non sint parallelae: productae ad
 34. def. alterutram partem' conueniant, velut in puncto G. Ergo ang. AEF extra triangulum
 16. I. EGF maior* erit interno EFD; contra hypothesin. Ergo AB, CD sunt parallelae. Q. E. D.

PROP. XXVIII. THEOR.



Si in duas lineas AB, CD recta linea EF incidens exteriorem angulum EGA interiori & opposito ad easdem partes EHC aequalem fecerit; vel interiores & ad easdem partes AGH, GHC duobus rectis aequales; rectae lineae AB, CD erunt inter se parallelae.

15. I. & 1. Hyp. Quia ang. $EGA = EHC$: erit' &
 I. ax. ang. $BGH = EHC$ alterno, Parallelae igitur
 27. I. sunt rectae AB & CD. Q. E. D.
 2. Hyp. Quia ang. $AGH + GHC = 2$ re-
 13. I. ctis = ' $AGH + BGH$; erit, ablato communi

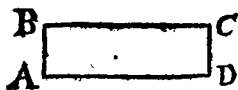
ni

ni AGH, ang. BGH = $\frac{1}{2}$ alterno GHC. Er- $\frac{1}{2}$. I. ax.
 go * AB, CD sunt parallelae. Q. E. D. μ . 27. I.

PROP. XXIX. THEOR.

*In parallelas rectas lineas AB, CD recta Figura
 linea EF incidens, Et alternos angulos BGH, propol. 28.
 GHC inter se aequales, Et exteriorem EGA
 interiori Et opposita ad easdem partes GHC
 aequalem, Et interiores ad easdem partes AGH,
 GHC duobus rectis aequales efficit.*

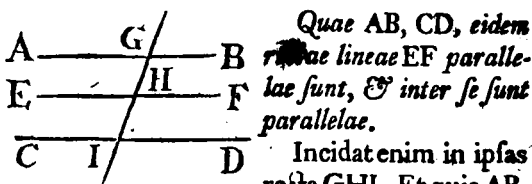
Sienim ang. BGH & GHC inaequales sint:
 alter e. gr. BGH maior erit. Ergo erit $\circ$ BGH α . 4. ax.
 $+ AGH > GHC + AGH$. Sed BGH $+ AGH = 2$ rectis. Ergo ang. GHC $+ AGH$ τ . 13. I.
 < 2 rectis. Quare $\circ$ rectae AB, CD produ- ϕ . 11. ax.
 ctae versus A, concurrent, ideoque $\circ$ non ϵ . 34. def.
 erunt parallelae. Quod est contra hypothe-
 sin. Ergo ang. BGH = GHC. Ergo quum
 ang. EGA $\tau =$ BGH, erit etiam $\circ$ ang. EGA = τ . 15. I.
 GHC. Hinc ϕ ang. EGA $+ AGH =$ AGH ν . 1. ax.
 $+ GHC$. Sed τ ang. EGA $+ AGH = 2$ re- ϕ . 2. ax.
 ctis. Ergo & ν ang. AGH $+ GHC = 2$ re-
 ctis. Q. E. D.



* Schol. Hinc omne paral-
 lelogrammum AC, habens
 vnum angulum rectum A, est
 rectangulum.

Nam A $+ B = 2$ rectis. Ergo quum A re- χ . 29. I.
 ctus sit, B etiam rectus ψ erit. Eodem argumento ψ . 3. ax.
 D & C recti sunt.

PROP. XXX. THEOR.

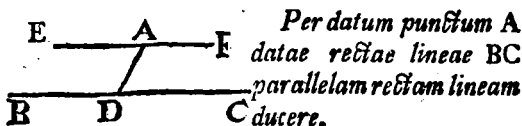


Quae AB, CD, eidem
rectae lineae EF paralle-
lae sunt, & inter se sunt
parallelae.

Incidat enim in ipsas
recta GHI. Et quia AB,

- EF parallelae sunt: $\therefore$ ang. AGH = GHF.
Rursus quia EF, CD parallelae: ang. HID =
GHF. Ergo $\therefore$ ang. AGH = alterno HID,
ideoque β rectae AB, CD parallelae. Q. E. D.

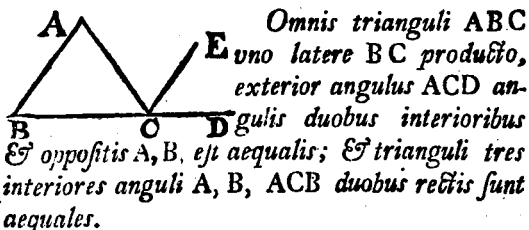
PROP. XXXI. PROBL.



Per datum punctum A
datae rectae lineae BC
parallelam rectam lineam
ducere.

- Sumatur in BC punctum quodvis D, & iun-
gatur AD, & fiat ang. γ EAD = ADC, &
producatur EA ad F. Erunt δ EF, BC paral-
lelae. Q. E. F.

PROP. XXXII. THEOR.



Omnis trianguli ABC
uno latere BC producto,
exterior angulus ACD an-
gulis duobus interioribus
& oppositis A, B, est aequalis; & trianguli tres
interiores anguli A, B, ACB duobus rectis sunt
aequales.

- Ducatur enim per C ipsi AB γ parallela CE:
& erit ang. ACE = ζ A; item ζ ang. ECD = B.
Quare η ACD = A + B. Quod erat unum.

Iam

Iam addito communi angulo ACB, erit
 $ACD + ACB = A + B + ACB$. Sed $ACD = 2 \text{ rectis}$.
 $+ ACB = 2 \text{ rectis}$. Ergo & anguli $A + B + ACB = 2 \text{ rectis}$.
Quod erat alterum.

* *Scholia.*

1. Tres simul anguli cuiusvis trianguli aequales sunt tribus simul cuiuscunque alterius. Vnde

2. Si in vno triangulo duo anguli (aut singuli, aut simul) aequales sint duobus angulis in altero triangulo: etiam reliquus reliquo aequalis est. Item, si duo triangula vnum angulum vni aequalem habeant: reliquorum summae aequantur.

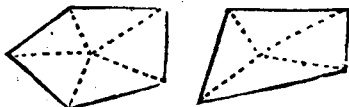
3. In triangulo si vnus angulus rectus sit: reliqui vnum rectum conficiunt.

4. Si in isoscele angulus, aequis cruribus contentus, rectus est: reliqui ad basin sunt semirecti.

5. Trianguli aequilateri angulus facit duas tertias vnus recti. Nam $\frac{1}{3} 2 \text{ rect.} = \frac{2}{3} \text{ recti}$.

6. Huius propositionis beneficio, cuiuslibet figurae rectilineae tam interni quam externi anguli quot rectos conficiant, innotescet per duo sequentia theorematum.

Theor. I.



Omnes simul anguli cuiuscunque figurae rectilineae conficiunt bis tot rectos, demis quatuor, quor sunt latera figurae.

Ex quouis puncto intra figuram ducantur ad omnes figurae angulos rectae, quae figuram resoluunt in tot triangula, quot habet latera. Quare quum singula triangula conficiant duos rectos: omnia simul conficient bis tot rectos, quot sunt latera. Sed anguli circa dictum punctum conficiunt

ciunt quatuor rectos. Ergo si ab omnium triangularum angulis demas angulos circa id punctum: anguli reliqui, qui componunt angulos figurae, conficiunt bis tot rectos, demtis quatuor, quot sunt latera figurae. Q. E. D.

Hinc omnes eiusdem speciei rectilineae figurae aequales habent angulorum summas.

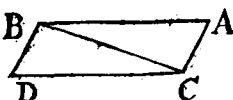
Theor. II.

Omnes simul externi anguli cuiuscunque figurae rectilineae conficiunt quatuor rectos.

Nam singuli interni figurae anguli, cum singulis externis, conficiunt duos rectos. Ergo interni simul omnes, cum omnibus simul externis, conficiunt bis tot rectos, quot sunt latera figurae. Sed (vt modo ostensum est) interni simul omnes etiam, cum quatuor rectis, efficiunt bis tot rectos, quot sunt latera figurae. Ergo externi anguli quatuor rectis aequantur. Q. E. D.

Hinc omnes cuiuscunque speciei rectilineae figurae aequales habent externorum angulorum summas.

PROP. XXXIII. THEOR.

 Quae rectae AC, BD aequales & parallelas AB, CD ad easdem partes coniungunt, ipsae etiam sunt aequales & parallelae.

29. I. Iungatur enim BC: & quia $\angle$ ABC = BCD, & per hyp. AB = CD, & latus BC commune; erit $\angle$ ACB = CBD, & ang. ACB = CBD, ideoque $\angle$ rectae AC & BD parallelae erunt. Q. E. D.

PROP.

PROP. XXXIV. THEOR.

Fig. prop.
33.

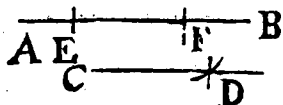
Parallelogrammorum spatiorum ABCD tam latera opposita ($AB = CD$, $AC = BD$), quam anguli oppositi ($A = D$, $ABD = ACD$) inter se aequantur; Et ipsa diameter BC bifariam secat.

Quoniam AB, CD parallelae sunt: $\angle$ erit v. hyp. ang. $ABC = DCB$. Rursus ob AC, DB parallelas, erit $\angle$ ang. $DBC = BCA$. Et latus BC est commune. Quare $AC = BD$, & $AB = CD$, & ang. $A = D$. Et quia erat ang. $ABC = DCB$, & ang. $DBC = BCA$: toti ang. ABD, ACD aequantur. Denique, quum sit $AC = BD$, & BC latus commune, & ang. $BCA = DBC$: tota $\Delta a.$ ACB, BGD aequantur. Q. E. D.

* Scholium.

Omni quadrilaterum ABDC, habens latera opposita aequalia, est parallelogrammum.

Nam per 8. I. ang. $ABC = BCD$. Ergo AB, CD parallelae sunt. Eadem ratione ang. $BCA = DBC$. Quare AC, BD etiam parallelae sunt. Ergo ABDC est parallelogrammum. Q. E. D.

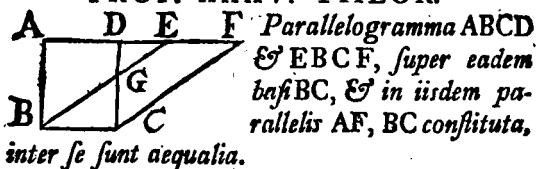


Hinc expeditius per datum punctum C datae rectae AB ducetur parallela CD. Sume in AB quodvis punctum E. Centris E & C, intervallo quovis, duc aequales circulos F, D. Centro vero F, spatio EC, duc circulum FD, qui priorem CD secet in D. Erit ducta CD parallela. Nam, vt modo demonstratum est, ECDF est Pgr.

me in AB quodvis punctum E. Centris E & C, intervallo quovis, duc aequales circulos F, D. Centro vero F, spatio EC, duc circulum FD, qui priorem CD secet in D. Erit ducta CD parallela. Nam, vt modo demonstratum est, ECDF est Pgr.

PROP.

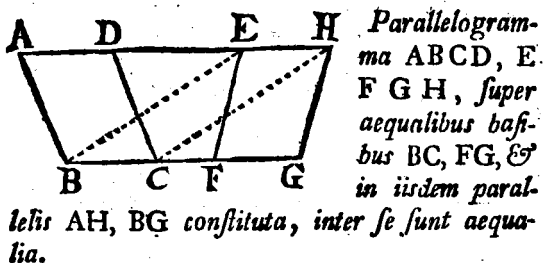
PROP. XXXV. THEOR.



- c. 34. I. Nam quia ABCD, EBCF Pgra sunt: est τ AD = BC = EF. Adde communem DE, & erit τ AE = DF. Sed & τ AB = DC, & ang. A = ν CDF. Ergo Δ ABE = ϕ Δ DCF.
 r. 2. ax. τ 29. I. ϕ 4. I. τ 3. ax. Auferatur commune DGE: erit τ trapezium ADGB = E G C F. Adde commune BGC: erit τ Pgr. ABCD = EBCF. Q.E. D.

* Reliquorum casuum, si E in D, vel inter D & A cadit, non dissimilis, sed simplicior & facilior est demonstratio.

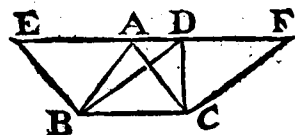
PROP. XXXVI. THEOR.



- Iungantur enim BE, CH. Et quia per hyp. ψ 34. I. BC = FG = ψ EH; BC & EH sunt aequales.
 ω 33. I. Sunt vero & parallelae (hyp.). Ergo τ BE & CH quoque sunt aequales ac parallelae. Quare EBCH est Pgr. & aequale τ Pgro ABCD.
 α 35. I. Sed est etiam τ Pgr. EBCH = Pgro EFGH.
 β 1. ax. Ergo β Pgr. ABCD = EFGH. Q.E.D.

PROP.

PROP. XXXVII. THEOR.



Triangula ABC ,
 DBC , super eadem
 basi BC , & in iisdem
 parallelis AD , BC

constituta, sunt inter se aequalia.

Producatur $\vee$ AD in E, F , & ducatur δ BE $\vee$. 1. post.
 parallela CA , & CF parall. BD . Erit δ Pgr. δ . 31. 1.
 $BCAE = DBCF$. Sed $\Delta ABC = \frac{1}{2}$ Pgr. δ . 35. 1.
 $BCAE$, item $\Delta DBC = \frac{1}{2}$ Pgr. $DBCF$. Ergo δ . 34. 1.
 $\Delta ABC = DBC$. Q. E. D. $\vee$. 7. ax.

PROP. XXXVIII. THEOR.



Triangula ABC ,
 DEF , super basibus
 aequalibus BC , EF ,
 & in iisdem paralle-

lis BF , AD constituta, sunt inter se aequalia.

Ducatur δ CG ipsi BA , & EH ipsi DF pa- 9. 31. 1.
 rallela. Pgra ergo sunt $ABCG$ & $DFEH$, &
 aequalia. Sed $\Delta ABC = \frac{1}{2}$ Pgr. $ABCG$, δ . 36. 1.
 & $\Delta DEF = \frac{1}{2}$ Pgr. $DFEH$. Ergo δ $\Delta ABC = \Delta DEF$. δ . 34. 1.
 Q. E. D. $\vee$. 7. ax.

* Scholium.

Si basis $BC > EF$: liquet $\Delta BAC > \Delta EDF$.
 Et si basis $BC < EF$: erit $\Delta BAC < \Delta EDF$.

PROP.

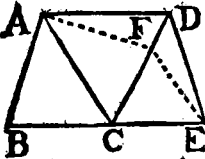
PROP. XXXIX. THEOR.

 Triangula ABC, DBC
aequalia, super eadem
basi BC, & ad eandem
partes constituta, sunt in iisdem parallelis
AD, BC.

μ. 31. I.
ν. 37. I.
ξ. hyp.
ο. 1. ax.
π. 9. ax.

Si enim AD, BC non sunt parallelae: ducatur per A ipsi BC parallela $^{\mu}$ AE, & ducatur EC. Quare $\triangle BEC = \triangle ABC = \triangle DBC$. Ergo triangula BEC, DBC aequalia sunt. Q. E. A $^{\pi}$. Similiter ostendemus, neque ullam aliam parallelam esse praeter rectam AD. Ergo AD est ipsi BC parallela. Q. E. D.

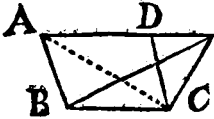
PROP. XL. THEOR.

 Triangula ABC, DCE
aequalia, super basibus BC,
CE † aequalibus, & ad eas-
dem partes constituta, sunt in
iisdem parallelis AD, BE.

ς. 31. I.
ο. 37. I.
ν. hyp. &
1. ax.
ν. 9. ax.

Sin minus: ducatur per A ipsi BE parallela AF, & iungatur FE. Ergo $\triangle FCE = \triangle ABC$. Ergo & $\triangle FCE = \triangle DCE$. Q. E. A $^{\nu}$.

PROP. XLI. THEOR.

 Si parallelogrammum
ABCD, & triangulum
BEC eandem habeant
basin BC, sintque in iis-
dem parallelis AE, BC: parallelogrammum
ABCD ipsius trianguli EBC duplum erit.

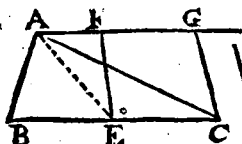
† Puta, in eadem recta positus.

Ducatur

Ducatur enim AC: & erit $\phi \triangle ABC = \triangle \phi$. 37. 1.
 EBC. Sed Pgr. ABCD est $\propto$ duplum $\triangle \propto$. 34. 1.
 ABC. Ergo Pgr. ABCD est ψ duplum $\triangle \psi$. 1. & 6.
 EBC. Q.E.D. ax.

PROP. XLII. PROBL.

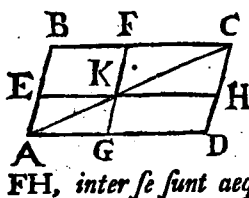
*Dato triangulo ABC aequale parallelogram-
 mum constituere in dato angulo rectilineo D.*



Secetur BC bi-
 fariam α in E, & α . 10. 1.
 fiat α ang. CEF α . 23. 1.
 = D. Ducatur
 AG β ipsi BC, & CG ipsi EF parallela. Erit β . 31. 1.
 FECG Pgr. aequale $\triangle ABC$.

Nam ducta AE, erit $\gamma \triangle ABE = \triangle AEC$. γ . 38. 1.
 Ergo $\triangle ABC \delta = 2 \triangle AEC =$ Pgr. FECG. δ . 2. ax.
 Ergo ζ Pgr. FECG = $\triangle ABC$. Q.E.F. ζ . 41. 1.
 ζ . 1. ax.

PROP. XLIII. THEOR.



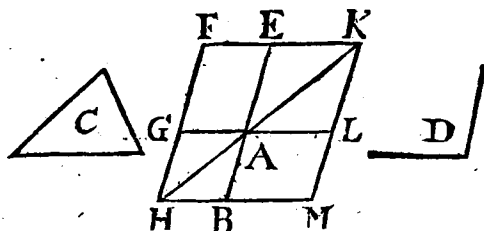
*In omni parallelogram-
 mo ABCD complementa
 EF, DK eorum, quae circa
 diametrum AC sunt, pa-
 rallelogrammorum EG,
 FH, inter se sunt aequalia.*

Nam $\alpha \triangle ABC = \triangle ACD$. Et quia etiam α . 34. 1.
 EG & FH sunt Pgra, quorum diametri sunt
 AK, KC: erit similiter $\triangle AEK = \triangle AKG$,
 & $\triangle FKC = \triangle KCH$. Quare $\beta \triangle AEK + \beta$. 2. ax.
 FKC = $\triangle AKG + KCH$. Ergo γ reliquum γ . 3. ax.
 Pgr. BK = reliquo KD. Q.E.D.

C.

PROP.

PROP. XLIV. PROBL.



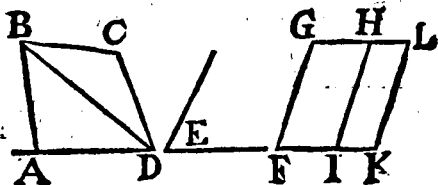
Ad datam rectam lineam AB dato triangulo C aequale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo D.

- x. 42. I. Fiat * triangulo C = Pgr. A E F G in angulo GAE, dato D aequali, & ponatur AE in directum ipsi AB, & producatu r FG ad H, & per B ipsi FE vel GA ducatur parallela BH, & iungatur HA. Et quia ang. EFH + FHB = ^λ 2 rectis, ideoque ang. EFH + FHA < 2 rectis: recta HA producta occurret * productae FE in K. Per K agatur ipsi FH vel EB parallela, quae rectis GA, HB productis occurrat in L & M. Dico, AM esse Pgr. desideratum.
- λ. 29. I. Nam * Pgr. AM = AF^ξ = Δo C. Et ang.
- μ. II. 2X. ξ. constr. LAB = GAE = ^ξ D. Ergo ad datam rectam AB in dato angulo D applicatum est Pgr. AM, triangulo C aequale. Q.E.F.

PROP. XLV. PROBL.

Dato rectilineo ABCD aequale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo E.

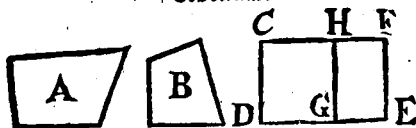
Datum



Datum rectilineum resolue in triacula BA
D, BCD, & fac^o Pgr. FH = Δ BAD, ita vt^o. 42. I.
ang. F = E. Deinde ad HI fac^o Pgr. HK = Δ BCD, vt dato angulo E aequalis sit HIK. 44. I.

Quia ang. F = E = HIK: erit ang. F +
FIH = $\angle$ HIK + FIH. Sed F + FIH = $\angle$ 2. ax.
2 rectis. Ergo^o & ang. HIK + FIH = $\angle$ 29. I.
rectis, & IK est in directum^o ipsi FI. Ergo^o. I. ax.
ang. HIK = $\angle$ alterno GHI, & adeo ang. HIK
+ IHL = $\angle$ GHI + IHL. Quare quum sint
ang. HIK + IHL = $\angle$ 2 rectis: erunt & GHI
+ IHL = $\angle$ 2 rectis, & erit^o HL ipsi GH in
directum. Hinc, ob GH, FK parallelas^o, et^o ϕ . constr.
iam GL, FK parallelae sunt; nec non GF, LK & dem.
eidem^o HI parallelae, ipsae^o sunt parallelae. 30. I.
Ergo FGLK est Pgr. & ϕ quia FH = Δ ABD,
& HK = Δ BCD: totum Pgr. FGLK = $\angle$ toti
rectilineo ABCD. Q. E. F.

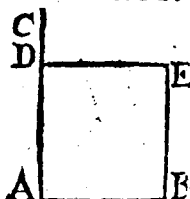
* Scholium.



Hinc facile inuenitur excessus HE, quo rectili-
neum aliquod A superat rectilineum minus B: ni-
mirum si ad quamvis rectam CD applicentur Pgr.
DF = A, & DH = B.

PROP. XLVI. PROBL.

A data recta linea AB quadratum describere.



ψ. II. I.
α. 3. I.

α. 31. I.

β. 34. I.

γ. I. 2x.

δ. sch. 29. I.

ε. 29. def.

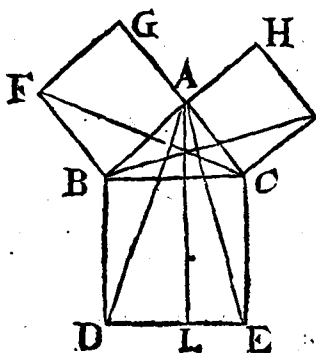
Ducatur ex A in AB perpendicularis ψ AC, in qua capiatur * AD = AB. Per D ipsi AB, & per B ipsi AC ducantur * parallelæ DE, BE. Erit BD quadratum, a data recta AB descriptum.

Est enim BD parallelogrammum. Ideo & AB = DE, & AD = EB. Sed AD = AB. Ergo 7 singula latera AD, AB, BE, DE inter se aequalia sunt. Quare BD est quadrilaterum aequilaterum. Et quoniam BD est Pgr. habens vnum rectum angulum A: 8 anguli reliqui D, E, B etiam recti erunt. Ergo BD ε. 29. def. est quadratum. Q. E. F.

* Scholium.

Eodem modo facile describes rectangulum, quod sub datis duabus rectis contineatur.

PROP. XLVII. THEOR.



In rectangulis triangulis ABC quadratum BC ED, quod a latere BC rectum angulum A subtendente describitur, aequale est quadratis BG, CH, quae a lateribus AB, AC, rectum

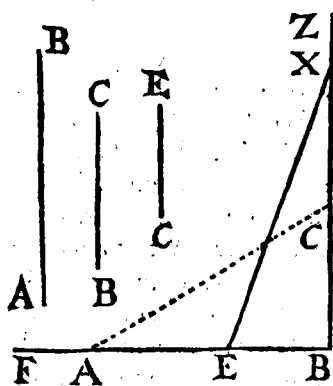
rectum angulum comprehendentibus, describuntur.

Per A ipsi BD vel CE ducatur² parallela². 31. 1.
 AL, & iungantur AD, FC. Quoniam ergo
 vterque ang. BAC, BAG rectus est: AC &
 AG erunt² in directum. Eadem ratione &* 14. 1.
 BA, AH sunt in directum. Iam ang. DBC
 $\equiv$ ² FBA, ideoque ang. DBA $\equiv$ FBC, & 9. 10. ax.
 DB $\equiv$ BC, ac BA $\equiv$ FB: ergo² Δ ABD². 2. ax.
 $\equiv$ FBC. Sed Pgr. BL, quod cum Δ ABD². 29. def.
 est in eadem basi BD & in iisdem parallelis². 4. 1.
 BD, AL, est duplum² Δ i ABD; & quadra². 41. 1.
 tum BG, quod cum Δ FBC est in eadem basi
 FB & in iisdem parallelis FB, GC, est² du-
 plum Δ FBC. Ergo² Pgr. BL $\equiv$ BG. Simi- v. 6. ax.
 liter ductis AE, BK, ostendetur Pgr. CL $\equiv$
 CH. Totum ergo² quadratum BCED $\equiv$ 2. ax.
 quadratis BG + CH. Q. E. D.

* *Scholium.*

Hoc nobilissimum & utilissimum theorema
 ab inuentore *Pythagora* Pythagoricum dici me-
 ruit. Eius beneficio quadratorum additio &
 subtractio perficitur, quo spectant duo sequentia
 problemata.

Problema I.



Datis quoruncumque quadratis, unum omnibus aequale constituere.

Dentur quadrata tria: quorum latera sint AB, BC, CE. Fac $\angle$ rectum FBZ, infinita habentem latera, in eaque transfer BA & BC, &

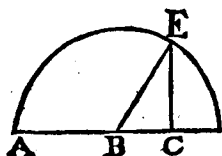
e. II. I.

iunge AC: erit π ACq = ABq + BCq. Tum AC transfer ex B in X, & CE tertium latus datum transfer ex B in E, & iunge EX: erit π EXq = EBq (vel CEq) + BXq (vel ACq) = π CEq + BCq + ABq. Q. E. F.

e. 47. I.

e. 2. ax.

Problema II.



Datis duabus rectis inaequalibus AB, BC, exhibere quadratum, quo quadratum maioris AB excedit quadratum minoris BC.

Centro B, intervallo BA describe circulum. Ex C erige perpendicularem CE, occurrentem peripheriae in E. Ducatur BE. Erit BEq (vel BAq) = π BCq + CEq. Ergo π BAq - BCq = CEq. Q. E. F.

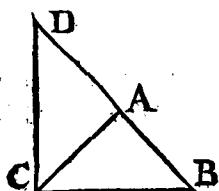
e. 47. I.

e. 3. ax.

PROP.

PROP. XLVIII. THEOR.

Si quadratum, quod describitur ab uno BC laterum trianguli ABC, aequale sit quadratis, quae a reliquis trianguli lateribus AB, AC describuntur: angulus BAC, a reliquis duobus trianguli lateribus AB, AC comprehensus, rectus erit.



Ducatur enim ν ad AC, perpendicularis AD, & fiat $AD = AB$, & iungatur DC.

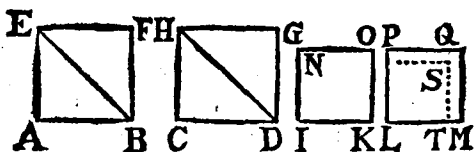
Quoniam ergo $DA = AB$: erit & $DAq = ABq$, ideoque $DAq + ACq = ABq + ACq$. Sed $DAq + ACq = DCq$, & $ABq + ACq = CBq$. Ergo $DCq = CBq$, ideoque $DC = CB$. Hinc quoniam $AD = AB$, & latus AC commune: erit $\angle BAC = \angle CAD$. Rectus autem est $\angle CAD$. Quare & ang. BAC rectus est.

Q. E. D.

* *Scholium.*

Sumtum est in demonstratione ex eo, quod $DA = AB$, sequi $DAq = ABq$; & ex eo, quod $DCq = CBq$, sequi $DC = CB$. Hoc vero manifestum fiet ex sequenti theoremate.

* Theorema.



Linearum rectarum aequalium AB, CD aequalia sunt quadrata AF, CG. Et quadratorum aequalium NK, PM aequalia sunt latera IK, LM.

Pro 1. Hyp. Duc diametros EB, HD. Liqueat
 β . 34. I. $AF = \beta$ duplo $\Delta EAB = \gamma$ 2 $\Delta HCD = \beta$ CG.
 γ . 4. I. & Ergo $AF = CG$. Q. E. D.
 6. ax.

Pro 2. Hyp. Si fieri potest, sit $LM > IK$: fac
 δ . 46. I. $LT = IK$, fitque δ $LS = LT$ q. Ergo $LS =$
 ϵ . I. part. $NK = \epsilon$ LQ. Q. E. A ϵ . Ergo $LM = IK$.
 ζ . hyp. Q. E. D.
 η . 9. ax.

* Schol.

Eodem modo quaelibet rectangula, inter se aequaliter, aequalia ostendentur.

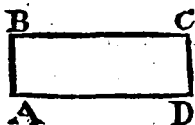


E V C L I D I S

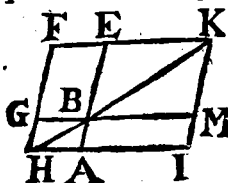
ELEMENTORVM

LIBER II.

DEFINITIONES.



1. Omne parallelogrammum rectangulum ABCD contineri dicitur sub duabus rectis lineis AB, AD, quae rectum angulum A comprehendunt.



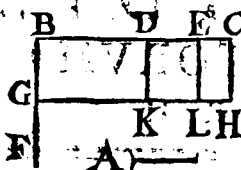
2. Omnis parallelogrammi FHIK vnumquodque eorum, quae circa HK diametrum ipsius sunt, parallelogrammorum EM, GA, cum duobus complementis FB, BI, *Gnomon* vocatur. (Hoc est, figura FHIMBEF vocatur *gnomon*, item figura FKIABGE.)

Breuitatis gratia has duas notas in hoc libro adhibemus.

Rgl. notat parallelogrammum rectangulum, veluti Rgl. BAD, lege rectangulum BAD.

✕ indicat etiam rectangulum, contentum sub duabus rectis, inter quas haec nota scripta est. E. gr. BA ✕ AD indicat rectangulum, sub rectis BA & AD contentum.

PROPOSITIO I. THEOR.



*Si sint duae rectae li-
neae A, BC, altera autem
ipsarum BC secta fue-
rit in quocunque par-
tes BD, DE, EC: rectan-*

*gulum, sub duabus rectis A, BC contentum,
aequale est iis rectangulis A x BD, + A x
DE, + A x EC, quae sub recta linea non
secta A & singulis alterius BC segmentis con-
tinentur.*

α. 11. 1.

β. 3. 1.

γ. 31. 1.

δ. sch. 29. 1.

ε. constr.

ζ. 1. def. 2,

η. 34. 1.

Ducatur enim ^α a puncto B ipsi BC perpen-
dicularis BF, atque ^β fiat BG = A. & per G
ipsi BC parallela sit ^γ GH, per puncta vero D,
E, C ipsi BG parallelae sint DK, EL, CH. Er-
go ^δ Rgl. BH = Rgl. BK + DL + EH. Sed
quia ^ε BG = A: erit Rgl. BH = ^ζ A x BC, &
Rgl. BK = A x BD. Et quia ^η DK = EL
= BG = A: erit Rgl. DL = A x DE, &
Rgl. EH = A x EC. Quare A x BC = A
x BD, + A x DE, + A x EC. Q. E. D.

** Scholium.*

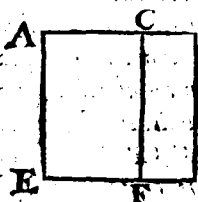
*Hinc si fuerint duae rectae Y, Z, secenturque ambae
in quocunque partes: rectangulum sub totis aequale
est rectangulis sub partibus.*

Nam sint rectae Z partes A, B, C, & rectae
Y partes D, E. Quia D x Z = D x A +
D x B, + D x C; & E x Z = E x A, + E
x B, + E x C; & Y x Z = D x Z, + E x Z:
erit ⁹ Y x Z = D x A, + D x B, + D x C,
+ E x A, + E x B, + E x C. Q. E. D.

9. 2. ax.

PROP.

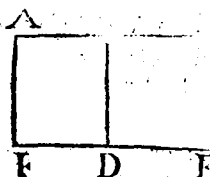
PROP. II. THEOR.



*Si recta linea AB secetur
utcumque in C: rectangula,
sub tota AB & utroque
segmento AC, CB conten-
ta, aequantur quadrato to-
tius AB.*

Describatur ex AB quadratum ABDE, . 46. 1.
& per C ducatur * alterutri AE, BD parallela . 31. 1.
CF. Est igitur $AD = Rgl. AF + CD =$
 $AE \times AC, + BD \times CB = AB \times AC, +$
 $AB \times CB$, quia $AE = BD = AB$. Ergo . 29. def. 1.
 $Rgl. AB \times AC, + AB \times CB =$ quadrato to-
tius AD. Q. E. D.

PROP. III. THEOR.



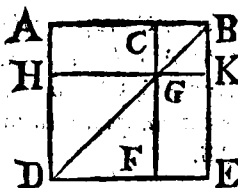
*Si recta linea AB se-
cetur utcumque in C: re-
ctangulum, sub tota AB
& uno segmento BC con-
tentum, aequatur rectan-
gulo sub segmentis AC,
CB contento, & praedicti segmenti CB qua-
drato.*

Describatur * ex CB quadratum BCDE, . 46. 1.
& producatu ED in F, & per A alterutri CD,
BE ducatur parallela AF. Ergo Rgl. $AE =$
 $Rgl. AD +$ quadrato CE. Et quia * $BE =$. 29. def. 1.
 CB : est Rgl. $AE = AB \times BC$; item quia
 $CD = BC$: est Rgl. $AD = AC \times CB$.
Quare $AB \times BC = AC \times CB, + CB q.$
Q. E. D.

PROP.

PROP. IV. THEOR.

Si recta linea AB secetur utcumque in C: quadratum totius AB aequatur quadratis segmentorum AC, CB, & rectangule bis contento sub segmentis AC, CB.



tur utcumque in C: quadratum totius AB aequatur quadratis segmentorum AC, CB, & rectangule bis contento sub segmentis AC, CB.

§. 46. I.

Describatur $\square$ ex AB quadratum ADEB, iungatur BD, & per C alterutri AD, BE ducatur parallela CGF, per G vero alterutri

a. 29. I.

π . 29. def. I.

§. 5. I.

§. I. ax.

v. 6. I.

v. 34. I.

ϕ . sch. 29. I.

AB, DE parallela HK. Erit ergo $\angle$ BGC $\equiv$ ADB. Sed quia π AD $\equiv$ AB: ang. $\angle$

ABD $\equiv$ ADB; quare ang. BGC $\equiv$ CBG,

& ideo CB $\equiv$ CG. Est vero $\angle$ CB $\equiv$ GK,

& CG $\equiv$ BK. Ergo CGKB est aequilaterum.

Sed est quoque ϕ rectangulum, ob angulum

ABE π rectum. Quare CGKB est CBq. Eadem

ratione HF est HGq, id est $\angle$ ACq. Et

§. 43. I.

quoniam Rgl. AG $\equiv$ Rgl. GE, & ob CG $\equiv$

CB, Rgl. AG $\equiv$ AC $\times$ CB: erit & Rgl. GE

$\equiv$ AC $\times$ CB. Ergo AG $\times$ GE $\equiv$ 2. AC

$\times$ CB. Ergo ABq $\equiv$ CK + HF + AG

+ GE $\equiv$ CBq + ACq + 2. AC $\times$ CB.

Q. E. D.

Aliter.

ψ . 32. I.

Quoniam ang. BAD π $\equiv$ recto: ang. ABD

+ ADB $\equiv$ ψ recto. Sed quum sit π AB $\equiv$

a. 5. I.

AD, ideoque π ang. ABD $\equiv$ ADB; erit ang.

ABD $\equiv$ $\frac{1}{2}$ recto. Et quoniam ang. BAD re-

a. 29. I.

ctus est: ang. BCG etiam π rectus erit. Quare

in $\triangle$ BCG reliquus angulus BGC etiam $\equiv$

ψ $\frac{1}{2}$ recto.

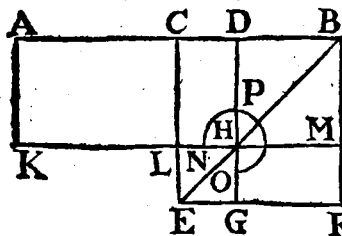
ψ recto. Hinc β $GC = CB$; & quia $GC \psi$. 32. 1. $\equiv \gamma$ BK , ac $CB = GK$: erit CK aequilate- β . 6. 1. rum. Est vero & rectangulum, ob ang. $ABE \gamma$. 34. 1. rectum. Ergo CK est CBq . Eadem ratione &c. ut supra.

Coroll. 1. Ex his manifestum est, in quadratis parallelogramma, quae sunt circa diametrum, esse quadrata.

* *Cor. 2.* Item, diametrum cuiusvis quadrati angulos eius bifecare.

* *Schol.* Si $AC = \frac{1}{2} AB$: erit $ABq = 4 ACq$, & $ACq = \frac{1}{4} ABq$. Et contra, si $ABq = 4 ACq$: erit $AC = \frac{1}{2} AB$.

PROP. V. THEOR.



Si recta linea AB secetur in aequalia AC , CB , & inaequalia AD , DB : rectangulum $FAD \times DB$ sub

inaequalibus totius segmentis contentum una cum quadrato rectae CD inter puncta sectionum aequatur quadrato dimidia BC .

Describatur β ex CB quadratum $CBFE$, β . 46. 1; iungatur BE , & per D alterutri CE , BF parallela DHG , ac per H alterutri AB , EF parallela KLM , per A denique alterutri CL , BF parallela AK ducatur. Et quia β $CH = HF$: α . 43. 1. erit β $CM = DF$. Sed $CM = \gamma$ AL : quare β . 2. ax. $AL = DF$, & addito communi CH , $AH \beta$ $\equiv \gamma$. 36. 1. gnomoni

gnomoni NPO, & tandem addito communi LG, $AH + LG = CBq$. Est autem ob $DH = DB$, Rgl. $AH = AD \times DB$, & LG est $LHq = CDq$. Ergo $AD \times DB + CDq = CBq$. Q.E.D.

* Scholia.

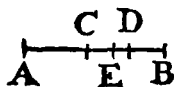
1. Hoc theorema paullo aliter sic effertur: Rectangulum sub summa AD & differentia DB duorum rectarum AC (vel CB) & CD, aequatur differentiae quadratorum ex ipsis.

2. Si AB aliter diuidatur, propius scilicet puncto bisectionis, in E: dico $AE \times EB > AD \times DB$. Nam $AE \times EB + CEq = CBq$

$= AD \times DB + CDq$.

Ergo quum $CEq < CDq$:

erit $AE \times EB > AD \times DB$. Q.E.D.

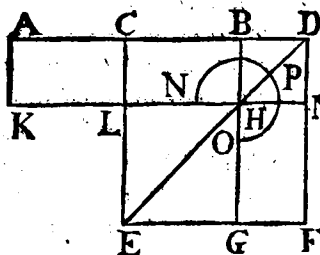


3. Hinc $ADq + DBq > AEq + EBq$. Nam $ADq + DBq + 2 AD \times DB = ABq = AEq + EBq + 2 AE \times EB$. Ergo quum $2 AE \times EB > 2 AD \times DB$: erit $ADq + DBq > AEq + EBq$. Q.E.D.

4. Ex quibus simul patet, esse $ADq + DBq - AEq - EBq = 2 AE \times EB - 2 AD \times DB$.

PROP.

PROP. VI. THEOR.

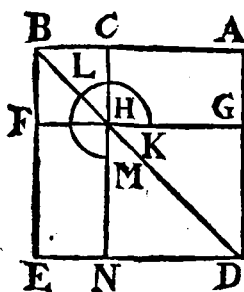


Si recta linea AB secetur bifariam in C, & illi recta quaecunque linea BD in directum adiciatur: rectangulum AD $\times$

BD contentum sub composita ex tota cum adiecta & adiecta, una cum quadrato dimidiaie CB, aequatur quadrato compositae CD ex dimidia & adiecta tanquam unius lineae.

Describatur ex CD quadratum CDFE, iungatur ED, per B alterutri CE, DF, fit parallela BHG, & per H ipsi AD vel EF parallela KLM, & adhuc per A ipsi CL vel DM parallela AK. Itaque quia $AC = CB$, Rgl. $AL = CH = HF$. Addito communi CM, erit $\S. 36. I. AM = gnom. NPO$. Atqui ob $DM = DB$ est $AM = AD \times DB$. Ergo $AD \times DB = gnom. NPO$. Sed ob $CB = LH$, est $CBq = LG$. Ergo $AD \times DB + CBq = gnom. NPO + LG = CDq$. Q.E.D. $\S. 4. 2. \S. 34. I.$

PROP. VII. THEOR.



Si recta linea AB secetur utcumque in C: quadrata totius AB & unius segmentis BC simul sumpta aequantur rectangulo $2 AB \times BC$ bis contento sub tota & dicto segmento, una cum ACq quadrato reliqui segmenti.

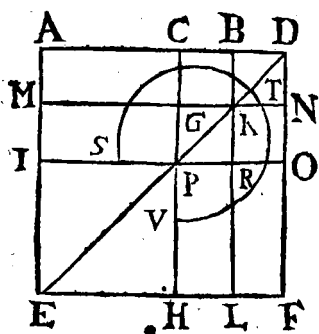
- Describantur enim ex AB quadratum AE, & in eo reliquae figurae, ut antea. Quoniam
- e. 43. I. $AH = HE$: erit $AF = CE$, & $AF + CE = 2 AF$. Sed $AF + CE = \text{gnom. KLM} + CF$: ergo $\text{gnomon KLM} + CF = 2 AF$. Iam
- v. 2. ax. $2 AB \times BC = 2 AF$, ideoque $\text{gnomon KLM} + BCq = 2 AB \times BC$. Ergo addito utrinque $GN = ACq$, erit $ABq + BCq = 2 AB \times BC + ACq$. Q. E. D.
- v. 1. corol. quum CF sit CBq , & hinc $BF = BC$: erit
4. 2. $2 AB \times BC = 2 AF$, ideoque $\text{gnomon KLM} + BCq = 2 AB \times BC$. Ergo addito utrinque $GN = ACq$, erit $ABq + BCq = 2 AB \times BC + ACq$. Q. E. D.

* *Scholium.*

- Hinc quadratum differentiae duarum rectarum AB, BC, aequale est quadratis utriusque minus duplo rectangulo sub ipsis. Nam
- q. 3. ax. $ABq + BCq - 2 AB \times BC = ACq = (AB - BC)q$.

PROP.

PROP. VIII. THEOR.



*Si recta linea
AB secetur ut-
cunque in C: re-
ctangulum, qua-
ter contentum
sub tota AB &
uno e segmen-
tis BC, una cum
quadrato reliqui
segmenti AC,
aequatur qua-*

*drato compositae ex tota AB & praedicto se-
gmento BC tanquam unius lineae.*

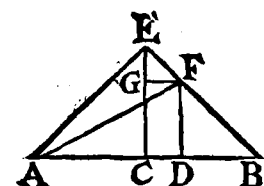
In producta AB fiat $BD = BC$, & describa-
tur ex AD quadratum AEF D, & reliquae
figurae describantur bis, quae in praecedente
propositione. Ergo quia $CB = BD$, & $\propto CB \propto$ 34. I.
 $= GK$, ac $BD = KN$: erit $GK = KN$. Ea-
dem ratione $PR = RO$. Hinc $\downarrow$ Rgl. CK $\downarrow$ 36. I. $\sim$
 $=$ Rgl. BN, & Rgl. GR $=$ Rgl. KO. Sed
Rgl. CK $=$ Rgl. KO. Quare & Rgl. BN $\propto$ 43. I.
 $=$ Rgl. GR; ideoque $CK + BN + GR +$
 $KO = 4 CK$. Porro $GC \propto = BK = BD$, $\propto$ 1. coroll.
& $BC = BD$; ideoque $CG = CB$. Sed & $\propto$ 4. 2.
 $GP = GK = CB$. Ergo $CG = GP$, & Rgl.
 $AG = \downarrow$ Rgl. MP. Eadem ratione ob PR
 $= RO$ est Rgl. PL $=$ Rgl. RF. Quum au-
tem in Pgr. ML sit $MP = PL$: erit $AG =$
 RF ; hinc $AG + MP + PL + RF = 4 AG$.
Sed ostensum est, quod $CK + BN + GR +$
 $KO = 4 CK$. Quare $\propto$ totus gnomon STV $\propto$ 2. ax.

D

 $= 4$

$= 4 AK$. Sed ob $BK = BD = BC$ est $AK = AB \times BC$. Ergo gnomon $STV = 4 AB \times BC$. Denique quia $IP = \frac{1}{2} AC$: est IH vel $\frac{1}{2} IPq = ACq$. Quare β totum quadratum AF , id est $(AB + BCq) = 4 AB \times BC + ACq$. Q.E.D.

PROP. IX, THEOR.



Si recta linea AB secetur in aequalia AC, CB, & inaequalia AD, DB: quadrata inaequalium segmentorum ADq + DBq sunt dupla quadratorum a dimidia, & a recta inter puncta sectionum, 2 ACq + 2 CDq.

Ex C ducatur γ in AB perpendicularis, in qua fiat $\delta CE = AC$. Iungantur AE, EB, & per D ipsi CE ϵ parallela DF, & per F ipsi AB parallela FG agantur, iungaturque AF. Itaque quia $\zeta EAC = AEC$, & ob ang. ACE rectum, $EAC + AEC = \eta$ recto: vterque ang. EAC, AEC $= \frac{1}{2}$ recti. Eadem ratione vterque ang. EBC, BEC $= \frac{1}{2}$ recti. Ergo totus ang. AEB rectus est. Et quia ang. GEF $= \frac{1}{2}$ recti, EGF vero $\theta = ECB =$ recto: reliquus EFG etiam $\epsilon = \frac{1}{2}$ recti. Hinc ang. GEF = EFG, & $\kappa GF = EG$. Eadem ratione DF = DB. Et quoniam AC = CE, ideoque $\lambda ACq = CEq$: erit $ACq + CEq = 2 ACq$. Est vero $ACq + CEq = \mu AEq$. Ergo AEq

γ . II. I.

δ . 3. I.

ϵ . 31. I.

ζ . 5. I.

η . 3. schol.

32. I.

θ . 29. I.

ϵ . 32. I.

κ . 6. I.

λ . sch. 48. I.

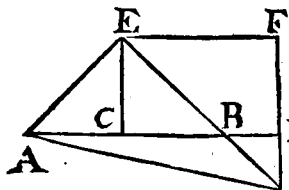
que $\lambda ACq = CEq$: erit $ACq + CEq = 2 ACq$. Est vero $ACq + CEq = \mu AEq$. Ergo AEq

go $AEq = 2 ACq$. Eadem ratione est $EFq = 2 GFq = 2 CDq$. Quare $AEq + EFq = 2 ACq + 2 CDq$. μ . 47. I. id est $AFq = 2 ACq + 2 CDq$. Sed $AFq = ADq + DFq = ADq + DBq$. Ergo $ADq + DBq = 2 ACq + 2 CDq$. ν . 2. ax. Q. E. D.

* Scholium.

Aliter effertur sic: *Aggregatum quadratorum ex summa AD & differentia DB duarum rectarum AC, CD aequatur duplo quadratorum ex ipsis AC, CD.*

PROP. X. THEOR.

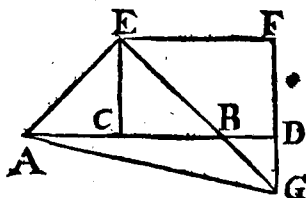


Si recta linea AB secetur bifariam in C, & illi recta quaecunque linea BD in directum adiciatur:

quadratum compositae AD ex tota & adiecta, & quadratum adiectae BD simul sumta sunt dupla & quadrati ex dimidia AC, & quadrati compositae CD ex dimidia & adiecta, tanquam unius lineae.

Ducatur enim ξ ex C ipsi AD perpendicularis CE, & fiat alterutri AC, CB aequalis, iunganturque AE, EB, & per E quidem θ ducatur ipsi AD parallela EF, per D vero ipsi CE parallela DF. Et quoniam anguli FEC + EFD = π 2 rectis: ang. FEB + EFD < π 2 rectis.

§. 11. ax.



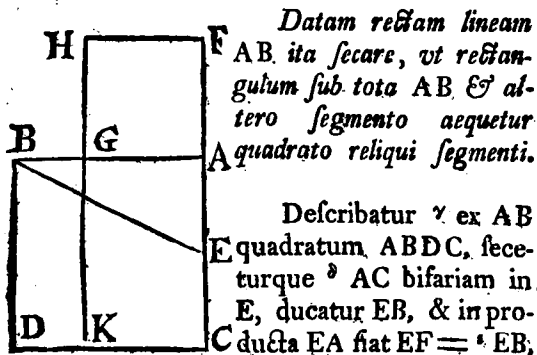
2 recti, ideoque re-
ctae EB, FD pro-
ductae conue-
nient ad partes
BD. Producantur,
& conueniant in

G, & iungatur AG.

- §. 5. I. Itaque quia $EAC = \angle CEA$, & ob ang.
 §. 32. I. ACE rectum, $EAC + CEA = \angle$ recto:
 erit vterque ang. $EAC, CEA = \frac{1}{2}$ recti.
 Eadem ratione vterque ang. $CEB, EBC = \frac{1}{2}$
 §. 2. ax. recti. Ergo $\angle AEB = \angle$ recto. Quia $\angle DBG$
 §. 15. I. $= \angle EBC$, & hinc $DBG = \frac{1}{2}$ recti, BDG ve-
 ro $= \angle ECB = \angle$ recto: erit $\angle$ ang. BGD
 §. 6. I. $= \frac{1}{2}$ recti $= \angle DBG$, ideoque $DG = BD$.
 Et quum ergo $BGD = \frac{1}{2}$ recti, ac ang. EFB
 §. 34. I. $= \angle ECD = \angle$ recto: erit quoque $\angle$ ang. FEG
 $= \frac{1}{2}$ recti $= \angle EGF$, & hinc $EF = FG$.
 Porro quia, ob $AC = CE$, est ACq
 §. sch. 48. I. $= CEq$, & $ACq + CEq = 2 ACq$:
 §. 47. I. erit $AEq = 2 ACq$. Simili ratione EGq
 §. 34. I. & $= 2 EFq = 2 CDq$. Quare $\angle AGq$
 §. sch. 48. I. $(= AEq + EGq) = 2 ACq + 2 CDq$.
 Sed $AGq = ADq + DGq = ADq +$
 BDq . Ergo $ADq + BDq = 2 ACq + 2$
 CDq . Q. E. D.

PROP.

PROP. XI. PROBL.



Datam rectam lineam
AB. ita secare, ut rectan-
gulum sub tota AB & al-
tero segmento aequetur
quadrato reliqui segmenti.

Describatur γ ex AB γ . 46. I.

Equadratum ABDC, sece-
 turque δ AC bifariam in δ . 10. I.

E, ducatur EB, & in pro-
 ducta EA fiat EF = δ EB, ϵ . 3. I.

ac describatur ex AF quadratum AFHG,
 & producat H G ad K. Dico, AB
 ita sectam esse in G, ut sit $AB \times BG =$
 AG^2 .

Nam $\epsilon^2 CF \times FA + AE^2 = EF^2 = \epsilon^2 \delta^2$. 6. 2.

EB^2 . Sed $EB^2 = \delta^2 AB^2 + AE^2$. Ergo ϵ . sch. 48. I.

$CF \times FA + AE^2 = AB^2 + AE^2$, & δ . 47. I.

hinc $CF \times FA = AB^2$. Iam quia ϵ AF ϵ . 3. ax.

$= FH$: erit $CF \times FA = Rgl. FK$. Est vero ϵ . 29. def. I.

$AB^2 = AD$ (per constr.) Ergo Rgl. FK

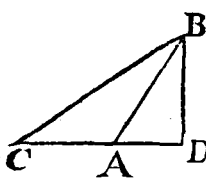
$= AD$. Hinc ablato communi GC, erit

$FG = GD$. Sed FG est AG^2 , & ob BD

$= \epsilon$ AB, est $GD = AB \times BG$. Ergo AB

$\times BG = AG^2$. Q.E.F.

PROP. XII. THEOR.



- In triangulis amblygoniis ABC quadratum lateris BC, subtendentis angulum obtusum A, maius est quam quadrata laterum AC, AB, angulum obtusum A comprehendentium, rectangulo bis contento sub uno laterum CA, circa angulum obtusum, in quod productum perpendicularis BD cadit, & recta AD extra intercepta a perpendiculari BD ad angulum obtusum. (Hoc est: $BCq = CAq + ABq + 2 CA \times AD$.)*

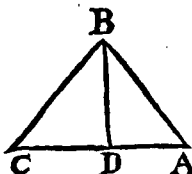
λ. 4. 2.

μ. 2. ax.

ν. 47. I.

Nam $CDq = CAq + ADq + 2 CA \times AD$, ideoque $CDq + DBq = CAq + ADq + DBq + 2 CA \times AD$. Sed $CDq + DBq = CBq$, & $ADq + DBq = ABq$. Ergo $CBq = CAq + ABq + 2 CA \times AD$. Q.E.D.

PROP. XIII. THEOR.

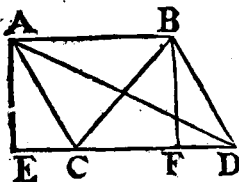


In triangulis oxygoniis ABC quadratum lateris BC, subtendentis angulum acutum A, minus est quam quadrata laterum AC, AB, comprehendentium angulum acutum, rectangulo bis contento sub uno laterum circa angulum acutum CA, in quod perpendicularis BD cadit, & recta AD intus intercepta a perpendiculari ad angulum acutum

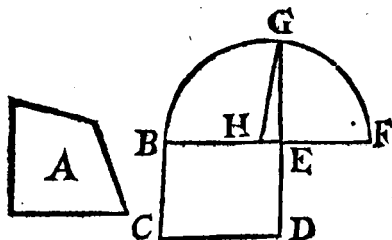
- acutum.* (Hoc est: $BCq + 2 CA \times AD = CAq + ABq$.)

Nam $\xi CAq + ADq = 2 CA \times AD + \xi. 7. 2. CDq$; hinc $\circ CAq + ADq + BDq = 2 \circ. 2. ax. CA + AD + CDq + BDq$. Iam $\pi ABq \pi. 47. I. = ADq + BDq$, & $BCq = CDq + BDq$. Ergo $CAq + ABq = BCq + 2 CA \times AD$. Q. E. D.

** Schol.* Hinc demonstratur, in omni parallelogrammo $ABDC$ quadrata e diametro AD , BC aequalia esse quadratis laterum simul sumtis. Nam ductis perpendicularibus AE , BF , est $ADq = \epsilon DCq + CAq + 2 DC \times CE$, & $\rho. 12. 2. BCq + 2 DC \times DF = \sigma \epsilon. 13. 2. CDq + BDq$. Est autem $CDq = \tau ABq$; & ob $\pi. 34. I.$ ang. $AEC = \nu BFD$, $\mu. 10. def. I.$ ac $ACE = \phi BDF$, ac $\& 10. ax. AC = \tau BD$, est $CE = \chi \phi. 29. I. DF$; $\% 26. I.$ ergo $BCq + 2 DC \times CE = ABq + BDq$. Quare $\psi ADq + BCq + 2 DC \times CE \psi. 2. ax. = ABq + BDq + DCq + CAq + 2 DC \times CE$, & ergo $\circ ADq + BCq = ABq + BDq + DCq + \circ. 3. ax. CAq$. Q. E. D.



PROP. XIV. PROBL.



Dato rectilineo A aequale quadratum constituere.

- α. 45. I. Constituatur rectilineo A aequale ^α Pgr. rectangulum BD. Si igitur $BE = ED$: erit
 β. 29. def. BD quadratum ^β desideratum. Sin minus:
 & 34. I. erit alterutrum latus $BE > ED$, & tunc produ-
 γ. 3. I. ducatur BE, donec $EF = \gamma$ ED, & bisecta ^δ
 δ. 10. I. BF in H describatur circulus interuallo HB
 vel HF, & producat DE in G. Dico, fore
 $EGq = A$.

- ε. 5. 2. Nam iungatur HG: & est ^ε $BE \times EF +$
 ζ. 15. def. & $HEq = HFq = \zeta$ HGq. Sed ob ang. HEG ^η
 sch. 48. I. rectum, est ^η $HGq = EGq + HEq$. Qua-
 η. I. sch. 13. re $EGq + HEq = \epsilon$ $BE \times EF + HEq$,
 θ. 47. I. atque $EGq = \epsilon$ $BE \times EF$. Est autem ob ^λ
 ι. I. ax. $EF = ED$, $BE \times EF =$ Rgl. $BD = \lambda$ A.
 κ. 3. ax. Ergo $EGq = \epsilon$ A. Q. E. F.
 α. constr.



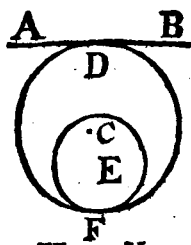
E V C L I D I S

ELEMENTORVM

LIBER III.

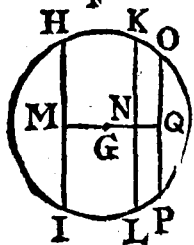
DEFINITIONES.

1. *Aequales circuli* sunt, quorum diametri sunt aequales, vel quorum lineae ex centris sunt aequales.



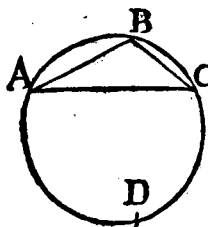
2. *Recta linea AB circum-
lum C contingere* dicitur,
quae, contingens circum-
(in D) & producta, ipsum
non secat.

2. *Circuli C, & E contin-
gere sese* dicuntur, qui, con-
tingentes se mutuo (in F),
se non secant.



4. In circulo *aequaliter
distare a centro G rectae*
lineae HI, KL dicuntur,
quando a centro ad ipsas
perpendiculares GM, GN
ductae sunt aequales.

5. *Magis autem distare a centro G* dicitur
ea OP, in quam maior perpendicularis GQ
cadit.

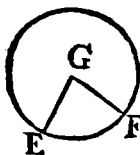


6. *Segmentum circuli est figura ACBA, quae sub recta linea AC & circuli circumferentia ABC comprehenditur.*

7. *Angulus segmenti est ACD, qui recta linea AC & circuli circumferentia CD comprehenditur.*

8. *Angulus in segmento ACBA est, quando in circumferentia ABC segmenti sumitur aliquod punctum B, atque ab ipso ad terminos A, C, lineae eius AC, quae basis est segmenti, rectae lineae BA, BC ducuntur, angulus ABC a ductis lineis BA, BC comprehensus.*

9. *Quando autem comprehendentes angulum ABC rectae lineae BA, BC interceptiunt circumferentiam ADC: illi circumferentiae ADC insistere angulus ABC dicitur.*



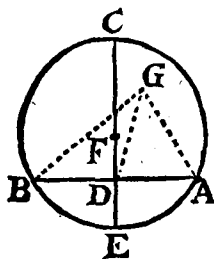
10. *Sector circuli est, quando angulus EGF ad centrum G constiterit, figura GEF G contenta rectis lineis GE, GF angulum comprehendentibus, & circumferentia EF ab ipsis intercepta.*

12. *Similia circularum segmenta sunt, quae angulos capiunt aequales: vel in quibus anguli sunt inter se aequales.*

PROP.

PROPOSITIO I. PROBL.

Dati circuli ACB centrum inuenire.

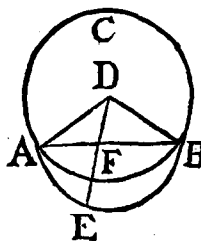


Ducatur in ipso recta AB vtcunque, quae bisece-
tur * in D. Ex puncto D α . 10. 1.
ipsi AB ad rectos β ducta β . 11. 1.
DC producat in E, & bi-
secetur CE in F. Dico,
punctum F centrum esse
circuli ABC.

Si negas : centrum esto G extra^r rectam
CE. (Nam in ea praeter F nullum γ esse γ . 15. def. 1.
potest.) Ducantur GA, GD, GB. Ergo
 $GA = \gamma GB$, & $AD = \delta DB$; latus vero δ . constr.
GD commune: hinc ϵ ang. $GDA = GDB$. ϵ . 8. 1.
Est ergo ζ ang. GDA rectus, ideoque η an- ζ . 10. def. 1.
gulo CDA aequalis. Q.E. A θ . η . 10. ax.
 θ . 9. ax.

*Coroll. Ex hoc perspicuum est, si in circulo recta
linea CD rectam AB bifariam & ad angulos rectos
seces, circuli centrum esse in secante CD.*

PROP. II. THEOR.



*Si in circumferentia cir-
culi ABC duo quaelibet pun-
cta A, B sumantur : quae
ipsa coniungit recta linea AB
intra circulum cadit.*

Sienim non : cadet extra,
vt AEB. Sumatur ϵ circuli ϵ . 1. 3.
centrum D, & ducantur rectae DA, DB,
DFE.

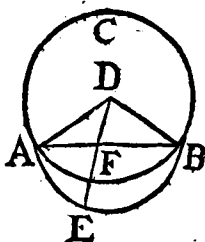
*. 15. def. 1.

a. 5. 1.

μ. 16. 1.

ν. 14. ax.

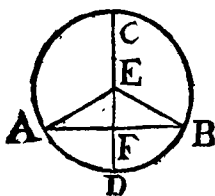
ξ. 19. 1.



DFE. Quoniam ergo
 $DA = DB$: erit ang.
 $DAE = DBE$. Et quum
 trianguli ADE latus AE
 productum sit in B: erit
 ang. DEB > DAE, ergo &
 ang. DEB > DBE, & DB
 > DE. Sed DB =

DF. Quare > DF > DE. Quod fieri ne-
 quit, quia E extra circumferentiam esse ponitur.
 Similiter ostendemus, rectam AB nec in cir-
 cumferentiam cadere. Ergo intus cadat ne-
 cesse est. Q. E. D.

PROP. III. THEOR.



Si in circulo ABC recta
 linea CD per centrum E
 ducta rectam lineam AB,
 non ductam per centrum,
 bifariam secat in F: & ad
 angulos rectos ipsam seca-

bit. Quod si ad angulos rectos ipsam AB secet:
 & bifariam secabit.

Ducantur EA, EB.

*. 15. def. 1. 1. Hyp. Quoniam $AF = FB$, & $EA = EB$,

τ. 8. 1. & latus EF commune: est $\angle AFE = \angle BFE$,

ξ. 10. def. 1. & ergo $\angle$ vterque rectus. Q. E. D.

ε. 10. ax. 2. Hyp. Quoniam ang. $\angle AFE = \angle BFE$, &

τ. 5. 1. $EA = EB$, & ergo $\angle EAF = \angle EBF$: est

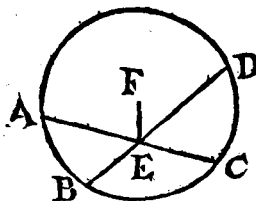
ν. 26. 1. $\angle AFE = \angle BFE$. Q. E. D.

* Coroll. Hinc in omni triangulo aequilatero &
 isosceli linea recta ab angulo verticis bisecans basin,
 perpen-

perpendicularis est basi; & contra perpendicularis ab angulo verticis bifecat basin; & perpendicularis e puncto medio basis angulum ad verticem bifecat.

PROP. IV. THEOR.

Si in circulo ABCD duae rectae AC, BD, non ductae per centrum, se inuicem secant in E: sese bifariam non secabunt.

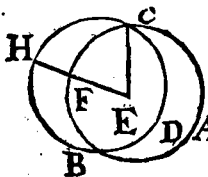


Si enim fieri potest, sit $AE = EC$, & $BE = ED$. Sumatur ϕ I. 3. centrum circuli F, iungaturque FE. Erit ergo $\simeq$ ang. FEA rectus, $\simeq$ 3. 3.

nec non ang. FEB rectus erit. Quare erit $\simeq$ ang. FEA = FEB. Q. E. A $\simeq$.

$\simeq$ 10. ax.
 $\simeq$ 9. ax.

PROPOSITIO V. THEOR.



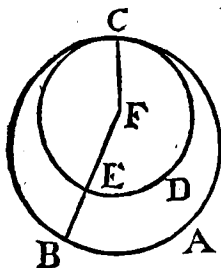
Si duo circuli ABC, CDH se inuicem secant in B, C: non erit ipsorum idem centrum.

Nam si fieri potest, sit E commune centrum. Iungatur CE, & ducatur recta EFH vtcunque. Erit ergo $\simeq$, in circulo ABC, $EF = EC$, $\simeq$ 15. def. 1. & in altero circulo, $EH = EC$, ideoque $EF = EH$. Q. F. N β .

β 9. ax.

PROP.

PROP. VI. THEOR.



Si duo circuli ABC, CDE sese intra contingunt in C: ipsorum idem centrum non erit.

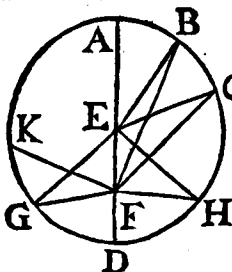
Si enim fieri potest, sit eorum idem centrum F. Iungatur CF, & ducatur utcunque FEB. Foret $\vee FB = FC = FE$.

7. 15. def. 1.

3. 9. ax. Q. E. A⁸.

PROP. VII. THEOR.

Si in circuli ABCD diametro AD aliquod punctum F sumatur, quod non sit centrum circuli, & ab eo F in circulum cadant quaedam rectae lineae AFD, FB, FC, FH: maxima quidem erit FA, in qua centrum E, reliqua vero FD minima; aliarum autem semper propinquior FB ei FC, quae per centrum, maior est remotiore FC; duaeque tantum aequales ab eodem puncto F in circulum cadent ex utraque parte minimae FD.



6. 20. 1.

2. 15. def. 1.
& 2. ax.

7. 14. ax.

9. 24. 1.

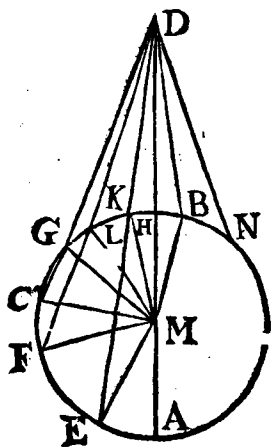
1. Iungantur EB, EC, EH. Et quia $\vee FE + EB > FB$, ac $FE + EB = \vee FA$: erit $FA > FB$. Rursus quia $EB = EC$, & EF latus commune, & ang. BEF $>$ CEF: est $\vee FB > FC$.

Eadem ratione & $FC > FH$. Rursus quia
FH

$FH + FE > EH$, & $ED = EH$: est $FH + FE > ED$, ac ergo $FH > FD$. Maxi-2. 5. ax.
ma ergo est FA , minima FD , & $FB > FC > FH$. Q.E.D.

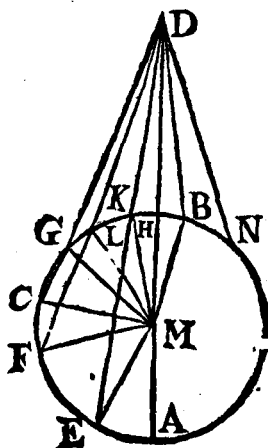
2. Fiat $\angle DEG = DEH$, & ducatur 23. 1.
 FG ; et quum praeterea $EG = EH$, & com-
munis EF : erit $FG = FH$. Omnis autem 4. 1.
alia ut FK aut maior aut minor erit $\wedge$, quam $\wedge$ per par-
 FG . Ergo duae tantum aequales FH, FG in tem. 1.
circulum cadent. Q.E.D.

PROP. VIII. THEOR.



*Si extra circulum
ABC aliquod punctum
D sumatur, atque ab
eo ad circulum ducan-
tur quaedam rectae li-
neae, quarum una DA
per centrum M tran-
seat, reliquae vero DE,
DF, utcumque: earum
quidem, quae in conca-
vam circumferentiam
cadunt, maxima est
DA, quae per centrum
transit, aliarum autem*

*DE, DF, DC semper propinquior ei DA, quae
per centrum, maior est remotiore; earum vero,
quae in connexam circumferentiam cadunt, mi-
nima est DH, quae inter punctum D & dia-
metrum HA interiicitur, aliarum autem DK,
DL,*



DL, DG semper quae propinquior minimae DH minor est remotiore; duaeque tantum aequales a puncto D in circulum cadunt ex utraque parte minimae DH.

κ. 20. I.

ν. 15. def. I.
& 2. ax.

ξ. 14. ax.

ο. 24. I.

quia $ME = MF$, & communis MD, & ang. $DME > DMF$: est $DE > DF$. Similiter $DF > DG$. Maxima ergo est DA, & huic propinquior remotiore semper maior. Q. E. D.

2. Quia $MK + DK > MD$, & $MK = MH$: est $DK > DH$, vel $DH < DK$. Porro quum $DK + KM < DL + LM$, & $KM = LM$: est $DK < DL$. Eadem ratione $DL < DG$. Minima ergo est DH, & huic propinquior remotiore minor, Q. E. D.

ο. 23. I.

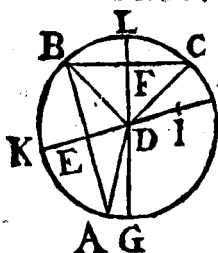
τ. 4. I.

ν. per par.
tem 2.

3. Ponatur $\angle BMD = \angle KMD$; & quia $KM = BM$, ac communis DM: est $\angle DK = \angle DB$. Et omnis alia ut DN in circulum cadens aut maior est aut minor, quam DB vel DK. Quare duae tantum rectae DK, DB, aequales ex D in circulum cadunt. Q. E. D.

PROP.

PROP. IX, THEOR.



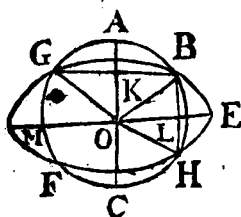
Si intra circulum ABC sumatur aliquod punctum D, atque ab eo in circulum cadant plures, quam duae rectae lineae DA, DB, DC aequales: punctum D, quod sumitur, erit centrum circuli.

Iungantur enim AB, BC, & bisecentur in E, F, & iunctae DE, DF ad K, H, L, G producantur. Quia ergo $AE = EB$, $ED = ED$, & basis $AD = BD$: est $\angle AED = \angle BED$. Ergo KH ipsam AB bifariam & ad angulos rectos $\propto$ secat, & ergo ψ in KH $\propto$ 10. def. 1. centrum circuli est. Eadem ratione & in LG ψ . cor. 1. 3. est centrum circuli ABC. Nullum autem punctum praeter D commune habent $\propto$ re. $\propto$. 12. ax. rectae KH, LG. Ergo D est centrum circuli ABC. Q. E. D.

Aliter.

Si D non sit centrum circuli ABC: sit illud L. Ducatur recta HDK. Erit ergo $DC > DB$. Sed $DC = DB$. Q. E. A. β . hyp.

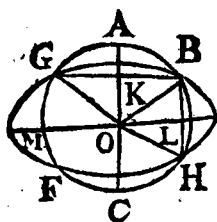
PROP. X. THEOR.



Circulus circulum in pluribus quam duobus punctis non secat.

Si enim fieri potest, circulus ABC circulum BEF secet in punctis E etis

7. 10. 1.



8. cor. 1. 3.

9. 5. 3.

Etis B, H, G. Iunctae BG, BH bisectae sint γ in K, L punctis, a quibus ipsis BG, BH ad rectos angulos ductae sint AKOC, ELOM. Erit ergo δ in vtraque

AC, EM centrum circuli ABC, ideoque O erit centrum circuli ABC. Eadem ratione O est centrum circuli BEF.

Q. F. N^o.

Aliter.

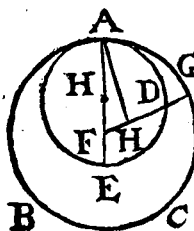
2. 1. 3.

11. 15. def. 1.

3. 9. 3.

Circuli ABC centrum sumatur δ , quod sit O. Iungantur OG, OB, OH, quae α aequales erunt. Erit ergo O quoque centrum δ circuli BEF. Q. F. N^o.

PROP. XI. THEOR.



Si duo circuli ABC, ADE sese intus contingant, & sumantur centra ipsorum F, H: recta linea ipsorum centra coniungens producta in circulorum contactum A cadet.

Si negas: sint centra F, H in alia recta FDG, quae non cadat in contactum A. Iungantur

1. 20. 1.

2. 5. ax.

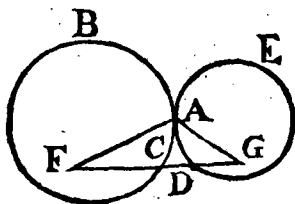
11. 15. def. 1.

11. 14. ax.

AF, AH. Erit ergo α $AH + HF > AF$ vel FG, & proinde α $AH > HG$. Sed α $AH = HD$. Ergo $HD > HG$. Q. F. N.

PROP.

PROP. XII. THEOR.

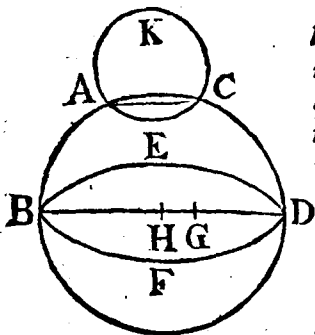


Si duo circuli ABC, ADE sese extra contingant in A: recta linea, ipsorum centra coniungens, per contactum transibit.

Si enim centra F & G essent in alia recta F C D G, per contactum A non transeunte: iunctis AF, AG, foret, ob $FC = FA$, v. 15. def. 1. & $GD = AG$, tota $FG > FA + AG$. Q.E.A. ξ .

ξ . 20. 1.

PROP. XIII. THEOR.



Circulus circum non contingit in pluribus punctis quam uno, siue intus, siue extra contingat.

1. Si enim fieri potest, contingat circulum ABCD circulus BEDF intus in duobus punctis B, D. Sumantur centra horum circulorum $^{\circ}H, G$, & iungatur HG, quae producta $^{\circ}1. 3.$ in puncta B & D cadet. Sed quia $BH = HD$: $^{\circ}11. 3.$ erit $BH > GD$, & a potiori $BG > GD$ Est $^{\circ}15. def. 1.$ vero ϵ & $BG = GD$. Q.E.A. $^{\circ}14. ax.$

2. Si fieri potest, contingat circulus ACK circulum ABC in duobus punctis A, C extra.

E 2

lunga-

7. 2. 3. Iungatur AC, quae ^r intra vtrumque circu-
 lum cadet. Sed quia circulus AKC circu-
 v. hyp. lum AB-C extra ^v contingit: recta intra
 4. 3. def. 3. circulum AKC ducta extra circulum ABC
 q cadet. Ergo AC simul intra & extra cir-
 culum AKC cadet. Q. E. A.

PROP. XIV. THEOR.



*In circulo ABDC aequales
 rectae lineae AB, CD aequa-
 liter distant a centro E. Et
 quae AB, CD aequaliter di-
 stant a centro E, sunt inter
 se aequales.*

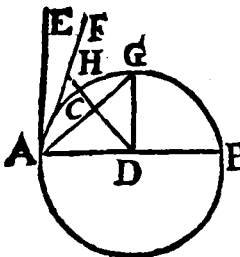
κ. 12. I.

Ex centro E ad rectas
 AB, CD demittantur κ
 perpendiculares EF, EH,
 & iungantur EA, EC.

- ψ. 3. 3. 1. Quia ergo ψ AF = FB: erit $\frac{1}{2}$ AB
 = AF. Eadem ratione $\frac{1}{2}$ CD = HC. Et
 α. 7. ax. quia AB = CD: erit α AF = HC. Dein-
 α. 15. def. 1. de quia AE = α EC, & hinc β AE q =
 β. sch. 48. 1. EC q: erit γ AF q + EF q = HC q +
 γ. 47. 1. & EH q. Sed AF q = β HC q. Ergo δ EF q
 1. ax. = EH q, ideoque β EF = EH. Rectae
 δ. 3. ax. ergo AB, CD a centro E ^r aequaliter distant.
 α. 4. def. 3. Q. E. D.

2. Quia ^r EF = EH, & hinc EF q = EH q;
 & praeterea EF q + AF q = γ EH q + CH q:
 erit AF q = δ CH q, & hinc AF = β CH,
 ζ. 6. ax. & AB = ζ CD. Q. E. D.

PROP.



1. Si fieri potest, cadat recta E A intus, & secet circulum in G. Ex

£. 5. 1.

• 17. I.

centro ducatur DG. Quoniam DA = DG: erit ang. AGD = $\frac{1}{2}$ GAD = recto. Q. E. A°. Similiter ostenditur, EA nec in circumferentiam cadere posse. Ergo extra circulum cadet. Q. E. D.

π.10.def.1.

f.10. & 14.

2X.

σ. 19. I.

т. 9. ах.

2. Si fieri potest, cadat recta FA inter EA, & circumferentiam AC. Ex centro D ad AF ducatur perpendicularis DH. Et quoniam ang. AHD rectus π est, & ang. DAH recto DAE minor: erit ang. DAH $<$ AHD, & ergo HD $<$ AD. Sed AD = DC: ergo HD $<$ DC. Q. E. A π .

3. Si quis angulus rectilineus acutus, vt FAB, maior esset angulo semicirculi CAB, vel aliquis angulus, vt FAE, minor angulo CAE: recta FA caderet inter perpendicularem EA, & circumferentiam AC. Q.E.D.

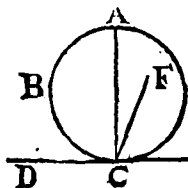
v. 2. déf. 2.

& 2. 3.

Coroll. Hinc, ^o recta linea, quae ad rectos angulos ducitur diametro circuli ab extremitate eiusdem, circulum tangit, & quidem in unico puncto.

PROP.

PROP. XIX. THEOR.



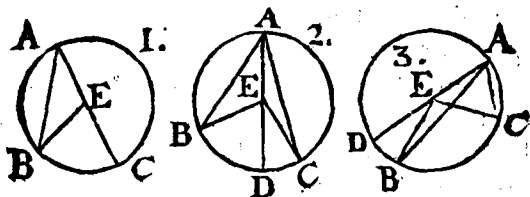
Si recta linea DE circulum ABC contingat, a contactu autem C recta linea CA ducatur ad angulos rectos tangenti DE: centrum circuli erit

in eadem CA.

Si enim non: fit centrum in alia recta CF. Erit ergo $\angle FCE$ rectus. Est autem $\angle ACE$ rectus $\therefore$ Q. E. A $\therefore$

$\therefore$ 18. 3.
 $\therefore$ hyp.
 $\therefore$ 9. ax.

PROP. XX. THEOR.



In circulo ABC angulus BEC, qui ad centrum E, duplus est eius BAC, qui ad circumferentiam; quando circumferentiam eandem BC habent pro basi.

Cas. 1. Si E cadit in AC. Quoniam EA = EB: erit ang. BAC = $\angle$ ABE, ideoque $2 \angle$ BAC = BAC + ABE. Sed ang. BEC = $\angle$ BAC + ABE. Ergo BEC = $2 \angle$ BAC. Q. E. D.

Cas. 2. Si E intra ang. BAC cadit. Iungatur AED: & erit BED = $\angle$ BAD, & DEC = $\angle$ DAC; quare ang. BEC = $\angle$ BAC. Q. E. D.

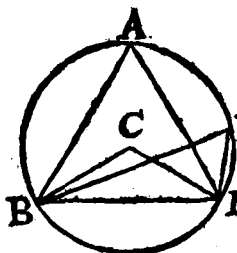
Cas.

$\therefore$ 5. 1.
 $\therefore$ 32. 1.

$\therefore$ cas. 1.
 $\therefore$ 2. ax.

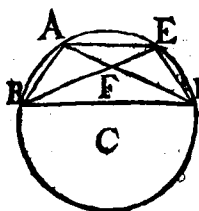
Caf. 3. Si E extra ang. BAC cadit: similiter ostenditur, esse ang. $BEC = 2 BAC$. *ax. 3. ax. Q. E. D.*

PROP. XXI. THEOR.



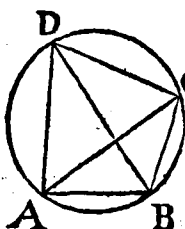
Anguli BAD, BED in eodem circuli segmento BAED sunt inter se aequales.

Caf. 1. Si segmentum BAED fit semicirculo maius: sumatur ^{*} circuli centrum C, & iungantur CB, CD. Quia ergo ang. $BAD = \frac{1}{2} BCD$, & ang. $BED = \frac{1}{2} BCD$: erit ang. $BAD = BED$. *ax. 7. ax. Q. E. D.*



** Caf. 2.* Si segmentum BAED semicirculo maius non sit: iungatur AE. Et quia segmentum ABDE semicirculo maius erit: per *caf. 1.* erit angul. $ABE = ADE$. Sed & ang. $BFA = EFD$. Subtractis ergo his angulis ab aequalibus ^{*} summis angulorum in triangulis ABF, EDF: remanebit ang. $BAD = BED$. *Q. E. D.*

PROP. XXII. THEOR.



Quadrilaterorum ADCB, quae circulis inscribuntur, Anguli oppositi ADC, ABC sunt duobus rectis aequalis.

p. 21. 3.

A

B

Iungantur AC, BD. Quoniam $\angle CAB = \angle CDB$, & $\angle ACB = \angle ADB$:

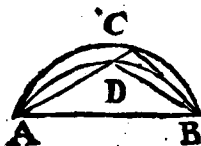
e. 2. 2x.

erit $\angle CAB + \angle ACB = \angle ADC$. Sed $\angle CAB + \angle ACB + \angle ABC = 2 \text{ rectis}$. Ergo

v. 32. 1.

$\angle ADC + \angle ABC = 2 \text{ rectis}$. Similiter ostenditur, $\angle DAB + \angle DCB = 2 \text{ rectis}$. Q. E. D.

PROP. XXIII. THEOR.



Super eadem recta linea duo circulorum segmenta similia & inaequalia ex eadem parte non constituentur.

Si enim fieri potest, sint super recta AB duo segmenta circulorum ACB, ADB inaequalia, sed similia ex eadem parte constituta. Ducatur ADC, & iungantur CB,

v. 10. def. 3. DB. Erit ergo $\angle ADB = \angle ACB$.

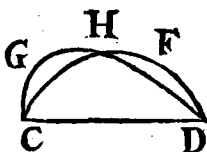
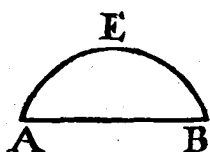
q. 16. 1. Q. E. A. q.

PROP. XXIV. THEOR.

Super aequalibus rectis lineis AB, CD similia circulorum segmenta ABE, CDF sunt inter se aequalia.

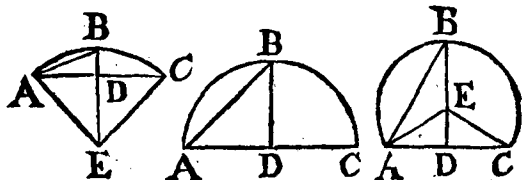
Ponatur enim segmentum ABE in segmento CDF sic, vt A in C & AB in CD cadat.

Et



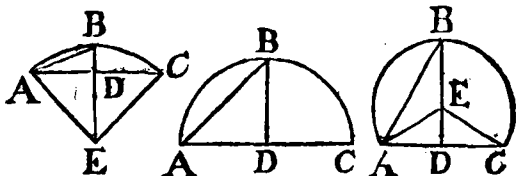
Et quia $AB = CD$: punctum B cadet in D. Iam si circumferentia AEB non congrueret circumferentiae CFD: aut extra hanc caderet, aut eam secaret, veluti CGHD. Atqui si circumferentia AEB extra vel intra segmentum CDF caderet: foret segmentum ABE segmento CDF maius minusue, & eidem simile. Quod fieri nequit $\propto$. Si circumferen- $\propto$ 23. 3. tia AEB caderet in CGHD: duo circuli se in pluribus quam duobus punctis C, H, D, secarent; quod etiam absurdum est ψ . Quum ψ 10. 3. ergo circumferentia AEB nec extra circumferentiam CFD cadat, nec eam secet: ipsi congruat necesse est. Congruent ergo tota segmenta ABE, CDF, & erunt proinde aequalia. Q.E.D.

PROP. XXV. PROBL.



*Dato circuli segmento ABC describere circum-
lum, cuius est segmentum.*

Secetur



α. 10. I.

α. 11. I.

β. 23. I.

Secetur ^α AC bifariam in D, & ipsi ex D ad rectos ducatur ^α DB, & iungatur AB. Et si ang. ABD = BAD: erit D centrum circuli, cuius est segmentum ACB. Sin ang. ABD maior vel minor angulo BAD; fiat ^β angul. BAE = ABD; & erit E centrum circuli, interuallo EA, vel EB, vel EC describendi.

γ. 6. I.
δ. constr.

ε. 9. 3.

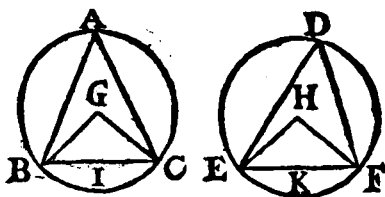
Cas. 1. Nam si ang. ABD = BAD: erit AD = ^γ DB. Sed & AD = DC ^δ. Quare D erit centrum circuli complendi ^ε. Q.E.F. Simul patet, hoc in casu segmentum ACB esse semicirculum.

ζ. 4. I.

Cas. 2. Si ang. BAE aequalis est constitutus ang. ABD: erit iterum ^γ EB = EA. Sed ob AD = ^δ DC, & angulos ad D aequales, est etiam EA ^ζ = EC. Ergo ^ε circuli complendi centrum erit E. Q.E.F. Constat simul, si ang. ABD > BAD, segmentum ACB semicirculo minus esse, quoniam centrum E extra cadit; & si ang. ABD < BAD, segmentum ACB maius esse semicirculo, quoniam centrum E intra cadit.

PROP.

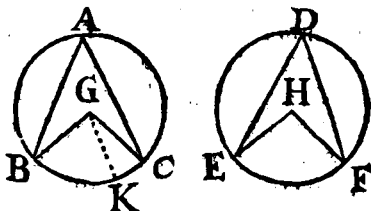
PROP. XXVI. THEOR.



In aequalibus circulis ABC, DEF, anguli aequales aequalibus insunt circumferentiis BIC, EKF, siue ad centra, (vt BGC, EHF) siue ad circumferentias (vt BAC, EDF) † insistant.

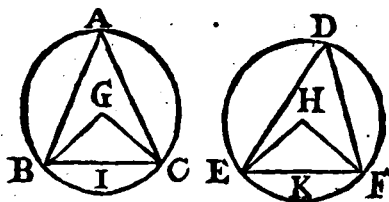
Iungantur enim BC, EF. Quia circuli ABC, EDF aequales sunt: erunt & quae ex centris aequales, id est, $GB = HE$, $GC = HF$. Et quia praeterea ang. $BGC = EHF$: erit $BC = EF$. Et quoniam ang. $BAC = EDF$: segmentum BCA simile est ⁹ segmento EFD. Ergo ²⁴ segm. $BCA = segm. EFD$. Totus autem circulus ABC = circulo DEF. Ergo ³ segm. $BCI = segm. EFK$, ideoque circumferentia $BIC = EKF$. Q.E.D.

PROP. XXVII. THEOR.



In aequalibus circulis ABC, DEF, anguli, qui

† Supple, constituti.



qui aequalibus insistant circumferentiis BC, EF, sunt inter se aequales siue ad contra, (vti BGC, EHF) siue ad circumferentias (vti BAC, EDF) † insistant.

Si enim non sit ang BGC = EHF: alteruter, veluti BGC, maior erit. Fiat ang. BGK = [^]EHF: & erit [^]BK = EF = BC. Quod fieri nequit. Est ergo ang. BGC = EHF, & hinc etiam [^]ang. BAC = EDF. Q. E. D.

λ. 23. I.

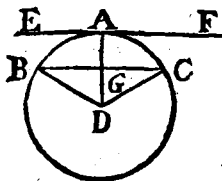
μ. 26. 3.

ν. 9. ax.

ξ. 20. 3. &

7. ax.

* Scholium.



Linea recta EF, quae ducta ex A medio puncto circumferentiae alicuius BAC circulum tangit, parallela est rectae lineae BC, quae peripheriam illam subrendit.

Duc e centro D ad contactum A rectam DGA, & connecte DB, DC. Latus DG commune est, & DB = DC, atque ang. BDA = [^]ADC, ob [^]peripherias BA, AC aequales. Ergo [^]ang. BGD = CGD, & proinde vterque rectus est. Sed interni anguli EAD, FAD etiam [^]recti sunt. Ergo EF, BC parallelae [^]sunt. Q. E. D.

σ. 27. 3.

π. hyp.

ρ. 4. I.

σ. 18. 3.

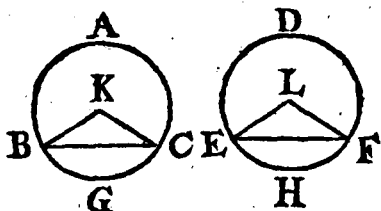
τ. 28. I. &

10. ax.

PROP.

† Supple, constanti.

PROP. XXVIII. THEOR.



In aequalibus circulis ABC, DEF, aequales rectae lineae BC, EF circumferentias aequales auferunt, maiorem quidem BAC maiori EDF, minorem vero BGC minori EHF.

Sumantur centra K, L, & iungantur KB, KC, LE, LF. Quoniam circuli aequales sunt: erit $KB = LE$, & $KC = LF$. Basis vero $BC = EF$: ergo ang. $BKC = \angle ELF$, & hinc $\angle BGC = \angle EHF$. Sed v. 8. 1. & totae circumferentiae aequales sunt. p. 26. 3. Ergo & reliquae BAC, EDF aequantur. Q. E. D.

PROP. XXIX. THEOR.

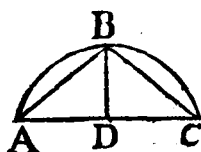
In aequalibus circulis ABC, DEF, aequales fig. propositae circumferentias BGC, EHF aequales rectae li. praeced. neae BC, EF subtendunt.

Quoniam $BGC = EHF$: ductis e centrīs KB, KC, LE, LF, erit $\angle BKC = \angle ELF$. x. 27. 3. Praeterea, quia circuli aequales ponuntur, est $KB = LE$, & $KC = LF$. Ergo $\angle BGC = \angle EHF$. p. 4. 1. Q. E. D.

* Nota. Haec & tres praecedentes intelligantur etiam de eodem circulo.

PROP.

PROP. XXX. PROBL.



Datam circumferentiam ABC bifariam secare.

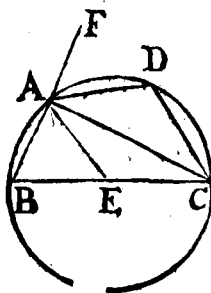
Duc AC, quam biseca in D. Ex D duc DB perpendiculararem in AC. Dico, fore $AB = BC$. Iungantur enim AB, BC. Et quia $AD = DC$, & latus DB commune, & ang. $ADB = BDC$: erit $AB = BC$, & ergo $\wedge$ circumferentia $AB =$ circumf. BC, quoniam vtraque semicirculo minor est. Q. E. F.

$\alpha. 10. \text{def. } 1.$

$\alpha. 4. 1.$

$\beta. 28. 3.$

PROP. XXXI. THEOR.



In circulo ABCD angulus BAC, qui in semicirculo, rectus est; qui vero ABC in maiori segmento, minor est recto; & qui ADC in minori, maior recto. Et insuper angulus maioris segmenti recto maior est; minoris vero segmenti angulus recto minor.

1. Ex centro E ducatur EA, & BA producat in F. Quoniam $BE = EA$: erit $\sphericalangle$ ang. $BAE = ABC$. Rursus quia $EA = EC$: erit $\sphericalangle$ ang. $BCA = CAE$. Ergo $\sphericalangle$ ang. $BAC = ABC + BCA$. Est autem & ang. $FAC = ABC + BCA$. Ergo ang. $BAC = FAC$. Ergo ang. BAC $\sphericalangle$ rectus est. Q. E. D.

$\gamma. 5. 1.$

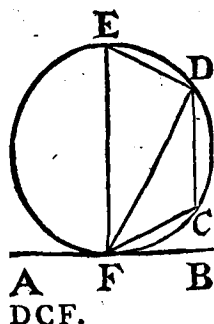
$\delta. 2. ax.$

$\alpha. 32. 1.$

$\zeta. 10. \text{def. } 1.$

2. Quo-

PROP. XXXII. THEOR.

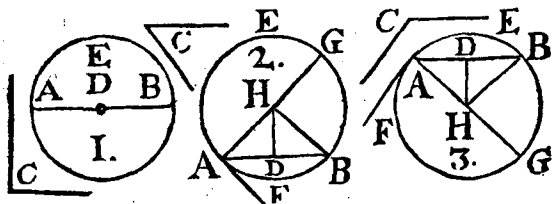


Si recta linea AB circulum CDE F contingat, a contactu F autem ducatur recta linea FD, circulum secans: anguli DFB, DFA, quos haec cum contingente facit, aequales erunt iis, qui in alternis circuli segmentis consistunt, DEF, DCF.

Ducatur enim ipsi AB ad rectos angulos FE; iungatur ED, & sumto quouis puncto C in circumferentia DF, iungantur CD, CF.

- v. 19. 3. Quoniam igitur in FE centrum circuli est:
 §. 18. def. 1. EDF est angulus $\frac{1}{2}$ in semicirculo, & proinde
 & 7. def. 3. rectus. Hinc ang. EFD + DEF = π recto.
 o. 31. 3. Sed & ang. EFB = recto. Quare $\angle$ ang.
 π. 32. 1. DFB = DEF. Deinde quoniam DFA +
 §. 1. & 3. ax. DFB = π 2 rectis = π DCF + DEF: erit
 o. 13. 1. DFA = π DCF. Q.E.D.
 τ. 22. 3. ang. DFA = π DCF. Q.E.D.
 v. 3. ax.

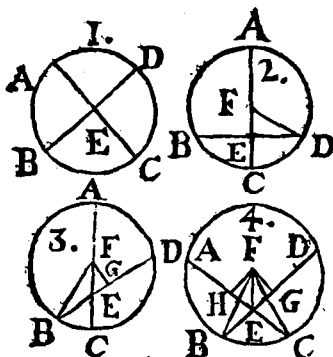
PROP. XXXIII. PROBL.



Super data recta linea AB describere segmentum circuli, quod capiat angulum, dato angulo rectilineo C aequalem.

Cas. 1.

PROP. XXXV. THEOR.

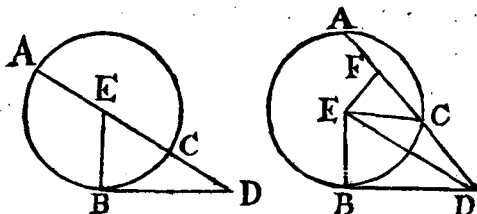


*Si in circulo A
BCD duae rectae
lineae AC, BD se-
se mutuo secant:
rectangulum, sub
segmentis unius
AE, EC compre-
hensum, aequale
est ei, quod sub
alterius segmen-
tis BE, ED com-
prehenditur.*

Cas. 1. Si AC, BD per centrum E tran-
eunt: manifestum est, quum AE, EB, DE,
EC aequales sint, esse $AE \times EC = BE \times ED$. Q. E. D.

** Cas. 2.* Si alterutra AC per centrum F
transit, & alteram BD ad angulos rectos secat
in E: iungatur FD. Est $AE \times EC + FEq = FCq = FDq$. Sed quia $BE = ED$,
ideoque $BE \times ED = EDq$: est quoque BE
 $\times ED + FEq = FDq$. Ergo $AE \times$
 $EC = BE \times ED$ vel EDq .

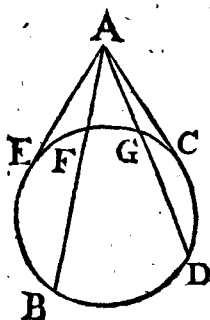
** Cas. 3.* Si alterutra AC per centrum F
quidem transit, sed alteram BD non ad rectos
secat: ex F in BD ducatur perpendicularis
FG. Est ergo $BG = GD$, & $BE \times ED$
 $+ EGq = BGq$. Iungatur FB, & addito
communi FGq, erit $BE \times ED + EGq +$
 $FGq = FBq$. Sed $EGq + FGq = FEq$.
Ergo $BE \times ED + FEq = FBq = FCq$.



Caf. 2. Si DA non transit per centrum E: in AD ex E ducatur perpendicularis EF, iunganturque EB, EC, ED. Ergo quum AC bisecta sit in F: erit $AD \times DC + FCq = FDq$. Commune addatur FEq: erit $AD \times DC + ECq = DEq$. Sed & $DBq + EBq = DEq$, & $CEq = EBq$. Ergo $AD \times DC = DBq$. Q.E.D.

* *Scholia.*

1. Si a puncto quouis A, extra circulum assumpto, plures rectae lineae AB, AD circulum secantes ducantur: rectangula, comprehensa sub totis lineis AB, AD, & partibus externis AF, AG, inter se sunt aequalia. Nam si ducatur tangens AC: erit $BA \times AF = ACq = DA \times AG$.



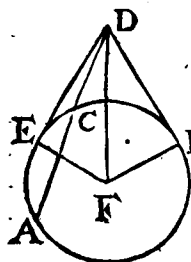
2. Constat etiam, duas rectas AE, AC, ab eodem puncto A ductas, quae circulum tangant, inter se aequales esse. Nam si ducatur AB secans circulum: erit $AEq = BA \times AF = ACq$.

3. Perspicuum quoque est, ab eodem puncto A, extra circulum assumpto, duci tantum posse duas lineas rectas AE, AC, quae circulum tangant.

Nam

Nam si tertia AG tangere dicatur, erit $AG = 2$. sch.
 $AE = AC$. Q.E.N.^{*} π. 8. 3.

PROP. XXXVII. THEOR.



Si extra circulum ABC sumatur aliquod punctum D, atque ab eo in circulum cadant duae rectae lineae DA, DB, quarum altera quidem DA circulum secet in C, altera vero DB in eum incidat; sit autem rectangulum comprehensum sub tota secante DA,

et exteriore segmento DC inter punctum D et convexam circumferentiam, aequale ei, quod ab incidente DB fit quadrato: incidens linea DB circulum continget.

Ducatur enim ^{*} tangens circulum DE, su-
 matur centrum ^{*} F, & iungantur FE, FB, ^{e. 1. 3.}
 FD. Ergo $AD \times DC = DE^2$ q. Ergo ^{π. 36. 3.}
 $DE^2 = DB^2$, & $DE = DB$. Sed quia
 praeterea $FE = FB$, & $DF = DF$: erit ang. ^{v. 8. 1.}
 $\angle DEF = \angle DBF$. Est vero $\angle DEF$ rectus ^{φ. 18. 3.}
 ergo & $\angle DBF$; & igitur DB $\propto$ circulum tan-
 git. Q.E.D.

^{*} Coroll. Hinc constat, si duae rectae aequales DE, DB ex puncto quopiam D in convexam peripheriam incidant, & earum una DE circulum tangat: alteram quoque DB circulum tangere.

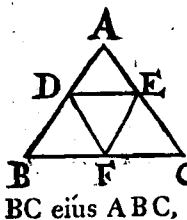


E V C L I D I S

ELEMENTORVM

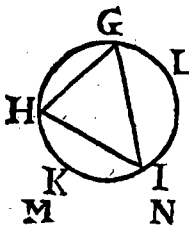
LIBER IV.

DEFINITIONES.

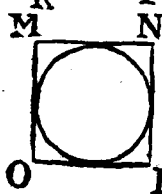


1. *Figura rectilinea in figura rectilinea inscribi dicitur, quando vnusquisque figuræ inscriptæ DEF angulus D, E, F contingit vnumquodque latus AB, AC, BC eius ABC, in qua inscribitur.*

2. *Figura similiter circa figuram circumscribi dicitur, quando vnumquodque latus circumscriptæ ABC contingit vnumquemque angulum eius DEF; circa quam circumscribitur.*



3. *Figura rectilinea in circulo inscribi dicitur, quando vnusquisque inscriptæ figuræ GHI angulus circuli GKL circumferentiam contingit.*



4. *Figura rectilinea circa circumscumbi dicitur, quando vnumquodque latus circumscriptæ NMO P circuli circumferentiam contingit.*

Cir-

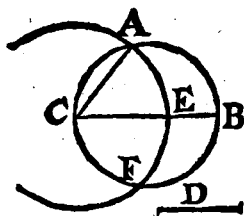
5. *Circulus* similiter in *figura rectilinea inscribi* dicitur, quando circuli circumferentia vnumquodque latius eius MNPO, in qua inscribitur, contingit.

6. *Circulus circa figuram rectilineam circumscribi* dicitur, quando circuli circumferentia GKL vnumquemque angulum eius GHI, circa quam circumscribitur, contingit.

7. *Recta linea GH in circulo GKL aptari* dicitur, quando eius termini G, H in circuli circumferentia fuerint.

PROP. I. PROBL.

In dato circulo ABC datae rectae lineae D, quae diametro eius BC maior non sit, aequalem rectam lineam aptare.



Ducatur circuli diameter BC. Et si $D = BC$: factum iam erit *propositum* *.

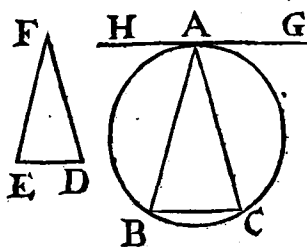
*. 7. def. 4.

Si $D < BC$, ponatur β ipsi $D = CE$, & β . 3. I, centro C, intervallo CE, circulus AEF describatur, & CA iungatur. Quae erit ipsi D aequalis γ , & in dato circulo aptata *. γ . I. $\alpha\epsilon$, Q.E.F.

PROP. II. PROBL.

In dato circulo ABC inscribere triangulum, æquiangulum dato triangulo DEF.

3. 23. I.



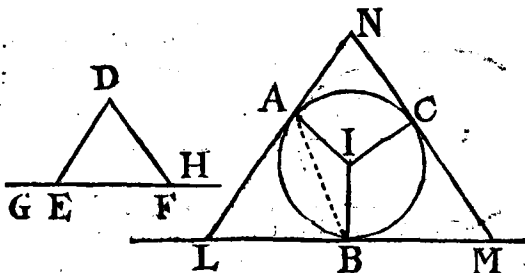
Ducatur recta
linea HAG tan-
gens circum in
A, & fiat $\angle$ an-
gulus GAC =
DEF, ac angul.
HAB = EDF,
& BC iungatur.

3. 32. 3.
2. I. ax.

7. 32. I.
9. 3. def. 4.

Quoniam igitur $\angle$ ang. ABC = GAC, &
ang. ACB = HAB: erit $\angle$ ang. ABC = DEF,
& ang. ACB = EDF. Ergo & reliquus BAC
reliquo EFD æqualis erit; & $\triangle$ ABC æqui-
angulum erit ipsi DEF, & in circulo $\circ$ in-
scriptum. Q. E. F.

PROP. III. PROBL.



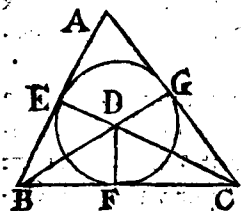
*Circa datum circum ABC circumscribe-
re triangulum, æquiangulum dato triangulo
DEF.*

Produc

Produc latus EF ad G & H. Cape $\angle$ I. 3. centrum circuli I, ex quo duc rectam IB vt-
cunque, & fac $\angle$ BIA = DEG, & ang. $\angle$ 23. 1.
BIC = DFH, & per A, B, C duc $\angle$ rectas $\angle$ cor. 16. 3.
NL, LM, NM, circumulum tangentes. Di-
co factum.

Quia enim $\angle$ anguli ad puncta A, B, C $\angle$ 18. 3.
recti sunt: erunt ang. IAL + IBL = 2
rectis. (* Ducta ergo AB, erunt ang. LAB
+ LBA < 2 rectis, ideoque rectae NL, ML
concurrent' in L.) Quum autem in qua $\angle$ ax. 11.
drilatero LAIB quatuor anguli $\angle$ sint = 4 $\angle$ 6. schol.
rectis, e quibus anguli IAL, IBL = 2 $\angle$ 32. 1.
rectis: erunt & reliqui AIB + ALB = $\angle$ 2 $\angle$ 3. ax.
rectis. Sunt autem & ang. DEG + DEF
= $\angle$ 2 rectis. Ergo ang. BIA + ALB = $\angle$ 13. 1.
DEG + DEF. Quare $\angle$ ang. ALB =
DEF. Similiter demonstrabitur, ang. NMB
= DFE. Ergo & reliquus MNL = $\angle$ 32. 1.
FDE. Est igitur $\triangle$ LMN aequiangulum
dato DEF, & circumscriptum $\angle$ circa circu- $\angle$ 14. def. 4.
lum ABC. Q.E.F.

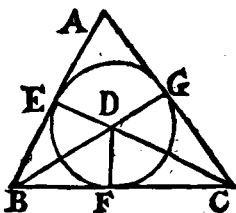
PROP. IV. PROBL.



*In dato triangulo ABC
circulum inscribere.*

Bisecentur $\angle$ ang. ABC, $\angle$ 9. 1.
ACB rectis, quae conue-
niant in puncto D, ex
quo duc $\angle$ perpendiculara $\angle$ 12. 1.

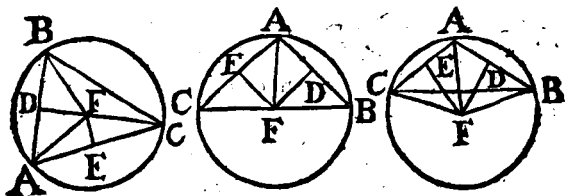
res



res DE, DF, DG. Circulus centro D per E, vel F, vel G descriptus; erit is, quem describere oportebat.

- ϕ . 10. 2x. $\angle ABD = \angle DBC$, & $\angle DEB = \angle DFB$, & latus DB commune: erit $\angle DE = DF$. Eadem ratione $DF = DG$. Circulus ergo ex D per E, vel F, vel G descriptus per reliqua etiam puncta transibit, & quia rectas AB, BC, CA secare nequit ψ , ipsas continget.
 ϕ . 16. 3. Erit ergo inscriptus in triangulo ABC.
 α . 5. def. 4. Q. E. F.

PROP. V. PROBL.



Circa datum triangulum ABC circulum circumscribere.

- α . 10. 1. Biseca $\angle$ AB, AC in D, E, & duc perpendiculares β DF, EF, coeuntes in F, ex quo centro per A, vel B, vel C describe circulum.
 β . 11. 1.

- γ . 4. 1. Siue enim F intra triangulum ABC, siue in basin BC, siue extra triangulum cadat: ductis rectis FA, FB, FC, erit $\angle$ BF = AF = FC. Ergo circulus ex F per vnum puncto-
 rum

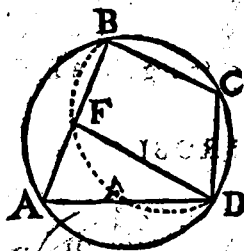
rum A, B, C descriptus, per reliqua etiam transibit, & circumscriptus erit circa ³ trian-³. 6. def. 4. gulum ABC. Q. E. F.

Corollar.

Si datum triangulum sit oxygonium, DF & EF intra triangulum conuenient ²; si amblygonium, extra; si vero rectangulum sit, conuenient in tertio latere BC, quod angulum rectum sub-
tendit. 2. schol. 31. 3.

Scholium.

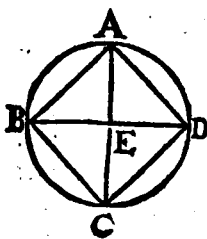
1. Eadem ratione circulus describitur per tria puncta, non in eadem recta existentia.



2. Si in quadrilatero A BCD anguli A & C, qui ex aduerso, duobus rectis aequantur, circa quadrilaterum circulus circumscribi potest. Describi enim per tres quosuis angulos B, C, D circulus potest. Iam si negas, eundem transiturum esse per quartum A: secet rectam AB in quouis alio puncto F. Ducta ergo DF, erit $\text{ang. } C + F = 2 \text{ rectis}$. 22. 3. Sed ponitur etiam $C + A = 2 \text{ rectis}$. Ergo $\text{ang. } F = A$. Q. E. A.⁹

*. 16. 1.

PROP. VI. PROBL.



In dato circulo ABCD quadratum inscribere.

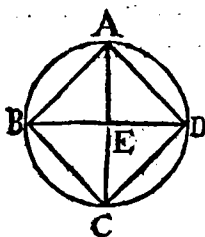
Ducantur ² diametri AEC, BED ad rectos angulos, & iungantur AB, BC, CD, DA. 1. 3. & 11. 1.

Nam quia $BE = ED$, & communis EA, & ang. BEA, AED

. 4. I.

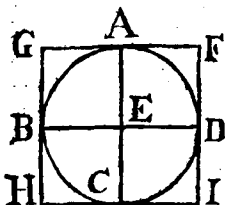
x. I. 2x.

A. 31. 3.



AED recti: erit $AB = DA$. Eadem ratione $BO = AB$, & $CD = DA$. Ergo quadrilaterum ABCD aequilaterum est. Est vero & rectangulum, quoniam ^a quilibet angulorum A, B, C, D, in semicirculo est. Igitur quadratum est, inscriptum in dato circulo. Q.E.F.

PROP. VII. PROBL.



Circa datum circulum ABCD quadratum circumferibere.

Ducantur diametri AE, C, BBD ad rectos angulos, & per puncta A, B, C, D, tangentes circu-

lum GF, GH, HI, FI ^μ.

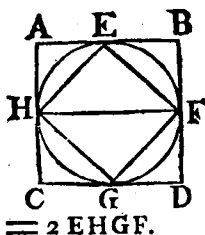
v. 18. 3.

ξ. 28. I.

v. 34. I.

Igitur quum ^a anguli ad A, B, C, D recti sint, nec non (per hyp.) anguli ad E: erunt rectae FG, HI, BD, & rectae GH, FI, AC parallelae. Ergo Pgra sunt GI, GC, FB, GE, FE, HE & EI, ac propterea ^a $GF = HI$, & $GH = FI$, & $GH = AC$, & $GF = BD$. Hinc ob $AC = BD$, erit quadrilaterum FGHI aequilaterum. Et quoniam GE est Pgr. & ang. AEB rectus: erit ^a & ang. G rectus. Similiter reliqui H, I, F recti demonstrantur. Ergo figura FGHI est quoque rectangula, & propterea quadratum, ac circa circulum descripta. Q.E.F.

* Scholium.

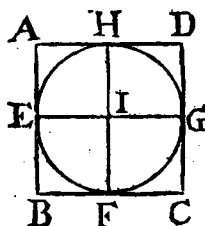
* *Scholium.*

Quadratum circulo circumscriptum ABCD duplum est inscripti quadrati EGHF.

Nam Rgl. $HB = \pi \cdot 2 \Delta \pi. 41. 1.$
 HEF , & Rgl. $HD = 2 \Delta$
 HGF . Ergo totum ABCD

$= 2 EGHF$.

PROP. VIII. PROBL.



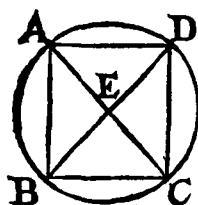
In dato quadrato ABCD circulum inscribere.

Bisecetur vtraque AB, AD in E, H, & per E alterutri ipsarum AD, BC parallela EG, per H vero alterutri ipsarum AB, DC parallela HIF agatur. Centro I intervallo IH, vel IE, vel IG describatur circulus.

Quoniam ergo Pgra sunt AG, GB, AF, FD, AI, IC, IB & ID: erit $\epsilon AE = HI$, & $AH \epsilon. 34. 1. = EI$. Sed quoniam $\epsilon AB = AD$: est $\epsilon AE \epsilon. 29. def. 1. = AH$, & ergo $HI = EI$. Similiter demon-
 $\epsilon. 7. ax.$
 strabitur $HI = IG$, & $EI = IF$. Ergo IE, IF, IG, IH aequales sunt inter se, & propterea circulus, centro I, intervallo vni ipsarum aequali, descriptus, etiam per reliquarum extrema transibit, & quoniam rectas AB, BC, CD, DA secare ν nequit (sunt enim anguli ad H, $\nu. 16. 3.$ E, F & G recti ϕ), ipsas tanget, & proinde $\phi. sch. 29. 1.$ quadrato $\times$ inscriptus erit. Q. E. F. $\times. 5. def. 4.$

PROP.

PROP. IX. PROBL.



*Circa datum quadratum
ABCD circulum circum-
scribere.*

Iungantur AC, BD. Ex
puncto E, in quo se secant,
interuallo EA, vel EB, vel
ED, vel EC describatur

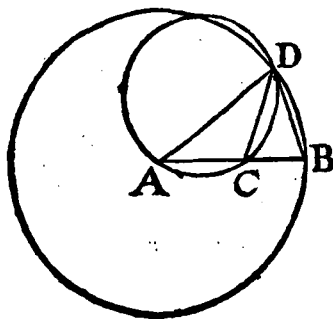
circulus.

ψ. 8. 3.

α. 6. 1.

Quoniam $DA = AB$, $DC = CB$, & com-
munis AC: anguli A & C per rectam AC bi-
secantur ψ. Similiter ostenditur, angulos B
& D bisecari per rectam BD. Et quia ang.
A = B, & hinc dimidius EAB = dimidio
EBA: erit α EA = EB. Similiter demon-
strabimus, esse EB = EC, & EC = ED.
Sunt ergo EA, EB, EC, ED inter se aequales,
& circulus, centro E, interuallo vni harum
aequali, descriptus, per puncta A, D, C, B
transit, & ergo circa quadratum ABDC cir-
α. 6. def. 4. cumscriptus α est. Q. E. F.

PROP. X. PROBL.



*Isocelestrian-
gulum constitue-
re, habens alteru-
trum angulorum,
qui sunt ad basin,
duplum reliqui.*

Ponatur recta
quaedam AB, &
secetur^s in C sic,
vt $AB \times BC =$
ACq.

β. 11. 2.

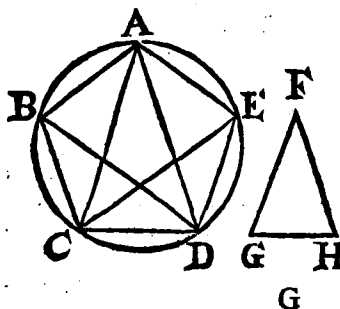
AC q. Centro A, intervallo AB describatur
 'circulus, in quo aptetur γ recta BD aequalis γ . I. 4.
 ipsi AC, quae diametro circuli maior non est.
 Iuncta AD, erit DAB triangulum isosceles,
 in quo ang. BDA vel ABD = 2 DAB.

Nam circumscripto circulo δ circa $\triangle ACD$, δ . 5. 4.
 quoniam $AB \times BC = AC q = BD q$, patet ϵ . 37. 3.
 BD circulum ADC ϵ tangere, & propterea ζ . 32. 3.
 ang. BDC = DAC. Hinc η ang. BDA = η . 2. ax.
 DAC + CDA = θ BCD. Sed quum sit ι . 32. 1.
 AB = AD: erit ang. BDA = κ CBD. Qua- ν . 5. 1.
 re ang. BCD = λ CBD, & DC μ = BD = λ . 1. ax.
 CA. Hinc ang. CDA = κ CAD, & additis μ . 6. 1.
 ang. BDC = ν CAD: erit ang. BDA = 2 ν . per dem.
 DAB Q. E. F.

* Scholium.

Quia ergo ang. DAB + ADB + ABD = 5
 DAB = 2 rectis: liquet, esse ang. DAB quintam
 partem duorum rectorum.

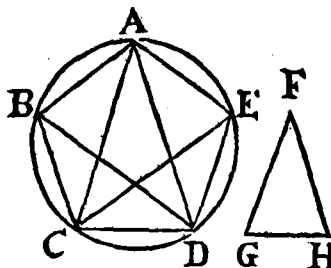
PROP. XI. PROBL.



In dato circulo
 ABCDE penta-
 gonum aequilate-
 rum & aequian-
 gulum describere.

ξ Fiat triangu- ξ IO. 4.
 lum FGH iso-
 sceles, habens al-
 terutrum

. 2. 4.



terutrum angu-
lorum ad basin
GH duplum re-
liqui F, & * in-
scribatur in cir-
culo A B C D E
triangulum AC
D, triangulo FG

π. 9. 1.

H aequiangulum, ita vt angulo $F = DAC$,
 $G = ACD$, & $H = ADC$. Secetur * vter-
que ipsorum ACD, ADC bifariam a rectis
CE, BD, & ducantur AB, BC, DE, EA:
dico factum.

ε. 26. 3.

ε. 29. 3.

τ. 27. 3.

Nam ex constructione liquet, quinque angu-
los ACE, ECD, DAC, BDC, BDA esse inter
se aequales. Hinc peripheriae, & his subtensae
* rectae AE, ED, DC, CB, BA sibi mutuo ae-
quantur. Aequilaterum ergo est pentago-
num ABCDE. Et quia peripheria AB =
per. DE: addita communi BCD, erit per.
ABCD = per. BCDE, ideoque * ang. AED
= BAE. De reliquis angulis similiter osten-
ditur, quod sint angulo BAE vel AED ae-
quales. Ergo & aequiangulum est pentago-
num ABCDE. Q. E. F.

* Scholia.

1. Praxis facilior huius problematis tradetur
ad 10. 13.

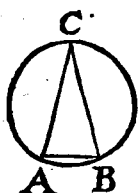
υ. 27. 3.

φ. sch. 10. 4.

2. Quoniam ang. BAE = 3 CAD υ: angulus
pentagoni aequilateri & aequianguli aequatur φ
tribus quintis duorum rectorum, vel sex quintis
recti.

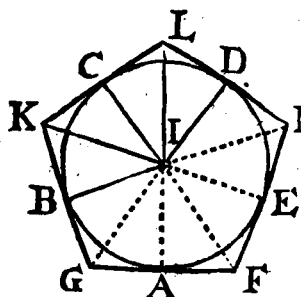
3. Vni-

3. Vniuersaliter figurae imparium laterum inscribuntur in circulis ope triangulorum isoscelium, quorum anguli aequales ad basin multiplices sunt eorum, qui ad verticem sunt, angulorum. Parium vero laterum figurae in circulo inscribuntur ope isoscelium triangulorum, quorum anguli ad basin multiplices sesquialteri sunt eorum, qui ad verticem sunt angulorum.



Vt in triangulo isosceli CAB, si ang. $A = 3 C = B$: AB erit latus heptagoni. Si $A = 4 C$: erit AB latus enneagoni &c. Sin vero $A = 1\frac{1}{2} C$: erit AB latus quadrati. Et si $A = 2\frac{1}{2} C$: subtendet AB sextam partem circumferentiae. Pariterque si $A = 3\frac{1}{2} C$: erit AB latus octogoni &c.

PROP. XII. PROBL.



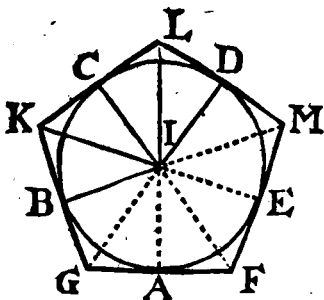
*Circa datum
circulum ABC
DE pentagonum
Maequilaterum &
aequiangulum
circumscribere.*

Intelligentur
pentagoni in circulo $\propto$ descripti. II. 4.

angulorum puncta A, B, C, D, E, ita vt circumferentiae AB, BC, CD, DE, EA sint aequales; & per puncta A, B, C, D, E ducantur circulum contingentes FG, GK, KL, LM, MF. Erit FGKLM pentagonum desideratum.

G 2

Sumto



Sumto enim
circuli centro I,
ducantur IB, IK,
IC, IL, ID. Et
quia IC in tan-
gentem KL est
perpendicularis:
erit vterque an-
gulorum ad Cre-

u. 10. def. 1. *Etus* ^a. Similiter anguli ad B & D recti sunt.
 a. 47. 1. Ergo ^a $IKq = ICq + KCq = IBq + BKq$.
 Sed $ICq = IBq$. Ergo $KCq = BKq$, & $KC = BK$.
 Est autem praeterea $IC = IB$, &
 p. 8. 1. communis IK : quare ^b ang. $CIK = BIK$, &
 ang. $IKC = IBK$. Hinc ang. $BIC = 2 KIC$,
 & ang. $BKC = 2 IKC$. Eadem ratione &
 ang. $CID = 2 CIL$, & ang. $CLD = 2 CLI$.
 7. hyp. Sed quum sit circumf. $BC = CD$, & ergo ^b
 d. 27. 3. ang. $BIC = CID$: erit & ^a ang. $KC = CIL$.
 s. 7. ax. Sunt vero recti ad C aequales, & praeterea
 latus IC commune. Ergo ^c $KC = CL$, &
 z. 26. 1. ang. $IKC = ILC$. Hinc $KL = 2 KC$. Ea-
 dem ratione $GK = 2 BK$. Erat autem $KC = BK$.
 7. 6. ax. Ergo ^a $KL = GK$. Similiter vnum-
 quodque ipsorum GF, FM, ML ipsi GK vel
 KL aequale ostenditur. Ergo pentagonum
 $FGKLM$ aequilaterum est. Deinde, quum
 ostensus sit ang. $IKC = ILC$, & $BKC = 2$
 IKC , & $CLD = 2 ILC$: patet ^a, esse ang.
 $BKC = CLD$. Similiter ostendetur quilibet
 angulorum ad G, F, Maequalis ipsi BKC vel C
 LD . Ergo pentagonum $FGKLM$ etiam
 aequiangulum est. Q. E. F.

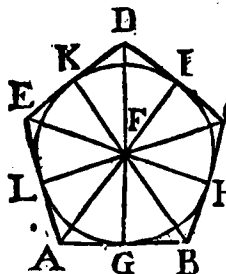
• *Scholium.*

* *Scholium.*

Eodem pacto, si in circulo quacunque figura aequilatera & aequiangula describatur, & ad extrema semidiametrorum ex centro ad angulos ductarum excitentur lineae perpendiculares: hae perpendiculares constituent figuram totidem laterum & angulorum aequalium circulo circumscriptam.

PROP. XIII. PROBL.

In dato pentagono æquilatèro & æquiangulo ABCDE circulum inscribere.




 Duos pentagoni angu-
 los A & B biseca^s rectis 9. 9. 1.
 AF, BF, concurrentibus
 in F. Apuncto F ad AB
 duc perpendiculararem FG, & ex F interuallo
 FG describe circulum. Dico factum.

Ducantur in reliqua latera lineae perpendiculares FH, FI, FK, FL, & iungantur FC, FD, FE. Et quia AB = BC, & communis FB, & ang. ABE = FBC: erit $\angle$ ang. FAB = FCB. Ergo ang. EAB = 2 FAB = 2 FCB. Sed ang. EAB = DCB. Ergo ang. DCB = 2 FCB. Recta ergo FC bisecat angulum DCB. Similiter ostendetur, reliquos angulos EDC, DEA etiam bisecari a rectis FD, FE. Et quia ang. FBG = FBH, item ang. FGB = FHB, & communis FB: eff. FH = FG. Eadem ratione reliquae FI, FK, FL.

FK, FL ipsi FH vel FG aequales ostendentur. Ergo circulus, centro F interuallo FG descriptus, per H, I, K, L puncta transibit, & ibi latera pentagoni continget, quia illa secare nequit°. In dato igitur pentagono ABCDE circulus GHIKL inscriptus est. Q. E. F.

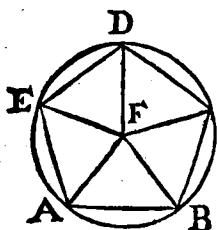
* Coroll.

Hinc si duo anguli proximi figurae aequilaterae & aequiangularae bisecentur, & a puncto, in quo coeunt lineae angulos bisecantes, ducantur rectae lineae ad reliquos figurae angulos: omnes anguli figurae erunt bisecti-

* Schol.

Eadem methodo in qualibet figura aequilatera & aequiangulara circulus describetur.

PROP. XIV. PROBL.



Circa datum pentagonum aequilaterum & aequiangularum ABCDE circulum circumscribere.

Duos pentagoni angulos A, B biseca rectis AF, BF, coeuntibus in F. Circulus, centro F interuallo FA descriptus, pentagono circumscriptus est.

Ductis enim FC, FD, FE, reliqui omnes anguli C, D, E bisecti erunt°. Et quoniam ang. EAB = ABC: erit ang. FAB = FBA. Ergo FB = FA. Similiter quaelibet FC, FD, FE ipsi FB vel FA aequalis ostendetur. Circulus

π. cor. 13. 4

ε. 7. ax.

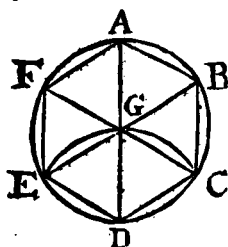
ε. 6. 1.

Circulus ergo, centro F intervallo FA descriptus, per angulos pentagoni A, B, C, D, E transibit. Q. E. F.

* *Scholium.*

Eadem arte circa quamlibet figuram aequilateram & aequiangulam circulus circumscribetur.

PROP. XV. PROBL.

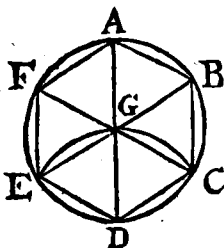


In dato circulo ABCD EF hexagonum aequilaterum & aequiangulum inscribere.

Ducatur circuli diameter AD, posito in G centro. Ex centro D in $\propto$ I. 3. intervallo DG describatur alius circulus EGC, iunctaeque EG, CG producantur in B & F; & iungantur AB, BC, CD, DE, EF, FA. Dico factum.

Nam quia in circulo AED est $GE = GD$, & in circulo EGC, $GD = DE$: erit Δ EGD aequilaterum, ideoque $\simeq$ aequiangulum. Quare ang. EGD est tertia pars ϕ duo- ϕ . 32. I. rum rectorum. Similiter ang. DGC est tertia pars 2 rectorum. Et quoniam ang. EGD + DGC + CGB = $\propto$ 2 rectis: erit & ang. $\propto$ 2. sch. CGB tertia pars 2 rectorum, & aequalis angulo EGD, & ang. DGC. Hinc ψ & anguli ψ . 15. I. AGB, AGF, FGE & inter se & reliquis aequales erunt. Sex igitur $\simeq$ circumferentiae $\simeq$. 26. 3. ED, DC, CB, BA, AF, FE inter se sunt aequales, ergo & $\simeq$ sex subtensae rectae. Quare $\simeq$. 29. 3. aequi-

p. 27. 3.



aequilaterum est hexagonum ABCDEF. Deinde quia circumf. $AF = ED$; communi addita AB CD : erit tota circumfer. $C FABCD = ABCDE$, & proinde ang. $FED = \text{p} AFE$. Similiter reliqui anguli hexagoni singillatim aequales ipsi FED , vel AFE ostendentur. Ergo & aequiangulum est hexagonum ABCDEF, & dato circulo inscriptum. Q. E. F.

Corollar.

Ex hoc manifestum est, hexagoni latus circuli semidiametro aequale esse.

Circumscriptio hexagoni circa circulum, nec non circuli inscriptio vel circumscriptio in vel circa datum hexagonum eodem modo fiant, quem de pentagono docuimus.

** Scholia.*

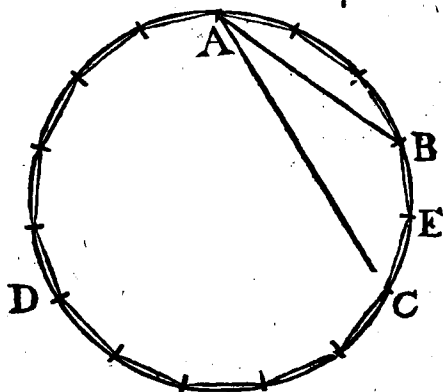
Hinc & facile triangulum aequilaterum ACE in dato circulo inscribetur.

Hexagonum autem regulare (i. e. aequilaterum & acuiangulum) super data recta CD ita construes. Fac super CD triangulum aequilaterum CGD . Centro G interuallo GC describe circulum. Is capiet hexagonum super data CD describendum.

PROP. XVI. PROBL.

In dato circulo ABCD quindecagonum aequilaterum & acuiangulum inscribere.

Inscri-



Inscribatur circulo trianguli aequilateri ipsi inscripti latus AC , item pentagoni aequilateri latus AB . Bifecetur BC in E . Iunctis rectis CE , EB aequales in continuum rectae circulo aptentur: erit in ipso quindecagonum aequilaterum & aequiangulum inscriptum. Nam qualium partium circulus $ABCD$ est quindecim, talium circumferentia ABC , tertia pars existens circuli, erit quinque. Circumferentia vero AB , quinta circuli pars, erit trium. Ergo reliqua BC est duarum, & huius dimidium BE vel EC est decima quinta pars circuli $ABCD$. Ergo si rectae EB aequales circulo in continuum aptentur: describetur quindecagonum aequilaterum & aequiangulum. Q. E. F.

Ad modum eorum, quae de pentagono dicta sunt, reliqua problemata de quindecagono soluentur.

Scholium.

Circulus di-
 uiditur geome-
 trice in par-
 tes. $\left\{ \begin{array}{l} 4, 8, 16, \&c. \text{ per } 6, 4. \& 9, 1. \\ 3, 6, 12, \&c. \text{ per } 15, 4. \& 9, 1. \\ 5, 10, 20, \&c. \text{ per } 11, 4. \& 9, 1. \\ 15, 30, 60, \&c. \text{ per } 16, 4. \& 9, 1. \end{array} \right.$

Ceterum diuisio circumferentiae in partes quot-
 nis aequales etiamnum desideratur. Quare pro
 figurarum quarumcunque ordinarum vel regula-
 rium constructionibus saepe ad mechanica artificia
 recurrendum est, de quibus Geometrae praefici
 consulendi sunt.





E V C L I D I S

ELEMENTORVM

LIBER V.

DEFINITIONES.

1. *Pars* est magnitudo *magnitudinis*, minor maioris, quando minor maiorem metitur.

2. *Multiplex* est maior minoris, quando minor maiorem metitur.

3. *Ratio* est duarum magnitudinum eiusdem generis, secundum quantiplicitatem, mutua quaedam habitudo (seu relatio.)

4. *Rationem inter se magnitudines habere* dicuntur, quae multiplicatae se inuicem superare possunt.

* In omni ratione ea quantitas, quae ad aliam refertur, *antecedens* dicitur, haec altera *consequens*. Vt si A ad B refertur, siue magnitudines sint eae quantitates, siue numeri, ita vt consideres, quomodo A habeat se ad B quoad quantiplicitatem: antecedens est A, B vero consequens. Signum rationis magnitudinis A ad B est nobis hoc $A:B$.

5. *In eadem ratione magnitudines esse dicuntur prima ad secundam & tertia ad quartam*, quando primae & tertiae aequae multiplices secundae & quartae aequae multiplices, iuxta quamuis multiplicationem, vtraque vtramque, vel una superant, vel vna aequales sunt, vel vna deficiunt, inter se comparatae.

6. Ma-

6. Magnitudines, quae eandem rationem habent, *proportionales* vocantur.

7. Quando autem aequemultiplicium multiplex primae superavit multiplicem secundae, multiplex autem tertiae non superauerit multiplicem quartae: tunc *prima ad secundam maiorem habere dicitur rationem, quam tertia ad quartam.*

8. *Proportio est rationum similitudo.*

* Signum, quo notamus proportionem, vel quod magnitudines A, B eandem rationem habeant, quam magnitudines C, D, est hoc $A : B = C : D$. Sed $A : B > C : D$ denotat, inter A & B maiorem quam inter C & D rationem esse. Similiter $C : D < A : B$ significat, rationem C ad D minorem esse ratione A : B.

9. Proportio in tribus ad minimum *terminis* consistit.

10. Si tres magnitudines sunt proportionales: prima ad tertiam *duplicatam* habere dicitur *rationem* eius, quam habet ad secundam.

11. Si quatuor magnitudines sunt proportionales: prima ad quartam *triplicatam* habere dicitur *rationem* eius, quam habet ad secundam. Et sic deinceps vno amplius, quamdiu proportio exstiterit.

* Talium proportionum, quae *continuae* appellantur, signum est $\div\div$. E. gr. $\div\div A, B, C$ notat, esse magnitudinem A ad B in eadem ratione, ac B ad C; & $\div\div A, B, C, D$ notat, rationes A : B, B : C, C : D easdem vel similes esse. Deinde si $\div\div A, B, C$, hoc quod ratio A : C fit duplicata rationis

A:

A: B, sic exprimemus, $A: C = (A: B)^2$. Et si A, B, C, D fuerint continuæ proportionales, rationem A ad D triplicatam esse rationis A ad B, sic significabimus, $A: D = (A: B)^3$.

12. *Homologae magnitudines* dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, consequentes vero consequentibus.

* Si $A: B = C: D$, vocatur A ipsi C homologa, item B & D homologae dicuntur.

13. *Alterna ratio* est sumtio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.

14. *Inversa ratio* est sumtio consequentis, vt antecedentis, ad antecedentem, vt consequentem.

15. *Compositio rationis* est sumtio antecedentis vna cum consequente, tanquam vnius, ad ipsam consequentem.

16. *Diuisio rationis* est sumtio excessus, quo antecedens superat consequentem, ad ipsam consequentem.

17. *Conuersio rationis* est sumtio antecedentis ad excessum, quo antecedens ipsam consequentem superat.

18. *Ex aequalitate ratio* est, quando, pluribus existentibus magnitudinibus, & aliis, ipsis numero aequalibus, fuerit vt, in primis magnitudinibus, prima ad vltimam, sic in secundis magnitudinibus, prima ad vltimam. Vel aliter, sumtio extremarum per subtractionem mediarum.

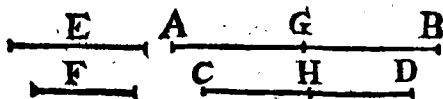
19. *Ordinata proportio* est, quando fuerit, vt antecedens ad consequentem, ita antecedens ad consequentem; vt autem consequens ad aliam quampiam, ita consequens ad aliam quampiam.

* Si fuerit $A : B = C : D$, & deinde fit $B : E = D : F$.

20. *Perturbata vero proportio* est, quando, tribus existentibus magnitudinibus, & aliis, ipsis numero aequalibus, fuerit, vt, in primis magnitudinibus, antecedens ad consequentem, ita, in secundis magnitudinibus, antecedens ad consequentem; vt autem, in primis magnitudinibus, consequens ad aliam quampiam, ita, in secundis magnitudinibus, alia quae-
piam ad antecedentem.

* Vt si sint magnitudines A, B, C, & totidem aliae D, E, F, & fuerit $A : B = E : F$; fit autem deinde $B : C = D : E$.

PROP. I. THEOR.



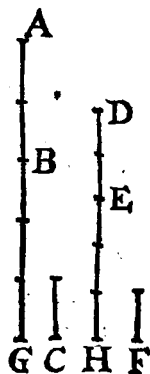
Si fuerint quotcunque magnitudines AB, CD, quotcunque magnitudinum aequalium numero E, F, singulae singularum, aequae multiplices: quam multiplex est vna magnitudo AB vnius E, tam multiplices erunt & omnes AB + CD omnium E + F.

Quia enim AB aequae multiplex est ipsius E, ac CD ipsius F: quot magnitudines sunt in

A B

AB ipsi E aequales, tot erunt & in CD ipsi F aequales. Sint partes, in quas AB diuidi potest, ipsi E aequales, AG, GB, & partes ipsius CD sint CH = HD = F. Ergo multitudo harum partium in A B aequalis erit multitudini in CD. Praeterea est $AG + CH = E + F$, & $GB + HD = E + F$. 2. 2x.
 Ergo quot sunt in AB aequales ipsi E, tot sunt in AB + CD aequales ipsis E + F. Ergo quam multiplex est AB ipsius E, tam multiplices erunt & AB + CD ipsarum E + F.
 Q. E. D.

PROP. II. THEOR.

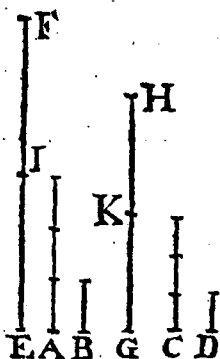


Si prima AB secundae C aequae multiplex fuerit, atque tertia DE quartae F; fuerit autem & quinta BG secundae C aequae multiplex, atque sexta EH quartae F: erunt etiam prima & quinta simul sumtae AG secundae C aequae multiplices, atque tertia & sexta DH quartae F.

Nam β quot in AB sunt β hyp. magnitudines ipsi C aequales, tot sunt in DE aequales ipsi F. Et quot in BG sunt ipsi C aequales, tot sunt in EH ipsi F aequales. Ergo γ quot in AG sunt magnitudines ipsi C aequales, totidem DH continet 2. 2x.

tinet ipsi F aequales. Hinc AG aequae multiplex est ipsius C; ac DH ipsius F. Q. E. D.

PROP. III. THEOR.



Si prima A secundae B aequae multiplex fuerit atque tertia C quartae D; sumantur autem EF, GH aequae multiplices primae A & tertiae C: erit & ex aequo sumtarum utraque utriusque aequae multiplex, altera quidem EF secundae B altera vero GH quartae D.

Sint enim in EF partes quotcunque EI, IF ipsi A aequales, & in GH partes GK, KH ipsi C aequales. Harum numerus illarum numero³ aequalis erit. Porro quia $EI = A$, & $GK = D$: erit EI ipsius B aequae multiplex³, ac GK ipsius D. Similiter IF ipsius B aequae multiplex erit; ac KH ipsius D. Ergo⁴ EF ipsius B aequae multiplex erit, ac GH ipsius D. Q. E. D.

PROP. IV. THEOR.

Si prima A ad secundam B eandem habeat rationem, quam tertia C ad quartam D: & aequae multiplices E, F primae & tertiae ad aequae multiplices G, H secundae & quartae, iuxta quamvis multiplicationem, eandem rationem habebunt inter se comparatae.



Sumantur enim ipsarum E, F aequae multiplices I, K, & ipsarum G, H aequae multiplices L, M. Erit ergo ^{2. 3. 5.} I aequae multiplex ipsius A, ac L ipsius C.

Item L aequae multiplex ipsius B erit, ac M ipsius D. Et quum sit $A : B = C : D$: si I superat L, superabit & K ipsam M, si aequalis, aequalis, & si minor, minor erit. Sunt autem I, K ipsarum E, F aequae multiplices, & L, M ipsarum G, H aliae vtcunque aequae multiplices^{3.} Ergo ^{4.} $E : G = F : H$.^{5. def. 5.} hyp. Q. E. D.

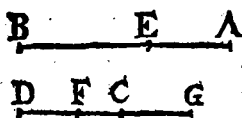
Cor. Quoniam demonstratum est, si fuerit $I >$ vel $=$ vel $<$ L, fore & $K >$, $=$, $<$ M: conitatur etiam, si $L >$, $=$, $<$ I, fore $M >$, $=$, $<$ K; ac propterea fore $G : E = H : F$. Si ergo quatuor magnitudines proportionales sunt, & inuerse proportionales erunt.

* *Schol.* Similiter demonstratur, esse $E : B = F : D$, item $A : G = C : H$.

H

PROP.

PROP. V. THEOR.



Si magnitudo AB magnitudinis CD aequae multiplex sit, atque ablata AE ablatae CF: erit & reliqua EB reliquae FD aequae multiplex, atque tota AB totius CD.

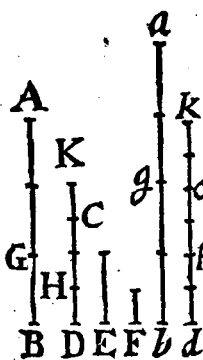
.. I. 5.

.. 7. ax.

.. 3. ax.

Ponatur alia CG, cuius EB sit aequae multiplex ac AE est ipsius CF. Ergo AB ipsius GF erit aequae multiplex ac AE ipsius CF. Sed & AB ipsius CD aequae multiplex erat ac AE ipsius CF. Ergo AB ipsarum GF & CD aequae multiplex erit. Quare* est $GF = CD$, & ergo $CG = FD$. Ergo EB ipsius FD aequae multiplex est, quam AE ipsius CF, vel quam tota AB totius CD. Q. E. D

PROP. VI. THEOR.



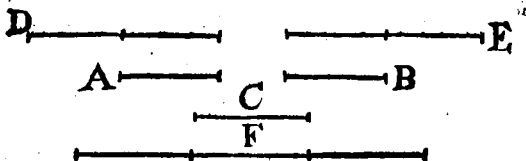
Si duae magnitudines AB, CD duarum magnitudinum E, F aequae multiplices sint; & ablatae quaedam AG, CH sint earundem E, F aequae multiplices: erunt & reliquae GB, HD vel iisdem E, F aequales, vel ipsarum E, F aequae multiplices.

Sit enim primum $GB = HD$. E: dico, etiam fore $HD = F$. Ponatur enim ipsi F aequalis CK. Et quia AG, CH ipsarum E, F sunt aequae multiplices;

plices: erunt adhuc AB, KH ipsarum E, F
aeque multiples. Sed & AB, CD earun-
dem E, F aequae multiples erant. Ergo KH
& CD eiusdem F aequae multiples erunt.
Quare $^{\mu}$ KH = CD, & KC = $^{\nu}$ HD. Sed $^{\mu}$. 6. ax.
KC = F. Ergo HD = F. $^{\nu}$. 3. ax.

Similiter demonstrabimus, $^{\xi}$ si gb fuerit $^{\xi}$. 2. 5.
ipsum E multiplex, & hd ipsum F aequae mul-
tiplicem esse, posita ck ipsum F aequae multi-
plici, ac gb ipsum E. Q. E. D.

PROP. VII. THEOR.



*Aequales magnitudines A, B eandem habent
rationem ad eandem C; & eadem C ad aequa-
les A, B.*

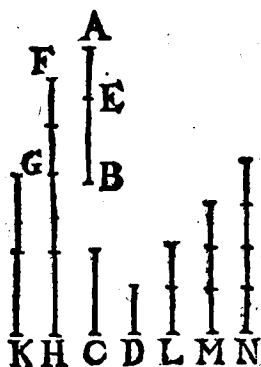
Sumantur ipsarum A, B aequae multiples
D, E, & ipsius C alia utcumque multiplex F.
Et quoniam $A = B$: erit & $D = E$. Quare si $^{\circ}$. 1. &
 $D >, =, < F$: erit $^{\circ}$ quoque $E >, =, < F$. $^{\circ}$. 14. ax.
Ergo $^{\pi}$ erit $A : C = B : C$. Q. E. D. $^{\pi}$. 5. def. 5.

Similiter demonstratur, esse $C : A = C : B$.
Q. E. D.

* *Scholium.*

Eodem modo demonstrabis, aequalia ad ae-
qualia eandem rationem habere.

PROP. VIII. THEOR.



Inaequalium magnitudinum A B, C maior AB ad eandem D maiorem habet rationem, quam minor C. Et eadem D ad minorem C maiorem habet rationem, quam ad maiorem A B.

Cas 1. Sumta in AB ipsi C = BE, sit AE < EB. Capi potest e

e. 4. def. 5.

ipfius AE multiplex, maior quam D, quae sit FG. Et quantiplex FG est ipfius AE, tantiplex fiat GH ipfius EB, & K ipfius C. Sumantur etiam ipfius D dupla L, tripla M, & sic deinceps, quoad perueniatur ad primam multiplicium ipfius D, ipsa K maiorem. Sit ea N, quadrupla ipfius D. Quia ergo N prima est, qua K facta est minor: nondum erit K < M. Et quum FG, GH ipfarum AE, EB aequae multiplices sint: erunt & FH, FG ipfarum AB, AE aequae multiplices. Sunt vero FG & K ipfarum AE, C aequae multiplices. Ergo FH & K ipfarum AB & C aequae multiplices erunt. Sed quia GH & K aequalium EB & C aequae sunt multiplices; est GH = K. Ergo non est GH < M. Hinc, ob FG > D, erit GH + FG, id est FH, maior quam M + D, id est N. K autem, quum sit minor quam

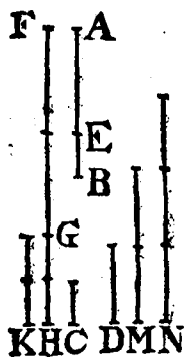
e. 1. 5.

e. 6. ax.

quam

quam N, non superat ipsam N. Ergo $AB : D > C : D$.
 $D > C : D$.

Similiter ostenditur, esse $D : C > D : AB$.
 Q. E. D.



*Cas. 2. Si $AE > EB$. Sumatur ipsius EB multiplex $GH > D$, & quantiplex est GH ipsius EB, tantiplex fiat FG ipsius AE, & K ipsius C. Erunt ergo vt antea FH, K ipsarum AB, C aequae multiplices. Sit inter ipsius D multiplices N primo maior quam FG, M proxime praecedens. Ergo, quod rursus eodem modo ostendetur, FH superabit ipsam N. Denique quum rursus sit $K = GH$, FG autem, quae ipsa GH maior est, non superet N: patet K non superare ipsam N. Ergo $AB : D > C : D$; & quod pari modo demonstratur, $D : C > D : AB$.
 Q. E. D.*

* *Cas. 3. Si $AE = EB$, idem eodem modo demonstrari potest, quo in casu 1.*

PROP. IX. THEOR.

Quas A, B, eandem rationem habent ad eandem C, sunt inter se aequales. Et ad quas A, B, eadem C eandem habet rationem, ipsae etiam sunt inter se aequales.

φ. 8. 5.

1. Si enim non esset $A = B$; nec foret^φ $A : C = B : C$. Quod est contra hypothesin. Ergo $A = B$. Q. E. D.
A B C

2. Si sit $C : A = C : B$, ne tamen $A = B$: non^φ erit $C : A = C : B$; contra hypothesin. Ergo $A = B$. Q. E. D.

PROP. X. THEOR.

Magnitudinum A, B rationem habentium ad eandem C, quae maiorem habet rationem A, est maior. Ad quam vero B eadem C maiorem habet rationem, illa est minor.
A B C

κ. 7. 5.
ψ. 8. 5.

1. Sit $A : C > B : C$. Jam si non sit $A > B$: aut aequalis, aut minor erit. Si esset $A = B$: foret $A : C = B : C$. Si $A < B$: foret^ψ $A : C < B : C$. Vtrumque contra hypothesin. Ergo $A > B$. Q. E. D.

2. Sit $C : B > C : A$. Jam si non sit $B < A$: aut aequalis erit, aut maior. Si $B = A$: erit^κ $C : B = C : A$. Si $B > A$: erit^ψ $C : B < C : A$. Quia vtrumque contra hypothesin est: necesse est vt sit $B < A$. Q. E. D.

PROP. XI. THEOR.



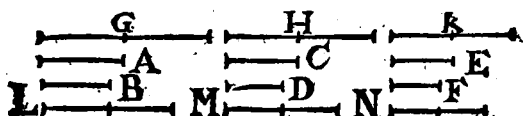
Quae eadem sunt eadem rationes, Et inter se sunt eadem.

Sit $A : B = C : D$, & $C : D = E : F$.

Dico

Dico fore $A:B = E:F$. Sumantur enim ipsarum A, C, E aequae multiplices G, H, K; ipsarum vero B, D, F aequae multiplices L, M, N. Ergo si fuerit $G >, =, < L$: erit ^{a} & $H >, =, < M$; item si fuerit $H >, =, < M$: erit & $K >, =, < N$. Quare si fuerit $G >, =, < L$: erit & $K >, =, < N$. Hinc erit $^a A:B = E:F$. Q. E. D.

PROP. XII. THEOR.



Si quocunque magnitudines proportionales fuerint $A:B = C:D = E:F$: ut una A antecedentium ad unam B consequentium, ita erunt omnes antecedentes $A + C + E$ ad omnes consequentes $B + D + F$.

Sumantur ipsarum A, C, E aequae multiplices G, H, K, & ipsarum B, D, F aliae utcumque aequae multiplices L, M, N. Jam ^{a} si $G >, =, < L$: erit & $H >, =, < M$, atque $K >, =, < N$. Quare si $G >, =, < L$: erunt & $G + H + K >, =, < L + M + N$. Sunt autem G, & $G + H + K$ ipsarum A, & $A + C + E$ ^{b} aequae multiplices; item L ac $L + M + N$ sunt ipsarum B ac $B + D + F$ aequae multiplices. Ergo ^{a} est $A:B = A + C + E : B + D + F$. Q. E. D.

ad primam posteriorum, quam secundae ad secundam, & haec maior, quam tertiae ad tertiam, & sic deinceps; habebunt omnes priores simul ad omnes posteriores simul maiorem rationem, quam omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores, relicta quoque prima; minorem autem, quam prima priorum ad primam posteriorum; maiorem denique etiam, quam ultima priorum ad ultimam posteriorum.

Horum demonstratio est penes interpretes, quos adeat, qui eam desiderat. Nos omisimus, brevitatis studio, & quia eorum nullus usus in his elementis.





E V C L I D I S

ELEMENTORVM

LIBER VI.

DEFINITIONES.

1. *Similes figurae rectilineae* sunt, quae & singulos angulos singulis aequales habent, & circa aequales angulos latera proportionalia.

* Nota similitudinis est haec $\sim$.

2. *Reciprocae figurae* sunt, quando in vtraque figura antecedentes & consequentes rationum termini fuerint.

3. *Secundum extremam & mediam rationem recta linea secta* esse dicitur, quando ut tota ad maius segmentum, ita maius segmentum ad minus se habuerit.

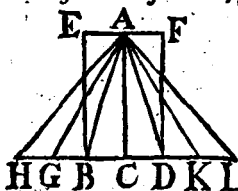
4. *Altitudo cuiusque figurae* est linea perpendicularis, a vertice ad basin ducta.

5. *Ratio ex rationibus componi* dicitur, quando rationum quantitates, inter se multiplicatae, illius faciunt quantitatem.

* Signum quantitatis rationis $A : B$ est $\frac{B}{A}$, scilicet signum quoti, qui indicat, quoties antecedens contineat consequentem vel aliquotam eius partem. Iam quia rationum $A : B$ & $B : C$ quantitates $\frac{A}{B}$ & $\frac{B}{C}$ inter se multiplicatae faciunt $\frac{A}{C}$, quae quantitas est rationis $A : C$: dicimus rationem $A : C$ componi ex rationibus $A : B$ & $B : C$, quod sic scribimus $(A : C) = (A : B) + (B : C)$.

PROP. I. THEOR.

Triangula ABC, ACD, & parallelogramma EC, CF, quae eandem habent altitudinem, sunt inter se ut bases BC, CD.



1. In BD producta sumantur $BG = GH = BC$, & $DK = KL = CD$, & iungantur AH, AG, AK, AL. Ergo $\Delta ABG = \Delta AGH =$

ΔABC , & sunt proinde basis HC & ΔACH basis BC & trianguli ABC aequae multiplicia. Similiter patet, esse basin CL & ΔACL basis CD & ΔACD aequae multiplicia. Iam si $HC >, =, < CL$: erit & $\Delta ACH >, =, <$

ΔACL . Ergo $BC : CD = \Delta ACB : \Delta ACD$. Q. E. D.

2. Quia Pgra. EC : CF sunt dupla Δ rum ABC, ACD, & hinc $EC : CF = \Delta ABC : \Delta ACD$: erit $EC : CF = BC : CD$. Q. E. D.

* Scholium.



Sume $IL = CB$, & $KM = FE$, ac iunge LA,

MD. Quia ergo $IL = KM$: erit $\Delta ALI : \Delta DMK = AI : DK$. Sed $\Delta ALI = \Delta ABC$, & $\Delta DMK = \Delta DEF$. Ergo $\Delta ABC : \Delta DEF = AI : DK =$ Pgr. GC : Pgr. HF. Q. E. D.

PROP.

PROP. II. THEOR.

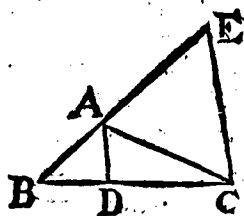


Si uni laterum BC trianguli ABC parallela recta linea DE ducatur: haec proportionaliter secabit ipsius trianguli latera AB, AC. Et si trianguli ABC latera CAB, AC proportionaliter secta fuerint: quae sectiones coniungit recta linea DE reliquo trianguli lateri BC parallela erit.

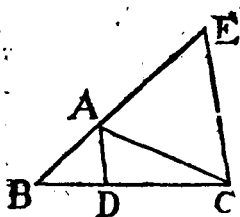
1. Sit DE ad BC parallela: dico fore BD: DA = CE: EA. Iungantur enim DC, BE. Et quia * DE, BC parallelae: erit $\triangle BDE \stackrel{\lambda}{=} \triangle CDE$. $\triangle BDE: \triangle ADE \stackrel{\mu}{=} \triangle CDE: \triangle ADE$. Atqui $\triangle BDE: \triangle ADE \stackrel{\mu}{=} BD: DA$, & $\triangle CDE: \triangle ADE \stackrel{\nu}{=} CE: EA$. Ergo BD: DA = CE: EA. Q. E. D. ξ . II. 5.

2. Quia * BD: DA = CE: EA, & BD: DA $\stackrel{\alpha}{=} \triangle BDE: \triangle EDA$, & CE: EA = $\triangle CDE: \triangle EDA$: erit $\triangle BDE: \triangle EDA \stackrel{\beta}{=} \triangle CDE: \triangle EDA$, & hinc $\triangle BDE \stackrel{\gamma}{=} \triangle CDE$. Quare $\stackrel{\gamma}{=} ED, BC$ parallelae sunt. Q. E. D. τ . 39. I.

PROP. III. THEOR.



Si trianguli ABC angulus A bisariam secetur, secans autem angulum recta linea AD secet etiam basim BC: basis segmenta BD, DC eandem rationem habebunt, quam reliqua trianguli latera BA, AC.



Et si basis BC segmenta BD, DC eandem habeant rationem, quam reliqua trianguli ABC latera BA, AC: quae a vertice A ad sectionem D ducitur. recta linea AD, trianguli angulum A bifariam secabit.

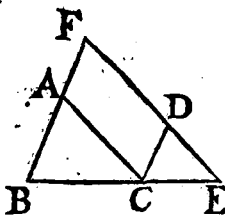
v. 29. I.
φ. hyp.
x. 6. I.
ψ. 2. 6.

1. Ducatur enim ad AD parallela CE, & producat BA in E. Quia ergo ang. ACE = $\angle$ CAD, & AEC = $\angle$ BAD, & CAD = $\angle$ BAD: erit ACE = AEC, & AC = AE. Hinc $\angle$ BD: DC = BA: AC. Q. E. D.

u. II. 5.
a. 9. 5.
β. 5. I.

2. Iisdem constructis, si BD: DC = BA: AC: quia BD: DC = $\angle$ BA: AE, erit BA: AC = $\angle$ BA: AE, & ergo AC = AE, & ang. ACE = AEC. Sed ang. ACE = $\angle$ DAC & ang. AEC = $\angle$ BAD. Ergo ang. BAD = DAC. Angulus igitur A bisectus est a recta AD. Q. E. D.

PROP. IV. THEOR.



Aequiangulorum triangulorum ABC, DCE proportionalia sunt latera, quae circum aequales angulos; Et homologa sunt latera, quae aequalibus angulis subtenduntur.

Sit ang. A = D, B = DCE, & ACB = E: dico fore BA: AC = CD: DE, item BC: CA = CE: ED, & AB: BC = DC: CE.

Posita

Posita enim CE ipsi BC in directum, pro-
duc BA & ED, quae in F concurrent: quia
ang. $B + E = \gamma$ $B + ACB < \delta$ 2 rectis. γ . hyp.
Et quia ergo CD ad BF, & AC ad FE paralle-
la¹ est: erit² $AF = CD$, & $FD = AC$. Sed γ . 28. 1.
 $BA : AF = BC : CE$, & alterne $AB : BC = AF :$ 34 1.
 CE , & $DC : CE = \gamma$ $AF : CE$. Ergo $AB : BC$ 2. 6.
 $= DC : CE$. 3. 7. 5.

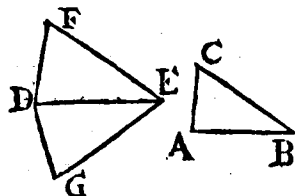
Rursus ob CD, BF parallelas est γ $BC : CE$
 $= FD : DE = AC : DE$. Ergo alterne $BC :$
 $CA = CE : ED$.

Et quia erat $AB : BC = DC : CE$: erit ex
aequo $BA : AC = CD : DE$. Q.E.D. 22. 5.

* Scholia.

1. Hinc $AB : DC = \gamma$ $BC : CE = AC : DE$. 16. 5.
2. Si in Δ EFB ducitur basi BF parallela CD; est
 $BF : CD^{\wedge} = BE : EC = FE : ED$. 18. 5.
3. Triangula aequiangula similia sunt.

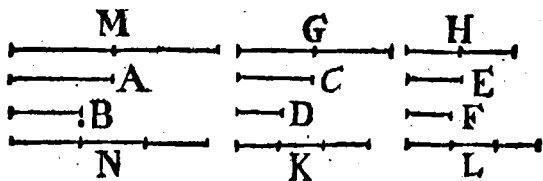
PROP. V. THEOR.



Si duo triangu-
la ABC, DEF latera ha-
beant proportionalia:
aequiangula erunt
triangula, & aequa-
les habebunt angulos,
quibus homologa latera subtenduntur.

Fac ad rectae DE punctum quidem D ang. μ . 23. 1.
 $EDG = CAB$, ad punctum vero E ang. ν . 32. 1.
 $= CBA$: & reliqui G, C aequales erunt. Er-
go² $AB : BC = DE : EG$. Sed γ $AB : BC = \gamma$ $DE : EF$.
Ergo $EG = \gamma$ EF . Similiter quia γ 9. 5.

PROP. XIII. THEOR.



Si prima A ad secundam B eandem habeat rationem, quam tertia C ad quartam D; tertia autem C ad quartam D maiorem habeat rationem, quam quinta E ad sextam F: & prima A ad secundam B maiorem habebit rationem, quam quinta E ad sextam F.

Sume ipsarum C, E aequemultiples G, H, & ipsarum D, F alias quasdam aequemultiples K, L, ita ut G quidem superet K, sed
 7. 7. def. 5. H non superet L, quod semper fieri potest 7. Deinde quantiplex G est ipsius C, tantiplex fiat M ipsius A, & quantiplex K est ipsius D, tantiplex N ipsius B. Ergo quum sit $A:B = C:D$; si fuerit $G >, =, < K$: erit & $M >, =, < N$. Sed $G > K$. Ergo & $M > N$. Atqui H non $> L$. Sunt vero M & H ipsarum A & E aequemultiples, nec non N & L ipsarum B, F (per constr.). Ergo 7 $A:B > E:F$. Q. E. D.

* Schol. Si vero fuerit $C:D < E:F$: erit quoque $A:B < E:F$. Item si $A:B > C:D > E:F$: erit $A:B > E:F$. Et si $A:B < C:D < E:F$: erit $A:B < E:F$.

PROP.

PROP. XIV. THEOR.

Si prima A ad secundam B eandem habeat rationem, quam tertia C ad quartam D; prima autem A maior sit quam tertia C: Et secunda B, quam quarta D, maior erit. Et si aequalis: aequalis. Et si minor: minor.

1. Quia enim $A > C$: erit $A : B > C : B$. 8. 5.
Sed $A : B = C : D$. Ergo $C : D > C : B$. Er- 13. 5.
go $D < B$, vel $B > D$. Q. E. D. 10. 5.

2. 3. Similiter demonstrabitur, si $A = C$, fore $B = D$, & si $A < C$, fore $B < D$. Q. E. D.

* Schol. A fortiori, si $A : B < C : D$, & $A > C$: erit $B > D$. Si fuerit $A = B$, & $A : B = C : D$: erit & $C = D$. Sumtis enim ipsarum A, B, C, D, aequae multiplicibus E, F, G, H: quia $E = F$, erit $G = H$, & proinde $C = D$. fch. praec. 6. 5. def. 5. ax. 7.

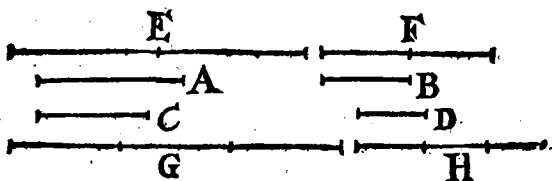
PROP. XV. THEOR.

Partes A, B inter se comparatae eandem habent rationem, quam habent earum aequae multiplices CD, EF.

Sint CG, GH, HD partes multiplicis CD ipsi A aequales, & EK, KL, LF partes multiplicis KEF ipsi B aequales. Erit ergo multitudo ipsarum CG, GH, HD aequalis multitudini ipsarum EK, KL, LF. Et quia $CG = GH = HD$, & $EK = KL = LF$: 7. 5.
erit $CG : EK = GH : KL = HD : LF$. Qua- & 11. 5.

- $\mu. 12. 5.$ re^u $CG:EK=CD:EF$. Est vero $A:B=$
 $\nu. 7. 5.$ $CG:EK$. Ergo $A:B=\frac{1}{2}CD:EF$. Q.E.D.
 $\xi. 11. 5.$

PROP. XVI. THEOR.



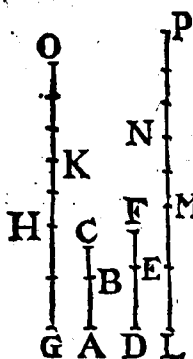
Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, $A:B=C:D$: & alterne proportionales erunt $A:C=B:D$.

- Sint ipfarum A, B aequae multiplices E, F , & ipfarum C, D aliae aequae multiplices G, H .
 $\mu. 15. 5.$ Hinc $A:B=E:F$. Sed $A:B=C:D$ (*hyp.*).
 $\pi. 11. 5.$ Ergo $C:D=E:F$. Rurfus $C:D=G:H$; hinc $E:F=G:H$. Quare si $E>, =, < G$:
 $\rho. 14. 5.$ erit ρ & $F>, =, < H$. Ergo $A:C=B:D$.
 $\sigma. 5. \text{ def. } 5. Q. E. D.$

- * *Schol.* Haec propositio & 14. locum tantum habent, si magnitudines proportionales eiusdem generis sunt. Ceterum ex hac demonstrare possumus, si sit $A:B=C:D$, & $A><B$, esse & $C><D$. Nam sumtis ipfarum A, B, C, D aequae multiplicibus E, F, G, H : quia $A:B=E:F$, & ergo $\tau A:E=B:F$, & $A><B$; erit $E><F$. Hinc & $\sigma G><H$. Sed quum sit $G:H=C:D$, & ergo $\tau G:C=H:D$: erit $\rho C><D$. Q.E.D.
 $\tau. 16. 5.$

PROP.

PROP. XVII. PROBL.



*Si compositae magnitudines
sint proportionales ($AC : BC$
 $= DF : EF$): & diuisae pro-
portionales erunt ($AB : BC$
 $= DE : EF$).*

Sumantur enim ipsarum
quidem AB, BC, DE, EF
aeque multiples $GH, HK,$
 LM, MN , ipsarum vero $BC,$
 EF aliae vtcunque aequae
multiplices KO, NP . Tota

KG totius AC tam multiplex ν est, quam HG ν . 1. 5.
ipsius AB , vel LM ipsius DE . Sed quam
multiplex est LM ipsius DE , tam multiplex
est ν LN ipsius DF . Ergo GK & LN ipsa-
rum AC, DF aequae sunt multiplices. Rur-
sus ϕ $HK + KO$ id est HO , & $MN + NP$ ϕ . 2. 5.
id est MP , aequae multiplices erunt ipsarum
 BC, EF . Est vero $AC : BC = DF : EF$.
Ergo si $GK >, =, < HO$; erit quoque
 $LN >, =, < MP$. Si vero $GK >, =, <$
 HO : erit &, communi HK ablata, adhuc
 $GH >, =, < KO$. Et si $LN >, =, < MP$;
erit, communi MN ablata, adhuc $LM >, =, < NP$.
Ergo si $GH >, =, < KO$: erit
& $LM >, =, < NP$. Quare $\propto AB : BC = \propto DE : EF$. 5. def. 5.
 $DE : EF$. Q. E. D.

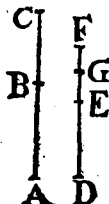
PROP.

PROP. XVIII. THEOR.

Si diuisae magnitudines sint proportionales ($AB:BC=DE:EF$): *& compositae proportionales erunt* ($AC:BC=DF:EF$).

Si negas: erit AC ad BC vt DF ad aliam FG ipsa FE minorem vel maiorem. Sit primo $FG < FE$. Sed quum sit $\psi AB:BC=DG:FG=\alpha DE:EF$, & $DG > DE$: erit $\alpha FG > FE$. Q. E. A. Similiter nec potest esse AC ad BC vt DF ad maiorem quam FE. Ergo $AC:BC=DF:FE$. Q. E. D.

ψ . 17. 5.
 α . 11. 5.
 α . 14. 5.



PROP. XIX. THEOR.

Si fuerit vt tota AB ad totam CD, ita ablata AE ad ablatam CF: erit reliqua EB ad reliquam FD, vt tota AB ad totam CD.

Nam quia $AB:CD=AE:CF$: erit alterne $\beta AB:AE=CD:CF$, & diuidendo $\gamma BE:EA=DF:FC$, & rursus alterne $BE:DF=EA:FC=AB:CD$. Q. E. D.

β . 16. 5.
 γ . 17. 5.



Corollar.

Quoniam ostensum est, si fuerit $AB:AE=CD:FC$, fore $AB:CD=BE:DF$: erit alterne $AB:BE=CD:DF$. Hinc δ si compositae magnitudines proportionales fuerint, conuertendo etiam proportionales erunt.

PROP.

PROP. XX. THEOR.



Si sint tres magnitudines A, B, C, & aliae ipsis numero aequales D, E, F, quae binae sumantur in eadem ratione (A: B = D: E, & B: C = E: F); ex aequo autem prima A maior fit quam tertia C: & quarta D quam sexta F maior erit; & si aequalis, aequalis; & si minor, minor.

Quum enim $A > C$: erit $A: B > C: B$. 8. 5.
 Sed (hyp.) $A: B = D: E$, atque $C: B = F: E$. 2. hyp. &
 Ergo $D: E > F: E$. Ergo $D > F$. cor. 4. 5.
 Similiter ostenditur, si $A = C$, fore $D = F$. 13. 5.
 <F. Q. E. D. 9. 10. 5.

PROP. XXI. THEOR.



Si sint tres magnitudines A, B, C, & aliae ipsis numero aequales D, E, F, quae binae sumantur, & in eadem ratione; fit autem perturbata earum proportio (A: B = E: F, & B: C = D: E), & ex aequo prima A maior fit quam tertia C: & quarta D quam sexta F maior erit; & si aequalis, aequalis; & si minor, minor.

Quia $A > C$: est $A: B > C: B$. Sed est $A: B = E: F$. 8. 5.
 $B: C = D: E$, & inuertendo $C: B = E: D$. Ergo $E: F > E: D$. 13. 5.
 Ergo $F < D$, vel $D > F$. 10. 5.
 Similiter ostenditur, si $A = C$, fore $D = F$.
 <F. Q. E. D.

PROP.

PROP. XXII. THEOR.



Si sint quotcunque magnitudines A, B, C, & aliae ipsi numero aequales D, E, F, quae binae sumantur, in eadem ratione ($A:B = D:E$, & $B:C = E:F$): *& ex aequo in eadem ratione erunt* ($A:C = D:F$).

Sumantur G, H ipsarum A, D aequae multiplices, & K, L ipsarum B, E aliae utcumque aequae multiplices, necnon M, N ipsarum C, F. Ergo $G:K = H:L$, & $K:M = L:N$. Quare si sit $G >, =, < M$: erit

4. 5.

20. 5.

5. 5. def. 5.

& $H >, =, < N$. Ergo $A:C = D:F$. Q. E. D.

* Schol.

1. Ergo rationum aequalium duplicatae, triplicatae &c. etiam aequales sunt.

2. Et vice versa, quarum rationum duplicatae, vel triplicatae &c. aequales sunt, eae inter se aequales sunt. Sint e. gr. a, b, c, d , & e, f, g, h , & sit $a:d = e:h$: erit $a:b = e:f$. Si negas; sit $a:b = e:p$, & $p > f$, & pone e, p, s, t . Igitur quia $e:p < e:f$: erit $p:s < f:g$, & $s:t < g:h$, ideoque $s > g$, & $t > h$ (sch. 14. 5). Sed quia $a:d = e:t$, (per sch. 1.) & $a:d = e:h$: erit quoque $t = h$. Q. E. A.

PROP.

PROP. XXIII. THEOR.



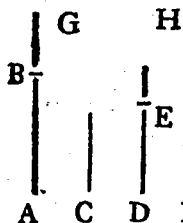
G H L K M N

Si sint tres magnitudines A, B, C, & aliae ipsi numero aequales D, E, F, quae binae sumantur, in eadem ratione, fit autem perturbata earum proportio ($A : B = E : F$, & $B : C = D : E$): & ex aequo in eadem ratione erunt ($A : C = D : F$):

Suntis G, H, K, ipsarum A, B, D aequae multiplicibus, & aliis L, M, N ipsarum C, E, F utcumque aequae multiplicibus, erit $A : B = G : H$, & $E : F = L : M$. Sed ponitur $A : B = E : F$. Ergo $G : H = L : M$. Et quia $B : C = D :$

E : erit $H : L = L : M$. Quare si $G > L$: erit & $K > N$, & propterea $A : C = D : F$. Q. E. D.

PROP. XXIV. THEOR.



Si prima AB ad secundam C eandem habeat rationem, quam tertia DE ad quartam F; habeat autem & quinta BG ad secundam C eandem rationem, quam sexta EH ad quartam F: & composita e prima & quinta A Gad secundam C eandem rationem habebit, quam composita e tertia & sexta DH ad quartam F.

Quum

ψ . cor. 4. 5. B G H Quum enim $B G : C = E H :$
 ϕ . 22. 5. E F : erit inuertendo $C : B G =$
 α . 18. 5. A C D F $F : E H$. Et quia $A B : C = D E :$
 F : erit ex aequo ϕ $A B : B G =$
 $D E : E H$; ergo componen-
 α $A G : G B = D H : H E$.
 Hinc quum praeterea sit $G B :$
 $C = H E$: F : erit ex aequo ϕ $A G : C =$
 $D H : F$. Q. E. D.

PROP. XXV. THEOR.

*Si quatuor magnitudines fue-
 rint proportionales ($A B : C D =$
 $E : F$): maxima ipsarum $A B$, &
 minima F duabus reliquis $C D$
 + E maiores erunt.*

Fiat enim $A G = E$, & $C H$
 $= F$. Quoniam ergo $A B : C D$
 $= \psi$ $E : F = \alpha$ $A G : C H$: erit
 $G B : H D = \alpha$ $A B : C D$. Sed $A B \psi > C D$.
 Ergo $G B > \beta$ $H D$. Quare, quia $A G + F$
 $= \gamma$ $C H + E$: erit δ $A G + G B + F > C H$
 $+ H D + E$, id est, $A B + F > C D + E$.
 Q. E. D.

* Quae sequuntur propositiones non sunt Eu-
 clidis, sed ex aliis desumptae. Ob frequentem ta-
 men earum usum eas Euclideis subiungere, Ha-
 cum Barrow securi, voluimus.

* PROP. XXVI. THEOR.

A ——— C ——— *Si prima ad secundam*
 B ——— D ——— *babuerit maiorem ratio-*
 E ——— *nem, quam tertia ad*
quartam: habebis inuertendo, secunda ad primam
minorem rationem, quam quarta ad tertiam.

Sit

Sit $A : B > C : D$. Dico $B : A < D : C$. Nam ϵ . 13. 5.
 concipe $C : D = E : B$. Ergo $A : B > E : B$; ζ . 10. 5.
 quare $A > E$; ergo $B : A < B : E$ vel $D : C$. η . 8. 5.
 Q. E. D. θ . cor. 45.

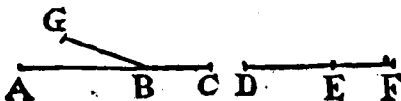
* PROP. XXVII. THEOR.

A ——— B ——— Si prima ad secundam
 C ——— D ——— habuerit maiorem rationem,
 E ——— quam tertia ad quartam: ha-
 bebis quoque vicissim prima ad tertiam maiorem ratio-
 nem, quam secunda ad quartam.

* Sit $A : B > C : D$. Dico $A : C > B : D$. Nam ϵ . 10. 5.
 puta $E : B = C : D$; ergo $A > E$. Ergo $A : C > E : C$. ζ . 8. 5.
 $>^* E : C$, vel $A : B > B : D$. Q. E. D. λ 16. 5.

* PROP. XXVIII. THEOR.

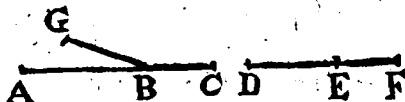
Si prima ad secundam habuerit maiorem ratio-
 nem, quam tertia ad quartam: habebis quoque com-
 posita prima cum secunda ad secundam maiorem ra-
 tionem, quam composita tertia cum quarta ad
 quartam.



Sit $AB : BC > DE : EF$. Dico $AC : BC >$
 $DF : EF$. Nam cogita $GB : BC = DE : EF$. μ . 10. 5.
 Ergo $AB > GB$; adde vtrunque BC , erit $AC > v$. 4. ax.
 GC ; ergo $AC : BC > GC : BC$, id est $DF : EF$. ξ . 8. 5.
 Q. E. D. θ . 18. 5.

* PROP. XXIX. THEOR.

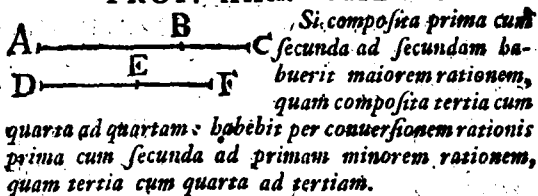
Si composita prima cum secunda ad secundam ma-
 iorem habuerit rationem, quam composita tertia cum
 quarta ad quartam: habebis quoque diuidendo pri-
 ma ad secundam maiorem rationem, quam tertia ad
 quartam.



π. 10. 5.
ε. 5. ax.
σ. 8. 5.
τ. 17. 5.

Sit $AC:BC > DF:EF$: dico $AB:BC > DE:EF$.
Intellige $GC:BC = DF:EF$. Ergo $^*AC > GC$.
Aufer communem BC : erit $^*AB > GB$.
Ergo $AB:BC > ^*GB:EC$, vel $^*DE:EF$.
Q. E. D.

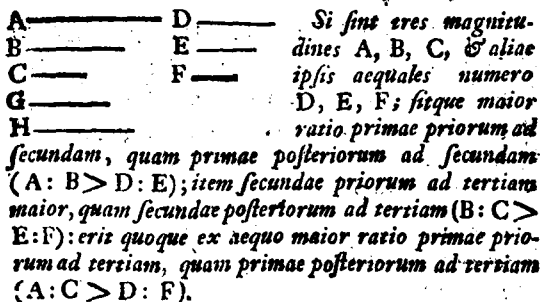
*PROP. XXX. THEOR.



υ. hyp.
φ. 29. 5.
χ. 26. 5.
ψ. 28. 5.

Sit $AC:BC > DF:EF$: dico $AC:AB < DF:DE$.
Nam quia $^*AC:BC > DF:EF$: erit diuidendo $AB:BC > ^*DE:EF$;
inuertendo igitur $^*BC:AB < EF:DE$;
ergo componendo $AC:AB < ^*DF:DE$.
Q. E. D.

*PROP. XXXI. THEOR.



ω. 10. 5.
α. 8. 5.

Concipe $G:C = E:F$. Ergo $^*B > G$, ergo $^*A:G > A:B$.
Rursus puta $H:G = D:E$: er-

go β H: G < A: B, & fortius γ H: G < A: G. β . 13. 5.
 Quare α A > H. Proinde A: C > α H: C γ . sch. 13. 5.
 vel δ D: F. Q.E.D. δ . 22. 5.

* PROP. XXXII. THEOR.

A ——— D ——— Si sunt tres magnitudi-
 B ——— E ——— nes A, B, C, & aliae
 C ——— F ——— ipsis numero aequales D,
 G ——— E, F; sitque maior ratio
 H ——— primae priorum ad se-
 cundam, quam secundae
 posteriorum ad tertiam (A: B > E: F); item secun-
 dae priorum ad tertiam, quam primae posteriorum
 ad secundam (B: C > D: E): erit quoque ex aequo
 maior ratio primae priorum ad tertiam, quam primae
 posteriorum ad tertiam (A: C > D: F).

Huiusce demonstratio plane similis est demon-
 strationi praecedentis.

* PROP. XXXIII. THEOR.

A ——— E ——— B Si fuerit maior ratio to-
 C ——— F ——— tius AB ad totum CD, quam
 ablati AE ad ablatum CF:
 erit & reliqui EB ad reli-
 quum FD maior ratio, quam totius AB ad to-
 tum CD.

Quoniam AB: CD > AE: CF: erit α per. e. 27. 5.
 mutando AB: AE > CD: CF; ergo conuertenden-
 do β AB: EB < CD: DF; permutando igitur γ . 30. 5.
 AB: CD α < EB: DF. Q.E.D.

* PROP. XXXIV. THEOR.

Si sint quaecunque magnitudines, & aliae ipsis
 aequales numero, sitque maior ratio primae priorum

ad primam posteriorum, quam secundae ad secundam, & haec maior, quam tertiae ad tertiam, & sic deinceps; habebunt omnes priores simul ad omnes posteriores simul maiorem rationem, quam omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores, relicta quoque prima; minorem autem, quam prima priorum ad primam posteriorum; maiorem denique etiam, quam ultima priorum ad ultimam posteriorum.

Horum demonstratio est penes interpretes, quos adeat, qui eam desiderat. Nos omisimus, brevitatis studio, & quia eorum nullus usus in his elementis.





E V C L I D I S

ELEMENTORVM

LIBER VI.

DEFINITIONES.

1. *Similes figurae rectilineae* sunt, quae & singulos angulos singulis aequales habent, & circa aequales angulos latera proportionalia.

* Nota similitudinis est haec $\sim$.

2. *Reciprocae figurae* sunt, quando in vtraque figura antecedentes & consequentes rationum termini fuerint.

3. *Secundum extremam & mediam rationem recta linea secta* esse dicitur, quando vt tota ad maius segmentum, ita maius segmentum ad minus se habuerit.

4. *Altitudo cuiusque figurae* est linea perpendicularis, a vertice ad basin ducta.

5. *Ratio ex rationibus componi* dicitur, quando rationum quantitates, inter se multiplicatae, illius faciunt quantitatem.

* Signum quantitatis rationis $A : B$ est $\frac{B}{A}$, sci-

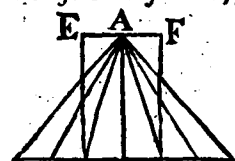
licet signum quoti, qui indicat, quoties antecedens contineat consequentem vel aliquotam eius partem. Iam quia rationum $A : B$ & $B : C$ quantita-

tes $\frac{A}{B}$ & $\frac{B}{C}$ inter se multiplicatae faciunt $\frac{A}{C}$,

quae quantitas est rationis $A : C$: dicimus rationem $A : C$ componi ex rationibus $A : B$ & $B : C$, quod sic scribimus $(A : C) = (A : B) + (B : C)$.

PROP. 1. THEOR.

Triangula ABC, ACD, & parallelogramma EC, CF, quae eandem habent altitudinem, sunt inter se ut bases BC, CD.



α. 38. I.

HGB CDKL $\Delta ABG = \Delta AGH = \Delta ABC$, & sunt proinde basis HC & ΔACH basis BC & trianguli ABC aequae multiplicia. Similiter patet, esse basin CL & ΔACL basis CD & ΔACD aequae multiplicia. Iam si $HC >, =, < CL$: erit & $\Delta ACH >, =, < \Delta ACL$. Ergo $BC : CD = \Delta ACB : \Delta ACD$. Q. E. D.

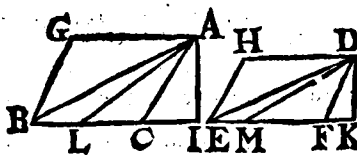
γ. 41. I.

δ. 15. 5.

ε. 11. 5.

2. Quia Pgra. EC: CF sunt dupla γ Δ rum ABC, ACD, & hinc δ $EC : CF = \Delta ABC : \Delta ACD$: erit ϵ $EC : CF = BC : CD$. Q. E. D.

* Scholium.



Hinc triangula ABC, DEF, & Pgra. GC, HF, quorum aequales sunt bases BC, EF, ita se habent ut altitudines AI, DK.

Sume $IL = CB$, & $KM = FE$, ac iunge LA,

ζ. 1. 6.

η. 38. I.

θ. 7. & 11. 5.

ι. 15. 5.

MD. Quia ergo $IL = KM$: erit ζ $\Delta ALI : \Delta DMK = AI : DK$. Sed $\Delta ALI = \eta$ ΔABC , & $\Delta DMK = \Delta DEF$. Ergo $\Delta ABC : \Delta DEF = \theta$ $AI : DK = \iota$ Pgra. GC: Pgra. HF. Q. E. D.

PROP.

PROP. II. THEOR.

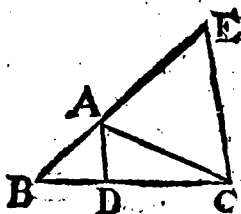


Si uni laterum BC trianguli ABC parallela recta linea DE ducatur: haec proportionaliter secabit ipsius trianguli latera AB, AC. Et si trianguli ABC latera CAB, AC proportionaliter secta fuerint: quae sectiones coniungit recta linea DE reliquo trianguli lateri BC parallela erit.

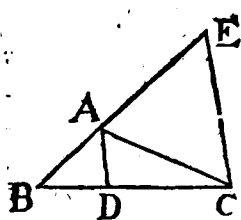
1. Sit DE ad BC parallela: dico fore BD: DA = CE: EA. Iungantur enim DC, BE. Et quia * DE, BC parallelae: erit $\triangle BDE \stackrel{\lambda}{=} \triangle CDE$. $\triangle BDE: \triangle CDE = \triangle ADE: \triangle ADE$. Ergo $\triangle BDE: \triangle ADE = \triangle CDE: \triangle ADE$. Atqui $\triangle BDE: \triangle ADE = BD: DA$. $\triangle CDE: \triangle ADE = CE: EA$. Ergo BD: DA = CE: EA. Q. E. D.

2. Quia ° BD: DA = CE: EA, & BD: DA = CE: EA. Ergo $\triangle BDE: \triangle EDA = \triangle CDE: \triangle EDA$. $\triangle BDE: \triangle EDA = \triangle CDE: \triangle EDA$. $\triangle BDE: \triangle CDE = \triangle EDA: \triangle EDA$. $\triangle BDE: \triangle CDE = 1: 1$. Ergo $\triangle BDE = \triangle CDE$. Quare ° ED, BC parallelae sunt. Q. E. D.

PROP. III. THEOR.



Si trianguli ABC angulus A bisariam secetur, secans autem angulum recta linea AD secet etiam basim BC: basis segmenta BD, DC eandem rationem habebunt, quam reliqua trianguli latera BA, AC.



Et si basis BC segmenta BD, DC eandem habeant rationem, quam reliqua trianguli ABC latera BA, AC: quae a vertice A ad sectionem D ducitur. recta linea AD, trianguli angulum A bifariam secabit.

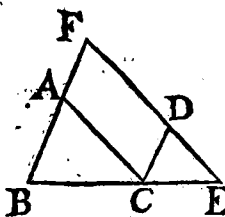
v. 29. I.
φ. hyp.
x. 6. I.
ψ. 2. 6.

1. Ducatur enim ad AD parallela CE, & producat BA in E. Quia ergo ang. ACE =^v CAD, & AEC =^v BAD, & CAD =^φ BAD: erit ACE = AEC, & AC =^x AE. Hinc ψ BD: DC = BA: AC. Q. E. D.

u. 11. 5.
a. 9. 5.
β. 5. I.

2. Iisdem constructis, si BD: DC = BA: AC: quia BD: DC =^ψ BA: AE, erit BA: AC =^u BA: AE, & ergo AC =^a AE, & ang. ACE =^β AEC. Sed ang. ACE =^v DAC & ang. AEC =^v BAD. Ergo ang. BAD = DAC. Angulus igitur A bifectus est a recta AD. Q. E. D.

PROP. IV. THEOR.



Aequiangulorum triangulorum ABC, DCE proportionalia sunt latera, quae circum aequales angulos; & homologa sunt latera, quae aequalibus angulis subtenduntur.

Sit ang. A = D, B = DCE, & ACB = E: dico fore BA: AC = CD: DE, item BG: CA = CE: ED, & AB: BC = DC: CE.

Posita

Posita enim CE ipsi BC in directum, pro-
duc BA & ED, quae in F concurrent: quia
ang. B + E = γ B + ACB < δ 2 rectis. γ . hyp.
Et quia ergo CD ad BF, & AC ad FE paralle-
la¹ est: erit $\angle$ AF = CD, & FD = AC. Sed γ . 17. 1.
BA: AF = BC: CE, & alterne AB: BC = AF:
CE, & DC: CE = γ AF: CE. Ergo AB: BC
= DC: CE. γ . 2. 6. 3. 7. 5.

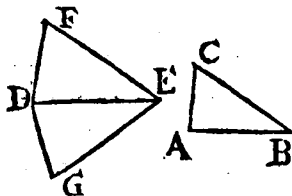
Rursus ob CD, BF parallelas est γ BC: CE
= FD: DE = AC: DE. Ergo alterne BC:
CA = CE: ED.

Et quia erat AB: BC = DC: CE: erit ex
aequo¹ BA: AC = CD: DE. Q.E.D. γ . 22. 5.

* Scholia.

1. Hinc AB: DC = γ BC: CE = AC: DE. γ . 16. 5.
2. Si in Δ EFB ducitur basi BF parallela CD; est
BF: CD¹ = BE: EC = FE: ED. γ . 18. 5.
3. Triangula aequiangula similia sunt.

PROP. V. THEOR.



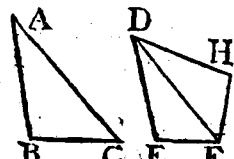
*Si duo triangula
ABC, DEF latera ha-
beant proportionalia:
aequiangula erunt
triangula, & aequa-
les habebunt angulos,
quibus homologa latera subtenduntur.*

Fac ad rectae DE¹ punctum quidem D ang. μ . 23. 1.
EDG = CAB, ad punctum vero E ang. DEG γ . 32. 1.
= CBA: & reliqui G, C aequales erunt². Er-
go³ AB: BC = DE: EG. Sed⁴ AB: BC = γ hyp.
DE: EF. Ergo EG = γ EF. Similiter quia γ . 9. 5.

8. I. $ED:DG = AB:AC = ED:DF$; erit $DG = DF$. Quare $\angle F = G = C$, & $\angle FDE = EDG = A$, & $\angle FED = DEG = B$. Q. E. D.

* Schol. Talia ergo triangula similia sunt. (3. sch. 4. 6.)

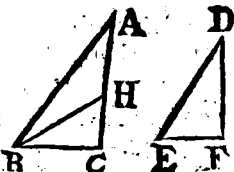
PROP. VI. THEOR.

 Si duo triangula ABC, DEF unum angulum A uni angulo FDE aequalem habeant; circa aequales autem angulos latera proportionalia ($BA:AC = ED:DF$): aequiangula erunt triangula, & aequales habebunt angulos, quibus homologa latera BA, ED, & AC, DF subtenduntur ($B = DEF$, & $C = DFE$).

Ad rectam DF fiant $\angle HDF = A$ vel FDE , & $\angle DFH = C$. Erit ergo $\angle H = B$, & $HD:DF = BA:AC = ED:DF$. Quare $HD = ED$, ideoque $\angle DEF = H = B$, & $\angle DFE = DFH = C$. Q. E. D.

* Schol. Talia ergo triangula similia sunt.

PROP. VII. THEOR.

 Si duo triangula ABC, DEF unum angulum A uni D aequalem habeant; circa alios autem angulos ABC & E latera proportionalia

tionalia ($AB:BC = DE:EF$); *reliquorum vero* C, F *utrumque simul vel minorem vel non minorem recto*: *aequiangula erunt triangula, & aequales habebunt angulos* ABC & E, *circa quos latera sunt proportionalia.*

1. Si enim non est $ABC = E$: sit alteruter ABC maior, & ponatur $\angle$ ang. ABH = E. Sint $\angle$. 23. 1. C, F acuti. Iam quia & $A = D$: erit in aequiangularibus triangulis ABH, DEF, $AB: BH = DE: EF$. Sed $AB: BC = DE: EF$. Ergo $BH = BC$, ideoque $\angle$ ang. BHC = $\angle$ hyp. C < $\angle$ recto. Quare $\angle$ ang. BHA > recto, & proinde ang. F > recto; contra hypothesisin.

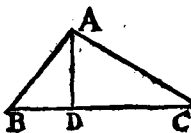
2. Pone autem utrumque C, F non esse recto minorem, & tamen $ABC > E$. Quia ang. BHC = C: ang. BHC + C non essent duobus rectis minores. Q. E. A. 2. Ergo in utroque casu ang. ABC = E; & hinc ang. C = F. Q. E. D.

* Scholia.

1. Talia ergo triangula etiam similia sunt. (3. sch. 4. 6.).

2. Eodem prorsus modo ex 26. 1. in locum 4. 6. substituta demonstrari potest hoc theorema: Si duo triangula unum angulum uni aequalem habeant, circa alios autem angulos latera aequalia, reliquorum vero angulorum utrumque simul aut minorem aut non minorem recto: aequalia erunt triangula, & aequales habebunt angulos, circa quos sunt aequalia latera, & tertium latus tertio aequale habebunt.

PROP. VIII. THEOR.

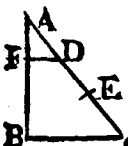
 Si in triangulo rectangulo ABC ab angulo recto A ad basin BC perpendicularis AD ducatur: quae ad perpendicularem sunt triangula ADB, CDA & toti ABC & inter se sunt similia.

4. 10. ax. Nam ang. BDA = ^o CDA = BAC, & ang.
9. 32. 1. BAD = ^o C, ob communem B, item ang.
CAD = B, ob communem C. Ergo Δa. ADB,
1. 3. sch. 4. 6. CDA, & ABC sunt aequiangula, & proinde
similia. Q. E. D.

Coroll.

Ex hoc manifestum est, in triangulo rectangulo perpendicularem, ab angulo recto ad basin ductam, mediam proportionalem esse inter segmenta basis ($\div$ BD, DA, DC); & praeterea, inter basin & basis segmentum utrumlibet, latus segmento conterminum medium esse proportionale ($\div$ BC, CA, CD, & $\div$ CB, BA, BD).

PROP. IX. PROBL.

 A data recta linea AB imperatam partem (e. gr. tertiam) abscindere.

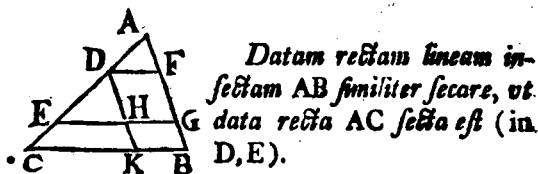
Ducatur ex A sub quovis angulo recta AC, & in ea sumatur punctum D utcumque, & ipsi AD aequales fiant DE, EC. Iunctae BC parallela fiat DF.

2. 2. 6. Erit ergo * BF : FA = CD : DA. Sed DC
1. 8. def. 5. = 2 DA, ergo BF = ¹ 2 AF, & AB = ³ AF,
id est AF = $\frac{1}{3}$ AB. Q. E. F.

* Scholium.

* *Schol.* Sumitur in hac demonstratione, si quatuor magnitudinum proportionalium ($CD : DA = BF : FA$) prima secundae sit multiplex, tertiam quartae aequè multiplicem esse. Cuius veritas, si cui ex 3. & 8. def. 5. non pateret, sic ostendi posset. Sumatur aliqua G , quae sit aequè multiplex ipsius FA ac CD ipsius DA : erit (15. 5.) $G : CD = FA : DA$, & alterne $G : FA = CD : DA = BF : FA$. Ergo $BF = G$, & ideo BF tam multiplex ipsius FA , quam CD ipsius DA .

PROP. X. PROBL.



Datam rectam lineam intersectam AB similiter secare, ut data recta AC secta est (in D, E).

Pone datas AB, AC ita, ut quemvis angulum A comprehendant; iunge BC , & huic duc parallelas EG, DF .

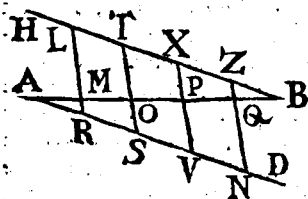
Iam, si praeterea ipsi AB ducta fuerit parallela DHK , erit $^{\circ} DH = FG$ & $HK = GB$. $^{\circ} 34. 1.$ Porro in $\triangle KDC$ est $^{\circ} CE : ED = KH : HD$. $^{\circ} 2. 6.$ $\therefore BG : GF$. Et in $\triangle GAE$ est $^{\circ} ED : DA = GF : FA$. $^{\circ} 7. 5.$ Ergo segmenta rectae AB se habent ut segmenta rectae AC . Q. E. F.

Corollar.

Ergo si ad unum trianguli latus plures parallelae ductae fuerint: erunt omnia laterum reliquorum segmenta proportionalia.

* *Scholium.*

* Scholium.



Hinc discimus rectam datam AB in quovis aequales partes (puta 5) secare, id quod facilius praestatur sic: Duc infinitam AD, eique parallelam BH et-

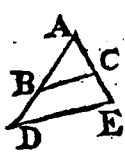
nam infinitam. Ex his cape partes aequales AR, RS, SV, VN, & BZ, ZX, XT, TL, in singulis vna pauciores, quam desiderantur in AB. Tum rectae ducantur LR, TS, XV, ZN, hae quinquiescabit datam AB. Nam RL, ST, VX, NZ * parallelae sunt; ergo quum AR, RS, SV, VN aequales sint: erunt * AM, MO, OP, PQ aequales. Similiter quia BZ = ZX: erit BQ = QP. Ergo AB quinquiesceta est.

* 33. I.

* cor. hui.

& sch. 14. 5.

PROP. XI. PROBL.



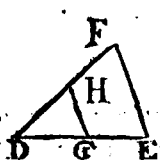
Duabus datis rectis lineis AB, AC, tertiam proportionalem invenire.

Datas rectas sub quovis angulo A positas produc, & in AB producta cape BD = AC, iunge BC, cui parallelam age DE.

* 2. 6.

Sic erit AB:BD id est AB:AC = AC:CE. Q. E. F.

PROP. XII. PROBL.



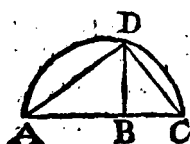
Tribus datis rectis lineis A, B, C, quartam proportionalem invenire.

Sub angulo quovis D ducantur rectae infinitae DE, DF, in quibus capia-

capiatur $DG = A$, $GE = B$, $DH = C$; iunctae GH parallela ducatur EF .

His enim factis, erit $^{\circ} DG : GE = DH : HF$, $\epsilon. 2. 6.$
id est $A : B = C : HF$. Q. E. F.

PROP. XIII. PROBL.



*Duabus datis rectis lineis
AB, BC, mediam proportiona-
lem inuenire.*

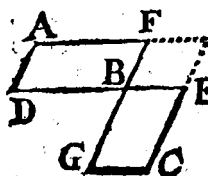
Ponatur in directum, &
super AC describatur semi-
circulus ADC , ducaturque a puncto B ipsi AC
ad rectos angulos BD .

Ductis enim AD, DC , erit, ob ang. ADC $\epsilon. 31. 3.$
rectum, $\div AB ; BD, BC$. Q. E. F. $\epsilon. cor. 8. 6.$

* Scholium.

Et (per 1. sch. 31. 3.) si recta BD , rectae AC ad re-
ctos insistens, sit media proportionalis inter has
segmenta AB, BC : semicirculus super hac AC descri-
ptus, per extremum illius D transibit. Nam quia
(per 6. 6.) ang. $A = BDC$, & $C = ADB$: erit ADC
rectus (per cor. 31. 3.).

PROP. XIV. THEOR.

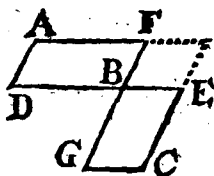


*Parallelogrammorum $AB,$
 BC aequalium, & unum an-
gulum B uni B aequalem ha-
bentium, reciproce propor-
tionalia sunt latera, quae cir-
cum aequales angulos ($DB :$*

$BE = GB : BF$). *Et quorum parallelogrammo-
rum AB, BC , unum angulum B uni B aequalem ha-
bentium, reciproce proportionalia sunt latera,
quae circum aequales angulos B , illa inter se sunt
aequalia.*

Positis

φ. 3. sch.
15. 1.



Positis in directum DB
& BE: erunt & FB, BG^φ
in directum. Complea-
tur Pgr. FE.

κ. 7. 5.

ψ. 1. 6.

α. 11. 5.

1. Iam quia Pgr. AB
= BC: erit $AB: FE = \alpha$
 $BC: FE$. Sed $AB: FE = \psi DB: BE$, &
 $BC: FE = GB: BF$. Ergo $DB: BE =$
 $GB: BF$. Q. E. D.

α. 9. 5.

2. Quia per hyp. $DB: BE = GB: BF$; &
 $DB: BE = \psi$ Pgr. AB: FE; & $GB: BF = BC:$
 FE : erit Pgr. AB: FE = α BC: FE; quare
Pgr. AB = α BC. Q. E. D.

PROP. XV. THEOR.



Triangulorum aequalium
ABC, ADE, & unum angulum
BAC uni DAE aequalem ha-
bentium, reciproce proportiona-
lia sunt latera, quae circum
aequales angulos ($CA: AD =$

$EA: AB$). Et quorum triangulorum ABC,
ADE, unum angulum BAC uni DAE aequalem
habentium, reciproce proportionalia sunt late-
ra, quae circum aequales angulos, illa sunt
inter se aequalia.

φ. 3. sch.
15. 1.

Ponantur in directum latera CA, AD, quo
facto & BA, AE in directum^β erunt. Iun-
gatur quoque BD.

κ. 7. 5.

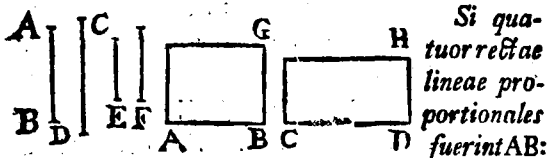
ψ. 1. 6.

1. Iam quia $\triangle ABC = \triangle ADE$ per hyp. erit
 $\triangle ABC: \triangle ABD = \triangle ADE: \triangle ABD$. At-
qui $\triangle ABC: \triangle ABD = \delta CA: AD$, & $\triangle$
ADE;

$ADE: \triangle ABD = EA: AB$. Ergo $CA: AD = EA: AB$. Q.E.D.

2. Quom per hyp. $CA: AD = EA: AB$, & 1. 11. 5. $CA: AD = \triangle ABC: \triangle ABD$, & $EA: AB = \triangle ADE: \triangle ABD$: erit $\triangle ABC: \triangle ABD = \triangle ADE: \triangle ABD$. Ergo $\triangle ABC = \triangle ADE$. 9. 5. Q.E.D.

PROP. XVI. THEOR.



$CD = E: F$: rectangulum $AB \times F$, sub extremis comprehensum, aequale est rectangulo $CD \times E$, quod sub mediis comprehenditur. Et si rectangulum $AB \times F$, sub extremis comprehensum, aequale fuerit ei $CD \times E$, quod sub mediis comprehenditur: quatuor rectae lineae AB , CD , E , F proportionales erunt.

Fiat enim super AB rectangulum, cuius 2. sch. 46. 1. alterum latus $BG = F$, item super CD fiat Rgl. CH , cuius alterum latus $DH = E$.

1. Quia ponitur $AB: CD = E: F = DH$: 7. 5. BG : erit $AG = CH$, id est $AB \times F = CD \times E$. 14. 6. Q.E.D.

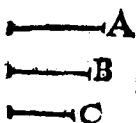
2. Quia pgra AG , CH , angulos rectos B , D aequales habentia, aequalia ponuntur: erit $AB: CD = DH: BG = E: F$. Q.E.D.

* Schol. Hinc ad datam rectam AB facile est datum rectangulum CH applicare, faciendo 12. 6. $AB: CD = DH: BG$.

K

PROP.

PROP. XVII. THEOR.



Si tres rectae lineae A, B, C proportionales fuerint: rectangulum, sub extremis A, C comprehensum, aequale est ei, quod a media B fit, quadrato. Et si rectangulum, sub extremis A, C comprehensum, aequale fuerit ei, quod a media B fit, quadrato: tres rectae lineae A, B, C proportionales erunt.

rectangulum, sub extremis A, C comprehensum, aequale est ei, quod a media B fit, quadrato. Et si rectangulum, sub extremis A, C comprehensum, aequale fuerit ei, quod a media B fit, quadrato: tres rectae lineae A, B, C proportionales erunt.

x. 16. 6.

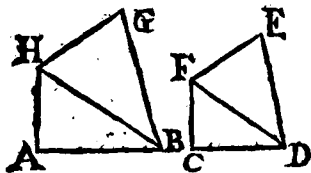
λ. 29. def.

1.

1. Sit $D = B$. Iam quia (hyp.) $A : B = B : C$: erit $A : B = D : C$. Ergo $A \times C = B \times D = B^2$. Q. E. D.

2. Quia ponitur $A \times C = B^2 = B \times D$: erit $A : B = D : C = B : C$. Q. E. D.

PROP. XVIII. PROBL.



Adata recta linea AB dato rectilineo CE simile et similiter positum rectilineum describere.

π. 23. 1.

Iunge DF, & fac^{re} ang. $A = C$, & ang. $ABH = CDF$, ang. vero $BHG = DFE$, & ang. $HGB = FDE$. Rectilineum AHGB erit $\sim$ ipsi CDEF.

π. constr. & Nam $\triangle HBA$ aequiangulum est $\triangle FDC$:

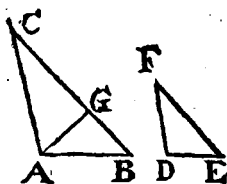
32. 1. & ergo $HB : FD = HA : FC = AB : CD$.

ξ. 1. sch. 4. 6. Eadem ratione in $\triangle$ is HGB, FED est $HB : FD$

π. 11. 5. $= BG : DE = GH : EF$. Ergo $HA : FC = AB$

$\equiv AB:CD \equiv BG:DE \equiv GH:EF$. Praeterea per constr. est ang. $A \equiv C$, & $B \equiv ABH + HBG \equiv CDF + FDE \equiv D$, & $G \equiv E$, & $H \equiv GHB + BHA \equiv EFD + DFC \equiv F$. Ergo rectilineum $AHGB$ dato CE simile π est & similiter super data π . 1. def. 6. AB positum. Q.E.F.

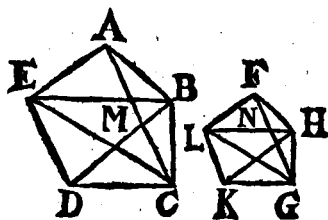
PROP. XIX. THEOR.



Similia triangula ABC, DEF sunt inter se in duplicata ratione laterum homologorum BC, EF.

Fiat enim $e \div BC, EF$, e. 11. 6. BG , iungatur GA . Quia igitur (hyp.) est $AB:BC \equiv DE:EF$, & al. e. 16. 5. $AB:DE \equiv BC:EF \equiv EF:BG$, π . constr. ang. autem $B \equiv E$ (hyp.): erit $\triangle ABG \equiv \triangle DEF$. Quare $\triangle ABC: \triangle DEF \equiv \triangle ABC: \triangle ABG \equiv BC:BG \equiv (BC:EF)$ 2. ψ . 10. def. Q.E.D. 5.

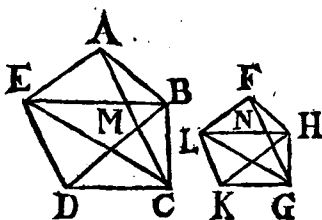
PROP. XX. THEOR.



Similia polygona ABCDE, FLKGH in similia triangula dividuntur, & numero aequalia, & homologa totis.

Et polygonum ABCDE ad polygonum FLKGH duplicatam rationem habet eius, quam latus homologum AB habet ad latus homologum FH.

α. 1. def. 6.



β. 6. 6.

1. Iungantur
EB, EC, LH,
LG. Quia *ang.
EAB = LFH,
& BA: AE =
HF: FL: erit^β
 $\triangle EAB \sim \triangle$

LFH, & ang. ABE = FHL, & EB: BA = LH:
HF. Sed est etiam *ang. ABC = FHG, &
AB: BC = FH: HG. Ergo ang. EBC =
LHG, & ex aequo^δ EB: BC = LH: HG. Qua-
re^β $\triangle BEC \sim \triangle HLG$, & ang. ECB = LGH,
& EC: CB = LG: GH. Hinc similiter de-
monstratur $\triangle CED \sim \triangle GLK$. Q. E. D.

γ. 3. ax.

δ. 22. 5.

z. dem.

ζ. 32. 1.

η. 4. 6.

θ. 1. 6.

ι. 12. 5.

κ. 11. 5.

2. Dico fore $\triangle ABE: \triangle FHL = \triangle BEC:$
 $\triangle HLG = \triangle CED: \triangle GLK = \text{Pol. } ABCDE:$
 $\text{Pol. } FGHKL$. Iungantur enim AC, FG, DB,
KH. Iam quia propter similitudinem poly-
gonorum ang. ABC = FHG, & AB: BC =
FH: HG: erit^β ang. BAM = HFN, & BCM
= HGN. Sed^z ang. ABM = FHN, & MBC
= NHG, ergo^ζ aequiangula sunt $\triangle a$ ABM,
FHN, item $\triangle MBC$, NHG. Quare^η AM:
MB = FN: NH, & MB: MC = NH: NG,
& ex aequo^δ AM: MC = FN: NG. Atqui^θ
 $\triangle ABM: \triangle MBC = AM: MC = \triangle AME: \triangle$
 $\triangle EMC$, & hinc $\triangle ABE: \triangle BEC = \triangle ABM: \triangle$
 $\triangle MBC = AM: MC$. Similiter ostenditur $\triangle$
 $\triangle FHL: \triangle HLG = FN: NG$. Ergo^κ $\triangle ABE:$
 $\triangle BEC = \triangle FHL: \triangle HLG$, & alternando^ι $\triangle$
 $\triangle ABE: \triangle FHL = \triangle BEC: \triangle HLG$. Similiter
ostendemus ope rectarum DB, KH esse $\triangle BEC:$
 $\triangle HLG$

$\triangle HLG = \triangle CED : \triangle GLK$. Quare erit $\triangle ABE \propto \triangle FHL = \triangle BEC : \triangle HLG = \triangle CED : \triangle GLK =$ ' Pol. $ABCDE : \text{Pol. } FHGKL$. Q. E. D.

Aliter & expeditius idem sic demonstratur.

Quia $\triangle ABE \sim \triangle FHL$, est $\triangle ABE : \triangle FHL =^{\wedge} (BE : HL)$ 2. Sed $\triangle EBC, LHG$ ob similitudinem sunt in eadem ratione $(BE : HL)$ 2. Ergo $\triangle ABE : \triangle FHL = \triangle EBC : \triangle LHG$. Similiter $\triangle EBC : \triangle LHG = (CE : GL) 2 = \triangle CED : \triangle GLK$. Ergo $\triangle ABE : \triangle FHL = \triangle EBC : \triangle LHG = \triangle CED : \triangle GLK =$ ' Pol. $ABCDE : \text{Pol. } FHGKL$. Q. E. D.

3. Dico $ABCDE : FHGKL = (AB : FH)$ 2. Nam quia $\triangle ABE : \triangle FHL =^{\wedge} (AB : FH)$ 2 : erit Pol. $ABCDE : \text{Pol. } FHGKL =^* (AB : FH)$ 2. Q. E. D.

Corollaria.

1. Quum de similibus quadrilateris eodem modo demonstretur, ea esse in ratione duplicata laterum homologorum, & idem de triangulis ^{14. 19. 6.} ostensum sit: patet vniuersae, *similes rectilineas figuras inter se esse in ratione duplicata homologorum laterum.*

2. Et quia, si homologis lateribus AB, FH tertia proportionalis T sumitur, est AB ad T in ratione duplicata ^{10. def. 5.} homologorum laterum: manifestum est, *si tres rectae lineae proportionales fuerint, ut prima ad tertiam, ita esse figuram rectilineam, quae sit a prima, ad similem & similiter descriptam a secunda.*

* Schol.

Hinc elicitor methodus figuram quamvis rectilineam augendi vel minuendi in ratione data. Vt,

K 3

si velis

- §. 13. 6. si velis Pentagoni, cuius latus CD, aliud facere
 §. 18. 6. quintuplum: inter CD & 5. CD quaere $\frac{1}{2}$ mediam
 proportionalem, super quam $^{\circ}$ construe pentagonum
 simile dato. Hoc erit quintuplum dati.

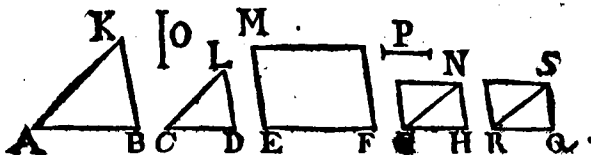
PROP. XXI. THEOR.



Quae A, B eidem
 rectilineo C sunt si-
 milia, & inter se sunt
 similia.

- nam quia vtrumque A, B eidem C simile
 . I. def. 6. est: vtrumque $^{\circ}$ aequiangulum erit ipsi C, &
 circum aequales angulos latera habebit pro-
 portionalia. Quare & A ipsi B aequian-
 gulum $^{\circ}$ est, & in vtroque latera circum
 aequales angulos proportionalia $^{\circ}$ sunt; ac
 . II. 5. ergo $A \sim B$. Q. E., D.

PROP. XXII. THEOR.



Si quatuor rectae lineae proportionales fue-
 rint $AB:CD=EF:GH$: & rectilinea
 AKB, CLD, FM, GN, quae ab ipsis fiunt, simi-
 lia & similiter descripta, proportionalia erunt.
 Et si rectilinea AKB, CLD, FM, GN, quae ab
 ipsis AB, CD, EF, GH fiunt, similia & simili-
 ter descripta, proportionalia fuerint: & ipsae
 rectae lineae AB, CD, EF, GH proportio-
 nales erunt.

1. Sumatur enim τ ipsis AB, CD tertia τ . II. 6.
 proportionalis O, & ipsis EF, GH tertia
 proportionalis P. Et quia est ν AB: CD $\equiv$ ν . hyp.
 EF: GH, & ergo CD: O $\equiv$ ϕ GH: P: erit ϕ . II. 5.
 ex aequo $\propto$ AB: O $\equiv$ EF: P. Atqui $\propto$. 22. 5.
 AB: O $\equiv$ ψ AKB: CLD, & EF: P $\equiv$ ψ . 2. cor.
 FM: GN. Ergo ϕ est AKB: CLD $\equiv$ 20. 6.
 FM: GN. Q.E.D.

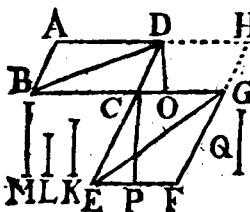
2. Sit AKB: CLD $\equiv$ FM: GN, & fiat α . 12. 6.
 AB: CD $\equiv$ EF: QR, a qua α ipsi FM vel α . 18. 6.
 GN simile & similiter positum. RS describa-
 tur. Ergo erit (per part. 1. hui.) AKB:
 CLD $\equiv$ FM: RS. Hinc FM: GN $\equiv$ ϕ . 9. 5.
 FM: RS. Est ergo β RS $\equiv$ GN, & hinc
 (per Lemma sequens) QR $\equiv$ GH, ideoque
 AB: CD $\equiv$ ν EF: GH. Q.E.D. γ . 7. 5.

L E M M A.

*Si rectilinea GN, RS similia & aequalia sunt:
 homologa ipsorum latera GH, QR inter se sunt
 aequalia.*

Si enim negas: alterutrum, veluti QR
 $>$ GH erit. Et quia est per hyp. QR:
 QS $\equiv$ GH: HN: erit QS $>$ δ HN. δ . 14. 5.
 Quare Δ RSQ ipsi GNH impositum non
 congruet, sed maius erit. Est autem τ Re- τ . 20. 6.
 ctil. SR: Rectil: GN $\equiv$ Δ RSQ: Δ GNH.
 Ergo δ esset Rectil: SR $>$ Rectilineo GN:
 contra hypothesin. Ergo GH $\equiv$ QR.
 Q.E.D.

PROP. XXIII. THEOR.



A quiangula Parallelogramma AC, CF inter se rationem habent ex lateribus compositam
 $AC:CF=(BC:CG)+(DC:CE)$.

Positis BC, CG, quae sunt circa aequales
 1. sch. 15. 1. angulos C, in directum, erit & DCE vna recta.
 Compleatur Pgr. DHGC, & sumta aliqua recta
 2. 12. 6. K fiat $BC:CG=K:L$, & $DC:CE=L:M$.
 3. 5. def. 6. Erit ergo $K:M=(K:L)+(L:M)=(BC:CG)+(DC:CE)$. Iam quum sit $K:L=BC:CG=^s AC:CH$, & $L:M=DC:CE=^s CH:CF$: erit ex aequo $K:M=AC:CF$. Quare $AC:CF=(BC:CG)+(DC:CE)$. Q. E. D.

* Scholia.

1. Hinc & ex 34. 1. patet primo, triangula BDC, CEG quae vnum angulum (ad C) aequalem habent, esse in ratione composita laterum $(BC:CG)+(DC:CE)$ aequalem angulum continensium.

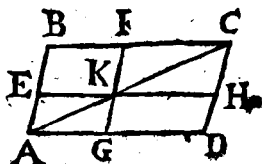
2. Patet rectangula $AD \times DO, GC \times CP$, ac proinde * Pgra quaecunque AC, CF, & triangula $\wedge BCD, CEG$, rationem inter se habere compositam ex rationibus basium & altitudinum, sc. $(AD:CG)+(DO:CP)$.

3. Patet, quomodo triangulorum ac parallelogrammorum ratio exhiberi possit. Sunt Pgra AC, CF, quorum bases AD, CG, altitudines vero DO, CP. Fiat $CP:DO=AD:Q$: erit $AC:CF=(AD \times DO:GC \times CP)=^s Q:GC$.

4. Patet via dimeiendi propositum parallelogrammum CF, vel triangulum. Sumatur pro unitate quoduis

quoduis quadratum, cuius latus sit K ; quaeratur ratio basis CG , & ratio altitudinis CP ad latus K , e. gr. sit $CG = 2 K$, & $CP = 3 K$; multiplicentur hi numeri per se inuicem: dico, fore $CF = 6 Kq$. Nam $CF:Kq = (CG:K) + (CP:K) = (2:1) + (3:1) = 6:1$. Ergo $CF = 6 Kq$. v. 5. def. 6. Hinc $\triangle CEG$ erit $3 Kq$.

PROP. XXIV. THEOR.



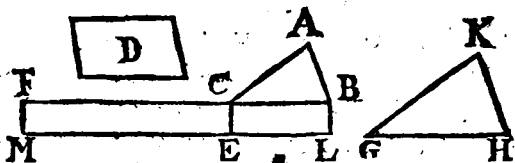
Omnis parallelogrammi ABCD quae circa diametrum AC sunt parallelogramma EG, HF sunt similia toti & inter se.

Nam, quia EH ad CB parallela, est $\frac{1}{2}$ $BE:EA = CK:KA$. Et quia GF, CD parallelae sunt, est $\frac{1}{2}$ $CK:KA = DG:GA$. Ergo $\frac{1}{2}$ $BE:EA = DG:GA$, & componendo $\frac{1}{2}$ $BA:AE = DA:AG$, & alterne $\frac{1}{2}$ $BA:AD = EA:AG$, id est latera circum angulum communem BAD proportionalia sunt. Porro quia triangula GAK, KAE triangulis CAD, CAB aequiangula sunt: erit & totum $Pgr. EG$ toti $ABCD$ aequiangulum, & circum aequales angulos D, G , erit $AD:DC = AG:GK$; circum aequales autem B, E , $AB:BC = AE:EK$; denique ob eandem rationem $DC:CA = GK:KA$, & $CA:CB = KA:EK$, ideoque ex aequo $DC:CB = KG:EK$ circum aequales angulos BCD, EKG . Ergo $Pgra ABCD, EG$ similia sunt. Idem eodem modo de $Pgris ABCD$ & FH ostenditur. Ergo etiam ipsa GE, HF similia sunt. Q. E. D.

* *Coroll.* Hinc Pgra, quae vnum angulum vni angulo aequalem & circum eos proportionalia latera habent, similia sunt.

PROP. XXV. PROBL.

*Dato rettilineo ABC simile & alteri dato D.
aequale idem constituere.*



x. 44. vel
45. I.

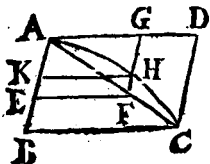
ψ. 13. 6.
ω. 18. 6.

α. constr.
 β. 29. I.
 γ. 14. I.
 δ. I. 6.
 ε. 2. cor.
 20. 6.
 ζ. II. 5.
 η. 9. 5.

Applicetur $\propto$ ad rectam BC rectilineo ABC
aequale Pgr. BE, ad rectam vero CE dato D
aequale Pgr. CM, in angulo FCE = CBL. Su-
mat^{ur} inter BC, CF media ψ proportionalis
GH, a qua describatur $\propto$ rectilineum KHG
ipsi ABC simile & similiter positum. Dico,
etiam esse KHG = D.

Nam quia ang. $FCE + ECB = \sphericalangle BCE + ECB = \sphericalangle 2$ rectis: erunt BC, CF in γ directum, itemque LE, EM . Quare $\sphericalangle BC: CF = BE: CM = \sphericalangle ACB: D$. Iam quum sit $\sphericalangle \div BC, GH, CF$: est $BC: CF = \sphericalangle ABC: KHG$. Ergo $ABC: KHG = \sphericalangle ABC: D$, & hinc $\sphericalangle KHG = D$. Q.E.F.

PROP. XXVI. THEOR.

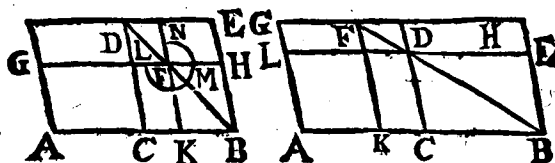


*Si a parallelogrammo AB-
CD parallelogrammum AE-
FG auferatur simile toti, &
similiter positum, communem
cum ipso angulum DAB ha-
bens:*

bens: circa eandem diametrum AC est cum toto.

Si negas: sit AHC diameter Pgr̃i ABCD secans GF extra F, vt in H & ducatur ipsi AD vel BC parallela HK. Erit² ergo Pgr. GK s. 9. 24. 6. mīle toti ABCD, & hinc $DA:AB = GA:AK$. I. def. 6. Sed quia ponitur Pgr. GE ∩ ABCD: est quoque $DA:AB = GA:AE$. Ergo $GA:AK = GA:AE$. x. 11. 5. $GA:AE$, hinc $AK = AE$. Q. F. N. 2. 9. 5.

PROP. XXVII. THEOR.

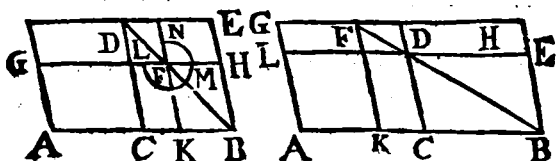


Omnium parallelogrammorum AF secundum eandem rectam lineam AB applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis KH, similibus & similiter positis ei CE, quae a dimidia CB describitur, maximum est AD, quod ad dimidiam AC est applicatum, simile existens defectui KH.

Ducatur ipsius KH diameter FB, & ipsius CE diameter DB, & describatur figura. Et quia KH ∩ CE, diametri illorum & FB, BD μ. 26. 6: coincident. Iam

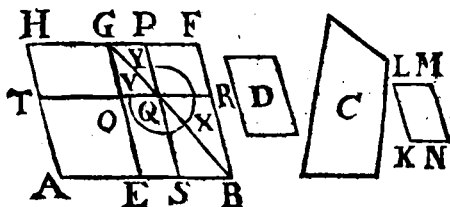
Cas. 1. Sit $AK > AC$. Quoniam $CF =$ 43. 1. FE: erit, addito KH communi, $CH = KE$. Ergo $CG = CH = KE$, & addito CF communi, $AF =$ gnom. LMN. Atqui $AD =$ CE > gnomone LMN. Ergo $AD > AF$. Q. E. D.

Cas.



Caf. 2. Sit $AK < AC$. Quia $CB = AC$;
 $\nu. 43. I.$ erit $ED = DL$, & hinc $DH = \frac{1}{2} DG > FL$.
 $\xi. 36. I.$ Ergo $DK = DH > FL$: & communi LK addi-
 $\circ. 34. I.$ to, $AD > AF$. Q. E. D.

PROP. XXVIII. PROBL.



Ad datam rectam lineam AB dato rectilineo C aequale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, quae similis sit alteri datae D: oportet autem datum rectilineum C, cui aequale applicandum est, non maius esse eo, quod ad dimidiam AB applicatur, similibus existentibus defectu eius, quod ad dimidiam AB applicatur, & parallelogrammo D, cui oportet simile deficere.

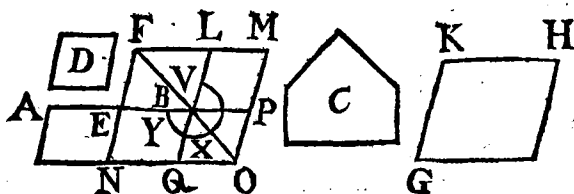
$\pi. 10. I.$ Biseca π AB in E, & ab ipsa EB fac ϵ Pgr. EF
 $\xi. 18. 6.$ ipsi D simile & similiter positum, & comple Pgr. AG. Iam si $AG = C$: factum est, quod proponebatur.

Si

Si vero non sit $AG = C$; quum σ non possit σ hyp.
 fit esse $AG < C$: erit $AG > C$. Igitur fac σ sch. 45. 1.
 Pgr. $KLMN = AG - C$ & simile similiterque & 25. 6.
 positum ipsi D vel ν FE , ita ut ML , FG sint ν . 21. 6.
 homologa latera, item LK & GE . Deinde
 pone $GO = LK$, & $GP = LM$, comple Pgr.
 $GOQP$, produc PQ in S , & OQ in T & R . Di-
 co. esse Pgr. $TS = C$, & deficere Pgro
 $SR \sim D$.

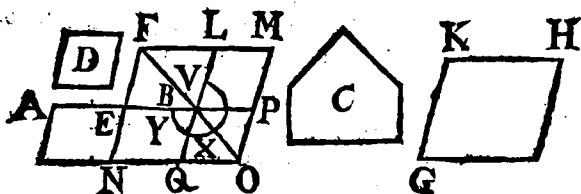
Nam quia Pgr. $EF \sim KM$, & FG homo-
 logum ipsi ML , GE vero ipsi LK : erit ϕ ang. ϕ . 1. def. 6.
 $FGE = MLK$. Est autem praeterea $PG =$
 ML , & $GO = LK$: ergo Pgr. $OP = \propto$ & $\sim \propto$. 4. & 34.
 KM , & $\sim \nu$ EF . Quia praeterea $OP = KM$ 1. & cor.
 $< AG$ vel ψ EF : erit σ OP circa eandem dia- 24. 6.
 metrum GQB cum toto EF . Quare $FQ = \propto \psi$. 36. 1.
 EQ , & communi SR addito, $FS = ER = \psi$. 26. 6.
 TE , & communi OS addito, gnomon VXY α . 43. 1.
 $= TS$. Est autem gnom. $VXY + OP = EF =$
 $AG = KM + C$; & $OP = KM$: ergo gnom.
 $VXY = C$. Quare $TS = C$. Deficit autem β . 24. 6.
 TS Pgro $SR \sim \beta EF \sim \gamma D$. Q.E.D. γ constr.

PROP. XXIX. PROBL.



*Ad datam rectam lineam AB dato rectilineo
 Caequale parallelogrammum applicare, excedens
 figura*

figura parallelogramma, quae similis sit alteri datae D.



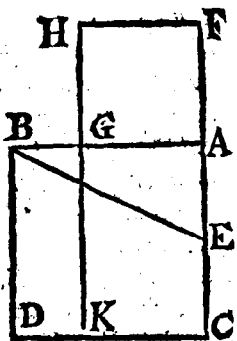
3. 10. 1. Bifeca AB in E, & ab EB describe * ipsi D
 18. 6. simile & similiter positum Pgr. EBLF. Fac
 2. 25. 6. GH ipsi EL simile & similiter positum & ipsis
 EL + C aequale, ita quidem vt KH homo-
 loga sit ipsi FL, & KG ipsi FE. Postea in pro-
 ductis FL, FE cape FM = KH, & FN = KG,
 comple Pgr. FMON, & produc AB in P, &
 LB in Q. Dico AO = C, & excedere Pgro
 QP simili ipsi D.

*. conftr. Nam quia * EL ~ GH, & FL, KH homo-
 loga sunt latera, ac FE, KG etiam homologa:
 9. 1. def. 6. ang. EGL = K. Sed FM = KH, & FN
 1. 8. ax. & = KG: ergo NM = & ~ GH. Quare
 cor. 24. 6. & EL ~ NM. Et est EL < NM, quia NM,
 2. 21. 6. = GH = EL + C. Quare * EL cum toto
 2. 26. 1. NM circa eandem diametrum FBO consistit.
 Ergo NM = EL + gnom. VXY. . Erat vero
 & NM = EL + C: erit igitur C = gnom.
 VXY. Porro quia * AN = EQ = EP:
 12. 35. 1. addito communi NP, erit AO = gnom. VXY.
 1. 43. 1. Vnde patet, esse AO = C. Excedit au-
 3. 24. 6. tem AO parallelogrammo QP ~ EL
 ~ D. Q. E. F.

PROP.

PROP. XXX. PROBL.

Datam rectam lineam terminatam AB secundum extremam & mediam rationem sectare.



Describe ex AB quadratum BC, & applica ad AC ipsi BC aequale Pgr. CH, excedens figura AH ipsi BC simili. Dico, AB ita sectam esse in G, vt $AG > GB$, & $AB : AG = AG : GB$.

Nam quia $BC = CH$: erit $DG = AH$: quare quum ang. KGB.

$= \angle AGH$: erit $KG : GH = AG : GB$. Quum autem AH, quadrato BC simile ipsum sit quadratum: erit $GH = AG$. Et $GK = CA = AB$. Est ergo $AB : AG = AG : GB$, & quum sit $AB > AG$, est $AG > GB$. Q. E. F.

v. 14. 5.

Aliter.

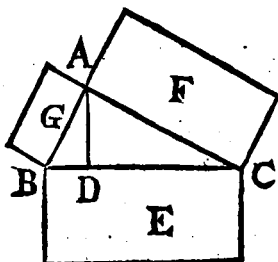
Secetur ϕ AB in G ita, vt $AB \times BG = AG^2$.

Nam quum ergo $\propto$ sit $AB : AG = AG : GB$, & $AG > GB$: erit sic quoque AB secundum extremam & mediam rationem secta ψ . Q. E. F.

ψ . 3. def. 6.

PROP.

PROP. XXXI. THEOR.



In rectangulis
triangulis BAC fi-
gura E, quae fit a
latere BC, rectum
angulum A subten-
dente, aequalis est
ei F + G, quae a
lateribus rectum an-
gulum comprehen-

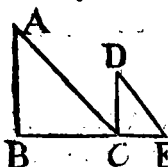
dentibus fiunt, similibus & similiter descriptis.

- α. cor. 8. 6. Duc perpendicularem AD: & erit $\alpha \div \div$ BC,
β. 2. cor. BA, BD, item $\div \div$ BC, CA, DC. Hinc β
20. 6. $BC: BD = E: G$, & $BC: DC = E: F$,
vel inuerse $DC: BC = F: E$, & $BD: BC =$
γ. 24. 5. $G: E$. Ergo γ $BD + DC: BC = F + G: E$.
δ. sch. 14. 5. Sed $BD + DC = BC$: ergo δ $F + G = E$.
Q. E. D.

Aliter.

- α. 1. cor. $F: E = (CA: BC)^2 = CAq: BCq$,
20. 6. & $G: E = (AB: BC)^2 = ABq: BCq$.
Ergo γ $F + G: E = CAq + ABq: BCq$.
Sed $CAq + ABq = BCq$. Ergo $F +$
ζ. 47. 1. $G = E$.

PROP. XXXII. THEOR.



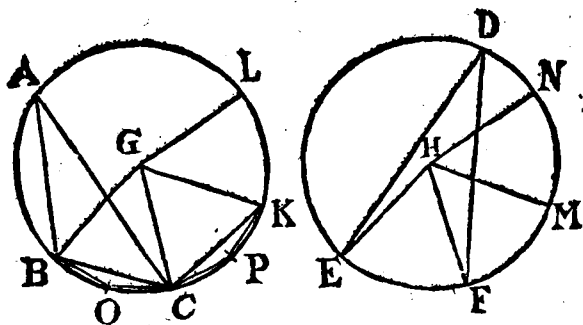
Si dua triangu-
la ABC,
DCE, quae duo latera duobus
lateribus proportionalia ha-
bent ($BA: AC = CD: DE$),
componantur secundum unum
angulum ita, ut homologa latera ipsorum BA &
CD, item AC & DE, sint parallela: reliqua trian-

triangulorum latera BC, CE in directum sibi inuicem erunt.

Quia enim $\angle$ BAC $\equiv$ BCD $\equiv$ CDE, v. 29. 1.
 & BA: AC $\equiv$ CD: DE: erit ang. B $\equiv$ $\angle$ DCE, 3. 6. 6.
 & hinc ang. ACE $\equiv$ B $\div$ BAC, ideoque ang.
 ACE $\div$ ACB $\equiv$ B $\div$ BAC $\div$ ACB $\equiv$ $\frac{1}{2}$ $\angle$ BAC, 2. 1. 32. 1.
 rectis. Ergo $\times$ BC, CE in directum erunt. *. 14. 1.
 Q. E. D.

PROP. XXXIII. THEOR.

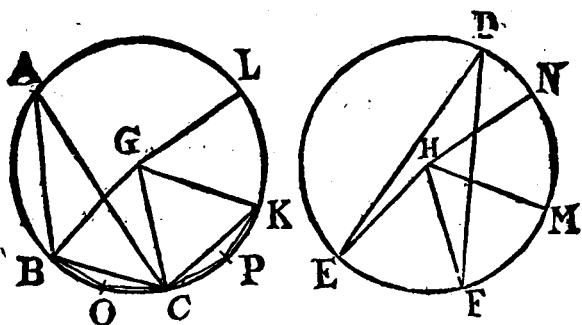
In circulis aequalibus ABC, DEF anguli eandem habent rationem, quam circumferentiae BC, EF, quibus insistant, siue ad centra G, H, ut BGC, EHF, siue ad circumferentias, ut BAC, EDF, insistant; adhuc etiam $\angle$ sectores GBC, HEF, quippe qui ad centra sunt constituti.



1. Sint circumferentiae BC deinceps quotcunque aequales CK, KL, & ipsi EF rursus totidem aequales FM, MN. Iungantur GK, GL, HM, HN. Erit ergo ang. BGC $\equiv$ $\angle$ CGK 27. 3.
 $\equiv$ KGL. Hinc circumferentia BKL & ang. BGL aequae multiplices erunt circumferentiae

L

BC



BC & anguli BGC. Eadem ratione circumf.
EMN & ang. EHN aequae erunt multiplices
circumferentiae EF & anguli EHF. Et si circ.
BKL $>$, $=$, $<$ circ. EMN: erit quoque ang.
BGL $>$, $=$, $<$ ang. EHN. Ergo circ. BC:

μ . 5. def. 5. circ. EF $=$ ang. BGC: ang. EHF $=$ ang.
 ν . 15. 5. & BAC: ang. EDF. Q. E. D.

20. 3.

2. Iungantur BC, CK, & sumtis in circumferentiis BC, CK punctis O, P, iungantur &
BO, OC, CP, PK. Et quia ang. BGC $=$ CGK,
& BG $=$ CG, & CG $=$ GK: est Δ BGC $=$
 Δ CGK, & basis BC $=$ CK. Et quum sit circ.
BC $=$ circ. CK: erit & reliqua BAKC $=$ reli-

3. 4. 1.

quae CALK, & ergo ang. BOC $=$ CPK, &
 λ . 27. 3. segmentum BCO $\sim$ segm. CKP. Quare

σ . 11. def. 3.

quum haec segmenta sint super aequales rectas
 π . 24. 3. BC, CK: aequalia π erunt. Erant vero & Δ a
BGC, CGK aequalia: ergo totus sector GBC
 $=$ GCK. Similiter ostenditur sector GKL $=$
GCK $=$ GBC, & sector HMN $=$ HFM $=$
EHF. Quam multiplex ergo circ. BKL cir-

sectoris

sectoris GBC; & quam multiplex circ. EMN circ. EF, tam multiplex sector HEN sectoris HEF; & ex modo ostensis, si circumf. BCL $>$, $=$, $<$ circ. EMN, est quoque sector GBL $>$, $=$, $<$ sectore HEN. Ergo circumf. DC: circ. EF $=$ sector GBC: sect. HEF. Q. E. D.

Corollar.

Perpicuum etiam est, *ut sector ad sectorem, e. II. 5. ita esse angulum ad angulum.*

** Schol.*

1. Hinc ang. BGC ad centrum est ad 4 rectos, ut arcus BC ad totam peripheriam. Nam ang. BGC ad rectum, ut arcus BC ad quadrantem. Ergo BGC ad 4 rectos, ut arcus BC ad 4 quadrantes seu totam circumferentiam (sch. 4. 5.).

Item ang. ad peripheriam A est ad 2 rectos, ut arcus BC ad totam peripheriam.



2. Inaequalium circularum arcus IL, BC, qui aequales subtendunt angulos, siue ad centra, ut IAL & BAC, siue ad peripherias, sunt similes: Et vice versa, arcus similes aequales angulos subtendunt.

Nam IL: periph. $=$ ang. IAL (vel BAC): 4 recti; item arc. BC: periph. $=$ ang. BAC: 4 recti: ergo IL: periph. $=$ BC: periph. Proinde arcus IL & BC sunt similes. Vnde

3. Duae semidiametri AB, AC a concentricis peripheriis arcus auferunt similes IL, BC.

4. Hiscè innitur vulgaris ratio angulos metiendi per arcus, qui illos subtendunt., Si enim, datis toti circumferentiae omnis circuli aliquot partibus scilicet 360, qui *gradus* vocantur, disquiritur ope instrumenti goniometrici, quot gradus sint in arcu BC, quot sint in arcu EF: patet per prop. 33. rationem angulorum BGC, EHF, quos hi arcus subtendunt, in numeris exhiberi posse. Et si vnus angulus IAL consideratur, & numerus graduum in arcu ad eum pertinente IL vel BC inuentus est: constat ratio anguli IAL ad 4 rectos, per schol. 1. Sit e. gr. numerus graduum in arcu IL = 100: erit IAL: 4 rect. = 100: 360.





E V C L I D I S ELEMENTORVM

LIBER VII.

DEFINITIONES.

1. *Vnitas* est, secundum quam vnumquodque eorum, quae sunt, vnum dicitur.

2. *Numerus* autem, ex vnitatibus constans multitudo.

3. *Pars* est *numerus numeri*, minor maioris, quum minor metitur maiorem.

* Omnis pars ab eo numero nomen sibi sumit, per quem ipsa numerum, cuius est pars, metitur: vt 4 dicitur pars tertia numeri 12, quia eum metitur per 3. Hinc 3 dicitur eadem pars numeri 6, quae 5 numeri 10, quia 3 & 5 ipsos 6 & 10 per eundem numerum 2 metiuntur, vel in ipsis aequae multoties continentur.

4. *Partes* autem, quando non metitur,

* Partes quaecunque nomen accipiunt a duobus illis numeris, per quos maxima communis duorum numerorum mensura vtrumque eorum metitur; vt 10 dicitur $\frac{2}{3}$ numeri 15, eo quod maxima communis mensura, nempe 5, metitur 10 per 2, & 15 per 3. Eaedem partes est numerus 4 numeri 6, quae numerus 10 ipsius 15, si numeri 4, 10 aequali multitudine continent duo numeros 2, 5, qui ipsorum 6, 15 eadem pars sunt.

5. *Multiplex* est maior minoris, quando minor maiorem metitur.

6. *Par numerus* est, qui bifariam diuiditur (vt 8).

7. *Impar* vero, qui bifariam non diuiditur, vel qui a pari numero vnitates differt (vti 9).

8. *Pariter par numerus* est, quem par numerus per parem numerum metitur (vti 16).

9. *Pariter* vero *impar* est, quem par numerus per numerum imparem metitur (vt 6).

10. *Impariter* vero *impar numerus* est, quem impar numerus per numerum imparem metitur (vt 15).

11. *Primus numerus* est, quem vnitas sola metitur (vt 3).

12. *Primi inter se numeri* sunt, quos sola vnitas, communis mensura, metitur (vt 5, 7).

13. *Compositus numerus* est, quem numerus aliquis metitur (9).

14. *Compositi inter se numeri* sunt, quos numerus aliquis, communis mensura, metitur (6, 8).

15. *Numerus numerum multiplicare* dicitur, quando, quot vnitates sunt in ipso, toties componitur multiplicatus, & aliquis gignitur.

* Numerum A per numerum B multiplicandum esse, sic indicamus, vt literas A, B coniungamus. Hinc AB notat numerum productum ex A per B multiplicato. In numeris productus scribitur sic 2×3 .

16. Quando duo numeri sese multiplicantes aliquem fecerint, qui factus est, *planus* appellatur; *Latera vero ipsius*, numeri sese multiplicantes. (10 est planus, latera eius sunt 2 & 5).

17. Quando

17. Quando autem tres numeri sese multiplicantes aliquem fecerint: factus *solidus* appellatur; *latera vero ipsius*, numeri sese multiplicantes. (30 est solidus, latera ipsius sunt 2, 3, 5).

18. *Quadratus numerus* est, qui aequaliter aequalis; vel qui sub duobus aequalibus numeris continetur.

* Sit A latus: quadratus numerus, id est AA, sic scribitur A^2 . Item 9, id est 3×3 , sic 3^2 .

19. *Cubus* vero, qui aequaliter aequalis aequaliter; vel qui sub tribus aequalibus numeris continetur.

* Sit A latus: cubus numerus scribitur sic A^3 ; id est AAA. Item $3 \times 3 \times 3$, id est 27, est cubus, qui sic designatur 3^3 .

20. *Numeri proportionales* sunt, quando primus secundi, & tertius quarti aequae multiplex est, vel eadem pars, vel eadem partes. (*e. gr. $12:3=8:2$; $2:6=5:15$; $10:15=12:18$; $8:6=16:12$).

21. *Similes plani & solidi numeri* sunt, qui latera habent proportionalia.

* E. gr. $6 \sim 24$; quia $2:3=4:6$. Item solidus 30 $\sim$ solido 240; quia $2:3=4:6$ & $3:5=6:10$.

22. *Perfectus numerus* est, qui suis ipsius partibus est aequalis.

* Sic $6=1+2+3$ est perfectus. Numerus vero, qui suis ipsius partibus minor est, *abundans*, appellatur, ut 12. Qui vero maior, *diminutus*, ut 15.

* 23. *Numerus numerum metiri*, dicitur per illum numerum, a quo multiplicatus, illum producit.

In diuisione vnitas est ad quotientem, ut diuidens ad diuisum. Nota, numerum alteri lineola interiecta subscriptam diuisionem denotare. Sic $\frac{A}{B}$ est A diuisus per B, item $\frac{CA}{B}$ est C in A diuisus per B.

* *Postulata.*

1. Postuletur, cuilibet numero quotlibet sumi posse aequales, vel multiplices.
2. Quolibet numero sumi posse maiorem.
3. Additio, subtractio, multiplicatio, diuisio, extractionesque radicum seu laterum ex numeris quadratis seu cubis concedantur etiam, tanquam possibilia.

* *Axiomata.*

1. Quicquid conuenit vni aequalium numerorum, conuenit & reliquis aequalibus numeris.
2. In omni additione, subtractione, multiplicatione, vel diuisione toti numero singulae suae partes simul sumtas substitui possunt.
3. Qui numeri aequalium numerorum, vel eiusdem, eadem partes fuerint, aequales inter se sunt.
4. Quorum idem numerus, vel aequales, eadem partes fuerint, aequales inter se sunt.
5. Maioris pars parte eadem minoris maior est.
6. Vnitas omnem numerum per vnitates, quae in ipso sunt, hoc est per ipsummet numerum, metitur.
7. Omnis numerus se ipsum metitur per vnitatem.
8. Si numerus, numerum multiplicans, aliquem produxerit; multiplicatus metietur eundem per vnitates in multiplicante, vel per ipsum multiplicantem (def. 15. & 23).

Hinc nullus numerus primus planus est, vel solidus, vel quadratus, vel cubus.

9. Si numerus, numerum metiens, ab eo, per quem metitur, multiplicetur; illum, quem metitur, producit.

10. Numerus, quotcunque numeros metiens, compositum quoque ex ipsis metitur.

11. Numerus, quemcunque numerum metiens, metitur quoque omnem numerum, quem ille metitur.

12. Numerus metiens totum, & ablatum, metitur & reliquum.

13. Numerus numerum metiens eodem maior esse non potest.

14. Numerus, pariter metiens totum, dimidium quoque metitur.

15. Quae rationes eidem eadem sunt, & inter se sunt eadem (def. 20).

16. Si quatuor numeri proportionales sunt, inerse quoque sunt proportionales.

PROP. I. THEOR.

B.....F..H.A
D...G...C.
E---
Si duobus numeris inaequalibus AB, CD expositis, detracta semper minore de maiore (CD de BA, & reliqua FA de DC), reliquus GC minime metiatur praecedentem, quoad assumpta fuerit unitas HA: numeri a principio positi AB, CD primi inter se erunt.

Si negas: metietur ^a eos aliquis numerus, qui sit E. Quia CD metitur ^b BF: & E ipsum ^{a.12.def.7.}
^{b. hyp.} BF ^c metietur, ergo & ^d reliquum FA. Sed FA ^{γ.11.ax.7.}
metitur ^b DG: ergo & ^γ E metitur DG, ideo ^{d.12.ax.7.}
que etiam reliquum ^d GC. Sed GC metitur

^aFH : quare E quoque $\forall$ metitur FH. Metiebatur autem E totum FA : ergo metitur & e. 13. ax. 7. reliquam ^bHA vnitatem. Ergo E maior non 2. 2. def. 7. est ^c vnitatem. Q. E. A ^d.

PROP. II. PROBL.

Duobus numeris datis AB, CD, non primis inter se, maximam eorum communem mensuram inuenire.

A.....B *Cas. 1.* Si CD metitur AB: quum
C...D etiam se ipse metiatur; erit CD
ipforum CD, AB communis mensura, & maxima quidem, quia nullus maior ipso CD eum metitur.

A....E.....B *Cas. 2.* Si CD non meti-
C..F....D tur AB: detrahe semper mi-
G--- norem de maiore, CD de
AB, quoties fieri potest, & reliquum AE de CD similiter, & sic porro, quoad relinquatur aliquis numerus CF metiens praecedentem AE. Dico, fore CF numerum, qui maxima est communis mensura ipforum AB, CD.

Nam primo, semper relinqui aliquem CF, qui metiatur praecedentem, & qui non sit
* 1. 7. vnitatem, patet ex eo, quod, si secus esset, *
numeri AB, CD primi inter se essent; contra hypothesin. Deinde quia CF metitur AE,
9. 11. ax. 7. AE vero FD: metietur & ^a CF ipsum FD.
* 7. ax. 7. CF autem se ipsum quoque ^b metitur: ergo
* 10. ax. 7. CF metitur * CD. At CD ipsum BE metitur; ergo ^c CF eundem BE, ideoque * & AB meti-

metitur. Quare CF est communis mensura. Si maximam esse negas: sit maior quaedam G. Ergo G, metiens CD, metitur ⁹ BE, & ¹ reliquum AE, ipsumque ⁹ DF; proinde & reliquum ¹ CF, maior inno-rem. Q. E. A¹². Quare numerus CF est maxima communis mensura datorum. Q. E. F. ¹². 12. ax. 7. ¹⁴. 13. ax. 7.

Coroll.

Hinc numerus, duos numeros metiens, & maximam eorum communem mensuram metitur.

PROP. III. PROBL.

Tribus datis numeris A, B, C, non primis inter se, maximam ipsorum communem mensuram inuenire.

1. Sume duorum A, B maximam communem mensuram D: & si D metitur C, erit communis trium mensura, & maxima quidem. Si qua enim esset maior; metiretur eadem numerum D. Q. E. A¹². ¹². cor. 2. 7. ¹³. 13. ax. 7.

2. Si vero D non metitur C: sume ipsorum C, D maximam communem mensuram E; quod fieri potest, quia C, D primi inter se esse nequeunt, vtpote quos idem numerus ¹² metietur, qui ipsos A, B, ¹². cor. 2. 7. C metiri ponitur. Dico, E esse maximam communem mensuram trium A, B, C.

Nam E, metiens D, metitur quoque ¹² A, & ¹² B; & quia ¹² metitur C, metitur singulos A, B, C. ¹². 11. ax. 7. ¹². contr. At nullus maior quam E eosdem metitur. Si quis

quis enim maior eos metiretur: idem meti-
 π . cor. 2. 7. retur π etiam D & C, ideoque π etiam E.
 π . 13. ax. 7. Q. E. A π .

Corollar.

Hinc, si numerus numeros tres metiatur: & ipso-
 rum maximam communem mensuram metitur.

Schol.

Eodem modo & pluribus numeris datis, maxi-
 mam communem mensuram inueniemus.

PROP. IV. THEOR.

*Omnis numerus BC omnis numeri A, minor
 maioris, vel pars est vel partes.*

Cas. 1. Si A, BC primi sunt inter
 A..... se. Quia unaquaque vnitatum,
 π . 3. def. & B... C quas continet BC, est π pars numeri
 6. ax. 7. A:BC ipsius A partes esse patet. Q. E. D.

Cas. 2. Si A & BC non sunt
 A..... primi inter se; aut BC metitur
 B..E..F..C A, & tunc ϕ pars ipsius est; aut
 ϕ . 3. def. 7. D.. non metitur. Quo in casu
 π . 2. 7. sume eorum maximam π communem men-
 suram D, & diuide BC in numeros BE = EF
 ψ . 1. ax. 7. = FC = D. Et quia D est ϕ pars ipsius A:
 erit ψ quoque tam BE, quam EF, quam FC
 pars ipsius A, & ergo totus BC partes ipsius A
 erit. Q. E. D.

PROP. V. THEOR.

*Si numerus A numeri BC pars
 fuerit; & alter D alterius EF
 eadem pars: & uterque A + D
 utriusque BC + EF eadem pars
 erit, quae unus A unius BC.*

Nam

Nam diuisus sit BC in numeros BG, GC ^{α. 3. post. 7.} ipsi A, EF verò in numeros EH, HF ipsi D aequales: & erit multitudo ^{α. 3. def. 7.} numerorum BG, GC aequalis multitudini numerorum EH, HF; & ergo aequalis multitudini numero-
rum BG + EH, GC + HF. Sed BG + EH = ^{β. 2. ax. 1.} A + D = GC + HF; & BG + EH + GC + HF = BC + EF: ergo BC + EF constat ex tot numeris, ipsis BG + EH, vel A + D aequalibus, ex quot ipsi BG, vel A aequalibus constat BC. Hinc ipsos BC + EF & BC numeri A + D & A per eundem numerum ^{γ. 15. & 23. def. 7.} metiuntur. Ergo ^{δ. 3. def. 7.} A + D numeri BC + EF eadem pars est, quae A ipsius BC. Q. E. D.

PROP. VI. THEOR.

A...G...B Si numerus AB numeri C
C..... partes fuerit; & alter DE al-
D...H....E terius F eandem partes: &
F..... uterque AB + DE utriusque
C + F eandem partes erit,
quae vnus AB vnius C.

Diuide AB in ipsius C partes AG, GB; DE vero in ipsius F partes DH, HE. Quia AB tot continet partes ipsius C, ^{α. hyp.} quot DE continet partes ipsius F: est multitudo partium AG, GB = multitudini ipsarum DH, HE. Et quum ^{β. 5. 7.} eadem pars sit AG ipsius C, quae DH ipsius F: & uterque AG + DH utriusque C + F eadem pars est, quae AG ipsius C. Simili ratione GB + HE ipsius C + F eadem pars est, quae GB ipsius C. Quare quum AG + DH

A...G...B $DH + GB + HE = AB +$
 C'..... $DE, \& AG + DH = GB$
 D....H....E $+ HE, \& multitudo ipso-$
 F..... $rum AG + DH, GB +$
 HE aequalis multitudini
 ipforum AG, GB: patet, $AB + DE$ vtriusque
 C + F easdem esse partes, quas AB ipsius C.
 Q. E. D.

PROP. VII. THEOR.

A...E...B *Si numerus AB nu-*
 G....C.....F....D *meri CD fuerit pars,*
 quae ablatus AE ablati
 CF: & reliquus EB reliqui FD eadem pars
 erit, quae totus AB totius CD.

Quae enim pars est AE ipsius CF, eadem sit
 5. 7. EB ipsius CG: ergo & AB ipsius FG eadem
 9. hyp. pars erit. Sed AB ipsius CD eadem pars
 erat, quae AE ipsius CF: ergo AB ipsius FG
 eadem pars est, quae ipsius CD. Quum er-
 4. ax. 7. go $FG = CD$, & hinc $CG = FD$: patet^a esse
 3. ax. I. EB ipsius FD eandem partem, quae AE ipsius
 1. ax. 7. CF, vel quae est AB ipsius CD. Q. E. D.
 & constr.

PROP. VIII. THEOR.

A.....L.....E....B *Si numerus*
 C.....F.....D *AB numeri CD*
 G.....M...K.....N..H *fuerit partes,*
 quae ablatus
 AE ablati CF: & reliquus EB reliqui FD eadem
 partes erit, quae totus AB totius CD.

Ponatur enim numero AB aequalis GH:
 1. ax. 7. ergo GH numeri CD eadem partes est^a, quae
 3. post. 7. AE ipsius CF. Diuidatur GH in partes GK,
 KH

KH numeri CD, AE vero in partes AL, LE numeri CF: aequalis ergo erit multitudo partium GK, KH multitudini partium AL, LE. Et quia $\frac{1}{2}$ AL ipsius CF eadem pars $\frac{1}{2}$ constr. & est, quae GK ipsius CD; & $CD > CF$: hyp. erit $\frac{1}{2}$ GK $>$ AL. Sume $GM = AL$. Quae $\frac{1}{2}$ 5. ax. 7. ergo $\frac{1}{2}$ pars est GK ipsius CD, eadem est $\frac{1}{2}$ 7. 7. GM ipsius CF, & eadem ergo $\frac{1}{2}$ MK ipsius FD. Sume $KN = LE$: & eodem modo patet, quae pars est KH numeri CD, eandem esse NH ipsius FD. Quare quae partes est GK + KH, id est AB, ipsius CD, eadem partes est MK + NH, id est $\frac{1}{2}$ EB, ipsius $\frac{1}{2}$ 3. ax. 1. FD. Q.E.D.

PROP. IX. THEOR.

Si numerus A numeri BC pars fuerit, & alter D alterius EF eadem pars: & permutando, quae pars est vel partes primus A tertii D, eadem erit pars vel eadem partes. & secundus BC, quarti EF.

Sit $A < D$, & sit $BG = GC = A$, & $EH = HF = D$, multitudo ergo partium BG, GC aequalis erit multitudini partium EH, HF. Et quia $BG = GC$, & $EH = HF$: quae pars est BG ipsius EH vel partes, eadem $\frac{1}{2}$ pars erit $\frac{1}{2}$ 1. ax. 7. & G ipsius HF vel eadem partes. Ergo $\frac{1}{2}$ 5. & 6. 7. quae pars vel partes est BG, id est A, ipsius EH, id est D, eadem pars vel eadem partes erit $BG + GC$, id est BC, ipsius $EH + HF$, id est EF. Q.E.D.

* Schol.

* Schol.

Si ergo duo numeri duos numeros aequaliter metiuntur: illi cum his eandem rationem habent.

PROP. X. THEOR.

A...G...B Si numerus AB numeri C
C..... partes fuerit, & alter DE
D.....H.....E alterius F eadem partes: &
F..... permutando, quae partes est
primus AB tertii DE, vel
pars, eadem partes erit & secundus C quarti
F, vel eadem pars.

Diuide AB in partes numeri C, quae sint AG, GB, & DE in partes ipsius F, quae sint DH, HE: erit multitudo partium AG, GB =
v. hyp. " multitudini partium DH, HE. Et quia
φ. constr. & AG ipsius C eadem pars est, quae DH ipsius
hyp. F: erit x AG ipsius DH eadem pars vel eadem
x. 9. 7. partes, quae C ipsius F. Similiter GB
ipsius HE erit eadem pars vel eadem partes,
quae C ipsius F. Quare ψ erit AG + GB,
ψ. 5. vel 6. 7. id est AB, ipsius DH + HE, id est DE, eadem
pars vel partes eadem, quae AG ipsius DH,
hoc est α, quae C ipsius F. Q. E. D.

α. dem.

PROP. XI. THEOR.

A....E...B Si fuerit ut totus AB ad
C.....F...D totum CD, ita ablatum AE
ad ablatum CF: & reliquus
EB ad reliquum FD erit, ut totus AB ad totum CD.

α. 20. def. 7. Quia enim α quae pars vel partes est AB
ipsius CD, eadem pars vel eadem partes est
AE

AE ipsius GF: etiam EB ipsius FD eadem pars vel eadem partes erit ^β, quae AB ipsius CD. ^β. 7. vel Ergo * EB: FD = AB: CD. Q. E. D. 8. 7.

* Si AB & AE ipsorum CD, CF aequae sunt multiplices: CD ipsius AB eadem pars est, quae CF ipsius AE. Quare demonstratio etiam ad hunc casum applicari potest, per ax. 16. 7; quod & in sequentibus notandum.

PROP. XII. THEOR.

A...C.... Si quotcunque numeri proportionales fuerint (A: B = B...D..... C: D): ut unus antecedentium A ad unum consequentium B, ita erunt omnes antecedentes A + C ad omnes consequentes B + D.

Quia enim, γ quae pars est A ipsius B vel γ. 20. def. 7. partes, eadem pars eademue partes est C ipsius D: quae pars vel partes est A ipsius B, eadem pars vel eadem partes ^δ est A + C ipsius B + D. 5. vel 6. 7. D; ideoque γ est A: B = A + C: B + D, Q. E. D.

PROP. XIII. THEOR.

A...C..... Si quatuor numeri proportionales fuerint (A: B = B...D..... C: D): Et permutando proportionales erunt (A: C = B: D).

Quia enim, * quae pars vel partes est A. 20. def. 7. ipsius B, talis talesue est C ipsius D: & permutando ζ quae pars vel partes est A ipsius C, ζ 9. 7. vel talis vel tales est B ipsius D; & ergo * A: C = 10. 7. B: D. Q. E. D.

* *Schol.* Ergo si quatuor numeri proportionales sunt: etiam conuertendo vel diuidendo proportionales erunt; per hanc & 11. 7.

PROP. XIV. THEOR.

A.....D.... Si fuerint quotcunque
B..... E.... numeri A, B, C, & alii
C.... F.... ipsis multitudine aequales
D, E, F, qui bini suman-
tur & in eadem ratione ($A:B=D:E$, & $B:C=E:F$): etiam ex aequo in eadem ratione erunt
($A:C=D:F$).

* 13. 7. Nam permutando * $A:D=B:E=C:F$, & iterum permutando $A:C=D:F$.
Q.E.D.

PROP. XV. THEOR.

A. D.. Si vnitas A nu-
B.G.H.C E.,K.,L.,F merum aliquem
BC metiatur; al-
ter autem numerus D aequaliter metiatur alium
aliquem EF: & permutando vnitas A tertium
numerus D aequaliter metietur, atque secundas
BC quartum EF.

Diuide BC in suas vnitates BG, GH, HC, &
EF in numeros ipsi D aequales, puta EK, KL,
LF. Et quoniam $BG=GH=HC$, & $EK=$
9. hyp. $KL=LF$; vnitatum autem multitudo = 9
multitudini numerorum EK, KL, LF: erit
.12. 7. $BG:EK=GH:HL=HC:LF$; & $BG:$
* 20. def. 7. EK , id est, $A:D=BC:EF$. Ergo * A nu-
merum D aequaliter metitur atque BC ipsum
EF. Q.E.D.

PROP.

PROP. XVI. THEOR.

E. *Si duo numeri A, B sese*
 A... B... *multiplicantes fecerint ali-*
 C.....D..... *quos C, D: facti ex ipsis C, D*
 inter se aequales erunt.

Si enim A ipsum B multiplicans produxit
 C. Metitur B ipsum C per unitates, quae sunt^a. 8. ax. 7.
 in A. Metitur autem & E unitas numerum
 A per unitates^a quae sunt in A. Ergo B ipsum^a. 6. ax. 7.
 C metitur aequaliter, ac E unitas ipsum A.
 Hinc^a E ipsum B aequaliter metitur ac A ipsum^a. 15. 7.
 C. Similiter si B ipsum A multiplicans produ-
 xit D: E ipsum B metitur aequaliter. ac A ipsum
 D. Quare quum^a A ipsius C eadem pars sit^a. 3. def. 7.
 quae ipsius D: patet^a esse $C = D$. Q. E. D. ^a. 4. ax. 7.

* Cor. 1. Multiplicans metitur factum per mul-
 tiplicatum.

* Cor. 2. Si numerus B numerum C metiatur:
 & ille A per quem metitur, eundem C metietur
 per ipsum numerum metientem B

PROP. XVII. THEOR.

A 2 *Si numerus A duos numeros B,*
 B 3 C 4 *C multiplicans fecerit aliquos D,*
 D 6 E 8 *E: facti ex ipsis eandem ratio-*
 nem habebunt, quem multiplicati
 (D: E = B: C).

Nam B metitur D^a per unitates in A. Me-^a. 8. ax. 7.
 titur autem & 1 numerum A per unitates in A.
 Ergo 1 ipsum A aequaliter metitur ac B ipsum
 D. & hinc^a $1: A = B: D$. Eadem ratione^a: 4. 20. def. 7.
 $A = C: E$. Quare^a $B: D = C: E$, & permu-
 tando^a $B: C = D: E$. Q. E. D. ^a. 13. 7.

M 2

* Cor.

* Cor. In multiplicatione est ut unitas ad multiplicantem A, ita multiplicatus B ad factum D.*

PROP. XVIII. THEOR.

A 3 B 4 Si duo numeri A, B, numerum aliquem C multiplicantes, fecerint aliquos D, E: facti ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicantes (D : E = A : B).

7. 16. 7. Quia enim $AC = CA = D$, & $BC = CB = E$: erit $D : E = A : B$. Q. E. D.

PROP. XIX. THEOR.

A 6 Si quatuor numeri proportionales fuerint (A : B = C : D): qui ex primo & quarto fit numerus, aequalis erit ei, qui fit ex secundo & tertio (AD = BC). Et si numerus AD, qui fit ex primo A & quarto D, aequalis fuerit ei BC, qui fit ex secundo B & tertio C: quatuor numeri proportionales erunt (A : B = C : D).

1. Nam sit alius AC factus ex A & C: erit
 φ. 18. 7. $AC : AD = C : D = A : B$. Rursus $AC : BC = A : B$. Ergo $AC : AD = AC : BC$, &
 x. 17. 7. hinc $AD = BC$. Q. E. D.

α. 3. 4. ax.

7. 2. Quia $C : D = AC : AD = AC : BC$; & $AC : BC = A : B$: erit $A : B = C : D$. Q. E. D.

PROP.

PROP. XX. THEOR.

Si tres numeri proportionales fuerint ($\div\div$ A, B, C): qui ab extremis fit numerus, aequalis erit ei, qui fit a medio ($AC = B^2$).

Si autem qui ab extremis fit AC, aequalis fuerit ei B^2 , qui a medio: tres numeri proportionales erunt ($\div\div$ A, B, C).

1. Ponatur ipsi $B = D$. Quia ergo $A : B = D : C$: erit ^{β} $AC = BD = \gamma B^2$. Q. E. D. β . 19. 7.

2. Quia $AC = B^2 = \gamma BD$: erit ^{β} $A : B = \gamma BD : C$. Q. E. D.

PROP. XXI. THEOR.

Minimi numeri C, D omnium eandem cum ipsis rationem habentium, eos, qui eandem rationem habent, A, B aequaliter metiuntur, maior C maiorem A, & minor D minorem B.

1. Dico C ipsum A metiri, quia eius partes non est. Si enim fieri potest, sit C partes ipsius A. Quia est $C : D = A : B$: erit ^{δ} D ipsius ^{δ} 20. def. 7. B eadem partes, quae C ipsius A. Quot & 9. 10. 7. igitur in C sunt partes ipsius A, tot & in D erunt partes ipsius B. Sint E, F partes ipsius A in C, & G, H partes ipsius B in D. Quia ergo $E = F$, & $G = H$: erit $E : G = F : H$. ϵ . 1. ax. 7. Et quia ipsorum E, F multitudo aequalis est ipsorum G, H multitudini: erit $E : G = C : D$. 2. 12. 7. D. Sed $E < C$, & $G < D$. Ergo C, D non sunt minimi eorum, qui eandem rationem habent; contra hypothesin. Non est ergo C

M 3

partes

* 4. 7. 9. 3. def. 7. $\begin{matrix} A & 10 \\ B & 6 \end{matrix} \quad \begin{matrix} C & 5 \\ D & 3 \end{matrix}$ partes ipsius A, nec D ipsius B. Quare quum * C ipsius A, & D ipsius B pars sit: metitur * C ipsum A, & D ipsum B.

* 20. def. 7. 2. Quia autem $C : D = A : B$, & $C : A = D : B$, & C pars ipsius A: erit * & D eadem pars ipsius B. Quare C & D ipsos A, B aequaliter * metiuntur. Q. E. D.

* Cor. Minimi numeri eandem rationem habentium eosdem metiuntur, antecedens antecedentes, & consequens consequentes.

PROP. XXII. THEOR.

$\begin{matrix} A & 6 \\ B & 4 \\ C & 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} D & 12 \\ E & 9 \\ F & 6 \end{matrix}$ Si sint tres numeri A, B, C, & alii ipsis multitudine aequales D, E, F, qui bini sumantur & in eadem ratione; sit autem perturbata eorum proportio ($A : B = E : F$, & $B : C = D : E$): etiam ex aequo in eadem ratione erunt ($A : C = D : F$).

* 19. 7. Est enim * $AF = BE = CD$. Ergo * $A : C = D : F$. Q. E. D.

PROP. XXIII. THEOR.

Numeri primi inter se, A, B, minimi sunt omnium eandem cum ipsis rationem habentium.

* 21. 7. Si fieri potest, sint C, D eandem rationem habentes quam A, B, & ipsis A, B minores, minimi omnium. Exgo ^ C ipsum A aequaliter metietur, ac D ipsum B. Iam quoties C ipsum A metitur, tot unitates sint in E: ergo & D ipsum B metietur per numerum

numerum E. Quare ¹⁴ etiam E metietur A ¹⁴. 2. cor.
per C, & E ipsum B per D. Quum itaque 16. 7.
idem E duos A, B metiatur: A, B non erunt ¹¹. 12. def. 7.
primi inter se; contra hypothesin. Minimi
ergo sunt A, B. Q. E. D.

PROP. XXIV. THEOR.

*Minimi numeri A, B eorum, qui eandem cum
ipsis rationem habent, primi inter se sunt.*

Si negas: metiatur ⁸ eos numerus C, ipsum ⁸. 12. def. 7.
A nempe per numerum aliquem D, & alterum
B per E. Ergo ⁹ $CD = A$, & $CE = B$; & in ⁹. 9. ax. 7.
de $A : B = D : E$. Quum autem sit $D < A$, ¹¹. 18. 7.
& $E < B$: non erunt A, B minimi; contra
hypothesin. Ergo A, B primi inter se sunt.
Q. E. D.

PROP. XXV. THEOR.

*Si duo numeri A, B primi inter
se fuerint, qui unum ipsorum A me-
tatur numerus C, ad reliquum B pri-
mus erit.*

Si enim B, C inter se primi non sint: me-
tiatur eos numerus D. Idem D metietur ⁸. 11. ax. 7.
ipsum A. Ergo A, B non ¹¹ erunt primi in-
ter se; contra hypothesin. Ergo C ad B pri-
mus est. Q. E. D.

PROP. XXVI. THEOR.

*Si duo numeri A, B ad
aliquem numerum C primi fue-
rint: & qui fit ex ipsis D ad
eum C primus erit.*

Si negas; metiatur ipsos C & D idem ali-
quis E. Ergo ¹¹ E & A primi inter se sunt. ¹¹. 25. 7.

M 4

Metia-

u. 2. cor. 16. 7. ϕ 9. ax. 7. $\propto$ hyp. ψ . 19. 7. ω . 23. 7. α . cor. 21. 7.

$A^2 \quad B^3$
 C^5
 D^6

Metiatur autem E ipsum D per numerum F: ergo ψ F ipsum D quoque metietur per E; & $EF = \phi D = \propto AB$ Quare ψ E: $A = B: F$. Quum autem E, A primi inter se ideoque ω minimi sint: E ipsum B ω metietur. Metitur autem E quoque ipsum C: ergo B, C non erunt primi inter se; contra hypothefin Quare D & C primi inter se sunt. Q. E. D.

PROP. XXVII. THEOR.

Si duo numeri A, B primi inter se fuerint: qui fit ab uno ipsorum A^2 ad reliquum B primus erit.

$A \dots B \dots$
 $A^2 \dots$
 $D \dots$

Sit enim ipsi $A = D$: erunt & D, B primi inter se; & ergo β AD id est γ A^2 ad B primus erit. Q. E. D.

β . 26 7. γ . 18. def. 7.

PROP. XXVIII. THEOR.

Si duo numeri A, B ad duos numeros C, D, uterque ad utrumque primi fuerint: & qui fiunt ex ipsis E, F inter se primi erunt.

$A^3 \quad B^5$
 E^{15}
 $C^2 \quad D^4$
 F^8

Nam quia A, B ad C primi sunt: E δ etiam ad C primus erit. Eadem ratione E, D inter se primi sunt. Quare quum C, D ad E primi sint: erunt & δ F ac E primi inter se. Q. E. D.

δ . 26. 7.

PROP.

PROP. XXIX. THEOR.

A^2 B^3 Si duo numeri A, B primi
 $A^2 + B^2$ B^2 9 inter se fuerint, & uterque se
 A^3 8 B^3 27 ipsum multiplicans faciat ali-
 quos A^2 , B^2 : facti ex ipsis
 A^2 , B^2 primi inter se erunt; & si numeri a
 principi positi A, B, eos qui facti sunt A^2 , B^2
 multiplicantes aliquos A^3 , B^3 faciant: & ipsi
 inter se primi erunt; & semper circa extremos
 hoc continget.

Quia enim A^2 , B primi sunt: erunt & A^2 , B^2 primi. Iam quum & A, B^2 primi sint,
 & ergo duo A, A^2 ad duos B, B^3 uterque ad
 utrumque primi sint: erunt quoque A^3 , B^3 primi inter se. Q. E. D.

PROP. XXX. THEOR.

A^3 B^5 Si duo numeri A, B primi
 $A+B$ 8 inter se fuerint: & uterque si-
 mul $A+B$ ad utrumque ipsorum
 & A & B primus erit. Quod si uterque simul
 $A+B$ ad unum aliquem ipsorum sit primus:
 & numeri A, B a principio positi inter se primi
 erunt

1. Si negas, $A+B$ ad A vel B primum esse:
 metiatur ipsos $A+B$ & A aliquis C: qui er-
 go & B metietur. Quare A & B non sunt
 primi inter se; contra hyp.

2. Si negas, A, B primos esse: metiatur eos
 aliquis C. Quum ergo idem C ipsum $A+B$
 B metiatur: $A+B$ ad neutrum ipsorum A, B
 primus erit; contra hyp.

PROP. XXXI. THEOR.

$A \ 3 \ B \ 7$ *Omnis primus numerus A ad omnem numerum B, quem non metitur, primus est.*

Si negas: metiatur eos aliquis C praeter unitatem. Et quia A non metitur B: erit C diuersus a numero A. Ergo quum A metiatur aliquis, qui nec vnitas nec ipsi A idem est:

¶ II. def. 7. A primus non erit; contra hyp.

PROP. XXXII. THEOR.

$A \ 2 \ B \ 6$ *Si duo numeri A, B, sese multiplicantes, aliquem faciant; eum vero AB, qui ex ipsis fit, metiatur aliquis numerus primus C: & unum ipsorum A, B, qui a principio positi sunt, metietur.*

$AB \ 12$
 $C \ 3$
 $D \ 4$

¶ 31. 7. Nam C ipsum A non metiatur: ergo * C & A primi inter se sunt. Metiatur autem C
 ¶ 9. ax. 9. ipsum AB per D: erit $CD =^A AB$, ideoque
 ¶ 19. 7. $C : A =^B B : D$. Quare quum C, A minimi
 ¶ 23. 7. sint eorum, qui rationem C: A habent: C
 ¶ cor. 21. 7. ipsum B ξ metietur.

Similiter demonstrabitur, si C ipsum B non metiretur, metiri ipsum A. Quare C metitur vnum ipsorum A, B. Q. E. D.

PROP. XXXIII. THEOR.

Omnem numerum compositum A primus aliquis numerus metitur.

Quia

Quia enim A compositus est: meti-
 A 12 tur eum * aliquis B, qui si primus sit, *c. 13. def. 7.*
 B 4 patet propositio. Si vero B etiam
 C 2 compositus est: metiatur eum C, qui
 etiam metietur * ipsum A. Quare si hic *π. 11. ax. 7.*
 C nondum primus est, metietur ipsum
 alius, & sic progrediendo tandem ad pri-
 mum peruenietur, qui metietur tam antec-
 dentem quam A. Nisi enim tandem ad pri-
 mum perueniretur: metirentur ipsum A in-
 finiti numeri, quorum alter altero minor.
 Q. E. A. *c.*

c. 2. def. 7.

Aliter. Sit C minimus omnium ipsum A
 metientium: erit idem primus. Si enim non:
 metiatur illum numerus $D < C$; quare quum
 idem D metiatur etiam * A, non est C minimus
 metientium ipsum A; contra hyp.

PROP. XXXIV. THEOR.

*Omnis numerus A vel primus est, vel eum
 primus aliquis. numerus metitur.*

Si enim A primus est: manifesta est propo-
 sitio. Sin A compositus: metietur eum aliquis * *c. 33. 7.*
 primus. Ergo A aut primus est, aut eum
 primus metitur. Q. E. D.

PROP. XXXV. PROBL.

*Numeris quocunque A,
 B, C datis, inuenire mini-
 mos omnium, qui eandem
 cum ipsis rationem habeant.*

A 6 B 15 C 21
 D 3
 E 2 F 6 G 7

Si ipsi A, B, C primi inter se sunt: mini-
 mi iam erunt * omnium eandem rationem *π. 23. 7.*
 habentium.

Si

*3.7. A 6 B 15 C 21 Si vero non: fume
D 3 ipforum maximam
E 2 F 5 G 7 communem mensu-
ram D, per quam di-
uide ipsos A, B, C. Numeri E, F, G, per
quos D ipsos A, B, C metitur, erunt quae-
siti.

Nam quia vnusquisque ipforum E, F, G
¶.2.cor. vnumquemque ipforum A, B, C per D^o me-
16.7. titur, id est aequaliter: ipsi E, F, G in eadem
x.sch.9.7. x sunt ratione cum numeris A, B, C. Di-
co etiam E, F, G minimos fore eandem cum
A, B, C rationem habentium. Si enim negas:
erunt alii H, K, L, ipsis E, F, G minores, mini-
mi eandem cum A, B, C rationem habentium.
¶.21.7. Ergo ψ H, K, L ipsos A, B, C aequaliter me-
tiantur, id est per eundem numerum, qui sit
M. Igitur M metietur^o ipsum A per H,
ipsum B per K, & ipsum C per L; & MH =
*9.ax.7. A. Sed est etiam ED =^o A. Ergo ED =
*19.7. MH, & E:H =^o M:D. Sed E > H: ergo
β.20.def. M >^β D. Quare quum M ipsos A, B, C me-
tiantur: non erit D maxima ipforum A, B, C
mensura; contra hyp. Ergo E, F, G minimi
sunt eandem cum A, B, C rationem habentium.
Q.E.D.

PROP. XXXVI. PROBL.

*Duobus numeris A, B datis, inuenire mini-
mum numerum quem metiantur.*

A 3 B 4 1. Sint dati A, B primi inter
AB 12 se. Multiplicetur A per B, fa-
ctus AB erit quaesitus.

Nam

Nam vterque A, B metitur γ AB. Est au- 8. ax. 7.
tem & AB minimus eorum, quem A & B me- & 1. cor.
tiantur. Si negas: metiantur illi numerum 16. 7.
 $C < AB$; & A quidem ipsum C metiatur per
D, B vero per E. Ergo erit $AD =^d C =^d BE$, 9. ax. 7.
& hinc $A : B =^e E : D$. Sunt autem A, B pri- 19. 7.
mi inter se, ideoque minimi δ : ergo B γ me- 23. 7.
tietur ipsum D. Sed numeri B, D ipsum A γ 21. 7.
multiplicantes fecerunt ipsos AB, C: ergo erit δ 18. 7.
 $B : D = AB : C$, & ideo AB metietur γ ipsum C, 20. def.
minor maiorem. Q. E. A γ . 13. ax. 7.

2. Non sint A, B primi inter se:
A 4 B 6
C 2 D 3 sume $\wedge$ minimos C, D in eadem 35. 7.
AD 12 ratione cum A, B: & multiplica
extremos vel medios per se in-
uicem. Factus AD erit quaesitus.

Nam quia A per D, & B per C multiplica-
tus eundem μ AD producant: tam A, quam μ 19. 7.
B eundem AD metietur γ . Dico etiam AD mi- 7. ax. 7.
nimus esse. Si enim non: metientur A, B
aliquem E minorem quam AD, & metiatur
quidem A ipsum E per F, B vero per G. Quare
erit $AF =^e E =^e BG$, & $A : B =^e G : F$. Sed δ 9. ax. 7.
 $A : B = C : D$. Ergo $C : D = G : F$. Quia δ 1. cor.
autem C, D minimi δ sunt: D ipsum F γ me- 21.
tietur. Sed $D : F =^e AD : AF$ id est E: igitur 7.
AD metietur E, maior minorem. Q. E. A γ . 18. 7.
13. ax. 7.

PROP. XXXVII. THEOR.

Si duo numeri A, B metiantur
A 2 B 3
C 18
D 6 numerum aliquem C: & mini-
mus, quem illi A, B metiuntur,
D eundem C metietur.

Si

A 2 B 3 Si negas: D diuidens C re-
C 18 linquat se minorem E. Quia
D 6 igitur D metitur C — E; & A,
B ipsum D metiuntur: metien-

7. 11. ax. 7. tur quoque τ ipsum C — E, & ν hinc etiam
7. 12. ax. 7. ipsum E, qui minor est quam D. Ergo D
non erit minimus eorum, quos A, B metiun-
tur; contra hyp.

PROP. XXXVIII. PROBL.

*Tribus numeris A, B, C datis, inuenire mini-
mum numerum, quem metiantur.*

φ. 36. 7.

A 3 B 4 C 6
D 12

1. Sume φ minimum
D, quem duo A, B me-
tiuntur. Si C etiam

metiatur ipsum D: erit D quaesitus.

Nam quod tres A, B, C ipsum D metian-
tur, patet. Quod autem minimus sit, sic
ostenditur. Si negas: metiantur A, B, C
alium numerum E ipso D minorem. Ergo
x. 37. 7. & D metietur $\propto$ ipsum E, maior minorem.
Q. E. A.

A 2 B 3 C 4
D 6
E 12

2. Si autem C non me-
tiatur D: sume minimum
φ E, quem C & D metian-
tur. Qui erit quaesitus.

Nam A, B, qui ipsum D metiuntur, me-
ψ. 11. ax. 7. tiuntur quoque ψ ipsum E. Ergo tres A, B,
C ipsum E metientur. E autem minimus
erit. Si enim non: metiantur A, B, C alium
F < E. Ergo & D $\propto$ metietur ipsum F.
Quare quum C & D ipsum F metiantur: me-
tietur

tietur eundem $\propto$ etiam E, minorem maior. $\propto$ 37. 7.
Q.E.A.^o. $\propto$ 13. ax. 7

PROP. XXXIX. THEOR.

A 12 B 4 Si numerum A numerus ali-
C 3 quis B metiatur, ille A, quem
metitur B, partem habebit C
a metiente B denominatam.

Metiatur enim B ipsum A per vnitates in
C: ergo, quum $\propto$ etiam 1 metiatur C per $\propto$ 5. ax. 7.
vnitates in eodem, 1 ipsum C aequaliter
metietur, ac B ipsum A. Quare 1 ipsum B
aequaliter β metietur ac C ipsum A; id est γ β 15. 7.
C ipsius A eadem pars est, quae 1 ipsius B. γ 3. def. 7.
Sed 1 est pars numeri B ab ipso B denomi-
nata: ergo A partem habet C ab ipso B de-
nominatam. Q.E.D.

PROP. XL. THEOR.

A 8 B 2 Si numerus A partem quam-
C 4 cunque B habeat: eum numerus
C a parte B denominatur me-
tietur.

Quia δ numerus C tot vnitates habet, quo- δ hyp.
ta pars B est ipsius A: erit 1 eadem pars ipsius
C, quae B ipsius A; id est ϵ 1 ipsum C aequali- ϵ 3. def. 7.
ter metietur, ac B ipsum A. Hinc & 1 ipsum
B aequaliter ζ metietur, ac C ipsum A. Ergo ζ 15. 7.
C metietur A. Q.E.D.

PROP.

PROP. XLI. PROBL.

Numerum inuenire, qui, minimus quum sit, datas partes A, B, C habeat.

Sint ab ipsis partibus A, B, C denominati numeri D, E, F, & sumatur * minimus eorum, quos D, E, F metiuntur, qui sit G. Dico factum.

A	$\frac{1}{2}$	D	2
B	$\frac{1}{3}$	E	3
C	$\frac{1}{4}$	F	4
G	12		

3. 39. 7. Nam ³ patet, numerum G partes habere, a metientibus D, E, F denominatas, id est, partes A, B, C. Dico autem G etiam esse minimum. Nam si quis minor H partes haberet A, B, C: metirentur eum * numeri D, E, F. Ergo G non esset minimus, quem D, E, F metiuntur; contra hypothesin.

40. 7.





E V C L I D I S

ELEMENTORVM

LIBER VIII.

PROP. I. THEOR.

A 8, B 12, C 18, D 27

Si sint quotcunque numeri A, B, C, D deinceps proportionales, quorum extremi A, D sint inter se primi: minimi erunt omnium eandem cum ipsis rationem habentium.

Si negas: sint totidem alii E, F, G, H minores in eadem ratione. Ergo ex aequo^a. 14. 7. $A : D = E : H$. Quare quum A, D primi inter se, sint quoque^b minimi: ^c γ p. 23. 7. metientur illi ipsos E, H, se ipsis minores. γ . cor. 21. 7. Q. E. A.

PROP. II. PROBL.

Numeros inuenire deinceps proportionales minimos, quotcunque quis imperauerit, in data ratione.

A 2, B 3

A^2 4, AB 6, B^2 9

A^3 8, A^2B 12, AB^2 18, B^3 27

1. Sint A, B minimi^d in data ratione: erunt^e, A^2 , AB, B^2 tres deinceps proportionales minimi in data ratione. 35. 7.

N

Nam

A 2, B 3

A² 4, AB 6, B³ 9A² 8, A²B 12, AB² 18, B³ 27

e. 18. 7.

2. 24. 7.

n. 29. 7.

3. 1. 8.

Nam $A^2 : AB = A : B = AB : B^2$.
 Et quia A, B primi inter se sunt, ideoque etiam A², B² primi sunt inter se: patet³, A², AB, B² minimos esse in ratione A : B. Q.E.F.

2. Sint iterum A, B minimi in data ratione: erunt A³, A²B, AB² & B³ quatuor minimi in data ratione deinceps proportionales.

x. 17. 7.

λ. 24. &

29. 7.

Nam similes sunt eidem rationi A : B sequentes⁴ A³ : A²B, A²B : AB², AB² : B³. Quum igitur A³, B³ inter se⁵ primi sint: erunt A³, A²B, AB², B³ quatuor minimi in data ratione continue proportionales. Et eodem modo quotcunque proportionales inuestigantur. Q.E.F.

Corollaria.

1. Ex hoc manifestum est, si tres numeri deinceps proportionales minimi fuerint omnium eandem cum ipsis rationem habentium; extremos eorum quadratos esse; si vero quatuor; esse cubos.

* 2. Et patet simul, latera extremorum esse duos illos numeros, qui minimi sunt in data ratione.

PROP. III. THEOR.

Si sint quotcunque numeri A, B, C, D deinceps proportionales minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium: eorum extremi A, D primi inter se erunt.

Sumtis

A 8, B 12, C 18, D 27

E 2, F 3

G 4, H 6, K 9

L 8, M 12, N 18, O 27

Sumtis enim ² duobus minimis numeris E, ^{35.7. &}
 F, & tribus G, H, K, & sic deinceps pluri- ^{2.8.}
 bus minimis continue proportionalibus in
 eadem ratione A: B, donec peruentum sit ad
 totidem L, M, N, O, quot sunt propositi A, B,
 C, D: erit vnusquisque ipsorum L, M, N, O
 vnicuique ipsorum A, B, C, D aequalis. Sed
 $L = E^2$, & $O = F^2$. Ergo quia L, O pri- ^{29.7. &}
 mi inter se sunt: etiam A, D inter se primi ^{24.7.}
 erunt. Q. E. D.

PROP. IV. PROBL.

*Rationibus datis quocunque, A: B, C: D,
 E: F in minimis numeris, numeros inuenire deinceps
 minimos in datis rationibus.*

A 2, B 5, C 3, D 4, E 5, F 6

H 6, G 15, K 20, L 24

N O M P

Sume ² minimum G, quem B & C metian- ^{36.7.}
 tur, & duos alios H, K, quos ipsi A, D aequae
 metiantur, ac ipsi B & C numerum G.

Cas. 1. Iam si E quoque metitur ipsum K,
 sume numerum L, quem F toties metiatur,
 quoties E ipsum K. Dico factum.

Nam ^o est $H: G = A: B$, & $G: K = C: D$, ^{26. def. 7.}
 & $K: L = E: F$. Si vero neges H, G, K, L mi- ^{& 13.7.}
 nimos esse eorum, qui in rationibus propositis
 sunt deinceps proportionales: sint alii N, O, M,
 P minimi. Et quia est $A: B = N: O$; A vero

N 2

&

A 2, B 5, C 3, D 4, E 5, F 6
 H 6, G 15, K 20, L 24
 N O M P

π. cor. 21. & B minimi sunt: B metietur π O. Eadem
 7. ratione C metietur ipsum O. Quare etiam
 ε. 37. 7. G metietur numerum O, maior minorem.
 Q. E. A.

A 4, B 5, C 2, D 3, E 4, F 3
 H 8, G 10, K 15
 N 32, O 40, M 60, P 45
 Q R S T

Cas. 2. At si non metiatur E ipsum K:
 sume minimum M, quem E & K metiantur;
 & duos N, O, quos ipsi H, G aequae metian-
 tur, ac K ipsum M, item quantum P, quem
 F aequae metiatur, ac E ipsum M. Dico
 factum.

ε. 20. def. 7. Est enim $A : B = H : G = N : O$, item C:
 & 13. 7. $D = G : K = O : M$, & $E : F = M : P$. Si
 vero neges: minimos esse N, O, M, P: sint
 Q, R, S, T minimi in datis rationibus. Quum
 ergo sit $A : B = Q : R$; & A, B minimi sint:
 B metietur π R. Eadem ratione C metietur
 R: ergo & G metietur eundem R. Quare
 quum sit $G : K = C : D = R : S$: numerus K
 metietur S. Sed quia $E : F = S : T$, & E, F
 minimi sunt: metitur quoque E ipsum S. Er-
 go tandem M metiretur S, maior minorem.
 Q. E. A.

PROP.

PROP. V. THEOR.

A 2	C 4	BC 12	<i>Plani numeri AB, CD rationem habent ex lateribus A, C, & B, D compositam</i> $AB:CD = (A:C) + (B:D).$
B 3	D 5		
AB 6	CD 20		
E 3, F 6, G 10			

Nam sumtis^r deinceps minimis E, F, G in^r. 4. 8. datis rationibus $A:C & B:D$; quia $E:G = \tau. 5. \text{def. } 6.$ $(E:F) + (F:G)$: erit $E:G = (A:C) + (B:D)$. Iam B, ipsum C multiplicans, faciat BC : & erit $AB:BC = A:C = E:F$. Si^r. 17. 7. militer $BC:CD = B:D = F:G$. Ergo^r. $\phi.$ confr. ex aequo $AB:CD = \tau. E:G = (A:C) + \tau. 14. 7. (B:D)$. Q.E.D.

PROP. VI. THEOR.

A 16, B 24, C 36, D 54, E 81
F 4, G 6, H 9

Si fuerint quotcunque numeri A, B, C, D, E deinceps proportionales; primus autem A secundum B non metiatur: neque alius aliquis vllum metietur.

1. Numeros hos deinceps se non metiri patet: quia si B metiretur C, A etiam metiretur^r ipsum B, contra hypothesin. ^r. 20. def. 7.

2. Nec vllus, vt A, vllum, vt C, metietur. Quot enim sint sumti A, B, C, tot sumantur minimi^r numeri in eadem ratione, ^r. 35. 7. qui sint F, G, H: hinc erit^r $A:C = F:H$. Sed^r. 14. 7. quia $A:B = F:G$, & A non metitur B: neque F metietur G; quare F vnitas esse^r ne^r. 3. 6. ax. 7. quit. Hinc, quum F & H primi^r sint inter^r. 3. 8.

N 3 se,

2.12. def. 7. se, F nequit ζ metiri ipsum H. Ergo nec A
 a. 20. def. 7. metiri potest α ipsum C. Q. E. D.

PROP. VII. THEOR.

A 2, B 4, C 8, D 16

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales $\div\div$ A, B, C, D), primus autem A metietur extremum D; Et secundum B metietur.

¶ 6. 8. Si negas: neque alius aliquis vllum η metietur, ergo nec A ipsum D; contra hypothesis.

PROP. VIII. THEOR.

Si inter duos nu-

A 2, C 4, D 8, B 16 *meros A, B numeri*
 G 1, H 2, K 4, L 8 *deinceps proportiona-*
 E 3, M 6, N 12, F 24 *les C, D ceciderint;*
quot inter eos cadunt

numeri deinceps proportionales, totidem Et inter alios E, F, eandem cum ipsis A, B rationem habentes, cadent.

5. 35. 7. Sumtis enim θ totidem minimis G, H, K, L,
 6. 3. 8. quot sunt numeri A, B, C, D, & in eadem ra-
 7. 14. 7. tione: erunt G & L ρ primi inter se, & ex
 a. hyp. aequo erit α G : L = A : B = λ E : F. Sunt
 11. 23. 7. autem μ G & L minimi: ergo ρ G aequaliter
 12. 21. 7. metitur ipsum E, atque L ipsum F. Sed quot-
 ties G metitur E, toties numeri H, K metian-
 tur ipsos M, N. Numeri ergo G, H, K, L
 ipsos E, M, N, F aequaliter metientur; ideo-

20. def. 7. que ζ numeri G, H, K, L in eadem ratione
 & 13. 7. erunt, in qua sunt E, M, N, F. Ergo E, M,
 N, F

N, F eandem cum ipsis A, C, D, B rationem habebunt, & ergo deinceps proportionales erunt. Tot igitur inter E, F cadunt deinceps proportionales, quot inter A & B. Q. E. D.

PROP. IX. THEOR.

Si duo numeri

A 8, C 12, D 18, B 27

E 1

F 2, G 3

H 4, K 6, L 9

M 8, N 12, O 18, P 27

A, B inter se primi fuerint, & inter ipsos numeri deinceps proportionales C, D ceciderint: quot in-

ter ipsos A, B cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter utrumque ipsorum A, B & unitatem E deinceps proportionales cadent.

Sume enim in eadem ratione, in qua sunt A, C, D, B, duos minimos F, G, & tres minimos H, K, L, & sic porro, donec sumtorum M, N, O, P multitudo aequalis fiat multitudi-
ni datorum A, C, D, B. Hinc, quia A, C, D, B minimi sunt in eadem ratione, erit
 $A = M, C = N, D = O, B = P$. Et quia
 $H = F^2$: erit $E : F = F : H$. Similiter quia
 $A = M = HF$: erit $E : F = H : A$. Ergo
 $\div E, F, H, A$. Eodem modo demonstratur,
esse $\div E, G, L, B$. Q. E. D.

PROP. X. THEOR.

Si inter duos numeros A, B, & unitatem E deinceps proportionales numeri D, E, & F, G ceciderint: quot inter utrumque ipsorum A, B & unitatem C cadunt numeri deinceps proportionales,

N 4

tionales, totidem & inter ipsos A, B numeri deinceps proportionales cadent.

Numerus enim D
A 8, K 12, L 18, B 27 ipsum F multipli-
E 4, H 6, G 9 cans faciat H, & su-
D 2, F 3 matur K = HD, &
C 1 L = HF. Et quia
ponitur C: D = E:

v. 5. ax. 7. E; C vero ipsum D metitur* per D: metie-
v. 20. def. 7. tur* quoque D ipsum E per D; & ergo
p. 9. ax. 7. $E = \phi D^2$. Rursus quia ponitur C: D = E:
A: erit $A = ED$. Eadem ratione $G = F^2$, &
 $B = GF$. Quum ergo sit $E = D^2$ & $H =$
 FD : erit $D: F = \propto E: H$. Item quia $H =$
 FD , & $G = F^2$: erit $D: F = H: G$. Ergo
 $E: H = H: G$. Rursus quia $K = HD$, &
 $L = HF$: erit $A: K = \propto E: H = D: F = \psi$
 $K: L$. Similiter quia $L = HF$, & $B = GF$:
erit $L: B = \propto H: G = E: H$. Quare $\div A,$
 K, L, B . Q. E. D.

PROP. XI. THEOR.

Inter duos numeros
 A^2 4, AB 6, B^2 9 *quadratos A^2 , B^2 , unus*
A 2, B 3 *medius proportionalis*
AB *cadit. Et quadra-*
tus A^2 ad quadratum B^2 duplicatam ratio-
nem habet eius, quam latus A habet ad latus B.

v. 18. 7. 1. Est enim $A^2: AB = \alpha A: B = \beta AB: B^2$.
p. 17. 7. Q. E. D.
2. Quia (per dem.) $\div A^2, AB, B^2$:
v. 10. def. 5. erit $A^2: B^2 = \gamma (A^2: AB)^2 = (A: B)^2$.
Q. E. D.

PROP.

PROP. XII. THEOR.

$$A^3 8, A^2 B 12, AB^2 18, B^3 27$$

$$A^2 4, AB 6, B^2 9$$

$$A 2, B 3$$

Inter duos numeros cubos A^3, B^3 , duo medii proportionales $A^2 B, AB^2$ cadunt. Et cubus A^3 ad cubum B^3 triplicatam habet rationem eius, quam latus A habet ad latus B .

1. Nam $A : B = A^2 : AB$, & $A : B = AB : B^2$. 18. 7.
 B^2 . Sed $A^3 : A^2 B = A^2 : AB = A : B$. Rur-
 fus $A^2 B : AB^2 = A : B$, item $AB^2 : B^3 = A : B$. 17. 7.
 $AB : B^2 = A : B$. Ergo $\div A^3, A^2 B, AB^2, B^3$.
 Q. E. D.

2. Quia (per dem.) $\div A^3, A^2 B, AB^2, B^3$,
 erit $A^3 : B^3 = (A^3 : A^2 B)^3 = (A : B)^3$. 2. 11. def. 5.
 Q. E. D.

PROP. XIII. THEOR.

$$A 2, B 4, C 8$$

$$A^2 4, AB 8, B^2 16, BC 32, C^2 64$$

$$A^3 8, A^2 B 16, AB^2 32, B^3 64, B^2 C 128, BC^2 256, C^3 512$$

Si sint quotcunque numeri A, B, C deinceps proportionales, & unusquisque, se ipsum multiplicans, faciat aliquos A^2, B^2, C^2 : facti ex ipsis proportionales erunt. Et si positi a principio numeri A, B, C factos A^2, B^2, C^2 multiplicantes, alios A^3, B^3, C^3 faciant, & ipsi proportionales erunt. Et semper circa extremos hoc contingit.

Expositis enim numeris $AB, BC, A^2 B, AB^2, B^2 C$ & BC^2 : erit $\div A^2, AB, B^2$, item $\div A^3, A^2 C, AB^2, B^3$, & erunt omnium horum numerorum rationes eadem rationi $A : B$. Similiter B^2, BC, C^2 sunt deinceps proportionales

A 2, B 4, C 8

A^2 4, AB 8, B^2 16, BC 32, C^2 64

A^3 8, A^2B 16, AB^2 32, B^3 64, B^2C 128, BC^2 256, C^3 512

in ratione B: C, pariterque B^3 , B^2C , BC^2 , C^3 in eadem ratione deinceps proportionales. Ergo quia, $A: B = B: C$, erunt A^2 , AB, B^2 in eadem ratione, in qua B^2 , BC, C^2 ; nec non A^3 , A^2B , AB^2 , B^3 in eadem ratione, in qua B^3 , B^2C , BC^2 , C^3 . Sunt autem tam illi quam hi inter se multitudine pares. Ergo ex aequo $A^2: B^2 = B^2: C^2$; & $A^3: B^3 = B^3: C^3$. Q. E. D.

9. 14. 7.

PROP. XIV. THEOR.

Si numerus quadratus

A 2, B 4

A^2 4, AB 8, B^2 16

tus A^2 metiatur quadratum numerum B^2 :

& latus A latus B

metietur. Et si latus A metiatur latus B: & quadratus A^2 quadratum B^2 metietur.

1. 2. 8.

1. Sumto enim numero AB, erunt deinceps proportionales A^2 , AB, B^2 in ratione A ad B. Ergo A^2 metietur AB. Hinc quia $A^2: AB = A: B$, metietur etiam A ipsam B. Q. E. D.

2. 7. 8.

1. 20. def. 7.

1. 18. 7.

2. Si A metitur B: quia $A: B = A^2: AB$, A^2 quoque metietur AB. Et quia $A^2: AB = A: B$, B^2 metietur AB & AB

3. 11. 21. 7.

ipsum B^2 . Ergo A^2 metietur B^2 . Q. E. D.

PROP.

PROP. XV. THEOR.

A^3 8, A^2B 16, AB^2 32, B^3 64

A^2 4, AB 8, B^2 16

A 2, B 4

Si numerus cubus A^3 metiatur cubum numerum B^3 : & latus A latus B metietur. Et si latus A latus B metiatur: & cubus A^3 cubum B^3 metietur.

1. Sumtis enim numeris A^2B , AB^2 , quia $\circ.2.8.$ deinceps in ratione A ad B proportionales sunt A^3 , A^2B , AB^2 , B^3 , & A^3 ipsum B^3 metitur; metietur & A^3 ipsum A^2B . Quare quum sit $A^3 : A^2B = A : B$: metietur & A^3 ipsum B . $\circ.20.def.7.$ Q.E.D.

2. Quia, iisdem sumtis, est $\circ A : B = A^3 : A^2B$, & A ipsum B metiri ponitur: metietur A^3 & A^3 ipsum A^2B . Quare quum sit $\div A^3$, A^2B , AB^2 , B^3 : patet: & A^3 ipsum B^3 metiri. $\circ.11.ax.7.$ Q.E.D.

PROP. XVI. THEOR.

Si numerus quadratus A^2 non A^2 9, B^2 16 metiatur quadratum numerum A 3, B 4 B^2 : neque latus A latus B metietur. Et si latus A non metiatur latus B : neque hic quadratus A^2 quadratum B^2 .

1. Si enim A metiretur B : A^2 etiam metiretur B^2 ; contra hypothesin. $\circ.14.8.$

2. Et si A^2 metiretur B^2 : A etiam metiretur B ; contra hypothesin.

PROP.

PROP.; XVII. THEOR.

*Si numerus cubus A^3 non metiatur cubum numerum B^3 :
 A^3 8, B^3 27 neque latus A latus B metietur. Et si latus A non metiatur latus B: neque cubus A^3 cubum B^3 metietur.*

1. Si enim A metiretur B: A^3 quoque metiretur B^3 ; contra hypothesin.
 2. Si A^3 metiretur B^3 : etiam A metiretur B; contra hypothesin.

PROP. XVIII. THEOR.

*Inter duos similes
 A 2, B 3, C 4, D 6 planos numeros AB,
 AB 6, BC 12, CD 24 CD , unus medius proportionalis BC cadit.
 Et planus AB ad planum CD duplicatam rationem habet eius, quam latus homologum A habet ad homologum latus C .*

1. Quia enim $AB:BC = A:C$, & $A:C = B:D$: erit $AB:BC = B:D = BC:CD$. Q. E. D.

2. Quum $\div AB, BC, CD$ (per dem.): erit $AB:CD = (AB:BC)^2 = (A:C)^2 = (B:D)^2$. Q. E. D.

* Cor. Hinc inter duos similes planos cadit unus medius proportionalis in ratione laterum homologorum.

PROP. XIX. THEOR.

A 2, B 3, C 5, D 4, E 6, F 10
 ABC 30, BCD 60, BDF 120, DEF 140
 AB 6, BD 12, DE 24

Inter

Inter duos similes solidos numeros ABC, DEF duo medii proportionales BCD, BDF cadunt. Et solidus ABC ad similem solidum DEF triplicatam rationem habet eius, quam latus homologum A, vel B, vel C habet ad homologum latus D, vel E, vel F.

1. Capiantur enim numeri AB, BD, DE, BCD, BDF. Et quia $A : B = x D : E$: erunt x hyp. AB, DE similes plani, & $\div \cdot$ * AB, BD, DE in $\downarrow$ 21. def. 7. ratione $A : D$, vel $B : E$, vel $C : F$. Est autem $ABC : BCD = * AB : BD$, & $BDF : DEF = *$ a. 18. 8. $BD : DE$. Quare $ABC : BCD = BDF : DEF$ a. 17. 7. $= C : F$. Denique $BCD : BDF = * C : F$. Ergo $\div \cdot$ ABC, BCD, BDF, DEF. Q. E. D.

2. Quia ergo $\div \cdot$ ABC, BCD, BDF, DEF: erit $ABC : DEF = ^\beta (ABC : BCD) = ^\gamma (C : F) = (B : E) = (A : D)$. β 17. def. 5. γ dem. Q. E. D.

* Cor. Ergo inter duos similes solidos cadunt duo medii proportionales in ratione laterum homologorum.

PROP. XX. THEOR.

Si inter duos numeros A, B unus medius proportionalis cadat: numeri A, B similes plani erunt.

Sume minimos D, E in ratione A ad C. Ergo ^{3} D ipsum A aequaliter metietur, ac E ^{3} 21. 7. ipsum C. Metiatur D ipsum A per F. Ergo $DF = ^4 A$, & $EF = ^4 C$. Ergo A planus ^{2} a. 9. ax. 7. numerus est, cuius latera sunt D, F. Rursus ^{2} 16. def. 7. quia $A : C = ^2 C : B$: minimi quoque D, E ^{4} hyp. sunt

$A 8, C 12, B 18$ sunt in ratione $C : B$.
 $D 2, E 3, F 4, G 6$ Hinc si D metiatur
 ipsum C per G , E me-
 tietur quoque B per G . Ergo $DG = C$,
 & $EG = B$. Quare & B est numerus pla-
 nus. Et quia $DG = C = EF$, ideoque D :
 9. 17. 7. $F = E : G$: erunt A & B similes * numeri pla-
 21. def. 7. ni. Q. E. D.

PROP. XXI. THEOR.

$A 24, C 72, D 216, B 648$
 $E 1, F 3, G 9$
 $H 1, K 1, N 24, L 3, M 3, O 72$

*Si inter duos numeros A, B duo mediis pro-
 portionales C, D cadant: numeri A, B similes so-
 lidi erunt.*

35. 7. Sume $\wedge$ tres minimos E, F, G , eandem cum
 A, C, D rationem habentes, & ergo deinceps
 3. 8. proportionales: & erunt E, G primi^a inter se,
 20. 8. & similes plani^a numeri. Sint H, K latera
 ipsius E , & L, M latera ipsius G . Erunt ergo
 18. 8. E, F, G proportionales in ratione $\frac{1}{2} H : L$ vel
 $K : M$. Iam quum E, F, G eandem cum A ,
 14. 7. C, D rationem habeant: erit $E : G = A : D$.
 23. 7. Et quia E, G primi sunt, ideoque^a minimi:
 21. 7. ϵ metientur ipsos A, D aequaliter. Metiatur
 9. ax. 7. E ipsum A per N : ergo $EN = A$. Sed E
 17. def. 7. $= HK$: ergo A est solidus^a numerus, cuius
 latera H, K, N . Rursus quia E, F, G minimi
 sunt eandem rationem habentium, quam C, D ,
 $B : E$ ipsum C aequaliter metitur, ac G ipsum B ,
 Metiatur E ipsum C per O . Ergo $GO = B$,
 Sed

Sed $G = LM$. Quare B est solidus, cuius latera L, M, O . Denique quia $A = EN$, & $C = EO$: erit $N : O = A : C = E : F = 17. 7.$
 $H : L = K : M$. Quare similes φ solidi sunt $\varphi. 21. def. 7.$
 A, B numeri. Q. E. D.

PROP. XXII. THEOR.

$A 4, B 6, C 9$ Si tres numeri A, B, C deinceps proportionales fuerint, primus A autem fit quadratus: Et tertius C quadratus erit.

Nam A, C similes $\propto$ sunt plani numeri. Ergo quum ψ latera ipsius A aequalia sint: ψ erunt $\psi. 18. def. 7.$
 & latera ipsius B aequalia, ideoque ψ erit & $\psi. 21. def. 7.$
 C quadratus. Q. E. D.

PROP. XXIII. THEOR.

$A 8, B 12, C 18, D 27$

Si quatuor numeri A, B, C, D deinceps proportionales fuerint, primus autem A fit cubus: Et quartus D cubus erit.

Nam A, D sunt $\propto$ similes solidi. Ergo & D cubus est. Q. E. D.

PROP. XXIV. THEOR.

$A 4, B 9$ Si duo numeri A, B inter se
 $C 16, D 36$ rationem habeant, quam numerus quadratus C ad quadratum numerum D , primus autem A fit quadratus: Et secundus B quadratus erit.

Quia enim inter similes planos C, D unus medius proportionalis β cadit; & $A : B = C : D$ $\beta. 18. 8.$
 cadet

7. 8. 8. cadet quoque inter A, B vnus ⁊ medius
 2. 22. 8. proportionalis. Ergo & B ³ est quadratus.
 Q.E.D.

* *Schol. 1.* Ergo ratio numeri quadrati ad non quadratum nequit exhiberi per duos quadratos numeros.

* *Schol. 2.* Et si A numerus ad numerum B est vt quadratus ad quadratum: numeri A, B similes plani sunt. (per 20. 8. & dem. huius). Et hinc dissimiles plani non sunt vt quadratus ad quadratum.

PROP. XXV. THEOR.

*Si duo numeri A, B inter
 A 64, B 216 se rationem habeant, quam
 C 8, D 27 numerus cubus C ad cubum
 numerum D, primus autem A
 sit cubus: & secundus B cubus erit.*

Quia enim C, D similes solidi sunt: duo
 1. 19. 8. medii proportionales inter * eos cadunt. Er-
 2. 8. 8. go & inter A, B duo medii proportionales ⁊
 3. 23. 8. cadunt. Quare quum A cubus sit: etiam *
 cubus erit. Q.E.D.

* Ergo ratio numeri cubi ad non cubum reperi-
 ri nequit in duobus numeris cubis.

PROP. XXVI. THEOR.

*Similes plani numeri A,
 A 6, C 12, B 14 B inter se rationem habent,
 D 1, E 2, F 4 quam numerus quadratus
 ad quadratum nuperum.*

Medius proportionalis, inter A, B cadens ³,
 3. 18. 8. sit C, & sumantur * minimi D, E, F eandem
 4. 2. 8. quam

quam A, C, B rationem habentium. Ergo ^{1.} 1. cor.
D, F quadrati erunt. Et quia $D : F = 4$ 2. 8.
A : B : habebit A ad B rationem quadrati ad ^{14.} 7.
quadratum. Q. E. D.

PROP. XXVII. THEOR.

A 16, C 24, D 36, B 54

E 8, F 12, G 18, H 27

*Similes solidi numeri A, B inter se ratio-
nem habent, quam numerus cubus ad cubum
numerum.*

Nam medii duo proportionales inter A,
B cadentes sint C, D, & sint E, F, G, ^{19.} 8.
H totidem ^{2.} 8. minimi & in eadem ratione
ac A, C, D, B. Ergo e eorum extremi E, ^{1.} 1. cor.
H cubi erunt. Hinc, quia $A : B = 8$ 2. 8.
H, patet, esse A ad B, vt cubus ad cubum. ^{14.} 7.
Q. E. D.



E V C L I D I S

ELEMENTORVM

LIBER IX.

PROP. I. THEOR.

Si duo similes plani numeri A, B, sese multiplicantes, aliquem fecerint: factus AB quadratus erit.

A 6, B 54
 AB 324
 A² 36

Nam numerus A, se ipsum multiplicans, faciat quadratum A². Ergo α A : B = A² : AB. Et quia inter A & B vnus medius proportionalis β cadit: cadet etiam γ inter A² & AB vnus medius proportionalis. Ergo AB est δ quadratus. Q. E. D.

α . 17. 7.
 β . 18. 8.
 γ . 8. 8.
 δ . 22. 8.

PROP. II. THEOR.

Si duo numeri, sese multiplicantes A, B, quadratum numerum AB efficiant: similes plani erunt.

A 3, B 12
 AB 36
 A² 9

Sumatur numerus quadratus A². Ergo A : B = A² : AB. Et quia quadrati A², AB similes plani numeri sunt, & ergo inter eos vnus medius proportionalis ζ cadit: cadet quoque inter A & B vnus η medius proportionalis. Ergo A & B similes plani sunt θ numeri. Q. E. D.

α . 17. 7.
 ζ . 18. 8.
 η . 8. 8.
 θ . 20. 8.

PROP. III.

Q.

PROP.

PROP. III. THEOR.

A^3 8 A^6 64 Si cubus numerus A^3 se
 A^2 4 ipsum multiplicans faciat ali-
 A 2 quem A^6 : factus A^6 cubus
erit.

I

Sumatur enim cubi A^3
latus A , & huius quadratum $A^2 = A \cdot A$. 18. def. 7
Ergo $A^3 = A^2 \cdot A$. Quare $1 : A = A : A^2$, & $1 : A = A^2 : A^3$. Ergo inter 1 & A^3 duo medii proportionales cadunt. Quia vero $1 : A^3 = A^3 : A^6$, totidem etiam inter A^3 & A^6 cadunt. Ergo A^6 cubus est. Q. E. D.

PROP. IV. THEOR.

A 8, B 27 Si numerus cubus A , cu-
 A^2 64 AB 216 bum numerum B multiplicans,
faciat aliquem: factus AB
cubus erit.

Sumatur numerus A^2 , qui etiam cubus erit. Et quia $A : B = A^2 : AB$: cubus erit ipse AB . Q. E. D.

PROP. V. THEOR.

A 8, B 27 Si cubus numerus A , nu-
 A^2 64, AB 216 merum aliquem B multipli-
cans, faciat cubum AB : &
multiplicatus B cubus erit.

Sumatur numerus A^2 , qui cubus erit. Et quia $A : B = A^2 : AB$: erit B cubus. Q. E. D.

O 2

PROP.

PROP. VI. THEOR.

A 8, A² 64, A³ 512

Si numerus A, se ipsum multiplicans, cubum A³ faciat: Et ipse A cubus erit.

¶ 17. 7. Sumto enim cubo numero A³, quia
 x. 25. 8. A³: A² = ϕ A²: A: erit A x cubus.
 Q.E.D.

PROP. VII. THEOR.

A 6, B 7 Si compositus numerus A, nume-
 AB 42 rum aliquem B multiplicans, quem-
 C 3, D 2 piam faciat: factus AB solidus
 erit.

¶ 13 def. 7. Numerum enim A metiatur ψ numerus C
 . 9. ax. 7. per D. Ergo A = ϕ CD. Ergo AB = CDB
 . 17. def. 7. solidus ϕ est. Q.E.D.

PROP. VIII. THEOR.

$\div$ 1. A 3. B 9. C 27. D 81. E 243. F 729

Si ab unitate quotcunque numeri A, B, C, D, E, F deinceps proportionales fuerint: tertius quidem ab unitate B quadratus est, Et vnum intermittentes omnes D, F; quartus autem C est cubus, Et duos intermittentes omnes F; septimus vero F cubus simul Et quadratus, Et quinque intermittentes omnes.

1. Quia enim 1: A = A: B: vnitas ipsam
 ¶ 20. def. A aequaliter metitur ϕ ac A ipsum B. Ergo
 7. A per se ipsum metitur γ numerum B, & hinc
 7. 6. ax. 7. B = δ A² quadratus est. Et quoniam $\div$ B,
 . 9. ax. 7. C, D: erit δ & D quadratus. Eadem ratione
 . 22. 8. & F quadratus erit, & vnum intermittentes
 omnes quadrati erunt. Q.E.D.

2. Quia

2. Quia est $1 : A = B : C$ metietur B ipsum C per A, & ergo $C = AB = A^3$ cubus 1.9. ax. 7. erit. Et quum sint $\div \div C, D, E, F$ erit $\& F$ 23. 8. cubus. Et similiter omnes duos intermittentes cubi erunt. Q. E. D.

3. Et quia F etiam ostensus est quadratus: septimus F & quadratus & cubus simul est; idemque pariter demonstratur de omni quinque intermittente. Q. E. D.

PROP. IX. THEOR.

$\div \div 1, A 4, B 16, C 64, D 256, E 1024, F 4096$
 $\div \div 1, A 8, B 64, C 512, D 4096, E 32768, F 262144$

Si ab unitate quotcunque numeri A, B, C, D, E, F deinceps proportionales fuerint, qui vero post unitatem A sit quadratus; & reliqui omnes quadrati erunt: si qui post unitatem A sit cubus; & reliqui omnes cubi erunt.

1. Sit enim A quadratus. Iam tertius B, & vnum intermittentes omnes D, F, quadrati sunt. Sed quia sunt $\div \div A^1, B^*$ 8. 9. C, & A quadratus est: erit $\& C$ quadratus, 9. 22. 8. hinc & E & c. Omnes ergo quadrati sunt. Q. E. D.

2. Sit A cubus. Iam quartus C, & omnes F, qui duos intermittunt, cubi sunt. Et quia $1 : A = A : B$; & ergo $B = A^2$: erit $\& B$ 20. def. 7. cubus; quare & E cubus ^{A} erit. Et ob $\div \div$ & 9. ax. 7. A, B, C, D, erit $\& D$ cubus. Et similiter reliqui omnes cubi sunt. Q. E. D. 3. 9. 23. 8.

PROP. X. THEOR.

1, A 2, B 4, C 8, D 16, D 32, F 64

Si ab unitate quotcunque numeri A, B, C, D, E, F deinceps proportionales fuerint, qui vero post unitatem A non sit quadratus; neque alius ullus quadratus erit, praeter tertium ab unitate B, & unum intermittentes omnes D, F: si, qui post unitatem, A non sit cubus; neque alius ullus cubus erit, praeter quartum ab unitate C, & duos intermittentes omnes F.

1. Non sit A quadratus, & tamen C quadratus sit, si fieri potest. Ergo quia & B quadratus ^μ est: A ad B eam rationem habet, quam quadratus B ad quadratum C, & hinc A quadratus ^ν erit; *contra hypothesin*. Similiter ostendemus, nullum alium quadratum esse praeter B, D, F &c. Q. E. D.

2. Si A cubus non sit, & tamen D cubus esset: quoniam C cubus ^μ est; haberet & B ad C rationem, quam cubus C ad cubum D, & ergo ipse B cubus ^ο esset. Hinc quia, ob
^{ο. 25. 8.}
^{π. 20. def. &}
^{9. ax. 7.}
^{ε. 6. 9.}
 $1 : A = A : B$, est $B = \pi A^2$, esset & A cubus ^ε; *contra hyp.* Similiter ostendemus, nec ullum alium cubum esse praeter C & F &c. Q. E. D.

PROP. XI. THEOR.

÷ 1, A 3, B 9, C 27, D 81, E 243.

Si ab unitate quotcunque numeri A, B, C, D, E deinceps proportionales fuerint: minor A maiorem D metitur per aliquem C eorum, qui sunt in numeris proportionalibus.

Quia

Quia enim est $1 : A = C : D$: aequè metitur C ipsum D ^α ac 1 ipsum A. Ergo & A ^{α.20.def.7.} ipsum D aequè ^α metitur ac 1 ipsum C, id ^{α.15.7.} est ^α A metitur D per C. ^{α.9.ax.7.}

* Pariter, si sumantur B & E, demonstratur, B metiri ipsum E per aliquem C inter propor- ^{φ.14.7.} tionales: quia $\phi 1 : B = C : E$. Q. E. D.

* Cor. In serie numerorum ab unitate deinceps proportionalium secundus A quemvis D metitur per proxime praecedentem C.

* Schol. 1. Et hinc secundus A, quemvis C multiplicans, facit proxime sequentem D.

* Schol. 2. Si numerus, qui metitur aliquem ex proportionalibus, non sit vnus proportionalium: neque is, per quem metitur, vnus ex proportionalibus erit $\propto$.

^{α.2.cor.}
^{16.7.}

PROP. XII. THEOR.

$\div 1, A 4, B 16, C 64, D 256$
 $E 2, H 8, G 32, F 128$

Si ab unitate quotlibet numeri A, B, C, D deinceps proportionales fuerint: quicumque primorum numerum E metiuntur ultimum D, iidem $\&$ eum A, qui unitati proximus est, metientur.

Si negas, E metiri ipsum A: erunt ψE & A ψ ^{31.7.} primi inter se. Metiatur autem E ipsum D per F: & erit $EF =^{\alpha} D =^{\alpha} AC$. Quare ^{α.9.ax.7.} $A : E =^{\beta} F : C$. Sunt autem A, E primi ^{α.1.sch.} inter se, & γ minimi: hinc E metitur ^δ etiam ^{β.11.9.} C. Metiatur per G. Ergo $EG =^{\alpha} C =^{\alpha}$ ^{γ.23.7.} AB. Quare $A : E =^{\beta} G : B$. Hinc E meti ^{δ.cor.21.7.} tur ^δ ipsum B. Metiatur eum per H. Ergo $EH =^{\alpha} B =^{\alpha} A^2$. Hinc $A : E =^{\beta} H : A$. Ergo E metietur quoque ^δ ipsum A. Q. E. D.

* *Schol. 1.* Numerus primus, ultimum metiens, metitur omnes ultimum praecedentes, per cor. 11. 9. & 11. ax. 7.

* *Schol. 2.* Si quis numerus, proximum unitati non metiens, ultimum metiatur, numerus erit compositus. Si enim primus esset, metiretur proximum unitati.

* *Schol. 3.* Si proximus unitati sit numerus primus: nullus alius numerus primus ultimum metietur. Si enim alius metiretur, unitati proximum quoque metiretur, qui ergo primus non foret.

PROP. XIII. THEOR.

$\div 1, A 5, B 25, C 125, D 625$
E - H - - G - - F - -

Si ab unitate quocunque numeri A, B, C, D deinceps proportionale fuerint, qui vero post unitatem A primus sit: maximum D nullus alius metietur, praeter eos A, B, C, qui sunt in numeris proportionalibus.

Si enim fieri potest: metiatur ultimum D aliquis numerus E, qui non idem sit cum aliquo ipsorum A, B, C. Ergo quia E numerus primus esse ζ nequit: compositus erit.

ζ 3. schol. 12. 9. Quare ipsum E metietur η aliquis primus, qui nullus erit praeter A. Si quis enim alius metiretur ipsum E: idem η quoque ipsum D metiretur; quod fieri nequit ζ . Ergo A metietur E. Iam metiatur E ipsum D per F: & F

12. sch. 11. 9. cor. 16. 7. 1. 9. ax. 7. 1. schol. 11. 9. 19. 7. nullus ex ipsis A, B, C esse η poterit. Sed quia F metietur η D: eodem modo, quo ante, demonstrabitur, F compositum esse, quem A metiatur. Et quia, ob $EF = \eta D = \eta AC$, est $A:E = \eta F:C$; A vero ipsum E metitur: F quo-

F quoque ipsum C ξ metietur. Metiatur per G, qui nullus ex ipsis A, B esse poterit. Et quia, ob $FG = ^\wedge C = ^\wedge AB$, est $A : F = G : B$; A vero ipsum F metitur: metietur ξ & G ξ . 20.def.7. ipsum B. Metiatur per H. Quum vero G nullus sit ex proportionalibus: neque H idem erit, qui A. Sed quum, ob $GH = ^\wedge B = ^\wedge A^2$, sit $A : G = H : A$, eodem vero, quo ante modo, demonstratur, A ipsum G metiri, quia G ipsum C ξ metitur: patet, H metiri ipsum A, & ergo A non esse α primum; *contra* α . 11.def.7. *hypothefin*.

* *Schol.* Quia similiter demonstratur, quod ipsum C nullus numerus metiatur, praeter A vel B: patet, quod numeros ab unitate deinceps proportionales, si proximus unitati primus sit, nullus numerus metiatur, nisi qui inter ipsos proportionales habetur.

PROP. XIV. THEOR.

Si minimum numerum
A primi numeri B, C, D
metiantur: nullus alius
numerus primus metietur
ipsum A praeter eos, qui a principio metiebantur, B, C, D.

A 30
B 2, C 3, D 5
E -- F --

Si fieri potest, metiatur ipsum A alius E, per F. Ergo E & F facient π numerum A: π . 9. α . 7. Quare quum B, C, & D metiantur ipsum A: metientur quoque vnum ξ ipsorum E, F. Non autem metiri possunt π primum E: ergo alterum F metientur. π . 32. 7. Est autem $F < A$. Quare A non erit minimus, quem B, C, D metiantur; *contra hypothefin*.

PROP. XV. THEOR.

$\div A 9, B 12, C 16$ Si tres numeri A, B,
 $D 3, E 4$ C, deinceps proportionales,
 fuerint minimi omnium
 eandem cum ipsis rationem habentium: duo qui-
 libet compositi ad reliquum primi erunt ($A + B$
 ad C, $B + C$ ad A, & $A + C$ ad B).

- $\alpha. 35. 7.$ Sumantur duo numeri ν D, E, minimi
 eandem cum A, B, C rationem habentium.
 $\phi. 2. 8.$ Ergo $\phi A = D^2$, $B = DE$, & $C = E^2$. Et
 $\kappa. 24. 7.$ quia D, E primi κ inter se sunt: erit & $D +$
 $\psi. 30. 7.$ E ad utrumque ψ ipsorum D, E primus. Er-
 go quia numeri $D + E$ & D ad ipsum E pri-
 mi sunt, erit α & $(D + E) \times D$ ad eundem
 $\alpha. 2. ax. 7.$ E primus. Sed $(D + E) \times D = \alpha D^2 +$
 ED . Ergo $D^2 + ED$ primus est ad E, hinc
 $\beta. 27. 7.$ quoque β ad E^2 . Patet igitur, $A + B$ esse
 $\gamma. 1. ax. 7.$ primum γ ad C. Similiter ostenditur, esse
 $B + C$ primum ad A. Denique quia $D +$
 $\delta. 26. 27. 7.$ E, D, & E primi sunt inter se: erit $\delta (D +$
 $E)^2$ ad DE primus. Sed $\alpha (D + E)^2 = D^2$
 $+ 2 DE + E^2$. Ergo $D^2 + 2 DE + E^2$
 primus est γ ad ipsum DE, & hinc ψ etiam
 $D^2 + DE + E^2$ ad ipsum DE, & pari ratio-
 ne $\psi D^2 + E^2$ ad eundem DE primus erit.
 Quare & $\gamma A + C$ ad ipsum B primus est.
 Q. E. D.

PROP. XVI. THEOR.

A 5, B 8, C...

Si duo numeri A, B primi inter se fuerint:
 non erit ut primus A ad secundum B, ita secun-
 dus B ad alium ullum.

Si

Si enim fieri potest: fit C numerus talis, ut sit $A : B = B : C$. Quia autem A & B minimi sunt eandem cum ipsis rationem habentium: A metietur $\frac{2}{3}$ ipsum B. Hinc quum A $\frac{2}{3}$ ipsum B quoque se ipsum metiatur: non erunt A, B primi inter se; *contra hypothesin*.

PROP. XVII. THEOR.

A 8, B 12, C 18, D 27, E---

Si fuerint quotcunque numeri A, B, C, D deinceps proportionales; extremi autem ipsorum, A, D, primi inter se sint: non erit ut primus A ad secundum B, ita ultimus D ad alium ullum.

Si negas: fit $A : B = D : E$. Quia ergo $A : D = B : E$, & A, D minimi sunt; A ipsum B metietur. Ergo, quum sit $A : B = B : C = C : D$; metietur B ipsum C, & ergo ipsum D. Quare & A ipsum D metietur, & hinc A, D primi non erunt; *contra hypothesin*.

PROP. XVIII. PROBL.

Duobus numeris A, B datis, considerare, an tertius ipsis proportionalis inueniri possit.

1. Cas. Si A, B primi inter se sunt: ostensum iam est, tertium proportionalem inueniri non posse.

2. Cas. Si A, B non sunt primi, & A metitur B: metiatur per C, qui erit tertius proportionalis. Quia enim $AC = B^2$: erit $A : B = B : C$.

3. Cas.

A 6, B 4, C --
 B^2 16
 3. *Cas.* Si vero A, B primi non sunt, nec A ipsum B^2 metitur: nequit tertius proportionalis inueniri. Si negas: sit inuentus C. Quia ergo $AC = \frac{1}{2} B^2$: A metitur $\frac{1}{2} B^2$; *contra hypothesin.*

§. 20. 7.
 e. 23. def. 7.

PROP. XIX. PROBL.

Tribus numeris datis A, B, C, considerare, an quartus ipsis proportionalis inueniri possit.

A 3, B 7, C 6, D 14
 BC 42
 1. *Cas.* Si A metitur BC: potest inueniri quartus proportionalis D, is nempe, per quem A ipsum BC metitur. Nam quia $AD = \frac{1}{7} BC$: erit A: B = $\frac{1}{7}$ C: D.

π. 9. ex. 7.
 e. 19. 7.

A 3, B 5, C 7, D --
 BC 35
 2. *Cas.* Si A non metitur BC: non potest quartus proportionalis inueniri. Si quis enim esset D: ob $A: B = C: D$, foret $AD = \frac{1}{5} BC$, & igitur A metiretur $\frac{1}{5} BC$; *contra hypothesin.*

e. 23. def. 7.

PROP. XX. THEOR.

Primi numeri plures sunt omni propofita multitudine primorum numerorum A, B, C.

π. 38. 7.

A 2, B 3, C 5
 D 30
 Sumatur enim $\frac{1}{30}$ minimus D, quem ipsi A, B, C metiantur, & apponatur vnitas. Iam si $D + 1$ primus est: patet propositio.

π. 33. 7.

A 5, B 3, C 7
 E 53, D 105
 Si vero $D + 1$ primus non est: metietur eum $\frac{1}{105}$ primus aliquis E, qui nulli ipforum A, B, C

B, C idem esse potest. Si enim alicui eorum idem esset: metiretur E quoque ipsum D, ergo & φ unitatem. Q. E. A. Ergo φ . 12. ax. 7. nouus numerus primus E inuentus est, Q. E. D.

PROP. XXI. THEOR.

A 4, B 6, C 8, $A + B + C$ 18

Si pares numeri quocunque A, B, C componentur: totus $A + B + C$ par erit.

Quia enim vtriusque ipsorum A, B, C partem $\times$ dimidiam habet: totus etiam $A + \times$. 6. def. 7. $B + C$ partem dimidiam ψ habebit, & igitur ψ . 2. ax. 7. par erit. Q. E. D.

PROP. XXII. THEOR.

A 5, B 3, C 7, D 9, $A + B + C + D$ 24

Si impares numeri A, B, C, D quocunque componantur; multitudo autem ipsorum fit par: totus $A + B + C + D$ par erit.

Quia enim $A - 1, B - 1, C - 1, D - 1$ sunt α . 7. def. 7. numeri α pares, & multitudo unitatum detraharum etiam par est: erit summa numerorum $A - 1, B - 1, C - 1, D - 1$ & unitatum residuarum, id est summa $A + B + C + D$, numerus α par. Q. E. D. α . 21. 9.

PROP. XXIII. THEOR.

A 11, B 5, C 3, $A + B + C$ 19

Si impares numeri A, B, C quocunque componantur; & multitudo ipsorum fit impar: & totus $A + B + C$ impar erit.

Nam

223 EVCLIDIS ELEMENT.

A 11, B 5, C 3, A + B + C 19

Nam quia C — 1 par^β est, & A + B itidem

β. 7. def. 7. par^γ est: erit & A + B + C — 1 numerus^δ

γ. 22. 9. par. Ergo^β patet, numerum A + B + C im-

δ. 21. 9. parem esse. Q. E. D.

PROP. XXIV. THEOR.

A 12

Si a pari numero A par aufera-

B 4

tur B: & reliquus A — B par erit.

Quum enim tam A, quam B ha-

α. 6. def. 7. A — B 8 beat partem dimidiam^ε: habebit

etiam A — B partem dimidiam, & igitur^ε

par erit. Q. E. D.

PROP. XXV. THEOR.

A 12

Si a pari numero A impar B

B 5

C 4

auferatur: reliquus A — B impar erit.

ζ. 7. def. 7. A — B 7 Quum enim B ζ constet ex pa-

η. 24. 9. ri C & vnitate; A — C autem^η par sit: erit

A — C — 1, id est A — B, numerus ζ impar.

Q. E. D.

PROP. XXVI. THEOR.

A....C...D..B

Si ab impari numero AB

impar BC auferatur: reli-

quus AC par erit.

θ. 18. 4 Ab utroque auferatur vnitas BD. Ergo

θ. 7. def. 7. tam AD quam DC par^θ erit; ergo & reli-

η. 24. 7. quus AC. Q. E. D.

PROP. XXVII. THEOR.

A. D....C..B

Si ab impari numero AB

par BC auferatur: reliquus

AC impar erit.

Nam

Nam ablata vnitate AD, erit DB par*. Ergo $\times$. 7. def. 7.
 $DB - BC = DC$ par quoque[^] est, & proinde* $\wedge$ 24. 7.
 $AC = DC + 1$, impar. Q. E. D.

PROP. XXVIII. THEOR.

*Si impar numerus A, parem B
 A... B... multiplicans, faciat aliquem: factus
 C... .. C par erit.*

Nam quum C componatur * ex tot nume- μ . 15. def. 7.
 ris aequalibus ipsi B, quot in A sunt vnitates:
 patet, C componi ex numeris paribus, ergo
 ipsum parem[^] esse. Q. E. D. ν . 21. 9.

* Schol. Eadem ratione, si A & B pares sunt:
 factus AB par est.

PROP. XXIX. THEOR.

*Si impar numerus A,
 A... B..... imparem numerum B
 C..... .. multiplicans, faciat ali-
 quem: factus C impar erit.*

Quia enim C componitur ξ ex tot numeris ξ . 15. def. 7.
 ipsi B aequalibus, quot A vnitates habet: pa-
 tet, C componi ex multitudine impari nume-
 rorum imparium, ideoque imparem^o esse. $\circ$. 23. 9.
 Q. E. D.

* Schol. I. Numerus A, numerum imparem C
 metiens, impar est, & per imparem B metitur. Si
 enim negas: aut neuter ipsorum A, B impar
 esset, ideoque nec $C = AB$ impar^{*} esse posset; π . sch. 23. 9.
 contra hypothesin: aut alteruter tantum ipsorum
 A, B esset impar, & neque sic C posset ξ impar esse ξ . 28. 9.
 etiam contra hypothesin. Quare vterque A, B
 impar est.

2. Paris numeri quadrati latus par est.

PROP.

PROP. XXX. THEOR.

A 3, B 12
C 4 *Si impar numerus A parem numerum B metiatur: Et dimidium eius metietur.*

Metiatur enim A ipsum B per C: dico, C non imparem esse; quia, C posito impari, etiam
 6. 29. 9. $AC = B$ impar * esset, contra hypothesin.
 Ergo C par erit; & A ipsum B pariter metietur, & ob id eius dimidium quoque * metietur. Q. E. D.

* Cor. Impar numerus parem metitur per parem.

PROP. XXXI. THEOR.

A 3 B 5
2 B 10
C... *Si impar numerus A ad aliquem numerum B fit primus: Et ad ipsum duplum 2 B primus erit.*

Si negas, A & 2 B primos esse
 12. def. 7. inter se: metiatur eos idem numerus C. Et
 9. sch. 29. quia A impar est: C quoque impar * erit.
 9. Sed quia C metitur ipsum 2 B, qui par * est:
 6. def. 7. metietur C etiam * dimidium eius, nempe B.
 30. 9. Ergo A & B non * erunt primi inter se; contra hypothesin.

PROP. XXXII. THEOR.

1, A 2, B 4, C 8, D 16

Numerorum B, C, D, a binario A duplatorum, unusquisque pariter par est tantum.

Nam quia * singuli B, C, D e binario facti
 9. hyp. sunt: pares eos esse * constat. Et quum praeterea
 6. def. 7. terea $\beta \frac{1}{11}$ 1, A, B, C, D: binarius A singulos
 20. def. 7. B, C

B, C, D metitur γ per aliquem ipsorum A, γ . cor. 11. 9.
 B, C, D. Ergo singuli B, C, D pariter pa- δ . 8. def. 7.
 res δ sunt. Denique quia A primus est,
 ideoque ipsos B, C, D nullus numerus δ me- δ . sch. 13. 9.
 tiri potest, qui non vnus ex ipsis A, B, C, D
 fit: singuli B, C, D pariter pares sunt tantum.
 Q. E. D.

PROP. XXXIII. THEOR.

A 10 Si numerus A dimidium $\frac{1}{2}$ A habeat.
 $\frac{1}{2}$ A 5 imparem: pariter impar est tantum.

Quia enim $\frac{1}{2}$ A metitur ipsum A per 2: pa-
 tet, A esse ζ pariter imparem. Dico & tan- ζ . 9. def. 7.
 tum: quia si etiam A ponas pariter parem,
 metietur η eum aliquis par pariter, ideoque η . 8. def. 7.
 idem par eius dimidium $\frac{1}{2}$ A, qui impar est, θ . ax. 7.
 metietur θ . Q. E. A'. δ . sch. 29. 9.

PROP. XXXIV. THEOR.

A 20 Si par numerus A neque fit a bina-
 $\frac{1}{2}$ A 10 rio duplatus, neque dimidium $\frac{1}{2}$ A impa-
 $\frac{1}{4}$ A 5 rem habeat: pariter par est, & pari-
 ter impar.

Nam A pariter parem esse, $\ast$ manifestum κ . 8. def. 7.
 est, quia $\frac{1}{2}$ A par est. Secundo, si $\frac{1}{2}$ A ite-
 rum bifariam diuiditur, & huius dimidium
 rursus bifariam, & sic porro, tandem proue-
 nient numerus $\frac{1}{4}$ A impar, qui ipsum A per pa-
 rem λ metietur λ . Nam si secus esset: perue- λ . cor. 30. 9.
 niretur tandem ad binarium; & A foret a
 binario duplatus. Quod est contra hypo-
 thesin. Ergo μ A est etiam pariter impar, μ . 9. def. 7.
 Q. E. D.

P

PROP.

PROP. XXXV. THEOR.

A.....

B....G.....C

D.....

E.....L.....K.....H.....F

Si sint quotcunque numeri A, BC, D, EF deinceps proportionales; auferantur autem a secundo BC & ultimo EF aequales primo CG, FH: erit ut secundi excessus B G ad primum A, ita ultimi excessus EH ad omnes ipsum antecedentes A + BC + D.

Ponatur $FK = BC$, & $FL = D$. Hinc quia
 v. 3. ax. 1. $FH = CG$, erit $HK = GB$. Et quum sit
 §. 16. ax. 7. $EF : D = D : BC = BC : A$: erit $EF : FL =$
 o. sch. 13. 7. $FL : FK = FK : FH$, ideoque diuidendo ° $EL :$
 $LF = LK : FK = KH : FH$, & ergo $BG : A =$
 v. 12. 7. $KH : FH = EH : LF + FK + FH = EH :$
 $A + BC + D$. Q.E.D.

PROP. XXXVI. THEOR.

÷ 1, A 2, B 4, C 8, D 16

E (= 1 + A + B + C + D) 31, ED 496

÷ E 31, F 62, G 124, H 248

K --- L ---

Si ab unitate quotcunque numeri A, B, C, D, deinceps proportionales, exponantur in dupla analogia, quoad totus compositus E primus fiat; & totus E, in ultimum D multiplicatus, faciat aliquem: factus ED perfectus erit.

Quot enim sunt A, B, C, D, tot sumantur ab E deinceps proportionales & in eadem ratione dupla, E, F, G, H. Ergo ° $A : D =$
 s. 14. 7. $E : H$.

E: H. Hinc ob $ED = {}^{\circ}AH = 2 H$: erunt ϵ . 19. 7.
 adhuc $\div$ E, F, G, H, ED; & ergo $F - E$:
 $E = {}^{\circ}ED - E$: $E + F + G + H$. Est τ . 35. 9.
 autem ${}^{\circ}F - E = 2 E - E = E$. Quare ν . constr.
 $ED - E = E + F + G + H$, & addi-
 to $E = 1 + A + B + C + D$, erit ED
 $= 1 + A + B + C + D + E + F +$
 $G + H$, qui singuli numeri partes sunt
 ipsius ED, quia ipsum ED tam nume-
 rus ϕ D, ideoque $\propto$ A, B, C, quam ψ H, ϕ . 8. ax. 7.
 ideoque E, F, G $\propto$ metiuntur. Denique $\propto$. 11. 9. &
 dico, nullum alium, praeter eos, metiri $\propto$. 11. ax. 7.
 ipsum ED. Pone enim alium K, qui ipsum ψ . dem.
 ED metiatur per L. Quia igitur ob KL $\propto$. constr. &
 $= {}^{\circ}ED$ est $E: L = K: D$; K autem ipsum $\propto$. 9. ax. 7.
 D non β metitur: neque E ipsum L γ metie- β . 13. 9.
 tur. Erunt itaque δ E, L primi inter se, γ . 20. def. 7.
 ideoque ϵ minimi eandem rationem habent δ . 31. 7.
 tium. Quare, quum fuerit $E: L = K: D$,
 L metietur ζ ipsum D, & proinde erit ali- ζ . cor. 21. 7.
 quis β ipforum A, B, C. Sit $L = B$. Sed
 quia E, F, G sunt in eadem ratione, in
 qua B, C, D: erit ex aequo ϵ $B: D = E:$
 G , & hinc $BG = {}^{\circ}ED = \psi$ KL. Quare
 quum sit $B: L = {}^{\circ}K: G$, & $B = L$: erit
 & γ $K = G$; contra hypothefin. Ergo
 nullus alius numerus praeter A, B, C, D,
 E, F, G & H ipsius ED pars η est. Qua- η . 3. def. 7.
 re $ED = A + B + C + D + E +$ η . 22. def. 7.
 $F + G + 1$ perfectus θ numerus est.
 Q. E. D.



E V C L I D I S

ELEMENTORVM

LIBER X.

DEFINITIONES.

1. *Commenfurabiles magnitudines dicuntur, quas eadem mensura metitur.*

2. *Incommenfurabiles autem, quarum nullam esse communem mensuram contingit.*

3. *Rectae lineae potentia commenfurabiles sunt, quum ea, quae ab ipsis fiunt, quadrata idem spatium metitur;*

4. *Incommenfurabiles autem, quum quadrata quae ab ipsis fiunt, nullum commune spatium metiri contingit.*

5. His positis, ostenditur, cuicumque rectae lineae propositae rectas lineas, multitudine infinitas, & commenfurabiles esse & incommenfurabiles, alias quidem longitudine & potentia, alias vero potentia solum. Vocetur autem proposita *recta linea rationalis;*

6. Et huic commenfurabiles, siue longitudine & potentia, siue potentia solum, *rationales;*

7. Incommenfurabiles vero *irrationales* vocentur.

8. Et *quadratum*, quod a recta linea proposita fit, dicatur *rationale;*

9. Et huic commensurabilia quidem *rationalia;*

10. In-

10. Incommensurabilia vero dicantur *irrationalia*.

11. Et *lineae*, quae † incommensurabilia possunt, vocentur *irrationales*; si quidem ea quadrata sint, ipsorum latera; si vero alia quaequam rectilinea, ipsae a quibus aequalia quadrata describuntur.

† Puta irrationalia.

* Scilicet recta posse spatium dicitur, si quadratum ab ea descriptum spatio illi aequale est.

* In locum terminorum hic definitorum sequentes notas brevitatis studio substituimus.

$\leq$ est nota commensurabilium. Si quando scriptum fuerit $AB \leq CD$, leges: rectae AB , CD longitudine commensurabiles sunt. Et si inter plurium magnitudinum binas quasvis proximas hanc notam deprehenderis, cogitabis, eas omnes sibi inuicem commensurabiles esse. Sed, A non $\leq B$ notat, spatia A , B incommensurabilia, vel rectas A , B longitudine incommensurabiles esse.

ϵ nota est rectarum linearum potentia solum commensurabilium, siue longitudine tantum incommensurabilium.

$\propto$ est nota rectarum potentia & longitudine incommensurabilium.

ρ notat quamvis magnitudinem rationalem.

α quamvis irrationalem magnitudinem designat.

$\sqrt{\quad}$ indicat rectam, quae spatium quoddam potest. E. gr. $\sqrt{EF}$ est recta quae spatium EF potest. $\sqrt{(ABq - BCq)}$ est recta, cuius quadrato recta AB plus potest quam recta BC .

* *Postulatum.*

Postulatur, quamlibet magnitudinem toties posse multiplicari, donec quamlibet magnitudinem eiusdem generis excedat.

* *Axiomata.*

1. Magnitudo, quoruncque magnitudines metiens, compositam quoque ex ipsis metitur.
2. Magnitudo, quamcunque magnitudinem metiens, metitur quoque omnem magnitudinem, quam illa metitur.
3. Magnitudo, metiens totam magnitudinem & ablatam, metitur & reliquam.
4. Omnis magnitudo se ipsam metitur.
5. Maior magnitudo minorem metiri nequit.
6. Si magnitudo toties magnitudinem continet, vel in ea continetur, quoties numerus unitatem, vel unitas in numero: magnitudinis ad magnitudinem eadem ratio est, quae numeri ad unitatem, vel unitatis ad numerum,

PROP. I. THEOR.

Duabus magnitudinibus AB, C expofitis, fi a maiori AB auferatur maius quam dimidium, & ab eo, quod reliquum est, rursus auferatur maius quam dimidium, & hoc femper fiat: relinquetur tandem quaedam magnitudo, quae minori magnitudine expofita C minor erit.

a. post. 10.



Sit enim DE ipsius C multiplex ipsa AB maior, & sint eius partes $DF = FG = GE = C$. Auferatur ab AB dimidia maior BH , & a reliqua AH dimidia maior HK , & sic deinceps, donec in AB partes AK, KH, HB aequae multae sint partibus DF, FG, GE . Jam quia DE

$DE > AB$, & ablata $EG < \frac{1}{2} DE$, & ablata $BH > \frac{1}{2} AB$: erit reliqua $DG > AH$. Eadem ratione erit $DF > AK$. Ergo $AK < C$. Q.E.D.

Aliter.

Fiant eadem, quae antea, & praeterea in recta quadam capiantur relictæ AK aequales tot partes LM, MN, NO , quot sunt diuisiones in AB . Et quia $BH > \frac{1}{2} AB$: erit $BH > HA > KA$; ideoque $BH > ON$. Simili ratione est $HK > NM$. Ergo tota $AB > OL$. Hinc & $DE > AB > OL$. Est autem β $DE: OL$ β . 15. 5. $= DF: LM$. Quare γ $DF > LM$, id est, $C \gamma$. sch. 16. 5. $> AK$. Q.E.D.

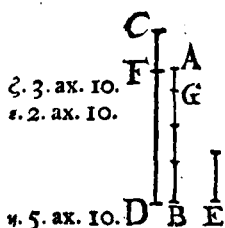
Idem demonstrabitur, etiam si non maius dimidio, sed ipsum dimidium, continue aufertur.

PROP. II. THEOR.

Si duabus magnitudinibus inaequalibus AB, CD expositis, detracta semper minore de maiore, reliqua minime praecedentem metiatur: magnitudines AB, CD incommensurabiles erunt.

Si negas: sit δ ipsarum AB, CD δ . I. def. 10. communis mensura E . Iam quia

AB diuidens ipsam CD relinquit aliquam CF se ipsa minorem, & haec CF diuidens alteram AB etiam se ipsa minorem AG , & hoc semper fieri ponitur: relinquetur tandem aliqua $AG < E$. Quum vero E metiatur ipsam AB , & AB ipsam $DF: E$ metiatur quoque ipsam DF . ϵ . 2. ax. 10.

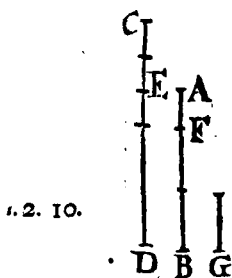


Sed & totam CD metiri ponitur: ergo ζ & reliquam FC metietur, & hinc quoque ϵ ipsam BG, quam CF metiebatur. Quare E, metiens AB, & BG, metietur quoque se ipsa minorem AG. Q. E. A η .

PROP. III. PROBL.

Duabus magnitudinibus commensurabilibus AB, CD datis, maximam earum communem mensuram inuenire.

Cas. 1. Si minor AB maiorem CD metitur: liquet ζ , ipsam AB esse maximam communem mensuram. Q. E. F.



Cas. 2. Si minor AB maiorem CD non metitur: detrahatur, quoties fieri potest, AB de CD, & reliqua EC de AB, & sic deinceps, donec relinquatur aliqua AF, quae metiatur praecedentem EC; id quod tandem fiat ϵ necesse est.

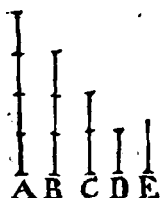
Quum ergo AF ipsam EC, & κ 2. ax. IO. haec ipsam BF metiatur: AF quoque ϵ ipsam λ 4. & 1. ax. IO. BF, & ergo λ totam AB, ideoque ϵ ipsam ED metietur. Sed eadem AF metitur ipsam EC: ergo μ totam CD quoque metitur. Est ergo AF ipsarum AB, CD communis mensura. Dico autem & maximam esse. Si enim alia ν 3. ax. IO. G ν AF metiretur vtramque AB, CD: eadem G metiretur quoque ϵ ipsam ED, ergo & ipsam

ipsam EC, & * ipsam BF, & * ipsam AF. Q.
E. A². Ergo AF est maxima vtriusque AB, & 5. ax. 10.
CD mensura. Q. E. F.

Cor. Ex hoc manifestum est, si magnitudo G
duas magnitudines AB, CD metitur, & maximam
ipsarum communem mensuram AF metiri.

PROP. IV. PROBL.

*Tribus magnitudinibus commensurabilibus
A, B, C datis, maximam ipsarum communem
mensuram inuenire.*



Sumatur* duarum A, B ma- d. 3. 10.
xima communis mensura D.

Cas. 1. Si haec D metitur
tertiam C: erit factum.

Nam D communem esse men-
suram patet. Si vero maximam
esse negas: sit ea $E > D$. Ergo
E metietur * ipsam D. Q. E. A². Quare D π. cor. 3.
maxima communis mensura erit. Q. E. F. 10.
p. 5. ax. 10.



Cas. 2. Si vero D tertiam C
non metitur: sumatur* ipsarum
C, D maxima communis men-
sura E. Dico factum.

Primo enim sumi posse com-
munem mensuram ipsarum C,
D, sic liquet. Quia A, B, C com-
mensurabiles ponuntur: erit
earum * aliqua communis mensura. Haec,
ipsas A, B metiens, metietur quoque * ipsam .i. def. 10.
D, & ergo erit ipsarum C, D communis men-
sura.

7. 2. ax. 10.

7. cor. 3. 10.

v. hyp.



fura. Sit ea igitur E: & π patet, E esse communem trium A, B, C mensuram. Deinde si ponas aliam $F > E$ pro communi earundem mensura: metietur π F ipsam D, & ν ipsam C, ideoque π ipsam E. Q. E. A. Ergo E est maxima trium A, B, C mensura.

Q. E. F.

Coroll. Hinc si magnitudo F tres metiatur magnitudines A, B, C: & ipsarum maximam communem mensuram E metietur.

PROP. V. THEOR.

Commensurabiles magnitudines A, B inter se rationem habent, quam numerus ad numerum.

9. 1. def. 10.



Quoniam $A \leq B$: metietur ϕ eas aliqua C. Et quoties C metitur A, tot vnitates sint in numero D, quoties autem C metitur B, tot sint vnitates in E. Hinc

est $\propto A : C = D : 1$, & $C : B = 1 : E$, & ergo ex aequo $A : B = D : E$. Q. E. D.

PROP. VI. THEOR.

Fig. prop. V. Si duae magnitudines A, B inter se rationem habeant, quam numerus D ad numerum E: magnitudines A, B erunt commensurabiles.

Quot enim vnitates sunt in D, in tot aequales partes diuidatur A, & vni harum sit ψ C. Est ψ ergo $1 : D = C : A$. Sed ponitur $D : E = A : B$. Quare ex aequo $1 : E = C : B$,

C : B, ideoque C metitur B. Metiebatur autem A. Ergo $A \propto B$. Q.E.D.

Aliter.



Quot vnitates sunt in D, in tot partes aequales diuide A, earumque vni fit $= C$. Et quot vnitates sunt in E, ex tot magnitudinibus ipsi C aequalibus componatur F. Ergo est $\psi A : C = D : 1$, & $C : F = 1 : E$, & ergo ex aequo $A : F = D : E$.

Sed erat $A : B = D : E$. Quare $A : B = A : F$. Ergo $B = F$. Metitur autem C ipsam F, α . 9. 5. ergo & ipsam B. Sed eadem C metitur A. Ergo $A \propto C$. Q.E.D.

Coroll. Ex hoc manifestum est, si sint duo numeri D, E, & recta linea A, fieri posse, vt numerus D ad E numerum ita rectam A ad rectam F. Si autem inter ipsas A, F media proportionalis G sumatur, fieri poterit, vt numerus D ad E numerum, ita figura, quae fit a recta A, ad figuram similem similiterque descriptam a recta G. Nam α . 2. cor. figura quae fit ab A est ad similem similiterque descriptam a G $= A : F = D : E$. 20. 6.

PROP. VII. THEOR.



Incommensurabiles magnitudines A, B inter se rationem habent, quam numerus ad numerum.

Si enim A ad B haberet rationem numeri ad numerum; foret $\beta A \propto B$; β . 6. 10. contra hyp.

PROP.

PROP. VIII. THEOR.

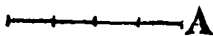
Si duae magnitudines A, B inter se rationem non habeant, quam numerus ad numerum: incommensurabiles erunt.

7. 5. 10. Si enim esset $A \lesseqgtr B$: foret γ A ad B, vt numerus ad numerum; contra hyp.

PROP. IX. THEOR.

Quae a rectis lineis A, B longitudine commensurabilibus fiunt quadrata inter se rationem habent, quam quadratus numerus C^2 ad quadratum numerum D^2 . Et quadrata Aq, Bq, inter se rationem habentia, quam quadratus numerus C^2 ad quadratum numerum D^2 . Et latera A, B habebunt longitudine commensurabilia. Quadrata vero, quae a longitudine incommensurabilibus rectis lineis E, F fiunt, inter se rationem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Et quadrata Eq, Fq, inter se rationem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque latera habebunt longitudine commensurabilia.

3. 5. 10.



1. I. cor. 20.



6.

2. II. 8.

C 4. C^2 16.D 3. D^2 9.

CD 12.

1. Sit $A \lesseqgtr B$, & 8

A: B = C: D. Quia

Aq: Bq = (A: B)²,& $C^2: D^2 = \zeta (C: D)^2$:erit Aq: Bq = $C^2: D^2$.

Q. E. D.

Aliter.

Sit $A \lesseqgtr B$, & $A: B = C: D$, & sumatur Rgl. sub A, B, nec non numerus CD. Ergo erit

erit $A:B=C:D=C^2:CD$. Sed $A:B=C^2:CD$. $\therefore Aq: A \times B = C^2:CD$. Quare $Aq: A \times B = C^2:CD$. Rursus, quia $A:B=C:D=C^2:CD$, $\therefore Aq: A \times B = C^2:CD$. Ergo exaequo $Aq: Bq = B^2: D^2$. Q. E. D.

2. Sit $Aq: Bq = C^2: D^2$: dico fore $A \leq B$. Quia enim $Aq: Bq = (A:B)^2$, & $C^2: D^2 = (C:D)^2$: erit $A:B=C:D$, & ergo $A \leq B$. Q. E. D.

Aliter.

Nam $C^2:CD, D^2$ deinceps proportionales sunt in ratione $C:D$. Et $Aq: A \times B, Bq$ in ratione $A:B$. Ergo $A:B=C^2:CD$. Ergo $A \leq B$. Q. E. D.

3. Non sit $E \leq F$. Iam si dicamus, Eq ad Fq esse vt numerus quadratus ad quadratum: erit $E \leq F$; contra hyp. Quare non est Eq ad Fq vt numerus quadratus ad quadratum. Q. E. D.

4. Non sit Eq ad Fq vt quadratus numerus ad quadratum. Iam si dicas $E \leq F$: erit Eq ad Fq vt quadratus numerus ad quadratum; μ . part. 1. contra hyp. Ergo E non $\leq F$. Q. E. D.

Corollar. Et manifestum est, ex iam demonstratis, lineas, quae longitudine sunt commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles esse; quae vero potentia commensurabiles, non semper & longitudine (quum earum quadrata possint esse inter se vt numeri non quadrati); & hinc, quae longitudine incommensurabiles sunt, non semper & potentia incommensurabiles esse; quae vero potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles esse.

PROP.

PROP. X. THEOR.



Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, $A : B = C : D$; prima vero A secundae B fuerit commensurabilis; & tertia C quartae D commensurabilis erit. Et si prima A secundae B fuerit incommensurabilis: & tertia C quartae D incommensurabilis erit.

- §. 5. 10. 1. Quia $A \leq B$: $\frac{1}{2}$ A ad B, ergo etiam C ad D, rationem habet, quam numerus ad numerum. Ergo est $C \leq D$. Q. E. D.
- 2. Quia A non $\leq B$: non habet A ad B rationem π , quam numerus ad numerum. Sed $A : B = C : D$: ergo nec C ad D rationem habet numeri ad numerum. Ergo C non $\leq D$. Q. E. D.
- 7. 10. 3. Quia A non $\leq B$: non habet A ad B rationem π , quam numerus ad numerum. Sed $A : B = C : D$: ergo nec C ad D rationem habet numeri ad numerum. Ergo C non $\leq D$. Q. E. D.

* 1. Schol. Hinc si quatuor rectarum proportionalium prima A secundae B est potentia solum commensurabilis: tertia C quartae D etiam potentia solum commensurabilis erit. Quia enim $Aq : Bq = Cq : Dq$ (22. 6.): erit $Cq \leq Dq$. Et quia non est $C \leq D$, patet esse $C \in D$.

* 2. Schol. Et si rectarum proportionalium prima A $\in$ secundae B: erit & tertia C $\in$ quartae D.

L E M M A.

Disimiles plani numeri inter se rationem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Hoc manifestum est per 1. sch. 24. 8. & 26. 8.

PROP.

PROP. XI. PROBL.

A ————— B 4. *Propositae rectae*
 E ————— C 10. *lineae A inuenire*
 D ————— *duas rectas lineas*
incommensurabiles;
alteram quidem longitudine tantum, alteram
vero etiam potentia.

Exponentur σ duo numeri B, C , dissimi- σ . 21. def. 7.
 les plani, & fiat τ $B : C = Aq : Dq$. Erit τ . cor. 6.
 $D \in A$. Sumatur ν inter A, D media pro- 10.
 portionalis E . Dico fore $E \notin A$. ν . 13. 6.

Nam quia B ad C non ϕ habet ratio- ϕ . lem. hui.
 nem numeri quadrati ad quadratum: nec
 Aq ad Dq eam rationem habebit. Ergo $\propto$ 9. 10.
 D ipsi A longitudine incommensurabilis
 erit. Quia tamen Aq ad Dq rationem nu-
 meri ad numerum habet: erit ψ D ipsi ψ . 6. 10. & 3.
 A potentia commensurabilis. Quare D def. 10.
 $\in A$.

Secundo quia $A : D = \sigma$ $Aq : Eq$, & A σ . 2. cor.
 non $\lesseqgtr D$: erit σ quoque Aq non $\lesseqgtr Eq$, & 20. 6.
 hinc β $E \notin A$. Q. E. F. σ . 10. 10.
 β . 4. def. 10.

* *Cor.* Patet etiam, si duarum rectarum qua-
 drata habeant rationem numeri ad numerum,
 nec tamen quadrati numeri ad quadratum, re-
 ctas potentia solum commensurabiles esse.

* *Schol.* Simili ratione plures inueniri pos-
 sunt, expositae rectae potentia solum commensurabiles.

PROP.

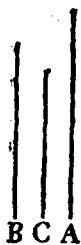
PROP. XII. THEOR.

Quae A, B eidem magnitudini C sunt commensurabiles, & inter se commensurabiles sunt.

7. 5. 10.

2. 4. 8.

1. 6. 10.



D 35. E 26.

F 52. G 61.

H 910. I 676. K 793.

Quia $A \leq C$, &

$B \leq C$; $\therefore$ fit A :

$C = D : E$, & C :

$B = F : G$. Su-

mantur $\div H, I, K$, minimi δ in ratio-

nibus D ad E & F ad G. Ergo, quia $H : I =$

$D : E$, erit $A : C = H : I$. Et quia $I : K = F :$

G , erit $C : B = I : K$. Ergo ex aequo $A : B =$

$H : K$. Quare $A \leq B$. Q. E. D.

* *Schol.* Hinc omnis recta linea, rationali lineae commensurabilis, est quoque rationalis (6. def. 10). Et quae rationalia spatia possunt, rationales sunt. Et omnes rectae rationales inter se commensurabiles sunt, saltem potentia. Item omne spatium, rationali spatio commensurabile, est quoque rationale (9. def. 10.), & omnia spatia rationalia inter se commensurabilia sunt.

PROP. XIII. THEOR.

A —————

C —————

B —————

Si sint duae magnitudines

A, B, & altera quidem A

eidem C sit commensurabilis,

altera vero B incommensura-

bilis: magnitudines A, B inter se incommensurabiles erunt.

2. 12. 10.

Si enim esset $B \leq A$: quia & $C \leq A$, foret $B \leq C$; contra hypothesin.

* *Schol.* Magnitudines ergo, quarum altera est rationalis, altera irrationalis, sunt inter se incommensurabiles.

PROP.

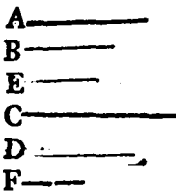
PROP. XIV. THEOR.


 Si duae magnitudines A, B commensurabiles sint; altera autem ipsarum A alicui magnitudini C sit incommensurabilis: Et reliqua B eidem C incommensurabilis erit.

Si enim esset $B \leq C$: quia $A \leq B$, foret * 9. 12. 10. $A \leq C$; contra hypothesin.

* Schol. Hinc si duae rectae sint longitudine commensurabiles, altera autem ipsarum alicui rectae sit potentia solum commensurabilis: & reliqua eidem potentia solum commensurabilis erit.

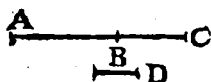
PROP. XV. THEOR.


 Si quatuor rectae lineae A, B, C, D proportionales fuerint; prima vero A tanto plus possit quam secunda B, quantum est quadratum rectae lineae E, sibi commensurabilis longitudine; Et tertia C tanto plus poterit quam quarta D, quantum est quadratum rectae lineae F, sibi longitudine commensurabilis. Quod si prima A tanto plus possit quam secunda B, quantum est quadratum rectae lineae E sibi incommensurabilis longitudine: Et tertia C quam quarta D tanto plus poterit, quantum est quadratum rectae lineae F, sibi longitudine incommensurabilis.

Quoniam $A : B = C : D$: erit $Aq : Bq =$ 9. 22. 6. $Cq : Dq$. Sed $Aq = Bq + Eq$, & $Cq = Dq$ hyp.

A ————— $Dq + Fq$: ergo $Bq + Eq$:
 B ————— $Bq = Dq + Fq$: Dq ; &
 κ . 17. 5. E ————— diuidendo $Eq: Bq^* = Fq$:
 ρ . 22. 6. C ————— Dq . Quare $E: B =^{\rho} F$:
 λ . cor. 4. 5. D ————— D , & inuerſe $B: E =^{\lambda} D$:
 F ————— F . Sed $A: B = C: D$:
 ergo ex aequo $A: E = C: F$. Hinc ſi ſit $A \leq E$,
 μ . 10. 10. erit & $^{\mu} F \leq C$. Si vero non ſit $A \leq E$, nec
 erit $^{\mu} F \leq C$. Q. E. D.

PROP. XVI. THEOR.

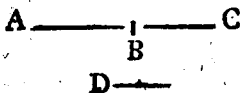


*Si duae magnitudines
 commensurabiles AB, BC
 componantur: Et tota ma-
 gnitudo AC utrique ipſarum AB, BC commensu-
 rabilis erit. Quod ſi tota magnitudo AC vni
 ipſarum AB, BC ſit commensurabilis: Et quae a
 principio magnitudines AB, BC commensurabi-
 les erunt.*

- ν . 1. def. 10. 1. Quia $AB \leq BC$: ſit $^{\nu}$ earum communis
 ξ . 1. ax. 10. meſura D . Ergo ξ D metietur totam AC ;
 & hinc $^{\nu} AB \leq AC \leq BC$. Q. E. D.
 2. Quia $AC \leq AB$: ſit earum meſura D ,
 θ . 3. ax. 10. quae etiam $^{\theta}$ metietur ipſam BC . Ergo AB
 $\leq^{\theta} BC$. Q. E. D.

* Cor. Et ſimul patet, totam magnitudinem AC ,
 quae vni partium AB commensurabilis ſit, reliquae
 BC etiam commensurabiles eſſe.

PROP. XVII. THEOR.



*Si duae magnitudi-
 nes incommensurabiles
 AB, BC componantur:
 Et*

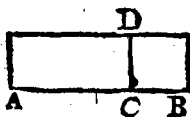
Et tota magnitudo AC utrique ipsarum AB, BC incommensurabilis erit. Quod si tota magnitudo AC uni ipsarum AB, BC sit incommensurabilis: Et quae a principio magnitudines AB, BC incommensurabiles erunt.

1. Si enim esset $AC \leq AB$: metiretur eas $^{\circ}$ *1. def. 10.* aliqua D, quae & reliquam BC metiretur, *3. ax. 10.* Ergo esset $AB \leq BC$; contra hypothesin. Quare AC non $\leq AB$. Et eadem ratione AC non $\leq BC$. Q. E. D.

2. Si AC non $\leq AB$; & tamen $AB \leq BC$: metietur eas aliqua D. Ergo eadem D $^{\circ}$ metietur *1. ax. 10.* totam AC, ideoque erit $AC \leq AB$; contra hypothesin. Ergo AB non $\leq BC$; quod etiam demonstrabitur similiter, si posita fuerit AC non $\leq BC$. Q. E. D.

* Coroll. Et manifestum est $^{\circ}$, magnitudinem *16. cor. 10.* AC, quae vni suarum partium AB incommensurabilis est, reliquae etiam BC incommensurabilem esse.

L E M M A,



Si ad aliquam rectam lineam AB applicetur parallelogrammum AD deficiens figura quadrata DB, parallelogrammum DA applicatum aequale est ei rectangulo, quod sub partibus AC, CB rectae lineae AB, ex applicatione factis, continetur.

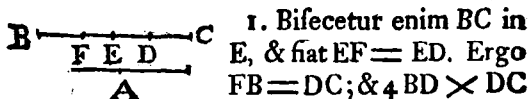
Hoc per se patet, quia $CD = CB$.

Q 2

PROP.

PROP. XVIII. THEOR.

Si sint duae rectae lineae inaequales A, BC, quartae autem parti quadrati, quod fit a minori A, aequale parallelogrammum ad maiorem BC applicetur, deficiens figura quadrata, Et in partes longitudine commensurabiles BD, DC ipsam BC diuidat: maior BC tanto plus poterit quam minor A, quantum est quadratum rectae lineae sibi longitudine commensurabilis. Quod si maior BC tanto plus possit quam minor A, quantum est quadratum rectae lineae sibi longitudine commensurabilis; quartae autem parti quadrati, quod fit a minori A, aequale parallelogrammum ad maiorem BC applicetur, deficiens figura quadrata: in partes BD, DC longitudine commensurabiles ipsam BC diuidet.



1. Bifecetur enim BC in E, & fiat $EF = ED$. Ergo $FB = DC$; & $BD \times DC + 4EDq = 4ECq$. Sed $4BD \times DC = Aq$, & $4EDq = 4FDq$, & $4ECq = 4BCq$. Ergo $Aq + 4FDq = 4BCq$, & hinc $BCq - Aq = 4FDq$. Et quum sit $BD < DC$, ac ideo $BC < DC + FB$: patet esse $BC < 2FD$. Q. E. D.

2. Sit $BD \times DC = \frac{1}{4} Aq$, & sit $BCq - Aq =$ quadrato rectae ipsi BC commensurabilis longitudine. Dico $BD \leq DC$. Nam, vt antea, ostenditur, esse FD rectam, cuius quadrato BC plus potest quam A. Quia ergo $BC \leq FD$: erit $BC \leq BF + DC$. Sed BF

$BF + DC^{\alpha} \leq DC$. Ergo $BC \leq^{\beta} DC$, ac ideo β . 12. 10.
 $BD^{\alpha} \leq DC$. Q. E. D.

PROP. XIX. THEOR.

*Si sint duae rectae lineae inaequales A, BC, Fig. prop. XVIII.
 quartae autem parti quadrati, quod fit a minore A, aequale parallelogrammum ad maiorem BC applicetur, deficiens figura quadrata, Et in partes incommensurabiles longitudine BD, DC ipsam BC diuidat: maior BC tanto plus poterit quam A minor, quantum est quadratum rectae lineae sibi longitudine incommensurabilis. Quod si maior BC tanto plus possit quam minor A, quantum est quadratum rectae lineae sibi longitudine incommensurabilis; quartae autem parti quadrati, quod fit a minori A, aequale parallelogrammum ad maiorem BC applicetur, deficiens figura quadrata: in partes BD, DC longitudine incommensurabiles ipsam BC diuidet.*

1. Iisdem enim, quae supra, constructis, similiter ostendemus, $BCq - Aq = DFq$. Iam quia BD^{γ} non $\leq DC$: nec est $\delta BC \leq DC$. γ . hyp.
 Sed $DC \leq FB + DC$: ergo BC non $\leq^{\epsilon} FB + DC$, & hinc ζBC non $\leq DF$. Q. E. D. δ . 17. 10.
 ϵ . 14. 10.

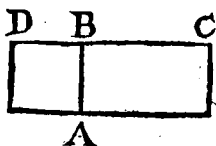
2. Quia γBC non $\leq DF$: nec erit $BC \leq^{\zeta} DC + BF$. Sed $DC + BF \leq DC$. Ergo BC^{η} non $\leq DC$, nec $\delta BD \leq DC$. Q. E. D. ζ . cor. 17. 10.

Schol. Tria sunt genera linearum rectarum rationalium, inter se commensurabilium. Aut enim duarum rectarum rationalium, longitudine inter se commensurabilium, altera aequalis est expositae rationali; aut neutra expositae rationali

aequalis est, longitudine tamen ei vtraque est commensurabilis; aut denique vtraque exposita rationali commensurabilis est solum potentia.

* Hi sunt illi modi, quos innuunt sequentia theoremata, vel supponunt. Notet hic etiam legens, si rectis lineis notam hanc $\rho \Sigma$ apponamus, nos intelligere rectas rationales longitudine & potentia commensurabiles; sin ipsis adscribamus notam $\rho \epsilon$, intelligendas esse rationales, potentia solum commensurabiles.

PROP. XX. THEOR.



Quod sub rationalibus longitudine commensurabilibus rectis lineis AB, BC secundum aliquem praedictorum modorum, continetur rectangulum AC, rationale est.

- u. 8. vel 9. Describatur ex AB quadratum AD, quod *
 def. 10. ρ erit. Atque, quum sit ρ AB Σ BC, & DB
 9. hyp. $\equiv$ AB: erit DB Σ BC. Hinc, quia BD: BC
 u. 1. 6. $\equiv$ AD: AC, est * AD Σ AC, ideoque ρ
 u. 10. 10. AC ρ . Q. E. D.
 a. 9. def. 10.

PROP. XXI. THEOR.

Fig. prop. Si rationale ad rationalem AB applice-
 praec. tur: latitudinem BC efficit rationalem, & ei
 AB, ad quam applicatum est, longitudine com-
 mensurabilem.

- u. 8. def. 10. Describatur ex AB quadratum AD, quod *
 u. 9. def. 10. rationale erit. Ergo AC Σ AD; hinc, quia
 x. 1. 6. AC: AD $\equiv$ BC: BD vel AB, erit & BC ρ Σ
 u. 10. 10. AB, ideoque BC ρ . Q. E. D.
 u. 6. def. 10.

* Schol.

* *Schol.* Hinc quod sub rationali & irrationali continetur rectangulum, irrationale est.

PROP. XXII. THEOR.

Quod sub rationalibus potentia solum com- Fig. prop.
mensurabilibus rectis lineis AB, BC continetur XX.
rectangulum AC, irrationale est; & recta li-
nea, ipsum potens, est irrationalis; vocetur autem
media.

Descriptum enim ab AB quadratum AD
rationale erit. Et quia $AB = BD$: erit BD
 $\in BC$. Hinc, quum sit $BD : BC = AD : AC$, *Fig. 1. 6.*
erit $AD \notin AC$. Quare AC τ est $\alpha\lambda$, & *Fig. 10. 10.*
recta, quae ipsum AC potest, ν est $\alpha\lambda$. Q. *Fig. 10. def.*
E. D. *Fig. 10.*

Schol. Media autem vocatur propterea, quod *Fig. 10. def.*
ipsum quadratum est rectangulo AC aequale, & ipsa *Fig. 10.*
media proportionalis est inter AB, BC latera.

* Rgl. etiam sub $\rho \in$ contentum, & spatium
omne, quod media potest, *medium* vocatur.

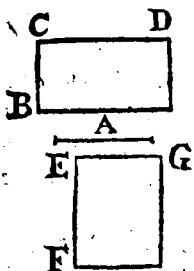
L E M M A.

Si sint duae rectae lineae AB, BC: erit, Fig. prop.
ut prima AB ad secundam BC, ita quadra- XX.
tum AD, quod fit a prima, ad rectangulum
AC quod sub duabus rectis lineis AB, BC con-
tinetur.

Descripto quadrato ex AB, compleatur
Rgl. AC: & propositio manifesta erit ex
1. 6.

* *Schol.* Et ergo, ut una BC ad alteram AB,
ita $AB \times BC$ ad quadratum alterius AB.

PROP. XXIII. THEOR.



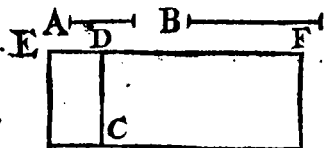
Quod fit a media A, ad rationalem BC applicatum, latitudinem CD efficit rationalem, & ei BC, ad quam applicatum est, longitudine incommensurabilem.

Possit enim A Rgl. FG. Sed potest etiam ϕ BD. Ergo $FG = BD$. Et quia vtrum-

que spatium rectangulum ϕ est: erit $BC : EG = EF : CD$, ac ideo $BCq : EGq = EFq : CDq$. Iam quum FE, EG sint $\rho \in$ & $BC \phi$ etiam ρ sit: erit $BCq \leq EGq$, & hinc $EFq \leq CDq$. Quare, quum EF sit ρ , erit $EFq = CDq$. Deinde quia $FE \in EG$, & $FE : EG \gamma = FEq : EGq$: erit $FEq \non \leq EGq$. Ergo quum $EFq \leq CDq$, & $FEq \non \leq EGq$: erit $CDq \non \leq EGq$, & hinc $CD \non \leq BC$, quia $CDq : BCq = CD : BC$. Q. E. D.

PROP. XXIV. THEOR.

Media A commensurabilis B media est.



Exponatur CD ρ , ad quam applicetur Rgl. CE = Aq, & Rgl. CF = Bq. Ergo

α . 23. 10.
 ζ . hyp. vel
cor. 9. 10.

η . 1. 6. &
10. 10.

θ . sch. 12. 10.

ι . 13. 10.

κ . 22. 10.

ED $\rho \in$ CD. Iam quia $Aq \leq Bq$: est & CE $\leq$ CF, & hinc ED $\non \leq$ DF. Quare DF est ρ & $\in$ CD. Hinc patet α , CF esse ρ , & quae ipsum potest, B mediam esse. Q. E. D.

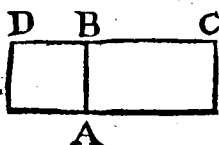
Coroll.

Coroll. Ex hoc manifestum est, spatium CF medio spatio CE commensurabile, medium esse: nam quae ipsum potest B etiam media sit, necesse est.

Schol. Est autem cum mediis, sicut cum rationalibus, comparatum. Aliae mediae commensurabiles sunt potentia tantum; aliae vero longitudine, & ergo potentia simul.

* Et praeterea notandum est, hoc theorema verum esse, siue B mediae A longitudine & potentia commensurabilis sit, siue potentia solum.

PROP. XXV. THEOR.

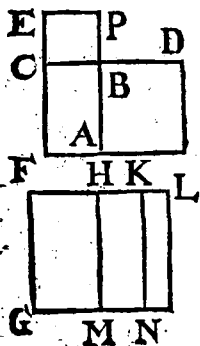


Quod sub mediis longitudine commensurabilibus rectis lineis AB, BC continetur rectangulum, medium est.

Fiat ex AB quadratum AD, quod medium erit, quia AB media est. Iam est $DB = AB \leq BC$, & $BC:BD = AC:DA$: ergo $AC \leq$ medio DA. *a. i. 6.*
Quare AC medium est. Q. E. D.

μ. cor. 24. 10.

PROP. XXVI. THEOR.

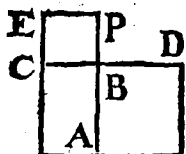


Quod sub mediis potentia solum commensurabilibus rectis lineis AB, BC continetur rectangulum AC, vel rationale est, vel medium.

Describantur ex AB, BC quadrata AD, BE, quae media erunt. Exponatur FGp, ad quam applicetur Rgl. *μ. 45. 1.*
 $GH = AD$; & ad HM applicetur Rgl. $MK = AC$, &

Q 5 ad

ξ. 14. I.



α. 23. 10.

π. hyp.



ρ. 1. 6.

σ. 10. 10.

τ. 20. 10.



ad KN Rgl. $NL = BE$. Sunt ergo ξ FH, HK, KL in directum, & GH, NL media. Porro, quia $FG = KN$ est ρ , etiam FH, KL $\circ$ sunt $\rho \in FG$. Sed est $AD \leq \pi$ BE, ideoque $GH \leq NL$, & quum sit $GH:NL = \circ$ FH:KL, erit $FH \circ \leq KL$. Quare quum FH, KL sint $\rho \leq$: erit π $FH \times KL \rho$. Et quoniam $DB:BC = AB:BP$, & $AD:$

$AC = \circ$ DB:BC & $AC:BE = \circ$ AB:BP: erit $AD:AC = AC:BE$, id est $GH:MK = MK:NL$, ac ergo, $FH:HK = \circ$ HK:KL. Hinc erit & ϕ HKq ρ , & ipsa π HK ρ . Ergo si sit $HK \leq FG$, erit π MK id est AC ρ : si vero sit $HK \in FG$: erit ψ AC medium. Q.E.D.

PROP. XXVII. THEOR.

Medium AB non superat medium AC rationali DB.

α. 45. I.

α. sch. 12.

10.

β. cor. 24.

10.

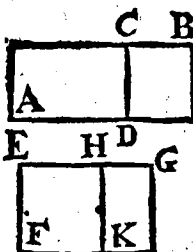
γ. 23. 10.

δ. 21. 10.

ε. lem. 23.

10.

ζ. 10. 10.



Si negas: sit DB ρ . Exponatur ρ EF, ad quam applicetur π Rgl. $FG = AB$, & Rgl. $FH = AC$. Erit ergo $KG = DB$, ideoque $KG \rho \pi$; FH vero & FG erunt β media. Hinc γ EH & EG sunt $\rho \in$ EF, HG autem δ est $\rho \leq$ EF. Quare $EH \in HG$. Et quia EH:HG $= \circ$ EHq:EH $\times$ GH: erit EHq δ non $\leq$ EH

EH $\times$ HG. Sed quum EH, HG sint ϵ : erit
 EHq + HGq $\leq$ EHq. Et est 2 EH $\times$ HG $\leq$ 16. 10.
 EH $\times$ HG. Quare EHq + HGq non $\leq$ 2 EH 14. 10.
 $\times$ HG, & ergo EHq + HGq + 2 EH $\times$ HG 17. 10.
 non $\leq$ EHq + HGq, id est, * EGq non $\leq$ EHq 4. 2.
 + HGq. Est vero EHq + HGq p. Ergo 10.
 EGq[^] est $\alpha\lambda$, ac ipsa[^] EG $\alpha\lambda$. Sed erat quo- 11. def.
 que EG p. Q.E.A. 10.

* *Corollar.* Euidens est ex ostensis, si sint
 duae rectae EH, HG ϵ , esse EHq + HGq non
 $\leq$ 2 EH $\times$ HG.

* *Schol.* Manifestum autem est, rationale supe-
 rare rationale rationali, & rationale cum rationali
 facere rationale (per 1. & 3. ax. 10).

PROP. XXVIII. PROBL.

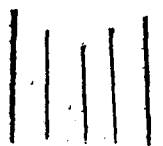
*Medias inuenire, potentia so-
 lum commensurabiles, quae ra-
 tionale contineant.*

Exponantur[^] duae rationales v. 11. 10.
 A C B D A, B ϵ , & fiat $\frac{1}{2}$ A: C = C: B, $\frac{1}{2}$ 13. 6.
 nec non[^] A: B = C: D. Dico C ϵ D esse, 12. 6.
 & mediam vtramque, & C $\times$ D p.

Nam quia * A $\times$ B medium est, erit & 22. 10.
 Cq[^] medium, & C media. Et quum sit A: 17. 6.
 B = C: D, ac A ϵ B: erit[^] C ϵ D. Hinc 1. sch. 10.
 &[^] D media est. Praeterea quum sit per- 10.
 mutando A: C = B: D: erit C: B = B: D, 24. 10.
 & Bq = C $\times$ D. Quare, ob Bq p[^] erit & v. 9. def. 10.
 C $\times$ D p. Q.E. F.

PROP.

PROP. XXIX. PROBL.



*Medias inuenire potentia
solum commensurabiles, quae
medium contineant.*

φ. 11. 10.
χ. 13. 6.
ψ. 12. 6.

A D B C E

Exponentur φ tres ratio-
nales €, A, B, C, & fiat $\propto$ A:
D = D: B, & ψ B:C = D:E.

Dico D, E esse quæsitæ.

α. 17. 6.
α. 22. 10.
β. sch. 10.
10.
γ. 24. 10.

Nam quia A, B p €, ac $A \times B = \alpha$ Dq:
erit α Dq medium, & D media. Et quoniam
B: C = D: E, ac B € C: erit $D \beta$ € E. Ergo
E etiam γ media est. Ostensum igitur est, D,
E medias € esse.

Praeterea quia est alternando B: D = C: E,
& inuerse B: D = D: A, ideoque D: A =
C: E: erit $D \times E = A \times C$. Est vero $A \times$
 $C \alpha$ medium: ergo & $D \times E$ medium est.
Q. E. F.

LEMMA I.

*Inuenire duos numeros quadratos, ita ut qui
ex ipsis componitur etiam quadratus sit.*

A.....D.....C.....B

δ. 24. &
26. 9.
ε. 6. 2.
ζ. 1. 9.

Exponentur duo numeri plani similes vel
quadrati, AB, BC: & sit vterque par, vel vter-
que impar. Nam ablato BC ex BA, relin-
quetur δ par AC, qui bifecari potest in D. Sed
 ϵ qui fit sub AB, BC vna cum quadrato ex CD
est æqualis quadrato ex BD, & is qui fit sub
AB, BC ipse ζ quadratus est: inuenti igitur
sunt duo quadrati, nempe factus ex AB, BC,
&

& quadratus ex CD, qui compositi produ-
cunt quadratum ex BD. Q. E. F.

Coroll. Et simul patet, quomodo inueniantur
duo numeri quadrati, quorum excessus sit quadra-
tus: si nimirum AB, BC similes plani sumantur.
Sin dissimiles sumantur: possunt pari ratione ha-
beri duo quadrati numeri, qui fiant ex BD, BC,
quorum excessus sit numerus sub AB, BC non
quadratus.

L E M M A 2.

*Inuenire duos quadratos numeros, ita ut qui
ex ipsis componitur non sit quadratus.*

A...G...H.D.E.F...C.....B

Factis omnibus quae in antecedenti Lem-
mate, & praeterea ex numero DC ablata vni-
tate DE; dico, quadratum, factum ex AB per
BC multiplicato vna cum quadrato ex CE, non
esse quadratum.

Quum enim, sicut antea, factus ex AB, BC
sit quadratus, & huc vna cum CD componat
quadratum ex BD: erit factus ex AB, BC, vna
cum quadrato ex CE minor quadrato ex BD.
Iam, si fieri potest, sit idem quadratus. Ergo
aut quadrato maiori quam quadratus ex BE,
aut minori, aut ipsi quadrato ex BE aequalis
erit. Sed quadratus proxime maior, quam
quadratus ex BE, est quadratus ex BD; & hoc
is qui fit ex AB, BC vna cum quadrato ex CE
minor est ostensus: ergo idem nulli quadrato
maiori, eo qui fit ex BE, aequalis esse potest.
Deinde ponatur aequalis quadrato ex BE; &
capiatur GA duplus vnitatis DE. Et quia
AC

A...G...H.D.E.F...C.....B

* 6. 2.

$AC = 2 DC$: erit $GC = 2 EC$, & igitur factus ex GB, BC cum quadrato ex CE = quadrato ex BE. Hinc erit factus ex AB, BC aequalis facto ex GB, BC, & $AB = BG$. Q. E. A. Quare AB per BC multiplicatus cum quadrato ex CE non est aequalis ipsi quadrato ex BE. Si tandem ponas eundem aequallem quadrato minori quam quadratum ex BE, velut quadrato ex BF: sit $HA = 2 DF$; & erit rursus $HC = 2 CF$, & ideo factus ex HB, BC cum quadrato ex CF = quadrato ex BF. Hinc foret factus ex AB, BC + quadrato ex CE = facto ex HB, BC + quadrato ex CF. Q. E. A. Ergo tandem patet, quadratum factum ex AB, BC cum quadrato ex CE non quadratum esse. Q. E. F.

PROP. XXX. PROBL.

Inuenire duas rationales, potentia solum commensurabiles, ita vt maior plus possit, quam minor, quadrato rectae lineae sibi longitudine commensurabilis.

9. cor. lem.

I.



Exponatur ρ AB, & sumantur⁹ duo quadrati numeri C, D, ita vt $C - D$ non sit quadratus, & in descripto super AB semicirculo aptetur AF, vt

cor. 6. 10. AFq sit ad ABq vti numerus $C - D$ ad numerum C. Iungatur FB. Dico factum.

Quia enim AFq ad ABq rationem habet numeri ad numerum, non autem quadrati ad qua-

quadratum: erit $\ast AF \in AB$, ideoque $\wedge AF$, $\ast$ cor. 11. 10.
 AB sunt $p \in$. Sed quia $C: C - D = ABq$: $\wedge$ 6. def. 10.
 AFq : erit conuertendo $\ast C: D = ABq$: μ . cor. 19. 5.
 $ABq - AFq$ id est $\ast BFq$. Ergo $\vee (ABq -$ ν 31. 3. &
 $AFq) = BFq \leq AB$. Q.E.F. $\wedge$ 47. 1.
 $\leq$ 9. 10.

PROP. XXXI. PROBL.

Inuenire duas rationales, potentia solum com- Fig. prop.
mensurabiles, ita ut maior plus possit, quam mi- XXX.
nor, quadrato rectae lineae sibi longitudine in-
commensurabilis.

Exponentur $p AB$, & duo quadrati numeri
 $C, D \ast$, qui nullum quadratum component, $\ast$ lem. 2.
 & super AB describatur semicirculus, & $\ast$ fiat $\ast$. cor. 6.
 uti $C + D$ ad C ita ABq ad AFq , & iungatur $\wedge$ 10.
 FB . Dico factum.

Nam primo, ut antea, ostendetur, AF, AB
 esse $p \in$. Secundo quia $C + D: C = ABq$:
 AFq , erit conuertendo $C + D: D = ABq$:
 $ABq - AFq$ id est $BFq \ast$. Ergo $\vee (ABq -$ $\ast$ 31. 3. &
 $AFq) = BFq$ non $\leq AB$. Q.E.F. $\wedge$ 47. 1.
 $\leq$ 9. 10.

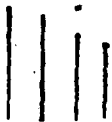
PROP. XXXII. PROBL.

Inuenire duas medias, potentia
solum commensurabiles, quae ra-
tionale contineant, ita ut maior
plus possit, quam minor, quadra-
to rectae lineae sibi longitudi-
ne commensurabilis.

Exponentur $\ast$ duae rationales $A, B \in$, ita ut τ . 30. 10.
 $\vee (Aq - Bq) \leq A$. Sit $\nu A \times B = Cq$, & ν 13. 6.
 $Bq = C \times D$. Dico C, D esse quaesitas. ϕ 45. 1.

Nam

z. 22. 10.



Nam quia $\propto A \times B$ medium est: C media erit. Et quia

ψ. sch. lem.

23. 10

A C B D

Bq est ρ : etiam $C \times D$ erit ρ .

ω. lem. 23.

10.

& $A \in B$: erit quoque $\ast D \in C$, ideoque

α. sch. 10.

10.

erunt C & D β mediae $\in$. Denique quia

β. 24. 10.

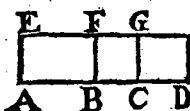
γ. 15. 10.

$A: B = C: D$, γ erit $\sqrt{(Cq - Dq)} \in C$.
Q.E.F.

Similiter autem ostendetur, inueniri posse duas medias, potentia solum commensurabiles, & continentes rationale, ita ut maior plus possit, quam minor, quadrato rectae lineae sibi incommensurabilis longitudine ³.

δ. 31. 10.

L E M M A.



Si fuerint tres rectae lineae AB, BC, CD in ratione aliqua: erit, ut prima AB ad tertiam CD,

ita rectangulum, contentum sub prima AB & media BC, ad id, quod sub media BC & tertia CD continetur.

Ponantur AB, BC, CD in directum, & ducatur perpendicularis $AE = BC$, & compleantur Pgra EB, FC, GD, quae Rgla erunt. Et quia ergo $BC = EA = FB = GC$, erit $AB: BC = EB: FC = AB \times BC: FC$, similiter $BC: CD = FC: GD = FC: BC \times CD$. Ergo ex aequo $AB: CD = AB \times BC: BC \times CD$. Q.E.D.

ε. 1. 6.

PROP.

PROP. XXXIII. PROBL.

Inuenire duas medias, potentia solum commensurabiles, quae medium contineant, ita ut maior plus possit, quam minor, quadrato rectae lineae sibi longitudine commensurabilis.



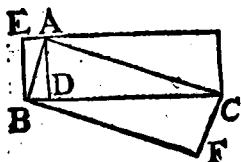
A D B E C

Exponentur tres rationales, $\text{II. IO. \&}$
 $\in A, B, C$, ita ut $\sqrt{(Aq - Cq)}$ $30. \text{IO.}$
 $\sum A$, & fiat $Dq = A \times B$, I. 14. 2.
 & $D \times E = B \times C$: erunt I. 45. I.
 D, E quaesitae. I. 22. IO.

Nam quia $A, B \rho \in$: erit D I. 6.
 media. Et quoniam $A : C = A \times B : C$ I. lemma
 $\times B = Dq : D \times E = D : E$: erit D I. sch. IO.
 $\in E$. Hinc D, E sunt mediae $\in$, atque $\sqrt{}$ IO.
 $(Dq - Eq) \sum D$. Patet etiam, quia B I. 24. IO.
 $\times C$ medium est, esse & $D \times E$ medium. I. 15. IO.
 I. sch. 22.
 Q. E. F. IO.

Similiter ostenditur, quomodo inuenian- I. cor. 24.
 tur duae mediae, potentia solum commensurabiles, IO.
 & medium continentes, ita ut maior plus possit, I. 31. IO.
 quam minor, quadrato rectae lineae sibi incom-
 mensurabilis longitudine.

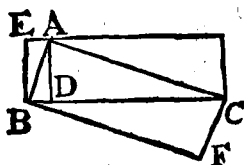
L E M M A.



Sit triangulum rectan-
 gulum ABC, rectum ha-
 bens angulum BAC, &
 ducatur AD perpendicu-
 laris: dico $CB \times BD$
 $= ABq$ & $BC \times CD$
 $= ACq$. & $BD \times DC = DAq$, & denique
 $BC \times AD = BA \times AC$.

R

Nam



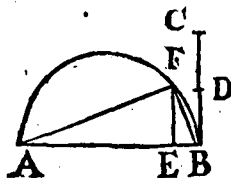
Nam tres priores partes huius propositionis patent ex corollario 8.6. & ex 17.6. Vltima demonstratur, descripto Rglo $EC = BC \times AD$,

- φ. 41. 1. & Rglo $AF = BA \times AC$. Nam $EC = 2 \Delta$.
φ. 34. 1. $ABC = AF$. Q.E.D.

PROP. XXXIV. PROBL.

Inuenire duas rectas lineas, potentia incommensurabiles, quae faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum vero, quod sub ipsis continetur, medium.

τ. 31. 10.



υ. 28. 6.

Exponentur τ AB, BC p ϵ , itavt $\sqrt{(ABq - BCq)}$ non $\leq$ AB. Biscetur BC in D, & ipsi BDq vel DCq aequale Pgr. ad rectam AB applicetur, deficiens figura quadra-

ta, & sint AE, EB partes ex applicatione factae. Describatur super AB semicirculus AFB, & ex E ducatur in AB perpendicularis EF, & iungantur AF, BF; quae erunt quaesitae.

- φ. 4. 2. Quum enim sit $BDq = \frac{1}{2} BCq$: erit $\propto$ BE
κ. 19. 10. non $\leq$ EA. Et quia $AE:EB = \psi BA \times AE$:
ψ. 1. 6. $AB \times BE = AFq:BFq$: erit $\propto$ AF $\propto$ BF.
α. lem. pr. Porro, quia $AFq + BFq = \beta ABq$, $AFq +$
α. 10. 10. BFq est p. Denique quia $EFq = \gamma AE \times$
β. 31. 3. $EB = \gamma BDq$, ideoque $BD = EF$, & $BC =$
γ. lem. 18. 10. $2 EF$: erit $AB \times BC = \delta 2 AB \times EF = \alpha 2$
δ. 1. 6. AF

$AF \times FB$. Sed $AB \times BC$ medium ^{1. 22. 10.}
est: ergo & $AF \times FB$ medium ² erit. ³ cor. 24.
Q.E.F. ^{10.}

PROP. XXXV. PROBL.

*Inuenire duas rectas lineas, potentia in Fig. prop.
commensurabiles, quae faciant compositum qui- XXXIV.
dem ex ipsarum quadratis medium, rectan-
gulum vero, quod sub ipsis continetur, ratio-
nale.*

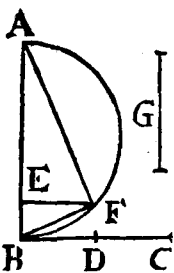
Exponentur AB , BC ⁷ mediae $\sqrt{2}$ & ratio-⁸ 32. 10.
nale continentes, ita ut $\sqrt{(ABq - BCq)}$ non
 $\leq AB$, & reliqua fiant, ut in praecedente.
Erunt AF , FB quaesitae.

Nam quia AE ⁹ non $\leq EB$: erit & ¹ BA 19. 10.
 $\times AE$ non $\leq AB \times BE$, ideoque ² AFq 1. 6. &
non $\leq BFq$, & propterea $AF \propto BF$. Et 10. 10.
patet, $AFq + BFq = ABq$ medium ³ lem. 34.
esse. Denique quum $BC = 2 EF$, & hinc ^{10.} $AB \times BC = 2 AB \times EF$: erit $AB \times$ 10.
 EF ⁴ p, utpote rationali $AB \times BC$ commen-⁵ 1. 6.
surabile ⁶. Ergo & ⁷ $AF \times BF$ est p. ⁸ sch. 12.
Q.E.F. ^{10.}

PROP. XXXVI. PROBL.

*Inuenire duas rectas lineas, potentia in-
commensurabiles, quae faciant & compositum
ex ipsarum quadratis medium, & rectan-
gulum, quod sub ipsis continetur, medium &
adhuc incommensurabile composito ex ipsarum
quadratis.*

ε. 33. 10.



Exponentur^ε duae mediae
 $\in$, AB, BC, medium continen-
 tes, ita ut $\sqrt{(ABq - BCq)}$ non
 $\leq$ AB. Reliqua fiant ut in
 prop. 34. Dico AF, FB
 esse quaesitas.

ε. 19. 10.

Nam AE non $\leq$ EB, ideo-
 que AF $\in$ BF. Et quoniam
 ABq medium^π est: AFq +

π. sch. 22.

10.

ε. constr. &

lem. 18. 10.

ε. cor. 24.

10.

π. lem. 34.

10.

υ. constr.

φ. 13. 10.

κ. 1. 6. &

10. 10.

FBq medium esse patet. Porro quia AE $\times$ EB
 $=$ BDq $=$ EFq: erit AB $\times$ BC $=$ 2 AB $\times$
 EF, & ideo^σ medium erit AB $\times$ EF, & propter-
 ea etiam^τ AF $\times$ FB. Denique quia AB non
 $\leq$ BC, & BC $\leq$ BD, & hinc AB non $\leq$ BD:
 erit^κ ABq non $\leq$ AB $\times$ BD. Sed AB $\times$ BD
 $=$ AB $\times$ EF $=$ AF $\times$ FB, & ABq $=$ AFq
 + FBq. Ergo AF $\times$ FB non $\leq$ AFq + FBq.
 Q. E. F.

* Schol. Ex his manifestum est, quomodo in-
 ueniri possint duae mediae, longitudine & potentia
 incommensurabiles. Facilis enim omnibus, quae
 in propositione iussa sunt, & capta insuper G me-
 dia proportionali inter AF, BF: erunt G & AB me-
 diae $\in$. Nam quia Gq $=$ AF $\times$ BF medio:
 erit G media, & $\in$ mediae AB.

ψ. 17. 6.

Principium Senariorum per compo-
 sitionem.

PROP. XXXVII. THEOR.

Si duae rationales, potentia solum commensu-
 rabiles, AB, BC, componantur: tota AC irratio-
 nalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus.

Quia

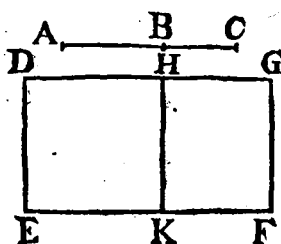
A | Quia enim $AB \in BC$, erit $2 AB \times BC$ ^{a. cor. 27.}
 BC^2 non $\leq ABq + BCq$. & proinde 2 ^{10.}
 $AB \times BC + ABq + BCq =^{\beta} ACq$ ^{β . 4. 2.}
 B | non $\leq \gamma ABq + BCq$. Quare quum ^{γ . 17. 10.}
 $ABq + BCq$ ^{δ} sit ρ : erit ACq ^{α} , ^{10.}
 C | & $\zeta AC \alpha$. Q. E. D. ^{δ . sch. 12. 10.}
 ζ . II. def. 10.

PROP. XXXVIII. THEOR.

$\overline{\text{A}} \quad \overline{\text{B}} \quad \overline{\text{C}}$ Si duae mediae potentia so-
 lum commensurabiles AB, BC
 componantur, quae rationale contineant: tota
 AC irrationalis erit. Vocetur autem ex binis
 mediis prima.

Nam quum sit $ABq + BCq$ non $\leq 2 AB \times BC$ ^{a. cor. 27.}
 BC : erit $ABq + BCq + 2 AB \times BC = ACq$ ^{10.}
 non $\leq^{\beta} 2 AB \times BC$: hinc $ACq \alpha$, & ergo AC ^{β . 17. 10. &}
 α . Q. E. D. ^{14. 10.}
 δ . sch. 12. 10.

PROP. XXXIX. THEOR.



Si duae mediae po-
 tentia solum commen-
 surabiles AB, BC
 componantur, quae
 medium contineant:
 tota irrationalis erit.
 Vocetur autem ex bi-
 nis mediis secunda.

Sit $DE \rho$, & fiat $Rgl. DEF = ACq$, & $Rgl. \alpha$. 45. 1.
 $DEK = ABq + BCq$. Ergo $Rgl. HF =^{\alpha} 2 \alpha$ ^{α . 4. 2.}
 $AB \times BC$. Et quia ABq, BCq media μ sunt, ^{μ . sch. 22.}
 ac propterea $ABq + BCq$ medium ν est, me- ^{10.}
 dium vero est & $AB \times BC$ ^{ζ} : erit vtrumque ^{ν . 16. 10. &}
 α . cor. 24. 10.

R 3

Rgl. ξ . hyp.

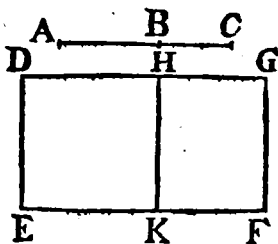
e. cor. 24.

10.

π. 23. 10.

e. cor. 27.

10.



Rgl. DK, HF • medium. Ergo EK, KF erunt π ρ. Sed quia AB € BC, erit ABq + BCq non ε 2 AB × BC, id est Rgl. DK non ε HF. Quare est EK non ε KF, &

e. sch. 12. 10. ideo EK, KF ρ € • sunt, & DG vel EF αλ.

π. 37. 10. Patet ergo DF esse v αλ, & ipsam AC ρ αλ.

v. sch. 21. 10. Q. E. D.

φ. 11. def.

10.

PROP. XL. THEOR.

A B C Si duae rectae lineae potentia incommensurabiles AB, BC componantur, quae faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem sub ipsis continetur medium: tota recta linea AC irrationalis erit. Vocetur autem maior.

κ. 22. 10. & Nam AB × BC non ε 2 ABq + BCq. Er-
sch. 13. 10. go 2 AB × BC + ABq + BCq = ACq non ε ψ
ψ. 17. 10. ABq + BCq; & hinc • ACq αλ, ac AC αλ.
e. 10. def. Q. E. D.

10.

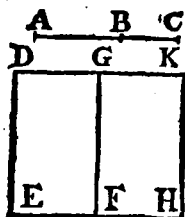
PROP. XLI. THEOR.

A B C Si duae rectae lineae potentia incommensurabiles AB, BC componantur, quae faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem sub ipsis continetur rationale: tota recta linea AC irrationalis erit. Vocetur autem rationale ac medium potens.

Nam,

Nam, quia $AB \times BC$ non ε^a ABq α .sch.13.10.
 $+BCq$, ideoque ACq non ε^b $AB \times BC$ α .22.10.
 BC : erit ACq α^c γ , ac ergo AC α . β .4.2. &
 Q. E. D. γ .10.17.10. def.10.

PROP. XLII. THEOR.

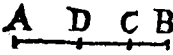


*Si duae rectae lineae
 potentia incommensurabiles
 AB, BC componentur,
 quae faciant compositum
 ex ipsarum quadratis me-
 dium, & quod sub ipsis
 continetur medium, & ad-
 huc incommensurable com-
 posito ex ipsarum quadratis: tota recta linea
 AC irrationalis erit. Vocetur autem bina
 media potens.*

Exponatur p DE, & fiat ^{d} Rgl. DEF δ .45.1.
 $= ABq + BCq$, & Rgl. GFH $= 2^e$.4.2.
 $AB \times BC$. Totum ergo DH $= ACq$, ζ .cor.24.
 & ^{f} DF medium, ideoque ^{g} EF p . Eadem γ .10.
 ratione FH p . Sed quia DF non ε^h GH: η .23.10.
 erit EF non ε^i FH, & ergo EF, FH p ϵ .10.10.
 erunt, atque ^{k} EH α ex binis nominibus κ .37.10.
 erit. Hinc, quia DE p , est DH λ α , & λ .sch.21.10.
 AC μ α . Q. E. D. μ .11.def.10.

Schol. At vero dictas irrationales vno tantum
 modo diuidi in rectas lineas, ex quibus compo-
 nuntur, & quae propositas species constituunt, mox
 demonstrabimus.

PROP. XLIII. THEOR.

 *Quae ex binis nominibus AB ad unum duntaxat punctum C diuiditur in nomina AC, CB.*

Si negas; diuidatur etiam ad D in nomina. Sed nequit esse $DB = AC$. Sic enim foret $BC = AD$, & $AC : CB = BD : DA$, hoc est AB in D similiter foret diuisa ac in C; id quod non ponitur. Quum ergo AB in partes inaequales ad C, & D secta sit, quarum maior sit AC: erit $2 AD \times DB - 2 AC \times CB = ACq + CBq - (ADq + DBq)$. Sunt autem ACq , CBq , ADq , DBq ρ , ideoque $ACq + CBq$, & $ADq + DBq$ differunt rationali. Quare & media $2 AD \times DB$ ac $2 AC \times CB$ differunt rationali. Q.E. A.

v. 4. sch. 5. 2. ξ . hyp. & 37. 10. o. sch. 27. 10. π . 37. 10. & 22. 10. ρ . 27. 10.

PROP. XLIV. THEOR.

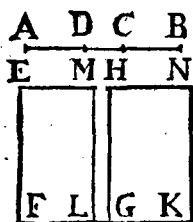
 *Quae ex binis mediis prima AB ad unum duntaxat punctum C diuiditur in nomina AC, CB.*

Si negas, sit AB etiam in D diuisa in alia nomina AD, DB, quae erunt σ mediae & continentes ρ . Sunt vero & AC, CB σ mediae rationale continentes, & differentiae inter $2 AD \times DB$ & $2 AC \times CB = \tau$ differentia inter summam $ACq + CBq$ & summam $ADq + DBq$. Ergo erit haec differentia τ rationale spatium. Q.E. A.

o. 38. 10. v. 4. sch. 5. 2. v. sch. 27. 10. ϕ . 27. 10. & cor. 24. 10.

PROP.

PROP. XLV. THEOR.



*Quae ex binis mediis
secunda AB ad unum dun-
taxat punctum C diuidi-
tur in nomina AC, CB.*

Si negas, diuidatur
etiam in D, & sit AC
non aequalis ipsi BD,
sed ea e gr. maior. Er-

go tam AC & CB, quam AD & DB sunt $\propto$ 39. 10.
mediae $\in$ & media continentes; ac $ACq +$
 $CBq > ADq + DBq$. Exponatur p EF, ψ . 3. sch.
ad quam applicetur Rgl. $EK = ABq$, & Rgl. 5. 2.
 $EG = ACq + CBq$, & Rgl. $EL = ADq$
 $+ DBq$. Ex quo sequitur Rgl. $HK = 2 AD \times DB$.
 $AC \times CB$, & Rgl. $MK = 2 AD \times DB$.
Quia autem mediae $\in$ sunt AC, CB: erit EC^a cor. 24.
medium, ideoque β EH p $\in$ EF. Eadem 10. & 16.
ratione HN est p $\in$ EF. Verum AC $\in$ CB, 10.
& proinde $ACq + CBq$ id est EG non $\sum$ γ cor. 27.
ipsi $2 AC \times CB$ id est ipsi HK, & idcirco EH 10.
non $\sum$ HN. Patet itaque EH, HN esse p $\in$.
& ergo δ EN α ex binis nominibus, & diui- δ . 37. 10.
sam in nomina in puncto H. Sed eodem mo-
do ostendetur, EN etiam ad M diuisam esse
in nomina. Neque tamen est $MN = EH$,
quoniam $EG = ACq + CBq > ADq +$
 $DBq > 2 AD \times DB = MK$. Ergo EN quae ex
binis nominibus ad duo puncta in nomina di-
uisa est. Q. E. A^o.

γ . 43. 10.

PROP. XLVI. THEOR.

$\begin{array}{c} D \quad C \\ \hline A \quad | \quad | \quad B \end{array}$

Major AB ad idem duntaxat punctum C diuiditur in nomina AC, CB.

Si negas: diuidatur ad aliud punctum D in nomina AD, DB, ab ipsis CB, AC diuersa. 2. 40. 10. Erit ergo $ACq + CBq \neq$, item $ADq + DBq \neq$, media vero erunt $AC \times CB$, & $AD \times DB$. Proinde, quum $ACq + CBq - (ADq + DBq) \neq$ sit $\neq$, & $=^s 2 AD \times DB - 2 AC \times CB$; erit differentia inter media $AD \times DB$ & $AC \times CB$ rationale spatium. 1. sch. 27. 10. 3. 4. schol. 5. 2. 1. 27. 10. Q.E.A'.

PROP. XLVII. THEOR.

$\begin{array}{c} D \quad C \\ \hline A \quad | \quad | \quad B \end{array}$

Rationale ac medium potens AB ad unum duntaxat punctum C diuiditur in nomina AC, CB.

Si negas: diuidatur etiam ad D. Erunt ergo $ACq + CBq$, & $ADq + DBq$ media $\neq$, sed $AC \times CB$, ac $AD \times DB$ rationalia. Quare, quum $ACq + CBq - (ADq + DBq) =^s 2 AD \times DB - 2 AC \times CB$, haec autem differentia $\neq$ sit $\neq$: erit & illa $\neq$. 1. 41. 10. 1. 4. sch. 5. 2. 1. sch. 27. 10. 1. 27. 10. Q.E.A'.

PROP. XLVIII. THEOR.

$\begin{array}{cccc} A & D & C & B \\ \hline E & M & H & N \end{array}$

Bina media potens AB ad unum duntaxat punctum C diuiditur in nomina AC, CB.



Si negas: diuidatur etiam in nomina AD, DB, diuersa ab illis, ita vt sit e. gr. $AC > DB$. Ad rationalem EF appli-

applicentur Rgl. $EG = ACq + CBq$, $EK = ABq$, & $EL = ADq + DBq$. Ergo $HK = \frac{1}{2} \xi. 4. 2.$
 $2 AC \times CB$, & $MK = 2 AD \times DB$. Sed
quia ponitur $ACq + CBq$ medium, erit & $a. 42. 10.$
 EG medium, & proinde $HE \rho$. Eodem argu- $\tau. 23. 10.$
mento HN est ρ . Quia vero & ponitur ACq
 $+ CBq$ non $\xi. 2 AC \times CB$: erit EH non Σ $e. 10. 10. \&$
 HN . Itaque EH, HN erunt $\rho \in$; & EN ex $1. 6.$
binis nominibus est τ , atque diuisa in nomina $\sigma. sch. 12.$
in puncto H . Atqui similiter ostendetur, quia $10.$
& $ADq + DBq$ nec non $AD \times DB$ media $\tau. 37. 10.$
non ξ ponuntur, eandem EN etiam ad M in
nomina diuidi, ita vt MN, EH inaequalia
sint. Q. E. A. $\nu. 43. 10.$

DEFINITIONES SECVNDAE.

1. Exposita rationali, & quae ex binis nominibus diuisa in nomina, cuius maius nomen plus possit, quam minus, quadrato rectae lineae sibi longitudine commensurabilis: si quidem maius nomen expositae rationali commensurabile sit longitudine, tota dicatur *ex binis nominibus prima*;

2. Si vero minus nomen expositae rationali longitudine sit commensurabile, dicatur *ex binis nominibus secunda*;

3. Quod si neutrum ipsorum nominum sit longitudine commensurabile expositae rationali, vocetur *ex binis nominibus tertia*.

4. Rursus, si maius nomen plus possit, quam minus, quadrato rectae lineae sibi longitudine incommensurabilis: si quidem maius nomen

nomen expositae rationali sit commensurabile longitudine, dicatur *ex binis nominibus quarta*;

5. Si vero minus, dicatur *quinta*;

6. Quod si neutrum, dicatur *sexta*.

PROP. XLIX. PROBL.

Inuenire ex binis nominibus primam.

φ. cor. lem. A 12 . B 4. Exponentur φ duo numeri A, B, ita vt $A + B$ ad B quidem habeat rationem numeri quadrati ad quadratum, sed non ad A. Exponatur quoque p C, & ei s DE, & fiat x $A + B : A = DEq : EFq$; erit DF quaesita.

1.30.10. C ——— F
F ——— t ——— D
G ———

Nam quia ratio numeri $A + B$ ad A non est ratio quadrati ad quadratum: erit $EF \notin DE$. Et quia DE p est^β: erunt $DE, EF \notin$; & idcirco DF erit γ ex binis nominibus. Porro quia $A + B : A = DEq : EFq$, & $A + B > A$: erit $DEq >^δ EFq$, & $DE > EF$. Sit $Gq = DEq - EFq$. Et quia est conuertendo $A + B : B = DEq : Gq$: erit G id est √ $(DEq - EFq) \leq^ε DE$. Est vero etiam ζ.1. def. sec. $DE \leq C$. Ergo DF est ex binis nominibus ζ prima. Q. E. F.

PROP. L. PROBL.

Inuenire ex binis nominibus secundam.

η. cor. lem. A 12 . B 4. Exponentur * duo numeri A, B, ita vt $A + B$ ad B quidem rationem habeat numeri quadrati ad

1.30.10. C ——— E
D ——— i ——— F
G ———

ad quadratum, non autem ad A, & sint C, FE ρ ξ , & fiat ρ A: A + B = FEq: EDq. 9. cor. 6. 10. Erit FD quaesita.

Quoniam enim ratio A + B ad A non est quadrati numeri ad quadratum: erit ρ ED $\in$ sch. 11. 10. FE, & ergo ρ erunt ED, FE ρ $\in$. Ex binis ρ 6. def. 10. ergo nominibus erit FD. Praeterea vero quum, ob A < A + B, sit FE < ρ ED, & sit inuerse A + B: A = DEq: FEq, & conuertendo A + B: B = EDq: EDq - FEq: posito Gq = EDq - FEq, erit Gid est $\sqrt{(EDq - FEq)}$ ξ ρ ED. Est autem & minus nomen FE μ 9. 10. Σ C. Quare FD est ex binis nominibus secunda ρ . Q. E. F. v. 2. def. sec.

PROP. LI. PROBL.

Inuenire ex binis nominibus tertiam.

A 12. B 4.

Cape ξ tres numeros A, ξ cor. lem.

C 8.

B, C, tales, vt A + B ad B 1. 30. 10.

D ———

quidem rationem qua-

E ——— G

drati numeri ad quadra-

F

tum habeat, non autem

H ———

ad A, C vero ad neutrum

ipforum A, A + B talem habeat rationem. Ac-

cipe ρ D, & fac C: A + B = ρ Dq: EFq, & A + ρ cor. 6. 10.

B: A = EFq: FGq. Erit EG quaesita.

Etenim quia ρ D $\in$ EF, & ρ FG $\in$ EF, & hinc ρ sch. 11.

EF, FG ρ sunt, erit EG ex binis nominibus ρ . Et 10.

quum sit C: A + B = Dq: EFq, atque A + ρ 37. 10.

B: A = EFq: FGq, ideoque ex aequo C: A

= Dq: FGq: erit ρ FG non ξ D. Sed & EF ρ 9. 10.

non ξ D. Ergo neutrum nomen EF, FG ξ ρ

D. Deinde quia A + B > A, erit ρ EF > FG. 7. sch. 16. 5.

Sit

$\epsilon. 9. 10.$
 $\nu. 3. \text{ def.}$
 sec.

Sit autem $Hq = EFq - FGq$. Et quia est conuertendo $A + B : B = EFq : Hq$, erit H id est $\sqrt{(EFq - FGq)} \leq EF$. Quare EG est ex binis nominibus tertia. Q.E.F.

PROP. LII. PROBL.

Inuenire ex binis nominibus quartam.

$\phi. \text{ cor. lem.}$
 $1. 30. 10.$

$A \ 10. \ B \ 6.$
 $C \text{ —————}$
 $D \text{ —————} E \text{ —————} F$
 E
 $G \text{ —————}$

$\text{Sume } \phi \text{ duo numeros } A, B$
 $\text{ita, vt } A + B \text{ neque ad } A \text{ neque ad } B \text{ rationem quadrati numeri ad quadratum habeat, \& expositae } p \ C \text{ sume}$

$\alpha. \text{ cor. } 6.$
 $10.$

$\leq DE$, & fac $\alpha \ A + B : A = DEq : EFq$.
 Erit DF quaesita.

$\psi. 6. \text{ def. } 6.$
 $\omega. \text{ sch. } 10.$
 $10.$

Nam erit $\psi \ DE p$, & $EF \in \omega \ DE$, & ergo erunt $DE, EF \omega p \in$. Hinc DF erit β ex binis nominibus. Porro quia $A + B > A$, erit $DEq > \gamma \ EFq$. Sit $Gq = DEq - EFq$. Ergo quia conuertendo $A + B : B = DEq : Gq$, non erit G id est $\sqrt{(DEq - EFq)} \leq DE$. Est autem $\& DE \leq C$. Ergo DF est ex binis nominibus quarta. Q.E.F.

PROP. LIII. PROBL.

Inuenire ex binis nominibus quintam.

Fig. prop.
 praec.

Expositis numeris A, B talibus, quales in praecedente erant, & recta $p \ C$, sume $FE \leq C$, & fac $A : A + B = FEq : EDq$: erit FD quaesita.

$\epsilon. 6. \text{ def. } 6.$
 $\eta. \text{ sch. } 11. 10.$
 $\theta. \text{ sch. } 12. 10.$
 $1. 37. 10.$

Etenim erit $\epsilon \ FE p$, & $ED \in \eta \ FE$, ideoque $\theta \ FE, ED$ erunt $p \in$. Hinc FD erit ex binis nominibus. Dein quia est inuertendo $A + B : A =$

$A =$

$A = EDq : FEq$: erit $EDq^* > FEq$. Sit π . sch. 16. 5.
 $EDq - FEq = Gq$. Conuertendo igitur erit $A + B : B = EDq : Gq$, & propterea G id est $\sqrt{(EDq - FEq)}$ non $\leq^{\lambda} ED$. Sed est quoque $FE \leq C$. Er. λ . 9. 10.
 go FD erit μ ex binis nominibus quinta. μ . 5. def. sec.
 Q. E. F.

PROP. LIV. PROBL.

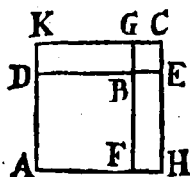
Inuenire ex binis nominibus sextam.

Exponentur duo numeri A , B ita, vt $A + B$ ν . 2. lem. 30. ad neutrum habeat ratio 10. & 1. sch. nem numeri quadrati ad 24. 8. quadratum, & alius C ξ . 2. sch. 24. 8. non quadratus, qui nec ad A nec ad $A + B$ rationem quadrati ad quadratum habeat. Exponatur etiam rationalis D , & fiat $\circ C : A + B = Dq : EFq$, π . cor. 6. 10. & $A + B : A = EFq : FGq$. Erit EG quaesita.

Erit enim π $EF \in D$, & $FG \in EF$, ideo π . sch. 11. que. quum Dp sit, EF , FG $p \in$ erunt. Pro- 10. pterea $\circ EG$ erit ex binis nominibus. Et quia ρ . 37. 10. $A + B > A$, erit $EFq^{\sigma} > FGq$. Sit EFq^{σ} . sch. 16. 5. $- FGq = Hq$. Iam conuertendo est $A + B : B = EFq : Hq$. Ergo H id est $\sqrt{(EFq - FGq)}$ non $\leq^{\tau} EF$. Et quia ex aequo $C : A = \tau$. 9. 10. $Dq : FGq$, erit $FG \in^{\pi} D$. Ergo neutrum nominum EF , $FG \leq D$. Quare EG est ex binis nominibus ν sexta. Q. E. F. ν . 6. def. sec.

LEMMA.

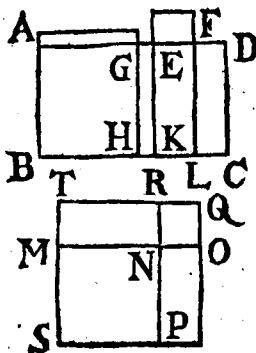
L E M M A.



Si duo quadrata AB, BC ponantur ita, ut DB sit in directum ipsi BE, & compleatur AC parallelogrammum: dico, AC quadratum esse, & inter quadrata AB, BC rectangulum DG medium esse proportionale, itemque inter ipsa AC, CB medium esse proportionale DC.

Quia enim DB, BE in directum sunt: erunt
 φ. 14. 1. & FB, BG φ in directum. Et quia DB = FB,
 & BE = BG, erit DE = FG. Sed quum AC
 Pgr. sit, erit AH = KC = DE, & AK = CH
 = FG. Ergo AC aequilaterum est. Sed &
 x. sch. 29. 1. rectangulum x. Ergo AC est quadratum. Se-
 ψ. 1. 6. cundo, quia AB : DG = ψ FB : BG = DB : BE
 = DG : BC, patet DG esse medium propor-
 tionale inter AB, BC. Tertio, quia AC : DC
 = ψ AK : KD = KC : GC = DC : CB, patet
 ÷ AC, DC, CB. Q. E. D.

PROP. LV. THEOR.



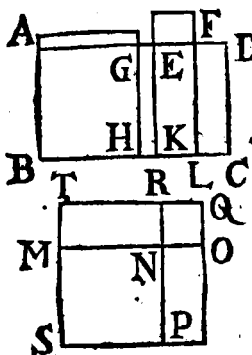
Si spatium ABCD contineatur sub rationali AB & ex binis nominibus prima AD: recta linea spatium ABCD potens irrationalis est, quae ex binis nominibus appellatur.

Divide AD in nomi-
 na ad E, & sit AE > ED.
 Ergo * AE, ED φ E, & √
 (AE q

o. 1. def. sec.

$(AEq - EDq) \lesssim AE$, & $AE \lesssim AB$.
 Bifeca ED in F, & ad AE applica Rgl.
 $\equiv EFq$, & deficiens figura quadrata.
 Fiant ex applicatione partes AG, GE.
 Ergo $AG \times GE = {}^* EFq$, & $AG \lesssim {}^{\beta a.1. def. sec.} GE$.
 Duc ad AB parallelas GH, EK, FL, ${}^{\beta. 18. 10.}$
 & pone quadratum SN $\equiv AH$, & qua-
 dratum NQ $\equiv GK$, ita vt MN, NO
 sint in directum, & comple Pgr. SQ. Er-
 go $\gamma SQ = MOq$, & $\div SN, MR, NQ$, γ . lemma
 Atqui quum sit $AG \times GE \equiv EFq$, & γ praec.
 ergo $AG: EF {}^{\delta} \equiv EF: GE$: erit $AH: {}^{\delta. 17. 6.}$
 $EL \equiv {}^{\delta} EL: GK$, id est $\div SN, EL$, ${}^{\delta. 1. 6.}$
 NQ . Ergo $EL = MR$. Sed $FC \equiv$
 $EL = MR \equiv {}^{\zeta} OP$. Ergo totum $AC {}^{\zeta. 43. 1.}$
 $\equiv$ toti SQ, ideoque recta MO potest AC.
 Et quia $AG \lesssim GE$: erunt AG, GE $\lesssim {}^{\eta. 16. 10.}$
 AE, ergo & ipsi AB; & ergo AG, GE
 erunt ρ , & ob id AH, GK ${}^{\rho}$. Quo- ${}^{\eta. 20. 10.}$
 niam igitur & SN, NQ ρ sunt, erunt MN,
 NO ρ . Quia vero $AE \lesssim AG$, & $ED \lesssim$
 EF , sed AE non $\lesssim ED$: nec erit $AG \lesssim {}^{\eta. 13. 10.}$
 EF . Ergo AH non $\lesssim {}^{\eta} EL$, & SN non $\lesssim {}^{\eta. 10. 10.}$
 MR . Hinc, quia $SN: MR \equiv MN:$
 NO , non erit $MN \lesssim {}^{\eta} NO$. Quare
 MN, NO erunt ρ $\in$, & MO id est $\sqrt{}$
 AC ex binis nominibus erit. Q.E.D.

PROP. LVI. THEOR.



*Si spatium ABCD
contineatur sub rationali
AB & ex binis nominibus
secunda AD: recta li-
nea spatium AC potens
irrationalis est, quae ex
binis mediis prima ap-
pellatur.*

*Iisdem enim con-
structis, quae in prae-
cedente, eodem modo
ostendetur MO posse*

AC; & constabit etiam, AE, ED esse $p\ e$,
& ED $\leq$ AB, & AG $\leq$ GE. Quum er-
go $\wedge AE \in AB$, & AE $\leq$ $\wedge$ utrique ipsarum
AG, GE: erunt $\wedge AB$, AG, GE $p\ e$, ideo-
que $\vee AH$, GK media; & proinde etiam
quadrata SN, NQ media erunt, & MN,
NO mediae. Dein ob AG $\leq$ GE, erit
AH $\leq$ GK, id est SN $\leq$ NQ, vel MNq
 $\leq$ NOq. Sed quia AE $\leq$ AG, & ED $\leq$ EF,
non tamen AE $\leq$ ED: nec erit AG $\leq$
EF; & hinc AH non $\leq$ EL, vel SN non
 $\leq$ PO, ideoque non erit MN $\leq$ NO.
Erat autem MNq $\leq$ NOq. Quare MN,
NO sunt mediae $\in$. Denique ob ED $\leq$
AB, erunt $\vee EF$, AB $p\ e$, ideoque $\wedge EL$
 p , & proinde MR = MN $\times$ NO p
erit. Ex quibus omnibus patet, MO, id
est $\vee AC$, esse $\in$ ex binis mediis primam.
Q.E.D.

a. sch. 14.

10.

u. 16. 10.

v. sch. 22. 10.

z. 10. 10.

e. 12. 10.

u. 20. 10.

e. 38. 10.

PROP.

PROP. LVII. THEOR.

Si spatium AC contineatur sub rationali AB Fig. prop. LVI.
Et ex binis nominibus tertia AD: recta linea
spatium AC potens irrationalis est, quae appel-
latur ex binis mediis secunda.

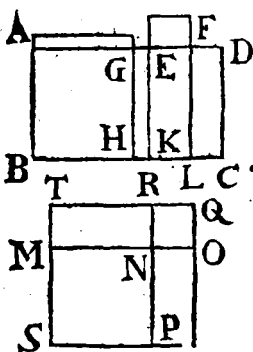
lisdem constructis, quae in prop. 55. eodem modo, quo antea, patebit, esse $MO = \sqrt{AC}$, & MN, NO medias. Sed quia pED non est $\leq$ AB, EF autem $\leq$ ED, & $AB = EK$: $\therefore$ hyp. erunt EF, EK $p \in$, ideoque erit $EL = MR$ medium τ . Est autem $MR = MN \times NO$. τ . sch. 22. Ergo $\sqrt{AC}$ est ex binis mediis secunda ν . 10. Q. E. D. ν . 39. 10.

PROP. LVIII. THEOR.

Si spatium AC contineatur sub rationali AB Fig. prop. LVI.
Et ex binis nominibus quarta AD: recta linea
spatium AC potens irrationalis est, quae vocatur
maior.

Quoniam AD est ex binis nominibus quarta: ϕ erunt AE, ED $p \in$, & $\sqrt{(AEq - EDq)\phi}$. 4. def. non erit $\leq$ AE, AE vero $\leq$ AB. Biseca ED $\sec$ in F, & fac omnia, quae in prop. 55. Constat ergo $MO = \sqrt{AC}$, & $\% GE$ non $\leq$ AG. Hinc χ . 19. 10. GK non $\leq$ AH, id est ν NOq non $\leq$ MNq. ψ . 1. 6. & ideoque $MN \not\propto NO$. Porro quia $pAE \leq$ AB: erit $AK = AH + GK = \nu MNq +$ 10. 10. NOq rationale α . Denique quia $AE \leq$ AB, α . 20. 10. & ED $\leq$ EF, non autem AE $\leq$ ED: non β . 14. 10. erit β EF $\leq$ AB vel EK, ergo erunt γ EF, EK γ . sch. 12. $p \in$, & ergo $EF \times EK = MN \times NO$ erit 10. medium δ . Vnde patet, $\sqrt{AC}$ esse δ irratio- δ . 22. 10. nalem maiorem. δ . 40. 10. Q. E. D.

PROP. LIX. THEOR.



Si spatium AC contineatur sub rationali AB & ex binis nominibus quinta AD: recta linea spatium potens irrationalis est, quae vocatur rationale & medium potens.

Constructis iisdem, iterum constat $MO = \sqrt{AC}$, & $MN \propto NO$. Porro, quia ED est minor portio ex binis

2.5. def. sec. nominibus quintae, est $ED \leq \frac{1}{2} AB$, non
 4. 13. 10. & autem $AE \leq ED$, sunt tamen AE, ED,
 sch. 12. 10. AB p. Ergo $\frac{1}{2} AE, AB \propto \frac{1}{2} \frac{1}{2}$. Ergo AK
 9. constr. $= \frac{1}{2} MNq + NOq$ medium¹ erit. Deni-
 1. 22. 10. que, quia EF, AB p $\frac{1}{2}$, erit $MN \propto NO$
 2. 20. 10. $= \frac{1}{2} EL \times$ rationale. Quapropter $\sqrt{AC}$
 2. 41. 10. erit irrationalis rationale ac medium¹ potens.
 Q. E. D.

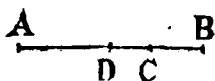
PROP. LX. THEOR.

Fig. prop. Si spatium AC contineatur sub rationali AB
 LIX. & ex binis nominibus sexta AD: quae spatium
 AC potest recta linea irrationalis est, quae vocatur
 bina media potens.

Constructis iisdem. quae supra, patet esse
 4. 6. def. $MO = \sqrt{AC}$, & $MN \propto NO$, & nec AE nec ED
 sec. $\leq \frac{1}{2} AB$; itaque AE, AB p $\frac{1}{2}$, & $MNq + NOq$
 2. sch. 12. 10. $= \frac{1}{2} AE \times AB$ medium¹. Et, quia EF $\leq$ ED,
 3. constr. non autem EK $\leq$ ED, erunt¹ EK, EF p $\frac{1}{2}$,
 1. sch. 22. ideoque $MN \propto NO = \frac{1}{2} EK \times EF$ medium¹
 10. erit.

erit. Porro, quia AE non $\leq EF$, erit $MNq + NOq$ non $\leq MR$. Quare MO irrationalalem esse bina media potentem π patet. π . 42. 10. Q. E. D.

L E M M A.

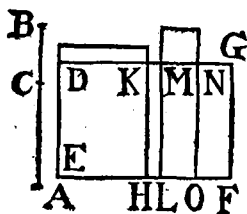


Si recta linea AB in partes inaequales AC, CB secetur: ipsarum partium quadrata $ACq + CBq$ maiora sunt re-

ctangulo. $2 AC \times CB$, quod bis sub dictis partibus continetur.

Bisecetur enim AB in D : & erit $2 AC \times CB$. 2. $CB + CDq = ADq$. Hinc $2 AC \times CB < 2 ADq$, & quia $ACq + CBq = 2 ADq$. 9. 2. $+ 2 DCq$, $ACq + CBq > 2 AC \times CB$. Q. E. D.

PROP. LXI. THEOR.



Quadratum eius AB, quae est ex binis nominibus, ad rationalem DE applicatum, latitudinem DG facit ex binis nominibus primam.

Sit AC maius CB minus nomen rectae AB . Fiat Rgl. $DH = ACq$, & Rgl. $KL = BCq$. Hinc erit $MF = 2 AC \times CB$. Bisecetur MG in N , & ad ML ducatur parallela NO . Ergo $MO = NF = AC \times CB$. Sed, quia ϕ AC , CB sunt p e , erunt ACq , CBq p $\leq$, ϕ . 37. 10. ideoque $ACq + CBq \leq x$ vtrique ACq , BCq . x . 16. 10. Quoniam ergo $ACq + CBq$, id est DL , p ψ . sch. 12. est ψ : erit DM p π & $\leq DE$. Dein quia AC , CB π . 21. 10.

α. sch. 22.

10.

β. 23. 10.

γ. 13. 10.

φ. 37. 10.

δ. lem. 55.

10.

ε. 1. 6.

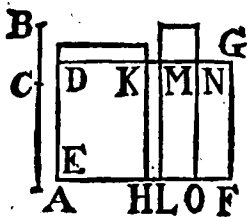
ζ. 17. 6.

κ. 10. 10.

θ. lem. hui.

ι. 18. 10.

κ. 1. def.
sec.



CB p ε, erit MF me-
dium*, & proinde MG

β p non ≤ ML vel DE.

Quare, quum DM p &
≤ DE, erunt DM, MG

p ε γ, & DG erit φ
ex binis nominibus.

Insuper, quia ÷ ACq, AC × CB, CBq,

ideoque ÷ DH, MO, KL: erit DK: MN

= MN: KM, & ergo DK × KM = MNq = 1/4 MGq.

Quia vero ACq ≤ CBq, & inde DH ≤ KL: erit DK ≤ KM.

Et quia ACq + CBq > 2 AC × CB, ideoque DL > MF: patet, esse DM > MG.

Ergo √(DMq - MGq) ≤ DM. Quare DG est ex binis nominibus prima*.

Q. E. D.

PROP. LXII. THEOR.

Fig. prop.
LXI.

Quadratum eius AB, quae est ex binis mediis prima, ad rationalem DE applicatum, latitudinem DG facit ex binis nominibus secundam.

Constructis, quae in praecedenti propo-

α. 38. 10. tione, erunt AC, CB mediae ε^λ, & AC ×

μ. 23. 10. CB p. Ergo DL medium est, & DM p ε

γ. 21. 10. DE μ. Rursus quia MF = 2 AC × CB est

ξ. sch. 14. p, erit MG p ≤ DE. Hinc 1/2 DM, MG

10. erunt p ε, & ergo DG erit* ex binis nomi-

α. 37. 10. nibus. Et quoniam, vt in antecedente, osten-

detur DM > MG, & √(DMq - MGq) ≤

κ. 2. def. DM: erit DG ex binis nominibus* secunda.

sec. Q. E. D.

PROP.

PROP. LXIII. THEOR.

Quadratum eius AB, quae est ex binis Fig. prop. LXI. mediis secunda, ad rationalem DE applicatum, latitudinem DG facit ex binis nominibus tertiam.

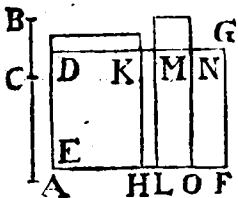
Constructis iisdem, quae ante, erunt AC, ϵ 39. 10. CB mediae ϵ , & erit $DL = ACq + CBq$ medium, & hinc $DM \rho \epsilon DE$. Similiter, quia $AC \times CB \epsilon$ medium est, erit $MG \rho \epsilon DE$. Sed, quia $AC \epsilon CB$, erit $DL = ACq + CBq$ non $\leq MF = 2 AC \times CB$, & ϵ cor. 27. ob id DM non $\leq MG$. Sunt autem DM , 10. $MG \rho$. Ergo DG est ex binis nominibus. Ostendetur autem, ut antea, $DM > MG$, & $\sqrt{(DMq - MGq)} \leq DM$. Ergo erit $DG \epsilon$ ex binis nominibus tertia. Q. ϵ 3. def. E. D. sec.

PROP. LXIV. PROBL.

Quadratum maioris AB, ad rationalem DE Fig. prop. LXI. applicatum, latitudinem DG facit ex binis nominibus quartam.

Construantur eadem. Iam erit $AC \epsilon \epsilon$ 40. 10. CB, & $ACq + CBq$ ideoque $DL \rho$, & $AC \times CB$ ideoque MF medium. Hinc DM , DE sunt $\rho \leq \epsilon$, sed $\neq MG$, $DE \rho \epsilon$. Quare ϕ . 21. 10. DM , MG sunt $\psi \rho \epsilon$. & DG est ϵ ex binis χ . 23. 10. nominibus. Sed, ut ante, ostendetur, esse ψ . sch. 14. $DM > MG$, & $DK \times KM = \frac{1}{4} MGq$. 10. Quare quum ACq non $\leq CBq$, & ergo DK α . 37. 10. non $\leq KM$, ideoque $\sqrt{(DMq - MGq)} \beta$ non 1. 6. $\leq DM$: erit DG ex binis nominibus quarta γ . β . 19. 10. Q.E. D. γ . 4. def. sec.

PROP. LXV. THEOR.



Quadratum eius AB,
quae rationale ac me-
dium potest, ad ratio-
nalem DE applicatum,
latitudinem DG facit
ex binis nominibus quin-

tam.

Nam iisdem constructis, constat $DL =$

3. 41. 10. ACq + CBq medium esse δ , MF vero = 2
AC $\times$ CB ρ , & hinc DM ρ non Σ DE, &
MG Σ DE, ideoque DM, MG $\rho \notin$. Er-
go, reliquis vt in praecedente ostensis, pa-
tebit, DG esse ex binis nominibus quintam.
Q. E. D.

PROP. LXVI. THEOR.

Fig. prop. LXV. *Quadratum eius AB, quae bina media potest, ad rationalem DE applicatum, latitudinem DG facit ex binis nominibus sextam.*

Nam quia DL, MF media ¹ sunt, & ob
^{1. 42. 10.} id DM, MG ρ ² & non ε ipsi DE; quia
^{2. 23. 10.} praeterea DL non ε ¹ MF, & ob id DM,
 MG ρ $\in$, & DG ex binis nominibus; re-
 liqua vero vt in prop. 64. ostenduntur:
^{1. 6. def. sec.} erit DG ex binis nominibus sexta ¹. Q.
 E. D.

PROP. LXVII. THEOR.

*Ei AB, quæ est ex binis nominibus, longitudine
commensurabilis CD & ipsa ex binis nominibus
est ordine eadem.*

Sit

A E B
 ———|———

C F D
 ———|———

Sit enim AE maius nomen
 rectae AB. Ergo⁹ AE, EB⁹. 37. 10.
 sunt p €. Fiat AB: CD =⁴. 12. 6.
 AE: CF. Ergo EB: FD =². 19. 5.
 AB: CD. Hinc^λ AE < CF,^μ. sch. 12.
 & EB < FD, & ergo^μ CF, FD p. Et quo- 10.
 niam AE: CF = EB: FD & permutando AE:
 EB = CF: FD, & AE € EB: erit CF € FD.^ν. sch. 10.
 Quare CD est⁹ ex binis nominibus. Iam^ξ. 10.
 si √ (AEq — EBq) < AE, erit & √ (CFq —
 FDq) < CF; si vero √ (AEq — EBq) non <
 AE, neque √ (CFq — FDq) < CF erit; & si
 AE < expositae rationali, erit & CF <^o. 12. 10.
 eidem; si EB < expositae p, erit & FD <
 eidem; si neutra AE, EB < expositae ratio-
 nali, nec CF, FD <^π eidem erunt. Ergo^π. 14. 10.
 CD ex binis nominibus ordine eadem erit
 ipsi AB €. Q. E. D. g. def. sec.

PROP. LXVIII. THEOR.

Ei AB, quae est ex binis mediis, longitudine Fig. prop.
 commensurabilis CD & ipsa ex binis mediis est, LXVII.
 atque ordine eadem.

Sint AE, EB mediae in AB. Ergo^σ AE €^σ. 38. & 39.
 EB. Fiat AB: CD = AE: CF. Ergo EB: 10.
 FD = AB: CD = AE: CF. Hinc erit EB
 < FD, & AE < CF, ideoque^τ CF, FD mediae^τ. 24. 10.
 erunt. Et, quoniam AE: EB = CF: FD, erunt
 CF, FD^ν mediae €, & ob id CD ex binis me-
 diis erit^σ. Iam, quia AE: EB = CF: FD,^ν. 1. sch.
 erit AEq: AE × EB =^φ CFq: CF × FD, & 10. 10.
 permutando AEq: CFq = AE × EB: CF ×^φ. 1. 6. &
 FD, ideoque^χ AE × EB < CF × FD. Si^χ. 10. 10.

ψ. sch. 12. igitur $AE \times EB \rho$: erit & ψ $CF \times FD \rho$:
 10. fin $AE \times EB$ medium; erit & $CF \times FD$ me-
 α. cor. 24. dium ω . Ergo CD est ex binis mediis σ ordi-
 10. ne eadem ipsi AB. Q. E. D.

PROP. LXIX. THEOR.

Maiori AB commensurabilis CD & ipsa maior est.

A E B Factis enim iisdem, quae
 ————|——— supra, erit $AE: CF = EB:$
 α. 10. 10. ————|——— $FD = AB: CD$. Ergo α
 C F D $AE \leq CF$, & $EB \leq FD$.
 Et quia permutando $AE: AB = CF: CD$:
 β. 22. 6. erit $AEq: ABq = \beta$ $CFq: CDq$. Simili-
 γ. 24 5. ter $EBq: ABq = FDq: CDq$. Ergo γ
 $AEq + EBq: ABq = CFq + FDq: CDq$,
 & permutando $AEq + EBq: CFq + FDq$
 $= ABq: CDq$. Ergo $AEq + FBq \leq \alpha$
 3. 40. 10. $CFq + FDq$. Est autem $AEq + EBq \rho \delta$.
 δ. sch. 12. Ergo δ $CFq + FDq \rho$ erit. Ostenditur au-
 10. tem, vt in praecedente, $CF \times FD \leq AE \times$
 EB . Medium vero est $AE \times EB \delta$. Ergo
 ζ. cor. 24. & $CF \times FD$ medium ζ erit. Denique, quia
 10. $AE \propto \delta$ EB , erit & γ $CF \propto \delta$ FD . Ergo δ CD
 η. 2. sch. maior erit. Q. E. D.
 10. 10.

PROP. LXX. THEOR.

*Rationale ac medium potenti AB commen-
 Fig. prop. surabilis CD & ipsa rationale ac medium po-
 LXIX. tens est.*

Constructis iisdem, similiter ostendemus
 $CF \propto \delta$ FD , & $CFq + FDq \leq AEq + EBq$,
 α. 41. 10. & $CF \times FD \leq AE \times EB$. Iam $AEq + EBq$
 medium

medium est; ergo & $CFq + FDq$. Et quia $\propto$ cor. 24.
 $AE \times EB \propto$: erit $CF \times FD \propto$. Et igitur CD erit rationale ac medium potens $\propto$. sch. 12.
 Q. E. D. 10.

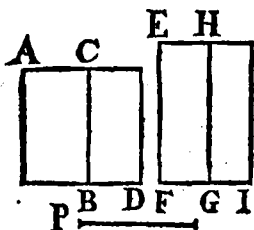
PROP. LXXI. THEOR.

Bina media potenti AB commensurabilis CD Fig. prop. LXIX.
Et ipsa bina media potens est.

Nam vt in 69. demonstrabimus, $CF \propto FD$,
 & $CFq + FDq \leq AEq + EBq$, & $CF \times FD$
 $\leq AE \times EB$. Iam quia $AEq + EBq$, & AE
 $\times EB$ media $\propto$ sunt, & $AEq + EBq$ non $\leq$ $\propto$. 42. 10.
 $AE \times EB$: erunt $CFq + FDq$ & $CF \times FD$
 media, & erit $CFq + FDq$ non $\leq$ $\frac{1}{2} CF \times FD$. cor. 24.
 Ergo CD erit bina media potens $\propto$. 10.
 Q. E. D. $\frac{1}{2}$. 14. 10.

PROP. LXXII. THEOR.

Si rationale AB et medium CD componantur: quatuor irrationales fiunt, vel quae ex binis nominibus, vel quae ex binis mediis prima, vel maior, vel rationale ac medium potens.

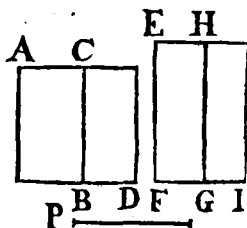


Sit $P = \sqrt{AB + CD}$. Dico, P fore
 vnam ex quatuor di-
 ctis irrationalibus.

Cas. 1. Sit $AB < CD$.
 Ad EF $\propto$ applicetur
 Rgl. $EFG = AB$, &
 Rgl. $HGI = CD$. Er-

go erit $EG \propto$ & $FG \propto \leq EF$. HI vero erit $\propto$. 21. 10.
 medium, & $GI \propto$ non $\leq EF$. Est vero EG $\propto$. 23. 10.
 non

e. cor. 24. 10.
& hyp.



non $\leq$ HI, & $EG : HI = FG : GI$. Ergo FG non $\leq$ GI, & idcirco FG, GI sunt $\rho \epsilon$, & FI est ex binis nominibus. Et quia $EG > HI$: erit & $FG > GI$.
Iam ponatur $\sqrt{(FGq - GIq)} \leq FG$: & erit FI ex binis nominibus prima^r; & $\sqrt{EI} = \sqrt{AD} = P$ ex binis nominibus^r. Ponatur $\sqrt{(FGq - GIq)} \leq FG$: & erit FI ex binis nominibus quarta^v; & P maior ϕ .

e. 1. def. sec.
r. 55. 10.
v. 4. def.
sec.
phi. 58. 10.

Cas. 2. Sit $AB < CD$; & erit $FG < GI$; FI autem vt antea ex binis nominibus. Quare, posita $\sqrt{(GIq - FGq)} \leq GI$, erit P ex binis mediis $\approx$ prima. Posita autem $\sqrt{(GIq - FGq)} \leq GI$, erit P rationale ac medium potens^{psi}. Q. E. D.

x. 56. 10.
psi. 59. 10.

PROP. LXXIII. THEOR.

Fig. prop. Si dua media inter se incommensurabilia LXXII. AB, CD componantur: duae reliquae irrationales fiunt; vel ex binis mediis secunda, vel bina media potens.

alpha. 23. 10.
alpha. hyp.
beta. 10. 10.

Factis iisdem, quae in praecedente, * erit nec FG nec GI $\leq$ EF, vtraque tamen erit ρ . Et quia EG non $\leq$ HI, ideoque FG non $\leq$ GI: erunt FG, GI $\rho \epsilon$, & hinc FI ex binis nominibus erit, quorum neutrum $\leq$ rationali EF.

Cas. 1.

Caf. 1. Iam si fuerit $AB > CD$, ideoque $FG > Gl$, & $\sqrt{(FGq - Glq)} \leq FG$: erit Fl ex binis nominibus tertia, & hinc P^{γ} ex binis 57. 10.
mediis secunda. Sin $\sqrt{(FGq - Glq)} \text{ non } \leq$
 FG : erit P bina media δ potens. 60. 10.

Caf. 2. Si fuerit $AB < CD$: similiter demonstrabitur, P aut ex binis mediis secundam, aut bina media potentem esse. Q.E.D.

Corollarium.

Quae ex binis nominibus; & quae post ipsam sunt (prop. 38. 39. 40. 41. 42.) irrationales, neque mediae neque inter se eadem sunt. Quadratum enim, quod fit a media, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit rationalem; quod autem fit ab ea, quae est ex binis nominibus, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit ex binis nominibus primam: quod ab ea, quae est ex binis mediis prima, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit ex binis nominibus secundam; & sic deinceps (prop. 63. 64. 65. 66). Quoniam igitur dictae latitudines differunt, & a prima, & inter sese, a prima quidem, quod rationalis sit, inter sese vero, quod ordine non sint eadem: constat & ipsas irrationales inter se differentes esse.

Principium Senariorum per detractionem.

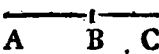
PROP. LXXIV. THEOR.

A | Si a rationali AC rationali AB aufe-
B | ratur, potentia solum commensurabilis exi-
C | stens toti AC : reliqua BC irrationalis est.
Vocetur autem apotome.

Nam

ε. cor. 27. Nam $2 AC \times AB$ non $\varepsilon ACq + ABq$,
 10. & ob id ζBCq non $\varepsilon ACq + ABq$. Hinc,
 ζ. 7. 2. & quia $ACq + ABq \rho^*$ est, erit $BCq \alpha$, & ergo
 cor. 17. 10. $BC \alpha$. Q. E. D.
 η. sch. 27. 10.

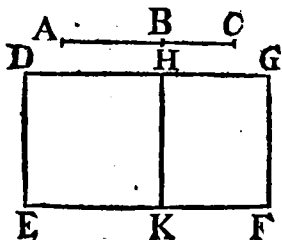
PROP. LXXV. THEOR.

 Si a media AC media BC auferatur, potentia solum commensurabilis existens toti AC, quae cum tota AC rationale continet: reliqua AB irrationalis est. Vocetur autem mediae apotome prima.

9. cor. 27. Nam $ACq + BCq^9$ non $\leq 2 AC \times CB$, &
 10. ergo ABq non $\varepsilon 2 AC \times CB$, ac ob id AB^*
 ι. 7. 2. & α . Q. E. D.
 17. 10.

PROP. LXXVI. THEOR.

10. Si a media AC media CB auferatur, potentia solum commensurabilis existens toti AC, quae cum tota AC medium continet: ζ reliqua AB irrationalis est. Vocetur autem mediae apotome secunda.



Exponatur ρ DE, ad quam applicetur Rgl. $DEK = 2 AC \times BC$, & Rgl. $DEF = ACq + CBq$. Erit itaque $\wedge HF = ABq$. Et quia $ACq + CBq$ medium μ

λ. 7. 2. est, nec non $AC \times CB$: erunt DF, DK media, & proinde $\vee EF, EK \rho$. Sed quia $AC \in$
 μ. 16. 10. & cor. 24. 10. CB , & ob id $\zeta ACq + CBq$ non $\leq 2 AC \times$
 ν. 23. 10. CB : erit $\circ FE$ non $\leq EK$. Ergo EF, EK erunt
 ξ. cor. 27. 10. ρ E,
 α. 1. 6. & 10. 10.

$p \in$, & ergo $KF^* \propto \alpha$, & ipsum $HF^* \propto \alpha$, $\pi. 74. 10.$
 & ob id quoque $AB^* \propto \alpha$ erit. Q.E.D. $\pi. sch. 21. 10.$
 $\pi. 11. def. 10.$

PROP. LXXVII. THEOR.

$\overline{\text{A}} \quad \text{B} \quad \text{C}$ Si recta linea AC re-
 sta linea CB auferatur, po-
 tentia incommensurabilis existens toti AC, quae
 cum tota faciat compositum quidem ex ipsa-
 rum quadratis $ACq + CBq$ rationale, quod
 autem sub ipsis continetur $AC \times CB$ me-
 dium: reliqua AB irrationalis est. Vocetur
 autem minor.

Nam quia $ACq + CBq$ non $\Sigma^* 2 AC \times$ $\pi. sch. 13. 10.$
 CB : erit & $ACq + CBq$ non $\Sigma^v ABq$, $v. cor. 17.$
 Quare AB^p erit $\propto \alpha$. Q.E.D. $10.$

$\phi. 11. def.$
 $10.$

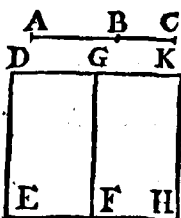
PROP. LXXVIII. THEOR.

$\overline{\text{A}} \quad \text{B} \quad \text{C}$ Si a recta linea AC re-
 sta linea CB auferatur po-
 tentia incommensurabilis existens toti AC, &
 cum tota faciens compositum quidem ex ipsa-
 rum quadratis $ACq + CBq$ medium, quod
 autem sub ipsis bis continetur $2 AB \times CB$
 rationale: reliqua AB irrationalis est. Vocetur
 autem cum rationali medium totum
 efficiens.

Nam quia $ACq + CBq$ non $\Sigma^* 2 AC \times$ $\pi. sch. 13.$
 CB : erit ABq non $\Sigma^v 2 AC \times CB$, & hinc $10.$
 $AB^* \propto \alpha$. Q.E.D. $\phi. 17. 10.$
 $\pi. 11. def. 10.$

PROP.

PROP. LXXIX. THEOR.



*Si a recta linea AC recta
linea CB auferatur potentia
incommensurabilis existens to-
ti AC, & cum tota faciens
compositum quidem ex ipsarum
quadratis ACq + CBq me-
dium quod autem sub ipsis bis
continetur 2 AC × CB medium, & adhuc ipsa-
rum quadrata ACq + CBq incommensurabilia
ei 2 AC + CB, quod bis continetur sub ipsis: re-
liqua AB irrationalis est. Vocetur autem cum
medio medium totum efficiens.*

Ad p DE applica Rgl. D t. H = ACq +
β. 23. 10. CBq, & Rgl. DEF = 2 AC × CB. Ergo GH
γ. 10. 10. & = α ABq, & EH, EF sunt p β, & DH non ε
1. 6. DF. Propterea EH non ε γ EF, ideoque EH,
δ. 74. 10. EF p ε sunt; ex quo sequitur, FH δ esse α,
ε. sch. 21. 10. & GH' α, & AB ε α. Q. E. D.
ζ. 11. def. 10.

PROP. LXXX. THEOR.

*Apotomae AB una
tantum congruit recta
linea BC potentia solum
commensurabilis existens toti AC.*

Si negas: congruat alia BD, ita ut α AD, DB
fint p ε. Et quia ADq + DBq = 2 AD ×
δ. 74. 10. DB + γ ABq, ACq + CBq = 2 AC × CB
+ ABq: erit ADq + DBq - (ACq + CBq)
= 2 AD × DB - 2 AC × CB. Sed quia
ε. sec. 27. 10. etiam AC, CB sunt α p ε, & hinc α ADq +
DBq - (ACq + CBq) p: erit & 2 AD ×
DB

DB — 2 AC $\times$ CB ρ . Q. E. A*, quia AD $\times$ DB & AC $\times$ CB media $\wedge$ sunt. x. 27. 10.
a. sch. 22.
10.

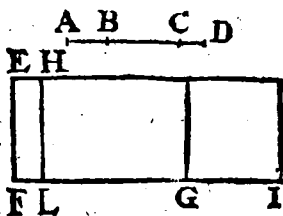
PROP. LXXXI. THEOR.

Mediae apotomae primae AB una tantum congruit recta linea media BC, potentia solum commensurabilis existens toti AC, & cum tota rationale continens. Fig. prop.
LXXX.

Si negas: fit AB etiam mediae AD apotome prima. Ergo erunt μ AD, DB mediae E, μ . 75. 10. & AD $\times$ DB ρ . Erit autem, vt antea, ADq + DBq — (ACq + CBq) = 2 AD $\times$ DB — 2 AC $\times$ CB. Et quia ADq + DBq medium ν est, nec non ACq + CBq ξ ; v. cor. 24. 10.
 ξ . 24. 10 &
cor. eiusd. rationalia autem sunt 2 AD $\times$ DB & 2 AC $\times$ CB: medium superat medium rationali π . o. hyp.
a. sch. 27.
10. Q. E. A ϵ .

PROP. LXXXII. THEOR.

δ . 27. 10.



Mediae apotomae secundae AB una tantum congruit recta linea media BC, potentia solum commensurabilis existens toti AC, & cum

tota medium continens.

Si negas: fit AB etiam apotome secunda mediae AD, id est, sint σ AD, DB mediae E, σ . 76. 10. & medium continentes. Ad ρ EF applicetur Rgl. EFG = ACq + CBq, & auferatur Rgl. HLG = 2 AC $\times$ CB, vel EL = σ ABq. τ . 7. 2. Ad eandem EF applicetur quoque Rgl. EFT = ADq

$\tau. 7. 2.$ $\overline{A B C D}$ $= ADq + DBq :$
 $\nu. hyp. \& 24. 10.$ $\overline{E H}$ $\& erit HI = 2 AD$
 $\phi. 16. 10. \& cor. 24. 10.$ $\overline{F L G I}$ $\times DB.$ Et quia
 $\chi. 23. 10.$ $\overline{AC, CB}$ mediae $\in$ $\circ$
 $\psi. cor. 27. 10.$ sunt: erit $ACq + CBq$ medium ϕ , &
 $\omega. 1. 6. \& 10. 10.$ ergo EG medium
 $\alpha. 74. 10.$ erit, & $FG p \propto$. Rursus quia $AC \times CB$, &
 $\beta. 80. 10.$ hinc etiam HG medium est: erit $LG p \propto$. Sed
quia $AC \in CB$: erit $\psi ACq + CBq$ non ≤ 2
 $AC \times CB$, id est, EG non $\leq HG$; & ob id
 FG non $\leq LG$. Quare FG, LG sunt $p \in$.
Proinde FL est apotome rectae FG . Simi-
liter autem demonstrabimus, esse & FL apoto-
men rectae FL . Q. E. A ^{β} .

PROP. LXXXIII. THEOR.

$\overline{A B C D}$ *Minori AB una tan-
tum congruit recta li-
nea BC, potentia incommensurabilis existens
toti AC, & cum tota faciens compositum quidem
ex ipsarum quadratis $ACq + CBq$ rational-
le, quod autem bis sub ipsis continetur $2 AC$
 $\times CB$ medium.*

$\gamma. 77. 10.$ Si negas: congruat BD . Ergo $\nu AD \in$
 $\delta. 7. 2.$ DB , & $ADq + DBq p$, & $2 AD \times DB$ me-
dium erit. Et quia $ADq + DBq = 2 AD$
 $\times DB + ABq$, & $ACq + CBq = 2 AC \times$
 $CB + ABq$: erit $ADq + DBq - (ACq +$
 $CBq) = 2 AD \times DB - 2 AC \times CB$. Ergo
 $\alpha. sch. 27. 10.$ medium $2 AD \times DB$ superabit medium $2 AC$
 $\beta. 27. 10.$ $\times CB$ rationali. Q. E. A ^{ζ} .

PROP.

PROP. LXXXIV. THEOR.

Ei AB, quae cum rationali medium totum Fig. ptop. LXXXIII.
facit, una tantum congruit recta linea BC, potentia incommensurabilis existens toti AC,
Et cum tota faciens compositum quidem ex
ipsarum quadratis ACq + CBq medium, quod
autem bis sub ipsis continetur 2 AC × CB
rationale.

Si negas: congruat quoque BD. Er-
 go $ADq + DBq$ medium, & $2 AD \times DB$ 78. 10.
 DB p erit. Et quia, vt antea, $ADq + DBq - (ACq + CBq) = 2 AD \times DB - 2$
 $AC \times CB =$ 9 p: medium $ADq + DBq$ 9. sch. 27.
 superabit medium $ACq + CBq$ rationali. 10.
 Q. E. A. 27. 10.

PROP. LXXXV. THEOR.

Ei AB, quae cum medio medium totum fa- Fig. prop. LXXXIV.
cit, una tantum congruit recta linea BC, poten-
tia incommensurabilis existens toti AC, Et cum
tota faciens compositum quidem ex ipsarum qua-
dratis ACq + CBq medium, quod autem bis
sub ipsis continetur 2 AC × CB medium, Et ad-
huc incommensurabile composito ex quadratis
ipsarum.

Si negas: congruat etiam BD, ita vt AD
 & DB, & medium $2 AD \times DB$ non $\leq$ medio
 $ADq + DBq$. Fiant eadem, quae in propo-
 sitione LXXXII; & simili ratione, ac ibi, de-
 monstrabitur, eandem FL esse apotomen dua-
 rum FG, FI. Q. E. A. 2.

x. 80. 10.

DEFINITIONES TERTIAE.

1. Exposita rationali & apotoma, si quidem tota plus possit, quam congruens, quadrato rectae lineae sibi commensurabilis longitudine; sitque tota expositae rationali longitudine commensurabilis: vocetur *apotome prima*.

2. Si vero congruens sit longitudine commensurabilis expositae rationali; & tota plus possit, quam congruens, quadrato rectae lineae sibi commensurabilis longitudine: vocetur *apotome secunda*.

3. Quod si neutra sit longitudine commensurabilis expositae rationali; & tota plus possit, quam congruens, quadrato rectae lineae sibi commensurabilis longitudine: dicatur *apotome tertia*.

4. Rursus si tota plus possit, quam congruens, quadrato rectae lineae sibi incommensurabilis longitudine: si quidem tota sit longitudine commensurabilis expositae rationali, vocetur *apotome quarta*.

5. Si vero congruens, vocetur *apotome quinta*;

6. Quod si neutra, dicatur *apotome sexta*.

PROP. LXXXVI. PROBL.

Inuenire primam apotomen.

A 16. B 9.

Expositae rationali C fiat Σ DF. Capiantur $\wedge$ duo numeri A, B quadrati, ita vt A — B non sit quadratus, & fiat μ A: A — B

A. cor. I.
lem. 30.
10.

C —————
D ————— F
E

μ . cor. 6. 10.

G —————

$A - B = DFq : FEq$. Dico, DE esse apotomen primam.

Nam quia $DF \propto C$: erit $DF \rho$. Et quia DFq ad EFq rationem numeri ad numerum, sed non quadrati ad quadratum, habet: erit $EF \notin DF$; & ergo erunt $EF, DF \rho \in$, & DE apotome ξ erit. Sit autem $G = \sqrt{(DFq - FEq)}$. Jam quia $A : A - B = DFq : EFq$, erit conuertendo $A : B = DFq : Gq$, & ob id $G = \sqrt{DFq - FEq} \propto DF$. Ergo DE est apotome prima π . Q. E. F.

cor. II. 10.

 ξ . 74 10. ρ . 9. 10. π . I. def. tert.

PROP. LXXXVII. PROBL.

Inuenire secundam apotomen.

Fig. prop.

LXXXVI.

Expositae ρ C sit $\propto EF$, & exponantur numeri A, B quadrati, ita vt A — B non sit quadratus, & fiat $A - B : A = EFq : FDq$. Erit DE apotome secunda.

Nam, quia $EF \propto C$, erit $EF \rho$; & vt antea, ostendemus, DE apotomen esse, atque $\sqrt{(DFq - FEq)} \propto DF$. Quare patet, DE esse apotomen secundam ξ . Q. E. F.

 ρ . 2. def. tert.

PROP. LXXXVIII. PROBL.

Inuenire tertiam apotomen.

A 16. B 12. Exponantur ρ D, & tres
C 8. numeri A, B, C non ha-
D ————— bentes inter se rationem
E ————— G quadrati ad quadratum;
F ————— A vero ad A — B ha-
H ————— beat talem rationem.
Fiat $C : A = Dq : EGq$, & $A : B = EGq : GFq$. EF erit apotome tertia.

T 3

Nam

6. 10. A 16. B 12. Nam quia $EGq \sum^r Dq$:
 C 8. erit $EG \rho$. Hinc, quia GF
 7. cor. 11. D ———— $\in^r EG$, erunt $EG, GF \rho \in$.
 10. E ———— | ———— G & EF erit ^{v} apotome. De-
 7. 74. 10. F inde quia ex aequo $C : B$
 H ———— $= Dq : GFq$, non erit GF
 9. 10. $\sum^r D \phi$. Similiter quia $C : A = Dq : EGq$,
 nec $EG \sum^r D$. Sit autem $Hq = EGq - GFq$.
 Et quia conuertendo $A : A - B = EGq : Hq$,
 erit H id est $\sqrt{(EGq - GFq)} \sum^r EG$. Ex
 4. def. quibus omnibus sequitur, EF esse apotomen
 tert. quartam $\propto$. Q.E.F.

PROP. LXXXIX. PROBL.

Inuenire quartam apotomen.

A 6. B 10. Exponentur duo nu-
 C ———— meri A, B tales, vt A
 D ———— | ———— F $+ B$ ad neutrum ratio-
 E nem quadrati ad qua-
 G ———— dratum habeat. Ex-
 positae ρ C fiat $\sum DF$, & $A + B : B = DFq :$
 FEq : erit DE quaesita,

6. def. 10. Quia enim $DF \rho \psi$ est: erit & $FE \rho^u$; &
 6. 10. & ob id DF, FE erunt $\rho \in^u$. Erit ergo DE ^{b}
 sch. 12. 10. apotome. Sit $Gq = DFq - FEq$. Et quia
 1. cor. 11. est conuertendo $A + B : A = DFq : Gq$: erit
 10. G id est $\sqrt{(DFq - FEq)}$ non $\sum^r DF$. Ergo
 74. 10. DE erit apotome ^{d} quarta. Q.E.F.
 9. 10.
 4. def.
 tert.

PROP. XC. PROBL.

Inuenire quintam apotomen.

Fig. prop. Exponentur duo numeri A, B, ita vt $A + B$
 LXXXIX. ad neutrum habeat rationem quadrati ad qua-
 dratum.

dratum. Expositae ρ C fiat $\leq$ EF, & B: A + B = FEq: FDq. Erit DE quaesita.

Quia enim, vt in praecedente, patet DE apotomen esse, & $\sqrt{(DFq - FEq)}$ non $\leq$ DF; EF autem $\leq$ ρ C facta est: erit DE apotome quinta. Q.E.F. 5. def. tert.

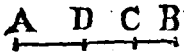
PROP. XCI. PROBL.

Inuenire sextam apotomen.

Erponantur ρ D, & tres numeri A, B, C, tales vt nec inter se rationem numeri quadrati ad quadratum habeant, nec A ad A - B eam habeat rationem; & fiat C: A = D q: EGq, & vt A: B = EGq: GFq: erit EF quaesita.

A 12. B 5. C 10. Ostendetur enim, vt in prop. 88. EF apotomen, & nec EG nec GF ipsi D $\leq$ esse. Sit autem $H = \sqrt{(EGq - GFq)}$. Atqui quum sit A: B = EGq: GFq, & ergo conuertendo A: A - B = EGq: Hq: patet etiam, non $\leq$ esse H id est $\sqrt{(EGq - GFq)}$ $\leq$ EG. Ergo EF erit apotome sexta. Q.E.F. 2. 9. 10. 6. def. tert.

Scholium.

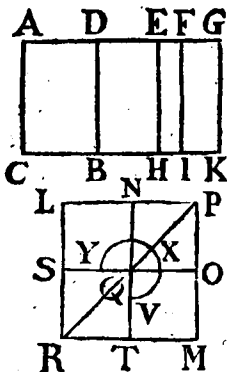
 Sed & expeditius sex dictarum linearum inuentionem ostendere licet. Si enim oporteat inuenire primam apotomen: exponatur ex binis nominibus prima AB, cuius maius nomen sit AC, & fiat CD = CB. Ergo AC, CB hoc est AC, CD sunt ρ E, & $\sqrt{(ACq - CDq)}$ $\leq$ AC, & AC expositae rationali $\leq$ est; & igitur AD est apotome prima. Si 49. 10. 1. def. sec. 1. def. tert.

militer & reliquas apotomas inueniemus eas, quæ sunt ex binis nominibus eiusdem ordinis exponentes.

PROP. XCII. THEOR.

Si spatium AB contineatur sub rationali AC & apotoma prima AD: recta linea spatium AB potens apotome est.

λ. 74. IO.
μ. I. def.
tert.



Sit ipsi AD congruens DG. Ergo $\wedge$ AG, GD sunt ρ E, & $AG \lesseqgtr \rho$ AC, & $\sqrt{(AGq - GDq)} \lesseqgtr AG$. Ad AG applicetur Rgl. $= \frac{1}{4} DGq = DEq$ deficiens figura quadrata. Secet hoc ipsam AH in partes AF, FG. Ergo $AF \lesseqgtr \rho$ FG, & ob id $AG \lesseqgtr \frac{1}{2}$ tam AF quam FG. Quare tam

α. 12. IO. AF quam FG $\lesseqgtr \rho$ AC erit ρ σ , & ergo AI, FK
π. 6. def. 6. ρ erunt τ . Deinde quia $DE = \frac{1}{2} EG$: erunt
ρ. 20. IO. DE, EG $\lesseqgtr DG$. Sed DG ρ non $\lesseqgtr \rho$ AC: ergo DE, EG, AC erunt ρ E, & ergo DH, EK, media σ . Fiat quadratum LM $= AI$, & auferatur quadratum NO $= FK$, communem cum toto angulum LPM habens. Erunt ergo LM, NO circa eandem τ diametrum RQP. Descri-
τ. 26. 6. pta ergo reliqua figura, erit & ST quadratum ν .
υ. 1. cor. 4. 2. iam, quia ρ $AF \times FG = EDq = EGq$, erit
φ. lem. 18. $AF:EG = \rho EG:FG$, & ob id $\div$ AI, EK, FK.
10. $\div$ Sed sunt quoque $\downarrow \div$ LM, MN, NO. Quare,
x. 17. 6. MN (= LO) = EK = DH, & proinde DK
ψ. lem. 55. = gnom.
10.

$=$ gnom. $VXY + NO$. Sed $AK = LM + NO$. Ergo $AB = ST = LN$ q. Denique quia AI, FK p sunt: erunt &, quae illa possunt, LP, PN p. Sed quia LO sch. 12. $= EK$ medium non $\leq NO$, & propterea IO . LP non $\leq PN$: erunt LP, PN p $\in$, $1. 6.$ & ergo LN id est $\sqrt{AB}$ apotome erit. $10. 10.$ Q. E. D.

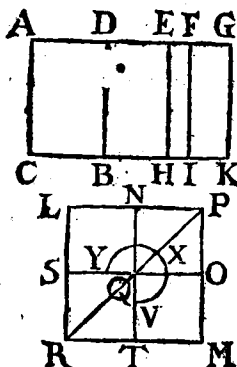
PROP. XCIII. THEOR.

Si spatium AB contineatur sub rationali AC Fig. prop. & apotoma secunda AD: recta linea spatium XCII.
AB potens mediae est apotome prima.

Sit enim ipsi AD congruens DG . Ergo $\beta \beta$. 2. def. AG, GD sunt p $\in$, & DG est $\leq AC$, & $\sqrt{(AGq - GDq)} \leq AG$, & AG non $\leq AC$. Iam factis iisdem, quae in propositione praecedente: erit tam AF quam $FG \leq AG$, sed non $\leq AC$, & proinde AF, AC erunt p $\in$, item γ . 14. IO . FG, AC ; & igitur δ AI, FK , & lis aequalia δ . sch. 22. LM, NO media erunt, & LP, PN mediae. IO . Et quia $AF: FG = AI: FK = LM: NO$, AF vero $\leq FG$: erunt PL, PN mediae ϵ . 18. IO . $\in$ ϵ . Denique quum ob $EG \leq DG \leq p AC$, ϵ . 10. IO . sit EK p; &, vt antea, demonstretur $LO = EK$: patet, LP, PN rationale continere. Quare LN id est $\sqrt{AB}$ erit mediae apotome prima. Q. E. D. γ . 75. IO .

PROP. XCIV. THEOR.

Si spatium AB contineatur sub rationali AC & apotome tertia AD: recta linea spatium potens mediae est apotome secunda.



3. def.
tert.
constr.
x. sch. 22.
10.

Nam primo, ut in
praecedente propo-
sitione, ostendetur, LP,
PN esse medias $\circ$ €. Deinde quia DG ρ est
non Σ^2 AC, EG vero
 Σ^2 DG; erunt EG,
AC ρ €, & EK $\times$ medium
erit, & igitur quoque
LO. Quare quum LP,
PN medium conti-
neant: erit LN id est $\sqrt{}$

76. 10. AB mediae apotome secunda $\wedge$. Q.E.D.

PROP. XCV. THEOR.

Fig. prop. Si spatium AB contineatur sub rationali AC,
XCIV. & apotoma quarta AD: recta linea spatium
AB potens minor est.

4. def. Sit enim DG congruens ipsi AD: & erunt $\times$
tert. AG, GD ρ €, eritque AG Σ AC, sed DG non
 Σ AC, nec $\sqrt{(AGq - GDq)} \Sigma$ AG. Con-
struantur eadem quae in praecedentibus: &
20. 10. patet, AK ρ esse ρ , DK vero medium $\frac{1}{2}$, &
3. sch. 22. AF non Σ^2 FG, & ergo AI non Σ^2 FK. Sed
10. AK = LPq + PNq, & $\frac{1}{2}$ DK = EK =
19. 10. LO = LP $\times$ PN, & AI = LPq, & FK =
10. 10. PNq. Quare LP $\circ$ PN, & LPq + PNq est
5. constr. ρ , 2 LP $\times$ PN autem medium; & proinde $\circ$
77. 10. LN id est $\sqrt{}$ AB minor. Q.E.D.

PROP. XCVI. THEOR.

Fig. prop. Si spatium AB contineatur sub rationali AC
XCIV. & apotoma quinta AD: recta linea spatium
AB

AB potens est quae cum rationali medium totum efficit.

Sit enim DG congruens ipsi AD; & erunt
 * AG, GD $\rho \epsilon$, eritque GD $\leq$ AC, sed AG $\neq$ AC, 5. def.
 non $\leq$ AC, & $\sqrt{(AGq - GDq)}$ non $\leq$ AG. tert.
 Constructis iisdem, quae antea, eodem modo ostendetur, DK vel EK esse ρ , AK vero medium, & AI non $\leq$ FK. Quare erit
 LP $\in$ PN, & LPq + PNq medium, 2 LP
 $\times$ PN vero ρ ; & ob id LN id est $\sqrt{AB}$,
 quae ν cum rationali medium totum efficit. 78. 10.
 Q. E. D.

PROP. XCVII. THEOR.

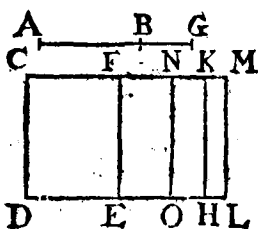
*Si spatium AB contineatur sub rationali Fig. prop.
 AC & apotoma sexta AD: recta linea spa- XCIV.
 tium AB potens est, quae cum medio medium
 totum efficit.*

Sit iterum ipsi AD congruens DG: &
 erunt ν AG, GD $\rho \epsilon$, & $\sqrt{(AG - GDq)}$ 6. def.
 non $\leq$ AG, & nec AG nec GD $\leq$ AC. tert.
 Constructis iisdem, quae antea, similiter
 demonstrabimus tam LPq + PNq, quam 2
 LP $\times$ PN esse medium & LP $\in$ PN.
 Sed praeterea, quia AG non $\leq$ EG, & ergo
 AK $\neq$ EK: erit LPq + PNq non
 $\leq$ 2 LP $\times$ PN. Ergo LN id est $\sqrt{AB}$ 10. 10.
 est ea, quae cum medio medium totum efficit.
 Q. E. D.

79. 10.

PROP.

PROP. XCVIII. THEOR.



Quadratum apotomae AB ad rationalem CD applicatum latitudinem CF facit apotomen primam.

Sit enim BG ipsi AB congruens. Ergo AG, GB sunt ψ ρ ϵ . Fiat

ψ . 74. 10.

Rgl. $CH = AGq$, & Rgl. $KL = BGq$. Ergo, quia $CE = ABq$, erit $FL = 2 AG \times GB$. Bifeca FM in N, & duc NO parallelam ad CD; ac erit $FO = NL = AG \times GB$.

α . 7. 2.

α . sch. 12. 10.

& 16. 10.

β . 21. 10.

γ . sch. 22.

10.

δ . 23. 10.

ϵ . cor. 27. 10.

ζ . 10. 10.

η . lem. 55.

10.

2. 18. 10.

Iam quia $DM = AGq + GBq$ est ρ α , erit $CM \rho$ β Σ CD. Et quia $FL = 2 AG \times GB$ medium γ est, erit $FM \rho$ non Σ CD δ . Porro quia $AGq + GBq$ non Σ $2 AG \times GB$, ideoque CL non Σ FL : erit FM non Σ CM , & proinde FM , CM erunt ρ ϵ , ac CF apotome ψ erit. Praeterea quum sit $\div$ CH , NL , KL , ideoque $\div$ CK , NM , KM : erit $CK \times KM = NMq = \frac{1}{4} FMq$. Sed quia $CH \Sigma KL$, est & $CK \Sigma KM$ ζ . Quare $\sqrt{(CMq - MFq)} \Sigma CM$ η . Ergo CF est apotome prima. Q.E.D.

PROP. XCIX. THEOR.

Fig. prop.

XCVIII.

Quadratum mediae apotomae primae AB ad rationalem CD applicatum latitudinem facit CF apotomen secundam.

α . 75. 10.

Sit iterum BG congruens ipsi AB: & erunt AG, GB mediae ϵ , & $AG \times GB \rho$. Ergo factis

factis, quae in propof. praec. erunt CH, KL, CL media, fed NL, FL ρ ; ideoque CM erit ρ non $\leq$ CD*, FM autem λ . 23. 10. $\rho \leq$ CD. Reliqua autem vt supra osten-^{λ. 21. 10.} dentur. Ergo CF est apotome fecunda.
Q. E. D.

PROP. C. THEOR.

Quadratum mediae secundae apotomae AB Fig. prop. ad rationalem CD applicatum latitudinem CF XCVIII. facit apotomen tertiam.

Factis iisdem, quae antea: quoniam $\mu\mu$. 76. 10. AG, GB mediae $\in$ sunt, & AG $\times$ GB medium est, erunt CL & FL media, ideoque erit tam CM, quam FM ρ non $\leq$ CD, & erunt CM, FM $\rho \in$. Ostenfis ergo reliquis, quae in praecedentibus, patebit, CF esse apotomen tertiam. Q. E. D.

PROP. CI. THEOR.

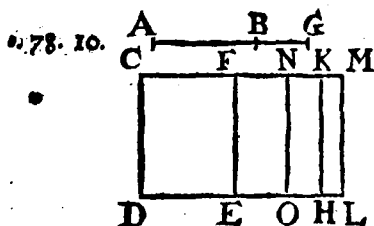
Quadratum minoris AB ad rationalem CD Fig. prop. applicatum latitudinem CF facit apotomen XCVIII. quartam.

Iisdem constructis: quia ν AG $\in$ GB, ν . 77. 10. & AGq + GBq ρ , & AG $\times$ GB medium, eodem modo, quo in prop. 98. patet, esse CM $\leq$ CD, & CF apotomen, & CK $\times$ KM = $\frac{1}{2}$ EMq, fed, ob AG $\in$ GB, CK non $\leq$ KM, ideoque $\frac{1}{2} \sqrt{(CMq - MFq)}$ non $\leq$ CM. Ergo CF est apotome quarta. ξ . 19. 10.
Q. E. D.

PROP. CII. THEOR.

Quadratum eius AB, quae cum rationali medium totum efficit, ad rationalem CD applicatum

plicatum latitudinem CF facit apotomen quintam.



quintam. Q. E. D.

PROP. CIII. THEOR.

Fig. prop. CII. *Quadratum eius AB, quae cum medio medium totum efficit, ad rationalem CD applicatum latitudinem CF facit apotomen sextam.*

- *. 79. 10. Constructis enim iisdem; quia * $AG \propto GB$, & $AGq + GBq$, $AG \times GB$ media, & $AG \times GB$ non $\leq AGq + GBq$: patet, vt antea,
- *. 23. 10. CM, FM esse p non $\leq CD$, atque, reliquis similiter vt antea ostensis, CF esse apotomen sextam. Q. E. D.

PROP. CIV. THEOR.

Recta linea AE, apotomae CF longitudine commensurabilis, & ipsa apotome est, atque ordine eadem.

- *. 74. 10.
-
- Sit enim ipsi CF congruens FD : ergo $CD, DF \in$.
 Fiat $EB:FD = AE:CF$.
 Erit ergo $AB:CD = EB:FD = AE:CF$; & proinde $AB \leq CD$, & EB
- *. 12. 5.
 u. 10. 10.

EB $\propto$ FD. Quare AB, BE erunt ρ ϕ , & quia ϕ . sch. 12.
 CD $\in$ DF, erunt AB, BE ρ $\in$ $\propto$, ideoque 10.
 AE apotome erit ϵ . Secundo quia AB : $\propto$ 1. sch.
 CD = EB : FD, & permutando AB : EB = 10. 10.
 CD : FD : si $\sqrt{(CDq - CFq)} \leq$ vel non $\leq$
 CD, erit ψ & $\sqrt{(ABq - BEq)} \leq$ vel non ψ . 15. 10.
 $\propto$ AB. Et si CD $\leq$ vel non $\leq$ expositae ra-
 tionali, erit ϵ & AB $\leq$ vel non $\leq$ eidem; nec 12. 14. 10.
 non, si DF $\leq$ vel non $\leq$ ρ expositae, erit ϵ
 BE $\leq$ vel non $\leq$ eidem. Ergo cuius ordinis
 apotome est CF, eiusdem est ϵ quoque apo- ϵ . def. tert.
 tome AE. Q. E. D.

PROP. CV. THEOR.

*Recta linea' AE, mediae apotomae CF com-Fig. prop.
 mensurabilis, & ipsa mediae apotome est, atque CIV.
 ordine eadem.*

Factis iisdem, quae in praecedente, quia β 75. 76. 10.
 CD, DF sunt mediae $\in$, similiter demonstra-
 bitur, AB $\leq$ CD, & AB, BE esse medias (γ . γ . 24. 10. &
 Ergo AE est mediae β apotome. Deinde 1. sch. 10.
 quia CDq : CD $\times$ DF = β CD : DF = AB : 10.
 BE = β ABq : AB $\times$ BE, & ergo permu- δ . 1. 6.
 tando CDq : ABq = CD $\times$ DF : AB $\times$ BE :
 erit β CD $\times$ DF $\leq$ AB $\times$ BE. Quare si ϵ . 10. 10.
 CD $\times$ DF est ρ vel medium, erit ϵ & AB $\times$
 BE ρ vel medium. Hinc patet β , esse AE ϵ . sch. 12.
 mediae apotomen eiusdem ordinis, cuius est 10. cor.
 CF. Q. E. D. 24. 10.

PROP. CVI. THEOR.

*Recta linea AE, minori CF commensurabilis,
 & ipsa minor est.*

Fiant

- *.77. 10. A E B Fiant eadem, quae prius :
 9. 2. sch. ————|——— & quia CD, DF $\propto$ ⁹, erunt
 10. 10. ————|——— & ⁹ AB, BE $\propto$. Et quo-
 C F D niam CD : DF = AB : BE,
 *ideoque CDq : DFq = ABq : BEq. & compo-
 nendo ac permutando CDq + DFq : ABq +
 *.22. 6. BEq = DFq : BEq; DF autem $\propto$ BE: erit
 CDq + DFq $\propto$ ABq + BEq. Quare, quum
 *.sch. 12. CDq + DFq sit ρ ⁹, erit & ABq + BEq ρ ⁹.
 10. Denique quia vt in praec. patet esse CD $\times$
 DF $\propto$ AB $\times$ BE, & CD $\times$ DF medium ⁹ est:
 a.cor. 24. est & AB $\times$ BE medium ⁹. Ergo AE minor ⁹
 10. est. Q. E. D.

Aliter.

Sit minori A $\propto$ B. Di-
 co, B minorem esse.

Ad expositam ratio-
 nalem CD applicetur Rgl.
 CE = Aq. Erit itaque ⁹
 CF apotome quarta. Fiat

Rgl. FH = Bq. Igitur, quia A $\propto$ B, erit CE

- v.cor. 9. 10. $\propto$ FH, & CF $\propto$ FG. Hinc FG erit ⁹
 §. 10. 10. apotome quarta, & $\sqrt{FH} = B$ erit ⁹ minor.
 §. 104. 10. Q. E. D.

*.95. 10.

PROP. CVII. THEOR.

A E B

—————|———

—————|———

C F D

Recta linea AE commensurabilis ei CF, quae cum rationali medium totum efficit, & ipsa cum rationali medium totum efficiens est.

Constructis iisdem, quae antea, similiter demonstrabitur AB : BE = CD : DF, & ABq + BEq

BEq $\leq$ CDq + DFq, & AB $\times$ BE $\leq$ CD $\times$ DF. Iam ϵ CDq + DFq est medium, & CD ϵ . 78. 10.
 $\times$ DF ρ , & CD $\in$ DF. Ergo AB $\in$ BE, ϵ . 2. sch. 10.
 & ABq + BEq est τ medium, & AB $\times$ BE ρ ϵ . 10.
 ideoque AE est cum rationali medium totum τ . sch. 24.
 efficiens ϵ . Q. E. D. 10.
 ν . sch. 12. 10.

Aliter.

Factis iisdem, quae in demonstratione altera praecedentis, erit CF apotome^o quinta, ϕ . 102. 10.
 ideoque $\propto$ & FG. Hinc, ob FE ρ , erit $\sqrt{x}$. 104. 10.
 FH = B cum rationali medium totum efficiens ψ . Q. E. D. ψ . 96. 10.

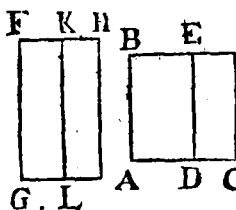
PROP. CVIII. THEOR.

Recta linea AE, commensurabilis ei CF, quae Fig. prop. cum media medium totum efficit, & ipsa cum medio medium totum efficiens est. CVII.

Constructis iisdem quae supra, erit iterum AB: EB = CD: DF, & ABq + BEq $\leq$ CDq + DFq, & AB $\times$ BE $\leq$ CD $\times$ DF. Iam α . 79. 10.
 CD $\in$ DF, & CDq + DFq medium, & CD $\times$ DF medium, & CD $\times$ DF non $\leq$ CDq + DFq. Ergo AB $\in$ BE α , & tam α . 2. sch. 10.
 ABq + BEq quam AB $\times$ BE medium β , 10.
 & ABq + BEq non $\leq$ AB $\times$ BE, ideo β . sch. 24.
 que AE est α cum medio medium totum γ . 14. 10.
 efficiens. Q. E. D.

PROP. CIX. THEOR.

Medio BD de rationali BC detractio, recta linea, quae reliquum spatium EC potest, una ex duabus irrationalibus fit, vel apotome, vel minor.



2. 21. IO.
1. 23. IO.
3. 74. IO.

1. 92. IO.

3. 95. IO.

Exposita enim p FG, fiat Rgl. $GH = BC$, & Rgl. $GK = BD$. Ergo $LH = EC$, & $GH p$, & GK medium. Quare δ erit $FH p \leq FG$, & $FK p$ non $\leq FG$, ideoque $FH, FK p \in$, ac ob id KH apotome ζ , & ipsi congruens FK . Iam si sit $\sqrt{(FHq - FKq)} \leq FH$, erit KH apotome prima, & $\sqrt{HL} = \sqrt{EC}$ apotome. Si non sit $\sqrt{(FHq - FKq)} \leq FH$, erit KH apotome quarta, ideoque $\sqrt{EC}$ minor. Q.E.D.

PROP. CX. THEOR.

Fig. prop.
praec.

Rationali BD de medio BC detracto, aliae duae irrationales fiunt, vel mediae apotome prima, vel cum rationali medium totum efficiens.

1. 93. IO.

1. 96. IO.

Constructis iisdem, quae prius, erit $FH p$ non $\leq FG$, & $FK p \leq FG$. Erunt ergo iterum $FH, FK p \in$, & KH apotome erit, ipsique congruens FK . Iam si fuerit $\sqrt{(FHq - FKq)} \leq FH$: erit KH apotome secunda, & $\sqrt{LH}$ id est $\sqrt{EC}$ mediae apotome prima. Si fuerit $\sqrt{(FHq - FKq)} \leq FH$: erit KH apotome quinta, & ergo $\sqrt{EC}$ erit $\ast$ cum rationali medium totum efficiens. Q.E.D.

PROP. CXI. THEOR.

Fig. prop.
CIX.

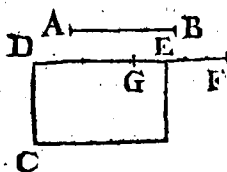
Medio BD de medio BC detracto, quod sit incommensurabile toti, reliquae duae irrationales fiunt, vel mediae apotome secunda, vel cum medio medium totum efficiens.

Quia

Quia enim GH non $\leq FL$, erit FH non $\leq FK$. Quare FH , FK erunt $p \in$, & ergo erit FH apotome, & ipsi congruens KF . Nunc si $\sqrt{(FHq - FKq)} \leq FH$: quia FH , FK non $\leq FG$, erit KH apotome tertia, & hinc $\sqrt{LH}$ id est $\sqrt{EC}$ media apotome secunda. Si $\sqrt{(FHq - FKq)} \text{ non } \leq FH$: erit KH apotome sexta, ideoque $\sqrt{EC}$ cum medio medium totum efficiens. Q. E. D.

PROP. CXII. THEOR.

Apotome AB non est eadem quae ex binis nominibus.



Si negas: exponatur p CD , & fiat $Rgl. CE = ABq.$ Ergo DE erit apotome prima. Sit ipsi congruens EF . Ergo DF , FE $p \in$, & $DF \leq CD$. Sed

quia AB etiam ponitur ex binis nominibus: tert. erit DE ex binis nominibus prima. Sit eius maius nomen DG . Ergo DG , GE $p \in$, & $DG \leq CD$. Hinc erit $DF \leq DG$, & ergo $FG \leq DF$, & FG p . Verum quia DF non $\leq FE$, erit FG non $\leq FE$, & hinc erunt FG , FE $p \in$, ac GE apotome $\propto$ erit. Sed est quoque GE p . Q. E. A.

Corollarium.

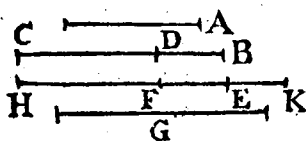
Apotome, & quae ipsam consequuntur, (prop. 75. 76. 77. 78. 79.) irrationales, neque mediae neque inter se eadem sunt. Quadratum enim, quod a media fit, ad rationalem applicatum, latitudinem facit rationalem. Quod autem ab apotoma fit, ad

rationalem applicatum, latitudinem facit apotomen primam; quod fit a mediae apotome prima, apotomen secundam; & sic deinceps (prop. 100. 101. 102. 103.). Quoniam igitur dictae latitudines differunt tum a prima tum inter sese; a prima quidem, quod illa rationalis sit, inter se vero, quod ordine non sint eadem: manifestum est, & ipsas hasce irrationales inter se differentes esse.

Et quoniam ostensum est, apotomen non esse eandem, quae ex binis nominibus; & quadrata quidem apotomae & earum, quae sequuntur apotomen, ad rationalem applicata, latitudines facere apotomas; quadrata vero eius, quae ex binis nominibus est, & hanc sequentium, ad rationalem applicata facere latitudines, quae ex binis nominibus (prop. 61. 62 — 66.): ergo rectae lineae, quae sequuntur apotomen, & quae sequuntur eam quae ex binis nominibus est, inter se diversae erunt, ita ut omnes irrationales sint numero tredecim.

1. Media. 2. Quae ex binis nominibus. 3. Quae ex binis mediis prima. 4. Quae ex binis mediis secunda. 5. Maior. 6. Rationale ac medium potens. 7. Bina media potens. 8. Apotome. 9. Mediae apotome prima. 10. Mediae apotome secunda. 11. Minor. 12. Cum rationali medium totum efficiens. 13. Cum medio medium totum efficiens.

PROP. CXIII. THEOR.



Quadratum rationalis A, ad eam quae ex binis nominibus BC applicatum, latitudinem

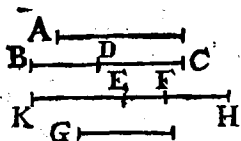
EF facit apotomen, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus CD, DB eius, quae est ex binis nominibus, & in eadem ratione; & adhuc apotome EF, quae fit, eundem habet ordinem,

ordinem, quem ea BC quae est ex binis nominibus.

Sit enim etiam $BD \times G = Aq$. Ergo $\psi \downarrow$. 16. 6.
 $BC : DB = G : EF$, ideoque $G > EF$. Fiat
 $EH = G$. Quare $CB : BD = HE : EF$, & di-
 uidendo $CD : DB = HF : FE$. Fiat $HF : FE$
 $= FK : KE$. Est ergo $HK : KF = FK : KE$, 12. 5.
 $= HF : FE = CD : DB$. Iam quia CDq
 $\sum^* DBq$, est & $HKq \sum KFq$. Et quo- 37. 10.
 niam $HKq : KFq = HK : KE$, erit $HK \sum KE$, 2. cor. 20.
 ideoque & $HE \sum EK$. Et quia $BD \times HE$ 6.
 $= Aq$ est p , nec non $BD p^*$: erit & $HE p^{2\gamma}$. 16. 16.
 $\sum BD$, & ob id & $EK p \sum BD$ ac $FK \sum CD$. 21. 10.
 Deinde quia $CD^* \in DB$, erit & $FK \in KE$, & 10. 10.
 ergo FK, KE erunt $p \in$, & FE erit apoto- 2. 1. sch. 10.
 me. Sed CD maius est nomen ipsius CB . 74. 10. 2.
 Iam si $\sqrt{(CDq - DBq)} \sum$ vel non $\sum CD$, erit
 & $\sqrt{(FKq - KEq)} \sum$ vel non $\sum FK^2$; & si 9. 15. 10.
 CD fuerit $\sum$ vel non $\sum p$ expositae, erit & 12. 14. 10.
 $FK \sum$ vel non $\sum$ eidem; atque si $DB \sum$ vel
 non $\sum$ eidem p , erit & $EK \sum$ vel non $\sum$ eidem.
 Ergo FE apotome erit, cuius nomina FK, KE
 commensurabilia sunt nominibus CD, DB
 eius &c. • Q. E. D.

PROP. CXIV. THEOR.

Quadratum rationalis A, ad apotomen BD applicatum, latitudinem KH facit eam, quae ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt apotomae BD nominibus BC, CD & in eadem ratione; & adhuc quae ex binis nominibus fit KH eandem habet ordinem, quem ipsa BD apotome.



x. 74. 10.

Nam quia DC congruens est ipsi BD, erunt * BC, CD ρ E. Fiat $BC \times G = Aq$: & erit $BC \times G \rho$,

λ. 21. 10.

ac ideo $G \rho \lambda BC$, ac praeterea CB: BD

μ. 16. 6.

= KH: G, ideoque $KH > G$. Ponatur

ν. 14. 5.

$KE = G$: ergo $KE \rho \leq BC$, & CB: BD = HK: KE, & conuertendo igitur BC:

ξ. 10. 6.

CD = KH: HE. Fiat KH: HE = HF:

ο. 19. 5.

FE. Igitur KF: FH = KH: HE =

π. 1. sch. 10.

HF: FE = BC: CD. Hinc $KF \in \tau FH$, &

10.

ρ. 2. cor.

$KFq: FHq = \tau KF: FE$, & ergo $KF \leq \tau FE$,

20. 6.

hinc & $KE \leq \tau KF$, & $KF \rho \leq BC$, &

σ. 10. 10.

proinde etiam $FH \rho \leq CD$. Quum er-

τ. cor. 16.

go sint KF, FH $\rho \in$: erit KH $\approx$ ex binis

10.

ν. 12. 10. &

nominibus, quae erunt $\leq$ ipsius BD nomi-

sch. eiusd.

bus BC, CD, & in eadem ratione. Denique

φ. sch. 12.

patet, si $\sqrt{(BCq - CDq)} \leq$ vel non $\leq$

10. & 10.

BC, esse & $\psi \sqrt{(KFq - FHq)} \leq$ vel

10.

non $\leq$ KF, & si BC, CD fuerint $\leq$ vel non

χ. 37. 10.

$\leq$ expositae ρ , fore & KF, FH $\leq$ vel non

ψ. 15. 10.

$\leq$ eidem ρ ; & ergo * KH esse ex binis no-

ω. def. sec

minibus eiusdem ordinis, cuius est apotome

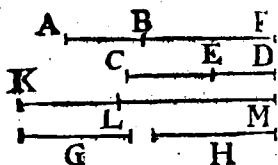
& tert.

BD. Q. E. D.

PROP. CXV. THEOR.

Si spatium contineatur sub apotoma AB & ea CD quae ex binis nominibus, cuius nomina CE, ED commensurabilia sunt nominibus AF, FB apotomae AB, & in eadem ratione: recta linea G spatium potens est rationalis.

Exponatur



Exponatur ρ H,
 & fiat $CD \times KL$
 $= Hq$. Apoto-
 me ergo est KL , α . 113. 10.
 cuius nomina KM,
 $ML \leq CE, ED$ &

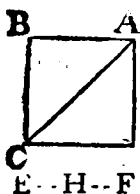
in eadem ratione. Est ergo $AF : FB = \beta\beta$. 11. 5.
 $KM : ML$, & permutando $AF : KM =$
 $FB : ML$. & ergo γ $AB : KL = AF : KM$. γ . 19. 5.
 Et quia δ $CE, ED \leq$ ipsis AF, FB , ideoque δ . hyp.
 & $AF \leq KM$: erit $AB \leq KL$. Hinc ϵ . 12. 10.
 quia $AB : KL = AB \times CD : KL \times CD$ ζ . 10. 10.
 $= Gq : Hq$: erit ζ $Gq \leq Hq$, & ob id η $G \rho$. η . sch. 12.
 Q. E. D. 10.

PROP. CXVI. THEOR.

A media A infinitae irrationales fiunt; & nulla alicui antecedentium est eadem.

A ————— Exponatur ρ B, & fit Cq
 B ————— $= A \times B$. Erit ergo θ ρ . sch. 21.
 C ————— Cq $\alpha\lambda$, & ipsa C $\alpha\lambda$, neque 10.
 D ————— vlli hactenus commemora-
 tarum eadem. Nullius enim antecedentium
 quadratum ad ρ applicatum latitudinem facit
 mediam. Rursus fit $Dq = B \times C$: & erit
 iterum θ $D \alpha\lambda$, nulli tamen antecedentium
 eadem; quia nullius earundem quadratum ad
 ρ applicatum talem facit latitudinem, qua
 lis est C. Similiter & eodem ordine in infi-
 nitum protracto manifestum est, a media in-
 finitas irrationales fieri, nulli antecedentium
 easdem. Q. E. D. ϵ . per dem.

PROP. CXVII. THEOR.



Propositum fit nobis ostendere, in quadratis figuris diametrum AC lateri AB incommensurabilem esse longitudine.

- Si negas: sit $AC \lesssim AB$. Ergo habebit AC ad AB rationem numeri π ad numerum. Habeat quam EF ad G; & sint EF, G minimi in data ratione. Non ergo vnitas erit EF: quia, quum $AC > AB$, foret vnitas μ maior quam numerus, si EF vnitas esset. Quare EF numerus sit necesse est. Et quia AC q: AB q' = EF²: G², & AC q = $\frac{1}{2}$ AB q: erit EF² = 2 G², & ergo EF² est par, & EF par^r.
 ¶ I. cor. 20. AB q' = EF²: G², & AC q = $\frac{1}{2}$ AB q: erit
 6. & 11. 8. EF² = 2 G², & ergo EF² est par, & EF par^r.
 §. 47. I. Iam quia EF, G minimi sunt in data ratione, &
 ¶ 6. def 7. ergo inter se primi; EF autem par est: nequit
 ¶ 2. sch. 29. 9. G par esse; si enim ita, vtrumque EF, G idem
 numerus 2 metiretur. Ergo G erit impar. Verum ipsius EF paris dimidium sit EH: & erit
 §. 11. 8. EF² = 4 EH² = 2 G², ideoque G² = 2
 ¶ 7. ax. I. EH². & G par. Erat autem idem G & impar.
 Q. E. A.

Aliter.

- Si dicas $AC \lesssim AB$: sint rursus EF, G numeri minimi in ratione AC:AB; & erunt ergo EF, G primi inter se^r. Iam nequit G esse vnitas. Nam quia AC q: AB q' = EF²: G²; & AC q = $\frac{1}{2}$ AB q: si G esset vnitas, foret EF² = 2, quod fieri nequit. Sed quia G est numerus, & EF² = 2 G²: G numerus^v metietur numerum EF, & ideo EF ac G non erunt primi inter se. Erant autem & primi inter se. Q. E. A.



E V C L I D I S

ELEMENTORVM

LIBER XI.

DEFINITIONES.

1. *Solidum* est, quod longitudinem & latitudinem & crassitudinem habet.

2. *Solidi* autem *terminus* est superficies.

3. *Recta linea ad planum rectum* est, quando ad rectas omnes lineas, quae ipsam contingunt & in subiecto plano iacent, rectos angulos efficiat.

4. *Planum ad planum rectum* est, quando rectae lineae, quae communi planorum sectioni ad rectos angulos & in vno plano ducuntur, alteri plano ad angulos rectos fuerint.

5. *Rectae lineae ad planum inclinatio* est, quando a sublimi termino rectae illius lineae ad planum acta perpendiculari, a puncto facto ad terminum lineae, qui est in plano, recta linea iuncta fuerit, angulus nempe acutus, qui iuncta linea & insistente continetur.

6. *Plani ad planum inclinatio* est angulus acutus rectis lineis contentus, quae ad rectos angulos communi planorum sectioni ad vnum ipsius punctum in utroque planorum ducuntur.

7. *Planum ad planum similiter inclinari* dicitur atque alterum ad alterum, quando dicti

inclinationem anguli inter se fuerint aequales.

8. *Plana parallela sunt, quae inter se non conueniunt.*

9. *Similes figurae solidae sunt, quae similibus planis ac multitudine aequalibus continentur.*

10. *Aequales vero & similes figurae solidae sunt, quae similibus planis, multitudine simul & magnitudine aequalibus, continentur.*

11. *Solidus angulus est plurium, quam duarum linearum, quae sese contingant, & non in eadem sint superficie, ad omnes lineas inclinatio. Aliter. Solidus angulus est, qui pluribus, quam duobus, planis angulis, in eodem non iacentibus plano, atque ad vnum punctum constitutis, comprehenditur.*

12. *Pyramis est figura solida planis comprehensa, quae ab vno plano ad vnum punctum constituitur.*

13. *Prisma est figura solida planis comprehensa, quorum aduersa duo aequalia & similia parallela sunt, reliqua vero parallelogramma.*

14. *Sphaera est figura quidem comprehensa, quum circa manentem diametrum semicirculus conuertitur, donec in eundem locum, a quo moueri coeperat, rursus restituitur.*

15. *Axis vero sphaerae est manens illa recta linea, circa quam semicirculus conuertitur.*

16. *Cen-*

16. *Centrum* autem *sphaerae* est idem illud, quod & semicirculi.

17. *Diameter* vero *sphaerae* est recta linea quaedam per centrum ducta, & ex vtraque parte a *sphaerae* superficie terminata.

18. *Conus* est figura quidem comprehensa, quum rectanguli trianguli manente vno latere eorum, quae circa rectum angulum sunt, triangulum ipsum conuertitur, donec in eundem locum, a quo moueri coeperat, rursus restituatur. Verum si manens recta linea aequalis fuerit reliquo lateri, quod circa rectum angulum conuertitur, *conus orthogonius* erit: si vero minor, *amblygonius*: & si maior, *oxygonius*,

19. *Axis* autem *coni* est manens illa recta linea, circa quam triangulum conuertitur.

20. *Basis* vero circulus a conuersa recta linea descriptus.

21. *Cylindrus* est figura comprehensa, quando rectanguli parallelogrammi manente vno latere eorum, quae circa rectum angulum sunt, parallelogrammum ipsum conuertitur, donec in eundem locum, a quo moueri coeperat, rursus restituatur.

22. *Axis* vero *cylindri* est manens illa recta linea, circa quam parallelogrammum conuertitur.

23. *Bases* autem sunt circuli, qui a duobus ex aduerso circumactis lateribus describuntur.

24. *Similes*

24. *Similes coni & cylindri sunt, quorum & axes & basium diametri proportionales sunt.*

25. *Cubus est figura solida, sex quadratis aequalibus contenta.*

26. *Tetraedrum est figura solida, quatuor triangulis aequalibus & aequilateris comprehensa.*

27. *Octaedrum est figura solida, octo triangulis aequalibus & aequilateris comprehensa.*

28. *Dodecaedrum est figura solida, quae duodecim pentagonis aequalibus & aequilateris & aequiangulis continetur.*

29. *Icosaedrum est figura solida, quae viginti triangulis aequalibus & aequilateris comprehenditur.*

* 30. *Parallelepipedum est figura solida, sex planis, quorum quae ex aduerso parallela sunt, contenta.*

* 31. *Solida figura in solida figura dicitur inscribi, quando omnes anguli figurae inscriptae constituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis figurae, cui inscribitur.*

* 32. *Solida figura solidae figurae vicissim circumscribi dicitur, quando vel anguli, vel latera vel denique plana figurae circumscriptae tangunt omnes angulos figurae, circum quam describitur.*

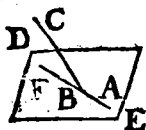
* A X I O M A.

Anguli solidi, qui sub aequae multis aequalibus ac eodem ordine positis angulis planis continentur, aequales sunt.

PROP.

PROP. I. THEOR.

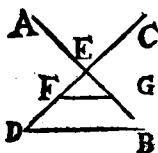
Rectae lineae ABC pars quaedam non est in subiecto plano DE, quaedam vero in sublimi.



Si enim fieri potest, sit pars AB in plano DE, pars BC autem extra. Iam, quia omnis recta in dato plano in directum continuari potest ^a, sit BF in ^a. 2. post. 1.

directum ipsi AB, in plano DE. Ergo rectae ABF, ABC segmentum commune BA ^β. 12. ax. 1. habebunt. Q. E. A ^β.

PROP. II. THEOR.



Si duae rectae lineae AB, CD se inuicem secant. in vno sunt plano. Item, omne triangulum DEB in vno plano consistit

1. Si $\triangle DEB$ non sit in vno plano: erit pars eius, velut EFG, in alio plano, quam reliqua; ideoque rectarum ED, EB vniuscuiusvis pars erit in plano subiecto, pars in sublimi. Q. E. A ^γ.

γ. 1. II.

2. Ergo quum ED, EB sint in eodem plano, CD autem sit ^γ in plano, in quo est ED, & AB in plano ^γ illo, in quo est EB: necesse est, ut AB, CD sint in eodem plano. Q. E. D:

PROP. III. THEOR.

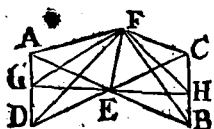


Si duo plana AB, BC se inuicem secant: communis ipsorum sectio DB est linea recta.

Si enim linea DB, in qua plana se inuicem secant, non sit recta: ducatur a puncto B ad D in

2.1. post. 1. in plano AB alia recta δ BED, in plano autem BC recta BFD; & recta BFD cum recta BED spatium comprehendet.
 12. 2x. 1. Q. E. A.

PROP. IV. THEOR.

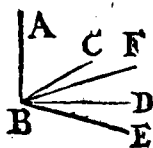


Si recta linea EF duabus rectis lineis AB, CD, se inuicem secantibus, in communi sectione E ad rectos angulos insistat, etiam ducto per ipsas AB, CD plano ad rectos angulos erit.

Sumatur $AE = EB = CE = ED$, & iungantur AD, CB, & per E ducatur in plano ACBD utcumque recta GEH, & a quouis puncto F in sublimi ducantur rectae FA, FG, FD, FB, FH, FC. Iam quia in Δ is AED, CEB est $\angle AD = CB$, & ang. EAD = EBC: erit in Δ is AEG, HEB. latus $AG = HB$, & $GE = EH$. Praeterea quum in Δ is AEF, BEF sit $\angle FA = FB$, & in Δ is FED, FEC pari ratione $\angle FD = FC$: erit in Δ is AFD, BFC ang. FAD = $\angle$ FBC. Hinc ob $AG = HB$, & $FA = FB$, erit $\angle FG = FH$; & ob id in Δ is GEF, HFE erunt $\angle$ anguli ad E aequales, id est recti. Similiter ostenditur EF ad omnes alias rectas in plano ACBD per E ductas angulos rectos efficere. Ergo FE plano per AB, CD ad rectos angulos est. Q. E. D.

PROP.

PROP. V. THEOR.

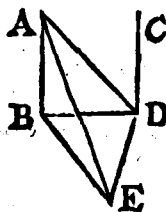


Si recta linea AB tribus rectis lineis, BC, BD, BE, sese tangentibus, in communi sectione B ad rectos angulos insistat: tres illae rectae lineae BC, BD,

BE in uno plano erunt.

Si fieri potest, sint BD, BE quidem in subiecto plano, BC vero in sublimi. Planum per AB, BC producat, donec subiectum secet in $\ast$ recta BF. Iam quia AB ipsis BD, BE ad $\ast$. 3. II. rectos insistit, erit eadem ad planum subiectum recta $\wedge$, ideoque ipsi BF, quae etiam in $\wedge$. 4. II. plano subiecto est, ad rectum $\ast$ angulum insistet. μ . 3. def. II. Sed ponitur quoque ang. ABC rectus. Ergo ang. ABF = ABC. Sed hi anguli sunt in eodem plano per AB, BC. Ergo totus ABF aequalis est parti ABC. Q. E. A.

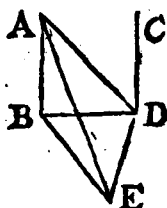
PROP. VI. THEOR.



Si duae rectae lineae AB, CD eidem plano ad rectos angulos fuerint, parallelae erunt ipsae rectae lineae AB, CD.

Insistant AB, CD subiecto plano in punctis B, D. Iunctae BD ducatur in eodem plano perpendicularis DE, quae fiat = AB, & iungantur BE, AE, AD. Et quia AB est ad planum subiectum recta: erunt ang. ABD, ABE recti $\prime$. Similiter ang. CDB, CDE recti erunt. $\ast$. 3. def. II. Quum itaque ang. ABD = $\angle$ BDE, & AB = $\angle$ DE, $\ast$. 10. ax. I.

o. 4. I.
π. 8. I.

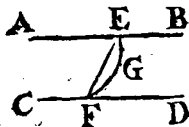


DE, & BD communis: erit
AD = BE. Ergo in $\triangle$ is
BAE, DAE erit ang. ABE =
EDA; ideoque ED A rectus
erit. Sunt autem & ang. EDC,
EDB recti. Ergo rectae CD,
DA, DB erunt in vno plano.

ρ. 5. II.
σ. 2. II.
τ. 28. I.

Sed AB est in eodem plano, in quo sunt
DA, DB. Ergo AB, CD sunt in eodem
plano. Quare, quum ang. ABD, CDB
recti sint, ipsae AB, CD parallelae sunt.
Q. E. D.

PROP. VII. THEOR.



Si duae rectae lineae
AB, CD parallelae sint;
sumantur autem in utra-
que ipsarum quaelibet pun-
cta E, F: quae dicta pun-

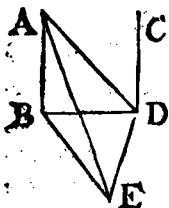
cta coniungit recta linea in eodem cum paral-
lelis plano erit.

Si fieri potest, sit recta EGF in sublimi.
Ducatur per eam planum vtcunque, quod
secabit planum subiectum in recta EF. Er-
go duae rectae EF, EGF spatium compre-
hendent. Q. E. A.

PROP. VIII. THEOR.

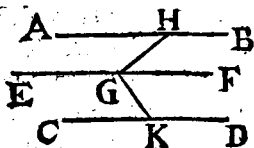
Si fuerint duae rectae lineae AB, CD par-
allelae, atque altera earum AB plano alicui sit
ad rectos angulos: Et reliqua CD quoque eidem
plano ad rectos angulos erit.

Instant AB, CD plano subiecto in punctis
B, D. Iungatur BD. Ergo AB, BD, DC
erunt



erunt ϕ in vno plano. Duca- ϕ . 7. II.
 tur in subiecto plano ipsi BD ad
 rectos DE, & fiat $\equiv$ AB, iun-
 ganturque AD, AE, EB. Quia
 AB recta est ad subiectum pla-
 num: erunt ang. ABD, ABE re-
 cti $\propto$. Sed ang. ABD + CDB $\downarrow \propto$. 3. def.
 $\equiv$ 2 rectis. Ergo CDB erit rectus. Et quia DE $\downarrow$ II.
 $\equiv$ AB, & BD communis, & ang. EDB $\equiv$ ABD: $\downarrow$ 29. I.
 erit BE $\equiv$ AD. Hinc in Δ is DAE, EAB $\propto$. 4. I.
 erit ang. EDA $\propto \equiv$ ABE $\equiv$ recto. Sed & $\propto$. 8. I.
 ang. EDB rectus est. Ergo β ED est ad pla- β . 4. II.
 num per BD, DA recta. Iam quia in plano
 per BD, DA sunt ipsae AB γ , BD: patet, CD γ . 2. II.
 in eodem plano esse. Itaque & ang. EDC
 rectus $\propto$ erit. Sed & ang. CDB rectus erat.
 Ergo β CD est ad planum subiectum recta.
 Q. E. D.

PROP. IX. THEOR.



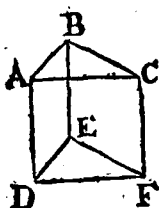
Quae AB, CD
 eidem rectae lineae
 EF sunt parallelae,
 sed non in eodem
 cum illa plano, etiam
 inter se parallelae sunt.

Sume in EF punctum G, ex quo ducad EF
 in plano per AB, EF perpendicularem GH,
 in plano autem per EF, CD perpendicularem
 GK. Quia ergo ang. EGH, EGK recti sunt:
 erit β EF ad planum per HG, GK recta. Ita- β . 4. II.
 que AB, CD ad idem planum rectae $\propto$ erunt, $\propto$. 8. II.
 ideoque β parallelae. Q. E. D. ζ . 6. II.

X

PROP.

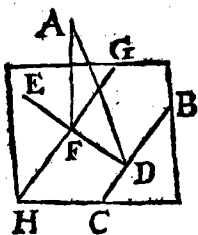
PROP. X. THEOR.



Si duae rectae lineae sese tangentes AB, BC duabus rectis lineis sese tangentibus DE, EF sint parallelae, non autem in eodem plano: illae aequales angulos ABC, DEF continebant.

- Sume $AB = DE$, & $BC = EF$, & iunge
 4. 33. 1. AD, BE, CF, AC, DF. Ergo erunt $\angle A D$,
 CF aequales & parallelae ipsi BE, & ideo
 9. 9. 11. AD, CF inter se aequales & parallelae^s erunt.
 8. 1. Quare & $AC = DF$, & ang. $ABC = DEF$.
 Q. E. D.

PROP. XI. PROBL.



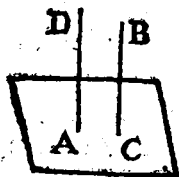
A dato puncto A in sublimi ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

- In subiecto plano duc
 vtcunque rectam BC, & ab
 A ad BC $\perp$ demitte per-
 pendicularem AD. Si
 AD ad planum subiectum perpendicularis est:
 factum iam erit propositum. Sin minus
 duc ex D in subiecto plano ad BC perpen-
 dicularem DE, ad quam in plano EDA ex A
 demitte perpendicularem AF. Haec erit
 desiderata.

- Nam in subiecto plano ducatur per F ipsi
 1. constr. BC parallela GH. Et quia $\angle BDA, BDE$
 4. 11. recti sunt, ideoque BC in planum EDA $\perp$ re-
 sta

Ita est: erit & GH ad idem planum ^{2. 8. 11.}
 recta, & ergo ang. GFA ^{3. def. 11.} rectus. Sed est
 etiam ang. DFA ¹ rectus. Ergo recta AF
 est ad planum subiectum ² perpendicularis.
 Q. E. F.

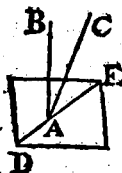
PROP. XII. PROBL.



*Dato plano, a puncto A,
 quod in ipso datum est, ad
 rectos angulos rectam lineam
 constituere.*

Intelligatur punctum B
 sublime, a quo ad datum
 planum agatur ¹ perpendicularis BC, & huic. ^{11. 11.}
 parallela ² AD ducatur, quae erit plano dato ^{3. 1. 1.}
 recta. Q. E. F. ^{2. 8. 11.}

PROP. XIII. THEOR.



*Dato plano a puncto A, quod
 in ipso est, duae rectae lineae AB,
 AC ad rectos angulos non consti-
 tuentur ab eadem parte.*

Si enim AB, AC simul essent
 perpendiculares plano A: ducto
 per BA, AC plano, quod planum A se-
 cet in recta DAE, forent ang. BAD &
 CAD ¹ recti, ideoque aequales; pars & to- ^{3. def.}
 tum. Q. E. A. ^{11.}

PROP. XIV. THEOR.

*Ad quae plana CD, EF eadem recta linea
 AB est perpendicularis, ea parallela sunt.*

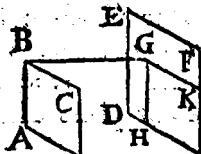


Si negas: pone illa produ-
cta se secare in recta GH , in
qua sumto puncto K , iunge
 KA , KB . Ergo KAB erit trian-
gulum. Et quia AB est in pla-
num; DH perpendicularis, in
quo ducta est AK : erit $\angle$ ang.

r.3.def.11.

ABK rectus. Similiter ang. ABK rectus
erit. Q. E. A^o.

PROP. XV. THEOR.



Si duae rectae lineae AB, BC sese tangentes duabus rectis lineis DE, EF sese tangentibus sint parallelae, non autem in eodem plano:

*Et quae per ipsas transeunt plana AC, DF
parallela erunt.*

Duc enim ex B in planum DF perpendicularem BG, & per G ipsi ED parallelam HG,

φ.3.def.11. ipsi EF vero parallelam GK. Recti ergo
erunt ang. BGH, BGK. Et quia AB, BC ipsis

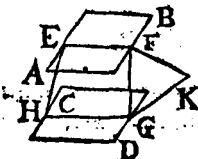
x. 9. II. GH, HK sunt $\propto$ parallelae: erunt & ang. GBA,

ψ. 29. I. 'GBC recti ψ. Ergo GB ad planum AC etiam

n. 4. II. recta erit, & hinc plana AC, DF erunt

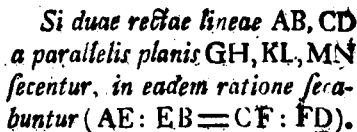
*. 14. 11. parallela *. Q. E. D.

PROP. XVI. THEOR.



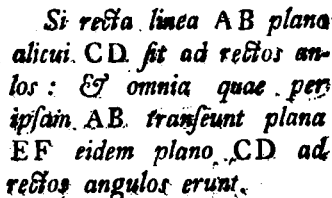
*Si duo plana parallela AB.
CD ab aliquo plano EFGH
secentur: communes ipsorum
sectiones EE, GH sunt etiam
parallelae.*

PROP. XVII. THEOR.



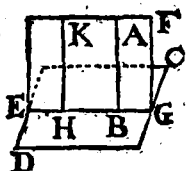
Iungantur AC, BD, AD.
Occurrat autem AD plano KL
in O, & iungantur OE, OF,
Ergo quia plana parallela KL,
MN a plano EODB secantur: erunt^s EO, BD ¶. 16. II.
parallelae. Eadem ratione OF, AC parallelae
erunt. Ergo AE : EB = AO : OD = CF : FD. Q.E.D.

PROP. XVIII, THEOR.



Sit planorum CD, EF communis sectio re-
cta EBG, & ex eius puncto quouis H in plano
EF ducatur ipsi GE perpendicularis HK. Iam
quia & ang. ABH rectus est; erunt * AB, 2.3.def.11.

9. 8. II.

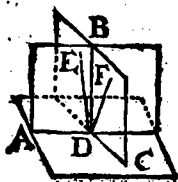


KH parallelae; & hinc KH erit $\perp$ ad planum CD recta. Sed & item & de reliquis ostendetur, quae ut KH in plano EF ad ipsam EG perpendiculares duci

4. def.
II.

possunt. Ergo planum EF plano CD rectum erit. Similiter demonstrabimus, quod-
vis aliud planum per AB ductum plano CD
rectum fore. Q. E. D.

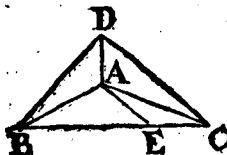
PROP. XIX. THEOR.



Si duo plana se invicem se-
cantia AB, BC plano alicui
AC, sint ad rectos angulos:
communis ipsorum sectio BD
eidem plano AC ad rectos
angulos erit.

Si negas: duc ex in D plano quidem AB ad AD perpendicularem DE, in plano autem BC perpendicularem DF ad DC. Sunt autem AD, DC communes sectiones planorum AB, BC cum plano AC. Ergo duae rectae ED, FD ad angulos rectos* constitutae erunt plano AC ab vno puncto D & ab vna parte.

PROP. XX. THEOR.



Si solidus angulus A
sub tribus angulis pla-
nis BAC, CAD, BAD
contineatur: duo quili-
bet CAD, BAD reli-
quo BAC maiores sunt, quomodocunque sumti.
Cas. I.

Caf. I.

Cas. 1. Si ang. BAC, CAD, BAD aequales sunt: euidens est propositio.

Cas. 2. Sed si non sint aequales: fit eorum maximus BAC. In planq per BA, AC fiat ang. BAD = BAE, & capiatur AE = AD, & per E ducatur recta secans ipsas AB, AC in B, C, & iungantur BD, DC. Erit ergo in Δ is BAD, BAE basis BD = BE. $\mu. 4. 1.$ Et quia BD + DC > BC, erit DC > EC. $\nu. 20. 1.$ & ergo in Δ is ADC, AEC ang. DAC > EAC. $\xi. 5. ax. 1.$ Quare DAC + BAD > BAC. $\eta. 25. 1.$ $\pi. 4. ax. 1.$ Q.E.D.

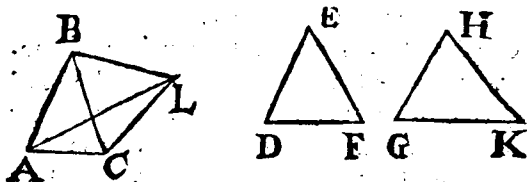
PROP. XXI. THEOR.



Omnis solidus angulus A sub minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur.

In rectis enim, angulos planos BAC, CAD, DAB continentibus, sumtis quibusvis punctis B, C, D, iungantur BC, CD, DB. Quia ergo solidus ang. B continetur sub 3 planis ang. ABC, ABD, DBC: erunt ang. ABC + ABD > DBC. $\rho. 29. 11.$ Eadem ratione in solido ang. C erunt BCA + ACD > BCD, & in solido ang. D erunt CDA + ADB > CDB. Ergo ABC + ABD + BCA + ACD + CDA + ADB > DBC + BCD + CDB id est > 2 rectis. $\sigma. 32. 1.$ Sunt autem ang. ABC + ABD + BCA + ACD + CDA + ADB + BAC + CAD + DAB = 6 rectis. Ergo ang. BAC + CAD + DAB < 4 rectis. Q.E.D. $\tau. 5. ax. 1.$

PROP. XXII. THEOR.



Si sint tres anguli plani ABC, E, H, quorum duo reliquo sunt maiores quomodocunque sumti; contineant autem ipsos rectae lineae aequales AB, BC, DE, EF, GH, HK, fieri potest, ut ex iis AC, DF, GK, quae rectas aequales coniungunt, triangulum constitutur.

v. 4. I.

Cas. 1. Si ang. $ABC = E = H$; erit $AC = DF = GK$, ideoque duae quaevis ipsarum tertia maiores erunt. ut ergo ex ipsis triangulum constitui queat. Q. E. D.

φ. 24. I.
x. 20. P.
ψ. 5. ax. I.

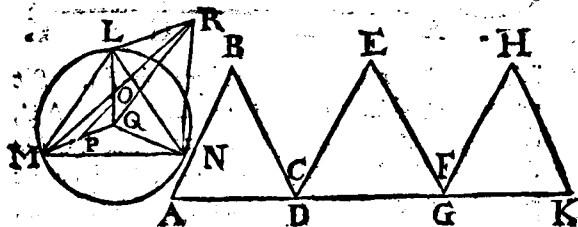
Cas. 2. Si praedicti anguli non fuerint aequales inter se: fiat ang. $CBL = E$, & $BL = AB$, & iungantur AL, LC . Est itaque $CL = DF$, & $CL + AC > AL$. Iam quia ang. $E + ABC > H$, & $E = CBL$, patet esse $\angle LBA > H$, ideoque $AL > GK$. Ergo $DF + AC > AL > GK$. Similiter ostenduntur $AC + GK > DF$, & $DF + GK > AC$. Quum itaque ipsarum AC, DF, GK duae quaevis tertia sint maiores: triangulum ex iisdem construipotest. Q. E. D.

v. 22. I.

PROP.

PROP. XXIII. PROBL.

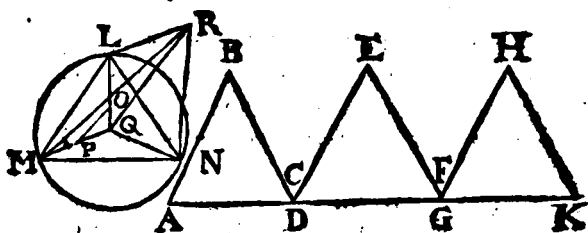
Ex tribus angulis planis ABC, DEF, GHK, quorum duo reliqui sunt maiores quomodocunque sunt, solidum angulum constituere: oportet autem tres angulos quatuor rectis esse minores.



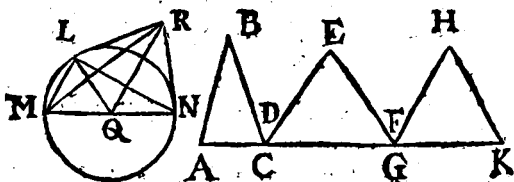
Abscinde aequales BA, BC, ED, EF, HG, HK, & iunge AC, DF, GK, ex quibus construe $\triangle LMN$ ita, vt $LM = AC$, & $MN = DF$, & $LN = GK$, quod semper fieri poterit. ^{a. 22. II.} Dein $\triangle LMN$ circumscribe ^{$\beta. 5. 4.$} circulum, & eius plano ex centro Q ad rectos angulos, constitue ^{$\gamma. 12. II.$} rectam, in qua cape ^{$\delta. sch. 47. I.$} $QR = \sqrt{(AB^2 - LQ^2)}$, & iunge RL, RM, RN. Factum erit.

Primo demonstrabimus, semper esse $AB > LQ$.

Cas. 1. Cadat centrum Q intra $\triangle LMN$.
Iam si non sit $AB > QL$: erit $AB = QL$ aut $< QL$. Sit $AB = QL$. Iunge QM, QN.
Quia ergo $BC = AB = QL = QM$, & $AC = LM$: erit ang. B = $\angle LQM$. Similiter patet, esse ang. E = $\angle MQN$, & ang. H = $\angle LQN$.
Ergo erit $B + E + H = LQM + MQN + LQN$
X 5 LQN

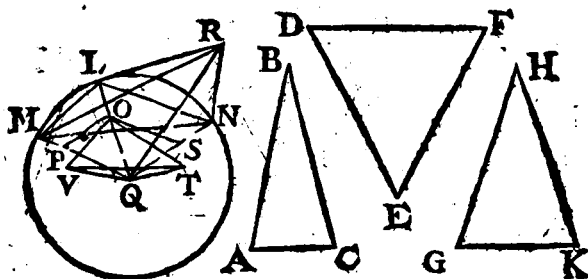


2. sch. $LQN = 4$ rectis; contra hypothesin. Sit
 15. 1. vero $AB < QL$. Cape $QO = QP = AB$,
 & iunge OP . Erit ergo $QL = PM$, & QQ :
 3. 2. 6. $QL = QP : PM$. Quare OP, LM erunt
 4. 4. 6. parallelae, & ergo in aequiangulis $\triangle LMQ$,
 14. 5. OPQ erit $QL : LM = QO : OP$. Sed
 25. 1. $QL > QO$. Ergo $LM > OP$. Quia igitur
 & $AC > OP$, erit $\angle B > \angle OQP$. Ea-
 dem ratione $\angle E > \angle MQN$, & $\angle H > \angle LQN$.
 Ergo erit $B + E + H > 4$ rectis; contra
 hyp. Igitur quia AB nec $=$ nec $< QL$: erit
 $AB > LQ$.



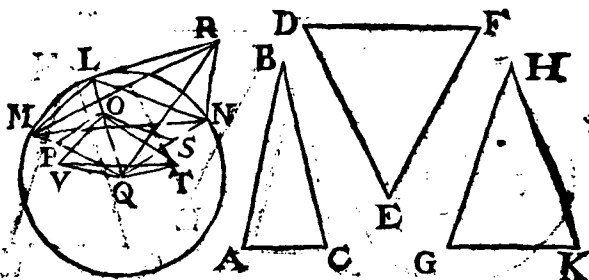
Cas. 2. Cadat centrum Q in latus MN . Iam
 si dicas $AB = QL$: erunt $DE = EF = AB$
 20. 1. $= QL = QM = QN$ ideoque $DE + EF$
 $= MN = DF$. Q. E. A. Si dicas $AB <$
 LQ : erunt $DE + EF < DF$. Q. E. A.
 Ergo $AB > LQ$.

Cas.



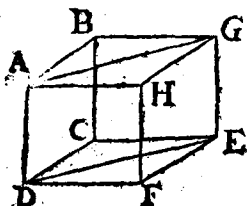
Caf. 3. Sit centrum Q extra $\triangle LMN$. Iam
 si dicas $AB = LQ$: erit ang. $B^{\angle} = LQM$, $\angle. 8. I.$
 & $H = LQN$. Ergo $B + H = MQN = \angle$
 E ; contra hyp. Si dicas $AB < QL$: fac
 $QO = AB$, & $QP = BC$, $QS = HK$, & iun-
 ge OP , OS . Ergo $QO = QP = QS$, & vti
 in *Cafu 1.* demonstrabitur $LM > OP$, & LN
 $> OS$. Ergo $AC > OP$, & $GK > OS$, & ang.
 $B^{\angle} > OQP$, & ang. $H > OQS$. Fiat ang. $\angle. 25. I.$
 $OQT = H$, & $OQV = B$, & $QT = QV =$
 QO , & iungantur OV , OT , TV . Erit itaque
 $OV = AC = LM$, & $OT = GK = LN$. $\angle. 4. I.$
 Sed quia ang. $POQ > VOQ$, & $SOQ > TOQ$:
 erit POT vel $MLN > VOT$, & hinc $\angle MN^{\angle} \angle. 24. I.$
 $> VT$, ideoque $DE > VT$. Quum autem
 $QV = ED$ & $QT = EF$, erit ang. $E >^{\angle}$
 VQT , id est $E > B + H$; etiam contra hy-
 pothesin. Itaque $BA > LQ$.

Secundo dico, ang. solidum R esse ex tribus
 planis B , E , H constitutum. Quia enim QR
 plano circuli recta est: erunt ang. RQL , RQM ,
 RQN recti. Sunt autem aequales LQ , MQ ,
 NQ . Ergo, $RL = RM = RN$. Et quia
 QRq



$QRq = ABq - LQq$, ac ob id $QRq + LQq = ABq$: erit $\therefore LR = AB$, & ergo $RM = BC$, atque, ob $ML = AC$, ang. $LRM = B$. Eadem ratione ang. $LRN = H$, & ang. $MRN = E$. Quare ex tribus planis B, E, H constitutus est solidus angulus R. Q. E. F.

PROP. XXIV. THEOR.



Si solidum parallelis planis contineatur: opposita ipsius plana & aequalia & parallelogramma sunt.

1. Nam quia plana parallela BH, CF secantur a plano AC in rectis AB, DC : erunt $\therefore AB, DC$ parallelae. Similiter quia plana AF, BE parallela secantur a plano AC : erunt $\therefore AD, BC$ parallelae. Ergo AC est Pgr. Similiter ostenditur, reliqua plana AF, HE, BE, BH, FC esse Pgra. Q. E. D.

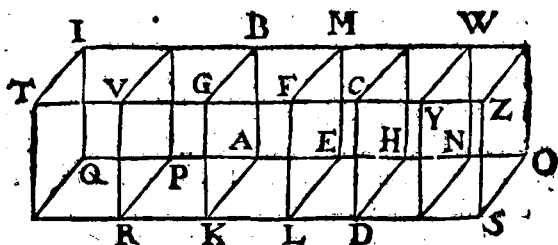
2. Iungantur AG, DE . Quia AB, BG ipsius DC, CE sunt parallelae: est ang. $ABG = DCE$.

DCE. Sed $AB = DC$, & $BG = CE$. Ergo $\Delta AGB = DEC$, & igitur $gr. BH = Pgr. CF$.
 Similiter ostendetur $Pgr. AC = HE$, & $Pgr. AF = BE$. Q. E. D.

* *Scholium.*

Et quia ostensum est, ang. $ABG = DCE$, & $AB : BG = DC : CE$: patet, aequiangula esse Pgra opposita, & latera circum aequales angulos proportionalia habere, ideoque etiam similia esse.

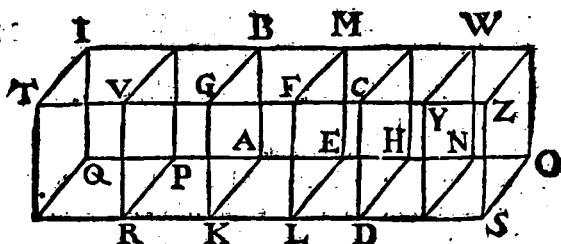
PROP. XXV. THEOR.



Si solidum parallelepipedum ABCD plano EF secetur oppositis planis AG, CH parallelo: erit ut basis AELK ad basin EHDL, ita solidum ABFL ad solidum EMCD.

Produc enim AH utrinque, & pone ipsi EH aequales quotcunque HN, NO, & ipsi EA aequales AP, PQ quotvis, & comple Pgra QR, PK, DN, NS, & Ppda PT, AV, HY, NZ. Iam quia $QP = PA = AE$: erit $Pgr. QR = PK = AL$, & $Pgr. PI = PB = BE$. Erit quoque $Pgr. TQ = VP = GA$. Ergo tria plana solidorum PT, AV, EG tribus planis aequantur. Sed tria tribus oppositis aequantur. Ergo tria solida PT, AV, EG aequa

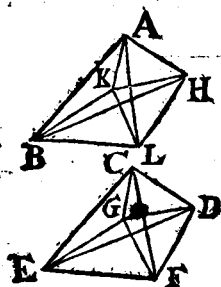
lia 11.



lia sunt. Similiter ostendetur tria solida OY, NC, HF aequalia esse. Ergo basis QL aequae multiplex est basis AL ac solidum TE solidi GE; & eadem ratione basis OL aequae est multiplex basis HL ac solidum OF solidi HF. Porro si basis $QL > = < OL$: est & ϕ solidum $TE > = <$ solidum OF. Quare ut basis $\propto$ 5. def. 5. AL est ad basin HL $\propto$ ita solidum GE ad solidum HF. Q. E. D.

PROP. XXVI. PROBL.

Ad datam rectam lineam AB & ad datum in ipsa punctum A dato angulo solido C aequalem angulum solidum constituere.



Sint DCE, ECF, FCD anguli plani solidum C continentis. Ex quovis puncto F in recta CF de-

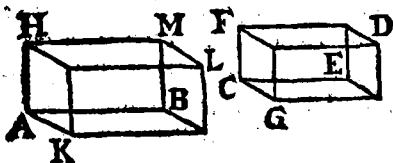
ϕ . II. II. mitte in planum EGD perpendicularem $\perp$ FG, quae ipsi occurrat in G, & iunge CG. Dein fac ang. BAH = ECD, & ang. BAK = ECG, & AK = CG; atque ex K plano BAH erige per-

perpendicularem * KL, quam fac $\equiv$ GF, & . 12. 11.
iunge AL. Dico factum.

Nam fiat $AB \equiv CE$, & iungantur KB, BL,
GE, EF. Et quia rectae KL, GF planis BAH,
ECD perpendiculares sunt: erunt ang. AKL,
BKL, CGF, EGF recti. Dein quia $KA \equiv$
 GC , & $AB \equiv CE$, & ang. BAK $\equiv$ ECG:
erit * $BK \equiv EG$. Sed $KL \equiv GF$. Er. . 4. 1.
go $AL \equiv$ * CF , & $BL \equiv$ * EF ; ac
inde ang. BAL $\beta \equiv$ ECF. Similiter, sum- . 8. 1.
ta $AH \equiv CD$ & iunctis HK, HL, DG,
DF ostendemus ang. LAH $\equiv$ FCD. Er-
go tres ang. plani BAH, BAL, LAH an-
guli solidi A tribus planis ECD, ECF,
FCD solidi Caequantur. Hinc ang. solidus
 $A \equiv$ * C . Q. E. F.

7. ax. 11.

PROP. XXVII. PROBL.



*A data
recta linea
AB dato
solido par-
allelepipe-*

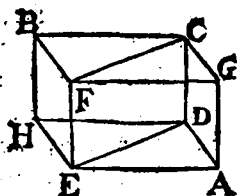
*do CD simile & similiter positum solidum
parallelepipedum describere.*

Fac δ angulo solido C $\equiv$ A, ita vt angulo . 26. 11.
 $GCE \equiv KAB$, & ang. FCE $\equiv$ HAB, & ang.
 $GCF \equiv KAH$. Dein fac $EC:CG \equiv$ * BA . 12. 6.
 AK , ac $GC:CF \equiv KA:AH$, & comple Pgr.
BH, ac solidum AL.

Etenim ζ Pgr. KB $\sim$ GE, & Pgr. KH $\sim$. 1. def 6.
GF, & quia ex aequo $EC:CF \equiv BA:AH$, & constr.
Pgr. BH $\sim$ EF. Ergo & tria reliqua Pgra
HL,

HL, LB, LK ~ tribus reliquis DF.
& 21.6. DE, DG. Quare Ppd. AL ~ Ppdo CD.
9.9.def.11. Q.E.D.

PROP. XXVIII. THEOR.



Si solidum parallelepipedum AB plano CDEF secetur per diagonales CF, DE oppositorum planorum: solidum AB ab ipso

plano CDEF bifariam secabitur.

Quia enim $\triangle GCF = \triangle CFB$, & $\triangle ADE = \triangle DEH$, & Pgr. AC = BE, & Pgr. GE = CH: Prisma GCFEDA = prismati CFBHDE. Q.E.D.

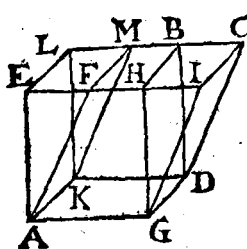
* Scholium.

Prismata vero esse illas duas dimidias partes Ppdi AB patet ex 24.11. & schol. eiusdem. & ex eo, quod per 16.11. planum CFED parallelogrammum est. Constat itaque, prisma triangularem basin habens dimidium esse parallelepipedum aequale & in eadem basi GE constituti, vel in basi AH basis triangularis dupla.

PROP. XXIX. THEOR.

Solida parallelepipeda AB, AC in eadem basi AD ea temque altitudine, quorum insister lineae AE, AF, GH, GI, KL, KM, DB, DC in eisdem rectis lineis EI, LC collocantur, inter se sunt aequalia.

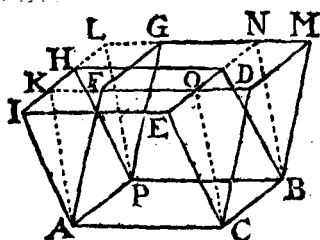
Quia KB & KC sunt Pgra. & inde LB = KD = MC: erit LM = BC, & ergo $\triangle LKM$



$LKM = BDC$, necv. 8. I.
 non Pgr. $EM = HC$. §. 36. I.
 Eadem ratione $\triangle AEF$
 $= GHI$. Est autem
 Pgr. $LA = BG$, & 24. II.
 Pgr. $MA = CG$. Er-
 go Prisma $AEFMLK$
 $=$ Prism. $GHICBD$. *. 10. def. II.

Hinc addito communi solido $AKDGHFMB$,
 tota Ppda AB, AC aequalia erunt. Q.
 E. D.

PROP. XXX. THEOR.



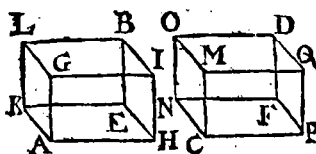
Solida parallelepiped $ABEH$,
 $ABDG$ in eadem
basi eademque al-
titudine, quorum
lineae insistentes in
eisdem lineis re-
ctis non collocan-

tur, inter se aequalia sunt.

Producantur enim DF, MG, IH, EO , vt
 se inuicem secant in K, L, N , & iungantur
 KA, LP, OC, NB . Ergo Ppd. $ABEH =$ 4. 29. II.
 $ABNK = ABDG$. Q. E. D.

PROP. XXXI. THEOR.

Solida parallelepiped AB, CD , quae in
aequalibus sunt basibus AE, CF , & *eadem alti-*
tudine, inter se sunt aequalia.

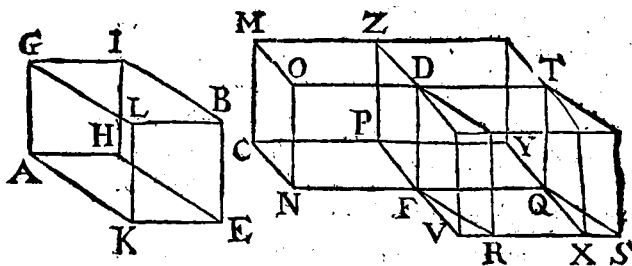


Caf. 1. Sint in-
fistentes lineae A-
G, BE, HI, KL,
CM, DF, NO, PQ
ad rectos angulos

bafibus AE, CF, & fit ang. PFN = HEK,
NF = KE, & FP = EH. Erit ergo Pgr.

1. def. 6. CF = & Pgro AE. Eadem ratione quia
altitudines NO, KL aequales, & ang. ONF,
ONC, LKE, LKA recti sunt: erit Pgr. ND
= & ipfi KB, & Pgr. CO = & AL.
Quare & reliqua Pgra reliquis aequalia & fi-

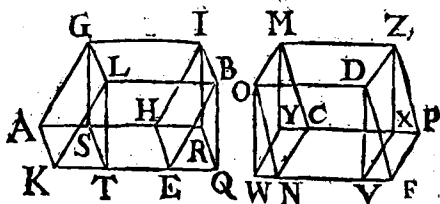
10. def. milia erunt, & ergo Ppd. CD = ipfi AB.
11. Q. E. D.



Caf. 2. Sint iterum infistentes perpendicu-
lares, fed ang. PFN non = HEK. Produce
NF in Q, & fac ang. QFR = HEK, & FQ
= HE, & FR = EK, & comple Pgr. QR ac
solidum TR. Ergo erit Ppd. TR = Ppdo
AB. Produce PF, SR, quae conveniant in V, &
per Qduc ipfi PV parallelam QX, quam produc,
donec productae CP occurrat in Y, & com-
ple Ppda TV, TP, quorum bafes sunt Pgra
VQ,

1. caf. 1.

VQ, PQ: Iam Ppda TV, TR, eandem basim TF habentia, aequalia φ sunt; & hinc φ . 29. 11: Ppd. TV = AB. Sed quia Pgr. FX = α 35. 1. FS = ψ AE = α CF: erit Pgr. FX: FY = ψ . constr. CF: FY. Atqui Ppd. TV: TP = α Pgr. α . 25. 11: FX: FY, nec non Ppd. CD: TP = Pgr. CF: FY. Ergo Ppd. TV: TP = Ppd. CD: TP. Quare Ppd. TV = β CD, ideoque Ppd. CD β . 9. 5. = AB. Q. E. D.



Caf. 3. Non sint insistentes AG, BE, HI, KL, CM, PZ, FD, NO perpendiculares basibus. Duc a punctis B, I, G, L, D, Z, M, O ad bases perpendiculares BQ, IR, GS, LT, DV, ZX, MY, OW, & iunge ST, QR, TQ, RS, XV, YW, YX, VW. Erit ergo Ppd. MV = γ GQ. Atqui γ . casus Ppd. CD = δ MV, & Ppd. AB = δ GQ. Ergo γ . casus Ppd. CD = AB. Q. E. D. δ . 29. vel δ . 30. 11.

* *Schol.* Itaque Parallelepipeda aequalia AB, CD aequalium basium aequae alta sunt. Nam si alterius AB altitudo maior esset: quia ipsius AB pars capi posset aequae alta ipsi CD, foret pars Ppdi AB = Ppdo CD. Ergo Ppda AB, CD inaequalia forent.

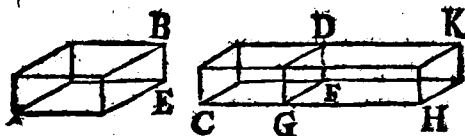
Y 2

PROP.

† Reliqui casus demonstrationem Lector facile addet. Similis enim est demonstrationi casus secundi.

PROP. XXXII. THEOR.

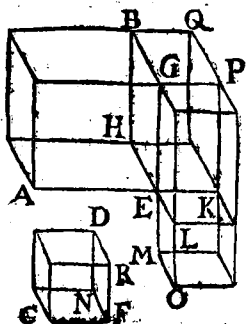
Solida parallelepipedum AB, CD, quae eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases AE, CF.



45. I. Applicetur ad FG Pgr. FH = AE,
 31. II. & compleatur Ppd. DH = AB. Quia
 25. II. autem totum Ppd. CK secatur plano DG:
 erit Ppd. DH vel AB ad Ppd. CD
 sicut basis FH vel AE ad basin CF. Q.
 E. D.

* *Schol.* Hinc parallelepipedorum aequalium quod maiorem basin habet, minorem habet altitudinem. Non enim eandem; quia sic Ppd. inaequalia erunt: nec maiorem; quia sic pars illius Ppdi reliquo aequae alta eodem maior, & a petiori totum eodem maius erit.

PROP. XXXIII. THEOR.



Similia solida parallelepipedum AB, CD inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum AE, CF.

In productis AE, HE, GE cape EK = CF, EL = FN, EM = FR. Comple Pgr. KL, & Ppd. KO. Iam quia Ppd.

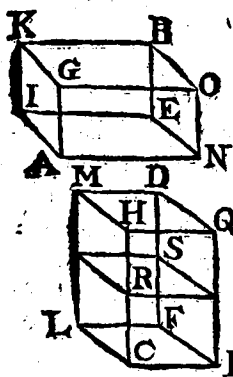
Ppd. $AB \sim CD$, ideoque $\angle AEH = \angle CFN$. 9. 9. def. 11.
 CFN : erit ang. $KEL = CFN$, ac propterea & 1. def. 6.
 Pgr. $KL = \sim CN$. Eadem ratione 4. 1. & 34.
 Pgr. $KM = \sim CR$, & Pgr. $OE = \sim DF$. 1. & 1. def. 6.
 Quoniam ergo & tria reliqua Pgra tribus re-
 liquis aequalia & similia sunt: erit Ppd. $KO \sim$ sch. 24.
 $\sim^A CD$. Comple Pgr. HK , & fac Ppda 11.
 HP , PL eiusdem altitudinis EG cum Ppdo 1. 10. def. 11.
 AB . Et quia $\angle AE: CF = EH: FN =$
 $EG: FR$: erit $AE: EK = HE: EL = GE:$
 EM . Est vero $\angle AE: EK = AH: HK$, & 1. 6.
 $HE: EL = HK: KL$, & $GE: EM = PE:$
 KM . Quare $AH: HK = HK: KL = PE:$
 KM . Porro $AH: HK = \angle Ppd. AB: Ppd. BK$; & $HK: KL = \angle Ppd. BK: PL$; & $PE:$
 $KM = Ppd. PL: KO$. Ergo $\div Ppda AB,$
 BK, PL, KO , ideoque $AB: KO = \frac{1}{2} (AB: BK + BK: KO)$ 1. 1. def.
 $BK) 3 = (AH: HK) 3 = (AE: EK) 3 = (AE: CF) 3$. Q. E. D.

Corollarium.

Hinc, si quatuor rectae lineae continue pro-
 portionales fuerint, est ut prima ad quartam,
 ita solidum parallelepipedum, quod fit a pri-
 ma, ad solidum, a secunda simile & similiter de-
 scriptum $\frac{1}{2}$.

PROP. XXXIV. THEOR.

*Aequalium solidorum parallelepipedorum $AB,$
 CD bases AE, CF sunt reciproce proportionales
 altitudinibus AG, CH . Et quorum solidorum
 parallelepipedorum AB, CD bases AE, CF sunt
 reciproce proportionales altitudinibus AG, CH ,
 ea inter se sunt aequalia.*



Caf. 1. Si infisten-
tes rectae AG, EB,
IK, NO, CH, LM,
FD, PQ sunt basibus
AE, CF perpendicu-
lares.

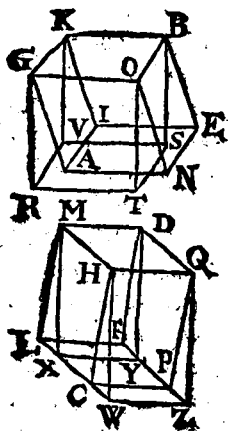
Hyp. 1. Si Ppd,
AB = CD, & basis
AE = CF: erit & alt.
AG = CH. Ergo
AE: CF = CH: AG.
Sin autem alterutra ba-
sis AE > altera CF:

q. sch. 31.
11.

q. sch. 32. quia tunc altitudo AG < CH, cape CR
11. = AG, & comple Ppd. SC. Iam quia
AB = CD: erit AB: CS = CD: CS. Sed
q. 32. 11. AB: CS = AE: CF, & CD: CS =
q. 1. 6. Pgr. CM: Pgr. RL = CH: CR = CH:
AG. Quare iterum est AE: CF = CH:
AG. Q. E. D.

Hyp. 2. Sit AE: CF = CH: AG. Iam
si basis AE = CF: erit & AG = CH, ideoque
Ppd. AB = CD. Si vero AE > CF: erit
q. 31. 11. CH > AG. Pone rursus CR = AG, &
q. sch. 32. comple Ppd. CS. Ergo AE: CF = CH: CR.
11. Sed AE: CF = AB: CS, & CH: CR =
CM: RL = CD: CS. Ergo AB: CS
q. 9. 5. = CD: CS. Igitur iterum AB = CD.
Q. E. D.

Caf.



Caf. 2. Si insistentes AG, EB, CH &c. basi-
bus AE, CF non sunt per-
pendiculares: demitte $\chi\chi$. II. II.
in bases perpendiculares
GR, BS, OT, KV, HW,
MX, DY, QZ, & com-
pleta intellige Ppda KT,
MZ.

Hyp. 1. Iam si Ppd.
AB = CD: quia Ppd.
AB = ψ KT, & Ppd. CD ψ . 30. & 29.
= MZ, erit Ppd. KT = ^{II.}
MZ. Quum itaque sit ^{ca. 1.}

BG: DH = DY: BS: erit $\propto$ AE: CF =
DY: BS. Q. E. D.

Hyp. 2. Deinde si basis AE: CF = alt,
DY: BS: erit & $\propto$ BG: DH = DY: BS. Er. ^{ca. 24.} II.
go Ppd. KT = $\propto$ MZ, ideoque Ppd. AB = ψ
CD. Q. E. D.

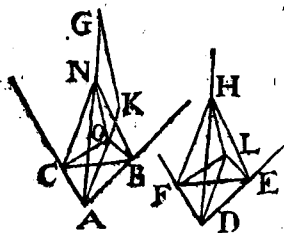
** Coroll.*

Ostenfum est sub hyp. 1. ca. 1. Ppda recta CD,
CS aequalium & similium basium esse inter se vt
altitudines CH, CR. Et quia his duobus Ppdis
quaeuis alia duo aequalia & aequae alta sumi pos-
sunt (per 31. II.): patet in vnuerfum, duo quae-
cunque Ppda aequalium basium esse in ratione
altitudinum.

** Schol.*

Propositiones 31. 32. 33. 34. cum suis scho-
liis & corollariis valent quoque de Prismatis
triangularibus, propter ea, quae ostensa sunt in
prop. 28.

PROP. XXXV. THEOR.



Si sint duo anguli plani BAC, EDF aequales; & in ipsorum verticibus A, D rectae sublimes AG, DH constituantur, quae cum rectis lineis a principio positis angulos contineant aequales, alterum GAB, GAC alteri HDE, HDF; in sublimibus autem sumantur quaevis puncta G, H, atque ob ipsis ad plana, in quibus sunt anguli primi BAC, EDF, perpendiculares ducantur GK, HL; & a punctis K, L, quae a perpendicularibus fiunt in planis, ad primos angulos iungantur rectae lineae KA, KD: cum sublimibus aequales angulos KAG, LDH continebunt.

Pone $AN = DH$, & in plano AGK duc NO parallelam ad GK, quae ergo plano BAC perpendicularis β erit. A punctis O, L duc ad rectas AB, AC, DE, DF perpendiculares OB, OC, LE, LF, & iunge NC, NB, HE, HF, CB, FE. Iam quia $ANq = \gamma NOq + OAq$, & $OAq = \gamma OCq + ACq$, & $NOq + OCq = \gamma NCq$: erit $ANq = NCq + CAq$, ideoque δ ang. NCA rectus. Similiter ostenditur ang. HFD rectus. Quare ang. NCA = HFD. Et quia NAC = HDF, ac $AN = DH$: erit $AC = DF$. Eadem ratione $AB = DE$. Quare $CB = FE$, & ang. ACB = DFE, & ang. ABC = DEF. Hinc ϵ ang. OCB = LFE, &

β . 8. II.

γ . 47. I.

δ . 48. I.

ϵ . 26. I.

ζ . 4. I.

η . 3. ax. I.

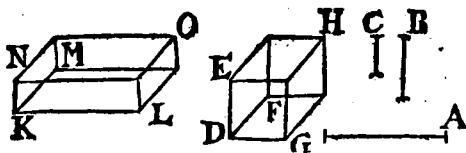
& ang. $OBC = LEF$, & ob $CB = FE$, est $CO = FL$. Vnde patet $\angle AO = DL$. Hinc quoniam $NOq + OAq = ANq = DHq = HLq + LDq$: erit $ONq = HLq$, & $NO = HL$. Igitur constat, ang. $KAG = \angle 9. 8. 1. LDH$. Q. E. D.

Corollar.

Ex hoc vero manifestum est, si sint duo anguli plani rectilinei aequales, ab ipsis autem constituentur sublimes rectae lineae aequales, quae cum rectis lineis a principio positis aequales contineant angulos, alterum alteri, perpendicularares NO , HL , quae ab ipsis ad plana, in quibus sunt primi anguli, ducuntur, inter se aequales esse.

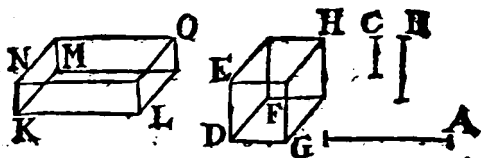
PROP. XXXVI. THEOR.

Si tres rectae lineae A, B, C proportionales sint: solidum parallelepipedum, quod a tribus fit, aequale est solido parallelepipedo, quod fit a media B, aequilatero quidem, aequiangulo autem antedicto.



Exponatur angulus solidus D, & ipsi B aequales fiant DE, DG, DF , & compleatur Ppd. DH , quod erit factum a B. Ponatur $KL = A$, & ad punctum K fiat ang. solidus $K = D$, ac $KM = B$, & $KN = C$, & compleatur Ppd. KO , quod erit factum a tribus A, B, C, & aequi-

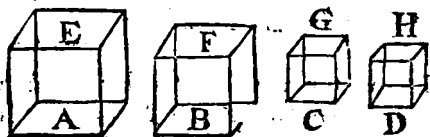
. 26. 11.



- ax. 11. & aequiangulum ipsi $\angle DH$. Et quia $\angle KL : DG$
 29. 1. $= DE : KN$, & $\angle LKN = GDE$: erit $Pgr.$
 a. constr. $NL = EG$. Deinde quia & $\angle MKN$
 14. 6. $= FDE$, & $\angle MKL = FDG$, & $KM = DF$:
 erunt perpendiculares, a punctis M, F ad
 1. cor. 35. plana NL, EG ductae, aequales; id est,
 11. $Ppda\ DH, KO$, aequales bases habentia EG ,
 §. 4. def. 6. NL , aequae alta $\frac{1}{2}$ erunt, ac ergo aequalia.
 31. 11. $Q. E. D.$

PROP. XXXVII. THEOR.

Si quatuor rectae lineae A, B, C, D proportionales sint: & quae ab ipsis fiunt solida parallelepipeda E, F, G, H similia & similiter descripta proportionalia erunt. Et si quae ab ipsis fiunt solida parallelepipeda E, F, G, H similia & similiter descripta proportionalia sint: & ipsae rectae lineae A, B, C, D proportionales erunt.

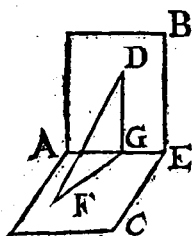


1. Nam quia $Ppd. E \sim F$: erit $E : F = (A : B)^3$. Eodem argumento erit $G : H = (C : D)^3$. Sed $(A : B)^3 = (C : D)^3$. Ergo
 33. 11. $E : F = G : H$. $Q. E. D.$
 2. Quia,

2. Quia, vt antea, $E : F = (A : B)3$, & $G : H = (C : D)3$, atque $E : F = G : H$: erit $(A : B)3 = (C : D)3$, ideoque $A : B = C : D$. Q.E.D. 2. sch. 22. 5.

PROP. XXXVIII. THEOR.

Si planum AB ad planum AC rectum fit, & ab vno puncto D eorum, quae sunt in vno plano AB, ad alterum planum AC perpendicularis ducatur: ea in communem planorum sectionem AE

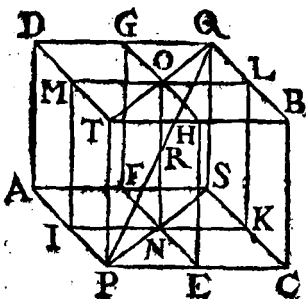


Si negas, cadat extra, vt DF, & a puncto F in plano AC duc ad AE perpendicularem FG, & iunge DG. Iam quia FG perpendicularis est plano AB: erit ang. FGD re-
ctus. Sed & ang. DFG re-
ctus est. Quare in $\triangle GDF$ duo recti sunt. Q.E.A. r. 4. def. II. 3. def. II.

PROP. XXXIX. THEOR.

Si in solido parallelepipedo AB oppositorum planorum AC, BD latera secantur bifariam: per sectiones vero plana ducantur EFGH, IKLM: communis planorum sectio NO & solidi parallelepipedis diameter PQ se mutuo bifariam secabunt.

Iungan-



Iungantur QO,
OT, PN, NS.
Quoniam QB, DT
sunt parallelæ:
erit ang. QLO
 $\equiv$ ϕ OMT. Præ-
terea QL $\propto$ =
TM. Et quia ψ
ML, DQ paralle-
læ sunt, item DT,

ϕ . 29. I.
 $\propto$. 34. I.
 ψ . 33. I.

α . constr.
 α . 4. I.
 β . 3. sch.
15. I.

γ . 7. II.

δ . 7. ax. I.
 ϵ . 26. I.

GH, QB: erit MO $\equiv$ $\propto$ DG $\equiv$ α GQ $\equiv$ $\propto$
OL. Quare α QO $\equiv$ OT, & ang. QOL
 $\equiv$ MOT, & ob id β QOT recta. Similiter
demonstratur, SN $\equiv$ NP, & SNP rectam
esse. Et quia PT, SQ, ipsi CB æquales $\propto$
& parallelæ, ipsæ æquales & parallelæ
sunt: erunt & TQ, PS æquales ψ & paralle-
læ. Ergo rectæ NO, PQ sunt in eodem γ
plano TS, & se mutuo secabunt in R. Sed
quia ϕ ang. QQR $\equiv$ RPN, & ang. QOR $\equiv$
PNR, & QO $\equiv$ β PN: erit ϵ OR $\equiv$ RN, &
QR $\equiv$ RP. Q. E. D.

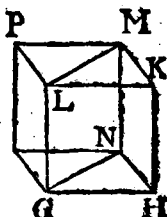
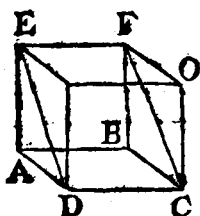
* Schol.

Hinc in omni parallelepipedo diametri omnes
se mutuo bifecant in vno puncto R.

PROP. XL. THEOR.

*Si sint duo prismata ABCDEF, GHKLMN
æque alta, quorum vnum quidem basin habeat
parallelogrammum ABCD, alterum vero trian-
gulum GHN, & parallelogrammum ABCD du-
plum sit trianguli GHN: æqualia erunt ipsa
prismata.*

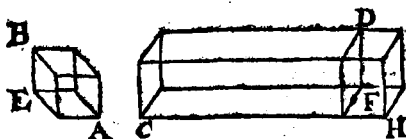
Com-



Compleantur enim Ppda AO, HP. Et
 quoniam Pgr. AC = $\triangle$ GNH = $\triangle$ Pgr. 2. 34. I.
 GN, atque solida aequae alta sunt: erit Ppd. 4. 31. II.
 AO = $\triangle$ HP, ideoque Pr. ABCDEF = $\triangle$ Pr. 9. 28. II.
 GHKLMN. Q. E. D.

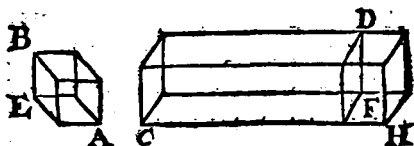
* Scholium.

Ex iis, quae haecenus ostensa sunt, demonstrari
 potest, parallelepida quaecumque AB, CD, nec non
 prismata triangularia, esse in ratione composita ba-
 sis AE, CF & altitudinum BE, DF.



Intelligatur enim aliud Ppd. DH, cuius basis
 FH = basi AE Ppdi AB, & altitudo DF = alti-
 tudini Ppdi CD. Et quoniam est AB: HD = $\triangle$ cor. 34
 BE: FD, & HD: CD = $\triangle$ FH: CF = AE: CF: II.
 erit AB: CD = $\triangle$ (AE: CF) + (BE: DF). Er. 32. II.
 go Parallelepida, & triangularia prismata, Paral. 5. def. 6.
 lelepipedorum dimidia, sunt inter se ut bases &
 altitudines. Q. E. D.

Quae



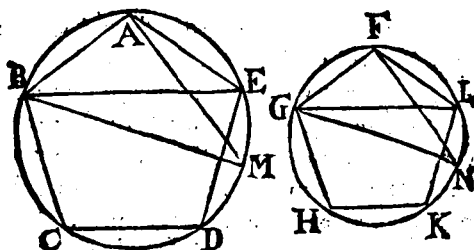
Quae quum ita sint, patet fundamentum methodi qua parallelepipeda & prismata in Geometria practica metiuntur. Sumunt enim cubum AB, & latus eius BE pro unitate, qua metiuntur basin Ppdi CD & altitudinem: & ex multiplicatione numerorum, qui basin & altitudinem exprimunt, gignitur numerus, qui soliditatem Ppdi CD exprimit. Sit (per 4. Ich. 23. 6.) basis CF = 9 AE, & altitudo DF = 2 BE: & quia CD:AB = (CF: AE) + (DF: BE) = (9:1) + (2:1) = 18:1; erit CD = 18 AB.



E V C L I D I S ELEMENTORVM

L I B E R XII.

PROP. I. THEOR.



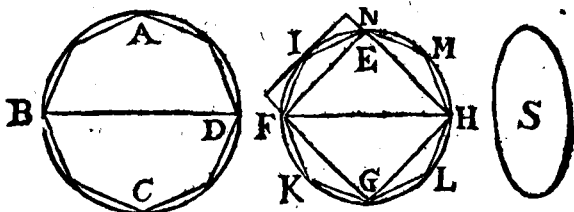
*Similia polygona ABCDE, FGHKL circuli
inscripta inter se sunt ut quadrata α diametris
BM, GN.*

Iungantur BE, AM, GL, FN. Quia po-
lygona similia sunt: est α ang. BAE = GFL, α . i. def. 6.
& BA: AE = GF: FL; ideoque β ang. AEB β . 6. 6:
= FLG. Ergo ang. AMB = γ FNG; et, γ . 21. 3. &
quia praeterea ang. BAM = δ GFN, est BM: δ . 31. 3.
GN = ϵ BA: GF. Hinc pol. ABCDE: pol. ϵ . 4. 6.
FGHKL = α (BA: GF) α = λ (BM: GN) λ = α . 20. 6.
BMq: GNq. Q. E. D. λ . I. sch. 22.

* Schol. Et quia AB: GF = BC: GH &c. = δ .
BM: GN: patet, μ similium polygonorum circulis μ . 12. 5.
inscriptorum perimetros AB + BC + CD + DE
+ EA, & FG + GH + HK + KL + LF, esse in
ratione diametrorum.

PROP.

PROP. II. THEOR.



Circuli ABCD, EFGH inter se sunt ut quadrata a diametris BD, FH.

Si negas: erit ut BDq ad FHq, ita circulus ABCD ad spatium S circulo EFGH minus vel maius. Sit primo $S < EFGH$. In circulo EFGH descriptum sit $\square$ quadratum HGFE, quod $\frac{1}{2}$ maius erit dimidio circulo. Circumferentiae EF, FG, GH, HE bisectae $\circ$ sint in I, K, L, M, & iungantur EI, IF, FK, KG, GL, LH, HM, ME. Erit similiter quodlibet $\triangle EIF > \frac{1}{2}$ segmento EIF, quoniam, ducta per I parallela ad EF & completo pgro rectangulo NF, est $\triangle EIF = \frac{1}{2} NF$. Reliquis ergo circumferentiis semper bisectis, & talibus triangulis a reliquis segmentis semper ablati: relinquentur tandem segmenta, quae simul sumpta erunt $\pi < EFGH - S$. Sint reliqua haec segmenta, quae sunt super rectis EI, IF, FK, KG, GL, LH, HM, ME. Ergo polygonum EIFKGLHM $> S$. Describe in circulo ABCD polygonum ABCD $\sim$ ipsi EIFKGLHM. Erit ergo illud polygonum ad hoc, ut $\circ$ BDq ad FHq, siue ut π circulus ABCD ad spatium S. Minus autem est pol. ABCD

CD circulo, in quo inscriptum est: ergo
& polyg. EIFKGLHM < " S. Q. E. 14. 5.
A. Non ergo est vt BDq ad FHq ita
circ. ABCD ad spatium minus circulo
EFGH.

2. Si ponis $S > EFGH$: quia sic erit
vt FHq ad BDq ita S ad circ. ABCD,
atque S ad circ. ABCD " vt circulus
EFGH ad spatium minus circulo ABCD:
erit vt FHq ad BDq ita circ. EFGH ad
spatium minus circulo ABCD. Q. F. N. $\phi\phi$. per part.
Quare vt BDq ad FHq ita circ. ABCD ad
circ. EFGH. Q. E. D.

* Schol.

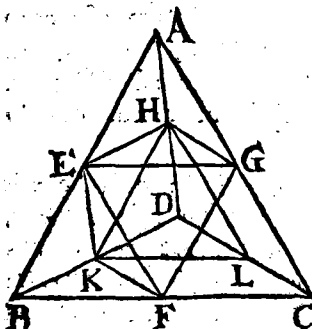
Similia ergo " polygona, in circulis inscripta, s. I. 18.
sunt vt iidem circuli.

PROP. III. THEOR.

*Omnis pyramis ABCD †, triangularem
habens basin ABC, diuiditur in duas pyra-
mides aequales & similes inter se, quae trian-
gulares bases habent, easque similes toti, nec
non in duo prismata aequalia, quae dimidio
quidem totius pyramidis sunt maiora.*

Bifeca

† Nota, litterarum pyramidem designantium
ultimam nobis semper eam esse, quae
vertici est apposita, tres autem priores
eas, quae ad basin pertinent. Contra,
in angulo solido designando prima est
quae ad verticem.



Biseca enim AB, BC, CA, AD, DB, DC, in punctis E, F, G, H, K, L, & iunge EG, EH, HG, per quas ductum planum abscindet pyramid. AEGH. Iunge etiam HK, K

CL, LH, & ducto per has plano a reliquo solido abscindetur pyr. HKLD. Iam quia $AE = EB$, & $AH = HD$: erunt EH, BD $\propto$ parallelae. Similiter quia $AH = HD$, & $BK = KD$: erunt & HK, AB $\propto$ parallelae. Quare $HK = \frac{1}{2} BE = EA$. Sed est $\angle KHD = \angle EAH$. Ergo $\triangle KDH = \triangle EHA$ & $EH = KD$. Eodem modo patet $\triangle HDL = \triangle HAG$, & $DL = GH$. Et quia ob parallelas EH, BD, & HG, DC, $\angle KDL = \angle EHG$; erit $\triangle KDL = \triangle EHG$. Eadem ratione ostenditur $\triangle KHL = \triangle EAG$.

x. 2. 6.

ψ. 34. I.

α. 29. I.

α. 4. I. &

sch. 6. 6.

ρ. 10. II.

γ. 10. def.

II.

δ. 3. sch.

4. 6.

α. 2. sch. 4.

6.

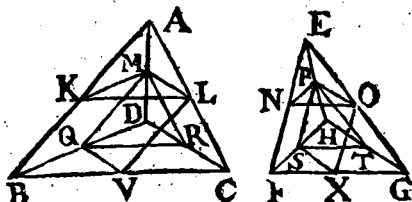
δ. 6. 6.

Ergo pyr. HKLD $\propto$ pyr. AEGH. Porro, quum AB, HK parallelae sint, $\triangle ADB$, $\triangle HDK$ aequiangula, ideoque $\triangle ADB \propto \triangle HDK$; & eadem ratione $\triangle BDC \propto \triangle KDL$; nec non $\triangle ADC \propto \triangle HDL$; atque, quum sit $\angle BAC = \angle KHL$, & $BA : KH = AD : DH = AC : HL$, $\triangle BAC \propto \triangle KHL$. Hinc erit pyr. BACD $\propto$ pyr. KHL D $\propto$ pyr. AEGH.

Deinde iunctis KF, FG, reliquum solidum diuidi poterit in dua prismata, quorum vnum habet

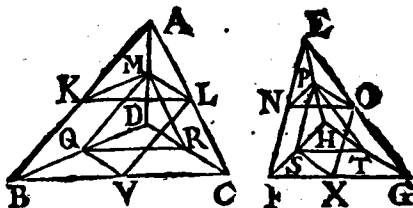
habet basin Pgr. EGFB, & lineam basi oppositam HK, alterum basin Δ GFC & oppositam basin Δ HKL. Sunt ergo haec prismata aequae alta, & quia Pgr. EGFB = $\frac{1}{2}$ Δ ^{7. 41. I.} GFC, aequalia ^{9.}. Sed pyramide EFBK, quae fit iunctis EK, EF, maius est prisma EGFBKH; & pyr. EBFK = $\frac{1}{7}$ pyr. AEGH (aequalibus enim & similibus triangulis continentur): ergo Pr. EGFBKH + Pr. GECLKH > pyr. AEGH + pyr. HKLD. Est autem Pr. EGFBKH + Pr. GECLKH + pyr. AEGH + pyr. HKLD = pyr. ABCD. Ergo pr. EGFBKH + pr. GECLKH > $\frac{1}{2}$ pyr. ABCD. Q. E. D.

PROP. IV. THEOR.



Si sint duae pyramides aequae altae ABCD, EFGH, quae triangulares bases habent ABC, EFG; diuidatur autem utraque ipsarum & in duas pyramides AKLM, MQRD, ENOP, PSTH, aequales inter se similesque toti, & in duo prismata aequalia KLVBQM, LVCROM; NOXFSP, OXGTSP; atque ortarum pyramidum utraque eodem modo diuidatur, idque semper fiat: erit ut unius pyramidis basis ABG ad basin EFG alterius, ita prismata omnia in

una pyramide ABCD ad prismata omnia
in altera pyramide EFGH numero aequa-
lia.



1. 15. 5. Quia $BC = 2 CV$, & $FG = 2 GX$: erit BC :
 $CV = FG$: GX . Sed quum, vt in praecedenti
propositione, constet, $\triangle ABC \sim \triangle VLC$,
& $\triangle FEG \sim \triangle XOG$: erit $\triangle ABC$: $\triangle VLC$
x. 22. 6. $= \triangle FEG$: $\triangle XOG$, & alternando $\triangle ABC$:
 $\triangle FEG = \triangle VLC$: $\triangle XOG$. Sed $\triangle LVC$:
λ. Lemma $\triangle XOG = \lambda$ pr. $VLCRQM$: Pr. $XOGTPS$
sequens. $= \mu$ pr. $KLVBQM$: pr. $NOXFSP$. Ergo $\triangle$
μ. 7. 5. ABC : $\triangle FEG = \nu$ pr. $VLCRQM +$ pr.
ν. 12. 5. $KLVBQM$: pr. $XOGTPS +$ pr. $NOXFSP$.
Idem vero demonstrabitur de pyramidibus
 $AKLM, ENOP$, scilicet vt basis AKL ad basin
 ENO ita esse duo prismata aequalia in pyr.
 $AKLM$ ad duo prismata aequalia in pyr. $EN-$
 OP . Itaque, quia eodem, quo modo vfi su-
mus, argumento, patet esse $\triangle ABC$: $\triangle EFG$
 $= \triangle AKL$: $\triangle ENO$: erunt ν vt $\triangle ABC$ ad
 $\triangle EFG$ sic 4 prismata in pyr. $ABCD$ ad 4
prismata in pyr. $EFGH$. Et similiter pro-
cedit demonstratio ad quocunque paria
prismatum in vtraque pyramide. Q. E. D.

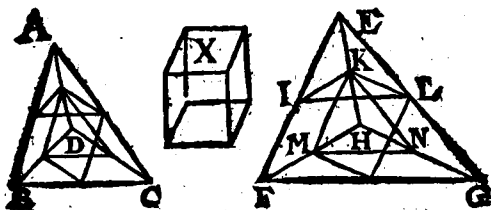
LEM-

L E M M A.

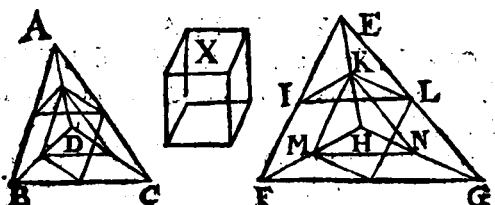
Ostendendum est, vti $\triangle LVC$ ad $\triangle XOG$,
ita esse prisma $VLCRQM$ ad prisma
 $OXGTPS$.

Intelligentur enim ex punctis D, H in ba-
ses VLC, XOG demissa perpendiculara, quae ^{o. hyp. & 4.}
aequalia erunt. Iam quia perpendicularis ^{def. 6.}
ex D demissa, & recta DC secantur a planis
QMR, VLC, quae ob parallelas ^{o. dem. 3.} MR & AC,
RQ & CV parallela ^{12.} sunt: erit pars perpen-
dicularis inter D & planum MQR ad partem ^{o. 15. 11.}
reliquam, vt DR ad RC. Sed DR = RC: ^{o. 17. 11.}
quare pars perpendiculi inter basin VLC & ^{o. hyp.}
basin oppositam QMR prismatis VLCRMQ
erit dimidium perpendiculi totius ex D de-
missi. Eadem ratione pars perpendiculi ex
H cadentis, quae est inter bases prismatis
OXGTSP dimidium erit totius. Erunt ergo
prismata VLCRMQ & OGXSTP ^{o. 7. ax. 1.} aequae alta,
ac ob id in ratione ^{o. 32. 11.} basium VLC, OXG.
Q.E.D.

PROP. V. THEOR.



*Pyramides ABCD, EFGH, quae in eadem
sunt altitudine, & triangulares bases ABC,
EFG habent, inter se sunt vt bases ABC, EFG.*

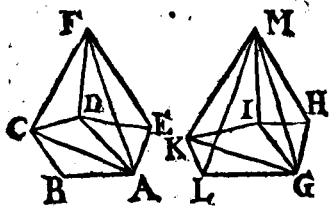


Si negas: fit $ABC : EFG = ABCD : X$, fitque primo $X < \text{pyr. } EFGH$. Diuidatur pyr. $EFGH$ vt in prop. III. & rursus pyramides ortae eodem modo diuidantur, fiatque hoc semper, vsque dum $\times$ duae reliquae pyramides $EILK + KMNH < \text{pyr. } EFGH - X$. Erunt itaque reliqua duo prismata in pyr. $EFGH > \downarrow$ solido X . Diuidatur etiam pyr. $ABCD$ similiter & in totidem partes ac pyr. $EFGH$. Ergo prismata in pyr. $ABCD$ erunt ad prismata in pyr. $EFGH = ABC : EFG = ABCD : X$. Quare quum pyr. $ABCD$ sit maior prismatis, quae in ipsa sunt: erit & solidum X maius quam prismata in pyr. $EFGH$, & ergo quam ipsa pyramis $EFGH$; contra hypothesin.

Sed pone $X > \text{pyr. } EFGH$. Erit ergo vt X ad pyr. $ABCD$, ita pyr. $EFGH$ ad solidum pyramide $ABCD$ minus. Sed inuertendo est $EFG : ABC = X : ABCD$. Ergo vt EFG ad ABC , ita pyr. $EFGH$ ad solidum pyramide $ABCD$ minus. Q. E. A. Erit itaque X nec $<$ nec $>$ pyr. $EFGH$, sed ipsi aequale. Ergo $ABC : EFG = ABCD : EFGH$. Q. E. D.

PROP.

PROP. VI. THEOR.

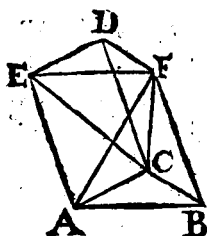


*Pyramides AB-
CDEF, GHIKL-
M, quæ in eadem
sunt altitudine, &
polygonas bases
habent, inter se
sunt ut bases.*

Bases diuidantur in triangu-
la ABC, ACD, ADE, GHI, GIK, GKL, super quibus intel-
ligantur pyramides aequæ altæ ipsis ABCDEF,
GHIKLM. Iam quia pyr. ABCF : ACDF
 $\equiv \Delta ABC : \Delta ACD$: erit componendo 7. 5. 12.
pyr. ABCDF : pyr. ACDF $\equiv$ ABCD : ACD.
Sed pyr. ACDF : ADEF $\equiv \Delta ACD : \Delta ADE$.
Ergo ex aequo pyr. ABCDF : ADEF $\equiv$ bas.
ABCD : ADE, & componendo pyr. ABCDEF :
ADEF $\equiv$ bas. ABCDE : ADE. Eadem ra-
tione pyr. GHIKLM : GKLM $\equiv$ bas. GHI-
KL : GKL. Sed pyr. ADEF : GKLM $\equiv$
bas. ADE : GKL. Ergo ex aequo pyr. ABC-
DEF : GKLM $\equiv$ bas. ABCDE : GKL. At-
qui est inuertendo pyr. GKLM : GHIKLM
 $\equiv$ bas. GKL : GHIKL. Quare ex aequo pyr.
ABCDEF : GHIKLM $\equiv$ bas. ABCDE : GHI-
KL. Q. E. D.

PROP. VII. THEOR.

*Omne prisma ABCDEF, triangularem
habens basim ABC, diuiditur in tres pyrami-
des aequales inter se, quæ triangulares bases
habent.*



4. 34. I.

5. 5. 12.

Iungantur enim AF, CE, CF: & orientur tres pyramides, triangulares bases habentes, ABFC, EAFC, CDEF. Iam quia ABFE est Pgr. eiusque diameter AF: erit $\triangle ABF = \triangle EAF$. Ergo pyr. ABFC = pyr. EAFC.

Sed pyr. EAFC eadem est quae pyr. AECF; atque pyramides AECF, CDEF, aequales bases ACE, CDE & eundem verticem F habentes, aequales sunt. Ergo pyr. ABFC = pyr. EAFC = pyr. CDEF. Q. E. D.

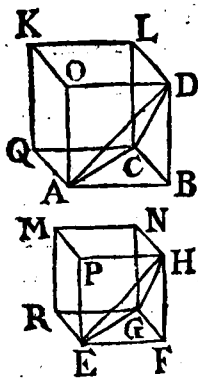
Cor. Et quia pyr. ABFC eadem est cum pyr. ABCF: manifestum est, pyramidem ABCF, quae cum prisma ABCDEF eandem habet triangularem basin ABC & eandem altitudinem,

4. 2. AX. I. tertiam partem esse prismatis. Ergo^a omnis pyramis tertia pars est prismatis, basin habentis eandem, & altitudinem aequalem: quoniam, si basis prismatis aliam quandam figuram rectilineam obtineat, diuiditur in prismata, quae triangulares habent bases.

PROP. VIII. THEOR.

Similes pyramides ABCD, EFGH, quae triangulares bases ABC, EFG habent, sunt in triplicata ratione homologorum laterum AB, EF.

Compleantur solida Ppda ABKL, EFMN. 9. 9. def. II. Et quia pyr. ABCD ~ pyr. EFGH: erit^a ang. ABD = EFH, & ang. ABC = EFG, & ang.



ang. DBC = HFG, & DB:

HF = BA: FE = BC: FG.

Ergo erit Pgr. BO ~ Pgr. FN. 1. def. 6.

FP, & Pgr. BL ~ Pgr. FN,

& Pgr. BQ. ~ Pgr. FR.

Tria ergo reliqua Pgra. KC,

AK, KD tribus reliquis

Pgris MG, EM, MH simi-

lia erunt. Hinc Ppd. BK x. sch. 24.

~ Ppd. FM, ac ergo 11.

Ppd. BK: Ppd. FM = 33. 11.

(AB: EF) 3. Sed quia py-

ramides ABCD, EFGH sunt sextae partes 14. cor. 7. 12.

Ppdorum BK, FM: erit Pyr. ABCD: & sch. 28.

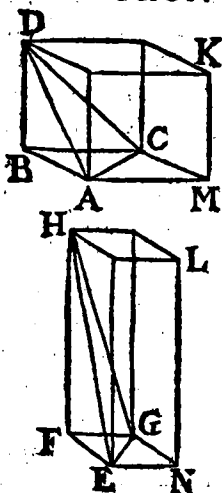
Pyr. EFGH = Ppd. BK: Ppd. FM. Ergo 11.

Pyr. ABCD: Pyr. EFGH = (AB: EF) 3. 15. 5.

Q. E. D.

Coroll. Ex hoc perspicuum est, similes pyra-
mides, quae polygonas habent bases, inter se esse
in triplicata ratione homologorum laterum. Ipsis
enim diuisis in pyramides, triangulares bases ha-
bentes; quoniam & similia polygonas basium in
triangula numero aequalia & homologa totis
& diuiduntur: erit * vt vna pyramis in altera 20. 6.
pyramide triangularem basin habens ad vnā 6. 12. &
pyramidem in altera triangularem basin habentem, ita tota illa pyramis polygonam basin ha- 11. 5. &
bens ad totam hanc. Sed pyramides istae trian- 16. 5.
gularium basium sunt in triplicata ratione late-
rum homologorum: ergo & pyramides polygonarum basium.

PROP. IX. THEOR.



Aequalium pyramidum ABCD, EFGH, triangulares bases habentium, bases ABC, EFG sunt altitudinibus DB, HF reciproce proportionales. Et quarum pyramidum, triangulares bases habentium, bases ABC, EFG sunt altitudinibus DB, HF reciproce proportionales, illae inter se aequales sunt.

Hyp. 1. Compleantur enim solida parallelepipedum BK, FL pyramidibus aequae alta. Et quia Ppd. BK = 6 pyr. ABCD = 6 pyr. EFGH = Ppd. FL: erit

* 34 II. vt HF: DB = BM: FN = ABC: EFG.
* 34 I. Q. E. D.

Hyp. 2. Quia vt HF: DB = ABC: EFG = BM: FN: erit Ppd. BK = Ppd. FL, ergo Pyr. ABCD = Pyr. EFGH.
* 6. ax. I. Q. E. D.

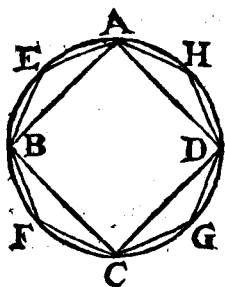
* *Schol. 1.* Idem de pyramidibus polygonarum basium valet (per cor. 7. 12. & sch. 34. II): quia in pyramides triangularium basium dividi possunt.

* 2. Quae de pyramidibus demonstrata sunt in prop. 6. 8. 9, ea & quibuscunque prismatis conveniunt, quippe quae tripla sunt pyramidum, easdem bases & altitudines habentium.

* 3. Hinc autem per se patet ex sch. 40. II. dimensio quorumvis prismatum & pyramidum.

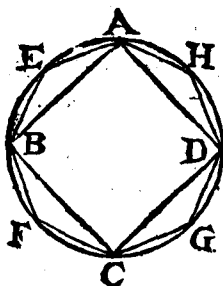
PROP.

PROP. X. THEOR.



*Omnis conus tertia pars
est cylindri, qui eandem
basin ABCD habet, &
altitudinem aequalem.*

1. Si negas: sit cylindrus $>$ triplo coni. Describatur in circulo quadratum ABCD, super quo intelligatur prisma aequale altum cylindro. Et quia hoc prisma dimidium est prismatis aequae altitudinis, super quadrato. 32. II. to circa circumscripto erecti; dimidium autem huius prismatis $>$ dimidio cylindro: erit & illud prisma $>$ dimidio cylindro. Bisecentur periphæriæ in punctis E, F, G, H, quæ connectantur rectis, atque a Δ is AEB, BFC, CGD, DHA intelligantur erecta prismata cylindro aequae alta. Et quoniam vnumquodque horum prismatum dimidium est Ppdi aequae altitudinis erecti super Pgro , rectangulo trianguli duplo; hoc autem Ppdum $>$ respectivo segmento cylindri: patet, vnumquodque horum prismatum $>$ esse dimidio respectivi segmenti cylindri. Igitur reliquas circumferentias bisecantes, et super singulis, quæ orientur, triangulis prismata erigentes, & hoc semper facientes, relinquemus tandem p . I. 10. segmenta cylindri, quæ simul sumpta minora erunt excessu cylindri supra triplum coni. Sint reliqua hæc segmenta, quæ super segmentis circuli AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA



2. cor. 7. 12.

HA consistunt. Igitur prisma, quod basin polygonam AEBFCGDH habet, & cylindro aequae altum est, erit $>$ triplo coni; ideoque pyramis, cuius basis est AEBFCGDH, & vertex idem qui coni $\propto$, $>$ erit cono;

pars toto. Q. E. A.

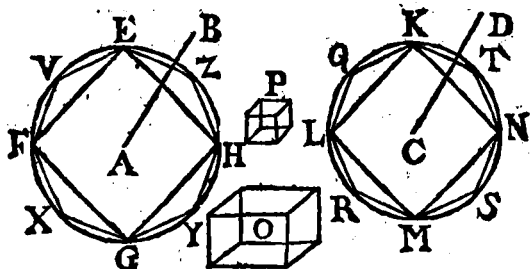
2. 6. 12.

2. Sit cylindrus $<$ triplo coni: erit conus $> \frac{1}{3}$ cylindri. Sed quia iisdem, quibus modo vti sumus, argumentis ψ , euincitur, pyramidem cono aequae altam, & cuius basis est quadratum ABCD $>$ esse dimidio coni, & vnamquamque pyramidum cono aequae altarum super triangulis AEB, BFC &c. $>$ esse dimidio respectui segmenti coni: iterum patet, circumferentias semper bisecando, & super ortis sic triangulis pyramides semper erigendo, relictum iri segmenta coni minora excessu coni supra $\frac{1}{3}$ cylindri. Sint haec segmenta, quae sunt super segmentis circuli AE, EB, BF &c. Quare quum reliqua pyramis, cuius basis est polyg. AEBFCGDH, & vertex idem qui coni $>$ sit $\frac{1}{3}$ cylindri: erit prisma cono vel cylindro aequae altum, & basin polyg. AEBFCGDH habens maius $\propto$ quam cylindrus; pars quam totum. Q. E. A.

PROP. XI. THEOR.

Coni & cylindri, qui eandem habent altitudinem AB, CD, inter se sunt ut bases EFGH, KLMN.

I. Sit



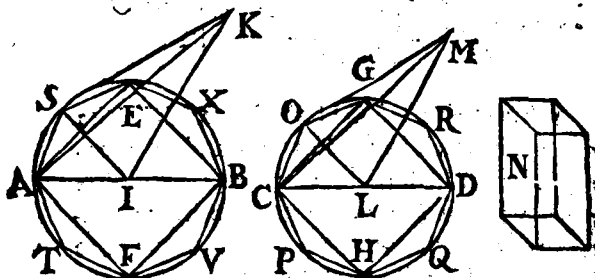
1. Sit vt circ. EFGH ad circ. KLMN ita conus FB ad aliud solidum O, quod fit $<$ cono LD; & fit $LD - O = P$. Supposita praeparatione & argumentatione praecedentis propositionis, erunt segmenta conii, quae in ipsis QL, LR, RM &c. $<$ P. Ergo pyr. KQLRMSNTD $>$ O. Fiat in circ. EFGH simile polygonum EVFXGYHZ. Iam quia pyr. EVFXGYHZB: pyr. KQLRMSNTD $=^{\alpha\alpha}$ 6. 12. polyg. EVFXGYHZ: pol. KQLRMSNT $=^{\alpha\alpha}$ sch. 2. 12. circ. EFGH: circ. KLMN $=^{\beta}$ conus FB: O; β . hyp. atque pyr. EVFXGYHZB $<$ γ cono FB: erit γ . 9. ax. 1. & pyr. KQLRMSNTD $<$ δ solido O; quod δ . 14. 5. repugnat ostensis. Non ergo est vt basis A ad basin C ita conus A ad solidum cono C minus.

2. Si ponas $O >$ cono LD: erit vt O ad conum FB, ita conus LD ad solidum δ minus cono FB, & ergo vt circ. KLMN ad circ. EFGH, ita conus LD ad solidum minus cono FB. Q. F. N. Itaque conii aequae alti, & ϵ . part. 1. proinde cylindri ζ aequae alti, sunt inter se vt ζ . 10, 12, bases. Q. E. D.

* *Schol.* 1. Coni ergo, item cylindri, quorum tam bases quam altitudines aequales sunt, ipsi inter se aequales sunt.

* 2. Quare conorum, item cylindrorum, aequales bases habentium, qui maiorem axin habet, maior est.

PROP. XII. THEOR.



Similes coni & cylindri inter se sunt in triplicata ratione diametrorum basium AB, CD.

Sint bases circuli AEBF, CGDH, & axes IK, LM; & fit conus AEBFK ad solidum quoddam N in triplicata ratione ipsius AB ad CD.

1. Pone N < cono CGDHM. Factis iisdem, quae in praecedentibus, eodem modo ostendemus, esse aliquam pyramidem GOCF, HQDRM in cono CDM, quae maior sit quam N. Fiat in circ. I simile polygonum ASEX-BVFT, quod sit basis pyramidis, verticem cum cono ABK communem habentis. Sint in his duabus pyramidibus triangu-
la CMO, AKS quaedam ex iis, quae pyramides continent, & iunctae sint LQ, IS. Iam quia conus ABK ~ cono CDM, est * AB : CD = IK : LM, ac er-
go

* 24. def.
II.

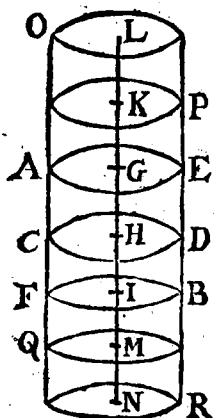
go $AI:IK = CL:LM$. Sed $\angle$ ang. KIA , 9. 11. def. MLC recti sunt: ergo $\triangle AKI \sim \triangle CML$. 11. Similiter, quia $AI:IS = CL:LO$, & ang. $^{\circ}$ 6. 6. $AIS = CLO$, erit $\triangle ASI \sim \triangle COL$; & $^{\circ}$ 2. sch. 33. 6. iterum similiter patet, esse $\triangle SKI \sim \triangle OML$. Hinc quia $^{\circ}$ $KA:AI = MC:CL$, & $AI:AS = 1. def. 6. = CL:CO$: erit ex aequo $KA:AS = MC:CO$. Similiter quia $KS:SI = MO:OL$, & $SI:SA = OL:OC$: erit ex aequo $KS:SA = MO:OC$. Ergo $\triangle ASK \sim \triangle OMC$. Quoniam $^{\circ}$ sch. 5. 6. igitur pyr. $ASIK \sim$ pyr. $COLM$: erit pyr. $^{\circ}$ 9. def. 11. $ASIK:pyr. COLM = (AI:CL)^3$. Sed idem $^{\circ}$ 8. 12. de reliquis pyramidibus $ATIK$, $CPLM$ &c. ostendemus. Ergo $^{\circ}$ pyr. $ASEXBVFT$: pyr. $^{\circ}$ 12. 5. $GOCPHQDRM = (AI:CL)^3 = (AB:CD)^3$ $^{\circ}$ 1. sch. 22. 5. $con. AEBFK:N$. Quare pyr. $GOCPHQDRM <$ solido N ; contra $^{\circ}$ hyp. 6. 14. 5. do dicta.

2. Si ponas $N >$ cono $CGDHM$: quia $N: AEBFK = (CD:AB)^3$, & $^{\circ}$ N ad $AEBFK$ uti conus $CGDHM$ ad solidum cono $AEBFK$ minus: erit conus $CGDHM$ ad solidum quoddam cono $AEBFK$ minus in triplicata ratione ipsius CD ad AD . Q. F. N. $^{\circ}$ Ergo tam $co. r. part. 1. ni$, quam $^{\circ}$ cylindri, sunt in triplicata ratione $^{\circ}$ 10. 12. diametrorum basium. Q. E. D.

PROP. XIII. THEOR.

Si cylindrus AB plano CD secetur, oppositis planis AE, FB parallelo: erit ut cylindrus AD ad cylindrum DF ita axis GH ad axem HL

Pro-



Producatur utrinque axis GI, & fiant ipsi GH aequales quotcunque GK, KL, & ipsi HI aequales quotuis IM, MN. Per puncta L, K, M, N ducantur plana ipsis AE, CD parallela, in quibus fiant circa centra L, K, M, N circuli ipsis AE, FB aequales; & inter hos circulos intelligantur cylindri OP, PA, BQ, QR constituti. Quia cylindri OP, PA,

φ. 1. sch.
II. 12.

AD inter se φ aequales sunt; quotuplex est axis LH ipsius GH, totuplex est cyl. OD ipsius AD. Similiter, quotuplex est axis HN ipsius HI, totuplex est cyl. CR cylindri DF. Praeterea si axis LH > <

z. 2. sch.
II. 12.

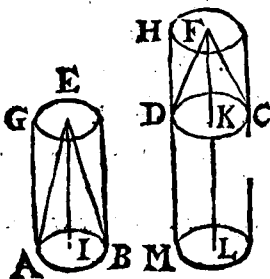
HN: erit z & cyl. OD > < cyl. CR. Ergo cyl. AD: cyl. DF = ψ ax. GH: ax. HI.

ψ. 4. def. 5.

Q. E. D.

PROP. XIV. THEOR.

Aequalibus basibus

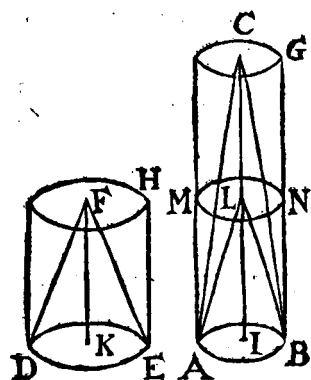


AB, CD insistentes coni ABE, CDF, aut cylindri BG, CH inter se sunt ut altitudines EI, FK.

Producatur axis FK, ut fiat KL = EI, & circa axem KL in basi

bas. CD fit cyl. CM, qui erit = cyl. ^{a. I. sch. II.} BG. Ergo cyl. BG: cyl. CH = cyl. CM: 12.
 cyl. CH = ^{a. 13. 12.} KL: FK = EI: FK. Qua. ^{a. 13. 12.}
 re & conus ABE: con. CDF ^{β. 15. 5.} = EI: FK. ^{β. 15. 5.}
 Q. E. D.

PROP. XV. THEOR.



Aequalium cono-
rum ABC, DEF aut
cylindrorum AG,
DH bases AB, DE
sunt altitudinibus CI,
FK reciproce pro-
portionales. Item
quorum conorum aut
cylindrorum bases
AB, DE altitudini-
b. CI, FK reci-
proce proportionales

sunt, illi inter se sunt aequales.

Cas. 1. Si altitudines aequales sunt: patet,
 in vtraque hypothese etiam bases aequales esse;
 & constat ergo propositio.

Cas. 2. Sit $CI > FK$. Fiat $LI = FK$, &
 per L secetur cylindrus AG plano MN ba-
 sibus parallelo.

Hyp. 1. Et quia cyl. AG = DH: erit cyl.
 AN: cyl. AG = cyl. AN: cyl. DH = ^{a. 11. 12.} bas. ^{a. 11. 12.}
 AB: DE. Sed cyl. AN: cyl. AG = ^{a. 13. 12. &} LI: ^{a. 13. 12. &}
 CI = FK: CI. Ergo AB: DE = FK: CI. 18. 5.
 Q. E. D.

Hyp. 2. Sit bas. AB: bas. DE = alt. FK:
 alt. CI. Est autem bas. AB: bas. DE = cyl.

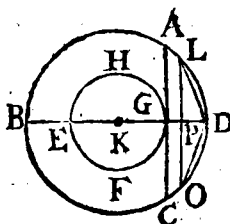
Aa

AN:

AN: cyl. DH, & FK: CI = LI: CI = cyl.
 9. 5. AN: cyl. AG. Ergo cyl. DH = cyl. AG.
 Q.E.D.

Similiter autem & in conis.

PROP. XVI. PROBL.



Duobus circulis ABCD, EFGH circa idem centrum K consistentibus, in maiori ABCD polygonum aequalium ac parium numero laterum describere, quod minorem

circulum EFGH non tangat.

30. 3. Duc diametrum BEGD, & per G ipsi perpendicularem AGC. Bifeca semicirculum BAD, ac eius semissem, atque ita perge donec relinquatur circumferentia LD minor ipsa AD. Ab L in BD duc perpendicularem LPO. Iunge LD, DO, quae aequales erunt.
 1. 10.
 3. 3. & 4. 1. Iam quia AC circulum EFGH tangit, LO vero ipsi AC parallela est extra hunc circulum: LO eum non tanget; multoque minus rectae LD, DO eundem tangent. Si ergo ipsi LD aequales deinceps in circulo ABC aptauerimus*: fiet polygonum aequalium & parium laterum (quia circumf. LD est pars aliquota semicirculi), circulum EFGH non tangens.
 1. cor. 16. 3. Q.E.F.

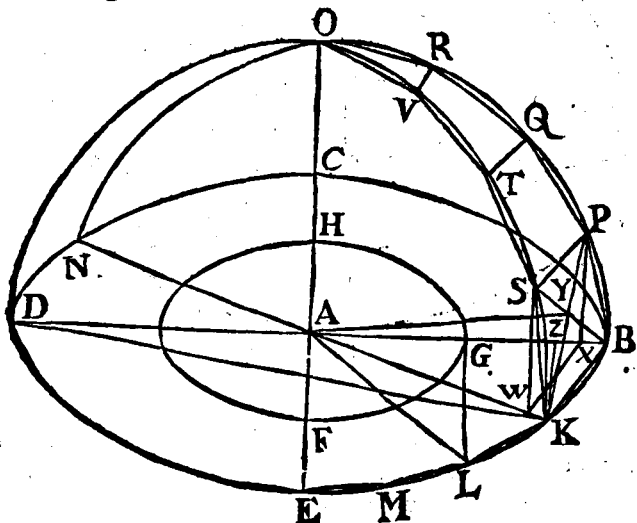
* Coroll.

Ergo recta KG < KP.

PROP.

PROP. XVII. PROBL.

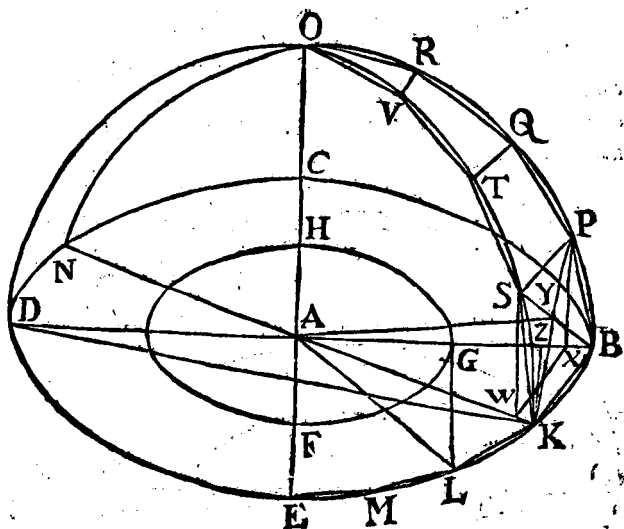
Duabus sphaeris circa idem centrum A consistentibus, in maiori solidum polyedrum describere, quod minoris sphaerae superficiem non tangat.



Secentur sphaerae plano aliquo per centrum. Quia ¹ semicirculi sphaeram generantis planum productum in superficie sphaerae-circulum efficit maximum, siue qui diametrum sphaerae habet: sectiones erunt circuli maximi. Sint illi BCDE, FGHE, & eorum diametri ad rectos angulos ducantur BD, CE. In maiori circulo BCDE polygonum aequalium & parium laterum ² describatur non tangens minorem FGH. Sint in quadrante BE ea ³ 16. 19.

Aa 2

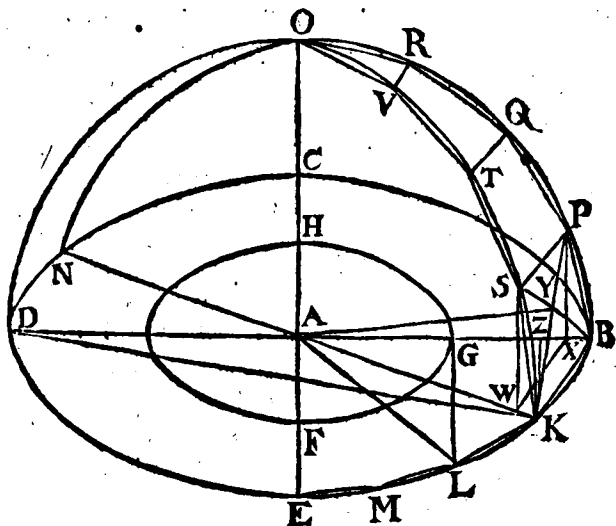
latera



latera BK, KL, LM, ME, & iuncta KA produ-
 catur ad N. Ex A in planum BCDE erigatur
 perpendicularis AO, superficiei sphaerae ma-
 ioris occurrens in O, & per AO ac vtram-
 que BD, KN ducantur plana, quae in super-
 ficie sphaerae efficient maximos circulos, quo-
 rum semisses sint DOB, NOK. Quia AO
 §. 3. def. 11. ipsis BD, KN ad rectos $\frac{1}{2}$ est: erunt OB, OK
 §. 1. def. 3. quadrantes circulorum, & aequales, quia cir-
 culi aequales diametros BD, KN habent.
 Quot ergo latera polygoni sunt in quadrante
 BE, tot aptari possunt illis aequalia in quadrante
 BO, quae sint BP, PQ, QR, RO, & in quadrante
 KO, quae sint KS, ST, TV, VO. Iungantur
 SP, TQ, VR. Ex P, S in planum BCDE de-
 mit-

mittantur $\propto$ perpendiculares PX, SW, quae $\propto$ II. II.
 occurrent ϵ rectis BA, KA. Et quia BP, KS $\propto$ 38. II.
 sunt aequales partes aequalium circulorum, $\propto$ 26. I.
 anguli vero PXB, SWK ϵ recti: erit $\propto$ PX $\equiv$ $\propto$ 7. 3. ax. 1.
 SW, & BX $\equiv$ KW, ideoque AX $\equiv$ $\propto$ AW, & $\propto$ 2. 6.
 XW ipsi KB $\propto$ parallela. Sed quum aequa $\propto$ 33. I.
 les PX, SW etiam parallelae $\propto$ sint: erant $\propto$ 9. II.
 XW, PS parallelae $\propto$ & aequales. Ergo & PS, $\propto$ 7. II.
 BK erunt parallelae $\propto$. Hinc $\propto$ quadrilaterum
 PS, KB est in vno plano. Idem similiter
 constat de quadrilateris QTSP, RVTQ. Sed
 & Δ ROV planum $\propto$ est. Ductis ergo a pun- $\propto$ 2. II.
 ctis P, S, T, Q, R, V ad A rectis, constituetur
 figura solida polyedra inter quadrantes circ-
 BO, KO, ex pyramidibus composita, quarum
 vertex communis A, & bases plana BKSP,
 PSTQ, QTVR, VOR. In vnoquoque late-
 rum KL, LM, ME eadem quae in KB con-
 struantur, & etiam in reliquis tribus quadran-
 tibus, & in reliquo hemisphaerio. Sic fiet so-
 lidum polyedrum maiori sphaerae inscriptum,
 compositum ex pyramidibus, quarum vertex
 communis A. Dico, huius solidi superficiem
 non tangere superficiem minoris sphaerae.

Ducatur enim in planum PSKB ex A per-
 pendicularis AY, & KY, BY iungantur. Et
 quoniam ob ang. AYB, AYK rectos ϵ , BYq +
 AYq $\equiv$ $\propto$ ABq $\equiv$ AKq $\equiv$ KYq + AYq: $\propto$ 47. I.
 erit BY $\equiv$ KY. Similiter patet, esse SY $\equiv$
 PY $\equiv$ BY. Ergo PSKB est quadrilaterum in
 circulo, $\propto$ centro Y interuallo YB, descripto. $\propto$ 15. def. 1.
 Et quia BK $\propto$ XW, ideoque $\propto$ PS; BK, & 14. 5.



vero $= KS = PB$: erit circumferentia huius
 a. 28. 3. circuli, quam recta BK subtendit, quadrante
 c. 33. 6. maior, hinc ang. KYB recto ζ maior, & KBq
 * 12. 2. $> 2 BYq$. Ducatur a K ad BD perpendicu-
 laris KZ, & iungatur DK. Quoniam $AB <$
 $AB + 2 AZ$: erit $DB < 2 DZ$. Hinc quia
 9. 1. 6. $DB : 2 DZ = DB \times BZ : 2 DZ \times BZ =$
 a. cor. 8. 6. $BKq : 2 KZq$: erit $BKq < 2 KZq$, & ergo
 $KZq > BYq$. Sed $KZq + AZq = AKq$
 $= BYq + AYq$. Ergo $AZ < AY$, & a
 a. cor. 16. 12. potiori * $AG < AY$. Ergo polyedri super-
 ficies non tangit minoris sphaerae superficiem.
 Q. E. F.

Aliter.

Et brevius ostendemus, esse $AG < AY$, ex-
 citato ex G in AB perpendiculo GL, & iuncta
 AL.

AL. Nam bisecta circ. BE, & huius semisse, & sic porro, relinquetur tandem circumferentia minor ea, quam recta ipsi GL aequalis in circulo BEE subtendit. Sit illa BK. Ergo recta BK < GL. Sed vt antea patet esse BK > BY. Ergo GL > BY. Sed $GLq + AGq = ALq = ABq = BYq + AYq$. Quare GA < AY. Q. E. D.

* Corollar.

Si in quavis alia sphaera describatur solidum polyedrum, praedicto polyedro in sphaera BCDEO simile: habebunt haec duo solida polyedra triplicatam rationem eius quam diametri sphaerarum habent. Diuisis enim solidis in pyramides numero aequales & eiusdem ordinis: erunt hae pyramides similes. Ergo pyr. BPSKA erit ad pyramidem eiusdem ordinis in altera sphaera in triplicata ratione [^] eius a. cor. 8. 12. quam latus homologum ad homologum habet, id est, quam habet semidiameter sphaerae A ad semidiametrum alterius sphaerae. Idem de quibusvis duabus pyramidibus in vtraque sphaera eiusdem ordinis intelligendum est. Sed [^] vt vna pyramis in ^μ. 12. 5. sphaera A ad vnam in altera, ita solidum polyedrum in sphaera A ad solidum polyedrum in altera sphaera. Ergo solida polyedra sunt in triplicata ratione semidiametrorum, vel diametrorum. Q. E. D.

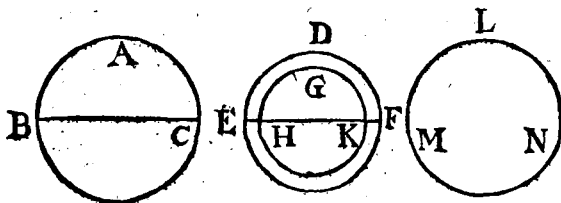
PROP. XVIII. THEOR.

Sphaerae ABC, DEF inter se sunt in triplicata ratione suarum diametrorum BC, EF.

1. Si enim non: fit sph. ABC ad sphaeram GHK ipsa DEF minorem in triplicata ratione BC ad EF. In sph. DEF describatur solidum ^μ. 17. 12.

Aa 4

polye-



polyedrum, quod non tangat minorem GHK, circa commune cum illa centrum constitutam, & in sph. ABC huic polyedro simile describatur, quod erit $\frac{1}{2}$ ad polyedrum in sph. DEF in triplicata ratione BC ad FE, ideoque in eadem ratione, in qua sph. ABC ad sph. GHK. Igitur sph. GHK $>$ polyedro in sphaera DEF descripto, pars toto, Q. E. A.

3. cor. 17.
12.

e. 14. 5.

2. Si ponas, sph. ABC ad sph. LMN ipsa DEF maiorem esse in triplicata ratione BC ad EF: erit sph. LMN: sph. ABC $=$ (EF: BC) 3. Sed sph. LMN ad sph. ABC vt sph. DEF ad sphaeram * ipsa ABC minorem. Ergo sph. DEF erit ad sphaeram ipsa ABC minorem in triplicata ratione diametri EF ad diametrum BC. Q. F. N.

7. part. 1.

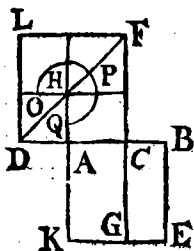
* Corollar.

Hinc vt sphaera ad sphaeram, ita est polyedrum solidum in illa ad polyedrum in hac simile & similiter descriptum.

E V C L I D I S ELEMENTORVM

LIBER XIII.

PROP. I. THEOR.

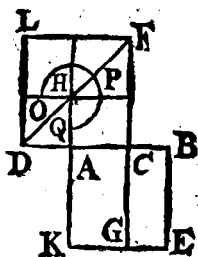


Si recta linea AB extrema ac media ratione secta fuerit: maior portio AC assumens dimidiam AD totius AB quintuplum potest eius, quod a dimidia AD totius fit, quadrati.

Describantur ex AB, DC quadrata AE, DF. Deinde in DF describatur figura, & producaturs FC ad G. Est ergo $CE = AB \times BC = ACq = HF$, *3. def. & 17. 6.* Iam quia $AK = AB = 2 AD = 2 AH$, & *17. 6.* $AK : AH = AG : CH$: erit $AG = 2 CH$. *hyp. = CH + HL*, ideoque $AE =$ gnomoni OPQ . Sed $AE = ABq = 4 ADq = 4 DH$, *4. 2. 1. 6.* Ergo gn. $OPQ = 4 DH$, & proinde $43. 1.$ de DF , id est $CDq = 5 DH$ vel $5 ADq$. *2. 2. ax. 1. n. sch. 4. 2.* Q. E. D.

PROP. II. THEOR.

Si recta linea CD partis sui ipsius AD quintuplum possit, atque duplum AB distae partis AD extrema ac media ratione secetur: maior portio est pars reliqua CA eius quae a principio rectae lineae CD.



9. 3. ax. 1.

sch. 4. 2.

x. constr.

17. 6.

lem. seq.

3. def. 6.

Descriptis enim iisdem, quae antea, quia $DF = CDq = 5 ADq = 5 DH$: erit $\text{gnomon } OPQ = 4 DH$. Sed $4 DH = 4 ADq = ABq = AE$. Ergo $\text{gn. } OPQ = AE$. Deinde quia ut in praec. ostenditur $AG = CH + HL$: erit $\text{quadratum } HF = CE$, id est $ACq = AB \times BC$. Quare $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC}$; & quia $AB > AC$, erit $AC > CB$. Igitur si recta AB extrema ac media ratione fecatur: maior eius portio est CA. Q. E. D.

LEMMATA.

At vero duplam ipsius AD, quae est AB, maiorem esse quam AC, sic demonstrabitur.

hyp.

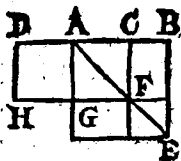
Si negas: fit $AC = 2 AD$. Erit ergo $ACq = 4 ADq$, & $ACq + ADq = 5 ADq = CDq$, pars tota. Q. E. A. Si ponas $2 AD < AC$, similiter ostendemus, totum esse parte sua minus. Q. E. A. Ergo $2 AD > AC$. Q. E. D.

PROP. III. THEOR.

Si recta linea AB extrema ac media ratione secta fuerit: portio minor CB assumens dimidiam CD maioris portionis AC quintuplum potest eius, quod a dimidia CD maioris portionis fit, quadrati.

Describatur enim ex AB quadratum AE, & figura compleatur. Ergo, quia $AC = 2 CD$:

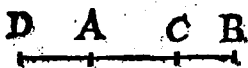
PROP. V. THEOR.



Si recta linea AB extrema ac media ratione secetur, adiciaturque ipsi AD aequalis maiori portioni AC: erit tota linea BD extrema ac media ratione secuta, & maior portio erit ea, quae a principio posita est, recta linea AB.

Descripto enim ex AB quadrato AE, & ψ . 3. def. 6. completa figura: erit $CE = \psi$ CG. Sed α . sch. 48. 1. $CE = GE$, & $CG = \alpha$ GD. Ergo $GD = GE$, & hinc $HB = AE$, id est $BD \times DA = AB^2$. Quare α $BD : AB = AB : DA$, & $AB > AD$, quia $BD > AB$. Hinc patet ψ Q. E. D.

PROP. VI. THEOR.



Si recta linea rationalis AB extrema ac media ratione secuta fuerit: utraque portio AC, CB irrationalis est, quae apotome appellatur.

Producatur CA, & sit $AD = \frac{1}{2} AB$. Ergo $CD^2 = \beta$ AD^2 . Hinc, quia AD est ρ , erit γ CD^2 ρ , ac ergo ipsa CD ρ . Sed δ CD non Σ AD. Ergo CD, DA erunt ρ ϵ . ideoque AC apotome ϵ erit. Deinde quia $AB \times BC = \zeta$ AC^2 : ACq ad ρ AB applicatum latitudinem faciet BC, quae proinde ϵ erit apotome prima. Q. E. D.

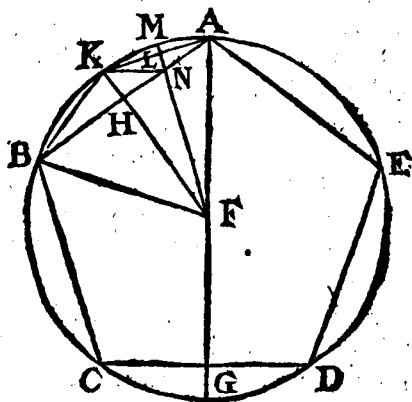
PROP.

$\angle CDE = 2 \angle CDE$: quare $\angle AEC = 4 \angle CDE$. Est ergo $\angle BDE = \angle BEC$. Sed $\angle B$ est communis $\triangle$ is BED, BEC . Quare $\angle BD : BE = BE : BC$, hoc est $BD : DC = DC : CB$. Est autem $DC > CB$, quia $BD > DC$. Ergo patet, Q.E.D.

* Schol.

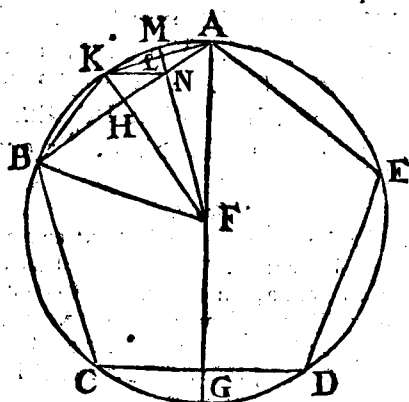
Et conuerſim, ſi qua recta BD extrema ac media ratione ſecetur: erit minor portio BC latus decagoni in eo circulo, in quo maior CD eſt latus hexagoni. Nam, eadem deſcripta figura, quia $\angle AEC = 2 \angle BCE$, & $\angle BCE = 2 \angle CDE = 2 \angle BEC$ (per 6. 6.): erit circumf. $AC = 4 BC$, ideoque recta BC latus decagoni.

PROP. X. THEOR.



Si in circulo $ABCDE$ pentagonum æquilaterum deſcribatur: latus pentagoni AB poteſt & hexagoni & decagoni latus in eodem circulo deſcriptorum.

Summa



Sumatur centrum circuli F , & ducatur diameter AFG , & iungatur FB . Ab F ad AB ducatur perpendicularis FHK , & iungantur AK, KB . Rursus ab F ad AK ducatur perpendicularis $FNLM$, & iungatur KN . Igitur quia circ. $ABCG = AEDG$, & circ. $ABC = AED$: erit circ. $CG = GD$, ideoque $CGD = 2 CG$. Rursus quia $BF = AF$, & anguli

$\alpha. 5. \& 26. I.$ ad H aequales sunt: erit α ang. $BFH = AFH$,

$\alpha. 26. 3.$ ideoque circumf. $BK = KA$, & $AKB = 2 BK$, & hinc AK erit latus decagoni. Similiter patet, esse circ. $BK = AMK = 2 KM$. Iam,

$\beta. 7. ax. I.$ quia $CGD = AKB$: erit β circ. $CG = BK = 2 KM$. Sed circ. $CB = AKB = 2 BK$. Er-

$\gamma. 2. ax. I.$ go γ circ. $BCG = 2 BKM$, & ob id ang. BFG

$\delta. 33. 6.$ $= 2 BFM$. Sed ang. $BFG = BAF +$

$\epsilon. 32. I.$ $ABF = 2 BAF$. Ergo β ang. $BAF = BFM$:

$\zeta. 5. I.$ Quum igitur $\Delta BFA, BFN$ sint aequiangula:

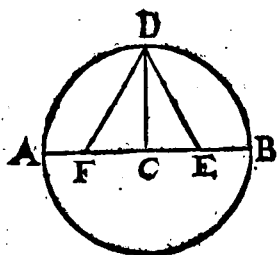
$\eta. 4. 6.$ erit η $AB : BF = BF : BN$, & proinde $AB \propto BN$.

BN

$BN = {}^9 BFq$. Rursus quia ang. ad L re 9. 17. 6.
 & sunt, & $AL = LK$: erit $\angle$ ang. $LAN = 3 \cdot 3$.
 $= LKN$. Sed quia recta $AK^{\wedge} = KB$, est $\angle$ 4. 1.
 ang. $LAN = \angle KBA$. Ergo ang. $KBA^{\wedge} = 29 \cdot 3$.
 $= AKN$. Quare in Δ is aequiangulis ANK ,
 ABK erit $BA : AK = KA : AN$, & hinc
 $AB \times AN = {}^9 AKq$. Ergo $ABq = {}^{\mu} AB \mu \cdot 2 \cdot 2$.
 $\times BN + AB \times AN = BFq + AKq$. Est $\angle$ cor. 15. 4.
 autem BF latus γ hexagoni, & AK decagoni.
 Q.E.D.

* Schol.

Hic praxin faciliorem trademus problematis
 II. 4. In dato circulo pentagonum aequilaterum &
 aequiangulum describere.



Super diametro AB
 ex centro C erigatur
 perpendicularis CD .
 Bifecetur BC in E , &
 iungatur ED , cui ca-
 piatur aequalis EF .
 Iuncta FD erit latus
 pentagoni in circulo

ABD describendi.

Nam quia (per 6. 2.) $BF \times FC + CEq =$
 $EFq = EDq = CDq + CEq$: erit $BF \times FC =$
 $CDq = BCq$. Quum ergo sit $BF : BC = BC : CF$:
 erit BF extrema ac media ratione secta. Sed ma-
 jor portio BC est latus hexagoni in circulo ABD .
 Ergo CF est latus decagoni in eodem (per sch.
 praec.); & hinc $DF = \sqrt{(DCq + CFq)}$ latus
 pentagoni. Q.E.F.

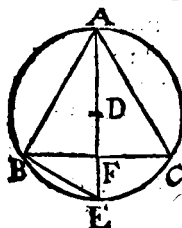
Bb

PROP.

non $\leq$ MK. Vtraque tamen p existente, erunt BK, KM p E. Quare MB est apotome* & ipsi congruens MK. Dico, & MB esse α . 74. 10. apotomen quartam. Sit enim $\sqrt{(BKq - KMq)} = N$. Et quia $KF \leq FB$; erit $KB \leq \beta$. 16. 10. $FB \leq BH$ rationali expositae. Deinde quia $BKq : KMq = 5 : 1$, & conuertendo $BKq : Nq = 5 : 4$: erit N non $\leq$ BK. Ergo γ MB erit apotome quarta. Hinc, quum sit ABq γ . 4. def. tert. 10. $= \delta$ MB $\times$ BH, erit AB α quae vocatur δ . cor. 8. 6. & 31. 3. minor. Q. E. D.

* Cor. Diameter circuli AG ex angulo A pentagoni regularis ducta & arcum CD a latere opposito subtensum, & latus ipsum oppositum CD ad angulos rectos bifecat. α . 95. 10.

PROP. XII. THEOR.



Si in circulo ABC triangulum aequilaterum ABC describatur: trianguli latus AB potentia triplum est eius DA quae ex circuli centro D.

Nam, producta AD in E, quia circumf. BEC est tertia pars circuli, & $BE = \frac{1}{2} EC$: erit BE sexta pars ζ . 3. ax. 1. circuli, ideoque recta BE latus hexagoni $= \eta$. cor. 15. 4. DA. Et quia $ABq + BEq = \theta$ AEq $= 4$ θ . 31. 3. DAq: erit $ABq = \frac{2}{3}$ DAq. Q. E. D.

* Schol.

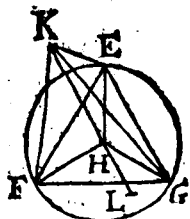
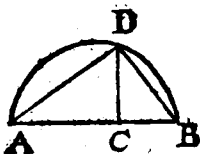
1. AEq : ABq $= 4 : 3$.

2. ABq : AFq $= 4 : 3$. Nam $AEq : ABq = \alpha$. cor. 8. 6. & 22. 6. ABq : AFq.

3. DF = FE. Nam $\triangle EBD$ aequilaterum est, & ADF ad BC perpendicularis*. Ergo $DF = FE$. α . 4. 1. α . cor. 3. 3.

4. Hinc AF = 3 FD.

PROP. XIII. PROBL.



Pyramidem † constituere, & sphaera comprehendere data; atque etiam demonstrare, quod sphaerae diameter AB est potentia sesquialtera lateris ipsius pyramidis.

- μ. 9. 6. Secetur AB in C^μ ita, vt $AC = 2 CB$. Super AB describatur semicirculus ADB, & ex C ad AB ducatur perpendicularis CD, & iungatur AD. Fiat circulus EFG centro H intervallo CD, & in eo describatur ^π triangulum aequilaterum EFG. Iungantur HE, HF, HG. Ex H plano huius circuli excitetur ad rectos HK, quae fiat $= AC$, & iungantur KE, KF, KG. EFGK erit tetraedrum desideratum.
- ξ. 3. def. 1. Etenim quia ang. KHE est ^ξ rectus, ideoque $= ACD$, & $KH = AC$, $HE = CD$: erit ^π
- II. $KE = AD$. Similiter $KF = AD = KG$.
- π. 4. I. Et quoniam $AB = 3 BC$, & $AB : BC = ^π ADq :$
- π. lemma DCq : erit $ADq = 3 DCq = ^ξ 3 HEq = ^π EFq$.
- ξ. constr. Hinc $EF = AD$; & ergo $FG = GE = EF = AD = KE = KF = KG$. Sunt ergo Δa EFG,
- π. 12. 13. EKG, FKG, EKF aequilatera & aequalia. Ergo EFGK est ^π tetraedrum.
- π. 26. def. II.

2. Pro-

† Vel potius *tetraedrum*: quod & in sequentibus intellige.

2. Producat^{ur} KH in L, ut sit HL = CB.
 Quia $\propto$ AC: CD = CD: CB: erit KH: HE $\propto$ cor. 8. 6.
 = EH: HL. Ergo semicirculus super KL
 descriptus $\propto$ transibit per E, & manente KL, ϕ . sch. 13. 6.
 conuersus transibit etiam per G & F, quod
 eodem modo ostendetur. Ergo $\propto$ sphaerae. 14. def.
 data, cuius diameter est AB = KL, compre- 11.
 hendet tetraedrum EFGK. Q. E. F.

3. Quia AB: BC = 3: 1: erit conuer-
 tendo AB: AC = 3: 2. Est vero BA:
 AD $\propto$ = AD: AC, & hinc AB: AC = ψ ψ . 2. cor.
 ABq: ADq. Ergo ABq = $\frac{2}{3}$ ADq = $\frac{2}{3}$ KEq. 20. 6.
 Q. E. D.

L E M M A.

Demonstrandum autem est, esse AB: BC =
ADq: DCq.

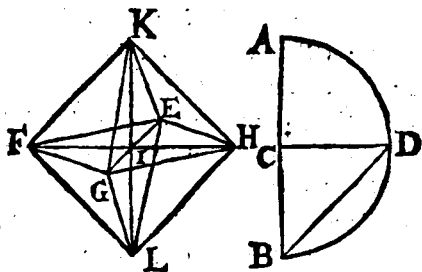
Nam quia BA: AD = $\propto$ AD: AC: erit BA
 $\times$ AC = ADq. Et quia AC: CD = $\propto$ CD:
 BC: erit AC $\times$ CB = CDq. Hinc AB: BC
 = $\propto$ AB $\times$ AC: AC $\times$ BC = ADq: CDq. $\propto$ 1. 6.
 Q. E. D.

* *Coroll.* Diameter sphaerae KL est sesquialtera
 altitudinis KH tetraedri inscripti.

* *Schol.* Latus tetraedri FG potentia est sesqui-
 alterum altitudinis tetraedri HK. Nam FGq:
 HKq = ADq: ACq = ABq: ADq = 3: 2.

PROP. XIV. PROBL.

Ostendrum constituere, & eadem sphaera
comprehendere, qua & pyramidem; atque de-
monstrare, sphaerae diametrum AB potentia du-
plam esse lateris ipsius octaedri.



Data diameter AB bifecetur in C, & describatur super AB semicirculus, & ex C in AB ducatur perpendicularis CD, & DB iungatur. Fiat quadratum EFGH, cuius latus = BD. Ex puncto I intersectionis diametrorum EG, FH plano EFGH ad rectos ducatur KIL, & fiat $KI = IL = IE$, & iungantur KE, KF, KG, KH, LE, LF, LG, LH.

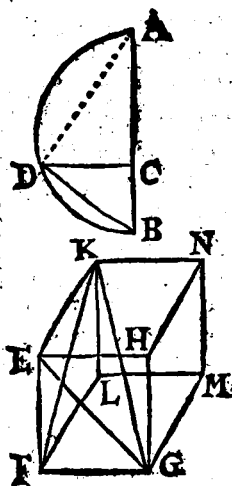
1. Nam quia $^{\circ}EI = IH$, & ang. EIH rectus: erit $^{\circ}EHq = 2\text{ Elq}$. Et quum $KI = IE$, ac ang. KIE rectus $\therefore$ erit & $KEq = 2\text{ Elq}$. Hinc $EH = KE$. Similiter $KH = HE$. Ergo ΔEKH est aequilaterum. Eodem modo ostendemus, reliqua triangula, quorum bases sunt EF, FG, GH, HE & vertices K, L, esse aequilatera. Et patet, omnia haec Δ a inter se aequalia $^{\circ}$ esse. Ergo KEFGHL est octaedrum. Q. E. F.

2. 3. Quia $KI = IE = IL$: semicirculus super KL descriptus transibit per E. Et manente KL, conuersus hic semicirculus transibit etiam per F, G, H. Ergo sphaera diametri KL comprehendet hoc octaedrum. Sed & data sphaera. Nam quia $KE = EL$, & ang. in semi-

femicirculo KEL $\angle$ rectus est, erit $KLq = {}^B 2. 31. 3.$
 $2 KEq$. Est vero $AB = 2 BC$, & ${}^A AB: BC = {}^A cor. 8. \&$
 $= ABq: BDq$. Ergo $ABq = 2 BDq = 2$ $20. 6.$
 $KEq = KLq$. Hinc diametro datae AB aequa-
 lis est ipsa KL , ideoque octaedrum sphaera da-
 ta comprehenditur; & AB potentia dupla est
 lateris octaedri KE . Q. F. F. & D.

* *Coroll.* Octaedrum constar ex duabus pyrami-
 dibus aequalibus, basin quadratam habentibus, &
 altitudinem aequalem semidiametro sphaerae cir-
 cumscriptae.

PROP. XV. PROBL.



Cubum constituere, &
eadem sphaera comprehen-
dere, qua & priores; at-
que demonstrare, sphaerae
diametrum AB lateris po-
tentia triplam esse.

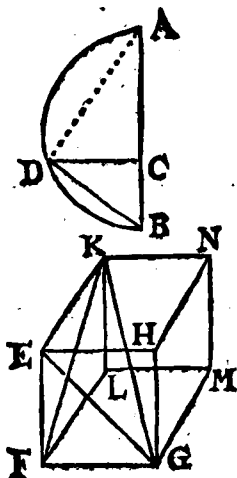
Ex AB auferatur pars
 tertia BC , & super AB
 descripto semicirculo,
 ducatur ad AB perpen-
 dicularis CD , & iunga-
 tur DB . Fiat quadra-
 tum $EFGH$ habens la-
 tus $= DB$. Ex punctis
 E, F, G, H plano $EFGH$
 ad rectos $\angle$ excitentur EK, FL, GM, HN , $\angle 12. 11.$
 quarum quaeque fiat $= EF$. Iungantur $KL,$
 LM, MN, KN .

1. Quidem ex constructione satis patet, soli-
 dum genitum esse cubum. Q. E. F.

25. def. 11.

Bb 4

2. 3. Iun.



* 3. def.

II.

λ. sch. 13.6.

μ. constr.

* 4. II.

2. 3. Iungantur EG, KF, KG. Et quia ang. KEG rectus * est: semicirculus super KG transibit^λ per E. Rursus quia * anguli GFE, GFL recti sunt, ideoque GF plano EL recta^λ est, & hinc^λ ang. GFK rectus: alius semicirculus super KG transibit^λ per F. Idem de reliquis punctis H, N, M, L ostendetur. Quare semicirculus super KG, manente KG, conuersus

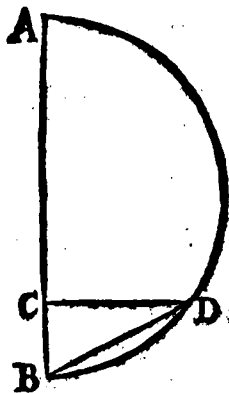
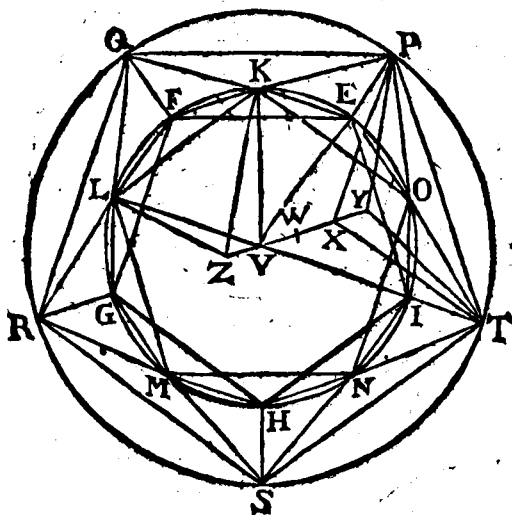
faciet sphaeram, quae cubum EM comprehendet. Dico autem, diametrum $KG = AB$. Nam quia $EGq = \frac{1}{2} EFq = \frac{1}{2} EKq$: & $KGq = EGq + EKq$: erit $KGq = 3 EKq = 3 BDq$. Sed quum sit $AB = 3 BC$, & a. cor. 8. & $AB:BC = ABq:BDq$: erit $ABq = 3 BDq = KGq$. Ergo $KG = AB$. Itaque cubus factus est, quem data sphaera comprehendit, & diameter AB potentia tripla est lateris eius FG. Q. E. F. & D.

* Schol. Quia AD erat * latus tetraedri sphaerae datae inscripti: patet, diametrum sphaerae AB posse latera tetraedri & cubi in eadem inscriptorum.

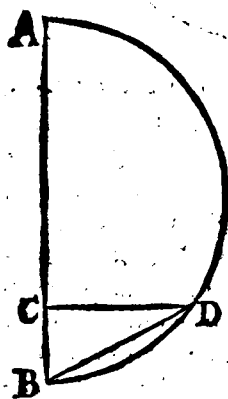
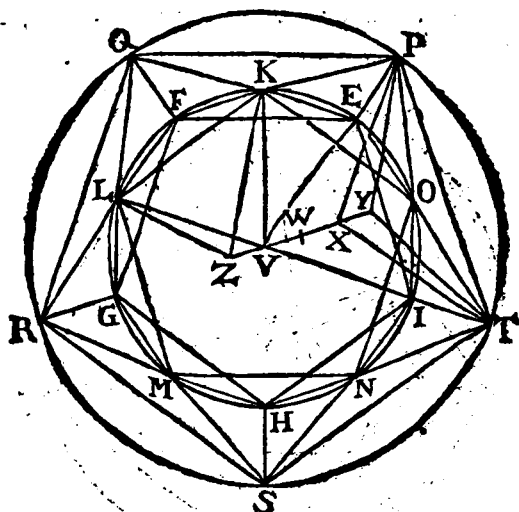
PROP. XVI. PROBL.

Icosaedrum constituere, & eadem sphaera comprehendere, quae & praedictas figuras; atque

que etiam demonstrare, icosædri latus irrationalem esse lineam, quæ minor appellatur.



I. A datae sphaerae diametro AB abscindatur pars quinta BC, & super AB descripto semicirculo, ducatur ad AB perpendicularis CD, & BD iungatur, quo intervallo describatur circulus EFGHI. Huic inscribatur pentagonum aequilaterum & aequiangulum EFGHI. Circumferentiae EF, FG, GH, HI, IE bisecentur in K, L, M, N, O, & iungantur KF, FL, LG, GM, MH, HN,



HN, NI, IO, OE, EK, item
KL, LM, MN, NO, OK.
Erit ergo KLMNO pen-
tagonum aequilaterum &
aequiangulum, & EO de-
cagoni latus. A punctis
E, F, G, H, I ipsi circuli
plano ad rectos erigantur
EP, FQ, GR, HS, IT, semi-
diametro VK singillatim
aequales, & iungantur PQ,
QR, RS, ST, TP, PK, PQ,
QL, LR, RM, MS, SN,

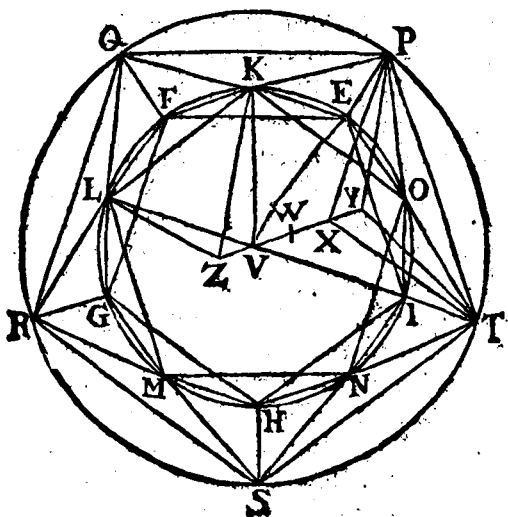
g. 6. II.
g. 33. I.

NT, TO, OP. Iam quia EP, IT parallelae
sunt, erit $PT = EI$, & hinc PT erit latus
pentagoni aequilateri in circulo QRSTP ipsi
EFGHI aequali. Idem de reliquis PQ, QR,
RS,

RS, ST demonstrabitur eodem modo. Erit ergo PQRST pentagonum aequilaterum. Et quia PE est latus hexagoni, EO vero decagoni: erit, ob ang. PEO rectum^r, PO latus^v pentagoni in eodem circulo. Idem patet de^{v. 10. 13.}

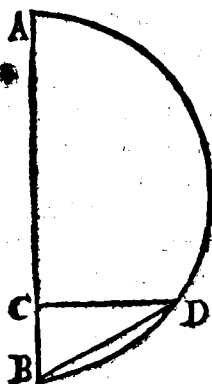
OT. Ergo POT erit Δ aequilaterum. Similiter ostenditur, ipsa PKQ, QLR, RMS, SNT esse Δ a aequilatera. Patet etiam ex dictis KPO, OTN, NSM, MRL & LQK Δ a aequilatera esse. Ex V centro circuli EFGHI ipsius plano ad rectos ducatur recta, in qua ex vna parte puncti V capiantur VX = lateri hexagoni, & XY = lateri decagoni, & ex altera VZ = XY. Iungantur PY, PX, YT, EV, KZ. Quia VX, PE sunt ϕ parallelae & aequales ϕ : erit PX parallela & = EV lateri ϕ . conftr. hexagoni, & ang. PXV rectus $\propto$, hinc & PXV $\propto$ sch. 29. $\propto$ rectus. Quare, quum XY sit decagoni latus, erit PY = lateri pentagoni = PT. Idem iunctis TX, VI patet de recta YT. Ergo PYT est Δ aequilaterum. Similiter aequilatera sunt Δ a reliqua, quorum vertex est Y, & bases sunt TS, SR, RQ, QP. Rursus quia ϕ KZq = KVq + VZq: erit KZ = lateri pentagoni = KL. Eodem modo, iunctis LV, LZ, ostendetur LZ = KL. Ergo Δ LZK aequilaterum est. Idem ostendetur de singulis Δ is, quorum bases sunt LM, MN, NO, OK & vertex communis est Z. Constitutum ergo est solidum viginti triangulis aequaliteris contentum, quorum aequalitas etiam patet. Q.E.F.

2. Quia



ψ. 9. 13.
φ. constr.

α. sch. 13. 6.



2. Quia VX, XY sunt
latera heragoni & deca-
goni: erit $\angle YV: VX =$
 $VX: XY$. Hinc $\angle YV:$
 $VK = KV: VZ$. Ergo
super YZ descriptus semi-
circulus, transibit per K .
Similiter quia $ZX = YV$,
& $PX = VX$, erit $ZX:$
 $XP = PX: XY$, & hinc,
ob ang. ad X rectos, semi-
circulus super ZY transi-
bit etiam per P . Quare
quum idem similiter de reliquis verticibus
angulorum icosaedri ostendi possit; constat,
semicirculum circa ZY manentem rotatum
transitu-

transituum esse per vertices omnium angulorum icosaedri, & ergo hoc icosaedrum comprehensum iri sphaera diametri ZY. Et quoniam, bisecta VX in W, $WYq = 5 WXq$; 2. 3. & 9.
 ZY vero $= 2 WY$, ac $VX = 2 WX$: erit β 13.
 $ZYq = 5 VXq$. Est autem $AB = 5 BC$, & β 15. 5.
 $ABq : BDq = 7 AB : BC$. Ergo quia ABq 7. cor. 8. &
 $= 5 BDq = 5 VXq = ZYq$; sphaera diametri ZY icosaedrum comprehendens erit datae sphaerae aequalis. Q. E. F. 20. 6.

3. Denique quia diameter data AB est p , & $ABq = 5 BDq$: erit δ & BD ideoque tota δ . 6. def.
 diameter circuli EFGHI rationalis. Hinc 10.
 quum latus pentagoni KL sit ϵ minor; & eadem KL sit quoque latus icosaedri: patet, latus icosaedri esse irrationalem, quae minor vocatur. Q. E. D. 11. 13.

* Corollar.

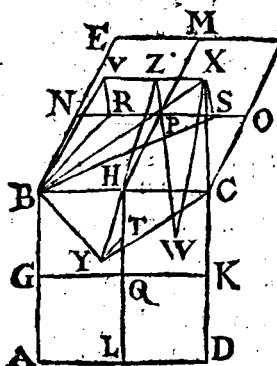
Sphaerae diameter potest quintuplum eius quae ex centro circuli quinque icosaedri latera ambientis. Et diameter sphaerae icosaedro circumscriptae composita est ex latere hexagoni & duplo latere decagoni, quae in eodem circulo describuntur.

PROP. XVII. PROBL.

Dodecaedrum constituere, & eadem sphaera comprehendere qua & praedictas figuras; atque etiam demonstrare, dodecaedri latus esse irrationalem, quae apotome appellatur.

1. Exponentur praedicti cubi & duo plana 2. 15. 13.
 ABCD, BCFE, quae sibi inuicem recta sunt, & eorum singula latera bisecentur, & iungantur

v. 30. 6.



Fitur GK, HL, HM, NO. Rectae NP, PO, HQ secantur extrema & media ratione in R, S, T punctis, in quibus ad plana cubi & ad exteriores eius partes excitentur perpendiculares RV, SX, TY, quae fiant aequales ipsis RP, PS,

QT. Iungantur VB, BY, YC, CX, VX, quae terminabunt pentagonum dodecaedri. Nam, iuncta RB, quia $\frac{PN}{NR} = \frac{RP}{RV}$ & $BN = PN$, ac $RP = RV$: est $BR = BN + NR = 3RV$, ideoque $BV = 2RV$. Sed quia $PN = PO$, ac ob id $RP = PS$: est $VX = RS = 2PR = 2RV$. Ergo $BV = VX$. Similiter BY, YC, & CX ipsis BV, VX aequales ostenduntur. Sunt autem hae quinque rectae in vno plano. Nam ipsi RV vel SX ducatur parallela PZ ad exteriores cubi partes, & iungantur ZH, HY. Et quia $\frac{HQ}{QT} = \frac{TH}{HT}$, & $HQ = HP$, ac $TY = QT = PZ$; est $HP : PZ = YT : TH$. Sed HP, YT, eidem plano BD ad rectos insistentes, sunt parallelae. Ergo ZHY est vna recta, & proinde in vno plano. Pentagonum ergo est BYCXV, & aequilaterum. Dico etiam aequiangulum esse. Iungantur enim BX, BS. Quoniam NP secta est in R extrema ac media ratione,

s. 4. 13.

v. 47. I.

v. 7. 14.

v. 33. I.

a. 3. def. 6.

v. 6. II.

v. 32. 6.

l. I. II.

v. 2. & 7. II.

tionem, & $SP = PR$: erit $\angle NSQ + SPQ = 3 \times 5. 13.$ &
 PNQ . Hinc $NSQ + SXQ = 3 \angle NBQ$, & $NSQ +$ 4. 13.
 $SXQ + BNQ = 4 \angle NBQ$, id est $\angle SBQ + SXQ =$
 $BXQ = 4 \angle NBQ$. Ergo $BX = 2 \angle NB = BC$.
 Quare in $\triangle$ is BVX , BYC erit $\angle$ ang. $BVX = \angle 8. 1.$
 BYC . Similiter ostendetur ang. $VXC = BYC$.
 Ergo pentagonum $BYCXV$ est $\angle$ aequiangulum. 6. 7. 13.
 Si igitur ita ad vnumquodque duodecim la-
 terum cubi eadem construantur, quae hic ad
 latus BC : figura solida constituetur, duode-
 cim pentagonis aequilateris & aequiangulis
 & aequalibus contenta. Q. E. F.

2. Producat^{ur} ZP intra cubum. Occurret
 ergo diametro cubi, & ambae se bifecabunt $\angle$, 39. 11.
 quod fiat in W . Est ergo W centrum $\angle$ sphae- 15. 13.
 rae cubum comprehendentis, & dupla $PW =$
 $\angle$ lateri cubi, ideoque $PW = PN$. Et quia 34. 1.
 $PZ = PS$, erit $ZW = NS$. Iam quum prae-
 terea $ZX = PS$, & $NSQ + SPQ = 3 \angle PNQ$: erit
 $3 \angle PNQ = ZWQ + ZXQ = \angle XWQ$. Sed semi- 47. 1.
 diameter sphaerae cubum comprehendentis
 potest etiam $\angle$ triplum dimidii lateris cubi PN .
 Ergo XW est semidiametro sphaerae cubo cir-
 cumscriptae aequalis. Quare quia W est cen-
 trum; erit X in superficie sphaerae. Simili-
 ter vertex cuiuslibet reliquorum angulorum
 dodecaedri in superficie sphaerae esse demon-
 stratur. Ergo dodecaedrum sphaera com-
 prehensum est data. Q. E. F.

3. Quoniam $\angle NP$: $PR = PR$: RN , ideo- 1. 3. def. 6.
 que $\angle NO$: $RS = RS$: $2 \angle RN = RS$: $RN + SO$; 15. 5.
 NO autem $> RS$, ideoque $RS > NR + SO$:
 erit $\angle$ rectae NO extrema ac media ratione se-
 ctae

4.6. 13.

• • •

* 2. *Coroll.* Liqueet etiam, rectam subrendentem

PROP. XVIII. PROBL.

*Latera quinque
figurarum expo-
nere, Et inter se
comparare.*

i. Exponatur
datae sphaerae
diameter AB, &
secetur in C, D
sic, ut $AC = CB$,
& $AD = 2 DB$.

Fiat semicircu-

lus AEB, & in AB perpendiculares duçantur
CE, DF, & AF, FB iungantur. Et quia $AB = 3$

α . cor. 19. 5. $BD : \text{est} \propto AB = \frac{1}{2} AD$. Hinc quia $AB : AD$
 β . cor. 8. $\& = \beta$ $ABq : AFq : \text{est} ABq = \frac{1}{2} AFq$. Ergo
 20. 6. AF est γ latus tetraedri.

7. 13. 13. 2. Quia $ABq: BFq = AB: BD = 3: 1$:
8. 15. 13. BF est latus cubi.

3. Iunctis AE, EB, est ABq : BEq = ² AB : BC = 2 : 1. Ergo BE est latus octaedri.

4. In AB ducatur perpendicularis $AC \perp AB$. Iuncta GC , a puncto H ducatur in AB per-

perpendicularis HK. Iam quia $HK: KC = 2.4.6.$
 $GA: AC = 2: 1$: erit $HKq = 4 KCq$, ideo-
 que $5 KCq = CHq = CBq$. Et quoniam
 $AB = 2 BC$, & $AD = 2 DB$: erit $DB^2 = 2.5.5.$
 CD , ideoque $CB = 3 CD$, & $CBq = 9 CDq$.
 Ergo $KC > CD$. Fac $CL = KC$, & in AB
 duc perpendicularem LM, iunge MB. Quia
 $CBq = 5 KCq$; est $^9 ABq = 5 KLq$. Ergo $^9. 15. 5.$
 KL est latus hexagoni in circulo quinque-
 icosaedri latera ambientis, ideoque $AK = 13.$
 $LB =$ lateri decagoni in eodem circulo. Sed
 $ML = ^* HK = 2 KC = KL =$ lateri hexa-
 goni. Ergo MB est $^{\wedge}$ latus pentagoni in eo-
 dem circulo, ideoque latus $^{\mu}$ icosaedri. $^{\mu}. 16. 13.$

5. Secetur BF extrema ac media ratio-
 ne: erit maior eius portio BN latus dode-
 caedri $^{\nu}$. $^{\nu}. I. cor. 17.$

6. Ex his liquet, latera tetraedri, octaedri,
 & cubi esse $\rho \in$ diametro AB sphaerae. Nam
 quarum partium 6 est ABq, earum 4 est AFq,
 trium BEq, & duarum BFq. Ergo $^{\frac{4}{3}} AFq = 5. 22. 5.$
 $^{\frac{4}{3}} BEq = 2 BFq$, & $BEq = \frac{3}{2} BFq$. Icosae-
 dri vero & dodecaedri latera nec inter se nec
 ad praedictarum figurarum latera sunt in ra-
 tionibus rationalibus: quia illius latus $^{\mu}$ est
 minor, huius apotome $^{\circ}$. $^{\circ}. 17. 13.$

7. Dico, MB icosaedri latus maius esse latere
 dodecaedri BN. Nam $^{\beta} FBq: BDq = AB: ^{\beta}. cor. 8. \&$
 $BD = 3: 1$. Sed $ADq = 4 BDq$. Ergo $20. 6.$
 $AD > FB$, ideoque $AL > FB$. Iam AL se-
 cta est extrema ac media ratione $^{\pi}$, & maior $^{\pi}. 9. 13.$
 eius portio est KL; hinc quia & FB extrema ac

Cc

media

media ratione facta est, & eius maior portio
 c. 3. def. 6. BN est: erit KL ϵ $>$ BN. Ergo ML =
 vel 7. 14. KL $>$ BN, ideoque ϵ MB $>$ BN. Q. E. F.
 e. 19. I.

Schol.

*Dico, praeter iam dictas quinque figuras non
 constitui aliam figuram †, quae sub figuris aequi-
 lateris & aequiangulis, inter se aequalibus,
 contineatur.*

c. 11. def.
 II.

7. 21. II.
 v. 5. sch. 32.
 I.

φ. 2. sch. II.
 4.

Ex duobus enim angulis planis ϵ non con-
 stituitur angulus solidus. Ex tribus autem
 triangulis aequilateris & aequalibus constitui-
 tur angulus tetraedri, ex quatuor octaedri, ex
 quinque icosaedri: ex sex autem pluribusue
 nullus constituetur ϵ , quia sex anguli Δ aequi-
 lateri = ν 4 rectis. Porro sub tribus qua-
 dratis continetur angulus cubi. Sub qua-
 tuor autem pluribusue ϵ nullus angulus soli-
 dus contineri potest. Sub tribus pentagonis
 aequilateris & aequiangulis ac aequalibus con-
 tinetur angulus dodecaedri. Sub quatuor
 autem pluribusue nullus comprehendetur ϵ
 angulus solidus: quia 4 in iis angulorum
 summa ϕ $>$ 4 rectis. Ob eandem rationem
 ex aliis figuris polygonis aequilateris &
 aequiangulis nullus solidus angulus consti-
 tui potest. Ergo nec fieri potest figura so-
 lida ex figuris planis aequilateris & aequian-
 gulis praeter quinque dictas. Q. E. D.

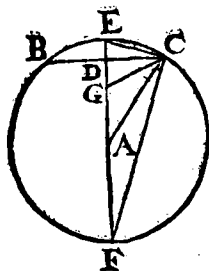
EVCLI-

† Talem autem intelligit figuram, cuius singu-
 li solidi anguli sub aequè multis planis
 angulis continentur.

E V C L I D I S ELEMENTORVM

LIBER XIV. †

PROP. I. THEOR.



Quae a centro A circuli alicuius ad latus BC pentagoni aequilateri in eodem circulo descripti perpendicularis ducitur AD, dimidia est utriusque & eius AC quae ex centro, & lateris decagoni in eodem circulo descripti.

Nam producat DA in F & E; fiat $DG = ED$, & iungantur CE, GC. Iam quia tota circumferentia circuli $= 5 BEC$: erit dimidia $FCE = 5 CE$, quae dimidia est α ipsius BEG. 2. 3. & 30.
Hinc quia $FC = 4 CE$: erit β ang. $FAC = 4 \beta$. 33. 6.
 DAC . Sed $FAC = 7 \angle DEC$. Ergo $2 DAC = 7 \angle DEC$. 20. 3.
 $= DEC = 3 DGC$. Quare $AG = GC = 4 CE$, ideoque $AD = CE + ED$, & $2 AD = CE + AE$, id est, $AD = \frac{1}{2} CE + \frac{1}{2} AC$. Est autem CE latus decagoni. 4. 1. 32. & 6. 1.
Q. E. D.

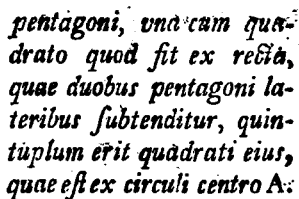
LEMMA

Si in circulo pentagonum aequilaterum describatur: quadratum, quod fit ex latere BC

Cc 2

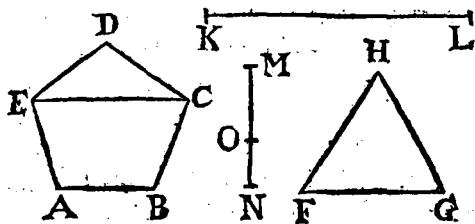
pen

† Vel verius Hypsiclis Alexandrini de quinque corporibus liber prior



2. 3. & 30. gatur CE, quae erit $\frac{1}{2}$ latus decagoni, item
3. CF, quae duo pentagoni latera subtendet.
Et quia $FE = 2 AE$: erit $4 AEq = FEq$
7. 31. 3. $= ECq + CFq$. Ergo $5 AEq =$
9. 10. 13. $AEq + ECq + CFq = BCq +$
 CFq . Q. E. D.

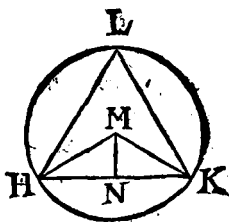
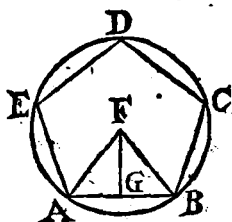
Idem circulus comprehendit dodecaedri pentagonum ABCDE, & icosaedri triangulum FGH, in eadem sphaera descriptorum.



Sit sphaerae diameter KL. Iungatur EC,
 . cor. 6. & exponatur ' recta MN talis, vt $KLq = s$
 10. MNq. Ergo * MN erit quae ex centro cir-
 x. cor. 16. culi, per quem icosaedrum describitur. Se-
 13. cetur MN extrema & media ratione, &
 segmen-

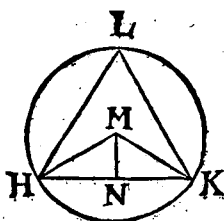
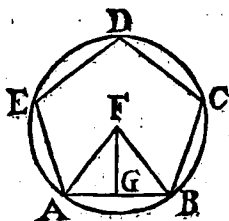
segmentum maius sit MO, quae ergo erit ^{a. 5. & sch.} λ 5. & sch. ^{9. 13.} latus decagoni in eodem circulo. Iam ^{2. cor. 17.} quia $5 \text{ MNq} = 3 \text{ CEq}$; & ^{& 15. 13.} $3 \text{ CEq} = 5 \text{ MNq}$; $5 \text{ MNq} = 3 \text{ ABq}$; 5 MOq : erit ^{8. 13. &} $3 \text{ ABq} = 5 \text{ MOq}$. Sed quia FG est ^{7. 14.} ξ 7. 14. latus pentagoni in praedicto circulo: erit ^{16. 13.} $5 \text{ FGq} = 5 \text{ MNq} + 5 \text{ MOq} = 3 \text{ CEq}$ ^{10. 13.} $+ 3 \text{ ABq} = 15$ quadratis eius, quae est ex ^{lemma} π 15. lemma ^{praec.} centro circuli, circa ABCDE circumscripti. ^{12. 13.} Atqui $5 \text{ FGq} = 15$ quadratis eius, quae est ex centro circuli, circa FGH descripti. Ergo circuli, circa ABCDE & FGH circumscripti, aequales sunt. Q. E. D.

PROP. III. THEOR.



*Si fuerit pentagonum aequilaterum & aequi-
angulum ABCDE, & circa ipsum circulus; a
centro F autem ad unum latus AB perpendiculari-
ris FG ducta fuerit: quod tricies sub uno latere
AB & perpendiculari FG continetur superficiei
dodecaedri est aequale. Item*

*Si fuerit triangulum aequilaterum HKL;
& circa ipsum circulus, cuius centrum M, &
ab eo perpendicularis MN: quod tricies sub
HK, MN continetur superficiei icosaedri aequa-
le est.*



1. Iungantur AF, FB. Quia $5 AB \times FG = 10 \Delta AFB = 2$ pentagonis ABCDE: erit $30 AB \times FG = 12$ ABCDE = superficiei dodecaedri.

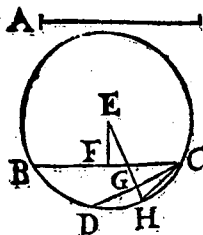
¶ 41. I.

2. Iungantur HM, MK. Quia $3 HK \times MN = 6 \Delta HMK = 2 \Delta HLK$: erit $30 HK \times MN = 20 \Delta HKL =$ superficiei icosaedri. Q.E.D.

Corollarium.

Ergo superficies dodecaedri est ad superficiem icosaedri in eadem sphaera, ut rectangulum sub latere pentagoni & perpendiculari ex centro circuli circumscripti ad illud ducta ad rectangulum sub latere trianguli & perpendiculari ex centro circuli circa triangulum descripti.

PROP. IV. THEOR.



Vt dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita est latus cubi A ad icosaedri latus BC.

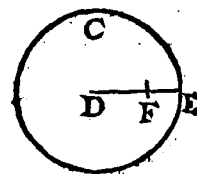
Circulo BCD, qui icosaedri triangulum, ideoque & dodecaedri pentagonum comprehendit, inscribatur

pentagoni latus CD, et trianguli CB. Ex centro

¶ 2. 14.

centro E ad BC; CD ducantur perpendiculares EF, EG. Producatur EG in H, & iungatur CH, quae erit latus decagoni. Hinc si EH + HC extrema ac media ratione secetur: erit EH maior portio. Sed $EG = \frac{1}{2} EH + \frac{1}{2} r$. 9. 13. HC, & EF = $\frac{1}{2} EH$. Ergo duplae ipsius EG extrema ac media ratione sectae maior portio erit 2 EF. Sed ipsius A extrema & media ratione sectae maior portio est CD. Quare A: CD = EG: EF; ideoque $A \times EF = CD \times EG$. Est ergo A: BC = A: EF: BC: EF = CD: EG: BC: EF = do. decaedri superficies ad icosaedri superficiem. Q. E. D.

PROP. V. THEOR.



Qualibet recta linea extrema ac media ratione secta, quam rationem habet ea, quae potest quadratum totius & quadratum maioris portionis, ad eam, quae potest quadratum totius & quadratum minoris portionis, eandem habet cubi latus

A ad latus icosaedri B.

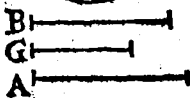
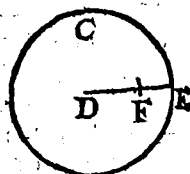
Sit enim circulus C is, qui capit icosaedri triangulum & dodecaedri pentagonum, in eadem sphaera descriptorum. Ex eius centro D ducatur utlibet recta DE, quae extrema & media ratione secetur, ut maior eius portio sit FD. Sit G latus dodecaedri quae maior portio rectae A extrema mediaque ra-

C c 4 tione

7. 12. 13.

2. 4. 13.

2. 7. 14.



tionē sectae. Et quoniam
Blatus trianguli icosaedri in
circulo C est: erit $Bq = \sqrt{3}$
 DEq . Sed $DEq + EFq$
 $= \sqrt{3} DFq$. Ergo $Bq : DEq$
 $+ EFq = DEq : DFq =$
 $Aq : Gq$, & hinc $Aq : Bq =$
 $Gq : DEq + EFq$. Sed
quum G sit latus pentagoni

§. sect. 9. & dodecaedri in circulo C; & DF latus deca-
goni in eodem: erit $Gq = \sqrt{5} DEq + DFq$.
Quare $A : B = \sqrt{(DEq + DFq)} : \sqrt{(DEq + EFq)}$, & ergo ^{1} , qualibet recta extrema &
media ratione secta, quam rationem habet ea
quae potest &c. Q. E. D.

PROP. VI. THEOR.

*Vt latus cubi ad icosaedri latus, ita est dode-
caedri solidum ad solidum icosaedri.*

3. 2. 14.

1. 6. 12.

Quia enim idem circulus pentagonum dode-
caedri & triangulum icosaedri ⁹ in eadem sphae-
ra capit: si e centro sphaerae in planum huius
circuli intelligatur ducta perpendicularis; erunt
pyramides, quae pentagonum & triangulum
bases habent, aequae altae. Vtergo pentagonum
ad triangulum, ita est ^{1} dodecaedri pyramis
ad pyramidem icosaedri; ac proinde vt 12
pentagona ad 20 triangula, id est, vt superfi-
cies dodecaedri ad superficiem icosaedri, ita
dodecaedrum est ad icosaedrum. Nam quia
perpendiculares, ex centro sphaerae in circulos in sphaera aequales ductae, in centra eorum
circularum incidunt, & ergo aequales
sunt:

sunt: dodecaedrum in 12, icosaedrum in 20 aequales pyramides, in centro sphaerae vertices habentes, diuiditur. Est ergo * vt latas cubi ad icosaedri latas, ita 4. 14. dodecaedrum ad icosaedrum. Q.E.D.

PROP. VII. THEOR.

 Si duae rectae lineae AB, CD extrema ac media ratione sectae fuerint: erunt maiores portiones AE, CF vt totae AB, CD.

Nam quia $^{\lambda}$ $AEq = AB \times BE$, & $^{\lambda}$ 17. 6. $CFq = CD \times DF$: erit $^{\lambda}$ $AB \times BE$: $AEq = CD \times DF$: CFq , & componendo $^{\mu}$ $(AB + BE)q$: $AEq = (CD + DF)q$: CFq . Quare $^{\nu}$ $AB + BE$: AE : $^{\nu}$ 22. 6. $= CD + DF$: CF , & componendo $^{\lambda}$ AB : $AE = 2$ CD : CF , & alternè AB : $CD = AE$: CF . Q.E.D.

Corollar.

Dodecaedrum & icosaedrum in eadem sphaera eandem inter se rationem habent, quam, si recta linea extrema ac media ratione secetur, habet ea, quae potest quadrata totius & maioris portionis, ad eam, quae potest quadrata totius & minoris portionis.

):(0):()

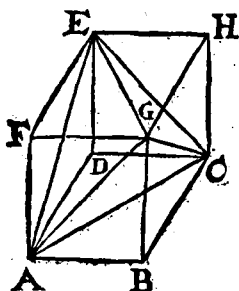


E V C L I D I S

ELEMENTORVM

LIBER XV.

PROP. I. PROBL.



In dato cubo ABCDEFGH pyramidem describere.

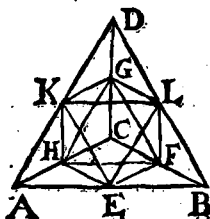
Ducantur diametri quadratorum GA, GE, GC, EA, EC, CA, quae omnes * inter se aequales sunt. Ergo triangu-
la EGC, EAG, AGC,

EAC sunt aequilatera, & aequalia. Proinde EGCA tetraedrum est, cubi angulis insistent, & ergo ipsi inscriptum β . Q.E.F.

α . 4. I.

β . 31. def.
II.

PROP. II. PROBL.



In data pyramide ABCD octaedrum describere.

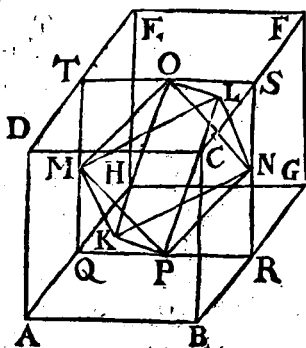
* Bisecentur latera tetraedri in punctis E, F, G, H, K, L. Haec puncta connectantur 12 rectis, quae omnes inter se γ aequales erunt. Qua-

re octo triangu'la, quae bases habent rectas HG, GL, LE, EH & vertices K, F, aequilatera erunt & aequalia; & solidum sub ipsis
com-

γ . 4. I.

comprehensum octaedrum erit, dato tetraedro inscriptum. Q. E. F.

PROP. III. PROBL.



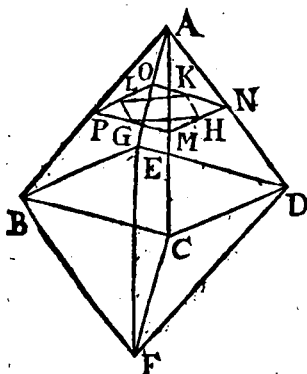
*In dato cubo
A B C D E F G
octaedrum descri-
bere.*

Sumantur³ qua². 8. 4.
dratorum centra
K, L, M, N, O, P.
Iunctae 12 rectae
ML, LN, NP &c.
constituent octae-
dram. Nam per
P, N, O, M du-

cantur lateribus quadrati AC parallelae
QR, RS, ST, MQ, quae iisdem lateri-
bus, & ergo inter se aequales erunt. (*Pa-
tet vero, has rectas se mutuo tangere; quia³
QT, ST eandem ED, & QR, SR eandem
GB, & NR, QR eandem AH &c. bisecant).
Ergo anguli MQP, NRP² sunt recti. Hinc². 10. 11.
quia MQ, QP, PR, NR, quippe aequalium
TQ, QR, RS dimidia, aequantur: erit MP
= PN. Similiter ostenditur, MP, OM, 2. 4. 1.
NK, NL & reliquas aequari. Ergo 8 trian-
gula, quorum vertices L, K, bases latera qua-
drati MONP, sunt aequilatera & aequalia, &
constituunt ergo octaedrum, cubo inscriptum.
Q. E. F.

PROP.

PROP. IV. PROBL.



*In dato octaedro
ABCDEF cubum
describere.*

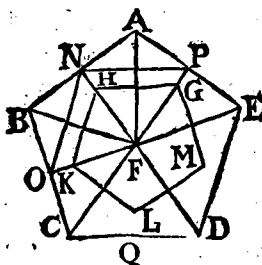
* Latera quatuor triangulorum pyramidis BCDEA bisecantur in M, N, O, P, & iungantur MN, NO, OP, PM, quae aequales sunt inter se, & paralle-

lae ⁹ lateribus quadrati BCDE, & proinde * angulos rectos inter se comprehendunt. Quare MNOP est quadratum. Deinde bisectis lateribus huius quadrati in G, H, K, L, iungantur GH, HK, KL, LG, quae ⁹ sunt aequales, & angulos rectos [^] comprehendunt; quia anguli, quos cum rectis MN, NO, OP, PM faciunt, semirecti [^] sunt. Ergo GHKL est quadratum. Si in reliquis 5 pyramidibus octaedri eadem fiant: constituentur 5 alia quadrata ipsi GHKL aequalia, & cum ipso cubum terminantia, dato octaedro inscriptum. Q. E. F.

PROP. V. PROBL.

In dato icosaedro dodecaedrum describere.

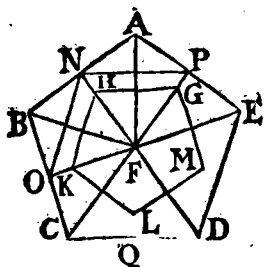
Sit ABCDEF pyramis icosaedri, cuius basis pentagonum ABCDE. Iungantur centra circulorum, in triangulis AFB &c. inscriptorum, rectis GH, HK, KL, LM. Dico, GHKLM esse



esse pentagonum dodecaedri inscribendi. Nam rectae FG, FH, FK &c. productae bifecabunt^{4. 1.} latera pentagoni in P, N, O, &c. quia $\frac{1}{2}$ bifecant angulos ad vertices F triangulorum.

Iungantur PN, NO, quae proinde aequales erunt^{1.} Iam quia $FP = FN = FO$, ac $\frac{1}{2}$ 26. 1. & $FG = FH = FK$: erunt GH, HK ipsis PN, 4. 3. NO $\propto$ parallelae, ac inde erit $\frac{1}{2}$ PN : GH = NF : FH = NO : HK, ideoque GH = HK. $\frac{1}{2}$ 2. 6. 2. sch. 4. 6. Similiter HK = KL &c. Porro quia ang. GHK = PNO, ac HKL = NOQ &c. ang. 6. 10. 11. autem PNO = NOQ, quia ambo sunt complementa aequalium^{1.} angulorum in N, O ad duos rectos: erit ang. GHK = HKL &c. Denique ex puncto sublimi F in planum ABCDE ductum intelligatur perpendicularum, & a puncto, in quo plano occurrit, ductae sint rectae ad puncta P, N, O, Q, quae cum perpendiculari angulos^{1.} rectos facient. Illi, quae per P ducta est, parallela intelligatur alia per G, & a puncto, in quo haec ductae perpendiculari occurrit, ducantur rectae ad H, K, L, &c. Iam quia $\propto$ perpendicularis illa a recta per G ducta secatur in ratione $FP : FG = FN : FH = FO : FK$ &c. patet, reliquas rectas, a punctis H, K, L ad perpendiculararem ductas, parallelas^{1.} esse illis, quae in plano ABCDE ad eandem ductae sunt, ac ob id angulos rectos cum perpendiculari

4.5. II.



pendiculari facere, & proinde ϕ in vno omnes plano esse. Vnde patet, GHKLM esse pentagonum æquilaterum & æquiangulum, ideoque, si in reliquis vndecim pyramidibus icosaëdri eadem construxerimus, proditura esse 12 pentagona huiusmodi, quae constituent dodecaëdram, icosaëdro inscriptam.

Q. E. F.

PROP. VI. PROBL.

Quinque figurarum latera & angulos inuenire.

1. Quia icosaëdram continetur 20 triangulis, & vnum triangulum 3 lateribus; singula vero latera bis sumuntur: numerus laterum erit dimidius facti ex 20 & 3, qui est 30. Similiter dodecaëdri laterum numerus est dimidius facti ex 12 & 5, qui est 30. Et sic porro in cubo, & reliquis inueniemus numerum laterum, sumentes dimidium facti ex numero planorum & numero laterum vniuscuiusque plani.

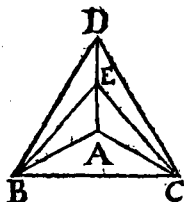
2. Numerum autem angulorum solidorum in his figuris habebimus, factum ex numero figurarum planarum & numero angulorum planorum in vnaqualibet diidentes per numerum angulorum planorum in quolibet solido angulo. Sic in icosaëdro factum ex 20 &

& 3, quod est 60, partientes per 5, habebimus
12 angulos solidos. Q. E. F.

PROP. VII. PROBL.

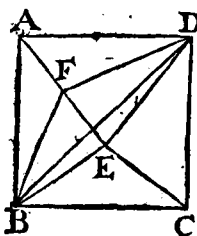
*Planorum, quae singulas quinque figuras
continent, inclinationem inuenire.*

1. De cubo manifestum est, eius plana ad
se inuicem recta esse.



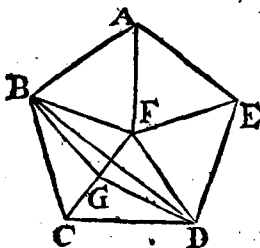
2. Sit tetraedri ABCD
expositum vnum triangu-
lum ABD, in quo a vertice
B ad latus AD ducta sit
perpendicularis BE. Si
centris A, D, interuallo
BE describantur duo cir-
culi, & a puncto sectionis ad centra A, D
iungantur rectae: angulus, quem contine-
bunt, erit inclinatio planorum. Nam iunga-
tur in altero triangulo ACD recta CE. Et
quia $\angle DE = EA$: erit CE etiam in AD $\propto$ sch. 3.3.
perpendicularis. Sed quia $BCq = ABq$
 $= \psi AEq + EBq$, & $EAq < \psi CEq$: ψ 47. 1.
erit $BCq < CEq + EBq$, & ergo α 2. sch. 12.
ang. CEB acutus. Quare CEB erit in-
clinatione β planorum tetraedri. Hinc quum α 13. 2.
sit $CE = EB$, & $BC = AD$, manifestum β 6. def.
est, praedicta constructione inueniri angu-
lum $\gamma \simeq BEC =$ inclinationi planorum. γ 22. & 8.
Q. E. F. I.

3. A latere octaedri describatur quadratum,
ducatur eius diameter BD, & centris B, D, in-
teruallo perpendiculari, quae a vertice ad
basin



basin trianguli in octaedro ducitur, describantur duo circuli. Rectae a sectione circulorum ad B, D iunctae continebunt angulum aequalem complemento inclinationis ad 2 rectos. Sit enim ABCDE pyramis octaedri,

& BF perpendicularis in Δ o ABE. Iuncta DF erit perpendicularis in AE & = ipsi BF. Hinc $BFq + FDq = 2 BFq < 2 ABq$. Sed $BDq = 2 ABq$. Ergo $BDq > BFq + FDq$, ac ob id $\angle$ DFB obtusus. Ergo BFD = complemento inclinationis planorum octaedri ad 2 rectos. Datur $\therefore$ autem ang. BFD dicta constructione. Q. E. F.



4. A latere icosaedri, descripto pentagono aequilatero & aequiangulo ABCDE, ducatur recta BD, angulum pentagoni C subtendens, & centris B, D, intervallo

perpendiculari cuiusvis e triangulis icosaedri, describantur duo circuli, a quorum sectione ad B, D iunctae rectae continebunt complementum inclinationis planorum ad 2 rectos. Sit enim ABCDEF pyramis icosaedri, & BG perpendicularis vnus trianguli: erit DG perpendicularis proximi trianguli. Et quia $BG < BC$: erit $\angle$ BGD > obtuso BCD, ideoque ipse obtusus. Quare BGD complementum in-

3. 19. 1.

4. 12. 2.

2. 6. def.

11.

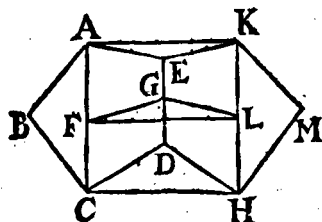
4. 22. & 8.

1.

3. 19. 1.

4. 21. 1.

erit inclinationis planorum icosaedri. Et manifestum est, hunc angulum dari praedicta constructione. Q. E. F.



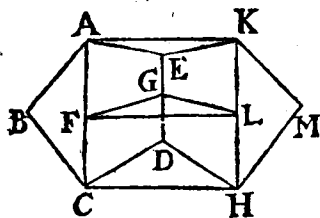
¶. Exposito pentagono dodecaedri ABCDE, & iuncta recta AC, angulum pentagoni subtendente, centris A C, inter-

uallo FG rectae a puncto F bipartitae sectionis ipsius AC in latus pentagoni parallelum ED perpendicularis describantur duo circuli, & rectae a sectione ad terminos A, C ductae comprehendent complementum inclinationis planorum dodecaedri. Nam quia $\ast$ AC est $\ast$ 17. 13. latus cubi, a quo dodecaedrum describitur: ponatur, ACHK esse vnum quadratorum illius cubi. Ergo erit KH recta, subtendens angulum in pentagono adiacente, quod sit EKM. HD. Ex G ad ED ducatur perpendicularis GL, & iungatur FL. Et quia ED AC sunt parallelae: erit GF in AC perpendicularis, ergo per centrum circuli, pentagono ABCDE circumscripti, transibit $\wedge$, & ED bisecabit μ in a. cor. 1. 3. G. Hinc similiter GL bisecabit ipsam KH. μ 3. 3. Quare FL = ν AK = AC. Et quia per ν 33. 1. perpendicularis ex G in FL cadens = $\ast$ $\frac{1}{2}$ AE, & $\frac{1}{2}$ FL = $\frac{1}{2}$ AC $\frac{1}{2}$ > $\frac{1}{2}$ AE: erit $\frac{1}{2}$ FL maior $\frac{1}{2}$ 8. 13. perpendiculari ex G in FL ducta, & ergo angulus, quem ea cum GF continet, maior ipso GFL. Hinc quia $\ast$ haec perpendicularis bi-

D d

secat

4. I.



secat ipsam FL ,
erit ang. $LG F$
 $> \angle GFL + GLF$,
ideoque obtusus,
& ob id comple-
mentum inclina-
tionis pentagono-

rum dodecaedri. Sed quia ex modo dictis
est $FG = GL$, atque ostensa est $FL = AC$:
patet, dari ang. FGL per traditam constru-
ctionem. Q.E.F.

FINIS

ELEMENTORVM EVCLIDIS

CORRIGENDA.

Pag. 6. lin. 17. *uni* leg. *uno*.

p. 11. lin. ultima post *habentes* interferantur verba,
cum rectis AC, BC initio ductis.

p. 63. lin. antepenult. *convexam* l. *convexam*.

p. 68 lin. 7. AKC leg. ABC .