

Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES
Bibliothèque électronique suisse

ELEMENTA
EVCLIDIS

ELEMENTORVM
EVCLIDIS
LIBRI XV
AD GRAECI CONTEXTVS
FIDEM RECENSITI
ET AD VSVM TIRONVM
ACCOMMODATI



LIPSIÆ
SVMTV IO. FRIDER. GLEDITSCHII

MDCCLXXXIII.



7772 (Bar)

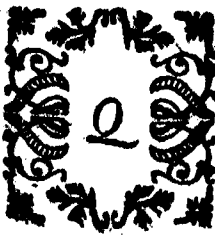
ILLVSTRISSIMO DOMINO
DOMINO
CHRIST. GOTTLIEB
DE HOLZENDORF

DYNASTAE IN BAERENSTEIN OBER-
ET NIEDER-LICHTENAV. ETC.

REGI POLON. ET ELECT. SAX.
AB INTIMIORIBVS CONSILIIS ECCLE-
SIASTICI SENATVS PRAESIDI CVBL-
CVLI REGII COMITI ETC.



ILLVSTRISIME DOMINE

 *Quum in eorum quam ma-
ximo numero, qui vel
virtutum TVARVM splendo-
re percussi TE admirantur, vel
singulari TVA humanitate &
benignitate capti TE diligunt &
venerantur, nemo sit, cui ego in
TE admirando venerandoque con-
cedam: dudum exoptavi aliquam
occasionem, quo erga TE animo*

*sim affectus, publice profitendi.
Equidem non ignoro, me eum non
esse, qui par sit magnis TVIS
virtutibus laudandis, vel ex cuius
iudicio ad TVAE gloriae am-
plitudinem aliquid accedere possit,
quod si posset a me fieri, nihil fo-
ret, in quo efficiendo omne meum
ingenium, studium, diligentiam
lubentius collocarem. Sed ita fe-
re natura est comparatum, ut ani-
mus magnarum virtutum admi-
ratione impletus cum alios quam
plurimos testes velit habere, tum
eum maxime, cuius admiratione
est occupatus. Quare, etsi diu
animo dubius pependi, mitteremne
ad TE, DOMINE, hoc Eu-
cliderum*

*clideum opus, curis meis ad usum
tironum utcumque accommodatum,
quippe quod longe infra TVAM
dignitatem, neque TVA perso-
na satis dignum videbatur, non
potui tamen a me impetrare, ut
banc dudum exoptatam occasio-
nem dimitterem, summae admi-
rationis & venerationis, qua TE
colo, & quam TIBI verbis co-
ram satis declarare pudor meus
non sinit, publicum nunc edendi
monumentum. Confirmabat de-
inde animum meum hoc, quod be-
ne intelligebam, si quo illustri no-
mine haec mea Euclidis editio esset
inscribenda, non aliud potius,
quam TVVM, mihi deligen-*

*dum esse. Namque quum TVAE
Sapientiae demandata sit huius
Academiae cura, in qua per ali-
quot annos mathemata priuatim
docui: officii mei partem putabam,
TIBI vitae meae academicae red-
dere rationem, oculisque TVIS
meorum studiorum specimen ali-
quod subiicere. Quae quum ita
sint, audeo, ILLVSTRISSI-
ME DOMINE, TIBI hunc
libellum ea qua par est reuerentia
dicare, TE que maximopere ro-
go, vt eum, siue tanquam addi-
ctissimi TIBI animi mei tesseram,
siue tanquam officiorum meorum
pignus, serena fronte excipere
digneris. Tanta est TVA hu-
mani-*

manitas, & in omnes, qui TE ad-
eunt, facilitas, ut animo plane
confidam, hisce meis precibus a
TE locum relictum iri; in quo
etiam, ut spero, me adiuuabit ip-
sum nomen Euclidis, qui parens
eius scientiae recte putatur, quam
quanti TV facias, cum illud decla-
rât, quod eximiae spei Filium ea in
primis erudiri voluisti, tum quod
nuper in morte Hausenii nostri,
excellentis Geometrae, magnam
iacturam factam esse iudicasti. Ce-
terum & illud TE vehementer
rogo, ut me meaque omnia TVO
fauore & patrocinio complectare,
& ita de me existimes, me semper
tantam operam daturum esse, ut
ne

*ne TVO patrocínio videar indi-
gnus, quanto animi ardore, ut
TIBI longae iucundaeque vitae
felicitas, TVIS que eximiis vir-
tutibus largissima remuneratio
contingat, a Deo immortali ex-
peto*

ILLVSTRISSIMI TVI
NOMINIS

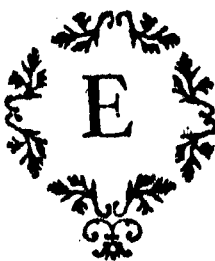
Scribeb. Lipſiae
xxiii Septembr.
clō lōcc xxxiii

additus deditusque

Georg. Frider. Baermannus.



EDITORIS PRAEFATIO

 uclidis Elementa omnibus, quotquot ad mathesin discendam animum appellant, non legenda solum, sed & fere tota ediscenda esse, communis olim fuit magistrorum huius artis sententia, & hac nostra etiam aetate, in qua tanta Elementorum Geometriae copia instructi dicam an obruti sumus, omnes mecum confitebuntur, qui in Euclideanorum Elementorum lectione ea qua par est diligentia sunt versati. Neque hoc tam suscepti operis amore, quam idoneis rationibus inductus iudico, quibus exponendis & his id persuadere possem, qui haec Elementa nondum
lege-

P R A E F A T I O

legerunt, & eorum quoque criminationibus occurrere, qui, quum Euclidis hos libros siue carptim siue certe oscitanter legerint, deinceps nescio quem commodiorem in tradendis propositionibus ordinem, quam faciliorem & beuiorem in demonstrationibus viam iure desiderare posse sibi videntur. Verum quia horum argumentorum longior foret tractatio, quam praefandi breuitas patitur: vnā tantum rationem commemorasse sufficiet, ob quam horum Elementorum lectio tironibus non utilis solum sed & necessaria est dicenda. Scilicet omnes, qui post Euclidis tempora aliquid in Geometria sublimiori, vel in Mechanica, Optica aut Astronomia a se inuentum litteris prodiderunt, quemadmodum demonstrationum suarum plurimas ex iis duxerunt, quae in his Elementis ab Euclide sunt ostensa, ita & saepe ad eorum tanquam fontes lectores amandarunt. Cuius rei quae sint rationes, intel-

P R A E F A T I O

intellectu non est difficile. Namque veteres Geometrae alium Auctorem citare non poterant: quum multis post Euclidem seculis nemo fuisset, qui tanta arte detextam Euclidis telam retexere, & sub noua quadam forma tironum oculis sistere voluisset. Ii vero, qui nostrae aetati propiores fuerunt, his tantum exceptis, qui ipsi vniuersae matheseos elementa conscripserunt, ad alium elementorum Geometriae scriptorem lectores suos commode non potuerunt ablegare, cum alias ob causas, tum ob hanc potissimum, quod nullius Auctoris elementa Geometriae aequae vulgata sunt, atque haec Euclidea, quae in omnes terrarum regiones, simul ac ad eas Geometria accessit, perlata esse constat, & ex quibus tanquam fontibus ceteri riuulos suos deduxerunt. Quae causa, sicut plerosque recentiorum Mathematicorum impulisse videtur, vt Euclidea Elementa, vbi opus erat, in demonstrationibus

P R A E F A T I O

tionibus suis citarent, ita & eos, opinor, qui posthac scribent, commouebit, certe commouere debet, vt hunc veterum morem sequantur. Quum ergo ad tot tam admirabilia excellentissimorum ingeniorum inuenta aditus iis sit praecclusus, qui Euclidis Elementis sunt destituti, vel eorum lectionem negligunt: neminem fore confido, qui non intelligat, quam sit necessarium matheſeos amatoribus, vt in Euclidea schola tirocinium ponant.

Quae quum ita sint, communi utilitati me aliquo modo consulere posse putabam, si hosce Euclideanos libros, quorum exemplaria in nostris bibliopoliis inde ab aliquot annis desiderabantur, denuo edendos curarem. Vt autem haec noua editio quam plurimorum vsibus inferuire posset: operam mihi dandam esse intelligebam, vt talia exemplaria ederentur, quae neque mole sua neque pretio emtores deter-

P R A E F A T I O

deterrent. Quare quum ea horum Elementorum editio, quam eximius, dum viueret, Geometra, Isaacus Barrowius, iuuenis olim Cantabrigiae parauerat, breuitate ita se commendasset, vt & in Germania typis quondam recusa, & plurimorum manibus huc vsque trita esset: in animum inducebam, huius editionis aliquod exemplar typis iterum describendum dare. Sed postea mutauī consilium, quum perpenderem, huic quamuis elegantissimae editioni inesse tamen aliquid, quod aliquos lectores offendere meminirim, & quod editioni aliqua saltem ex parte meliori locum relinquat. Scilicet qui Barrowianam Euclidis editionem cum Graecis codicibus contulerunt, non ignorant, in ea multarum propositionum demonstrationes immutatas, nonnullarum quoque omnino sublatas esse, aliis, quas Graecus Euclides non habet, in earum locum substitutis. Quod quanquam apud

b

mul-

P R A E F A T I O

multos Lectores facile excusatur breuitatis studio: sunt tamen harum rerum intelligentes, qui id factum non esse mallent. Dicunt enim primo, difficillimum esse, Euclideis demonstrationibus alias substituere, quae, quum breuiores sint, genio horum Elementorum, & purae simplicitati huius Geometriae aequae conueniant; idque ipsum illum celeberrimum Euclidis editorem suo exemplo docuisse in demonstrationibus, quas plurimis Libri II. propositionibus adiunxit. Deinde negant, illum, qui se Euclidem edere profiteatur, munere suo rite fungi, si lectoribus alia tradat, quam quae ipsi legerent, si Graecis codicibus vterentur. Quae, quum non exiguam veri speciem habere mihi viderentur; neque ego in tanti viri opere aliquid immutare auderem: statui, de noua prorsus editione Latina Euclidis paranda mihi cogitandum esse, quae Graeci textus demonstrationes satis fideliter exhi-

P R A E F A T I O

exhiberet, in ceteris vero Barrowianam breuitatem, quantum eius fieri posset, imitaretur.

Sumta itaque in manus praestantissima Operum Euclidis editione, quae cura doctissimi viri, Daudis Gregorii, Oxoniae prodiit, ex ea textum Latinum definitionum & propositionum descripsi ad verbum, paucissimis * exceptis, in quibus siue sensus siue Graecus contextus aliquam mutationem postulabat. Deinde perlecta vniuscuiusque propositionis demonstratione, eam sic reddere studui, vt, seruatō eodem ordine, quo Euclides syllogismorum seriem instruxerat, totam tamen demonstrationem in arctius quasi spatium cogerem. Hoc autem quatuor potissimum modis efficere volui, quibus & Isaacum Barrowium vsum esse videbam. Nam primo *ἐκθεσις*, quam

b 2

Eucli-

* Sunt illae prop. 7. L. I. prop. 28. L. VI. prop. 10. L. VIII. & prop. 26. L. XI.

P R A E F A T I O

Euclides singulis propositionibus subiungit, & in qua quidquid in propositionibus vniuersaliter enunciatum fuit ad singulares schematum appositorum lineas applicat, ipsis propositionibus inclusi, ita tamen, vt ne *ἐκθεσις* cum propositione commisceretur, sed vt quaeque propositio absolutum sensum haberet, etiam si inter legendum litterae illae maiusculae, quae ad schema referuntur, & *ἐκθεσις* continent, omitterentur. Quod ita fieri in propositionibus mathematicis, saltem si tiro-nibus scribatur, consultum esse existimo, propterea quod propositiones ipsae memoriae mandandae sunt, non autem earum *ἐκθεσις*, quippe quae foliis demonstrationibus inseruiunt. Secundo, syllogismorum maiores, quas vocant, propositiones, quae in omni demonstratione ex superioribus sumuntur, & quas Euclides solet totidem verbis plerumque repetere, omisi, indicaui tamen per numeros, alphabeti

P R A E F A T I O

beti Graeci litteris in margine adscriptos, ea loca, in quibus eas, si sponte non succurrant, lector euoluere potest. * Tertio pro quibusdam verbis notas illas adhibui, quae apud Mathematicos dudum vſu receptae sunt. Habent autem harum notarum pleraeque non hunc solum vſum, vt tanquam scripturae compendia textum breuiorem reddant, sed &, si quis iis semel adſueuerit, quod fieri poteſt facillime, menti in cogitando non exiguo ſunt adiumento, quia quantitatum, de quibus cogitandum eſt, mutuam relationem citius longe & diſtinctius, quam litterae vel vocabula, animo intuentiam praebent. Propterea veniam mihi, vt ſpero, dabunt aequi lectores, quod in X. Libro horum Elementorum

b 3 rum

* Videlicet horum numerorum poſterior designat Librum, prior huius libri proſitionem. Praeterea def. ſignificat definitionem, ax. axioma, & poſt. poſtulatam.

P R A E F A T I O

rum quatuor nouis notis vsus fui, quum eae, quae in Barrowiana editione ibi occurrunt, nimis incommodae sint. Est enim earum vna alteri adeo similis, vt inter legendum facillime possint confundi. Quare quum his, sine lectorum incommodo, me vti vix posse intelligerem, neque apud alium Auctorem alias ipsis pares reperissem: ausus sum nouas istas effingere, quas in limine dicti Libri exposui. Perpaucae quum sint, facile poterit lector earum potestatem memoria retinere, praesertim vbi animaduernerit, eas ex initjalis litteris Graecorum, quibus substituantur, vocabulorum *Σύμμετρα*, *ἄσύμμετρα*, *ἄλογα*, leuiter inflexis litterarum ductibus, vel lineola apposita, esse efformatas. Quartum denique, quod mihi in contrahendis Euclideis demonstrationibus nonnunquam auxilio fuit, hoc est, quod quibusdam propositionibus subiunxi scholia vel corollaria, in quibus eiusmodi propositiones

P R A E F A T I O

sitiones ostensae sunt, quae multorum sequentium theorematum & problematum demonstrationes iterum tanquam principia ingrediuntur.

Sed praeter haec scholia & corollaria, visum etiam est alia addere, in quibus ex Euclidis propositionibus aliae, quarum vel ad inuentionem, vel ad aliorum Auctorum demonstrationes intelligendas, frequentissimus vsus est, & quae in vulgatis aliorum Auctorum Elementis Geometriae habentur, sine longa ratiocinatione colliguntur. Praeque horum scholiorum e Barrowiana editione huc transcripsi, nonnulla, sed perpauca, ipse addidi. Nam omnium horum scholiorum numerum mediocrem esse volui, memor quippe, non thesaurum geometricarum propositionum mihi condendum, sed Elementa Geometriae edenda fuisse. Singula autem haec siue scholia, siue corollaria, siue alia, quae in Graecis

P R A E F A T I O

exemplaribus horum Elementorum vel omnino non leguntur, vel saltim aliis in locis, demonstrationum contextui interspersa, reperiuntur, asteriscis notavi. Erunt forsitan, qui mirabuntur, cur talibus propositionibus scholiorum titulum adscripserim, quibus corollariorum potius nomen convenire existimabunt. His autem respondeo, me in his quoque minutis ad indolem Euclidei operis, quantum possem, accedere voluisse, in quo video, eas fere solas propositiones corollariorum vel *πορισμάτων* titulo insignitas esse, quae, quum in demonstratione alicuius theorematis vel problematis obiter ostensae sint, dein ex ea quasi excerpuntur, & absoluta demonstratione, separatim enunciantur, quo earum ad sequentes demonstrationes expeditior sit usus. Quod tandem ad schemata attinet, ligno incisa, etsi curavi, ut ea illis, quae Oxoniensis Operum Euclidis editio habet, similia essent,

fatcor

P R A E F A T I O

fateor tamen, nos illarum non assequi potuisse elegantiam.

Haec sunt, quae de instituti operis ratione lectores monere volui, & ex quibus fatis, opinor, apparebit, me omne consilium operamque in hoc intendisse, ut & verum & integrum Euclidem ipsis in manus traderem. Ut autem hi, qui ad eius lectionem primum accedunt, aliquam eius notitiam afferant, non erit alienum, huius Geometriae ideam breuiter adumbrare. Totum hoc opus duabus constat partibus, quarum altera contemplationem superficierum, altera solidorum complectitur. Et in quatuor quidem primis libris traduntur, quae figuris planis, circulo puta & rectilineis, absolute spectatis conueniunt, & quae ad earum aequalitatem, ac angulorum laterumque in illis magnitudinem cognoscendam conducunt. Sextus liber de similitudine figurarum planarum agit, earum-

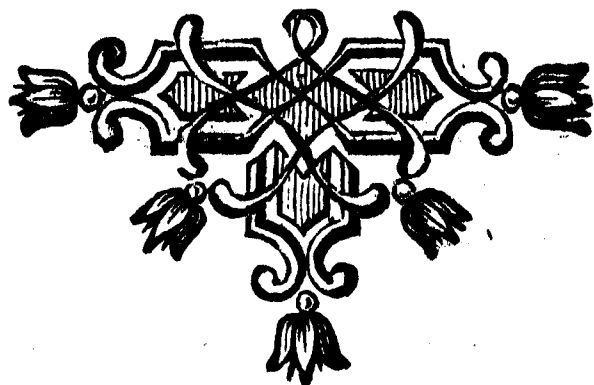
P R A E F A T I O

rumque, item angulorum & rectarum linearum, ad se inuicem rationes inuestigare docet. Eius gratia in quinto libro tradita est proportionum, quae inter magnitudines esse possunt, vniuersalis *ἁρμονία*. Hisce prima pars huius Geometriae absoluitur. Solidorum contemplatio commensurabilium & incommensurabilium notitiam requirit, ad quam doctrina de numeris opus est. Eorum itaque librorum qui sextum sequuntur, tres priores de numeris copiose exponunt, ac ob id arithmetici vocari solent. Decimus rectarum linearum & spatiorum irrationalium, hoc est, datis rectis lineis vel spatiis incommensurabilium, doctrinam tradit. Postremi quinque in solidorum contemplatione versantur, & ea docent, quae ad illorum tam dimensionem, quam proportionem & in se inuicem inscriptionem spectant. Nunc reliquum esset, vt singulorum etiam librorum argumenta commemorarem.

Sed

P R A E F A T I O

Sed praeterquam quod hac enarratione facile carere poterunt, quibus animus est, integra haec Elementa a capite vsque ad calcem perspicere (quod vt tirones faciant, maximopere sua-
deo): vereor, ne, si ea percurram, haec praefatio, quae iam praeter opinionem longiuscula facta est, iustos limites excedat. Vnum hoc addam, si hanc meam operam doctis viris probari intellexero, curaturum me esse, vt Euclidis Liber Datorum, Theodosii sphaerici, & Archimedis Geometrici libri eodem, quo haec Elementa, habitu vestiti posthac in lucem prodeant.



*Hosce errores operarum, quos repetita lectione
deprehendimus, Lector ut calamo sic
corrigit, rogamus.*

Pag. 6. lin. 17. *vni*, scribatur *vno*.

pag. 11. lin. vltima post *habentes* sequi debent haec
verba, *cum rectis AC, BC initio ductis*.

pag. 19. in schemate prop. 19. alteri extremo basis
trianguli adscribatur littera B.

pag. 63. lin. antepenultima, *connexam*, scribatur
conuexam.

pag. 65. lin. 19. *LH*, scribatur *KH*.

pag. 68. lin. 6. *AKC*, scribatur *ABC*.

pag. 121. lin. 22. *eorum*, scribatur *earum*.

pag. 160. lin. 24. *XXXI*, scribatur *XXXII*.

pag. 260. lin. 4. *AB*, scribatur *ABq*.

pag. 264 in margine suppleatur *σ*.

pag. 307. lin. 29. *Apotomae*, scribatur *Apotome*.

pag. 320. lin. 26. *AC*, scribatur *AB*.

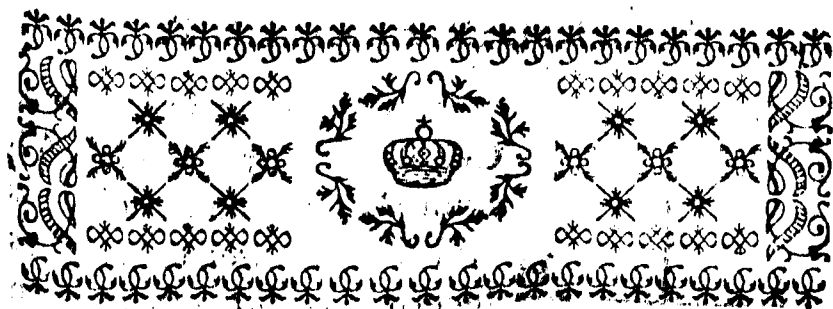
pag. 334. lin. 14. *punctam*, scribatur *punctum*.

pag. 348. lin. 27. *Sint*, scribatur *Si sint*.

pag. 367. lin. 22. deleatur; .

pag. 402. lin. 22. *eorum*, scribatur *4 in iis angulo-
rum*.

ELEMEN-



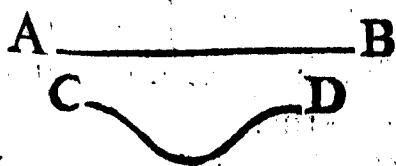
ELEMENTORVM EVCLIDIS

LIBER I

DEFINITIONES.

1. *Punctum* est, cuius pars nulla est.

2. *Linea* autem est longitudo non lata.



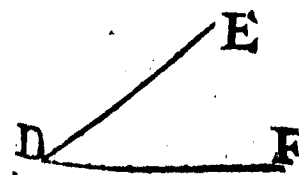
3. *Lineae* vero *extrema* (A, B, vel D, C) sunt puncta.

4. *Recta* quidem *linea* AB est, quae ex aequo sua interiacet puncta.

5. *Superficies* autem est, quod longitudinem & latitudinem tantum habet.

6. *Superficie*i vero *extrema* sunt *lineae*.

7. *Plana* quidem *superficies* est, quae ex aequo suas lineas rectas interiacet.



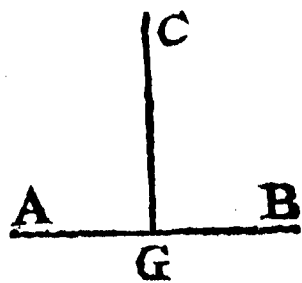
8. *Planus* vero *angulus* est duarum linearum, in plano sese tangentium, & non in directum iacentium, mutua

inclinatio.

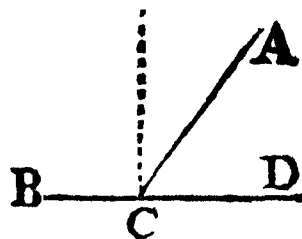
9. Quando autem lineae DE, DF, angulum comprehendentes, rectae fuerint, *angulus* ipse EDF appellatur *rectilineus*.

A

10. Quum



10. Quum vero recta linea CG, super rectam lineam AB insistens, angulos deinceps AGC, BGC inter se aequales fecerit: *rectus* est vterque aequalium angulorum; & quae insistit recta linea CG *perpendicularis* vocatur ad eam AB, super quam insistit.



11. *Obtusus* angulus ACB est, qui maior est recto.

12. *Acutus* autem ACD, qui est recto minor.

13. *Terminus* est, quod aliquis est extremum.

14. *Figura* est, quae aliquo vel aliquibus terminis comprehenditur.

15. *Circulus* est figura plana, una linea ABCDA comprehensa, quae *circumferentia* appellatur, ad quam ab vno puncto E eorum, quae intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectae lineae, EC, EA, inter se sunt aequales.

16. Hoc autem punctum E *centrum circuli* nuncupatur.

17. *Diameter* vero circuli est recta quaedam linea AC, per centrum E ducta, & ex vtraque parte circuli circumferentia ABCDA terminata. Quae etiam circulum bifariam secat.

18. *Semicirculus* est figura ACBA comprehensa sub diametro AC, & ea circuli circumferentia ABC, quae a diametro intercipitur.

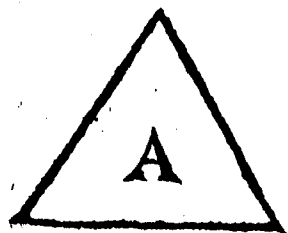
19. *Recti-*

19. *Rectilineae figurae* sunt, quae rectis lineis comprehenduntur.

20. *Trilaterae* quidem, quae tribus.

21. *Quadrilaterae*, quae quatuor.

22. *Multilaterae* vero, quae pluribus, quam quatuor rectis lineis comprehenduntur.



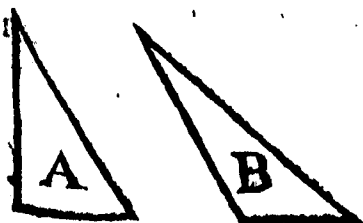
23. E trilateris autem figuris, *aequilaterum triangulum* A est, quod tria latera habet aequalia.



24. *Isoceles* autem B, quod duo tantum aequalia habet latera.



25. *Scalenum* C vero, quod tria latera habet inaequalia.

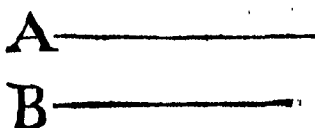
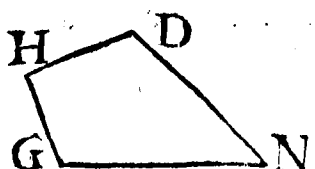
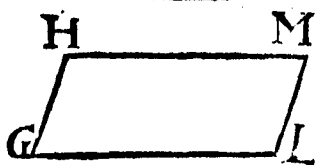
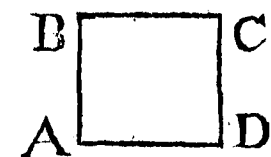


26. Adhaec, e trilateris figuris, *rectangulum* quidem *triangulum* est A, quod rectum angulum habet.



27. *Amblygonium* autem B, quod habet angulum obtusum.

28. *Oxygonium* C vero, quod tres habet angulos acutos.



29. E figuris autem quadri-
lateris, *quadratum* quidem
est ABCD, quod & aequila-
terum est, & rectangulum.

30. *Oblongum* E, quod re-
ctangulum quidem est, sed
non aequilaterum.

31. *Rhombus* A, quod ae-
quilaterum quidem est, sed
non rectangulum.

32. *Rhomboides* GHML,
quod habet opposita & la-
tera & angulos inuicem ae-
qualia, sed nec aequilate-
rum est, nec rectangulum.

33. Reliqua autem quadri-
latera, praeter haec, vocen-
tur *trapezia*. Vt GNDH.

34. *Parallelæ* rectæ lineæ
A, B sunt, quæ in eodem
iacentes plano, atque ex
vtraque parte in infinitum
productæ, in neutram sibi coincidunt.

POSTVLATA.

1. Postulatur, a quouis puncto ad quoduis
punctum rectam lineam ducere.

2. Item, rectam lineam finitam continue in
directum producere.

3. Item, quouis centro & intervallo circu-
lum describere.

COM-

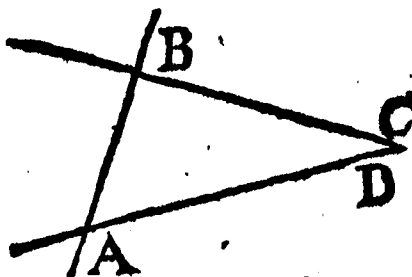
COMMUNES NOTIONES,
sive AXIOMATA.

1. Quae eidem aequalia, inter se sunt aequalia.
2. Si aequalibus aequalia addantur, tota sunt aequalia.
3. Si ab aequalibus aequalia auferantur, reliqua sunt aequalia.
4. Si inaequalibus aequalia addantur, tota sunt inaequalia.
5. Si ab inaequalibus aequalia (*vel ab aequalibus inaequalia*) auferantur, reliqua sunt inaequalia. * Et id quidem, quod ex maiori inaequalium, demtis aequalibus, relinquitur, maius est; quod vero, demto maiori inaequalium ab aequalibus, relinquitur, minus est.
6. Quae eiusdem (*vel aequalium*) sunt duplicia, inter se sunt aequalia. * Idem de utrumque aequae multiplicibus intelligendum est.
7. Quae eiusdem (*vel aequalium*) sunt dimidia, inter se aequalia sunt. * Idem de utrumque aequae submultiplicibus intellige.
8. Quae sibi mutuo congruunt, sunt aequalia.

* Hoc axioma in rectis lineis & angulis valet conuersum: sed non congruunt aequales figurae, nisi & similes fuerint. Ceterum *congruere* dicuntur, quorum partes applicari partibus sic possunt, ut tota eundem locum occupent.

9. Totum sua parte maius est.

10. Omnes anguli recti inter se aequales sunt.



11. Si in duas rectas lineas AD, BC recta BA incidens angulos interiores BAD, ABC, & ad easdem partes, duobus rectis minores fecerit: duae illae rectae AD, BC, in infinitum productae, coincident inter se ex ea parte, ad quam sunt anguli duobus rectis minores.

12. Duae rectae lineae spatium non comprehendunt.

13. * Omne totum aequale est omnibus suis partibus simul sumtis.

14. * Quod vni aequalium maius vel minus est, idem & altero maius vel minus est. Et quo vnum aequalium maius est vel minus, eodem alterum quoque maius vel minus est.

In hoc libro notae, quibus breuitatis causa utimur, hae fere sunt.

$\equiv$ Notat aequalitatem. E. g. Ang. $A = B = C$, lege, angulus A aequalis est angulo B, & hic angulo C. Sed saepe trium quantitarum hac nota iunctarum primam etiam tertiae aequallem intelligendam esse per ax. i. supponitur.

$>$ notat maioritatem. E. g. Recta $AB > CD$, lege, recta AC maior est quam recta CD.

$<$

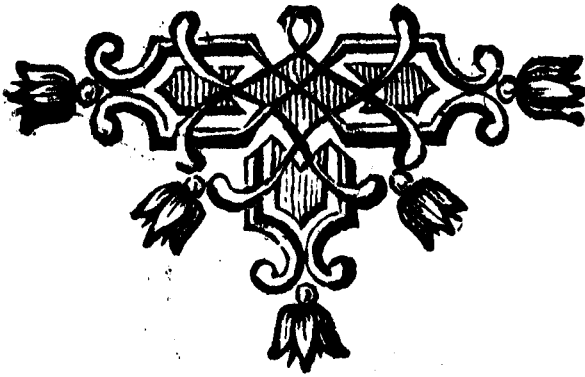
< notat minoritatem. $A < B$, lege A minor est quam B .

+ notat duas magnitudines pluresue, inter quas haec nota reperitur, iunctim sumendas esse. E. gr. $A + B$, lege, A una cum B .

- notat subtractionem. E. gr. Rectus — ang. ABC , lege, Excessus recti anguli super angulum ABC , vel, ut vulgo pronunciant, rectus minus angulo ABC .

Δ notat triangulum.

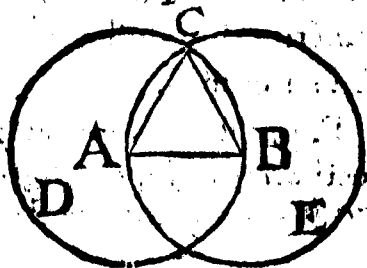
AC^q notat quadratum a recta AC descriptum, vel cuius latus est recta AC .



PROPOSITIO. I. PROBLEMA.

Super datam rectam terminatam AB triangulum aequilaterum constituere.

κ. 3. post.



Centro A, intervallo A B describatur ^κ circulus BCD; & rursus centro B intervallo B A circulus ACE; & a puncto C, in quo circuli se mutuo

β. 1. post.

γ. 15. def.

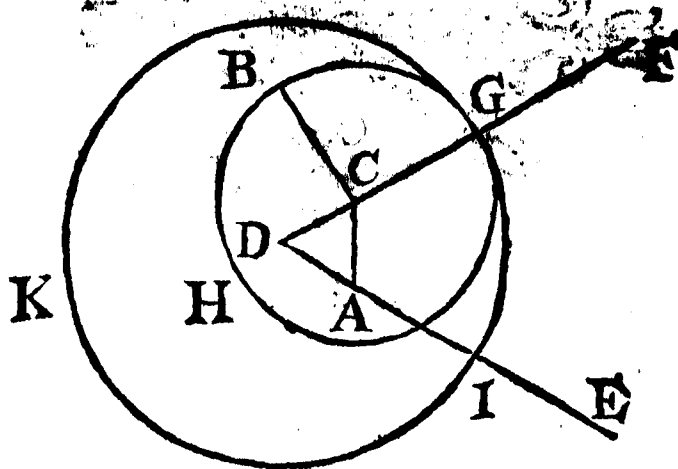
δ. 1. ax.

ε. 23. def.

secant, ad puncta A, B ducantur ^β rectae CA, CB.

Quoniam igitur ^γ $AC = AB$, & $BC = BA$: erit ^δ $AC = BC$. Quare tres rectae AC, AB, BC aequales sunt. Est igitur ACB triangulum aequilaterum ^ε super AB constitutum. Quod Erat Faciendum.

PROP. II. PROBL.



Ad datum punctum A datae rectae BC aequalem rectam ponere.

ζ. 1. post.

η. 1. 1.

θ. 2. post.

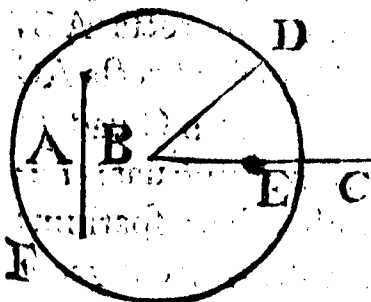
ι. 3. post.

Ducatur ^ζ recta AC; et super eam constitua-
tur ^η triangulum aequilaterum ADC; & pro-
ducantur ^θ DA, DC ad E & F. Dein centro C
intervallo CB describatur ^ι circulus GBH, &
rursus centro D, intervallo DG, circulus GIK.

Quo-

μ. 3. αχ.
ν. 1. αχ.

PROP. III. PROBL.



Datis duabus rectis inaequalibus, A & BC, a maiore BC auferre rectam aequalem minori A.

Ponatur ζ ad punctum B, §. 2. 1.

recta $BD = A$, & centro
B. intervallo BD describa-

tur^o circulus DEF. Et, quoniam π . BE = BD, ^{o. 3. post.}
& σ . A = BD, erit σ . BE = A. Ergo ab BC ab- ^{π . 15. def.}
lata est BE, minori A aequalis. Q. E. F. ^{σ . construct.}
 ^{σ . 1. ax.}

PROP. IV. THEOREMA.



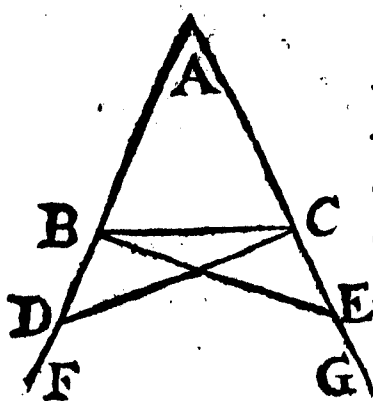
Si duobus triangulis ABC, DEF, habuerint duo latera, duobus lateribus aequalia, alterum alteri ($AB = DE$, & $AC = DF$), & angulum A aequalem angulo D, qui ab aequalibus rectis comprehenditur: habebunt & basin BC basi EF aequalem; & triangulum ABC erit triangulo DEF aequale; & reliqui anguli B, C, reliquis angulis E, F aequabuntur, alter alteri, quibus aequalia latera subtenduntur ($B = E$, & $C = F$).

Nam si triangulum ABC applicetur trian-
gulo EDF, posito puncto A super D, & recta
AB



τ . hypoth. AB super DE: quia $AB = DE$, cadet^u punctum B in E. Congruente autem recta AB, rectae DE: quia^u ang. $A = D$, cadet^u recta AC in DF; &^u quia $AC = DF$, punctum C cadet^u in F. Iam si BC ipsi EF non congruat: necesse est duae rectae comprehendant spatium; quod fieri nequit^o. Ergo basis BC congruet basi EF, & ergo^u $BC = EF$. Quare & tota triangu-
 ϕ . 12. ax. lula ABC, DEF congruent, & aequalia erunt; itemque anguli B ac E, nec non anguli C ac F congruent, & aequales erunt. Quod Erat Demonstrandum.

PROP. V. THEOR.



Triangulorum isoscelium ABC anguli ad basin ABC, ACB, sunt inter se aequales; & productis aequalibus rectis AB, AC, anguli sub basi FBC, GCB erunt inter se aequales.

κ . 3. I.

Sumto enim in recta BF puncto quolibet D, fiat κ $AE = AD$, & ducantur rectae CD, BE.

ψ . confr.
 ω . hyp.
 α . 4. I.

Quoniam ergo in triangulis ABE & ACD est^u $AE = AD$, &^u $AB = AC$, & angulus A communis: erit^u ang. $ABE = \text{ang. } ACD$, & ang. $BEC = \text{ang. } BDC$, & $BE = CD$. Quum autem

autem $\angle A E = A D$, & $\angle A C = A B$, ideoque $\angle$ p. 3. ax.
 $C E = B D$: erit in triangulis $B E C$ & $B D C$
 $\angle C B E = \angle B C D$, & $\angle B C E = \angle$
 $D B C$. Sed erat $\angle A B E = \angle A C D$. Ergo γ , per dem.
 $\angle$ anguli ad basin $A B C$, $A C B$ aequales sunt, item
 $\angle$ anguli sub basi $G C B$, $F B C$ aequales sunt. Q.
 E. D.

* *Scholium.* Hinc omne triangulum aequilate-
 rum est quoque aequiangulum.

PROP. VI. THEOR.



*Si trianguli ABC duo
 anguli ABC, ACB sint
 inter se aequales: latera
 AB, AC, aequalibus an-
 gulis subtensa, inter se aequalia erunt.*

Si enim non est $A B = A C$, vtrius $A B >$
 $A C$ erit. Fiat ergo δ $B D = A C$, & ducatur $C D$. δ 3. 1.

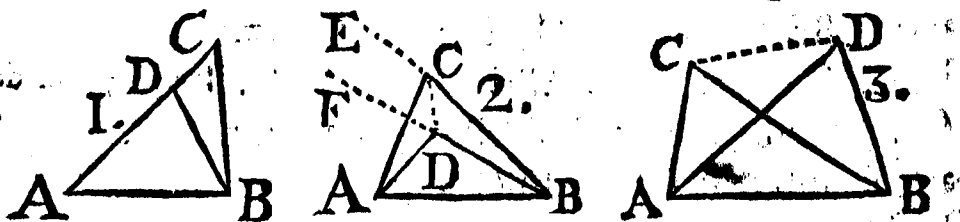
In triangulis ergo $D B C$, $A B C$ est $B D = A C$,
 & $B C$ latus commune, & $\angle D B C = \angle$ a. hyp.
 $A C B$. Quare ϵ triangulum $D B C =$ triangulo
 $A B C$, pars toti. Quod Est Absurdum. Non ϵ 4. 1.
 est ergo recta $A B$ rectae $A C$ inaequalis; ergo ν 9. ax.
 aequales sunt. Q. E. D.

* *Scholium.* Hinc omne triangulum aequiangu-
 lum est quoque aequilaterum.

PROP. VII. THEOR.

*Super eandem rectam AB duabus iisdem re-
 ctis AC, BC duae aliae rectae AD, BD aequales
 altera alteri, eosdem terminos habentes, ($A D =$
 $A C$,*

AC , & $BD = BC$) non constituentur ad aliud punctum D atque aliud C in easdem partes.



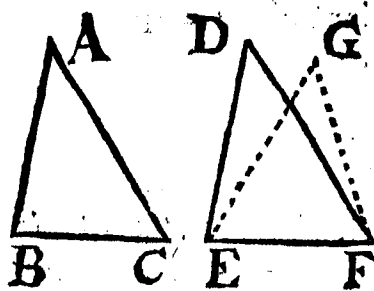
* 1. *Casus*. Si punctum D statuatur in AC :
 9. 9. ax. liquet ⁹ non esse $AD = AC$.

* 2. *Casus*. Si punctum D ponatur intra triangulum ACB : ducatur CD , & producantur BD ad F , & BC ad E . Iam si fit $AD = AC$: erit ' ang. $ADC = ACD$. Sed si $BD = BC$: erit ' ang. $ECD = FDC$. Ergo ang. $ACD > FDC$,
 5. 1. & multo magis ang. $ECD > FDC$. Q. E. A.
 9. & 14. ax.

3. *Casus*. Si D sit extra $\triangle ACB$: ducatur recta CD . Iam si fit $AD = AC$: erit ' ang. $ACD = ADC$. Quare ang. $ADC > DCB$, & multo magis ang. $BDC > DCB$. Sed quia etiam ponitur $BD = BC$: erit ' ang. $BDC = DCB$. Q. E. A.

Ergo non potest esse $AD = AC$, & simul $BD = BC$. Q. E. D.

PROP. VIII. THEOR.



Si duo triangula ABC , DEF habeant duo latera AB, AC , duobus lateribus DE, DF aequalia, alterum alteri, habeant etiam basin BC basi EF aequalem, angulum quoque A angulo D aequalem habebunt, ab aequalibus rectis comprehensum.

Si

Si enim $\triangle ABC$ applicetur $\triangle DEF$, & punctum B ponatur in E, & recta BC super rectam EF: cadet ^{λ.} punctum C in F, quia ^{8. ax.} $BC = EF$. ^{μ. hyp.} Iam si punctum A non caderet in D, sed in aliud, velut G: super eadem recta EF duabus iisdem rectis ED, FD aliae duae rectae EG, FG, aequales ^{μ.}, altera alteri, habentes eosdem terminos, constitutae essent ad aliud punctum G & aliud D in easdem partes. Sed hoc fieri nequit ^{ν. 7. 1.}. Ergo punctum A cadet in punctum D, & ergo congruet latus BA lateri ED; & latus AC lateri DF; quare & angulus A congruet angulo D. Ergo ^{λ.} $\text{ang. } A = D$. Q. E. D.

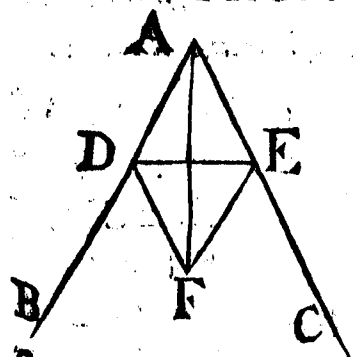
* *Schol. 1.* Hinc triacula sibi mutuo aequilatera etiam sibi mutuo aequiangula sunt ξ .

$\xi. 4. 1.$

* *Schol. 2.* Triacula sibi mutuo aequilatera aequantur inter se ξ .

PROP. IX. PROBL.

Datum angulum rectilineum BAC bifariam secare.



Sumatur in recta AB punctum quoduis D, & capiatur ^{o.} $AE = AD$, & ^{o. 3. 1.} ducatur DE, super qua fiat triangulum aequilaterum DFE. Ducatur AF. Dico AF bifariam secare ang. BAC.

Quoniam enim est $AE = AD$, & AF latus commune, & basis EF = ^{π.} basi DF: est ^{π. constr.} $\text{ang. } EAF = \text{ang. } DAF$. Ergo AF bifariam secat angulum BAC. Q. E. F. ^{& 8. 1.}

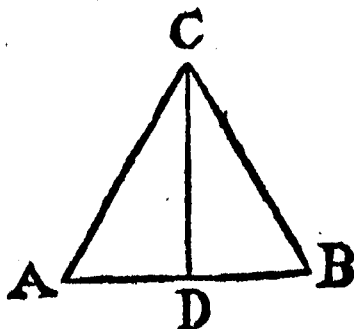
* *Schol.*

* *Scholium.* Hinc patet, quomodo angulus secari possit in aequales partes 4, 8, 16, 32 &c; singulas nempe partes iterum bisecando. Methodus vero recta & circulo angulos secandi in partes aequales quotcunque, e. gr. 3, 5, 7, nulla datur.

PROP. X. PROBL.

Datam rectam lineam terminatam AB bisariam secare.

e. 1. 1.
7. 9. 1.



e. 23. def.

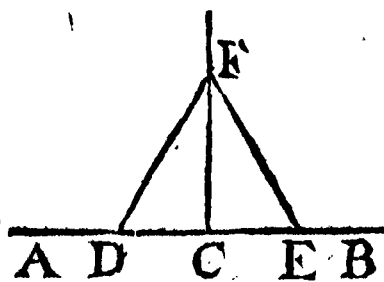
φ. constr.
x. 4. 1.

Fiat super AB^o Δ aequilaterum, & bisecetur^r ang^{us} ACB recta CD. Dico, rectam AB bisecari in puncto D.
Nam^o AC = BC, & CD^o latus Δis ADC & BDC commune, & ang. ACD = BCD φ. Ergo^r AD = DB. Q. E. F.

PROP. XI. PROBL.

Data rectae lineae AB, a puncto in ipsa dato C, ad rectos angulos rectam lineam ducere.

ψ. 3. 1.
a. 1. 1.



Sumatur in recta AC punctum quodvis D, & ponatur^r CE = CD, & constituatur^r super DE Δ aequilaterum DFE, & ducatur recta FC, quae erit rectae AB ad angulos rectos.

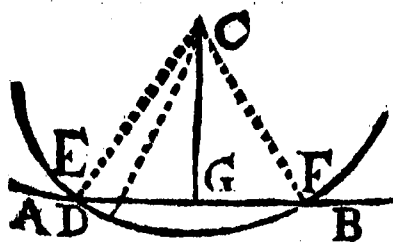
a. constr.
β. 23. def.
γ. 8. 1.
δ. 10. def.

Quoniam enim in Δis FEC & FDC^o est CE = CD, &^β EF = DF, & FC communis; ang.^γ ECF = DCF. Ergo^δ anguli ECF, DCF recti sunt. Q. E. F.

PROP.

PROP. XII. PROBL.

Super datam rectam lineam infinitam AB, a dato puncto C, quod non est in eadem, perpendicularem lineam rectam ducere.



Sumatur ex altera parte rectae AB punctum quoduis D, & centro C interuallo CD describatur ^{1. 3. post.} ^{2. 10. 1.} circulus EDF, & secetur ² recta EF bifariam in G. Ducatur recta CG, quae in AB erit perpendicularis.

Nam ductis rectis CE, CF, quoniam ¹ EG = GF, & CG communis, & ² CE = CF: erit ^{1. 8. 1.} ang. EGC = FGC. Ergo CG est in AB perpendicularis *. Q. E. F. ^{1. 10. def.}

PROP. XIII. THEOR.



Si recta AB insists rectae DC, faciat angulos ABD, ABC: vel duos rectos faciet, vel duobus rectis aequales.

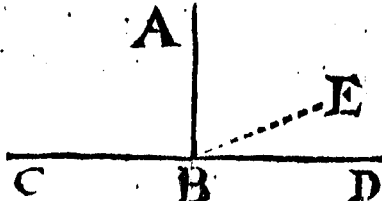
Si enim ang. ABD = ABC: duo ¹ hi anguli ^{1. 10. def.} recti sunt. Sin minus: ducatur ² a puncto B ^{1. 11. 1.} recta BE in DC perpendicularis. Quare ang. CBE + EBD ¹ = 2 rectis. Et quoniam CBE = CBA + ABE: erit ¹ CBE + EBD = CBA + ABE + EBD. Item quoniam ang. DBA = ABE + EBD; erit ¹ DBA + CBA = CBA + ABE + EBD. Ergo ¹ DBA + CBA = CBE + EBD = 2 rectis. Q. E. D. ^{1. 2. ax.} ^{2. 1. ax.} ^{3. 13. ax.}

* 1. Schol.

* 1. Schol. Hinc si vnus angulorum EBD rectus sit: aliter EBC etiam rectus erit. Si ille ABD obtusus: hic ABC acutus erit; & contra.

* 2. Schol. Si plures rectae quam vna ad idem punctum eidem rectae insistant: anguli fient duobus rectis aequales.

PROP. XIV. THEOR.

 Si ad aliquam rectam AB, & ad punctum in ea B, duae rectae BC, BD, non ad easdem partes positae, faciant angulos deinceps CBA, DBA, duobus rectis aequales: ipsae rectae BC, BD in directum sibi inuicem erunt.

π . 1. post.

ρ . 13. 1.

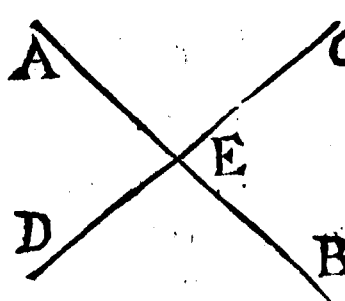
σ . hyp.

τ . 3. ax.

ν . 9. ax.

Si enim BD non sit in directum ipsi CB: fit π ei in directum quaeritis BE. Ergo ρ ang. CBA + ABE = 2 rectis. Sed & CBA + DBA = σ 2 rectis. Ergo CBA + ABE = CBA + DBA. Ergo τ ang. ABE = DBA. ν Q.E.A.

PROP. XV. THEOR.

 Si duae rectae AB, CD sese mutuo secant in E: angulos AEC, DEB ad verticem facient inter se aequales.

ϕ . 13. 1.

χ . 3. ax.

Nam ϕ ang. AEC + AED = 2 rectis = DEB + AED. Ergo χ ang. AEC = DEB. Q.E.D.

* 1. Schol. Hinc manifestum est, quotcumque rectis sese mutuo secantibus, angulos ad punctum sectionis aequales esse 4 rectis.

2. Schol.

* 2. *Schol.* Et ergo omnes anguli circa vnum punctum constituti efficiunt quatuor rectos.

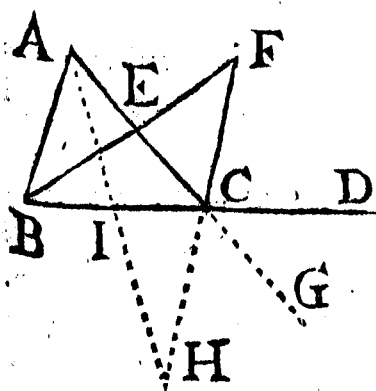
* 3. *Schol.* Si ad aliquam rectam lineam AB, atque ad eius punctum E, duae rectae EC, ED non ad easdem partes sumtae, angulos ad verticem AEC, DEB aequales fecerint: ipsae rectae CE, ED in directum sibi inuicem erunt.

Nam 2 recti $= \angle AEC + \angle CEB = \angle DEB + \angle CED$. Ergo CE, ED sunt in directum. ψ. 13. 1.
ω. hyp. & 2.
ax.

* 4. *Schol.* Si quatuor rectae EA, EB, EC, ED ab vno puncto E exeuntes, angulos oppositos ad verticem aequales inter se fecerint: erunt quaelibet duae lineae AE, EB, & CE, ED in directum positae. α. 14. 1.
β. 2. schol.
γ. hyp. &
2. ax.

Nam quia ang. AEC + AED + CEB + DEB = 4 rectis: erit AEC + AED = DEB + CEB. Ergo CED & AEB sunt rectae lineae. δ. 7. ax.
ε. 14. 1.

PROP. XVI. THEOR.



Omnis trianguli ABC vno latere BC producto ad D: angulus exterior ACD maior est utrolibet interiorum & oppositorum BAC, ABC.

Secetur AC bifariam in E, & ducta recta BE.

Producatur ad F, & ponatur EF = EB, & ducatur FC. Quoniam igitur AE = EC, & EB = EF, & ang. AEB = FEC: erit ang. BAE = ACF. Sed ang. ACD > ACF. Ergo ang. ACD > BAE. ζ. 10. 1.
η. 3. 1.
θ. 15. 1.
ι. 4. 1.
κ. 9. ax.
λ. 14. ax.

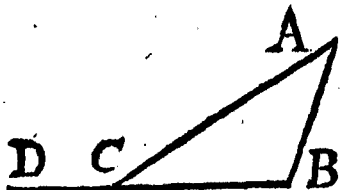
Eodem modo, si BC bifecetur in I, & recta AI producatur, donec IH = IA, & iungatur HC,

HC, & producat^r etiam AC ad G, demonstrabitur esse ang. BCG, vel ACD $>$ ABC. Q. E. D.

PROP. XVII. THEOR.

Omnis trianguli ABC duo anguli duobus rectis sunt minores, quomodocunque sumti.

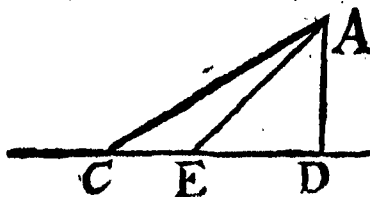
μ. 16. 1.
ν. 4. ax.



ξ. 13. 1.
ο. 14. ax.

Producatur enim BC ad D. Et quia ang. ACD $>$ ABC: erit ACD + ACB $>$ ABC + ACB. Sed ACD + ACB = $\frac{1}{2}$ 2 rectis. Ergo ang. ABC + ACB $<$ 2 rectis. Eodem modo, producta CA, demonstrabitur esse ACB + CAB $<$ 2 rectis; item, producta AB, esse CAB + ABC $<$ 2 rectis. Q. E. D.

* 1. Schol. Hinc in omni triangulo, cuius vnus angulus, est rectus, vel obtusus, reliqui acuti sunt.



* 2. Schol. Si recta AE cum alia CD angulos inaequales faciat, vnum AED acutum, & alterum AEC obtusum: linea perpendicularis AD, ex quouis eius puncto A ad aliam illam CD demissa, cadet ad partes anguli acuti AED.

Nam si AC, ad partes anguli obtusi ducta, dicatur perpendicularis: in $\triangle AEC$ erit ang. AEC + ACE $>$ 2 rectis. Quod fieri nequit.

π. 10. & 11. def.

ρ. 17. 1.

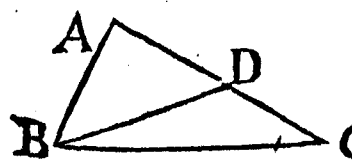
σ. 5. 1.

* 3. Schol. Omnes anguli trianguli aequilateri, & duo anguli trianguli isoscelis ad basin, acuti sunt.

PROP.

PROP. XVIII. THEOR.

Omnis trianguli ABC maius latus AC maiorem angulum ABC subtendit.



Quum enim $AC > AB$:

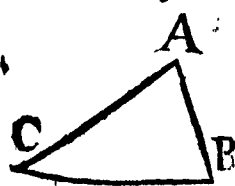
fiat τ $AD = AB$, & iun- τ . 3. 1.
gatur BD. Iam est ν ang. ν . 16. 1.

$\angle ADB > \angle ACB$, & ang.

$\angle ABD = \varphi$ $\angle ADB$: ergo ang. $\angle ABD > \angle ACB$, & φ . 5. 1.
a potiori ang. $\angle ABC > \angle ACB$. Q. E. D. χ . 14. ax.

PROP. XIX. THEOR.

Omnis trianguli ABC maiori angulo B maius latus AC subtenditur.



Si enim ang. $B > C$, nec tamen

$AC > AB$: aut erit $AC = AB$,

aut $AC < AB$. Si esset $AC =$

AB : foret ang. $B = \psi$ C ; contra ψ . 5. 1.

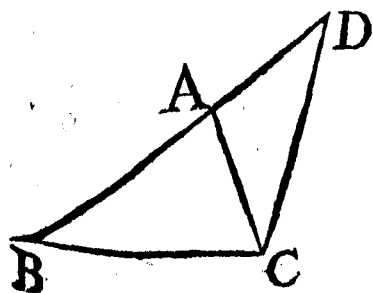
hypothefin. Et si $AC < AB$, foret ang. $C > \omega$ B . 18. 1.

B ; etiam contra hypothefin. Ergo $AC >$

AB . Q. E. D.

PROP. XX. THEOR.

Omnis trianguli ABC duo latera sunt maiora reliquo, quomodocunque sumta.



Sumantur BA, AC, &

in producta BA capia-

tur α $AD = AC$; duca- α . 3. 1.

tur DC. Ergo angulus

$\angle ADC = \beta$ $\angle ACD$. Sed β . 5. 1.

ang. $\angle BGD > \gamma$ $\angle ACD$. γ . 9. ax.

Quare $\angle BCD > \delta$ $\angle BDC$. δ . 19. 1.

Ergo δ $BD > BC$, ideoque quum $BD = BA$ ϵ 2 . ax.

+ AC, erit $BA + AC > \zeta$ BC . Eodem mo- ζ . 14. ax.

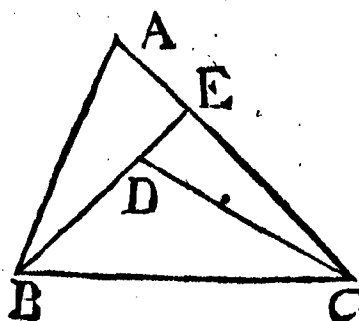
do ostendemus esse $AB + BC > AC$, & AC

+ $BC > AB$. Q. E. D.

PROP. XXI. THEOR.

Si a terminis B, C unius lateris trianguli ABC duae rectae BD, CD intus constituentur: hae reliquis duobus trianguli ABC lateribus AB, AC, minores quidem erunt, angulum vero BDC maiorem, quam A, comprehendent.

η. 20. 1.
§. 4. ax.

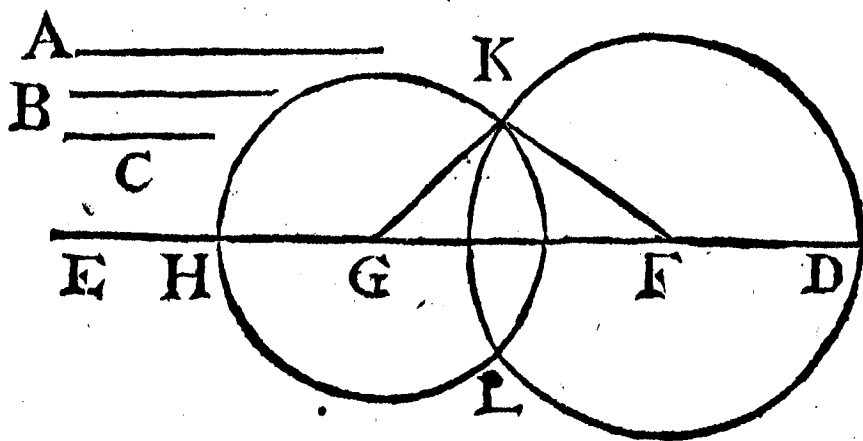


Producatur enim BD ad E. Et quum ABE fiat Δ : erit $AB + AE > EB$; ideoque $AB + AC > EB + EC$. In ΔEDC est $CE + ED > CD$; ideoque $CE + EB > CD + DB$. Quare multo magis $AB + AC > CD + BD$. Q. E. Imum.

ι. 16. 1.

Angulus $BDC > CED > A$. Ergo & ang. $BDC > A$. Q. E. Ildum.

PROP. XXII. PROBL.



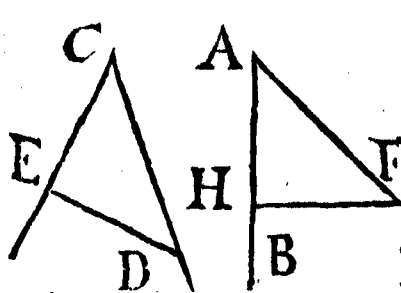
E tribus rectis, quae tribus rectis datis A, B, C, sint aequales, triangulum constituere. Oportet autem duas, utcumque sumtas, maiores esse reliqua.

Pona-

Ponatur recta DE, finita quidem ad D, infinita vero versus E, & fiat $DF = A$, & $FG = B$, & $GH = C$. Centro F interuallo FD describatur $\wedge$ circulus DKL, item centro G $\wedge$ 3. post. interuallo GH circulus HLK; & ducantur rectae KF, KG.

Quoniam ergo $KF = FD = A$; & $GK = GH = C$; & $GF = B$: ex tribus rectis KF, GK, GF, tribus A, C, B aequalibus, constitutum est triangulum KGF. Q. E. F.

PROP. XXIII. PROBL.



Ad datam rectam AB, & ad datum in ea punctum A, dato angulo rectilineo DCE angulum rectilineum aequalem constituere.

Sumantur in ytraque recta CD & CE puncta quaevis D, E, & ducatur recta DE, & e tribus rectis lineis, quae tribus CE, CD, DE aequales sint, constituatur $\triangle AHF$, ita vt $AF = CD$, & $AH = CE$, & $HF = DE$. 22. 1.

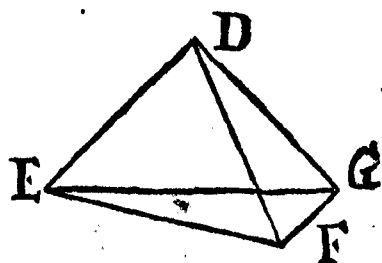
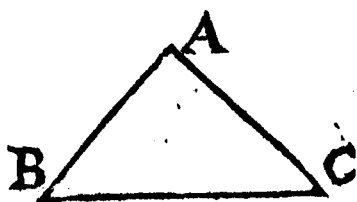
Quia ergo $AF = CD$, & $AH = CE$, & basi $HF =$ basi ED : erit ang. A = π DCE. 8. 1. Q. E. F.

PROP. XXIV. THEOR.

Si duo triangula ABC, DEF habeant duo latera AB, AC duobus lateribus DE, DF aequalia, alterum alteri; angulum autem A angulo EDF maiorem, ab aequalibus rectis comprehensum: etiam basin BC basi EF maiorem habebunt.

B 3

Quoniam



p. 23. 1.

a. 3. 1.

r. hyp.

u. 4. 1.

φ. 5. 1.

x. 19. 1.

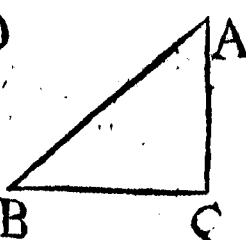
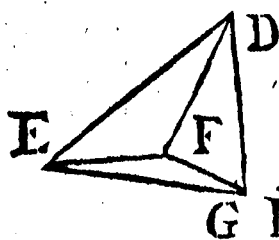
ψ. 9. ax.

ω. 21. 1.

α. 5. ax.

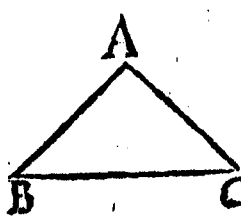
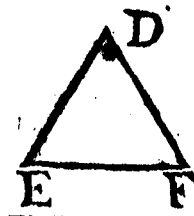
Quoniam enim ang. $A > EDF$, constitutur⁶ ad rectam DE & ad eius punctum D ang. $EDG = A$, & capiatur^r $DG = AC$ vel $= DF$. Ducantur FG , EG . 1. *Cas.* Si EG cadit supra EF ; quum in Δ is ABC , DEG praeterea sit $AB = DE$ ^r: erit basis^v $BC =$ basi EG . Rursus quia $DG = DF$, ideoque ϕ ang. $DFG = DGF$: erit ang. $DFG > EGF$, & multo magis $EFG > EGF$. Quare in Δ EGF erit x latus $EG > EF$. Ergo & $BC > EF$. Q. E. D.

* 2. *Cas.* Si EG cadit in EF : liquet^ψ esse $EG > EF$, ideoque $BC > EF$. Q. E. D.



* 3. *Cas.* Si EG cadit infra EF . Quoniam ω $DG + GE > DF + FE$; si hinc inde auferantur aequales DG , DF : manet ω $GE > FE$. Ergo & $BC > EF$. Q. E. D.

PROP. XXV. THEOR.



Si duo triangula ABC , DEF habeant duo latera AB , AC , duobus lateribus DE , DF aequalia alterum alteri, basin autem BC habeant

ant basi EF maiorem: habebunt etiam angulum A maiorem angulo D, qui ab aequalibus rectis comprehenditur.

Nam si ang. A non maior est quam D: aut est $A = D$, aut $A < D$. Sed si $A = D$: β erit β . 4. 1. $BC = EF$; contra hypothesin. Si ang. $A < D$: erit γ $BC < EF$; etiam contra hypothesin. γ . 24. 1. Ergo ang. $A > D$. Q. E. D.

PROP. XXVI. THEOR.

Si duo triangula ABC, DEF duos angulos B, ACB, duobus angulis E, F aequales habeant, alterum alteri, unumque latus uni lateri aequale, vel quod aequalibus adiacet angulis, vel quod uni aequalium angulorum subtenditur: & reliqua latera reliquis lateribus aequalia, alterum alteri, & reliquum angulum BAC reliquo D aequalem habebunt.

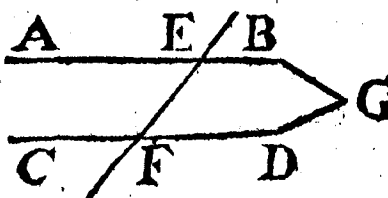


1. Hyp. Sit $B = E$, $ACB = F$ & $BC = EF$. Dico $AB = DE$, & $AC = DF$, & ang. $BAC = D$. Sienim non est $AB = DE$, sit alterutra $AB > DE$, & fiat δ $BG = DE$, & iungatur GC. δ . 3. 1. Quoniam ergo $BC = EF$ & $BG = DE$, & ang. $B = E$: erit ϵ $GCB = DFE = \zeta$ ACB . Q. E. A η . ϵ . 4. 1. ζ . hyp. 2. Hyp. Sit $AB = DE$. Dico, fore $BC = EF$, & $AC = DF$, & ang. $BAC = D$. Nam si dicatur $BC > EF$, ponatur δ $BH = EF$ & ducatur AH. Et quia ζ $AB = DE$, & $BH = EF$,
B 4 & ang.

z. 4. 1.
9. 16. 1.

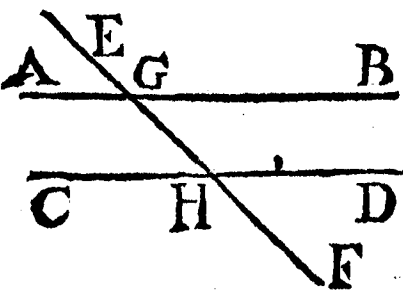
& ang. $B = E$; erit $\angle$ ang. $BHA = F = ACB$.
Q. E. A.⁹. Ergo $BC = EF$, ideoque $\angle$ & AC
 $= DF$ & ang. $BAC = D$. Q. E. D.

PROP. XXVII. THEOR.

 *Si in duas rectas lineas*
AB, CD recta linea EF
incidens alternos angu-
los AEF, EFD inter se
aequales fecerit: parallelae erunt rectae lineae
AB, CD.

Si enim non sint parallelae: productae ad
alterutram partem $\angle$ conueniant, velut in pun-
cto G. Ergo ang. AEF extra triangulum
EGF maior $\approx$ erit interno EFD; contra hypo-
thesin. Ergo AB, CD sunt parallelae. Q. E. D.

PROP. XXVIII. THEOR.

 *Si in duas lineas AB,*
CD recta linea EF in-
cidens exteriorem an-
gulum EGA interiori
& opposito ad easdem
partes EHC aequalem
fecerit; vel interiores
& ad easdem partes AGH, GHC duobus rectis
aequales: rectae lineae AB, CD erunt inter se
parallelae.

z. 15. 1. & 1. Hyp. Quia ang. $EGA = EHC$: erit $\angle$ &
1. ax. ang. $BGH = EHC$ alterno. Parallelae igitur
14. 27. 1. sunt rectae AB & CD. Q. E. D.

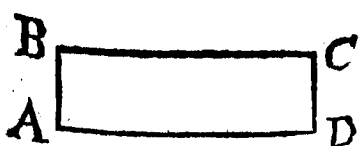
2. Hyp. Quia ang. $AGH + GHC = 2$ re-
ctis $= AGH + BGH$: erit, ablato commu-
ni

ni AGH, ang. BGH $\equiv$ alterno GHC. Er- ξ . 3. ax.
 go^u AB, CD, sunt parallelae. Q. E. D. μ . 27. 1.

PROP. XXIX. THEOR.

In parallelas rectas lineas AB, CD recta li- Figura pro-
nea EF incidens, & alternos angulos BGH, pos. 28.
GHC inter se aequales, & exteriorem EGA
interiori & opposito ad easdem partes GHC
aequalem, & interiores ad easdem partes AGH,
GHC duobus rectis aequales efficit.

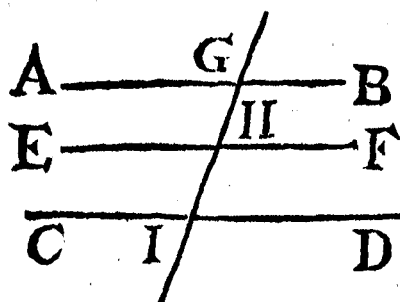
Si enim ang. BGH & GHC inaequales sint:
 alter e. gr. BGH maior erit. Ergo erit $\circ$ BGH θ . 4. ax.
 $\div$ AGH $>$ GHC $\div$ AGH. Sed BGH $\div$
 AGH $=$ π 2 rectis. Ergo ang. GHC $\div$ AGH π . 13. 1.
 $<$ 2 rectis. Quare θ rectae AB, CD produ- θ . 11. ax.
 ctae versus A concurrent, ideoque σ non σ . 34. def.
 erunt parallelae. Quod est contra hypothe-
 sin. Ergo ang. BGH $=$ GHC. Ergo quum τ . 15. 1.
 ang. EGA τ $=$ BGH, erit etiam ν ang. EGA $=$ ν . 1. 2x.
 GHC. Hinc ϕ ang. EGA $\div$ AGH $=$ AGH ϕ . 2. 2x.
 $\div$ GHC. Sed π ang. EGA $\div$ AGH $=$ 2 re-
 ctis. Ergo $\&$ ν ang. AGH $\div$ GHC $=$ 2 re-
 ctis. Q. E. D.



* Schol. Hinc omne paral-
 lelogrammum AC habens
 vnum angulum rectum A
 est rectangulum.

Nam A $\div$ B $=$ π 2 rectis. Ergo quum A re- χ . 29. 1.
 ctus sit, B etiam rectus ψ erit. Eodem argumento ψ . 3. ax.
 D & C recti sunt.

PROP. XXX. THEOR.



Quae AB, CD, eidem rectae lineae EF parallelae sunt, & inter se sunt parallelae.

Incidat enim in ipsas recta GHI. Et quia AB,

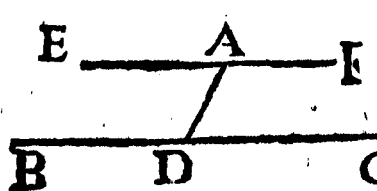
EF parallelae sunt: ω ang. AGH = GHF. Rursus quia EF, CD parallelae: ang. HID = GHF. Ergo ω ang. AGH = alterno HID, ideoque β rectae AB, CD parallelae. Q. E. D.

ω . 29. I.

α . I. ax.

β . 27. I.

PROP. XXXI. PROBL.



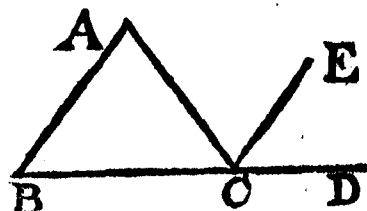
Per datum punctum A datae rectae lineae BC parallelam rectam lineam ducere.

Sumatur in BC punctum quoduis D, & iungatur AD, & fiat ang. γ EAD = ADC, & producaturs EA ad F. Erunt δ EF, BC parallelae. Q. E. F.

γ . 23. I.

δ . 27. I.

PROP. XXXII. THEOR.



Omnis trianguli ABC uno latere BC producto, exterior angulus ACD angulis duobus interioribus & oppositis A, B, est aequalis; & trianguli tres interiores anguli A, B, ACB duobus rectis sunt aequales.

α . 31. I.

ξ . 29. I.

η . 2. ax.

Ducatur enim per C ipsi AB θ parallela CE: & erit ang. ACE = ζ A; item ζ ang. ECD = B Quare η ACD = A + B. Quod erat unum.

Iam

Iam addito communi angulo ACB, erit
 $ACD + ACB = A + B + ACB$. Sed ACD ^{11. 2. ax.}
 $+ ACB = 2$ rectis. ^{9. 13. 1.} Ergo & anguli A +
 $B + ACB = 2$ rectis. ^{11. 1. ax.} *Quod erat alterum.*

* *Scholia.*

1. Tres simul anguli cuiusvis trianguli aequales sunt tribus simul cuiuscunque alterius. Vnde

2. Si in vno triangulo duo anguli (aut singuli, aut simul) aequales sint duobus angulis in altero triangulo: etiam reliquus reliquo aequalis est. Item, si duo triangula vnum angulum vni aequalem habeant: reliquorum summae aequantur.

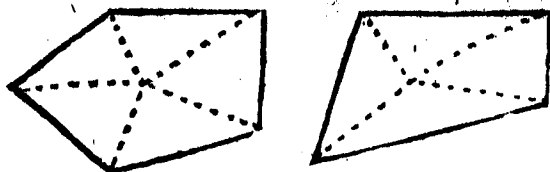
3. In triangulo si vnus angulus rectus sit: reliqui vnum rectum conficiunt.

4. Si in isoscele angulus, aequis cruribus contentus, rectus est: reliqui ad basin sunt semirecti.

5. Trianguli aequilateri angulus facit duas tertias vnus recti. Nam $\frac{1}{3} 2$ rect. $= \frac{2}{3}$ recti.

6. Huius propositionis beneficio, cuiuslibet figurae rectilineae tam interni quam externi anguli quot rectos conficiant, innotescet per duo sequentia theoremata.

Theor. I.



Omnes simul anguli cuiuscunque figurae rectilineae conficiunt bis tot rectos, demtis quatuor, quot sunt latera figurae.

Ex quouis puncto intra figuram ducantur ad omnes figurae angulos rectae, quae figuram resolvent in tot triangula, quot habet latera. Quare quum singula triangula conficiant duos rectos: omnia simul conficient bis tot rectos, quot sunt latera. Sed anguli circa dictum punctum conficiunt

ciunt quatuor rectos. Ergo si ab omnium triangulorum angulis demas angulos circa id punctum: anguli reliqui, qui componunt angulos figurae, conficiunt bis tot rectos, demtis quatuor, quot sunt latera figurae. Q. E. D.

Hinc omnes eiusdem speciei rectilineae figurae aequales habent angulorum summas.

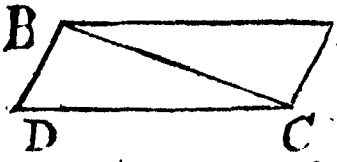
Theor. II.

Omnes simul externi anguli cuiuscunque figurae rectilineae conficiunt quatuor rectos.

Nam singuli interni figurae anguli cum singulis externis conficiunt duos rectos. Ergo interni simul omnes cum omnibus simul externis conficiunt bis tot rectos, quot sunt latera figurae. Sed (ut modo ostensum est) interni simul omnes etiam, cum quatuor rectis, efficiunt bis tot rectos, quot sunt latera figurae. Ergo externi anguli quatuor rectis aequantur. Q. E. D.

Hinc omnes cuiuscunque speciei rectilineae figurae aequales habent externorum angulorum summas.

PROP. XXXIII. THEOR.

 Quae rectae AC, BD, aequales & parallelas AB, CD ad easdem partes coniungunt, ipsae etiam sunt aequales & parallelas.

κ. 29. I.

λ. 4. I.

μ. 27. I.

Iungatur enim BC: & quia $\sphericalangle$ ang. ABC = BCD, & per hyp. AB = CD, & latus BC commune; erit $\wedge$ AC = BD & ang. ACB = CBD, ideoque $\sphericalangle$ rectae AC & BD parallelas erunt. Q. E. D.

PROP.

PROP. XXXIV. THEOR.

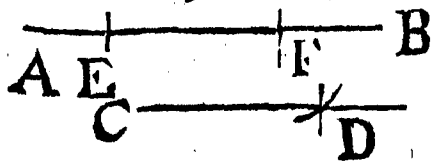
Parallelogrammorum spatiorum ABCD tam Fig. prop. 33.
latera opposita ($AB = CD$, $AC = BD$) *quam*
anguli oppositi ($A = D$, $ABD = ACD$) *inter*
se aequantur; & ipsa diameter BC bifariam
secat.

Quoniam AB, CD parallelae sunt: $\angle$ erit $\angle$ hyp. $\angle ABC = DCB$. Rursus ob AC, DB parallelas, erit $\angle DBC = BCA$. Et latus BC est commune. Quare $AC = BD$, & $AB = CD$, & $\angle A = D$. Et quia erat $\angle ABC = DCB$, & $\angle DBC = BCA$: toti $\angle ABD, ACD$ aequantur. Denique, quum sit $AC = BD$, & BC latus commune, & $\angle BCA = DBC$: tota $\triangle a. ACB, CBD$ aequantur. Q. E. D.

* Scholium.

Omne quadrilaterum ABDC habens latera opposita aequalia, est parallelogrammum.

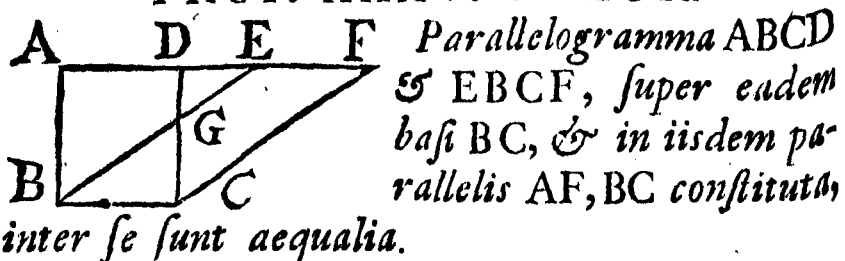
Nam per 8. 1. $\angle ABC = BCD$. Ergo AB, CD parallelae sunt. Eadem ratione $\angle BCA = DBC$. Quare AC, BD etiam parallelae sunt. Ergo $ABDC$ est parallelogrammum. Q. E. D.



Hinc expeditius per datum punctum C datae rectae AB ducetur parallela CD . Sume in AB quodvis punctum E . Centris E & C intervallo quovis duc aequales circulos F, D . Centro vero F spatio EC duc circulum FD , qui priorem CD secet in D . Erit ducta CD parallela. Nam, vt modo demonstratum est, $E C D F$ est fgr.

PROP.

PROP. XXXV. THEOR.



σ. 34. 1.

τ. 2. ax.

υ. 29. 1.

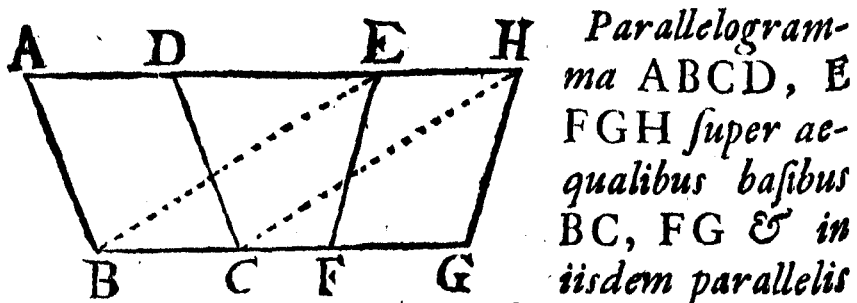
φ. 4. 1.

χ. 3. ax.

Nam quia ABCD, EBCF Pgra sunt: est σ $AD = BC = EF$. Adde communem DE, & erit τ $AE = DF$. Sed & σ $AB = DC$, & ang. $A = \nu$ CDF. Ergo $\Delta ABE = \varphi$ ΔDCF . Auferatur commune DGE: erit $\propto$ trapezium $ADGB = EGCF$. Adde commune BGC: erit τ Pgr. $ABCD = EBCF$. Q. E. D.

* Reliquorum casuum, si E in D, vel inter D & A cadit, non dissimilis, sed simplicior & facilior est demonstratio.

PROP. XXXVI. THEOR.



ψ. 34. 1.

ω. 33. 1.

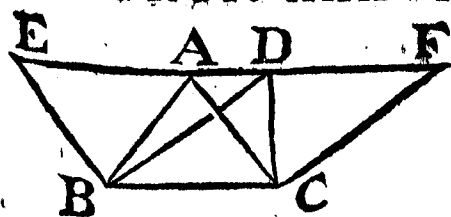
α. 35. 1.

β. 1. ax.

Iungantur enim BE, CH. Et quia per hyp. $BC = FG = \psi$ EH; BC & EH sunt aequales. Sunt vero & parallelae (hyp.). Ergo α BE & CH quoque sunt aequales ac parallelae. Quare EBCH est Pgr. & aequale α Pgro ABCD. Sed est etiam α Pgr. EBCH = Pgro EFGH. Ergo β Pgr. $ABCD = EFGH$. Q. E. D.

PROP.

PROP. XXXVII. THEOR.

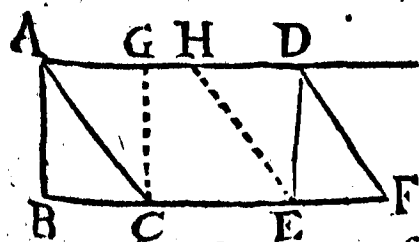


Triangula ABC,
DBC super eadem
basi BC & in iisdem
parallelis AD, BC

constituta, sunt inter se aequalia.

Producatur γ AD in E, F, & ducatur δ BE γ . 1. post.
Parallela CA, & CF parall. BD. Erit ϵ Prg. δ . 31. 1.
BCAE = DBCF. Sed Δ ABC ζ = $\frac{1}{2}$ Pgr. ζ . 35. 1.
BCAE, item Δ DBC = $\frac{1}{2}$ Pgr. DBCF. Ergo
 Δ ABC η = DBC. Q. E. D. η . 7. ax.

PROP. XXXVIII. THEOR.



Triangula ABC, DEF
super basibus aequali-
bus BC, EF, & in iis-
dem parallelis BF, AD

constituta, sunt inter se aequalia.

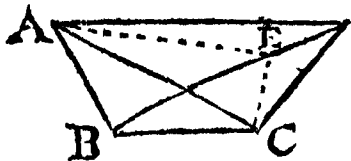
Ducatur θ CG ipsi BA, & EH ipsi DF pa- θ . 31. 1.
rallela. Pgra ergo sunt ABCG & DFEH, &
aequalia. Sed Δ ABC $\ast$ est $\frac{1}{2}$ Pgr. ABCG, $\ast$. 36. 1.
& Δ DEF est $\frac{1}{2}$ Pgr. DFEH. Ergo Δ ABC $\ast$. 34. 1.
= Δ DEF. Q. E. D. λ . 7. ax.

* Scholium.

Si basis $BC > EF$: liquet $\Delta BAC > \Delta EDF$.
Et si basis $BC < EF$: erit $\Delta BAC < \Delta EDF$.

PROP.

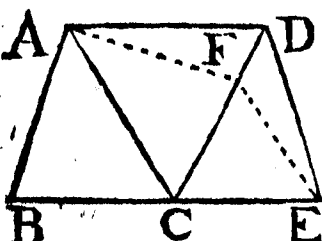
PROP. XXXIX. THEOR.

 Triangula ABC, DBC
aequalia, super eadem
basi BC & ad easdem
partes constituta, sunt in iisdem parallelis AD,
BC.

μ. 31. 1.
ν. 37. 1.
ξ. hyp.
ο. 1. ax.
π. 9. ax.

Si enim AD, BC non sunt parallelae: ducatur per A ipsi BC parallela μ AE, & ducatur EC. Quare $\triangle BEC = \nu \triangle ABC = \xi \triangle DBC$. Ergo $\circ$ triangula BEC, DBC aequalia sunt. Q. E. A π . Similiter ostendemus, neque ullam aliam parallelam esse praeter rectam AD. Ergo AD est ipsi BC parallela. Q. E. D.

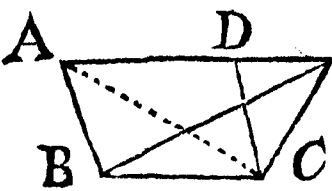
PROP. XL. THEOR.

 Triangula ABC, DCE
aequalia, super basibus BC,
CE † aequalibus, & ad eas-
dem partes constituta, sunt in
iisdem parallelis AD, BE.

ς. 31. 1.
σ. 37. 1.
τ. hyp. &
1. ax.
υ. 9. ax.

Sin minus: ducatur ϵ per A ipsi BE paral-
lela AF, & iungatur FE. Ergo $\triangle FCE = \sigma$
 $\triangle ABC$. Ergo & $\triangle FCE = \tau \triangle DCE$.
Q. E. A ν .

PROP. XLI. THEOR.

 Si parallelogrammum
ABCD, & triangulum
BEC eandem habeant
basin BC, sintque in iis-
dem parallelis AE, BC: parallelogrammum
ABCD ipsius trianguli EBC duplum erit.

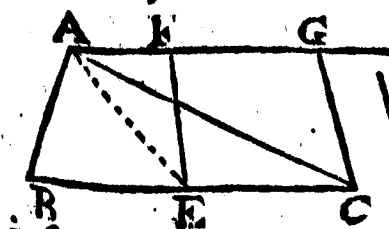
† Puta, in eadem recta positus.

Ducatur

Ducatur enim AC: & erit ϕ $\triangle ABC = \triangle \phi$. 37. 1.
 EBC. Sed Pgr. ABCD est χ duplum $\triangle \chi$. 34. 1.
 ABC. Ergo Pgr. ABCD est ψ duplum $\triangle \psi$. 1. & 6
 EBC. Q. E. D. ax.

PROP. XLII. PROBL.

Dato triangulo ABC aequale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo D.



Secetur BC bifariam ω in E, & fiat ω . 10. 1.

ω ang. CEF = D. α . 23. 1.

Ducatur AG β . 31. 1.

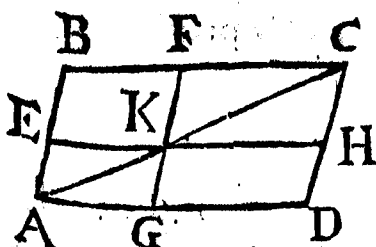
ipfi BC, & CG ipfi EF parallela. Erit FECG
 Pgr. aequale $\triangle ABC$.

Nam ducta AE, erit γ $\triangle ABE = \triangle AEC$. γ . 38. 1.

Ergo $\triangle ABC$ δ = 2 $\triangle AEC$ = Pgr. FECG. δ . 2. ax.

Ergo ζ Pgr. FECG = $\triangle ABC$. Q. E. D. ζ . 41. 1.
 ζ . 1. ax.

PROP. XLIII. THEOR.



In omni parallelogrammo
 ABCD complementa EF,
 DK eorum, quae circa
 diametrum AC sunt, pa-
 rallelogrammorum EG,
 FH, inter se sunt aequalia.

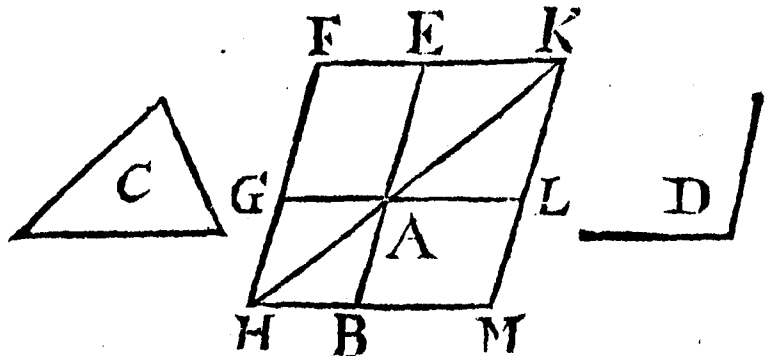
Nam η $\triangle ABC = \triangle ACD$. Et quia etiam η . 34. 1.

EG & FH sunt Pgra, quorum diametri sunt
 AK, KC: erit similiter $\triangle AEK = \triangle AKG$,
 & $\triangle FKC = \triangle KCH$. Quare θ $\triangle AEK + \theta$. 2. ax.
 $\triangle FKC = \triangle AKG + \triangle KCH$. Ergo ι reliquum ι . 3. ax.
 Pgr. BK = reliquo KD. Q. E. D.

C

PROP.

PROP. XLIV. PROBL.



Ad datam rectam lineam AB dato triangulo C aequale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo D.

x. 42. I.

Fiat * triangulo C = Pgr. AEFH in angulo GAE, dato D aequali, & ponatur AE in directum ipsi AB, & producatu FG ad H, & per B ipsi FE vel GA ducatur parallela BH, & iungatur HA. Et quia ang. EFH + FHB = $\wedge$ 2 rectis, ideoque ang. EFH + FHA < 2 rectis: recta HA producta occurret $\wedge$ productae FE in K. Per K agatur ipsi FH vel EB parallela, quae rectis GA, HB productis occurrat in L & M. Dico, AM esse Pgr. desideratum.

m. 29. I.
u. 11. ax.

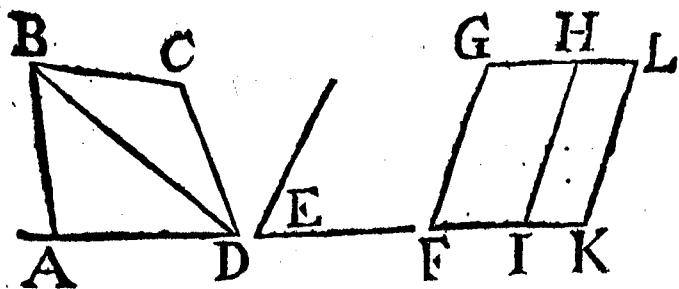
v. 43. I.
§. constr.

Nam $\vee$ Pgr. AM = AF ξ = Δ o C. Et ang. LAB = GAE = ξ D. Ergo ad datam rectam AB in dato angulo D applicatum est Pgr. AM triangulo C aequale. Q. E. F.

PROP. XLV. PROBL.

Dato rectilineo ABCD aequale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo E.

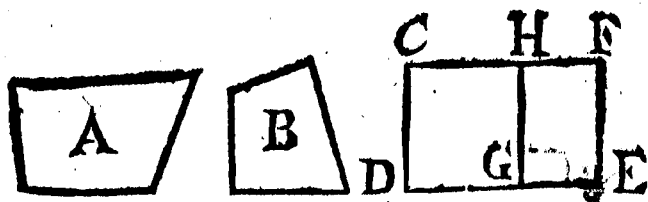
Datum



Datum rectilineum resolue in triacula BA
D, BCD, & fac ° Pgr. FH = Δ BAD, ita vt °. 42. 1.
ang. F = E. Deinde ad HI fac ° Pgr. HK = °. 44. 1.
 Δ BCD, vt dato angulo E aequalis sit HIK.

Quia ang. F = E = HIK: erit ang. F +
FIH = ° HIK + FIH. Sed F + FIH = °. 2. 2x.
2 rectis. Ergo ° & ang. HIK + FIH = 2 °. 29. 1.
rectis, & IK est in directum ° ipsi FI. Ergo °. 14. 1.
ang. HIK = ° alterno GHI, & adeo ang. HIK
+ IHL = ° GHI + IHL. Quare quum sint
ang. HIK + IHL = ° 2 rectis, erunt & GHI
+ IHL = ° 2 rectis, & erit ° HL ipsi GH in °. constr.
directum. Hinc, ob GH, FK parallelas °, et ° & dem.
iam GL, FK parallelae sunt; nec non GF, LK
eidem ° HI parallelae, ipsae ° sunt parallelae. °. 30. 1.
Ergo FGLK est Pgr; & ° quia FH = Δ ABD,
& HK = Δ BCD, totum Pgr. FGLK = °
toti rectilineo ABCD. Q. E. F.

* Scholium.

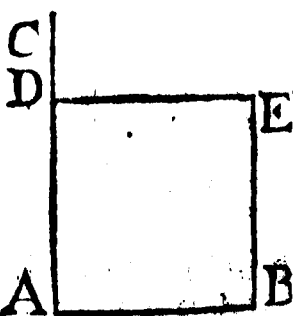


Hinc facile inuenitur excessus HE, quo rectili-
neum aliquod A superat rectilineum minus B: ni-
mirum si ad quamuis rectam CD applicentur Pgr.
DF = A, & DH = B.

C 2

PROP

PROP. XLVI. PROBL.



A data recta linea AB quadratum describere.

Ducatur ex A in AB perpendicularis ψ AC, in qua capiatur ω AD = AB. Per B ipsi AB, & per B ipsi AC

ducantur α parallelae DE, BE. Erit BD quadratum, a data recta AB descriptum.

ψ . II. I.

ω . 3. I.

α . 31. I.

β . 34. I.

γ . 1. ax.

δ . sch. 29. I.

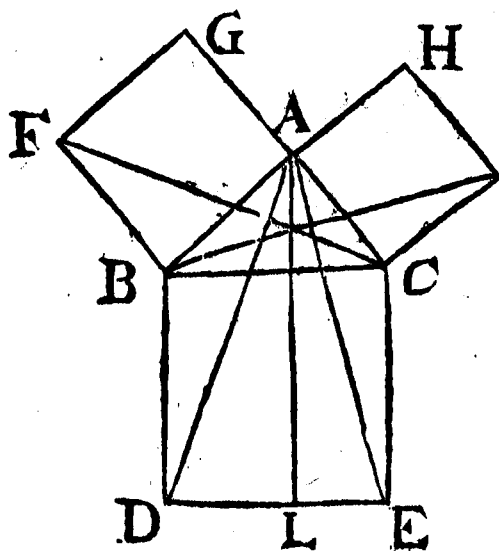
ϵ . 29. def.

Est enim BD parallelogrammum. Ideo & β AB = DE, & AD = EB. Sed AD = AB. Ergo γ singula latera AD, AB, BE, DE inter se aequalia sunt. Quare BD est quadrilaterum aequilaterum. Et quoniam BD est Pgr. habens vnum rectum angulum A: δ anguli reliqui DE, B etiam recti erunt. Ergo BD est ϵ quadratum. Q. E. F.

* Scholium.

Eodem modo facile describes rectangulum, quod sub datis duabus rectis contineatur.

PROP. XLVII. THEOR.



In rectangulis triangulis ABC quadratum BFGA, quod a latere BC rectum angulum A subtendente describitur, aequale est quadratis BGA, CH, quae a lateribus AB, AC rectum

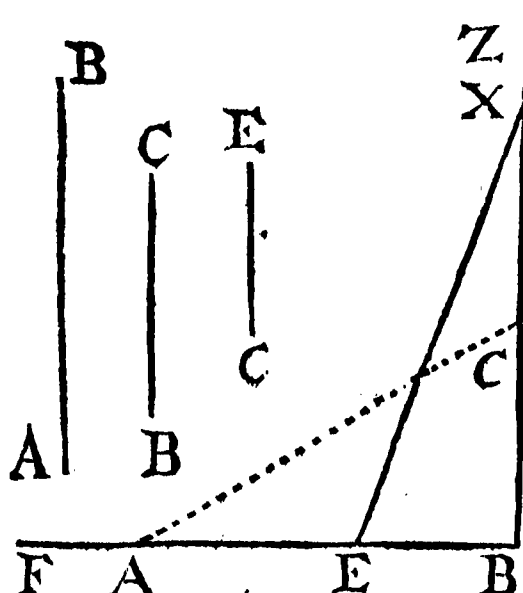
rectum angulum comprehendentibus, describuntur.

Per A ipsi BD vel CE ducatur ζ parallela ζ . 31. 1.
 AL, & iungantur AD, FC. Quoniam ergo
 vterque ang. BAC, BAG rectus est: AC &
 AG erunt $\parallel$ in directum. Eadem ratione & γ . 14. 1.
 BA, AH sunt in directum. Iam ang. DBC
 $\stackrel{\circ}{=}$ FBA, ideoque ang. DBA $\stackrel{\circ}{=}$ FBC, & γ . 10. ax.
 DB $\stackrel{\circ}{=}$ BC, ac BA $\stackrel{\circ}{=}$ FB: ergo Δ ABD $\stackrel{\circ}{=}$ FBC. γ . 2. ax.
 $\stackrel{\circ}{=}$ FBC. Sed Pgr. BL, quod cum Δ ABD λ . 29. def.
 $\stackrel{\circ}{=}$ FBC. Sed Pgr. BL, quod cum Δ ABD λ . 4. 1.
 est in eadem basi BD & in iisdem parallelis
 BD, AL, est duplum μ Δ i ABD; & quadra- μ . 41. 1.
 tum BG, quod cum Δ FBC est in eadem basi
 FB & in iisdem parallelis FB, GC, est μ du-
 plum Δ FBC. Ergo γ Pgr. BL $\stackrel{\circ}{=}$ BG. Simi- γ . 6. ax.
 liter ductis AE, BK ostendetur Pgr. CL $\stackrel{\circ}{=}$
 CH. Totum ergo ζ quadratum BCED $\stackrel{\circ}{=}$ ξ . 2. ax.
 Quadratis BG + CH. Q. E. D.

** Scholium.*

Hoc nobilissimum & vtilissimum theorema ab
 inuentore *Pythagora* Pythagoricum dici meruit.
 Eius beneficio quadratorum additio & subtractio
 perficitur, quo spectant duo sequentia problemata.

Problema I.



*Datis quotcunque
quadratis vnum
omnibus aequale
constituere.*

*Dentur quadra-
ta tria: quorum
lata sint AB,
BC, CE. Fac
ang. rectum FBZ
infinita habentem
lata, in ea
que transfer BA
& BC, & iunge
AC: erit π ACq*

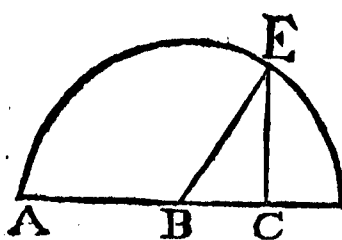
o. II. I.

 π . 47. I.

g. 2. ax.

*= ABq + BCq. Tum AC transfer ex B in X,
& CE tertium latus datum transfer ex B in E, &
iunge EX: erit π EXq = EBq (vel CEq) +
BXq (vel ACq) = g CEq + BCq + ABq.
Q. E. F.*

Problema II.



*Datis duabus rectis inae-
qualibus AB, BC, exhibere
quadratum, quo quadratum
maioris AB excedit qua-
dratum minoris BC.*

o. 47. I.

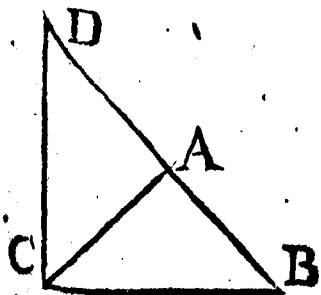
 π . 3. ax.

*Centro B intervallo BA describe circulum. Ex
C erige perpendicularem CE occurrentem peri-
pheriae in E. Ducatur BE. Erit BEq (vel BAq)
= g BCq + CEq. Ergo π BAq - BCq =
CEq. Q. E. F.*

PROP.

PROP. XLVIII. THEOR.

Si quadratum, quod describitur ab uno BC laterum trianguli ABC, aequale sit quadratis, quae a reliquis trianguli lateribus AB, AC describuntur: angulus BAC a reliquis duobus trianguli lateribus AB, AC comprehensus rectus erit.



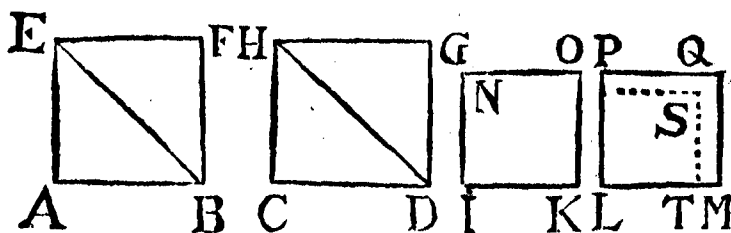
Ducatur enim ^u ad AC ^u. II. I.
perpendicularis AD, & fiat
AD = AB, & iungatur
DC.

Quoniam ergo DA = AB: erit & DAq = ABq, ideoque DAq + ACq = ABq + ACq. Sed DAq + ACq = DCq, & ABq + ACq = CBq. ^{2. ax.} ^{47. 1.} ^{hyp.}
Ergo DCq = CBq, ideoque DC = CB. Hinc quoniam AD = AB, & latus AC commune: erit ^u ang. BAC = CAD. Rectus autem est ^u. 8. 1.
CAD. Quare & ang. BAC rectus est. Q. ^u. 16. def. E. D.

* Scholium.

Sumtum est in demonstratione, ex eo quod DA = AB sequi DAq = ABq, & ex eo quod DCq = CBq sequi DC = CB. Hoc vero manifestum fiet ex sequenti theoremate.

* Theorema.



Linearum rectarum aequalium AB, CD aequalia sunt quadrata AF, CG. Et quadratorum aequalium NK, PM aequalia sunt latera IK, LM.

Pro 1. Hyp. Duc diagonos EB, HD. Liqueat
 β . 34. 1. $AF = \beta$ duplo $\triangle EAB = \gamma$ 2 $\triangle HCD = \beta$
 γ . 4. 1. & CG. Ergo $AF = CG$. Q. E. D.
 6. ax.

Pro 2. Hyp. Si fieri potest, sit $LM > IK$: fac
 δ . 46. 1. $LT = IK$, sitque δ $LS = LT$ q. Ergo $LS =$
 ϵ . 1. part. $NK = \epsilon$ LQ . Q. E. A. η . Ergo $LM = IK$.
 ζ . hyp. Q. E. D.
 9. ax.

* Schol.

Eodem modo quaelibet rectangula inter se æquilatera aequalia ostendentur.



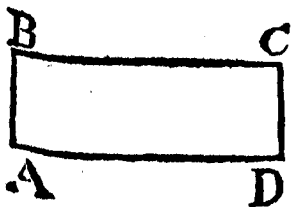
E V C L I D I S

E L E M E N T O R V M

L I B E R I I .

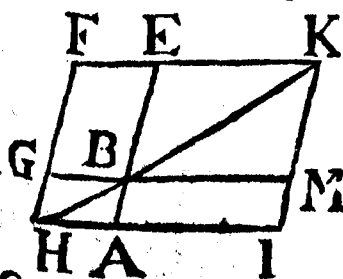
* * * * *

DEFINITIONES.



1. Omne *parallelogrammum rectangulum* $ABCD$ contineri dicitur sub duabus rectis lineis AB , AD

quae rectum angulum A comprehendunt.



2. Omnis parallelogrammi $FHIK$ vnumquodque eorum, quae circa HK diametrum ipsius sunt, parallelogrammorum EM ,

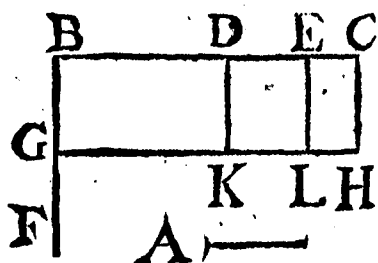
GA cum duobus complementis FB , BI *Gnomon* vocatur. (Hoc est, figura $FHIMBEF$ vocatur gnomon, item figura $FKIABGF$.)

Breuitatis gratia has duas notas in hoc libro adhibemus.

Rgl. notat parallelogrammum rectangulum, veluti Rgl. BAD , lege rectangulum BAD .

$\times$ indicat etiam rectangulum, contentum sub duabus rectis, inter quas haec nota scripta est. E. gr. $BA \times AD$ indicat rectangulum sub rectis BA & AD contentum.

PROPOSITIO I. THEOR.



Si sint duae rectae lineae A, BC, altera autem ipsarum BC secta fuerit in quocunque partes BD, DE, EC: rectangulum sub duabus rectis A, BC contentum aequale est iis rectangulis $A \times BD$, $+ A \times DE$, $+ A \times EC$, quae sub recta linea non secta A & singulis alterius BC segmentis continentur.

α. 11. 1.

β. 3. 1.

γ. 31. 1.

δ. sch. 29. 1.

ε. constr.

ζ. 1. def. 2.

η. 34. 1.

Ducatur enim ^α a puncto B ipsi BC perpendicularis BF, atque ^β fiat BG = A, & per G ipsi BC parallela sit ^γ GH, per puncta vero D, E, C ipsi BG parallelae sint DK, EL, CH. Ergo ^δ Rgl. BH = Rgl. BK + DL + EH. Sed quia ^ε BG = A, erit Rgl. BH = ^ζ A × BC, & Rgl. BK = A × BD. Et quia ^η DK = EL = BG = A, erit Rgl. DL = A × DE, & Rgl. EH = A × EC. Quare A × BC = A × BD, + A × DE, + A × EC. Q. E. D.

** Scholium.*

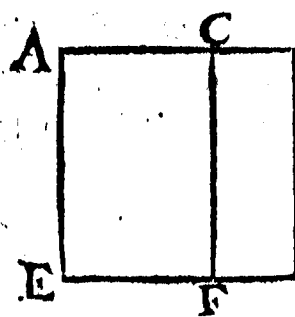
Hinc si fuerint duae rectae Y, Z, secanturque ambae in quocunque partes; rectangulum sub totis aequale est rectangulis sub partibus.

Nam sint rectae Z partes A, B, C, & rectae Y partes D, E. Quia $D \times Z = D \times A + D \times B + D \times C$; & $E \times Z = E \times A + E \times B + E \times C$; & $Y \times Z = D \times Z + E \times Z$: erit ³ $Y \times Z = D \times A + D \times B + D \times C + E \times A + E \times B + E \times C$. Q. E. D.

θ. 2. ax.

PROP.

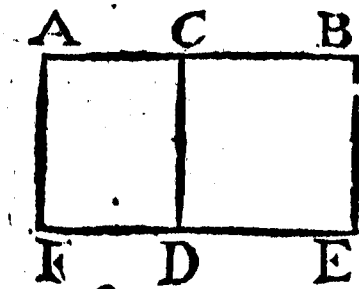
PROP. II. THEOR.



*Si recta linea AB secetur
utcumque in C: rectangula
sub tota AB & utroque se-
gmento AC, CB, conten-
ta aequantur quadrato to-
tius AB.*

Describatur ex AB quadratum ABDE, ^{n. 46. 1.}
& per C ducatur ^{n. 31. 1.} alterutri AE, BD parallela
CF. Est igitur AD = Rgl. AF + CD =
AE × AC, + BD × CB = AB × AC, + ^{l. 29. def. 1.}
AB × CB, quia [^] AE = BD = AB. Ergo
Rgl. AB × AC, + AB × CB = quadrato
totius AD. Q. E. D.

PROP. III. THEOR.

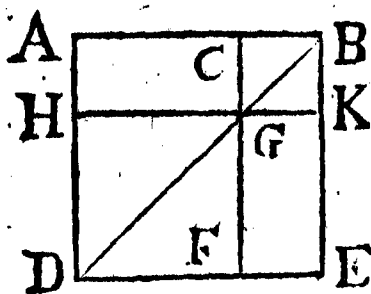


*Si recta linea AB secetur
utcumque in C: rectangu-
lum sub tota AB & vno
segmento BC contentum
aequatur rectangulo sub
segmentis AC, CB con-
tento, & praedicti segmenti CB quadrato.*

Describatur ^{n.} ex CB quadratum BCDE, ^{n. 46. 1.}
& producatu ED in F & per A alterutri CD,
BE ducatur parallela AF. Ergo Rgl. AE =
Rgl. AD + quadrato CE. Et quia ^{v. 29. def. 1.} BE =
CB, est Rgl. AE = AB × BC; item quia
CD = BC, est Rgl. AD = AC × CB.
Quare AB × BC = AC × CB, + CBq.
Q. E. D.

PROP.

PROP. IV. THEOR.



Si recta linea AB secetur utcumque in C; quadratum totius AB aequatur quadratis segmento- rum AC, CB, & rectan- gulo bis contento sub se- gmentis AC, CB.

§. 46. I.

Describatur $\square$ ex AB quadratum ADEB, iungatur BD, & per C alterutri AD, BE du- catur parallela CGF; per G vero alterutri AB, DE parallela HK. Erit ergo $\circ$ ang. BGC

o. 29. I.

π . 29. def. 1.

p. 5. I.

s. I. ax.

τ . 6. I.

ν . 34. I.

ϕ . sch. 29. I.

$\equiv$ ADB. Sed quia π AD $\equiv$ AB: ang. ϵ ABD $\equiv$ ADB; quare ang. BGC $\equiv$ CBG, & ideo CB $\equiv$ CG. Est vero ν CB $\equiv$ GK, & CG $\equiv$ BK. Ergo CGKB est aequilaterum. Sed est quoque ϕ rectangulum, ob angulum ABE π rectum. Quare CGKB est CBq. Ea- dem ratione HF est HGq, id est ν ACq. Et quoniam Rgl. AG $\equiv$ Rgl. GE, & ob CG $\equiv$ CB, Rgl. AG $\equiv$ AC $\times$ CB: erit & Rgl. GE $\equiv$ AC $\times$ CB. Ergo AG + GE $\equiv$ 2. AC $\times$ CB. Ergo ABq $\equiv$ CK + HF + AG + GE $\equiv$ CBq + ACq + 2. AC $\times$ CB. Q. E. D.

x. 43. I.

Aliter.

ψ . 32. I.

oe. 5. I.

ae. 29. I.

Quoniam ang. BAD π $\equiv$ recto: ang. ABD + ADB $\equiv$ ψ recto. Sed quum sit π AB $\equiv$ AD, ideoque ω ang. ABD $\equiv$ ADB; erit ang. ABD $\equiv$ $\frac{1}{2}$ recto. Et quoniam ang. BAD re- ctus est: ang. BCG etiam ω rectus erit. Quare in $\triangle$ BCG reliquus angulus BGC etiam $\equiv$

ψ $\frac{1}{2}$

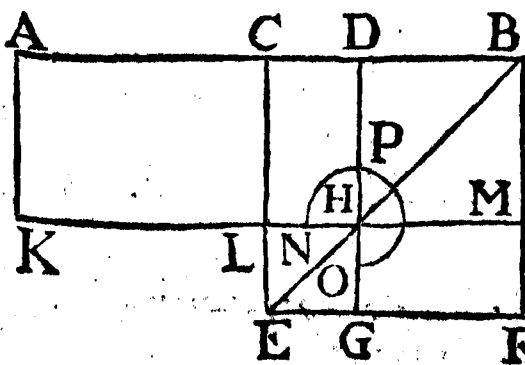
$\frac{1}{2}$ recto. Hinc β $GC = CB$; & quia GC ψ . 32. 1.
 $= \gamma$ BK , ac $CB = GK$, erit CK aequilate- β . 6. 1.
 rum. Est vero & rectangulum, ob ang. ABE γ . 34. 1.
 rectum. Ergo CK est CBq . Eadem ratione
 & c. ut supra.

Coroll. 1. Ex his manifestum est, in quadra-
 tis parallelogramma, quae sunt circa diame-
 trum, esse quadrata.

* *Cor. 2.* Item, diametrum cuiusvis quadrati
 angulos eius bisecare.

* *Schol.* Si $AC = \frac{1}{2} AB$: erit $ABq = 4 ACq$
 & $ACq = \frac{1}{4} ABq$. Et contra si $ABq = 4 ACq$:
 erit $AC = \frac{1}{2} AB$.

PROP. V. THEOR.



Si recta linea
AB secetur in
aequalia AC,
CB, & inae-
qualia AD,
DB: rectangu-
lum AD $\times$ DB

sub inaequalibus totius segmentis contentum
una cum quadrato rectae CD inter puncta se-
ctionum aequatur quadrato dimidiaae BC.

Describatur δ ex CB quadratum $CBFE$, α . 46. 1.
 iungatur BE , & per D alterutri CE , BF paral-
 lela DHG , ac per H alterutri AB , EF paral-
 lela KLM , per A denique alterutri CL , BF
 parallela AK ducatur. Et quia ϵ $CH = HF$, α . 43. 1.
 erit ζ $CM = DF$. Sed $CM = \eta$ AL : quare ζ . 2. ax.
 $AL = DF$, & addito communi CH , $AH^2 =$ η . 36. 1.
 gnomoni

gnomoni NPO, & tandem addito communi
 LG, $AH + LG = CBq$. Est autem ob DH
 3. 1. cor. $=^g DB$, Rgl. $AH = AD \times DB$, & LG est^g
 4. 2. $=^g LHq =^g CDq$. Ergo $AD \times DB + CDq$
 1. 34. 1. $= CBq$. Q. E. D.
 schol. 48. 1.

* Scholia.

1. Hoc theorema paullo aliter sic effertur: *Rectangulum sub summa AD & differentia DB duarum rectarum AC (vel CB) & CD, aequatur differentiae quadratorum ex ipsis.*

2. Si AB aliter diuidatur, propius scilicet puncto bisectionis, in E: dico $AE \times EB > AD \times DB$. Nam

$$AE \times EB + CEq =^* CBq$$

κ. 5. 2.

$$=^* AD \times DB + CDq.$$

Ergo quum $CEq < CDq$:

λ. 5. ax.

erit^λ $AE \times EB > AD \times DB$. Q. E. D.

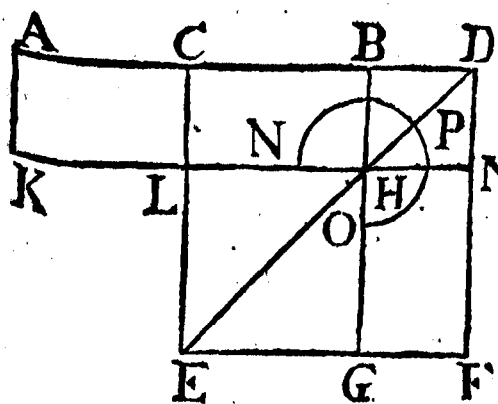


3. Hinc $ADq + DBq > AEq + EBq$. Nam
 14. 4. 2. $ADq + DBq + 2 AD \times DB =^* ABq =^*$
 $AEq + EBq + 2 AE \times EB$. Ergo quum $2 AE$
 $\times EB > 2 AD \times DB$: erit $ADq + DBq > AEq$
 $+ EBq$. Q. E. D.

ν. 3. ax.

4. Ex quibus simul patet, esse^ν $ADq + DBq$
 $- AEq - EBq = 2 AE \times EB - 2 AD \times DB$.

PROP. VI. THEOR.



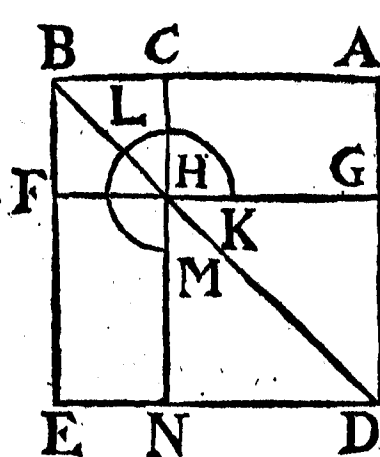
*Si recta linea
AB secetur bi-
fariam in C, &
illi recta quae-
cunque linea BD
in directum ad-
iiciatur: rectan-
gulum $AD \times$*

*BD contentum sub composita ex tota cum adie-
cta & adiecta, una cum quadrato dimidiae CB,
aequatur quadrato compositae CD ex dimidia
& adiecta tanquam unius lineae.*

Describatur ex CD quadratum CDFE,
iungatur ED, per B alterutri CE, DF sit paral-
lela BHG, & per H ipsi AD vel EF parallela
KLM, & adhuc per A ipsi CL vel DM paral-
lela AK. Itaque quia $AC = CB$, Rgl. $AL =$
 $CH = HF$. Addito communi CM, erit ξ . 36. 1.
 $AM = \text{gnom. NPO}$. Atqui ob $DM \propto$ π . 43. 1.
 DB est $AM = AD \times DB$. Ergo $AD \times DB$ π . 1. cor.
 $= \text{gnom. NPO}$. Sed ob $CB = LH$, est ξ . 34. 1.
 $CBq = LG$. Ergo $AD \times DB + CBq =$
 $\text{gnom. NPO} + LG = CDq$. Q. E. D.

PROP.

PROP. VII. THEOR.



Si recta linea AB secetur utcumque in C: quadrata totius AB & unius segmentis BC simul sumta aequantur rectangulo $2 AB \times BC$ bis contento sub tota & dicto segmento, una cum ACq quadrato reliqui segmenti.

6. 43. 1.
7. 2. ax.

9. 1. corol.
4. 2.

Describantur enim ex AB quadratum AE, & in eo reliquae figurae, ut antea. Quoniam $AH = HE$, erit $AF = CE$, & $AF + CE = 2 AF$. Sed $AF + CE = \text{gnom. KLM} + CF$: ergo $\text{gnomon KLM} + CF = 2 AF$. Iam quum CF sit CBq , & hinc $BF = BC$: erit $2 AB \times BC = 2 AF$, ideoque $\text{gnomon KLM} + BCq = 2 AB \times BC$. Ergo addito utrinque $GN = ACq$, erit $ABq + BCq = 2 AB \times BC + ACq$. Q. E. D.

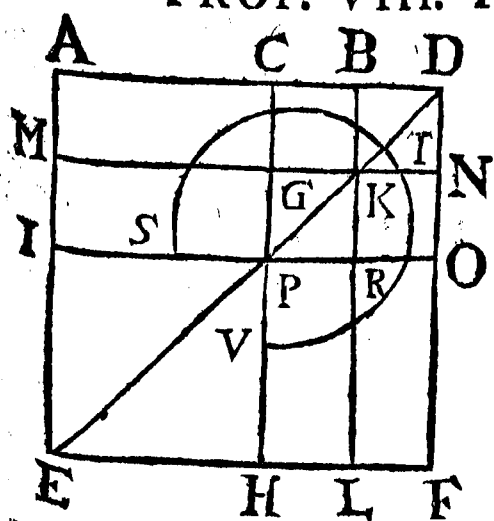
* Scholium.

Hinc quadratum differentiae duarum rectarum AB, BC, aequale est quadratis utriusque minus duplo rectangulo sub ipsis. Nam $ABq + BCq - 2 AB \times BC = ACq = (AB - BC)q$.

φ. 3. ax.

PROP.

PROP. VIII. THEOR.



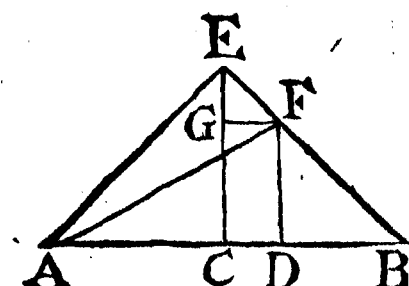
*Si recta linea
AB secetur ut-
cunque in C:
rectangulum
quater conten-
tum sub tota AB
& vno e segmen-
tis BC, una cum
quadrato reliqui
segmenti AC,*

*aequatur quadrato compositae ex tota AB &
praedicto segmento BC tanquam unius lineae.*

In producta AB fiat $BD = BC$, & describa-
tur ex AD quadratum AEFH, & reliquae
figurae describantur bis, quae in praecedente
propositione. Ergo quia $CB = BD$, & $\propto CB \propto$ 34. 1.
 $= GK$, ac $BD = KN$: erit $GK = KN$. Ea-
dem ratione $PR = RO$. Hinc ψ Rgl. CK ψ 36. 1.
 $=$ Rgl. BN, & Rgl. GR $=$ Rgl. KO. Sed
Rgl. CK $=$ Rgl. KO. Quare & Rgl. BN $\propto$ 43. 1.
 $=$ Rgl. GR; ideoque $CK + BN + GR +$
 $KO = 4 CK$. Porro $GC \propto = BK = BD$, a. 1. coroll.
& $BC = BD$, ideoque $CG = CB$. Sed & $\propto$ 4. 2.
 $GP = GK = CB$. Ergo $CG = GP$, & Rgl.
 $AG = \psi$ Rgl. MP. Eadem ratione ob PR
 $= RO$ est Rgl. PL $=$ Rgl. RF. Quum au-
tem in pgr. ML sit $MP = PL$: erit $AG =$
 RF ; hinc $AG + MP + PL + RF = 4 AG$.
Sed ostensum est, quod $CK + BN + GR +$
 $KO = 4 CK$. Quare β totus gnomon STV β 2. ax.
D $= 4$

$= 4 AK$. Sed ob $BK = BD = BC$ est $AK = AB \times BC$. Ergo gnomon $STV = 4 AB \times BC$. Denique quia $IP = \propto AC$, est IH vel $\propto IPq = ACq$. Quare β totum quadratum AF , id est $(AB + BC)q = 4 AB \times BC + ACq$. Q. E. D.

PROP. IX. THEOR.



Si recta linea AB sectetur in aequalia AC, CB & inaequalia AD, DB: quadrata inaequalium segmentorum ADq + DBq sunt dupla quadratorum a dimidia, & a recta inter puncta sectionum, 2 ACq + 2 CDq.

γ . II. I.

δ . 3. I.

ϵ . 31. I.

ζ . 5. I.

η . 3. schol.

θ . 32. I.

ι . 29. I.

κ . 32. I.

λ . 6. I.

μ . sch. 48. I.

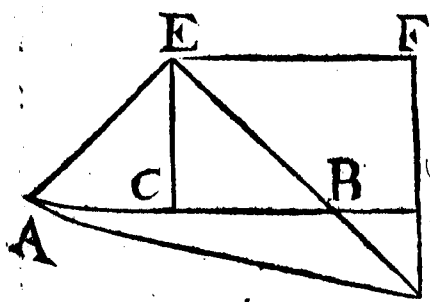
Ex C ducatur γ in AB perpendicularis, in qua fiat δ $CE = AC$. Iungantur AE, EB, & per D ipsi CE ϵ parallela DF, & per F ipsi AB parallela FG agantur, iungaturque AF. Itaque quia ζ $EAC = AEC$, & ob ang. ACE rectum, $EAC + AEC = \eta$ recto: vterque ang. EAC, $AEC = \frac{1}{2}$ recti. Eadem ratione vterque ang. EBC, $BEC = \frac{1}{2}$ recti. Ergo totus ang. AEB rectus est. Et quia ang. GEF $= \frac{1}{2}$ recti, EGF vero $\theta = ECB =$ recto: reliquus EFG etiam $\iota = \frac{1}{2}$ recti. Hinc ang. GEF $= EFG$, & κ $GF = EG$. Eadem ratione $DF = DB$. Et quoniam $AC = CE$, ideoque λ $ACq = CEq$: erit $ACq + CEq = \mu$ AEq . Est vero $ACq + CEq = \mu$ AEq . Ergo AEq

$AEq = 2 ACq$. Eadem ratione est EFq
 $= 2 GFq = 2 CDq$. Quare $AEq + EFq$, μ . 47. I.
 id est $AFq = 2 ACq + 2 CDq$. Sed AFq
 $= ADq + DFq = ADq + DBq$. Er- ν . 2. ax.
 go $ADq + DBq = 2 ACq + 2 CDq$. Q.
 E. D.

* Scholium.

Aliter effertur sic: *Aggregatum quadratorum ex
 summa AD & differentia DB duarum rectarum
 AC, CD aequatur duplo quadratorum ex ipsis
 AC, CD.*

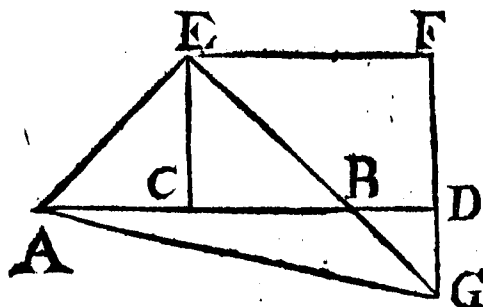
PROP. X. THEOR.



Si recta linea AB
 secetur bisariam in
 C, & illi recta
 quaecunque linea
 BD in directum
 G adiiciatur: qua-
 dratum compositae AD ex tota & adiecta, &
 quadratum adiectae BD simul sumta sunt dupla
 & quadrati ex dimidia AC, & quadrati com-
 positae CD ex dimidia & adiecta, tanquam uni-
 us lineae.

Ducatur enim ξ ex C ipsi AD, perpendicu- ξ . II. 1.
 laris CE, & fiat alterutri AC, CB aequalis, $\circ$. 31. I.
 iunganturque AE, EB, & per E quidem $\circ$ du- π . 29. I.
 catur ipsi AD parallela EF, per D vero ipsi
 CE parallela DF. Et quoniam anguli FEC
 $+ EFD = \pi$ 2 rectis: ang. FEB + EFD <
 D 2 2 rect.

g. 11. ax.



2 rect. ideoque re-
ctae EB, FD pro-
ductae conueni-
ent & ad partes
BD. Producantur
& conueniant

in G, & iungatur AG.

e. 5. 1.

r. 32. 1.

u. 2. ax.

φ. 15. 1.

x. 6. 1.

ψ. 34. 1.

ω. sch. 48. 1.

α. 47. 1.

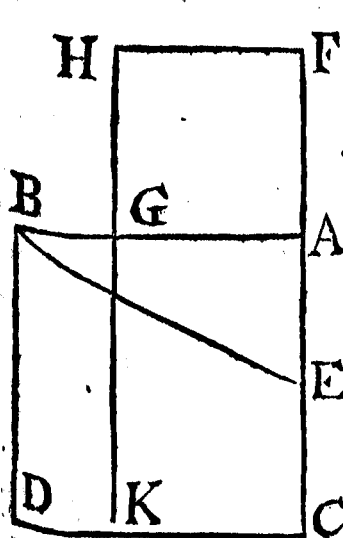
β. 34. 1. &

sch. 48. 1.

Itaque quia $\angle EAC = \angle CEA$, & ob ang.
ACE rectum, $\angle EAC + \angle CEA = 2$ recto.
erit vterque ang. $\angle EAC$, $\angle CEA = \frac{1}{2}$ recti.
Eadem ratione vterque ang. $\angle CEB$, $\angle ECB = \frac{1}{2}$
recti. Ergo $\angle AEB =$ recto. Quia $\angle DBG$
 $= \angle ECB$, & hinc $\angle DBG = \frac{1}{2}$ recti, $\angle BDG$ ve-
ro $= \angle ECB =$ recto: erit $\angle BGD$
 $= \frac{1}{2}$ recti $= \angle DBG$, ideoque $DG = BD$.
Et quum ergo $\angle BGD = \frac{1}{2}$ recti, ac ang. $\angle EFG$
 $= \angle ECD =$ recto: erit quoque $\angle FEG$
 $= \frac{1}{2}$ recti $= \angle EGF$, & hinc $EF = FG$.
Porro quia, ob $AC = CE$, est $ACq = CEq$,
& $ACq + CEq = 2 ACq$: erit $AEq = 2 ACq$.
Simili ratione $EGq = 2 EFq = 2 CDq$.
Quare $AGq (= AEq + EGq) = 2 ACq + 2 CDq$.
Sed $AGq = ADq + DGq = ADq + BDq$.
Ergo $ADq + BDq = 2 ACq + 2 CDq$. Q. E. D.

PROP.

PROP. XI. PROBL.



*Datam rectam lineam AB
ita secare, ut rectangulum
sub tota AB & altero se-
gmento aequetur quadrato
A reliqui segmenti.*

Describatur γ ex AB γ . 46. 1.

Equadratum ABDC, sece-
turque δ AC bifariam in E, δ . 10. 1.

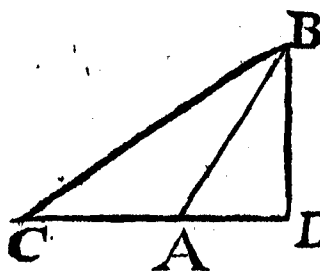
ducatur EB, & in producta
CEA fiat $EF = EB$, ac de- ϵ 3. 1.

scribatur ex AF quadratum AFHG, & pro-
ducatur HG ad K. Dico AB ita sectam esse
in G, ut sit $AB \times BG = AG^2$.

Nam ζ $CF \times FA + AE^2 = EF^2 =$ ϵ 2. 6. 2.
 EB^2 . Sed $EB^2 =$ δ $AB^2 + AE^2$. Ergo γ . sch. 48. 1.
 $CF \times FA + AE^2 = AB^2 + AE^2$, & δ . 47. 1.
hinc ϵ $CF \times FA = AB^2$. Jam quia ϵ AF ϵ 3. ax.
 $= FH$, erit $CF \times FA =$ Rgl. FK. Est vero ϵ 29. def. 1.
 $AB^2 = AD$ (per constr.) Ergo Rgl. FK
 $= AD$. Hinc ablato communi GC, erit
 $FG = GD$. Sed FG est AG^2 , & ob BD
 $=$ ϵ AB est $GD = AB \times BG$. Ergo AB
 $\times BG = AG^2$. Q. E. D.

PROP. XII. THEOR.

In triangulis amblygoniis ABC quadratum lateris BC, subtendentis angulum obtusum A, maius est quam quadrata laterum AC, AB, angulum obtusum A comprehendentium, rectangulo bis contento sub uno laterum CA, circa angulum obtusum, in quod productum perpendicularis BD cadit, & recta AD extra intercepta a perpendiculari BD ad angulum obtusum. (Hoc est: $BC^2 = CA^2 + AB^2 + 2 CA \times AD$.)



A. 4. 2.

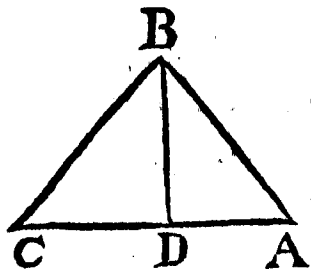
14. 2. ax.

11. 47. 1.

Nam $CD^2 = CA^2 + AD^2 + 2 CA \times AD$, ideoque $CD^2 + DB^2 = CA^2 + AD^2 + DB^2 + 2 CA \times AD$. Sed $CD^2 + DB^2 = CB^2$, & $AD^2 + DB^2 = AB^2$. Ergo $CB^2 = CA^2 + AB^2 + 2 CA \times AD$. Q. E. D.

PROP. XIII. THEOR.

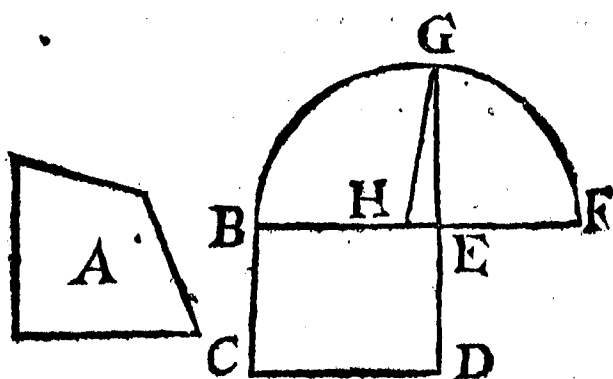
In triangulis oxygoniis ABC quadratum lateris BC, subtendentis angulum acutum A, minus est quam quadrata laterum AC, AB comprehendentium angulum acutum, rectangulo bis contento sub uno laterum circa angulum acutum CA, in quod perpendicularis BD cadit, & recta AD intus intercepta a perpendiculari ad angulum acutum



acutum. (Hoc est: $BCq + 2 CA \times AD = CAq + ABq.$)

Nam $\xi CAq + ADq = 2 CA \times AD + \xi. 7. 2.$
 CDq ; hinc $^o CAq + ADq + BDq = 2^o. 2. ax.$
 $CA \times AD + CDq + BDq.$ Iam $^{\pi} ABq^{\pi. 47. 1.}$
 $= ADq + BDq$, & $BCq = CDq + BDq.$
 Ergo $CAq + ABq = BCq + 2 CA \times AD.$
 Q. E. D.

* *Schol.* Hinc demonstratur, in omni parallelogrammo $ABDC$ quadrata e diametris AD , BC aequalia esse quadratis laterum simul sumtis. Nam ductis perpendicularibus AE , BF , est $ADq = DCq + CAq + 2 DC \times CE$, & $BCq + 2 DC \times CE. 12. 2.$
 $\times DF = ^{\sigma} CDq + BDq.$
 Est autem $CDq = ^{\tau} ABq; \sigma. 13. 2.$
 & ob ang. $AEC = ^{\nu} BFD, \tau. 34. 1.$
 ac $ACE = ^{\phi} BDF$, ac $AC = ^{\nu. 10. def. 1.}$
 $BD = ^{\tau} BD$, est $CE = ^{\chi} DF; \phi. 29. 1. \& 10. ax.$
 ergo $BCq + 2 DC \times CE = ABq + BDq. Quae \chi. 26. 1.$
 re $\downarrow ADq + BCq + 2 DC \times CE = ABq + BDq. 2. ax.$
 $BDq + DCq + CAq + 2 DC \times CE$, & ergo
 $ADq + BCq = ABq + BDq + DCq + CAq. 3. ax.$
 Q. E. D.



Dato rectilineo A aequale quadratum constituere.

α . 45. 1.

β . 29. def.
& 34. 1.

γ . 3. 1.
 δ . 10. 1.

Constituatur rectilineo A aequale α pgr. rectangulum BD. Si igitur $BE = ED$: erit BD quadratum β desideratum. Sin minus: erit alterutrum latus $BE > ED$, & tunc producat BE, donec $EF = \gamma ED$, & bisecta δ BF in H describatur circulus intervallo HB vel HF, & producat DE in G. Dico fore $EGq = A$.

ϵ . 5. 2.

ζ . 15. def. & sch. 48. 1.

η . 1. sch. 13.

θ . 47. 1.

ι . 1. ax.

κ . 3. ax.

λ . contr.

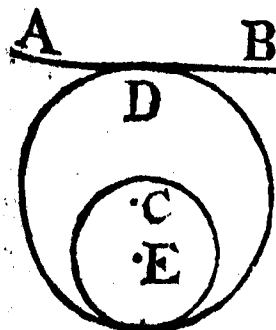
Nam iungatur HG: & est $BE \times EF + HEq = HFq = \epsilon HGq$. Sed ob ang. HEG ζ rectum, est $\eta HGq = EGq + HEq$. Quare $EGq + HEq = \theta BE \times EF + HEq$, atque $EGq = \iota BE \times EF$. Est autem ob $\kappa EF = ED$, $BE \times EF = Rgl. BD = \lambda A$. Ergo $EGq = A$. Q. E. D.

E V C L I D I S E L E M E N T O R V M

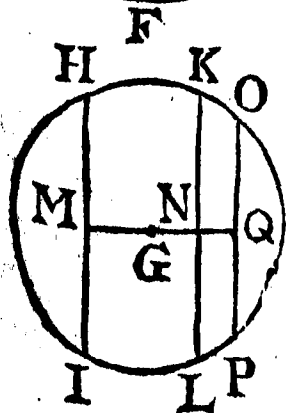
LIBER III.

DEFINITIONES.

1. *Aequales circuli sunt, quorum diametri sunt aequales, vel quorum quae ex centris sunt aequales.*



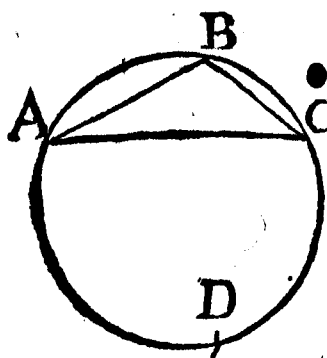
2. *Recta linea AB circum C contingere dicitur, quae contingens circum (in D) & producta ipsum non secat.*



3. *Circuli C, & E, contingere sese dicuntur, qui contingentes se mutuo (in F) se non secant.*

4. *In circulo aequaliter distare a centro G rectae lineae HI, KL dicuntur, quando a centro ad ipsas perpendiculares GM, GN ductae sunt aequales.*

5. *Magis autem distare a centro G dicitur ea OP, in quam maior perpendicularis GQ cadit.*

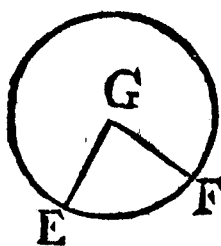


6. *Segmentum circuli* est figura ACBA, quae sub recta linea AC & circuli circumferentia ABC comprehenditur.

7. *Angulus segmenti* est ACD, qui recta linea AC & circuli circumferentia CD comprehenditur.

8. *Angulus in segmento* ACBA est, quando in circumferentia ABC segmenti sumitur aliquod punctum B, atque ab ipso ad terminos A, C, lineae eius AC, quae basis est segmenti, rectae lineae BA, BC ducuntur, angulus ABC a ductis lineis BA, BC comprehensus.

9. Quando autem comprehendentes angulum ABC rectae lineae BA, BC intercipiunt circumferentiam ADC: illi *circumferentiae* ADC *insistere angulus* ABC dicitur.



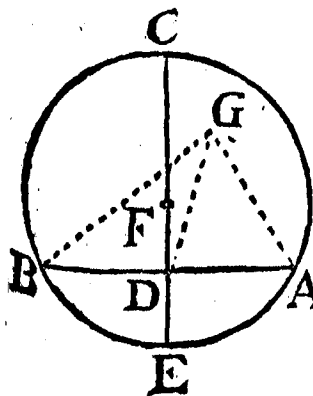
10. *Sector circuli* est, quando angulus EGF ad centrum G constiterit, figura GEFG contenta rectis lineis GE, GF angulum comprehendentibus, & circumferentia EF ab ipsis intercèpta.

11. *Similia circularum segmenta* sunt, quae angulos capiunt aequales: vel in quibus anguli sunt inter se aequales.

PROP.

Dati circuli ACB centrum inuenire.

Dati circuli ACB centrum inuenire.

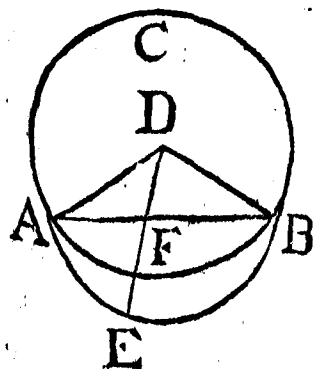


Ducatur in ipso recta
 AB vtcunque, quae bisece-
 tur α in D. A puncto D α . 10. 1.
 ipsi AB ad rectos β ducta β . 11. 1.
 DC producat in E, & bi-
 secetur CE in F. Dico,
 punctum F centrum esse
 circuli ABC.

Si negas : centrum esto G extra rectam
CE. (Nam in ea praeter F nullum γ esse γ . 15. def. 1.
potest .) Ducantur GA, GD, GB. Ergo
 $GA = \gamma GB$, & $AD = \delta DB$; latus vero δ . constr.
GD commune: hinc ϵ ang. $GDA = GDB$. ϵ . 8. 1.
Est ergo ζ ang. GDA rectus, ideoque η an- ζ . 10. def. 1.
gulo CDA aequalis. Q. E. A θ . η . 10. ax.
 θ . 9. ax.

*Coroll. Ex hoc perspicuum est, si in circulo recta
linea CD rectam AB bisariam & ad angulos rectos
secat, circuli centrum esse in secante CD.*

PROP. II. THEOR.



Si in circumferentia circuli ABC duo quaelibet puncta A, B sumantur: quae ipsa coniungit recta linea AB intra circulum cadit.

Si enim non: cadet extra,
vt AEB. Sumatur ' circuli. 1. 3.
centrum D, & ducantur rectae DA, DB,
DFE.

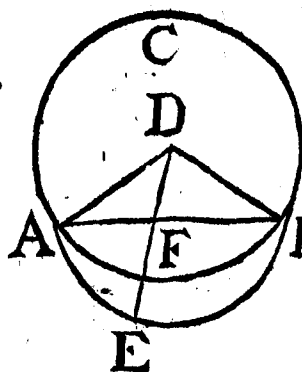
κ. 15. def. 1.

λ. 5. 1.

μ. 16. 1.

ν. 14. ax.

ξ. 19. 1.



DFE. Quoniam ergo $DA = DB$: erit $\angle DAE = \angle DBE$. Et quum trianguli ADE latus AE productum sit in B: erit $\angle DEB > \angle DAE$, ergo & $\angle DEB > \angle DBE$, & $DB > DE$.

Sed $DB = DF$. Quare $DF > DE$. Quod fieri nequit, quia E extra circulum esse ponitur. Similiter ostendemus rectam AB nec in circumferentiam cadere. Ergo intus cadat necesse est. Q. E. D.

PROP. III. THEOR.



Si in circulo ABC recta linea CD per centrum E ducta rectam lineam AB non ductam per centrum, bifariam secat in F: & ad angulos rectos ipsam secabit. Quod si ad angulos rectos ipsam AB secet: & bifariam secabit.

Ducantur EA, EB.

ο. 15. def. 1.

π. 8. 1.

ρ. 10. def. 1.

σ. 10. ax.

τ. 5. 1.

υ. 26. 1.

1. Hyp. Quoniam $AF = FB$, & $EA = EB$, & latus EF commune: est $\angle AFE = \angle BFE$, & ergo $\angle$ vterque rectus. Q. E. D.

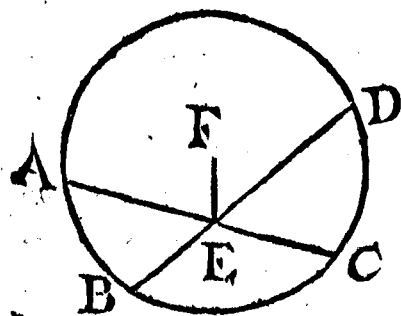
2. Hyp. Quoniam $\angle AFE = \angle BFE$, & $EA = EB$, & ergo $\angle EAF = \angle EBF$: est $AF = FB$. Q. E. D.

* Coroll. Hinc in omni triangulo aequilatero & isosceli linea recta ab angulo verticis bisecans basin, perpen-

perpendicularis est basi; & contra perpendicularis ab angulo verticis bisecat basin; & perpendicularis a puncto medio basis angulum ad verticem bisecat.

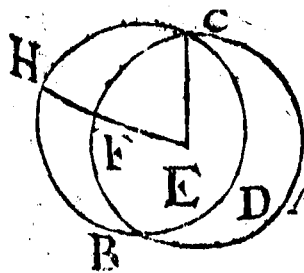
PROP. IV. THEOR.

Si in circulo ABCD duae rectae AC, BD non ductae per centrum se inuicem secant in E: sese bifariam non secabunt.



Si enim fieri potest, sit $AE = EC$, & $BE = ED$. Sumatur ϕ . 1. 3. centrum circuli F, iungaturque FE. Erit ergo $\sphericalangle$ ang. FEA rectus, $\sphericalangle$ 3. 3. nec non ang. FEB rectus erit. Quare erit ψ ψ . 10. ax. ang. FEA = FEB. Q. E. A ω . ω . 9. ax.

PROP. V. THEOR.

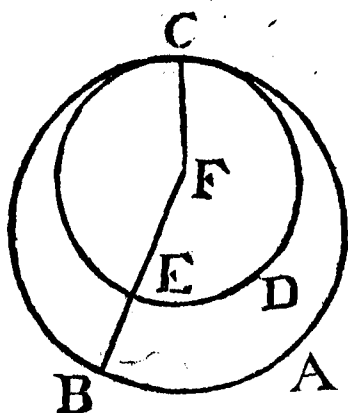


Si duo circuli ABC, CDH se inuicem secant in B, C: non erit ipsorum idem centrum.

Nam si fieri potest, sit E commune centrum. Iungatur CE, & ducatur recta EFH α . 15. def. 1. vtrunque. Erit ergo α , in circulo ABC, $EF = EC$, & in altero circulo, $EH = EC$, ideoque $EF = EH$. Q. F. N. β . β . 9. ax.

PROP.

PROP. VI. THEOR.



Si duo circuli ABC, CDE sese intra contingunt in C: ipsorum idem centrum non erit.

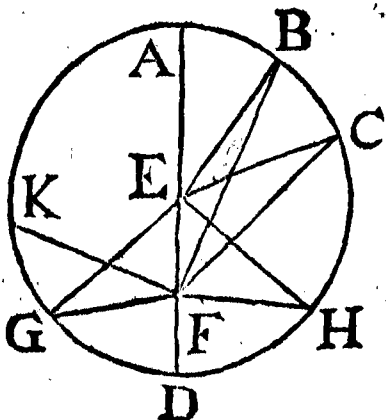
Si enim fieri potest, sit eorum idem centrum F. Iungatur CF, & ducatur utcumque FEB.

γ. 15. def. 1.
δ. 9. ax.

Foret γ $FB = FC = FE$. Q. E. A^δ.

PROP. VII. THEOR.

Si in circuli ABCD diametro AD aliquod punctum F sumatur, quod non sit centrum circuli, & ab eo F in circulum cadant quaedam rectae lineae AFD, FB, FC, FH: maxima quidem erit FA, in qua centrum E, reliqua vero FD minima; aliarum autem semper propinquior FB ei FC, quae per centrum, maior est remotiore FC; duaeque tantum aequales ab eodem puncto F in circulum cadent ex utraque parte minimae FD.



ε. 20. I.

ζ. 15. def. 1.
& 2. ax.
η. 14. ax.

θ. 24. I.

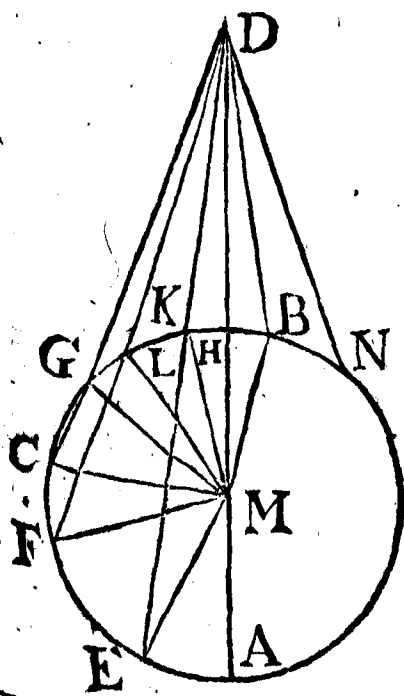
1. Iungantur EB, EC, EH. Et quia $FE + EB > FB$, ac $FE + EB = \zeta$ FA: erit $FA > FB$. Rursus quia $EB = EC$, & EF latus commune, & ang. BEF $>$ CEF: est θ $FB > FC$.

Eadem ratione & $FC > FH$. Rursus quia FH

$FH + FE > EH$, & $ED = EH$: est $FH + FE > ED$, ac ergo $FH > FD$. Maxi-9. 5. ax. ma ergo est FA , minima FD , & $FB > FC > FH$. Q. E. D.

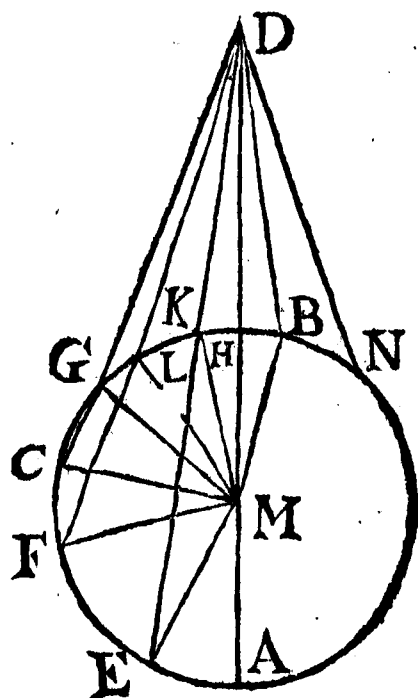
2. Fiat $\angle DEG = DEH$, & ducatur FG ; & quoniam praeterea $EG = EH$, & communis EF : erit $FG = FH$. Omnis autem alia ut FK aut maior aut minor erit, quam FG . Ergo duae tantum aequales FH , FG in circulum cadent. Q. E. D.

PROP. VIII. THEOR.



Si extra circulum ABC aliquod punctum D sumatur, atque ab eo ad circulum ducantur quaedam rectae lineae, quarum una DA per centrum M transeat, reliquae vero DE, DF, utcumque: earum quidem, quae in concavam circumferentiam cadunt, maxima est DA, quae per centrum transit, aliarum autem

DE, DF, DC semper propinquior ei DA, quae per centrum, maior est remotiore; earum vero, quae in connexam circumferentiam cadunt, minima est DH, quae inter punctum D & diametrum HA interiicitur, aliarum autem DK, DL,



DL, DG *semper quae propinquior minimae D H minor est remotiore; duaeque tantum aequales a puncto D in circulum cadunt ex utraque parte minimae DH.*

μ. 20. 1.

ν. 15. def. 1.

& 2. ax.

ξ. 14. ax.

ο. 24. 1.

fus quia $ME = MF$, & communis MD, & ang. $DME > DMF$: est $DE > DF$. Similiter $DF > DC$. Maxima ergo est DA, & huic propinquior remotiore semper maior. Q. E. D.

π. 5. ax.

ρ. 21. 1.

2. Quia $MK + DK > MD$, & $MK = MH$: est $DK > DH$, vel $DH < DK$. Porro quum $DK + KM < DL + LM$, & $KM = LM$: est $DK < DL$. Eadem ratione $DL < DG$. Minima ergo est DH, & huic propinquior remotiore minor. Q. E. D.

σ. 23. 1.

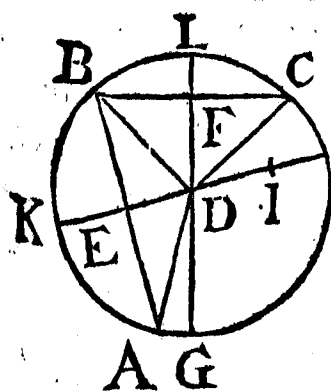
τ. 4. 1.

3. Ponatur $\angle BMD = \angle KMD$; & quia $KM = BM$, ac communis DM: est $DK = DB$. Et omnis alia vt DN in circulum cadens apt maior est aut minor, quam DB vel DK. Quare duae tantum rectae DK, DB aequales ex D in circulum cadunt. Q. E. D.

υ. per par-
tem 2.

PROP.

PROP. IX. THEOR.



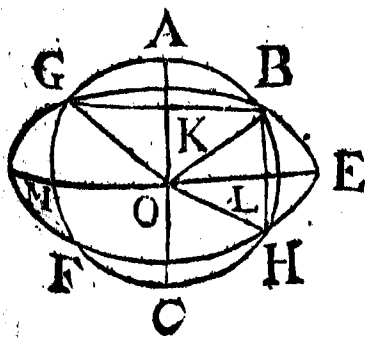
Si intra circulum ABC sumatur aliquod punctum D, atque ab eo in circulum cadant plures, quam duae rectae lineae DA, DB, DC aequales: punctum D, quod sumitur, erit centrum circuli.

Iungantur enim AB, BC, & bisecentur in E, F, & iunctae DE, DF ad K, H, L, G producantur. Quia ergo $AE = EB$, $ED = ED$, & basis $AD = BD$: est $\angle AED = \angle BED$. ϕ . 8. 1. Ergo KH ipsam AB bifariam & ad angulos rectos $\propto$ secat, & ergo ψ in KH centrum circuli $\propto$. 10. def. 1. est. Eadem ratione & in LG est centrum ψ . cor. 1. 3 circuli ABC. Nullum autem punctum praeter D commune habent ω rectae LH, LG. ω . 12. ax. Ergo D est centrum circuli ABC. Q. E. D.

Aliter.

Si D non sit centrum circuli ABC: sit illud I. Ducatur recta HIDK. Erit ergo $DC \alpha$. 7. 3. $\alpha > DB$. Sed & $DC = DB$ β . Q. E. A. β . hyp.

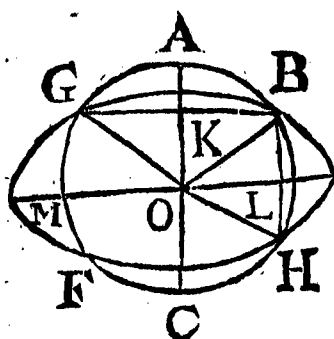
PROP. X. THEOR.



Circulus circulum in pluribus quam duobus punctis non secat.

Si enim fieri potest, circulus ABC circulum BEF secet in punctis E etis

7. 10. 1.



3. cor. 1. 3.

8. 5. 3.

ctis B, H, G. Iunctae BG, BH bisectae sint γ in K, L punctis, a quibus ipsis BG, BH ad rectos angulos ductae sint AK, OC, EL, OM. Erit ergo δ in ytraque AC, EM centrum circuli ABC, ideoque O erit centrum circuli ABC. Eadem ratione O est centrum circuli BEF. Q. F. N^s.

Aliter.

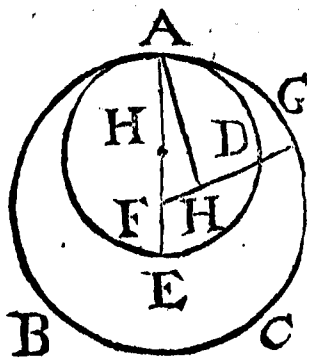
2. 1. 3.

7. 15. def. 1.

3. 9. 3.

Circuli ABC centrum sumatur ζ , quod fit O. Iungantur OG, OB, OH, quae η aequales erunt. Erit ergo O quoque centrum circuli BEF. Q. F. N^s.

PROP. XI. THEOR.



Si duo circuli ABC, ADE sese intus contingant, & sumantur centra ipsorum F, H: recta linea ipsorum centra coniungens producta in circumulorum contactum A cadet.

Si negas: sint centra F, H in alia recta FDG, quae non cadat in contactum A. Iungantur AF, AH. Erit ergo $AH + HF > AF$ vel FG , & proinde $AH > HG$. Sed $AH = HD$. Ergo $HD > HG$. Q. F. N.

6. 20. 1.

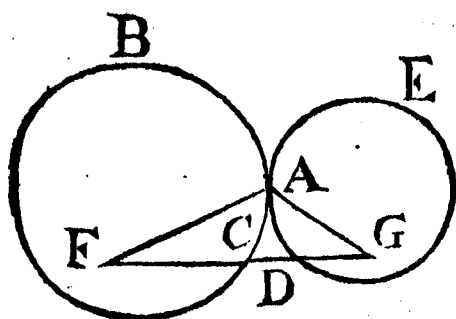
x. 5. ax.

2. 15. def. 1.

14. 14. ax.

PROP.

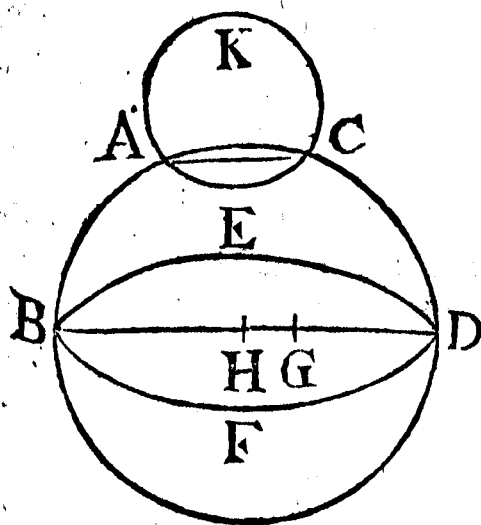
PROP. XII. THEOR.



Si duo circuli ABC, ADE sese extra contingant in A: recta linea ipsorum centra coniungens per contactum transibit.

Si enim centra F & G essent in alia recta FCDG per contactum A non transeunte: iunctis AF, AG, foret, ob $FC = FA$, & $GD = GA$ v. 15. def. 1. $= AG$, tota $FG > FA + AG$. Q. E. A. 2. 20. 1.

PROP. XIII. THEOR.



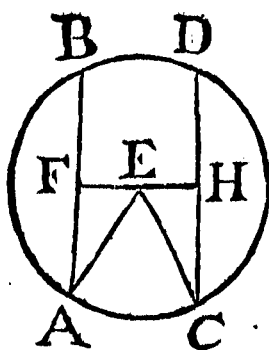
Circulus circum non contingit in pluribus punctis quam uno, siue intus, siue extra contingat.

1. Si enim fieri potest, contingat circulum ABDC circulus BEDF intus in duobus punctis B, D. Sumantur centra horum circulorum^o H, G, & iungatur HG, quae producat^o in puncta B & D. cadet. Sed quia $BH = HD$, erit $BH > GD$, & a potiori $BG > GD$. Est vero $BG = GD$. Q. E. A. 2. 1. 3. 2. 11. 3. 15. def. 1. 14. ax.

2. Si fieri potest, contingat circulus ACK circulum ABC in duobus punctis A, C extra. Iunga-

- τ . 2. 3. Iungatur AC, quae τ intra vtrumque circum-
 lum cadet. Sed quia circulus AKC circum-
 ν . hyp. ABC extra ν contingit: recta intra circum-
 ϕ . 3. def. 3. AKC ducta extra circum-
 lum ABC ϕ cadet.
 Ergo AC simul intra & extra circum-
 lum AKC cadet. Q. E. A.

PROP. XIV. THEOR.



*In circulo ABDC aequales
 rectae lineae AB, CD aequa-
 liter distant a centro E. Et
 quae AB, CD aequaliter di-
 stant a centro E, sunt inter
 se aequales.*

χ . 12. 1.

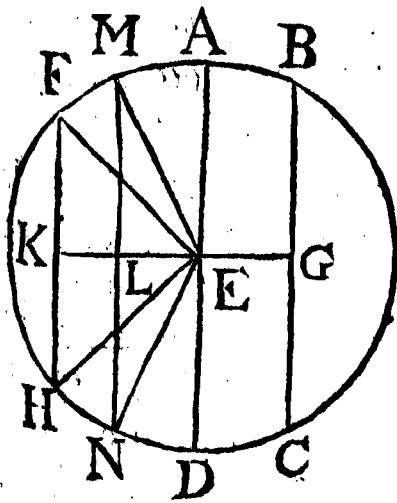
Ex centro E ad rectas AB,
 CD demittantur χ perpendi-
 culares EF, EH, & iungantur EA, EC.

- ψ . 3. 3. 1. Quia ergo ψ $AF = AB$: erit $\frac{1}{2}$ $AB =$
 AF . Eadem ratione $\frac{1}{2}$ $CD = HC$. Et quia
 ω . 7. ax. $AB = CD$: erit ω $AF = HC$. Deinde quia
 α . 15. def. 1. $AE = EC$, & hinc β $AEq = ECq$: erit γ
 β . sch. 48. 1. $AFq + EFq = HCq + EHq$. Sed AFq
 γ . 47. 1. & $= \beta$ HCq . Ergo δ $EFq = EHq$, ideoque β
 $EF = EH$. Rectae ergo AB, CD a centro
 δ . 3. ax. E ϵ aequaliter distant. Q. E. D.
 ϵ . 4. def. 3.

2. Quia ϵ $EF = EH$, & hinc $EFq = EHq$:
 & praeterea $EFq + AFq = \gamma$ $EHq + HCq$:
 erit $AFq = \delta$ HCq , & hinc $AF = \beta$ HC ,
 ζ . 6. ax. & $AB = \zeta$ CD . Q. E. D.

PROP.

PROP. XV. THEOR.

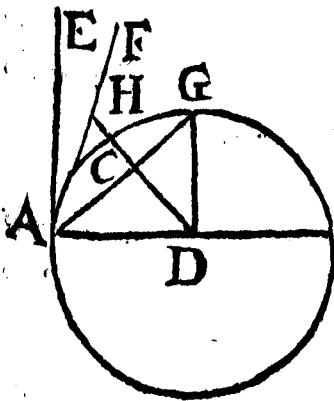


In circulo maxima quidem est diameter A D, aliarum vero semper propinquior B C centro E maior est remotiore F H.

Ducantur a centro ad B C, F H perpendiculares E G, E K: & erit $EK > EG$. Po-ⁿ. 5. def. 3. natur $EL = EG$, &

per L ipsi E K perpendicularis ⁹ ducatur ⁹. 11. 1. M L N, & iungantur E M, E N, E F, E H. Quoniam $EL = EG$, erit $MN = BC$. Quia ¹⁴. 3. $ME = AE$, & $NE = ED$: erit $ME + EN$ ². 2. ax. $= AD$. Sed $ME + EN > MN$. Ergo ²⁰. 1. $AD > MN$, & $AD > BC$. Deinde quia ¹⁴. 14. ax. $ME = FE$, & $NE = HE$, ang. vero $MEN > FEH$: erit ²⁴. 24. 1. $basis MN > FH$, ergo & $BC > FH$. Maxima ergo est A D, & B C maior quam F H. Q. E. D.

PROP. XVI. THEOR.

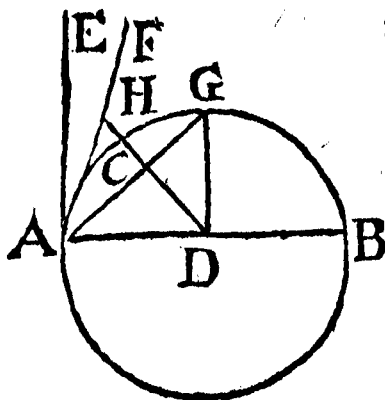


Recta EA diametro AB circuli ABC ad rectos angulos ab extremitate A ducta cadit extra circum-

blum. Et in locum, qui inter rectam lineam AE, & circumferentiam interii-

E 3

non



non cadet. Et semicirculi angulus CAB maior est quovis angulo rectilineo acuto, reliquus autem CAE minor.



1. Si fieri potest, cadat
recta EA intus, & fecet
circulum in G. Ex cen-
tro ducatur DG. Quoniam $DA = DG$,
erit ang. $AGD = \angle GAD = \text{recto}$. Q. E.
A°. Similiter ostenditur, EA nec in circum-
ferentiam cadere posse. Ergo extra circulum
cadet. Q. E. D.

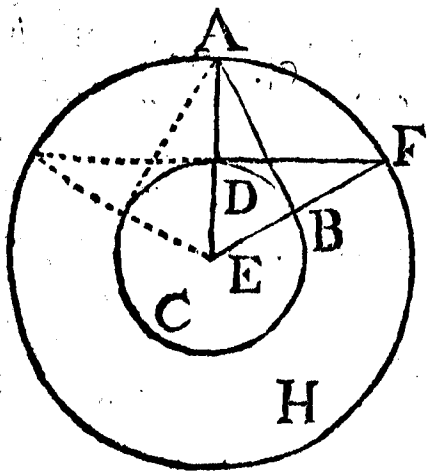
2. Si fieri potest, cadat recta FA inter EA,
& circumferentiam AC. A centro D ad AF
ducatur perpendicularis DH. Et quoniam
ang. AHD rectus π est, & ang. DAH recto
DAE minor: erit ang. DAH $<^e$ AHD, &
ergo HD $<^r$ AD. Sed AD = DC: ergo
HD $<$ DC. Q. E. A τ .

3. Si quis angulus rectilineus acutus ut FAB maior esset angulo semicirculi CAB , vel aliquis angulus ut FAE minor angulo CAE ; recta FA caderet inter perpendicularem EA , & circumferentiam AC . Q. F. N.

u. 2. def. 3. Coroll. Hinc, *u recta linea, quae ad rectos angulos*
& 2. 3. *ducitur diametro circuli ab extremitate eiusdem,*
circulum tangit, & quidem in unico puncto.

PROP.

PROP. XVII. PROBL.



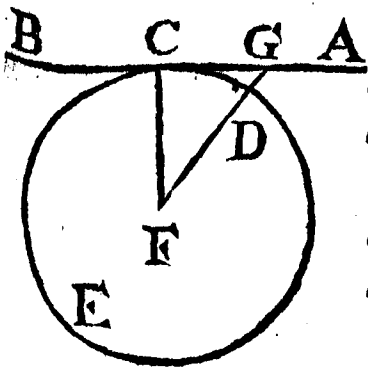
*A dato puncto A
rectam lineam ducere,
quae datum circulum
BCD contingat.*

Sumatur centrum
 ϕ circuli E, & iun- ϕ . 1. 3.
 gatur ADE, & cen-
 tro E intervallo EA

describatur circulus AHF, & a puncto D ipsi
AE ad angulos rectos ducatur DF. Iun-
gantur EBF, ac AB, quae circulum continget.

Nam $EA = EF$, & $EB = ED$, & communem angulum AEB continent. Ergo $\sphericalangle$ ang. $\sphericalangle$. 4. 1.
 $EBA = FDE = \text{recto}$. Ergo ψ AB circum ψ . cor. 16. 3.
 lum BDC tangit. Q. E. F.

PROP. XVIII. THEOR.

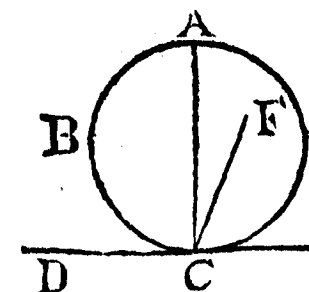


Si recta linea AB circulum CDE contingat; a centro F autem ad contactum C recta linea FC ducatur: ea perpendicularis erit tangenti AB.

Si enim non fit ita: du-

catur ex F ad AB^α perpendicularis FD G. ω. 12. 7.
 Quia ergo FGC rectus est, erit^α ang. GCF α. 17. 1.
 minor recto, quare & FG <^β FC. Sed FD β. 19. 1.
 = FC: ergo FG < FD. Q. E. A γ. 9. ax. &
2. def. 3.

PROP. XIX. THEOR.

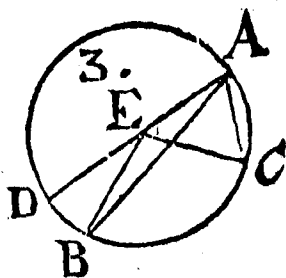
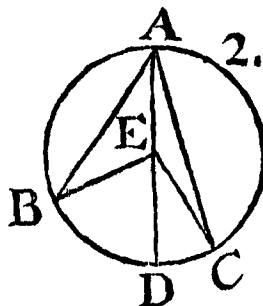


*Si recta linea DE circum-
culum ABC contingat, &
contactu autem C recta
linea CA ducatur ad an-
gulos rectos tangenti
DE: centrum circuli erit in eadem CA.*

δ. 18. 3.
ε. hyp.
ζ. 9. ax.

*Si enim non: fit centrum in alia recta CF.
Erit ergo δ FCE rectus. Est autem & ACE
rectus ε. Q. E. A ζ.*

PROP. XX. THEOR.



*In circulo ABC angulus BEC, qui ad cen-
trum E, duplus est eius BAC, qui ad circum-
ferentiam; quando circumferentiam eandem
BC habent pro basi.*

η. 5. 1.
θ. 32. 1.

*Cas. 1. Si E cadit in AC. Quoniam EA =
EB: erit ang. BAC =^η ABE, ideoque 2 BAC
= BAC + ABE. Sed ang. BEC =^θ BAC
+ ABE. Ergo BEC = 2 BAC. Q. E. D.*

ι. cas. 1.
κ. 2. ax.

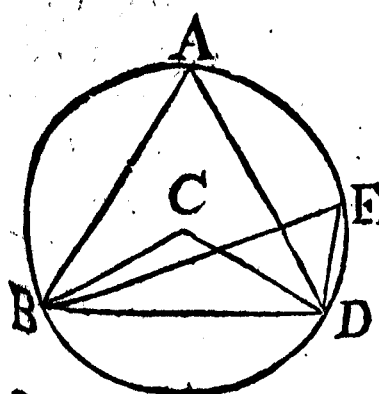
*Cas. 2. Si E intra ang. BAC cadit. Iunga-
tur AED: & erit BED =^ι 2 BAD, & DEC
= 2 DAC; quare ang. BEC =^κ 2 BAC.
Q. E. D.*

Cas.

Caf. 3. Si E extra ang. BAC cadit: similiter ostenditur, esse ang. $BEC = \frac{1}{2} BAC$. λ . 3. ax.
Q. E. D.

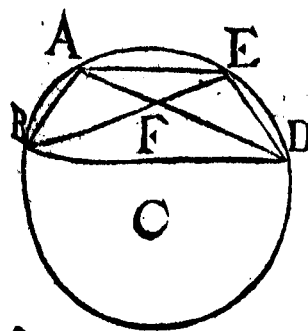
PROP. XXI. THEOR.

*Anguli BAD, BED
in eodem circuli segmento
BAED sunt inter se ae-
quales.*



Caf. 1. Si segmentum
BAED fit semicirculo
maius: sumatur μ circuli
centrum C, & iungantur

CB, CD. Quia ergo ang. $BAD = \frac{1}{2} BCD$, ν . 20. 3.
& ang. $BED = \frac{1}{2} BCD$: erit $\angle BAD = \angle BED$. ξ . 7. ax.
Q. E. D.

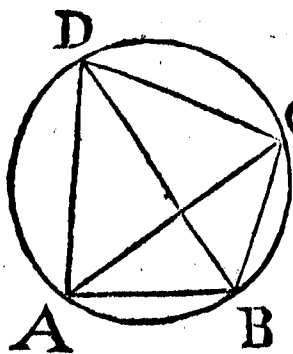


* *Caf. 2.* Si segmentum BA
ED semicirculo maius non
sit: iungatur AE. Et quia
segmentum ABDE semicir-
culo maius erit: per *caf. 1.*
erit angul. $ABE = ADE$.

Sed & ang. $BFA = EFD$. θ . 15. 1.

Subtractis ergo his angulis ab aequalibus π . 32. 1.
summis angulorum in triangulis ABF, EDF:
remanebit ang. $BAD = BED$. Q. E. D.

PROP. XXII. THEOR.



Quadrilaterorum ADCB, quae circulis inscribuntur, Anguli oppositi ADC, ABC sunt duobus rectis aequales.

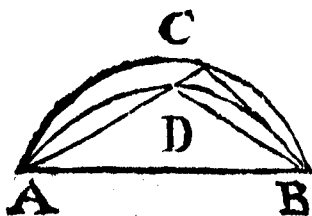
p. 21. 3.

c. 2. ax.

r. 32. 1.

Iungantur AC, BD. Quoniam $\angle$ ang. $CAB = CDB$, & ang. $ACB = ADB$: erit $\angle$ ang. $CAB + ACB = ADC$. Sed ang. $CAB + ACB + ABC = 2$ rectis. Ergo ang. $ADC + ABC = 2$ rectis. Similiter ostenditur, ang. $DAB + DCB = 2$ rectis. Q. E. D.

PROP. XXIII. THEOR.



Super eadem recta linea duo circulum segmenta similia & inaequalia ex eadem parte non constituentur.

v. 10. def. 3.

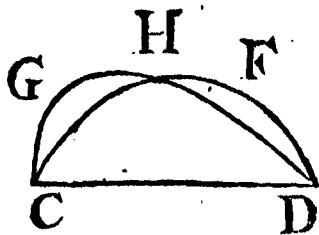
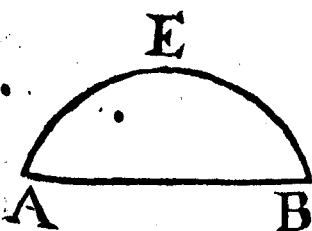
p. 16. 1.

Si enim fieri potest, sint super recta AB duo segmenta circulum ACB, ADB inaequalia sed similia ex eadem parte constituta. Ducatur ADC, & iungantur CB, DB. Erit ergo $\angle$ ang. $ADB = ACB$. Q. E. A ϕ .

PROP. XXIV. THEOR.

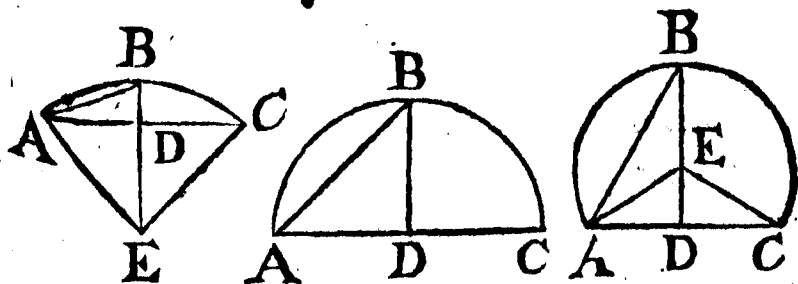
Super aequalibus rectis lineis AB, CD similia circulum segmenta ABE, CDF sunt inter se aequalia.

Ponatur enim segmentum AB Ein segmentum CDF sic, vt A in C & AB in CD cadat. Et



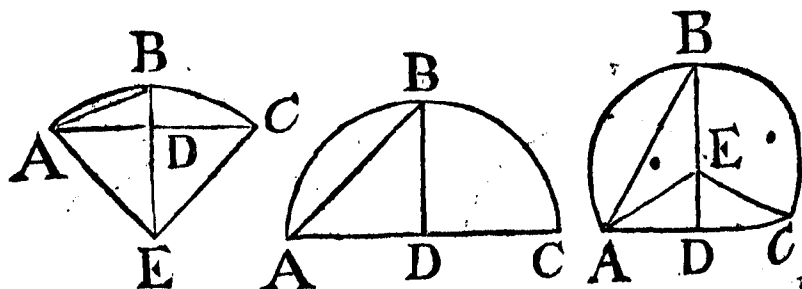
Et quia $AB = CD$, punctum B cadet in D, lam si circumferentia AEB non congrueret circumferentiae CFD: aut extra hanc caderet, aut eam secaret, veluti CGHD. Atqui si circumferentia AEB extra vel intra segmentum CDF caderet: foret segmentum ABE segmento CDF maius minusue, & eidem simile. Quod fieri nequit $\propto$. Si circumferentia AFB caderet in CGHD: duo circuli se in pluribus quam duobus punctis C, H, D secarent; quod etiam absurdum est ψ . Quum ergo circumferentia AEB nec extra circumferentiam CFD cadat, nec eam secet: ipsi congruat necesse est. Congruent ergo tota segmenta ABE, CDF, & erunt proinde aequalia. Q. E. D. $\propto$. 23. 3. ψ . 10. 3.

PROP. XXV. PROBL.



Dato circuli segmento ABC describere circulum, cuius est segmentum.

Secetur



α. 10. 1.

α. 11. 1.

β. 23. 1.

Secetur α AC bifariam in D, & ipsi ex D ad rectos ducatur α DB, & iungatur AB. Et si ang. ABD = BAD: erit D centrum circuli, cuius est segmentum ACB. Sin ang. ABD maior vel minor angulo BAD; fiat β angul. BAE = ABD; & erit E centrum circuli, in teruallo EA, vel EB, vel EC describendi.

γ. 6. 1.

δ. constr.

ε. 9. 3.

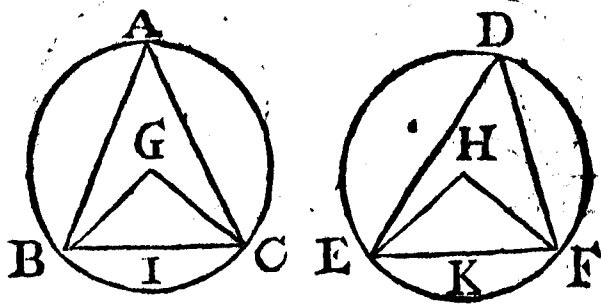
Cas. 1. Nam si ang. ABD = BAD: erit AD = γ DB. Sed & AD = DC δ . Quare D erit centrum circuli complendi. Q. E. F. Simul patet, hoc in casu segmentum ACB esse semicirculum.

ζ. 4. 1.

Cas. 2. Si ang. BAE aequalis est constitutus ang. ABD: erit iterum γ EB = EA. Sed ob AD = δ DC, & angulos ad D aequales, est etiam EA ϵ = EC. Ergo, circuli complendi centrum erit E. Q. E. F. Constat simul, si ang. ABD > BAD, segmentum ACB semicirculo minus esse, quoniam centrum E extra cadit; & si ang. ABD < BAD, segmentum ACB maius esse semicirculo, quoniam centrum E intra cadit.

PROP.

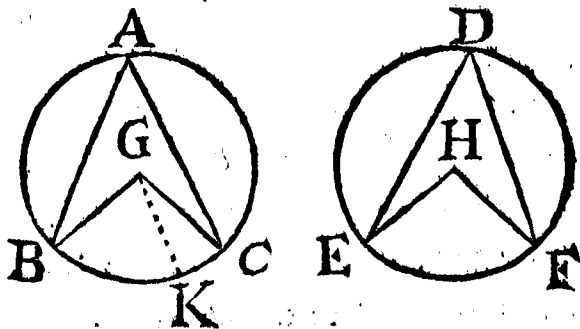
PROP. XXVI. THEOR.



In aequalibus circulis ABC, DEF, anguli
 aequales aequalibus insistant circumferentiis
 BIC, EKF, siue ad centra, (vt BGC, EHF)
 siue ad circumferentias (vt BAC, EDF) †
 insistant.

Iungantur enim BC, EF. Quia circuli
 ABC, EDF aequales sunt: erunt & quae ex
 centrīs aequales, id est, $GB = HE$, $GC =$
 HF . Et quia praeterea ang. $BGC = EHF$:
 erit $BC = EF$. Et quoniam ang. $BAC =$ ^{9. 4. 1.}
 EDF : segmentum BCA simile est ^{9. 11. def. 3.} segmen-
 to EFD. Ergo ^{1. 24. 3.} segm. $BCA =$ segm. EFD .
 Totus autem circulus $ABG =$ circulo DEF .
 Ergo ^{2. 3. ax.} segm. $BCI =$ segm. EKF , ideoque
 circumferentia $BIC = EKF$. Q. E. D.

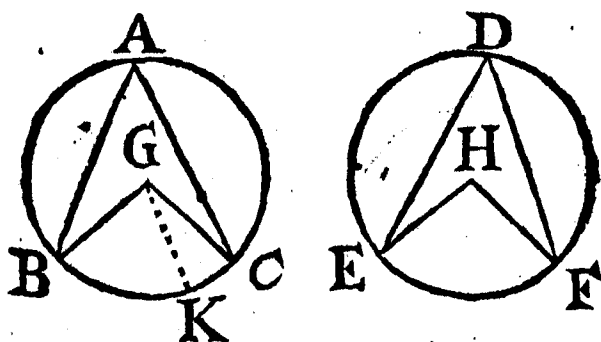
PROP. XXVII. THEOR.



In aequalibus circulis ABC, DEF, anguli,

† Supple, constitui.

qui

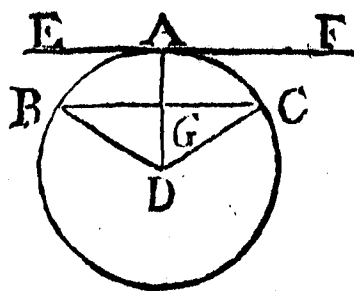


qui aequalibus insistant circumferentiis BC, EF, sunt inter se aequales siue ad centra, (vti BGC, EHF) siue ad circumferentias (vti BAC, EDF)† insistant.

Si enim non sit ang. BGC = EHF: alteruter veluti BGC maior erit. Fiat ang. BGK = ^λ EHF: & erit ^μ BK = EF = BC. Quod fieri nequit. Est ergo ang. BGC = EHF. & hinc etiam ^ξ ang. BAC = EDF. Q. E. D.

λ. 23. 1.
μ. 26. 3.
ν. 9. ax.
ξ. 20. 3.
7. ax.

* Scholium.



Linea recta EF, quae ducta ex A medio puncto circumferentiae alicuius BAC circulum tangit, parallela est rectae lineae BC, quae peripheriam illam subtendit.

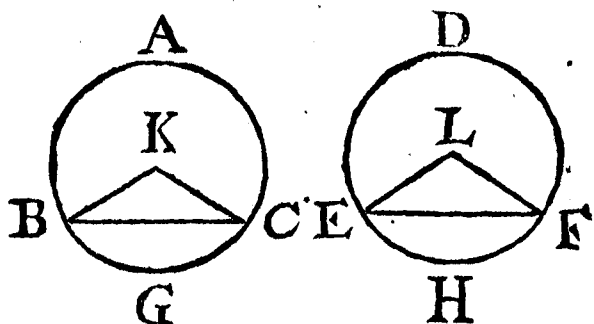
Duc e centro D ad contactum A rectam DGA, & connecte DB, DC. Latus DG commune est, & DB = DC, atque ang. BDA = ^o ADC, ob ^π peripherias BA, AC aequales. Ergo ^ρ ang. BGD = CGD, & proinde vterque rectus est. Sed interni anguli EAD, FAD etiam ^σ recti sunt. Ergo EF, BC parallelae ^τ sunt. Q. E. D.

ο. 27. 3.
π. hyp.
ρ. 4. 1.
σ. 18. 3.
τ. 28. 1.
10. ax.

† Supple, constituti.

PROP.

PROP. XXVIII. THEOR.



In aequalibus circulis ABC, DEF, aequales rectae lineae BC, EF circumferentias aequales auferunt, maiorem quidem BAC maiori EDF, minorem vero BGC minori EHF.

Sumantur centra K, L, & iungantur KB, KC, LE, LF. Quoniam circuli aequales sunt: erit $KB = LE$, & $KC = LF$. Basis vero $BC = EF$: ergo ang. $BKC = ELF$, & $\therefore$ 8. 1. hinc $\angle BGC = EHF$. Sed & totae circum- ϕ . 26. 3. ferentiae aequales sunt. Ergo & reliquae BAC, EDF aequantur. Q. E. D.

PROP. XXIX. THEOR.

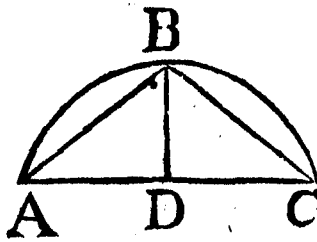
In aequalibus circulis ABC, DEF, aequa-fig. propos. 28. circumferentias BGC, EHF aequales re- praeced. ctas lineae BC, EF subtendunt.

Quoniam $BGC = EHF$: ductis e centrīs KB, KC, LE, LF, erit $\simeq$ ang. $BKC = ELF$. $\propto$ 27. 3. Praeterea, quia circuli aequales ponuntur, est $KB = LE$, & $KC = LF$. Ergo $\simeq BC = EF$. ψ 4. 1. Q. E. D.

* Nota. Haec & tres praecedentes intelligantur etiam de eodem circulo.

PROP.

PROP. XXX. PROBL.



Datam circumferentiam ABC bifariam secare.

Duc AC, quam biseca in D. Ex D duc DB perpendiculararem in AC. Dico,

fore $AB = BC$. Iungantur enim AB, BC.

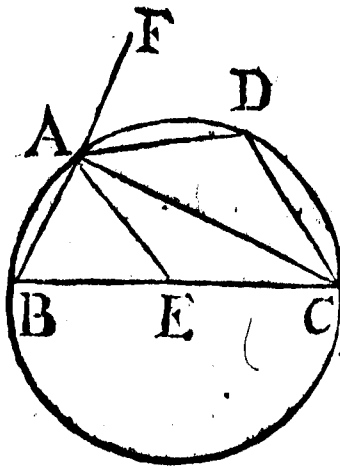
Et quia $AD = DC$, & latus DB commune,

α . 10. def. 1. & ang. $ADB = \alpha$ BDC: erit α $AB = BC$, &

α . 4. 1. ergo β . circumferentia AB = circumf. BC,

β . 28. 3. quoniam vtraque semicirculo minor est. Q. E. F.

PROP. XXXI. THEOR.



In circulo ABCD angulus BAC, qui in semicirculo rectus est; qui vero ABC in maiori segmento, minor est recto; & qui ADC in minori, maior recto. Et insuper angulus maioris segmenti recto maior est; minoris vero segmenti angulus recto minor.

1. Ex centro E ducatur EA, & BA producat in F. Quoniam $BE = EA$: erit γ ang.

$BAE = ABC$. Rursus quia $EA = EC$: erit γ ang. $BCA = CAE$. Ergo δ ang. $BAC =$

$ABC + BCA$. Est autem & ang. $FAC = ABC + BCA$. Ergo ang. $BAC = FAC$.

ϵ . 10. def. 1. Ergo ang. BAC ϵ rectus est. Q. E. D.

2. Quo-

2. Quoniam $\angle$ ang. $ABC + BAC < 2$ re-
ctis, & $BAC =$ recto: erit $\angle$ ang. $ABC <$
recto. Q. E. D. n. 17. 1.
9. 5. ax.

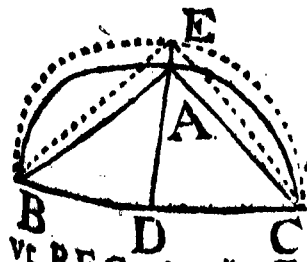
3. Quum quadrilaterum $ABCD$ in circulo
habeat $\angle$ angulos oppositos ABC & ADC 2 re-
ctis aequales; ABC vero minor sit recto: re-
liquus ADC maior recto erit. Q. E. D. 1. 22. 3.

4. Quia angulus rectilineus BAC rectus est:
patet, angulum a circumferentia CBA & re-
cta AC comprehensum maiorem recto esse.
Rursus quia FAC rectus est: patet, angulum
minoris segmenti DAC minorem esse recto.
Q. E. D.

Corollar. Hinc manifestum est, quod si unus an-
gulus trianguli duobus reliquis aequalis sit, est rectus.

* Scholia.

1. In triangulo rectangulo BAC
si hypotenusam BC bisecetur in
 D : circulus, intervallo DB de-
scriptus, per A etiam transibit.



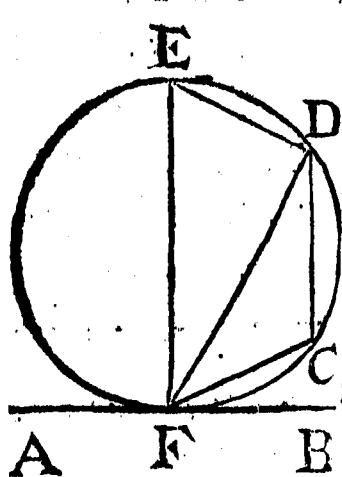
Si enim non transeat per A ,
ut BEC : iuncta DA , quae circulo occurrat ad E ,
ducantur EB , EC . Erit ergo $\angle$ angulus BEC in
semicirculo rectus, & proinde $\angle$ ang. BAC aequa-
lis. Q. E. N.^o n. 31. 3.
1. 10. ax.
4. 21. 1.

2. Si quis angulus in segmento circuli rectus est:
segmentum semicirculus est. Si vero obtusus est, seg-
mentum minus: sin acutus, segmentum maioris est se-
micirculo. Si enim negas: angulus ille tantus non
erit, quantus ponebatur.

F

PROP.

PROP. XXXII. THEOR.

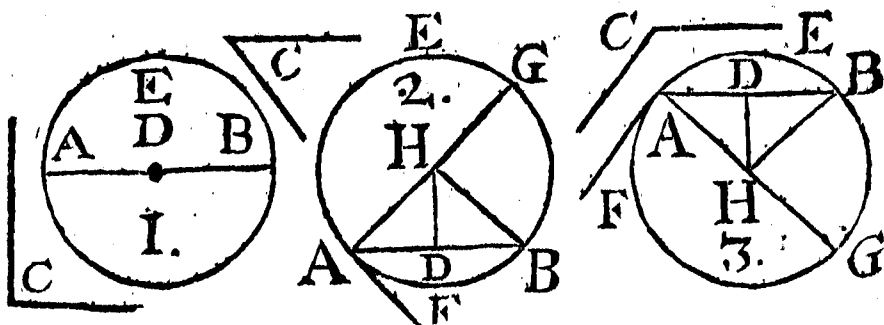


Si recta linea AB circulum CDEF contingat, a contactu F autem ducatur recta linea FD, circulum secans; anguli DFB, DFA, quos haec cum contingente facit, aequales erunt iis, qui in alternis circuli segmentis consistunt, DEF, DCF.

Ducatur enim ipsi AB ad rectos angulos FE; iungatur ED, & sumto quouis puncto C in circumferentia DF, iungantur CD, CF.

Quoniam igitur ^{v. 19. 3.} in FE centrum circuli est, ^{§. 18. def. 1.} EDF est angulus ^{& 7. def. 3. de °} in semicirculo, & proinde ^{rectus.} Hinc $\text{ang. EFD} + \text{DEF} = \text{recto}$. Sed & $\text{ang. EFB} = \text{recto}$. Quare ^{o. 31. 3.} $\text{ang. DFB} = \text{DEF}$. Deinde quoniam DFA ^{π. 32. 1.} $+ \text{DFB} = 2 \text{ rectis} = \text{DCF} + \text{DEF}$ ^{g. 1. & 3. ax.} erit $\text{ang. DFA} = \text{DCF}$. ^{6. 13. 1.} Q. E. D. ^{7. 22. 3.} ^{v. 3. ax.}

PROP. XXXIII. PROBL.



Super data recta linea AB describere segmentum circuli, quod capiat angulum, dato angulo rectilineo C aequalem.

Cas. 1.

Cas. 1. Si datus angulus C sit rectus (fig. 1.):
 biseca AB in D, & super AB centro D inter-
 uallo DA vel DB describe segmentum circuli
 AEB, quod capiet ϕ angulum rectum, qui $\propto \phi$. 31. 3.
 dato C aequalis erit. Q. E. F. $\propto$. 10. ax.

Cas. 2. Si datus angulus C sit acutus (fig. 2.)
 vel obtusus (fig. 3.): fac ang. BAF = C, & ex
 A excita super AF perpendicularem AG;
 biseca AB in D, & per D duc DH ipsi AB
 ad rectos angulos; centro H interuallo HA
 descripti circuli segmentum AEB erit id,
 quod describendum erat.

Nam, iuncta HB, quia AD = DB, DH
 communis, & ang. ADH = $\propto$ HDB: erit
 AH = ψ HB, & ergo circulus centro H per ψ . 4. 1.
 A descriptus transibit etiam per B. Et quo-
 niam AF circulum ω tangit, AB vero secat:
 erit angulus in segmento AEB = ω ang. BAF ω . cor. 16. 3.
 = C. Q. E. F. α . 32. 3.

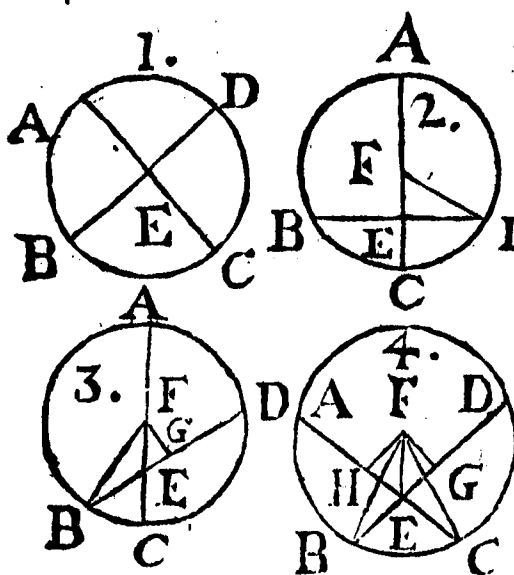
PROP. XXXIV. PROBL.



A dato circulo ABC
 segmentum abscindere,
 quod capiat angulum, da-
 to angulo rectilineo D ae-
 qualem.

Ducatur β recta EF, circulum tangens in β . 17. 3.
 B, & ad punctum B fiat γ ang. CBF = D: γ . 23. 1.
 segmentum BAC capiet angulum δ , angulo δ . 32. 3.
 CBF, vel dato D aequalem. Q. E. F.

PROP. XXXV. THEOR.



*Si in circulo A
BCD duae rectae
lineae AC, BD sese
mutuo secant: et
et angulum sub se-
gmentis unius AE,
EC comprehensum
aequale est ei,
quod sub alterius
segmentis BE, ED
comprehenditur.*

ε. 36. 1.

Cas. 1. Si AC, BD per centrum E tran-
eunt: manifestum est, quum AE, EB, DE,
EC aequales sint, esse $AE \times EC = BE \times ED$. Q. E. D.

5. 2.

3. 3.

9. 47. 1.

1. 1. & 3. ax.

* *Cas. 2.* Si alterutra AC per centrum F
transit, & alteram BD ad angulos rectos secat
in E: iungatur FD. Est $\angle AE \times EC + FEq = FCq = FDq$. Sed quia $BE = ED$,
ideoque $BE \times ED = EDq$: est quoque $BE \times ED + FEq = FDq$. Ergo $AE \times EC = BE \times ED$ vel EDq .

* *Cas. 3.* Si alterutra AC per centrum F
quidem transit, sed alteram BD non ad rectos
secat: ex F in BD ducatur perpendicularis
FG. Est ergo $BG = GD$, & $BE \times ED + EGq = BGq$. Iungatur FB, & addito
communi FGq, erit $BE \times ED + EGq + FGq = FBq$. Sed, $EGq + FGq = FEq$.
Ergo $BE \times ED + FEq = FBq = FCq$.

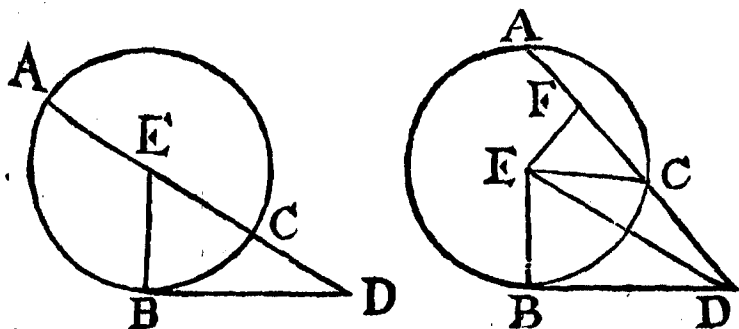
FCq. Est vero & $AE \times EC + FEq = ?$

FCq. Ergo $AE \times EC = BE \times ED$.

Q. E. D.

Cas. 4. Si neutra per centrum F transit: iungantur FE, FB, FC, & ex F in AC, BD, demittantur perpendiculares FH, FG. Ostenditur, vti antea, $BE \times ED + FEq = FBq$, & $AE \times EC + FEq = FCq$. Est vero $FBq = FCq$. Ergo $AE \times EC = BE \times ED$. Q. E. D.

PROP. XXXVI. THEOR.



Si extra circulum ABC aliquod punctum D sumatur, & ab eo in circulum cadant duae rectae lineae, quarum altera DA circulum secet in C, A, altera DB vero contingat: rectangulum comprehensum sub tota secante DA, & exteriore segmento DC, inter punctum D & conuexam circumferentiam, aequale erit ei, quod a contingente DB fit, quadrato.

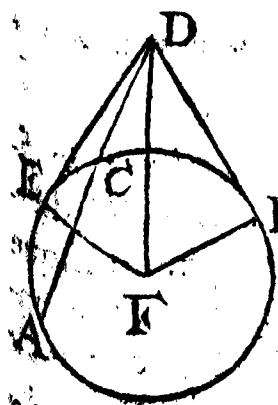
Cas. 1. Si DA transit per centrum E circuli: iungatur EB, & ang. EBD erit ^{n.} rectus. ^{n. 18. 3.}
Sed ^{n.} $AD \times DC + CEq = DEq$, & ^{n.} DBq ^{n. 6. 2.}
^{n.} $+ BEq = DEq$. Ergo $AD \times DC + CEq$ ^{n. 47. 1.}
^{n.} $= DBq + BEq$. Ergo, quum $CEq = BEq$,
 $AD \times DC = DBq$. Q. E. D.

F 3

Cas. 2.

Nam si tertia AG tangere dicatur, erit $AG = AC$ o. 2. sch.
 $AE = AC$. Q. E. D. π. 8. 3.

PROP. XXXVII. THEOR.



Si extra circumulum ABC sumatur aliquod punctum D, atque ab eo in circumulum cadant duae rectae lineae DA, DB, quarum altera quidem DA circumulum secet in C, altera vero DB in eum incidit; sit autem rectangulum comprehensum sub tota secante DA,

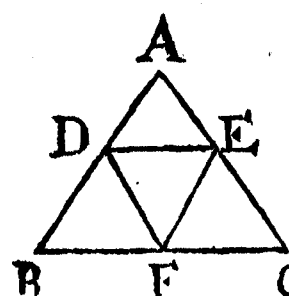
& exteriori segmento DC inter punctum D. & conuexam circumferentiam, aequale ei, quod ab incidente DB sit quadrato: incidens linea DB circumulum continget.

Ducatur enim e tangens circumulum DE, Eucl. 17. 3.
 matur centrum σ F, & iungantur FE, FB, σ. 1. 3.
 FD. Ergo $AD \times DC = DE^2$. Ergo 7. 36. 3.
 $DE^2 = DB^2$, & $DE = DB$. Sed quia
 praeterea $FE = FB$, & $DF = DF$; erit ang. v. 8. 1.
 $DEF = DBF$. Est vero DEF rectus ϕ ; φ. 18. 3.
 ergo & DBF; & igitur DB $\approx$ circumulum tan- x. cor. 16. 3.
 git. Q. E. D.

* Coroll. Hinc constat, si duae rectae aequales DE, DB ex puncto quopiam D in conuexam peripheriam incidunt, & eorum una DE circumulum tangit: alteram quoque DB circumulum tangere.

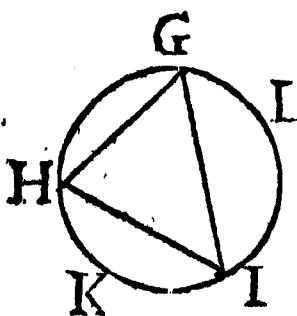
E V C L I D I S E L E M E N T O R V M L I B E R I V.

DEFINITIONES.

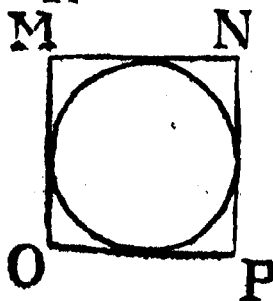


1. *Figura rectilinea in figura rectilinea inscribi dicitur, quando unusquisque figurae inscriptae DEF angulus D, E, F, contingit vnumquodque latus AB, AC, BC eius ABC, in qua inscribitur.*

2. *Figura similiter circa figuram circumscripti dicitur, quando vnumquodque latus circumscriptae ABC contingit vnumquemque angulum eius DEF, circa quam circumscribitur.*



3. *Figura rectilinea in circulo inscribi dicitur, quando unusquisque inscriptae figurae GHI angulus circuli GKL circumferentiam contingit.*



4. *Figura rectilinea circa circulum circumscribi dicitur, quando vnumquodque latus circumscriptae NMO P circuli circumferentiam contingit.*

Cir-

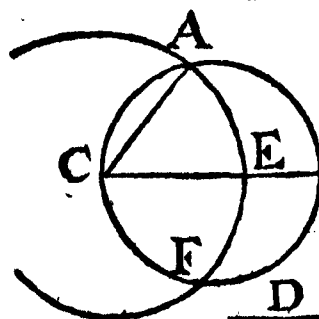
5. *Circulus similiter in figura rectilinea inscribi dicitur, quando circuli circumferentia vnumquodque latus eius MNPO, in qua inscribitur, contingit.*

6. *Circulus circa figuram rectilineam circumscribi dicitur, quando circuli circumferentia GKL vnumquemque angulum eius GHI, circa quam circumscribitur, contingit.*

7. *Recta linea GH in circulo GKL aptari dicitur, quando eius termini G, H in circuli circumferentia fuerint.*

PROP. I. PROBL.

In dato circulo ABC datae rectae lineae D, quae diametro eius BC maior non sit, aequalem rectam lineam aptare.



Ducatur circuli diameter BC. Et si $D = BC$: factum iam erit propositum ^{a} .

^{a} . 7. def. 4.

Si $D < BC$, ponatur ^{b} ipsi $D = CE$, & centro C intervallo CE circulus AEF describitur, & CA iungatur. Quae erit ipsi D aequalis ^{c} , & in dato circulo aptata ^{a} . Q. E. F.

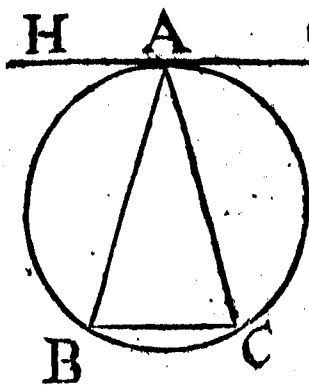
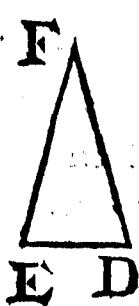
^{b} . 3. 1.

^{c} . 7. 1. ax.

PROP. II. PROBL.

In dato circulo ABC inscribere triangulum aequiangulum dato triangulo DEF.

δ. 23. 1.



Ducatur recta
linea HAG tan-
gens circulum in
A, & fiat δ an-
gulus GAC =
DEF, ac angul.
HAB = EDF,
& BC iungatur.

ε. 32. 3.

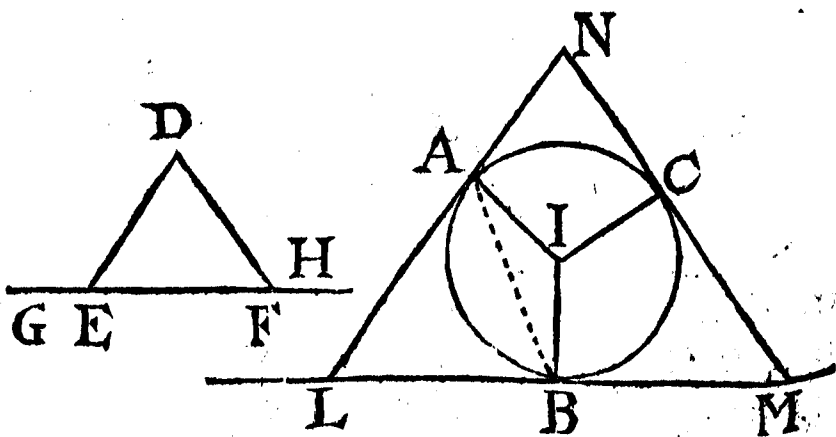
ζ. 1. ax.

η. 32. 1.

θ. 3. def. 4.

Quoniam igitur * ang. $ABC = GAC$, &
ang. $ACB = HAB$: erit † ang. $ABC = DEF$,
& ang. $ACB = EDF$. Ergo & reliquus BAC
reliquo EFD aequalis erit †; & $\triangle ABC$ ae-
quiangulum erit ipsi DEF, & in circulo ‡ in-
scriptum. Q. E. F.

PROP. III. PROBL.

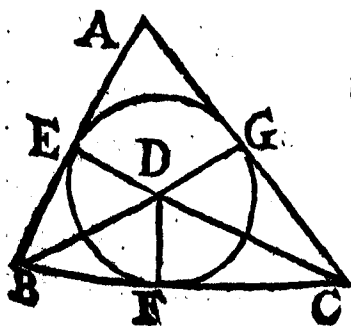


*Circa datum circulum ABC circumscribere
triangulum, aequiangulum dato triangulo DEF.*
Produce

Produce latus EF ad G & H. Cape ^{cen-1. 1. 3.}trum circuli I, ex quo duc rectam IB utrun- ^{2. 23. 1.}que, & fac^a ang. BIA = DEG, & ang. BIC = DFH, & per A, B, C duc^a rectas NL, ^{1. cor. 16. 3.}LM, NM, circumulum tangentes. Dico factum.

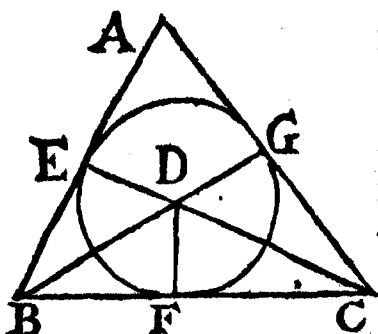
Quia enim ^{18. 3.} anguli ad puncta A, B, C recti sunt: erunt ang. IAL + IBL = 2 rectis. (* Ducta ergo AB, erunt ang. LAB + LBA < 2 rectis, ideoque rectae NL, ML concurr- ^{ax. 11.}ent in L.) Quum autem in quadrilatero LAIB quatuor anguli ^{6. schol.} sint = 4 rectis, e.g. 6, schol. quibus anguli IAL, IBL = 2 rectis: erunt ^{32. 1.} & reliqui AIB + ALB = 2 rectis. Sunt ^{3. ax.} autem & ang. DEG + DEF = 2 rectis. ^{13. 1.} Ergo ang. BIA + ALB = DEG + DEF. Quare ^{32. 1.} ang. ALB = DEF. Similiter demonstrabitur, ang. NMB = DFE, Ergo & reliquus MNL = FDE. Est igitur ^{4. 4. def. 4.} LMN aequiangulum dato DEF, & circumscriptum ^{12. 1.} circa circumulum ABC. Q. E. F.

PROP. IV. PROBL.



*In dato triangulo ABC
circulum inscribere.*

Bisecentur ^{9. 1.} ang. ABC, ^{12. 1.} ACB rectis, quae conueniant in puncto D, ex quo duc^a perpendicular- ^{12. 1.}res



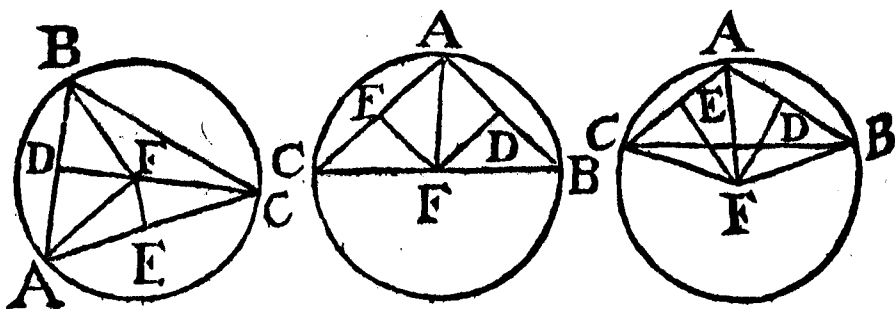
res DE, DF, DG. Circulus centro D per E, vel F, vel G descriptus, erit is, quem describere oportebat.

Q. 10. 22.
x. 26. 1.

Nam quum ang. $ABD = DBC$, & ang. $DEB = \phi$ DFB , & latus DB commune: erit $\propto$ $DE = DF$. Eadem ratione $DF = DG$. Circulus ergo ex D per E, vel F, vel G descriptus per reliqua etiam puncta transibit, & quia rectas AB, BC, CA secare nequit ψ , ipsas continget. Erit ergo inscriptus α in triangulo ABC. Q. E. F.

ψ . 16. 3.
a. 5. def. 4.

PROP. V. PROBL.



Circa datum triangulum ABC circulum circumscribere.

a. 10. 1.
b. 11. 1.

Biseca α AB, AC in D, E, & duc perpendiculares β DF, EF, coeuntes in F, ex quo centro per A, vel B, vel C describe circulum.

γ . 4. 1.

Siue enim F intra triangulum ABC, siue in basin BC, siue extra triangulum cadat: ductis rectis FA, FB, FC, erit γ $BF = AF = FC$. Ergo circulus ex F per vnum punctum

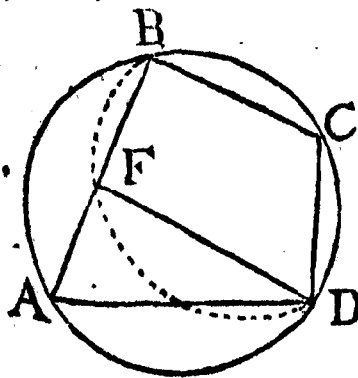
rum A, B, C descriptus, per reliqua etiam transibit, & circumscriptus erit circa ^d triangulum ABC. Q. E. F.

Corollar.

Si datum triangulum sit oxygonium, DE & EF intra triangulum conuenient ¹; si amblygonium, ² 2. schol. extra; si vero rectangulum sit, conuenient in tertio latere BC, quod angulum rectum subtendit. ³ 3.

** Scholia.*

1. Eadem ratione circulus describitur per tria puncta, non in eadem recta existentia.

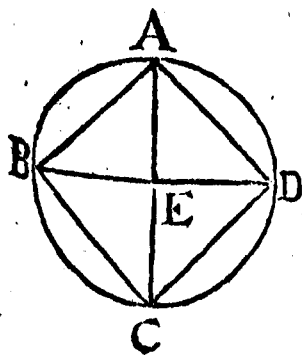


2. Si in quadrilatero A B C D anguli A & C, qui ex aduerso, duobus rectis aequantur, circa quadrilaterum circulus circumscribi potest. Describi enim per tres quosuis angulos B, C, D circulus potest. Iam si negas, eundem transitu-

rum esse per quartum A: secet rectam AB in quouis alio puncto F. Ducta ergo DF, erit ang. C + ² 22. 3. $F = 2$ rectis. Sed ponitur etiam $C + A = 2$ rectis. Ergo ang. $F = A$. Q. E. A ⁴. ⁴ 16. 1.

PROP. VI. PROBL.

In dato circulo ABCD quadratum inscribere.



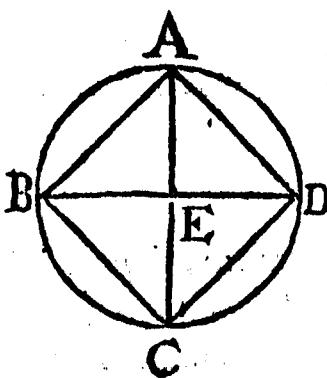
Ducantur ⁹ diametri AEC, ⁹ 1. 3. & BED ad rectos angulos, & ¹¹ 11. 1. iungantur AB, BC, CD, DA.

Nam quia $BE = ED$, & communis EA, & ang. BEA, AED

c. 4. 1.

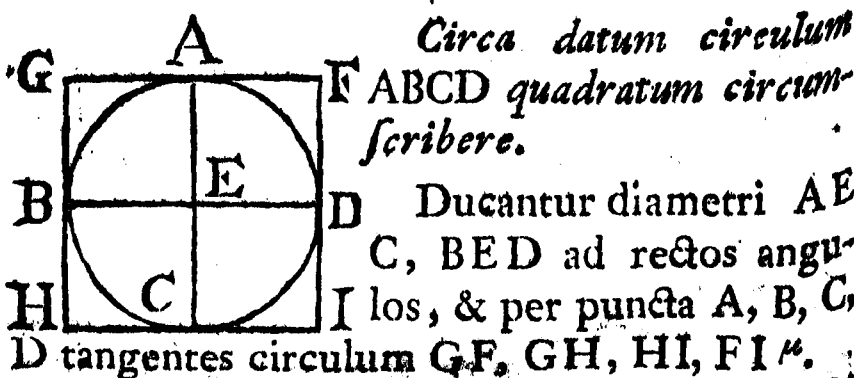
n. 1. ax.

λ. 31. 3.



AED recti: erit $AB = DA$.
Eadem ratione $BC = AB$, &
 $CD = DA$. Ergo $\times$ qua-
drilaterum ABCD aequila-
terum est. Est vero & re-
ctangulum, quoniam λ qui-
libet angulorum A, B, C, D,
in semicirculo est. Igitur
quadratum est, inscriptum in dato circulo.
Q. E. F.

PROP. VII. PROBL.



Circa datum circum

ABCD quadratum circumscribere.

Ducantur diametri AE
C, BED ad rectos angu-
los, & per puncta A, B, C,
D tangentes circum μ GF, GH, HI, FI μ .

 μ . cor. 16. 3.

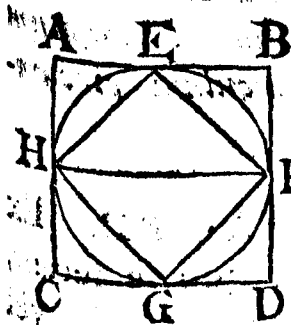
v. 18. 3.

 ξ . 28. 1.

o. 34. 1.

Igitur quum ν anguli ad A, B, C, D recti
sint, nec non (per hyp.) anguli ad E: erunt
rectae HC, HI, BD, & rectae GH, FI, AC pa-
rallaelae. Ergo Pgra sunt GI, GC, FB, GE,
FE, HE & EI, ac propterea $\circ$ $GF = HI$, &
 $GH = FI$, & $GH = AC$, & $GF = BD$.
Hinc ob $AC = BD$, erit quadrilaterum FG
HI aequilaterum. Et quoniam GE est Pgr.
& ang. AEB rectus: erit $\circ$ & ang. G rectus.
Similiter reliqui H, I, F recti demonstrantur.
Ergo figura FGH I est quoque rectangula, &
propterea quadratum, ac circa circum de-
scripta. Q. E. F.

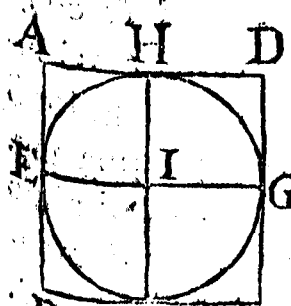
* Scholium

* *Scholium.*

Quadratum circulo circumscriptum ABCD duplum est inscripti quadrati EGHF.

Nam Rgl. $HB = 2 \triangle HEF$ ^{41. 1.}
& Rgl. $HD = 2 \triangle HGF$. Ergo totum ABCD $= 2$ EGHF.

PROP. VIII. PROBL.



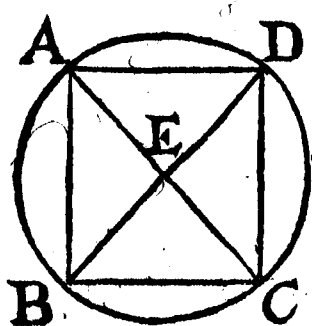
In dato quadrato ABCD circulum inscribere.

Bisecetur utraque AB, AD in E, H, & per E alterutri ipsarum AD, BC parallela EG, per H vero alterutri ipsarum AB, DC parallela HIF agatur. Centro I intervallo IH, vel IE, vel IG describatur circulus.

Quoniam ergo pgra sunt AG, GB, AF, FD, AI, IC, IB & ID: erit $AE = HI$, & $AH = EI$. ^{34. 1.}
Sed quoniam $AB = AD$: est $AE = AH$. ^{29. def. 1.}
 $= EI$. & ergo $HI = EI$. Similiter demonstrabitur $HI = IG$, & $EI = IF$. ^{7. ax.}
Ergo IE, IF, IG, IH aequales sunt inter se, & propterea circulus centro I intervallo vni ipsarum aequali descriptus etiam per reliquarum extrema transibit, & quoniam rectas AB, BC, CD, DA secare nequit (sunt enim anguli ad H, E, F & G recti), ipsas tanget, & proinde quadrato inscriptus erit. ^{16. 3.}
Q. E. F. ^{5. def. 4.}

PROP.

PROP. IX. PROBL.

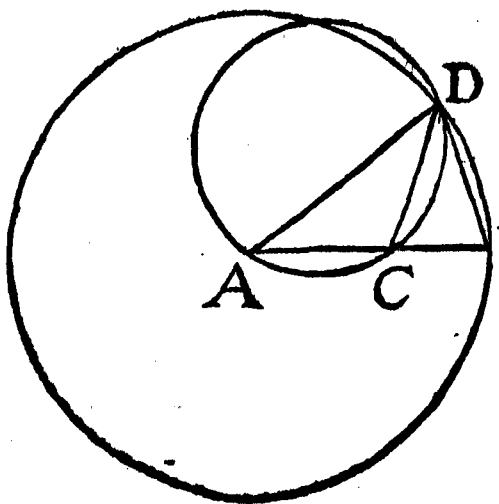


*Circa datum quadratum
ABCD circulum circumscribere.*

Iungantur AC, BD. Ex puncto E, in quo se secant, interuallo EA vel EB, vel ED, vel EC describatur circulus.

Quoniam $DA = AB$, $DC = CB$ & communis AC: anguli A & C per rectam AC bisecantur ψ . Similiter ostenditur, angulos B & D bisecari per rectam BD. Et quia ang. $A = B$, & hinc dimidiis $EAB =$ dimidio EBA : erit $EA = EB$. Similiter demonstrabimus, esse $EB = EC$, & $EC = ED$. Sunt ergo EA, EB, EC, ED inter se aequales, & circulus, centro E interuallo, vni harum aequali, descriptus, per puncta A, D, C, B transit, & ergo circa quadratum ABDC circumscriptus est. Q. E. F.

PROP. X. PROBL.



Isofceles triangulum constituisse, habens alterutrum angulorum qui sunt ad basin, duplum reliqui.

Ponatur recta quaedam AB, & secetur ^{β} in C sic, ut $AB \times BC = AC^2$.

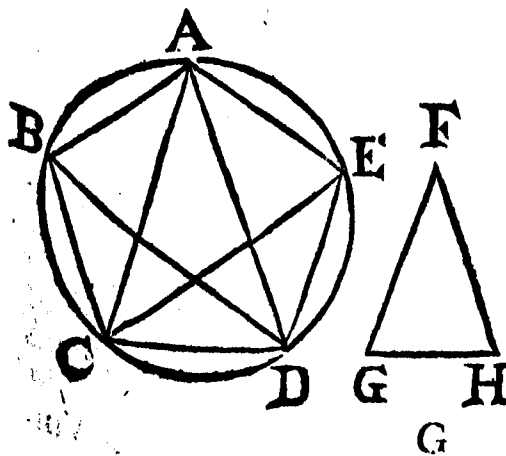
ACq. Centro A intervallo AB describatur
 circulus, in quo aptetur γ recta BD aequalis γ . 1. 4.
 ipsi AC, quae diametro circuli maior non est.
 Iuncta AD, erit DAB triangulum isosceles,
 in quo ang. BDA vel ABD = 2 DAB.

Nam circumscripto circulo δ circa $\triangle ACD$, δ . 5. 4.
 quoniam $AB \times BC = ACq = BDq$, patet ϵ . 37. 3.
 BD circulum ADC tangere, & propterea ζ ζ . 32. 3.
 ang. BDC = DAC. Hinc η ang. BDA = η . 2. ax.
 DAC + CDA = θ BCD. Sed quum sit ι . 15. def. 1.
 AB = AD, erit ang. BDA = κ CBD. Qua- κ . 5. 1.
 re ang. BCD = λ CBD, & DC μ = BD = λ . 1. ax.
 CA. Hinc ang. CDA = μ CAD, & additis μ . 6. 1.
 ang. BDC = ν CAD: erit ang. BDA = 2 ν . per dem.
 DAB. Q. E. F.

* Scholium.

Quia ergo ang. DAB + ADB + ABD = ς
 DAB = 2 rectis: liquet, esse ang. DAB quintam
 partem duorum rectorum.

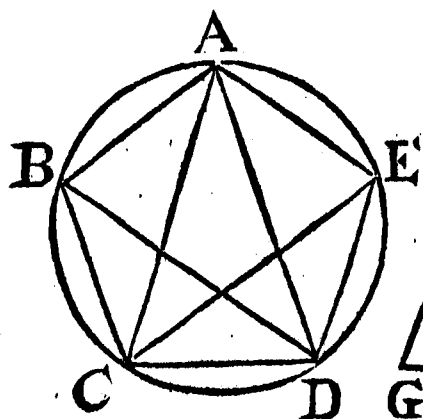
PROP. XI. PROBL.



In dato circulo
 ABCDE penta-
 gonum aequilate-
 rum & aequian-
 gulum describere.

ξ Fiat triangu- ξ . 10. 4.
 lum FGH iso-
 sceles, habens al-
 terutrum

e. 2. 4.



terutrum angu-
lorum ad basin
GH duplum re-
liqui F, & ° in-
scribatur in cir-
culo A B C D E
triangulum A C
D, triangulo F G

π. 9. 1.

H aequiangulum, ita vt angulo $F = DAC$,
 $G = ACD$, & $H = ADC$. Secetur π vter-
que ipsorum ACD, ADC bifariam a rectis
CE, BD, & ducantur AB, BC, DE, EA:
dico factum.

e. 26. 3.

σ. 29. 3.

π. 27. 3.

Nam ex constructione liquet, quinque angu-
los ACE, ECD, DAC, BDC, BDA esse inter
se aequales. Hinc peripheriae & his subtensae
rectae AE, ED, DC, CB, BA sibi mutuo ae-
quantur. Aequilaterum ergo est pentago-
num ABCDE. Et quia peripheria AB =
per. DE, addita communi BCD, erit per.
ABCD = per. BCDE, ideoque ang. AED
= BAE. De reliquis angulis similiter osten-
ditur, quod sint angulo BAE vel AED ae-
quales. Ergo & aequiangulum est pentago-
num ABCDE. Q. E. F.

* Scholia.

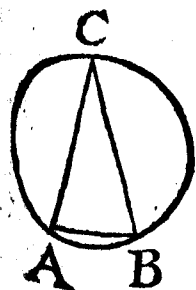
1. Praxis faciliior huius problematis tradetur ad
10. 13.

v. 27. 3.

2. Quoniam ang. BAE = 3 CAD v: angulus
pentagoni aequilateri & aequianguli aequatur
tribus quintis duorum rectorum, vel sex quibus
recti.

3. Vni-

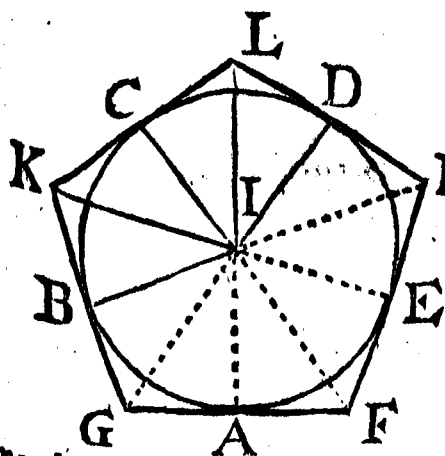
3. Vniuersaliter figurae imparium laterum inscribuntur in circulis ope triangulorum isoscelium, quorum anguli aequales ad basin multiplices sunt eorum, qui ad verticem sunt, angulorum. Parium vero laterum figurae in circulo inscribuntur ope isoscelium triangulorum, quorum anguli ad basin multiplices sesquialteri sunt eorum, qui ad verticem sunt angulorum.



Vt in triangulo isosceli CAB, si ang. $A = 3 C = B$: AB erit latus heptagoni. Si $A = 4 C$: erit AB latus enneagoni &c. Sin vero $A = 1\frac{1}{2} C$: erit AB latus quadrati. Et si $A = 2\frac{1}{2} C$: subtendet AB sextam partem circumferentiae. Pariterque

si $A = 3\frac{1}{2} C$: erit AB latus octogoni &c.

PROP. XII. PROBL.



*Circa datum
circulum ABC
DE pentagonum
maequilaterum &
aequiangulum
circumscribere.*

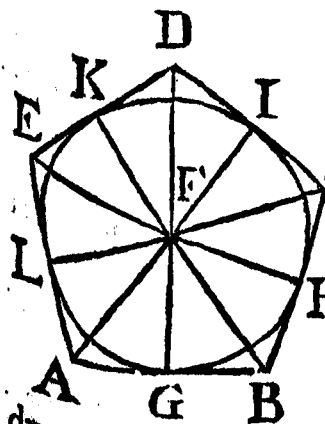
Intelligentur
pentagoni in cir-
culo & descripti $\propto$ II. 4.

angulorum puncta A, B, C, D, E, ita vt circumferentiae AB, BC, CD, DE, EA sint aequales; & per puncta A, B, C, D, E ducantur circulum contingentes FG, GK, KL, LM, MF. Erit FGKLM pentagonum desideratum.

* Scholium.

Eodem pacto, si in circulo quaecunque figura aequilatera & aequiangula describatur, & ad extrema semidiametrorum ex centro ad angulos ductarum excitentur lineae perpendiculares: hae perpendiculares constituent figuram totidem laterum & angulorum aequalium circulo circumscriptam.

PROP. XIII. PROBL.



In dato pentagono aequilatero & aequiangulo ABCDE circulum inscribere.

Duos pentagoni angulos A & B biseca^r rectis^r. 9. 1.

AF, BF, concurrentibus

in F. A puncto F ad AB

duc perpendicularem FG, & ex F intervallo^r. 12. 1. FG describe circulum. Dico factum.

Ducantur in reliqua latera lineae perpendiculares FH, FI, FK, FL, & iungantur FC, FD, FE. Et quia $AB = BC$, & communis^r. hyp. FB, & ang. ABF = FBC: erit $\angle FAB = \angle FBC$. 4. 1. Ergo ang. EAB = 2 FAB = 2 FCB. Sed ang. EAB = $\frac{1}{2}$ DCB. Ergo ang. DCB = 2 FCB. Recta ergo FC bisecat angulum DCB. Similiter ostendetur, reliquos angulos EDC, DEA etiam bisecari a rectis FD, FE. Et quia ang. FBG = FBH, item ang. FGB = FHB, & communis FB: est $\angle FGH = \angle FHB$. 10. ax. FH = FG. Eadem ratione reliquae FI, FK, FL = FG.

G;

FK,

o. 16. 3.

FK, FL ipsi FH vel FG aequales ostendentur. Ergo circulus centro F interuallo FG descriptus per H, I, K, L puncta transibit, & ibi latera pentagoni continget, quia illa secare nequit. In dato igitur pentagono ABCDE circulus GHIKL inscriptus est. Q. E. F.

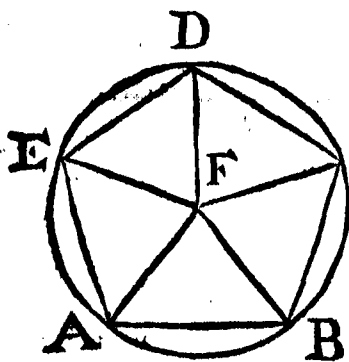
* Coroll.

Hinc si duo anguli proximi figurae aequilaterae & aequiangularae bisecentur, & a puncto, in quo coeunt lineae angulos bisecantes, ducantur rectae lineae ad reliquos figurae angulos: omnes anguli figurae erunt bisecti.

* Schol.

Eadem methodo in qualibet figura aequilatera & aequiangulara circulus describetur.

PROP. XIV. PROBL.



Circa datum pentagonum aequilaterum & aequiangularum ABCDE circulum circumscribere.

Duos pentagoni angulos A, B biseca rectis AF, BF, coeuntibus in F. Circulus centro F interuallo FA descriptus pentagono circumscriptus est.

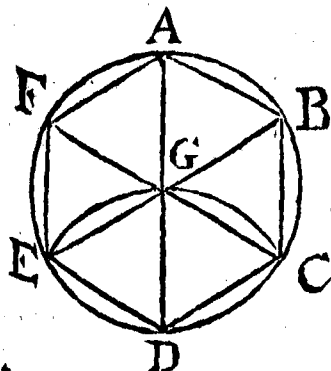
π. cor. 13. 4. ductis enim FC, FD, FE, reliqui omnes
 ε. 7. ax. anguli C, D, E bisecti erunt π. Et quoniam
 ε. 6. 1. ang. EAB = ABC: erit ang. FAB = FBA.
 Ergo FB = FA. Similiter quaelibet FC, FD, FE ipsi FB vel FA aequalis ostendetur. Circulus

Circulus ergo centro F interuallo FA descri-
ptus per angulos pentagoni A, B, C, D, E
transibit. Q. E. F.

* Scholion.

Eadem arte circa quamlibet figuram aequilate-
ram & aequiangulam circulus circumscribetur.

PROP. XV. PROBL.



In dato circulo ABCD
EF hexagonum aequilate-
rum & aequiangulum in
scribere.

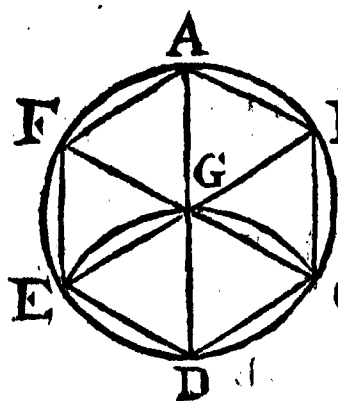
Ducatur circuli diame-
ter AD, posito in G cen-
tro τ . Ex centro D in τ . 1. 3.

teruallo DG describatur alius circulus EGC,
iunctaeque EG, CG producantur in B & F;
& iungantur AB, BC, CD, DE, EF, FA.
Dico factum.

Nam quia in circulo AED est $GE = GD$,
& in circulo EGC, $GD = DE$: erit Δ
EGD aequilaterum, ideoque ψ aequiangulum. sch. 5. 1.
lum. Quare ang. EGD est tertia pars ϕ duo- ϕ . 32. 1.
rum rectorum. Similiter ang. DGC est ter-
tia pars 2 rectorum. Et quoniam ang. EGD
 $+ DGC + CGB = \approx 2$ rectis: erit & ang. ≈ 2 . sch. 13. 1.
CGB tertia pars 2 rectorum, & aequalis an-
gulo EGD, & ang. DGC. Hinc ψ & anguli ψ . 15. 1.
AGB, AGF, FGE & inter se & reliquis ae-
quales erunt. Sex igitur ω circumferentiae ω . 26. 3.
ED, DC, CB, BA, AF, FE inter se sunt aequa-
les, ergo & ω sex subtensae rectae. Quare ω . 29. 3.

G 4

aequi-



β. 27. 3.

aequilaterum est hexagonum ABCDEF. Deinde quia circumf. $AF = ED$: communi addita AB CD : erit tota circumfer. $C F A B C D = A B C D E$, & proinde ang. $F E D = A F E$. Similiter reliqui anguli hexagoni singillatim aequales ipsi $F E D$, vel $A F E$ ostendentur. Ergo & aequiangulum est hexagonum ABCDEF, & dato circulo inscriptum. Q. E. F.

Corollar.

Ex hoc manifestum est, hexagoni latus circuli semidiametro aequale esse.

Circumscriptio hexagoni circa circulum, nec non circuli inscriptio vel circumscriptio in vel circa datum hexagonum eodem modo fiant, quem de pentagono docuimus.

** Scholia.*

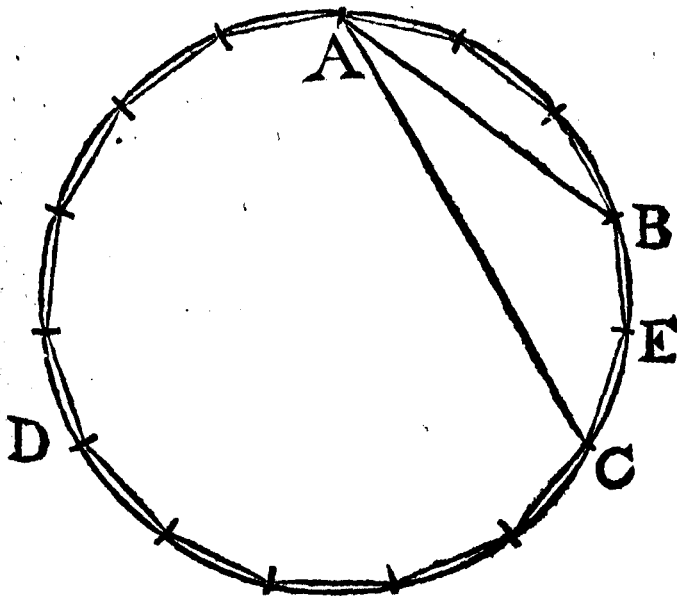
Hinc & facile triangulum aequilaterum ACE in dato circulo inscribetur.

Hexagonum autem regulare (i. e. aequilaterum & aequiangulum) super data recta CD ita construatur. Fac super CD triangulum aequilaterum CGD. Centro G intervallo GC describe circulum. Is capiet hexagonum super data CD describendum.

PROP. XVI. PROBL.

In dato circulo ABCD quindecagonum aequilaterum & aequiangulum inscribere.

Inscri-



Inscribatur circulo trianguli aequilateri ipsi inscripti latus AC , item pentagoni aequilateri latus AB . Bifecetur BC in E . Iunctis rectis CE , EB aequales in continuum rectae circulo aptentur: erit in ipso quindecagonum aequilaterum & aequiangulum inscriptum. Nam qualium partium circulus $ABCD$ est quindecim, talium circumferentia ABC , tertia pars existens circuli, erit quinque. Circumferentia vero AB , quinta circuli pars, erit trium. Ergo reliqua BC est duarum, & huius dimidium BE vel EC est decima quinta pars circuli $ABCD$. Ergo si rectae EB aequales circulo in continuum aptentur: describetur quindecagonum aequilaterum & aequiangulum. Q. E. F.

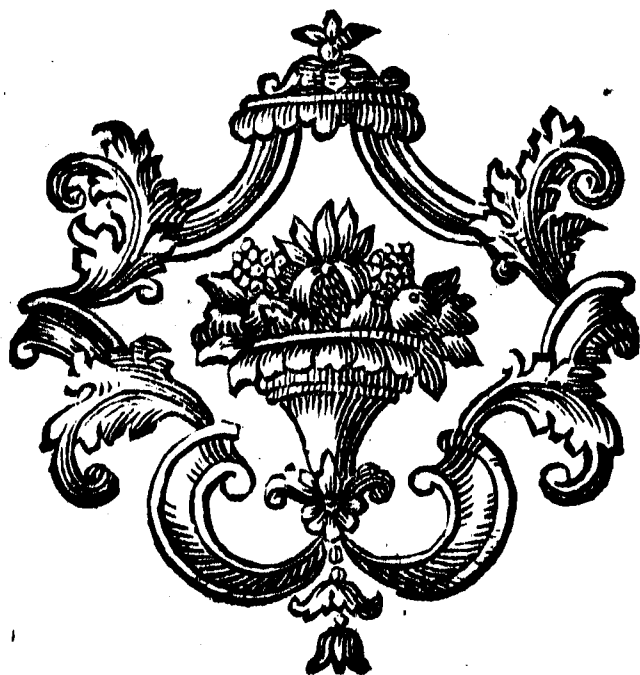
Ad modum eorum, quae de pentagono dicta sunt, reliqua problemata de quindecagono soluentur.

* *Scholium.*

Circulus di-
uiditur geome-
trice in par-
tes

{	4, 8, 16, &c. per 6, 4. & 9, 1.
	3, 6, 12, &c. per 15, 4. & 9, 1.
	5, 10, 20, &c. per 11, 4. & 9, 1.
	15, 30, 60, &c. per 16, 4. & 9, 1.

Ceterum diuifio circumferentiae in partes quot-
uis aequales etiamnum desideratur. Quare pro
figurarum quatumcunque ordinatarum vel regula-
rium constructionibus faepe ad mechanica artificia
recurrendum est, de quibus Geometrae practici
confulendi sunt.



EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER V.

* * * * *

DEFINITIONES.

1. *Pars* est magnitudo *magnitudinis*, minor maioris, quando minor maiorem metitur.

2. *Multiplex* est maior minoris, quando minor maiorem metitur.

3. *Ratio* est duarum magnitudinum eiusdem generis, secundum quantiplicitatem mutua quaedam habitudo (seu relatio.)

4. *Rationem inter se magnitudines habere* dicuntur, quae multiplicatae se inuicem superare possunt.

* In omni ratione ea quantitas, quae ad aliam refertur, *antecedens* dicitur, haec altera *consequens*. Vt si A ad B refertur, siue magnitudines sint eae quantitates, siue numeri, ita vt consideres, quomodo A habeat se ad B quoad quantiplicitatem: antecedens est A, B vero consequens. Signum rationis magnitudinis A ad B est nobis hoc $A : B$.

5. *In eadem ratione magnitudines esse* dicuntur *prima ad secundam & tertia ad quartam*, quando primae & tertiae aequae multiplices secundae & quartae aequae multiplices, iuxta quamuis multiplicationem, vtraque vtramque, vel vna superant, vel vna aequales sunt, vel vna deficiunt, inter se comparatae.

6. Ma-

6. Magnitudines, quae eandem rationem habent, *proportionales* vocantur.

7. Quando autem aequè multiplicium multiplex primae superavit multiplicem secundae, multiplex autem tertiae non superauerit multiplicem quartae: tunc *prima ad secundam maiorem habere dicitur rationem, quam tertia ad quartam.*

8. *Proportio* est rationum similitudo.

* Signum, quo notamus proportionem, vel quod magnitudines A, B eandem rationem habeant, quam magnitudines C, D, est hoc $A : B = C : D$. Sed $A : B > C : D$ denotat, inter A & B maiorem quam inter C & D rationem esse. Similiter $C : D < A : B$ significat, rationem C ad D minorem esse ratione A : B.

9. Proportio in tribus ad minimum *terminis* consistit.

10. Si tres magnitudines sunt proportionales: prima ad tertiam *duplicatam* habere dicitur *rationem* eius, quam habet ad secundam.

11. Si quatuor magnitudines sunt proportionales: prima ad quartam *triplicatam* habere dicitur *rationem* eius, quam habet ad secundam. Et sic deinceps vno amplius, quamdiu proportio exstiterit.

* Talium proportionum, quae *continuae* appellantur, signum est $\div\div$. E. gr. $\div\div$ A, B, C notat, esse magnitudinem A ad B in eadem ratione, ac B ad C; & $\div\div$ A, B, C, D notat, rationes A : B, B : C, C : D easdem vel similes esse. Deinde si $\div\div$ A, B, C, hoc quod ratio A : C sit duplicata rationis A :

A :

A : B, sic exprimemus $A : C = (A : B)^2$. Et si A, B, C, D fuerint continue proportionales, rationem A ad D triplicatam esse rationis A ad B, sic significabimus $A : D = (A : B)^3$.

12. *Homologae magnitudines* dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, consequentes vero consequentibus.

* Si $A : B = C : D$, vocatur A ipsi C homologa, item B & D homologae dicuntur.

13. *Alterna ratio* est sumtio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.

14. *Inuersa ratio* est sumtio consequentis, vt antecedentis, ad antecedentem, vt consequentem.

15. *Compositio rationis* est sumtio antecedentis vna cum consequente, tanquam vnius, ad ipsam consequentem.

16. *Diuisio rationis* est sumtio excessus, quo antecedens superat consequentem, ad ipsam consequentem.

17. *Conuersio rationis* est sumtio antecedentis ad excessum, quo antecedens ipsam consequentem superat.

18. *Ex aequalitate ratio* est, quando pluribus existentibus magnitudinibus, & aliis, ipsis numero aequalibus, fuerit vt, in primis magnitudinibus, prima ad vltimam, sic in secundis magnitudinibus, prima ad vltimam. Vel aliter, sumtio extremarum per subtractionem mediarum.

19. Or-

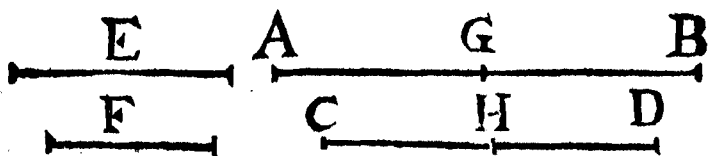
19. *Ordinata proportio* est, quando fuerit, vt antecedens ad consequentem, ita antecedens ad consequentem; vt autem consequens ad aliam quampiam, ita consequens ad aliam quampiam.

* Si fuerit $A : B = C : D$, & deinde sit $B : E = D : F$.

20. *Perturbata vero proportio* est, quando, tribus existentibus magnitudinibus, & aliis, ipsis numero aequalibus, fuerit, vt, in primis magnitudinibus, antecedens ad consequentem, ita, in secundis magnitudinibus, antecedens ad consequentem; vt autem, in primis magnitudinibus, consequens ad aliam quampiam, ita, in secundis magnitudinibus, alia quae-
piam ad antecedentem.

* Vt si sint magnitudines A, B, C, & toridem aliae D, E, F, & fuerit $A : B = E : F$; sit autem deinde $B : C = D : E$.

PROP. I. THEOR.

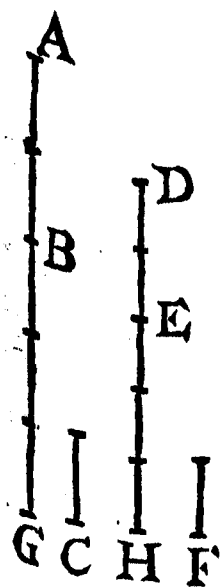


Si fuerint quotcunque magnitudines AB, CD quotcunque magnitudinum aequalium numero E, F, singulae singularum, aequae multiplices; quam multiplex est vna magnitudo AB vnius E, tam multiplices erunt & omnes AB + CD omnium E + F.

Quia enim AB aequae multiplex est ipsius E ac CD ipsius F: quot magnitudines sunt in
AB

A B ipsi E aequales, tot erunt & in C D ipsi F aequales. Sint partes, in quas A B diuidi potest, ipsi E aequales, A G, G B, & partes ipsius C D sint C H = H D = F. Ergo multitudo harum partium in A B aequalis erit multitudini in C D. Praeterea est $A G + C H = E + F$, & $G B + H D = E + F$. α . 2. ax. Ergo quot sunt in A B aequales ipsi E, tot sunt in A B + C D aequales ipsis E + F. Ergo quam multiplex est A B ipsius E, tam multiplices erunt & A B + C D ipsarum E + F. Q. E. D.

PROP. II. THEOR.

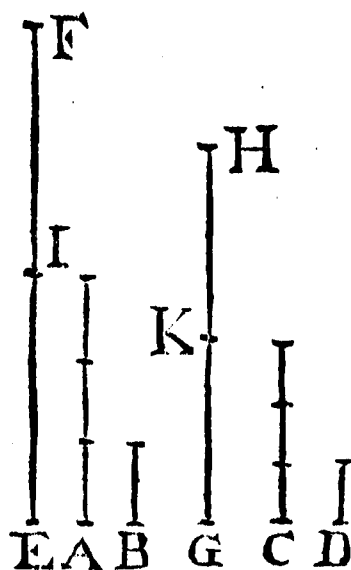


Si prima A B secundae C aequae multiplex fuerit, atque tertia D E quartae F; fuerit autem & quinta B G secundae C aequae multiplex, atque sexta E H quartae F: erunt etiam prima & quinta simul sumtae A G secundae C aequemultiplices, atque tertia & sexta D H quartae F.

Nam β quot in A B sunt β . hyp. magnitudines ipsi C aequales, tot sunt in D E aequales ipsi F. Et quot in B G sunt ipsi C aequales, tot sunt in E H ipsi F aequales. Ergo γ quot in A G sunt magnitudines ipsi C aequales, totidem D H con- γ . 2. ax. tinct

tinet ipsi F aequales. Hinc A G aequemultiplex est ipsius C, ac D H ipsius F. Q. E. D.

PROP. III. THEOR.



Si prima A secundae B aequae multiplex fuerit atque tertia C quartae D; sumantur autem EF, GH aequae multiplices primae A & tertiae C: erit & ex aequo sumtarum utraque utriusque aequae multiplex, altera quidem EF secundae B, altera vero GH quartae D.

2. hyp.

6. 2. 5.

Sint enim in EF partes quotcunque EI, IF ipsi A aequales, & in GH partes GK, KH ipsi C aequales. Harum numerus illarum numero aequalis erit. Porro quia $EI = A$, & $GK = C$: erit EI ipsius B aequae multiplex^d ac GK ipsius D. Similiter IF ipsius B aequae multiplex erit, ac KH ipsius D. Ergo^e EF ipsius B aequae multiplex erit, ac GH ipsius D. Q. E. D.

PROP.

PROP. IV. THEOR.

Si prima A ad secundam B eandem habeat rationem, quam tertia C ad quartam D: & aequae multiplices E, F primae & tertiae ad aequae multiplices G, H secundae & quartae, iuxta quamvis multiplicationem, eandem rationem habebunt inter se comparatae.

Sumantur enim ipsarum E, F aequae multiplices I, K, & ipsarum G, H aequae multiplices L, M. Erit ergo $\frac{I}{A} = \frac{K}{C}$ I aequae multiplex ipsius A, ac K ipsius C.

2. 3. 5.

Item L aequae multiplex ipsius B erit, ac M ipsius D. Et quum sit $A : B = C : D$: si I superat L, superabit & K ipsam M, si aequalis, aequalis, & si minor, minor erit.

4. 5. def. 5.

Sunt autem I, K ipsarum E, F aequae multiplices, & L, M ipsarum G, H aliae vtcunque aequae multiplices. Ergo $E : G = F : H$.

9. hyp.

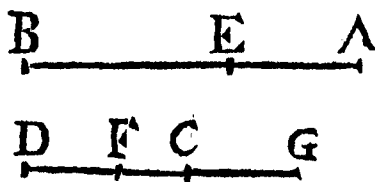
Q. E. D.
Cor. Quoniam demonstratum est, si fuerit $I >$ vel $=$ vel $<$ L, fore & $K >$, $=$, $<$ M: constat etiam, si $L >$, $=$, $<$ I, fore $M >$, $=$, $<$ K; ac propterea fore $G : E = H : F$. Si ergo quatuor magnitudines proportionales sunt, & inuerse proportionales erunt.

Schol. Similiter demonstratur, esse $E : B = F : D$, item $A : G = C : H$.

H

PROP.

PROP. V. THEOR.



Si magnitudo AB magnitudinis CD aequae multiplex sit atque ablata AE ablatae CF: erit & reliqua EB reliquae FD aequae multiplex atque tota AB totius CD.

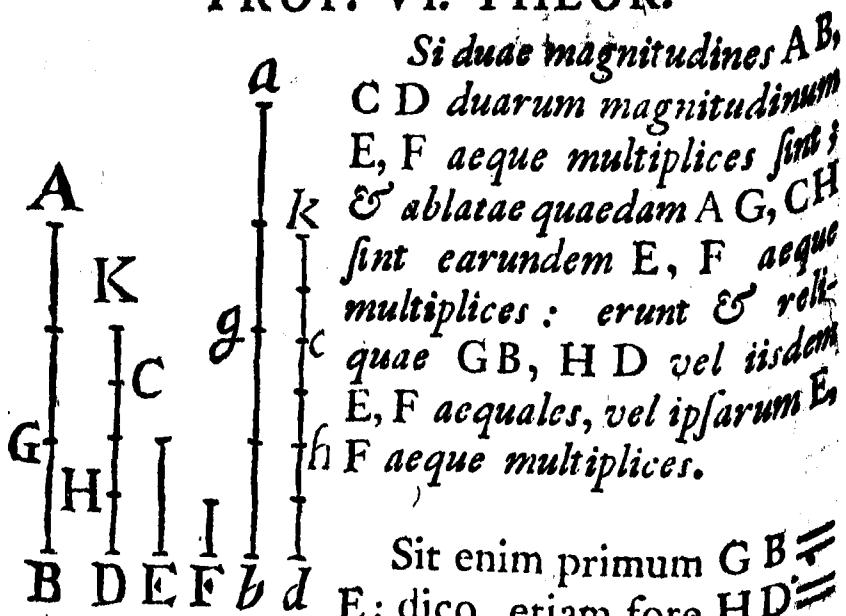
.. 1. 5.

.. 7. ax.

.. 3. ax.

Ponatur alia CG, cuius EB sit aequae multiplex ac AE est ipsius CF. Ergo AB ipsius GF erit aequae multiplex ac AE ipsius CF. Sed & AB ipsius CD aequae multiplex erat ac AE ipsius CF. Ergo AB ipsarum GF & CD aequae multiplex erit. Quare* est $GF = CD$, & ergo $CG = FD$. Ergo EB ipsius FD aequae multiplex est, quam AE ipsius CF, vel quam tota AB totius CD. Q.E.D.

PROP. VI. THEOR.



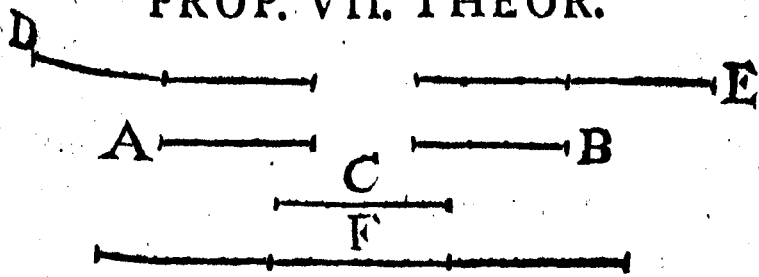
Si duae magnitudines AB, CD duarum magnitudinum E, F aequae multiplices sint, & ablatae quaedam AG, CH sint earundem E, F aequae multiplices: erunt & reliquae GB, HD vel iisdem E, F aequales, vel ipsarum E, F aequae multiplices.

Sit enim primum $GB = E$: dico, etiam fore $HD = F$. Ponatur enim ipsi F aequalis CK. Ecce quia AG, CH ipsarum E, F sunt aequae multiplices:

plices: erunt adhuc AB , KH ipsarum E , F aequae multiplices. Sed & AB , CD earundem E , F aequae multiplices erant. Ergo KH & CD eiusdem F aequae multiplices erunt. Quare μ $KH = CD$, & $KC = HD$. Sed μ . 6. ax. ν . 3. ax. $KC = F$. Ergo $HD = F$.

Similiter demonstrabimus, ξ si gb fuerit ξ . 2. 5. ipsius E multiplex, & hd ipsius F aequae multiplicem esse, posita ck ipsius F aequae multiplici, ac gb ipsius E . Q. E. D.

PROP. VII. THEOR.



Aequales magnitudines A , B eandem habent rationem ad eandem C ; & eadem C ad aequales A , B .

Sumantur ipsarum A , B aequae multiplices D , E , & ipsius C alia utcumque multiplex F . Et quoniam $A = B$: erit & $D = E$. Quare si $D >, =, < F$: erit $\circ$ quoque $E >, =, < F$. $\circ$. 1. & 14. ax. π . 5. def. 5. Ergo π erit $A : C = B : C$. Q. E. D.

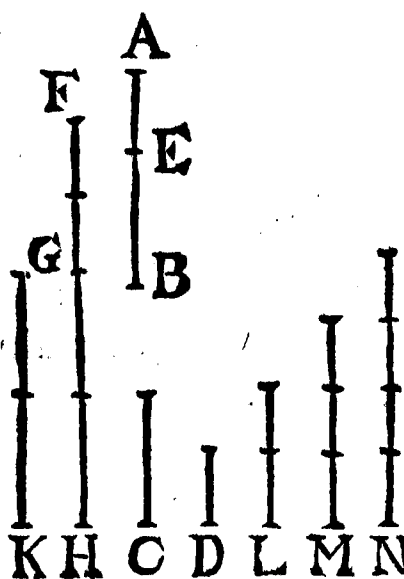
Similiter demonstratur, esse $C : A = C : B$. Q. E. D.

* Scholium.

Eodem modo demonstrabis, aequalia ad aequalia eandem rationem habere.

PROP. VIII. THEOR.

Inaequalium magnitudinum A B, C maior A B ad eandem D maiorem habet rationem, quam minor C. Et eadem D ad minorem C maiorem habet rationem, quam ad maiorem A B.



p. 4. def. 5.

Cas. 1. Sumta in A B ipsi C = B E, sit A E < E B. Capi potest

ipsum A E multiplex, maior quam D, quae sit F G. Et quantiplex F G est ipsum A E, tantiplex fiat G H ipsum E B, & K ipsum C. Sumantur etiam ipsum D dupla L, tripla M, & sic deinceps, quoad perveniatur ad primam multiplicium ipsum D, ipsa K maiorem.

c. 1. 5.

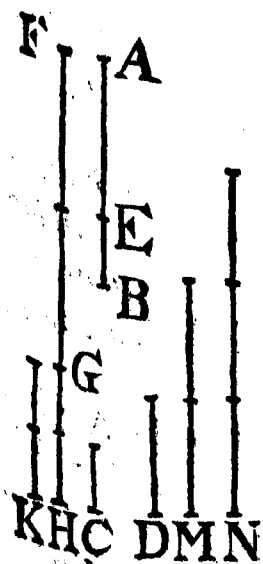
ea N, quadrupla ipsum D. Quia ergo N prima est, qua K facta est minor: nondum erit K < M. Et quum F G, G H ipsarum A E, E B aequae multiplices sint: erunt & F H, F G ipsarum A B, A E aequae multiplices. Sunt vero

7. 6. ax.

F G & K ipsarum A E, C aequae multiplices. Ergo F H & K ipsarum A B & C aequae multiplices erunt. Sed quia G H & K aequalium E B & C aequae sunt multiplices; est G H = K. Ergo non est G H < M. Hinc, ob F G > D erit G H + F G, id est F H, maior quam M + D, id est N. K autem, quum sit minor quam

quam N, non superat ipsam N. Ergo $AB : C > D : AB$. *u. 7. def. 5.*
 $B > C : D$.

Similiter ostenditur, esse $D : C > D : AB$.
 Q. E. D.



Cas. 2. Si $AE > EB$. Sumatur ipsius EB multiplex $GH > D$, & quantiplex est GH ipsius EB , tantiplex fiat FG ipsius AE , & K ipsius C . Erunt ergo ut antea FH, K ipsarum AB, C aequae multiplices. Sit inter ipsius D multiplices N primo maior quam FG , M proxime praecedens. Ergo, quod rursus eodem modo ostenderetur, FH

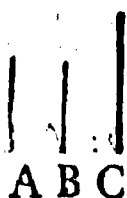
superabit ipsam N . Denique quum rursus sit $K = GH$, FG autem, quae ipsa GH maior est, non superet N : patet K non superare ipsam N . Ergo $AB : D > C : D$; &, quod pari modo demonstratur, $D : C > D : AB$. Q. E. D.

* *Cas. 3.* Si $AE = EB$, idem eodem modo demonstrari potest, quo in casu 1.

PROP. IX. THEOR.

Quae A, B, eandem rationem habent ad eandem C, sunt inter se aequales. Et ad quas A, B, eadem C eandem habet rationem, ipsae etiam sunt inter se aequales.

φ. 8. 5.



1. Si enim non esset $A = B$; nec foret $A : C = B : C$. Quod est contra hypothesin. Ergo $A = B$. Q.E.D.

A B C

2. Si sit $C : A = C : B$, nec tamen $A = B$: non ϕ erit $C : A = C : B$; contra hypothesin. Ergo $A = B$. Q.E.D.

PROP. X. THEOR.



Magnitudinum A, B rationem habentium ad eandem C, quae maiorem habet rationem A, est maior. Ad quam utro B eadem C maiorem habet rationem illa est minor.

1. Sit $A : C > B : C$. Jam si non sit $A > B$: aut aequalis aut minor erit. Si esset $A = B$: foret $A : C = B : C$. Si $A < B$: foret $\psi A : C < B : C$. Vtrumque contra hypothesin. Ergo $A > B$. Q.E.D.

κ. 7. 5.
ψ. 8. 5.

2. Sit $C : B > C : A$. Jam si non sit $B < A$: aut aequalis erit, aut maior. Si $B = A$: erit $C : B = C : A$. Si $B > A$: erit $\psi C : B < C : A$. Quia vtrumque contra hypothesin est: necesse est ut sit $B < A$. Q.E.D.

PROP. XI. THEOR.

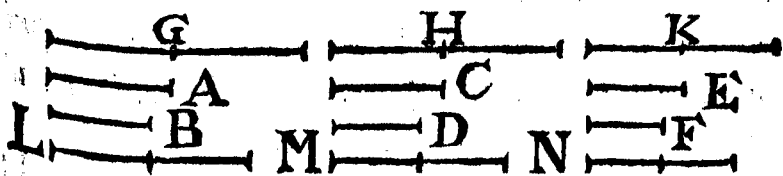


Quae aequales sunt eandem rationem, & inter se sunt eadem.

Sit $A : B = C : D$, & $C : D = E : F$.
Dico

Dico fore $A:B = E:F$. Sumantur enim ipsarum A, C, E aequae multiplices G, H, K ; ipsarum vero B, D, F aequae multiplices L, M, N . Ergo si fuerit $G >, =, < L$: erit^a & $H >, =, < M$; item si fuerit $H >, =, < M$: erit & $K >, =, < N$. Quare si fuerit $G >, =, < L$: erit & $K >, =, < N$. Hinc erit^a $A:B = E:F$. Q. E. D.

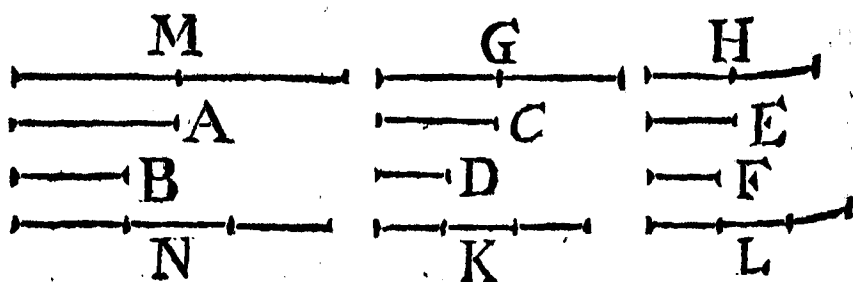
PROP. XII. THEOR.



Si quotcunque magnitudines proportionales fuerint $A:B = C:D = E:F$: ut una A antecedentium ad unam B consequentium, ita erunt omnes antecedentes $A + C + E$ ad omnes consequentes $B + D + F$.

Sumantur ipsarum A, C, E aequae multiplices G, H, K , & ipsarum B, D, F aliae utcumque aequae multiplices L, M, N . Jam^a si $G >, =, < L$: erit & $H >, =, < M$, atque $K >, =, < N$. Quare si $G >, =, < L$: erunt & $G + H + K >, =, < L + M + N$. Sunt autem $G, & G + H + K$ ipsarum A , & $A + C + E$ ^b aequae multiplices; item L ac $L + M + N$ sunt ipsarum B ac $B + D + F$ aequae multiplices. Ergo^a est $A:B = A + C + E:B + D + F$. Q. E. D.

PROP. XIII. THEOR.



Si prima A ad secundam B eandem habeat rationem, quam tertia C ad quartam D; tertia autem C ad quartam D maiorem habeat rationem, quam quinta E ad sextam F: & prima A ad secundam B maiorem habebit rationem, quam quinta E ad sextam F.

Sume ipsarum C, E aequae multiplices G, H, & ipsarum D, F alias quasdam aequae multiplices K, L, ita ut G quidem superet K, sed
 7. 7. def. 5. H non superet L, quod semper fieri potest. Deinde quantiplex G est ipsius C, tantiplex fiat M ipsius A, & quantiplex K est ipsius D, tantiplex N ipsius B. Ergo quum sit $A : B = C : D$; si fuerit $G >, =, < K$: erit & $M >, =, < N$. Sed $G > K$. Ergo & $M > N$. Atqui H non $> L$. Sunt vero M & H ipsarum A & E aequemultiplices, nec non N & L ipsarum B, F, (per constr.). Ergo $A : B > E : F$. Q. E. D.

* Schol. Si vero fuerit $C : D < E : F$: erit quoque $A : B < E : F$. Item si $A : B > C : D > E : F$: erit $A : B > E : F$. Et si $A : B < C : D < E : F$: erit $A : B < E : F$.

PROP.

PROP. XIV. THEOR.

Si prima A ad secundam B eandem habeat rationem, quam tertia C ad quartam D; prima autem A maior sit quam tertia C: & secunda B quam quarta D maior erit. Et si aequalis: aequalis. Et si minor: minor.

1. Quia enim $A > C$: erit $A : B > C : B$. δ . 8. 9.
Sed $A : B = C : D$. Ergo $C : D > C : B$. Er- δ . 13. 5.
go $D < B$, vel $B > D$. Q. E. D. ζ . 10. 5.

2. 3. Similiter demonstrabitur, si $A = C$, fore $B = D$, & si $A < C$, fore $B < D$. Q. E. D.

* Schol. A fortiori, si $A : B < C : D$, & $A > C$: erit $B > D$. Si fuerit $A = B$, & $A : B = C : D$: erit $C = D$. Sumtis enim ipsarum A, C, D, aequae multiplicibus E, F, G, H: quia $E : A = F : C$. 9. 6. ax.
 $F : C = G : D$, & proinde $C = D$. δ . 5. def. 5.
 α . 7. ax.

PROP. XV. THEOR.

Partes A, B inter se comparatae eandem habent rationem, quam habent eorum aequae multiplices C D, E F.

Sint CG, GH, HD partes multiplicis CD ipsi A aequales, & EK, KL, LF partes multiplicis EF ipsi B aequales. Erit ergo multitudo ipsarum CG, GH, HD aequalis multitudini ipsarum EK, KL, LF. Et quia $CG = GH = HD$, & $EK = KL = LF$:
erit $CG : EK = GH : KL = HD : LF$. Qua- α . 7. 5. & 11. 5.
re

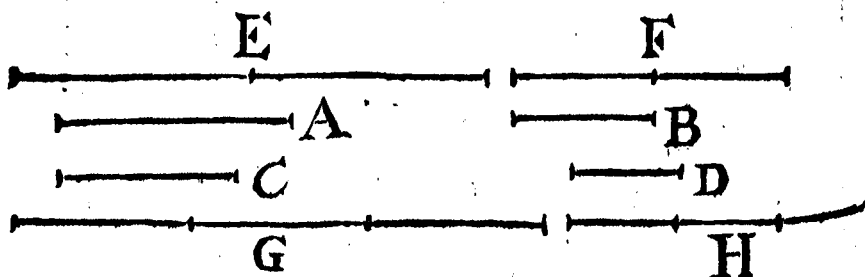
μ. 12. 5.

ν. 7. 5.

ξ. 11. 5.

re $^{\mu}$ $CG:EK=CD:EF$. Est vero $A:B=$
 $CG:EK$. Ergo $A:B=^{\xi} CD:EF$. Q. E. D.

PROP. XVI. THEOR.



Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, $A:B=C:D$: & alterne proportionales erunt $A:C=B:D$.

o. 15. 5.

π. 11. 5.

ρ. 14. 5.

σ. 5. def. 5.

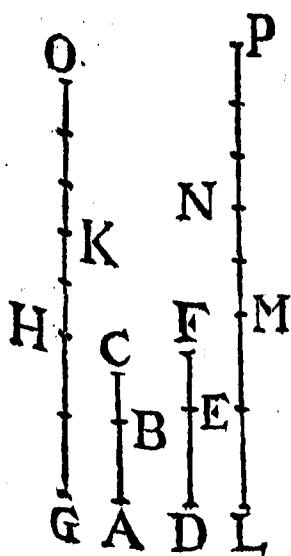
Sint ipsarum A, B aequae multiplices E, F, & ipsarum C, D aliae aequae multiplices G, H.
 Hinc $A:B=^o E:F$. Sed $A:B=^o C:D$ (*hyp.*)
 Ergo $^{\pi} C:D=E:F$. Rursus $C:D=^o G:H$;
 hinc $^{\pi} E:F=G:H$. Quare si $E>, =, < G$:
 erit $^{\rho} & F>, =, < H$. Ergo $A:C=^{\sigma} B:D$.
 Q. E. D.

τ. 16. 5.

* *Schol.* Haec propositio & 14. locum tantum habent, si magnitudines proportionales eiusdem generis sunt. Ceterum ex hac demonstrare possumus, si sit $A:B=C:D$, & $A>< B$, esse & $C>< D$. Nam sumtis ipsarum A, B, C, D aequae multiplicibus E, F, G, H: quia $^o A:B=E:F$, & ergo $^{\tau} A:E=B:F$, & $A>< B$; erit $E>< F$. Hinc & $^{\sigma} G>< H$. Sed quum sit $^o G:H=C:D$, & ergo $^{\tau} G:C=H:D$: erit $^{\rho} C>< D$. Q. E. D.

PROP.

PROP. XVII. THEOR.



*Si compositae magnitudines
sint proportionales ($AC:BC$
 $=DF:EF$): & diuisae pro-
portionales erunt ($AB:BC$
 $=DE:EF$).*

Sumantur enim ipsarum
quidem AB, BC, DE, EF
aeque multiplices $GH, HK,$
 LM, MN , ipsarum vero $BC,$
 EF aliae vtcunque aequae
multiplices KO, NP . Tota

KG totius AC tam multiplex^u est, quam HG ^{u. 1. 5.}
ipsius AB , vel LM ipsius DE . Sed quam
multiplex est LM ipsius DE , tam multiplex
est^v LN ipsius DF . Ergo GK & LN ipsa-
rum AC, DF aequae sunt multiplices. Rur-
sus^φ $HK + KO$ id est HO , & $MN + NP$ ^{φ. 2. 5.}
id est MP , aequae multiplices erunt ipsarum
 BC, EF . Est vero $AC:BC = DF:EF$.
Ergo si $GK >, =, < HO$; erit quoque
 $LN >, =, < MP$. Si vero $GK >, =, <$
 HO : erit &, communi HK ablata, adhuc
 $GH >, =, < KO$; Et si $LN >, =, < MP$;
erit, communi MN ablata, adhuc $LM >, =, < NP$. Ergo si $GH >, =, < KO$: erit
& $LM >, =, < NP$. Quare $\propto AB:BC = \propto DE:EF$.^{5. def. 5.} Q. E. D.

PROP.

PROP. XVIII. THEOR.

Si diuifae magnitudines fint proportionales
 $(AB:BC \equiv DE:EF)$: & *compositae propor-*
tionales erunt $(AC:BC \equiv DF:EF)$.

ψ . 17. 5.
 ω . 11. 5.
 α . 14. 5.



Si negas: erit AC ad BC vt DF
 ad aliam FG ipsa FE minorem vel
 maiorem. Sit primo $FG < FE$. Sed
 quum fit ψ $AB:BC \equiv DG:FG$
 $\equiv \omega$ $DE:EF$, & $DG > DE$: erit
 $FG > FE$. Q. E. A. Similiter nec
 potest esse AC ad BC vt DF ad ma-
 iorem quam FE. Ergo $AC:BC \equiv DF:FE$.
 Q. E. D.

PROP. XIX. THEOR.



Si fuerit vt tota AB ad totam CD,
ita ablata AE ad ablatam CF: erit
reliqua EB ad reliquam FD, vt tota
AB ad totam CD.

β . 16. 5.
 γ . 17. 5.

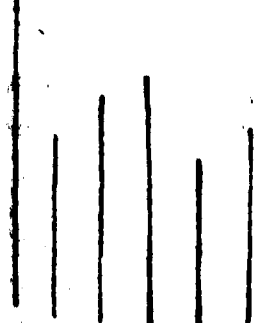
Nam quia $AB:CD \equiv AE:CF$:
 A C erit alterne ^{β} $AB:AE \equiv CD:CF$, &
 diuidendo γ $BE:EA \equiv DF:FC$, & rursus
 alterne $BE:DF \equiv EA:FC \equiv AB:CD$. Q.
 E. D.

Corollar.

Quoniam ostensum est, si fuerit $AB:AE$
 δ . 17. def. 5. $\equiv CD:FC$, fore $AB:CD \equiv BE:DF$: erit
 alterne $AB:BE \equiv CD:DF$. Hinc δ si com-
 positae magnitudines proportionales fuerint, con-
 uertendo etiam proportionales erunt.

PROP.

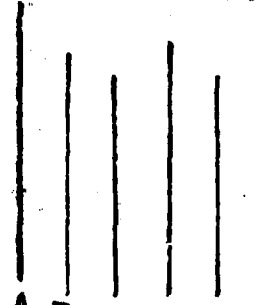
PROP. XX. THEOR.



Si sint tres magnitudines A, B, C & aliae ipsis numero aequales D, E, F, quae binae sumantur in eadem ratione ($A : B = D : E$, & $B : C = E : F$); ex aequo autem prima A maior sit quam tertia C: & quarta D quam sexta F maior erit; & si aequalis, aequalis; & si minor, minor.

Quum enim $A > C$: erit $A : B > C : B$. Sed α . 8. 5.
 (hyp.) $A : B = D : E$, atque $C : B = E : F$. Ergo ζ . hyp. &
 $D : E > E : F$. Ergo $D > F$. Similiter γ . 13. 5.
 ostenditur, si $A = C$, fore $D = F$. δ . 10. 5.
 Q. E. D.

PROP. XXI. THEOR.

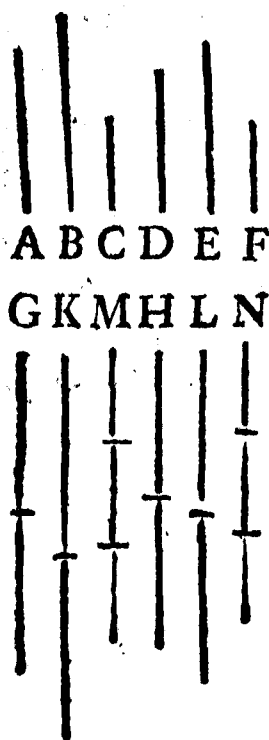


Si sint tres magnitudines A, B, C, & aliae ipsis numero aequales D, E, F, quae binae sumantur, & in eadem ratione; sit autem perturbata earum proportio ($A : B = E : F$, & $B : C = D : E$), & ex aequo prima A maior sit quam tertia C: & quarta D quam sexta F maior erit; & si aequalis, aequalis; & si minor, minor.

Quia $A > C$: est $A : B > C : B$. Sed est $A : B = E : F$. Ergo α . 8. 5.
 $B : C = D : E$, & inuertendo $C : B = E : D$. Ergo γ . 13. 5.
 $E : F > E : D$. Ergo $F < D$, vel $D > F$. δ . 10. 5.
 Similiter ostenditur, si $A = C$, fore $D = F$,
 $< F$. Q. E. D.

PROP.

PROP. XXII. THEOR.



μ. 4. 5.

ν. 20. 5.

ξ. 5. def. 5.

Q. E. D.

Si sint quotcunque magnitudines A, B, C, & aliae ipsis numero aequales D, E, F, quae binariae sumantur, in eadem ratione ($A:B = D:E$, & $B:C = E:F$): & ex aequo in eadem ratione erunt ($A:C = D:F$).

Sumantur G, H ipsarum A, D aequae multiplices, & K, L ipsarum B, E aliae vtcunque aequae multiplices, nec non M, N ipsarum C, F. Ergo $G:K = H:L$, & $K:M = L:N$.

Quare si sit $G >, =, < M$, erit

& $H >, =, < N$. Ergo $A:C = D:F$.

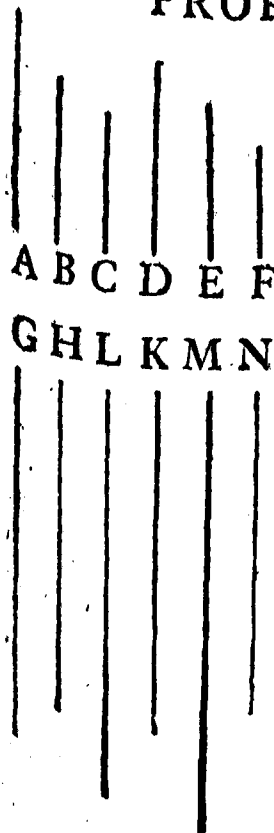
* Schol.

1. Ergo rationum aequalium duplicatae, triplicatae &c. etiam aequales sunt.

2. Et vice versa, quarum rationum duplicatae, vel triplicatae &c. aequales sunt, eae inter se aequales sunt. Sint e. gr. $\div \div a, b, c, d$, & $\div \div e, f, g, h$, & sit $a:d = e:h$: erit $a:b = e:f$. Si negas: sit $a:b = e:p$, & $p > f$, & pone $\div \div e, p, s, t$. Igitur quia $e:p < e:f$, erit $p:s < f:g$, & $s:t < g:h$, ideoque $s > g$, & $t > h$ (sch. 14. 5). Sed quia $a:d = e:t$, (per sch. 1.) & $a:d = e:h$ erit quoque $t = h$. Q. E. A.

PROP.

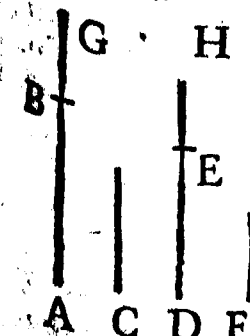
PROP. XXIII. THEOR.


 Si sint tres magnitudines A, B, C, & aliae ipsis numero aequales D, E, F, quae binae sumantur, in eadem ratione, sit autem perturbata earum proportio ($A : B = E : F$, & $B : C = D : E$): & ex aequo in eadem ratione erunt ($A : C = D : F$).

Sumtis G, H, K, ipsarum A, B, D aequae multiplicibus, & aliis L, M, N ipsarum C, E, F ut-
 cunque aequae multiplicibus,
 erit $A : B = G : H$, & $E : F = M : N$. Sed ponitur $A : B = E : F$. Ergo $G : H = M : N$. Et quia $B : C = D :$

E : erit $H : L = K : M$. Quare si $G >$, $=$, $<$ L : erit & $K >$, $=$, $<$ N , & propterea $A : C = D : F$. Q. E. D.

PROP. XXIV. THEOR.

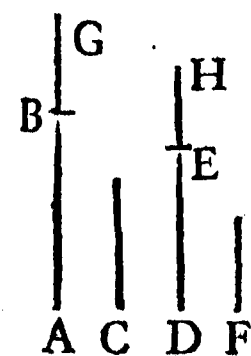

 Si prima AB ad secundam C eandem habeat rationem, quam tertia DE ad quartam F; habeat autem & quinta BG ad secundam C eandem rationem, quam sexta EH ad quartam F: & composita e prima & quinta AG ad secundam C eandem rationem habebit, quam composita e tertia & sexta DH ad quartam F.

Quum

v. cor. 4. 5.

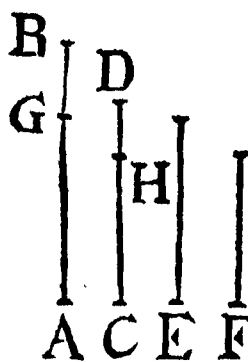
φ. 22. 5.

x. 18. 5.



Quum enim $BG : C = EH : F$: erit inuertendo $C : BG = F : EH$. Et quia $AB : C = DE : F$: erit ex aequo ϕ $AB : BG = DE : EH$; ergo componendo ψ $AG : GB = DH : HE$. Hinc quum praeterea sit $GB : C = HE : F$, erit ex aequo ϕ $AG : C = DH : F$. Q. E. D.

PROP. XXV. THEOR.



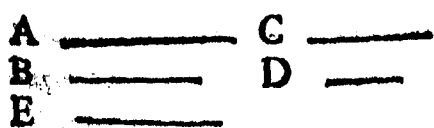
Si quatuor magnitudines fuerint proportionales ($AB : CD = E : F$): maxima ipsarum AB, & minima F duabus reliquis CD + E maiores erunt.

Fiat enim $AG = E$, & $CH = F$. Quoniam ergo $AB : CD = E : F = AG : CH$: erit $GB : HD = AB : CD$. Sed $AB > CD$. Ergo $GB > HD$. Quare, quia $AG + F = CH + E$: erit δ $AG + GB + F > CH + HD + E$, id est, $AB + F > CD + E$. Q. E. D.

 ψ . hyp. ω . 7. 5. α . 19. 5. β . 1ch. 14. 5. γ . 2. ax. δ . 4. ax.

* Quae sequuntur propositiones non sunt Euclidis, sed ex aliis desumptae. Ob frequentem tamen earum usum eas Euclideis subiungere, Isaacum Barrow secuti, volumus.

* PROP. XXVI. THEOR.



Si prima ad secundam habuerit maiorem rationem, quam tertia ad quartam: habebit inuertendo, secunda ad primam minorem rationem, quam quarta ad tertiam.

Sit

Sit $A : B > C : D$. Dico $B : A < D : C$. Nam
 concipe $C : D = E : B$. Ergo $A : B > E : B$; 6. 13. 5.
 quare $A > E$; ergo $B : A < B : E$ vel $D : C$. 2. 10. 5.
 Q. E. D. 7. 8. 5.
3. cor. 4. 5.

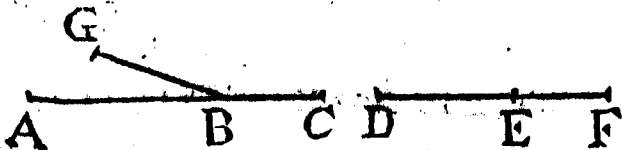
* PROP. XXVII. THEOR.

A ————— B ————— Si prima ad secundam
 C ————— D ————— habuerit maiorem ratio-
 E ————— nem, quam tertia ad quar-
 tam: habebit quoque vicissim prima ad tertiam ma-
 iorem rationem, quam secunda ad quartam.

Sit $A : B > C : D$. Dico $A : C > B : D$. Nam
 puta $E : B = C : D$; ergo $A > E$. Ergo $A : C$ 1. 10. 5.
 $> E : C$ vel $B : D$. Q. E. D. x. 8. 5.
a. 16. 5.

* PROP. XXVIII. THEOR.

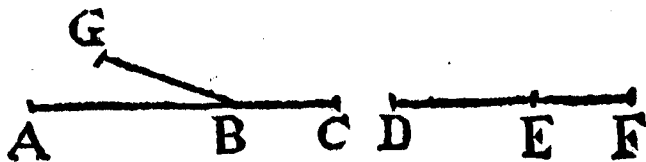
Si prima ad secundam habuerit maiorem rationem,
 quam tertia ad quartam: habebit quoque composita
 prima cum secunda ad secundam maiorem rationem,
 quam composita tertia cum quarta ad quartam.



Sit $AB : BC > DE : EF$. Dico $AC : BC >$
 $DF : EF$. Nam cogita $GB : BC = DE : EF$. μ. 10. 5.
 Ergo $AB > GB$; adde utrinque BC , erit $AC >$ v. 4. ax.
 GC , ergo $AC : BC > GC : BC$ id est $DF :$ ξ. 8. 5.
 EF . Q. E. D. o. 18. 5.

* PROP. XXIX. THEOR.

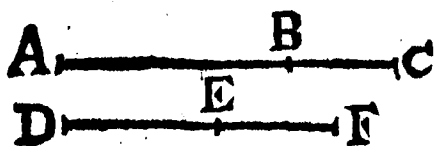
Si composita prima cum secunda ad secundam ma-
 iorem habuerit rationem, quam composita tertia cum
 quarta ad quartam: habebit quoque diuidendo pri-
 ma ad secundam maiorem rationem, quam tertia ad
 quartam.



π. 10. 5.
 ρ. 5. ax.
 σ. 8. 5.
 τ. 17. 5.

Sit $AC:BC > DF:EF$: dico $AB:BC > DE:EF$. Intellige $GC:BC = DF:EF$. Ergo $^{\pi}AC > GC$. Aufer communem BC : erit $^{\rho}AB > GB$. Ergo $AB:BC > ^{\sigma}GB:BC$, vel $^{\tau}DE:EF$. Q. E. D.

* PROP. XXX. THEOR.

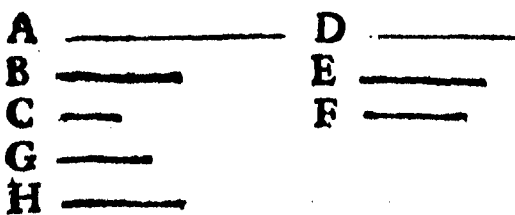


Si composita prima cum secunda ad secundam habuerit maiorem rationem quam composita tertia cum quarta ad quartam: habebit per compositionem rationis prima cum secunda ad primam minorem rationem, quam tertia cum quarta ad tertiam.

υ. hyp.
 φ. 29. 5.
 χ. 26. 5.
 ψ. 28. 5.

Sit $AC:BC > DF:EF$: dico $AC:AB < DF:DE$. Nam quia $^{\nu}AC:BC > DF:EF$: erit dividendo $AB:BC > ^{\phi}DE:EF$; inuertendo igitur $^{\chi}BC:AB < EF:DE$, ergo componendo $AC:AB < ^{\psi}DF:DE$. Q. E. D.

* PROP. XXXI. THEOR.



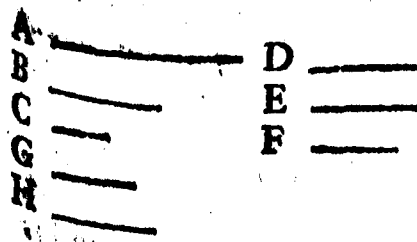
Si sint tres magnitudines A, B, C, et aliae ipsis aequales numero D, E, F; si quae maior ratio primae priorum ad secundam, quam primae posteriorum ad secundam ($A:B > D:E$), item secundae priorum ad tertiam maior, quam secundae posteriorum ad tertiam ($B:C > E:F$): erit quoque ex aequo maior ratio primae priorum ad tertiam, quam primae posteriorum ad tertiam ($A:C > D:F$).

ω. 10. 5.
 α. 8. 5.

Concipe $G:C = E:F$. Ergo $^{\omega}B > G$, ergo $A:G > A:B$. Rursus puta $H:G = D:E$: ergo

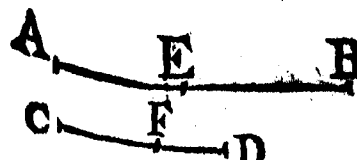
80^{β} $H: G < A: B$, & fortius γ $H: G < A: C$. β . 13. 5.
 Quare ω $A > H$. Proinde $A: C > H: C$ vel $\delta \gamma$. sch. 13. 5.
 $D: F$. Q. E. D. δ . 22. 5.

* PROP. XXXII. THEOR.


 Si sint tres magnitudines A, B, C, & aliae ipsis numero aequales D, E, F; sitque maior ratio primae priorum ad secundam, quam secundae posteriorum ad tertiam ($A: B > E: F$), item secundae priorum ad tertiam, quam primae posteriorum ad secundam ($B: C > D: E$): erit quoque ex aequo maior ratio primae priorum ad tertiam, quam primae posteriorum ad tertiam ($A: C > D: F$).

Huiusce demonstratio plane similis est demonstrationi praecedentis.

* PROP. XXXIII. THEOR.


 Si fuerit maior ratio totius AB ad totum CD, quam ablati AE ad ablatum CF: erit & reliqui EB ad reliquum FD maior ratio, quam totius AB ad totum CD.

Quoniam $AB: CD > AE: CF$: erit ϵ permutando $AB: AE > CD: CF$; ergo conuertendo ζ $AB: EB < CD: DF$, permutando igitur $AB: CD < EB: DF$. Q. E. D. ϵ . 27. 5. ζ . 30. 5.

* PROP. XXXIV. THEOR.

Si sint quotcunque magnitudines, & aliae ipsis aequales numero, sitque maior ratio primae priorum ad

I a

ad primam posteriorum, quam secundae ad secundam, & haec maior, quam tertiae ad tertiam, & sic deinceps: habebunt omnes priores simul ad omnes posteriores simul maiorem rationem, quam omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores, relicta quoque prima; minorem autem, quam prima priorum ad primam posteriorum; maiorem denique etiam quam ultima priorum ad ultimam posteriorum.

Horum demonstratio est penes interpretes, quos adeat, qui eam desiderat. Nos omisimus breuitatis studio, & quia eorum nullus usus in his elementis.



E V C L I D I S

E L E M E N T O R V M

L I B E R V I.

* * * * *

DEFINITIONES.

1. *Similes figurae rectilineae* sunt, quae & singulos angulos singulis aequales habent, & circa aequales angulos latera proportionalia.

* Nota similitudinis est haec $\sphericalangle$.

2. *Reciprocae figurae* sunt, quando in vtraque figura antecedentes & consequentes rationum termini fuerint.

3. *Secundum extremam & mediam rationem recta linea secta* esse dicitur, quando ut tota ad maius segmentum, ita maius segmentum ad minus se habuerit.

4. *Altitudo cuiusque figurae* est linea perpendicularis a vertice ad basin ducta.

5. *Ratio ex rationibus componi* dicitur, quando rationum quantitates inter se multiplicatae illius faciunt quantitatem.

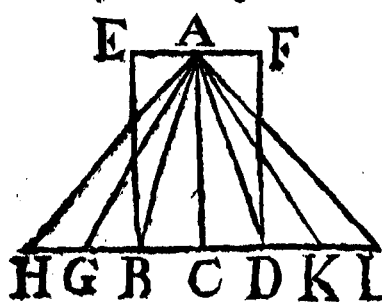
* Signum quantitatis rationis $A : B$ est $\frac{B}{A}$, scilicet signum quoti, qui indicat, quoties antecedens contineat consequentem vel aliquotam eius partem. Nam quia rationum $A : B$ & $B : C$ quantitates $\frac{A}{B}$ & $\frac{B}{C}$ inter se multiplicatae faciunt $\frac{A}{C}$,

quae quantitas est rationis $A : C$: dicimus rationem $A : C$ componi ex rationibus $A : B$ & $B : C$, quod sic scribimus $(A : C) = (A : B) + (B : C)$.

PROP. I. THEOR.

Triangula ABC, ACD, & parallelogramma EC, CF, quae eandem habent altitudinem, sunt inter se ut bases BC, CD.

2. 38. 1.



2. 5. def. 5.

7. 41. 1.

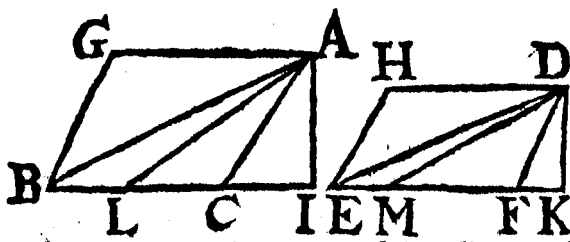
2. 15. 5.

1. 11. 5.

1. In BD producta sumantur $BG = GH = BC$, & $DK = KL = CD$, & iungantur AH, AG, AK, AL. Ergo $\triangle ABG = \triangle AGH = \triangle ABC$, & sunt proinde basis HC & $\triangle ACH$ basis BC & trianguli ABC aequae multiplicia. Similiter patet esse basim CL & $\triangle ACL$ basis CD & $\triangle ACD$ aequae multiplicia. Iam si $HC >, =, < CL$: erit $\triangle ACH >, =, < \triangle ACL$. Ergo $BC : CD = \triangle ABC : \triangle ACD$. Q. E. D.

2. Quia Pgra. EC: CF sunt dupla $\triangle$ rum ABC, ACD, & hinc $EC : CF = \triangle ABC : \triangle ACD$: erit $EC : CF = BC : CD$. Q. E. D.

* Schol.



Hinc triangula ABC, DEF, & pgra. GC, HF, quorum aequales sunt bases BC, EF, ita se habent ut altitudines AI, DK.

2. 1. 6.

2. 38. 1.

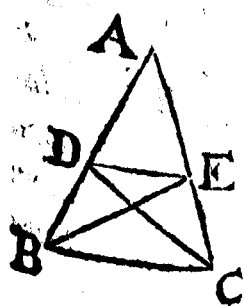
2. 7. & 11. 5.

1. 15. 5.

Sume $IL = CB$, & $KM = FE$, ac iunge LA, MD. Quia ergo $IL = KM$: erit $\triangle ALI = \triangle DMK = \triangle AI : DK$. Sed $\triangle ALI = \triangle ABC$, & $\triangle DMK = \triangle DEF$. Ergo $\triangle ABC : \triangle DEF = AI : DK = Pgr. GC : Pgr. HF$. Q. E. D.

PROP.

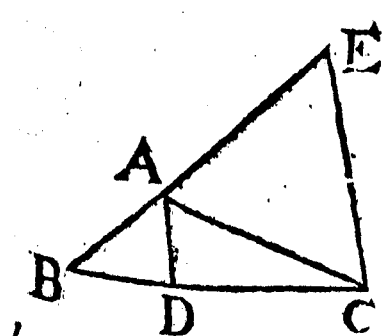
PROP. II. THEOR.



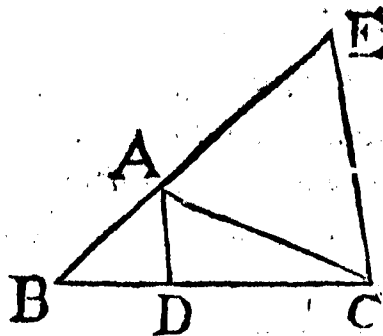
Si uni laterum BC trianguli ABC parallela recta linea DE ducatur: haec proportionaliter secabit ipsius trianguli latera AB, AC. Et si trianguli ABC latera AB, AC proportionaliter secta fuerint: quae sectiones coniungit recta linea DE reliquo trianguli lateri BC parallela erit.

1. Sit DE ad BC parallela: dico fore $BD:DA = CE:EA$. Iungantur enim DC, BE. Et quia DE, BC parallelae, erit $\triangle BDE =^{\lambda} \triangle CDE$. hyp. 37. 1. Ergo $\triangle BDE: \triangle ADE =^{\mu} \triangle CDE: \triangle ADE$. 7. 5. Atqui $\triangle BDE: \triangle ADE =^{\nu} BD:DA$, & $\triangle CDE: \triangle ADE = CE:EA$. 1. 6. Ergo $BD:DA = CE:EA$. Q. E. D. 11. 5.
2. Quia $BD:DA = CE:EA$, & $BD:DA =^{\sigma} \triangle BDE: \triangle EDA$, & $CE:EA =^{\pi} \triangle CDE: \triangle EDA$. hyp. 1. 6. $\triangle BDE: \triangle EDA =^{\rho} \triangle CDE: \triangle EDA$. 11. 5. erit $\triangle BDE: \triangle EDA = \triangle CDE: \triangle EDA$, & hinc $\triangle BDE =^{\sigma} \triangle CDE$. 9. 5. Quare ED, BC parallelae sunt. Q. E. D. 39. 1.

PROP. III. THEOR.



Si trianguli ABC angulus A bifariam secetur, secans autem angulum recta linea AD secet etiam basin BC: basis segmenta BD, DC eandem rationem habebunt, quam reliqua trianguli latera BA, AC.



Et si basis BC segmenta BD, DC eandem habent rationem, quam reliqua trianguli ABC latera BA, AC: quæ a vertice A ad sectionem D ducitur recta linea AD, trianguli angulum A bifariam secabit.

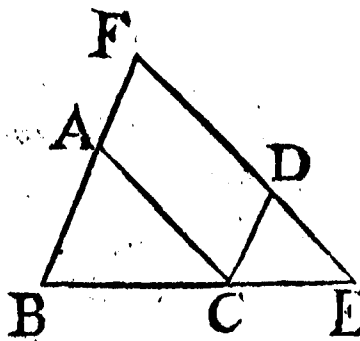
υ. 29. 1.
φ. hyp.
χ. 6. 1.
ψ. 2. 6.

1. Ducatur enim ad AD parallela CE, & producat BA in E. Quia ergo ang. ACE =^υ CAD, & AEC =^υ BAD, & CAD =^φ BAD: erit ACE = AEC, & AC =^χ AE. Hinc ψ BD: DC = BA: AC. Q. E. D.

ω. 11. 5.
α. 9. 5.
β. 5. 1.

2. Iisdem constructis, si BD: DC = BA: AC: quia BD: DC =^ψ BA: AE, erit BA: AC =^ω BA: AE, & ergo AC =^α AE, & ang. ACE =^β AEC. Sed ang ACE =^υ DAG & ang. AEC =^υ BAD. Ergo ang. BAD = DAC. Angulus igitur A bisectus est a recta AD. Q. E. D.

PROP. IV. THEOR.



Aequiangulorum triangulorum ABC, DCE proportionalia sunt latera quæ circum æquales angulos; & homologa sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur.

Sit ang. A = D, B = DCE, & ACB = E: dica fore BA: AC = CD: DE, item BC: CA = CE: ED, & AB: BC = DC: CE.

Posita

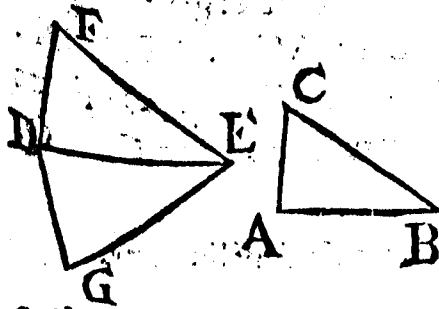
Posita enim CE ipsi BC in directum, produ-
 catur BA & ED, quae in F concurrent: quia
 ang. $B + E = \gamma$ $B + ACB < \delta$ 2. Rectis. γ . hyp.
 Et quia ergo CD ad BF, & AC ad FE paralle-
 lae est: erit $AF = CD$, & $FD = AC$. Sed $BA : AF = BC : CE$, & alterne $AB : BC = AF : CE$, & $DC : CE = AF : CE$. Ergo $AB : BC = DC : CE$.
 Rursum ob CD, BF parallelas est $BC : CE = FD : DE = AC : DE$. Ergo alterne $BC : CA = CE : ED$.

Et quia erat $AB : BC = DC : CE$: erit ex
 aequo $BA : AC = CD : DE$. Q. E. D. μ . 22. 5.

* Scholium.

1. Hinc $AB : DC = BC : CE = AC : DE$. μ . 16. 5.
2. Si in Δ . EFB ducitur basi BF parallela CD, $BF : CD = BE : EC = FE : ED$. λ . 18. 5.
3. Triangula aequiangula similia sunt.

PROP. V. THEOR.



Si duo triangula
 ABC, DEF latera ha-
 beant proportionalia:
 aequiangula erunt
 triangula, & aequa-
 les habebunt angulos,

quibus homologa latera subtenduntur.

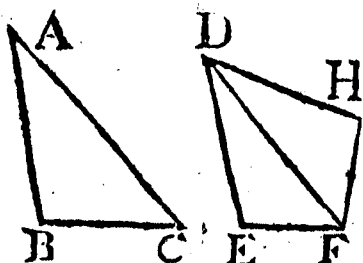
Fac ad rectae DE punctum quidem D ang.
 $EDG = CAB$, ad punctum vero E ang. $DEG = CBA$: & reliqui G, C aequales erunt. Er-
 go $AB : BC = DE : EG$. Sed $AB : BC = DE : EF$. Ergo $EG = EF$. Similiter quia
 $ED : EF = EG : ED$.

g. 8. 1.

$ED: DG = \frac{1}{2} AB: AC = \circ ED: DF$, erit $DG = DF$. Quare $\circ$ ang. $F = G = C$, & ang. $FDE = EDG = A$, & ang. $FED = DEG = B$. Q. E. D.

* Schol. Talia ergo triangula similia sunt. (3. sch. 4. 6.)

PROP. VI. THEOR.



Si duo triangula ABC, DEF unum angulum A uni angulo FDE aequalem habeant; circa altera autem angulos la-

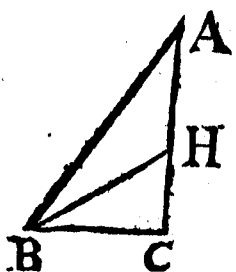
tera proportionalia ($BA: AC = ED: DF$): aequiangula erunt triangula, & aequales habebunt angulos, quibus homologa latera BA, ED, & AC, DF subtenduntur ($B = DEF$, & $C = DFE$).

Ad rectam DF fiant ang. $HDF = A$ vel FDE , & ang. $DFH = C$. Erit ergo $\circ$ ang. $H = B$, & $HD: DF = \circ BA: AC = \circ ED: DF$. Quare $\circ$ $HD = ED$, ideoque $\circ$ ang. $DEF = H = B$, & ang. $DFE = DFH = C$. Q. E. D.

σ . 32. 2.
 τ . 4. 6.
 ω . hyp.
 ϕ . 9. 5.
 α . 4. 4.

* Schol. Talia ergo triangula similia sunt.

PROP. VII. THEOR.



Si duo triangula ABC, DEF unum angulum A uni D aequalem habeant; circa alios autem angulos $ABC \propto E$ latera proportionalia

tionalia ($AB:BC=DE:EF$); *reliquorum vero* C, F *utrumque simul vel minorem vel non minorem recto*: *dequiangula erunt triangula, & aequales habebunt angulos* ABC & E, *circa quos latera sunt proportionalia.*

1. Si enim non est $ABC = E$: sit alteruter ABC maior, & ponatur ψ ang. $ABH = E$. Sint ψ . 23. 1. C, F acuti. Iam quia & $A = D$: erit in aequiangulis α triangulis ABH, DEF, $AB: BH = DE: EF$. Sed β $AB: BC = DE: EF$. Ergo γ $BH = BC$, ideoque δ ang. $BHC = C < \beta$ δ . 5. 1. Recto. Quare ϵ ang. $BHA >$ recto, & proinde ϵ . 13. 1. de ang. F $>$ recto; contra hypothesin.

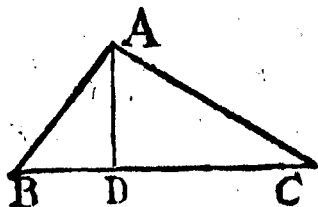
2. Pone autem utrumque C, F non esse recto minorem, & tamen $ABC > E$. Quia ang. $BHC = C$: ang. $BHC + C$ non essent duobus rectis minores. Q. E. A ζ . Ergo in utroque casu ang. $ABC = E$; & hinc ang. $C = F$. Q. E. D.

* *Scholium.*

1. Talia ergo triangula etiam similia sunt. (3. sch. 4. 6).

2. Eodem prorsus modo ex 26. 1. in locum 4. 6. substituta demonstrari potest hoc theorema: Si duo triangula unum angulum uni aequalem habeant, circa alios autem angulos latera aequalia, reliquorum vero angulorum utrumque simul aut minorem aut non minorem recto: aequalia erunt triangula, & aequales habebunt angulos, circa quos sunt aequalia latera, & tertium latus tertio aequale habebunt.

PROP. VIII. THEOR.



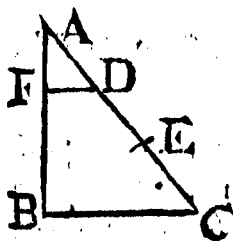
Si in triangulo rectangulo ABC ab angulo recto A ad basin BC perpendicularis AD ducatur: quae ad perpendicularem sunt triangula ADB, CDA & toti ABC & inter se sunt similia.

¶ 10. ax. Nam ang. BDA =ⁿ CDA = BAC, & ang.
 9. 32. 1. BAD =^s C, ob communem B, item ang.
 CAD = B, ob communem C. Ergo Δa. ADB,
 1. 3. sch. 4. 6. CDA, & ABC sunt aequiangula, & proinde
 similia. Q. E. D.

Coroll.

Ex hoc manifestum est, in triangulo rectangulo perpendicularem, ab angulo recto ad basin ductam, mediam proportionalem esse inter segmenta basis ($\div$ BD, DA, DC); & praeterea, inter basin & basis segmentum utrumlibet, latus segmento conterminum medium esse proportionale ($\div$ BC, CA, CD, & $\div$ CB, BA, BD).

PROP. IX. PROBL.



A data recta linea AB imperatam partem (c. gr. tertiam) abscindere.

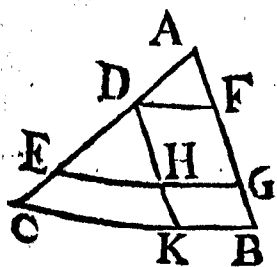
Ducatur ex A sub quouis angulo recta AC, & in ea sumatur punctum D utcumque, & ipsi AD aequales fiant DE, EC. Iunctae BC parallela fiat DF.

¶ 2. 6. Erit ergo * BF: FA = CD: DA. Sed DC
 1. 8. def. 5. =² DA, ergo BF =¹ 2 AF, & AB =³ AF,
 id est AF = $\frac{1}{3}$ AB. Q. E. F.

* Schol.

* *Schol.* Sumitur in hac deimonstracione, si quatuor magnitudinum proportionalium ($CD : DA = BF : FA$) prima secundae sit multiplex, tertiam quartae aequae multiplicem esse. Cuius veritas, si cui ex 3. & 8 def. 5. non pateret, sic ostendi posset. Sumatur aliqua G , quae sit aequae multiplex ipsius FA ac CD ipsius DA : erit (15. 5.) $G : CD = FA : DA$, & alterne $G : FA = CD : DA = BF : FA$. Ergo $BF = G$. & ideo BF tam multiplex ipsius FA , quam CD ipsius DA .

PROP. X. PROBL.



Datam rectam lineam intersectam AB similiter secare, ut data recta AC secta est (in D, E).

Pone datas AB , AC ita ut quemuis angulum A comprehendant; iunge BC , & huic duc parallelas EG , DF .

Iam, si praeterea ipsi AB ducta fuerit parallela DHK , erit μ $DH = FG$ & $HK = GB$. μ . 34. 1.
 Porro in $\triangle KDC$ est ν $CE : ED = KH : HD$. ν . 2. 6.
 $= \xi$ $BG : GF$. Et in $\triangle GAE$ est $ED : DA = \nu$ ξ . 7. 5.
 $GF : FA$. Ergo segmenta rectae AB se habent ut segmenta rectae AC . Q. E. F.

* *Corollar.*

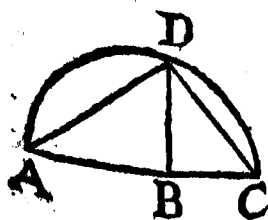
Ergo si ad unum trianguli latus plures parallelae ductae fuerint: erunt omnia laterum reliquorum segmenta proportionalia.

* *Scho-*

capiatur $DG = A$, $GE = B$, $DH = C$; iun-
ctae GH parallela ducatur EF .

His enim factis erit $DG:GE = DH:HF$, c. 2. 6.
id est $A:B = C:HF$. Q. E. F.

PROP. XIII. PROBL.



*Duabus datis rectis lineis
AB, BC, mediam proportiona-
lem inuenire.*

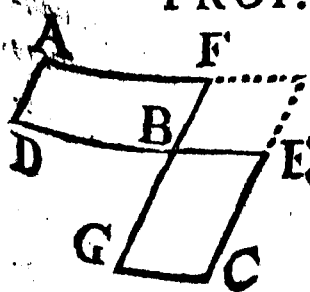
Ponantur in directum, &
super AC describatur semi-
circulus ADC , ducaturque a puncto B ipsi AC
ad rectos angulos BD .

Ductis enim AD, DC , erit, ob ang. ADC r. 31. 3.
rectum, $\therefore AB:BD, BC$ v. Q. E. F. v. cor. 8. 6.

* Scholium.

Et (per sch. 31. 3.) si recta BD , rectae AC ad rectos
insistens, sit media proportionalis inter huius segmen-
ta AB, BC : semicirculus super hac AC descriptus,
per extremum illius D transibit. Nam quia (per 6. 6)
ang. $A = BDC$, & $C = ADB$: erit ADC rectus
(per cor. 31. 3).

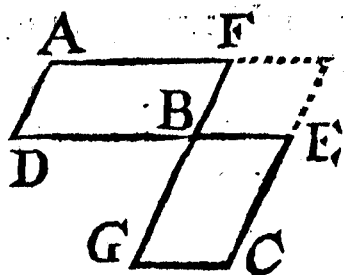
PROP. XIV. THEOR.



*Parallelogrammorum AB,
BC, aequalium, & unum an-
gulum B uni B aequalem ha-
bentium, reciproce propor-
tionalia sunt latera, quae
circum aequales angulos*

($DB:BE = GB:BF$). Et quorum parallelo-
grammorum AB, BC , unum angulum B uni B
aequalem habentium, reciproce proportionalia
sunt latera, quae circum aequales angulos B ,
illa inter se sunt aequalia. Positis

φ. 3. sch. 15.1.



Positis in directum DB & BE: erunt & FB, BG φ in directum. Compleatur Pgr. FE.

κ. 7. 5.

ψ. 1. 6.

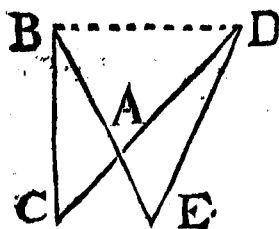
ω. 11. 5.

1. Iam quia Pgr. AB = BC: erit AB: FE = κ BC: FE. Sed AB: FE = ψ DB: BE, & BC: FE = GB: BF. Ergo DB: BE = ω GB: BF. Q. E. D.

α. 9. 5.

2. Quia per hyp. DB: BE = GB: BF; & DB: BE = ψ Pgr. AB: FE; & GB: BF = BC: FE: erit Pgr. AB = α BC: FE; quare Pgr. AB = α BC. Q. E. D.

PROP. XV. THEOR.



Triangulorum aequalium, ABC, ADE, & unum angulum BAC uni DAE aequalem habentium, reciproce proportionalia sunt latera, quae circum aequales angulos (CA: AD = EA:

AB). Et quorum triangulorum ABC, ADE, unum angulum BAC uni DAE aequalem habentium, reciproce proportionalia sunt latera, quae circum aequales angulos, illa sunt inter se aequalia.

β. 3. sch. 15.1. Ponantur in directum latera CA, AD, quo facto & BA, AE in directum β erunt. Iungantur quoque BD.

γ. 7. 5.

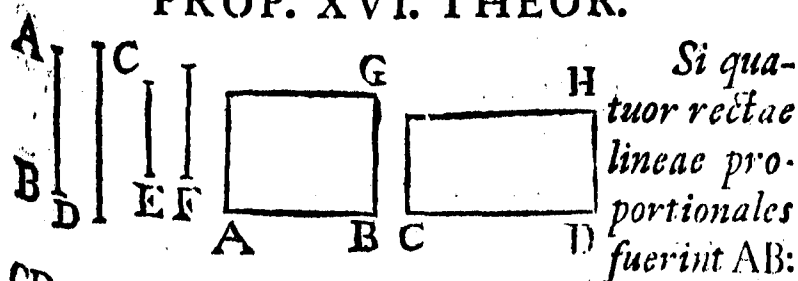
δ. 1. 6.

1. Iam quia Δ. ABC = ADE per hyp. erit Δ. ABC: Δ. ABD = Δ. ADE: Δ. ABD. At qui Δ. ABC: Δ. ABD = δ CA: AD, & Δ. ADE:

ADE: $\triangle ABD = EA: AB$. Ergo $CA: AD = EA: AB$. Q. E. D. a. 11. 5.

2. Quum per hyp. $CA: AD = EA: AB$, & $CA: AD = \triangle ABC: \triangle ABD$, & $EA: AB = \triangle ADE: \triangle ABD$: erit $\triangle ABC: \triangle ABD = \triangle ADE: \triangle ABD$. Ergo $\triangle ABC = \triangle ADE$. Q. E. D. 5. 9. 5.

PROP. XVI. THEOR.



$CD = E: F$: rectangulum $AB \times F$, sub extremis comprehensum, aequale est rectangulo $CD \times E$, quod sub mediis comprehenditur. Et si rectangulum $AB \times F$, sub extremis comprehensum, aequale fuerit ei $CD \times E$, quod sub mediis comprehenditur: quatuor rectae lineae AB , CD , E , F proportionales erunt.

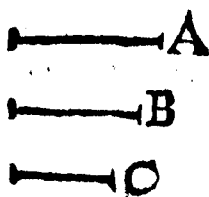
Fiat enim $\square$ super AB rectangulum cuius $\square$ sch. 46. 1. alterum latus $BG = F$, item super CD fiat Rgt. CH , cuius alterum latus $DH = E$.

1. Quia ponitur $AB: CD = E: F = DH: BG$: 7. 7. 5.
 BG : erit $\square AG = CH$, id est $AB \times F = CD \times E$. 9. 14. 6.
 Q. E. D.

2. Quia Pgra. AG , CH , angulos rectos B , D aequales habentia, aequalia ponuntur: erit $AB: CD = DH: BG = E: F$. Q. E. D.

* Schol. Hinc ad datam rectam AB facile est datum rectangulum CH applicare, faciendo $AB: CD = DH: BG$. 1. 12. 6.

PROP. XVII. THEOR.



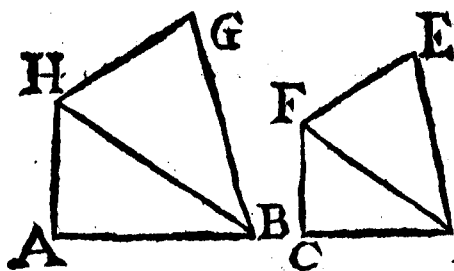
Si tres rectae lineae A, B, C, proportionales fuerint:

rectangulum sub extremis A, C comprehensum aequale est ei quod a media B fit quadrato. Et si rectangulum sub extremis A, C comprehensum aequale fuerit ei quod a media B fit quadrato: tres rectae lineae A, B, C, proportionales erunt.

1. Sit $D = B$. Iam quia (hyp.) $A : B = B : C$: erit $A : B = D : C$. Ergo $A \times C = B \times D = B^2$. Q. E. D.

2. Quia ponitur $A \times C = B^2 = B \times D$: erit $A : B = D : C = B : C$. Q. E. D.

PROP. XVIII. PROBL.



A data recta lineae AB dato rectilineo CE simile & militer positum rectilineum describere.

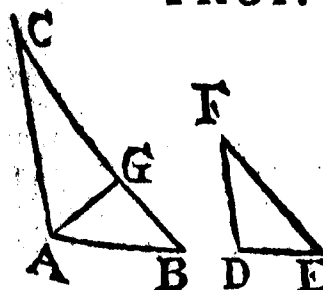
1. Iunge DF, & fac^{te} ang. $A = C$, & ang. $ABH = CDF$, ang. vero $BHG = DFE$, & ang. $HGB = FDE$. Rectilineum AHGB erit $\sim$ ipsi CDEF.

Nam ΔHBA aequiangulum est ΔFDC : & ergo $HB : FD = HA : FC = AB : CD$. Eadem ratione in Δ is HGB, FED est $HB : FD = BG : DE = GH : EF$. Ergo $HA : FC = AB$.

$\equiv AB:CD \equiv BG:DE \equiv GH:EF$. Praeterea per constr. est ang. $A \equiv C$, & $B \equiv ABH + HBG \equiv CDF + FDE \equiv D$, & $G \equiv E$, & $H \equiv GHB + BHA \equiv EFD + DFC \equiv F$. Ergo rectilineum AHGB dato CE simile π est π . 1. def. 6. & similiter super data AB positum. Q.E.F.

PROP. XIX. THEOR.

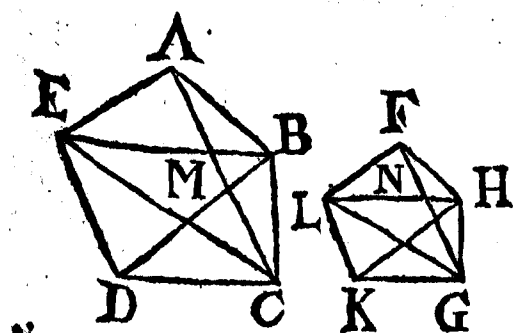
*Similia triangu-
la ABC,
DEF sunt inter se in dupli-
cata ratione laterum homo-
logorum, BC, EF.*

 Fiat enim $e \div BC, EF$, s. 11. 6. BG, iungatur GA. Quia igitur (hyp.) est $AB:BC \equiv DE:EF$, & alterne σ $AB:DE \equiv BC:EF \equiv EF:BG$, ang. autem $B \equiv E$ (hyp.): erit $\triangle ABG \equiv \triangle DEF$. Quare $\triangle ABC:\triangle DEF \equiv \triangle ABC:\triangle ABG \equiv BC:BG \equiv (BC:EF)^2$. Q. E. D.

σ . 16. 5.
 τ . contr.
 ν . 15. 6.
 ϕ . 7. 5.
 χ . 1. 6.
 ψ . 10. def. 5.

PROP. XX. THEOR.

*Similia poly-
gona ABCDE,
FLKGH in simi-
lia triangu-
la di-
viduntur, & nu-
mero aequalia,
& homologa to-*



*ris. Et polygonum ABCDE ad polygonum
FLKGH duplicatam rationem habet eius, quam
latus homologum AB habet ad latus homologum
FH.*

α. 1. def. 6.

β. 6. 6.

γ. 3. 2x.

δ. 22. 5.

ε. dem.

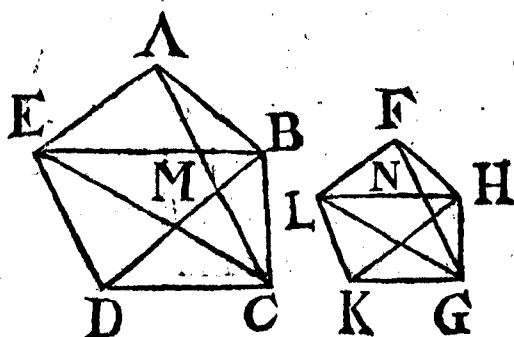
ζ. 32. 1.

η. 4. 6.

θ. 1. 6.

ι. 12. 5.

κ. 11. 5.



1. Iungantur

EB, EC, LH,

LG. Quia^α ang.

EAB = LFH,

& BA: AE =

HF: FL: erit^β

Δ. EAB ~ Δ

LFH, & ang. ABE = FHL, & EB: BA = LH:

HF. Sed est etiam^α ang. ABC = FHG, &

AB: BC = FH: HG. Ergo ang. EBC =

LHG, & ex aequo^δ EB: BC = LH: HG. Qua-re^β Δ BEC ~ Δ HLG, & ang. ECB = LGH,

& EC: CB = LG: GH. Hinc similiter de-

monstratur Δ CED ~ Δ GLK. Q. E. D.

2. Dico fore Δ ABE: Δ FHL = Δ BEC:

Δ HLG = Δ CED: Δ GLK = Pol. ABCDE:

Pol. FHGKL. Iungantur enim AC, FG, DB,

KH. Iam quia propter similitudinem poly-

gonorum ang. ABC = FHG, & AB: BC =

FH: HG: erit^β ang. BAM = HFN, & BCM= HGN. Sed^α ang. ABM = FHN, & MBC= NHG, ergo^ζ aequiangula sunt Δa ABM,FHN, item Δ MBC, NHG. Quare^η AM:

MB = FN: NH, & MB: MC = NH: NG,

&^δ ex aequo AM: MC = FN: NG. Atqui^θ

Δ ABM: Δ MBC = AM: MC = Δ AME: Δ

EMC, & hinc Δ ABE: Δ BEC = Δ ABM: Δ

MBC = AM: MC. Similiter ostenditur Δ

FHL: Δ HLG = FN: NG. Ergo^κ Δ ABE:

Δ BEC = Δ FHL: Δ HLG, & alternando Δ

ABE: Δ FHL = Δ BEC: Δ HLG. Similiter

ostendemus ope rectarum DB, KH esse Δ BEC:

Δ HLG

$\triangle HLG = \triangle CED : \triangle GLK$. Quare erit $\triangle ABE : \triangle FHL = \triangle BEC : \triangle HLG = \triangle CED : \triangle GLK =$ Pol. ABCDE : Pol. FHGKL. Q. E. D.

Aliter & expeditius idem sic demonstratur. Quia $\triangle ABE \sim \triangle FHL$, est $\triangle ABE : \triangle FHL =^{\lambda} (BE : HL)^2$. Sed $\triangle EBC, LHG$ ob similitudinem sunt in eadem ratione $(BE : HL)^2$. Ergo $\triangle ABE : \triangle FHL = \triangle EBC : \triangle LHG$. Similiter $\triangle EBC : \triangle LHG = (CE : GL)^2 = \triangle CED : \triangle GLK$. Ergo $\triangle ABE : \triangle FHL = \triangle EBC : \triangle LHG = \triangle CED : \triangle GLK =$ Pol. ABCDE : Pol. FHGKL. Q. E. D.

3. Dico ABCDE : FHGKL = (AB : FH)². Nam quia $\triangle ABE : \triangle FHL =^{\lambda} (AB : FH)^2$: erit Pol. ABCDE : Pol. FHGKL =^{*} (AB : FH)². Q. E. D.

Corollaria.

1. Quum de similibus quadrilateris eodem modo demonstretur, ea esse in ratione duplicata laterum homologorum, & idem de triangulis^u ostensum sit: patet vniuerse, *similes rectilineas figuras inter se esse in ratione duplicata homologorum laterum*. u. 19. 6.

2. Et quia, si homologis lateribus AB, FH tertia proportionalis T sumitur, est AB ad T in ratione duplicata^v homologorum laterum: manifestum est, *si tres rectae lineae proportionales fuerint, ut prima ad tertiam, ita esse figuram rectilineam, quae fit a prima, ad similem & similiter descriptam a secunda*. v. 10. def. 5.

* Schol.

Hinc elicitur methodus figuram quamvis rectilineam augendi vel minuendi in ratione data. Vt

K 3

si velis

ξ. 13. 6.
ο. 18. 6.

si velis Pentagoni, cuius latus CD, aliud facere quintuplum: inter CD & 5 CD quaere $\frac{1}{2}$ mediam proportionalem, super quam^o construe pentagonum simile dato. Hoc erit quintuplum dati.

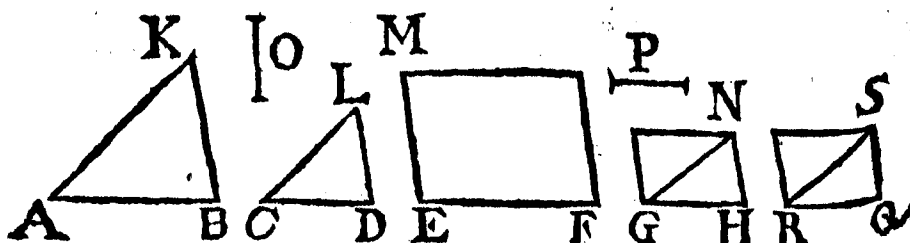
PROP. XXI. THEOR.



Quae A, B, eidem rectilineo C sunt similia, & inter se sunt similia.

Nam quia vtrumque A, B eidem C simile
π. 1. def. 6. est: vtrumque π aequiangulum erit ipsi C, &
circum aequales angulos latera habebit proportionalia. Quare & A ipsi B aequiangulum
est, & in vtroque latera circum aequales angulos proportionalia^o sunt; ac ergo $A \sim^{\pi} B$.
Q. E. D.

PROP. XXII. THEOR.



Si quatuor rectae lineae proportionales fuerint ($AB:CD = EF:GH$): & rectilinea AKB, CLD, FM, GN, quae ab ipsis fiunt, similia & similiter descripta, proportionalia erunt. Et si rectilinea AKB, CLD, FM, GN, quae ab ipsis AB, CD, EF, GH fiunt, similia & similiter descripta, proportionalia fuerint: & ipsae rectae lineae AB, CD, EF, GH proportionales erunt.

1. Sumatur enim τ ipsi^s AB, CD tertia proportionalis O, & ipsis EF, GH tertia proportionalis P. Et quia est ν AB: CD = EF: GH, ν hyp. & ergo CD: O = ϕ GH: P: erit ex aequo $\propto$ ϕ . 11. 5. AB: O = EF: P. Atqui AB: O = ψ AKB: ψ . 2. cor. CLD, & EF: P = ψ FM: GN. Ergo ϕ est 20. 6. AKB: CLD = FM: GN. Q. E. D.

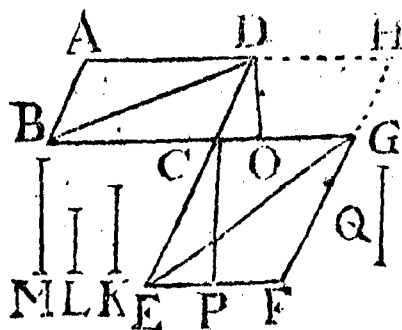
2. Sit AKB: CLD = FM: GN, & fiat ω AB: ω . 12. 6. CD = EF: QR, a qua α ipsi FM vel GN simile & similiter positum RS describatur. Ergo erit (per part. 1. hui.) AKB: CLD = FM: RS. Hinc FM: GN = ϕ FM: RS. Est ergo β RS β . 9. 5. = GN, & hinc (per Lemma sequens) QR = GH, ideoque AB: CD = γ EF: GH. Q. E. D. γ . 7. 5.

L E M M A.

Si rectilinea GN, RS similia & aequalia sunt: homologa ipsorum latera GH, QR inter se sunt aequalia.

Si enim negas: alterutrum veluti QR > GH erit. Et quia est per hyp. QR: QS = GH: HN: erit QS > δ HN. Quare Δ RSQ ipsi δ . 14. 5. GNH impositum non congruet, sed maius erit. Est autem ϵ Rectil. SR: Rectil. GN = Δ RSQ: ϵ . 20. 6. Δ GNH. Ergo δ esset Rectil. SR > Rectil. neo GN: contra hypothesin. Ergo GH = QR. Q. E. D.

PROP. XXIII. THEOR.



Aequiangula Parallelogramma AC, CF inter se rationem habent ex lateribus compositam
 $AC : CF = (BC : CG) + (DC : CE).$

- Positis BC, CG, quae sunt circa aequales
 a. sch. 15. 1. angulos C, in directum, erit & DCE vna recta.
 Compleatur Pgr. DHGC, & sumta aliqua recta
 2. 12. 6. K, fiat $BC : CG = K : L$, & $DC : CE = L : M$.
 4. 5. def. 6. Erit ergo $K : M = (K : L) + (L : M) =$
 $(BC : CG) + (DC : CE)$. Iam quum fit $K : L$
 7. 1. 6. $= BC : CG = AC : CH$, & $L : M = DC : CE$
 $= CH : CF$: erit ex aequo $K : M = AC : CF$.
 1. 11. 5. Quare $AC : CF = (BC : CG) + (DC : CE)$.
 Q. E. D.

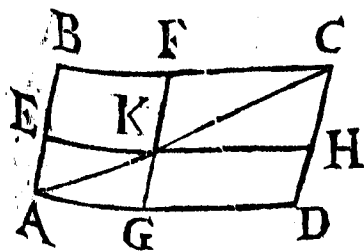
* Scholia.

1. Hinc & ex 34. 1. patet primo, triangula BDC
 CEG, quae vnum angulum (ad C) aequalem habent,
 esse in ratione composita laterum $(BC : CG) + (DC : CE)$ aequalem angulum continentium.
 2. Patet rectangula AD $\times$ DO, GC $\times$ CP, ac
 2. 35. 1. proinde Pgra quaecunque AC, CF, & triangula
 3. 34. 1. BCD, CEG, rationem inter se habere compositam ex
 rationibus basium & altitudinum, sc. $(AD : CG) +$
 $(DO : CP)$.
 3. Patet, quomodo triangulorum ac parallelogram-
 morum ratio exhiberi possit. Sunt Pgra. AC, CF, quo-
 rum bases AD, CG, altitudines vero DO, CP. Fiat
 $CP : DO = AD : Q$: erit $AC : CF = (AD \times$
 4. 16. 6. $DO : GC \times CP = Q \times CP : GC \times CP) =$
 $Q : GC$.

4. Patet

4. Patet via *dimetiendi propositum parallelogram-
mum CF, vel triangulum.* Sumatur pro vnitate
quoduis quadratum, cuius latus sit K; quaeratur
ratio basis CG, & ratio altitudinis CP ad latus K,
e. gr. sit $CG = 2 K$, & $CP = 3 K$; multiplicen-
tur hi numeri per se inuicem: dico fore $CF = 6$
Kq. Nam $CF: Kq = (CG: K) + (CP: K) =$
 $(2: 1) + (3: 1) = 6: 1$. Ergo $CF = 6 Kq$. v. 5. def. 6.
Hinc ΔCEG erit 3 Kq.

PROP. XXIV. THEOR.



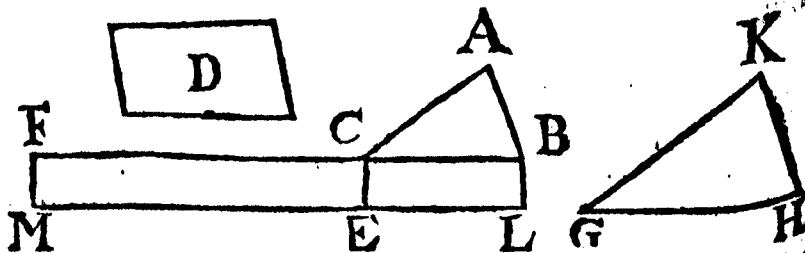
*Omnis parallelogrammi
ABCD quae circa diame-
trum AC sunt parallelo-
gramma EG, HF sunt si-
milia toti & inter se.*

Nam, quia EH ad CB parallela, est $\angle BE$:
 $EA = CK: KA$. Et quia GF, CD parallelae
sunt, est $\angle CK: KA = DG: GA$. Ergo $\angle BE: \angle$ 2. 6.
 $EA = DG: GA$, & componendo π $BA: AE$ o. 11. 5.
 $= DA: AG$, & alterne π $BA: AD = EA: AG$ π . 18. 5.
id est latera circum angulum communem BAD
proportionalia sunt. Porro quia triangu-
la GAK, KAE triangulis CAD, CAB aequiangu-
la^a sunt: erit & totum Pgr. EG toti ABCD σ . 29. 1.
aequiangulum, & π circum aequales angulos τ . 4. 6.
D, G, erit $AD: DC = AG: GK$; circum ae-
quales autem B, E, $AB: BC = AE: EK$; deni-
que ob eandem rationem $DC: CA = GK: KA$,
& $CA: CB = KA: EK$, ideoque ex aequo $DC:$
 $CB = KG: EK$ circum aequales angulos BCD,
EKG. Ergo Pgra. ABCD, EG similia^a sunt. v. 1. def. 6.
Idem eodem modo de Pgris. ABCD & FH
ostenditur. Ergo etiam ipsa GE, HF similia^a sunt. ϕ . 21. 6.
Q.E.D. K 5 * Coroll.

* *Coroll.* Hinc pgra, quae vnum angulum vni angulo aequalem & circum eos proportionalia latera habent, similia sunt.

PROP. XXV. PROBL.

Dato rectili eo ABC simile & alteri dato D aequale idem constituere.



α. 44. vel
45. 1.

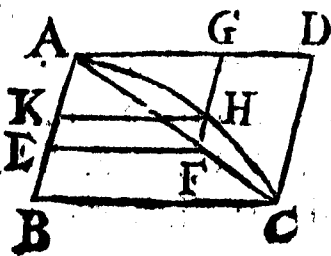
ψ. 13. 6.
ω. 18. 6.

Applicetur α ad rectam BC rectilineo ABC aequale Pgr. BE, ad rectam vero CE dato D aequale Pgr. CM, in angulo $FCE = CBL$. Sumatur inter BC, CF media ψ proportionalis GH, a qua describatur α rectilineum KHG ipsi ABC simile & similiter positum. Dico etiam esse $KHG = D$.

α. constr.
β. 29. 1.
γ. 14. 1.
δ. 1. 6.
ε. 2. cor.
20. 6.
ζ. 11. 5.
η. 9. 5.

Nam quia ang. $FCE + ECB = α BCE + ECB = β$ 2. rectis: erunt BC, CF in γ directum, itemque LE, EM. Quare δ $BC : CF = BE : CM = α ACB : D$. Iam quum sit α $BC : GH, CF : est BC : CF = ε ABC : KHG$. Ergo $ABC : KHG = ζ ABC : D$, & hinc η $KHG = D$. Q. E. F.

PROP. XXVI. THEOR.

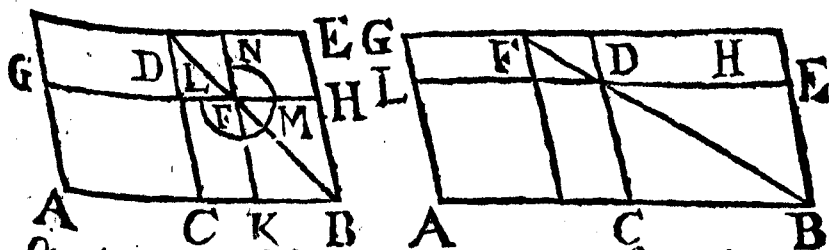


Si a parallelogrammo AB CD parallelogrammum AE FG auferatur simile toti, & similiter positum, communem cum ipso angulum DAB habens:

bens : circa eandem diametrum AC est cum toto.

Si negas: sit AHC diameter Pgrⁱ ABCD secans GF extra F, vt in H, & ducatur ipsi AD vel BC parallela HK. Erit⁹ ergo Pgr. GK si- 2. 24. 6.
mile toti ABCD, & hinc DA:AB = GA:AK. " 1. def. 6.
Sed quia ponitur Pgr. GE ~ ABCD: est quo-
que DA:AB = GA:AE. Ergo GA:AK
= GA:AE, hinc AK = AE. Q. F. N. x. 11. 5.
A. 9. 5.

PROP. XXVII. THEOR.

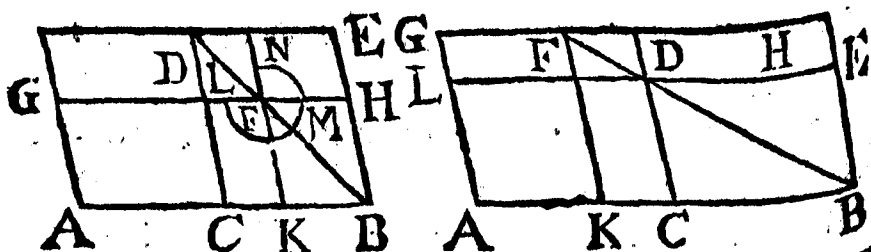


Omniū parallelogrammorum AF secundum eandem rectam lineam AB applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis KH, similibus & similiter positis ei CE, quae a dimidia CB describitur, maximum est AD, quod ad dimidiam AC est applicatum, simile existens defectui KH.

Ducatur ipsius KH diameter FB, & ipsius CE diameter DB, & describatur figura. Et quia KH ~ CE, diametri illorum^u FB, BD μ. 26. & coincident. Iam

Cas. 1. Sit AK > AC. Quoniam^r CF = v. 43. 1.
FE: erit, addito KH communi, CH = KE.
Ergo CG = CH = KE, & addito CF com- ξ. 36. 1.
muni, AF = gnom. LMN. Atqui AD =
CE > gnomone LMN. Ergo AD > AF.
Q. E. D.

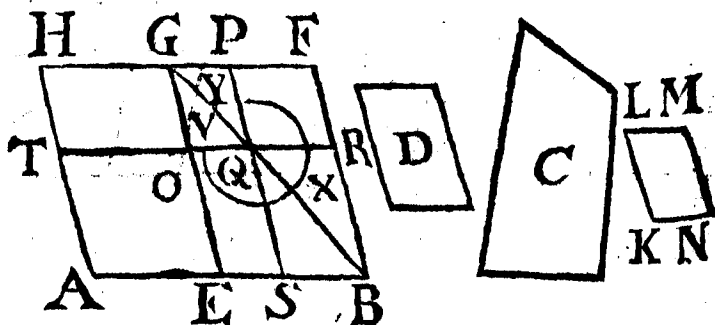
Cas.



v. 43. 1.
 §. 36. 1.
 o. 34. 1.

Cas. 2. Sit $AK < AC$. Quia $CB = AC$:
 erit $ED = \circ DL$, & hinc $DH = \xi DG > FL$.
 Ergo $DK = ' DH > FL$: & communi LK ad-
 dito, $AD > AF$. Q. E. D.

PROP. XXVIII. PROBL.



*Ad datam rectam lineam AB dato rectilineo
 Cacuale parallelogrammum applicare, deficiens
 figura parallelogramma, quae similis sit alteri
 datae D: oportet autem datum rectilineum C,
 cui aequale applicandum est, non maius esse eo,
 quod ad dimidiam AB applicatur, similibus ex-
 sistentibus defectu eius, quod ad dimidiam AB
 applicatur, & parallelogrammo D, cui oportet
 simile deficere.*

π . 10. 1.
 §. 18. 6.

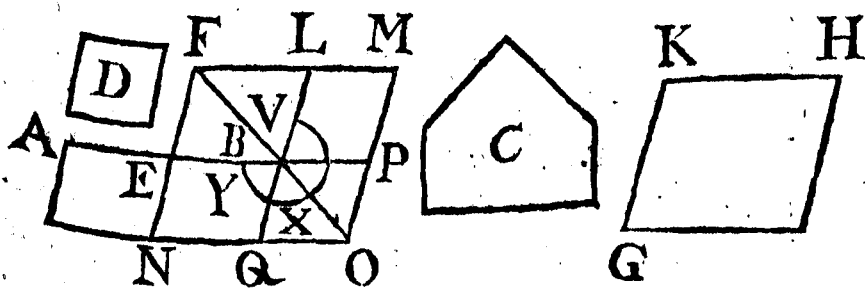
Biseca π AB in E, & ab ipsa EB fac $Pgr. EF$
 ipsi D simile & similiter positum, & comple
 Pgr. AG. Iam si $AG = C$: factum est quod
 proponebatur.

Si

Si vero non sit $AG = C$; quum non possit esse $AG < C$: erit $AG > C$. Igitur fac pgr. $KLMN = AG - C$ & simile similiterque positum ipsi D vel FE , ita ut ML, FG sint homologa latera, item LK & GE . Deinde pone $GO = LK$, & $GP = LM$, comple pgr. $GOQP$, produc PQ in S , & OQ in T & R . Dico esse pgr. $TS = C$, & deficere pgro. $SR \sim D$.

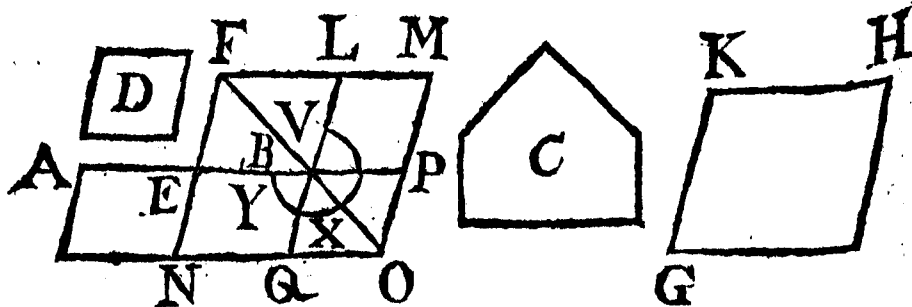
Nam quia pgr. $EF \sim KM$, & FG homologum ipsi ML , GE vero ipsi LK : erit $\angle$ ang. $FGE = MLK$. Est autem præterea $PG = ML$, & $GO = LK$: ergo pgr. $OP = \propto$ & $\sim KM$, & $\sim EF$. Quia præterea $OP = KM < AG$ vel EF : erit OP circa eandem diametrum GQB cum toto EF . Quare $FQ = EQ$, & communi SR addito, $FS = ER = TE$, & communi OS addito, gnomon $VXY = TS$. Est autem gnom. $VXY + OP = EF = AG = KM + C$; & $OP = KM$: ergo gnom. $VXY = C$. Quare $TS = C$. Deficit autem TS pgro. $SR \sim EF \sim D$. Q. E. D.

PROP. XXIX. PROBL.



Ad datam rectam lineam AB dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicare, excedens figura

figura parallelogramma, quae similis sit alteri datae D.



3. 10. 1.

5. 18. 6.

2. 25. 6.

Biseca AB ^d in E, & ab EB describe ^r ipsi D simile & similiter positum pgr. EBLF. Fac GH ipsi EL simile & similiter positum ^r & ipsis EL + C aequale, ita quidem vt KH homologa sit ipsi FL, & KG ipsi FE. Postea in productis FL, FE, cape FM = KH & FN = KG, comple pgr. FMON, & produc AB in P, & LB in Q. Dico AO = C, & excedere pgr. QP simili ipsi D.

7. constr.

9. 1. def. 6.

4. 8. ax. &

cor. 24. 6.

11. 21. 6.

7. 26. 1.

Nam quia ^r EL ~ GH, & FL, KH homologa sunt latera, ac FE, KG etiam homologa: ang. EFL = ^r K. Sed FM = ^r KH, & FN = ^r KG: ergo NM = & ~ ^r GH. Quare & EL ~ ^r NM. Et est EL < NM, quia NM, = GH = ^r EL + C. Quare ^r EL cum toto NM circa eandem diametrum FBO consistit. Ergo NM = EL + gnom. VXY. Erat vero & NM = EL + C: erit igitur C = gnom. VXY. Porro quia ^r AN = EQ = ^r EP: addito communi NP, erit AO = gnom. VXY. Vnde patet esse AO = C. Excedit autem AO parallelogrammo QP ~ ^r EL ~ ^r D. Q. E. F.

11. 36. 1.

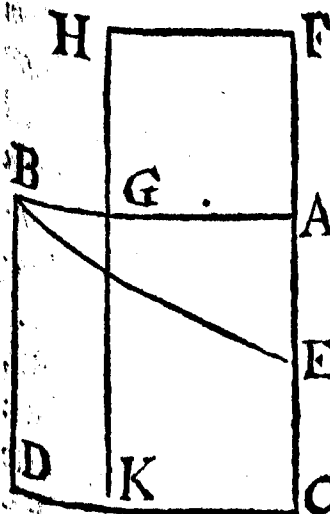
7. 43. 1.

2. 24. 6.

PROP.

PROP. XXX. PROBL.

Datam rectam lineam terminatam AB secundum extremam & mediam rationem secare.



Describe ° ex AB qua- o. 46. 1.
dratum BC, & ° applica ad π. 29. 6.
AC ipsi BC aequale pgr.
CH, excedens figura AH
ipsi BC simili. Dico AB
ita sectam esse in G, vt AG
> GB, & AB: AG = AG:
GB.

Nam quia BC = CH:
erit DG = AH: quare
quum ang. KGB = ° AGH, p. 15. 1.
erit KG: GH = ° AG: GB. Quum autem °. 14. 6.
AH, quadrato BC simile, ipsum sit quadratum:
erit GH = AG. Et GK = ° CA = AB. °. 34. 1.
Est ergo AB: AG = AG: GB, & quum sit AB
> AG, est AG > ° GB. Q. E. F. v. 14. 5.

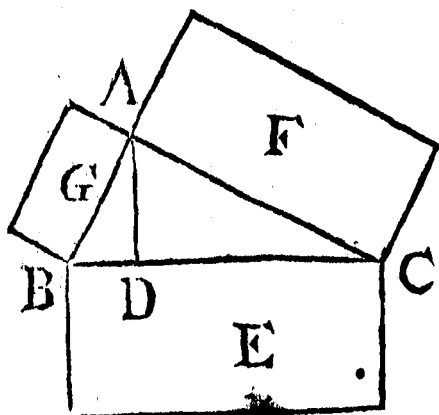
Aliter.

Secetur ° AB in G ita vt AB × BG = φ. 11. 2.
AGq.

Nam quum ergo x sit AB: AG = AG: x. 17. 6.
GB, & AG > GB: erit sic quoque AB se-
cundum extremam & mediam rationem se-
cta ψ. Q. E. F. ψ. 3. def. 6.

PROP.

PROP. XXXI. THEOR.



In rectangulis
triangulis BAC fi-
gura E, quae fit a
latere BC, rectum
angulum A subten-
dente, aequalis est
eis F + G, quae a
lateralibus rectum an-
gulum compren-
dentibus sunt, similibus & similiter descriptis.

α. cor. 8. 6.

β. 2. cor.
20. 6.

γ. 24. 5.

δ. sch. 14. 5.

Duc perpendicularem AD: & erit $\alpha \div \div BC$,
BA, BD, item $\div \div BC$, CA, DC. Hinc βBC :
BD = E: G, & BC: DC = E: F, vel inverte
DC: BC = F: E, & BD: BC = G: E. Er-
go $\gamma BD + DC: BC = F + G: E$. Sed BD
+ DC = BC: ergo $\delta F + G = E$. Q.E.D.

Aliter.

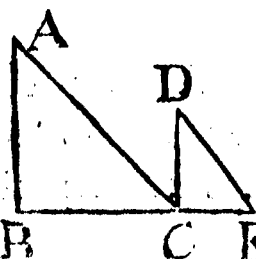
α. 1. cor.

20. 6.

ζ. 47. 1.

$F: E = (CA: BC)^2 = CAq: BCq$, & G
 $E = (AB: BC)^2 = ABq: BCq$. Ergo γF
+ G: E = CAq + ABq: BCq. Sed CAq
+ ABq = ζBCq . Ergo $F + G = \delta E$.

PROP. XXXI. THEOR.



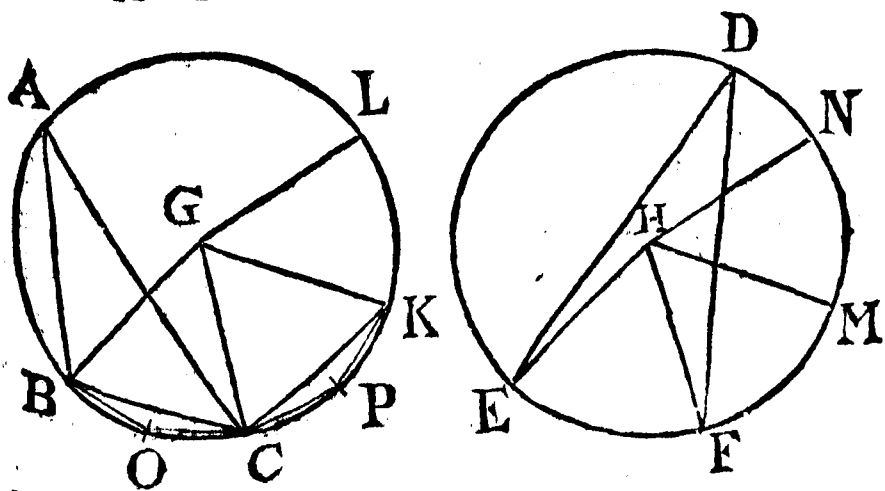
Si duo triangula ABC,
DCE, quae duo latera duobus
lateralibus proportionalia ha-
bent. (BA: AC = CD: DE)
componentur secundum unum
angulum ita, ut homologa latera ipsorum BA &
CD, item AC & DE, sint parallela: reliqua trian-

triangulorum latera BC, CE in directum sibi invicem erunt.

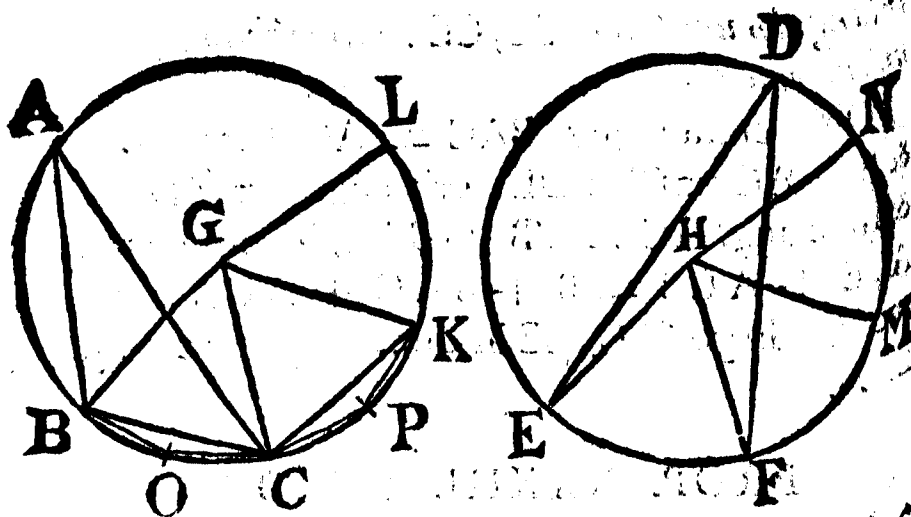
Quia enim $\angle BAC = \angle ACD = \angle CDE$,
 & $BA : AC = CD : DE$; erit $\angle B = \angle DCE$,
 & hinc $\angle ACE = \angle B + \angle BAC$, ideoque $\angle ACE + \angle ACB = \angle B + \angle BAC + \angle ACB =$
 rectis. Ergo $\angle BC, CE$ in directum erunt. Q. 2. 14. 1.
 E. D.

PROP. XXXIII. THEOR.

In circulis aequalibus ABC, DEF anguli eandem habent rationem, quam circumferentiae BC, EF, quibus insistant, siue ad centra G, H, ut BGC, EHF, siue ad circumferentias, ut BAC, EDF, insistant; adhuc etiam & sectores GBC, HEF, quippe qui ad centra sunt constituti.



1. Sint circumferentiae BC deinceps quot-
 unque aequales CK, KL, & ipsi EF rursus to-
 tidem aequales FM, MN. Iungantur GK, GL,
 HM, HN. Erit ergo $\angle BGC = \angle CGK$
 $= \angle KGL$. Hinc circumferentia BKL & ang.
 BGL aequae multiplices erunt circumferentiae
 BC



BC & anguli BGC. Eadem ratione circumf.
EMN & ang. EHN aequae erunt multiples
circumferentiae EF & anguli EHF. Et si circ.
BKL $>$, $=$, $<$ circ. EMN: erit quoque ang.
BGL $>$, $=$, $<$ ang. EHN. Ergo circ. BC
μ. 5. def. 5. circ. EF $=$ ang. BGC: ang. EHF $=$ ang.
ν. 15. 5. BAC: ang. EDF. Q. E. D.
& 20. 3.

2. Iungantur BC, CK, & sumtis in circum-
ferentiis BC, CK, punctis O, P, iungantur
BO, OC, CP, PK. Et quia ang. BGC $=$ CGK,
& BG $=$ CG, & CG $=$ GK: est $\triangle$ BGC $\cong$
ξ. 4. 1. $\triangle$ CGK, & basis BC $=$ CK. Et quum sit circ.
BC $=$ circ. CK: erit & reliqua BAKC $=$ re-
λ. 27. 3. liquae CALK, & ergo ang. BOC $=$ CPK, &
o. 11. def. 3. segmentum BCO $\sim$ segm. CKP. Quare
quum haec segmenta sint super aequales rectas
π. 24. 3. BC, CK: aequalia erant. Erant vero & $\triangle$ BGC,
BGC, CGK aequalia: ergo totus sector GBC
 $=$ GCK. Similiter ostenditur sector GKL $=$
GCK $=$ GBC, & sector HMN $=$ HFM $=$
EHF. Quam multiplex ergo circ. BKL cir-
cumferentiae BC, tam multiplex est sector GBL
sectoris

sectoris GBC; & quam multiplex circ. EMN
 circ. EF, tam multiplex sector HEN sectoris
 HEF; & ex modo ostensis, si circumf. BCL
 $\angle =$, $\angle$ circ. EMN, est quoque sector GBL
 $\angle =$, $\angle$ sectore HEN. Ergo circumf. DC:
 circ. EF $\equiv$ sector GBC: sect. HEF. Q. E. D.

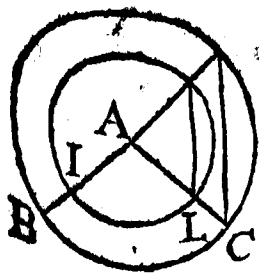
Corollar.

Peripicuum etiam est, ut sector ad sectorem, ita p. n. 5.
 esse angulam ad angulam.

** Schol.*

1. Hinc ang. BGC ad centrum est ad 4 rectos,
 ut arcus BC ad totam peripheriam. Nam ang. BGC
 ad rectum, ut arcus BC ad quadrantem. Ergo
 BGC ad 4. rectos ut arcus BC ad 4 quadrantes seu
 totam circumferentiam. (sch. 4. 5.)

Item ang. ad peripheriam A est ad 2 rectos, ut
 arcus BC ad totam peripheriam.



2. Inaequalium circulorum
 arcus IL, BC, qui aequales sub-
 tendunt angulos, siue ad centra, ut
 IAL & BAC, siue ad periphe-
 rias, sunt similes: Et vice
 versa, arcus similes aequales an-
 gulos subtendunt.

Nam IL: periph. $\equiv$ ang. IAL (vel BAC): 4
 Rect; item arc. BC: periph. $\equiv$ ang. BAC: 4 Rect:
 ergo IL: periph. $\equiv$ BC: periph. Proinde arcus
 IL & BC sunt similes. Vnde

3. Duae semidiametri AB, AC a concentricis pe-
 ripheriis arcus auferunt similes IL, BC.

4. Hisce innititur vulgaris ratio angulos metiendi per arcus, qui illos subtendunt. Si enim, datis toti circumferentiae omnis circuli aliquot partibus scilicet 360, qui *gradus* vocantur, disquiritur ope instrumenti goniometrici, quot gradus sint in arcu BC, quot sint in arcu EF: patet per prop. 3. rationem angulorum BGC, EHF, quos hi arcus subtendunt, in numeris exhiberi posse. Et si vnus angulus IAL consideratur, & numerus graduum in arcu ad eum pertinente IL vel BC inuentus est: constat ratio anguli IAL ad 4 Rectos, per schol. 4. Sit e. gr. numerus graduum in Arcu IL = 100⁰ erit IAL: 4 Rect. = 100: 360.



E V C L I D I S

E L E M E N T O R V M

L I B E R V I I .

DEFINITIONES.

1. *Vnitas* est, secundum quam vnumquodque eorum, quae sunt, vnum dicitur.

2. *Numerus* autem, ex vnitatibus constans multitudo.

3. *Pars* est *numerus numeri*, minor maioris, quum minor metitur maiorem.

* Omnis pars ab eo numero nomen sibi sumit, per quem ipsa numerum, cuius est pars, metitur: vt 4 dicitur pars tertia numeri 12, quia eum metitur per 3. Hinc 3 dicitur eadem pars numeri 6 quae 5 numeri 10, quia 3 & 5 ipsos 6 & 10 per eundem numerum 2 metiuntur, vel in ipsis aequae multoties continentur.

4. *Partes* autem, quando non metitur.

* Partes quaecunque nomen accipiunt a duobus illis numeris, per quos maxima communis duorum numerorum mensura vtrumque eorum metitur; vt 10 dicitur $\frac{2}{3}$ numeri 15, eo quod maxima communis mensura, nempe 5 metitur 10 per 2, & 15 per 3. Eadem partes est numerus 4 numeri 6, quae numerus 10 ipsius 15; si numeri 4, 10 aequali multitudine continent duo numeros 2, 5, qui ipsorum 6, 15 eadem pars sunt,

5. *Multiplex* est maior minoris, quando minor maiorem metitur.

6. *Par numerus* est, qui bifariam diuiditur (vt 8).

7. *Impar* vero, qui bifariam non diuiditur vel qui a pari numero vnitatem differt (vti 9).

8. *Pariter par numerus* est, quem par numerus per parem numerum metitur (vti 16).

9. *Pariter vero impar* est, quem par numerus per numerum imparem metitur (vt 6).

10. *Impariter vero impar numerus* est, quem impar numerus per numerum imparem metitur (vt 15).

11. *Primus numerus* est, quem vnitas sola metitur (vt 3).

12. *Primi inter se numeri* sunt, quos sola vnitas, communis mensura, metitur (vt 5, 7).

13. *Compositus numerus* est, quem numerus aliquis metitur (9).

14. *Compositi inter se numeri* sunt, quos numerus aliquis, communis mensura, metitur (6, 8).

15. *Numerus numerum multiplicare* dicitur, quando, quot vnitates sunt in ipso, toties componitur multiplicatus, & aliquis gignitur.

* Numerum A per numerum B multiplicandum esse, sic indicamus, vt literas A, B coniungamus. Hinc AB notat numerum productum ex A per B multiplicato. In numeris productus scribitur sic 2×3 .

16. Quando duo numeri sese multiplicantes aliquem fecerint, qui factus est *planus* appellatur; *Latera vero ipsius*, numeri sese multiplicantes. (10 est planus, latera eius sunt 2 & 5).

17. Quan-

17. Quando autem tres numeri sese multiplicantes aliquem fecerint: factus *solidus* appellatur; *latera vero ipsius*, numeri sese multiplicantes. (30 est solidus, latera ipsius sunt 2, 3, 5).

18. *Quadratus numerus* est, qui aequaliter aequalis; vel qui sub duobus aequalibus numeris continetur.

* Sit A latus: quadratus numerus, id est AA, sic scribitur A^2 . Item 9, id est 3×3 , sic 3^2 .

19. *Cubus* vero, qui aequaliter aequalis aequaliter; vel qui sub tribus aequalibus numeris continetur.

* Sit A latus: cubus numerus scribitur sic A^3 , id est AAA. Item $3 \times 3 \times 3$, id est 27, est cubus, qui sic designatur 3^3 .

20. *Numeri proportionales* sunt, quando primus secundi, & tertius quarti aeque multiplex est, vel eadem pars, vel eadem partes. (* e. gr. $12 : 3 = 8 : 2$; $2 : 6 = 5 : 15$; $10 : 15 = 12 : 18$; $8 : 6 = 16 : 12$). *

21. *Similes plani & solidi numeri* sunt, qui latera habent proportionalia.

* E. gr. $6 \sim 24$; quia $2 : 3 = 4 : 6$. Item solidus $30 \sim$ solido 240; quia $2 : 3 = 4 : 6$ & $3 : 5 = 6 : 10$.

22. *Perfectus numerus* est, qui suis ipsius partibus est aequalis.

* Sic $6 = 1 + 2 + 3$ est perfectus. Numerus vero, qui suis ipsius partibus minor est *abundans* appellatur, ut 12. Qui vero maior, *diminutus*, ut 15.

23. *Numerus numerum metiri* dicitur per illum numerum, a quo multiplicatus, illum producit.

In diuisione unitas est ad quotientem, ut diuidens ad diuifum. Nota, numerum alteri lineola teriecta subscriptum diuifionem denotare. Sic est A diuifus per B, item $\frac{CA}{B}$ est C in A diuifus per B.

** Postulata.*

1. Postuletur, cuilibet numero quotlibet sumi posse aequales, vel multiplices.
2. Quolibet numero sumi posse maiorem.
3. Additio, subtractio, multiplicatio, diuifio, extractionesque radicum seu laterum ex numeris quadratis seu cubis concedantur etiam, tanquam possibilis.

** Axiomata.*

1. Quicquid conuenit vni aequalium numerorum, conuenit & reliquis aequalibus numeris.
2. In omni additione, subtractione, multiplicatione, vel diuisione toti numero singulae suae partes simul sumtae substitui possunt.
3. Qui numeri aequalium numerorum, vel eundem, eadem partes fuerint, aequales inter se sunt.
4. Quorum idem numerus, vel aequales, eadem partes fuerint, aequales inter se sunt.
5. Maioris pars parte eadem minoris maior est.
6. Unitas omnem numerum per unitates, quae in ipso sunt, hoc est per ipsummet numerum, metitur.
7. Omnis numerus se ipsum metitur per unitatem.
8. Si numerus, numerum multiplicans, aliquem produxerit: multiplicatus metietur eundem per unitates in multiplicante, vel per ipsum multiplicantem (def. 15. & 23).

Hinc nullus numerus primus planus est, vel solidus, vel quadratus, vel cubus.

9. Si numerus, numerum metiens, ab eo, per quem metitur, multiplicetur: illum, quem metitur, producit.

10. Numerus, quocunque numeros metiens, compositum quoque ex ipsis metitur.

11. Numerus, quemcunque numerum metiens, metitur quoque omnem numerum, quem ille metitur.

12. Numerus metiens totum, & ablatum, metitur & reliquum.

13. Numerus numerum metiens eodem maior esse non potest.

14. Numerus, pariter metiens totum, dimidium quoque metitur.

15. Quae rationes eidem eadem sunt, & inter se sunt eadem (def. 20).

16. Si quatuor numeri proportionales sunt, inverse quoque sunt proportionales.

PROP. I. THEOR.

B.....F..H.A. Si duobus numeris inaequalibus AB, CD expositis, detracto semper minore de maiore (CD de BA, & reliquo FA de DC), reliquis GC minime metiatur praecedentem, quoad assumpta fuerit unitas HA: numeri a principio positi AB, CD primi inter se erunt.

Si negas: metietur α eos aliquis numerus, qui sit E. Quia CD metitur β BF: & E ipsum BF γ metietur, ergo & δ reliquum FA. Sed FA metitur β DG: ergo & γ E metitur DG, ideoque etiam reliquum δ GC. Sed GC metitur β FH:

L 5

α . 12. def. 7.

β . hyp.

γ . 11. ax. 7.

δ . 12. ax. 7.

β FH: quare E quoque⁷ metitur FH. Metiebatur autem E totum FA: ergo metitur & reliquam⁸ HA vnitatem. Ergo E maior non
 6. 13. ax. 7. 2. 2. def. 7. est⁹ vnitatem. Q. E. A §.

PROP. II. PROBL.

Duobus numeris datis AB, CD, non primis inter se, maximam eorum communem mensuram inuenire.

A.....B *Cas. 1.* Si CD metitur AB: quum
 C...D etiam se ipse metiatur; erit CD
 ipforum CD, AB communis mensura, & maxima quidem, quia nullus maior ipso CD eum metitur.

A....E.....B *Cas. 2.* Si CD non meti-
 C...F....D tur AB: detrahe semper mi-
 G--- norem de maiore, CD de AB, quoties fieri potest, & reliquum AE de CD similiter, & sic porro, quoad relinquatur aliquis numerus CF metiens praecedentem AE. Dico fore CF numerum, qui maxima est communis mensura ipforum AB, CD.

Nam primo, semper relinqui aliquem CF, qui metiatur praecedentem, & qui non sit
 * 1. 7. vnitas, patet ex eo, quod, si secus esset,
 numeri AB, CD primi inter se essent; contra hypothesin. Deinde quia CF metitur AE,
 9. 11. ax. 7. AE vero FD: metietur &⁹ CF ipsum FD.
 4. 7. ax. 7. CF autem se ipsum quoque¹ metitur: ergo
 8. 10. ax. 7. CF metitur² CD. At CD ipsum BE meti-
 tur; ergo³ CF eundem BE, ideoque⁴ & AB
 meti-

metitur. Quare CF est communis mensura.
 Si maximam esse negas: sit maior quaedam G.
 Ergo G metiens CD, metitur⁹ BE, & [^] reli- A. 12. ax. 7.
 quum AE, ipsumque⁹ DF; proinde & reli-
 quum [^] CF, maior minorem. Q. E. A¹⁴. Qua- 14. 13. ax. 7.
 re numerus CF est maxima communis mensu-
 ra datorum. Q. E. F.

Coroll.

*Hinc numerus, duos numeros metiens, & ma-
 ximam eorum communem mensuram metitur.*

PROP. III. PROBL.

*Tribus datis numeris A, B, C, non primis
 inter se, maximam ipsorum communem mensu-
 ram inuenire.*

A 8
 B 6
 C 4
 D 2
 1. Sume duorum A, B maximam
 communem mensuram D: & si D me-
 titur C, erit communis trium mensu-
 ra, & maxima quidem. Si qua enim
 esset maior: metiretur eadem⁹ nume- 9. cor. 2. 7.
 rum D. Q. E. A⁵. 5. 13. ax. 7.

A 18.
 B 12.
 C 4.
 D 6.
 E 2.
 2. Si vero D non metitur C: fu-
 me ipsorum C, D maximam⁶ com- 6. 9. 7.
 munem mensuram E; quod fieri pot-
 est, quia C, D primi inter se esse ne-
 queunt, utpote quos idem numerus
 metietur, qui ipsos A, B, C metiri 7. cor. 2. 7.
 ponitur. Dico E esse maximam communem
 mensuram trium A, B, C.

Nam E metiens D, metitur quoque⁹ A, & 9. 11. ax. 7.
 B; & quia⁶ metitur C, metitur singulos A, B, C. 6. const.
 At nullus maior quam E eosdem metitur. Si
 quis

quis enim maior eos metiretur: idem meti-
 π. cor. 2. 7. retur^π etiam D & C, ideoque^π etiam E. Q
 π. 13. ax. 7. E. A^π.

Corollar.

Hinc, si numerus numeros tres metiatur: &
 ipsorum maximam communem mensuram metitur.

Schol.

Eodem modo & pluribus numeris datis, ma-
 ximam communem mensuram inueniemus.

PROP. IV. THEOR.

*Omnis numerus BC omnis numeri A, minor
 maioris, vel pars est vel partes.*

Cas. 1. Si A, BC primi sunt inter se.
 A.....
 B...C Quia vnaquaeque vnitatum, quas
 u. 3. def. & continet BC, est^v pars numeri A: BC
 6. ax. 7. ipsius A partes esse patet. Q. E. D.

*Cas. 2. Si A' & BC non sunt
 primi inter se: aut BC metitur A,
 φ. 3. def. 7. B...E...F...C & tunc φ pars ipsius est; aut non
 D... metitur. Quo in casu sume eo-
 rum maximam x communem mensuram D, &
 x. 2. 7. diuide BC in numeros BE = EF = FC = D.
 ψ. 1. ax. 7. Et quia D est φ pars ipsius A: erit ψ quoque
 tam BE, quam EF, quam FC pars ipsius A, &
 ergo totus BC partes ipsius A erit. Q. E. D.*

PROP. V. THEOR.

*Si numerus A numeri BC pars
 fuerit; & alter D alterius EF
 B...G...C eadem pars: & uterque A + D
 D.... utriusque BC + EF eadem pars
 E....H....F erit, quae unus A unius BC.*

Nam

Nam diuifus^a fit BC in numeros BG, GC ipfi ^{a. 3. post. 7.}
 A, EF vero in numeros EH, HF ipfi D aequa-
 les: & erit multitudo^a numerorum BG, GC ^{a. 3. def. 7.}
 aequalis multitudini numerorum EH, HF; & ^{& hyp.}
 ergo aequalis multitudini numerorum BG
 + EH, GC + HF. Sed BG + EH =^β A ^{β. 2. ax. 1.}
 + D = GC + HF; & BG + EH + GC +
 HF = BC + EF: ergo BC + EF conftat ex
 tot numeris, ipsis BG + EH, vel A + D ae-
 qualibus, ex quot ipfi BG, vel A aequalibus
 conftat BC. Hinc ipfos BC + EF & BC nu-
 meri A + D & A per eundem numerum ^{γ. 15. & 23.}
 metiuntur. Ergo^δ A + D numeri BC + EF ^{def. 7.}
 eadem pars eft, quae A ipfius BC. Q. E. D. ^{δ. 3. def. 7.}

PROP. VI. THEOR.

A...G...B Si numerus AB numeri C
 C..... partes fuerit; & alter DE al-
 D...H....E terius F euedem partes: &
 E..... vterque AB + DE vtriusque
 C + F eadem partes erit.

quae vnus AB vnus C.

Diuide AB in ipfius C partes AG, GB; DE
 vero in ipfius F partes DH, HE. Quia AB
 tot continet partes ipfius C, quot DE conti-^{a. hyp.}
 net partes ipfius F: eft multitudo partium
 AG, GB = multitudini ipfarum DH, HE. Et
 quum^a eadem pars fit AG ipfius C, quae DH
 ipfius F: & vterque AG + DH vtriusque C ^{2. 5. 7.}
 + F eadem pars eft, quae AG ipfius C. Simili
 ratione GB + HE ipfius C + F eadem pars
 eft, quae GB ipfius C. Quare quum AG +
 DH

$A \dots G \dots B$ $DH + GB + HE = AB +$
 $C \dots \dots \dots$ $DE, \& AG + DH = GB +$
 $D \dots H \dots E$ $HE, \& multitudo ipforum AG$
 $F \dots \dots \dots$ $+ DH, GB + HE aequalis mul-$
 titudini ipforum AG, GB: pa-
 tet, $AB + DE$ vtriusque $C + F$ easdem esse
 partes, quas AB ipsius C. Q. E. D.

PROP. VII. THEOR.

$A \dots E \dots B$ Si numerus AB nu-
 $G \dots C \dots F \dots D$ meri CD fuerit pars,
 quae ablati AE ablati
 CF: & reliquus EB reliqui FD eadem pars
 erit, quae totus AB totius CD.

Quae enim pars est AE ipsius CF, eadem sit
 EB ipsius CG: ergo & AB ipsius FG eadem
 pars erit. Sed AB ipsius CD eadem pars
 erat, quae AE ipsius CF: ergo AB ipsius FG
 eadem pars est, quae ipsius CD. Quum er-
 go $FG = CD$, & hinc $CG = FD$: patet
 esse EB ipsius FD eandem partem, quae AE
 ipsius CF, vel quae est AB ipsius CD. Q. E. D.

n. 5. 7.

9. hyp.

6. 4. ax. 7.

x. 3. ax. 1.

a. 1. ax. 7.

& constr.

PROP. VIII. THEOR.

$A \dots L \dots E \dots B$ Si numerus
 $C \dots \dots \dots F \dots D$ AB numeri CD
 $G \dots M \dots K \dots N \dots H$ fuerit partes,
 quae ablati
 AE ablati CF: & reliquus EB reliqui FD ead-
 dem partes erit, quae totus AB totius CD.

Ponatur enim numero AB aequalis GH:
 ergo GH numeri CD eadem partes est, quae
 AE ipsius CF. Diuidatur GH in partes GK,
 KH

u. 1. ax. 7.

n. 3. post. 7.

KH numeri CD, AE vero in partes AL, LE numeri CF: aequalis ergo erit multitudo partium GK, KH multitudini partium AL, LE. Et quia^z AL ipsius CF eadem pars est, ^{ξ. constr. & hyp.} quae GK ipsius CD; & $CD > CF$: erit^o $GK > AL$. Sume $GM = AL$. Quae ergo ^{o. 5. ax. 7.} pars est GK ipsius CD, eadem est GM ipsius ^{π. 7. 7.} CF, & eadem ergo ^π MK ipsius FD. Sume $KN = LE$: & eodem modo patet, quae pars est KH numeri CD, eandem esse NH ipsius FD. Quare quae partes est $GK + KH$, id est AB, ipsius CD, eadem partes est $MK + NH$, id est^e EB, ipsius FD. Q. E. D. ^{p. 3. ax. 1.}

PROP. IX. THEOR.

A.... Si numerus A numeri BC
B....G....C pars fuerit, & alter D alie-
D..... rius EF, eadem pars: & per-
E....H.....F mutando, quae pars est vel
partes primus A tertii D, ea-
dem erit pars vel eadem partes & secundus
BC, quarti EF.

Sit $A < D$, & sit $BG = GC = A$, & $EH = HF = D$: multitudo ergo partium BG, GC aequalis erit multitudini partium EH, HF. Et quia $BG = GC$, & $EH = HF$: quae pars est BG ipsius EH vel partes, eadem^π pars erit ^{o. 1. ax. 7.} & GC ipsius HF vel eadem partes. Ergo ^{π. 5. & 6. 7.} quae pars vel partes est BG, id est A ipsius EH, id est D, eadem pars vel eadem partes erit $BG + GC$, id est BC, ipsius $EH + HF$, id est EF. Q. E. D.

* Schol.

* Schol.

Si ergo duo numeri duos numeros aequaliter metiuntur: illi cum his eandem rationem habent.

PROP. X. THEOR.

A...G...B

C.....

D.....H.....E

F.....

Si numerus AB numeri C partes fuerit, & alter DE alterius F eadem partes: & permutando, quae partes est primus AB tertii DE, vel pars, eadem partes erit & secundus C quarti F, vel eadem pars.

v. hyp.

φ. constr.

& hyp.

x. 9. 7.

4. 5. vel 6. 7.

ω. dem.

Diuide AB in partes numeri C, quae sint AG, GB, & DE in partes ipsius F, quae sint DH, HE: erit multitudo partium AG, GB =^v multitudini partium DH, HE. Et quia^φ AG ipsius C eadem pars est, quae DH ipsius F: erit x AG ipsius DH eadem pars vel eadem partes, quae C ipsius F. Similiter GB ipsius HE erit eadem pars vel eadem partes quae C ipsius F. Quare^ψ erit AG + GB, id est AB, ipsius DH + HE, id est DE, eadem pars vel partes eadem, quae AG ipsius DH, hoc est^ω, quae C ipsius F. Q. E. D.

PROP. XI. THEOR.

A.....E...B

C.....F...D

Si fuerit ut totus AB ad totum CD, ita ablatus AE ad ablatum CF: & reliquus EB ad reliquum FD erit, ut totus AB ad totum CD.

x. 20. def. 7.

Quia enim^α quae pars vel partes est AB ipsius CD, eadem pars vel eadem partes est AE

AE ipsius CF: etiam EB ipsius FD eadem pars
vel eadem partes erit^β, quae AB ipsius CD. ^{β. 7. vel 8. 7.}
Ergo * EB: FD = AB: CD. Q. E. D.

* Si AB & AE ipsorum CD, CF aequae sunt
multiplices: CD ipsius AB eadem pars est, quae
CF ipsius AE. Quare demonstratio etiam ad hunc
casum applicari potest, per ax. 16. 7; quod & in se-
quentibus notandum.

PROP. XII. THEOR.

A...C.... Si quocunque numeri propor-
B...D..... tionales fuerint ($A : B = C : D$):
ut unus antecedentium A ad unum
consequentium B, ita erunt omnes antecedentes
A + C ad omnes consequentes B + D.

Quia enim, γ quae pars est A ipsius B vel ^{γ. 20. def. 7.}
partes, eadem pars eademue partes est C ipsius
D: quae pars vel partes est A ipsius B, eadem
pars vel eadem partes^δ est A + C ipsius B + ^{δ. 5. vel 6. 7.}
D: ideoque γ est $A : B = A + C : B + D$.
Q. E. D.

PROP. XIII. THEOR.

A...C.... Si quatuor numeri propor-
B...D..... tionales fuerint ($A : B = C :$
D): & permutando propor-
tionales erunt ($A : C = B : D$).

Quia enim, * quae pars vel partes est A ip- ^{s. 20. def. 7.}
sius B, talis talesue est C ipsius D: & permu-
tando^ζ quae pars vel partes est A ipsius C, ta- ^{ζ. 9. 7. vel}
lis vel tales est B ipsius D; & ergo * $A : C =$ ^{10. 7.}
B : D. Q. E. D.

* *Schol.* Ergo si quatuor numeri proportionales sunt: etiam conuertendo vel diuidendo proportionales erunt; per hanc & 11. 7.

PROP. XIV. THEOR.

A.....D.... Si fuerint quotcunque numeri A, B, C, & alii ipsis multitudine aequales D, E, F, quibini sumantur & in eadem ratione ($A:B = D:E$, & $B:C = E:F$): etiam ex aequo in eadem ratione erunt ($A:C = D:F$).

11. 13. 7.

Nam permutando $A:D = B:E = C:F$, & iterum permutando $A:C = D:F$. Q. E. D.

PROP. XV. THEOR.

A. D.. Si unitas A numerum aliquem BC metiatur; alter autem numerus D aequaliter metiatur alium aliquem EF: & permutando, unitas A tertium numerum D aequaliter metietur, atque secundus BC quartum EF.

Diuide BC in suas unitates BG, GH, HC, & EF in numeros ipsi D aequales, puta EK, KL, LF. Et quoniam $BG = GH = HC$, & $EK =$

3. hyp. $KL = LF$; unitatum autem multitudo = multitudini numerorum EK, KL, LF: erit $BG:$

1. 12. 7. $EK = GH:HL = HC:LF$; & $BG:EK$, id

20. def. 7. est $A:D = BC:EF$. Ergo * A numerum D aequaliter metitur atque BC ipsum EF. Q. E. D.

PROP.

PROP. XVI. THEOR.

Si duo numeri A, B sese multiplicantes fecerint aliquos C, D: facti ex ipsis C, D inter se aequales erunt.

Si enim A ipsum B multiplicans produxit C: ^{λ. 8. ax. 7.} metitur B ipsum C per vnitates, quae sunt in A. Metitur autem & E vnitas numerum A per vnitates ^{μ. 6. ax. 7.} quae sunt in A. Ergo B ipsum C metitur aequaliter, ac E vnitas ipsum A. Hinc ^{ν. 15. 7.} E ipsum B aequaliter metitur ac A ipsum C. Similiter si B ipsum A multiplicans produxit D: E ipsum B metitur aequaliter, ac A ipsum D. Quare quum ^{ξ. 3. def. 7.} A ipsius D: ^{ο. 4. ax. 7.} eadem pars sit quae ipsius C: patet^ο esse C = D. Q. E. D.

* Cor. 1. Multiplicans metitur factum per multiplicatum.

* Cor. 2. Si numerus B numerum C metiatur: & ille A, per quem metitur, eundem C metietur per ipsum numerum metientem B.

PROP. XVII. THEOR.

Si numerus A duos numeros B, C multiplicans fecerit aliquos D, E: facti ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicati (D: E = B: C).

Nam B metitur D ^{π. 8. ax. 7.} per vnitates in A. Metitur autem & 1 numerum A per vnitates in A. Ergo 1 ipsum A aequaliter metitur ac B ipsum D, & hinc ^{ρ. 20. def. 7.} 1: A = B: D. Eadem ratione ^{σ. 13. 7.} 1: A = C: E. Quare ^{σ. 13. 7.} B: D = C: E, & permutando^σ B: C = D: E. Q. E. D.

* Cor. In multiplicatione est ut unitas ad multiplicantem A, ita multiplicatus B ad factum D.

PROP. XVIII. THEOR.

$A_3 \quad B_4 \quad C_5 \quad D_{15} \quad E_{20}$ Si duo numeri A, B numerum aliquem C multiplicantes, fecerint aliquos D, E: facti ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicantes ($D : E = A : B$).

τ. 16. 7.

υ. 17. 7.

Quia enim $AC = \tau CA = D$, & $BC = \upsilon CB = E$: erit $D : E = \upsilon A : B$. Q. E. D.

PROP. XIX. THEOR.

$A_6 \quad B_4 \quad C_3 \quad D_2 \quad AD_{12} \quad BC_{12} \quad AC_{18}$ Si quatuor numeri proportionales fuerint ($A : B = C : D$): qui ex primo & quarto fit numerus, aequalis erit ei, qui fit ex secundo & tertio ($AD = BC$). Et si numerus AD, qui fit ex primo A & quarto D, aequalis fuerit ei BC, qui fit ex secundo B & tertio C: quatuor numeri proportionales erunt ($A : B = C : D$).

1. Nam fit alius AC factus ex A & C: erit $AC : AD = \phi C : D = A : B$. Rursus $AC : BC = \chi A : B$. Ergo $AC : AD = \psi AC : BC$, & hinc $AD = \omega BC$. Q. E. D.

φ. 18. 7.

χ. 17. 7.

ψ. 15 ax. 7.

ω. 3. 4. ax. 7.

2. Quia $C : D = \phi AC : AD = \omega AC : BC$ & $AC : BC = \chi A : B$: erit $A : B = \psi C : D$. Q. E. D.

PROP.

PROP. XX. THEOR.

Si tres numeri proportionales fuerint ($\div\div$ A, B, C): qui ab extremis fit numerus, aequalis erit ei, qui fit a medio ($AC = B^2$). Si autem qui ab extremis fit AC, aequalis fuerit ei B^2 , qui a medio: tres numeri proportionales erunt ($\div\div$ A, B, C).

1. Ponatur ipsi $B = D$. Quia ergo $A : B = D : C$: erit $^{\beta} AC = BD = ^{\gamma} B^2$. Q. E. D. β . 19. 7.
 γ . 18. def. 7.
2. Quia $AC = B^2 = ^{\gamma} BD$: erit $^{\beta} A : B = D : C = B : C$. Q. E. D.

PROP. XXI. THEOR.

Minimi numeri C, D omnium eandem cum ipsis rationem habentium, eos, qui eandem rationem habent, A, B aequaliter metiuntur, maior C maiorem A, & minor D minorem B.

1. Dico C ipsum A metiri, quia eius partes non est. Si enim fieri potest, sit C partes ipsius A. Quia est $C : D = A : B$: erit $^{\delta} D$ ipsius B eadem partes, quae C ipsius A. Quot igitur in C sunt partes ipsius A, tot & in D erunt partes ipsius B. Sint E, F partes ipsius A in C, & G, H partes ipsius B in D. Quia ergo $E = F$, & $G = H$: erit $E : G = ^{\epsilon} F : H$. ϵ . 1. ax. 7.
Et quia ipsorum E, F multitudo aequalis est ipsorum G, H multitudini: erit $E : G = ^{\zeta} C : D$. ζ . 12. 7.
Sed $E < C$, & $G < D$. Ergo C, D non sunt minimi eorum, qui eandem rationem habent; contra hypothesin. Non est ergo C

M 3

partes

A 10 C 5 partes ipsius A , nec D ipsius B
 9. 4. 7. B 6 D 3 Quare quum C ipsius A , & D
 9. 3. def. 7. ipsius B pars sit: metitur C ip-
 sum A , & D ipsum B .

2. Quia autem $C : D = A : B$, & $C : A =$
 1. 20. def. 7. $D : B$, & C pars ipsius A : erit D eadem
 pars ipsius B . Quare C & D ipsos A , B aequa-
 liter metiuntur . Q. E. D.

* Cor. Minimi numeri eandem rationem ha-
 bentium eodem metiuntur, antecedens antec-
 dentes, & consequens consequentes.

PROP. XXII. THEOR.

Si sint tres numeri A , B , C , &
 alii ipsis multitudine aequales D , E ,
 F , qui bini sumantur & in eadem
 ratione; sit autem perturbata eo-
 rum proportio ($A : B = E : F$, & $B : C = D : E$)
 etiam ex aequo in eadem ratione erunt ($A : C$
 $= D : F$).

11. 19. 7. Est enim $AF = BE = CD$. Ergo $A : C$
 $= D : F$. Q. E. D.

PROP. XXIII. THEOR.

Numeri primi inter se, A , B , minimi sunt
 omnium eandem cum ipsis rationem habentium.

Si fieri potest, sint C , D , eandem rationem
 habentes quam A , B , & ipsis A , B minores, mi-
 nimi omnium. Ergo C ipsum A , aequaliter
 metietur, ac D ipsum B . Iam quoties C ip-
 sum A metitur, tot unitates sint in E : ergo &
 11. 21. 7. D ipsum B metietur per numerum E . Quare
 11. 2. cor. 16. 7. etiam

etiam E metietur A per C, & E ipsum B per D. Quum itaque idem E duos A, B metiatur: A, B non erunt primi inter se; contra v. 12. def. 7. hypothefin. Minimi ergo sunt A, B. Q. E. D.

PROP. XXIV. THEOR.

Minimi numeri A, B, eorum, qui eandem cum ipso rationem habent, primi inter se sunt.

Si negas: metiatur eos numerus C, ipsum ξ . 12. def. 7. Anempe per numerum aliquem D, & alterum B per E. Ergo $CD = A$, & $CE = B$; & inde $A : B = D : E$. Quum autem sit $D < A$, π . 18. 7. & $E < B$: non erunt A, B minimi; contra hypothefin. Ergo A, B primi inter se sunt. Q. E. D.

PROP. XXV. THEOR.

Si duo numeri A, B primi inter se fuerint, qui unum ipsorum A metitur numerus C, ad reliquum B primus erit.

Si enim B, C inter se primi non sint: metiatur eos numerus D. Idem D metietur ipsum A. Ergo A, B non erunt primi inter se; contra hypothefin. Ergo C ad B primus est. Q. E. D.

PROP. XXVI. THEOR.

Si duo numeri A, B ad aliquem numerum C primi fuerint: & qui sit ex ipsis D ad eum C primus erit.

Si negas: metiatur ipsos C & D idem aliquis E. Ergo E & A primi inter se sunt. τ . 25. 7.

M 4

Me-

u. 2. cor. A 2 B 3 Metiatur autem E ipsum D per
 16. 7. C 5 numerum F : ergo ν F ipsum D
 φ. 9. ax. 7. D 6 quoque metietur per E; & $EF \equiv$
 x. hyp. ϕ D $\equiv$ $\approx$ AB. Quare ψ E : A $\equiv$
 ψ. 19. 7. B : F. Quum autem E, A primi inter se, ideo-
 ω. 23. 7. que ω minimi sint: E ipsum B ω metietur. Me-
 α. cor. 21. 7. titur autem E quoque ipsum C: ergo B, C non
 erunt primi inter se; contra hypothesin. Quo-
 re D & C primi inter se sunt. Q. E. D.

PROP. XXVII. THEOR.

A... B... Si duo numeri A, B primi inter se
 A².... fuerint: qui sit ab uno ipsorum A
 D... ad reliquum B primus erit.

Sit enim ipsi A = D: erunt & D, B primi
 φ. 26. 7. inter se; & ergo β AD id est γ A² ad B primus
 γ. 18. def. 7. erit. Q. E. D.

PROP. XXVIII. THEOR.

A 3. B 5 Si duo numeri A, B ad duos nu-
 E 15 meros C, D, uterque ad utrumque
 C 2 D 4 primi fuerint: & qui sunt ex ipsis
 F 8 E, F inter se primi erunt.

α. 26. 7. Nam quia A, B ad C primi sunt: E^δ etiam
 ad C primus erit. Eadem ratione E, D inter
 se primi sunt. Quare quum C, D ad E primi
 sint: erunt & δ F ac E primi inter se. Q.
 E. D.

PROP.

PROP. XXIX. THEOR.

A^2 B^3 Si duo numeri A, B primi inter
 A^4 B^9 se fuerint, & uterque se ipsum
 A^8 B^{27} multiplicans faciat aliquos A^2, B^2 ;
 facti ex ipsis A^2, B^2 primi inter se
 erunt; & si numeri a principio positi A, B, eos
 qui facti sunt A^2, B^2 multiplicantes, aliquos A^3, B^3
 faciant: & ipsi inter se primi erunt; & sem-
 per circa extremos hoc continget.

Quia enim A^2, B primi sunt: erunt & $A^2, 27. 7.$
 B^2 primi. Iam quum & A, B^2 primi sint, &
 ergo duo A, A^2 ad duos B, B^2 uterque ad utrum-
 que primi sint: erunt quoque & A^3, B^3 primi 28. 7.
 inter se. Q. E. D.

PROP. XXX. THEOR.

A^3 B^5 Si duo numeri A, B primi inter
 $A+B$ B^8 se fuerint: & uterque simul $A+B$
 ad utrumque ipsorum & A & B pri-
 mus erit. Quod si uterque simul $A+B$ ad unum
 aliquem ipsorum sit primus: & numeri A, B a
 principio positi inter se primi erunt.

1. Si negas, $A+B$ ad A vel B primum esse:
 metiatur ipsos $A+B$ & A aliquis C; qui er-
 go & B metietur. Quare A & B non sunt 12. ax. 7.
 primi inter se; contra hyp.

2. Si negas A, B primos esse: metiatur eos
 aliquis C. Quum ergo idem C ipsum $A+B$ 9. 10. ax. 7.
 B metiatur: $A+B$ ad neutrum ipsorum A, B
 primus erit; contra hyp.

PROP. XXXI. THEOR.

A 3 B 7 Omnis primus numerus A ad omnem numerum B, quem non metitur, primus est.

Si negas : metiatur eos aliquis C praeter unitatem. Et quia A non metitur B: erit O diuersus a numero A. Ergo quum A metiatur aliquis, qui nec vnitas nec ipsi A idem est.

11. def. 7. A primus non erit; contra hyp.

PROP. XXXII. THEOR.

A 2 B 6 Si duo numeri A, B sese multiplicantes, aliquem faciant; cum vero AB 12
C 3
D 4 ro AB, qui ex ipsis fit, metiatur aliquis numerus primus C: & vnum ipsorum A, B, qui a principio positi sunt, metietur.

11. 31. 7. Nam C ipsum A non metiatur: ergo C & A primi inter se sunt. Metiatur autem C ipsum AB per D: erit $CD = {}^A AB$, ideoque
11. 9. ax. 9. $C : A = {}^B B : D$. Quare quum C, A minimi
11. 19. 7. sint eorum, qui rationem C: A habent: C ipsum
11. 23. 7. B $\frac{2}{3}$ metietur.
11. cor. 21. 7.

Similiter demonstrabitur, si C ipsum B non metiretur, metiri ipsum A. Quare C metitur vnum ipsorum A, B. Q. E. D.

PROP. XXXIII. THEOR.

Omnen numerum compositum A primus aliquis numerus metitur.

Quia

A₁₂ Quia enim A compositus est; meti-
 B₄ tur eum^o aliquis B, qui si primus sit, *e. 13. def. 7.*
 C₂ patet propositio. Si vero B etiam com-
 positus est: metiatur eum C, qui etiam
 metietur^π ipsum A. Quare si hic C nondum *π. 11. ax. 7.*
 primus est, metietur ipsum alius, & sic pro-
 grediendo tandem ad primum peruenietur,
 qui metietur tam antecedentem quam A. Nisi
 enim tandem ad primum perueniretur: meti-
 rentur ipsum A infiniti numeri, quorum alter
 altero minor. Q. E. A^e. *e. 2. def. 7.*

Aliter. Sit C minimus omnium ipsum A
 metientium: erit idem primus. Si enim non:
 metiatur illum numerus $D < C$; quare quum
 idem D metiatur etiam^π A, non est C minimus
 metientium ipsum A; contra hyp.

PROP. XXXIV. THEOR.

*Omnis numerus A vel primus est, vel eum
 primus aliquis numerus metitur.*

Si enim A primus est: manifesta est pro-
 positio. Sin A compositus: metietur eum
 aliquis^σ primus. Ergo A aut primus est, aut *σ. 33. 7.*
 eum primus metitur. Q. E. D.

PROP. XXXV. PROBL.

A₆ B₁₅ C₂₁ Numeris quocunque A,
 D₃ B, C datis, inuenire mini-
 E₂ F₆ G₇ mos omnium, qui eandem
 cum ipsis rationem habeant.

Si ipsi A, B, C primi inter se sunt: minimi
 iam erunt^τ omnium eandem rationem habentium. *τ. 23. 7.*

Si

u. 3. 7.

A 6 B 15 C 21

D 3

E 2 F 5 G 7

Si verò non : sume
 ipforum maximam com-
 munem mensuram D, per
 quam diuide ipsos A, B, C.
 Numeri E, F, G, per quos D ipsos A, B, C me-
 titur, erunt quaesiti.

φ. 2. cor.
 16. 7.

x. sch. 9. 7.

ψ. 21. 7.

α. 9. ax. 7.

α. 19. 7.

β. 20. def. 7.

Nam quia vnusquisque ipforum E, F, G
 vnumquemque ipforum A, B, C per D φ me-
 titur, id est aequaliter : ipsi E, F, G in ea-
 dem x sunt ratione cum numeris A, B, C. Di-
 co etiam E, F, G minimos fore eandem cum
 A, B, C rationem habentium. Si enim negas:
 erunt alii H, K, L, ipsis E, F, G minores, minimi
 eandem cum A, B, C rationem habentium.
 Ergo ψ H, K, L ipsos A, B, C aequaliter metien-
 tur, id est per eundem numerum, qui sit M.
 Igitur M metietur φ ipsum A per H, ipsum B
 per K, & ipsum C per L; & $MH =^α A$. Sed
 est etiam $ED =^α A$. Ergo $ED = MH$, &
 $E : H =^α M : D$. Sed $E > H$; ergo $M >^β D$.
 Quare quum M ipsos A, B, C metiatur: non
 erit D maxima ipforum A, B, C mensura; con-
 tra hyp. Ergo E, F, G minimi sunt eandem
 cum A, B, C rationem habentium. Q. E. D.

PROP. XXXVI. PROBL.

*Duobus numeris A, B datis, inuenire mini-
 mum numerum, quem metiantur.*

A 3 B 4
 AB 12

1. Sint dati A, B primi inter se.
 Multiplicetur A per B, factus AB
 erit quaesitus.

Nam

Nam vterque A, B metitur γ AB. Est au- γ . 8. ax. 7. &
 tem & AB minimus eorum, quem A & B me- γ . 1. cor. 16. 7.
 tiuntur. Si negas: metiantur illi numerum
 $C < AB$; & A quidem ipsum C metiatur per
 D, B vero per E. Ergo erit $AD =^{\delta} C =^{\delta} BE$, δ . 9. ax. 7.
 & hinc $A : B =^{\epsilon} E : D$. Sunt autem A, B pri-
 mi inter se, ideoque minimi ζ : ergo Bⁿ me- ζ . 19. 7.
 tietur ipsum D. Sed numeri B, D ipsum A ζ . 23. 7.
 multiplicantes fecerunt ipsos AB, C: ergo erit η . 21. 7.
 $B : D = AB : C$, & ideo AB metietur ipsum C, η . 18. 7.
 minor maiorem. Q. E. Aⁿ. ϵ . 20. def. 7.
 κ . 13. ax. 7.

2. Non sint A, B primi inter se:
 sume λ minimos C, D in eadem λ . 35. 7.
 ratione cum A, B: & multiplica
 extremos vel medios per se inui-
 cem. Factus AD erit quaesitus.

Nam quia A per D, & B per C multiplica- μ . 19. 7.
 tis eundemⁿ AD producant: tam A, quam B ν . 7. ax. 7.
 eundem AD metieturⁿ. Dico etiam AD mi-
 nimum esse. Si enim non: metientur A, B
 aliquem E minorem quam AD, & metiatur
 quidem A ipsum E per F, B vero per G. Qua- ξ . 9. ax. 7.
 re erit $AF =^{\zeta} E =^{\zeta} BG$, & $A : B =^{\mu} G : F$. ϵ . constr.
 Sed $A : B = C : D$. Ergo $C : D = G : F$. π . cor. 21. 7.
 Quia autem C, D minimi^o sunt: D ipsum Fⁿ ρ . 18. 7.
 metietur. Sed $D : F =^{\epsilon} AD : AF$ id est E : igitur AD metietur E, maior minorem. Q. E. Aⁿ. σ . 13. ax. 7.

PROP. XXXVII. THEOR.

Si duo numeri A, B metiantur nu-
 merum aliquem C: & minimus,
 quem illi A, B metiuntur, D eun-
 dem C metietur.

Si

Si negas : D diuidens C relin-
 quat se minorem E. Quia igitur
 D metitur C—E; & A, B ipsum
 D metiuntur : metientur quoque
 ipsum C—E, & hinc etiam ipsum E, qui mi-
 nor est quam D. Ergo D non erit minimus
 eorum, quos A, B metiuntur; contra hyp.

PROP. XXXVIII. PROBL.

*Tribus numeris A, B, C datis, inuenire mi-
 nimum numerum, quem metiantur.*

1. Sume ϕ minimum D,
 quem duo A, B metiuntur.
 Si C etiam metiatur ipsum
 D: erit D quaesitus.

Nam quod tres A, B, C ipsum D metian-
 tur, patet. Quod autem minimus sit, sic
 ostenditur. Si negas: metiantur A, B, C ali-
 um numerum E ipso D minorem. Ergo &
 D metietur $\propto$ ipsum E, maior minorem. Q.
 E. A.

2. Si autem C non me-
 tiatur D: sume minimum ϕ
 E, quem C & D metiantur.
 Qui erit quaesitus.

Nam A, B, qui ipsum D metiuntur, me-
 tientur quoque ψ ipsum E. Ergo tres A, B,
 C ipsum E metientur. E autem minimus
 erit. Si enim non: metiantur A, B, C alium
 F < E. Ergo & D $\propto$ metietur ipsum F.
 Quare quum C & D ipsum F metiantur: me-
 tietur

tietur eundem $\propto$ etiam E, minorem maior. α . 37. 7.
 Q. E. A α . α . 13. ax. 7.

PROP. XXXIX. THEOR.

A $\begin{smallmatrix} 12 \\ 3 \end{smallmatrix}$ B $\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}$ *Si numerum A numerus aliquis
 B metiatur, ille A, quem meti-
 tur B, partem habebit C a metien-
 te B denominatam.*

Metiatur enim B ipsum A per vnitates in
 C: ergo, quum α etiam 1 metiatur C per vni- α . 5. ax. 7.
 tates in eodem, 1 ipsum C aequaliter metie-
 tur, ac B ipsum A. Quare 1 ipsum B aequa-
 liter β metietur ac C ipsum A; id est γ C ipse β . 15. 7.
 A eadem pars est, quae 1 ipse B. Sed 1 est γ . 3. def. 7.
 pars numeri B ab ipso B denominata: ergo A
 partem habet C ab ipso B denominatam. Q.
 E. D.

PROP. XL. THEOR.

A $\begin{smallmatrix} 8 \\ 4 \end{smallmatrix}$ B $\begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \end{smallmatrix}$ *Si numerus A partem quamcun-
 que B habeat: cum numerus C a
 parte B denominatus metietur.*

Quia δ numerus C tot vnitates habet, quo- δ . hyp.
 ta pars B est ipsius A: erit 1 eadem pars ipsius
 C, quae B ipsius A; id est 1 ipsum C aequa- α . 3. def. 7.
 liter metietur, ac B ipsum A. Hinc & 1 ipsum
 B aequaliter ϵ metietur, ac C ipsum A. Ergo ϵ . 15. 7.
 C metietur A. Q. E. D.

PROP.

PROP. XLI. PROBL.

*Numerum invenire, qui, minimus quem sit,
datas partes A, B, C, habeat.*

n. 38. 7.

A	$\frac{1}{2}$	D	2
B	$\frac{1}{3}$	E	3
C	$\frac{1}{4}$	F	4
G	12		

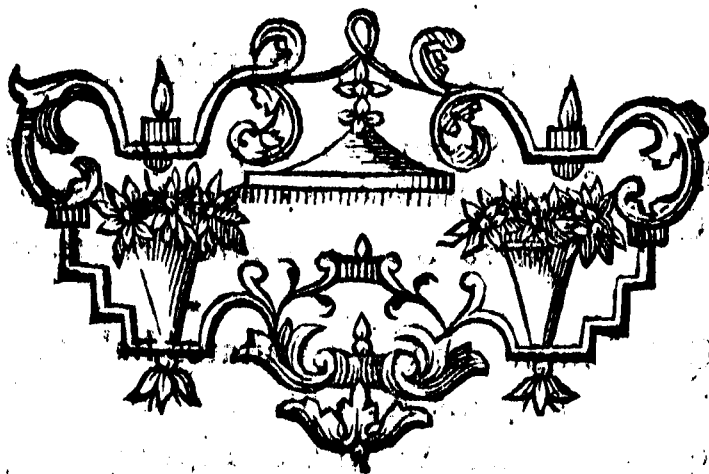
Sint ab ipsis partibus A, B, C
denominati numeri D, E, F, &
sumatur ⁿ minimus eorum, quos
D, E, F metiuntur, qui sit G
Dico factum.

n. 39. 7.

Nam ⁹ patet numerum G partes habere
metientibus D, E, F denominatas, id est, par-
tes A, B, C. Dico autem G etiam esse minimum

n. 40. 7.

Nam si quis minor H partes haberet A, B, C
metirentur eum ⁴ numeri D, E, F. Ergo G
non esset minimus, quem D, E, F metiuntur
contra hypothesein.



EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER VIII.

* * * * *

PROP. I. THEOR.

A 8 , B 12 , C 18 , D 27

Si sint quotcunque numeri A, B, C, D deinceps proportionales, quorum extremi A, D sint inter se primi: minimi erunt omnium eandem cum ipsis rationem habentium.

Si negas: sint totidem alii E, F, G, H minores in eadem ratione. Ergo ex aequo^a A:D a. 14. 7.

E:H. Quare quum A, D, primi inter se, sint quoque^β minimi: γ metientur illi ipsos β. 23. 7. γ. cor. 21. 7.
E, H, se ipsis minores. Q. E. A.

PROP. II. PROBL.

Numeros inuenire deinceps proportionales minimos, quotcunque quis imperauerit, in data ratione.

A 2 , B 3

A² 4 , AB 6 , B² 9

A³ 8 , A²B 12 , AB² 18 , B³ 27

^{1.} Sint A, B minimi^δ in data ratione: erunt δ. 35. 7.
A³, AB, B² tres deinceps proportionales minimi in data ratione.

N

Nam

$$A^2, B^3$$

$$A^2 4, AB 6, B^2 9$$

$$A^3 8, A^2 B 12, AB^2 18, B^3 27$$

ε. 18. 7.
ζ. 24. 7.
η. 29. 7.
θ. 1. 8.

Nam $A^2 : AB = A : B = AB : B^2$. Et quia A, B primi inter se ^ζ sunt, ideoque etiam A^2, B^2 primi ^η sunt inter se: patet ^θ, A^2, AB, B^2 minimos esse in ratione $A : B$. Q. E. F.

2. Sint iterum A, B minimi in data ratione: erunt $A^3, A^2 B, AB^2$ & B^3 quatuor minimi in data ratione deinceps proportionales.

κ. 17. 7.
λ. 24. &
29. 7.

Nam similes sunt eidem rationi $A : B$ sequentes $A^3 : A^2 B, A^2 B : AB^2, AB^2 : B^3$. Quum igitur A^3, B^3 inter se ^λ primi sint: erunt $A^3, A^2 B, AB^2, B^3$ quatuor minimi in data ratione continue proportionales. Et eodem modo quotcunque proportionales inuestigantur. Q. E. F.

Corollaria.

1. Ex hoc manifestum est, si tres numeri deinceps proportionales minimi fuerint omnium eandem cum ipsis rationem habentium; extremos eorum quadratos esse; si vero quatuor; esse cubos.

* 2. Et patet simul, latera extremorum esse duos illos numeros, qui minimi sunt in data ratione.

PROP. III. THEOR.

Si sint quotcunque numeri A, B, C, D deinceps proportionales minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium: eorum extremi A, D primi inter se erunt.

Sum.

A 8, B 12, C 18, D 27

E, 2, F 3

G 4, H 6, K 9

L 8, M 12, N 18, O 27

Sumtis enim^μ duobus minimis numeris E, F, ^{35. 7. &}
 & tribus G, H, K, & sic deinceps pluribus mini- ^{2. 8.}
 mis continue proportionalibus in eadem ratio-
 ne A : B, donec peruentum sit ad totidem L, M,
 N, O, quot sunt propositi A, B, C, D: erit vnus-
 quisque ipsorum L, M, N, O vnicuique ipsorum
 A, B, C, D aequalis. Sed $L = E^3$, & $O =$
 F^3 . Ergo quia' L, O primi inter se sunt: et- ^{29. 7. &}
 in A, D inter se primi erunt. Q. E. D. ^{24. 7.}

PROP. IV. PROBL.

*Rationibus datis quocunque, A : B, C : D,
 E : F in minimis numeris, numeros inuenire de-
 inceps minimos in datis rationibus.*

A 2, B 5, C 3, D 4, E 5, F 6

H 6, G 15, K 20, L 24

N O M P

Sume $\frac{1}{2}$ minimum G quem B & C metian- ^{36. 7.}
 tur, & duos alios H, K, quos ipsi A, D aequi-
 metiantur, ac ipsi B & C numerum G.

Cas. 1. Iam si E quoque metitur ipsum K,
 sume numerum L, quem F toties metiatur,
 quoties E ipsum K. Dico factum.

Nam^o est $H : G = A : B$, & $G : K = C : D$, ^{20. def. 7.}
 & $K : L = E : F$. Si vero neges H, G, K, L mi- ^{& 13. 7.}
 nimos esse eorum, qui in rationibus propositis
 sunt deinceps proportionales: sint alii N, O, M,
 P minimi. Et quia est $A : B = N : O$; A vero
 N 2 &

A 2, B 5, C 3, D 4, E 5, F 6
 H 6, G 15, K 20, L 24
 N O M P

π . cor. 21. 7. & B minimi sunt: B metietur π O. Eadem
 37. 7. ratione C metietur ipsum O. Quare & etiam
 G metietur numerum O, maior minorem.
 Q. E. A.

A 4, B 5, C 2, D 3, E 4, F 3
 H 8, G 10, K 15
 N 32, O 40, M 60, P 45
 Q R S T

Cas. 2. At si non metiatur E ipsum K: su-
 me minimum M quem E & K metiantur; &
 duos N, O quos ipsi H, G aequae metiantur;
 ac K ipsum M, item quartum P, quem F ae-
 que metiatur, ac E ipsum M. Dico factum.

20. def. 7. Est enim $A : B = H : G = N : O$, item C:
 & 13. 7. $D = G : K = O : M$, & $E : F = M : P$. Si
 vero neges: minimos esse N, O, M, P: sint
 Q, R, S, T minimi in datis rationibus. Quum
 ergo sit $A : B = Q : R$; & A, B minimi sint:
 B metietur π R. Eadem ratione C metietur
 R: ergo & G metietur eundem R. Quare
 quum sit $G : K = C : D = R : S$: numerus K
 metietur S. Sed quia $E : F = S : T$, & E, F
 minimi sunt: metitur quoque E ipsum S. Er-
 go tandem M metiretur S, maior minorem.
 Q. E. A.

PROP. V. THEOR.

$$\begin{array}{r} A \ 2 \quad C \ 4 \\ B \ 3 \quad D \ 5 \\ \hline AB \ 6 \quad CD \ 20 \\ E \ 3, F \ 6, G \ 10 \end{array}$$

*Plani numeri AB, CD
rationem habent ex la-
teribus A, C, & B, D
compositam* $AB:CD =$
 $(A:C) + (B:D).$

Nam sumtis^r deinceps minimis E, F, G in σ . 4. 8.
datis rationibus $A:C$ & $B:D$; quia $E:G = \tau$. 5. def. 6.
 $(E:F) + (F:G)$: erit $E:G = (A:C) + (B:D)$.
Iam B ipsum C multiplicans faciat BC: & erit
 $AB:BC = \nu$ $A:C = \phi$ $E:F$. Similiter $BC:\nu$. 17. 7.
 $CD = \nu$ $B:D = \phi$ $F:G$. Ergo ex aequo ϕ . constr.
 $AB:CD = \kappa$ $E:G = (A:C) + (B:D)$. Q. κ . 14. 7.
E. D.

PROP. VI. THEOR.

$$\begin{array}{r} A \ 16, \quad B \ 24, \quad C \ 36, \quad D \ 54, \quad E \ 81 \\ F \ 4, \quad G \ 6, \quad H \ 9 \end{array}$$

*Si fuerint quotcunque numeri A, B, C, D, E
deinceps proportionales; primus autem A secun-
dum B non metiatur: neque alius aliquis vllum
metietur.*

1. Numeros hos deinceps se non metiri
patet: quia si B metiretur C, A etiam metire-
tur^a ipsum B, contra hypothesin. α . 20. def. 7.

2. Nec vllus, vt A, vllum, vt C, metie-
tur. Quot enim sint sumti A, B, C, tot su-
mantur minimi^a numeri in eadem ratione, β . 35. 7.
qui sint F, G, H: hinc erit^r $A:C = F:H$. Sed γ . 14. 7.
quia $A:B = F:G$, & A non metitur B:^a ne-
que F metietur G; quare F vnitas esse^a ne- δ . 6. ax. 7.
quit. Hinc, quum F & H primi^a sint inter ϵ . 3. 8.

N 3

se,

ζ. 12. def. 7. se, F nequit ζ metiri ipsum H. Ergo nec A
 α. 20. def. 7. metiri potest α ipsum C. Q. E. D.

PROP. VII. THEOR.

A 2, B 4, C 8, D 16

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales ($\div\div$ A, B, C, D), primus autem A metiatur extremum D: & secundum B metietur.

4. 6. 8. Si negas: neque alius aliquis vllum " metietur, ergo nec A ipsum D; contra hypothesin.

PROP. VIII. THEOR.

A 2, C 4, D 8, B 16

G 1, H 2, K 4, L 8

E 3, M 6, N 12, F 24

Si inter duos numeros A, B numeri deinceps proportionales C, D ceciderint:

quot inter eos cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter alios E, F, eandem cum ipsis A, B rationem habentes, cadent.

9. 35. 7.

ι. 3. 8.

κ. 14. 7.

λ. hyp.

μ. 23. 7.

ν. 21. 7.

Sumtis enim ⁹ totidem minimis G, H, K, L, quot sunt numeri A, B, C, D, & in eadem ratione: erunt G & L ' primi inter se, & ex aequo erit * $G : L = A : B = ^\lambda E : F$. Sunt autem " G & L minimi: ergo " G aequaliter metitur ipsum E, atque Lipsum F. Sed quoties G metitur E, toties numeri H, K metiantur ipsos M, N. Numeri ergo G, H, K, L ipsos E, M, N, F aequaliter metientur; ideo-
 ξ. 20. def. 7. que ζ numeri G, H, K, L in eadem ratione
 & 13. 7. erunt, in qua sunt E, M, N, F. Ergo E, M, N, F

N, F eandem cum ipsis A, C, D, B rationem habebunt, & ergo deinceps proportionales erunt. Tot igitur inter E, F cadunt deinceps proportionales, quot inter A & B. Q. E. D.

PROP. IX. THEOR.

A 8, C 12, D 18, B 27

E 1

F 2, G 3

H 4, K 6, L 9

M 8, N 12, O 18, P 27

Si duo numeri A, B inter se primi fuerint, & inter ipsos numeri deinceps proportionales C, D ceciderint: quot inter ipsos A, B cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter utrumque ipsorum A, B & unitatem E deinceps proportionales cadent.

Sume enim^o in eadem ratione, in qua sunt ^{o. 35. 7. & 3. 8.} A, C, D, B, duos minimos F, G, & tres minimos H, K, L, & sic porro donec sumtorum M, N, O, P multitudo aequalis fiat multitudi-
ni datorum A, C, D, B. Hinc, quia & A, C, D, B minimi^o sunt in eadem ratione, erit ^{o. 1. 8.} A = M, C = N, D = O, B = P. Et quia^{o. cor. 2. 8. o. cor. 17. 7.} H = F²: erit E: F =^o F: H. Similiter quia A = M = H F: erit E: F = H: A. Ergo
E, F, H, A. Eodem modo demonstratur,
esse ÷ E, G, L, B. Q. E. D.

PROP. X. THEOR.

Si inter duos numeros A, B, & unitatem C deinceps proportionales numeri D, E, & F, G ceciderint: quot inter utrumque ipsorum A, B & unitatem C cadunt numeri deinceps proportionales,

N 4

tionales, totidem & inter ipsos A, B numeri deinceps proportionales cadent.

Numerus enim D

A 8, K 12, L 18, B 27

E 4, H 6, G 9

D 2, F 3

C 1

ipsum F multiplicans

faciat H, & sumatur

$K = HD$, & $L = HF$.

Et quia ponitur C:

$D = D : E$; C vero

τ . 5. ax. 7. ipsum D metitur^r per D: metietur^v quoque

ν . 20. def. 7. D ipsum E per D; & ergo $E = \phi D^2$. Rur-

ϕ . 9. ax. 7. sus quia ponitur C: $D = E : A$: erit $A = ED$.

Eadem ratione $G = F^2$, & $B = GF$. Quum

ergo sit $E = D^2$ & $H = FD$: erit $D : F =$

$E : H$. Item quia $H = FD$, & $G = F^2$:

erit $D : F = H : G$. Ergo $E : H = H : G$.

Rursus quia $K = HD$, & $L = HF$: erit $A : K$

$= E : H = D : F = \psi K : L$. Similiter quia

$L = HF$, & $B = GF$: erit $L : B = \chi H : G =$

$E : H$. Quare $\div \div A, K, L, B$. Q. E. D.

PROP. XI. THEOR.

A^2 4, AB 6, B^2 9

A 2, B 3

Inter duos numeros quadratos A^2 , B^2 , unus medius proportionalis AB

cadit. Et quadratus A^2 ad quadratum B^2 duplicatam rationem habet eius, quam latus A habet ad latus B.

α . 18. 7.

1. Est enim $A^2 : AB = \alpha A : B = \beta AB : B^2$.

β . 17. 7.

Q. E. D.

2. Quia (per dem.) $\div \div A^2, AB, B^2$: erit

γ . 10. def. 5. $A^2 : B^2 = \gamma (A^2 : AB)^2 = (A : B)^2$. Q. E. D.

PROP.

PROP. XII. THEOR.

$$A^3 \ 8, \ A^2B \ 12, \ AB^2 \ 18, \ B^3 \ 27$$

$$A^2 \ 4, \ AB \ 6, \ B^2 \ 9$$

$$A \ 2, \ B \ 3$$

Inter duos numeros cubos A^3, B^3 , duo medii proportionales A^2B, AB^2 cadunt. Et cubus A^3 ad cubum B^3 triplicatam habet rationem eius, quam latus A habet ad latus B .

1. Nam $A : B =^{\delta} A^2 : AB$, & $A : B =^{\epsilon} AB : B^2$. d. 18. 7.

Sed $A^3 : A^2B =^{\delta} A^2 : AB = A : B$. Rur-
 lus $A^2B : AB^2 =^{\epsilon} A : B$, item $AB^2 : B^3 =^{\epsilon}$ e. 17. 7.

$AB : B^2 = A : B$. Ergo $\div A^3, A^2B, AB^2, B^3$.

Q. E. D.

2. Quia (per dem.) $\div A^3, A^2B, AB^2, B^3 : 2$. II. def. 5.
 erit $A^3 : B^3 =^2 (A^3 : A^2B)^3 = (A : B)^3$. Q.

E. D.

PROP. XIII. THEOR.

$$A \ 2, \ B \ 4, \ C \ 8$$

$$A^2 \ 4, \ AB \ 8, \ B^2 \ 16, \ BC \ 32, \ C^2 \ 64$$

$$A^3 \ 8, \ A^2B \ 16, \ AB^2 \ 32, \ B^3 \ 64, \ B^2C \ 128, \ BC^2 \ 256, \ C^3 \ 512$$

Si sint quotcunque numeri A, B, C deinceps proportionales, & unusquisque se ipsum multiplicans faciat aliquos A^2, B^2, C^2 : facti ex ipsis proportionales erunt. Et si positi a principio numeri A, B, C factos A^2, B^2, C^2 multiplicantes, alios A^3, B^3, C^3 faciant, & ipsi proportionales erunt: Et semper circa extremos hoc contingit.

Expositis enim numeris AB, BC, A^2B, AB^2, B^2C & BC^2 : erit $\div A^2, AB, B^2$, item $\div A^3$, n. 2. 8.

A^2B, AB^2, B^3 , & erunt omnium horum numerorum rationes eadem rationi $A : B$. Similiter B^2, BC, C^2 sunt deinceps proportionales

A 2, B 4, C 8

A^2 4, AB 8, B^2 16, BC 32, C^2 64

A^3 8, A^2B 16, AB^2 32, B^3 64, B^2C 128, BC^2 256, C^3 512

in ratione B : C, pariterque B^3 , B^2C , BC^2 , C^3
in eadem ratione deinceps proportionales.
Ergo quia, $A : B = B : C$, erunt A^2 , AB, B^2 in
eadem ratione, in qua B^2 , BC, C^2 ; nec non
 A^3 , A^2B , AB^2 , B^3 in eadem ratione, in qua
 B^3 , B^2C , BC^2 , C^3 . Sunt autem tam illi quam
hi inter se multitudine pares. Ergo ex æ-
quo $A^2 : B^2 = B^2 : C^2$; & $A^3 : B^3 = B^3 : C^3$.
Q. E. D.

9. 14. 7.

PROP. XIV. THEOR.

A 2, B 4

A^2 4, AB 8, B^2 16

*Si numerus quadratus
 A^2 metiatur quadratum
numerus B^2 : & latus*

*A latus B metietur. Et si latus A metiatur
latus B : & quadratus A^2 quadratum B^2 me-
tietur.*

κ. 2. 8.

1. Sumto enim numero AB, erunt A^2 deinceps proportionales A^2 , AB, B^2 in ratione A ad B. Ergo A^2 metietur A^2 AB. Hinc quia $A^2 : AB = A : B$, metietur etiam A^2 ipsum B.
Q. E. D.

λ. 7. 8.

μ. 20. def. 7.

ν. 18. 7.

2. Si A metitur B : quia $A : B = A^2 : AB$, A^2 quoque metietur A^2 AB. Et quia $A^2 : AB = AB : B^2$: metietur A^2 & AB ipsum B^2 . Ergo A^2 metietur B^2 . Q. E. D.

ξ. 11. ax. 7.

PROP.

PROP. XV. THEOR.

A^3 8, A^2B 16, AB^2 32, B^3 64

A^2 4, AB 8, B^2 16

A 2, B 4

Si numerus cubus A^3 metiatur cubum numerum B^3 : & latus A latus B metietur. Et si latus A latus B metiatur: & cubus A^3 cubum B^3 metietur.

1. Sumtis enim numeris A^2B , AB^2 , quia deinceps in ratione A ad B proportionales sunt A^3 , A^2B , AB^2 , B^3 , & A^3 ipsum B^3 metitur; metietur & A^3 ipsum A^2B . Quare quum sit $A^3 : A^2B = A : B$: metietur & A^3 ipsum B . Q. E. D.

2. Quia, iisdem sumtis, est $A : B = A^3 : A^2B$, & A ipsum B metiri ponitur: metietur & A^3 ipsum A^2B . Quare quum sit $A^3 : A^2B = A : B$: patet & A^3 ipsum B metiri. Q. E. D.

PROP. XVI. THEOR.

A^2 9, B^2 16
 A 3, B 4
Si numerus quadratus A^2 non metiatur quadratum numerum B^2 : neque latus A latus B metietur. Et si latus A non metiatur latus B : neque hic quadratus A^2 quadratum B^2 .

1. Si enim A metiretur B : A^2 etiam metiretur B^2 ; contra hypothesin. c. 14. 8.

2. Et si A^2 metiretur B^2 : A etiam metiretur B ; contra hypothesin.

PROP.

PROP. XVII. THEOR.

$A^3 8, B^3 27$ *Si numerus cubus A^3 non me-*
 $A 2, B 3$ *tiatur cubum numerum B^3 : ne-*
que latus A latus B metietur. Et
si latus A non metiatur latus B: neque cubus A^3
cubum B^3 metietur.

1. Si enim A metiretur B: A^3 quoque me-
 tiretur B^3 , contra hypothesin.
 2. Si A^3 metiretur B^3 : etiam A metiretur
 B; contra hypothesin.

PROP. XVIII. THEOR.

$A 2, B 3, C 4, D 6$ *Inter duos similes*
 $AB 6, BC 12, CD 24$ *planos numeros AB, CD,*
vnus medius proportio-
nalis BC cadit. Et planus AB ad planum CD
duplicatam rationem habet eius, quam latus
homologum A habet ad homologum latus C.

u. 17. 7.

φ. 13. 7. &

21. def. 7.

1. Quia enim $AB : BC =^u A : C$, & $A : C =^φ B : D$: erit $AB : BC = B : D =^u BC : CD$. Q. E. D.

2. Quum $\div AB, BC, CD$ (per dem.): erit
 $AB : CD = (AB : BC)^2 = (A : C)^2 = (B : D)^2$. Q. E. D.

* Cor. Hinc inter duos similes planos cadit vnus medius proportionalis in ratione laterum homologorum.

PROP. XIX. THEOR.

$A 2, B 3, C 5, D 4, E 6, F 10$
 $ABC 30, BCD 60, BDF 120, DEF 240$
 $AB 6, BD 12, DE 24$

Inter

*Inter duos similes solidos numeros ABC, DEF
duo medii proportionales BCD, BDF cadunt.
Et solidus ABC ad similem solidum DEF tri-
plicatam rationem habet eius, quam latus ho-
mologum A, vel B, vel C habet ad homologum
latus D, vel E, vel F.*

1. Capiantur enim numeri AB, BD, DE, BCD, BDF. Et quia $A : B = D : E$: erunt $\downarrow$ χ . hyp.
AB, DE similes plani, & $\div$ ω AB, BD, DE in ψ . 21. def. 7.
ratione A : D, vel B : E, vel C : F. Est autem ω . 18. 8.
 $ABC : BCD = AB : BD$, & $BDF : DEF = BD : DE$. Quare $ABC : BCD = BDF : DEF$
 $= C : F$. Denique $BCD : BDF = C : F$.
Ergo $\div$ ABC, BCD, BDF, DEF. Q. E. D. α . 17. 7.

2. Quia ergo $\div$ ABC, BCD, BDF, DEF:
erit $ABC : DEF = (ABC : BCD)^3 = (C : F)^3$ β . 11. def. 5.
 $= (B : E)^3 = (A : D)^3$. Q. E. D. γ . dem.

Cor. Ergo inter duos similes solidos cadunt
duo medii proportionales in ratione laterum ho-
mologorum.

PROP. XX. THEOR.

*Si inter duos nume-
ros A, B unus medius
proportionalis C cadat :
numeri A, B similes plani erunt.*

Sume minimos D, E in ratione A ad C. Er-
go δ D ipsum A aequaliter metietur, ac E ip- δ . 21. 7.
sum C. Metiatur D ipsum A per F. Ergo
 $DF = A$, & $EF = C$. Ergo A planus ζ ϵ . 9. ax. 7.
numerus est, cuius latera sunt D, F. Rursus ζ 16. def. 7.
quia $A : C = C : B$: minimi quoque D, E χ . hyp.
sunt

$A\ 8, C\ 12, B\ 18$ sunt in ratione $C : B$.
 $D\ 2, E\ 3, F\ 4, G\ 6$ Hinc si D metiatur
 ipsum C per G , E me-
 tietur quoque B per G . Ergo $DG = C$, &
 $EG = B$. Quare & B est numerus planus. Et
 9. 17. 7. quia $DG = C = EF$, ideoque $D : F = E :$
 11. 21. def. 7. G : erunt A & B similes * numeri plani. Q.
 E. D.

PROP. XXI. THEOR.

$A\ 24, C\ 72, D\ 216, B\ 648$

$E\ 1, F\ 3, G\ 9$

$H\ 1, K\ 1, N\ 24, L\ 3, M\ 3, O\ 72$

*Si inter duos numeros A, B duo medii pro-
 portionales C, D cadant: numeri A, B similes
 solidi erunt.*

1. 35. 7. Sume^λ tres minimos E, F, G eandem cum
 A, C, D rationem habentes, & ergo deinceps
 12. 3. 8. proportionales: & erunt E, G primi * inter se,
 11. 20. 8. & similes plani * numeri. Sint H, K latera
 ipsius E , & L, M latera ipsius G . Erunt ergo
 ξ. cor. 18. 8. E, F, G proportionales in ratione ξ $H : L$ vel
 $K : M$. Iam quum E, F, G eandem cum $A,$
 6. 14. 7. C, D rationem habeant: erit $E : G = ° A : D$.
 π. 23. 7. Et quia E, G primi sunt, ideoque π minimi:
 9. 21. 7. * metientur ipsos A, D aequaliter. Metiatur
 σ. 9. ax. 7. E ipsum A per N : ergo $EN = ° A$. Sed E
 τ. 17. def. 7. $= HK$: ergo A est solidus * numerus, cuius
 latera H, K, N . Rursus quia E, F, G minimi
 sunt eandem rationem habentium, quam C, D, B :
 E ipsum C aequaliter metitur, ac G ipsum B .
 Metiatur E ipsum C per O . Ergo $GO = B$.
 Sed

Sed $G = LM$. Quare B est solidus, cuius latera L, M, O. Denique quia $A = EN$, & $C = EO$: erit $N : O = A : C = E : F = H : L = K : M$. Quare similes φ solidi sunt A, B numeri. Q. E. D. u. 17. 7.
 φ . 21. def. 7.

PROP. XXII. THEOR.

A 4, B 6, C 9 Si tres numeri A, B, C deinceps proportionales fuerint, primus A autem sit quadratus: & tertius C quadratus erit.

Nam A, C similes $\propto$ sunt plani numeri. Ergo quum ψ latera ipsius A aequalia sint: ω erunt & latera ipsius B aequalia, ideoque ψ erit & C quadratus. Q. E. D. $\propto$. 20. 8.
 ψ . 18. def. 7.
 ω . 21. def. 7.

PROP. XXIII. THEOR.

A 8, B 12, C 18, D 27

Si quatuor numeri A, B, C, D deinceps proportionales fuerint, primus autem A sit cubus: & quartus D cubus erit.

Nam A, D sunt $\propto$ similes solidi. Ergo & D cubus est. Q. E. D. $\propto$. 21. 8.

PROP. XXIV. THEOR.

A 4, B 9 Si duo numeri A, B inter se rationem habeant, quam numerus quadratus C ad quadratum numerum D, primus autem A sit quadratus: & secundus B quadratus erit.

Quia enim inter similes planos C, D, unus medius proportionalis β cadit; & $A : B = C : D$: β . 18. 8. cadet

γ. 8. 8.
δ. 22. 8.

cadet quoque inter A, B vnus γ medius proportionalis. Ergo & B^δ est quadratus. Q. E. D.

* *Schol. 1.* Ergo ratio numeri quadrati ad non quadratum nequit exhiberi per duos quadratos numeros.

* *Schol. 2.* Et si A numerus ad numerum B est vt quadratus ad quadratum: numeri A, B similes plani sunt. (per 20. 8. & dem. huius). Et hinc dissimiles plani non sunt vt quadratus ad quadratum.

PROP. XXV. THEOR.

A 64, B 216
C 8, D 27
Si duo numeri A, B inter se rationem habeant, quam numerus cubus C ad cubum numerum D primus autem A sit cubus: & secundus B cubus erit.

ε. 19. 8.
ζ. 8. 8.
η. 23. 8.

Quia enim C, D similes solidi sunt: duo medii proportionales inter eos cadunt. Ergo & inter A, B duo medii proportionales cadunt. Quare quum A cubus sit: B etiam cubus erit. Q. E. D.

* Ergo ratio numeri cubi ad non cubum reperi nequit in duobus numeris cubis.

PROP. XXVI. THEOR.

A 6, C 12, B 24
D 1, E 2, F 4
Similes plani numeri A, B inter se rationem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum.

θ. 18. 8.
κ. 2. 8.

Medius proportionalis, inter A, B cadens⁹, sit C, & sumantur * minimi D, E, F eandem⁹ quam

quam A, C, B rationem habentium. Ergo ^λ A. I. cor. 2. 8.
 D, F quadrati erunt. Et quia $D:F = A:B$ ^μ 14. 7.
 habebit A ad B rationem quadrati ad quadra-
 tum. Q. E. D.

PROP. XXVII. THEOR.

A 16, C 24, D 36, B 54

E 8, F 12, G 18, H 27

*Similes solidi numeri A, B inter se rationem
 habent, quam numerus cubus ad cubum nume-
 rum.*

Nam medii duo proportionales inter A, B
 cadentes^v sint C, D, & sint E, F, G, H totidem^z v. 19. 8.
 minimi & in eadem ratione ac A, C, D, B. ^ξ 2. 8.
 Ergo^o eorum extremi E, H cubi erunt. Hinc, ^{o. i. cor. 2. 8.}
 quia $A:B = E:H$, patet, esse A ad B, vt ^π 14. 7.
 cubus ad cubum. Q. E. D.





E V C L I D I S E L E M E N T O R V M L I B E R I X.

* * * * *

PROP. I. THEOR.

$A\ 6, B\ 54$
 $AB\ 324$
 $A^2\ 36$

*Si duo similes plani numeri A
 B sese multiplicantes aliquem fa-
 cerint : factus AB quadratus
 erit.*

$\alpha. 17. 7.$
 $\beta. 18. 8.$
 $\gamma. 8. 8.$
 $\delta. 22. 8.$

Nam numerus A se ipsum multiplicans fa-
 ciat quadratum A^2 . Ergo $\alpha\ A : B = A^2 : AB$.
 Et quia inter A & B vnus medius proportiona-
 lis β cadit : cadet etiam γ inter A^2 & AB vnus
 medius proportionalis. Ergo AB est δ qua-
 dratus. Q. E. D.

PROP. II. THEOR.

$A\ 3, B\ 12$
 $AB\ 36$
 $A^2\ 9$

*Si duo numeri sese multiplican-
 tes A, B, quadratum numerum AB
 efficiant : similes plani erunt.*

$\alpha. 17. 7.$
 $\beta. 18. 8.$
 $\gamma. 8. 8.$
 $\delta. 20. 8.$

Sumatur numerus quadratus A^2 . Ergo A :
 $B = \alpha\ A^2 : AB$. Et quia quadrati A^2, AB si-
 miles plani numeri sunt, & ergo inter eos
 vnus medius proportionalis β cadit : cadet
 quoque inter A & B vnus γ medius propor-
 tionalis. Ergo A & B similes plani sunt δ nu-
 meri. Q. E. D.

PROP.

PROP. III. THEOR.

A^3 8 A^6 64
 A^2 4
 A 2
 1

Si cubus numerus A^3 se ipsum multiplicans faciat aliquem A^6 : factus A^6 cubus erit.

Sumatur enim cubi A^3 latus A , & huius quadratum A^2

$\equiv AA$. Ergo $A^3 \equiv A^2 A$. Quare $1: A$ 1. 18. def. 7.
 $\equiv A: A^2$, & $1: A \equiv A^2: A^3$. Ergo inter 1 & A^3 18. & 19. def. 7.
 duo medii proportionales cadunt. Quia $1: A^3 \equiv A^3: A^6$, totidem etiam $1: A^6$ 1. cor. 17. 7.
 vero $1: A^3 \equiv A^3: A^6$, totidem etiam $1: A^6$ 8. 8.
 A^3 & A^6 cadunt. Ergo A^6 cubus est. Q. 23. 8.
 E. D.

PROP. IV. THEOR.

A 8, B 27
 A^2 64 AB 216
 cubus erit.

Si numerus cubus A cubum numerum B multiplicans faciat aliquem: factus AB cubus erit.

Sumatur numerus A^2 , qui etiam cubus erit. 6. 3. 9.
 Et quia $A: B \equiv A^2: AB$: cubus erit & ipse AB . 7. 18. 7.
 Q. E. D. 25. 8.

PROP. V. THEOR.

A 8, B 27
 A^2 64, AB 216

Si cubus numerus A numerum aliquem B multiplicans faciat cubum AB : & multiplicatus B cubus erit.

Sumatur numerus A^2 , qui cubus erit. Et 6. 3. 9.
 quia $A: B \equiv A^2: AB$: erit B cubus. Q. 7. 18. 7.
 E. D. 25. 8.

PROP. VI. THEOR.

A 8, A² 64, A³ 512

Si numerus A se ipsum multiplicans cubum A² faciat: & ipse A cubus erit.

φ. 17. 7.

κ. 25. 8.

Sumto enim cubo numero A³, quia A³:A²
 $\equiv^{\phi}$ A²:A: erit A^κ cubus. Q. E. D.

PROP. VII. THEOR.

A 6, B 7

AB 42

C₃, D₂

Si compositus numerus A numerum aliquem B multiplicans quendam faciat: factus AB solidus erit.

ψ. 13. def. 7.

ω. 9. ax. 7.

α. 17. def. 7.

Numerum enim A metiatur ψ numerus C per D. Ergo A $\equiv^{\omega}$ CD. Ergo AB $\equiv$ CDB solidus^α est. Q. E. D.

PROP. VIII. THEOR.

÷ 1. A 3. B 9. C 27. D 81. E 243. F 729

Si ab unitate quotcunque numeri A, B, C, D, E, F deinceps proportionales fuerint: tertius quidem ab unitate B quadratus est, & vnum intermittentes omnes D, F; quartus autem C est cubus, & duos intermittentes omnes F; septimus vero F cubus simul & quadratus, & quinque intermittentes omnes.

β. 20. def. 7.

γ. 6. ax. 7.

δ. 9. ax. 7.

ε. 22. 8.

1. Quia enim 1 : A $\equiv$ A : B: vnitas ipsum A aequaliter metitur^β ac A ipsum B. Ergo A per se ipsum metitur^γ numerum B, & hinc B $\equiv^{\delta}$ A² quadratus est. Et quoniam ÷ B, C, D: erit^ε & D quadratus. Eadem ratione & F quadratus erit, & vnum intermittentes omnes quadrati erunt. Q. E. D.

2. Quia

2. Quia est $1: A = B: C$: metietur B ipsum C per A, & ergo $C =^d AB = A^3$ cubus 1. 9. ax. 7.
erit. Et quum sint $\div\div C, D, E, F$: erit 2^o & $F \text{2}^o$ 23. 8.
cubus. Et similiter omnes duos intermittentes cubi erunt. Q. E. D.

3. Et quia F etiam ostensus est quadratus: septimus F & quadratus & cubus simul est; idemque pariter demonstratur de omni quinque intermittente. Q. E. D.

PROP. IX. THEOR.

$\div\div 1, A 4, B 16, C 64, D 256, E 1024, F 4096$
 $\div\div 1, A 8, B 64, C 512, D 4096, E 32768, F 262144$

Si ab unitate quocunque numeri A, B, C, D, E, F deinceps proportionales fuerint, qui vero post unitatem A sit quadratus; & reliqui omnes quadrati erunt: si qui post unitatem A sit cubus; & reliqui omnes cubi erunt.

1. Sit enim A quadratus. Iam tertius B, & vnum intermittentes omnes D, F, quadrati * 8. 9.
sunt. Sed quia sunt $\div\div A, B, C$, & A quadratus est: erit 2^o C quadratus, hinc & E & c. 3. 12. 8.
Omnes ergo quadrati sunt. Q. E. D.

2. Sit A cubus. Iam quartus C, & omnes F, qui duos intermittunt, 3^o cubi sunt. Et quia $1: A = A: B$; & ergo $B = A^2$: erit & 2^o B 1. 29. def. 7.
cubus; quare & E cubus 1^o erit. Et ob $\div\div$ & 9. ax. 7.
A, B, C, D, erit & 1^o D cubus. Et similiter re- * 3. 9.
liqui omnes cubi sunt. Q. E. D. 23. 8.

PROP. X. THEOR.

1, A 2, B 4, C 8, D 16, E 32, F 64

Si ab unitate quocunque numeri A, B, C, D, E, F deinceps proportionales fuerint, qui vero post unitatem A non sit quadratus; neque alius ullus quadratus erit, praeter tertium ab unitate B, & unum intermittentes omnes D, F: si, qui post unitatem, A non sit cubus; neque alius ullus cubus erit, praeter quartum ab unitate C, & duos intermittentes omnes F.

1. Non sit A quadratus, & tamen C quadratus sit, si fieri potest. Ergo quia & B quadratus^u est: A ad B eam rationem habet, quam quadratus B ad quadratum C, & hinc A quadratus^v erit; *contra hypotesin*. Similiter ostendemus nullum alium quadratum esse praeter B, D, F &c. Q. E. D.

2. Si A cubus non sit, & tamen D cubus esset: quoniam C cubus^u est; haberet & B ad C rationem, quam cubus C ad cubum D, & ergo ipse B cubus^o esset. Hinc quia, ob $1:A = A:B$, est $B = \pi A^2$, esset & A cubus^u; *contra hyp.* Similiter ostendemus nec ullum alium cubum esse praeter C & F &c. Q. E. D.

PROP. XI. THEOR.

$\div$ 1, A 3, B 9, C 27, D 81, E 243

Si ab unitate quocunque numeri A, B, C, D, E deinceps proportionales fuerint: minor A maiorem D metitur per aliquem C eorum, qui sunt in numeris proportionalibus.

Quia

Quia enim est $1 : A = C : D$: aequae me-
 titur C ipsum D^o ac 1 ipsum A. Ergo & A σ. 20. def. 7.
 ipsum D aequae^r metitur ac 1 ipsum C, id est^r τ. 15. 7.
 A metitur D per C. v. 9. ax. 7.

* Pariter, si sumantur B & E, demonstratur
 B metiri ipsum E per aliquem C inter propor-
 tionales : quia ϕ $1 : B = C : E$. Q. E. D. φ. 14. 7.

* Cor. In serie numerorum ab unitate deinceps
 proportionalium secundus A quemvis D me-
 titur per proxime praecedentem C.

* Schol. 1. Et hinc secundus A quemvis C mul-
 tiplicans facit proxime sequentem D.

* Schol. 2. Si numerus qui metitur aliquem
 ex proportionalibus non sit vnus proportionalium :
 neque is, per quem metitur, vnus ex proportio-
 nalibus erit χ . χ. 2. cor. 16. 7.

PROP. XII. THEOR.

$\div$ 1, A 4, B 16, C 64, D 256
 E 2, H 8, G 32, F 128

Si ab unitate quotlibet numeri A, B, C, D deinceps
 proportionales fuerint : quicumque pri-
 morum numerum E metiuntur ultimum D, iidem
 & eum A, qui unitati proximus est, metientur.

Si negas E metiri ipsum A : erunt ψ E & A
 primi inter se. Metiatur autem E ipsum D ψ. 31. 7.

per F : & erit $EF =^a D =^a AC$. Quare
 $A : E =^b F : C$. Sunt autem A, E primi ω. 9. ax. 7.
 inter se, & γ minimi : hinc E metitur^d etiam α. 1. sch. 11. 9.
 C. Metiatur per G. Ergo $EG =^a C =^a$ β. 19. 7.

AB. Quare $A : E =^b G : B$. Hinc E meti-
 tur^d ipsum B. Metiatur eum per H. Ergo
 $EH =^a B =^a A^2$. Hinc $A : E =^b H : A$. Ergo
 E metietur quoque^d ipsum A. Q. E. D. γ. 23. 7.

O 4

* Schol.

* *Schol.* 1. Numerus primus, ultimum metiens, metitur omnes ultimum præcedentes, per cor. II. 9. & II. ax. 7.

* *Schol.* 2. Si quis numerus, proximum unitati non metiens, ultimum metiatur, numerus erit compositus. Si enim primus esset, metiretur proximum unitati.

* *Schol.* 3. Si proximus unitati sit numerus primus: nullus alius numerus primus ultimum metietur. Si enim alius metiretur, unitati proximum quoque metiretur, qui ergo primus non foret.

PROP. XIII. THEOR.

÷ 1, A 5, B 25, C 125, D 625

E--- H--- G--- F---

Si ab unitate quotcunque numeri A, B, C, D deinceps proportionales fuerint, qui vero post unitatem A primus sit: maximum D nullus alius metietur, præter eos A, B, C, qui sunt in numeris proportionalibus.

Si enim fieri potest: metiatur ultimum D aliquis numerus E, qui non idem sit cum aliquo ipsorum A, B, C. Ergo quia E numerus primus esse nequit: compositus erit. Quare ipsum E metietur aliquis primus, qui nullus erit præter A. Si quis enim alius metiretur ipsum E: idem quoque ipsum D metiretur; quod fieri nequit. Ergo A metietur E. Iam metiatur E ipsum D per F: & F

2. 3. schol.

12. 9.

4. 33. 7.

9. ax. 7.

1. 2. sch. II. 9.

11. 2. cor.

16. 7.

1. 9. ax. 7.

11. 1. sch.

11. 9.

11. 19. 7.

nullus ex ipsis A, B, C esse poterit. Sed quia F metietur D: eodem modo, quo ante demonstrabitur, F compositum esse, quem A metiatur. Et quia, ob $EF = D = AC$, est $A:E = F:C$; A vero ipsum E metitur: F quo-

F quoque ipsum C^z metietur. Metiatur per G, qui nullus ex ipsis A, B esse poterit. Et quia ob $FG =^{\wedge} C =^{\wedge} AB$, est $A : F =^{\vee} G : B$; A vero ipsum F metitur: metietur^z & G ξ . 20. def. 7. ipsum B. Metiatur per H. Quum vero G nullus sit ex proportionalibus: neque H idem erit, qui A. Sed quum, ob $GH =^{\wedge} B =^{\wedge} A^{\wedge}$, sit $A : G =^{\vee} H : A$, eodem vero, quo ante modo, demonstratur, A ipsum G metiri, quia G ipsum C^z metitur: patet, H metiri ipsum A, & ergo A non esse^o primum; *contra hyp.* o. II. def. 7. *potthesin.*

* *Schol.* Quia similiter demonstratur, quod ipsum C nullus numerus metiatur, praeter A vel B: patet, quod numeros ab unitate deinceps proportionales, si proximus unitati primus sit, nullus numerus metiatur, nisi qui inter ipsos proportionales habetur.

PROP. XIV. THEOR.

Si minimum numerum A primi numeri B, C, D metiantur: nullus alius numerus primus metietur ipsum A praeter eos, qui a principio metiebantur, B, C, D.

A 30
B 2, C 3, D 5
E -- F --

Si fieri^o potest, metiatur ipsum A alius E, per F. Ergo E & F facient^o numerum A. π . 9. ax. 7. Quare quum B, C, & D metiantur ipsum A: metientur quoque vnum^o ipsorum E, F. Non ξ . 32. 7. autem metiri possunt^o primum E: ergo alterum F metientur. σ . II. def. 7. Est autem $F < A$. Quare A non erit minimus, quem B, C, D metiantur; *contra hypotesin.*

PROP. XV. THEOR.

÷ A 9, B 12, C 16
D 3, E 4

Si tres numeri A, B, C, deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium

duo quilibet compositi ad reliquum primi erunt (A + B ad C, B + C ad A, & A + C ad B).

v. 35. 7.

φ. 2. 8.

χ. 24. 7.

ψ. 30. 7.

ω. 26. 7.

α. 2. ax. 7.

β. 27. 7.

γ. 1. ax. 7.

δ. 26. 27. 7.

Sumantur duo numeri^v D, E, minimi eandem cum A, B, C rationem habentium. Ergo^φ $A = D^2$, $B = DE$, & $C = E^2$. Et quia D, E primi^χ inter se sunt: erit & $D + E$ ad vtrumque^ψ ipsorum D, E primus. Ergo quia numeri $D + E$ & D ad ipsum E primi sunt, erit^ω & $(D + E) \times D$ ad eundem E primus. Sed $(D + E) \times D = D^2 + ED$. Ergo^α $D^2 + ED$ primus est ad E, hinc quoque^β ad E^2 . Patet igitur $A + B$ esse primum^γ ad C. Similiter ostenditur, esse $B + C$ primum ad A. Denique quia $D + E$, D, & E primi sunt inter se: erit^δ $(D + E)^2$ ad DE primus. Sed^α $(D + E)^2 = D^2 + 2DE + E^2$. Ergo $D^2 + 2DE + E^2$ primus est^γ ad ipsum DE, & hinc^ψ etiam $D^2 + DE + E^2$ ad ipsum DE, & pari ratione^ψ $D^2 + E^2$ ad eundem DE primus erit. Quare &^γ $A + C$ ad ipsum B primus est. Q. E. D.

PROP. XVI. THEOR.

A 5, B 8, C ---

Si duo numeri A, B primi inter se fuerint: non erit ut primus A ad secundum B, ita secundus B ad alium ullum.

Si

Si enim fieri potest: sit C numerus talis, ut
 sit $A : B = B : C$. Quia autem A & B mini-
 mi sunt eandem cum ipsis rationem habent-
 tium: A metietur $\frac{2}{3}$ ipsum B. Hinc quum A
 quoque se ipsum metiatur: non erunt A, B
 primi inter se; *contra hypothesin*. e. 23. 7.
c. 21. 7.

PROP. XVII. THEOR.

A 8, B 12, C 18, D 27, E---

Si fuerint quotcunque numeri A, B, C, D de-
 inceps proportionales; extremi autem ipsorum,
 A, D, primi inter se sint: non erit ut primus
 A ad secundum B ita ultimus D ad alium ullum.

Si negas: sit $A : B = D : E$. Quia ergo A:
 D = $\frac{2}{3}$ B : E, & A, D minimi $\frac{2}{3}$; A ipsum B $\frac{2}{3}$
 metietur. Ergo, quum sit $A : B = B : C =$
 C : D; metietur B $\frac{2}{3}$ ipsum C, & ergo ipsum $\frac{2}{3}$
 D. Quare & A ipsum D $\frac{2}{3}$ metietur, & hinc
 A, D primi non erunt; *contra hypothesin*. u. 13. 7.
g. 21. 7.
i. 21. 7.
u. 20. def. 7.
l. 11. ax. 7.

PROP. XVIII. PROBL.

Duobus numeris A, B datis, considerare, an
 tertius ipsis proportionalis inueniri possit.

1. Cas. Si A, B primi inter se sunt: osten-
 sum iam μ est, tertium proportionalem inue-
 niri non posse. u. 16. 9.

A 4, B 6, C 9
 $B^2 = 36$

2. Cas. Si A, B non sunt
 primi, & A metitur B^2 : me-
 tiatur per C, qui erit tertius

Proportionalis.
 $A : B = \frac{1}{3} B : C$

Quia enim $AC = \frac{1}{3} B^2$: erit v. 9. ax. 7.
g. 20. 7.

3. Cas.

A 6, B 4, C -- 3. *Cas.* Si vero A, B primi non sunt, nec A ipsum
 B^2 16 B^2 metitur: nequit tertius
 proportionalis inueniri. Si negas: fit inuen-
 tus C. Quia ergo $AC = \frac{1}{2} B^2$: A metitur B^2 :
 contra hypotesin.

ξ. 20. 7.
 ε. 23. def. 7.

PROP. XIX. PROBL.

*Tribus numeris datis A, B, C, considerare,
 an quartus ipsis proportionalis inueniri possit.*

A 3, B 7, C 6, D 14 1. *Cas.* Si A meti-
 BC 42 tur BC: potest inue-
 niri quartus propor-
 tionalis D, is nempe per quem A ipsum BC
 metitur. Nam quia $AD = \pi BC$: erit A: B
 $=^e C: D$.

π. 9. ax. 7.
 ε. 19. 7.

A 3, B 5, C 7, D -- 2. *Cas.* Si A non
 BC 35 metitur BC: non pot-
 est quartus proportio-
 nalis inueniri. Si quis enim esset D: ob A:
 $B = C: D$, foret $AD =^e BC$, & igitur A me-
 tiretur πBC ; contra hyp.

ε. 23. def. 7.

PROP. XX. THEOR.

*Primi numeri plures sunt omni proposita mul-
 titudine primorum numerorum A, B, C.*

π. 38. 7.

A 2, B 3, C 5 Sumatur enim π minimus
 D 30 D, quem ipsi A, B, C metian-
 tur, & apponatur vnitas. Iam
 si $D + 1$ primus est: patet propositio.

A 5, B 3, C 7. Si vero $D + 1$ primus non
 E 53, D 105 est: metietur eum π primus
 aliquis E, qui nulli ipsorum A,
 B, C

v. 33. 7.

B, C idem esse potest. Si enim alicui eorum idem esset: metiretur E quoque ipsum D, ergo & ϕ unitatem. Q. E. A. Ergo nouus numerus primus E inuentus est. Q. E. D. ϕ . 12. ax. 7.

PROP. XXI. THEOR.

A 4, B 6, C 8, $A + B + C$ 18

Si pares numeri quotcunque A, B, C componantur: totus $A + B + C$ par erit.

Quia enim vnusquisque ipsorum A, B, C partem $\propto$ dimidiam habet: totus etiam $A +$ $\propto$. 6. def. 7.
 $B + C$ partem dimidiam ψ habebit, & igitur ψ . 2. ax. 7.
 par erit. Q. E. D.

PROP. XXII. THEOR.

A 5, B 3, C 7, D 9, $A + B + C + D$ 24

Si impares numeri A, B, C, D quotcunque componantur; multitudo autem ipsorum sit par: totus $A + B + C + D$ par erit.

Quia enim $A - 1, B - 1, C - 1, D - 1$ sunt numeri ω pares, & multitudo unitatum detra- ω . 7. def. 7.
 ctarum etiam par est: erit summa numerorum $A - 1, B - 1, C - 1, D - 1$ & unitatum residuarum, id est summa $A + B + C + D$, numerus ω par. Q. E. D. α . 21. 9.

PROP. XXIII. THEOR.

A 11, B 5, C 3, $A + B + C$ 19

Si impares numeri A, B, C quotcunque componantur; & multitudo ipsorum sit impar: & totus $A + B + C$ impar erit.

Nam

$A_{11}, B_5, C_3, A + B + C_{19}$
 3. 7. def. 7. Nam quia $C - 1$ par^s est, & $A + B$ idem
 7. 22. 9. par^v est: erit & $A + B + C - 1$ numerus
 8. 21. 9. par. Ergo^s patet numerum $A + B + C$ im-
 parem esse. Q. E. D.

PROP. XXIV. THEOR.

A_{12}
 B_4

 $A - B_8$
 8. 6. def. 7. Si a pari numero A par aufera-
 tur B : & reliquus $A - B$ par erit.
 Quum enim tam A , quam B ha-
 beat partem dimidiam: habebit et-
 iam $A - B$ partem dimidiam, & igitur^s par
 erit. Q. E. D.

PROP. XXV. THEOR.

A_{12}
 B_5
 C_4

 $A - B_7$
 2. 7. def. 7. Si a pari numero A impar B
 11. 24. 9. auferatur: reliquus $A - B$ im-
 par erit.
 Quum enim B constet ex pa-
 ri C & vnitate; $A - C$ autem^v par sit: erit A
 $- C - 1$, id est $A - B$, numerus^s impar.
 Q. E. D.

PROP. XXVI. THEOR.

$A....C...D.B$
 Si ab impari numero AB
 impar BC auferatur: reli-
 quus AC par erit.
 Ab utroque auferatur vnitas BD . Ergo
 3. 7. def. 7. tam AD quam DC par^s erit; ergo & reli-
 11. 24. 7. quus AC . Q. E. D.

PROP. XXVII. THEOR.

$A.D....C...B$
 Si ab impari numero AB
 par BC auferatur: reliquus
 AC impar erit.

Nam

Nam ablata vnitate AD, erit DB par^u. Er-
^u. 7. def. 7.
 go DB — BC = DC par quoque^λ est, & pro-
^λ. 24. 7.
 inde^u AC = DC + 1, impar. Q. E. D.

PROP. XXVIII. THEOR.

A... B... Si impar numerus A parem B
 C... .. multiplicans faciat aliquem: factus
 C par erit.

Nam quum C componatur^u ex tot nume-
^u. 15. def. 7.
 ris aequalibus ipsi B, quot in A sunt vnitates:
 patet C componi ex numeris paribus, ergo
 ipsum parem^v esse. Q. E. D.
^v. 21. 9.

* Schol. Eadem ratione, si A & B pares sunt:
 factus AB par est.

PROP. XXIX. THEOR.

A..., B..... Si impar numerus A
 C..... .. imparem numerum B mul-
 tiplicans faciat aliquem:
 factus C impar erit.

Quia enim C componitur^ξ ex tot numeris
^ξ. 15. def. 7.
 ipsi B aequalibus, quot A vnitates habet: pa-
 tet C componi ex multitudine impari nume-
 rorum imparium, ideoque imparem^o esse. o. 23. 9.
 Q. E. D.

* Schol. 1. Numerus A, numerum imparem C
 metiens, impar est, & per imparem B metitur.
 Si enim negas: aut neuter ipsorum A, B impar
 esset, ideoque nec C = AB impar^π esse posset; π. sch. 28. 9.
 contra hypothesin: aut alteruter tantum ipsorum
 A, B esset impar, & neque sic C posset^ε impar esse; ε. 28. 9.
 etiam contra hypothesin. Quare vterque A, B
 impar est.

2. Paris numeri quadrati latus par est.

PROP.

PROP. XXX. THEOR.

A 3, B 12
C 4

Si impar numerus A parem numerum B metiatur: & dimidium eius metietur.

Metiatur enim A ipsum B per C: dico C non imparem esse; quia C posito impari, etiam $AC = B$ impar^e esset, contra hypothesin. Ergo C par erit; & A ipsum B pariter metietur, & ob id eius dimidium quoque^r metietur. Q. E. D.

* Cor. Impar numerus parem metitur per parem.

PROP. XXXI. THEOR.

A 3 B 5
2 B 10
C ---

Si impar numerus A ad aliquod numerum B sit primus: & ad ipsius duplum 2 B primus erit.

Si negas, A & 2 B primos esse inter se: metiatur^v eos idem numerus C. Et quia A impar est: C quoque impar^o erit. Sed quia C metitur ipsum 2 B, qui par^x est: metietur C etiam^ψ dimidium eius, nempe B. Ergo A & B non^v erunt primi inter se; contra hypothesin.

PROP. XXXII. THEOR.

1, A 2, B 4, C 8, D 16

Numerorum B, C, D, a binario A duplatorum unusquisque pariter par est tantum.

Nam quia^ω singuli B, C, D e binario facti sunt: pares eos esse^α constat. Et quum praeterea^β $\div$ 1, A, B, C, D: binarius A singulos B, C

B, C, D metitur γ per aliquem ipsorum A, B, C, D. γ . cor. 11. 9.
 Ergo singuli B, C, D pariter pares δ sunt. De δ . 8. def. 7.
 nique quia A primus est, ideoque ipsos B, C,
 D nullus numerus ϵ metiri potest, qui non vnus ϵ . sch. 13. 9.
 ex ipsis A, B, C, D sit: singuli B, C, D pariter
 pares sunt tantum. Q. E. D.

PROP. XXXIII. THEOR.

A 10 Si numerus A dimidium $\frac{1}{2}$ A habeat
 A 5 imparem: pariter impar est tantum.

Quia enim $\frac{1}{2}$ A metitur ipsum A per 2: pa-
 tet A esse ζ pariter imparem. Dico & tan- ζ . 9. def. 7.
 tum: quia si etiam A ponas pariter parem,
 metietur η eum aliquis par pariter, ideoque η . 8. def. 7.
 idem par eius dimidium $\frac{1}{2}$ A, qui impar est, θ . ax. 7.
 metietur θ . Q. E. A. ϵ . sch. 29. 9.

PROP. XXXIV. THEOR.

A 20 Si par numerus A neque sit a bina-
 A 10 rio duplatus, neque dimidium $\frac{1}{2}$ A im-
 A 5 parem habeat: pariter par est, & pa-
 riter impar.

Nam A pariter parem esse, $\ast$ manifestum $\ast$. 8. def. 7
 est, quia $\frac{1}{2}$ A par est. Secundo, si $\frac{1}{2}$ A iterum
 bifariam diuiditur, & huius dimidium rursus
 bifariam, & sic porro, tandem proueniet nu-
 merus $\frac{1}{4}$ A impar, qui ipsum A per parem 4
 metietur λ . Nam si secus esset: perueniretur λ . cor. 30. 9.
 tandem ad binarium; & A foret a binario du-
 platus. Quod est contra hypothesin. Ergo
 $\ast$ A est etiam pariter impar. Q. E. D. μ . 9. def. 7.

PROP. XXXV. THEOR.

A.....

B....G.....C

D.....

E.....L.....K....H.....F

Si sint quotcunque numeri A, BC, D, EF deinceps proportionales; auferantur autem a secundo BC & ultimo EF aequales primo CG, FH: erit ut secundi excessus BG ad primum A, ita ultimi excessus EH ad omnes ipsum antecedentes A + BC + D.

Ponatur $FK = BC$, & $FL = D$. Hinc quia
 v. 3. ax. 1. $FH = CG$, erit $HK = GB$. Et quum
 §. 16. ax. 7. $EF : D = D : BC = BC : A$: erit $EF : FL =$
 o. sch. 13. 7. $FL : FK = FK : FH$, ideoque diuidendo ° $EL :$
 $LF = LK : FK = KH : FH$, & ergo $BG : A =$
 π. 12. 7. $KH : FH = EH : LF + FK + FH = EH :$
 $A + BC + D$. Q. E. D.

PROP. XXXVI. THEOR.

÷ 1, A 2, B 4, C 8, D 16

E (= 1 + A + B + C + D) 31, ED 496

÷ E 31, F 62, G 124, H 248

K--- L----

Si ab unitate quotcunque numeri A, B, C, D deinceps proportionales exponantur in dupla analogia, quoad totus compositus E primus fiat: & totus E in ultimum D multiplicatus faciat aliquem: factus ED perfectus erit.

Quot enim sunt A, B, C, D, tot sumantur ab E deinceps proportionales & in eadem ratione dupla, E, F, G, H. Ergo $A : D = E : H$.

e. 14. 7.

$E: H$. Hinc ob $ED = {}^{\sigma} AH = 2 H$: erunt ϕ . 19. 7.
adhuc $\div E, F, G, H, ED$; & ergo $F - E: E$
 $= {}^{\sigma} ED - E: E + F + G + H$. Est autem τ . 35. 9.
 ${}^{\sigma} F - E = 2 E - E = E$. Quare $ED - E =$ ν . constr.
 $E + F + G + H$, & addito $E = 1 + A + B$
 $+ C + D$, erit $ED = 1 + A + B + C + D$
 $+ E + F + G + H$, qui singuli numeri par-
tes sunt ipsius ED , quia ipsum ED tam nu-
merus ϕ D , ideoque $\propto A, B, C$, quam ψ H , ideo- ϕ . 8. ax. 7.
que E, F, G $\propto$ metiuntur. Denique dicō nul- $\propto$. 11. 9. &
lum alium, praeter eos, metiri ipsum ED . ν . dem. ν . constr. &
Pone enim alium K , qui ipsum ED metiatur per ν . constr. &
 L . Quia igitur ob $KL = {}^{\sigma} ED$ est $E: L = K:$ ν . 11. ax. 7.
 D ; K autem ipsum D non β metitur: neque β . 13. 9.
 E ipsam L γ metietur. Erunt itaque δ E, L γ . 20. def. 7.
primi inter se, ideoque ϵ minimi eandem ra- δ . 31. 7.
tionem habentium. Quare, quum fuerit $E:$ ϵ . 23. 7.
 $L = K: D$, L metietur ζ ipsum D , & proinde ζ . cor. 21. 7.
erit aliquis β ipsorum A, B, C . Sit $L = B$.
Sed quia E, F, G sunt in eadem ratione, in
qua B, C, D : erit ex aequo ϵ $B: D = E: G$,
& hinc $BG = {}^{\sigma} ED = \psi$ KL . Quare quum
sit $B: L = {}^{\sigma} K: G$, & $B = L$: erit & γ $K = G$;
contra hypothesin. Ergo nullus alius nume-
rus praeter A, B, C, D, E, F, G & H ipsius ED
pars est. Quare $ED = A + B + C + D +$ η . 3. def. 7.
 $+ E + F + G + 1$ perfectus θ numerus est. θ . 21. def. 7.
Q. E. D.



E V C L I D I S E L E M E N T O R V M L I B E R X.

* * * * *

DEFINITIONES.

1. *Commensurabiles magnitudines* dicuntur, quas eadem mensura metitur.
2. *Incommensurabiles* autem, quarum nullam esse communem mensuram contingit.
3. *Rectae lineae potentia commensurabiles* sunt, quum ea, quae ab ipsis fiunt, quadrata idem spatium metitur;
4. *Incommensurabiles* autem, quum quadrata, quae ab ipsis fiunt, nullum commune spatium metiri contingit.
5. His positis, ostenditur, cuicumque rectas lineae propositae rectas lineas, multitudine infinitas, & commensurabiles esse & incommensurabiles, alias quidem longitudine & potentia, alias vero potentia solum. Vocetur autem proposita *recta linea rationalis*;
6. Et huic commensurabiles, siue longitudine & potentia, siue potentia solum, *rationales*;
7. Incommensurabiles vero *irracionales* vocentur.
8. Et *quadratum*, quod a recta linea proposita fit, dicatur *rationale*;
9. Et

9. Et huic commensurabilia quidem *rationalia*;

10. Incommensurabilia vero dicantur *irrationalia*.

11. Et *lineae*, quae † incommensurabilia possunt, vocentur *irrationales*; si quidem ea quadrata sint, ipsorum latera; si vero alia quaequam rectilinea, ipsae a quibus aequalia quadrata describuntur.

† Puta irrationalia.

* Scilicet recta posse spatium dicitur, si quadratum ab ea descriptum spatio illi aequale est.

* In locum terminorum hic definitorum sequentes notas breuitatis studio substituiamus.

Σ est nota commensurabilium. Si quando scriptum fuerit $AB \Sigma CD$, leges: rectae AB, CD longitudine commensurabiles sunt. Et si inter plurium magnitudinum binas quasvis proximas hanc notamprehenderis, cogitabis, eas omnes sibi inuicem commensurabiles esse. Sed, A non Σ B notat, spatia A, B incommensurabilia, vel rectas A, B longitudine incommensurabiles esse.

Ε est nota rectarum linearum potentia solum commensurabilium, siue longitudine tantum incommensurabilium.

⊗ est nota rectarum potentia & longitudine incommensurabilium.

ρ notat quamvis magnitudinem rationalem.

ι notat quamvis irrationalem magnitudinem designat.

√ indicat rectam, quae spatium quoddam potest. E. gr. √ EF est recta quae spatium EF potest. √ (ABq — BCq) est recta, cuius quadrato recta AB plus potest quam recta BC.

* *Postulatum.*

Postulatur, quamlibet magnitudinem toties posse multiplicari, donec quamlibet magnitudinem eiusdem generis excedat.

* *Axiomata.*

1. Magnitudo, quotcunque magnitudines metiens, compositam quoque ex ipsis metitur.
2. Magnitudo, quamcunque magnitudinem metiens, metitur quoque omnem magnitudinem, quam illa metitur.
3. Magnitudo, metiens totam magnitudinem & ablatam, metitur & reliquam.
4. Omnis magnitudo se ipsam metitur.
5. Maior magnitudo minorem metiri nequit.
6. Si magnitudo toties magnitudinem continet, vel in ea continetur, quoties numerus unitatem, vel unitas in numero: magnitudinis ad magnitudinem eadem ratio est, quae numeri ad unitatem, vel unitatis ad numerum.

PROP. I. THEOR.

Duabus magnitudinibus AB, C expositis, si a maiori AB auferatur maius quam dimidium, & ab eo, quod reliquum est, rursus auferatur maius quam dimidium, & hoc semper fiat: relinquetur tandem quaedam magnitudo, quae minori magnitudine exposita C minor erit.

a. post. 10.



Sit enim * DE ipsius C multiplex ipsa AB maior, & sint eius partes $DF = FG = GE = C$. Auferatur ab AB dimidia maior BH, & a reliqua AH dimidia maior HK, & sic deinceps donec in AB partes AK, KH, HB aequae multae sint partibus DF, FG, GE. Jam quia DE

$DE > AB$, & ablata $EG < \frac{1}{2} DE$, & ablata $BH > \frac{1}{2} AB$: erit reliqua $DG > AH$. Eadem ratione erit $DF > AK$. Ergo $AK < C$. Q. E. D.

Aliter.

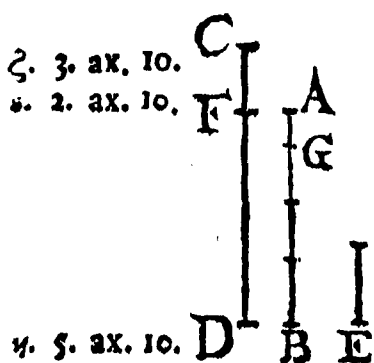
Fiant eadem quae antea, & praeterea in recta quadam capiantur relictæ AK aequales tot partes LM, MN, NO , quot sunt diuisiones in AB . Et quia $BH > \frac{1}{2} AB$: erit $BH > HA > KA$; ideoque $BH > ON$. Simili ratione est $HK > NM$. Ergo tota $AB > OL$. Hinc & $DE > AB > OL$. Est autem β $DE : OL$ β . 15. 5. $= DF : LM$. Quare γ $DF > LM$, id est, $C \gamma$ sch. 16. 5. $> AK$. Q. E. D.

Idem demonstrabitur, etiamsi non maius dimidio, sed ipsum dimidium, continue auferatur.

PROP. II. THEOR.

Si duabus magnitudinibus inaequalibus AB, CD expositis, detracta semper minore de maiore, reliqua minime praecedentem metiatur: magnitudines AB, CD incommensurabiles erunt.

Si negas: sit δ ipsarum AB, CD δ . 1. def. 10. communis mensura E . Iam quia AB diuidens ipsam CD relinquit aliquam CF se ipsa minorem, & haec CF diuidens alteram AB etiam se ipsa minorem AG , & hoc semper fieri ponitur: relinquetur tandem aliqua $AG < E$. Quum vero E metiatur ipsam AB , & AB ipsam DF : E metietur quoque ipsam DF . ϵ . 2. ax. 10.



Sed & totam CD metiri ponitur:
 ergo ζ & reliquam FC metietur,
 & hinc quoque ϵ ipsam BG, quae
 CF metiebatur. Quare E, me-
 tiens AB, & BG, metietur quo-
 que se ipsa minorem AG. Q.
 E. A η .

PROP. III. PROBL.

*Duabus magnitudinibus commensurabilibus
 AB, CD datis, maximam earum communem
 mensuram inuenire.*

Cas. 1. Si minor AB maiorem CD metitur:
 9. 4. & 5. liquet θ ipsam AB esse maximam communem
 ax. 10. mensuram. Q. E. F.



1. 2. 10.

Cas. 2. Si minor AB maiorem
 CD non metitur: detrahatur, quo-
 ties fieri potest, AB de CD, & reli-
 qua EC de AB, & sic deinceps, do-
 nec relinquatur aliqua AF, quae me-
 tiatur praecedentem EC; id quod
 tandem fiat ϵ necesse est.

Quum ergo AF ipsam EC, & haec
 x. 2. ax. 10. ipsam BF metiatur: AF quoque κ ipsam BF,
 λ. 4. & 1. ergo λ totam AB, ideoque κ ipsam ED metietur,
 ax. 10. Sed eadem AF metitur ipsam EC: ergo μ totam
 μ. 1. ax. 10. CD quoque metitur. Est ergo AF ipsarum
 AB, CD communis mensura. Dico autem &
 maximam esse. Si enim alia G > AF meti-
 retur vtramque AB, CD: eadem G metiretur
 ν. 3. ax. 10. quoque κ ipsam ED, ergo & ϵ ipsam EC, &
 ipsam

ipsam BF, & ipsam AF. Q. E. A⁵. Ergo ξ . 5. ax. 10.
 AF est maxima vtriusque AB, CD mensura.
 Q. E. F.

Cor. Ex hoc manifestum est, si magnitudo
 G duas magnitudines AB, CD metitur, & maxi-
 mam ipsarum communem mensuram AF metiri.

PROP. IV. PROBL.

*Tribus magnitudinibus commensurabilibus
 A, B, C datis, maximam ipsarum communem
 mensuram inuenire.*

Sumatur * duarum A, B ma- $\bullet$. 3. 10.
 xima communis mensura D.

Cas. 1. Si haec D metitur ter-
 tiam C: erit factum.

Nam D communem esse men-
 suram patet. Si vero maximam
 esse negas: sit ea $E > D$. Er-
 go E metietur π ipsam D. Q. E. A⁵. Qua- π . cor. 3. 10.
 re D maxima communis mensura erit. Q. E. F. ξ . 5. ax. 10.

Cas. 2. Si vero D tertiam C
 non metitur: fumatur * ipsarum
 C, D maxima communis mensu-
 ra E. Dico factum.

Primo enim sumi posse com-
 munem mensuram ipsarum C, D
 sic liquet. Quia A, B, C com-
 mensurabiles ponuntur: erit ea-
 rum * aliqua communis mensura. Haec, ip- σ . 1. def. 10.
 sa A, B metiens, metietur quoque π ipsam
 D, & ergo erit ipsarum C, D communis men-
 sura.

r. 2. 2X. 10.

π. cor. 3. 10.

u. hyp.

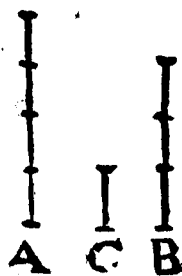


fura. Sit ea igitur E: & ^τ patet E esse communem trium A, B, C mensuram. Deinde si ponas aliam $F > E$ pro communi earundem mensura: metietur ^π F ipsam D, & ^υ ipsam C, ideoque ipsam E. Q. E. A. Ergo E est maxima trium A, B, C mensura. Q. E. F.

Coroll. Hinc si magnitudo F tres metiatur magnitudines A, B, C: & ipsarum maximam communem mensuram E metietur.

PROP. V. THEOR.

φ. 1. def. 10.



χ. 6. ax. 10.

4. 1. 3.
D E

Commensurabiles magnitudines A, B, inter se rationem habent, quam numerus ad numerum.

Quoniam $A \leq B$: metietur eas aliqua C. Et quoties C metitur A, tot unitates sint in numero D, quoties autem C metitur B, tot sint unitates in E. Hinc est $\propto A : C = D : 1$, & $C : B = 1 : E$, & ergo ex aequo $A : B = D : E$. Q. E. D.

PROP. VI. THEOR.

Fig. Prop. V.

Si duae magnitudines A, B, inter se rationem habeant, quam numerus D ad numerum E: magnitudines A, B erunt commensurabiles.

ψ. 6. ax. 10.

Quot enim unitates sunt in D, in tot aequales partes diuidatur A, & vni harum $= C$. Est ψ ergo $1 : D = C : A$. Sed ponitur $D : E = A : B$. Quare ex aequo $1 : E = C : B$.

C: B, ideoque C metitur B. Metiebatur autem A. Ergo $A \leq B$. Q. E. D.

Aliter.



Quot vnitates sunt in D, in tot partes aequales diuide A, earumque vni fit $= C$. Et quot vnitates sunt in E, ex tot magnitudinibus ipsi C aequalibus componatur F. Ergo est ψ $A: C = D: 1$, & $C: F = 1: E$, & ergo ex aequo $A: F = D: E$.

Sed erat $A: B = D: E$. Quare $A: B = A: F$. Ergo $B = F$. Metitur autem C ipsam F, ^{n. 9. 5.} ergo & ipsam B. Sed eadem C metitur A. Ergo $A \leq C$. Q. E. D.

Coroll. Ex hoc manifestum est, si sint duo numeri D, E, & recta linea A, fieri posse vt numerus D ad E numerum ita rectam A ad rectam F. Si autem inter ipsas A, F media proportionalis G sumatur, fieri poterit, vt numerus D ad E numerum, ita figura quae fit a recta A ad figuram similem similiterque descriptam a recta G. Nam ^{n. 2. cor. 20. 6.} figura quae fit ab A est ad similem similiterque descriptam a G $= A: F = D: E$.

PROP. VII. THEOR.

Incommensurabiles magnitudines A, B inter se rationem non habent, quam numerus ad numerum.

Si enim A ad B haberet rationem numeri ad numerum: foret ^{β} $A \leq B$; ^{β . 6. 10.} contra hyp.

PROP.

PROP. VIII. THEOR.

Si duae magnitudines A, B inter se rationem non habeant, quam numerus ad numerum: incommensurabiles erunt.

γ. 5. 10.

Si enim esset $A \propto B$: foret γ A ad B vt numerus ad numerum; contra hyp.

PROP. IX. THEOR.

Quae a rectis lineis A, B longitudine commensurabilibus fiunt quadrata inter se rationem habent, quam quadratus numerus C^2 ad quadratum numerum D^2 . Et quadrata Aq , Bq inter se rationem habentia, quam quadratus numerus C^2 ad quadratum numerum D^2 , & latera A, B habebunt longitudine commensurabilia. Quadrata vero, quae a longitudine incommensurabilibus rectis lineis E, F fiunt, inter se rationem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Et quadrata Eq , Fq inter se rationem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque latera habebunt longitudine commensurabilia.

δ. 5. 10.

ε. 1. cor. 20. 6.

ζ. 11. 2.

 A

 B

C 4. C^2 16.

D 3. D^2 9.

CD 12.

1. Sit $A \propto B$, & δ A : B
 $= C : D$. Quia $Aq : Bq$
 $= (A : B)^2$, & $C^2 : D^2 =$
 $(C : D)^2$: erit $Aq : Bq =$
 $C^2 : D^2$. Q. E. D.

Aliter.

Sit $A \propto B$, & $A : B = C : D$, & sumatur
 Rgl. sub A, B, nec non numerus CD. Ergo
 erit

erit $A:B = C:D = C^2:CD$. Sed $A:B = Aq:A \times B$. Quare $Aq:A \times B = C^2:CD$. Rursus, quia $A:B = C:D = CD:D^2$, & $A:B = A \times B:Bq$: erit $A \times B:Bq = CD:D^2$. Ergo ex aequo $Aq:Bq = B^2:D^2$. Q. E. D.

2. Sit $Aq:Bq = C^2:D^2$: dico fore $A \leq B$. Quia enim $Aq:Bq = (A:B)^2$, & $C^2:D^2 = (C:D)^2$: erit $A:B = C:D$, & ergo $A \leq B$. Q. E. D.

Aliter.

Nam C^2, CD, D^2 deinceps proportionales sunt in ratione $C:D$. Et $Aq, A \times B, Bq$ in ratione $A:B$. Ergo $A:B = C^2:CD$. Ergo $A \leq B$. Q. E. D.

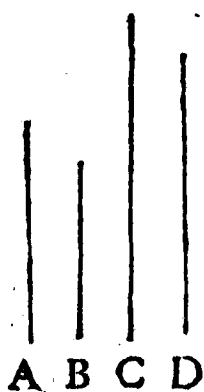
3. Non sit $E \leq F$. Iam si dicas, Eq ad Fq esse vt numerus quadratus ad quadratum: erit $E \leq F$; ^{per partem 2.} contra hyp. Quare non est Eq ad Fq vt numerus quadratus ad quadratum. Q. E. D.

4. Non sit Eq ad Fq vt quadratus numerus ad quadratum. Iam si dicas $E \leq F$: erit Eq ad Fq vt quadratus numerus ad quadratum; ^{per partem 1.} contra hyp. Ergo E non $\leq F$. Q. E. D.

Corollar. Et manifestum est, ex iam demonstratis, lineas, quae longitudine sunt commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles esse; quae vero potentia commensurabiles, non semper & longitudine (quum earum quadrata possint esse inter se vt numeri non quadrati); & hinc, quae longitudine incommensurabiles sunt, non semper & potentia incommensurabiles esse; quae vero potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles esse.

PROP.

PROP. X. THEOR.



A B C D

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, $A : B = C : D$; prima vero A secundae B fuerit commensurabilis; & tertia C quartae D commensurabilis erit. Et si prima A secundae B fuerit incommensurabilis: & tertia C quartae D incommensurabilis erit.

ξ. 5. 10.

1. Quia $A \leq B$: ξ A ad B, ergo etiam C ad D, rationem habet quam numerus ad numerum. Ergo est $C \leq D$. Q. E. D.

α. 6. 10.

π. 7. 10.

ρ. 8. 10.

2. Quia A non $\leq B$: non habet A ad B rationem π , quam numerus ad numerum. Sed $A : B = C : D$: ergo nec C ad D rationem habet numeri ad numerum. Ergo: C non $\leq D$. Q. E. D.

* 1. Schol. Hinc si quatuor rectarum proportionalium prima A secundae B est potentia solum commensurabilis: tertia C quartae D etiam potentia solum commensurabilis erit. Quia $Aq : Bq = Cq : Dq$ (22. 6.) erit $Cq \leq Dq$. Et quia non est $C \leq D$, patet esse $C \in D$.

* 2. Schol. Et si rectarum proportionalium prima A $\in$ secundae B: erit & tertia C $\in$ quartae D.

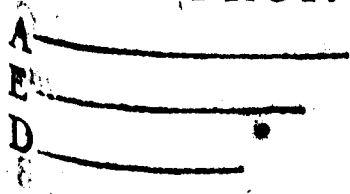
L E M M A.

Diffimiles plani numeri inter se rationem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Hoc manifestum est per 2. sch. 24. 8, & 26. 8.

PROP.

PROP. XI. PROBL.


 B 4. *Proposita rectae*
 C 10. *lineae A inuenire*
duas rectas lineas
incommensurabiles,
alteram quidem longitudine tantum, alteram
vero etiam potentia.

Exponentur τ duo numeri B, C, dissimiles σ . 21. def. 7.
 plani, & fiat τ B: C = Aq: Dq. Erit D $\in$ A. τ . cor. 6. 10.
 Sumatur ν inter A, D media proportionalis E. ν . 13. 6.
 Dico fore E $\in$ A.

Nam quia B ad C non ϕ habet rationem nu- ϕ . lem. hui.
 meri quadrati ad quadratum: nec Aq ad Dq
 eam rationem habebit. Ergo $\times$ D ipsi A lon- $\times$. 9. 10.
 gitudine incommensurabilis erit. Quia tamen
 Aq ad Dq rationem numeri ad numerum habet:
 erit ψ D ipsi A potentia commensurabilis. ψ . 6. 10. & 3.
 Quare D $\in$ A. def. 10.

Secundo quia A: D = Aq: Eq, & A non ω . 2. cor.
 D: erit α quoque Aq non ξ Eq, & hinc β E α . 20. 6.
 $\in$ A. Q. E. D. α . 10. 10. β . 4. def. 10.

* Cor. Patet etiam si duarum rectarum quadrata
 habeant rationem numeri ad numerum nec tamen
 quadrati numeri ad quadratum, rectas potentia so-
 lum commensurabiles esse.

* Schol. Simili ratione plures inueniri pos-
 sunt, expositae rectae potentia solum commensu-
 rabiles.

PROP. XII. THEOR.

Quae A, B eidem magnitudini C sunt commensurabiles, & inter se commensurabiles sunt.

7. 5. 10.

D 35. E 26.

F 52. G 61.

H 910. I 676. K 793.

Quia $A \propto C$, & B $\propto C$; $\therefore$ fit $A : C =$ $D : E$, & $C : B = F : G$.Sumantur $\div$ H, I, K

8. 4. 8.

B C A

minimi δ in rationibus D ad E & F adG. Ergo, quia $H : I = D : E$, erit $A : C =$ $H : I$. Et quia $I : K = F : G$, erit $C : B = I : K$.

9. 6. 10.

Ergo ex aequo $A : B = H : K$. Quare $A \propto$

B. Q. E. D.

* Schol. Hinc omnis recta linea rationali lineae commensurabilis, est quoque rationalis (6. def. 10). Et quae rationalia spatia possunt, rationales sunt. Et omnes rectae rationales inter se commensurabiles sunt, saltem potentia. Item omne spatium rationali spatio commensurabile est quoque rationale (9. def. 10.) & omnia spatia rationalia inter se commensurabilia sunt.

PROP. XIII. THEOR.

A —————

C —————

B —————

*Si sint duae magnitudines**A, B, & altera quidem A**eidem C sit commensurabilis,**altera vero B incommensura-**bilis: magnitudines A, B inter se incommensurabiles erunt.*

• Si enim esset $B \propto A$: quia & $C \propto A$, foret $B \propto C$; contra hypothesin.

2. 12. 10.

* Schol. Magnitudines ergo, quarum altera est rationalis, altera irrationalis sunt inter se incommensurabiles.

PROP.

PROP. XIV. THEOR.

Si duae magnitudines A, B commensurabiles sint; altera autem ipsarum A alicui magnitudini C sit incommensurabilis: & reliqua B eidem C incommensurabilis erit.

A B C

Si enim esset $B \propto C$: quia $A \propto B$, foret $A \propto C$; contra hypothesin.

* Schol. Hinc si duae rectae sint longitudine commensurabiles, altera autem ipsarum alicui rectae sit potentia solum commensurabilis: & reliqua eidem potentia solum commensurabilis erit.

PROP. XV. THEOR.

Si quatuor rectae lineae A, B, C, D proportionales fuerint; prima vero A tanto plus possit quam secunda B, quantum est quadratum rectae lineae E sibi commensurabilis longitudine: & tertia C tanto plus poterit quam quarta D, quantum est quadratum rectae lineae F, sibi longitudine commensurabilis.

A
B
C
D
E
F

Quod si prima A tanto plus possit quam secunda B, quantum est quadratum rectae lineae E sibi incommensurabilis longitudine: & tertia C quam quarta D tanto plus poterit, quantum est quadratum rectae lineae F sibi longitudine incommensurabilis.

Quoniam $A : B = C : D$: erit $Aq : Bq =$ 9. 22. 6.
 $Cq : Dq$. Sed $Aq = Bq + Eq$, & $Cq =$.. hyp.
 Q Dq

x. 17. 5.

9. 22. 6.

A. COR. 4. 5.

A. 10. 10.

A —————

B —————

E —————

C —————

D —————

F —————

Dq + Fq : ergo Bq + Eq :

Bq = Dq + Fq : Dq ; &

diuidendo Eq : Bq = Fq :

Dq. Quare E : B = F :

D, & inuerse B : E = D :

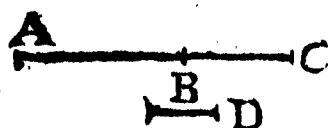
F. Sed A : B = C : D : er-

go ex aequo A : E = C : F. Hinc si sit A <

E, erit & F < C. Si vero non sit A < E,

nec erit F < C. Q. E. D.

PROP. XVI. THEOR.



Si duae magnitudines commensurabiles AB, BC componantur : & tota magnitudo AC utrique ipsarum AB, BC commensurabilis erit. Quod si tota magnitudo AC vni ipsarum AB, BC sit commensurabilis : & quae a principio magnitudines AB, BC commensurabiles erunt.

9. 1. def. 10.

3. 1. ax. 10.

6. 3. ax. 10.

1. Quia AB < BC : sit earum communis mensura D. Ergo 2 D metietur totam AC : & hinc AB < AC < BC. Q. E. D.

2. Quia AC < AB : sit earum mensura D, quae etiam metietur ipsam BC. Ergo AB < BC. Q. E. D.

* Cor. Et simul patet, totam magnitudinem AC, quae vni partium AB commensurabilis sit, reliquae BC etiam commensurabilem esse.

PROP. XVII. THEOR.



Si duae magnitudines incommensurabiles AB, BC componantur :

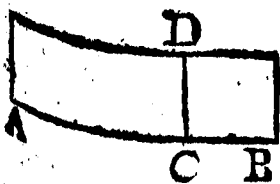
Et tota magnitudo AC utriusque ipsarum AB, BC incommensurabilis erit. Quod si tota magnitudo AC uni ipsarum AB, BC sit incommensurabilis: Et quae a principio magnitudines AB, BC incommensurabiles erunt.

1. Si enim esset $AC \propto AB$: metiretur eas^r aliqua D, quae & reliquam BC metiretur. Ergo esset $AB \propto BC$; contra hypothesin. Quare AC non $\propto AB$. Et eadem ratione AC non $\propto BC$. Q. E. D.

2. Si AC non $\propto AB$; & tamen $AB \propto BC$: metietur eas aliqua D. Ergo eadem D^r metietur totam AC, ideoque erit $AC \propto AB$; contra hypothesin. Ergo AB non $\propto BC$; quod etiam demonstrabitur similiter, si posita fuerit AC non $\propto BC$. Q. E. D.

* Coroll. Et manifestum est^r, magnitudinem AC, quae uni suarum partium AB incommensurabilis est, reliqua etiam BC incommensurabilem esse.

L E M M A.



Si ad aliquam rectam lineam AB applicetur parallelogrammum AD deficiens figura quadrata DB, parallelogrammum DA applicatum aequale est ei rectangulo, quod sub partibus AC, CB rectae lineae AB, ex applicatione factis, continetur.

Hoc per se patet, quia $CD = CB$.

PROP. XVIII. THEOR.

Si sint duae rectae lineae inaequales A, BC, quartae autem parti quadrati, quod fit a minori A, aequale parallelogrammum ad maiorem BC applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commensurabiles BD, DC ipsam BC dividat: maior BC tanto plus poterit quam minor A, quantum est quadratum rectae lineae sibi longitudine commensurabilis. Quod si maior BC tanto plus possit quam minor A, quantum est quadratum rectae lineae sibi longitudine commensurabilis; quartae autem parti quadrati, quod fit a minori A, aequale parallelogrammum ad maiorem BC applicetur, deficiens figura quadrata: in partes BD, DC longitudine commensurabiles ipsam BC dividet.



v. 5. 2.
 φ. hyp. &
 lemma.
 x. sch. 4. 2.
 ψ. hyp.
 ω. 16. 10.
 α. cor. 16. 10.

1. Bisecetur enim BC in E, & fiat $EF = ED$. Ergo $FB = DC$; & $4 BD \times DC + 4 EDq = 4 ECq$. Sed $4 BD \times DC = Aq$, & $4 EDq = 4 FDq$, & $4 ECq = 4 BCq$. Ergo $Aq + 4 FDq = 4 BCq$, & hinc $BCq - Aq = 4 FDq$. Et quum sit $BD < DC$, ideo $BC < DC + FB$: patet esse $BC < FD$. Q. E. D.

2. Sit $BD \times DC = \frac{1}{4} Aq$, & sit $BCq - Aq =$ quadrato rectae ipsi BC commensurabilis longitudine. Dico $BD < DC$. Nam, ut antea, ostenditur, esse FD rectam, cuius quadrato BC plus potest quam A. Quia ergo $BC < FD$: erit $BC < BF + DC$. Sed BF

$BF + DC^{\alpha} \leq DC$. Ergo $BC \leq^{\beta} DC$, ac ideo β . 12. 10.
 $BD^{\alpha} \leq DC$. Q.E.D.

PROP. XIX. THEOR.

Si sint duae rectae lineae inaequales A, BC, Fig. prop. XVIII.
quartae autem parti quadrati, quod fit a minori A, aequale parallelogrammum ad maiorem BC applicetur deficiens figura quadrata, & in partes incommensurabiles longitudine BD, DC ipsam BC diuidat: maior BC tanto plus poterit quam A minor, quantum est quadratum rectae lineae sibi longitudine incommensurabilis. Quod si maior BC tanto plus possit quam minor A, quantum est quadratum rectae lineae sibi longitudine incommensurabilis; quartae autem parti quadrati, quod fit a minori A, aequale parallelogrammum ad maiorem BC applicetur, deficiens figura quadrata: in partes BD, DC longitudine incommensurabiles ipsam BC diuidet.

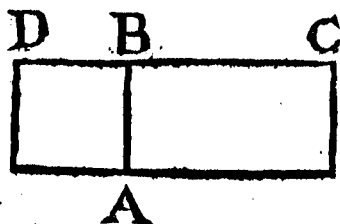
1. Iisdem enim, quae supra, constructis similiter ostendemus, $BCq - Aq = DFq$. Iam quia $BD \gamma$ non $\leq DC$: nec est δ $BC \leq DC$. γ . hyp.
 Sed $DC \leq FB + DC$: ergo BC non $\leq^{\epsilon}$ $FB + DC$, & hinc ζ BC non $\leq DF$. δ . 17. 10.
 Q. E. D. ϵ . 14. 10.
2. Quia γ BC non $\leq DF$: nec erit $BC \leq^{\delta}$ $DC + BF$. Sed $DC + BF \leq DC$. Ergo BC non $\leq DC$, nec δ $BD \leq DC$. ζ . cor. 17. 10.
 Q. E. D.

Schol. Tria sunt genera linearum rectarum rationalium inter se commensurabilium. Aut enim duarum rectarum rationalium, longitudine inter se commensurabilium, altera aequalis est expositae rationali; aut neutra expositae rationali

aequalis est, longitudine tamen ei vtraque est commensurabilis; aut denique vtraque expositae rationali commensurabilis est solum potentia.

* Hi sunt illi modi, quos innuunt sequentia theoremata, vel supponunt. Notet hic etiam legens, si rectis lineis notam hanc $\rho \propto$ apponamus, nos intelligere rectas rationales longitudine & potentia commensurabiles; sin ipsis adscribamus notam $\rho \in$, intelligendas esse rationales potentia solum commensurabiles.

PROP. XX. THEOR.



Quod sub rationalibus longitudine commensurabilibus rectis lineis AB, BC secundum aliquem praedictarum modorum, continetur

rectangulum AC rationale est.

- μ . 8. vel 9. Describatur ex AB quadratum AD, quod
 def. 10. ρ erit. Atque, quum sit ρ AB $\propto$ BC, & DB
 9. hyp. $=$ AB: erit DB $\propto$ BC. Hinc, quia BD: BC
 1. 1. 6. $=$ AD: AC, est * AD $\propto$ AC, ideoque ρ ACP.
 π . 10. 10. Q. E. D.
 A. 9. def. 10.

PROP. XXI. THEOR.

Fig. prop.
 praec.

Si rationale ad rationalem AB applicetur: latitudinem BC efficit rationalem, & ad AB, ad quam applicatum est, longitudine commensurabilem.

- μ . 8. def. 10. Describatur ex AB quadratum AD, quod
 ν . 9. def. 10. rationale erit. Ergo AC $\propto$ AD; hinc, quia
 5. 1. 6. AC: AD $=$ BC: BD vel AB, erit & BC $\propto$ AB,
 9. 10. 10. ideoque BC ρ . Q. E. D.
 π . 6. def. 10.

* Schol.

* Schol. Hinc quod sub rationali & irrationali continetur rectangulum, irrationale est.

PROP. XXII. THEOR.

Quod sub rationalibus potentia solum commensurabilibus rectis lineis AB, BC continetur rectangulum AC irrationale est; & recta linea ipsum potens est irrationalis; vocetur autem Media. Fig. prop. XX.

Descriptum enim ab AB quadratum AD rationale erit. Et quia $AB = BD$: erit BD $\in$ BC. Hinc, quum sit $BD:BC = AD:AC$, p. 1. 6.
erit AD $\propto$ non $\in$ AC. Quare AC $\propto$ est $\alpha\beta$, & p. 10. 10.
recta, quae ipsum AC potest, $\propto$ est $\alpha\beta$. Q. p. 10. def. 10.
E. D. p. 11. def. 10.

Schol. Media autem vocatur propterea, quod ipius quadratum est rectangulo AC aequale, & ipsa media proportionalis est inter AB, BC latera.

* Rgl. etiam sub $p \in$ contentum, & spatium omne, quod media potest, *medium* vocatur.

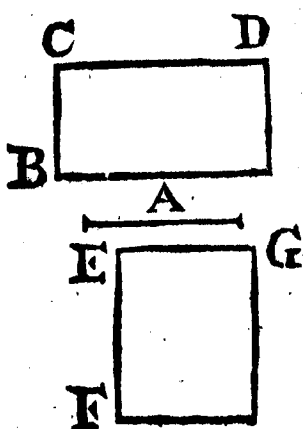
L E M M A.

Si sint duae rectae lineae AB, BC: erit, ut Fig. prop. XX.
prima AB ad secundam BC, ita quadratum AD, quod fit a prima, ad rectangulum AC quod sub duabus rectis lineis AB, BC continetur.

Descripto quadrato ex AB, compleatur Rgl. AC: & propositio manifesta erit ex 1. 6.

* Schol. Et ergo, ut vna BC ad alteram AB, ita $AB \times BC$ ad quadratum alterius AB.

PROP. XXIII. THEOR.



Quod fit a media A, ad rationalem BC applicatum, latitudinem CD efficit rationalem. & ei BC, ad quam applicatum est, longitudine incommensurabilem.

φ. hyp.

Possit enim A Rgl. FG. Sed potest etiam φ BD. Ergo $FG = BD$. Et quia vtrum-

κ. 16. 6.

ψ. 22. 6.

ω. 22. 10 &

hyp.

κ. sch. 12. 10.

ρ. 10. 10.

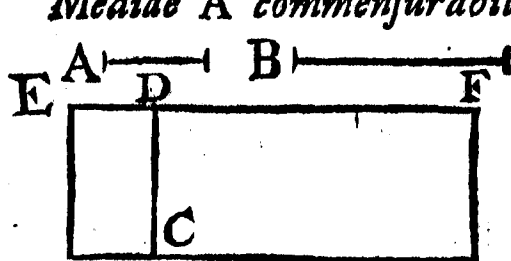
γ. lem. pr.

δ. 13. 10.

que spatium rectangulum φ est: erit $BC : EG = κ$ $EF : CD$, ac ideo $BCq : EGq = ψ$ $EFq : CDq$. Iam quum ^{ω} FE, EG sint ρ ε, & $BC^φ$ etiam ρ sit: erit ^{α} $BCq < EGq$, & hinc ^{β} $EFq < CDq$. Quare, quum EF sit ρ, erit ^{α} & $CD^ρ$. Deinde quia $FE ∈ EG$, & $FE : EG^γ = FEq : FG$: erit ^{β} $FEq < FG$. Ergo quum $EFq < CDq$, & $FG < BD$: erit ^{δ} $CDq < BDq$, & hinc ^{β} $CD < BC$, quia $CDq : BDq =^γ$ $CD : BC$. Q. E. D.

PROP. XXIV. THEOR.

Mediae A commensurabilis B media est.



Exponatur CD ρ, ad quam applicetur Rgl. CE = Aq, & Rgl. CF = Bq. Ergo

ε. 23. 10.

ζ. hyp. vel

cor. 9. 10.

η. 1. 6. &

10. 10.

θ. sch. 12. 10.

ι. 13. 10.

κ. 22. 10.

ED ρ ∈ CD. Iam quia ^{ζ} $Aq < Bq$: est & $CE < CF$, & hinc $ED^η < DF$. Quare DF est ^{θ} ρ & ∈ CD. Hinc patet ^{κ} , CF esse ρ, & quae ipsum potest, B mediam esse. Q. E. D.

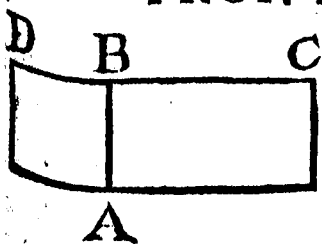
Coroll.

Coroll. Ex hoc manifestum est, spatium CF, medio spatio CE commensurabile, medium esse: nam quae ipsum potest B etiam media sit, necesse est.

Schol. Est autem cum mediis, sicut cum rationalibus, comparatum. Aliae mediae commensurabiles sunt potentia tantum; aliae vero longitudine, & ergo potentia simul.

* Et praeterea notandum est, hoc theorema verum esse, siue B mediae A longitudine & potentia commensurabilis sit, siue potentia solum.

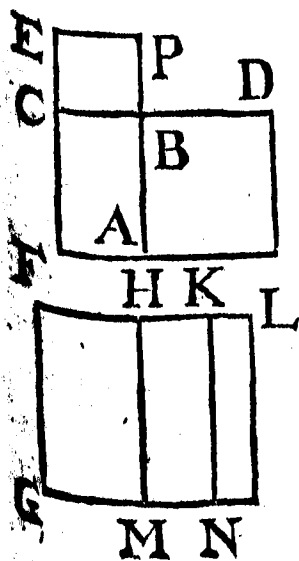
PROP. XXV. THEOR.



Quod sub mediis longitudine commensurabilibus rectis lineis AB, BC continetur rectangulum medium est.

Fiat ex AB quadratum AD, quod medium erit, quia AB media est. Iam est $DB = AB \propto BC$, & $BC : BD = AC : DA$: ergo $AC \propto$ medio DA. Quare AC medium est. Q. E. D. λ. 1. 6.
μ. cor. 24. 10.

PROP. XXVI. THEOR.



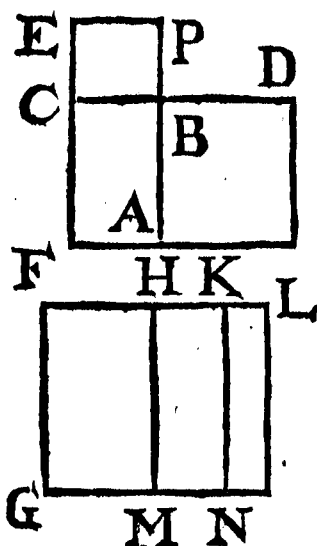
Quod sub mediis potentia solum commensurabilibus rectis lineis AB, BC continetur rectangulum AC vel rationale est, vel medium.

Describantur ex AB, BC quadrata AD, BE, quae media erunt. Exponatur FG ρ, ad quam applicetur Rgl. GH = AD; & ad HM applicetur Rgl. MK = AC, &

Q 5

ad

§. 14. 1.

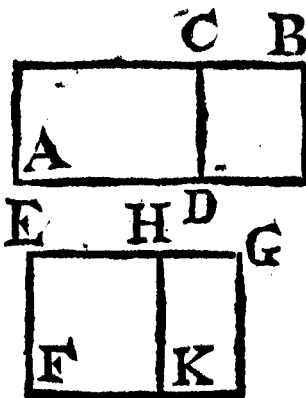
e. 23. 10.
π. hyp.g. 1. 6.
e. 10. 10.
τ. 20. 10.u. 22. 6.
φ. 17. 6.
x. 6. def. 10.
ψ. 22. 10.

ad KN Rgl. $NL = BE$. Sum
ergo $\frac{FH}{HK} = \frac{KL}{NL}$ in dire
ctum, & GH, NL media
Porro, quia $FG = KN$ est
 ρ , etiam FH, KL $\circ$ sunt ρ
FG. Sed est $AD \propto \pi$ BE
ideoque $GH \propto NL$, & quum
sit $GH : NL = \frac{FH}{KL}$
erit $FH \propto KL$. Quare
quum FH, KL sint ρ $\propto$ erit
 $FH \times KL \rho$. Et quoniam
 $DB : BC = AB : BP$, & $AD :$
 $AC = \frac{DB}{BC} = \frac{AB}{BP}$ erit
 $AD : AC = AC : BE$, id est $GH : MK = MK :$
 NL , ac ergo, $FH : HK = \frac{MK}{NL} = \frac{MK}{KL}$. Hinc
erit & $\frac{FH}{HK} = \frac{KL}{NL}$ & ipsa $\propto$ HK ρ . Ergo si sit
 $HK \propto FG$, erit τ MK id est AC ρ : si vero sit
 $HK \in FG$: erit ψ AC medium. Q. E. D.

PROP. XXVII. THEOR.

Medium AB non superat medium AC ratio
nali DB.

u. 45. 1.

u. sch. 12. 10.
β. cor. 24. 10.
γ. 23. 10.
δ. 21. 10.s. lem. 23. 10.
ζ. 10. 10.

Si negas: sit DB ρ . Expo
natur ρ EF, ad quam appli
cetur $\circ$ Rgl. $FG = AB$, & Rgl.
 $FH = AC$. Erit ergo KG
 $= DB$, ideoque $KG \rho$; FH
vero & FG erunt β media.
Hinc τ EH & EG sunt ρ EF.
HG autem δ est ρ $\propto$ EF. Qua
re EH $\in$ HG. Et quia EH
 $HG = \frac{EH}{HG}$: EH $\times$ GH : erit EHq ρ non $\propto$
EH

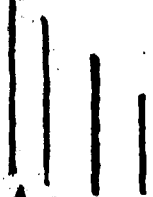
$EH \times HG$. Sed quum EH, HG sint E : erit
 $EHq + HGq \propto EHq$. Et est $2 EH \times HG \propto$ 7. 16. 10.
 $EH \times HG$. Quare $EHq + HGq$ non $\propto 2 EH$ 9. 14. 10.
 $\times HG$, & ergo $EHq + HGq + 2 EH \times HG$ 11. 17. 10.
 non $\propto EHq + HGq$, id est, EGq non $\propto EHq$
 $+ HGq$. Est vero $EHq + HGq p$. Ergo 2. 10. def. 10.
 EGq est α , ac ipsa $EG \alpha$. Sed erat quo- 4. 11. def. 10.
 que $EG p$. Q. E. A.

* *Corollar.* Euidens est ex ostensis, si sint
 duae rectae $EH, HG E$, esse $EHq + HGq$ non $\propto$
 $EH \times HG$.

* *Schol.* Manifestum autem est, rationale su-
 perare rationale rationali, & rationale cum ratio-
 nali facere rationale (per 1. & 3. ax. 10).

PROP. XXVIII. PROBL.

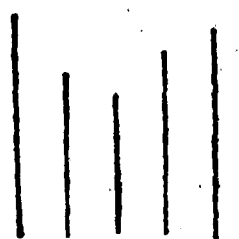
*Medias inuenire, potentia solum
 commensurabiles, quae rationale con-
 tineant.*


 Exponantur ν duae rationales $A, B E$, & fiat $A : C = C : B$, nec non $A : B = C : D$. Dico $C E D$ esse, & mediam
 utramque, & $C \times D p$. 7. 11. 10.
5. 13. 6.
6. 12. 6.

Nam quia $A \times B$ medium est, erit & 7. 22. 10.
 Cq medium, & C media. Et quum sit $A : B = C : D$, ac $A E B$: erit $C E D$. Hinc 5. 17. 6.
 $B = C : D$, & D media est. Praeterea quum sit permu- 6. sch. 10. 10.
 tando $A : C = B : D$: erit $C : B = B : D$, & 7. 24. 10.
 $Bq = C \times D$. Quare, ob $Bq p$ erit & C 4. 9. def. 10.
 $\times D p$. Q. E. D.

PROP.

PROP. XXIX. PROBL.



*Medias inuenire potentia so-
lum commensurabiles, quae me-
dium contineant.*

φ. 11. 10.
χ. 13. 6.
ψ. 12. 6.

Exponentur φ tres rationales
Ε, Α, Β, C, & fiat χ Α : D = D :
Β, & ψ Β : C = D : E. Dico D,
E esse quaesitas.

ω. 17. 6.
α. 22. 10.
β. sch. 10. 10.
γ. 24. 10.

Nam quia Α, Β p Ε, ac Α × Β = α Dq :
erit α Dq medium, & D media. Et quoniam
Β : C = D : E, ac Β Ε C : erit D β Ε. Ergo
E etiam γ media est. Ostensum igitur est, D,
E medias Ε esse.

Praeterea quia est alternando Β : D = C : E,
& inuerse Β : D = D : Α, ideoque D : Α =
C : E : erit D × E = Α × C. Est vero Α ×
C α medium : ergo & D × E medium est.
Q. E. D.

L E M M A I.

*Inuenire duos numeros quadratos, ita ut qui
ex ipsis componitur etiam quadratus sit.*

A.....D.....C.....B

δ. 24. &
26. 9.
ε. 6. 2.
ζ. 1. 9.

Exponentur duo numeri plani similes vel
quadrati, ΑΒ, ΒC : & sit vterque par, vel vter-
que impar. Nam ablato ΒC ex ΒΑ, relin-
quetur δ par ΑC, qui bisecari potest in D. Sed
qui fit sub ΑΒ, ΒC vna cum quadrato ex CD
est aequalis quadrato ex BD, & is qui fit sub
ΑΒ, ΒC ipse ζ quadratus est : inuenti igitur
sunt duo quadrati, nempe factus ex ΑΒ, ΒC,
&

& quadratus ex CD, qui compositi producant quadratum ex BD. Q. E. F.

Coroll. Et simul patet, quomodo inueniantur duo numeri quadrati, quorum excessus sit quadratus: si nimirum AB, BC similes plani sumantur. Sin dissimiles sumantur: possunt pari ratione haberi duo quadrati numeri, qui fiunt ex BD, BC, quorum excessus sit numerus sub AB, BC non quadratus.

L E M M A 2.

Inuenire duos quadratos numeros, ita ut qui ex ipsis componitur non sit quadratus.

A...G...H.D.E.F...C.....B

Factis omnibus quae in antecedenti Lemmate, & praeterea ex numero DC ablata unitate DE; dico quadratum factum ex AB per BC multiplicato una cum quadrato ex CE non esse quadratum.

Quum enim, sicut antea, factus ex AB, BC sit quadratus, & hic una cum CD componat quadratum ex BD: erit factus ex AB, BC, una cum quadrato ex CE minor quadrato ex BD. Iam si fieri potest sit idem quadratus. Ergo aut quadrato maiori quam quadratus ex BE, aut minori, aut ipsi quadrato ex BE aequalis erit. Sed quadratus proxime maior, quam quadratus ex BE, est quadratus ex BD; & hoc is qui fit ex AB, BC una cum quadrato ex CE minor est ostensus: ergo idem nulli quadrato maiori, eo qui fit ex BE, aequalis esse potest. Deinde ponatur aequalis quadrato ex BE; & capiatur GA duplus unitatis DE. Et quia
AC

7. 6. 2.

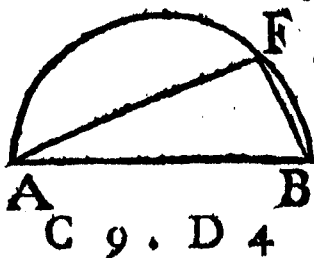
A..G..H.D.E.F...C.....B

$AC = 2 DC$: erit $GC = 2 EC$, & igitur factus ex GB, BC cum quadrato ex CE = quadrato ex BE. Hinc erit factus ex AB, BC aequalis facto ex GB, BC, & $AB = BG$. Q. E. A. Quare AB per BC multiplicatus cum quadrato ex CE non est aequalis ipsi quadrato ex BE. Si tandem ponis eundem aequalem quadrato minori quam quadratum ex BE, velut quadrato ex BF: sit $HA = 2 DF$; & erit rursus $HC = 2 CF$, & ideo factus ex HB, BC cum quadrato ex CF = quadrato ex BF. Hinc foret factus ex AB, BC + quadrato ex CE = facto ex HB, BC + quadrato ex CF. Q. E. A. Ergo tandem patet, quadratum factum ex AB, BC cum quadrato ex CE non quadratum esse. Q. E. F.

PROP. XXX. PROBL.

Inuenire duas rationales potentia solum commensurabiles, ita ut maior plus possit, quam minor, quadrato rectae lineae sibi longitudine commensurabilis.

3. cor. lem. 1.



Exponatur p AB, & sumantur⁹ duo quadrati numeri C, D, ita ut $C > D$ non sit quadratus, & in descripto super AB semicirculo aptetur AF, ut AFq

1. cor. 6. 10. sit' ad ABq vti numerus C — D ad numerum C. Iungatur FB. Dico factum.

Quia enim AFq ad ABq rationem habet numeri ad numerum, non autem quadrati ad qua-

quadratum: erit $\ast AF \in AB$, ideoque $\wedge AF, AB$ x. cor. 11. 12.
 sunt $\rho \in$. Sed quia $C: C - D = ABq: AFq$: a. 6. def. 10.
 erit conuertendo $\ast C: D = ABq: ABq - AFq$ u. cor. 19. 5.
 id est $\ast BFq$. Ergo $\vee (ABq - AFq) = BF \xi$ v. 31. 3. &
 AB . Q. E. F. 47. 1.
5. 9. 12.

PROP. XXXI. PROBL.

Inuenire duas rationales potentia solum commensurabiles, ita ut maior plus possit, quam minor, quadrato rectae lineae sibi longitudine incommensurabilis. Fig. prop. XXX.

Exponentur ρAB , & duo quadrati numeri C, D , qui nullum quadratum component, e. lem. 2.
 & super AB describatur semicirculus, & π fiat x. cor. 6. 18.
 uti $C + D$ ad C ita ABq ad AFq , & iungatur FB . Dico factum.

Nam primo, ut antea ostenderetur, AF, AB esse $\rho \in$. Secundo quia $C + D: C = ABq: AFq$,
 erit conuertendo $C + D: D = ABq: ABq - AFq$ e. 31. 3. &
 AFq id est BFq . Ergo $\vee (ABq - AFq)$ 47. 1.
 $= BF$ non $\leq AB$. Q. E. F. 6. 9. 10.

PROP. XXXII. PROBL.

Inuenire duas medias potentia solum commensurabiles, quae rationale contineant, ita ut maior plus possit, quam minor, quadrato rectae lineae sibi longitudine commensurabilis.

Exponentur τ duae rationales $A, B \in$, ita ut x. 30. 12.
 $\vee (Aq - Bq) \leq A$. Sit $\ast A \times B = Cq$, & φ u. 13. 6.
 $Bq = C \times D$. Dico C, D esse quaesitas. p. 45. 1.

Nam

κ. 22. 10.

ψ. sch. lem.

23. 10.

ω. lem 23. 10.

α. sch. 10. 10.

β. 24. 10.

γ. 15. 10.

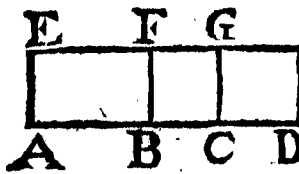


Nam quia κ $A \times B$ medium est: C media erit. Et quia Bq est ρ : etiam $C \times D$ erit ρ . Quia vero $A : B = \psi$ $A \times B : Bq = Cq : C \times D = \omega$ $C : D$; & A ϵ B: erit quoque α D ϵ C, ideoque erunt C & D β mediae ϵ . Denique quia $A : B = C : D$, γ erit $\sqrt{(Cq - Dq)} \leq C$. Q. E. F.

δ. 31. 10.

Similiter autem ostendetur *inueniri posse duas medias potentia solum commensurabiles, & continentes rationale, ita ut maior plus possit, quam minor, quadrato rectae lineae sibi incommensurabilis longitudine* δ .

LEMMA.



Si fuerint tres rectae lineae AB, BC, CD in ratione aliqua: erit, ut prima AB ad tertiam CD, ita rectangulum contentum sub prima AB & media BC ad id quod sub media BC & tertia CD continetur.

ζ. 1. 6.

Ponantur AB, BC, CD in directum, & ducatur perpendicularis AE = BC, & completantur Pgra. EB, FC, GD, quae Rgla. erunt. Et quia ergo $BC = EA = FB = GC$, erit $AB : BC = EB : FC = AB \times BC : FC$, similiter $BC : CD = FC : GD = FC : BC \times CD$. Ergo ex aequo $AB : CD = AB \times BC : BC \times CD$. Q. E. D.

PROP.

PROP. XXXIII. PROBL.

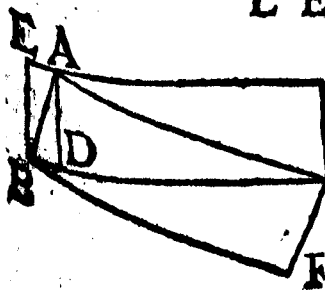
Inuenire duas medias potentia solum commensurabiles, quae medium contineant, ita ut maior plus possit, quam minor, quadrato rectae lineae sibi longitudine commensurabilis.

Exponentur^e tres rationales ϵ , ϵ . 11. 10. &
 A, B, C , ita ut $\sqrt{(Aq - Cq)} \leq$ 30. 10.
 A , & fiat $Dq = \epsilon A \times B$, & D 2. 14. 2.
 $\times E^2 = B \times C$: erunt D, E 7. 45. 1.
 quaesitae.

Nam quia $A, B \rho \epsilon$: erit⁹ D 9. 22. 10.
 media. Et quoniam $A: C = A \times B: C \times$ 1. 1. 6.
 $B = Dq: D \times E = D: E$: erit $D^2 \in E$. 10. lemma
 Hinc D, E^2 sunt mediae ϵ , atque $\sqrt{(Dq -$ 23. 10.
 $Eq)^2} \leq D$. Patet etiam, quia $\frac{1}{2} B \times C$ me- 1.1.fch.10.10.
 dium est, esse & $D \times E^2$ medium. Q.E.F. 11. 24. 10.
 12. 15. 10.
 13. fch. 22.10.
 14. cor. 14. 10.
 15. 31. 10.

*Similiter ostenditur, quomodo inuenian-
 tur duae mediae potentia solum commensurabi-
 les, & medium continentes, ita ut maior plus
 possit, quam minor, quadrato rectae lineae sibi
 incommensurabilis longitudine.*

L E M M A.

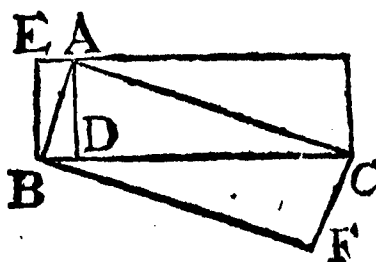


Sit triangulum rectan-
 gulum ABC , rectum ha-
 bens angulum BAC , &
 ducatur AD perpendicu-
 laris: dico $CB \times BD$
 $= ABq$, & $BC \times CD$

$= ACq$, & $BD \times DC = DAq$, & denique
 $BC \times AD = BA \times AC$.

R

Nam



Nam tres priores partes huius propositionis patent ex corollario 8.6 & ex 17.6. Ultima demonstratur, descripto

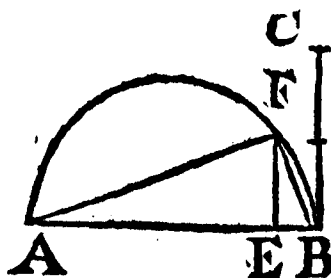
g. 41. 1.
g. 34. 1.

& Rglo. $AF = BA \times AC$. Nam $EC = \frac{1}{2} \Delta ABC = AF$. Q. E. D.

PROP. XXXIV. PROBL.

Invenire duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quae faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum vero, quod sub ipsis continetur, medium.

r. 31. 10.



v. 28. 6.

Exponentur τ AB, BC p E, ita ut $\sqrt{(ABq - BCq)}$ non $\leq$ AB. Bisecetur BC in D, & ipsi BDq vel DCq aequale pgr. ad rectam AB applicetur, deficiens figura quadrata, & sint

AE, EB partes ex applicatione factae. Describatur super AB semicirculus AFB, & ex E ducatur in AB perpendicularis EF, & iungantur AF, BF; quae erunt quaesitae.

ϕ . 4. 2.

α . 19. 10.

ψ . 1. 6.

ω . lem. pr.

α . 10. 10.

β . 31. 3.

γ . lem. 18. 10.

δ . 1. 6.

Quum enim sit $BDq = \frac{1}{4} BCq$: erit $\propto$ BE non $\leq$ EA. Et quia $AE: EB = \psi$ $BA \times AE: AB \times BE = \omega$ $AFq: BFq$: erit $\propto$ AF $\propto$ BF. Porro, quia $AFq + BFq = \beta$ ABq , $AFq + BFq$ est p. Denique quia $EFq = \alpha$ $AE \times EB = \gamma$ BDq , ideoque $BD = EF$, & $BC = 2 EF$: erit $AB \times BC = \delta$ $2 AB \times EF = \alpha$ AF

AF $\times$ FB. Sed AB $\times$ BC medium¹ est: er- 1. 22. 10.
 go & AF $\times$ FB medium² erit. Q. E. F. 2. cor. 24. 10.

PROP. XXXV. PROBL.

Inuenire duas rectas lineas potentia in- Fig. prop.
 commensurabiles, quae faciant compositum qui- XXXIV.
 dem ex ipsarum quadratis medium, rectan-
 gulum vero, quod sub ipsis continetur ratio-
 nale.

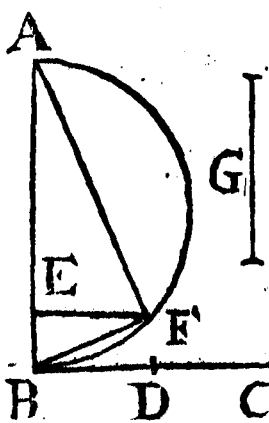
Exponentur AB, BCⁿ mediae E & ratio- 7. 32. 10.
 nale continentes, ita vt $\sqrt{ABq - BCq}$
 non Σ AB, & reliqua fiant, ut in praecedente.
 Erunt AF, FB quaesitae.

Nam quia AE⁹ non Σ EB: erit & BA $\times$ AE 9. 19. 10.
 non Σ AB $\times$ BE, ideoque * AFq non Σ BFq, 1. 1. 6. &
 & propterea AF Θ BF. Et patet AFq + 10. 10.
 BFq = ABq medium¹ esse. Denique quum x. lem. 34. 10.
 BC = 2 EF, & hinc AB $\times$ BC = 2 AB $\times$ EF 1. sch. 22. 10.
 EF: erit AB $\times$ EF ρ , vtpote rationali AB $\times$ EF
 BC commensurabile. Ergo & * AF $\times$ BF 1. sch. 12. 10.
 est ρ . Q. E. F.

PROP. XXXVI. PROBL.

Inuenire duas rectas lineas potentia incom-
 mensurabiles, quae faciant & compositum ex
 ipsarum quadratis medium, & rectangulum,
 quod sub ipsis continetur, medium & adhuc in-
 commensurabile composito ex ipsarum quadra-
 tis.

ξ. 33. 10.



θ. 19. 10.

π. sch. 22. 10.

ε. constr. &

lem. 18. 10.

σ. cor. 24. 10.

τ. lem. 34. 10.

υ. constr.

φ. 13. 10.

χ. 1. 6. &

10. 10.

Exponentur ξ duae mediae Θ , AB, BC, medium continentes, ita ut $\sqrt{(AB - BCq)}$ non ξ AB. Reliqua fiant ut in prop. 34. Dico AF, FB esse quae sitas.

Nam AE non ξ^o EB, ideoque AF Θ BF. Et quoniam ABq medium π est: AFq +

FBq medium esse patet. Porro quia AE $\times$ EB = ϵ BDq = τ EFq: erit AB $\times$ BC = α AB $\times$ EF, & ideo σ medium erit AB $\times$ EF, & propter ea etiam τ AF $\times$ FB. Denique quia AB non ξ^o BC, & BC ξ^o BD, & hinc AB non ξ^o BD: erit χ ABq non ξ AB $\times$ BD. Sed AB $\times$ BD = AB $\times$ EF = AF $\times$ FB, & ABq = AFq + FBq. Ergo AF $\times$ FB non ξ AFq + FBq. Q. E. F.

* Schol. Ex his manifestum est, quomodo inveniri possint duae mediae longitudine & potentia incommensurabiles. Factis enim omnibus, quae in propositione iussa sunt, & capta insuper G media proportionali inter AF, BF: erunt G & AB mediae Θ . Nam quia Gq = ψ AF $\times$ BF medio: erit G media, & Θ mediae AB.

ψ. 17. 6.

Principium Senariorum per compositionem.

PROP. XXXVII. THEOR.

Si duae rationales potentia solum commensurabiles AB, BC componantur: tota AC irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus. Quia

A Quia enim $AB \in BC$, erit $2 AB \times BC^a$ *a. cor. 27. 10.*
 non $\leq ABq + BCq$, & proinde $2 AB \times$
 B $BC + ABq + BCq =^b ACq$ non $\leq^c ABq$ *b. 4. 2.*
 + BCq . Quare quum $ABq + BCq$ *c. 17. 10.*
 C sit p : erit $ACq = \alpha\lambda$, & $^d AC \alpha\lambda$. *d. sch. 27. 10.*
e. sch. 12. 10.
 E. D. *g. 11. def. 10.*

PROP. XXXVIII. THEOR.

A ——— B C Si duae mediae potentia so-
 lum commensurabiles AB, BC
 componantur, quae rationale contineant: tota
 AC irrationalis erit. Vocetur autem ex binis
 mediis prima.

Nam quum sit $ABq + BCq$ non $\leq 2 AB \times$ *q. cor. 27. 10.*
 BC: erit $ABq + BCq + 2 AB \times BC = ACq$ *r. 17. 10. &*
 non $\leq^p AB \times BC$: hinc $ACq \alpha\lambda$, & ergo AC *14. 10.*
 $\alpha\lambda$. Q. E. D. *a. sch. 12. 10.*

PROP. XXXIX. THEOR.

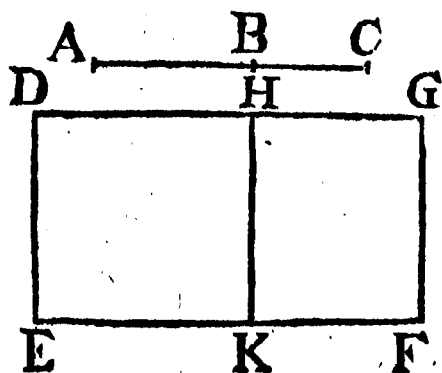
A ——— B C Si duae mediae po-
 D ——— H G tentia solum commen-
 E ——— K F surabiles AB, BC
 componantur, quae
 medium contineant:
 tota irrationalis erit.
 Vocetur autem ex bi-
 nis mediis secunda.

Sit DE p , & fiat $^a Rgl. DEF = ACq$, & $Rgl.$ *u. 45. 1.*
 $DEK = ABq + BCq$. Ergo $Rgl. HF =^b$ *l. 4. 2.*
 $AB \times BC$. Et quia ABq, BCq media ^{c} sunt, *u. sch. 27. 10.*
 ac propterea $ABq + BCq$ medium ^{d} est, me- *u. 16. 10. &*
 dium vero est & $AB \times BC^e$: erit vtrumque *cor. 24. 10.*
 R ; *g. hyp.* Rgl.

6. COR. 24. 10.

π. 23. 10.

9. COR. 27. 10.



Rgl. DK, HF = medium. Ergo EK, KF erunt π ρ. Sed quia AB ∈ BC, erit ABq + BCq non < 2 AB × BC, id est Rgl. DK non < HF. Quare est EK non < KF, &

ideo EK, KF ρ ∈ σ sunt, & τ DG vel EF αλ. Patet ergo DF esse υ αλ, & ipsam AC ϕ αλ. Q. E. D.

PROP. XL. THEOR.

A B C Si duae rectae lineae potentia incommensurabiles AB, BC componantur, quae faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem sub ipsis continetur medium: tota recta linea AC irrationalis erit. Vocetur autem maior.

χ. 22. 10. & sch. 13. 10. Nam AB × BC non < ABq + BCq. Ergo 2 AB × BC + ABq + BCq = ACq non < ψ ABq + BCq; & hinc ACq αλ, ac AC αλ. Q. E. D.

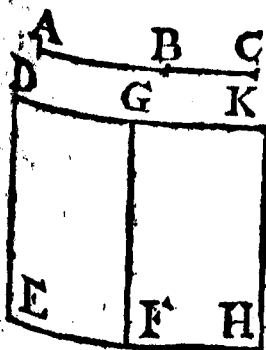
PROP. XLI. THEOR.

A B C Si duae rectae lineae potentia incommensurabiles AB, BC componantur, quae faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem sub ipsis continetur rationale: tota recta linea AC irrationalis erit. Vocetur autem rationale ac medium potens.

Nam,

Nam, quia $AB \times BC$ non $\propto ABq + BCq$, a. sch. 13. 10.
 ideoque ACq non $\propto AB \times BC$: erit ACq & 22. 10.
 $\propto$, ac ergo $AC \propto$. Q. E. D. β . 4. 2. &
 17. 10.
 7. 10. def. 10.

PROP. XLII. THEOR.



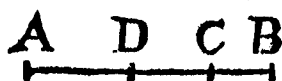
*Si duae rectae lineae po-
 textia incommensurabiles AB,
 BC componantur, quae faciant
 compositum ex ipsarum qua-
 dratis medium, & quod sub
 ipsis continetur medium, &
 adhuc incommensurabile com-*

*posito ex ipsarum quadratis: tota recta linea
 AC irrationalis erit. Vocetur autem bina me-
 dia potens.*

Exponatur p DE, & fiat δ Rgl. $DEF = ABq$ δ . 45. 1.
 $+ BCq$, & Rgl. $GFH = 2 AB \times BC$. To- ϵ . 4. 2.
 tum ergo $DH^2 = ACq$, & ζ DF medium, ζ cor. 24. 10.
 ideoque $\propto EF p$. Eadem ratione FHp . Sed η . 23. 10.
 quia DF non $\propto GH$: erit EF non $\propto FH$, & θ . hyp.
 ergo EF, FH p $\in$ erunt, atque $\propto EH \propto$ ex bi- ι . 10. 10.
 nis nominibus erit. Hinc, quia DE p , est DH^2 κ . 37. 10.
 $\propto$, & $AC^2 \propto$. Q. E. D. λ . sch. 21. 10.
 μ . 11. def. 10.

Schol. At vero dictas irrationales vno tantum
 modo diuidi in rectas lineas, ex quibus compo-
 nuntur, & quae propositas species constituunt,
 mox demonstrabimus.

PROP. XLIII. THEOR.



Quae ex binis nominibus
AB ad unum duntaxat pun-
ctum C diuiditur in nomi-
na AC, CB.

Si negas; diuidatur etiam ad D in nomi-
na. Sed nequit esse $DB = AC$. Sic
enim foret $BC = AD$, & $AC : CB = BD :$
 DA , hoc est AB in D similiter foret diuisa ac
in C ; id quod non ponitur. Quum ergo AB
in partes inaequales ad C , & D secta sit, quarum
v. 4. sch. 5. 2. maior sit AC : erit $2 AD \times DB - 2 AC \times$
 $CB = ACq + CBq - (ADq + DBq)$. Sunt
ξ. hyp. & autem ξ ACq, CBq, ADq, DBq ρ, ideoque
37. 10. $ACq + CBq$, & $ADq + DBq$ ° differunt ra-
o. sch. 27. 10. tionali. Quare & media $2 AD \times DB$ ac
π. 37. 10. & $AC \times CB$ ° different rationali. Q. E. A.
22. 10.
ρ. 27. 10.

PROP. XLIV. THEOR.



Quae ex binis mediis prima AB ad unum
duntaxat punctum C diuiditur in nomina AC
CB.

Si negas, sit AB etiam in D diuisa in alia
nomina AD, DB , quae erunt ° mediae ε &
continentes ρ. Sunt vero & AC, CB ° mediae
r. 4. sch. 5. 2. rationale continentis, & differentiae inter
 $AD \times DB$ & $2 AC \times CB =$ ° differentia in-
v. sch. 27. 10. ter summam $ACq + CBq$ & summam ADq
φ. 27. 10. & $+ DBq$. Ergo erit haec differentia ° ratio-
cor. 24. 10. nale spatium. Q. E. A. °.

PROP.

PROP. XLV. THEOR.



Quae ex binis mediis secunda AB ad unum duntaxat punctum C diuiditur in nomina AC, CB.

Si negas, diuidatur etiam in D, & sit AC non aequalis ipsi BD, sed ea e. gr. maior. Ergo tam AC & CB, quam

AD & DB sunt $\propto$ mediae ϵ & media continentes; ac $ACq + CBq > ADq + DBq$. Exponatur p EF, ad quam applicetur Rgl. $EK = ABq$, & Rgl. $EG = ACq + CBq$, & Rgl. $EL = ADq + DBq$. Ex quo sequitur Rgl. $HK = 2 AC \times BC$, & Rgl. $MK = 2 AD \times DB$. Quia autem mediae ϵ sunt AC, CB: erit EG $\propto$ medium, ideoque β EH p ϵ EF. Eadem ratione HN est p ϵ EF. Verum AC ϵ CB, & proinde $ACq + CBq$ id est EG non $\leq$ ipsi $2 AC \times CB$ id est ipsi HK, & idcirco EH non $\leq$ HN. Patet itaque EH, HN esse p ϵ , & ergo δ EN $\propto$ ex binis nominibus, & diuisam in nomina in puncto H. Sed eodem modo ostendetur, EN etiam ad M diuisam esse in nomina. Neque tamen est $MN = EH$, quoniam $EG = ACq + CBq > ADq + DBq > 2 AD \times DB = MK$. Ergo EN quae ex binis nominibus ad duo puncta in nomina diuisa est. Q. E. A.

$\propto$. 39. 10.

ψ . 3. sch. 5. 2.

ω . 4. 2.

α . cor. 24. 10.

& 16. 10.

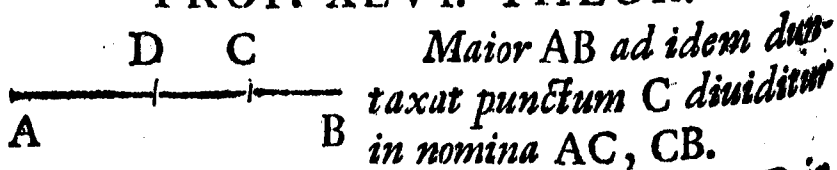
β . 23. 10.

γ . cor. 27. 10.

δ . 37. 10.

ϵ . 43. 10.

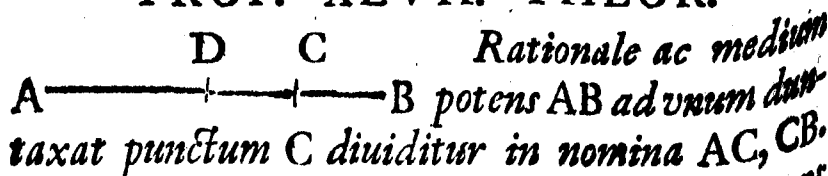
PROP. XLVI. THEOR.



Si negas: diuidatur ad aliud punctum D in nomina AD, DB, ab ipsis CB, AC diuersa. Erit ergo $^2 ACq + CBq \rho$, item $ADq + DBq \rho$, media vero erunt $AC \times CB$, & $AD \times DB$. Proinde, quum $ACq + CBq - (ADq + DBq) \text{ sit } \rho$, & $\equiv \text{ } ^2 AD \times DB - 2 AC \times CB$; erit differentia inter media $AD \times DB$ & $AC \times CB$ rationale spatium. Q. E. A'.

ζ. 40. 10.
 η. sch. 27. 10.
 θ. 4. sch. 5. 2.
 ι. 27. 10.

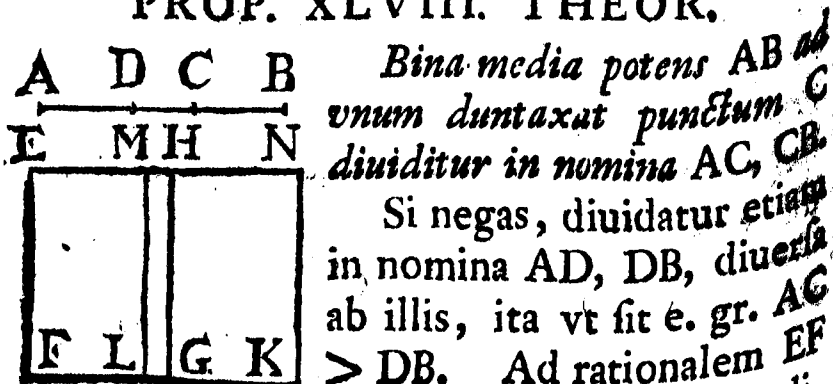
PROP. XLVII. THEOR.



Si negas, diuidatur etiam ad D. Erunt ergo $ACq + CBq$, & $ADq + DBq$ media, sed $AC \times CB$, ac $AD \times DB$ rationalia. Quare, quum $ACq + CBq - (ADq + DBq) \equiv \text{ } ^2 AD \times DB - 2 AC \times CB$, haec autem differentia fit ρ : erit & illa ρ . Q. E. A'.

κ. 41. 10.
 λ. 4. sch. 5. 2.
 μ. sch. 27. 10.
 ν. 27. 10.

PROP. XLVIII. THEOR.



Si negas, diuidatur etiam in nomina AD, DB, diuersa ab illis, ita vt sit e. gr. $AC > DB$. Ad rationalem EF appli-

applicentur Rgl. $EG = ACq + CBq$, $EK = ABq$, & $EL = ADq + DBq$. Ergo $HK = \xi$ ξ . 4. 2.
 $2 AC \times CB$, & $MK = 2 AD \times DB$. Sed
quia ponitur^o $ACq + CBq$ medium, erit & EG θ . 42. 10.
medium, & proinde π HE ρ . Eodem argu- π . 23. 10.
mento HN est ρ . Quia vero & ponitur ACq
+ CBq non ξ ^o $2 AC \times CB$: erit EH non ξ ^e ξ . 10. 10. &
 HN . Itaque EH , HN erunt ρ ϵ ^r; & EN ex σ . 1. 6.
binis nominibus est τ , atque diuisa in nomina σ . sch. 12. 10.
in puncto H . Atqui similiter ostendetur, quia τ . 37. 10.
& $ADq + DBq$ nec non $AD \times DB$ media
non ξ ponuntur, eandem EN etiam ad M in
nomina diuidi, ita vt MN , EH inaequalia sint.
Q. E. A^o. μ . 43. 10.

DEFINITIONES SECVNDAE.

1. Exposita rationali, & quae ex binis nominibus diuisa in nomina, cuius maius nomen plus possit, quam minus, quadrato rectae lineae sibi longitudine commensurabilis: si quidem maius nomen expositae rationali commensurabile sit longitudine, tota dicatur *ex binis nominibus prima*;
2. Si vero minus nomen expositae rationali longitudine sit commensurabile, dicatur *ex binis nominibus secunda*;
3. Quod si neutrum ipforum nominum sit longitudine commensurabile expositae rationali, vocetur *ex binis nominibus tertia*.
4. Rursus, si maius nomen plus possit, quam minus, quadrato rectae lineae sibi longitudine incommensurabilis: si quidem maius nomen

nomen expositae rationali sit commensurabile longitudine, dicatur *ex binis nominibus quarta*;

5. Si vero minus, dicatur *quinta*;

6. Quod si neutrum, dicatur *sexta*.

PROP. XLIX. PROBL.

Inuenire ex binis nominibus primam.

φ. cor. lem. 1. 30. 10. $A \ 12 \ . \ B \ 4.$ Exponentur φ duo numeri A, B ita vt $A + B$ ad B quidem habeat rationem numeri quadrati ad quadratum, sed non ad A. Exponatur quodque ρ C, & eiς DE, & fiat $\propto A + B : A = DEq : EFq$; erit DF quaesita.

Nam quia ratio numeri $A + B$ ad A non est ratio quadrati ad quadratum: erit EF ϵ^a DE. Et quia DE ρ est β^3 : erunt DE, EF ρ ϵ^a ; & idcirco DF erit γ^7 ex binis nominibus. Porro quia $A + B : A = DEq : EFq$, & $A + B > A$: erit $DEq >^d EFq$, & $DE > EF$. Sit $Gq = DEq - EFq$. Et quia est conuertendo $A + B : B = DEq : Gq$: erit G id est $\sqrt{(DEq - EFq)} <^e DE$. Est vero etiam $DE <^c C$. Ergo DF est ex binis nominibus ζ prima. Q. E. F.

PROP. L. PROBL.

Inuenire ex binis nominibus secundam.

η. cor. lem. 1. 30. 10. $A \ 12 \ . \ B \ 4.$ Exponentur η duo numeri A, B, ita vt $A + B$ ad B quidem rationem habeat numeri quadrati ad

ad quadratum, non autem ad A, & sint C,
 $FE \rho \xi$, & fiat $A : A + B = FEq : EDq$. 9. cor. 6. 10.
 Erit FD quaesita.

Quoniam enim ratio $A + B$ ad A non est
 quadrati numeri ad quadratum: erit $ED \in$. sch. 11. 10.
 FE , & ergo^{*} erunt ED, $FE \rho \in$. Ex binis^{*} 6. def. 10.
 ergo nominibus erit FD. Praeterea vero quum,
 ob $A < A + B$, sit $FE <^{\wedge} ED$, & sit inuerse a. sch. 16. 3.
 $A + B : A = DEq : FEq$, & conuertendo A
 $+ B : B = EDq : EDq - FEq$: posito $Gq =$
 $EDq - FEq$, erit G id est $\sqrt{(EDq - FEq)}$
 $\xi^{\wedge} ED$. Est autem & minus nomen $FE \xi C$. μ . 9. 10.
 Quare FD est ex binis nominibus secunda^{*}. v. 2. def. sec.
 Q. E. F.

PROP. LI. PROBL.

Inuenire ex binis nominibus tertiam.

A 12 . B 4.

C 8.

D ———

E ——— F ——— G

H ———

Cape^z tres numeros A, ξ . cor. lem.

B, C, tales vt $A + B$ ad B 1. 30. 10.

quidem rationem qua-
 drati numeri ad quadra-
 tum habeat, non autem ad
 A, C vero ad neutrum ip-
 forum A, $A + B$ talem habeat rationem. Accipe

ρD , & fac $C : A + B =^{\circ} Dq : EFq$, & $A + B : A =$ cor. 6. 10.
 $= EFq : FGq$. Erit EG quaesita.

Etenim quia^{*} $D \in EF$, & $FG \in EF$, & hinc π . sch. 11. 10.
 EF , $FG \rho$ sunt, erit EG ex binis nominibus^{*}. Et ρ . 37. 10.
 quum sit $C : A + B = Dq : EFq$, atque $A +$
 $B : A = EFq : FGq$, ideoque ex aequo $C : A$
 $= Dq : FGq$: erit^{*} FG non ξD . Sed & $EF \rho$. 9. 10.
 non ξD . Ergo neutrum nomen EF, FG $\xi \rho$
 D. Deinde quia $A + B > A$, erit^{*} $EF > FG$. τ . sch. 16. 3.

Sit

e. 9. 10.
v. 3. def. sec. Sit autem $Hq = EFq - FGq$. Et quia est
id est $\sqrt{(EFq - FGq)} \leq EF$. Quare EG
est ex binis nominibus tertia. Q. E. F.

PROP. LII. PROBL.

Inuenire ex binis nominibus quartam.

q. cor. lem. A 10. B 6. Sume ϕ duo numeros A, B
i. 30. 10. C _____ ita vt A + B neque ad A ne-
D _____ F que ad B rationem quadrati
E numeri ad quadratum habeat
G _____ & expositae ρ C sume $\leq DE$,
x. cor. 6. 10. & fac $\propto$ A + B: A = DEq: EFq. Erit DF
quaesita.
 ψ . 6. def. 6. Nam erit ψ DE ρ , & EF $\in$ DE, & ergo
v. sch. 11. 10. erunt DE, EF ρ $\in$. Hinc DF erit β ex bi-
v. sch. 12. 10. nis nominibus. Porro quia A + B > A, erit
 β . 37. 10. DEq > EFq. Sit Gq = DEq - EFq. Ergo
v. sch. 16. 5. quia conuertendo A + B: B = DEq: Gq, non
erit G id est $\sqrt{(DEq - EFq)} \leq DE$. Est
d. 9. 10. autem & DE $\leq$ C. Ergo DF est ex binis no-
v. 4. def. sec. minibus quarta. Q. E. F.

PROP. LIII. PROBL.

Inuenire ex binis nominibus quintam.

Fig. prop.
praec.

Expositis numeris A, B talibus, quales in
praecedente erant, & recta ρ C, sume FE $\leq$ C,
& fac A: A + B = FEq: EDq: erit FD quae-
sita.

z. 6. def. 6. Etenim erit ζ FE ρ , & ED $\in$ FE, ideoque
v. sch. 11. 10. FE, ED erunt ρ $\in$. Hinc FD erit ex binis
v. sch. 12. 10. nominibus. Dein quia est inuertendo A + B:
v. 37. 10. A =

$A = EDq : FEq$: erit $EDq^x > FEq$. Sit EDq^x x. sch. 16. 5.
 $- FEq = Gq$. Conuertendo igitur erit A
 $+ B : B = EDq : Gq$, & propterea G id est $\sqrt{(EDq - FEq)}$ non $\leq^A ED$. Sed est quoque λ. 9. 10.
 $FE \leq C$. Ergo FD erit^u ex binis nominibus μ. 5. def. sec.
 quinta. Q. E. F.

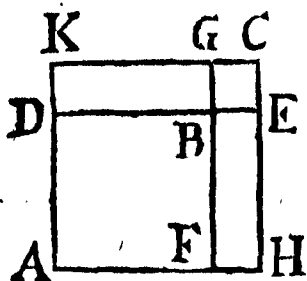
PROP. LIV. PROBL.

Inuenire ex binis nominibus sextam.

A 16. B 4. Exponentur duo nu-
 C 12. meri A, B ita^v vt $A + B$ π. 2. lem. 30.
 D _____ ad neutrum habeat ratio- 10. & 1. sch.
 E _____ nem numeri quadrati ad 24. 8.
 H _____ F quadratum, & alius C ξ. 2. sch.
 non quadratus, qui nec 24. 8.
 ad A nec ad $A + B$ rationem quadrati ad
 quadratum habeat. Exponatur etiam rationa-
 lis D , & fiat^o $C : A + B = Dq : EFq$, & A ρ. cor. 8. 10.
 $+ B : A = EFq : FGq$. Erit EG quaesita.

Erit enim^π $EF \in D$, & $FG \in EF$, ideo- π. sch. 11. 10.
 que, quum D p sit, EF, FG p $\in$ erunt. Pro-
 pterea^ρ EG erit ex binis nominibus. Et quia ρ. 37. 10.
 $A + B > A$, erit $EFq^σ > FGq$. Sit $EFq^σ$ σ. sch. 16. 5.
 $- FGq = Hq$. Iam conuertendo est $A +$
 $B : B = EFq : Hq$. Ergo H id est $\sqrt{(EFq -$
 $FGq)}$ non $\leq^τ EF$. Et quia ex aequo $C : A$ τ. 9. 10.
 $= Dq : FGq$, erit $FG \in^π D$. Ergo neutrum ν. 6. def. sec.
 nominum $EF, FG \leq D$. Quare EG est ex bi-
 nis nominibus^ν sexta. Q. E. F.

L E M M A.

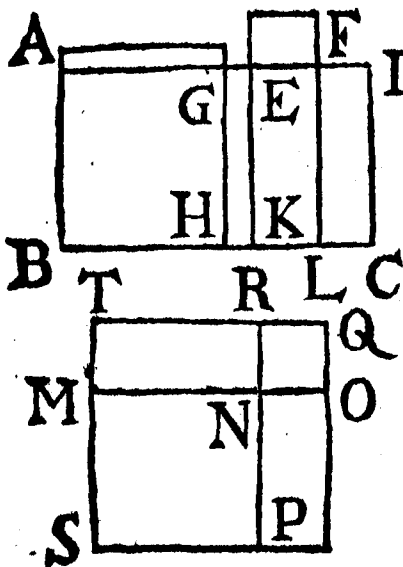


Si duo quadrata AB, BC ponantur ita, ut DB sit in directum ipsi BE, & compleatur AC parallelogrammum: dico AC quadratum esse, & inter quadrata AB, BC re-

ctangulum DG medium esse proportionale, itemque inter ipsa AC, CB medium esse proportionale DC.

Quia enim DB, BE in directum sunt: erunt & FB, BG^o in directum, Et quia DB = FB, & BE = BG, erit DE = FG. Sed quum AC pgr. sit, erit AH = KC = DE, & AK = CH = FG. Ergo AC aequilaterum est. Sed & rectangulum. Ergo AC est quadratum. Secundo, quia $AB:DG = FB:BG = DB:BE = DG:BC$, patet DG esse medium proportionale inter AB, BC. Tertio, quia $AC:DC = AK:KD = KC:GC = DC:CB$, patet $\div AC, DC, CB$. Q. E. D.

PROP. LV. THEOR.

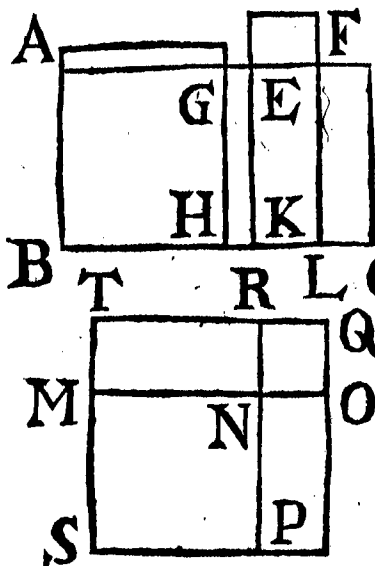


Si spatium ABCD contineatur sub rationali AB & ex binis nominibus prima AD: recta linea spatium ABCD potens irrationalis est, quae ex binis nominibus appellatur.

Diuide AD in nomina ad E, & sit $AE > ED$. Ergo AE, ED p^o e, & $\sqrt{AEq}$

$(AEq - EDq) \leq AE$, & $AE \leq AB$. Biseca
 ED in F , & ad AE applica $Rgl. = EFq$, &
 deficiens figura quadrata. Fiant ex applica-
 tione partes AG, GE . Ergo $AG \times GE =$ ^{α . 1. def. sec.}
 EFq , & $AG \leq^{\beta} GE$. Duc ad AB parallelas ^{β . 18. 10.}
 GH, EK, FL , & pone quadratum $SN = AH$,
 & quadratum $NQ = GK$, ita vt MN, NO
 sint in directum, & comple Pgr. SQ . Ergo ^{γ . lemma}
 $SQ = MOq$, & $\div SN, MR, NQ$. Atqui ^{praec.}
 quum fit $AG \times GE = EFq$, & ergo $AG : EF$
 $= EF : GE$: erit $AH : EL = EL : GK$, id est ^{δ . 17. 6.}
 $\div SN, EL, NQ$. Ergo $EL = MR$. Sed ^{ϵ . 1. 6.}
 $FC = EL = MR =$ ^{ζ . 43. 1.} OP . Ergo totum AC
 $=$ toti SQ , ideoque recta MO potest AC . Et
 quia $AG \leq GE$: erunt $AG, GE \leq^{\eta} AE$, ergo ^{η . 16. 10.}
 & ipsi AB ; & ergo AG, GE erunt p , & ob id
 $AH, GK \supset^{\theta} p$. Quoniam igitur & $SN, NQ \supset$ ^{θ . 20. 10.}
 sunt, erunt $MN, NO \supset$. Quia vero $AE \leq$
 AG , & $ED \leq EF$, sed AE non $\leq ED$: nec erit
 $AG \leq EF$. Ergo AH non $\leq^{\iota} EL$, & SN ^{ι . 13. 10.}
 non $\leq MR$. Hinc, quia $SN : MR = MN :$ ^{κ . 10. 10.}
 NO , non erit $MN \leq^{\iota} NO$. Quare MN, NO
 erunt $p \in$, & MO id est $\sqrt{AC}$ ex binis nomi-
 nibus erit. Q. E. D.

PROP. LVI. THEOR.



Si spatium ABCD continetur sub rationali AB & ex binis nominibus secunda AD: recta linea spatium AC potens irrationalis est, quae ex binis mediis prima appellatur.

Isdem enim constructis, quae in praecedente, eodem modo ostendetur MO posse AC; & constabit etiam, AE, ED

esse p e, & ED < AB, & AG < GE. Quum ergo ^ AE e AB, & AE <^ vtrique ipsarum AG, GE: erunt ^ AB, AG, GE p e, ideoque AH, GK media; & proinde etiam quadrata SN, NQ media erunt, & MN, NO mediae. Dein ob AG < GE, erit AH <^ GK, id est SN < NQ, vel MNq < NOq. Sed quia AE < AG, & ED < EF, non tamen AE < ED: nec erit AG < EF; & hinc AH non <^ EL, vel SN non < PO, ideoque non erit MN <^ NO. Erat autem MNq < NOq. Quare MN, NO sunt mediae e. Denique ob ED < AB, erunt ^ EF, AB p <, ideoque ^ EL p, & proinde MR = MN < NO p erit. Ex quibus omnibus patet MO, id est ^ AC, esse ex binis mediis primam. Q. E. D.

λ. sch. 14. 10.

μ. 16. 10.

ν. sch. 22. 10.

ξ. 10. 10.

ο. 12. 10.

π. 20. 10.

ς. 38. 10.

PROP

PROP. LVII. THEOR.

Si spatium AC contineatur sub rationali AB
 & ex binis nominibus tertia AD: recta linea
 spatium AC potens irrationalis est, quae appel-
 latur ex binis mediis secunda. Fig. prop.
LVI.

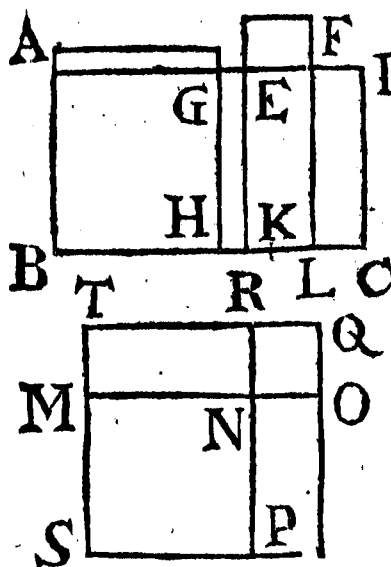
Isdem constructis, quae in prop. 55. eodem
 modo, quo antea, patebit, esse $MO = \sqrt{AC}$, & MN, NO medias. Sed quia p ED non
 est $\propto$ AB, EF autem $\propto$ ED, & $AB = EK$: ϵ . hyp.
 erunt EF, EK p E, ideoque erit $EL = MR$
 medium τ . Est autem $MR = MN \times NO$. τ . sch. 22. 10.
 Ergo $\sqrt{AC}$ est ex binis mediis secunda ν . ν . 39. 10.
 Q. E. D.

PROP. LVIII. THEOR.

Si spatium AC contineatur sub rationali AB
 & ex binis nominibus quarta AD: recta linea
 spatium AC potens irrationalis est, quae voca-
 tur maior. Fig. prop.
LVI.

Quoniam AD est ex binis nominibus quar-
 ta: p erunt AE, ED p E, & $\sqrt{(AEq - EDq)}$ p . 4. def. sec.
 non erit $\propto$ AE, AE vero $\propto$ AB. Biseca ED
 in F, & fac omnia quae in prop. 55. Constat
 ergo $MO = \sqrt{AC}$, & $\propto$ GE non $\propto$ AG. Hinc $\propto$. 19. 10.
 GK non $\propto$ AH, id est $\propto$ NOq non $\propto$ MNq, ψ . 1. 6. &
 10. 10.
 ideoque $MN \propto NO$. Porro quia p AE $\propto$ ω . constr.
 AB: erit $AK = AH + GK = \propto MNq +$
 NOq rationale α . Denique quia $AE \propto AB$, α . 20. 10.
 & ED $\propto$ EF, non autem AE $\propto$ ED: non erit β β . 14. 10.
 EF $\propto$ AB vel EK, ergo erunt ν EF, EK p E, & γ . sch. 12. 10.
 ergo $EF \times EK = MN \times NO$ erit medium δ . δ . 22. 10.
 Vnde patet $\sqrt{AC}$ esse irrationaliorem maiorem. ϵ . 40. 10.
 Q. E. D.

PROP. LIX. THEOR.



*Si spatium AC conti-
neatur sub rationali AB
& ex binis nominibus
quinta AD: recta linea
spatium potens irrationalis
est, quae vocatur ra-
tionale & medium potens.*

Constructis iisdem,
iterum constat $MO = \sqrt{AC}$, & $MN \in NO$.
Porro, quia ED est mi-
nor portio ex binis no-

minibus quintae, est $ED < \frac{1}{2} AB$, non autem
 $AE < ED$, sunt tamen AE, ED, AB p. Ergo
 $AE, AB \notin$. Ergo $AK = MNq + NOq$
medium¹ erit. Denique, quia EF, AB p, erit
 $MN \times NO = EL$ rationale. Quapro-
pter $\sqrt{AC}$ erit irrationalis rationale ac me-
dium² potens. Q. E. D.

PROP. LX. THEOR.

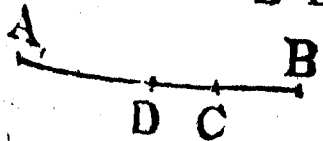
Fig. prop.
LIX.

*Si spatium AC contineatur sub rationali AB
& ex binis nominibus sexta AD: quae spatium
AC potest recta linea irrationalis est, quae vo-
catur bina media potens.*

Constructis iisdem, quae supra, patet esse
 $MO = \sqrt{AC}$, & $MN \in NO$, & nec AE nec ED
 $< \frac{1}{2} AB$; itaque AE, AB p, & $MNq + NOq$
 $= \frac{1}{2} AE \times AB$ medium³. Et, quia EF < ED,
non autem EK < ED, erunt⁴ EK, EF p, &
ideoque $MN \times NO = EK \times EF$ medium⁵
erit.

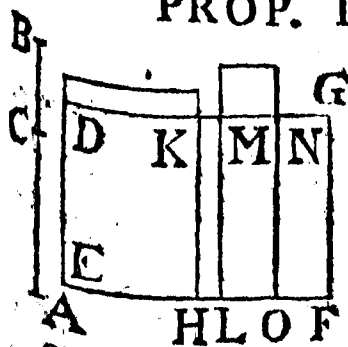
erit. Porro, quia AE non $\propto EF$, erit $MNq + NOq$ non $\propto MR$. Quare MO irrationalem esse bina media potentem π patet. Q. E. D.

L E M M A.

 Si recta linea AB in partes inaequales AC, CB secetur: ipsarum partium quadrata $ACq + CBq$ maiora sunt rectangulo $2 AC \times CB$, quod bis sub dictis partibus continetur.

Bifecetur enim AB in D : & erit $AC \times CB + CDq = ADq$. Hinc $2 AC \times CB < 2 ADq$, &, quia $ACq + CBq = 2 ADq + 2 DCq$, $ACq + CBq > 2 AC \times CB$. Q. E. D.

PROP. LXI. THEOR.

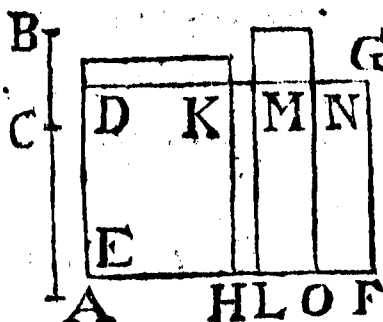


Quadratum eius AB , quae est ex binis nominibus, ad rationalem DE applicatum latitudinem DG facit ex binis nominibus primam.

Sit AC maius, CB minus nomen rectae AB . Fiat Rgl. $DH = ACq$, & Rgl. $KL = BCq$. Hinc erit $MF = 2 AC \times CB$. Bifecetur MG in N , & ad ML ducatur parallela NO . Ergo $MO = NF = AC \times CB$. Sed, quia AC, CB sunt p, q , erunt ACq, CBq p^2, q^2 , itaque $ACq + CBq < y$ trique ACq, BCq . Quoniam ergo $ACq + CBq$, id est DL , $p^2 + q^2$ est: erit DM p^2 & $< DE$. Dein quia AC, CB

α. sch. 22. 10.
β. 23. 10.

γ. 13. 10.
φ. 37. 10.



CB $\rho \in$, erit MF medium^α, & proinde MG $\rho \in$ non $\leq$ ML vel DE. Quare, quum DM $\rho \in$ & $\leq$ DE, erunt DM, MG $\rho \in$ ^γ, & DG erit ϕ ex binis nominibus. Insuper, quia

δ. lem. 55. 10. $\div$ ACq, AC $\times$ CB, CBq, ideoque $\div$ DH, MO, KL, erit DK: MN = MN: KM, & ergo DK $\times$ KM = MNq = $\frac{1}{4}$ MGq. Quia vero ACq $\leq$ CBq, & inde DH $\leq$ KL: erit DK $\leq$ KM. Et quia ACq + CBq ⁹ $>$ 2 AC $\times$ CB, ideoque DL $>$ MF: patet esse DM $>$ MG. Ergo $\sqrt{(DMq - MGq)} \leq$ DM. Quare DG est ex binis nominibus prima^π. Q. E. D.

PROP. LXII. THEOR.

Fig. prop. LXI.

Quadratum eius AB, quae est ex binis mediis prima, ad rationalem DE applicatum latitudinem DG facit ex binis nominibus secundam.

Constructis quae in praecedenti propositione, erunt AC, CB mediae $\in$ ^λ, & AC $\times$ CB ρ . Ergo DL medium est, & DM $\rho \in$ DE^μ. Rursum quia MF = 2 AC $\times$ CB est ρ , erit MG $\rho \in$ $\leq$ DE. Hinc $\frac{1}{2}$ DM, MG erunt $\rho \in$, & ergo DG erit^o ex binis nominibus. Et quoniam, ut in antecedente, ostenderetur DM $>$ MG, & $\sqrt{(DMq - MGq)} \leq$ DM: erit DG ex binis nominibus^π secunda. Q. E. D.

PROP.

PROP. LXIII. THEOR.

Quadratum eius AB, quae est ex binis me- Fig. prop.
dis secunda, ad rationalem DE applicatum la- LXI.
titudinem DG facit ex binis nominibus tertiam.

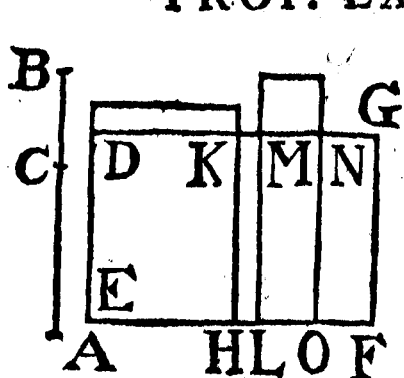
Constructis iisdem, quae ante, ϵ erunt AC, ϵ 39. 10.
 CB mediae ϵ , & erit $DL = ACq + CBq$
 medium, & hinc $DM \rho \epsilon DE$. Similiter,
 quia $AC \times CB \epsilon$ medium est, erit $MG \rho \epsilon DE$.
 Sed, quia $AC \epsilon CB$, erit $DL = ACq + CBq$
 non ϵ $MF = 2 AC \times CB$, & ob id DM
 non ϵ MG . Sunt autem $DM, MG \rho$. Er- ϵ . cor. 27. 10.
 go DG est ex binis nominibus. Ostendetur
 autem ut antea $DM > MG$, & $\sqrt{(DMq -$
 $MGq)} \epsilon DM$. Ergo erit $DG \epsilon$ ex binis no- ϵ . 3. def. sec.
 minibus tertia. Q. E. D.

PROP. LXIV. THEOR.

Quadratum maioris AB ad rationalem DE Fig. prop.
applicatum latitudinem DG facit ex binis no- LXI.
minibus quartam.

Construantur eadem. Iam erit $AC \Theta \epsilon$ ϵ . 40. 10.
 CB, & $ACq + CBq$ ideoque $DL \rho$, & AC
 $\times CB$ ideoque MF medium. Hinc $DM,$
 DE sunt $\rho \epsilon$, sed $\neq MG$, $DE \rho \epsilon$. Quare. ϵ . 21. 10.
 DM, MG sunt $\rho \epsilon$, & DG est ϵ ex binis no- ϵ . 23. 10.
 minibus. Sed ut antea ostendetur, esse DM ϵ . sch. 14. 10.
 $> MG$, & $DK \times KM = \frac{1}{2} MGq$. Quare ϵ . 37. 10.
 quum ACq non ϵ CBq , & ergo DK non ϵ ϵ . 10. 10 &
 KM , ideoque $\sqrt{(DMq - MGq)} \epsilon$ non ϵ DM : ϵ . 19. 10.
 erit DG ex binis nominibus quarta. Q. E. D. ϵ . 4. def. sec.

PROP. LXV. THEOR.



Quadratum eius AB, quae rationale ac medium potest, ad rationalem DE applicatum latitudinem DG facit ex binis nominibus quintam.

g. 41. 10.

Nam iisdem constructis constat $DL = AC$ + CB medium esse^d, MF vero $= 2 AC$ $\times$ CB p, & hinc DM p non $\leq DE$, & $MG \leq DE$, ideoque DM, MG p $\in$. Ergo, reliquis ut in praecedente ostensis, patebit, DG esse ex binis nominibus quintam. Q. E. D.

PROP. LXVI. THEOR.

Fig. prop. LXV:

Quadratum eius AB, quae bina media potest, ad rationalem DE applicatum latitudinem DG facit ex binis nominibus sextam.

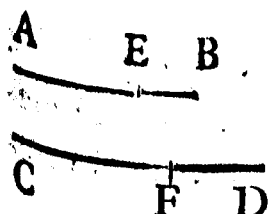
z. 42. 10.

z. 23. 10.

Nam quia DL, MF media^s sunt, & ob id DM, MG p² & non $\leq$ ipsi DE ; quia praeterea DL non $\leq MF$, & ob id DM, MG p $\in$ & DG ex binis nominibus; reliqua vero ut in prop. 64. ostenduntur: erit DG ex binis nominibus sextaⁿ. Q. E. D.

PROP. LXVII. THEOR.

Ei AB, quae est ex binis nominibus, longitudine commensurabilis CD & ipsa ex binis nominibus est ordine eadem.


 Sit enim AE maius nomen rectae AB. Ergo ⁹ AE, EB sunt $\rho \in$. Fiat $\text{' } AB: CD = AE: CF$. Ergo EB: FD = $\text{' } AB: CD$. Hinc ¹ AE $\leq$ CF, & EB $\leq$ FD, & ergo ¹⁰ CF, FD ρ . Et quoniam AE: CF = EB: FD, & permutando AE: EB = CF: FD, & AE $\in$ EB: erit $\text{' } CF \in$ FD. Quare CD est ⁹ ex binis nominibus. Iam ξ si $\sqrt{(AEq - EBq)} \leq AE$, erit & $\sqrt{(CFq - FDq)} \leq CF$; si vero $\sqrt{(AEq - EBq)}$ non $\leq$ AE, neque $\sqrt{(CFq - FDq)} \leq CF$ erit; & si AE $\leq$ expositae rationali, erit & $\text{' } CF \leq$ eidem; si EB $\leq$ expositae ρ , erit & $\text{' } FD \leq$ eidem; si neutra AE, EB $\leq$ expositae rationali, nec CF, FD $\leq$ eidem erunt. Ergo CD ex binis nominibus ordine eadem erit ipsi AB ϵ . Q. E. D.

PROP. LXVIII. THEOR.

Ei AB, quae est ex binis mediis, longitudine commensurabilis CD & ipsa ex binis mediis est, atque ordine eadem. Fig. prop. LXVII.

Sint AE, EB mediae in AB. Ergo σ AE $\in$ EB. Fiat $AB: CD = AE: CF$. Ergo EB: FD = $AB: CD = AE: CF$. Hinc erit EB $\leq$ FD, & AE $\leq$ CF, ideoque τ CF, FD mediae erunt. Et, quoniam AE: EB = CF: FD, erunt CF, FD ν mediae $\in$, & ob id CD ex binis mediis erit σ . Iam, quia AE: EB = CF: FD, erit AEq: AE $\times$ EB = ϕ CFq: CF $\times$ FD, & permutando AEq: CFq = AE $\times$ EB: CF $\times$ FD, ideoque κ AE $\times$ EB $\leq$ CF $\times$ FD. Si

ψ . sch. 12. 10. igitur $AE \times EB \rho$: erit & ψ $CF \times FD \rho$:
 fin $AE \times EB$ medium; erit & $CF \times FD$ me-
 ω . cor. 24. 10. dium ω . Ergo CD est ex binis mediis σ ordi-
 ne eadem ipsi AB. Q. E. D.

PROP. LXIX. THEOR.

*Maiori AB commensurabilis CD & ipsa ma-
 ior est.*

A E B Factis enim iisdem quae
 ————|——— supra, erit $AE:CF = EB:FD$
 α . 10. 10. ————|——— = $AB:CD$. Ergo α $AE \leq$
 C F D CF , & $EB \leq FD$. Et quia
 β . 22. 6. permutando $AE:AB = CF:CD$: erit $AEq:$
 γ . 24. 5. $ABq = \beta$ $CFq:CDq$. Similiter $EBq:ABq$
 $= FDq:CDq$. Ergo γ $AEq + EBq:ABq =$
 $CFq + FDq:CDq$, & permutando $AEq + EBq:$
 $CFq + FDq = ABq:CDq$. Ergo $AEq +$
 $EBq \leq \alpha$ $CFq + FDq$. Est autem $AEq +$
 δ . 40. 10. $EBq \rho^\delta$. Ergo δ $CFq + FDq \rho$ erit. Osten-
 ϵ . sch. 12. 10. ditur autem ut in praecedente $CF \times FD \leq$
 $AE \times EB$. Medium vero est $AE \times EB^\epsilon$.
 ζ . cor. 24. 10. Ergo & $CF \times FD$ medium ζ erit. Denique,
 η . 2. sch. quia $AE \propto^\delta EB$, erit & η $CF \propto^\delta FD$. Ergo
 10. 10. δ CD maior erit. Q. E. D.

PROP. LXX. THEOR.

Fig. prop.
 LXIX.

*Rationale ac medium potenti AB commensu-
 rabilis CD & ipsa rationale ac medium potens
 est.*

Constructis iisdem, similiter ostendemus
 $CF \propto^\delta FD$, & $CFq + FDq \leq AEq + EBq$,
 α . 41. 10. & $CF \times FD \leq AE \times EB$. Iam $AEq + EBq$
 medium

medium est; ergo $\&^* CFq + FDq$. Et quia μ . cor. 24. 10.
 $AE \times EB \rho$: erit $CF \times FD \rho^\lambda$. Et igitur λ . sch. 12. 10.
 tur CD erit rationale ac medium potens.
 Q. E. D.

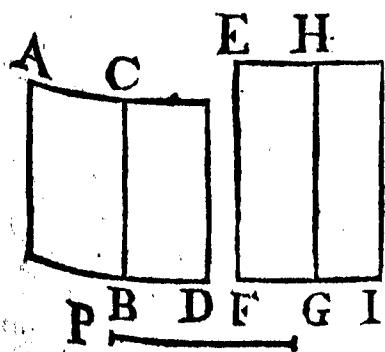
PROP. LXXI. THEOR.

Bina media potenti AB commensurabilis CD Fig. prop.
& ipsa bina media potens est. LXIX.

Nam vt in 69. demonstrabimus, $CF \propto FD$,
 $\& CFq + FDq \leq AEq + EBq$, $\& CF \times FD$
 $\leq AE \times EB$. Iam quia $AEq + EBq$, $\& AE$
 $\times EB$ media μ sunt, $\& AEq + EBq$ non $\leq \mu$. 42. 10.
 $AE \times EB$: erunt $CFq + FDq$ $\& CF \times FD$
 media, $\&$ erit $CFq + FDq$ non $\leq \xi$ $CF \times FD$ μ . cor. 24. 10.
 FD. Ergo CD erit bina media potens μ . ξ . 14. 10.
 Q. E. D.

PROP. LXXII. THEOR.

Si rationale AB & medium CD componan-
tur: quatuor irrationales fiunt, vel quae ex binis
nominibus, vel quae ex binis mediis prima, vel
maior, vel rationale ac medium potens.

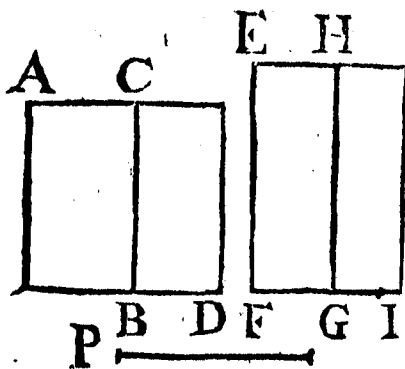


Sit $P = \sqrt{AB + CD}$. Dico P fore
 vnam ex quatuor di-
 ctis irrationalibus.

Cas. 1. Sit $AB < CD$.
 Ad EF ρ applicetur
 Rgl. $EFG = AB$, $\&$
 Rgl. $HGI = CD$. Er-

go erit EG ρ $\&$ FG $\rho \leq EF^\circ$. HI vero erit μ . 21. 10.
 medium, $\&$ GI ρ non $\leq EF^\pi$. Est vero EG π . 23. 10.
 non

g. cor. 24. 10.
& hyp.



non $\leq$ HI, & $EG:HI = FG:GI$. Ergo FG non $\leq$ GI, & idcirco FG, GI sunt p $\in$, & FI est ex binis nominibus. Et quia $EG > HI$: erit & $FG > GI$. Iam ponatur $\sqrt{(FGq - GIq)}$ < FG: & erit FI ex binis nominibus prima^σ; & $\sqrt{EI} = \sqrt{AD} = P$ ex binis nominibus^τ. Ponatur $\sqrt{(FGq - GIq)}$ non $\leq$ FG: & erit FI ex binis nominibus quarta^υ & P maior ϕ .

g. 1. def. sec.
7. 55. 16.
v. 4. def. sec.
φ. 58. 10.

— GIq) < FG: & erit FI ex binis nominibus prima^σ; & $\sqrt{EI} = \sqrt{AD} = P$ ex binis nominibus^τ. Ponatur $\sqrt{(FGq - GIq)}$ non $\leq$ FG: & erit FI ex binis nominibus quarta^υ & P maior ϕ .

κ. 56. 10.

ψ. 59. 10.

Cas. 2. Sit $AB < CD$: & erit $FG < GI$; FI autem vt antea ex binis nominibus. Quare, posita $\sqrt{(GIq - FGq)}$ < GI, erit P ex binis mediis κ prima. Posita autem $\sqrt{(GIq - FGq)}$ non $\leq$ GI, erit P rationale ac medium potens ψ. Q. E. D.

PROP. LXXIII. THEOR.

Fig. prop.
LXXII.

Si duo media inter se incommensurabilia AB, CD componantur: duae reliquae irrationales fiunt; vel ex binis mediis secunda, vel binam media potens.

ω. 23. 10.
α. hyp.
β. 10. 10.

Factis iisdem quae in praecedente, α erit nec FG nec GI $\leq$ EF, vtraque tamen erit p. Et quia EG non $\leq$ HI, ideoque FG non $\leq$ GI: erunt FG, GI p $\in$, & hinc FI ex binis nominibus erit, quorum neutrum $\leq$ rationali EF.

Cas. 1.

Cas. 1. Iam si fuerit $AB > CD$, ideoque $FG > GI$, & $\sqrt{(FGq - GIq)} < FG$: erit FI ex binis nominibus tertia, & hinc P γ ex binis γ . 57. 10.
mediis secunda. Sin $\sqrt{(FGq - GIq)}$ non $<$
 FG : erit P bina media δ potens. δ . 60. 10.

Cas. 2. Si fuerit $AB < CD$: similiter demonstrabitur, P aut ex binis mediis secundam, aut bina media potentem esse. Q. E. D.

Corollarium.

Quae ex binis nominibus, & quae post ipsam sunt (prop. 38. 39. 40. 41. 42.) irrationales, neque mediae neque inter se eadem sunt. Quadratum enim, quod fit a media, ad rationalem applicatum latitudinem efficit rationalem; quod autem fit ab ea, quae est ex binis nominibus, ad rationalem applicatum latitudinem efficit ex binis nominibus primam; quod ab ea, quae est ex binis mediis prima, ad rationalem applicatum latitudinem efficit ex binis nominibus secundam; & sic deinceps (prop. 63. 64. 65. 66). Quoniam igitur dictae latitudines differunt, & a prima, & inter sese, a prima quidem, quod rationalis sit, inter sese vero, quod ordine non sint eadem: constat & ipsas irrationales inter se differentes esse.

Principium Senariorum per detractionem.

PROP. LXXIV. THEOR.

A
B
C
Si a rationali AC rationalis AB auferatur, potentia solum commensurabilis existens toti AC : reliqua BC irrationalis est.
Vocetur autem Apotome.

Nam $2 AC \times AB$ non $\xi^2 ACq + ABq$, δ . cor. 27. 10.
& ob id $2 BCq$ non $\xi^2 ACq + ABq$. Hinc, ξ . 7. 2. &
quia cor. 17. 10

7. sch. 27. 10. quia $ACq + ABq$ pⁿ est, erit BCq αλ, & ergo BC αλ. Q. E. D.

PROP. LXXV. THEOR.

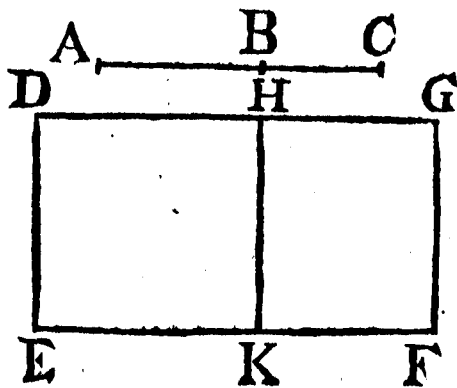


Si a media AC media BC auferatur, potentia solum commensurabilis existens toti AC, quae cum tota AC rationale conueniet: reliqua AB irrationalis est. Vocetur autem mediae apotome prima.

9. cor. 27. 10. Nam $ACq + BCq$ qⁿ non $\leq 2 AC \times CB$, &
 7. 2 & ergo ABq non $\leq 2 AC \times CB$, ac ob id AB
 17. 10.
 11. def. 10. αλ. Q. E. D.

PROP. LXXVI. THEOR.

Si a media AC media CB auferatur, potentia solum commensurabilis existens toti AC, quae cum tota AC medium continet: & reliqua AB irrationalis est. Vocetur autem mediae apotome secunda.



Exponatur p DE, ad quam applicetur Rgl. $DEK = 2 AC \times BC$, & Rgl. $DEF = ACq + CBq$. Erit itaque ^λ $HF = ABq$. Et quia $ACq + CBq$ medium pⁿ

λ. 7. 2.

μ. 16. 10 & cor. 24. 10.

ν. 23. 10.

ξ. cor. 27. 10.

ο. 1. 6. & 10. 10.

est, nec non $AC \times CB$: erunt DF, DK media, & proinde EF, EK p. Sed quia $AC \in CB$, & ob id ξ $ACq + CBq$ non $\leq 2 AC \times CB$: erit ^ο FE non $\leq$ EK. Ergo EF, EK erunt p ε

$\text{p} \in$, & ergo $KF \propto \alpha$, & ipsum $HF : \alpha$, & π . 74. 10.
 ob id quoque $AB \propto \alpha$ erit. Q. E. D. p. sch. 21. 10.
 c. u. def. 10.

PROP. LXXVII. THEOR.

 Si a recta linea AC recta
 linea CB auferatur, potentia
 incommensurabilis existens toti AC, quae cum
 tota faciat compositum quidem ex ipsarum qua-
 dratis $ACq + CBq$ rationale, quod autem sub
 ipsis continetur $AC \times CB$ medium: reliqua AB
 irrationalis est. Vocetur autem minor.

Nam quia $ACq + CBq$ non $\propto 2 AC \times CB$: π . sch. 13. 10.
 erit & $ACq + CBq$ non $\propto ABq$. Quare ν . cor. 17. 10.
 $AB \propto$ erit α . Q. E. D. ϕ . 11. def. 10.

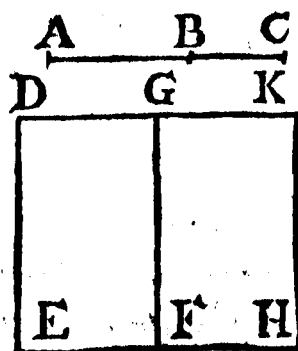
PROP. LXXVIII. THEOR.

 Si a recta linea AC recta
 linea CB auferatur potentia
 incommensurabilis existens toti AC, & cum
 tota faciens compositum quidem ex ipsarum qua-
 dratis $ACq + CBq$ medium, quod autem sub
 ipsis bis continetur $2 AB \times CB$ rationale: re-
 liqua AB irrationalis est. Vocetur autem cum
 rationali medium totum efficiens.

Nam quia $ACq + CBq$ non $\propto 2 AC \times CB$: π . sch. 13. 10.
 CB : erit ABq non $\propto 2 AC \times CB$, & hinc ϕ . 17. 10.
 $AB \propto$ α . Q. E. D. ω . 11. def. 10.

PROP.

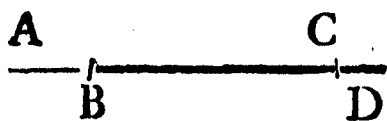
PROP. LXXIX. THEOR.



Si a recta linea AC recta linea CB auferatur potentia incommensurabilis existens toti AC, & cum tota facient compositum quidem ex ipsarum quadratis ACq + CBq medium, quod autem sub ipsis bis continetur 2 AC × CB medium, & adhuc ipsarum quadrata ACq + CBq incommensurabilia ei 2 AC + CB quod bis continetur sub ipsis: reliqua AB irrationalis est. Vocetur autem cum medio medium totum efficiens.

Ad p DE applica Rgl. $DEH = ACq + CBq$, & Rgl. $DEF = 2 AC \times CB$. Ergo α . 7. 2. β . 23. 10. γ . 10. 10. & $GH = ABq$, & EH, EF sunt p β , & DH non $\leq$ DF. Propterea EH non $\leq$ EF, ideo δ . 74. 10. que EH, EF p ϵ sunt; ex quo sequitur FH ϵ s. sch. 21. 10. esse α , & GH ϵ α , & AB ϵ α . Q. E. D. ζ . 11. def. 10.

PROP. LXXX. THEOR.



Apotomae AB tantum congruit recta linea BC potentia solum commensurabilis existens toti AC.

Si negas: congruat alia BD, ita vt α AD, DB sint p ϵ . Et quia $ADq + DBq = 2 AD \times DB + ABq$, $ACq + CBq = 2 AC \times CB + ABq$: erit $ADq + DBq - (ACq + CBq) = 2 AD \times DB - 2 AC \times CB$. Sed quia etiam AC, CB sunt α p ϵ , & hinc $ADq + DBq - (ACq + CBq)$ p: erit & $2 AD \times DB$

DB — 2 AC $\times$ CB p. Q. E. A π , quia AD κ . 27. 10.
 $\times$ DB & AC $\times$ CB media λ sunt. λ . sch. 22. 10.

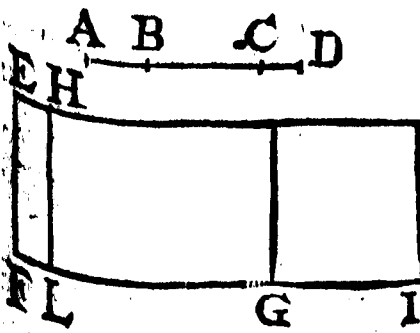
PROP. LXXXI. THEOR.

Mediae apotomae primae AB una tantum con- Fig. prop.
gruit recta linea media BC, potentia solum com- LXXX.
mensurabilis existens toti AC, & cum tota ra-
tionale continens.

Si negas: sit AB etiam mediae AD apoto-
 me prima. Ergo erunt μ AD, DB mediae ϵ , μ . 75. 10.
 & AD $\times$ DB p. Erit autem vt antea ADq
 + DBq — (ACq + CBq) = 2 AD $\times$ DB
 — 2 AC $\times$ CB. Et quia ADq + DBq me- ν . cor. 24. 10.
 dium ν est, nec non ACq + CBq ξ ; ratio- ξ . 24. 10 &
 nalia autem sunt 2 AD $\times$ DB & $\circ$ 2 AC $\times$ CB: cor. ejusd.
 medium superat medium rationali π . Q. E. A ϵ . $\circ$. hyp.
 π . sch. 27. 10.
 ϵ . 27. 10.

PROP. LXXXII. THEOR.

Mediae apotomae
secundae AB una
tantum congruit re-
cta linea media BC,
potentia solum com-
mensurabilis existens
toti AC, & cum tota
medium continens.



Si negas: sit AB etiam apotome secunda
 mediae AD, id est, sint σ AD, DB mediae ϵ , σ . 76. 10.
 & medium continentes. Ad p EF applicetur
 Rgl. EFG = ACq + CBq, & auferatur Rgl.
 FLG = 2 AC $\times$ CB, vel EL = τ ABq. τ . 7. 2.
 Ad eandem EF applicetur quoque Rgl. EFI
 T = ADq

τ. 7. 2.

υ. hyp. &
24. 10.

φ. 16. 10. &
cor. 24. 10.

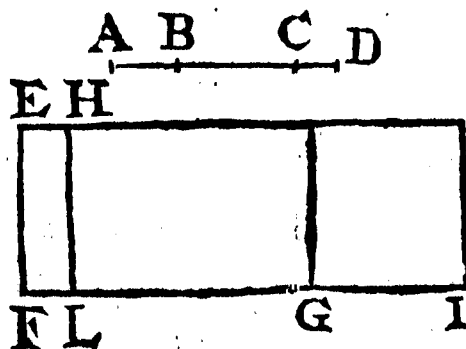
κ. 23. 10.

ψ. cor. 27. 10.

α. 1. 6. &
10. 10.

α. 74. 10.

β. 30. 10.



$= ADq + DBq$
& erit $HI = 2 AD$
 $\times DB$. Et quia
AC, CB mediae ϵ
sunt: erit $ACq +$
 CBq medium ϕ , &
ergo EG medium

erit, & FG ρ κ . Rursus quia $AC \times CB$, &
hinc etiam HG, medium est: erit LG ρ κ . Sed
quia $AC \epsilon$ CB: erit ψ $ACq + CBq$ non $\leq$ 2
 $AC \times CB$, id est, EG non $\leq$ HG; & ob id
FG non $\leq$ LG. Quare FG, LG sunt ρ ϵ .
Proinde FL est apotome rectae FG. Simi-
liter autem demonstrabimus, esse & FL apo-
tomen rectae FI. Q. E. A^β.

PROP. LXXXIII. THEOR.

$A \text{---} B \text{---} C \text{---} D$ Minori AB una tan-
tum congruit recta li-
nea BC, potentia incommensurabilis existens to-
ti AC, & cum tota faciens compositum quidem
ex ipsarum quadratis $ACq + CBq$ rationale,
quod autem bis sub ipsis continetur $2 AC \times CB$
medium.

γ. 77. 10

δ. 7. 2.

ε. sch. 27. 10.

ζ. 27. 10.

Si negas: congruat BD. Ergo γ $AD \epsilon$
DB, & $ADq + DBq \rho$, & $2 AD \times DB$ me-
dium erit. Et quia $ADq + DBq = 2 AD$
 $\times DB + ABq$, & $ACq + CBq = 2 AC$
 $\times CB + ABq$: erit $ADq + DBq - (ACq +$
 $CBq) = 2 AD \times DB - 2 AC \times CB$. Ergo
medium $2 AD \times DB$ superabit medium $2 AC$
 $\times CB$ rationali. Q. E. A^ζ.

PROP.

**Fig. prop.
LXXXIII.**

Si negas: congruat quoque BD. Ergo ⁿ 78. 10.
ADq + DBq medium, & 2 AD × DB p̄erit.
Et quia vt antea ADq + DBq — (ACq +
CBq) = 2 AD × DB — 2 AC × CB = ^s 9. sch. 27. 10.
p̄: medium ADq + DBq superabit medium
ACq + CBq rationali. Q. E. A'. 11. 27. 10.

**Fig. prop.
LXXXII.**

Si negas: congruat etiam BD, ita vt AD
 $\propto$ DB, & medium 2 AD $\times$ DB non $\propto$ medio
ADq + DBq. Fiant eadem quae in propo-
sitione LXXXII; & simili ratione, ac ibi, de-
monstrabitur, eandem FL esse apotomen dua-
rum FG, FI. Q. E. A*.

DEFINITIONES TERTIAE.

1. Exposita rationali & apotoma, si quidem tota plus possit, quam congruens, quadrato rectae lineae sibi commensurabilis longitudine; sitque tota expositae rationali longitudine commensurabilis: vocetur *apotome prima*.

2. Si vero congruens sit longitudine commensurabilis expositae rationali; & tota plus possit, quam congruens, quadrato rectae lineae sibi commensurabilis longitudine: vocetur *apotome secunda*.

3. Quod si neutra sit longitudine commensurabilis expositae rationali; & tota plus possit, quam congruens, quadrato rectae lineae sibi commensurabilis longitudine: dicatur *apotome tertia*.

4. Rursus si tota plus possit, quam congruens, quadrato rectae lineae sibi incommensurabilis longitudine: si quidem tota sit longitudine commensurabilis expositae rationali, vocetur *apotome quarta*;

5. Si vero congruens, vocetur *apotome quinta*;

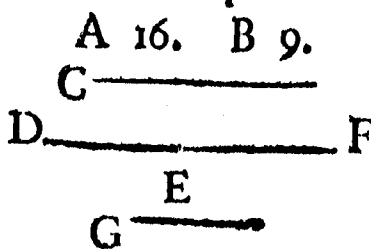
6. Quod si neutra, dicatur *apotome sexta*.

PROP. LXXXVI. PROBL.

Inuenire primam apotomen.

A. cor. 1.
lem. 30. 10.

μ. cor. 6. 10.



Expositae rationali C
fiat ξ DF. Capiantur
duo numeri A, B. qua-
drati, ita vt A — B non
sit quadratus, & fiat A:
A — B

$A - B = DFq : FEq$. Dico DE esse apotomen primam.

Nam quia $DF \leq C$: erit $DF \rho$. Et quia DFq ad FEq rationem numeri ad numerum, sed non quadrati ad quadratum, habet: erit ^{v. cor. II. 10.} $EF \in DF$; & ergo erunt $EF, DF \rho \in$, & DE apotome ξ erit. Sit autem $G = \sqrt{(DFq - \xi. 74. 10. FEq)}$. Iam quia $A : A - B = DFq : EFq$, erit conuertendo $A : B = DFq : Gq$, & ob id $G = \sqrt{(DFq - FEq)} \leq DF$. Ergo DE ^{a. 9. 10. n. 1. def. tert.} est apotome primaⁿ. Q. E. F.

PROP. LXXXVII. PROBL.

Inuenire secundam apotomen.

Expositae ρC sit $\leq EF$, & exponantur numeri A, B quadrati, ita vt $A - B$ non sit quadratus, & fiat $A - B : A = EFq : FDq$. Erit DE apotome secunda. Fig. prop. LXXXVI.

Nam, quia $EF \leq C$, erit $EF \rho$; & vt antea ostendimus, DE apotomen esse, atque $\sqrt{(DFq - FEq)} \leq DF$. Quare patet DE esse apotomen secundam^e. Q. E. F. 2. def. tert.

PROP. LXXXVIII. PROBL.

Inuenire tertiam apotomen.

A 16. B 12. C 8. Exponentur ρD , & tres numeri A, B, C non habentes inter se rationem quadrati ad quadratum; A vero ad $A - B$ habeat talem rationem. Fiat $C : A = Dq : EGq$, & $A : B = EGq : GFq$. EF erit apotome tertia.

T 3

Nam

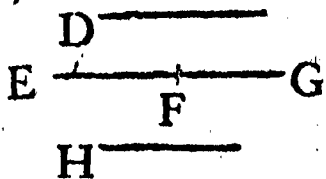
ε. 6. 10.

A 16. B 12.

C 8.

τ. cor. 11. 10.

υ. 74. 10.



Nam quia $EGq \propto Dq$:
erit $EG \rho$. Hinc, quia GF
 $\in \tau EG$, erunt $EG, GF \rho \epsilon$,
& EF erit ν apotome. De-
inde quia ex aequo $C : B$
 $= Dq : GFq$, non erit GF

φ. 9. 10.

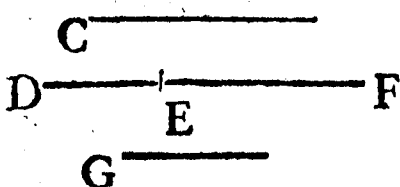
$\propto D\phi$. Similiter quia $C : A = Dq : EGq$,
nec $EG \propto D$. Sit autem $Hq = EGq - GFq$.
Et quia conuertendo $A : A - B = EGq : Hq$,
erit H id est $\sqrt{(EGq - GFq)} \propto \phi EG$. Ex
quibus omnibus sequitur EF esse apotomen
quartam $\propto$. Q. E. F.

κ. 4. def.
tert.

PROP. LXXXIX. PROBL.

Inuenire quartam apotomen.

A 6. B 10.



Exponentur duo nu-
meri A, B, tales vt A
+ B ad neutrum ratio-
nem quadrati ad qua-
dratum habeat. Ex-

positae ρC fiat $\propto DF$, & $A + B : B = DFq :$
 FEq : erit DE quaesita.

ψ. 6. def. 10.

ω. 6. 10. &

fch. 12. 10.

α. cor. 11. 10.

β. 74. 10.

γ. 9. 10.

δ. 4. def.

tert.

Quia enim $DF \rho \psi$ est: erit & $FE \rho \omega$; &
ob id DF, FE erunt $\rho \epsilon$. Erit ergo DE
apotome. Sit $Gq = DFq - FEq$. Et quia
est conuertendo $A + B : A = DFq : Gq$: erit
 G id est $\sqrt{(DFq - FEq)}$ non $\propto \nu DF$. Er-
go DE erit apotome δ quarta. Q. E. F.

PROP. XC. PROBL.

Inuenire quintam apotomen.

Fig. prop.
LXXXIX.

Exponentur duo numeri A, B, ita vt $A + B$
ad neutrum habeat rationem quadrati ad qua-
dratum.

dratum. Expositae p C fiat ε EF, & $B : A + B = FEq : FDq$. Erit DE quaesita.

Quia enim, vt in praecedente, patet DE apotomen esse, & $\sqrt{(DFq - FEq)}$ non ε DF; EF autem ε p C facta est: erit DE apotome quinta. Q. E. F.

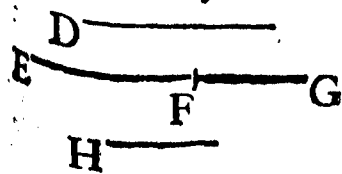
s. 5. def. tert.

PROP. XCI. PROBL.

Inuenire sextam apotomen.

Exponantur p D, & tres numeri A, B, C, tales vt nec inter se rationem numeri quadrati ad quadratum habeant, nec A ad A — B eam habeat rationem; & fiat $C : A = Dq : EGq$, & vt $A : B = EGq : GFq$: erit EF quaesita.

A 12. B 5. C 10. Ostendetur enim, vt



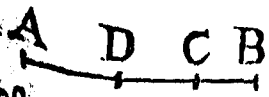
in prop. 88. EF apotomen, & nec EG nec GF ipsi D ε esse. Sit autem $H = \sqrt{(EGq - GFq)}$.

Atqui quum sit $A : B = EGq : GFq$, & ergo conuertendo $A : A - B = EGq : Hq$; patet etiam, non ε esse H id est $\sqrt{(EGq - GFq)}$ ε EG. Ergo EF erit " apotome sexta. Q. E. F.

s. 9. 10.

s. 6. def. tert.

Scholium.



Sed & expeditius sex dictarum linearum inuentionem ostendere licet. Si enim oporteat inuenire primam apotomen: exponatur " ex binis nominibus prima AB, cuius maius nomen sit AC, & fiat $CD = CB$. Ergo AC, CB hoc est AC, CD sunt p E, & $\sqrt{(ACq - CDq)} \varepsilon$ AC, & AC expositae rationali ε est; & igitur AD est apotome prima. Si.

s. 49. 10.

s. 1. def. sec.

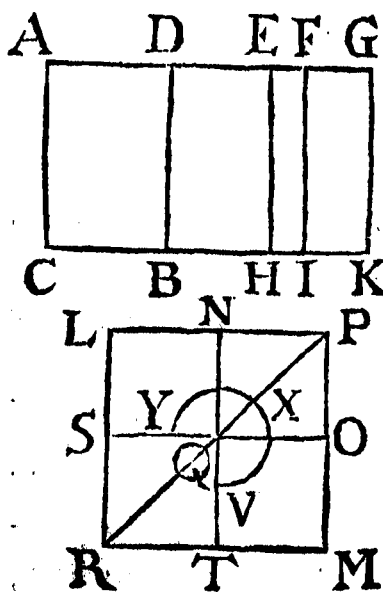
s. 1. def. tert.

militer & reliquas apotomas inueniemus, eas quæ sunt ex binis nominibus eiusdem ordinis exponentes.

PROP. XCII. THEOR.

Si spatium AB contineatur sub rationali AC & apotoma prima AD: recta linea spatium AB potens apotome est.

λ. 74. 10.
μ. 1. def.
tert.



ν. 18. 10.
ξ. 16. 10.

π. 13. 10.
π. 6. def. 6.
ρ. 20. 10.

σ. sch. 22. 10.

τ. 26. 6.

υ. 1. cor. 4. 2.

φ. lem. 18. 10.

χ. 17. 6.

ψ. lem. 55. 10.

Sit ipsi AD congruens DG. Ergo $\wedge$ AG, GD sunt $\rho \in$, & $AG \varepsilon^{\mu} \rho$ AC, & $\sqrt{(AGq - GDq)} \varepsilon$ AG. Ad AG applicetur Rgl. $= \frac{1}{4} DGq = DEq$ deficiens figura quadrata. Secet hoc ipsam AH in partes AF, FG. Ergo $AF \varepsilon^{\nu} FG$, & ob id $AG \varepsilon^{\xi}$ tam AF quam FG. Quare tam AF quam FG ε° AC erit ρ^{π} , & ergo AI, FK ρ erunt ρ . Deinde quia $DE = \frac{1}{2} EG$: erunt DE, EG ε DG. Sed DG ρ non ε^{μ} AC: ergo DE, EG, AC erunt $\rho \in$, & ergo DH, EK media σ . Fiat quadratum LM $=$ AI, & auferatur quadratum NO $=$ FK, communem cum toto angulum LPM habens. Erunt ergo LM, NO circa eandem τ diametrum RQP. Descripta ergo reliqua figura, erit & ST quadratum ν lam, quia ϕ $AF \times FG = EDq = EGq$, erit χ $AF:EG = \chi$ EG:EG, & ob id $\div$ AI, EK, FK. Sed sunt quoque ψ $\div$ LM, MN, NO. Quare MN

MN (= LO) = EK = DH, & proinde DK = gnom. VXY + NO. Sed AK = LM + NO. Ergo AB = ST = LNq. Denique quia AI, FK p sunt: erunt &, quae illa possunt, LP, PN p^o. Sed quia LO = EK medium non $\propto$ NO, & propterea LP non $\propto$ PN: erunt LP, PN p^e, & ergo LN id est $\sqrt{AB}$ apotome erit. Q. E. D.

ω . sch. 12. 10.
 α . 1. 6. &
 10. 10.

PROP. XCIII. THEOR.

Si spatium AB contineatur sub rationali AC
 & apotoma secunda AD: recta linea spatium
 AB potens mediae est apotome prima.

Fig. prop.
 XCII.

Sit enim ipsi AD congruens DG. Ergo AG, GD sunt p^e, & DG est $\propto$ AC, & $\sqrt{(AGq - GDq)} \propto AG$, & AG non $\propto$ AC. Iam facis iisdem, quae in propositione praecedente: erit tam AF quam FG $\propto$ AG, sed non $\propto$ AC, & proinde AF, AC erunt p^e, item FG, AC; & igitur AI, FK, & iis aequalia LM, NO media erunt, & LP, PN mediae. Et quia AF: FG = AI: FK = LM: NO, AF vero $\propto$ FG: erunt PL, PN mediae p^e. Denique quum ob EG $\propto$ DG $\propto$ p^e AC, sit EK p; &, ut antea, demonstretur LO = EK: patet, LP, PN rationale continere. Quare LN id est $\sqrt{AB}$ erit mediae apotome prima. Q. E. D.

β . 2. def.
 tert.

γ . 14. 10.

δ . sch. 22. 10.

ϵ . 18. 10.
 ζ . 16. 10.

η . 75. 10.

PROP. XCIV. THEOR.

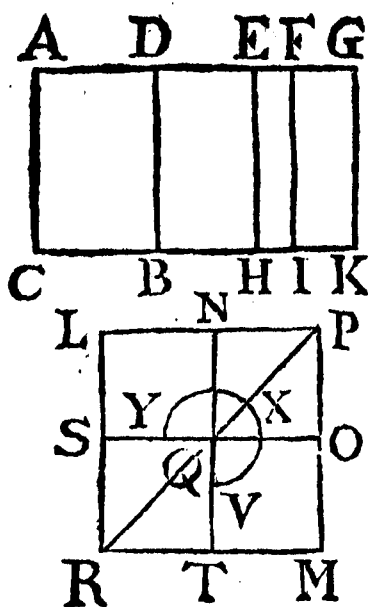
Si spatium AB contineatur sub rationali AC
 & apotome tertia AD: recta linea spatium potens mediae est apotome secunda.

T,

Nam

§. 3. def.
tert.
1. constr.
x. sch. 22. 10.

λ. 76. 10.



Q. E. D.

PROP. XCV. THEOR.

Fig. prop.
XCIV.

Si spatium AB contineatur sub rationali AC, & apotoma quarta AD: recta linea spatium AB potens minor est.

μ. 4. def.
tert.

ν. 20. 10.
ξ. sch. 22. 10.
ο. 19. 10.
π. 10. 10.
ς. constr.

σ. 77. 10.

Sit enim DG congruens ipsi AD: & erunt AG, GD ρ € , eritque AG ξ AC, sed DG non ξ AC, nec $\sqrt{(AGq - GDq)} \xi AG$. Construuntur eadem quae in praecedentibus: & patet AK' esse ρ, DK vero medium $\frac{1}{2}$, & AF non ξ FG, & ergo AI non ξ FK. sed $AK = LPq + PNq$, & $\frac{1}{2} DK = EK = LO = LP \times PN$, & $AI = LPq$, & $FK = PNq$. Quare LP € PN, & $LPq + PNq$ est ρ, 2 $LP \times PN$ autem medium; & proinde LN id est $\sqrt{AB}$ minor. Q. E. D.

PROP. XCVI. THEOR.

Fig. prop.
XCIV.

Si spatium AB contineatur sub rationali AC, & apotoma quinta AD: recta linea spatium AB

AB potens est quae cum rationali medium totum efficit.

Sit enim DG congruens ipsi AD; & erunt AG, GD $p \in$, eritque GD $\leq$ AC, sed AG non $\leq$ AC, & $\sqrt{(AGq - GDq)}$ non $\leq$ AG. Constructis iisdem, quae antea, eodem modo ostendetur, DK vel EK esse p , AK vero medium, & AI non $\leq$ FK. Quare erit LP $\propto$ PN, & LPq + PNq medium, $2 LP \times PN$ vero p ; & ob id LN id est $\sqrt{AB}$ quae cum rationali medium totum efficit. Q. E. D. 7. 5. def. tert. u. 78. 10.

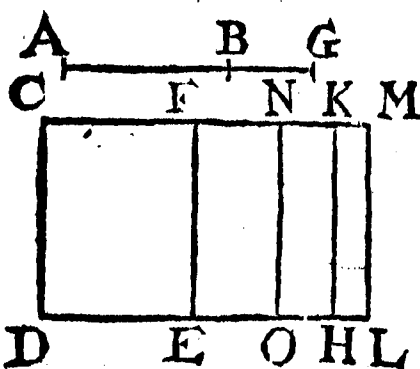
PROP. XCVII. THEOR.

Si spatium AB contineatur sub rationali AC apotoma sexta AD: recta linea spatium AB potens est quae cum medio medium totum efficit. Fig. prop. XCIV.

Sit iterum ipsi AD congruens DG: & erunt AG, GD $p \in$, & $\sqrt{(AG - GDq)}$ non $\leq$ AG, & nec AG nec GD $\leq$ AC. Constructis iisdem, quae antea, similiter demonstrabimus tam LPq + PNq, quam $2 LP \times PN$ esse medium & LP $\propto$ PN. Sed praeterea, quia AG non $\leq$ EG, & ergo AK ϕ non $\leq$ EK: erit LPq + PNq non $\leq 2 LP \times PN$. Ergo LN id est $\sqrt{AB}$ est ea quae cum medio medium totum efficit. Q. E. D. u. 6. def. tert. d. 10. 10. x. 79. 10.

PROP.

PROP. XCVIII. THEOR.



Quadratum apotomae AB ad rationalem CD applicatum latitudinem CF facit apotomen primam.

Sit enim BG ipsi AB congruens. Ergo AG, GB sunt ψ ρ ϵ .

ψ . 74. 10.

ω . 7. 2.

Rgl. CH = AGq, & Rgl. KL = BGq. Ergo, quia CE = ABq, erit FL = ω 2 AG $\times$ GB. Biseca FM in N, & duc NO parallelam ad CD; ac erit FO = NL = AG $\times$ GB.

α . sch. 12. 10.

& 16. 10.

β . 21. 10.

γ . sch. 20. 10.

δ . 23. 10...

ϵ . cor. 27. 10.

ζ . 10. 10.

Iam quia DM = AGq + GBq est ρ α , erit CM ρ β $\leq$ CD. Et quia FL = 2 AG $\times$ GB medium γ est, erit FM ρ non $\leq$ CD δ . Porro quia AGq + GBq non $\leq$ 2 AG $\times$ GB, ideoque CL non $\leq$ FL: erit FM non $\leq$ ζ CM, & proinde FM, CM erunt ρ ϵ , ac CF apotome

η . lem. 55. 10.

ψ erit. Praeterea quum sint $\div$ CH, NL, KL, ideoque $\div$ CK, NM, KM: erit CK $\times$ KM = NMq = $\frac{1}{4}$ FMq. Sed, quia CH $\leq$ KL, est & CK $\leq$ KM ζ . Quare $\sqrt{(CMq - MFq)}$ $\leq$ CM δ . Ergo CF est apotome prima. Q. E. D.

θ . 18. 10.

PROP. XCIX. THEOR.

Fig. prop. XCVIII.

Quadratum mediae apotomae primae AB ad rationalem CD applicatum latitudinem facit CF apotomen secundam.

ι . 75. 10.

Sit iterum BG congruens ipsi AB: & erunt AG, GB mediae ϵ , & AG $\times$ GB ρ . Ergo factis

factis quae in propof. praec. erunt CH, KL, CL media, fed NL, FL ρ ; ideoque CM erit ρ non $\leq$ CD², FM autem $\wedge \rho \leq$ CD. Reliqua ^{23. 10.} autem vt supra ostenduntur. Ergo CF est ^{21. 10.} apotome secunda. Q. E. D.

PROP. C. THEOR.

Quadratum mediae secundae apotomae AB ad rationalem CD applicatum latitudinem CF facit apotomen tertiam. Fig. prop. XCVIII.

Factis iisdem, quae antea; quoniam² AG, ^{76. 10.} GB mediae $\in$ sunt, & AG $\times$ GB medium est, erunt CL & FL media, ideoque erit tam CM, quam FM ρ non $\leq$ CD, & erunt CM, FM $\rho \in$. Ostensis ergo reliquis, quae in praecedentibus, patebit, CF esse apotomen tertiam. Q. E. D.

PROP. CI. THEOR.

Quadratum minoris AB ad rationalem CD applicatum latitudinem CF facit apotomen quartam. Fig. prop. XCVIII.

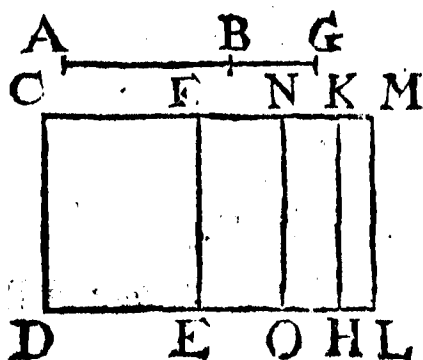
Iisdem constructis: quia³ AG $\in$ GB, & ^{77. 10.} AGq + GBq ρ , & AG $\times$ GB medium, eodem modo, quo in prop. 98. patet, esse CM $\leq$ CD, & CF apotomen, & CK $\times$ KM = $\frac{1}{4}$ FMq, fed, ob AG $\in$ GB, CK non $\leq$ KM, ideoque $\sqrt{(CMq - MFq)}$ non $\leq$ CM. Er- ^{19. 20.} go CF est apotome quarta. Q. E. D.

PROP. CII. THEOR.

Quadratum eius AB, quae cum rationali medium totum efficit, ad rationalem CD applicatum

plicatum latitudinem CF facit apotomen quintam.

g. 78. 10.



Constructis iisdem; quia $\circ$ AG, $\ominus$ GB, & AGq + GBq medium, & AG $\times$ GB ρ , eadem ratione ac antea ostendetur, esse CM ρ non $\leq$ CD, sed FM ρ & CD, & CF apotomen

quintam. Q. E. D.

PROP. CIII. THEOR.

Fig. prop. CII.

Quadratum eius AB, quae cum medio medium totum efficit, ad rationalem CD applicatum latitudinem CF facit apotomen sextam.

r. 79. 10.

g. 23. 10.

Constructis enim iisdem; quia π AG $\ominus$ GB, & AGq + GBq, AG $\times$ GB media, & AG $\times$ GB non $\leq$ AGq + GBq: patet vt antea, CM, FM: esse ρ non $\leq$ CD, atque, reliquis similiter vt antea ostensis, CF esse apotomen sextam. Q. E. D.

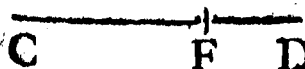
PROP. CIV. THEOR.

Recta linea AE, apotomae CF longitudine commensurabilis, & ipsa apotome est, atque ordinis eadem.

g. 74. 10.

r. 12. 5.

g. 10. 10.



Sit enim ipsi CF congruens FD: ergo $\circ$ CD, DF ρ E. Fiat EB : FD = AE : CF. Erit ergo π AB : CD = EB : FD = AE : CF; & proinde AB $\leq$ CD, & EB

EB $\propto$ FD. Quare AB, BE erunt ρ^o , &, quia ϕ . sch. 12. 10.
 CD $\in$ DF, erunt AB, BE $\rho \in \propto$, ideoque AE $\propto$. 1. sch.
 apotome erit σ . Secundo quia AB : CD = 10. 10.
 EB : FD, & permutando AB : EB = CD : FD:
 si $\sqrt{(CDq - DFq)} \propto$ vel non $\propto$ CD, erit ψ . 15. 10.
 & $\sqrt{(ABq - BEq)} \propto$ vel non $\propto$ AB. Et si
 CD $\propto$ vel non $\propto$ expositae rationali, erit ω & AB ω . 12. 14. 10.
 $\propto$ vel non $\propto$ eidem; nec non, si DF $\propto$ vel non
 $\propto$ ρ expositae, erit ω BE $\propto$ vel non $\propto$ eidem.
 Ergo cuius ordinis apotome est CF, eiusdem
 est ω quoque apotome AE. Q. E. D. α . def. tert.

PROP. CV. THEOR.

Recta linea AE, mediae apotomae CF com- Fig. prop.
mensurabilis, & ipsa mediae apotome est, atque CIV.
ordine eadem.

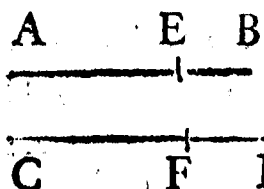
Factis iisdem quae in praecedente, quia β CD, β . 75. 76. 10.
 DF sunt mediae $\in$, similiter demonstrabitur,
 AB $\propto$ CD, & AB, BE esse medias $\in$ γ . Ergo γ . 24. 10. &
 AE est mediae β apotome. Deinde quia CDq : 1. sch. 10. 10.
 CD $\times$ DF = δ CD : DF = AB : BE = δ ABq : δ . 1. 6.
 AB $\times$ BE, & ergo permutando CDq : ABq
 = CD $\times$ DF : AB $\times$ BE : erit ϵ CD $\times$ DF $\propto$ ϵ . 10. 10.
 AB $\times$ BE. Quare si CD $\times$ DF est ρ vel me- ζ . sch. 12. 10.
 dium, erit ζ & AB $\times$ BE ρ vel medium. Hinc cor. 24. 10.
 patet β esse AE mediae apotomen eiusdem or-
 dinis, cuius est CF. Q. E. D.

PROP. CVI. THEOR.

Recta linea AE, minori CF communisurabi-
lis, & ipsa minor est.

Fiant

7. 77. 10.
9. 2. fch.
10. 10.



Fiant eadem, quae prius: quia $CD, DF \in$, erunt & $AB, BE \in$. Et quoniam $CD, DF = AB:BE$, ideoque CDq

1. 22. 6.

$DFq = ABq:BEq$, & componendo ac permutando $CDq + DFq:ABq + BEq = DFq:BEq$. DF autem $\leq BE$: erit $CDq + DFq \leq ABq + BEq$. Quare, quum $CDq + DFq$ sit ρ ,

11. fch. 12. 10.

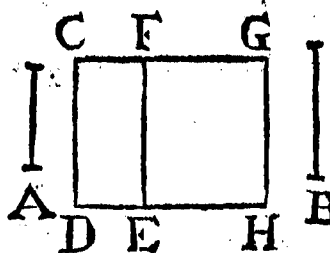
erit & $ABq + BEq \rho$. Denique quia ut in praec. patet esse $CD \times DF \leq AB \times BE$, &

1. cor. 24. 10.

$CD \times DF$ mediumⁿ est: est & $AB \times BE$ mediumⁿ. Ergo AE minorⁿ est. Q. E. D.

Aliter.

14. 101. 10.



Sit minori $A \leq B$. D B minorem esse.

Ad expositam rationalem CD applicetur Rgl. C $E = Aq$. Erit itaque CF apotome quarta. Fiat

15. cor. 9. 10.

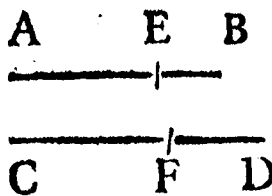
16. 10. 10.

17. 104. 10.

18. 95. 10.

Rgl. $FH = Bq$. Igitur, quia $A \leq B$, erit $CF \leq FH$, & $CF \leq FG$. Hinc FG eritⁿ apotome quarta, & $\sqrt{FH} = B$ eritⁿ minor. Q. E. D.

PROP. CVII. THEOR.



Recta linea AE commensurabilis ei CF, quae cum rationali medium totum efficit, & ipsa cum rationali medium totum efficiens est.

Constructis iisdem quae antea, similiter demonstrabitur $AB:BE = CD:DF$, & $ABq + BEq$

BEq $\propto$ CDq + DFq, & AB $\times$ BE $\propto$ CD $\times$ DF. Iam^e CDq + DFq est medium, & CD $\propto$ DF ρ , & CD $\propto$ DF. Ergo AB $\propto$ BE, & ABq + BEq est^r medium, & AB $\times$ BE ρ^v ideoque AE est cum rationali medium totum efficiens^e. Q. E. D.

Aliter.

Factis iisdem, quae in demonstratione altera praecedentis, erit CF apotome^p quinta, ideoque $\propto$ & FG. Hinc, ob FE ρ , erit $\sqrt{FH} \propto$ B cum rationali medium totum efficiens^v. Q. E. D.

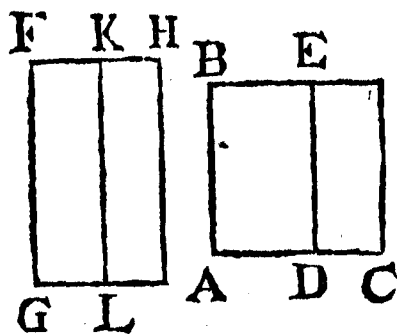
PROP. CVIII. THEOR.

Recta linea AE, commensurabilis ei CF, quae cum media medium totum efficit, & ipsa cum medio medium totum efficiens est. Fig. prop. CVII.

Constructis iisdem quae supra, erit iterum AB : EB = CD : DF, & ABq + BEq $\propto$ CDq + DFq, & AB $\times$ BE $\propto$ CD $\times$ DF. Iam^a CD $\propto$ DF, & CDq + DFq medium, & CD $\times$ DF medium, & CD $\times$ DF non $\propto$ CDq + DFq. Ergo AB $\propto$ BE^a, & tam ABq + BEq quam AB $\times$ BE medium^b, & ABq + BEq non $\propto$ AB $\times$ BE, ideoque AE est^w cum medio medium totum efficiens. Q. E. D.

PROP. CIX. THEOR.

Medio BD de rationali BC detracto, recta linea, quae reliquum spatium EC potest, una ex duabus irrationalibus sit, vel apotome, vel minor.



δ. 21. 10.
 ε. 23. 10.
 ζ. 74. 10.

η. 92. 10.

θ. 95. 10.

Exposita enim ρ FG, fiat Rgl. $GH = BC$, & Rgl. $GK = BD$. Ergo $LH = EC$, & $GH \rho$, & GK medium. Quare δ erit $FH \rho \leq FG$, & $FK \rho \neq FG$, ideoque

$FH, FK \rho \in$, ac ob id KH apotome ζ , & ipsi congruens FK . Iam si sit $\sqrt{(FHq - FKq)} \leq FH$, erit KH apotome prima, & $\sqrt{HL} = \sqrt{EC}$ apotome. Si non sit $\sqrt{(FHq - FKq)} \leq FH$, erit KH apotome quarta, ideoque $\sqrt{EC}$ minor. Q. E. D.

PROP. CX. THEOR.

Fig. prop.
 praec.

Rationali BD de medio BC detracto, aliae duae irrationales fiunt, vel mediae apotome prima, vel cum rationali medium totum efficiens.

Constructis iisdem, quae prius, erit $FH \rho$ non $\leq FG$, & $FK \rho \leq FG$. Erunt ergo iterum $FH, FK \rho \in$, & KH apotome erit, ipsique congruens FK . Iam si fuerit $\sqrt{(FHq - FKq)} \leq FH$: erit KH apotome secunda, & $\sqrt{LH}$ id est $\sqrt{EC}$ mediae apotome prima. Si fuerit $\sqrt{(FHq - FKq)} \neq FH$: erit KH apotome quinta, & ergo $\sqrt{EC}$ erit cum rationali medium totum efficiens. Q. E. D.

ι. 93. 10.

κ. 96. 10.

PROP. CXI. THEOR.

Fig. prop.
 CIX.

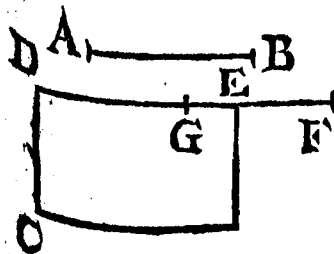
Medio BD de medio BC detracto, quod sit incommensurabile toti, reliquae duae irrationales fiunt, vel mediae apotome secunda, vel cum medio medium totum efficiens.

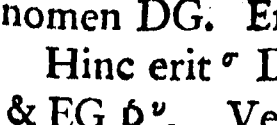
Quia

Quia enim GH non $\leq$ FL, erit FH non $\leq$ FK. Quare FH, FK erunt ρ E, & ergo erit KH apotome, & ipsi congruens KF. Nunc si $\sqrt{(FHq - FKq)} \leq FH$: quia FH, FK non $\leq$ FG, erit KH apotome tertia, & hinc $\sqrt{LH}$ λ . 23. 10. id est $\sqrt{EC}$ mediae^a apotome secunda. Si $\sqrt{FHq - FKq}$ non $\leq$ FH: erit KH apotome sexta, ideoque $\sqrt{EC}$ cum medio medium totum efficiens. Q. E. D. v. 97. 10.

PROP. CXII. THEOR.

Apotome AB non est eadem quae ex binis nominibus.




Si negas: exponatur ρ
 CD , & fiat Rgl. $CE = A$
Bq. Ergo DE erit ξ apo-
tome prima. Sit ipsi con-
gruens EF . Ergo DF, FE
 $\rho \in^{\circ}$, & $DF \leq CD$. Sed
quia AB etiam ponitur ex binis nominibus:
erit DE ex binis nominibus π prima. Sit eius
maius nomen DG . Ergo $\rho DG, GE \rho \in$, & DG
 $\leq CD$. Hinc erit $\sigma DF \leq DG$, & ergo τFG
 $\leq DF$, & $FG \rho^v$. Verum quia DF non $\leq FE$,
erit FG non $\phi \leq FE$, & hinc erunt $FG, FE \rho \in$,
ac GE apotome $\times$ erit. Sed est quoque $GE \rho$.

Corollarium.

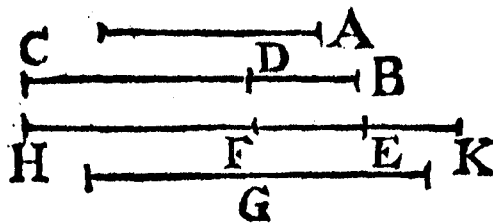
Corollarium.
 71. Apotomae, & quae ipsam consequuntur, (prop. 76. 77. 78. 79) irrationales, neque mediae neque inter se eadem sunt. Quadratum enim, quod a media fit, ad rationalem applicatum, latitudinem facit rationalem. Quod autem ab apotoma fit, ad ratio-

rationalem applicatum, latitudinem facit apotomen primam; quod fit a mediae apotome prima, apotomen secundam; & sic deinceps (prop. 100. 101. 102. 103.). Quoniam igitur dictae latitudines differunt tum a prima tum inter sese; a prima quidem, quod illa rationalis sit, inter se vero, quod ordine non sint eadem: manifestum est, & ipsas hasce irrationales inter se differentes esse.

Et quoniam ostensum est, apotomen non esse eandem, quae ex binis nominibus; & quadrata quidem apotomae & earum, quae sequuntur apotomen, ad rationalem applicata, latitudines facere apotomas; quadrata vero eius, quae ex binis nominibus est, & hanc sequentium, ad rationalem applicata facere latitudines, quae ex binis nominibus (prop. 61. 62. - - 66.): ergo rectae lineae quae sequuntur apotomen, & quae sequuntur eam quae ex binis nominibus est, inter se diuersae erunt, ita ut omnes irrationales sint numero tredecim.

1. Media.
2. Quae ex binis nominibus.
3. Quae ex binis mediis prima.
4. Quae ex binis mediis secunda.
5. Maior.
6. Rationale ac medium potens.
7. Bina media potens.
8. Apotome.
9. Mediae apotome prima.
10. Mediae apotome secunda.
11. Minor.
12. Cum rationali medium totum efficiens.
13. Cum medio medium totum efficiens.

PROP. CXIII. THEOR.



Quadratum rationalis A, ad eam quae ex binis nominibus BC applicatum, latitudinem

EF facit apotomen, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus CD, DB eius, quae est ex binis nominibus, & in eadem ratione; & adhuc apotome EF, quae fit, eundem habet ordinem.

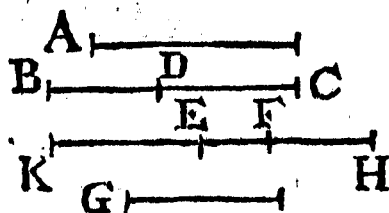
ordinem, quem ea BC quae est ex binis nominibus.

Sit enim etiam $BD \times G = Aq$. Ergo ψ ψ . 16. 6.
 $BC: DB = G: EF$, ideoque $G > EF$. Fiat
 $EH = G$. Quare $CB: BD = HE: EF$, & di-
videndo $CD: DB = HF: FE$. Fiat $HF: FE$
 $= FK: KE$. Est ergo $HK: KF = FK: KE$ α . 12. 5.
 $= HF: FE = CD: DB$. Iam quia $CDq \leq \alpha$ α . 37. 10.
 DBq , est & $HKq \leq KFq$. Et quoniam β $HKq: \beta$. 2. cor.
 $KFq = HK: KE$, erit $HK \leq KE$, ideoque &
 γ $HE \leq EK$. Et quia $BD \times HE = Aq$ est γ . 16. 16.
 ρ , nec non $BD \rho \alpha$: erit & $HE \rho \delta \leq BD$, & δ . 21. 10.
ob id & $EK \rho \leq BD$ ac $FK \leq CD$. Deinde ϵ . 10. 10.
quia $CD \alpha \in DB$, erit & ζ $FK \in KE$, & ergo ζ . 1. sch.
 FK, KE erunt $\rho \in$, & η FE erit apotome. Sed η . 74. 10.
 CD maius est nomen ipsius CB . Iam si $\sqrt{(CDq$
 $- DBq)} \leq$ vel non $\leq CD$, erit & $\sqrt{(FKq -$
 $KEq)} \leq$ vel non $\leq FK$ θ ; & si CD fuerit $\leq$ vel θ . 15. 10.
non $\leq \rho$ expositae, erit & $FK \leq$ vel non $\leq$ ι . 12. 14. 10.
eidem; atque si $DB \leq$ vel non $\leq$ eidem ρ , erit
& $EK \leq$ vel non $\leq$ eidem. Ergo FE apoto-
me erit, cuius nomina FK, KE commensura-
bilia sunt nominibus CD, DB eius &c. Q.
E. D.

PROP. CXIV. THEOR.

Quadratum rationalis A, ad apotomen BD applicatum, latitudinem KH facit eam, quae ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt apotomae BD nominibus BC, CD & in eadem ratione; & adhuc quae ex binis nominibus fit KH eundem habet ordinem, quem ipsa BD apotome.

x. 74. 10.



Nam quia DC
congruens est ipsi
BD, erunt $\propto$ BC,
CD ρ E. Fiat BC
 $\times$ G = Aq: &

a. 21. 10.

μ. 16. 6.

ν. 14. 5.

ξ. 10. 6.

θ. 19. 5.

π. 1. sch.

10. 10.

ρ. 2. cor.

20. 6.

σ. 10. 10.

τ. cor. 16. 10.

υ. 12. 10. &

sch. eiusd.

φ. sch. 12. 10.

& 10. 10.

χ. 37. 10.

ψ. 15. 10.

ω. def. sec.

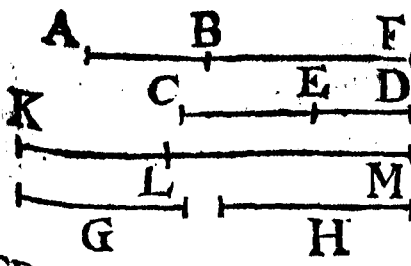
& tert.

erit BC $\times$ G ρ , ac ideo G ρ $\wedge$ BC, ac prae-
terea CB: BD $\propto$ KH: G, ideoque KH $>$
G. Ponatur KE = G: ergo KE ρ BC, &
CB: BD = HK: KE, & conuertendo igitur
BC: CD = KH: HE. Fiat KH: HE =
HF: FE. Igitur KF: FH = $\circ$ KH: HE =
HF: FE = BC: CD. Hinc KF $\in$ FH, &
KFq: FHq = $\circ$ KF: FE, & ergo KF ξ FE,
hinc & KE ξ KF, & KF ρ BC^υ, & proinde
etiam FH ρ CD ϕ . Quum ergo sint KF,
FH ρ E: erit KH $\propto$ ex binis nominibus, quae
erunt ξ ipsius BD nominibus BC, CD, & in
eadem ratione. Denique patet, si $\sqrt{(BCq -$
CDq)} ξ vel non ξ BC, esse & $\sqrt{(KFq -$
FHq)} ξ vel non ξ KF, & si BC, CD fuerint ξ
vel non ξ expositae ρ , fore & KF, FH ξ vel
non ξ eidem ρ ; & ergo $\propto$ KH esse ex binis
nominibus eiusdem ordinis, cuius est apotoma
BD. Q. E. D.

PROP. CXV. THEOR.

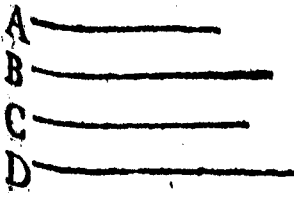
*Si spatium contineatur sub apotoma AB &
ea CD quae ex binis nominibus, cuius nomina
CE, ED commensurabilia sunt nominibus AF,
FB apotomae AB, & in eadem ratione: recta
linea G spatium potens est rationalis.*

Expo-

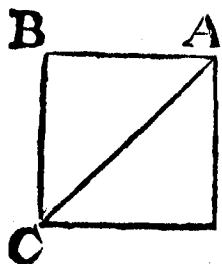

 Exponatur p H, & fiat $CD \times KL = Hq$. Apotome ergo est KL , cuius nomina KM, ML $\leq$ CE, ED & in eadem ratione. Est ergo $AF:FB = KM:ML$, & permutando $AF:KM = FB:ML$, & ergo $AB:KL = AF:KM$. Et quia CE, ED $\leq$ ipsis AF, FB, ideoque & AF:KM: erit $AB \leq KL$. Hinc quia $AB:KL = AB \times CD:KL \times CD = Gq:Hq$: erit $Gq \leq Hq$, & ob id $G p$. Q. E. D.

PROP. CXVI. THEOR.

A media A infinitae irrationales fiunt; & nulla alicui antecedentium est eadem.


 Exponatur p B, & sit $Cq = A \times B$. Erit ergo $Cq \propto A$, & ipsa C $\propto A$, neque ulli haecenus commemoratarum eadem. Nullius enim antecedentium quadratum ad p applicatum latitudinem facit mediam. Rursus sit $Dq = B \times C$: & erit iterum $D \propto A$, nulli tamen antecedentium eadem; quia nullius earundem quadratum ad p applicatum talem facit latitudinem, qualis est C. Similiter & eodem ordine in infinitum protracto, manifestum est, a media infinitas irrationales fieri, nulli antecedentium eadem. Q. E. D.

PROP. CXVII. THEOR.



Propositum sit nobis ostendere in quadratis figuris diametrum AC lateri AB incommensurabilem esse longitudine.

Si negas: sit $AC \leq AB$. Ergo habebit AC ad AB rationem numeri ad numerum. Habeat quam EF ad G; & sint EF, G

minimi in data ratione. Non ergo vnitas erit

EF: quia, quum $AC > AB$, foret vnitas maior quam numerus, si EF vnitas esset. Quare EF numerus sit necesse est. Et quia ACq:

ABq' = $EF^2 : G^2$, & ACq = $\frac{1}{2} ABq$: erit

$EF^2 = 2 G^2$, & ergo EF^2 est par, & EF par.

Iam quia EF, G minimi sunt in data ratione, &

ergo inter se primi; EF autem par est: nequit

G par esse; si enim ita, vtrumque EF, G idem

numerus 2 metiretur. Ergo G erit impar. Ve-

rum ipsius EF paris dimidium sit EH: & erit

$EF^2 = 4 EH^2 = 2 G^2$, ideoque $G^2 = EH^2$, & G par. Erat autem idem G & impar.

Q. E. A.

Aliter.

Si dicas $AC \leq AB$: sint rursus EF, G numeri minimi in ratione AC:AB; & erunt ergo EF, G

primi inter se. Iam nequit G esse vnitas. Nam

quia ACq: ABq = $EF^2 : G^2$; & ACq = $\frac{1}{2} ABq$:

si G esset vnitas, foret $EF^2 = 2$, quod fieri ne-

quit. Sed quia G est numerus, & $EF^2 = 2 G^2$:

G numerus metietur numerum EF, & ideo EF

ac G non erunt primi inter se. Erant autem &

primi inter se. Q. E. A.

E V C L I D I S

E L E M E N T O R V M

L I B E R X I.

* * * * *

DEFINITIONES.

1. *Solidum* est, quod longitudinem & latitudinem & crassitudinem habet.
2. *Solidi* autem *terminus* est superficies.
3. *Recta linea ad planum recta* est, quando ad rectas omnes lineas, quae ipsam contingunt & in subiecto plano iacent, rectos angulos efficiat.
4. *Planum ad planum rectum* est, quando rectae lineae, quae communi planorum sectioni ad rectos angulos & in vno plano ducuntur, alteri plano ad angulos rectos fuerint.
5. *Rectae lineae ad planum inclinatio* est, quando a sublimi termino rectae illius lineae ad planum acta perpendiculari, a puncto facto ad terminum lineae, qui est in plano, recta linea iuncta fuerit, angulus nempe acutus, qui iuncta linea & insistente continetur.
6. *Plani ad planum inclinatio* est angulus acutus rectis lineis contentus, quae ad rectos angulos communi planorum sectioni ad vnum ipsius punctum in vtroque planorum ducuntur.
7. *Planum ad planum similiter inclinari* dicitur atque alterum ad alterum, quando dicti incli-

inclinationum anguli inter se fuerint aequales.

8. *Plana parallela sunt, quae inter se non conueniunt.*

9. *Similes figurae solidae sunt, quae similibus planis ac multitudine aequalibus continentur.*

10. *Aequales vero & similes figurae solidae sunt, quae similibus planis, multitudine simul & magnitudine aequalibus, continentur.*

11. *Solidus angulus* est plurium, quam duarum, linearum, quae sese contingant, & non in eadem sint superficie, ad omnes lineas inclinatio. *Aliter.* Solidus angulus est, qui pluribus, quam duobus, planis angulis, in eodem non iacentibus plano, atque ad vnum punctum constitutis, comprehenditur.

12. *Pyramis* est figura solida planis comprehensa, quae ab vno plano ad vnum punctum constituitur.

13. *Prisma* est figura solida planis comprehensa, quorum aduersa duo aequalia & similia parallela sunt, reliqua vero parallelogramma.

14. *Sphaera* est figura quidem comprehensa, quum circa manentem diametrum semicirculus conuertitur, donec in eundem locum, a quo moueri coeperat, rursus restituitur.

15. *Axis* vero *sphaerae* est manens illa recta linea, circa quam semicirculus conuertitur.

16. *Cat*

16. *Centrum* autem *sphaerae* est idem illud, quod & semicirculi.

17. *Diameter* vero *sphaerae* est recta linea quaedam per centrum ducta, & ex vtraque parte a sphaerae superficie terminata.

18. *Conus* est figura quidem comprehensa, quum rectanguli trianguli manente vno latere eorum, quae circa rectum angulum sunt, triangulum ipsum conuertitur, donec in eundem locum, a quo moueri coeperat, rursus restituatur. Verum si manens recta linea aequalis fuerit reliquo lateri, quod circa rectum angulum conuertitur, *conus orthogonius* erit: si vero minor, *amblygonius*: & si maior, *oxygonius*.

19. *Axis* autem *coni* est manens illa recta linea, circa quam triangulum conuertitur.

20. *Basis* vero circulus a conuersa recta linea descriptus.

21. *Cylindrus* est figura comprehensa, quando rectanguli parallelogrammi manente vno latere eorum, quae circa rectum angulum sunt, parallelogrammum ipsum conuertitur, donec in eundem locum, a quo moueri coeperat, rursus restituatur.

22. *Axis* vero *cylindri* est manens illa recta linea, circa quam parallelogrammum conuertitur.

23. *Bases* autem sunt circuli, qui a duobus ex aduerso circumactis lateribus describuntur.

24. Si-

24. *Similes coni & cylindri* sunt, quorum & axes & basium diametri proportionales sunt.

25. *Cubus* est figura solida sex quadratis aequalibus contenta.

26. *Tetraedrum* est figura solida quatuor triangulis aequalibus & aequilateris comprehensa.

27. *Octaedrum* est figura solida octo triangulis aequalibus & aequilateris comprehensa.

28. *Dodecaedrum* est figura solida, quae duodecim pentagonis aequalibus & aequilateris & aequiangulis continetur.

29. *Icosaedrum* est figura solida, quae viginti triangulis aequalibus & aequilateris comprehenditur.

* 30. *Parallelepipedum* est figura solida sex planis, quorum quae ex aduerso parallela sunt, contenta.

* 31. *Solida figura in solida figura* dicitur *inscribi*, quando omnes anguli figurae inscriptae constituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis figurae, cui inscribitur.

* 32. *Solida figura solidae figurae* vicissim *circumscribi* dicitur, quando vel anguli, vel latera vel denique plana figurae circumscriptae tangunt omnes angulos figurae, circumquam describitur.

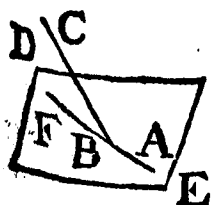
* AXIOMA.

Anguli solidi, qui sub aequè multis aequalibus ac eodem ordine positis angulis planis continentur, aequales sunt.

PROP.

PROP. I. THEOR.

Rectae lineae ABC pars quaedam non est in subiecto plano DE, quaedam véro in sublimi.

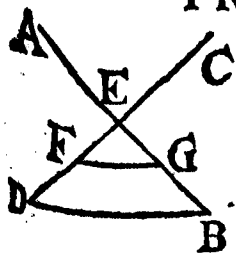


Si enim fieri potest, sit pars AB in plano DE, pars BC autem extra. Iam, quia omnis recta in dato plano in directum continuari potest^a, sit BF in directum

^a. 2. post. 1.

ipsi AB, in plano DE. Ergo rectae ABF, ABC segmentum commune BA habebunt. Q. E. A^β. β. 12. ax. 1.

PROP. II. THEOR.



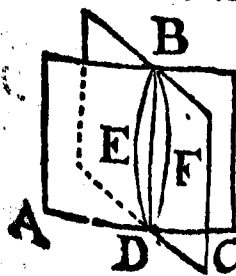
Si duae rectae lineae AB, CD se inuicem secant, in vno sunt plano. Item, omne triangulum DEB in vno plano consistit.

1. Si $\triangle DEB$ non sit in vno plano: erit pars eius, velut EFG, in alio plano, quam reliqua; ideoque rectarum ED, EB vnius cuiusvis pars erit in plano subiecto, pars in sublimi. Q. E. A^γ.

^γ. 1. II.

2. Ergo quum ED, EB sint in eodem plano, CD autem sit ^γ in plano, in quo est ED, & AB in plano ^γ illo, in quo est EB: necesse est, vt AB, CD sint in eodem plano. Q. E. D.

PROP. III. THEOR.

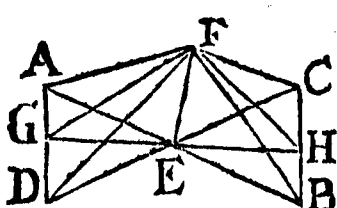


Si duo plana AB, BC se inuicem secant: communis ipsorum sectio DB est linea recta.

Si enim linea DB, in qua plana se inuicem secant, non sit recta: ducatur a puncto B ad D in

3. 1. post. 1. in plano AB alia recta δ BED, in plano autem BC recta BFD; & recta BFD cum recta BED
 6. 12. ax. 1. spatium comprehendet. Q. E. A.

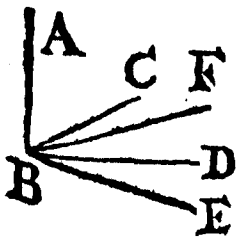
PROP. IV. THEOR.



Si recta linea EF duabus rectis lineis AB, CD, se invicem secantibus, in communi sectione E ad rectos angulos insistat, etiam ducto per ipsas AB, CD plano ad rectos angulos erit.

- Sumatur $AE = EB = CE = ED$, & iungantur AD, CB, & per E ducatur in plano ACBD utcumque recta GEH, & a quovis puncto F in sublimi ducantur rectae FA, FG, FD, FB, FH, FC. Iam quia in Δ is AED, CEB est $\angle$
 2. 4. 1. $AD = CB$, & ang. EAD = EBC: erit $\angle$ in
 4. 26. 1. Δ is AEG, HEB latus AG = HB, & GE = EH. Praeterea quum in Δ is AEF, BEF sit $\angle$
 3. 8. 1. $FA = FB$, & in Δ is FED, FEC pari ratione $\angle$
 6. 3. def. 11. $FD = FC$: erit in Δ is AFD, BFC ang. FAD = $\angle$ FBC. Hinc ob AG = HB, & FA = FB, erit $\angle$ FG = FH; & ob id in Δ is GEF, HFE erunt $\angle$ anguli ad E aequales, id est recti. Similiter ostenditur EF ad omnes alias rectas in plano ACBD per E ductas angulos rectos efficere. Ergo $\angle$ FE plano per AB, CD ad rectos angulos est. Q. E. D.

PROP. V. THEOR.

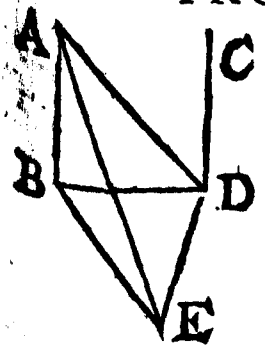


Si recta linea AB tribus rectis lineis, BC, BD, BE, sese tangentibus, in communi sectione B ad rectos angulos insistat: tres illae rectae lineae BC, BD,

BE in uno plano erunt.

Si fieri potest, sint BD, BE quidem in subiecto plano, BC vero in sublimi. Planum per AB, BC producat, donec subiectum secet in ∞ recta BF. Iam quia AB ipsis BD, BE ad rectos insistit, erit eadem ad planum subiectum recta^a, ideoque ipsi BF, quae etiam in plano subiecto est, ad rectum angulum insistet. Sed ponitur quoque ang. ABC rectus. Ergo ang. ABF = ABC. Sed hi anguli sunt in eodem plano per AB, BC. Ergo totus ABF aequalis est parti ABC. Q. E. A.

PROP. VI. THEOR.

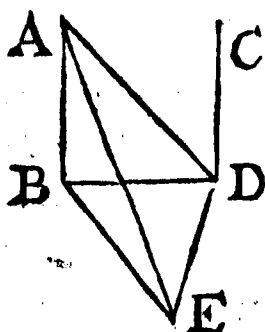


Si duae rectae lineae AB, CD eidem plano ad rectos angulos fuerint, parallelae erunt ipsae rectae lineae AB, CD.

Insistant AB, CD subiecto plano in punctis B, D. Iunctae BD ducatur in eodem plano perpendicularis DE, quae fiat = AB, & iungantur BE, AE, AD. Et quia AB est ad planum subiectum recta: erunt ang. ABD, ABE recti. Similiter ang. CDB, CDE recti erunt. Quum itaque ang. ABD = $\frac{1}{2}$ BDE, & AB = DE,

v. 3. def. 11.
§. 10. ax. 1.

g. 4. 1.
π. 8. 1.

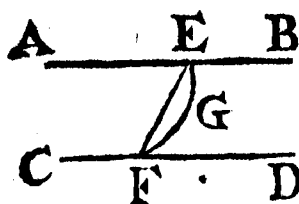


g. 5. 11.
c. 2. 11.

τ. 28. 1.

DE, & BD communis : erit
 $AD = BE$. Ergo in Δ is
 BAE, DAE erit ang. $ABE =$
 EDA ; ideoque EDA rectus
 erit. Sunt autem & ang. EDC,
 EDB recti. Ergo rectae CD,
 DA, DB erunt in vno plano.
 Sed AB est in eodem plano, in quo sunt DA,
 DB. Ergo AB, CD sunt in eodem plano.
 Quare, quum ang. ABD, CDB recti sint, ipsae
 AB, CD parallelae sunt. Q. E. D.

PROP. VII. THEOR.



Si duae rectae lineae AB,
 CD parallelae sint; suman-
 tur autem in utraque ipso-
 rum quaelibet puncta E, F;
 quae dicta puncta coniungit
 recta linea in eodem cum parallelis plano erit.

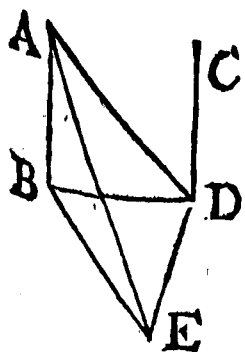
v. 3. 11.

Si fieri potest, sit recta EGF in sublimi.
 Ducatur per eam planum utcuque, quod
 secabit planum subiectum in recta EF. Er-
 go duae rectae EF, EGF spatium comprehen-
 dent. Q. E. A.

PROP. VIII. THEOR.

Si fuerint duae rectae lineae AC, CD par-
 allelae, atque altera earum AB plano alicui sit
 ad rectos angulos: & reliqua CD quoque ei-
 dem plano ad rectos angulos erit.

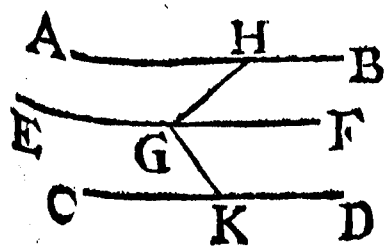
Insistant AB, CD plano subiecto in punctis
 B, D. Iungatur BD. Ergo AB, BD, DC
 erunt



erunt ϕ in vno plano. Ducta ϕ . 7. II.
 tur in subiecto plano ipsi BD ad
 rectos DE, & fiat $\equiv$ AB, iun-
 ganturque AD, AE, EB. Quia
 AB recta est ad subiectum pla-
 num: erunt ang. ABD, ABE re-
 cti $\propto$. Sed ang. ABD $\dashv$ CDB ψ $\propto$. 3. def. II.
 ψ . 29. I.

$\equiv$ 2 rectis. Ergo CDB erit rectus. Et quia DE
 $\equiv$ AB, & BD communis, & ang. EDB $\equiv$ ABD:
 erit BE ω $\equiv$ AD. Hinc in Δ is DAE, EAB ω . 4. I.
 erit ang. EDA α $\equiv$ ABE $\equiv$ recto. Sed & α . 8. I.
 ang. EDB rectus est. Ergo β ED est ad pla- β . 4. II.
 num per BD, DA recta. Iam quia in plano
 per BD, DA sunt ipsae AB γ , BD: patet CD γ . 2. II.
 in eodem plano esse. Itaque & ang. EDC
 rectus $\propto$ erit. Sed & ang. CDB rectus erat.
 Ergo β CD est ad planum subiectum recta.
 Q. E. D.

PROP. IX. THEOR.



*Quae AB, CD ei-
 dem rectae lineae EF
 sunt parallelae, sed non
 in eodem cum illa pla-
 no, etiam inter se par-*

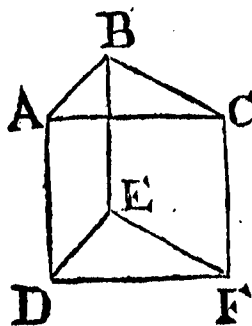
allelae sunt.

Sume in EF punctum G, ex quo duc ad EF
 in plano per AB, EF perpendicularem GH,
 in plano autem per EF, CD perpendicularem
 GK. Quia ergo ang. EGH, EGK recti sunt:
 erit δ EF ad planum per HG, GK recta. Ita- δ . 4. II.
 que AB, CD ad idem planum rectae ϵ erunt, ϵ . 8. II.
 ideoque ζ parallelae. Q. E. D. ζ . 6. II.

X

PROP.

PROP. X. THEOR.



Si duae rectae lineae sese tangentes AB, BC duabus rectis lineis sese tangentibus DE, EF sint parallelae, non autem in eodem plano: illae aequales angulos ABC, DEF continebunt.

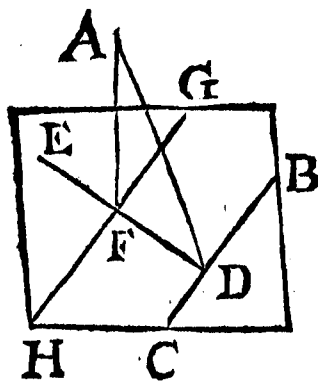
¶ 33. I.

¶ 9. II.

¶ 8. I.

Sume $AB = DE$, & $BC = EF$, & iunge AD, BE, CF, AC, DF. Ergo eruntⁿ AD, CF aequales & parallelae ipsi BE, & ideo AD, CF inter se aequales & parallelae^s erunt. Quare & $AC = DF$, & ang. $ABC = DEF$. Q. E. D.

PROP. XI. PROBL.



¶ 12. I. &
2. II.

A dato puncto A in subiecto ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

In subiecto plano duc vtcunque rectam BC, & ab A ad BCⁿ demitte perpendicularem AD. Si AD ad

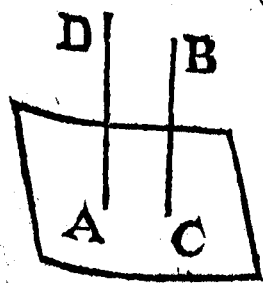
planum subiectum perpendicularis est: factum iam erit propositum. Sin minus: duc ex D in subiecto plano ad BC perpendicularem DE, ad quam in plano EDA ex Aⁿ demitte perpendicularem AF. Haec erit desiderata.

λ. constr.
μ. 4. II.

Nam in subiecto plano ducatur per F ipsi BC parallela GH. Et quiaⁿ ang. BDA, BDE recti sunt, ideoque BC in planum EDAⁿ re-

sta est: erit & GH ad idem planum ^{v. 8. II.} recta, & ergo ang. GFA ^{ξ. 3. def. II.} rectus. Sed est etiam ang. DFA ^λ rectus. Ergo recta AF est ad planum subiectum ^μ perpendicularis. Q. E. F.

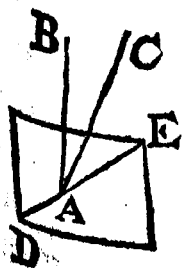
PROP. XII. PROBL.



Dato plano, a puncto A, quod in ipso datum est, ad rectos angulos rectam lineam constituere.

Intelligatur punctum B sublimae, a quo ad datum planum agatur ^{o. II. II.} perpendicularis BC, & huic parallela ^{τ. 31. I.} AD ducatur, quae erit plano dato recta ^{ξ. 8. II.}. Q. E. F.

PROP. XIII. THEOR.

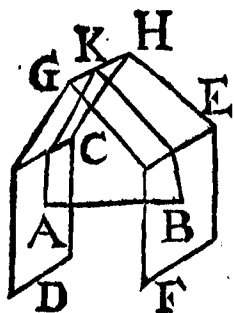


Dato plano a puncto A, quod in ipso est, duae rectae lineae AB, AC ad rectos angulos non constituentur ab eadem parte.

Si enim AB, AC simul essent perpendiculares plano A: ducto per BA, AC plano, quod planum A secet in recta DAE, forent ang. BAD & CAD ^σ recti, ^{ξ. 3. def. II.} ideoque aequales; pars & totum. Q. E. A.

PROP. XIV. THEOR.

Ad quae plana CD, EF eadem recta linea AB est perpendicularis, ea parallela sunt.

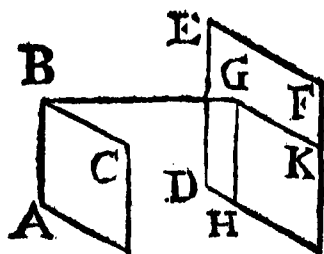


τ. 3. def. 11.

υ. 17. 1.

Si negas: pone illa producta se secare in recta GH, in qua sumto puncto K, iunge KA, KB. Ergo KAB erit triangulum. Et quia AB est in planum DH perpendicularis, in quo ducta est AK: erit $\angle$ BAK rectus. Similiter ang. ABK rectus erit. Q. E. A^o.

PROP. XV. THEOR.



Si duae rectae lineae AB, BC sese tangentes duabus rectis lineis DE, EF sese tangentibus sint parallelae, non autem in eodem plano: & quae per ipsas transeunt plana AC, DF parallela erunt.

Duc enim ex B in planum DF perpendicularem BG, & per G ipsi ED parallelam HG, ipsi EF vero parallelam GK. Recti ergo erunt ang. BGH, BGK. Et quia AB, BC ipsis GH, HK sunt $\propto$ parallelae: erunt & ang. GBA, GBC recti $\downarrow$. Ergo GB ad planum AC etiam $\propto$ recta erit, & hinc plana AC, DF erunt parallela $\propto$. Q. E. D.

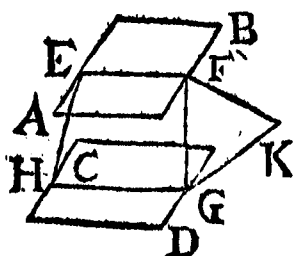
κ. 9. 11.

ψ. 29. 1.

ω. 4. 11.

α. 14. 11.

PROP. XVI. THEOR.

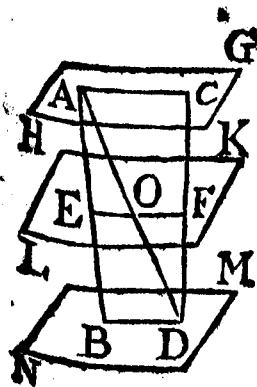


Si duo plana parallela AB, CD ab aliquo plano EFGH secentur: communes ipsorum sectiones FE, GH sunt etiam parallelae.

Si

Si non sint parallelæ: productæ alicubi conuenient, vt in K. Sed quia recta EFK est in β plano AB; erit & punctum K in pla- β . i. ii. no AB. Similiter idem K erit & in plano CD. Ergo plana AB, CD producta conuenient, nec ergo parallelæ γ erunt; contra hyp. γ . 8. def. ii.

PROP. XVII. THEOR.



Si duæ rectæ lineæ AB, CD a parallelis planis GH, KL, MN secantur, in eadem ratione secabuntur ($AE:EB=CF:FD$).

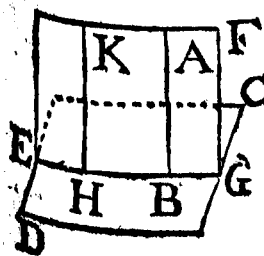
Iungantur AC, BD, AD.

Occurrat autem AD plano KL in O, & iungantur OE, OF.

Ergo quia plana parallelæ KL, MN a plano EODB secantur: erunt δ EO, BD δ . 16. ii.

parallelæ. Eadem ratione OF, AC parallelæ erunt. Ergo $AE:EB=AO:OD=CF:FD$. 2. 6. Q. E. D.

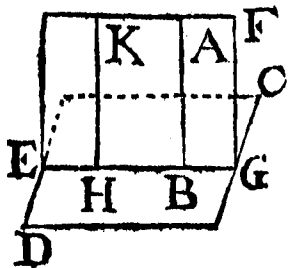
PROP. XVIII. THEOR.



Si recta linea AB plano alicui CD sit ad rectos angulos: & omnia quæ per ipsam AB transeunt plana EF eidem plano CD ad rectos angulos erunt.

Sit planorum CD, EF communis sectio recta EBG, & ex eius puncto quouis H in plano EF ducatur ipsi GE perpendicularis HK. Iam quia & ang. ABH rectus ζ est: erunt, η AB, KH ζ . 3. def. ii. η . 28. i.

3. 8. II.

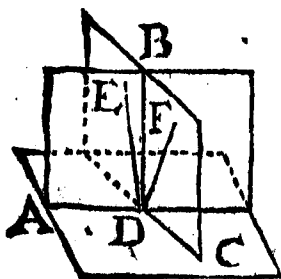


KH parallelae; & hinc KH
erit ⁹ ad planum CD recta.
Sed item & de reliquis osten-
detur, quae ut KH in plano
EF ad ipsam EG perpendicu-
lares duci possunt. Ergo pla-

n. 4. def. II.

num EF plano CD rectum erit. Similiter demonstrabimus, quoduis aliud planum per AB ductum plano CD rectum fore. Q.E.D.

PROP. XIX. THEOR.



*Si duo plana se inuicem se-
cantia AB, BC plano alicui AC
sint ad rectos angulos: commu-
nis ipsorum sectio BD eidem
plano AC ad rectos angulos
erit.*

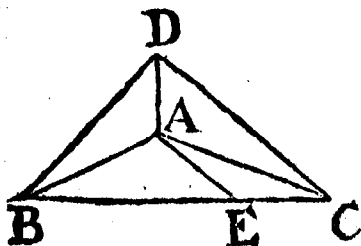
Si negas: duc ex in D plano quidem A B ad
AD perpendicularem DE, in plano autem BC
perpendicularem DF ad DC. Sunt autem
AD, DC communes sectiones planorum AB,
BC cum plano AC. Ergo duae rectae ED,
FD ad angulos rectos * constitutae erunt pla-
no AC ab vno puncto D & ab vna parte.

***. 4. def. 11.**

λ. 13. II.

Q. E. A².

PROP. XX. THEOR.



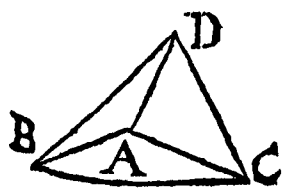
*Si solidus angulus A sub
tribus angulis planis BAC,
CAD, BAD contineatur:
duo quilibet CAD, BAD
reliquo BAC maiores sunt,
quomodocunque sumti.*

Cas. 1.

Cas. 1. Si ang. BAC, CAD, BAD aequales sunt: evidens est propositio.

Cas. 2. Sed si non sint aequales: sit eorum maximus BAC. In plano per BA, AC fiat ang. BAD = BAE, & capiatur AE = AD, & per E ducatur recta secans ipsas AB, AC in B, C, & iungantur BD, DC. Erit ergo in Δ is BAD, BAE basis BD = BE. Et quia BD μ . 4. 1. + DC > BC, erit DC ξ > EC, & ergo in Δ is ADC, AEC ang. DAC > EAC. Quare DAC + BAD > π BAC. Q. E. D. ν . 20. 1. ξ . 5. ax. 1. σ . 25. 1. π . 4. ax. 1.

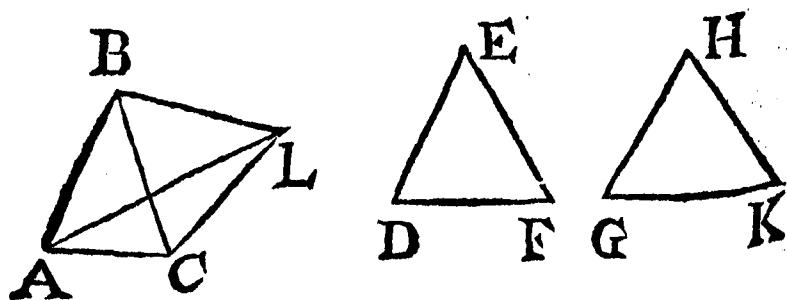
PROP. XXI. THEOR.



Omnis solidus angulus A sub minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur.

In rectis enim, angulos planos BAC, CAD, DAB continentibus, sumtis quibusvis punctis B, C, D, iungantur BC, CD, DB. Quia ergo solidus ang. B continetur sub 3 planis ang. ABC, ABD, DBC: erunt ang. ABC + ABD ρ g. 20. 11. > DBC. Eadem ratione in solido ang. C erunt BCA + ACD > BCD, & in solido ang. D erunt CDA + ADB > CDB. Ergo ABC + ABD + BCA + ACD + CDA + ADB > DBC + BCD + CDB id est σ 2 rectis. σ . 32. 1. Sunt autem ang. ABC + ABD + BCA + ACD + CDA + ADB + BAC + CAD + DAB = σ 6 rectis. Ergo ang. BAC + CAD + DAB < τ 4 rectis. Q. E. D. τ . 5. ax. 1.

PROP. XXII. THEOR.



Si sint tres anguli plani ABC, E, H, quorum duo reliquo sunt maiores quomodocunque sumti; contineant autem ipsos rectae lineae aequales AB, BC, DE, EF, GH, HK: fieri potest, ut ex iis AC, DF, GK, quae rectas aequales coniungunt, triangulum constituatur.

u. 4. 1.

Cas. 1. Si ang. $ABC = E = H$: erit $^u AC = DF = GK$, ideoque duae quaevis ipsarum tertia maiores erunt, ut ergo ex ipsis triangulum constitui queat. Q. E. D.

φ. 24. 7.

κ. 20. 1.

ψ. 5. ax. 1.

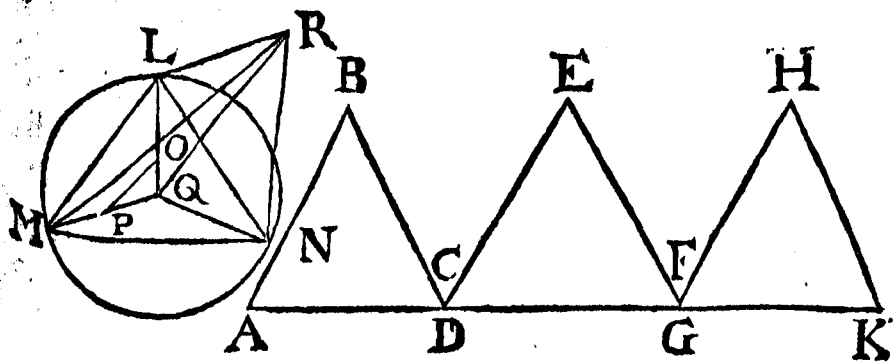
Cas. 2. Si praedicti anguli non fuerint aequales inter se: fiat ang. $CBL = E$, & $BL = AB$, & iungantur AL, LC . Est itaque $CL = ^u DF$, & $CL + AC > ^x AL$. Iam quia ang. $E + ABC > H$, & $E = CBL$, patet esse ^{ψ} ang. $LBA > H$, ideoque $AL > ^φ GK$. Ergo $DF + AC > AL > GK$. Similiter ostenduntur $AC + GK > DF$, & $DF + GK > AC$. Quum itaque ipsarum AC, DF, GK duae quaevis tertia sint maiores: triangulum ^{u} ex iisdem constitui potest. Q. E. D.

ω. 22. 1.

PROP.

PROP. XXIII. PROBL.

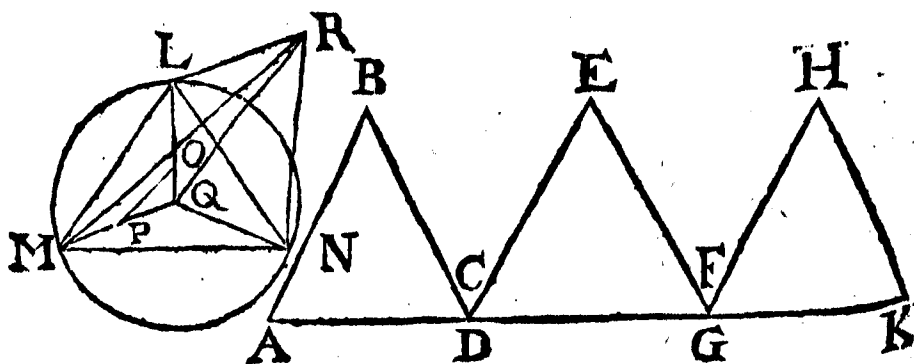
Ex tribus angulis planis ABC, DEF, GHK, quorum duo reliquo sunt maiores quomodocunque sumti, solidum angulum constituere: oportet autem tres angulos quatuor rectis esse minores.



Abscinde aequales BA, BC, ED, EF, HG, HK, & iunge AC, DF, GK, ex quibus construe Δ . LMN ita vt LM = AC, & MN = DF, & LN = GK, quod semper ^{a. 22. II.} fieri poterit. Dein Δ o. LMN circumscribe ^{β . 5. 4.} circulum, & eius plano ex centro Q ad rectos angulos constitue ^{γ . 12. II.} rectam, in qua cape ^{δ . sch. 47. I.} QR = $\sqrt{(ABq - LQq)}$, & iunge RL, RM, RN. Factum erit.

Primo demonstrabimus, semper esse AB > LQ.

Cas. 1. Cadat centrum Q intra Δ . LMN. Iam si non sit AB > QL: erit AB = QL aut < QL. Sit AB = QL. Iunge QM, QN. Quia ergo BC = AB = QL = QM, & ^{s. constr.} AC = LM: erit ang. B = ^{ζ} LQM. Similiter ^{ζ . 8. I.} patet esse ang. E = MQN, & ang. H = LQN. Ergo erit B + E + H = LQM + MQN + LQN



7. 2. sch.
15. 1.

$LQN = 4$ rectis; contra hypothesin. Sit vero $AB < QL$. Cape $QO = QP = AB$, & iunge OP . Erit ergo $OL = PM$, & QO :

9. 2. 6.

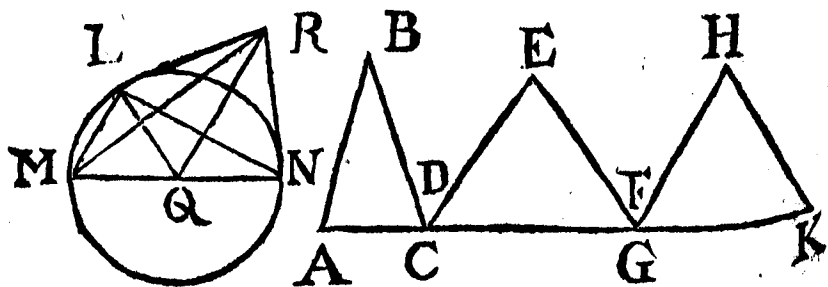
$OL = QP : PM$. Quare⁹ OP, LM erunt parallelæ, & ergo in æquiangulis $\triangle LMQ, OPQ$

1. 4. 6.

11. 14. 5.

12. 25. 1.

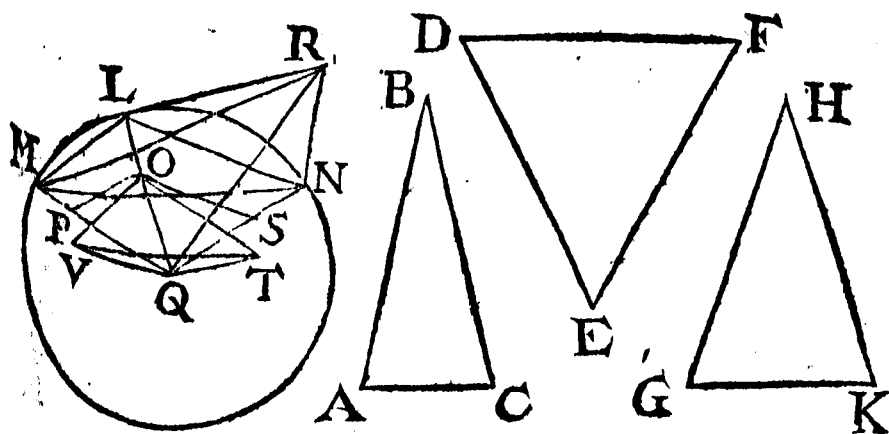
erit $QL : LM = QO : OP$. Sed $QL > QO$. Ergo $LM^* > OP$. Quia igitur & $AC > OP$, erit $\wedge$ ang. $B > OQP$. Eadem ratione ang. $E > MQN$, & $H > LQN$. Ergo erit $B + E + H > 4$ rectis; contra hyp. Igitur quia AB nec $=$ nec $< QL$: erit $AB > LQ$.



Cas. 2. Cadat centrum Q in latus MN . Iam si dicas $AB = QL$: erunt $DE = EF = AB = QL = QM = QN$, ideoque $DE + EF = MN = DF$. Q. E. A^m. Si dicas $AB < LQ$: erunt $DE + EF < DF$. Q. E. A^m. Ergo $AB > LQ$.

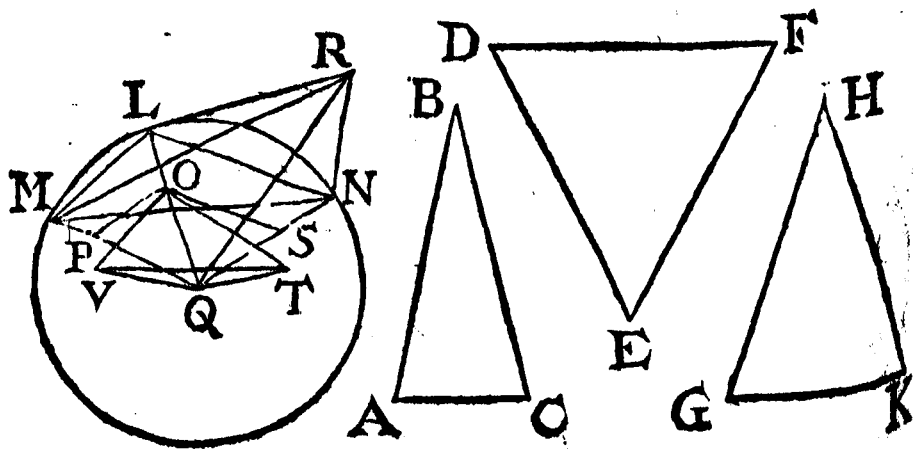
11. 20. 1.

Cas.



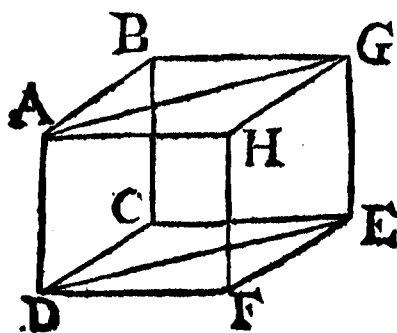
Caf. 3. Sit centrum Q extra Δ . LMN . Iam
 si dicas $AB = LQ$: erit ang. $B = LQM$, ζ . 8. 1.
 & $H = LQN$. Ergo $B + H = MQN = \zeta$
 E ; contra hyp. Si dicas $AB < QL$: fac
 $QO = AB$, & $QP = BC$, $QS = HK$, & iun-
 ge OP , OS . Ergo $QO = QP = QS$, & vti
 in *Cafu* 1. demonstrabitur $LM > OP$, & LN
 $> OS$. Ergo $AC > OP$, & $GK > OS$, & ang.
 $B > OQP$, & ang. $H > OQS$. Fiat ang. λ . 25. 1.
 $QQT = H$, & $OQV = B$, & $QT = QV =$
 QO , & iungantur OV , OT , TV . Erit itaque
 $OV = AC = LM$, & $OT = GK = LN$. ν . 4. 1.
 Sed quia ang. $POQ > VOQ$, & $SOQ > TOQ$:
 erit POT vel $MLN > VOT$, & hinc ξ MN ξ . 24. 1.
 $> VT$, ideoque $DF > VT$. Quum autem
 $QV = ED$ & $QT = EF$, erit ang. $E >$
 VQT , id est $E > B + H$; etiam contra hy-
 pothesin. Itaque $BA > LQ$.

Secundo dico, ang. solidum R esse ex tribus
 planis B , E , H constitutum. Quia enim QR
 plano circuli recta est: erunt ang. RQL , RQM ,
 RQN recti. Sunt autem aequales LQ , MQ ,
 NQ . Ergo $RL = RM = RN$. Et quia
 QRq



$QRq = ABq - LQq$, ac ob id $QRq + LQq = ABq$: erit $\circ LR = AB$, & ergo $RM = BC$, atque, ob $ML = AC$, ang. $LRM = B$. Eadem ratione ang. $LRN = H$, & ang. $MRN = E$. Quare ex tribus planis B, E, H constitutus est solidus angulus R . Q.E.F.

PROP. XXIV. THEOR.



Si solidum parallelis planis contineatur: opposita ipsius plana & aequalia & parallelogramma sunt.

π. 16. 11.

1. Nam quia plana parallela BH, CF secantur a plano AC in rectis AB, DC : erunt $\pi AB, CD$ parallelae. Similiter quia plana AF, BE parallela secantur a plano AC : erunt $\pi AD, BC$ parallelae. Ergo AC est Pgr. Similiter ostenditur, reliqua plana AF, HE, BE, BH, FC esse Pgra Q.E.D.

ε. 10. 11.

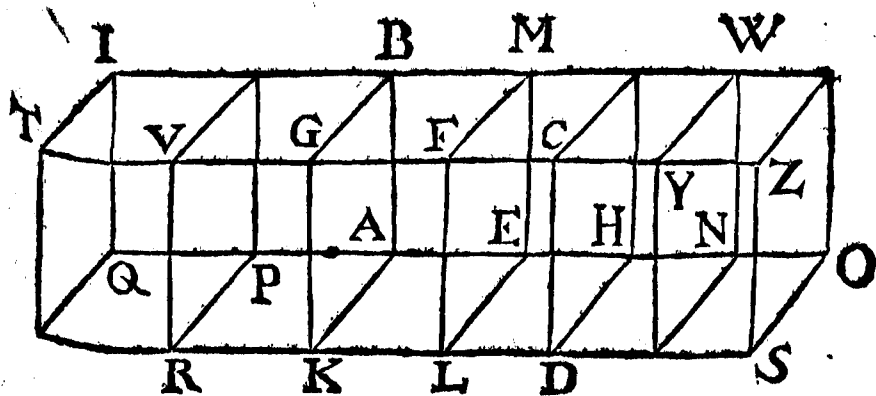
2. Iungantur AG, DE . Quia AB, BG ipsius DC, CE sunt parallelae: est ang. $ABG = DCE$.

DCE. Sed $AB^{\sigma} = DC$, & $BG = CE$. Er- 6. 34. 1.
 go Δ . $AGB = DEC$, & igitur Pgr. $BH =$
 Pgr. CF . Similiter ostendetur Pgr. $AC =$
 HE, & Pgr. $AF = BE$. Q. E. D.

* *Scholium.*

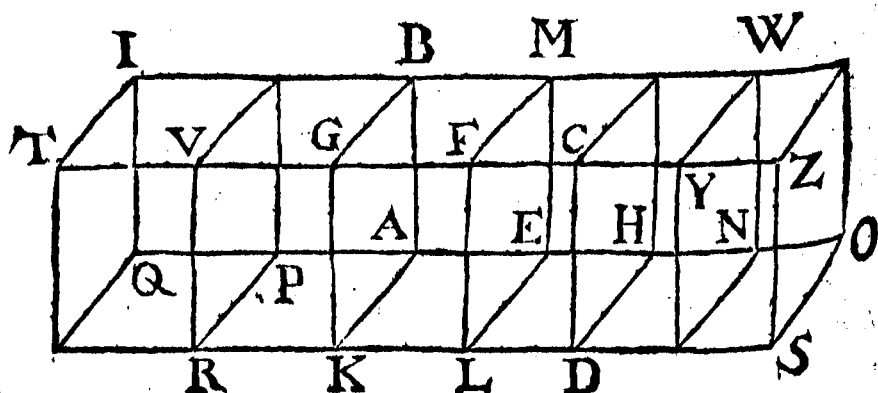
Et quia ostensum est, ang. $ABG = DCE$, &
 $AB : BG = DC : CE$: patet aequiangula esse Pgra.
 opposita, & latera circum aequales angulos propor-
 tionalia habere, ideoque etiam similia esse.

PROP. XXV. THEOR.



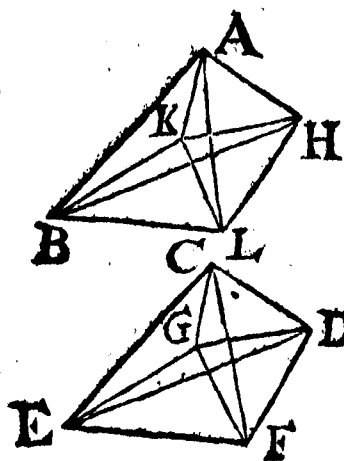
*Si solidum parallelepipedum ABCD plano EF
 secetur oppositis planis AG, CH parallelo: erit
 ut basis AELK ad basin EHDL ita solidum AB-
 FL ad solidum EMCD.*

Produc enim AH vtrinque, & pone ipsi
 EH aequales quotcunque HN, NO, & ipsi EA
 aequales AP, PQ quotuis, & comple Pgra.
 QR, PK, DN, NS, & Ppda PT, AV, HY, NZ.
 Iam quia $QP = PA = AE$: erit τ Pgr. QR 7. 38. 2.
 $= PK = AL$, & Pgr. PI $= PB = BE$. Erit
 quoque Pgr. TQ $= VP = GA$. Ergo tria v. 24. 11.
 plana solidorum PT, AV, EG tribus planis
 aequantur. Sed tria tribus oppositis^v aequan-
 tur. Ergo ϕ tria solida PT, AV, EG aequa- ϕ . 10. def. 11.
 lia



lia sunt. Similiter ostendetur tria solida OY , NC , HF aequalia esse. Ergo basis QL aequemultiplex est basis AL ac solidum TE solidi GE ; & eadem ratione basis OL aequemultiplex basis HL ac solidum OF solidi HF . Porro si basis $QL > = < OL$: est & ϕ solidum $TE > = <$ solido OF . Quare ut basis AL est ad basin HL $\approx$ ita solidum GE ad solidum HF . Q. E. D.

PROP. XXVI. PROBL.



Ad datam rectam lineam AB & ad datum in ipsa punctam A dato angulo solido C aequalem angulum solidum constituere.

Sint DCE , ECF , FCD anguli plani solidum C continentes. Ex quouis puncto F in recta CF de-

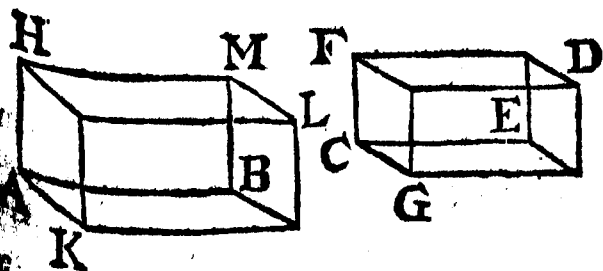
ψ . II. II.

mitte in planum ECD perpendicularem ψ FG , quae ipsi occurrat in G , & iunge CG . Dein fac ang. $BAH = ECD$, & ang. $BAK = ECG$, & $AK = CG$; atque ex K plano BAH erige per-

perpendiculararem α KL, quam fac $\equiv$ GF, & α . 12. 11.
iunge AL. Dico factum.

Nam fiat $AB \equiv CE$, & iungantur KB, BL, GE, EF. Et quia rectae KL, GF planis BAH, ECD perpendiculares sunt: erunt ang. AKL BKL, CGF, EGF recti. Dein quia $KA \equiv GC$, & $AB \equiv CE$, & ang. BAK $\equiv$ ECG: erit α . 4. 1. $BK \equiv EG$. Sed $KL \equiv GF$. Ergo $AL \equiv CF$, & $BL \equiv EF$; ac inde ang. BAL $\beta \equiv$ β . 8. 1. ECF. Similiter, sumpta $AH \equiv CD$ & iunctis HK, HL, DG, DF ostendemus ang. LAH $\equiv$ FCD. Ergo tres ang. plani BAH, BAL, LAH anguli solidi A tribus planis ECD, ECF, FCD solidi C aequantur. Hinc ang. solidus A $\equiv$ γ C. Q. E. F. γ . ax. 11.

PROP. XXVII. PROBL.



*A data
recta linea
AB dato soli-
do parallele-
lepipedo CD*

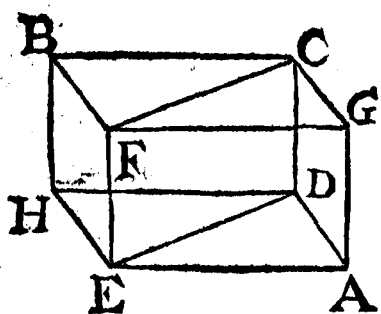
*simile & similiter positum solidum parallelepe-
dum describere.*

Fac δ angulo solido C $\equiv$ A, ita vt angulo δ . 26. 11.
 $GCE \equiv KAB$, & ang. FCE $\equiv$ HAB, & ang.
 $GCF \equiv KAH$. Dein fac EC: CG $\equiv$ BA: ϵ . 12. 6.
AK, ac GC: CF $\equiv$ KA: AH, & comple Pgr.
BH, ac solidum AL.

Etenim ζ Pgr. KB $\sim$ GE, & Pgr. KH $\sim$ ζ . 1. def. 6. & constr.
GF, & quia ex aequo EC: CF $\equiv$ BA: AH,
Pgr. BH $\sim$ EF. Ergo & tria reliqua Pgra.
HL,

7. sch. 24. 11. HL, LB, LK $\sim^n$ tribus reliquis DF, DE, DG,
 & 21. 6. Quare Ppd. AL $\sim^s$ Ppdo. CD. Q. E. D.
 9. 9. def. 11.

PROP. XXVIII. THEOR.



Si solidum parallelepipedum AB plano CDEF secetur per diagonales CF, DE oppositorum planorum: solidum AB ab ipso plano CDEF bisariam secabitur.

6. 34. 1.
 8. 24. 11.
 1. 10. def. 11.

Quia enim $\Delta. GCF = \Delta. CFB$, & $\Delta. ADE = \Delta. DEH$, & Pgr. AC $=^*$ BE, & Pgr. GE $=$ CH: Prisma GCFEDA $=^*$ prismati CF-BHDE. Q. E. D.

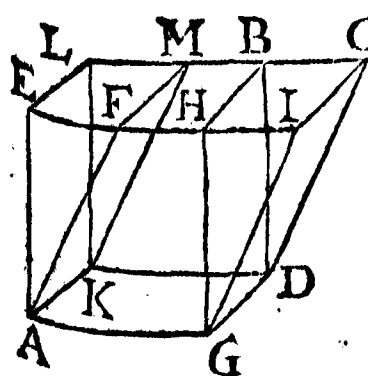
* Schol.

Prismata vero esse illas duas dimidias partes Ppdi. AB, patet ex 24. 11. & schol. eiusdem, & ex eo quod, (per 16. 11.) planum CFED parallelogrammum est. Constat itaque, prisma triangularem basin habens dimidium esse parallelepipedum aequale & in eadem basi GE constituti, vel in basi AF basis triangularis dupla.

PROP. XXIX. THEOR.

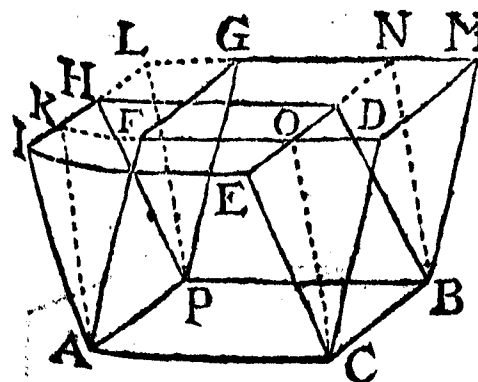
Solida parallelepipeda AB, AC in eadem basi AD eademque altitudine, quorum insistentibus lineae AE, AF, GH, GI, KL, KM, DB, DC in eisdem rectis lineis EI, LC collocantur, insertae sunt aequalia.

Quia KB & KC sunt Pgra. & inde LB $=$ KD $=$ MC: erit LM $=^*$ BC, & ergo $\Delta. LKM$



$LKM = BDC$, nec non v. 8. 1.
 Pgr. $EM = \frac{1}{2} HC$. Ea- 36. 1.
 dem ratione Δ . $AEF =$
 GHI . Est autem $\circ$ Pgr. 24. 11.
 $LA = BG$, & Pgr. MA
 $= CG$. Ergo Prisma
 $AEFMLK = \pi$ Prism, 10. def. 11.
 $GHICBD$. Hinc ad-
 dico communi solido $AKDGHFMB$, tota
 Ppda AB, AC aequalia erunt. Q. E. D.

PROP. XXX. THEOR.



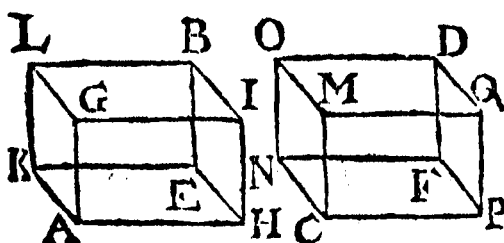
Solida paralle-
lepipeda ABEH,
ABDG in eadem
basi eademque alti-
tudine, quorum li-
neae insistentes in
eisdem lineis rectis
non collocantur, in-

ter se aequalia sunt.

Producantur enim DF, MG, IH, EO , ut
 se invicem secent in K, L, N , & iungantur
 KA, LP, OC, NB . Ergo Ppd. $ABEH =$ 29. 11.
 $ABNK = ABDG$. Q. E. D.

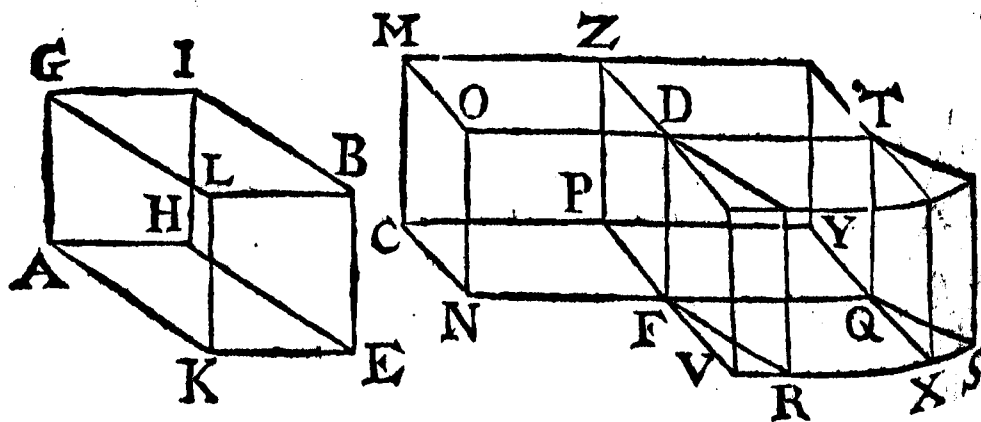
PROP. XXXI. THEOR.

Solida parallelepipeda AB, CD, quae in
aequalibus sunt basibus AE, CF, & eadem alti-
tudine, inter se sunt aequalia.



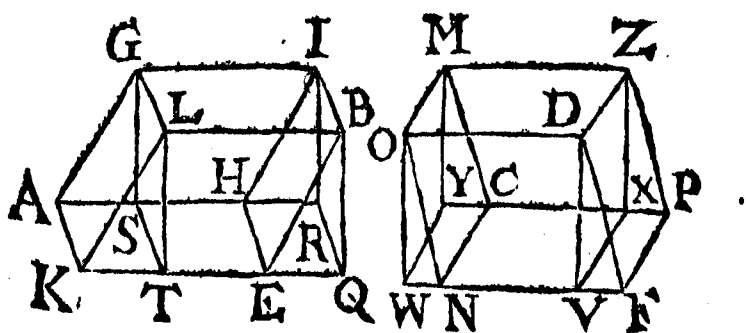
Cas. 1. Sint insistentes lineae ABEH, CMDF, NO, PQ ad rectos angulos

basibus AE, CF, & sit ang. PFN = HEK, NF = KE, & FP = EH. Erit ergo Pgr. CF = & ~^r Pgro. AE. Eadem ratione quia altitudines NO, KL aequales, & ang. ONF, QNC, LKE, LKA recti sunt: erit Pgr. ND = & ~ ipsi KB, & Pgr. CO = & ~ AL. Quare & reliqua Pgra reliquis aequalia & similia erunt, & ergo Ppd. CD = ^r ipsi AB. Q. E. D.



Cas. 2. Sint iterum insistentes perpendiculares, sed ang. PFN non = HEK. Produc NF in Q, & fac ang. QFR = HEK, & FQ = HE, & FR = EK, & comple Pgr. QR ac solidum TR. Ergo erit Ppd. TR = Ppd. AB. Produc PF, SR, quae conueniant in V, per Q duc ipsi PV parallelam QX, quam produc donec productae CP occurrat in Y, & comple Ppda TV, TP, quorum bases sunt Pgra. VQ,

VQ, PQ. Iam Ppda. TV, TR eandem basin
 TF habentia, aequalia ϕ sunt; & hinc Ppd. ϕ . 29. 11.
 $TV = AB$. Sed quia Pgr. $FX = \propto FS = \psi$ $\propto$. 35. 1.
 $AE = \propto CF$: erit Pgr. $FX : FY = CF : FY$. ψ . constr.
 Atqui Ppd. $TV : TP = \propto$ Pgr. $FX : FY$, nec ω . hyp.
 non Ppd. $CD : TP =$ Pgr. $CF : FY$. Ergo α . 25. 11.
 Ppd. $TV : TP =$ Ppd. $CD : TP$. Quare Ppd.
 $TV = \beta$ CD , ideoque Ppd. $CD = AB$. Q. β . 9. 5.
 E. D.



Cas. 3. Non sint insistentes AG, BE, HI, KL,
 CM, PZ, FD, NO perpendiculares basibus.
 Duc a punctis B, I, G, L, D, Z, M, O ad ba-
 ses perpendiculares BQ, IR, GS, LT, DV, ZX,
 MY, OW, & iunge ST, QR, TQ, RS, XV,
 YW, YX, VW. Erit ergo Ppd. $MV = \gamma$ γ . casus
 praec. δ . 29. vel
 Atqui Ppd. $CD = \delta$ MV , & Ppd. AB
 $= \delta$ GQ . Ergo Ppd. $CD = AB$. Q. E. D. $\dagger$ 30. 11.

Schol. Itaque Parallelepipeda aequalia AB, CD
 aequalium basium aequae alta sunt. Nam si alterius
 AB altitudo maior esset: quia ipsius AB pars capi
 posset aequae alta ipsi CD, foret pars Ppdi. $AB =$
 Ppdi. CD. Ergo Ppda. AB, CD inaequalia forent.

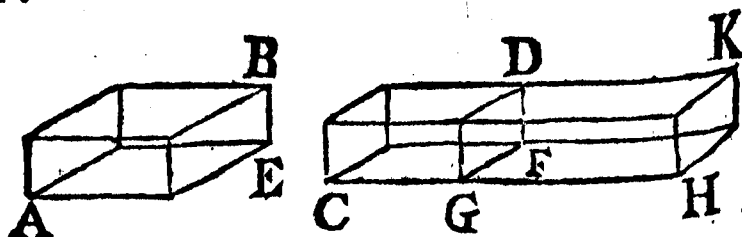
Y 2

PROP.

$\dagger$ Reliqui casus demonstrationem Lector facile ad-
 det. Similis enim est demonstrationi casus se-
 cundi.

PROP. XXXII. THEOR.

Solida parallelepipeda AB, CD, quae eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases AE, CF.

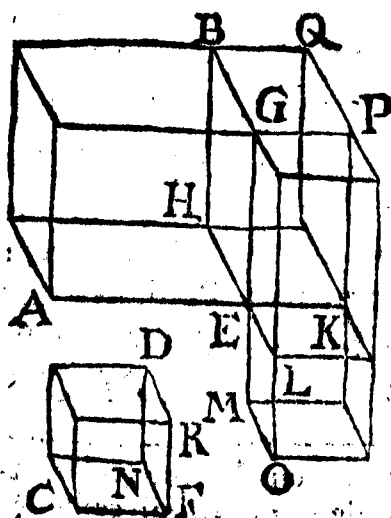


8. 45. I.
 §. 31. II.
 7. 25. II.

* Applicetur ad FG Pgr. FH = AE, & compleatur Ppd. DH = AB. Quia autem totum Ppd. CK secatur plano DG, erit Ppd. DH vel AB ad Ppd. CD sicut basis FH vel AE ad basin CF. Q. E. D.

* *Schol.* Hinc parallelepipedorum aequalium quod maiorem basin habet, minorem habet altitudinem. Non enim eandem; quia sic Ppda inaequalia erunt: nec maiorem; quia sic pars illius Ppdi reliquo aequalia eodem maior, & a potiori totum eodem maius erit.

PROP. XXXIII. THEOR.



Similia solida parallelepipeda AB, CD inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum AE, CF.

In productis AE, HE, GE cape EK = CF, EL = FN, EM = FR. Comple Pgr. KL, & Ppd. KO. Iam quia Ppd.

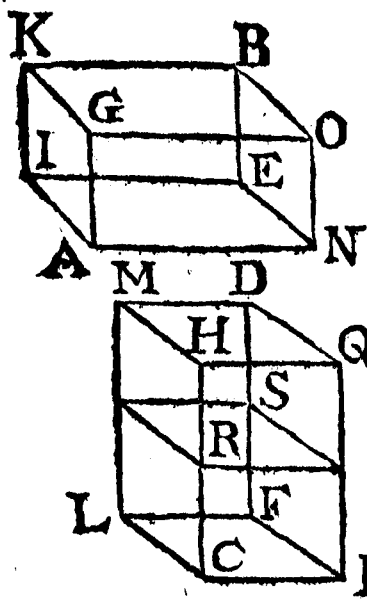
Ppd. $AB \sim CD$, ideoque $\angle AEH = \angle CFN$, ideoque $\angle AEH = \angle CFN$, ac propterea
 CFN : erit ang. $KEL = CFN$, ac propterea $\angle KEL = \angle CFN$, ac propterea
 Pgr. $KL = \& \sim CN$. Eadem ratione Pgr. $OE = \sim DF$. Quo-
 $KM = \sim CR$, & Pgr. $OE = \sim DF$. Quo-
 niam ergo & tria reliqua Pgra tribus reliquis
 aequalia & similia $\sim$ sunt: erit Ppd. $KO = \sim$ sch. 24. 11.
 $\sim^{\lambda} CD$. Comple Pgr. HK , & fac Ppda λ . 10. def. 11.
 HP, PL eiusdem altitudinis EG cum Ppdo AB .
 Et quia $\angle AE: CF = EH: FN = EG: FR$:
 erit $AE: EK = HE: EL = GE: EM$. Est
 vero $\sim AE: EK = AH: HK$, & $HE: EL \sim \mu$. I. 6.
 $HK: KL$, & $GE: EM = \sim PE: KM$. Quare
 $AH: HK = HK: KL = PE: KM$. Porro
 $AH: HK = \sim$ Ppd. $AB: Ppd. BK$; & $HK: KL \sim$ 32. 11.
 $\sim$ Ppd. $BK: PL$; & $PE: KM = Ppd. PL:$
 KO . Ergo $\div$ Ppda AB, BK, PL, KO , ideo-
 que $AB: KO = \xi (AB: BK)^3 = (AH: HK)^3 \xi$. 11. def. 5.
 $= (AE: EK)^3 = (AE: CF)^3$. Q. E. D.

Corollarium.

Hinc, si quatuor rectae lineae continue pro-
 portionales fuerint, est ut prima ad quartam, ita
 solidum parallelepipedum, quod fit a prima, ad
 solidum a secunda simile & similiter descriptum ξ .

PROP. XXXIV. THEOR.

Aequalium solidorum parallelepipedorum AB, CD bases AE, CF sunt reciproce proportionales altitudinibus AG, CH . Et quorum solidorum parallelepipedorum AB, CD bases AE, CF sunt reciproce proportionales altitudinibus AG, CH , ea inter se sunt aequalia.



2. sch. 31. 11.

Cas. 1. Si insistentes rectae AG, EB, IK, NO, CH, LM, FD, PQ sunt basibus AE, CF perpendiculares.

Hyp. 1. Si Ppd. AB = CD, & basis AE = CF: erit & alt. AG = CH. Ergo AE:CF = CH:AG. Sin autem alterutra basis AE > altera CF: quia tunc al-

titudo AG < CH, cape CR = AG, & comple Ppd. SC. Iam quia AB = CD, erit AB:CS = CD:CS. Sed AB:CS = AE:CF, & CD:CS = Pgr. CM:Pgr. RL = CH:CR = CH:AG. Quare iterum est AE:CF = CH:AG. Q. E. D.

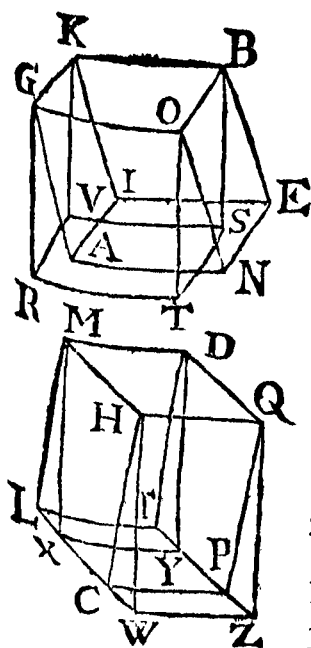
Hyp. 2. Sit AE:CF = CH:AG. Iam si basis AE = CF: erit & AG = CH, ideoque Ppd. AB = CD. Si vero AE > CF: erit CH > AG. Pone rursus CR = AG, & comple Ppd. CS. Ergo AE:CF = CH:CR. Sed AE:CF = AB:CS, & CH:CR = CM:RL = CD:CS. Ergo AB:CS = CD:CS. Igitur iterum AB = CD. Q. E. D.

7. 31. 11.

6. 1. 6.

9. 9. 5.

Cas.



Caf. 2. Si insistentes AG, EB, CH &c. basibus AE, CF non sunt perpendiculares: lemitte $\propto$ in bases perpendiculares GR, BS, OT, KV, HW, MX, DY, QZ, & completa intellige Ppda KT, MZ.

Hyp. 1. Iam si Ppd. AB $\equiv$ CD: quia Ppd. AB $\equiv$ ψ ψ 30. & 29. II. KT, & Ppd. CD $\equiv$ MZ, erit Ppd. KT $\equiv$ MZ. Quum itaque sit $\propto$ BG: DH $\equiv$ DY: ω . *caf. 1.*

BS: erit $\propto$ AE: CF $\equiv$ DY: BS. Q. E. D.

Hyp. 2. Deinde si basis AE: CF $\equiv$ alt. DY: BS: erit & $\propto$ BG: DH $\equiv$ DY: BS. Er- $\propto$ 24. II. go Ppd. KT $\equiv$ ω MZ, ideoque Ppd. AB $\equiv$ ψ CD. Q. E. D.

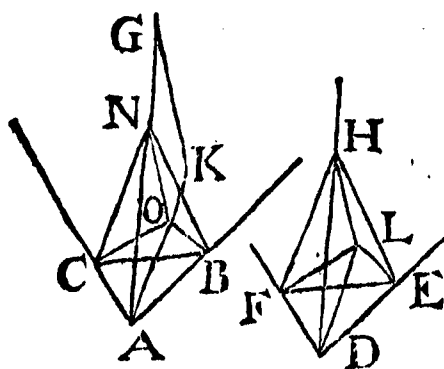
* *Coroll.*

Ostensum est sub hyp. 1. *caf. 1.* Ppda. recta CD, CS aequalium & similium basium esse inter se vt altitudines CH, CR. Et quia his duobus Ppdis quaeuis alia duo aequalia & aequae alta sumi possunt (per 31. II.): patet in vniuersum duo quaecunque Ppda aequalium basium esse in ratione altitudinum.

* *Schol.*

Propositiones 31. 32. 33. & 34. cum suis scholiis & corollariis valent quoque de Prismatis triangularibus, propter ea quae ostensa sunt in prop. 28.

PROP. XXXV. THEOR.



Si sint duo anguli plani BAC, EDF aequales; & in ipsorum verticibus A, D rectae sublimes AG, DH constituantur, quae cum rectis lineis a prin-

cipio positis angulos contineant aequales, alterum GAB, GAC alteri HDE, HDF; in sublimibus autem sumantur quacvis puncta G, H, atque ab ipsis ad plana, in quibus sunt anguli primi BAC, EDF, perpendiculares ducantur GK, HL; & a punctis, K, L, quae a perpendicularibus sunt in planis, ad primos angulos iungantur rectae lineae KA, LD: cum sublimibus aequales angulos KAG, LDH continebunt.

Pone $AN = DH$, & in plano AGK duc NO parallelam ad GK, quae ergo plano BAC perpendicularis β erit. A punctis O, L duc ad rectas AB, AC, DE, DF perpendiculares OB, OC, LE, LF, & iunge NC, NB, HE, HF, CB, FE. Iam quia $ANq = \gamma NOq + OAq$, & $OAq = \gamma OCq + ACq$, & $NOq + OCq = \gamma NCq$: erit $ANq = NCq + CAq$, ideoque δ ang. NCA rectus. Similiter ostenditur ang. HFD rectus. Quare ang. NCA = HFD. Et quia NAC = HDF, ac $AN = DH$: erit $AC = \epsilon DF$. Eadem ratione $AB = DE$. Quare $CB = \zeta FE$, & ang. ACB = DFE, & ang. ABC = DEF. Hinc η ang. OCB = LFE, &

β . 8. II.

γ . 47. I.

δ . 48. I.

ϵ . 26. I.

ζ . 4. I.

η . 3. ax. I.

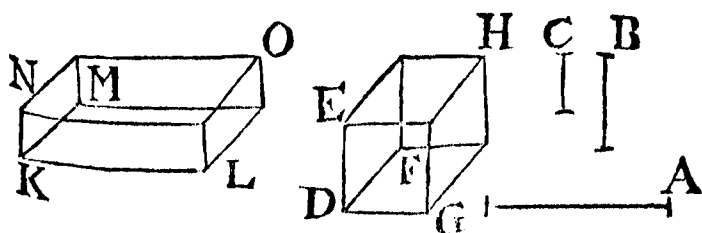
& ang. $OBC = LEF$, & ob $CB = FE$, est $CO = FL$. Vnde patet $AO = DL$. Hinc quoniam $NOq + OAq = ANq = DHq = HLq + LDq$: erit $ONq = HLq$ & $NO = HL$. Igitur constat ang. $KAG = \text{9. 8. 1.}$ LDH . Q. E. D.

Corollar.

Ex hoc vero manifestum est, si sint duo anguli plani rectilinei aequales, ab ipsis autem constituantur sublimes rectae lineae aequales, quae cum rectis lineis a principio positis aequales contineant angulos, alterum alteri, perpendiculares NO, HL , quae ab ipsis ad plana in quibus sunt primi anguli ducuntur, inter se aequales esse.

PROP. XXXVI. THEOR.

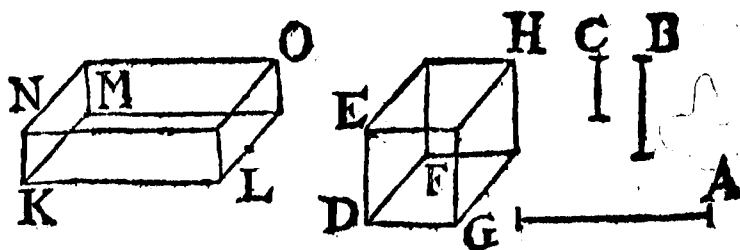
Si tres rectae lineae A, B, C, proportionales sint: solidum parallelepipedum, quod a tribus sit, aequale est solido parallelepipedo, quod sit a media B, aequilatero quidem, acuiangulo autem antedicto.



Exponatur angulus solidus D, & ipsi B aequales fiant DE, DG, DF , & compleatur Ppd. DH , quod erit factum a B. Ponatur $KL = A$, & ad punctum K fiat $\text{ang. solidus } K = D$, 26. 11. ac $KM = B$, & $KN = C$, & compleatur Ppd. KO , quod erit factum a tribus A, B, C, & aequi-

Y ;

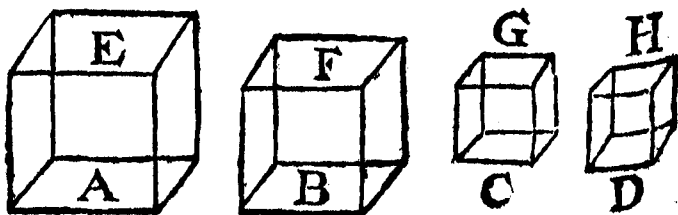
qui-



μ . ax. 11. & quiangulum ipsi DH^* . Et quia $KL : DG =$
 $29. 1.$ $DE : KN$, & ang. $LKN = GDE$: erit $Pgr.$
 λ . constr. $NL = EG$. Deinde quia & λ ang. MKN
 μ . 14. 6. $= FDE$, & ang. $MKL = FDG$, & $KM = DF$:
 erunt perpendiculares a punctis M, F ad plana
 v . cor. 35. 11. NL, EG ductae aequales^o; id est $Ppda DH,$
 ξ . 4. def. 6. KO , aequales bases habentia EG, NL , aequae-
 α . 31. 11. alta^z erunt, ac ergo aequalia^o. Q. E. D.

PROP. XXXVII. THEOR.

Si quatuor rectae lineae A, B, C, D proportionales sint: & quae ab ipsis fiunt solida parallelepipeda E, F, G, H similia & similiter descripta proportionalia erunt. Et si quae ab ipsis fiunt solida parallelepipeda E, F, G, H similia & similiter descripta proportionalia sint: & ipsae rectae lineae A, B, C, D proportionales erunt.



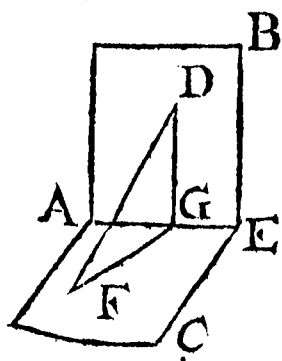
π . 33. 11. 1. Nam quia $Ppd. E \sim F$: erit $E : F = (A : B)^3$. Eodem argumento erit $G : H = (C : D)^3$. Sed $(A : B)^3 = (C : D)^3$. Ergo $E : F = G : H$. Q. E. D.

2. Quia,

2. Quia, vt antea, $E : F = (A : B)^3$, & $G : H = (C : D)^3$, atque $E : F = G : H$: erit $(A : B)^3 = (C : D)^3$, ideoque $A : B = C$: *σ. 2. sch. 22. 5.*
 D. Q. E. D.

PROP. XXXVIII. THEOR.

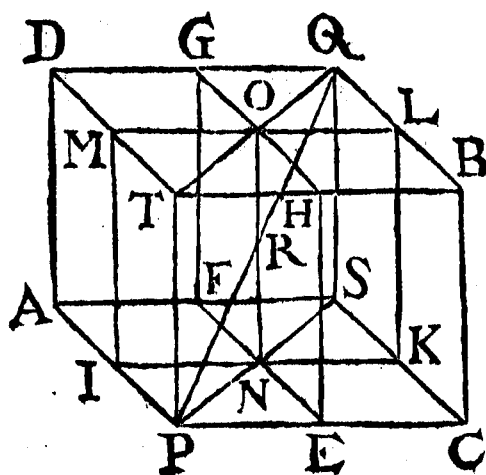
Si planum AB ad planum AC rectum sit, & ab uno puncto D eorum, quae sunt in uno plano AB, ad alterum planum AC perpendicularis ducatur: ea in communem planorum sectionem AE cadet.



Si negas, cadat extra, vt DF, & a puncto F in plano AC duc ad AE perpendicularem FG, & iunge DG. Iam quia FG perpendicularis τ est plano AB: erit τ . 4. def. 12. ang. FGD rectus ν . Sed & ν . 3. def. 11. ang. DFG rectus ν est. Quare in Δ GDF duo recti sunt. Q. E. A.

PROP. XXXIX. THEOR.

Si in solido parallelepipedo AB oppositorum planorum AC, BD latera secantur bifariam; per sectiones vero plana ducantur EFGH, IKLM: communis planorum sectio NO & solidi parallelepipedo diameter PQ se mutuo bifariam secabunt.



φ. 29. I.

κ. 34. I.

ψ. 33. I.

ω. constr.

α. 4. I.

β. 3. sch. 15. I.

γ. 7. II.

δ. 7. ax. I.

ε. 26. I.

Iungantur QO, OT, PN, NS. Quoniam QB, DT sunt parallelæ: erit ang. QLO = φ OMT. Praeterea QL κ = TM. Et quia ψ ML, DQ parallelæ sunt, item DT, GH, QB: erit MO

= κ DG = α GQ = κ OL. Quare α QO = OT, & ang. QOL = MOT, & ob id β QOT recta. Similiter demonstratur, SN = NP, & SNP rectam esse. Et quia PT, SQ, ipsi CB æquales κ & parallelæ, ipsæ æquales & parallelæ sunt: erunt & TQ, PS æquales ψ & parallelæ. Ergo rectæ NO, PQ sunt in eodem γ plano TS, & se mutuo secabunt in R. Sed quia φ ang. QQR = RPN, & ang. QOR = PNR, & QO = δ PN: erit ε OR = RN, & QR = RP. Q. E. D.

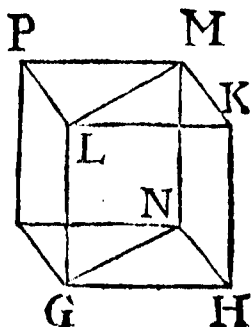
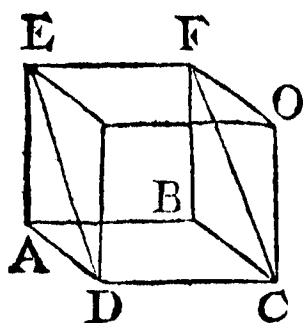
* Schol.

Hinc in omni parallelepipedo diametri omnes se mutuo bisecant in vno puncto R.

PROP. XL. THEOR.

Sint duo prismata ABCDEF, GHKL.MN æquealta, quorum unum quidem basin habeat parallelogrammum ABCD, alterum vero triangulum GHN, & parallelogrammum ABCD duplum sit trianguli GHN: æqualia erunt ipsa prismata.

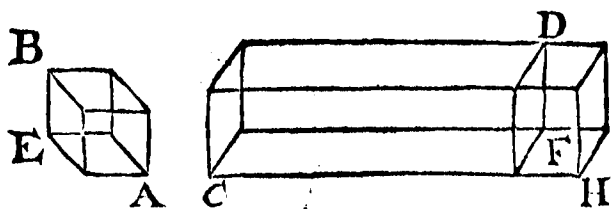
Com-



Compleantur enim Ppda. AO, HP. Et quoniam Pgr. $\triangle AC = 2 \triangle GNH = 2$ Pgr. GN, $\zeta. 34. I.$ atque solida aequalta sunt: erit Ppd. AO $=$ $\eta. 31. II.$ HP, ideoque Pr. ABCDEF $=$ $\theta. 28. II.$ Pr. GHKL-MN. Q. E. D.

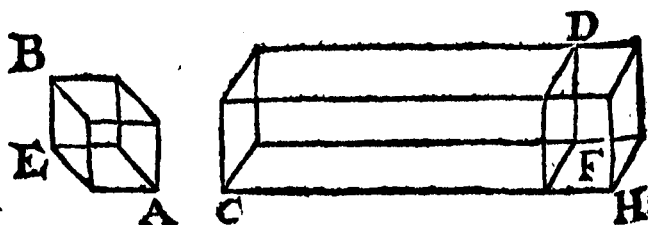
* *Scholium.*

Ex iis quae haecenus ostensa sunt demonstrari potest, parallelepipeda quaevis AB, CD, nec non prismata triangularia, esse in ratione composita basium AE, CF & altitudinum BE, DF.

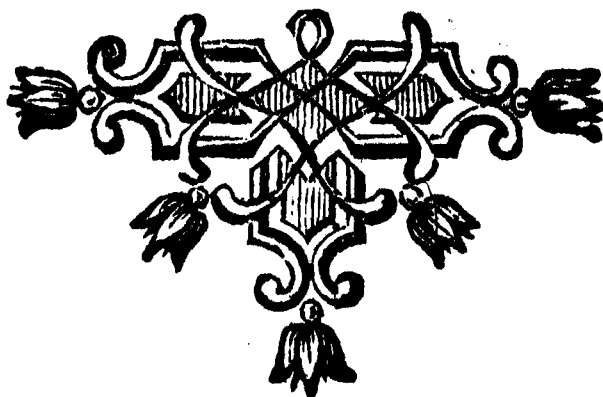


Intelligatur enim aliud Ppd. DH, cuius basis FH $=$ basi AE Ppdi. AB, & altitudo DF $=$ altitudini Ppdi CD. Et quoniam est AB : HD $=$ $\iota. cor. 34. II.$ BE : FD, & HD : CD $=$ $\kappa. 32. II.$ FH : CF $=$ AE : CF: erit AB : CD $=$ $\lambda. 5. def. 6.$ (AE : CF) + (BE : DF). Ergo Parallelepipeda, & triangularia prismata, Parallelepipedorum dimidia, sunt inter se vt bases & altitudines. Q. E. D.

Quae



Quae quum ita sint, patet fundamentum methodi, qua parallelepipeda & prismata in Geometria practica metiuntur. Sumunt enim cubum AB, & latus eius BE pro vnitate, qua metiuntur basin Ppdi CD & altitudinem: & ex multiplicatione numerorum, qui basin & altitudinem exprimunt, gignitur numerus, qui soliditatem Ppdi CD exprimit. Sit (per 4. sch. 23. 6) basis CF = 9 AE, & altitudo DF = 2 BE: & quia $CD:AB = (CF:AE) + (DF:BE) = (9:1) + (2:1) = 11$; erit $CD = 18 AB$.



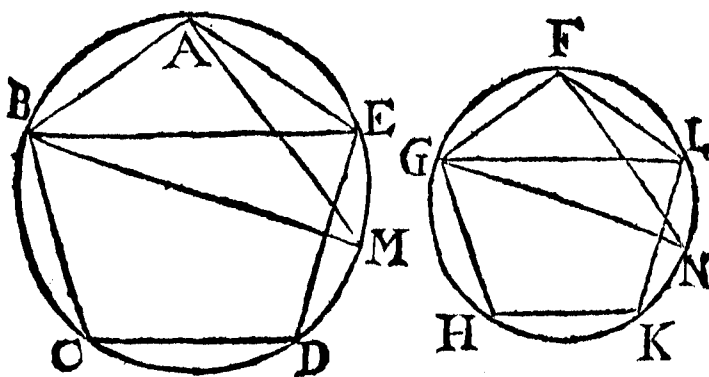
E V C L I D I S

E L E M E N T O R V M

L I B E R X I I.

* * * * *

PROP. I. THEOR.



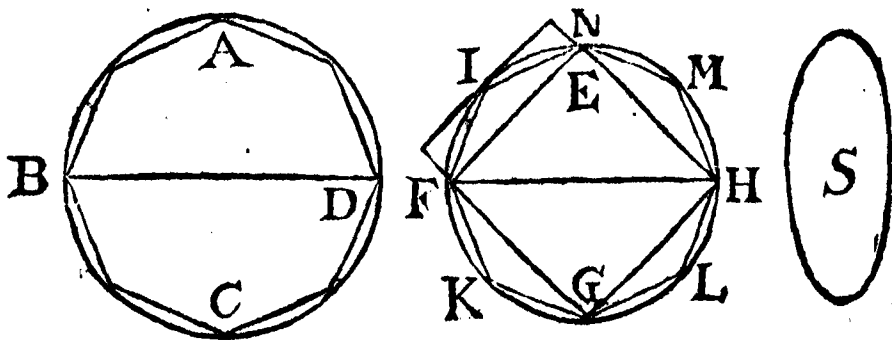
Similia polygona ABCDE, FGHLK circulis inscripta inter se sunt ut quadrata a diametris BM, GN.

Iungantur BE, AM, GL, FN. Quia polygona similia sunt: est ^a ang. BAE = GFL, ^a 1. def. 8. & BA : AE = GF : FL; ideoque ^b ang. AEB ^b 6. 6. = FLG. Ergo ang. AMB = ^c FNG; Et, ^c 21. 3. & 1. ax. 1. quia praeterea ang. BAM = ^d GFN, est BM : ^d 31. 3. GN = ^e BA : GF. Hinc pol. ABCDE : pol. ^e 4. 6. FGHLK = ^f (BA : GF)² = ^f (BM : GN)² ^f 20. 6. ^f 1. sch. 22. 5. = ^g BMq : GNq. Q. E. D.

^{*} Schol. Et quia AB : GF = BC : GH &c. = BM : GN: patet ^a similium polygonorum circulis ^a 12. 5. inscriptorum perimetros AB + BC + CD + DE + EA, & FG + GH + HK + KL + LF, esse in ratione diametrorum.

PROP.

PROP. II. THEOR.



Circuli ABCD, EFGH inter se sunt ut quadrata a diametris BD, FH.

Si negas: erit ut BD^2 ad FH^2 ita circulus ABCD ad spatium S circulo EFGH minus vel maius. Sit primo $S < EFGH$. In circulo EFGH descriptum sit $\square$ quadratum HGF E, quod $\frac{1}{2}$ maius erit dimidio circulo. Circumferentiae EF, FG, GH, HE bisectae sint in I, K, L, M, & iungantur EI, IF, FK, KG, GL, LH, HM, ME. Erit similiter quodlibet $\triangle EIF > \frac{1}{2}$ segmento EIF, quoniam, ducta per I parallela ad EF & completo p. g. rectangulo NF, est $\triangle EIF = \frac{1}{2} NF$. Reliquis ergo circumferentiis semper bisectis, & talibus triangulis a reliquis segmentis semper ablati: relinquentur tandem segmenta, quae simul sumpta erunt $\pi < EFGH - S$. Sint reliqua haec segmenta, quae sunt super rectis EI, IF, FK, KG, GL, LH, HM, ME. Ergo polygonum EIFKGLHM $> S$. Describe in circulo ABCD polygonum ABCD $\sim$ ipsi EIFKGLHM. Erit ergo illud polygonum ad hoc, ut BD^2 ad FH^2 , sive ut π circulus ABCD ad spatium S. Minus, autem est pol. AB CD

v. 6. 4.

§. sch. 7. 4.

e. 30. 3.

π . 1. 10.

e. 5. ax. 1.

e. 1. 12.

π . hyp.

CD circulo in quo inscriptum est: ergo & Polyg. EIFKGLHM $<$ ^{v} S. Q. E. A. Non v . 14. 5. ergo est vt BDq ad FHq ita circ. ABCD ad spatium minus circulo EFGH.

2. Si ponis $S > EFGH$: quia sic erit vt. FHq ad BDq ita S ad circ. ABCD, atque S ad circ. ABCD ^{v} vt circulus EFGH ad spatium minus circulo ABCD: erit vt FHq ad BDq ita circ. EFGH ad spatium minus circulo ABCD. Q. F. N. ϕ Quare vt BDq ad FHq ita circ. ABCD ad circ. EFGH. Q. E. D. ϕ . per part. 1.

* Schol.

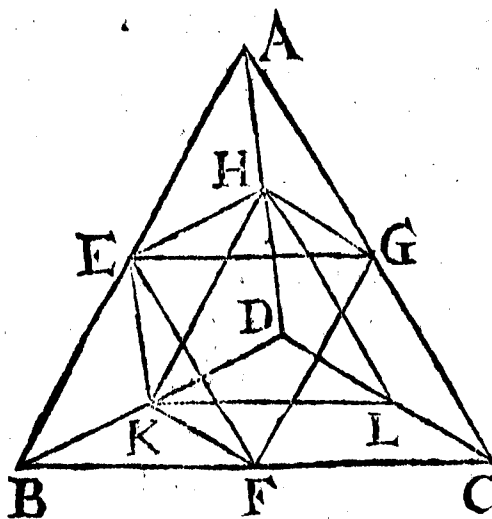
Similia ergo σ polygona in circulis inscripta σ . 1. 12. sunt vt iidem circuli.

PROP. III. THEOR.

Omnis pyramis ABCD† triangularem habens basin ABC diuiditur in duas pyramides aequales & similes inter se, quae triangulares bases habent, easque similes toti, nec non in duo prismata aequalia, quae dimidio quidem totius pyramidis sunt maiora.

Biseca

† Nota, litterarum pyramidem designantium ultimam nobis semper eam esse, quae vertici est appolita, tres autem priores eas, quae ad basin pertinent. Contra, in angulo solido designando prima est quae ad verticem.



Biseca enim AB, BC, CA, AD, DB, DC, in punctis E, F, G, H, K, L, & iunge EG, EH, HG, per quas ductum planum abscindet pyramid. AEGH. Iunge etiam HK, KL, LH, & ducto per has plano a reliquo

solido abscindetur pyr. HKLD. Iam quia $AE = EB$, & $AH = HD$: erunt EH, BD parallelae. Similiter quia $AH = HD$, & $BK = KD$; erunt & HK, AB parallelae. Quare $HK = \frac{1}{2} BE = EA$. Sed est $\angle KHD = \angle EAH$. Ergo $\triangle KDH = \triangle EHA$. Eodem modo patet $\triangle HDL = \triangle HAG$, & $DL = GH$. Et quia ob parallelas EH, BD, & HG, DC, $\angle KDL = \angle EHG$; erit $\triangle KDL = \triangle EHG$. Eadem ratione ostenditur $\triangle KHL = \triangle EAG$. Ergo pyr. HKLD $\sim$ pyr. AEGH. Porro, quum AB, HK parallelae sint, $\triangle ADB \sim \triangle HDK$ aequiangula, ideoque $\triangle BDC \sim \triangle KDL$; nec non $\triangle ADC \sim \triangle HDL$; atque, quum sit $\angle BAC = \angle KHL$, & $BA : KH = AD : DH = AC : HL$, $\triangle BAC \sim \triangle KHL$. Hinc erit pyr. BACD $\sim$ pyr. KHL D $\sim$ pyr. AEGH.

Dèinde iunctis KF, FG, reliquum solidum diuidi poterit in duo prismata, quorum vnum habet

α . 2. 6.

ψ . 34. 1.

ω . 29. 1.

α . 4. 1. &

sch. 6. 6.

β . 10. 11.

γ . 10. def. 11.

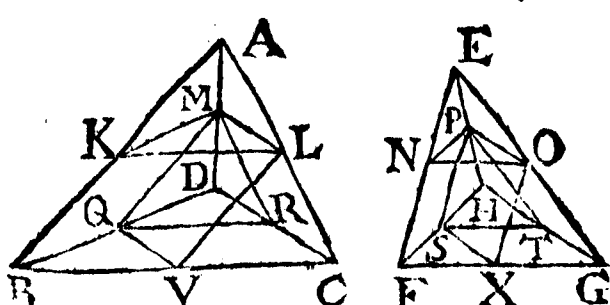
δ . 3. sch. 4. 6.

ϵ . 2. sch. 4. 6.

ζ . 6. 6.

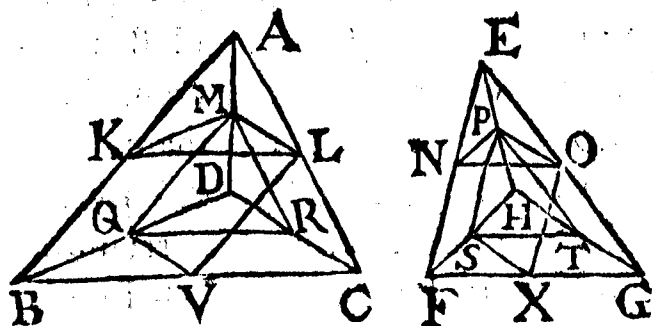
habet basin Pgr. EGFB, & lineam basi oppositam HK, alterum basin $\triangle$ GFC & oppositam basin $\triangle$ HKL. Sunt ergo haec prismata aequae alta, &, quia Pgr. EGFB = $\frac{1}{2}$ $\triangle$ GFC, aequalia ^{9.}. Sed pyramide EFBK, ^{7. 41. I.} quae fit iunctis EK, EF, maius est prismata ^{9. 40. II.} EGFBKH; & pyr. EFBK = $\frac{1}{3}$ pyr. AEGH (aequalibus enim & similibus triangulis continentur): ergo Pr. EGFBKH + Pr. GFCLKH > pyr. AEGH + pyr. HKLD. Est autem Pr. EGFBKH + Pr. GFCLKH + pyr. AEGH + pyr. HKLD = pyr. ABCD. Ergo pr. EGFBKH + pr. GFCLKH > $\frac{1}{2}$ pyr. ABCD. Q. E. D.

PROP. IV. THEOR.



Si sint duae pyramides aequae altae ABCD, EFGH, quae triangulares bases habent ABC, EFG; diuidatur autem utraque ipsarum & in duas pyramides AKLM, MQRD, ENOP, PSTH, aequales inter se similesque toti, & in duo prismata aequalia KLVBQM, LVCRQM, NOXFSP, OXGTSP; atque ortarum pyramidum utraque eodem modo diuidatur, idque semper fiat: erit et unius pyramidis basis ABC ad basin EFG alterius, ita prismata omnia in

una pyramide ABCD ad prismata omnia in altera pyramide EFGH numero aequalia.



1. 15. 5.

2. 22. 6.

3. Lemma
sequens.

4. 7. 5.

5. 12. 5.

Quia $BC = 2 CV$, & $FG = 2 GX$: erit' $BC : CV = FG : GX$. Sed quum, vt in praecedenti propositione, constet, $\triangle ABC \sim \triangle VLC$, & $\triangle FEG \sim \triangle XOG$: erit' $\triangle ABC : \triangle VLC = \triangle FEG : \triangle XOG$, & alternando $\triangle ABC : \triangle FEG = \triangle VLC : \triangle XOG$. Sed $\triangle LVG : \triangle XOG =$ pr. $VLCRQM$: pr. $XOGTPS =$ pr. $KLVBQM$: pr. $NOXFSP$. Ergo $\triangle ABC : \triangle FEG =$ pr. $VLCRQM +$ pr. $KLVBQM$: pr. $XOGTPS +$ pr. $NOXFSP$. Idem vero demonstrabitur de pyramidibus $AKLM$, $ENOP$, scilicet vt basis AKL ad basin ENO ita esse duo prismata aequalia in pyr. $AKLM$ ad duo prismata aequalia in pyr. $ENOP$. Itaque, quia eodem, quo modo vti sumus, argumento, patet esse $\triangle ABC : \triangle EFG = \triangle AKL : \triangle ENO$: erunt' vt $\triangle ABC$ ad $\triangle EFG$ sic 4 prismata in pyr. $ABCD$ ad 4 prismata in pyr. $EFGH$. Et similiter procedit demonstratio ad quocunque paria prismatum in vtraque pyramide. Q. E. D.

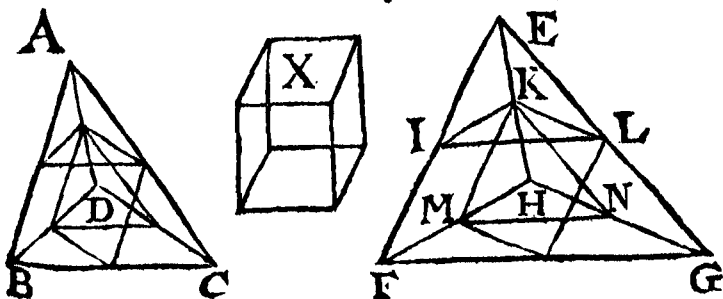
LEM.

L E M M A.

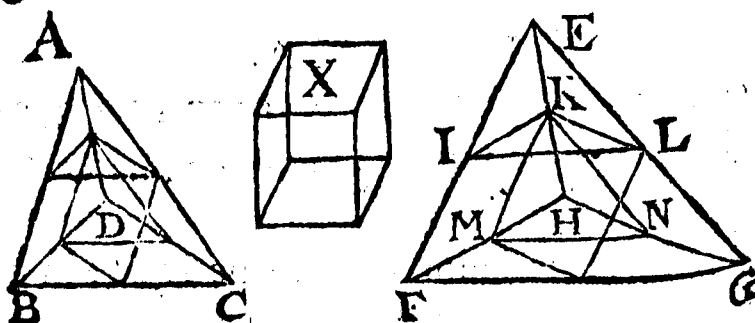
Ostendendum est, vti $\triangle LVC$ ad $\triangle XOG$ ita esse prisma $VL CRQM$ ad prisma $OXG-TPS$.

Intelligentur enim ex punctis D, H in bases VLC, XOG demissa perpendiculara, quae ^{o. hyp. & 4. def. 6.} aequalia erunt. Iam quia perpendicularis ex D demissa, & recta DC secantur a planis QMR, VLC , quae ob parallelas π MR & AC , ^{π . dem. 3. 12.} RQ & CV parallela ϵ sunt: erit pars perpendicularis inter D & planum MQR ad partem reliquam σ , vt DR ad RC . Sed $DR = \tau$ RC : ^{σ . 17. 11. τ . hyp.} quare pars perpendiculi inter basin VLC & basin oppositam QMR prismatis $VL CRMQ$ erit dimidium perpendiculi totius ex D demissi. Eadem ratione pars perpendiculi ex H cadentis, quae est inter bases prismatis $OXGTSP$ dimidium erit totius. Erunt ergo Prismata $VL CRMQ$ & $OGXSTP$ ^{o. 7. ax. 1.} aequae alta, ac ob id in ratione ϕ basium VLC, OXG . ^{ϕ . 32. 11.} Q. E. D.

PROP. V. THEOR.



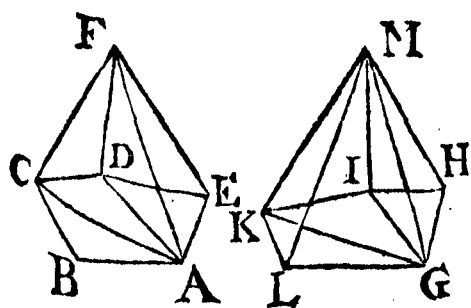
Pyramides $ABCD, EFGH$, quae in eadem sunt altitudine, & triangulares bases ABC, EFG habent, inter se sunt vt bases ABC, EFG .
Z 3 Si



α . 1. 10. Si negas: fit $ABC : EFG = ABCD : X$, si-
 que primo $X < \text{pyr. EFGH}$. Diuidatur pyr.
 $EFGH$ vt in prop. III. & rursus pyramides
 ortae eodem modo diuidantur, fiatque hoc
 Erunt itaque reliqua duo prismata in pyr. EF-
 ψ . 5. ax. 1. GH $> \psi$ solido X. Diuidatur etiam pyr.
 ABCD similiter & in totidem partes ac pyr.
 α . 4. 12. EFGH. Ergo prismata in pyr. ABCD erunt
 ad prismata in pyr. EFGH $= \alpha$ $ABC : EFG$
 $= ABCD : X$. Quare quum pyr. ABCD sit
 α . 14. 5. maior prismatis quae in ipsa sunt: erit & so-
 lidum X maius α quam prismata in pyr. EFGH,
 & ergo quam ipsa pyramis EFGH; contra
 hypothesin.

Sed pone $X > \text{pyr. EFGH}$. Erit ergo vt
 X ad pyr. ABCD, ita α pyr. EFGH ad soli-
 dum pyramide ABCD minus. Sed inuerten-
 do est $EFG : ABC = X : ABCD$. Ergo vt
 EFG ad ABC ita pyr. EFGH ad solidum py-
 β per part. 1. ramide ABCD minus. Q. E. A^s. Erit ita-
 que X nec $<$ nec $>$ pyr. EFGH, sed ipsi ae-
 quale. Ergo $ABC : EFG = ABCD : EFGH$.
 Q. E. D.

PROP. VI. THEOR.

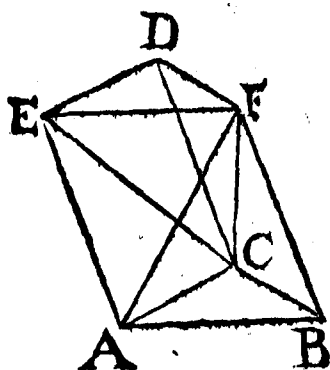


*Pyramides AB-
CDEF, GHIKL-
M, quae in eadem
sunt altitudine,
& polygonas ba-
ses habent, inter
se sunt vt bases.*

Bases diuidantur in triangula ABC, ACD, ADE, GHI, GIK, GKL, super quibus intelligantur pyramides aequae altae ipsis ABCDEF, GHIKLM. Iam quia pyr. ABCF : ACDF = γ Δ ABC : Δ ACD : erit componendo γ . 5. 12. pyr. ABCDF : pyr. ACDF = ABCD : ACD. Sed pyr. ACDF : ADEF = γ ACD : ADE. Ergo ex aequo pyr. ABCDF : ADEF = bas. ABCD : ADE, & componendo pyr. ABCDEF : ADEF = bas. ABCDE : ADE. Eadem ratione pyr. GHIKLM : GKLM = bas. GHIKL : GKL. Sed pyr. ADEF : GKLM = γ bas. ADE : GKL. Ergo ex aequo pyr. ABCDEF : GKLM = bas. ABCDE : GKL. Atqui est inuertendo pyr. GKLM : GHIKLM = bas. GKL : GHIKL. Quare ex aequo pyr. ABCDEF : GHIKLM = bas. ABCDE : GHIKL. Q. E. D.

PROP. VII. THEOR.

Omne prisma ABCDEF triangularem habens basin ABC diuiditur in tres pyramides aequales inter se, quae triangulares bases habent.



34. 1.

5. 12.

Iungantur enim AF, CE, CF: & orientur tres pyramides, triangulares bases habentes, ABFC, EAFC, CDEF. Iam quia ABFE est Pgr. eiusque diameter AF: erit $\triangle ABF = \triangle EAF$. Ergo pyr. ABFC = $\frac{1}{2}$ pyr. EAFC. Sed pyr. EAFC eadem est quae pyr. AECF; atque pyramides AECF, CDEF, aequales bases ACE, CDE & eundem verticem F habentes, aequales sunt. Ergo pyr. ABFC = pyr. EAFC = pyr. CDEF. Q. E. D.

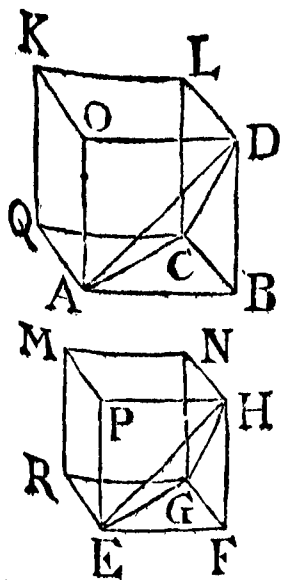
2. ax. 1.

Cor. Et quia pyr. ABFC eadem est cum pyr. ABCF: manifestum est pyramidem ABCF, quae cum prisma ABCDEF eandem habet triangularem basin ABC & eandem altitudinem, tertiam partem esse prismatis. Ergo $\frac{1}{3}$ omnis pyramis tota pars est prismatis basin habentis eandem, & altitudinem aequalem: quoniam, si basis prismatis aliam quandam figuram rectilineam obtineat, dividitur in prismata, quae triangulares habent bases.

PROP. VIII. THEOR.

Similes pyramides ABCD, EFGH, quae triangulares bases ABC, EFG habent, sunt in triplicata ratione homologorum laterum AB, EF.

3. 9. def. 11. Compleantur solida Ppda ABKL, EFMN. Et quia pyr. ABCD $\sim$ pyr. EFGH: erit ang. ABD = EFH, & ang. ABC = EFG, & ang.



ang. $DBC = HFG$, & $DB :$

$HF = BA : FE = BC : FG$.

Ergo erit Pgr. $BO \sim$ pgr. FN , *1. 1. def. 6.*

FP , & pgr. $BL \sim$ pgr. FN ,

& pgr. $BQ \sim$ pgr. FR .

Tria ergo reliqua pgra. KC ,

AK , KD tribus reliquis

pgris MG , EM , MH simi-

lia² erunt. Hinc Ppd. BK

$\sim$ Ppd. FM , ac ergo

Ppd. $BK : Ppd. FM =$

$(AB : EF)^3$. Sed quia py-

ramides $ABCD$, $EFGH$ sunt sextae partes

Ppdorum BK , FM : erit³ Pyr. $ABCD : pyr.$

$EFGH = Ppd. BK : Ppd. FM$. Ergo Pyr.

$ABCD : pyr. EFGH = (AB : EF)^3$. Q.

E. D.

2. sch. 24. 11.

1. 33. 11.

12. cor. 7. 12.

& sch. 28. 11.

15. 5.

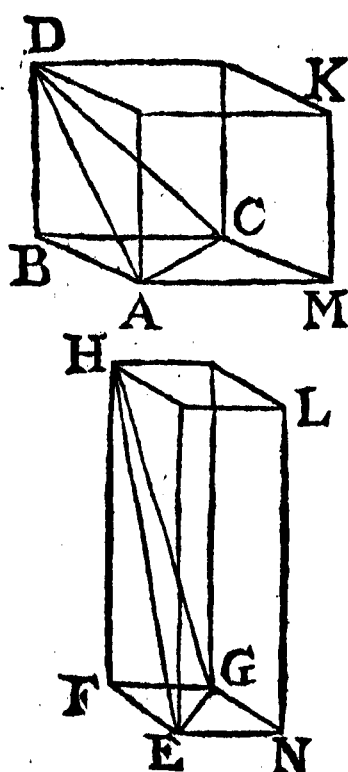
20. 6.

6. 12. & 11.

5. & 16. 5.

Coroll. Ex hoc perspicuum est, similes pyramides, quae polygonas habent bases, inter se esse in triplicata ratione homologorum laterum. Iplis enim diuisis in pyramides triangulares bases habentes; quoniam & similia polygonas basium in triacula numero aequalia & homologa totis & diuiduntur: erit^o vt vna pyramis in altera pyramide triangularem basin habens ad vnam pyramidem in altera triangularem basin habentem, ita tota illa pyramis polygonam basin habens ad totam hanc. Sed pyramides istae triangularium basium sunt in triplicata ratione laterum homologorum: Ergo & pyramides polygonarum basium.

PROP. IX. THEOR.



Aequalium pyramidum ABCD, EFGH triangulares bases habentium, bases ABC, EFG sunt altitudinibus DB, HF reciproce proportionales. Et quarum pyramidum, triangulares bases habentium, bases ABC, EFG sunt altitudinibus DB, HF reciproce proportionales, illae inter se aequales sunt.

Hyp. 1. Compleantur enim solida parallelepipedum BK, FL pyramidibus aequae alta. Et quia Ppd. BK = 6 pyr. ABCD = 6 pyr. EFGH = Ppd. FL: erit vt HF: DB = * BM: FN = ABC: EFG. Q. E. D.

π. 34. 11.
ε. 34. 1.

Hyp. 2. Quia vt HF: DB = ABC: EFG = * BM: FN: erit Ppd. BK = * Ppd. FL. ergo Pyr. ABCD = * Pyr. EFGH. Q. E. D.

ε. 6. ax. 1.

* *Schol. 1.* Idem de pyramidibus polygonarum basium valet (per cor. 7. 12. & sch. 34. 11): quia in pyramides triangularium basium dividi possunt.

* 2. Quae de pyramidibus demonstrata sunt in prop. 6. 8. 9, ea & quibuscunque prismatis conveniunt, quippe quae tripla sunt pyramidum eadem bases & altitudines habentium.

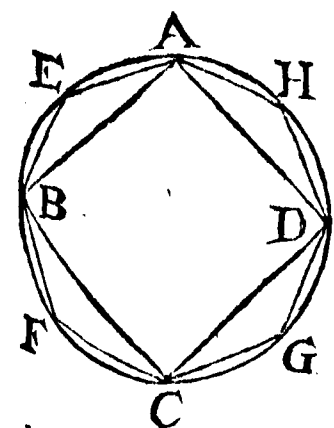
* 3. Hinc autem per se patet ex sch. 40. 11. dimensio quorumvis prismatum & pyramidum.

PROP.

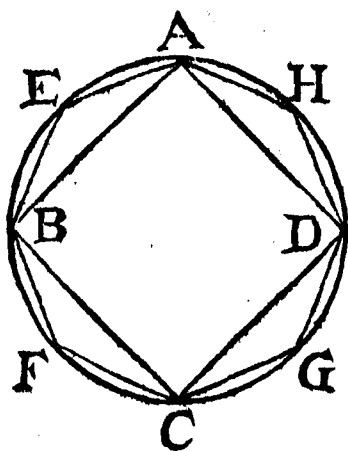
PROP. X. THEOR.

Omnis conus tertia pars est cylindri, qui eandem basin ABCD habet, & altitudinem aequalem.

1. Si negas: sit cylindrus $>$ triplo coni. Describatur in circulo quadratum ABCD, super quo intelligatur prisma aeque



altum cylindro. Et quia hoc prisma dimidium est prismatis aeque alti τ super quadra- 7. 32. II.
to circa circulum circumscripto erecti; dimidium autem huius prismatis $>$ dimidio cylindro: erit & illud prisma $>$ dimidio cylindro. Bisecentur peripheriae in punctis E, F, G, H, quae connectantur rectis, atque a Δ is AEB, BFC, CGD, DHA intelligantur erecta prismata cylindro aeque alta. Et quoniam vnumquodque horum prismatum dimidium est ν Ppdi aeque alti erecti super Pgro. rectan- v. sch. 28. II.
gulo trianguli duplo; hoc autem Ppdum $>$ respectiuo segmento cylindri: patet, vnumquodque horum prismatum $>$ esse dimidio respectiuo segmenti cylindri. Igitur reliquas circumferentias bisecantes, & super singulis, quae orientur, triangulis prismata erigentes, & hoc semper facientes, relinquemus tandem ϕ \phi. I. 10.
segmenta cylindri, quae simul sumta minora erunt excessu cylindri supra triplum coni. Sint reliqua haec segmenta, quae super segmentis circuli AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA



κ. cor. 7. 12.

Q. E. A.

HA consistunt. Igitur prisma, quod basin polygonam AEBFCGDH habet, & cylindro aequo altum est, erit $>$ triplo cono; ideoque pyramis, cuius basis est AEBFCGDH, & vertex idem qui cono, $\propto >$ erit cono; pars toto.

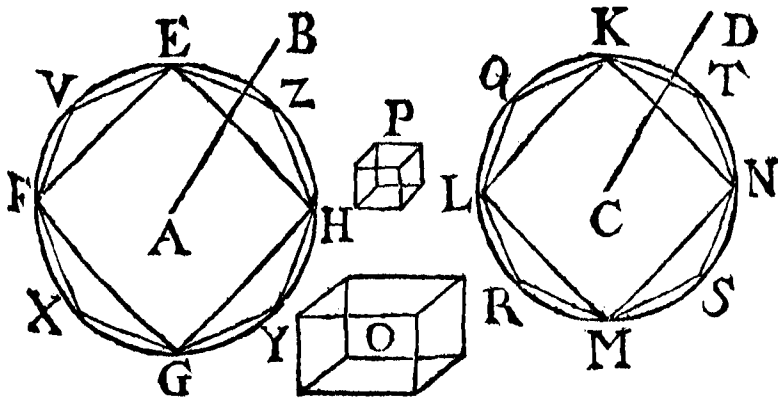
ψ. 6. 12.

2. Sit cylindrus $<$ triplo cono: erit conus $> \frac{1}{3}$ cylindri. Sed quia iisdem, quibus modo vti sumus, argumentis ψ, euincitur, pyramidem cono aequo altam & cuius basis est quadratum ABCD $>$ esse dimidio cono, & vnamquamque pyramidum cono aequo altarum super triangulis AEB, BFC &c. $>$ esse dimidio respectui segmenti cono: iterum patet, circumferentias semper bisecando, & super ortis sic triangulis pyramides semper erigendo, relictum iri segmenta cono minora excessu cono supra $\frac{1}{3}$ cylindri. Sint haec segmenta, quae sunt super segmentis circuli AE, EB, BF &c. Quare quum reliqua pyramis, cuius basis est polyg. AEBFCGDH, & vertex idem qui cono $>$ sit $\frac{1}{3}$ cylindri: erit prisma cono vel cylindro aequo altum & basin polyg. AEBFCGDH habens maius $\propto$ quam cylindrus; pars quam totum. Q. E. A.

PROP. XI. THEOR.

Coni & cylindri, qui eandem habent altitudinem AB, CD, inter se sunt ut bases EFGH, KLMN.

1. Sit



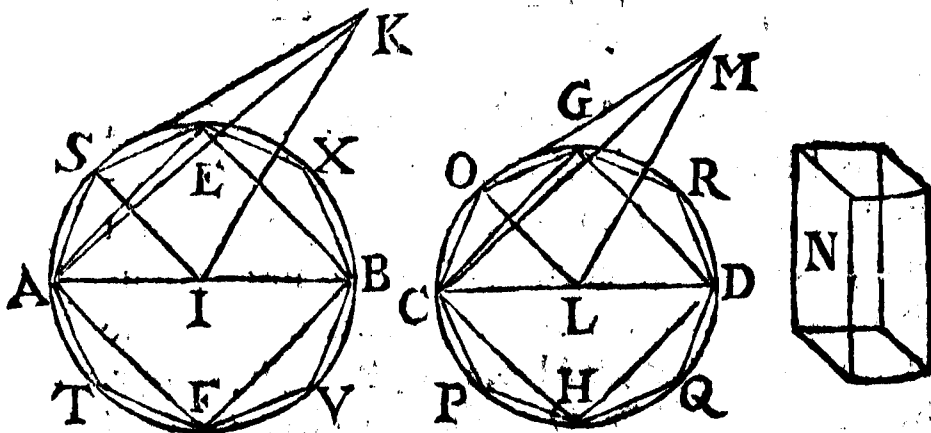
1. Sit vt circ. EFGH ad circ. KLMN ita
 conus FB ad aliud solidum O, quod sit $<$ co-
 no LD; & sit LD — O = P. Supposita
 praeparatione & argumentatione praecedentis
 propositionis, erunt segmenta coni, quae
 in ipsis QL, LR, RM &c. $<$ P. Ergo pyr.
 KQLRMSNTD $>$ O. Fiat in circ. EFGH
 simile polygonum EVFXGYHZ. Iam quia
 Pyr. EVFXGYHZB: pyr. KQLRMSNTD = ω ω . 6. 12.
 polyg. EVFXGYHZ: pol. KQLRMSNT = α α . sch. 2. 12.
 circ. EFGH: circ. KLMN = β conus FB: O; β . hyp.
 atque pyr. EVFXGYHZB $<$ γ cono FB: erit γ . 9. ax. 1.
 & pyr. KQLRMSNTD $<$ δ solido O; quod δ . 14. 5.
 repugnat ostensis. Non ergo est vt basis A
 ad basin C ita conus A ad solidum cono C
 minus.

2. Si ponas O $>$ cono LD: erit vt O ad
 conum FB, ita conus LD ad solidum δ minus
 cono FB, & ergo vt circ. KLMN ad circ. EF-
 GH, ita conus LD ad solidum minus cono
 FB. Q. F. N.* Itaque coni aequae alti, & ϵ . part. 1.
 proinde cylindri ζ aequae alti, sunt inter se vt ζ . 10. 12.
 bases. Q. E. D.

* *Schol.* 1. Coni ergo, item cylindri, quorum tam bases quam altitudines aequales sunt, ipsi inter se aequales sunt.

* 2. Quare conorum, item cylindrorum, aequales bases habentium, qui maiorem axin habet, maior est.

PROP. XII. THEOR.



Similes coni & cylindri inter se sunt in triplicata ratione diametrorum, basium AB, CD.

Sint bases circuli AEBF, CGDH, & axes IK, LM; & sit conus AEBFK ad solidum quoddam N in triplicata ratione ipsius AB ad CD.

1. Pone $N <$ cono CGDHM. Factis iisdem quae in praecedentibus, eodem modo ostendemus esse aliquam pyramidem GOCPHQDRM in cono CDM, quae maior sit quam N. Fiat in circ. I simile polygonum ASEXBVFT, quod sit basis pyramidis verticem cum cono ABK communem habentis. Sint in his duabus pyramidibus triangula CMO, AKS quaedam ex iis quae pyramides continent, & iunctae sint LO, IS. Iam quia conus ABK $\sim$ cono CDM, est $AB:CD = IK:LM$, ac ergo

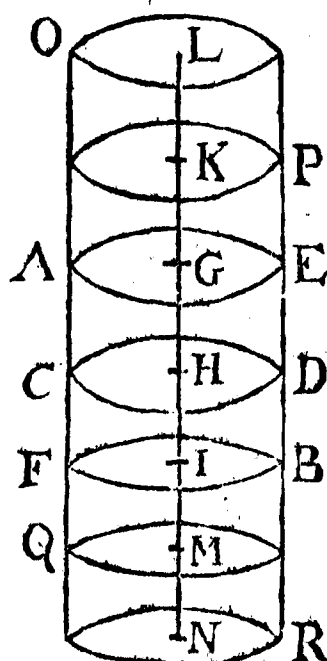
go $AI:IK = CL:LM$. Sed ⁹ ang. KIA, 9. 11. def. 11.
 MLC recti sunt: ergo $\Delta. AKI \sim \Delta. CML$. 4. 6. 6.
 Similiter, quia $AI:IS = CL:LO$, & ang.
 $AI^x = CLO$, erit $\Delta. ASI \sim \Delta. COL$; & 2. sch.
 iterum similiter patet esse, $\Delta. SKI \sim \Delta. OML$. 33. 6.
 Hinc quia ¹ $KA:AI = MC:CL$, & $AI:AS$ 1. 1. def. 6.
 $= CL:CO$: erit ex aequo $KA:AS = MC:$
 CO . Similiter quia $KS:SI = MO:OL$, & $SI:$
 $SA = OL:OC$: erit ex aequo $KS:SA = MO:$
 OC . Ergo $\Delta. ASK \sim \Delta. OMC$. Quoniam 12. sch. 5. 6.
 igitur pyr. $ASIK \sim$ pyr. $COLM$: erit pyr. 9. def. 11.
 $ASIK:pyr. COLM = \frac{1}{2}(AI:CL)^3$. Sed idem 8. 12.
 de reliquis pyramidibus $ATIK, CPLM$ &c.
 ostendemus. Ergo ⁰ pyr. $ASEXBVFT$: pyr. 12. 5.
 $GOCPHQDRM = (AI:CL)^3 = \pi(AB:$ 1. sch.
 $CD)^3 = \frac{1}{2}$ con. $AEBFK:N$. Quare pyr. $GO-$ 22. 5.
 $CPHQDRM < \frac{1}{2}$ solido N ; contra modo 9. hyp.
 dicta. 14. 5.

2. Si ponas $N >$ cono $CGDHM$: quia $N:$
 $AEBFK = \frac{1}{2}(CD:AB)^3$, & ⁰ N ad $AEBFK$
 uti conus; $CGDHM$ ad solidum cono $AEBFK$
 minus: erit conus $CGDHM$ ad solidum quod-
 dam cono $AEBFK$ minus in triplicata ratione
 ipsius CD ad AD . Q. F. N. ⁷ Ergo tam co- 7. part. 1.
 ni, quam ⁰ cylindri, sunt in triplicata ratione 10. 12.
 diametrorum basium. Q. E. D.

PROP. XIII. THEOR.

*Si cylindrus AB plano CD secetur, oppositis
 planis AE, FB parallelo, erit ut cylindrus AD
 ad cylindrum DF ita axis GH ad axem HI.*

Pro-



Producatur vtrunque axis GI, & fiant ipsi GH aequales quocunque GK, KL, & ipsi HI aequales quouis IM, MN. Per puncta L, K, M, N ducantur plana ipsis AE, CD parallela, in quibus fiant circa centra L, K, M, N circuli ipsis AE, EB aequales; & inter hos circulos intelligentur cylindri OP, PA, BQ, QR constituti. Quia

φ. 1. sch.
11. 12.

cylindri OP, PA, AD inter se^φ, aequales sunt; quotuplex est axis LH ipsius GH, totuplex est cyl. OD ipsius AD. Similiter, quotuplex est axis HN ipsius HI, totuplex est cyl. CR cylindri DF. Praeterea si axis LH $> = <$

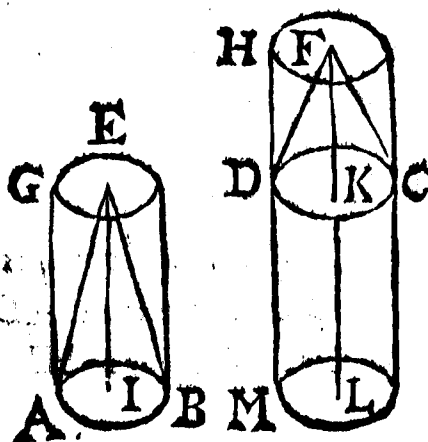
κ. 2. sch.
11. 12.

HN: erit κ & cyl. OD $> = <$ cyl. CR. Er-

ψ. 4. def. 5.

go cyl. AD: cyl. DF = ψ ax. GH: ax. HI.
Q. E. D.

PROP. XIV. THEOR.

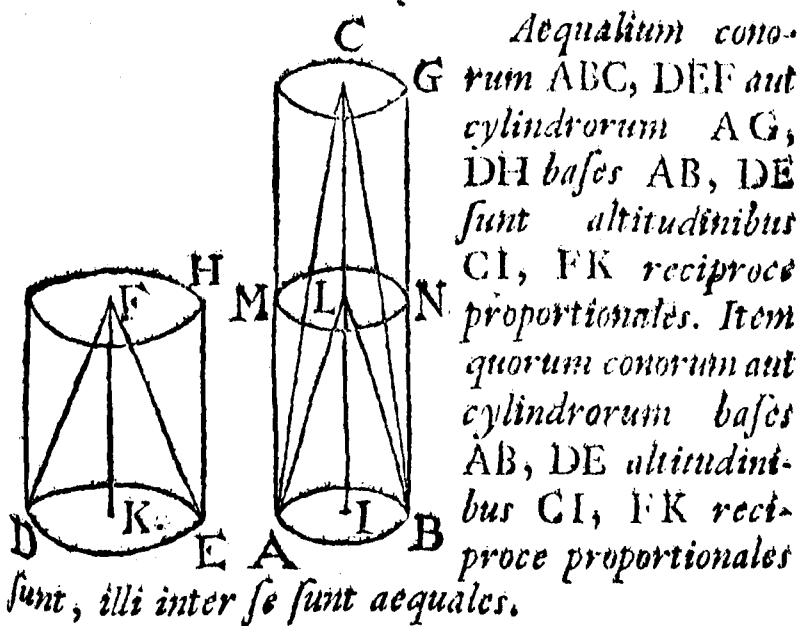


Aequalibus basibus AB, CD insistentibus coni ABE, CDF aut cylindri BG, CH inter se sunt ut altitudines EI, FK.

Producatur axis FK, ut fiat KL = EI, & circa axem KL in basi

basi CD sit cyl. CM, qui erit $\equiv^a$ cyl. BG. ω. 1. sch.
 Ergo cyl. BG : cyl. CH $\equiv$ cyl. CM : cyl. CH 11. 12
 $\equiv^a$ KL : FK $\equiv$ EI : FK. Quare & conus α. 13. 12.
 ABE : con. CDF $\beta \equiv$ EI : FK. Q. E. D. β. 15. 5.

PROP. XV. THEOR.



Cas. 1. Si altitudines aequales sunt: patet in vtraque hypothesi etiam bases aequales esse; & constat ergo propositio.

Cas. 2. Sit $CI > FK$. Fiat $LI \equiv FK$, & per L secetur cylindrus AG plano MN basibus parallelo.

Hyp. 1. Et quia cyl. AG $\equiv$ DH: erit cyl. AN : cyl. AG $\equiv$ cyl. AN : cyl. DH $\equiv^a$ bas. γ. 11. 12.
 AB : DE. Sed cyl. AN : cyl. AG $\equiv^b$ LI : δ. 13. 12. &
 CI $\equiv$ FK : CI. Ergo AB : DE $\equiv$ FK : CI. 18. 5.
 Q. E. D.

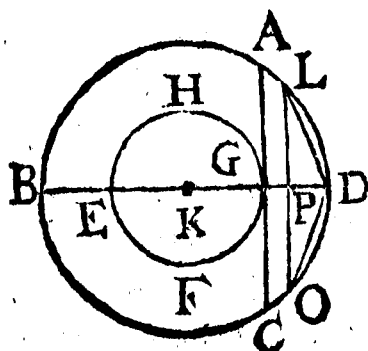
Hyp. 2. Sit bas. AB : bas. DE $\equiv$ alt. FK : alt. CI. Est autem bas. AB : bas. DE $\equiv$ cyl. AN : AN

9. 5.

AN: cyl. DH, & FK: CI = LI: CI = cyl.
AN: cyl. AG. Ergo cyl. DH = cyl. AG.
Q. E. D.

Similiter autem & in conis.

PROP. XVI. PROBL.



Duobus circulis ABCD, EFGH circa idem centrum K consistentibus, in maiori ABCD polygonum aequalium ac parium numero laterum describere, quod minorem circulum EFGH non tangat.

2. 30. 3. Duc diametrum BEGD, & per G ipsi perpendiculararem AGC. Biseca semicirculum BAD, ac eius semissem, atque ita perge donec relinquatur circumferentia LD minor ipsa AD. Ab L in BD duc perpendiculararem LPO. Iunge LD, DO, quae aequales erunt. 9. 3. 3. & 4. 1. 1. cor. 16. 3. Iam quia AC circulum EFGH tangit, LO vero ipsi AC parallela est extra hunc circulum: LO eum non tanget; multoque minus rectae LD, DO eundem tangant. Si ergo ipsae LD aequales deinceps in circulo ABC aptauerimus: fiet polygonum aequalium & parium laterum (quia circumf. LD est pars aliquota semicirculi), circulum EFGH non tangens. Q. E. F.

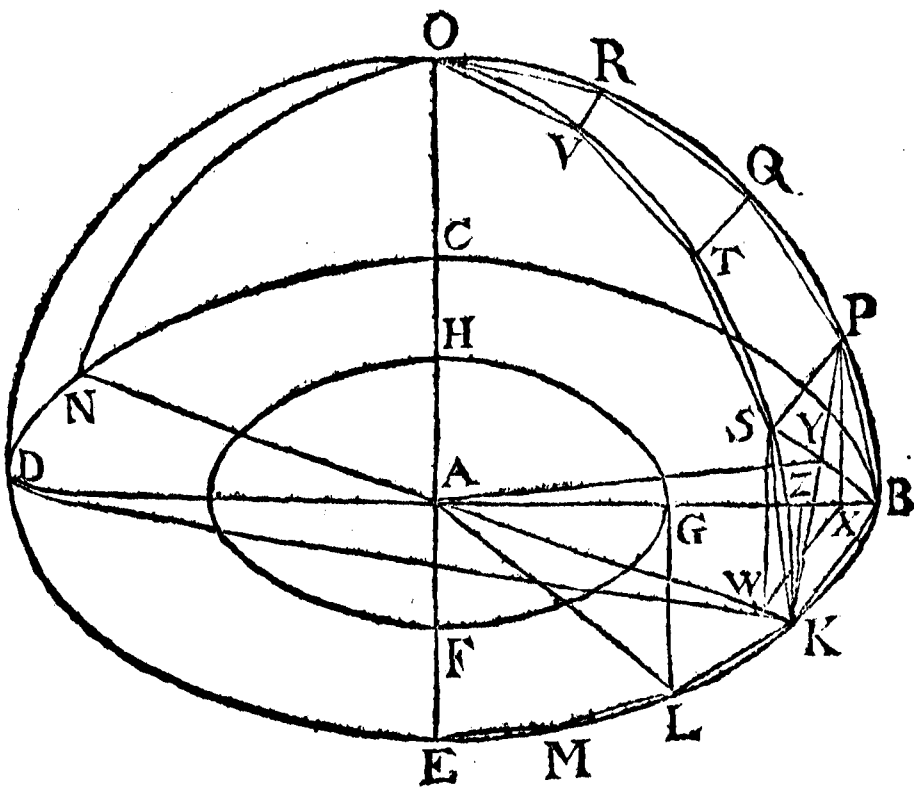
* Coroll.

Ergo recta $KG < KP$.

PROP.

PROP. XVII. PROBL.

Duabus sphaeris circa idem centrum A consistentibus, in maiori solidum polyedrum describere, quod minoris sphaerae superficiem non tangat.



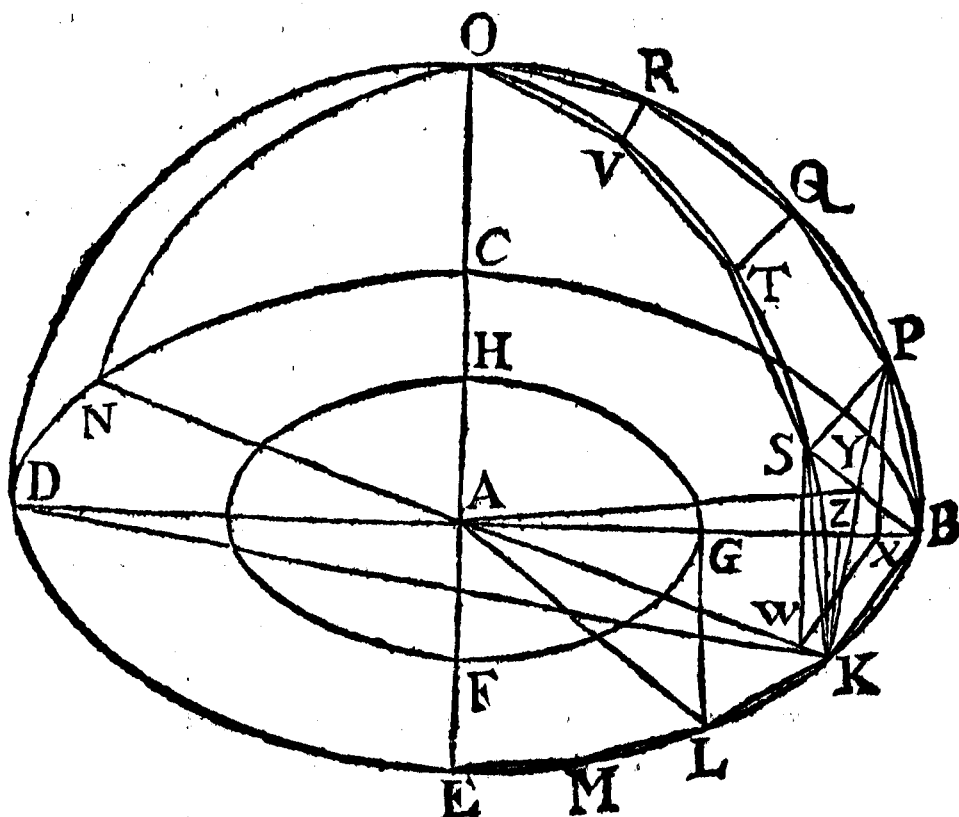
Secentur sphaerae plano aliquo per centrum. Quia $\wedge$ semicirculi sphaeram generantis planum productum in superficie sphaerae circum efficit maximum, siue qui diametrum sphaerae habet: sectiones erunt circuli maximi. Sint illi BCDE, FGHF, & eorum diametri ad rectos angulos ducantur BD, CE. In maiori circulo BCDE polygonum aequalium & parium laterum μ describatur, non tangens minorem FGH. Sint in quadrante BE ea

λ . 14. def. 11.
& sequ.
& 15. 3.

μ . 16. 12.

mittantur π perpendiculares PX, SW, quae τ . 11. 11.
 occurrent ϵ rectis BA, KA. Et quia BP, KS ϵ . 38. 11.
 sunt aequales partes aequalium circulorum,
 anguli vero PXB, SWK ξ recti: erit σ PX = σ . 26. 1.
 SW, & BX = KW, ideoque AX = τ AW, & τ . 3. ax. 1.
 XW ipsi KB ν parallela. Sed quum aequa- ν . 2. 6.
 les PX, SW etiam parallelae ϕ sint: erunt ϕ . 6. 11.
 XW, PS parallelae ω & aequales. Ergo & PS, ω . 7. 11.
 BK erunt parallelae ψ . Hinc ω quadrilaterum
 PS, KB est in vno plano. Idem similiter
 constat de quadrilateris QTSP, RVTQ. Sed
 & Δ ROV planum α est. Ductis ergo a pun- α . 2. 11.
 ctis P, S, T, Q, R, V ad A rectis, constituetur
 figura solida polyedra inter quadrantes circ.
 BO, KO, ex pyramidibus composita, quarum
 vertex communis A, & bases plana BKSP,
 PSTQ, QTVR, VOR. In vnoquoque late-
 rum KL, LM, ME eadem quae in KB con-
 struantur, & etiam in reliquis tribus quadran-
 tibus, & in reliquo hemisphaerio. Sic fiet so-
 lidum polyedrum maiori sphaerae inscriptum,
 compositum ex pyramidibus, quarum vertex
 communis A. Dico huius solidi superficiem
 non tangere superficiem minoris sphaerae.

Ducatur enim in planum PSKB ex A per-
 pendicularis AY, & KY, BY iungantur. Et
 quoniam ob ang. AYB, AYK rectos ξ , BYq +
 AYq = β ABq = AKq = KYq + AYq: β . 47. 1.
 erit BY = KY. Similiter patet esse SY =
 PY = BY. Ergo PSKB est quadrilaterum in
 circulo γ centro Y intervallo YB descripto, γ . 15. def. 1.
 Et quia BK $>$ δ XW, ideoque $>$ PS; BK δ . 2. sch. 4. 6.
 & 14. 5.



1. 28. 3.
2. 33. 6.
4. 12. 3.

2. 1. 6.
1. cor. 8. 6.

1. cor. 16. 12.

vero $\equiv KS \equiv PB$: erit circumferentia huius
circuli, quam recta BK subtendit, quadrante
maior, hinc ang. KYB recto ζ maior, & KBq
 $> 2 BYq$. Ducatur a K ad BD perpendicu-
laris KZ, & iungatur DK. Quoniam $AB <$
 $AB + 2 AZ$: erit $DB < 2 DZ$. Hinc quia
 $DB : 2 DZ = \text{ang. } DB \times BZ : 2 DZ \times BZ =$
 $BKq : 2 KZq$: erit $BKq < 2 KZq$, & ergo KZq
 $> BYq$. Sed $KZq + AZq = AKq = BYq$
 $+ AYq$. Ergo $AZ < AY$, & a potiori
 $AG < AY$. Ergo polyedri superficies non
tangit minoris sphaerae superficiem. Q. E. F.

Alter.

Et breuius ostendemus esse $AG < AY$, ex-
citato ex G in AB perpendiculo GL, & iuncta
AL.

AL. Nam bisecta circ. BE, & huius semisse, & sic porro, relinquetur tandem circumferentia minor ea, quam recta ipsi GL aequalis in circulo BCE subtendit. Sit illa BK. Ergo recta $BK < GL$. Sed ut antea patet esse $BK > BY$. Ergo $GL > BY$. Sed $GLq + AGq = ALq = ABq = BYq + AYq$. Quare $GA < AY$. Q. E. D.

Corollar.

Si in quavis alia sphaera describatur solidum polyedrum praedicto polyedro in sphaera BCDEO simile: habebunt haec duo solida polyedra triplicatam rationem eius quam diametri sphaerarum habent. Divisis enim solidis in pyramides numero aequales & eiusdem ordinis: erunt hae pyramides similes. Ergo pyr. BPSKA erit ad pyramidem eiusdem ordinis in altera sphaera in triplicata ratione [^] eius λ. cor. 8. 12. quam latus homologum ad homologum habet, id est, quam habet semidiameter sphaerae A ad semidiametrum alterius sphaerae. Idem de quibusvis duabus pyramidibus in utraque sphaera eiusdem ordinis intelligendum est. Sed [^] ut vna pyramis μ. 12. 5. in sphaera A ad vnam in altera, ita solidum polyedrum in sphaera A ad solidum polyedrum in altera sphaera. Ergo solida polyedra sunt in triplicata ratione semidiametrorum, vel diametrorum. Q. E. D.

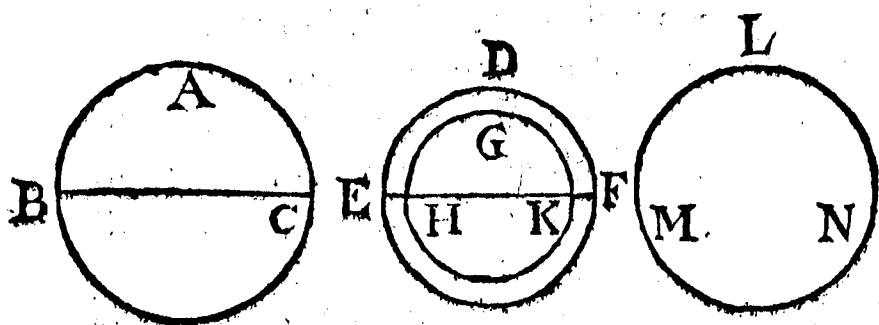
PROP. XVIII. THEOR.

Sphaerae ABC, DEF inter se sunt in triplicata ratione suarum diametrorum BC, EF.

1. Si enim non: sit sph. ABC ad sphaeram GHK ipsa DEF minorem in triplicata ratione BC ad EF. In sph. DEF describatur solidum ν. 17. 12.

Aa 4

polye-



polyedrum, quod non tangat minorem GHK, circa commune cum illa centrum constitutam, & in sph. ABC huic polyedro simile describitur, quod erit ξ ad polyedrum in sph. DEF in triplicata ratione BC ad FE, ideoque in eadem ratione in qua sph. ABC ad sph. GHK. Igitur sph. GHK $>^a$ polyedro in sphaera DEF descripto, pars toro. Q. E. A.

2. Si ponas, sph. ABC ad sph. LMN ipsa DEF maiorem esse in triplicata ratione BC ad EF; erit sph. LMN: sph. ABC $= (EF:BC)^3$. Sed sph. LMN ad sph. ABC vt sph. DEF ad sphaeram ^{a} ipsa ABC minorem. Ergo sph. DEF erit ad sphaeram ipsa ABC minorem in triplicata ratione diametri EF ad diametrum BC. Q. F. N ^{r} .

** Corollar.*

Hinc vt sphaera ad sphaeram, ita est polyedrum solidum in illa ad polyedrum in hac simile & similiter descriptum.

* * * * *

Describantur ex AB, DC
quadrata AE, DF. Deinde

in DF describatur figura, & producat^r FC
ad G. Est ergo $CE = AB \times BC =^{\alpha} ACq$ α . 3. def. &
 $=^{\gamma} HF$. Iam quia $AK = AB =^{\beta} 2 AD =$ β . 17. 6.
 $=^{\gamma} AH$, & $AK : AH =^{\delta} AG : CH$: erit AG β . hyp.
 $=^{\epsilon} CH =^{\epsilon} CH + HL$, ideoque $AE =^{\zeta}$ γ . 1. cor. 4. 2.
gnomoni OPQ. Sed $AE = ABq =^{\eta} 4 ADq$ δ . 1. 6.
 $=^{\eta} 4 DH$. Ergo gn. OPQ $=^{\eta} 4 DH$, & pro- ϵ . 43. 1.
inde ζ DF, id est $CDq =^{\eta} DH$ vel $5 ADq$. ζ . 2. 3x. 1.
Q. E. D. η . sch. 4. a.

*Si recta linea CD partis sui ipsius AD quin- Fig. prop.
tuplum possit, atque duplum AB dictae partis praec.
AD extrema ac media ratione secetur: maior
portio est pars reliqua CA eius quae a principio
rectae lineae CD.*

Ans

De-

3. 3. ax. 1.

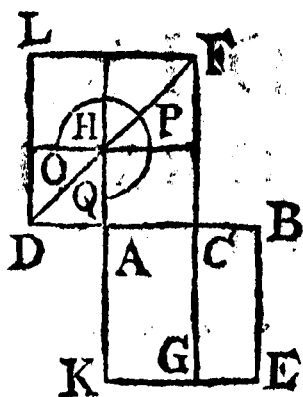
4. sch. 4. 2.

u. conftr.

a. 17. 6.

u. lem. seq.

v. 3. def. 6.



Descriptis enim iisdem, quae antea, quia $DF = CDq = 5 ADq = 5 DH$: erit $gnomon OPQ = 4 DH$. Sed $4 DH = 4 ADq = ABq = AE$. Ergo $gn. OPQ = AE$. Deinde quia ut in praec. ostenditur $AG = CH + HL$: erit $quadratum HF = CE$, id est $ACq = AB \times BC$. Quare $\div AB, AC, BC$; & quia $AB > AC$, erit $AC > CB$. Igitur si recta AB extrema ac media ratione secatur: maior eius portio est CA. Q. E. D.

L E M M A.

At vero duplam ipsius AD, quae est AB, maiorem esse quam AC, sic demonstrabitur.

ξ. hyp.

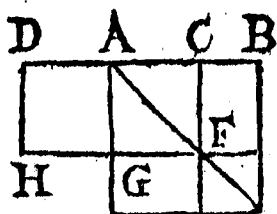
Si negas: sit $AC = 2 AD$. Erit ergo $ACq = 4 ADq$, & $ACq + ADq = 5 ADq = CDq$, pars toti. Q. E. A. Si ponas $2 AD < AC$, similiter ostendemus, totum esse parte sua minus. Q. E. A. Ergo $2 AD > AC$. Q. E. D.

PROP. III. THEOR.

Si recta linea AB extrema ac media ratione secta fuerit: portio minor CB assumens dimidiam CD maioris portionis AC quintuplum potest eius, quod a dimidia CD maioris portionis fit, quadrati.

Describatur enim ex AB quadratum AE, & figura compleatur. Ergo, quia $AC = 2 CD$:

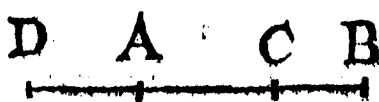
PROP. V. THEOR.



Si recta linea AB extrema ac media ratione secetur, adjiciaturque ipsi AD aequalis maiori parti AC: erit tota linea BD extrema ac media ratione secuta, & maior portio erit ea, quae a principio posita est, recta linea AB.

Descripto enim ex AB quadrato AE, & completa figura: erit $CE = CG$. Sed $CE = GE$, & $CG = GD$. Ergo $GD = GE$, & hinc $HB = AE$, id est $BD \times DA = AB^2$. Quare $BD : AB = AB : DA$, & $AB > AD$, quia $BD > AB$. Hinc patet Q. E. D.

PROP. VI. THEOR.

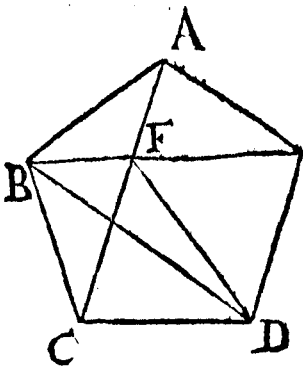


Si recta linea rationalis AB extrema ac media ratione secuta fuerit: utraque portio AC, CB irrationalis est, quae apotome appellatur.

Producatur CA, & sit $AD = \frac{1}{2} AB$. Ergo $CD^2 = 5 AD^2$. Hinc, quia AD est p, erit γCD^2 p, ac ergo ipsa CD p. Sed δCD non ϵAD . Ergo CD, DA erunt p ϵ , ideoque AC apotome ϵ erit. Deinde quia $AB \times BC = AC^2$: ACq ad p AB applicatum latitudinem faciet BC, quae proinde ϵ erit apotome prima. Q. E. D.

PROP.

PROP. VII. THEOR.



Si pentagoni aequilateri ABCDE tres anguli, siue deinceps siue non deinceps, inter se fuerint aequales: aequiangulum erit pentagonum.

1. Sint anguli deinceps A, B, C aequales. Iungantur AC, BE, FD. In

Δ is BAE, ABC erit ⁹ $BE = AC$, & ang. AEB ^{9. 4. 1.} $= ACB$, & ang. ABE $= BAC$. Ergo BF ^{1. 6. 1.} $= AF$, & FE ^{2. 3. ax. 1.} $= FC$. Sed praeterea ED ^{2. 8. 1.} $= DC$. Ergo ^{1.} ang. FED $= FCD$, ideoque ^{2.} ang. ^{2. ax. 1.} AED $= BCD = A = B$. Similiter demonstrabitur, ang. CDE $= B =$ cuique reliquorum. Q. E. D.

2. Sit ang. A $= C = D$. Iungatur BD. Et quia AB $= BC$ & AE $= CD$, & ang. A $= C$: erit ⁹ ang. AEB $= CDB$, & BE $= BD$, ideoque ang. BED $= BDE$. Hinc ^{2.} totus AED $= CDE = A = C$. Idem de ang. B similiter ostendetur. Q. E. D.

PROP. VIII. THEOR.

Si pentagoni aequilateri & aequianguli ABCDE duos, qui deinceps sunt, angulos A, B subtendunt rectae lineae BE, AC: extrema ac media ratione se mutuo secant; & maiores ipsarum portiones EF, FC pentagoni lateri AE sunt aequales.

Descri-

v. 14. 4.

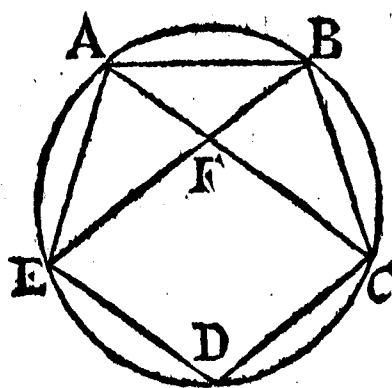
ξ. 4. 1.

α. 32. 1.

π. 33. 6.

ρ. 6. 1.

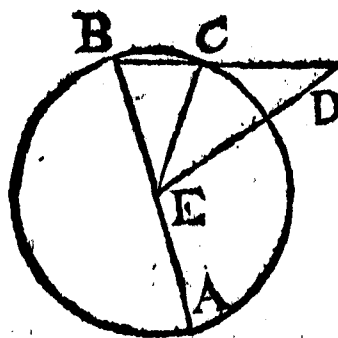
σ. 5. 1.



Describatur ^v circa pentagonum circulus. Primo in triangulis AEB & ACB est $\angle$ BE = AC, & ang. EBA = CAB. Hinc ang. AFE = 2 CAB = π CAE. Igitur EF = ρ AE.

Deinde quia ang. FAB = FBA = σ AEB, & ang. B communis Δ is AFB, AEB: erunt Δ a ista aequiangula, & erit EB: BA = BA: BF, id est ob AB = AE = EF, EB: EF = EF: FB. Est vero EF > FB, quia EB > EF. Ergo BE in F secatur extrema ac media ratione, & maior portio EF aequalis est lateri pentagoni AE. Idem similiter de recta AC ostendemus. Q. E. D.

PROP. IX. THEOR.



Si latera hexagoni DC & decagoni CB in eodem circulo ACB descriptorum componantur: erit tota recta BD extrema ac media ratione secta, & maior ipsius portio erit hexagoni latus CD.

Sit centrum circuli E. Quia BC est latus decagoni. aequilateri: erit circumf. ACB = 5 BC, ergo AC = 4 CB. Hinc & ang. AEC = 4 BEC. Sed ang. AEC = σ BGE + CBE = ρ 2 BCE; &, ob DC = π CE, est ang. BCE = 2

π. 33. 6.

v. 32. 1.

φ. 5. 1.

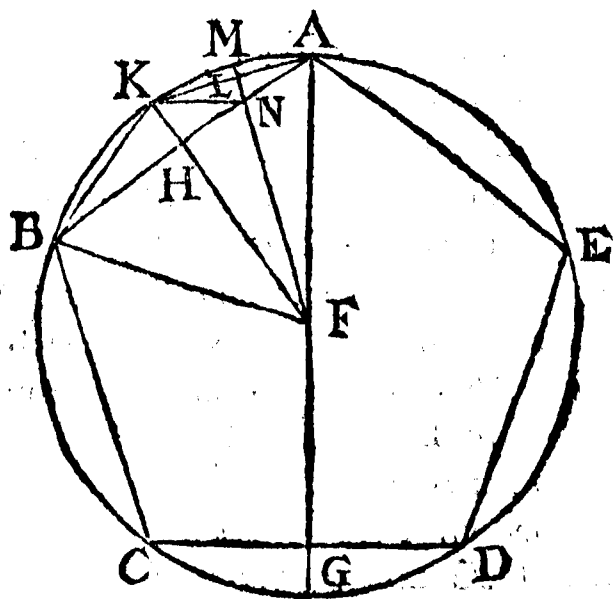
x. cor. 15. 4.

$\equiv 2 \text{ CDE}$: quare $\text{AEC} \equiv 4 \text{ CDE}$. Est ergo ang. $\text{BDE} \equiv \text{BEC}$. Sed ang. B est communis Δ is BED , BEC . Quare $\psi \text{ BD} : \text{BE} \equiv \psi. 4. 6.$
 $\text{BE} : \text{BC}$, hoc est $\text{BD} : \text{DC} \equiv \text{DC} : \text{CB}$. Est autem $\text{DC} > \text{CB}$, quia $\text{BD} > \text{DC}$. Ergo patet Q. E. D.

* *Schol.*

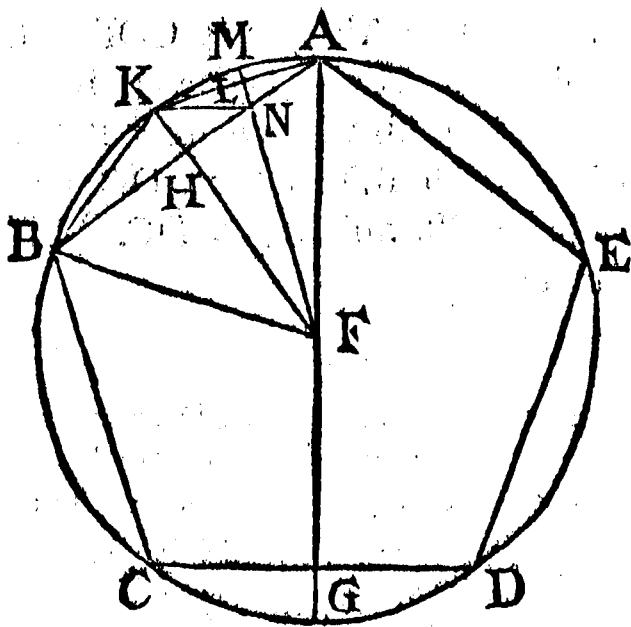
Et conuersim, si qua recta BD extrema ac media ratione secetur: erit minor portio BC latus decagoni in eo circulo, in quo maior CD est latus hexagoni. Nam, eadem descripta figura, quia ang. $\text{AEC} \equiv 2 \text{ BCE}$, & ang. $\text{BCE} \equiv 2 \text{ CDE} \equiv 2 \text{ BEC}$ (per 6. 6): erit circumf. $\text{AC} \equiv 4 \text{ BC}$, ideoque recta BC latus decagoni.

PROP. X. THEOR.



Si in circulo ABCDE pentagonum aequilaterum describatur: latus pentagoni AB potest & hexagoni & decagoni latus in eodem circulo descriptorum.

Summa.

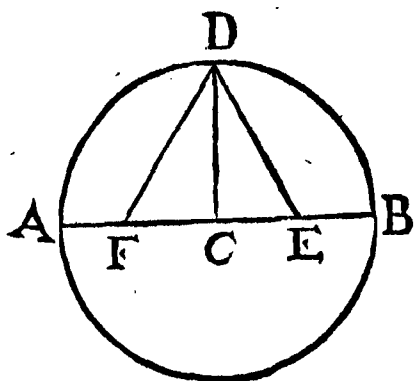


Sumatur centrum circuli F, & ducatur diameter AFG, & iungatur FB. Ab F ad AB ducatur perpendicularis FHK, & iungantur AK, KB. Rursus ab F ad AK ducatur perpendicularis FNLM, & iungatur KN. Igitur quia circ. $ABCG \equiv AEDG$, & circ. $ABC \equiv AED$: erit circ. $CG \equiv GD$, ideoque $CGD \equiv 2 CG$. Rursus quia $BF \equiv AF$, & anguli ad H aequales sunt, erit α ang. $BFH \equiv AFH$, ideoque circumf. $BK \equiv KA$, & $AKB \equiv 2 BK$, & hinc AK erit latus decagoni. Similiter patet esse circ. $BK \equiv AMK \equiv 2 KM$. Iam, quia $CGD \equiv AKB$, erit β circ. $CG \equiv BK \equiv 2 KM$. Sed circ. $CB \equiv AKB \equiv 2 BK$. Ergo γ circ. $BGG \equiv 2 BKM$, & ob id ang. $BFG \equiv \delta 2 BFM$. Sed ang. $BFG \equiv \epsilon BAF + ABF \equiv \zeta 2 BAF$. Ergo β ang. $BAF \equiv BFM$. Quum igitur Δa BFA, BFN sint aequiangula: erit $\eta AB: BF \equiv BF: BN$, & proinde $AB \propto BN$

$BN = {}^9 BFq$. Rurſus quia ang. ad L recti $\text{g. } 17. 6.$
 ſunt, & $AL = LK$: erit $\text{ang. } LAN = LKN.$ $\text{g. } 3. 3.$
 Sed quia recta $AK \wedge = KB$, eſt ang. $LAN =$ $\text{g. } 4. 1.$
 $\text{g. } 29. 3.$
 $\text{g. } KBA$. Ergo ang. $KBA = AKN$. Quare
 in Δ is aequiangulis ANK , ABK erit $BA: AK$
 $= KA: AN$, & hinc $AB \times AN = {}^9 AKq$.
 Ergo $ABq = {}^{\mu} AB \times BN + AB \times AN =$ $\text{g. } 2. 2.$
 $BFq + AKq$. Eſt autem BF latus hexagoni,
 & AK decagoni. Q. E. D. $\text{v. cor. } 15. 4$

* Schol.

Hic praxin faciliorem trademus problematis
 II. 4: In dato circulo pentagonum aequilaterum &
 aequiangulum deſcribere.

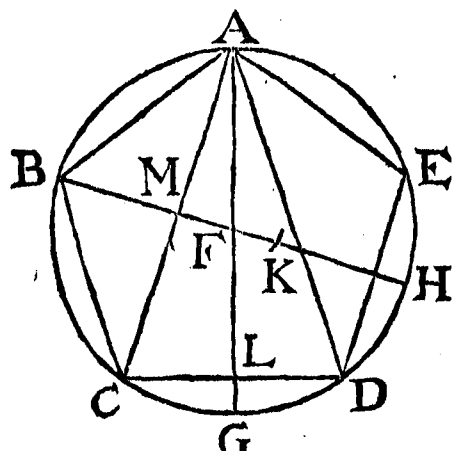


Super diametro AB
 ex centro C erigatur
 perpendicularis CD . Bi-
 ſecetur BC in E , & iun-
 gatur ED , cui capiatur
 aequalis EF . Iuncta
 FD erit latus pentago-
 ni in circulo ABD de-
 ſcribendi.

Nam quia (per 6. 2) $BF \times FC + CEq =$
 $EFq = EDq = CDq + CEq$: erit $BF \times FC =$
 $CDq = BCq$. Quum ergo ſit $BF:BC = BC:CF$:
 erit BF extrema ac media ratione ſecta. Sed ma-
 ior portio BC eſt latus hexagoni in circulo ABD .
 Ergo CF eſt latus decagoni in eodem (per ſch.
 praec.); & hinc $DF = \sqrt{(DCq + CFq)}$ latus
 pentagoni. Q. E. F.

PROP. XI. THEOR.

Si in circulo ABCDE, rationalem diametrum habente, pentagonum acquilaterum describatur: pentagoni latus AB est linea irrationalis, quae minor appellatur.



Sumatur enim circuli centrum F, & ducantur diametri AG, BH, & iungatur AC, & capiatur $FK = \frac{1}{2} AF$, quae erit ρ , quia AF ρ . Sed & BF est rationalis.

z. 16. 10.

o. 27. 3.

π . 32. 1.

g. 3. 3.

σ . 4. 6.

τ . sch. 4. 5.

ϵ . 15. 5.

ν . 22. 6.

ϕ . 8. 13.

χ . 1. 13.

ψ . sch. 12. 10.

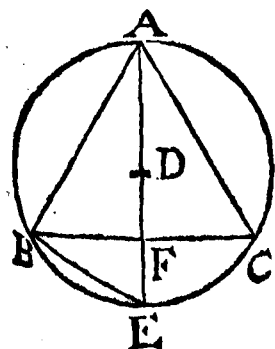
ω . 9. 10.

lis. Ergo $\frac{1}{2} BK$ est ρ . Et quia circumf. $ABG = AEG$, & $ABC = AED$: erit circ. $CG = GD$, & $\circ$ ang. $CAG = GAD$, item ang. $ACL = \circ$ ADL . Ergo π anguli ad L sunt recti, & hinc ϵ $CL = LD$, & $CD = 2CL$. Eadem ratione & anguli ad M recti sunt, & AC est $= 2CM$. Quia igitur Δ^a ALC , AFM aequiangula sunt: erit σ $LC : CA = MF : FA$, & τ $2LC : CA = 2MF : FA$, $= \epsilon$ $MF : \frac{1}{2} FA$; ideoque ϵ $2LC : \frac{1}{2} CA = MF : \frac{1}{4} FA$, id est $CD : CM = MF : FK$. Hinc componendo $DC + CM : CM = MK : KF$, & ν $(DC + CM)q : CMq = MKq : KFq$. Iam si AC extrema ac media ratione secetur, erit maior eius portio $\phi = CD$; ideoque erit χ $(DC + CM)q = 5CMq$. Hinc & $MKq = 5KFq$; ideoque ψ MKq est ρ , & MK ρ . Et quoniam $BF = \epsilon$ FK : erit $BK = 5FK$, & $BKq = 25FKq$. Hinc $5MKq = BKq$, & ob id ω BK non

non $\leq$ MK. Vtraque tamen p existente, erunt BK, KM p E. Quare MB est apotome^a & ipsi congruens MK. Dico & MB esse^a. 74. 10. apotomen quartam. Sit enim $\sqrt{(BKq - KMq)} = N$. Et quia KF $\leq$ FB, erit KB $\leq$ β β . 16. 10. FB $\leq$ BH rationali expositae. Deinde quia BKq : KMq = 5 : 1, & conuertendo BKq : Nq = 5 : 4 : erit^a N non $\leq$ BK. Ergo γ MB γ . 4. def. tert. 10. erit apotome quarta. Hinc, quum sit ABq δ . cor. 8. 6. = δ MB $\times$ BH, erit^a AB α quae vocatur & 31. 3. minor. Q. E. D. δ . 95. 10.

* Cor. Diameter circuli AG ex angulo A pentagoni regularis ducta & arcum CD a latere opposito subtensum, & latus ipsum oppositum CD ad angulos rectos bisecat.

PROP. XII. THEOR.



Si in circulo ABC triangulum aequilaterum ABC describatur: trianguli latus AB potentia triplum est eius DA quae ex circuli centro D.

Nam, producta AD in E, quia circumf. BEC est tertia pars circuli, & BE = $\frac{2}{3}$ EC: erit BE sexta pars $\frac{2}{3}$. 3. ax. 1. circuli, ideoque recta BE latus hexagoni = $\frac{1}{3}$ γ . cor. 15. 4. DA. Et quia ABq + BEq = $\frac{3}{2}$ AEq = 4 δ . 31. 3. DAq: erit ABq = $\frac{2}{3}$ DAq. Q. E. D.

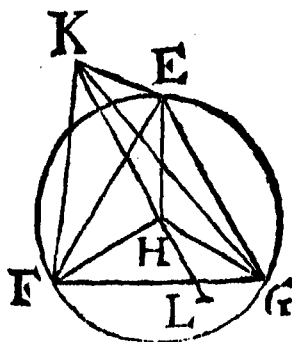
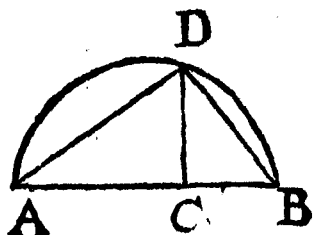
* Schol.

1. AEq : ABq = 4 : 3.
2. ABq : AFq = 4 : 3. Nam^a AEq : ABq = $\frac{1}{3}$ γ . cor. 8. 6. & 22. 6.
3. DF = FE. Nam Δ . EBD aequilaterum est, γ . 4. 1. & ADF ad BC perpendicularis^a. Ergo^a DF = FE. λ . cor. 3. 3.
4. Hinc AF = 3 FD.

Bb a

PROP.

PROP. XIII. PROBL.



Pyramidem + constituere, & sphaera comprehendere data; atque etiam demonstrare, quod sphaerae diameter AB est potentia sesquialtera lateris ipsius pyramidis.

μ. 9. 6.

ν. 2. 4.

Secetur AB in C ^μ ita, vt $AC = 2 CB$. Super AB describatur semicirculus ADB, & ex C ad AB ducatur perpendicularis CD, & iungatur AD. Fiat circulus EFG centro H interuallo CD, & in eo describatur ^ν triangulum aequilaterum EFG. Iungantur HE, HF, HG. Ex H plano huius circuli excitentur ad rectos HK, quae fiat $= AC$, & iungantur KE, KF, KG. EFGK erit tetraedrum desideratum.

ξ. 3. def. 11.

ο. 4. 1.

π. lemma sequens.

ρ. constr.

σ. 12. 13.

1. Etenim quia ang. KHE est $\frac{1}{2}$ rectus, ideoque $= ACD$, & $KH = AC$, $HE = CD$: erit ^ο $KE = AD$. Similiter $KF = AD = KG$. Et quoniam $AB = 3 BC$, & $AB:BC = \pi ADq:DCq$: erit $ADq = 3 DCq = \rho 3 HEq = \rho EFq$. Hinc $EF = AD$; & ergo $FG = GE = EF = AD = KE = KF = KG$. Sunt ergo Δa EFG, EKG, FKG, EKF aequilatera & ^τ aequalia. Ergo EFGK est ^τ tetraedrum.

2. Pro-

† Vel potius tetraedrum; quod & in sequentibus intellige.

2. Producatur KH in L vt sit HL = CB.
 Quia ν AC : CD = CD : CB : erit KH : HE ν . cor. 8. 6.
 = EH : HL. Ergo semicirculus super KL
 descriptus ϕ transibit per E, &, manente KL, ϕ . sch. 13. 6.
 conuersus transibit etiam per G & F, quod eo-
 dem modo ostendetur. Ergo $\propto$ sphaera data, $\propto$. 14. def. 11.
 cuius diameter est AB = KL, comprehendet
 tetraedrum EFGK. Q. E. F.

3. Quia AB : BC = ϵ 3 : 1 : erit conuerten-
 do AB : AC = 3 : 2. Est vero BA : AD ν =
 AD : AC, & hinc AB : AC = ψ ABq : ADq. ψ . 2. cor.
 Ergo ABq = $\frac{3}{2}$ ADq = $\frac{3}{2}$ KEq. Q. E. D. 20. 6.

L E M M A.

Demonstrandum autem est, esse AB : BC =
ADq : DCq.

Nam quia BA : AD = ν AD : AC : erit BA
 $\times$ AC = ADq. Et quia AC : CD = ν CD :
 BC : erit AC $\times$ CB = CDq. Hinc AB : BC
 = ω AB $\times$ AC : AC $\times$ BC = ADq : CDq. ω . 1. 6.
 Q. E. D.

* *Coroll.* Diameter sphaerae KL est sesquial-
 tera altitudinis KH tetraedri inscripti.

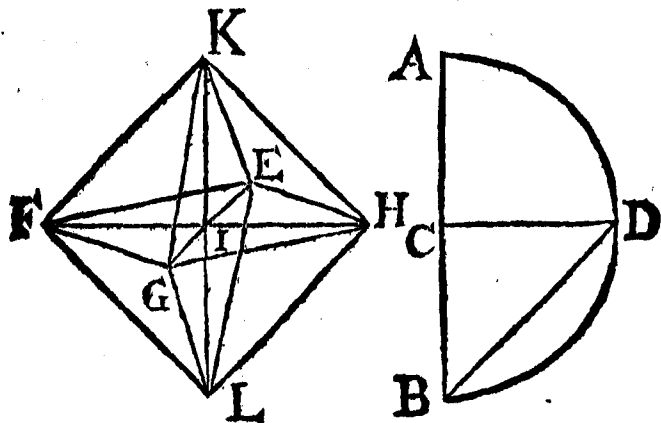
* *Schol.* Latus tetraedri FG potentia est sesqui-
 alteram altitudinis tetraedri HK. Nam FGq :
 HKq = ADq : ACq = ABq : ADq = 3 : 2.

PROP. XIV. PROBL.

Oc̄taedrum constituere, & eadem sphaera
comprehendere, qua & pyramidem; atque de-
monstrare, sphaerae diametrum AB potentia
duplam esse lateris ipsius oc̄taedri.

B b 3

Data



Data diameter AB bisecetur in C, & describatur super AB semicirculus, & ex C in AB ducatur perpendicularis CD, & DB iungatur. Fiat quadratum EFGH, cuius latus = BD. Ex puncto I intersectionis diametrorum EG, FH plano EFGH ad rectos ducatur KIL, & fiat $KI = IL = IE$, & iungantur KE, KF, KG, KH, LE, LF, LG, LH.

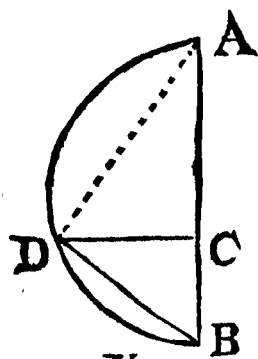
1. Nam quia α $EI = IH$ & ang. EIH rectus: erit β $EHq = 2 EIq$. Et quum $KI = IE$, ac ang. KIE rectus γ : erit & $KEq = 2 EIq$. Hinc $EH = KE$. Similiter $KH = HE$. Ergo Δ . EKH est aequilaterum. Eodem modo ostendemus, reliqua triangula, quorum bases sunt EF, FG, GH, HE & vertices K, L, esse aequilatera. Et patet omnia haec Δ a. inter se aequalia δ esse. Ergo. KLEFGHL est octaedrum. Q. E. F.

2. 3. Quia $KI = IE = IL$: semicirculus super KL descriptus transibit per E. Et manente KL conuersus hic semicirculus transibit etiam per F, G, H. Ergo sphaera diametri KL comprehendet hoc octaedrum. Sed & data sphaera. Nam quia $KE = EL$, & ang. in semi-

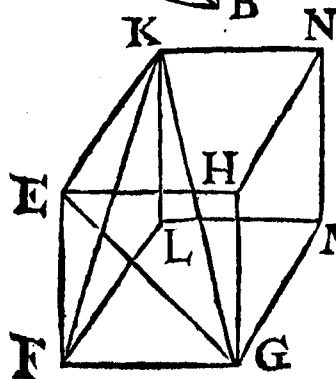
semicirculo KEL ζ rectus est, erit $KLq = \beta \zeta$ 31. 3.
 α KEq. Est vero $AB = 2 BC$, & $AB : BC$ 31. cor. 8. &
 $= ABq : BDq$. Ergo $ABq = 2 BDq = 2$ 20. 6.
 $KEq = KLq$. Hinc diametro datae AB ae-
 qualis est ipsa KL , ideoque octaedrum sphae-
 ra data comprehenditur; & AB potentia du-
 pla est lateris octaedri KE . Q. E. F. & D.

* *Coroll.* Octaedrum constat ex duabus pyrami-
 dibus aequalibus, basin quadratam habentibus, &
 altitudinem aequalem semidiametro sphaerae cir-
 cumscriptae.

PROP. XV. PROBL.



*Cubum constituere, &
 eadem sphaera comprehen-
 dere, qua & priores; at-
 que demonstrare, sphaerae
 diametrum AB lateris po-
 tentia triplam esse.*



Ex AB auferatur pars
 tertia BC , &, super AB
 descripto semicirculo, du-
 catur ad AB perpendicula-
 ris CD , & iungatur DB .

Fiat quadratum $EFGH$
 habens latus $= DB$. Ex
 punctis E, F, G, H plano
 $EFGH$ ad rectos ζ exci-

tentur EK, FL, GM, HN , quarum quaeque fiat
 $= EF$. Iungantur KL, LM, MN, KN .

1. Quidem ex constructione satis patet so-
 lidum genitum esse 'cubum. Q. E. F.

Bb 4.

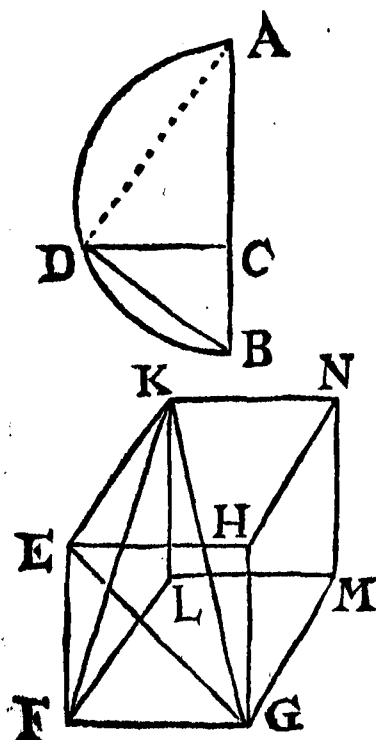
2. 3.

3. 12. 11.

1. 25. def. 11.

κ. 3. def. 11.
λ. sch. 13. 6.
μ. constr.

ν. 4. 11.



ξ. 47. 1.

ο. cor. 8. &
20. 6.

π. 13. 13.

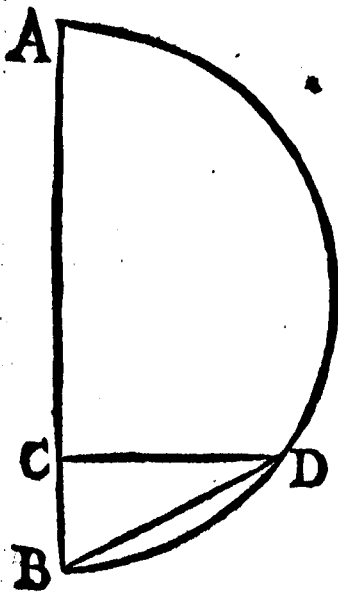
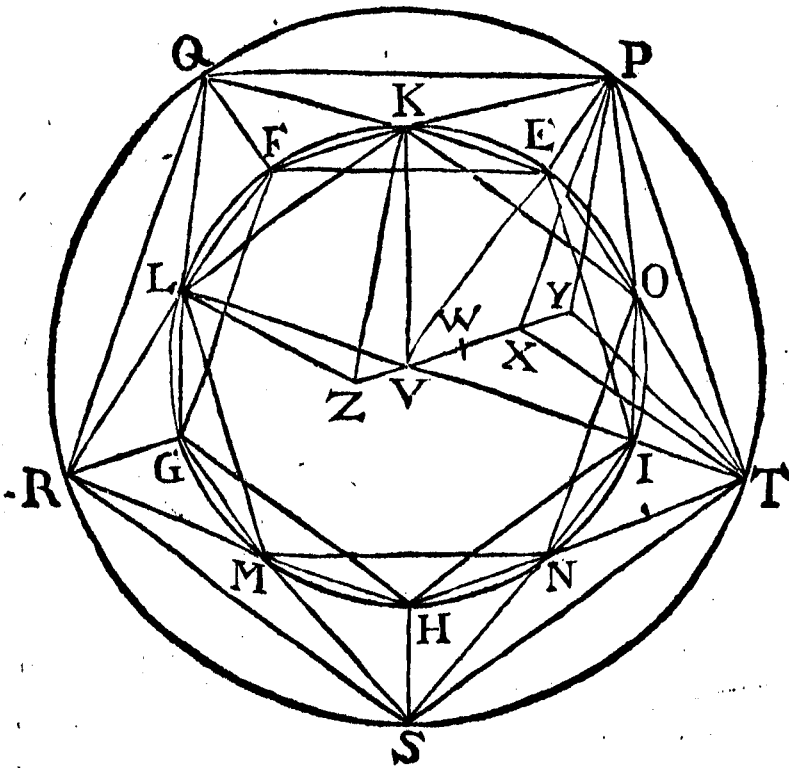
2. 3. Iungantur EG, KF, KG. Et quia ang. KEG rectus * est : semicirculus super KG transibit ^λ per E. Rursus quia ^κ anguli GFE, GFL recti sunt, ideoque GF plano EL recta ^ν est, & hinc ^κ ang. GFK rectus : alius semicirculus super KG transibit ^λ per F. Idem de reliquis punctis H, N, M, L ostendetur. Quare semicirculus super KG, manente KG, conuersus faciet sphaeram, quae cubum EM comprehendet. Dico autem, diametrum KG = AB. Nam quia EGq = ^ξ 2 EFq = 2 EKq : & KGq ^ξ = EGq + EKq : erit KGq = 3 EKq = ^κ 3 BDq. Sed quum sit AB = 3 BC, & AB : BC = ^ο ABq : BDq : erit ABq = 3 BDq = KGq. Ergo KG = AB. Itaque cubus factus est, quem data sphaera comprehendit, & diameter AB potentia tripla est lateris eius FG. Q.E.F & D.

* Schol. Quia AD erat ^π latus tetraedri sphaerae datae inscripti : patet diametrum sphaerae AB posse latera tetraedri & cubi in eadem inscriptorum.

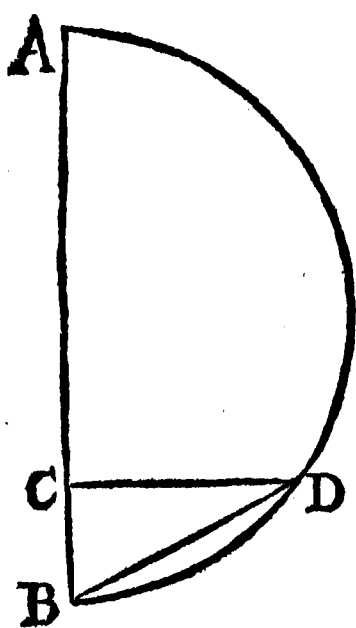
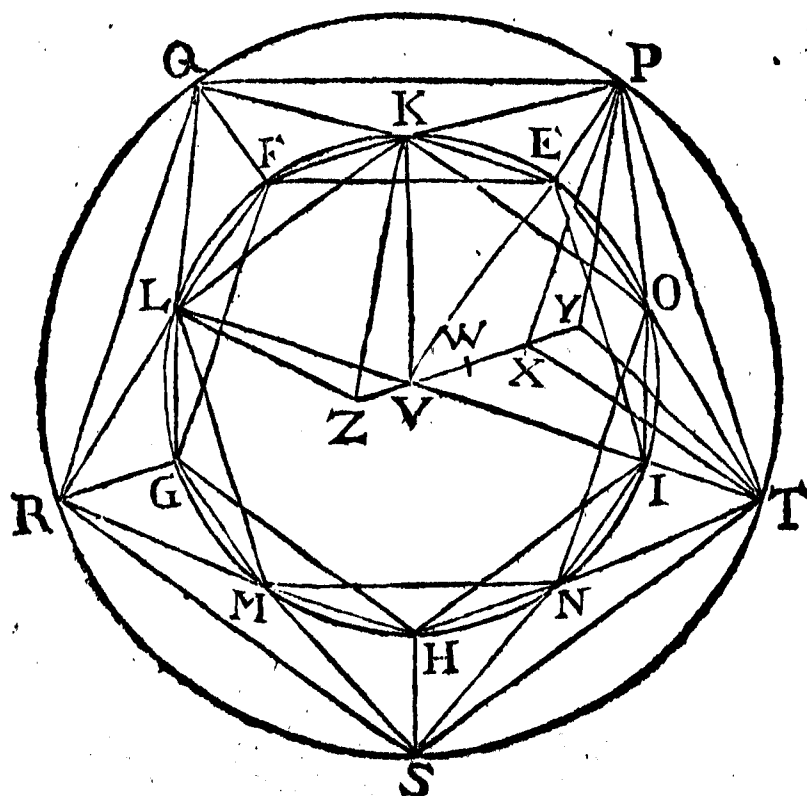
PROP. XVI. PROBL.

Icosaedrum constituere, & eadem sphaera comprehendere, qua & praedictas figuras ; atque

que etiam demonstrare, icosaedri latus irrationalem esse lineam, quae minor appellatur.



1. A datae sphaerae diametro AB abscindatur pars quinta BC, & super AB descripto semicirculo, ducatur ad AB perpendicularis CD, & BD iungatur, quo intervallo describatur circulus EFGHI. Huic inscribatur pentagonum aequilaterum & aequiangulum EFGHI. Circumferentiae EF, FG, GH, HI, IE bisecentur in K, L, M, N, O, & iungantur KF, FL, LG, GM, MH, HN,

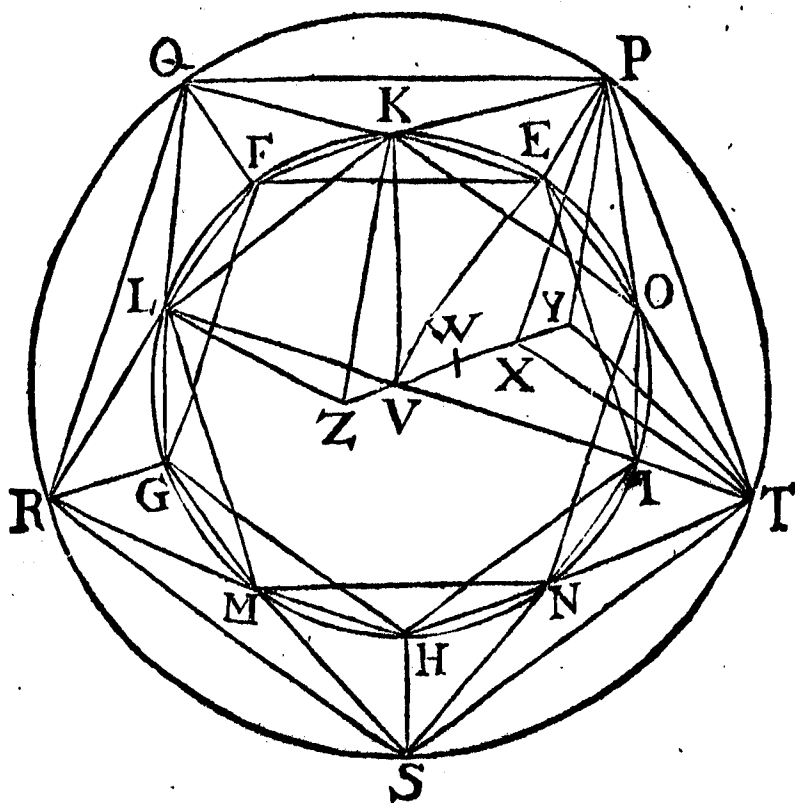


HN, NI, IO, OE, EK, item KL, LM, MN, NO, OK. Erit ergo KLMNO pentagonum aequilaterum & aequiangulum, & EO decagoni latus. A punctis E, F, G, H, I ipsi circuli plano ad rectos erigantur EP, FQ, GR, HS, IT, semidiametro VK fingillatim aequales, & iungantur PQ, QR, RS, ST, TP, PK, KQ, QL, LR, RM, MS, SN, NT, TO, OP. Iam quia EP, IT parallelae sunt, erit $PT = EI$, & hinc PT erit latus pentagoni aequilateri in circulo QRSTP ipsi EFGHI aequali. Idem de reliquis PQ, QR, RS,

p. 6. II.
c. 33. I.

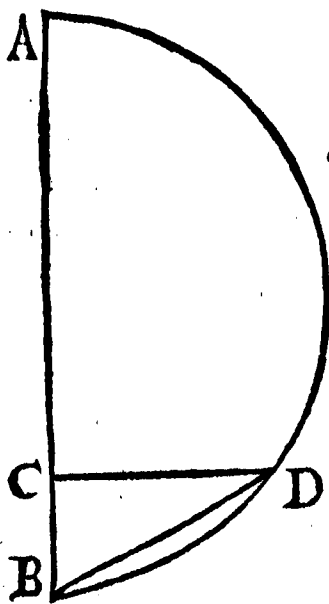
RS, ST demonstrabitur eodem modo. Erit ergo PQRST pentagonum aequilaterum. Et quia PE est latus hexagoni, EO vero decagoni: erit, ob ang. PEO rectum τ , PO latus ν pentagoni in eodem circulo. Idem patet de OT. Ergo POT erit Δ aequilaterum. Similiter ostenditur, ipsa PKQ, QLR, RMS, SNT esse Δ a aequilatera. Patet etiam ex dictis KPO, OTN, NSM, MRL & LQK Δ a aequilatera esse. Ex V centro circuli EFGHI ipsius plano ad rectos ducatur recta, in qua ex vna parte puncti V capiantur VX = lateri hexagoni, & XY = lateri decagoni, & ex altera VZ = XY. Iungantur PY, PX, YT, EV, KZ. Quia VX, PE, sunt ϵ parallelae & aequales ϕ : erit PX parallela & = σ EV lateri ϕ . constr. hexagoni, & ang. PXV rectus κ , hinc & PXY κ . sch. 29. 1. rectus. Quare, quum XY sit decagoni latus, erit PY = lateri pentagoni = PT. Idem iunctis TX, VI patet de recta YT. Ergo PYT est Δ . aequilaterum. Similiter aequilatera sunt Δ a reliqua, quorum vertex est Y, & bases sunt TS, SR, RQ, QP. Rursus quia ϕ KZq = KVq + VZq: erit KZ = lateri pentagoni = KL. Eodem modo, iunctis LV, LZ ostendetur LZ = KL. Ergo Δ . LZK aequilaterum est. Idem ostendetur de singulis Δ is, quorum bases sunt LM, MN, NO, OK & vertex communis est Z. Constitutum ergo est solidum viginti triangulis aequilateris contentum, quorum aequalitas etiam patet. Q. E. F.

2. Quia



ψ. 9. 13.
φ. constr.

α. sch. 13. 6.



2. Quia VX, XY sunt
lateralia hexagoni & deca-
goni: erit $\psi YV : VX =$
 $VX : XY$. Hinc $\phi YV :$
 $VK = KV : VZ$. Ergo
super YZ descriptus semi-
circulus α transibit per K .
Similiter quia $ZX = YV$,
& $PX = VX$, erit $ZX :$
 $XP = PX : XY$, & hinc,
ob ang. ad X rectos, semi-
circulus super ZY transi-
bit etiam per P . Quare

quum idem similiter de reliquis verticibus
angulorum icosaedri ostendi possit; constat,
semicirculum circa ZY manentem rotatum
transitum esse per vertices omnium angulo-
rum

rum icosaedri, & ergo hoc icosaedrum comprehensum iri sphaera diametri ZY. Et quoniam, bisecta VX in W, $WYq = 5 WXq$; α . 3. & 9. 13. ZY vero $= 2 WY$, ac $VX = 2 WX$: erit β . 15. 5. $ZYq = 5 VXq$. Est autem $AB = 5 BC$, & $ABq : BDq = 7 AB : BC$. Ergo quia $ABq = 5 BDq = 5 VXq = ZYq$: sphaera diametri ZY icosaedrum comprehendens erit datae sphaerae aequalis. Q. E. F.

3. Denique quia diameter data AB est ρ , & $ABq = 5 BDq$: erit δ & BD ideoque tota δ . 6. def. 10. diameter circuli EFGHI rationalis. Hinc quum latus pentagoni KL sit ϵ minor; & eadem KL sit quoque latus icosaedri: patet latus icosaedri esse irrationalem quae minor vocatur. Q. E. D.

Corollar.

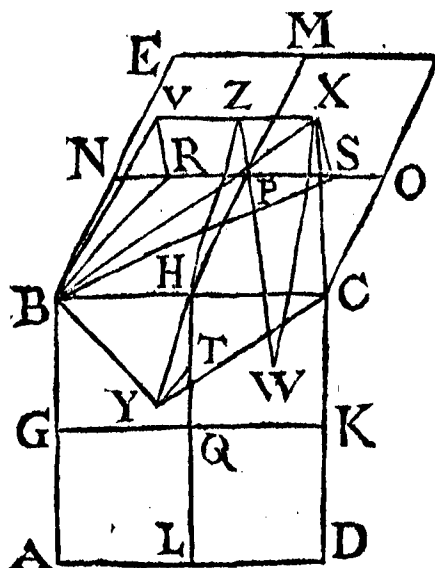
Sphaerae diameter potest quintuplum eius quae ex centro circuli quinque icosaedri latera ambientis. Et diameter sphaerae icosaedro circumscriptae composita est ex latere hexagoni & duplo latere decagoni, quae in eodem circulo describuntur.

PROP. XVII. PROBL.

Dodecaedrum constituere, & eadem sphaera comprehendere qua & praedictas figuras; atque etiam demonstrare, dodecaedri latus esse irrationalem, quae apotome appellatur.

1. Exponentur praedicti cubi ζ duo plana ζ . 15. 13. ABCD, BCFE, quae sibi inuicem recta sunt, & eorum singula latera bisecentur, & iungantur

η. 30. 6.



etur GK, HL, HM, NO. Rectae NP, PO, HQ secantur extremaⁿ & media ratione in R, S, T punctis, in quibus ad plana cubi & ad exteriores eius partes excitentur perpendiculares RV, SX, TY, quae fiant aequales ipsis RP, PS, QT.

θ. 4. 13.

ι. 47. 1.

κ. 7. 14.

λ. 33. 1.

μ. 3. def. 6.

ν. 6. 11.

ξ. 32. 6.

ο. 1. 11.

π. 2. & 7. 11.

Iungantur VB, BY, YC, CX, VX, quae terminabunt pentagonum dodecaedri. Nam, iuncta RB, quia^θ $PNq + NRq = 3 RPq$, & $BN = PN$, ac $RP = RV$: est $BRq = BNq + NRq = 3 RVq$, ideoque $BVq = BRq + RVq = 4 RVq$. Hinc $BV = 2 RV$. Sed quia $PN = PO$, ac ob id $RP = PS$: est $VX = RS = 2 PR = 2 RV$. Ergo $BV = VX$. Similiter BY, YC, & CX ipsis BV, VX aequales ostendentur. Sunt autem hae quinque rectae in vno plano. Nam ipsi RV vel SX ducatur parallela PZ ad exteriores cubi partes, & iungantur ZH, HY. Et quia^λ $HQ: QT = QT: TH$, & $HQ = HP$, ac $TY = QT = PZ$; est $HP: PZ = YT: TH$. Sed HP, YT, eidem plano BD ad rectos insistentes, sunt^μ parallelae. Ergo ZHY est^ν vna recta, & proinde^ξ in vno plano. Pentagonum^ο ergo est BYCXV, & aequilaterum. Dico etiam aequiangulum esse. Iungantur enim BX, BS. Quoniam NP secta est in R extrema ac media ratione,

tionem, & $SP = PR$: erit π $NSq + SPq = 3$ π . 5. 13. &
 PNq . Hinc $NSq + SXq = 3$ NBq , & $NSq +$ 4. 13.
 $SXq + BNq = 4$ NBq , id est $SBq + SXq =$
 $BXq = 4$ NBq . Ergo $BX = 2$ $NB = BC$.
 Quare in Δ is BVX , BYC erit ϵ ang. $BVX =$ 9. 8. 1.
 BYC . Similiter ostendetur ang. $VXC = BYC$.
 Ergo pentagonum $BYCXV$ est ϵ aequiangulum. 10. 7. 13.
 Si igitur ita ad vnumquodque duodecim la-
 terum cubi eadem construantur, quae hic ad
 latus BC : figura solida constituetur, duode-
 cim pentagonis aequilateris & aequiangulis
 & aequalibus contenta. Q. E. F.

2. Producat^{ur} ZP intra cubum. Occurret
 ergo diametro cubi, & ambae se bisecabunt τ , τ . 39. 11.
 quod fiat in W . Est ergo W centrum ν sphae- ν . 15. 13.
 rae cubum comprehendens, & dupla $PW =$
 ϕ lateri cubi, ideoque $PW = PN$. Et quia ϕ . 34. 1.
 $PZ = PS$, erit $ZW = NS$. Iam quum prae-
 terea $ZX = PS$, & $NSq + SPq = 3$ PNq : erit
 3 $PNq = ZWq + ZXq =$ XWq . Sed se- ι . 47. 1.
 midiameter sphaerae cubum comprehendens
 potest etiam ν triplum dimidii lateris cubi PN .
 Ergo XW est semidiametro sphaerae cubo cir-
 cumscriptae aequalis. Quare quia W est cen-
 trum: erit X in superficie sphaerae. Simili-
 ter vertex cuiuslibet reliquorum angulorum
 dodecaedri in superficie sphaerae esse demon-
 stratur. Ergo dodecaedrum sphaera com-
 prehensum est data. Q. E. F.

3. Quoniam λ $NP : PR = PR : RN$, ideo- λ . 3. def. 6
 que $\propto$ $NO : RS = RS : 2$ $RN = RS : RN + SO$; $\propto$. 15. 5.
 NO autem $>$ RS , ideoque $RS >$ $NR + SO$:
 erit λ rectae NO extrema ac media ratione se-
 ctae

ψ. 6. 13.

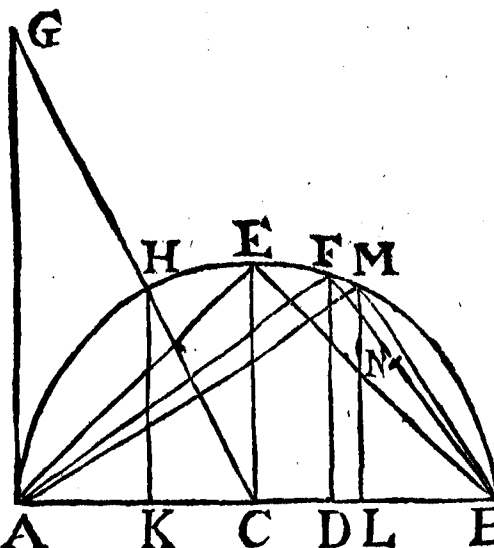
ctae maior portio ipsa $RS = VX$. Et quia sphaerae diameter, quae ψ potest triplum ipsius NO , est ρ : erit & $NO \rho$; ergo ψVX apotome. Q. E. D.

1. Coroll. Ergo latere cubi extrema ac media ratione secto, eius portio maior est dodecaedri latus.

* 2. Coroll. Liquet etiam, rectam subtendentem angulum pentagoni in dodecaedro esse latus cubi in eadem sphaera inscripti.

PROP. XVIII. PROBL.

Latera quinque figurarum exponere, & inter se comparare.



ω. 9. 6.

α. cor. 19. 5.

β. cor. 8. &

20. 6.

γ. 13. 13.

δ. 15. 13.

ε. 14. 13.

A K C D L B semicirculus AEB, & in AB perpendiculares ducantur CE, DF, & AF, FB iungantur. Et quia $AB = 3 BD$: est $\alpha AB = \frac{3}{2} AD$. Hinc quia $AB: AD = \beta ABq: AFq$: est $ABq = \frac{3}{2} AFq$. Ergo AF est γ latus tetraedri.

2. Quia $ABq: BFq = \beta AB: BD = 3:1$: BF est latus cubi δ .

3. Iunctis AE, EB, est $ABq: BEq = \beta AB: BC = 2:1$. Ergo BE est latus octaedri ϵ .

4. In AB ducatur perpendicularis $AG = AB$. Iuncta GC, a puncto H ducatur in AB per-

perpendicularis HK. Iam quia $HK : KC = \frac{2}{3}$ 2. 4. 6.
 $GA : AC = 2 : 1$: erit $HKq = 4 KCq$, ideo-
 que 5 $KCq = CHq = CBq$. Et quoniam
 $AB = 2 BC$, & $AD = 2 DB$: erit $DB^n = 2$ 4. 5. 5.
 CD , ideoque $CB = 3 CD$, & $CBq = 9 CDq$.
 Ergo $KC > CD$. Fac $CL = KC$, & in AB
 duc perpendiculararem LM, iunge MB. Quia
 $CBq = 5 KCq$; est $ABq = 5 KLq$. Ergo 9. 15. 5.
 KL est latus hexagoni in circulo quinque 1. cor. 16. 13.
 icosaedri latera ambientis, ideoque $AK =$
 $LB =$ lateri decagoni in eodem circulo. Sed
 $ML = HK = 2 KC = KL =$ lateri hexa- 11. 14. 3.
 goni. Ergo MB est ^{A} latus pentagoni in eo- 1. 10. 13.
 dem circulo, ideoque latus ^{u} icosaedri. 14. 16. 13.

5. Secetur BF extrema ac media ratione:
 erit maior eius portio BN latus dodecaedri. 1. cor. 17. 13.

6. Ex his liquet, latera tetraedri, octaedri
 & cubi esse $p \in$ diametro AB sphaerae. Nam
 quarum partium 6 est ABq, earum 4 est AFq,
 trium BEq, & duarum BFq. Ergo $\frac{2}{3}$ AFq = 5. 22. 5.
 $\frac{4}{3}$ BEq = 2 BFq, & BEq = $\frac{3}{2}$ BFq. Icosae-
 dri vero & dodecaedri latera nec inter se nec
 ad praedictarum figurarum latera sunt in ra-
 tionibus rationalibus: quia illius latus ^{u} est
 minor, huius apotome^o. 9. 17. 13.

7. Dico MB icosaedri latus maius esse latere
 dodecaedri BN. Nam ^{B} FBq : BDq = AB : 13. cor. 8 &
 $BD = 3 : 1$. Sed ADq = 4 BDq. Ergo 20. 6.
 $AD > FB$, ideoque $AL > FB$. Iam AL se-
 cta est extrema ac media ratione ^{n} , & maior 11. 9. 13.
 eius portio est KL; hinc quia & FB extrema ac
 media ratione secta est, & eius maior portio
 Cc BN

ε. 3. def. 6. BN est: erit KL ^ε > BN. Ergo ML = KL
 vel 7. 14. > BN, ideoque ε MB > BN. Q. E. F.
 ε. 19. 1.

Schol.

Dico praeter iam dictas quinque figuras non constitui aliam figuram †, quae sub figuris aequilateris & aequiangularis, inter se aequalibus, contineatur.

ε. 11. def. 11. Ex duobus enim angulis planis σ non constituitur angulus solidus. Ex tribus autem triangulis aequilateris & aequalibus constituitur angulus tetraedri, ex quatuor octaedri, ex quinque icosaedri: ex sex autem pluribusue nullus constituetur τ, quia sex anguli Δ aequilateri = ° 4 Rectis. Porro sub tribus quadratis continetur angulus cubi. Sub quatuor autem pluribusue τ nullus angulus solidus contineri potest. Sub tribus pentagonis aequilateris & aequiangularis ac aequalibus continetur angulus dodecaedri. Sub quatuor autem pluribusue nullus comprehendetur τ angulus solidus: quia eorum summa φ > 4 rectis. Ob eandem rationem ex aliis figuris polygonis aequilateris & aequiangularis nullus solidus angulus constitui potest. Ergo nec fieri potest figura solida ex figuris planis aequilateris & aequiangularis praeter quinque dictas. Q. E. D.

τ. 21. 11.
 υ. 5. sch.
 32. 1.

φ. 2. sch.
 11. 4.

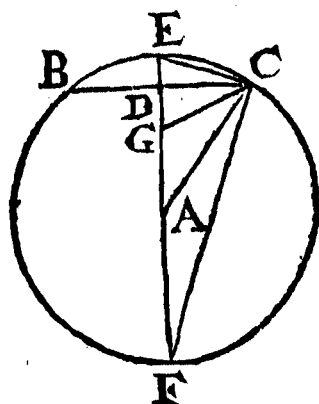
† Talem autem intelligit figuram, cuius singuli solidi anguli sub aequae multis planis angulis continentur.

E V C L I D I S E L E M E N T O R V M

L I B E R XIV. †

* * * * *

PROP. I. THEOR.



Quae a centro A circuli alicuius ad latus BC pentagoni aequilateri in eodem circulo descripti perpendicularis ducitur AD, dimidia est utriusque & eius AC quae ex centro, & lateris decagoni in eodem circulo descripti.

Nam producat DA in F & E; fiat $DG = ED$, & iungantur CE, GC. Iam quia tota circumferentia circuli $= 5 \text{ BEC}$: erit dimidia $FCE = 5 \text{ CE}$, quae dimidia est α ipsius BEC. Hinc quia $FC = 4 \text{ CE}$, erit β ang. $FAC = 4 \text{ DAC}$. Sed $FAC = \gamma 2 \text{ DEC}$. Ergo $2 \text{ DAC} = \text{DEC} = \delta \text{ DGC}$. Quare $AG = \epsilon \text{ GC} = \text{CE}$, ideoque $AD = \text{CE} + ED$, & $2 \text{ AD} = \text{CE} + \text{AE}$, id est, $AD = \frac{1}{2} \text{ CE} + \frac{1}{2} \text{ AC}$. Est autem CE latus decagoni. Q. E. D.

$\alpha. 3. \& 30. 3.$
 $\beta. 33. 6.$
 $\gamma. 20. 3.$
 $\delta. 4. 1.$
 $\epsilon. 32. \& 6. 1.$

L E M M A.

Si in circulo pentagonum aequilaterum describatur: quadratum quod fit ex latere BC

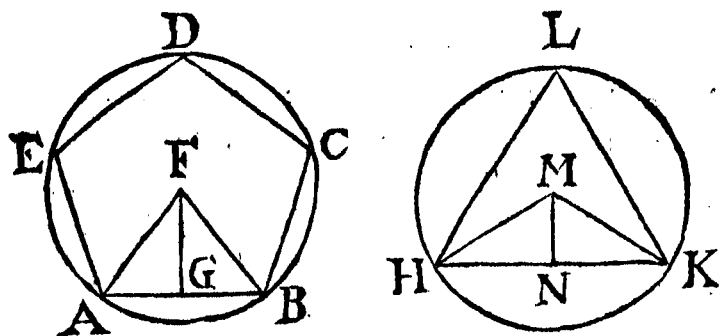
Cc 2

pen-

† Vel verius Hypsicles Alexandrini de quinque corporibus liber prior.

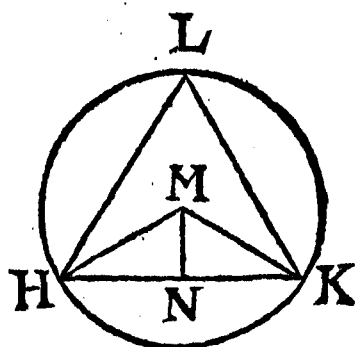
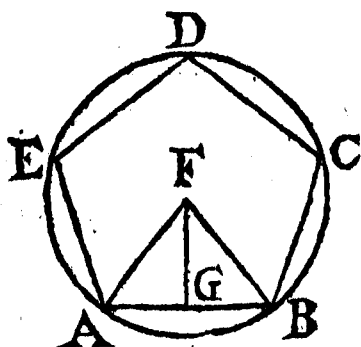
ius fit MO, quae ergo erit ^λ latus decagoni ^{λ. 5. & sch}
 in eodem circulo. Iam quia $5\text{ MNq} = \text{KLq}$ ^{9. 13.}
 $= \text{''} 3\text{ CEq}$; & $3\text{ CEq} : 5\text{ MNq} = \text{' } 3\text{ ABq} : 5$ ^{μ. 2. cor. 17}
 MOq ; erit $3\text{ ABq} = 5\text{ MOq}$. Sed quia FG ^{ν. 8. 13. &}
 est $\frac{2}{5}$ latus pentagoni in praedicto circulo: erit ^{7. 14.}
 $5\text{ FGq} = \text{' } 5\text{ MNq} + 5\text{ MOq} = 3\text{ CEq} + 3$ ^{ξ. 16. 13.}
 $\text{ABq} = \text{' } 15$ quadratis eius quae est ex centro cir- ^{ο. 10. 13.}
 culi circa ABCDE circumscripti. Atqui 5 FGq ^{π. lemma}
 $= \text{' } 15$ quadratis eius quae est ex centro cir- ^{praec.}
 culi circa FGH descripti. Ergo circuli circa ^{ε. 12. 13.}
 ABCDE, & FGH circumscripti aequales sunt,
 Q. E. D.

PROP. III. THEOR.



*Si fuerit pentagonum aequilaterum & aequi-
 angulum ABCDE, & circa ipsum circulus; a
 centro F autem ad unum latus AB perpendicu-
 laris FG ducta fuerit: quod tricies sub vno la-
 tere AB & perpendiculari FG continetur super-
 ficiei dodecaedri est aequale. Item*

*Si fuerit triangulum aequilaterum HKL, &
 circa ipsum circulus, cuius centrum M, & ab
 eo perpendicularis MN: quod tricies sub HK,
 MN continetur superficiei icosaedri aequale est.*



1. Iungantur AF, FB. Quia $5 AB \times FG = 10 \Delta AFB = 2$ pentagonis ABCDE: erit $30 AB \times FG = 12 ABCDE =$ superficiei dodecaedri.

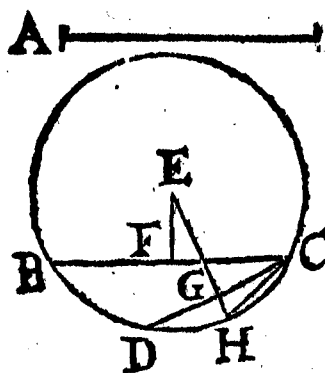
6. 42. 2.

2. Iungantur HM, MK. Quia $3 HK \times MN = 6 \Delta HMK = 2 \Delta HLK$: erit $30 HK \times MN = 20 \Delta HKL =$ superficiei Icofaedri. Q. E. D.

Coroll.

Ergo superficies dodecaedri est ad superficiem icofaedri in eadem sphaera, ut rectangulum sub latere pentagoni & perpendiculari ex centro circuli circumscripti ad illud ducta ad rectangulum sub latere trianguli & perpendiculari ex centro circuli circa triangulum descripti.

PROP. IV. THEOR.



Vt dodecaedri superficies ad superficiem icofaedri, ita est latus cubi A ad icofaedri latus BC.

Circulo BCD qui icofaedri triangulum, ideoque & dodecaedri pentagonum, comprehendit, inscribitur pentagoni latus CD, & trianguli CB. Ex centro

7. 2. 14

centro E ad BC, CD ducantur perpendiculares EF, EG. Producatur EG in H, & iungatur CH, quae erit latus decagoni. Hinc si EH + HC extrema ac media ratione secetur: erit τ EH maior portio. Sed $EG = \frac{1}{2} EH + \frac{1}{2} HC$, & $EF = \frac{1}{2} EH$. Ergo duplae ipsius EG extrema ac media ratione sectae maior portio erit τ EF. Sed ipsius A extrema & media ratione sectae maior portio τ est CD. Quare ψ A : CD = EG : EF ; ideoque $A \times EF = CD \times EG$. Est ergo $A : BC = A \times EF : BC \times EF = CD \times EG : BC \times EF =$ do-
 decaedri superficies ad icosaedri superficiem. Q. E. D.

 τ . 9. 13. ψ . 1. 14. ϕ . 3. sch.

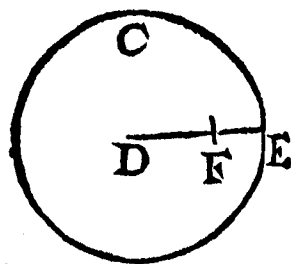
12. 13.

 τ . 1. cor.

17. 13.

 ψ . 7. 14. ω . 1. 6. α . cor. praec.

PROP. V. THEOR.



Qualibet recta linea extrema ac media ratione secta, quam rationem habet ea, quae potest quadratum totius & quadratum maioris portionis, ad eam, quae potest quadratum totius & quadratum minoris portionis, eandem habet cubi latus A ad latus icosaedri B.

Sit enim circulus C is, qui capit icosaedri triangulum & dodecaedri pentagonum in eadem sphaera descriptorum. Ex eius centro D ducatur utlibet recta DE, quae extrema & media ratione secetur, ut maior eius portio sit FD. Sit G latus dodecaedri, quae β erit maior portio rectae A extrema mediaque ra-
 C c 4 tione

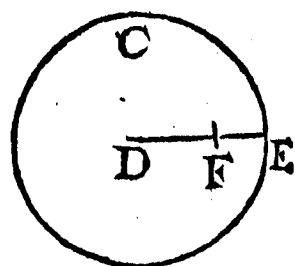
 β . 1. cor.

17. 13.

7. 12. 13.

8. 4. 13.

8. 7. 14.



3. sch. 9. &

5. 13.

4. 10. 13.

tione sectae. Et quoniam B latus trianguli icosaedri in circulo C est, erit $Bq = \gamma$ DEq. Sed $DEq + EFq = \delta$ DFq. Ergo $Bq : DEq + EFq = DEq : DFq = Aq : Gq$, & hinc $Aq : Bq = Gq : DEq + EFq$. Sed quum G sit latus pentagoni dodecaedri in circulo C; & DF latus decagoni in eodem: erit $Gq = \eta$ $DEq + DFq$. Quare $A : B = \sqrt{(DEq + DFq)} : \sqrt{(DEq + EFq)}$, & ergo γ , qualibet recta extrema & media ratione secta, quam rationem habet ea quae potest &c. Q. E. D.

PROP. VI. THEOR.

Vt latus cubi ad icosaedri latus, ita est dodecaedri solidum ad solidum icosaedri.

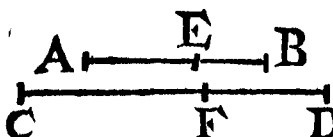
3. 2. 14.

1. 6. 12.

Quia enim idem circulus pentagonum dodecaedri & triangulum icosaedri γ in eadem sphaera capit: si e centro sphaerae in planum huius circuli intelligatur ducta perpendicularis; erunt pyramides, quae pentagonum & triangulum bases habent, aequae altae. Vt ergo pentagonum ad triangulum, ita est γ dodecaedri pyramis ad pyramidem icosaedri; ac proinde vt 12 pentagona ad 20 triangula, id est vt superficies dodecaedri ad superficiem icosaedri, ita dodecaedrum est ad icosaedrum. Nam quia perpendiculares ex centro sphaerae in circulos in sphaera aequales ductae, in centra eorum circulorum incidunt, & ergo aequales sunt:

sunt: dodecaedrum in 12, icosaedrum in 20
 aequales ' pyramides, in centro sphaerae ver-
 tices habentes, diuiditur. Est ergo ^u vt latus ^u. 4. 14.
 cubi ad icosaedri latus, ita dodecaedrum ad
 icosaedrum. Q. E. D.

PROP. VII. THEOR.

 *Si duae rectae lineae*
AB, CD extrema ac me-
dia ratione sectae fuerint:
erunt maiores portiones AE, CF vt totae AB,
CD.

Nam quia ^λ $AEq = AB \times BE$, & $CFq =$ ^λ. 17. 6.
 $CD \times DF$: erit 4 $AB \times BE : AEq =$ 4 CD
 $\times DF : CFq$, & componendo ^u $(AB + BE)q :$ ^u. 8. 2.
 $AEq = (CD + DF)q : CFq$. Quare ^v AB ^v. 22. 6.
 $+ BE : AE = CD + DF : CF$, & compo-
 nendo 2 $AB : AE = 2 CD : CF$, & alterne $AB :$
 $CD = AE : CF$. Q. E. D.

Corollar.

Dodecaedrum & icosaedrum in eadem sphaera
 eandem inter se rationem habent, quam, si recta
 linea extrema ac media ratione secetur, habet ea
 quae potest quadrata totius & maioris portiones,
 ad eam quae potest quadrata totius & minoris
 portiones.



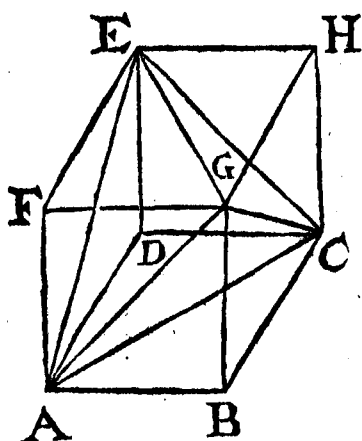
E V C L I D I S

E L E M E N T O R V M

L I B E R X V.

* * * * *

PROP. I. PROBL.



In dato cubo ABCDEFGH pyramidem describere.

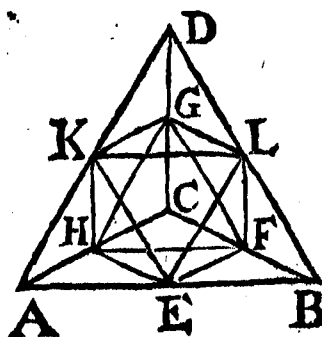
Ducantur diametri quadratorum GA, GE, GC, EA, EC, CA, quae omnes * inter se aequales sunt. Ergo triangu-
la EGC, EAG, AGC, EAC sunt aequilate-

ra, & aequalia. Proinde EGCA tetraedrum est, cubi angulis insistens, & ergo ipsi inscriptum^β.
Q. E. F.

α. 4. 1.

β. 31. def. 11.

PROP. II. PROBL.



In data pyramide ABCD octaedrum describere.

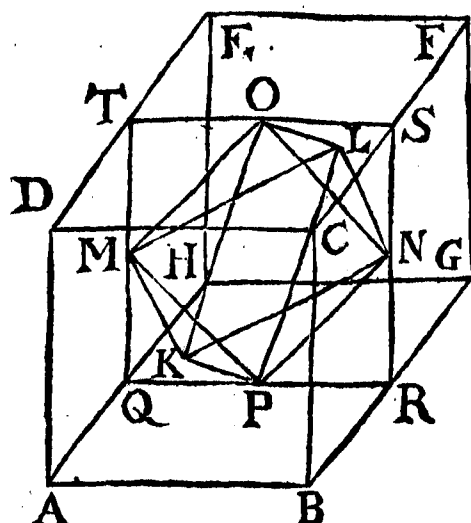
* Bifecentur latera tetraedri in punctis E, F, G, H, K, L. Haec puncta connectantur 12 rectis, quae omnes inter se^γ aequales erunt. Quare octo triangu-

la, quae bases habent rectas HG, GL, LE, EH & vertices K, F, aequilatera erunt & aequalia; & solidum sub ipsis com-

γ. 4. 1.

comprehensum octaedrum erit, dato tetraedro
inscriptum. Q. E. F.

PROP. III. PROBL.

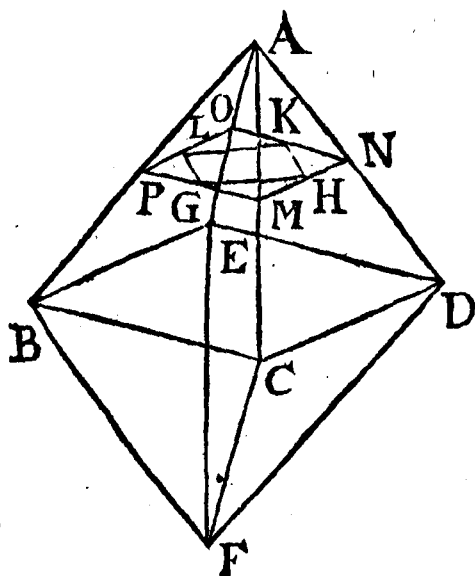


*In dato cubo AB-
CDEFG octaedrum
describere.*

Sumantur^δ qua-^δ 3. 8. 4
dratorum centra K,
L, M, N, O, P. Iun-
ctae 12 rectae ML,
LN, NP &c. con-
stituent octaedrum.
Nam per P, N, O,
M, ducantur late-

ribus quadrati AC parallelae QR, RS, ST, MQ,
quae iisdem lateribus, & ergo inter se aequa-
les erunt. (* Pater vero has rectas se mutuo
tangere; quia^δ QT, ST eandem ED, & QR,
SR eandem GB, & NR, QR eandem AH &c. bi-
secant). Ergo anguli MQP, NRP¹ sunt recti. 6. 10. 11.
Hinc quia MQ, QP, PR, NR, quippe aequa-
lium TQ, QR, RS dimidia, aequantur: erit
MP =² PN. Similiter ostenditur, MP, OM, 2. 4. 1.
NK, NL & reliquas aequari. Ergo 8 trian-
gula, quorum vertices L, K, bases latera qua-
drati MONP, sunt aequilatera & aequalia, &
constituunt ergo octaedrum cubo inscriptum.
Q. E. F.

PROP. IV. PROBL.



*In dato octaedro
ABCDEF cubum
describere.*

* Latera quatuor
triangulorum py-
ramidis BCDEA bi-
secantur in M, N,
O, P, & iungantur
MN, NO, OP, PM,
quae aequalesⁿ sunt
inter se, & paralle-
laeⁿ lateribus qua-

drati^t BCDE, & proindeⁿ angulos rectos in-
ter se comprehendunt. Quare MNOP est qua-
dratum. Deinde bisectis lateribus huius qua-
drati in G, H, K, L, iungantur GH, HK, KL, LG,
quaeⁿ sunt aequales, & angulos rectos[^] com-
prehendunt; quia anguli, quos cum rectis
MN, NO, OP, PM faciunt, semirectiⁿ sunt.
Ergo GHKL est quadratum. Si in reliquis 5
pyramidibus octaedri eadem fiant: consti-
tuentur 5 alia quadrata ipsi GHKL aequalia,
& cum ipso cubum terminantia, dato octae-
dro inscriptum. Q. E. F.

PROP. V. PROBL.

In dato icosaedro dodecaedrum describere.

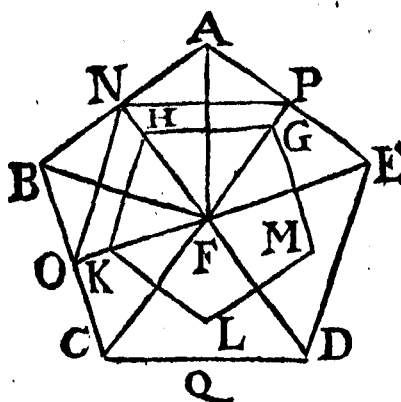
Sit ABCDEF pyramis icosaedri, cuius basis
pentagonum ABCDE. Iungantur centra cir-
culorum, in triangulis AFB &c. inscriptorum,
rectis GH, HK, KL, LM. Dico GHKLM
esse

η. 4. 1.

θ. 2. 6.
ι. 14. 13.
κ. 10. 11.

λ. 2. sch.
13. 1.
μ. 4. sch.
32. 1.

φ. 5. II.



pendiculari facere, & proinde^φ in vno omnes plano esse. Vnde patet, GHKLM esse pentagonum aequilaterum & aequiangulum, ideoque, si in reliquis vndecim pyramidibus ico-

saedri eadem construxerimus, proditura esse 12 pentagona huiusmodi, quae constituent dodecaedrum icosaedro inscriptum. Q. E. F.

PROP. VI. PROBL.

Quinque figurarum latera & angulos inuenire.

1. Quia icosaedrum continetur 20 triangulis, & vnum triangulum 3 lateribus; singula vero latera bis sumuntur: numerus laterum erit dimidius facti ex 20 & 3, qui est 30. Similiter dodecaedri laterum numerus est dimidius facti ex 12 & 5, qui est 30. Et sic porro in cubo, & reliquis, inueniemus numerum laterum, sumentes dimidium facti ex numero planorum & numero laterum vnius cuiusque plani.

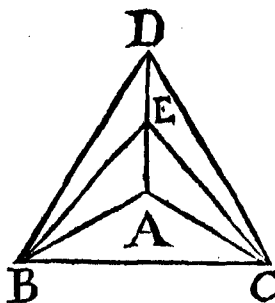
2. Numerum autem angulorum solidorum in his figuris habebimus, factum ex numero figurarum planarum & numero angulorum planorum in vnaqualibet diidentes per numerum angulorum planorum in quolibet solido angulo. Sic in icosaedro factum ex 20 &

& 3, quod est 60 partientes per 5, habebimus 12 angulos solidos. Q. E. F.

PROP. VII. PROBL.

Planorum, quae singulas quinque figuras continent, inclinationem inuenire.

1. De cubo manifestum est, eius plana ad se inuicem recta esse.



2. Sit tetraedri ABCD expositum vnum triangulum ABD, in quo a vertice B ad latus AD ducta sit perpendicularis BE. Si centris A, D, interuallo BE describantur duo circuli, & a puncto sectionis ad centra A, D iungantur rectae: angulus, quem continebunt, erit inclinatio planorum. Nam iungatur in altero triangulo ACD recta CE. Et quia $DE = EA$: erit CE etiam in AD perpendicularis. Sed quia $BCq = ABq = \psi$ $AEq + EBq$, & $EAq < CEq$: erit $BCq < CEq + EBq$, & ergo α ang. CEB acutus. Quare CEB erit inclinatio β planorum tetraedri. Hinc quum sit $CE = EB$, & $BC = AD$, manifestum est, praedicta constructione inueniri angulum $\gamma = BEC =$ inclinationi planorum. Q. E. F.

α . fch. 3. 3.

ψ . 47. 1.

α . 2. fch.

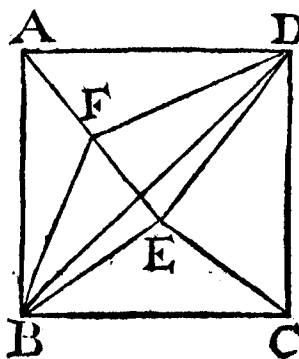
12. 13.

α . 13. 2.

β . 6. def. 11.

γ . 22. & 8. 1.

3. A latere octaedri describatur quadratum, ducatur eius diameter BD, & centris B, D interuallo perpendiculari, quae a vertice ad basin



basin trianguli in octaedro ducitur, describantur duo circuli. Rectae a sectione circulorum ad B, D iunctae continebunt angulum aequalem complemento inclinationis ad 2 rectos. Sit enim

ABCDE pyramis octaedri,

& BF perpendicularis in Δ^o ABE. Iuncta

DF erit perpendicularis in AE & = ipsi BF.

2. 19. 1.

Hinc $BFq + FDq = 2 BFq^{\delta} < 2 ABq$. Sed

2. 12. 2.

$BDq = 2 ABq$. Ergo $BDq > BFq + FDq$,

3. 6. def. 11.

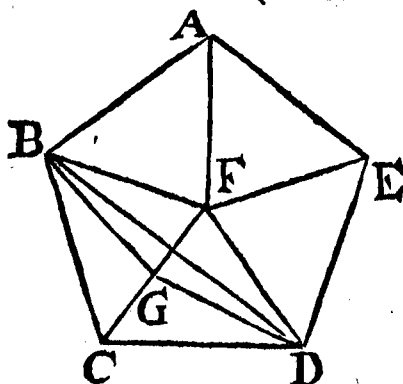
ac ob id ' ang. DFB obtusus, Ergo BFD^{ζ}

= complemento inclinationis planorum octa-

4. 22. & 8. 1.

edri ad 2 rectos. Datur ' autem ang. BFD

dicta constructione. Q. E. F.



4. A latere icosaedri, descripto pentagono aequilatero & aequiangulo ABCDE ducatur recta BD angulum pentagoni C subtendens, & centris B, D intervallo

perpendiculari cuiusvis e triangulis icosaedri

describantur duo circuli, a quorum sectione

ad B, D iunctae rectae continebunt comple-

mentum inclinationis planorum ad 2 rectos.

Sit enim ABCDEF pyramis icosaedri, & BG

perpendicularis vnus trianguli: erit DG per-

pendicularis proximi trianguli. Et quia $BG <^{\theta}$

BC: erit ' ang. BGD > obruso BCD, ideoque

ipse obrusus. Quare BGD complementum

in-

3. 19. 1.

4. 21. 1.

A geometric diagram of a cube. The vertices are labeled as follows: A (top-left-front), B (top-left-back), C (bottom-left-front), D (bottom-left-back), E (top-right-front), F (top-right-back), G (bottom-right-front), and H (bottom-right-back). The top face is a square A-B-E-F, the bottom face is a square C-D-G-H, the front face is a square A-E-G-D, the back face is a square B-F-H-D, the left face is a square A-B-C-D, and the right face is a square E-F-G-H. The edges are represented by lines connecting these vertices.

uallo FG rectae a puncto F bipartitae sectionis ipsius AC in latus pentagoni parallelum ED perpendicularis describantur duo circuli, & rectae a sectione ad terminos A, C ductae comprehendent complementum inclinationis planorum dodecaedri. Nam quia* AC est latus *. 17. 13.

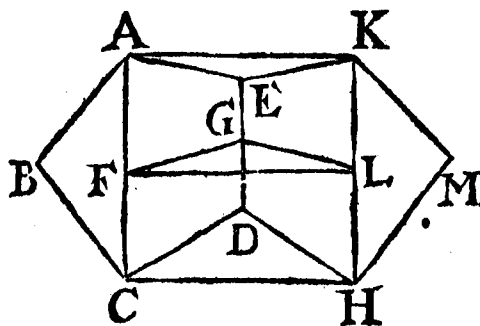
cubi, a quo dodecaedrum describitur: ponatur $ACHK$ esse vnum quadratorum illius cubi. Ergo erit KH recta subtendens angulum in pentagono adiacente, quod sit $EKM-HD$. Ex G ad ED ducatur perpendicularis GL , & iungatur FL . Et quia ED, AC sunt parallelae: erit GF in AC perpendicularis, ergo per centrum circuli pentagono $ABCDE$ circumscripti transibit ^{A} , & ED bisecabit ^{u} in λ . cor. 1. 3.
 G . Hinc similiter GL bisecabit ipsam KH . ^{u} . 3. 3.
Quare $FL = ^v AK = AC$. Et quia perpendicularis ex G in FL cadens $= ^* \frac{1}{2} AE$,
& $\frac{1}{2} FL = \frac{1}{2} AC \frac{1}{2} > \frac{1}{2} AE$: erit $\frac{1}{2} FL$ maior ξ . 8. 13
perpendiculari ex G in FL ducta, & ergo angulus, quem ea cum GF continet, maior ipso GFL . Hinc quia * haec perpendicularis bi-

Ddsecat

D d

fecat

p. 4. 1.

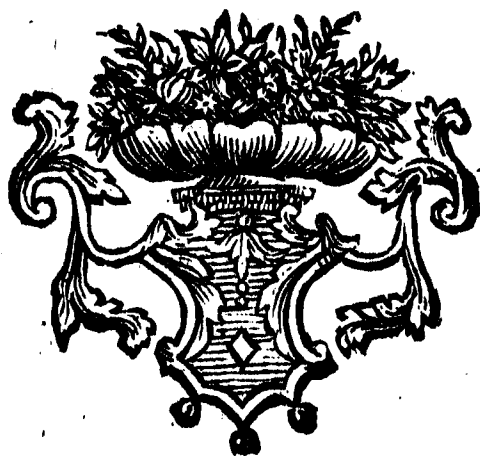


fecat ipsam FL,
erit ang. LGF $>^{\circ}$
GFL + GLF,
ideoque obtusus,
& ob id comple-
mentum inclina-
tionis pentagono-

rum dodecaedri. Sed quia ex modo dictis
est $FG = GL$, atque ostensa est $FL = AC$:
patet, dari ang. FGL per traditam constructio-
nem. Q. E. F.

F I N I S

ELEMENTORVM EVCLIDIS



LITTERIS GEORGII SAALBACHII.

