# ELEMENTA
# EVCLIDIS

# ELEMENTORVM EVCLIDIS LIBRI XV

AD GRAECI CONTEXTVS FIDEM RECENSITI ET AD VSVM TIRONVM ACCOMMODATI

Ebenecht del. Bernigeroth sc.

*LIPSIAE*

SVMTV IO. FRIDER. GLEDITSCHII

MDCCXXXXIII.

ILLVSTRISSIMO DOMINO

DOMINO

CHRIST. GOTTLIEB

DE HOLZENDORF

DYNASTAE IN BAERENSTEIN OBER- ET NIEDER-LICHTENAV ETC.

REGI POLON. ET ELECT. SAX. AB INTIMIORIBVS CONSILIIS ECCLESIASTICI SENATVS PRAESIDI CVBICVLI REGII COMITI ETC.

# ILLVSTRISSIME
# DOMINE

*Quum in eorum quam maximo numero, qui vel virtutum TVARVM splendore percussi TE admirantur, vel singulari TVA humanitate & benignitate capti TE diligunt & venerantur, nemo sit, cui ego in TE admirando venerandoque concedam: dudum exoptaui aliquam occasionem, quo erga TE animo*

 *sim*

*ſim affectus, publice profitendi. Equidem non ignoro, me eum non eſſe, qui par ſit magnis TVIS virtutibus laudandis, vel ex cuius iudicio ad TVAE gloriae amplitudinem aliquid accedere poſſit, quod ſi poſſet a me fieri, nihil foret, in quo efficiendo omne meum ingenium, ſtudium, diligentiam lubentius collocarem. Sed ita fere natura eſt comparatum, vt animus magnarum virtutum admiratione impletus cum alios quam plurimos teſtes velit habere, tum eum maxime, cuius admiratione eſt occupatus. Quare, etſi diu animo dubius pependi, mitteremne ad TE, DOMINE, hoc Eu-*

*clideum*

*clideum opus, curis meis ad vsum tironum vtcunque accommodatum, quippe quod longe infra TVAM dignitatem, neque TVA persona satis dignum videbatur, non potui tamen a me impetrare, vt hanc dudum exoptatam occasionem dimitterem, summae admirationis & venerationis, qua TE colo, & quam TIBI verbis coram satis declarare pudor meus non sinit, publicum nunc edendi monumentum. Confirmabat deinde animum meum hoc, quod bene intelligebam, si quo illustri nomine haec mea Euclidis editio esset inscribenda, non aliud potius, quam TVVM, mihi deligen-*

 *dum*

*dum esse. Namque quum TVAE sapientiae demandata sit huius Academiae cura, in qua per aliquot annos mathemata priuatim docui: officii mei partem putabam, TIBI vitae meae academicae reddere rationem, oculisque TVIS meorum studiorum specimen aliquod subiicere. Quae quum ita sint, audeo, ILLVSTRISSIME DOMINE, TIBI hunc libellum ea qua par est reuerentia dicare, TEque maximopere rogo, vt eum, siue tanquam addictissimi TIBI animi mei tesseram, siue tanquam officiorum meorum pignus, serena fronte excipere digneris. Tanta est TVA humani-*

*manitas, & in omnes, qui TE adeunt, facilitas, vt animo plane confidam, hisce meis precibus a TE locum relictum iri; in quo etiam, vt spero, me adiuuabit ipsum nomen Euclidis, qui parens eius scientiae recte putatur, quam quanti TV facias, cum illud declarat, quod eximiae spei Filium ea in primis erudiri voluisti, tum quod nuper in morte Hausenii nostri, excellentis Geometrae, magnam iacturam factam esse iudicasti. Ceterum & illud TE vehementer rogo, vt me meaque omnia TVO fauore & patrocinio complectare, & ita de me existimes, me semper tantam operam daturum esse, vt*

*ne*

*ne TVO patrocinio videar indignus, quanto animi ardore, vt TIBI longae iucundaeque vitae felicitas, TVIS que eximiis virtutibus largissima remuneratio contingat, a Deo immortali expeto*

ILLVSTRISSIMI TVI
NOMINIS

Scribeb. Lipsiae
XXIII Septembr.
CIↃ IↃCC XXXXIII

addictus deditusque

Georg. Frider. Baermannus.

# EDITORIS PRAEFATIO

Euclidis Elementa omnibus, quotquot ad mathesin discendam animum appellunt, non legenda solum, sed & fere tota ediscenda esse, communis olim fuit magistrorum huius artis sententia, & hac nostra etiam aetate, in qua tanta Elementorum Geometriae copia instructi dicam an obruti sumus, omnes mecum confitebuntur, qui in Euclideorum Elementorum lectione ea qua par est diligentia sunt versati. Neque hoc tam suscepti operis amore, quam idoneis rationibus inductus iudico; quibus exponendis & his id persuadere possem, qui haec Elementa nondum lege-

legerunt, & eorum quoque criminationibus occurrere, qui, quum Euclidis hos libros ſiue carptim ſiue certe oſcitanter legerint, deinceps neſcio quem commodiorem in tradendis propoſitionibus ordinem, quam faciliorem & beuiorem in demonſtrationibus viam iure deſiderare poſſe ſibi videntur. Verum quia horum argumentorum longior foret tractatio, quam praefandi breuitas patitur: vnam tantum rationem commemoraſſe ſufficiet, ob quam horum Elementorum lectio tironibus non vtilis ſolum ſed & neceſſaria eſt dicenda. Scilicet omnes, qui poſt Euclidis tempora aliquid in Geometria ſublimiori, vel in Mechanica, Optica aut Aſtronomia a ſe inuentum litteris prodiderunt, quemadmodum demonſtrationum ſuarum plurimas ex iis duxerunt, quae in his Elementis ab Euclide ſunt oſtenſa, ita & ſaepe ad eorum tanquam fontes lectores amandarunt. Cuius rei quae ſint rationes, intel-

intellectu non eſt difficile. Namque veteres Geometrae alium Auctorem citare non poterant: quum multis poſt Euclidem ſeculis nemo fuiſſet, qui tanta arte detextam Euclidis telam retexere, & ſub noua quadam forma tironum oculis ſiſtere voluiſſet. Ii vero, qui noſtrae aetati propiores fuerunt, his tantum exceptis, qui ipſi vniuerſae matheſeos elementa conſcripſerunt, ad alium elementorum Geometriae ſcriptorem lectores ſuos commode non potuerunt ablegare, cum alias ob cauſſas, tum ob hanc potiſſimum, quod nullius Auctoris elementa Geometriae aeque vulgata ſunt, atque haec Euclidea, quae in omnes terrarum regiones, ſimul ac ad eas Geometria acceſſit, perlata eſſe conſtat, & ex quibus tanquam fontibus ceteri riuulos ſuos deduxerunt. Quae cauſſa, ſicut pleroſque recentiorum Mathematicorum impuliſſe videtur, vt Euclidea Elementa, vbi opus erat, in demonſtrationibus ſuis citarent, ita & eos, opinor, qui poſthac ſcribent, commouebit, certe commouere debet, vt hunc veterum morem ſequantur. Quum ergo ad tot tam admirabilia excellentiſſimorum ingeniorum inuenta aditus iis ſit praecluſus, qui Euclidis Elementis ſunt deſtituti, vel eorum lectionem negligunt: neminem fore confido, qui non intelligat, quam ſit neceſſarium matheſeos amatoribus, vt in Euclidea ſchola tirocinium ponant.

Quae quum ita ſint, communi vtilitati me aliquo modo conſulere poſſe putabam, ſi hosce Euclideos libros, quorum exemplaria in noſtris bibliopoliis inde ab aliquot annis deſiderabantur, denuo edendos curarem. Vt autem haec noua editio quam plurimorum vſibus inſeruire poſſet: operam mihi dandam eſſe intelligebam, vt talia exemplaria ederentur, quae neque mole ſua neque pretio emtores deter-

deterrerent. Quare quum ea horum Elementorum editio, quam eximius, dum viueret, Geometra, Iſaacus Barrowius, iuuenis olim Cantabrigiae parauerat, breuitate ita ſe commendaſſet, vt & in Germania typis quondam recuſa, & plurimorum manibus huc vsque trita eſſet: in animum inducebam, huius editionis aliquod exemplar typis iterum deſcribendum dare. Sed poſtea mutaui conſilium, quum perpenderem, huic quamuis elegantiſſimae editioni ineſſe tamen aliquid, quod aliquos lectores offendere meminerim, & quod editioni aliqua ſaltim ex parte meliori locum relinquat. Scilicet qui Barrowianam Euclidis editionem cum Graecis codicibus contulerunt, non ignorant, in ea multarum propoſitionum demonſtrationes immutatas, nonnullarum quoque omnino ſublatas eſſe, aliis, quas Graecus Euclides non habet, in earum locum ſubſtitutis. Quod quanquam apud multos Lectores facile excusatur breuitatis studio: sunt tamen harum rerum intelligentes, qui id factum non esse mallent. Dicunt enim primo, difficillimum esse, Euclideis demonstrationibus alias substituere, quae, quum breuiores sint, genio horum Elementorum, & purae simplicitati huius Geometriae aeque conueniant; idque ipsum illum celeberrimum Euclidis editorem suo exemplo docuisse in demonstrationibus, quas plurimis Libri II. propositionibus adiunxit. Deinde negant, illum, qui se Euclidem edere profiteatur, munere suo rite fungi, si lectoribus alia tradat, quam quae ipsi legerent, si Graecis codicibus vterentur. Quae, quum non exiguam veri speciem habere mihi viderentur; neque ego in tanti viri opere aliquid immutare auderem: statui, de noua prorsus editione Latina Euclidis paranda mihi cogitandum esse, quae Graeci textus demonstrationes satis fideliter

exhi-

exhiberet, in ceteris vero Barrowianam breuitatem, quantum eius fieri poſſet, imitaretur.

Sumta itaque in manus praeſtantiſſima Operum Euclidis editione, quae cura doctiſſimi viri, Dauidis Gregorii, Oxoniae prodiit, ex ea textum Latinum definitionum & propoſitionum deſcripſi ad verbum, pauciſſimis * exceptis, in quibus ſiue ſenſus ſiue Graecus contextus aliquam mutationem poſtulabat. Deinde perlecta vniuscuiusque propoſitionis demonſtratione, eam ſic reddere ſtudui, vt, ſeruato eodem ordine, quo Euclides ſyllogiſmorum ſeriem inſtruxerat, totam tamen demonſtrationem in arctius quaſi ſpatium cogerem. Hoc autem quatuor potiſſimum modis efficere volui, quibus & Iſaacum Barrowium vſum eſſe videbam. Nam primo ἔκθεσιν, quam

 Eucli-

* Sunt illae prop. 7. L. I. prop. 28. L. VI. prop. 10. L. VIII. & prop. 26. L. XI.

Euclides ſingulis propoſitionibus ſubiungit, & in qua quidquid in propoſitionibus vniuerſaliter enunciatum fuit ad ſingulares ſchematum appoſitorum lineas applicat, ipſis propoſitionibus incluſi, ita tamen, vt ne ἔκθεσις cum propoſitione commiſceretur, ſed vt quaeque propoſitio abſolutum ſenſum haberet, etiam ſi inter legendum litterae illae maiuſculae, quae ad ſchema referuntur, & ἔκθεσιν continent, omitterentur. Quod ita fieri in propoſitionibus mathematicis, ſaltim ſi tironibus ſcribatur, conſultum eſſe exiſtimo, propterea quod propoſitiones ipſae memoriae mandandae ſunt, non autem earum ἔκθεσες, quippe quae ſolis demonſtrationibus inſeruiunt. Secundo, ſyllogiſmorum maiores, quas vocant, propoſitiones, quae in omni demonſtratione ex ſuperioribus ſumuntur, & quas Euclides ſolet totidem verbis plerumque repetere, omiſi, indicaui tamen per numeros, alphabeti

beti Graeci litteris in margine adſcriptos, ea loca, in quibus eas, ſi ſponte non ſuccurrant, lector euoluere poteſt.* Tertio pro quibusdam verbis notas illas adhibui, quae apud Mathematicos dudum vſu receptae ſunt. Habent autem harum notarum pleraeque non hunc ſolum vſum, vt tanquam ſcripturae compendia textum breuiorem reddant, ſed &, ſi quis iis ſemel adſueuerit, quod fieri poteſt facillime, menti in cogitando non exiguo ſunt adiumento, quia quantitatum, de quibus cogitandum eſt, mutuam relationem citius longe & diſtinctius, quam litterae vel vocabula, animo intuendam praebent. Propterea veniam mihi, vt ſpero, dabunt aequi lectores, quod in X. Libro horum Elemento-



* Videlicet horum numerorum poſterior deſignat Librum, prior huius libri propoſitionem. Praeterea def. ſignificat definitionem, ax. axioma, & poſt. poſtulatum.

rum quatuor nouis notis vſus fui, quum eae, quae in Barrowiana editione ibi occurrunt, nimis incommodae ſint. Eſt enim earum vna alteri adeo ſimilis, vt inter legendum facillime poſſint confundi. Quare quum his, ſine lectorum incommodo, me vti vix poſſe intelligerem, neque apud alium Auctorem alias ipſis pares reperiſſem: auſus ſum nouas iſtas effingere, quas in limine dicti Libri expoſui. Perpaucae quum ſint, facile poterit lector earum poteſtatem memoria retinere, praeſertim vbi animaduerterit, eas ex initialibus litteris Graecorum, quibus ſubſtituuntur, vocabulorum Σύμμετρα, ἀσύμμετρα, ἄλογα, leuiter inflexis litterarum ductibus, vel lineola appoſita, eſſe efformatas. Quartum denique, quod mihi in contrahendis Euclideis demonſtrationibus nonnunquam auxilio fuit, hoc eſt, quod quibusdam propoſitionibus ſubiunxi ſcholia vel corollaria, in quibus eiusmodi propo-

ſitiones

ſitiones oſtenſae ſunt, quae multorum ſequentium theorematum & problematum demonſtrationes iterum tanquam principia ingrediuntur.

Sed praeter haec ſcholia & corollaria, viſum etiam eſt alia addere, in quibus ex Euclidis propoſitionibus aliae, quarum vel ad inuentionem, vel ad aliorum Auctorum demonſtrationes intelligendas, frequentiſſimus vſus eſt, & quae in vulgatis aliorum Auctorum Elementis Geometriae habentur, ſine longa ratiocinatione colliguntur. Pleraque horum ſcholiorum e Barrowiana editione huc transſcripſi, nonnulla, ſed perpauca, ipſe addidi. Nam omnium horum ſcholiorum numerum mediocrem eſſe volui, memor quippe, non theſaurum geometricarum propoſitionum mihi condendum, ſed Elementa Geometriae edenda fuiſſe. Singula autem haec ſiue ſcholia, ſiue corollaria, ſiue alia, quae in Graecis exemplaribus horum Elementorum vel omnino non leguntur, vel ſaltim aliis in locis, demonſtrationum contextui interſperſa, reperiuntur, aſteriſcis notaui. Erunt forſitan, qui mirabuntur, cur talibus propoſitionibus ſcholiorum titulum adſcripſerim, quibus corollariorum potius nomen conuenire exiſtimabunt. His autem reſpondeo, me in his quoque minutiis ad indolem Euclidei operis, quantum poſſem, accedere voluiſſe, in quo video, eas fere ſolas propoſitiones corollariorum vel πορισμάτων titulo inſignitas eſſe, quae, quum in demonſtratione alicuius theorematis vel problematis obiter oſtenſae ſint, dein ex ea quaſi excerpuntur, &, abſoluta demonſtratione, ſeparatim enunciantur, quo earum ad ſequentes demonſtrationes expeditior ſit vſus. Quod tandem ad ſchemata attinet, ligno inciſa, etſi curaui, vt ea illis, quae Oxonienſis Operum Euclidis editio habet, ſimilia eſſent,

fateor

fateor tamen, nos illarum non aſſequi potuiſſe elegantiam.

Haec ſunt, quae de inſtituti operis ratione lectores monere volui, & ex quibus ſatis, opinor, apparebit, me omne conſilium operamque in hoc intendiſſe, vt & verum & integrum Euclidem ipſis in manus traderem. Vt autem hi, qui ad eius lectionem primum accedunt, aliquam eius notitiam afferant, non erit alienum, huius Geometriae ideam breuiter adumbrare. Totum hoc opus duabus conſtat partibus, quarum altera contemplationem ſuperficierum, altera ſolidorum complectitur. Et in quatuor quidem primis libris traduntur, quae figuris planis, circulo puta & rectilineis, abſolute ſpectatis conueniunt, & quae ad earum aequalitatem, ac angulorum laterumque in illis magnitudinem cognoſcendam conducunt. Sextus liber de ſimilitudine figurarum planarum agit, ea-

rum-

rumque, item angulorum & rectarum linearum, ad ſe inuicem rationes inueſtigare docet. Eius gratia in quinto libro tradita eſt proportionum, quae inter magnitudines eſſe poſſunt, vniuerſalis θεωρία. Hiſce prima pars huius Geometriae abſoluitur. Solidorum contemplatio commenſurabilium & incommenſurabilum notitiam requirit, ad quam doctrina de numeris opus eſt. Eorum itaque librorum qui ſextum ſequuntur, tres priores de numeris copioſe exponunt, ac ob id arithmetici vocari ſolent. Decimus rectarum linearum & ſpatiorum irrationalium, hoc eſt, datis rectis lineis vel ſpatiis incommenſurabilium, doctrinam tradit. Poſtremi quinque in ſolidorum contemplatione verſantur, & ea docent, quae ad illorum tam dimenſionem, quam proportionem & in ſe inuicem inſcriptionem ſpectant. Nunc reliquum eſſet, vt ſingulorum etiam librorum argumenta commemorarem.

Sed

Sed praeterquam quod hac enarratione facile carere poterunt, quibus animus eſt, integra haec Elementa a capite vsque ad calcem perſpicere (quod vt tirones faciant, maximopere ſuadeo): vereor, ne, ſi ea percurram, haec praefatio, quae iam praeter opinionem longiuſcula facta eſt, iuſtos limites excedat. Vnum hoc addam, ſi hanc meam operam doctis viris probari intellexero, curaturum me eſſe, vt Euclidis Liber Datorum, Theodoſii ſphaerici, & Archimedis Geometrici libri eodem, quo haec Elementa, habitu veſtiti poſthac in lucem prodeant.

*Hosce errores operarum, quos repetita lectione deprehendimus, Lector vt calamo sic corrigat, rogamus.*

Pag. 6. lin. 17. *vni*, scribatur *vno*.

pag. 11. lin. vltima post *habentes* sequi debent haec verba, *cum rectis AC, BC initio ductis*.

pag. 19. in schemate prop. 19. alteri extremo basis trianguli adscribatur littera B.

pag. 63. lin. antepenultima, *connexam*, scribatur *conuexam*.

pag. 65. lin. 19. *LH*, scribatur *KH*.

pag. 68. lin. 6. *AKC*, scribatur *ABC*.

pag. 121. lin. 22. *eorum*, scribatur *earum*.

pag. 160. lin. 24. *XXXI*, scribatur *XXXII*.

pag. 260. lin. 4. *AB*, scribatur *ABq*.

pag. 264 in margine suppleatur *e*.

pag. 307. lin. 29. *Apotomae*, scribatur *Apotome*.

pag. 320. lin. 26. *AC*, scribatur *AB*.

pag. 334. lin. 14. *punctam*, scribatur *punctum*.

pag. 348. lin. 27. *Sint*, scribatur *Si sint*.

pag. 367. lin. 22. deleatur ; .

pag. 402. lin. 22. *eorum*, scribatur *4 in iis angulorum*.

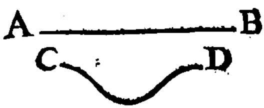
ELEMEN-

# ELEMENTORVM EVCLIDIS
## LIBER I.

### *DEFINITIONES.*

1. *Punctum* eſt, cuius pars nulla eſt.

2. *Linea* autem eſt longitudo non lata.



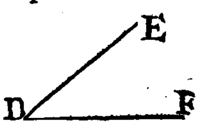

3. *Lineae* vero *extrema* ( A, B, vel D, C ) ſunt puncta.

4. *Recta* quidem *linea* AB eſt, quae ex aequo ſua interiacet puncta.

5. *Superficies* autem eſt, quod longitudinem & latitudinem tantum habet.

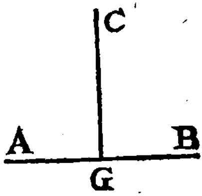
6. *Superficiei* vero *extrema* ſunt lineae.

7. *Plana* quidem *ſuperficies* eſt, quae ex aequo ſuas lineas rectas interiacet.

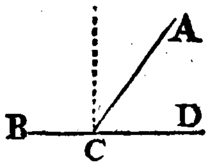



8. *Planus* vero *angulus* eſt duarum linearum, in plano ſeſe tangentium, & non in directum iacentium, mutua inclinatio.

9. Quando autem lineae DE, DF, angulum comprehendentes, rectae fuerint, *angulus* ipſe EDF appellatur *rectilineus.*



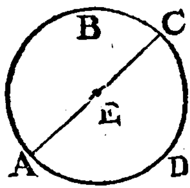

10. Quum vero recta linea CG, super rectam lineam AB insistens, angulos deinceps AGC, BGC inter se aequales fecerit: *rectus* est vterque aequalium angulorum; & quae insistit recta linea CG *perpendicularis* vocatur ad eam AB, super quam insistit.




11. *Obtusus angulus* ACB est, qui maior est recto.

12. *Acutus* autem ACD, qui est recto minor.

13. *Terminus* est, quod alicuius est extremum.




14. *Figura* est, quae aliquo vel aliquibus terminis comprehenditur.

15. *Circulus* est figura plana, vna linea ABCDA comprehensa, quae *circumferentia* appellatur, ad quam ab vno puncto E eorum, quae intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectae lineae, EC, EA, inter se sunt aequales.

16. Hoc autem punctum E *centrum circuli* nuncupatur.

17. *Diameter* vero *circuli* est recta quaedam linea AC, per centrum E ducta, & ex vtraque parte circuli circumferentia ABCDA terminata. Quae etiam circulum bifariam secat.

18. *Semicirculus* est figura ACBA comprehensa sub diametro AC, & ea circuli circumferentia ABC, quae a diametro intercipitur.

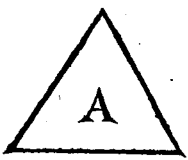
19. *Recti-*

19. *Rectilineae figurae* ſunt, quae rectis lineis comprehenduntur.

20. *Trilaterae* quidem, quae tribus.

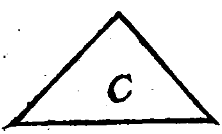
21. *Quadrilaterae*, quae quatuor.

22. *Multilaterae* vero, quae pluribus, quam quatuor rectis lineis comprehenduntur.

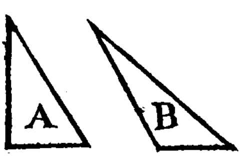



23. E trilateris autem figuris, *aequilaterum triangulum* A eſt, quod tria latera habet aequalia.


24. *Iſoſceles* autem B, quod duo tantum aequalia habet latera.

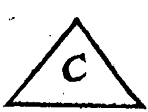



25. *Scalenum* C vero, quod tria latera habet inaequalia.

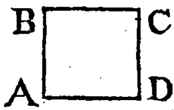



26. Adhaec, e trilateris figuris, *rectangulum* quidem *triangulum* eſt A, quod rectum angulum habet.

27. *Amblygonium* autem B, quod habet angulum obtuſum.

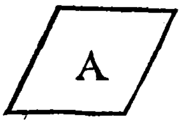



28. *Oxygonium* C vero, quod tres habet angulos acutos.

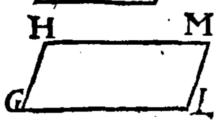



29. E figuris autem quadrilateris, *quadratum* quidem est ABCD, quod & aequilaterum est, & rectangulum.

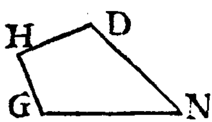

30. *Oblongum* E, quod rectangulum quidem est, sed non aequilaterum.



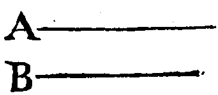

31. *Rhombus* A, quod aequilaterum quidem est, sed non rectangulum.




32. *Rhomboides* GHML, quod habet opposita & latera & angulos inuicem aequalia, sed nec aequilaterum est, nec rectangulum.




33. Reliqua autem quadrilatera, praeter haec, vocentur *trapezia*. Vt GNDH.




34. *Parallelae* rectae lineae A, B sunt, quae in eodem iacentes plano, atque ex vtraque parte in infinitum productae, in neutram sibi coincidunt.

## *POSTVLATA.*

1. Postulatur, a quouis puncto ad quoduis punctum rectam lineam ducere.

2. Item, rectam lineam finitam continue in directum producere.

3. Item, quouis centro & interuallo circulum describere.

*COM-*

## *COMMVNES NOTIONES, siue AXIOMATA.*

1. Quae eidem aequalia, inter ſe ſunt aequalia.

2. Si aequalibus aequalia addantur, tota ſunt aequalia.

3. Si ab aequalibus aequalia auferantur, reliqua ſunt aequalia.

4. Si inaequalibus aequalia addantur, tota ſunt inaequalia.

5. Si ab inaequalibus aequalia (*vel ab aequalibus inaequalia*) auferantur, reliqua ſunt inaequalia. * Et id quidem, quod ex maiori inaequalium, demtis aequalibus, relinquitur, maius eſt; quod vero, demto maiori inaequalium ab aequalibus, relinquitur, minus eſt.

6. Quae eiuſdem (*vel aequalium*) ſunt duplicia, inter ſe ſunt aequalia. * Idem de vtcunque aeque multiplicibus intelligendum eſt.

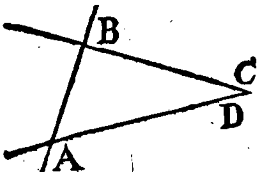
7. Quae eiuſdem (*vel aequalium*) ſunt dimidia, inter ſe aequalia ſunt. * Idem de vtcunque aeque ſubmultiplicibus intellige.

8. Quae ſibi mutuo congruunt, ſunt aequalia.

* Hoc axioma in rectis lineis & angulis valet conuerſum; ſed non congruunt aequales figurae, niſi & ſimiles fuerint. Ceterum *congruere* dicuntur, quorum partes applicari partibus ſic poſſunt, vt tota eundem locum occupent.

9. Totum ſua parte maius eſt.

10. Omnes anguli recti inter se aequales sunt.




11. Si in duas rectas lineas AD, BC recta BA incidens angulos interiores BAD, ABC, & ad easdem partes, duobus rectis minores fecerit: duae illae rectae AD, BC, in infinitum productae, coincident inter se ex ea parte, ad quam sunt anguli duobus rectis minores.

12. Duae rectae lineae spatium non comprehendunt.

13. * Omne totum aequale est omnibus suis partibus simul sumtis.

14. * Quod vni aequalium maius vel minus est, idem & altero maius vel minus est. Et quo vnum aequalium maius est vel minus, eodem alterum quoque maius vel minus est.

---

**In hoc libro notae, quibus breuitatis caussa vtimur, hae fere sunt.**

**= Notat aequalitatem. E. g. Ang. A = B = C, lege, angulus A aequalis est angulo B, & hic angulo C. Sed saepe trium quantitatum hac nota iunctarum primam etiam tertiae aequalem intelligendam esse per ax. 1. supponitur.**

**> notat maioritatem. E. g. Recta AB > CD, lege, recta AC maior est quam recta CD.**

<

$<$ notat minoritatem. $A < B$, lege A minor eſt quam B.

$+$ notat duas magnitudines pluresue, inter quas haec nota reperitur, iunctim ſumendas eſſe. E. gr. $A + B$, lege, A vna cum B.

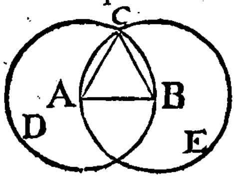
$-$ notat ſubtractionem. E. gr. Rectus $-$ ang. ABC, lege, Exceſſus recti anguli ſuper angulum ABC, vel, vt vulgo pronunciant, rectus minus angulo ABC.

$\triangle$ notat triangulum.

ACq notat quadratum a recta AC deſcriptum, vel cuius latus eſt recta AC.

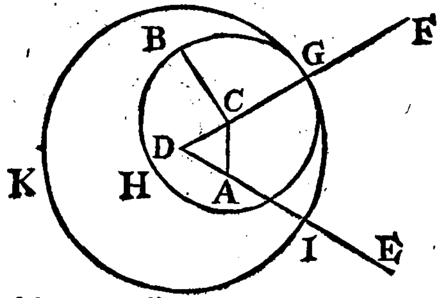
## PROPOSITIO I. PROBLEMA.

*Super datam rectam terminatam* AB *triangulum aequilaterum conſtituere.*




Centro A, interuallo A
α. 3. poſt. B deſcribatur [α] circulus BCD; & rurſus centro B interuallo BA circulus ACE; & a puncto C, in quo circuli ſeſe mutuo
β. 1. poſt. ſecant, ad puncta A, B ducantur [β] rectae CA, CB.
γ. 15. def. Quoniam igitur [γ] AC = AB, & BC = BA:
δ. 1. ax. erit [δ] AC = BC. Quare tres rectae AC, AB, BC aequales ſunt. Eſt igitur ACB triangu-
ε. 23. def. lum aequilaterum [ε] ſuper AB conſtitutum. Quod Erat Faciendum.

## PROP. II. PROBL.



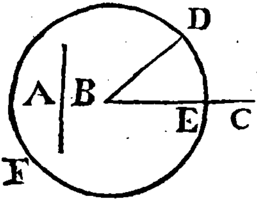

*Ad datum punctum* A *datae rectae* BC *aequalem rectam ponere.*

ζ. 1. poſt. Ducatur [ζ] recta AC; et ſuper eam conſtitua-
η. 1. 1. tur [η] triangulum aequilaterum ADC; & pro-
θ. 2. poſt. ducantur [θ] DA, DC ad E & F. Dein centro C
ι. 3. poſt. interuallo CB deſcribatur [ι] circulus GBH, & rurſus centro D, interuallo DG, circulus GIK.

Quo-

Quoniam igitur[κ] DI = DG, & [λ] DA = DC, κ. 15. def.
erit[μ] AI = CG. Sed[κ] CB = CG. Ergo λ. 23. def.
AI =[ν] CB. Q. E. F. μ. 3. ax.
ν. 1. ax.

## PROP. III. PROBL.




*Datis duabus rectis inaequalibus,* A & BC, *a maiore* BC *auferre rectam aequalem minori* A.

Ponatur[ξ] ad punctum B ξ. 2. 1.
recta BD = A, & centro
B interuallo BD describa-
tur[ο] circulus DEF. Et, quoniam[π] BE = BD, ο. 3. post.
&[ρ] A = BD, erit[σ] BE = A. Ergo ab BC ab- π. 15. def. ρ. construct.
lata est BE, minori A aequalis. Q. E. F. σ. 1. ax.

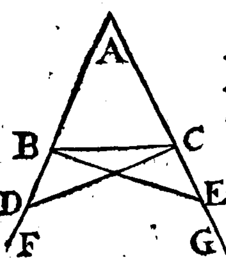
## PROP. IV. THEOREMA.


*Si duo triangula* ABC, DEF *habuerint duo latera, duobus lateribus aequalia, alterum alteri* (AB = DE, & AC = DF), *& angulum* A *aequalem angulo* D, *qui ab aequalibus rectis comprehenditur: habebunt & basin* BC *basi* EF *aequalem; & triangulum* ABC *erit triangulo* DEF *aequale; & reliqui anguli* B, C, *reliquis angulis* E, F *aequabuntur, alter alteri, quibus aequalia latera subtenduntur* (B = E, & C = F).

Nam si triangulum ABC applicetur triangulo EDF, posito puncto A super D, & recta


τ. hypoth. AB ſuper DE: quia AB = DE τ, cadet υ pun-
υ. 8. ax. ctum B in E. Congruente autem recta AB, rectae DE: quia τ ang. A = D, cadet υ recta AC in DF; & τ quia AC = DF, punctum C cadet υ in F. Iam ſi BC ipſi EF non congruat: neceſſe eſt duae rectae comprehendant ſpatium;
φ. 12. ax. quod fieri nequit φ. Ergo baſis BC congruet baſi EF, & ergo υ BC = EF. Quare & tota triangula ABC, DEF congruent, & aequalia erunt; itemque anguli B ac E, nec non anguli C ac F congruent, & aequales erunt. Quod Erat Demonſtrandum.

## PROP. V. THEOR.




*Triangulorum iſoſcelium* ABC *anguli ad baſin* ABC, ACB, *ſunt inter ſe aequales; & productis aequalibus rectis* AB, AC, *anguli ſub baſi* FBC, GCB *erunt inter ſe aequales.*

Sumto enim in recta BF
χ. 3. 1. puncto quolibet D, fiat χ AE = AD, & ducantur rectae CD, BE.

Quoniam ergo in triangulis ABE & ACD
ψ. conſtr. eſt ψ AE = AD, & ω AB = AC, & angulus A
ω. hyp. communis: erit α ang. ABE = ang. ACD, &
α. 4. 1. ang. BEC = ang. BDC, & BE = CD. Quum

autem

autem $^{\psi}$ AE = AD, & $^{\alpha}$ AC = AB, ideoque $^{\beta}$ CE = BD: erit in triangulis BEC & BDC $^{\alpha}$ ang. CBE = ang. BCD, & ang. BCE = ang, DBC. Sed erat $^{\gamma}$ ang. ABE = ang. ACD. Ergo $^{\beta}$ anguli ad basin ABC, ACB aequales sunt, item anguli sub basi GCB, FBC aequales sunt. Q. E. D. β. 3. ax. γ. per dem.

* *Scholium.* Hinc omne triangulum aequilaterum est quoque aequiangulum.

## PROP. VI. THEOR.


*Si trianguli* ABC *duo anguli* ABC, ACB *sint inter se aequales: latera* AB, AC, *aequalibus angulis subtensa, inter se aequalia erunt.*

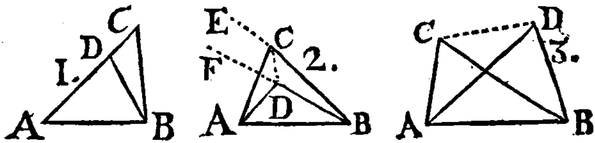
Si enim non est AB = AC, vtrauis AB > AC erit. Fiat ergo $^{\delta}$ BD = AC, & ducatur CD. δ. 3. 1.

In triangulis ergo DBC, ABC est BD = AC, & BC latus commune, & $^{\epsilon}$ ang. DBC = ang. ACB. Quare $^{\zeta}$ triangulum DBC = triangulo ABC, pars toti. Quod Est Absurdum $^{\eta}$. Non est ergo recta AB rectae AC inaequalis; ergo aequales sunt. Q. E. D. ε. hyp. ζ. 4. 1. η. 9. ax.

* *Scholium.* Hinc omne triangulum aequiangulum est quoque aequilaterum.

## PROP. VII. THEOR.

*Super eandem rectam* AB *duabus iisdem rectis* AC, BC *duae aliae rectae* AD, BD *aequales altera alteri, eosdem terminos habentes,* (AD = AC, AC, & BD = BC) *non constituentur ad aliud punctum* D *atque aliud* C *in easdem partes.*




* *1. Casus.* Si punctum D statuatur in AC:

g. 9. ax. liquet [g] non esse AD = AC.

* *2. Cas.* Si punctum D ponatur intra triangulum ACB: ducatur CD, & producantur BD

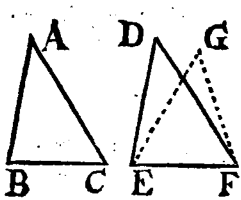
i. 5. 1. ad F, & BC ad E. Iam si sit AD = AC: erit [i] ang. ADC = ACD. Sed si BD = BC: erit [i]

k. 9. & 14. ax. ang. ECD = FDC. Ergo ang. ACD [k] > FDC, & multo magis ang. ECD > FDC. Q. E. A.

*3. Cas.* Si D sit extra △ ACB: ducatur recta CD. Iam si sit AD = AC: erit [i] ang. ACD = ADC. Quare ang. ADC > [k] DCB, & multo magis ang. BDC > DCB. Sed quia etiam ponitur BD = BC: erit [i] ang. BDC = DCB. Q. E. A.

Ergo non potest esse AD = AC, & simul BD = BC. Q. E. D.

## PROP. VIII. THEOR.



*Si duo triangula* ABC, DEF *habeant duo latera* AB, AC, *duobus lateribus* DE, DF *aequalia, alterum alteri, habeant etiam basin* BC *basi* EF *aequalem, angulum quoque* A *angulo* D *aequalem habebunt, ab aequalibus rectis comprehensum.*

Si

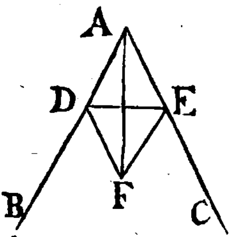
Si enim △ ABC applicetur △o DEF, & punctum B ponatur in E, & recta BC super rectam EF: cadet [λ] punctum C in F, quia [μ] BC = EF. Iam si punctum A non caderet in D, sed in aliud, velut G: super eadem recta EF duabus iisdem rectis ED, FD aliae duae rectae EG, FG, aequales [μ], altera alteri, habentes eosdem terminos, constitutae essent ad aliud punctum G & aliud D in easdem partes. Sed hoc fieri nequit [ν]. Ergo punctum A cadet in punctum D, & ergo congruet latus BA lateri ED, & latus AC lateri DF; quare & angulus A congruet angulo D. Ergo [λ] ang. A = D. Q. E. D.

λ. 8. ax.
μ. hyp.
ν. 7. 1.

* *Schol. 1.* Hinc triangula sibi mutuo aequilatera etiam sibi mutuo aequiangula sunt [ξ]. ξ. 4. 1.

* *Schol. 2.* Triangula sibi mutuo aequilatera aequantur inter se [ξ].

## PROP. IX. PROBL.




*Datum angulum rectilineum* BAC *bifariam secare.*

Sumatur in recta AB punctum quodvis D, & capiatur [ο] AE = AD, & ducatur DE, super qua fiat triangulum aequilaterum DFE. Ducatur AF. Dico AF bifariam secare ang. BAC. ο. 3. 1.

Quoniam enim est AE = AD, & AF latus commune, & basis EF = [π] basi DF: est [ρ] ang. EAF = DAF. Ergo AF bifariam secat angulum BAC. Q. E. F.

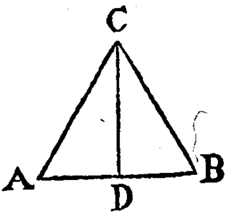
π. constr. & 23. def.
ρ. 8. 1.

* *Schol.*

* *Scholium.* Hinc patet, quomodo angulus secari possit in aequales partes 4, 8, 16, 32 &c; singulas nimirum partes iterum bisecando. Methodus vero recta & circulo angulos secandi in partes aequales quotcunque, e. gr. 3, 5, 7, nulla datur.

## PROP. X. PROBL.

*Datam rectam lineam terminatam* AB *bifariam secare.*

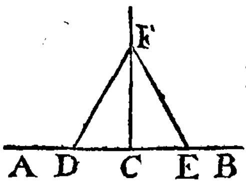


σ. 1. 1. Fiat super AB $^{\sigma}$ △ aequilaterum,
τ. 9. 1. & bisecetur $^{\tau}$ ang. ACB recta CD. Dico, rectam AB bisecari in puncto D.

υ. 23. def. Nam $^{\upsilon}$ AC = BC, & CD latus △is ADC & BDC
φ. constr. commune, & ang. ACD = BCD $^{\varphi}$. Ergo $^{\chi}$
χ. 4. 1. AD = DB. Q. E. F.

## PROP. XI. PROBL.

*Datae rectae lineae* AB, *a puncto in ipsa dato* C, *ad rectos angulos rectam lineam ducere.*



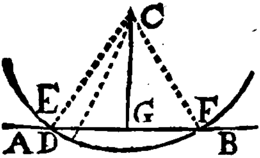
Sumatur in recta AC punctum quoduis D, &
ψ. 3. 1. ponatur $^{\psi}$ CE = CD, &
ω. 1. 1. constituatur $^{\omega}$ super DE △ aequilaterum DFE, & ducatur recta FC, quae erit rectae AB ad angulos rectos.

α. constr. Quoniam enim in △is FEC & FDC $^{\alpha}$ est
β. 23. def. CE = CD, & $^{\beta}$ EF = DF, & FC communis:
γ. 8. 1. ang. $^{\gamma}$ ECF = DCF. Ergo $^{\delta}$ anguli ECF, DCF
δ. 10. def. recti sunt. Q. E. F.

PROP.

## PROP. XII. PROBL.

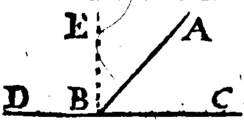
*Super datam rectam lineam infinitam* AB, *a dato puncto* C, *quod non est in eadem, perpendicularem lineam rectam ducere.*




Sumatur ex altera parte rectae AB punctum quoduis D, & centro C interuallo CD describatur [ε] circulus EDF, & ε. 3. post.
secetur [ζ] recta EF bifariam in G. Ducatur re- ζ. 10. 1.
cta CG, quae in AB erit perpendicularis.

Nam ductis rectis CE, CF, quoniam [η] EG η. constr.
= GF, & CG communis, & [θ] CE = CF: erit [ι] θ. 15. def.
ang. EGC = FGC. Ergo CG est in AB per- ι. 8. 1.
pendicularis [κ]. Q. E. F. κ. 10. def.

## PROP. XIII. THEOR.




*Si recta* AB *insistens rectae* DC, *faciat angulos* ABD, ABC: *vel duos rectos faciet, vel duobus rectis aequales.*

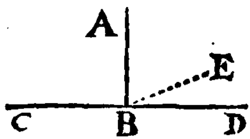
Si enim ang. ABD = ABC: duo [λ] hi anguli λ. 10. def.
recti sunt. Sin minus: ducatur [μ] a puncto B μ. 11. 1.
recta BE in DC perpendicularis. Quare ang.
CBE + EBD [λ] = 2 rectis. Et quoniam CBE
= [*] CBA + ABE: erit [ν] CBE + EBD = CBA ν. 2. ax.
+ ABE + EBD. Item quoniam ang. DBA ξ. 1. ax.
= ABE + EBD; erit [ν] DBA + CBA = CBA ο. 13. ax.
+ ABE + EBD. Ergo [ξ] DBA + CBA =
CBE + EBD = 2 rectis. Q. E. D.

* 1. *Schol.*

* *1. Schol.* Hinc ſi vnus angulorum EBD rectus ſit: alter EBC etiam rectus erit. Si ille ABD obtuſus: hic ABC acutus erit; & contra.

* *2. Schol.* Si plures rectae quam vna ad idem punctum eidem rectae inſiſtant: anguli fient duobus rectis aequales.

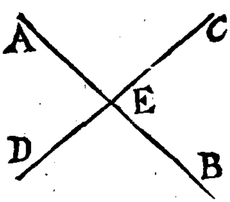
## PROP. XIV. THEOR.



*Si ad aliquam rectam* AB, *&* *ad punctum in ea* B, *duae rectae* BC, BD, *non ad easdem partes poſitae, faciant angulos deinceps* CBA, DBA, *duobus rectis aequales: ipſae rectae* BC, BD *in directum ſibi inuicem erunt.*

Si enim BD non ſit in directum ipſi CB:
π. 1. poſt. ſit [π] ei in directum quaeuis BE. Ergo [ρ] ang.
ρ. 13. 1. CBA + ABE = 2 rectis. Sed & CBA + DBA
σ. hyp. = [σ] 2 rectis. Ergo CBA + ABE = CBA +
τ. 3. ax. DBA. Ergo [τ] ang. ABE = DBA. [υ] Q. E. A.
υ. 9. ax.

## PROP. XV. THEOR.



*Si duae rectae* AB, CD *ſeſe mutuo ſecent in* E: *angulos* AEC, DEB *ad verticem facient inter ſe aequales.*

φ. 13. 1. Nam [φ] ang. AEC + AED = 2 rectis = DEB
χ. 3. ax. + AED. Ergo [χ] ang. AEC = DEB. Q. E. D.

* *1. Schol.* Hinc manifeſtum eſt, quotcunque rectis ſeſe mutuo ſecantibus, angulos ad punctum ſectionis aequales eſſe 4 rectis.

*2. Schol.*

* 2. *Schol.* Et ergo omnes anguli circa vnum punctum constituti efficiunt quatuor rectos.

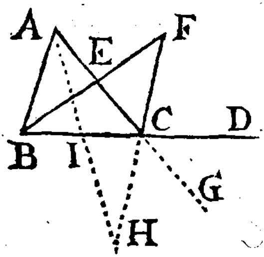
* 3. *Schol.* Si ad aliquam rectam lineam AB, atque ad eius punctum E, duae rectae EC, ED non ad easdem partes sumtae, angulos ad verticem AEC, DEB aequales fecerint: ipsae rectae CE, ED in directum sibi inuicem erunt.

Nam 2 recti = [ψ] AEC + CEB = [ω] DEB + CEB. Ergo [α] CE, ED sunt in directum. ψ. 13. 1. ω. hyp. & 2. ax. α. 14. 1.

* 4. *Schol.* Si quatuor rectae EA, EB, EC, ED ab vno puncto E exeuntes, angulos oppositos ad verticem aequales inter se fecerint: erunt quaelibet duae lineae AE, EB, & CE, ED in directum positae.

Nam quia ang. AEC + AED + CEB + DEB = [β] 4 rectis: erit AEC + AED = [γ] DEB + CEB = [δ] 2 rectis. Ergo CED & AEB [ε] sunt rectae lineae. β. 2. schol. γ. hyp. & 2. ax. δ. 7. ax. ε. 14. 1.

## PROP. XVI. THEOR.




*Omnis trianguli* ABC *vno latere* BC *producto* ad D: *angulus exterior* ACD *maior est vtrolibet interiorum & oppositorum* BAC, ABC.

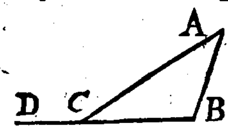
Secetur AC bifariam [ζ] in E, & ducta recta BE producatur ad F, & ponatur [η] EF = EB, & ducatur FC. Quoniam igitur AE = EC, & EB = EF, & ang. [θ] AEB = FEC: erit ang. [ι] BAE = ACF. Sed ang. ACD [κ] > ACF. Ergo [λ] ang. ACD > BAE. ζ. 10. 1. η. 3. 1. θ. 15. 1. ι. 4. 1. κ. 9. ax. λ. 14. ax.

Eodem modo, si BC bisecetur in I, & recta AI producatur, donec IH = IA, & iungatur

HC, & producatur etiam AC ad G, demonstrabitur esse ang. BCG, vel ACD > ABC. Q. E. D.

## PROP. XVII. THEOR.

*Omnis trianguli* ABC *duo anguli duobus rectis sunt minores, quomodocunque sumti.*




Producatur enim BC ad D. Et quia ang. ACD
μ. 16. 1. >[μ] ABC: erit ACD +
ν. 4. ax. ACB >[ν] ABC + ACB.
ξ. 13. 1. Sed ACD + ACB =[ξ] 2 rectis. Ergo ang.
ο. 14. ax. ABC + ACB <[ο] 2 rectis. Eodem modo, producta CA, demonstrabitur esse ACB + CAB < 2 rectis; item, producta AB, esse CAB + ABC < 2 rectis. Q. E. D.

* 1. *Schol.* Hinc in omni triangulo, cuius vnus angulus est rectus, vel obtusus, reliqui acuti sunt.

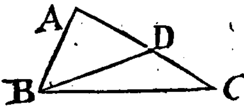

* 2. *Schol.* Si recta AE cum alia CD angulos inaequales faciat, vnum AED acutum, & alterum AEC obtusum: linea perpendicularis AD, ex quouis eius puncto A ad aliam illam CD demissa, cadet ad partes anguli acuti AED.

Nam si AC, ad partes anguli obtusi ducta, dicatur
π. 10. & 11. def. perpendicularis: in △ AEC erit ang. AEC + ACE >[π] 2 rectis. Quod fieri nequit[ρ].
ρ. 17. 1. * 3. *Schol.* Omnes anguli trianguli aequilateri,
σ. 5. 1. & duo anguli trianguli isoscelis ad basin, [σ] acuti sunt.

PROP.

## PROP. XVIII. THEOR.

*Omnis trianguli* ABC *maius latus* AC *maiorem angulum* ABC *subtendit.*

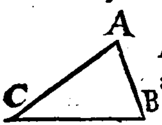


Quum enim AC $>$ AB: fiat [τ] AD $=$ AB, & iungatur BD. Iam est [υ] ang. ADB $>$ ACB, & ang. ABD $=$ [φ] ADB: ergo ang. ABD $>$ [χ] ACB, & a potiori ang. ABC $>$ ACB. Q. E. D.

τ. 3. 1.
υ. 16. 1.
φ. 5. 1.
χ. 14. ax.

## PROP. XIX. THEOR.

*Omnis trianguli* ABC *maiori angulo* B *maius latus* AC *subtenditur.*

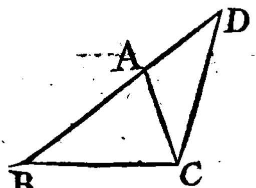


Si enim ang. B $>$ C, nec tamen AC $>$ AB: aut erit AC $=$ AB, aut AC $<$ AB. Si esset AC $=$ AB: foret ang. B $=$ [ψ] C; contra hypothesin. Et si AC $<$ AB, foret ang. C $>$ [ω] B; etiam contra hypothesin. Ergo AC $>$ AB. Q. E. D.

ψ. 5. 1.
ω. 18. 1.

## PROP. XX. THEOR.

*Omnis trianguli* ABC *duo latera sunt maiora reliquo, quomodocunque sumta.*

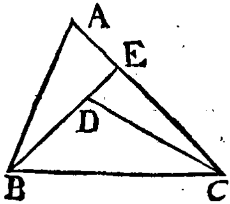


Sumantur BA, AC, & in producta BA capiatur [α] AD $=$ AC; ducatur DC. Ergo angulus ADC $=$ [β] ACD. Sed ang. BCD $>$ [γ] ACD. Quare BCD $>$ [ζ] BDC. Ergo [δ] BD $>$ BC, ideoque quum BD [ε] $=$ BA $+$ AC, erit BA $+$ AC $>$ [ζ] BC. Eodem modo ostendemus esse AB $+$ BC $>$ AC, & AC $+$ BC $>$ AB. Q. E. D.

α. 3. 1.
β. 5. 1.
γ. 9. ax.
δ. 19. 1.
ε. constr. & 2. ax.
ζ. 14. ax.

## PROP. XXI. THEOR.

*Si a terminis* B, C *vnius lateris trianguli* ABC *duae rectae* BD, CD *intus constituantur: hae reliquis duobus trianguli* ABC *lateribus* AB, AC, *minores quidem erunt, angulum vero* BDC *maiorem*, quam A, *comprehendent.*

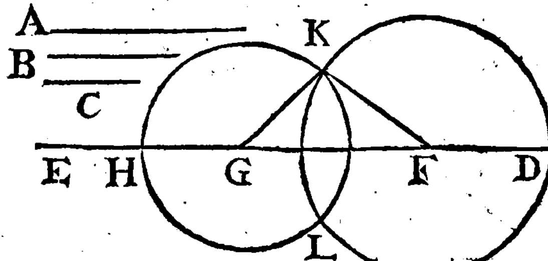



Producatur enim BD ad E. Et quum ABE fiat △: erit AB + AE > [η] EB; ideoque [ϑ] AB + AC > EB + EC. In △ EDC est CE + ED > [η] CD; ideoque [ϑ] CE + EB > CD + DB. Quare multo magis AB + AC > CD + BD. Q. E. Imum.

η. 20. 1.
ϑ. 4. ax.

ι. 16. 1. Angulus BDC > [ι] CED > [ι] A. Ergo & ang. BDC > A. Q. E. IIdum.

## PROP. XXII. PROBL.



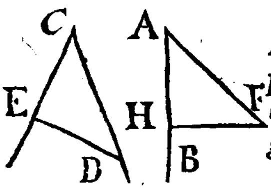

*E tribus rectis, quae tribus rectis datis* A, B, C, *sint aequales, triangulum constituere. Oportet autem duas, vtcunque sumtas, maiores esse reliqua.*

Pona-

Ponatur recta DE, finita quidem ad D, infinita vero versus E, & fiat [κ] DF = A, & FG [κ. 3. 1.]
= B, & GH = C. Centro F interuallo FD describatur [λ] circulus DKL, item centro G [λ. 3. post.] interuallo GH circulus HLK; & ducantur rectae KF, KG.

Quoniam ergo [μ] KF = FD = [ν] A; & GK [μ. 15. def.]
= [μ] GH = [ν] C; & GF = [ν] B: ex tribus rectis [ν. constr.] KF, GK, GF, tribus A, C, B aequalibus, constitutum est triangulum KGF. Q. E. F.

## PROP. XXIII. PROBL.




*Ad datam rectam* AB, *& ad datum in ea punctum* A. *dato angulo rectilineo* DCE *angulum rectilineum aequalem constituere.*

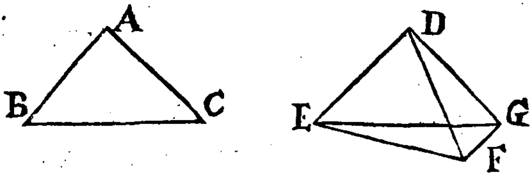
Sumantur in vtraque recta CD & CE puncta quaeuis D, E, & ducatur recta DE, & e tribus rectis lineis, quae tribus CE, CD, DE aequales sint, constituatur [ο] △ AHF, ita vt AF [ο. 22. 1.]
= CD, & AH = CE, & HF = DE.

Quia ergo AF = CD, & AH = CE, & basis HF = basi ED: erit ang. A = [π] DCE. [π. 8. 1.]
Q. E. F.

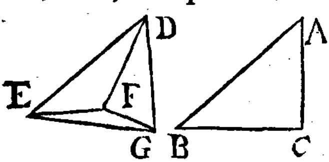
## PROP. XXIV. THEOR.

*Si duo triangula* ABC, DEF *habeant duo latera* AB, AC *duobus lateribus* DE, DF *aequalia, alterum alteri; angulum autem* A *angulo* EDF *maiorem, ab aequalibus rectis comprehensum: etiam basin* BC *basi* EF *maiorem habebunt.*

 Quoniam

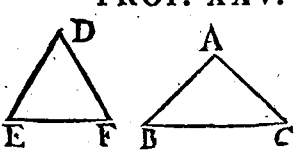



Quoniam enim ang. A > EDF, constituatur[ρ] ad rectam DE & ad eius punctum D ang.
ρ. 23. 1. EDG = A, & capiatur[σ] DG = AC vel = DF.
σ. 3. 1. Ducantur FG, EG. *1. Cas.* Si EG cadit supra EF; quum in △is ABC, DEG praeterea sit AB
τ. hyp. = DE[τ]: erit basis[υ] BC = basi EG. Rursus
υ. 4. 1. quia DG = DF, ideoque[φ] ang. DFG =
φ. 5. 1. DGF: erit ang. DFG > EGF, & multo magis
χ. 19. 1. EFG > EGF. Quare in △ EGF erit[χ] latus EG > EF. Ergo & BC > EF. Q. E. D.
ψ. 9. ax. * *2. Cas.* Si EG cadit in EF: liquet[ψ] esse EG > EF, ideoque BC > EF. Q. E. D.




*3. Cas.* Si EG cadit infra EF.
ω. 21. 1. Quoniam[ω] DG + GE > DF + FE; si hinc inde
α. 5. ax. auferantur aequales DG, DF: manet[α] GE > FE. Ergo & BC > EF. Q. E. D.

## PROP. XXV. THEOR.




*Si duo triangula* ABC, DEF *habeant duo latera* AB, AC, *duobus lateribus* DE, DF *aequalia alterum alteri, basin autem* BC *habeant*

*ant basi* EF *maiorem: habebunt etiam angulum* A *maiorem angulo* D, *qui ab aequalibus rectis comprehenditur.*

Nam si ang. A non maior est quam D: aut est A = D, aut A < D. Sed si A = D: [β] erit BC = EF; contra hypothesin. Si ang. A < D: erit [γ] BC < EF; etiam contra hypothesin. Ergo ang. A > D. Q. E. D.

β. 4. 1.
γ. 24. 1.

## PROP. XXVI. THEOR.

*Si duo triangula* ABC, DEF *duos angulos* B, ACB, *duobus angulis* E, F *aequales habeant, alterum alteri, vnumque latus vni lateri aequale, vel quod aequalibus adiacet angulis, vel quod vni aequalium angulorum subtenditur: & reliqua latera reliquis lateribus aequalia, alterum alteri, & reliquum angulum* BAC *reliquo* D *aequalem habebunt.*


*1. Hyp.* Sit B = E, ACB = F & BC = EF. Dico AB = DE, & AC = DF, & ang. BAC = D. Si enim non est AB = DE, sit alterutra AB > DE, & fiat [δ] BG = DE, & iungatur GC. Quoniam ergo BC = EF & BG = DE, & ang. B = E: erit [ε] GCB = DFE = [ζ] ACB. Q. E. A [η].

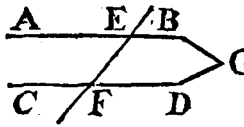
*2. Hyp.* Sit AB = DE. Dico, fore BC = EF, & AC = DF, & ang. BAC = D. Nam si dicatur BC > EF, ponatur [δ] BH = EF & ducatur AH. Et quia [ζ] AB = DE, & BH = EF,

δ. 3. 1.
ε. 4. 1.
ζ. hyp.
η. 9. ax.

 & ang.

ρ. 4. 1. & ang. B = E; erit [ρ] ang. BHA = F = ACB.
σ. 16. 1. Q. E. A[σ]. Ergo BC = EF, ideoque [ρ] & AC = DF & ang. BAC = D. Q. E. D.

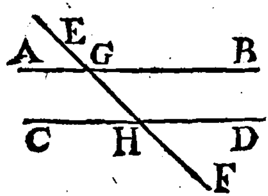
## PROP. XXVII. THEOR.




*Si in duas rectas lineas* AB, CD *recta linea* EF *incidens alternos angulos* AEF, EFD *inter se aequales fecerit: parallelae erunt rectae lineae* AB, CD.

Si enim non sint parallelae: productae ad
τ. 34. def. alterutram partem [τ] conueniant, velut in puncto G. Ergo ang. AEF extra triangulum
υ. 16. 1. EGF maior [υ] erit interno EFD; contra hypothesin. Ergo AB, CD sunt parallelae. Q. E. D.

## PROP. XXVIII. THEOR.




*Si in duas lineas* AB, CD *recta linea* EF *incidens exteriorem angulum* EGA *interiori & opposito ad easdem partes* EHC *aequalem fecerit; vel interiores & ad easdem partes* AGH, GHC *duobus rectis aequales: rectae lineae* AB, CD *erunt inter se parallelae*.

λ. 15. 1. & 1. ax. *1. Hyp.* Quia ang. EGA = EHC: erit [λ] & ang. BGH = EHC alterno. Parallelae igitur [μ]
μ. 27. 1. sunt rectae AB & CD. Q. E. D.

*2. Hyp.* Quia ang. AGH + GHC = 2 re-
ν. 13. 1. ctis = [ν] AGH + BGH: erit, ablato commu-

ni

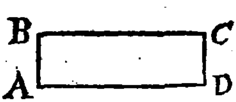
ni AGH, ang. BGH =[ξ] alterno GHC. Er- ξ. 3. ax.
go[μ] AB, CD, sunt parallelae. Q. E. D. μ. 27. 1.

## PROP. XXIX. THEOR.

*In parallelas rectas lineas* AB, CD *recta linea* EF *incidens, & alternos angulos* BGH, GHC *inter se aequales, & exteriorem* EGA *interiori & opposito ad easdem partes* GHC *aequalem, & interiores ad easdem partes* AGH, GHC *duobus rectis aequales efficit.* Figura propos. 28.

Si enim ang. BGH & GHC inaequales sint: alter e. gr. BGH maior erit. Ergo erit [o] BGH $+$ AGH $>$ GHC $+$ AGH. Sed BGH $+$ AGH $=$[π] 2 rectis. Ergo ang. GHC $+$ AGH $<$ 2 rectis. Quare [ρ] rectae AB, CD productae versus A concurrent, ideoque [σ] non erunt parallelae. Quod est contra hypothesin. Ergo ang. BGH $=$ GHC. Ergo quum [τ] ang. EGA [τ] $=$ BGH, erit etiam [υ] ang. EGA $=$ GHC. Hinc [φ] ang. EGA $+$ AGH $=$ AGH $+$ GHC. Sed [π] ang. EGA $+$ AGH $=$ 2 rectis. Ergo & [υ] ang. AGH $+$ GHC $=$ 2 rectis. Q. E. D.

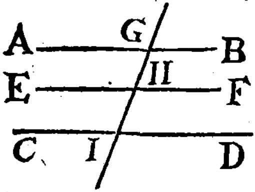
o. 4. ax. π. 13. 1. ρ. 11. ax. σ. 34. def. τ. 15. 1. υ. 1. ax. φ. 2. ax.




* *Schol.* Hinc omne parallelogrammum AC habens vnum angulum rectum A est rectangulum.

Nam A $+$ B $=$[χ] 2 rectis. Ergo quum A rectus sit, B etiam rectus [ψ] erit. Eodem argumento D & C recti sunt. χ. 29. 1. ψ. 3. ax.

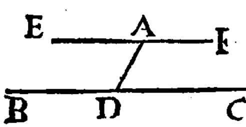
## PROP. XXX. THEOR.




*Quae* AB, CD, *eidem rectae lineae* EF *parallelae sunt, & inter se sunt parallelae.*

Incidat enim in ipsas recta GHI. Et quia AB,
α. 29. 1. EF parallelae sunt: [α] ang. AGH = GHF.
Rursus quia EF, CD parallelae: ang. HID =
α. 1. ax. GHF. Ergo [α] ang. AGH = alterno HID,
β. 27. 1. ideoque [β] rectae AB, CD parallelae. Q. E. D.

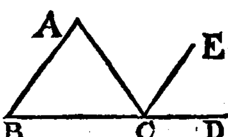
## PROP. XXXI. PROBL.




*Per datum punctum* A *datae rectae lineae* BC *darallelam rectam lineam ducere.*

Sumatur in BC punctum quoduis D, & iun-
γ. 23. 1. gatur AD, & fiat ang. [γ] EAD = ADC, &
δ. 27. 1. producatur EA ad F. Erunt [δ] EF, BC parallelae. Q. E. F.

## PROP. XXXII. THEOR.




*Omnis trianguli* ABC *vno latere* BC *producto, exterior angulus* ACD *angulis duobus interioribus & oppositis* A, B, *est aequalis; & trianguli tres interiores anguli* A, B, ACB *duobus rectis sunt aequales.*

ε. 31. 1. Ducatur enim per C ipsi AB [ε] parallela CE:
ζ. 29. 1. & erit ang. ACE = [ζ] A; item [ζ] ang. ECD = B
η. 2. ax. Quare [η] ACD = A + B. *Quod erat vnum.*

Iam

Iam addito communi angulo ACB, erit ACD + ACB =ⁿ A + B + ACB. Sed ACD + ACB =ᶿ 2 rectis. Ergo & ͥ anguli A + B + ACB = 2 rectis. *Quod erat alterum.* n. 2. ax. 9. 13. 1. i. 1. ax.

** Scholia.*

1. Tres simul anguli cuiusuis trianguli aequales sunt tribus simul cuiuscunque alterius. Vnde

2. Si in vno triangulo duo anguli (aut singuli, aut simul) aequales sint duobus angulis in altero triangulo: etiam reliquus reliquo aequalis est. Item, si duo triangula vnum angulum vni aequalem habeant: reliquorum summae aequantur.

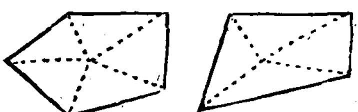
3. In triangulo si vnus angulus rectus sit: reliqui vnum rectum conficiunt.

4. Si in isoscele angulus, aequis cruribus contentus, rectus est: reliqui ad basin sunt semirecti.

5. Trianguli aequilateri angulus facit duas tertias vnius recti. Nam $\frac{1}{3}$ 2 rect. = $\frac{2}{3}$ recti.

6. Huius propositionis beneficio, cuiuslibet figurae rectilineae tam interni quam externi anguli quot rectos conficiant, innotescet per duo sequentia theoremata.

*Theor. I.*



*Omnes simul anguli cuiuscunque figurae rectilineae conficiunt bis tot rectos, demtis quatuor, quot sunt latera figurae.*

Ex quouis puncto intra figuram ducantur ad omnes figurae angulos rectae, quae figuram resoluent in tot triangula, quot habet latera. Quare quum singula triangula conficiant duos rectos: omnia simul conficient bis tot rectos, quot sunt latera. Sed anguli circa dictum punctum conficiunt

ciunt quatuor rectos. Ergo si ab omnium triangulorum angulis demas angulos circa id punctum: anguli reliqui, qui componunt angulos figurae, conficiunt bis tot rectos, demtis quatuor, quot sunt latera figurae. Q. E. D.

Hinc omnes eiusdem speciei rectilineae figurae aequales habent angulorum summas.

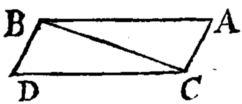
*Theor. II.*

*Omnes simul externi anguli cuiuscunque figurae rectilineae conficiunt quatuor rectos.*

Nam singuli interni figurae anguli cum singulis externis conficiunt duos rectos. Ergo interni simul omnes cum omnibus simul externis conficiunt bis tot rectos, quot sunt latera figurae. Sed (vt modo ostensum est) interni simul omnes etiam, cum quatuor rectis, efficiunt bis tot rectos, quot sunt latera figurae. Ergo externi anguli quatuor rectis aequantur. Q. E. D.

Hinc omnes cuiuscumque speciei rectilineae figurae aequales habent externorum angulorum summas.

## PROP. XXXIII. THEOR.




*Quae rectae* AC, BD, *aequales & parallelas* AB, CD *ad easdem partes coniungunt, ipsae etiam sunt aequales & parallelae.*

κ. 29. I. Iungatur enim BC: & quia [κ] ang. ABC = BCD, & per hyp. AB = CD, & latus BC

λ. 4. I. commune; erit [λ] AC = BD & ang. ACB =

μ. 27. I. CBD, ideoque [μ] rectae AC & BD parallelae erunt. Q. E. D.

## PROP. XXXIV. THEOR.

*Parallelogrammorum spatiorum* ABCD *tam latera opposita* (AB = CD, AC = BD) *quam anguli oppositi* (A = D, ABD = ACD) *inter se aequantur*; *& ipsa diameter* BC *bifariam secat.* Fig. prop. 33.

Quoniam AB, CD parallelae ν sunt: ξ erit ang. ABC = DCB. Rursus ob ν AC, DB parallelas, erit ξ ang. DBC = BCA. Et latus BC est commune. Quare ο AC = BD, & AB = CD, & ang. A = D. Et quia erat ang. ABC = DCB, & ang. DBC = BCA: toti ang. π ABD, ACD aequantur. Denique, quum sit AC = BD, & BC latus commune, & ang. BCA = DBC: tota ρ △a. ACB, CBD aequantur. Q. E. D.

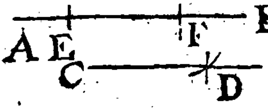
ν. hyp.
ξ. 29. 1.
ο. 26. 1.
π. 2. ax.
ρ. 4. 1.

### * Scholium.

*Omne quadrilaterum* ABDC *habens latera opposita aequalia, est parallelogrammum.*

Nam per 8. 1. ang. ABC = BCD. Ergo α AB, CD parallelae sunt. Eadem ratione ang. BCA = DBC. Quare AC, BD etiam parallelae sunt. Ergo ABDC est parallelogrammum. Q. E. D.

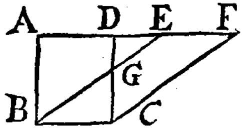
α. 27. 1.




Hinc expeditius per datum punctum C datae rectae AB ducetur parallela CD. Sume in AB quoduis punctum E. Centris E & C interuallo quouis duc aequales circulos F, D. Centro vero F spatio EC duc circulum FD, qui priorem CD secet in D. Erit ducta CD parallela. Nam, vt modo demonstratum est, ECDF est Pgr.

PROP.

## PROP. XXXV. THEOR.

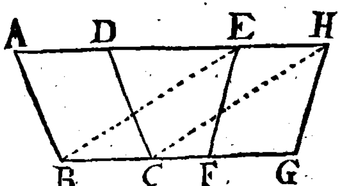



*Parallelogramma* ABCD *&* EBCF, *super eadem basi* BC, *&* *in iisdem parallelis* AF, BC *constituta,*
σ. 34. 1. *inter se sunt aequalia.*

Nam quia ABCD, EBCF Pgra sunt: est σ AD = BC = EF. Adde communem DE, &
τ. 2. ax. erit τ AE = DF. Sed & σ AB = DC, & ang.
υ. 29. 1. A = υ CDF. Ergo △ ABE = φ △ DCF.
φ. 4. 1. Auferatur commune DGE: erit χ trapezium
χ. 3. ax. ADGB = EGCF. Adde commune BGC: erit τ Pgr. ABCD = EBCF. Q. E. D.

* Reliquorum casuum, si E in D, vel inter D & A cadit, non dissimilis, sed simplicior & facilior est demonstratio.

## PROP. XXXVI. THEOR.

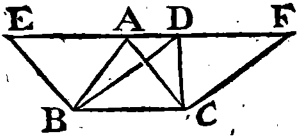



*Parallelogramma* ABCD, EFGH *super aequalibus basibus* BC, FG *&* *in iisdem parallelis* AH, BG *constituta, inter se sunt aequalia.*

Iungantur enim BE, CH. Et quia per hyp.
ψ. 34. 1. BC = FG = ψ EH; BC & EH sunt aequales.
ω. 33. 1. Sunt vero & parallelae (hyp.). Ergo ω BE & CH quoque sunt aequales ac parallelae.
α. 35. 1. Quare EBCH est Pgr. & aequale α Pgro ABCD. Sed est etiam α Pgr. EBCH = Pgro EFGH.
β. 1. ax. Ergo β Pgr. ABCD = EFGH. Q. E. D.

PROP.

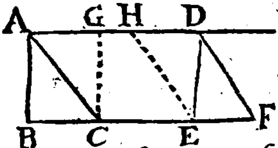
## PROP. XXXVII. THEOR.




*Triangula* ABC, DBC *super eadem basi* BC & *in iisdem parallelis* AD, BC *constituta, sunt inter se aequalia.*

Producatur $^{\gamma}$ AD in E, F, & ducatur $^{\delta}$ BE γ. 1. post.
parallela CA, & CF parall. BD. Erit $^{\varepsilon}$ Prg. δ. 31. 1.
BCAE $=$ DBCF. Sed $\triangle$ ABC $^{\zeta} = \frac{1}{2}$ Pgr. ε. 35. 1. ζ. 34. 1.
BCAE, item $\triangle$ DBC $= \frac{1}{2}$ Pgr. DBCF. Ergo
$\triangle$ ABC $^{\eta} =$ DBC. Q. E. D. η. 7. ax.

## PROP. XXXVIII. THEOR.




*Triangula* ABC, DEF *super basibus aequalibus* BC, EF, & *in iisdem parallelis* BF, AD *constituta, sunt inter se aequalia.*

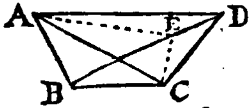
Ducatur $^{\vartheta}$ CG ipsi BA, & EH ipsi DF pa- ϑ. 31. 1.
rallela. Pgra ergo sunt ABCG & DFEH, &
$^{\iota}$ aequalia. Sed $\triangle$ ABC $^{\kappa}$ est $\frac{1}{2}$ Pgri ABCG, ι. 36. 1.
& $\triangle$ DEF est $\frac{1}{2}$ Pgri DFEH. Ergo $^{\lambda}$ $\triangle$ ABC κ. 34. 1. λ. 7. ax.
$=$ $\triangle$ DEF. Q. E. D.

* *Scholium.*

Si basis BC $>$ EF: liquet $\triangle$ BAC $>$ $\triangle$ EDF.
Et si basis BC $<$ EF: erit $\triangle$ BAC $<$ $\triangle$ EDF.

PROP.

## PROP. XXXIX. THEOR.

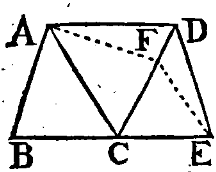



*Triangula* ABC, DBC, *aequalia, super eadem basi* BC *& ad easdem partes constituta, sunt in iisdem parallelis* AD, BC.

Si enim AD, BC non sunt parallelae: ducatur per A ipsi BC parallela μ AE, & ducatur EC. Quare △ BEC = ν △ ABC = ξ △ DBC. Ergo ο triangula BEC, DBC aequalia sunt. Q. E. A π. Similiter ostendemus, neque vllam aliam parallelam esse praeter rectam AD. Ergo AD est ipsi BC parallela. Q. E. D.

μ. 31. 1.
ν. 37. 1.
ξ. hyp.
ο. 1. ax.
π. 9. ax.

## PROP. XL. THEOR.

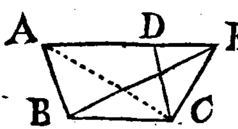



*Triangula* ABC, DCE *aequalia, super basibus* BC, CE † *aequalibus, & ad easdem partes constituta, sunt in iisdem parallelis* AD, BE.

Sin minus: ducatur ς per A ipsi BE parallela AF, & iungatur FE. Ergo △ FCE = σ △ ABC. Ergo & △ FCE = τ △ DCE. Q. E. A υ.

ς. 31. 1.
σ. 37. 1.
τ. hyp. & 1. ax.
υ. 9. ax.

## PROP. XLI. THEOR.




*Si parallelogrammum* ABCD, *& triangulum* BEC *eandem habeant basin* BC, *sintque in iisdem parallelis* AE, BC: *parallelogrammum* ABCD *ipsius trianguli* EBC *duplum erit.*

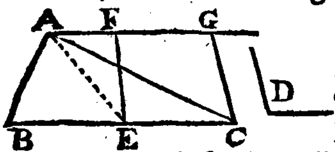
† Puta, in eadem recta positis.

Ducatur

Ducatur enim AC: & erit [φ] △ ABC = △ φ. 37. 1.
EBC. Sed Pgr. ABCD est [χ] duplum △ χ. 34. 1.
ABC. Ergo Pgr. ABCD est [ψ] duplum △ ψ. 1. & 6. ax.
EBC. Q. E. D.

## PROP. XLII. PROBL.

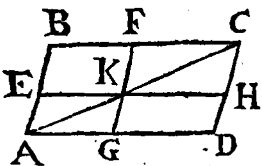
*Dato triangulo* ABC *aequale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo* D.




Secetur BC bifariam [ω] in E, & fiat ω. 10. 1.
[α] ang. CEF = D. α. 23. 1.
Ducatur AG [β] β. 31. 1.
ipsi BC, & CG ipsi EF parallela. Erit FECG Pgr. aequale △ ABC.

Nam ducta AE, erit [γ] △ ABE = △ AEC. γ. 38. 1.
Ergo △ ABC [δ] = 2 △ AEC = [ε] Pgr. FECG. δ. 2. ax.
Ergo [ζ] Prg. FECG = △ ABC. Q. E. D. ε. 41. 1. ζ. 1. ax.

## PROP. XLIII. THEOR.

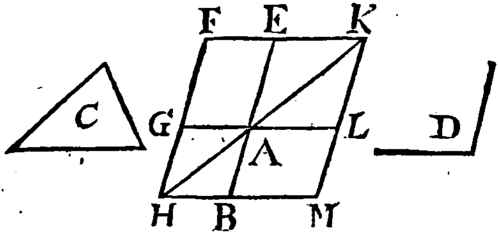



*In omni parallelogrammo* ABCD *complementa* EF, DK *eorum, quae circa diametrum* AC *sunt, parallelogrammorum* EG, FH, *inter se sunt aequalia.*

Nam [η] △ ABC = △ ACD. Et quia etiam η. 34. 1.
EG & FH sunt Pgra, quorum diametri sunt AK, KC: erit similiter △ AEK = △ AKG, & △ FKC = △ KCH. Quare [θ] △ AEK + θ. 2. ax.
FKC = △ AKG + KCH. Ergo [ι] reliquum ι. 3. ax.
Pgr. BK = reliquo KD. Q. E. D.

C PROP.

## PROP. XLIV. PROBL.




*Ad datam rectam lineam* AB *dato triangulo* C *aequale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo* D.

κ. 42. 1. Fiat [κ] triangulo C = Pgr. AEFG in angulo GAE, dato D aequali, & ponatur AE in directum ipsi AB, & producatur FG ad H, & per B ipsi FE vel GA ducatur parallela BH, & iungatur HA. Et quia ang. EFH + FHB

λ. 29. 1. = [λ] 2 rectis, ideoque ang. EFH + FHA <

μ. 11. ax. 2 rectis: recta HA producta occurret [μ] productae FE in K. Per K agatur ipsi FH vel EB parallela, quae rectis GA, HB productis occurrat in L & M. Dico, AM esse Pgr. desideratum.

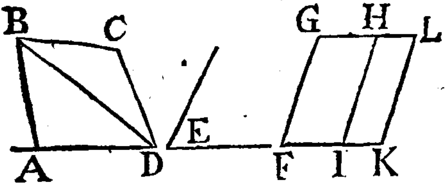
ν. 43. 1. Nam [ν] Pgr. AM = AF [ξ] = Δo C. Et

ξ. constr. ang. LAB = GAE = [ξ] D. Ergo ad datam rectam AB in dato angulo D applicatum est Pgr. AM triangulo C aequale. Q. E. F.

## PROP. XLV. PROBL.

*Dato rectilineo* ABCD *aequale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo* E.

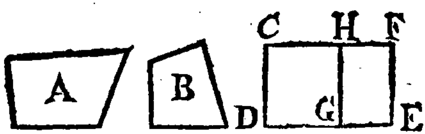
Datum




Datum rectilineum resolue in triangula BA D, BCD, & fac • Pgr. FH = △ BAD, ita vt • 42. 1.
ang. F = E. Deinde ad HI fac π Pgr. HK = π. 44. 1.
△ BCD, vt dato angulo E aequalis sit HIK.

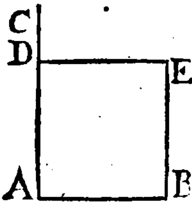
Quia ang. F = E = HIK: erit ang. F + FIH = ρ HIK + FIH. Sed F + FIH = σ ρ. 2. ax.
2 rectis. Ergo τ & ang. HIK + FIH = 2 σ. 29. 1. τ. 1. ax.
rectis, & IK est in directum υ ipsi FI. Ergo υ. 14. 1.
ang. HIK = σ alterno GHI, & adeo ang. HIK + IHL = ρ GHI + IHL. Quare quum sint ang. HIK + IHL = σ 2 rectis, erunt & GHI + IHL = τ 2 rectis, & erit υ HL ipsi GH in φ. constr. & dem.
directum. Hinc, ob GH, FK parallelas φ, etiam GL, FK parallelae sunt; nec non GF, LK eidem φ HI parallelae, ipsae χ sunt parallelae. χ. 30. 1.
Ergo FGLK est Pgr; & φ quia FH = △ ABD, & HK = △ BCD, totum Pgr. FGLK = ρ toti rectilineo ABCD. Q. E. F.

* *Scholium.*




Hinc facile inuenitur excessus HE, quo rectilineum aliquod A superat rectilineum minus B: nimirum si ad quamuis rectam CD applicentur Pgr. DF = A, & DH = B.

## PROP. XLVI. PROBL.




*A data recta linea* AB *quadratum describere.*

ψ. 11. 1. Ducatur ex A in AB perpendicularis ψ AC, in qua

ω. 3. 1. capiatur ω AD = AB. Per D ipsi AB, & per B ipsi AC

α. 31. 1. ducantur α parallelae DE, BE. Erit BD quadratum, a data recta AB descriptum.

β. 34. 1. Est enim BD parallelogrammum. Ideo & β AB = DE, & AD = EB. Sed AD = AB.

γ. 1. ax. Ergo γ singula latera AD, AB, BE, DE inter se aequalia sunt. Quare BD est quadrilaterum aequilaterum. Et quoniam BD est Pgr.

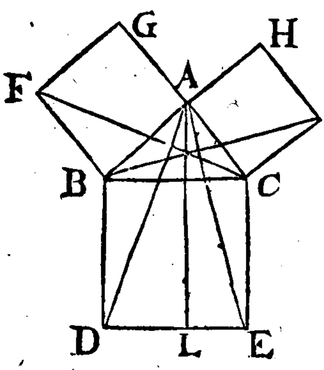
δ. sch. 29. 1. habens vnum rectum angulum A: δ anguli reliqui DE, B etiam recti erunt. Ergo BD

ε. 29. def. est ε quadratum. Q. E. F.

* *Scholium.*

Eodem modo facile describes rectangulum, quod sub datis duabus rectis contineatur.

## PROP. XLVII. THEOR.




*In rectangulis triangulis* ABC *quadratum* BCED, *quod a latere* BC *rectum angulum* A *subtendente describitur, aequale est quadratis* BG, CH, *quae a lateribus* AB, AC *rectum*

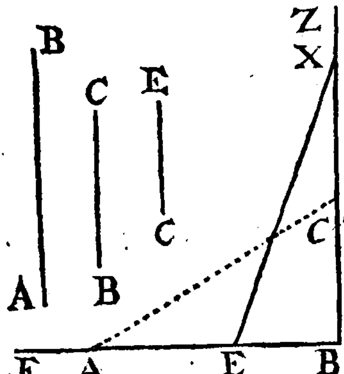
*rectum angulum comprehendentibus, describuntur.*

Per A ipſi BD vel CE ducatur [ζ] parallela ζ. 31. 1.
AL, & iungantur AD, FC. Quoniam ergo
vterque ang. BAC, BAG rectus eſt: AC &
AG erunt [η] in directum. Eadem ratione & η. 14. 1.
BA, AH ſunt in directum. Iam ang. DBC
= [θ] FBA, ideoque ang. DBA = [ι] FBC, & θ. 10. ax.
DB = [κ] BC, ac BA = FB: ergo [λ] △ ABD ι. 2. ax. κ. 29. def.
= FBC. Sed Pgr. BL, quod cum △ ABD λ. 4. 1.
eſt in eadem baſi BD & in iisdem parallelis
BD, AL, eſt duplum [μ] △i ABD; & quadra- μ. 41. 1.
tum BG, quod cum △ FBC eſt in eadem baſi
FB & in iisdem parallelis FB, GC, eſt [μ] duplum △ FBC. Ergo [ν] Pgr. BL = BG. Simi- ν. 6. ax.
liter ductis AE, BK oſtendetur Pgr. CL =
CH. Totum ergo [ξ] quadratum BCED = ξ. 2. ax.
quadratis BG + CH. Q. E. D.

### * *Scholium.*

Hoc nobiliſſimum & vtiliſſimum theorema ab inuentore *Pythagora* Pythagoricum dici meruit. Eius beneficio quadratorum additio & ſubtractio perficitur, quo ſpectant duo ſequentia problemata.

### *Problema I.*



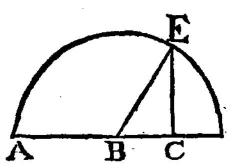

*Datis quotcunque quadratis vnum omnibus aequale constituere.*

a. 11. 1. Dentur quadrata tria: quorum latera sint AB, BC, CE. Fac a ang. rectum FBZ infinita habentem latera, in eaque transfer BA & BC, & iunge

π. 47. 1. AC: erit π $ACq = ABq + BCq$. Tum AC transfer ex B in X, & CE tertium latus datum transfer ex B in E, & iunge EX: erit π $EXq = EBq$ ( vel $CEq$ ) $+$

ρ. 2. ax. $BXq$ ( vel $ACq$ ) $=$ ρ $CEq + BCq + ABq$. Q. E. F.

### *Problema II.*




*Datis duabus rectis inaequalibus* AB, BC, *exhibere quadratum, quo quadratum maioris* AB *excedit quadratum minoris* BC.

Centro B interuallo BA describe circulum. Ex C erige perpendicularem CE occurrentem peripheriae in E. Ducatur BE. Erit $BEq$ ( vel $BAq$ )

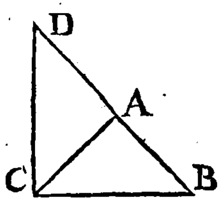
σ. 47. 1. $=$ σ $BCq + CEq$. Ergo τ $BAq - BCq =$

τ. 3. ax. $CEq$. Q. E. F.

PROP.

## PROP. XLVIII. THEOR.

*Si quadratum, quod describitur ab uno* BC *laterum trianguli* ABC, *aequale sit quadratis, quae a reliquis trianguli lateribus* AB, AC *describuntur: angulus* BAC *a reliquis duobus trianguli lateribus* AB, AC *comprehensus rectus erit.*



Ducatur enim [v] ad AC perpendicularis AD, & fiat AD = AB, & iungatur DC. v. 11. 1.

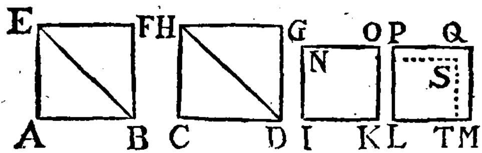
Quoniam ergo DA = AB: erit & DAq = ABq, ideoque DAq + ACq = [φ] ABq + ACq. Sed DAq + ACq = [χ] DCq, & ABq + ACq = [ψ] CBq. Ergo DCq = CBq, ideoque DC = CB. Hinc quoniam AD = AB, & latus AC commune: erit [ω] ang. BAC = CAD. Rectus autem est [α] CAD. Quare & ang. BAC rectus est. Q. E. D.

φ. 2. ax.
χ. 47. 1.
ψ. hyp.
ω. 8. 1.
α. 10. def.

### * *Scholium.*

Sumtum est in demonstratione, ex eo quod DA = AB sequi DAq = ABq, & ex eo quod DCq = CBq sequi DC = CB. Hoc verò manifestum fiet ex sequenti theoremate.

* *Theorema.*




*Linearum rectarum aequalium* AB, CD *aequalia sunt quadrata* AF, CG. *Et quadratorum aequalium* NK, PM *aequalia sunt latera* IK, LM.

Pro 1. Hyp. Duc diametros EB, HD. Liquet
β. 34. 1. AF $=^{\beta}$ duplo $\triangle$ EAB $=^{\gamma}$ 2 $\triangle$ HCD $=^{\beta}$
γ. 4. 1. & 6. ax. & CG. Ergo AF $=$ CG. Q. E. D.

Pro 2. Hyp. Si fieri potest, sit LM $>$ IK: fac
δ. 46. 1. LT $=$ IK, sitque $^{\delta}$ LS $=$ LTq. Ergo LS $=^{\epsilon}$
ε. 1. part. NK $=^{\zeta}$ LQ. Q. E. A $^{\eta}$. Ergo LM $=$ IK.
ζ. hyp.
η. 9. ax. Q. E. D.

* *Schol.*

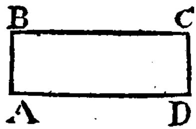
Eodem modo quaelibet rectangula inter se aequilatera aequalia ostendentur.

EV-

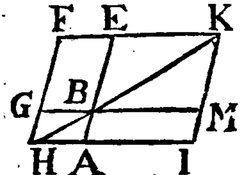
# EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER II.

* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *

## DEFINITIONES.



1. Omne *parallelogrammum rectangulum* ABCD *contineri* dicitur *ſub duabus rectis lineis* AB, AD quae rectum angulum A comprehendunt.



2. Omnis parallelogrammi FHIK vnumquodque eorum, quae circa HK diametrum ipſius ſunt, parallelogrammorum EM, GA cum duobus complementis FB, BI *Gnomon* vocatur. (Hoc eſt, figura FHIMBEF vocatur gnomon, item figura FKIABGF.)

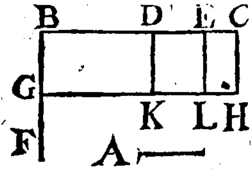
---

Breuitatis gratia has duas notas in hoc libro adhibemus.

Rgl. notat parallelogrammum rectangulum, veluti Rgl. BAD, lege rectangulum BAD.

$\times$ indicat etiam rectangulum, contentum ſub duabus rectis, inter quas haec nota ſcripta eſt. E. gr. BA $\times$ AD indicat rectangulum ſub rectis BA & AD contentum.

## PROPOSITIO I. THEOR.




*Si sint duae rectae lineae* A, BC, *altera autem ipsarum* BC *secta fuerit in quotcunque partes* BD, DE, EC: *rectangulum sub duabus rectis* A, BC *contentum aequale est iis rectangulis* $A \times BD, + A \times DE, + A \times EC$, *quae sub recta linea non secta* A *&* *singulis alterius* BC *segmentis continentur.*

α. 11. 1. Ducatur enim [α] a puncto B ipsi BC perpen-
β. 3. 1. dicularis BF, atque [β] fiat $BG = A$, & per G
γ. 31. 1. ipsi BC parallela sit [γ] GH, per puncta vero D, E, C ipsi BG parallelae sint DK, EL, CH. Er-
δ. sch. 29. 1. go [δ] Rgl. $BH = $ Rgl. $BK + DL + EH$. Sed
ε. constr. quia [ε] $BG = A$, erit Rgl. $BH = $ [ζ] $A \times BC$, &
ζ. 1. def. 2. Rgl. $BK = A \times BD$. Et quia [η] $DK = EL$
η. 34. 1. $= BG = A$, erit Rgl. $DL = A \times DE$, & Rgl. $EH = A \times EC$. Quare $A \times BC = A \times BD, + A \times DE, + A \times EC$. Q. E. D.

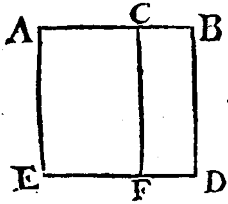
* *Scholium.*

***Hinc si fuerint duae rectae* Y, Z, *secenturque ambae in quotcunque partes; rectangulum sub totis aequale est rectangulis sub partibus.***

Nam sint rectae Z partes A, B, C, & rectae Y partes D, E. Quia $D \times Z = D \times A + D \times B, + D \times C$; & $E \times Z = E \times A, + E \times B, + E \times C$; & $Y \times Z = D \times Z, + E \times Z$:
θ. 2. ax. erit [θ] $Y \times Z = D \times A, + D \times B, + D \times C, + E \times A, + E \times B, + E \times C$. Q. E. D.

PROP.

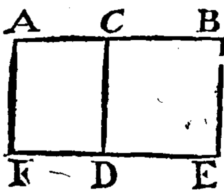
## PROP. II. THEOR.



*Si recta linea* AB *secetur vtcunque in* C*: rectangula sub tota* AB *& vtroque segmento* AC, CB, *contenta aequantur quadrato totius* AB.

Describatur ex AB quadratum [ι] ABDE, ι. 46. 1.
& per C ducatur [κ] alterutri AE, BD parallela κ. 31. 1.
CF. Est igitur $AD = $ Rgl. $AF + CD =$
$AE \times AC, + BD \times CB = AB \times AC, +$ λ. 29. def. 1
$AB \times CB$, quia [λ] $AE = BD = AB$. Ergo
Rgl. $AB \times AC, + AB \times CB =$ quadrato
totius AD. Q. E. D.

## PROP. III. THEOR.

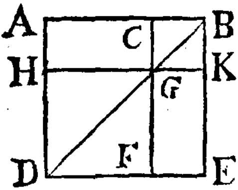


*Si recta linea* AB *secetur vtcunque in* C*: rectangulum sub tota* AB *& vno segmento* BC *contentum aequatur rectangulo sub segmentis* AC, CB *contento, & praedicti segmenti* CB *quadrato.*

Describatur [μ] ex CB quadratum BCDE, μ. 46. 1.
& producatur ED in F & per A alterutri CD,
BE ducatur parallela AF. Ergo Rgl. $AE =$
Rgl. $AD +$ quadrato CE. Et quia [ν] $BE =$ ν. 29. def. 1.
CB; est Rgl. $AE = AB \times BC$; item quia
$CD = BC$, est Rgl. $AD = AC \times CB$.
Quare $AB \times BC = AC \times CB, + CBq$.
Q. E. D.

PROP.

## PROP. IV. THEOR.




*Si recta linea* AB *secetur vtcunque in* C: *quadratum totius* AB *aequatur quadratis segmentorum* AC, CB, *& rectangulo bis contento sub segmentis* AC, CB.

ξ. 46. 1. Describatur [ξ] ex AB quadratum ADEB,
iungatur BD, & per C alterutri AD, BE ducatur paralle la CGF, per G vero alterutri
AB, DE parallela HK. Erit ergo [ο] ang. BGC
ο. 29. 1. = ADB. Sed quia [π] AD = AB: ang. [ρ]
π. 29. def. 1. ABD = ADB; quare ang. BGC = [σ] CBG,
ρ. 5. 1.
σ. 1. ax. & ideo CB = [τ] CG. Est vero [υ] CB = GK,
τ. 6. 1. & CG = BK. Ergo CGKB est aequilaterum.
υ. 34. 1.
φ. sch. 29. 1. Sed est quoque [φ] rectangulum, ob angulum
ABE [π] rectum. Quare CGKB est CBq. Eadem ratione HF est HGq, id est [υ] ACq. Et
χ. 43. 1. quoniam Rgl. AG = [χ] Rgl. GE, & ob CG = CB, Rgl. AG = AC × CB: erit & Rgl. GE = AC × CB. Ergo AG + GE = 2. AC × CB. Ergo ABq = CK + HF + AG + GE = CBq + ACq + 2. AC × CB. Q. E. D.

*Aliter.*

ψ. 32. 1. Quoniam ang. BAD [π] = recto: ang. ABD + ADB = [ψ] recto. Sed quum sit [π] AB =
ω. 5. 1. AD, ideoque [ω] ang. ABD = ADB; erit ang. ABD = $\frac{1}{2}$ recto. Et quoniam ang. BAD rectus est: ang. BCG etiam [α] rectus erit. Quare
α. 29. 1. in △ BCG reliquus angulus BGC etiam =

ψ $\frac{1}{2}$

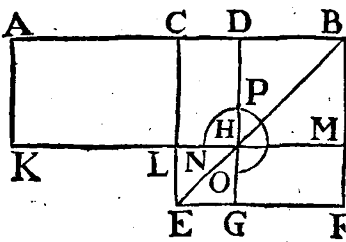
ψ ½ recto. Hinc β GC = CB; & quia GC ψ. 32. 1.
= γ BK, ac CB = GK, erit CK aequilate- β. 6. 1.
rum. Est vero & rectangulum, ob ang. ABE γ. 34. 1.
rectum. Ergo CK est CBq. Eadem ratione *&c. vt supra.*

*Coroll. 1.* Ex his manifestum est, in quadratis parallelogramma, quae sunt circa diametrum, esse quadrata.

* *Cor. 2.* Item, diametrum cuiusuis quadrati angulos eius bisecare.

* *Schol.* Si AC = ½ AB: erit ABq = 4 ACq & ACq = ¼ ABq. Et contra si ABq = 4 ACq: erit AC = ½ AB.

## PROP. V. THEOR.




*Si recta linea* AB *secetur in aequalia* AC, CB, *& inaequalia* AD, DB: *rectangulum* AD ⨯ DB *sub inaequalibus totius segmentis contentum vna cum quadrato rectae* CD *inter puncta sectionum aequatur quadrato dimidiae* BC.

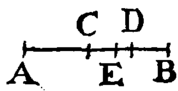
Describatur δ ex CB quadratum CBFE, δ. 46. 1.
iungatur BE, & per D alterutri CE, BF parallela DHG, ac per H alterutri AB, EF parallela KLM, per A denique alterutri CL, BF parallela AK ducatur. Et quia ε CH = HF, ε. 43. 1.
erit ζ CM = DF. Sed CM = η AL: quare ζ. 2. ax.
AL = DF, &, addito communi CH, AH ζ = η. 36. 1.
gnomoni

gnomoni NPO, &, tandem addito communi LG, $AH + LG = CBq$. Eſt autem ob DH
ϑ. 1. cor. 4. 2. $= ^{\vartheta}$ DB, Rgl. $AH = AD \times DB$, & LG eſt $^{\vartheta}$
ι. 34. 1. & $LHq = ^{\iota} CDq$. Ergo $AD \times DB + CDq$
ſchol. 48. 1. $= CBq$. Q. E. D.

### * *Scholia.*

1. Hoc theorema paullo aliter ſic effertur: *Rectangulum ſub ſumma* AD *&* *differentia* DB *duarum rectarum* AC (vel CB) & CD, *aequatur differentiae quadratorum ex ipſis.*

2. *Si* AB *aliter diuidatur, propius ſcilicet puncto biſectionis, in* E: *dico* $AE \times EB > AD \times DB$. Nam
$AE \times EB + CEq = ^{\varkappa} CBq$
κ. 5. 2. $= ^{\varkappa} AD \times DB + CDq$.
Ergo quum $CEq < CDq$:
λ. 5. ax. erit $^{\lambda}$ $AE \times EB > AD \times DB$. Q. E. D.

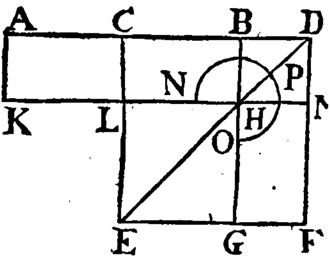



3. Hinc $ADq + DBq > AEq + EBq$. Nam
μ. 4. 2. $ADq + DBq + 2\,AD \times DB = ^{\mu} ABq = ^{\mu} AEq + EBq + 2\,AE \times EB$. Ergo quum $2\,AE \times EB > 2\,AD \times DB$: erit $ADq + DB > AEq + EBq$. Q. E. D.

ν. 3. ax. 4. Ex quibus ſimul patet, eſſe $^{\nu} ADq + DBq - AEq - EBq = 2\,AE \times EB - 2\,AD \times DB$.

PROP.

## PROP. VI. THEOR.

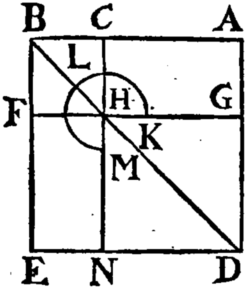



*Si recta linea* AB *secetur bifariam in* C, *&* *illi recta quaecunque linea* BD *in directum adiiciatur: rectangulum* $AD \times BD$ *contentum sub composita ex tota cum adiecta & adiecta, una cum quadrato dimidiae* CB, *aequatur quadrato compositae* CD *ex dimidia & adiecta tanquam unius lineae.*

Describatur ex CD quadratum CDFE, iungatur ED, per B alterutri CE, DF sit parallela BHG, & per H ipsi AD vel EF parallela KLM, & adhuc per A ipsi CL vel DM parallela AK. Itaque quia $AC = CB$, Rgl. $AL =$
[ξ] $CH =$ [o] HF. Addito communi CM, erit ξ. 36. 1.
$AM =$ gnom. NPO. Atqui ob DM [π] $=$ o. 43. 1.
DB est $AM = AD \times DB$. Ergo $AD \times DB$ π. 1. cor. 4. 2.
$=$ gnom. NPO. Sed ob $CB =$ [ρ] LH, est ρ. 34. 1.
$CBq =$ [π] LG. Ergo $AD \times DB + CBq =$
gnom. $NPO + LG = CDq$. Q. E. D.

PROP.

## PROP. VII. THEOR.




*Si recta linea* AB *secetur vtcunque in* C: *quadrata totius* AB *&* *vnius e segmentis* BC *simul sumta aequantur rectangulo* $2\,AB \times BC$ *bis contento sub tota & dicto segmento, vna cum* ACq *quadrato reliqui segmenti.*

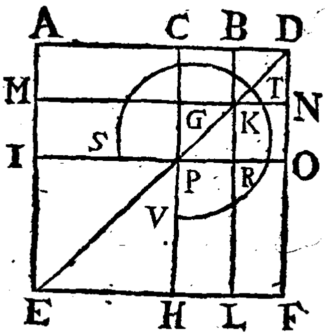
Describantur enim ex AB quadratum AE, & in eo reliquae figurae, vt antea. Quoniam
σ. 43. 1. AH $=^{\sigma}$ HE, erit $^{\tau}$ AF $=$ CE, & AF $+$ CE
τ. 2. ax. $=$ 2 AF. Sed AF $+$ CE $=$ gnom. KLM $+$ CF: ergo gnomon KLM $+$ CF $=$ 2 AF. Iam
υ. 1. corol. quum $^{\upsilon}$ CF sit CBq, & hinc BF $=$ BC: erit
4. 2. $2\,AB \times BC = 2\,AF$, ideoque gnomon KLM $+$ BCq $= 2\,AB \times BC$. Ergo addito vtrinque GN $=$ ACq, erit ABq $+$ BCq $= 2\,AB \times BC +$ ACq. Q. E. D.

### * *Scholium.*

Hinc quadratum differentiae duarum rectarum AB, BC, aequale est quadratis vtriusque minus duplo rectangulo sub ipsis. Nam ABq $+$ BCq
φ. 3. ax. $-\ 2\,AB \times BC =^{\varphi}$ ACq $=$ (AB $-$ BC) q.

PROP.

## PROP. VIII. THEOR.



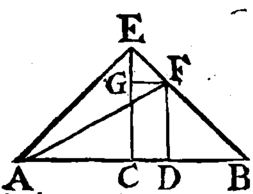

*Si recta linea AB secetur vtcunque in C: rectangulum quater contentum sub tota AB & vno e segmentis BC, una cum quadrato reliqui segmenti AC, aequatur quadrato compositae ex tota AB & praedicto segmento BC tanquam vnius lineae.*

In producta AB fiat BD = BC, & describatur ex AD quadratum AEFD, & reliquae figurae describantur bis, quae in praecedente propositione. Ergo quia CB = BD, & κ CB = GK, ac BD = KN: erit GK = KN. Eadem ratione PR = RO. Hinc ψ Rgl. CK = Rgl. BN, & Rgl. GR = Rgl. KO. Sed Rgl. CK = ω Rgl. KO. Quare & Rgl. BN = Rgl. GR; ideoque CK + BN + GR + KO = 4 CK. Porro GC κ = BK = α BD, & BC = BD, ideoque CG = CB. Sed & α GP = GK = CB. Ergo CG = GP, & Rgl. AG = ψ Rgl. MP. Eadem ratione ob PR = RO est Rgl. PL = Rgl. RF. Quum autem in pgr. ML sit MP = ω PL: erit AG = RF; hinc AG + MP + PL + RF = 4 AG. Sed ostensum est, quod CK + BN + GR + KO = 4 CK. Quare β totus gnomon STV

κ. 34. 1.
ψ. 36. 1.
ω. 43. 1.
α. 1. coroll. 4. 2.
β. 2. ax.

$= 4$ AK. Sed ob BK $=$ BD $=$ BC est AK $=$ AB $\times$ BC. Ergo gnomon STV $= 4$ AB $\times$ BC. Denique quia IP $=$ $^{\varkappa}$ AC, est IH vel $^{\alpha}$ IPq $=$ ACq. Quare $^{\beta}$ totum quadratum AF, id est (AB $+$ BC)q $= 4$ AB $\times$ BC $+$ ACq. Q. E. D.

## PROP. IX. THEOR.




*Si recta linea* AB *secetur in aequalia* AC, CB *& inaequalia* AD, DB: *quadrata inaequalium segmentorum* ADq $+$ DBq *sunt dupla quadratorum a dimidia, & a recta inter puncta sectionum,* 2 ACq $+$ 2 CDq.

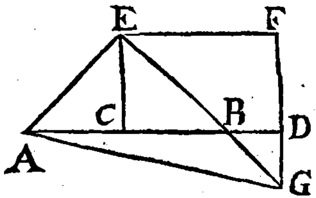
γ. 11. 1. Ex C ducatur $^{\gamma}$ in AB perpendicularis, in
δ. 3. 1. qua fiat $^{\delta}$ CE $=$ AC. Iungantur AE, EB, &
ε. 31. 1. per D ipsi CE $^{\epsilon}$ parallela DF, & per F ipsi
AB parallela FG agantur, iungaturque AF.
ζ. 5. 1. Itaque quia $^{\zeta}$ EAC $=$ AEC, &, ob ang. ACE
rectum, EAC $+$ AEC $=$ $^{\eta}$ recto: vterque
ang. EAC, AEC $= \frac{1}{2}$ rect. Eadem ratione
vterque ang. EBC, BEC $= \frac{1}{2}$ rect. Ergo totus ang. AEB rectus est. Et quia ang. GEF
η. 3. schol. 32. 1. $= \frac{1}{2}$ recti, EGF vero $^{\vartheta}$ $=$ ECB $=$ recto: re-
θ. 29. 1. liquus EFG etiam $^{\iota}$ $= \frac{1}{2}$ recti. Hinc ang.
ι. 32. 1. GEF $=$ EFG, & $^{\varkappa}$ GF $=$ EG. Eadem ratione DF $=$ DB. Et quoniam AC $=$ CE, ideo-
κ. 6. 1. que $^{\lambda}$ ACq $=$ CEq: erit ACq $+$ CEq $= 2$
λ. sch. 48. 1. ACq. Est vero ACq $+$ CEq $=$ $^{\mu}$ AEq. Ergo AEq

go AEq $=$ 2 ACq. Eadem ratione est EFq $=$ [μ] 2 GFq $=$ 2 CDq. Quare AEq $+$ EFq, id est [λ] AFq $=$ 2 ACq $+$ 2 CDq. Sed AFq $=$ [μ] ADq $+$ DFq $=$ ADq $+$ DBq. Ergo ADq $+$ DBq $=$ [ν] 2 ACq $+$ 2 CDq. Q. E. D. μ. 47. 1. ν. 2. ax.

### * *Scholium.*

Aliter effertur sic: *Aggregatum quadratorum ex summa* AD *& differentia* DB *duarum rectarum* AC, CD *aequatur duplo quadratorum ex ipsis* AC, CD.

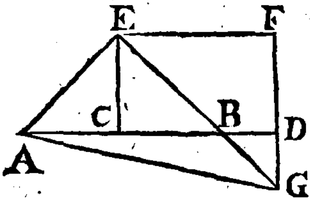
## PROP. X. THEOR.




*Si recta linea* AB *secetur bifariam in* C, *& illi recta quaecunque linea* BD *in directum adiiciatur: quadratum compositae* AD *ex tota & adiecta, & quadratum adiectae* BD *simul sumta sunt dupla & quadrati ex dimidia* AC, *& quadrati compositae* CD *ex dimidia & adiecta, tanquam unius lineae.*

Ducatur enim [ξ] ex C ipsi AD, perpendicularis CE, & fiat alterutri AC, CB aequalis, iunganturque AE, EB, & per E quidem [ο] ducatur ipsi AD parallela EF, per D vero ipsi CE parallela DF. Et quoniam anguli FEC $+$ EFD $=$ [π] 2 rectis: ang. FEB $+$ EFD $<$ ξ. 11. 1. ο. 31. 1. π. 29. 1.

 2 rect.




2 rect. ideoque rectae EB, FD productae conuenient $^{\rho}$ ad partes BD. Producantur & conueniant in G, & iungatur AG.

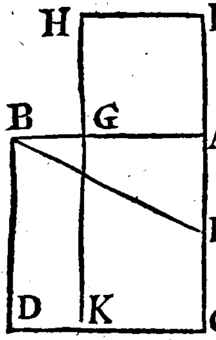
ρ. 11. ax.

σ. 5. 1.
τ. 32. 1.
υ. 2. ax.
φ. 15. 1.
χ. 6. 1.
ψ. 34. 1.
ω. sch. 48. 1.
α. 47. 1.
β. 34. 1. & sch. 48. 1.

Itaque quia EAC $=^{\sigma}$ CEA, &, ob ang. ACE rectum, EAC + CEA $=^{\tau}$ recto, erit vterque ang. EAC, CEA $= \frac{1}{2}$ recti. Eadem ratione vterque ang. CEB, EBC $= \frac{1}{2}$ recti. Ergo $^{\upsilon}$ AEB = recto. Quia $^{\varphi}$ DBG = EBC, & hinc DBG $= \frac{1}{2}$ recti, BDG vero $=^{\pi}$ ECB = recto: erit $^{\tau}$ ang. BGD $= \frac{1}{2}$ recti = DBG, ideoque DG $=^{\chi}$ BD. Et quum ergo BGD $= \frac{1}{2}$ recti, ac ang. EFG $=^{\psi}$ ECD = recto: erit quoque $^{\tau}$ ang. FEG $= \frac{1}{2}$ recti = EGF, & hinc $^{\chi}$ EF = FG. Porro quia, ob AC = CE, est ACq $=^{\omega}$ CEq, & ACq + CEq = 2 ACq: erit $^{\alpha}$ AEq = 2 ACq. Simili ratione EGq = 2 EFq $=^{\beta}$ 2 CDq. Quare $^{\upsilon}$ AGq ($=^{\alpha}$ AEq + EGq) = 2 ACq + 2 CDq. Sed AGq $=^{\alpha}$ ADq + DGq = ADq + BDq. Ergo ADq + BDq = 2 ACq + 2 CDq. Q. E. D.

PROP.

## PROP. XI. PROBL.




*Datam rectam lineam* AB *ita secare, vt rectangulum sub tota* AB *& altero segmento aequetur quadrato reliqui segmenti.*

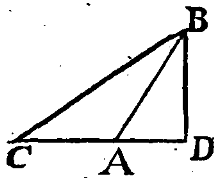
Describatur [γ] ex AB quadratum ABDC, seceturque [δ] AC bifariam in E, ducatur EB, & in producta EA fiat EF = [ε] EB, ac describatur ex AF quadratum AFHG, & producatur HG ad K. Dico AB ita sectam esse in G, vt sit AB × BG = AGq.

γ. 46. 1.
δ. 10. 1.
ε. 3. 1.

Nam [ζ] CF × FA + AEq = EFq = [η] EBq. Sed EBq = [θ] ABq + AEq. Ergo CF × FA + AEq = ABq + AEq, & hinc [ι] CF × FA = ABq. Iam quia [κ] AF = FH, erit CF × FA = Rgl. FK. Est vero ABq = AD ( per constr.) Ergo Rgl. FK = AD. Hinc ablato communi GC, erit FG = GD. Sed FG est AGq, & ob BD = [κ] AB est GD = AB × BG. Ergo AB × BG = AGq. Q. E. D.

ζ. 6. 2.
η. sch. 48. 1.
θ. 47. 1.
ι. 3. ax.
κ. 29. def. 1.

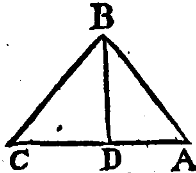
## PROP. XII. THEOR.



*In triangulis amblygoniis* ABC *quadratum lateris* BC, *ſubtendentis angulum obtuſum* A, *maius eſt quam quadrata laterum* AC, AB, *angulum obtuſum* A *comprehendentium, rectangulo bis contento ſub vno laterum* C A, *circa angulum obtuſum, in quod productum perpendicularis* BD *cadit, & recta* AD *extra intercepta a perpendiculari* BD *ad angulum obtuſum.* (Hoc eſt: $BCq = CAq + ABq + 2\,CA \times AD$.)

λ. 4. 2. Nam λ $CDq = CAq + ADq + 2\,CA$
μ. 2. ax. $\times AD$, ideoque μ $CDq + DBq = CAq + ADq + DBq + 2\,CA \times AD$. Sed $CDq$
ν. 47. 1. $+ DBq$ ν $= CBq$, & $ADq + DBq = ABq$. Ergo $CBq = CAq + ABq + 2\,CA \times AD$. Q. E. D.

## PROP. XIII. THEOR.



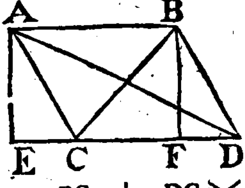
*In triangulis oxygoniis* ABC *quadratum lateris* BC, *ſubtendentis angulum acutum* A, *minus eſt quam quadrata laterum* AC, AB *comprehendentium angulum acutum, rectangulo bis contento ſub vno laterum circa angulum acutum* CA, *in quod perpendicularis* BD *cadit, & recta* AD *intus intercepta a perpendiculari ad angulum*

*acutum*

*acutum.* (Hoc est: $BCq + 2\,CA \times AD = CAq + ABq.$)

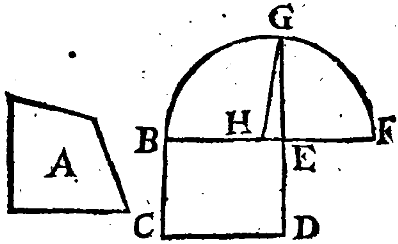
Nam [ξ] $CAq + ADq = 2\,CA \times AD +$ $CDq$; hinc [o] $CAq + ADq + BDq = 2\,CA \times AD + CDq + BDq$. Iam [π] $ABq = ADq + BDq$, & $BCq = CDq + BDq$. Ergo $CAq + ABq = BCq + 2\,CA \times AD$. Q. E. D. ξ. 7. 2. o. 2. ax. π. 47. 1.

* *Schol.* Hinc demonstratur, *in omni parallelogrammo* ABDC *quadrata e diametris* AD, BC *aequalia esse quadratis laterum simul sumtis.* Nam ductis perpendicularibus AE, BF, est $ADq =$ [ρ] $DCq + CAq + 2\,DC \times CE$, & $BCq + 2\,DC \times DF =$ [σ] $CDq + BDq$. ρ. 12. 2.



Est autem $CDq =$ [τ] $ABq$; σ. 13. 2.
& ob ang. AEC = [υ] BFD, τ. 34. 1.
ac ACE = [φ] BDF, ac AC υ. 10. def. 1 & 10. ax.
= [τ] BD, est CE = [χ] DF: φ. 29. 1.
ergo $BCq + 2\,DC \times CE = ABq + BDq$. Quare [ψ] $ADq + BCq + 2\,DC \times CE = ABq + BDq + DCq + CAq + 2\,DC \times CE$, & ergo [ω] $ADq + BCq = ABq + BDq + DCq + CAq$. Q. E. D. χ. 26. 1. ψ. 2. ax. ω. 3. ax.

PROP. XIV. PROBL.




*Dato rectilineo* A *aequale quadratum constituere.*

α. 45. 1. Constituatur rectilineo A aequale [α] pgr. rectangulum BD. Si igitur BE = ED: erit
β. 29. def. & 34. 1. BD quadratum [β] desideratum. Sin minus: erit alterutrum latus BE > ED, & tunc producatur BE, donec EF = [γ] ED, & bisecta [δ]
γ. 3. 1. δ. 10. 1. BF in H describatur circulus interuallo HB vel HF, & producatur DE in G. Dico fore EGq = A.

ε. 5. 2. Nam iungatur HG: & est [ε] BE × EF +
ζ. 15. def. & sch. 48. 1. HEq = HFq = [ζ] HGq. Sed ob ang. HEG [η]
η. 1. sch. 13. rectum, est [θ] HGq = EGq + HEq. Qua-
θ. 47. 1. re EGq + HEq = [ι] BE × EF + HEq,
ι. 1. ax. atque EGq = [κ] BE × EF. Est autem ob [λ]
κ. 3. ax. EF = ED, BE × EF = Rgl. BD = [λ] A.
λ. constr. Ergo EGq = [ι] A. Q. E. D.

EV-

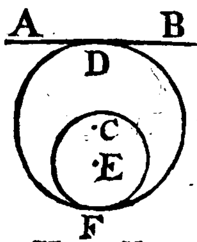
# EVCLIDIS ELEMENTORVM

## LIBER III.

* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *

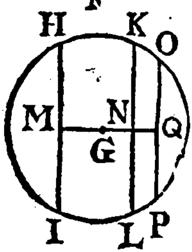
### DEFINITIONES.

1. *Aequales circuli* ſunt, quorum diametri ſunt aequales, vel quorum quae ex centris ſunt aequales.



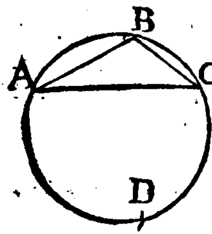

2. *Recta linea* AB *circulum* C *contingere* dicitur, quae contingens circulum ( in D) & producta ipſum non ſecat.

3. *Circuli* C, & E, *contingere ſeſe* dicuntur, qui contingentes ſe mutuo ( in F) ſe non ſecant.




4. In circulo *aequaliter diſtare a centro* G *rectae* lineae HI, KL dicuntur, quando a centro ad ipſas perpendiculares GM, GN ductae ſunt aequales.

5. *Magis* autem *diſtare a centro* G dicitur ea OP, in quam maior perpendicularis GQ cadit.

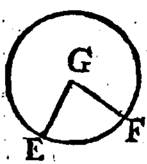



6. *Segmentum circuli* est figura ACBA, quae sub recta linea AC & circuli circumferentia ABC comprehenditur.

7. *Angulus segmenti* est ACD, qui recta linea AC & circuli circumferentia CD comprehenditur.

8. *Angulus in segmento* ACBA est, quando in circumferentia ABC segmenti sumitur aliquod punctum B, atque ab ipso ad terminos A, C, lineae eius AC, quae basis est segmenti, rectae lineae BA, BC ducuntur, angulus ABC a ductis lineis BA, BC comprehensus.

9. Quando autem comprehendentes angulum ABC rectae lineae BA, BC intercipiunt circumferentiam ADC: illi *circumferentiae* ADC *insistere angulus* ABC dicitur.



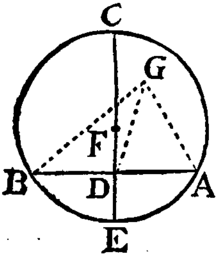

10. *Sector circuli* est, quando angulus EGF ad centrum G constiterit, figura GEFG contenta rectis lineis GE, GF angulum comprehendentibus, & circumferentia EF ab ipsis intercepta.

11. *Similia circulorum segmenta* sunt, quae angulos capiunt aequales: vel in quibus anguli sunt inter se aequales.

PROP.

## PROPOSITIO I. PROBL.

*Dati circuli* ACB *centrum inuenire.*



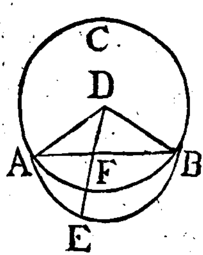

Ducatur in ipſo recta AB vtcunque, quae biſecetur [α] in D. A puncto D ipſi AB ad rectos [β] ducta DC producatur in E, & biſecetur CE in F. Dico, punctum F centrum eſſe circuli ABC. α. 10. 1. β. 11. 1.

Si negas: centrum eſto G extra rectam CE. (Nam in ea praeter F nullum [γ] eſſe poteſt.) Ducantur GA, GD, GB. Ergo GA = [γ] GB, & AD = [δ] DB; latus vero GD commune: hinc [ε] ang. GDA = GDB. Eſt ergo [ζ] ang. GDA rectus, ideoque [η] angulo CDA aequalis. Q. E. A [ϑ].

γ. 15. def. 1.
δ. conſtr.
ε. 8. 1.
ζ. 10. def. 1.
η. 10. ax.
ϑ. 9. ax.

*Coroll.* Ex hoc perſpicuum eſt, *ſi in circulo recta linea* CD *rectam* AB *bifariam & ad angulos rectos ſecat, circuli centrum eſſe in ſecante* CD.

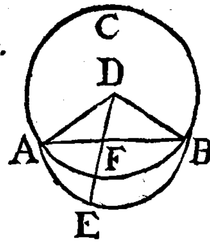
## PROP. II. THEOR.




*Si in circumferentia circuli* ABC *duo quaelibet puncta* A, B *ſumantur: quae ipſa coniungit recta linea* AB *intra circulum cadit.*

Si enim non: cadet extra, vt AEB. Sumatur [ι] circuli centrum D, & ducantur rectae DA, DB, ι. 1. 3.

DFE.



DFE. Quoniam ergo DA
κ. 15. def. 1. = κ DB: erit ang. DAE =
λ. 5. 1. λ DBE. Et quum trianguli
ADE latus AE productum
μ. 16. 1. sit in B: erit μ ang. DEB >
DAE, ergo & ang. DEB
ν. 14. ax. ξ. 19. 1. > ν DBE, & DB > ξ DE.
Sed DB = κ DF. Quare ν DF > DE. Quod fieri nequit, quia E extra circulum esse ponitur. Similiter ostendemus rectam AB nec in circumferentiam cadere. Ergo intus cadat necesse est. Q. E. D.

## PROP. III. THEOR.

*Si in circulo* ABC *recta linea* CD *per centrum* E *ducta rectam lineam* AB *non ductam per centrum, bifariam secat* in F: *& ad angulos rectos ipsam secabit. Quod si ad angulos rectos ipsam* AB *secet: & bifariam secabit.*

Ducantur EA, EB.

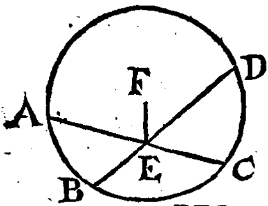
ο. 15. def. 1. *1. Hyp.* Quoniam AF = FB, & EA = ο
π. 8. 1. EB, & latus EF commune: est π ang. AFE
ρ. 10. def. 1. = BFE, & ergo ρ vterque rectus. Q. E. D.
σ. 10. ax. *2. Hyp.* Quoniam ang. AFE = σ BFE, &
τ. 5. 1. EA = EB, & ergo τ ang. EAF = EBF: est
υ. 26. 1. υ AF = FB. Q. E. D.

* *Coroll.* Hinc *in omni triangulo aequilatero & isosceli linea recta ab angulo verticis bisecans basin,* *perpen-*

*perpendicularis est basi; & contra perpendicularis ab angulo verticis bisecat basin; & perpendicularis e puncto medio basis angulum ad verticem bisecat.*

## PROP. IV. THEOR.

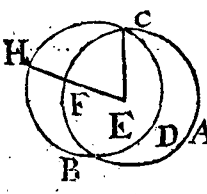
*Si in circulo* ABCD *duae rectae* AC, BD *non ductae per centrum se inuicem secent* in E: *sese bifariam non secabunt.*



Si enim fieri potest, sit AE = EC, & BE = ED. Sumatur φ centrum circuli F, iungaturque FE. Erit ergo χ ang. FEA rectus, nec non ang. FEB rectus erit. Quare erit ψ ang. FEA = FEB. Q. E. A ω.

φ. 1. 3.
χ. 3. 3.
ψ. 10. ax.
ω. 9. ax.

## PROP. V. THEOR.



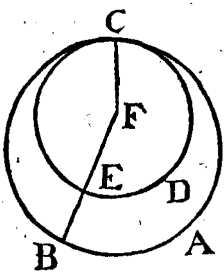
*Si duo circuli* ABC, CDH *se inuicem secent* in B, C: *non erit ipsorum idem centrum.*

Nam si fieri potest, sit E commune centrum. Iungatur CE, & ducatur recta EFH vtcunque. Erit ergo α, in circulo ABC, EF = EC, & in altero circulo, EH = EC, ideoque EF = EH. Q. F. N β.

α. 15. def. 1.
β. 9. ax.

PROP.

## PROP. VI. THEOR.



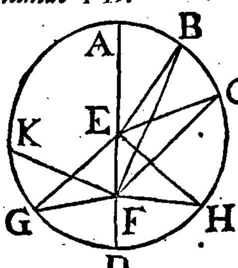

*Si duo circuli* ABC, CDE *ſeſe intra contingunt* in C: *ipſorum idem centrum non erit.*

Si enim fieri poteſt, ſit eorum idem centrum F. Iungatur CF, & ducatur vtcunque FEB.

γ. 15. def. 1. δ. 9. ax. Foret γ FB = FC = FE. Q. E. A δ.

## PROP. VII. THEOR.

*Si in circuli* ABCD *diametro* AD *aliquod punctum* F *ſumatur, quod non ſit centrum circuli, & ab eo* F *in circulum cadant quaedam rectae lineae* AFD, FB, FC, FH: *maxima quidem erit* FA, *in qua centrum* E, *reliqua vero* FD *minima; aliarum autem ſemper propinquior* FB *ei* FC, *quae per centrum, maior eſt remotiore* FC; *duaeque tantum aequales ab eodem puncto* F *in circulum cadent ex vtraque parte minimae* FD.




ε. 20. 1.
ζ. 15. def. 1. & 2. ax.
η. 14. ax.
θ. 24. 1.

1. Iungantur EB, EC, EH. Et quia ε FE + EB > FB, ac FE + EB = ζ FA: erit FA > η FB. Rurſus quia EB = EC, & EF latus commune, & ang. BEF > CEF: eſt θ FB > FC. Eadem ratione & FC > FH. Rurſus quia

FH

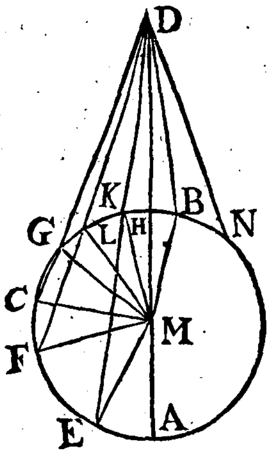
FH + FE >[ε] EH, & ED = EH: est FH + FE >[η] ED, ac ergo FH >[θ] FD. Maxima ergo est FA, minima FD, & FB > FC > FH. Q. E. D.

θ. 5. ax.

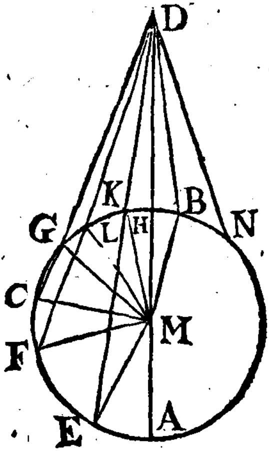
2. Fiat[ι] ang. DEG = DEH, & ducatur FG; & quum praeterea EG = EH, & communis EF: erit[κ] FG = FH. Omnis autem alia vt FK aut maior aut minor erit[λ], quam FG. Ergo duae tantum aequales FH, FG in circulum cadent. Q. E. D.

ι. 23. 1.
κ. 4. 1.
λ. per partem. 1.

## PROP. VIII. THEOR.




*Si extra circulum* ABC *aliquod punctum* D *sumatur, atque ab eo ad circulum ducantur quaedam rectae lineae, quarum vna* DA *per centrum* M *transeat, reliquae vero* DE, DF, *vtcunque: earum quidem, quae in concauam circumferentiam cadunt, maxima est* DA, *quae per centrum transit, aliarum autem* DE, DF, DC *semper propinquior ei* DA, *quae per centrum, maior est remotiore; earum vero, quae in connexam circumferentiam cadunt, minima est* DH, *quae inter punctum* D *&* *diametrum* HA *interiicitur, aliarum autem* DK, DL,




*DL, DG semper quae propinquior minimae DH minor est remotiore; duaeque tantum aequales a puncto D in circulum cadunt ex vtraque parte minimae DH.*

1. Iungantur ME, MF, MC, MG, ML, MK. Et quia [μ] $DM + ME > DE$, atque $DM + ME =$ [ν] $DA$: est $DA >$ [ξ] $DE$. Rursus quia $ME = MF$, & communis MD, & ang. $DME > DMF$: est $DE >$ [ο] $DF$. Similiter $DF > DC$. Maxima ergo est DA, & huic propinquior remotiore semper maior. Q. E. D.

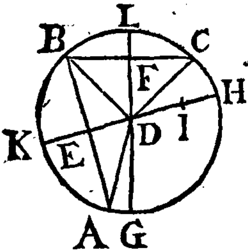
2. Quia $MK + DK >$ [μ] $MD$, & $MK = MH$: est $DK >$ [π] $DH$, vel $DH < DK$. Porro quum [ρ] $DK + KM < DL + LM$, & $KM = LM$: est $DK < DL$. Eadem ratione $DL < DG$. Minima ergo est DH, & huic propinquior remotiore minor. Q. E. D.

3. Ponatur [σ] ang. $BMD = KMD$; & quia $KM = BM$, ac communis DM: est [τ] $DK = DB$. Et omnis alia vt DN in circulum cadens aut maior est aut minor [υ], quam DB vel DK. Quare duae tantum rectae DK, DB aequales ex D in circulum cadunt. Q. E. D.

μ. 20. 1.
ν. 15. def. 1. & 2. ax.
ξ. 14. ax.
ο. 24. 1.
π. 5. ax.
ρ. 21. 1.
σ. 23. 1.
τ. 4. 1.
υ. per partem 2.

PROP.

## PROP. IX. THEOR.



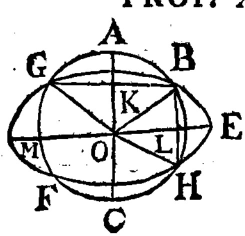

*Si intra circulum* ABC *sumatur aliquod punctum* D, *atque ab eo in circulum cadant plures, quam duae rectae lineae* DA, DB, DC *aequales: punctum* D, *quod sumitur, erit centrum circuli.*

Iungantur enim AB, BC, & bisecentur in E, F, & iunctae DE, DF ad K, H, L, G producantur. Quia ergo AE = EB, ED = ED, & basis AD = BD: est [φ] ang. AED = BED. φ. 8. 1.
Ergo KH ipsam AB bifariam & ad angulos rectos [χ] secat, & ergo [ψ] in KH centrum circuli χ. 10. def. 1
est. Eadem ratione & in LG est centrum ψ. cor. 1. 3
circuli ABC. Nullum autem punctum praeter D commune habent [ω] rectae LH, LG. ω. 12. ax.
Ergo D est centrum circuli ABC. Q. E. D.

*Aliter.*

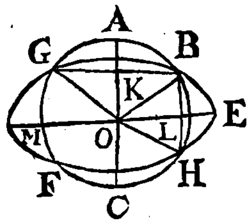
Si D non sit centrum circuli ABC: sit illud I. Ducatur recta HIDK. Erit ergo DC α. 7. 3.
[α] > DB. Sed & DC = DB [β]. Q. E. A. β. hyp.

## PROP. X. THEOR.




*Circulus circulum in pluribus quam duobus punctis non secat.*

Si enim fieri potest, circulus ABC circulum BEF secet in pun-



ctis B, H, G. Iunctae
γ. 10. 1. BG, BH bisectae sint [γ] in K, L punctis, a quibus ipsis BG, BH ad rectos angulos ductae sint AK OC, ELOM. Erit er-
δ. cor. 1. 3. go [δ] in vtraque AC, EM centrum circuli ABC, ideoque O erit centrum circuli ABC. Eadem ratione O est
ε. 5. 3. centrum circuli BEF. Q. F. N [ε].

*Aliter.*

ζ. 1. 3. Circuli ABC centrum sumatur [ζ], quod
η. 15. def. 1. sit O. Iungantur OG, OB, OH, quae [η] ae-
ϑ. 9. 3. quales erunt, Erit ergo O quoque centrum [ϑ] circuli BEF. Q. F. N [ε].

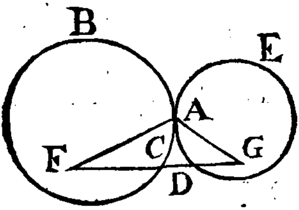
## PROP. XI. THEOR.

*Si duo circuli* ABC, ADE *sese intus contingant, & sumantur centra ipsorum* F, H: *recta linea ipsorum centra coniungens producta in circulorum contactum* A *cadet.*

Si negas: sint centra F, H in alia recta FDG, quae non cadat in conta-
ι. 20. 1. ctum A. Iungantur AF, AH. Erit ergo [ι]
κ. 5. ax.
λ. 15. def. 1. AH + HF > AF vel FG, & proinde [κ] AH
μ. 14. ax. > HG. Sed AH [λ] = HD. Ergo HD > [μ] HG. Q. F. N.

PROP.

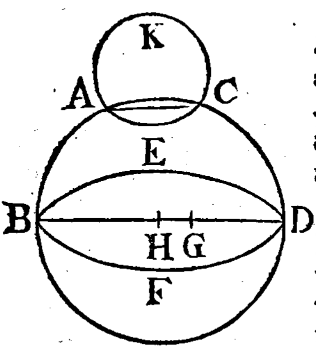
## PROP. XII. THEOR.




*Si duo circuli* ABC, ADE *sese extra contingant* in A: *recta linea ipsorum centra coniungens per contactum transibit.*

Si enim centra F & G essent in alia recta FCDG per contactum A non transeunte: iunctis AF, AG, foret, ob FC = [ν] FA, & GD = AG, tota FG > FA + AG. Q. E. A [ξ]. ν. 15. def. 1. ξ. 20. 1.

## PROP. XIII. THEOR.



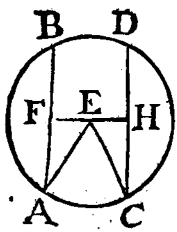

*Circulus circulum non contingit in pluribus punctis quam uno, siue intus, siue extra contingat.*

1. Si enim fieri potest, contingat circulum ABDC circulus BEDF intus in duobus punctis B, D. Sumantur centra horum circulorum [ο] H, G, & iungatur HG, quae producta [π] in puncta B & D cadet. Sed quia BH [ρ] = HD, erit BH > [σ] GD, & a potiori BG > GD. Est vero [ρ] & BG = GD. Q. E. A. ο. 1. 3. π. 11. 3. ρ. 15. def. 1. σ. 14. ax.

2. Si fieri potest, contingat circulus ACK circulum ABC in duobus punctis A, C extra.

τ. 2. 3. Iungatur AC, quae [τ] intra vtrumque circulum cadet. Sed quia circulus AKC circulum
υ. hyp. ABC extra [υ] contingit: recta intra circulum
φ. 3. def. 3. AKC ducta extra circulum ABC [φ] cadet. Ergo AC simul intra & extra circulum AKC cadet. Q. E. A.

## PROP. XIV. THEOR.




*In circulo* ABDC *aequales rectae lineae* AB, CD *aequaliter distant a centro* E. *Et quae* AB, CD *aequaliter distant a centro* E, *sunt inter se aequales.*

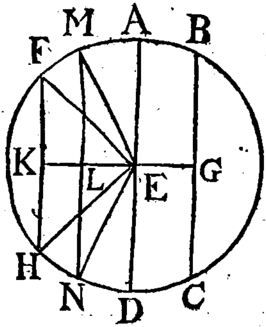
Ex centro E ad rectas AB,
χ. 12. 1. CD demittantur [χ] perpendiculares EF, EH, & iungantur EA, EC.

ψ. 3. 3. 1. Quia ergo [ψ] $AF = AB$: erit $\frac{1}{2} AB = AF$. Eadem ratione $\frac{1}{2} CD = HC$. Et quia
ω. 7. ax. $AB = CD$: erit [ω] $AF = HC$. Deinde quia
α. 15. def. 1. $AE =$ [α] $EC$, & hinc [β] $AEq = ECq$: erit [γ]
β. sch. 48. 1. $AFq + EFq = HCq + EHq$. Sed $AFq$
γ. 47. 1. & $=$ [β] $HCq$. Ergo [δ] $EFq = EHq$, ideoque [β]
1. ax. $EF = EH$. Rectae ergo AB, CD a centro
δ. 3. ax. E [ε] aequaliter distant. Q. E. D.
ε. 4. def. 3.

2. Quia [ε] $EF = EH$, & hinc $EFq = EHq$: & praeterea $EFq + AFq =$ [γ] $EHq + CHq$: erit $AFq =$ [δ] $CHq$, & hinc $AF =$ [β] $CH$,
ζ. 6. ax. & $AB =$ [ζ] $CD$. Q. E. D.

PROP.

## PROP. XV. THEOR.

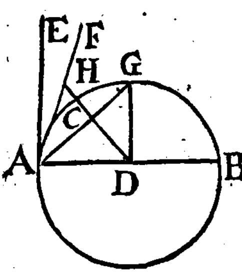



*In circulo maxima quidem est diameter* AD, *aliarum vero semper propinquior* BC *centro* E *maior est remotiore* FH.

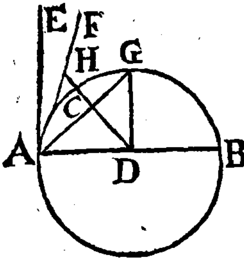
Ducantur a centro ad BC, FH perpendiculares EG, EK: & erit EK > [η] EG. Ponatur EL = EG, & per L ipsi EK perpendicularis [θ] ducatur MLN, & iungantur EM, EN, EF, EH. Quoniam EL = EG, erit [ι] MN = BC. Quia ME = AE, & NE = ED: erit [κ] ME + EN = AD. Sed ME + EN > [λ] MN. Ergo AD > [μ] MN, & AD > BC. Deinde quia ME = FE, & NE = HE, ang. vero MEN > FEH: erit [ν] basis MN > FH, ergo & BC > [μ] FH. Maxima ergo est AD, & BC maior quam FH. Q. E. D.

η. 5. def. 3.
θ. 11. 1.
ι. 14. 3.
κ. 2. ax.
λ. 20. 1.
μ. 14. ax.
ν. 24. 1.

## PROP. XVI. THEOR.




*Recta* EA *diametro* AB *circuli* ABC *ad rectos angulos ab extremitate* A *ducta cadit extra circulum. Et in locum, qui inter rectam lineam* AE, *&* *circumferentiam interiicitur, altera recta linea*




*non cadet. Et semicirculi angulus* C A B *maior est quouis angulo rectilineo acuto, reliquus autem* C A E *minor.*

1. Si fieri potest, cadat recta E A intus, & secet circulum in G. Ex centro ducatur D G. Quoniam D A = D G,
ξ. 5. 1. erit ang. A G D = [ξ] G A D = recto. Q. E.
ο. 17. 1. A [ο]. Similiter ostenditur, E A nec in circumferentiam cadere posse. Ergo extra circulum cadet. Q. E. D.

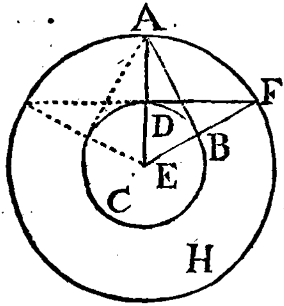
2. Si fieri potest, cadat recta FA inter EA, & circumferentiam AC. A centro D ad AF ducatur perpendicularis DH. Et quoniam
π. 10. def. 1. ang. AHD rectus [π] est, & ang. DAH recto
ρ. 10. & 14. ax. DAE minor: erit ang. DAH < [ρ] AHD, &
σ. 19. 1. ergo HD < [σ] AD. Sed AD = DC: ergo
τ. 9. ax. HD < DC. Q. E. A [τ].

3. Si quis angulus rectilineus acutus vt FAB maior esset angulo semicirculi CAB, vel aliquis angulus vt FAE minor angulo GAE: recta FA caderet inter perpendicularem EA, & circumferentiam AC. Q. F. N.

υ. 2. def. 3. & 2. 3. *Coroll.* Hinc, [υ] *recta linea, quae ad rectos angulos ducitur diametro circuli ab extremitate eiusdem, circulum tangit, & quidem in vnico puncto.*

PROP.

## PROP. XVII. PROBL.

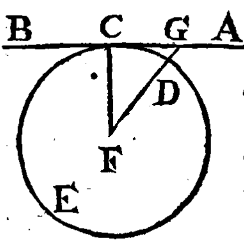



*A dato puncto* A *rectam lineam ducere, quae datum circulum* BCD *contingat.*

Sumatur centrum φ circuli E, & iungatur ADE, & centro E interuallo EA describatur circulus AHF, & a puncto D ipsi AE ad angulos rectos ducatur DF. Iungantur EBF, ac AB, quae circulum continget. φ. 1. 3.

Nam EA = EF, & EB = ED, & communem angulum AEB continent. Ergo χ ang. EBA = FDE = recto. Ergo ψ AB circulum BDC tangit. Q. E. F. χ. 4. 1. ψ. cor. 16. 3.

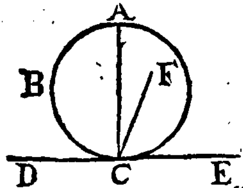
## PROP. XVIII. THEOR.




*Si recta linea* AB *circulum* CDE *contingat; a centro* F *autem ad contactum* C *recta linea* FC *ducatur: ea perpendicularis erit tangenti* AB.

Si enim non sit ita: ducatur ex F ad AB ω perpendicularis FDG. Quia ergo FGC rectus est, erit α ang. GCF minor recto, quare & FG < β FC. Sed FD = FC: ergo FG < FD. Q. E. A γ. ω. 12. 1. α. 17. 1. β. 19. 1. γ. 9. ax. & 2. def. 3.

## PROP. XIX. THEOR.




*Si recta linea* DE *circulum* ABC *contingat, a contactu autem* C *recta linea* CA *ducatur ad angulos rectos tangenti* DE: *centrum circuli erit in eadem* CA.

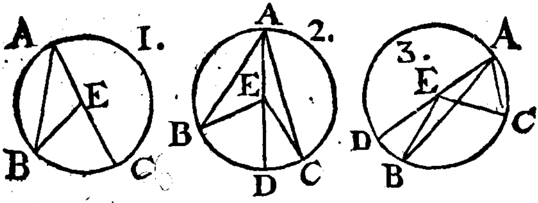
Si enim non: ſit centrum in alia recta CF.

δ. 18. 3. Erit ergo [δ] FCE rectus. Eſt autem & ACE

ε. hyp. rectus [ε]. Q. E. A [ζ].

ζ. 9. ax.

## PROP. XX. THEOR.




*In circulo* ABC *angulus* BEC, *qui ad centrum* E, *duplus eſt eius* BAC, *qui ad circumferentiam; quando circumferentiam eandem* BC *habent pro baſi.*

*Caſ. 1.* Si E cadit in AC. Quoniam EA =

η. 5. 1. EB: erit ang. BAC = [η] ABE, ideoque 2 BAC

θ. 32. 1. = BAC + ABE. Sed ang. BEC = [θ] BAC + ABE. Ergo BEC = 2 BAC. Q. E. D.

*Caſ. 2.* Si E intra ang. BAC cadit. Iungatur

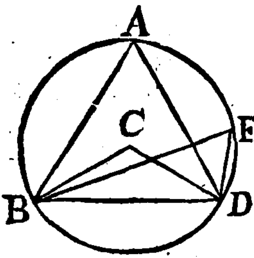
ι. caſ. 1. AED: & erit BED = [ι] 2 BAD, & DEC

κ. 2. ax. = 2 DAC; quare ang. BEC = [κ] 2 BAC. Q. E. D.

*Caſ.*

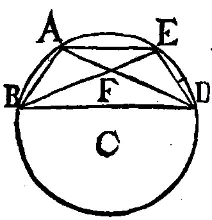
*Caſ. 3.* Si E extra ang. B A C cadit: ſimiliter oſtenditur, eſſe ang. B E C = [λ] 2 B A C. λ. 3. ax. Q. E. D.

## PROP. XXI. THEOR.



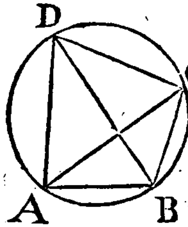

*Anguli* B A D, B E D *in eodem circuli ſegmento* B A E D *ſunt inter ſe aequales.*

*Caſ. 1.* Si ſegmentum B A E D ſit ſemicirculo maius: ſumatur [μ] circuli centrum C, & iungantur CB, CD. Quia ergo ang. B A D = [ν] $\frac{1}{2}$ B C D, & ang. B E D = [ν] $\frac{1}{2}$ B C D: erit [ξ] ang. B A D = B E D. Q. E. D. μ. 1. 3. ν. 20. 3. ξ. 7. ax.




* *Caſ. 2.* Si ſegmentum B A E D ſemicirculo maius non ſit: iungatur A E. Et quia ſegmentum A B D E ſemicirculo maius erit: per caſ. 1. erit angul. A B E = A D E. Sed & ang. B F A = [ο] E F D. Subtractis ergo his angulis ab aequalibus [π] ſummis angulorum in triangulis A B F, E D F: remanebit ang. B A D = B E D. Q. E. D. ο. 15. 1. π. 32. 1.

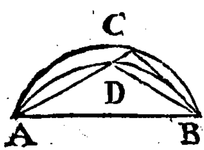
## PROP. XXII. THEOR.




*Quadrilaterorum* ADCB, *quae circulis inſcribuntur, anguli oppoſiti* ADC, ABC *ſunt duobus rectis aequales.*

Iungantur AC, BD. Quoniam ρ ang. CAB = CDB,
ρ. 21. 3.
& ang. ACB = ADB: erit σ
σ. 2. ax.
ang. CAB + ACB = ADC. Sed ang. CAB
+ ACB + ABC = τ 2 rectis. Ergo ang.
τ. 32. 1.
ADC + ABC = 2 rectis. Similiter oſtenditur, ang. DAB + DCB = 2 rectis. Q. E D.

## PROP. XXIII. THEOR.




*Super eadem recta linea duo circulorum ſegmenta ſimilia & inaequalia ex eadem parte non conſtituentur.*

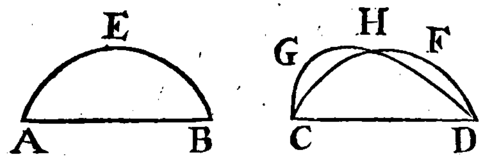
Si enim fieri poteſt, ſint ſuper recta AB duo ſegmenta circulorum ACB, ADB inaequalia ſed ſimilia ex eadem parte conſtituta.
υ. 10. def. 3. Ducatur ADC, & iungantur CB, DB. Erit
φ. 16. 1. ergo υ ang. ADB = ACB. Q. E. A φ.

## PROP. XXIV. THEOR.

*Super aequalibus rectis lineis* AB, CD *ſimilia circulorum ſegmenta* ABE, CDF *ſunt i ter ſe aequalia.*

Ponatur enim ſegmentum ABE in ſegmentum CDF ſic, vt A in C & AB in CD cadat.

Et

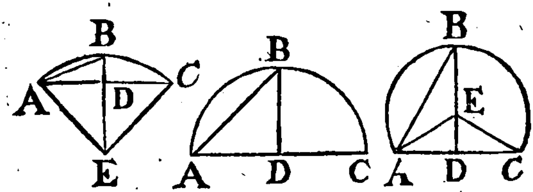


Et quia AB = CD, punctum B cadet in D. Iam si circumferentia AEB non congrueret circumferentiae CFD: aut extra hanc caderet, aut eam secaret, veluti CGHD. Atqui si circumferentia AEB extra vel intra segmentum CDF caderet: foret segmentum ABE segmento CDF maius minusue, & eidem simile. Quod fieri nequit χ. Si circumferentia AFB caderet in CGHD: duo circuli se in pluribus quam duobus punctis C, H, D secarent; quod etiam absurdum est ψ. Quum ergo circumferentia AEB nec extra circumferentiam CFD cadat, nec eam secet: ipsi congruat necesse est. Congruent ergo tota segmenta ABE, CDF, & erunt proinde aequalia. Q. E. D.

χ. 23. 3.

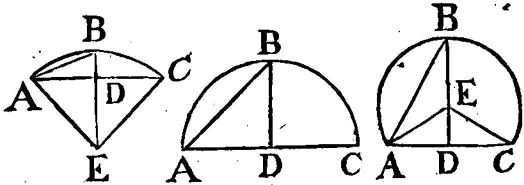
ψ. 10. 3.

## PROP. XXV. PROBL.



*Dato circuli segmento* ABC *describere circulum, cuius est segmentum.*

Secetur

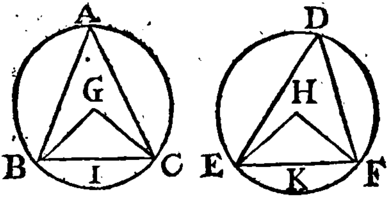



α. 10. 1. Secetur [α] AC bifariam in D, & ipſi ex D
α. 11. 1. ad rectos ducatur [α] DB, & iungatur AB. Et ſi ang. ABD = BAD: erit D centrum circuli, cuius eſt ſegmentum ACB. Sin ang. ABD
β. 23. 1. maior vel minor angulo BAD; fiat [β] angul. BAE = ABD; & erit E centrum circuli, in teruallo EA, vel EB, vel EC deſcribendi.

*Caſ. 1.* Nam ſi ang. ABD = BAD: erit
γ. 6. 1. AD = [γ] DB. Sed & AD = DC [δ]. Quare
δ. conſtr.
ε. 9. 3. D erit centrum circuli complendi [ε]. Q. E. F. *Simul patet, hoc in caſu ſegmentum* ACB *eſſe ſemicirculum.*

*Caſ. 2.* Si ang. BAE aequalis eſt conſtitutus ang. ABD: erit iterum [γ] EB = EA. Sed
ζ. 4. 1. ob AD = [δ] DC, & angulos ad D aequales, eſt etiam EA [ζ] = EC. Ergo [ε] circuli complendi centrum erit E. Q. E. F. *Conſtat ſimul, ſi ang.* ABD > BAD, *ſegmentum* ACB *ſemicirculo minus eſſe, quoniam centrum* E *extra cadit; & ſi ang.* ABD < BAD, *ſegmentum* ACB *maius eſſe ſemicirculo, quoniam centrum* E *intra cadit.*

## PROP. XXVI. THEOR.

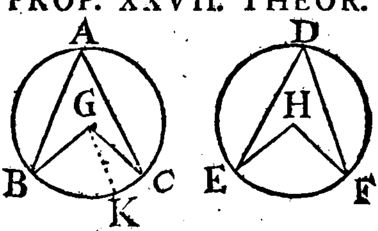


*In aequalibus circulis* ABC, DEF, *anguli aequales aequalibus insistunt circumferentiis* BIC, EKF, *siue ad centra*, (vt BGC, EHF) *siue ad circumferentias* (vt BAC, EDF) † *insistant*.

Iungantur enim BC, EF. Quia circuli ABC, EDF aequales sunt: erunt & quae ex centris aequales, id est, GB = HE, GC = HF. Et quia praeterea ang. BGC = EHF: erit BC = ᵑ EF. Et quoniam ang. BAC = EDF: segmentum BCA simile est ᶿ segmento EFD. Ergo ᶥ segm. BCA = segm. EFD. Totus autem circulus ABG = circulo DEF. Ergo * segm. BCI = segm. EFK, ideoque circumferentia BIC = EKF. Q. E. D.

ᵑ. 4. 1.
ᶿ. 11. def. 3.
ᶥ. 24. 3.
*. 3. ax.

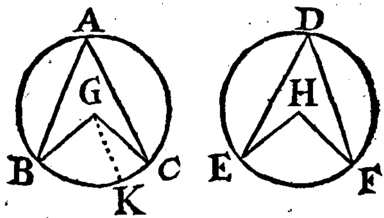
## PROP. XXVII. THEOR.



*In aequalibus circulis* ABC, DEF, *anguli*,

† Supple, *constituti*.

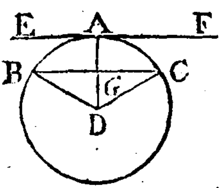
*qui*




*qui aequalibus insistunt circumferentiis* BC, EF, *sunt inter se aequales siue ad centra*, (vti BGC, EHF) *siue ad circumferentias* (vti BAC, EDF) † *insistant.*

Si enim non sit ang. BGC = EHF: alteruter veluti BGC maior erit. Fiat ang. BGK
λ. 23. 1. = [λ] EHF: & erit [μ] BK = EF = BC. Quod
μ. 26. 3. fieri [ν] nequit. Est ergo ang. BGC = EHF,
ν. 9. ax.
ξ. 20. 3. & 7. ax. & hinc etiam [ξ] ang. BAC = EDF. Q. E. D.

* *Scholium.*



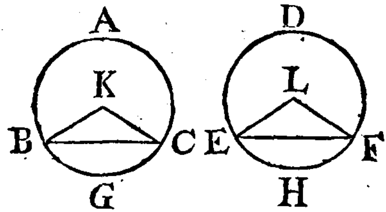

*Linea recta* EF, *quae ducta ex* A *medio puncto circumferentiae alicuius* BAC *circulum tangit, parallela est rectae lineae* B C, *quae peripheriam illam subtendit.*

Duc e centro D ad contactum A rectam DGA,
ο. 27. 3. & connecte DB, DC. Latus DG commune est,
π. hyp. & DB = DC, atque ang. BDA = [ο] ADC, ob [π]
ρ. 4. 1. peripherias BA, AC aequales. Ergo [ρ] ang. BGD
σ. 18. 3.
τ. 28. 1. & 10. ax. = CGD, & proinde vterque rectus est. Sed interni anguli EAD, FAD etiam [σ] recti sunt. Ergo EF, BC parallelae [τ] sunt. Q. E. D.

† Supple, *constituti.*

PROP.

## PROP. XXVIII. THEOR.



*In aequalibus circulis* ABC, DEF, *aequales rectae lineae* BC, EF *circumferentias aequales auferunt, maiorem quidem* BAC *maiori* EDF, *minorem vero* BGC *minori* EHF.

Sumantur centra K, L, & iungantur KB, KC, LE, LF. Quoniam circuli aequales sunt: erit KB = LE, & KC = LF. Basis vero BC = EF: ergo ang. BKC = [υ] ELF, & υ. 8. 1.
hinc [φ] BGC = EHF. Sed & totae circum- φ. 26. 3.
ferentiae aequales sunt. Ergo & reliquae BAC, EDF aequantur. Q. E. D.

## PROP. XXIX. THEOR.

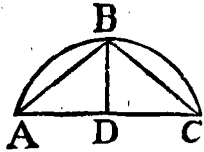
*In aequalibus circulis* ABC, DEF, *aequales circumferentias* BGC, EHF *aequales rectae lineae* BC, EF *subtendunt*. fig. propos. praeced.

Quoniam BGC = EHF: ductis e centris KB, KC, LE, LF, erit [χ] ang. BKC = ELF. χ. 27. 3.
Praeterea, quia circuli aequales ponuntur, est KB = LE, & KC = LF. Ergo [ψ] BC = EF. ψ. 4. 1.
Q. E. D.

* *Nota.* Haec & tres praecedentes intelligantur etiam de eodem circulo.

PROP.

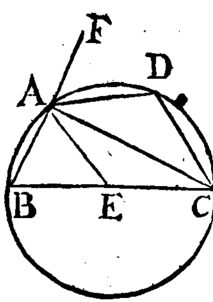
## PROP. XXX. PROBL.



*Datam circumferentiam* ABC *bifariam secare.*

Duc AC, quam biseca in D. Ex D duc DB perpendicularem in AC. Dico, fore AB = BC. Iungantur enim AB, BC. Et quia AD = DC, & latus DB commune,
ω. 10. def. 1. & ang. ADB = ω BDC: erit α AB = BC, &
α. 4. 1. ergo β circumferentia AB = circumf. BC,
β. 28. 3. quoniam vtraque semicirculo minor est. Q. E. F.

## PROP. XXXI. THEOR.



*In circulo* ABCD *angulus* BAC, *qui in semicirculo, rectus est; qui vero* ABC *in maiori segmento, minor est recto; & qui* ADC *in minori, maior recto. Et insuper angulus maioris segmenti recto maior est; minoris vero segmenti angulus recto minor.*

1. Ex centro E ducatur EA, & BA producatur in F. Quoniam BE = EA: erit γ ang.
γ. 5. 1. BAE = ABC. Rursus quia EA = EC: erit γ
δ. 2. ax. ang. BCA = CAE. Ergo δ ang. BAC =
ε. 32. 1. ABC + BCA. Est autem & ang. FAC = ε ABC + BCA. Ergo ang. BAC = FAC.
ζ. 16. def. 1. Ergo ang. BAC ζ rectus est. Q. E. D.

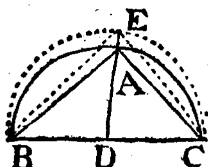
2. Quo-

2. Quoniam [ν] ang. ABC + BAC < 2 rectis, & BAC = recto: erit [ξ] ang. ABC < recto. Q. E. D. ν. 17. 1. ξ. 5. ax.

3. Quum quadrilaterum ABCD in circulo habeat [ι] angulos oppositos ABC & ADC 2 rectis aequales; ABC vero minor sit recto: reliquus [ι] ADC maior recto erit. Q. E. D. ι. 22. 3.

4. Quia angulus rectilineus BAC rectus est: patet, angulum a circumferentia CBA & recta AC comprehensum maiorem recto esse. Rursus quia FAC rectus est: patet, angulum minoris segmenti DAC minorem esse recto. Q. E. D.

*Corollar.* Hinc manifestum est, quod *si unus angulus trianguli duobus reliquis aequalis sit, est rectus.*




* *Scholia.*

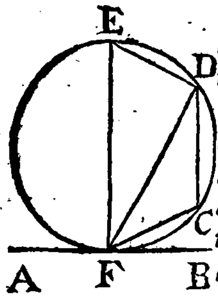
1. *In triangulo rectangulo* BAC *si hypotenusa* BC *bisecetur in* D: *circulus, interuallo* DB *descriptus, per* A *etiam transibit.*

Si enim non transeat per A, vt BEC: iuncta DA, quae circulo occurrat ad E, ducantur EB, EC. Erit ergo [κ] angulus BEC in semicirculo rectus, & proinde [λ] ang. BAC aequalis. Q. F. N [μ]. κ. 31. 3. λ. 10. ax. μ. 21. 1.

2. *Si quis angulus in segmento circuli rectus est: segmentum semicirculus est. Si vero obtusus est, segmentum minus: sin acutus, segmentum maius est semicirculo.* Si enim negas: angulus ille tantus non erit, quantus ponebatur.

F PROP.

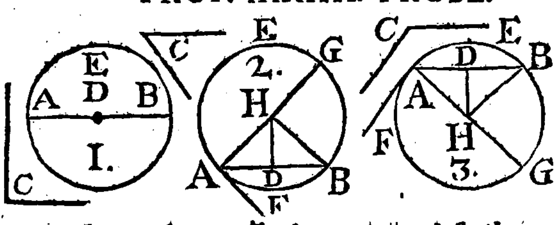
## PROP. XXXII. THEOR.




*Si recta linea* AB *circulum* CDEF *contingat, a contactu* F *autem ducatur recta linea* FD, *circulum ſecans: anguli* DFB, DFA, *quos haec cum contingente facit, aequales erunt iis, qui in alternis circuli ſegmentis conſiſtunt,* DEF, DCF.

Ducatur enim ipſi AB ad rectos angulos FE; iungatur ED, & ſumto quouis puncto C in circumferentia DF, iungantur CD, CF.
Quoniam igitur ν in FE centrum circuli eſt:
ν. 19. 3.
ξ. 18. def. 1. EDF eſt angulus ξ in ſemicirculo, & proin-
& 7. def. 3. de ο rectus. Hinc ang. EFD + DEF = π
ο. 31. 3. recto. Sed & ang. EFB = recto. Quare ρ
π. 32. 1.
ρ. 1. & 3. ax. ang. DFB = DEF. Deinde quoniam DFA
σ. 13. 1. + DFB = σ 2 rectis = τ DCF + DEF:
τ. 22. 3.
υ. 3. ax. erit ang. DFA = υ DCF. Q.E.D.

## PROP. XXXIII. PROBL.




*Super data recta linea* AB *deſcribere ſegmentum circuli, quod capiat angulum, dato angulo rectilineo* C *aequalem.*

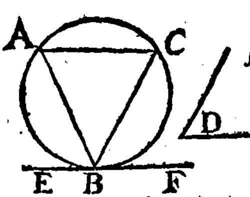
*Caſ. 1.*

*Cas. 1.* Si datus angulus C sit rectus (fig. 1.): biseca AB in D, & super AB centro D interuallo DA vel DB describe segmentum circuli AEB, quod capiet [φ] angulum rectum, qui [χ] dato C aequalis erit. Q. E. F. φ. 31. 3. χ. 10. ax.

*Cas. 2.* Si datus angulus C sit acutus (fig. 2.) vel obtusus (fig. 3.): fac ang. BAF = C, & ex A excita super AF perpendicularem AG; biseca AB in D, & per D duc DH ipsi AB ad rectos angulos; centro H interuallo HA descripti circuli segmentum AEB erit id, quod describendum erat.

Nam, iuncta HB, quia AD = DB, DH communis, & ang. ADH = [χ] HDB: erit AH = [ψ] HB, & ergo circulus centro H per A descriptus transibit etiam per B. Et quoniam AF circulum [ω] tangit, AB vero secat: erit angulus in segmento AEB = [α] ang. BAF = C. Q. E. F. ψ. 4. 1. ω. cor. 16. 3. α. 32. 3.

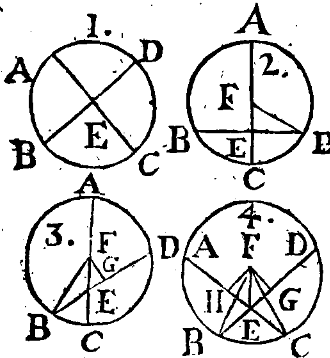
## PROP. XXXIV. PROBL.




*A dato circulo ABC segmentum abscindere, quod capiat angulum, dato angulo rectilineo D aequalem.*

Ducatur [β] recta EF, circulum tangens in B, & ad punctum B fiat [γ] ang. CBF = D: segmentum BAC capiet angulum [δ], angulo CBF, vel dato D aequalem. Q. E. F. β. 17. 3. γ. 23. 1. δ. 32. 3.

## PROP. XXXV. THEOR.




*Si in circulo* ABCD *duae rectae lineae* AC, BD *sese mutuo secent: rectangulum sub segmentis unius* AE, EC *comprehensum aequale est ei, quod sub alterius segmentis* BE, ED *comprehenditur*.

*Cas.* 1. Si AC, BD per centrum E transeunt: manifestum est, quum AE, EB, DE,
s. 36. 1. EC aequales sint, esse AE $\times$ EC $=$ [s] BE $\times$ ED. Q. E. D.

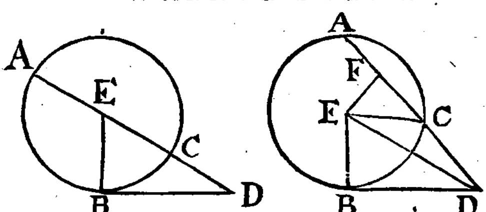
* *Cas.* 2. Si alterutra AC per centrum F transit, & alteram BD ad angulos rectos secat
5. 2. in E: iungatur FD. Est [ς] AE $\times$ EC $+$ FEq
3. 3. $=$ FCq $=$ FDq. Sed quia [η] BE $=$ ED, ideoque BE $\times$ ED $=$ EDq: est quoque BE
9. 47. 1. $\times$ ED $+$ FEq $=$ [ϑ] FDq. Ergo [ι] AE $\times$
ι. 1. & 3. ax. EC $=$ BE $\times$ ED vel EDq.

* *Cas.* 3. Si alterutra AC per centrum F quidem transit, sed alteram BD non ad rectos secat: ex F in BD ducatur perpendicularis FG. Est ergo [η] BG $=$ GD, & [ς] BE $\times$ ED $+$ EGq $=$ BGq. Iungatur FB, & addito communi FGq, erit BE $\times$ ED $+$ EGq $+$ FGq $=$ [ϑ] FBq. Sed EGq $+$ FGq $=$ [ϑ] FEq. Ergo BE $\times$ ED $+$ FEq $=$ FBq $=$ FCq.

FCq. Est vero & $AE \times EC + FEq =$ [ζ] FCq. Ergo [ι] $AE \times EC = BE \times ED$. Q. E. D.

*Cas.* 4. Si neutra per centrum F transit: iungantur FE, FB, FC, & ex F in AC, BD, demittantur perpendiculares FH, FG. Ostenditur, vti antea, $BE \times ED + FEq = FBq$, & $AE \times EC + FEq = FCq$. Est vero $FBq = FCq$. Ergo [ι] $AE \times EC = BE \times ED$. Q. E. D.

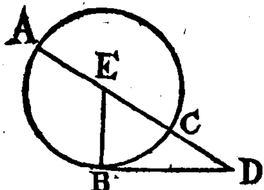
## PROP. XXXVI. THEOR.

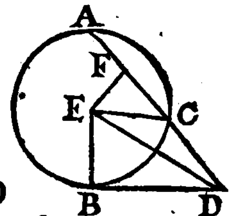



*Si extra circulum* ABC *aliquod punctum* D *sumatur, & ab eo in circulum cadant duae rectae lineae, quarum altera* DA *circulum secet in* C, A, *altera* DB *vero contingat: rectangulum comprehensum sub tota secante* DA, *& exteriore segmento* DC, *inter punctum* D *& conuexam circumferentiam, aequale erit ei, quod a contingente* DB *fit, quadrato.*

*Cas.* 1. Si DA transit per centrum E circuli: iungatur EB, & ang. EBD erit [κ] rectus. [κ. 18. 3.]
Sed [λ] $AD \times DC + CEq = DEq$, & [μ] DBq [λ. 6. 2.]
$+ BEq = DEq$. Ergo $AD \times DC + CEq$ [μ. 47. 1.]
$= DBq + BEq$. Ergo, quum $CEq = BEq$, $AD \times DC = DBq$. Q. E. D.

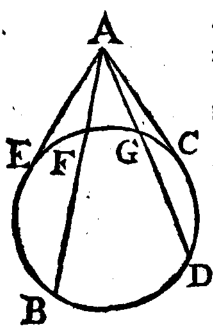
 *Cas.* 2.





*Cas.* 2. Si DA non transit per centrum E in AD ex E ducatur perpendicularis EF, iunganturque EB, EC, ED. Ergo quum
ν. 3. 3. λ. 6. 2. AC bisecta ν sit in F, erit $AD \times DC +$
μ. 47. 1. $FCq =^{\lambda} FDq$. Commune addatur FEq: erit $AD \times DC +^{\mu} ECq = DEq$. Sed & $DBq + EBq =^{\vartheta} DEq$, & $CEq = EBq$: Ergo $AD \times DC = DBq$. Q. E. D.

* *Scholia.*



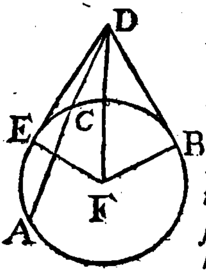
1. Si a puncto quouis A extra circulum assumto, plures rectae lineae AB, AD circulum secantes ducantur: rectangula comprehensa sub totis lineis AB, AD, & partibus externis AF, AG inter se sunt aequalia. Nam si ducatur tan-
ξ. 36. 3. gens AC: erit $BA \times AF =^{\xi} ACq =^{\xi} DA \times AG$.

2. Constat etiam, duas rectas AE, AC, ab eodem puncto A ductas, quae circulum tangant, inter se aequales esse. Nam si ducatur AB secans circulum: erit $AEq =^{\xi} BA \times AF =^{\xi} ACq$.

3. Perspicuum quoque est, ab eodem puncto A, extra circulum assumto, duci tantum posse duas lineas rectas AE, AC, quae circulum tangant. Nam

Nam si tertia AG tangere dicatur, erit AG = ° AE = AC. Q. F. N [π]. ο. 2. sch. π. 8. 3.

## PROP. XXXVII. THEOR.



*Si extra circulum* ABC *sumatur aliquod punctum* D, *atque ab eo in circulum cadant duae rectae lineae* DA, DB, *quarum altera quidem* DA *circulum secet in* C, *altera vero* DB *in eum incidat; sit autem rectangulum comprehensum sub tota secante* DA, *& exteriore segmento* DC *inter punctum* D *& conuexam circumferentiam, aequale ei, quod ab incidente* DB *fit quadrato: incidens linea* DB *circulum continget.*

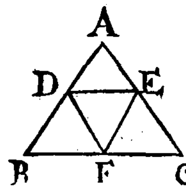
Ducatur enim ρ tangens circulum DE, sumatur centrum σ F, & iungantur FE, FB, FD. Ergo AD × DC = τ DEq. Ergo DEq = DBq, & DE = DB. Sed quia praeterea FE = FB, & DF = DF: erit ang. DEF = υ DBF. Est vero DEF rectus φ; ergo & DBF; & igitur DB χ circulum tangit. Q. E. D. ρ. 17. 3. σ. 1. 3. τ. 36. 3. υ. 8. 1. φ. 18. 3. χ. cor. 16. 3.

* *Coroll.* Hinc constat, si duae rectae aequales DE, DB ex puncto quopiam D in conuexam peripheriam incidunt, & eorum vna DE circulum tangit: alteram quoque DB circulum tangere.

# EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER IV.

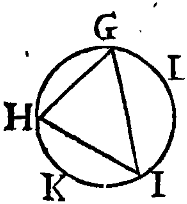
* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *

## DEFINITIONES.

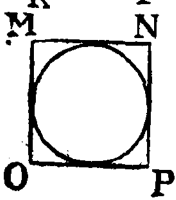



1. *Figura rectilinea in figura rectilinea inſcribi* dicitur, quando vnuſquiſque figurae inſcriptae DEF angulus D, E, F, contingit vnumquodque latus AB, AC, BC eius ABC, in qua inſcribitur.

2. *Figura* ſimiliter *circa figuram circumſcribi* dicitur, quando vnumquodque latus circumſcriptae ABC contingit vnumquemque angulum eius DEF, circa quam circumſcribitur.




3. *Figura rectilinea in circulo inſcribi* dicitur, quando vnuſquiſque inſcriptae figurae GHI angulus circuli GKL circumferentiam contingit.




4. *Figura rectilinea circa circulum circumſcribi* dicitur, quando vnumquodque latus circumſcriptae NMOP circuli circumferentiam contingit.

*Cir-*

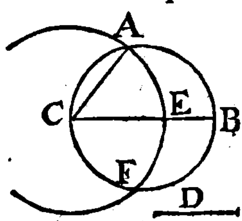
5. *Circulus* similiter *in figura rectilinea inscribi* dicitur, quando circuli circumferentia vnumquodque latus eius MNPO, in qua inscribitur, contingit.

6. *Circulus circa figuram rectilineam circumscribi* dicitur, quando circuli circumferentia GKL vnumquemque angulum eius GHI, circa quam circumscribitur, contingit.

7. *Recta linea* GH *in circulo* GKL *aptari* dicitur, quando eius termini G, H in circuli circumferentia fuerint.

## PROP. I. PROBL.

*In dato circulo* ABC *datae rectae lineae* D, *quae diametro eius* BC *maior non sit*, *aequalem rectam lineam aptare.*

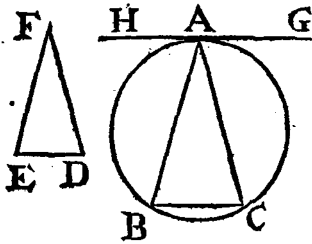



Ducatur circuli diameter BC. Et si D = BC: factum iam erit propositum [α]. [α] 7. def. 4.

Si D < BC, ponatur [β] ipsi D = CE, & centro C interuallo CE circulus AEF describatur, & CA iungatur. Quae erit ipsi D aequalis [γ], & in dato circulo aptata [α]. Q. E. F. [β] 3. 1. [γ] 1. ax.

## PROP. II. PROBL.

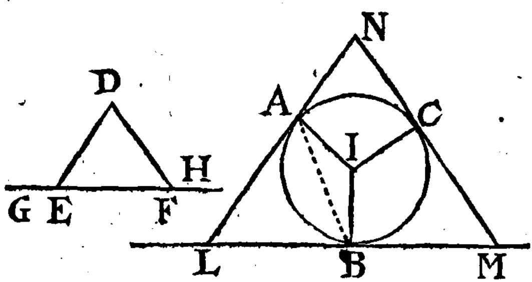
*In dato circulo* ABC *inscribere triangulum, aequiangulum dato triangulo* DEF.




Ducatur recta linea HAG tangens circulum in
δ. 23. 1. A, & fiat δ angulus GAC = DEF, ac angul. HAB = EDF, & BC iungatur.

ε. 32. 3. Quoniam igitur ε ang. ABC = GAC, &
ζ. 1. ax. ang. ACB = HAB: erit ζ ang. ABC = DEF, & ang. ACB = EDF. Ergo & reliquus BAC
η. 32. 1. reliquo EFD aequalis erit η; & △ ABC ae-
θ. 3. def. 4. quiangulum erit ipsi DEF, & in circulo θ inscriptum. Q. E. F.

## PROP. III. PROBL.




*Circa datum circulum* ABC *circumscribere triangulum, aequiangulum dato triangulo* DEF.

Produc

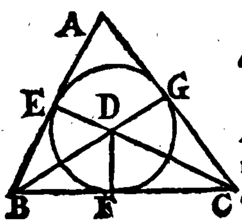
Produc latus EF ad G & H. Cape ι centrum circuli I, ex quo duc rectam IB vtcunque, & fac κ ang. BIA = DEG, & ang. BIC = DFH, & per A, B, C duc λ rectas NL, LM, NM, circulum tangentes. Dico factum.

ι. 1. 3.
κ. 23. 1.
λ. cor. 16. 3.

Quia enim μ anguli ad puncta A, B, C recti sunt: erunt ang. IAL + IBL = 2 rectis. (* Ducta ergo AB, erunt ang. LAB + LBA < 2 rectis, ideoque rectae NL, ML concurrent ν in L.) Quum autem in quadrilatero LAIB quatuor anguli ξ sint = 4 rectis, e quibus anguli IAL, IBL = 2 rectis: erunt & reliqui AIB + ALB = ο 2 rectis. Sunt autem & ang. DEG + DEF = π 2 rectis. Ergo ang. BIA + ALB = DEG + DEF. Quare ρ ang. ALB = DEF. Similiter demonstrabitur, ang. NMB = DFE. Ergo & reliquus MNL = ς FDE. Est igitur Δ LMN aequiangulum dato DEF, & circumscripum σ circa circulum ABC. Q. E. F.

μ. 18. 3.
ν. ax. 11.
ξ. 6: schol. 32. 1.
ο. 3. ax.
π. 13. 1.
ς. 32. 1.
σ. 4. def. 4.

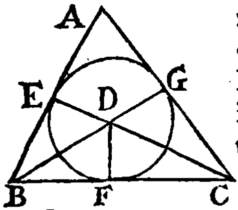
## PROP. IV. PROBL.




*In dato triangulo* ABC *circulum inscribere.*

Bisecentur τ ang. ABC, ACB rectis, quae conueniant in puncto D, ex quo duc υ perpendiculares

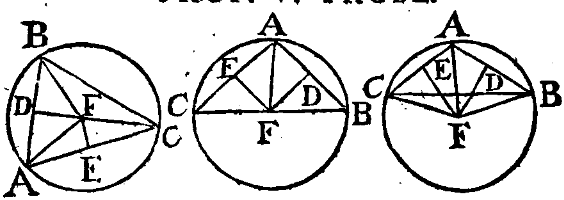
τ. 9. 1.
υ. 12. 1.




res DE, DF, DG. Circulus centro D per E, vel F, vel G deſcriptus, erit is, quem deſcribere oportebat.

Nam quum ang. ABD = DBC, & ang.
φ. 10. ax. DEB =[φ] DFB, & latus DB commune: erit
χ. 26. 1. [χ] DE = DF. Eadem ratione DF = DG. Circulus ergo ex D per E, vel F, vel G deſcriptus per reliqua etiam puncta tranſibit, &,
ψ. 16. 3. quia rectas AB, BC, CA ſecare nequit [ψ], ipſas
ω. 5. def. 4. continget. Erit ergo inſcriptus [ω] in triangulo ABC. Q. E. F.

## PROP. V. PROBL.




*Circa datum triangulum* ABC *circulum circumſcribere.*

Biſeca [α] AB, AC in D, E, & duc perpen-
α. 10. 1. diculares [β] DF, EF, coeuntes in F, ex quo
β. 11. 1. centro per A, vel B, vel C deſcribe circulum.

Siue enim F intra triangulum ABC, ſiue in baſin BC, ſiue extra triangulum cadat: ductis rectis FA, FB, FC, erit [γ] BF = AF =
γ. 4. 1. FC. Ergo circulus ex F per vnum puncto-

rum

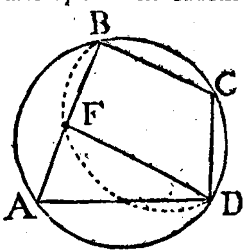
rum A, B, C descriptus, per reliqua etiam transibit, & circumscriptus erit circa [δ] triangulum ABC. Q. E. F. δ. 6. def. 4.

*Corollar.*

Si datum triangulum sit oxygonium, DF & EF intra triangulum conuenient [ε]; sin amblygonium, extra; si vero rectangulum sit, conuenient in tertio latere BC, quod angulum rectum subtendit. ε. 2. schol. 31. 3.

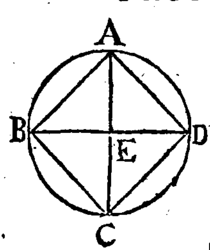
* *Scholia.*

1. Eadem ratione circulus describitur per tria puncta, non in eadem recta existentia.



2. Si in quadrilatero ABCD anguli A & C, qui ex aduerso, duobus rectis aequantur, circa quadrilaterum circulus circumscribi potest. Describi enim per tres quosuis angulos B, C, D circulus potest. Iam si negas, eundem transiturum esse per quartum A: secet rectam AB in quouis alio puncto F. Ducta ergo DF, erit ang. C + F = [ζ] 2 rectis. Sed ponituretiam C + A = 2 rectis. Ergo ang. F = A. Q. E. A [η]. ζ. 22. 3. η. 16. 1.

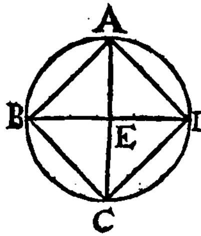
## PROP. VI. PROBL.



*In dato circulo* ABCD *quadratum inscribere.*

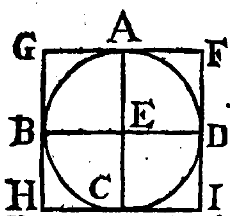
Ducantur [θ] diametri AEC, BED ad rectos angulos, & iungantur AB, BC, CD, DA. θ. 1. 3. & 11. 1.

Nam quia BE = ED, & communis EA, & ang. BEA, AED




ι. 4. 1. AED recti: erit [ι] AB = DA. Eadem ratione BC = AB, & κ. 1. ax. CD = DA. Ergo [κ] quadrilaterum ABCD aequilaterum eſt. Eſt vero & re- λ. 31. 3. ctangulum, quoniam [λ] quilibet angulorum A, B, C, D, in ſemicirculo eſt. Igitur quadratum eſt, inſcriptum in dato circulo. Q. E. F.

## PROP. VII. PROBL.



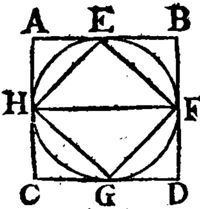

*Circa datum circulum* ABCD *quadratum circumſcribere.*

Ducantur diametri AEC, BED ad rectos angulos, & per puncta A, B, C, D tangentes circulum GF, GH, HI, FI [μ].

μ. cor. 16. 3. Igitur quum [ν] anguli ad A, B, C, D recti ν. 18. 3. ſint, nec non (per hyp.) anguli ad E: erunt [ξ] ξ. 28. 1. rectae FG, HI, BD, & rectae GH, FI, AC parallelae. Ergo Pgra ſunt GI, GC, FB, GE, FE, HE & EI, ac propterea [ο] GF = HI, & ο. 34. 1. GH = FI, & GH = AC, & GF = BD. Hinc ob AC = BD, erit quadrilaterum FGHI aequilaterum. Et quoniam GE eſt Pgr. & ang. AEB rectus: erit [ο] & ang. G rectus. Similiter reliqui H, I, F recti demonſtrantur. Ergo figura FGHI eſt quoque rectangula, & propterea quadratum, ac circa circulum deſcripta. Q. E. F.

* *Scholium*

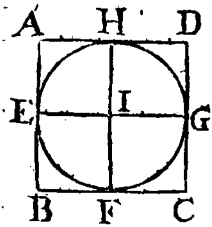
* *Scholium.*




Quadratum circulo circumscriptum ABCD duplum est inscripti quadrati EGHF.

Nam Rgl. HB = π 2 △ HEF & Rgl. HD = 2 △ HGF. Ergo totum ABCD = 2 EHGF. π. 41. 1.

## PROP. VIII. PROBL.



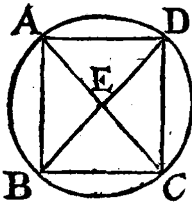

*In dato quadrato* ABCD *circulum inscribere.*

Bisecetur vtraque AB, AD in E, H, & per E alterutri ipsarum AD, BC parallela EG, per H vero alterutri ipsarum AB, DC parallela HIF agatur. Centro I interuallo IH, vel IE, vel IG describatur circulus.

Quoniam ergo Pgra sunt AG, GB, AF, FD, AI, IC, IB & ID: erit ρ AE = HI, & AH ρ. 34. 1.
= EI. Sed quoniam σ AB = AD: est τ AE σ. 29. def. 1.
= AH, & ergo HI = EI. Similiter demon- τ. 7. ax.
strabitur HI = IG; & EI = IF. Ergo IE, IF, IG, IH aequales sunt inter se, & propterea circulus centro I interuallo vni ipsarum aequali descriptus etiam per reliquarum extrema transibit, & quoniam rectas AB, BC,
CD, DA secare υ nequit (sunt enim anguli υ. 16. 3.
ad H, E, F & G recti φ), ipsas tanget, & pro- φ. sch. 29. 1.
inde quadrato χ inscriptus erit. Q. E. F. χ. 5. def. 4.

PROP.

## PROP. IX. PROBL.

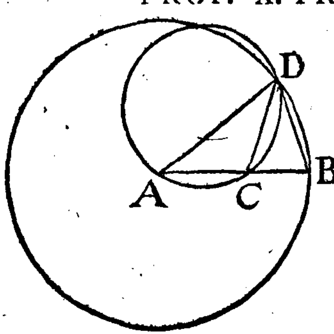



*Circa datum quadratum* ABCD *circulum circumscribere.*

Iungantur AC, BD. Ex puncto E, in quo se secant, interuallo EA vel EB, vel ED, vel EC describatur circulus.

Quoniam DA = AB, DC = CB & communis AC: anguli A & C per rectam AC bi-
ψ. 8. 3. secantur ψ. Similiter ostenditur, angulos B & D bisecari per rectam BD. Et quia ang. A = B, & hinc dimidius EAB = dimidio
ω. 6. 1. EBA: erit ω EA = EB. Similiter demonstrabimus, esse EB = EC, & EC = ED. Sunt ergo EA, EB, EC, ED inter se aequales, & circulus, centro E interuallo, vni harum aequali, descriptus, per puncta A, D, C, B transit, & ergo circa quadratum ABDC cir-
α. 6. def. 4. cumscriptus α est. Q. E. F.

## PROP. X. PROBL.




*Isosceles triangulum constituere, habens alterutrum angulorum, qui sunt ad basin, duplum reliqui.*

Ponatur recta quaedam AB, &
β. 11. 2. secetur β in C sic, vt AB × BC = ACq.

ACq. Centro A interuallo AB describatur circulus, in quo aptetur γ recta BD aequalis ipsi AC, quae diametro circuli maior non est. Iuncta AD, erit DAB triangulum isosceles, in quo ang. BDA vel ABD = 2 DAB.

γ. 1. 4.

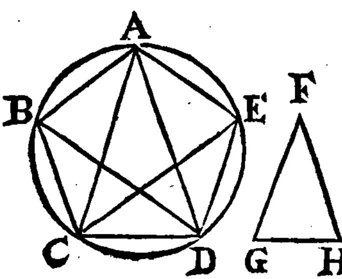
Nam circumscripto circulo δ circa △ ACD, quoniam AB × BC = ACq = BDq, patet ε BD circulum ADC tangere, & propterea ζ ang. BDC = DAC. Hinc η ang. BDA = DAC + CDA = θ BCD. Sed quum sit ι AB = AD, erit ang. BDA = κ CBD. Quare ang. BCD = λ CBD, & DC μ = BD = CA. Hinc ang. CDA = κ CAD, & additis ang. BDC = ν CAD: erit ang. BDA = 2 DAB. Q. E. F.

δ. 5. 4.
ε. 37. 3.
ζ. 32. 3.
η. 2. ax.
θ. 32. 1.
ι. 15. def. 1.
κ. 5. 1.
λ. 1. ax.
μ. 6. 1.
ν. per dem.

** Scholium.*

Quia ergo ang. DAB + ADB + ABD = 5 DAB = 2 rectis: liquet, esse ang. DAB quintam partem duorum rectorum.

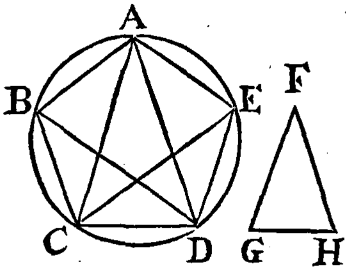
## PROP. XI. PROBL.




*In dato circulo* ABCDE *pentagonum aequilaterum & aequiangulum describere.*

ξ Fiat triangulum FGH isosceles, habens alterutrum

ξ. 10. 4.




o. 2. 4. terutrum angulorum ad basin GH duplum reliqui F, & [o] inscribatur in circulo A B C D E triangulum A C D, triangulo F G H aequiangulum, ita vt angulo F = D A C,

π. 9. 1. G = ACD, & H = A D C. Secetur [π] vterque ipsorum A C D, A D C bifariam a rectis CE, BD, & ducantur AB, BC, DE, EA: dico factum.

Nam ex constructione liquet, quinque angulos A C E, E C D, D A C, B D C, B D A esse inter

ρ. 26. 3. se aequales. Hinc peripheriae [ρ] & his subtensae

σ. 29. 3. [σ] rectae A E, E D, D C, C B, B A sibi mutuo aequantur. Aequilaterum ergo est pentagonum A B C D E. Et quia peripheria A B = per. D E, addita communi B C D, erit per. A B C D = per. B C D E, ideoque [τ] ang. A E D

τ. 27. 3. = BAE. De reliquis angulis similiter ostenditur, quod sint angulo B A E vel A E D aequales. Ergo & aequiangulum est pentagonum A B C D E. Q. E. F.

### * *Scholia.*

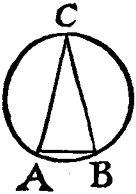
1. Praxis facilior huius problematis tradetur ad 10. 13.

υ. 27. 3. 2. Quoniam ang. B A E = 3 C A D [υ]: angulus

φ. sch. 10. 4. pentagoni aequilateri & aequianguli aequatur [φ] tribus quintis duorum rectorum, vel sex quintis recti.

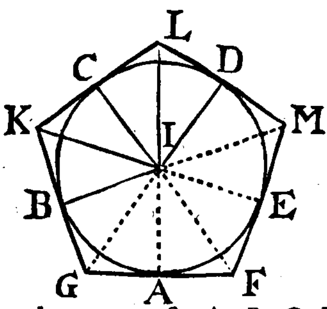
3. Vni-

3. Vniuersaliter figurae imparium laterum inscribuntur in circulis ope triangulorum isosceliium, quorum anguli aequales ad basin multiplices sunt eorum, qui ad verticem sunt, angulorum. Parium vero laterum figurae in circulo inscribuntur ope isoscelium triangulorum, quorum anguli ad basin multiplices sesquialteri sunt eorum, qui ad verticem sunt angulorum.




Vt in triangulo isosceli CAB, si ang. A $=$ 3 C $=$ B: AB erit latus heptagoni. Si A $=$ 4 C: erit AB latus enneagoni &c. Sin vero A $=$ $1\frac{1}{2}$C: erit AB latus quadrati. Et si A $=$ $2\frac{1}{2}$ C: subtendet AB sextam partem circumferentiae. Pariterque si A $=$ $3\frac{1}{2}$C: erit AB latus octogoni &c.

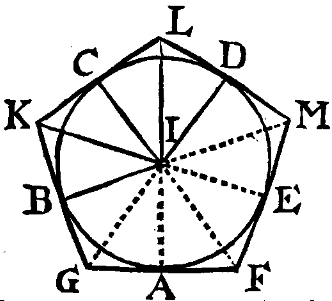
## PROP. XII. PROBL.




*Circa datum circulum* ABC DE *pentagonum aequilaterum & aequiangulum circumscribere.*

Intelligantur pentagoni in circulo *x* descripti *x.* II. 4. angulorum puncta A, B, C, D, E, ita vt circumferentiae AB, BC, CD, DE, EA sint aequales; & per puncta A, B, C, D, E ducantur circulum contingentes FG, GK, KL, LM, MF. Erit FGKLM pentagonum desideratum.

 Sumto



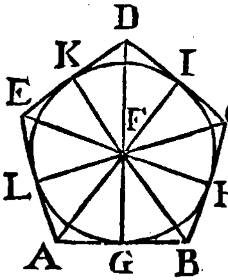

Sumto enim circuli centro I, ducantur IB, IK, IC, IL, ID. Et quia IC in tangentem KL est ψ perpendicularis: erit vterque angulorum ad C rectus ω. Similiter anguli ad B & D recti sunt. Ergo α IKq = ICq + KCq = IBq + BKq. Sed ICq = IBq. Ergo KCq = BKq, & KC = BK. Est autem praeterea IC = IB, & communis IK: quare β ang. CIK = BIK, & ang. IKC = IKB. Hinc ang. BIC = 2 KIC, & ang. BKC = 2 IKC. Eadem ratione & ang. CID = 2 CIL, & ang. CLD = 2 CLI. Sed quum sit circumf. BC = CD γ, & ergo δ ang. BIC = CID: erit & ε ang. KIC = CIL. Sunt vero recti ad C aequales, & praeterea latus IC commune. Ergo ζ KC = CL, & ang. IKC = ILC. Hinc KL = 2 KC. Eadem ratione GK = 2 BK. Erat autem KC = = BK. Ergo η KL = GK. Similiter vnumquodque ipsorum GF, FM, ML ipsi GK vel KL aequale ostenditur. Ergo pentagonum FGKLM aequilaterum est. Deinde, quum ostensus sit ang. IKC = ILC, & BKC = 2 IKC, & CLD = 2 ILC: patet η, esse ang. BKC = CLD. Similiter ostendetur quilibet angulorum ad G, F, M aequalis ipsi BKC vel CLD. Ergo pentagonum FGKLM etiam aequiangulum est. Q.E.F.

ψ. 18. 3.
ω. 10. def. 1.
α. 47. 1.
β. 8. 1.
γ. hyp.
δ. 27. 3.
ε. 7. ax.
ζ. 26. 1.
η. 6. ax.

* *Scholium.*

Eodem pacto, ſi in circulo quaecunque figura aequilatera & aequiangula deſcribatur, & ad extrema ſemidiametrorum ex centro ad angulos ductarum excitentur lineae perpendiculares: hae perpendiculares conſtituent figuram totidem laterum & angulorum aequalium circulo circumſcriptam.

## PROP. XIII. PROBL.




*In dato pentagono aequilatero & aequiangulo* ABCDE *circulum inſcribere.*

Duos pentagoni angulos A & B biſeca ϑ rectis ϑ. 9. 1.
AF, BF, concurrentibus in F. A puncto F ad AB duc perpendicularem ι FG, & ex F interuallo ι. 12. 1.
FG deſcribe circulum. Dico factum.

Ducantur in reliqua latera lineae perpendiculares FH, FI, FK, FL, & iungantur FC, FD, FE. Et quia AB = κ BC, & communis κ. hyp.
FB, & ang. ABF = FBC: erit λ ang. FAB λ. 4. 1.
= FCB. Ergo ang. EAB = κ 2 FAB = μ 2 μ. 6. ax.
FCB. Sed ang. EAB = ξ DCB. Ergo ang. DCB = 2 FCB. Recta ergo FC biſecat angulum DCB. Similiter oſtendetur, reliquos angulos EDC, DEA etiam biſecari a rectis FD, FE. Et quia ang. FBG = FBH, item ang. FGB = ν FHB, & communis FB: eſt ν. 10. ax.
FH = ξ FG. Eadem ratione reliquae FI, ξ. 26. 1.

FK, FL ipſi FH vel FG aequales oſtendentur. Ergo circulus centro F interuallo FG deſcriptus per H, I, K, L puncta tranſibit, & ibi latera pentagoni continget, quia illa ſecare nequit °. In dato igitur pentagono ABCDE circulus GHIKL inſcriptus eſt. Q. E. F.

o. 16. 3.

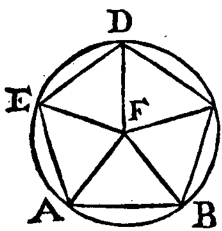
* *Coroll.*

Hinc ſi duo anguli proximi figurae aequilaterae & aequiangulae biſecentur, & a puncto, in quo coëunt lineae angulos biſecantes, ducantur rectae lineae ad reliquos figurae angulos: omnes anguli figurae erunt biſecti.

* *Schol.*

Eadem methodo in qualibet figura aequilatera & aequiangula circulus deſcribetur.

## PROP. XIV. PROBL.




*Circa datum pentagonum aequilaterum & aequiangulum* ABCDE *circulum circumſcribere.*

Duos pentagoni angulos A, B biſeca rectis AF, BF, coeuntibus in F. Circulus centro F interuallo FA deſcriptus pentagono circumſcriptus eſt.

Ductis enim FC, FD, FE, reliqui omnes anguli C, D, E biſecti erunt π. Et quoniam ang. EAB = ABC: erit ang. FAB = ρ FBA. Ergo FB = σ FA. Similiter quaelibet FC, FD, FE ipſi FB vel FA aequalis oſtendetur.

π. cor. 13. 4.
ρ. 7. ax.
σ. 6. 1.

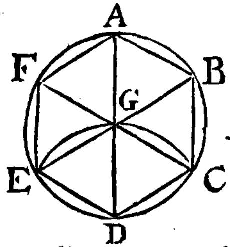
Circulus

Circulus ergo centro F interuallo FA descridtus per angulos pentagoni A, B, C, D, E transibit. Q. E. F.

** Scholion.*

Eadem arte circa quamlibet figuram aequilateram & aequiangulam circulus circumscribetur.

## PROP. XV. PROBL.



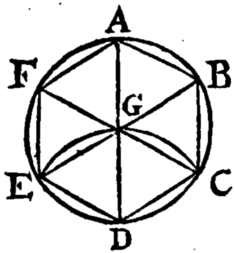

*In dato circulo* ABCDEF *hexagonum aequilaterum & aequiangulum inscribere.*

Ducatur circuli diameter AD, posito in G centro [τ]. Ex centro D interuallo DG describatur alius circulus EGC, iunctaeque EG, CG producantur in B & F; & iungantur AB, BC, CD, DE, EF, FA. Dico factum. τ. 1. 3.

Nam quia in circulo AED est GE = GD, & in circulo EGC, GD = DE: erit △ EGD aequilaterum, ideoque [υ] aequiangulum. Quare ang. EGD est tertia pars [φ] duorum rectorum. Similiter ang. DGC est tertia pars 2 rectorum. Et quoniam ang. EGD + DGC + CGB = [χ] 2 rectis: erit & ang. CGB tertia pars 2 rectorum, & aequalis angulo EGD, & ang. DGC. Hinc [ψ] & anguli AGB, AGF, FGE & inter se & reliquis aequales erunt. Sex igitur [ω] circumferentiae ED, DC, CB, BA, AF, FE inter se sunt aequales, ergo & [α] sex subtensae rectae. Quare

υ. sch. 5. 1.
φ. 32. 1.
χ. 2. sch. 13. 1.
ψ. 15. 1.
ω. 26. 3.
α. 29. 3.

 aequi-




aequilaterum est hexagonum ABCDEF. Deinde quia circumf. AF = ED: communi addita AB CD: erit tota circumfer. FABCD = ABCDE, & proinde ang. FED = β AFE. Similiter reliqui anguli hexagoni singillatim aequales ipsi FED, vel AFE ostendentur. Ergo & aequiangulum est hexagonum ABCDEF, & dato circulo inscriptum. Q. E. F.

β. 27. 3.

*Corollar.*

•Ex hoc manifestum est, hexagoni latus circuli semidiametro aequale esse.

Circumscriptio hexagoni circa circulum, nec non circuli inscriptio vel circumscriptio in vel circa datum hexagonum eodem modo fiant, quem de pentagono docuimus.

* *Scholia.*

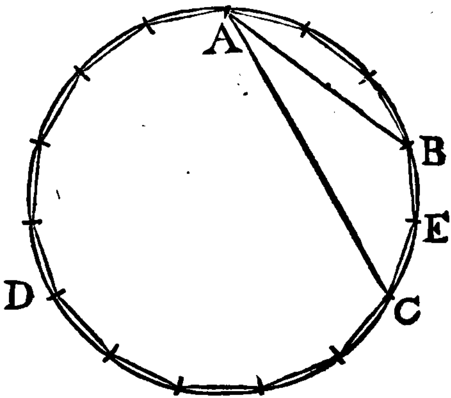
Hinc & facile triangulum aequilaterum ACE in dato circulo inscribetur.

*Hexagonum autem regulare* ( i. e. aequilaterum & aequiangulum ) *super data recta* CD *ita construes.* Fac super CD triangulum aequilaterum CGD. Centro G interuallo GC describe circulum. Is capiet hexagonum super data CD describendum.

## PROP. XVI. PROBL.

*In dato circulo* ABCD *quindecagonum aequilaterum & aequiangulum inscribere.*

Inscri-




Inſcribatur circulo trianguli aequilateri ipſi inſcripti latus A C [γ], item pentagoni aequilateri latus AB [δ]. Biſecetur BC in E [ε]. Iunctis rectis CE, EB aequales in continuum rectae circulo aptentur: erit in ipſo quindecagonum aequilaterum & aequiangulum inſcriptum. Nam qualium partium circulus ABCD eſt quindecim, talium circumferentia ABC, tertia pars exſiſtens circuli, erit quinque. Circumferentia vero AB, quinta circuli pars, erit trium. Ergo reliqua BC eſt duarum, & huius dimidium BE vel EC eſt decima quinta pars circuli ABCD. Ergo ſi rectae E B aequales circulo in continuum aptentur: deſcribetur quindecagonum aequilaterum & aequiangulum. Q. E. F.

γ. 2. 4.
δ. 11. 4.
ε. 30. 3.

Ad modum eorum, quae de pentagono dicta ſunt, reliqua problemata de quindecagono ſoluentur.

* *Scholium.*

| | |
|---|---|
| Circulus diuiditur geometrice in partes | 4, 8, 16, &c. per 6, 4. & 9, 1. |
| | 3, 6, 12, &c. per 15, 4. & 9, 1. |
| | 5, 10, 20, &c. per 11, 4. & 9, 1. |
| | 15. 30. 60, &c. per 16, 4. & 9, 1. |

Ceterum diuiſio circumferentiae in partes quotuis aequales etiamnum deſideratur. Quare pro figurarum quarumcunque ordinatarum vel regularium conſtructionibus ſaepe ad mechanica artificia recurrendum eſt, de quibus Geometrae practici conſulendi ſunt.

EV-

# EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER V.

* * * * * * * * * * * * * *

## DEFINITIONES.

1. *Pars* eſt magnitudo *magnitudinis*, minor maioris, quando minor maiorem metitur.

2. *Multiplex* eſt maior minoris, quando minor maiorem metitur.

3. *Ratio* eſt duarum magnitudinum eiusdem generis, ſecundum quantiplicitatem mutua quaedam habitudo (ſeu relatio.)

4. *Rationem inter ſe magnitudines habere* dicuntur, quae multiplicatae ſe inuicem ſuperare poſſunt.

* In omni ratione ea quantitas, quae ad aliam refertur, *antecedens* dicitur, haec altera *conſequens*. Vt ſi A ad B refertur, ſiue magnitudines ſint eae quantitates, ſiue numeri, ita vt conſideres, quomodo A habeat ſe ad B quoad quantiplicitatem: antecedens eſt A, B vero conſequens. Signum rationis magnitudinis A ad B eſt nobis hoc A: B.

5. *In eadem ratione magnitudines eſſe* dicuntur *prima ad ſecundam & tertia ad quartam*, quando primae & tertiae aeque multiplices ſecundae & quartae aeque multiplices, iuxta quamuis multiplicationem, vtraque vtramque, vel vna ſuperant, vel vna aequales ſunt, vel vna deficiunt, inter ſe comparatae.

6. Ma-

6. Magnitudines, quae eandem rationem habent, *proportionales* vocantur.

7. Quando autem aeque multiplicium multiplex primae ſuperauit multiplicem ſecundae, multiplex autem tertiae non ſuperauerit multiplicem quartae: tunc *prima ad ſecundam maiorem habere* dicitur *rationem, quam tertia ad quartam.*

8. *Proportio* eſt rationum ſimilitudo.

* Signum, quo notamus proportionem, vel quod magnitudines A, B eandem rationem habeant, quam magnitudines C, D, eſt hoc $A:B = C:D$. Sed $A:B > C:D$ denotat, inter A & B maiorem quam inter C & D rationem eſſe. Similiter $C:D < A:B$ ſignificat, rationem C ad D minorem eſſe ratione $A:B$.

9. Proportio in tribus ad minimum *terminis* conſiſtit.

10. Si tres magnitudines ſunt proportionales: prima ad tertiam *duplicatam* habere dicitur *rationem* eius, quam habet ad ſecundam.

11. Si quatuor magnitudines ſunt proportionales: prima ad quartam *triplicatam* habere dicitur *rationem* eius, quam habet ad ſecundam. Et ſic deinceps vno amplius, quamdiu proportio exſtiterit.

* Talium proportionum, quae *continuae* appellantur, ſignum eſt $\div\!\!\div$. E. gr. $\div\!\!\div$ A, B, C notat, eſſe magnitudinem A ad B in eadem ratione, ac B ad C; & $\div\!\!\div$ A, B, C, D notat, rationes $A:B$, $B:C$, $C:D$ easdem vel ſimiles eſſe. Deinde ſi $\div\!\!\div$ A, B, C, hoc quod ratio $A:C$ ſit duplicata rationis

A:

A : B, sic exprimemus $A : C = (A : B)^2$. Et si A, B, C, D fuerint continue proportionales, rationem A ad D triplicatam esse rationis A ad B, sic significabimus $A : D = (A : B)^3$.

12. *Homologae magnitudines* dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, consequentes vero consequentibus.

* Si $A : B = C : D$, vocatur A ipsi C homologa, item B & D homologae dicuntur.

13. *Alterna ratio* est sumtio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.

14. *Inuersa ratio* est sumtio consequentis, vt antecedentis, ad antecedentem, vt consequentem.

15. *Compositio rationis* est sumtio antecedentis vna cum consequente, tanquam vnius, ad ipsam consequentem.

16. *Diuisio rationis* est sumtio excessus, quo antecedens superat consequentem, ad ipsam consequentem.

17. *Conuersio rationis* est sumtio antecedentis ad excessum, quo antecedens ipsam consequentem superat.

18. *Ex aequalitate ratio* est, quando pluribus exsistentibus magnitudinibus, & aliis, ipsis numero aequalibus, fuerit vt, in primis magnitudinibus, prima ad vltimam, sic in secundis magnitudinibus, prima ad vltimam. Vel aliter, sumtio extremarum per subtractionem mediarum.

19. *Or-*

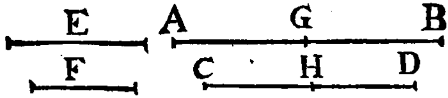
19. *Ordinata proportio* eſt, quando fuerit, vt antecedens ad conſequentem, ita antecedens ad conſequentem; vt autem conſequens ad aliam quampiam, ita conſequens ad aliam quampiam.

* Si fuerit A : B = C : D, & deinde ſit B : E = D : F.

20. *Perturbata* vero *proportio* eſt, quando, tribus exſiſtentibus magnitudinibus, & aliis, ipſis numero aequalibus, fuerit, vt, in primis magnitudinibus, antecedens ad conſequentem, ita, in ſecundis magnitudinibus, antecedens ad conſequentem; vt autem, in primis magnitudinibus, conſequens ad aliam quampiam, ita, in ſecundis magnitudinibus, alia quaepiam ad antecedentem.

* Vt ſi ſint magnitudines A, B, C, & totidem aliae D, E, F, & fuerit A : B = E : F; ſit autem deinde B : C = D : E.

## PROP. I. THEOR.



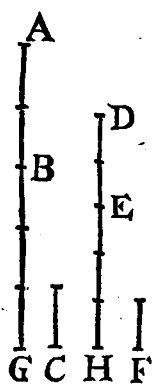

*Si fuerint quotcunque magnitudines* A B, C D *quotcunque magnitudinum aequalium numero* E, F, *ſingulae ſingularum, aeque multiplices: quam multiplex eſt vna magnitudo* A B *vnius* E, *tam multiplices erunt & omnes* A B + C D *omnium* E + F.

Quia enim A B aeque multiplex eſt ipſius E ac C D ipſius F: quot magnitudines ſunt in

A B

A B ipsi E aequales, tot erunt & in C D ipsi F aequales. Sint partes, in quas A B diuidi potest, ipsi E aequales, A G, G B, & partes ipsius C D sint $CH = HD = F$. Ergo multitudo harum partium in A B aequalis erit multitudini in C D. Praeterea est $AG + CH =$ [α] $E + F$, & $GB + HD = E + F$. α. 2. ax. Ergo quot sunt in A B aequales ipsi E, tot sunt in $AB + CD$ aequales ipsis $E + F$. Ergo quam multiplex est A B ipsius E, tam multiplices erunt & $AB + CD$ ipsarum $E + F$. Q. E. D.

## PROP. II. THEOR.




*Si prima* A B *secundae* C *aeque multiplex fuerit, atque tertia* D E *quartae* F; *fuerit autem & quinta* B G *secundae* C *aeque multiplex, atque sexta* E H *quartae* F: *erunt etiam prima & quinta simul sumtae* A G *secundae* C *aequemultiplices, atque tertia & sexta* D H *quartae* F.

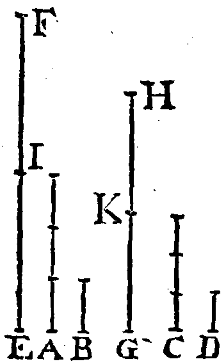
Nam [β] quot in A B sunt magnitudines ipsi C aequales, tot sunt in D E aequales ipsi F. Et quot in B G sunt ipsi C aequales, tot sunt in E H ipsi F aequales. Ergo [γ] quot in A G sunt magnitudines ipsi C aequales, totidem D H continet

β. hyp.

γ. 2. ax.

tinet ipsi F aequales. Hinc A G aequemultiplex est ipsius C, ac D H ipsius F. Q. E. D.

## PROP. III. THEOR.




*Si prima* A *secundae* B *aeque multiplex fuerit atque tertia* C *quartae* D; *sumantur autem* E F, G H *aeque multiplices primae* A *& tertiae* C: *erit & ex aequo sumtarum vtraque vtriusque aeque multiplex, altera quidem* E F *secundae* B, *altera vero* G H *quartae* D.

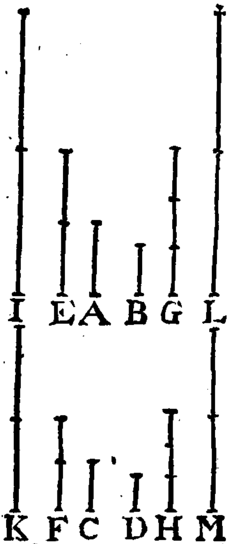
Sint enim in E F partes quotcunque E I, I F ipsi A aequales, & in G H partes G K, K H ipsi C aequales. Harum numerus illarum numero [δ] aequalis erit. Porro quia E I = A, & G K = D: erit E I ipsius B aeque multiplex [δ] ac G K ipsius D. Similiter I F ipsius B aeque multiplex erit, ac K H ipsius D. Ergo [ε] E F ipsius B aeque multiplex erit, ac G H ipsius D. Q. E. D.

δ. hyp.

ε. 2. 5.

PROP.

## PROP. IV. THEOR.



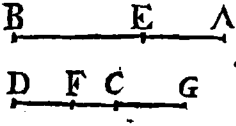

*Si prima* A *ad ſecundam* B *eandem habeat rationem, quam tertia* C *ad quartam* D: *& aeque multiplices* E, F *primae & tertiae ad aeque multiplices* G, H *ſecundae & quartae, iuxta quamuis multiplicationem, eandem rationem habebunt inter ſe comparatae.*

Sumantur enim ipſarum E, F aeque multiplices I, K, & ipſarum G, H aeque multiplices L, M. Erit ergo ζ I aeque multiplex ipſius A, ac K ipſius C. ζ. 3. 5.
Item L aeque multiplex ipſius B erit, ac M ipſius D. Et quum ſit A : B = C : D : ſi I ſuperat L, ſuperabit & η K ipſam M, ſi aequalis, aequalis, & ſi minor, minor erit. η. 5. def. 5.
Sunt autem I, K ipſarum E, F aeque multiplices, & L, M ipſarum G, H aliae vtcunque aeque multiplices θ. Ergo η E : G = F : H. Q. E. D. θ. hyp.

*Cor.* Quoniam demonſtratum eſt, ſi fuerit I $>$ vel $=$ vel $<$ L, fore & K $>$, $=$, $<$ M: conſtat etiam, ſi L $>$, $=$, $<$ I, fore M $>$, $=$, $<$ K; ac propterea fore G : E = H : F. *Si ergo quatuor magnitudines proportionales ſunt, & inuerſe proportionales erunt.*

* *Schol.* Similiter demonſtratur, eſſe E : B = F : D, item A : G = C : H.

## PROP. V. THEOR.

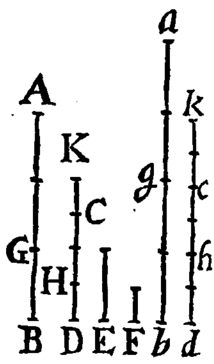



*Si magnitudo* A B *magnitudinis* C D *aeque multiplex sit atque ablata* AE *ablatae* CF: *erit & reliqua* EB *reliquae* F D *aeque multiplex atque tota* AB *totius* C D.

Ponatur alia CG, cuius EB sit aeque multiplex ac AE est ipsius CF. Ergo [ι] AB ipsius GF erit aeque multiplex ac AE ipsius CF. Sed & AB ipsius C D aeque multiplex erat ac AE ipsius C F. Ergo AB ipsarum GF&CD aeque multiplex erit. Quare [κ] est GF = CD, & ergo [λ] CG = FD. Ergo EB ipsius FD aeque multiplex est, quam AE ipsius CF, vel quam tota AB totius CD. Q.E.D.

ι. 1. 5.
κ. 7. ax.
λ. 3. ax.

## PROP. VI. THEOR.



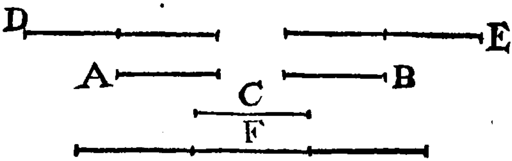

*Si duae magnitudines* A B, C D *duarum magnitudinum* E, F *aeque multiplices sint; & ablatae quaedam* A G, C H *sint earundem* E, F *aeque multiplices: erunt & reliquae* GB, H D *vel iisdem* E, F *aequales, vel ipsarum* E, F *aeque multiplices.*

Sit enim primum G B = E: dico, etiam fore HD = F. Ponatur enim ipsi F aequalis C K. Et quia A G, C H ipsarum E, F sunt aeque multiplices:

plices: erunt adhuc AB, KH ipsarum E, F aeque multiplices. Sed & AB, CD earundem E, F aeque multiplices erant. Ergo KH & CD eiusdem F aeque multiplices erunt. Quare μ KH = CD, & KC = ν HD. Sed KC = F. Ergo HD = F. μ. 6. ax. ν. 3. ax.

Similiter demonstrabimus, ξ si gb fuerit ipsius E multiplex, & hd ipsius F aeque multiplicem esse, posita ck ipsius F aeque multiplici, ac gb ipsius E. Q. E. D. ξ. 2. 5.

## PROP. VII. THEOR.




*Aequales magnitudines* A, B *eandem habent rationem ad eandem* C; *& eadem* C *ad aequales* A, B.

Sumantur ipsarum A, B aeque multiplices D, E, & ipsius C alia vtcunque multiplex F. Et quoniam A = B: erit & D = E. Quare si D >, =, < F: erit ο quoque E >, =, < F. ο. 1. & 14. ax.
Ergo π erit A : C = B : C. Q. E. D. π. 5. def. 5.

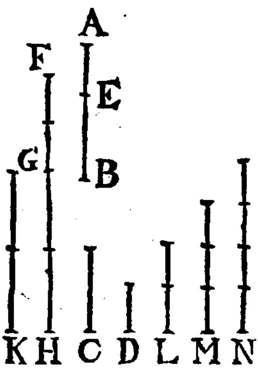
Similiter demonstratur, esse C : A = C : B. Q. E. D.

* *Scholium.*

Eodem modo demonstrabis, aequalia ad aequalia eandem rationem habere.

## PROP. VIII. THEOR.

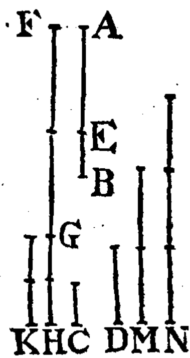
*Inaequalium magnitudinum* A B, C *maior* A B *ad eandem* D *maiorem habet rationem, quam minor* C. *Et eadem* D *ad minorem* C *maiorem habet rationem, quam ad maiorem* A B.




*Caſ. 1.* Sumta in A B ipſi C $=$ B E, ſit A E
p. 4. def. 5. $<$ E B. Capi poteſt [e] ipſius A E multiplex, maior quam D, quae ſit F G. Et quantiplex F G eſt ipſius A E, tantiplex fiat G H ipſius E B, & K ipſius C. Sumantur etiam ipſius D dupla L, tripla M, & ſic deinceps, quoad perueniatur ad primam multiplicium ipſius D, ipſa K maiorem. Sit ea N, quadrupla ipſius D. Quia ergo N prima eſt, qua K facta eſt minor: nondum erit K $<$ M. Et quum F G, G H ipſarum A E, E B
q. 1. 5. aeque multiplices ſint: erunt & [q] F H, F G ipſarum A B, A E aeque multiplices. Sunt vero F G & K ipſarum A E, C aeque multiplices. Ergo F H & K ipſarum A B & C aeque multiplices erunt. Sed quia G H & K aequalium
r. 6. ax. E B & C aeque ſunt multiplices; eſt G H $=$ [r] K. Ergo non eſt G H $<$ M. Hinc, ob F G $>$ D, erit G H $+$ F G, id eſt F H, maior quam M $+$ D, id eſt N. K autem, quum ſit minor quam

quam N, non superat ipsam N. Ergo [v] AB: D > C: D. v. 7. def. 5.

Similiter ostenditur, esse D: C > D: AB. Q. E. D.




*Cas. 2.* Si AE > EB. Sumatur ipsius EB multiplex GH > D, & quantiplex est GH ipsius EB, tantiplex fiat FG ipsius AE, & K ipsius C. Erunt ergo vt antea FH, K ipsarum AB, C aeque multiplices. Sit inter ipsius D multiplices N primo maior quam FG, M proxime praecedens. Ergo, quod rursus eodem modo ostendetur, FH superabit ipsam N. Denique quum rursus sit K = GH, FG autem, quae ipsa GH maior est, non superet N: patet K non superare ipsam N. Ergo AB: D > C: D; &, quod pari modo demonstratur, D: C > D: AB. Q. E. D.

* *Cas. 3.* Si AE = EB, idem eodem modo demonstrari potest, quo in casu 1.

## PROP. IX. THEOR.


*Quae* A, B, *eandem rationem habent ad eandem* C, *sunt inter se aequales. Et ad quas* A, B, *eadem* C *eandem habet rationem, ipsae etiam sunt inter se aequales.*


1. Si enim non esset $A = B$; nec fo-
φ. 8. 5. ret[φ] $A : C = B : C$. Quod est contra hypothesin. Ergo $A = B$. Q.E.D.

2. Si sit $C : A = C : B$, nec tamen $A = B$: non [φ] erit $C : A = C : B$; contra hypothesin. Ergo $A = B$. Q. E. D.

## PROP. X. THEOR.


*Magnitudinum* A, B *rationem habentium ad eandem* C, *quae maiorem habet rationem* A, *est maior. Ad quam vero* B *eadem* C *maiorem habet rationem, illa est minor.*

1. Sit $A : C > B : C$. Jam si non sit $A > B$: aut aequalis aut minor erit. Si esset $A = B$:
χ. 7. 5. foret $A : C =$[χ] $B : C$. Si $A < B$: foret [ψ] A:
ψ. 8. 5. $C < B : C$. Vtrumque contra hypothesin. Ergo $A > B$. Q.E.D.

2. Sit $C : B > C : A$. Jam si non sit $B < A$: aut aequalis erit, aut maior. Si $B = A$: erit [χ] $C : B = C : A$. Si $B > A$: erit [ψ] $C : B < C : A$. Quia vtrumque contra hypothesin est: necesse est vt sit $B < A$. Q.E.D.

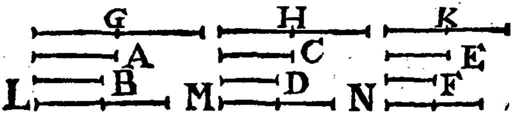
## PROP. XI. THEOR.


*Quae eidem sunt eaedem rationes, & inter se sunt eaedem.*

Sit $A : B = C : D$, & $C : D = E : F$. Dico

Dico fore $A:B = E:F$. Sumantur enim ipsarum A, C, E aeque multiplices G, H, K; ipsarum vero B, D, F aeque multiplices L, M, N. Ergo si fuerit $G >, =, < L$: erit[α] & $H >, =,$ α. 5. def. 5.
$< M$; item si fuerit $H >, =, < M$: erit & K $>, =, < N$. Quare si fuerit $G >, =, < L$: erit & $K >, =, < N$. Hinc erit[α] $A:B = E:F$. Q. E. D.

## PROP. XII. THEOR.

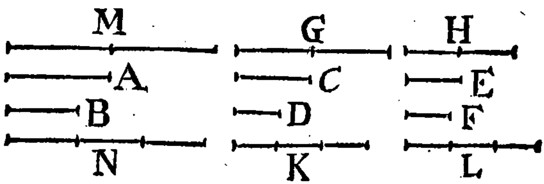



*Si quotcunque magnitudines proportionales fuerint* $A:B = C:D = E:F$: *vt vna* A *antecedentium ad vnam* B *consequentium, ita erunt omnes antecedentes* $A + C + E$ *ad omnes consequentes* $B + D + F$.

Sumantur ipsarum A, C, E aeque multiplices G, H, K, & ipsarum B, D, F aliae vtcunque aeque multiplices L, M, N. Jam[α] si $G >, =,$ α. 5. def. 5.
$< L$: erit & $H >, =, < M$, atque $K >, =, < N$. Quare si $G >, =, < L$: erunt & $G + H + K >, =, < L + M + N$. Sunt autem G, & $G + H + K$ ipsarum A, & $A + C + E$[β] aeque multiplices; item L ac $L +$ β. 1. 5.
$M + N$ sunt ipsarum B ac $B + D + F$ aeque multiplices. Ergo[α] est $A:B = A + C + E : B + D + F$. Q. E. D.

 PROP.

## PROP. XIII. THEOR.



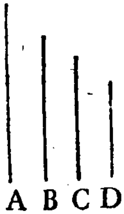

*Si prima* A *ad ſecundam* B *eandem habeat rationem, quam tertia* C *ad quartam* D; *tertia autem* C *ad quartam* D *maiorem habeat rationem, quam quinta* E *ad ſextam* F: *& prima* A *ad ſecundam* B *maiorem habebit rationem, quam quinta* E *ad ſextam* F.

Sume ipſarum C, E aeque multiplices G, H, & ipſarum D, F alias quasdam aeque multiplices K, L, ita vt G quidem ſuperet K, ſed
γ. 7. def. 5. H non ſuperet L, quod ſemper fieri poteſt γ. Deinde quantiplex G eſt ipſius C, tantiplex fiat M ipſius A, & quantiplex K eſt ipſius D, tantiplex N ipſius B. Ergo quum ſit A : B = C : D; ſi fuerit G >, =, < K: erit & M >, =, < N. Sed G > K. Ergo & M > N. Atqui H non > L. Sunt vero M & H ipſarum A & E aequemultiplices, nec non N & L ipſarum B, F, (per conſtr.). Ergo γ A : B > E : F. Q. E. D.

* *Schol.* Si vero fuerit C : D < E : F : erit quoque A : B < E : F. Item ſi A : B > C : D > E : F : erit A : B > E : F. Et ſi A : B < C : D < E : F : erit A : B < E : F.

PROP.

## PROP. XIV. THEOR.




*Si prima* A *ad secundam* B *eandem habeat rationem, quam tertia* C *ad quartam* D; *prima autem* A *maior sit quam tertia* C: & *secunda* B *quam quarta* D *maior erit. Et si aequalis: aequalis. Et si minor: minor.*

1. Quia enim $A > C$: erit [δ] $A:B > C:B$. Sed $A:B = C:D$. Ergo [ε] $C:D > C:B$. Ergo [ζ] $D < B$, vel $B > D$. Q. E. D. δ. 8. 5. ε. 13. 5. ζ. 10. 5.

2, 3. Similiter demonstrabitur, si $A = C$, fore $B = D$, & si $A < C$, fore $B < D$. Q. E. D.

* *Schol.* A fortiori, si $A:B < C:D$, & $A > C$: erit [η] $B > D$. Si fuerit $A = B$, & $A:B = C:D$: erit & $C = D$. Sumtis enim ipsarum A, B, C, D, aeque multiplicibus E, F, G, H: quia [θ] $E = F$, erit [ι] $G = H$, & proinde [κ] $C = D$. η. sch.praec. θ. 6. ax. ι. 5. def. 5. κ. 7. ax.

## PROP. XV. THEOR.

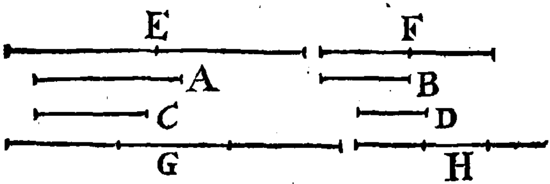
*Partes* A, B *inter se comparatae eandem habent rationem, quam habent eorum aeque multiplices* C D, E F.


Sint C G, G H, H D partes multiplicis C D ipsi A aequales, & E K, K L, L F partes multiplicis E F ipsi B aequales. Erit ergo multitudo ipsarum CG, GH, HD aequalis multitudini ipsarum EK, KL, LF. Et quia $CG = GH = HD$, & $EK = KL = LF$: erit [λ] $CG:EK = GH:KL = HD:LF$. Qua- λ. 7.5. & 11.5.

 re

μ. 12. 5. re $^{\mu}$ $CG : EK = CD : EF$. Est vero $A : B =^{\nu}$
ν. 7. 5. $CG : EK$. Ergo $A : B =^{\xi} CD : EF$. Q.E.D.
ξ. 11. 5.

## PROP. XVI. THEOR.



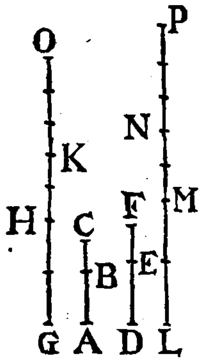

*Si quatuor magnitudines proportionales fuerint*, $A : B = C : D$: *& alterne proportionales erunt* $A : C = B : D$.

Sint ipsarum A, B aeque multiplices E, F, & ipsarum C, D aliae aeque multiplices G, H.
ο. 15. 5. Hinc $A : B =^{o} E : F$. Sed $A : B = C : D$ (*hyp.*)
π. 11. 5. Ergo $^{\pi}$ $C : D = E : F$. Rursus $C : D =^{o} G : H$;
hinc $^{\pi}$ $E : F = G : H$. Quare si $E >, =, < G$:
ρ. 14. 5. erit $^{\rho}$ & $F >, =, < H$. Ergo $A : C =^{\sigma} B : D$.
σ. 5. def. 5. Q. E. D.

* *Schol.* Haec propositio & 14. locum tantum habent, si magnitudines proportionales eiusdem generis sunt. Ceterum ex hac demonstrare possumus, *si sit* $A : B = C : D$, & $A >< B$, *esse &* $C >< D$. Nam sumtis ipsarum A, B, C, D aeque multiplicibus E, F, G, H: quia $^{o}$ $A : B = E : F$, &
τ. 16. 5. ergo $^{\tau}$ $A : E = B : F$, & $A >< B$; erit $E >< F$. Hinc & $^{\sigma}$ $G >< H$. Sed quum sit $^{o}$ $G : H = C : D$, & ergo $^{\tau}$ $G : C = H : D$: erit $^{\rho}$ $C >< D$. Q.E.D.

PROP.

## PROP. XVII. THEOR.



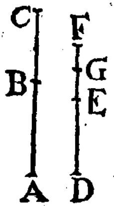

*Si compositae magnitudines sint proportionales* (AC: BC $=$ DF:EF): *& diuisae proportionales erunt* (AB:BC $=$ DE: EF).

Sumantur enim ipsarum quidem AB, BC, DE, EF aeque multiplices GH, HK, LM, MN, ipsarum vero BC, EF aliae vtcunque aeque multiplices KO, NP. Tota KG totius AC tam multiplex [υ] est, quam HG ipsius AB, vel LM ipsius DE. Sed quam multiplex est LM ipsius DE, tam multiplex est [υ] LN ipsius DF. Ergo GK & LN ipsarum AC, DF aeque sunt multiplices. Rursus [φ] HK $+$ KO id est HO, & MN $+$ NP id est MP, aeque multiplices erunt ipsarum BC, EF. Est vero AC:BC $=$ DF:EF. Ergo si GK $>, =, <$ HO; erit quoque LN $>, =, <$ MP. Si vero GK $>, =, <$ HO: erit &, communi HK ablata, adhuc GH $>, =, <$ KO; Et si LN $>, =, <$ MP; erit, communi MN ablata, adhuc LM $>, =, <$ NP. Ergo si GH $>, =, <$ KO: erit & LM $>, =, <$ NP. Quare [χ] AB: BC $=$ DE: EF. Q. E. D.

υ. 1. 5.
φ. 2. 5.
χ. 5. def. 5.

## PROP. XVIII. THEOR.

*Si diuisae magnitudines sint proportionales* (AB: BC = DE: EF): *& compositae proportionales erunt* (AC: BC = DF: EF).




Si negas: erit AC ad BC vt DF ad aliam FG ipsa FE minorem vel maiorem. Sit primo $FG < FE$. Sed
ψ. 17. 5. quum sit ψ AB: BC = DG: FG
ω. 11. 5. = ω DE: EF, & $DG > DE$: erit α
α. 14. 5. $FG > FE$. Q. E. A. Similiter nec potest esse AC ad BC vt DF ad maiorem quam FE. Ergo AC: BC = DF: FE. Q. E. D.

## PROP. XIX. THEOR.


*Si fuerit vt tota* AB *ad totam* CD, *ita ablata* AE *ad ablatam* CF: *erit reliqua* EB *ad reliquam* FD, *vt tota* AB *ad totam* CD.

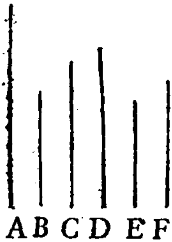
Nam quia AB: CD = AE: CF:
β. 16. 5. erit alterne β AB: AE = CD: CF, &
γ. 17. 5. diuidendo γ BE: EA = DF: FC, & rursus alterne BE: DF = EA: FC = AB: CD. Q. E. D.

### *Corollar.*

Quoniam ostensum est, si fuerit AB: AE
δ. 17. def. 5. = CD: FC, fore AB: CD = BE: DF: erit alterne AB: BE = CD: DF. Hinc δ *si compositae magnitudines proportionales fuerint, conuertendo etiam proportionales erunt.*

PROP.

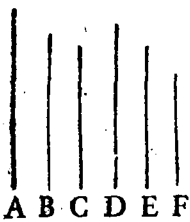
## PROP. XX. THEOR.




*Si sint tres magnitudines* A, B, C *& aliae ipsis numero aequales* D, E, F, *quae binae sumantur in eadem ratione* ($A:B = D:E$, & $B:C = E:F$); *ex aequo autem prima* A *maior sit quam tertia* C: *& quarta* D *quam sexta* F *maior erit; & si aequalis, aequalis; & si minor, minor.*

Quum enim $A > C$: erit $A:B >^{\varepsilon} C:B$. Sed ε. 8. 5.
(hyp.) $A:B = D:E$, atque $C:B =^{\zeta} F:E$. Ergo ζ. hyp. & cor. 4. 5.
$D:E >^{\eta} F:E$. Ergo $D >^{\vartheta} F$. Similiter η. 13. 5.
ostenditur, si $A =, < C$, fore $D =, < F$. ϑ. 10. 5.
Q. E. D.

## PROP. XXI. THEOR.

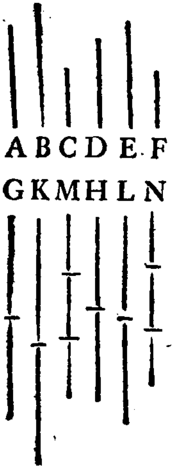



*Si sint tres magnitudines* A, B, C, *& aliae ipsis numero aequales* D, E, F, *quae binae sumantur, & in eadem ratione; sit autem perturbata earum proportio* ($A:B = E:F$, & $B:C = D:E$), *& ex aequo prima* A *maior sit quam tertia* C: *& quarta* D *quam sexta* F *maior erit; & si aequalis, aequalis; & si minor, minor.*

Quia $A > C$: est $A:B >^{\iota} C:B$. Sed est $A:$ ι. 8. 5.
$B = E:F$, & inuertendo $C:B = E:D$. Ergo[κ] κ. 13. 5.
$E:F > E:D$. Ergo $^{\lambda} F < D$, vel $D > F$. λ. 10. 5.
Similiter ostenditur, si $A =, < C$, fore $D =,$
$< F$. Q. E. D.

PROP.

## PROP. XXII. THEOR.




*Si ſint quotcunque magnitudines* A, B, C, *& aliae ipſis numero aequales* D, E, F, *quae binae ſumantur, in eadem ratione* (A : B = D : E, & B : C = E : F): *& ex aequo in eadem ratione erunt* (A : C = D : F).

Sumantur G, H ipſarum A, D aeque multiplices, & K, L ipſarum B, E aliae vtcunque aeque multiplices, nec non M,
μ. 4. 5. N ipſarum C, F. Ergo [μ] G : K = H : L, & K : M = L : N. Quare ſi ſit G >, =, < M, erit
ν. 20. 5. & [ν] H >, =, < N. Ergo A : C = [ξ] D : F.
ξ. 5. def. 5. Q. E. D.

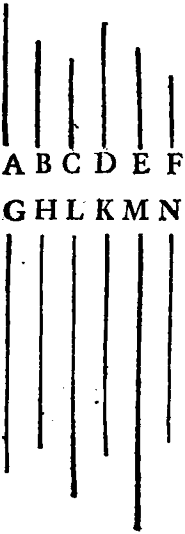
** Schol.*

1. Ergo rationum aequalium duplicatae, triplicatae &c. etiam aequales ſunt.

2. Et vice verſa, quarum rationum duplicatae, vel triplicatae &c. aequales ſunt, eae inter ſe aequales ſunt. Sint e. gr. ∺ a, b, c, d, & ∺ e, f, g, h, & ſit a : d = e : h: erit a : b = e : f. Si negas: ſit a : b = e : p, & p > f, & pone ∺ e, p, s, t. Igitur quia e : p < e : f, erit p : s < f : g, & s : t < g : h, ideoque s > g, & t > h (ſch. 14. 5). Sed quia a : d = e : t, (per ſch. 1.) & a : d = e : h: erit quoque t = h. Q. E. A.

PROP.

## PROP. XXIII. THEOR.

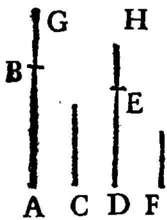



*Si sint tres magnitudines* A, B, C, *& aliae ipsis numero aequales* D, E, F, *quae binae sumantur, in eadem ratione, sit autem perturbata earum proportio* (A : B = E : F, & B : C = D : E) : *& ex aequo in eadem ratione erunt* (A : C = D : F).

Sumtis G, H, K, ipsarum A, B, D aeque multiplicibus, & aliis L, M, N ipsarum C, E, F vtcunque aeque multiplicibus, erit ο A : B = G : H, & E : F = M : N. Sed ponitur A : B = E : F. Ergo G : H π = M : N. Et quia B : C = D : E : erit H : L = ρ K : M. Quare σ si G >, =, < L : erit & K >, =, < N, & propterea τ A : C = D : F. Q. E. D.

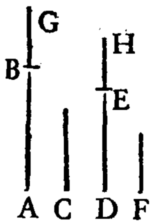
ο. 15. 5.
π. 11. 5.
ρ. 4. 5.
σ. 21. 5.
τ. 5. def. 5.

## PROP. XXIV. THEOR.



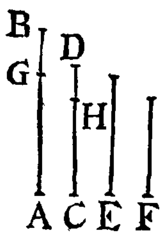

*Si prima* AB *ad secundam* C *eandem habeat rationem, quam tertia* DE *ad quartam* F; *habeat autem & quinta* BG *ad secundam* C *eandem rationem, quam sexta* EH *ad quartam* F : *& composita e prima & quinta* AG *ad secundam* C *eandem rationem habebit, quam composita e tertia & sexta* DH *ad quartam* F.

Quum




Quum enim B G : C = E H :
ν. cor. 4. 5. F : erit inuertendo C : B G =[ν]
F : E H. Et quia A B : C = D E :
φ. 22. 5. F : erit ex aequo[φ] A B : B G =
χ. 18. 5. D E : E H ; ergo componendo[χ]
A G : G B = D H : H E. Hinc
quum praeterea sit G B : C =
H E : F, erit ex aequo[φ] A G : C = D H : F.
Q. E. D.

## PROP. XXV. THEOR.

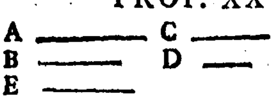



*Si quatuor magnitudines fuerint proportionales* (A B : C D = E : F) : *maxima ipsarum* A B, *&* *minima* F *duabus reliquis* C D + E *maiores erunt.*

Fiat enim A G = E, & C H = F. Quoniam ergo A B : C D
ψ. hyp. =[ψ] E : F =[ω] A G : C H : erit
ω. 7. 5. G B : H D =[α] A B : C D. Sed A B [ψ]> C D.
α. 19. 5. Ergo G B >[β] H D. Quare, quia A G + F
β. sch. 14. 5. =[γ] C H + E : erit[δ] A G + G B + F > C H
γ. 2. ax. + H D + E, id est, A B + F > C D + E.
δ. 4. ax. Q. E. D.

* Quae sequuntur propositiones non sunt Euclidis, sed ex aliis desumtae. Ob frequentem tamen earum vsum eas Euclideis subiungere, Isaacum Barrow secuti, voluimus.

## * PROP. XXVI. THEOR.




*Si prima ad secundam habuerit maiorem rationem, quam tertia ad quartam: habebit inuertendo, secunda ad primam minorem rationem, quam quarta ad tertiam.*

Sit

Sit A : B > C : D. Dico B : A < D : C. Nam concipe C : D = E : B. Ergo [ε] A : B > E : B; quare [ζ] A > E : ergo [η] B : A < B : E vel [θ] D : C. Q. E. D. ε. 13. 5. ζ. 10. 5. η. 8. 5. θ. cor. 4. 5.

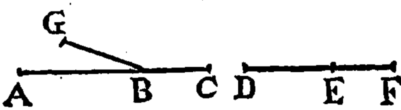
## * PROP. XXVII. THEOR.


*Si prima ad secundam habuerit maiorem rationem, quam tertia ad quartam: habebit quoque vicissim prima ad tertiam maiorem rationem, quam secunda ad quartam.*

Sit A : B > C : D. Dico A : C > B : D. Nam puta E : B = C : D : ergo [ι] A > E. Ergo A : C >[κ] E : C vel [λ] B : D. Q. E. D. ι. 10. 5. κ. 8. 5. λ. 16. 5.

## * PROP. XXVIII. THEOR.

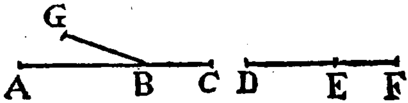
*Si prima ad secundam habuerit maiorem rationem, quam tertia ad quartam: habebit quoque composita prima cum secunda ad secundam maiorem rationem, quam composita tertia cum quarta ad quartam.*




Sit AB : BC > DE : EF. Dico AC : BC > DF : EF. Nam cogita GB : BC = DE : EF. Ergo [μ] AB > GB; adde vtrinque BC, erit [ν] AC > GC, ergo [ξ] AC : BC > GC : BC id est [ο] DF : EF. Q. E. D. μ. 10. 5. ν. 4. ax. ξ. 8. 5. ο. 18. 5.

## * PROP. XXIX. THEOR.

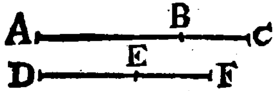
*Si composita prima cum secunda ad secundam maiorem habuerit rationem, quam composita tertia cum quarta ad quartam: habebit quoque diuidendo prima ad secundam maiorem rationem, quam tertia ad quartam.*



Sit $AC:BC > DF:EF$: dico $AB:BC > DE:EF$. Intellige $GC:BC = DF:EF$. Ergo [π] $AC > GC$. Aufer communem $BC$: erit [ρ] $AB > GB$. Ergo $AB:BC >$ [σ] $GB:BC$, vel [τ] $DE:EF$. Q. E. D.

π. 10. 5.
ρ. 5. ax.
σ. 8. 5.
τ. 17. 5.

## * PROP. XXX. THEOR.

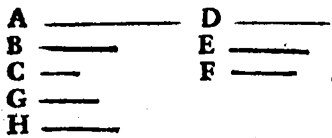


*Si composita prima cum secunda ad secundam habuerit maiorem rationem quam composita tertia cum quarta ad quartam: habebit per conuersionem rationis prima cum secunda ad primam minorem rationem, quam tertia cum quarta ad tertiam.*

Sit $AC:BC > DF:EF$: dico $AC:AB < DF:DE$. Nam quia [υ] $AC:BC > DF:EF$: erit diuidendo $AB:BC >$ [φ] $DE:EF$; inuertendo igitur [χ] $BC:AB < EF:DE$, ergo componendo $AC:AB$ [ψ] $< DF:DE$. Q. E. D.

υ. hyp.
φ. 29. 5.
χ. 26. 5.
ψ. 28. 5.

## * PROP. XXXI. THEOR.



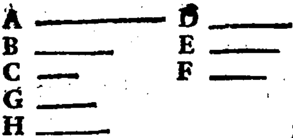
*Si sint tres magnitudines* A, B, C, *&* *aliae ipsis aequales numero* D, E, F; *sitque maior ratio primae priorum ad secundam, quam primae posteriorum ad secundam* ($A:B > D:E$), *item secundae priorum ad tertiam maior, quam secundae posteriorum ad tertiam* ($B:C > E:F$): *erit quoque ex aequo maior ratio primae priorum ad tertiam, quam primae posteriorum ad tertiam* ($A:C > D:F$).

ω. 10. 5.
α. 8. 5.

Concipe $G:C = E:F$. Ergo [ω] $B > G$, ergo [α] $A:G > A:B$. Rursus puta $H:G = D:E$: ergo

go [β] $H : G < A : B$, & fortius [γ] $H : G < A : G$. β. 13. 5.
Quare [*] $A > H$. Proinde $A : C >$ [α] $H : C$ vel [δ] γ. sch. 13. 5.
$D : F$. Q. E. D. δ. 22. 5.

## * PROP. XXXII. THEOR.




*Si sint tres magnitudines* A, B, C, *& aliae ipsis numero aequales* D, E, F; *sitque maior ratio primae priorum ad secundam, quam secundae posteriorum ad tertiam* ($A : B > E : F$), *item secundae priorum ad tertiam, quam primae posteriorum ad secundam* ($B : C > D : E$): *erit quoque ex aequo maior ratio primae priorum ad tertiam, quam primae posteriorum ad tertiam* ($A : C > D : F$).

Huiusce demonstratio plane similis est demonstrationi praecedentis.

## * PROP. XXXIII. THEOR.


*Si fuerit maior ratio totius* AB *ad totum* CD, *quam ablati* AE *ad ablatum* CF: *erit & reliqui* EB *ad reliquum* FD *maior ratio, quam totius* AB *ad totum* CD.

Quoniam $AB : CD > AE : CF$: erit [ε] permutando $AB : AE > CD : CF$; ergo conuertendo [ζ] $AB : EB < CD : DF$, permutando igitur $AB : CD$ [ε] $< EB : DF$. Q. E. D. ε. 27. 5. ζ. 30. 5.

## * PROP. XXXIV. THEOR.

*Si sint quotcunque magnitudines, & aliae ipsis aequales numero, sitque maior ratio primae priorum*

 *ad*

*ad primam poſteriorum, quam ſecundae ad ſecundam, & haec maior, quam tertiae ad tertiam, & ſic deinceps: habebunt omnes priores ſimul ad omnes poſteriores ſimul maiorem rationem, quam omnes priores, relicta prima, ad omnes poſteriores, relicta quoque prima; minorem autem, quam prima priorum ad primam poſteriorum; maiorem denique etiam quam vltima priorum ad vltimam poſteriorum.*

Horum demonſtratio eſt penes interpretes, quos adeat, qui eam deſiderat. Nos omiſimus, breuitatis ſtudio, & quia eorum nullus vſus in his elementis.

# EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER VI.

## DEFINITIONES.

1. *Similes figurae rectilineae* sunt, quae & singulos angulos singulis aequales habent, & circa aequales angulos latera proportionalia.

* Nota similitudinis est haec $\sim$.

2. *Reciprocae figurae* sunt, quando in vtraque figura antecedentes & consequentes rationum termini fuerint.

3. *Secundum extremam & mediam rationem recta linea secta* esse dicitur, quando vt tota ad maius segmentum, ita maius segmentum ad minus se habuerit.

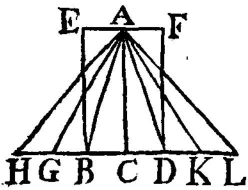
4. *Altitudo cuiusque figurae* est linea perpendicularis a vertice ad basin ducta.

5. *Ratio ex rationibus componi* dicitur, quando rationum quantitates inter se multiplicatae illius faciunt quantitatem.

* Signum quantitatis rationis A : B est $\frac{B}{A}$, scilicet signum quoti, qui indicat, quoties antecedens contineat consequentem vel aliquotam eius partem. Iam quia rationum A : B & B : C quantitates $\frac{A}{B}$ & $\frac{B}{C}$ inter se multiplicatae faciunt $\frac{A}{C}$, quae quantitas est rationis A : C : dicimus rationem A : C componi ex rationibus A : B & B : C, quod sic scribimus $(A : C) = (A : B) + (B : C)$.

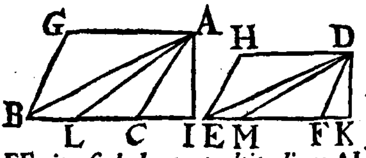
## PROP. I. THEOR.

*Triangula* ABC, ACD, *&* *parallelogramma* EC, CF, *quae eandem habent altitudinem, ſunt inter ſe vt baſes* BC, CD.




1. In BD producta ſumantur BG = GH = BC, & DK = KL = CD, & iungantur AH, AG,
α. 38. 1. AK, AL. Ergo $^{\alpha}$ Δ ABG = Δ. AGH = Δ. ABC, & ſunt proinde baſis HC & Δ ACH baſis BC & trianguli ABC aeque multiplicia. Similiter patet eſſe baſin CL & Δ. ACL baſis CD & Δ. ACD aeque multiplicia. Iam ſi HC >, =, < CL: erit & $^{\alpha}$ Δ ACH >, =, <
β. 5. def. 5. Δ. ACL. Ergo BC : CD = $^{\beta}$ Δ. ACB : Δ. ACD. Q. E. D.
γ. 41. 1. 2. Quia Pgra. EC : CF ſunt dupla $^{\gamma}$ Δrum
δ. 15. 5. ABC, ACD, & hinc $^{\delta}$ EC : CF = Δ. ABC : Δ
ε. 11. 5. ACD : erit $^{\epsilon}$ EC : CF = BC : CD. Q. E. D.

* *Schol.*

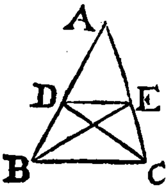



*Hinc triangula* ABC, DEF, *&* *pgra.* GC, HF, *quorum aequales ſunt baſes* BC, EF, *ita ſe habent vt altitudines* AI, DK.

Sume IL = CB, & KM = FE, ac iunge LA,
ζ. 1. 6. MD. Quia ergo IL = KM : erit $^{\zeta}$ Δ. ALI : Δ.
η. 38. 1. DMK = AI : DK. Sed Δ. ALI = $^{\eta}$ Δ. ABC, &
ϑ. 7. & 11. 5. Δ. DMK = Δ. DEF. Ergo Δ. ABC : Δ DEF = $^{\vartheta}$
ι. 15. 5. AI : DK = $^{\iota}$ Pgr. GC : Pgr. HF. Q. E. D.

PROP.

## PROP. II. THEOR.

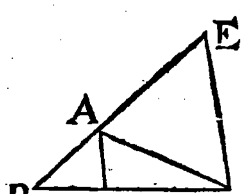


*Si vni laterum* BC *trianguli* ABC *parallela recta linea* DE *ducatur: haec proportionaliter secabit ipsius trianguli latera* AB, AC. *Et si trianguli* ABC *latera* AB, AC *proportionaliter secta fuerint: quae sectiones coniungit recta linea* DE *reliquo trianguli lateri* BC *parallela erit.*

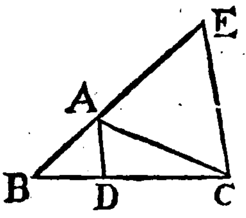
1. Sit DE ad BC parallela: dico fore BD: DA = CE: EA. Iungantur enim DC, BE.
Et quia[κ] DE, BC parallelae, erit △ BDE =[λ] κ. hyp.
△ CDE. Ergo △. BDE: △. ADE =[μ] △. λ. 37. 1.
CDE: △. ADE. Atqui △. BDE: △. ADE μ. 7. 5.
=[ν] BD: DA, & △. CDE: △. ADE = CE: ν. 1. 6.
EA. Ergo BD: DA =[ξ] CE: EA. Q. E. D. ξ. 11. 5.

2. Quia[ο] BD: DA = CE: EA, & BD: DA ο. hyp.
=[π] △. BDE: △ EDA, & CE: EA = △. CDE: π. 1. 6.
△ EDA: erit[ρ] △. BDE: △ EDA = △ CDE: ρ. 11. 5.
△ EDA, & hinc △ BDE =[σ] △ CDE. Qua- σ. 9. 5.
re[τ] ED, BC parallelae sunt. Q. E. D. τ. 39. 1.

## PROP. III. THEOR.



*Si trianguli* ABC *angulus* A *bifariam secetur, secans autem angulum recta linea* AD *secet etiam basin* BC: *basis segmenta* BD, DC *eandem rationem habebunt, quam reliqua trianguli latera* BA, AC.

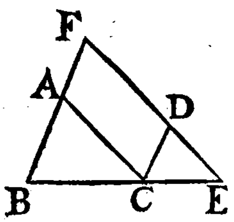



*Et ſi baſis* BC *ſegmenta* BD, DC *eandem habeant rationem, quam reliqua trianguli* ABC *latera* BA, AC: *quae a vertice* A *ad ſectionem* D *ducitur recta linea* AD, *trianguli angulum* A *bifariam ſecabit.*

1. Ducatur enim ad AD parallela CE, & producatur BA in E. Quia ergo ang. ACE
υ. 29. 1. =[υ] CAD, & AEC =[υ] BAD, & CAD =[φ]
φ. hyp. BAD: erit ACE = AEC, & AC =[χ] AE.
χ. 6. 1.
ψ. 2. 6. Hinc[ψ] BD: DC = BA: AC. Q. E. D.

2. Iisdem conſtructis, ſi BD: DC = BA: AC: quia BD: DC =[ψ] BA: AE, erit BA: AC
ω. 11. 5. =[ω] BA: AE, & ergo AC =[α] AE, & ang.
α. 9. 5. ACE =[β] AEC. Sed ang. ACE =[υ] DAC
β. 5. 1. & ang. AEC =[υ] BAD. Ergo ang. BAD = DAC. Angulus igitur A biſectus eſt a recta AD. Q. E. D.

## PROP. IV. THEOR.




*Aequiangulorum triangulorum* ABC, DCE *proportionalia ſunt latera quae circum aequales angulos; & homologa ſunt latera, quae aequalibus angulis ſubtenduntur.*

Sit ang. A = D, B = DCE, & ACB = E: dico fore BA: AC = CD: DE, item BC: CA = CE: ED, & AB: BC = DC: CE.

Poſita

Posita enim CE ipsi BC in directum, produc BA & ED, quae in F concurrent: quia ang. B + E = $^{\gamma}$ B + ACB < $^{\delta}$ 2. Rectis. γ. hyp.
Et quia ergo CD ad BF, & AC ad FE parallela $^{\epsilon}$ est: erit $^{\zeta}$ AF = CD, & FD = AC. Sed $^{\eta}$ BA : AF = BC : CE, & alterne AB : BC = AF : CE, & DC : CE = $^{\vartheta}$ AF : CE. Ergo AB : BC = DC : CE. δ. 17. 1. ε. 28. 1. ζ. 34. 1. η. 2. 6. ϑ. 7. 5.

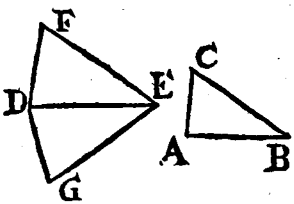
Rursus ob CD, BF parallelas est $^{\eta}$ BC : CE = FD : DE = AC : DE. Ergo alterne BC : CA = CE : ED.

Et quia erat AB : BC = DC : CE : erit ex aequo $^{\iota}$ BA : AC = CD : DE. Q. E. D. ι. 22. 5.

** Scholium.*

1. Hinc AB : DC = $^{\kappa}$ BC : CE = AC : DE. κ. 16. 5.
2. Si in Δ. EFB ducitur basi BF parallela CD; est BF : CD $^{\lambda}$ = BE : EC = FE : ED. λ. 18. 5.
3. Triangula aequiangula similia sunt.

## PROP. V. THEOR.



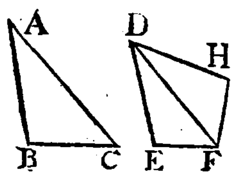

*Si duo triangula* ABC, DEF *latera habeant proportionalia: aequiangula erunt triangula, & aequales habebunt angulos, quibus homologa latera subtenduntur.*

Fac ad rectae DE $^{\mu}$ punctum quidem D ang. EDG = CAB, ad punctum vero E ang. DEG = CBA: & reliqui G, C aequales erunt $^{\nu}$. Ergo $^{\xi}$ AB : BC = DE : EG. Sed $^{o}$ AB : BC = DE : EF. Ergo EG = $^{\pi}$ EF. Similiter quia μ. 23. 1. ν. 32. 1. ξ. 4. 6. ο. hyp. π. 9. 5.

ED : DG = [ξ] AB : AC = [o] ED : DF ; erit DG
ρ. 8. 1. = DF. Quare [ρ] ang. F = G = C, & ang. FDE = EDG = A, & ang. FED = DEG = B. Q. E. D.

* *Schol.* Talia ergo triangula similia sunt. (3. sch. 4. 6.)

## PROP. VI. THEOR.

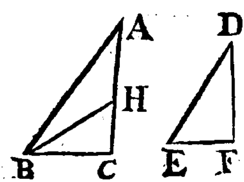


*Si duo triangula* ABC, DEF *vnum angulum* A *vni angulo* FDE *aequalem habeant; circa aequales autem angulos latera proportionalia* (BA : AC = ED : DF): *aequiangula erunt triangula, & aequales habebunt angulos, quibus homologa latera* BA, ED, & AC, DF *subtenduntur* (B = DEF, & C = DFE).

Ad rectam DF fiant ang. HDF = A vel
σ. 32. 1. FDE, & ang. DFH = C. Erit ergo [σ] ang. H
τ. 4. 6. = B, & HD : DF = [τ] BA : AC = [υ] ED : DF.
υ. hyp. Quare [φ] HD = ED, ideoque [χ] ang. DEF =
φ. 9. 5. H = B, & ang. DFE = DFH = C. Q.
χ. 4. 1. E. D.

* *Schol.* Talia ergo triangula similia sunt.

## PROP. VII. THEOR.



*Si duo triangula* ABC, DEF *vnum angulum* A *vni* D *aequalem habeant; circa alios autem angulos* ABC & E *latera proportionalia*

*tionalia* (AB : BC = DE : EF); *reliquorum vero* C, F *vtrumque simul vel minorem vel non minorem recto: aequiangula erunt triangula, & aequales habebunt angulos* ABC & E, *circa quos latera sunt proportionalia.*

1. Si enim non est ABC = E : sit alteruter ABC maior, & ponatur [ψ] ang. ABH = E. Sint ψ. 23. 1.
C, F acuti. Iam quia & A = D: erit in ae- ω. 32. 1.
quiangulis [ω] triangulis ABH, DEF, AB: BH α. 4. 6.
= [α] DE: EF. Sed [β] AB : BC = DE : EF. Er- β. hyp.
go [γ] BH = BC, ideoque [δ] ang. BHC = C < [β] γ. 9. 5.
Recto. Quare [ε] ang. BHA > recto, & proin- δ. 5. 1.
de ang. F > recto; contra hypothesin. ε. 13. 1.

2. Pone autem vtrumque C, F non esse recto minorem, & tamen ABC > E. Quia ang. BHC = C: ang. BHC + C non essent duobus rectis minores. Q. E. A [ζ]. Ergo in vtroque casu ang. ABC = E; & hinc ang. C = F. Q. E. D. ζ. 17. 1.

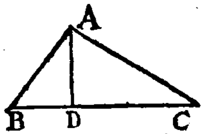
### * *Scholium.*

1. Talia ergo triangula etiam similia sunt. (3. sch. 4. 6).

2. Eodem prorsus modo ex 26. 1. in locum 4. 6. substituta demonstrari potest hoc theorema: *Si duo triangula vnum angulum vni aequalem habeant, circa alios autem angulos latera aequalia, reliquorum vero angulorum vtrumque simul aut minorem aut non minorem recto: aequalia erunt triangula, & aequales habebunt angulos, circa quos sunt aequalia latera, & tertium latus tertio aequale habebunt.*

PROP.

## PROP. VIII. THEOR.




*Si in triangulo rectangulo* ABC *ab angulo recto* A *ad basin* BC *perpendicularis* AD *ducatur: quae ad perpendicularem sunt triangula* ADB, CDA *& toti* ABC *& inter se sunt similia.*

ν. 10. ax. Nam ang. BDA =ν CDA = BAC, & ang.
ξ. 32. 1. BAD =ξ C, ob communem B, item ang. CAD = B, ob communem C. Ergo △a. ADB,
ι. 3. sch. 4. 6. CDA, & ABC sunt aequiangula, & proinde ι similia. Q. E. D.

### Coroll.

Ex hoc manifestum est, *in triangulo rectangulo perpendicularem, ab angulo recto ad basin ductam, mediam proportionalem esse inter segmenta basis* (÷ BD, DA, DC); & praeterea, *inter basin & basis segmentum vtrumlibet, latus segmento conterminum medium esse proportionale* (÷ BC, CA, CD, & ÷ CB, BA, BD).

## PROP. IX. PROBL.


*A data recta linea* AB *imperatam partem* (e. gr. tertiam) *abscindere.*

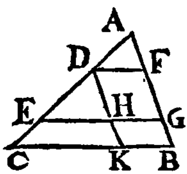
Ducatur ex A sub quouis angulo recta AC, & in ea sumatur punctum D vtcunque, & ipsi AD aequales fiant DE, EC. Iunctae BC parallela fiat DF.

κ. 2. 6. Erit ergo κ BF : FA = CD : DA. Sed DC
λ. 8. def. 5. = 2 DA, ergo BF =λ 2 AF, & AB = 3 AF, id est AF = $\frac{1}{3}$ AB. Q. E. F.

* Schol.

* *Schol.* Sumitur in hac demonstratione, si quatuor magnitudinum proportionalium (CD : DA = BF : FA) prima secundae sit multiplex, tertiam quartae aeque multiplicem esse. Cuius veritas, si cui ex 3. & 8 def. 5. non pateret, sic ostendi posset. Sumatur aliqua G, quae sit aeque multiplex ipsius FA ac CD ipsius DA: erit (15. 5.) G : CD = FA : DA, & alterne G : FA = CD : DA = BF : FA. Ergo BF = G & ideo BF tam multiplex ipsius FA, quam CD ipsius DA.

## PROP. X. PROBL.




*Datam rectam lineam insectam* AB *similiter secare, vt data recta* AC *secta est* (in D, E).

Pone datas AB, AC ita vt quemuis angulum A comprehendant; iunge BC, & huic duc parallelas EG, DF.

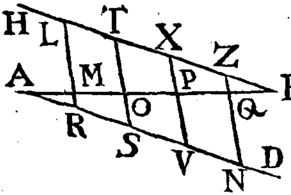
Iam, si praeterea ipsi AB ducta fuerit parallela DHK, erit [μ] DH = FG & HK = GB. Porro in △ KDC est [ν] CE : ED = KH : HD = [ξ] BG : GF. Et in △ GAE est ED : DA = [ν] GF : FA. Ergo segmenta rectae AB se habent vt segmenta rectae AC. Q. E. F. μ. 34. 1. ν. 2. 6. ξ. 7. 5.

* *Corollar.*

Ergo *si ad vnum trianguli latus plures parallelae ductae fuerint: erunt omnia laterum reliquorum segmenta proportionalia.*

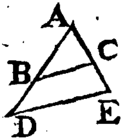
* *Scho-*

* *Scholium.*




Hinc discimus *rectam datam* AB *in quotuis aequales partes* (puta 5) *secare*, id quod facilius praestatur sic: Duc infinitam AD, eique parallelam BH etiam infinitam. Ex his cape partes aequales AR, RS, SV, VN, & BZ, ZX, XT, TL, in singulis vna pauciores, quam desiderantur in AB. Tum rectae ducantur LR, TS, XV, ZN, hae quinquisecabunt
o. 33. 1. datam AB. Nam RL, ST, VX, NZ ° parallelae sunt, ergo quum AR, RS, SV, VN aequales sint,
π. cor. huj. & sch. 14. 5. erunt π AM, MO, OP, PQ aequales. Similiter quia BZ = ZX, erit BQ = QP. Ergo AB quinquisecta est.

## PROP. XI. PROBL.




*Duabus datis rectis lineis* AB, AC *tertiam proportionalem inuenire.*

Datas rectas sub quouis angulo A positas produc, & in AB producta cape BD = AC, iunge BC, cui parallelam age DE.
g. 2. 6. Sic erit AB: BD id est AB : AC = ᵍ AC: CE. Q. E. F.

## PROP. XII. PROBL.

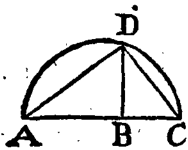

*Tribus datis rectis lineis* A, B, C, *quartam proportionalem inuenire.*

Sub angulo quouis D ducantur rectae infinitae DE, DF, in quibus capia-

capiatur DG = A, GE = B, DH = C; iunctae GH parallela ducatur EF.

His enim factis erit[σ] DG : GE = DH : HF, id est A : B = C : HF. Q. E. F. σ. 2. 6.

## PROP. XIII. PROBL.



*Duabus datis rectis lineis* AB, BC, *mediam proportionalem inuenire.*

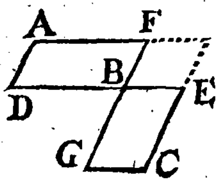
Ponantur in directum, & super AC describatur semicirculus ADC, ducaturque a puncto B ipsi AC ad rectos angulos BD.

Ductis enim AD, DC, erit, ob ang. ADC[τ] rectum, ∻ AB; BD, BC[υ]. Q. E. F. τ. 31. 3. υ. cor. 8. 6.

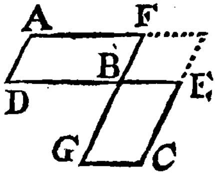
* *Scholium.*

Et (per 1. sch. 31. 3.) *si recta* BD, *rectae* AC *ad rectos insistens, sit media proportionalis inter huius segmenta* AB, BC: *semicirculus super hac* AC *descriptus, per extremum illius* D *transibit.* Nam quia (per 6. 6) ang. A = BDC, & C = ADB: erit ADC rectus (per cor. 31. 3).

## PROP. XIV. THEOR.



*Parallelogrammorum* AB, BC, *aequalium, & vnum angulum* B *vni* B *aequalem habentium, reciproce proportionalia sunt latera, quae circum aequales angulos* (DB : BE = GB : BF). *Et quorum parallelogrammorum* AB, BC, *vnum angulum* B *vni* B *aequalem habentium, reciproce proportionalia sunt latera, quae circum aequales angulos* B, *illa inter se sunt aequalia.* Positis

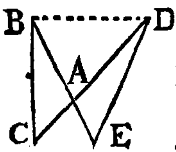



φ. 3. sch. 15. 1. Positis in directum DB & BE: erunt & FB, BG $^{\varphi}$ in directum. Compleatur Pgr. FE.

χ. 7. 5. 1. Iam quia Pgr. AB = BC: erit AB: FE =$^{\chi}$ BC:
ψ. 1. 6. FE. Sed AB: FE =$^{\psi}$ DB: BE, & BC: FE =
ω. 11. 5. GB: BF. Ergo DB: BE =$^{\omega}$ GB: BF. Q. E. D.

2. Quia per hyp. DB: BE = GB: BF; & DB: BE =$^{\psi}$ Pgr. AB: FE; & GB: BF = BC: FE: erit Pgr. AB: FE =$^{\omega}$ BC: FE; quare
α. 9. 5. Pgr. AB =$^{\alpha}$ BC. Q. E. D.

## PROP. XV. THEOR.




*Triangulorum aequalium*, ABC, ADE, *& vnum angulum* BAC *vni* DAE *aequalem habentium, reciproce proportionalia sunt latera, quae circum aequales angulos* (CA: AD = EA: AB). *Et quorum triangulorum* ABC, ADE, *vnum angulum* BAC *vni* DAE *aequalem habentium, reciproce proportionalia sunt latera, quae circum aequales angulos, illa sunt inter se aequalia.*

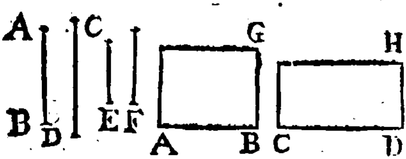
Ponantur in directum latera CA, AD, quo
β. 3. sch. 15. 1. facto & BA, AE in directum $^{\beta}$ erunt. Iungatur quoque BD.

γ. 7. 5. 1. Iam quia △. ABC = ADE per hyp. erit$^{\gamma}$ △. ABC: △ ABD = △ ADE: △ ABD. At-
δ. 1. 6. qui △ ABC: △ ABD =$^{\delta}$ CA: AD, & △. ADE:

ADE: △ ABD = EA: AB. Ergo CA: AD =[ε] EA: AB. Q. E. D. ε. 11. 5.

2. Quum per hyp. CA: AD = EA: AB, & CA: AD =[δ] △ ABC: △ ABD, & EA: AB =[δ] △ ADE: △ ABD: erit △ ABC: ABD =[ε] ADE: ABD. Ergo △ ABC[ζ] = △ ADE. Q. E. D. ζ. 9. 5.

## PROP. XVI. THEOR.



*Si quatuor rectae lineae proportionales fuerint* AB: CD = E: F: *rectangulum* AB × F, *sub extremis comprehensum, aequale est rectangulo* CD × E, *quod sub mediis comprehenditur. Et si rectangulum* AB × F, *sub extremis comprehensum, aequale fuerit ei* CD × E, *quod sub mediis comprehenditur: quatuor rectae lineae* AB, CD, E, F *proportionales erunt.*

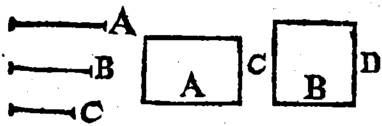
Fiat enim [ζ] super AB rectangulum cuius alterum latus BG = F, item super CD fiat Rgl. CH, cuius alterum latus DH = E. ζ. sch. 46. 1.

1. Quia ponitur AB: CD = E: F =[η] DH: BG: erit [θ] AG = CH, id est AB × F = CD × E. Q. E. D. η. 7. 5. θ. 14. 6.

2. Quia Pgra. AG, CH, angulos rectos B, D aequales habentia, aequalia ponuntur: erit AB: CD [θ] = DH: BG = E: F. Q. E. D.

* *Schol.* Hinc *ad datam rectam* AB facile est *datum rectangulum* CH *applicare*, faciendo [ι] AB: CD = DH: BG. ι. 12. 6.

## PROP. XVII. THEOR.

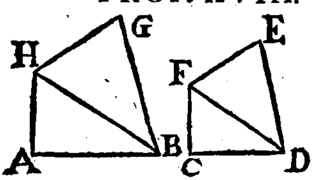



*Si tres rectae lineae* A, B, C, *proportionales fuerint: rectangulum sub extremis* A, C *comprehensum aequale est ei quod a media* B *fit quadrato. Et si rectangulum sub extremis* A, C *comprehensum aequale fuerit ei quod a media* B *fit quadrato: tres rectae lineae* A, B, C, *proportionales erunt.*

1. Sit D = B. Iam quia (hyp.) A : B =
κ. 16. 6. B : C : erit A : B = D : C. Ergo A $\times$ C =κ
λ. 29. def. 1. B $\times$ D =λ Bq. Q. E. D.

2. Quia ponitur A $\times$ C = Bq = B $\times$ D : eritκ A : B = D : C = B : C. Q. E. D.

## PROP. XVIII. PROBL.




*A data recta linea* AB *dato rectilineo* CE *simile & similiter positum rectilineum describere.*

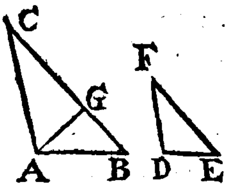
μ. 23. 1. Iunge DF, & facμ ang. A = C, & ang. ABH = CDF, ang. vero BHG = DFE, & ang. HBG = FDE. Rectilineum AHGB erit $\sim$ ipsi CDEF.

ν. constr. & 32. 1. Nam △. HBA aequiangulumν est △ FDC: & ergoξ HB : FD = HA : FC = AB : CD.
ξ. 1. sch. 4. 6. Eadem ratione in △is HGB, FED est HB : FD
ο. 11. 5. = BG : DE = GH : EF. Ergoο HA : FC

= AB

= AB : CD = BG : DE = GH : EF. Praeterea per constr. est ang. A = C, & B = ABH + HBG = CDF + FDE = D, & G = E, & H = GHB + BHA = EFD + DFC = F. Ergo rectilineum AHGB dato CE simile[π] est π. 1. def. 6.
& similiter super data AB positum. Q. E. F.

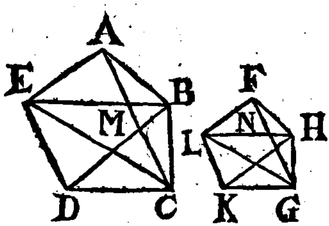
## PROP. XIX. THEOR.



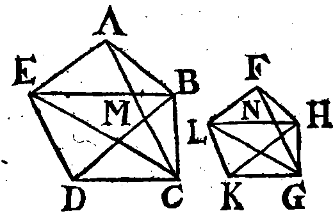

*Similia triangula* ABC, DEF *sunt inter se in duplicata ratione laterum homologorum*, BC, EF.

Fiat enim[ρ] ÷÷ BC, EF, ρ. 11. 6.
BG, iungatur GA. Quia
igitur (hyp.) est AB : BC = DE : EF, & alter- σ. 16. 5.
ne[σ] AB : DE = BC : EF =[τ] EF : BG, ang. au- τ. constr.
tem B = E (hyp.): erit △ ABG =[υ] △ DEF. υ. 15. 6.
Quare △ ABC : △ DEF =[φ] △ ABC : △ ABG φ. 7. 5. χ. 1. 6.
=[χ] BC : BG =[ψ] $(BC : EF)^2$. Q. E. D. ψ. 10. def. 5.

## PROP. XX. THEOR.




*Similia polygona* ABCDE, FLKGH *in similia triangula diuiduntur, & numero aequalia, & homologa totis. Et polygonum* ABCDE *ad polygonum* FLKGH *duplicatam rationem habet eius, quam latus homologum* AB *habet ad latus homologum* FH.




1. Iungantur EB, EC, LH,
α. 1. def. 6. LG. Quia[α] ang. EAB = LFH, & BA : AE =
β. 6. 6. HF : FL : erit[β] △. EAB ∾ △ LFH, & ang. ABE = FHL, & EB : BA = LH : HF. Sed est etiam[α] ang. ABC = FHG, &
γ. 3. ax. AB : BC = FH : HG. Ergo ang. EBC =[γ]
δ. 22. 5. LHG, & ex aequo[δ] EB : BC = LH : HG. Quare[β] △ BEC ∾ △ HLG, & ang. ECB = LGH, & EC : CB = LG : GH. Hinc similiter demonstratur △ CED ∾ △ GLK. Q. E. D.

2. Dico fore △ ABE : △ FHL = △ BEC : △ HLG = △ CED : △ GLK = Pol. ABCDE : Pol. FHGKL. Iungantur enim AC, FG, DB, KH. Iam quia propter similitudinem polygonorum ang. ABC = FHG, & AB : BC = FH : HG : erit[β] ang. BAM = HFN, & BCM
ε. dem. = HGN. Sed[ε] ang. ABM = FHN, & MBC
ζ. 32. 1. = NHG, ergo[ζ] aequiangula sunt △a ABM,
η. 4. 6. FHN, item △ MBC, NHG. Quare[η] AM : MB = FN : NH, & MB : MC = NH : NG,
θ. 1. 6. &[δ] ex aequo AM : MC = FN : NG. Atqui[θ] △ ABM : △ MBC = AM : MC = △ AME : △
ι. 12. 5. EMC, & hinc △ ABE : △ BEC =[ι] △ ABM : △ MBC = AM : MC. Similiter ostenditur △
κ. 11. 5. FHL : △ HLG = FN : NG. Ergo[κ] △ ABE : △ BEC = △ FHL : △ HLG, & alternando △ ABE : △ FHL = △ BEC : △ HLG. Similiter ostendemus ope rectarum DB, KH esse △ BEC :

△ HLG

$\triangle$ HLG = $\triangle$ CED: $\triangle$ GLK. Quare erit $\triangle$. ABE: $\triangle$ FHL = $\triangle$ BEC: $\triangle$ HLG = $\triangle$. CED: $\triangle$ GLK = [ι] Pol. ABCDE: Pol. FHGKL. Q. E. D.

*Aliter & expeditius* idem sic demonstratur. Quia $\triangle$ ABE $\sim$ [ε] $\triangle$ FHL, est $\triangle$ ABE: $\triangle$ FHL = [λ] $(BE: HL)^2$. Sed $\triangle$ EBC, LHG ob similitudinem sunt in eadem ratione $(BE: HL)^2$. Ergo $\triangle$ ABE: $\triangle$ FHL = $\triangle$ EBC: $\triangle$ LHG. Similiter $\triangle$ EBC: $\triangle$ LHG = $(CE: GL)^2$ = $\triangle$ CED: $\triangle$ GLK. Ergo $\triangle$ ABE: $\triangle$ FHL = $\triangle$ EBC: $\triangle$ LHG = $\triangle$ CED: $\triangle$ GLK = [ι] Pol. ABCDE: Pol. FHGKL. Q. E. D. λ. 19. 6.

3. Dico ABCDE: FHGKL = $(AB: FH)^2$. Nam quia [ε] $\triangle$ ABE: $\triangle$ FHL = [λ] $(AB: FH)^2$: erit Pol. ABCDE: Pol. FHGKL = [κ] $(AB: FH)^2$. Q. E. D.

### *Corollaria.*

1. Quum de similibus quadrilateris eodem modo demonstretur, ea esse in ratione duplicata laterum homologorum, & idem de triangulis [μ] ostensum sit; patet vniuerse, *similes rectilineas figuras inter se esse in ratione duplicata homologorum laterum.* μ. 19. 6.

2. Et quia, si homologis lateribus AB, FH tertia proportionalis T sumitur, est AB ad T in ratione duplicata [ν] homologorum laterum: manifestum est, *si tres rectae lineae proportionales fuerint, vt prima ad tertiam, ita esse figuram rectilineam, quae fit a prima, ad similem & similiter descriptam a secunda.* ν. 10. def. 5.

### * *Schol.*

Hinc elicitur methodus *figuram quamuis rectilineam augendi vel minuendi in ratione data.* Vt

 si velis

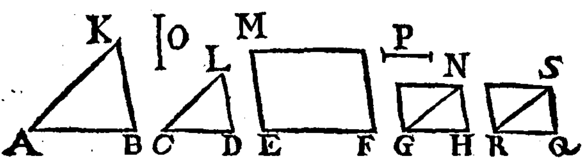
si velis Pentagoni, cuius latus CD, aliud facere
ξ. 13. 6. quintuplum: inter CD & 5 CD quaere ξ mediam
ο. 18. 6. proportionalem, super quam ο construe pentagonum simile dato. Hoc erit quintuplum dati.

## PROP. XXI. THEOR.


*Quae* A, B, *eidem rectilineo* C *sunt similia, & inter se sunt similia.*

Nam quia vtrumque A, B eidem C simile
π. 1. def. 6. est: vtrumque π aequiangulum erit ipsi C, & circum aequales angulos latera habebit pro-
ρ. 1. ax. portionalia. Quare & A ipsi B aequiangulum ρ est, & in vtroque latera circum aequales an-
σ. 11. 5. gulos proportionalia σ sunt; ac ergo A ∾ σ B. Q. E. D.

## PROP. XXII. THEOR.




*Si quatuor rectae lineae proportionales fuerint* (AB : CD = EF : GH) : *& rectilinea*, AKB, CLD, FM, GN, *quae ab ipsis fiunt, similia & similiter descripta, proportionalia erunt. Et si rectilinea* AKB, CLD, FM, GN, *quae ab ipsis* AB, CD, EF, GH *fiunt, similia & similiter descripta, proportionalia fuerint: & ipsae rectae lineae* AB, CD, EF, GH *proportionales erunt.*

1. Su-

1. Sumatur enim[τ] ipsis AB, CD tertia proportionalis O, & ipsis EF, GH tertia proportionalis P. Et quia est[υ] AB : CD = EF : GH, & ergo CD : O = [φ] GH : P: erit ex aequo[χ] AB : O = EF : P. Atqui AB : O = [ψ] AKB : CLD, & EF : P = [ψ] FM : GN. Ergo [φ] est AKB : CLD = FM : GN. Q. E. D.

τ. 11. 6.
υ. hyp.
φ. 11. 5.
χ. 22. 5.
ψ. 2. cor. 20. 6.

2. Sit AKB : CLD = FM : GN, & fiat[ω] AB : CD = EF : QR, a qua[α] ipsi FM vel GN simile & similiter positum RS describatur. Ergo erit (per part. 1. hui.) AKB : CLD = FM : RS. Hinc FM : GN = [φ] FM : RS. Est ergo[β] RS = GN, & hinc (per Lemma sequens) QR = GH, ideoque AB : CD = [γ] EF : GH. Q. E. D.

ω. 12. 6.
α. 18. 6.
β. 9. 5.
γ. 7. 5.

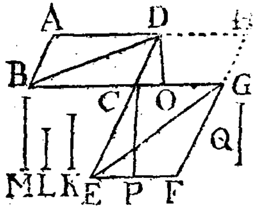
## LEMMA.

*Si rectilinea* GN, RS *similia & aequalia sunt: homologa ipsorum latera* GH, QR *inter se sunt aequalia.*

Si enim negas: alterutrum veluti QR > GH erit. Et quia est per hyp. QR : QS = GH : HN: erit QS > [δ] HN. Quare Δ RSQ ipsi GNH impositum non congruet, sed maius erit. Est autem[ε] Rectil. SR : Rectil. GN = Δ RSQ : Δ GNH. Ergo [δ] esset Rectil. SR > Rectilineo GN: contra hypothesin. Ergo GH = QR. Q. E. D.

δ. 14. 5.
ε. 20. 6.

## PROP. XXIII. THEOR.




*Aequiangula Parallelogramma* AC, CF *inter se rationem habent ex lateribus compositam* AC : CF = (BC : CG) + (DC : CE).

Positis BC, CG, quae sunt circa aequales
ε. sch. 15. 1. angulos C, in directum, erit & [ε] DCE vna recta. Compleatur Pgr. DHGC, & sumta aliqua recta
ζ. 12. 6. K, fiat [ζ] BC : CG = K : L, & DC : CE = L : M.
η. 5. def. 6. Erit ergo K : M = [η] (K : L) + (L : M) = (BC : CG) + (DC : CE). Iam quum sit K : L
θ. 1. 6. = BC : CG = [θ] AC : CH, & L : M = DC : CE = [θ] CH : CF : erit ex aequo K : M = AC : CF.
ι. 11. 5. Quare [ι] AC : CF = (BC : CG) + (DC : CE). Q. E. D.

### * *Scholia.*

1. Hinc & ex 34. 1. patet primo, *triangula* BDC CEG, *quae vnum angulum* (ad C) *aequalem habent, esse in ratione composita laterum* (BC : CG) + (DC : CE) *aequalem angulum continentium.*

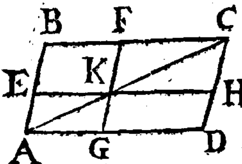
2. Patet *rectangula* AD $\times$ DO, GC $\times$ CP, ac
κ. 35. 1. proinde [κ] *Pgra quaecunque* AC, CF, *&* *triangula* [λ]
λ. 34. 1. BCD, CEG, *rationem inter se habere compositam ex rationibus basium & altitudinum*, sc. (AD : CG) + (DO : CP).

3. Patet, *quomodo triangulorum ac parallelogrammorum ratio exhiberi possit.* Sunto Pgra. AC, CF, quorum bases AD, CG, altitudines vero DO, CP. Fiat CP : DO = AD : Q: erit AC : CF = (AD $\times$
μ. 16. 6. DO : GC $\times$ CP = [μ] Q $\times$ CP : GC $\times$ CP) = [θ] Q : GC.

4. Patet

4. Patet via *dimetiendi propositum parallelogrammum* CF, *vel triangulum.* Sumatur pro vnitate quoduis quadratum, cuius latus sit K; quaeratur ratio basis CG, & ratio altitudinis CP ad latus K, e. gr. sit CG = 2 K, & CP = 3 K; multiplicentur hi numeri per se inuicem: dico fore CF = 6 Kq. Nam CF: Kq = (CG: K) + (CP: K) = (2: 1) + (3: 1) = [v] 6: 1. Ergo CF = 6 Kq. v. 5. def. 6.
Hinc Δ CEG erit 3 Kq.

## PROP. XXIV. THEOR.




*Omnis parallelogrammi* ABCD *quae circa diametrum* AC *sunt parallelogramma* EG, HF *sunt similia toti & inter se.*

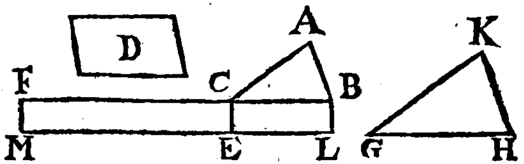
Nam, quia EH ad CB parallela, est [ξ] BE: EA = CK: KA. Et quia GF, CD parallelae sunt, est [ξ] CK: KA = DG: GA. Ergo [o] BE: EA = DG: GA, & componendo [π] BA: AE = DA: AG, & alterne [ρ] BA: AD = EA: AG, id est latera circum angulum communem BAD proportionalia sunt. Porro quia triangula GAK, KAE triangulis CAD, CAB aequiangula [σ] sunt: erit & totum Pgr. EG toti ABCD aequiangulum, & [τ] circum aequales angulos D, G, erit AD: DC = AG: GK; circum aequales autem B, E, AB: BC = AE: EK; denique ob eandem rationem DC: CA = GK: KA, & CA: CB = KA: EK, ideoque ex aequo DC: CB = KG: EK circum aequales angulos BCD, EKG. Ergo Pgra. ABCD, EG similia [υ] sunt. Idem eodem modo de Pgris. ABCD & FH ostenditur. Ergo etiam ipsa GE, HF similia [φ] sunt. Q. E. D.

ξ. 2. 6.
o. 11. 5.
π. 18. 5.
ρ. 16. 5.
σ. 29. 1.
τ. 4. 6.
υ. 1. def. 6.
φ. 21. 6.

* *Coroll.* Hinc pgra, quae vnum angulum vni angulo aequalem & circum eos proportionalia latera habent, similia sunt.

## PROP. XXV. PROBL.

*Dato rectili eo* ABC *simile & alteri dato* D *aequale idem constituere.*



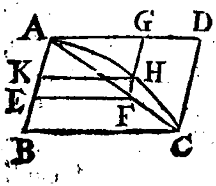

κ. 44. vel 45. 1. Applicetur κ ad rectam BC rectilineo ABC aequale Pgr. BE, ad rectam vero CE dato D aequale Pgr. CM, in angulo FCE = CBL. Sumatur inter BC, CF media ψ proportionalis GH, a qua describatur ω rectilineum KHG ipsi ABC simile & similiter positum. Dico etiam esse KHG = D.

ψ. 13. 6.
ω. 18. 6.

α. constr.
β. 29. 1.
γ. 14. 1.
δ. 1. 6.
ε. 2. cor. 20. 6.
ζ. 11. 5.
η. 9. 5.

Nam quia ang. FCE + ECB = α BCE + ECB = β 2. rectis: erunt BC, CF in γ directum, itemque LE, EM. Quare δ BC : CF = BE : CM = α ACB : D. Iam quum sit α ÷ BC, GH, CF : est BC : CF = ε ABC : KHG. Ergo ABC : KGH = ζ ABC : D, & hinc η KGH = D. Q. E. F.

## PROP. XXVI. THEOR.

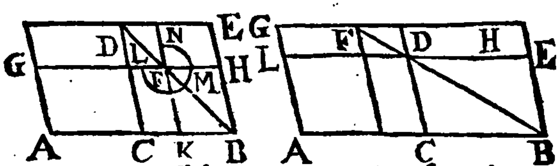



*Si a parallelogrammo* AB CD *parallelogrammum* AE FG *auferatur simile toti, & similiter positum, communem cum ipso angulum* DAB *habens:*

*bens: circa eandem diametrum* AC *est cum toto.*

Si negas: sit AHC diameter Pgri ABCD secans GF extra F, vt in H, & ducatur ipsi AD vel BC parallela HK. Erit[θ] ergo Pgr. GK simile toti ABCD, & hinc DA : AB =[ι] GA : AK. Sed quia ponitur Pgr. GE ∾ ABCD: est quoque DA : AB = GA : AE. Ergo GA : AK =[κ] GA : AE, hinc AK =[λ] AE. Q. F. N. θ. 24. 6. ι. 1. def. 6. κ. 11. 5. λ. 9. 5.

## PROP. XXVII. THEOR.

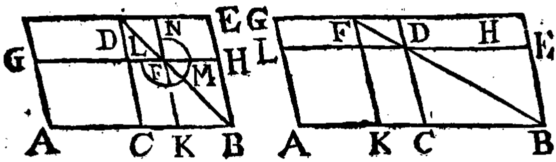



*Omnium parallelogrammorum* AF *secundum eandem rectam lineam* AB *applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis* KH, *similibus & similiter positis ei* CE, *quae a dimidia* CB *describitur, maximum est* AD, *quod ad dimidiam* AC *est applicatum, simile existens defectui* KH.

Ducatur ipsius KH diameter FB, & ipsius CE diameter DB, & describatur figura. Et quia KH ∾ CE, diametri illorum[μ] FB, BD coincident. Iam μ. 26. 6.

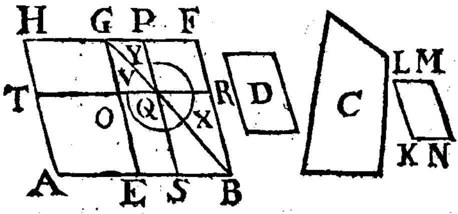
*Cas.* 1. Sit AK > AC. Quoniam[ν] CF = FE: erit, addito KH communi, CH = KE. Ergo CG =[ξ] CH = KE, &, addito CF communi, AF = gnom. LMN. Atqui AD =[ξ] CE > gnomone LMN. Ergo AD > AF. Q. E. D. ν. 43. 1. ξ. 36. 1.

*Cas.*




ν. 43. 1. *Cas.* 2. Sit AK < AC. Quia CB = AC:
ξ. 36. 1. erit ED =[ν] DL, & hinc DH =[ξ] DG > FL.
ο. 34. 1. Ergo DK =[ο] DH > FL: & communi LK addito, AD > AF. Q. E. D.

## PROP. XXVIII. PROBL.




*Ad datam rectam lineam* AB *dato rectilineo* C *aequale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, quae similis sit alteri datae* D: *oportet autem datum rectilineum* C, *cui aequale applicandum est, non maius esse eo, quod ad dimidiam* AB *applicatur, similibus exsistentibus defectu eius, quod ad dimidiam* AB *applicatur, & parallelogrammo* D, *cui oportet simile deficere.*

π. 10. 1. Biseca[π] AB in E, & ab ipsa EB fac[ρ] Pgr. EF
ρ. 18. 6. ipsi D simile & similiter positum, & comple Pgr. AG. Iam si AG = C: factum est quod proponebatur.

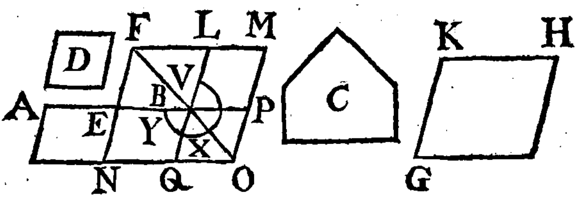
Si

Si vero non sit AG = C; quum[σ] non possit esse AG < C: erit AG > C. Igitur fac[τ] Pgr. KLMN = AG — C & simile similiterque positum ipsi D vel[υ] FE, ita vt ML, FG sint homologa latera, item LK & GE. Deinde pone GO = LK, & GP = LM, comple Pgr. GOQP, produc PQ in S, & OQ in T & R. Dico esse pgr. TS = C, & deficere pgro. SR ∾ D.

Nam quia pgr. EF ∾ KM, & FG homologum ipsi ML, GE vero ipsi LK: erit[φ] ang. FGE = MLK. Est autem praeterea PG = ML, & GO = LK: ergo pgr. OP =[χ] & ∾ KM, & ∾[υ] EF. Quia praeterea OP = KM < AG vel[ψ] EF: erit[ω] OP circa eandem diametrum GQB cum toto EF. Quare FQ =[α] EQ, & communi SR addito, FS = ER =[ψ] TE, & communi OS addito, gnomon VXY = TS. Est autem gnom. VXY + OP = EF = AG = KM + C; & OP = KM: ergo gnom. VXY = C. Quare TS = C. Deficit autem TS pgro. SR ∾[β] EF ∾[γ] D. Q. E. D.

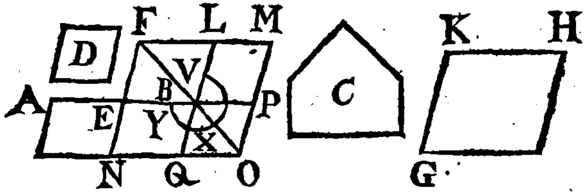
σ. hyp.
τ. sch. 45. 1. & 25. 6.
υ. 21. 6.
φ. 1. def. 6.
χ. 4. & 34. 1. & cor. 24. 6.
ψ. 36. 1.
ω. 26. 6.
α. 43. 1.
β. 24. 6.
γ. constr.

## PROP. XXIX. PROBL.




*Ad datam rectam lineam* AB *dato rectilineo* C *aequale parallelogrammum applicare, excedens figura*

*figura parallelogramma, quae similis sit alteri datae* D.



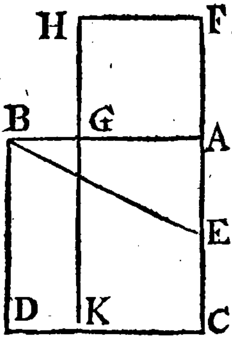

δ. 10. 1. Biseca AB δ in E, & ab EB describe ε ipsi D
ε. 18. 6. simile & similiter positum pgr. EBLF. Fac
ζ. 25. 6. GH ipsi EL simile & similiter positum ζ & ipsis EL + C aequale, ita quidem vt KH homologa sit ipsi FL, & KG ipsi FE. Postea in productis FL, FE, cape FM = KH & FN = KG, comple pgr. FMON, & produc AB in P, & LB in Q. Dico AO = C, & excedere pgro. QP simili ipsi D.

η. constr. Nam quia η EL ∾ GH, & FL, KH homologa sunt latera, ac FE, KG etiam homologa:
θ. 1. def. 6. ang. EFL = θ K. Sed FM = η KH, & FN
ι. 8. ax. & cor. 24. 6. = KG: ergo NM = & ∾ ι GH. Quare
κ. 21. 6. & EL ∾ κ NM. Et est EL < NM, quia NM,
λ. 26. 1. = GH = η EL + C. Quare λ EL cum toto NM circa eandem diametrum FBO consistit. Ergo NM = EL + gnom. VXY. Erat vero & NM = EL + C: erit igitur C = gnom.
μ. 36. 1. VXY. Porro quia μ AN = EQ = ν LP:
ν. 43. 1. addito communi NP, erit AO = gnom. VXY. Vnde patet esse AO = C. Excedit autem
ξ. 24. 6. AO parallelogrammo QP ∾ ξ EL ∾ η D. Q. E. F.

PROP.

## PROP. XXX. PROBL.

*Datam rectam lineam terminatam* AB *secundum extremam & mediam rationem secare.*




Describe [o] ex AB quadratum BC, & [π] applica ad AC ipsi BC aequale pgr. CH, excedens figura AH ipsi BC simili. Dico AB ita sectam esse in G, vt AG > GB, & AB : AG = AG : GB. o. 46. 1. π. 29. 6.

Nam quia BC = CH: erit DG = AH : quare quum ang. KGB = [ρ] AGH, erit KG : GH = [σ] AG : GB. Quum autem AH, quadrato BC simile, ipsum sit quadratum: erit GH = AG. Et GK = [τ] CA = AB. Est ergo AB : AG = AG : GB, & quum sit AB > AG, est AG > [υ] GB. Q. E. F. ρ. 15. 1. σ. 14. 6. τ. 34. 1. υ. 14. 5.

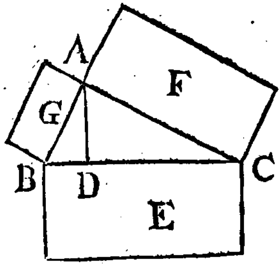
*Aliter.*

Secetur [φ] AB in G ita vt AB × BG = AGq. φ. 11. 2.

Nam quum ergo [χ] sit AB : AG = AG : GB, & AG > GB : erit sic quoque AB secundum extremam & mediam rationem secta [ψ]. Q. E. F. χ. 17. 6. ψ. 3. def. 6.

PROP.

## PROP. XXXI. THEOR.



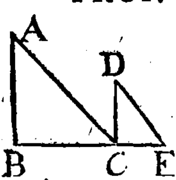

*In rectangulis triangulis* BAC *figura* E, *quae fit a latere* BC, *rectum angulum* A *subtendente, aequalis est eis* F + G, *quae a lateribus rectum angulum comprehendentibus fiunt, similibus & similiter descriptis.*

α. cor. 8. 6. Duc perpendicularem AD: & erit [α] $\div\div$ BC,
β. 2. cor. 20. 6. BA, BD, item $\div\div$ BC, CA, DC. Hinc [β] BC: BD = E: G, & BC: DC = E: F, vel inuerse DC: BC = F: E, & BD: BC = G: E. Er-
γ. 24. 5. go [γ] BD + DC: BC = F + G: E. Sed BD
δ. sch. 14. 5. + DC = BC: ergo [δ] F + G = E. Q.E.D.

*Aliter.*

ε. 1. cor. 20. 6. F: E =[ε] $(CA: BC)^2$ =[ε] CAq: BCq, & G: E = $(AB: BC)^2$ = ABq: BCq. Ergo [γ] F + G: E = CAq + ABq: BCq. Sed CAq
ζ. 47. 1. + ABq =[ζ] BCq. Ergo F + G =[δ] E.

## PROP. XXXI. THEOR.



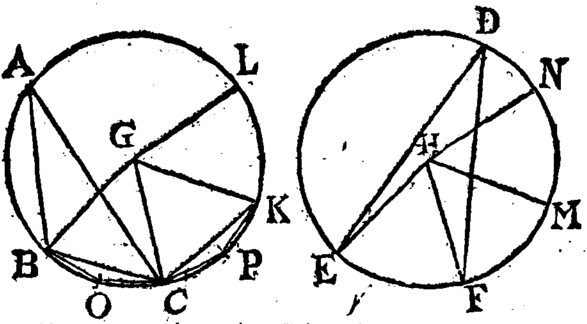

*Si duo triangula* ABC, DCE, *quae duo latera duobus lateribus proportionalia habent* (BA : AC = CD : DE), *componantur secundum vnum angulum ita, vt homologa latera ipsorum* BA & CD, item AC & DE, *sint parallela: reliqua trian-*

*triangulorum latera* BC, CE *in directum sibi invicem erunt.*

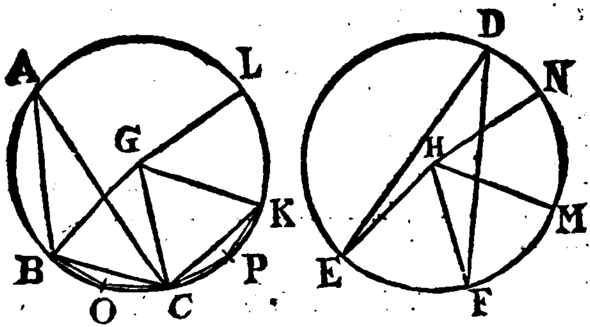
Quia enim [v] ang. BAC = ACD = CDE, [v. 29. 1.]
& BA : AC = CD : DE : erit ang. B =[9] DCE, [9. 6. 6.]
& hinc ang. ACE = B + BAC, ideoque ang.
ACE + ACB = B + BAC + ACB =[ι] 2 [ι. 32. 1.]
rectis. Ergo [κ] BC, CE in directum erunt. Q. [κ. 14. 1.]
E. D.

## PROP. XXXIII. THEOR.

*In circulis aequalibus* ABC, DEF *anguli eandem habent rationem, quam circumferentiae* BC, EF, *quibus insistunt, siue ad centra* G, H, vt BGC, EHF, *siue ad circumferentias*, vt BAC, EDF, *insistant; adhuc etiam & sectores* GBC, HEF, *quippe qui ad centra sunt constituti.*




1. Sint circumferentiae BC deinceps quotcunque aequales CK, KL, & ipsi EF rursus totidem aequales FM, MN. Iungantur GK, GL, HM, HN. Erit ergo ang. BGC =[λ] CGK [λ. 27. 3.]
= KGL. Hinc circumferentia BKL & ang. BGL aeque multiplices erunt circumferentiae




BC & anguli BGC. Eadem ratione circumf.
EMN & ang. EHN aeque erunt multiplices
circumferentiae EF & anguli EHF. Et ſi circ.
BKL >, =, < circ. EMN: erit quoque ang.
BGL >, =, < ang. EHN. Ergo circ. BC:
μ. 5. def. 5. circ. EF = [μ] ang. BGC: ang. EHF = [ν] ang.
ν. 15. 5. & 20. 3. BAC: ang. EDF. Q. E. D.

2. Iungantur BC, CK, & ſumtis in circum-
ferentiis BC, CK, punctis O, P, iungantur &
BO, OC, CP, PK. Et quia ang. BGC = CGK,
ξ. 4. 1. & BG = CG, & CG = GK: eſt △ BGC = [ξ]
△. CGK, & baſis BC = CK. Et quum ſit circ.
BC = circ. CK: erit & reliqua BAKC = re-
λ. 27. 3. liquae CALK, & ergo ang. BOC = [λ] CPK, &
ο. 11. def. 3. ſegmentum BCO ∾ [ο] ſegm. CKP. Quare
quum haec ſegmenta ſint ſuper aequales rectas
π. 24. 3. BC, CK: aequalia [π] erunt. Erant vero & △a.
BGC, CGK aequalia: ergo totus ſector GBC
= GCK. Similiter oſtenditur ſector GKL =
GCK = GBC, & ſector HMN = HFM =
EHF. Quam multiplex ergo circ. BKL cir-
cumferentiae BC, tam multiplex eſt ſector GBL

ſectoris

sectoris GBC; & quam multiplex circ. EMN circ. EF, tam multiplex sector HEN sectoris HEF; & ex modo ostensis, si circumf. BCL >, =, < circ. EMN, est quoque sector GBL >, =, < sectore HEN. Ergo circumf. DC: circ. EF =[μ] sector GBC: sect. HEF. Q.E.D.

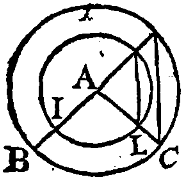
*Corollar.*

Perspicuum etiam est[ε], *vt sector ad sectorem, ita* ε. 11. 5. *esse angulum ad angulum.*

* *Schol.*

1. Hinc *ang.* BGC *ad centrum est ad 4 rectos, vt arcus* BC *ad totam peripheriam.* Nam ang. BGC ad rectum, vt arcus BC ad quadrantem. Ergo BGC ad 4. rectos vt arcus BC ad 4 quadrantes seu totam circumferentiam. (sch. 4. 5.)

Item ang. ad peripheriam A est ad 2 rectos, vt arcus BC ad totam peripheriam.




2. *Inaequalium circulorum arcus* IL, BC, *qui aequales subtendunt angulos, siue ad centra, vt* IAL & BAC, *siue ad peripherias, sunt similes:* Et vice versa, *arcus similes aequales angulos subtendunt.*

Nam IL: periph. = ang. IAL (vel BAC): 4 Rect; item arc. BC: periph. = ang. BAC: 4 Rect: ergo IL: periph. = BC: periph. Proinde arcus IL & BC sunt similes. Vnde

3. *Duae semidiametri* AB, AC *a concentricis peripheriis arcus auferunt similes* IL, BC.

 5. Hisce

4. Hisce innititur vulgaris ratio angulos metiendi per arcus, qui illos subtendunt. Si enim, datis toti circumferentiae omnis circuli aliquot partibus scilicet 360, qui *gradus* vocantur, disquiritur ope instrumenti goniometrici, quot gradus sint in arcu BC, quot sint in arcu EF: patet per prop. 33. rationem angulorum BGC, EHF, quos hi arcus subtendunt, in numeris exhiberi posse. Et si vnus angulus IAL consideratur, & numerus graduum in arcu ad eum pertinente IL vel BC inuentus est: constat ratio anguli IAL ad 4 Rectos, per schol. 1. Sit e. gr. numerus graduum in Arcu IL = 100: erit IAL : 4 Rect. = 100 : 360.

EV-

# EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER VII.

## DEFINITIONES.

1. *Vnitas* eſt, ſecundum quam vnumquodque eorum, quae ſunt, vnum dicitur.

2. *Numerus* autem, ex vnitatibus conſtans multitudo.

3. *Pars* eſt *numerus numeri*, minor maioris, quum minor metitur maiorem.

* Omnis pars ab eo numero nomen ſibi ſumit, per quem ipſa numerum, cuius eſt pars, metitur; vt 4 dicitur pars tertia numeri 12, quia eum metitur per 3. Hinc 3 dicitur eadem pars numeri 6 quae 5 numeri 10, quia 3 & 5 ipſos 6 & 10 per eundem numerum 2 metiuntur, vel in ipſis aeque multoties continentur.

4. *Partes* autem, quando non metitur.

* Partes quaecunque nomen accipiunt a duobus illis numeris, per quos maxima communis duorum numerorum menſura vtrumque eorum metitur; vt 10 dicitur $\frac{2}{3}$ numeri 15, eo quod maxima communis menſura, nempe 5 metitur 10 per 2 & 15 per 3. Eaedem partes eſt numerus 4 numeri 6, quae numerus 10 ipſius 15, ſi numeri 4, 10 aequali multitudine continent duo numeros 2, 5, qui ipſorum 6, 15 eadem pars ſunt.

5. *Multiplex* eſt maior minoris, quando minor maiorem metitur.

6. *Par numerus* eſt, qui bifariam diuiditur (vt 8).

7. *Impar* vero, qui bifariam non diuiditur, vel qui a pari numero vnitate differt (vti 9).

8. *Pariter par* numerus eſt, quem par numerus per parem numerum metitur (vti 16).

9. *Pariter* vero *impar* eſt, quem par numerus per numerum imparem metitur (vt 6).

10. *Impariter* vero *impar* numerus eſt, quem impar numerus per numerum imparem metitur (vt 15).

11. *Primus numerus* eſt, quem vnitas ſola metitur (vt 3).

12. *Primi inter ſe numeri* ſunt, quos ſola vnitas, communis menſura, metitur (vt 5, 7).

13. *Compoſitus numerus* eſt, quem numerus aliquis metitur (9).

14. *Compoſiti inter ſe numeri* ſunt, quos numerus aliquis, communis menſura, metitur (6, 8).

15. *Numerus numerum multiplicare* dicitur, quando, quot vnitates ſunt in ipſo, toties componitur multiplicatus, & aliquis gignitur.

* Numerum A per numerum B multiplicandum eſſe, ſic indicamus, vt literas A, B coniungamus. Hinc AB notat numerum productum ex A per B multiplicato. In numeris productus ſcribitur ſic 2 $\times$ 3.

16. Quando duo numeri ſeſe multiplicantes aliquem fecerint, qui factus eſt *planus* appellatur; *Latera* vero *ipſius*, numeri ſeſe multiplicantes. (10 eſt planus, latera eius ſunt 2 & 5).

17. Quan-

17. Quando autem tres numeri sese multiplicantes aliquem fecerint: factus *solidus* appellatur; *latera* vero *ipsius*, numeri sese multiplicantes. (30 est solidus, latera ipsius sunt 2, 3, 5).

18. *Quadratus numerus* est, qui aequaliter aequalis; vel qui sub duobus aequalibus numeris continetur.

* Sit A latus: quadratus numerus, id est AA, sic scribitur $A^2$. Item 9, id est $3 \times 3$, sic $3^2$.

19. *Cubus* vero, qui aequaliter aequalis aequaliter; vel qui sub tribus aequalibus numeris continetur.

* Sit A latus: cubus numerus scribitur sic $A^3$, id est AAA. Item $3 \times 3 \times 3$, id est 27, est cubus, qui sic designatur $3^3$.

20. *Numeri proportionales* sunt, quando primus secundi, & tertius quarti aeque multiplex est, vel eadem pars, vel eaedem partes. (* e. gr. $12 : 3 = 8 : 2$; $2 : 6 = 5 : 15$; $10 : 15 = 12 : 18$; $8 : 6 = 16 : 12$).

21. *Similes plani* & *solidi numeri* sunt, qui latera habent proportionalia.

* E. gr. $6 \sim 24$; quia $2 : 3 = 4 : 6$. Item solidus $30 \sim$ solido $240$; quia $2 : 3 = 4 : 6$ & $3 : 5 = 6 : 10$.

22. *Perfectus numerus* est, qui suis ipsius partibus est aequalis.

* Sic $6 = 1 + 2 + 3$ est perfectus. Numerus vero, qui suis ipsius partibus minor est *abundans* apellatur, vt 12. Qui vero maior, *diminutus*, vt 15.

* 23. *Numerus numerum metiri* dicitur *per* illum *numerum*, a quo multiplicatus, illum producit.

*In diuisione vnitas est ad quotientem, vt diuidens ad diuisum. Nota, numerum alteri lineola interiecta subscriptum diuisionem denotare. Sic* $\frac{A}{B}$ *est* A *diuisus per* B, *item* $\frac{CA}{B}$ *est* C *in* A *diuisus per* B.

* *Postulata.*

1. Postuletur, cuilibet numero quotlibet sumi posse aequales, vel multiplices.

2. Quolibet numero sumi posse maiorem.

3. Additio, subtractio, multiplicatio, diuisio, extractionesque radicum seu laterum ex numeris quadratis seu cubis concedantur etiam, tanquam possibilia.

* *Axiomata.*

1. Quicquid conuenit vni aequalium numerorum, conuenit & reliquis aequalibus numeris.

2. In omni additione, subtractione, multiplicatione, vel diuisione toti numero singulae suae partes simul sumtae substitui possunt.

3. Qui numeri aequalium numerorum, vel eiusdem, eaedem partes fuerint, aequales inter se sunt.

4. Quorum idem numerus, vel aequales, eaedem partes fuerint, aequales inter se sunt.

5. Maioris pars parte eadem minoris maior est.

6. Vnitas omnem numerum per vnitates, quae in ipso sunt, hoc est per ipsummet numerum, metitur.

7. Omnis numerus se ipsum metitur per vnitatem.

8. Si numerus, numerum multiplicans, aliquem produxerit: multiplicatus metietur eundem per vnitates in multiplicante, vel per ipsum multiplicantem (def. 15. & 23).

*Hinc, nullus numerus primus planus est, vel solidus, vel quadratus, vel cubus.*

9. Si

9. Si numerus, numerum metiens, ab eo, per quem metitur, multiplicetur: illum, quem metitur, producit.

10. Numerus, quotcunque numeros metiens, compositum quoque ex ipsis metitur.

11. Numerus, quemcunque numerum metiens, metitur quoque omnem numerum, quem ille metitur.

12. Numerus metiens totum, & ablatum, metitur & reliquum.

13. Numerus numerum metiens eodem maior esse non potest.

14. Numerus, pariter metiens totum, dimidium quoque metitur.

15. Quae rationes eidem eaedem sunt, & inter se sunt eaedem (def. 20).

16. Si quatuor numeri proportionales sunt, inuerse quoque sunt proportionales.

## PROP. I. THEOR.

B.....F..H.A
D...G..C
E---

*Si duobus numeris inaequalibus* AB, CD *expositis, detracto semper minore de maiore* (CD de BA, & reliquo FA de DC), *reliquus* GC *minime metiatur praecedentem, quoad assumta fuerit vnitas* HA: *numeri a principio positi* AB, CD *primi inter se erunt.*

Si negas: metietur [α] eos aliquis numerus, qui sit E. Quia CD metitur [β] BF: & E ipsum BF [γ] metietur, ergo & [δ] reliquum FA. Sed FA metitur [β] DG: ergo & [γ] E metitur DG, ideoque etiam reliquum [δ] GC. Sed GC metitur [β] FH:

α. 12. def. 7.
β. Hyp.
γ. 11. ax. 7.
δ. 12. ax. 7.

β FH: quare E quoque γ metitur FH. Metiebatur autem E totum FA: ergo metitur & ε. 13. ax. 7. reliquam δ HA vnitatem. Ergo E maior non ζ. 2. def. 7. est ε vnitate. Q. E. A ζ.

## PROP. II. PROBL.

*Duobus numeris datis* AB, CD, *non primis inter se, maximam eorum communem mensuram inuenire.*

A......B
C...D

*Cas. 1.* Si CD metitur AB: quum etiam se ipse metiatur; erit CD ipsorum CD, AB communis mensura, & maxima quidem, quia nullus maior ipso CD eum metitur.

A....E......B
C..F....D
G---

*Cas. 2.* Si CD non metitur AB: detrahe semper minorem de maiore, CD de AB, quoties fieri potest, & reliquum AE de CD similiter, & sic porro, quoad relinquatur aliquis numerus CF metiens praecedentem AE. Dico fore CF numerum, qui maxima est communis mensura ipsorum AB, CD.

Nam primo, semper relinqui aliquem CF, qui metiatur praecedentem, & qui non sit η. 1. 7. vnitas, patet ex eo, quod, si secus esset, η numeri AB, CD primi inter se essent; contra hypothesin. Deinde quia CF metitur AE, θ. 11. ax. 7. AE vero FD: metietur & θ CF ipsum FD. ι. 7. ax. 7. CF autem se ipsum quoque ι metitur: ergo κ. 10. ax. 7. CF metitur κ CD. At CD ipsum BE metitur; ergo θ CF eundem BE, ideoque κ & AB

meti-

metitur. Quare CF est communis mensura. Si maximam esse negas: sit maior quaedam G. Ergo G metiens CD, metitur θ BE, & λ reliquum AE, ipsumque θ DF; proinde & reliquum λ CF, maior minorem. Q. E. A μ. Quare numerus CF est maxima communis mensura datorum. Q. E. F.

λ. 12. ax. 7.
μ. 13. ax. 7.

*Coroll.*

Hinc *numerus, duos numeros metiens, & maximam eorum communem mensuram metitur.*

## PROP. III. PROBL.

*Tribus datis numeris* A, B, C, *non primis inter se, maximam ipsorum communem mensuram inuenire.*

| | |
|---|---|
| A | 8 |
| B | 6 |
| C | 4 |
| D | 2 |

1. Sume duorum A, B maximam communem mensuram D: & si D metitur C, erit communis trium mensura, & maxima quidem. Si qua enim esset maior: metiretur eadem ν numerum D. Q. E. A ξ.

ν. cor. 2. 7.
ξ. 13. ax. 7.

| | |
|---|---|
| A | 18. |
| B | 12. |
| C | 4. |
| D | 6. |
| E | 2. |

2. Si vero D non metitur C: sume ipsorum C, D maximam ο communem mensuram E; quod fieri potest, quia C, D primi inter se esse nequeunt, vtpote quos idem numerus π metietur, qui ipsos A, B, C metiri ponitur. Dico E esse maximam communem mensuram trium A, B, C.

ο. 2. 7.
π. cor. 2. 7.

Nam E metiens D, metitur quoque ρ A, & B; & quia σ metitur C, metitur singulos A, B, C. At nullus maior quam E eosdem metitur. Si

ρ. 11. ax. 7.
σ. constr.

quis

quis enim maior eos metiretur: idem metiretur[τ] etiam D & C, ideoque[τ] etiam E. Q. E. A[τ].

τ. cor. 2. 7.
τ. 13. ax. 7.

*Corollar.*

Hinc, *si numerus numeros tres metiatur: & ipsorum maximam communem mensuram metitur.*

*Schol.*

Eodem modo & pluribus numeris datis, maximam communem mensuram inueniemus.

## PROP. IV. THEOR.

*Omnis numerus* BC *omnis numeri* A, *minor maioris, vel pars est vel partes.*

A.....
B...C

*Cas. 1.* Si A, BC primi sunt inter se. Quia vnaquaeque vnitatum, quas continet BC, est[u] pars numeri A: BC ipsius A partes esse patet. Q. E. D.

u. 3. def. & 6. ax. 7.

A........
B..E..F..C
D..

*Cas. 2.* Si A & BC non sunt primi inter se: aut BC metitur A, & tunc[φ] pars ipsius est; aut non metitur. Quo in casu sume eorum maximam[χ] communem mensuram D, & diuide BC in numeros BE = EF = FC = D. Et quia D est[φ] pars ipsius A: erit[ψ] quoque tam BE, quam EF, quam FC pars ipsius A, & ergo totus BC partes ipsius A erit. Q. E. D.

φ. 3. def. 7.
χ. 2. 7.
ψ. 1. ax. 7.

## PROP. V. THEOR.

A...
B...G...C
D....
E....H....F

*Si numerus* A *numeri* BC *pars fuerit; & alter* D *alterius* EF *eadem pars: & vterque* A + D *vtriusque* BC + EF *eadem pars erit, quae vnus* A *vnius* BC.

Nam

Nam diuisus [α] sit BC in numeros BG, GC ipsi A, EF vero in numeros EH, HF ipsi D aequales: & erit multitudo [α] numerorum BG, GC aequalis multitudini numerorum EH, HF; & ergo aequalis multitudini numerorum BG + EH, GC + HF. Sed BG + EH = [β] A + D = GC + HF; & BG + EH + GC + HF = BC + EF: ergo BC + EF constat ex tot numeris, ipsis BG + EH, vel A + D aequalibus, ex quot ipsi BG, vel A aequalibus constat BC. Hinc ipsos BC + EF & BC numeri A + D & A per eundem numerum [γ] metiuntur. Ergo [δ] A + D numeri BC + EF eadem pars est, quae A ipsius BC. Q. E. D.

[α] 3. post. 7.
[α] 2. def. 7. & hyp.
[β] 2. ax. 1.
[γ] 15. & 23. def. 7.
[δ] 3. def. 7.

## PROP. VI. THEOR.

A...G...B
C.........
D....H....E
F............

*Si numerus* AB *numeri* C *partes fuerit; & alter* DE *alterius* F *eaedem partes: & vterque* AB + DE *vtriusque* C + F *eaedem partes erit, quae vnus* AB *vnius* C.

Diuide AB in ipsius C partes AG, GB; DE vero in ipsius F partes DH, HE. Quia AB tot continet partes ipsius C, [ε] quot DE continet partes ipsius F: est multitudo partium AG, GB = multitudini ipsarum DH, HE. Et quum [ε] eadem pars sit AG ipsius C, quae DH ipsius F: [ζ] vterque AG + DH vtriusque C + F eadem pars est, quae AG ipsius C. Simili ratione GB + HE ipsius C + F eadem pars est, quae GB ipsius C. Quare quum AG + DH

[ε] hyp.
[ζ] 5. 7.

A...G...B
C.........
D....H....E
F...........

DH + GB + HE = AB + DE, & AG + DH = GB + HE, & multitudo ipsorum AG + DH, GB + HE aequalis multitudini ipsorum AG, GB: patet, AB + DE vtriusque C + F easdem esse partes, quas AB ipsius C. Q. E. D.

## PROP. VII. THEOR.

A...E..B
G....C......F....D

*Si numerus* AB *numeri* CD *fuerit pars, quae ablatus* AE *ablati* CF: *& reliquus* EB *reliqui* FD *eadem pars erit, quae totus* AB *totius* CD.

Quae enim pars est AE ipsius CF, eadem sit
η. 5. 7. EB ipsius CG: ergo & η AB ipsius FG eadem pars erit. Sed AB ipsius CD eadem pars θ
θ. hyp. erat, quae AE ipsius CF: ergo AB ipsius FG eadem pars est, quae ipsius CD. Quum er-
ι. 4. ax. 7. go ι FG = CD, & hinc κ CG = FD: patet λ
κ. 3. ax. 1.
λ. 1. ax. 7. & constr. esse EB ipsius FD eandem partem, quae AE ipsius CF, vel quae est AB ipsius CD. Q.E.D.

## PROP. VIII. THEOR.

A......L......E....B
C..................F.......D
G......M..K......N..H

*Si numerus* AB *numeri* CD *fuerit partes, quae ablatus* AE *ablati* CF: *& reliquus* EB *reliqui* FD *eaedem partes erit, quae totus* AB *totius* CD.

Ponatur enim numero AB aequalis GH:
μ. 1. ax. 7. ergo GH numeri CD eaedem partes est μ, quae
ν. 3. post. 7. AE ipsius CF. Diuidatur ν GH in partes GK, KH

KH numeri CD, AE vero in partes AL, LE numeri CF: aequalis ergo erit multitudo partium GK, KH multitudini partium AL, LE. Et quia[ξ] AL ipsius CF eadem pars est, quae GK ipsius CD; & CD > CF: erit[ο] GK > AL. Sume GM = AL. Quae ergo [μ] pars est GK ipsius CD, eadem est GM ipsius CF, & eadem ergo [π] MK ipsius FD. Sume KN = LE: & eodem modo patet, quae pars est KH numeri CD, eandem esse NH ipsius FD. Quare quae partes est GK + KH, id est AB, ipsius CD, eaedem partes est MK + NH, id est[ρ] EB, ipsius FD. Q. E. D.

ξ. constr. & hyp.
ο. 5. ax. 7.
π. 7. 7.
ρ. 3. ax. 1.

## PROP. IX. THEOR.

A....
B....G....C
D.....
E.....H.....F

*Si numerus* A *numeri* BC *pars fuerit, & alter* D *alterius* EF *eadem pars: & permutando, quae pars est vel partes primus* A *tertii* D, *eadem erit pars vel eaedem partes & secundus* BC, *quarti* EF.

Sit A < D, & sit BG = GC = A, & EH = HF = D: multitudo ergo partium BG, GC aequalis erit multitudini partium EH, HF. Et quia BG = GC, & EH = HF: quae pars est BG ipsius EH vel partes, eadem[σ] pars erit & GC ipsius HF vel eaedem partes. Ergo[τ] quae pars vel partes est BG, id est A ipsius EH, id est D, eadem pars vel eaedem partes erit BG + GC, id est BC, ipsius EH + HF, id est EF. Q. E. D.

σ. 1. ax. 7.
τ. 5. & 6. 7.

* *Schol.*

* *Schol.*

Si ergo duo numeri duos numeros aequaliter metiuntur: illi cum his eandem rationem habent.

## PROP. X. THEOR.

A..G..B
C......
D.....H.....E
F...............

*Si numerus* AB *numeri* C *partes fuerit, & alter* DE *alterius* F *eaedem partes: & permutando, quae partes est primus* AB *tertii* DE, *vel pars, eaedem partes erit & secundus* C *quarti* F, *vel eadem pars.*

Diuide AB in partes numeri C, quae sint AG, GB, & DE in partes ipsius F, quae sint DH, HE: erit multitudo partium AG, GB = ν multitudini partium DH, HE. Et quia φ AG ipsius C eadem pars est, quae DH ipsius F: erit χ AG ipsius DH eadem pars vel eaedem partes, quae C ipsius F. Similiter GB ipsius HE erit eadem pars vel eaedem partes, quae C ipsius F. Quare ψ erit AG + GB, id est AB, ipsius DH + HE, id est DE, eadem pars vel partes eaedem, quae AG ipsius DH, hoc est ω, quae C ipsius F. Q. E. D.

ν. hyp.
φ. constr. & hyp.
χ. 9. 7.
ψ. 5. vel 6. 7.
ω. dem.

## PROP. XI. THEOR.

A....E..B
C......F...D

*Si fuerit vt totus* AB *ad totum* CD, *ita ablatus* AE *ad ablatum* CF: *& reliquus* EB *ad reliquum* FD *erit, vt totus* AB *ad totum* CD.

α. 20. def. 7.

Quia enim α quae pars vel partes est AB ipsius CD, eadem pars vel eaedem partes est

AE

AE ipsius CF: etiam EB ipsius FD eadem pars vel eaedem partes erit[β], quae AB ipsius CD. β. 7. vel 8. 7.
Ergo [α] EB : FD = AB: CD. Q. E. D.

* Si AB & AE ipsorum CD, CF aeque sunt multiplices: CD ipsius AB eadem pars est, quae CF ipsius AE. Quare demonstratio etiam ad hunc casum applicari potest, per ax. 16. 7; quod & in sequentibus notandum.

## PROP. XII. THEOR.

A..C....
B...D......

*Si quotcunque numeri proportionales fuerint* (A : B = C: D): *vt vnus antecedentium* A *ad vnum consequentium* B, *ita erunt omnes antecedentes* A + C *ad omnes consequentes* B + D.

Quia enim, [γ] quae pars est A ipsius B vel partes, eadem pars eaedemue partes est C ipsius D: quae pars vel partes est A ipsius B, eadem pars vel eaedem partes [δ] est A + C ipsius B + D; ideoque [γ] est A: B = A + C: B + D. Q. E. D. γ. 20. def. 7. δ. 5. vel 6. 7.

## PROP. XIII. THEOR.

A..C......
B...D.........

*Si quatuor numeri proportionales fuerint* (A: B = C: D): *& permutando proportionales erunt* (A: C = B: D).

Quia enim, [ε] quae pars vel partes est A ipsius B, talis talesue est C ipsius D: & permutando [ζ] quae pars vel partes est A ipsius C, talis vel tales est B ipsius D; & ergo [ε] A : C = B: D. Q. E. D. ε. 20. def. 7. ζ. 9. 7. vel 10. 7.

M * Schol.

* *Schol.* Ergo si quatuor numeri proportionales sunt: etiam conuertendo vel diuidendo proportionales erunt; per hanc & 11. 7.

## PROP. XIV. THEOR.

A........D....
B......   E...
C....   F..

*Si fuerint quotcunque numeri* A, B, C, *& alii ipsis multitudine aequales* D, E, F, *qui bini sumantur & in eadem ratione* (A : B = D : E, & B : C = E : F): *etiam ex aequo in eadem ratione erunt* (A : C = D : F).

η. 13. 7. Nam permutando [η] A : D = B : E = C : F, & iterum permutando A : C = D : F. Q. E. D.

## PROP. XV. THEOR.

A.   D..
B.G.H.C   E..K..L..F

*Si vnitas* A *numerum aliquem* BC *metiatur; alter autem numerus* D *aequaliter metiatur alium aliquem* EF: *& permutando, vnitas* A *tertium numerum* D *aequaliter metietur, atque secundus* BC *quartum* EF.

Diuide BC in suas vnitates BG, GH, HC, & EF in numeros ipsi D aequales, puta EK, KL, LF. Et quoniam BG = GH = HC, & EK =
θ. hyp. KL = LF; vnitatum autem multitudo = [θ] multitudini numerorum EK, KL, LF: erit BG :
ι. 12. 7. EK = GH : HL = HC : LF; & [ι] BG : EK, id
κ. 20. def. 7. est A : D, = BC : EF. Ergo [κ] A numerum D aequaliter metitur atque BC ipsum EF. Q. E. D.

PROP.

## PROP. XVI. THEOR.

E.
A.. B...
C...... D......

*Si duo numeri A, B sese multiplicantes fecerint aliquos C, D: facti ex ipsis C, D inter se aequales erunt.*

Si enim A ipsum B multiplicans produxit C: [λ] metitur B ipsum C per vnitates, quae sunt in A. Metitur autem & E vnitas numerum A per vnitates [μ] quae sunt in A. Ergo B ipsum C metitur aequaliter, ac E vnitas ipsum A. Hinc [ν] E ipsum B aequaliter metitur ac A ipsum C. Similiter si B ipsum A multiplicans produxit D: E ipsum B metitur aequaliter, ac A ipsum D. Quare quum [ξ] A ipsius C eadem pars sit quae ipsius D: patet [o] esse C = D. Q. E. D.

λ. 8. ax. 7.
μ. 6. ax. 7.
ν. 15. 7.
ξ. 3. def. 7.
o. 4. ax. 7.

* *Cor.* 1. **Multiplicans metitur factum per multiplicatum.**

* *Cor.* 2. **Si numerus B numerum C metiatur: & ille A, per quem metitur, eundem C metietur per ipsum numerum metientem B.**

## PROP. XVII. THEOR.

A 2
B 3 C 4
D 6 E 8

*Si numerus A duos numeros B, C multiplicans fecerit aliquos D, E: facti ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicati* (D : E = B : C).

Nam B metitur D [π] per vnitates in A. Metitur autem & 1 numerum A per vnitates in A. Ergo 1 ipsum A aequaliter metitur ac B ipsum D, & hinc [ρ] 1 : A = B : D. Eadem ratione 1 : A = C : E. Quare [σ] B : D = C : E, & permutando [σ] B : C = D : E. Q. E. D.

π. 8. ax. 7.
ρ. 20. def. 7.
σ. 13. 7.

* *Cor.* In multiplicatione est vt vnitas ad multiplicantem A, ita multiplicatus B ad factum D.

## PROP. XVIII. THEOR.

A 3 B 4
C 5
D 15 E 20

*Si duo numeri* A, B *numerum aliquem* C *multiplicantes, fecerint aliquos* D, E: *facti ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicantes* (D: E = A: B).

τ. 16. 7. Quia enim AC =[τ] CA = D, & BC = CB
υ. 17. 7. = E: erit D: E =[υ] A: B. Q. E. D.

## PROP. XIX. THEOR.

A 6
B 4 AD 12
C 3 BC 12
D 2 AC 18

*Si quatuor numeri proportionales fuerint* (A: B = C: D): *qui ex primo & quarto fit numerus, aequalis erit ei, qui fit ex secundo & tertio* (AD = BC). *Et si numerus* AD, *qui fit ex primo* A *&* *quarto* D, *aequalis fuerit ei* BC, *qui fit ex secundo* B *&* *tertio* C: *quatuor numeri proportionales erunt* (A: B = C: D).

1. Nam sit alius AC factus ex A & C: erit
φ. 18. 7. AC: AD =[φ] C: D = A: B. Rursus AC: BC
χ. 17. 7. =[χ] A: B. Ergo AC: AD =[ψ] AC: BC, &
ψ. 15. ax. 7.
ω. 3. 4. ax. 7. hinc AD =[ω] BC. Q. E. D.

α. 1. ax. 7. 2. Quia C: D =[φ] AC: AD =[α] AC: BC; & AC: BC =[χ] A: B: erit A : B =[ψ] C: D. Q. E. D.

PROP.

## PROP. XX. THEOR.

A 4
B 6 D 6
C 9

*Si tres numeri proportionales fuerint* ($\div$ A, B, C): *qui ab extremis fit numerus, aequalis erit ei, qui fit a medio* ($AC = B^2$). *Si autem qui ab extremis fit* AC, *aequalis fuerit ei* $B^2$, *qui a medio: tres numeri proportionales erunt* ($\div$ A, B, C).

1. Ponatur ipsi $B = D$. Quia ergo $A : B = D : C$: erit[β] $AC = BD =$[γ] $B^2$. Q. E. D. β. 19. 7.

2. Quia $AC = B^2 =$[γ] $BD$: erit[β] $A : B = D : C = B : C$. Q. E. D. γ. 18. def. 7.

## PROP. XXI. THEOR.

A 10 C 5
B 6 D 3

*Minimi numeri* C, D *omnium eandem cum ipsis rationem habentium, eos, qui eandem rationem habent,* A, B *aequaliter metiuntur, maior* C *maiorem* A, *&* *minor* D *minorem* B.

1. Dico C ipsum A metiri, quia eius partes non est. Si enim fieri potest, sit C partes ipsius A. Quia est $C : D = A : B$: erit[δ] D ipsius B eaedem partes, quae C ipsius A. Quot igitur in C sunt partes ipsius A, tot & in D erunt partes ipsius B. Sint E, F partes ipsius A in C, & G, H partes ipsius B in D. Quia ergo $E = F$, & $G = H$: erit $E : G =$[ε] $F : H$. Et quia ipsorum E, F multitudo aequalis est ipsorum G, H multitudini: erit $E : G =$[ζ] $C : D$. Sed $E < C$, & $G < D$. Ergo C, D non sunt minimi eorum, qui eandem rationem habent; contra hypothesin. Non est ergo C

δ. 20. def. 7. & 9. 10. 7.
ε. 1. ax. 7.
ζ. 12. 7.

 partes

A 10 C 5
B 6 D 3

partes ipsius A, nec D ipsius B. Quare quum η C ipsius A, & D
η. 4. 7. ϑ. 3. def. 7. ipsius B pars sit: metitur ϑ C ipsum A, & D ipsum B.

2. Quia autem C : D = A : B, & C : A =
ι. 20. def. 7. D : B, & C pars ipsius A : erit ι & D eadem pars ipsius B. Quare C & D ipsos A, B aequaliter ϑ metiuntur. Q. E. D.

*** *Cor.* Minimi numeri eandem rationem habentium eosdem metiuntur, antecedens antecedentes, & consequens consequentes.**

## PROP. XXII. THEOR.

A 6 D 12
B 4 E 9
C 3 F 6

*Si sint tres numeri* A, B, C, *&* *alii ipsis multitudine aequales* D, E, F, *qui bini sumantur & in eadem ratione; sit autem perturbata eorum proportio* (A : B = E : F, & B : C = D : E) *etiam ex aequo in eadem ratione erunt* (A : C = D : F).

κ. 19. 7. Est enim κ AF = BE = CD. Ergo κ A : C = D : F. Q. E. D.

## PROP. XXIII. THEOR.

***Numeri primi inter se*, A, B, *minimi sunt omnium eandem cum ipsis rationem habentium.***

Si fieri potest, sint C, D, eandem rationem habentes quam A, B, & ipsis A, B minores, mi-
λ. 21. 7. nimi omnium. Ergo λ C ipsum A aequaliter metietur, ac D ipsum B. Iam quoties C ipsum A metitur, tot vnitates sint in E: ergo &
μ. 2. cor. 16. 7. D ipsum B metietur per numerum E. Quare μ etiam

etiam E metietur A per C, & E ipſum B per D. Quum itaque idem E duos A, B metiatur: A, B non erunt [ν] primi inter ſe; contra hypotheſin. Minimi ergo ſunt A, B. Q.E.D. ν. 12. def. 7.

## PROP. XXIV. THEOR.

*Minimi numeri* A, B, *eorum, qui eandem cum ipſis rationem habent, primi inter ſe ſunt.*

Si negas: metiatur [ξ] eos numerus C, ipſum A nempe per numerum aliquem D, & alterum B per E. Ergo [ο] CD = A, & CE = B; & inde A : B = [π] D : E. Quum autem ſit D < A, & E < B: non erunt A, B minimi; contra hypotheſin. Ergo A, B primi inter ſe ſunt. Q. E. D. ξ. 12. def. 7. ο. 9. ax. 7. π. 18. 7.

## PROP. XXV. THEOR.

A 6
B 5
C 3

*Si duo numeri* A, B *primi inter ſe fuerint, qui vnum ipſorum* A *metitur numerus* C, *ad reliquum* B *primus erit.*

Si enim B, C inter ſe primi non ſint: metiatur eos numerus D. Idem D metietur [ρ] ipſum A. Ergo A, B non [σ] erunt primi inter ſe; contra hypotheſin. Ergo C ad B primus eſt. Q. E. D. ρ. 11. ax. 7. σ. 12. def. 7.

## PROP. XXVI. THEOR.

A 2 B 3
C 5
D 6

*Si duo numeri* A, B *ad aliquem numerum* C *primi fuerint: & qui fit ex ipſis* D *ad eum* C *primus erit.*

Si negas: metiatur ipſos C & D idem aliquis E. Ergo [τ] E & A primi inter ſe ſunt. τ. 25. 7.

υ. 2. cor. 16. 7.
φ. 9. ax. 7.
χ. hyp.
ψ. 19. 7.
ω. 23. 7.
α. cor. 21. 7.

A 2 B 3
C 5
D 6

Metiatur autem E ipsum D per numerum F: ergo [υ] F ipsum D quoque metietur per E; & EF = [φ] D = [χ] AB. Quare [ψ] E : A = B : F. Quum autem E, A primi inter se, ideoque [ω] minimi sint: E ipsum B [α] metietur. Metitur autem E quoque ipsum C: ergo B, C non erunt primi inter se; contra hypothesin. Quare D & C primi inter se sunt. Q. E. D.

## PROP. XXVII. THEOR.

A.. B...
$A^2$....
D..

*Si duo numeri* A, B *primi inter se fuerint: qui fit ab vno ipsorum* $A^2$ *ad reliquum* B *primus erit.*

β. 26. 7.
γ. 18. def. 7.

Sit enim ipsi A = D: erunt & D, B primi inter se; & ergo [β] AD id est [γ] $A^2$ ad B primus erit. Q. E. D.

## PROP. XXVIII. THEOR.

A 3. B 5
E 15
C 2 D 4
F 8

*Si duo numeri* A, B *ad duos numeros* C, D, *vterque ad vtrumque primi fuerint: & qui fiunt ex ipsis* E, F *inter se primi erunt.*

δ. 26. 7.

Nam quia A, B ad C primi sunt: E [δ] etiam ad C primus erit. Eadem ratione E, D inter se primi sunt. Quare quum C, D ad E primi sint: erunt & [δ] F ac E primi inter se. Q. E. D.

PROP.

## PROP. XXIX. THEOR.

| | |
|---|---|
| A 2 | B 3 |
| $A^2$ 4 | $B^2$ 9 |
| $A^3$ 8 | $B^3$ 27 |

*Si duo numeri* A, B *primi inter se fuerint, & vterque se ipsum multiplicans faciat aliquos* $A^2$, $B^2$: *facti ex ipsis* $A^2$, $B^2$ *primi inter se erunt; & si numeri a principio positi* A, B, *eos qui facti sunt* $A^2$, $B^2$ *multiplicantes, aliquos* $A^3$, $B^3$ *faciant: & ipsi inter se primi erunt; & semper circa extremos hoc continget.*

Quia enim [e] $A^2$, B primi sunt: erunt & [e] $A^2$, $B^2$ primi. Iam quum & A, $B^2$ primi sint, & ergo duo A, $A^2$ ad duos B, $B^2$ vterque ad vtrumque primi sint: erunt quoque [ζ] $A^3$, $B^3$ primi inter se. Q. E. D. e. 27. 7. ζ. 28. 7.

## PROP. XXX. THEOR.

| | |
|---|---|
| A 3 | B 5 |
| A+B 8 | |

*Si duo numeri* A, B *primi inter se fuerint: & vterque simul* A+B *ad vtrumque ipsorum* & A & B *primus erit. Quod si vterque simul* A+B *ad vnum aliquem ipsorum sit primus: & numeri* A, B *a principio positi inter se primi erunt.*

1. Si negas, A+B ad A vel B primum esse: metiatur ipsos A+B & A aliquis C; qui ergo [η] & B metietur. Quare A & B non sunt primi inter se; contra hyp. η. 12. ax. 7.

2. Si negas A, B primos esse: metiatur eos aliquis C. Quum ergo idem C [θ] ipsum A+B metiatur: A+B ad neutrum ipsorum A, B primus erit; contra hyp. θ. 10. ax. 7.

## PROP. XXXI. THEOR.

A 3 B 7 *Omnis primus numerus* A *ad omnem numerum* B, *quem non metitur, primus est.*

Si negas: metiatur eos aliquis C praeter vnitatem. Et quia A non metitur B: erit C diuersus a numero A. Ergo quum A metiatur aliquis, qui nec vnitas nec ipsi A idem est:
ι. 11. def. 7. A primus ι non erit; contra hyp.

## PROP. XXXII. THEOR.

A 2 B 6
AB 12
C 3
D 4

*Si duo numeri* A, B *sese multiplicantes, aliquem faciant; cum vero* AB, *qui ex ipsis fit, metiatur aliquis numerus primus* C: *& vnum ipsorum* A, B, *qui a principio positi sunt, metietur.*

κ. 31. 7. Nam C ipsum A non metiatur: ergo κ C & A primi inter se sunt. Metiatur autem C
λ. 9. ax. 9. ipsum AB per D: erit CD = λ AB, ideoque
μ. 19. 7. C : A = μ B : D. Quare quum C, A minimi
ν. 23. 7. sint eorum ν, qui rationem C : A habent: C ip-
ξ. cor. 21. 7. sum B ξ metietur.

Similiter demonstrabitur, si C ipsum B non metiretur, metiri ipsum A. Quare C metitur vnum ipsorum A, B. Q. E. D.

## PROP. XXXIII. THEOR.

*Omnem numerum compositum* A *primus aliquis numerus metitur.*

Quia

A 12
B 4
C 2

Quia enim A compositus est: metitur eum [a] aliquis B, qui si primus sit, patet propositio. Si vero B etiam compositus est: metiatur eum C, qui etiam metietur [π] ipsum A. Quare si hic C nondum primus est, metietur ipsum alius, & sic progrediendo tandem ad primum peruenietur, qui metietur tam antecedentem quam A. Nisi enim tandem ad primum perueniretur: metirentur ipsum A infiniti numeri, quorum alter altero minor. Q. E. A [ϱ].

a. 13. def. 7.
π. 11. ax. 7.
ϱ. 2. def. 7.

*Aliter.* Sit C minimus omnium ipsum A metientium: erit idem primus. Si enim non: metiatur illum numerus D $<$ C; quare quum idem D metiatur etiam [π] A, non est C minimus metientium ipsum A; contra hyp.

## PROP. XXXIV. THEOR.

*Omnis numerus* A *vel primus est, vel eum primus aliquis numerus metitur.*

Si enim A primus est: manifesta est propositio. Sin A compositus: metietur eum aliquis [σ] primus. Ergo A aut primus est, aut eum primus metitur. Q. E. D.

σ. 33. 7.

## PROP. XXXV. PROBL.

A 6 B 15 C 21
D 3
E 2 F 6 G 7

*Numeris quotcunque* A, B, C *datis, inuenire minimos omnium, qui eandem cum ipsis rationem habeant.*

Si ipsi A, B, C primi inter se sunt: minimi iam erunt [τ] omnium eandem rationem habentium.

τ. 23. 7.

Si

ν. 3. 7.

| | | |
|---|---|---|
| A 6 | B 15 | C 21 |
| | D 3 | |
| E 2 | F 5 | G 7 |

Si vero non: sume ν ipsorum maximam communem mensuram D, per quam diuide ipsos A, B, C. Numeri E, F, G, per quos D ipsos A, B, C metitur, erunt quaesiti.

Nam quia vnusquisque ipsorum E, F, G vnumquemque ipsorum A, B, C per D φ metitur, id est aequaliter: ipsi E, F, G in eadem χ sunt ratione cum numeris A, B, C. Dico etiam E, F, G minimos fore eandem cum A, B, C rationem habentium. Si enim negas: erunt alii H, K, L, ipsis E, F, G minores, minimi eandem cum A, B, C rationem habentium. Ergo ψ H, K, L ipsos A, B, C aequaliter metientur, id est per eundem numerum, qui sit M. Igitur M metietur φ ipsum A per H, ipsum B per K, & ipsum C per L; & MH $=$ ω A. Sed est etiam ED $=$ ω A. Ergo ED $=$ MH, & E : H $=$ α M : D. Sed E $>$ H: ergo M $>$ β D. Quare quum M ipsos A, B, C metiatur: non erit D maxima ipsorum A, B, C mensura; contra hyp. Ergo E, F, G minimi sunt eandem cum A, B, C rationem habentium. Q. E. D.

φ. 2. cor. 16. 7.
χ. sch. 9. 7.
ψ. 21. 7.
ω. 9. ax. 7.
α. 19. 7.
β. 20. def. 7.

## PROP. XXXVI. PROBL.

*Duobus numeris* A, B *datis, inuenire minimum numerum, quem metiantur.*

| | |
|---|---|
| A 3 | B 4 |
| AB 12 | |

1. Sint dati A, B primi inter se. Multiplicetur A per B, factus AB erit quaesitus.

Nam

Nam vterque A, B metitur [γ] AB. Eſt autem & AB minimus eorum, quem A & B metiuntur. Si negas: metiantur illi numerum $C < AB$; & A quidem ipſum C metiatur per D, B vero per E. Ergo erit AD $=$ [δ] C $=$ [δ] BE, & hinc A : B $=$ [ε] E : D. Sunt autem A, B primi inter ſe, ideoque minimi [ζ]: ergo B [η] metietur ipſum D. Sed numeri B, D ipſum A multiplicantes fecerunt ipſos AB, C: ergo erit [θ] B : D $=$ AB : C, & ideo AB metietur [ι] ipſum C, minor maiorem. Q. E. A [κ].

γ. 8. ax. 7. & 1. cor. 16. 7.
δ. 9. ax. 7.
ε. 19. 7.
ζ. 23. 7.
η. 21. 7.
θ. 18. 7.
ι. 20. def. 7.
κ. 13. ax. 7.

| | |
|---|---|
| A 4 | B 6 |
| C 2 | D 3 |
| AD 12 | |

2. Non ſint A, B primi inter ſe: ſume [λ] minimos C, D in eadem ratione cum A, B, & multiplica extremos vel medios per ſe inuicem. Factus AD erit quaeſitus.

λ. 35. 7.

Nam quia A per D, & B per C multiplicatus eundem [μ] AD producunt: tam A, quam B eundem AD metietur [ν]. Dico etiam AD minimum eſſe. Si enim non: metientur A, B aliquem E minorem quam AD, & metiatur quidem A ipſum E per F, B vero per G. Quare erit AF $=$ [ξ] E $=$ [ξ] BG, & A : B $=$ [μ] G : F. Sed [ο] A : B $=$ C : D. Ergo C : D $=$ G : F. Quia autem C, D minimi [ο] ſunt: D ipſum F [π] metietur. Sed D : F $=$ [ρ] AD : AF id eſt E: igitur AD metietur E, maior minorem. Q. E. A [σ].

μ. 19. 7.
ν. 7. ax. 7.
ξ. 9. ax. 7.
ο. conſtr.
π. cor. 21. 7.
ρ. 18. 7.
σ. 13. ax. 7.

## PROP. XXXVII. THEOR.

| | |
|---|---|
| A 2 | B 3 |
| C 18 | |
| D 6 | |

*Si duo numeri* A, B *metiantur numerum aliquem* C: *&* *minimus, quem illi* A, B *metiuntur*, D *eundem* C *metietur.*

Si

A 2 B 3
C 18
D 6

Si negas: D diuidens C relinquat se minorem E. Quia igitur D metitur C—E; & A, B ipsum
τ. 11. ax. 7. D metiuntur: metientur quoque[τ]
υ. 12. ax. 7. ipsum C—E, &[υ] hinc etiam ipsum E, qui minor est quam D. Ergo D non erit minimus eorum, quos A, B metiuntur; contra hyp.

## PROP. XXXVIII. PROBL.

*Tribus numeris* A, B, C *datis, inuenire minimum numerum, quem metiantur.*

φ. 36. 7.

A 3 B 4 C 6
D 12

1. Sume[φ] minimum D, quem duo A, B metiuntur. Si C etiam metiatur ipsum D: erit D quaesitus.

Nam quod tres A, B, C ipsum D metiantur, patet. Quod autem minimus sit, sic ostenditur. Si negas: metiantur A, B, C alium numerum E ipso D minorem. Ergo &
χ. 37. 7. D metietur[χ] ipsum E, maior minorem. Q. E. A.

A 2 B 3 C 4
D 6
E 12

2. Si autem C non metiatur D: sume minimum[φ] E, quem C & D metiantur. Qui erit quaesitus.

Nam A, B, qui ipsum D metiuntur, me-
ψ. 11. ax. 7. tientur quoque[ψ] ipsum E. Ergo tres A, B, C ipsum E metientur. E autem minimus erit. Si enim non: metiantur A, B, C alium F < E. Ergo & D[χ] metietur ipsum F. Quare quum C & D ipsum F metiantur: metietur

tietur eundem [κ] etiam E, minorem maior. Q. E. A [λ]. κ. 37. 7. λ. 13. ax. 7.

## PROP. XXXIX. THEOR.

A 12 B 4
C 3

*Si numerum* A *numerus aliquis* B *metiatur, ille* A, *quem metitur* B, *partem habebit* C *a metiente* B *denominatam.*

Metiatur enim B ipſum A per vnitates in C: ergo, quum [α] etiam 1 metiatur C per vnitates in eodem, 1 ipſum C aequaliter metietur, ac B ipſum A. Quare 1 ipſum B aequaliter [β] metietur ac C ipſum A; id eſt [γ] C ipſius A eadem pars eſt, quae 1 ipſius B. Sed 1 eſt pars numeri B ab ipſo B denominata: ergo A partem habet C ab ipſo B denominatam. Q. E. D.

α. 5. ax. 7. β. 15. 7. γ. 3. def. 7.

## PROP. XL. THEOR.

A 8 B 2
C 4

*Si numerus* A *partem quamcunque* B *habeat: eum numerus* C *a parte* B *denominatus metietur.*

Quia [δ] numerus C tot vnitates habet, quota pars B eſt ipſius A: erit 1 eadem pars ipſius C, quae B ipſius A; id eſt [ε] 1 ipſum C aequaliter metietur, ac B ipſum A. Hinc & 1 ipſum B aequaliter [ζ] metietur, ac C ipſum A. Ergo C metietur A. Q. E. D.

δ. hyp. ε. 3. def. 7. ζ. 15. 7.

PROP.

## PROP. XLI. PROBL.

*Numerum inuenire, qui, minimus quum ſit, datas partes* A, B, C, *habeat.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | $\frac{1}{2}$ | D | 2 |
| B | $\frac{1}{3}$ | E | 3 |
| C | $\frac{1}{4}$ | F | 4 |
| | G | 12 | |

Sint ab ipſis partibus A, B, C denominati numeri D, E, F, &
u. 38. 7. ſumatur u minimus eorum, quos D, E, F metiuntur, qui ſit G. Dico factum.

9. 39. 7. Nam 9 patet numerum G partes habere a metientibus D, E, F denominatas, id eſt, partes A, B, C. Dico autem G etiam eſſe minimum. Nam ſi quis minor H partes haberet A, B, C:
i. 40. 7. metirentur eum i numeri D, E, F. Ergo G non eſſet minimus, quem D, E, F metiuntur; contra hypotheſin.

EV-

# EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER VIII.

## PROP. I. THEOR.

A 8, B 12, C 18, D 27.

*Si sint quotcunque numeri* A, B, C, D *deinceps proportionales, quorum extremi* A, D *sint inter se primi: minimi erunt omnium eandem cum ipsis rationem habentium.*

Si negas: sint totidem alii E, F, G, H minores in eadem ratione. Ergo ex aequo [α] A : D = E : H. Quare quum A, D, primi inter se, sint quoque [β] minimi: [γ] metientur illi ipsos E, H, se ipsis minores. Q. E. A. α. 14. 7. β. 23. 7. γ. cor. 21. 7.

## PROP. II. PROBL.

*Numeros inuenire deinceps proportionales minimos, quotcunque quis imperauerit, in data ratione.*

A 2, B 3

$A^2$ 4, AB 6, $B^2$ 9

$A^3$ 8, $A^2B$ 12, $AB^2$ 18, $B^3$ 27

1. Sint A, B minimi [δ] in data ratione: erunt $A^2$, AB, $B^2$ tres deinceps proportionales minimi in data ratione. δ. 35. 7.

$$A\ 2,\quad B\ 3$$
$$A^2\ 4,\quad AB\ 6,\quad B^2\ 9$$
$$A^3\ 8,\quad A^2B\ 12,\quad AB^2\ 18,\quad B^3\ 27$$

ε. 18. 7. Nam $A^2 : AB = {}^{\epsilon} A : B = {}^{\epsilon} AB : B^2$. Et
ζ. 24. 7. quia A, B primi inter se ζ sunt, ideoque etiam
η. 29. 7. $A^2$, $B^2$ primi η sunt inter se: patet θ, $A^2$, $AB$,
θ. 1. 8. $B^2$ minimos esse in ratione A : B. Q. E. F.

2. Sint iterum A, B minimi in data ratione: erunt $A^3$, $A^2B$, $AB^2$ & $B^3$ quatuor minimi in data ratione deinceps proportionales.

Nam similes sunt eidem rationi A : B sequen-
κ. 17. 7. tes κ $A^3 : A^2B$, $A^2B : AB^2$, $AB^2 : B^3$. Quum
λ. 24. & igitur $A^3$, $B^3$ inter se λ primi sint: erunt $A^3$,
29. 7. $A^2B$, $AB^2$, $B^3$ quatuor minimi in data ratione continue proportionales. Et eodem modo quotcunque proportionales inuestigantur. Q. E. F.

*Corollaria.*

1. Ex hoc manifestum est, si tres numeri deinceps proportionales minimi fuerint omnium eandem cum ipsis rationem habentium; extremos eorum quadratos esse; si vero quatuor; esse cubos.

2. Et patet simul, latera extremorum esse duos illos numeros, qui minimi sunt in data ratione.

## PROP. III. THEOR.

*Si sint quotcunque numeri* A, B, C, D *deinceps proportionales minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium: eorum extremi* A, D *primi inter se erunt.*

Sum-

A 8, B 12, C 18, D 27
E, 2, F 3
G 4, H 6, K 9
L 8, M 12, N 18, O 27

Sumtis enim [μ] duobus minimis numeris E, F, & tribus G, H, K, & sic deinceps pluribus minimis continue proportionalibus in eadem ratione A : B, donec peruentum sit ad totidem L, M, N, O, quot sunt propositi A, B, C, D: erit vnusquisque ipsorum L, M, N, O vnicuique ipsorum A, B, C, D aequalis. Sed L = $E^3$, & O = $F^3$. Ergo quia [ν] L, O primi inter se sunt: etiam A, D inter se primi erunt. Q. E. D.

μ. 35. 7. & 2. 8.

ν. 29. 7. & 24. 7.

## PROP. IV. PROBL.

*Rationibus datis quotcunque*, A : B, C : D, E : F *in minimis numeris, numeros inuenire deinceps minimos in datis rationibus.*

A 2, B 5, C 3, D 4, E 5, F 6
H 6, G 15, K 20, L 24
N O M P

Sume [ξ] minimum G quem B & C metiantur, & duos alios H, K, quos ipsi A, D aeque metiantur, ac ipsi B & C numerum G.

ξ. 36. 7.

*Cas.* 1. Iam si E quoque metitur ipsum K, sume numerum L, quem F toties metiatur, quoties E ipsum K. Dico factum.

Nam [ο] est H : G = A : B, & G : K = C : D, & K : L = E : F. Si vero neges H, G, K, L minimos esse eorum, qui in rationibus propositis sunt deinceps proportionales: sint alii N, O, M, P minimi. Et quia est A : B = N : O; A vero

ο. 20. def. 7. & 13. 7.

A 2, B 5, C 3, D 4, E 5, F 6
H 6, G 15, K 20, L 24
N O M P

π. cor. 21. 7. & B minimi sunt: B metietur* O. Eadem
ρ. 37. 7. ratione C metietur ipsum O. Quare ρ etiam G metietur numerum O, maior minorem. Q. E. A.

A 4, B 5, C 2, D 3, E 4, F 3
H 8, G 10, K 15.
N 32, O 40, M 60, P 45
Q R S T

*Cas.* 2. At si non metiatur E ipsum K: sume minimum M quem E & K metiantur; & duos N, O quos ipsi H, G aeque metiantur, ac K ipsum M, item quartum P, quem F aeque metiatur, ac E ipsum M. Dico factum.

σ. 20. def. 7. & 13. 7. Est enim* A : B = H : G = N : O, item C : D = G : K = O : M, & E : F = M : P. Si vero neges minimos esse N, O, M, P : sint Q, R, S, T minimi in datis rationibus. Quum ergo sit A : B = Q : R, & A, B minimi sint: B metietur* R. Eadem ratione G metietur R: ergo & ρ G metietur eundem R. Quare quum sit G : K = C : D = R : S : numerus K metietur S. Sed quia E : F = S : T, & E, F minimi sunt: metitur quoque E ipsum S. Ergo ρ tandem M metiretur S, maior minorem. Q. E. A.

PROP.

## PROP. V. THEOR.

A 2 C 4 BC 12
B 3 D 5

AB 6 CD 20
E 3, F 6, G 10

*Plani numeri* AB, CD *rationem habent ex lateribus* A, C, & B, D *compositam* AB: CD = (A: C) + (B: D).

Nam sumtis[τ] deinceps minimis E, F, G in datis rationibus A: C & B: D; quia E: G =[υ] (E: F) + (F: G): erit E: G = (A: C) + (B: D). Iam B ipsum C multiplicans faciat BC: & erit AB: BC =[υ] A: C =[φ] E: F. Similiter BC: CD =[υ] B: D =[φ] F: G. Ergo ex aequo AB: CD =[χ] E: G = (A: C) + (B: D). Q. E. D.

τ. 4. 8.
υ. 5. def. 6.
υ. 17. 7.
φ. constr.
χ. 14. 7.

## PROP. VI. THEOR.

A 16, B 24, C 36, D 54, E 81
F 4, G 6, H 9

***Si fuerint quotcunque numeri* A, B, C, D, E *deinceps proportionales; primus autem* A *secundum* B *non metiatur: neque alius aliquis vllum metietur.***

1. Numeros hos deinceps se non metiri patet: quia si B metiretur C, A etiam metiretur[α] ipsum B, contra hypothesin.

2. Nec vllus, vt A, vllum, vt C, metietur. Quot enim sint sumti A, B, C, tot sumantur minimi[β] numeri in eadem ratione, qui sint F, G, H: hinc erit[γ] A: C = F: H. Sed quia A: B = F: G, & A non metitur B:[α] neque F metietur G; quare F vnitas esse[δ] nequit. Hinc, quum F & H primi[ε] sint inter

α. 20. def. 7.
β. 35. 7.
γ. 14. 7.
δ. 6. ax. 7.
ε. 3. 8.

 se,

ζ. 12. def. 7. se, F nequit ζ metiri ipsum H. Ergo nec A
α. 20. def. 7. metiri potest α ipsum C. Q. E. D.

## PROP. VII. THEOR.

A 2, B 4, C 8, D 16

*Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales* (∺ A, B, C, D), *primus autem* A *metiatur extremum* D: *& secundum* B *metietur.*

η. 6. 8. Si negas: neque alius aliquis vllum η metietur, ergo nec A ipsum D; contra hypothesin.

## PROP. VIII. THEOR.

A 2, C 4, D 8, B 16
G 1, H 2, K 4, L 8
E 3, M 6, N 12, F 24

*Si inter duos numeros* A, B *numeri deinceps proportionales* C, D *ceciderint: quot inter eos cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter alios* E, F, *eandem cum ipsis* A, B *rationem habentes, cadent.*

θ. 35. 7. Sumtis enim θ totidem minimis G, H, K, L,
ι. 3. 8. quot sunt numeri A, B, C, D, & in eadem ra-
κ. 14. 7. ratione: erunt G & L ι primi inter se, & ex
λ. hyp. aequo erit κ G : L = A : B = λ E: F. Sunt
μ. 23. 7. autem μ G & L minimi: ergo ν G aequaliter
ν. 21. 7. metitur ipsum E, atque L ipsum F. Sed quoties G metitur E, toties numeri H, K metiantur ipsos M, N. Numeri ergo G, H, K, L ipsos E, M, N, F aequaliter metientur; ideo-
ξ. 20. def. 7. que ξ numeri G, H, K, L in eadem ratione
& 13. 7. erunt, in qua sunt E, M, N, F. Ergo E, M,

N, F

N, F eandem cum ipsis A, C, D, B rationem habebunt, & ergo deinceps proportionales erunt. Tot igitur inter E, F cadunt deinceps proportionales, quot inter A & B. Q. E. D.

## PROP. IX. THEOR.

A 8, C 12, D 18, B 27
E 1
F 2, G 3
H 4, K 6, L 9
M 8, N 12, O 18, P 27

*Si duo numeri* A, B *inter se primi fuerint, & inter ipsos numeri deinceps proportionales* C, D *ceciderint: quot inter ipsos* A, B *cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter vtrumque ipsorum* A, B *& vnitatem* E *deinceps proportionales cadent.*

Sume enim [a] in eadem ratione, in qua sunt A, C, D, B, duos minimos F, G, & tres minimos H, K, L, & sic porro donec sumtorum M, N, O, P multitudo aequalis fiat multitudini datorum A, C, D, B. Hinc, quia & A, C, D, B minimi [b] sunt in eadem ratione, erit A = M, C = N, D = O, B = P. Et quia [c] H = $F^2$: erit E : F = [d] F : H. Similiter quia A = M = HF : erit E : F = H : A. Ergo ∺ E, F, H, A. Eodem modo demonstratur, esse ∺ E, G, L, B. Q. E. D.

a. 35. 7. & 3. 8.
b. 1. 8.
c. cor. 2. 8.
d. cor. 17. 7.

## PROP. X. THEOR.

*Si inter duos numeros* A, B, *& vnitatem* C *deinceps proportionales numeri* D, E, & F, G *ceciderint: quot inter vtrumque ipsorum* A, B *& vnitatem* C *cadunt numeri deinceps propor-*

*tionales, totidem & inter ipsos* A, B *numeri deinceps proportionales cadent.*

A 8, K 12, L 18, B 27
E 4, H 6, G 9
D 2, F 3
C 1

Numerus enim D ipsum F multiplicans faciat H, & sumatur K = HD, & L = HF. Et quia ponitur C : D = D : E; C vero

τ. 5. ax. 7. ipsum D metitur[τ] per D: metietur[υ] quoque
υ. 20. def. 7. D ipsum E per D; & ergo $E = {}^{\varphi} D^2$. Rur-
φ. 9. ax. 7. sus quia ponitur C: D = E: A: erit A = ED. Eadem ratione $G = F^2$, & B = GF. Cum ergo sit $E = D^2$ & H = FD: erit D: F =[χ] E: H. Item quia H = FD, & $G = F^2$: erit D : F = H : G. Ergo E : H = H : G. Rursus quia K = HD, & L = HF: erit A : K

χ. 17. 7. =[χ] E: H = D: F =[ψ] K: L. Similiter quia
ψ. 18. 7. L = HF, & B = GF: erit L: B =[χ] H: G = E: H. Quare ∺ A, K, L, B. Q. E. D.

## PROP. XI. THEOR.

$A^2$ 4, AB 6, $B^2$ 9
A 2, B 3

*Inter duos numeros quadratos* $A^2$, $B^2$, *vnus medius proportionalis* AB *cadit: Et quadratus* $A^2$ *ad quadratum* $B^2$ *duplicatam rationem habet eius, quam latus* A *habet ad latus* B.

α. 18. 7. 1. Est enim $A^2$: AB =[α] A: B =[β] AB: $B^2$.
β. 17. 7. Q. E. D.

2. Quia (per dem.) ∺ $A^2$, AB, $B^2$: erit
γ. 10. def. 5. $A^2 : B^2 = {}^{\gamma} (A^2 : AB)^2 = (A : B)^2$. Q. E. D.

PROP.

## PROP. XII. THEOR.

$A^3$ 8, $A^2B$ 12, $AB^2$ 18, $B^3$ 27

$A^2$ 4, $AB$ 6, $B^2$ 9

A 2, B 3

*Inter duos numeros cubos* $A^3$, $B^3$, *duo medii proportionales* $A^2B$, $AB^2$ *cadunt. Et cubus* $A^3$ *ad cubum* $B^3$ *triplicatam habet rationem eius, quam latus* A *habet ad latus* B.

1. Nam $A:B = {}^{\delta} A^2 : AB$, & $A:B = {}^{\varepsilon} AB : B^2$. Sed $A^3 : A^2B = {}^{\delta} A^2 : AB = A:B$. Rursus $A^2B : AB^2 = {}^{\varepsilon} A:B$, item $AB^2 : B^3 = {}^{\varepsilon} AB : B^2 = A:B$. Ergo $\div A^3, A^2B, AB^2, B^3$. Q. E. D. δ. 18. 7. ε. 17. 7.

2. Quia (per dem.) $\div A^3, A^2B, AB^2, B^3$: erit $A^3 : B^3 = {}^{\zeta} (A^3 : A^2B)^3 = (A:B)^3$. Q. E. D. ζ. 11. def. 5.

## PROP. XIII. THEOR.

A 2, B 4, C 8

$A^2$ 4, $AB$ 8, $B^2$ 16, $BC$ 32, $C^2$ 64

$A^3$8, $A^2B$16, $AB^2$32, $B^3$64, $B^2C$128, $BC^2$256, $C^3$512

*Si sint quotcunque numeri* A, B, C *deinceps proportionales, & vnusquisque se ipsum multiplicans faciat aliquos* $A^2$, $B^2$, $C^2$: *facti ex ipsis proportionales erunt. Et si positi a principio numeri* A, B, C *factos* $A^2$, $B^2$, $C^2$ *multiplicantes, alios* $A^3$, $B^3$, $C^3$ *faciant, & ipsi proportionales erunt. Et semper circa extremos hoc contingit.*

Expositis enim numeris AB, BC, $A^2B$, $AB^2$ $B^2C$ & $BC^2$: erit ${}^{\eta} \div A^2, AB, B^2$, item $\div A^3$, $A^2B$, $AB^2$, $B^3$, & erunt omnium horum numerorum rationes eaedem rationi $A:B$. Similiter $B^2$, BC, $C^2$ sunt deinceps proportionales η. 2. 8.

 in

$A\,2,\ B\,4,\ C\,8$

$A^2\,4,\ AB\,8,\ B^2\,16,\ BC\,32,\ C^2\,64$

$A^3 8, A^2B 16, AB^2 32, B^3 64, B^2C 128, BC^2 256, C^3 512$

in ratione B : C, pariterque $B^3$, $B^2C$, $BC^2$, $C^3$ in eadem ratione deinceps proportionales. Ergo quia, $A : B = B : C$, erunt $A^2$, AB, $B^2$ in eadem ratione, in qua $B^2$, BC, $C^2$; nec non $A^3$, $A^2B$, $AB^2$, $B^3$ in eadem ratione, in qua $B^3$, $B^2C$, $BC^2$, $C^3$. Sunt autem tam illi quam hi inter se multitudine pares. Ergo ex ae-
ϑ. 14. 7. quo ϑ $A^2 : B^2 = B^2 : C^2$; & $A^3 : B^3 = B^3 : C^3$. Q. E. D.

## PROP. XIV. THEOR.

$A\,2,\ B\,4$

$A^2\,4,\ AB\,8,\ B^2\,16$

*Si numerus quadratus* $A^2$ *metiatur quadratum numerum* $B^2$ : *& latus* A *latus* B *metietur. Et si latus* A *metiatur latus* B : *& quadratus* $A^2$ *quadratum* $B^2$ *metietur.*

κ. 2. 8. 1. Sumto enim numero AB, erunt κ deinceps proportionales $A^2$, AB, $B^2$ in ratione A
λ. 7. 8. ad B. Ergo $A^2$ metietur λ AB. Hinc quia
μ. 20. def. 7. $A^2 : AB = A : B$, metietur etiam μ A ipsum B. Q. E. D.

ν. 18. 7. 2. Si A metitur B: quia $A : B$ ν $= A^2 : AB$, $A^2$ quoque metietur μ AB. Et quia $A^2 : AB$ $=$ ν $AB : B^2$ : metietur μ & AB ipsum $B^2$. Er-
ξ. 11. ax. 7. go ξ $A^2$ metietur $B^2$. Q. E. D.

## PROP. XV. THEOR.

$A^3$ 8, $A^2B$ 16, $AB^2$ 32, $B^3$ 64
$A^2$ 4, $AB$ 8, $B^2$ 16
$A$ 2, $B$ 4

*Si numerus cubus* $A^3$ *metiatur cubum numerum* $B^3$: *& latus* A *latus* B *metietur. Et si latus* A *latus* B *metiatur: & cubus* $A^3$ *cubum* $B^3$ *metietur.*

1. Sumtis enim numeris $A^2B$, $AB^2$, quia[a] deinceps in ratione A ad B proportionales sunt $A^3$, $A^2B$, $AB^2$, $B^3$, & $A^3$ ipsum $B^3$ metitur; metietur & $A^3$ ipsum $A^2B$. Quare quum sit $A^3 : A^2B = A : B$: metietur & A[π] ipsum B. Q. E. D. a. 2. 8. π. 20. def. 7.

2. Quia, iisdem sumtis, est[a] $A : B = A^3 : A^2B$, & A ipsum B metiri ponitur: metietur[π] & $A^3$ ipsum $A^2B$. Quare quum sit $\div$ $A^3$, $A^2B$, $AB^2$, $B^3$: patet[ρ] & $A^3$ ipsum $B^3$ metiri. Q. E. D. ρ. 11. ax. 7.

## PROP. XVI. THEOR.

$A^2$ 9, $B^2$ 16
$A$ 3, $B$ 4

*Si numerus quadratus* $A^2$ *non metiatur quadratum numerum* $B^2$: *neque latus* A *latus* B *metietur. Et si latus* A *non metiatur latus* B: *neque hic quadratus* $A^2$ *quadratum* $B^2$.

1. Si enim A metiretur B: $A^2$ etiam metiretur[σ] $B^2$; contra hypothesin. σ. 14. 8.

2. Et si $A^2$ metiretur $B^2$: A etiam[σ] metiretur B; contra hypothesin.

PROP.

## PROP. XVII. THEOR.

$A^3$ 8, $B^3$ 27
A 2, B 3

*Si numerus cubus* $A^3$ *non metiatur cubum numerum* $B^3$: *neque latus* A *latus* B *metietur. Et si latus* A *non metiatur latus* B: *neque cubus* $A^3$ *cubum* $B^3$ *metietur.*

1. Si enim A metiretur B: $A^3$ quoque metiretur[τ] $B^3$, contra hypothesin.

τ. 15. 8.

2. Si $A^3$ metiretur $B^3$:[τ] etiam A metiretur B; contra hypothesin.

## PROP. XVIII. THEOR.

A 2, B 3, C 4, D 6
AB 6, BC 12, CD 24

*Inter duos similes planos numeros* AB, CD, *vnus medius proportionalis* BC *cadit. Et planus* AB *ad planum* CD *duplicatam rationem habet eius, quam latus homologum* A *habet ad homologum latus* C.

υ. 17. 7.
φ. 13. 7. & 21. def. 7.

1. Quia enim AB : BC $=$[υ] A : C, & A : C $=$[φ] B : D: erit AB : BC $=$ B : D $=$[υ] BC : CD. Q. E. D.

2. Quum $\div$ AB, BC, CD (per dem.): erit AB : CD $= (AB : BC)^2 = (A : C)^2 = (B : D)^2$. Q. E. D.

* *Cor.* Hinc inter duos similes planos cadit vnus medius proportionalis in ratione laterum homologorum.

## PROP. XIX. THEOR.

A 2, B 3, C 5, D 4, E 6, F 10
ABC 30, BCD 60, BDF 120, DEF 240
AB 6, BD 12, DE 24

Inter

*Inter duos similes solidos numeros* ABC, DEF *duo medii proportionales* BCD, BDF *cadunt. Et solidus* ABC *ad similem solidum* DEF *triplicatam rationem habet ejus, quam latus homologum* A, vel B, vel C *habet ad homologum latus* D, vel E, vel F.

1. Capiantur enim numeri AB, BD, DE, BCD, BDF. Et quia A : B = [χ] D : E: erunt [ψ] AB, DE similes plani, & ∺ [ω] AB, BD, DE in ratione A : D, vel B : E, vel C : F. Est autem ABC : BCD = [α] AB : BD, & BDF : DEF = [α] BD : DE. Quare ABC : BCD = BDF : DEF = C : F. Denique BCD : BDF = [α] C : F. Ergo ∺ ABC, BCD, BDF, DEF. Q. E. D. χ. hyp. ψ. 21. def. 7. ω. 18. 8. α. 17. 7.

2. Quia ergo ∺ ABC, BCD, BDF, DEF: erit ABC : DEF = [β] (ABC : BCD)$^3$ = [γ] (C : F)$^3$ = (B : E)$^3$ = (A : D)$^3$. Q. E. D. β. 11. def. 5. γ. dem.

*Cor.* Ergo inter duos similes solidos cadunt duo medii proportionales in ratione laterum homologorum.

## PROP. XX. THEOR.

A 8, C 12, B 18
D 2, E 3, F 4, G 6

*Si inter duos numeros* A, B *unus medius proportionalis* C *cadat: numeri* A, B *similes plani erunt.*

Sume minimos D, E in ratione A ad C. Ergo [δ] D ipsum A aequaliter metietur, ac E ipsum C. Metiatur D ipsum A per F. Ergo DF = [ε] A, & EF = [ε] C. Ergo A planus [ζ] numerus est, cujus latera sunt D, F. Rursus, quia A : C = [η] C : B: minimi quoque D, E δ. 21. 7. ε. 9. ax. 7. ζ. 16. def. 7. η. hyp.

sunt

A 8, C 12, B 18
D 2, E 3, F 4, G 6

ſunt in ratione C : B. Hinc ſi D metiatur ipſum C per G, E metietur quoque B per G. Ergo DG = C, & EG = B. Quare & B eſt numerus planus. Et

ϑ. 17. 7. κ. 21. def. 7. quia DG = C = EF, ideoque [ϑ] D : F = E : G : erunt A & B ſimiles [κ] numeri plani. Q. E. D.

## PROP. XXI. THEOR.

A 24, C 72, D 216, B 648
E 1, F 3, G 9
H 1, K 1, N 24, L 3, M 3, O 72

*Si inter duos numeros* A, B *duo medii proportionales* C, D *cadant: numeri* A, B *ſimiles ſolidi erunt.*

λ. 35. 7. Sume [λ] tres minimos E, F, G eandem cum A, C, D rationem habentes, & ergo deinceps

μ. 3. 8. proportionales: & erunt E, G primi [μ] inter ſe,

ν. 20. 8. & ſimiles plani [ν] numeri. Sint H, K latera ipſius E, & L, M latera ipſius G. Erunt ergo

ξ. cor. 18. 8. E, F, G proportionales in ratione [ξ] H : L vel K : M. Iam quum E, F, G eandem cum A,

ο. 14. 7. C, D rationem habeant: erit E : G = [ο] A : D.

π. 23. 7. Et quia E, G primi ſunt, ideoque [π] minimi:

ρ. 21. 7. [ρ] metientur ipſos A, D aequaliter. Metiatur

σ. 9. ax. 7. E ipſum A per N: ergo EN = [σ] A. Sed E

τ. 17. def. 7. = HK: ergo A eſt ſolidus [τ] numerus, cuius latera H, K, N. Rurſus quia E, F, G minimi ſunt eandem rationem habentium, quam C, D, B: E ipſum G aequaliter metitur, ac G ipſum B. Metiatur E ipſum C per O. Ergo GO = B.

Sed

Sed G = L M. Quare B est solidus, cuius latera L, M, O. Denique quia A = EN, & C = EO : erit ν N : O = A : C = E : F = H : L = K : M. Quare similes φ solidi sunt A, B numeri. Q. E. D. ν. 17. 7. φ. 21. def. 7.

## PROP. XXII. THEOR.

A 4, B 6, C 9

*Si tres numeri* A, B, C *deinceps proportionales fuerint, primus* A *autem sit quadratus: & tertius* C *quadratus erit.*

Nam A, C similes χ sunt plani numeri. Ergo quum ψ latera ipsius A aequalia sint: ω erunt & latera ipsius B aequalia, ideoque ψ erit & C quadratus. Q. E. D. χ. 20. 8. ψ. 18. def. 7. ω. 21. def. 7.

## PROP. XXIII. THEOR.

A 8, B 12, C 18, D 27

*Si quatuor numeri* A, B, C, D *deinceps proportionales fuerint, primus autem* A *sit cubus: & quartus* D *cubus erit.*

Nam A, D sunt α similes solidi. Ergo & D cubus est. Q. E. D. α. 21. 8.

## PROP. XXIV. THEOR.

A 4, B 9
C 16, D 36

*Si duo numeri* A, B *inter se rationem habeant, quam numerus quadratus* C *ad quadratum numerum* D, *primus autem* A *sit quadratus: & secundus* B *quadratus erit.*

Quia enim inter similes planos C, D, vnus medius proportionalis β cadit; & A : B = C : D : β. 18. 8.

cadet

γ. 8. 8. cadet quoque inter A, B vnus γ medius pro-
δ. 22. 8. portionalis. Ergo & B δ est quadratus. Q. E. D.

* *Schol.* 1. Ergo ratio numeri quadrati ad non quadratum nequit exhiberi per duos quadratos numeros.

* *Schol.* 2. Et si A numerus ad numerum B est vt quadratus ad quadratum: numeri A, B similes plani sunt. (per 20. 8. & dem. huius). Et hinc dissimiles plani non sunt vt quadratus ad quadratum.

## PROP. XXV. THEOR.

A 64, B 216
C 8, D 27

*Si duo numeri A, B inter se rationem habeant, quam numerus cubus C ad cubum numerum D; primus autem A sit cubus: & secundus B cubus erit.*

Quia enim C, D similes solidi sunt: duo
ε. 19. 8. medii proportionales inter ε eos cadunt. Er-
ζ. 8. 8. go & inter A, B duo medii proportionales ζ
η. 23. 8. cadunt. Quare quum A cubus sit: B etiam η cubus erit. Q. E. D.

* Ergo ratio numeri cubi ad non cubum reperiri nequit in duobus numeris cubis.

## PROP. XXVI. THEOR.

A 6, C 12, B 24
D 1, E 2, F 4

*Similes plani numeri A, B inter se rationem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum.*

θ. 18. 8. Medius proportionalis, inter A, B cadens θ,
κ. 2. 8. sit C, & sumantur κ minimi D, E, F eandem quam

quam A, C, B rationem habentium. Ergo [λ] D, F quadrati erunt. Et quia D : F =[μ] A : B: habebit A ad B rationem quadrati ad quadratum. Q. E. D.

λ. 1. cor. 2. 8.
μ. 14. 7.

## PROP. XXVII. THEOR.

A 16, C 24, D 36, B 54
E 8, F 12, G 18, H 27

*Similes solidi numeri* A, B *inter se rationem habent, quam numerus cubus ad cubum numerum.*

Nam medii duo proportionales inter A, B cadentes [ν] sint C, D, & sint E, F, G, H totidem [ξ] minimi & in eadem ratione ac A, C, D, B. Ergo [ο] eorum extremi E, H cubi erunt. Hinc, quia A : B =[π] E : H, patet, esse A ad B, vt cubus ad cubum. Q. E. D.

ν. 19. 8.
ξ. 2. 8.
ο. 1. cor. 2. 8.
π. 14. 7.

# EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER IX.

## PROP. I. THEOR.

A 6, B 54
AB 324
$A^2$ 36

*Si duo similes plani numeri* A, B *sese multiplicantes aliquem fecerint: factus* AB *quadratus erit.*

Nam numerus A se ipsum multiplicans fa-
α. 17. 7. ciat quadratum $A^2$. Ergo [α] $A:B = A^2:AB$.
Et quia inter A & B vnus medius proportiona-
β. 18. 8. γ. 8. 8. lis [β] cadit: cadet etiam [γ] inter $A^2$ & AB vnus
δ. 22. 8. medius proportionalis. Ergo AB est [δ] quadratus. Q. E. D.

## PROP. II. THEOR.

A 3, B 12
AB 36
$A^2$ 9

*Si duo numeri sese multiplicantes* A, B, *quadratum numerum* AB *efficiant: similes plani erunt.*

Sumatur numerus quadratus $A^2$. Ergo A:
ε. 17. 7. B =[ε] $A^2$: AB. Et quia quadrati $A^2$, AB similes plani numeri sunt, & ergo inter eos
ζ. 18. 8. vnus medius proportionalis [ζ] cadit: cadet
η. 8. 8. quoque inter A & B vnus [η] medius propor-
θ. 20. 8. tionalis. Ergo A & B similes plani sunt [θ] numeri. Q. E. D.

PROP.

## PROP. III. THEOR.

$A^3$ 8 $A^6$ 64
$A^2$ 4
A 2
I

*Si cubus numerus* $A^3$ *se ipsum multiplicans faciat aliquem* $A^6$: *factus* $A^6$ *cubus erit.*

Sumatur enim cubi $A^3$ latus A, & huius quadratum $A^2$ $=^{\iota}$ AA. Ergo $A^3 =^{\kappa} A^2A$. Quare $^{\lambda}$ $1 : A = A : A^2$, & $1 : A = A^2 : A^3$. Ergo inter 1 & $A^3$ duo medii proportionales cadunt. Quia vero $^{\lambda}$ $1 : A^3 = A^3 : A^6$, totidem etiam $^{\mu}$ inter $A^3$ & $A^6$ cadunt. Ergo $A^6$ cubus $^{\nu}$ est. Q. E. D.

ι. 18. def. 7.
κ. 18. & 19. def. 7.
λ. cor. 17. 7.
μ. 8. 8.
ν. 23. 8.

## PROP. IV. THEOR.

A 8, B 27,
$A^2$ 64 AB 216

*Si numerus cubus A cubum numerum B multiplicans faciat aliquem: factus AB cubus erit.*

Sumatur numerus $A^2$, qui etiam $^{o}$ cubus erit. Et quia $A : B =^{\pi} A^2 : AB$: cubus erit $^{\varrho}$ ipse AB. Q. E. D.

ο. 3. 9.
π. 18. 7.
ϱ. 25. 8.

## PROP. V. THEOR.

A 8, B 27
$A^2$ 64, AB 216

*Si cubus numerus A numerum aliquem B multiplicans faciat cubum AB: & multiplicatus B cubus erit.*

Sumatur numerus $A^2$, qui cubus $^{\sigma}$ erit. Et quia $A : B =^{\tau} A^2 : AB$: erit $^{\upsilon}$ B cubus. Q. E. D.

σ. 3. 9.
τ. 18. 7.
υ. 25. 8.

## PROP. VI. THEOR.

A 8, $A^2$ 64, $A^3$ 512

*Si numerus* A *se ipsum multiplicans cubum* $A^2$ *faciat: & ipse* A *cubus erit.*

φ. 17. 7. Sumto enim cubo numero $A^3$, quia $A^3 : A^2$
χ. 25. 8. $=^{\varphi} A^2 : A$: erit A[χ] cubus. Q. E. D.

## PROP. VII. THEOR.

A 6, B 7
AB 42
C 3, D 2

*Si compositus numerus* A *numerum aliquem* B *multiplicans quempiam faciat: factus* AB *solidus erit.*

ψ. 13. def. 7. Numerum enim A metiatur[ψ] numerus C
ω. 9. ax. 7. per D. Ergo A $=^{\omega}$ CD. Ergo AB = CDB
α. 17. def. 7. solidus[α] est. Q. E. D.

## PROP. VIII. THEOR.

∻ 1. A 3. B 9. C 27. D 81. E 243. F 729

*Si ab vnitate quotcunque numeri* A, B, C, D, E, F *deinceps proportionales fuerint: tertius quidem ab vnitate* B *quadratus est, & vnum intermittentes omnes* D, F; *quartus autem* C *est cubus, & duos intermittentes omnes* F; *septimus vero* F *cubus simul & quadratus, & quinque intermittentes omnes.*

1. Quia enim 1 : A = A : B : vnitas ipsum
β. 20. def. 7. A aequaliter metitur[β] ac A ipsum B. Ergo
γ. 6. ax. 7. A per se ipsum metitur[γ] numerum B, & hinc
δ. 9. ax. 7. B $=^{\delta} A^2$ quadratus est. Et quoniam ∻ B,
ε. 22. 8. C, D: erit[ε] & D quadratus. Eadem ratione & F quadratus erit, & vnum intermittentes omnes quadrati erunt. Q. E. D.

2. Quia

2. Quia est 1 : A = B : C : metietur B ipsum C per A, & ergo C =[δ] AB = $A^3$ cubus erit. Et quum sint ∸ C, D, E, F : erit[ζ] & F cubus. Et similiter omnes duos intermittentes cubi erunt. Q. E. D. δ. 9. ax. 7. ζ. 23. 8.

3. Et quia F etiam ostensus est quadratus : septimus F & quadratus & cubus simul est ; idemque pariter demonstratur de omni quinque intermittente. Q. E. D.

## PROP. IX. THEOR.

∸ 1, A 4, B 16, C 64, D 256, E 1024, F 4096
∸ 1, A 8, B 64, C 512, D 4096, E 32768, F 262144

*Si ab unitate quotcunque numeri* A, B, C, D, E, F *deinceps proportionales fuerint, qui vero post unitatem* A *sit quadratus ; & reliqui omnes quadrati erunt : si qui post unitatem* A *sit cubus ; & reliqui omnes cubi erunt.*

1. Sit enim A quadratus. Iam tertius B, & unum intermittentes omnes D, F, quadrati[η] sunt. Sed quia sunt ∸ A, B, C, & A quadratus est : erit[θ] C quadratus, hinc & E &c. Omnes ergo quadrati sunt. Q. E. D. η. 8. 9. θ. 22. 8.

2. Sit A cubus. Iam quartus C, & omnes F, qui duos intermittunt,[η] cubi sunt. Et quia 1 : A = A : B ; & ergo B =[ι] $A^2$ : erit & [κ] B cubus ; quare & E cubus[λ] erit. Et ob ∸ A, B, C, D, erit &[λ] D cubus. Et similiter reliqui omnes cubi sunt. Q. E. D. ι. 20. def. 7. & 9. ax. 7. κ. 3. 9. λ. 23. 8.

## PROP. X. THEOR.

1, A 2, B 4, C 8, D 16, E 32, F 64

*Si ab vnitate quotcunque numeri* A, B, C, D, E, F *deinceps proportionales fuerint, qui vero post vnitatem* A *non sit quadratus; neque alius vllus quadratus erit, practer tertium ab vnitate* B, *&* *vnum intermittentes omnes* D, F: *si, qui post vnitatem,* A *non sit cubus; neque alius vllus cubus erit, praeter quartum ab vnitate* C, *&* *duos intermittentes omnes* F.

1. Non sit A quadratus, & tamen C quadratus sit, si fieri potest. Ergo quia & B quadratus [μ] est: A ad B eam rationem habet, quam quadratus B ad quadratum C, & hinc A quadratus [ν] erit; *contra hypothesin.* Similiter ostendemus nullum alium quadratum esse præter B, D, F &c. Q. E. D.

μ. 8. 9.
ν. 24. 8.

2. Si A cubus non sit, & tamen D cubus esset: quoniam C cubus [μ] est; haberet & B ad C rationem, quam cubus C ad cubum D, & ergo ipse B cubus [o] esset. Hinc quia, ob 1 : A = A ; B, est B = [π] $A^2$, esset & A cubus [ρ]; *contra hyp.* Similiter ostendemus nec vllum alium cubum esse præter C & F &c. Q. E. D.

o. 25. 8.
π. 20. def. & 9. ax. 7.
ρ. 6. 9.

## PROP. XI. THEOR.

∴ 1, A 3, B 9, C 27, D 81, E 243

*Si ab vnitate quotcunque numeri* A, B, C, D, E *deinceps proportionales fuerint: minor* A *maiorem* D *metitur per aliquem* C *eorum, qui sunt in numeris proportionalibus.*

Quia

Quia enim est 1 : A = C : D : aeque metitur C ipsum D[σ] ac 1 ipsum A. Ergo & A ipsum D aeque[τ] metitur ac 1 ipsum C, id est[υ] A metitur D per C. σ. 20. def. 7. τ. 15. 7. υ. 9. ax. 7.

* Pariter, si sumantur B & E, demonstratur B metiri ipsum E per aliquem C inter proportionales : quia[φ] 1 : B = C : E. Q. E. D. φ. 14. 7.

* *Cor.* In serie numerorum ab vnitate deinceps proportionalium secundus A quemuis D metitur per proxime praecedentem C.

* *Schol.* 1. Et hinc secundus A quemuis C multiplicans facit proxime sequentem D.

* *Schol.* 2. Si numerus qui metitur aliquem ex proportionalibus non sit vnus proportionalium : neque is, per quem metitur, vnus ex proportionalibus erit[χ]. χ. 2. cor. 16. 7.

## PROP. XII. THEOR.

∺ 1, A 4, B 16, C 64, D 256
E 2, H 8, G 32, F 128

*Si ab vnitate quotlibet numeri* A, B, C, D *deinceps proportionales fuerint : quicunque primorum numerum* E *metiuntur vltimum* D, *iidem & eum* A, *qui vnitati proximus est, metientur.*

Si negas E metiri ipsum A : erunt[ψ] E & A primi inter se. Metiatur autem E ipsum D per F : & erit EF =[α] D =[α] AC. Quare A : E =[β] F : C. Sunt autem A, E primi inter se, & [γ] minimi : hinc E metitur[δ] etiam C. Metiatur per G. Ergo EG =[α] C =[α] AB. Quare A : E =[β] G : B. Hinc E metitur[δ] ipsum B. Metiatur eum per H. Ergo EH =[α] B =[α] $A^2$. Hinc A : E =[β] H : A. Ergo E metietur quoque[δ] ipsum A. Q. E. D. ψ. 31. 7. α. 9. ax. 7. α. 1. sch. 11. 9 β. 19. 7. γ. 23. 7. δ. cor. 21. 7

 * *Schol.*

* *Schol.* 1. Numerus primus, vltimum metiens, metitur omnes vltimum præcedentes, per cor. 11. 9. & 11. ax. 7.

* *Schol.* 2. Si quis numerus, proximum vnitati non metiens, vltimum metiatur, numerus erit compositus. Si enim primus esset, metiretur proximum vnitati.

* *Schol.* 3. Si proximus vnitati sit numerus primus: nullus alius numerus primus vltimum metietur. Si enim alius metiretur, vnitati proximum quoque metiretur, qui ergo primus non foret.

## PROP. XIII. THEOR.

∺ 1, A 5, B 25, C 125, D 625

E--- H--- G--- F---

*Si ab vnitate quotcunque numeri* A, B, C, D *deinceps proportionales fuerint, qui vero post vnitatem* A *primus sit: maximum* D *nullus alius metietur, praeter eos* A, B, C, *qui sunt in numeris proportionalibus.*

Si enim fieri potest: metiatur vltimum D aliquis numerus E, qui non idem sit cum aliquo ipsorum A, B, C. Ergo quia E nume-
ζ. 3. schol. 12. 9. rus primus esse ζ nequit: compositus erit.
η. 33. 7. Quare ipsum E metietur η aliquis primus, qui nullus erit praeter A. Si quis enim alius me-
θ. ax. 7. tiretur ipsum E: idem θ quoque ipsum D metiretur; quod fieri nequit ζ. Ergo A metietur E. Iam metiatur E ipsum D per F: & F
ι. 2. sch. 11. 9. nullus ex ipsis A, B, C esse ι poterit. Sed quia
κ. 2. cor. 16. 7. F metietur κ D: eodem modo, quo ante de-
λ. 9. ax. 7. monstrabitur, F compositum esse, quem A
μ. 1 sch. 11. 9. metiatur. Et quia, ob EF = λ D = μ AC,
ν. 19. 7. est A : E = ν F : C; A vero ipsum E metitur:

F quo-

F quoque ipsum C[ξ] metietur. Metiatur per G, qui nullus ex ipsis A, B esse[ι] poterit. Et quia ob FG =[λ] C =[μ] AB, est A : F =[ν] G : B; A vero ipsum F metitur: metietur[ξ] & G ipsum B. Metiatur per H. Quum vero G nullus sit ex proportionalibus: neque H idem [ι] erit, qui A. Sed quum, ob GH =[λ] B =[μ] $A^2$, sit A : G =[ν] H : A, eodem vero, quo ante modo, demonstratur, A ipsum G metiri, quia G ipsum C* metitur: patet, H metiri ipsum[ν] A, & ergo A non esse[ο] primum; *contra hypothesin.*

ξ. 20. def. 7.

ο. 11. def. 7.

* *Schol.* Quia similiter demonstratur, quod ipsum C nullus numerus metiatur, praeter A vel B: patet, quod numeros ab vnitate deinceps proportionales, si proximus vnitati primus sit, nullus nnmerus metiatur, nisi qui inter ipsos proportionales habetur.

## PROP. XIV. THEOR.

A 30
B 2, C 3, D 5
E-- F--

*Si minimum numerum* A *primi numeri* B, C, D *metiantur: nullus alius numerus primus metietur ipsum* A *praeter eos, qui a principio metiebantur,* B, C, D.

Si fieri potest, metiatur ipsum A alius E, per F. Ergo E & F facient[π] numerum A. Quare quum B, C, & D metiantur ipsum A: metientur quoque vnum[ρ] ipsorum E, F. Non autem metiri possunt[σ] primum E: ergo alterum F metientur. Est autem F < A. Quare A non erit minimus, quem B, C, D metiantur; *contra hypothesin.*

π. 9. ax. 7.

ρ. 32. 7.

σ. 11. def. 7.

## PROP. XV. THEOR.

$\div$ A 9, B 12, C 16
D 3, E 4

*Si tres numeri* A, B, C, *deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium: duo quilibet compositi ad reliquum primi erunt* (A + B ad C, B + C ad A, & A + C ad B).

ν. 35. 7. Sumantur duo numeri [ν] D, E, minimi eandem cum A, B, C rationem habentium. Ergo [φ] A $= D^2$, B $= DE$, & C $= E^2$. Et quia D, E primi [χ] inter se sunt: erit & D + E ad vtrumque [ψ] ipsorum D, E primus. Ergo quia numeri D + E & D ad ipsum E primi sunt, erit [ω] & $(D+E) \times D$ ad eundem E primus. Sed $(D + E) \times D =$ [α] $D^2 + ED$. Ergo $D^2 + ED$ primus est ad E, hinc quoque [β] ad $E^2$. Patet igitur A + B esse primum [γ] ad C. Similiter ostenditur, esse B + C primum ad A. Denique quia D + E, D, & E primi sunt inter se: erit [δ] $(D+E)^2$ ad DE primus. Sed [α] $(D+E)^2 = D^2 + 2\,DE + E^2$. Ergo $D^2 + 2\,DE + E^2$ primus est [γ] ad ipsum DE, & hinc [ψ] etiam $D^2 + DE + E^2$ ad ipsum DE, & pari ratione [ψ] $D^2 + E^2$ ad eundem DE primus erit. Quare & [γ] A + C ad ipsum B primus est. Q. E. D.

φ. 2. 8.
χ. 24. 7.
ψ. 30. 7.
ω. 26. 7.
α. 2. ax. 7.
β. 27. 7.
γ. 1. ax. 7.
δ. 26. 27. 7.

## PROP. XVI. THEOR.

A 5, B 8, C - - -

*Si duo numeri* A, B *primi inter se fuerint: non erit vt primus* A *ad secundum* B, *ita secundus* B *ad alium vllum.*

Si

Si enim fieri poteſt: ſit C numerus talis, vt ſit A : B = B : C. Quia autem A & B minimi[ε] ſunt eandem cum ipſis rationem habentium: A metietur[ζ] ipſum B. Hinc quum A quoque ſe ipſum metiatur: non erunt A, B primi inter ſe; *contra hypotheſin.*

ε. 23. 7.
ζ. 21. 7.

## PROP. XVII. THEOR.

A 8, B 12, C 18, D 27, E - - -

*Si fuerint quotcunque numeri* A, B, C, D *deinceps proportionales; extremi autem ipſorum,* A, D, *primi inter ſe ſint: non erit vt primus* A *ad ſecundum* B *ita vltimus* D *ad alium vllum.*

Si negas: ſit A : B = D : E. Quia ergo A : D =[η] B : E, & A, D minimi[θ]; A ipſum B[ι] metietur. Ergo, quum ſit A : B = B : C = C : D; metietur B[κ] ipſum C, & ergo ipſum[λ] D. Quare & A ipſum D[λ] metietur, & hinc A, D primi non erunt; *contra hypotheſin.*

η. 13. 7.
θ. 23. 7.
ι. 21. 7.
κ. 20. def. 7.
λ. 11. ax. 7.

## PROP. XVIII. PROBL.

*Duobus numeris* A, B *datis, conſiderare, an tertius ipſis proportionalis inueniri poſſit.*

1. *Caſ.* Si A, B primi inter ſe ſunt: oſtenſum iam[μ] eſt, tertium proportionalem inueniri non poſſe.

μ. 16. 9.

A 4, B 6, C 9
$B^2$ 36

2. *Caſ.* Si A, B non ſunt primi, & A metitur $B^2$: metiatur per C, qui erit tertius proportionalis. Quia enim AC =[ν] $B^2$: erit A : B =[ξ] B : C.

ν. 9. ax. 7.
ξ. 20. 7.

3. *Caſ.*

A 6, B 4, C --
$B^2$ 16

*3. Cas.* Si vero A, B primi non sunt, nec A ipsum $B^2$ metitur: nequit tertius proportionalis inueniri. Si negas: sit inuentus C. Quia ergo AC = ξ $B^2$: A metitur ο $B^2$; *contra hypothesin.*

ξ. 20. 7.
ο. 23. def. 7.

PROP. XIX. PROBL.

*Tribus numeris datis* A, B, C, *considerare, an quartus ipsis proportionalis inueniri possit.*

A 3, B 7, C 6, D 14
BC 42

*1. Cas.* Si A metitur BC: potest inueniri quartus proportionalis D, is nempe per quem A ipsum BC metitur. Nam quia AD = π BC: erit A : B = ρ C : D.

π. 9. ax. 7.
ρ. 19. 7.

A 3, B 5, C 7, D --
BC 35

*2. Cas.* Si A non metitur BC: non potest quartus proportionalis inueniri. Si quis enim esset D: ob A : B = C : D, foret AD = ρ BC, & igitur A metiretur σ BC; *contra hyp.*

σ. 23. def. 7.

PROP. XX. THEOR.

*Primi numeri plures sunt omni proposita multitudine primorum numerorum* A, B, C.

τ. 38. 7.

A 2, B 3, C 5
D 30

Sumatur enim τ minimus D, quem ipsi A, B, C metiantur, & apponatur vnitas. Iam si D + 1 primus est: patet propositio.

A 5, B 3, C 7
E 53, D 105

υ. 33. 7.

Si vero D + 1 primus non est: metietur eum υ primus aliquis E, qui nulli ipsorum A,

B, C

B, C idem esse potest. Si enim alicui eorum idem esset: metiretur E quoque ipsum D, ergo & [φ] vnitatem. Q. E. A. Ergo nouus numerus primus E inuentus est. Q. E. D. φ. 12. ax. 7.

## PROP. XXI. THEOR.

A 4, B 6, C 8, A + B + C 18

*Si pares numeri quotcunque* A, B, C *componantur: totus* A + B + C *par erit.*

Quia enim vnusquisque ipsorum A, B, C partem [χ] dimidiam habet: totus etiam A + B + C partem dimidiam [ψ] habebit, & igitur par erit. Q. E. D. χ. 6. def. 7. ψ. 2. ax. 7.

## PROP. XXII. THEOR.

A 5, B 3, C 7, D 9, A + B + C + D 24

*Si impares numeri* A, B, C, D *quotcunque componantur; multitudo autem ipsorum sit par: totus* A + B + C + D *par erit.*

Quia enim A — 1, B — 1, C — 1, D — 1 sunt numeri [α] pares, & multitudo vnitatum detractarum etiam par est: erit summa numerorum A — 1, B — 1, C — 1, D — 1 & vnitatum residuarum, id est summa A + B + C + D, numerus [α] par. Q. E. D. α. 7. def. 7. α. 21. 9.

## PROP. XXIII. THEOR.

A 11, B 5, C 3, A + B + C 19

*Si impares numeri* A, B, C *quotcunque componantur; & multitudo ipsorum sit impar: & totus* A + B + C *impar erit.*

Nam

A 11, B 5, C 3, A + B + C 19

β. 7. def. 7. Nam quia C — 1 par $^{\beta}$ eſt, & A + B itidem
γ. 22. 9. par $^{\gamma}$ eſt: erit & A + B + C — 1 numerus $^{\delta}$
δ. 21. 9. par. Ergo $^{\beta}$ patet numerum A + B + C imparem eſſe. Q. E. D.

## PROP. XXIV. THEOR.

A 12
B 4
A — B 8

*Si a pari numero* A *par auferatur* B: *& reliquus* A — B *par erit.*

ε. 6. def. 7. Quum enim tam A, quam B habeat partem dimidiam $^{\varepsilon}$: habebit etiam A — B partem dimidiam, & igitur $^{\varepsilon}$ par erit. Q. E. D.

## PROP. XXV. THEOR.

A 12 C 4
B 5
A — B 7

*Si a pari numero* A *impar* B *auferatur: reliquus* A — B *impar erit.*

ζ. 7. def. 7. Quum enim B $^{\zeta}$ conſtet ex pa-
η. 24. 9. ri C & vnitate; A — C autem $^{\eta}$ par ſit: erit A — C — 1, id eſt A — B, numerus $^{\zeta}$ impar. Q. E. D.

## PROP. XXVI. THEOR.

A....C..D.B

*Si ab impari numero* AB *impar* BC *auferatur: reliquus* AC *par erit.*

Ab vtroque auferatur vnitas BD. Ergo
ϑ. 7. def. 7. tam AD quam DC par $^{\vartheta}$ erit; ergo & $^{\iota}$ reli-
ι. 24. 7. quus AC. Q. E. D.

## PROP. XXVII. THEOR.

A.D....C..B

*Si ab impari numero* AB *par* BC *auferatur: reliquus* AC *impar erit.*

Nam

Nam ablata vnitate AD, erit DB par [κ]. Ergo DB — BC = DC par quoque [λ] est, & proinde* AC = DC + 1, impar. Q. E. D.

κ. 7. def. 7.
λ. 24. 7.

## PROP. XXVIII. THEOR.

A... B..
C.. .. ..

*Si impar numerus* A *parem* B *multiplicans faciat aliquem: factus* C *par erit.*

Nam quum C componatur [μ] ex tot numeris aequalibus ipsi B, quot in A sunt vnitates: patet C componi ex numeris paribus, ergo ipsum parem [ν] esse. Q. E. D.

μ. 15. def. 7.
ν. 21. 9.

* *Schol.* Eadem ratione, si A & B pares sunt: factus AB par est.

## PROP. XXIX. THEOR.

A..., B.....
C..... ..... .....

*Si impar numerus* A *imparem numerum* B *multiplicans faciat aliquem: factus* C *impar erit.*

Quia enim C componitur [ξ] ex tot numeris ipsi B aequalibus, quot A vnitates habet: patet C componi ex multitudine impari numerorum imparium, ideoque imparem [ο] esse. Q. E. D.

ξ. 15. def. 7.
ο. 23. 9.

* *Schol.* 1. *Numerus* A, *numerum imparem* C *metiens, impar est, & per imparem* B *metitur.* Si enim negas: aut neuter ipsorum A, B impar esset, ideoque nec C = AB impar [π] esse posset; contra hypothesin: aut alteruter tantum ipsorum A, B esset impar, & neque sic C posset [ρ] impar esse; etiam contra hypothesin. Quare vterque A, B impar est.

π. sch. 28. 9.
ρ. 28. 9.

2. Paris numeri quadrati latus par est.

PROP.

## PROP. XXX. THEOR.

A 3, B 12
C 4

*Si impar numerus* A *parem numerum* B *metiatur: & dimidium eius metietur.*

Metiatur enim A ipſum B per C: dico C non imparem eſſe; quia C poſito impari, et-
σ. 29. 9. iam AC=B impar[σ] eſſet, contra hypotheſin. Ergo C par erit; & A ipſum B pariter me-
τ. ax. 7. tietur, & ob id eius dimidium quoque[τ] metietur. Q. E. D.

* *Cor.* Impar numerus parem metitur per parem.

## PROP. XXXI. THEOR.

A 3 B 5
2 B 10
C - - -

*Si impar numerus* A *ad aliquem numerum* B *ſit primus: & ad ipſius duplum* 2 B *primus erit.*

Si negas, A & 2 B primos eſſe
υ. 12. def. 7. inter ſe: metiatur[υ] eos idem numerus C. Et
φ. ſch. 29. 9. quia A impar eſt: C quoque impar[φ] erit.
χ. 6. def. 7. Sed quia C metitur ipſum 2 B, qui par[χ] eſt:
ψ. 30. 9. metietur C etiam[ψ] dimidium eius, nempe B. Ergo A & B non[υ] erunt primi inter ſe; *contra hypotheſin.*

## PROP. XXXII. THEOR.

1, A 2, B 4, C 8, D 16

*Numerorum* B, C, D, *a binario* A *duplatorum, vnusquisque pariter par eſt tantum.*

ω. hyp. Nam quia[ω] ſinguli B, C, D e binario facti
α. 6. def. 7. ſunt: pares eos eſſe[α] conſtat. Et quum prae-
β. 20. def. 7. terea[β] ∺ 1, A, B, C, D: binarius A ſingulos

B, C

B,C,D metitur [γ] per aliquem ipsorum A, B, C, D. Ergo singuli B, C, D pariter pares [δ] sunt. Denique quia A primus est, ideoque ipsos B, C, D nullus numerus [ε] metiri potest, qui non vnus ex ipsis A, B, C, D sit: singuli B, C, D pariter pares sunt tantum. Q. E. D.

γ. cor. 11. 9.
δ. 8. def. 7.
ε. sch. 13. 9.

## PROP. XXXIII. THEOR.

A 10
$\frac{1}{2}$A 5

*Si numerus* A *dimidium* $\frac{1}{2}$A *habeat imparem: pariter impar est tantum.*

Quia enim $\frac{1}{2}$A metitur ipsum A per 2: patet A esse [ζ] pariter imparem. Dico & tantum: quia si etiam A ponas pariter parem; metietur [η] eum aliquis par pariter, ideoque idem par eius dimidium $\frac{1}{2}$A, qui impar est, metietur [θ]. Q. E. A. [ι]

ζ. 9. def. 7.
η. 8. def. 7.
θ. ax. 7.
ι. sch. 29. 9.

## PROP. XXXIV. THEOR.

A 20
$\frac{1}{2}$A 10
$\frac{1}{4}$A 5

*Si par numerus* A *neque sit a binario duplatus, neque dimidium* $\frac{1}{2}$A *imparem habeat: pariter par est, & pariter impar.*

Nam A pariter parem esse, [κ] manifestum est, quia $\frac{1}{2}$A par est. Secundo, si $\frac{1}{2}$A iterum bifariam diuiditur, & huius dimidium rursus bifariam, & sic porro, tandem proueniet numerus $\frac{1}{4}$A impar, qui ipsum A per parem 4 metietur [λ]. Nam si secus esset: perueniretur tandem ad binarium; & A foret a binario duplatus. Quod est contra hypothesin. Ergo [μ] A est etiam pariter impar. Q. E. D.

κ. 8. def. 7.
λ. cor. 30. 9.
μ. 9. def. 7.

## PROP. XXXV. THEOR.

A........
B....G........C
D..................
E.........L......K....H........F

*Si sint quotcunque numeri* A, BC, D, EF *deinceps proportionales; auferantur autem a secundo* BC *&* *vltimo* EF *aequales primo* CG, FH: *erit vt secundi excessus* BG *ad primum* A, *ita vltimi excessus* EH *ad omnes ipsum antecedentes* A + BC + D.

Ponatur FK = BC, & FL = D. Hinc quia
v. 3. ax. 1. FH = CG, erit HK =[v] GB. Et quum [ξ] sit
ξ. 16. ax. 7. EF : D = D : BC = BC : A: erit EF : FL =
o. sch. 13. 7. FL : FK = FK : FH, ideoque diuidendo [o] EL :
LF = LK : FK = KH : FH, & ergo BG : A =
π. 12. 7. KH : FH =[π] EH : LF + FK + FH = EH :
A + BC + D. Q. E. D.

## PROP. XXXVI. THEOR.

∺ 1, A 2, B 4, C 8, D 16
E (= 1 + A + B + C + D) 31, ED 496
∺ E 31, F 62, G 124, H 248
K--- L----

*Si ab vnitate quotcunque numeri* A, B, C, D *deinceps proportionales exponantur in dupla analogia, quoad totus compositus* E *primus fiat; &* *totus* E *in vltimum* D *multiplicatus faciat aliquem: factus* ED *perfectus erit.*

Quot enim sunt A, B, C, D, tot sumantur ab E deinceps proportionales & in eadem ra-
ρ. 14. 7. tione dupla, E, F, G, H. Ergo [ρ] A : D =
E : H.

$E:H$. Hinc ob $ED =$ [σ] $AH = 2H$: erunt adhuc $\div E, F, G, H, ED$; & ergo $F - E : E =$ [τ] $ED - E : E + F + G + H$. Est autem [υ] $F - E = 2E - E = E$. Quare $ED - E = E + F + G + H$, & addito $E = 1 + A + B + C + D$, erit $ED = 1 + A + B + C + D + E + F + G + H$, qui singuli numeri partes sunt ipsius $ED$, quia ipsum $ED$ tam numerus [φ] $D$, ideoque [χ] $A, B, C$, quam [ψ] $H$, ideoque $E, F, G$ [ω] metiuntur. Denique dico nullum alium, praeter eos, metiri ipsum $ED$. Pone enim alium $K$, qui ipsum $ED$ metiatur per $L$. Quia igitur ob $KL =$ [α] $ED$ est $E:L = K:D$; $K$ autem ipsum $D$ non [β] metitur: neque $E$ ipsum $L$ [γ] metietur. Erunt itaque [δ] $E, L$ primi inter se, ideoque [ε] minimi eandem rationem habentium. Quare, quum fuerit $E:L = K:D$, $L$ metietur [ζ] ipsum $D$, & proinde erit aliquis [β] ipsorum $A, B, C$. Sit $L = B$. Sed quia $E, F, G$ sunt in eadem ratione, in qua $B, C, D$: erit ex aequo [ε] $B:D = E:G$, & hinc $BG =$ [σ] $ED =$ [ψ] $KL$. Quare quum sit $B:L =$ [σ] $K:G$, & $B = L$: erit & [γ] $K = G$; contra hypothesin. Ergo nullus alius numerus praeter $A, B, C, D, E, F, G$ & $H$ ipsius $ED$ pars [η] est. Quare $ED = A + B + C + D + E + F + G + 1$ perfectus [θ] numerus est. Q. E. D.

σ. 19. 7.
τ. 35. 9.
υ. constr.
φ. 8. ax. 7.
χ. 11. 9. & 11. ax. 7.
ψ. dem.
ω. constr. & 11. ax. 7.
α. 9. ax. 7.
β. 13. 9.
γ. 20. def. 7.
δ. 31. 7.
ε. 23. 7.
ζ. cor. 21. 7.
η. 3. def. 7.
θ. 22. def. 7.

# EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER X.

## DEFINITIONES.

1. *Commensurabiles magnitudines* dicuntur, quas eadem mensura metitur.

2. *Incommensurabiles* autem, quarum nullam esse communem mensuram contingit.

3. *Rectae lineae potentia commensurabiles* sunt, quum ea, quae ab ipsis fiunt, quadrata idem spatium metitur;

4. *Incommensurabiles* autem, quum quadrata, quae ab ipsis fiunt, nullum commune spatium metiri contingit.

5. His positis, ostenditur, cuicunque rectae lineae propositae rectas lineas, multitudine infinitas, & commensurabiles esse & incommensurabiles, alias quidem longitudine & potentia, alias vero potentia solum. Vocetur autem proposita *recta linea rationalis;*

6. Et huic commensurabiles, siue longitudine & potentia, siue potentia solum, *rationales;*

7. Incommensurabiles vero *irrationales* vocentur.

8. Et *quadratum*, quod a recta linea proposita fit, dicatur *rationale;*

9. Et

9. Et huic commensurabilia quidem *rationalia*;

10. Incommensurabilia vero dicantur *irrationalia*.

11. Et *lineae*, quae † incommensurabilia possunt, vocentur *irrationales*; si quidem ea quadrata sint, ipsorum latera; si vero alia quaepiam rectilinea, ipsae a quibus aequalia quadrata describuntur.

† Puta irrationalia.

* Scilicet recta posse spatium dicitur, si quadratum ab ea descriptum spatio illi aequale est.

* In locum terminorum hic definitorum sequentes notas breuitatis studio substituimus.

Ʃ est nota commensurabilium. Si quando scriptum fuerit AB Ʃ CD, leges: rectæ AB, CD longitudine commensurabiles sunt. Et si inter plurium magnitudinum binas quasuis proximas hanc notam deprehenderis, cogitabis, eas omnes sibi inuicem commensurabiles esse. Sed, A non Ʃ B notat, spatia A, B incommensurabilia, vel rectas A, B longitudine incommensurabiles esse.

Є nota est rectarum linearum potentia solum commensurabilium, siue longitudine tantum incommensurabilium.

ΘЄ est nota rectarum potentia & longitudine incommensurabilium.

ρ notat quamuis magnitudinem rationalem.

αλ quamuis irrationalem magnitudinem designat.

√ indicat rectam, quæ spatium quoddam potest. E. gr. √ EF est recta quae spatium EF potest. √ (ABq — BCq) est recta, cuius quadrato recta AB plus potest quam recta BC.

### * *Postulatum.*

Postulatur, quamlibet magnitudinem toties posse multiplicari, donec quamlibet magnitudinem eiusdem generis excedat.

### * *Axiomata.*

1. Magnitudo, quotcunque magnitudines metiens, compositam quoque ex ipsis metitur.

2. Magnitudo, quamcunque magnitudinem metiens, metitur quoque omnem magnitudinem, quam illa metitur.

3. Magnitudo, metiens totam magnitudinem & ablatam, metitur & reliquam.

4. Omnis magnitudo se ipsam metitur.

5. Maior magnitudo minorem metiri nequit.

6. Si magnitudo toties magnitudinem continet, vel in ea continetur, quoties numerus vnitatem, vel vnitas in numero: magnitudinis ad magnitudinem eadem ratio est, quae numeri ad vnitatem, vel vnitatis ad numerum.

## PROP. I. THEOR.

*Duabus magnitudinibus* AB, C *expositis, si a maiori* AB *auferatur maius quam dimidium, & ab eo, quod reliquum est, rursus auferatur maius quam dimidium, & hoc semper fiat: relinquetur tandem quaedam magnitudo, quae minori magnitudine exposita* C *minor erit.*

a. post. 10.


Sit enim [a] DE ipsius C multiplex ipsa AB maior, & sint eius partes DF = FG = GE = C. Auferatur ab AB dimidia maior BH, & a reliqua AH dimidia maior HK, & sic deinceps donec in AB partes AK, KH, HB aeque multae sint partibus DF, FG, GE. Jam quia

DE

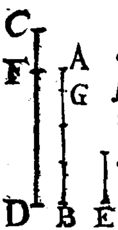
$DE > AB$, & ablata $EG < \frac{1}{2} DE$, & ablata $BH > \frac{1}{2} AB$: erit reliqua $DG > AH$. Eadem ratione erit $DF > AK$. Ergo $AK < C$. Q. E. D.

*Aliter.*

Fiant eadem quae antea, & praeterea in recta quadam capiantur relictae AK aequales tot partes LM, MN, NO, quot sunt diuisiones in AB. Et quia $BH > \frac{1}{2} AB$: erit $BH > HA > KA$; ideoque $BH > ON$. Simili ratione est $HK > NM$. Ergo tota $AB > OL$. Hinc & $DE > AB > OL$. Est autem [β] $DE : OL$ β. 15. 5.
$= DF : LM$. Quare [γ] $DF > LM$, id est, $C$ γ. sch. 16. 5.
$> AK$. Q. E. D.

*Idem demonstrabitur, etiamsi non maius dimidio, sed ipsum dimidium, continue auferatur.*

## PROP. II. THEOR.




*Si duabus magnitudinibus inaequalibus* AB, CD *expositis, detracta semper minore de maiore, reliqua minime praecedentem metiatur: magnitudines* AB, CD *incommensurabiles erunt.*

Si negas: sit [δ] ipsarum AB, CD δ. 1. def. 10
communis mensura E. Iam quia AB diuidens ipsam CD relinquit aliquam CF se ipsa minorem, & haec CF diuidens alteram AB etiam se ipsa minorem AG, & hoc semper fieri ponitur: relinquetur tandem aliqua $AG < E$. Quum vero E metiatur ipsam AB, & AB ipsam DF: E metietur [ε] quoque ipsam DF. ε. 2. ax. 10.

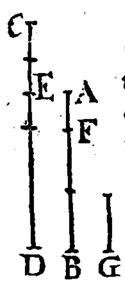
 Sed

Sed & totam CD metiri ponitur:
ζ. 3. ax. 10. ergo ζ & reliquam FC metietur,
ε. 2. ax. 10. & hinc quoque ε ipsam BG, quam CF metiebatur. Quare E, metiens AB, & BG, metietur quoque se ipsa minorem AG. Q.
η. 5. ax. 10. E. A η.

## PROP. III. PROBL.

*Duabus magnitudinibus commensurabilibus* AB, CD *datis*, *maximam earum communem mensuram inuenire.*

*Cas.* 1. Si minor AB maiorem CD metitur:
θ. 4. & 5. ax. 10. liquet θ ipsam AB esse maximam communem mensuram. Q. E. F.



*Cas.* 2. Si minor AB maiorem CD non metitur: detrahatur, quoties fieri potest, AB de CD, & reliqua EC de AB, & sic deinceps, donec relinquatur aliqua AF, quae metiatur praecedentem EC; id quod
ι. 2. 10. tandem fiat ι necesse est.

Quum ergo AF ipsam EC, & haec
κ. 2. ax. 10. ipsam BF metiatur: AF quoque κ ipsam BF, &
λ. 4. & 1. ax. 10. ergo λ totam AB, ideoque κ ipsam ED metietur.
μ. 1. ax. 10. Sed eadem AF metitur ipsam EC: ergo μ totam CD quoque metitur. Est ergo AF ipsarum AB, CD communis mensura. Dico autem & maximam esse. Si enim alia G > AF metiretur vtramque AB, CD: eadem G metiretur
ν. 3. ax. 10. quoque κ ipsam ED, ergo & ν ipsam EC, & κ ipsam

ipsam BF, &[x] ipsam AF. Q. E. A[ȝ]. Ergo ȝ. 5. ax. 10.
AF est maxima vtriusque AB, CD mensura. Q. E. F.

*Cor.* Ex hoc manifestum est, si magnitudo G duas magnitudines AB, CD metitur, & maximam ipsarum communem mensuram AF metiri.

## PROP. IV. PROBL.

*Tribus magnitudinibus commensurabilibus* A, B, C *datis, maximam ipsarum communem mensuram inuenire.*


Sumatur[a] duarum A, B maxima communis mensura D. a. 3. 10.

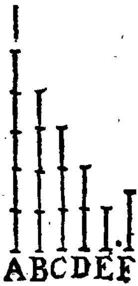
*Cas. 1.* Si haec D metitur tertiam C: erit factum.

Nam D communem esse mensuram patet. Si vero maximam esse negas: sit ea E > D. Ergo E metietur[π] ipsam D. Q. E. A[ϱ]. Quare D maxima communis mensura erit. Q. E. F. π. cor. 3. 10. ϱ. 5. ax. 10.


*Cas. 2.* Si vero D tertiam C non metitur: sumatur[a] ipsarum C, D maxima communis mensura E. Dico factum.

Primo enim sumi posse communem mensuram ipsarum C, D sic liquet. Quia A, B, C commensurabiles ponuntur: erit earum[σ] aliqua communis mensura. Haec, ipsas A, B metiens, metietur quoque[π] ipsam D, & ergo erit ipsarum C, D communis mensura. σ. 1. def. 10.

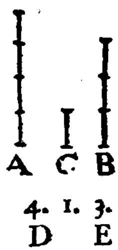
 sura.




τ. 4. ax. 10. ſura. Sit ea igitur E: &[τ] patet E eſſe communem trium A, B, C menſuram. Deinde ſi ponas aliam F > E pro communi earundem menſura:
π. cor. 3. 10. metietur[π] F ipſam D, &[υ] ipſam C, ideoque[π]
υ. hyp. ipſam E. Q. E. A[ϛ]. Ergo E eſt maxima trium A, B, C menſura. Q. E. F.

*Coroll.* **Hinc ſi magnitudo F tres metiatur magnitudines A, B, C: & ipſarum maximam communem menſuram E metietur.**

## PROP. V. THEOR.




*Commenſurabiles magnitudines* A, B, *inter ſe rationem habent, quam numerus ad numerum.*

φ. 1. def. 10. Quoniam A ≤ B: metietur[φ] eas aliqua C. Et quoties C metitur A, tot vnitates ſint in numero D, quoties autem C metitur B, tot ſint
χ. 6. ax. 10. vnitates in E. Hinc eſt[χ] A : C = D : 1, & C : B = 1 : E, & ergo ex aequo A : B = D : E. Q. E. D.

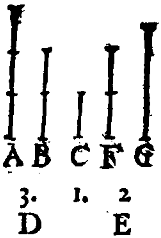
## PROP. VI. THEOR.

Fig. Prop. V. *Si duae magnitudines* A, B, *inter ſe rationem habeant, quam numerus* D *ad numerum* E: *magnitudines* A, B *erunt commenſurabiles.*

Quot enim vnitates ſunt in D, in tot aequales partes diuidatur A, & vni harum ſit
ψ. 6. ax. 10. = C. Eſt[ψ] ergo 1 : D = C : A. Sed ponitur D : E = A : B. Quare ex aequo 1 : E = C : B,

C : B, ideoque C metitur B. Metiebatur autem A. Ergo A $\lesssim$ B. Q. E. D.

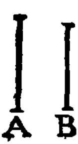
*Aliter.*




Quot vnitates ſunt in D, in tot partes aequales diuide A, earumque vni ſit = C. Et quot vnitates ſunt in E, ex tot magnitudinibus ipſi C aequalibus componatur F. Ergo eſt $^{\gamma}$ A : C = D : 1, & C : F = 1 : E, & ergo ex aequo A : F = D : E. Sed erat A : B = D : E. Quare A : B = A : F. Ergo $^{\alpha}$ B = F. Metitur autem C ipſam F, α. 9. 5.
ergo & ipſam B. Sed eadem C metitur A. Ergo A $\lesssim$ C. Q. E. D.

*Coroll.* Ex hoc manifeſtum eſt, ſi ſint duo numeri D, E, & recta linea A, fieri poſſe vt numerus D ad E numerum ita rectam A ad rectam F. Si autem inter ipſas A, F media proportionalis G ſumatur, fieri poterit, vt numerus D ad E numerum, ita figura quae fit a recta A ad figuram ſimilem ſimiliterque deſcriptam a recta G. Nam $^{\alpha}$ α. 2. cor. 20. 6.
figura quae fit ab A eſt ad ſimilem ſimiliterque deſcriptam a G = A : F = D : E.

## PROP. VII. THEOR.




*Incommenſurabiles magnitudines* A, B *inter ſe rationem non habent, quam numerus ad numerum.*

Si enim A ad B haberet rationem numeri ad numerum: foret $^{\beta}$ A $\lesssim$ B; β. 6. 10.
contra hyp.

PROP.

## PROP. VIII. THEOR.

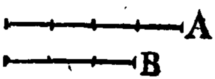
*Si duae magnitudines* A, B *inter se rationem non habeant, quam numerus ad numerum: incommensurabiles erunt.*

γ. 5. 10. Si enim esset $A \precsim B$: foret[γ] A ad B vt numerus ad numerum; contra hyp.

## PROP. IX. THEOR.

*Quae a rectis lineis* A, B *longitudine commensurabilibus fiunt quadrata inter se rationem habent, quam quadratus numerus* $C^2$ *ad quadratum numerum* $D^2$. *Et quadrata* Aq, Bq *inter se rationem habentia, quam quadratus numerus* $C^2$ *ad quadratum numerum* $D^2$, *&* *latera* A, B *habebunt longitudine commensurabilia. Quadrata vero, quae a longitudine incommensurabilibus rectis lineis* E, F *fiunt, inter se rationem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Et quadrata* Eq, Fq *inter se rationem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque latera habebunt longitudine commensurabilia.*

δ. 5. 10.
ε. 1. cor. 20. 6.
ζ. 11. 8.




C 4. $C^2$ 16.
D 3. $D^2$ 9.
CD 12.

1. Sit $A \precsim B$, &[δ] $A : B = C : D$. Quia $Aq : Bq$[ε] $= (A : B)^2$, & $C^2 : D^2 =$[ζ] $(C : D)^2$: erit $Aq : Bq = C^2 : D^2$. Q. E. D.

*Aliter.*

Sit $A \precsim B$, & $A : B = C : D$, & sumatur Rgl. sub A, B, nec non numerus CD. Ergo erit

erit $A:B = C:D =$ [η] $C^2 : CD$. Sed [θ] $A : B$ η. 17. 7.
$= Aq : A \times B$. Quare $Aq : A \times B = C^2 :$ θ. 1. 6.
$CD$. Rursus, quia $A:B = C:D =$ [ι] $CD : D^2$, ι. 18. 7.
& $A : B =$ [θ] $A \times B : Bq$: erit $A \times B : Bq =$ $CD : D^2$. Ergo ex aequo $Aq : Bq = B^2 : D^2$. Q. E. D.

2. Sit $Aq : Bq = C^2 : D^2$: dico fore $A \lesssim B$. Quia enim $Aq : Bq =$ [ι] $(A : B)^2$, & $C^2 : D^2$
$=$ [ζ] $(C : D)^2$: erit $A : B = C : D$, & ergo [κ] κ. 6. 10.
$A \lesssim B$. Q. E. D.

*Aliter*.

Nam [η] $C^2$, $CD$, $D^2$ deinceps proportionales sunt in ratione $C : D$. Et [θ] $\div\div\, Aq$, $A \times B$, $Bq$ in ratione $A : B$. Ergo $A : B = C^2 : CD$. Ergo $A \lesssim B$. Q. E. D.

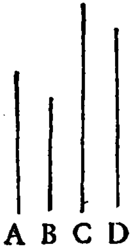

3. Non sit $E \lesssim F$. Iam si dicas, $Eq$ ad $Fq$ esse vt numerus quadratus ad quadratum: erit [λ] $E \lesssim F$; λ. per partem 2.
contra hyp. Quare non est $Eq$ ad $Fq$ vt numerus quadratus ad quadratum. Q. E. D.

4. Non sit $Eq$ ad $Fq$ vt quadratus numerus ad quadratum. Iam si dicas $E \lesssim F$: erit $Eq$ ad $Fq$ vt quadratus numerus ad quadratum [μ];
contra hyp. Ergo $E$ non $\lesssim F$. Q. E. D. μ. part. 1.

*Corollar.* Et manifestum est, ex iam demonstratis, lineas, quae longitudine sunt commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles [ν] ν. 6. 10. & 3. def. 10.
esse; quae vero potentia commensurabiles, non semper & longitudine (quum earum quadrata possint esse inter se vt numeri non quadrati); & hinc, quae longitudine incommensurabiles sunt, non semper & potentia incommensurabiles esse; quae vero potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles esse.

PROP.

## PROP. X. THEOR.




*Si quatuor magnitudines proportionales fuerint*, A : B = C : D; *prima vero* A *secundae* B *fuerit commensurabilis*; *& tertia* C *quartae* D *commensurabilis erit. Et si prima* A *secundae* B *fuerit incommensurabilis*: *& tertia* C *quartae* D *incommensurabilis erit.*

ξ. 5. 10. 1. Quia A ≺ B: [ξ] A ad B, ergo etiam C ad D, rationem habet quam numerus ad numerum. Ergo est [ο] C ≺ D. Q. E. D.

ο. 6. 10.

π. 7. 10. 2. Quia A non ≺ B : non habet A ad B rationem [π], quam numerus ad numerum. Sed A : B = C : D : ergo nec C ad D rationem habet numeri ad numerum. Ergo [ρ] C non ≺ D. Q. E. D.

ρ. 8. 10.

* 1. *Schol.* Hinc si quatuor rectarum proportionalium prima A secundae B est potentia solum commensurabilis : tertia C quartae D etiam potentia solum commensurabilis erit. Quia enim Aq : Bq = Cq : Dq (22. 6.) erit Cq ≺ Dq. Et quia non est C ≺ D, patet esse C ∈ D.

* 2. *Schol.* Et si rectarum proportionalium prima A Θ∈ secundae B : erit & tertia C Θ∈ quartae D.

### L E M M A.

*Dissimiles plani numeri inter se rationem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.*

Hoc manifestum est per 2. sch. 24. 8, & 26. 8.

PROP.

## PROP. XI. PROBL.

A————————B 4. *Propositae rectae*
E———————C 10. *lineae A inuenire*
D—————— *duas rectas lineas*
*incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentia.*

Exponantur [σ] duo numeri B, C, dissimiles σ. 21. def. 7.
plani, & fiat [τ] B : C = Aq : Dq. Erit D $\in$ A. τ. cor. 6. 10.
Sumatur [υ] inter A, D media proportionalis E. υ. 13. 6.
Dico fore E $\theta\in$ A.

Nam quia B ad C non [φ] habet rationem numeri quadrati ad quadratum: nec Aq ad Dq eam rationem habebit. Ergo [χ] D ipsi A longitudine incommensurabilis erit. Quia tamen Aq ad Dq rationem numeri ad numerum habet: erit [ψ] D ipsi A potentia commensurabilis. Quare D $\in$ A.

φ. lem. hui. χ. 9. 10. ψ. 6. 10. & 3. def. 10.

Secundo quia A : D = [ω] Aq : Eq, & A non $\lesssim$ D : erit [α] quoque Aq non $\lesssim$ Eq, & hinc [β] E $\theta\in$ A. Q. E. D.

ω. 2. cor. 20. 6. α. 10. 10. β. 4. def. 10.

* *Cor.* Patet etiam si duarum rectarum quadrata habeant rationem numeri ad numerum nec tamen quadrati numeri ad quadratum, rectas potentia solum commensurabiles esse.

* *Schol.* Simili ratione plures inueniri possunt, expositae rectae potentia solum commensurabiles.

PROP.

## PROP. XII. THEOR.

B C A

*Quae* A, B *eidem magnitudini* C *sunt commensurabiles, & inter se commensurabiles sunt.*

D 35. E 26.
F 52. G 61.
H910.I676.K793.

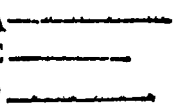
Quia A $\asymp$ C, & B $\asymp$ C; [γ] sit A : C = D : E, & C : B = F : G. Sumantur ÷ H, I, K minimi [δ] in rationibus D ad E & F ad G. Ergo, quia H : I = D : E, erit A : C = H : I. Et quia I : K = F : G, erit C : B = I : K. Ergo ex aequo A : B = H : K. Quare [ε] A $\asymp$ B. Q. E. D.

γ. 5. 10.
δ. 4. 8.
ε. 6. 10.

* *Schol.* Hinc omnis recta linea rationali lineae commensurabilis, est quoque rationalis (6. def. 10). Et quae rationalia spatia possunt, rationales sunt. Et omnes rectae rationales inter se commensurabiles sunt, saltem potentia. Item omne spatium rationali spatio commensurabile est quoque rationale (9. def. 10.) & omnia spatia rationalia inter se commensurabilia sunt.

## PROP. XIII. THEOR.

A
C
B



*Si sint duae magnitudines* A, B, *& altera quidem* A *eidem* C *sit commensurabilis, altera vero* B *incommensurabilis: magnitudines* A, B *inter se incommensurabiles erunt.*

Si enim esset B $\asymp$ A: quia & C $\asymp$ A, foret [ζ] B $\asymp$ C; contra hypothesin.

ζ. 12. 10.

* *Schol.* Magnitudines ergo, quarum altera est rationalis, altera irrationalis sunt inter se incommensurabiles.

PROP.

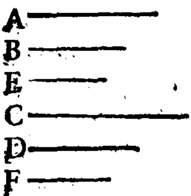
## PROP. XIV. THEOR.


*Si duae magnitudines* A, B *commensurabiles sint; altera autem ipsarum* A *alicui magnitudini* C *sit incommensurabilis: & reliqua* B *eidem* C *incommensurabilis erit.*

Si enim esset B $\precsim$ C: quia A $\precsim$ B, foret[η] A $\precsim$ C; contra hypothesin. η. 12. 10.

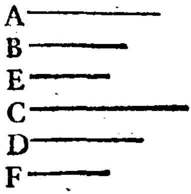
* *Schol.* Hinc si duae rectae sint longitudine commensurabiles, altera autem ipsarum alicui rectae sit potentia solum commensurabilis: & reliqua eidem potentia solum commensurabilis[η] erit.

## PROP. XV. THEOR.



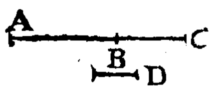

*Si quatuor rectae lineae* A, B, C, D *proportionales fuerint; prima vero* A *tanto plus possit quam secunda* B, *quantum est quadratum rectae lineae* E *sibi commensurabilis longitudine: & tertia* C *tanto plus poterit quam quarta* D, *quantum est quadratum rectae lineae* F, *sibi longitudine commensurabilis. Quod si prima* A *tanto plus possit quam secunda* B, *quantum est quadratum rectae lineae* E *sibi incommensurabilis longitudine: & tertia* C *quam quarta* D *tanto plus poterit, quantum est quadratum rectae lineae* F *sibi longitudine incommensurabilis.*

Quoniam A : B = C : D: erit Aq : Bq =[θ] Cq : Dq. Sed Aq =[ι] Bq + Eq, & Cq =[ι] θ. 22. 6. ι. hyp.
Q Dq




$Dq + Fq$: ergo $Bq + Eq : Bq = Dq + Fq : Dq$; &
κ. 17. 5. diuidendo $Eq : Bq$ [κ] $= Fq :$
ϑ. 22. 6. $Dq$. Quare $E : B =$ [ϑ] $F :$
λ. cor. 4. 5. $D$, & inuerse $B : E =$ [λ] $D :$
$F$. Sed $A : B = C : D$: ergo ex aequo $A : E = C : F$. Hinc si sit $A \preceq E$, erit & [μ] $F \preceq C$. Si vero non sit $A \preceq E$,
μ. 10. 10. nec erit [μ] $F \preceq C$. Q. E. D.

## PROP. XVI. THEOR.



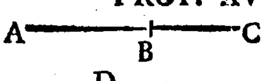

*Si duae magnitudines commensurabiles* AB, BC *componantur: & tota magnitudo* AC *vtrique ipsarum* AB, BC *commensurabilis erit. Quod si tota magnitudo* AC *vni ipsarum* AB, BC *sit commensurabilis: & quae a principio magnitudines* AB, BC *commensurabiles erunt.*

ν. 1. def. 10. 1. Quia $AB \preceq BC$: sit [ν] earum communis
ξ. 1. ax. 10. mensura D. Ergo [ξ] D metietur totam AC; & hinc [ν] $AB \preceq AC \preceq BC$. Q. E. D.

2. Quia $AC \preceq AB$: sit earum mensura D,
ο. 3. ax. 10. quae etiam [ο] metietur ipsam BC. Ergo $AB \preceq$ [ν] BC. Q. E. D.

* *Cor.* Et simul patet, totam magnitudinem AC, quae vni partium AB commensurabilis sit, reliquae BC etiam commensurabilem esse.

## PROP. XVII. THEOR.




*Si duae magnitudines incommensurabiles* AB, BC *componantur: &*

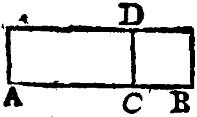
*& tota magnitudo* AC *utrique ipsarum* AB, BC *incommensurabilis erit. Quod si tota magnitudo* AC *uni ipsarum* AB, BC *sit incommensurabilis: & quae a principio magnitudines* AB, BC *incommensurabiles erunt.*

1. Si enim esset AC ⪯ AB: metiretur eas[π] aliqua D, quae & [ρ] reliquam BC metiretur. Ergo esset AB ⪯ [π] BC; contra hypothesin. Quare AC non ⪯ AB. Et eadem ratione AC non ⪯ BC. Q. E. D. π. 1. def. 10. ρ. 3. ax. 10.

2. Si AC non ⪯ AB; & tamen AB ⪯ BC: metietur eas aliqua D. Ergo eadem D[σ] metietur totam AC, ideoque erit AC ⪯ AB; contra hypothesin. Ergo AB non ⪯ BC; quod etiam demonstrabitur similiter, si posita fuerit AC non ⪯ BC. Q.E.D. σ. 1. ax. 10

* *Coroll.* Et manifestum est [τ], magnitudinem AC, quae uni suarum partium AB incommensurabilis est, reliquae etiam BC incommensurabilem esse. τ. cor. 16. 10.

## LEMMA.




*Si ad aliquam rectam lineam* AB *applicetur parallelogrammum* AD *deficiens figura quadrata* DB, *parallelogrammum* DA *applicatum aequale est ei rectangulo, quod sub partibus* AC, CB *rectae lineae* AB, *ex applicatione factis, continetur.*

Hoc per se patet, quia CD = CB.

## PROP. XVIII. THEOR.

*Si sint duae rectae lineae inaequales* A, BC, *quartae autem parti quadrati, quod fit a minori* A, *aequale parallelogrammum ad maiorem* BC *applicetur, deficiens figura quadrata, &* *in partes longitudine commensurabiles* BD, DC *ipsam* BC *diuidat: maior* BC *tanto plus poterit quam minor* A, *quantum est quadratum rectae lineae sibi longitudine commensurabilis. Quod si maior* BC *tanto plus possit quam minor* A, *quantum est quadratum rectae lineae sibi longitudine commensurabilis; quartae autem parti quadrati, quod fit a minori* A, *aequale parallelogrammum ad maiorem* BC *applicetur, deficiens figura quadrata: in partes* BD, DC *longitudine commensurabiles ipsam* BC *diuidet.*


1. Bisecetur enim BC in E, & fiat $EF = ED$. Ergo $FB = DC$; & $4\,BD \times DC$
υ. 5. 2. $+ 4\,EDq =^{\upsilon} 4\,ECq$. Sed $^{\varphi}$ $4\,BD \times DC$
φ. hyp. & lemma. $= Aq$, & $4\,EDq =^{\chi} FDq$, & $4\,ECq =^{\chi}$
χ. sch. 4. 2. $BCq$. Ergo $Aq + FDq = BCq$, & hinc $BCq$
ψ. hyp. $- Aq = FDq$. Et quum sit $BD^{\psi} \precsim DC$, ac
ω. 16. 10. ideo$^{\omega}$ $BC \precsim DC \precsim DC + FB$: patet esse $BC^{\alpha}$
α. cor. 16. 10. $\precsim FD$. Q. E. D.

2. Sit $BD \times DC = \frac{1}{4} Aq$, & sit $BCq - Aq =$ quadrato rectae ipsi BC commensurabilis longitudine. Dico $BD \precsim DC$. Nam, vt antea, ostenditur, esse FD rectam, cuius quadrato BC plus potest quam A. Quia ergo $BC \precsim FD$: erit$^{\alpha}$ & $BC \precsim BF + DC$. Sed

BF

$BF + DC^{\alpha} \precsim DC$. Ergo $BC \precsim^{\beta} DC$, ac ideo β. 12. 10.
$BD^{\alpha} \precsim DC$. Q.E.D.

## PROP. XIX. THEOR.

*Si sint duae rectae lineae inaequales* A, BC, *quartae autem parti quadrati, quod fit a minori* A, *aequale parallelogrammum ad maiorem* BC *applicetur deficiens figura quadrata, & in partes incommensurabiles longitudine* BD, DC *ipsam* BC *diuidat: maior* BC *tanto plus poterit quam* A *minor, quantum est quadratum rectae lineae sibi longitudine incommensurabilis. Quod si maior* BC *tanto plus possit quam minor* A, *quantum est quadratum rectae lineae sibi longitudine incommensurabilis; quartae autem parti quadrati, quod fit a minori* A, *aequale parallelogrammum ad maiorem* BC *applicetur, deficiens figura quadrata: in partes* BD, DC *longitudine incommensurabiles ipsam* BC *diuidet.* Fig. prop. XVIII.

1. Iisdem enim, quae supra, constructis similiter ostendemus, $BCq - Aq = DFq$. Iam quia $BD^{\gamma}$ non $\precsim DC$: nec est$^{\delta}$ $BC \precsim DC$. Sed $DC \precsim FB + DC$: ergo BC non $\precsim^{\varepsilon}$ $FB + DC$, & hinc$^{\zeta}$ BC non $\precsim DF$. Q. E. D. γ. hyp. δ. 17. 10. ε. 14. 10. ζ. cor. 17. 10.

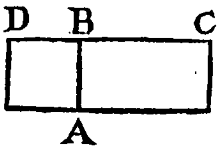
2. Quia$^{\gamma}$ BC non $\precsim DF$: nec erit $BC \precsim^{\zeta}$ $DC + BF$. Sed $DC + BF \precsim DC$. Ergo $BC^{\varepsilon}$ non $\precsim DC$, nec$^{\delta}$ $BD \precsim DC$. Q. E. D.

*Schol.* Tria sunt genera linearum rectarum rationalium inter se commensurabilium. Aut enim duarum rectarum rationalium, longitudine inter se commensurabilium, altera aequalis est expositae rationali; aut neutra expositae rationali aequa-

aequalis eſt, longitudine tamen ei vtraque eſt commenſurabilis; aut denique vtraque expoſitae rationali commenſurabilis eſt ſolum potentia.

* Hi ſunt illi modi, quos innuunt ſequentia theoremata, vel ſupponunt. Notet hic etiam legens, ſi rectis lineis notam hanc ρ ⪤ apponamus, nos intelligere rectas rationales longitudine & potentia commenſurabiles; ſin ipſis adſcribamus notam ρ ∈, intelligendas eſſe rationales potentia ſolum commenſurabiles.

## PROP. XX. THEOR.



*Quod ſub rationalibus longitudine commenſurabilibus rectis lineis* AB, BC *ſecundum aliquem praedictorum modorum, continetur rectangulum* AC *rationale eſt.*

γ. 8. vel 9. def. 10. Deſcribatur ex AB quadratum AD, quod [γ] ρ erit. Atque, quum ſit [θ] AB ⪤ BC, & DB
θ. hyp. = AB: erit DB ⪤ BC. Hinc, quia BD : BC
ι. 1. 6. = [ι] AD : AC, eſt [κ] AD ⪤ AC, ideoque [λ] AC ρ.
κ. 10. 10.
λ. 9. def. 10. Q. E. D.

## PROP. XXI. THEOR.

Fig. prop. praec. *Si rationale ad rationalem* AB *applicetur: latitudinem* BC *efficit rationalem, & ei* AB, *ad quam applicatum eſt, longitudine commenſurabilem.*

μ. 8. def. 10. Deſcribatur ex AB quadratum AD, quod [μ]
ν. 9. def. 10. rationale erit. Ergo AC ⪤ [ν] AD; hinc, quia
ξ. 1. 6. AC : AD = [ξ] BC : BD vel AB, erit & BC [ο] ⪤
ο. 10. 10. AB, ideoque BC [π] ρ. Q. E. D.
π. 6. def. 10.

* Schol.

* *Schol.* Hinc quod ſub rationali & irrationali continetur rectangulum, irrationale eſt.

## PROP. XXII. THEOR.

*Quod ſub rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus rectis lineis* AB, BC *continetur rectangulum* AC *irrationale eſt*; & *recta linea ipſum potens eſt irrationalis; vocetur autem* Media. Fig. prop. XX.

Deſcriptum enim ab AB quadratum AD rationale erit. Et quia AB ═ BD: erit BD ∈ BC. Hinc, quum ſit BD: BC ═ [ρ] AD: AC, ρ. 1. 6.
erit AD [σ] non ∑ AC. Quare AC [τ] eſt αλ, & σ. 10. 10.
recta, quae ipſum AC poteſt, [υ] eſt αλ. Q. τ. 10. def. 10. υ. 11. def. 10.
E. D.

*Schol.* Media autem vocatur propterea, quod ipſius quadratum eſt rectangulo AC aequale, & ipſa media proportionalis eſt inter AB, BC latera.

* Rgl. etiam ſub ρ ∈ contentum, & ſpatium omne, quod media poteſt, *medium* vocatur.

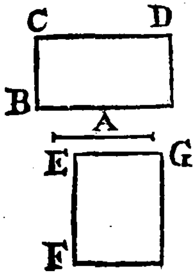
## L E M M A.

*Si ſint duae rectae lineae* AB, BC: *erit, vt prima* AB *ad ſecundam* BC, *ita quadratum* AD, *quod fit a prima, ad rectangulum* AC *quod ſub duabus rectis lineis* AB, BC *continetur*. Fig. prop. XX.

Deſcripto quadrato ex AB, compleatur Rgl. AC: & propoſitio manifeſta erit ex 1. 6.

* *Schol.* Et ergo, vt vna BC ad alteram AB, ita AB ✕ BC ad quadratum alterius AB.

## PROP. XXIII. THEOR.

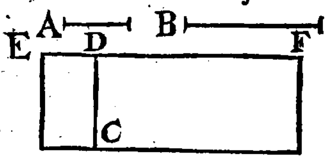


*Quod fit a media* A, *ad rationalem* BC *applicatum, latitudinem* CD *efficit rationalem, & ei* BC, *ad quam applicatum est, longitudine incommensurabilem.*

Possit enim A Rgl. FG.
φ. hyp. Sed potest etiam $^{\varphi}$ BD. Ergo FG $=$ BD. Et quia vtrumque spatium rectangulum $^{\varphi}$ est; erit BC : EG
χ. 16. 6. $=^{\chi}$ EF : CD, ac ideo BCq : EGq $=^{\psi}$ EFq :
ψ. 22. 6. CDq. Iam quum $^{\omega}$ FE, EG sint $\rho \in$, & BC $^{\varphi}$
ω. 22. 10 & hyp. etiam $\rho$ sit: erit $^{\alpha}$ BCq $\precsim$ EGq, & hinc $^{\beta}$ EFq
α. sch. 12. 10. $\precsim$ CDq. Quare, quum EF sit $\rho$, erit $^{\alpha}$ & CD
β. 10. 10. $\rho$. Deinde quia FE $\in$ EG, & FE : EG $^{\gamma} =$
γ. lem. pr. FEq : FG: erit $^{\beta}$ FEq non $\precsim$ FG. Ergo quum
δ. 13. 10. EFq $\precsim$ CDq, & FG $\precsim$ BD: erit $^{\delta}$ CDq non $\precsim$ BD, & hinc $^{\beta}$ CD non $\precsim$ BC, quia CDq : BD $=^{\gamma}$ CD : BC. Q. E. D.

## PROP. XXIV. THEOR.

*Mediae* A *commensurabilis* B *media est.*



Exponatur CD $\rho$, ad quam applicetur Rgl. CE $=$ Aq, & Rgl. CF
ε. 23. 10. $=$ Bq. Ergo $^{\varepsilon}$
ζ. hyp. vel cor. 9. 10. ED $\rho \in$ CD. Iam quia $^{\zeta}$ Aq $\precsim$ Bq: est & CE
η. 1. 6. & 10. 10. $\precsim$ CF, & hinc ED $^{\eta} \precsim$ DF. Quare DF est $^{\vartheta}$ $\rho$
ϑ. sch. 12. 10. & $\in^{\iota}$ CD. Hinc patet $^{\kappa}$, CF esse $\rho$, &, quae
ι. 13. 10. κ. 22. 10. ipsum potest, B mediam esse. Q. E. D.

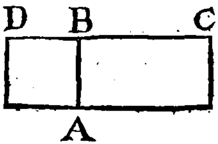
Coroll.

*Coroll.* Ex hoc manifestum est, spatium CF, medio spatio CE commensurabile, medium esse: nam quae ipsum potest B etiam media sit, necesse est.

*Schol.* Est autem cum mediis, sicut cum rationalibus, comparatum. Aliae mediae commensurabiles sunt potentia tantum; aliae vero longitudine, & ergo potentia simul.

* Et praeterea notandum est, hoc theorema verum esse, siue B mediae A longitudine & potentia commensurabilis sit, siue potentia solum.

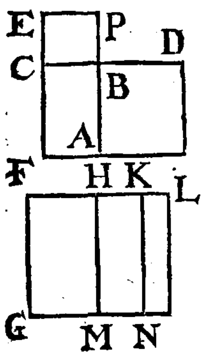
## PROP. XXV. THEOR.



*Quod sub mediis longitudine commensurabilibus rectis lineis* AB, BC *continetur rectangulum medium est.*

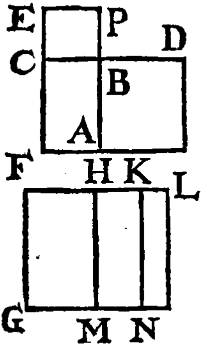
Fiat ex AB quadratum AD, quod medium erit, quia AB media est. Iam est DB $=$ AB $\Sigma$ BC, & BC : BD $=$ [λ] AC : DA : ergo AC $\Sigma$ medio DA. Quare [μ] AC medium est. Q. E. D. λ. 1. 6. μ. cor. 24. 10.

## PROP. XXVI. THEOR.



*Quod sub mediis potentia solum commensurabilibus rectis lineis* AB, BC *continetur rectangulum* AC *vel rationale est, vel medium.*

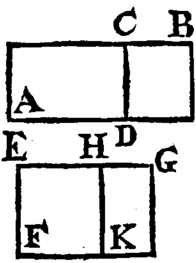
Describantur ex AB, BC quadrata AD, BE, quae media erunt. Exponatur FG ρ, ad quam [ν] applicetur Rgl. GH $=$ AD; & ad HM applicetur Rgl. MK $=$ AC, & ν. 45. 1.




ad KN Rgl. NL = BE. Sunt
ξ. 14. 1. ergo [ξ] FH, HK, KL in dire-
ctum, & GH, NL media.
Porro, quia FG = KN est
ῥ, etiam FH, KL [ο] sunt ῥ Є
ο. 23. 10. FG. Sed est AD Ʃ [π] BE,
π. hyp. ideoque GH Ʃ NL, &, quum
ρ. 1. 6. sit GH : NL = [ρ] FH : KL,
σ. 10. 10. erit FH [σ] Ʃ KL. Quare
τ. 20. 10. quum FH, KL sint ῥƩ : erit [τ]
FH × KL ῥ. Et quoniam
DB : BC = AB : BP, & AD :
AC = [ρ] DB : BC, & AC : BE = [ρ] AB : BP : erit
AD : AC = AC : BE, id est GH : MK = MK :
υ. 22. 6. NL, ac ergo, FH : HK = [υ] HK : KL. Hinc
φ. 17. 6. erit & [φ] HKq ῥ, & ipsa [χ] HK ῥ. Ergo si sit
χ. 6. def. 10. HK Ʃ FG, erit [τ] MK id est AC ῥ : si vero sit
ψ. 22. 10. HK Є FG : erit [ψ] AC medium. Q. E. D.

## PROP. XXVII. THEOR.

*Medium* AB *non superat medium* AC *rationali* DB.



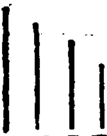

Si negas : sit DB ῥ. Expo-
natur ῥ EF, ad quam appli-
ω. 45. 1. cetur [ω] Rgl. FG = AB, & Rgl.
FH = AC. Erit ergo KG
α. sch. 12. 10. = DB, ideoque KG ῥ [α]; FH
β. cor. 24. 10. vero & FG erunt [β] media.
γ. 23. 10. Hinc [γ] EH & EG sunt ῥ Є EF,
δ. 21. 10. HG autem [δ] est ῥ Ʃ EF. Qua-
ε. lem. 23. 10. re EH Є HG. Et quia EH :
ζ. 10. 10. HG = [ε] EHq : EH × GH : erit EHq [ζ] non Ʃ
EH

EH $\times$ HG. Sed quum EH, HG sint Є: erit EHq + HGq ≤ [η] EHq. Et est 2 EH $\times$ HG ≤ η. 16. 10.
EH $\times$ HG. Quare [ϑ] EHq + HGq non ≤ 2 EH ϑ. 14. 10.
$\times$ HG, & ergo [ι] EHq + HGq + 2 EH $\times$ HG ι. 17. 10. κ. 4. 2.
non ≤ EHq + HGq, id est, [κ] EGq non ≤ EHq
+ HGq. Est vero EHq + HGq ῥ. Ergo λ. 10. def. 10.
EGq [λ] est αλ, ac ipsa [μ] EG αλ. Sed erat quo- μ. 11. def. 10.
que EG ῥ. Q. E. A.

* *Corollar.* **Euidens est ex ostensis, si sint duae rectae EH, HG Є, esse EHq + HGq non ≤ 2 EH $\times$ HG.**

* *Schol.* **Manifestum autem est, rationale superare rationale rationali, & rationale cum rationali facere rationale (per 1. & 3. ax. 10).**

## PROP. XXVIII. PROBL.



A C B D

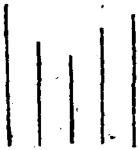
*Medias inuenire, potentia solum commensurabiles, quae rationale contineant.*

Exponantur [ν] duae rationales A, ν. 11. 10.
B Є, & fiat [ξ] A : C = C : B, nec non ξ. 13. 6.
[ο] A : B = C : D. Dico C Є D esse, & mediam ο. 12. 6.
vtramque, & C $\times$ D ῥ.

Nam quia [π] A $\times$ B medium est, erit & π. 22. 10.
Cq [ρ] medium, & C media. Et quum sit A : ρ. 17. 6.
B = C : D, ac A Є B : erit [σ] C Є D. Hinc σ. sch. 10. 10.
& [τ] D media est. Praeterea quum sit permu- τ. 24. 10.
tando A : C = B : D : erit C : B = B : D, &
Bq = C $\times$ D. Quare, ob Bq ῥ [υ] erit & C υ. 9. def. 10.
$\times$ D ῥ. Q. E. D.

PROP.

## PROP. XXIX. PROBL.



A D B C E

*Medias inuenire potentia ſolum commenſurabiles, quae medium contineant.*

φ. 11. 10. Exponantur φ tres rationales
χ. 13. 6. Є, A, B, C, & fiat χ A : D = D :
ψ. 12. 6. B, & ψ B : C = D : E. Dico D, E eſſe quaeſitas.

ω. 17. 6. Nam quia A, B ρ Є, ac A $\times$ B = ω Dq:
α. 22. 10. erit α Dq medium, & D media. Et quoniam
β. ſch. 10. 10. B : C = D : E, ac B Є C : erit D β Є E. Ergo
γ. 24. 10. E etiam γ media eſt. Oſtenſum igitur eſt, D, E medias Є eſſe.

Praeterea quia eſt alternando B : D = C : E, & inuerſe B : D = D : A, ideoque D : A = C : E : erit D $\times$ E = A $\times$ C. Eſt vero A $\times$ C α medium : ergo & D $\times$ E medium eſt. Q. E. D.

## LEMMA I.

*Inuenire duos numeros quadratos, ita vt qui ex ipſis componitur etiam quadratus ſit.*

A.....D.....C........B

Exponantur duo numeri plani ſimiles vel quadrati, AB, BC: & ſit vterque par, vel vterque impar. Nam ablato BC ex BA, relin-
δ. 24. & quetur δ par AC, qui biſecari poteſt in D. Sed
26. 9. ε qui fit ſub AB, BC vna cum quadrato ex CD
ε. 6. 2. eſt aequalis quadrato ex BD, & is qui fit ſub
ζ. 1. 9. AB, BC ipſe ζ quadratus eſt : inuenti igitur ſunt duo quadrati, nempe factus ex AB, BC,

&

& quadratus ex CD, qui compositi producunt quadratum ex BD. Q. E. F.

*Coroll.* Et simul patet, quomodo inueniantur duo numeri quadrati, quorum excessus sit quadratus: si nimirum AB, BC similes plani sumantur. Sin dissimiles sumantur: possunt pari ratione haberi duo quadrati numeri, qui fiunt ex BD, BC, quorum excessus sit numerus sub AB, BC non quadratus.

## LEMMA 2.

*Inuenire duos quadratos numeros, ita vt qui ex ipsis componitur non sit quadratus.*

A..G..H.D.E.F...C........B

Factis omnibus quae in antecedenti Lemmate, & praeterea ex numero DC ablata vnitate DE; dico quadratum factum ex AB per BC multiplicato vna cum quadrato ex CE non esse quadratum.

Quum enim, sicut antea, factus ex AB, BC sit quadratus, & hic vna cum CD componat quadratum ex BD: erit factus ex AB, BC, vna cum quadrato ex CE minor quadrato ex BD. Iam si fieri potest sit idem quadratus. Ergo aut quadrato maiori quam quadratus ex BE, aut minori, aut ipsi quadrato ex BE aequalis erit. Sed quadratus proxime maior, quam quadratus ex BE, est quadratus ex BD; & hoc is qui fit ex AB, BC vna cum quadrato ex CE minor est ostensus: ergo idem nulli quadrato maiori, eo qui fit ex BE, aequalis esse potest. Deinde ponatur aequalis quadrato ex BE; & capiatur GA duplus vnitatis DE. Et quia

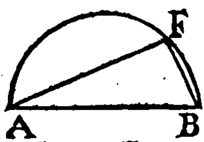
AC

n. 6. 2. A..G..H.D.E.F...C........B

AC = 2 DC: erit GC = 2 EC, & igitur [n] factus ex GB, BC cum quadrato ex CE = quadrato ex BE. Hinc erit factus ex AB, BC aequalis facto ex GB, BC, & AB = BG. Q. E. A. Quare AB per BC multiplicatus cum quadrato ex CE non est aequalis ipsi quadrato ex BE. Si tandem ponas eundem aequalem quadrato minori quam quadratum ex BE, velut quadrato ex BF: sit HA = 2 DF; & erit rursus HC = 2 CF, & ideo [n] factus ex HB, BC cum quadrato ex CF = quadrato ex BF. Hinc foret factus ex AB, BC + quadrato ex CE = facto ex HB, BC + quadrato ex CF. Q. E. A. Ergo tandem patet, quadratum factum ex AB, BC cum quadrato ex CE non quadratum esse. Q. E. F.

## PROP. XXX. PROBL.

*Inuenire duas rationales potentia solum commensurabiles, ita vt maior plus possit, quam minor, quadrato rectae lineae sibi longitudine commensurabilis.*




C 9 . D 4

Exponatur ρ AB, & sumantur [9] duo quadrati numeri C, D, ita vt C — D non sit quadratus, & in descripto super AB semicirculo aptetur AF, vt AFq sit [t] ad ABq vti numerus C — D ad numerum C. Iungatur FB. Dico factum.

9. cor. lem. 1.

t. cor. 6. 10.

Quia enim AFq ad ABq rationem habet numeri ad numerum, non autem quadrati ad

qua-

quadratum: erit[κ] AF $\epsilon$ AB, ideoque[λ] AF, AB sunt $\rho\,\epsilon$. Sed quia $C : C - D = ABq : AFq$: erit conuertendo[μ] $C : D = ABq : ABq - AFq$ id est[ν] BFq. Ergo $\sqrt{(ABq - AFq)} = BF$[ξ] $\asymp$ AB. Q. E. F.

κ. cor. 11. 10.
λ. 6. def. 10.
μ. cor. 19. 5.
ν. 31. 3. & 47. 1.
ξ. 9. 10.

## PROP. XXXI. PROBL.

*Inuenire duas rationales potentia solum commensurabiles, ita vt maior plus possit, quam minor, quadrato rectae lineae sibi longitudine incommensurabilis.*

Fig. prop. XXX.

Exponantur $\rho$ AB, & duo quadrati numeri C, D[ο], qui nullum quadratum componant, & super AB describatur semicirculus, & [π] fiat vti C+D ad C ita ABq ad AFq, & iungatur FB. Dico factum.

ο. lem. 2.
π. cor. 6. 10.

Nam primo, vt antea ostendetur, AF, AB esse $\rho\,\epsilon$. Secundo quia $C + D : C = ABq : AFq$, erit conuertendo $C + D : D = ABq : ABq - AFq$ id est BFq[ρ]. Ergo $\sqrt{(ABq - AFq)} = BF$[σ] non $\asymp$ AB. Q. E. F.

ρ. 31. 3. & 47. 1.
σ. 9. 10.

## PROP. XXXII. PROBL.


*Inuenire duas medias potentia solum commensurabiles, quae rationale contineant, ita vt maior plus possit, quam minor, quadrato rectae lineae sibi longitudine commensurabilis.*

Exponantur[τ] duae rationales A, B $\epsilon$, ita vt $\sqrt{(Aq - Bq)} \asymp$ A. Sit[υ] $A \times B = Cq$, & [φ] $Bq = C \times D$. Dico C, D esse quaesitas.

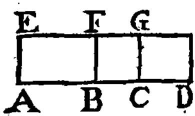
τ. 30. 10.
υ. 13. 6.
φ. 45. 1.

Nam

κ. 22. 10. Nam quia [κ] $A \times B$ medium est: C media erit. Et quia Bq' est $\rho$: etiam $C \times D$ erit $\rho$. Quia
ψ. sch. lem. 23. 10. vero $A : B =$ [ψ] $A \times B : Bq =$ $Cq : C \times D =$ [ω] $C : D$; & $A \in$
ω lem 23. 10.
α. sch. 10. 10. $B$: erit quoque [α] $D \in C$, ideoque erunt C &
β. 24. 10. D [β] mediae $\in$. Denique quia $A : B = C : D$,
γ. 15. 10. [γ] erit $\sqrt{(Cq - Dq)} \lesssim C$. Q. E. F.

Similiter autem ostendetur *inueniri posse duas medias potentia solum commensurabiles, & continentes rationale, ita vt maior plus possit, quam minor, quadrato rectae lineae sibi* incom-
δ. 31. 10. mensurabilis *longitudine* [δ].

## LEMMA.



*Si fuerint tres rectae lineae* AB, BC, CD *in ratione aliqua: erit, vt prima* AB *ad tertiam* CD, *ita rectangulum contentum sub prima* AB *& media* BC *ad id quod sub media* BC *& tertia* CD *continetur.*

Ponantur AB, BC, CD in directum, & ducatur perpendicularis $AE = BC$, & compleantur Pgra. EB, FC, GD, quae Rgla. erunt. Et quia ergo $BC = EA = FB = GC$, erit
ε. 1. 6. $AB : BC =$ [ε] $EB : FC = AB \times BC : FC$, similiter $BC : CD = FC : GD = FC : BC \times CD$. Ergo ex aequo $AB : CD = AB \times BC : BC \times CD$. Q. E. D.

PROP.

## PROP. XXXIII. PROBL.

*Inuenire duas medias potentia solum commensurabiles, quae medium contineant, ita vt maior plus possit, quam minor, quadrato rectae lineae sibi longitudine commensurabilis.*

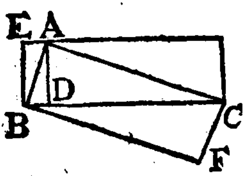

Exponantur[ε] tres rationales ∈ ε. 11. 10. &
A, B, C, ita vt $\sqrt{(Aq - Cq)}$ ⋜ 30. 10.
A, & fiat $Dq =$[ζ] $A \times B$, & D ζ. 14. 2.
$\times E$[η] $= B \times C$: erunt D, E η. 45. 1.
quaesitae.

Nam quia A, B ρ ∈: erit[θ] D θ. 22. 10.
media. Et quoniam $A : C =$[ι] $A \times B : C \times$ ι. 1. 6.
$B = Dq : D \times E =$[κ] $D : E$: erit D[λ] ∈ E. κ. lemma 23. 10.
Hinc D, E[μ] sunt mediae ∈, atque $\sqrt{(Dq -}$ λ. 1. sch. 10. 10.
$Eq)$[ν] ⋜ D. Patet etiam, quia[ξ] $B \times C$ me- μ. 24. 10.
dium est, esse & $D \times E$[ο] medium. Q. E. F. ν. 15. 10.

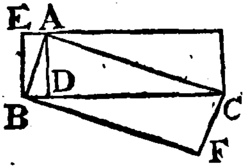
ξ. sch. 22. 10.

Similiter ostenditur,[π] quomodo *inueniantur duae mediae potentia solum commensurabiles, & medium continentes, ita vt maior plus possit, quam minor, quadrato rectae lineae sibi* incommensurabilis *longitudine.* ο. cor. 24. 10. π. 31. 10.

## LEMMA.




*Sit triangulum rectangulum* ABC, *rectum habens angulum* BAC, *&* *ducatur* AD *perpendicularis: dico* $CB \times BD = ABq$, *&* $BC \times CD = ACq$, *&* $BD \times DC = DAq$, *& denique* $BC \times AD = BA \times AC$.




Nam tres priores partes huius propositionis patent ex corollario 8.6 & ex 17.6. Vltima demonstratur, descripto Rglo. EC = BC × AD, & Rglo. AF = BA × AC. Nam EC = [ρ] 2 △. ABC = [σ] AF. Q. E. D.

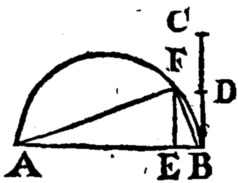
ρ. 41. 1.
σ. 34. 1.

## PROP. XXXIV. PROBL.

*Inuenire duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quae faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum vero, quod sub ipsis continetur, medium.*

τ. 31. 10.

Exponantur [τ] AB, BC ρ Є, ita vt √(ABq — BCq) non ⊏ AB. Bisecetur BC in D, & ipsi BDq vel DCq aequale pgr. ad rectam AB applicetur [υ], deficiens figura quadrata, & sint AE, EB partes ex applicatione factae. Describatur super AB semicirculus AFB, & ex E ducatur in AB perpendicularis EF, & iungantur AF, BF; quae erunt quaesitae.




υ. 28. 6.

φ. 4. 2.
χ. 19. 10.
ψ. 1. 6.
ω. lem. pr.
α. 10. 10.
β. 31. 3.
γ. lem. 18. 10.
δ. 1. 6.

Quum enim sit BDq = [φ] ¼ BCq: erit [χ] BE non ⊏ EA. Et quia AE: EB = [ψ] BA × AE: AB × BE = [ω] AFq: BFq: erit [α] AF Є BF. Porro, quia AFq + BFq = [β] ABq, AFq + BFq est ρ. Denique quia EFq = [ω] AE × EB = [γ] BDq, ideoque BD = EF, & BC = 2 EF: erit AB × BC = [δ] 2 AB × EF = [ω] 2

AF

AF $\times$ FB. Sed AB $\times$ BC medium [ε] est: ergo & AF $\times$ FB medium [ζ] erit. Q. E. F. ε. 22. 10. ζ. cor. 24. 10.

## PROP. XXXV. PROBL.

*Inuenire duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quae faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, rectangulum vero, quod sub ipsis continetur rationale.* Fig. prop. XXXIV.

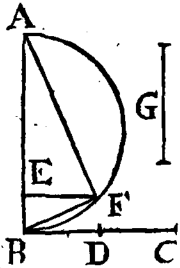
Exponantur AB, BC [η] mediae $\sqsubset$ & rationale continentes, ita vt $\sqrt{}$ (ABq — BCq) non $\sqsubset$ AB, & reliqua fiant, ut in praecedente. Erunt AF, FB quaesitae. η. 32. 10.

Nam quia AE [θ] non $\sqsubset$ EB: erit & [ι] BA $\times$ AE non $\sqsubset$ AB $\times$ BE, ideoque [κ] AFq non $\sqsubset$ BFq, & propterea AF $\ominus$ BF. Et patet AFq + BFq = ABq medium [λ] esse. Denique quum BC = 2 EF, & hinc AB $\times$ BC = [μ] 2 AB $\times$ EF: erit AB $\times$ EF $\rho$, vtpote rationali AB $\times$ BC commensurabile [ν]. Ergo & [ν] AF $\times$ BF est $\rho$. Q. E. F. θ. 19. 10. ι. 1. 6. & 10. 10. κ. lem. 34 10. λ. sch. 22. 10. μ. 1. 6. ν. sch. 12. 10.

## PROP. XXXVI. PROBL.

*Inuenire duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quae faciant & compositum ex ipsarum quadratis medium, & rectangulum, quod sub ipsis continetur, medium & adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis.*

ξ. 33. 10.



Exponantur[ξ] duae mediae Є, AB, BC, medium continentes, ita vt $\surd$ (ABq — BCq) non Σ AB. Reliqua fiant vt in prop. 34. Dico AF, FB esse quaesitas.

ο. 19. 10. Nam AE non Σ[ο] EB, ideoque AF ΘЄ BF. Et quoniam
π. sch. 22. 10. ABq medium[π] est: AFq + FBq medium esse patet. Porro quia AE $\times$ EB
ρ. constr. & lem. 18. 10. = [ρ] BDq = [τ] EFq: erit AB $\times$ BC = 2 AB $\times$
σ. cor. 24. 10. EF, & ideo[σ] medium erit AB $\times$ EF, & propter-
τ. lem. 34. 10. ea etiam[τ] AF $\times$ FB. Denique quia AB non
υ. constr. Σ[υ] BC, & BC Σ[υ] BD, & hinc AB non Σ[φ] BD:
φ. 13. 10.
χ. 1. 6. & 10. 10. erit[χ] ABq non Σ AB $\times$ BD. Sed AB $\times$ BD = AB $\times$ EF = AF $\times$ FB, & ABq = AFq + FBq. Ergo AF $\times$ FB non Σ AFq + FBq. Q. E. F.

* *Schol.* Ex his manifestum est, quomodo *inueniri possint duae mediae longitudine & potentia incommensurabiles.* Factis enim omnibus, quae in propositione iussa sunt, & capta insuper G media proportionali inter AF, BF: erunt G & AB me-
ψ. 17. 6. diae ΘЄ. Nam quia Gq =[ψ] AF $\times$ BF medio: erit G media, & ΘЄ mediae AB.

## Principium Senariorum per compositionem.

### PROP. XXXVII. THEOR.

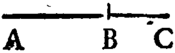
*Si duae rationales potentia solum commensurabiles* AB, BC *componantur: tota* AC *irrationalis erit. Vocetur autem* ex binis nominibus.

Quia


Quia enim AB ∈ BC, erit 2 AB × BC [α] non ⪯ ABq + BCq, & proinde 2 AB × BC + ABq + BCq =[β] ACq non ⪯[γ] ABq + BCq. Quare quum ABq + BCq[δ] sit ῥ: erit ACq[ε] αλ, &[ζ] AC αλ. Q. E. D.

α. cor. 27. 10.
β. 4. 2.
γ. 17. 10.
δ. sch. 27. 10
ε. sch. 12. 10.
ζ. 11. def. 10.

## PROP. XXXVIII. THEOR.

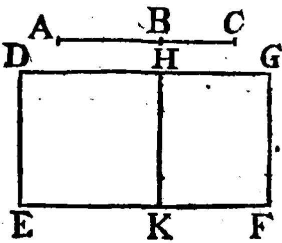



*Si duae mediae potentia solum commensurabiles* AB, BC *componantur, quae rationale contineant: tota* AC *irrationalis erit. Vocetur autem* ex binis mediis prima.

Nam quum sit[η] ABq + BCq non ⪯ 2 AB × BC: erit ABq + BCq + 2 AB × BC = ACq non ⪯[θ] AB × BC: hinc[ι] ACq αλ, & ergo AC αλ. Q. E. D.

η. cor. 27. 10.
θ. 17. 10. & 14. 10.
ι. sch. 12. 10.

## PROP. XXXIX. THEOR.

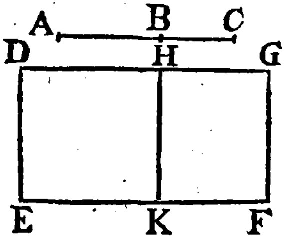



*Si duae mediae potentia solum commensurabiles* AB, BC *componantur, quae medium contineant: tota irrationalis erit. Vocetur autem* ex binis mediis secunda.

Sit DE ῥ, & fiat[κ] Rgl. DEF = ACq, & Rgl. DEK = ABq + BCq. Ergo Rgl. HF =[λ] 2 AB × BC. Et quia ABq, BCq media[μ] sunt, ac propterea ABq + BCq medium[ν] est, medium vero est & AB × BC[ξ]: erit vtrumque

κ. 45. 1.
λ. 4. 2.
μ. sch. 22. 10.
ν. 16. 10. & cor. 24. 10.
ξ. hyp.

ο. cor. 24. 10.
π. 23. 10.
ρ. cor. 27. 10.



Rgl. DK, HF ο medium. Ergo EK, KF erunt π ῥ. Sed quia AB ϵ BC, erit ABq + BCq non ≍ ρ 2 AB × BC, id est Rgl. DK non ≍ HF. Quare est EK non ≍ KF, & ideo EK, KF ῥ ϵ σ sunt, & τ DG vel EF ἀλ. Patet ergo DF esse υ ἀλ, & ipsam AC φ ἀλ. Q. E. D.

σ. sch. 12. 10.
τ. 37. 10.
υ. sch. 21. 10.
φ. 11. def. 10.

## PROP. XL. THEOR.

A B C *Si duae rectae lineae potentia incommensurabiles* AB, BC *componantur, quae faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem sub ipsis continetur medium: tota recta linea* AC *irrationalis erit. Vocetur autem* maior.

χ. 22. 10. & sch. 13. 10.
ψ. 17. 10.
ω. 10. def. 10.

Nam AB × BC non ≍ χ ABq + BCq. Ergo 2 AB × BC + ABq + BCq = ACq non ≍ ψ ABq + BCq; & hinc ω ACq ἀλ, ac AC ἀλ. Q. E. D.

## PROP. XLI. THEOR.

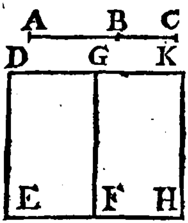
A B C *Si duae rectae lineae potentia incommensurabiles* AB, BC *componantur, quae faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem sub ipsis continetur rationale: tota recta linea* AC *irrationalis erit. Vocetur autem* rationale ac medium potens.

Nam,

Nam, quia AB$\times$BC non $\asymp$ [α] ABq + BCq, ideoque ACq non $\asymp$ [β] AB$\times$BC: erit ACq ꝏ [γ], ac ergo AC ꝏ. Q. E. D.

α. sch. 13. 10. & 22. 10.
β. 4. 2. & 17. 10.
γ. 10. def. 10.

## PROP. XLII. THEOR.




*Si duae rectae lineae potentia incommensurabiles* AB, BC *componantur, quae faciant compositum ex ipsarum quadratis medium, & quod sub ipsis continetur medium, & adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis: tota recta linea* AC *irrationalis erit. Vocetur autem* bina media potens.

Exponatur ρ DE, & fiat [δ] Rgl. DEF = ABq + BCq, & Rgl. GFH = 2 AB$\times$BC. Totum ergo DH [ε] = ACq, & [ζ] DF medium, ideoque [η] EF ρ. Eadem ratione FH ρ. Sed quia DF non $\asymp$ [θ] GH: erit EF non $\asymp$ [ι] FH, & ergo EF, FH ρ ϵ erunt, atque [κ] EH ꝏ ex binis nominibus erit. Hinc, quia DE ρ, est DH [λ] ꝏ, & AC [μ] ꝏ. Q. E. D.

δ. 45. 1.
ε. 4. 2.
ζ. cor. 24. 10.
η. 23. 10.
θ. hyp.
ι. 10. 10.
κ. 37. 10.
λ. sch. 21. 10.
μ. 11. def. 10.

*Schol.* At vero dictas irrationales vno tantum modo diuidi in rectas lineas, ex quibus componuntur, & quae propositas species constituunt, mox demonstrabimus.

## PROP. XLIII. THEOR.


*Quae ex binis nominibus* AB *ad vnum duntaxat punctum* C *diuiditur in nomina* AC, CB.

Si negas; diuidatur etiam ad D in nomina. Sed nequit esse $DB = AC$. Sic enim foret $BC = AD$, & $AC : CB = BD : DA$, hoc est AB in D similiter foret diuisa ac in C; id quod non ponitur. Quum ergo AB in partes inaequales ad C, & D secta sit, quarum

ν. 4. sch. 5. 2. maior sit AC: [ν] erit $2\,AD \times DB - 2\,AC \times CB = ACq + CBq - (ADq + DBq)$. Sunt

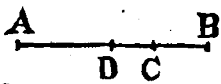
ξ. hyp. & 37. 10. autem [ξ] ACq, CBq, ADq, DBq ῥ, ideoque

ο. sch. 27. 10. $ACq + CBq$, & $ADq + DBq$ [ο] differunt ra-

π. 37. 10. & 22. 10. tionali. Quare & media $2\,AD \times DB$ ac $2\,AC \times CB$ [π] different rationali. Q. E. A. [ρ]

ρ. 27. 10.

## PROP. XLIV. THEOR.




*Quae ex binis mediis prima* AB *ad vnum duntaxat punctum* C *diuiditur in nomina* AC, CB.

σ. 38. 10. Si negas, sit AB etiam in D diuisa in alia nomina AD, DB, quae erunt [σ] mediae Є & continentes ῥ. Sunt vero & AC, CB [σ] mediae

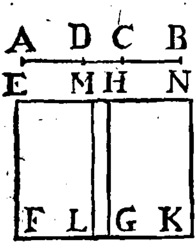
τ. 4. sch. 5. 2. rationale continentes, & differentiae inter $2\,AD \times DB$ & $2\,AC \times CB =$ [τ] differentia in-

υ. sch. 27. 10. ter summam $ACq + CBq$ & summam $ADq$

φ. 27. 10. & cor. 24. 10. $+ DBq$. Ergo erit haec differentia [υ] rationale spatium. Q. E. A [φ].

PROP.

## PROP. XLV. THEOR.

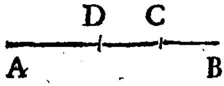



*Quae ex binis mediis secunda* AB *ad vnum duntaxat punctum* C *diuiditur in nomina* AC, CB.

Si negas, diuidatur etiam in D, & sit AC non aequalis ipsi BD, sed ea e. gr. maior. Ergo tam AC & CB, quam AD & DB sunt[κ] mediae $\in$ & media continentes; ac $ACq + CBq >$[ψ] $ADq + DBq$. Exponatur $\rho$ EF, ad quam applicetur Rgl. $EK = ABq$, & Rgl. $EG = ACq + CBq$, & Rgl. $EL = ADq + DBq$. Ex quo sequitur Rgl. HK $=$[ω] $2\ AC \times BC$, & Rgl. $MK = 2\ AD \times DB$. Quia autem mediae $\in$ sunt AC, CB: erit EG[α] medium, ideoque[β] EH $\rho \in$ EF. Eadem ratione HN est $\rho \in$ EF. Verum AC $\in$ CB, & proinde $ACq + CBq$ id est EG non $\Sigma$[γ] ipsi $2\ AC \times CB$ id est ipsi HK, & idcirco EH non $\Sigma$ HN. Patet itaque EH, HN esse $\rho \in$, & ergo[δ] EN α̃ ex binis nominibus, & diuisam in nomina in puncto H. Sed eodem modo ostendetur, EN etiam ad M diuisam esse in nomina. Neque tamen est $MN = EH$, quoniam $EG = ACq + CBq > ADq + DBq > 2\ AD \times DB = MK$. Ergo EN quae ex binis nominibus ad duo puncta in nomina diuisa est. Q. E. A[ε].

κ. 39. 10.
ψ. 3. sch. 5. 2.
ω. 4. 2.
α. cor. 24. 10. & 16. 10.
β. 23. 10.
γ. cor. 27. 10.
δ. 37. 10.
ε. 43. 10.

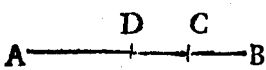
## PROP. XLVI. THEOR.




*Maior* AB *ad idem duntaxat punctum* C *diuiditur in nomina* AC, CB.

Si negas: diuidatur ad aliud punctum D in nomina AD, DB, ab ipsis CB, AC diuer-
ζ. 40. 10. sa. Erit ergo [ζ] ACq + CBq $\rho$, item ADq + DBq $\rho$, media vero erunt AC $\times$ CB, & AD $\times$ DB. Proinde, quum ACq +
η. sch. 27. 10. CBq — (ADq + DBq) [η] sit $\rho$, & = [ϑ] 2 AD
ϑ. 4. sch. 5. 2. $\times$ DB — 2 AC $\times$ CB; erit differentia inter media AD $\times$ DB & AC $\times$ CB rationale
ι. 27. 10. spatium. Q. E. A [ι].

## PROP. XLVII. THEOR.




*Rationale ac medium potens* AB *ad vnum duntaxat punctum* C *diuiditur in nomina* AC, CB.

Si negas, diuidatur etiam ad D. Erunt
κ. 41. 10. ergo ACq + CBq, & ADq + DBq media [κ], sed AC $\times$ CB, ac AD $\times$ DB rationalia. Quare, quum ACq + CBq — (ADq + DBq)
λ. 4. sch. 5. 2. = [λ] 2 AD $\times$ DB — 2 AC $\times$ CB, haec autem
μ. sch. 27. 10. ν. 27. 10. differentia [μ] sit $\rho$: erit & illa $\rho$. Q. E. A [ν].

## PROP. XLVIII. THEOR.


*Bina media potens* AB *ad vnum duntaxat punctum* C *diuiditur in nomina* AC, CB.

Si negas, diuidatur etiam in nomina AD, DB, diuersa ab illis, ita vt sit e. gr. AC > DB. Ad rationalem EF appli-

applicentur Rgl. EG $=$ ACq $+$ CBq, EK $=$ ABq, & EL $=$ ADq $+$ DBq. Ergo HK $=$ [ξ] 2 AC $\times$ CB, & MK $=$ 2 AD $\times$ DB. Sed quia ponitur[o] ACq $+$ CBq medium, erit & EG medium, & proinde [π] HE ρ̇. Eodem argumento HN est ρ̇. Quia vero & ponitur ACq $+$ CBq non Ꞓ[o] 2 AC $\times$ CB: erit EH non Ꞓ[ρ] HN. Itaque EH, HN erunt ρ̇ Є[σ]; & EN ex binis nominibus est[τ], atque diuisa in nomina in puncto H. Atqui similiter ostendetur, quia & ADq $+$ DBq nec non AD $\times$ DB media non Ꞓ ponuntur, eandem EN etiam ad M in nomina diuidi, ita vt MN, EH inaequalia sint. Q. E. A[υ].

ξ. 4. 2.
ο. 42. 10.
π. 23. 10.
ρ. 10. 10. & 1. 6.
σ. sch. 12. 10.
τ. 37. 10.
υ. 42. 10.

## DEFINITIONES SECVNDAE.

1. Exposita rationali, & quae ex binis nominibus diuisa in nomina, cuius maius nomen plus possit, quam minus, quadrato rectae lineae sibi longitudine commensurabilis: si quidem maius nomen expositae rationali commensurabile sit longitudine, tota dicatur *ex binis nominibus prima;*

2. Si vero minus nomen expositae rationali longitudine sit commensurabile, dicatur *ex binis nominibus secunda;*

3. Quod si neutrum ipsorum nominum sit longitudine commensurabile expositae rationali, vocetur *ex binis nominibus tertia.*

4. Rursus, si maius nomen plus possit, quam minus, quadrato rectae lineae sibi longitudine incommensurabilis: si quidem maius

nomen

nomen expositae rationali sit commensurabile longitudine, dicatur *ex binis nominibus quarta*;

5. Si vero minus, dicatur *quinta*;

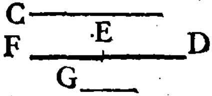
6. Quod si neutrum, dicatur *sexta*.

## PROP. XLIX. PROBL.

*Inuenire ex binis nominibus primam.*

φ. cor. lem. 1. 30. 10.

A 12 . B 4.




Exponantur $^{\varphi}$ duo numeri A, B ita vt A + B ad B quidem habeat rationem numeri quadrati ad quadratum, sed non ad A. Exponatur quoque $\rho$ C, & ei $\lesssim$ DE, & fiat $^{\chi}$ A + B : A = DEq : EFq; erit DF quaesita.

χ. cor. 6. 10.

Nam quia ratio numeri A + B ad A non est ratio quadrati ad quadratum: erit EF $\in^{\alpha}$ DE. Et quia DE $\rho$ est $^{\beta}$: erunt DE, EF $\rho \in$; & idcirco DF erit $^{\gamma}$ ex binis nominibus. Porro quia A + B : A = DEq : EFq, & A + B > A : erit DEq $>^{\delta}$ EFq, & DE > EF. Sit Gq = DEq − EFq. Et quia est conuertendo A + B : B = DEq : Gq : erit G id est $\sqrt{}$ (DEq − EFq) $\lesssim^{\epsilon}$ DE. Est vero etiam DE $\lesssim$ C. Ergo DF est ex binis nominibus $^{\zeta}$ prima. Q. E. F.

α. cor. 11. 10. β. 6. def. 10. γ. 37. 10. δ. sch. 16. 5. ε. 9. 10. ζ. 1. def. sec.

## PROP. L. PROBL.

*Inuenire ex binis nominibus secundam.*

η. cor. lem. 1. 30. 10.

A 12 . B 4.


Exponantur $^{\eta}$ duo numeri A, B, ita vt A + B ad B quidem rationem habeat numeri quadrati ad

ad quadratum, non autem ad A, & sint C, FE $\rho \asymp$, & fiat [ϑ] $A : A + B = FEq : EDq$. ϑ. cor. 6. 10.
Erit FD quaesita.

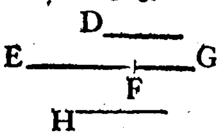
Quoniam enim ratio $A + B$ ad A non est quadrati numeri ad quadratum: erit [ι] ED $\in$ FE, & ergo [κ] erunt ED, FE $\rho \in$. Ex binis ergo nominibus erit FD. Praeterea vero quum, ob $A < A + B$, sit $FE <$ [λ] ED, & sit inuerse $A + B : A = DEq : FEq$, & conuertendo $A + B : B = EDq : EDq - FEq$: posito $Gq = EDq - FEq$, erit G id est $\surd(EDq - FEq)$ $\asymp$ [μ] ED. Est autem & minus nomen FE $\asymp$ C. Quare FD est ex binis nominibus secunda [ν]. Q. E. F.

ι. sch. 11. 10. κ. 6. def. 10. λ. sch. 16. 5. μ. 9. 10. ν. 2. def. sec.

## PROP. LI. PROBL.

*Inuenire ex binis nominibus tertiam.*

A 12 . B 4.
C 8.




Cape [ξ] tres numeros A, B, C, tales vt $A + B$ ad B quidem rationem quadrati numeri ad quadratum habeat, non autem ad A, C vero ad neutrum ipsorum A, $A + B$ talem habeat rationem. Accipe $\rho$ D, & fac $C : A + B =$ [ο] $Dq : EFq$, & $A + B : A = EFq : FGq$. Erit EG quaesita.

ξ. cor. lem. 1. 30. 10. ο. cor. 6. 10.

Etenim quia [π] D $\in$ EF, & [π] FG $\in$ EF, & hinc EF, FG $\rho$ sunt, erit EG ex binis nominibus [ρ]. Et quum sit $C : A + B = Dq : EFq$, atque $A + B : A = EFq : FGq$, ideoque ex aequo $C : A = Dq : FGq$: erit [σ] FG non $\asymp$ D. Sed & EF non $\asymp$ D. Ergo neutrum nomen EF, FG $\asymp \rho$ D. Deinde quia $A + B > A$, erit [τ] $EF > FG$.

π. sch. 11. 10. ρ. 37. 10. σ. 9. 10. τ. sch. 16. 5.

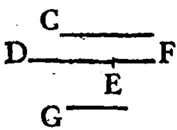
Sit

Sit autem Hq = EFq — FGq. Et quia eſt
σ. 9. 10. conuertendo A + B: B = EFq : Hq, erit H
υ. 3. def. ſec. id eſt √ (EFq — FGq) ε σ EF. Quare υ EG
eſt ex binis nominibus tertia. Q. E. F.

## PROP. LII. PROBL.

*Inuenire ex binis nominibus quartam.*

φ. cor. lem. 1. 30. 10. A 10. B 6. Sume φ duo numeros A, B ita vt A + B neque ad A neque ad B rationem quadrati numeri ad quadratum habeat, & expoſitae ρ C ſume ε DE,




χ. cor. 6. 10. & fac χ A + B: A = DEq : EFq. Erit DF quaeſita.

ψ. 6. def. 6. Nam erit ψ DE ρ, & EF Є ω DE, & ergo
ω. ſch. 11. 10.
α. ſch. 12. 10. erunt DE, EF α ρ Є. Hinc DF erit β ex bi-
β. 37. 10. nis nominibus. Porro quia A + B > A, erit
γ. ſch. 16. 5. DEq > γ EFq. Sit Gq = DEq — EFq. Ergo quia conuertendo A + B : B = DEq : Gq, non
δ. 9. 10. erit G id eſt √ (DEq — EFq) δ ε DE. Eſt
ε. 4. def. ſec. autem & DE ε C. Ergo DF ε eſt ex binis nominibus quarta. Q. E. F.

## PROP. LIII. PROBL.

Fig. prop. praec. *Inuenire ex binis nominibus quintam.*

Expoſitis numeris A, B talibus, quales in praecedente erant, & recta ρ C, ſume FE ε C, & fac A : A + B = FEq : EDq : erit FD quaeſita.

ζ. 6. def. 6. Etenim erit ζ FE ρ, & ED Є η FE, ideoque θ
η. ſch. 11. 10.
θ. ſch. 12. 10. FE, ED erunt ρ Є. Hinc FD erit ex binis ι
ι. 37. 10. nominibus. Dein quia eſt inuertendo A + B:

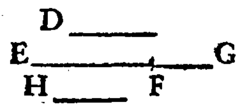
A =

$A = EDq : FEq$: erit $EDq$ [x] $> FEq$. Sit $EDq$ x. sch. 16. 5.
$- FEq = Gq$. Conuertendo igitur erit $A$
$+ B : B = EDq : Gq$, & propterea $G$ id est $\sqrt{}$
$(EDq - FEq)$ non $\preceq$ [λ] $ED$. Sed est quoque λ. 9. 10.
$FE \preceq C$. Ergo $FD$ erit [μ] ex binis nominibus μ. 5. def. sec.
quinta. Q. E. F.

## PROP. LIV. PROBL.

*Inuenire ex binis nominibus sextam.*

A 16. B 4.
C 12.




Exponantur duo numeri $A$, $B$ ita [ν] vt $A + B$ ad neutrum habeat rationem numeri quadrati ad quadratum, & alius $C$ [ξ] non quadratus, qui nec ad $A$ nec ad $A + B$ rationem quadrati ad quadratum habeat. Exponatur etiam rationalis $D$, & fiat [o] $C : A + B = Dq : EFq$, & $A + B : A = EFq : FGq$. Erit $EG$ quaesita.

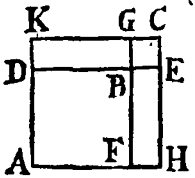
ν. 2. lem. 30. 10. & 1. sch. 24. 8.
ξ. 2. sch. 24. 8.
o. cor. 6. 10.

Erit enim [π] $EF \in D$, & $FG \in EF$, ideoque, quum $D$ ρ sit, $EF$, $FG$ ρ $\in$ erunt. Propterea [ρ] $EG$ erit ex binis nominibus. Et quia $A + B > A$, erit $EFq$ [σ] $> FGq$. Sit $EFq - FGq = Hq$. Iam conuertendo est $A + B : B = EFq : Hq$. Ergo $H$ id est $\sqrt{}(EFq - FGq)$ non $\preceq$ [τ] $EF$. Et quia ex aequo $C : A = Dq : FGq$, erit $FG \in$ [π] $D$. Ergo neutrum nominum $EF$, $FG \preceq D$. Quare $EG$ est ex binis nominibus [υ] sexta. Q. E. F.

π. sch. 11. 10.
ρ. 37. 10.
σ. sch. 16. 5.
τ. 9. 10.
υ. 6. def. sec.

LEM-

## LEMMA.

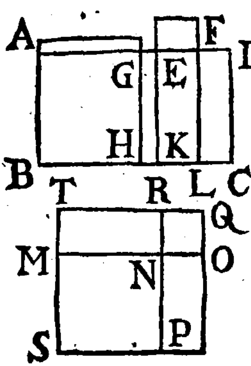



*Si duo quadrata* AB, BC *ponantur ita, vt* DB *ſit in directum ipſi* BE, *& compleatur* AC *parallelogrammum: dico* AC *quadratum eſſe, & inter quadrata* AB, BC *rectangulum* DG *medium eſſe proportionale, itemque inter ipſa* AC, CB *medium eſſe proportionale* DC.

Quia enim DB, BE in directum ſunt: erunt & FB, BG $^{\varphi}$ in directum. Et quia DB = FB, & BE = BG, erit DE = FG. Sed quum AC pgr. ſit, erit AH = KC = DE, & AK = CH = FG. Ergo AC aequilaterum eſt. Sed & rectangulum $^{\chi}$. Ergo AC eſt quadratum. Secundo, quia AB : DG = $^{\psi}$ FB : BG = DB : BE = DG : BC, patet DG eſſe medium proportionale inter AB, BC. Tertio, quia AC : DC = $^{\psi}$ AK : KD = KC : GC = DC : CB, patet ∺ AC, DC, CB. Q. E. D.

φ. 14. 1.
χ. ſch. 29. 1.
ψ. 1. 6.

## PROP. LV. THEOR.




*Si ſpatium* ABCD *contineatur ſub rationali* AB *& ex binis nominibus prima* AD: *recta linea ſpatium* ABCD *potens irrationalis eſt, quae ex binis nominibus appellatur.*

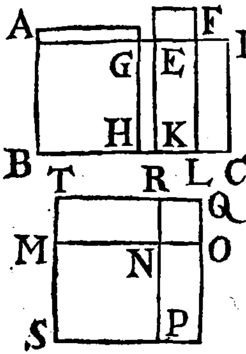
Diuide AD in nomina ad E, & ſit AE > ED. Ergo $^{\omega}$ AE, ED ρ̃ Є, & √ (AEq

ω. 1. def. ſec.

(AEq — EDq) $\asymp$ AE, & AE $\asymp$ AB. Biſeca ED in F, & ad AE applica Rgl. $=$ EFq, & deficiens figura quadrata. Fiant ex applicatione partes AG, GE. Ergo AG $\times$ GE $=^{\alpha}$ EFq, & AG $\asymp^{\beta}$ GE. Duc ad AB parallelas GH, EK, FL, & pone quadratum SN $=$ AH, & quadratum NQ $=$ GK, ita vt MN, NO ſint in directum, & comple Pgr. SQ. Ergo$^{\gamma}$ SQ $=$ MOq, & $\div$ SN, MR, NQ. Atqui quum ſit AG $\times$ GE $=$ EFq, & ergo AG : EF $^{\delta}=$ EF : GE : erit AH : EL $=^{\epsilon}$ EL : GK, id eſt $\div$ SN, EL, NQ. Ergo EL $=$ MR. Sed FC $=$ EL $=$ MR $=^{\zeta}$ OP. Ergo totum AC $=$ toti SQ, ideoque recta MO poteſt AC. Et quia AG $\asymp$ GE : erunt AG, GE $\asymp^{\eta}$ AE, ergo & ipſi AB; & ergo AG, GE erunt $\dot{\rho}$, & ob id AH, GK$^{\vartheta}$ $\dot{\rho}$. Quoniam igitur & SN, NQ $\dot{\rho}$ ſunt, erunt MN, NO $\dot{\rho}$. Quia vero AE $\asymp$ AG, & ED $\asymp$ EF, ſed AE non $\asymp$ ED: nec erit AG $\asymp^{\iota}$ EF. Ergo AH non $\asymp^{\kappa}$ EL, & SN non $\asymp$ MR. Hinc, quia SN : MR $=$ MN : NO, non erit MN $\asymp^{\kappa}$ NO. Quare MN, NO erunt $\dot{\rho}$ Є, & MO id eſt $\sqrt{}$ AC ex binis nominibus erit. Q. E. D.

α. 1. def. ſec.
β. 18. 10.
γ. lemma praec.
δ. 17. 6.
ε. 1. 6.
ζ. 43. 1.
η. 16. 10.
ϑ. 20. 10.
ι. 13. 10.
κ. 10. 10.

## PROP. LVI. THEOR.



*Si ſpatium* ABCD *contineatur ſub rationali* AB *& ex binis nominibus ſecunda* AD: *recta linea ſpatium* AC *potens irrationalis eſt, quae ex binis mediis prima appellatur.*

Iisdem enim conſtructis, quae in praecedente, eodem modo oſtendetur MO poſſe AC; & conſtabit etiam, AE, ED eſſe ρ ϵ, & ED ≍ AB, & AG ≍ GE. Quum
λ ſch. 14. 10. ergo [λ] AE ϵ AB, & AE ≍ [μ] vtrique ipſarum
μ. 16. 10. AG, GE: erunt [λ] AB, AG, GE ρ ϵ, ideoque [ν] AH, GK media; & proinde etiam quadrata
ν. ſch. 22. 10. SN, NQ media erunt, & MN, NO mediae [ν].
ξ. 10. 10. Dein ob AG ≍ GE, erit AH ≍ [ξ] GK, id eſt SN ≍ NQ, vel MNq ≍ NOq. Sed quia AE ≍ AG, & ED ≍ EF, non tamen AE ≍ ED: nec erit AG ≍ EF; & hinc AH non ≍ [ξ] EL, vel SN non ≍ PO, ideoque non erit MN ≍ [ξ] NO. Erat autem MNq ≍ NOq. Quare MN, NO ſunt mediae ϵ. Denique ob ED ≍
ο. 12. 10. AB, erunt [ο] EF, AB ρ ≍, ideoque [π] EL ρ, &
π. 20. 10. proinde MR = MN × NO ρ erit. Ex qui-
ς. 38. 10. bus omnibus patet MO, id eſt √ AC, eſſe [ς] ex binis mediis primam. Q. E. D.

PROP.

## PROP. LVII. THEOR.

*Si ſpatium* AC *contineatur ſub rationali* AB *& ex binis nominibus tertia* AD: *recta linea ſpatium* AC *potens irrationalis eſt, quae appellatur ex binis mediis ſecunda.* Fig. prop. LVI.

Iisdem conſtructis, quae in prop. 55. eodem modo, quo antea, patebit, eſſe MO = √ AC, & MN, NO medias. Sed quia ρ ED non eſt Ƹ [σ] AB, EF autem Ƹ ED, & AB = EK: erunt EF, EK ρ Є, ideoque erit EL = MR medium [τ]. Eſt autem MR = MN × NO. Ergo √ AC eſt ex binis mediis ſecunda [υ]. Q. E. D.

σ. hyp.
τ. ſch. 22. 10.
υ. 39. 10.

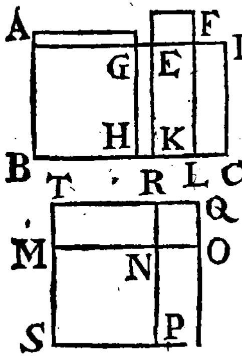
## PROP. LVIII. THEOR.

*Si ſpatium* AC *contineatur ſub rationali* AB *& ex binis nominibus quarta* AD: *recta linea ſpatium* AC *potens irrationalis eſt, quae vocatur maior.* Fig. prop. LVI.

Quoniam AD eſt ex binis nominibus quarta: [φ] erunt AE, ED ρ Є, & √ (AEq — EDq) non erit Ƹ AE, AE vero Ƹ AB. Biſeca ED in F, & fac omnia quae in prop. 55. Conſtat ergo MO = √ AC, & [χ] GE non Ƹ AG. Hinc GK non Ƹ [ψ] AH, id eſt [ω] NOq non Ƹ MNq, ideoque MN ⊖Є NO. Porro quia ρ AE Ƹ AB: erit AK = AH + GK = [ω] MNq + NOq rationale [α]. Denique quia AE Ƹ AB, & ED Ƹ EF, non autem AE Ƹ ED: non erit [β] EF Ƹ AB vel EK, ergo erunt [γ] EF, EK ρ Є, & ergo EF × EK [ω] = MN × NO erit medium [δ]. Vnde patet √ AC eſſe [ε] irrationalem maiorem. Q. E. D.

φ. 4. def. ſec.
χ. 19. 10.
ψ. 1. 6. & 10. 10.
ω. conſtr.
α. 20. 10.
β. 14. 10.
γ. ſch. 12. 10.
δ. 22. 10.
ε. 40. 10.

## PROP. LIX. THEOR.




*Si ſpatium* AC *contineatur ſub rationali* AB *& ex binis nominibus quinta* AD: *recta linea ſpatium potens irrationalis eſt, quae vocatur rationale & medium potens.*

Conſtructis iisdem, iterum conſtat MO = √AC, & MN ⊖Є NO. Porro, quia ED eſt minor portio ex binis no-
ζ. 5.def. ſec. minibus quintae, eſt ED Σ ζ AB, non autem
η. 13. 10. & ſch. 12. 10. AE Σ ED, ſunt tamen AE, ED, AB ρ. Ergo η AE, AB ρ Є. Ergo AK = ϑ MNq + NOq
ϑ. conſtr.
ι. 22. 10. medium ι erit. Denique, quia EF, AB ρ Σ, erit
κ. 20. 10. MN × NO = ϑ EL κ rationale. Quapropter √ AC erit irrationalis rationale ac me-
λ. 41. 10. dium λ potens. Q. E. D.

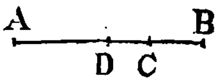
## PROP. LX. THEOR.

Fig. prop. LIX. *Si ſpatium* AC *contineatur ſub rationali* AB *& ex binis nominibus ſexta* AD: *quae ſpatium* AC *poteſt recta linea irrationalis eſt, quae vocatur bina media potens.*

Conſtructis iisdem, quae ſupra, patet eſſe
μ. 6.def.ſec. MO = √AC, & MN ⊖Є NO, & nec AE nec ED
ν. ſch. 12. 10. Σ μ AB; itaque AE, AB ρ Є ν, & MNq + NOq
ξ. conſtr. = ξ AE × AB medium ο. Et, quia EF Σ ED,
ο. ſch. 22. 10. non autem EK Σ ED, erunt π EK, EF ρ Є, ideoque MN × NO = ξ EK × EF medium π erit.

erit. Porro, quia AE non $\preceq^{\mu}$ EF, erit MNq + NOq non $\preceq$ MR. Quare MO irrationalem esse bina media potentem [π] patet. Q. E. D. π. 42. 10.

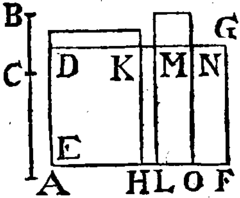
## LEMMA.




*Si recta linea* AB *in partes inaequales* AC, CB *secetur: ipsarum partium quadrata* ACq + CBq *maiora sunt rectangulo* 2 AC × CB, *quod bis sub dictis partibus continetur.*

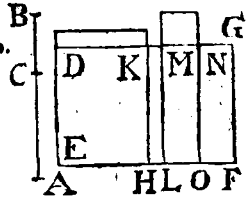
Bisecetur enim AB in D: & erit [ρ] AC × CB + CDq = ADq. Hinc 2 AC × CB < 2 ADq, &, quia ACq + CBq [σ] = 2 ADq + 2 DCq, ACq + CBq > 2 AC × CB. Q. E. D. ρ. 5. 2. σ. 9. 2.

## PROP. LXI. THEOR.




*Quadratum eius* AB, *quae est ex binis nominibus, ad rationalem* DE *applicatum latitudinem* DG *facit ex binis nominibus primam.*

Sit AC maius, CB minus nomen rectae AB. Fiat Rgl. DH = ACq, & Rgl. KL = BCq. Hinc erit MF = [τ] 2 AC × CB. Bisecetur MG in N, & ad ML ducatur parallela NO. Ergo MO [υ] = NF = AC × CB. Sed, quia [φ] AC, CB sunt $\rho$ Є, erunt ACq, CBq $\rho$ $\preceq$, ideoque ACq + CBq $\preceq^{\chi}$ vtrique ACq, BCq. Quoniam ergo ACq + CBq, id est DL, $\rho$ est [ψ]: erit DM $\rho^{\omega}$ & $\preceq$ DE. Dein quia AC, τ. 4. 2. υ. 36. 1. φ. 37. 10. χ. 16. 10. ψ. sch. 12. 10. ω. 21. 10.



α. sch. 22. 10.
β. 23. 10.
γ. 13. 10.
φ. 37. 10.

CB ρ Є, erit MF medium [α], & proinde MG [β] ρ non ≾ ML vel DE: Quare, quum DM ρ & ≾ DE, erunt DM, MG ρ Є [γ], & DG erit [φ] ex binis nominibus. Insuper, quia

δ. lem. 55. 10. ∺ [δ] ACq, AC $\times$ CB, CBq, ideoque ∺ DH,
ε. 1. 6. MO, KL, erit DK : MN = [ε] MN : KM, & er-
ζ. 17. 6. go DK $\times$ KM = [ζ] MNq = $\frac{1}{4}$ MGq. Quia
vero ACq ≾ CBq, & inde DH ≾ KL: erit DK
η. 10. 10. ≾ [η] KM. Et quia ACq + CBq [ϑ] > 2 AC
ϑ. lem. hui. $\times$ CB, ideoque DL > MF: patet esse DM
ι. 18. 10. > MG. Ergo [ι] √ (DMq — MGq) ≾ DM.
κ. 1. def. sec. Quare DG est ex binis nominibus prima [κ].
Q. E. D.

## PROP. LXII. THEOR.

Fig. prop. LXI.

*Quadratum eius* AB, *quae est ex binis mediis prima, ad rationalem* DE *applicatum latitudinem* DG *facit ex binis nominibus secundam.*

Constructis quae in praecedenti proposi-
λ. 38. 10. tione, erunt AC, CB mediae Є [λ], & AC $\times$ CB ρ.
μ. 23. 10. Ergo DL medium est, & DM ρ Є DE [μ]. Rur-
ν. 21. 10. sus quia MF = 2 AC $\times$ CB est ρ, erit [ν] MG ρ
ξ. sch. 14. 10. ≾ DE. Hinc [ξ] DM, MG erunt ρ Є, & ergo
ο. 37. 10. DG erit [ο] ex binis nominibus. Et quoniam, vt in antecedente, ostendetur DM > MG, & √ (DMq — MGq) ≾ DM: erit DG ex bi-
π. 2. def. sec. nis nominibus [π] secunda. Q. E. D.

PROP.

## PROP. LXIII. THEOR.

*Quadratum eius* AB, *quae est ex binis mediis secunda, ad rationalem* DE *applicatum latitudinem* DG *facit ex binis nominibus tertiam.* Fig. prop. LXI.

Constructis iisdem, quae ante, [ς] erunt AC, CB mediae Є, & erit DL $=$ ACq $+$ CBq medium, & hinc DM ρ Є DE. Similiter, quia AC $\times$ CB [ς] medium est, erit MG ρ Є DE. Sed, quia AC Є CB, erit DL $=$ ACq $+$ CBq non $\leq$ [σ] MF $= 2$ AC $\times$ CB, & ob id DM non $\leq$ MG. Sunt autem DM, MG ρ. Ergo DG est ex binis nominibus. Ostendetur autem vt antea DM $>$ MG, & $\surd$(DMq $-$ MGq) $\leq$ DM. Ergo erit DG [τ] ex binis nominibus tertia. Q. E. D.

ς. 39. 10.
σ. cor. 27. 10.
τ. 3. def. sec.

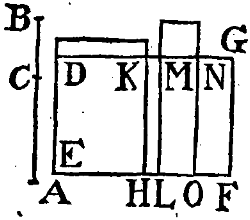
## PROP. LXIV. THEOR.

*Quadratum maioris* AB *ad rationalem* DE *applicatum latitudinem* DG *facit ex binis nominibus quartam.* Fig. prop. LXI.

Construantur eadem. Iam erit [υ] AC ӨЄ CB, & ACq $+$ CBq ideoque DL ρ, & AC $\times$ CB ideoque MF medium. Hinc DM, DE sunt ρ $\leq$ [φ], sed [χ] MG, DE ρ Є. Quare DM, MG sunt [ψ] ρ Є, & DG est [ω] ex binis nominibus. Sed vt ante ostendetur, esse DM $>$ MG, & DK $\times$ KM $= \frac{1}{4}$ MGq. Quare quum ACq non $\leq$ CBq, & ergo DK non $\leq$ [α] KM, ideoque $\surd$(DMq $-$ MGq) [β] non $\leq$ DM: erit DG ex binis nominibus quarta [γ]. Q. E. D.

υ. 40. 10.
φ. 21. 10.
χ. 23. 10.
ψ. sch. 14. 10.
ω. 37. 10.
α. 10. 10 & 1. 6.
β. 19. 10.
γ. 4. def. sec.

## PROP. LXV. THEOR.




*Quadratum eius* AB, *quae rationale ac medium potest, ad rationalem* DE *applicatum latitudinem* DG *facit ex binis nominibus quintam.*

Nam iisdem constructis constat DL $=$ ACq $+$ CBq medium esse[δ], MF vero $=$ 2 AC $\times$ CB ρ, & hinc DM ρ non $\asymp$ DE, & MG $\asymp$ DE, ideoque DM, MG ρ ϵ. Ergo, reliquis vt in praecedente ostensis, patebit, DG esse ex binis nominibus quintam. Q. E. D.

δ. 41. 10.

## PROP. LXVI. THEOR.

Fig. prop. LXV.

*Quadratum eius* AB, *quae bina media potest, ad rationalem* DE *applicatum latitudinem* DG *facit ex binis nominibus sextam.*

ε. 42. 10.
ζ. 23. 10.

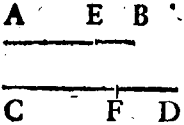
Nam quia DL, MF media[ε] sunt, & ob id DM, MG ρ[ζ] & non $\asymp$ ipsi DE; quia praeterea DL non $\asymp$[ε] MF, & ob id DM, MG ρ ϵ, & DG ex binis nominibus; reliqua vero vt in prop. 64. ostenduntur: erit DG ex binis nominibus sexta[η]. Q. E. D.

η. 6. def. sec.

## PROP. LXVII. THEOR.

*Ei* AB, *quae est ex binis nominibus, longitudine commensurabilis* CD *& ipsa ex binis nominibus est ordine eadem.*

Sit




Sit enim AE maius nomen rectae AB. Ergo [ϑ] AE, EB sunt $\dot\rho$ Є. Fiat [ι] AB : CD $=$ AE : CF. Ergo EB : FD $=$ [κ] AB : CD. Hinc [λ] AE $\prec$ CF, & EB $\prec$ FD, & ergo [μ] CF, FD $\dot\rho$. Et quoniam AE : CF $=$ EB : FD, & permutando AE : EB $=$ CF : FD, & AE Є EB : erit [ν] CF Є FD. Quare CD est [ϑ] ex binis nominibus. Iam [ξ] si $\sqrt{}$ (AEq — EBq) $\prec$ AE, erit & $\sqrt{}$ (CFq — FDq) $\prec$ CF; si vero $\sqrt{}$ (AEq — EBq) non $\prec$ AE, neque $\sqrt{}$ (CFq — FDq) $\prec$ CF erit; & si AE $\prec$ expositae rationali, erit & [ο] CF $\prec$ eidem; si EB $\prec$ expositae $\dot\rho$, erit & [ο] FD $\prec$ eidem; si neutra AE, EB $\prec$ expositae rationali, nec CF, FD $\prec$ [π] eidem erunt. Ergo CD ex binis nominibus ordine eadem erit ipsi AB [ρ]. Q. E. D.

ϑ. 37. 10.
ι. 12. 6.
κ. 19. 5.
λ. 10. 10.
μ. sch. 12. 10.
ν. sch. 10. 10.
ξ. 15. 10.
ο. 12. 10.
π. 14. 10.
ρ. def. sec.

## PROP. LXVIII. THEOR.

*Ei* AB, *quae est ex binis mediis, longitudine commensurabilis* CD *& ipsa ex binis mediis est, atque ordine eadem.* Fig. prop. LXVII.

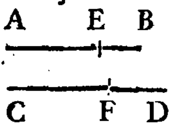
Sint AE, EB mediae in AB. Ergo [σ] AE Є EB. Fiat AB : CD $=$ AE : CF. Ergo EB : FD $=$ AB : CD $=$ AE : CF. Hinc erit EB $\prec$ FD, & AE $\prec$ CF, ideoque [τ] CF, FD mediae erunt. Et, quoniam AE : EB $=$ CF : FD, erunt CF, FD [υ] mediae Є, & ob id CD ex binis mediis erit [σ]. Iam, quia AE : EB $=$ CF : FD, erit AEq : AE $\times$ EB $=$ [φ] CFq : CF $\times$ FD, & permutando AEq : CFq $=$ AE $\times$ EB : CF $\times$ FD, ideoque [χ] AE $\times$ EB $\prec$ CF $\times$ FD. Si igitur

σ. 38. & 39. 10.
τ. 24. 10.
υ. 1. sch. 10. 10.
φ. 1. 6. & 11. 5.
χ. 10. 10.

ψ. sch. 12. 10. igitur AE ✕ EB ρ: erit & ψ CF ✕ FD ρ: sin AE ✕ EB medium; erit & CF ✕ FD me-
ω. cor. 24. 10. dium ω. Ergo CD est ex binis mediis σ ordine eadem ipsi AB. Q. E. D.

## PROP. LXIX. THEOR.

*Maiori* AB *commensurabilis* CD *& ipsa maior est.*




Factis enim iisdem quae supra, erit AE : CF = EB : FD
α. 10. 10. = AB : CD. Ergo α AE Σ CF, & EB Σ FD. Et quia permutando AE : AB = CF : CD: erit AEq :
β. 22. 6. ABq = β CFq : CDq. Similiter EBq : ABq
γ. 24. 5. = FDq : CDq. Ergo γ AEq + EBq : ABq = CFq + FDq : CDq, & permutando AEq + EBq : CFq + FDq = ABq : CDq. Ergo AEq + FBq Σ α CFq + FDq. Est autem AEq +
δ. 40. 10. EBq ρ δ. Ergo ε CFq + FDq ρ erit. Osten-
ε. sch. 12. 10. ditur autem vt in praecedente CF ✕ FD Σ AE ✕ EB. Medium vero est AE ✕ EB δ.
ζ. cor. 24. 10. Ergo & CF ✕ FD medium ζ erit. Denique,
η. 2. sch. 10. 10. quia AE θε δ EB, erit & η CF θε FD. Ergo δ CD maior erit. Q. E. D.

## PROP. LXX. THEOR.

Fig. prop. LXIX. *Rationale ac medium potenti* AB *commensurabilis* CD *& ipsa rationale ac medium potens est.*

Constructis iisdem, similiter ostendemus CF θε FD, & CFq + FDq Σ AEq + EBq,
ι. 41. 10. & CF ✕ FD Σ AE ✕ EB. Iam AEq + EBq ι medium

medium eſt; ergo &[κ] CFq + FDq. Et quia [κ. cor. 24. 10.]
AE $\times$ EB[ι] ρ: erit CF $\times$ FD ρ[λ]. Et igi- [λ. ſch. 12. 10.]
tur CD erit rationale ac medium potens[ι].
Q. E. D.

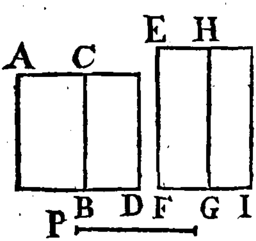
## PROP. LXXI. THEOR.

*Bina media potenti* AB *commenſurabilis* CD [Fig. prop. LXIX.]
*& ipſa bina media potens eſt.*

Nam vt in 69. demonſtrabimus, CF ⊖Є FD, & CFq + FDq Σ AEq + EBq, & CF $\times$ FD Σ AE $\times$ EB. Iam quia AEq + EBq, & AE $\times$ EB media[μ] ſunt, & AEq + EBq non Σ [μ. 42. 10.] AE $\times$ EB: erunt CFq + EDq & CF $\times$ FD [ν] media, & erit CFq + FDq non Σ[ξ] CF $\times$ [ν. cor. 24. 10.] FD. Ergo CD erit bina media potens[μ]. [ξ. 14. 10.]
Q. E. D.

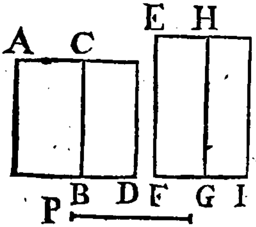
## PROP. LXXII. THEOR.

*Si rationale* AB *&* *medium* CD *componantur: quatuor irrationales fiunt, vel quae ex binis nominibus, vel quae ex binis mediis prima, vel maior, vel rationale ac medium potens.*




Sit P = √(AB + CD. Dico P fore vnam ex quatuor dictis irrationalibus.

*Caſ. 1.* Sit AB < CD. Ad EF ρ applicetur Rgl. EFG = AB, & Rgl. HGI = CD. Ergo erit EG ρ & FG ρ Σ EF[ο]. HI vero erit [ο. 21. 10.] medium, & GI ρ non Σ EF[π]. Eſt vero EG [π. 23. 10.]
non




ρ. cor. 24.10. & hyp. non ≾$^{\rho}$ HI, & EG:HI = FG: GI. Ergo FG non ≾ GI, & idcirco FG, GI ſunt ῥ Є, & FI eſt ex binis nominibus. Et quia EG > HI: erit & FG > GI. Iam ponatur √ (FGq — GIq) ≾ FG: & erit FI ex binis nominibus

σ. 1. def. ſec. prima$^{\sigma}$; & √ EI = √ AD = P ex binis no-
τ. 55. 10. minibus$^{\tau}$. Ponatur √ (FGq — GIq) non ≾
υ. 4. def. ſec. φ. 58. 10. FG: & erit FI ex binis nominibus quarta$^{\upsilon}$; & P maior$^{\varphi}$.

*Caſ.* 2. Sit AB < CD: & erit FG < GI; FI autem vt antea ex binis nominibus. Quare, poſita √ (GIq — FGq) ≾ GI, erit P ex
χ. 56. 10. binis mediis$^{\chi}$ prima. Poſita autem √ (GIq
ψ. 59. 10. — FGq) non ≾ GI, erit P rationale ac medium potens$^{\psi}$. Q. E. D.

## PROP. LXXIII. THEOR.

Fig. prop. LXXII. *Si duo media inter ſe incommenſurabilia* AB, CD *componantur: duae reliquae irrationales fiunt; vel ex binis mediis ſecunda, vel bina media potens.*

ω. 23. 10. Factis iisdem quae in praecedente, $^{\omega}$ erit
α. hyp. nec FG nec GI ≾ EF, vtraque tamen erit ῥ.
β. 10. 10. Et quia EG non ≾$^{\alpha}$ HI, ideoque FG non ≾$^{\beta}$ GI: erunt FG, GI ῥ Є, & hinc FI ex binis nominibus erit, quorum neutrum ≾ rationali EF.

*Caſ. 1.*

*Caſ. 1.* Iam ſi fuerit AB $>$ CD, ideoque FG $>$ GI, & $\sqrt{}$ (FGq — GIq) $\asymp$ FG: erit FI ex binis nominibus tertia, & hinc P [γ] ex binis mediis ſecunda. Sin $\sqrt{}$ (FGq — GIq) non $\asymp$ FG: erit P bina media [δ] potens. γ. 57. 10. δ. 60. 10.

*Caſ. 2.* Si fuerit AB $<$ CD: ſimiliter demonſtrabitur, P aut ex binis mediis ſecundam, aut bina media potentem eſſe. Q. E. D.

*Corollarium.*

Quae ex binis nominibus, & quae poſt ipſam ſunt (prop. 38. 39. 40. 41. 42.) irrationales, neque mediae neque inter ſe eaedem ſunt. Quadratum enim, quod fit a media, ad rationalem applicatum latitudinem efficit rationalem; quod autem fit ab ea, quae eſt ex binis nominibus, ad rationalem applicatum latitudinem efficit ex binis nominibus primam; quod ab ea, quae eſt ex binis mediis prima, ad rationalem applicatum latitudinem efficit ex binis nominibus ſecundam; & ſic deinceps (prop. 63. 64. 65. 66). Quoniam igitur dictae latitudines differunt, & a prima, & inter ſeſe, a prima quidem, quod rationalis ſit, inter ſeſe vero, quod ordine non ſint eaedem: conſtat & ipſas irrationales inter ſe differentes eſſe.

## Principium Senariorum per detractionem.

### PROP. LXXIV. THEOR.

*Si a rationali* AC *rationalis* AB *auferatur, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti* AC: *reliqua* BC *irrationalis eſt. Vocetur autem* Apotome.

Nam 2 AC $\times$ AB non $\asymp$ [ε] ACq + ABq, & ob id [ζ] BCq non $\asymp$ ACq + ABq. Hinc, quia ε. cor. 27. 10. ζ. 7. 2. & cor. 17. 10.

η. sch. 27. 10. quia ACq + ABq ρ[η] eſt, erit BCq αλ, & ergo BC αλ. Q. E. D.

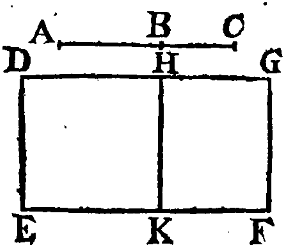
## PROP. LXXV. THEOR.


*Si a media* AC *media* BC *auferatur, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti* AC, *quae cum tota* AC *rationale continet: reliqua* AB *irrationalis eſt. Vocetur autem* mediae apotome prima.

θ. cor. 27. 10. Nam ACq + BCq [θ] non $\lesssim$ 2 AC $\times$ CB, &
ι. 7. 2 & 17. 10. ergo ABq non $\lesssim$[ι] 2 AC $\times$ CB, ac ob id AB[κ]
κ. 11. def. 10. αλ. Q. E. D.

## PROP. LXXVI. THEOR.

*Si a media* AC *media* CB *auferatur, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti* AC, *quae cum tota* AC *medium continet: & reliqua* AB *irrationalis eſt. Vocetur autem* mediae apotome ſecunda.




Exponatur ρ DE, ad quam applicetur Rgl. DEK = 2 AC $\times$ BC, & Rgl. DEF = ACq + CBq.
λ. 7. 2. Erit itaque [λ] HF = ABq. Et quia ACq
μ. 16. 10 & cor. 24. 10. + CBq medium [μ] eſt, nec non AC $\times$ CB: erunt DF, DK media, & proinde [ν] EF, EK ρ. Sed quia AC $\in$
ν. 23. 10.
ξ. cor. 27. 10. CB, & ob id [ξ] ACq + CBq non $\lesssim$ 2 AC $\times$
ο. 1. 6. & 10. 10. CB: erit [ο] FE non $\lesssim$ EK. Ergo EF, EK erunt

ρ $\in$,

ρ ε, & ergo KF $^{\pi}$ αλ, & ipſum HF $^{\rho}$ αλ, & ob id quoque AB $^{\sigma}$ αλ erit. Q. E. D.

π. 74. 10.
ρ. ſch. 21. 10.
σ. 11. def. 10.

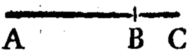
## PROP. LXXVII. THEOR.


*Si a recta linea* AC *recta linea* CB *auferatur, potentia incommenſurabilis exiſtens toti* AC, *quae cum tota faciat compoſitum quidem ex ipſarum quadratis* ACq + CBq *rationale, quod autem ſub ipſis continetur* AC × CB *medium: reliqua* AB *irrationalis eſt. Vocetur autem* minor.

Nam quia ACq + CBq non $\precsim^{\tau}$ 2 AC × CB: erit & ACq + CBq non $\precsim^{\upsilon}$ ABq. Quare AB $^{\varphi}$ erit αλ. Q. E. D.

τ. ſch. 13. 10.
υ. cor. 17. 10.
φ. 11. def. 10.

## PROP. LXXVIII. THEOR.



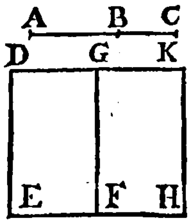

*Si a recta linea* AC *recta linea* CB *auferatur potentia incommenſurabilis exiſtens toti* AC, *& cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis* ACq + CBq *medium, quod autem ſub ipſis bis continetur* 2 AB × CB *rationale: reliqua* AB *irrationalis eſt. Vocetur autem* cum rationali medium totum efficiens.

Nam quia ACq + CBq non $\precsim^{\chi}$ 2 AC × CB: erit ABq non $\precsim^{\psi}$ 2 AC × CB, & hinc AB $^{\omega}$ αλ. Q. E. D.

χ. ſch. 13. 10.
ψ. 17. 10.
ω. 11. def. 10.

PROP.

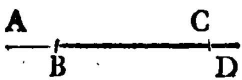
## PROP. LXXIX. THEOR.



*Si a recta linea* AC *recta linea* CB *auferatur potentia incommensurabilis existens toti* AC, *& cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis* ACq + CBq *medium, quod autem sub ipsis bis continetur* 2 AC × CB *medium, & adhuc ipsarum quadrata* ACq + CBq *incommensurabilia ei* 2 AC + CB *quod bis continetur sub ipsis: reliqua* AB *irrationalis est. Vocetur autem* cum medio medium totum efficiens.

Ad ῥ DE applica Rgl. DEH = ACq +
α. 7. 2. CBq, & Rgl. DEF = 2 AC × CB. Ergo
β. 23. 10. GH = [α] ABq, & EH, EF sunt ῥ [β], & DH
γ. 10. 10. & 1. 6. non ⊏ DF. Propterea EH non ⊏ [γ] EF, ideo-
δ. 74. 10. que EH, EF ῥ ϵ sunt; ex quo sequitur FH [δ]
ε. sch. 21. 10. esse αλ, & GH [ε] αλ, & AB [ζ] αλ. Q. E. D.
ζ. 11. def. 10.

## PROP. LXXX. THEOR.



*Apotomae* AB *vna tantum congruit recta linea* BC *potentia solum commensurabilis existens toti* AC.

η. 74. 10. Si negas: congruat alia BD, ita vt [η] AD, DB sint ῥ ϵ. Et quia ADq + DBq = 2 AD ×
θ. 7. 2. DB + [θ] ABq, ACq + CBq = 2 AC × CB + ABq: erit ADq + DBq — (ACq + CBq) = 2 AD × DB — 2 AC × CB. Sed quia
ι. sec. 27. 10. etiam AC, CB sunt [η] ῥ ϵ, & hinc [ι] ADq + DBq — (ACq + CBq) ῥ: erit & 2 AD × DB

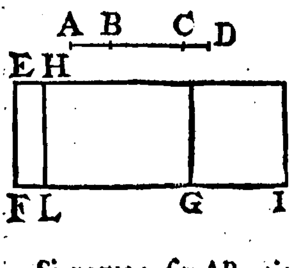
DB — 2 AC $\times$ CB $\rho$. Q. E. A [κ], quia AD κ. 27. 10.
$\times$ DB & AC $\times$ CB media [λ] sunt. λ. sch. 22. 10.

## PROP. LXXXI. THEOR.

*Mediae apotomae primae* AB *vna tantum congruit recta linea media* BC, *potentia solum commensurabilis existens toti* AC, *& cum tota rationale continens.* Fig. prop. LXXX.

Si negas: sit AB etiam mediae AD apotome prima. Ergo erunt [μ] AD, DB mediae Є, μ. 75. 10.
& AD $\times$ DB $\rho$. Erit autem vt antea ADq + DBq — (ACq + CBq) = 2 AD $\times$ DB
— 2 AC $\times$ CB. Et quia ADq + DBq me- ν. cor. 24. 10.
dium [ν] est, nec non ACq + CBq [ξ]; ratio- ξ. 24. 10 & cor. ejusd.
nalia autem sunt 2 AD $\times$ DB & [ο] 2 AC $\times$ CB: ο. hyp.
medium superat medium rationali [π]. Q. E. A [ρ]. π. sch. 27. 10. ρ. 27. 10.

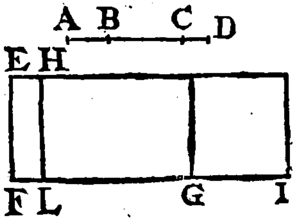
## PROP. LXXXII. THEOR.




*Mediae apotomae secundae* AB *vna tantum congruit recta linea media* BC, *potentia solum commensurabilis existens toti* AC, *& cum tota medium continens.*

Si negas: sit AB etiam apotome secunda
mediae AD, id est, sint [σ] AD, DB mediae Є, σ. 76. 10.
& medium continentes. Ad $\rho$ EF applicetur
Rgl. EFG = ACq + CBq, & auferatur Rgl.
HLG = 2 AC $\times$ CB, vel EL = [τ] ABq. τ. 7. 2.
Ad eandem EF applicetur quoque Rgl. EFI

T =ADq




τ. 7. 2. = ADq + DBq: & erit HI =[τ] 2 AD

υ. hyp. & 24. 10. × DB. Et quia AC, CB mediae Є[υ] sunt: erit ACq + CBq medium[φ], & ergo EG medium

φ. 16. 10. & cor. 24. 10.

χ. 23. 10. erit, & FG ρ[χ]. Rursus quia AC × CB, & hinc etiam HG, medium est: erit LG ρ[χ]. Sed

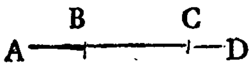
ψ. cor. 27. 10. quia AC Є CB: erit[ψ] ACq + CBq non Ɛ 2 AC × CB, id est, EG non Ɛ HG; & ob id

ω. 1. 6. & 10. 10. FG non Ɛ[ω] LG. Quare FG, LG sunt ρ Є.

α. 74. 10. Proinde[α] FL est apotome rectae FG. Similiter autem demonstrabimus, esse & FL apo-

β. 80. 10. tomen rectae FI. Q. E. A[β].

## PROP. LXXXIII. THEOR.




*Minori* AB *una tantum congruit recta linea* BC, *potentia incommensurabilis existens toti* AC, *& cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis* ACq + CBq *rationale, quod autem bis sub ipsis continetur* 2 AC × CB *medium.*

γ. 77. 10 Si negas: congruat BD. Ergo[γ] AD ӨЄ DB, & ADq + DBq ρ, & 2 AD × DB me-

δ. 7. 2. dium erit. Et quia ADq + DBq =[δ] 2 AD × DB + ABq, & ACq + CBq = 2 AC × CB + ABq: erit ADq + DBq — (ACq + CBq) = 2 AD × DB — 2 AC × CB. Ergo

ε. sch. 27. 10. medium 2 AD × DB superabit medium 2 AC

ζ. 27. 10. × CB rationali[ε]. Q. E. A[ζ].

PROP.

## PROP. LXXXIV. THEOR.

*Ei* AB, *quae cum rationali medium totum facit, vna tantum congruit recta linea* BC *potentia incommensurabilis existens toti* AC, *& cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis* ACq + CBq *medium, quod autem bis sub ipsis continetur* 2 AC × CB *rationale.* Fig. prop. LXXXIII.

Si negas: congruat quoque BD. Ergo [h] ADq + DBq medium, & 2 AD × DB ρ erit. Et quia vt antea ADq + DBq — (ACq + CBq) = 2 AD × DB — 2 AC × CB = [g] ρ: medium ADq + DBq superabit medium ACq + CBq rationali. Q. E. A [i].

h. 78. 10.
g. sch. 27. 10.
i. 27. 10.

## PROP. LXXXV. THEOR.

*Ei* AB, *quae cum medio medium totum fecit, vna tantum congruit recta linea* BC, *potentia incommensurabilis existens toti* AC, *& cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis* ACq + CBq *medium, quod autem bis sub ipsis continetur* 2 AC × CB *medium, & adhuc incommensurabile composito ex quadratis ipsarum.* Fig. prop. LXXXII.

Si negas: congruat etiam BD, ita vt AD ϴϵ DB, & medium 2 AD × DB non ≍ medio ADq + DBq. Fiant eadem quae in propositione LXXXII; & simili ratione, ac ibi, demonstrabitur, eandem FL esse apotomen duarum FG, FI. Q. E. A [x].

x. 80. 10.

## DEFINITIONES TERTIAE.

1. Expoſita rationali & apotoma, ſi quidem tota plus poſſit, quam congruens, quadrato rectae lineae ſibi commenſurabilis longitudine; ſitque tota expoſitae rationali longitudine commenſurabilis: vocetur *apotome prima*.

2. Si vero congruens ſit longitudine commenſurabilis expoſitae rationali; & tota plus poſſit, quam congruens, quadrato rectae lineae ſibi commenſurabilis longitudine: vocetur *apotome ſecunda*.

3. Quod ſi neutra ſit longitudine commenſurabilis expoſitae rationali; & tota plus poſſit, quam congruens, quadrato rectae lineae ſibi commenſurabilis longitudine: dicatur *apotome tertia*.

4. Rurſus ſi tota plus poſſit, quam congruens, quadrato rectae lineae ſibi incommenſurabilis longitudine: ſi quidem tota ſit longitudine commenſurabilis expoſitae rationali, vocetur *apotome quarta*;

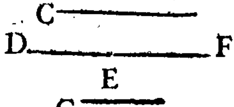
5. Si vero congruens, vocetur *apotome quinta*;

6. Quod ſi neutra, dicatur *apotome ſexta*.

### PROP. LXXXVI. PROBL.

*Inuenire primam apotomen.*

A 16. B 9.




λ. cor. 1. lem. 30. 10.

μ. cor. 6. 10.

Expoſitae rationali C fiat ≍ DF. Capiantur [λ] duo numeri A, B quadrati, ita vt A—B non ſit quadratus, & fiat [μ] A : A—B

$A - B = DFq : FEq$. Dico DE esse apotomen primam.

Nam quia $DF \asymp C$: erit $DF\ \rho$. Et quia DFq ad EFq rationem numeri ad numerum, sed non quadrati ad quadratum, habet: erit[ν] EF $\epsilon$ DF; & ergo erunt EF, DF $\rho\ \epsilon$, & DE apotome[ξ] erit. Sit autem $G = \sqrt{(DFq - FEq)}$. Iam quia $A : A - B = DFq : EFq$, erit conuertendo $A : B = DFq : Gq$, & ob id[o] $G = \sqrt{(DFq - FEq)} \asymp DF$. Ergo DE est apotome prima[π]. Q. E. F.

ν. cor. 11. 10.
ξ. 74. 10.
o. 9. 10.
π. 1. def. tert.

## PROP. LXXXVII. PROBL.

*Inuenire secundam apotomen.*

Expositae $\rho$ C sit $\asymp$ EF, & exponantur numeri A, B quadrati, ita vt $A - B$ non sit quadratus, & fiat $A - B : A = EFq : FDq$. Erit DE apotome secunda.

Fig. prop. LXXXVI.

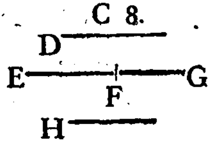
Nam, quia $EF \asymp C$, erit EF $\rho$; & vt antea ostendemus, DE apotomen esse, atque $\sqrt{(DFq - FEq)} \asymp DF$. Quare patet DE esse apotomen secundam[ρ]. Q. E. F.

ρ. 2. def. tert.

## PROP. LXXXVIII. PROBL.

*Inuenire tertiam apotomen.*

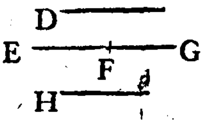
A 16. B 12.
C 8.




Exponantur $\rho$ D, & tres numeri A, B, C non habentes inter se rationem quadrati ad quadratum; A vero ad $A - B$ habeat talem rationem. Fiat $C : A = Dq : EGq$, & $A : B = EGq : GFq$. EF erit apotome tertia.

 Nam

A 16. B 12.
C 8.

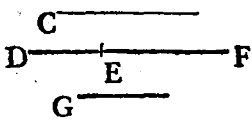



σ. 6. 10. Nam quia EGq Σ[σ] Dq: erit EG ρ. Hinc, quia GF
τ. cor. 11. 10. Є[τ] EG, erunt EG, GF ρ Є,
υ. 74. 10. & EF erit[υ] apotome. Deinde quia ex aequo C : B = Dq : GFq, non erit GF
φ. 9. 10. Σ D[φ]. Similiter quia C : A = Dq : EGq, nec EG Σ D. Sit autem Hq = EGq — GFq. Et quia conuertendo A : A — B = EGq : Hq, erit H id est √ (EGq — GFq) Σ[φ] EG. Ex
χ. 4. def. tert. quibus omnibus sequitur EF esse apotomen quartam[χ]. Q. E. F.

## PROP. LXXXIX. PROBL.

*Inuenire quartam apotomen.*

A 6. B 10.




Exponantur duo numeri A, B, tales vt A + B ad neutrum rationem quadrati ad quadratum habeat. Expositae ρ C fiat Σ DF, & A + B : B = DFq : FEq : erit DE quaesita.

ψ. 6. def. 10. Quia enim DF ρ[ψ] est: erit & FE ρ[ω]; &
ω. 6. 10. & sch. 12. 10. ob id DF, FE erunt ρ Є[α]. Erit ergo DE[β]
α. cor. 11. 10. apotome. Sit Gq = DFq — FEq. Et quia
β. 74. 10. est conuertendo A + B : A = DFq : Gq : erit
γ. 9. 10. G id est √ (DFq — FEq) non Σ[γ] DF. Er-
δ. 4. def. tert. go DE erit apotome[δ] quarta. Q. E. F.

## PROP. XC. PROBL.

*Inuenire quintam apotomen.*

Fig. prop. LXXXIX. Exponatur duo numeri A, B, ita vt A + B ad neutrum habeat rationem quadrati ad quadratum.

dratum. Expositae ρ C fiat ⪯ EF, & B : A + B = FEq : FDq. Erit DE quaesita.

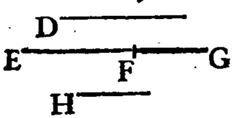
Quia enim, vt in praecedente, patet DE apotomen esse, & √ (DFq — FEq) non ⪯ DF; EF autem ⪯ ρ C facta est: erit DE apotome quinta[s]. Q. E. F. s. 5. def. tert.

## PROP. XCI. PROBL.

*Inuenire sextam apotomen.*

Exponantur ρ D, & tres numeri A, B, C, tales vt nec inter se rationem numeri quadrati ad quadratum habeant, nec A ad A — B eam habeat rationem; & fiat C : A = Dq : EGq, & vt A : B = EGq : GFq: erit EF quaesita.

A 12. B 5. C 10.




Ostendetur enim, vt in prop. 88. EF apotomen, & nec EG nec GF ipsi D ⪯ esse. Sit autem H = √ (EGq — GFq). Atqui quum sit A : B = EGq : GFq, & ergo conuertendo A : A — B = EGq : Hq: patet etiam, non [ς] esse H id est √ (EGq — GFq) ⪯ EG. Ergo EF erit [u] apotome sexta. Q. E. F. ς. 9. 10. u. 6. def. tert.

### *Scholium.*

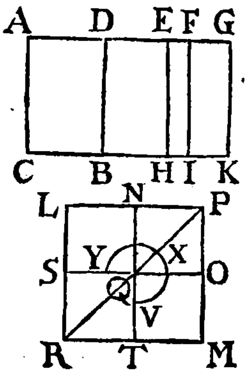

Sed & expeditius sex dictarum linearum inuentionem ostendere licet. Si enim oporteat inuenire primam apotomen: exponatur [ϑ] ex binis nominibus prima AB, cuius maius nomen sit AC, & fiat CD = CB. Ergo [ι] AC, CB hoc est AC, CD sunt ρ Ɛ, & √ (ACq — CDq) ⪯ AC, & AC expositae rationali ⪯ est; & igitur [x] AD est apotome prima. Similiter ϑ. 49. 10. ι. 1. def. sec. x. 1. def. tert.

militer & reliquas apotomas inueniemus, eas quae sunt ex binis nominibus eiusdem ordinis exponentes.

## PROP. XCII. THEOR.

*Si spatium* AB *contineatur sub rationali* AC *& apotoma prima* AD: *recta linea spatium* AB *potens apotome est.*

λ. 74. 10.
μ. 1. def. tert.




Sit ipsi AD congruens DG. Ergo [λ] AG, GD sunt $\rho$ $\epsilon$, & AG $\asymp$ [μ] $\rho$ AC, & $\sqrt{(AGq - GDq)}$ $\asymp$ AG. Ad AG applicetur Rgl. $= \frac{1}{4}$ DGq $=$ DEq deficiens figura quadrata. Secet hoc ipsam AH in partes AF, FG. Ergo AF $\asymp$ [ν] FG, & ob id AG $\asymp$ [ξ] tam AF quam FG. Quare tam

ν. 18. 10.
ξ. 16. 10.
ο. 12. 10.
π. 6. def. 6.
ρ. 20. 10.
σ. sch. 22. 10.
τ. 26. 6.
υ. 1. cor. 4. 2.
φ. lem. 18. 10.
χ. 17. 6.
ψ. lem. 55. 10.

AF quam FG $\asymp$ [ο] AC erit $\rho$ [π], & ergo AI, FK $\rho$ erunt [ρ]. Deinde quia DE $= \frac{1}{2}$ EG: erunt DE, EG $\asymp$ DG. Sed DG $\rho$ non $\asymp$ [μ] AC: ergo DE, EG, AC erunt $\rho$ $\epsilon$, & ergo DH, EK media [σ]. Fiat quadratum LM $=$ AI, & auferatur quadratum NO $=$ FK, communem cum toto angulum LPM habens. Erunt ergo LM, NO circa eandem [τ] diametrum RQP. Descripta ergo reliqua figura, erit & ST quadratum [υ], Iam, quia [φ] AF $\times$ FG $=$ EDq $=$ EGq, erit AF : EG $=$ [χ] EG : FG, & ob id $\div$ AI, EK, FK. Sed sunt quoque [ψ] $\div$ LM, MN, NO. Quare

MN

MN (= LO) = EK = DH, & proinde DK = gnom. VXY + NO. Sed AK = LM + NO. Ergo AB = ST = LNq. Denique quia AI, FK ρ sunt: erunt &, quae illa possunt, LP, PN ρ [α]. Sed quia LO = EK medium non Ɛ [α] NO, & propterea LP non Ɛ [α] PN: erunt LP, PN ρ Є, & ergo LN id est √ AB apotome erit. Q. E. D. α. sch. 12. 10. α. 1. 6. & 10. 10.

## PROP. XCIII. THEOR.

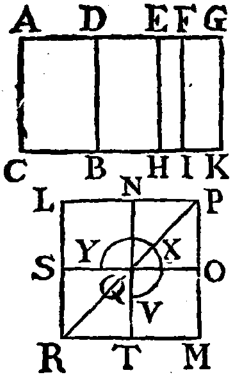
*Si spatium* AB *contineatur sub rationali* AC *& apotoma secunda* AD: *recta linea spatium* AB *potens mediae est apotome prima.* Fig. prop. XCII.

Sit enim ipsi AD congruens DG. Ergo [β] AG, GD sunt ρ Є, & DG est Ɛ AC, & √(AGq — GDq) Ɛ AG, & AG non Ɛ AC. Iam factis iisdem, quae in propositione praecedente: erit tam AF quam FG Ɛ AG, sed non Ɛ [γ] AC, & proinde AF, AC erunt ρ Є, item FG, AC; & igitur [δ] AI, FK, & iis aequalia LM, NO media erunt, & LP, PN mediae. Et quia AF : FG = AI : FK = LM : NO, AF vero Ɛ FG [ε]: erunt PL, PN mediae Є [ζ]. Denique quum ob EG Ɛ DG Ɛ ρ AC, sit EK ρ; &, vt antea, demonstretur LO = EK: patet, LP, PN rationale continere. Quare LN id est √ AB erit mediae apotome prima [η]. Q. E. D. β. 2. def. tert. γ. 14. 10. δ. sch. 22. 10. ε. 18. 10. ζ. 10. 10. η. 75. 10.

## PROP. XCIV. THEOR.

*Si spatium* AB *contineatur sub rationali* AC *& apotome tertia* AD: *recta linea spatium potens mediae est apotome secunda.*

 Nam




Nam primo vt in praecedente propositione ostendetur, LP, PN esse medias ϵ. Deinde quia
ϑ. 3. def. tert. DG ρ est non ⊏ ϑ AC, EG vero ⊏ ι DG; erunt EG,
ι. constr. AC ρ ϵ, & EK κ medium
κ. sch. 22. 10. erit, & igitur ι quoque LO. Quare quum LP, PN medium contineant: erit LN id est √ AB me-
λ. 76. 10. diae apotome secunda λ. Q. E. D.

## PROP. XCV. THEOR.

Fig. prop. XCIV. *Si spatium* AB *contineatur sub rationali* AC, *& apotoma quarta* AD: *recta linea spatium* AB *potens minor est.*

μ. 4. def. tert. Sit enim DG congruens ipsi AD: & erunt μ AG, GD ρ ϵ, eritque AG ⊏ AC, sed DG non ⊏ AC, nec √ (AGq — GDq) ⊏ AG. Construantur eadem quae in praecedentibus: &
ν. 20. 10. patet AK ν esse ρ, DK vero medium ξ, &
ξ. sch. 22. 10. AF non ⊏ ο FG, & ergo AI non ⊏ π FK. Sed
ο. 19. 10. ρ AK = LPq + PNq, & ½ DK = EK =
π. 10. 10. LO = LP × PN, & AI = LPq, & FK =
ρ. constr. PNq. Quare LP θϵ PN, & LPq + PNq est ρ, 2 LP × PN autem medium; & proinde σ
σ. 77. 10. LN id est √ AB minor. Q. E. D.

## PROP. XCVI. THEOR.

Fig. prop. XCIV. *Si spatium* AB *contineatur sub rationali* AC *& apotoma quinta* AD: *recta linea spatium* AB

AB *potens est quae cum rationali medium totum efficit.*

Sit enim DG congruens ipsi AD; & erunt [τ] AG, GD ρ Ε, eritque GD ⪤ AC, sed AG non ⪤ AC, & √(AGq — GDq) non ⪤ AG. Constructis iisdem, quae antea, eodem modo ostendetur, DK vel EK esse ρ, AK vero medium, & AI non ⪤ FK. Quare erit LP ⋲ PN, & LPq + PNq medium, 2 LP × PN vero ρ; & ob id LN id est √AB quae [υ] cum rationali medium totum efficit. Q.E.D.

τ. 5. def. tert.

υ. 78. 10.

## PROP. XCVII. THEOR.

*Si spatium* AB *contineatur sub rationali* AC *& apotoma sexta* AD: *recta linea spatium* AB *potens est quae cum medio medium totum efficit.*

Fig. prop. XCIV.

Sit iterum ipsi AD congruens DG: & erunt [υ] AG, GD ρ Ε, & √(AG — GDq) non ⪤ AG, & nec AG nec GD ⪤ AC. Constructis iisdem, quae antea, similiter demonstrabimus tam LPq + PNq, quam 2 LP × PN esse medium & LP ⋲ PN. Sed praeterea, quia AG non ⪤ EG, & ergo AK [φ] non ⪤ EK: erit LPq + PNq non ⪤ 2 LP × PN. Ergo LN id est √AB est ea quae cum medio medium totum efficit [χ]. Q. E. D.

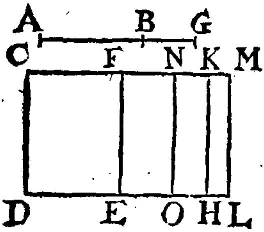
υ. 6. def. tert.

φ. 10. 10.

χ. 79. 10.

PROP.

## PROP. XCVIII. THEOR.




*Quadratum apotomae* AB *ad rationalem* CD *applicatum latitudinem* CF *facit apotomen primam.*

Sit enim BG ipsi AB congruens. Ergo AG,
ψ. 74. 10. GB sunt $^{\psi}$ $\rho$ Є. Fiat
Rgl. CH $=$ AGq, & Rgl. KL $=$ BGq. Er-
ω. 7. 2. go, quia CE $=$ ABq, erit FL $=^{\omega}$ 2 AG $\times$
GB. Biseca FM in N, & duc NO parallelam
ad CD; ac erit FO $=$ NL $=$ AG $\times$ GB.
α. sch. 12. 10. & 16. 10. Iam quia DM $=$ AGq $+$ GBq est $\rho$ $^{\alpha}$, erit
β. 21. 10. CM $\rho^{\beta}$ $\Sigma$ CD. Et quia FL $=$ 2 AG $\times$ GB
γ. sch. 22. 10. medium $^{\gamma}$ est, erit FM $\rho$ non $\Sigma$ CD $^{\delta}$. Porro
δ. 23. 10. ε. cor. 27. 10. quia AGq $+$ GBq non $\Sigma^{\varepsilon}$ 2 AG $\times$ GB, ideo-
ζ. 10. 10. que CL non $\Sigma$ FL: erit FM non $\Sigma^{\zeta}$ CM, &
proinde FM, CM erunt $\rho$ Є, ac CF apotome
η. lem. 55. 10. $^{\psi}$ erit. Praeterea quum sint $\div\!\div^{\eta}$ CH, NL, KL,
ideoque $\div\!\div$ CK, NM, KM: erit CK $\times$ KM
$=$ NMq $= \frac{1}{4}$ FMq. Sed, quia CH $\Sigma$ KL,
est & CK $\Sigma$ KM $^{\zeta}$. Quare $\sqrt{}$ (CMq $-$ MFq)
θ. 18. 10. $\Sigma$ CM $^{\vartheta}$. Ergo CF est apotome prima. Q. E. D.

## PROP. XCIX. THEOR.

Fig. prop. XCVIII. *Quadratum mediae apotomae primae* AB *ad rationalem* CD *applicatum latitudinem facit* CF *apotomen secundam.*

ι. 75. 10. Sit iterum BG congruens ipsi AB: $^{\iota}$ & erunt
AG, GB mediae Є, & AG $\times$ GB $\rho$. Ergo
factis

factis quae in propos. praec. erunt CH, KL, CL media, sed NL, FL ῥ; ideoque CM erit ῥ non ≍ CD[κ], FM autem[λ] ῥ ≍ CD. Reliqua autem vt supra ostendentur. Ergo CF est apotome secunda. Q. E. D. κ. 23. 10. λ. 21. 10.

## PROP. C. THEOR.

*Quadratum mediae secundae apotomae* AB *ad rationalem* CD *applicatum latitudinem* CF *facit apotomen tertiam.* Fig. prop. XCVIII.

Factis iisdem, quae antea; quoniam[μ] AG, GB mediae ∈ sunt, & AG ⨯ GB medium est, erunt CL & FL media, ideoque erit tam CM, quam FM ῥ non ≍ CD, & erunt CM, FM ῥ∈. Ostensis ergo reliquis, quae in praecedentibus, patebit, CF esse apotomen tertiam. Q. E. D. μ. 76. 10.

## PROP. CI. THEOR.

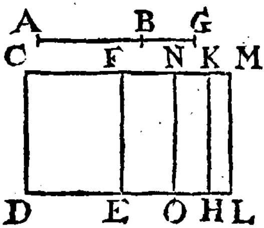
*Quadratum minoris* AB *ad rationalem* CD *applicatum latitudinem* CF *facit apotomen quartam.* Fig. prop. XCVIII.

Iisdem constructis: quia[ν] AG ⊖∈ GB, & AGq + GBq ῥ, & AG ⨯ GB medium, eodem modo, quo in prop. 98. patet, esse CM ≍ CD, & CF apotomen, & CK ⨯ KM = $\frac{1}{4}$ FMq, sed, ob AG ⊖∈ GB, CK non ≍ KM, ideoque[ξ] √ (CMq — MFq) non ≍ CM. Ergo CF est apotome quarta. Q. E. D. ν. 77. 10. ξ. 19. 20.

## PROP. CII. THEOR.

*Quadratum eius* AB, *quae cum rationali medium totum efficit, ad rationalem* CD *applicatum*

*plicatum latitudinem* CF *facit apotomen quintam.*




Constructis iisdem; s. 78. 10. quia $^{s}$ AG, ⊖€ GB, & AGq + GBq medium, & AG × GB ρ, eadem ratione ac antea ostendetur, esse CM ρ non ≤ CD, sed FM ρ ≤ CD, & CF apotomen quintam. Q. E. D.

## PROP. CIII. THEOR.

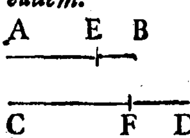
Fig. prop. CII. *Quadratum eius* AB, *quae cum medio medium totum efficit, ad rationalem* CD *applicatum latitudinem* CF *facit apotomen sextam.*

π. 79. 10. Constructis enim iisdem; quia $^{\pi}$ AG ⊖€ GB, & AGq + GBq, AG × GB media, & AG × GB non ≤ AGq + GBq: patet vt antea,

ρ. 23. 10. CM, FM $^{\rho}$ esse ρ non ≤ CD, atque, reliquis similiter vt antea ostensis, CF esse apotomen sextam. Q. E. D.

## PROP. CIV. THEOR.

*Recta linea* AE, *apotomae* CF *longitudine commensurabilis, & ipsa apotome est, atque ordine eadem.*




Sit enim ipsi CF congru-

σ. 74. 10. ens FD: ergo $^{\sigma}$ CD, DF ρ ⊖€.

Fiat EB : FD = AE : CF.

τ. 12. 5. Erit ergo $^{\tau}$ AB : CD = EB :

υ. 10. 10. FD = AE : CF; & proinde AB ≤ CD $^{\upsilon}$, &

EB

EB $\lesssim$ FD. Quare AB, BE erunt $\rho$ [φ], &, quia φ. sch. 12. 10.
CD $\epsilon$ DF, erunt AB, BE $\rho$ $\epsilon$ [χ], ideoque AE χ. 1. sch.
apotome erit [σ]. Secundo quia AB : CD = 10. 10.
EB : FD, & permutando AB : EB = CD : FD :
si $\sqrt{(CDq - DFq)} \lesssim$ vel non $\lesssim$ CD, erit [ψ] ψ. 15. 10.
& $\sqrt{(ABq - BEq)} \lesssim$ vel non $\lesssim$ AB. Et si
CD $\lesssim$ vel non $\lesssim$ expositae rationali, erit [ω] & AB ω. 12. 14. 10.
$\lesssim$ vel non $\lesssim$ eidem; nec non, si DF $\lesssim$ vel non
$\lesssim$ $\rho$ expositae, erit [ω] BE $\lesssim$ vel non $\lesssim$ eidem.
Ergo cuius ordinis apotome est CF, eiusdem
est [α] quoque apotome AE. Q. E. D. α. def. tert.

## PROP. CV. THEOR.

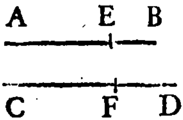
*Recta linea* AE, *mediae apotomae* CF *commensurabilis, & ipsa mediae apotome est, atque ordine eadem.* Fig. prop. CIV.

Factis iisdem quae in praecedente, quia [β] CD, β. 75. 76. 10.
DF sunt mediae $\epsilon$, similiter demonstrabitur,
AB $\lesssim$ CD, & AB, BE esse medias $\epsilon$ [γ]. Ergo γ. 24. 10. &
AE est mediae [β] apotome. Deinde quia CDq : 1. sch. 10. 10.
CD $\times$ DF = [δ] CD : DF = AB : BE = [δ] ABq : δ. 1. 6.
AB $\times$ BE, & ergo permutando CDq : ABq
= CD $\times$ DF : AB $\times$ BE : erit [ε] CD $\times$ DF $\lesssim$ ε. 10. 10.
AB $\times$ BE. Quare si CD $\times$ DF est $\rho$ vel medium, erit [ζ] & AB $\times$ BE $\rho$ vel medium. Hinc ζ. sch. 12. 10. cor. 24. 10.
patet [β] esse AE mediae apotomen eiusdem ordinis, cuius est CF. Q. E. D.

## PROP. CVI. THEOR.

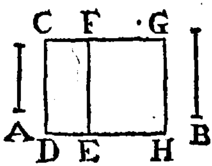
*Recta linea* AE, *minori* CF *commensurabilis, & ipsa minor est.*

Fiant




η. 77. 10. Fiant eadem, quae prius: & quia CD, DF $\ominus\!\!\in$[η], erunt &[θ]
θ. 2. sch. AB, BE $\ominus\!\!\in$. Et quoniam CD :
10. 10. DF $=$ AB : BE, ideoque CDq :
ι. 22. 6. DFq $=$[ι] ABq : BEq, & componendo ac permutando CDq $+$ DFq : ABq $+$ BEq $=$ DFq : BEq; DF autem $<$ BE: erit CDq $+$ DFq $<$ ABq $+$ BEq. Quare, quum CDq $+$ DFq ſit ρ[η],
κ. ſch. 12. 10. erit & ABq $+$ BEq ρ[κ]. Denique quia vt in praec. patet eſſe CD $\times$ DF $<$ AB $\times$ BE, & CD $\times$ DF medium[η] eſt: eſt & AB $\times$ BE me-
λ. cor. 24. 10. dium[λ]. Ergo AE minor[η] eſt. Q. E. D.

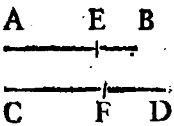
*Aliter.*




Sit minori A $<$ B. Dico B minorem eſſe.

Ad expoſitam rationalem CD applicetur Rgl. CE $=$ Aq. Erit itaque[μ]
μ. 101. 10. CF apotome quarta. Fiat Rgl. FH $=$ Bq. Igitur, quia A $<$ B, erit CE
ν. cor. 9. 10. $<$[ν] FH, & CF $<$[ξ] FG. Hinc FG erit[ο] apo-
ξ. 10. 10. tome quarta, & $\sqrt{}$ FH $=$ B erit[π] minor. Q.
ο. 104. 10. E. D.
π. 95. 10.

## PROP. CVII. THEOR.




*Recta linea* AE *commenſurabilis ei* CF, *quae cum rationali medium totum efficit, & ipſa cum rationali medium totum efficiens eſt.*

Conſtructis iisdem quae antea, ſimiliter demonſtrabitur AB : BE $=$ CD : DF, & ABq $+$ BEq

BEq Ɛ CDq + DFq, & AB $\times$ BE Ɛ CD $\times$
DF. Iam ρ CDq + DFq est medium, & CD ρ. 78. 10. σ. 2. sch.
$\times$ DF ρ, & CD ⊖Ɛ DF. Ergo AB ⊖Ɛ σ BE, 10. 10.
& ABq + BEq est τ medium, & AB $\times$ BE ρ υ τ. sch. 24. 10.
ideoque AE est cum rationali medium totum υ. sch. 12. 10.
efficiens ρ. Q. E. D.

*Aliter.*

Factis iisdem, quae in demonstratione altera praecedentis, erit CF apotome φ quinta, φ. 102. 10.
ideoque χ & FG. Hinc, ob FE ρ, erit $\sqrt{}$FH χ. 104. 10.
= B cum rationali medium totum efficiens ψ. ψ. 96. 10.
Q. E. D.

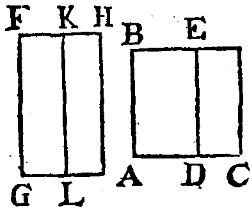
## PROP. CVIII. THEOR.

*Recta linea* AE, *commensurabilis ei* CF, *quae* Fig. prop. CVII.
*cum media medium totum efficit, & ipsa cum medio medium totum efficiens est.*

Constructis iisdem quae supra, erit iterum AB : EB = CD : DF, & ABq + BEq Ɛ CDq + DFq, & AB $\times$ BE Ɛ CD $\times$ DF. Iam ω ω. 79. 10.
CD ⊖Ɛ DF, & CDq + DFq medium, & CD $\times$ DF medium, & CD $\times$ DF non Ɛ CDq + DFq. Ergo AB ⊖Ɛ BE α, & tam ABq + α. 2. sch. 10. 10.
BEq quam AB $\times$ BE medium β, & ABq + β. sch. 24. 10.
BEq non Ɛ γ AB $\times$ BE, ideoque AE est ω cum γ. 14. 10.
medio medium totum efficiens. Q. E. D.

## PROP. CIX. THEOR.

*Medio* BD *de rationali* BC *detracto, recta linea, quae reliquum spatium* EC *potest, una ex duabus irrationalibus fit, vel apotome, vel minor.*



Expofita enim $\rho$ FG, fiat Rgl. GH = BC, & Rgl. GK = BD. Ergo LH = EC, & GH $\rho$, & GK medium. Quare

δ. 21. 10. [δ] erit FH $\rho \asymp$ FG, & FK

ε. 23. 10. $\rho$ [ε] non $\asymp$ FG, ideoque

ζ. 74. 10. FH, FK $\rho$ $\epsilon$, ac ob id KH apotome [ζ], & ipfi congruens FK. Iam fi fit $\surd$ (FHq — FKq)

η. 92. 10. $\asymp$ FH, erit KH apotome prima, & [η] $\surd$ HL = $\surd$ EC apotome. Si non fit $\surd$ (FHq — FKq)

θ. 95. 10. $\asymp$ FH, erit KH apotome quarta, ideoque [θ] $\surd$ EC minor. Q. E. D.

## PROP. CX. THEOR.

Fig. prop. praec. *Rationali* BD *de medio* BC *detracto, aliae duae irrationales fiunt, vel mediae apotome prima, vel cum rationali medium totum efficiens.*

Conftructis iisdem, quae prius, erit FH $\rho$ non $\asymp$ FG, & FK $\rho \asymp$ FG. Erunt ergo iterum FH, FK $\rho$ $\epsilon$, & KH apotome erit, ipfique congruens FK. Iam fi fuerit $\surd$ (FHq — FKq) $\asymp$ FH: erit KH apotome fecunda, & $\surd$

ι. 93. 10. LH id eft $\surd$ EC mediae [ι] apotome prima. Si fuerit $\surd$ (FHq — FKq) non $\asymp$ FH: erit KH

κ. 96. 10. apotome quinta, & ergo $\surd$ EC erit [κ] cum rationali medium totum efficiens. Q. E. D.

## PROP. CXI. THEOR.

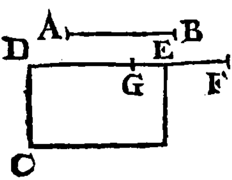
Fig. prop. CIX. *Medio* BD *de medio* BC *detracto, quod fit incommenfurabile toti, reliquae duae irrationales fiunt, vel mediae apotome fecunda, vel cum medio medium totum efficiens.*

Quia

Quia enim GH non $\asymp$ FL, erit FH non $\asymp$ FK. Quare FH, FK erunt $\rho\,\epsilon$, & ergo erit KH apotome, & ipsi congruens KF. Nunc si $\surd$(FHq — FKq) $\asymp$ FH: quia FH, FK non $\asymp$ [λ] FG, erit KH apotome tertia, & hinc $\surd$ LH λ. 23. 10.
id est $\surd$ EC mediae [μ] apotome secunda. Si $\surd$ μ. 94. 10.
(FHq — FKq) non $\asymp$ FH: erit KH apotome sexta, ideoque $\surd$ EC cum medio medium totum efficiens [ν]. Q. E. D. ν. 97. 10.

## PROP. CXII. THEOR.

*Apotome* AB *non est eadem quae ex binis nominibus.*




Si negas: exponatur $\rho$ CD, & fiat Rgl. CE = ABq. Ergo DE erit [ξ] apotome prima. Sit ipsi congruens EF. Ergo DF, FE $\rho\,\epsilon$ [ο], & DF $\asymp$ CD. Sed quia AB etiam ponitur ex binis nominibus: erit DE ex binis nominibus [π] prima. Sit eius maius nomen DG. Ergo [ρ] DG, GE $\rho\,\epsilon$, & DG $\asymp$ CD. Hinc erit [σ] DF $\asymp$ DG, & ergo [τ] FG $\asymp$ DF, & FG $\rho$ [υ]. Verum quia DF non $\asymp$ FE, erit FG non [φ] $\asymp$ FE, & hinc erunt FG, FE $\rho\,\epsilon$, ac GE apotome [χ] erit. Sed est quoque GE $\rho$. Q. E. A.

ξ. 98. 10.
ο. 1. def. tert.
π. 61. 10.
ρ. 1. def. sec.
σ. 12. 10.
τ. cor. 16. 10.
υ. sch. 12. 10.
φ. 14. 10.
χ. 74. 10.

*Corollarium.*

Apotomae, & quae ipsam consequuntur, (prop. 75. 76. 77. 78. 79) irrationales, neque mediae neque inter se eaedem sunt. Quadratum enim, quod a media fit, ad rationalem applicatum, latitudinem facit rationalem. Quod autem ab apotoma fit, ad rationalem applicatum, latitudinem facit apotomen primam; quod fit a mediae apotome prima, apotomen secundam; & sic deinceps (prop. 100. 101. 102. 103.). Quoniam igitur dictae latitudines differunt tum a prima tum inter sese; a prima quidem, quod illa rationalis sit, inter se vero, quod ordine non sint eaedem: manifestum est, & ipsas hasce irrationales inter se differentes esse.

Et quoniam ostensum est, apotomen non esse eandem, quae ex binis nominibus; & quadrata quidem apotomae & earum, quae sequuntur apotomen, ad rationalem applicata, latitudines facere apotomas; quadrata vero eius, quae ex binis nominibus est, & hanc sequentium, ad rationalem applicata facere latitudines, quae ex binis nominibus (prop. 61. 62. - - 66.): ergo rectae lineae quae sequuntur apotomen, & quae sequuntur eam quae ex binis nominibus est, inter se diuersae erunt, ita vt omnes irrationales sint numero tredecim. 1. *Media.* 2. *Quae ex binis nominibus.* 3. *Quae ex binis mediis prima.* 4. *Quae ex binis mediis secunda.* 5. *Maior.* 6. *Rationale ac medium potens.* 7. *Bina media potens.* 8. *Apotome.* 9. *Mediae apotome prima.* 10. *Mediae apotome secunda.* 11. *Minor.* 12. *Cum rationali medium totum efficiens.* 13. *Cum medio medium totum efficiens.*

## PROP. CXIII. THEOR.


*Quadratum rationalis* A, *ad eam quae ex binis nominibus* BC *applicatum, latitudinem* EF *facit apotomen, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus* CD, DB *eius, quae est ex binis nominibus, & in eadem ratione; & adhuc apotome* EF, *quae fit, eundem habet ordinem,*

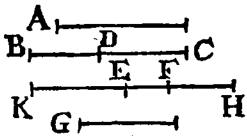
*ordinem, quem ea* BC *quae est ex binis nominibus.*

Sit enim etiam BD ⨯ G = Aq. Ergo ψ ψ. 16. 6.
BC: DB = G: EF, ideoque G > EF. Fiat EH = G. Quare CB: BD = HE: EF, & diuidendo CD: DB = HF: FE. Fiat HF: FE = FK: KE. Est ergo HK: KF = α FK: KE α. 12. 5.
= HF: FE = CD: DB. Iam quia CDq Ƹ α α. 37. 10.
DBq, est & HKq Ƹ KFq. Et quoniam β HKq: β. 2. cor. 20. 6.
KFq = HK: KE, erit HK Ƹ KE, ideoque & γ HE Ƹ EK. Et quia BD ⨯ HE = Aq est γ. 16. 16.
ρ, nec non BD ρ α: erit & HE ρ δ Ƹ BD, & δ. 21. 10.
ob id & EK ρ Ƹ BD ac FK Ƹ CD ε. Deinde ε. 10. 10.
quia CD α Є DB, erit & ζ FK Є KE, & ergo ζ .1. sch. 10. 10.
FK, KE erunt ρ Є, & η FE erit apotome. Sed η. 74. 10.
CD maius est nomen ipsius CB. Iam si √(CDq — DBq) Ƹ vel non Ƹ CD, erit & √(FKq — KEq) Ƹ vel non Ƹ FK θ; & si CD fuerit Ƹ vel θ. 15. 10.
non Ƹ ρ expositae, erit & FK Ƹ ι vel non Ƹ ι. 12. 14. 10.
eidem; atque si DB Ƹ vel non Ƹ eidem ρ, erit & EK Ƹ vel non Ƹ eidem. Ergo FE apotome erit, cuius nomina FK, KE commensurabilia sunt nominibus CD, DB eius &c. Q. E. D.

## PROP. CXIV. THEOR.

*Quadratum rationalis* A, *ad apotomen* BD *applicatum, latitudinem* KH *facit eam, quae ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt apotomae* BD *nominibus* BC, CD *& in eadem ratione; & adhuc quae ex binis nominibus fit* KH *eundem habet ordinem, quem ipsa* BD *apotome.*

 Nam

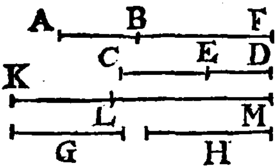



Nam quia DC
congruens est ipsi
κ. 74. 10. BD, erunt [κ] BC,
CD ρ Є. Fiat BC
× G = Aq: &
λ. 21. 10. erit BC × G ρ, ac ideo G ρ [λ] ς BC, ac prae-
μ. 16. 6. terea CB : BD [μ] = KH : G, ideoque KH > [ν]
ν. 14. 5. G. Ponatur KE = G : ergo KE ρ ς BC, &
CB : BD = HK : KE, & conuertendo igitur
ξ. 10. 6. BC : CD = KH : HE. Fiat KH : HE = [ξ]
ο. 19. 5. HF : FE. Igitur KF : FH = [ο] KH : HE =
π. 1. sch. 10. 10. HF : FE = BC : CD. Hinc KF Є [π] FH, &
ρ. 2. cor. 20. 6. KFq : FHq = [ρ] KF : FE, & ergo KF ς [σ] FE,
hinc & KE ς [τ] KF, & KF ρ ς BC [υ], & proinde
σ. 10. 10. etiam FH ρ ς CD [φ]. Quum ergo sint KF,
τ. cor. 16. 10. FH ρ Є: erit KH [χ] ex binis nominibus, quae
υ. 12. 10. & sch. eiusd. erunt ς ipsius BD nominibus BC, CD, & in
φ. sch. 12. 10. & 10. 10. eadem ratione. Denique patet, si √(BCq —
χ. 37. 10. CDq) ς vel non ς BC, esse & [ψ] √(KFq —
ψ. 15. 10. FHq) ς vel non ς KF, & si BC, CD fuerint ς
ω. def. sec. & tert. vel non ς expositae ρ, fore & KF, FH ς vel
non ς eidem ρ; & ergo [ω] KH esse ex binis
nominibus eiusdem ordinis, cuius est apotome
BD. Q. E. D.

## PROP. CXV. THEOR.

*Si spatium contineatur sub apotoma* AB *&* *ea* CD *quae ex binis nominibus, cuius nomina* CE, ED *commensurabilia sunt nominibus* AF, FB *apotomae* AB, *& in eadem ratione: recta linea* G *spatium potens est rationalis.*

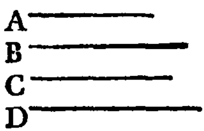
Expo-



Exponatur ρ H, & fiat CD × KL = Hq. Apotome ergo est [α] KL, cuius nomina KM, ML ≾ CE, — α. 115. 10.
ED & in eadem ratione. Est ergo AF : FB = [β] KM : ML, & permutando AF : KM = — β. 11. 5.
FB : ML, & ergo [γ] AB : KL = AF : KM. Et — γ. 19. 5.
quia [δ] CE, ED ≾ ipsis AF, FB, ideoque & AF — δ. hyp.
≾ [ε] KM : erit AB ≾ [ζ] KL. Hinc quia AB : — ε. 12. 10. ζ. 10. 10.
KL = AB × CD : KL × CD = Gq : Hq :
erit [ζ] Gq ≾ Hq, & ob id [η] G ρ. Q. E. D. — η. sch. 12. 10.

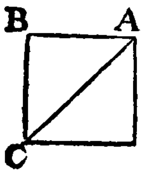
## PROP. CXVI. THEOR.

*A media A infinitae irrationales fiunt; & nulla alicui antecedentium est eadem.*



Exponatur ρ B, & sit Cq = A × B. Erit ergo [θ] Cq αλ, & ipsa C αλ, neque vlli hactenus commemoratarum eadem. Nullius enim antecedentium quadratum ad ρ applicatum latitudinem facit mediam. Rursus sit Dq = B × C: & erit iterum [θ] D αλ, nulli tamen antecedentium eadem; quia nullius earundem quadratum ad ρ applicatum talem [ι] facit latitudinem, qualis est C. Similiter & eodem ordine in infinitum protracto, manifestum est, a media infinitas irrationales fieri, nulli antecedentium easdem. Q. E. D. — θ. sch. 21. 10. — ι. per dem.

## PROP. CXVII. THEOR.




*Propositum sit nobis ostendere, in quadratis figuris diametrum* AC *lateri* AB *incommensurabilem esse longitudine.*

Si negas: sit AC $\sqsubset$ AB. Ergo habebit AC ad AB rationem numeri [κ] ad numerum. Habeat quam EF ad G; & sint EF, G minimi in data ratione.

E - - H - - F
G - - -

κ. 5. 10.
λ. 35. 7.

Non ergo vnitas erit
μ. 14. 5. EF: quia, quum AC > AB, foret vnitas [μ] maior quam numerus, si EF vnitas esset. Quare EF numerus sit necesse est. Et quia ACq:
ν. 1. cor. 20. 6. & 11. 8. ABq [ν] $=$ $EF^2 : G^2$, & ACq $=$ [ξ] 2 ABq: erit $EF^2 = 2\,G^2$, & ergo $EF^2$ est [ο] par, & EF par [π].
ξ. 47. 1.
ο. 6. def. 7. Iam quia EF, G minimi sunt in data ratione, &
π. 2. sch. 89. 9. ergo inter se primi; EF autem par est: nequit G par esse; si enim ita, vtrumque EF, G idem numerus 2 metiretur. Ergo G erit impar. Verum ipsius EF paris dimidium sit EH: & erit
ρ. 11. 8. $EF^2 =$ [ρ] 4 $EH^2 = 2\,G^2$, ideoque $G^2 =$ [σ] 2
σ. 7. ax. 1. $EH^2$, & G par. Erat autem idem G & impar. Q. E. A.

### *Aliter.*

Si dicas AC $\sqsubset$ AB: sint rursus EF, G numeri minimi in ratione AC : AB; & erunt ergo EF, G
τ. 24. 7. primi inter se [τ]. Iam nequit G esse vnitas. Nam quia ACq : ABq $=$ $EF^2 : G^2$; & ACq $=$ 2 ABq: si G esset vnitas, foret $EF^2 = 2$, quod fieri nequit. Sed quia G est numerus, & $EF^2 = 2\,G^2$:
υ. 14. 8. G numerus [υ] metietur numerum EF, & ideo EF ac G non erunt primi inter se. Erant autem & primi inter se. Q. E. A.

EVCLI-

# EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER XI.

## DEFINITIONES.

1. *Solidum* est, quod longitudinem & latitudinem & crassitudinem habet.

2. *Solidi* autem *terminus* est superficies.

3. *Recta linea ad planum recta* est, quando ad rectas omnes lineas, quae ipsam contingunt & in subiecto plano iacent, rectos angulos efficiat.

4. *Planum ad planum rectum* est, quando rectae lineae, quae communi planorum sectioni ad rectos angulos & in vno plano ducuntur, alteri plano ad angulos rectos fuerint.

5. *Rectae lineae ad planum inclinatio* est, quando a sublimi termino rectae illius lineae ad planum acta perpendiculari, a puncto facto ad terminum lineae, qui est in plano, recta linea iuncta fuerit, angulus nempe acutus, qui iuncta linea & insistente continetur.

6. *Plani ad planum inclinatio* est angulus acutus rectis lineis contentus, quae ad rectos angulos communi planorum sectioni ad vnum ipsius punctum in vtroque planorum ducuntur.

7. *Planum ad planum similiter inclinari* dicitur *atque alterum ad alterum*, quando dicti

inclinationum anguli inter ſe fuerint aequales.

8. *Plana parallela* ſunt, quae inter ſe non conueniunt.

9. *Similes figurae ſolidae* ſunt, quae ſimilibus planis ac multitudine aequalibus continentur.

10. *Aequales* vero & *ſimiles figurae ſolidae* ſunt, quae ſimilibus planis, multitudine ſimul & magnitudine aequalibus, continentur.

11. *Solidus angulus* eſt plurium, quam duarum, linearum, quae ſeſe contingant, & non in eadem ſint ſuperficie, ad omnes lineas inclinatio. *Aliter.* Solidus angulus eſt, qui pluribus, quam duobus, planis angulis, in eodem non iacentibus plano, atque ad vnum punctum conſtitutis, comprehenditur.

12. *Pyramis* eſt figura ſolida planis comprehenſa, quae ab vno plano ad vnum punctum conſtituitur.

13. *Priſma* eſt figura ſolida planis comprehenſa, quorum aduerſa duo aequalia & ſimilia parallela ſunt, reliqua vero parallelogramma.

14. *Sphaera* eſt figura quidem comprehenſa, quum circa manentem diametrum ſemicirculus conuertitur, donec in eundem locum, a quo moueri coeperat, rurſus reſtituatur.

15. *Axis* vero *ſphaerae* eſt manens illa recta linea, circa quam ſemicirculus conuertitur.

16. *Cen-*

16. *Centrum* autem *ſphaerae* eſt idem illud, quod & ſemicirculi.

17. *Diameter* vero *ſphaerae* eſt recta linea quaedam per centrum ducta, & ex vtraque parte a ſphaerae ſuperficie terminata.

18. *Conus* eſt figura quidem comprehenſa, quum rectanguli trianguli manente vno latere eorum, quae circa rectum angulum ſunt, triangulum ipſum conuertitur, donec in eundem locum, a quo moueri coeperat, rurſus reſtituatur. Verum ſi manens recta linea aequalis fuerit reliquo lateri, quod circa rectum angulum conuertitur, *conus orthogonius* erit: ſi vero minor, *amblygonius:* & ſi maior, *oxygonius*.

19. *Axis* autem *coni* eſt manens illa recta linea, circa quam triangulum conuertitur.

20. *Baſis* vero circulus a conuerſa recta linea deſcriptus.

21. *Cylindrus* eſt figura comprehenſa, quando rectanguli parallelogrammi manente vno latere eorum, quae circa rectum angulum ſunt, parallelogrammum ipſum conuertitur, donec in eundem locum, a quo moueri coeperat, rurſus reſtituatur.

22. *Axis* vero *cylindri* eſt manens illa recta linea, circa quam parallelogrammum conuertitur.

23. *Baſes* autem ſunt circuli, qui a duobus ex aduerſo circumactis lateribus deſcribuntur.

24. *Si-*

24. *Similes coni & cylindri* ſunt, quorum & axes & baſium diametri proportionales ſunt.

25. *Cubus* eſt figura ſolida ſex quadratis aequalibus contenta.

26. *Tetraedrum* eſt figura ſolida quatuor triangulis aequalibus & aequilateris comprehenſa.

27. *Octaedrum* eſt figura ſolida octo triangulis aequalibus & aequilateris comprehenſa.

28. *Dodecaedrum* eſt figura ſolida, quae duodecim pentagonis aequalibus & aequilateris & aequiangulis continetur.

29. *Icoſaedrum* eſt figura ſolida, quae viginti triangulis aequalibus & aequilateris comprehenditur.

*30. *Parallelepipedum* eſt figura ſolida ſex planis, quorum quae ex aduerſo parallela ſunt, contenta.

*31. *Solida figura in ſolida figura* dicitur *inſcribi*, quando omnes anguli figurae inſcriptae conſtituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis figurae, cui inſcribitur.

*32. *Solida figura ſolidae figurae* viciſſim *circumſcribi* dicitur, quando vel anguli, vel latera vel denique plana figurae circumſcriptae tangunt omnes angulos figurae, circum quam deſcribitur.

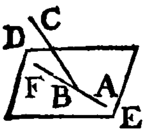
## * AXIOMA.

Anguli ſolidi, qui ſub aeque multis aequalibus ac eodem ordine poſitis angulis planis continentur, aequales ſunt.

PROP.

## PROP. I. THEOR.

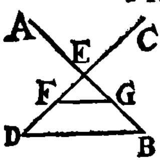
*Rectae lineae* ABC *pars quaedam non est in subiecto plano* DE, *quaedam vero in sublimi.*




Si enim fieri potest, sit pars AB in plano DE, pars BC autem extra. Iam, quia omnis recta in dato plano in directum continuari potest [α], sit BF in directum ipsi AB, in plano DE. Ergo rectae ABF, ABC segmentum commune BA habebunt. Q. E. A [β].

α. 2. post. 1.
β. 12. ax. 1.

## PROP. II. THEOR.



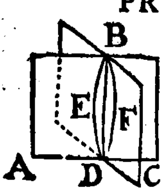

*Si duae rectae lineae* AB, CD *se inuicem secent, in vno sunt plano. Item, omne triangulum* DEB *in vno plano consistit.*

1. Si △ DEB non sit in vno plano: erit pars eius, velut EFG, in alio plano, quam reliqua; ideoque rectarum ED, EB vniuscuiusuis pars erit in plano subiecto, pars in sublimi. Q. E. A [γ].

γ. 1. 11.

2. Ergo quum ED, EB sint in eodem plano, CD autem sit [γ] in plano, in quo est ED, & AB in plano [γ] illo, in quo est EB: necesse est, vt AB, CD sint in eodem plano. Q. E. D.

## PROP. III. THEOR.

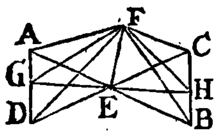



*Si duo plana* AB, BC *se inuicem secent: communis ipsorum sectio* DB *est linea recta.*

Si enim linea DB, in qua plana se inuicem secant, non sit recta: ducatur a puncto B ad D in

δ. 1. post. 1. in plano AB alia recta [δ] BED, in plano autem BC recta BFD; & recta BFD cum recta BED
ε. 12. ax. 1. ſpatium comprehendet. Q. E. A [ε].

## PROP. IV. THEOR.

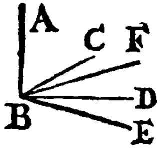



*Si recta linea* EF *duabus rectis lineis* AB, CD, *ſe inuicem ſecantibus, in communi ſectione* E *ad rectos angulos inſiſtat, etiam ducto per ipſas* AB, CD *plano ad rectos angulos erit.*

Sumatur AE = EB = CE = ED, & iungantur AD, CB, & per E ducatur in plano ACBD vtcunque recta GEH, & a quouis puncto F in ſublimi ducantur rectae FA, FG, FD, FB,
ζ. 4. 1. FH, FC. Iam quia in △is AED, CEB eſt [ζ]
η. 26. 1. AD = CB, & ang. EAD = EBC: erit [η] in △is AEG, HEB latus AG = HB, & GE = EH. Praeterea quum in △is AEF, BEF ſit [ζ] FA = FB, & in △is FED, FEC pari ratione [ζ] FD = FC: erit in △is AFD, BFC ang. FAD = [θ] FBC. Hinc ob AG = HB, & FA = FB, erit [ζ] FG = FH; & ob id in △is GEF,
θ. 8. 1. HFE erunt [θ] anguli ad E aequales, id eſt recti. Similiter oſtenditur EF ad omnes alias rectas in plano ACBD per E ductas angulos
ι. 3. def. 11. rectos efficere. Ergo [ι] FE plano per AB, CD ad rectos angulos eſt. Q. E. D.

PROP.

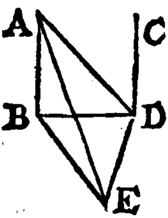
## PROP. V. THEOR.




*Si recta linea* AB *tribus rectis lineis*, BC, BD, BE, *sese tangentibus, in communi sectione* B *ad rectos angulos insistat: tres illae rectae lineae* BC, BD, BE *in vno plano erunt.*

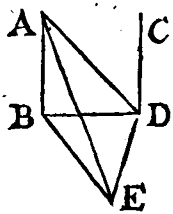
Si fieri potest, sint BD, BE quidem in subiecto plano, BC vero in sublimi. Planum per AB, BC producatur, donec subiectum secet in κ recta BF. Iam quia AB ipsis BD, BE ad κ. 3. 11. rectos insistit, erit eadem ad planum subiectum recta λ, ideoque ipsi BF, quae etiam in λ. 4. 11. plano subiecto est, ad rectum μ angulum insi- μ. 3. def. 11. stet. Sed ponitur quoque ang. ABC rectus. Ergo ang. ABF = ABC. Sed hi anguli sunt in eodem plano per AB, BC. Ergo totus ABF aequalis est parti ABC. Q. E. A.

## PROP. VI. THEOR.



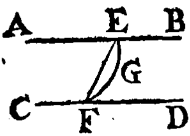

*Si duae rectae lineae* AB, CD *eidem plano ad rectos angulos fuerint, parallelae erunt ipsae rectae lineae* AB, CD.

Insistant AB, CD subiecto plano in punctis B, D. Iunctae BD ducatur in eodem plano perpendicularis DE, quae fiat = AB, & iungantur BE, AE, AD. Et quia AB est ad planum subiectum recta: erunt ang. ABD, ABE recti ν. Similiter ang. CDB, CDE recti erunt. ν. 3. def. 11. Quum itaque ang. ABD = ξ BDE, & AB = ξ. 10. ax. 1. DE,



DE, & BD communis: erit
ε. 4. 1. AD = ε BE. Ergo in Δis
π. 8. 1. BAE, DAE erit ang. ABE = π EDA; ideoque EDA rectus erit. Sunt autem & ang. EDC, EDB recti. Ergo rectae CD,
ρ. 5. 11. DA, DB erunt ρ in vno plano.
σ. 2. 11. Sed AB est in eodem plano σ, in quo sunt DA, DB. Ergo AB, CD sunt in eodem plano. Quare, quum ang. ABD, CDB recti sint, ipsae
τ. 28. 1. AB, CD parallelae τ sunt. Q. E. D.

## PROP. VII. THEOR.



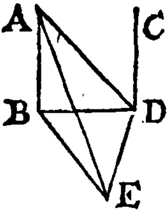
*Si duae rectae lineae* AB, CD *parallelae sint; sumantur autem in vtraque ipsarum quaelibet puncta* E, F: *quae dicta puncta coniungit recta linea in eodem cum parallelis plano erit.*

Si fieri potest, sit recta EGF in sublimi. Ducatur per eam planum vtcunque, quod
υ. 3. 11. secabit planum subiectum in recta υ EF. Ergo duae rectae EF, EGF spatium comprehendent. Q. E. A.

## PROP. VIII. THEOR.

*Si fuerint duae rectae lineae* AC, CD *parallelae, atque altera earum* AB *plano alicui sit ad rectos angulos: & reliqua* CD *quoque eidem plano ad rectos angulos erit.*

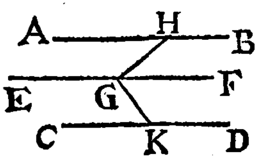
Insistant AB, CD plano subiecto in punctis B, D. Iungatur BD. Ergo AB, BD, DC erunt




erunt [φ] in vno plano. Ducatur in subiecto plano ipsi BD ad rectos DE, & fiat = AB, iunganturque AD, AE, EB. Quia AB recta est ad subiectum planum: erunt ang. ABD, ABE recti [χ]. Sed ang. ABD + CDB [ψ] = 2 rectis. Ergo CDB erit rectus. Et quia DE = AB, & BD communis, & ang. EDB = ABD: erit BE [ω] = AD. Hinc in Δis DAE, EAB erit ang. EDA [α] = ABE = recto. Sed & ang. EDB rectus est. Ergo [β] ED est ad planum per BD, DA recta. Iam quia in plano per BD, DA sunt ipsae AB [γ], BD: patet CD in eodem plano esse. Itaque & ang. EDC rectus [χ] erit. Sed & ang. CDB rectus erat. Ergo [β] CD est ad planum subiectum recta. Q. E. D.

φ. 7. 11.
χ. 3. def. 11.
ψ. 29. 1.
ω. 4. 1.
α. 8. 1.
β. 4. 11.
γ. 2. 11.

## PROP. IX. THEOR.

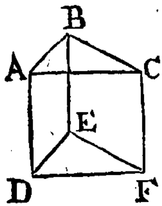



*Quae* AB, CD *eidem rectae lineae* EF *sunt parallelae, sed non in eodem cum illa plano, etiam inter se parallelae sunt.*

Sume in EF punctum G, ex quo duc ad EF in plano per AB, EF perpendicularem GH, in plano autem per EF, CD perpendicularem GK. Quia ergo ang. EGH, EGK recti sunt: erit [δ] EF ad planum per HG, GK recta. Itaque AB, CD ad idem planum rectae [ε] erunt, ideoque [ζ] parallelae. Q. E. D.

δ. 4. 11.
ε. 8. 11.
ζ. 6. 11.

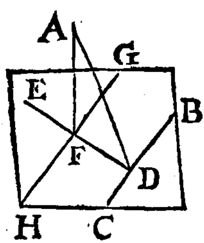
## PROP. X. THEOR.



*Si duae rectae lineae sese tangentes* AB, BC *duabus rectis lineis sese tangentibus* DE, EF *sint parallelae, non autem in eodem plano: illae aequales angulos* ABC, DEF *continebunt.*

Sume AB = DE, & BC = EF, & iunge
η. 33. 1. AD, BE, CF, AC, DF. Ergo erunt [η] AD, CF aequales & parallelae ipsi BE, & ideo AD, CF
ϑ. 9. 11. inter se aequales & parallelae [ϑ] erunt. Quare
ι. 8. 1. & AC = [η] DF, & ang. ABC = [ι] DEF. Q. E. D.

## PROP. XI. PROBL.



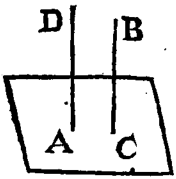
*A dato puncto* A *in sublimi ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.*

In subiecto plano duc vtcunque rectam BC, & ab
κ. 12. 1. & 2. 11. A ad BC [κ] demitte perpendicularem AD. Si AD ad planum subiectum perpendicularis est: factum iam erit propositum. Sin minus: duc ex D in subiecto plano ad BC perpendicularem DE, ad quam in plano EDA ex A [κ] demitte perpendicularem AF. Haec erit desiderata.

Nam in subiecto plano ducatur per F ipsi
λ. constr. BC parallela GH. Et quia [λ] ang. BDA, BDE
μ. 4. 11. recti sunt, ideoque BC in planum EDA [μ] recta

cta est: erit & GH ad idem planum [ν] recta, & ergo ang. GFA [ξ] rectus. Sed est etiam ang. DFA [λ] rectus. Ergo recta AF est ad planum subiectum [μ] perpendicularis. Q. E. F. ν. 8. 11. ξ. 3. def. 11.

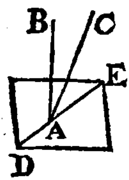
## PROP. XII. PROBL.



*Dato plano, a puncto* A, *quod in ipso datum est, ad rectos angulos rectam lineam constituere.*

Intelligatur punctum B sublime, a quo ad datum planum agatur [o] perpendicularis BC, & huic parallela [π] AD ducatur, quae erit plano dato recta [ρ]. Q. E. F. o. 11. 11. π. 31. 1. ρ. 8. 11.

## PROP. XIII. THEOR.

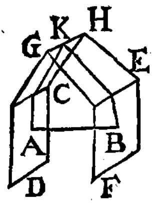


*Dato plano a puncto* A, *quod in ipso est, duae rectae lineae* AB, AC *ad rectos angulos non constituentur ab eadem parte.*

Si enim AB, AC simul essent perpendiculares plano A: ducto per BA, AC plano, quod planum A secet in recta DAE, forent ang. BAD & CAD [σ] recti, ideoque aequales; pars & totum. Q. E. A. σ. 3. def. 11.

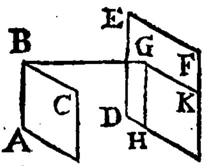
## PROP. XIV. THEOR.

*Ad quae plana* CD, EF *eadem recta linea* AB *est perpendicularis, ea parallela sunt.*




Si negas: pone illa producta se secare in recta GH, in qua sumto puncto K, iunge KA, KB. Ergo KAB erit triangulum. Et quia AB est in planum DH perpendicularis, in quo ducta est
τ. 3. def. 11. AK: erit [τ] ang. BAK rectus. Si-
υ. 17. 1. militer ang. ABK rectus erit. Q. E. A[υ].

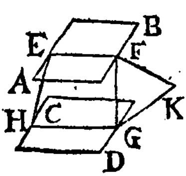
## PROP. XV. THEOR.




*Si duae rectae lineae* AB, BC *sese tangentes duabus rectis lineis* DE, EF *sese tangentibus sint parallelae, non autem in eodem plano: & quae per ipsas transeunt plana* AC, DF *parallela erunt.*

Duc enim ex B in planum DF perpendicularem BG, & per G ipsi ED parallelam HG,
φ. 3. def. 11. ipsi EF vero parallelam GK. Recti ergo [φ]
erunt ang. BGH, BGK. Et quia AB, BC ipsis
χ. 9. 11. GH, HK sunt [χ] parallelae: erunt & ang. GBA,
ψ. 29. 1. GBC recti [ψ]. Ergo GB ad planum AC etiam
ω. 4. 11. [ω] recta erit, & hinc plana AC, DF erunt par-
α. 14. 11. allela [α]. Q. E. D.

## PROP. XVI. THEOR.

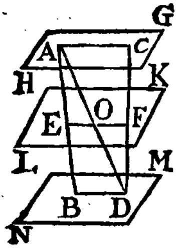



*Si duo plana parallela* AB, CD *ab aliquo plano* EFGH *secentur: communes ipsorum sectiones* FE, GH *sunt etiam parallelae.*

Si

Si non ſint parallelae: productae alicubi conuenient, vt in K. Sed quia recta EFK eſt in [β] plano AB: erit & punctum K in plano AB. Similiter idem K erit & in plano CD. Ergo plana AB, CD producta conuenient, nec ergo parallela [γ] erunt; contra hyp. β. 1. 11. γ. 8. def. 11.

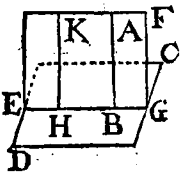
## PROP. XVII. THEOR.




*Si duae rectae lineae* AB, CD *a parallelis planis* GH, KL, MN *ſecentur, in eadem ratione ſecabuntur* (AE : EB = CF : FD).

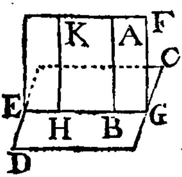
Iungantur AC, BD, AD. Occurrat autem AD plano KL in O, & iungantur OE, OF. Ergo quia plana parallela KL, MN a plano EODB ſecantur: erunt [δ] EO, BD parallelae. Eadem ratione CF, AC parallelae erunt. Ergo AE : EB = [ε] AO : OD = [ε] CF : FD. Q. E. D. δ. 16. 11. ε. 2. 6.

## PROP. XVIII. THEOR.




*Si recta linea* AB *plano alicui* CD *ſit ad rectos angulos: & omnia quae per ipſam* AB *tranſeunt plana* EF *eidem plano* CD *ad rectos angulos erunt.*

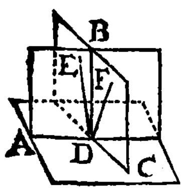
Sit planorum CD, EF communis ſectio recta EBG, & ex eius puncto quouis H in plano EF ducatur ipſi GE perpendicularis HK. Iam quia & ang. ABH rectus [ζ] eſt: erunt [η] AB, ζ. 3. def. 11. η. 28. 1.




9. 8. 11. KH parallelae; & hinc KH erit [9] ad planum CD recta. Sed item & de reliquis ostendetur, quae vt KH in plano EF ad ipsam EG perpendiculares duci possunt. Ergo planum EF plano CD rectum [ι] erit. Similiter demonstrabimus, quoduis aliud planum per AB ductum plano CD rectum fore. Q. E. D.

ι. 4. def. 11.

## PROP. XIX. THEOR.

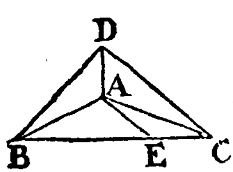



*Si duo plana se inuicem secantia* AB, BC *plano alicui* AC *sint ad rectos angulos: communis ipsorum sectio* BD *eidem plano* AC *ad rectos angulos erit.*

Si negas: duc ex in D plano quidem AB ad AD perpendicularem DE, in plano autem BC perpendicularem DF ad DC. Sunt autem AD, DC communes sectiones planorum AB, BC cum plano AC. Ergo duae rectae ED, FD ad angulos rectos [κ] constitutae erunt plano AC ab vno puncto D & ab vna parte. Q. E. A [λ].

κ. 4. def. 11.
λ. 13. 11.

## PROP. XX. THEOR.



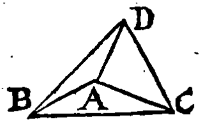

*Si solidus angulus* A *sub tribus angulis planis* BAC, CAD, BAD *contineatur: duo quilibet* CAD, BAD *reliquo* BAC *maiores sunt, quomodocunque sumti.*

*Cas.* 1.

*Caſ. 1.* Si ang. BAC, CAD, BAD aequales ſunt: euidens eſt propoſitio.

*Caſ. 2.* Sed ſi non ſint aequales: ſit eorum maximus BAC. In plano per BA, AC fiat ang. BAD = BAE, & capiatur AE = AD, & per E ducatur recta ſecans ipſas AB, AC in B, C, & iungantur BD, DC. Erit ergo in △is BAD, BAE baſis BD =[μ] BE. Et quia BD μ. 4. 1.
+ DC[ν] > BC, erit DC[ξ] > EC, & ergo in ν. 20. 1.
△is ADC, AEC ang. DAC >[ο] EAC. Quare ξ. 5. ax. 1.
DAC + BAD >[π] BAC. Q. E. D. ο. 25. 1. π. 4. ax. 1.

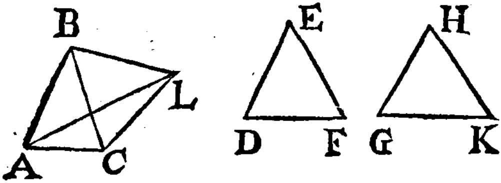
## PROP. XXI. THEOR.



*Omnis ſolidus angulus A ſub minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur.*

In rectis enim, angulos planos BAC, CAD, DAB continentibus, ſumtis quibusuis punctis B, C, D, iungantur BC, CD, DB. Quia ergo ſolidus ang. B continetur ſub 3 planis ang. ABC, ABD, DBC: erunt ang. ABC + ABD[ρ] ρ. 20. 11.
> DBC. Eadem ratione in ſolido ang. C erunt BCA + ACD > BCD, & in ſolido ang. D erunt CDA + ADB > CDB. Ergo ABC + ABD + BCA + ACD + CDA + ADB > DBC + BCD + CDB id eſt[σ] 2 rectis. σ. 32. 1.
Sunt autem ang. ABC + ABD + BCA + ACD + CDA + ADB + BAC + CAD + DAB =[σ] 6 rectis. Ergo ang. BAC + CAD + DAB <[τ] 4 rectis. Q. E. D. τ. 5. ax. 1.

## PROP. XXII. THEOR.




*Si sint tres anguli plani* ABC, E, H, *quorum duo reliquo sunt maiores quomodocunque sumti; contineant autem ipsos rectae lineae aequales* AB, BC, DE, EF, GH, HK: *fieri potest, vt ex iis* AC, DF, GK, *quae rectas aequales coniungunt, triangulum constituatur.*

v. 4. 1. *Cas. 1.* Si ang. ABC = E = H: erit [v] AC = DF = GK, ideoque duae quaeuis ipsarum tertia maiores erunt, vt ergo ex ipsis triangulum constitui queat. Q. E. D.

*Cas. 2.* Si praedicti anguli non fuerint aequales inter se: fiat ang. CBL = E, & BL = AB, & iungantur AL, LC. Est itaque CL

φ. 24. 1. = [v] DF, & CL + AC > [χ] AL. Iam quia

χ. 20. 1. ang. E + ABC > H, & E = CBL, patet esse

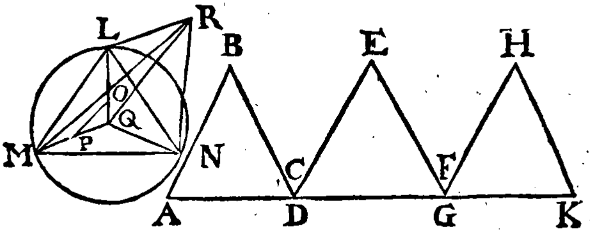
ψ. 5. ax. 1. [ψ] ang. LBA > H, ideoque AL > [φ] GK. Ergo DF + AC > AL > GK. Similiter ostendentur AC + GK > DF, & DF + GK > AC. Quum itaque ipsarum AC, DF, GK duae quae-

ω. 22. 1. uis tertia sint maiores: triangulum [ω] ex iisdem construi potest. Q. E. D.

PROP.

## PROP. XXIII. PROBL.

*Ex tribus angulis planis* ABC, DEF, GHK, *quorum duo reliquo sunt maiores quomodocunque sumti, solidum angulum constituere: oportet autem tres angulos quatuor rectis esse minores.*




Abscinde aequales BA, BC, ED, EF, HG, HK, & iunge AC, DF, GK, ex quibus construe △. LMN ita vt LM = AC, & MN = DF, & LN = GK, quod semper [α] fieri poterit. Dein △o. LMN circumscribe [β] circulum, & eius plano ex centro Q ad rectos angulos constitue [γ] rectam, in qua cape [δ] QR = $\sqrt{(ABq - LQq)}$, & iunge RL, RM, RN. Factum erit.

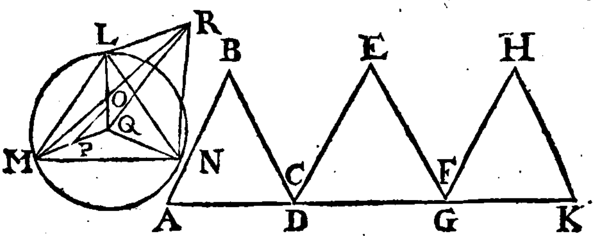
α. 22. 11. β. 5. 4. γ. 12. 11. δ. sch. 47. 1.

Primo demonstrabimus, semper esse AB > LQ.

*Cas. 1.* Cadat centrum Q intra △. LMN. Iam si non sit AB > QL: erit AB = QL aut < QL. Sit AB = QL. Iunge QM, QN. Quia ergo BC = AB = QL = QM, & [ε] AC = LM: erit ang. B = [ζ] LQM. Similiter patet esse ang. E = MQN, & ang. H = LQN. Ergo erit B + E + H = LQM + MQN +

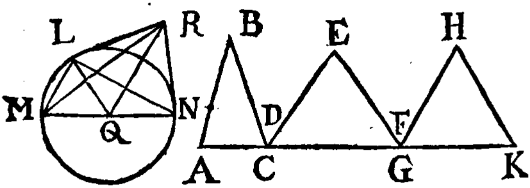
ε. constr. ζ. 8. 1.

 LQN




ν. 2. sch. 15. 1. LQN $=$ ν 4 rectis; contra hypothesin. Sit vero $AB < QL$. Cape $QO = QP = AB$, & iunge OP. Erit ergo $OL = PM$, & $QO : OL = QP : PM$. Quare ϑ OP, LM erunt parallelae, & ergo in aequiangulis $\triangle$ LMQ, OPQ erit ι $QL : LM = QO : OP$. Sed $QL > QO$. Ergo LM κ $> OP$. Quia igitur & $AC > OP$, erit λ ang. $B > OQP$. Eadem ratione ang. $E > MQN$, & $H > LQN$. Ergo erit $B + E + H > 4$ rectis; contra hyp. Igitur quia AB nec $=$ nec $<$ QL: erit $AB > LQ$.

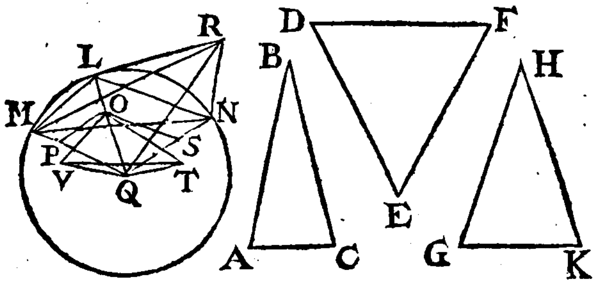
ϑ. 2. 6.
ι. 4. 6.
κ. 14. 5.
λ. 25. 1.




*Caf.* 2. Cadat centrum Q in latus MN. Iam si dicas $AB = QL$: erunt $DE = EF = AB = QL = QM = QN$, ideoque $DE + EF = MN = DF$. Q. E. A μ. Si dicas $AB < LQ$: erunt $DE + EF < DF$. Q. E. A μ. Ergo $AB > LQ$.

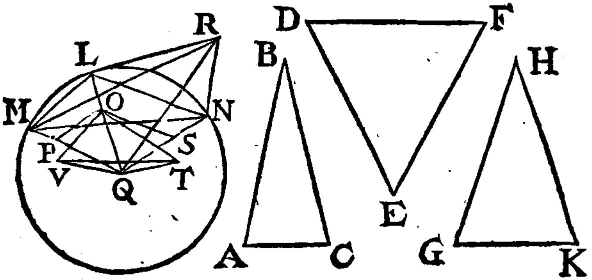
μ. 20. 1.

*Caf.*



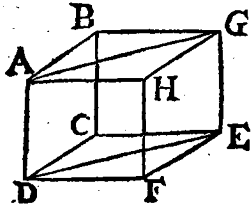

*Caſ. 3.* Sit centrum Q extra △. LMN. Iam ſi dicas AB = LQ: erit ang. B ζ = LQM, ζ. 8. 1.
& H = LQN. Ergo B + H = MQN = ζ E; contra hyp. Si dicas AB < QL: fac QO = AB, & QP = BC, QS = HK, & iunge OP, OS. Ergo QO = QP = QS, & vti in Caſu 1. demonſtrabitur LM > OP, & LN > OS. Ergo AC > OP, & GK > OS, & ang. B λ > OQP, & ang. H > OQS. Fiat ang. λ. 25. 1.
OQT = H, & OQV = B, & QT = QV = QO, & iungantur OV, OT, TV. Erit itaque ν OV = AC = LM, & OT = GK = LN. ν. 4. 1.
Sed quia ang. POQ > VOQ, & SOQ > TOQ: erit POT vel MLN > VOT, & hinc ξ MN ξ. 24. 1
> VT, ideoque DF > VT. Quum autem QV = ED & QT = EF, erit ang. E > λ VQT, id eſt E > B + H; etiam contra hypotheſin. Itaque BA > LQ.

Secundo dico, ang. ſolidum R eſſe ex tribus planis B, E, H conſtitutum. Quia enim QR plano circuli recta eſt: erunt ang. RQL, RQM, RQN recti. Sunt autem aequales LQ, MQ, NQ. Ergo ν RL = RM = RN. Et quia QRq




QRq = ABq — LQq, ac ob id QRq +
o. 47. 1. LQq = ABq: erit ° LR = AB, & ergo RM
= BC, atque, ob ML = AC, ang. LRM =
B. Eadem ratione ang. LRN = H, & ang.
MRN = E. Quare ex tribus planis B, E, H
constitutus est solidus angulus R. Q. E. F.

## PROP. XXIV. THEOR.




*Si solidum parallelis planis contineatur: opposita ipsius plana & aequalia & parallelogramma sunt.*

1. Nam quia plana parallela BH, CF secan-
π. 16. 11. tur a plano AC in rectis AB, DC: erunt π AB,
CD parallelae. Similiter quia plana AF, BE
parallela secantur a plano AC: erunt π AD, BC
parallelae. Ergo AC est Pgr. Similiter ostenditur, reliqua plana AF, HE, BE, BH, FC esse Pgra Q. E. D.

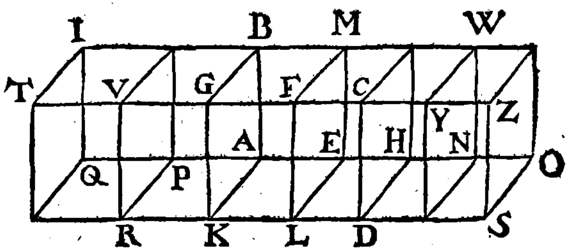
2. Iungantur AG, DE. Quia AB, BG ip-
ρ. 10. 11. sis DC, CE sunt parallelae: est ang. ABG ρ =
DCE.

DCE. Sed AB[σ] = DC, & BG = CE. Ergo △. AGB = DEC, & igitur Pgr. BH = Pgr. CF. Similiter oſtendetur Pgr. AC = HE, & Pgr. AF = BE. Q. E. D. σ. 34. 1.

** Scholium.*

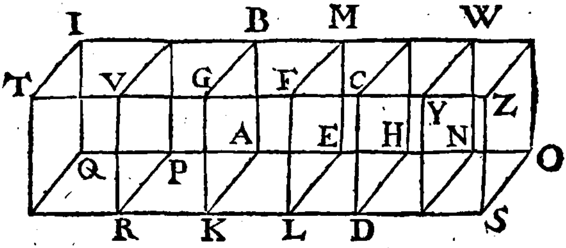
Et quia oſtenſum eſt, ang. ABG = DCE, & AB : BG = DC : CE: patet aequiangula eſſe Pgra. oppoſita, & latera circum aequales angulos proportionalia habere, ideoque etiam ſimilia eſſe.

## PROP. XXV. THEOR.



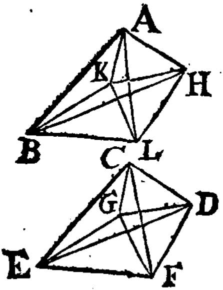

*Si ſolidum parallelepipedum* ABCD *plano* EF *ſecetur oppoſitis planis* AG, CH *parallelo: erit vt baſis* AELK *ad baſin* EHDL *ita ſolidum* ABFL *ad ſolidum* EMCD.

Produc enim AH vtrinque, & pone ipſi EH aequales quotcunque HN, NO, & ipſi EA aequales AP, PQ quotuis, & comple Pgra. QR, PK, DN, NS, & Ppda PT, AV, HY, NZ. Iam quia QP = PA = AE: erit[τ] Pgr. QR = PK = AL, & Pgr. PI = PB = BE. Erit quoque Pgr. TQ =[υ] VP = GA. Ergo tria plana ſolidorum PT, AV, EG tribus planis aequantur. Sed tria tribus oppoſitis[υ] aequantur. Ergo[φ] tria ſolida PT, AV, EG aequalia τ. 38. 1. υ. 24. 11. φ. 10. def. 11.




lia ſunt. Similiter oſtendetur tria ſolida OY, NC, HF aequalia eſſe. Ergo baſis QL aeque multiplex eſt baſis AL ac ſolidum TE ſolidi GE; & eadem ratione baſis OL aeque eſt multiplex baſis HL ac ſolidum OF ſolidi HF. Porro ſi baſis QL >=< OL: eſt & [φ] ſolidum TE >=< ſolido OF. Quare vt baſis
χ. 5. def. 5. AL eſt ad baſin HL [χ] ita ſolidum GE ad ſolidum HF. Q. E. D.

## PROP. XXVI. PROBL.




*Ad datam rectam lineam* AB *&* *ad datum in ipſa punctam* A *dato angulo ſolido* C *aequalem angulum ſolidum conſtituere.*

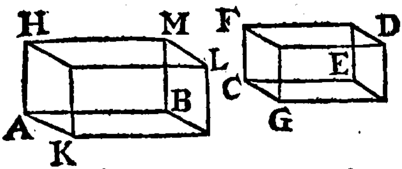
Sint DCE, ECF, FCD anguli plani ſolidum C continentes. Ex quouis puncto F in recta CF de-
ψ. 11. 11. mitte in planum ECD perpendicularem [ψ] FG, quae ipſi occurrat in G, & iunge CG. Dein fac ang. BAH = ECD, & ang. BAK = ECG, & AK = CG; atque ex K plano BAH erige per-

perpendicularem [α] KL, quam fac = GF, & iunge AL. Dico factum. α. 12. 11.

Nam fiat AB = CE, & iungantur KB, BL, GE, EF. Et quia rectae KL, GF planis BAH, ECD perpendiculares sunt: erunt ang. AKL BKL, CGF, EGF recti. Dein quia KA = GC, & AB = CE, & ang. BAK = ECG: erit [α] BK = EG. Sed KL = GF. Ergo AL = [α] CF, & BL = [α] EF; ac inde ang. BAL [β] = ECF. Similiter, sumta AH = CD & iunctis HK, HL, DG, DF ostendemus ang. LAH = FCD. Ergo tres ang. plani BAH, BAL, LAH anguli solidi A tribus planis ECD, ECF, FCD solidi C aequantur. Hinc ang. solidus A = [γ] C. Q. E. F.

α. 4. 1.
β. 8. 1.
γ. ax. 11.

## PROP. XXVII. PROBL.




*A data recta linea* AB *dato solido parallelepipedo* CD *simile & similiter positum solidum parallelepipedum describere.*

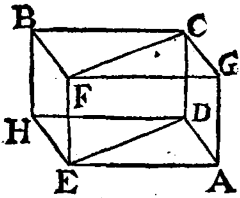
Fac [δ] angulo solido C = A, ita vt angulo GCE = KAB, & ang. FCE = HAB, & ang. GCF = KAH. Dein fac EC : CG = [ε] BA : AK, ac GC : CF = KA : AH, & comple Pgr. BH, ac solidum AL. δ. 26. 11. ε. 12. 6.

Etenim [ζ] Pgr. KB $\sim$ GE, & Pgr. KH $\sim$ GF, &, quia ex aequo EC : CF = BA : AH, Pgr. BH $\sim$ EF. Ergo & tria reliqua Pgra. ζ. 1. def. 6. & constr.

HL,

ν. sch. 24. 11. & 21. 6. HL, LB, LK ∾[ν] tribus reliquis DF, DE, DG.
ϑ. 9. def. 11. Quare Ppd. AL ∾[ϑ] Ppdo. CD. Q. E. D.

## PROP. XXVIII. THEOR.




*Si solidum parallelepipedum* AB *plano* CDEF *secetur per diagonales* CF, DE *oppositorum planorum: solidum* AB *ab ipso plano* CDEF *bifariam secabitur.*

ι. 34. 1.
κ. 24. 11.
λ. 10. def. 11.
Quia enim △. GCF =[ι] △. CFB, & △ADE = △. DEH, & Pgr. AC =[κ] BE, & Pgr. GE = CH: Prisma GCFEDA =[λ] prismati CFBHDE. Q. E. D.

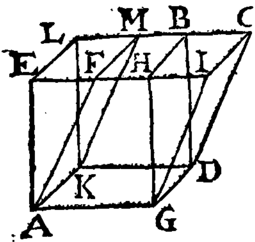
### * *Schol.*

Prismata vero esse illas duas dimidias partes Ppdi. AB, patet ex 24. 11. & schol. eiusdem, & ex eo quod, (per 16. 11.) planum CFED parallelogrammum est. Constat itaque, prisma triangularem basin habens dimidium esse parallelepipedi aeque alti & in eadem basi GE constituti, vel in basi AH basis triangularis dupla.

## PROP. XXIX. THEOR.

*Solida parallelepipeda* AB, AC *in eadem basi* AD *eademque altitudine, quorum insistentes lineae* AE, AF, GH, GI, KL, KM, DB, DC *in eisdem rectis lineis* EI, LC *collocantur, inter se sunt aequalia.*

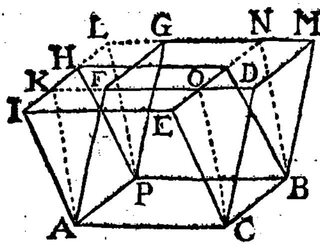
μ. 3. ax. 1. Quia KB & KC sunt Pgra. & inde LB = KD = MC: erit LM =[μ] BC, & ergo △. LKM




LKM = [v] BDC, nec non Pgr. EM = [ξ] HC. Eadem ratione △. AEF = GHI. Est autem [o] Pgr. LA = BG, & Pgr. MA = CG. Ergo Prisma AEFMLK = [π] Prism. GHICBD. Hinc addito communi solido AKDGHFMB, tota Ppda AB, AC aequalia erunt. Q. E. D.

v. 8. 1.
ξ. 36. 1.
o. 24. 11.
π. 10. def. 11.

## PROP. XXX. THEOR.

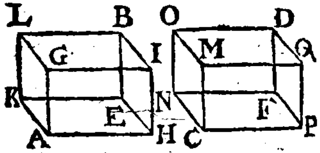



*Solida parallelepipeda* ABEH, ABDG *in eadem basi eademque altitudine, quorum lineae insistentes in eisdem lineis rectis non collocantur, inter se aequalia sunt.*

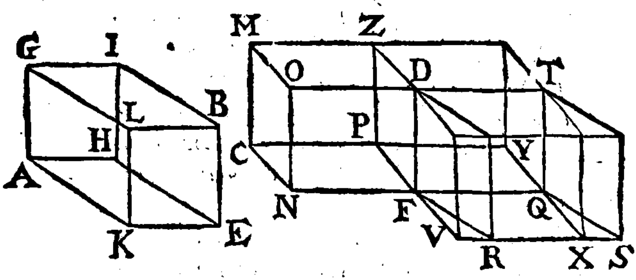
Producantur enim DF, MG, IH, EO, vt se inuicem secent in K, L, N, & iungantur KA, LP, OC, NB. Ergo Ppd. ABEH = [ρ] ABNK = [ρ] ABDG. Q. E. D. ρ. 29. 11.

## PROP. XXXI. THEOR.

*Solida parallelepipeda* AB, CD, *quae in aequalibus sunt basibus* AE, CF, *& eadem altitudine, inter se sunt aequalia.*




*Caſ. 1.* Sint inſiſtentes lineae AG, BE, HI, KL, CM, DF, NO, PQ ad rectos angulos baſibus AE, CF, & ſit ang. PFN = HEK, NF = KE, & FP = EH. Erit ergo Pgr.
σ. 1 def. 6. CF = & ∾[σ] Pgro. AE. Eadem ratione quia altitudines NO, KL aequales, & ang. ONF, ONC, LKE, LKA recti ſunt: erit Pgr. ND = & ∾ ipſi KB, & Pgr. CO = & ∾ AL. Quare & reliqua Pgra reliquis aequalia & ſi-
τ. 10. def. 11. milia erunt, & ergo Ppd. CD =[τ] ipſi AB. Q. E. D.

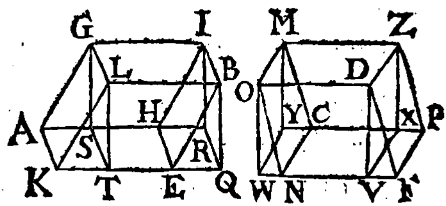



*Caſ. 2.* Sint iterum inſiſtentes perpendiculares, ſed ang. PFN non = HEK. Produc NF in Q, & fac ang. QFR = HEK, & FQ = HE, & FR = EK, & comple Pgr. QR ac
υ. caſ. 1. ſolidum TR. Ergo erit Ppd. TR[υ] = Ppdo AB. Produc PF, SR, quae conueniant in V, & per Q duc ipſi PV parallelam QX, quam produc donec productae CP occurrat in Y, & comple Ppda TV, TP, quorum baſes ſunt Pgra.

VQ,

VQ, PQ. Iam Ppda. TV, TR eandem basin TF habentia, aequalia [φ] sunt; & hinc Ppd. TV = AB. Sed quia Pgr. FX = [χ] FS = [ψ] AE = [ω] CF: erit Pgr. FX : FY = CF : FY. Atqui Ppd. TV : TP = [α] Pgr. FX : FY, nec non Ppd. CD : TP = Pgr. CF : FY. Ergo Ppd. TV : TP = Ppd. CD : TP. Quare Ppd. TV = [β] CD, ideoque Ppd. CD = AB. Q. E. D.

φ. 29. 11.
χ. 35. 1.
ψ. constr.
ω. hyp.
α. 25. 11.
β. 9. 5.




*Cas. 3.* Non sint insistentes AG, BE, HI, KL, CM, PZ, FD, NO perpendiculares basibus; Duc a punctis B, I, G, L, D, Z, M, O ad bases perpendiculares BQ, IR, GS, LT, DV, ZX, MY, OW, & iunge ST, QR, TQ, RS, XV, YW, YX, VW. Erit ergo Ppd. MV = [γ] GQ. Atqui Ppd. CD = [δ] MV, & Ppd. AB = [δ] GQ. Ergo Ppd. CD = AB. Q. E. D. †

γ. casus praec.
δ. 29. vel 30. 11.

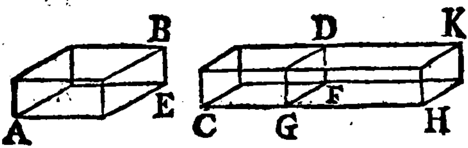
* *Schol.* Itaque Parallelepida aequalia AB, CD aequalium basium aeque alta sunt. Nam si alterius AB altitudo maior esset: quia ipsius AB pars capi posset aeque alta ipsi CD, foret pars Ppdi. AB = Ppdo. CD. Ergo Ppda. AB, CD inaequalia forent.

 PROP.

† Reliqui casus demonstrationem Lector facile addet. Similis enim est demonstrationi casus secundi.

## PROP. XXXII. THEOR.

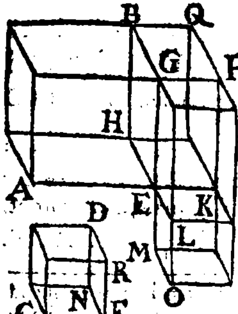
*Solida parallelepipeda* AB, CD, *quae eandem habent altitudinem, inter se sunt vt bases* AE, CF.




a. 45. 1. Applicetur ad FG Pgr. FH = [a] AE, & com-
ζ. 31. 11. pleatur Ppd. DH = [ζ] AB. Quia autem to-
η. 25. 11. tum Ppd. CK secatur plano DG, erit [η] Ppd. DH vel AB ad Ppd. CD sicut basis FH vel AE ad basin CF. Q. E. D.

* *Schol.* Hinc parallelepipedorum aequalium quod maiorem basin habet, minorem habet altitudinem. Non enim eandem; quia sic Ppda inaequalia erunt: nec maiorem; quia sic pars illius Ppdi reliquo aequealta eodem maior, & a potiori totum eodem maius erit.

## PROP. XXXIII. THEOR.




*Similia solida parallelepipeda* AB, CD *inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum* AE, CF.

In productis AE, HE, GE cape EK = CF, EL = FN, EM = FR. Comple Pgr. KL, & Ppd. KQ. Iam quia ... Ppd.

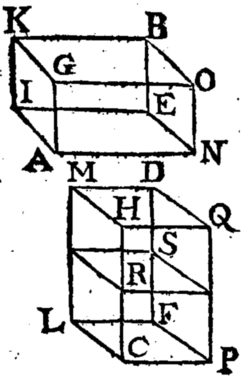
Ppd. AB $\sim$ CD, ideoque [ϑ] ang. AEH $=$ ϑ. 9. def. 11.
CFN: erit ang. KEL $=$ CFN, ac propterea & 1. def. 6.
Pgr. KL $=$ & $\sim$ [ι] CN. Eadem ratione Pgr. ι. 4. 1. & 34. 1. & 1. def. 6.
KM $= \sim$ CR, & Pgr. OE $= \sim$ DF. Quoniam ergo & tria reliqua Pgra tribus reliquis aequalia & similia [κ] sunt: erit Ppd. KO $=$ κ. sch. 24. 11.
$\sim$ [λ] CD. Comple Pgr. HK, & fac Ppda λ. 10. def. 11.
HP, PL eiusdem altitudinis EG cum Ppdo AB. Et quia [ϑ] AE : CF $=$ EH : FN $=$ EG : FR: erit AE : EK $=$ HE : EL $=$ GE : EM. Est vero [μ] AE : EK $=$ AH : HK, & HE : EL [μ] $=$ μ. 1. 6.
HK : KL, & GE : EM $=$ [μ] PE : KM. Quare AH : HK $=$ HK : KL $=$ PE : KM. Porro AH : HK $=$ [ν] Ppd. AB : Ppd. BK; & HK : KL ν. 32. 11.
$=$ [ν] Ppd. BK : PL; & PE : KM $=$ Ppd. PL : KO. Ergo ∺ Ppda AB, BK, PL, KO, ideoque AB : KO $=$ [ξ] $(AB : BK)^3 = (AH : HK)^3$ ξ. 11. def. 5.
$= (AE : EK)^3 = (AE : CF)^3$. Q. E. D.

*Corollarium.*

Hinc, si quatuor rectae lineae continue proportionales fuerint, est vt prima ad quartam, ita solidum parallelepipedum, quod fit a prima, ad solidum a secunda simile & similiter descriptum [ξ].

## PROP. XXXIV. THEOR.

*Aequalium solidorum parallelepipedorum* AB, CD *bases* AE, CF *sunt reciproce proportionales altitudinibus* AG, CH. *Et quorum solidorum parallelepipedorum* AB, CD *bases* AE, CF *sunt reciproce proportionales altitudinibus* AG, CH, *ea inter se sunt aequalia.*




*Caf.* 1. Si insistentes rectae AG, EB, IK, NO, CH, LM, FD, PQ sunt basibus AE, CF perpendiculares.

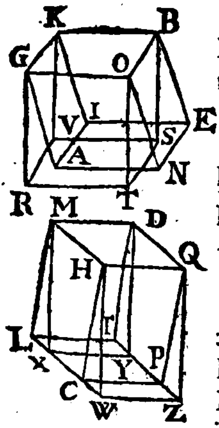
*Hyp.* 1. Si Ppd. AB = CD, & basis AE = CF: erit & alt. AG = [ϛ] CH. Ergo AE : CF = CH : AG. Sin autem alterutra basis AE > altera CF: quia tunc altitudo AG < [π] CH, cape CR = AG, & comple Ppd. SC. Iam quia AB = CD, erit AB : CS = CD : CS. Sed AB : CS = [ρ] AE : CF, & CD : CS = [ρ] Pgr. CM : Pgr. RL = [σ] CH : CR = CH : AG. Quare iterum est AE : CF = CH : AG. Q. E. D.

ϛ. sch. 31. 11.
π. sch. 32. 11.
ρ. 32. 11.
σ. 1. 6.

*Hyp.* 2. Sit AE : CF = CH : AG. Iam si basis AE = CF: erit & AG = CH, ideoque Ppd. AB = [τ] CD. Si vero AE > CF: erit CH > [υ] AG. Pone rursus CR = AG, & comple Ppd. CS. Ergo AE : CF = CH : CR. Sed AE : CF = [ρ] AB : CS, & CH : CR = [σ] CM : RL = [ρ] CD : CS Ergo AB : CS = CD : CS. Igitur iterum AB = [φ] CD. Q. E. D.

τ. 31. 11.
υ. sch. 32. 11.
φ. 9. 5.

Caf.




*Caſ.* 2. Si inſiſtentes AG, EB, CH &c. baſibus AE, CF non ſunt perpendiculares: demitte *x* in baſes perpendiculares GR, BS, OT, KV, HW, MX, DY, QZ, & completa intellige Ppda KT, MZ. *x.* 11. 11.

*Hyp.* 1. Iam ſi Ppd. AB = CD: quia Ppd. AB =ψ KT, & Ppd. CD = MZ, erit Ppd. KT = MZ. Quum itaque ſit *a* BG : DH = DY : BS : erit *a* AE : CF = DY : BS. Q. E. D. ψ.30.&29.11. *a*. caſ. 1.

*Hyp.* 2. Deinde ſi baſis AE : CF = alt. DY : BS : erit & *a* BG : DH = DY : BS. Ergo Ppd. KT = *a* MZ, ideoque Ppd. AB =ψ CD. Q. E. D. *a*. 24. 11.

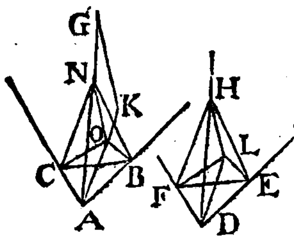
* *Coroll.*

Oſtenſum eſt ſub hyp. 1. caſ. 1. Ppda. recta CD, CS aequalium & ſimilium baſium eſſe inter ſe vt altitudines CH, CR. Et quia his duobus Ppdis quaeuis alia duo aequalia & aeque alta ſumi poſſunt (per 31. 11.): patet in vniuerſum duo quaecunque Ppda aequalium baſium eſſe in ratione altitudinum.

* *Schol.*

Propoſitiones 31. 32. 33. & 34. cum ſuis ſcholiis & corollariis valent quoque de Priſmatis triangularibus, propter ea quae oſtenſa ſunt in prop. 28.

## PROP. XXXV. THEOR.




*Si sint duo anguli plani* BAC, EDF *aequales; & in ipsorum verticibus* A, D *rectae sublimes* AG, DH *constituantur, quae cum rectis lineis a principio positis angulos contineant aequales, alterum* GAB, GAC *alteri* HDE, HDF; *in sublimibus autem sumantur quaevis puncta* G, H, *atque ab ipsis ad plana, in quibus sunt anguli primi* BAC, EDF, *perpendiculares ducantur* GK, HL; *& a punctis*, K, L, *quae a perpendicularibus fiunt in planis, ad primos angulos iungantur rectae lineae* KA, LD: *cum sublimibus aequales angulos* KAG, LDH *continebunt*.

Pone AN = DH, & in plano AGK duc NO parallelam ad GK, quae ergo plano BAC
β. 8. 11. perpendicularis [β] erit. A punctis O, L duc ad rectas AB, AC, DE, DF perpendiculares OB, OC, LE, LF, & iunge NC, NB, HE, HF,
γ. 47. 1. CB, FE. Iam quia ANq =[γ] NOq + OAq, & OAq =[γ] OCq + ACq, & NOq + OCq =[γ] NCq: erit ANq = NCq + CAq, ideo-
δ. 48. 1. que [δ] ang. NCA rectus. Similiter ostenditur ang. HFD rectus. Quare ang. NCA = HFD. Et quia NAC = HDF, ac AN = DH: erit
ε. 26. 1. AC =[ε] DF. Eadem ratione AB = DE.
ζ. 4. 1. Quare CB =[ζ] FE, & ang. ACB = DFE, &
η. 3. ax. 1. ang. ABC = DEF. Hinc[η] ang. OCB = LFE,

&

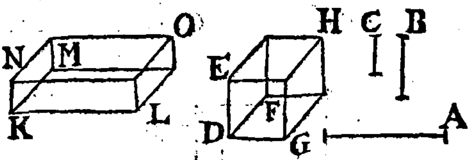
& ang. OBC = LEF, & ob CB = FE, est CO = [s] FL. Vnde patet [s] AO = DL. Hinc quoniam NOq + OAq = ANq = DHq = HLq + LDq: erit ONq = HLq & NO = HL. Igitur constat ang. KAG = [9] LDH. Q. E. D. 9. 8. 1.

*Corollar.*

**Ex hoc vero manifestum est, si sint duo anguli plani rectilinei aequales, ab ipsis autem constituantur sublimes rectae lineae aequales, quae cum rectis lineis a principio positis aequales contineant angulos, alterum alteri, perpendiculares NO, HL, quae ab ipsis ad plana in quibus sunt primi anguli ducuntur, inter se aequales esse.**

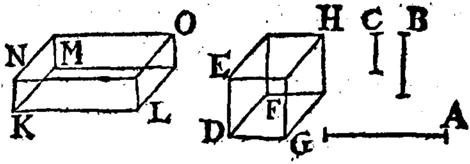
## PROP. XXXVI. THEOR.

*Si tres rectae lineae* A, B, C, *proportionales sint: solidum parallelepipedum, quod a tribus fit, aequale est solido parallelepipedo, quod fit a media* B, *aequilatero quidem, aequiangulo autem antedicto.*




Exponatur angulus solidus D, & ipsi B aequales fiant DE, DG, DF, & compleatur Ppd. DH, quod erit factum a B. Ponatur KL = A, & ad punctum K fiat [t] ang. solidus K = D, ac KM = B, & KN = C, & compleatur Ppd. KO, quod erit factum a tribus A, B, C, & ae- t. 26. 11.

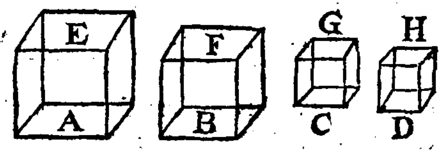
 qui-




κ. ax. 11. & quiangulum ipsi DH*. Et quia λ KL : DG =
29. 1. DE : KN, & ang. LKN = GDE: erit Pgr.
λ. constr. NL = μ EG. Deinde quia & λ ang. MKN
μ. 14. 6. = FDE, & ang. MKL = FDG, & KM = DF:
erunt perpendiculares a punctis M, F ad plana
ν. cor. 35. 11. NL, EG ductae aequales ν; id est Ppda DH, KO, aequales bases habentia EG, NL, aeque-
ξ. 4. def. 6. alta ξ erunt, ac ergo aequalia ο. Q. E. D.
ο. 31. 11.

## PROP. XXXVII. THEOR.

*Si quatuor rectae lineae* A, B, C, D *proportionales sint: & quae ab ipsis fiunt solida parallelepipeda* E, F, G, H *similia & similiter descripta proportionalia erunt. Et si quae ab ipsis fiunt solida parallelepipeda* E, F, G, H *similia & similiter descripta proportionalia sint: & ipsae rectae lineae* A, B, C, D *proportionales erunt.*



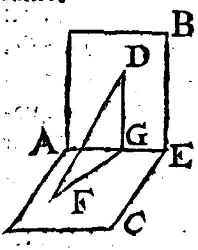

π. 33. 11. 1. Nam quia Ppd. E ∾ F: erit E : F = π $(A:B)^3$. Eodem argumento erit G : H = $(C:D)^3$.
ρ. hyp. & 1. sch. 22. 5. Sed $(A:B)^3$ = ρ $(C:D)^3$. Ergo E : F = G : H. Q. E. D.

2. Quia,

2. Quia, vt antea, $E:F = (A:B)^3$, & $G:H = (C:D)^3$, atque $E:F = G:H$: erit $(A:B)^3 = (C:D)^3$, ideoque $A:B =$ [σ] $C:D$. Q. E. D. σ. 2. sch. 22. 5.

## PROP. XXXVIII. THEOR.

*Si planum* AB *ad planum* AC *rectum sit, & ab vno puncto* D *eorum, quae sunt in vno plano* AB, *ad alterum planum* AC *perpendicularis ducatur: ea in communem planorum sectionem* AE *cadet.*



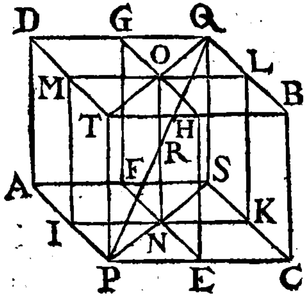

Si negas, cadat extra, vt DF, & a puncto F in plano AC duc ad AE perpendicularem FG, & iunge DG. Iam quia FG perpendicularis [τ] est plano AB: erit ang. FGD rectus [υ]. Sed & ang. DFG rectus [υ] est. Quare in Δ GDF duo recti sunt. Q. E. A.

τ. 4. def. 11.
υ. 3. def. 11.

## PROP. XXXIX. THEOR.

*Si in solido parallelepipedo* AB *oppositorum planorum* AC, BD *latera secentur bifariam; per sectiones vero plana ducantur* EFGH, IKLM: *communis planorum sectio* NO *& solidi parallelepipedi diameter* PQ *se mutuo bifariam secabunt.*

Iun-




Iungantur QO, OT, PN, NS. Quoniam QB, DT sunt parallelae: erit ang.
φ. 29. 1. QLO = φ OMT.
χ. 34. 1. Praeterea QL χ = TM.
ψ. 33. 1. Et quia ψ ML, DQ parallelae sunt, item DT, GH, QB: erit MO
α. constr. = χ DG = α GQ = χ OL. Quare α QO
α. 4. 1 = OT, & ang. QOL = MOT, & ob id β
β. 3. sch. 15. 1. QOT recta. Similiter demonstratur, SN = NP, & SNP rectam esse. Et quia PT, SQ, ipsi CB aequales χ & parallelae, ipsae aequales & parallelae sunt: erunt & TQ, PS aequales ψ & parallelae. Ergo rectae NO, PQ sunt
γ. 7. 11. in eodem γ plano TS, & se mutuo secabunt in R. Sed quia φ ang. OQR = RPN, & ang.
δ. 7. ax. 1. QOR = PNR, & QO = δ PN: erit ε OR =
ε. 26. 1. RN, & QR = RP. Q. E. D.

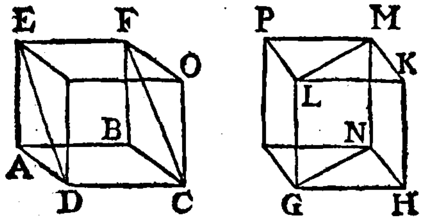
* *Schol.*

Hinc in omni parallelepipedo diametri omnes se mutuo bisecant in vno puncto R.

## PROP. XL. THEOR.

*Sint duo prismata* ABCDEF, GHKLMN *aequealta, quorum vnum quidem basin habeat parallelogrammum* ABCD, *alterum vero triangulum* GHN, *&* *parallelogrammum* ABCD *duplum sit trianguli* GHN: *aequalia erunt ipsa prismata.*

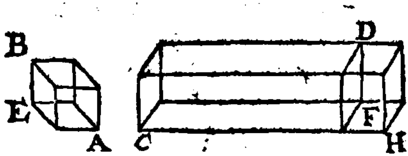
Com-




Compleantur enim Ppda. A O, H P. Et
quoniam Pgr. AC $=$ 2 $\triangle$ GNH $=^{\zeta}$ Pgr. GN, ζ. 34. 1.
atque ſolida aequealta ſunt: erit Ppd. AO $=$ η. 31. 11.
$^{\eta}$ HP, ideoque Pr. ABCDEF $=^{\vartheta}$ Pr. GHKL- ϑ. 28. 11.
MN. Q. E. D.

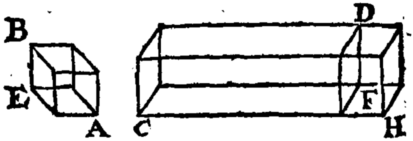
** Scholium.*

Ex iis quae hactenus oſtenſa ſunt demonſtrari poteſt, *parallelepipeda quaeuis* A B, C D, *nec non priſmata triangularia, eſſe in ratione compoſita baſium* AE, CF *& altitudinum* BE, DF.




Intelligatur enim aliud Ppd. DH, cuius baſis
F H $=$ baſi A E Ppdi. A B, & altitudo D F $=$ al-
titudini Ppdi C D. Et quoniam eſt AB : HD $=^{\iota}$ ι. cor. 34. 11.
BE : FD, & HD : CD $=^{\kappa}$ FH : CF $=$ AE : CF : κ. 32. 11.
erit AB : CD $=^{\lambda}$ (AE : CF) + (BE : DF). Er- λ. 5. def. 6.
go Parallelepipeda, & triangularia priſmata, Parallelepipedorum dimidia, ſunt inter ſe vt baſes & altitudines. Q. E. D.

Quae

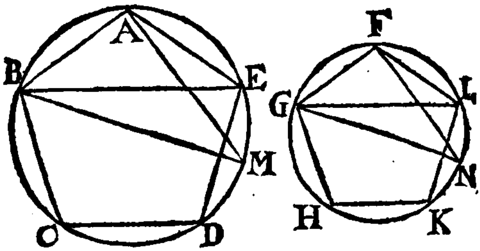



Quae quum ita sint, patet fundamentum methodi, qua parallelepipeda & prismata in Geometria practica metiuntur. Sumunt enim cubum AB, & latus eius BE pro vnitate, qua metiuntur basin Ppdi CD & altitudinem: & ex multiplicatione numerorum, qui basin & altitudinem exprimunt, gignitur numerus, qui soliditatem Ppdi CD exprimit. Sit (per 4. sch. 23. 6) basis CF = 9 AE, & altitudo DF = 2 BE: & quia CD: AB = (CF: AE) + (DF: BE) = (9:1) + (2:1) = $^{\lambda}$ 18: 1; erit CD = 18 AB.

EV-

# EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER XII.

## PROP. I. THEOR.




*Similia polygona* ABCDE, FGHKL *circulis inſcripta inter ſe ſunt vt quadrata a diametris* BM, GN.

Iungantur BE, AM, GL, FN. Quia polygona ſimilia ſunt: eſt [α] ang. BAE = GFL, & BA : AE = GF : FL; ideoque [β] ang. AEB = FLG. Ergo ang. AMB = [γ] FNG; Et, quia praeterea ang. BAM = [δ] GFN, eſt BM : GN = [ε] BA : GF. Hinc pol. ABCDE : pol. FGHKL = [κ] $(BA : GF)^2$ = [λ] $(BM : GN)^2$ = [κ] BMq : GNq. Q. E. D.

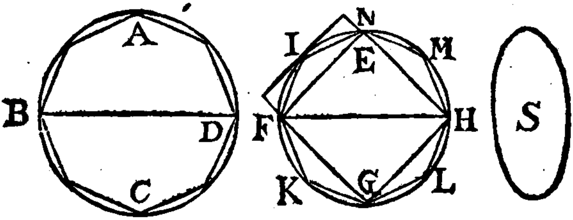
α. 1. def. 6.
β. 6. 6.
γ. 21. 3. & 1. ax. 1.
δ. 31. 3.
ε. 4. 6.
κ. 20. 6.
λ. 1. ſch. 22. 5.

* *Schol.* Et quia AB : GF = BC : GH &c. = BM : GN : patet [μ] ſimilium polygonorum circulis inſcriptorum perimetros AB + BC + CD + DE + EA, & FG + GH + HK + KL + LF, eſſe in ratione diametrorum.

μ. 12. 5.

PROP.

## PROP. II. THEOR.




*Circuli* ABCD, EFGH *inter se sunt vt quadrata a diametris* BD, FH.

Si negas: erit vt BDq ad FHq ita circulus ABCD ad spatium S circulo EFGH minus vel maius. Sit primo S < EFGH. In circulo
v. 6. 4. EFGH descriptum sit [v] quadratum HGFE,
ξ. sch. 7. 4. quod [ξ] maius erit dimidio circulo. Circum-
o. 30. 3. ferentiae EF, FG, GH, HE bisectae [o] sint in I, K, L, M, & iungantur EI, IF, FK, KG, GL, LH, HM, ME. Erit similiter quodlibet △ EIF > $\frac{1}{2}$ segmento EIF, quoniam, ducta per I parallela ad EF & completo pgro. rectangulo NF, est △ EIF = $\frac{1}{2}$ NF. Reliquis ergo circumferentiis semper bisectis, & talibus triangulis a reliquis segmentis semper ablatis: relinquentur tandem segmenta, quae simul sumta
π. 1. 10. ta erunt [π] < EFGH — S. Sint reliqua haec segmenta, quae sunt super rectis EI, IF, FK, KG, GL, LH, HM, ME. Ergo polygonum
ρ. 5. ax. 1. EIFKGLHM > [ρ] S. Describe in circulo AB CD polygonum ABCD ∾ ipsi EIFKGLHM. Erit ergo illud polygonum ad hoc,
σ. 1. 12. vt [σ] BDq ad FHq, siue vt [τ] circulus ABCD
τ. hyp. ad spatium S. Minus autem est pol. AB

CD

CD circulo in quo inſcriptum eſt: ergo & polyg. EIFKGLHM $<^{v}$ S. Q. E. A. Non v. 14. 5.
ergo eſt vt BDq ad FHq ita circ. ABCD ad ſpatium minus circulo EFGH.

2. Si ponis S > EFGH: quia ſic erit vt FHq ad BDq ita S ad circ. ABCD, atque S ad circ. ABCD [v] vt circulus EFGH ad ſpatium minus circulo ABCD: erit vt FHq ad BDq ita circ. EFGH ad ſpatium minus circulo ABCD. Q. F. N. [φ] Quare vt BDq ad φ. per part. 1.
FHq ita circ. ABCD ad circ. EFGH. Q. E. D.

*Schol.*

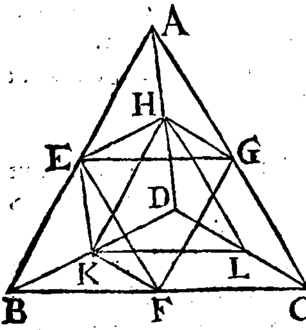
Similia ergo [σ] polygona in circulis inſcripta σ. 1. 12.
ſunt vt iidem circuli.

## PROP. III. THEOR.

*Omnis pyramis* ABCD † *triangularem habens baſin* ABC *diuiditur in duas pyramides aequales & ſimiles inter ſe, quae triangulares baſes habent, easque ſimiles toti, nec non in duo priſmata aequalia, quae dimidio quidem totius pyramidis ſunt maiora.*

Biſeca

† Nota, litterarum pyramidem deſignantium vltimam nobis ſemper eam eſſe, quae vertici eſt appoſita, tres autem priores eas, quae ad baſin pertinent. Contra, in angulo ſolido deſignando prima eſt quae ad verticem.




Biſeca enim AB, BC, CA, AD, DB, DC, in punctis E, F, G, H, K, L, & iunge EG, EH, HG, per quas ductum planum abſcindet pyramid. AEGH. Iunge etiam HK, KL, LH, & ducto per has plano a reliquo ſolido abſcindetur pyr. HKLD. Iam quia AE = EB, & AH = HD: erunt EH, BD ϰ parallelae. Similiter quia AH = HD, & BK

ϰ. 2. 6. = KD: erunt & HK, AB ϰ parallelae. Qua-

ψ. 34. 1. re HK = ψ BE = EA. Sed eſt ω ang. KHD

ω. 29. 1. = EAH. Ergo Δ KDH = ∾ α Δo EHA

α. 4. 1. & ſch. 6. 6. & EH = KD. Eodem modo patet Δ. HDL = ∾ Δo HAG, & DL = GH. Et quia ob parallelas EH, BD, & HG, DC, ang. KDL

β. 10. 11. = β EHG; erit Δ KDL α = ∾ Δo EHG. Eadem ratione oſtenditur Δ. KHL = ∾ Δo

γ. 10. def. 11. EAG. Ergo pyr. HKLD = ∾ γ pyr. AEGH. Porro, quum AB, HK parallelae ſint, Δa ADB,

δ. 3. ſch. 4. 6. HDK ω aequiangula, ideoque δ ſimilia ſunt; & eadem ratione Δ BDC ∾ δ Δo KDL; nec non Δ. ADC ∾ δ Δo HDL; atque, quum ſit

ε. 2. ſch. 4. 6. ang. BAC = KHL, & BA : KH = ε AD : DH =

ζ. 6. 6. AC : HL, Δ BAC ∾ ζ Δo KHL. Hinc erit pyr. BACD γ ∾ pyr. KHLD ∾ pyr. AEGH.

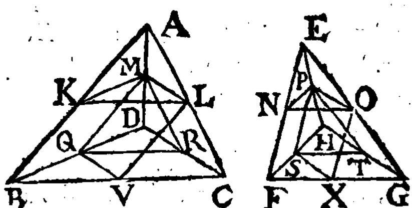
Deinde iunctis KF, FG, reliquum ſolidum diuidi poterit in duo priſmata, quorum vnum

habet

habet basin Pgr. EGFB, & lineam basi oppositam HK, alterum basin △ GFC & oppositam basin △ HKL. Sunt ergo haec prismata aeque alta, &, quia Pgr. EGFB $=$ [a] 2 △i GFC, aequalia [b]. Sed pyramide EFBK, quae fit iunctis EK, EF, maius est prisma EGFBKH; & pyr. EBFK $=$ [c] pyr. AEGH (aequalibus enim & similibus triangulis continentur): ergo Pr. EGFBKH $+$ Pr. GFCLKH $>$ pyr. AEGH $+$ pyr. HKLD. Est autem Pr. EGFBKH $+$ Pr. GFCLKH $+$ pyr. AEGH $+$ pyr. HKLD $=$ pyr. ABCD. Ergo pr. EGFBKH $+$ pr. GFCLKH $> \frac{1}{2}$ pyr. ABCD. Q. E. D.

[a]. 41. I.
[b]. 40. II.

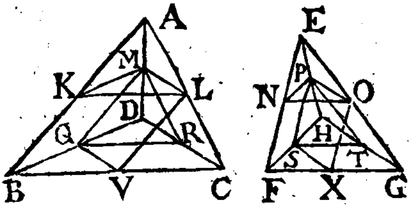
## PROP. IV. THEOR.




*Si sint duae pyramides aeque altae* ABCD, EFGH, *quae triangulares bases habent* ABC, EFG; *diuidatur autem vtraque ipsarum & in duas pyramides* AKLM, MQRD, ENOP, PSTH, *aequales inter se similesque toti, & in duo prismata aequalia* KLVBQM, LVCRQM, NOXFSP, OXGTSP; *atque ortarum pyramidum vtraque eodem modo diuidatur, idque semper fiat: erit vt vnius pyramidis basis* ABC *ad basin* EFG *alterius, ita prismata omnia in*

 *vna*

*vna pyramide* ABCD *ad prismata omnia in altera pyramide* EFGH *numero aequalia.*




ι. 15. 5. Quia BC = 2 CV, & FG = 2 GX: erit[ι] BC: CV = FG: GX. Sed quum, vt in praecedenti propositione, constet, △ ABC ∾ △o VLC, & △ FEG ∾ △o XOG: erit △ ABC: △ VLC

κ. 22. 6. =[κ] △. FEG: △ XOG, & alternando △ ABC: △ FEG = △ VLC: △ XOG. Sed △ LVC:

λ. Lemma sequens. △ XOG =[λ] pr. VLCRQM: Pr. XOGTPS

μ. 7. 5. =[μ] pr. KLVBQM: pr. NOXFSP. Ergo △

ν. 12. 5. ABC: △ FEG =[ν] pr. VLCRQM + pr. KLVBQM: pr. XOGTPS + pr. NOXFSP. Idem vero demonstrabitur de pyramidibus AKLM, ENOP, scilicet vt basis AKL ad basin ENO ita esse duo prismata aequalia in pyr. AKLM ad duo prismata aequalia in pyr. ENOP. Itaque, quia eodem, quo modo vsi sumus, argumento, patet esse * △ ABC: △ EFG = △ AKL: △ ENO: erunt[ν] vt △ ABC ad △ EFG sic 4 prismata in pyr. ABCD ad 4 prismata in pyr. EFGH. Et similiter procedit demonstratio ad quotcunque paria prismatum in vtraque pyramide. Q. E. D.

LEM-

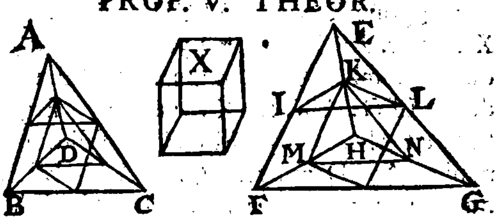
## LEMMA.

Oſtendendum eſt, vti △ LVC ad △ XOG ita eſſe priſma VLCRQM ad priſma OXG-TPS.

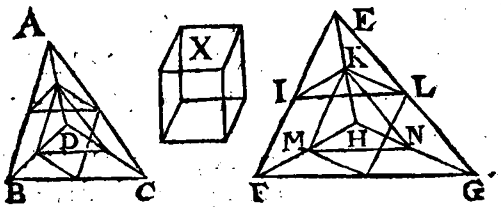
Intelligantur enim ex punctis D, H in baſes VLC, XOG demiſſa perpendicula, quae [o] aequalia erunt. Iam quia perpendicularis ex D demiſſa, & recta DC ſecantur a planis QMR, VLC, quae ob parallelas [π] MR & AC, RQ & CV parallela [ρ] ſunt: erit pars perpendicularis inter D & planum MQR ad partem reliquam [σ], vt DR ad RC. Sed DR = [τ] RC: quare pars perpendiculi inter baſin VLC & baſin oppoſitam QMR priſmatis VLCRMQ erit dimidium perpendiculi totius ex D demiſſi. Eadem ratione pars perpendiculi ex H cadentis, quae eſt inter baſes priſmatis OXGTSP dimidium erit totius. Erunt ergo priſmata VLCRMQ & OGXSTP [υ] aeque alta, ac ob id in ratione [φ] baſium VLC, OXG. Q. E. D.

o. hyp. & 4. def. 6.
π. dem. 3. 12.
ρ. 15. 11.
σ. 17. 11.
τ. hyp.
υ. 7. ax. 1.
φ. 32. 11.

## PROP. V. THEOR.




*Pyramides* ABCD, EFGH, *quae in eadem ſunt altitudine, & triangulares baſes* ABC, EFG *habent, inter ſe ſunt vt baſes* ABC, EFG.

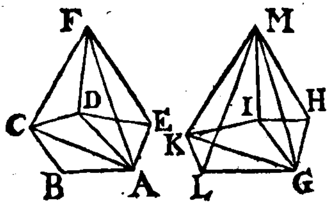



Si negas: ſit ABC : EFG $=$ ABCD : X, ſit-
que primo X $<$ pyr. EFGH. Diuidatur pyr.
EFGH vt in prop. III. & rurſus pyramides
ortae eodem modo diuidantur, fiatque hoc
x. 1. 10. ſemper, vsque dum x duae reliquae pyrami-
des EILK $+$ KMNH $<$ pyr. EFGH $-$ X.
Erunt itaque reliqua duo priſmata in pyr. EF-
ψ. 5. ax. 1. GH $>$ ψ ſolido X. Diuidatur etiam pyr.
ABCD ſimiliter & in totidem partes ac pyr.
EFGH. Ergo priſmata in pyr. ABCD erunt
a. 4. 12. ad priſmata in pyr. EFGH $=$ a ABC : EFG
$=$ ABCD : X. Quare quum pyr. ABCD ſit
maior priſmatis quae in ipſa ſunt: erit & ſo-
a. 14. 5. lidum X maius a quam priſmata in pyr. EFGH,
& ergo quam ipſa pyramis EFGH; contra
hypotheſin.

Sed pone X $>$ pyr. EFGH. Erit ergo vt
X ad pyr. ABCD, ita a pyr. EFGH ad ſoli-
dum pyramide ABCD minus. Sed inuerten-
do eſt EFG : ABC $=$ X : ABCD. Ergo vt
EFG ad ABC ita pyr. EFGH ad ſolidum py-
β per part. 1. ramide ABCD minus. Q. E. A $^{\beta}$. Erit ita-
que X nec $<$ nec $>$ pyr. EFGH, ſed ipſi ae-
quale. Ergo ABC : EFG $=$ ABCD : EFGH.
Q. E. D.

PROP.

## PROP. VI. THEOR.

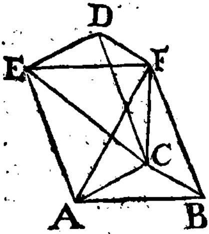



*Pyramides* ABCDEF, GHIKLM, *quae in eadem sunt altitudine, & polygonas bases habent, inter se sunt vt bases.*

Bases diuidantur in triangula ABC, ACD, ADE, GHI, GIK, GKL, super quibus intelligantur pyramides aeque altae ipsis ABCDEF, GHIKLM. Iam quia pyr. ABCF: ACDF $= ^{\gamma}$ △ ABC: △ ACD: erit componendo pyr. ABCDF : pyr. ACDF = ABCD : ACD. Sed pyr. ACDF : ADEF $= ^{\gamma}$ ACD : ADE. Ergo ex aequo pyr. ABCDF : ADEF = baſ. ABCD : ADE, & componendo pyr. ABCDEF: ADEF = baſ. ABCDE : ADE. Eadem ratione pyr. GHIKLM : GKLM = baſ. GHIKL : GKL. Sed pyr. ADEF : GKLM $= ^{\gamma}$ baſ. ADE : GKL. Ergo ex aequo pyr. ABCDEF : GKLM = baſ. ABCDE : GKL. Atqui eſt inuertendo pyr. GKLM : GHIKLM = baſ. GKL : GHIKL. Quare ex aequo pyr. ABCDEF : GHIKLM = baſ. ABCDE : GHIKL. Q. E. D. γ. 5. m.

## PROP. VII. THEOR.

*Omne priſma* ABCDEF *triangularem habens baſin* ABC *diuiditur in tres pyramides aequales inter ſe, quae triangulares baſes habent.*




Iungantur enim AF, CE, CF: & orientur tres pyramides, triangulares bases habentes, ABFC, EAFC, CDEF. Iam quia ABFE est Pgr. eiusque diameter

s. 34. 1. AF: erit △ ABF [s] = △ EAF. Ergo pyr. ABFC

ζ. 5. 12. = [ζ] pyr. EAFC. Sed pyr. EAFC eadem est quae pyr. AECF; atque pyramides AECF, CDEF, aequales [s] bases ACE, CDE & eundem verticem F habentes, aequales [ζ] sunt. Ergo pyr. ABFC = pyr. EAFC = pyr. CDEF. Q. E. D.

*Cor.* Et quia pyr. ABFC eadem est cum pyr. ABCF: manifestum est pyramidem ABCF, quae cum prismate ABCDEF eandem habet triangularem basin ABC & eandem altitudinem, tertiam

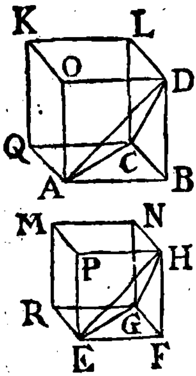
η. 2. ax. 1. partem esse prismatis. Ergo [η] omnis pyramis tertia pars est prismatis basin habentis eandem, & altitudinem aequalem: quoniam, si basis prismatis aliam quandam figuram rectilineam obtineat, diuiditur in prismata, quae triangulares habent bases.

## PROP. VIII. THEOR.

*Similes pyramides* ABCD, EFGH, *quae triangulares bases* ABC, EFG *habent, sunt in triplicata ratione homologorum laterum* AB, EF.

Compleantur solida Ppda ABKL, EFMN.

θ. 9. def. 11. Et quia pyr. ABCD ∾ pyr. EFGH: erit [θ] ang. ABD = EFH, & ang. ABC = EFG, & ang.



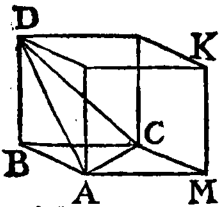

ang. DBC = HFG, & DB : HF = BA : FE = BC : FG. Ergo erit Pgr. BO ∾ [ι] pgr. FP, & pgr. BL ∾ pgr. FN, & pgr. BQ ∾ pgr. FR. Tria ergo reliqua pgra. KC, AK, KD tribus reliquis pgris MG, EM, MH similia [κ] erunt. Hinc Ppd. BK ∾ [ϑ] Ppdo FM, ac ergo Ppd. BK : Ppd. FM = [λ] $(AB : EF)^3$. Sed quia pyramides ABCD, EFGH sunt sextae partes [μ] Ppdorum BK, FM: erit [ν] Pyr. ABCD : pyr. EFGH = Ppd. BK : Ppd. FM. Ergo Pyr. ABCD : pyr. EFGH = $(AB : EF)^3$. Q. E. D.

ι. 1. def. 6.
κ. sch. 24. 11.
λ. 33. 11.
μ. cor. 7. 12. & sch. 28. 11.
ν. 15. 5.

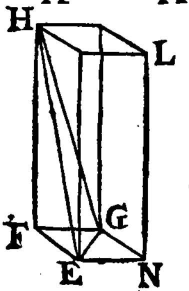
*Coroll.* Ex hoc perspicuum est, similes pyramides, quae polygonas habent bases, inter se esse in triplicata ratione homologorum laterum. Ipsis enim diuisis in pyramides triangulares bases habentes; quoniam & similia polygona basium in triangula numero aequalia & homologa totis [ξ] diuiduntur: erit [ο] vt vna pyramis in altera pyramide triangularem basin habens ad vnam pyramidem in altera triangularem basin habentem, ita tota illa pyramis polygonam basin habens ad totam hanc. Sed pyramides istae triangularium basium sunt in triplicata ratione laterum homologorum: Ergo & pyramides polygonarum basium.

ξ. 20. 6.
ο. 6. 12. & 11. 5. & 16. 5.

## PROP. IX. THEOR.




*Aequalium pyramidum* ABCD, EFGH *triangulares bases habentium, bases* ABC, EFG *sunt altitudinibus* DB, HF *reciproce proportionales. Et quarum pyramidum, triangulares bases habentium, bases* ABC, EFG *sunt altitudinibus* DB, HF *reciproce proportionales, illae inter se aequales sunt.*




*Hyp. 1.* Compleantur enim solida parallelepipeda. BK, FL pyramidibus aeque alta. Et quia Ppd. BK = 6 pyr. ABCD = 6 pyr. EFGH = Ppd. FL: erit vt HF: DB =[π] BM: FN =[ρ] ABC: EFG. Q.E.D.

π. 34. 11.
ρ. 34. 1.

*Hyp. 2.* Quia vt HF : DB = ABC : EFG =[ρ] BM : FN: erit Ppd. BK =[π] Ppdo FL, ergo Pyr. ABCD =[σ] Pyr. EFGH. Q. E. D.

σ. 6. ax. 1.

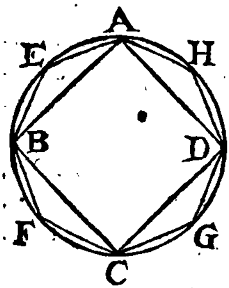
* *Schol.* 1. Idem de pyramidibus polygonarum basium valet (per cor. 7. 12. & sch. 34. 11): quia in pyramides triangularium basium dividi possunt.

* 2. Quae de pyramidibus demonstrata sunt in prop. 6. 8. 9, ea & quibuscunque prismatis conueniunt, quippe quae tripla sunt pyramidum easdem bases & altitudines habentium.

* 3. Hinc autem per se patet ex sch. 40. 11. dimensio quorumuis prismatum & pyramidum.

PROP.

## PROP. X. THEOR.



*Omnis conus tertia pars eſt cylindri, qui eandem baſin* ABCD *habet, & altitudinem aequalem.*

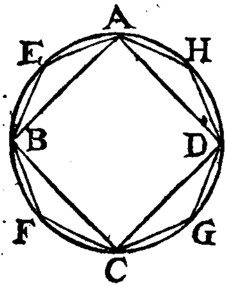
1. Si negas: ſit cylindrus $>$ triplo coni. Deſcribatur in circulo quadratum ABCD, ſuper quo intelligatur priſma aeque altum cylindro. Et quia hoc priſma dimidium eſt priſmatis aeque alti [τ] ſuper quadrato circa circulum circumſcripto erecti; dimidium autem huius priſmatis $>$ dimidio cylindro: erit & illud priſma $>$ dimidio cylindro. Biſecentur peripheriae in punctis E, F, G, H, quae connectantur rectis, atque a $\triangle$is AEB, BFC, CGD, DHA intelligantur erecta priſmata cylindro aeque alta. Et quoniam vnumquodque horum priſmatum dimidium eſt [υ] Ppdi aeque alti erecti ſuper Pgro. rectangulo trianguli duplo; hoc autem Ppdum $>$ reſpectiuo ſegmento cylindri: patet, vnumquodque horum priſmatum $>$ eſſe dimidio reſpectiui ſegmenti cylindri. Igitur reliquas circumferentias biſecantes, & ſuper ſingulis, quae orientur, triangulis priſmata erigentes, & hoc ſemper facientes, relinquemus tandem [φ] ſegmenta cylindri, quae ſimul ſumta minora erunt exceſſu cylindri ſupra triplum coni. Sint reliqua haec ſegmenta, quae ſuper ſegmentis circuli AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH,

τ. 32. 11.

υ. ſch. 28. 11.

φ. 1. 10.

HA




HA consistunt. Igitur prisma, quod basin polygonam AEBFCGDH habet, & cylindro aeque altum est, erit > triplo coni; ideoque pyramis, cuius basis est AEBFCGDH, & vertex idem qui coni, ϰ > erit cono; pars toto.

ϰ. cor. 7. 12.

Q. E. A.

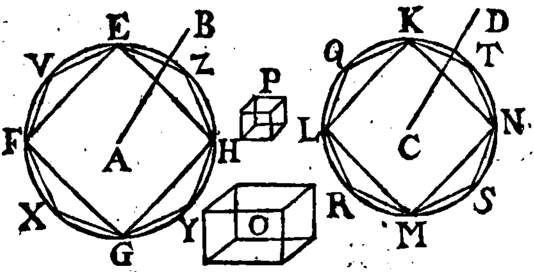
2. Sit cylindrus < triplo coni: erit conus > ⅓ cylindri. Sed quia iisdem, quibus modo vsi sumus, argumentis ψ, euincitur, pyramidem cono aeque altam & cuius basis est quadratum ABCD > esse dimidio coni, & vnamquamque pyramidum cono aeque altarum super triangulis AEB, BFC &c. > esse dimidio respectiui segmenti coni: iterum patet, circumferentias semper bisecando, & super ortis sic triangulis pyramides semper erigendo, relictum iri segmenta coni minora excessu coni supra ⅓ cylindri. Sint haec segmenta, quae sunt super segmentis circuli AE, EB, BF &c. Quare quum reliqua pyramis, cuius basis est polyg. AEBFCGDH, & vertex idem qui coni > sit ⅓ cylindri: erit prisma cono vel cylindro aeque altum & basin polyg. AEBFCGDH habens maius ϰ quam cylindrus; pars quam totum. Q. E. A.

ψ. 6. 12.

## PROP. XI. THEOR.

*Coni & cylindri, qui eandem habent altitudinem* AB, CD, *inter se sunt vt bases* EFGH, KLMN.

1. Sit



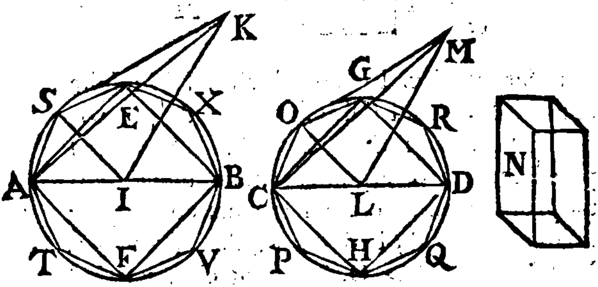

1. Sit vt circ. EFGH ad circ. KLMN ita conus FB ad aliud ſolidum O, quod ſit < cono LD; & ſit LD — O = P. Suppoſita praeparatione & argumentatione praecedentis propoſitionis, erunt ſegmenta coni, quae in ipſis QL, LR, RM &c. < P. Ergo pyr. KQLRMSNTD > O. Fiat in circ. EFGH ſimile polygonum EVFXGYHZ. Iam quia
pyr. EVFXGYHZB: pyr. KQLRMSNTD $=^{\alpha}$ — $\alpha$. 6. 12.
polyg. EVFXGYHZ: pol. KQLRMSNT $=^{\alpha\alpha}$ — $\alpha\alpha$. ſch. 2. 12.
circ. EFGH: circ. KLMN $=^{\beta}$ conus FB: O; — $\beta$. hyp.
atque pyr. EVFXGYHZB $<^{\gamma}$ cono FB: erit — $\gamma$. 9. ax. 1.
& pyr. KQLRMSNTD $<^{\delta}$ ſolido O; quod repugnat oſtenſis. Non ergo eſt vt baſis A ad baſin C ita conus A ad ſolidum cono C minus. — $\delta$. 14. 5.

2. Si ponis O > cono LD: erit vt O ad conum FB, ita conus LD ad ſolidum $^{\delta}$ minus cono FB, & ergo vt circ. KLMN ad circ. EFGH, ita conus LD ad ſolidum minus cono FB. Q. F. N.$^{\epsilon}$ Itaque coni aeque alti, & — $\epsilon$. part. 1.
proinde cylindri $^{\zeta}$ aeque alti, ſunt inter ſe vt baſes. Q. E. D. — $\zeta$. 10. 12.

* *Schol.* 1. Coni ergo, item cylindri, quorum tam bases quam altitudines aequales sunt, ipsi inter se aequales sunt.

* 2. Quare conorum, item cylindrorum, aequales bases habentium, qui maiorem axin habet, maior est.

## PROP. XII. THEOR.




*Similes coni & cylindri inter se sunt in triplicata ratione diametrorum basium* AB, CD.

Sint bases circuli AEBF, CGDH, & axes IK, LM; & sit conus AEBFK ad solidum quoddam N in triplicata ratione ipsius AB ad CD.

1. Pone N $<$ cono CGDHM. Factis iisdem quae in praecedentibus, eodem modo ostendemus esse aliquam pyramidem GOCPHQDRM in cono CDM, quae maior sit quam N. Fiat in circ. I simile polygonum ASEXBVFT, quod sit basis pyramidis verticem cum cono ABK communem habentis. Sint in his duabus pyramidibus triangula CMO, AKS quaedam ex iis quae pyramides continent, & iunctae sint LO, IS. Iam quia conus ABK $\sim$ cono CDM, est [a] AB : CD $=$ IK : LM, ac ergo

a. 24. def. 11.

go $AI : IK = CL : LM$. Sed [ϑ] ang. KIA, MLC recti sunt: ergo Δ. AKI $\sim$ [ι] Δ. CML. Similiter, quia $AI : IS = CL : LO$, & ang. AIS [κ] = CLO, erit Δ. ASI $\sim$ Δ. COL; & iterum similiter patet esse, Δ SKI $\sim$ Δ OML. Hinc quia [λ] $KA : AI = MC : CL$, & $AI : AS = CL : CO$: erit ex aequo $KA : AS = MC : CO$. Similiter quia $KS : SI = MO : OL$, & $SI : SA = OL : OC$ : erit ex aequo $KS : SA = MO : OC$. Ergo Δ ASK $\sim$ [μ] Δo OMC. Quoniam igitur pyr. ASIK $\sim$ [ν] pyr. COLM: erit pyr. ASIK : pyr. COLM = [ξ] $(AI : CL)^3$. Sed idem de reliquis pyramidibus ATIK, CPLM &c. ostendemus. Ergo [ο] pyr. ASEXBVFT : pyr. GOCPHQDRM = $(AI : CL)^3$ = [π] $(AB : CD)^3$ = [ρ] con. AEBFK : N. Quare pyr. GOCPHQDRM < [σ] solido N; contra modo dicta.

ϑ. 11. def. 11.
ι. 6. 6.
κ. 2. sch. 33. 6.
λ. 1. def. 6.
μ. sch. 5. 6.
ν. 9. def. 11.
ξ. 8. 12.
ο. 12. 5.
π. 1. sch. 22. 5.
ρ. hyp.
σ. 14. 5.

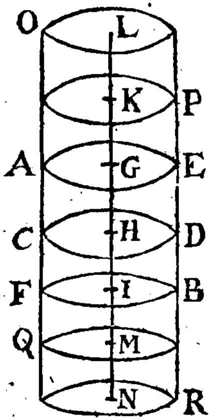
2. Si ponas N > cono CGDHM: quia N : AEBFK = [ρ] $(CD : AB)^3$, & [σ] N ad AEBFK vti conus; CGDHM ad solidum cono AEBFK minus: erit conus CGDHM ad solidum quoddam cono AEBFK minus in triplicatâ ratione ipsius CD ad AD. Q. F. N. [τ] Ergo tam coni, quam [υ] cylindri, sunt in triplicata ratione diametrorum basium. Q. E. D.

τ. part. 1.
υ. 10. 12.

## PROP. XIII. THEOR.

*Si cylindrus* AB *plano* CD *secetur, oppositis planis* AE, FB *parallelo, erit vt cylindrus* AD *ad cylindrum* DF *ita axis* GH *ad axem* HI.

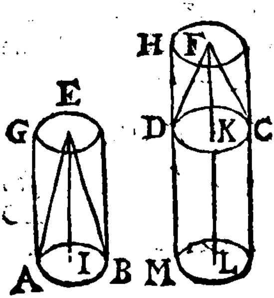
Pro-




Producatur vtrinque axis GI, & fiant ipsi GH aequales quotcunque GK, KL, & ipsi HI aequales quotuis IM, MN. Per puncta L, K, M, N ducantur plana ipsis AE, CD parallela, in quibus fiant circa centra L, K, M, N circuli ipsis AE, FB aequales; & inter hos circulos intelligantur cylindri OP, PA, BQ, QR constituti. Quia cylindri OP, PA, AD inter se φ, aequales sunt; quotuplex est axis LH ipsius GH, totuplex est cyl. OD ipsius AD. Similiter, quotuplex est axis HN ipsius HI, totuplex est cyl. CR cylindri DF. Praeterea si axis LH $> = <$ HN: erit χ & cyl. OD $> = <$ cyl. CR. Ergo cyl. AD: cyl. DF $=$ ψ ax. GH: ax. HI. Q. E. D.

φ. 1. sch. 11. 12.
χ. 2. sch. 11. 12.
ψ. 4. def. 5.

## PROP. XIV. THEOR.



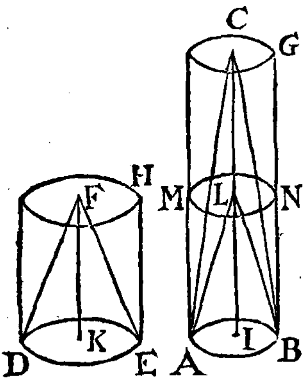

*Aequalibus basibus* AB, CD *insistentes coni* ABE, CDF *aut cylindri* BG, CH *inter se sunt vt altitudines* EI, FK.

Producatur axis FK, vt fiat KL $=$ EI, & circa axem KL in basi

basi CD sit cyl. CM, qui erit $=$ [α] cyl. BG. Ergo cyl. BG : cyl. CH $=$ cyl. CM : cyl. CH $=$ [α] KL : FK $=$ EI : FK. Quare & conus ABE : con. CDF [β] $=$ EI : FK. Q. E. D.

α. 1. sch. 11. 12.
α. 13. 12.
β. 15. 5.

## PROP. XV. THEOR.




*Aequalium conorum* ABC, DEF *aut cylindrorum* AG, DH *bases* AB, DE *sunt altitudinibus* CI, FK *reciproce proportionales. Item quorum conorum aut cylindrorum bases* AB, DE *altitudinibus* CI, FK *reciproce proportionales sunt, illi inter se sunt aequales.*

*Cas. 1.* Si altitudines aequales sunt: patet in vtraque hypothesi etiam bases aequales esse; & constat ergo propositio.

*Cas. 2.* Sit CI $>$ FK. Fiat LI $=$ FK, & per L secetur cylindrus AG plano MN basibus parallelo.

*Hyp. 1.* Et quia cyl. AG $=$ DH: erit cyl. AN : cyl. AG $=$ cyl. AN : cyl. DH $=$ [γ] bas. AB : DE. Sed cyl. AN : cyl. AG $=$ [δ] LI : CI $=$ FK : CI. Ergo AB : DE $=$ FK : CI. Q. E. D.

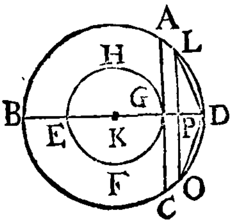
γ. 11. 12.
δ. 13. 12. & 18. 5.

*Hyp. 2.* Sit bas. AB : bas. DE $=$ alt. FK : alt. CI. Est autem bas. AB : bas. DE $=$ cyl.

AN : cyl. DH, & FK : CI = LI : CI = cyl.
ε. 9. 5. AN : cyl. AG. Ergo cyl. DH =[ε] cyl. AG.
Q. E. D.

Similiter autem & in conis.

## PROP. XVI. PROBL.




*Duobus circulis* ABCD, EFGH *circa idem centrum* K *consistentibus*, *in maiori* ABCD *polygonum aequalium ac parium numero laterum describere, quod minorem circulum* EFGH *non tangat.*

Duc diametrum BEGD, & per G ipsi per-
ζ. 30. 3. pendicularem AGC. Biseca semicirculum [ζ]
BAD, ac eius semissem, atque ita perge do-
η. 1. 10. nec relinquatur [η] circumferentia LD minor
ipsa AD. Ab L in BD duc perpendicularem
θ. 3. 3. & 4. 1. LPO. Iunge LD, DO, quae [θ] aequales erunt.
ι. cor. 16. 3. Iam quia AC circulum EFGH tangit, LO
vero ipsi AC parallela est extra hunc circulum: LO eum non tanget; multoque minus rectae LD, DO eundem tangent. Si ergo ipsi LD aequales deinceps in circulo ABC aptaue-
κ. 1. 4. rimus [κ]: fiet polygonum aequalium & parium laterum (quia circumf. LD est pars aliquota semicirculi), circulum EFGH non tangens.
Q. E. F.

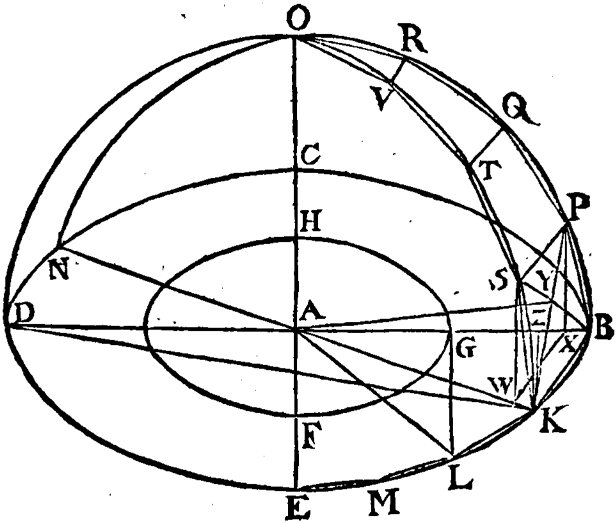
* *Coroll.*

Ergo recta KG < KP.

PROP.

## PROP. XVII. PROBL.

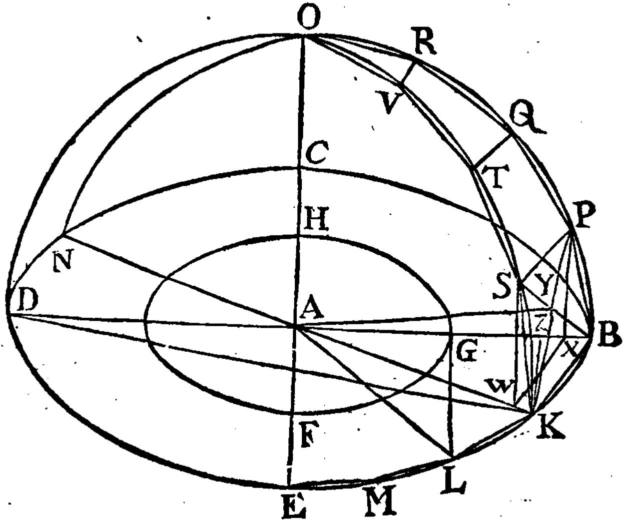
*Duabus ſphaeris circa idem centrum* A *conſiſtentibus, in maiori ſolidum polyedrum deſcribere, quod minoris ſphaerae ſuperficiem non tangat.*




Secentur ſphaerae plano aliquo per centrum. Quia [λ] ſemicirculi ſphaeram generantis planum productum in ſuperficie ſphaerae circulum efficit maximum, ſiue qui diametrum ſphaerae habet: ſectiones erunt circuli maximi. Sint illi BCDE, FGHF, & eorum diametri ad rectos angulos ducantur BD, CE. In maiori circulo BCDE polygonum aequalium & parium laterum [μ] deſcribatur, non tangens minorem FGH. Sint in quadrante BE ea latera

λ. 14. def. 11. & ſequ. & 15. 3.

μ. 16. 12.

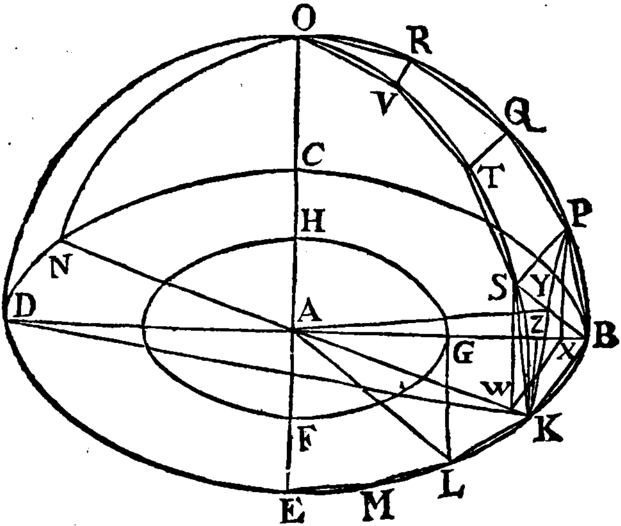



latera BK, KL, LM, ME, & iuncta KA producatur ad N. Ex A in planum BCDE erigatur
v. 12. 11. perpendicularis [v] AO, superficiei sphaerae maioris occurrens in O, & per AO ac vtramque BD, KN ducantur plana, quae in superficie sphaerae efficient maximos circulos, quorum semisses sint DOB, NOK. Quia AO
ξ. 3. def. 11. ipsis BD, KN ad rectos [ξ] est: erunt OB, OK
o. 1. def. 3. quadrantes circulorum, & aequales [o], quia circuli aequales diametros BD, KN habent. Quot ergo latera polygoni sunt in quadrante BE, tot aptari possunt illis aequalia in quadrante BO, quae sint BP, PQ, QR, RO, & in quadrante KO, quae sint KS, ST, TV, VO. Iungantur SP, TQ, VR. Ex P, S in planum BCDE demit-

mittantur $^{\pi}$ perpendiculares PX, SW, quae π. 11. 11.
occurrent $^{\varrho}$ rectis BA, KA. Et quia BP, KS ρ. 38. 11.
ſunt aequales partes aequalium circulorum,
anguli vero PXB, SWK $^{\xi}$ recti: erit $^{\sigma}$ PX $=$ σ. 26. 1.
SW, & BX $=$ KW, ideoque AX $=^{\tau}$ AW, & τ. 3. ax. 1.
XW ipſi KB $^{\upsilon}$ parallela. Sed quum aequa- υ. 2. 6.
les PX, SW etiam parallelae $^{\varphi}$ ſint: erunt φ. 6. 11.
XW, PS parallelae $^{\chi}$ & aequales. Ergo & PS, χ. 33. 1.
BK erunt parallelae $^{\psi}$. Hinc $^{\omega}$ quadrilaterum ψ. 9. 11. ω. 7. 11.
PS, KB eſt in vno plano. Idem ſimiliter
conſtat de quadrilateris QTSP, RVTQ. Sed
& △ ROV planum $^{\alpha}$ eſt. Ductis ergo a pun- α. 2. 11.
ctis P, S, T, Q, R, V ad A rectis, conſtituetur
figura ſolida polyedra inter quadrantes circ.
BO, KO, ex pyramidibus compoſita, quarum
vertex communis A, & baſes plana BKSP,
PSTQ, QTVR, VOR. In vnoquoque late-
rum KL, LM, ME eadem quae in KB con-
ſtruantur, & etiam in reliquis tribus quadran-
tibus, & in reliquo hemiſphaerio. Sic fiet ſo-
lidum polyedrum maiori ſphaerae inſcriptum,
compoſitum ex pyramidibus, quarum vertex
communis A. Dico huius ſolidi ſuperficiem
non tangere ſuperficiem minoris ſphaerae.

Ducatur enim in planum PSKB ex A per-
pendicularis AY, & KY, BY iungantur. Et
quoniam ob ang. AYB, AYK rectos $^{\xi}$, BYq $+$
AYq $=^{\beta}$ ABq $=$ AKq $=$ KYq $+$ AYq: β. 47. 1.
erit BY $=$ KY. Similiter patet eſſe SY $=$
PY $=$ BY. Ergo PSKB eſt quadrilaterum in
circulo $^{\gamma}$ centro Y interuallo YB deſcripto. γ. 15. def. 1.
Et quia BK $>^{\delta}$ XW, ideoque $>$ PS; BK δ. 2. ſch. 4. 6. & 14. 5.

 vero




vero $=$ KS $=$ PB: erit circumferentia huius circuli, quam recta BK subtendit, quadrante [ε] maior, hinc ang. KYB recto [ζ] maior, & KBq [η] $>$ 2 BYq. Ducatur a K ad BD perpendicularis KZ, & iungatur DK. Quoniam AB $<$ AB $+$ 2 AZ: erit DB $<$ 2 DZ. Hinc quia DB : 2 DZ $=$ [θ] DB $\times$ BZ : 2 DZ $\times$ BZ $=$ [ι] BKq : 2 KZq : erit BKq $<$ 2 KZq, & ergo KZq $>$ BYq. Sed KZq $+$ AZq $=$ AKq $=$ BYq $+$ AYq. Ergo AZ $<$ AY, & a potiori [κ] AG $<$ AY. Ergo polyedri superficies non tangit minoris sphaerae superficiem. Q. E. F.

ε. 28. 3.
ζ. 33. 6.
η. 12. 2.
θ. 1. 6.
ι. cor. 8. 6.
κ. cor. 16. 12.

*Aliter.*

Et breuius ostendemus esse AG $<$ AY, excitato ex G in AB perpendiculo GL, & iuncta AL.

AL. Nam bisecta circ. BE, & huius semisse, & sic porro, relinquetur tandem circumferentia minor ea, quam recta ipsi GL aequalis in circulo BCE subtendit. Sit illa BK. Ergo recta BK < GL. Sed vt antea patet esse BK > BY. Ergo GL > BY. Sed GLq + AGq = ALq = ABq = BYq + AYq. Quare GA < AY. Q. E. D.

*Corollar.*

*Si in quauis alia sphaera describatur solidum polyedrum praedicto polyedro in sphaera* BCDEO *simile: habebunt haec duo solida polyedra triplicatam rationem eius quam diametri sphaerarum habent.* Diuisis enim solidis in pyramides numero aequales & eiusdem ordinis: erunt hae pyramides similes. Ergo pyr. BPSKA erit ad pyramidem eiusdem ordinis in altera sphaera in triplicata ratione $^{\lambda}$ eius quam latus homologum ad homologum habet, id est, quam habet semidiameter spharae A ad semidiametrum alterius sphaerae. Idem de quibusuis duabus pyramidibus in vtraque sphaera eiusdem ordinis intelligendum est. Sed $^{\mu}$ vt vna pyramis in sphaera A ad vnam in altera, ita solidum polyedrum in sphaera A ad solidum polyedrum in altera sphaera. Ergo solida polyedra sunt in triplicata ratione semidiametrorum, vel diametrorum. Q. E. D.

λ. cor. 8. 12.

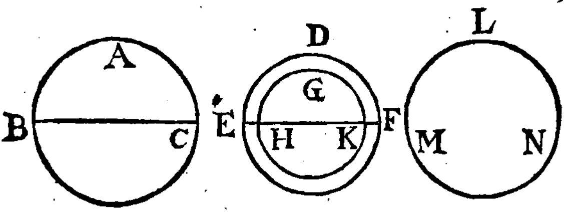
μ. 12. 5.

## PROP. XVIII. THEOR.

*Sphaerae* ABC, DEF *inter se sunt in triplicata ratione suarum diametrorum* BC, EF.

1. Si enim non: sit sph. ABC ad sphaeram GHK ipsa DEF minorem in triplicata ratione BC ad EF. In sph. DEF describatur $^{\nu}$ solidum

ν. 17. 12.




polyedrum, quod non tangat minorem GHK, circa commune cum illa centrum conſtitutam, & in ſph. ABC huic polyedro ſimile deſcri-
ξ. cor. 17. 12. batur, quod erit ξ ad polyedrum in ſph. DEF in triplicata ratione BC ad FE, ideoque in eadem ratione in qua ſph. ABC ad ſph. GHK.
o. 14. 5. Igitur ſph. GHK > o polyedro in ſphaera DEF deſcripto, pars toto. Q. E. A.

2. Si ponas, ſph. ABC ad ſph. LMN ipſa DEF maiorem eſſe in triplicata ratione BC ad EF: erit ſph. LMN : ſph. ABC = $(EF : BC)^3$. Sed ſph. LMN ad ſph. ABC vt ſph. DEF ad ſphaeram * ipſa ABC minorem. Ergo ſph. DEF erit ad ſphaeram ipſa ABC minorem in triplicata ratione diametri EF ad diametrum
π. part. 1. BC. Q. F. N π.

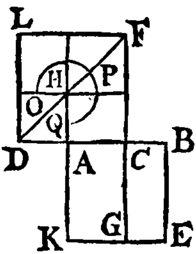
* *Corollar.*

Hinc vt ſphaera ad ſphaeram, ita eſt polyedrum ſolidum in illa ad polyedrum in hac ſimile & ſimiliter deſcriptum.

EV-

# EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER XIII.

## PROP. I. THEOR.



*Si recta linea* AB *extrema ac media ratione secta fuerit: maior portio* AC *assumens dimidiam* AD *totius* AB *quintuplum potest eius, quod a dimidia* AD *totius fit, quadrati.*

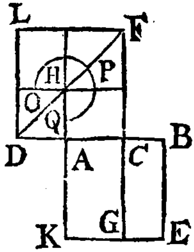
Describantur ex AB, DC quadrata AE, DF. Deinde in DF describatur figura, & producatur FC ad G. Est ergo CE $=$ AB $\times$ BC $=^{\alpha}$ ACq $=^{\gamma}$ HF. Iam quia AK $=$ AB $=^{\beta}$ 2 AD $=^{\gamma}$ 2 AH, & AK : AH $=^{\delta}$ AG : CH : erit AG $=$ 2 CH $=^{\varepsilon}$ CH $+$ HL, ideoque AE $=^{\zeta}$ gnomoni OPQ. Sed AE $=$ ABq $=^{\eta}$ 4 ADq $=$ 4 DH. Ergo gn. OPQ $=$ 4 DH, & proinde $^{\zeta}$ DF, id est CDq $=$ 5 DH vel 5 ADq. Q. E. D.

$\alpha$. 3. def. & 17. 6.
$\beta$. hyp.
$\gamma$. 1. cor. 4. 2.
$\delta$. 1. 6.
$\varepsilon$. 43. 1.
$\zeta$. 2. ax. 1.
$\eta$. sch. 4. 2.

## PROP. II. THEOR.

*Si recta linea* CD *partis sui ipsius* AD *quintuplum possit, atque duplum* AB *dictae partis* AD *extrema ac media ratione secetur: maior portio est pars reliqua* CA *eius quae a principio rectae lineae* CD. Fig. prop. praec.

 De-



Descriptis enim iisdem, quae antea, quia DF = CDq = 5 ADq = 5 DH: erit ϑ gnomon OPQ = 4 DH. Sed 4 DH = 4 ADq = ι ABq = AE. Ergo gn. OPQ = AE. Deinde quia vt in praec. ostenditur AG = CH + HL: erit ϑ quadratum HF = CE, id est κ ACq = AB × BC. Quare λ ÷ AB, AC, BC; & quia μ AB > AC, erit AC > CB. Igitur si recta AB extrema ac media ratione secatur: ν maior eius portio est CA. Q. E. D.

ϑ. 3. ax. 1.
ι. sch. 4. 2.
κ. constr.
λ. 17. 6.
μ. lem. seq.
ν. 3. def. 6.

## LEMMA.

At vero *duplam ipsius* AD, *quae est* AB, *maiorem esse quam* AC, sic demonstrabitur.

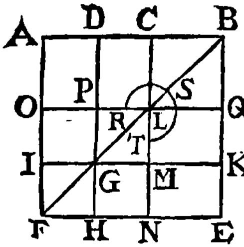
Si negas: sit AC = 2 AD. Erit ergo ACq = 4 ADq, & ACq + ADq = 5 ADq = ξ CDq, pars toti. Q. E. A. Si ponas 2 AD < AC, similiter ostendemus, totum esse parte sua minus. Q. E. A. Ergo 2 AD > AC. Q. E. D.

ξ. hyp.

## PROP. III. THEOR.

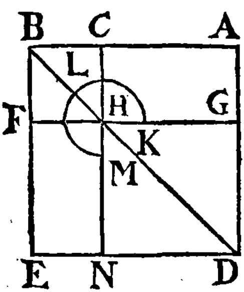
*Si recta linea* AB *extrema ac media ratione secta fuerit: portio minor* CB *assumens dimidiam* CD *maioris portionis* AC *quintuplum potest eius, quod a dimidia* CD *maioris portionis fit, quadrati.*

Describatur enim ex AB quadratum AE, & figura compleatur. Ergo, quia AC = 2 CD:




CD : erit ON = ACq
= 4 CDq = 4 PM.
Et quia AB × BC [o] = [o. 3. def. 6.]
ACq, & AB × BC =
CE: erit CE = 4 PM.
Rurſus quoniam AD =
DC, & proinde IG =
[π] GM: erit PM = [ρ] HI, [π. 34. 1.]
& PG = GH, vel [π] QK = KE. Quare [σ] [ρ. 1. cor. 4. 2.]
Pgr. ME = MQ = [τ] LD, ideoque gnomon [σ. 36. 1.]
RST = [υ] CE = 4 PM, ac ob id [υ] totum DK [τ. 43. 1.] [υ. 2. ax. 1.]
id eſt DBq = 5 CDq. Q. E. D.

## PROP. IV. THEOR.

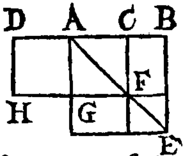



*Si recta linea* AB *extrema ac media ratione ſecta fuerit: totius* AB *& minoris portionis* BC *vtraque ſimul quadrata tripla ſunt quadrati eius, quod a maiori ſit portione* AC.

Deſcripto enim ex AB quadrato AE, & completa figura: erit vt antea AF = [φ] GN. [φ. 3. def. 6.]
Sed AF = [χ] CE, ideoque AF + CE id eſt [χ. 43. 1.]
gnom. KLM + CF = 2 AF = 2 GN. Ergo addito communi GN, erit AE + CF = 3 GN, id eſt, ABq + BCq = 3 ACq. Q. E. D.

PROP.

## PROP. V. THEOR.




*Si recta linea* AB *extrema ac media ratione secetur, adjiciaturque ipsi* AD *aequalis maiori portioni* AC : *erit tota linea* BD *extrema ac media ratione secta, & maior portio erit ea, quae a principio posita est, recta linea* AB.

Descripto enim ex AB quadrato AE, &
ψ. 3. def. 6. completa figura: erit CE = ψ CG. Sed
ω. sch. 48. 1. CE = GE, & CG = ω GD. Ergo GD = GE, & hinc HB = AE, id est BD ⨯ DA =
α. 17. 6. ABq. Quare α BD : AB = AB : DA, & AB > AD, quia BD > AB. Hinc patet ψ Q. E. D.

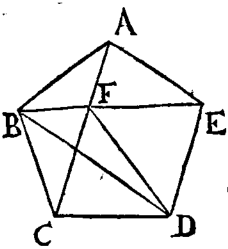
## PROP. VI. THEOR.


*Si recta linea rationalis* AB *extrema ac media ratione secta fuerit: vtraque portio* AC, CB *irrationalis est, quae apotome appellatur.*

Producatur CA, & sit AD = ½ AB. Er-
β. 1. 13. go CDq = β 5 ADq. Hinc, quia AD est ρ,
γ. 9. def. & 6. 10. erit γ CDq ρ, ac ergo ipsa CD ρ. Sed δ CD
δ. 9. 10. non ≍ AD. Ergo CD, DA erunt ρ Є, ideo-
ε. 74. 10. que AC apotome ε erit. Deinde quia AB
ζ. 3. def. 6. ⨯ BC = ζ ACq : ACq ad ρ AB applicatum
η. 98. 10. latitudinem faciet BC, quae proinde η erit apotome prima. Q. E. D.

PROP.

## PROP. VII. THEOR.




*Si pentagoni aequilateri* ABCDE *tres anguli, siue deinceps siue non deinceps, inter se fuerint aequales: aequiangulum erit pentagonum.*

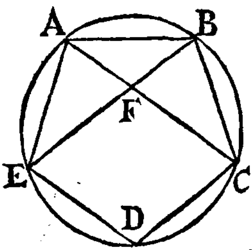
1. Sint anguli deinceps A, B, C aequales. Iungantur AC, BE, FD. In
△is BAE, ABC erit ϑ BE = AC, & ang. AEB ϑ. 4. 1.
= ACB, & ang. ABE = BAC. Ergo BF = ι ι. 6. 1.
AF, & FE = κ FC. Sed praeterea ED = DC. κ. 3. ax. 1. λ. 8. 1.
Ergo λ ang. FED = FCD, ideoque μ ang. μ. 2. ax. 1.
AED = BCD = A = B. Similiter demonstrabitur, ang. CDE = B = cuique reliquorum. Q. E. D.

2. Sit ang. A = C = D. Iungatur BD. Et quia AB = BC & AE = CD, & ang. A = C: erit ϑ ang. AEB = CDB, & BE = BD, ideoque ang. BED = BDE. Hinc μ totus AED = CDE = A = C. Idem de ang. B similiter ostendetur. Q. E. D.

## PROP. VIII. THEOR.

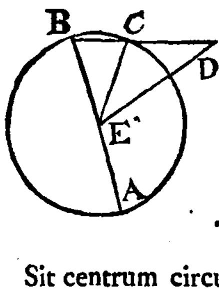
*Si pentagoni aequilateri & aequianguli* ABCDE *duos, qui deinceps sunt, angulos* A, B *subtendunt rectae lineae* BE, AC: *extrema ac media ratione se mutuo secant; & maiores ipsarum portiones* EF, FC *pentagoni lateri* AE *sunt aequales.*

Descri-




ν. 14. 4. Describatur [ν] circa pentagonum circulus. Primo in triangulis
ξ. 4. 1. AEB & ACB est [ξ] BE = AC, & ang. EBA = CAB. Hinc ang. AFE = [ο] 2 CAB = [π] CAE.
ο. 32. 1. π. 33. 6. Igitur EF = [ρ] AE.
ρ. 6. 1. Deinde quia ang. FAB
σ. 5. 1. = FBA = [σ] AEB, & ang. B communis △is AFB, AEB: erunt [ο] △a ista aequiangula, & erit EB : BA = BA : BF, id est ob AB = AE = EF, EB : EF = EF : FB. Est vero EF > FB, quia EB > EF. Ergo BE in F secatur extrema ac media ratione, & maior portio EF aequalis est lateri pentagoni AE. Idem similiter de recta AC ostendemus. Q. E. D.

## PROP. IX. THEOR.




*Si latera hexagoni* DC *& decagoni* CB *in eodem circulo* ACB *descriptorum componantur: erit tota recta* BD *extrema ac media ratione secta, & maior ipsius portio erit hexagoni latus* CD.

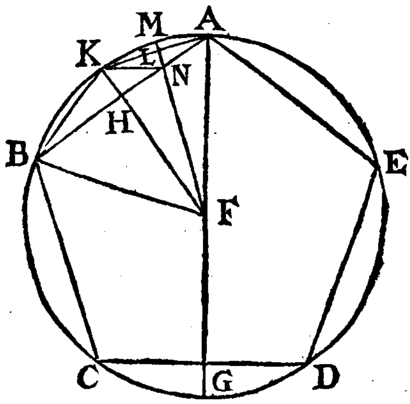
Sit centrum circuli E. Quia BC est latus decagoni aequilateri: erit circumf. ACB = 5
τ. 33. 6. BC, ergo AC = 4 CB. Hinc & ang. AEC [τ]
υ. 32. 1. = 4 BEC. Sed ang. AEC = [υ] BCE + CBE
φ. 5. 1. = [φ] 2 BCE; &, ob DC = [χ] CE, est ang. BCE
χ. cor. 15. 4. = 2

$= 2$ CDE: quare AEC $= 4$ CDE. Eſt ergo ang. BDE $=$ BEC. Sed ang. B eſt communis $\triangle$is BED, BEC. Quare ✝ BD : BE $=$ BE : BC, hoc eſt BD : DC $=$ DC : CB. Eſt autem DC $>$ CB, quia BD $>$ DC. Ergo patet Q. E. D. ✝. 4. 6

* *Schol.*

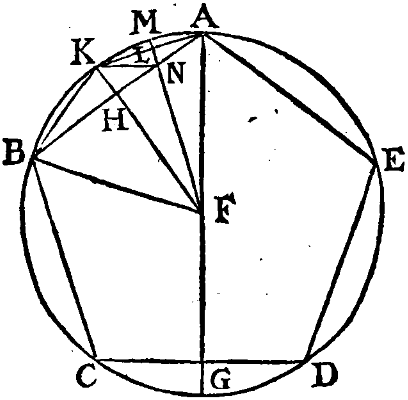
Et conuerſim, ſi qua recta BD extrema ac media ratione ſecetur: erit minor portio BC latus decagoni in eo circulo, in quo maior CD eſt latus hexagoni. Nam, eadem deſcripta figura, quia ang. AEC $= 2$ BCE, & ang. BCE $= 2$ CDE $= 2$ BEC (per 6. 6): erit circumf. AC $= 4$ BC, ideoque recta BC latus decagoni.

## PROP. X. THEOR.




*Si in circulo* ABCDE *pentagonum aequilaterum deſcribatur: latus pentagoni* AB *poteſt & hexagoni & decagoni latus in eodem circulo deſcriptorum.*

Suma-




Sumatur centrum circuli F, & ducatur diameter AFG, & iungatur FB. Ab F ad AB ducatur perpendicularis FHK, & iungantur AK, KB. Rursus ab F ad AK ducatur perpendicularis FNLM, & iungatur KN. Igitur quia circ. ABCG = AEDG, & circ. ABC = AED: erit circ. CG = GD, ideoque CGD = 2 CG. Rursus quia BF = AF, & anguli

α. 5. & 26. 1. ad H aequales sunt, erit α ang. BFH = AFH,

α. 26. 3. ideoque circumf. BK = α KA, & AKB = 2 BK, & hinc AK erit latus decagoni. Similiter patet esse circ. BK = AMK = 2 KM. Iam,

β. 7. ax. 1. quia CGD = AKB, erit β circ. CG = BK = 2 KM. Sed circ. CB = AKB = 2 BK. Er-

γ. 2. ax. 1. go γ circ. BCG = 2 BKM, & ob id ang. BFG

δ. 33. 6. = δ 2 BFM. Sed ang. BFG = ε BAF +

ε. 32. 1.

ζ. 5. 1. ABF = ζ 2 BAF. Ergo β ang. BAF = BFM. Quum igitur Δa BFA, BFN sint aequiangula:

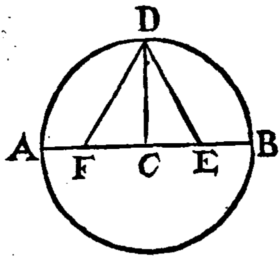
η. 4. 6. erit η AB : BF = BF : BN, & proinde AB ×

BN

BN = [ϑ] BFq. Rursus quia ang. ad L recti ϑ. 17. 6.
sunt, &[ι] AL = LK: erit[κ] ang. LAN = LKN. ι. 3. 3. κ. 4. 1.
Sed quia recta AK [λ] = KB, est ang. LAN = λ. 29. 3.
[ζ] KBA. Ergo ang. KBA = AKN. Quare in $\triangle$is aequiangulis ANK, ABK erit BA : AK = [η] KA : AN, & hinc AB $\times$ AN = [ϑ] AKq.
Ergo ABq = [μ] AB $\times$ BN + AB $\times$ AN = μ. 2. 2.
BFq + AKq. Est autem BF latus [ν] hexagoni, ν. cor. 15. 4
& AK decagoni. Q. E. D.

[*] *Schol.*

Hic praxin faciliorem trademus problematis 11. 4: *In dato circulo pentagonum aequilaterum & aequiangulum describere.*

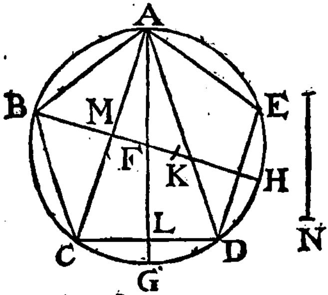



Super diametro AB ex centro C erigatur perpendicularis CD. Bisecetur BC in E, & iungatur ED, cui capiatur aequalis EF. Iuncta FD erit latus pentagoni in circulo ABD describendi.

Nam quia (per 6. 2) BF $\times$ FC + CEq = EFq = EDq = CDq + CEq: erit BF $\times$ FC = CDq = BCq. Quum ergo sit BF : BC = BC : CF: erit BF extrema ac media ratione secta. Sed maior portio BC est latus hexagoni in circulo ABD. Ergo CF est latus decagoni in eodem (per sch. praec.); & hinc DF = $\sqrt{}$ (DCq + CFq) latus pentagoni. Q. E. F.

## PROP. XI. THEOR.

*Si in circulo* ABCDE, *rationalem diametrum habente, pentagonum aequilaterum describatur: pentagoni latus* AB *est linea irrationalis, quae minor appellatur.*



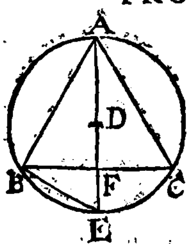

Sumatur enim circuli centrum F, & ducantur diametri AG, BH, & iungatur AC, & capiatur FK = $\frac{1}{4}$ AF, quae erit ρ, quia AF ρ. Sed & BF est rationa-

ξ. 16. 10. lis. Ergo [ξ] BK est ρ. Et quia circumf. ABG =
AEG, & ABC = AED : erit circ. CG = GD, & [ο]
ο. 27. 3. ang. CAG = GAD, item ang. ACL = [ο] ADL.
π. 32. 1. Ergo [π] anguli ad L sunt recti, & hinc [ρ] CL = LD,
ρ. 3. 3. & CD = 2 CL. Eadem ratione & anguli ad M
recti sunt, & AC est = 2 CM. Quia igitur Δa
ALC, AFM aequiangula sunt : erit [σ] LC : CA =
σ. 4. 6. MF : FA, & [τ] 2 LC : CA = 2 MF : FA, = [σ] MF : $\frac{1}{2}$
τ. sch. 4. 5. FA; ideoque 2 LC : $\frac{1}{2}$ CA = MF : $\frac{1}{4}$ FA, id
σ. 15. 5. est CD : CM = MF : FK. Hinc componen-
υ. 22. 6. nendo DC + CM : CM = MK : KF, & [υ] (DC +
CM) q : CMq = MKq : KFq. Iam si AC ex-
trema ac media ratione secetur, erit maior
φ. 8. 13. eius portio [φ] = CD; ideoque erit [χ] (DC +
χ. 1. 13. ψ. sch. 12. 10. CM) q = 5 CMq. Hinc & MKq = 5 KFq;
ideoque [ψ] MKq est ρ, & MK ρ. Et quoniam
BF = 4 FK : erit BK = 5 FK, & BKq = 25
ω. 9. 10. FKq. Hinc 5 MKq = BKq, & ob id [ω] BK
non

non ≮ MK. Vtraque tamen ρ existente, erunt BK, KM ρ ∈. Quare MB est apotome [α] & ipsi congruens MK. Dico & MB esse apotómen quartam: Sit enim √ (BKq — KMq) = N. Et quia KF ≮ FB, erit KB ≮ [β] FB ≮ BH rationali expositae. Deinde quia BKq : KMq = 5 : 1, & conuertendo BKq : Nq = 5 : 4 : erit [γ] N non ≮ BK. Ergo [γ] MB erit apotome quarta. Hinc; quum sit ABq = [δ] MB × BH, erit [ε] AB quae vocatur minor. Q. E. D. α. 74. 10. β. 18. 10. γ. 4. def. tert. 10. δ. cor. 8. 6. & 31. 3. ε. 95. 10.

* *Cor.* Diameter circuli AG ex angulo A pentagoni regularis ducta & arcum CD a latere opposito subtensum, & latus ipsum oppositum CD ad angulos rectos bisecat.

## PROP. XII. THEOR.



*Si in circulo* ABC *triangulum aequilaterum* ABC *describatur: trianguli latus* AB *potentia triplum est eius* DA *quae ex circuli centro* D.

Nam, producta AD in E, quia circumf. BEC est tertia pars circuli, & BE = [ζ] EC: erit BE sexta pars circuli, ideoque recta BE latus hexagoni = [η] DA. Et quia ABq + BEq = [θ] AEq = 4 DAq: erit ABq = [ζ] 3 DAq. Q. E. D. ζ. 3. ax. 1. η. cor. 15. 4. θ. 31. 3.

* *Schol.*

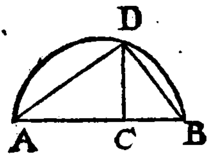
1. AEq : ABq = 4 : 3.

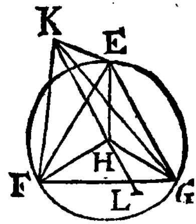
2. ABq : AFq = 4 : 3. Nam [ι] AEq : ABq = [ι] ABq : AFq. ι. cor. 8. 6. & 22. 6.

3. DF = FE. Nam Δ. EBD aequilaterum est, & ADF ad BC perpendicularis [κ]. Ergo [λ] DF = FE. κ. 4. 1. λ. cor. 3. 3.

4. Hinc AF = 3 FD.

## PROP. XIII. PROBL.




*Pyramidem † conſtituere, & ſphaera comprehendere data; atque etiam demonſtrare, quod ſphaerae diameter* AB *eſt potentia ſeſquialtera lateris ipſius pyramidis.*

μ. 9. 6. Secetur AB in C [μ] ita, vt AC = 2 CB. Super AB deſcribatur ſemicirculus ADB, & ex C ad AB ducatur perpendicularis CD, & iungatur AD. Fiat circulus EFG centro H interuallo CD, & in eo deſcribatur [ν] triangulum aequilaterum EFG.

ν. 2. 4. Iungantur HE, HF, HG. Ex H plano huius circuli excitetur ad rectos HK, quae fiat = AC, & iungantur KE, KF, KG. EFGK erit tetraedrum deſideratum.

ξ. 3. def. 11. 1. Etenim quia ang. KHE eſt [ξ] rectus, ideoque = ACD, & KH = AC, HE = CD: erit

ο. 4. 1. [ο] KE = AD. Similiter KF = AD = KG.

π. lemma ſequens. Et quoniam AB = 3 BC, & AB : BC = [π] ADq :

ρ. conſtr. DCq: erit ADq = 3 DCq = [ρ] 3 HEq = [σ]

σ. 12. 13. EFq. Hinc EF = AD; & ergo FG = GE = EF = AD = KE = KF = KG. Sunt ergo △a EFG, EKG, FKG, EKF aequilatera &

τ. 26. def. 11. aequalia. Ergo EFGK eſt [τ] tetraedrum.

2. Pro-

† Vel potius *tetraedrum*; quod & in ſequentibus intellige.

2. Producatur KH in L vt ſit HL = CB. Quia [υ] AC : CD = CD : CB : erit KH : HE = EH : HL. Ergo ſemicirculus ſuper KL deſcriptus [φ] tranſibit per E, &, manente KL, conuerſus tranſibit etiam per G & F, quod eodem modo oſtendetur. Ergo [χ] ſphaera data, cuius diameter eſt AB = KL, comprehendet tetraedrum EFGK. Q. E. F.

υ. cor. 8. 6.
φ. ſch. 13. 6.
χ. 14. def. 11.

3. Quia AB : BC = ? 3 : 1 : erit conuertendo AB : AC = 3 : 2. Eſt vero BA : AD [υ] = AD : AC, & hinc AB : AC = [ψ] ABq : ADq. Ergo ABq = $\frac{3}{2}$ ADq = $\frac{3}{2}$ KEq. Q. E. D.

ψ. 2. cor. 20. 6.

## LEMMA.

*Demonſtrandum autem eſt, eſſe* AB : BC = ADq : DCq.

Nam quia BA : AD = [υ] AD : AC : erit BA × AC = ADq. Et quia AC : CD = [υ] CD : BC : erit AC × CB = CDq. Hinc AB : BC = [ω] AB × AC : AC × BC = ADq : CDq. Q. E. D.

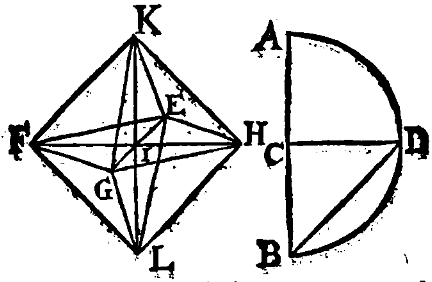
ω. 1. 6.

* *Coroll.* Diameter ſphaerae KL eſt ſesquialtera altitudinis KH tetraedri inſcripti.

* *Schol.* Latus tetraedri FG potentia eſt ſesquialterum altitudinis tetraedri HK. Nam FGq : HKq = ADq : ACq = ABq : ADq = 3 : 2.

## PROP. XIV. PROBL.

*Octaedrum conſtituere, & eadem ſphaera comprehendere, qua & pyramidem; atque demonſtrare, ſphaerae diametrum* AB *potentia duplam eſſe lateris ipſius octaedri.*




Data diameter AB bifecetur in C, & defcribatur fuper AB femicirculus, & ex C in AB ducatur perpendicularis CD, & DB iungatur. Fiat quadratum EFGH, cuius latus = BD. Ex puncto I interfectionis diametrorum EG, FH plano EFGH ad rectos ducatur KIL, & fiat KI = IL = IE, & iungantur KE, KF, KG, KH, LE, LF, LG, LH.

α. 9. 4. β. 47. 1. γ. 3. def. 11. 1. Nam quia [α] EI = IH & ang. EIH rectus: erit [β] EHq = 2 EIq. Et quum KI = IE, ac ang. KIE rectus [γ] erit & KEq = 2 EIq. Hinc EH = KE. Similiter KH = HE. Ergo △. EKH eft aequilaterum. Eodem modo oftendemus, reliqua triangula, quorum bafes funt EF, FG, GH, HE & vertices K, L, effe aequilatera. Et patet omnia haec △a inter fe aequalia [δ] effe. Ergo KEFGHL eft [ε] octaedrum. Q. E. F.

δ. 2. fch. 8. 1. ε. 27. def. 11.

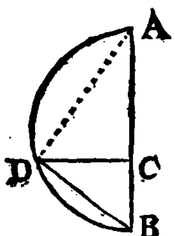
2. 3. Quia KI = IE = IL: femicirculus fuper KL defcriptus tranfibit per E. Et manente KL conuerfus hic femicirculus tranfibit etiam per F, G, H. Ergo fphaera diametri KL comprehendet hoc octaedrum. Sed & data fphaera. Nam quia KE = EL, & ang. in

femi-

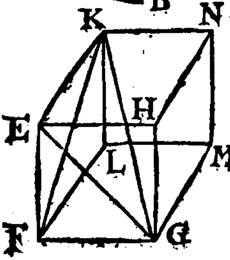
ſemicirculo KEL ζ rectus eſt, erit KLq = β ζ. 31. 3.
2 KEq. Eſt vero AB = 2 BC, & η AB : BC η. cor. 8. & 20. 6.
= ABq : BDq. Ergo ABq = 2 BDq = 2 KEq = KLq. Hinc diametro datae AB aequalis eſt ipſa KL, ideoque octaedrum ſphaera data comprehenditur; & AB potentia dupla eſt lateris octaedri KE. Q. E. F. & D.

* *Coroll.* Octaedrum conſtat ex duabus pyramidibus aequalibus, baſin quadratam habentibus, & altitudinem aequalem ſemidiametro ſphaerae circumſcriptae.

## PROP. XV. PROBL.

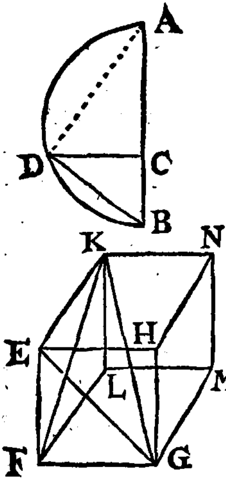



*Cubum conſtituere, & eadem ſphaera comprehendere, qua & priores; atque demonſtrare, ſphaerae diametrum* AB *lateris potentia triplam eſſe.*




Ex AB auferatur pars tertia BC, &, ſuper AB deſcripto ſemicirculo, ducatur ad AB perpendicularis CD, & iungatur DB. Fiat quadratum EFGH habens latus = DB. Ex punctis E, F, G, H plano EFGH ad rectos ϑ excitentur EK, FL, GM, HN, quarum quaeque fiat = EF. Iungantur KL, LM, MN, KN. ϑ. 12. 11.

1. Quidem ex conſtructione ſatis patet ſolidum genitum eſſe ι cubum. Q. E. F. ι. 25. def. 11.




2. 3. Iungantur EG, KF, KG. Et quia ang. KEG rectus [κ] eſt: ſemicirculus ſuper KG tranſibit [λ] per E. Rurſus quia [μ] anguli GFE, GFL recti ſunt, ideoque GF plano EL recta [ν] eſt, & hinc [κ] ang. GFK rectus: alius ſemicirculus ſuper KG tranſibit [λ] per F. Idem de reliquis punctis H, N, M, L oſtendetur. Quare ſemicirculus ſuper KG, manente KG, conuerſus faciet ſphaeram, quae cubum EM comprehendet. Dico autem, diametrum KG = AB. Nam quia EGq =

ξ. 47. 1. = [ξ] 2 EFq = 2 EKq: & KGq [ξ] = EGq + EKq: erit KGq = 3 EKq = [μ] 3 BDq. Sed

ο. cor. 8. & 20. 6. quum ſit AB = 3 BC, & AB : BC = [ο] ABq : BDq: erit ABq = 3 BDq = KGq. Ergo KG = AB. Itaque cubus factus eſt, quem data ſphaera comprehendit, & diameter AB potentia tripla eſt lateris eius FG. Q. E. F & D.

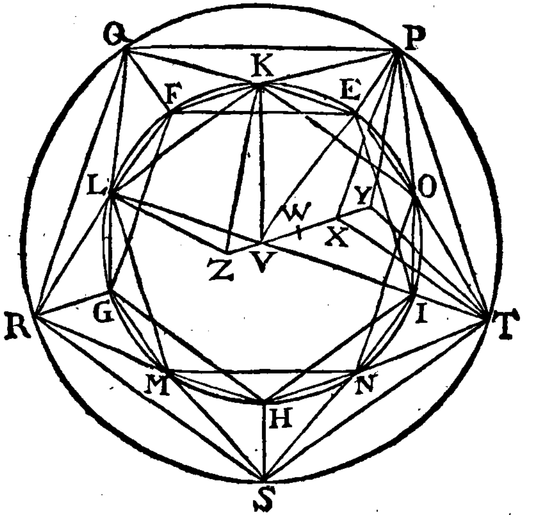
κ. 3. def. 11.
λ. ſch. 13. 6.
μ. conſtr.
ν. 4. 11.

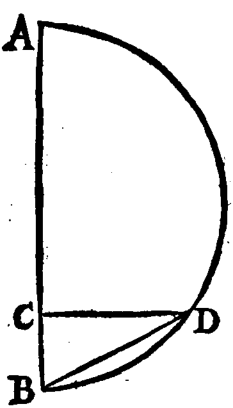
π. 13. 13. * *Schol.* Quia AD erat [π] latus tetraedri ſphaerae datae inſcripti: patet diametrum ſphaerae AB poſſe latera tetraedri & cubi in eadem inſcriptorum.

## PROP. XVI. PROBL.

*Icoſaedrum conſtituere, & eadem ſphaera comprehendere, qua & praedictas figuras; atque*

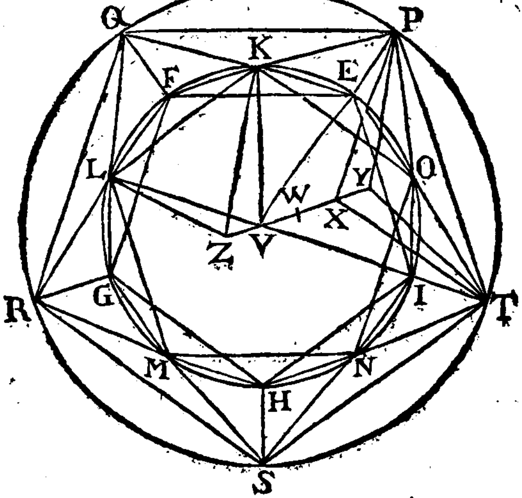
*que etiam demonstrare, icosaedri latus irrationalem esse lineam, quae minor appellatur.*




1. A datae sphaerae diametro AB abscindatur pars quinta BC, & super AB descripto semicirculo, ducatur ad AB perpendicularis CD, & BD iungatur, quo interuallo describatur circulus EFGHI. Huic inscribatur pentagonum aequilaterum & aequiangulum EFGHI. Circumferentiae EF, FG, GH, HI, IE bisecentur in K,L,M,N,O, & iungantur KF, FL,LG,GM,MH,

 HN,

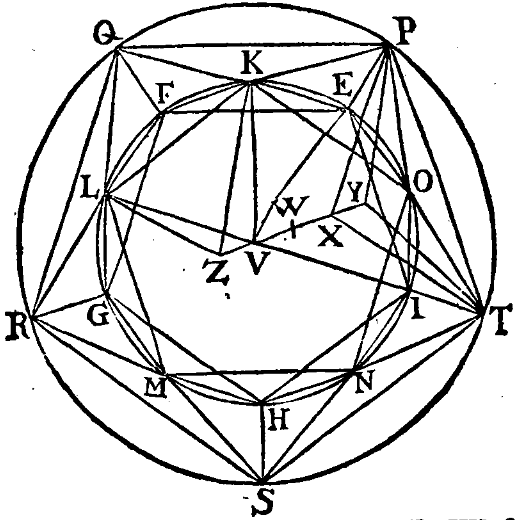


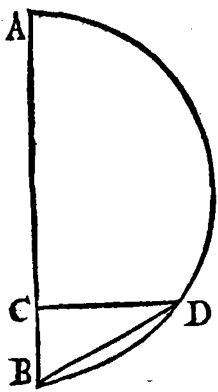


HN, NI, IO, OE, EK, item KL, LM, MN, NO, OK. Erit ergo KLMNO pentagonum aequilaterum & aequiangulum, & EO decagoni latus. A punctis E, F, G, H, I ipsi circuli plano ad rectos erigantur EP, FQ, GR, HS, IT, semidiametro VK singillatim aequales, & iungantur PQ, QR, RS, ST, TP, PK, KQ, QL, LR, RM, MS, SN, NT, TO, OP. Iam quia EP, IT parallelae [e] sunt, erit PT = EI [f], & hinc PT erit latus pentagoni aequilateri in circulo QRSTP ipsi EFGHI aequali. Idem de reliquis PQ, QR, RS,

e. 6. 11.
f. 33. 1.

RS, ST demonstrabitur eodem modo. Erit
ergo PQRST pentagonum aequilaterum. Et
quia PE est latus hexagoni, EO vero decago-
ni: erit, ob ang. PEO rectum [τ], PO latus [υ] pen- τ. 3. def. 11.
tagoni in eodem circulo. Idem patet de υ. 10. 13.
OT. Ergo POT erit Δ aequilaterum. Si-
militer ostenditur, ipsa PKQ, QLR, RMS,
SNT esse Δa aequilatera. Patet etiam ex di-
ctis KPO, OTN, NSM, MRL & LQK Δa ae-
quilatera esse. Ex V centro circuli EFGHI
ipsius plano ad rectos ducatur recta, in qua
ex vna parte puncti V capiantur VX $=$ lateri
hexagoni, & XY $=$ lateri decagoni, & ex al-
tera VZ $=$ XY. Iungantur PY, PX, YT, EV,
KZ. Quia VX, PE, sunt [ρ] parallelae & ae-
quales [φ]: erit PX parallela & $=$ [σ] EV lateri φ. constr.
hexagoni, & ang. PXV rectus [χ], hinc & PXY χ. sch. 29. 1.
rectus. Quare, quum XY sit decagoni latus,
erit PY $=$ lateri pentagoni $=$ PT. Idem
iunctis TX, VI patet de recta YT. Ergo PYT
est Δ. aequilaterum. Similiter aequilatera
sunt Δa reliqua, quorum vertex est Y, & ba-
ses sunt TS, SR, RQ, QP. Rursus quia [ψ] KZq
$=$ KVq $+$ VZq: erit KZ $=$ lateri pentago-
ni $=$ KL. Eodem modo, iunctis LV, LZ
ostendetur LZ $=$ KL. Ergo Δ. LZK aequi-
laterum est. Idem ostendetur de singulis Δis,
quorum bases sunt LM, MN, NO, OK & ver-
tex communis est Z. Constitutum ergo est
solidum viginti triangulis aequilateris con-
tentum, quorum aequalitas etiam patet. Q.
E. F.




2. Quia VX, XY sunt latera hexagoni & decagoni: erit ψ YV : VX = VX : XY. Hinc φ YV : VK = KV : YZ. Ergo super YZ descriptus semicirculus ω transibit per K. Similiter quia ZX = YV, & PX = VX, erit ZX : XP = PX : XY, & hinc, ob ang. ad X rectos, semicirculus super ZY transibit etiam per P. Quare quum idem similiter de reliquis verticibus angulorum icosaedri ostendi possit; constat, semicirculum circa ZY manentem rotatum transiturum esse per vertices omnium angulo-

ψ. 9. 13.
φ. constr.
ω. sch. 13. 6.

rum

rum icosaedri, & ergo hoc icosaedrum comprehensum iri sphaera diametri ZY. Et quoniam, bisecta VX in W, WYq [α] = 5 WXq; ZY vero = 2 WY, ac VX = 2 WX: erit [β] ZYq = 5 VXq. Est autem AB = 5 BC, & ABq : BDq = [γ] AB : BC. Ergo quia ABq = 5 BDq = [φ] 5 VXq = ZYq: sphaera diametri ZY icosaedrum comprehendens erit datae sphaerae aequalis. Q. E. F.

α. 3. & 9. 13.
β. 15. 5.
γ. cor. 8. & 20. 6.

3. Denique quia diameter data AB est ρ, & ABq = 5 BDq: erit [δ] & BD ideoque tota diameter circuli EFGHI rationalis. Hinc quum latus pentagoni KL sit [ε] minor; & eadem KL sit quoque latus icosaedri: patet latus icosaedri esse irrationalem quae minor vocatur. Q. E. D.

δ. 6. def. 10.
ε. 11. 13.

*Corollar.*

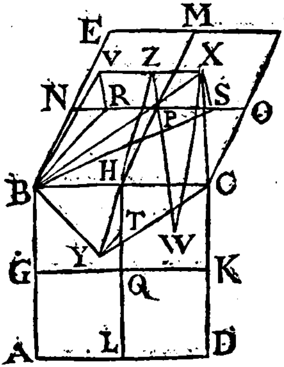
Sphaerae diameter potest quintuplum eius quae ex centro circuli quinque icosaedri latera ambientis. Et diameter sphaerae icosaedro circumscriptae composita est ex latere hexagoni & duplo latere decagoni, quae in eodem circulo describuntur.

## PROP. XVII. PROBL.

*Dodecaedrum constituere, & eadem sphaera comprehendere qua & praedictas figuras; atque etiam demonstrare, dodecaedri latus esse irrationalem, quae apotome appellatur.*

1. Exponantur praedicti cubi [ζ] duo plana ABCD, BCFE, quae sibi inuicem recta sunt, & eorum singula latera bisecentur, & iunganttur

ζ. 15. 13.




tur GK, HL; HM, NO. Rectae NP, PO, HQ secentur extrema [n] & media ratione in R, S, T punctis, in quibus ad plana cubi & ad exteriores eius partes excitentur perpendiculares RV, SX, TY, quae fiant aequales ipsis RP, PS, QT. Iungantur VB, BY, YC, CX, VX, quae terminabunt pentagonum dodecaedri. Nam,

ϑ. 4. 13. iuncta RB, quia [ϑ] PNq + NRq = 3 RPq, & BN = PN, ac RP = RV: est BRq = [ι] BNq

ι. 47. 1. + NRq = 3 RVq, ideoque BVq = [ι] BRq + RVq = 4 RVq. Hinc BV = 2 RV. Sed

ϰ. 7. 14. quia PN = PO, ac ob id RP = [ϰ] PS: est VX

λ. 33. 1. = [λ] RS = 2 PR = 2 RV. Ergo BV = VX. Similiter BY, YC, & CX ipsis BV, VX aequales ostendentur. Sunt autem hae quinque rectae in vno plano. Nam ipsi RV vel SX ducatur parallela PZ ad exteriores cubi partes,

λ. 3. def. 6. & iungantur ZH, HY. Et quia [λ] HQ : QT = QT : TH, & HQ = HP, ac TY = QT = PZ; est HP : PZ = YT : TH. Sed HP, YT,

μ. 6. 11. eidem plano BD ad rectos insistentes, sunt [μ]

ν. 32. 6. parallelae. Ergo ZHY est [ν] vna recta, & pro-

ξ. 1. 11. inde [ξ] in vno plano. Pentagonum [ο] ergo est

ο. 2. & 7. 11. BYCXV, & aequilaterum. Dico etiam aequiangulum esse. Iungantur enim BX, BS. Quoniam NP secta est in R extrema ac media ratione,

tione; & $SP = PR$: erit [π] $NSq + SPq = 3 PNq$. Hinc $NSq + SXq = 3 NBq$, & $NSq + SXq + BNq = 4 NBq$, id est [ρ] $SBq + SXq = BXq = 4 NBq$. Ergo $BX = 2 NB = BC$. Quare in Δis BVX, BYC erit [ς] ang. $BVX = BYC$. Similiter ostendetur ang. $VXC = BYC$. Ergo pentagonum BYCXV est [σ] aequiangulum. Si igitur ita ad vnumquodque duodecim laterum cubi eadem construantur, quae hic ad latus BC: figura solida constituetur; duodecim pentagonis aequilateris & aequiangulis & aequalibus contenta. Q. E. F.

π. 5. 13. & 4. 13.

ρ. 8. 11

σ. 7. 13.

2. Producatur ZP intra cubum. Occurret ergo diametro cubi, & ambae se bisecabunt [τ], quod fiat in W. Est ergo W centrum [υ] sphaerae cubum comprehendentis, & dupla $PW =$ [φ] lateri cubi, ideoque $PW = PN$. Et quia $PZ = PS$, erit $ZW = NS$. Iam quum praeterea $ZX = PS$, & $NSq + SPq = 3 PNq$: erit $3 PNq = ZWq + ZXq =$ [χ] $XWq$. Sed semidiameter sphaerae cubum comprehendentis potest etiam [υ] triplum dimidii lateris cubi PN. Ergo XW est semidiametro sphaerae cubo circumscriptae aequalis. Quare quia W est centrum: erit X in superficie sphaerae. Similiter vertex cuiuslibet reliquorum angulorum dodecaedri in superficie sphaerae esse demonstratur. Ergo dodecaedrum sphaera comprehensum est data. Q. E. F.

τ. 39. 11.

υ. 15. 13.

φ. 34. 1.

χ. 47. 1.

3. Quoniam [λ] $NP : PR = PR : RN$, ideoque [κ] $NO : RS = RS : 2 RN = RS : RN + SO$; $NO$ autem $> RS$, ideoque $RS > NR + SO$: erit [λ] rectae NO extrema ac media ratione se-

λ. 3. def. 6

κ. 15. 5.

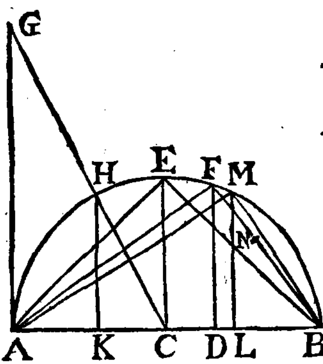
ctae

ctae maior portio ipsa RS = VX. Et quia sphaerae diameter, quae [ν] potest triplum ip-
ψ. 6. 13. sius NO, est ρ: erit & NO ρ; ergo [ψ] VX apotome. Q. E. D.

1. *Coroll.* Ergo latere cubi extrema ac media ratione secto, eius portio maior est dodecaedri latus.

[*] 2. *Coroll.* Liquet etiam, rectam subtendentem angulum pentagoni in dodecaedro esse latus cubi in eadem sphaera inscripti.

## PROP. XVIII. PROBL.




*Latera quinque figurarum exponere, & inter se comparare.*

1. Exponatur datae sphaerae diameter AB, & secetur in C, D sic,
α. 9. 6. vt AC = CB, & [α] AD = 2 DB. Fiat semicirculus AEB, & in AB perpendiculares ducantur CE, DF, & AF, FB iungantur. Et quia AB = 3 BD:
α. cor. 19. 5. est [α] AB = $\frac{3}{2}$ AD. Hinc quia AB: AD = [β]
β. cor. 8. & 20. 6. ABq : AFq : est ABq = $\frac{3}{2}$ AFq. Ergo AF
γ. 13. 13. est [γ] latus tetraedri.

2. Quia ABq : BFq = [β] AB : BD = 3 : 1:
δ. 15. 13. BF est latus cubi [δ].

3. Iunctis AE, EB, est ABq : BEq = [β] AB:
ε. 14. 13. BC = 2 : 1. Ergo BE est latus octaedri [ε].

4. In AB ducatur perpendicularis AG = AB. Iuncta GC, a puncto H ducatur in AB per-

perpendicularis HK. Iam quia $HK : KC = ^{\zeta}$ ζ. 4. 6.
$GA : AC = 2 : 1$: erit $HKq = 4\ KCq$, ideoque $5\ KCq = CHq = CBq$. Et quoniam
$AB = 2\ BC$, & $AD = 2\ DB$: erit $DB^{\eta} = 2$ η. 5. 5.
CD, ideoque $CB = 3\ CD$, & $CBq = 9\ CDq$. Ergo $KC > CD$. Fac $CL = KC$, & in AB duc perpendicularem LM, iunge MB. Quia
$CBq = 5\ KCq$; est $^{\theta}$ $ABq = 5\ KLq$. Ergo θ. 15. 5.
KL est latus hexagoni $^{\iota}$ in circulo quinque ι. cor. 16. 13.
icosaedri latera ambientis, ideoque $AK = LB =^{\iota}$ lateri decagoni in eodem circulo. Sed
$ML =^{\kappa} HK = 2\ KC = KL =$ lateri hexa- κ. 14. 3.
goni. Ergo MB est $^{\lambda}$ latus pentagoni in eo- λ. 10. 13.
dem circulo, ideoque latus $^{\mu}$ icosaedri. μ. 16. 13.

5. Secetur BF extrema ac media ratione: erit maior eius portio BN latus dodecaedri. $^{\nu}$ ν. 1. cor. 17. 13.

6. Ex his liquet, latera tetraedri, octaedri & cubi esse $\rho\ \epsilon$ diametro AB sphaerae. Nam quarum partium 6 est ABq, earum 4 est AFq,
trium BEq, & duarum BFq. Ergo $^{\xi}$ $AFq =$ ξ. 22. 5.
$\frac{4}{3}\ BEq = 2\ BFq$, & $BEq = \frac{3}{2}\ BFq$. Icosaedri vero & dodecaedri latera nec inter se nec ad praedictarum figurarum latera sunt in rationibus rationalibus: quia illius latus $^{\mu}$ est
minor, huius apotome$^{o}$. ο. 17. 13.

7. Dico MB icosaedri latus maius esse latere
dodecaedri BN. Nam $^{\beta}$ $FBq : BDq = AB :$ β. cor. 8. &
$BD = 3 : 1$. Sed $ADq = 4\ BDq$. Ergo 20. 6.
$AD > FB$, ideoque $AL > FB$. Iam AL secta est extrema ac media ratione $^{\pi}$, & maior π. 9. 13.
eius portio est KL; hinc quia & FB extrema ac media ratione secta est, & eius maior portio

ς. 3. def. 6. vel 7. 14. ϛ. 19. 1. BN eſt: erit KL [ς] > BN. Ergo ML = KL > BN, ideoque [ϛ] MB > BN. Q. E. F.

*Schol.*

*Dico praeter iam dictas quinque figuras non constitui aliam figuram †, quae ſub figuris aequilateris & aequiangulis, inter ſe aequalibus, contineatur.*

σ. 11. def. 11. Ex duobus enim angulis planis [σ] non conſtituitur angulus ſolidus. Ex tribus autem triangulis aequilateris & aequalibus conſtituitur angulus tetraedri, ex quatuor octaedri, ex quinque icoſaedri: ex ſex autem pluribusue nullus conſtituetur [τ], quia ſex anguli △ aequilateri = [υ] 4 Rectis. Porro ſub tribus quadratis continetur angulus cubi. Sub quatuor autem pluribusue [τ] nullus angulus ſolidus contineri poteſt. Sub tribus pentagonis aequilateris & aequiangulis ac aequalibus continetur angulus dodecaedri. Sub quatuor autem pluribusue nullus comprehendetur [τ] angulus ſolidus: quia eorum ſumma [φ] > 4 rectis. Ob eandem rationem ex aliis figuris polygonis aequilateris & aequiangulis nullus ſolidus angulus conſtitui poteſt. Ergo nec fieri poteſt figura ſolida ex figuris planis aequilateris & aequiangulis praeter quinque dictas. Q. E. D.

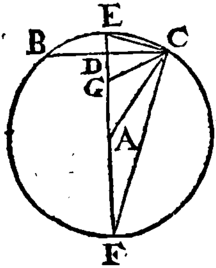
τ. 21. 11. υ. 5. ſch. 32. 1. φ. 2. ſch. 11. 4.

† Talem autem intelligit figuram, cuius ſinguli ſolidi anguli ſub aeque multis planis angulis continentur.

EV-

# EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER XIV. †

## PROP. I. THEOR.




*Quae a centro* A *circuli alicuius ad latus* BC *pentagoni æquilateri in eodem circulo descripti perpendicularis ducitur* AD, *dimidia est vtriusque & eius* AC *quae ex centro, & lateris decagoni in eodem circulo descripti.*

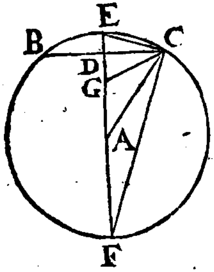
Nam producatur DA in F & E; fiat $DG = ED$, & iungantur CE, GC. Iam quia tota circumferentia circuli $= 5\ BEC$: erit dimidia $FCE = 5\ CE$, quae dimidia est [α] ipsius BEC. α. 3. & 30. 3.
Hinc quia $FC = 4\ CE$, erit [β] ang. $FAC = 4\ DAC$. β. 33. 6. γ. 20. 3.
Sed $FAC =$ [γ] $2\ DEC$. Ergo $2\ DAC = DEC =$ [δ] $DGC$. δ. 4. 1.
Quare $AG =$ [ε] $GC = CE$, ideoque $AD = CE + ED$, & $2\ AD = CE + AE$, id est, $AD = \frac{1}{2} CE + \frac{1}{2} AC$. Est autem CE latus decagoni. Q. E. D. ε. 32. & 6. 1.

## L E M M A.

*Si in circulo pentagonum aequilaterum describatur: quadratum quod fit ex latere* BC *pen-*



† Vel verius Hypsiclis Alexandrini de quinque corporibus liber prior.




*pentagoni, vna cum quadrato quod fit ex recta, quae duobus pentagoni lateribus subtenditur, quintuplum erit quadrati eius, quae est ex circuli centro* A.

Ex centro circuli A ducatur in BC perpendicularis FADE, & iungatur CE, quae erit ζ latus decagoni, item CF, quae duo pentagoni latera subtendet. Et quia FE =

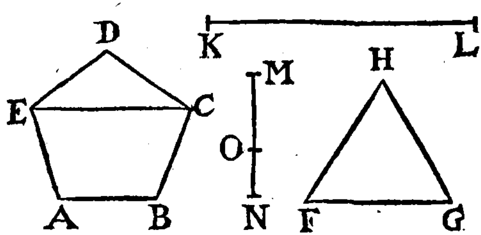
ζ. 3. & 30. 3. 2 AE, erit 4 AEq = FEq = η ECq + CFq.

η. 31. 3.

θ. 10. 13. Ergo 5 AEq = AEq + ECq + CFq = θ BCq + CFq. Q. E. D.

## PROP. II. THEOR.

*Idem circulus comprehendit dodecaedri pentagonum* ABCDE *& icosaedri triangulum* FGH *in eadem sphaera descriptorum.*




Sit sphaerae diameter KL. Iungatur EC,

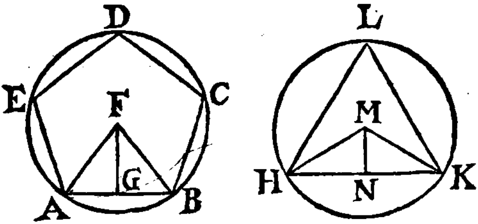
ι. cor. 6. 10. & exponatur ι recta MN talis, vt KLq = 5

κ. cor. 16. 13. MNq. Ergo κ MN erit quae ex centro circuli, per quem icosaedrum describitur. Secetur MN extrema & media ratione, & segmentum maius

ius sit MO, quae ergo erit [λ] latus decagoni in eodem circulo. Iam quia 5 MNq = KLq = [μ] 3 CEq; & 3 CEq : 5 MNq = [ν] 3 ABq : 5 MOq : erit 3 ABq = 5 MOq. Sed quia FG est [ξ] latus pentagoni in praedicto circulo: erit 5 FGq = [ο] 5 MNq + 5 MOq = 3 CEq + 3 ABq = [π] 15 quadratis eius quae est ex centro circuli circa ABCDE circumscripti. Atqui 5 FGq = [ρ] 15 quadratis eius quae est ex centro circuli circa FGH descripti. Ergo circuli circa ABCDE, & FGH circumscripti aequales sunt. Q. E. D.

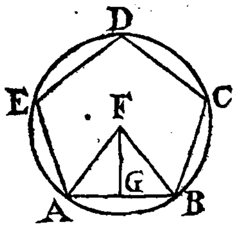
λ. 5. & sch. 9. 13.
μ. 2. cor. 17 & 15. 13.
ν. 8. 13. & 7. 14.
ξ. 16. 13.
ο. 10. 13.
π. lemma praec.
ρ. 12. 13.

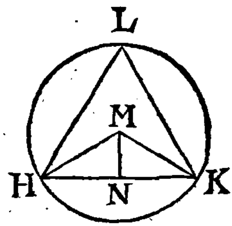
## PROP. III. THEOR.




*Si fuerit pentagonum aequilaterum & aequiangulum* ABCDE, *& circa ipsum circulus; a centro* F *autem ad vnum latus* AB *perpendicularis* FG *ducta fuerit: quod tricies sub vno latere* AB *& perpendiculari* FG *continetur superficiei dodecaedri est aequale.* Item

*Si fuerit triangulum aequilaterum* HKL, *& circa ipsum circulus, cuius centrum* M, *& ab eo perpendicularis* MN: *quod tricies sub* HK, MN *continetur superficiei icosaedri aequale est.*



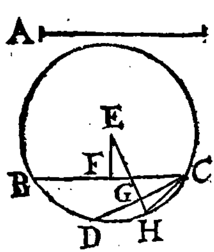

1. Iungantur AF, FB. Quia 5 $AB \times FG$ $=$ [σ] 10 $\triangle AFB = 2$ pentagonis ABCDE: erit 30 $AB \times FG = 12$ ABCDE $=$ superficiei
c. 41. 1. dodecaedri.

2. Iungantur HM, MK. Quia [σ] 3 $HK \times MN = 6 \triangle HMK = 2 \triangle HLK$: erit 30 $HK \times MN = 20 \triangle HKL =$ superficiei Icosaedri. Q. E. D.

*Coroll.*

**Ergo superficies dodecaedri est ad superficiem icosaedri in eadem sphaera, ut rectangulum sub latere pentagoni & perpendiculari ex centro circuli circumscripti ad illud ducta ad rectangulum sub latere trianguli & perpendiculari ex centro circuli circa triangulum descripti.**

## PROP. IV. THEOR.



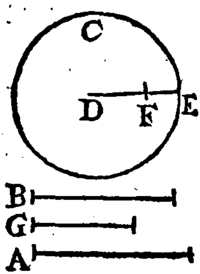

*Vt dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita est latus cubi* A *ad icosaedri latus* BC.

Circulo BCD qui icosaedri triangulum, ideoque & dodecaedri pentagonum,
r. 2. 14 [σ] comprehendit, inscribatur pentagoni latus CD, & trianguli CB. Ex centro

centro E ad BC, CD ducantur perpendiculares EF, EG. Producatur EG in H, & iungatur CH, quae erit latus decagoni. Hinc si EH + HC extrema ac media ratione secetur: erit [τ] EH maior portio. Sed EG $=$[υ] $\frac{1}{2}$ EH + $\frac{1}{2}$ HC, & EF $=$[φ] $\frac{1}{2}$ EH. Ergo duplae ipsius EG extrema ac media ratione sectae maior portio erit 2 EF. Sed ipsius A extrema & media ratione sectae maior portio [χ] est CD. Quare [ψ] A : CD $=$ EG : EF; ideoque A $\times$ EF $=$ CD $\times$ EG. Est ergo A : BC $=$[ω] A $\times$ EF : BC $\times$ EF $=$ CD $\times$ EG : BC $\times$ EF $=$[α] dodecaedri superficies ad icosaedri superficiem. Q. E. D.

τ. 9. 13.
υ. 1. 14.
φ. 3. sch. 12. 13.
χ. 1. cor. 17. 13.
ψ. 7. 14.
ω. 1. 6.
α. cor. praec.

## PROP. V. THEOR.

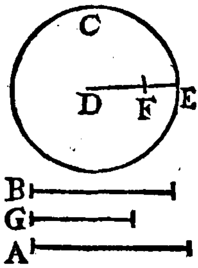



*Qualibet recta linea extrema ac media ratione secta, quam rationem habet ea, quae potest quadratum totius & quadratum maioris portionis, ad eam, quae potest quadratum totius & quadratum minoris portionis, eandem habet cubi latus* A *ad latus icosaedri* B.

Sit enim circulus C is, qui capit icosaedri triangulum & dodecaedri pentagonum in eadem sphaera descriptorum. Ex eius centro D ducatur vtlibet recta DE, quae extrema & media ratione secetur, vt maior eius portio sit FD. Sit G latus dodecaedri, quae [β] erit maior portio rectae A extrema mediaque ratione

β. 1. cor. 17. 13.

 tione




tione sectae. Et quoniam
B latus trianguli icosaedri in
γ. 12. 13. circulo C est, erit $Bq = {}^{\gamma} 3$
DEq. Sed $DEq + EFq$
δ. 4. 13. $= {}^{\delta} 3\ DFq$. Ergo $Bq : DEq$
ε. 7. 14. $+ EFq = DEq : DFq = {}^{\varepsilon}$
$Aq : Gq$, & hinc $Aq : Bq =$
$Gq : DEq + EFq$. Sed
quum G sit latus pentagoni
ζ. sch. 9. & 5. 13. dodecaedri in circulo C; & ζ DF latus de-
η. 10. 13. cagoni in eodem: erit $Gq = {}^{\eta} DEq + DFq$.
Quare $A : B = \sqrt{(DEq + DFq)} : \sqrt{(DEq + EFq)}$, & ergo ʹ, qualibet recta extrema &
media ratione secta, quam rationem habet ea
quae potest &c. Q. E. D.

## PROP. VI. THEOR.

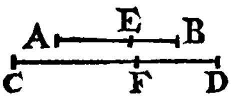
*Vt latus cubi ad icosaedri latus, ita est dodecaedri solidum ad solidum icosaedri.*

Quia enim idem circulus pentagonum dode-
θ. 2. 14. caedri & triangulum icosaedri θ in eadem sphae-
ra capit: si e centro sphaerae in planum huius
circuli intelligatur ducta perpendicularis; erunt
pyramides, quae pentagonum & triangulum ba-
ses habent, aeque altae. Vt ergo pentagonum
ι. 6. 12. ad triangulum, ita est ι dodecaedri pyramis
ad pyramidem icosaedri; ac proinde vt 12
pentagona ad 20 triangula, id est vt superfi-
cies dodecaedri ad superficiem icosaedri, ita
dodecaedrum est ad icosaedrum. Nam quia
perpendiculares ex centro sphaerae in circu-
los in sphaera aequales ductae, in centra eo-
rum circulorum incidunt, & ergo aequales
sunt:

ſunt: dodecaedrum in 12, icoſaedrum in 20 aequales [ι] pyramides, in centro ſphaerae vertices habentes, diuiditur. Eſt ergo [κ] vt latus cubi ad icoſaedri latus, ita dodecaedrum ad icoſaedrum. Q. E. D.

κ. 4. 14.

## PROP. VII. THEOR.




*Si duae rectae lineae* AB, CD *extrema ac media ratione ſectae fuerint: erunt maiores portiones* AE, CF *vt totae* AB, CD.

Nam quia [λ] $AEq = AB \times BE$, & $CFq = CD \times DF$: erit $4\,AB \times BE : AEq = 4\,CD \times DF : CFq$, & componendo [μ] $(AB + BE)q : AEq = (CD + DF)q : CFq$. Quare [ν] $AB + BE : AE = CD + DF : CF$, & componendo $2\,AB : AE = 2\,CD : CF$, & alterne $AB : CD = AE : CF$. Q. E. D.

λ. 17. 6.
μ. 8. 2.
ν. 22. 6.

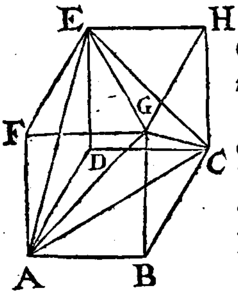
*Corollar.*

Dodecaedrum & icoſaedrum in eadem ſphaera eandem inter ſe rationem habent, quam, ſi recta linea extrema ac media ratione ſecetur, habet ea quae poteſt quadrata totius & maioris portionis, ad eam quae poteſt quadrata totius & minoris portionis.

# EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER XV.

* * * * * * * * * * * * * *

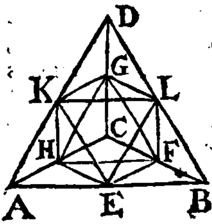
## PROP. I. PROBL.




*In dato cubo* ABCDEFGH *pyramidem describere.*

Ducantur diametri quadratorum GA, GE, GC, EA, EC, CA, quae omnes
α. 4. 1. α inter se aequales sunt. Ergo triangula EGC, EAG, AGC, EAC sunt aequilatera, & aequalia. Proinde EGCA tetraedrum est,
β. 31. def. 11. cubi angulis insistens, & ergo ipsi inscriptum β. Q. E. F.

## PROP. II. PROBL.

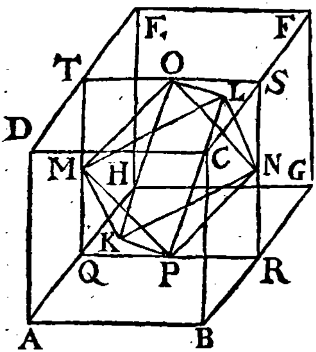



*In data pyramide* ABCD *octaedrum describere.*

* Bisecentur latera tetraedri in punctis E, F, G, H, K, L. Haec puncta connectantur 12
γ. 4. 1. rectis, quae omnes inter se γ aequales erunt. Quare octo triangula, quae bases habent rectas HG, GL, LE, EH & vertices K, F, aequilatera erunt & aequalia; & solidum sub ipsis com-

comprehensum octaedrum erit, dato tetraedro inscriptum. Q. E. F.

## PROP. III. PROBL.

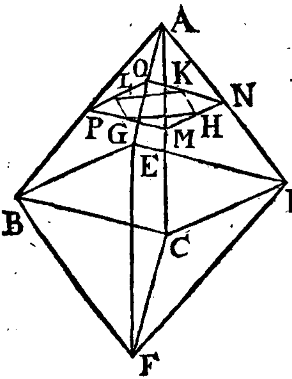



*In dato cubo* ABCDEFG *octaedrum describere.*

Sumantur [δ] quadratorum centra K, L, M, N, O, P. δ. 2. 4. Iunctae 12 rectae ML, LN, NP &c. constituent octaedrum. Nam per P, N, O, M, ducantur lateribus quadrati AC parallelae QR, RS, ST, MQ, quae iisdem lateribus, & ergo inter se aequales erunt. (* Patet vero has rectas se mutuo tangere; quia [δ] QT, ST eandem ED, & QR, SR eandem GB, & NR, QR eandem AH &c. bisecant). Ergo anguli MQP, NRP [ε] sunt recti. ε. 10. 11. Hinc quia MQ, QP, PR, NR, quippe aequalium TQ, QR, RS dimidia, aequantur: erit MP = [ζ] PN. Similiter ostenditur, MP, OM, NK, NL & reliquas aequari. ζ. 4. 1. Ergo 8 triangula, quorum vertices L, K, bases latera quadrati MONP, sunt aequilatera & aequalia, & constituunt ergo octaedrum cubo inscriptum. Q. E. F.

PROP.

## PROP. IV. PROBL.



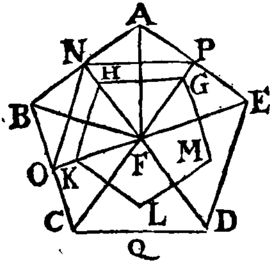

*In dato octaedro* ABCDEF *cubum describere.*

* Latera quatuor triangulorum pyramidis BCDEA bisecentur in M, N, O, P, & iungantur MN, NO, OP, PM,
ν. 4. 1. quae aequales ν sunt inter se, & parallelae ϑ lateribus qua-
ϑ. 2. 6.
ι. 14. 13. drati ι BCDE, & proinde κ angulos rectos in-
κ. 10. 11. ter se comprehendunt. Quare MNOP est quadratum. Deinde bisectis lateribus huius quadrati in G, H, K, L, iungantur GH, HK, KL, LG,
λ. 2. sch. 13. 1. quae ν sunt aequales, & angulos rectos λ comprehendunt; quia anguli, quos cum rectis
μ. 4. sch. 32. 1. MN, NO, OP, PM faciunt, semirecti μ sunt. Ergo GHKL est quadratum. Si in reliquis 5 pyramidibus octaedri eadem fiant: constituentur 5 alia quadrata ipsi GHKL aequalia, & cum ipso cubum terminantia, dato octaedro inscriptum. Q. E. F.

## PROP. V. PROBL.

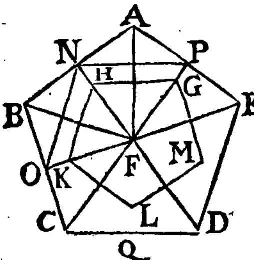
*In dato icosaedro dodecaedrum describere.*

Sit ABCDEF pyramis icosaedri, cuius basis pentagonum ABCDE. Iungantur centra circulorum, in triangulis AFB &c. inscriptorum, rectis GH, HK, KL, LM. Dico GHKLM esse




eſſe pentagonum dodecaedri inſcribendi. Nam rectae FG, FH, FK &c. productae biſecabunt [ν] latera pentagoni in P, N, O &c. quia [ξ] biſecant angulos ad vertices F triangulorum. Iungantur PN, NO, quae proinde aequales erunt [ν]. Iam quia [ν] FP = FN = FO, ac [o] FG = FH = FK: erunt GH, HK ipſis PN, NO [π] parallelae, ac inde erit [ρ] PN : GH = NF : FH = NO : HK, ideoque GH = HK. Similiter HK = KL &c. Porro quia ang. GHK [σ] = PNO, ac HKL = NOQ &c; ang. autem PNO =[τ] NOQ, quia ambo ſunt complementa aequalium [ν] angulorum in N, O ad duos rectos: erit ang. GHK = HKL &c. Denique ex puncto ſublimi F in planum ABCDE ductum intelligatur perpendiculum, & a puncto, in quo plano occurrit, ductae ſint rectae ad puncta P, N, O, Q, quae cum perpendiculari angulos [υ] rectos facient. Illi, quae per P ducta eſt, parallela intelligatur alia per G, & a puncto, in quo haec dictae perpendiculari occurrit, ducantur rectae ad H, K, L, &c. Iam quia [π] perpendicularis illa a recta per G ducta ſecatur in ratione FP : FG = FN : FH = FO : FK &c: patet reliquas rectas a punctis H, K, L ad perpendicularem ductas parallelas [π] eſſe illis, quae in plano ABCDE ad eandem ductae ſunt, ac ob id angulos rectos cum perpendi-

ν. 4. 1.
ξ. 4. 3.
o. 26. 1. & 4. 3.
π. 2. 6.
ρ. 2. ſch. 4. 6.
σ. 10. 11.
τ. 2. ſch. 13. 2.
υ. 4. 11.




pendiculari facere, & φ. 5. 11. proinde[φ] in vno omnes plano esse. Vnde patet, GHKLM esse pentagonum aequilaterum & aequiangulum, ideoque, si in reliquis vndecim pyramidibus icosaedri eadem construxerimus, proditura esse 12 pentagona huiusmodi, quae constituent dodecaedrum icosaedro inscriptum. Q. E. F.

## PROP. VI. PROBL.

*Quinque figurarum latera & angulos inuenire.*

1. Quia icosaedrum continetur 20 triangulis, & vnum triangulum 3 lateribus; singula vero latera bis sumuntur: numerus laterum erit dimidius facti ex 20 & 3, qui est 30. Similiter dodecaedri laterum numerus est dimidius facti ex 12 & 5, qui est 30. Et sic porro in cubo, & reliquis, inueniemus numerum laterum, sumentes dimidium facti ex numero planorum & numero laterum vniuscuiusque plani.

2. Numerum autem angulorum solidorum in his figuris habebimus, factum ex numero figurarum planarum & numero angulorum planorum in vnaqualibet diuidentes per numerum angulorum planorum in quolibet solido angulo. Sic in icosaedro factum ex 20

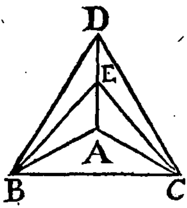
&

& 3, quod eſt 60 partientes per 5, habebimus 12 angulos ſolidos. Q. E. F.

## PROP. VII. PROBL.

*Planorum, quae ſingulas quinque figuras continent, inclinationem inuenire.*

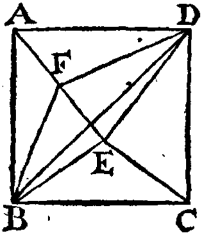
1. De cubo manifeſtum eſt, eius plana ad ſe inuicem recta eſſe.



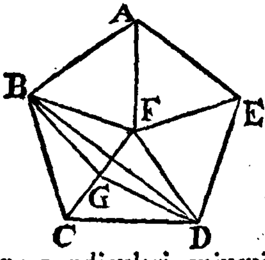

2. Sit tetraedri ABCD expoſitum vnum triangulum ABD, in quo a vertice B ad latus AD ducta ſit perpendicularis BE. Si centris A, D, interuallo BE deſcribantur duo circuli, & a puncto ſectionis ad centra A, D iungantur rectae: angulus, quem continebunt, erit inclinatio planorum. Nam iungatur in altero triangulo ACD recta CE. Et quia[χ] DE = EA: erit CE etiam in AD perpendicularis. Sed quia BCq = ABq = [ψ] AEq + EBq, & EAq < [ω] CEq: erit BCq < CEq + EBq, & ergo [α] ang. CEB acutus. Quare CEB erit inclinatio [β] planorum tetraedri. Hinc quum ſit CE = EB, & BC = AD, manifeſtum eſt, praedicta conſtructione inueniri angulum [γ] = BEC = inclinationi planorum. Q. E. F.

χ. ſch. 3. 3.
ψ. 47. 1.
ω. 2. ſch. 12. 13.
α. 13. 2.
β. 6. def. 11.
γ. 22. & 8. 1.

3. A latere octaedri deſcribatur quadratum, ducatur eius diameter BD, & centris B, D interuallo perpendiculari, quae a vertice ad baſin

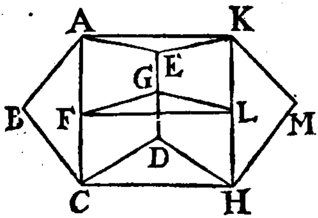



basin trianguli in octaedro ducitur, describantur duo circuli. Rectae a sectione circulorum ad B, D iunctae continebunt angulum aequalem complemento inclinationis ad 2 rectos. Sit enim ABCDE pyramis octaedri, & BF perpendicularis in $\triangle$o ABE. Iuncta DF erit perpendicularis in AE & $=$ ipsi BF.
δ. 19. 1. Hinc BFq $+$ FDq $=$ 2 BFq [δ] $<$ 2 ABq. Sed
ε. 12. 2. BDq $=$ 2 ABq. Ergo BDq $>$ BFq $+$ FDq,
ζ. 6. def. 11. ac ob id [ε] ang. DFB obtusus, Ergo BFD [ζ] $=$ complemento inclinationis planorum octa-
η. 22. & 8. 1. edri ad 2 rectos. Datur [η] autem ang. *BFD* dicta constructione. Q. E. F.



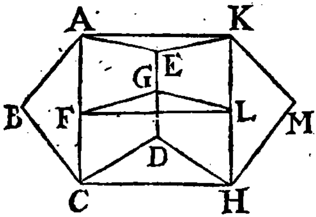

4. A latere icosaedri, descripto pentagono aequilatero & aequiangulo ABCDE ducatur recta BD angulum pentagoni C subtendens, & centris B, D interuallo perpendiculari cuiusuis e triangulis icosaedri describantur duo circuli, a quorum sectione ad B, D iunctae rectae continebunt complementum inclinationis planorum ad 2 rectos. Sit enim ABCDEF pyramis icosaedri, & BG perpendicularis vnius trianguli: erit DG per-
θ. 19. 1. pendicularis proximi trianguli. Et quia BG $<$ [θ]
ι. 21. 1. BC: erit [ι] ang. BGD $>$ obtuso BCD, ideoque ipse obtusus. Quare *BGD* complementum

in-erit inclinationis planorum icosaedri. Et manifestum, est hunc angulum dari praedicta constructione. Q. E. F.




5. Exposito pentagono dodecaedri ABCDE, & iuncta recta AC, angulum pentagoni subtendente, centris A, C interuallo FG rectae a puncto F bipartitae sectionis ipsius AC in latus pentagoni parallelum ED perpendicularis describantur duo circuli, & rectae a sectione ad terminos A, C ductae comprehendent complementum inclinationis planorum dodecaedri. Nam quia[κ] AC est latus cubi, a quo dodecaedrum describitur: ponatur ACHK esse vnum quadratorum illius cubi. Ergo erit KH recta subtendens angulum in pentagono adiacente, quod sit EKMHD. Ex G ad ED ducatur perpendicularis GL, & iungatur FL. Et quia ED, AC sunt parallelae: erit GF in AC perpendicularis, ergo per centrum circuli pentagono ABCDE circumscripti transibit[λ], & ED bisecabit[μ] in G. Hinc similiter GL bisecabit ipsam KH. Quare FL =[ν] AK = AC. Et quia perpendicularis ex G in FL cadens =* $\frac{1}{2}$ AE, & $\frac{1}{2}$ FL = $\frac{1}{2}$ AC[ξ] > $\frac{1}{2}$ AE: erit $\frac{1}{2}$ FL maior perpendiculari ex G in FL ducta, & ergo angulus, quem ea cum GF continet, maior ipso GFL. Hinc quia * haec perpendicularis bi-

κ. 17. 13.
λ. cor. 1. 3.
μ. 3. 3.
ν. 33. 1.
ξ. 8. 13.




o. 4. 1.

ſecat ipſam FL, erit ang. LGF $>$° GFL + GLF, ideoque obtuſus, & ob id complementum inclinationis pentagonorum dodecaedri. Sed quia ex modo dictis eſt FG = GL, atque oſtenſa eſt FL = AC: patet, dari ang. FGL per traditam conſtructionem. Q. E. F.

# FINIS

## ELEMENTORVM EVCLIDIS

LITTERIS GEORGII SAALBACHII.