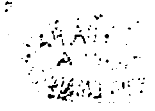

EVCLIDIS
ELEMENTORVM
Priores libri VI
GENVÆ
1644
VT
ILLVSTRE




Frid. Glass sculpsit

Ad Lectorem.

GEometricorum elementorum Euclidis priores libros ſex mole quidem paruos, ſed virtute magnos facili abſque vllo claritatis diſpendio compendioſa explicatione exararos accipe Humaniſsime Lector. Permulta *atq; ingentia aliorum volumina commentationibus eruditissimis ornabunt te, sed onerabunt etiam nimia prolixitate ingenium, maximè si nunc primum Problematibus, & Theorematibus Mathematicis aßuescat. Libellus iste excussis digressionum omnium vtilium alioqui, scolio-*

lio-

liorumq; quorumcunq; phaleris natiua dumtaxat venustate conspicuus in tuas se manus ingerit : Procul hinc Poeticus, quem moneat alienis plummis denudata Cornicula risus. Siquidem Mathematica elementa numquam magis elegantia sunt quam cum nuda. Experimen-

mentum tu ipse habebis plus quam satis euidens, si diurna, nocturnaq; manu eũdem euolueris; quam ne grauaret commodiori forma, vtpote breuiori, excussum ideo sese offert: Duplici nec non si malueris distinctum volumine altero quidẽ propositionum explicatione, & altero figurarum

rum delineatione contento, vt si quando à sẽsibili alterutrius speculatione ad intelligibilem congruenter magis ad Mathematicarum naturam animum auocare libuerit in hoc etiam adminiculo tibi, ac præsto sit. Altius enim hæc, stabiliusque insident animo, cum semel intellectu sola

figu-

figurarum inspectione iterum, aut bis repetũtur. Vtere igitur aliorum industria, ac labore ad mathematicas facultates omnes tibi præparato via compendio. Sitq; tibi Figura & gradus, non figura, & tres oboli. *Vale.*

EV-

EVCLIDIS ELEMENTORVM

LIBER PRIMVS.

DEFINITIONES.

1. PVnctum est cuius nulla pars est. *vt A.*
2. Linea vero longitudo latitudinis expers. *vt A B.*
3. Lineæ autem termini sunt puncta. *vt A & B*
4. Recta linea est, quę ex ęquo sua interiecet puncta, *qua videlicet est talis, vt procedendo ab vno puncto extremo, ad alterum punctum, non discedamus neque ad hanc, neque ad illam partem, sed ex aqua*

procedamus, neque est plus linea ex vna parte, quam ex altera.

5. Superficies est, quæ longitudinem, latitudinemque tantum habet. *vt A B C D*

6. Superficiei autem extremà sunt lineæ.

7. Plana superficies est, quæ ex æquo suas interiecet lineas, *quod intelligitur eadem ratione, qua linea recta definitio.*

8. Planus vero angulus est duarum linearum in plano se mutuo tangentium, & non in directum iacentium alterius ad alteram inclinatio, *aduerte autem non hoc ita esse intelligendum, quasi vero angulus sint illæ duæ lineæ tãtũ: est enim etiã superficies lineis inclusa, seu area illa.*

9. Cum autem, quæ angulum con-

continent, lineæ rectæ fuerint rectilineus ille angulus appellatur. *vt CBA.*

10. Cum vero recta linea super rectam consistens lineã eos, qui sunt deinceps angulos æquales inter se fecerit, rectus est vterq; æqualium angulorum, & quæ insistit recta, linea dicitur perpendicularis illi lineæ cui insistit, *vt est linea A B, qua ita cadit super lineam C D, vt faciat duos angulos ex vtraque parte, æquè accuminatos; hoc est enim esse æquales.*

11. Obtusus angulus est, qui recto maior est; *hoc est minus accuminatus. vt E B D.*

12. Acutus vero, qui minor est recto, *idest magis accuminatus, vt EBC.*

13. Terminus est, quod alicuius extremum est.

14. Figura est, quæ sub aliquo vel aliquibus terminis comprehenditur, *intellige linearibus non punctualibus.*

15. Circulus est figura plana, sub vna linea comprehensa, quæ peripherea appellatur; ad quam ab vno puncto eorum, quę intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectę lineę inter se sunt ęquales, *ex quo aduerte circulum esse aream lineæ illa inclusam non lineam includentem, vt etiam figura est, quæ includitur terminis. vt A C E B C.*

16. Hoc vero punctum centrū circuli appellatur. *vt D.*

17. Diameter autem circuli est recta quædam linea per cētrum dicta, & ex vtraque parte in circuli peripheriam terminata, quæ circulum bifariam secat. *Hoc est in duas*

par-

partes æquales, hoc enim est bifariam secare, vt A B.

18. Semicirculus verò est figura, quæ continetur sub diametro, & sub ea linea, quæ de circuli peripheria aufertur *à diametro, vt AGB.*

19. Rectilineæ figuræ sunt, quæ sub rectis lineis cõtinentur, *hoc est terminantur rectis lineis.*

20. Trilateræ quidem, quæ sub tribus.

21. Quadrilateræ, quæ sub quatuor.

22. Multilateræ autem, quæ sub pluribus, quam quatuor rectis lineis comprehenduntur.

23. Trilaterarum autem figurarum, æquilaterũ est triangulum, quod tria latera habet æqualia. *vt ABC.*

24. Isosceles autem, quod duo

tantum æqualia habet latera, *vt CBA*

25 Scalenum verò eſt, quod tria inæqualia habet latera, *vt EDF. et ſic diuiduntur triãgula ratione laterum: ratione verò angulorum iterum.*

26. Trilaterarum figurarum, rectangulum quidem triangulum eſt, quod vnum habet angulum rectum, *vt EDF*

27. Amblygonium, quod obtuſum angulum habet: *ſeu vnum maiorem recto, vt LMH.*

28 Oxygonium quod tres habet acutos angulos, *vt IHG*

29. Quadrilaterarum autem figurarum, quadratum quidem eſt, quod & æquilaterum, & rectangulum eſt, *habens angulos rectos, & latera æqualia, vt eſt in figura ABCD*

30. Altera verò parte longior figura eſt, quæ rectangula qui-

quidem at æquilatera non eſt, *vt in figura EFHG*

31. Rhombus autem, quę ęquilatera, ſed rectangula non eſt, *vt IKML.*

32. Rhomboides verò, quę aduerſa, & latera, & angulos habens inter ſe æquales, neque æquilatera eſt, neque rectangula, *vt PNOQ*

33. Præter has autem reliquæ quadrilateræ figuræ trapetia appellantur, *vt TRSV*

34. Parallelę rectæ lineæ ſunt, quæ cum in eodem ſint plano, & ex vtraque in infinitũ producantur parte in neutram, ſibi mutuo incidunt, *quod intellige de lineis rectis, & curuis circa idem centrum.*

35. Parallelogrammum eſt figura quadrilatera, cuius bina oppoſita latera ſunt parallella, ſeu æquidiſtantia.

36. Cum vero in Parallelogrãmo diameter ducta fuerit duæq; lineæ lateribus parallellæ secantes diametrum in vno eodemque puncto: ita vt, parallelogrammum ab his parallelis in quatuor distribuatur parallelogramma appellãtur duo illa, per quæ diameter non transit complementa, duo vero reliqua per quæ diameter incedit, circa diametrum consistere dicuntur, *vt in fig. ABDC.*

Petitiones siue postulata.

1. Postuletur, vt à quouis puncto in quoduis punctum rectam lineam ducere concedatur, *vt ab A ad BCD*
2. Et rectam lineam terminatam in continuum, seu in directum vlterius producere. *vt AB ad C. & AC ad D.*
3. Item quo vis centro, & interuallo circulũ describere.

vt *AE, AD, AC, AB*.

4. Item quacumque magnitudine data finita sumi posse aliam magnitudinem, vel maiorẽ, vel minorem, vt data AB sumere CD vel EF.

Communes notiones, siue Axiomata.

1. QVæ eidem æqualia, & inter se sunt æqualia, & quod vno æqualium maius est, aut minus, maius quoque est, aut minus altero æqualium; & si vnum æqualium maius est, aut minus magnitudine quapiam; alterum quoque æqualium eadem magnitudine maius est, aut minus *respectiuè. vide in libello Fig. pag. 6.*

2. Si æqualibus æqualia adiecta sint, tota sunt æqualia.

3. Si ab æqualibus æqualia ablata sint, quæ relinquuntur sunt æqualia. A 5. 3. Si

4. Si inæqualibus æqualia adiecta sint, tota sunt inæqualia; & si inæqualibus inæqualia adiecta sint maiori maius, & minori minus, remanent inæqualia.

5 Si ab inæqualibus æqualia ablata sint, reliqua sunt inæqualia; etsi ab inæqualibus inæqualia ablata sint à maiori minus, à minori maius, reliqua sunt inæqualia.

6. Quæ eiusdē duplicia sunt, inter se sunt æqualia, & quod vnius æqualiū duplum est, duplum est & alterius.

7. Quæ eiusdem sunt dimidia, inter se sunt æqualia; & cōtra.

8. Quæ sibi mutuo congruunt inter se sunt æqualia.

9. Totum est maius sua parte.

10. Duæ lineæ rectæ non habent commune segmentum, *ut pag.6. BD,CD*

11. Duæ rectæ in vno puncto concurrentes, si producantur ambæ necessario in illo puncto se mutuo secabunt.

12. Omnes anguli recti sunt inter se æquales.

13. Si in duas rectas lineas altera recta incidẽs internos, & ad easdem partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineę in infinitum productæ sibi mutuo incident ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores. *si enim sint æquales duobus rectis probabitur infra, quod nõ coincident, si sint maiores duobus rectis, constabit ex dicendis, quod ab inuicem discedent, ergo si sint minores coincident,*

14. Duæ rectæ lineæ spatium non comprehendunt; *manendo in sua rectitudine, non*

claudunt aream, non figuram formant, vt AB, CB

15. Si æqualibus inæqualia adijciantur, erit totorum excessus adiūctorum excessui æqualis.

16. Si inæqualibus æqualia adiungantur, erit totorum excessus excessui eorum, quę à principio erant, æqualis.

17. Si ab æqualibus inæqualia demantur, erit residuorum excessus excessui ablatorum æqualis.

18. Si ab inæqualibus æqualia demantur, erit residuorum excessus excessui totorum æqualis.

19. Omne totum ęquale est omnibus suis partib. simul sumptis.

20. Si totum totius est duplū, & ablatum ablati, & reliquū reliqui erit duplum.

PROBLEMA I.

PROPOSITIO PRIMA.

Super data recta linea terminata triangulum æquilaterum constituere.

SIt data recta linea terminata A B, super quam cõstruere iubemur triangulum æquilaterum. facto centro in A, ad interuallum A B, describatur circulus C B D, & facto centro in B, ad interuallum pariter B A, describatur alter circulus C A D, secans priorem in C, tum ex puncto interfectionis C. ducatur vna linea ad A. altera ad B, dico factum esse triangulum æquilaterum super datam rectam lineam finitam A B. quoniam enim

enim A B, & A C, sunt duæ rectæ lineæ a centro A. ad circumferētiam eamdē, erunt inter se æquales. rurs⁹ quia rectę BC,BA ducūtur ex cētro B. ad circumferentiam eamdē erunt æquales inter se: cum igitur tam B C, quam A C. sint æquales ipsi A B. erunt & inter se, equales. factum igitur est, quod erat faciendum. Patet hinc aditus etiam ad triangula alterius generis facienda, vt in lib. Fig. pag. 7.

PROBLEMA II.
PROPOSITIO II.

Ad datum punctum data recta linea æqualem rectam lineam ponere.

Sit data linea B C; & sit datum punctum A. à quo pun-

puncto incipere debeat alia linea æqualis ipsi B C. si non sit ducta linea ducatur à puncto A ad C. facto centro in C. interuallo C B. describatur circulus B, & super lineam C A, constructo triangulo æquilatere producatur latus D C, vsque ad circulum si opus sit. tũ facto centro in D. interuallo D E. describatur alter circulus E, & producatur latus DA, vsque in G. l. in F. Dico AG esse lineam imperatam, quoniam enim D E, D G. æquales sunt à centro D. ad eamdem circumferentiam ablatis D A, DC æqualibus lateribus trianguli æquilateri remanebit A G, C E æqualis. quod erat faciẽdum. nam CE est ęqualis CB, vt à centro C ad eamdem circumferentiam.

PROBLEMA III.

PROPOSITIO III.

Duobus datis rectis lineis inæqualibus, de maiore æqualem minori detrahere.

Sint datæ duæ rectæ lineæ inæquales A minor B C maior; vt ex maiore detrahatur linea ęqualis minori A. Fiat linea B E, ex puncto B, æqualis ipsi A, tum facto centro in B interuallo B E, describatur circulus F secans lineā C B in D, dico D B esse lineam imperatam. quoniam enim linea A, & linea B D sunt æqual[illegible]dē B E erunt æquales inter se linea A, & linea B D, quod erat faciendum.

THEO-

THEOREMA I.

PROPOSITIO IV.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, vtrunque vtrique, habeant vero angulum angulo æqualem sub æqualibus rectis lineis contentum, et basim basi æqualem habebunt, eritque totum triangulum triangulo æquale. & anguli correspondentes æquales.

SInt duo triangula A B C, D E F, & latus B A vnius sit æquale lateri E D alterius, & C A. ipsi D. F: sit autem angulus B A C angulo E D F æqualis, dico & basim B C basi E F æqualem, & totum triangulum B A C triangulo E D F æqua-

æquale. quoniam enim recta A B rectæ D E ponitur æqualis, fit vt si altera superponi intelligatur alteri, collocato puncto A in D, ipsę sibi mutuo cōgruant, punctumq; B. cadet in puncto E, & si recta A C cadet super rectam D F, cum habeat extremum A in D, C cadet in F, & quia angulus B A C, supponitur angulo E D F æqualis, congruet cum altero angulo, & ita superpositis duobus his triangulis A cadet in D, B in E; C in F, ergo, & basis B. C congruet cum basi E F: si enim caderet supra, aut infra, duæ rectæ lineæ superficiem clauderent. quod est absurdum; & basis igitur, & omnes anguli correspondentes, qui æqualibus continentur lateribus sunt inter se æquales, & congruunt, quod erat demonstrandum.

THEO-

THEOREMA II.

PROPOSITIO V.

Isoscelium triangulorum, qui ad basim sunt anguli, inter se sunt æquales, & productis æqualibus lateribus, qui sub basi fiunt anguli inter se æquales erunt.

SIt triangulum Isosceles A B C in quo latera AB, AC sint æqualia inter se. dico angulos A B C; A C B inter se æquales esse item si latera AB, A C producātur, angulos quoque infra basim DBC; ECB inter se æquales esse. Ex linea enim A B producta sumatur A D cui abscindatur ex altera producta infinite, id est, vt non possit deesse, linea A E equalis ipsi A D, & ducantur rectæ B E, C D. Considerentur iam duo triangula ABE, ACD, quæ habent conditiones quartæ; latus enim A B est æquale lateri A C, quia sunt latera trianguli Isoscelis, & latus A E est æquale lateri A D, ex constructione, & angulus B A E est æqualis angulo C A D est enim angulus communis vtrique triangulo, ergo & basis C D est æqualis basi B E, & angulus A E B est æqualis angulo ADC, & angulus ABE est æqualis angulo A CD, considerentur iam duo triangula B C D, & C B E, quæ pariter habent conditiones quartæ; latus enim D C monstratum est æquale lateri B E, & cum A D, A E sint æqualia ex constructione, si auferantur BA, CA auferuntur partes æquales, remanebunt igitur

Igitur B D, C E latera equalia, & angulus B D C monstratus est æqualis angulo C E B: ergo angulus D B C infra basim in triangulo Isoscele est æqualis angulo B C E pariter infra basim,& angulus BCD est æqualis angulo CBE. Et quoniam totus angulus A C D monstratus est æqualis angulo ABE si auferantur partes æquales, nimirum C B E ab angulo ABE, & angulus B C D ab angulo A CD, remanebunt anguli ad basim ABC, ACB æquales, quod erat demonstrandum.

THEOREMA III.

PROPOSITIO VI.

Si trianguli duo anguli æquales inter se fuerint, & sub æqualibus angulis subtensa latera æqualia inter se erunt.

IN triangulo ABC sint duo anguli ABC; ACB super latus B C æquales. dico & duo latera illis opposita AB AC esse æqualia. Si enim non dicuntur æqualia, sit AB maius quam AC, ex quo abscindatur B D æqualis rectæ A C, ducaturq; recta CD, & considerentur duo triangula ACB, DBC; quæ, ex illa suppositione essent æqualia, haberent enim proprietates quartæ; nam D B dicitur æqualis ipsi A C; B C est com-

communis; angulus DBC supponitur æqualis angulo A C B: ergo triangulum DBC erit æquale triangulo ABC pars toti, quod est impossibile, ergo illa latera erant æqualia, quod erat demonstrandum.

THEOREMA IV.

PROPOSITIO VII.

Super eadem recta linea duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ æquales vtraque vtriq; non constituentur ad aliud, atq; aliud punctum ad easdem partes.

SVper recta A B sint ductæ duæ rectæ lineæ A C, B C, quæ concurrant in puncto C, dico super eandem rectam A B non posse duci alias duas lineas æquales prioribus vtraque quę vtriquę, quæ concurrant, ad aliud punctū, quam ad punctum C, si ducantur ad easdem partes: si enim possunt duci, ducantur; & cadant in puncto D. linea igitur A C, supponitur æqualis lineæ AD, & BC ipsi BD: ergo ductà CD, triãgulum ADC est Isosceles, ergo anguli A C D, A D C sunt æquales: similiter triangulum BDC est Isosceles: ergo anguli EDC, FCE infra basim sunt æquales, sed angulus A D C est minor angulo E D C pars toto; ergo etiam est minor angulo F C D, qui ponitur ęqualis angulo E D C sed angulus A E C ponitur æqualis angulo A C E, & iam ostenditur minor angulo F C E, qui est illius pars: ergo est æqualis toto, & minor parte, ergo pars est maior, quam totum. non igitur concurrent ad punctum

D,

D, quod erat demonstrandum.

THEOREMA V.

PROPOSITIO VIII.

Si duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus vtrunque vtriq; æqualia, habuerint vero, & basim basi æqualem; angulum quoque sub æqualibus rectis lineis contentum angulo æqualem habebunt.

Sint duo latera AB, AC triãguli A B C duobus lateribus DA, D B trianguli D A B ęqualia, vtrunque, vtrique, ideſt vnum vni, alterum alteri, ſit autem Baſis B C Baſi A B æqualis, dico angulum A æqualem eſſe angulo D. intelligatur e-enim basis B C superponi basi A B, cum sint æquales congruent, punctum B, puncto A, & C. puncto B cogitetur triãgulum A B C cadere super triãgulum D A B, non cadet punctum A, nisi super punctum D, alioquin duæ rectæ lineæ ductæ ad easdem partes æquales prioribus concurrent ad aliud punctum, quod est impossibile, cum igitur anguli congruant, æquales inter se erunt, quod erat demonstrandum.

PROBLEMA IV.

PROPOSITIO IX.

Datum angulum rectilinium Bifariam secare.

SIt datus angulus B A C diuidendus in duas partes

equaæquales. sumantur A D, A B æquales lineæ, & ducatur recta D E super quam constituatur triangulum æquilaterum D F E, & ab angulo F ad A ducatur F A. dico hanc lineam secare angulum B A C in duas partes æquales. quoniam enim triangulum F D A. habet duo latera duobus lateribus ęqualia triangulo F E A. vtrunque vtrique, & basim basi æqualem latus enim F D est ęquale lateri F E trianguli æquilateri, D A est ęquale E A. linea F A est basis communis; ergo angulus BAF est ęqualis angulo CAF, quod erat faciendum.

PROBLEMA V.

PROPOSITIO X.

Datam rectam lineam finitam, bifariam secare.

SIt data recta linea D E bifariam diuidenda. Constitue super eam triangulum equilaterum D A E, deinde diuide angulum D A E bifariam per A F dico lineam D E esse diuisam bifariam in G. triangula enim A D G, A E G habent cõditiones quartæ; latus enim A D est equale lateri A E, A G est commune; angulus D A G factus est equalis angulo EAG ergo linea D G est equalis lineę E G, quod erat faciendum.

PRO-

PROBLEMA VI.

PROPOSITIO XI.

Data recta linea, à puncto in ea dato rectam lineam ad angulos rectos excitare.

Sit data recta D E, in ea pũctum G, à quo excitanda sit G A perpendicularis ipsi D E. sumantur duæ equales vtrinque DG, G E. & super totam D E constitue triangulum equilaterum D A E, tum ab angulo A ad G duc A G, hanc dico esse perpẽdicularem: duo enim triangula D A G, G A E habent conditiones octauę D A est equale lateri A E, G D est equale ipsi G E, G A est commune, ergo anguli sunt equales; ergo angulus D G A est equalis

qualis angulo E G A. ergo linea G A est perpendicularis, quod erat faciendum.

PROBLEMA VII.

PROPOSITIO XII.

Super datam rectam lineam infinitam, à dato puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam deducere.

Sit data recta A B, & datum punctum C, ex quo super A B, demittenda sit perpendicularis. facto centro in C describatur circulus tantæ magnitudinis, vt abscindatur pars aliqua datæ lineæ AB puta D E. diuidatur autem linea bifariam in F, & à puncto C ducatur linea ad F. hanc dico esse perpendicularem, quo-

niam

nã enim duo triangula C E F, C D F habent conditiones octauę latus enim C D, est ęquale lateri C B à centro ad circumferentiam ambo. D F est æquale F E ex constructione F C est commuue. ergo angulus C F D est æqualis angulo CFE; ergo CF est perpendicularis, quod erat faciendum.

THEOREMA VI.

PROPOSITIO XIII.

Cum recta linea super rectam consistens lineam angulos facit, aut duos rectos, aut duobus rectis æquales faciet.

Sit recta linea A B, quæ consistat super C D. dico vel efficere duos angulos rectos, si sit perpendicularis, vel ęquales duobus rectis, si non sit perpendicularis. educatur enim perpendicularis ad E B ex E perpendicularis ad C D; quoniam angulus rectus D B E æqualis est duobus angulis E B A, A B D, erunt apposito communi angulo recto E B C duo recti E B D. E B C tribus angulis C B E, E B A, A B D æquales: & quia angulus E B D est æqualis duobus angulis E B A, A B D; erunt apposito communi angulo E B C, duo anguli C B A, ABD. æquales tribus C B E, E B A, A B D; sed illi tres erant equales duobus rectis, ergo etiam isti duo sunt æquales duobus rectis, quod erat demonstrandum.

THEO-

THEOREMA VII.

PROPOSITIO XIV.

Si ad aliquam rectam lineam, atque ad eius punctum duæ rectæ lineæ non ad easdem partes ductæ eos, qui sunt deinceps angulos duobus rectis æquales fecerint, in directum erunt inter se illæ duæ rectæ lineæ.

SInt ductæ duæ rectæ lineæ ad punctum C in diuersas partes CD & CE faciētes cum A B, angulos æquales duobus rectis D C A, A C E. dico lineā D C E esse vnam continuatam in directum productam. Si non est, producatur D C in directū. & sit D C F. quoniam igitur super rectam D C F ex aduersario cadit recta A B faciet duos angulos D C A, A C F æquales duobus rectis, sed etiam anguli D C A, A C E supponuntur æquales duobus rectis, ergo æquales inter se, & tamen hoc est totum, illud est pars; ergo pars est æqualis toti, quod est impossibile. ergo illa linea DCE est vna linea recta. quod erat demonstrandum.

THEOREMA VIII.

PROPOSITIO XV.

Si duæ rectæ lineæ se mutuò secent, angulos qui ad verticem sunt, æquales inter se efficient.

SI sint duæ rectæ A C, B D, quæ se mutuo secent in E. dico angulos ad verticem E æquales esse, nimirum angulum A E D angulo C E B, & angulũ

DEC,

D E C, angulo A E B, cũ enim ſuper rectam A C cadit linea D B. anguli A E D, D E C erunt ęquales duobus rectis ſimiliter cum ſuper rectam D B cadat A C. erunt anguli D E A, A E B æquales duobus rectis, erunt igitur duo anguli A E B, D E A æquales duobus C E D, D E A. ablato igitur communi A E D. & conſequenter ab vtroque parte æquali, remanebit angulus A E B, æqualis angulo C E D eodem modo demonſtrabitur angulus D E A angulo B E C æqualis. quod erat faciendum.

THEOREMA IX.

PROPOSITIO XVI.

Cuiuscunque trianguli vno latere producto externus angulus vtrolibet interno, & opposito maior est.

SIt triangulum A B C, producto latere B A ad D. dico angulum externum D A C maiorem esse quolibet interno A B C, vel B C A. diuidatur enim C A bifariam in E, & ducatur ab angulo B ad E linea B E, quæ producatur extra triangulum in directum tantum, vt E F sit æqualis ipsi B E, & ducatur recta F A, & F A producatur vtcunque in I. quoniam igitur triangula B E C, A E F habent conditiones

nes quartę, latus enim B E est æquale ductum lateri E F, & ex diuisione latus E C factum est æquale lateri E A, & angulus A E F est æqualis angulo ad verticem C F B: ergo angulus E, C B est æqualis angulo F A E. sed angulus D A C est maior angulo F A E, totum, parti; ergo est etiam maior angul. E C B equali FAE eodem modo ostenditur angulus G A B maior angulo A B C, producendo latus C A, & ducẽdo lineam, vt factum est à B ab angulo C per H. diuiso bifariã B A in H. quod erat demonstrandum.

THEO-

THEOREMA X.

PROPOSITIO XVII.

Cuiuscumque trianguli duo anguli simul sumpti sunt minores duobus rectis,

IN triangulo A B C dico quoscunque duos angulos simul sumptos minores esse duobus rectis. producantur enim duo quæuis latera C B, C A, quoniam angulus A B D maior est interno, & opposito B A C, cum duo anguli ABD, A B C sint æquales duobus rectis, si loco anguli A B D ponatur angulus C A B minor illo, erunt duo anguli A B C, C A B minores duobus rectis. quod erat demonstrandum.

THEO-

THEOREMA XI.

PROPOSITIO XVIII.

Omnis trianguli maius latus maiorem angulum subtendit.

SIt in triangulo A B C latus A C, maius latere A B, dico angulum ABC, subtensum à maiore latere maiorem esse: nam ex A C auferatur A D. æqualis ipsi AB,& ducatur recta BD, quoniam igitur duo latera AB, AD per constructionem sunt æqualia, erunt anguli ad basim ABD, ADB æquales, sed angulus ADB est maior angulo DCB. externus interno, & opposito in paruo triangulo; ergo etiam A B D est maior angulo DCB. ergo multo magis totus angulus ABC erit maior angulo lo ACB, quod erat demonstrãdum, ex quo constat in triangulo scaleno angulos esse inæquales.

THEOREMA XII.

PROPOSITIO XIX.

Omnis trianguli maior angulus à maiore latere subtenditur.

IN triangulo ABC angulus B maior sit angulo C. dico latus AC subtendens angulum maiorem maius esse: si enim nõ est maius, vel est æquale, vel minus: si est ęquale, ergo anguli BC ad basim erunt æquales, sed supponitur B maior. Si latus AC sit minus latere AB, ergo angulus B minor erit angulo C, contra suppositum: si igitur non est nec æquale, nec

minus,

minus, erit maius. quod erat demonstrandum.

THEOREMA XIII.
PROPOSITIO XX.

Omnis trianguli qualibet duo latera simul sumpta reliquo sunt maiora.

IN triangulo DBC dico quelibet duo latera BD, DC simul maiora esse reliquo BC producatur enim CD vsque ad A, vt recta AD sit æqualis ipsi DB, ducaturque recta BA in triangulo igitur Isoscele ABD erunt anguli ad basim ABD, DAB æquales; angulus autem ABC maior est angulo ABD totum parte; ergo & latus CA; maius erit latere BC, opposito ang. A æquali angulo ABD, sed latus CA est æquale duobus lateteribus BD, DC; cum BD sit æqualis ipsi DA, & DC commune; ergo duo latera BD,DC simul maiora sunt reliquo B C, quod erat demonstrandum.

THEOREMA XIV. PROPOSITIO XXI.

Si super trianguli uno latere ab extremitatibus duæ rectæ lineæ ductæ fuerint, quæ interius iũgantur; Hæ lineæ reliquis triãguli duobus lateribus minores erunt, maiorem verò angulum continebunt.

SInt in triangulo ABC in extremitatibus B & C. constitutæ duæ rectæ lineæ, quæ iungantur intra triangulum ad punctum D dico BD,DC simul minores esse quam BA, A C simul; angulum vero BDC maiorem

iorem esse angulo BAC producatur enim BD vsque in E quoniam igitur in triangulo B A E duo latera BA, AE simul maiora sunt latere B E. erũt addito communi EC, tres lineæ B A, AE, EC maiores duabus BE, BC similiter in triangulo CDE maiora sunt duo latera CE, ED simul reliquo solo CD; ergo addito communi B D erunt tres lineæ CE, ED, DB maiores duabus CD, DB; ergo multo magis CD, DB minores erunt quam CA, AB; quod autem angulus sit maior patet; nam angulus DEC maior est angulo A, qui in triangulo BAE est internus, & oppositus; sed angulus BDC est externus angulo CED interno, & opposito, ergo est maior illo, ergo multo maior angulo A, quo adhuc ille est maior, quod erat demonstrandum.

PRO-

PROBLEMA VIII.

PROPOSITIO XXII.

Tribus datis rectis lineis, quarum duæ simul tertia sint maiores, triangulum constituere.

DEbent esse quælibet duæ lineę simul reliqua maiores, propter demonstrata ꝑpositione 20. sint igitur datæ tres rectæ lineæ A, B, C. ducatur DG linea in infinitum, hoc est, vt non possit ex illa deesse, & sumatur DF æqualis ipsi A, FG ęqualis ipsi B; & G H ęqualis ipsi C. tum facto centro in F ad interuallum FD describatur circulus, & facto centro in G interuallo G H describatur alter circulus, qui priorem secabit alioquin sola linea F G esset

esset vel æqualis, vel maior quam duæ simul GH, FD contra suppositum. ex puncto igitur K in quo se secant circuli ducantur duæ rectę KF, KG. dico triangulum esse constitutum tribus lineis, quę, datis sūt ęquales. nam KF est ęqualis FD à centro ad circumferentiam, cui etiam est ęqualis A. KG est ęqualis HG, cui etiam est ęqualis C, FG est ęqualis ipsi B. quod erat faciendum.

PROBLEMA IX.

PROPOSITIO XXIII.

Ad datam rectam lineam, datūq; in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere.

SIt data recta linea AB, & in ea datum punctum C, in

quo

quo constituendus sit angulus F E D equalis. Sumantur duę rectę EH, EG vtrinque, & ducatur recta HG, tum sumantur in recta A B ex puncto C tres lineę equales tribus C I equalis GE, CA, GH, IB, EH, & ex his tribus fiat triangulum IKC, & quoniam duo triangula C K I, GEH, habent conditiones octauę, tria latera tribus lateribus ęqualia, erit angulus GEH æqualis angulo I C K in dato puncto, quod erat faciendum.

THEO.

THEOREMA XV.

PROPOSITIO XXIV.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrunque vtrique, habuerint vero angulum angulo maiorem contentum æqualibus rectis lineis, & basim basi maiorem habebunt.

SInt duo latera AB, AC ęqualia duobus lateribus D E, D H singula singulis angulus vero A maior sit angulo E, DH. dico & basim BC maiorem esse basi H E. constituatur enim angulus G D E ęqualis angulo A. per lineam D G, quę fiet ęqualis ipsi D H, & producatur recta GE. quoniam igitur duo triangula BAC, EDG habent con-

conditiones quartę, erit basi BC basi EG ęqualis, siue igitur dicatur linea EG cadere supra lineam HE siue nō, semper HG apparebit minor quam EG; si enim congruit patenter excedet; si non congruit, vel non congruere dicatur, vt est EF, ducatur linea FG. quoniam enim duo latera DG, DF ęqualia dicuntur erunt anguli ad basim DGF, DFG ęquales, ergo angulus EGF, qui est minor angulo DGF erit etiam minor angulo DFG, ergo multo minor angulo totali EFG, ergo linea EG, quę subtenditur angulo maiori, erit maior linea EF; quę subtenditur minori. ergo etiam minor erit quam BC, quę monstrata est ęqualis ipsi GE, quod erat demonstrandū.

THEO-

THEOREMA XVI

PROPOSITIO XXV

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint vtrunque vtrique, basim vero basi maiorem, et angulum angulo maiorem habebunt.

Sint duo latera AB, AC æqualia lateribus DE, DH singula singulis; basis vero sit basi maior, & angulus A erit maior angulo D. si enim dicatur æqualis, erit per quartam basis basi æqualis; si dicatur minor, erit basis BC per 24. basi HE minor; supponitur autem maior. ergo est maior, quod erat demonstrandum.

conditiones quartę, erit basis BC basi EG ęqualis, siue igitur dicatur linea EG cadere supra lineam HE siue nō, semper HG apparebit minor quam EG; si enim congruit patenter excedet; si non congruit, vel non congruere dicatur, vt est EF, ducatur linea FG. quoniam enim duo latera DG, DF ęqualia dicuntur erunt anguli ad basim DGF, DFG ęquales, ergo angulus EGF, qui est minor angulo DGF erit etiam minor angulo DFG, ergo multo minor angulo totali EFG, ergo linea EG, quę subtenditur angulo maiori, erit maior linea EF; quę subtenditur minori. ergo etiam minor erit quam BC, quę monstrata est ęqualis ipsi GE, quod erat demonstrandū.

THEO-

THEOREMA XVI

PROPOSITIO XXV.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint vtrunque vtrique, basim vero basi maiorem, et angulum angulo maiorem habebunt.

Sint duo latera AB, AC æqualia lateribus DE, DH singula singulis; basis vero sit basi maior, & angulus A erit maior angulo D. si enim dicatur æqualis, erit per quartam basis basi æqualis; si dicatur minor, erit basis BC per 24. basi HE minor; supponitur autem maior. ergo est maior, quod erat demonstrandum.

conditiones quartę, erit basis BC basi EG ęqualis, siue igitur dicatur linea EG cadere supra lineam HE siue nō, semper HG apparebit minor quam EG; si enim congruit patenter excedet; si non congruit, vel non congruere dicatur, vt est EF, ducatur linea FG. quoniam enim duo latera DG, DF ęqualia dicuntur erunt anguli ad basim DGF, DFG ęquales, ergo angulus EGF, qui est minor angulo DGF erit etiam minor angulo DFG, ergo multo minor angulo totali EFG, ergo linea EG, quę subtenditur angulo maiori, erit maior linea EF; quę subtenditur minori. ergo etiam minor erit quam BC, quę monstrata est ęqualis ipsi GE, quod erat demonstrandū.

THEO-

THEOREMA XVI

PROPOSITIO XXV.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint vtrunque vtrique, basim vero basi maiorem, et angulum angulo maiorem habebunt.

Sint duo latera AB, AC æqualia lateribus DE, DH singula singulis; basis vero sit basi maior, & angulus A erit maior angulo D. si enim dicatur æqualis, erit per quartam basis basi æqualis; si dicatur minor, erit basis BC per 24. basi H E minor; supponitur autem maior. ergo est maior, quod erat demonstrandum.

conditiones quartę, erit basis BC basi EG ęqualis, siue igitur dicatur linea EG cadere supra lineam HE siue nō, semper HG apparebit minor quam EG; si enim congruit patenter excedet; si non congruit, vel non congruere dicatur, vt est EF, ducatur linea FG. quoniam enim duo latera DG, DF ęqualia dicuntur erunt anguli ad basim DGF, DFG ęquales, ergo angulus EGF, qui est minor angulo DGF erit etiam minor angulo DFG, ergo multo minor angulo totali EFG, ergo linea EG, quę subtenditur angulo maiori, erit maior linea EF; quę subtenditur minori. ergo etiam minor erit quam BC, quę monstrata est ęqualis ipsi GE, quod erat demonstrandū.

THEO-

THEOREMA XVI

PROPOSITIO XXV.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint vtrunque vtrique, basim vero basi maiorem, et angulum angulo maiorem habebunt.

SInt duo latera AB, AC æqualia lateribus DE, DH singula singulis; basis vero sit basi maior, & angulus A erit maior angulo D. si enim dicatur æqualis, erit per quartam basis basi æqualis; si dicatur minor, erit basis BC per 24. basi H E minor; supponitur autem maior. ergo est maior, quod erat demonstrandum.

conditiones quartę, erit basis BC basi EG ęqualis, siue igitur dicatur linea EG cadere supra lineam HE siue nõ, semper HG apparebit minor quam EG; si enim congruit patenter excedet; si non congruit, vel non congruere dicatur, vt est EF, ducatur linea FG. quoniam enim duo latera DG, DF ęqualia dicuntur erunt anguli ad basim DGF, DFG ęquales, ergo angulus EGF, qui est minor angulo DGF erit etiam minor angulo DFG, ergo multo minor angulo totali EFG, ergo linea EG, quę subtenditur angulo maiori, erit maior linea EF; quę subtenditur minori. ergo etiam minor erit quam BC, quę monstrata est ęqualis ipsi GE, quod erat demonstrandũ.

THEO-

THEOREMA XVI

PROPOSITIO XXV

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint vtrunque vtrique, basim vero basi maiorem, et angulum angulo maiorem habebunt.

Sint duo latera AB, AC æqualia lateribus DE, DH singula singulis; basis vero sit basi maior, & angulus A erit maior angulo D. si enim dicatur æqualis, erit per quartam basis basi æqualis; si dicatur minor, erit basis BC per 24. basi HE minor; supponitur autem maior. ergo est maior, quod erat demonstrandum.

THEOREMA XVII.

PROPOSITIO XXVI.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint vtrunque vtrique, vnumque latus vni lateri æquale, quodcunque latus sit, habebunt & reliqua latera, et angulum angulo æqualem.

SInt duo anguli E. G. duobus angulis B,C ęquales, & sit latus B C lateri E G ęquale. dico reliqua latera reliquis lateribus æqualia, & angulum angulo. Si enim C A non eſt ęquale ipſi E D, ſed dicitur maius ſumatur ex maiore C A ęquale ipſi E D, & ſit I C, & ducatur I B. quoniam autem duo triãgula IBC,

DEG

DEG habent conditiones 4. latus BC lateri EG, IC, ED æqualia, & angulus C angulo E ex suppositione, erit angulus IBC angulo DGE æqualis, sed etiam angulus ABC supponitur eidem equalis, ergo illi duo IBC, ABC erunt equales inter se, & pars esset equalis toti; ergo etiam latera, & angulus est equalis. quod erat demonstrandum.

THEOREMA XVIII.

PROPOSITIO XXVII.

Si in duas rectas lineas recta incidens alternatim angulos æquales inter se fecerit, Parallele erunt inter se rectæ lineæ.

Sint duo anguli BGM, CMG quos facit recta EH. incicidens in lineas AB , CD inter se equales , dico A B , C D parallelas : si enim non sunt parallelę productæ concurrent ad vnam ex partibus, & facient triangulum , verbi gratia, I M G in quo angulus externus L M C ęqualis esset vni ex internis , & oppositis IGM quod est impossibile . ergo non concurrent , neque facient triangulum , ergo sunt parallelæ,quod erat ostendendum .

THEO-

THEOREMA XIX.

PROPOSITIO XXVIII.

Si in duas rectas lineas recta incidens externum angulum interno, & opposito ad easdem partes aequalem fecerit, aut internos ad easdem partes duobus rectis aequales, parallelae erunt illae rectae lineae.

Sit angulus EGA æqualis interno, & opposito ad easdem partes LMC. diço esse parallelas, nam anguli EGA, BGM ad verticem sunt æquales; ergo si ille est æqualis, etiam iste erit æqualis ipsi LMC, ergo per hoc erunt parallelę. Deinde sint anguli AGM, GMC ęquales duobus rectis, etiam anguli AGM, BGM sunt æquales duo-

 bus

bus rectis, ac proinde æquales inter se, ablato igitur communi AGM relinquetur B G M æqualis ipsi GMC alternatim posito; & ita per hoc erunt parallelæ. quod erat demonstrandum.

THEOREMA XX.

PROPOSITIO XXIX.

In parallelas recta incidens linea, & alternatim angulos inter se æquales efficiet, & externum interno ad easdem partes, & internos ad easdem partes duobus rectis æquales.

IN parallelis ABCD recta incidat E F. dico angulos alternos AGH, G H D inter se æquales, si enim non sunt æquales, sit maior AGH, addito com-

communi BGH, erunt AGH, HGB maiores, quam BGH, GHD: sed illi sunt duobus rectis æquales, ergo isti sunt minores duobus rectis; coibunt ergo lineæ, quod est contra suppositum. Est etiam angulus externus EGB æqualis interno, & opposito ad easdem partes GHD: si enim illi AGH est æqualis, cum huic EGB sit ad verticem erit etiam ipse illi æqualis, sic monstrabuntur anguli interni ad easdem partes duobus rectis æquales, cum duo AGH, BGH sint æquales duobus rectis, quod erat faciendum.

THEOREMA XXI.

PROPOSITIO XXX.

Lineæ, quæ sunt eidem parallelæ, inter se sunt parallelæ.

LIneæ AB,CD,sint paralellę eidem K I, vel CD. dico inter se esse parallelas,ducatur enim G H, quæ secet omnes: angulus BGL erit æqualis angulo GLK cum sint parallelæ, & huic erit æqualis angulus LMC, cum etiam istæ sint paralellæ, ergo angulus CML erit ęqualis angulo AGE, ergo erũt parallelæ CD, AB, quod erat demonstrandum.

PRO-

PROBLEMA X.

PROPOSITIO XXXI.

Dato puncto datæ rectæ lineæ ducere lineam alteri parallelam.

Ex puncto M, ducenda sit linea parallela AB, ducatur ex M vtcunque ad lineam AB linea ME, & ducatur linea per punctum M, quæ cum linea ME, ducta faciat angulum CME æqualem angulo B G M. dico hanc esse parallelam, cum anguli alterni sint ex constructione æquales, quod erat faciendum.

THEOREMA XXII.

PROPOSITIO XXXII.

Cuiuscunque trianguli vno latere producto externus angulus duobus internis, & oppositis æqualis est, & tres anguli simul sumpti interni æquales sunt duobus rectis.

IN triangulo ABC producatur latus BC in D, dico angulum ACD ęqualem esse duobus internis,& oppositis A,& B ducatur enim ex C linea C E, quæ sit parallela ipsi A B; quoniam igitur linea AC incidit in parallelas AB, EC erunt anguli alterni A, & ACE æquales, & quia recta B D pariter incidit in easdem parallelas A B, C E faciet angulũ externum D C E æqua-

æqualem interno ad easdem partes B. ergo totus angulus ACD est æqualis duobus internis A, & B; cum autem duo anguli ACB, & ACD sint æquales duobus rectis; erunt etiam angulus ACB, cum angulis A, & B, equales duobus rectis; cum isti æquiualeant externo, quod erat demonstrandum.

THEOREMA XXIII.

PROPOSITIO XXXIII.

Recta lineæ, quæ æquales, & parallellas lineas, ad easdem partes coniungunt, & ipsæ æquales, & parallelæ sunt.

SInt duæ rectæ lineæ AC, BD æquales; & parallelæ, quę coniungãtur duabus lineis AB; CD, dico istas etiam esse ęquales, & parallelas. ducatur enim linea AD, quæ, cum incidat in parallelas AC, DB faciet angulos alternos CAD, ADB æquales: duo igitur triangula CAD, ADB habent conditiones quartæ, cum latus A C sit æquale lateri BD, & latus AD sit commune, & anguli comprehensi æqualibus lateribus sint æquales. iam basis CD erit ęqualis basi A B, & angulus BAD erit ęqualis angulo ADC. cum igitur isti anguli alterni sint æquales, ergo linea A B erit parallela C D, quod erat demonstrandum.

THEOREMA XXIV.

PROPOSITIO XXXIV.

Parallelogrammorum spatiorum æqualia sunt inter se, quæ ex aduerso, & latera, & anguli; atque illa bifariam secat diameter.

IN parallelogrammo ABDC dico latera opposita esse æqualia, & angulos oppositos æquales; & diuidi bifariam ducta diametro. hæc tria simul probantur ducta, vtlibet diametro BC. triangula enim ACB, DCB, quæ resultant, habent conditiones 26. latus enim BC est commune; angulus BCA est æqualis angulo alterno CBD. cum incidat in parallelas linea BC; angulus BCD

est

eſt æqualis angulo alterno CB D. cum incidat in parallelas linea BC; angulus BCD eſt æqualis angulo CBA. ergo triãgula illa ſunt inter ſe æqualia, & quoad latera, & quoad angulos: ergo latera oppoſita in parallelogrammo sũt ęqualia, & anguli oppoſiti A, & D. ſic probantur etiam B & C, quod erat demonſtrandum.

THEOREMA XXV.

PROPOSITIO XXXV.

Parallelogramma ſuper eandem baſi, & in ijſdem parallelis conſtituta inter ſe sũt æqualia.

Sint intra duas parallelas AB, CD, conſtituta duo parallelogramma ACDE, EDCF, ſuper eandem baſim CD. dico eſſe

esse inter se æqualia. Considerentur enim duo triangula ACE; EDF, quæ habent conditiones 4.: latus enim AC est æquale lateri ED. Cum sint latera opposita in parallelogrammo, & latus EF lateri CD ob eandem rationem. Angulus AEC, angulo EFD interno, & opposito, cum linea AF incidat in CE, & DF parallelas. Ergo totum triangulum toti triangulo. Ergo addito triangulo communi CED, erit ACDE parallelogrammum æquale parallelogrammo EDCF, quæ sũt super eandem basim CD, quod erat demonstrandum.

THEO-

THEOREMA XXVI.

PROPOSITIO XXXVI.

Parallelogramma super æqualibus basibus; & in ijsdem parallelis constituta inter se sunt æqualia.

Sint duo parallelogramma ACEF, & DHGB super æqualibus basibus CE, HD, & in ijsdem parallelis constituta. dico inter se esse æqualia ducantur enim nectentes lineæ E B, CG constituent parallelogramma, cum nectant parallelas, & æquales CE, BG lineæ ductæ. cum igitur hoc medium parallelogramma CE BG sit æquale ipsi AC EF, quia est super eamdem basim CE in ijsdem parallelis, & sit etiam æquale ipsi

GH

GHDB, quia est super eamdem basim B G, cum illo in ijsdem parallelis; ergo illa duo erunt æqualia vni tertio, & inter se, quod erat demonstrandum.

PROBLEMA XXVII.

PROPOSITIO XXXVII.

Triangula super eadem basi constituta, & in ijsdem parallelis inter se sunt æqualia.

SInt inter parallelas ABCD super basim CD constituta duo triangula ACD, & CDB, hoc est linea ducta per apices A, & B sit parallela basi, dico esse æqualia, ducatur enim ex D linea DE parallela ipsi AC. & D F parallela C B, erunt duo parallelogramma A C D E, & CDFB inter se æqualia cum sint

ſint ſuper eamdem baſim CD: ſed horum dimidia ſunt dicta triangula cum ſecentur bifariã à diametro, ergo erunt inter ſe æqualia, quod erat demonſtrandum.

THEOREMA XXVIII

PROPOSITIO XXXVIII.

Triangula ſuper æqualibus baſibus conſtituta, & in iiſdem parallelis inter ſe ſunt æqualia

Sint duo triãgula ACE, BFD ſuper baſibus æqualibus CE, FD in iiſdem parallelis. dico eſſe inter ſe æqualia. ducatur enim EG parallela ipſi AC, & DH ipſi BF erunt parallelogramma FDHB, ACEG æqualia, cum igitur horum dimidia ſint triangula dicta, erunt & inter

inter se æqualia. quod erat demonstrandum.

THEOREMA XXIX

PROPOSITIO XXXIX.

Si duo triangula sint super eamdem basim, & constituta ad easdem partes, & sint inter se æqualia, erunt in iisdem parallelis.

SI enim sunt inter se æqualia triangula ABC, & CBD super eadem basi CB, & ad easdem partes ducatur alia linea parallela ipsi BC, & sit AF, vel AE, si nō est AD, vel EC iūgatur FC. erunt igitur duo triangula ABC, & CEB, æqualia, sed eidē triangulo ABC est æquale triāgulum B D C ex suppositione; ergo duo triāgula BCD, & BCE

erunt

erunt inter se æqualia totum scilicet: & pars ergo prima AD erat parallela basi, & non secunda AF, vel AE, qua posita sequeretur idem absurdū, quare si duo triangula & c̨ et. quod erat demonstrandum.

THEOREMA XXX.

PROPOSITIO XL.

Triangula, quæ sunt constituta ad easdem partes super æqualibus basibus si sint inter se æqualia erunt in iisdem parallelis.

SI enim duo triangula ABC, DEF sint constituta ad easdem partes super æqualibus basibus BC, EF, & sint inter se æqualia non tamen dicatur linea AD parallela ipsi B

F ducatur alia, quæ sit parallela huic, & sit AG, vel AH ducatur GF, cum igitur duo triãgula ABC, FGE dicantur in ijsdem parallelis super æqualibus basibus erunt equalia; sed eidem A B C est æquale FDE. ergo & duo triangula FDE: E GF erũt inter se æqualia, pars, & totum: idem sequitur posita AH pro parallela eidem BF, & ducta HF non igitur AG, vel AH, sed AD est parallela ipsi B F. quod erat demonstrandum.

THEOREMA XXXI.

PROPOSITIIO XLI.

Si parallelogrammum habuerit eamdem basim, cum triangulo, & fuerit in iisdem parallelis parallelogrammum erit duplum ipsius trianguli.

CONstituatur inter easdem parallelas AB, DC super eamdem basim DC parallelogrammum EDCA, & triangulũ CDB. dico parallelogrammum triangulo esse duplum ducta enim diametro AD erunt triãgula ACD, EAD æqualia; at parallelogrammum duplum est triangulo ADC, ergo, & duplũ triangulo CDB, eidem ACD æquali quod erat demonstrãdum.

PRO-

PROBLEMA XI.

PROPOSITIO XLII.

Dato triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

SIt datum triangulum ABC, & angulus rectilineus D, diuidatur vnum latus triãguli BC bifariam in D, & fiat angulus BDA æqualis angulo D ducatur item per A linea AG parallela ipsi BC, quã secet DF in F, & ducatur recta CG eritque parallelogrammũ GFDC cum angulo FDC æquali dato angulo rectilineo D quod autem sit æquale triãgulo patet; nam est duplum trianguli CDA super eadem basi in ijsdem parallelis; sed triãgulum

gulum ACD est dimidiũ trianguli BAC, cum duo triangula BAC, BAD sint æqualia; super æqualibus basibus constituta, erit & parallelogrammum æquale triangulo id dato angulo rectilineo, quia angulus ADB, qui est æqualis angulo D, est ęqualis etiã angulo FDC quare tam AD, quam FD supra BC faciunt angulos æquales duobus rectis ablato igitur communi angulo ADF, remanebũt ADB, & FDC æquales inter se. quod erat demonstrandũ.

THEO-

THEOREMA XXXII.

PROPOSITIO XLIII.

In omni parallelogrammo complementa, quæ sunt circa diametrum inter se sunt æqualia.

IN Parallelogrammo ABDC complementa CG, BG dicuntur esse æqualia. Cum enim triangula ACD, & ADB sint æqualia: similiter triangula IDG, & GDF: nec non AGE, & AGH, si ex ADB auferantur hæc duo AGE, & IGD & ex ADC, ADH, & GFD auferrentur partes æquales remanebunt igitur EI, & HF. cõplementa æqualia. Quod erat demonstrandum.

PROBLEMA XII.

PROPOSITIO XLIV.

Ad datam rectam lineam applicare in dato angulo rectilineo parallelogrammum dato triãgulo æquale.

Sit data recta linea A, supra quam sit construendum parallelogrammum æquale triangulo B, quod habeat angulum C, construatur parallelogrammum GB æquale triãgulo B, quod habeat angulum IGE æqualem angulo C, dato producaturq; IG ad H, vt GH sit æqualis ipsi A, ducaturque H A parallela ipsi EG donec occurrat lineæ BE productæ in A. demittaturq; BI, donec occurrat lineæ productæ per AG, AG, in D ducatur DC parallela GH, productis AH in C. & B G in F dico parallelogrammũ FH esse imperatum, est enim super latus GH æquale ipsi A; angulus FGH est æqualis angulo EGI, hoc est angulo C. & est equale complemento GB, hoc est triangulo B. quod erat faciendum.

PROBLEMA XIII.

PROPOSITIO XLV.

Super datam rectam lineam, dato rectilinao æquale parallelogrammum constituere, in dato angulo rectilineo.

SIt datum rectilineum AB C cui constituendum sit parallegrammum æquale, cuius vnum latus sit data recta

EF,& datus sit angulus D. diuidatur datum rectilineum in quotlibet triangula ABC, tum cõstituatur parallelogrammũ FH,cuius sit vnum latus EF,& angulus EFG,sit ęqualis angulo D, & sit parallelogrammum duplum triangulo A, tum super lineam GH , & angulo IH G, fiat parallelogrammum GI duplum triangulo B,ita & KM supra IK duplum triangulo C, Cum igitur totum Parallelogrammum MF sit duplum rectilineo dato; dico FH eius dimidium eidem rectilineo esse ęquale ad datam rectam lineã in dato Angulo rectilineo ; quod erat faciendum .

PRO-

PROBLEMA XIV.

PROPOSITIO XLVI.

Data recta linea quadratum describere.

SIt data recta A B super quam oporteat quadratú describere. super AB, erigantur perpendiculares AD, BC, quę sumantur æquales ipsi A B, & connectantur recta DC, dico ABCD esse quadratum. cum enim anguli A, & B sint recti erunt AD, BC parallelæ, & sunt æquales igitur, & AB, EC parallelæ sunt, & æquales; cum igitur quatuor lineæ sint ęquales, & anguli recti omnes, erit quadratum. quod erat faciendum.

THEOREMA XXXIII.

PROPOSITIO XLVII.

In triangulis rectangulis quadratum, quod à latere rectum angulum subtendente describitur æquale est quadratis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

IN triangulo ABC, angulus BAC sit rectus, si describãtur quadrata super BC, & super AB, AC, dico quadratum descriptum à BC solum, esse æquale alijs duobus descriptis à BA, AC. ducatur enim recta AK parallela lateribus BE, CD quę secet BC, in L, & ex A ducatur AE, ducaturq; FC, quoniam igitur duo anguli BAC, BAG sunt recti, erunt GA, AC vna

vna recta linea similiter vna recta BA, AI considerentur iā duo triangula FBC,ABE, quæ habent conditiones quartæ latus enim EB in triangulo AB E est æquale lateri BC in altero triangulo BCF,sunt enim latera eiusdem quadrati, & A B est æquale lateri BF, eadem ratione & angulus ABE est æquale angulo FBC. cum enim anguli FBA,CBE sint recti, & consequenter æquales,addito vtrique communi angulo AB C erit angulus ABE totus æqualis angulo FBC, ergo illa duo triangula sunt æqualia, sed triangulum FBC est dimidium quadrati EG,AB, cum sit super eamdem basim FB in ijsdem parallelis FB,GC, ergo etiam triangulum ABE erit dimidium eiusdem quadrati, cū sit illi æquale, sed est etiam dimidium parallelogrammi B K cum sit super eamdem basim BE, & in ijsdem, parallelis ergo parallelogrammum BK est æquale quadrato FGAB eodem demonstrabitur parallelogrammum KC æquale quadrato AIHC, ergo totum quadratum lineæ BC est æquale duobus quadratis linearum BA, AC. quod erat demonstrā-dum.

THEO-

THEOREMA XXXIV

PROPOSITIO XLVIII.

Si quadratum, quod ab vno latere trianguli describitur, aquale sit eis quadratis, qua à reliquis trianguli lateribus describuntur, angulus comprehensus illis lateribus erit rectus.

SIt quadratum lateris AC ęquale quadratis laterum AB, BC. dico angulum ABC esse rectum. ducatur namque BD perpendicularis ipsi BA ęqualis rectæ BC connectaturque recta AD. quoniam igitur in triangulo ABD angulus AB D est rectus, erit quadratum AD æquale quadratis AB, BD, sed quadratum BD est æquale quadrato B C, cum ex constructione sint latera æqualia DB, BC ergo quadratum AD est æquale quadratis AB, BC sed ijsdem est æquale quadratum AC, ergo quadrata AD, AC sunt æqualia, ergo & lineæ A C, AD. duo igitur triangula AB C, ABD erunt æqualia cum, habeant tria latera æqualia igitur angulus ABC erit æqualis angulo ABD, & consequenter rectus etiam ipsæ cum ille sit rectus, quod erat demonstrandum.

EV-

EVCLIDIS
ELEMENTORVM
LIBER SECVNDVS.

DEFINITIONES.

1 OMne parallelogrammũ rectangulum contineri dicitur sub rectis duabus lineis, quæ comprehendunt vnum ex rectis angulis. *Dum enim vna supra aliam ad rectos angulos recta duci intelligitur formari intelligitur rectangulum, ut in lib. Fig. pag. 20. ABCD*

2 In omni parallelogrammo spatio, parallelogrammum illud, quod circa diametrum est, si diameter ducatur, vna

cum duobus complementis Gnomon vocatur, vt ibidem. Gnomon est multilatera Figura ex tribus reliquis parallelogrammis, si excipiatur vnum in ijs per quæ diameter transit, vt ea per quam transit circũferentia HGM.

THEOREMA I.

PROPOSITIO I.

Si fuerint duæ rectæ lineæ, seceturq; ipsarum altera in quotcunque partes rectangulum comprahensum sub illis duabus rectis lineis æquale est eis rectangulis, quæ sub non secta, & omnibus illis partibus comprehenduntur.

Sint duæ rectæ A, & BC, quarum BC secetur in D, &

& E, dico rectangulum comprehensum sub A, & BC tota æquale esse rectangulis, quæ fiunt ab eadem A, & BD, vna cum rectangulis, quæ fiunt ab A, & DE, & EC. fiat enim rectangulum BF, ex BG æquali ipsi A, & ex BC, deinde ex D erigatur parallela ipsi BG linea DH, & ex E altera eidem parallela EI, ostendo in toto isto rectangulo BF esse inclusa tria rectangula ex A, & ex illis tribus partibus, quæ fiunt ex secta BC, & consequenter esse æqualia: cum enim DH, sit parallela, & æqualis ipsi BG, erit BH rectangulum ex GB, hoc est A, & BD: similiter DI erit rectangulum ex DH, hoc est BG, seu A, quæ sunt inter se æquales, & DE; & cum EI sit parallela, & æqualis ipsi DH, & consequenter ipsi A, erunt re-
ctan-

ctangula BH,DI,EF explent totum rectangulum BF,& cõsequenter illi æqualia, quod erat demonstrandum.

THEOREMA II.

PROPOSITIO II.

Si recta linea secta sit vtcunque rectangula, quæ sub tota, & quolibet segmentorum comprehenduntur æqualia sunt quadrato, quod fit à tota.

RECta linea CA diuidatur vtcunque in E. dico rectangula,quę fiunt à tota CA, & à partibus CE, & EA esse æqualia quadrato, quod fit à tota CA,fiat enim quadratum totius CA,& sit CK deinde ex A erigatur AK parallela ipsi CF. ostendo illud quadratum adæadequatè diuisum esse in duo rectangula facta ex AE, EI, & ex EC,CF,& consequenter esse illis duobus æquale. lineam enim CF est parallela,& æqualis ipsi AK;hæc autem,cum sit latus quadrati erit æqualis ipsi CA,& consequenter etiam CF erit æqualis ipsi IE , cum autem angulus C sit rectus, erit etiam AEI rectus , erit igitur CK rectangulum sub CF, hoc est CA, & EC, similiter CI erit rectangulum sub CF,hoc est AC, & CE : cum igitur duæ istæ partes adequent totum quadratum , erunt illi æquales , quod erat demonstrandum.

THEO-

THEOREMA III.

PROPOSITIO III.

Si recta linea secetur vtcunque rectangulum sub tota, & vno segmentorum comprehensum aquale est illi rectangulo, quod fit à segmentis, vna cum quadrato, quod fit ab illo segmento prius sumpto.

SIt recta linea AB diuisa vtcuuque in C dico rectangulum comprehensum sub tota AB, & vna parte AC, vt rectangulum AF æquale esse rectangulo, quod fit à partibus AC, CB, vna cum quadrato ipsius AC, fiat enim prędictum rectangulum AF ostendo in ipso includi adequate, & rectagulum illarum partium, &

qua-

quadratum ipsius AC, ex C enim erigatur CD parallela ipsi AE, AF erit rectangulum comprehensum sub partibus AC, CB, & AD erit quadratum ipsius AC, AE, enim supponitur equalis. ipsi AC in rectangulo AF, ergo, & FB, DC cum sint latera opposita in parallelogrammo AD. ergo AD est quadratum ipsius AC, & cum angulus A sit rectus etiam angulus BCD erit rectus, ergo cum CD sit æqualis ipsi AC, erit AF rectangulum ex CD, hoc est AC, & CB. quod erat demonstrandum.

THEO-

THEOREMA IV.

PROPOSITIO IV.

Si recta linea secta sit vtcunque quadratum, quod à tota describitur æquale est illis, quæ à segmentis describuntur quadratis, & ei, quod bis sub segmentis comprehenditur rectã gulo.

SIt recta AB diuisa vtcunque in C fiat quadratum totius AB ostendo istud quadratum diuidi adequate in duo quadrata partium AC, CB, & in duo rectangula, quæ fiant vtraque ex AC, CB ducatur enim diameter EB, deinde ex C erigatur CF, parallela ipsi AE, & per punctum vbi seccatur diameter in G duca-

ducatur IH parallela ipsi *A*B, cum igitur IH sit parallela ipsi *A*B, si angulus *A* est rectus, & angulus *A*HG erit rectus, & similiter BCG, & linea CG erit æqualis ipsi *A*H, & cum CG sit parallela ipsi BI, quæ est parallela ipsi *A*H, erit & illi æqualis claudens CB, & GI æquales & cum triangula E*A*B, ED B habeant conditiones 4. latus enim E*A*, æquale est lateri DB, & *A*B, ipsi ED, & angulus *A* angulo D. erit & angulus *A* BE angulo DBE æqualis: ergo in triangulo paruo GCB cum sit angulus C rectus, vt est angulus I in triangulo GIB, & angulus CBG angulo IBG, & latus GB commune erit CG, GI, & CB, lateri BI æquale. eodem modo ostendetur latus H G, GF æquale cum triangula EHG, EFG sint æqualia, & HE, EF.

EF. erit igitur HF quadratum ipsius AC, & CI quadratum ipsius CB, cum latera omnia sint æqualia, & anguli recti. eodem modo constat AG esse rectangulum sub AC, CG. hoc est CB, & GD alterum rectangulũ sub GF, quæ est æqualis ipsi HG, hoc est ipsi AC, & GI, seu CB, igitur intra quadratum AD sunt adæquatè duo quadrata partium AC, CB, & duo rectãgula earumdum partiũ, quod erat demonstrandum.

Constat ex hoc Theoremate rectangula, quæ sunt circa diametrum in quadrato esse quadrata.

THEO-

THEOREMA V.

PROPOSITIO V.

Si recta linea secetur in partes æquales, & non æquales, rectãgulum, quod fit ab inæqualibus segmentis, vna cum quadrato inter media sectionis æquale est quadrato, quod fit à dimidia.

Diuidatur recta AB bifariam in C, & non bifariam in D. dico rectangulum factum ex segmentis inæqualibus AD, DB, vna cum quadrato intermediæ CD, quæ est inter sectiones, æquale esse quadrato dimidiæ CA, fiat enim quadratum CF ex dimidia CA, & ducta diametro EA, ex D erigatur DG parallela ipsi AF, & per punctum sectionis H, ducatur

IK

IK parallela ipsi AB ostẽdo rectangulum BK, quod remanet extra quadratum CF, æquale esse rectangulo DF, quo ostenso patebit quadratum C F, æquale esse rectangulo I A, vna cum quadrato KG. probo autem, nam linea AF est æqualis ipsi AC, quia sunt latera quadrati, & BC est æqualis eidem CA cum tota sit diuisa bifariam in C: ergo BC est æqualis ipsi AF, DA est æqualis ipsi AI, cum D I sit quadratum ex supradictis, ergo est etiam æqualis ipsi B I. ergo rectangulum DF est æquale IC. quod erat demonstrandum; cum sub æqualibus lineis contineatur.

THEOREMA VI.

PROPOSITIO VI.

Si recta linea secetur bifariam, & illi adijciatur alia recta linea, rectangulum comprehensum sub composita ex tota, & adiuncta, vna cum quadrato dimidiæ æquale est quadrato, quod fit ex linea composita ex dimidia, & adiecta.

RECta A D secetur bifariam in C illique alia addatur BD. dico rectangulum factum ex tota AB, quæ componitur ex tota, & adiecta, & ex B D adiecta, vna cum quadrato ipsius CD, æquale esse quadrato, quod fit à CB, quæ constat ex dimidia, & adiecta. describatur enim quadratum CF, ex

CB

CB, & ducta diametro EB, erigatur paralella DG ex puncto D per punctum inter sectionis H ducatur IL paralella ipsi BA. ostendo rectangulum HF æquale esse rectangulo LC quod vbi ostendero habebo intentũ: reliqua enim continentur intra quadratum, vt apparet; CB verò cum sit æqualis ipsi BF, & DB, ipsi BI, cum sint latera quadratorum; si hæc auferantur à primis, remanebit FI æqualis ipsi DC, hæc autem æqualis est ipsi CA, cum sit diuisa bifariam. BI est æqualis ipsi AL, cum sint latera opposita rectanguli, huic autem est etiã æqualis DB, seu GF, quæ illi opponitur.. ergo rectangulum CL est æquale rectangulo HF, quod est demonstrandum, nam quadratum EH constat esse quadratum ipsius CD.

THEO-

THEOREMA VII.

PROPOSITIO VII.

Si recta linea secetur vtcunque dico quadrata, quæ fiunt alterũ à tota, alterum ab vno segmẽtorum æqualia esse simul sumpta rectangulo, quod fit à tota, & dicto segmento bis sumpto, & addito quadrato alterius segmenti.

SEcetur recta BA vtcunque in C, dico quadratum totius B A vna cũ quadrato segmenti B C æquale esse rectangulo facto à tota B A, & à segmento BC; si bis sumatur, & illi addatur quadratum alterius segmenti CA, describatur enim quadratum ex tota BA ex C, erigatur paralella ipsi BD, linea

E CF,

CF, & ſumpta BH æquali ipſi B C, ducatur H I parallela ipſi B A, & ad faciliorem demonſtrationem producta CF, vſque ad L. vt ſit æqualis ſegmento BC. producatur etiam D ad K & fiat quadratum FK. oſtendo quadratum A E vna cum quadrato FK, quod eſt quadratum ipſius CB, vt conſtat ex conſtructione continere duo rectangula ex A B, C B, & quadratum I F, quod conſtat eſſe quadratum ipſius A C. patet autem hoc, cum enim C B ſit æqualis ipſi B H ex conſtructione BI erit rectangulum ex AB, BC. ſimiliter cum BE, ſit æqualis ipſi AB. BF erit rectangulum ex BA, BC, quia autem bis ſumitur quadratum CH, ſumatur ſecunda vice quadratũ FK illi æquale, & erunt completa duo rectangula igitur in

qua-

quadrato A D vna cum quadrato FK sunt illa duo rectangula vna cum quadrato ipsius AC, quod est quadratum EG. vt constat, quod erat demonstrandum.

THEOREMA VIII.
PROPOSITIO VIII.

Si recta linea secetur vtcunque; rectangulum quater comprahensum sub tota, & vno segmentorum, cum eo, quod à reliquo segmento sit quadrato aquale est ei quod à tota, et dicto segmento tanquam ab vna linea, describitur quadrato.

Sit recta A B diuisa vtcunq; in C dico, si sumantur quatuor rectangula facta ex AB, CB, vna cum quadrato ipsius AC, æqualia esse ista omnia

quadrato, quod fit ex tota AB, BC, tanquam ex vna linea. Addatur enim BD æqualis ipsi CB, & describatur quadratum AE, tunc per punctum B, & C ducantur recte BG, CI parallelæ ipsi DE, & sumptis DM, & MP, quæ sint æquales ipsi CB, ducâtur aliæ parallelæ ML, PO ostendo in toto quadrato AE esse quatuor rectangula dicta, vna cum illo quadrato, ex quo sequetur illa rectangula cum quadrato dicto esse æqualia quadrato AE. nam IO est quadratum ipsius CA, vt constat ex supradictis LB, & HA, sunt duo rectangula ex AB CB, cum MD, & PM sint sumpta equales ipsi BC. similiter HE est rectâgulum tertium ex AB, BC; nam MF est æqualis ipsi AB, cum AD, DE sint litera quadrati, ac proinde æqualia, demptis
ergo

ergo BD, DM, æqualibus remanebit AB, ME equalis; & GE ipsi DB, seu CB est æqualis quartū esset rectangulum HI, sed illis deest quadratum KH sumptū iam in rectangulo OH, loco igitur illius ponatur quadratum HD illi æquale cum habeat latera æqualia, ergo in toto quadrato AE continentur quatuor dicta rectangula vna cum dicto quadrato, quod erat demonstrandum.

THEOREMA IX.

PROPOSITIO IX.

Si recta linea secetur in partes æquales, & non æquales; quadrata, quæ fiunt à partibus inæqualibus sunt duplicia quadratorum, quæ fiunt à dimidia, & ab interiecta inter dimidiam, & alteram sectionem.

SEcetur recta AB bifariam in C, & non bifariam in D. dico quadrata rectarum A D, D B simul, esse dupla quadratorum AC, CD. educatur enim ex C ad A B perpendicularis CE, quæ sit æqualis ipsi AC, iunganturque rectæ EA, EB, deinde ex D erigatur recta perpendicularis vsque ad F, & per F ducatur F G parallela ipsi

ipsi A B, & denique ducatur recta AF. quoniam igitur in triangulo ACE, AC, CE sunt latera æqualia, erũt anguli CAE, CEA æquales cum autem angulus ad C sit rectus isti, qui continent alterum rectum, erunt semirecti. eodem modo demonstrabitur angulus CEB, & CBE semirectus; ex quo etiã inferetur, quod anguli DFB, & GFE sint semirecti; cum & angulus BDF, & FGE sint recti ex constructione; ergo totus etiam angulus A E F constans ex duobus semirectis, erit rectus. cum igitur in triangulo ACE angulus C sit rectus, quadratum AE erit æquale quadratis AC, CE, quæ cum sint æqualia erit AE duplum quadrati AC. eodem modo cum in triangulo E G F angulus G sit rectus, erit quadratum FE æquale quadratis FG, GE, & cõsequenter duplum quadrati FG, cum illa latera sint æqualia, & duplum quadrati CD, cũ CD sit æqualis ipsi GF; ergo quadrata AE, EF erunt dupla quadratorum AC, CD, cum vero in triangulo AEF angulus ad E sit rectus, quadratum AF erit æquale quadratis AE, EF, & consequenter duplum quadratorum AC, CD, cum autem in triangulo AFD, angulus ad D sit rectus; erunt quadrata AD, DF, seu DB, cum illa duo sint latera æqualia, eo quod anguli sint æquales. æqualia quadrato AF, & consequenter dupla quadratorum AC, CD. quod erat demonstrandum.

THEO-

THEOREMA X.

PROPOSITIO X.

Si recta linea secetur bifariam, & illi addatur quævis recta linea; quadrata, quæ fiunt à tota cum adiuncta, & ab adiuncta sola, sunt duplicia quadratorum, quæ fiunt à dimidia, & à composita ex dimidia, & adiuncta.

SEcetur recta A B bifariam in C, & ei addatur quælibet BD. dico quadrata rectarũ AD, DB duplicia esse quadratorum AC, CD. erigatur enim ex C perpendicularis CE, æqualis dimidiè AC; iunganturq; rectæ AE, EB, ducaturq; per D recta GF parallela ipsi CE, & ducatur EF ad angulos rectos cum CE, & producatur EB, vt pertingat ad G ; ac demum ducatur A G. Cum igitur angulus ACE sit rectus ; anguli etiam AEC, CEA ostendentur semirecti, cum latera CA, CE sint æqualia, ergo & anguli ad latera æquales, vt etiam CB, CE, & anguli ad C sint recti ; eodem modo angulus DBG ostendetur semirectus cum sit ad verticem, cum CBE, & consequẽter DGB erit semirectus cum angulus ad D in triãgulo BDG sit rectus, cum autem in triangulo EFG, angulus F sit rectus angulus ad C semirectus ad E erit semirectus ; & consequenter latera EF, FG erunt æqualia, quoniam igitur quadratum AE est æquale quadratis A C, CE erit duplum quadrati AC ; quia illa sunt æqualia. Cum verò CF sit parallelogrammũ, erit EF æqualis ipsi CD. igitur

cum

cum in triangulo E F G, quadratum EG sit æquale quadratis EF, FG erit duplum quadrati EF, seu quadrati CD. igitur quadrata AE, EG sunt dupla quadratorum AC, CD. cum autem in triangulo A E G, quadratum AG sit æquale quadratis AE, EG, erit istud solum duplum quadratorum AC, CD, & cum triangulum ADG sit rectangulum, erunt quadrata AD, DG, seu DB, quæ sunt lineæ æquales, æqualia quadrato AG; & consequenter ipsa etiam dupla quadratorum AC, CD. quod erat demonstrandũ.

PROBLEMA I.

PROPOSITIO XI.

Datam rectam lineam secare, vt rectangulum comprehensum sub tota, & altero segmentorũ æquale sit quadrato, quod fit à reliquo segmento.

SIt diuidenda recta AB; ita vt rectangulum comprę-hensum sub tota AB, & altero segmento BG æquale sit quadrato, quod fit ab altero segmento AG. describatur ex AB quadratum AC: diuisoque latere AD bifariam in E, erigatur E ad B; cui sumatur æqualis EF producta DA vsque in F. Sumaturque GA æqualis ipsi AF, fiatque quadratum AH ex AG. dico rectam AB, sectam esse

esse in G. ita vt rectangulum sub AB,BG sit æquale quadrato AG. ducatur enim GH vsq; ad I erit rectangulum GC cōprehensum sub AB,BG, cum BC sit æqualis ipsi AB,eo quod sint latera eiusdem quadrati,& AH erit quadratum ipsius GA. probo igitur rectangulum GC esse æquale quadrato AH. quoniam igitur recta AD diuisa est bifariam in E, & addita alia AF erit rectangulum sub DF, FA, hoc est rectangulum DH, vna cum quadrato dimidiè EA æquale quadrato rectè EF. est autem quadratum rectè EB æquale quadrato EF, cum sumptæ sunt illæ lineæ æquales; ergo rectangulum sub DF, FA, vna cum quadrato AE est æquale quadrato EB; in triangulo autem rectangulo EAB, quadrata EA, AB æqualia sunt qua-

quadrato EB. igitur quadrata FA. AB æqualia sunt rectangulo DH, vna cum quadrato EA ablato igitur communi quadrato FA, remanebit rectangulũ DH æquale quadrato AB, hoc est quadrato AC, dempta communi parte GD remanebit rectangulum IB æquale quadrato AH, quod erat demonstrandum.

THEO.

THEOREMA XI.

PROPOSITIO XII.

In amblygonijs triangulis, quadratum, quod fit à latere obtusum angulum subtendente maius est quadratis, quæ fiunt ab alijs lateribus, duplici rectangulo, quod fiat ab vno latere à obtusum angulum formante, quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab absumpta exterius linea inter perpendicularem, & obtusum angulum.

SIt triangulum ABC habens angulum ABC obtusum. producatur latus CB, donec demissa perpendicularis ex A, cadat super ipsum in D. dico quadratum lateris AC, quod

op-

opponitur angulo obtuso B, esse maius, quam sint quadrata AB, CB duplici rectangulo comprehenso sub CB,CD.cum enim recta CD sit vtcunque diuisa in B, erit quadratum rectę CD ęquale duobus quadratis rectarum BC,DB, & rectangulo bis comprehenso sub BC, BD, addito igitur cōmuni quadrato AD, erunt duo quadrata rectarum CD, DA æqualia quinque figuris; quadratis DB,BC,DA, & duobus rectangulis ex CB, BD, & quia triangulum ACD est rectangulum, erit quadratum A C solum æquale quadratis AD, DC, ergo erit æquale quinque dictis figuris quadratis, scilicet tribus DB,BC,DA, & duobus rectangulis ex BC,BD; cum autem & triangulum ABD sit rectangulum,erit quadratum AB ęquale le quadratis AD, DB. cum igitur dictum sit quadratum AC æquale quinque figuris duobus rectangulis, scilicet sub CB, BD, & tribus quadratis CB BD, DA, loco horum duorum summatur BA; erit igitur quadratum AC æquale duobus quadratis CB, BA, & duobus rectangulis sub CB, BD. ergo quadratum ipsius AC excedit illa duo quadrata ijs duobus rectangulis, quod erat demonstrandum.

THEO-

THEOREMA XII.

PROPOSITIO XIII.

In oxygonijs triangulis quadratum à latere acutum angulum subtendente minus est quadratis, quæ fiunt à lateribus eundem comprehendentibus, duplici rectangulo comprehenso ab vno latere, in quod perpendicularis cadit, & ab assumpta interius linea inter perpendicularem, & acutum angulum.

SIt triangulum ABC habens omnes angulos acutos, & ab A demissa perpendicularis AD, cadat in latus BC. dico quadratum lateris AB minus esse quadratis laterum AC,CB duplici rectãgulo facto ex CB, DC, DC, hoc eſt quadratum lateris AB, vna cum illis rectangulis ęquale eſſe quadratis AC, CB. cum enim recta BC diuiſa ſit vtcunque in *D*, erunt quadrata rectarum BC, CD æqualia duplici rectãgulo ſub BC, CD, & quadrato rectę BD. addito ergo communi quadrato rectę DA, erunt tria quadrata BC, CD, DA ęqualia quatuor figuris duobus rectangulis BC, CD, & duobus quadratis BD, DA, loco autem duorum quadratorum CD, DA ſumatur vnicū quadratum CA, erunt igitur duo quadrata BC, CA ęqualia quatuor figuris, duobus ſcilicet rectangulis BC, CD, & BD, DA loco horum duorum quadratorum DB, DA ſumatur vnicū quadratum BA illi æquale, erunt igitur duo quadrata BC, CA æqualia tribus figuris quadrato

drato ſcilicet BA, & duobus rectangulis ex BC, CD. quod erat demonſtrandum.

PROBLEMA II.

PROPOSITIO XIV.

Dato rectilineo æquale quadratum conſtituere.

SIt datum rectilineum A, cui quadratum æquale conſtituendum eſt, conſtituatur rectangulum, hoc eſt parallelogrammum in angulo recto, æquale dato rectilineo A. & producatur latus DC vſque in F; ita vt latus CF ſit æquale lateri CB: deinde tota FD diuidatur bifariam in G, & facto centro in G deſcribatur ſemicirculus DHF, tum BC producatur vſque ad peripheriã H.

dico

dico quadratũ CH esse ęquale rectilineo A dato. iungatur recta GH, quoniam recta DF diuiditur bifariam in G, & non bifariam in C, erit rectangulũ sub DC, CF, hoc est rectangulum DB, seu rectilineum A, quod est illi æquale, vna cum quadrato rectę GC æquale quadrato rectę GF, seu GH, quæ sunt æquales; sed quadratum GH est æquale quadratis GC, CH. igitur rectangulum DB, seu rectilineum A, vna cum quadrato rectę GC est ęquale quadratis rectarum GC, CH, ablato igitur cõmuni quadrato GC, remanebit rectangulum DB, seu rectilineũ A æquale quadrato rectæ CH, quod erat demonstrandum.

EV-

EVCLIDIS
ELEMENTORVM
LIBER TERTIVS.

DEFINITIONES.

1. AEquales circuli sunt, quorum diametri sunt æquales, vel quorum, quæ ex centris, rectæ lineæ sunt æquales,
2. Recta linea circulum tangere dicitur, quæ cum circulum tangat, si producatur, circulum non secat.
3. Circuli se se mutuo tangere dicuntur, qui se se mutuo tangentes, se se mutuo non secant,
4. In circulo æqualiter distare à cen-

à centro rectæ lineæ dicuntur, cum perpendiculares, quæ à centro in ipsas ducũtur, sunt æquales. Longius autem abesse illa dicitur, in quam maior perpendicularis cadit.

5. Segmentum circuli est figura, quæ sub recta linea, & circuli peripheria compræhenditur,

6. Segmenti autem angulus est, qui sub recta linea, & circuli peripheria comprehẽditur.

7. In segmento autem angulus est, cum in segmenti peripheria sumptũ fuerit quodpiam punctum, & ab illo in terminos rectæ eius lineæ, quæ segmenti basis est, adiũctæ fuerint rectæ lineæ: Is, inquam, angulus ab adiunctis illis lineis compræhensus.

8. Cum

8. Cum vero comprehendentes angulum rectæ lineę aliquam assumunt peripheriā, illi angulus insistere dicitur.

9. Sector autem circuli est, cū ad ipsius circuli centrum constitutus fuerit angulus, comprehensa nimium figura, & à rectis lineis angulum continentibus, & à peripheria ab illis assumpta.

10. Similia circuli segmenta sunt, quæ angulos cupiunt æquales, aut in quibus anguli inter se sunt æquales exempla harum omniū vide in libello figurarū pag. huic correspondenti.

PRO-

PROBLEMA I.

PROPOSITIO I.

Dati circuli centrum reperire.

SIt circulus datus ABCD, cuius centrum oportet inuenire. Ducatur in eo linea vtcunque AC, quæ bifarIam diuidatur in F, & per F ad AC, perpendicularis agatur BD, vtrinque in peripheria terminata in punctis BG. Hac igitur bifariam secta in F, dico F esse centrum circuli propositi. In ipsa enim recta BD, aliud punctum, præter F, non erit centrum, cum omne aliud punctũ ipsam diuidat inæqualiter, quandoquidem in F, diuisa fuit equaliter. Si igitur F non est centrum, sit punctum E, extra

F re-

rectam B D, centrum, à quo ducantur lineæ EA, EC, ED. Quoniam ergo latera AE, ED, trianguli A E D, æqualia sunt lateribus CE, ED, triãguli CED; & basis AD, basi CD; (à centro enim duci dicuntur) erunt anguli ADE, CDE æquales, ideoque recti: Erat autem & angulus ADF rectus ex cõstructione. Igitur recti ADF, ADE, æquales sunt, pars & totum, quod est absurdum. Non est ergo punctum E, centrum, eademque est ratio de omni alio, quare F centrum erit. Itaque dati circuli centrum reperimus, quod erat faciendum.

THEO.

THEOREMA I.

PROPOSITIO II.

Si in circuli peripheria duo quælibet puncta accepta fuerint; Recta linea, quæ ad ipsa puncta adiungitur, intra circulum cadet.

HOc theorema demõstrari poterit affirmatiue, hoc modo: Recta A B, coniungat duo puncta A, & B, in circunferentia circuli AB, cuius centrum C. Dico rectam AB, intra circulum cadere, ita vt omnia eius puncta media intra circulum existant. Assumatur enim quodcunque eius punctum intermedium D, & ex centro educantur rectę CA, CB, CD. Quoniam igitur duo latera

CA, CB, trianguli CAB æqualia sunt, erunt anguli CAB, CBA ęquales: Est autem angulus CDA, angulo CBD, maior, externus interno. Igitur idem angulus CDA, angulo CAD maior erit, & ob id latus CA latere CD maius erit. Quare cum CA sit ducta à centro ad circunferentiam, vsque, non perueniet recta C D ad circunferentiam, ideoque punctum D intra circulum cadet. Idem ostendetur de quolibet alio puncto assumpto, tota igitur recta AB intra circulum cadit. Quod est propositum.

THEO-

THEOREMA II.

PROPOSITIO III.

Si in circulo recta quædam linea per centrum extensa quandam non per centrum extensam bifariam secet, & ad angulos rectos ipsam secabit. Et si ad angulos rectos ipsam secabit, Et bifariam quoque eam secabit.

PEr centrum E, circuli BCD, recta BA, extensa diuidat rectam DC, non per centrum extensam, bifariam in F. dico rectam AF, esse ad angulos rectos ipsi DC; ductis enim rectis ED, EC, erunt duo latera ED, EF, trianguli EDF, duobus EF, EC, trianguli ECF equalia; & bases DF, FC equales. Igitur

CA,CB, trianguli CAB æqualia sunt, erunt anguli CAB, CBA equales : Est autem angulus CDA, angulo CBD, maior, externus interno. Igitur idem angulus CDA, angulo CAD maior erit, & ob id latus CA latere CD maius erit. Quare cum CA sit ducta à centro ad circunferentiam, vsque, non perueniet recta C D ad circunferentiam, ideoque punctum D intra circulum cadet. Idem ostendetur de quolibet alio puncto assumpto, tota igitur recta AB intra circulum cadit. Quod est propositum.

THEO-

THEOREMA II.

PROPOSITIO III.

Si in circulo recta quadam linea per centrum extensa quandam non per centrum extensam bifariam secet, & ad angulos rectos ipsam secabit. Et si ad angulos rectos ipsam secabit, Et bifariam quoque eam secabit.

PEr centrum E, circuli BCD, recta BA, extensa diuidat rectam DC, non per centrum extensam, bifariam in F. dico rectam AF, esse ad angulos rectos ipsi DC; ductis enim rectis ED, EC, erunt duo latera ED, EF, trianguli EDF, duobus EF, EC, trianguli ECF ęqualia; & bases DF, FC ęquales. Igitur

CA,CB, trianguli CAB æqualia sunt, erunt anguli CAB, CBA equales: Est autem angulus CDA, angulo CBD, maior, externus interno. Igitur idem angulus CDA, angulo CAD maior erit, & ob id latus CA latere CD maius erit. Quare cum CA sit ducta à centro ad circunferentiam, vsque, non perueniet recta C D ad circunferentiam, ideoque punctum D intra circulum cadet. Idem ostendetur de quolibet alio puncto assumpto, tota igitur recta AB intra circulum cadit. Quod est propositum.

THEO-

THEOREMA II.

PROPOSITIO III.

Si in circulo recta quadam linea per centrum extensa quandam non per centrum extensam bifariam secet, & ad angulos rectos ipsam secabit. Et si ad angulos rectos ipsam secabit. Et bifariam quoque eam secabit.

PEr centrum E, circuli BCD, recta BA, extensa diuidat rectam DC, non per centrum extensam, bifariam in F. dico rectam AF, esse ad angulos rectos ipsi DC; ductis enim rectis ED, EC, erunt duo latera ED,EF, trianguli EDF, duobus EF,EC, trianguli ECF ęqualia; & bases DF,FC ęquales. Igitur anguli EFD, EFC ęquales erũt; hoc eſt, recti. Quod erat primo propoſitum.

Sit iam AF ad angulos rectos ipſi DC; dico rectam CD bifariam ſecari in F, à recta EB. ductis enim iterum rectis ED, EC: cum latera ED, EC, trianguli EDC ſint ęqualia, erunt anguli E D C, E C D ęquales. Quoniã igitur duo anguli EFD, E D F, trianguli E F D ęquales ſunt duobus angulis EFC, ECF, triãguli ECF, & latera EC, ED. quę rectis angulis æqualibus opponuntur, ęqualia quoque: erunt latera CF, FD æqualia, Quod ſecundo proponebatur. Si igitur in circulo recta quædam linea per centrum extenſa, &c. Quod demonſtrandum erat.

THEO-

THEOREMA III.

PROPOSITIO IV.

Si in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuo secent non per centrum extensæ; se se mutuo bifariam non secabunt.

DVę rectę AB, CD, se mutuo in F; secent in circulo ACBD, non per centrum extensę. Dico fieri non posse, vt mutuo se se bifariam secent. Si enim vna earum per centrum transit, certum est, eam bifariã non secari: solum enim in centro, per quod altera ponitur non transire, bifariam diuiditur: Si vero neutra per centrum extenditur, quamuis vna earum nonnunquam bifariam ab altera diuidatur, tamen al-anguli EFD,EFC ęquales erũt; hoc eſt,recti. Quod erat primo propoſitum.

Sit iam AF ad angulos rectos ipſi DC; dico rectam CD bifariam ſecari in F, à recta EB. ductis enim iterum rectis ED, EC: cum latera ED, EC, trianguli EDC ſint ęqualia, erunt anguli E D C, E C D ęquales. Quoniã igitur duo anguli EFD, E D F, trianguli E F D ęquales ſunt duobus angulis EFC,ECF, triãguli ECF, & latera EC, ED. quę rectis angulis æqualibus opponuntur, ęqualia quoque; erunt latera CF,FD æqualia, Quod ſecundo proponebatur. Si igitur in circulo recta quædam linea per centrum extenſa, &c. Quod demonſtrandum erat.

THEO-

THEOREMA III.

PROPOSITIO IV.

Si in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuo secent non per centrum extensæ; se se mutuo bifariam non secabunt.

DVæ rectæ AB, CD, se mutuo in F; secent in circulo ACBD, non per centrum extensæ. Dico fieri non posse, vt mutuo se se bifariam secent. Si enim vna earum per centrum transit, certum est, eam bifariã non secari: solum enim in centro, per quod altera ponitur non transire, bifariam diuiditur: Si vero neutra per centrum extenditur, quamuis vna earum nonnunquam bifariam ab altera diuidatur, tamen altera minimè secabitur bifariã. Diuisa enim sit AB.& CD, si fieri potest, bifariam in F. Inuento igitur centro circuli E, ducatur ab eo ad F, recta FE; quoniam ergo F E ponitur secare rectam AB, bifariam in F, secabit ipsam ad angulos rectos. Eadem ratione secabitur C D ad angulos rectos, cum ponatur bifariam diuidi in F. Quare rectus angulus EFD, recto angulo EFA, ęqualis est, pars toti, quod est absurdum. Itaque si in circulo duę rectę lineę sese mutuo secent, &c. Quod erat demonstrandum.

THEO-

THEOREMA IV.

PROPOSITIO V.

Si duo circuli se se mutuo secent, non erit illorum idem centrum.

DVo circuli ABC, ADC, se mutuo secent in A, & C. Dico ipsos non habere idem centrum. Sit enim, si fieri potest, idem centrum vtriusque E. à quo duę rectę ducantur; EA, quidem ad sectionem A, EB, verò secans vtramque circumferentiam in D, & B. Quoniam igitur E, centrum ponitur circuli CDA, erit recta EA, rectę ED ęqualis. Rursus quia E, centrum quoque ponitur circuli ABC, erit & recta EB, eidem rectę EA ęqualis. Quare rectę EB, ED, ęquales inter se erunt, pars, & totum, quod est absurdum. Si igitur duo circuli se se mutuo secent, &c. Quod ostendendum erat.

THEOREMA V.

PROPOSITIO VI.

Si duo circuli se se mutuo interius tangant; eorum non erit idem centrum.

DVo circuli AB, AD, se interius tangant in A. Dico eos non habere idem centrũ. Habeant enim, si fieri potest, idem centrum E, à quo duę rectę ducantur; EA, quidem ad tactum A, At EB secans vtrãque circumferentiam in D, & B. Quoniam igitur E, Ponitur centrum circuli AD, erit recta

AE,

AE, rectæ ED, equalis. Rursus quia E, ponitur centrum circuli AB, erit EB, eidem recte E A, equalis. Quare rectæ ED, & EB inter se erunt equales, pars & totum, quod est absurdum. Si igitur duo circuli se se mutuo interius tangant, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOREMA VI.

PROPOSITIO VII.

Si in diametro circuli quodpiam sumatur punctum, quod circuli centrum non sit, ab eoque puncto in circulum quadam recta linea cadant: Maxima quidem erit ea, in qua centrum, minima vero reliqua; aliarum vero propinquior illi, qua per centrum ducitur, remotiore semper maior est: Dua autem solum recta linea aquales ab eodem puncto in circulum cadunt, ad utrasque partes minima, vel maxima.

IN diametro AB, circuli AGEB, cuius centrum D, punctum assumatur quodcunque C. preter centrum, & ex C, cadant

dant in circulum quotcunque lineę GC,FC,CE. Dico omniũ, quę ex C, ad circumferentiam ducuntur, maximam esse CA, in qua est centrum, minimam vero reliquam CB, quę diametrũ perficit: Deinde rectam CG, quę rectę CA, per centrum ductę propinquior est, maiorē recta CF, quę ab eadem CA, plus distat, & eadem ratione CF, maiorem recta CE, atque ita de alijs lineis, si ducerentur, in infinitum. Denique ex C, ad vtrasque partes minimę lineę CB, vel maximę CA, duci posse tantummodo duas lineas inter se ęquales. Ducantur è centro D, ad G, F, & E, rectę lineę DG, DF, DE. Quoniam igitur duo latera GD, DC, trianguli GDC, maiora sunt latere GC. Sunt autem rectę GD, DC, ęquales rectis AD, DC, hoc est,

toti

toti rectę CA, erit & CA, maior quam CG. Eadem ratione maior erit recta CA, quam CF, & quam CE. Quare CA, maxima est omnium, quę ex C, in circulum cadunt.

Deinde quoniam in triangulo ECD, latus ED, minus est duobus lateribus DC, CE. Est autem DE, ipsi DB, ęqualis erit & DB, minor duabus rectis DC, CB. Dempta ergo communi recta CD remanebit adhuc CB, minor, quam CE. Eadem ratione minor erit CB, quam CF, & quam GC. Quare CB, minima est omnium, quę ex C, in circuli circumferentiam cadunt.

Rursus, quia duo latera CD, DG trianguli CDG, ęqualia sunt duobus lateribus CD, DF, trianguli CDF; & angulus totus CDG, maior est angulo FDC,

FDC; erit basis GC, maior basse FC. Eadem ratione maior erit GC, quam CE; Item maior erit CF, quam CE. Quare linea propinquior ei, quæ per centrum ducitur, maior est ea, quę remotior.

Fiat iam angulo BDE, ex altera parte æqualis angulus BDH, & ducantur rectа CH. Quoniam igitur latera ED, DC, triãguli EDC, æqualia sunt lateribus HD, DC, trianguli HDC, & anguli his lateribus contenti EDC, HDC, æquales; erunt rectæ CE, CH, ex vtraque parte ipsius lineæ minimæ CB. vel maximæ CA, æquales inter se. Quod autem nulla alia his duabus possit esse ęqualis, constat. Nam si ex C, ducatur alia, quę cadat supra punctum H. erit ea, cum sit ei, quę per per centrum ducitur, propinquior,

quior, maior quam CH: si vero cadat infra H, erit ea, cum sit remotior ab eadem CA, per centrum ducta, minor quam CH, vt ostensum fuit: *Duæ igitur* duntaxat rectæ lineæ æquales ad vtrasque partes minimæ CB, vel maximæ CA, cadunt. Itaque si in diametro circuli quodpiam *sumatur* pũctum, &c. Quod erat demonstrandum.

THEO-

THEOREMA VII.

PROPOSITIO VIII.

Si extra circulum sumatur punctum quodpiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum una quidem per centrum protendatur, reliquæ vero vtlibet: In cauam peripheriam cadentium rectarum linearum maxima quidem est illa, quæ per centrũ ducitur; aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum transit, remotiore semper maior est; In conuexam vero peripheriam cadentium rectarũ linearum minima quidem est illa, quæ inter punctum, & diametrum interponitur; aliarum autem ea, quæ propinquior est minimæ, remotiore semper minor

nor est. Duæ autem tantum rectæ lineæ æquales ab eo puncto in ipsum circulum cadunt, ad vtrasque partes, minimæ, vel maximæ.

EX puncto E, extra circulũ BCDA, cuius centrum F, lineæ secantes circulum ducãtur, quarum AE, per centrum transeat, aliæ vero EB, EC, ED, vtcunque. Dico omnium esse maximam AE, quæ per centrũ ducitur, propinquior illi EB, maiorem recta EC, quę remotior est ab eadem AE. Et eadem ratione EB, maiorem quam ED, è contrario autem, rectam EG omnium, quæ extra circulum sunt, minimam esse: Deinde rectam EH, quę vicinior est minimæ EG, minorem esse recta EI, remotiore; Et eadem ratione, ipsam EI, minorem quam

EK

EK. Denique ex E, ad vtrasq; partes minimæ lineæ EG, vel maximę AE, duci posse tãtummodo duas lineas rectas inter se æquales. Ducantur ex centro F, ad puncta C,D,B,G,H, I K rectæ FC,FD,FB,FK,FH,FI. Quoniam igitur duo latera EF, FB, trianguli EFB, maiora sunt recta EB; Sunt autem rectæ EF,FA, æquales rectis EF, FB, hoc est tota recta AE; erit & *A E*, maior, quam EB. Eadem ratione erit AE, maior, quam EC, & quam ED. Quare AE, est omnium, quæ ex E, in circulum cadunt, maxima.

Deinde, quoniam latera EF, FB, trianguli EFB, æqualia sunt lateribus EF,FC, trianguli EF C; Et angulus totus EFB, maior est angulo EFC; erit basis EB, basi EC, maior. Eadem ratione maior erit EB, quam ED:

Item

Item EC, maior, quam FD. Quare linea propinquor ei, quę per centrum ducitur, maior est linea remotiore.

Rursus, quia in triangulo EFH, recta EF, minor est duabus EH, HF; si auferantur æquales FG, FH: remanebit adhuc EG, minor, quam EH. Simili ratione erit EG, minor, quam EI, & quã EK. Quare EG, omnium linearum extra circulum, quæ ex E, dicuntur, minima est.

Rursus, cum intra triangulũ EIF, cadant duæ rectę EH, HF, ab extremitatibus lateris EF; erunt EH, HF, minores, quam EI, IF. Sublatis igitur æqualibus FI, FH, remanebit adhuc FH, minor, quam FI. Pari ratione erit EH, minor, quam EK: Item EI, minor, quam EK. Quare linea propinquior minimæ lineę EG, minor est, quam remotior eadem.

Po-

Postremo fiat angulo EFH, angulus EFL, æqualis, & ducatur recta EL. Quoniam igitur latera EF, FH, trianguli EFH, equalia sunt lateribus EF, FL, trianguli EFL; Sunt autē & anguli EFH, EFL, dictis lateribus contenti æquales; erunt rectæ EH, EL, ex vtraque parte minimæ EG, vel maximæ EA inter se æquales. Quod autem nulla alia his possit esse æqualis, constat. Nam si ex E, ducatur recta cadens vltra L, erit ipsa, cum sit remotior à minima, maior quam EL. Quod si cadat inter G, & L, erit ea, cum sit minimæ propinquior, minor quam EL, vt ostensum est. Duę igitur solum rectæ lineæ æquales; ad vtrasque partes minimæ, vel maximæ cadunt. Si igitur extra circulum sumatur punctum quodpiam, ab eoque pun-

puncto ad circulũ deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA VIII.

PROPOSITIO IX.

Si in circulo acceptum fuerit pũctum aliquod, & ab eo puncto ad circulum cadant plures, quam duæ rectæ lineæ æquales: acceptum punctum centrum est ipsius circuli.

A Puncto assumpto *A*, in circulo BCD, cadant plures rectæ, quam duæ, AB, AC AD, inter se æquales. Dico A, pũctum esse centrum circuli. Cõnectantur enim puncta B, C, D rectis BC, CD; quibus diuisis bifa-

bifariam in E,& F,ducantur ex A,rectæ AE,AF. Quoniam igitur latera AE,EB,trianguli AEB, ęqualia sunt lateribus AE, EC,trianguli AEC;& bases AB, AC, ponuntur etiam æquales: erunt anguli AEB,AEC, æquales, ideoque recti. Eodem modo ostendemus, angulos ad F, esse rectos. Quare cum rectę,AE,AF,diuidant rectas BC, CD,bifariam, & ad angulos rectos, transibit vtraque producta per centrum circuli, per corollarium Propos. 1. huius lib.Punctum igitur A,in quo se mutuo secant, centrum erit circuli. Si enim esset aliud punctum centrum,non transiret vtraque per centrum. Si itaq; in circulo acceptum fuerit punctum,&c.Quod demonstrandum erat.

THEO

THEOREMA IX
PROPOSITIO X.

Circulus circulum in pluribus quam duobus, punctis non secat.

SEcent se ijdem duo circuli, si fieri potest, in tribus punctis A, B, & E, Inuentum autem sit I, centrum circuli AGBDHE, à quo ad dicta tria puncta ducantur rectæ IA, IB, IE, quæ defin- circuli æquales erunt inter se. Quoniam igitur intra circulum ABCDEF, assũptum est punctum I, à quo cadunt in circunferentiam plures, quam duæ, rectæ æquales, erit I, centrum circuli ABCD EF. Erat autem idem punctum I, centrum circuli AGBDHE. Duo

Duo ergo circuli se mutuo secantes, habent idem centrum. Quod est absurdum.

THEOREMA X.

PROPOSITIO XI.

Si duo circuli se se intus contingant, atque accepta fuerint eorum centra; ad eorum centra adiuncta recta linea, & producta, in contactum circulorum cadet.

TAngat circulus ABC, circulum ADF, intus in A, & sit E, centrum circuli ABC, & G, centrũ circuli ADF, quod necessario ab illo diuersum erit, cum duo circuli interius se tangentes, non possint idem centrum habere. Dico rectam extensam per G. & E, cadere in contactum A. Si enim non cadit, secet vtrumque circulũ in punctis D,B,C,F, & ex contactu A, ad centra E, G, rectæ ducantur AE,AG. Quoniam igitur in triangulo A E G, duo latera GE, EA, maiora sunt latere GA. Est autem GA, recta rectæ GD ęqualis; (quod G, positum sit centrum circuli ADF) erunt & GE, FA, rectæ maiores recta G D. Dempta igitur communi GE, remanebit EA maior, quam ED. Quare cũ EA, æqualis sit ipsi EB, (quod E, positum fuerit centrum circuli ABC) erit & EB, maior, quam ED, pars quam totum, quod est absurdum.

THEO-

THEOREMA XI.

PROPOSITIO XII.

Si duo circuli se se exterius contingant, linea recta, quæ ad centra eorum adiungitur, per contactum transibit.

Circuli duo ABC, DBE, tangant se exterius in B, & centrũm circuli ABC, sit F, circuli vero DBE, centrum sit G. Dico rectam extensam per F, & G, transire per contactũ B. Si enim non transit, secet circumferentias in C, & E, ducanturque à centris F, G, ad B, contactum rectæ FB, GB. Quoniam igitur in triangulo FBG, latera duo BF, BG, maiora sunt latere FG: Est autem recta BF, rectę FC æqualis:

G 2 (quod

(quod F ponatur centrum circuli ABC,) & recta BG, rectæ GE, æqualis, (quod G ponatur centrum circuli DBE) erunt & rectę FC, GE, maiores quam recta FG, pars quam totum, (cum FG, cõtineat pręter FC, GE, rectam adhuc CE,) quod est absurdum. Si igitur duo circuli se se exterius contingant, &c. Quod erat demonstrandũ.

THEOREMA XII.

PROPOSITIO XIII.

Circulus circulum non tangit in pluribus punctis, quam vno, siue intus, siue extra tangat.

TAngãt se se circuli ABCD, AECF, intus. si fieri potest, in pluribus punctis, quam vno, A, & C. Assumantur autem centra horum circulorum G, H, quę diuersa erunt, per quæ recta GH, in vtramque partem extendatur, quam necesse est cadere in contactus A, & C. Itaque cum G, sit centrum, & recta AGHC, diameter, diuidetur AGHC, bifariam in puncto G. Simili ratione diuidetur eadem AC, bifariam in H. quod est absurdum. Vna enim recta in vno duntaxat puncto diuiditur bifariam. Si namque GC est dimidium totius AC, erit necessario HC, dimidio minor, cum sit pars dimidij GC.

THEOREMA XIII.

PROPOSITIO XIV.

In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant à centro. Et quæ æqualiter distant à centro, æquales sunt inter se.

Sint in circulo ABCD, cuius centrum E, duę rectæ æquales AB, CD. Dico ipsas æqualiter distare à centro E. Ducantur enim ex E, centro ad rectas AB, CD, duæ perpendiculares EF, EG, & coniungantur rectę EA, FD. Secabunt rectę EF, EG, rectas AB, CD, bifariam. Quare cum totæ AB, CD, ęquales ponantur, erunt & dimidia earum, rectę videlicet AF, DG, ęqualia. Quoniam igitur quadrata rectarum EA, ED, BD, ęqualium, inter se sunt ęqualia; Quadratum autem rectę EA, ęquale est quadratis rectarum & quadratarum rectæ E D, quadratis rectarum DG, G E: Erunt quoque quadrata rectarum A F, F E, æqualia quadratis rectarum DG,GE Ablatis ergo quadratis equalibus æqualium rectarum AF,DG, remanebunt quadrata rectarum FE,GE, ęqualia, ideoque & rectę EF, FG, æquales erunt. Distant igitur per 4. defin. huius lib. rectę AB, CD, ęqualiter à centro E.

Rursus distent rectę AB,CD, ęqualiter à centro E. Dico eas inter se esse ęquales. Ducantur enim iterum ex centro E, ad AB, CD, perpẽdiculares EF, EG, quæ per 4. definit. huius lib. ęquales erunt; diuidentq; rectas AB,CD bifariam, Ductis

Igitur rectis EA, ED, erunt earũ quadrata ęqualia: Est autem quadratum rectæ EA, ęquale quadratis rectarum AF, FE; & quadratum rectę ED, æquale quadratis rectarum DG, GE. Igitur & quadrata rectarum AF, FE, ęqualia sunt quadratis rectarum DG, GE; ideoque ablatis æqualibus quadratis ęqualium rectarum EF, EG, remanebunt quadrata rectarum AF, DG. ęqualia; atque adeo rectę AF, DG, ac propterea earum duplę AB, CD, ęquales quoque erunt. Itaque in circulo ęquales rectę lineę ęqualiter distant à centro, &c. quod erat demonstrandum.

THEO-

THEOREMA XIV.

PROPOSITIO XV.

In circulo maxima quidem linea est diameter; aliarum autem propinquior centro, remotiore semper maior.

IN circulo ABCDEF, cuius centrum G, diameter sit AF; & recta ei propinquior HI, remotior autem CD. Dico omnium esse maximam AF, & HI, maiorem quam CD. Ducantur enim ex G, centro rectæ GK, GL, perpendiculares ad CD, HI. Et quia remotior est CD, à cẽtro, quam HI, erit GK, maior quam GL, per 4. defin. huius lib. Abscindatur ex GK, recta GM, ipsi GL equalis, atq; per M, educatur BME, perpendidicularis ad GK, & connectătur rectę GB, GC, GD, GE; Quoniam igitur rectæ perpendiculares GM, GL, ęquales sūt, equaliter distabunt rectę BE, HI, à centro, per 4. defin. huius lib. & ideo inter se æquales erunt. Rursus quia rectę GB, GE, maiores quidem sunt recta BE, ęquales autem diametro AF; erit & diameter AF, maior, quam BE. Eādem ratione ostēdetur AF, maior omnibus alijs lineis. Deinde quia latera GB, GE, trianguli BGF, æqualia sunt lateribus GC, CD, triāguli CGD; & angulus BGE, maior est angulo CGD; erit recta BE, maior quam CD; atque adeo HI, quę ęqualis ostensa fuit ipsi BE, maior quoque erit quā CD. In circulo igitur maxima quidem linea est diameter, &c. Quod erat demonstrandum.

THEO-

THEOREMA XV.

PROPOSITIO XVI.

Quæ ab extremitate diametri cuiusque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipsum circulum cadet; & in locum inter ipsam rectam lineam, & peripheriam comprehensum, altera recta linea non cadet: & semicirculi, quidem angulus, quoquis angulo acuto rectilineo maior, est; reliquus autem minor.

IN circulo ABC, cuius centrum D, diameter sit AC, ad quam ex A, puncto extremo perpendicularis ducatur. Dico hanc lineam perpendicularẽ necessario extra circulum cadere. Si enim cadit intra ipſum, qualis eſt AB; ducta DB, erunt duo anguli DAB, DBA, æquales, ſed DAB, rectus eſt, per conſtructionem: Igitur & DBA rectus erit, quod eſt abſurdum. Duo enim anguli in triangulo minores ſunt duobus rectis. Non igitur cadet perpendicularis intra circulum; neq; eandem ob cauſam in ipſam circumferentiam, ſed extra, qualis eſt EF. Dico iam ex A, inter A E, rectam, & circumferentiam AB, non poſſe cadere alteram rectam. Cadat enim, ſi fieri poteſt, recta AG, ad quam ex D, ducatur perpendicularis CH, ſecans circumferentiam in I. quæ neceſſario ad partes anguli acuti DAG, cadet, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 1. Quoniam igitur in triangulo DAH, duo anguli DHA, DAH, minores ſunt duobus rectis, & DHA,

rectus

rectus est, per constructionem, erit angulus DAH. recto minor, ideoque recta DA, hoc est, recta illi æqualis DI, maior erit quam DH, pars quam totum, quod est absurdum. Non igitur intercipietur recta inter AE, & circumferentiam AB: sed quæcunque ex A, ducatur infra AE, ea secabit circulum. Dico denique angulum semicirculi, contentum diametro AC, & circumferentia AB, maiorem esse omni acuto angulo rectilineo; reliquum vero angulum contingentiæ, qui continetur recta AE, & circumferentia AB, minorem esse omni acuto angulo rectilineo. Quoniam enim ostensum est, omnẽ rectam ex A, ductam, infra perpendicularem AE, cadere intra circulum, faciet necessario ea linea, cum AC, angulum rectilineum

neum acutum minorem angulo semicirculi; at vero cum AE, angulum rectilineum acutum maiorem angulo contingentiæ, cum ille sit pars anguli semicirculi, hic vero totum quidpiam respectu anguli cótingentiæ. Id quod liquido constat, ducta recta AB, quomodocunqe infra AE. Nam cũ hæc linea AB, intra circulum cadat, vt demonstratum est, erit angulus rectilineus acutus CAB, minor angulo semicirculi contento sub diametro AC, & circumferentia ABC, cum ille huius sit pars: Angulus vero contingentię contẽtus sub tangente linea AE, & circumferentia ABC, minor angulo rectilineo acuto BAE, quod ille huius pars sit. Eademque ratio est de omnibus alijs angulis acutis rectilineis, cum omnes
con-

contineantur à diametro AC, vel tangente AE, & rectis ex A, ſub AE, ductis, quæ omnes intra circulum cadent, vt demonſtrauimus. Angulus igitur ſemicirculi maior eſt omni acuto angulo rectilineo, reliquus autem angulus contingentię, minor. Itaque quæ ab extremitate diametri, cuiuſque circuli ad angulos rectos ducitur, &c. Quod erat oſtendendum.

PROBLEMA II.

PROPOSITIO XVII.

A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum tangat circulum.

Ex puncto A, ducenda ſit linea, quæ tangat circulum

lum *BC*, cuius centrum D. Ducatur recta AD, secans circulum BC, in *B*. Deinde centro D, interuallo, autem DA. describatur circulus AE, & ex B educatur B E perpendicularis ad AD, secans circulum AE in E. Ducta deniq; recta ED, secans circulũ BC, in C. connectatur recta AC: quam dico tangere circulum BC, in C. Cum enim duo latera DE, DB. trianguli B DE, equalia sint duobus lateribus DA, DC, trianguli CDA, vtrumq; vtriq; vt constat ex circuli definitione; angulusque D, contentus dictis lateribus sit communis: Erunt & bases *B* E, GA, & anguli DBE, DC*A*, super ipsas, æquales. Est autem DBE, rectus ex constructione. Igitur & DCA, rectus erit. Itaque CA, eum sit perpendicularis ducta ad C, extremum se-

mi-

midiametri CD, tanget circulum, per corollarium præcedẽtis propositionis. A dato ergo puncto A, ducta est AC, recta tangens circulum BC, in C. quod faciendum erat.

THEOREMA XVI.

PROPOSITIO XVIII.

Si circulum tangat recta quæpiã linea, à centro autem ad contactum adiungatur recta quædam linea: quæ adiuncta fuerit, ad ipsam contingentem perpendicularis erit.

Recta linea AB, tangat in C, circulũ CD, cuius centrũ E, & ex E, ad C, recta ducatur EC. Dico EC, perpendicularem esse ad AB. Si enim non est, ducatur EF, perpendicularis ſum BC, cuius centrum D. Ducatur recta AD, ſecans circulum BC, in B. Deinde centro D, interuallo, autem DA, deſcribatur circulus AE; & ex B educatur B E perpendicularis ad AD, ſecans circulum AE in E. Ducta deniq; recta ED, ſecans circulũ BC, in C. connectatur recta AC: quam dico tangere circulum BC, in C. Cum enim duo latera DE, DB. trianguli B DE, equalia ſint duobus lateribus DA, DC, trianguli CDA, vtrumq; vtriq; vt conſtat ex circuli definitione; angulusque D, contentus dictis lateribus ſit communis: Erunt & baſes B E, CA, & anguli DBE, DCA, ſub per ipſas, æquales. Eſt autem DBE, rectus ex conſtructione. Igitur & DCA, rectus erit. Itaque CA, cum ſit perpendicularis ducta ad C, extremum ſemi-

mi-

midiametri CD, tanget circulum, per corollarium præcedẽtis propositionis. A dato ergo puncto A, ducta est AC, recta tangens circulum BC, in C. quod faciendum erat.

THEOREMA XVI.

PROPOSITIO XVIII.

Si circulum tangat recta quæpiã linea, à centro autem ad contactum adiungatur recta quædam linea: quæ adiuncta fuerit, ad ipsam contingentem perpendicularis erit.

RECta linea AB, tangat in C, circulũ CD, cuius centrũ E, & ex E, ad C, recta ducatur EC. Dico EC, perpendicularem esse ad AB. Si enim non est, ducatur EF, perpendicularis

ris ad AB, secans circumferentiam in D. Quoniam igitur in triangulo CEF, duo anguli ECF, EFC, minores sunt duobus rectis; Et est EFC rectus ex constructione: erit ECF, minor. Quare maior erit recta EC, hoc est, ED, quam EF pars quam totum, quod est absurdum. Est igitur EC, perpendicularis ad AB. Quare si circulum tangat recta quæpiam linea, &c. Quod demonstrandum erat.

Aliter EC non est perpendicularis ad AB, erit alter angulorum ad C, obtusus, & alter acutus. Sit ergo ECB, acutus, qui cum maior sit angulo semicirculi ECD, erit angulus semicirculi minor angulo aliquo acuto: quod est absurdum. Omnis siquidem angulus semicirculi maior est omni acuto.

THEOREMA XVII.

PROPOSITIO IX.

Si circulum tetigerit recta quapiam linea, à contactu autem recta linea ad angulos rectos ipsi tangenti excitetur: In excitata erit centrum circuli.

TAngat recta AB, circulum CDE, in C; & ex C, ducatur CE, perpendicularis ad AB Dico in CE, esse centrum circuli. Si enim est extra CE, sit F, centrum, à quo ad C, ducatur recta FC, quæ perpendicularis erit ad AB. Quare rectus angulus FCB, recto angulo ECB, æqualis erit pars toti: quod est absurdum. Non igitur extra CE, centrum circuli existet. Itaque si circulum tetigerit recta

cta quæpiam linea,&c. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA XVIII.

PROPOSITIO XVIII.

In circulo,angulus ad centrum duplex est anguli ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria basis angulorum.

IN circulo ABC, cuius centrum D,super basin BC,cõstituatur angulus BDC,ad cẽtrum , & super eandem basin angulus BAC, ad peripheriã. Dico angulum BDC duplum esse anguli BAC. per centrum D,recta extendatur AE. Quoniam igitur rectę DA,DB,equales sunt,erunt anguli DAB,DBA,æquales: Est autem externus angulus BDE,equalis duobus

bus angulis internis DAB, DBA. Quare BDE, duplus erit alterius eorum, vt anguli DAB. Eodem modo duplus ostendetur angulus CDE, anguli DAC. Quapropter totus BDC, duplus erit totius BAC. Quando enim duę magnitudines duarum sunt duplæ, singulæ singularum, est quoque aggregatum ex illis aggregati ex his duplū. Constat ergo propositum, & eodem fere modo ostendetur alijs casibus.

THEO-

THEOREMA XIX.

PROPOSITIO XXI.

In circulo, qui in eodem segmento sunt, anguli sunt, inter se æquales.

IN circulo ABCD, cuius centrum E existant anguli A, & B, in segmento DABC. Dico eos esse æquales. Sit enim segmentum DABC, primum semicirculo maius; & ducantur rectæ DE, CE, ad centrum E. Quoniam igitur angulus DEC, ad centrum, duplus est tam anguli D A C, quàm DBC, ad peripheriam, cum omnes habeant eandem basim DC; erunt anguli A, & B, dimidiatę partes anguli E. Quare inter se æquales erunt. Eademque ratione omnes

omnes alij anguli existentes in segmento DABC, ostendentur esse equales.

THEOREMA XX.

PROPOSITIO XXII.

Quadrilatererum in circulis descriptorum anguli, qui ex adverso, duobus rectis sunt aquales.

IN circulo, cuius centrum E, inscriptum sit quadrilaterũ ABCD. Dico duos angulos oppositos ABC,CBA. Item BCD, DAB, æquales esse duobus rectis. Ductis enim diametris duabus quadrilateri AC, BD, erunt duo anguli ABD, ACD, in eodem segmento ABCD, æquales. Similiter erunt duo anguli CBD, CAD, in eodem

seg

segmento CBAD, æquales. Quare duo anguli ABD, CBD, hoc est, totus angulus ABC, ęqualis est duobus angulis ACD, CAD. Addito igitur communi angulo CDA, erunt duo anguli ABC, CDA, ęquales tribus angulis ACD, CAD, CDA. Sed hi tres æquales sunt duobus rectis. Igitur, & duo ABC, CDA, duobus erunt rectis æquales. Eodem modo ostendemus, angulos BCD, DAB, duobus esse rectis ęquales. Nam rursus duo anguli ABD, ACD, sunt æquales: Item duo BCA, BDA; ac propterea totus angulus BCD, duobus angulis ABD, BDA, ęqualis erit. Addito igitur communi angulo BAD; erunt duo anguli BCD, BAD, ęquales tribus angulis ABD, BDA, DAB. Sed hi tres sunt ęquales duobus rectis. Igitur & duo

& duo BCD, DAB, duobus rectis equales erunt. Quadrilaterorum igitur in circulis descriptorum, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOREMA XXI.

PROPOSITIO XXIII.

Super eadem recta linea, duo segmenta circulorum similia, & inaequalia, non constituentur ad easdem partes.

SI enim fieri potest super recta AB, constituantur ad easdem partes duo segmenta similia. & inequalia ACB, ADB. Perspicuum est autem, quod se solum intersecent in punctis A, & B; circulus enim circulum non secat in pluribus punctis, quam duobus. Vnde peripheria vnius segmenti tota erit extra peripheriam alterius. Ducatur igitur recta AD, secans circumferentias in C, & D, & connectantur rectę CB, DB. Quoniam igitur segmenta ponuntur similia, erit per 10. defin. huius lib. angulus ACB, æqualis angulo ADB, externus interno: quod est absurdum. Non igitur segmenta sunt similia: Quare super eadem recta linea, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA XXII.

PROPOSITIO XXIV.

Super æqualibus rectis lineis, similia circulorum segmenta sunt inter se æqualia.

SVper rectis lineis equalibus *A* B, C D, constituta sint seg-

segmenta similia AEB, CFD, Dico ea inter se esse æqualia. Lineę enim AB, CD, cum sint ęquales, congruent inter se, si altera alteri superponatur. Dico igitur & segmentum AEB segmento CED congruere. Si enim non congruit, cadet aut extra, aut intra, aut partim extra, partim intra. Quod si extra cadat, aut intra, constituentur super eadem recta CD, duo segmenta AEB, AFB, similia, & inæqualia, quorum vnum totum extra aliud cadit, quod est absurdum. Demonstratum enim est contrarium. Quod si partim extra cadat, partim intra, secabunt se se in pluribus punctis, quam duobus, duo circuli. quod est absurdum. Circuli enim non se secant in pluribus punctis, quam duobus. Congruet igitur segmentum

AEB, segmento CFD, atque adeo ipsa inter se æqualia erunt. Quocirca super æqualibus rectis lineis, &c. Quod erat demonstrandum.

PROBLEMA III.

PROPOSITIO XXV.

Circuli segmento dato, describere circulum, cuius est segmentum.

SIt segmentum circuli ABC, quod perficere oporteat. Subtendatur recta AC, quæ bifariam secetur in D, pũcto, per quod perpendicularis ducatur DB, connectaturque AB. Angulus igitur DBA, vel maior est angulo DAB, vel æqualis, vel minor. Si maior, (quod quidem continget, quando segmentum ABC, minus fuerit semicirculo:

Tunc

Tunc enim, quia BD trãsit per centrum; ex corollario propos. 1. huius lib. quod est extra segmentum, cum ponatur esse minus; erit DA, maior, quã DB, cum DB perficiens diametrum sit omnium minima, quæ ex puncto D, in circunferentiam cadunt. Quare angulus DBA, maior erit angulo DAB.) omnino si est fiatq; angulus BAE, æqualis angulo DBA, & secet recta AE, rectam BD, productam in E. Dico E, esse centrum circuli, cuius segmentum ABC. Ducta enim recta EC, erunt latera AD, DE, trianguli ADE, æqualia lateribus CD, DE, trianguli CDE, & anguli contenti, recti. Quare bases EA, EC, æquales erunt. Est autem & EA, æqualis ipsi EB, quod anguli EAB, EBA, æquales sint. Igitur tres lineæ EA, EB, EC, equales erunt, ac propterea E, centrũ erit circuli ABC, quandoquidẽ ex E, plures quam duæ rectæ æquales cadunt in circumferentiam.

THEOREMA XXIII.

PROPOSITIO XXVI.

In æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus peripherijs insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

IN circulis æqualibus ABC, DEF, quorum centra G,H, constituti sint primum ad centra anguli equales AGC, DHF. Dico peripherias AC, DF, quibus insistunt, siue super quas ascenderunt, esse equales. Sumantur enim in peripherijs ABC,

ABC,DEF, duo puncta B,E, ad quę rectę ducantur AB, CB, DE, FE, connectanturque rectę AC,DF. Quoniam igitur anguli B,& E, dimidij sunt æqualium angulorum G,& H; erunt & ipsi ęquales inter se. Quare ex definitione segmenta ABC, DEF,similia erunt. Et quia latera AG,GC,trianguli AGC, æqualia sunt lateribus DH, HF, trianguli DHF, propter circulorum æqualitatem, & anguli, quos continent,G,H, æquales, ex hypothesi; erunt bases AC, DF,ęquales. Cum igitur segméta similia ABC, DEF, sint super lineas ęquales AC, DF, erunt ipsa inter se ęqualia. Quare si à circulis æqualibus demãtur, remanebunt, & segmenta AC, DF, inter se ęqualia; atq; adeo peripheriæ AC, DF: Quod est propositum.

Sint deinde ad peripherias constituti duo anguli ęquales B, & E. Dico rursus, peripherias AC, DF, super quas ascenderunt, esse æquales. Erunt enim, vt prius, segmenta ABC. DEF, similia. Cum igitur sint super æquales lineas AC, DF: (cum enim anguli G, H, æquales sint, quod sint dupli angulorum æqualium B, & E: erunt, vt prius, rectæ AC, DF ęquales) erunt ipsa inter se æqualia. Si igitur à circulis ęqualibus detrahantur, remanebunt & segmenta AC, DF, æqualia. In æqualibus itaque circulis, ęquales anguli, &c. Quod erat demonstrandum.

THEO-

THEOREMA XXIV

PROPOSITIO XXVII.

In æqualibus circulis, anguli, qui æqualibus peripherijs insistunt, sunt inter se æquales, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

IN circulis æqualibus ABC, DEF, quorum centra G,H, insistant primum anguli ad cẽtra AGC,& DHF,æqualibus peripherijs AG, DF. Dico angulos AGC,& DHF,æquales esse. Si enim non sunt æquales, sit angulus G, maior, fiatque angulus AGI, ęqualis angulo DHF. Erunt igitur peripheriæ AI, DF, ęquales. Cum igitur peripheria AC,æqualis ponatur peripheriæ DF, erunt peripheriæ AI, AC, inter se ęquales, pars,

& totum; quod est absurdum.
Sunt ergo anguli AGC, DHF, æquales,

Insistant deinde eisdem peripherijs equalibus AC, DF, anguli B,&E,ad peripherias,quos rursus dico equales esse. Nam si alter,vt ABC, maior est: fiat angulo E,equalis angulus ABI, eruntque peripherię AI, DF, ęquales. Quare,vt prius,erunt peripherię AI,AC,ęquales,pars & totum; quod est absurdum. Sunt ergo anguli ABC, DEF, ęquales. In ęqualibus igitur circulis, anguli,qui ęqualibus peripherijs insistunt, &c. Quod demonstrandum erat.

THEO:

THEOREMA XXV.

PROPOSITIO XXVIII.

In æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ æquales peripherias auferunt, maiorem quidem maiori, minori autem minori.

IN circulis ęqualibus ABC, DEF, quorum centra G, & H, sint rectæ ęquales AC, DF, Dico maiorem peripheriam ABC, ęqualem esse maiori DEF & minorem AC; minori DF. Ductis enim rectis AG, GC, DH, HF; erunt latera AG, GC, trianguli AGC, ęqualia lateribus DH, HF, trianguli DHF, Ponuntur autem & bases AC, DF, ęquales. Igitur anguli G, & H, ęquales erunt: ac propterea peripheriæ AC, DF, quibus insistunt, ęquales erunt; quæ ablatæ ex totis ęqualibus, relinquent etiam ęquales ABC, DEF. In ęqualibus ergo circulis æquales rectæ lineæ, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA XXVI.

PROPOSITIO XXIX.

In æqualibus circulis, æquales peripherias, æquales rectæ lineæ subtendunt.

IN circulis eisdem ęqualibus ponantur ęquales peripheriæ ABC, DEF; item AC, & DF. Dico rectas AC, DF, quę eas subtendunt, esse ęquales. Ductis enim lineis, vt prius erunt latera AG, GC, trianguli AGC, ęqualia lateribus DH, HF, trianguli DHF: Sunt autē &

& anguli G,H, æquales, quod æqualibus peripherijs AC, DF, insistant. Igitur bases AC, DF, æquales erunt. In æqualibus ergo circulis, ęquales peripherias, &c. Quod erat ostendendum.

PROBLEMA IV.

PROPOSITIO XXX.

Datam peripheriam bifariam secare.

SIt peripheria ABC, secanda bifariam. Ducatur recta subtendens AC, qua diuisa bifariam in D, erigatur perpendicularis DB, quæ peripheriam ABC, bifariam secabit in B. Ductis enim rectis AB, CB, erunt latera AD, BD, trianguli ADB, æqualia lateribus CD, DB, triā-guli

guli CDB : Sunt autem & anguli ad D, ęquales, nempe recti. Igitur & bases AB, CB, æquales erunt; ac propterea peripheriæ AB, CB, erunt æquales. Datam ergo peripheriam bifariam secuimus. Quod erat faciendum.

THEOREMA XXVII

PROPOSITIO XXXI.

In circulo angulus, qui in semicirculo, rectus est: qui autem in maiore segmento, minor recto: qui vero in minore segmento, maior est recto. Et insuper angulus maioris segmenti, recto quidem maior est: minoris autem segmenti angulus, minor est recto.

CIrculi enim ABC, cuius centrum D, diameter sit AC, A C, constituaturque in semicirculo angulus ABC, existetq; angulus BAC, in maiori segmẽto CAB. Constituatur quoque in CEB, minori segmento angulus BEC. Dico angulũ ABC, in semicirculo rectum esse; angulum vero BAC, in maiore segmento, minorem recto: & angulum BEC, n minori segmento, maiorem recto. Item angulum maioris segmenti cõprehensum recta BC, & peripheria BAC, esse recto maiorẽ. At angulum minoris segmenti comprehensum recta BC, & peripheria BEC, recto minorem. Ducatur enim recta BD, ad centrum, & extendatur AB in F. Quoniam igitur rectę DA, DB, ęquales sunt, erit angulus DBA, angulo DAB, ęqualis. Eadem ratione erit angulus DBC, angulo DCB, ęqualis, ideo-

ideoque totus angulus ABC, duobus angulis BAC, BCA, æqualis erit. Est autem & angulus FBC, externus eisdem duobus internis angulis BAC, BCA in triangulo ABC equalis. Quare equales erunt inter se anguli ABC, FBC; ac propterea vterque rectus. Rectus igitur est angulus ABC; quod est primum.

Quoniam vero in triangulo ABC, duo anguli ABC, & BAC sunt duobus rectis minores; Et est angulus A B C ostensus rectus: Erit angulus BAC, in segmento maiori, recto minor; quod est secundum.

Rursus, quia in quadrilatero ABEC, intra circulum descripto, duo anguli oppositi BAC, & BEC, sunt duobus rectis æquales; Et angulus BAC ostensus est recto minor: Erit BEC,

angu-

angulus in segmento minore, recto maior: quod est tertium.

Quartum patet ex demonstratis angulis enim segmentorum, vel additur, vel detrahitur recto.

THEOREMA XXVIII

PROPOSITIO XXXII.

Si circulum tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem producatur quadam recta linea circulum secans: Anguli, quos ad contingentem facit, aquales sũt ijs, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis.

TAngat recta *AB*, circulum CDE, in C, puncto, à quo ducatur recta CE, diuidens circulum in duo segmenta, in quibus fiant anguli CGE. CDE. Pico

Dico angulum ACE, ęqualem esse angulo CGE, in alterno segmento; & angulum BCE, angulo CDE, in alterno quoq; segmento. Ducta igitur recta CF, per centrum, connectatur recta EF: eritque CF perpendicularis ad AB, & angulus CEF, rectus; ac propterea reliqui anguli ECF, EFC, æquales erunt vni recto, vt angulo recto ACF. Dempto ergo communi angulo ECF, erit reliquus ACE, reliquo CFE, æqualis est autem angulo CFE ęqualis quoque angulus CGE, cum vterque sit in segmento CGE. Quare angulus ACE, angulo CGF, ęqualis erit. Quoniam vero in quadrilatero CDEG, duo anguli CDE, CGE, duobus sunt rectis æquales: Sunt autē & duo anguli ACE, BCE, duobus rectis ęquales; si auferantur

tur æquales anguli ACE, CGE, remanebit angulus B C E, angulo CDE, ęqualis. Si circulum igitur tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem, &c. Quód erat ostendendum.

PROBLEMA V.

PROPOSITIO XXXIII.

Super data recta linea describere segmentum circuli, quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.

AD punctum A, fiat angulus DAB, ęqualis angulo C, acuto; & agatur ad D A, perpendicularis A E, quæ cadet supra AB. Fiat deinde angulo FAB, ęqualis angulus FBA, secetque BF, rectam AE, in F. Erunt igitur rectæ FA, FB, æquales. Quare si centro F, & in-

interuallo FA, circulus describatur AGB, transibit is per B. Dico igitur angulum in segméto AGB, quod descriptum est super AB, esse ęqualem angulo C. Fiat enim angulus in dicto segmento AGB. Quia igitur AE per centrum F, transit, & ei perpendicularis est DA, tanget DA, recta circulum in A, per Coroll. propos. 16. huius lib. Quapropter angulus DAB, hoc est, angulus datus C, ęqualis erit angulo G, in segmento alterno AGB.

Si vero sit angulus datus H, obtusus. Fiat rursus angulo H, ęqualis angulus IAB, & agatur ad IA, perpendicularis AE, quę supra AB, cadet. Reliqua omnia fiant, vt prius, descriptaq; erit super AC, segmétum AKB, in quo angulus K, equalis est angulo dato obtuso H. Nam an-

angulus IAB, hoc eſt, angulus datus H, ęqualis eſt angulo K, in alterno ſegmento AKB. Eadem enim eſt demonſtratio. Itaque ſuper data recta linea deſcripſimus ſegmentum, &c. Quod efficiendum erat.

PROBLEMA VI.

PROPOSITIO XXXIV.

A dato circulo ſegmentum abſcindere capiens angulum aequalem dato angulo rectilineo.

DAtus circulus ſit *A* B C, à quo auferre oporteat ſegmentum, in quo angulus exiſtés ęqualis ſit dato angulo D. Ducatur recta EF, tangens circulum in A. Fiat deinde angulus FAE, ęqualis angulo dato D. Dico igitur triangulum ACB

ACB, in ſegmento ablato ACB, æqualem eſſe dato angulo D. Eſt enim angulus FAC, æqualis angulo B, in alterno ſegmento ACB. Cum ergo angulo dato D, factus ſit æqualis angulus FAC, erit quoque angulus B, angulo D, æqualis. A dato ergo circulo abſcidimus ſegmentum ACB, &c. Quod erat faciendum.

THEOREMA XXIX

PROPOSITIO XXXV

Si in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecuerint, rectangulum comprahenſum ſub ſegmentis vnius, æquale eſt ei; quod ſub ſegmentis alterius comprahenditur, rectangulo.

SEcet CD, tranſiens per centrum rectam AB, non bifariam,

riam. Secetur ergo AB, bifariam in G, ducanturque rectæ FG, FB, eritque FG, perpendicularis ad AB. Quoniam recta CD, diuisa est bifariam in F, & non bifariam in E, erit sane rectangulum sub CE, ED, vna cũ quadrato rectæ FE, æquale quadrato rectæ FD, hoc est, quadrato rectæ FB: Est autem quadratum rectæ EF, æquale quadratis rectarum FG, GE, & quadratum rectæ FB, æquale quadratis rectarum FG, GB, erit quoque rectangulum sub CE, ED, vna cum quadratis rectarum FG, GE, equale quadratis rectarum FG, GB. Dempto ergo communi quadrato rectæ FG, remanebit rectangulum sub CE, ED, vna cum quadrato rectę GE, æquale quadrato rectæ GB. Atqui etiam rectangulum sub AE, EB, vna cum quadrato enim DA, secans vtcunque. Diuisa ergo A C, bifariam in F, ducãtur rectæ EB, EC, ED, EF: eritq; EB, ad BD, perpendicularis; & EF, ad AC. Quoniam igitur CA, diuisa est per æqualia in F, & ei addita recta CD, erit rectangulum sub DA, DC, vna cum quadrato rectæ CF, ęquale quadrato rectæ D F. Addito igitur communi quadrato rectę FE, erit rectangulũ sub DA, DC, vna cum quadratis rectarum CF, FE, æquale quadratis rectarum DF, FE: Est autem quadratis rectarum CF, F E, ęquale quadratum rectæ E C, ideoq; & quadratũ rectę EB; & quadratis rectarum DF, FE, ęquale est quadratum rectę DE. Quare rectangulum sub DA, DC, vna cum quadrato rectę EB, ęquale erit quadrato rectæ DE. Cum igitur quadratum

tum rectę DE, ęquale sit quadratis rectarum DB, BE: erit & rectangulum sub DA, DC, vna cum quadrato rectæ EB, ęquale quadratis rectarum DB, BE. Ablato ergo cõmuni quadrato rectæ BE, remanebit rectangulum sub DA, DC, quadrato rectæ DB, ęquale: quod est propositum. Si igitur extra circulum sumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonstrandum.

drato rectę GE, æquale est eidē quadrato rectæ GB: propterea quod recta AB; secta est bifariam in G, & non bifariam in E. Igitur rectangulum sub CE, ED vna cum quadrato rectæ GE, æquale est rectangulo sub AE, EB, vna cum quadrato eiusdē rectæ GE. Quare ablato communi quadrato rectæ GE, remanebit rectangulum sub CE, ED, ęquale rectangulo sub AE. EB. quod est propositum.

Quod si neutra per centrum transeat, siue vna illarum bifariam diuidatur, siue neutra facilè fere eodem medio fiet demonstratio: vnde cum non sit noua difficultas, aliud non addo, si igitur in circulo duę lineæ, &c. Quod demonstrandū erat.

THEO-

THEOREMA XXX.

PROPOSITIO XXXVI.

Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulũ secet, altera vero tangat: Quod sub tota secante, & exterius inter punctum, & conuexam peripheriam assumpta comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod à tangente describitur, quadrato.

EXtra circulum ABC, punctum sumatur D, à quo linea ducatur DA, secans circulum in C, & linea DB, circulum tangens in B. Dico rectãgulum sub DA, DC, æquale esse quadrato rectæ DB. Transeat

drato rectę GE, æquale est eidē quadrato rectæ GB: propterea quod recta AB; secta est bifariam in G, & non bifariam in E. Igitur rectangulum sub CE, ED vna cum quadrato rectæ GE, æquale est rectangulo sub AE, EB, vna cum quadrato eiusdē rectæ GE. Quare ablato communi quadrato rectæ GE, remanebit rectangulum sub CE, ED, ęquale rectangulo sub AE. EB. quod est propositum.

Quod si neutra per centrum transeat, siue vna illarum bifariam diuidatur, siue neutra facilè fere eodem medio fiet demonstratio: vnde cum non sit noua difficultas, aliud non addo, si igitur in circulo duę lineæ, &c. Quod demonstrandū erat.

THEO-

THEOREMA XXX.

PROPOSITIO XXXVI.

Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulũ secet, altera vero tangat: Quod sub tota secante, & exterius inter punctum, & conuexam peripheriam assumpta comprahenditur rectangulum, æquale erit ei, quod à tangente describitur, quadrato.

Extra circulum ABC, punctum sumatur D, à quo linea ducatur DA, secans circulum in C, & linea DB, circulum tangens in B. Dico rectãgulum sub DA, DC, æquale esse quadrato rectæ DB. Transeat

drato rectę GE, æquale est eidē quadrato rectæ GB: propterea quod recta AB; secta est bifariam in G, & non bifariam in E. Igitur rectangulum sub CE, ED vna cum quadrato rectæ GE, æquale est rectangulo sub AE, EB, vna cum quadrato eiusdē rectæ GE. Quare ablato communi quadrato rectæ GE, remanebit rectangulum sub CE, ED, ęquale rectangulo sub AE. EB. quod est propositum.

Quod si neutra per centrum transeat, siue vna illarum bifariam diuidatur, siue neutra facilè fere eodem medio fiet demonstratio: vnde cum non sit noua difficultas, aliud non addo, si igitur in circulo duę lineæ, &c. Quod demonstrandū erat.

THEO-

THEOREMA XXX.

PROPOSITIO XXXVI.

Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulũ secet, altera vero tangat: Quod sub tota secante, & exterius inter punctum, & conuexam peripheriam assumpta comprahenditur rectangulum, æquale erit ei, quod à tangente describitur, quadrato.

EXtra circulum ABC, punctum sumatur D, à quo linea ducatur DA, secans circulum in C, & linea DB, circulum tangens in B. Dico rectãgulum sub DA, DC, æquale esse quadrato rectæ DB. Transeat

drato rectę GE, æquale est eidē quadrato rectæ GB: propterea quod recta AB; secta est bifariam in G, & non bifariam in E. Igitur rectangulum sub CE, ED vna cum quadrato rectæ GE, æquale est rectangulo sub AE, EB, vna cum quadrato eiusdē rectæ GE. Quare ablato communi quadrato rectæ GE, remanebit rectangulum sub CE, ED, ęquale rectangulo sub AE. EB. quod est propositum.

Quod si neutra per centrum transeat, siue vna illarum bifariam diuidatur, siue neutra facilè fere eodem medio fiet demonstratio: vnde cum non sit noua difficultas, aliud non addo, si igitur in circulo duę lineæ, &c. Quod demonstrandū erat.

THEO-

THEOREMA XXX.

PROPOSITIO XXXVI.

Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulũ secet, altera vero tangat: Quod sub tota secante, & exterius inter punctum, & conuexam peripheriam assumpta comprahenditur rectangulum, æquale erit ei, quod à tangente describitur, quadrato.

EXtra circulum ABC, punctum sumatur D, à quo linea ducatur DA, secans circulum in C, & linea DB, circulum tangens in B. Dico rectãgulum sub DA, DC, æquale esse quadrato rectæ DB. Transeat

enim DA, secans vtcunque. Diuisa ergo A C, bifariam in F, ducātur rectæ EB, EC, ED, EF: eritq; EB, ad BD, perpendicularis; & EF, ad AC. Quoniam igitur CA, diuisa est per æqualia in F, & ei addita recta CD, erit rectangulum sub DA, DC, vna cum quadrato rectæ C F, ęquale quadrato rectæ D F. Addito igitur communi quadrato rectę FE, erit rectangulū sub DA, DC, vna cum quadratis rectarum CF, FE, æquale quadratis rectarum DF, FE: Est autem quadratis rectarum CF, F E, ęquale quadratum rectæ E C, ideoq; & quadratū rectę EB; & quadratis rectarum DF, FE, ęquale est quadratum rectę DE. Quare rectangulum sub DA, DC, vna cum quadrato rectę EB, ęquale erit quadrato rectæ DE. Cum igitur quadratum

tum rectę DE, ęquale sit quadratis rectarum DB, BE. erit & rectangulum sub DA, DC, vna cum quadrato rectæ E B, ęquale quadratis rectarum DB, BE. Ablato ergo communi quadrato rectæ BE, remanebit rectangulum sub DA, DC, quadrato rectæ DB, ęquale: quod est propositum. Si igitur extra circulum sumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA XXXI.

PROPOSITIO XXXVII.

Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum secet, altera in eum incidat; sit autem, quod sub tota secante, & exterius inter punctum, & conuexam peripheriam assumpta, comprehenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente describitur, quadrato; Incidens ipsa circulum tanget.

EXtra circulum ABC, cuius centrum E, punctum sumatur D, à quo ducatur recta DA, circulum secans in C, & recta DB, incidens in circulum ad ad punctum B, sitque rectangulum sub DA, DC, equale quadrato rectæ DB. dico DB, circulum tangere in B. ducatur enim DF, tangens circulum, & iungantur rectæ EB, EF. Quod si DA, secans, non transeat per centrum E, iungatur quoque recta DE. Quoniam igitur rectangulo sub DA, DC, equale est quadratum rectę tangentis DF: Et eidem rectangulo sub DA, DC, equale ponitur quadratum rectę DB: erunt quadrata rectarum DF, DB, inter se equalia; ideoque & rectæ DF, DB, equales inter se erunt. Itaque quia latera DF, FE, trianguli DFE, equalia sunt lateribus DB, BE, trianguli DBE; & basis DE, communis erunt anguli DFE, DBE, equales. Atqui angulus DFE, rectus est, quod DF, circulum tangat.

Igitur & angulus DBE, rectus erit. Quapropter per coroll. propos. 16. huius lib. DB, circulum tanget; quod est propositum. Si ergo extra circulum sumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonstrandum.

EVCLIDIS ELEMENTORVM

LIBER QVARTVS.

DEFINITIONES.

1 Figura rectilinea in figura rectilinea inscribi dicitur, cum singuli eius figuræ, quæ inscribitur, anguli singula latera eius, in qua inscribitur, tangunt.

2. Similiter, & figura circum figuram describi dicitur, cũ singula eius, quę circumscribitur, latera singulos eius figurę angulos tetigerint, circum quam illa describitur.

3 Figura rectilinea in circulo inscribi dicitur, cum singuli

eius figurę, quæ inscribitur, anguli tetigerint circuli peripheriam.

4. Figura vero rectilinea circa circulum describi dicitur, cum singula latera eius, quæ circunscribitur, circuli peripheriam tangunt.

5. Similiter, & circulus in figura rectilinea inscribi dicitur, cum circuli peripheria singula latera tangit eius figuræ, cui inscribitur.

6. Circulus autem circum figuram describi dicitur, cum circuli peripheria singulos tangit eius figurę, quam circumscribit, angulos.

7. Recta linea in circulo accōmodari, seu coaptari dicitur, cum eius extrema in circuli peripheria fuerint.

PRO-

PROBLEMA I.

PROPOSITIO I.

In dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non sit maior.

IN circulo ABC, coaptanda sit recta linea equalis rectæ lineę datę G, quæ tamen maior non sit diametro circuli dati. Cum enim diameter sit omnium rectarum in circulo maxima, si data recta diametro maior foret, non posset in circulo aptari illi vna ęqualis. Ducatur ergo diameter B C. Itaque si data recta G, æqualis fuerit diametro, aptata erit B C, illi ęqualis: Si vero G, minor fuerit diametro, abscindatur BE, equalis ipsi G, & centro B, interuallo autem B E, circulus describatur EA, secans circulum ABC, in A. Ducta igitur recta BA, erit ea aptata in circulo ABC, equali date recte G. Est enim BA, equalis ipsi BE & G, equalis eidem BE, per constructionem. Quare AB, & G, inter se equales quoque erunt. In dato ergo circulo rectam lineam accommodauimus, &c. Quod erat faciēdum.

THEO-

THEOREMA II.

PROPOSITIO II.

In dato circulo triangulum describere dato triangulo æquiangulum.

Sit in circulo ABC, dato describendum triangulum æquiangulum triangulo dato cuicunque DEF. Ducatur recta GH, tangens circulum in A, fiatque angulus GAB, angulo F, æqualis, & angulus HAC angulo E, atque extendantur rectæ AB, AC: ad circumferentia vsq; in puncta B, & C, coniugaturque recta BC. Non cadet autem recta AG, in rectam AB, vel inter rectas AB, AG, propterea quod anguli GAB, HAC, hoc est, anguli F, E, minores

res sunt duobus rectis. Essent autem duobus rectis æquales, si *A*C, in *AB*, caderet; vel maiores duobus rectis, si inter *AB*, *A*C, caderet. Dico triangulum *ABC*, circulo dato inscriptum, esse æquiangulum dato triangulo DEF. Est enim angulus *C*, æqualis angulo G*AB*; & eidem angulo G*AB*, æqualis est angulus F, ex constructione. Quare anguli *C*, & F, inter se quoque erunt æquales. Similiter quia angulus *B*, æqualis est angulo H*A*C; & eidem angulo HAC, æqualis est, per constructionem, angulus E, erunt etiam anguli *B*, & *E*, inter se æquales. Cum igitur duo anguli *B*, & *C*, trianguli *ABC*, æquales sint duobus angulis *E*, & F, trianguli DEF, erunt quoque reliqui anguli *A*, & D, æquales. Æquiangulum est ergo triangulum *ABC*, triã-

gulo

gulo DEF. Quare in dato circulo triangulum descripsimus, &c. Quod faciendum erat.

PROBLEMA III.

PROPOSITIO III.

Circa datum circulum triangulum describere dato triangulo æquiangulum.

Circa circulum datum ABC, describendum sit triãgulum ęquiangulum dato triãgulo DEF. Producto latere EF, vtrinque ad G, & H, sumptoque centro circuli I, ducatur recta vtcunque *AI*, & fiat angulus *AIB*, æqualis angulo DEG, & angulus *BIC*, angulo DFH. Deinde ex *A*, *B*, C, educantur ad *AI*, *BI*, *CI* perpendiculares KL, LM, MK, quæ circulũ tan-

tangent in punctis *A*,*B*,C, per coroll. propos. 16. lib. 3. coibuntque in punctis K,I M. Si enim duceretur recta *AC*, fierent duo anguli KAC,KC*A*, duobus rectis minores, ac proinde *A*K CK, coibunt, &c. Nam recta hæc ducta *A*C, caderet supra rectas *A*I,CI, quod hæ angulū constituant in I. Cum enim spatium circa I, æquale sit quatuor rectis, ex coroll. 2. propos. 15. lib 1. hoc est, quatuor angulis ad *E*. & F, sintq; duo anguli *A*I*B*, CI*B*, duobus angulis DEG, DFH, æquales; erit reliquum spatium *A*IC, reliquis duobus angulis DEF, DF*E*, æquale: Sed hi minores sunt duobus rectis. Igitur & spatiū *A*IC, minus erit duobus rectis, ac proinde angulus erit *A*IC. Alias spatium illud esset vel æquale duobus rectis, si nimirum

Al,

AI,CI,vnam rectam lineã constituerent;vel maius duobus rectis,si recta AI,producta caderet supra I. C. Cadit igitur necessario AI, producta infra CI, atque idcirco angulus fiet *AI C*,ad partes K,& ducta recta AC, faciet eum AK,CK, duobus angulos minores duobus rectis,ideoque rectæ AK, CK, coibunt in K. Non secus ostẽdemus,AL,BL,coire in L,& CM BM, in M, quia ductæ rectæ A B,BC,facient cum AL,BL,CM, BM, angulos minores duobus rectis. Descriptum est igitur circa circulum triangulum KLM, quod dico esse æquiangulum triangulo DEF. Quoniã enim omnes anguli in quadrilatero AIBL,equales sunt quatuor rectis, vt ad 32. propos. lib.1. ostensum fuit, & anguli IAL,IBL,sunt duo recti, erunt

reli-

reliqui AIB, & L, duobus rectis æquales. Cum igitur & anguli DEG, DEF, sint duobus rectis ęquales, si auferantur æquales AIB, DEG, remanebit angulus L angulo DEF, ęqualis. Pari ratione ostendemus angulum M, æqualem esse angulo DFE, Reliquus igitur, angulus K, reliquo angulo D, ęqualis erit; atq; idcirco triangulum KLM, ęquiangulum triangulo DEF. Circa datum ergo circulũ, &c. Quod efficiendum erat.

PRO-

PROBLEMA IV.

PROPOSITIO IV.

In dato triangulo circulum inscribere.

SIt describendus circulus in dato triangulo ABC. Diuisis duobus angulis ABC, ACB, bifariam rectis BD, CD, quæ intra triangulum coeant in D, ducantur ex D, ad tria latera, perpendiculares DE, DF, DG. Quoniam igitur duo anguli DBE, DEB, trianguli DBE, ęquales sunt duobus angulis DBF, DFB, triãguli DBF, vterque vtrique; & latus BD, commune; erunt quoque latera DE, DF ęqualia. Eademque ratione ęqualia erunt latera DF, DG, in triangulis DCF, DCG. Cum igitur

tur tres rectæ DE, DF DG, sint æquales; circulus ex D, ad interuallum DE, descriptus transibit per reliqua puncta F, & G; tangetque latera trianguli in E, F, G per coroll. propos. 16. lib. 3. quod latera perpendicularia sint ad semidiametros DE, DF, DG In dato ergo triangulo circulum descripsimus. Quod erat efficiendum.

PROBLEMA V.

PROFOSITIO V.

Circa datum triangulum circulum describere.

SIt circulus describẽdus circa datum triangulum ABC Diuidantur duo latera AB, AC, (quę in triãgulo, rectãgulo vel obtusangulo sumenda sũt faci-

facilitatis gratia, circa rectum, vel obtusum angulum, quamuis hoc non sit omnino necessarium, sed duo quæuis latera bifariam possint secari) bifariam in D,& E, punctis, ex quibus educantur DF,EF; perpendiculares ad dicta latera, coeūtes in F, (Quod enim coeant, patet. Nam si ducta esset recta DE, fierent anguli FDE, FED; duobus rectis minores) eritque F, vel intra triangulum, vel in latere BC, vel extra triangulum. Ducantur rectæ FA, FB, FC. Quoniam igitur latera AD, DF, trianguli ADF, æqualia sunt lateribus BD, DF, trianguli BDF, & anguli ad D, recti; erunt bases FA, FB æquales. Eodem modo erunt FA, FC, æquales. Cum ergo tres rectæ FA, FB, FC, sint æquales, circulus descriptus ex F, ad interuallum

FA.

EA, transibit quoque per puncta B, & C. Circa datum ergo triangulum circulum descripsimus. Quod erat faciendum.

PROBLEMA VI.

PROPOSITIO VI.

In dato circulo quadratum describere.

SIt in dato circulo ABCD, cuius centrum E, inscribẽdum quadratum. Ducantur duæ diametri AC, BD, secantes se se ad angulos rectos in centro E, & iungantur rectæ AB, BC, CD, DA. Dico ABCD, esse quadratum inscriptum in dato circulo. Nam quia latera EA, EB, trianguli AEB, æqualia sunt lateribus EC, EB, trianguli CEB cum omnia sint ex centro; & anguli

anguli contenti sunt recti erũt Bases AB, BC, ęquales. Eadem ratione ęquales erunt rectæ BC, CD, Item rectæ CD, DA, & rectæ DA, AB. Omnia igitur latera quadrilateri ABCD, æqualia inter se sunt. Quod breuius ita concludemus. Quoniã quatuor anguli ad E, æquales sunt, nimirum recti, erunt quatuor arcus, quibus insistunt; æquales; ac proinde & rectę quatuor subtensæ æquales erunt. Omnia ergo latera quadrilateri ABCD, inter se æqualia sunt autem & anguli recti, cum omnes in semicirculi existant. Quare quadratum erit ABCD, proptereaq; in dato circulo quadratum descripsimus. Quod erat faciendum.

PRO-

PROBLEMA VII.

PROPOSITIO VII.

Circa datum circulum quadratum describere.

SIt circa datum circulum ABCD, cuius centrum E, describendum quadratum. Ducantur duæ diametri AC, BD, secantes se in E, centro ad angulos rectos; & per A, B. C,& D, educãtur ad diametros lineæ perpendiculares FG FH, HI, IG, coeuntes in punctis F, H,I,G. Quod enim coeant AF, BF, patet ex eo, quod ducta recta AB, faciat cum AF, BF, duos angulos duobus rectis minores; atq; ita de reliquis. Dico FHIG, esse quadratum circa circulum datum descriptum.

Cum

Cum enim anguli AEB, FBE, sint recti; erunt FH, AC; parallelę; similiterque erunt GI, AC, parallelæ. Quare & FH, GI, parallelæ erunt. Eodem modo parallelæ erunt FG, HI. Quoniam igitur parallelogrammum est ACHF, erunt latera opposita AC, FH, æqualia, & anguli oppositi ACH, AFH, ęquales. Sed ACH est rectus. Igitur AFH rectus erit. Eadem ratione ostendemus angulos H, I, G, rectos esse; & latera HI, IG, GE equalia esse diametris BD, AC. Quare cum diametri sint æquales, erunt & quatuor latera FG, FH, HI, IG, ęqualia, ideoque FGIH quadratum erit; cuius quidem latera circulum tangunt, per corollarium propos. 16. lib. 3. Circa datum igitur circulum quadratum descripsimus. Quod erat efficiendum.

PRO-

PROBLEMA VIII.

PROPOSITIO VIII.

In dato quadrato circulum describere.

SIt in dato quadrato ABCD, inscribendus circulus. Diuisis lateribus bifariam in E. F, G,H, ducantur rectæ EG, FH, secantes se in I. Quoniam igitur AD,BC, rectæ æquales sūt, & parallelę, erunt, & dimidiæ earum AH,BF, ęquales, & parallelę. Quare & AB, parallela est, & ęqualis ipsi FH. Eadem ratione erit DC, parallela, & ęqualis eidem FH: Itemque rectę AD,BC, parallelę erunt, & ęquales ipsi EG. Sunt igitur parallelogramma AI,IB, CI,ID, ideoque rectæ IE,IF,IG,IH, æquales

quales erunt rectis AH, EB, DH, AE: Sunt autem hæ inter se æquales, cum sint semisses æqualium AD, AB, &c. Quare & rectæ IE, IF, IG, IH, æquales erunt, ac propterea circulus descriptus ex I, ad interuallum IE, transibit quoque per puncta F, G, H, qui cum contingat latera AB, BC, CD, DA, per coroll. propos. 16. lib. 3. quod anguli ad E, F, G, H, sint recti, descriptus erit in quadrato AC. In dato ergo quadrato circulum descripsimus. Quod efficiendum erat.

K PRO-

PROBLEMA IX.

PROPOSITIO IX.

Circa datum quadratum circulum describere.

Sit describendus circulus circa quadratum ABCD. Ducantur diametri AC, BD, secantes se in E. Quoniam igitur latera AB, AD, trianguli ABD, æqualia sunt, erunt anguli AB D, ADB, æquales: Est autem angulus BAD, rectus. Quare ABD, ADB, semirecti erunt. Similiter ostendemus, reliquos omnes angulos ad A, B, C, D, esse semirectos; & idcirco inter se equales. Cum ergo anguli EAD, EDA, sint equales; erunt rectæ EA, ED, æquales. Eadem ratione EA, EB, equales erunt, nec-

necnon EB,EC. Item EC,ED. Quare circulus ex E, descriptus, interuallo EA, transibit per reliqua puncta B,C.D. Circa datum ergo quadratum, circulum descripsimus. Quod erat faciendum.

PROBLEMA X.

PROPOSITIO X.

Isosceles triangulum constituere; quod habeat vtrumque eorum, qui ad basin sunt, angulorum, duplum reliqui.

SVmatur quęuis recta linea *A*B, quæ diuidatur in C, ita vt rectangulum sub AB, BC equale sit quadrato rectę AG. Deinde centro A, interuallo vero AB, circulus describatur, in quo accommodetur recta BD, equalis ipsi AC, iungaturque recta AD. Quoniam autem rectę AB, AD, equales sunt, erit triangulum ABD, Isosceles. Dico vtrumque angulorum ABD, ADB, duplum esse reliqui anguli A. Ducta enim recta CD, describatur circa triangulum ACD, circulus DCA Quoniam igitur rectangulum sub AB, BC, equale est quadrato rectę BD, & recta A B, secat circulum DCA, tanget recta BD, eundem circulum DCA, in D. Quare angulus BDC, ęqualis est angulo A, in alterno segmento CAD. Addito igitur cōmuni CDA, erit totus angulus ADB, equalis duobus angulis CAD, CDA: Sed his eisdem æqualis est etiam angulus externus BCD; angulus ergo BC D, equalis erit anguloADB, hoc est, angulo ABD, cū ABD, ADB,

ęqua-

ęquales sint, ac propterea rectę CD, BD, ęquales erunt: Est autem BD, ęqualis posita rectę AC. Igitur & CD, ipsi CA, æqualis erit; ac propterea anguli CAD, CDA, ęquales. *A*ngulus igitur ADB, qui ęqualis ostẽsus est duobus angulis CAD, CDA, duplus erit alterius eorum, anguli nimirum *A*. Quare & angulus ABD, duplus erit eiusdem anguli *A* Isosceles ergo triangulum constituimus, habens, &c. Quod erat efficiendum.

PROBLEMA XI.

PROPOSITIO XI.

In dato circulo, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum inscribere.

SIt in dato circulo ABCDE, inscribendum pentagonũ ęquilaterum,& ęquiangulum. Construatur triangulum Isosceles F G H, ita vt vterque angulorum G,H, duplus sit reliqui F. & in circulo inscribatur triangulum ACD, ęquiangulum triangulo FGH, & vterque angulorum ACD, ADC, bifariam diuidatur rectis CE,DB, atque rectę iungãtur AB. BC, CD.DE.EA. Dico pentagonum ABCDE, in circulo dato inscriptum, esse ęquilaterum, & æquianquiangulum. Cum enim vterque angulorum ACD, ADC, duplus sit anguli CAD, & diuisus bifariam; erunt quinque anguli ADB, BDC, CAD, DCE, ECA, æquales, Quare arcus AB, BC, CD, DE, EA, super quos ascenderunt, atque idcirco & rectæ AB, BC, CD, DE, EA, equales erunt. Æquilaterum est igitur pentagonum ABCDE. Rursus, quia arcus AB, ED, equales sũt; addito communi B C D, fient equales ABCD, EDCB. Anguli ergo AED, BAE dictis arcubus insistentes equales erunt. Eodem modo equales erunt cuilibet horum angulorum reliqui anguli. Insistunt enim æqualibus arcubus, quorum singuli ex ternis arcubus equalibus componuntur. Æquiangulum est ergo pentagonum ABCDE. Quare cum & equilaterum esse sit ostensum inscriptum erit, dato circulo pẽtagonum ęquilaterum,& ęquiangulum. Quod faciendum erat.

PROBLEMA XII.

PROPOSITIO XII.

Circa datum circulum, pentagonum ęquilaterum, & ęquiangulum describere.

SIt circa datum circulum ABCDE, describendum pentagonum ęquilaterum, & ęquiangulum. Inscribatur in eo pentagonum ęquilaterum, & ęquiangulum ABCDE, & ex centro F. ducantur rectę FA, FB,FC,FD,FE, ad quas ducantur perpendiculares GH, HI, IK, KL, LG, coeuntes in G,H, I, I,K,L. Cum enim anguli GAB, GEA, duobus sint rectis minores, partes nimirum angulorũ rectorum FAG, FEG; coibunt rectę AG, EG, ad partes G, & sic de alijs. Et quia ipsę tangunt circulum, per coroll. propos. 16. lib. 3. erit descriptum pentagonum GHIKL, circa circulum; quod dico esse ęquilaterum, atque ęquiangulum. Ductus enim rectis FG, FH, FI, FK, FL, erunt quadrato rectę FH, ęqualia tam quadrata rectarum FA, AH, quam rectarum FB, BH. Quare quadrata rectarum FA, AH, ęqualia erũt quadratis rectarum FA, AH. Demptis igitur quadratis ęqualibus rectarum ęqualium FA, FB, remanebunt quadrata rectarum AH, BH, ęqualia; ideoque & rectę AH, BH, ęquales erunt. Quod etiam constat ex coroll. 2. propos. 36. lib. 3. cum AH, BH, ex eodem puncto H, ducantur circulum tangentes in A, & B. Quoniam er o latera AF, FH, trianguli AFH, equalia sunt lateribus BF. FH, trianguli BFH. Est autem & basis A H, basi BH, equalis, vt ostensum est; erunt anguli AFH, BFH, equales. Igitur & anguli AHF, BHF. Duplus igitur est angulus AFB, anguli BFG, & angulus AHB, anguli BHF. Eodem modo ostendemus, angulum BFC, duplum esse anguli BFI, & angulum BIC. anguli BIF. Cum igitur anguli AFB, BFC, sint equales, quod insistant circumferentijs AB, BC, que equales sunt, cum à rectis equalibus subtendantur AB, BC; erunt & dimidij eorum BFH, BFI, equales. Quocirca cum duo anguli BFH, HBF, trianguli

BFH,

BFH, ęquales sint duobus angulis BFI, IBF; trianguli IFB, & latus illis adiacens commune BF, erunt & latera BH, BI, æqualia, & anguli BHF, BIF, æquales. Dupla est ergo recta HI, rectę HB. Eademque ratione ostendemus GH, rectam duplam esse rectæ HA. Sunt autem ostensæ æquales HB, HA. Igitur & earum duplæ HI, HG ęquales erunt. Similiter demõstrabimus rectas IK, KL, LG, ęquales esse cuilibet rectarum HI HG. Æquilaterum ergo est pentagonum GHIKL. Rursus quoniam ostensum est, angulos BHF, BIF, ęquales esse, ac semisses angulorum BHA, BIC: erunt & eorum dupli BHA, BIC, ęquales: Eademque ratione anguli IKL, KLG, LGH ęquales erunt cuilibet angulorum BHA, BIC. Æquiangulum igitur est pẽtagonum GHIKL. Quapropter cum, & æquilaterum sit ostensum, descriptum erit circa datum circulum, pẽtagonum ęquilaterum, & ęquiangulum. Quod efficiendum erat.

PROBLEMA XIIII.

PROPOSITIO XIIII.

In dato pentagono æquilatero, & æquiangulo circulum inscribere.

SIt inscribendus circulus in dato pentagono ABCDE. Diuidantur duo eius anguli BAE, ABC, proximi bifariam rectis AF, BF, quę coeant in F. Cum enim ex scholio præcedentis propos. rectæ AF, BF, secent opposita latera CD, DE, bifa-

bifariam, necesse est, duas re-
ctas AF,BF, se mutuo intra pé-
tagonum secare, priusquam
rectis CD,DE, occurrant. Con-
nectantur deinde rectæ FC,
ED,FE. Quoniam igitur latera
AB,BF, trianguli ABF, æqualia
sunt lateribus CB,BF, trianguli
CBF: Sunt autem ex constru-
ctione, & anguli ipsis contenti
æquales ABF,CBF; erunt bases
AF,CF, & anguli BAF,BCF, æ-
quales. Cum igitur anguli BA
E, BCD, ponantur æquales, &
BAF, dimidium sit anguli BAE,
per constructionem; erit &
BCF, dimidium anguli BCD.
Diuisus est ergo angulus BCD,
bifariam. Simili modo ostende-
mus, reliquos duos angulos
CDE,DEA, diuisos esse bifariã.
Ducantur iam ex F, ad singula
pentagoni latera perpendicu-
lares FG,FH,FI,FK,FL. Quo-
niam

niam igitur duo anguli FGA, FAG, trianguli FAG, æquales sunt duobus angulis FLA, FAL, trianguli FAL, estque latus AF subtensum vni æqualium angulorum commune erunt & rectæ FG, FL, equales. Similiterque ostendentur reliquæ perpendiculares FH, FI, FK, æquales cuilibet istarum. Circulus igitur descriptus ex centro F, & interuallo FG, transibit per puncta quoque H, I, K, L. Quoniam vero latera pentagoni circulum hunc tangũt, per coroll. propos. 16. lib. 3. eo, quod angulos rectos faciant cum semidiametri FG FH, &c. erit circulus in dato pentagono inscriptus. Quod faciendum erat.

PRO-

PROBLEMA XIV.

PROPOSITIO XIV.

Circa datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulum describere.

SIt circa pentagonum ABCDE equilaterum, & equiangulum, circulus describendus. Diuisis duobus angulis BAE, ABC, bifariam rectis AF, BF, quæ coeant in F, intra pentagonű, vt in antecedente propositione demonstratum est; & coniunctis rectis FC, FD, FE, ostendemus, vt in præcedenti problemate; reliquos etiam angulos BCD, CDE, DEA, sectos esse bifariam. Erunt ergo omnes anguli dimidij inter se æquales, quod toti anguli æquales po-niam igitur duo anguli F G A, FAG, trianguli FAG, æquales sunt duobus angulis FLA, FAL, trianguli FAL, estque latus AF subtensum vni æqualium angulorum commune erunt & rectæ FG, FL, equales. Similiterque ostendentur reliquæ perpendiculares FH, FI, FK, æquales cuilibet istarum. Circulus igitur descriptus ex centro F, & interuallo FG, transibit per puncta quoque H, I, K, L. Quoniam vero latera pentagoni circulum hunc tangũt, per coroll. propos. 16. lib. 3. eo, quod angulos rectos faciant cum semidiametri FG FH, &c. erit circulus in dato pentagono inscriptus. Quod faciendum erat.

PRO-

PROBLEMA XIV.

PROPOSITIO XIV.

Circa datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulum describere.

SIt circa pentagonum ABCDE æquilaterum, & æquiangulum, circulus describendus. Diuisis duobus angulis BAE, ABC, bifariam rectis AF, BF, quæ coeant in F, intra pentagonū, vt in antecedente propositione demonstratum est; & coniunctis rectis FC, FD, FE, ostendemus, vt in præcedenti problemate, reliquos etiam angulos BCD, CDE, DEA, sectos esse bifariam. Erunt ergo omnes anguli dimidij inter se æquales, quod toti anguli æquales po-

ponantur. Quoniam igitur in triangulo AFB, duo anguli æquales sunt FAB, FBA; erunt rectæ FA, FB, equales. Eademque ratione erunt reliquæ FC, FD, FE, cuilibet istarum equales. Quare circulus descriptus ex centro F, interuallo autem FA, transibit quoque per puncta B, C, D, E. Circa datum ergo pentagonum, &c. Quod faciendum erat.

PRO-

PROBLEMA XV.
PROPOSITIO XV.

In dato circulo hexagonum, & æquilaterum, & æquiangulum inscribere.

SIt in dato circulo ABCDE F, cuius centrum G, inscribendum hexagonum æquilaterum, & ęquiangulum. Ducta diametro AD, describatur circulus ex centro D, interuallo vero DG, qui secet circulum datum in pũctis C, & E, è quibus per centrum G rectæ extendantur CF, EB. Si igitur cõnectantur rectę AB, BC, CD, DE, EF, FA, inscriptum erit in dato circulo hexagonum ABC DEF; quod dico esse, & æquilaterum, & æquiangulum. Cum enim recta GC, æqualis sit rectę GD, & recta DC, æqualis eidem

eidem rectæ *D*G, ex definitione circuli; erunt & rectæ GC, DC, æquales inter se: Ideoque triangulum C*D*G, erit æquilaterum. Quare tres anguli CG*D*, GDC, *D*CG, æquales inter se erunt: qui cum æquales sint duobus rectis, erit quilibet illorum, nempe CG*D*, tertia pars duorum rectorum. Eodem modo erit angulus *D*GE, tertia pars duorum rectorum. Sunt autem tres anguli CG*D*, *D*GE, EGF, æquales duobus rectis. Reliquus igitur angulus EGF, tertia quoque pars erit duorũ rectorum. Sunt ergo tres anguli CG*D*, *D*GE, EGF, inter se æquales: quibus cum etiam æquales sint ad verticem anguli *F*GA, AGB, BGC, erunt sex anguli ad centrum G, æquales. Quare circumferentiæ, quibus insistunt, ac propterea rectæ A B, BC, B, BC, CD, DE, EF, FA, æquales erunt. Quapropter equilaterum est hexagonum ABCDEF. Rursus quia circumferentia BC. æqualis est circumferentię AF; si addatur communis CDEF, erunt circumferentiæ B CDEF, AFEDC, æquales. Anguli igitur ipsis insistentes BAF, ABC, ęquales erunt. Similiterque ostendemus, reliquos angulos BCD, CDE, DEF, EFA, æquales esse cuilibet istorum, quia nimirum quilibet insistit arcui composito ex quatuor arcubus æqualibus, nimirum ex tot, quot latera continet figura inscripta, demptis duobus. Ex quo fit, angulos omnes ęqualibus arcubus insistere. Quare æquiangulum quoque est hexagonum ABCDEF. In dato ergo circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum

gulum descripsimus. Quod faciendum erat.

PROBLEMA XVI.

PROPOSITIO XVI.

In dato circulo, quintidecagonum & æquilaterum & æquiangulum describere.

SIt in dato circulo ABC, inscribendum. Quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum. Constituto triangulo equilatero *D*, quod ex coroll. propos. 5. lib. 1. erit etiam æquiangulum inscribatur ei æquiangulum triangulum A*BC*, in dato circulo, quod etiam erit equilaterum, ex coroll. propos. 6. lib. 1. eruntque tres arcus AB, BC, CA equales, vel propter tres rectas *A*B, BC, CA, æquales, vel propter tres æquales

les angulos A,B,C,trianguli AB C. Qualium igitur partium æqualium quindecim est circũferentia tota ABC,talium quinque erit arcus AB, qui tertia pars totius circumferentiæ. Inscribatur rursus in dato circulo pentagonum ęquilaterũ, & ęquiangulum AEEGH, applicans vnum angulorum ad punctum A,eruntq; qninque arcus AE,EF,FG,GH,HA,æquales. Qualium igitur partium æqualium quindecim est tota circumferentia ABC, talium trium erit arcus AE, quinta pars existens totius circumferentię. Itaque cum arcus AB, contineat tales partes quinq; & arcus AE, tres; continebit reliquus arcus EB, duas. Diuiso ergo arcu EB,bifarim in I. erit arcus BI,pars decimaquinta totius circumferentiæ. Quare re ducta recta BI, subtendet decimaquintam partem totius circumferentiæ; cui si aliȩ quatuordecim, ȩquales in circulo accommodentur, inscriptum erit in circulo quintidecagonũ ȩquilaterum, quod & æquiangulum est, cum eius anguli subtendant arcus æquales, compositos videlicet ex 13. arcubus ȩqualibus omnes, vt perspicuum est, In dato igitur circulo quintidecagonum, &c. Quod faciendum erat.

Similiter autem per ea, quæ dicta sunt de pentagono supra, propos. 12. 13. & 14. describemus circa datum circulum quintidecagonum ȩquilaterũ, & æquiangulum. Item in dato quintidecagono æquilatero, & æquiangulo circulum inscribemus; & tandem circa datum quintidecagonum describemus circulum.

EV

tur, & in eadem ratione: cum vt in primis magnitudinibus prima ad vltimam, sic & in secundis magnitudinibus prima ad vltimam se se habuerit.

Vel aliter. Sumptio extremorum, per subductionẽ mediorum.

18 Ordinata proportio est, cũ fuerit, quemadmodum antecedens ad consequentem, ita antecedens ad consequentem: fuerit etiam, vt consequens ad aliud quidpiam, ita consequens ad aliud quidpiam.

19 Perturbata autem proportio est, cum tribus positis magnitudinibus, & alijs, quę sint his multitudine pares, vt in primis quidem magnitudinibus se habet antecedens ad consequentem, ita in

in ſecundis magnitudinibus antecedens ad conſequentem: Vt autem in primis magnitudinibus conſequens ad aliud quidpiam, ſic in ſecũdis magnitudinibus aliud quidpiam ad antecedentem

THEO-

THEOREMA I.

PROPOSITIO I.

Si sint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, singulæ singularum, æque multiplices; quam multiplex est unius vna magnitudo, tam multiplices erunt, & omnes omnium.

SInt quotcunque magnitudines AB, CD, totidem magnitudinum E, F, ęque multiplices. Dico magnitudines AB, CD, simul, tam esse multiplices magnitudinum E, F, simul, quam est multiplex AB, ipsius E, vel CD, ipsius F Cum enim AB, CD, sint ęque multiplices ipsarum E, & F, si AB diuidatur in magnitudines A G, GH,HB,ipsi E,ęquales, & CD. quoque in magnitudines C I, IK,KD,ipsi F,æquales; (Diuidi autem poterit quælibet in partes omnino ęquales, cum A,B, C,D,E,F eque multiplices, atq; ideo toties E,in AB, perfecte continceatur, quoties F,in CD, vt ex ijs,quæ in defin. 2, huius lib. scripsimus, constat) erunt magnitudines AG GH,HB, tot numero, quot sunt magnitudines CI,IK,KD. Quoniam vero AG,& E, equales inter se sunt, si ipsis addantur equales CI,& F, erunt AG,CI,simul,æquales ipsi E,& F,simul. Eodem modo erunt GH & IK,simul ęquales ipsis E,& F,simul; Necnon HB, & KD eisdem E, & F. Quoties igitur E,in AB, vel F,in CD,cõtinetur toties,& E, F, simul, in AB.CD, simul comprehenduntur: Ideoque, quam multiplex

est

eſt AB, ipſius E, tam ſunt multiplices AB,CD, ſimul, ipſarum E,& F,ſimul, vt conſtat ex ijs, quæ in defin. 2. huius lib. ſcripſimus. Quare ſi ſint quotcunque magnitudines quotcunq; magnitudinum,&c. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA II.

PROPOSITIO II.

Si prima ſecũda æque fuerit multiplex, atque tertia quartæ; fuerit autem & quinta ſecunda æque multiplex, atque ſexta quartæ;erit & compoſita prima cum quinta, ſecunda æque multiplex, atque tertia cum ſexta, quartæ.

SIt magnitudo prima AB, tam multiplex ſecundæ C quam est multiplex DE, tertia, quartæ F. Rursus, tam sit multiplex BG, quinta ipsius C, secundæ, quam multiplex est E H, sexta ipsius F, quartæ. Dico AB, primam cum BG, quinta, compositam, tam multiplicem esse secundæ C, quam multiplex esse DE, tertia composita cum sexta EH, ipsius F, quartæ. Cum enim AB, sint eque multiplices ipsarum C, F, erunt in AB, tot magnitudines ipsi C, æquales; quot sunt in DE, æquales ipsi F. Eadem ratione erunt, & in BG, tot æquales ipsi C quot sunt in EH, equales ipsi F. Si igitur equalibus multitudinibus AB, DE, addantur equales multitudines B G, E H, erunt tote multitudines AG, DH, equales. Quare toties comprehenditur C, in AG quoties F, in DH. Quod erat ostendendum.

THEO-

THEOREMA III.

PROPOSITIO III.

Si sit prima secundæ æque multiplex, atque tertia quartæ; sumantur autem æque multiplices primæ, & tertiæ: Erit & ex æquo, sumptarum utraque utriusque æque multiplex, altera quidem secundæ, altera autem quartæ.

SIt prima magnitudo A, tam multiplex secundæ B, quã multiplex est C, tertia quartæ D; sumanturque E, F, æque multiplices primæ, & tertiæ A, & C. Dico ex æquo tam multiplicem esse E, ipsius B, secundæ, quam est F, ipsius D, quartæ. Nam cum E, & F, sint æque multiplices ipsarum A, & C; si distribuantur E,& F,in magnitudines ipsis A,& C, æquales, vt in EG,GH,HI, & FK,KL, LM, erunt tot partes in E,æquales ipsi A, quot sunt in F, æquales ipsi C. Quoniam vero EG,FK,æquales sunt ipsis A, & C; sunt autem A, & C, æque multiplices ipsarum B, & D, ex hypothesi; Erunt & EG, FK, earundem B, & D, æque multiplices. Pari ratione erũt GH, KL. Item HI,LM, æque multiplices earundem B, & D, erunt igitur & compositæ ex EG, GH, æquè multiplices ipsius B,vt compositæ ex FK,KL ipsius C, ergo & pariter composita ex EH,HI, & ex FL,LM, & eadem erit ratio si plures sint partes. Quod ostendendum erat.

THEO-

THEOREMA IV.

PROPOSITIO IV.

Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: Etiam aeque multiplices primæ, & tertiæ, ad æque multiplices secundæ, & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem, eandem habebunt rationem, si prout inter se respondent, ita sumptæ fuerint.

SIt proportio *A*, ad B, quæ C, ad D, sumanturque primæ A, & tertiæ C, æque multiplices E, & F; Item secundæ B, & quartæ D, æque multiplices G & H, iuxta quamuis multiplicationem; siue E, F, ita multiplices sint ipsarum *A*, C, sicut G, H, ipsarum B, D, siue non.

His positis, constat ex defin. 6. huius lib. si E, deficit à G, etiã F, deficere ab H. Et si E, æqualis est ipsi G, etiam F, æqualem esse ipsi H. Et denique si E excedit G, etiam F excedere H. Alioquin non esset, per defin. 6 eadem proportio A, ad B, quæ C, ad D, si earum æque multiplicia non semper ita se haberent. Dico iam, multiplicia primæ, ac tertiæ non solum vna deficere à multiplicibus secundæ, ac quartæ, aut vna æqualia esse, aut vna excedere, vt diximus, sed eandem quoque inter se proportionem habere. Capiantur enim rursus I, K, ipsarum E, F, æque multiplices; Item L, M, æquè multiplices ipsarum G, H. Quoniam igitur tam multiplex est E, prima ipsius A, secundæ, quam F, tertia ipsius C, quartæ; sumptæ sunt

autem

autem & I, K, æque multiplices ipsarum E, F, primæ, ac tertiæ: Erunt quoque ex ęquo I,K, ęque multiplices ipsarum AC,secundæ, & quartæ. Eadem ratione erunt L,M, ipsarum B,D,æque multiplices. Et quia ponitur proportio A, primæ ad B,secundam, quæ C, tertię ad D,quartam, ostensæque sunt I,K, ęque multiplices primæ,& tertiæ A,C.Item L M, æque multiplices secundæ, & quartæ B,D,istę quæ illorum sunt æque multiplices vna deficient,vel excedent,vel ęquales erunt, ergo ita se habebit E,ad F,quorum IK, sunt æque multiplices,vt G,ad H, quorũ LM, sunt ęque multiplices. Quod erat ostendendum.

THEO-

THEOREMA V.

PROPOSITIO V.

Si magnitudo magnitudinis æque fuerit multiplex, atque ablata ablata: Etiam reliqua reliqua ita multiplex erit, vt tota totius.

ITa multiplex sit tota AB, totius CD, vt est multiplex AE, ablata ablatę CF. Dico reliquam EB, ita esse multiplicem reliquæ FD, vt est tota AB, totius CD. Ponatur enim EB, ita multiplex cuiuspiam magnitudinis, videlicet ipsius GC, vt est AE, multiplex ipsius CF, vel tota AB, totius CD. Quoniam igitur AE, EB, æque sunt multiplices ipsarum CF, GC; erit tota AB, totius GF, ita multiplex, vt vt AE,ipsius CF,hoc est omnes omnium,vt vna vnius:Sed tam multiplex etiam ponitur AB, ipsius CD , quam est multiplex AE,ipsius CF. Igitur AB,tam est multiplex ipsius GF,quam mul tiplex est ipsius CD; atque id-circo æquales sunt GF , CD . Ablata igitur communi CF. æquales erunt GC. FD. Tam multiplex igitur erit EB, ipsius FD, quam multiplex est ipsius GC. Sed ita multiplex posita fuit EB,ipsius GC,vt AE, ipsius CF, hoc est,vt tota AB, totius CD. Quare tam multiplex est reliqua EB , reliquæ FD, quam est tota AB,totius CD.quod est propositum .

THEO-

THEOREMA VI.

PROPOSITIO VI.

Si duæ magnitudines duarum magnitudinum sint æque multiplices, & detractæ quædam sint earundem æque multiplices: & reliquæ eisdem aut æquales sunt, aut æque ipsarum multiplices.

SInt magnitudines AB, CD, ęque multiplices ipsarum E,F,& detractæ AG,CH,earundem E, F, ęque multiplices. Dico reliquas GB,HD, aut esse æquales eisdem EF, aut certè earundem ęque multiplices. Quoniam AB,CD,sunt ipsarum E,F, æque multiplices;erunt in AB,tot magnitudines æquales ipsi E,quot sunt magnitudines in CD, æquales ipsi F. Rursus quia *AG*,CH, earundem E, F æque multiplices sunt; erunt quoque in *AG*, tot magnitudines ipsi E, ęquales, quot sunt magnitudines in CH, ipsi F, ęquales. Si igitur ex ęqualibus multidinibus AB,CD, demantur multitudines æquales AG, CH; remanebunt multitudines GB, HD. æquales. Quare toties continebitur E, in GB, quoties F,continetur in HD;ac proinde si GB,equalis sit ipsi E, erit quoq; HD,ipsi F. ęqualis: Si autem GB, multiplex sit ipsius E: erit ita multiplex *HD*, ipsius F,vt GB, multiplex est ipsius E.quandoquidem toties E,in GB:continetur, quoties F, in *HD*,existit,vt ostensum est.

THEO-

THEOREMA VII.

PROPOSITIO VII.

Aequales ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales.

SInt duę magnitudines A, B, æquales inter se, & tertia quæuis C. Dico A, & B, habere eandem proportionem ad C. Item C, vicissim ad A, & B, eãdem quoque proportionem habere. Sumantur D, E, æque multiplices ipsarum equalium A, B, eruntque D, E, æquales inter se. Capiatur rursus F, vtcunque multiplex ipsius C. Quoniam igitur D, E, equales sunt fit vt vtraq; vel minor fit, quam F, vel æqualis, vel maior, iuxta quamcunque multipliplicationem ea multiplicia sumantur. Quare cum D,E, æque multiplices primæ A.& B, tertiæ, minores sint ipsa F, multiplice secundę, & quartæ C, (est enim C, instar duarum magnitudinum,&c.) vel æquales, vel maiores; erit ea proportio primæ A, ad C, secundam, quę tertię *B*, ad C, quartam.

Eodem pacto ostendemus *F*, vel minorem esse vtraque D, E, vel vtrique æqualem, vel maiorem. Igitur cum F, multiplex primæ,& tertiæ C, vna deficiat à D, & E, æque multiplicibus secundæ A,& quartæ B, vel vna æqualis sit, vel maior; Erit quoque ea proportio primæ C, ad secundam *A*, quæ tertiæ C, ad quartam B; quod est propositum. Posset breuius secunda hæc pars ostendi per coroll. 4. propos. ex inuersa ratione.

Cum

Cum enim ostensum iam sit, esse A, ad C, vt B, ad C, erit conuertendo C, ad A, vt C, ad B, Aequales ergo ad eandem, eãdem habent rationem. Et eadem ad æquales, quod erat demonstrandum.

THEOREMA VIII.

PROPOSITIO VIII.

In æqualium magnitudinum maior ad eandem, maiorem rationem habet, quam minor: Et eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quam ad maiorem.

SInt magnitudines inęquales, AB, maior, & C, minor, Tertia autem quælibet D. Dico proportionem AB, ad D, maiorem esse proportione C, ad D.

At

At è conuerſo, maiorem eſſe proportionem D,ad C, quam D,ad AB. Intelligatur enim in AB,magnitudine maiore, magnitudo AE, æqualis minori C, vt ſit reliqua EB. Vtraq; deinde EB,AE, ęqualiter multiplicetur,hac lege,vt GF, multiplex ipſius EB, maior quidem ſit,quam D,At HG multiplex ipſius AE,non ſit minor eadem D,ſed vel maior, vel ęqualis. Quoniam igitur duæ FG, GH, æque multiplices ſunt duarum BE,EA; erit & tota FH ita multiplex totius AB,vt HG, ipſius AE,hoc eſt,ipſius C,cum æquales ſint poſitæ C,& AE. Capiatur quoque ipſius D,multiplex IK,quæ proximè maior ſit,quã HG,Abſciſſa ergo LK, quę ęqualis; ſit ipſi D, non erit IL, maior,quam HG,(alias IK, nõ eſſet multiplex ipſius D,proxime me maior quam HG, sed & IL, maior quoque esset quam HG. Quod si IK, dupla sit ipsius D, perspicuum est, IL, non esse maiorem, quam HG, cum HG, posita sit] non minor quam D, hoc est, quàm IL,) & idcirco HG, erit vel ęqualis ipsi IL, vel maior. Et quia FG, maior est posita quam D: LK, vero ęqualis eidem D; erit quoque FG, maior quam LK. Cum ergo HG, non minor sit quam IL, vt demonstratum est, sed vel æqualis, vel maior, erit tota FH, maior quam IK. Itaque cum FH, HG, sint æque multiplices primę *AB*, & tertiæ C, atque IK, multiplex ipsius D, quę instar est secundæ, & quartæ: sit autem FH, multiplex primæ, maior quam IK, multiplex secundæ; *At* HG, multiplex tertiæ, non sit maior, quã IK, multiplex

tiplex quartæ, immo minor, ex hypothesi (sumpta enim est IK, multiplex ipsius D, maior quam HG,) erit maior proportio *A*B, primæ ad D, secundam, quam *C*, tertię ad *D*, quartam.

Quoniam vero è contrario IK, multiplex primę D, (ponatur enim nunc D, prima ac tertia: At C, secunda & AB, quarta) maior est quam HG, multiplex secundæ C; At IK, multiplex tertiæ D, maior non est, quam FH, multiplex quartæ *AB* immo minor, cum FH, maior sit, quam IK, vt ostensum est, erit maior proportio *D*, primę ad C, secundam, quam D, tertiæ ad AB, quartam: quod est propositum. Inæqualium igitur magnitudinum maior ad eandem, &c. Quod erat ostendendum.

THEO-

THEOREMA IX.

PROPOSITIO IX.

Quæ ad eandem, eandem habent rationem, æquales sunt inter se: Et ad quas eadem eandem habet rationem, eæ quoq; sunt inter se æquales.

HAbeant primum A, & B, eandem rationem ad C; Dico A, & B, esse inter se æquales. Sit enim, si fieri potest, altera, nempe A, maior, & B, minor, erit igitur maior proportio A, maioris ad C, quam B, minoris ad eandem C; quod est cõtra hypothesim. Non ergo inæquales sunt A, & B, sed æquales. Habeat deinde C, eandem proportionem ad A, & B: Dico rursus A, & B, esse æquales.

les. Nam si altera, nempe A, esset maior, & B minor; haberet C, ad B, minorem, maiorẽ proportionem, quam ad A, maiorem; quod est contra hypothesin. Non igitur maior erit A, quam B, sed ęqualis. Quæ igitur ad eandem, eandem habẽt rationem, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOREMA X.

PROPOSITIO X.

Ad eandem magnitudinem rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior est; Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor est.

HAbeat primum *A*, ad C, maiorem proportionem, quam

quam *B*, ad eandem C. *Dico* A, maiorem esse, quam *B*: Si enim A, foret ipsi *B*, ęqualis, haberent A, & B, eandem proportionem ad C: Si autem A, minor esset, quam B, haberet B, maior ad C, proportionem maiorem, quàm A, minor ad eandem C, quod est contra hypothesin. Non est igitur A, ęqualis vel minor quam B, sed maior. Habeat secundo *C*, ad B, maiorem proportionem, quam ad *A*. Dico *B*, minorem esse quam A. Non enim æqualis erit *B*, ipsi A: alioqui haberet C, eandem proportionem ad A, & B; quod est contra hypothesin. Neque vero B, maior erit quam *A*, alias haberet *C*, ad minorem *A*, maiorem proportionem quam ad B, maiorem: quod magis est contra hypothesin. Minor igitur est B

quam

quam A, quod est propositum. Ad eandem igitur magnitudinem rationem habentium, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA XI.

PROPOSITIO XI.

Quæ eidem sunt eadem rationes, & inter se sunt eadem.

SInt proportiones *A*, ad B, & *C*, ad D, eędem proportioni E, ad F. Dico & proportiones *A*, ad *B*, & C, ad D, easdem esse inter se, secundum definitionem 6. Sumātur enim ad omnes antecedentes A, *C*, E ęque multiplices quæcunque G, H, I, & ad omnes consequētes *B*, D, F, aliæ quæcunque ęque multiplices K, L, M. Quoniam igitur ponitur esse *A*, pri-

 ma

ma ad B, secundam vt E, tertiam ad F, quartam; sit vt si G, multiplex primæ deficit à K, multiplice secundæ, deficiat quoque I, multiplex tertiæ ab M, multiplice quartæ; Et si G, æqualis est ipsi K, vel maior, æqualis quoque sit I, ipsi M, vel maior: Sed (vt eodem modo ostendetur) si I, minor est, quam M, vel æqualis, vel maior, est quoque H, minor quam L, vel æqualis, vel maior, propterea, quod ponitur esse E, prima ad F, secundam, vt C, tertia ad D, quartam. Quare si G, multiplex primæ A, deficit à K, multiplice secundæ B, deficiet quoque H, multiplex tertiæ C, ab L, multiplice quartæ D. Et si G, æqualis est, vel maior quã K etiã H æqualis erit, vel maior quã L. Idẽq; ostendetur accidere in quibuscunque alijs

æque

ęque multiplicibus. Quapropter erit *A*, prima ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartā. Quę igitur eidem sunt eędem rationes, & inter se sunt eędē. Quod erat ostendendum.

THEOREMA XII.
PROPOSITIO XII.

Si sint magnitudines quotcunque proportionales: quemadmodum se habuerit vna antecedentiū ad vnam consequentium, ita se habebunt omnes antecedentes ad omnes consequentes.

QVod in propos. 1. de Proportione multiplici demonstrauit, ostendit hic de omni genere proportionis, etiam irrationalis. Sint ergo quotcunque magnitudines *A*, *B*, *C*, D, E, F, proportionales, hoc eſt, ſit A, ad B, vt C, ad D, & E, ad F. Dico vt eſt vna antecedentium ad vnam conſequentium; nimirum A, ad B, ita eſſe omnes antecedentes ſimul A, C, E, ad omnes conſequentes ſimul B, D, F. Sumptis enim G, H, I, æque multiplicibus antecedentium, & K, L, M, ęque multiplicibus conſequentium; erunt omnes G, H, I, ſimul omnium A, C, E, ſimul ita multiplices, vt vna vnius, nempe vt G, ipſius A; & omnes K, L, M ſimul omnium B, D, F, ſimul ita multiplices, vt vna vnius, nimirum vt K, ipſius B. Quoniam vero ponitur eſſe A, prima ad B, ſecundam, vt C, tertia ad D, quartam, & vt alia E, tertia ad aliam F, quartam, ſit vt ſi G, multiplex primę deficit à K, multiplice ſecundę, deficiat quoque H, multiplex tertię ab

L,

L, multiplice quartę, & I, ab M: Et si G, ęqualis est ipsi K, vel maior, ęqualis quoque sit H, ipsi L,& I, ipsi M, vel maior. Ac proinde si G, minor est, vel æqualis, vel maior quam K, & omnes G. H, I, simul omnibus K,L,M, simul minores sint, vel æquales,vel maiores. Quocirca vt est A,prima ad B, secundam ita erit A,C,E, tertia ad B,D,F, quartam. Si sint itaque magnitudines quotcunque proportionales,&c. Quod demonstrandum erat.

THEOREMA XIII.

PROPOSITIO XIII.

Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia vero ad quartam maiorem rationem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque ad secundam maiorem rationem habebit, quam quinta ad sextam.

Sit prima A, ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartam: sit autem proportio C, tertiæ ad D, quartam maior, quam E, quintæ ad F, sextam. Dico, & proportionem A, primæ ad B, secundam esse maiorem quam E, quintæ ad F, sextam, secundum definitionem 8. hoc est, sumptis æque multiplicibus ipsa-

ipſarum *A*, E ; item æque multiplicibus ipſarum B, F, contingere poſſe, vt multiplex ipſius A, excedat multiplicem ipſius B, at multiplex ipſius E, multiplicem ipſius F, non excedat. Sumptis enim G, H, I, ęque multiplicibus antecedentium ; Et K, L, M, ęque multiplicibns cõſequentium, cum ſit *A*, prima ad B, ſecundam, vt C, tertia ad D, quartam : ſit vt ſi G, multiplex primæ exceſſerit K, multiplicem ſecundæ, excedat quoque H, multiplèx tertiæ ipſam L, multiplicem quartæ, &c. At quando H, excedit ipſam L, non neceſſario I, excedit ipſam M, ſed æqualis aliquando erit, vel minor; quod maior ponatur proportio C, prima ad *D*, ſecundam, quam E, tertiæ ad F, quartam: Igitur ſi G, excedit K, non neceſſario I, excedit M, Maior est ergo proportio A, primę ad B, secundam, quam E, tertię ad F, quartam. Quamobrem si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, &c. Quod ostendendum erat.

THEOREMA XIV.

PROPOSITIO XIV.

Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; Prima vero quam tertia maior fuerit, erit & secunda maior quam quarta. Quod si prima fuerit aequalis tertiae, erit & secunda aequalis quartae: Si vero minor & minor erit.

SIt enim A, prima ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quar-

quartam. Dico si A, maior fuerit quam C, fore quoque B, maiorem quam *D*. Quod si A, equalis fuerit ipsi C, equalem quoque esse B. ipsi D: Si denique A, minor fuerit quam C, minorem quoque esse B, ipsa D. Sit primum A, maior quam C. eritque propterea proportio *A*, maioris ad B, maior quã C, minoris ad eandem B. Quoniam igitur est C, prima ad D, secundam, vt A, tertia ad *B*, quartam; Proportio autem A, tertiæ ad *B*, quartam, maior est, vt ostẽdimus, quam C, quintæ ad *B*, sextam: Maior quoque erit proportio C, primæ ad D, secundam, quam C, quintæ ad B, sextam. Minor est ergo D, quam B; Ideoque *B*, maior erit quam *D*. Quod est propositum.

Sit deinde A, æqualis ipsi *C*,

eritque idcirco *A*,ad B , vt C, ad B, Quoniam igitur proportiones C,ad D,& C,ad *B*, eædē sunt proportioni A,ad B,erunt quoque inter se eędem proportiones C,ad D,& C,ad B; ideoque ęquales erunt B , & D. Quod est propositum .

Sit tertio A,minor, quam C: eritque ob hoc maior proportio C, maioris ad B , quam A, minoris ad B,eandem . Quoniā igitur est C,prima ad D, secundam,vt A,tertia ad B, quartā; est autem proportio A, tertię ad B, quartam minor, quam C, quintæ ad B, sextam ; Minor quoque erit proportio C, primæ ad D, secundam , quam C, quintæ ad B,sextam ; Ideoque B, minor erit quā D, quod est propositum . *Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c.* Quod erat demonstrandum .

THEO-

THEOREMA XV.

PROPOSITIO XV.

Partes cum pariter multiplicibus in eadem sunt ratione, si prout sibi mutuo respondent, ita sumantur.

Sint partium A, & B, eque multiplices CD, & EF. Dico ita esse CD, ad EF, vt A, ad *B*. Cum enim C*D*, & EF, sint eque multiplices ipsarum *A*, & B, continebitur A toties in CD, quoties *B*, in EF Diuidatur ergo C*D* in partes CG, GH, HD æquales ipsi A, & EF, in partes EI, IK, KF, æquales ipsi B; eritque CG, ad EI, vt A, ad B, quod CG, & *A*, equales inter se sint; necnon EI, & B. Eadem ratione erit GH, ad IK, & H*D*, ad KF.

F, vt A, ad B, ideoque CG, GH, HD, ac EI, IK, KF, eandem hābebunt proportionem. Quocirca vt CG, ad EI, hoc eſt, vt A, ad B, ita erit CD, ad EF. nempe omnes CG, GH, HD, ſimul ad omnes E I, I K, K F, ſimul quod eſt propoſitum. Partes itaque cum pariter multiplicibus, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA XVI.

PROPOSITIO XVI.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & viciſſim proportionales erunt.

HIC demonſtratur *Alterna*, ſiue Permutata proportio, ſeu ratio, quæ defin. 12 explicata eſt. Sit enim A ad B vt vt C ad D. Dico vicissim, seu permutando, esse quoque *A*, ad *C*, vt B, ad D. Sumantur enim ipsarum A, B, primæ, ac secundę, ęque multiplices E, F. Item ipsarum C, D, tertiæ, & quartæ æque multiplices G, H; eritque E, ad F, vt A, ad B; cum E, & F, sint pariter multiplices partiū A, & B. Eadem ratione erit G, ad H, vt C, ad D. Cum igitur proportiones E, ad F, & G, ad D sint eędem proportioni A, ad B erunt & ipsę inter se eędem. Rursus, quia proportiones E, ad F, & G, ad H, eędem sunt proportioni C, ad D; erunt & ipsæ eędem inter se; hoc est, vt est E, prima ad F, secundam, ita erit G, tertia ad H, quartam. Quare si E, prima maior est quā G, tertia, vel equalis, vel minor, erit quoque F, secunda maior quam H, quarta, vel æqualis,

vel

vel minor, in quacunque multiplicatione accepta sint ęque multiplicia E,F, & ęque multiplicia G,H. Est igitur *A*, prima ad C, secundam, vt B, tertia ad D, quartam (cum E,& F, sint ęque multiplices primæ A, ac tertię B; At G,& H, ęque multiplices C, secundæ, & D, quartæ, & illæ ab his vna deficiāt, vel vna ęquales sint, vel vna excedant, &c.) Quod est propositum. Si quatuor igitur magnitudines proportionales fuerint, & viciſsim proportionales erunt. Quod oſtendendum erat.

THEO-

THEOREMA XVII.

PROPOSITIO XVII.

Si compoſitæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque diuiſæ proportionales erunt.

HOc loco demonſtrat Euclides diuiſionem rationis, quam defin. 15. explicauit. Sint enim compoſitæ magnitudines *AB*, CB, & *DE*, FE, proportionales, hoc eſt, ſit AB, ad CB, vt DE, ad FE. Dico & diuiſas eaſdẽ proportionales eſſe, hoc eſt, vt eſt *A*C, ad CB, ita eſſe DF, ad FE, in eo ſenſu, quẽ definit. 6. expoſuimus. Ipſarũ enim AC, C*B*, DF, FE, ęque multiplices capiantur eodem ordine GH, HI, KL, LM: eritque GI ita multiplex ipſius *A*B, vt eſt

GH

GH, ipsius *A*C, hoc est, vt KL, ipsius DF. Sed vt est multiplex KL, ipsius DF, ita quoque multiplex est KM, ipsius DE; eque multiplices; ergo sunt GI, KM, ipsarum *A*B, DE. Capiantur rursus I N, M O, eque multiplices ipsarum CB, FE. Quoniam igitur sic est multiplex HI, prima secunde CB, vt LM, tertia quartæ FE. Item tam est multiplex IN, quinta secundæ CB, quam multiplex est MO, sexta quarte FE; erit & HN, sic multiplex secundæ CB, vt LO, multiplex est quarte FE. Itaque cum sit *A*B, prima ad CB, secundam, vt DE, tertia ad FE, quartam; sumpteque sint eque multiplices GI, KM, prime ac tertie AB, DE: Item secunde, & quarte CB, FE, eque multiplices HN, LO sit vt si G I. multiplex primæ AB, deficit ab HN, multiplice se-

secundę CB, etiam KM, multiplex tertiæ *DE*, deficiat ab LO, multiplice quartæ FE; & si æqualis, ęqualis; & si excedit, excedat. Quod si deficiat tam GI, ab HN, quam KM, ab LO, ablatis communibus HI, LM, deficiet quoque GH, ab IN, & KL. ab MO. Et si G I, æqualis fuerit ipsi HN, & KM, ipsi LO, ablatis communibus HI, LM, erit & GH, ęqualis ipsi IN, & KL, ipsi MO. Et si denique GI, excesserit ipsam HN, & KM, ipsam LO, ablatis communibus HI, LM, excedet quoque GH, ipsam IN, & KL, ipsam MO. Quamobrem cum GH, KL, sumptę sint æque multiplices primæ *A* C, & tertiæ *D F*: Item IN, MO, æque multiplices secundę C*B*, & quartæ FE, ostensumque sit, (in quacunque multiplicatione illę ęque multi-

ti-

tiplices fuerint acceptę) ęque multiplices primę, & tertię ab ęque multiplicibus secundæ, & quartæ, vel vna deficere, vel ęquales esse, vel vna excedere; Erit A C, prima ad C B, secundam, vt DF, tertia ad FE, quartam, quod est propositum. Si compositæ igitur magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

THEOREMA XVIII.

PROPOSITIO XVIII.

Si diuisa magnitudines sint proportionales, hæ quoque composita proportionales erunt.

DEmonstrat hoc loco Euclides compositionem rationis, quam defin. 14. descripsit. Sint enim diuisæ magnituditudines AB, BC, & DE, EF, proportionales, hoc est, AB, ad BC vt DE, ad EF. Dico & compositas proportionales esse, hoc est, vt est AC, ad BC, ita esse DF, ad EF. Si enim non est, vt AC, ad BC, ita DF, ad EF, habebit DF ad aliquam magnitudinem minorem ipsa EF, vel maiorem, eandem proportionem, quam AC, ad BC. Habeat primum DF, ad GF, minorem ipsa EF, si fieri potest, eandem proportionem, quam AC, ad BC. Quoniam igitur est, vt AC, ad BC, ita DF, ad GF; erit diuidendo quoque, vt AB ad BC, ita DG ad GF: Sed vt AB, ad BC, ita posita quoque est DE, ad EF. Igitur erit etiam, vt DG prima ad GF, secundam, ita DE tertia ad EF, quartam. Cum ergo DG, prima maior sit, quam DE, tertia; erit quoque GF, secuncunda maior, quam EF, quartá, pars quam totum. Quod est absurdum.

Habeat deinde, si fieri potest DF, ad HF, maiorem ipsa EF, eandem proportionem, quam AC, ad BC. Qnoniam igitur est, vt AC, ad BC, ita DF, ad HF; erit diuidendo quoque vt AB, ad BC, ita DH, ad HE. Sed vt AB, ad BC, ita posita etiam est DE, ad EF. Igitur erit quoque, vt DH, prima ad HE, secūdam, ita DE, tertia ad EF, quartam. Cum ergo DH, prima minor sit quam DF, tertia, fuerit quoque HF, secunda minor quam EF, quarta, totum quam pars, quod est absurdum. Non igitur habebit DF ad minorem, ipsa EF, aut ad maiorem, eandē proportionem, quam AC, habet ad BC. Ergo DF, ad ipsam EF erit, vt AC, ad BC, quod est pro-

propoſitum. Itaque ſi diuiſæ magnitudines ſint proportionales, &c. Quod demonſtrandum erat.

THEOREMA XIX.

PROPOSITIO XIX.

Si quemadmodum totum ad totum, ita ablatum ſe habuerit ad ablatum, & reliquum ad reliquum, vt totum ad totum, ſe habebit.

QVod in propoſ. 5. demonſtratum eſt de multiplici proportione, hoc loco de omni proportione, etiam irrationali demonſtratur. Sit enim tota AB, ad totam CD, vt ablata AE, ad ablatam CF. Dico & reliquam EB eſſe ad reliquam FD, vt eſt

tota

tota AB ad totam CD Cum-
enim sit AB, ad CD, vt AE, ad CF: erit & permutando AB, ad AE, vt CD, ad CF. Diuidendo ergo erit EB, ad AE, vt FD, ad CF. Quare permutando rursus erit EB, ad FD, vt AE, ad CF, hoc est, vt tota AB, ad totam CD, cum posita sit AB, ad CD, vt AE, ad CF. Si igitur quemadmodum totum ad totum. &c. Quod demonstrandum erat.

THEOREMA XX.

PROPOSITIO XX.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur; ex æquo autem prima, quàm tertia maior fuerit, erit et quarta, quam sexta, maior. Quod si prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ, sin illa minor, hæc quoque minor erit.

SInt tres magnitudines *A*, B, C, & totidem D, E, F, sitque *A*, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F, sit autem primum A, prima maior quam C, tertia. Dico & D, quartam esse maiorem F, sexta. Cum enim A, maior sit quam C, erit maior

N pro-

proportio A, ad B, quam C, ad B. Eſt autem vt A ad *B*, ita ad D, ad E. Maior igitur proportio quoque erit D, ad E, quam C, ad B. *A*t vt *C*, ad B, ita eſt F, ad E. (Cum enim ſit B, ad C, vt E, ad F, erit conuertendo vt C, ad B, ita F, ad E.) Maior igitur quoque proportio erit D, ad E, quam F, ad E. Quare *D*, maior erit, quam F. Quod eſt propoſitum.

Sit deinde A, ęqualis ipſi *C*. Dico, & *D*, æqualem eſſe ipſi F. Cum enim A, ſit ipſi C, æqualis; erit *A*, ad B, vt C, ad B. Eſt autem vt A, ad B, ita D, ad E. igitur erit & D, ad E, vt C, ad *B*: *A*t vt C, ad B, ita eſt *F*, ad *E*, per inuerſam rationem, vti prius. Quare erit quoque D, ad F, vt F, ad *E*; Ideoque ęquales erunt D, & E. Quod eſt propoſitum.

Sit tertio A, minor quam C.

Dico

Dico & D, minorem esse, quam F. Cum enim *A*, minor sit, quã C, erit minor proportio A, ad B quam C, ad B. Sed vt *A*, ad B, ita est D, ad E. Minor ergo quoque proportio est D, ad E, quã C, ad *B*. Est autem conuertendo, vt prius, vt C, ad B, ita F, ad E. Igitur minor est quoque proportio D, ad E, quam F, ad E; propterea; D, minor erit quam F. Quod est propositum. Si sint itaque tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, &c.

THEOREMA XXI.

PROPOSITIO XXI.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur, fueritque perturbata earũ proportio; ex æquo autem prima, quam tertia maior fuerit: erit & quarta, quam sexta, maior. Quod si prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ; sin illa minor, hæc quoque minor erit.

SInt tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur; sitque earum proportio perturbata, hoc est, sit vt A, ad B, ita E, ad F, & vt B, ad C, ita D, ad E. Sit autem primũ

A,

A, prima maior quam C, tertia. Dico & D, quartam esse maiorem sexta F. Cum enim *A*, maior sit quam C, erit maior proportio *A*, ad B, quam C, ad B. Est autem, vt *A*, ad B, ita E, ad F. Maior ergo quoque proportio est E, ad F, quam C, ad B. Quoniam vero vt B, ad C, ita est D, ad E, erit conuertendo vt C, ad B, ita E, ad D. Quare maior quoque erit proportio E, ad F, quam E, ad D. Ideoque, maior erit D, quam F. Quod est propositum.

Sit deinde A, ipsi C, æqualis. Dico D, quoque ipsi F, esse æqualem. Cum enim A, sit equalis ipsi C, erit A, ad B, vt C, ad B: Sed vt A, ad B, ita est E, ad F. Igitur erit vt C, ad B, ita E, ad *F*: Est autem ex inuersa ratione, vt C, ad B, ita E, ad D, veluti prius. Igitur erit quoq;

vt E,ad F, ita E, ad D; atque idcirco D, ipsi F, æqualis erit. Quod est propositum.

Sit tertio A, minor, quam C. Dico, & D, minorem esse quam F. Cum enim A, sit minor quã C, erit minor proportio A, ad B quàm C, ad B: Vt autem A, ad B, ita est E, ad F. Minor est ergo proportio E, ad F, quam C, ad B. Quoniam vero, vt ante, ex inuersa ratione, vt est C, ad B, ita E, ad D; erit quoque minor proportio E, ad F, quam F, ad D; ac propterea D, minor erit quam F, quod est propositum. Si igitur sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, &c. Quod ostendendum erat.

THEO-

THEOREMA XXII.

PROPOSITIO XXII.

Si sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ bina in eadem ratione sumantur: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt.

IAm hic demonstrat Euclides modum argumentandi in proportionibus ex ęqualitate, quando proportio est ordinata. Sint enim primum tres magnitudines A, B. C, & aliæ tres D, E, F: sitque *A*, ad *B*, vt D, ad E. & *B*, ad C, vt E, ad F. Dico quoque ex æqualitate esse A, ad C, vt D, ad F. Sumptis enim ipsarum A, D, æque multiplicibus G, H. Item ipsarum

B, E, I, K, & ipsarum C, F, L, M; cum sit A, prima ad B, secundam, vt D, tertia ad E, quartā, erit quoque G, multiplex primæ A, ad I, multiplicem secundæ B; vt H, multiplex tertiæ D ad K, multiplicem quartæ E. Eadem ratione, cum sit B, prima ad C, secundam, vt E, tertia ad F, quartam; erit I, multiplex primæ B, ad L, multiplicem secundæ C, vt K, multiplex tertiæ E, ad M, multiplicem quartæ F. Quoniam igitur sunt tres magnitudines G, I, L, & aliæ tres H, K, M, quæ binæ in eadem proportione sumuntur; fit vt si G, prima superat tertiam L, superet necessario quoque H, quarta sextam M: Et si æqualis, equalis; Et si deficit, deficiat. Itaque cum G, H, æque multiplices primæ A, & tertiæ D, vel deficiant vna ab L, M,
æque

æque-multiplicibus secundæ C, & quartæ F, vel vna æquales sint, vel vna excedant: in quacunque multiplicatione sumpta sint ea multiplicia, erit A, prima ad C, secundam vt D, tertia ad F, quartam. Quod est propositum.

Deinde sint plures magnitudines tribus; ita vt sit etiam C, ad N, vt F, ad O. Dico adhuc esse, vt A, ad N, ita D, ad O. Cũ enim iam sit ostensum in tribus magnitudi nibus, esse A, ad C, vt D, ad F: ponatur autem C, ad N, vt F, ad O, erunt tres magnitudines A, C, N, & aliæ tres D, F, O, quæ binæ in eadem ratione sumuntur. Ergo ex æqualitate in tribus magnitudinibus ostensa, rursus erit vt A, ad N, ita D, ad O. Eodemque modo idem ostendetur in quinque magnitudinibus, per quatuor; ficut id in quatuor demonftratum fuit per tres; & fic de pluribus. Itaque fi fint quotcunq; magnitudines, &c. Quod erat oftendendum.

THEOREMA XXIII

PROPOSITIO XXIII.

Si fint tres magnitudines, aliaque ipfis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione fumantur, fuerit autem perturbata earũ proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

DEmonftratur hic ratio ex æqualitate, quando proportio eft perturbata. Sint enim tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, fitque perturbata earum proportio, hoc eft, fit vt A, ad B, ita E, ad F; &

vt

vt *B*, ad C, ita D, ad E. Dico quoque ex æqualitate esse, vt A, ad C; ita D, ad F. Sumptis enim ipsarum A, B, *D*, æquemultiplicibus G, H, I; Item ipsarum C, E, F, equemultiplicibus K, *L*, M. Erit vt *A*, ad B, ita G, ad I, cum G, I, sint ipsarum A, B, æquemultiplices; At vt A, ad *B*, ita est E, ad *F*; Igitur vt G ad I, ita quoque est E, ad F; Sed vt E, ad *F*, ita est, quoque K, ad M; quod K, M, sint ipsarũ E F, æquemultiplices. Igitur erit quoq; vt G, ad I, ita K, ad M. Rursus quoniam est *B*, prima ad C, secundam, vt D, tertiam ad E, quartam; erit quoque vt I, multiplex primę B, ad L, multiplicem secundæ C, ita H, multiplex tertiæ *D*, ad K, multiplicem quartæ E. Quia igitur sunt tres magnitudines G, I, L, & aliæ tres H, K, M, quæ binæ in eadem ratione sumuntur, estq; earum proportio perturbata; cum ostensum sit esse vt G, ad L, ita K, ad M; Et vt H, ad K, ita L, ad L, fit vt si G, prima superat tertiã L, superat quoque quarta H, sextam M; & si equalis, equalis; & si deficit, deficiat. Itaq; cum G, & H, æquemultiplices primæ A, & tertiæ D, ab L, & M, æquemultiplicibus secundæ C, & quartæ F, vel vna deficiant, vel vna æquales sint, vel vna excedant; erit vt A, prima ad C, secundã, ita D, tertia ad F, quartam, quod est propositum. Itaque si sint tres magnitudines, &c. Quod demonstrandum erat.

THEO-

THEOREMA XXIV.

PROPOSITIO XXIV.

Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; habuerit autem & quinta ad secundam, eandem rationem, quam sexta ad quartam; Etiam composita prima cum quinta, ad secundam eandem habebit rationem, quam tertia cum sexta, ad quartam.

QVod propositione 24. demonstrauit Euclides de sola proportione multiplici, demonstrat hoc loco de omni proportione, etiam irrationali. Sit enim AB, prima ad C, secundam, vt DE, tertia ad F, quartam; Item BC, quinta ad ad C, secundam, vt EH, sexta ad F, quartam. Dico ita esse AG, compositam ex prima ac quinta, ad secundam C, vt est D H, composita ex tertia, & sexta, ad quartam F. Cum enim sit vt BG, ad C, ita EH, ad F; erit conuertendo vt C, ad BG, ita F, ad EH. Quoniam igitur est AB, ad C, vt DE, ad F, & C, ad BG, vt F, ad FH; erit ex æquali AB, ad BG, vt DE, ad EH. Componendo igitur erit vt tota AG, ad BG, ita tota DH, ad EH. Itaque cum rursus sit AG ad BG, vt DH, ad EH, & BG, ad C, vt EH, ad F: erit ex æquali AG, ad C, vt DH, ad F, quod est propositum. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.

THEO-

THEOREMA XXV.

PROPOSITIO XXV.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint: maxima, & minima reliquis duobus maiores erunt.

SIt enim AB, ad CD, vt E, ad F, sitque AB, omnium maxima & F, minima. Dico duas AB, & F, simul esse maiores duabus CD, & E, simul. Auferatur enim ex AB, magnitudo AG, equalis ipsi E; & ex CD, alia CH, equalis ipsi E. Erit igitur AG, ad CH, vt E, ad F, hoc est, vt AB, ad CD. Quare cum sit tota AB, ad totam CD, vt ablata AG, ad ablatam CH: erit quoque vt tota AB, ad totam CD, ita reliqua GB, ad reliquã HD:

HD: Est autem A B, (cum sit omnium maxima) maior, quam CD. Igitur & G B, maior erit quam HD. Quoniam vero AG, & E, æquales sunt; si ipsis addantur æquales F, & CH; nimirum F ipsi AG, & CH, ipsi E, fient AG, & F, simul æquales ipsis E, & CH, simul. Additis igitur inæqualibus GB, & HD, fient AB, & F, simul maiores quam E, & CD, simul cum GB, sit maior quam HD; quod est propositum. Si ergo quatuor magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

THEO-

THEOREMA XXVI.

PROPOSITIO XXVI.

Si prima ad secundam habuerit maiorem proportionem quam tertia ad quartam: habebit conuertendo secunda ad primam minorem proportionem, quam quarta ad tertiam.

HAbeat enim *A*, ad B, maiorem proportionem, quam C, ad D. Dico proportionem B, ad *A*, minorem esse proportione D, ad C. Intelligatur enim esse E, ad B, vt C, ad D; eritque proportio A, ad B, maior quoque quam E, ad B; ac propterea *A*, maior erit quam E. Quare minor erit proportio B, ad *A*, maiorem; quam B, ad E, minorem: Sed vt est B, ad E, ita

est

est conuertendo D, ad C. Igitur proportio *B*, ad *A*, minor est quoque, quam D, ad C. Quod est propositum.

THEOREMA XXVII.

PROPOSITIO XXVII.

Si prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoque vicissim prima ad tertiam maiorem proportionem, quam secunda ad quartam.

HAbeat enim A, ad B, maiorem proportionem, quam C, ad D. Dico permutando maiorem esse quoque proportionem *A*, ad C, quam B, ad D. Intelligatur namque esse E, ad B, vt C, ad D, eritque proportio *A*, ad B, maior etiam quam E, E,ad B. Ideoque A, maior erit quam E. Quare maior erit proportio A,ad C, quam E,ad C. Quoniam vero permutando est, vt E,ad C,ita *B*,ad D (cum posita sit E, ad B, vt C, ad D.) Igitur proportio A,ad C, maior quoque erit quam *B*, ad D. Quod est propositum.

THEOREMA XXVIII

PROPOSITIO XXVIII.

Si prima ad secundam habuerit maiorem proportionem quam tertia ad quartam: Habebit quoque composita prima cum secunda, ad secundam maiorem proportionem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam.

SIt maior proportio *A*B, ad BC, quam *D*E,ad EF. Dico

&

& componendo maiorem esse proportionem AC, ad BC, quã DF, ad EF. Intelligatur enim esse GB, ad BC, vt DE, ad EF. eritque proportio AB, ad BC, maior quoque, quam GB, ad BC: Ideoque AB, maior quam GB, Addita ergo communi BC fiet AC, maior quam GC, maiorq; propterea erit proportio AC, ad BC, quam GC, ad BC. Sed componendo, vt est GC, ad BC, ita est DF, ad EF (quod posita sit GB, ad BC, vt DE, ad EF.) Maior ergo etiam erit proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Quod est propositum.

THEOREMA XXIX.

PROPOSITIO XXIX.

Si composita prima cum secunda ad secundam maiorem habuerit proportionem, quam composita tertia cum quarta ad quartam: Habebit quoque diuidendo prima ad secundam maiorem proportionem, quam tertia ad quartam.

SIt maior proportio A C, ad BC, quam DF, ad EF. Dico & diuidendo maiorem esse proportionem AB, ad BC, quam DE, ad EF. Intelligatur enim esse GC, ad BC, vt DF, ad EF, eritque proportio AC, ad BC, maior quoque proportione GC, ad BC: ideoque maior erit AC, quam GC. Ablata ergo cõmuni

muni BC; maior erit AB, quam GB: Ac propterea maior erit proportio AB, ad BC, quam GB, ad BC. Sed diuidendo, vt est GB, ad BC, ita est DE, ad EF. (Posita namque est GC, ad BC, vt DF, ad EF.) Igitur maior quoque erit proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Quod est propositum.

THEO-

THEOREMA XXX.

PROPOSITIO XXX.

Si composita prima cum secunda, ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam: Habebit per conuersionem rationis, prima cum secunda ad primam, minorem proportionem, quam tertia cũ quarta, ad tertiam.

SIt maior proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Dico per conuersionem rationis, minorem esse proportionem AC, ad AB, quam DF, ad DE. Cum enim sit AC, ad BC, maior proportio, quam DF, ad EF, erit & diuidendo, maior proportio AB ad BC, quam DE, ad EF. Quare con-

conuertendo, minor erit proportio BC, ad AB, quam EF, ad DE: Ac propterea, & componendo, minor erit proportio totius AC, ad AB, quam totius DF, ad DE Quod est propositũ.

THEOREMA XXXI.

PROPOSITIO XXXI.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad secundam quam primæ posteriorum ad secundam; Item secundæ priorum ad tertiam maior, quam secundæ posteriorũ ad tertiam: Erit quoque ex æqualitate maior proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam.

SInt tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, sitque maior

maior proportio *A*, ad B, quam D, ad E: Item maior B, ad C, quam E, ad F. Dico ex æqualitate maiorem quoque esse A, ad C quam *D*, ad F. Intelligatur enim esse G, ad C, vt E, ad F; eritque propterea proportio B, ad C, maior, quam G, ad C. Ideoque B, maior erit quam G. Quare maior erit proportio *A*, ad G, minorem, quam *A*, ad *B*, maiorem. Ponitur autem A proportio A, ad B, maior quam D, ad E. Multo ergo maior erit proportio *A*, ad C, quam D, ad E. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt D, ad E; eritque propterea maior proportio A, ad G, quam H, ad C; Ideoque *A*, maior erit, quam H. Quare maior quantitas A, ad C, habebit maiorem proportionem, quam minor quantitas H, ad eandem C: *A*tqui vt *H*, ad C. ita est, ex æqualitate D, ad F, (quoniam vt D, ad E, ita est H, ad G; & vt E, ad F, ita G, ad C.) Maior ergo proportio quoque erit A, ad C. quam D, ad F. Quod est propositum.

THEOREMA XXXII.

PROPOSITIO XXXII.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad secundam, quam secundæ posteriorum ad tertiam; Item secundæ priorum ad tertiam maior, quam primæ posteriorũ ad secundam: Erit quoque ex æqualitate, maior proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam.

Sint tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, sitq; maior

maior proportio A, ad B, quam E, ad F. Item maior B, ad C, quam D, ad E. Dico esse quoq; maiorem proportionem ex æqualitate A, ad C, quam D, ad F. Intelligatur enim esse G, ad C, vt D, ad E, eritque propterea proportio B, ad G, maior quam G, ad C. Ideoque maior erit B, quam G. Quare maior erit proportio A, ad G, minorẽ quam eiusdem A, ad B, maiorem: Est autem proportio A, ad B, maior quam E, ad F. Multo ergo maior est proportio A, ad G, quam E, ad F. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt E, ad F; Eritque propterea maior proportio A, ad G, quam H, ad G; ideoque maior erit A, quam H, Quocirca A, maior ad C, maiorem habebit proportionem, quam H, minor ad eandẽ. C: At vt H, ad C, ita est ex æ-

O 2 qua-

qualitate *D*, ad F. (Quoniam vt *D*, ad E, ita est G, ad C: & vt E, ad F, ita est H, ad G.) Maior ergo etiam est proportio A, ad C, quam *D*, ad F. Quod est propositum.

THEOREMA XXXIII.

PROPOSITIO XXXIII.

Si fuerit maior proportio totius ad totum, quam ablati ad ablatum: Erit, & reliqui ad reliquum maior proportio, quam totius ad totum.

SIt maior proportio totius *A*B, ad totam CD, quam ablatæ AE, ad ablatam CF. Dico & proportionem reliquæ E*B*, ad reliquam F*D*, maiorem esse, quam totius *AB*, ad totam CD. Cum enim maior sit proportio

portio AB,ad CD,quam AE, ad CF; erit quoque permutando, maior proportio AB,ad AE,quã CD, ad CF; ac propterea, per conuersionem rationis, minor erit proportio AB, ad EB, quã CD,ad FD. Permutando igitur, minor quoque erit proportio AB, ad CD, quam EB, ad FD. hoc est, EB,reliqua ad reliquã FD, maiorem habebit proportionem, quam tota AB, ad totam CD. Quod est propositum.

THEOREMA XXXIV.

PROPOSITIO XXXIV.

Si sint quotcunque magnitudines & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad primam posteriorũ, quam secundæ ad secundam; & hæc maior, quam tertiæ ad tertiam, & sic deinceps: Habebunt omnes priores simul ad omnes posteriores simul, maiorem proportionem; quam omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores, relicta quoque prima: minorem autem, quam prima priorum ad primam posteriorum; maiorem denique etiam, quam vltima priorum ad vltimam posteriorum.

SInt primum tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, D,E,F. Sit autem maior proportio A, ad D, quam B, ad E. Item maior B, ad E, quam C, ad F. Dico proportionem ipſarum A, B, C, ſimul ad ipſas D, E, F, ſimul maiorem eſſe proportione ipſarum B, C, ſimul ad ipſas E, F, ſimul; minorem vero proportione A, ad D: maiorem denique etiam proportione C, ad F. Cum enim maior ſit proportio A, ad D, quam B, ad F; erit permutando maior A, ad B, quam D, ad E. Igitur componendo, maior erit proportio ipſarum A, B, ſimul ad B, quam ipſarum D, ſimul ad E. Permutando ergo rurſus, maior erit proportio A, B, ſimul ad D, E, ſimul, quam B, ad E. Itaque cum tota A, B, ad totam D, E, maiorẽ habeat proportionem, quam ablata B, ad ablatam E, habebit quoque reliqua A, ad reliquam

D, maiorem proportionem, quam tota A,B,ad totam D,E. Eadem ratione, maior erit proportio B, ad E, quam totius B, C, ad totam E, F: Multo ergo maior erit proportio A, ad D, quam B, C, totius ad totam E, F. Permutando igitur, maior erit proportio A,ad B,C, quam D, ad E, F; & componendo ergo maior est proportio totius A,B,C, ad B,C, quam totius D, E,F, ad E, F. Et rursus permutando maior proportio omniũ A,B,C, simul ad omnes D,E, F, simul quam B,C, ad E, F, quod est primum.

Itaque sit maior proportio totius A,B,C, ad totam D, E,F, quam ablatę B, C, ad ablatam E, F, erit & maior proportio reliquæ A, ad reliquam D, quã totius A,B, C, ad totam D,E,F, quod est secundum.

Quo-

Quoniam vero maior est proportio B,ad E, quam C, ad F; erit permutando maior quoque B,.ad C, quam E, ad F, & componendo, maior totius BC ad C, quam totius E,F,ad F: & rursus permutando,maior B,C ad E,F,quam C,ad A,F. Est autem maior proportio A,B,C, ad D,E,F, vt ostendimus,quam B, C,ad E, F. Multo ergo maior erit proportio omnium A, B, C, ad omnes D,E,F, quam vltimam C, ad vltimam F, quod est tertium.

Deinde sint quatuor magnitudines vtrobique cum eadem hypothesi, hoc est, sit quoque maior proportio tertiæ C, ad F, tertiam, quam G, quartæ ad H, quartam. Dico eadem consequi. Vt enim iam in tribus est ostensum, maior est proportio B,ad E, quam B,C,G,ad

E, F, H. Multo ergo maior erit A, ad D, quam B, C, G, ad E, F, H. Permutando ergo minor erit A, ad B, C, G, quam D, ad E, F, H, & componendo maior A, B, C, G, ad B, C, G, quam D, E, F, H, ad E, F H, & permutando A, B, C, G, ad D, E, F, H, maior quam B, C, G, ad E, F, H. quod est primum.

Itaque cum sit maior proportio totius A, B, C, G, ad totã D, E, F, H, quam ablatæ B, C, G, ad ablatam E, F, H, erit & reliquæ A, ad reliquam D, maior proportio, quam totius A, B, C, G, ad totam D, E, F, H. quod est secundum.

Quoniam vero, vt in tribus est demonstratum, maior est proportio B, C, G, ad E, F, H, quam G, ad H; & maior A, B, C, G, ad D, E, F, H, quam B, C, G, ad E, F, H. vt fuit ostensum; multo

multo maior erit proportio A, B, C, G, ad D, E, F, H quam vltimæ G, ad vltimam H; quod est tertium.

Eadem arte concludes, eadem consequi in quinque magnitudinibus per quatuor, & in sex per quinque, & in septem, per sex, &c. quemadmodum ostendimus in quatuor, per tres. Constat ergo totum Theorema, &c.

EVCLIDIS ELEMENTORVM

LIBER SEXTVS.

DEFINITIONES.

1 Similes figuræ rectilineæ sunt, quæ & angulos singulos singulis æquales habent, atque etiam latera, quæ circum angulos equales, proportionalia.

2 Reciprocæ autem figuræ sunt, cum in vtraque figura antecedentes, & consequentes rationum termini fuerint.

3 Secundum extremam, & mediam rationem recta linea secta esse dicitur, cũ

vt

vt tota ad maius segmentum, ita maius ad minus se habuerit.

4 Altitudo cuiusque figuræ est linea perpendicularis à vertice ad basin deducta.

5 Ratio ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter se multiplicatæ, aliquam effecerint rationem.

6 Parallelogrammum secundú aliquam rectam lineam applicatum, deficere dicitur parallelogrammo, quando non occupat totam lineam. Excedere vero, quando occupat maiorem lineam, quam sit ea, secundum quam applicatur: ita tamen, vt parallelogrammum deficiens, aut excedens eandem habeat altitudinem,

cum

cum parallelogrammo appli-cato, constituatque cum eo totum vnum parallelogrammum.

THEOREMA I.

PROPOSITIO I.

Triangula, & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita se habent inter se, vt bases.

SInt duo triangula ABC, DEF, eandem habentia altitudinem, quorum bases BC, EF. Item duo parallelogramma CG, EH, eiusdem altitudinis, quorum eædem bases BC, EF. Dico ita esse triangulum ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum CG, ad parallelogrammum EH, vt est basis BC, ad basin EF. Collocentur enim

enim tam triangula, quam parallelogramma inter easdem parallelas GH, LN, & ex BL, sumantur quoscunque rectæ BI, IK, KL, ipsi EG, æquales; Item ex FN, abscindantur quotcunque rectæ FM, MN, æquales rectæ EF. Deinde ex A, & D, deducantur rectæ AI, AK, AL, DM, DN. Erunt igitur triangula ABC, AIB, AKI, ALK, super æquales bases, & inter easdem parallelas constituta, inter se equalia. Eadem ratione æqualia erunt triangula DEF, DFM, DMN Quam multiplex est ergo recta CL, rectæ BC, tam multiplex quoque erit triangulum ACL, trianguli ABC; & quam multiplex est recta EM, rectæ EF, tam quoque multiplex erit triangulum DEN, trianguli DEF, quia in tot triangula equalia sunt diuisa nifa tota triangula ACL, DEN, in quot rectas equales sectæ fuerunt totæ rectæ CL, EN. Quoniam vero si basis C L, æqualis fuerit basi E N, necessario triangulum ACL, equale est triangulo DEN, ac proinde si CL, maior fuerit quam EN, necessario ACL, maius est quam DEN, & si minor, minus; deficient propterea vna CL, recta, & triangulum ACL, æquemultiplicia primæ magnitudinis B C, & tertiæ ABC, ab EN, recta triãgulo DEN, equemultiplicibus secundę EF, & quartæ DE F, vel vna equalia erunt, vel vna excedent, si ea sumantur, quę inter se respondent. Quare quæ proportio est primę B C, ad secundam EF, basis ad basim, ea est tertię ABC, ad quartam DEF, trianguli ad triangulum. Sicut igitur basis ad basim, sin, ita est triãgulum ad triangulũm, quod est propositum.

Quoniam autem vt triangulum ABC, ad triangulum DEF, ita est parallelogrammum CG, (quod duplum est trianguli AB C,) ad parallelogrammum EH: (quod est duplum trianguli DEF) perspicuum est, ita quoque esse parallelogrammũ ad parallelogrammum, vt est basis ad basin. Quod erat demonstrandum.

THEO-

THEOREMA II.

PROPOSITIO II.

Si ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quędam linea, hęc proportionaliter secabit ipsius trianguli latera. Et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quę ad sectiones ad iuncta fuerit recta linea, erit ad reliquũ ipsius trianguli latus parallela.

IN triangulo A B C, ducatur primum recta DE, parallela lateri BC. Dico latera AB, AC, secta esse proportionaliter in D, & E, hoc est esse vt AD, ad DB, ita AE, ad EC. Ductis enim rectis CD, BE, erunt triangula DEB, DEC, super eã-

dem

dem basin DE. & inter easdem parallelas DE,BC, constituta, inter se equalia. Quare vt triangulum ADE, ad triangulũ DEB, ita est triangulum idem ADE.ad triangulum DEC: Atqui vt triangulum ADE,ad triã gulum DEB,ita est basis AD,ad basin DB; (cum hæc triangula sint eiusdem altitudinis vt cõstat,si per E.agatur parallela recta ipsi AB,) & eadem ratione,vt triangulum ADE,ad triã gulum DEC ita est basis AE, ad basin EC. Vt igitur AD, ad DB, ita est AE,ad EC,(cum hę duæ proportiones eædem sint proportioni trianguli ADE,ad triã gulum DEC.) quod est propositum.

Secet deinde recta DE, latera AB,AC, proportionaliter. Dico DE, parallelam esse reliquo lateri BC. Ductis enim rur-

rursū rectis CD, BE, erit vt basis AD, ad basin DB, ita triangulum ADE, ad triangulum DEB, cum sint eiusdem altitudinis: Ponitur autem vt AD, ad DB, ita AE, ad EC. Igitur erit vt triangulum ADE, ad triangulū DEB, ita AE, ad EC; Sed rursus vt basis AE, ad basin EC, ita est triangulum ADE, ad triangulū DEC, cum sint altitudinis eiusdem. Igitur vt triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita est triangulum idem ADE, ad triãgulum DEC. Æqualia ergo sunt triãgula DEB, & DEC; Ac propterea, cum eandem habeant basin DE, inter easdem erunt collocata parallelas. Igitur parallela est DE, ipsi BC, quod est propositum. Si itaque ad vnū trianguli latus parallela ducta fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

THEO-

THEOREMA III.

PROPOSITIO III.

Si trianguli angulus bifariam sectus sit, secans autem angulũ recta linea secuerit, & basin: basis segmenta eandem habebunt rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera. Et si basis segmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera: recta linea, quæ à vertice ad sectionẽ producitur, bifariam secat trianguli ipsius angulum.

IN triangulo ABC, recta AD, secet primo angulum BAC, bifariam. Dico esse vt BA, ad AC, ita BD, ad DC. Agatur enim per B, recta BE, parallela ipsi AD, donec cũ CA. producta con-

conueniat in E, eritque angulus EBA, equalis alterno BAD; & angulus E, externo DAC. Cum igitur duo anguli BAD, DAC, equales ponantur; erunt & anguli EBA, & E, inter se equales; Ideoque & rectæ BA, EA, inter se equales. Vt igitur EA, ad AC, ita BA, ad eandem AC. Atqui vt EA, ad AC, ita est BD, ad DC, cum in triangulo BCE, recta AD, sit parallela lateri BE. igitur vt BA, ad AC, ita est BD, ad DC, quod est propositum.

Sit deinde vt BA, ad AC, ita BD, ad DC. Dico rectam AD, bifariam secare angulum BAC. Agatur enim rursus per B, recta BE, ipsi AD, parallela coiens cum CA, potracta in E. Quoniã igitur vt BA, ad AC, ita ponitur BD, ad DC. Vt autem BD, ad DC, ita est EA, ad AC; (quod in trian-

triangulo *BCF*, recta *AD*, sit lateri BE, parallela) Erit vt *BA*, ad *AC*, ita EA, ad eandem AG. Aequale igitur sunt *BA*, & EA, inter se, ac propterea anguli *ABE*, & E, æquales quoq; erunt. Cum igitur angulus *ABE*, equalis sit alterno *BAD*, & angulus E, externo DAC, erunt, & duo anguli *BAD*, DAC, inter se equales, quod est propositum. Itaque si trianguli angulus bifariā sectus sit, &c. Quod erat demonstrandum.

THEO-

rectę DF Quoniam igitur in triangulo BEF, recta AC, parallela est lateri EF, erit AB, ad AF, hoc est, ad DC, (quę æqualis est ipsi AF,) vt BC, ad CE. Permutando igitur erit AB, ad BC, vt DC, ad CE. Rursus, quia in eodem triangulo BEF, recta CD, parallela est lateri BF, erit BC, ad CE, vt FD, hoc est, vt CA (quę ęqualis est ipsi FD) ad ED. Permutando igitur erit BC, ad CA, vt CE, ad ED, Cum igitur sit AB, ad BC, vt DC, ad CE, & BC, ad CA, vt CE, ad ED: erit & ex ęquali AB, ad CA, vt DC, ad ED. Quod est propositum. Aquiãgulorum ergo triangulorum proportionalia sunt latera, &c. Quod erat demonstrandum,

THEO.

THEOREMA V.

PROPOSITIO V.

Si duo triangula latera proportionalia habeant; æquiangula erunt triangula. & æquales habebunt eos angulos, sub quibus & homologa latera subtenduntur.

HAbeant triangula ABC, DEF, latera proportionalia, sitque AB, ad BC, vt DE, ad EF, & BC, ad CA, vt EF. ad FD, & AB, denique ad AC, vt DE, ad DF. Dico triangula esse æquiangula, angulum scilicet A, æqualem esse angulo D, & angulum B, angulo E; & angulum C, angulo F. Sic enim anguli æquales respiciunt homologa latera. Fiat angulus FEG, æqualis

THEOREMA IV.

PROPOSITIO IV.

Aequiangulorum triangulorum proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur.

Sint æquiangula triangula ABC, DCE, sintque æquales anguli ABC, DCE, & ACB, DEC, & BAC CDE, Dico esse AB, ad BC, vt DC, ad CE, & BC ad CA, vt CE, ad ED; & AB, denique ad AC, vt DC, ad DE; Ita enim latera circa æquales angulos sunt proportionalia, homologaque sunt ea latera, quę æqualibus angulis subtenduntur, hoc est, & antecedentia omnia æquales respiciunt angulos,

gulos, & consequentia similiter. Constituantur latera B C.CE, secundum lineam rectã, ita vt angulus DCE, externus sit æqualis interno ABC, pariterque externus ACB, interno D C. Et quia duo anguli ABC, ACB, minores sunt duobus rectis: est autem angulo ACB, æqualis angulus DEC, erunt & anguli B,& E, duobus rectis minores. Quare rectæ BA,& ED productæ ad partes A,D, coibunt. Producantur ergo, & conueniant in F. Quoniam vero angulus externus DCE, ęqualis est interno opposito AB C: parallelæ erunt CD, & BF. Eadem ratione parallelę erunt CA,& EF: quod angulus externus ACB, sit æqualis intero DE C. Parallelogrammum est igitur AGDF, proptereaque recta AF, æqualis rectę CD; & recta CA,

THEOREMA IV.

PROPOSITIO IV.

Aequiangulorum triangulorum proportionalia sunt latera, quae circum aequales angulos, & homologa sunt latera, quae aequalibus angulis subtenduntur.

Sint æquiangula triangula ABC, DCE, sintque æquales anguli ABC, DCE, & ACB, DEC, & BAC CDE, Dico esse *AB*, ad BC, vt DC, ad CE, & BC ad CA, vt CE, ad ED; & AB, denique ad *A*C, vt DC, ad DE; Ita enim latera circa æquales angulos sunt proportionalia, homologaque sunt ea latera, quę æqualibus angulis subtenduntur, hoc est, & antecedentia omnia æquales respiciunt angulos,

gulos, & consequentia simi-
liter. Constituantur latera B
C.CE, secundum lineam rectã,
ita vt angulus DCE, externus
sit æqualis interno ABC, pari-
terque externus ACB, interno
D'C. Et quia duo anguli ABC,
ACB, minores sunt duobus re-
ctis: est autem angulo ACB, æ-
qualis angulus DEC, erunt &
anguli B,& E, duobus rectis mi
nores. Quare rectæ BA,& ED
productæ ad partes A,D, coi-
bunt. Producantur ergo, &
conueniant in F. Quoniam
vero angulus externus DCE, æ-
qualis est iuterno opposito AB
C: parallelæ erunt CD, & BF.
Eadem ratione parallelę erunt
CA,& EF: quod angulus exter-
nus ACB, sit æqualis intero DE
C. Parallelogrammum est igitur
AGDF, proptereaque recta AF,
æqualis rectę CD; & recta CA,
P rectę

THEOREMA IV.

PROPOSITIO IV.

Aequiangulorum triangulorum proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur.

Sint æquiangula triangula ABC, DCE, sintque æquales anguli ABC, DCE, & ACB, DEC, & BAC CDE, Dico esse AB, ad BC, vt DC, ad CE, & BC ad CA, vt CE, ad ED; & AB, denique ad AC, vt DC, ad DE, Ita enim latera circa æquales angulos sunt proportionalia, homologaque sunt ea latera, quę æqualibus angulis subtenduntur, hoc est, & antecedentia omnia æquales respiciant angulos,

gulos, & consequentia simi-
liter. Constituantur latera B
C.CE, secundum lineam rectã,
ita vt angulus DCE, externus
sit æqualis interno ABC, pari-
terque externus ACB, interno
D' C. Et quia duo anguli ABC,
ACB, minores sunt duobus re-
ctis: est autem angulo ACB, æ-
qualis angulus DEC, erunt &
anguli B, & E, duobus rectis mi
nores. Quare rectæ BA, & ED
productæ ad partes A, D, coi-
bunt. Producantur ergo, &
conueniant in F. Quoniam
vero angulus externus DCE, ę-
qualis est interno opposito AB
C: parallelæ erunt CD, & BF.
Eadem ratione parallelę erunt
CA, & EF: quod angulus exter-
nus ACB, sit æqualis intero DE
C. Parallelogrammum est igitur
AGDF, proptereaque recta AF,
æqualis rectę CD; & recta CA,

P rectę

THEOREMA IV.

PROPOSITIO IV.

Aequiangulorum triangulorum proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur.

Sint æquiangula triangula ABC, DCE, sintque æquales anguli ABC, DCE, & ACB, DEC, & BAC CDE, Dico esse AB, ad BC, vt DC, ad CE, & BC ad CA, vt CE, ad ED; & AB, denique ad AC, vt DC, ad DE; Ita enim latera circa æquales angulos sunt proportionalia, homologaque sunt ea latera, quę æqualibus angulis subtenduntur, hoc est, & antecedentia omnia æquales respiciant augulos,

gulos, & consequentia simi-
liter. Constituantur latera B
C.CE, secundum lineam rectã,
ita vt angulus DCE, externus
sit æqualis interno ABC, pari-
terque externus ACB, interno
DEC. Et quia duo anguli ABC,
ACB,minores sunt duobus re-
ctis: est autem angulo ACB, æ-
qualis angulus DEC, erunt &
anguli B,& E, duobus rectis mi
nores. Quare rectæ BA,& ED
productæ ad partes A,D, coi-
bunt. Producantur ergo, &
conueniant in F. Quoniam
vero angulus externus DCE,ę-
qualis est interno opposito AB
C:parallelæ erunt CD, & BF.
Eadem ratione parallelę erunt
CA,& EF:quod angulus exter-
nus ACB,sit æquaiis intero DE
C. Parallelogrammum est igitur
AGDF,proptereaque recta AF,
æqualis rectę CD;& recta CA,

rectę DF Quoniam igitur in triangulo BEF, recta AC, parallela est lateri EF, erit AB, ad AF, hoc est, ad DC, (quę æqualis est ipsi AF,) vt BC, ad CE. Permutando igitur erit AB, ad BC, vt DC, ad CE Rursus, quia in eodem triangulo BEF, recta CD, parallela est lateri BF, e it BC, ad CE, vt FD, hoc est, vt CA (quę ęqualis est ipsi FD) ad ED. Permutando igitur erit BC, ad CA, vt CE, ad ED, Cum igitur sit AB, ad BC, vt DC, ad CE, & BC, ad CA, vt CE, ad ED: erit & ex ęquali AB, ad CA, vt DC, ad ED. Quod est propositum. Aquiãgulorum ergo triangulorum proportionalia sunt latera, &c. Quod erat demonstrandum.

THEO-

THEOREMA V.

PROPOSITIO V.

Si duo triangula latera proportionalia habeant; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, sub quibus & homologa latera subtenduntur.

HAbeant triangula ABC, DEF, latera proportionalia, sitque AB ad BC, vt DE, ad EF, & BC, ad CA, vt EF, ad FD, & AB, denique ad AC, vt DE, ad DF. Dico triangula esse æquiangula, angulum scilicet A, æqualem esse angulo D, & angulum B, angulo E; & angulum C, angulo F. Sic enim anguli æquales respiciunt homologa latera. Fiat angulus FEG, æqualis angulo B; & angulus EFG, angulo C, conueniantque rectæ EG,FG,in G: eritque reliquus angulus G, reliquo angulo A,æqualis. Aequiangula igitur sunt triangula ABC,GEF. Quare vt AB,ad BC,ita est GE ad EF:vt autẽAB,ad BC,ita ponitur DE,ad EF. Igitur vt GE, ad EF,ita est DE,ad EF,eandẽ: proptereaque æquales erunt GE, DE. Rursus, quoniam vt BC,ad CA,ita est EF,ad FG, Vt autem BC,ad CA, ita ponitur EF,ad FD, erit vt EF,ad FG,ita eadem EF,ad FD; ideoq; æquales erunt FG, FD. Itaque cum latera EG,FG, æqualia sint lateribus DE,DF,vtrumque vtrique,& basis communis EF,erũt anguli G,& D,æquales;ac propterea, & reliqui anguli GEF, GFE, reliquis angulis DEF, DFE,æquales erunt. Quamobrẽ cum cũ angulus G, æqualis sit angulo A; erit & angulus D, eidem angulo A, æqualis, eodemque modo angulus DEF. angulo B, & angulus DFE, angulo C, æqualis erit, quod est propositũ. Si duo igitur triangula latera proportionalia habeant, &c. Quod ostendendum erat.

THEOREMA VI.

PROPOSITIO VI.

Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, & circa æquales angulos latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triangula, æqualesq; habebunt angulos, sub quibus homologa latera subtenduntur.

SIt angulus B, trianguli ABC, æqualis angulo E, trianguli DEF, sintque latera AB, BC proportionalia lateribus DE, EF, hoc est, sit AB, ad BC, vt DE, ad EF. Dico reliquos angulos reliquis angulis æquales esse, angulum scilicet A, angulo D, & angulum C, angulo F; Ita enim æquales anguli homologa latera respiciunt. Fiat angulo B æqualis angulus FEG; & angulo C, angulus EFG; eritq; vt in pcedēti propos. dictum est, triāgulum GEF, triangulo ABC, æquiangulum. Quare vt AB, ad BC, ita est GE, ad EF Sed vt AB, ad BC, ita ponitur DE, ad EF. Igitur vt DE, ad EF, ita est GE, ad eandem EF, atque idcirco DE, GE, æquales erunt. Itaque cum latera DE, EF, æqualia sint lateribus GE, EF, & anguli ipsis contenti æquales, quoque (nam angulo B, cui factus est æqualis angulus FEG, æqualis est

est positus angulus DEF, propterea que æquales ad inuicem erunt anguli DEF, GEF, erũt reliqui anguli D, BED, reliquis angulis G, EFG, æquales. Cum ergo angulus G sit æqualis angulo A, & angulus EFG, angulo C; erunt etiam angulis A, C, æquales anguli D, *EFD*, & ob id æquiangula erunt triangula ABC, DEF, quod est propositum. Si igitur duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA VII.

PROPOSITIO VII.

Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, circum autem alios angulos latera proportionalia habeant: reliquorum verò simul vtrumque aut minorem, aut non minorē recto: Aequiangula erunt triãgula, & æquales habebunt eos angulos, circum quos proportionalia sunt latera.

SIt angulus A. trianguli ABC, æqualis angulo D. trianguli DEF, & latera AC, CB, circa angulum ACB, proportionalia lateribus DF, FE, circa angulum F, hoc eſt ſit vt AC, ad CB ita DF, ad FE, hac tamen lege, vt quilibet reliquorum, angulorum

lorum B, & E, sit vel minor recto, vel non minor. Dico equiã gula esse triangula, angulos scilicet ACB, & F, circa quos sunt latera proportionalia, & angulos B, & E, æquales esse. Sit enim primum tam B, quam E, recto minor: Quo posito, si anguli ACB, & F, non sunt equales, sit ACB, maior, quam F: fiatque ipsi F, æqualis ACG. Cum igitur, & angulus A, angulo D, ponatur æqualis, erit & reliquus AGC, reliquo E, æqualis; ideoque triangula AGC, DEF, æquiangula erunt. Quare vt AC, ad CG, ita erit DF, ad FE: Sed vt DF, ad FE, ita ponitur AC, ad CB. Vt igitur AC, ad CG, ita erit eadem AC, ad CB. ac propterea æquales erunt CG, CB, & anguli CBG, CGB, equales. Cum igitur angulus B, ponatur recto minor erit & CGB minor recto, ideoque ei deinceps AGC, recta maioris (cum AGC,CGB, sint duobus rectis ęquales; Est autem ostensus angulus AGC,angulo E, ęqualis. Maior igitur recto est quoque angulus E; Sed positus est etiam recto minor. Quod est absurdum.

Sit deinde tam B, angulus, quam E, recto non minor; eritque vt prius,angulus B,angulo CGB,ęqualis,ideoque & CGB, recto non minor erit;ac propterea anguli CBG, CGB, in triangulo BCG, non minores erunt duobus rectis, sed vel maiores, vel æquales duobus rectis,quod est absurdum.Sunt enim duobus rectis minores. Non ergo inęquales sunt anguli ACB,& F, sed æquales,atque idcirco reliqui etiam anguli B,& E, æquales erũt,quod

est

est propositum. Si duo itaque triangula vnum angulum vni angulo æqualem,&c. Quod demonstrandum erat.

THEOREMA VIII.

PROPOSITIO VIII.

Si in triangulo rectangulo, ab angulo recto in basin perpendicularis ducta sit: quæ ad perpendicularem triangula, tum toti triangulo, tum ipsa inter se similia sunt.

IN triangulo ABC, angulus BAC, sit rectus à quo ad basin perpendiculares agatur AD. Dico triangula ADB, ADC, similia esse, & toti triangulo ABC,& inter se. Cum enim in triangulis ABC, DBA, anguli BAC,& ABD, sint recti, & angulus B, communis; erunt & reliqui anguli ACB, & DAE, equales. Aequiangulum est igitur triangulum DBA, triangulo AB C, ac propterea habebunt latera circa æquales angulos proportionalia, &c. hoc est, erit vt CB, ad BA, ita BA, ad BD, & vt BA, ad AC, ita BD. ad DA; & vt BC, ad CA, ita BA, ad AD. Ita enim latera homologa æqualibus angulis opponuntur, vt vult propos. 4. huius lib: Quare simile est triangulũ ADB toti triãgulo ABC. Eodẽ modo ostendetur triangulum ADC, simile eidem triangulo ABC. Nã anguli BAC, & ADC, sunt recti, & angulus C, communis; ac propterea reliqui anguli ABC, & CAD, æqualis. Quare vt BC, ad CA, ita est CA, ad CD, & vt CA, ad AB, ita CD, ad DA, & vt CB, ad BA, ita CA, ad AD. Sic e-

nim

nim opponuntur quoque homologa latera angulis æqualibus, ex preſcripto propoſ.4.huius lib. Non ſecus demonſtrabitur, ſimilia inter ſe eſſe triangula ADB, & ADC, cum anguli ADB, ADC, ſint recti, & anguli ABD, CAD, oſtenſi equales, nec non anguli BAD, ACD: Atque idcirco fit vt BD, ad DA, ita DA ad DC, & vt DA, ad AB, ita DC ad CA; & vt AB, ad BD, ita CA, ad AD. Si igitur in triangulo rectangulo, ab angulo recto in baſin perpendicularis ducta ſit &c. Quod erat demonſtrandum.

PRO-

PROBLEMA I.

PROPOSITIO IX.

A data recta linea imperatam partem auferre.

IMperetur, vt ex linea *A B* auferamus partem tertiam. Ex A, ducatur recta AC, vtcunque faciens angulum CAB, & ex AC, abscindantur tot partes æquales cuiuslibet magnitudinis, quota pars detrahenda est ex A B, vt in proposito exemplo tres AD, DE, EF. Deinde ex F, ad B, recta ducatur F B, cui per *D*, parallela agatur DG. Dico AG, esse partem tertiam imperatam rectæ A *B*. Nam cum in triangulo A B F, lateri FE, parallela sit recta D G; erit vt FD, ad D*A*, ita BG, ad ad GA. Componendo igitur, vt FA, ad DA, ita BA, erit ad GA. Sed FA, ipsius AD, est tripla, ex constructione. Igitur & BA ipsius AG, erit tripla; ideoque AG, tertia pars erit ipsius AB, quæ imperabatur A, data ergo recta linea imperatam partem abstulimus. Quod faciendum erat.

PROBLEMA II.

PROPOSITIO X.

Datam rectam lineam insectam similiter secare, vt data altera recta secta fuerit.

Sit recta AB, secanda similiter, vt secta est recta AC, in D, & E, hoc est, in partes, quę sint partibus AD, DE, EC, proportionales. Coniungãtur dactæ duæ lineæ ad A, facientes angulum quemcunque BAC & connectatur recta BC. Deinde ex D, E, agantur DF, EG, parallelæ ipsi BC. Dico rectam AB, similiter esse sectam in F, & G, vt est secta AC, in D, & E. Nam vt AD, ad DE, ita est AF, ad FG. Proportionales ergo sunt partes AF, FG, partibus AD, DE. Quod si ducatur DH, ipsi FB, parallela, secans EC, in I; erit rursus, vt DE, ad EC, ita DI, ad IH, hoc est, ita FG, ad GB; quod FG, ipsi DI, & GB, ipsi IH, æqualis sit. Quare proportionales quoque erunt partes FG, GB, partibus DE, EC. Eademque ratio est de pluribus partibus, si ex E, & C, ipsi AB, parallelæ agantur, &c. Itaque datam rectam lineam insectam similiter secuimus, vt data altera recta secta fuit. Quod faciendum erat.

PRO-

PROBLEMA III.

PROPOSITIO XI.

Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem adinuenire.

Sint duæ rectæ AB, AC, ita dispositæ, vt efficiant angulum A. quemcunque, sitque inuenienda illis tertia proportionalis, sicut quidem AB, ad AC, ita AC, ad tertiam. Producatur AB, quam volumus esse antecedentem, & capiatur BD æqualis ipsi AC, quæ consequens esse debet, siue media. Deinde ducta recta BC, agatur illi ex D, parallela DF, occurrens ipsi AC, productæ in E. Dico CE, esse tertiam proportionalem, hoc est, esse vt AB, ad ad AC, ita AC, ad CE. Cum enim in triangulo ADE, lateri DE, parallela, sit recta BC; erit vt AB, ad BD, ita AC, ad CE: Sed vt AB, ad BD, ita eadem AB, ad AC, ęqualem ipsi BD: Vt igitur AB, ad AC, ita AC, ad CE quod est propositum. Duabus ergo datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinuenimus. Quod erat faciendum.

PROBLEMA IV.

PROPOSITIO XII.

Tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenire.

Sint tres lineæ rectę AB, BC, AD, quibus inuenienda sit quarta proportionalis; sicut quidem AB, ad BC, ita AD, ad quartam. Disponantur primæ

duæ

duæ AB, BC, secundum lineam rectam, quæ sit AC: Tertia vero AD, cum prima AB, faciat angulum A, quemcunque. Deinde ex B, ad D, recta ducatur BD, cui per C, parallela ducatur CE, occurrens rectæ AD, productæ in E, puncto. Dico DE, esse quartam proportionalem. Cum enim in triangulo ACE, lateri CE acta sit parallela BD; erit vt AB, ad BC, ita AD, ad DE. Quare DE, quarta est proportionalis; ac propterea, tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenimus. Quod faciendum erat.

PRO-

PROBLEMA V.

PROPOSITIO XIII.

Duabus datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenire.

Sint duæ rectæ AB,BC, quibus media inuenienda est proportionalis, dispositæ secũdum lineam rectam AC. Diuisa AC, bifariam in E, ex E, centro, & interuallo EA, vel EC, semicirculus describatur ADC: Deinde ex B, ad AC, perpendicularis educatur BD, ad circumferentiam vsque. Dico BD, esse mediam proportionalem inter AB, & BC. Ductis enim rectis ADCD, erit angulus ADC, rectus in semicirculo. Cum igitur ex angulo recto ADC, trianguli re-

rectanguli ADC, deducta sit ad basin AC, perpendicularis DB, erit per demonstrata propos. 8. huius lib. BD, media proportionalis inter AB, & BC. Duabus ergo datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenimus. Quod erat faciendum.

THEOREMA IX.
PROPOSITIO XIV.

Aequalium & vnum vni aequalem habentium angulum, parallelogrammorum, reciproca sunt latera, quae circum aequales angulos. Et quorum parallelogrammorum vnum angulũ vni angulo aequalem habentiũ reciproca sunt latera, quae circum aequales angulos; illa sunt aequalia.

Sint duo parallelogramma aequalia ABCD, BEFG, habenbentia angulos ABC, EBG, æquales. Dico latera circum hosce angulos esse reciproca, hoc est, esse vt AB, ad BG, ita EB, ad BC. Coniungantur enim parallelogramma ad angulos æquales, ita vt AB, & BG, vnâ efficiant lineam rectam. Quo facto, cum anguli ABC, EBG, sint æquales, erunt & EB, BC, vna recta linea, vt ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo demonstratum est. Producantur iam DC, & FG, donec coeant in H. Quoniam igitur æqualia sunt parallelogramma DB, BF: erit vt DB, ad BH, ita BF, ad idem BH; Sed vt DB, ad BH; ita est AB, basis ad basin BG, quod parallelogramma sint eiusdem altitudinis; & similiter vt BF, ad BH, ita est basis EB, ad basin BC. Igitur vt AB, ad BG, ita est EB, ad BC. Quod est

est propositum.

E contrario sint iam latera circa æquales angulos ABC, EBG, reciproca, hoc est, vt AB, ad BG, ita EB, ad BC. Dico parallelogramma DB, BF, esse æqualia. Facta enim eadem constructione; cum sit, vt AB, ad BG, ita EB, ad BC: Vt autem AB, ad BG, ita DB, ad BH; & vt EB, ad BC, ita BF, ad idem BH: erit quoque vt DB, ad BH, ita BF, ad idem BH; erit quoque vt DB, ad BH, ita BF, ad idem BH. Atque idcirco æqualia erunt parallelogramma DB, BF. Æqualium igitur, & vnum vni æqualem habentium angulum &c. Quod erat demonstrandũ.

THEOREMA X.

PROPOSITIO XV.

Æqualium, & vnum vni æqualem habentium angulum, triangulorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum triangulorum vnũ angulum vni æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos, illa sunt æqualia.

SInt duo triangula æqualia ABC, DBE, habentia angulos, qui ad B, æquales. Dico latera circa hosce angulos esse reciproca, hoc est, esse vt AB, ad BE, ita DB, ad BC. Coniungantur enim triangula ad angulos æquales, ita vt AB, BE, vnam efficiant lineam rectam,

Quo

Quo facto, cum anguli ABC, & DBE, sint æquales, erunt & DB, BC vna recta linea, vt demonstratum est ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo. Ducta igitur recta CE, quoniam æqualia sũt triangula ABC, DBE, erit vt ABC, ad BCE, ita DBE, ad idem BCE. Sed vt triangulum ABC, ad triangulum BCE, ita est basis AB, ad basin BE, quod hæc triangula eiusdem sint altitudinis; & similiter vt DBE, ad BCE, ita est basis DB, ad BC. Quare vt AB, ad BE, ita est DB ad B. Quod est propositum.

Iam vero contra, sint latera circa angulos ęquales, qui ad B, reciproca, hoc est, vt AB, ad BE, ita DB, ad BC. Dico triangula ABC, DBE, esse æqualia. Facta enim constructione eadem, cum sit vt AB, ad BE, ita DB, ad BC; vt autẽ AB, ad BE, ita triágulũ ABC, ad triangulũ BCE; & vt DB, ad BC, ita triangulum DBE, ad triangulum idem BCE; erit vt ABC, ad BCE, ita DBE, ad idem BCE, propterea que æqualia erunt triãgula ABC, DBE. Æqualium igitur, & vnum vni æqualem habentium angulum, &c. Quod ostendendum erat.

THEOREMA XI.
PROPOSITIO XVI.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod sub medijs comprehenditur, rectangulo. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale fuerit ei, quod sub medijs continetur, rectangulo: illa quatuor rectæ lineæ proportionales erunt. Sint

Sint quatuor rectæ proportionales *AB*, FG, EF, *BC*; vt quidem *AB*, ad FG, ita EF, ad BC: Sitq; rectangulum ABCD, comprehensum sub extremis AB, *BC*; rectangulum vero EF GH, comprehensum sub medijs EF, FG. Dico rectangula *A*C, EG, esse æqualia. Cũ enim anguli recti B, & F, sint æquales, & sit vt AB, ad *FG*, ita EF, ad BC, erunt latera circa æquales angulos *B*, & F, reciproca. Quare parallelogramma AC, EG, æqualia erunt. Quod est propositum.

Contra vero, sint iam æqualia rectangula AC, EG. Dico quatuor rectas lineas AB, FG, EF, BC, esse proportionales, hoc est, esse vt A*B*, ad FG, ita EF, ad BC. Cum enim æqualia sint rectangula AC, EG, habeantq; angulos æquales, nempe rectos

B, & F, erunt latera circa hosce angulos reciproca; sicut quidē AB, ad FG, ita EF, ad BC. Itaq; si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

THEOREMA XII.

PROPOSITIO XVII.

Si tres rectæ lineæ sint proportionales: quod sub extremis comprahenditur rectangulum, æquale est ei, quod à media describitur, quadrato. Et si sub extremis comprahensum rectãgulum æquale sit ei, quod à media describitur, quadrato: illæ tres rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint tres lineæ rectæ AB, EF, & BC, proportionales; vt qui-

quidem *AB*, ad EF, ita EF, ad BC: sitque rectangulum ABCD contentum sub extremis *A* B, BC, & quadratum mediæ E F, sit EFGH. Dico æqualia esse rectangulum AC, & quadratũ EG. Sumpta enim recta F G, quæ æqualis sit ipsi EF, erunt quatuor lineæ *AB*, EF, FG, BC, proportionales; vt quidem *AB* ad EF; ita FG, ad BC; eritque quadratum EG, compræhensũ sub medijs EF, FG, propter æqualitatem rectarum EF, FG. Quare rectangulum AC, comprehensum sub extremis A *B*, BC, æquale est quadrato E G, hoc est, rectangulo sub medijs EF, FG, comprehenso. Quod est propositum.

Sed sint iam æqualia rectangulum AC, & quadratum EG. Dico esse vt *AB*, ad EF, ita EF, ad BC. Cum enim æqualia sint rectangula A C, & E G, erit vt AB, ad EF, ita FG, ad BC: Vt autem FG, ad BC, ita est EF, ipsi FG, equalis, ad eandem BC. Quare vt AB, ad EF, ita est EF, ad B C. Si tres igitur rectæ lineæ sint proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

PROBLEMA VI.

PROPOSITIO XVIII.

A data recta linea dato rectilineo simile, similiterq; positum rectilineum describere.

Sit data recta AB, super quã describendum sit rectilineum rectilineo CDEFG, simile similiterq; positum. Ducantur ex quolibet angulo, vt ex F, ad singulos angulos oppositos rectæ lineæ, quæ rectilineũ re-

resoluant in triangula CDF, DE F, FGC. Deinde super AB, constituatur AIB, triangulum, æquiangulum CDF, & super AI, triangulum AKI, equiangulum CGF, & IBH, æquiangulum DE F, ex quo constat rectilinium esse equiangulum dato ex cõstructione. Quoniam vero ita est AB, ad BI, vt CD, ad DF: & ita BI, ad BH, vt DF, ad DE; erit ex æquo ita AB, ad BH, vt CD, ad DE. Quare latera circa æquales angulos ABH, CDE, proportionalia sunt; quemadmodum, & latera circa equales angulos H, & E, proportionalia sunt, ob triangula equiangula BHI, DEF. Rursus ita est HI, ad IB, vt EF, ad FD: & ita IB, ad IA, vt FD, ad FC. & ita IA, ad IK, vt FC, ad FG. Igitur ex æquo erit ita HI, ad IK; vt EF, ad FG, & ideo latera quoque circa ęquales angulos HIK, EFG, proportionalia erunt, & sic de cæteris. Quamobrem rectilinea, cum sint equiangula, habeantque latera circa æquales angulos proportionalia, similia sunt, similiterque descripta. A data ergo recta linea, dato rectilineo simile similiterq; positum rectilineū descripsimus. Quod faciendum erat.

THEOREMA XIII.

PROPOSITIO XIX.

Similia triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum.

SInt triangula similia ABC, DEF, habentia angulos æquales B, & E: Item C, & F, &c. Et sit vt AB, ad BC, ita DE,

ad

ad EF, &c. Dico triangula inter se rationem habere duplicatam eius, quam habent latera homologa BC, & EF, & quidem si sint ęqualia latera AB, DE, constat triangula esse æqualia ex 26. prin. cum anguli sint æquales, & ita etiam media proportionalis inuenta erit ęqualis, & duplicata proportio erit æqualitatis. Sint ergo primum latera BC, EF, æqualia, ac proinde, & tertia proportionalis BG, illis æqualis, ita vt proportio BC, ad BG, quę duplicata dicitur proportionis lateris BC, ad latus EF, sit proportio æqualitatis. Quoniam igitur triangula ABC, DEF, habent quoque proportionem æqualitatis, quod ipsa inter se æqualia sint, ob angulos B, C, angulis E, F, ęquales, & ęqualitatem laterum BC, EF.

ca ęquales angulos HIK, EFG, proportionalia erunt, & sic de cæteris. Quamobrem rectilinea, cum sint ęquiangula, habeantque latera circa æquales angulos proportionalia, similia sunt, similiterque descripta. A data ergo recta linea, dato rectilineo simile similiterq; positum rectilineũ descripsimus. Quod faciendum erat.

THEOREMA XIIII.

PROPOSITIO XIX.

Similia triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum.

SInt triangula similia ABC, DEF, habentia angulos æquales B, & E: Item C. & F, &c. Et sit vt AB, ad BC, ita DE,

ad

ad EF, &c. Dico triangula inter se rationem habere duplicatam eius, quam habent latera homologa BC, & EF, & quidem si sint equalia latera AB, DE, constat triangula esse æqualia ex 26. prin. cum anguli sint æquales, & ita etiam media proportionalis inuenta erit equalis, & duplicata proportio erit æqualitatis. Sint ergo primum latera BC, EF, æqualia, ac proinde, & tertia proportionalis BG, illis æqualis, ita vt proportio BC, ad BG, que duplicata dicitur proportionis lateris BC, ad latus EF, sit proportio æqualitatis. Quoniam igitur triangula ABC, DEF, habent quoque proportionem æqualitatis, quod ipsa inter se æqualia sint, ob angulos B, C, angulis E, F, equales, & equalitatem laterum BC, EF, tota erunt æqualia.

Sit deinde BC, latus latere EF, maius; & ex BC, abscindatur rectis BC, EF, tertia proportionalis BG, ducaturque recta AG. Quia igitur est, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; erit permutando, vt AB, ad DE, ita BC, ad EF: Vt autem BC, ad EF, ita est per constructionem EF, ad BG. Vt ergo AB, ad DE, ita erit EF, ad BG. Quare cum triangula ABG, DEF, habeant latera circa angulos B, E, æquales reciproca, ipsa inter se æqualia erunt; & propterea vt triangulum ABC, ad triangulum DEF, ita erit idem triangulum ABC ad triangulum ABG Vt autem triangulum ABC, ad triangulũ ABG, eiusdem altitudinis, ita est basis BC, ad basin BG. Igitur vt triangulum A B C, ad triangulum DEF, ita est BC, ad

BG,

BG. Atqui cum tres lineæ BC, EF, BG, sint continuè proportionales, proportio primæ BC, ad tertiam BG, duplicata dicitur proportionis BC, primæ ad EF, secundam. Igitur & triangulum ABC, ad triangulū DEF, proportionem habet duplicatam proportionis lateris BC, ad latus EF. Similia igitur triangula inter se sunt, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA XIV.

PROPOSITIO XX.

Similia polygona in similia triangula dividuntur, & numero æqualia, & homologa totis: Et polygona duplicatam habent eam inter se rationem, quam latus homologum ad homologum latus.

Q 6 Sint

SInt polygona similia ABC DE, FGHIK, habentia angulos æquales BAE, GFK, Itē angulos B, G, & sic deinceps: habeant autem latera proportionalia circa angulos ęquales; vt quidem AB, BC, ita FG, ad GH; & vt BC, ad CD, ita GH, ad HI, &c. Dico primum, hæc polygona diuidi in triangula simi lia, quæ sint numero ęqualia. Angulus enim BAE, GFK, rectę educantur ad singulos angulos oppositos, quę sint AC, AD, FH, FI; diuisaque erunt polygona in triangula numero æqualia. Quoniam vero angulus B, æqualis est angulo G, ex hypothesi, & circa ipsos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula ABC, IGH, & eadem ratione ostendetur de omnibus triangulis in quibus resoluitur.

Dico

Dico præterea, triãgula hæc esse homologa totis polygonis, hoc est, ita esse quodlibet triãgulum in vno polygono ad suum correspondens triangulũ in altero polygono, vt polygonum ad polygonum. Quoniam enim similia sunt triangula ABC, FGH, erit eorum proportio duplicata proportionis homologorum laterum AC, FH. Atque eodem argumento propor tio triangulorum ACD, FHI, du plicata erit proportionis eorundem laterum homologorũ AC, FH. Quare vt triangulum ABC. ad triangulum FGH, ita erit triangulum ACD, ad triangulum FHI, cum vtraque hæc proportio triangulorum sit duplicata eiusdem proportionis lateris AC, ad latus FH. Neque dissimili ratione concludetur quoque esse triangulum ADE,

ad

ad triangulum FIK, vt ACD, ad FHI: Atque ita deinceps, si plura fuerint triangula. Sunt igitur proportionalia triangula vnius polygoni cum triangulis alterius, ita vt triangula vnius sint antecedentia, & triangula alterius consequentia proportionum. Vt autem vnum antecedens ad vnum consequẽs, ita sunt omnia antecedentia ad omnia consequentia. Igitur vt quodlibet triangulum vnius polygoni ad sibi respondens triangulum alterius, ita erit totum polygonum ad totum polygonum; ideoq; triangula homologa erunt totis polygonis.

Dico postremo, polygona inter se proportionem habere duplicatam eius, quam habent latera homologa. Cum enim sit, vt triangulum ABC, ad triã-

gulum

gulum FGH, ita polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK; Triangulum vero ABC, ad triangulum FGH, habeat proportionem duplicatam eius, quam habent latera homologa *AB*, FG, hoc eſt, eandem, quam habet AB, ad illam tertiam inuentã; habebunt quoque polygona inter ſe proportionem duplicatam proportionis eorundem laterum homologorum AB, FG, hoc eſt eandem, quam habet *AB*, ad illam tertiam inuentam. Itaque ſimilia polygona in ſimilia triãgula diuiduntur, &c. Quod demonſtrandum erat.

THEO-

THEOREMA XV.

PROPOSITIO XXI.

Quæ eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia.

SInt rectilinea ABC, DEF, rectilineo GHI, similia. Dico, & ipsa inter se esse similia. Cum enim propter similitudinem, anguli rectilinei ABC æquales sint angulis rectilinei GHI; Itē eadē de causa anguli rectilinei DEF, æquales angulis eiusdē rectilinei GHI; erūt anguli rectilinei ABC, æquales angulis rectilinei DEF. Rursus cū ob eandem similitudinem, latera rectilinea ABC, proportionalia sint lateribus rectilinei GHI, ea videlicet ijs, quæ circum æquales sunt angulos:

Item

Item eādem ob causam, latera rectilinei DEF, proportionalis lateribus eiusdē rectilinei GHI; erunt quoque latera rectilinei ABC, lateribus rectilinei DEF, proportionalia, ea nimirum ijs, quę angulos ambiunt æquales. Atque adeo per definitionem, similia existent rectilinea ABC, DEF. Quæ igitur eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia. Quod erat ostendendum.

THEOREMA XVI. PROPOSITIO XXII.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; Et ab eis rectilinea similia similiterque descripta, proportionalia erunt. Et si à rectis lineis similia similiterque descripta rectilinea, proportionalia fuerint; ipsæ etiam

etiam rectæ lineæ proportionales erunt.

SInt primum quatuor rectæ Ab,CD,EF, GH, proportionales,vt quidem AB,ad CD ita EF,ad GH,Constituanturq; super AB,CD,duo quæcunque rectilinea similia similiterque descripta ABI, CDK; Item super EF,GH,alia duo quęcunq; rectilinea similia similiterque descripta,EFML, GHON. Dico & hæc rectilinea esse proportionalia,vt quidem ABI, ad CDK,ita EM, ad GO. Inueniatur enim rectis AB, CD, tertia proportionalis P; & rectis EF, GH, tertia proportionalis Q. eritque ex æquo,vt AB, ad P, ita EF,ad Q. Vt autem AB, ad P, ita est rectilineum ABI, ad rectilineum CDK,simile similiterque descriptum,ex corollario nio propositionis 20. huius lib. vel si fuerint triangula, ex coroll. propos. 19. Et eadem ratione, vt EF, ad Q, ita rectilineum EM, ad rectilineum GO. Igitur vt ABI, ad CDK, ita erit EM, ad GO. Quod est propositum.

Deinde sint ABI, CDK, EM, GO, rectilinea proportionalia, Dico quatuor rectas AB, CD, EF, GH, esse quoq; proportionales, vt quidem AB, ad CD, ita EF, ad GH. Inueniatur enim tribus rectis AB, CD, EF, quarta proportionalis RS, super quam describatur rectilineum RSVT simile rectilineo EM, similiterq; positu: & ob id rectilineo GO. Quoniam igitur est, vt AB, ad CD, ita EF, ad RS; erit quoque vt iam est ostensum, vt ABI, ad CDK, ita EM, ad RV. Vt autem ABI, ad CDK, ita quoque ponitur

nitur EM,ad GO. Igitur erit vt EM,ad RV,ita EM,ad GO; Atq; idcirco æqualia erunt RV,GO. Quæ cum sint similia similiterque posita,consistent necessario,vt mox ostendemus, super rectas RS,GH, equales. Quare erit vt EF,ad RS, ita EF , ad CD. Ponitur autem EF, ad RS, vt AB,ad CD. Igitur erit quoque vt AB,ad CD,ita EF, ad GH. Quamobrem si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint , &c. Quod erat demonstrandum .

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XXIII.

Aequiangula parallelogramma inter se rationem habent eam, quæ ex lateribus componitur.

SInt parallelogramma æquiangula AC,GF, habentia tiæ angulos BCD, ECG, æquales. Dico proportionem eorũ esse compositam ex duabus proportionibus, quas habent duo latera vnius circa angulũ æqualem, ad duo latera alterius circa angulum æqualem, ita vt antecedentia proportionum sint in vno Parallalogrãmo, & consequentia in altero; hoc est, proportionem AC, parallelogrammi ad parallelogrammum CF, compositam esse ex proportionibus rectę BC, ad CG, rectam, & rectæ DC, ad rectam CE; Vel etiam ex proportionibus rectæ BC, ad rectam CE, & rectæ DC, ad rectã CG. Idest, si sumantur tres lineæ I, K, L, ita vt I, ad K, sit, sicut BC, latus ad latus CG, & K, ad L, vt latus DC, ad latus CE: ita esse parallelogrammum AC, ad parallelogrammum CF, vt est

recta

recta I, ad rectam L; ac proinde cum ex defin. 5. huius lib. proportio I, ad L, componi dicatur ex proportionibus I, ad K, & K, ad L, proportionem quoque parallelogrammi *AC*, ad parallelogrammum CF, dici compositam esse ex eisdẽ proportionibus, hoc est, ex proportionibus BC, ad CG, & DC, ad CE. Coniungantur enim parallelogramma ad angulos æquales, ita vt BC, CG, efficiant vnam lineam *rectam*; Quo posito, cum anguli, BCD, ECG. sint æquales, erunt & DC, CE, vna recta linea, vt ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo demonstratũ est. Producantur deinde *AD*, FG, donec conueniant in H; Sumptaque recta I, quacunq; inueniatur tribus BC, CG, & I, quarta proportionalis K: Item tribus DC, CE, & K., quarta pro-

proportionalis L. Quoniam igitur est, vt BC, ad CG, ita AC, ad CH. Vt autem BC, ad CG, ita posita est I, ad K, erit quoque vt AC, ad CH, ita I, ad K. Eodemque argumento ostendes esse, vt HC, ad CF, ita K, ad L. Nam vt *D*C, ad CE, ita est HC, ad CF. Cum ergo posita sit K, ad L, vt *D*C, ad CE, erit quoque HC, ad CF, vt K, ad L. Ex æquo igitur erit, vt AC, ad CF, ita I, ad L. Sed proportio I, ad L, per 5. defin. huius lib. componitur ex proportionibus BC ad CG, & *DC*, ad CE. Ex his eisdem ergo proportionibus componetur quoque proportio parallogrammi *A*C ad parallelogrammum CE. Eademq; ratione ostendemus, proportionem AC, ad CF, cōponi ex proportionibus BC, ad CE, & DC, ad CG, dummodo parallelo-

gram-

gramma ita coniungantur ad angulos equales, vt BC, CE, efficiant vnam rectam lineam, &c. Aequiangula itaque parallelogramma inter se rationẽ habent, &c. Quod erat ostendendum est.

THEOREMA XVIII

PROPOSITIO XXIV.

In omni parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt, parallelogramma, & toti, & inter se sunt similia.

ESto parallelogrammum *ABCD*, in quo ducatur diameter AC, & per quodlibet eius punctum I, ducantur duæ rectę EF, GH, parallelæ lateribus parallelogrammi. Dico parallelogramma FG, FH, circa diame-

diametrum, similia esse & toti parallelogrammo, & inter se se. Quod enim æquiangula sint to ti, facilè ostendetur. Nam angulus CAE, idem est, qui angulus BAD; & angulus externus AEI, æqualis interno ADC, & angulus ACI, externus interno ABC, & angulus EIG, externus interno EFI, & hic externus interno BCD. Quare æquiangulum est EG, parallelogrammum parallelogrammo BD: Et eadem ratione eidem BD, æquiangulum erit FH. Quod autem latera circa æquales angulos habeant proportionalia lateribus totius, hoc modo demonstrabimus. Cum triangulum AGI, æquiangulum sit triãgulo ABC, & triangulum AEI, triangulo ADC, vt perspicuum est ex 29. propos. lib. 1. vel etiam ex coroll. propos. 4. huius lib. erit vt AB, ad BC, ita AG, ad GI, atque ita latera circa æquales angulos B, & G, proportionalia sunt. Rursus erit vt BC, ad CA, ita GI, ad IA; Item vt CA, ad CD, ita IA, ad IE. Ex æquo igitur, vt BC, ad CD, ita est GI, ad IE, ac propterea, & latera circa æquales angulos BCD, GIE, proportionalia existunt. Non aliter demonstrabuntur latera, circa reliquos angulos æquales, esse proportionalia. Quare, per definitionem, simile erit parallelogrammum EG, toti parallelogrammo BD. Eadem arte ostendens parallelogrammum FH, simile esse eidem parallelogrammo BD; atque adeo, & ipsa inter se similia erunt. In omni ergo parallelogrammo, quę circa diametrum sunt, &c. Quod erat ostendendum.

PRO-

PROBLEMA VII.
PROPOSITIO XXV.

Dato rectilineo simile similiterq; positum, & alteri dato æquale idem constituere.

SInt data duo rectilinea A, & B; sitque constituendũ aliud rectilineum, quod simile quidem sit ipsi A, æquale vero ipsi B. Super CD, vnum latus rectilinei, cui simile debet constitui, constituatur parallelogrammum CE, in quouis angulo, æquale rectilineo A; Et super rectam DE, in angulo EDG qui æqualia sit angulo DCF, parallelogrammum DH, æquale ipsi B, eritq; tam CDG, quã FEH, linea vna recta, vt demõstratum est propos. 45. lib. 1. Inueniatur iam inter rectas CD, DG, media proportionalis IK; super quam constituatur rectilineum L, simile ipsi *A*, similiterq; positum. Dico L, æquale esse alteri rectilineo *B*. Cum enim sint proportionales tres rectæ CD, IK, *D*G; erit per coroll. propos. 19. vel 20. huius lib. vt CD, prima ad DG tertiam, ita A, rectilineum super primam CD, ad rectilineũ L, super IK, secundam simile similiterque descripsimus: Vt autem CD, ad DG, ita est parallelogrammum CE, ad parallelogrammum DH, eiusdem altitudinis. Igitur erit vt CE, ad DH, ita A, ad L. Vt autem CE, ad DH, ita est A, ad B: propterea quod parallelogrammum CE, rectilineo A; & parallelogrammum D H, rectilineo B, constructum est æquale Quare erit vt A, ad B, ita A, ad L, propterea que æqualia erunt rectilinea B, & L; Eit autem & L, simi-

simile ipsi A, similiterque positum per constructionem. Dato igitur rectilineo simile similiterque positum, & alteri dato æquale idem constituimus. Quod erat faciendum.

THEOREMA XIX.

PROPOSITIO XXVI.

Si à parallelogrammo parallelogrammum ablatũ sit simile toti & similiter positum, communẽ cum eo habens angulum; hoc circum eandem cum toto diametrum consistit.

Ex parallelogrammo BD, abscissum sit parallelogrammum EG, simile ei similiterq; positum, habens cum ipso angulum cõmunem EAG. Dico EG, consistere circa diametrum totius BD. Ducantur enim rectæ AF, CF, quæ si fuerint vna linea recta, perspicuũ

est, cum AF, sit diameter ipsiu
EG, & AC diameter ipsius
BD, parallelogrammi EG, con-
sistere circa diametrum A F C
totius parallelogrammi. Quod
si AF, CF, non dicantur efficere
lineam rectam, ducatur totius
parallelogrammi diameter AC
secans latus EF, in H, puncto
per quod ipsi F G, parallela
agatur HI. Quoniam igitur pa-
rallelogramma BD, EI, sunt cir-
ca eandem diametrum A H C
ipsa erunt similia, similiterque
posita. Quare erit vt BA, ad
AD, ita EA, ad AI. Sed vt BA
ad AD, ita quoque est EA, ad
AG, quod parallelogramma
BD, EG, ponantur etiam simi-
lia, similiterque posita. Igitur
erit vt EA, ad AI, ita EA, ad AG
ac propterea æquales erunt
rectæ AI, AG, pars, & totum.
quod est absurdum.

Quod

Quod si dicatur recta AHC, secare alterum latus FG Tunc ducta HI, parallela ipsi FF, erũt rursus similia parallelogramma BD, IG, similiterque posita. Quare erit vt DA, ad AB, ita GA, ad AI: Sed vt DA, ad AB, ita quoque est GA, ad AE, ob similitudinem parallelogrammorũ BD, EG. Igitur erit vt GA, ad AI, ita GA, ad AE; ideoque æquales erunt rectæ AI, AE, pars & totum, quod est absurdum. Constituunt ergo rectę AF, FC vnam rectam lineam: hoc est, ducta diameter AC, transit per punctum F, & ducta diameter AF, cadit in punctum C. Itaq; si à parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA XX.

PROPOSITIO XXVII.

Omnium parallelogrammorum, secundum eandem rectam lineam applicatorum, deficientiumque figuris parallelogrammis similibus, similiterque positis ei, quod à dimidia describitur: maximum id est, quod ad dimidiam applicatur, parallelogrammum simile existens defectui.

DEtur recta AB, diuisa bifariam in C, superque eius dimidiam BC, constituatur quodcunq; parallelogrammum CDEB, cuius diameter BD. Si igitur compleatur totum parallelogrammum ABEH; erit parallelogrammum AD, super dimidiam AC, consistens, applicatum secundum AB, deficiēs parallelogrammo CE, & existens simile defectui CE. Dico parallelogrammum AD, ad dimidiam AC, applicatum deficiensq;

cientque parallelogrammo CE maximum esse omnium, quæ secundum AB, rectam applicantur, deficiuntq; parallelogrammis similibus similiterque positis ipsi CE. Sumpto enim puncto G, vtcunque in diametro BD, & ductis per G, rectis FGI, KG, quę fiat parallelę rectis AB, BE: erit parallelogrammum FK, secundum rectam AB, applicatum, deficiens parallelogrammo KI, quod ipsi CE, simile est, similiterque positum, cum sit circa eandem cum CE, diametrum. Quoniam vero complementa CG, GE, ęqualia sunt si addatur commune KI, erunt quoque æqualia CI, KE: Est autem CI, ęquale ipsi CF, propter bases ęquales AC, CB. igitur & CF, KE, æqualia erunt; additoque communi CG, equalia erunt parallelogrammum

AG, & gnomon LM. Quare cū
C E, maius sit gnomone LM,
(cōtinet enim CE, præter gnomonem, parallelogrammum
adhuc DG,) erit quoque AD,
æquale existēs ipsi CE. propter
bases æquales AC, CB, maius
quam parallelogrammum AG,
eodem porallelogrammo DG.
Eodemque modo ostendetur
AD; maius esse omnibus parallelogrammis; quæ ita secundum rectam AB, applicantur,
vt punctum G, sit inter pūcta
B, & D. hoc est, quæ occupant
maiorem lineam semisse AC,
habentque minorem altitudinem, quam AD; dummodo defectus similes sint ipsi CE.

PROBLEMA VIII.
PROPOSITIO XXVIII

Ad datam lineam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrā-

mum

mum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri parallelogrammo dato. Oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum est, nõ maius esse eo, quod ad dimidiam applicatur, cum similes fuerint defectus, & eius quod ad dimidiam applicatur, & eius, cui simile deesse debet.

AD datam rectam lineam AB, dato rectilineo C, applicandum sit parallelogrammum æquale, deficiens parallelogrammo, quod sit simile dato alteri parallelogrammo D. Secta AB; bifariam in E, super medietatem EB, describatur parallelogrammum EFGB, simile ipsi *D*, similiterq; positum, & compleatur totum parallelogrammum AHGB. Si igitur AF, æquale est ipsi *C*, cum sit applicatum ad AB, deficiens parallelogrammo EG, ſimili ipſi D, factum erit, quod iubetur. Si autem A F, maius eſt quam C. (Neque enim minus eſſe debet. Nam cum per propoſ. præcedentem, ipſum ſit omniũ applicatorum maximum, dummodo defectus ſint ſimiles, nõ poſſet applicari vllum ad AB, quod eſſet ipſi C, æquale, ſed omnia eſſent minora. Propterea adiunxit Euclides; Oportet autem datũ rectilineum, &c.) erit quoque ſibi æquale E G, maius quam C. Sit igitur maius rectilineo I. (Qua vero ratione exceſſus duorum rectilineorũ ſit inquirendus, dictum eſt ad propoſ. 45. lib. 1.) & conſtituatur parallelogrammum KLMN ſimile quidem, ſimiliterq; poſitum ipſi D, ſeu ipſi EG, æquale vero exceſſui inuento I; vt ſit EG, equale rectilineo C, & paral-

parallelogrammo KM, simul; & ob id maius quam KM. Cum igitur ob similitudinem sit vt EF, ad FG, ita NK, ad KL; erũt quoque latera EF, FG, maiora lateribus NK, ad KL. Si enim his illa forent æqualia, vel minora, esset etiam EG, æquale ipsi NL. vel minus, vt constat. Quare abscissis rectis FO, FQ, quæ sint æquales ipsis KN, KL & completo parallelogrammo FQPO, erit hec ipsi LN, æquale, & eidem simile similiterq; positum, & propterea ipsi EG: atque adeo circa eandem diametrum cum EG, consistet, que sit BF. Productis iam rectis QP, OP, erit parallelogrammum AP, ad rectam AB, applicatum deficiens parallelogrammo PB, quod simile est ipsi EG, similiterq; positum, & propterea ipsi D, Dico igitur AP, æquale esse

ipsi

ipsi C, rectilineo. Nam cum PG equale sit complemento PE; si addatur commune PB, erit & BQ equale ipsi EB, hoc est, ipsi ES, quod equale est ipsi ER, propter bases equales EA, EB. Quare si equalibus AO, BQ, commune addatur EP, erit AP, æquale gnomoni TV. Sed gnomon TV, equalis est rectilineo C. (Nam cum EG, parallelogrammum equale sit ipsi C, vna cum LN; si auferantur æqualia QO, LN, remanebit gnomon TV, ipsi C equalis.) Igitur & AP, eidem C, equale erit. Ad rectã ergo AB, applicatum est parallelogrammum AP, deficiens parallelogrammo PB, quod simile est dato parallelogrammo D, & æquale existens rectilineo dato C. Quod faciendum erat.

PROBLEMA IX.
PROPOSITIO XXIX.

Ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrãmum applicare, excedens figura parallelogrãma, quæ similis sit parallelogrammo alteri dato

AD datam rectam lineam AB, dato rectilineo C, applicandum sit parallelogrammum ęquale, excedens parallelogrammo, quod simile sit dato alteri parallelogrammo D. Diuisa AB, bifariam in E; super dimidiam EB, constituatur parallelogrammum EFGB, simile ipsi D, similiterque positum. Deinde rectilineo C, & parallelogrãmo EG, constituatur quadratum H, æquale; cui quidem fiat parallelogrammum IKLM, æquale, simile vero ipsi EG, similiterque positum; eritque propterea IKLM, maius quam EFGB, quandoquidem ęquale est quadrato H, quod constru-

ctum

Quum est rectilineo C, vna cum parallelogrammo EG, æquale. Cum igitur ob similitudinem MK, EG, sit vt MI, ad IK, ita EF, ad FG, erunt quoque latera MI, IK, lateribus EF, FG, maiora. Si enim illa his forent æqualia, vel minora, esset quoque MK, vel æquale ipsi EG, vel minus, vt perspicuum est. Productis igitur FE, FG, vt rectæ FO, FN, æquales sint rectis I M, I K, & completo parallelogrammo O N; erit hoc simile, similiterque positum ipsi EG, cum sit æquale ipsi MK, & simile, similiterq; positum. Quare ON, EG, circa eandem diametrum cõsistent. Productis iam AB, GB, ad Q R; & PO, donec cum AS, ipsi F O, parallela conueniat in S, erit parallelogrammum AP, applicatum ad rectam AB, excedẽs parallelogrammo QR, quod simile

mile est ipsi EG, ac propterea ipsi D. Dico igitur AP, æquale esse rectilineo C. Nam cum AO, ER, sint equalia, & ER, equale complemento B N, erit & AO, ipsi BN, equale. Addito ergo communi OQ, fiet AP, æquale gnomoni E P G. Atqui gnomon EPG, equalis est rectilineo C. (Nam cum MK, hoc est, ON, equale sit rectilineo C, vna cum EG; si auferatur commune EG, remanebunt equalia gnomon EPG, & rectilineũ C.) Igitur & AP, equale erit rectilineo C. Ad datam ergo rectam AB, dato rectilineo C, æquale parallelogrammum applicatum est AP, excedens parallelogrammo RQ, quod simile est alteri dato D. Quod faciendum erat.

PROBLEMA X.
PROPOSITIO XXX.

Propositam rectam lineam terminatam extrema, ac media ratione secare.

SIt recta AB, secanda extrema, ac media ratione. Descripto super eam quadrato ABCD, ad latus DA, applicetur rectangulum DF, ęquale quadrato AC, & excedens parallelogrammo AF, simili ipsi quadrato; ita vt sit AF quoq; quadratum, cum quadrato solum quadratum sit simile. Secet autem recta EF, rectam AB, in H. Dico AB, in H, sectam esse extrema ac media ratione. Cum enim æqualia sint DF, & AC, si demat ur commune AE, remanebunt ęqualia GH, HC, quæ cum habeant angulos ęquales AHF, BHE, vtpote rectos, erũt latera circa illos reciproca, hoc est, erit vt EH, hoc est, vt AB, ipsi EH, ęqualis ad HF, hoc

est,

est, ad AH, ipsi HF, ęqualem, vt AH, ad HB. Quare cum sit, vt tota AB, ad segmentum AH, ita segmentum AH ad segmentum HB, secta est AB, extrema ac media ratione, per definitioné. Propositam ergo rectam lineã terminatam, &c. Quod erat faciendum.

THEOREMA XXI.

PROPOSITIO XXXI.

In rectangulis triangulis, figura à quauis à latere rectum angulũ subtendente descripta, aequalis est figuris, quae priori illi similes, & similiter posita à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

TRiangulum rectangulum sit ABC, habens angulum BAC, rectum; describaturque super BC, quæcunque figura rectilinea BCDE, cui similes, similiter militerq; positæ super AB, AC, constituantur ABFG, ACIH. Dico figuram BD, æqualem esse duabus figuris AF, AI. Demissa enim ex A, ad BC, perpendiculari AK, erit per coroll. propos. 8. huius lib. vt BC, ad CA, ita CA, ad CK. Quare vt BC, ad CK, prima linea ad tertiam, ita figura BD, super primam, ad figuram CH, super secundam similem, similiterq; positam, per coroll. propos. 19 vel 20. huius lib. & conuertendo vt CK, ad BC, ita figura CG, ad figurã BD. Nõ secus ostẽdetur, esse quoq; vt BK, ad BC, ita figuram BG, ad figuram BD, cum tres lineæ BC, BA, BK, sint quoq; proportionales, &c. Quoniam igitur est vt CK, prima quantitas ad BC, secundam, ita CH, tertia ad BD, quartam; Item vt BK, quinta quantitas ad BC, secundam,

ita

ita BG, sexta ad BD, quartam: erit vt prima CK, cum quinta BK, ad BC, secundam, ita tertia CH, cũ sexta BG, ad BD, quartã. Sunt autem prima CK, & quinta BK, simul ęquales secundæ BC. Igitur tertia CH, & sexta BG, simul ęquales quoq; erunt quartę BD. Quod est propositũ.

THEOREMA XXII.

PROPOSITIO XXXII.

Si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, secundum vnum angulum composita fuerint, ita vt homologa eorũ latera sint etiã parallela: tum reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineam collocata reperientur.

HAbent triangula ABC, DCE, latera AB, AC, lateribus DC, DE, proportionalia, vt quidem AB, ad AC, ita DC, ad DE,

com-

componanturque ad angulum ACD; ita vt latera homologa AF, DC; Item AC, DE, inter se sint parallela. Dico duo latera reliqua BC, CE, rectam cōponere lineam. Cum enim parallelę sint AFDC, erit angulus A, alterno ACD, ęqualis. Eademq; ratione angulus D, eidem ACD ęqualis erit; ac propterea A, & D, inter se quoq; existent ęquales. Quoniam igitur triangula ABC, DCE, habent latera circa ęquales angulos A, & D, proportionalia; ipsa erunt inter se æquiangula, habebuntq; ęquales angulos B, & DCE. Additis ergo ęqualibus A, & ACD, erunt duo anguli B, & A, duobus angulis DCE, ACD, hoc est angulo ACE ęquales. Rursus addito cōmuni ACB, fient tres anguli triāguli ABC, duobus angulis ACE, ACB ęquales: Sed illi tres ęquales sunt duobus rectis. Ergo & duo

ACE, ACB, duobus erunt rectis ęquales: *Atque* idcirco BC, CE vnam rectā lineam constituēt. Itaq; si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA XXIII.
PROPOSITIO XXXIII.

In æqualibus circulis, anguli eandem habent rationem cum peripherijs, quibus insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant: Insuper vero, & sectores, quippe qui ad centra consistunt.

SInt duo circuli ęquales ABC, EFG quorum centra D, H, sumanturq; ex circulis duo arcus quicunque BC, FG, quibus ad centra quidem insistāt anguli BDD, FHG, ad circumferētias vera anguli BAC, FEG. Dico esse, vt arcum BC, ad arcomponanturque ad angulum ACD; ita vt latera homologa AF, DG; Item AC, DE, inter se sint parallela. Dico duo latera reliqua BC, CE, rectam cōponere lineam. Cum enim parallelę sint AFDC, erit angulus A, alterno ACD, ęqualis. Eademq; ratione angulus D, eidem ACD ęqualis erit; ac propterea A, & D, inter se quoq; existent ęquales. Quoniam igitur triangula ABC, DCE, habent latera circa ęquales angulos A, & D, proportionalia; ipsa erunt inter se æquiangula, habebuntq; ęquales angulos B, & DCE. Additis ergo ęqualibus A, & ACD, erunt duo anguli B, & A, duobus angulis DCE, ACD, hoc est angulo ACE ęquales. Rursus addito cōmuni ACB, fient tres anguli triāguli ABC, duobus angulis ACE, ACB ęquales: Sed illi tres ęquales sunt duobus rectis. Ergo & duo

ACE,ACB, duobus erunt rectis equales: *A*tque idcirco BC,CE vnam rectā lineam constituēt. Itaq; si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant,&c. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA XXIII.
PROPOSITIO XXXIII.

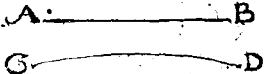
In æqualibus circulis, anguli eandem habent rationem cum peripherijs, quibus insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant: Insuper vero, & sectores, quippe qui ad centra consistunt.

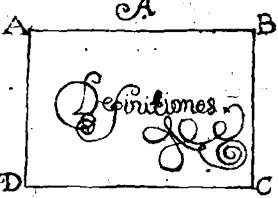
SInt duo circuli equales ABC,EFG quorum centra D, H, sumanturq; ex circulis duo arcus quicunque BC, FG, quibus ad centra quidem insistāt anguli BDC, FHG, ad circumferētias vera anguli BAC,FEG. Dico esse, vt arcum BC, ad arcum FG:ita angulum BDC, ad FHG;& BAC,ad FEG,& sectorem BDC, ad sectorem FHG. Applicentur enim in circulis equales CI,quidem ipsi BC, & ipsi FG,GK, KL, Æquales igitur erunt arcus,quibus hæ rectæ insistunt; ergo & anguli ad centra æquales inter se erunt BDC,& CDI; similiter FHG, & GHL,&c. ergo æque multiplices sunt arcus,& anguli ad cētra,cum sint diuisa in partes ęquales , & spacia ad centra, & arcus; si ergo arcus se excedēt, vel æquales erunt, similiter, & anguli; ergo vt se habet arcus BC,ad FG;ita angulus BDC,ad FHG , & hoc idem de spacio , vt arcus ad arcum,ita spacium ad spacium , ergo etiam vt angulus BDE,ad FGH;ita dimidiū BAC, ad dimidium FEG, &c. Quod erat demonstrandum.

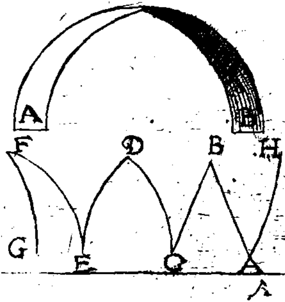
FINIS.

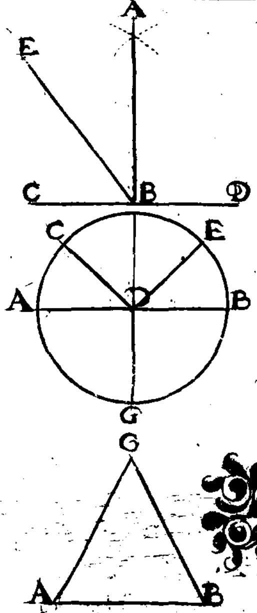

EVCLIDIS
ELEMENTORVM
Priores libri VI.
In Gratiam Mathematicæ Studiosorum
GENVÆ
Superiorum Permissu
1644
NON DECIPIT SOMNVS

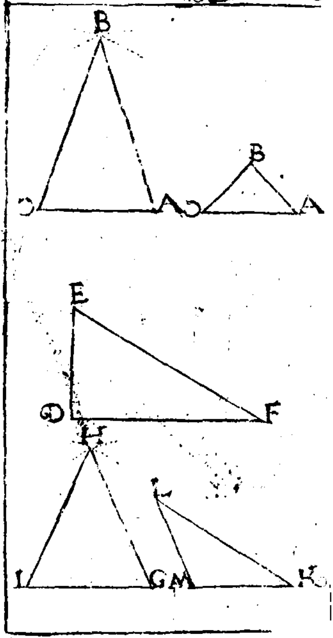
Libri Primi

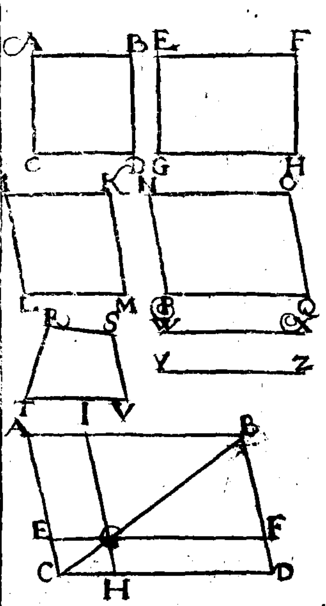


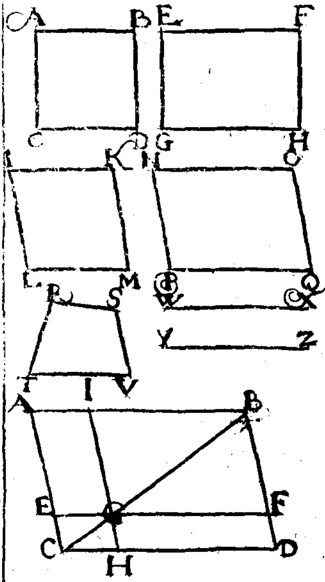




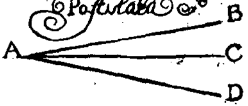

A
E
C
B
D
C
E
A
D
B
G
G
A
B

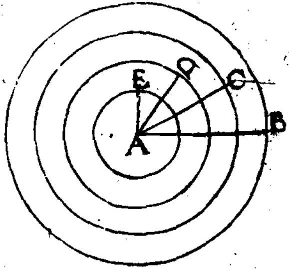

B
D
A
D
B
A
E
D
F
H
L
I
G
M
K

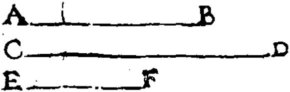

A
B
E
F
C
D
G
H
I
K
N
O
L
M
P
Q
R
S
W
X
Y
Z
T
V
A
I
B
E
F
C
H
D


A B E F
C D G H
I K N O
L M P Q
R S W X
Y Z
T V
I
A B
E F
C H D

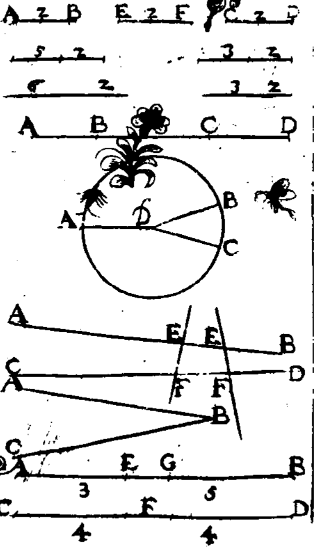
Postulata



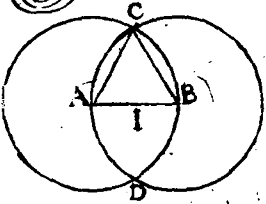


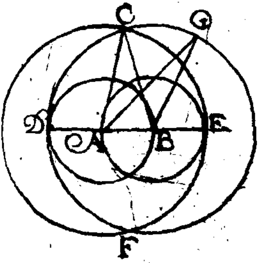


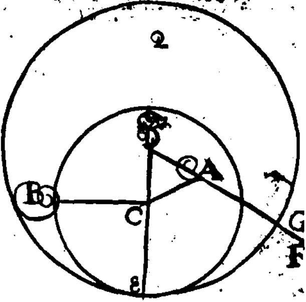
Axiomata

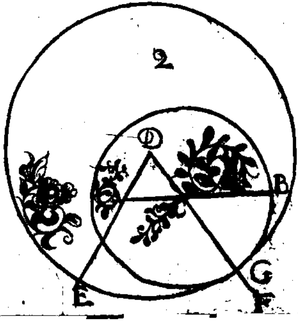


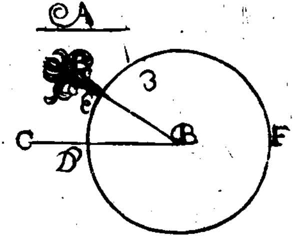
Propositiones

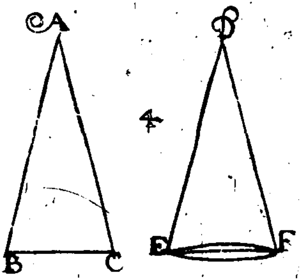


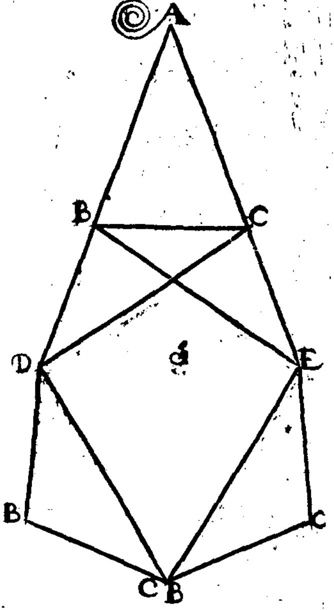


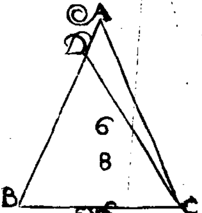

2
B
C
A
G
F
E

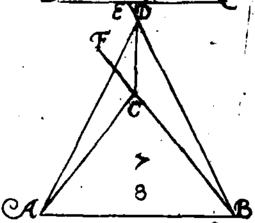

2
D
B
C
G
E
F

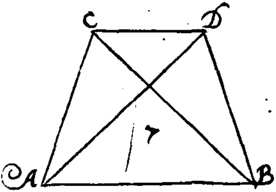

A
3
E
C
D
B
F

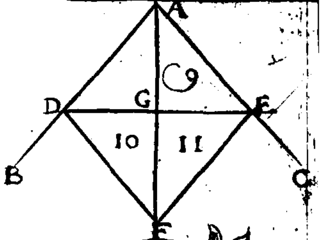

A
D
4
B
C
E
F

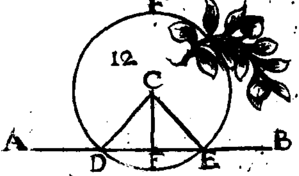

A
B
C
D
d
E
B
C
C
B

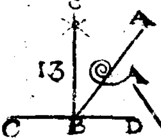

A
D
6
8
B
C

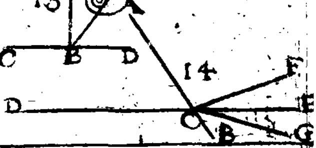

E
D
F
C
7
8
A
B

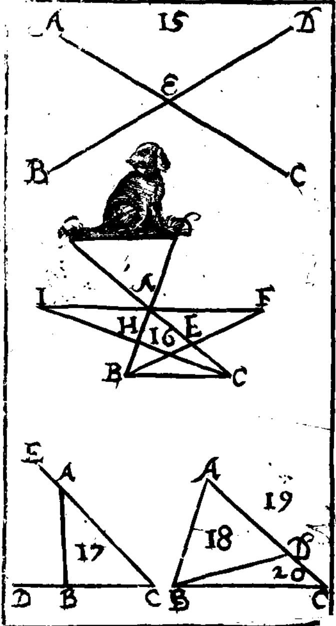

C
D
7
A
B

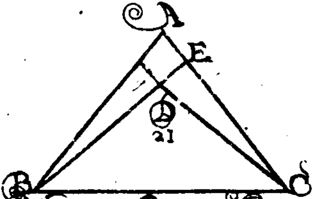

A
9
D
G
E
10
11
B
C
F

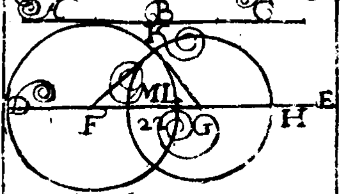

12
C
A
B
D
F
E

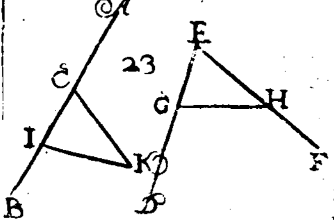

A
13
C
B
D

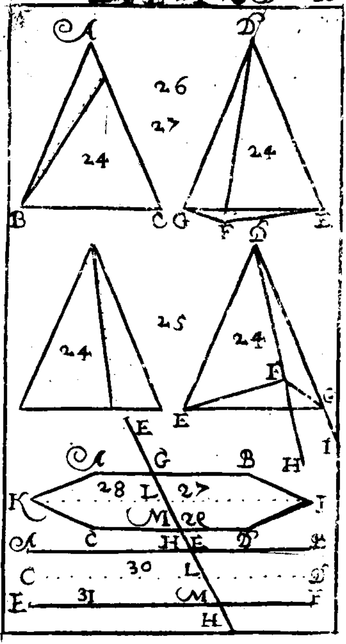

A
14
F
D
E
C
B
G

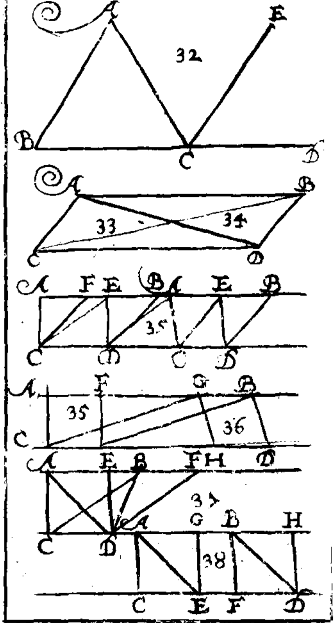

A
15
D
E
B
C
G
G
A
I
F
H
16
E
B
C
E
A
17
D
B
C
B
A
18
19
D
20
C

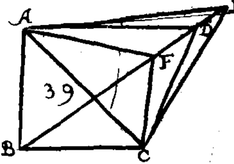

A
E
D
21
B
C

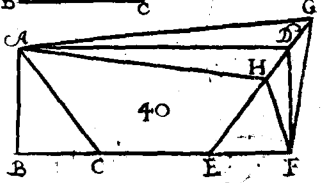

A
B
C
K
D
M L
E
F
G
H

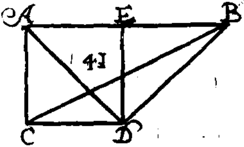

A
23
E
C
G
H
I
K
F
B
D

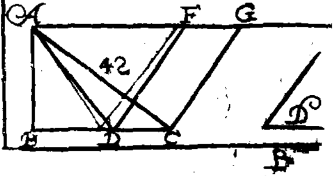

A
D
26
27
24
24
B
C
G
F
E
D
25
24
24
F
G
E
E
I
H
A
G
B
H
K
28
L
27
I
M
29
C
D
A
H
E
B
C
30
L
D
E
31
M
F
H

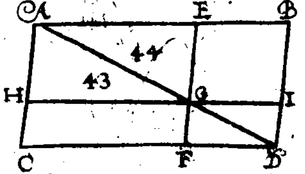

A
E
32
B
C
D
A
B
33
34
C
D
A F E B A E B
35
C D C D
A F G B
35
36
C
E F H D
A E B F H
37
G B H
A
38
C D
C E F D

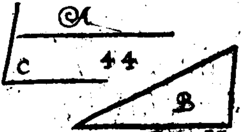

A
E
D
F
39
B
C

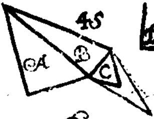

G
A
D
H
40
B
C
E
F

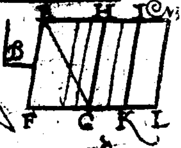

A
E
B
41
C
D

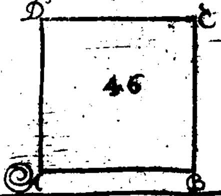

A
F
G
42
D
B
D
C
B

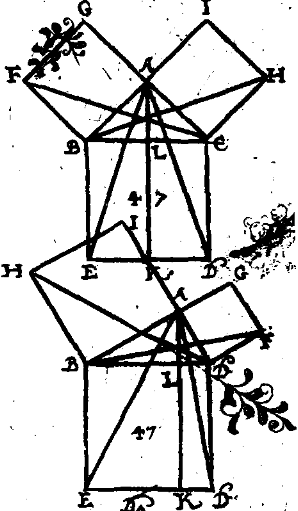

A
E
B
44
43
H
G
I
C
F
D

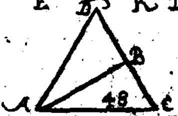

A
C
44
B


45
A
B
C

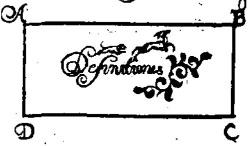

E
H
I
M
B
F
G
K
L


D
C
46
A
B

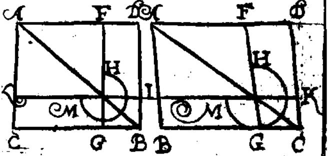

G
I
F
A
H
B
L
C
47
I
E
K
D
G
H
A
F
B
C
L
47
E
D
K
D


B
A
48
C

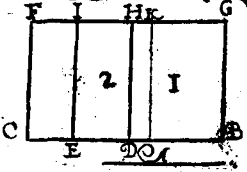
Libri Secundi

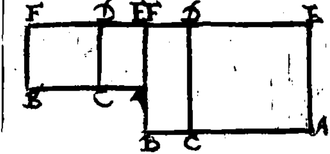


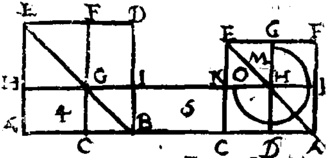
Definitiones

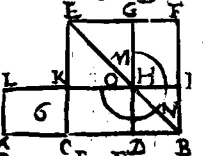


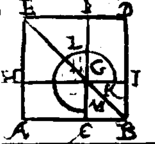
Propositiones

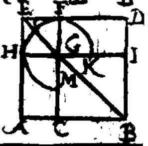


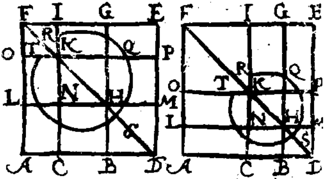






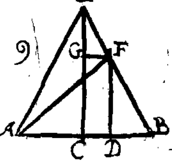




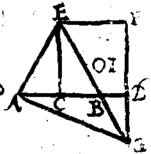

F I G E F I G E
R K Q T
O T P O R K Q
L N H M T
L N H
S S
A C B D A C B D

8

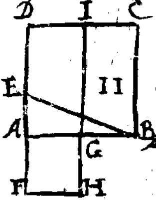
9


E
G F
A C D B

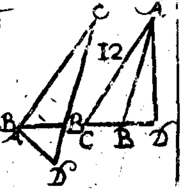
10


E F
A C B D
G

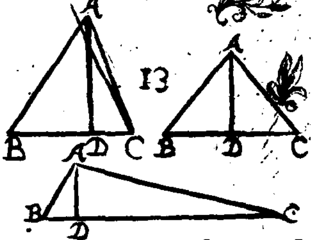
11


D I C
E
A G B
F H

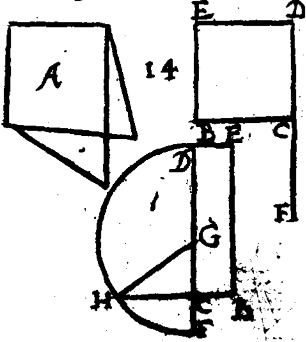
12


C A
A B C B D
D

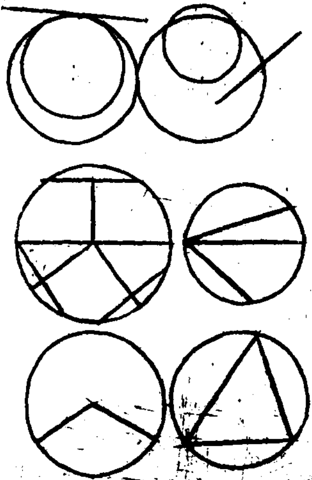
13

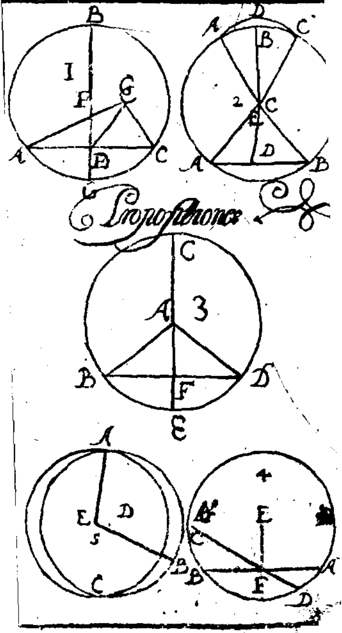


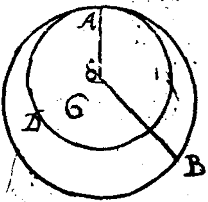
14

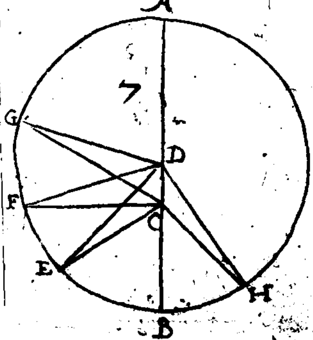


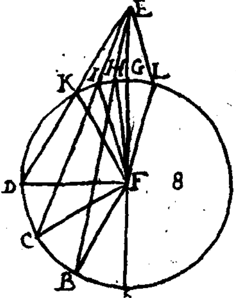
Libri Tertii Definitiones.

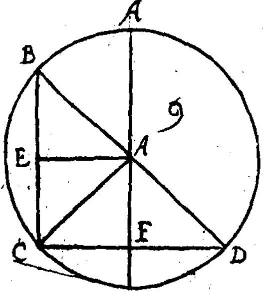


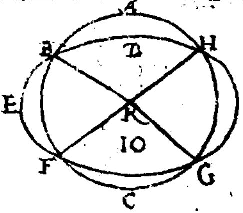

1
2
Propositiones
3
5
4

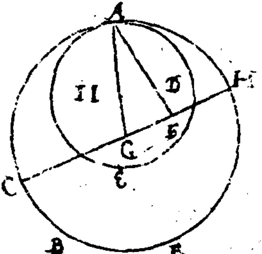

A
8
6
D
B

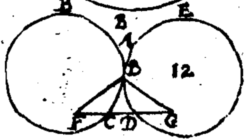

A
7
G
D
F
C
E
H
B

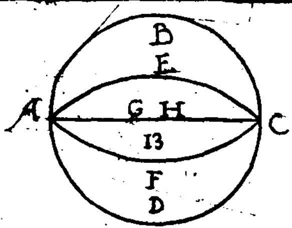

E
K
I
H
G
L
D
F
8
C
B
A

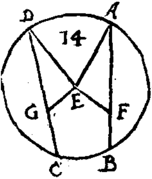

A
B
9
E
A
F
C
D

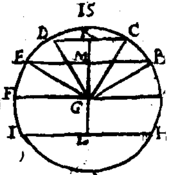

A
B
D
H
E
K
10
F
G
C

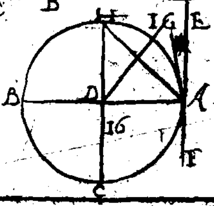

A
11
D
H
E
G
C

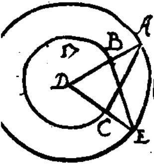

B
B
E
A
12
F
C
D
G

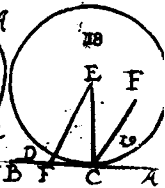

B
E
A
G H
C
13
F
D

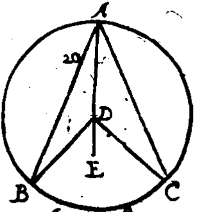

D
A
14
E
G
F
C
B

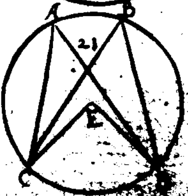

15
D
C
E
M
B
F
G
I
L
H

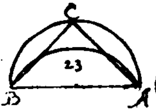

H
16
E
B
D
A
16
F
C

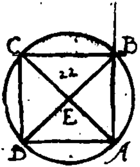

A
B
17
D
C
E

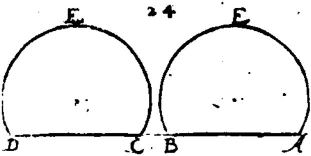

18
E
F
19
D
B
F
C
A

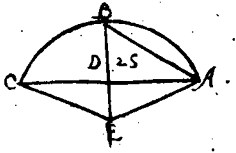

A
20
D
E
B
C


A
B
21
E
C

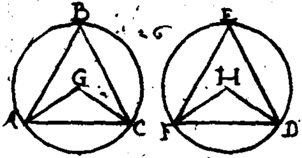

C
23
B
A


C
B
22
E
D
A

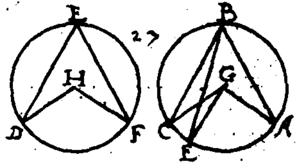

E
24
E
D
C
B
A


B
D
25
C
A
E

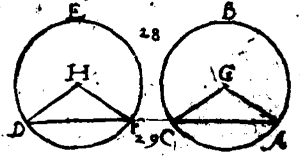
26

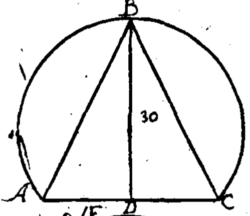


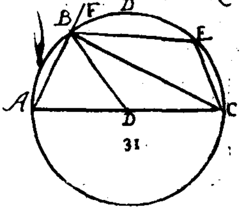
27

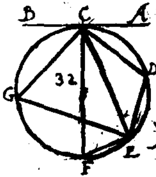


28

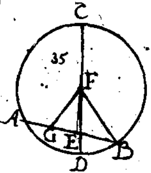


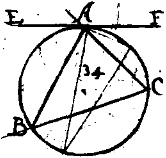

B
30
A
D
C

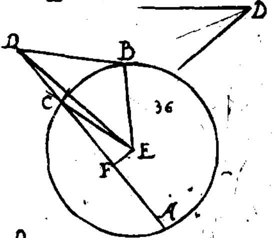

B
F
E
A
D
C
31

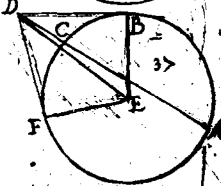

B
C
A
D
32
G
E
F


G
E
C
F
H
33
A
B
D

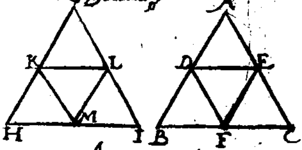

C
35
F
A
G
E
B
D

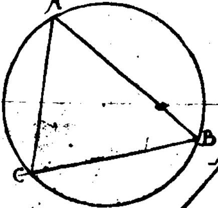

E
A
F
34
C
B

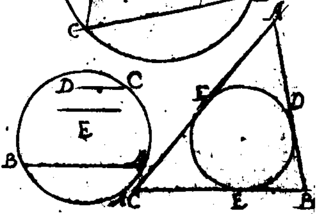

D
D
B
C
36
E
F
A

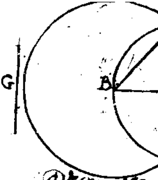

D
C
B
37
E
F
A

Libri Quarti

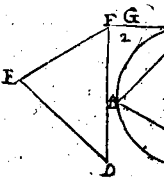


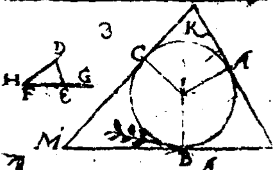


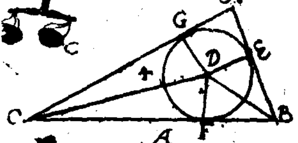


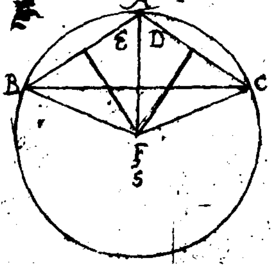


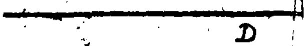
Propositiones

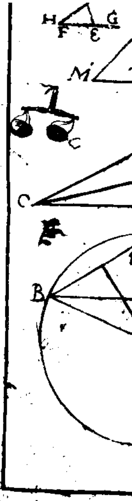


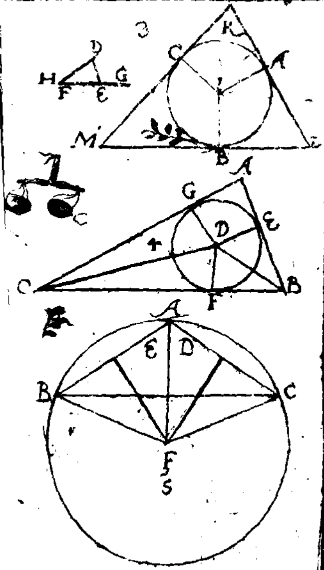

3
K
C
A
D
H
G
F
E
M
B


A
G
E
D
C
F
B

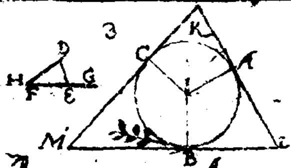

A
E
D
B
C
F
5

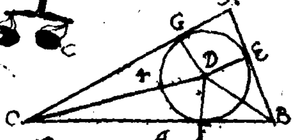

D

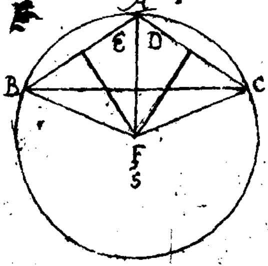

H
G
F
E
M
C
C
B

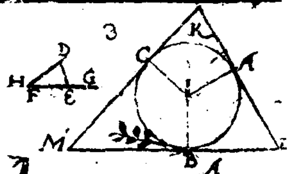


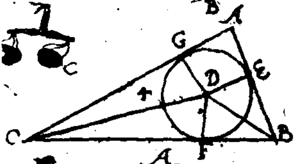
D
H
F
E
G
C
K
A
M
B
A
G
E
D
C
F
B
A
E
D
B
C
F
S

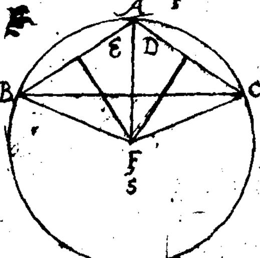

3
H D G
F E
K
C A
M B

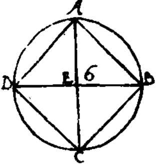

A
G E
D
C B
F

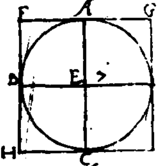

A
E D
B C
F
S

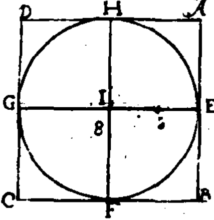

3
K
C
A
D
H
G
F
E
M
B

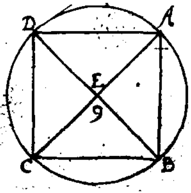

A
G
E
D
C
B
F


A
E
D
B
C
F
5

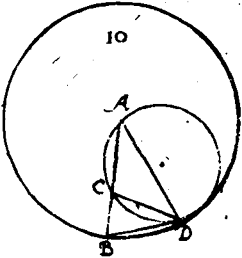

A
D
E
6
B
C


F
A
G
D
E
7
H
C

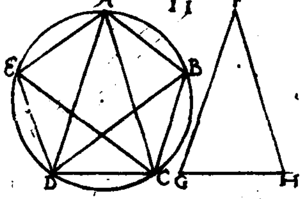

D
H
A
G
I
E
8
C
F
B

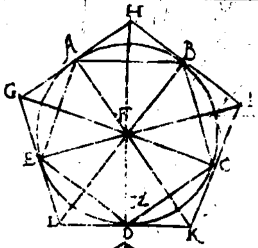

D
A
E
9
C
B

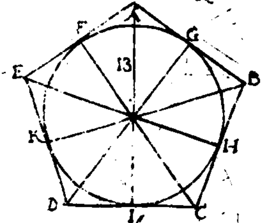
10

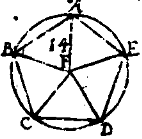


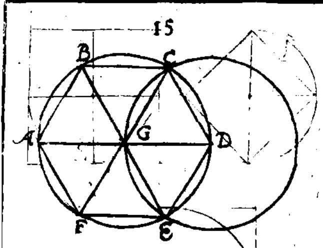
11

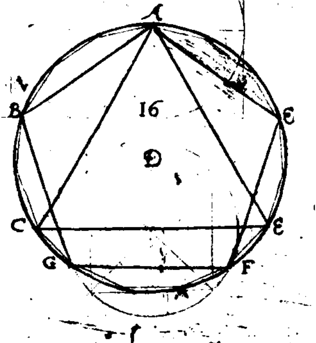



H
A
B
G
I
F
E
C
L
D
K

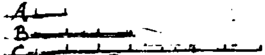

A
F
G
13
E
B
K
H
D
I
C


A
14
B
E
F
C
D

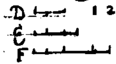

15
B
C
A
G
D
F
E


A
B
16
E
D
C
E
G
F

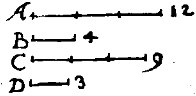
Libri Quinti

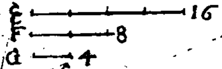


Definitiones 3

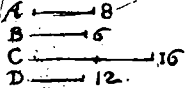


4

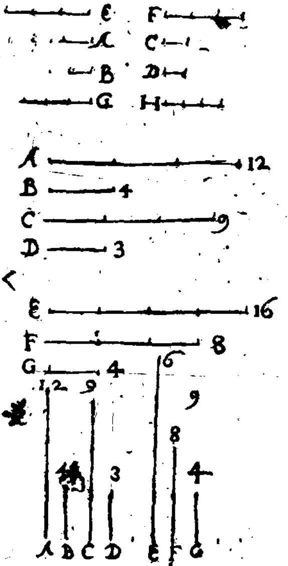




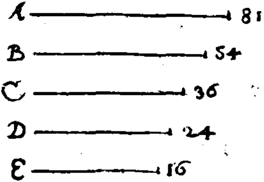
5



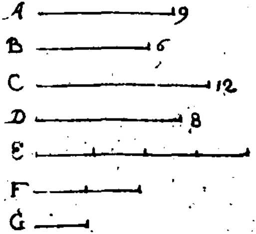
6



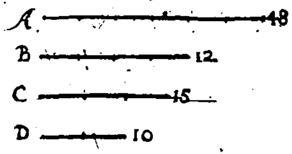
10



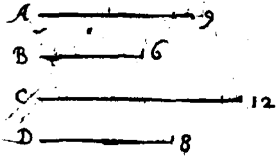
11



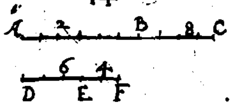
12



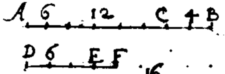
13



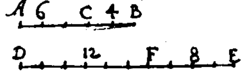
14



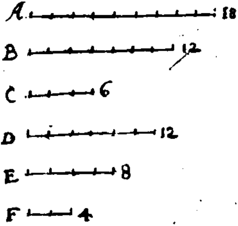
15



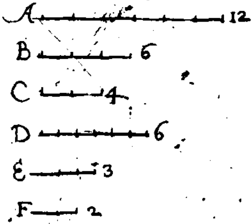
16



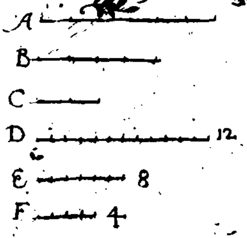
17



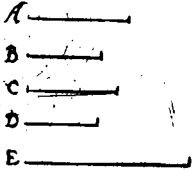
18



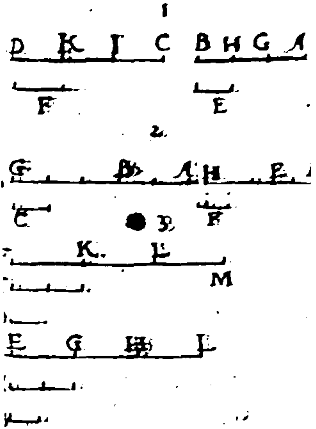
19

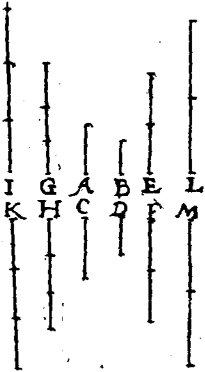


20

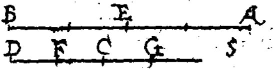


Propositiones.

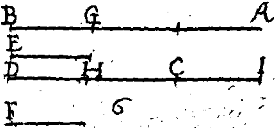

1
D K I C B H G A
F E
2
G B A H E
C D F
K L
M
E G H L



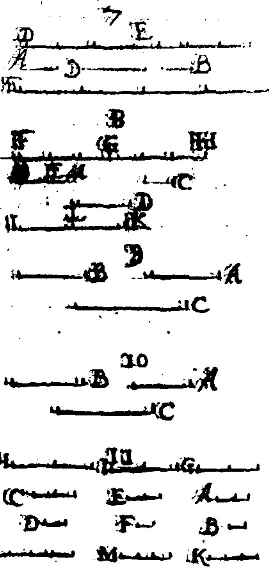
4



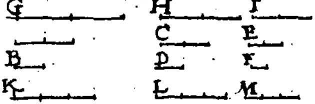
5



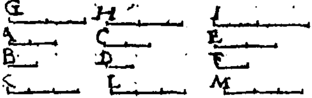
6



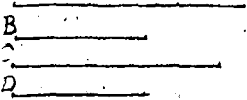
12



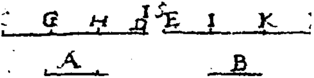
13



14



15



116

E

A

B

F

G

C

D

H

117

N I H G

B C A

O M L F

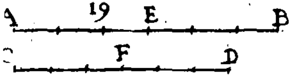
E F D

118

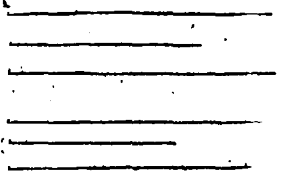
H G E H D

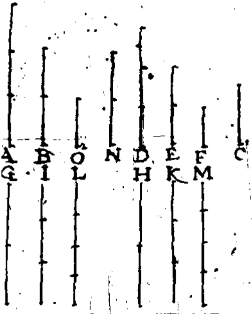
C B A

19

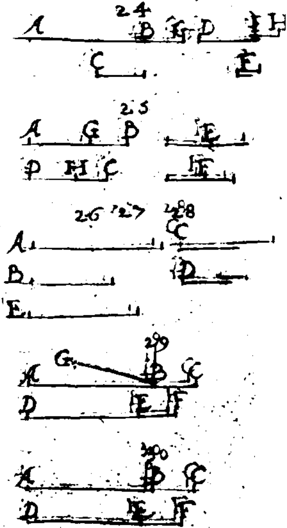


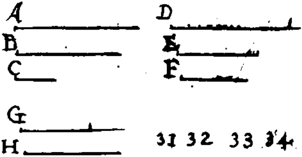
20 21



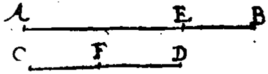


22. 23

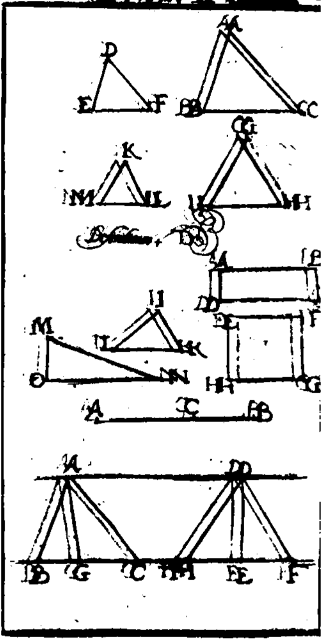

24
A B G D H
C E
25
A G B E
D H C F
26 27 28
A C
B D
E
29
G
A B C
D E F
300
A B C
D E F

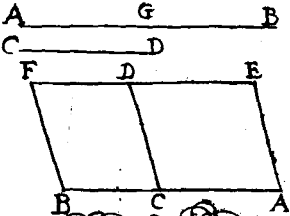


31 32 33 34

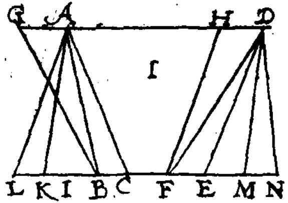


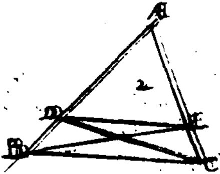
Libri Sexti Definitiones

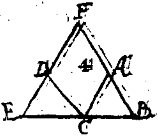

D
E
F
A
B
C
K
M
L
G
I
H
A
B
D
E
F
H
G
I
H
K
M
O
N
A
C
B
A
D
B
G
C
H
E
F

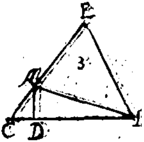


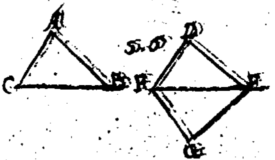
Suppositiones

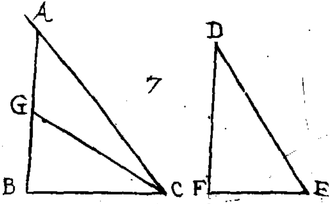


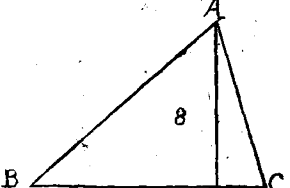

A
2
D
E
B
C

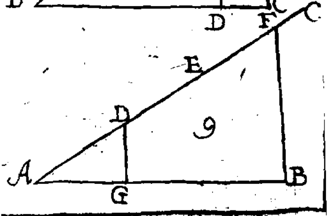

F
D
4
A
E
C
B

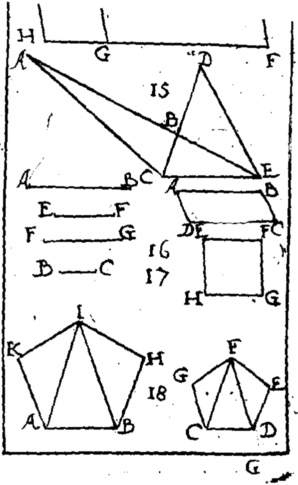

E
3
A
C
D


A
C
B
D
F
E
G

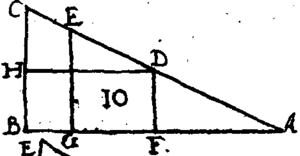

A
D
7
G
B
C
F
E

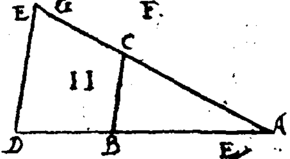

A
8
B
D
C

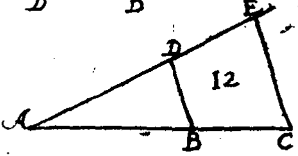

F
C
E
D
9
A
G
B

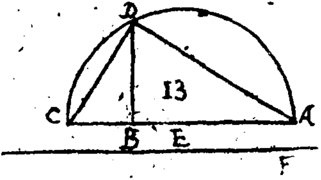


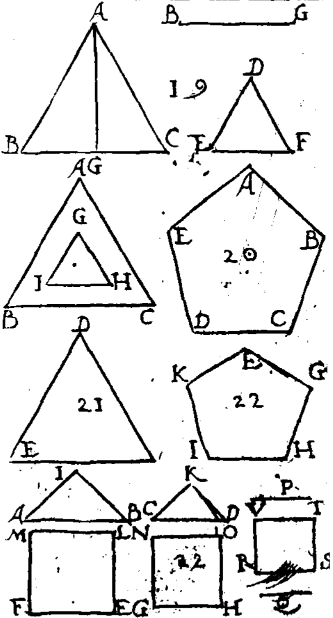
H G F
A D
15
B
A BC E
A B
E F
F G
DE FC
16
B C
17
H G
I
K H
G F E
18
A B
C D
G

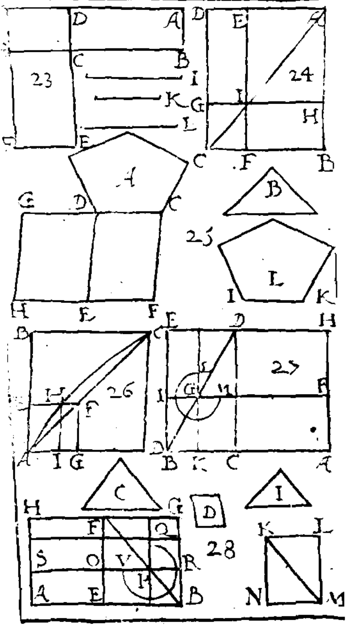

C
E
H
D
10
B
G
F
A

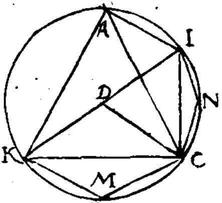

E
C
11
D
B
A


E
D
12
A
B
C

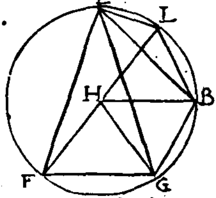

D
13
C
A
B
E
F


A
B G
19
D
B C E F
A G
G
I H
B C
A
E B
20
D C
D
21
E
K E G
22
I H
I K P
A BC D V T
M LN O
22
R S
F EG H


23
D A C B I K L E
D E A 24 G I H C F B
A B G D C 25 L H E F I K
B C H 26 F A I G
E D H G F I B K C A
C H G D F Q 28 S O V R A E B I
K L N M

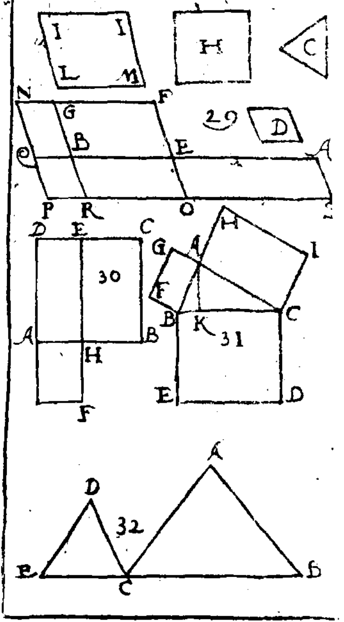


33



L. D. O. M.

FINIS.


29
30
31
32