EVCLIDIS ELEMENTORVM

Liber primus.

[redacted] Item, [redacted].

HERONIS ALEXANDRINI

vocabula quædam geometrica: ante hac nunquam edita, græcè & latinè.

Per M. Cunradum Dasypodium. [redacted]

Cum gratia & priuilegio Cæsareo, atque Regis Galliæ, ad sexennium.

ARGENTINAE,

1571.

Jo Jacobi Wendli..

6 n.

Ad Reuerendiss: & Illustriss: Principem, Dominum, D. Danielem Archiepiscopum Moguntinensem, Sacri Romani Imperij, per Germaniam Archicancellarium, atq; Electorem, &c. Cunradi Dasypodij Præfatio.

GEOMETRIAM IN *summo apud Græcos fuisse honore, Reuerendiss: Præsul: non tantum historiæ testantur: sed & ipsorum confirmant multiplicia atq; varia volumina: quæ partim extant, partim in priuatis & publicis reseruantur bibliothecis. Itaq; ferè nullus tum temporis erat Philosophus, qui se non in hoc erudito geometrarum puluere exercuisset: neque ad philosophiæ admittebantur penetralia:*

niſi periti geometriæ eſſent. atque nihil fuit Mathematicis illuſtrius: nihil excellentius: nihil quod ad Regum & Principum ſplendorem & dignitatem accederet propius. Verùm (quod ſanè dolendum) hoc noſtro ſæculo excellentiſsima hæc ſtudia: proſtrata & abiecta iacent: neq; vlla ferè ſpes eſt relicta: fore vt hæc integritati ſuæ: & honori priſtino reſtituatur: niſi Reges atq; Principes ſua liberalitate & beneficentia, excitent homines literatos: literati verò, & qui in ſcholis verſantur, ipſi quoquemet ſint γεώμετραι, non autem ἀγεωμέτρητοι: deniq; certo modo rationeq́; bona, ſtudioſis geometrica & his ſimilia proponant. quod quidem in omnibus Academijs fieri deberet: & in aliquibus inſignioribus fit: in cæteris eadem fieri opto. in me quod eſt: pro virili in id incumbo:

cumbo: vt in nostris scholis Pythagoricos pueros, hoc est, in mathematicorũ ordine constitutos habeamus.

Ideóq; de sententia Ioann. Sturmij Rectoris, non tantum tria volumina mathematica conscribo: sed & hunc primum Elemẽtorum Euclidis librum in lucem nunc edo: cùm propter ea quæ ante sunt dicta: tum etiam quòd hic potissimùm liber: in omnibus fere Gymnasijs prælegatur: in nostris verò scholis: ijs qui in prima sunt curia, proponatur. Sic enim comparatus & factus est, hic primus Euclidis liber: vt doctrinam contineat principiorum geometriæ, & figurarum planarum simplicissimarũ: trianguli inquam & parallelogrammi: quibus perceptis, animus adolescentum iam præparatus videtur, ad assequenda maiora: cùm in his disciplinis, tum &

alijs artibus atque ſcientijs.

Atque ne mea deeſſem opera omnibus ijs, quibus hæc ſtudia curæ ſunt: & è tenebris antiquos meliorisque notæ, (quorum non paucos habeo) authores græcos in lucem eruerem: Heronis Alexandrini quædam, eiusdem argumenti: ex eius onomaſtico geometrico, huic libro adiunxi: Vt quæ Græcorum fuerint Gymnaſia: & qualia puerorum exercitia ex ijs appareret. deinde vt copia rerum geometricarum propoſita: noſtri adoleſcentes in campum illum amplißimum mathematicarum ſcientiarũ exirent: imò in puluerem deſcenderent geometricum: in quo cùm viderint tot tamq́; varias figuras, earúmque definitiones, diuiſiones, differentias, accidentia, proprietatesq́; alias: quanti momenti ſit hæc cognouiſſe, quantiq́; adiumenti in ριφερείας· αἱ δὲ σπειρικαὶ, μικταί εἰσιν ἐκ δύο περιφερειῶν· καὶ ἄλλαι δὲ πλείους εἰσὶν, ὥσπερ σύνθετοι, οὕτω καὶ μικταὶ ἄπειροι. Τῶν ἐν τοῖς στερεοῖς σχήμασι γραμμῶν, αἱ μὲν ἁπλαῖ, αἱ δὲ μικταί. ἁπλαῖ μὲν οὖν αἵτε εὐθεῖαι, καὶ περιφερεῖς· μικταὶ δὲ αἵτε κωνικαὶ καὶ σπειρικαί, καὶ αὗται μὲν τεταγμέναι εἰσίν· τῶν δὲ ἀτάκτων, πλῆθος ἄπειρόν ἐστιν ὡς καὶ τῶν συνθέτων.

Σφαῖρά ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ μιᾶς ἐπιφανείας περιεχόμενον· πρὸς ἣν ἀφ᾽ ἑνὸς σημείου, τῶν ἐντὸς καὶ μέσον τοῦ σχήματος κειμένων, πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἢ σχῆμα στερεὸν ἄκρως στρόγγυλον, ὥστε ἐκ τοῦ μέσου πάντη ἴσας ἔχειν τὰς ἀποστάσεις. ὅταν γὰρ ἡμικυκλίου, μενούσης τῆς διαμέτρου περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ· ἡ μὲν γινομένη ἐπιφάνεια, ὑπὸ τῆς τοῦ ἡμικυκλίου περιφερείας σφαιρικὴ ἐπιφάνεια καλεῖται, τὸ δὲ περιληφθὲν στερεὸν σχῆμα, σφαῖρα. τὸ δὲ μέσον τῆς σφαίρας κέντρον αὐτῆς καλεῖται. ἐστὶ δὲ ταυτὸ τοῦτο τοῦ ἡμικυκλίου κέντρον. Ἡ δὲ διάμετρος τῆς σφαίρας ἄξων καλεῖται· καί ἐστιν εὐθεῖά τις, διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ ti in alijs comparandis & percipiendis scientijs: sciant atque intelligant.

Ita enim natura comparatum est: ut plurimum copia, varietateq́ rerum afficiamur: animusq́ noster se in eorum pascat contemplatione, quæ etsi vulgaria atq; quotidiana videantur: tamen si in ordinem redigantur: si præcepta de ijs fiant bona ratione, modoq́ bono, & concinno: dum ea legimus, dum singula accuratius perpendimus: mirificè recreamus vires ingenij nostri: imò cupiditate & amore cognoscendi, incensi: ad inuestigationem & perscrutationem reconditarum abstrusissimarumq́ rerum rapimur.

Statuamus enim puerum quendam è scholis Grammaticorum egressum: linguarum, & orationis puræ cognitione instructum: Dialecticorum etiam

& Rhetorum præceptis quodammodo imbutum: accedere ad Geometricorum elementorum auscultationem: is si audiat primum & simplicissimum principium Geometriæ esse punctum: rem tenuissimam, minimam, talemq́ue, quæ in partes diuidi nequeat: ex quo tamen puncto omnes lineæ: vniuersæ superficies: atque infinita corpora oriuntur: quærit statim cognito puncto, quid sit linea, quid superficies: quid corpus. neque contentus est se lineam coguouisse: sed cùm plures linearum esse species videt: singulas cupit addiscere: à lineis postea ad superficies, & quæ in superficiebus describuntur, figuras progreditur. in qua doctrina maximam rerum geometricarum inueniet varietatem: dum intelligit quasdam superficies planas esse: quasdam minimè planas: in planis superfiperficiebus delineari omnis generis figuras, easq; numero quodammodo infinitas: affectiones etiam earundem varias atq; multiplices cognoſcit: deniq; in corporum ſolidorum contemplationem incidit: diffuſam per vniuerſam rerum naturam.

Quæ & quanta igitur puer ille ex vnici puncti, lineæ etiam, atq; ſuperficiei, & corporis perceptione cognoſcit? quantam rerum copiam & varietatem ſibi principiorum cognitione comparat? quæ tandem his inſtructus rebus, recondita in his ſcientijs, non perſcrutabitur? Magnum certè, magnum lumen præbet Geometriæ cognitio, rebus & cognoſcendis, & dijudicandis: atq; tam clara & perſpicua omnia reddit: vt Sole ſplendidiora & apertiora fiant: quæ ſi locus eſſet dicendi & orandi, pluribus perſequerer. Hoc tantum oſtendere volui, noſtram mẽtem ſtudio atq; cupiditate ſciendi incenſam: ſi minimum quoddam cognitionis principium nacta ſit: non ceſſare, neq; quieſcere: ſed perpetuò inuentis, alia atq; alia ſubinde addere. itaq; in ſcholis, in id potiſsimum incumbendum eſt: vt pueri hæc & ſimilia Mathematicorum præcepta diſcant, teneant, & ad inueſtigationem rerum ſecum adferant: ſiue in explicatione rerum diuinarum verſari: ſiue officia Reipub. tractare: ſiue res naturales explicare, et ad vitæ vſum accomodare velint.

Hæc itaq; Reuerẽdiſs. Præſul, mei inſtituti fuit ratio: vt & hunc librum primum Euclidis, & Heronis quædam geometrica primo atq; ſecundo meo volumini mathematico adiunxerim. quia ad verum & ſolidam eruditionem aſſequen-

ſequēdam, hæc ſtudia inprimis ſunt neceſſaria: quod illorum teſtimonio auſim dicerę: qui cùm ſint ignari mathematicarum rerum: ſi quando incidunt in probatiſsimi alicuius authoris ſcripta: quid ipſis deſit, ſero tandem ſentiūt atq; animaduertunt.

Adhortor itaq; ſubinde omnes adoleſcenteis, quibus ad ſolidam peruenire eruditionem animus eſt: Vt in his ſe exerceat ſtudijs: ijs annis quib. hæc conueniunt ſtudia: quibus etiā abſq; tædio, vllaq; moleſtia addiſcere ſingula poſſūt. Et quòd tot tantiq; viri olim in Græcia fuerint, in omni ſtudiorum genere præſtantiſsimi: hoc ipſum multū adiumenti illis dedit, quòd παῖδας μαθηματικοὺς *habebant: & in his diſciplinis eos erudiebant: priuſquam ad ſtudia eos deducerēt altiora. Vnde etiam videmus antiquos*

autores, plerunq; Mathematicorum vti
exemplis: tanquam vulgatiſs. tanquam
ijs, quæ à pueris iam eſſent cognita &
percepta: quæ ſi nos legimus: plus inter-
dum in intelligendo exemplo mathe-
matico laboramus: quo res propoſita il-
luſtratur: quàm in rei ipſius cognitione
aſſequenda. quod quidem neutiquam
nobis contingeret: ſi noſtri παῖδες, eſ-
ſent μαθηματικοί: neq; tot obſtacula, tot
difficultates in autorum antiquorum le-
ctione nobis occurrerent, ſi animi no-
ſtri his imbuti eſſent diſciplinis. Nu-
per itaq; in noſtris ſcholis bene inſtitue-
re ſtudia mathematica incepimus: quæ
res cùm tam recenter ſit inchoata: fru-
ctum & vtilitatem eius, nondum per-
ſpicere poſſumus. ſed aliquot annis per-
actis: ſentient omnes homines, quan-
tum bona iuuet inſtitutio: quidue ſit ra-

tione

tione bona modoq́; facili pueros erudire.

Tibi verò Reuerendiss. Præsul, hanc meam exiguam opellam commendare volui: quòd Amplitudinem tuam intelligam, non his tantum studijs, sed omnibus literis, literatisq́; hominibus, amplissimum præbere patrocinium, neque ob hoc tantùm: verum etiam quòd natura tua talis sit, vt prudentiam singularem: grauitatem insignem: & in rebus arduis cùm suscipiendis dexteritatem: tum perficiendis constantiam tuam omnes mirentur: in controuersijs etiam difficilioribus dirimendis acumen, & æquitatem laudent. Itaq; cùm animus A. T. ingenio & virtutibus excellat: res externas despiciat: in magnis atq; vtilibus, vehementerq́; arduis gerendis, se exerceat: patronum etiam horum meorum studiorum A. T. esse

opta-

optabam: cuius eam esse voluntatem in defendendis & tuendis studijs promptam & paratam video: quæ Principū virorū semper fuit: eam etiam dignitatem, & amplitudinem: quæ olim in Regibus apparebat: qui cum omni studio, omnibus viribus, maximis sumptibus, incredibili liberalitate, mathematica iuuarent, atq; promouerent studia: tanta, quanta ea legimus fuisse, effecerunt: & ad summum vsque fastigium euexerunt. Quod si hoc nostro seculo plures A. T. similes existerent Principes: non dubito, quin & nos tandem ad fastigium harum scientiarum perueniremus. Etsi verò hic libellus sit exiguus, & A. T. minimè videatur dignus: cùm in eo res prima fronte appareant spinosæ & steriles: magni tamen sunt momenti, & Principibus viris dignissimæ:

simæ: principia inquam excellẽtissimarum scientiarum Mathematicarũ. quas res sanè Reges olim tractarũt: quas singulariter coluerunt: in quibus qui ad sacra & mysteria tractanda admitti volebant, plurimùm se exercuerunt. Sint ergo Reuerendiss. Præsul, hæc mea studia T. A. commendata: quæ si clementiam A. T. senserint: maiora his, iuuante Deo, proferam.

Calendis Maij.

Anno

M. D. LXX.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

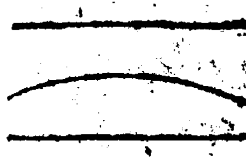
ΣΤΟΙΧΕΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ, ΕΚ τῶν τοῦ Θέωνος συνουσιῶν.

ΟΡΟΙ.

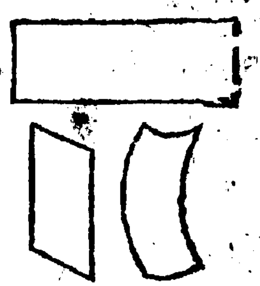
ΣΗΜΕΙΟΝ ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.

Γραμμὴ δέ, μῆκος ἀπλατές.

Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα.

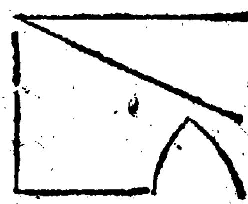


Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν· ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.



Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν· ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.

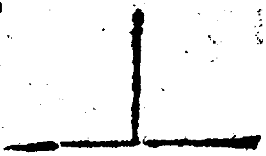
Ἐπιφανείας δὲ πέρατα, γραμμαί.



Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν· ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.

Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν· ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων· καὶ μὴ ἐπ᾽ εὐθείας κειμένων· πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.

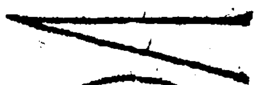
Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ, εὐθεῖαι ὦσιν: εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.



Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα: τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ: ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν. Καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα: κάθετος καλεῖται, ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.

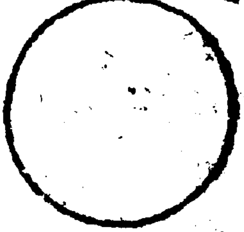
Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν, ἡ μείζων ὀρθῆς.

Ὀξεῖα δὲ ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.



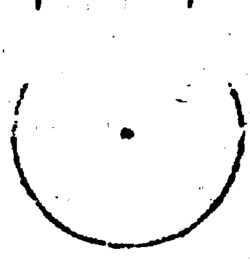
Ὅρος ἐστὶν, ὅ τινός ἐστι πέρας.

Σχῆμα ἐστὶ, τὸ ὑπό τινος, ἢ τινῶν ὅρων περιεχόμενον.



Κύκλος ἐστὶ, σχῆμα ἐπίπεδον: ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον (ἣ καλεῖται περιφέρεια) πρὸς ἣν ἀφ' ἑνὸς σημείου, τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων: πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι: ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

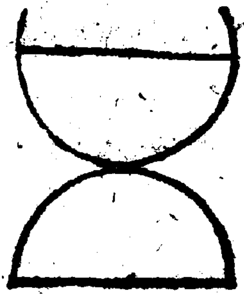
Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον καλεῖται.



Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν, εὐθεῖα τὶς διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη: καὶ περατου-

μένη

μένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας: ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.



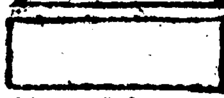
Ἡμικύκλιον δέ ἐστι, τὸ περιεχόμενον σχῆμα, ὑπό τε τῆς διαμέτρου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

Τμῆμα κύκλου ἐστὶ, τὸ περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας, καὶ κύκλου περιφερείας.

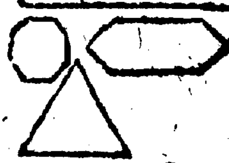
Εὐθύγραμμα σχήματά ἐστι, τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα.

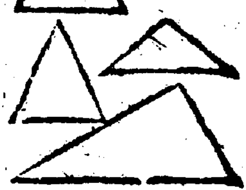
Τρίπλευρα μὲν τὰ ὑπὸ τριῶν.

Τετράπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ τεσσάρων.



Πολύπλευρα δὲ, τὰ ὑπὸ πλειόνων, ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.



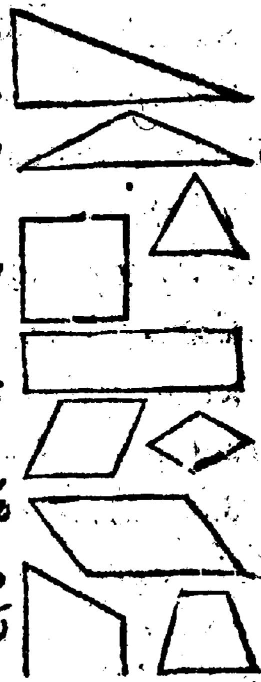


Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων, Ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι, τὸ τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς.

Ἰσοσκελὲς δὲ, τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς.

Σκαληνὸν δὲ, τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς.

Ἔτι δὲ τῶν τριπλεύρων σχημάτων. Ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι, τὸ ἔχον μίαν ὀρθὴν γωνίαν.



Ἀμβλυγώνιον δὲ, τὸ μίαν ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν.

Ὀξυγώνιον δὲ, τὸ τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.

Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημά μάτων, τετράγωνον μέν ἐστιν, ὃ ἰσόπλευρόν τε ἐστὶ, καὶ ὀρθογώνιον.

Ἑτερόμηκες δὲ, ὃ ὀρθογώνιον μὲν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ.

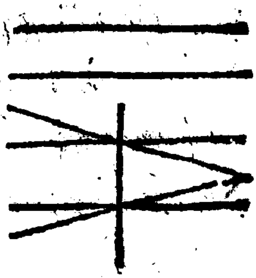
Ῥόμβος δὲ, ὃ ἰσόπλευρον μὲν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ.

Ῥομβοειδὲς δὲ, τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας, ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ὀρθογώνιον. οὔτε ἰσόπλευρον.

Τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα, Τραπέζια καλείσθω.

Παράλ-

Παράλληλοι εἰσὶν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι· καὶ ἐκβαλλόμεναι ἐπ᾽ ἄπειρον ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη· ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.



ΑΙΤΗΜΑΤΑ.

ΗΤΗΣΤΩ, ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ᾽ εὐθείας ἐκβάλλειν.

Καὶ παντὶ κέντρῳ, καὶ διαστήματι· κύκλον γράφεσθαι.

ΚΟΙΝΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ.

ΤΑ ΤΩ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ· τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.

Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ· τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.

Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ· τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα.

Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἀνίσων ἴσα ἀφαιρεθῇ· τὰ λοιπὰ ἐστιν ἄνισα.

Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια· ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση· ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα: ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Καὶ τὸ ὅλον, τοῦ μέρους μεῖζόν ἐστι.

Καὶ πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι: ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας, εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τὰς ἐντὸς, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ: ἐκβαλλόμεναι αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι ἐπ' ἄπειρον, συμπεσοῦνται ἀλλήλαις, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες γωνίαι.

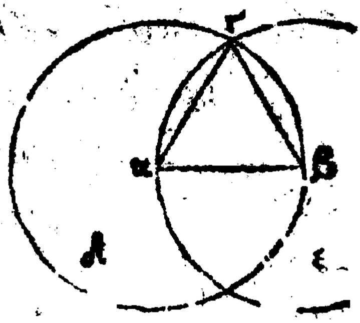
Καὶ δύο εὐθεῖαι: χωρίον οὐ περιέχουσιν.

Πρότασις α. πρόβλημα.

ΕΠΙ ΤΗΣ δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης: τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Ἔκθεσις.) Ἔστω ἡ δοθεῖσα πεπερασμένη, ἡ αβ. (Διορισμὸς.) Δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς αβ εὐθείας: τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι. (Κατασκευή.) Κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ, τῷ αβ: κύκλος γεγράφθω, ὁ βγε. καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ βα: κύκλος γεγράφθω, ὁ αγδ. καὶ ἀπὸ τοῦ γ σημείου,

καθ'

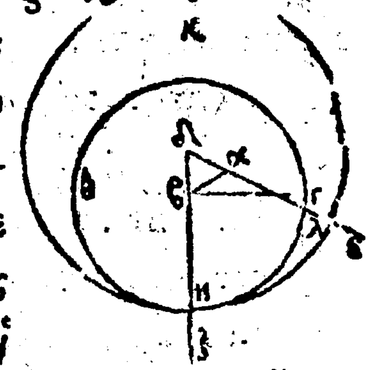


καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπὶ τὰ α, β, σημεῖα· ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι, αἱ γα, γβ. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ οὖν τὸ α σημεῖον, κέντρον ἐστὶ τοῦ γεβ κύκλου· ἴση ἐστὶν ἡ αγ τῇ αβ. πάλιν ἐπεὶ τὸ β σημεῖον, κέντρον ἐστὶ, τοῦ γαδ κύκλου· ἴση ἐστὶν ἡ βγ, τῇ βα. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ γα, τῇ αβ ἴση. ἑκατέρα ἄρα τῶν γα, γβ· τῇ αβ ἐστὶν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα· καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα, καὶ ἡ γα ἄρα τῇ γβ ἐστὶν ἴση. αἱ τρεῖς ἄρα αἱ γα, αβ, βγ· ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Συμπέρασμα.) Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον· καὶ συνέσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς αβ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις β. πρόβλημα.

Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ· τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ· ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

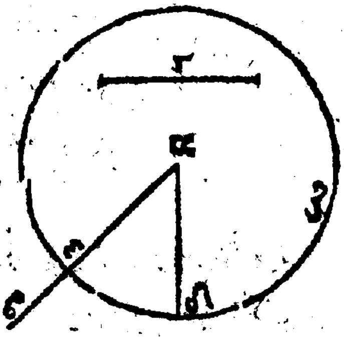
Ἔκθεσις.) Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ α· ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ βγ. (Διορισμός. Δεῖ δὴ πρὸς τῷ α σημείῳ· τῇ βγ εὐθείᾳ· ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι. (Κατασκευή.) Ἐπεζεύχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ α σημείου, ἐπὶ τὸ β σημεῖον: εὐθεῖα ἡ αβ. καὶ συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς, τρίγωνον ἰσόπλευρον, τὸ δαβ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς δα, δβ: εὐθεῖαι, αἱ αε, βζ: καὶ κέντρῳ μὲν τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ βγ: κύκλος γεγράφθω ὁ γηθ. καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ δ, διαστήματι δὲ τῷ δη: κύκλος γεγράφθω ὁ ηκλ. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ οὖν τὸ β σημεῖον, κέντρον ἐστὶ τοῦ γηθ κύκλου: ἴση ἐστὶν ἡ βγ, τῇ βη. καὶ πάλιν, ἐπεὶ τὸ δ σημεῖον, κέντρον ἐστὶ τοῦ ηκλ κύκλου: ἴση ἐστὶν ἡ δλ, τῇ δη. ὧν ἡ δα, τῇ δβ ἴση ἐστί. λοιπὴ ἄρα ἡ αλ, λοιπῇ τῇ βη ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ βγ, τῇ βη ἴση. ἑκατέρα ἄρα τῶν αλ, βγ: τῇ βη ἐστὶν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα: καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα. καὶ ἡ αλ ἄρα, τῇ βγ, ἐστὶν ἴση. (Συμπέρασμα.) Πρὸς ἄρα τῷ δοθέντι σημείῳ τῷ α: τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ βγ: ἴση εὐθεῖα κεῖται ἡ αλ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



Πρότα-

Πρότασις γ. πρόβλημα.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων· ἀπὸ τῆς μείζονος, τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.



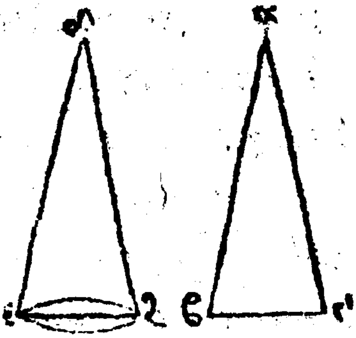
Ἔκθεσις.) Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ αβ, γ, ὧν μείζων ἔστω ἡ αβ. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς αβ, τῇ ἐλάσσονι τῇ γ: ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν. (Κατασκευή.) Κείσθω πρὸς τῷ α σημείῳ, τῇ γ εὐθείᾳ ἴση ἡ αδ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ αδ: κύκλος γεγράφθω ὁ δεζ. (Ἀπόδειξις.) Καὶ ἐπεὶ τὸ α σημεῖον, κέντρον ἐστὶ τοῦ δεζ κύκλου: ἴση ἐστὶν ἡ αε, τῇ αδ. ἀλλὰ καὶ ἡ γ, τῇ αδ ἐστὶν ἴση. ἑκατέρα ἄρα τῶν αε, γ: τῇ αδ ἐστὶν ἴση. ὥστε καὶ ἡ αε, τῇ γ ἐστὶν ἴση. Συμπέρασμα.) Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων τῶν αβ, γ: ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς αβ, τῇ ἐλάσσονι τῇ γ: ἴση ἀφῄρηται ἡ αε. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις δ. θεώρημα.

Ἐὰν δύο τρίγωνα, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς

δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ· καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ· τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει· καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται· καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Ἔκθεσις.) Ἔστω δύο τρίγωνα, τὰ αβγ, δεζ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς αβ, αγ, ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς δε, δζ, ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ· τὴν μὲν αβ, τῇ δε· τὴν δὲ αγ, τῇ δζ· καὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ βαγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εδζ ἴσην. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι, καὶ βάσις ἡ βγ, βάσει τῇ εζ ἴση ἐστίν· καὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ δεζ, τριγώνῳ ἴσον ἔσται· καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι, ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ αβγ, τῇ ὑπὸ δεζ· ἡ δὲ ὑπὸ αγβ, τῇ ὑπὸ δζε. (Ἀπόδειξις.) Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ αβγ τριγώνου ἐπὶ τὸ δεζ τρίγωνον· καὶ τιθεμέ-



νου τοῦ μὲν α σημείου, ἐπὶ τὸ δ σημεῖον: τῆς δὲ αβ εὐθείας, ἐπὶ τὴν δε. ἐφαρμόσει καὶ τὸ β, ἐπὶ τὸ ε. διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν αβ, τῇ δε. ἐφαρμοσάσης δὲ τῆς αβ, διὰ τὴν δε ἐφαρμόσει καὶ ἡ αγ εὐθεῖα, ἐπὶ τὴν δζ. ἐπὶ τὸ ἴσην εἶναι, τὴν ὑπὸ βαγ γωνίαν: τῇ ὑπὸ εδζ. ὥστε καὶ τὸ γ σημεῖον, ἐπὶ τὸ ζ σημεῖον ἐφαρμόσει. διὰ τὸ ἴσην πάλιν εἶναι τὴν αγ τῇ δζ. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ β, ἐπὶ τὸ ε ἐφηρμόκει. ὥστε βάσις ἡ βγ, ἐπὶ βάσιν τὴν εζ ἐφαρμόσει. εἰ γὰρ τοῦ, μὲν β ἐπὶ τὸ ε ἐφαρμόσαντος, τοῦ δὲ γ ἐπὶ τὸ ζ: ἡ βγ βάσις ἐπὶ τὴν εζ οὐκ ἐφαρμόσει δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσιν. ὅπερ ἀδύνατον. Ἐφαρμόσει ἄρα ἡ βγ βάσις, ἐπὶ τὴν εζ βάσιν. ἴση αὐτῇ ἔσται: ὥστε καὶ ὅλον τὸ αβγ τρίγωνον, ἐπὶ ὅλον τὸ δεζ τρίγωνον ἐφαρμόσει: καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται. καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι, ἐπὶ τὰς λοιπὰς γωνίας ἐφαρμόσουσι. καὶ ἴσαι αὐταῖς ἔσονται. ἡ μὲν ὑπὸ αβγ, τῇ ὑπὸ δεζ, ἡ δὲ ὑπὸ αγβ, τῇ ὑπὸ δζε. Συμπέρασμα.) Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα, τὰς δύο πλευρὰς, ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ: καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην: καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην

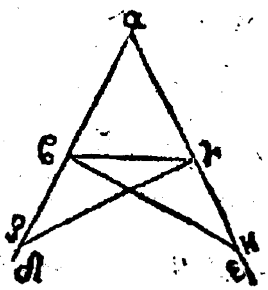
ἕξει:

ἕξει· καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται· καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι, ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκάτερα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ε. θεώρημα.

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν: αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι: ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Ἔκθεσις.) Ἔστω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ αβγ, ἴσην ἔχον τὴν αβ πλευρὰν, τῇ αγ πλευρᾷ. καὶ προσεκβεβλήσθωσαν ἐπ᾽ εὐθείας ταῖς αβ, αγ: εὐθεῖαι αἱ βδ, γε. Διορισμός.) Λέγω ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ αβγ γωνία, τῇ ὑπὸ αγβ ἴση ἐστίν: ἡ δὲ ὑπὸ γβδ, τῇ ὑπὸ βγε. Κατασκευή.) Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς βδ: τυχὸν σημεῖον τὸ ζ. καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς αε: τῇ ἐλάττονι τῇ αζ, ἴση ἡ αη: καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζγ, ηβ εὐθεῖαι. Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν αζ, τῇ αη: ἡ δὲ αβ, τῇ αγ. δύο δὴ αἱ ζα, αγ, δυσὶ ταῖς ηα, αβ, ἴσαι εἰσὶν,



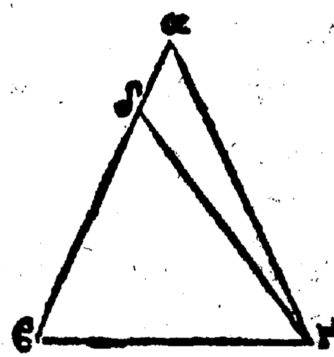
ἑκάἑκατέρα ἑκατέρα. καὶ γωνίαν περιέχουσιν τὴν ὑπὸ ζαη· βάσις ἄρα ἡ ζγ, βάσει τῇ ηβ ἴση ἐστίν· καὶ τὸ αζγ τρίγωνον, τῷ αηβ τριγώνῳ ἴσον ἔσται. καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι, ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρα, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἡ μὲν ὑπὸ αγζ, τῇ ὑπὸ αβη· ἡ δὲ ὑπὸ αζγ, τῇ ὑπὸ αηβ. καὶ ἐπεὶ ὅλη ἡ αζ, ὅλῃ τῇ αη ἐστὶν ἴση, ὧν ἡ αβ τῇ αγ ἐστὶν ἴση. λοιπὴ ἄρα ἡ βζ, λοιπῇ τῇ γη ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ζγ, τῇ ηβ ἴση. δύο δὴ αἱ βζ, ζγ. δυσὶ ταῖς γη, ηβ, ἴσαι εἰσίν, ἑκατέρα ἑκατέρα· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βζγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ γηβ ἐστὶν ἴση· καὶ βάσις αὐτῶν κοινή, ἡ βγ. καὶ τὸ βζγ ἄρα τρίγωνον, τῷ ηβ τριγώνῳ ἴσον ἔσται· καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι, ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρα, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν, ἡ μὲν ὑπὸ ζβγ, τῇ ὑπὸ ηγβ· ἡ δὲ ὑπὸ βγζ, τῇ ὑπὸ γβη. ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ ὑπὸ αβη γωνία, ὅλῃ τῇ ὑπὸ αγζ γωνίᾳ ἐδείχθη ἴση· ὧν ἡ ὑπὸ γβη, τῇ ὑπὸ βγζ ἴση. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ αγβ ἐστὶν ἴση. καὶ εἰσὶ πρὸς τῇ βάσει τοῦ αβγ τριγώνου. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ζβγ, τῇ ὑπὸ ηγβ ἴση· καὶ

εἰσὶν

εἰσὶν ὑπὸ τὴν βάσιν. Συμπέρασμα.) Τῶν ἄρα ἰσοσκελῶν τριγώνων, αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν: αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ϛ. θεώρημα.

ΕΑν τριγώνου, αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι: καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραί: ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.



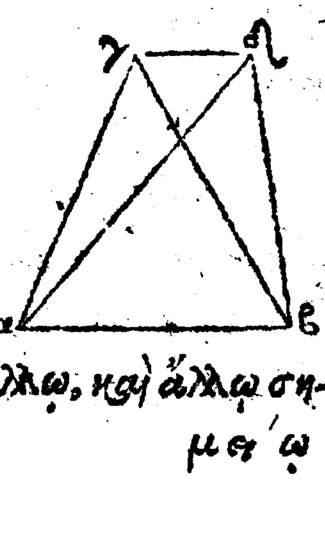
Ἔκθεσις.) Ἔστω τρίγωνον, τὸ αβγ: ἴσην ἔχον τὴν ὑπὸ αβγ γωνίαν, τῇ ὑπὸ αγβ γωνίᾳ. Διορισμός.) Λέγω ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ αβ: πλευρᾷ τῇ αγ ἐστὶν ἴση. Κατασκευή.) Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ αβ, τῇ αγ: ἡ ἑτέρα αὐτῶν, μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ αβ. καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς αβ, τῇ ἐλάσσονι τῇ αγ: ἴση ἡ δβ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δγ. Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ δβ, τῇ αγ: κοινὴ δὲ ἡ βγ. δύο δὴ αἱ δβ, βγ, δυσὶ ταῖς αγ, γβ: ἴσαι

εἰσίν,

εἰσὶν, ἑκάτερα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ δβγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ αγβ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ δγ, βάσει τῇ αβ ἴση ἐστίν. καὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ δγβ τριγώνῳ ἴσον ἔσται. τὸ ἔλασσον τὸ μεῖζον. ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ αβ, τῇ αγ. ἴση ἄρα. Συμπέρασμα.) Ἐὰν ἄρα τριγώνου, αἱ δύο γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι· καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραί· ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ζ. θεώρημα.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας· δύσι ταῖς αὐταῖς εὐθείαις· ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· οὐ συσταθήσονται, πρὸς ἄλλῳ, καὶ ἄλλῳ σημείῳ· ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι, ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.



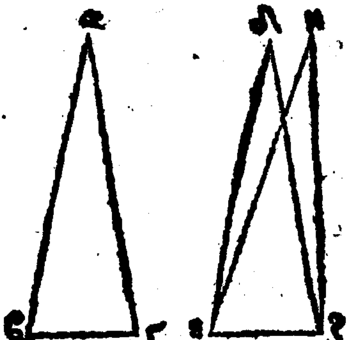
Ἔκθεσις.) Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς αβ· δύσι ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ταῖς αγ, γβ· ἄλλαι δύο εὐθεῖαι, αἱ αδ, δβ, ἴσαι ἑκάτερα ἑκατέρᾳ, συνεστάτωσαν, πρὸς ἄλλῳ, καὶ ἄλλῳ σημείῳ μείω, τῷ τε γ, καὶ δ: ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ γ, δ: τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι, τὰ α, β, ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις: ὥστε ἴσην εἶναι, τὴν μὲν γα: τῇ δα: τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαν αὐτῇ, τὸ α: τὴν δὲ γβ, τῇ δβ: τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαν αὐτῇ τὸ β. Κατασκευή.) Ἐπεζεύχθω ἡ γδ. Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ αγ, τῇ αδ: ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αγδ, τῇ ὑπὸ αδγ. μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ αδγ: τῆς ὑπὸ δγβ. πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ γδβ: μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ δγβ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ γβ, τῇ δβ: ἴση ἐστὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ γδα: γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δγβ. ἐδείχθη δὲ αὐτῆς, καὶ πολλῷ μείζων. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Συμπέρασμα.) Οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας: δύσι ταῖς αὐταῖς εὐθείαις, ἄλλαι δύο εὐθεῖαι, ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ: συσταθήσονται, πρὸς ἄλλῳ, καὶ ἄλλῳ σημείῳ: ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη: τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι, ταῖς ἐξαρχῆς εὐθείαις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις η. θεώρημα.

ΕΑν δύο τρίγωνα, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ: ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν, τῇ βάσει ἴσην: καὶ

τὴν

τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.



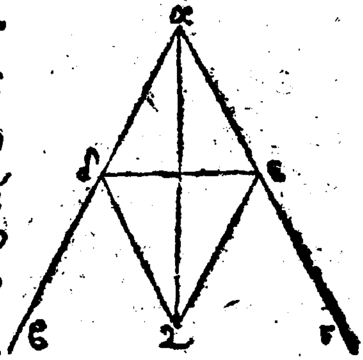
Ἔκθεσις.) Ἔστω δύο τρίγωνα, τὰ αβγ, δεζ: τὰς δύο πλευρὰς τὰς αβ, αγ, ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς δε, δζ, ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ: τὴν μὲν αβ, τῇ δε: τὴν δὲ αγ, τῇ δζ: ἐχέτω δὲ καὶ βάσιν τὴν βγ, βάσει τῇ εζ ἴσην. Διορισμός.) Λέγω ὅτι, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βαγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εδζ ἐστὶν ἴση. Κατασκευή.) Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ αβγ τριγώνου, ἐπὶ τὸ δεζ τρίγωνον: καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν β σημείου, ἐπὶ τὸ ε σημεῖον: τῆς δὲ βγ εὐθείας, ἐπὶ τὴν εζ: ἐφαρμόσει, καὶ τὸ γ σημεῖον, ἐπὶ τὸ ζ: διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν βγ, τῇ εζ. Ἀπόδειξις.) Ἐφαρμοσάσης δὴ τῆς βγ, ἐπὶ τὴν εζ: ἐφαρμόσουσι, καὶ αἱ βα, γα: ἐπὶ τὰς εδ, δζ, εἰ γὰρ βάσις μὲν ἡ βγ, ἐπὶ βάσιν τὴν εζ ἐφαρμόσει: αἱ δὲ βα, αγ πλευραὶ ἐπὶ τὰς εδ, δζ, οὐκ ἐφαρμόζουσιν: ἀλλὰ παραλλάξουσιν, ὡς αἱ εη, ηζ: συσταθήσονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις· ἄλλαι δύο εὐθεῖαι, ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρα πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ· ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι. οὐ συνίστανται δὲ· οὐκ ἄρα ἐφαρμοζομένης τῆς βγ βάσεως, ἐπὶ τὴν εζ βάσιν: οὐκ ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ βα, αγ πλευραὶ· ἐπὶ τὰς εδ, δζ. ἐφαρμόσουσι ἄρα, ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βαγ, ἐπὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ εδζ ἐφαρμόσει: καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται. Συμπέρασμα.) Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα, τὰς δύο πλευρὰς, ταῖς δυσὶ πλευραῖς, ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ· καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔχει: καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις θ. Πρόβλημα.

Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον: δίχα τεμεῖν.

Ἔκθεσις.) Ἔστω ἡ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος, ἡ ὑπὸ βαγ. Διορισμός.) Δεῖ δὴ αὐτὴν: δίχα τεμεῖν. Κατασκευή.) Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς αβ, τύχον σημεῖον τὸ δ. καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς αγ, τῇ αδ ἴση: ἡ αε. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δε. καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς δε: τρίγωνον ἰσόπλευρον,

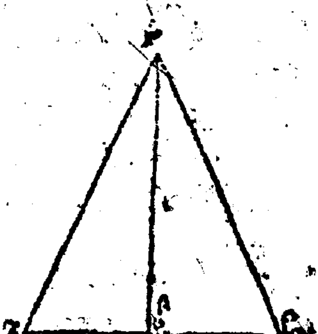
πλευρον, τὸ δεζ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αζ. Διορισμὸς τῆς κατασκευῆς.) Λέγω ὅτι ἡ ὑπὸ βαγ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς αζ εὐθείας. Απόδειξις.) Επεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ αδ, τῇ αε: κοινὴ δὲ ἡ αζ: δύο δὴ αἱ δα, αζ, δυσὶ ταῖς εα, αζ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ: καὶ βάσις ἡ δζ, βάσει τῇ εζ ἴση ἐστί. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ δαζ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εαζ, ἐστὶν ἴση. Συμπέρασμα.) Η ἄρα δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ βαγ: δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς αζ εὐθείας, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



Πρότασις ι. Πρόβλημα.

Την δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην: δίχα τεμεῖν.

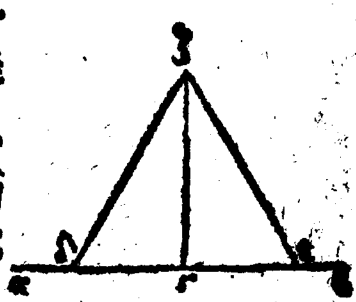
Εκθεσις.) Εστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη, ἡ αβ. Διορισμός.) Δεῖ δὴ τὴν αβ, δίχα τεμεῖν. Κατασκευή.) Συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευ-



ρον τὸ αβγ: καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ αβγ γωνία δίχα, τῇ γδ εὐθείᾳ. Διορισμὸς τῆς κατασκευῆς.) Λέγω ὅτι ἡ αβ εὐθεῖα, δίχα τέτμηται, κατὰ τὸ δ σημεῖον. Απόδειξις.) Επεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ αγ, τῇ γβ: κοινὴ δὲ γδ: δύο δὴ αἱ αγ, γδ: δυσὶ ταῖς βγ, γδ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ: καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αγδ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ βγδ ἐστὶν ἴση. βάσις ἄρα ἡ αδ: βάσει τῇ βδ ἐστὶν ἴση. Συμπέρασμα.) Η ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ αβ: δίχα τέτμηται κατὰ τὸ δ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ια. Πρόβλημα.

ΤΗ δοθείσῃ εὐθείᾳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου: πρὸς ὀρθὰς γωνίας, εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.



Εκθεσις.) Εστω μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα, ἡ αβ: τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπ' αὐτῆς, τὸ γ. Διορισμός.) Δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ γ σημείου, τῇ αβ εὐθείᾳ: πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. Κατασκευή.)

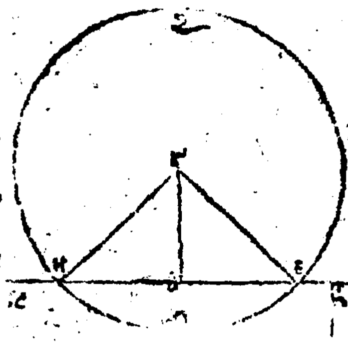
Εἰλή-

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς αγ· τυχὸν σημεῖον τὸ δ. καὶ κείσθω τῇ γδ ἴση, ἡ γε. καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς δε· τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ζδε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζγ. Διορισμὸς τῆς κατασκευῆς.) Λέγω ὅτι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ αβ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ γ· πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ζγ. Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ δγ, τῇ γε· κοινὴ δὲ ἡ ζγ· δύο δὴ αἱ δγ, γζ, δυσὶ ταῖς εγ, γζ, ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ βάσις ἡ δζ, βάσει τῇ εζ ἴση ἐστί. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ δγζ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εγζ, ἴση ἐστὶ, καὶ εἰσὶν ἐφεξῆς. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα· τὰς ἐφεξῆς γωνίας, ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ· ὀρθὴ ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν. ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα, τῶν ὑπὸ δγζ, ζγε. Συμπέρασμα.) Τῇ ἄρα δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ αγ· ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ γ· πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται, ἡ ζγ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ιβ. Πρόβλημα.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς· κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔκθεσις.) Ἔστω μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄπειρος, ἡ αβ· τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον, ὃ μὴ ἔστιν ἐπ' αὐτῆς, τὸ γ. Διορισμός.) Δεῖ δὴ ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν αβ· ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ γ, ὃ μὴ ἔστιν ἐπ' αὐτῆς· κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. Κατασκευή.)



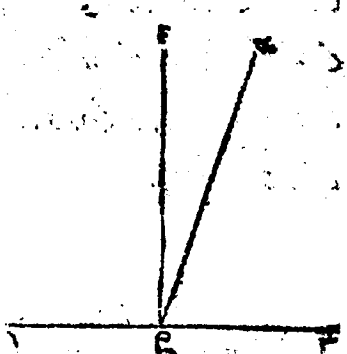
Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τῆς αβ εὐθείας, τυχὸν σημεῖον τὸ δ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ γ, διαστήματι δὲ τῷ γδ· κύκλος γεγράφθω ὁ εζη. καὶ τετμήσθω ἡ εη δίχα κατὰ τὸ θ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ γη, γθ, γε. Διορισμὸς τῆς κατασκευῆς.) Λέγω ὅτι, ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν αβ, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ γ, ὃ μὴ ἔστιν ἐπ' αὐτῆς· κάθετος ἦκται ἡ γθ. Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ηθ τῇ θε· κοινὴ δὲ ἡ θγ. δύο δὴ αἱ ηθ, θγ· δύσι ταῖς εθ, θγ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ βάσις ἡ γη, βάσει τῇ γε, ἐστὶν ἴση. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ γθη, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εθγ ἐστὶν ἴση. καὶ εἰσὶν ἐφεξῆς. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα· τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ· ὀρθὴ ἐστὶν ἑκά-

τερα

περα τῶν ἴσων γωνιῶν. καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα: κάθετος καλεῖται ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν. Συμπέρασμα.) Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν ἄπειρον, τὴν αβ: ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς: κάθετος ἦκται ἡ γθ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ιγ. θεώρημα.

Ὡς ἂν εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα, γωνίας ποιῇ: ἤτοι δύο ὀρθάς, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, ποιήσει.



Ἔκθεσις.) Εὐθεῖα γάρ τις ἡ αβ, ἐπ' εὐθεῖαν τὴν γδ σταθεῖσα: γωνίας ποιήτω, τὰς ὑπὸ γβα, αβδ. Διορισμός.) Λέγω ὅτι αἱ ὑπὸ γβα, αβδ, γωνίαι ἢ δύο ὀρθαί εἰσιν, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. Κατασκευή.) Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ γβα, τῇ ὑπὸ αβδ: δύο ὀρθαί εἰσιν. εἰ δὲ οὔ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ β σημείου, τῇ γδ πρὸς ὀρθάς, ἡ βε. Ἀπόδειξις.) αἱ ἄρα ὑπὸ γβε, εβδ, δύο ὀρθαί εἰσι. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ γβε δυσὶ ταῖς ὑπὸ γβα, αβε ἴση ἐστί: κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ εβδ. αἱ ἄρα ὑπὸ γβε, εβδ: τρισὶ ταῖς ὑπὸ γβα, αβε, εβδ, εἰσὶν ἴσαι. πάλιν ἐπεὶ ἡ ὑπὸ δβα, δυσὶ ταῖς ὑπὸ δβε, εβα ἴση ἐστὶ. κοινὴ προσκείσθω, ἡ ὑπὸ αβγ. αἱ ἄρα γωνίαι, αἱ ὑπὸ δβα, αβγ τρισὶ ταῖς ὑπὸ δβε, εβα, αβγ ἴσαι εἰσὶν. ἐδείχθησαν δὲ, καὶ αἱ ὑπὸ γβε, εβδ: τρισὶ ταῖς αὐταῖς ἴσαι. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα: καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα. καὶ αἱ ὑπὸ γβε, εβδ ἄρα, ταῖς ὑπὸ δβα, αβγ, ἴσαι εἰσὶν. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ γβε, εβδ, δύο ὀρθαί εἰσι. καὶ αἱ ὑπὸ δβα, αβγ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Συμπέρασμα.) Ως ἂν ἄρα εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ: ἤτοι δύο ὀρθὰς, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

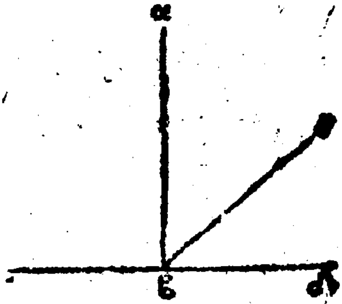
Πρότασις ιδ. θεώρημα.

Ἐὰν πρός τινι εὐθεῖα, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ: δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι: τὰς ἐφεξῆς γωνίας, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν: ἐπ' εὐθείας ἔσονται, ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Ἔκθεσις.) Πρὸς γὰρ τινι εὐθεῖα τῇ αβ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ β: δύο εὐθεῖαι αἱ βγ, βδ: μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι: τὰς ἐφε-

ξῆς

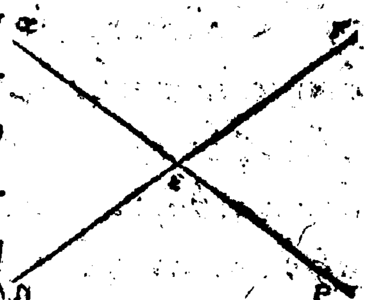
ξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ αβγ, αβδ, δύσιν ὀρθαῖς ἴσας ποιήτωσαν. Διορισμός.) Λέγω ὅτι ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τῇ γβ ἡ βδ. Κατασκευή.) Εἰ γὰρ μή ἐστι τῇ βγ ἐπ' εὐθείας ἡ βδ: ἔστω τῇ γβ ἐπ' εὐθείας ἡ βε. Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ αβ, ἐπ' εὐθεῖαν τὴν γβε ἐφέστηκεν: αἱ ἄρα ὑπὸ αβγ, αβε γωνίαι: δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ αβγ, αβδ, δύσιν ὀρθαῖς ἴσαι. αἱ ἄρα ὑπὸ γβα, αβε: ταῖς ὑπὸ γβα, αβδ ἴσαι εἰσί. κοινὴ ἀφῃρήσθω, ἡ ὑπὸ αβγ. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ αβε: λοιπῇ τῇ ὑπὸ αβδ ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ βε, τῇ βγ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις, πλὴν τῆς βδ. Συμπέρασμα.) Ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ γβ, τῇ βδ. Ἐὰν ἄρα πρός τινι εὐθείᾳ: καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ: δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι: τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν: ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Πρότασις ιε. θεώρημα.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι, τέμνωσιν ἀλλήλας: τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας, ἴσας ἀλλήλαις ποιήσουσι.

Ἔκθεσις.) Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ αβ, γδ: τεμνέσθωσαν ἀλλήλας, κατὰ τὸ ε σημεῖον. Διορισμός.) Λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν, ἡ μὲν ὑπὸ αεγ, γωνία, τῇ ὑπὸ δεβ: ἡ δὲ ὑπὸ γεβ, τῇ ὑπὸ αεδ. Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ αε: ἐπ' εὐθείαν, τὴν γδ

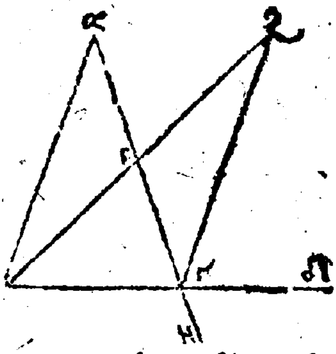


ἐφέστηκε, γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ γεα, αεδ: αἱ ἄρα ὑπὸ γεα, αεδ γωνίαι: δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. πάλιν ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ δε, ἐπ' εὐθείαν τὴν αβ ἐφέστηκε: γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ αεδ, δεβ. αἱ ἄρα ὑπὸ αεδ, δεβ γωνίαι: δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ γεα, αεδ: δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. αἱ ἄρα ὑπὸ γεα. αεδ: ταῖς ὑπὸ αεδ, δεβ, ἴσαι εἰσί. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ αεδ. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ γεα: λοιπῇ τῇ ὑπὸ βεδ ἴση ἐστίν. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται: ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ γεβ, δεα, ἴσαι εἰσίν. Συμπέρασμα.) Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι, τέμνωσιν ἀλλήλας λήλαις· τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας, ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι καὶ ὅσαι δήποτ' οὖν εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας: τὰς πρὸς τῇ τομῇ γωνίας, τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσουσι.

Πρότασις ις. θεώρημα.

ΠΑντὸς τριγώνου, μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης: ἡ ἐκτὸς γωνία, ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστίν.



Ἔκθεσις.) Ἔστω τρίγωνον, τὸ αβγ: καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ βγ, ἐπὶ τὸ δ. Διορισμός.) Λέγω ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ αγδ: μείζων ἐστὶν ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον: τῶν ὑπὸ γβα, βαγ γωνιῶν. Κατασκευή.) Τετμήσθω ἡ αγ δίχα κατὰ τὸ ε: καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ βε: ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ζ: καὶ κείσθω τῇ βε, ἴση ἡ εζ: καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζγ: καὶ διήχθω ἡ αγ, ἐπὶ τὸ η. Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν αε, τῇ εγ. ἡ δὲ βε, τῇ εζ: δύο δὴ αἱ αε εβ.

δυσὶ

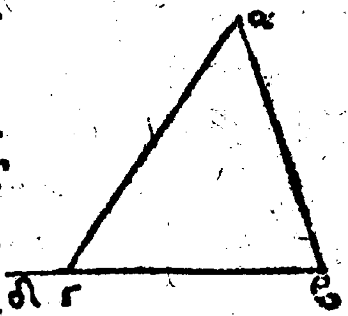
δυσὶ ταῖς γε, εζ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αεβ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ζεγ ἴση ἐστὶν. κατὰ κορυφὴν γάρ. βάσις ἄρα ἡ αβ, βάσει τῇ ζγ ἴση ἐστί· καὶ τὸ αβε τρίγωνον, τῷ ζεδ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον· καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι, ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ βαε, τῇ ὑπὸ εγζ· μείζων δ᾽ ἐστὶν ἡ ὑπὸ εγδ, τῆς ὑπὸ εγζ. μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ αγδ, τῆς ὑπὸ βαε. ὁμοίως δὲ τῆς βγ τετμημένης δίχα· δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ βγη, τουτέστιν ἡ ὑπὸ αγδ, μείζων καὶ τῆς ὑπὸ αβγ. Συμπέρασμα.) Παντὸς ἄρα τριγώνου, μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης· ἡ ἐκτὸς γωνία, ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιζ. θεώρημα.

Παντὸς τριγώνου, αἱ δύο γωνίαι· δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Ἔκθεσις.) Ἔστω τρίγωνον, τὸ αβγ. Διορισμός.) Λέγω ὅτι τοῦ αβγ, τριγώνου, αἱ δύο γωνίαι· δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, πάντῃ μετα-

λαμ-



λαμβανόμεναι. Κατασκευή.) Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ βγ, ἐπὶ τὸ δ. Ἀπόδειξις.) Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ αβγ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ αγδ: μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπ' ἐναντίον, τῆς ὑπὸ αβγ. κοινὴ προσκείσθω, ἡ ὑπὸ αβγ. αἱ ἄρα ὑπὸ αγδ, αγβ, τῶν ὑπὸ αβγ, βγα μείζονές εἰσιν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ αγδ, αγβ, δύσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. αἱ ἄρα ὑπὸ αβγ, βγα, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι. ὁμοίως δὴ δείξομεν: ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ βαγ, αγβ: δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι: καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ αγβ, αβγ. Συμπέρασμα.) Παντὸς ἄρα τριγώνου, αἱ δύο γωνίαι: δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντη μεταλαμβανόμεναι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

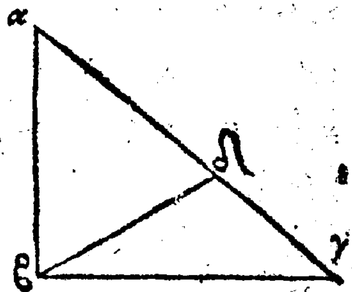
Πρότασις ιη. θεώρημα.

Παντὸς τριγώνου, ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.

Ἔκθεσις.) Ἔστω τρίγωνον, τὸ αβγ, μείζονα ἔχον τὴν αγ πλευρὰν, τῆς αβ. Διορισμός.) Λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβγ: μείζων ἐστὶ, τῆς

ὑπὸ

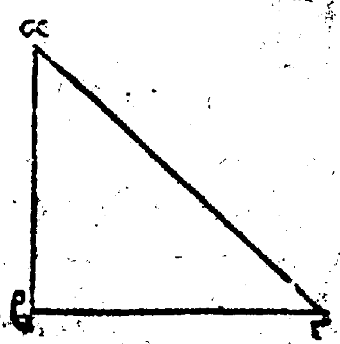
ὑπὸ βγα. Κατασκευή.) Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ αγ, τῆς αβ· κείσθω τῇ αβ ἴση ἡ αδ· καὶ ἐπεζεύχθω, ἡ βδ. Ἀπόδειξις.) Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ βδγ· ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ αδβ· μείζων ἄρα ἐστὶ τῆς ἐντὸς, καὶ ἀπεναντίον, τῆς ὑπὸ δγβ. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ αδβ· τῇ ὑπὸ αβδ. ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ αβ, τῇ αδ ἐστὶν ἴση. μείζων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αβδ, τῆς ὑπὸ αγβ. πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ μετων ἐστὶ, τῆς ὑπὸ αγβ. Συμπέρασμα.) Παντὸς ἄρα τριγώνου, ἡ μείζων πλευρὰ· τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Πρότασις ιθ. θεώρημα.

ΠΑντὸς τριγώνου, ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν· ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.

Ἔκθεσις.) Ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ, μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ αβγ γωνίαν· τῆς ὑπὸ βγα. Διορισμός.) Λέγω ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ αγ·

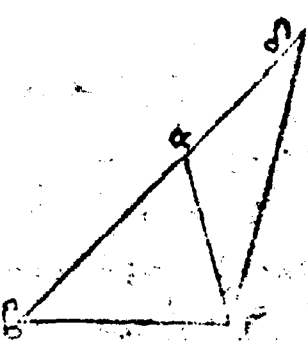


πλευρὰς

πλευρᾶς τῆς αβ μείζων ἐστίν. Ἀπόδειξις.) Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ αγ, τῇ αβ, ἢ ἐλάσσων. ἴση μὲν οὖν οὐκ ἔστιν ἡ αγ, τῇ αβ. ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβγ, τῇ ὑπὸ αγβ. οὐκ ἔστι δέ. οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ αγ, τῇ αβ. οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ αγ, τῆς αβ, ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβγ· τῆς ὑπὸ αγβ. οὐκ ἔστι δέ. οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ αγ, τῆς αβ. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἴση ἐστί. μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ αγ, τῆς αβ. Συμπέρασμα.) Παντὸς ἄρα τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν· ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κ. θεώρημα.

ΠΑντὸς τριγώνου, αἱ δύο πλευραί· τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.



Ἔκθεσις.) Ἔστω γὰρ τρίγωνον τὸ αβγ. Διορισμός.) Λέγω ὅτι τοῦ αβγ τριγώνου αἱ δύο πλευραί, τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν βα, αγ, τῆς βγ· αἱ δὲ αβ, βγ· τῆς αγ.

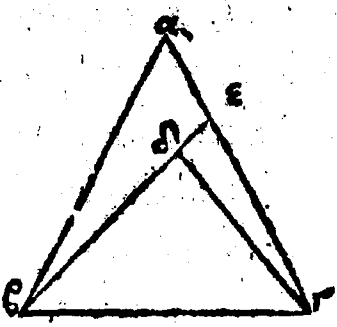
αἱ δὲ, βγ, γα· τῆς αβ. Κατασκευή.) Διήχθω γὰρ ἡ βα ἐπὶ τὸ δ σημεῖον· καὶ κείσθω τῇ γα ἴση ἡ δα· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δγ. Απόδειξις.) Επεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ δα, τῇ αγ. ἴση ἐστὶν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αδγ· τῇ ὑπὸ αγδ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ βγδ γωνία· τῆς ὑπὸ αγδ μείζων ἐστί. μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ βγδ· τῆς ὑπὸ αδγ. καὶ ἐπεὶ τρίγωνον ἐστὶ τὸ δβγ, μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ βγδ γωνίαν, τῆς ὑπὸ αδγ· ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει. ἡ δβ ἄρα, τῆς βγ ἐστὶν μείζων, ἴση δὲ ἡ δβ, ταῖς αβ, αγ. μείζονες ἄρα αἱ βα, αγ, τῆς βγ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ μὲν αβ, βγ· τῆς γα μείζονές εἰσιν. αἱ δὲ βγ, γα· τῆς αβ. Συμπέρασμα.) Παντὸς ἄρα τριγώνου, αἱ δύο πλευραὶ· τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κα. θεώρημα.

ΕΑν τριγώνου, ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν· ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν· αἱ συσταθεῖσαι, τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν, ἐλάττονες μὲν ἔσονται· μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσι.

Ἔκθεσις.

Ἔκθεσις.) Τριγώνου γὰρ τοῦ αβγ, ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς βγ· ἀπὸ τῶν περάτων τῶν βγ δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συνεστάθωσαν· αἱ βδ· δγ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι αἱ βδ, δγ· τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν, τῶν βα αγ· ἐλάσσονες μὲν εἰσι· μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσι· τὴν ὑπὸ βδγ, τῆς ὑπὸ βαγ. (Κατασκευή.) Διήχθω γὰρ ἡ βδ, ἐπὶ τὸ ε. (Ἀπόδειξις.) Καὶ ἐπεὶ

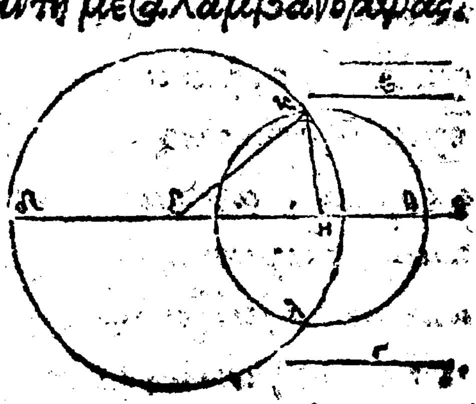


παντὸς τριγώνου· αἱ δύο πλευραὶ, τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι. τοῦ αβε ἄρα τριγώνου, αἱ δύο πλευραὶ αἱ αβ, αε· τῆς βε μείζονές εἰσι. κοινὴ προσκείσθω ἡ εγ. αἱ ἄρα βα, αγ· τῶν βε, εγ, μείζονές εἰσι. πάλιν ἐπεὶ τοῦ γεδ τριγώνου· αἱ δύο πλευραὶ αἱ γε, εδ, τῆς γδ μείζονές εἰσι. κοινὴ προσκείσθω ἡ δβ· αἱ γε, εβ ἄρα, τῶν γδ, γβ μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ τῶν βε, εγ μείζονες ἐδείχθησαν αἱ βα, αγ· πολλῷ ἄρα αἱ βα, αγ, μείζονές εἰσι. πάλιν ἐπεὶ παντὸς τριγώνου· ἡ ἐκτὸς γωνία, τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστί. τοῦ γδε ἄρα τριγώνου· ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ βδγ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ γεδ· διὰ τὰ αὐτὰ ἄρα καὶ τοῦ αβε τριγώνου· ἡ ἐκτὸς γωνία, ἡ ὑπὸ γεβ· μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ βαγ. ἀλλὰ τῆς ὑπὸ γεβ, μείζων ἐδείχθη ἡ ὑπὸ βδγ. πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ βδγ· μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ βαγ. (Συμπέρασμα.) Ἐὰν ἄρα τριγώνου, ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων· δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν· αἱ συσταθεῖσαι, τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν, ἐλάττονες μὲν εἰσι· μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κβ. Πρόβλημα.

Ἐκ τριῶν εὐθειῶν· αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις· τρίγωνον συστήσασθαι. Δεῖ δὴ τὰς δύο, τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι· πάντη μεταλαμβανομένας. διὰ τὸ καὶ παντὸς τριγώνου· τὰς δύο πλευρὰς, τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντη μεταλαμβανομένας.

Ἔκθεσις.) Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ α, β, γ, ὧν αἱ δύο, τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν, πάντη με-

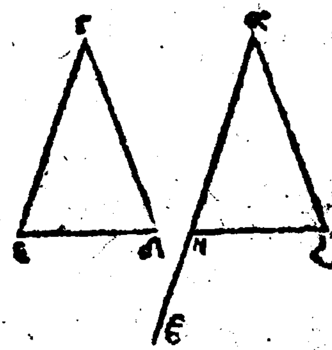


ταλαμ-

ταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν α, β, τῆς γ, αἱ δὲ α, γ, τῆς β, καὶ ἔτι αἱ β, γ, τῆς α. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς α, β, γ, τρίγωνον συστήσασθαι. (Κατασκευή.) Ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ δε, πεπερασμένη μὲν κατὰ τὸ δ, ἄπειρος δὲ κατὰ τὸ ε, καὶ κείσθω τῇ μὲν α ἴση, ἡ δζ, τῇ δὲ β, ἴση ἡ ζη, τῇ δὲ γ, ἴση ἡ ηθ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ ζ, διαστήματι δὲ τῷ ζδ, κύκλος γεγράφθω, ὁ δκλ. καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ η, διαστήματι δὲ τῷ ηθ, κύκλος γεγράφθω ὁ κλθ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ κη. (Διορισμὸς τῆς κατασκευῆς.) Λέγω ὅτι ἐκ τριῶν εὐθειῶν τῶν ἴσων ταῖς α, β, γ, τρίγωνον συνέστηκε τὸ κζη. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ γὰρ τὸ ζ σημεῖον, κέντρον ἐστὶ τοῦ δκλ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ζδ, τῇ ζκ, ἀλλὰ ἡ ζδ τῇ α ἐστὶν ἴση. καὶ ἡ κζ ἄρα τῇ α ἐστὶν ἴση. πάλιν ἐπεὶ τὸ η σημεῖον, κέντρον ἐστὶν τοῦ λκθ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ηθ, τῇ ηκ. ἀλλὰ ἡ ηθ, τῇ γ ἐστὶν ἴση. καὶ ἡ κη ἄρα, τῇ γ ἐστὶν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ζη τῇ β ἴση. αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι, αἱ κζ, ζη, ηκ τρισὶ ταῖς α, β, γ ἴσαι εἰσίν. (Συμπέρασμα.) Ἐκ τριῶν ἄρα εὐθειῶν τῶν κζ, ζη, ηκ: αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις ταῖς α, β, γ· τρίγωνον συνίσταται, τὸ κζη. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις κγ. πρόβλημα.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ: καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ: τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ: ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.



Ἔκθεσις.) Ἔστω μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ αβ: τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ σημεῖον τὸ α: ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος, ἡ ὑπὸ δγε. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ αβ: καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ α: τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ, τῇ ὑπὸ δγε: ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι. Κατασκευή.) Εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας τῶν γδ, γε: τυχόντα σημεῖα τὰ δ, ε: καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δε: καὶ ἐκ τριῶν εὐθειῶν αἵ εἰσιν ἴσαι: τρισὶ ταῖς γδ, δε, γε: τρίγωνον συνεστάτω τὸ αζη: ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν γδ, τῇ αζ: τὴν δὲ γε, τῇ αη: καὶ ἔτι τὴν δε, τῇ ζη. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ οὖν αἱ δύο αἱ δγ, γε: δυσὶ ταῖς ζα, αη, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ: καὶ βάσις ἡ δε, βάσει τῇ ζη ἴση. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ δγε,

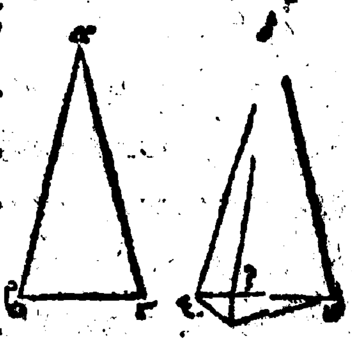
γωνία

γωνία τῇ ὑπὸ ζαη ἐστὶν ἴση. (Συμπέρασμα.) Πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ αβ: καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ α: τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ: τῇ ὑπὸ δγε, ἴση γωνία εὐθύγραμμος συνίσταται, ἡ ὑπὸ ζαη. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις κδ: θεώρημα.

Ἐὰν δύο τρίγωνα, τὰς δύο πλευρὰς, ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ: τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην: καὶ τὴν βάσιν, τῆς βάσεως μείζονα ἕξει.

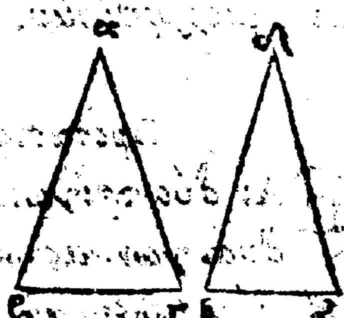
Ἔκθεσις.) Ἔστω δύο τρίγωνα, τὰ αβγ, δεζ: τὰς δύο πλευρὰς τὰς αβ, αγ: ταῖς δυσὶ πλευραῖς, ταῖς δε, δζ, ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ: τὴν μὲν αβ, τῇ δε: τὴν δὲ αγ, τῇ δζ: γωνία δὲ ἡ ὑπὸ βαγ, γωνίας τῆς ὑπὸ εδζ μείζων ἔστω. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι καὶ βάσις ἡ βγ: βάσεως τῆς εζ, μείζων ἐστίν. (Κατασκευή.) Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ βαγ γωνία: τῆς ὑπὸ εδζ γωνίας: συνεστάτω πρὸς τῇ δε εὐ-



θείᾳ· καὶ τοῦ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τοῦ δ· τῇ ὑπὸ βαγ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ εδη. καὶ κείσθω ὁποτέρα τῶν αγ, δζ ἴση ἡ δη· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ηε, ζη. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν αβ, τῇ δε· ἡ δὲ αγ, τῇ δη· δύο δὴ αἱ βα, αγ· δυσὶ ταῖς εδ, δη ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βαγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εδη, ἴση ἐστί. βάσις ἄρα ἡ βγ, βάσει τῇ εη, ἐστὶν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ δη, τῇ δζ· ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ δζη· γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δηζ. μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ δζη· τῆς ὑπὸ εηζ. πολλῷ ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ εζη· τῆς ὑπὸ εηζ. καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι, τὸ εζη· μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ εζη γωνίαν τῆς ὑπὸ εηζ· ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν, ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει. μείζων ἄρα καὶ πλευρὰ ἡ εη· τῆς εζ. ἴση δὲ ἡ εη, τῇ βγ. μείζων ἄρα καὶ ἡ βγ, τῆς εζ. (Συμπέρασμα.) Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα, τὰς δύο πλευρὰς, ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ· τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κε. θεώρημα.

Ἐὰν δύο τρίγωνα, τὰς δύο πλευρὰς, ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν βάσιν δὲ τῆς βάσεως, μείζονα ἔχῃ: καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει: τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

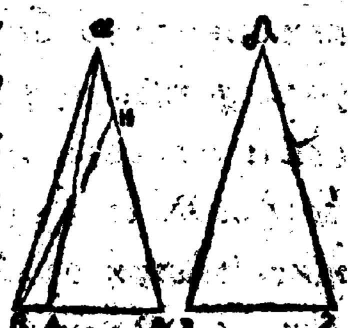


Ἔκθεσις. Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ αβγ, δεζ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς αβ, αγ, ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς δε, δζ ἴσας ἔχοντα: ἑκατέραν ἑκατέρᾳ τὴν μὲν αβ, τῇ δε: τὴν δὲ αγ, τῇ δζ: βάσις δὲ ἡ βγ: βάσεως τῆς εζ, μείζων ἔστω. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βαγ: γωνίας τῆς ὑπὸ εδζ, μείζων ἐστίν. (Ἀπόδειξις.) Εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι ἴση ἐστὶν αὐτῇ: ἢ ἐλάττων. ἴση μὲν οὖν οὐκ ἔστιν ἡ ὑπὸ βαγ γωνία τῇ ὑπὸ εδζ: ἴση γὰρ ἂν ἦν, καὶ ἡ βάσις ἡ βγ: βάσει τῇ εζ. οὐκ ἔστι δέ. οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ βαγ γωνία: τῇ ὑπὸ εδζ. ἀλλ' οὐδὲ μὴν ἐλάσσων. ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ βάσις ἡ βγ: βάσεως τῆς εζ. οὐκ ἔστι δέ. οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ βαγ γωνία: τῆς ὑπὸ εδζ. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴση. μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ βαγ γωνία: τῆς ὑπὸ, εδζ.

(Συμπέρασμα.) Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ· τὴν δὲ βάσιν, τῆς βάσεως μείζονα ἔχει· καὶ τὴν γωνίαν, τῆς γωνίας μείζονα ἕξει· τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κϛ. θεώρημα.

Ἐὰν δύο τρίγωνα, τὰς δύο γωνίας, ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ· καὶ μίαν πλευρὰν, μιᾷ πλευρᾷ ἴσην· ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις· ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς, ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ· καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν, τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.



Ἔκθεσις πρώτη. Ἔστωσαν δύο τρίγωνα, τὰ αβγ δεζ, τὰς δύο γωνίας· τὰς ὑπὸ αβγ, βγα, δυσὶ ταῖς ὑπὸ δεζ, εζδ, ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ· τὴν μὲν ὑπὸ αβγ, τῇ ὑπὸ δεζ· τὴν δὲ ὑπὸ βγα, τῇ ὑπὸ εζδ· ἐχέτω δὲ καὶ μίαν

πλευ-

πλευρὰ, μιᾷ πλευρᾷ ἴσην· πρότερον τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, τὴν βγ, τῇ εζ. (Διορισμὸς πρῶτος.) Λέγω ὅτι καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς, ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ· τὴν μὲν αβ, τῇ δε· τὴν δὲ αγ, τῇ δζ· καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν, τῇ λοιπῇ γωνίᾳ, τὴν ὑπὸ βαγ, τῇ ὑπὸ εδζ. (Κατασκευὴ πρώτη.) Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ αβ, τῇ δε· μία αὐτῶν μείζων ἐστί. ἔστω μείζων, ἡ αβ, καὶ κείσθω τῇ δε, ἴση ἡ ηβ· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ηγ. (Ἀπόδειξις πρώτη.) Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν βη, τῇ δε· ἡ δὲ βγ, τῇ εζ· δύο δὴ αἱ βη, βγ· δυσὶ ταῖς δε, εζ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ηβγ· γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δεζ ἴση ἐστί. βάσις ἄρα ἡ ηγ, βάσει τῇ γζ ἴση ἐστί· καὶ τὸ ηγβ τρίγωνον, τῷ δεζ τριγώνῳ, ἴσον ἐστί· καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι, ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ηγβ γωνία, τῇ ὑπὸ δζε· ἀλλὰ ἡ ὑπὸ δζε, τῇ ὑπὸ βγα ὑπόκειται ἴση. καὶ ἡ ὑπὸ βγη ἄρα, τῇ ὑπὸ βγα ἴση ἐστίν, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι. ὅπερ ἀδύνατον. (Συμπέρασμα πρῶτον.) οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ αβ, τῇ δε. ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ βγ, τῇ εζ ἴση. δύο δὴ αἱ αβ, βγ· δυσὶ ταῖς δε, εζ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβγ· γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δεζ ἐστὶν ἴση. βάσις ἄρα ἡ αγ· βάσει τῇ δζ ἴση ἐστί· καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ βαγ· λοιπῇ γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ εδζ ἴση ἐστίν. (Ἔκθεσις δευτέρα.) Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἔστωσαν, αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ὑποτείνουσαι ἴσαι· ὡς ἡ αβ, τῇ δε. (Διορισμὸς δεύτερος.) Λέγω πάλιν, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ, ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσαι ἔσονται· ἡ μὲν αγ, τῇ δζ· ἡ δὲ βγ, τῇ εζ· καὶ ἔτι ἡ λοιπὴ γωνία, ἡ ὑπὸ βαγ· λοιπῇ τῇ ὑπὸ εδζ ἴση ἐστίν. (Κατασκευὴ δευτέρα.) Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ βγ, τῇ εζ· μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω εἰ δυνατὸν μείζων, ἡ βγ· καὶ κείσθω τῇ εζ ἴση ἡ γθ· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αθ. (Ἀπόδειξις δευτέρα.) Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν βθ τῇ εζ· ἡ δὲ αβ τῇ δε· δύο δὴ αἱ αβ, βθ· δυσὶ ταῖς δε, εζ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι. βάσις ἄρα ἡ αθ, βάσει τῇ δζ ἴση ἐστί· καὶ τὸ αβθ τρίγωνον, τῷ δεζ τριγώνῳ ἴσον ἐστί· καὶ αἱ λοιπαὶ, γωνίαι, ταῖς λοιπαῖς γωνίαις, ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν

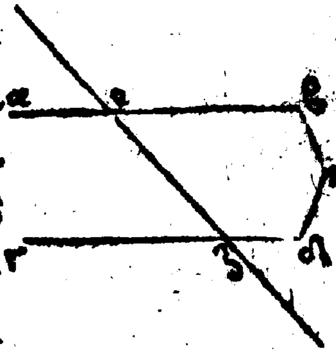
ἡ ὑπὸ

ἡ ὑπὸ βθα γωνία: τῇ ὑπὸ εζδ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ εζδ, τῇ ὑπὸ βγα γωνία ἐστὶν ἴση: καὶ ἡ ὑπὸ βθα ἄρα, τῇ ὑπὸ βγα ἐστὶν ἴση. τριγώνου δὴ τοῦ αθγ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ βθα: ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπ᾽ ἐναντίον, τῇ ὑπὸ βγα. ὅπερ ἀδύνατόν ἐστιν. (Συμπέρασμα δεύτερον. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ βγ, τῇ εζ. ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ αβ, τῇ δε ἴση: δύο δὴ αἱ αβ, βγ, δύσι ταῖς δε, εζ, ἴσαι εἰσὶν ἑκάτερα ἑκατέρᾳ: καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι. βάσις ἄρα ἡ αγ, βάσει τῇ δζ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ δεζ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ: καὶ ἡ λοιπὴ γωνία, ἡ ὑπὸ βαγ: τῇ λοιπῇ γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ εδζ, ἴση ἐστίν. (Συμπέρασμα καθόλου.) Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα, τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ: καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην ἔχῃ: ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις: ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν: καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει: καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν: τῇ λοιπῇ γωνίᾳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΤΟ ΔΕΥΤΕΡΟΝ ΜΕΡΟΣ ΤΟΥ-
του τοῦ στοιχείου.

Πρότασις κζ. θεώρημα.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας, εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ: παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.



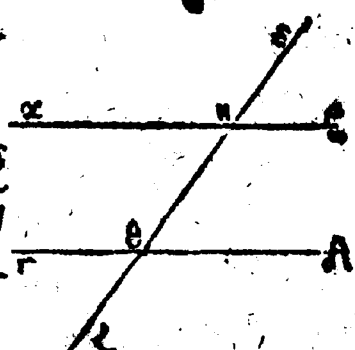
Ἔκθεσις.) Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς αβ, γδ: εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ εζ: τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ αεζ, εζγ: ἴσας ἀλλήλαις ποιείτω. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ αβ εὐθεῖα, τῇ γδ εὐθείᾳ. (Ὑπόθεσις.) Εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμεναι αἱ αβ, γδ, συμπεσοῦνται: ἤτοι ἐπὶ τὰ β, δ, μέρη, ἢ ἐπὶ τὰ α, γ. (Κατασκευή.) Ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τὰ β, δ, μέρη: κατὰ τὸ η. (Ἀπόδειξις.) Τριγώνου δὴ τοῦ ηεζ: ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ αεζ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνίας, τῆς ὑπὸ εζη. ἀλλὰ καὶ ἴση. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα αἱ αβ, γδ ἐκβαλλόμεναι: συμπεσοῦνται, ἐπὶ τὰ

β, δ,

β, δ, μέρη. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐπὶ τὰ αγ, αἱ δὲ ἐπὶ μηδέτερα τὰ μέρη συμπίπτουσαι: παράλληλοί εἰσι. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ αβ, τῇ γδ. (Συμπέρασμα.) Ἐὰν ἄρα εἰς δύο εὐθείας, εὐθεῖα ἐμπίπτουσα: τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ: παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κή. θεώρημα.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας: εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τὴν ἐκτὸς γωνίαν, τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ: ἢ τὰς ἐντὸς, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῇ: παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.



Ἔκθεσις.) Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς αβ, γδ: εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ εζ: τὴν ἐκτὸς γωνίαν, τὴν ὑπὸ εηβ, τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ηθδ, ἴσην ποιείτω: ἢ τὰς ἐντὸς, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη: τὰς ὑπὸ βηθ, ηθδ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ αβ, τῇ γδ.

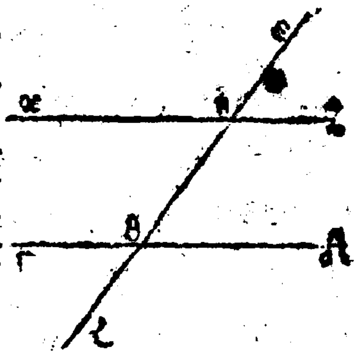
(Ἀπό-

(Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ εηθ, τῇ ὑπὸ ηθδ· ἀλλὰ ἡ ὑπὸ εηβ, τῇ ὑπὸ αηθ ἐστὶν ἴση. καὶ ἡ ὑπὸ αηθ ἄρα, τῇ ὑπὸ ηθδ ἐστὶν ἴση. καί εἰσιν ἐναλλάξ. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ αϐ, τῇ γδ. Πάλιν ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ϐηθ, ηθδ· δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ αηθ, ϐηθ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. αἱ ἄρα ὑπὸ αηθ, βηθ· ταῖς ὑπὸ βηθ, ηθδ, ἴσαι εἰσί. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ βηθ. λοιπὴ ἄρα, ἡ ὑπὸ αηθ· λοιπῇ τῇ ὑπὸ ηθδ ἐστὶν ἴση. καί εἰσιν ἐναλλάξ. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ αϐ, τῇ γδ. (Συμπέρασμα.) Ἐὰν ἄρα εἰς δύο εὐθείας, εὐθεῖα ἐμπίπτουσα: τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ: ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας: παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κθ. θεώρημα.

Ἡ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας, εὐθεῖα ἐμπίπτουσα: τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας, ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ: καὶ τὴν ἐκτὸς, τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἴσην: καὶ τὰς ἐντὸς, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, δυσὶν ὀρθαῖς

Ἐκθε-



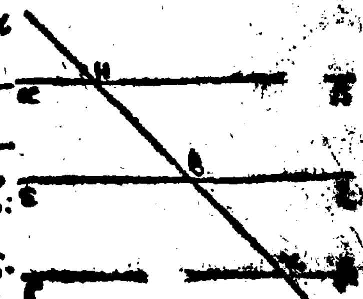
(Ἔκθεσις.) Εἰς γὰρ παραλλήλους εὐθείας τὰς αβ, γδ· εὐθεῖα ἐμπιπτέτω, ἡ εζ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας, τὰς ὑπὸ αηθ, ηθδ ἴσας ποιεῖ· καὶ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ εηβ, τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῇ ὑπὸ ηθδ ἴσην· καὶ τὰς ἐντὸς, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ βηθ, ηθδ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας. (Ἀπόδειξις μετὰ τῆς ὑποθέσεως.) Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ αηθ, τῇ ὑπὸ ηθδ· μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ αηθ. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ αηθ, τῆς ὑπὸ ηθδ· κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ βηθ. αἱ ἄρα ὑπὸ αηθ, βηθ· τῶν ὑπὸ βηθ, ηθδ, μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ αηθ, βηθ· δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. καὶ αἱ ἄρα ὑπὸ βηθ, ηθδ· δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. αἱ δὲ ἀπ᾽ ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν, ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον· συμπίπτουσιν. αἱ ἄρα αβ, γδ, ἐκβαλλόμεναι, εἰς ἄπειρον, συμπεσοῦνται. οὐ συμπίπτουσι δὲ, διὰ τὸ παραλλήλους αὐτὰς ὑποκεῖσθαι. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ αηθ· τῇ

ὑπὸ

ὑπὸ ηθδ. ἴση ἄρα. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ αηθ· τῇ ὑπὸ εηβ ἐστὶν ἴση. καὶ ἡ ὑπὸ εηβ ἄρα, τῇ ὑπὸ ηθδ ἐστὶν ἴση. κοινὴ προσκείσθω, ἡ ὑπὸ βηθ. αἱ ἄρα ὑπὸ εηβ, βηθ: ταῖς ὑπὸ βηθ, ηθδ ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ εηβ, βηθ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. καὶ αἱ ὑπὸ βηθ, ηθδ ἄρα, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. (Συμπέρασμα.) Ἡ ἄρα εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας, εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας: ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ: καὶ τὴν ἐκτὸς, τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην: καὶ τὰς ἐντὸς, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη: δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λ. θεώρημα.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι: καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.



Ἔκθεσις.) Ἔστω ἑκατέρα τῶν αβ, γδ: τῇ εζ, παράλληλος. Διορισμός.) Λέγω ὅτι καὶ ἡ αβ: τῇ γδ ἐστὶ παράλληλος. (Κατασκευή.) Ἐμπιπτέτω γὰρ εἰς αὐτὰς εὐθεῖα ἡ ηκ. (Ἀπόδειξις.)

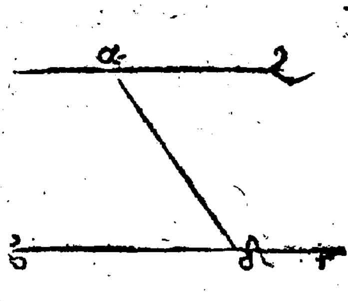
Καὶ

Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς αβ, εζ· εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν, ἡ ηκ. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αηθ τῇ ὑπὸ ηθζ. πάλιν ἐπεὶ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας τὰς εζ, γδ· εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ ηκ. ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ηθζ, τῇ ὑπὸ ηκδ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αηκ· τῇ ὑπὸ ηθζ ἴση. καὶ ἡ ὑπὸ αηκ ἄρα, τῇ ὑπὸ ηκδ ἐστὶν ἴση: καί εἰσιν ἐναλλάξ. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ αβ, τῇ γδ. (Συμπέρασμα.) Αἱ ἄρα τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι: καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λα. Πρόβλημα.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου: τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ: παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

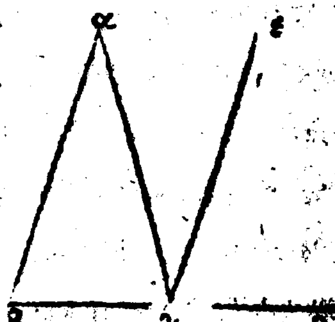
Ἔκθεσις.) Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον, τὸ α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα, ἡ βγ. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ διὰ τοῦ α σημείου: τῇ γβ εὐθείᾳ: παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. (Κατασκευή.) Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς βγ τυχὸν σημεῖον τὸ δ: καὶ ἐ-



ἐπεζεύχθω ἡ αδ· καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ δα εὐθείᾳ· καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ α· τῇ ὑπὸ αδγ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ δαε· καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῇ αε, εὐθεῖα ἡ αζ. (Ἀπόδειξις.) Καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς βγ, εζ εὐθεῖα ἐμπεσοῦσα ἡ αδ· τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ εαδ, αδγ. ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκε· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ εζ, τῇ βγ. (Συμπέρασμα.) Διὰ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου τοῦ α· τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ βγ· παράλληλος εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ εαζ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις λβ. θεώρημα.

ΠΑντὸς τριγώνου, μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης· ἡ ἐκτὸς γωνία, δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστί· καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι· δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.



Ἔκθεσις.) Ἔστω τρίγωνον, τὸ αβγ· καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ βγ, ἐπὶ τὸ δ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία, ἡ ὑπὸ αγδ· ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, ταῖς

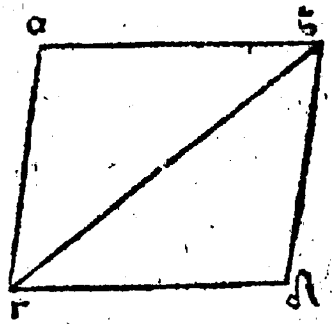
ὑπὸ

ὑπὸ γαβ, αβγ: καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι, αἱ ὑπὸ αβγ, βγα, γαβ: δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. (Κατασκευή.) Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ γ σημείου, τῇ αβ εὐθείᾳ: παράλληλος ἡ γε. (Ἀπόδειξις.) Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ αβ, τῇ γε: καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ αγ. αἱ ἄρα ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ βαγ, αγε: ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ αβ, τῇ γε: καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ βδ: ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ εγδ: ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, τῇ ὑπὸ αβγ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αεγ: τῇ ὑπὸ βαγ ἴση. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ αγδ ἐκτὸς γωνία, ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ἐντὸς, καὶ ἀπεναντίον, ταῖς ὑπὸ βαγ, αβγ. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ αγβ. αἱ ἄρα ὑπὸ αγδ, αγβ: τρισὶ ταῖς ὑπὸ αβγ, βγα, γαβ, ἴσαι εἰσίν. ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ αγδ, αγβ: δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. καὶ αἱ ὑπὸ αγβ, γβα, αβγ ἄρα, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. (Συμπέρασμα.) Παντὸς ἄρα τριγώνου, μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης: ἡ ἐκτὸς γωνία, δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστί: καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι: δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λγ. θεώρημα.

Αἱ τὰς ἴσας τε, καὶ παραλλήλους, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι, εὐθεῖαι: καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

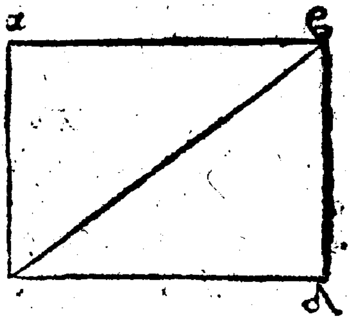
Ἔκθεσις.) Ἔστωσαν ἴσαι τε καὶ παράλληλοι, αἱ αβ, γδ: καὶ ἐπιζευγνύτωσαν αὐτὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη εὐθεῖαι, αἱ αγ, βδ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι καὶ αἱ αγ, δβ: ἴσαι καὶ παράλληλοί εἰσιν. (Κατασκευή.) Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ βγ. (Ἀπόδειξις.) καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ αβ, τῇ γδ: καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ βγ: αἱ ἐναλλὰξ ἄρα γωνίαι, αἱ ὑπὸ αβγ, βγδ: ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αβ, τῇ γδ, κοινὴ δὲ ἡ βγ: δύο δὴ αἱ αβ, βγ δυσὶ ταῖς βγ, γδ ἴσαι εἰσί: καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ βγδ ἴση ἐστίν. βάσις ἄρα ἡ αγ, βάσει τῇ βδ ἐστὶν ἴση: καὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ βγδ τριγώνῳ ἴσον ἐστί: καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι, ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αγβ γωνία: τῇ ὑπὸ γβδ: καὶ ἡ ὑπὸ βαγ: τῇ ὑπὸ γδβ.



καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς αγ, βδ: εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ βγ: τὰς ἐναλλὰξ γωνίας, τὰς ὑπὸ αγβ, γβδ: ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκεν. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ αγ, τῇ βδ: ἐδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση. (Συμπέρασμα.) Αἱ ἄρα τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι: καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοι εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λδ. θεώρημα.

Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων, αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι: ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί: καὶ ἡ διάμετρος, αὐτὰ δίχα τέμνει.

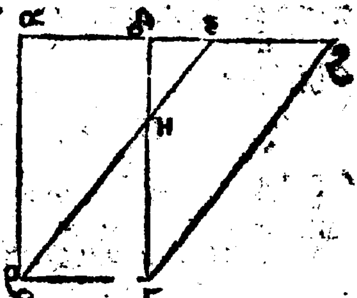


Ἔκθεσις.) Ἔστω παραλληλόγραμμον, τὸ αγδβ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ, ἡ βγ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι τοῦ αγδβ παραλληλογράμμου: αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ ἡ βγ, διάμετρος, αὐτὸ δίχα τέμνει. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ αβ τῇ γδ: καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ βγ. αἱ ἐναλλὰξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ αβδ, βγδ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. πάλιν ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ αγ, τῇ βδ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ βγ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ αγβ, γβδ: ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. δύο δὴ τρίγωνα ἐστὶ τὰ αβγ, βδγ, τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ αβγ, βγα: δυσὶ ταῖς ὑπὸ βγδ, γβδ, ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ: καὶ μίαν πλευρὰν τῇ μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις κοινὴν αὐτῶν, τὴν βγ. καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευράς, ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ: καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν, τῇ λοιπῇ γωνίᾳ. ἴση ἄρα ἡ μὲν αβ πλευρά, τῇ γδ: ἡ δὲ αγ, τῇ βδ: καὶ ἡ ὑπὸ βαγ γωνία, τῇ ὑπὸ βδγ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ αβγ γωνία, τῇ ὑπὸ βγδ: ἡ δὲ ὑπὸ γβδ, τῇ ὑπὸ αγβ. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ αβδ, ὅλῃ τῇ ὑπὸ αγδ ἴση ἐστίν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ βαγ, τῇ ὑπὸ βδγ ἴση. (Συμπέρασμα.) Τῶν ἄρα παραλληλογράμμων χωρίων, αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. (Διορισμὸς δεύτερος.) Λέγω δὲ ὅτι, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει. (Δευτέρα ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ αβ, τῇ γδ: κοινὴ δὲ ἡ βγ: δύο δὴ αἱ αβ, βγ, δυσὶ ταῖς γδ, βγ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ βγδ ἴση ἐστί. καὶ βάσις ἄρα ἡ αγ, βάσει τῇ δβ ἴση ἐστί· καὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ βγδ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν. (Συμπέρασμα.) Ἡ ἄρα βγ διάμετρος, δίχα τέμνει τὸ αβγδ παραλληλόγραμμον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΤΟ ΤΡΙΤΟΝ ΜΕΡΟΣ ΤΟΥ-ΤΟΥ ΤΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ.

Πρότασις λε. θεώρημα.

Τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα: καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις: ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.



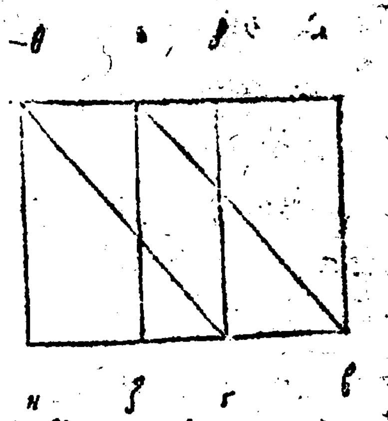
Ἔκθεσις.) Ἔστω παραλληλόγραμμα τὰ αβγδ, εβζγ: ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα τῆς βγ: καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς αζ, βγ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ αβγδ, τῷ εβζγ. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ αβγδ: τῇ βγ, ἴση ἐστὶν ἡ αδ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ εζ τῇ βγ ἴση ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ αδ.

τῇ εζ ἴση ἐστὶ. καὶ κοινὴ ἡ δε. ὅλη ἄρα ἡ αε: ὅλῃ τῇ δζ ἐστιν ἴση. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ αβ, τῇ δγ ἴση. δύο δὴ αἱ εα, αβ, δυσὶ ταῖς ζδ, δγ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ: καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ζδγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εαβ ἴση ἐστὶν: ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντός. βάσις ἄρα ἡ εβ, βάσει τῇ ζγ ἴση ἐστί: καὶ τὸ εαβ τρίγωνον τῷ ζδγ τριγώνῳ ἴσον ἐστί. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ δηε: λοιπὸν ἄρα τὸ αβηδ τραπέζιον: λοιπῷ τῷ εηγζ τραπεζίῳ, ἴσον ἐστί. κοινὸν προσκείσθω τὸ ηβγ τρίγωνον. ὅλον ἄρα τὸ αβγδ παραλληλόγραμμον: ὅλῳ τῷ εβγζ παραλληλογράμμῳ, ἴσον ἐστί. (Συμπέρασμα.) Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα: καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις: ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λϛ. θεώρημα.

Τα παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα: καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις: ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

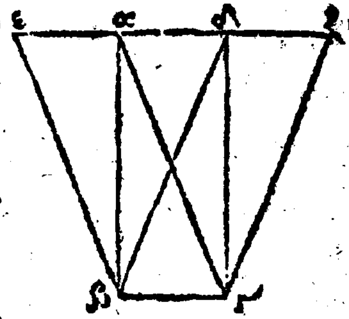
Ἔκθεσις.) Ἔστω παραλληλόγραμμα τὰ αβγδ, εζηθ: ἐπὶ ἴσων βάσεων, τῶν βγ, ζη: καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς αθ, βη. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ αβγδ παραλραλληλόγραμμον, τῷ εζηθ. (Κατασκευή.) Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ βε, γθ. (Ἀπόδειξις.) Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ βγ τῇ ζη: ἀλλὰ καὶ ἡ ζη, τῇ εθ ἐστὶν ἴση. καὶ ἡ βγ



ἄρα, τῇ εθ ἐστὶν ἴση. εἰσὶ δὲ παράλληλοι, καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ βε, γθ. αἱ δὲ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι: ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι. καὶ αἱ εβ, γθ ἄρα ἴσαι τέ εἰσι, καὶ παράλληλοι. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ, τὸ εβγδ: καὶ ἔστιν ἴσον τῷ αβγδ. βάσιν τε γὰρ αὐτὸ τὴν αὐτὴν ἔχει τὴν βγ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστὶ αὐτῷ, ταῖς βγ, αθ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ζηθε: τῷ αὐτῷ, τῷ εβγθ, ἐστὶν ἴσον. ὥστε καὶ τὸ αβγδ παραλληλόγραμμον, τῷ εζηθ ἴσον ἐστί. (Συμπέρασμα.) Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις: ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λζ. θεώρημα.

ΤΑ τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα: καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις: ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.



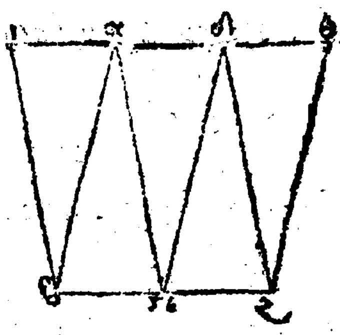
Ἔκθεσις.) Ἔστω τρίγωνα τὰ αβγ, δβγ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα τῆς βγ: καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ταῖς αδ, βγ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ δβγ τριγώνῳ. (Κατασκευή.) Ἐκβεβλήσθω ἡ αδ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ τὰ ε, ζ σημεῖα: καὶ διὰ μὲν τοῦ β, τῇ γα παράλληλος ἤχθω ἡ βε: διὰ δὲ τοῦ γ, τῇ βδ παράλληλος ἤχθω ἡ γζ. (Ἀπόδειξις.) Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν εβαγ, δβγζ. καὶ ἴσον τὸ εβγα, τῷ δβγζ. ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστι τῆς βγ: καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς βγ, εζ. καὶ ἔστι τοῦ μὲν εβγα παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ αβγ τρίγωνον. ἡ γὰρ αβ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει. τοῦ δὲ δβγζ παραλληλογράμμου, ἥμισυ τὸ δβγ τρίγωνον. ἡ γὰρ δγ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει. τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση: ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ

τρίγω-

τρίγωνον, τῷ δβγ τριγώνῳ. (Συμπέρασμα.) Τὰ ἄρα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα: καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις: ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λη. θεώρημα.

ΤΑ τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα: καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις: ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.



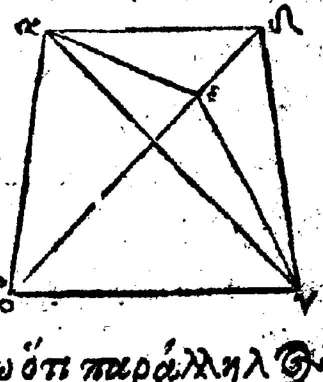
Ἔκθεσις.) Ἔστω τρίγωνα τὰ αβγ, δεζ: ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα, τῶν βγ, εζ: καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ταῖς βζ, δα. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ δεζ τριγώνῳ. (Κατασκευή.) Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ αδ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ τὰ η, θ: καὶ διὰ μὲν τοῦ β, τῇ γα παράλληλος ἤχθω, ἡ βη: διὰ δὲ τοῦ ζ, τῇ δε παράλληλος ἤχθω ἡ ζθ. (Ἀπόδειξις.) Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ηβγα, δεζθ: καὶ ἴσον τὸ ηβγα, τῷ δεζθ: ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών ἐστι τῶν βγ, εζ: καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς βζ, ηθ.

ηθ. καὶ ἔστι τοῦ μὲν ηβγα παραλληλογράμμου, ἥμισυ, τὸ αβγ τρίγωνον. ἡ γὰρ αβ διάμετρος, δίχα αὐτὸ τέμνει. τοῦ δὲ δεζθ, παραλληλογράμμου, ἥμισυ τὸ ζεδ τρίγωνον: ἡ γὰρ ζδ, διάμετρος δίχα αὐτὸ τέμνει. τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίσυ: ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ δεζ τριγώνῳ. (Συμπέρασμα.) Τὰ ἄρα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα: καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις: ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λθ. θεώρημα.

ΤΑ ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα: καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη: καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἔκθεσις.) Ἔστω τρίγωνα ἴσα τὰ αβγ, δβγ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, τῆς βγ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. (Κατασκευή.) Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ αδ. (Διορισμὸς τῆς κατασκευῆς.) Λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ αδ, τῇ γβ. (Ὑπόθεσις.) Εἰ γὰρ μή,



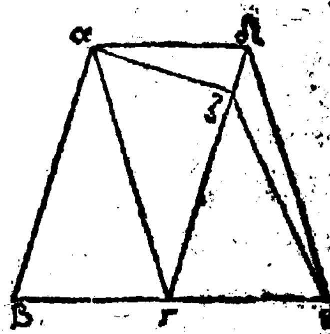
ἤχθω

ἤχθω διὰ τοῦ α σημείου, τῇ βγ εὐθείᾳ παράλληλος ἡ αε: καὶ ἐπεζεύχθω ἡ εγ. (Απόδειξις.) Ισον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ εβγ τριγώνῳ. ἐπείπερ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ἐστὶν αὐτῷ τῆς βγ: καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς βγ, αε. ἀλλὰ τὸ αβγ, τῷ δβγ ἐστὶν ἴσον. καὶ τὸ δβγ ἄρα τρίγωνον, τῷ εβγ ἴσον ἐστὶν, τὸ μεῖζον τῷ ἐλάττονι. ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ αε, τῇ βγ. Ομοίως δὴ δείξομεν: ὅτι οὐδὲ ἄλλη τίς πλὴν τῆς αδ. ἡ αδ ἄρα, τῇ βγ ἐστὶν παράλληλος. (Συμπέρασμα.) Τὰ ἄρα ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα: καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις μ. θεώρημα.

ΤΑ ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα: καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη: καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Εκθεσις.) Εστω τρίγωνα ἴσα, τὰ αβγ, γδε, ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα τῶν βγ, γε. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστιν. (Κατασκευή.) Επεζεύχθω γὰρ ἡ αδ. (Διορισμὸς τῆς κατασκευῆς.) Λέγω ὅτι πα-



τι παράλληλός ἐστιν ἡ αδ, τῇ βε. (Ὑπόθεσις.) Εἰ γὰρ μὴ, ἤχθω διὰ τοῦ α, τῇ βε παράλληλος ἡ ζα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζε. (Ἀπόδειξις.) Ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ ζγε τριγώνῳ. ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν βγ, γε: καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς βε, αζ. ἀλλὰ τὸ αβγ τρίγωνον, ἴσον ἐστὶ, τῷ δγε τριγώνῳ. καὶ τὸ δγε τρίγωνον ἄρα, ἴσον ἐστὶ τὸ ζγε τριγώνῳ. τὸ μεῖζον, τῷ ἐλάσσονι: ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ αζ, τῇ βε. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς αδ. ἡ αδ ἄρα τῇ βε παράλληλός ἐστι. (Συμπέρασμα.) Τὰ ἄρα ἴσα τρίγωνα: τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα: καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστὶ παραλλήλοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

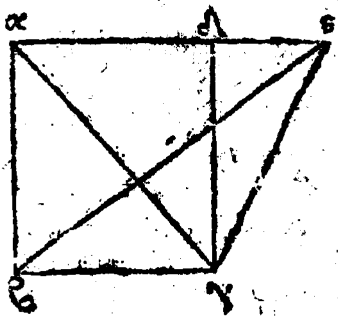
Πρότασις μα. θεώρημα.

Ἐὰν παραλληλόγραμμον, τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν: καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ: διπλάσιον ἔσται τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου.

Ἔκθεσις. Παραλληλόγραμμον γὰρ τὸ αβ

γδ

γδ, τριγώνῳ τῷ εβγ: βάσιν τε ἐχέτω τὴν αὐτὴν τὴν βγ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἔστω παραλλήλοις ταῖς βγ, αε. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι διπλάσιόν ἐστι τὸ

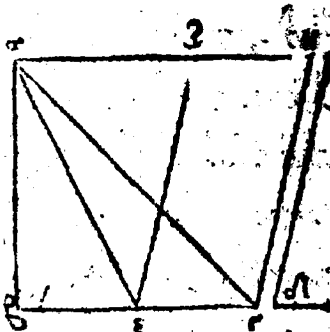


αβγδ, παραλληλόγραμμον, τοῦ βεγ τριγώνου. (Κατασκευή.) Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ αγ (Ἀπόδειξις.) Ἴσον δή ἐστι τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ εβγ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστιν αὐτῷ, τῆς βγ: καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς βγ, αε. ἀλλὰ τὸ αβγδ παραλληλόγραμμον: διπλάσιόν ἐστι τοῦ αβγ τριγώνου. ἡ γὰρ αγ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει. ὥστε τὸ αβγδ παραλληλόγραμμον, καὶ τοῦ εβγ τριγώνου ἐστὶ διπλάσιον. (Συμπέρ.) Ἐὰν ἄρα παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν: καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ: διπλάσιόν ἐστι τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις μβ. Πρόβλημα.

Τῷ δοθέντι τριγώνῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι: ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.

Ἔκθεσις.) Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν τρίγωνον, τὸ αβγ:

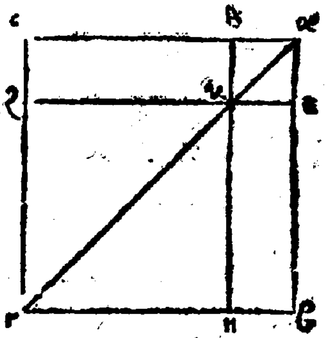


αβγ· ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθύγραμμος γωνία, ἡ δ. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ τῷ αβγ τριγώνῳ· ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν ἴσῃ τῇ δ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ. (Κατασκευή.) Τετμήσθω ἡ βγ δίχα κατὰ τὸ ε· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αε· καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ εγ εὐθείᾳ· καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ ε· τῇ δ γωνίᾳ, ἴση ἡ ὑπὸ γεζ. καὶ διὰ μὲν τοῦ α· τῇ εγ παράλληλος ἤχθω, ἡ αη· διὰ δὲ τοῦ γ, τῇ ζε παράλληλος ἤχθω ἡ γη. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ, τὸ ζεγη. (Απόδειξις.) Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ βε τῇ εγ· ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ αβε τρίγωνον, τῷ αεγ τριγώνῳ. ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεων ἐστὶ τῶν βε, εγ· καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς βγ, αη. διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τοῦ αεγ τριγώνου. ἔστι δὲ καὶ τὸ ζεγη παραλληλόγραμμον, διπλάσιον τοῦ αεγ τριγώνου. βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει· καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστὶν αὐτῷ παραλλήλοις. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ζεγη παραλληλόγραμμον, τῷ αβγ τριγώνῳ· καὶ ἔχει τὴν ὑπὸ γεζ γωνίαν, ἴσην τῇ δ. (Συμπεραπέρασμα.) Τῷ ἄρα δοθέντι τριγώνῳ τῷ αβγ: ἴσον παραλληλόγραμμον συνεστάθη τὸ ζεγη: ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ζεγ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ δ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις μγ. θεώρημα.

ΠΑντὸς παραλληλογράμμου, τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων: τὰ παραπληρώματα: ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔκθεσις.) Ἔστω παραλληλόγραμμον, τὸ αβγδ: διάμετρος δὲ αὐτοῦ, ἡ αγ: περὶ τὴν αγ, παραλληλόγραμμα μὲν ἔστω τὰ εθ, ζη: τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα, τὰ βκ, κδ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ βκ παραπλήρωμα: τῷ κδ παραπληρώματι. (Ἀπόδειξις.)



Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ αβγδ: διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ αγ: ἴσον ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ αδγ τριγώνῳ. πάλιν ἐπεὶ τὸ εκθα παραλληλόγραμμόν ἐστι: διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ακ: ἴσον ἐστὶ τὸ εακ τρίγωνον: τῷ αθκ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δή, καὶ τὸ κζγ τρίγωνον, τῷ κηγ ἐστὶν ἴσον. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν αεκ τρίγωνον, τῷ αθκ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ κζγ, τῷ κηγ. τὸ αεκ τρίγωνον μετὰ τοῦ κηγ ἐστὶν ἴσον τῷ αθκ τριγώνῳ, μετὰ τοῦ κζγ τριγώνου. ἐστὶ δὲ καὶ ὅλον τὸ αβγ τρίγωνον, ὅλῳ τῷ αδγ ἴσον. λοιπῷ ἄρα τῷ κδ παραπληρώματι, ἴσον ἐστὶ, τὸ βκ παραπλήρωμα. (Συμπέρασμα.) Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου, τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα: ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις μδ. Πρόβλημα.

ΠΑρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν: τῷ δοθέντι τριγώνῳ: ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν: ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἔκθεσις. Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα, ἡ αβ: τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον, τὸ γ: ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος, ἡ δ. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν αβ: τῷ δοθέντι τριγώ-

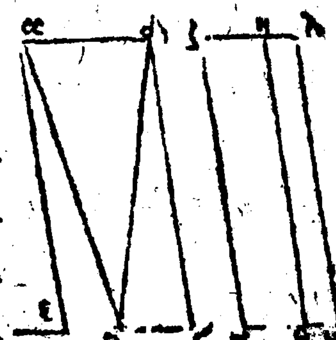
νῳ τῷ

νῳ τῷ γ: ἴσον παραλληλόγραμμον παραβα-
λεῖν, ἐν ἴσῃ τῇ δ γωνίᾳ. (Κατασκευή.) Συνε-
στάτω τῷ γ τριγώνῳ: ἴσον παραλληλόγραμ-
μον τὸ βεζη: ἐν γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ εβη, ἥ ἐστιν ἴση
τῇ δ: καὶ κείσθω ὥσπερ ἐπ᾽ εὐθείας εἶναι τὴν
βε, τῇ αβ: καὶ διήχθω ἡ ζη, ἐπὶ τὸ θ: καὶ διὰ τοῦ
α, ὁποτέρᾳ τῶν βη, εζ: παράλληλος ἤχθω ἡ
αθ: καὶ ἐπεζεύχθω ἡ θβ. (Ἀπόδειξις.) Καὶ
ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς αθ, εζ: εὐθεῖα ἐμ-
πέπτωκεν ἡ θζ. αἱ ἄρα ὑπὸ αθζ, θζε γωνίαι:
δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. αἱ ἄρα ὑπὸ βθη, ηζε
δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. αἱ δὲ ἀπὸ ἐλασ-
σόνων, ἢ δύο ὀρθῶν: εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι,
συμπίπτουσιν. αἱ θβ, ζε, ἄρα ἐκβαλλόμεναι,
συμπεσοῦνται. (Κατασκευῆς τὸ ἕτερον μέρος.)
Ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν, κατὰ τὸ κ:
καὶ διὰ τοῦ κ σημείου, ὁποτέρᾳ τῶν εα, ζθ: πα-
ράλληλος ἤχθω ἡ κλ: καὶ ἐκβεβλήσθω-
σαν αἱ θα, ηβ, ἐπὶ τὰ λ, μ, σημεῖα. (Ἀποδεί-
ξεως τὸ ἕτερον μέρος.) Παραλληλόγραμ-
μον ἄρα ἐστὶ τὸ θλκζ: διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ
βκ: περὶ δὲ θκ, παραλληλόγραμμα μὲν, τὰ
αη, με: τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα
[illegible] βζ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ λβ, τῷ βζ. ἀλλὰ καὶ

τὸ βζ, τῷ γ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον. καὶ λβ ἄρα τῷ γ, ἐστὶν ἴσον. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ηβε γωνία: τῇ ὑπὸ αβμ: ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ηβε, τῇ δ ἐστὶν ἴση: καὶ ἡ ὑπὸ αβμ, τῇ δ γωνίᾳ ἐστὶν ἴση. (Συμπέρασμα.) Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν αβ: τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ γ: ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ λβ: ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ αβμ, ἡ ἐστὶν ἴση τῇ δ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις με. Πρόβλημα.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι: ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.

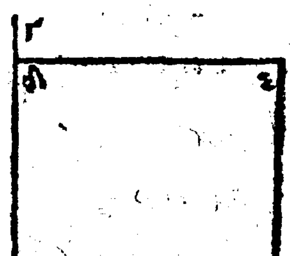


Ἔκθεσις.) Ἔστω τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον, τὸ αβγδ: ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος, ἡ ε. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ τῷ αβγδ εὐθυγράμμῳ: ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν ἴσῃ γωνίᾳ τῇ ε. (Κατασκευή.) Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ δβ: καὶ συνεστάτω τῷ αβδ τριγώνῳ: ἴσον παραλληλόγραμμον, τὸ ζθ: ἐν τῇ ὑπὸ θκζ γωνί[illegible]εϛὶν ἴση τῇ ε· καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ηθ εὐθεῖαν, τῷ δβγ τριγώνῳ· ἴσον παράλληλόγραμμον, τὸ ημ, ἐν τῇ ὑπὸ ηθμ γωνίᾳ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ ε. (Ἀπόδειξις.) Καὶ ἐπεὶ ἡ ε γωνία, ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ θκζ, ηθμ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ηθμ ἄρα τῇ ὑπὸ θκζ ἐστιν ἴση. κοινὴ προσκείσθω, ἡ ὑπὸ κθη. αἱ ἄρα ὑπὸ ζκθ, κθη· ταῖς ὑπὸ κθη, ηθμ, ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ κθη, ηθμ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. πρὸς δή τινι εὐθείᾳ, τῇ ηθ· καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ θ· δύο εὐθεῖαι αἱ κθ, θμ, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι· τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν. ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ κθ, τῇ θμ. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς κμ, ζη, εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ θη· αἱ ἐναλλὰξ ἄρα γωνίαι, αἱ ὑπὸ μθη, θηζ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ θηλ. αἱ ἄρα ὑπὸ μθη, θηλ, ταῖς ὑπὸ θηζ, θηλ, ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ μθη, θηλ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. καὶ αἱ ὑπὸ θηζ, θηλ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ζη, τῇ ηλ. καὶ ἐπεὶ ἡ κζ τῇ θη, ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ἡ θη τῇ μλ. καὶ ἡ κζ ἄρα τῇ μλ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν· καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς εὐθεῖαι, αἱ κμ, ζλ. καὶ αἱ κλ, ζμ, ἴσαι τε καὶ παράλληλοι εἰσι. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ κζλμ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν αβδ τρίγωνον, τῷ θζ παραλληλογράμμῳ: τὸ δὲ δβγ τῷ ημ, ὅλον ἄρα τὸ αβγδ εὐθύγραμμον, ὅλῳ τῷ κζλμ παραλληλογράμμῳ, ἴσον ἐστί. (Συμπέρασμα.) Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ αβγδ: ἴσον παραλληλόγραμμον συνίσταται τὸ κλμ: ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ζκμ: ἥ ἐστιν ἴση τῇ δοθείσῃ τῇ ε. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις μς. Πρόβλημα.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας: τετράγωνον ἀναγράψαι.

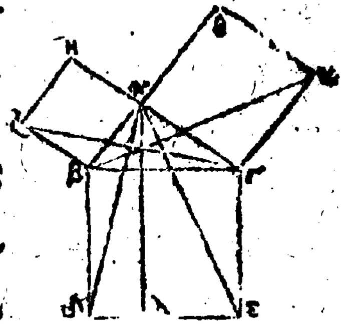
Ἔκθεσις. Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα, ἡ αβ. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς αβ εὐθείας, τετράγωνον ἀναγράψαι. (Κατασκευή.) Ἤχθω τῇ αβ εὐθείᾳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ σημείου τοῦ α: πρὸς ὀρθὰς ἡ αγ: καὶ κείσθω τῇ αβ ἴση, ἡ αδ: καὶ διὰ μὲν τοῦ δ σημείου: τῇ αβ παράλληλος ἤχθω, ἡ δε: διὰ δὲ τοῦ β σημείου, τῇ αδ παράλληλος ἤχθω, ἡ βε.



ἡ βε. (Ἀπόδειξις.) Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ αδεβ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν αβ, τῇ δε: ἡ δὲ αδ, τῇ βε. ἀλλὰ καὶ ἡ αβ, τῇ αδ ἐστὶν ἴση. αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ βα, αδ, δε, βε: ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ αδεβ παραλληλόγραμμον. (Διορισμὸς δεύτερος.) Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ γὰρ εἰς παραλλήλους τὰς αβ, δε: εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ αδ. αἱ ἄρα ὑπὸ βαδ, αδε γωνίαι: δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ βαδ. ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αδε. τῶν δὲ παραλληλογράμμων χωρίων, αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι: ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὀρθὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ἀπεναντίον τῶν ὑπὸ αβε, βεδ γωνιῶν. ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ αδεβ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον. (Συμπέρασμα.) Τετράγωνον ἄρα ἐστί: καί ἐστιν ἀπὸ τῆς αβ εὐθείας ἀναγεγραμμένον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις μζ. θεώρημα.

ΕΝ τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον: ἴσον ἐστί, τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.



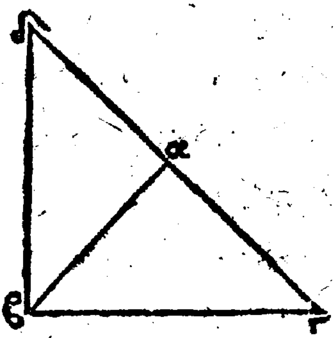
Ἔκθεσις.) Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον, τὸ αβγ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ βαγ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς βγ τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν βα, αγ τετραγώνοις. (Κατασκευή.) Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ μὲν τῆς βγ: τετράγωνον, τὸ βδγε: ἀπὸ δὲ τῶν βα, αγ: τὰ ηβ, θγ: καὶ διὰ τοῦ α, ὁποτέρᾳ τῶν βδ, γε, παράλληλος ἤχθω ἡ αλ: καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αδ, ζγ. (Ἀπόδειξις.) Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ βαγ, βαη γωνιῶν: πρὸς δή τινι εὐθείᾳ, τῇ βα: καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ α: δύο εὐθεῖαι: αἱ αγ, αη: μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι: τὰς ἐφεξῆς γωνίας, δύσιν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν. ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ γα, τῇ αη. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ αβ: τῇ αθ, ἐστὶν ἐπ' εὐθείας: καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ δβγ γωνία, τῇ ὑπὸ ζβα. ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ αβγ. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ δβα: ὅλῃ τῇ ὑπὸ ζβγ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ δβ, βα: δυσὶ ταῖς βζ, βγ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ: καὶ γωνία ἡ ὑπὸ δβα, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ζβγ, ἴση ἐστίν.

ἐστιν. βάσις ἄρα ἡ ᾱδ, βάσει τῇ ζγ̄ ἐστιν ἴση: καὶ τὸ ᾱβδ τρίγωνον, τῷ ζκγ̄ τριγώνῳ ἐστιν ἴσον: καὶ ἔστι τοῦ μὲν ᾱβδ τριγώνου, διπλάσιον τὸ βλ̄ παραλληλόγραμμον: βάσιν τε γὰρ τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν βδ: καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσὶ παραλλήλοις, ταῖς βδ, ᾱλ. τοῦ δὲ ζβγ̄ τριγώνου: διπλάσιον ἐστὶ τὸ η̄β τετράγωνον. βάσιν τε γὰρ πάλιν τὴν αὐτὴν ἔχουσι, τὴν ζβ: καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις εἰσὶ, ταῖς ζβ, η̄γ. τὰ δὲ τῶν ἴσων διπλάσια: ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ βλ̄ παραλληλόγραμμον, τῷ η̄β τετραγώνῳ. Ὁμοίως δὴ ἐπιζευγνυμένων τῶν ᾱε, βη: δειχθήσεται καὶ τὸ γλ̄ παραλληλόγραμμον, ἴσον τῷ θγ̄ τετραγώνῳ. ὅλον ἄρα τὸ ὑβεγ̄ τετράγωνον: δυσὶ τοῖς η̄β, θγ̄ τετραγώνοις, ἴσον ἐστί: καὶ ἐστὶ τὸ μὲν βδεγ̄ τετράγωνον: ἀπὸ τῆς βγ̄ ἀναγραφὲν, τὰ δὲ η̄β, θγ̄: ἀπὸ τῶν βᾱ, ᾱδ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς βγ̄ πλευρᾶς τετράγωνον: ἴσον ἐστὶ τοῖς, ἀπὸ τῶν βᾱ, ᾱγ, πλευρῶν τετραγώνοις. Συμπέρασμα.) Ἐν ἄρα τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις: τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον: ἴσον ἐστὶ, τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις μη. θεώρημα.

Ἐὰν τριγώνου, τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον· ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις· ἡ περιεχομένη γωνία, ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν, ὀρθή ἐστι.

Ἔκθεσις.) Τριγώνου γὰρ τοῦ αβγ· τὸ ἀπὸ μιᾶς τῆς βγ πλευρᾶς τετράγωνον· ἴσον ἔστω τοῖς ἀπὸ τῶν βα, αγ πλευρῶν τετραγώνοις. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ βαγ γωνία. (Κατασκευή.) Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ α σημείου, τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα, ἡ αδ· καὶ κείσθω τῇ γα, ἴση ἡ αδ καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δβ. (Ἀπόδειξις.) Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ δα, τῇ αγ· ἴσον ἐστί, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς δα τετράγωνον· τῷ ἀπὸ τῆς αγ τετραγώνῳ. κοινὸν προσκείσθω, τὸ ἀπὸ τῆς αβ τετράγωνον. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν δα, αβ τετράγωνα· ἴσα ἐστί, τοῖς ἀπὸ τῶν βα, αγ τετραγώνοις. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν δα, αβ· ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς δβ· ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἡ ὑπὸ δαβ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν αβ. αγ· ἴσον ἐστὶ τὸ ἀ-



πὸ τῆς

πὸ τῆς βγ. ὑπόκειται γάρ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς δβ τετράγωνον: ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς βγ τετραγώνῳ. ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ δβ: τῇ βγ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αδ τῇ αβ. κοινὴ δὲ ἡ αγ: δύο δὴ αἱ δα, αβ: δυσὶ ταῖς βα, αγ ἴσαι εἰσί: καὶ βάσις ἡ δβ, βάσει τῇ βγ ἐστὶν ἴση. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ δαβ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ βαγ, ἐστὶν ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ δαβ. ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ βαγ. (Συμπέρασμα.) Ἐὰν ἄρα τριγώνου, τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον: ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις: ἡ περιεχομένη γωνία, ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν ὀρθή ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΤΕΛΟΣ.

ΟΝΟΜΑΤΑ
ΕΚ ΤΩΝ ΤΟΥ ΗΡΩΝΟΣ, ΠΕΡΙ τῶν τῆς γεωμετρίας ὀνομάτων.

Ὀνόματα γεωμετρικά.

Σημεῖον ἐστὶν οὗ μέρος οὐθέν: ἢ πέρας ἀδιάστατον: ἢ πέρας γραμμῆς. πέφυκε δὲ διανοίᾳ μόνῃ ἐπιληπτὸν εἶναι: ὡσανεὶ ἀμερές τι καὶ ἀμεγεθὲς τυγχάνον. Τοιοῦτον οὖν αὐτὸ φασὶν εἶναι: οἷον ἐν χρόνῳ τὸ ἐνεστός: καὶ οἷον μονάδα θέσιν ἔχουσαν. Ὅτι μὲν οὖν τῇ οὐσίᾳ, ταυτὸν τῇ μονάδι (ἀδιαίρετα γὰρ ἄμφω, καὶ ἀσώματα, καὶ ἀμέριστα) τῇ δὲ ἐπιφανείᾳ, καὶ τῇ σχέσει διαφέρει δῆλον. ἡ μὲν γὰρ μονὰς ἀρχὴ ἀριθμοῦ: τὸ δὲ σημεῖον τῆς γεωμετρουμένης οὐσίας ἀρχή. ἀρχὴ δὲ κατ᾽ ἔκθεσιν, οὐχ ὡς μέρος τῆς γραμμῆς: ὡς τοῦ ἀριθμοῦ μέρος ἡ μονάς: προσεπινοουμένου δὲ αὐτοῦ. κινηθέντος γὰρ ἢ μᾶλλον νοηθέντος ἐν ῥύσει νοεῖται γραμμῆς. ὅτι σημεῖον ἐστὶν γραμμῆς ἀρχὴ ἐπιφανεῖα δὲ στερεοῦ σώματος.

Γραμμὴ δέ ἐστι μῆκος ἀπλατές: ἢ τὸ πρῶτον ἐν μεγέθει, τὴν ὑπόστασιν λαμβάνον: ἢ τὸ

ἐν διαἓν διαστατόν τι καὶ διαιρετόν. γίνεται δὲ σημείου ῥυέντος ἄνωθεν κάτω. ἔννοια τῇ κατὰ τὴν συνέχειαν περιέχεται· καὶ περατοῦται σημείοις· πέρας ἐπιφανείας αὐτὴ γενομένη. λέγοιτο δ' ἂν εἶναι γραμμή· τὸ διαιροῦν ἀπὸ τῆς σκιᾶς τὴν ἡλιακὴν ἀκτῖνα· ἢ ἀπὸ τοῦ πεφωτισμένου μέρους τὴν σκιάν. καὶ ἐν ἱματίῳ ὡς ἐν συνεχεῖ νοουμένῳ, τὸ χωρίζον τὴν πορφύραν ἀπὸ τοῦ ἐρίου καὶ τὸ ἔριον, ἀπὸ τῆς πορφύρας. ἤδη δὲ, κἂν τῇ συνηθείᾳ τῆς γραμμῆς ἔννοιαν ἔχομεν· ὡς μῆκος μόνον ἐχούσης· οὐκέτι δὲ πλάτος ἢ βάθος· λέγομεν γοῦν τὸ τεῖχος ἐστὶ καθ' ὑπόθεσιν πηχῶν ρ̄· οὐκέτι ἀποβλέποντες εἰς τὸ πλάτος, ἢ τὸ πάχος. ἡ ὁδὸς σταδίων. ν̄· τὸ μῆκος μόνον, οὐκέτι δὲ καὶ τὸ πλάτος αὐτῶν πολυπραγμονοῦντες· ὡς γραμμικὴν ἡμῖν εἶναι καὶ τὴν τοιαύτην ἐξαρίθμησιν· αὐτίκα καὶ εὐθυμετρικὰ καλεῖται.

Τῶν γραμμῶν αἱ μὲν εἰσὶν εὐθεῖαι· αἱ δὲ οὔ· καὶ τῶν μὴ εὐθειῶν, αἱ μὲν εἰσὶν κυκλικαί, περιφέρειαι ὀνομαζόμεναι. αἱ δὲ καμπύλαι. Εὐθεῖα μὲν οὖν γραμμή ἐστιν· ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται. ὀρθὴ οὖσα, καὶ οἷον ἐπ' ἄκρον τεταμένη. ἐπὶ τὰ πέρατα· ἥτις

δύο

δύο δοθέντων σημείων, ἡ μεταξὺ ἐλαχίστη ἐστὶ τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν γραμμῶν. καὶ ἧς πάντα τὰ μέρη, πᾶσι τοῖς μέρεσι, παντοίως ἐφαρμόζειν πέφυκε. καὶ τῶν περάτων μενόντων· καὶ αὐτὴ μένουσα: οἷον ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ στρεφομένη: καὶ περὶ τὰ αὐτὰ πέρατα τὸν αὐτὸν ἀεὶ τόπον ἔχουσα. οὔτε δὲ μία εὐθεῖα, οὔτε δύο σχῆμα τελοῦσι. Κυκλικαὶ γραμμαί εἰσι, ὅσαι περὶ ἓν σημεῖον περιφερῶς ἐπ' ἄκρον τεταμέναι: ἢ κύκλους, ἢ μέρη κύκλων ἀποτελοῦσι: μόναι τῶν ἄλλων γραμμῶν σχήματος οὖσαι ποιητικαί. Τῶν δὲ καμπύλων γραμμῶν ἐστὶν μὲν τὸ πλῆθος ἄπειρον. αἱ γὰρ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ κοῖλα ἔχουσιν: αἱ δὲ οὔ. ἐπὶ τὰ αὐτὰ μὲν οὖν κοίλη γραμμή ἐστιν: ὅταν δύο σημείων ληφθέντων αὐτῆς, ὁποίων οὖν: ἡ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα: ἤτοι κατ' αὐτῆς πίπτει τῆς γραμμῆς: ἢ ἐντός: ἐκτὸς δὲ μηδέποτε: οὐκ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κοίλη γραμμή ἐστιν ἡ οὐχ οὕτως ἔχουσα. Ἕλιξ δὲ γραμμή ἐστιν ἐν ἐπιπέδῳ μέν, ἐὰν εὐθείας, μένοντος τοῦ ἑτέρου πέρατος: καὶ κινουμένης ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἕως εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ: φέρεταί τι σημεῖον, ἀπὸ τοῦ μένοντος πέρα-

τος

τοῦ ὁμοῦ ἀρξαμένου τῇ εὐθείᾳ, καὶ ἡ μὲν ἀπὸ ταύτης τῆς εὐθείας γινομένη γραμμή: κύκλος ἐστί. ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ τῆς εὐθείας φερομένου σημείου: ἕλιξ καλεῖται. Ἐὰν παραλληλογράμμου ὀρθογωνίου, μενούσης μιᾶς πλευρᾶς, τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν: περιενεχθὲν μὲν τὸ παραλληλόγραμμον: εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι: ἅμα δὲ τοῦ παραλληλογράμμου σημεῖόν τι φέρηται κατ᾽ αὐτῆς τῆς μὴ μενούσης παραλλήλου, ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ ἑτέρου πέρατος: τὸ μὲν οὖν περιληφθὲν σχῆμα, ὑπὸ τῆς τοῦ παραλληλογράμμου κινήσεως: καλεῖται κύλινδρος: ἡ δὲ ὑπὸ τοῦ φερομένου σημείου γραμμή: γίνεται ἕλιξ: ἧς πᾶν μέρος, ἐπὶ πᾶν ἐφαρμόζει: ὅταν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ κοῖλα ἔχῃ.

Ἐπιφάνεια ἐστὶν ὃ μῆκος, καὶ πλάτος μόνον ἔχει: ἢ πέρας σώματος καὶ τόπου, ἢ τὸ ἐπὶ δύο διαστατὸν μέγεθος: ἢ τὸ παντὸς στερεοῦ τε καὶ ἐπιπέδου σχήματος: κατὰ δύο διαστάσεις μήκους καὶ πλάτους ἐπιφαινόμενον πέρας. γίνεται δὲ ῥύσει ὑπὸ γραμμῆς, κατὰ πλάτος, ἀπὸ δεξιῶν ἐπ᾽ ἀριστερὰ ῥυείσης. Καὶ νοεῖται ἂν εἶναι ἐπιφάνεια, πᾶσα σκιά, καὶ

πᾶσα

πᾶσα χρόα· καθ' ὃ καὶ χρόας ἐκάλουν, οἱ Πυθα-
γόρειοι τὰς ἐπιφανείας· νοεῖται δὲ καὶ καθ' ὃ
μίγνυται ὁ ἀὴρ τῇ γῇ· ἢ ἄλλῳ στερεῷ σώματι· ἢ
ὁ ἀὴρ ὕδατι· ἢ τὸ ὕδωρ ποτηρίῳ ἢ ἄλλῳ τινὶ δο-
χείῳ. Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥ τις ἐξ
ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται. ὀρθὴ οὖσα
ἀποτεταμμένως· ἣν ἐπειδὰν δύο σημείων ἅ-
ψηται εὐθεῖα· καὶ ὅλη αὐτὴ κατὰ πάντα τόπον
παντοίως ἐφαρμόζεται· τοῦτ' ἐστιν ἡ κατὰ ὅλην
εὐθεῖαν ἐφαρμόζουσα· καὶ ἡ ἐλαχίστη πασῶν τῶν
τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν ἐπιφανειῶν· καὶ ἧς
πάντα τὰ μέρη ἐφαρμόζειν πέφυκε. Οὐκ
ἐπίπεδοι ἐπιφάνειαί εἰσιν· αἱ μὴ οὕτως ἔχου-
σαι· τοῦτ' ἐστιν αἱ μὴ πάντη κατ' εὐθεῖαν φερό-
μεναι γραμμαί· ἔχουσαι δέ τινα ἀνωμαλίαν·
καὶ οὐκ ὀρθαὶ δι' ὅλου.

Στερεόν ἐστι σῶμα τὸ μῆκος καὶ πλάτος, καὶ
βάθος ἔχον· ἢ τὸ ταῖς τρισὶ διαστάσεσι κεχρη-
μένον. καλοῦνται δὲ στερεὰ σώματα· καὶ οἱ τό-
ποι. σῶμα μὲν οὖν μαθηματικόν ἐστι τὸ τριχῇ
διαστατόν. σῶμα δὲ ἁπλῶς τὸ τριχῇ διαστα-
τὸν μετὰ ἀντιτυπίας. περατοῦται δὲ πᾶν στε-
ρεὸν ὑπὸ ἐπιφανειῶν. γίνεται ἐπιφανείας ὑ-
πὸ τῶν πρόσω ἐπὶ τὰ ὀπίσω ἐνεχθείσης.

Γωνία

Γωνία ἐστὶ συναγωγὴ πρὸς ἓν σημεῖον: ὑπὸ κεκλασμένης ἐπιφανείας, ἢ γραμμῆς ἀποτελουμένη. κεκλασμένη δὲ λέγεται γραμμὴ, ἥτις ἐκβαλλομένη συμπίπτει αὐτὴ καθ' ἑαυτήν. Τῶν δὲ γωνιῶν αἱ μὲν εἰσὶν ἐπίπεδοι: αἱ δὲ στερεαί. καὶ τῶν ἐπιπέδων, ἢ στερεῶν: αἱ μὲν εἰσὶν εὐθύγραμμοι: αἱ δὲ οὔ. Ἐπίπεδος μὲν οὖν ἐστὶ κοινῶς γωνία, ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις. Εἰσὶ δὲ οὐ συνεχεῖς ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ γραμμαί: ὅταν ἡ ἑτέρα προσεκβαλλομένη κατὰ τὴν ἑαυτῆς σύννευσιν: μὴ πίπτει κατὰ τῆς ἑτέρας. Καὶ ἄλλως δέ. Ἐπίπεδός ἐστι γωνία, γραμμῆς ἐν ἐπιπέδῳ πρὸς ἑνὶ σημείῳ κλάσις. ἢ συναγωγὴ, πρὸς ἓν σημεῖον ὑπὸ κεκλασμένης γραμμῆς. ἐπίπεδος δὲ εὐθύγραμμος καλεῖται γωνία: ὅταν αἱ περιέχουσαι αὐτὴν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν. ἐπίπεδος δὲ γωνία ἡ ἐν ἐπιπέδῳ πρὸς ἀλλήλους σύννευσις τῶν γραμμῶν. ἢ γραμμῆς εὐθείας πρὸς ἑνὶ σημείῳ κλάσις. οὕτω γοῦν γλωχῖνας ἐκάλουν οἱ Πυθαγόροι τὰς γωνίας. Τῶν ἐν τοῖς ἐπιπέδοις οὐκ εὐθυγράμμων γωνιῶν πλῆθος ἐστὶν ἄπειρον. τῶν δ' ἐν τοῖς ἐπιπέδοις εὐθυγράμμων γωνιῶν εἴδη ἐστὶ τρία. αἱ μὲν γὰρ ὀρθαὶ, αἱ δὲ ὀξεῖαι, αἱ δὲ ἀμβλεῖαι καλοῦνται. Ορθὴ μὲν οὖν ἐστὶ γωνία, ἡ τῇ ἀντικειμένῃ ἴση. ἀντικείμεναι δ' εἰσὶν ἃς ποιεῖ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα. ὅταν γὰρ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας, ἴσας ἀλλήλας ποιεῖ· ὀρθὴ ἐστὶν, ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν. Οξεῖα γωνία ἐστὶν ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς. Αμβλεῖα δὲ ἡ μείζων ὀρθῆς. Οταν γὰρ εὐθεῖα, ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ἀνίσους ποιῇ· ἡ μὲν ἐλάττω καλεῖται ὀξεῖα· ἡ δὲ μείζων ἀμβλεῖα. Πᾶσα μὲν οὖν ὀρθὴ, πάσῃ ὀρθῇ ἐστὶν ἴση· οὐκέτι δὲ πᾶσα ὀξεῖα, πάσῃ ὀξείᾳ ἐστὶν ἴση· οὐδὲ πᾶσα ἀμβλεῖα, πάσῃ ἀμβλείᾳ ἐστὶν ἴση. Εὐθείας γὰρ ἐπ' εὐθείας σταθείσης, καὶ ἐκκλινάσης ἀπὸ τῆς ὀρθῆς μέχρι τούτου ἐλαττοῦται ἡ ὀξεῖα: ἕως συνιζίσωσιν αὗται αἱ εὐθεῖαι: καὶ ἐφίκωνται ἀλλήλων. Εὐθείας δὲ ἐπ' εὐθείας σταθείσης, καὶ ἀποκλινάσης ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας μέχρι τούτου μείζων γίνεται ἡ ἀμβλεῖα: ἕως ἂν ὑπτιάσηται ἡ κάθετος ἐπ' εὐθείας: καὶ συνεχὴς γένηται τῇ ὑποκειμένῃ.

Η γοῦν ὀρθὴ γωνία, καὶ τὸ νῦν, καὶ ἡ μονάς,

ὁμοίως

ὁμοίως ἔχουσιν. ἥτε γὰρ ὀρθὴ γωνία αἰεὶ ἕστηκεν ἡ αὐτὴ μένουσα· τῆς ὀξείας καὶ ἀμβλείας ἐπ' ἄπειρον μεταχειρίζομένης. ἥ τε μονὰς μὲν, αὐτὴ ἕστηκεν· ὁ δὲ μερισμὸς περὶ αὐτὴν, καὶ ἡ σύνθεσις· καὶ τὸ νῦν δὲ καὶ αὐτὸ ἕστηκεν· ὁ δὲ παρεληλυθὼς, καὶ ὁ μέλλων, ἐπ' ἄπειρον.

Στερεὰ γωνία κοινῶς μέν ἐστιν ἐπιφανείας ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ κοῖλα ἐχούσης πρὸς ἑνὶ σημείῳ συναγωγή. Καὶ ἄλλως δέ. στερεὰ γωνία ἐστίν· ἡ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο ἐπιπέδων γωνιῶν περιεχομένη. ἢ συναγωγὴ στερεὰ, ὑφ' ἑνὸς σημείου κεκλασμένη ἐπιφάνεια, πρὸς γραμμήν· ἥ τις ἐκβαλλομένη, οὐ συμπίπτει αὐτὴ καθ' ἑαυτῆς. Νοεῖται δὲ ἐκβαλλομένη· ὅταν μὴ φαίνεται μὴ ἐκβαίνουσα ὅλον αὐτῆς τὸ μῆκος. ὁμοίως καὶ ἐπίπεδον ἐκβαλλόμενον νοεῖται. Ἰδίως δὲ εὐθύγραμμοι στερεαὶ γωνίαι καλοῦνται· ὧν αἱ ἐπιφάνειαι αἱ ποιοῦσαι τὰς γωνίας, ὑπὸ γωνιῶν εὐθυγράμμων περιέχονται· ὡς αἱ τῶν πυραμίδων, καὶ αἱ τῶν στερεῶν πολυέδρων, καὶ αἱ τοῦ κύβου. οὐκ εὐθύγραμμοι δὲ, αἱ μὴ οὕτως ἔχουσαι, ὡς αἱ τῶν κώνων.

Σχῆμά ἐστι τὸ ὑπό τινος ἢ τινῶν ὅρων πε-

εριεχόμενον· ἢ τὸ πέρατι, ἢ πέρασι συγκλειόμε-
νον τουτέστι μὲν οὖν τὸ ἐσχηματισμένον. Λέγεται
δὲ ἄλλως. σχῆμα, πέρας συγκλεῖον ἀπὸ τοῦ
σχηματίζοντος. Εἴρηται δὲ τὸ σχῆμα παρὰ τὸ
σῆμα, ὅ ἐστι συγκλειόμενον ἢ συγκλείων. Δια-
φέρει δὲ τὸ περιέχων, πέρατος· πέρας μὲν γὰρ
καὶ τὸ σημεῖον· οὕτω δὲ σχήματος ποιητικόν.
Ὅροι δὲ σχημάτων εἰσὶν, αἵ τε ἐπιφάνειαι
καὶ γραμμαί. κέκληνται δὲ ὅροι· παρὰ τὸ ὁ-
ρίζειν μέχρι τοῦ τὸ σχῆμα· τουτέστι τὰ τέλη
τῶν σχημάτων καὶ τὰ πέρατα δείκνυται. Τῶν
δὲ σχημάτων, ἃ μὲν ἐστὶν ἐπίπεδα, ἃ δὲ στερεά·
ἐπίπεδα μὲν οὖν ἐστὶ, τὰ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ
πάσας ἔχοντα τὰς γραμμάς. στερεὰ δὲ, τὰ μὴ
ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πάσας ἔχοντα τὰς
γραμμάς. τῶν ἐν ταῖς ἐπιφανείαις σχημά-
των, ἃ μὲν ἐστὶν ἀσύνθετα· ἃ δὲ σύνθετα. ἀσύν-
θετα μὲν οὖν ἐστὶ τὰ μὴ συγκείμενα ἐκ γραμ-
μῶν. σύνθετα δὲ τὰ ἐκ γραμμῶν συγκείμενα·
τῶν δὲ συνθέτων σχημάτων, τῶν ἐν ταῖς ἐπιφα-
νείαις· ἃ μὲν ἐστὶν ἐξ ὁμογενῶν σύνθετα· ἃ δὲ
ἐξ ἀνομογενῶν. οἷον οἱ λεγόμενοι τομεῖς τῶν
κύκλων· καὶ τὰ ἡμικύκλια, καὶ αἱ ἀψίδες, καὶ
τὰ μείζονα τμήματα τῶν κύκλων· λέγοιντο

δ' ἂν

δ' αὖ οἱ μηνίσκοι, καὶ αἱ στεφάναι, καὶ τὰ παραπλήσια.

Κύκλος ἐστὶ τὸ ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον ἐπίπεδον. τὸ μὲν οὖν σχῆμα καλεῖται κύκλος. ἡ δὲ περιέχουσα αὐτὸ γραμμὴ, περιφέρεια: πρὸς ἣν ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων: πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ἐὰν μὲν οὖν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τὸ σημεῖον ᾖ: κέντρον καλεῖται: ἐὰν δὲ μὴ ᾖ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πόλος: ὡς ἔχει ἐπὶ τῶν ἐν ταῖς σφαίραις κύκλων. Λέγεται δὲ καὶ ἄλλως κύκλος γραμμὴ, ἥτις πρὸς πάντα τὰ μέρη: ἴσα ποιεῖ διαστήματα. γίνεται δὲ κύκλος ἐπ' ἂν εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὑπάρχουσα: μένοντος τοῦ ἑνὸς πέρατος τῷ ἑτέρῳ περιενεχθεῖσα εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ: ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι.

Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν εὐθεῖά τις, διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας: ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον: ἢ εὐθεῖα διὰ τοῦ κέντρου, ἕως τῆς περιφερείας διηγμένη. Ἡμικύκλιον ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς διαμέτρου, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς περιφερείας: ἢ τὸ ὑπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου: καὶ περιφερείας περιεχόμενον σχῆμα. Κοινῶς τμῆμα κύκλου ἐστὶν, ἄν τε μεῖζον, ἄν τε ἔλαττον ἡμικυκλίου, τὸ περιεχόμενον σχῆμα, ὑπὸ εὐθείας, καὶ κύκλου περιφερείας. Ἐν τμήματι γωνία ἐστὶν. ὅταν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τμήματος ληφθῇ τι σημεῖον· ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου, ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν. Τομεὺς δὲ κύκλου ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα, ὑπὸ δύο μὲν εὐθειῶν, μιᾶς δὲ περιφερείας. ἢ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τῶν τὴν τυχοῦσαν ἐν κύκλῳ, πρὸς τῷ κέντρῳ γωνίαν περιεχουσῶν: καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῶν περιφερείας. Πᾶσα περιφέρεια, κατὰ μὲν τὴν πρὸς τὸ περιεχόμενον χωρίον νόησιν: κοίλη καλεῖται: κατὰ δὲ τὴν πρὸς τὸ περιέχον κυρτή. Μηνίσκος ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ δύο περιφερειῶν: ἢ δύο κύκλων μὴ περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων: ὑπεροχὴ κοίλης καὶ κυρτῆς: ἢ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο περιφερειῶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ

μέρη

μέρη τὰ κοῖλα ἐχουσῶν. Στεφάνη δ' ἐστὶν τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τῶν δύο κυρτῶν περιφερειῶν· ἢ δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὑπεροχή. Πέλεκις δ' ἐστὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τεσσάρων περιφερειῶν· δύο κοίλων, καὶ δύο κυρτῶν. καθόλου δ' εἰπεῖν, ἀπερίληπτόν ἐστι τὸ πλῆθος τῶν ἐν τοῖς ἐπιπέδοις περιφερῶν σχημάτων· ἔτι γε μᾶλλον τῶν ἐν ταῖς ἐπιφανείαις.

Τῶν ἐν τοῖς ἐπιπέδοις εὐθυγράμμων σχημάτων· ἃ μέν ἐστι τρίγωνα, ἢ τρίπλευρα· ἃ δὲ τετράγωνα, ἢ τετράπλευρα· ἃ δὲ ἐπ' ἄπειρον πολύγωνα ἢ πολύπλευρα. Τρίγωνον ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ τριῶν εὐθειῶν περιεχόμενον· τρεῖς ἔχον γωνίας. Τῶν δὲ τριγώνων ἢ τριπλεύρων σχημάτων, τὰ γενικώτατα εἴδη ἐστὶν ἕξ. ἀπὸ μὲν γὰρ τῶν πλευρῶν· ἃ μὲν καλεῖται ἰσόπλευρα, ἃ δὲ ἰσοσκελῆ, ἃ δὲ σκαληνά. ἀπὸ δὲ τῶν γωνιῶν. ἃ μὲν ἐστιν ὀρθογώνια, ἃ δὲ ὀξυγώνια, ἃ δὲ ἀμβλυγώνια. ἐπὶ μὲν τῶν ὀρθογωνίων, δύο γένη· τό τε ἰσοσκελὲς, καὶ τὸ σκαληνόν. οὐδὲ γὰρ ὀρθογώνιον ἰσόπλευρον· τὰ δ' ἄλλα τρίγωνα τὰ μὴ ὀρθογώνια πλὴν τοῦ ἰσοπλεύρου οὐ δύο μόνον ἔχει φύσεις· ἀλλὰ καὶ ἐπ' ἄπειρον χωρεῖ. Ἰσόπλευρον μὲν οὖν ἐστιν ὅταν τρεῖς ἴσας ἔχει πλευρὰς, ἢ γωνίας. Ἰσοσκελὲς δὲ, ὅταν τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχει πλευράς. Σκαληνὰ δὲ ὅσα τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχει πλευράς. Ὀρθογώνιον δ' ἐστὶ, τὸ μίαν ἔχον ὀρθὴν γωνίαν, ὀξυγώνιον δὲ τὸ τὰς τρεῖς ὀξείας ἔχον. Ἀμβλυγώνιον δ' τὸ μίαν ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν. τὰ μὲν οὖν ἰσόπλευρα πάντα ὀξυγώνια ἐστί. τῶν δὲ ἰσοσκελῶν, καὶ σκαληνῶν· ἃ μὲν ἐστὶ ὀρθογώνια, ἃ δὲ ὀξυγώνια, ἃ δὲ ἀμβλυγώνια.

Τετράπλευρον ἐπίπεδον ἐστὶ σχῆμα, τὸ ὑπὸ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενον: τεσσάρας ἔχον γωνίας. Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων, ἃ μὲν ἐστὶ ἰσόπλευρα· ἃ δὲ οὔ. τῶν δὲ ἰσοπλεύρων, ἃ μὲν ὀρθογώνια, ἃ δὲ οὔ. τὰ μὲν οὖν ὀρθογώνια ἰσόπλευρα: τετράγωνα καλεῖται. τὰ δὲ ὀρθογώνια μὲν μὴ ἰσόπλευρα δὲ· ἑτερομήκη καλεῖται. τὰ δὲ ἰσόπλευρα μὲν μὴ ὀρθογώνια δὲ· ῥόμβοι. τὰ δὲ μήτε ἰσόπλευρα, μήτε ὀρθογώνια, τὰς δὲ ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχοντα ῥομβοειδῆ καλεῖται. Ἐπὶ τῶν τετρα-

πλεύ-

πλεύρων, ἃ μὲν καλεῖται παραλληλόγραμμα· ἃ δὲ οὐ παραλληλόγραμμα. παραλληλόγραμμα μὲν οὖν τὰ τὰς ἀπεναντίον πλευρὰς παραλλήλους ἔχοντα· οὐ παραλληλόγραμμα δὲ, τὰ μὴ οὕτως ἔχοντα. Τῶν δὲ παραλληλογράμμων, ὀρθογώνια ὅσα περιέχεσθαι λέγεται ὑπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν. ἔστι γὰρ μέγιστον τῶν ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένων παραλληλόγραμμον, τὸ ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ. ἄπειρον γὰρ ἐπινοεῖται. παραλληλόγραμμα δὲ ὅσα ὑπὸ τῶν περιεχομένων πλευρῶν διάφορα κατὰ τὸ ἐμβαδὸν τυγχάνοντα, ἐλάττονα γίνεται: τὸ δὲ ἔχον τὴν ὀρθὴν μέγιστον. Ἐπεὶ οὖν ἐλάττους ἀεὶ ὀξεῖαι εὑρίσκονται: οἱ βουλόμενοι ἀναμετρεῖν τὰ τοιαῦτα σχήματα: ὅρον ὑπόστασιν ἔθεντο, τὸν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν λόγον. Παντὸς δὲ παραλληλογράμμου, τῶν περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ παραλληλογράμμων: ἓν ὁποιονοῦν, σὺν τοῖς δύσι παραπληρώμασι, γνώμων καλεῖται. Καθόλου δὲ γνώμων ἐστὶν πᾶν ὃ προσλαβὼν ὁποιοῦν ἀριθμὸν ἢ σχῆμα ποιεῖ τὸ ὅλον ὅμοιον ὃ προσείληφεν. Τῶν παρὰ τὰ εἰρημένα τετραπλεύρων ἃ μὲν τραπέζια λέγεται, ἃ δὲ τραπεζοειδῆ. τραπέζια μὲν οὖν ἐστὶν ὅσα μόνον δύο παραλλήλους ἔχει πλευράς· τραπεζοειδῆ ὅσα μὴ ἔχει παραλλήλους πλευράς. Τῶν δὲ τραπεζίων ἃ μέν ἐστιν ἰσοσκελῆ, ἃ δὲ σκαληνά· ἰσοσκελῆ μὲν οὖν ἐστιν, ὅσα ἴσας ἔχει τὰς μὴ παραλλήλους. Σκαληνὰ δὲ ὅσα ἀνίσους ἔχει τὰς μὴ παραλλήλους.

Πολύπλευρα ἐπίπεδα σχήματά ἐστι τὰ ὑπὸ πλειόνων, ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα. οἷον πενταγώνια, καὶ τὰ ἑξῆς πολύγωνα ἐπ᾽ ἄπειρον προϊόντα.

Βάσις λέγεται ἐπιπέδου χωρίου γραμμὴ ἡ ὡσανεὶ κάτω νοουμένη. πλευρὰ δὲ μία τῶν τὸ σχῆμα περικλειουσῶν. Διαγώνιος δὲ ἡ ἀπὸ γωνίας εἰς γωνίαν ἀγομένη εὐθεῖα. Κάθετος δέ ἐστιν ἡ ἀπὸ σημείου εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθεῖαν ἠγμένη. Κάθετος δὲ πρὸς ὀρθὰς λέγεται, ἡ ὀρθὰς ποιοῦσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας τῇ ἐφεστηκυίᾳ εὐθείᾳ. Παράλληλοι δὲ καλοῦνται γραμμαὶ ἀσύμπτωτοι· ὅσαι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, καὶ ἐκβαλλόμεναι ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις· αἳ μήτε συννεύουσι, μήτε ἀπονεύουσιν ἐν ἐπιπέδῳ· ἴσας δ᾽ ἔχουσι τὰς καθέτους πάσας.

τὰς ἀγομένας ἀπὸ τῶν τῆς ἑτέρας σημείων ἐπὶ τὴν λοιπήν. Οὐ παράλληλοι δὲ εὐθεῖαί εἰσιν, ὅσαι συννεύουσαι μείζους ἀεὶ τὰς καθέτους ποιοῦσι. Τριγώνου ὕψος καλεῖται, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀγομένη.

Ὀνόματα στερεομετρικά.

Τῶν ἐν τοῖς στερεοῖς σχήμασι ἐπιφανειῶν αἱ μὲν ἀσύνθετοι λέγονται· αἱ δὲ σύνθετοι. ἀσύνθετοι μὲν οὖν τῶν στερεῶν εἰσὶν ὅσαι ἐκβαλλόμεναι αὐταὶ καθ᾽ ἑαυτὰς πίπτουσιν. οἷον ἡ τῆς σφαίρας. σύνθετοι δὲ ὅσαι ἐκβαλλόμεναι, τέμνουσιν ἀλλήλας. τῶν δὲ συνθέτων, αἱ μὲν ἐξ ἀνομογενῶν εἰσὶ σύνθετοι, ὡς αἱ τῶν κώνων, καὶ κυλίνδρων, καὶ τῶν τούτοις ὁμοίων. ἐξ ὁμογενῶν δὲ αἱ τῶν στερεῶν εὐθυγράμμων. καὶ καθ᾽ ἑτέραν δὲ διαίρεσιν τῶν ἐν τοῖς στερεοῖς σχήμασι τῶν ἐπιφανειῶν, αἱ μέν εἰσιν ἁπλαῖ, αἱ δὲ μικταί. ἁπλαῖ μὲν οὖν εἰσιν ἐν τοῖς στερεοῖς ἐπιπέδοις ἡ σφαιρική· μικταὶ δὲ ἥ τε κωνικὴ καὶ κυλινδρική, καὶ αἱ ταύτης ὅμοιαι. αὗται μὲν οὖν μικταὶ ἐξ ἐπιπέδου, καὶ περιφερείας·

νη, καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη τῆς σφαίρας ἀμετακίνητος· περὶ ὃν ἡ σφαῖρα κινεῖται καὶ στρέφεται. Τὰ τοῦ ἄξονος ἄκρα πόλοι καλοῦνται. Ἐὰν δὲ ἡ σφαῖρα τμηθῇ· ἡ τομὴ κύκλος γίνεται. Κύκλου δὲ πόλος ἐν τῇ σφαίρᾳ λέγεται· σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας· ἀφ' οὗ πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι, πρὸς τὴν περιφέρειαν, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὥσπερ δὲ τῶν ἐπιπέδων ἰσοπεριμέτρων σχημάτων· μείζων ἐστὶ κύκλος· οὕτως τὸ τῆς σφαίρας σχῆμα πάντων τῶν στερεῶν ἰσοπεριμέτρων μέγιστόν ἐστι, διὸ καὶ περιεκτικὸν τῶν ἄλλων ἁπάντων ἐλαττόνων.

Κῶνός ἐστι σχῆμα στερεὸν βάσιν μὲν ἔχον κύκλον· συναγόμενον δὲ ὑφ' ἓν σημεῖον. ἐὰν γὰρ ἀπὸ μετεώρου σημείου ἐπὶ κύκλου περιφερείας· εὐθεῖά τις προσβληθῇ· καὶ περιενεχθεῖσα εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ· τὸ ἀπογενηθὲν σχῆμα κῶνος γίνεται. Καὶ ἄλλως. Ἐὰν ὀρθογωνίου τριγώνου, μενούσης μιᾶς πλευρᾶς, τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν, περιενεχθὲν τρίγωνον σχῆμα· εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι τὸ περιληφθὲν σχῆμα· ἡ μὲν γινομένη ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης

τοῦ

τοῦ τριγώνου πλευρᾶς περιοχὴ· ἐπιφάνεια κωνικὴ καλεῖται· τὸ δὲ περιληφθὲν σχῆμα στερεὸν, κῶνος. Βάσις δὲ κώνου ὁ κύκλος καλεῖται. Κορυφὴ δὲ κώνου τὸ σημεῖον. Ἄξων δὲ κώνου, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς, ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα· τοῦτ' ἐστὶ ἡ μένουσα. Ἰσοσκελὴς δὲ κῶνος λέγεται, ὁ τοῦ τριγώνου ἴσας ἔχων τὰς πλευράς. Σκαληνὸς δὲ κῶνος ὁ ἄνισος λέγεται. Ὀρθογώνιος δὲ κῶνος ἐστὶν, ἐὰν ἡ μένουσα πλευρὰ, ἴση ᾖ τῇ περιφερομένῃ. ἢ οὗ τμηθέντος διὰ τοῦ ἄξονος, τὸ γινόμενον ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ σχῆμα τρίγωνον ὀρθογώνιον γίνεται. Ὀξυγώνιος δὲ κῶνος ἐστὶν οὗ ἡ μένουσα μείζων ἐστὶ τῆς περιφερομένης· ἢ οὗ τμηθέντος τὸ γινόμενον σχῆμα τρίγωνον ὀξυγώνιον γίνεται. Ἀμβλυγώνιος δὲ κῶνος ἐστὶν, οὗ ἡ μένουσα πλευρὰ, ἐλάττων ἐστὶ τῆς περιφερομένης· ἢ οὗ τμηθέντος τὸ γινόμενον ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ σχῆμα, τρίγωνον ἀμβλυγώνιον γίνεται. Κόλουρος δὲ κῶνος καλεῖται, ὁ τὴν κορυφὴν κολοβωθεῖσαν ἐσχηκὼς· ἡ δὲ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου· ἄλλως μὲν κυρτὴ καλεῖται· ἄλλως δὲ κοίλη. Τεμνόμενος δὲ κῶνος διὰ τῆς κορυφῆς τρίγωνον ποιεῖ τὴν τομήν· παραλλήλως δὲ τῇ βάσει τμηθεὶς, κύκλον· μὴ παραλλήλως δὲ τμηθεὶς ἄλλο τι γένος γραμμῆς ὃ καλεῖται κώνου τομή. Τῶν δὲ τοῦ κώνου τομῶν, ἡ μὲν καλεῖται ὀρθογώνιος· ἡ δὲ ἀμβλυγώνιος, ἡ δὲ ὀξυγώνιος. ὀρθογώνιος μὲν οὖν ἡ ἑαυτῇ συνάπτουσα καὶ ποιοῦσα σχῆμα θυρεοειδές· καλεῖται δὲ ὑπό τινων καὶ ἔλλειψις· ἡ δὲ τοῦ ὀρθογωνίου καλεῖται παραβολή· ἡ δὲ τοῦ ἀμβλυγωνίου ὑπερβολή.

Κύλινδρος ἐστὶ σχῆμα στερεὸν, ὅπερ νοεῖται ἀποτελούμενον, παραλληλογράμμου ὀρθογωνίου, περὶ μίαν τῶν πλευρῶν μενουσαν στραφέντος· καὶ ἀποκατασταθέντος ὅθεν καὶ ἤρξατο φέρεσθαι. ἡ δὲ μένουσα εὐθεῖα περὶ ἣν ἡ στροφὴ, ἄξων λέγεται. οἱ δὲ βάσεις κύκλοι, οἱ γινόμενοι ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν τοῦ παραλληλογράμμου. Τομαὶ δὲ κυλίνδρου, αἱ μὲν παραλληλόγραμμα, αἱ δὲ ὀξυγωνίων κώνων γραμμαί. Τέμνεται δὲ στερεὸν μὲν ὑπὸ ἐπιφανείας, ἐπιφάνεια δὲ ὑπὸ γραμμῆς, γραμμὴ δὲ ὑπὸ στιγμῆς. ἐνίοτε δὲ ὑπὸ γραμμῆς λέγεται τέμνεσθαι· κατὰ ἀναφορὰν τὴν ἐπὶ τὴν στιγμήν. καὶ ἐπιφάνεια δὲ ὑπὸ ἐπιφα-

νείας·

νίας· κατὰ ἀναφορὰν τὴν ἐπὶ τὴν γραμμήν.

Σπεῖρα γίνεται ὅταν κύκλος ἐπὶ κύκλου τὸ κέντρον ἔχων· ὀρθὸς ὢν πρὸς τοῦ κύκλου ἐπίπεδον περιενεχθεὶς, εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ. τὸ δὲ αὐτὸ τοῦτο, καὶ κρίκος καλεῖται. Διεχὴς μὲν οὖν ἐστι σπεῖρα ἡ ἔχουσα διάλημμα. συνεχὴς δὲ ἡ καθ᾽ ἓν σημεῖον συμπίπτουσα. ἐπαλλάττουσα δὲ, καθ᾽ ἣν ὁ περιφερόμενος κύκλος αὐτὸς αὐτὸν τέμνει. γίνονται δὲ καὶ τούτων τομαὶ γραμμαί τινες ἰδιάζουσαι. οἱ δὲ τετράγωνοι κρίκοι, ἐκ πρίσματα εἰσὶ κυλίνδρων. γίνονται δὲ καὶ ἄλλα τινὰ ποικίλα πρίσματα, ἔκ τε σφαιρῶν καὶ ἐκ μικτῶν ἐπιφανειῶν.

Τῶν δὲ εὐθυγράμμων στερεῶν σχημάτων, ἃ μὲν καλεῖται πυραμίδες, ἃ δὲ κύβοι· ἃ δὲ πολύεδρα· ἃ δὲ πρίσματα· ἃ δὲ δοκίδες· ἃ δὲ πλινθίδες ἃ δὲ σφηνίσκοι· καὶ τὰ παραπλήσια. Πυραμὶς μὲν οὖν ἐστι σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον· ἀφ᾽ ἑνὸς ἐπιπέδου πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνεστηκόν. Καὶ ἄλλως δὲ λέγεται πυραμὶς τὸ ἀπὸ βάσεως τριπλεύρου, ἢ τετραπλεύρου, ἢ πολυγώνου τοῦτ᾽ ἐστὶν ἁπλῶς εὐθυγράμμου κατὰ σύνθεσιν

τριγώ-

τριγώνων, εἰς ἓν σημεῖον συναγόμενον σχῆμα. Ἰδίως δὲ ἰσόπλευρος λέγεται πύραμις, ἡ ὑπὸ τεσσάρων τριγώνων ἰσοπλεύρων περιεχομένη, καὶ γωνιῶν. καλεῖται δὲ τὸ σχῆμα τοῦτο καὶ τετράεδρον. Εἰκοσάεδρον ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων ἰσοπλεύρων περιεχόμενον. Εἰσὶ δὲ πέντε μόνον ταῦτα τὰ ὑπὸ ἴσων καὶ ὁμοίων περιεχόμενα· ἃ δὴ ὑπὸ τῶν ἑλλήνων ὕστερον ἐπονομάσθη πλάτωνος σχήματα· τῶν δὲ πέντε τούτων αἱ πλευραὶ λόγον ἔχουσι πρὸς τὴν σφαῖραν. Εὐκλείδης μὲν οὖν ἐν τῷ ιγ τῶν στοιχείων, ἀπέδειξε, πῶς ἡ σφαῖρα τὰ πέντε ταῦτα σχήματα περιλαμβάνει. μόνα γὰρ τὰ Πλάτωνος οἴεται: Ἀρχιμήδης δὲ τρία καὶ δέκα ὅλα φησὶν εὑρίσκεται σχήματα δυνάμενα ἐγγραφῆναι τῇ σφαίρᾳ, προστεθεὶς ὀκτὼ: μετὰ τὰ εἰρημένα πέντε: ὧν εἶδεναι καὶ πλάτωνα φασίν. Τὸ τεσσαρες καὶ δεκάεδρον εἶναι τοῦτο διπλοῦν. τὸ μὲν ἐξ ὀκτὼ τριγώνων καὶ τετραγώνων ἕξ. σύνθετον δὲ ἐκ γῆς καὶ ἀέρος. ὅπερ καὶ τῶν ἀρχαίων τινὲς ἤδεσαν. τὸ δὲ ἕτερον πάλιν ἐκ τετραγώνων μὲν ὀκτὼ τριγώνων δὲ ἓξ ὃ καὶ χαλεπώτερον εἶναι δοκεῖ. καθόλου δὲ τῶν εὐθυγράμμων στερεῶν σχημάτων· ἃ μέν ἐστι πυραμίδες· ἃ δὲ πρίσματα· ἃ δ᾽ οὔτε πυραμίδες, οὔτε πρίσματα· τί μὲν οὖν ἐστι πύραμις περιείρηται. Ὀκτάεδρον ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ὀκτὼ τριγώνων ἰσοπλεύρων περιεχόμενον. Δωδεκάεδρον δὲ ἐστὶ σχῆμα ὑπὸ ιβ πενταγωνίων ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον· τὸ δὲ πεντάγωνον ἐξ οὗ γίνεται τὸ * δωδεκάεδρον· ἴσον ἐστὶ τριγώνοις τρισὶ παρὰ δύο πλευρῶν. Κύβος ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ἓξ τετραγώνων ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον· καλεῖται δὲ τὸ σχῆμα τοῦτο καὶ ἑξάεδρον. Πρίσματα δὲ ἐστὶ τὰ ἀπὸ βάσεως εὐθυγράμμων σύνθεσιν πρὸς χωρίον εὐθύγραμμον συνάπτοντα· οὔτε δὲ πυραμίδες, οὔτε πρίσματα ἐστὶν τὰ ἀπὸ βάσεως εὐθυγράμμου, καὶ εὐθύγραμμον σύνθεσιν πρὸς εὐθεῖαν συνάπτοντα. Τῶν δὲ πρισμάτων παραλληλόπλευρα καλεῖται· ὅσα ἑξάεδρα ὄντα· τὰ ἀπεναντίον ἐπίπεδα παράλληλα ἔχει. Παράλληλα δὲ ἐπίπεδα ἐστιν· ὅσα ἐκβαλλόμενα οὐ συμπίπτει ἀλλήλοις· ἢ ἐν οἷς ἴσων καὶ ὁμοίων τριγώνων τινῶν γραφέντων· ἑκάστη πλευρὰ παράλληλος ἐστίν. Κάθετος δ᾽ ἐν στερεῷ λέγεται, ἡ ἀπὸ μετεωρου σημείου, πρὸς ἐπίπεδον ἠγμένη· ἥτις πάσαις ταῖς ἁπτομέναις αὐτῆς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. Τῶν δὲ παραλληλοπλεύρων πρισμάτων: ἃ μὲν ἐστὶν ὀρθογώνια: ἃ δὲ οὐκ ὀρθογώνια. ὀρθογώνια μὲν οὖν ἐστιν, ὅσα ἑκάστην τῶν ὀρθογωνίων ὑπὸ τριῶν γωνιῶν περιεχομένην ἔχει γραμμήν. οὐκ ὀρθογώνια δὲ τὰ μὴ οὕτως ἔχοντα. Δοκὶς δ' ἐστὶν ὃ τὸ μῆκος μεῖζον ἔχει τοῦ τε πλάτους καὶ τοῦ πάχους: ἐστὶ δ' ὅτε τὸ πλάτος καὶ τὸ πάχος ἴσα. πάχος δὲ καὶ βάθος καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ λέγεται. Πλινθὶς δ' ἐστὶ τὸ ἔχον τὸ μῆκος ἔλαττον τοῦ τε πλάτους, καὶ βάθους: ἐστὶ δ' ὅτε ταῦτα ἀλλήλοις ἴσα. Σφηνίσκος δ' ἐστὶ τὸ ἔχον ἄνισα ἀλλήλοις, τό τε μῆκος, καὶ τὸ πλάτος, καὶ τὸ βάθος: τινὲς δὲ καὶ βωμίσκον καλοῦσι τὸ τοιοῦτον σχῆμα.

Τὰ πάθη τῆς γεωμετρίας.

Ἐφάπτεται δὲ γραμμὴ γραμμῆς, καὶ ἐπιφανείας, καὶ στερεοῦ, κατὰ στιγμήν, καὶ κατὰ γραμμήν. στιγμὴ δὲ στιγμῆς ἁψαμένη μία γίνεται. γραμμὴ δὲ γραμμῆς ἁψαμένη: ὅλη ὅλης: ὁμοίως μία γίνεται. Εὐθεῖα δὲ κύκλου ἐφάπτεσθαι λέγεται ἥτις ἁπτομένη τοῦ κύκλου, καὶ ἐκβαλλομένη, ἐπὶ μηδέτερα τὰ μέρη τέμνει τὸν κύκλον. Κύκλοι δ' ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται: οἵτινες ἁπτόμενοι ἀλλήλων, οὐ τέμνουσι ἀλλήλους. Εὐθεῖα δὲ πρὸς ἐπίπεδον ὀρθή ἐστι, ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιεῖ τὰς γωνίας. Ἐπίπεδον δὲ πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστιν: ὅταν αἱ τῇ κοινῇ αὐτῶν τομῇ πρὸς ὀρθὰς ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων ἀγόμεναι εὐθεῖαι: καὶ τῷ λοιπῷ πρὸς ὀρθάς ὦσιν: ἐπίπεδα δὲ παράλληλα ἐστὶ τὰ ἀσύμπτωτα.

Διάφοροι μὲν καὶ ἐν στερεοῖς, καὶ ἐν ἐπιπέδοις ἤδη δὲ καὶ ἐν γραμμαῖς, ὁμοιότης καὶ ἰσότης: οὕτω γοῦν καὶ ἐν τῷ ἕκτῳ τῶν τοῦ Εὐκλείδου στοιχείων. Δύο δοθέντων εὐθυγράμμων, ᾧ μὲν ὅμοιον, ᾧ δὲ ἴσον συστήσασθαι πρόκειται: κἀκεῖ μέσον ἀνάλογον εὑρόντες: διὰ ταύτης κατασκευάζομεν τὸ προβληθὲν ἐπὶ δὲ τῶν στερεῶν διὰ δύο μεσοτήτων. Νυνὶ δὲ καθόλου λέγωμεν περὶ μὲν ἴσων ὅτι ἴσαι γραμμαί εἰσιν, καὶ ἐπιφάνειαι καὶ στερεά: ὅσα ἁρμόττει ὅλα ὅλοις, ἢ κατὰ γένος, ἢ κατὰ σχηματισμόν. Λέγεται δὲ ἴσον, καὶ τὸ ἰσοπεριμετρον τῇ περιοχῇ, καὶ τὸ ἴσον ταῖς γραμμαῖς: ὥστε καὶ τῷ ἐμβαδῷ, καὶ τῷ μόνῳ ἐμβαδῷ: Ισαι δὲ γωνίαι εἰσὶν αἱ ἐφαρμόζουσαι ὅλαι ὅλοις, ἐν τοῖς ἐπιπέδοις, ἢ ἐν τοῖς στερεοῖς, κατὰ τὴν αὐτὴν συναγωγήν, ἢ κατὰ γένος, ἢ κατὰ σχηματισμόν. Ισοι δὲ κύκλοι εἰσίν, ὧν αἱ διάμετροι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν: ἀπὸ γὰρ τῶν αὐτῶν διαμέτρων οὐκ ἐστὶν ἕτερον καὶ ἕτερον κύκλον ἐπινοῆσαι. Δοθείσης δὲ τῆς διαμέτρου: δέδοται καὶ ὁ κύκλος τῷ μεγέθει. Ισον δὲ ἀπέχειν τὰς εὐθείας λέγεται τοῦ κέντρου: ὅταν ἀπὸ τοῦ κέντρου, ἐπ᾽ αὐτὰς κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ὦσιν. Μεῖζον δὲ ἐφ᾽ ἣν ἡ μείζων κάθετος πίπτει. Ισα δὲ καὶ ὅμοια στερεὰ σχήματά ἐστι: τὰ ὑπὸ ἴσων ἐπιπέδων περιεχόμενα, καὶ ὁμοίως κειμένων, ἴσων τὸ πλῆθος καὶ τὸ μέγεθος.

Ομοια ἐστὶ σχήματα εὐθύγραμμα τὰ ἔχοντα κατὰ μίαν τὰς γωνίας ἴσας, καὶ ἄλλως. ὅσα τάς τε γωνίας ἴσας ἔχει κατὰ μίαν: καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον. Αντιπεπονθότα δὲ σχήματά ἐστιν, ἐν οἷς ἐν ἑκατέρῳ τῶν σχημάτων ἡγούμενοί τε καὶ ἑπόμενοι λόγοι εἰσίν. Ομοια τμήματα κύκλων

ἐστι, τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας. ἢ ἐν οἷς αἱ γω-
νίαι ἴσαι εἰσί. Παραπλησίως γὲ καὶ τμήμα-
τα σφαιρῶν ὅμοια στερεὰ σχήματά ἐστι, τὰ ὑ-
πὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα καὶ ὁμοίως
κειμένων. Πᾶς δὲ κύκλος παντὶ κύκλῳ ὅ-
μοιός ἐστι τῷ εἴδει. μία γὰρ ἡ γένεσις τοῦ κύ-
κλου, καὶ ἓν τὸ εἶδος: τῶν δὲ τμημάτων οὐκ
ἔστιν ἡ αὐτὴ ὁμοιότης. ἀλλ' ὅσα μὲν ἔχει τὴν ὁ-
μοίαν κλίσιν: τοῦτ' ἐστι τὰς ἐν αὐτοῖς γωνίας
ἀλλήλαις ἴσας: ταῦτα καλεῖται ὅμοια: οὐχ ὅ-
μοια δὲ τὰ μὴ οὕτως ἔχοντα: παραπλησίως
δ' ἔχει καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ἐπιπέδων τε καὶ
στερεῶν σχημάτων.

Μέγεθός ἐστι τὸ αὐξανόμενον, καὶ τὸ τεμ-
νόμενον εἰς ἄπειρον: εἴδη δ' αὐτοῦ τρία γραμ-
μή, ἐπιφάνεια, στερεόν. ἄπειρον δ' ἐστι μέγεθος,
οὗ μεῖζον οὐθὲν νοεῖται καθ' ὑπόστασιν ἡλικην-
δήποτε: ὥστε μηδὲν εἶναι αὐτοῦ πέρας. Μέρος
ἐστὶ μέγεθος μεγέθους τὸ ἔλαττον τοῦ μείζο-
νος: ὅταν καταμετρῇ τὸ μείζων. εἴρηται δὲ
τὸ μέρος νῦν, οὔτι ὡς κόσμου μέρος ἡ γῆ, οὔτε
ὡς ἀνθρώπου κεφαλή: ἀλλὰ μὲν οὐδὲ ὡς τῆς
πρὸς ὀρθὰς τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου ἀπ' ἄ-
κρας ἀγομένης, λέγωμεν μέρος εἶναι τὴν

ἐκτὸς

ἐκτὸς τοῦ ἡμικυκλίου λαμβανομένην γωνίαν ὑπὸ τῆς πρὸς ὀρθάς. ἀδύνατον γάρ ἐστιν ὑπὸ ταύτης τῆς γωνίας ἥ τις κερατοειδὴς καλεῖται καταμετρηθῆναι τὴν ὀρθήν, πάσης γωνίας εὐθυγράμμου ἐλάττονος οὔσης τῆς κερατοειδοῦς. Μᾶλλον οὖν τὸ ἐν μεγέθει μέρος ἐπὶ τῶν ὁμοιογενῶν ληψόμεθα: καὶ οὕτως ἐροῦμεν τὸ ἐν μεγέθεσι μέρος, ὡς τὴν τοῦ τρίτου ὀρθῆς γωνίαν λέγομεν τῆς ὀρθῆς μέρος εἶναι. Τὸ γὰρ σοφισμάτιον ἐκεῖνο παραλειπτέον τὸ λεγόμενον ὅτι εἰ τὸ μέρος ἐστὶ τὸ καταμετροῦν: καὶ τὸ καταμετροῦν ἐστὶ μέρος. καταμετρεῖται δὲ τὸ στερεὸν ὑπὸ ποδιαίας εὐθείας. μέρος ἄρα ἡ ποδιαία εὐθεῖα τοῦ στερεοῦ. καὶ στερεὸν ἐστὶν ἡ ποδιαία εὐθεῖα. ὅπερ ἄτοπον. ποδιαία εὐθεῖα τὸ μῆκος καταμετρεῖ τοῦ στερεοῦ, καὶ τὸ βάθος καὶ τὸ πλάτος ὅπερ εἰσὶν ὁμοιογενῆ αὐτῇ τῇ εὐθείᾳ: οὐ μὴν τὸ στερεόν. Πολλαπλάσιον ἐστὶ τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάττονος, ὅταν καταμετρεῖται ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος.

Τί μέρος μὲν οὖν ἐστὶ καὶ λόγος, καὶ τίνα ὁμογενῆ ἅμα καὶ τί ἀναλογία εἴρηται μὲν ἀκριβέστερον ἐν τοῖς περὶ τῆς ἀριθμητικῆς στοιχειώσεως. νῦν δὲ λέγομεν: ὅτι ὡς ἐπὶ τῶν ἄλλων ὁμοιογενῶν ἡ ἀναλογία ἐφαρμόζει· οὕτω καὶ ἐπὶ τῶν ἐν τοῖς μεγέθεσιν ὁμοιογενῶν. Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα τὰ μεγέθη λέγεται· ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν. πρὸς δὲ τοὺς ἀντιθέτους τοῦ ὅρῳ τούτῳ· καὶ λέγοντας· ὅτι μόνα λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν. οὐδὲν δὲ οὕτως ὁμογενὲς, ὡς σημεῖον σημείου· ἄρα ὅτι πολλαπλασιαζόμενον τὸ σημεῖον, ὑπερέξει τοῦ σημείου. πρὸς δὲ τούτους ῥητέον, ὅτι τὸν κατὰ μέγεθος πολλαπλασιασμὸν οὐκ ἐπιδέχεται τὸ σημεῖον. ὁ γὰρ ἀτυχεῖ μεγέθους· τοῦτο ἀτυχεῖ καὶ τοῦ κατὰ μέγεθος πολλαπλασιασθῆναι. μόνως δὲ ἐπιδέξεται πολλαπλασιασμὸν κατ᾽ ἀριθμὸν οὕτως. ἐπειδὴ ἐν τῇ εὐθείᾳ ἄπειρα ἐστὶ σημεῖα, τὰ τοσάδε τοσῶνδε ἐστὶ πολλαπλάσια· ὅλως τι ὡς περὶ μεγέθους διαλέγονται τοῦ, ἔχοντός τινα διάστασιν. τοῦ συχνῶς δὲ ἄντικρυς· τὸ μὲν σημεῖον ἀμερές· λόγον δὲ ἔχειν πρὸς ἄλληλα τὰ μεγέθη εἴποντος.

Ε. τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθει λέγονται πρῶτον πρὸς δεύτερον· καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον· ὅταν τοῦ πρώτου καὶ τοῦ τρίτου ἰσάκις πολλαπλά-

σια

σια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἄλλων ὡς ἔτυχε ἰσάκις πολλαπλασίων ἢ ἅμα ὑπερέχει· ἢ ἅμα ἐλλείπει· ἢ ἅμα ἴσα ᾖ ληφθέντα κατ' ἄλληλα· τὰ δὲ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντα ἀνάλογον καλείσθω. Αναλογία δ' ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστοις ἐστίν. ἐνταῦθα ὅρων λαμβανομένων ἤτοι τῶν μεγεθῶν, ἤτοι τῶν ἐπικειμένων αὐτοῖς ἀριθμῶν. ὡς γὰρ κύκλου ὅρος ἐστὶν ἡ περιφέρεια, καὶ τριγώνου αἱ πλευραὶ οὕτω τοῦ θ πρὸς τὸν ϛ λόγου ὅροι εἰσὶν οἱ αὐτοὶ ἀριθμοί. Οταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον φησὶ γοῦν Ερατοσθένης, ὅτι ὥσπερ ἐπὶ τῶν διαστημάτων ἴσων καὶ κατ' εὐθεῖαν κειμένων τὰ διαστήματα διπλασιάζεται: οὕτως καὶ ἐπὶ τῶν λόγων, ὡσανεὶ κατ' εὐθεῖαν κειμένων, τὸ $\overline{α}$ πρὸς τὸ $\overline{γ}$ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον. τὰ γὰρ $\overline{θ}$ τῶν $\overline{ϛ}$ ἀφέστηκεν ἡμιολίῳ καὶ τὰ $\overline{ϛ}$ τῶν $\overline{δ}$ τῷ αὐτῷ ἡμιολίῳ. τὰ ἄρα θ τῶν $\overline{δ}$ ἀφέστηκεν δυσὶν ἡμιολίοις. καὶ γὰρ αἱ ὑπεροχαὶ αἱ δύο τῇ μιᾷ εἰσὶν αὐταί. οἷον ὡς ἐπὶ τῶν θ. καὶ τῶν δ. ὑπερέχει γὰρ ὁ θ τοῦ $\overline{ϛ}$ τοῖς τρισίν: ὑπερέχει δὲ καὶ ὁ $\overline{ϛ}$ τῶν δ τοῖς δυσίν. τὰ δὲ τρία καὶ τὰ β συντεθέντα ποιεῖ τὸν πέντε. ὅς ἐστι τῆς θ καὶ δ ὑπεροχή. Ὥσπερ δὲ ἀπὸ τῶν μειζόνων ἐπὶ τοὺς ἐλάττονας αἱ ὑπεροχαὶ ποιοῦσι διπλασίους λόγους καὶ τριπλασίους: οὕτως ἀπὸ τῶν ἐλαττόνων αἱ ἐλλείψεις. Ὅταν δὲ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον: ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον, μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται ἢ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον. Ἐν δὲ ταύτῃ τῇ ὑπογραφῇ τοῦ ὅρου, βεβούλεται ὁ Εὐκλείδης εἰς ὑπόνοιαν ἡμᾶς ἀγαγεῖν. καὶ παραστῆσαι ἐν τρισὶν εὑρίσκεσθαι δεῖ μείζονα λόγον λόγου: καὶ ἐπεὶ τὰ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ κεχαρακτηρεῖσθαι ἀπὸ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων ἤτοι ἅμα ὑπερεχόντων ἢ ἅμα ἴσων ὄντων, ἢ ἅμα ἐλλειπόντων: τὰ ἐν μείζονι λόγῳ ὄντα: ἐκεῖνα ἔχειν τὴν ὑπεροχήν. ὅπως δὲ γίνεται ὑπεροχὴ: αὐτὸς ἐν τῷ πέμπτῳ τῆς καθόλου λόγων στοιχειώσεως ἐν τῷ θεωρήματι τῶν ἀνίσων μεγεθῶν ἐπέδειξεν. Ὁμόλογα μεγέθη λέγεται εἶναι: τὰ μὲν ἡγούμενα τοῖς ἡγουμένοις: τὰ δὲ ἑπόμενα τοῖς ἑπομένοις. Λόγος μὲν εἴρηται ὅτι δύο ὁμογενῶν ἐστιν ἡ

πρὸς

πρὸς ἄλληλα σχέσις· ἐπὶ δὲ τῶν μεγεθῶν λέξωμεν ἰδίως, ὅτι λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα ποία σχέσις: ὡς εἶναι καὶ ἐπ' αὐτῶν ἀναλογίαν τὴν τοιούτων λόγων ὁμοιότητα. Ἀνάπαλιν λόγος ἐστὶν ὁ τοῦ ἑπομένου, πρὸς τὸ ἡγούμενον. Σύνθεντι λόγος ἐστὶν λῆψις τοῦ ἡγουμένου μετὰ τοῦ ἑπομένου ὡς ἑνὸς πρὸς αὐτὸ ἑπόμενον. τὰ δ' ἄλλα ὁ στοιχειωτὴς ἐν τῷ πέμπτῳ τῆς καθόλου στοιχειώσεως διορίζει. Ἡ ἄπειρος γραμμὴ οὐδὲ πολλαπλασιάσαι δύναται ποτέ: οὐδὲ συγκρίνεσθαι ἕτερον πρὸς ἕτερον. τὰ γὰρ μὴ ὁμογενῆ: οὐ δύναται λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα ποίαν σχέσιν. οἷον γραμμὴ πρὸς γραμμὴν, καὶ ἐπιφάνεια πρὸς ἐπιφάνειαν, καὶ τὰ λοιπὰ ὁμοίως. Τῶν ἀναλογιῶν μὲν, αἱ μὲν εἰσὶ συνεχεῖς: αἱ δὲ διεχεῖς: συνεχεῖς μὲν αἱ συνεχῶς, καὶ ἀδιακόπως ἔχουσαι τὰς σχέσεις: διεχεῖς δ' εἰσὶν ὅταν μὴ οὕτως ἔχουσιν οἱ λόγοι: ἀλλὰ διῃρημένοι ἀπ' ἀλλήλων: καὶ μὴ ὑπὸ τοῦ μέσου ὅρου συναπτόμενοι ἀλλήλοις. ὁ γὰρ μέσος ὅρος τοῦ μὲν ἡγεῖται: τοῦ δὲ ἕπεται. συνεχὴς ὡς $\overline{\eta}$, $\overline{\delta}$, $\overline{\beta}$. διεχὴς ὡς ἡ πρὸς δ, καὶ $\overline{ϛ}$ πρὸς $\overline{\gamma}$. λόγος: ἐστι διάστημα τὸ μεταξὺ τῶν μεγεθῶν τῶν ἐκκειμένων.

Περὶ

Περὶ συμμέτρων καὶ ἀσυμμέτρων ὁ στοιχειωτὴς ἐν τῷ δεκάτῳ τῆς στοιχειώσεως βιβλίῳ πολλὰ παραδίδωσι.

Τὸ ῥητὸν καὶ ἄλογον μέγεθος, ἑκάτερον οὐκ ἐστὶ τῶν καθ᾽ ἑαυτὰ νοουμένων· ἀλλὰ πρὸς ἕτερον συγκρινομένων. ὅσα γὰρ ἀλλήλοις σύμμετρα· ταῦτα καὶ ῥητὰ πρὸς ἄλληλα λέγεται. οἱ μὲν ἀριθμοὶ σύμμετροι τυγχάνουσιν· ἐπείπερ ἕκαστος αὐτῶν ὑπό τινος ἐλαχίστου μέρους μετρεῖται. ὁμοίως δὲ πῆχυς, καὶ παλαιστής, συμμετρίαν ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους. ἑκάτερον γὰρ ὑπὸ ἐλαχίστου μέτρου καταμετρεῖται ὑπὸ δακτύλου. * * τῶν μέτρων ὄντων μονάδος θέσιν ἔχοντος αὐτοῦ. ἀπείρου δὲ ἐν τοῖς μεγέθεσιν ὑπάρχοντος, καὶ μηδενὸς ὑφεστηκότος ἐλαχίστου μέτρου. δῆλον ὅτι τοῦ ῥητοῦ μεγέθους οὐχ ἕν τι ὡρισμένον, ὡς ὁ δάκτυλος ἐλάχιστον μέτρον· ἀλλ᾽ ἐφ᾽ ἡμῖν ἐστιν ὁ πηλίκον ἂν θέλωμεν ἐλάχιστον ὑποθέσθαι μέτρον γνώριμον· ἐν ᾧ ἡ μονάς. πᾶν γὰρ καθ᾽ ἑαυτὸ μέγεθος ὡς ἐλέχθη οὔτε ῥητὸν οὔτε ἄλογον. ὅτι καὶ πᾶσα εὐθεῖα καθ᾽ ἑαυτὴν οὔτε ῥητή, οὔτε ἄλογος ἐστί. συγκρινομένη δὲ πρὸς ὑποτεθεῖσαν ἐν θέσει μονάδα· ῥητὴ ἢ ἄλογος εὑρί-

εὑρί-

εὑρίσκεται. οὕτως γοῦν τῆς τετραγώνου πλευρᾶς ὑποτεθείσης ῥητῆς· ἡ διάμετρος δυνάμει ῥητὴ εὑρίσκεται· μήκει γὰρ ἄλογος εὑρίσκεται· καὶ πάλιν οὖν τῆς διαμέτρου ῥητῆς ὑπαρχούσης· ἡ πλευρὰ δυνάμει ῥητή. ἑκατέρας αὐτῶν καθ' ἑαυτὴν οὔτε ῥητῆς, οὔτε ἀρρήτου τοῦτ' ἐστὶ ἀλόγου ὑπαρχούσης. Οὕτως γοῦν τῶν εὐθειῶν ἐλαχιστόν τι μέτρον ὑποθέμενοι εὐθεῖαν μονάδων· οἱ ἀπὸ τῶν μαθημάτων ῥητὴν ὀνόμαζον· καὶ τὰς αὐτῆς συμμέτρους ῥητάς· ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον ῥητόν· καὶ τὰ τούτῳ χωρία σύμμετρα· ῥητὰ ἐκάλεσαν· καὶ ῥητὸν ὁμοίως, τὸν ἀπ' αὐτῆς κύβον, καὶ τούτῳ σύμμετρα στερεά. Ἄρρητον δ' ἀκουστέον τοῦτ' ἐστὶν ἄλογον στερεὸν μὲν τὸ ἀσύμμετρον τῷ ἀπὸ ῥητῆς κύβῳ· ἐπίπεδον δέ, τὸ ἀσύμμετρον τῷ ἀπὸ τῆς ῥητῆς τετραγώνῳ. μῆκος δὲ τοῦτ' ἐστὶν εὐθεῖαν ῥητὴν συμμέτρου. ἐπεὶ δὲ τῶν εὐθειῶν διττῆς νοουμένης τῆς συμμετρίας· μιᾶς μὲν ὅταν αὐταὶ εὐθεῖαι συμμετριῶσι· τὰ δὲ ἀπ' αὐτῶν χωρία σύμμετρα ἀλλήλοις· ἑτέρας δέ, ὅταν καὶ τὰ αὐτὰ χώρια ἀσύμμετρα ἀλλήλοις εἴη. διττὴ καὶ ἡ πρὸς τὴν ῥητὴν διαφορὰ

κατὰ

κατὰ τοὺς παλαιοὺς ὑπῆρχε. αἱ μὲν γὰρ λέγονται δυνάμει ῥηταὶ, αἱ δὲ ἄλογοι: αἱ δὲ λοιπαὶ μήκει: δυνάμει μὲν εἰσὶν ῥηταὶ ὡς προείπομεν ὅσαι μὲν εἰσὶν αὗται ἀσύμμετροι τῇ ῥητῇ: τὰ δὲ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα σύμμετρα τῷ ἀπὸ ῥητῆς τετραγώνῳ: μήκει δὲ, ὅταν τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα ᾖ ἐν τετραγώνοις ἀριθμοῖς ἢ τὰς πλευρὰς ἔχει συμμέτρους τῇ ῥητῇ μήκει. καὶ καθόλου καλεῖται ἡ τῇ ῥητῇ σύμμετρος, ῥητὴ εἴτε μήκει, εἴτε δυνάμει μόνον. Ορίζονται γε τὴν ῥητὴν καὶ οὕτως. ῥητὴ ἡ διὰ ἀριθμῶν γνωρίμη: οὐκ ἐστὶ δὲ ῥητῆς ὅρος οὗτος: ἀλλὰ συμβεβηκὸς αὐτῇ. ὅταν γὰρ λόγου χάριν ἐκτιθῶσι ῥητὰς τῶν ἀπὸ τῆς πήχεως ῥητῆς: οἴδαμεν ἑκάστην πόσων ἐστὶ παλαιστῶν ἢ δακτύλων: πόθεν, ἐκ τῶν συμβεβηκότων λέγομεν ῥητὴν: διὰ ἀριθμῶν γνωρίμην. διαφέρει δὲ ῥητὴ δοθείσης. τῷ τὴν μὲν ῥητὴν δοθεῖσαν εἶναι πάντως. τὴν δοθεῖσαν δ' οὐκ ἐξ ἀνάγκης ῥητὴν, ἡ μὲν ῥητὴ καὶ πηλικότητι καὶ ποιότητι γνωρήμη ἐστὶν, ἡ δὲ δοθεῖσα πηλικότητι, καὶ μεγέθει μόνον: καὶ γὰρ εἰσί τινες ἄλογοι δεδομέναι. Ἀπὸ τῆς προτεθείσης εὐθείας τετράγωνον ῥητὸν λέγει ὁ Εὐκλείδης. προτεθεῖσα

δὲ εὐδὲ εὐθεῖα καλεῖται, ἥτις ἀρχὴ μέτρων καὶ οἷον καὶ κάνων εἰς ἐκμέτρησιν ἡμῖν μηκῶν καθ' ὑπόθεσιν εἴληπται. οἷον εἴ τις προτείνει ποσὸν εἴη τὸ μεταξὺ διάστημα ὑποκειμένων τινῶν σημείων οὐδὲν ἂν οὐ δεόντως πυνθάνοι τὸ ποσῶν ἐστὶ ποδῶν ἢ πηχῶν: ἀναγκαῖον ἂν δέοι πηχὸς καὶ ποδὸς αἰτεῖν ἡμᾶς παρὰ τοῦ παρέχοντος πηλικότητος: καὶ ἐκείνῃ χρωμένους τῇ προτεθείσῃ καὶ ῥητῇ εὐθείᾳ: τὸ προτεθὲν διάστημα ἐξετάζωμεν εἰ ἐστὶν ὅλως ῥητὸν μέτρον.

Τῶν δὲ ἐν τοῖς μεγέθεσι τῶν μετρήσεων: καταμετροῦνται τὰ ὅλα ἐστὶ τάδε. Δάκτυλος, παλαιστή, σπιθαμή, ποῦς, πῆχυς, βῆμα, ὀργεῖα, πάντων δὲ ἐλαχιστότερον ἐστὶ δάκτυλος. Διαιρεῖται δὲ καὶ εἰς μέρη ἐσθ' ὅτε μὲν γὰρ καὶ ἥμισυ, καὶ τρίτα καὶ λοιπὰ μόρια. Εἰσὶ δὲ καὶ ἕτερα μέτρα ἐπινενοημένα τισὶ τάδε. πάσσον, ἄκαινα, πλέθρον, Ἰούγερον, στάδιον, μίλιον, σχοῖνος, σχοῖνος περσικὴ, καὶ σχοῖνος ἑλληνική, καὶ λοιπά.

ΤΕΛΟΣ.

EVCLIDIS ELEMENtum primum ex Theonis Commentarijs.

Definitiones.

PVnctum est: quod partem non habet.

Linea est: longitudo absq; latitudine.

Termini lineæ, sunt puncta.

Linea recta est: quæ ex æquo posita est inter sua puncta.

Superficies est: quæ longitudinem & latitudinem tantum habet.

Termini superficiei, sunt lineæ

Plana superficies est: quæ ex æquo posita est inter suas lineas rectas.

Angulus planus est: duarum linearum: sese in plano tangentium: & non ex aduerso positarum: mutua inclinatio.

Rectilineum vocamus angulum: quem lineæ rectæ continent.

Cum recta super recta stans: angulos vicinos, inter se fecerit æquales: rectus est vterque æqualium illorum angulorum.

Recta verò linea, angulos illos æquales faci-

ens : perpendicularis dicitur ad eam lineã, super qua consistit.

Obtusus angulus est: qui recto est maior.

Acutus verò: qui recto est minor.

Terminus est, quod alicuius finis est.

Figura est: quæ termino aliquo, aut aliquibus terminis continetur.

Circulus est figura plana: vna linea cõtenta: (quam vocamus circumferentiam) ad quã ab vno aliquo ex punctis, quæ intra ipsam sunt, omnes lineæ rectæ procidentes: inter se sunt æquales.

Centrum verò circuli: vocatur hoc in circulo medium punctum.

Dimetiens circuli est: recta quædam linea, per centrum circuli ducta: vtrinq; ad circumferentiam circuli desinens: ipsumq; circulũ in duas partes æquales diuidens.

Semicirculus est: figura, quam dimetiens circuli, & intercepta à dimetiente circumferentia continet.

Segmentum circuli est: figura, quam linea recta, & circuli circumferentia continet.

Rectilineæ figuræ sunt: quas rectæ lineæ ambiunt.

Trila-

Trilateræ quidem: quas ambiunt tres rectæ. Quadrilateræ verò: quas quatuor. Multilateræ, quas plures, quàm quatuor rectæ ambiunt.

Ex trilateris autē figuris. Triangulus æquilaterus est: qui tria habet æqualia latera.

Æquicrurus, qui duo tantum habet æqualia latera.

Scalenus triangulus: qui tria habet inæqualia latera.

Item ex triangulis figuris, triangulus rectangulus est: qui angulum habet rectum.

Amblygonius: qui angulum habet obtusum.

Oxygonius: qui angulos tres acutos habet.

Ex quadrilateris figuris: quadratū est, quod æquilaterum est, & rectangulum.

Quadrangulum oblongum: quod rectangulū quidem est, sed non æquilaterum.

Rhombus: quod æquilaterum quidem est, sed non rectangulum.

Rhomboides: quod latera è regione posita habet æqualia: ac etiam angulos æquales: nō tamen est æquilaterū, neq; rectangulum.

Omnes reliquæ præter has, quadrilateræ figu-

uæ: Trapezia vocentur.

Æquedistantes rectæ lineæ sunt: quæ in eodē plano sitæ: & in infinitum ex vtraque par se extensæ: in neutra tamen concurrunt.

POSTVLATA.

Petatur. A quouis puncto: ad quoduis punctū: rectam lineam describere.

Item, lineam rectam finitam: in infinitū vsq; extendere.

Item, quouis centro, & quouis interuallo: describere circulum.

COMMVNES NOTIONES, seu sententiæ.

Quæ eidem sunt æqualia: illa inter se sunt æqualia.

Si æqualibus æqualia fuerint adiecta: etiam tota sunt æqualia.

Si ab æqualibus æqualia fuerint ablata: etiā quæ relinquuntur, sunt æqualia.

Si inæqualibus æqualia fuerint adiecta: etiā tota sunt inæqualia.

Si ab inæqualibus æqualia fuerint sublata: quæ relinquuntur sunt inæqualia.

Quæ sunt eiusdē dupla: inter se sunt æqualia.

Quæ

Quæ eiusdem sunt dimidia: inter se sunt æqualia.

Quæ applicata inter se conueniunt: sunt æqualia.

Totum, est maius sua parte.

Omnes recti anguli: inter se sunt æquales.

Cùm in duas rectas, recta incidens linea: duos internos ex vna parte angulos, duobus rectis facit minores: productæ istæ duæ lineæ rectæ in infinitum: ex ea parte concurrẽt: vbi sunt illi duo anguli duobus rectis minores.

Duæ lineæ rectæ, figuram non faciunt.

Propositio prima. Problema.

SVper data linea recta finita: triangulum æquilaterum constituere.

Explicatio dati.) Sit data linea recta finita $\alpha\beta$. (Explicatio quæsiti.) Oportet super linea recta $\alpha\beta$ triangulum æquilaterum constituere. (Delineatio.) Centro α, interuallo $\alpha\beta$: describatur circulus $\beta\gamma\epsilon$. Item centro β, interuallo $\beta\alpha$: describatur circulus $\alpha\gamma\delta$: ducantur deniq; lineæ rectæ $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$. (Demonstra-

rio) Quoniam punctum α, est centrum circuli $\gamma\epsilon\beta$: idcirco recta $\alpha\gamma$, est æqualis rectæ $\alpha\beta$. rursus quoniam punctum β, est centrum circuli $\gamma\alpha\delta$: idcirco recta $\beta\gamma$: æqualis est rectæ $\beta\alpha$. Verum demonstratum est: quod recta $\gamma\alpha$ etiã æqualis sit rectæ $\alpha\beta$. Ergo vtraq; rectarum $\gamma\alpha,\gamma\beta$: est æqualis rectæ $\alpha\beta$. Quæ verò eidẽ sunt æqualia: illa etiam inter se sunt æqualia. Ergo $\gamma\alpha$ recta: etiam æqualis est, rectæ $\gamma\beta$. Tres igitur lineæ rectæ $\gamma\alpha,\alpha\beta,\alpha\gamma$: sunt inter se æquales. (Conclusio.) Triangulus itaq; $\alpha\beta\gamma$, est æquilaterus: & consistit super data linea recta finita $\alpha\beta$. Quod faciendum erat.

Propositio secunda. Problema.

AD punctum datum: lineæ rectæ datæ: ęqualem lineam rectam ponere.

Explicatio dati.) Sit punctum datum α: & data recta linea $\beta\gamma$. (Explicatio quæsiti.) Ad punctum datum α: datæ lineæ rectæ $\beta\gamma$ ponenda est recta linea æqualis. (Delineatio.) Ab α puncto, ad punctum β: ducatur linea recta $\alpha\beta$: & super linea $\alpha\beta$: statuatur triangu-

lus

lus æquilaterus ad β. Extendantur etiam lineæ rectæ δα, δϐ versus puncta ε, ζ: & fiant rectæ αε, βζ. Centro quoq; β, interuallo βγ: describatur circulus γηθ. Item Centro δ, interuallo δη: describatur circulus ηκλ (secans lineam rectam δζ, in puncto η.) Demonstratio.) Quoniam punctum β, est centrum circuli γηθ: idcirco recta αγ, est æqualis rectæ βη. Item quoniam punctum δ, est centrum circuli ηκλ. igitur recta δλ, est æqualis rectæ δη. Ex quibus δα, fuit æqualis rectæ δβ. reliqua igitur αλ: reliquæ βη est æqualis. Vtraq; idcirco rectarum αλ, βγ: est æqualis rectæ βη. quæ verò eidē sunt æqualia: illa inter se sunt æqualia. quare recta αλ, etiam erit æqualis rectæ ϐγ. (Conclusio.) Ad datum igitur punctū α: datæ lineæ rectæ βγ: æqualis posita est recta linea αλ, quod faciendum erat.

Propositio tertia. Problema.

DVabus rectis inęqualibus datis: ex maiore, minori æqualem rectā lineam auferre.

Explicatio dati.) Sit data linea recta ma ior $\alpha\beta$: minor verò γ. (*Explicatio quæsiti.*) *Ex maiore linea* $\alpha\beta$: *tollenda est recta æqualis lineæ* γ. (*Delineatio.*) *Ponatur ad punctũ* α: *lineæ* γ: *æqualis recta linea* $\alpha\delta$. *deinde centro* α, *interuallo* $\alpha\delta$: *describatur circulus* $\delta\epsilon\zeta$ (*secans rectam* $\alpha\beta$, *in puncto* ϵ. (*Demonstratio.*) *Quoniam punctum* α, *centrum est circuli* $\delta\epsilon\zeta$. *idcirco recta* $\alpha\epsilon$, *est æqualis rectæ* $\alpha\delta$. *Verum recta* γ, *etiã est æqualis rectæ* $\alpha\delta$. *Vtraque igitur rectarum* $\alpha\epsilon$, γ, *est æqualis rectæ* $\alpha\delta$. *Quare* $\alpha\epsilon$, *etiam est æqualis rectæ* γ. (*Conclusio.*) *Duabus igitur rectis datis inæqualibus* $\alpha\beta$, γ: *ex maiore* $\alpha\beta$, *ablata est* $\alpha\epsilon$: *æqualis minori* γ. *Quod faciendum erat.*

Propositio quarta. Theorema.

SI duo trianguli, duo latera duobus lateribus habuerint æqualia alterũ alteri: & angulum angulo æqualẽ, qui æqualibus rectis lineis continetur: etiam basim basi habebunt æqualem: & triangulus triangulo erit æqualis: et reliqui anguli, reliquis angulis erunt ęquales: alter alteri, quos latera subtendunt æqualia.

Expli-

Explicatio dati.) Sint duo trianguli $\alpha\beta\gamma$, $\delta\varepsilon\zeta$: habentes duo latera $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, æqualia duobus lateribus $\delta\varepsilon$, $\delta\zeta$ alterum alteri: latus $\alpha\beta$, æquale lateri $\delta\varepsilon$: & latus $\alpha\gamma$, æquale lateri $\delta\zeta$: & angulum $\beta\alpha\gamma$, æqualem angulo $\varepsilon\delta\zeta$. (Explicatio quæsiti.) Dico quòd basis $\beta\gamma$, sit æqualis basi $\varepsilon\eta$: & triangulus $\alpha\beta\gamma$: sit æqualis triangulo $\delta\varepsilon\zeta$: & reliqui anguli, reliquis angulis sint æquales: alter alteri, quos æqualia illa latera subtendunt: angulus $\alpha\beta\gamma$, sit æqualis angulo $\delta\varepsilon\zeta$: angulus deniq; $\alpha\gamma\beta$, sit æqualis angulo $\delta\zeta\eta$. (Demõstratio.) Quando enim triangulus $\alpha\beta\gamma$, applicatur triangulo $\delta\varepsilon\zeta$: punctum α, ponitur super puncto δ: & recta $\alpha\beta$, applicatur rectæ $\delta\varepsilon$. cadet etiam punctum β, super puncto ε. quia $\alpha\beta$, est æqualis rectæ $\delta\varepsilon$. Deinde si recta $\alpha\beta$, applicatur rectæ $\delta\varepsilon$: etiam recta $\alpha\gamma$, applicabitur rectæ $\delta\zeta$. quoniam angulus $\beta\alpha\gamma$, proponitur æqualis angulo $\varepsilon\delta\zeta$. quare & punctum γ, applicabitur puncto ζ. cum recta $\alpha\gamma$, æqualis sit rectæ $\delta\zeta$. Verum punctum β applicabitur puncto ε. Basis igitur $\beta\gamma$: basi $\varepsilon\zeta$ applicabitur. Nam si punctum β applicetur puncto ζ: & basis $\beta\gamma$, *non applicetur basi εζ: tum duæ rectæ figurã facient, quod est impossibile. Basis igitur βγ, basi εζ applicatur: & est ei æqualis. Unde & totus triangulus αβγ: toti triangulo δεζ applicabitur, & ei erit æqualis: & reliqui anguli, reliquis angulis applicabuntur, eisq; erunt æquales: angulus αβγ, angulo δεζ: & angulus αγβ, angulo δζε. (Conclusio.) Si igitur duo trianguli, duo latera duobus lateribus habuerint æqualia alterum alteri: & angulum angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continetur: etiam basin basi habebunt æqualem: & triangulus triangulo erit æqualis: & reliqui anguli, reliquis angulis erũt æquales: alter alteri, quos æqualia illa latera subtendunt. quod erat demonstrandum.*

Propositio quinta. Theorema.

TRiangulorum, qui duo æqualia habẽt latera: anguli ad basim sunt æquales. Et productis æqualibus illis rectis: etiam qui sub basi sunt anguli: inter se erunt æquales.

Explicatio dati.) Sit triangulus æquicrurus

rus

rus αβγ, habens latus αβ, æquale lateri αγ. & producantur lineæ αγ, αβ, ἐπ' εὐθείας (hoc est, ut continuè extendantur secundum lineā rectam) & fiant rectæ βδ, γε. (Explicatio quæsiti.) Dico quod angulus αβγ, sit æqualis angulo αγβ. Et quòd angulus γβδ, sit æqualis angulo βγε. (Delineatio.) Sumatur in linea βδ: punctum quoduis ζ. deinde tollatur à maiore linea αε, minori αζ: æqualis linea αη. denique ducantur rectæ ζγ, ηβ. (Demonstratio.) Quoniam recta αζ, est æqualis rectæ αη: & recta αβ, æqualis rectæ αγ: duæ igitur rectæ ζα, αγ: duabus rectis ηα, αβ sunt æquales, altera alteræ: & communem ambiunt ζαη angulum. quare basis ζγ, basi ηβ est æqualis: & triangulus αζγ, triangulo αηβ æqualis est: reliqui etiam anguli, reliquis angulis æquales sunt: alter alteri, quos æqualia illa latera subtendunt: angulus αγζ, angulo αβη: & angulus αζγ, angulo αηβ. Cum verò tota recta αζ, toti rectæ αη sit æqualis: & recta αβ ablata, sit æqualis rectæ αγ ablatæ. idcirco reliqua linea recta βζ: reliquæ rectæ γη etiam erit æqualis. Verum recta ζγ: demonstrata est æqualis esse rectæ $\eta\beta$. duæ igitur rectæ $\beta\zeta$, $\zeta\gamma$: duabus rectis $\gamma\eta$, $\eta\beta$ sunt æquales altera alteræ: & angulus $\beta\zeta\gamma$, æqualis est angulo $\gamma\eta\beta$: basis etiam eorum communis est recta $\beta\gamma$. triangulus igitur $\beta\zeta\gamma$: triangulo $\gamma\eta\beta$ etiam erit æqualis: & reliqui anguli, reliquis angulis æquales: quos æqualia illa latera subtendunt. angulus $\zeta\beta\gamma$, æqualis angulo $\eta\gamma\beta$: & angulus $\beta\gamma\zeta$, angulo $\gamma\beta\eta$. Quoniam nunc totus angulus $\alpha\beta\eta$, toti angulo $\alpha\gamma\zeta$ demonstratus est æqualis: quorum ablatus angulus $\gamma\eta\beta$, ablato angulo $\beta\gamma\zeta$ est æqualis. ergo reliquus $\alpha\beta\gamma$ angulus, reliquo $\alpha\gamma\beta$ angulo est æqualis: & sunt anguli ad basim trianguli $\alpha\beta\gamma$. Angulus verò $\zeta\beta\gamma$, angulo $\eta\gamma\beta$ demonstratus est æqualis esse: & sunt sub basi. ¶ Conclusio. Triangulorum igitur, qui duo habent æqualia latera: anguli ad basim sunt æquales. & productis æqualibus illis rectis: etiã qui sub basi sunt anguli, inter se erunt æquales. Id quod erat demonstrandum.

Propositio sexta. Theorema.

SI trianguli, duo anguli æquales inter

ter se fuerint: etiam latera, quæ æquales illos angulos subtendunt: erunt inter se æqualia.

Explicatio dati.) Sit triangulus αβγ: habens angulum αβγ, æqualẽ angulo αγβ. Explicatio quæsiti.) Dico quòd latus αβ: sit æquale lateri αγ. (Delineatio cum hypothesi.) Si enim recta αβ, non est æqualis rectæ αγ: altera illarum erit maior. Hypothesis.) Sit recta αβ maior. (Delineatio.) Ex recta αβ maiore: lineæ rectæ αγ minori auferatur linea recta βδ æqualis: & ducatur recta δγ. (Demonstratio) Quoniam latus δβ, æquale est lateri αγ, & commune latus βγ duo igitur latera δβ, βγ: duobus lateribus αγ, γβ sunt æqualia alterum alteri: & angulus δβγ, angulo αγβ est æqualis. Basis igitur δγ, basi αβ est æqualis: & triangulus αβγ, triangulo δγβ est æqualis: maior minori. quod est absurdũ. Quare recta αβ, non est inæqualis rectæ αγ. itaq; erit ei æqualis. (Conclusio.) Si ergo trianguli, duo anguli æquales inter se fuerint: etiã latera, quæ æquales illos angulos subtendunt: erunt inter se æqualia. Id quod erat demonstrandum.

Pro-

Propositio septima. Theorema.

SVper eadē linea recta: duabus eisdem rectis: aliæ duæ rectæ æquales altera alteræ: non statuentur ad aliud, atque aliud punctum: in easdem partes: eosdē habentes terminos, quos lineæ primæ.

Explicatio dati.) Si enim fieri potest: sit linea recta αβ: & super ea duabus rectis αγ, γβ, constitutis: aliæ duæ lineæ rectæ αδ, δβ constituantur æquales altera alteræ: ad aliud atque aliud punctum γ, & δ: in easdem partes γ, & δ: eosdem habentes terminos α, & β: quos linea recta primæ: ita vt γα æqualis sit δα: & eundem habeat terminum α: recta verò γβ, sit æqualis rectæ δβ: & eundem cum ea habeat terminum β. (Delineatio.) Et ducatur recta γδ. (Demonstratio.) Quoniam αγ recta, est æqualis rectæ αδ: etiā angulus αγδ, erit æqualis angulo αδγ. verum angulus αδγ, maior est angulo δγβ: multò ergo angulus γδβ, maior est angulo δγβ. Item, quoniā latus γβ, est æquale lateri δβ: erit etiam angulus γδβ: angulo δγβ æqualis. Verum ille

ipse

ipse angulus γδα: demonstratus est esse multò maior angulo δγβ, quod fieri nequit. (Conclusio.) Super eadem igitur recta: duabus eisdem rectis: aliæ duæ rectæ æquales altera alteræ: nõ statuentur ad aliud atq; aliud punctũ: in easdem partes: eosdem habentes terminos, quos lineæ primæ. Id quod erat demonstrandum.

Propositio octaua. Theorema.

SI duo trianguli, duo latera duobus lateribus habuerint æqualia alterũ alteri: habuerint verò basin, æqualem basi: etiam angulum angulo habebunt æqualẽ, quem æquales illę lineæ rectæ continent.

Explicatio dati.) Sint duo trianguli αβγ, δεζ: habentes duo latera αβ, αγ: duobus lateribus δε, δζ, æqualia, alterum alteri: latus scilicet αβ, æquale lateri δε: & latus αγ, æquale lateri δζ: item basim βγ, æqualẽ basi εζ. (Explicatio quæsiti.) Dico quòd angulus βαγ, sit æqualis angulo εδζ. (Delineatio.) Quando enim triangulus αβγ, applicatur triangulo δεζ: & punctum β, ponitur super puncto ε: linea

nea

nea quoq; recta $\beta\gamma$*, applicatur rectæ* $\varepsilon\zeta$*: tum punctum* γ*, etiam applicabitur puncto* ζ*: quia recta* $\beta\gamma$*: est æqualis rectæ* $\varepsilon\zeta$*. (Demōstratio.) Quando verò recta* $\beta\gamma$*, applicatur rectæ* $\varepsilon\zeta$*: applicabuntur etiam rectæ* $\beta\alpha$*,* $\alpha\gamma$*, rectis* $\varepsilon\delta$*,* $\delta\zeta$*. Si enim basis* $\beta\gamma$*, applicatur basi* $\varepsilon\zeta$*, & latera* $\beta\alpha$*,* $\alpha\gamma$*, non applicentur lateribus* $\varepsilon\delta$*,* $\delta\zeta$*, verum diuersum habuerint situm, vt rectæ* $\varepsilon\eta$*,* $\eta\zeta$*: constituentur super eadem linea recta: duabus eisdem rectis: aliæ duæ rectæ æquales altera alteræ: ad aliud, atq; aliud punctum: ad easdem partes: eosdē habentes terminos, quos lineæ primæ. sed non statuentur ad diuersum punctum. Quare falsum est: quòd applicata basis* $\beta\gamma$*, basi* $\varepsilon\zeta$*: nō applicētur* $\beta\alpha$*,* $\beta\gamma$*, latera: lateribus* $\varepsilon\delta$*,* $\delta\zeta$*. applicabūtur ergo. Vnde sequitur, quòd angulus* $\beta\alpha\gamma$*, applicabitur angulo* $\varepsilon\delta\zeta$*, & ei erit æqualis. (Conclusio.) Si igitur duo trianguli, duo latera duobus lateribus habuerint æqualia alterum alteri: habuerint verò basim basi æqualem: etiam angulum angulo habebunt æqualem, quem æquales illæ rectæ lineæ continent. Id quod erat demonstrandum.*

Propo-

Propositio nona. Problema.

DAtum angulum rectilineum; per medium secare: vel in duas partes equales secare.

Explicatio dati.) Sit datus angulus rectilineus βαγ. (Explicatio quæsiti.) Angulus βαγ: secãdus est in duas partes æquales. Delineatio.) Sumatur in linea αβ, punctũ quoddã δ: & tollatur ex linea αγ: lineæ αδ: æqualis recta linea αε: postea ducatur linea δε: & statuatur super linea δε: triangulus æquilaterus δζε: deniq; ducatur linea αζ. (Explicatio iam factæ delineationis.) Dico quòd linea βζ: in duas partes æquales secet angulum βαγ. (Demonstratio.) Quoniam recta αδ: æqualis est rectæ αε: & communis est recta αζ: idcirco duo latera δα, αζ: duobus lateribus εα, αζ: sunt æqualia alterum alteri: & basis δζ: æqualis basi εζ. Angulus igitur δαζ: angulo εαζ est æqualis. (Conclusio.) Datus igitur angulus rectilineus βαγ: per lineam rectam αζ: est dissectus in duas partes æquales. Id quod faciendum erat.

Propositio decima. Problema.

DAtam lineam rectam finitam: in duas partes ęquales secare.

Explicatio dati.) Sit data linea recta finita $\alpha\beta$. Explicatio quæsiti.) Linea recta finita $\alpha\beta$: dissecanda est in duas partes æquales. (Delineatio. Statuatur super recta $\alpha\beta$: triangulus æquilaterus $\alpha\beta\gamma$: & secetur angulus $\alpha\beta\gamma$: in duas partes æquales, per lineam rectam $\gamma\beta$. (Explicatio factæ delineationis.) Dico quòd recta $\alpha\beta$: secta sit in duas partes æquales, in puncto δ. (Demonstratio.) Quoniam recta $\alpha\gamma$: est æqualis rectæ $\gamma\beta$: & communis recta $\gamma\delta$: duo igitur latera $\alpha\gamma,\gamma\delta$: duobus lateribus $\beta\gamma,\gamma\delta$ sunt æqualia alterũ alteri: & angulus $\alpha\gamma\delta$, est æqualis angulo $\beta\gamma\delta$. Ergo basis $\alpha\delta$: est æqualis basi $\beta\delta$. (Conclusio. Data igitur linea recta finita $\alpha\beta$: secta est in duas partes æquales in pũcto δ. Id quod faciendum erat.

Propositio vndecima. Problema.

DAtæ lineę rectæ: à dato in ea puncto: ducere lineam rectam ad angulos

gulos rectos; id est, rectos facientē angulos.

Explicatio dati.) Sit data linea recta $\alpha\beta$: & datum in ea punctum γ. (Explicatio quaesiti.) Ducēda est à puncto γ: linea recta, rectos faciens angulos cum linea $\alpha\beta$. (Delineatio.) Sumatur in linea $\alpha\gamma$, quoduis punctum δ: & fiat linea $\gamma\delta$, aequalis lineae $\gamma\epsilon$. Et statuatur super linea $\delta\epsilon$: triangulus aequilaterus $\delta\zeta\epsilon$: deniq; ducatur recta $\zeta\gamma$. (Explicatio factae delineationis.) Dico, quòd datae lineae rectae $\alpha\beta$: à dato in ea puncto γ: ad angulos rectos, ducta sit recta linea $\gamma\zeta$. (Demonstratio.) Quoniam recta $\delta\gamma$: est aequalis rectae $\gamma\epsilon$: communis verò recta $\zeta\gamma$. Duo igitur latera $\delta\gamma$, $\delta\zeta$: duobus lateribus $\epsilon\gamma$, $\gamma\zeta$, sunt aequalia alterum alteri: & basis $\delta\zeta$: aequalis est basi $\epsilon\zeta$. ergo angulus $\delta\gamma\zeta$: aequalis est angulo $\epsilon\gamma\zeta$, (& sunt ἐφέξῆς. id est, vicini.) Quando verò recta super recta stans: angulos vicinos aequales fecerit inter se: vterq; aequalium angulorum est rectus. Ergo vterq; angulorum $\delta\gamma\zeta$, $\zeta\gamma\epsilon$, est rectus. Conclusio.) Datae igitur lineae rectae $\alpha\beta$: à dato quod in ea est puncto γ: ad angulos rectos. du-

cta est recta $\eta\gamma$. Id quod faciendum erat.

Propositio duodecima. Problema.

AD lineam rectam datã infinitam: à dato puncto: quod in ea nõ est: perpendicularem rectam lineam ducere.

(Explicatio dati.) Sit data linea recta infinita $\alpha\beta$: & punctum quod in ea non est, datũ γ. (Explicatio quæsiti.) A puncto dato γ: ad datam lineam rectam infinitam $\alpha\beta$: ducenda est linea recta perpendicularis. (Delineatio.) Sumatur ex altera parte lineæ $\alpha\beta$, punctum quoduis δ: & centro γ, interuallo $\gamma\delta$: describatur circulus $\varepsilon\zeta\eta$: secans lineam $\alpha\beta$, in punctis ε, & η. Postea dissecetur linea recta $\varepsilon\eta$: in duas partes æquales in puncto θ. & ducantur lineæ rectæ $\gamma\eta$, $\gamma\theta$, $\gamma\varepsilon$. (Explicatio iam factæ delineationis.) Dico quod ad lineam rectam datam infinitam $\alpha\beta$: à puncto γ dato, quod in ea non est: perpendicularis ducta sit recta linea $\gamma\theta$. (Demonstratio.) Quoniam recta $\eta\theta$, æqualis est rectæ $\theta\varepsilon$: & communis recta $\theta\gamma$. ergo duo latera $\eta\theta$, $\theta\gamma$: duobus lateribus $\varepsilon\theta$, $\theta\gamma$,

sunt

sunt æqualia alterum alteri: & basis $\gamma\eta$, basi $\gamma\epsilon$, est æqualis. quare angulus $\gamma\theta\eta$: angulo $\epsilon\theta\delta$ est æqualis: & sunt vicini. Quando verò recta super recta stans angulos vicinos æquales inter se fecerit: vterq; æqualium illorũ angulorum est rectus. & recta super recta stans: perpendicularis ad eam dicitur. (Conclusio.) Ad datam igitur lineam rectam infinitã $\alpha\beta$: à puncto γ dato quod in ea non est: perpendicularis ducta est recta $\gamma\theta$. Id quod faciendum erat.

Propositio decima tertia. Theorema.

VT vt recta super recta stans, angulos fecerit: vel duos rectos: vel duobus rectis ęquales eos faciet.

Explicatio dati.) Recta quædam $\alpha\beta$, stans super recta $\gamma\delta$, faciat angulos $\gamma\beta\alpha$, $\alpha\beta\delta$. Explicatio quæsiti.) Dico quòd anguli $\gamma\beta\alpha$, $\alpha\beta\delta$: vel sint duo recti: vel duobus rectis æquales. Delineatio cum hypothesi.) Si igitur angulus $\gamma\beta\alpha$, æqualis est angulo $\alpha\beta\delta$: tum sunt duo recti. quòd si verò non: tum ducatur à puncto β, rectæ lineæ $\gamma\delta$: ad angulos rectos, linea recta $\beta\epsilon$. (Demonstratio.) Anguli igitur $\gamma\beta\epsilon$,

$\epsilon\beta\delta$: sunt duo recti. & cùm angulus $\gamma\beta\epsilon$, sit æqualis duobus angulis $\gamma\beta\alpha$, $\alpha\beta\epsilon$: communis addatur angulus $\epsilon\beta\delta$. quare duo anguli $\gamma\beta\epsilon$, $\epsilon\beta\delta$: tribus angulis $\gamma\beta\alpha$, $\alpha\beta\epsilon$, $\epsilon\beta\delta$: sunt æquales. Rursus quoniam angulus $\delta\beta\alpha$ æqualis est duobus angulis $\delta\beta\epsilon$, $\epsilon\beta\alpha$: communis addatur angulus $\alpha\beta\gamma$. anguli igitur $\delta\beta\alpha$, $\alpha\beta\gamma$: tribus angulis $\delta\beta\epsilon$, $\epsilon\beta\alpha$, $\alpha\beta\gamma$, sunt æquales: Verum demonstratum est, angulos $\gamma\beta\epsilon$, $\epsilon\beta\delta$: tribus ijsdem angulis, esse æquales. Quæ verò eidem sunt æqualia: illa inter se sunt æqualia. ergo anguli $\gamma\beta\epsilon$, $\epsilon\beta\delta$: sunt duobus angulis $\delta\beta\alpha$, $\alpha\beta\gamma$, æquales. sed anguli $\gamma\beta\epsilon$, $\epsilon\beta\delta$: sunt duo recti. ergo $\delta\beta\alpha$, $\alpha\beta\gamma$, anguli: sunt æquales duobus rectis. (Conclusio.) Vt ut igitur recta super recta stans: fecerit angulos: vel duos rectos: vel duobus rectis æquales faciet. Id quod erat demonstrandum.

Propositio decima quarta. Theorema.

SI ad lineam quandã rectam: & punctum in ea datum: duæ rectę, nõ in easdẽ partes sitæ: angulos (ἐφεξῆς) vicinos, duobus rectis angulis æquales

les fecerint: duæ istę rectæ, ἐπ' εὐθείας, altera alteræ erunt.

Explicatio dati.) Nam ad lineam quandam rectam αβ: & ad punctum in ea datum β: duæ rectæ lineæ βγ, βδ: non in easdem partes sitæ: faciant angulos ἐφεξῆς (vicinos) αβγ, αβδ, æquales duobus rectis. Explicatio quæsiti.) Dico quòd rectæ γβ, sit ἐπ' εὐθείας recta βδ. Delineatio.) Si enim rectæ βγ, non est ἐπ' εὐθείας recta βδ: sit recta βε, rectæ γβ, ἐπ' εὐθείας. Demonstratio.) Quoniam recta αβ: constituta est super recta γβε. anguli igitur αβγ, αβε: sunt æquales duobus rectis. Verum anguli αβγ, αβδ: etiam sunt æquales duobus rectis. anguli igitur γβα, αβε: angulis γβα, αβδ sunt æquales. Communis auferatur angulus αβγ. reliquus igitur angulus αβε: reliquo angulo αβδ, est æqualis, minor maiori. quod fieri nequit. Quare recta βε: nō est ἐπ' εὐθείας, rectæ βγ. Similiter etiam demonstrabimus, quòd nulla alia præter rectam βδ: sit ἐπ' εὐθείας, rectæ γβ. Conclusio.) Ergo recta γβ, est ἐπ' εὐθείας rectæ βδ. Si igitur ad lineam quandā rectam: & punctū in ea *datum: duæ rectæ non in easdem partes sitæ: angulos ἐφεξῆς duobus rectis angulis fecerint æquales: duæ istæ rectæ ἐπ' εὐθείας, erũt altera alteræ. Id quod erat demonstrandum.*

Propositio decimaquinta. Theorema.

SI duæ lineæ rectæ, sese mutuo secãtes facient angulos ad verticem, inter se ęquales.

Explicatio dati.) Duæ enim lineæ rectæ αβ, γδ: sese mutuo secent in puncto ε. (Explicatio quæsiti.) Dico quòd angulus αεγ, angulo δεβ sit æqualis: & angulus γεϐ, angulo αεδ etiam æqualis. (Demonstratio.) Quoniã recta αε, super recta γδ, constituta est: & facit angulos γεα, αεδ. anguli igitur γεα, αεδ: duobus rectis sunt æquales. Item quoniam recta δε: super recta αβ, est constituta, facitq; angulos αεδ, δεβ. anguli igitur αεδ, δεϐ: sunt æquales duobus rectis. Verum anguli γεα, αεδ duobus rectis sunt æquales. quare duo anguli γεα, αεδ: sunt æquales duobus angulis αεδ, δεβ. Communis auferatur angulus αεδ. reliquus igitur angulus γεα reliquo angulo

βεδ

$\beta\epsilon\delta$ est æqualis. Simili demonstratione, probabimus angulum $\gamma\epsilon\beta$: angulo $\delta\epsilon\alpha$ esse æqualem. Conclusio.) Si igitur duæ rectæ sese mutuò secant: facient angulos ad verticem inter se æquales. Id quod erat demonstrandum.

Corolarium. Ex hoc est manifestum, quòd quæcunque lineæ rectæ sese mutuò secant: faciant angulos ad punctum sectionis: quatuor rectis æquales.

Propositio decimasexta. Theorema.

OMnis trianguli, vno ex lateribus producto: angulus extraneus, vtroque eorum, qui intra triangulum sunt, quibus ipse opponitur, est maior.

Explicatio dati.) Sit triangulus $\alpha\beta\gamma$: & protrahatur latus eius $\beta\gamma$, ad punctum δ. Explicatio quæsiti.) Dico quòd angulus $\alpha\beta\delta$: est maior angulo $\gamma\beta\alpha$, interno sibi opposito: & maior angulo $\beta\alpha\gamma$, interno sibi opposito. Delineatio.) Dissecetur latus $\alpha\gamma$, in duas partes æquales in punctò ϵ. deinde ducatur linea $\beta\epsilon$: & producatur ad punctũ ζ. Fiat etiam lineæ

$\beta\epsilon$, qualis linea $\epsilon\zeta$: deniq; ducatur linea $\zeta\gamma$: & extendatur recta $\alpha\gamma$, ad punctum vsq; η. Demonstratio.) Quoniam recta $\alpha\epsilon$, æqualis est rectæ $\epsilon\gamma$: & recta $\beta\epsilon$, æqualis rectæ $\epsilon\zeta$. duo igitur latera $\alpha\epsilon$, $\epsilon\beta$: duobus lateribus $\gamma\epsilon$, $\epsilon\zeta$ sunt æqualia alterum alteri: & angulus $\alpha\epsilon\gamma$, æqualis est angulo $\zeta\epsilon\gamma$. quia sunt anguli ad verticem. Basis igitur $\alpha\beta$: basi $\zeta\gamma$, erit æqualis: & triangulus $\alpha\beta\epsilon$, æqualis erit triangulo $\zeta\epsilon\gamma$: & reliqui anguli, reliquis angulis sunt æquales alter alteri. quos æqualia illa latera subtendunt. itaq; angulus $\beta\alpha\epsilon$, æqualis est angulo $\epsilon\gamma\zeta$. Verum angulus $\epsilon\gamma\delta$, maior est angulo $\epsilon\gamma\zeta$. quare angulus $\alpha\gamma\delta$, angulo $\beta\alpha\epsilon$ etiam est maior. Similiter demonstrabitur, quando recta $\beta\gamma$, dissecta fuerit in duas partes æquales: quod angulus $\beta\gamma\eta$, hoc est, angulus $\alpha\gamma\delta$, maior sit angulo $\alpha\beta\gamma$. Conclusio.) Omnis igitur trianguli, vno ex lateribus protracto: extraneus angulus, vtroq; eorum, qui intra triangulum sunt, quibus ipse opponitur est maior. Id quod erat demonstrandum.

Propo-

Propositio decima septima, Theorema.

Omnis trianguli: quiuis duo anguli: duobus rectis angulis sunt minores, quouis modo sunt.

Explicatio dati.) Sit triangulus $\alpha\beta\gamma$. Explicatio quæsiti.) Dico quòd trianguli $\alpha\beta\gamma$: duo anguli sint minores duobus rectis, quouis modo sumpti. Delineatio.) Producatur linea $\beta\gamma$, ad punctum δ. Demonstratio.) Quoniam trianguli $\alpha\beta\gamma$, angulus extraneus $\alpha\gamma\beta$: maior est angulo $\alpha\beta\gamma$, interno sibi opposito. Communis addatur angulus $\alpha\gamma\beta$. anguli igitur $\alpha\gamma\delta$, $\alpha\gamma\beta$: sunt maiores angulis $\alpha\beta\gamma$, $\beta\gamma\alpha$. Verum anguli $\alpha\gamma\delta$, $\alpha\gamma\beta$: sunt duo recti. ergo anguli $\alpha\beta\gamma$, $\gamma\beta\alpha$. sunt minores duobus rectis. Simili ratione demonstrabimus angulos $\beta\alpha\gamma$, $\alpha\gamma\beta$ duobus rectis esse minores. Item & angulos $\alpha\gamma\beta$, $\alpha\beta\gamma$: duobus rectis esse minores. Conclusio.) Omnis igitur trianguli, quiuis duo anguli: minores sunt duobus angulis rectis. Id quod erat demonstrandum.

Propo-

Propositio decimaoctaua. Theorema.

VT quoduis latus trianguli est maius: ita maiorē subtendit angulū.

Explicatio dati.) Sit triangulus $\alpha\beta\gamma$: habens latus $\alpha\gamma$, maius latere $\alpha\beta$. Explicatio quæsiti.) Dico quòd angulus $\alpha\beta\gamma$: maior sit angulo $\alpha\gamma\beta$. Delineatio.) Cum enim latus $\alpha\gamma$, sit maius latere $\alpha\beta$: fiat linea $\alpha\beta$, æqualis recta $\alpha\delta$: & ducatur recta $\beta\delta$. Demonstratio.) Quoniam trianguli $\beta\delta\gamma$, angulus $\alpha\delta\beta$ externus maior est angulo $\delta\gamma\beta$, interno sibi opposito: & angulus $\alpha\delta\beta$, sit æqualis angulo $\alpha\beta\delta$: cum latus $\alpha\beta$, lateri $\alpha\delta$ sit æquale: idcirco angulus $\alpha\beta\delta$: maior est angulo $\alpha\gamma\beta$. Ergo angulus $\alpha\beta\gamma$, multo est maior angulo $\alpha\gamma\beta$. Conclusio.) Vt quoduis igitur latus trianguli est maius: ita maiorem subtendit angulum. id quod erat demonstrandum.

Propositio decima nona. Theorema.

VT triangulus aliquis, angulum quemuis habuerit maiorem: ita etiam maiorem habebit eam lineā rectam, quę illum subtendit angulum.

Expli-

Explicatio dati.) Sit triangulus αβγ: habens angulũ αβγ, maiorem angulo αγβ. Explicatio quæſiti.) Dico quod trianguli αβγ: latus αγ, maius ſit latere αβ. Demonſtratio.) Si enim non fuerit maius: tum vel erit ei æquale: vel erit eo minor. ſed recta αγ, non eſt æqualis rectæ αβ. nam & angulus αβγ, angulo αγβ eſſet æqualis. id quod tamen non eſt. quare neq; latus αγ. lateri αβ, erit æquale: neque etiam latus αγ, poterit eſſe minus latere αβ. quia etiam angulus αβγ, minor eſſet angulo αγβ: cum tamen non ſit. Quare neq; latus αγ, minus eſt latere αβ. antea autem demonſtratum eſt. quod ei non ſit æquale. Erit ergo αγ latus, maius latere αβ. Concluſio.) Omnis igitur trianguli, maiorẽ angulum maius latus ſubtendit. Id quod erat demonſtrandum.

Propoſitio vigeſima. Theorema.

OMnis trianguli quæuis duo latera, ſunt maiora reliquo.

Explicatio dati.) Sit triangulus αβγ. Explicatio quæſiti.) Dico quod trianguli αβγ: quæuis duo latera, ſint maiora reliquo.

quo, latera $\beta\alpha$, $\alpha\gamma$, maiora latere $\beta\gamma$: Item latera $\alpha\beta$. $\beta\gamma$, maiora latere $\alpha\gamma$: deniq; latera $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, maiora latere $\alpha\beta$. Delineatio.) Producatur linea $\beta\alpha$, ad punctum δ: & fiat lineæ $\alpha\gamma$, æqualis linea $\alpha\delta$: deniq; ducatur linea $\gamma\delta$. Demonstratio.) Quoniam latus $\delta\alpha$, æquale est lateri $\alpha\gamma$: etiam angulus $\alpha\delta\gamma$, est æqualis angulo $\alpha\gamma\delta$. Verum angulus $\alpha\gamma\delta$, maior est angulo $\alpha\delta\gamma$. quare & angulus $\beta\gamma\delta$, angulo $\alpha\delta\gamma$, maior erit. & quia triangulus $\delta\gamma\beta$, angulum $\beta\gamma\delta$ maiorem habet angulo $\alpha\gamma\delta$: atq; maius latus subtendit angulum maiorẽ: idcirco & latus $\delta\beta$, maius est latere $\beta\gamma$. Sed $\delta\beta$ latus, æquale est $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ lateribus. quare $\beta\alpha$, $\alpha\gamma$, duo latera: sunt maiora latere $\beta\gamma$. Similiter demonstrabimus, quòd latera $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, sint maiora latere $\alpha\gamma$: & $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ latera sint maiora latere $\alpha\beta$. Conclusio.) Omnis igitur trianguli, quæuis duo latera: sunt maiora reliquo. id quod erat demonstrandum.

Propositio vigesima prima. Theorema.

SIà finibus vnius lateris trianguli cuiusuis, duæ rectæ lineæ intra triangulum ad punctũ idẽ statuantur: erunt quidẽ istæ duæ rectę lineæ, reliquis duobus trianguli lateribus minores, vel uero maiorem angulum comprehendent.

Explicatio dati.) Super latere enim βγ trianguli αβγ: à finibus β, & γ, duæ lineæ rectæ βδ, δγ statuantur intra triangulum. Explicatio quæsiti.) Dico quod duæ rectæ βδ, δγ: minores quidẽ sint reliquis duobus trianguli lateribus βα, αγ: verum angulum βδγ, maiorem angulo βαγ, contineant. Delineatio.) Producatur enim linea βδ: ad punctum vsq; ε. Demonstratio.) Quoniam omnis trianguli duo latera maiora sunt reliquo: idcirco trianguli αβε, duo latera αβ, αε sunt maiora latere βε. Commune addatur latus εγ. latera igitur βα, αγ, maiora sunt lateribus βε, εγ. Item quia trianguli γεδ, duo latera γε, εδ maiora sunt latere γδ. Cõmune addatur latus δβ. quare latera γε, εβ: maiora sunt lateribus γδ, δβ. Verum latera βα, αγ: demõstrata sunt maiora lateribus βε, εγ. ergo βα, αγ latera, lõge erũt maiora lateribus βδ, δγ. Rursus quoniã omnis triãguli angulus extraneus,

angulo

angulo intra triangulum sibi opposito est maior: idcirco trianguli γδε, angulus βδγ extraneus, angulo γεδ interno sibi opposito est maior. Per eadem demonstrabitur, quòd trianguli αβε, angulus γεβ: maior sit angulo βαγ. verum angulo γεβ, maior est demonstratus angulus βδγ. Ergo angulus βδγ: multò est maior angulo βαγ. (Conclusio.) Si igitur à finibus vnius lateris trianguli cuiusuis, duæ rectæ lineæ intra triangulum, ad puncta eadẽ statuantur: erũt quidem istæ duæ rectæ lineæ, reliquis duobus trianguli lateribus minores: verum maiorem angulũ comprehendent. Id quod erat demonstrandum.

Propositio vigesima secunda. Problema.

EX tribus lineis rectis: quæ sunt æquales tribus rectis lineis datis: triangulum constituere. Oportet verò quasuis duas reliqua esse maiores: propterea quod in omni triangulo quæuis duo latera, maiora sint reliquo.

Explicatio dati,) Sint tres lineæ rectæ datæ α, β, γ: & sint quæuis duæ maiores quàm reli-

reliqua: scilicet α & β maiores quàm γ: & α, atq; γ, maiores quàm β: deniq; β, & γ, maiores quàm α. Explicatio quæsiti.) Oportet igitur ex tribus lineis rectis: quæ datis tribus, α, β, γ, sunt æquales: triangulum componere. Delineatio.) Sumatur recta aliqua linea δε: finita quidem ad punctum δ: infinita verò ad punctum ε. deinde fiat lineæ rectæ α: æqualis linea recta δζ. Item rectæ β: æqualis recta ζη. præterea rectæ γ: æqualis recta ηθ. Ad hæc centro ζ, interuallo ζδ: describatur circulus δκλ. centro etiam η, interuallo ηθ: describatur circulus κλη: secans circulum δηλ, in puncto κ. Denique ducantur lineæ rectæ ζκ, κη. Delineationis factæ explicatio.) Dico quòd ex lineis rectis tribus, quæ sunt æquales tribus rectis datis: compositus sit triangulus κζη. Demonstratio.) Quoniam punctũ ζ, centrum est circuli δκλ. idcirco recta ζδ, æqualis est rectæ ζκ: verùm recta ζδ, est æqualis rectæ α: itaq; & κζ recta, æqualis est rectæ α. Item quoniã punctum η, est centrum circuli κλη: idcirco recta ηθ, est æqualis rectæ ηκ. verùm ηθ æqualis est γ rectæ. ergo & ηκ recta, æqualis est re-

ctæ γ. Verùm ζη, etiam est æqualis recta β. Tres igitur rectæ κζ, ζη. ηκ: tribus rectis α, β, γ, sunt æquales. Conclusio.) Ex tribus igitur rectis κζ, ζη, ηκ, quæ sunt æquales tribus datis γ, β, γ, rectis: triangulus est factus κζη. Quod faciendum erat.

Propositio vigesima tertia. Problema.

AD datam lineam rectam: & datū in ea punctum: dato angulo rectilineo: æqualem angulum rectilineum statuere.

Explicatio dati.) Sit data linea recta αβ: sit datum in ea punctum α: sit angulus rectilineus datus δγε. Explicatio quæsiti.) Ad lineam rectam datam αβ: & punctum in ea datum α: statuendus est angulus rectilineus: æqualis angulo δγε rectilineo dato. Delineatio.) Sumantur in lineis rectis γδ, γε, puncta quæuis δ, ε. Ducatur etiā linea recta δε. Postea ex talibus lineis rectis quæ sunt æquales tribus rectis γδ, δε, γε. componatur triangulus αζη: sic vt lineæ γδ, sit æqualis linea αζ. & lineæ γε, linea αη. item lineæ δε, æqualis linea ζη.

ζη. Demonstratio.) Quoniam duo latera δγ, γε, duobus lateribus ζα, αη, sunt æqualia alterum alteri: & basis δε, æqualis sit basi ζη. Erit igitur angulus δγε: æqualis angulo ζαη. Conclusio.) Ad datam igitur lineam rectam αβ: & ad punctum in ea datum α: dato angulo rectilineo δγε: cōstitutus est angulus rectilineus ζαη. Id quod erat faciendum.

Propositio vigesima quarta. Theorema.

SI fuerint trianguli vnius, duo latera æqualia duobus lateribus alterius trianguli, alterū alteri: sed angulus vnius maior angulo alterius, quē æquales rectæ lineæ comprehendunt: etiam basis basi maior erit.

Explicatio dati.) Sint duo trianguli αβγ, δεζ: quorum duo latera αβ, αγ, duobus lateribus δε, δζ sint æqualia, alterum alteri: latus αβ, lateri δε: & latus αγ, lateri δζ: sed angulus βαγ sit maior angulo εδζ. Explicatio quæsiti.) Dico quod basis βγ, basi εζ sit maior. Delineatio.) Quoniā angulus βαγ maior est angulo εδζ: statuatur ad lineam rectā εδ:

& ad punctum in ea δ: angulus εδη, æqualis angulo βαγ: & fiat alterutræ linearum αγ, δζ: æqualis linea recta δη. & ducantur lineæ rectæ ηε, ζη. Demonstratio.) Quoniam latus αβ, æquale est lateri δε: & latus αγ: æquale est lateri δη: duo igitur latera βα, αγ, duobus lateribus εδ, δη sunt æqualia, alterum alteri: & angulus βαγ, æqualis est angulo εδη. Ergo basis βγ, basi εη est æqualis. Item quoniam latus δη, est æquale lateri δζ: erit etiam angulus δζη, æqualis angulo δηζ. ergo angulus δζη maior est angulo εηζ. quare angulus εζη, longè maior est angulo εηζ. Cum etiam triangulus εζη, habeat angulum εζη, maiorem angulo εηζ: at maiorem angulum maius latus subtendat, idcirco latus εη, maius est latere εζ. verùm latus εη, æquale est lateri βγ. ergo & βγ latus, maius est latere εζ. Conclusio.) Si ergo duo fuerint trianguli, habentes duo latera, duobus lateribus æqualia, alterum alteri: angulum verò angulo maiorem, qui æqualibus illis lateribus continetur: etiam basin basi maiorem habebunt. Id quod erat demonstrandum.

Propo-

Propositio vigesima quinta. Theorema.

SI trianguli vnius, duo latera fuerint ęqualia duobus lateribus trianguli aterius: sed basis vnius fuerit maior basi alterius: erit etiam angulus vnius maior angulo alterius, quem æquales illæ rectę lineæ comprehendũt.

Explicatio dati.) Sint duo trianguli $\alpha\beta\gamma$, $\gamma\epsilon\zeta$: quorum duo latera $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, sint æqualia duobus lateribus $\delta\epsilon$, $\delta\zeta$, alterum alteri: latus $\alpha\beta$, æquale lateri $\delta\epsilon$: & latus $\alpha\gamma$, æquale lateri $\delta\zeta$: sed basis $\beta\gamma$, sit maior basi $\epsilon\zeta$. Explicatio quæsiti.) Dico quod angulus $\beta\alpha\gamma$, maior sit angulo $\epsilon\delta\zeta$. Demonstratio.) Quod si enim non fuerit maior: aut erit ei æqualis: aut eo minor. sed angulus $\beta\alpha\gamma$, non est æqualis angulo $\epsilon\delta\zeta$. nam & basis $\beta\gamma$, etiam esset æqualis basi $\epsilon\zeta$. Verùm non est ei æqualis. quare nec angulus $\beta\alpha\gamma$, est æqualis augulo $\epsilon\delta\zeta$: sic etiã non est eo minor: siquidem & basis $\beta\gamma$, basi $\epsilon\zeta$ minor esset: quod tamen non est. quare nec angulus $\beta\alpha\gamma$, angulo $\epsilon\delta\zeta$ minor est. demonstratum verò antea fuit. quòd ei non sit æqualis. Erit igitur angulus $\beta\alpha\gamma$, angulo $\epsilon\delta\zeta$ maior.

Conclusio.) Si ergo fuerint trianguli vnius duo latera æqualia duobus lateribus trianguli alterius, alterum alteri; sed basis vnius maior basi alterius: erit etiã angulus vnius, maior angulo alterius, quem æquales rectæ lineæ comprehendunt. Id quod erat demonstrandũ.

Propositio vigesima sexta. Theorema.

QVorum triangulorum duo anguli vnius, fuerint æquales duobus angulis alterius: alter alteri: & latus vnum, æquale vni: siue illud appositum sit æqualibus illis angulis: siue subtendat, vnum ex æqualibus illis angulis: illorum tum reliqua latera inter se erunt æqualia, alterum alteri: tum etiam reliquus angulus reliquo angulo erit æqualis.

Prima explicatio dati.) Sint duo trianguli αβγ, δεζ, quorum duo anguli αβγ, βγα sint æquales duobus angulis δεζ, εζδ, alter alteri: angulus αβγ, æqualis angulo δεζ: &c angulus βγα, angulo εζδ: habeant etiam vnum latus vni lateri æquale, & primo loco, latus quod positũ est ad æquales illos angulos, latus ius $\beta\gamma$, lateri $\varepsilon\zeta$. *Prima explicatio quæsiti.*) Dico quod & reliqua latera reliquis lateribus habebunt æqualia, alterũ alteri: latus $\alpha\beta$, lateri $\delta\varepsilon$: et latus $\alpha\gamma$, æquale lateri $\delta\zeta$: et reliquũ angulũ reliquo angulo æqualẽ, nempe angulũ $\beta\alpha\gamma$, æqualẽ angulo $\varepsilon\delta\zeta$. *Prima delineatio.*) Si enim $\alpha\beta$, latus, inæquale fuerit lateri $\delta\varepsilon$: vnum ex istis sit maius. sit igitur latus $\alpha\beta$, maius. & fiat rectæ $\delta\varepsilon$, æqualis recta $\beta\eta$: & ducatur recta $\eta\gamma$. *Prima demonstratio.*) Cum itaq; latus $\beta\eta$, sit æquale lateri $\delta\varepsilon$, & latus $\beta\gamma$ æquale lateri $\varepsilon\zeta$. duo igitur latera $\beta\eta$, $\beta\gamma$: duobus lateribus $\delta\varepsilon$, $\varepsilon\zeta$, sunt æqualia alterum alteri: & angulus $\eta\beta\gamma$, angulo $\delta\varepsilon\zeta$ æqualis: ergo basis $\eta\gamma$, basi $\delta\zeta$ est æqualis, & triangulus $\alpha\gamma\beta$, triangulo $\delta\varepsilon\zeta$ est æqualis, & reliqui anguli, reliquis angulis sunt æquales, alter alteri, quos æqualia illa latera subtendunt angulus $\eta\gamma\beta$, æqualis angulo $\delta\zeta\varepsilon$, sed angulus $\delta\zeta\varepsilon$, proponitur æqualis angulo $\beta\gamma\alpha$. erit igitur angulus $\beta\gamma\eta$, etiam æqualis angulo $\beta\gamma\alpha$, minor maiori, quod fieri nequit. *Conclusio prima.*) Ergo latus $\alpha\beta$, nõ est inæquale lateri $\delta\varepsilon$, ergo erit ei æquale, verum latus $\beta\gamma$

etiam est æquale lateri $\varepsilon\zeta$: *duo igitur latera* $\alpha\beta, \beta\delta$: *duobus lateribus* $\delta\varepsilon, \varepsilon\zeta$, *sunt æqualia alterum alteri*: & *angulus* $\alpha\beta\gamma$, *angulo* $\delta\varepsilon\zeta$ *æqualis. basis itaq;* $\alpha\gamma$, *basi* $\delta\zeta$ *erit æqualis*, & *reliquus angulus* $\beta\alpha\gamma$, *reliquo angulo* $\varepsilon\delta\zeta$ *æqualis. Secunda explicatio dati.) Verum iterum statuantur latera æquales angulos subtendentia æqualia, vt* $\alpha\beta$ *latus, æquale lateri* $\delta\varepsilon$. *Secunda explicatio quæsiti.) Dico quod etiam reliqua latera, reliquis lateribus sint æqualia, latus* $\alpha\gamma$, *æquale lateri* $\delta\zeta$: & *latus* $\beta\gamma$, *æquale lateri* $\varepsilon\zeta$: *deniq; reliquus angulus* $\beta\alpha\gamma$, *reliquo angulo* $\varepsilon\delta\zeta$ *æqualis. Secunda delineatio.) Si enim latus* $\beta\gamma$, *non fuerit æquale lateri* $\varepsilon\zeta$: *sed alterum ex eis fuerit maius. sit latus* $\beta\gamma$, *si poterit fieri, maius latere* $\varepsilon\zeta$: & *fiat lateri* $\varepsilon\zeta$, *æquale latus* $\beta\theta$: & *ducatur recta* $\alpha\theta$. *Secunda demonstratio.) Quoniam latus* $\beta\theta$, *æquale est lateri* $\varepsilon\zeta$, & *latus* $\alpha\beta$, *æquale lateri* $\delta\varepsilon$: *duo itaq; latera* $\alpha\beta, \beta\theta$: *duobus lateribus* $\delta\varepsilon, \delta\zeta$, *sunt æqualia alterum alteri*: & *angulos comprehendunt æquales: basis igitur* $\alpha\theta$, *est æqualis basi* $\delta\zeta$: & *triangulus* $\alpha\beta\theta$, *triangulo* $\delta\varepsilon\zeta$ *est æqualis*: & *reliqui anguli, reliquis*

quis angulis sunt æquales alter alteri, quos æqualia illa latera subtendũt: angulus $\beta\delta\alpha$, æqualis angulo $\varepsilon\zeta\delta$. Verùm angulus $\varepsilon\zeta\delta$, est æqualis angulo $\beta\gamma\alpha$. ergo angulus $\beta\theta\alpha$, est æqualis angulo $\beta\gamma\alpha$. Trianguli igitur $\alpha\theta\gamma$, angulus $\beta\theta\alpha$ externus: angulo $\beta\gamma\alpha$ interno sibi opposito est æqualis. quod fieri nequit. Quare latus $\beta\gamma$: non est inæquale lateri $\varepsilon\zeta$. erit igitur ei æquale. sed & $\alpha\beta$ latus, est æquale lateri $\delta\varepsilon$: duo igitur latera $\alpha\beta$, $\beta\gamma$: sunt æqualia duobus lateribus $\delta\varepsilon$, $\varepsilon\zeta$ alterum alteri: & angulos comprehendunt æquales. basis igitur $\alpha\gamma$, basi $\delta\zeta$ est æqualis: & triangulus $\alpha\beta\gamma$, est æqualis triangulo $\delta\varepsilon\zeta$: & reliquus angulus $\beta\alpha\gamma$, reliquo angulo $\varepsilon\delta\zeta$ est æqualis. Conclusio.) Quorum ergo triangulorum duo anguli vnius, fuerint æquales duobus angulis alterius, alter alteri: & latus vnum vni lateri æquale: siue illud appositum sit æqualibus illis angulis: siue subtẽdat vnum ex æqualibus illis angulis. illorũ tum reliqua latera inter se erunt æqualia, alterum alteri: tum etiam reliquus angulus, reliquo angulo erit æqualis. Id quod erat demonstrandum.

PARS ALTERA HVius primi elementi.

Propositio vigesima septima. Theorema.

SI in duas lineas rectas, recta incidens linea, angulos alternos æquales inter se fecerit: equedistantes inter se erunt rectæ illæ duæ lineæ.

Explicatio dati.) In lineas duas rectas $\alpha\beta$, $\gamma\delta$: incidens linea recta $\epsilon\zeta$: angulos alternos $\alpha\epsilon\zeta$, $\epsilon\zeta\delta$: æquales inter se faciat. Explicatio quæsiti.) Dico quòd recta $\alpha\beta$, rectæ $\gamma\delta$, æquedistet. Hypothesis.) Si enim non æquedistantium protractæ lineæ rectæ $\alpha\beta$, $\gamma\delta$: concurrũt, vel ex partibus β & δ: vel ex partibus α, & γ. Delineatio.) Protrahantur & concurrant ex partibus β, & δ: in puncto η. Demonstratio.) Trianguli igitur $\eta\epsilon\zeta$, angulus $\alpha\epsilon\zeta$ externus, angulo $\epsilon\zeta\eta$ interno opposito est maior: verum etiã est ei æqualis. quod fieri non potest. quare rectæ $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, si protrahantur: non concurrent ex partibus β, & δ, similiter demonstrabitur: quod neque ex partibus α, & γ, concurrant.

currant. rectæ verò, quæ ex neutra parte concurrunt, si protrahantur: sunt inter se æquedistantes. quare recta $\alpha\beta$, æquedistat rectæ $\gamma\delta$. Conclusio.) Si igitur in duas lineas rectas, recta incidat linea: ac faciat angulos alternos inter se æquales: rectæ istæ lineæ inter se sunt æquedistantes. Id quod erat demonstrandum.

Propositio vigesima octaua. Theorema.

SI linea recta, in duas rectas incidens lineas: extraneum angulum, interno cui opponitur ex eadem parte fecerit æqualem: vel si duos internos, ex eadem parte: fecerit æquales duobus angulis rectis: æquedistātes inter se erūt, duæ illæ lineæ rectæ.

Explicatio dati.) In lineas duas rectas $\alpha\beta$, incidat linea recta $\epsilon\zeta$: angulum extraneum $\epsilon\eta\beta$, interno opposito ex eadē parte angulo $\eta\zeta\delta$: faciat æqualem: & faciat duos angulos internos, ex eadem parte $\beta\eta\theta$, $\eta\theta\delta$: æquales duobus angulis rectis. (Explicatio quæsiti.) Dico quod recta $\alpha\beta$, æquedistet rectæ $\gamma\delta$. Demonstratio. (Cùm enim angulus $\epsilon\eta\beta$, sit æ-

qualis

qualis angulo αηθ: idcirco angulus αηθ, etiam est æqualis angulo ηθδ. & sunt anguli alterni. quare recta αβ, rectæ γδ, est æquedistans. Rursus, quoniam anguli βηθ, ηθδ, duobus rectis sunt æquales: & duo anguli αηθ, βηθ, etiã duobus rectis æquales: idcirco anguli αηθ, βηθ sunt duobus angulis βηθ, ηθδ æquales: communis auferatur angulus βηθ, reliquus igitur angulus αηθ: reliquo angulo ηθδ, est æqualis, & sunt anguli alterni. ergo recta αβ, æquedistat rectæ γδ. Cõclusio.) Si igitur linea recta, in duas rectas incidens lineas: extraneum angulum interno cui opponitur, ex eadem parte fecerit æqualem: vel si duos angulos internos, ex eadem parte, fecerit æquales duobus angulis rectis: æquedistantes inter se erunt, duæ illæ lineæ rectæ. Id quod erat demonstrandum.

Propositio vigesima nona. Theorema.

Linea recta, in duas rectas æquedistantes lineas incidens: facit angulos alternos inter se æquales: & angulum externum, interno opposito ex eadem parte facit æqualem: item duos

angu-

angulos internos, ex eadem parte: facit æquales duobus rectis.

Explicatio dati.) Sint duæ lineæ rectæ æquedistantes αβ, γδ: & in eas incidat linea recta εζ. Explicatio quæsiti.) Dico quod faciat angulos αηθ, ηθδ: qui sunt alterni, inter se æquales: & angulum externum εηβ, angulo interno opposito ex eadem parte ηθδ, æqualem: & angulos internos ex eadem parte positos βηθ, ηθδ: duobus rectis æquales. Demonstratio cum hypothesi.) Si enim angulus αηθ, non est æqualis angulo ηθδ: alter illorum erit maior. sit angulus αηθ maior. Quoniam angulus αηθ, maior est angulo ηθδ: communis addatur angulus βηθ. ergo anguli αηθ, βηθ, sunt maiores angulis βηθ, ηθδ. Verum anguli αηθ, βηθ: duobus rectis sunt æquales. ergo anguli βηθ, ηθδ: duobus rectis sunt minores. lineæ verò rectæ, à duobus angulis, qui sunt minores duobus angulis rectis: in infinitum vsq; ductæ: concurrunt. quare rectæ αβ, γδ in infinitum productæ concurrent. sed quia æquedistantes proponuntur esse: nō concurrūt: idcirco angulus αηθ, non est inæqualis angulo ηθδ.

ηθδ, erit igitur ei æqualis: Verũ angulus αηθ angulo εηϐ est æqualis: ideo etiã angulus εηβ est æqualis angulo ηθδ. cõmunis addatur angulus ϐηθ, ergo anguli εηβ, βηθ: angulis βηθ, ηθδ sunt æquales. verùm anguli εηβ, βηθ duobus rectis sunt æquales. idcirco & anguli βηθ, ηθδ: duobus rectis æquales erunt. Conclusio.) Linea igitur recta, in duas æquedistantes lineas rectas incidens: facit alternos angulos, inter se æquales: & angulum externum, interno opposito ex eadem parte facit æqualem: item duos angulos internos, ex eadem parte, facit æquales duobus rectis. Id quod erat demonstrandum.

Propositio trigesima. Theorema.

QVæ eidem lineæ rectæ æquedistant: illæ etiam inter se æquedistant.

Explicatio dati.) Sit linea recta εζ, cui æquedistet rectæ lineæ αβ, γδ. Explicatio quæsiti.) Dico quòd recta αϐ, etiam æquedistet rectæ γδ. Delineatio.) Incidat in prædictas lineas: recta quædam linea ηκ. Demonstratio.)

Quoniam

Quoniam in duas æquedistantes rectas $\alpha\beta$, $\varepsilon\zeta$: incidit recta $\eta\theta$: idcirco angulus $\alpha\eta\theta$: est æqualis angulo $\eta\theta\zeta$. Præterea quoniam in duas rectas æquedistantes $\varepsilon\zeta$, $\gamma\delta$ recta incidit $\eta\kappa$: angulus $\eta\theta\zeta$, erit æqualis angulo $\eta\kappa\delta$. demonstratum verò est, quòd angulus $\alpha\eta\kappa$: angulo $\eta\theta\zeta$ sit æqualis. quare & angulus $\alpha\eta\kappa$: angulo $\eta\kappa\delta$ est æqualis, & sunt anguli alterni. Quare recta $\alpha\beta$, æquedistat rectæ $\gamma\delta$. Conclusio.) Quæ igitur rectæ eidem lineæ rectæ æquedistant: illæ etiam inter se æquedistant. Id quod erat demonstrandum.

Propositio trigesima prima. Problema.

A Puncto dato: datæ lineæ rectæ: rectam lineam æquedistantem ducere.

Explicatio dati.) Sit datum punctum α: & data linea recta $\beta\gamma$. Explicatio quæsiti.) A dato puncto α: ducenda est linea recta, æquedistans lineæ rectæ datæ, $\beta\gamma$. Delineatio.) Sumatur in linea recta $\beta\gamma$: punctum quoduis δ: & ducatur linea recta $\alpha\delta$: ad lineam rectam $\alpha\delta$: & punctũ in ea α: angulo rectilineo $\alpha\delta\gamma$:

æqua-

æqualis statuatur angulus rectilineus δαε: & ducatur linea αζ, ἐπ' εὐθείας, lineæ εα. Demonstratio.) Quoniam in duas lineas rectas βγ, εζ: incidens linea recta αδ: angulos alternos εαδ, αδγ, æquales inter se fecit. idcirco recta εζ, æquedistat rectæ βγ. (Conclusio.) A puncto igitur dato α: datæ lineæ rectæ βγ: ducta est linea recta εαζ æquedistans. Id quod faciendum erat.

Propositio trigesima secunda.
Theorema.

Omnis trianguli, vno è lateribus protracto: exterior angulus, duobus angulis interioribus quibus opponitur, est ęqualis: & trianguli tres interiores anguli: duobus rectis sunt æquales.

Explicatio dati.) Sit triangulus αβγ: & protrahatur latus eius βγ, ad punctum δ. Explicatio quæsiti.) Dico quod angulus αγδ: est æqualis duobus angulis γαβ, αβγ, interioribus quibus opponitur: & quod anguli tres interiores αβγ, βγα, γαβ: sint æquales duobus

angulis

angulis rectis. Delineatio.) Ducatur à puncto γ lineæ rectæ $\alpha\beta$ æquedistans linea recta $\gamma\epsilon$. Demonstratio.) Quoniam recta $\alpha\beta$, æquedistat rectæ $\gamma\epsilon$: & in eas incidit recta $\alpha\gamma$. Idcirco alterni anguli $\beta\alpha\gamma$, $\alpha\gamma\epsilon$: sunt inter se æquales. Item cum recta $\alpha\beta$, æquedistet rectæ $\gamma\epsilon$: & in eas incidit recta $\beta\delta$: angulus $\epsilon\gamma\delta$ externus, est æqualis angulo $\alpha\beta\gamma$ interno opposito. sed demonstratum est angulum $\alpha\epsilon\gamma$: angulis $\beta\alpha\gamma$ $\alpha\beta\gamma$ esse æqualem. totus igitur angulus $\alpha\gamma\delta$ externus, duobus angulis internis oppositis $\beta\alpha\gamma$, $\alpha\beta\gamma$ est æqualis. Cõmunis addatur angulus $\alpha\gamma\beta$. anguli igitur $\alpha\gamma\delta$, $\alpha\gamma\beta$: tribus angulis $\alpha\beta\gamma$, $\beta\gamma\alpha$, $\gamma\alpha\beta$ sunt æquales. sed duo anguli $\alpha\gamma\delta$, $\alpha\gamma\beta$ sunt duobus rectis æquales. quare tres anguli $\alpha\gamma\beta$, $\gamma\beta\alpha$, $\gamma\alpha\beta$, duobus rectis erunt æquales. Conclusio.) Omnis igitur trianguli, vno è lateribus protracto: exterior angulus, duobus angulis interioribus, quibus opponitur, est æqualis: & trianguli, tres interiores anguli: duobus rectis sunt æquales. Id quod erat demonstrandum.

Propositio trigesima tertia. Theorema.

Lineæ rectæ, quæ ęquales, & ęquedistantes inter se lineas rectas ex eadem parte coniungunt; etiam ipsæ æquales, & æquedistantes inter se sunt.

Explicatio dati.) Sint lineæ rectæ αβ, γδ, æquales, & æquedistantes: easq́ ex eadem parta coniungant duæ rectæ, αγ. βδ. Explicatio quæsiti.) Dico quod rectæ αγ, βδ, æquales, & æquedistantes sint. Delineatio.) Ducatur linea recta βγ. Demonstratio.) Quoniam recta αβ, æquedistat rectæ γδ: & in eas incidit recta βγ: idcirco anguli αβγ, βγδ alterni: sunt inter se æquales. Et cum recta αβ: sit æqualis rectæ γδ: communis verò βγ: duo igitur latera αβ, βγ, duobus lateribus βγ, γδ sunt æqualia: & angulus αβγ, angulo βγδ est æqualis. basis igitur αγ, basi βδ est æqualis: & triangulus αβγ, triangulo βγδ est æqualis: & reliqui anguli, reliquis angulis sunt æquales alter alteri, quos æqualia illa latera subtendunt. angulus igitur αγβ, angulo γβδ est æqualis, & angulus βαγ, angulo γδβ. & quoniam nium in duas rectas $\alpha\gamma$, $\beta\delta$, recta incidēs $\beta\gamma$: angulos alternos $\alpha\beta\gamma$, $\gamma\beta\delta$, æquales inter se fecit. idcirco recta $\alpha\gamma$, æquedistat rectæ $\beta\delta$. Verum demonstrata fuit ei esse æqualis. Conclusio.) Lineæ igitur rectæ, quæ æquales, & æquedistantes inter se lineas rectas, ex eadem parte coniungunt: etiam ipsæ æquales, & æquedistantes inter se sunt. Id quod erat demonstrandum.

Propositio trigesima quarta. Theorema.

AReæ, quę ęquedistantibus lineis rectis continentur: habent latera opposita, & angulos oppositos inter se æquales: & dimetiens ipsas medias secat.

Explicatio dati.) Sit figura æquedistantibus lineis rectis contenta $\alpha\gamma\delta\beta$: dimetiens eius linea $\beta\gamma$. *Explicatio quæsiti*) Dico quod areæ $\alpha\beta\gamma\delta$, latus $\alpha\beta$: sit æquale lateri $\gamma\delta$: item latus $\alpha\gamma$, æquale lateri $\beta\delta$. Præterea dimetiens $\beta\gamma$, ipsam figuram secet in duas partes æquales. *Demonstratio.)* Quoniam recta $\alpha\beta$, æquedistat rectæ $\gamma\delta$: & in eas incidit recta $\beta\gamma$: anguli alterni $\alpha\beta\gamma$, $\beta\gamma\delta$ sunt inter se æquales. Item quoniam recta $\alpha\gamma$, æquedistat rectæ $\beta\delta$: & in eas incidit recta $\beta\gamma$: anguli igitur alterni inter se sunt æquales. Quare cum duo trianguli $\alpha\beta\gamma$, $\gamma\beta\delta$: duos angulos $\alpha\beta\gamma$, $\beta\gamma\alpha$, habeat duobus angulis $\gamma\beta\delta$ $\beta\gamma\delta$, æquales, alterum alteri: & vnum latus vni lateri æquale: nempe latus $\beta\gamma$, commune: quod ad angulos æquales est positum. idcirco & reliqua latera, reliquis lateribus habent æqualia, alterum alteri: & reliquum angulum reliquo angulo æqualem. latus $\alpha\beta$, æquale lateri $\gamma\delta$: & latus $\alpha\gamma$, æquale lateri $\beta\delta$: & angulum $\beta\alpha\gamma$, angulo $\beta\delta\gamma$, æqualem. Quia verò angulus $\alpha\beta\gamma$, angulo $\beta\gamma\delta$ est æqualis: & angulus $\gamma\beta\delta$, angulo $\alpha\gamma\beta$ etiam æqualis. Totus igitur angulus $\alpha\beta\delta$, toti angulo $\alpha\gamma\delta$ est æqualis. Verùm & angulus $\beta\alpha\gamma$, demonstratus est æqualis angulo $\beta\delta\gamma$. Cõclusio.) Areæ igitur, quæ æquedistantibus lineis rectis continentur: habent latera opposita æqualia, & angulos oppositos inter se æquales. Secũda explicatio quæsiti.) Dico quod diameter secet eas in duas partes æquales. Demonstratio secunda.)

Quoni-

Quoniam latus $\alpha\beta$, est æquale lateri $\gamma\delta$: & latus $\beta\gamma$ cõmune. duo igitur latera $\alpha\beta$, $\beta\gamma$: duobus lateribus $\gamma\delta$, $\beta\gamma$ sunt æqualia alterũ alteri: & angulus $\alpha\beta\gamma$, angulo $\beta\gamma\delta$ est æqualis. ergo basis $\alpha\gamma$, basi $\delta\beta$ est æqualis: & triangulus $\alpha\beta\gamma$, triangulo $\beta\gamma\delta$ etiam æqualis. (Conclusio.) Ergo diameter $\beta\gamma$, figuram $\alpha\beta\gamma\delta$: secuit in duas partes æquales. Id quod demonstrandum erat.

TERTIA HVIVS ELEmenti pars.

Propositio trigesima quinta. Theorema.

QVæ parallelogramma, eandem habent basin: & in eisdem æque distantibus sunt lineis rectis: illa sunt æqualia inter se.

Explicatio dati.) Sint parallelogramma $\alpha\beta\gamma\delta$, $\epsilon\beta\gamma\zeta$: in eadem basi $\beta\gamma$: & eisdem lineis rectis æquedistantibus $\alpha\zeta$, $\beta\gamma$. Explicatio quæsiti.) Dico quod parallelogrammon $\alpha\beta\gamma\delta$: sit æquale parallelogrammo $\epsilon\beta\gamma\zeta$. Di monstratio.) Quoniam $\alpha\beta\gamma\delta$ figura: est parallelogrammon. idcirco latus $\beta\gamma$, est æquale lateri $\alpha\delta$. Per eadem demonstrabitur quoque latus $\varepsilon\zeta$: æquale lateri $\beta\gamma$. quare & latus $\alpha\delta$, est æquale lateri $\varepsilon\zeta$. communis verò est recta $\delta\varepsilon$. totum igitur latus $\alpha\varepsilon$: toti lateri $\delta\zeta$ est æquale. Verum latus $\alpha\beta$: est etiam æquale lateri $\delta\gamma$, duo itaque latera $\varepsilon\alpha$, $\alpha\beta$: duobus lateribus $\zeta\delta$, $\delta\gamma$ sunt æqualia alterum alteri: & angulus $\zeta\delta\gamma$, æqualis angulo $\varepsilon\alpha\beta$, externus interno. basis igitur $\varepsilon\beta$, basi $\zeta\gamma$ est æqualis: & triangulus $\varepsilon\alpha\beta$, triangulo $\zeta\delta\gamma$ æqualis. communis auferatur triangulus $\delta\eta\varepsilon$. quare reliquum trapezion $\alpha\beta\eta\delta$, reliquo trapezio $\varepsilon\eta\gamma\zeta$ est æquale. Communis addatur triangulus $\eta\beta\gamma$. totum igitur parallelogrammon $\alpha\beta\gamma\delta$, est æquale toti parallelogrammo $\varepsilon\beta\gamma\zeta$. Conclusio.) Quæ igitur parallelogramma eandem habent basin: & in eisdem æquedistantibus sunt lineis rectis: illa sunt inter se æqualia. Id quod erat demonstrandum.

Propositio 36. Theorema.

QVæ parallelogramma, æquales habent

habent bases: & sunt in eisdem æquedistantibus lineis rectis: illa sunt æqualia inter se.

Explicatio dati.) Sint parallelogramma αβγδ, εζηθ: habentia bases βγ, ζη æquales: & sint inter easdem æquedistantes rectas lineas αθ, βη. Explicatio quæsiti.) Dico quod parallelogrammon αβγδ, sit æquale parallelogrammo εζηθ. Delineatio.) Ducantur lineæ rectæ βε, γθ. Demonstratio.) Quoniam recta βγ, æqualis est rectæ ζη: & ζη est æqualis rectæ εθ. idcirco & βγ, est æqualis rectæ εθ. verùm sunt lineæ rectæ æquedistantes, easque coniungunt rectæ γε, γθ: rectæ verò quæ æquales, & æquedistantes rectas ex eadẽ parte coniungunt: & ipsæ æquales, & æquedistantes sunt. quare rectæ εβ, γθ æquales & æquedistantes sunt. atq; figura εβγδ est parallelogrãmon, & est æquale parallelogrãmo αβγδ. quia cum eo eandẽ habet basim βγ: & in eisdẽ est æquedistantibus rectis βγ, αθ. Similiter demonstrabimus quod ζηθε eidem parallelogrãmo εβγθ sit æquale. quare parallelogrammon αβγδ, parallelogrãmo εζηθ est æquale.

Conclusio.) Quæ igitur parallelogramma, æquales habent bases: & sunt in eisdem æquedistantibus lineis rectis: illa sunt æqualia inter se: Id quod erat demonstrandum.

Propositio trigesima septima. Theorema.

QVi trianguli, eandem habent basin: & sunt in eisdem equedistantibus lineis rectis; illi sunt inter se æquales.

Explicatio dati.) Sint duo trianguli αβγ. δγβ, super eadem basi βγ: & in eisdem æquedistantibus lineis rectis αδ, βγ. Explicatio quæsiti.) Dico quod triangulus αβγ: sit æqualis triangulo δγβ. Delineatio.) Producatur linea recta αδ, in vtramque partem ad puncta ε, & ζ: & ex puncto β, ducatur linea recta βε, æquedistans lineæ rectæ αγ. præterea ex puncto γ, ducatur recta βγζ, æquedistans rectæ δ. Demonstratio.) Vtraque igitur figura εβαγ, & δβγζ est parallelogrammon. & parallelogrammon εβαγ, est æquale parallelogrammo δβγζ. quia super eadem basi βγ est: & inter easdem æquedistantes lineas rectas βγ, εζ &

paralle-

parallelogrammi εβγα dimidium est, triangulus αβγ, nam diameter αβ ipsum per mediũ secat. parallelogrammi verò δϐ, γζ, dimidiũ est triangulus δβγ. nam diameter δγ ipsum per medium secat. Quæ verò æqualium sunt dimidia: illa inter se sunt æqualia. triangulus igitur αβγ, triangulo δβγ est æqualis. Conclusio.) Qui igitur trianguli, sunt super eadem basi: & inter easdem lineas rectas æquedistantes: illi inter se sunt æquales. Id quod erat demonstrandum.

Propositio trigesima octaua. Theorema.

QVi trianguli, æquales habent bases: & sunt in eisdem æquedistantibus lineis rectis: illi inter se sunt æquales.

Explicatio dati.) Sint trianguli αβγ, δεζ super basibus æqualibus γβ, εζ: in eisdem æquedistantibus lineis rectis αδ, βζ. Explicatio quæsiti.) Dico quod triangulus αβγ, sit æqualis triangulo δεζ. Delineatio.) Producatur linea recta αδ, in vtramq; partem ad puncta η, & θ. Ex puncto β, ducatur linea recta

$\beta\eta$, æquedistans lineæ rectæ $\alpha\gamma$. Item ex puncto ζ, ducatur linea recta $\zeta\theta$, æquedistans lineæ rectæ $\delta\epsilon$. Demonstratio.) Vtraque igitur figura $\eta\beta\gamma\alpha$, $\delta\epsilon\zeta\theta$ est parallelogrammon. & parallelogrammon $\eta\beta\gamma\alpha$, est æquale parallelogrammo $\delta\epsilon\zeta\theta$. quia super basibus $\beta\gamma$, $\epsilon\zeta$ æqualibus: & in eisdem lineis rectis æquedistantibus $\beta\zeta$, $\eta\theta$ sunt. præterea parallelogrammi $\alpha\beta\gamma\alpha$ dimidiũ: est triangulus $\alpha\beta\gamma$. quoniam diameter $\alpha\beta$, ipsum secat per medium. & parallelogrammi $\delta\epsilon\zeta\theta$ dimidium, est $\zeta\epsilon\delta$ triangulus. quia diameter $\zeta\delta$, ipsum secat medium. Quæ verò æqualium sunt dimidia: illa inter se sunt æqualia. quare triangulus $\alpha\beta\gamma$, triangulo $\delta\epsilon\zeta$ est æqualis. Conclusio.) Qui igitur trianguli, super basibus fuerint æqualibus: & in eisdem lineis æquedistantibus: illi inter se sunt æquales. Id quod erat demonstrandum.

Propositio trigesima nona. Theorema.

TRianguli æquales, eandẽ habentes basim: & ex eadem parte, & in eisdem æquedistantibus rectis sunt.

Explicatio dati.) Sint trianguli αβγ. δβγ super eadem basi βγ. Explicatio quæsiti.) Dico quod etiam in eisdem sint lineis rectis æque distantibus. Delineatio.) Ducatur linea recta αδ. Explicatio delineationis.) Dico quod recta αδ, æquedistet rectæ βγ. Hypothesis.) Si enim ei non æquedistat: ducatur per punctum α, rectæ lineæ βγ, æquedistans recta αε: & ducatur linea recta εγ. Demonstratio.) Triangulus igitur αβγ, est æqualis triangulo εβγ: qui super eadem basi βγ est: et in eisdem lineis rectis æquedistantibus βγ, αε. verum triangulus αβγ: est æqualis triangulo δβγ: idcirco & triangulus δβγ, triangulo εβγ est æqualis. maior minori: quod fieri nequit. Quare recta αε, non æquedistat rectæ βγ. Simili ratione demonstrabimus, quod nulla alia præterquam αδ recta, æquedistet rectæ βγ. recta igitur αδ, rectæ βγ æquedistat. Cōclusio.) Trianguli igitur æquales: eandem habentes basim: in eisdem sunt æquedistantibus rectis. Id quod erat demonstrandum.

Propo-

Propositio quadragesima. Theorema.

Trianguli æquales: super æqualibus constituti basibus: sunt in eisdem lineis rectis æquedistantibus.

Explicatio dati.) Sint trianguli æquales, αβγ, γδε: super basibus βγ, γε æqualibus. Explicatio quæsiti. Dico quod in eisdem sint æquedistantibus lineis rectis. Delineatio.) Ducatur recta αδ. Explicatio delineationis.) Dico quod αδ, æquedistet rectæ βε. Hypothesis.) Si enim et non æquedistat, ducatur per punctum α, rectæ βε, æquedistans recta ζα: & ducatur recta ζε. Demonstratio.) Triangulus igitur αβγ: est æqualis triangulo ζγε. quia sunt constituti super basibus βγ, γζ æqualibus: & in eisdem lineis rectis æquedistantibus βε, αζ. sed triangulus αβγ, est æqualis triangulo δγε. quare triangulus δγε: etiam erit æqualis triangulo ζγε. maior minori. quod fieri nequit. nõ igitur recta αζ, æquedistat rectæ βε. Simili ratione demonstrabimus, quod nulla alia præterquam αδ recta: æquedistet rectæ βε. Cõclusio.) Trianguli igitur æquales: super æqualibus constituti basibus: sunt in eisdem lineis

neis

neis rectis æquedistantibus. Id quod erat demonstrandum.

Propositio quadragesima prima. *Theorema.*

Parallelogrammon, trianguli est duplum: si super eadem consistat basi: & in eisdem fuerit æquedistantibus lineis rectis.

Explicatio dati.) Parallelogrāmon αβγδ, & triangulus εβγ: sint super eadem basi βγ, in eisdem æquedistantibus lineis rectis αε, ϐγ. Explicatio quæsiti.) Dico quod parallelogrammon αβγδ: sit duplum trianguli βεγ. Delineatio.) Ducatur recta αγ. Demonstratio.) Triangulus αβγ, est æqualis triangulo εβγ: quia super eadem basi sunt βγ: & in eisdem æquedistantibus lineis rectis βγ, αε. sed parallelogrammon αϐγδ, est duplum trianguli αβγ. quia αγ diameter ipsum mediū secat. quare & parallelogrammon αβγδ: trianguli εβγ duplum erit. Conclusio.) Parallelogrammon igitur trianguli est duplum: si super eadem consistat basi: & in eisdem fuerit æque-

æquedistantibus lineis rectis. Id quod erat demonstrandum.

Propositio quadragesima secunda.
Problema.

DAto triangulo, æquale statuere parallelogrammon: in angulo rectilineo dato.

Explicatio dati.) Sit triangulus datus αβγ: & datus angulus rectilineus δ. Explicatio quæsiti.) Dato triangulo αβγ, statuendum est parallelogrammon æquale: in angulo qui est æqualis, dato angulo rectilineo δ. Delineatio. Dissecetur linea recta βγ media in puncto ε: & ducatur linea recta αε: atque statuatur ad lineam rectam εγ: & ad punctum eius ε: dato angulo rectilineo δ: æqualis angulus rectilineus γεζ: postea ducatur per punctũ α, lineæ rectæ γε: æquedistans linea recta αη: & per punctum γ, lineæ rectæ εζ, æquedistans linea recta γη. Erit itaq; figura ζεγη parallelogrammon. Demonstratio.) Quoniam βε est æqualis εγ: idcirco & triangulus αβε, triangulo αεγ est æqualis: sunt enim super basibus

æquali-

æqualibus $\beta\epsilon, \epsilon\gamma$: *& in eisdē lineis rectis* $\beta\gamma$, $\iota\eta$, *æquedistantibus, Quare* $\alpha\beta\gamma$ *triangulus duplus est trianguli* $\alpha\epsilon\gamma$. *verū parallelogrammon* $\epsilon\zeta\gamma\eta$: *etiam est duplum trianguli* $\alpha\epsilon\gamma$. *quia eandem habent basin* $\epsilon\gamma$: *& in eisdē sunt æquedistantibus lineis rectis* $\epsilon\gamma$, $\zeta\eta$. *Quare parallelogrammon* $\epsilon\zeta\gamma\eta$: *est æquale triangulo* $\alpha\beta\gamma$: *& habet angulum* $\gamma\epsilon\zeta$, *æqualem angulo* δ. *Cōclusio.) Dato igitur triangulo* $\alpha\beta\gamma$: *statutum est æquale parallelogrammon* $\epsilon\zeta\gamma\eta$, *in angulo* $\zeta\epsilon\gamma$, *qui est æqualis, dato angulo rectilineo* δ, *Quod faciendum erat.*

Propositio 43. Theorema.

OMnis parallelogrammi, eorum quæ circa eandem sunt dimetientem parallelogrammωn supplementa: æqualia inter se sunt.

Explicatio dati.) Sit parallelogrammon $\alpha\beta\gamma\delta$: *dimetiens eius* $\alpha\gamma$: *& circa* $\alpha\gamma$, *sint parallelogramma* $\epsilon\theta$, $\zeta\eta$, *& quæ vocantur supplementa sint* $\beta\kappa$, $\kappa\delta$. *Explicatio quæsiti.) Dico quod supplementum* $\beta\kappa$, *sit æquale supplemēto* $\gamma\delta$. *Demonstratio.) Quoniam* $\alpha\beta\gamma\delta$ *paralle-*

parallelogrammon, diametrum habet $\alpha\gamma$: idcirco triangulus $\alpha\beta\gamma$, est æqualis triangulo $\alpha\delta\gamma$. Rursus quoniam $\epsilon\kappa\theta\alpha$ parallelogrammon: diametrum habet $\alpha\kappa$ lineam rectã: ideo $\epsilon\alpha\kappa$ triangulus, est æqualis triangulo $\alpha\theta\kappa$. per eadem demonstrabitur triangulum $\kappa\zeta\gamma$, triangulo $\kappa\eta\gamma$ esse æqualem. Cum igitur triangulus $\alpha\epsilon\kappa$, triangulo $\alpha\theta\kappa$ sit æqualis: & triangulus $\kappa\zeta\gamma$, æqualis triangulo $\kappa\eta\gamma$: erit itaq; triangulus $\alpha\epsilon\kappa$ cum triangulo $\kappa\theta\gamma$ æqualis triangulo $\alpha\theta\kappa$, cum triangulo $\kappa\zeta\gamma$. verùm totus triangulus $\alpha\beta\gamma$, toti triangulo $\alpha\delta\gamma$ est æqualis. quare reliquum supplementũ $\beta\kappa$, reliquo supplemento $\kappa\delta$ est æquale. Conclusio.) Omnis igitur parallelogrammi, eorum quæ circa eandem sunt dimetientẽ parallelogrammon supplementa: æqualia sunt inter se. Id quod erat demonstrandum.

Propositio quadragesima quarta. Problema.

AD datam lineam rectam: dato triangulo: æquale statuere parallelogrãmon: in angulo rectilineo dato. Expli-

Explicatio dati.) Sit data linea recta $\alpha\beta$: datus vero triangulus γ: datus angulus recti lineus δ. Explicatio quæsiti.) Ad datam lineam rectam $\alpha\beta$: statuendum est parallelogrammon, æquale triangulo dato γ: in angulo, qui est æqualis angulo δ dato. Delineatio.) Fiat triangulo γ, æquale parallelogrammon $\beta\epsilon\zeta\eta$: in angulo $\epsilon\beta\eta$, æquali angulo δ dato: & sit linea recta $\beta\epsilon$, ἐπ' εὐθείας rectæ $\alpha\beta$: atque producatur linea recta $\zeta\eta$, ad punctum θ. per punctum etiam α: æducatur alterutri linearum $\beta\zeta\eta$, $\epsilon\zeta$ æquedistans linea recta $\alpha\theta$: denique ducatur linea recta $\theta\beta$. Demonstratio.) Quoniam in duas rectas æquedistantes $\alpha\theta$, $\epsilon\zeta$: incidit recta linea $\theta\zeta$. idcirco anguli $\alpha\theta\zeta$, $\theta\zeta\epsilon$ duobus rectis sunt æquales. atque ideo anguli $\beta\theta\eta$, $\eta\zeta\epsilon$ duobus rectis sunt minores, verum lineæ rectæ, à duobus angulis, qui sunt minores duobus angulis rectis: in infinitum vsque ductæ concurrunt. quare $\theta\beta$, $\zeta\epsilon$ productæ concurrent. Altera delineationis pars.) Producantur duæ lineæ rectæ $\zeta\epsilon\theta\beta$: & concurrant in puncto κ: & per punctum κ, alterutræ linearum $\epsilon\alpha$, $\zeta\theta$, ducatur $\kappa\lambda$ æquedistans: atque producantur lineæ *rectæ $\eta\beta$, $\theta\alpha$, ad puncta vsque λ, μ. Demonstrationis altera pars.) Est igitur figura $\theta\lambda\kappa\zeta$ parallelogrammon: eiusque diameter $\theta\kappa$: circa dimetientem verò parallelogramma sunt $\alpha\eta$, $\mu\epsilon$: dicta vero supplementa $\lambda\beta$, $\beta\zeta$. quare $\lambda\beta$ supplementum, est æquale $\beta\zeta$ supplemẽto: verùm $\beta\zeta$ supplementum, est æquale triangulo γ. ergo & $\lambda\beta$ supplementum triangulo γ est æquale. præterea quoniam angulus $\eta\beta\epsilon$ est æqualis angulo $\alpha\beta\mu$: & angulus $\eta\beta\epsilon$ etiam est æqualis angulo δ. idcirco & angulus $\alpha\beta\mu$, etiam est æqualis angulo δ. Conclusio.) Ad datam igitur lineam rectam $\alpha\beta$: dato triangulo γ: æquale constitutum est parallelogrammon $\lambda\beta$: in angulo $\alpha\beta\mu$, qui est æqualis angulo δ. Id quod erat faciendum.*

Propositio quadragesima quinta.
Problema.

DAto rectilineo: æquale statuere parallelogrammon: in angulo rectilineo dato.

Explicatio dati.) Sit datum rectilineum $\alpha\beta\gamma\delta$: & datus angulus rectilineus ϵ. Explica-

plicatio quæsiti.) Dato rectilineo $\alpha\beta\gamma\delta$: statuendum est æquale parallelogrammon: in angulo rectilineo, qui est æqualis angulo ϵ dato. Delineatio.) Ducatur linea recta $\beta\delta$: & constituatur triangulo $\alpha\beta\delta$ æquale parallelogrammon $\zeta\theta$: habens angulum $\theta\kappa\zeta$, æqualem angulo ϵ. statuatur etiam ad lineam rectam $\eta\theta$, parallelogrammon $\eta\mu$, æquale triangulo $\delta\beta\gamma$: habens angulum $\kappa\theta\mu$ æqualem angulo ϵ. Demonstratio.) Quoniã angulus ϵ alterutri angulo $\theta\kappa\zeta$, $\eta\theta\mu$ est æqualis: idcirco & angulus $\eta\theta\mu$, angulo $\theta\kappa\zeta$ est æqualis. cõmunis addatur angulus $\kappa\theta\eta$. ergo duo anguli $\zeta\kappa\theta$, $\kappa\theta\eta$: duobus angulis $\kappa\theta\eta$, $\kappa\theta\mu$ sunt æquales. verum duo anguli $\zeta\eta\theta$, $\kappa\theta\eta$ duobus rectis sunt æquales. quare & anguli $\kappa\theta\eta$, $\eta\theta\mu$ duobus rectis sunt aquales. ad lineam rectam $\eta\theta$, & punctũ in ea datum θ in diuersas partes ductæ sunt lineæ rectæ $\kappa\theta$, $\theta\mu$: atq; faciunt angulos ἐφεξῆς æquales duobus rectis: quare recta $\kappa\theta$, est ἐπ' εὐθείας rectæ $\theta\mu$. Et quia in lineas rectas æquedistãtes $\kappa\mu$, $\zeta\eta$, recta quædam $\theta\eta$ incidit: anguli idcirco alterni sunt inter se æquales: angulus $\mu\theta\eta$, æqualis angulo $\theta\kappa\zeta$. Communis *addatur angulus* $\theta\eta\lambda$. *anguli igitur* $\mu\theta\eta$, $\theta\eta\lambda$: *angulis* $\theta\kappa\zeta$, $\theta\eta\lambda$ *sunt æquales. verum* $\lambda\theta\eta$, $\theta\eta\lambda$ *anguli sunt æquales duobus rectis. quare & anguli* $\theta\kappa\zeta$, $\theta\eta\lambda$, *duobus rectis sunt æquales. quare recta* $\zeta\eta$, *est* ἐπ' εὐθείας, *rectæ* $\eta\lambda$. *Cum vero* $\kappa\zeta$ *recta, rectæ* $\theta\eta$ *sit æqualis, & æquedistans: item* $\theta\eta$ *recta, rectæ* $\mu\lambda$ *æqualis & æquedistans: idcirco &* $\kappa\zeta$ *recta, rectæ* $\mu\lambda$ *æqualis & æquedistans est: easq́ coniungunt rectæ* $\kappa\mu$, $\zeta\lambda$. *quare &* $\kappa\lambda$, $\zeta\mu$ *æquales & æquedistantes sunt: vnde fit, quod figura* $\kappa\zeta\lambda\mu$ *sit parallelogrammon. Cum autē triangulus* $\alpha\beta\delta$: *sit æqualis parallelogrammo* $\theta\zeta$: *& triangulus* $\delta\beta\gamma$ *parallelogrammo* $\eta\mu$. *totum igitur rectilineum* $\alpha\beta\gamma\delta$: *toti parallelogrammo* $\kappa\zeta\lambda\mu$ *est æquale. Conclusio.) Dato igitur rectilineo* $\alpha\beta\gamma\delta$: *constitutum est parallelogrammon* $\kappa\zeta\lambda\mu$ *æquale: in angulo* $\zeta\eta\mu$: *qui est æqualis dato angulo* ϵ. *Id quod faciendum erat.*

Propositio quadragesima sexta. Problema.

A Data linea recta: describere quadratum.

Explicatio dati.) Sit data linea recta ctæ αβ. Explicatio quæsiti.) A data linea recta λβ, describendum est quadratũ. Delineatio.) Ducatur ex puncto α, lineæ rectæ αβ: ad angulos rectos recta linea αγ: & fiat rectæ αβ, æqualis recta αδ: per punctum etiam δ, lineæ rectæ αβ: ducatur æquedistans linea recta δε: deniq; per punctum β, lineæ rectæ δε: ducatur æquedistans linea recta ζε. Demonstratio.) Figura igitur αβδε, est parallelogrammon: & αζ, est æqualis δε, atq; αδ rectæ βε: sed & αβ etiam est æqualis rectæ αδ. quatuor igitur rectæ αζ, αδ, δε, ζε, sunt inter se æquales, atq; idcirco parallelogrammon αδεζ est æquilaterum. Secũda explicatio quæsiti.) Dico quod parallelogrammon αδεβ: etiam sit rectangulum. Demonstratio.) Cum in duas rectas æquedistantes αζ, δε, recta quædam αδ inciderit: anguli βαδ, αδε, duobus rectis sunt æquales: verùm angulus βαγ, est rectus. idcirco & angulus αγε, etiã est rectus. parallelogrãma verò angulos oppositos æquales: & latera opposita habẽt æqualia: quare vterq; angulorum oppositorum αβε, εβδ est rectus: ideoq; αδεβ parallelogrammon, est rectangulum. sed

& æquilaterum esse, fuit demonstratum. Conclusio.) Quare αβεγ figura, est quadratum: & est descriptũ à linea recta data αβ. id quod erat demonstrandum.

Propositio quadragesima septima.
Theorema.

IN triangulis rectangulis, quadratum lateris angulum rectum subtendentis: est æquale quadratis laterum, rectum angulum continentium.

Explicatio dati.) Sit triangulus rectangulus αβγ, habens angulum βαγ rectum. Explicatio quæsiti.) Dico quod quadratum lateris βγ: sit æquale quadratis laterum βα, αγ. Delineatio.) Describatur à linea βγ, quadratum βδεγ: & à linea βα, quadratum βη. Præterea à linea αγ quadratum γθ. Ducatur etiam per punctum α: alterutræ linearum βδ, γε æquedistans recta linea αλ. deniq; ducantur duæ lineæ rectæ αδ, ζγ. Demonstratio.) Quoniam vterq; angulorum βαγ, βαη est rectus. idcirco ad rectam quandam βα: & ad punctum quod in ea est α, duæ rectæ αγ, αη

in

in diuersas partes ductæ: faciunt angulos vicinos inter se æquales. quare recta $\gamma\alpha$ est ἐπ' εὐθείας rectæ $\alpha\eta$. per eadem ista demonstrabitur: quod recta $\alpha\beta$, est ἐπ' εὐθείας recta $\alpha\theta$. quoniam verò angulus $\delta\gamma\beta$, æqualis est angulo $\zeta\beta\alpha$ (quia vterque est rectus) communis addatur angulus $\alpha\beta\gamma$. totus igitur angulus $\delta\beta\alpha$: toti angulo $\zeta\beta\gamma$ est æqualis. cùm verò duo latera $\delta\beta$, $\beta\alpha$, duobus lateribus $\beta\zeta$, $\beta\gamma$ sint æqualia, alterum alteri: & angulus $\delta\beta\alpha$, angulo $\zeta\beta\gamma$ æqualis. basis igitur $\alpha\delta$, basi $\zeta\gamma$. est æqualis. & triangulus $\alpha\beta\gamma$, triangulo $\zeta\beta\gamma$ æqualis. verùm trianguli $\alpha\beta\gamma$: parallelogrammon $\beta\lambda$ est duplum. quia habent eandem basin $\beta\delta$: & sunt in eisdem lineis rectis æquedistantibus $\beta\gamma$, $\alpha\lambda$. Item trianguli $\zeta\beta\gamma$, duplum est quadratum $\eta\beta$. quia habent eandem basin $\zeta\beta$: & sunt in eisdem lineis rectis æquedistantibus $\zeta\beta$, $\eta\gamma$. Quæ vero æqualium sunt dupla: illa inter se sunt æqualia. ideoque parallelogrammon $\beta\lambda$, æquale est quadrato $\eta\beta$. Simili ratione quando $\alpha\epsilon$, $\gamma\zeta$, rectæ coniunguntur: demonstrabitur quod parallelogrammon $\gamma\lambda$ sit æquale quadrato $\eta\gamma$. totum *igitur quadratum $\delta\beta\epsilon\gamma$: duobus quadratis $\eta\beta, \theta\gamma$, est æquale. sed $\beta\delta\epsilon\gamma$ quadratum: est descriptum à latere $\beta\gamma$, & quadrata $\eta\beta$, $\theta\gamma$ sunt descripta à lateribus $\beta\alpha, \alpha\gamma$. Quadratū igitur lateris $\beta\gamma$: est æquale quadratis laterū $\beta\alpha, \alpha\gamma$. Cōclusio.) In triangulis igitur rectangulis: quadratum lateris rectum angulū subtendentis: est æquale quadratis laterum rectū angulum cōtinentium. quod erat demonstrandum.*

Propositio quadragesima octaua.
Theorema.

SI quadratum vnius lateris trianguli: fuerit æquale quadratis reliquorum duorū laterum: erit angulus, quem reliqua illa duo trianguli latera continent, rectus.

Explicatio dati.) Sit quadratum lateris $\beta\gamma$, trianguli $\alpha\beta\gamma$, æquale quadratis laterum $\beta\alpha, \alpha\gamma$. Explicatio quæsiti.) Dico quod angulus $\beta\alpha\gamma$ sit rectus. Delineatio.) Ducatur à puncto α: lineæ rectæ $\alpha\beta$, ad angulos rectos linea recta $\alpha\delta$: & fiat linea $\alpha\delta$, æqualis rectæ lineæ $\alpha\delta$: deniq; ducatur linea recta $\delta\beta$. Demonstra-

monstratio.) Quoniam recta $\delta\alpha$, est æqualis recta $\alpha\gamma$: idcirco & quadratũ à recta $\delta\alpha$ descriptum: erit æquale, quadrato à recta $\alpha\gamma$ descripto. Commune addatur quadratũ rectæ $\alpha\beta$. quare quadrata rectarum $\delta\alpha$, $\alpha\beta$: sunt æqualia quadratis rectæ $\beta\alpha$, $\alpha\gamma$. verùm quadratis rectarum $\delta\alpha$, $\alpha\beta$: æquale est quadratum rectæ $\gamma\beta$: quia angulus $\delta\alpha\beta$ est rectus. quadratis verò rectarum $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$: æquale proponitur esse quadratum rectæ $\delta\beta$. Quare quadratum rectæ $\delta\beta$: æquale est quadrato rectæ $\beta\gamma$. vnde etiam latus $\delta\beta$: lateri $\beta\gamma$, est æquale. Quoniam verò latus $\alpha\delta$, est æquale lateri $\alpha\beta$: commune verò latus $\alpha\gamma$: duo latera $\delta\alpha$, $\alpha\beta$: duobus lateribus $\beta\alpha$, $\alpha\gamma$ sunt æqualia: & basis $\delta\beta$, est æqualis basi $\beta\gamma$. idcirco & angulus $\delta\alpha\beta$, angulo $\beta\alpha\gamma$ est æqualis. Verum angulus $\gamma\alpha\beta$ est rectus. quare & angulus $\beta\alpha\gamma$ etiã erit rectus. Conclusio.) Si igitur quadratum vnius lateris trianguli fuerit æquale quadratis reliquorum duorum laterum: erit angulus quem reliqua duo trianguli latera continent rectus. Id quod erat demonstrandum.

SCHOLIA IN HOC PRImum Euclidis elementum, Cunradi Dasypodij.

De scientijs Mathematicis.

Mathematicas scientias, sic dictas volunt: quòd cum alias artes etiam absque præceptore intelligere, & addiscere possimus: has tamen non nisi instituti, & edocti: imò in illis exercitati percipere queamus: vt à discendo disciplinæ, à μαθήσει, ἐπιστῆμαι μαθηματικαὶ dicantur. Pythagorici autem mathematicæ nomẽ, duabus tantum scientijs Arithmeticæ, & Geometriæ imposuerũt. quoniam in his potissimum τὸ ἐπιστημονικὸν, & ipsa μάθησις cerni potest. postea tamen nonnulli latius sumpto vocabulo: alias scientias hisce cognatas appellarunt Mathematicas, Astronomiam, Musicam, & quæ huius sunt generis. Hinc fit, vt Mathematica definiatur scientia contemplationem habens rerum, non tantum abstractarum, vt sunt numeri, & figuræ: sed & sensibus ipsis subiectarum, vt-

pote

pote cæli, terræ, stellarum, sonorum, tonorum, & quæcunque his sunt similia.

Hanc verò vniuersalem mathesin: in duas potissimum partes diuidunt: altera enim versatur circa res mēte & ratione perceptas: quæ Græcis nominantur τὰ νοητὰ, *&* διανοητὰ. *altera verò* τῶν αἰσθητῶν, *rerum sensu subiectarum habet perceptionem: illa Geometriam, & Arithmeticam complectitur: hæc verò in sex est diuisa scientias, Geodæsiam, & Opticam: quæ ex Geometria nascuntur: Logisticam & Canonicam, prognatas ex Arithmetica: deniq; Mechanicam, & Astronomiā: quas ad vtramq; referri tradunt. Est & alia Mathematicæ diuisio: in quatuor partes tantum facta. quoniam* μάθησις *vel habet perceptionem quantitatis continuæ, vel quantitatis discretæ. Geometria enim, & Astronomia sibi habēt subiectas ipsas magnitudines: Geometria quidem eam, quæ est sine motu: Astronomia eam, quæ mouetur. sic etiam multitudinis & numerorum fit contemplatio, in Arithmetica, & Musica: illa enim numeros per se considerat: eorumq; proprietates inuestigat.*

significat: hæc verò numeros tractat relatos, quos etiam harmonicos appellant. Itaque vniuersalis quædam mathematica cognitio & doctrina est statuenda: sub se complectens reliquas disciplinas omnes: suaq́ principia, & vniuersales propositiones omnibus communicans: non quatenus numeris, aut figuris, vel deniq́ motibus illa insunt: sed quatenus eorũ vniuersalis est natura: & talis, quæ singularibus illis disciplinis attribui potest. Sunt autẽ eiusmodi principia τὸ πέρας, καὶ τὸ ἄπειρον, finitum, & infinitum: quia numerus incipit ab vnitate, & in infinitum vsq́ crescit: is verò qui sumitur, finitus semper est: sic etiam magnitudines in infinitum vsq́ diuidi possunt: cũ tamen ea quæ diuiduntur: sint finita, & termi nata. Propositiones verò mathematicæ communes sunt istæ, in quibus contemplamur λόγους, ἀναλογίας, συνθέσεις διαιρέσεις, ἀναστροφὰς, ἐναλλαγὰς τὸ ἴσον, τὸ ἄνισον, id est, rationes, proportiones, compositiones, diuisiones, cõuersiones, alternas permutationes, æquale, & inæquale. deinde τὸ κάλλος, καὶ τάξις, ipsaq́ μέθοδος. præterea ὁμοιότης, καὶ ἀνομοιότης, similitudo

militudo, & dissimilitudo rerum in figuris, numeris, & motibus vniuersaliter considerantur. hæc inquam omnia, & his similia vnaquæque disciplina ad suam accommodat rem subiectam: eaq; ei inesse proprijs confirmat rationibus. Præterea Mathematicarum disciplinarum fastigium & vertex quasi: est ipsa ἀποδεικτική. quia per ipsam hæ scientiæ perficiuntur: dum definitionibus, diuisionibus, demonstrationibus, & quicquid harum rerum est, vtuntur.

De Geometria, & eius elementis.

Proclus Geometriã sic definit: γεωμετρία ἐστὶ ἐπιστήμη γνωστικὴ μεγεθῶν, καὶ σχημάτων, καὶ τῶν ἐν τούτοις περάτων: ἔτι δὲ καὶ τῶν λόγων τῶν ἐν αὐτοῖς, καὶ παθῶν τῶν περὶ αὐτά, καὶ τῶν παντοίων θέσεων, καὶ κινήσεων. Geometria est scientia, vel cognitio magnitudinum, & figurarum, atq; etiam terminorum quibus illæ clauduntur: quæq; proportiones & rationes, atq; etiam passiones his accidentes demonstrat: positionum deniq; & motuum varietates explicat. Hæc scientia duplex est: altera nominatur θεωρία τῶν ἐπιπέδων: altera στερεομετρία.

Plano

SCHOLIA.

Planorum contemplatio tanquam simplicior præcedit, siquidem ex superficierum contemplatione nascitur corporum & solidorum cognitio. in vtraq; verò tria (sicuti in omnibus scientijs) considerantur. Primum ὑποκείμενον γένος, res ipsa, de qua doctrina est instituta: alterum τὸ καθ' αὑτὸ ὑπάρχον: id quod rei per se inest: & τὰ πάθη, rerum affectiones: tertium ἀξιώματα, καὶ αἰτήματα, propositiones: per quas rebus subiectis inesse aliquid demôstratur. illa itaq; in Geometria consideranda veniunt: nam vt ex definitione Geometriæ licet videre: subiecta sunt trianguli, quadrata, circuli, sphæræ, Cylindri, & vt summatim dicam, figuræ planæ corpora solida, deniq; omnes magnitudines immobiles, & harum termini. quæ verò his per se in sunt, διαιρέσεις, ἁφαὶ, παραβολαὶ, ὑπεροχὴ, ἔλλειψις, ἰσότης καὶ ἀνισότης, id est, diuisiones contactus, applicationes, excessus, defectus, æqualitas, & inæqualitas: cum alijs quibusdam huius generis. Axiomata, & petitiones, quibus singula rebus subiectis demonstrantur inesse: sunt huiusmodi: quæ eidem sunt æqualia: illa inter se

sunt

sunt æqualia. item à puncto ad punctum: ducere lineam rectam. Hæc verò cum late pateat: & ipsarum rerum subiectarum, atq; propositionum geometricarũ magna, variaq; sit copia: necesse est, vt delectus habeatur, & in tradendo, atq; docendo incipiamus à simplicioribus, ac principalioribus: ex quibus tanquam notissimis: extruamus demonstrationes rerum in geometria abstrusarum. quas quidẽ simpliciores propositiones στοιχεῖα, earumq; doctrinam στοιχείωσιν Græci autẽ nominant. sunt στοιχεῖα seu elementa Geometriæ, propositiones simplicissimæ, in quas compositæ resoluũtur: & à quibus tanquam principijs, omnes Geometricæ demonstrationes egressæ sunt. tales sunt hæ propositiones Euclidis, quibus Archimedes, Apollonius, & cæteri geometræ tanquã principijs, & notissimis elementis vtuntur. ita tamen hæc prima, & simplissima Geometriæ principia ab Euclide conscripta sunt: vt nemo satis possit hominis & ingenium, & industriam mirari. quæ enim ab antiquis fuerunt inuenta, in optimum redegit ordinem: delectum etiam in tanta copia, & varietate propo-

posi-

positionum habuit talem: vt non omnia quæ dici poterant, assumeret: sed tantum, quæ elementari institutioni conueniebant. deinde omnes modos, omniaq́; genera syllogismorum adhibuit, quæcunq́; ab ipsis apodeicticis recipiuntur. Præterea vtimur diuisionibus in inueniendis rerum speciebus: item definitionibus in substantiali rerum subiectarum explicatione: adhæc demonstratione in ijs: quæ à principijs fiunt ad quæsita. deniq; resolutione cum à quæsitis ad ipsa principia fit reditus. Taceo de varijs, quibus vtimur conuertendi modis, continuatione, & dispositione singulari ipsorum elementorum: vt vnum absq; altero videatur esse non posse. Quæ cum ita sint, meritò omnes studiosi philosophiæ, & bonarum artium: sibi hæc Euclidis elementa familiaria reddere debebant: vt ad altiores capescendas scientias fierent paratiores.

De propositionibus Geometriæ.

Solent Geometræ duo præcipua propositionum genera habere: vnum est τῶν ἀρχῶν *principiorum: alterum* τῶν μετὰ τὰς ἀρχὰς προβλάσεων*: id est, propositionum, quæ principia se-*

pia ſequuntur. principia ipſa, quia per ſe manifeſta, & ſimplicia ſunt: nulla adhibita demonſtratione primo explicantur loco: ſubſequuntur propoſitiones demonſtratione indigentes: & ex ipſis demanantes principijs. & niſi hic ordo teneatur, verùm permiſceantur omnia: tum & ipſa cognitio perturbatur: & quæ natura ſunt diſtincta, coniunguntur. Illud ipſum facit Euclides, & principiorum facta enumeratione, abſque vlla demõſtratione: tranſit ad propoſitiones demonſtrabiles. diuidit verò ipſa in ὑποθέσεις, αἰτήματα, καὶ ἀξιώματα, ἢ κοινὰς ἐννοίας. Eſt autem ὑπόθεσις, cum aliquis rei propoſitæ cognitionem nondum habet: quæ per ſe fidem rei faciat: verùm concedit aſſumẽti illud verum eſſe. eiuſmodi ſunt ipſæ definitiones Euclidis. Poſtulatum verò in genere eſt, cum neq; cognitum quid eſt: neque ab audiente conceſſum: tamen petitur ab alieno, vt aſſumi concedatur. ſicuti cùm peto mihi concedi: omnes angulos rectos: æquales inter ſe eſſe. Axioma, vel pronunciatum eſt, quando quid cognitum eſt, & tam manifeſtum: vt per ſeſe fidem habeat. vt quæ *videm sunt æqualia: illa inter se sunt æqualia, totum maius est sua parte. Geometræ tamen hypotheseis vocant etiam ὅρους definitiones rerum subiectarum: vt si definiam lineam, angulos, figuras, & similia: quo sciatur, quibus de rebus sermo sit institutus. deinde αἴτημα, seu postulatum non sic sumunt vt Philosophi: sed postulatum vocant propositionem immediatam: in qua petitur aliquid quod factu est facile: & nulla indiget varia aut prolixa delineatione: vt si dicam, à puncto ad punctum: ducatur linea recta. Communis deniq; sententia Geometris dicitur propositio immediata: quæ per se manifesta, & cognitu perfacilis est, sine vlla demonstratione recepta: & communi omnium conseusu concessa. Itaq; tria ista propositionum genera, in eo conueniunt: quod principiorum naturam habeant: ac per se sint manifesta. differunt verò, quòd hypothesis sit rerum subiectarum explicatio: postulatum proponit aliquid, quod factu sit facile: axioma rei per se manifestæ sit cognitio. Quidam verò petitiones dicunt tantum ad Geometriam spectare: axiomata verò ad omnes disciplinas.*

nas. Alij diuidunt hoc modo ipsas communes sententias: vt quasdam Geometriæ, nõnullas Arithmeticæ proprias esse dicant: alias deniq; communes. atq; hæc sint paucis dicta de principijs. Propositiones verò, quæ principia sequuntur: & demonstrari possunt ac debent: aliæ sunt προβλήματα, *aliæ* θεωρήματα. *Problemata dicuntur propositiones, in quibus aliquid nobis ad agendum proponitur. vt quando figurarum ortus, & constitutiones, sectiones, subtractiones, additiones, & similia proponuntur. Theoremata autem sunt, in quibus ad contemplandum quiddam proponitur, vt si ea, quæ rebus per se insunt, aut accidunt, consideramus. cuiusmodi dicuntur esse* τὰ καθ' αὑτὰ ὑπάρχοντα ἢ συμβεβηκότα: *vel etiam* συμπτώματα, *aut deniq;* τὰ πάθη. *Differunt itaq; inter se, sed non aliter quàm petitio, & axioma. Euclides vtroq; genere vtitur. nam iterdum tantum habet problemata, vt in quarto libro, interdum verò solum theoremata, sicuti in quinto: nonnunquam deniq; theoremata problematibus commiscet: vt in reliquis facit libris.*

De primo libro.

Proposuit sibi Euclides in hoc primo elemento: principia figurarum rectilinearum tradere: nam triangulus & parallelogrammon, sunt in figuris rectilineis omnium primæ, & simplicissimæ figuræ. Diuisit verò librum in partes tres: in prima, post explicationem principiorum: docet quomodo triangulus sit constituendus: quæ sint eius proprietates: cùm quoad angulos: tum etiam latera: præterea eosdem comparat inter se: & vnumquodq; accidens per se considerat: in altera de lineis æquedistantibus, & parallelogrammis doctrinã instituit: demonstrans quæ eis per se insint: & quomodo ipsa fiant parallelogramma. in postrema, parallelogramma & triangulos inter se confert. primum seorsim, deinde coniunctim. Atq; hæc breuiter sint dicta, & explicata: de vniuersali illa rerum mathematicarũ: & Geometriæ cognitione: nunc subiungemus perbreues locorum difficiliorum expositiones: & si quid forsan occurret: quod latius sit explicandũ, & ad vniuersam Geometriam spectare videbitur: id fusius exponemus. cuiusmodi

modi est ille locus περὶ τοῦ πρίσματος, ἐν στά σεως ἀπαγωγῆς, & de ijs, quæ his similia.

Σημείων.) Alij sic definiunt: σημεῖον ἐστὶ μονὰς θέσιν ἔχουσα. punctum est vnitas, quæ positionem habet. solum punctum in Geometria diuidi non potest: sicut in Arithmetica vnitas non admittit diuisionem. sunt enim vnius, eiusdemque naturæ: quum duarum scientiarum omnium prima, & simplicissima sint principia: differunt tamen in eo, quòd punctũ dari & poni possit: vnitas verò puncto simplicior existens nõ ponatur: cùm ab omni interuallo, omnique materia, ac loco sit abstracta. Vtitur autem definitione negatiua, quoniam negationes maximè conueniunt principijs.

Γραμμὴ.) Principium omnium magnitudinum sola negatione definiuit: lineam verò nunc describit affirmando, & negando. quia affirmatione excedit naturam puncti: & minus est simplex puncto: cùm sit longitudo diuisionem admittens: negatione verò est principium respectu superficiei, & corporis. sunt enim tres dimensiones: longitudinis quæ attribuitur lineæ, lõgitudinis & latitudinis simul:

quæ ad superficiem refertur: denique longitudinis, & latitudinis, atque profunditatis coniunctim in corpore. cum itaq; in definitione ponit ἀπλατὲς latitudine carens: vnà cum latitudine adimit quoque profunditatem: atque eam ob causam non addidit καὶ ἀβαθὲς, cùm superfluum esset. Alij sic definiunt lineam: γραμμή ἐστι ῥύσις σημείου: id est, linea fit ex fluxu puncti: nonnulli γραμμὴν μέγεθος ὑφ' ἓν διαστατὸν nominant: magnitudinem vno contentam interuallo. Euclidis tamen definitio perfectior est: essentiam & substantiam lineæ explicans. Possumus autem lineã hoc modo cognoscere: si longitudines parietũ, aut itinerũ spatia dimetiamur, quia tum neq; latitudinem, neque craßitiem subiungimus: sed vnicam consideramus distantiam: sicuti cùm metimur prata, & campos: videmus ipsam tantum superficiem, id est longitudinem & latitudinẽ tantum eius loci, vel agri. Cùm verò puteos, tum est solidum, quia omnes distantiæ, omniaq; interualla ibi coniunguntur. dicimus enim longitudinis, latitudinis, profunditatis ipsius putei, tantum, vel tantum *esse spatium. melius tamen cognoscemus lineam, quando obseruamus quomodo lucidum ab obscuro: illuminatum ab obumbrato distinguatur.*

Εὐθεῖα.) *Duæ simplicissimæ, ac præcipuæ linearum species sunt, recta & circularis: reliquæ omnes sunt mixtæ: & vel in superficiebus planis: vel in corporibus solidis considerantur. Plato lineam rectam definit sic:* εὐθεῖα γραμμή ἐστιν ἧς τὰ μέσα τοῖς ἄκροις ἐπιπροσθεῖ: *cuius media obumbrant extrema: quod licet videre in Eclipsi solis, quando in vna linea recta sunt Sol, Luna, & oculus noster: Luna media inter nos & Solem existente. Archimedes definit lineam rectam sic:* εὐθεῖα γραμμή ἐστιν ἐλαχίστη τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν γραμμῶν, *est breuissima earum linearum, quæ eosdem habent terminos. atque hæc definitio explicat Euclideam, & vicissim illa declarat hanc.*

Επιφανεία.) *Post punctum & lineam sequitur superficies, quæ duplici interuallo distat lõgitudine, & latitudine: caret verò crassitudine: atq; eam ob causam addidit particulam* μόνον.

Ἐπιφάνεια δὲ.) *Sicut corpus solidũ clauditur, & terminatur superficie: sic & superficies linea finitur, & linea puncto. quod quidẽ est omnium magnitudinum communis, & simplicissimus, atq; extremus terminus.*

Ἐπίπεδος ἐπιφάνεια.) *Omnis superficies vel est plana, vel circularis, & sphærica. vnam igitur Geometra delegit, eamq; definit, nempe planam. possunt ei etiam congruere definitiones lineæ rectæ supra positæ: in hac autẽ plana superficie nos tanquam in aliquo subiecto contemplamur figuras, & figurarum affectiones. nam in plana superficie nos ducimus lineas rectas, circulares, & figuras omnis generis: item linearum, circulorum, & figurarum sectiones, contactus, applicationes angulorum, constitutiones, & quicquid harum est rerum. sed planam superficiem idcirco elegit, quoniam in alijs superficiebus ista omnia non possunt ita intelligi, aut describi, quemadmodum in plana. Vocat itaq; hic planũ id, quod nobis ante oculos est positum: & in quo mente atque cogitatione omnia describimus, & delineamus, atq; firmis rationibus confirmamus.*

Ἐπι-

Ἐπίπεδος γωνία.) Genus definitionis est κλίσις, inclinatio: locus autem in quo describitur angulus, est τὸ ἐπίπεδον, planũ ipsum: ortus verò eius est, quòd ad minimum duæ debent esse lineæ rectæ: sicuti in solido angulo, lineæ tres: deinde illæ duæ lineæ rectæ: debent sese mutuo tangere: neq; sitæ esse in directo. illud enim est ἐπ' εὐθείας, quando duæ lineæ rectæ ita collocatæ sunt: vt protractis istis lineis rectis, & concurrentibus, vna ex duabus fiat linea recta.

Ὅταν δὲ.) Enumerat species substantiales anguli rectilinei, definitionibus acuti & obtusi anguli: est addendũ genus: quod scilicet vterq; sit rectilineus, alter maior recto, alter verò recto minor. Verum nõ absolute illud est sumendum, quod omnis angulus recto minor, sit acutus: quia sunt anguli nonnulli etiam non rectilinei minores recto, & tamen non acuti: sicut neq; illud simpliciter sumitur, quod obtusus sit recto maior, & idcirco omnes recto angulo maiores sunt obtusi. quoniam sunt anguli recto maiores, qui non sunt obtusi.

Σταθεῖσα.) Rectam super recta constituit *in definitione anguli recti: non autem in anguli obtusi aut acuti descriptione. quia angulus rectus, est angulorum non rectorum mensura: sicuti æqualitas, est regula & norma inæqualitatis.*

Ἀλλήλαις.) *Possunt enim æquales esse, sed si inter se æquales sint; necesse est vt sint recti.*

Ἐφεξῆς.) *Indicat causam rectitudinis: quia si anguli contigui inter se sunt æquales, rectus erit vterque illorum æqualium angulorum, nam stans illa recta in neutrum inclinat partem: & idcirco causa est non æqualitatis tantum, sed & rectitudinis. Traditur verò hic de angulis, qui sunt in vno eodemque plano: sicuti & perpendicularis non quælibet hic definitur: sed illa tantum, quæ in vno, eodemque est plano.*

Κύκλος.) *Prima simplicissima, atque perfectissima figura plana est circulus, vt in corporibus solidis sphæra.*

Σχῆμα.) *Quia vno comprehenditur termino.* ἀφ᾽ ἑνός. *sunt enim infinita in circulo puncta: quorum omnium vnum tantum centri nomen & naturam retinet.* Ἐντός.) *ad*

diffe-

differentiam eius puncti, quod extra circulum sumitur: & polus dicitur. omnia enim in uno sunt plano. idcirco etiam statim definitionem illius puncti subiungit, ut sciamus nō polum, sed centrum intelligi.

Διάμετρος.) Circulo propriè conuenit: nam ἄξων vel axis est ipsius sphæræ: Διαγώνιος verò figurarum quadrilaterarum.

Ημικύκλιον.) Semicirculum inquit circuli diametro & circumferentia comprehendi: propter τμήματα segmenta circulorum, quorum alterum μείζων maius, alterum ἔλαττον minus dicitur.

Ευθύγραμμα.) à figura quæ uno termino, ad eam quæ duobus comprehenditur, est progressus: nunc ad alias pergit explicandas: idq́ iuxta ordinem numerorum, binarium, & ternarium, & ita deinceps. quamuis ultra quadrilateras figuras, quæ in elementis locum habent, non progreditur specialiter: uerùm sub uno uocabulo comprehendit: & eas nominat τὰ πολύπλευρα, multilateras figuras. Omnis igitur figura rectilinea, uel est trilatera: uel quadrilatera: uel gradatim multilatera:

sed

sed non è contra omnis trilatera, quadrilatera, aut multilatera est rectilinea.

Τριπλεύρων.) *Triangulorum duplex est diuisio: vna per se manifesta, & cognita sumpta ab ipsis lateribus: altera quæ eam subsequitur est propria ab ipsis angulis facta.*

Τετραπλεύρων.) *Præcipua diuisio quadrilaterarum figurarũ hæc est: aliæ dicuntur parallelogramma: aliæ nõ parallelogramma. quæ verò parallelogramma dicuntur: aliæ rectangula, & æquilatera sunt: vt* τετράγωνον *quadratum: aliæ verò horum neutrum habẽt, vt* τὸ ῥομβοειδὲς, *Rhombi speciem habens. nonnulla verò sunt quidem rectangula: sed nõ æquilatera, vt* ἑτερομηκὲς, *parallelogrammon altera parte longius: deniq; sunt parallelogramma, quæ æquilatera quidem, sed non rectangula sunt, vt est* ῥόμβος, *Rhombus. Figuræ verò quadrilateræ, quæ non sunt parallelogramma: aut duo tantum habent parallela latera, & sunt* τραπέζια: *aut nulla prorsus parallela latera, & nominantur* τραπεζοειδῆ, *speciem trapezij habentia. Verum Euclides hanc diuisionem facere non potuit,*

cùm

cùm de parallelis lineis aut figuris hisce lineis contentis nulla sit facta mentio: idcirco simpliciorem illam facit diuisionem τετραπλεύρων.

Καὶ πᾶσιν ὀρθαὶ) Quidam iuxta Peripateticos volunt hanc propositionẽ esse αἴτημα, petitionem: alij verò & melius ἀξίωμα, pronuntiatum. Cùm nunc paucis absoluerimus principia: restant propositiones demonstrabiles. omnis enim scientia vel versatur in principiorum explicatione; quas sine vlla demonstratione adhibita recipit: vel in doctrina propositionum earum, quæ ex ipsis demanãt principijs: & per ea demonstrantur: quare & nos illas aggrediamur.

De partibus problematis, atque Theorematis.

Propositiones quæ demonstrationem admittunt, suprà duplices constituimus esse: vel enim sunt προβλήματα, problemata: in quibus ea, quæ quodammodo nondum existunt comparare, & constituere proponitur: vel θεωρήματα, theoremata, in quibus id quod *iam constitutum est, & in rerum natura existit, cognoscere, & perspicere statuimus. Geometria enim, vt & aliæ scientiæ, habet omnes quatuor quæstiones: an sit, quid sit, quale sit, & quare sit: de quibus quidem omnibus sermonem instituit ipsa Geometria, vt apud Euclidem videbimus. Omne verò problema, omneq́ theorema, quod suis perfectum, & absolutum est partibus, hæc in se habet: πρότασιν, ἔκθεσιν, διορισμὸν, κατασκευὴν, ἀπόδειξιν, καὶ συμπέρασμα, id est, propositionem, in qua est δεδομένον, datũ, & ζητούμενον, quæsitum: deinde explicationem dati: tertio explicationem quæsiti: quarto delineationem: quinto demonstrationem: sexto & postremo conclusionem totius. Nam in propositione quid de re subiecta, vel ipso dato quæratur, proponitur. perfecta enim propositio, & datum, & quæsitum habet, quamuis nõnullæ sint, quæ altero careant: postea ἔκθεσις ipsum datum per sese considerat, & ipso quæsito quasi præparat & struit viam. διορισμὸς seorsim proponit quid de subiecto quæratur. Delineatio verò solet ea addere, quæ ad inuestigationem quæsiti pertinent:*

tinent: ipsa autem demonstratio, adhibitis certis atque firmis, priusq́ concessis & affirmatis rationibus: id de subiecto dici, quod proponitur, confirmat. tandem facta ipsa demonstratione: conclusio redit ad ipsam propositionem, eamq́ confirmatam, & demonstratam iam esse colligit: solet verò interdum duplex esse, vna specialis in ipsa delineatione, & demonstratione facta: altera generalis, quæ totā confirmationem propositionis datæ colligit vniuersaliter.

Ex his vniuscuiusq́ problematis, aut theorematis partibus maximè necessariæ sunt istæ tres. Propositio, demonstratio, & conclusio: reliquæ interdum adhibentur, & id vt plurimū interdum non adhibentur, vt in Arithmeticis fit, & in decimo Euclidis libro.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ.) Sunt quædam in Geometria, quæ nobis solent in medio demonstrationis cursu occurrere: qualis etiā in hac propositione est πτῶσις, casus. dicitur autē casus nihil aliud esse: quam delineationis transpositio, quæ fit propter diuersas positiones. ab hoc casu quædā propositiones dicūtur Græcis ἄπτωτοι

προβλή-

προβλήματα, problemata quæ carent casu; quando vna tantum est positio, & delineatio: siquidem casus respiciunt ipsam delineationē; quædam verò nominantur πολύπτωτα, proble mata multos casus habentia: in quibus aliter atque aliter fieri possunt dtlineationes. Hoc itaq; secundum problema, multos habet casus; varias etiam delineationes. nam cum punctū detur positione, illa fieri potest varijs modis: vel enim ponitur extra datā lineam rectam, vel in ipsa linea recta: & si in ipsa, aut erit al terum extremorum: aut inter ipsa extrema: & si extra ipsam, aut à latere, ita vt recta protracta à puncto ad datam lineam rectam, angulum faciat, aut è directo. Euclides sum psit casum difficiliorem, & punctum extra li neam rectam datam à latere eius ponit.

Δοθείσῃ εὐθεία.) Omne datum vel datur θέσει, positione, vel λόγῳ, ratione, vel μεγέθει, magnitudine, vel εἴδει, specie. positione tantum datur ipsum punctum: linea verò & reliqua Geometriæ subiecta. omnibus modis. hoc tamen in loco linea recta datur εἴδει specie, est enim linea recta & θέσει positione.

Δύο

Δύο δοθεισῶν.) *In hac propositione lineæ dantur magnitudine: ipsa delineatio multos habet casus: nam aut distant inter se, vt apud Euclidem: aut in vno puncto coniunguntur: aut sese mutuo secant: aut altera alteram in extremo alterius puncto tantum secat: & vel maior minorem, vel minor maiorem: & quicunq; eiusmodi fieri possunt casus. Veruntamen ad omnes huiusmodi casus, Euclidis demonstratio accommodatur.*

Εὰν δύο τρίγωνα.) *Prius docuit trianguli constitutionem, quàm ea explicaret, quæ per se triangulis accidunt: præterea duabus propositionibus ostendit viam et methodum, qua lineæ rectæ, facienda sit alia recta æqualis. altera quidem non existentem facit per σύστασιν, constitutionem, & θέσιν, positionem æqualem. altera verò per ἀφαίρεσιν, ablationẽ, idq; fecit vt latera laterib. posset æqualia proponere. dantur in hac propositione duo, æqualitas laterum duorum, & angulus angulo æqualis: idq; datum ratione dari dicitur: quæruntur tria, basis basi, triangulus triangulo æqualis: reliqui denique anguli reliquis angulis æquales.*

Ἑκάτερον ἑκατέρῳ.) Quia aliâs Theorema verum non esset: idcirco nõ simpliciter inquit latus lateri æquale, sed alterum alteri. possent enim duo latera simul iuncta duobus simul iunctis esse æqualia: sed non idcirco triangulus esset triangulo æqualis.

Ὑπὸ τῶν ἴσων.) Hoc addidit ne sumeremus basin: nam in triangulis duo latera dicuntur angulum aliquem comprehendere περιέχειν, tertium verò ὑποτείνειν subtendere: nam latera quæ angulis opponuntur è regione, sunt ὑποτείνουσαι πλευραὶ, latera subtendentia, & interdum βάσεις bases dicuntur, quòd tanquam fundamento figura ipsa hoc nitatur latere.

Τρίγωνον.) Intelligit aream ipsam triangularem, seu spatium ipsum, quod à trianguli lateribus intercipitur.

Demonstratio tota facta ex his duabus propositionibus, quæ inter se applicata conueniunt; æqualia erunt: & vicissim. Quæ inter se sunt æqualia: si applicentur, conuenient etiam inter se.

Τῶν ἰσοσκελῶν.) Theoremata apud Geometras

metras magnam habent varietatem. alia enim sunt ἁπλᾶ, simplicia, in quibus vnum est datum, & vnum quæsitum: quorum & data, & quæsita diuidi & seiungi non possunt. Vt si dicat Euclides, omnis triangulus æquicrurus: habet angulos ad basin æquales. alia composita σύνθετα, quæ ex pluribus vel datis, vel quæsitis constant. vt data sint plura, & vnum quæsitum: vel plura quæsita, & vnum datum, vel denique plura data, & plura quæsita. composita sunt duplicia: quædam dicuntur συμπεπλεγμένα, quæ possunt in alia simplicia theoremata diuidi: vt cum dico trianguli, & parallelogramma sub eadem altitudine existentia: eam habēt rationem, quam basis ad basin. de vtroque enim, & triangulo, & parallelogrammo seorsim eadem dici possunt. Quædam verò ἀσύμπλεκτα, quæ cū sint composita, in simplicia tamen theoremata diuidi non possunt: quale est præcedens theorema quartum. Est & alia diuisio theorematum, de qua alibi. Hoc theorema ex vtraq; parte, dati nempe, & quæsiti compositum est: idcirco etiam distinxit, quæ data sint & quæ quæsita.

Ἐὰν τριγώνου.) *In hac propositione duo nobis occurrunt explicanda: primum est ἀναστροφὴ τῶν προτάσεων: alterum ἀπαγωγὴ εἰς τὸ ἀδύνατον. Est autem ἀναστροφὴ τῶν προτάσεων: quando ex dato alicuius propositionis, fit quæsitum: & ex quæsito datum. vt triangulus æquicrurus, id est, habens duo æqualia latera: etiam angulos ad basim habet æquales, per ἀναστροφὴν, conuersionem sic. Triangulus qui angulos ad basim habet æquales: etiam est æquicrurus, id est, duo habet æqualia latera: nam propositio quinta hic cōuertitur iam dicto modo. Est etiam alia conuersionis ratio in propositionibus compositis obseruata: quæ fit permutatione partium, etsi non omnium, tamē aliquarum: vt fit in octaua propositione: quæ conuertitur cum quarta. Quare notemus hic esse duo genera propositionum: vnum est τῶν προηγουμένων, quando id quod natura subiectum est, datur: quodúe illi per se inest, quæritur de eodem: alterum τῶν ἀντιστροφῶν, cum è contrario σύμπτωμα seu accidens quoddam datur: et id, cui hoc accidit, in quæstionem adhibetur. vt in his duobus li-*

bus licet videre propositionibus, quinta, & sexta. Proximum est, vt dicamus de ἀπαγωγὴ εἰς τὸ ἀδύνατον, de reductione ad impoßibile. sciendum itaq; est, quòd omnis demonstratio mathematica, vel fit ἀπὸ τῶν ἀρχῶν, quæ ab ipsis principijs ad ea, quæ ἐκ his demanant, progreditur: vel ἐπὶ τὰς ἀρχάς, dum à re proposita regressus fit ad principia. vtraq; verò est duplex: illa enim vel ex principijs rem propositam confirmat: vel ex rebus antea affirmatis, & conceßis: hæc autem vel est θετικὴ, & nominatur ἀνάλυσις, cui opponitur σύνθεσις: vel ἀναιρετικὴ, & dicitur ἀπαγωγὴ εἰς τὸ ἀδύνατον, est autem reductio ad impoßibile: quando in aliquod manifestum absurdum, & impoßibile desinimus: & cuius contrarium omnes fatentur esse verum: eam quoq; faciunt bifariam: vel enim nos deducit ad ea, quæ principijs, ipsisq; axiomatibus manifestè repugnant, vt si quis sua argumentatione eò deueniat, totum esse æquale parti: vel ad id, quod demonstratis, & affirmatis è directo opponitur: sicuti facit in demonstratione propositionis octauæ. fit igi-

tur reductio ad impoßibile, cùm id quod quæsito repugnat, accipimus pro vero: & ita progrediendo tandem in manifestum absurdum incidimus: quo deniq; sublato, id confirmamus, quod ab initio erat propositum, verum esse. Hæc demonstrandi forma syllogismis vtitur hypotheticis, quemadmodum in directis demonstrationibus vtimur categoricis. Hoc in loco Euclides conuersione est vsus in propositionis partibus: deductione verò in ipsâ delineatione, ac demonstratione.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς.) *In geometria, & Arithmetica, vt plurimum sunt propositiones vniuersales affirmatiuæ: verum Euclides hîc posuit negatiuam, sed omnibus additamentis ita eam muniuit: & tam certam, atq; indubitatam reddidit: vt minimè conuinci poßit: quamuis non magnum in Geometria vsum habeat: tamen præcipuè posita est ad confirmandam octauam propositionem.*

Τὴν δοθεῖσαν.) *Angulus hic datur specie tantum: potest enim omnibus quatuor modis dari, nempe positione, cùm ad certum quoddam punctum constituitur: forma deinde, vt*

si po-

si ponatur esse rectilineus: ratione verò, quando duplum triplúmue statuo: deniq; magnitudine, si dicam eam esse tertiam recti partem.

Πεπερασμένην.) Omnis enim linea recta aut est finita ex vtraq; parte: aut ex altera tantum finita, et ex altera infinita: aut deniq; ex vtraq; parte infinita.

Κάθετον εὐθεῖαν.) Κάθετος perpendicularis etiam dicitur γνώμων: & eandem habet naturam cum ea, quæ nominatur ἡ πρὸς ὀρθὰς γωνίας. est autem duplex: vna plana, altera solida. plana perpendicularis est: quando à puncto aliquo, ad lineam rectam in eodẽ plano existentem alia linea recta ducitur: vt anguli contigui sint æquales: quam in hoc loco antea ducere præcepit. Solida, quæ in Stereometria considerarur, dicitur quando punctum in alio fuerit plano: & non ad rectam, sed ad aliud planum ducitur linea quædam ad angulos rectos. differunt igitur inter se: quia perpendicularis est in eodẽ plano, & ducitur ad lineam rectam: solida verò nõ in vno eodemq; plano, nec etiam ad rectam, verum ad planum ducitur: deniq; in solida id considerandum, quòd ad omnes quæ in eo sunt plano rectas, non ad vnam tantum, vt plana, debet esse perpendicularis.

Ἀπῖρον.) Quæ pro nostro sumitur arbitrio satis longa vel breuis, longior vel breuior: vt visum fuerit necessarium esse ad rei demonstrationem.

Κατὰ κορυφὴν.) Differunt anguli ἐφεξῆς, & anguli κατὰ κορυφὴν: quòd anguli ἐφεξῆς contigui fiunt per lineam, quæ alteram non secat: sed anguli κατὰ κορυφὴν per lineas duas sese secantes, sic dicti sunt, quod vertices in vno coniungant puncto.

Ἐκ δὴ τούτου.) Locus hic expostulat vt aliquid dicamus de corollario. in elementis igitur πορίσματα, seu corollaria sunt propositiones, quæ dum aliæ demonstrantur, simul apparent, & manifestæ fiunt: nobis etiam non quærentibus, aut inuestigantibus eas. quale est hoc præsens πόρισμα. dum enim proponitur, quod duabus lineis rectis sese secantibus, anguli ad verticem sint inter se æquales: et firmis demõstratur rationib. in ipsa occurrit nobis demonstratione: quatuor illos angulos es-

los esse æquales, quatuor rectis. Itaq; lucrifecimus per ipsam hanc propositionem, hoc πόρισμα. tripliciter verò diuiduntur: primum enim omne corollarium vel est Geometricũ, vel Arithmeticum, vel alterius scientiæ, vt iam dictum, proprium est Geometriæ. In septimo verò Euclidis libro, propositione secunda, est Arithmeticum. deinde quædam corollaria sequuntur ipsa problemata: quædam verò theoremata: nam in hoc loco theorematis corollarium habemus: verum in libro secundo problematis. tertiò alia corollaria sunt demonstrationis directæ: alia verò indirectæ. sicuti hoc præsens porisma, natum est ex demonstratione directa: sed in propositione prima libri tertij: facta demonstratione per reductionem ad impossibile, nascitur corollarium. possunt & alia porismatum discrimina tradi: nobis tamen hæc monstrasse satis est.

Εκτὸς γωνία.) *In definitionibus mentionem fecit diuisionis angulorum substãtialis: nunc alia est facienda eorum diuisio per accidens. omnis angulus vel est ἐντὸς, vel ἐκτὸς. id est, omnis angulus vel est intra ipsam figu-*

ram, vel extra eam. deinde anguli quidam sunt ἐφεξῆς, *quidam* ἀπ' ἐναντίον, *id est, contigui, aut oppositi. in triangulis igitur sic se res habet, quando aliquod trianguli latus extenditur: nascitur angulus qui ad ipsam trianguli substantiam non pertinet, & cùm extra figuram existat: nominatur externus. Verum ex illis tribus, qui ad triangulum pertinent: vnus qui ei est proximus, nominatur contiguus, reliqui verò duo oppositi: respectu eius, qui extra triangulum est.*

Πάντη μεταλαμβανόμεναι) *Est Geometrica phrasis, qua vtimur, dũ volumus ostendere, quouis modo sumi vel latera, vel aliquod aliud Geometriæ subiectũ, aut accidẽs per se.*

Explicauit Euclides quæcunq; in primis illis elementis poterant dici, de triangulorum constitutione, æqualitate, aut inæqualitate eorundem, aut etiam laterum, & angulorum: nunc pergit de quadrilateratis figuris enarrare ea, quæ ad eorum contemplationem elementarem pertinẽt. Cùm verò ex lineis æque distantibus fiant eiusmodi figuræ: prius earũ proprietates docet, & parallelogramma constituit:

stituit: postea persequitur doctrinam de figuris quadrilateris, seu parallelogrammis. est autem παραλληλόγραμμον figura quæ circumscribitur lineis rectis æquedistantibus, atq; oppositis inter se.

Tria itaq; in lineis parallelis sunt consideranda, quæ eis per se insunt: & ita attribuuntur: vt inde cognoscere possimus lineas rectas esse æquedistantes. Primum est, vt anguli ἐναλλὰξ alterni (qui fiunt per lineam rectam in alias duas rectas incidentem) sint inter se æquales. Alterum, recta linea incidente in duas alias rectas: si anguli interni fuerint duobus rectis æquales: tum propositæ duæ rectæ sunt æquedistantes. Postremum, Recta linea secante alias duas rectas: si externus angulus, angulo interno sibi opposito ex eadem parte, fuerit æqualis: iterum erunt illæ rectæ æquedistantes.

ἡ εἰς τὰς.) *Hoc Theorema conuertitur cum ambobus præcedentibus. in demonstratione vtitur propositione, quæ inter principia est relata: sed principium non est.*

Παντὸς τριγώνου.) *Ea quæ decima sexta, & de-*

& decima septima propositione erant omissa: in hac præsenti addit, et quantò minores sint, explicat: nempe tertio, & huius propositionis maxima est vtilitas.

Αἱ τὰς ἴσας.) *Hæc propositio finit doctrinam linearum æquedistantium: & incipit parallelogrammorum traditionem.*

Τῶν παραλληλογράμμων.) *Postquam constituit parallelogrammon: inuestigat tria quæ parallelogrammis per se insunt. Primum latera opposita esse æqualia. Secundum, angulos oppositos esse æquales. Tertium, diametrum per medium ipsam secare figuram. Ita fit, vt à lateribus ab angulis, & ab ipsis areis, proprietates inquirat parallelogrammorum.*

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν.) *Tria sunt apud Geometras vocabula:* παραβολὴ, ὑπερβολὴ, *&* ἔλλειψις. *cùm enim figura applicatur ad lineam rectam: vt neque excedat, neque deficiat: est tum* παραβολὴ *applicatio. quando verò excedit* ὑπερβολὴ*: cùm deficit* ἔλλειψις. *atque in Conicis figuris maximè considerantur ista.*

Ἀπὸ

Ἀπὸ τῆς.) *Videtur Euclides voluisse præstantiores figuras rectilineas describere: in triangulis, eum quem æquilaterum nominamus: in quadrilateris figuris ipsum quadratū.*

Ἀναγράψαι.) *Vtitur hoc verbo, quoniam ab vno latere describitur:* συστήσασθαι *verò est, cùm ex multis constituitur.*

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις.) *In hoc, & sequenti theoremate vtitur* λήμμασι, *id est assumptiuis propositionibus, vtpote: Quæ ab æqualibus rectis lineis descripta sunt quadrata: illa sunt æqualia inter se. item æqualium quadratorum: æqualia sunt latera.*

In quibusdam etiam propositionibus vtitur alijs λήμμασι, *assumptionibus, quas hic subiungam.*

I. Si prima magnitudo fuerit æqualis magnitudini secundæ: & secunda maior sit tertia: erit etiam prima maior quàm tertia.

II. Si prima magnitudo fuerit maior secunda: & secunda sit æqualis tertiæ: erit etiam prima maior quàm tertia.

III. Si

III. *Si prima magnitudo fuerit maior quàm secunda: et secunda maior sit quàm tertia: erit etiam prima longè maior quàm tertia. Sunt & alia huius generis, de quibus aliâs.*

EX SCRIPTIS HIERONIS *Alexandrini de Geometricis definitionibus selecta quædam in vsum Academiæ Argentinensis.*

PVnctum est, cuius nulla est pars: aut terminus sine interuallo: vel terminus lineæ. eius verò natura talis est: vt ratiõe tantum percipiatur: quia nullam habet partem, neq; vllam magnitudinem. ideoq; aiunt punctum tale quippiam esse: quale est id quod in temporis consideratione præsens & instans est tempus atq; momentum. imò tanquam vnitas quæ positionem habet. Itaq; patet punctum quo ad substantiam idem esse cum vnitate. Sunt enim ambo talia, quæ diuidi nequeunt, *queũt, & incorporea atq; partis expertia existunt) differunt tamen superficie & habitudine. Vnitas etenim est principium numeri: punctum verò principium substantiæ geometricæ. sed est principium ipsa expositione, non autem vt pars lineæ: sicuti vnitas est pars numeri: simul tamen percipitur. nam quando mouetur, vel potius imaginamur moueri, illud intelligimus in lineæ fluxu. vnde etiam punctum est principium lineæ: superficies verò est principium corporis solidi.*

Linea verò est longitudo absque latitudine: vel primum quod in magnitudine habet subsistentiam: aut id quod vnico interuallo constans diuidi potest. Fit autem linea, quando ex superiore loco deorsum fluit punctum: atq; eius notio comprehenditur per continuationem, finiturq; punctis: ipsamet existens superficiei terminus. Dicetur itaq; linea esse idipsum quod distinguit radium solarem ab vmbra: aut vmbram à parte illuminata: quodue in veste intellecta atq; concepta tanquam continuo separat: purpuram à lana: & econtra lanam à purpura. Nunc ergo cum consuetudine

quadam

quadam habeamus lineæ notitionem: quia longitudinem tantum habet: non autem latitudinem aut profunditatem: ideo dicimus parietem exempli gratia esse centum vlnarum: neque illius respicimus aut latitudinem aut craßitiem. sic quoq; viam quinquaginta stadiorum, vbi longitudinem tantum, non autem latitudinem stadiorum inquirimus. quasi linearis sit hæc ipsa enumeratio: quam & Euthimetricam nominant.

Lineæ aliæ sunt rectæ, aliæ rectæ non sunt: atq; ex ijs quæ rectæ non sunt: nonnullæ quidem circulares existunt, quæ & circumferentiæ nominantur. quædam verò speciem habent helicæ, reliquæ sunt curuæ. Est itaque linea recta quæ ex æquo inter sua est posita puncta, erecta existens, & tanquam ad extremum extensa ad extremitates: eaq; est vicinißima omniũ linearũ, quæ inter duo puncta ductæ, eadem habent externa puncta: cuius quoq; partes omnibus partibus omni modo applicatæ solent conuenire. deniq; recta linea est quæ manentibus extremis: ipsa quoque manet immota. tanquam ea quæ vertitur in

eodem

eodem plano. atq; circa eadem extrema perpetuo eundem tenet locum. neq; verò vna recta, neq; duæ figuram facere possunt. Circulares lineæ sunt, quæcunq; circulariter, vel circa vnum punctum ad extremum extensæ, vel circulos, vel circulorum partes absoluunt: solæ ex omnibus alijs lineis efficientes figuram. Curuarum atq; flexarum linearum numerus est infinitus. aliæ siquidem in easdem partes habent sua concaua: nonnullæ verò non habent. Linea ergo flexa concaua in easdem partes est: quando duobus in ea sumptis punctis quibuscunq;: recta quæ illa coniungit puncta: vel in ipsam cadit lineam: vel intra eam: nunquam verò extra ipsam. quæ verò hoc modo se non habet: non est flexa concaua linea in easdem partes. Helix autem seu helica linea in plano quidem est, quando alicuius lineæ rectæ altero extremo manente, mota ipsa in plano fuerit: donec ad eundem redeat locum: simul punctum aliquod circumfertur: quod cum recta simul moueri cœperat à manente extremo. linea illa itaque quæ per hanc rectam fit, est circulus: linea verò altera quæ *sit per punctum quod circumfertur ad lineam rectam, appellatur helix vel helica.*

Quando parallelogrammi alicuius vno latere rectum angulum ambientibus manente: ipsum parallelogrammum quidem circumuoluitur, donec ad eum vnde cœperat moueri locum redeat: atq; simul cum parallelogrammo punctum aliquod circumuoluitur in linea æquidistante non manente: atq; illud ab altero extremo incipiat: tum figura motu parallelogrammi facta nominatur Cylindrus: illa verò quæ fit per punctum quod circumfertur linea: fiet helica: cuius queuis pars cuiuis parti applicata conuenit: quando eius concaua in easdem fuerint partes.

Superficies est quæ longitudinem & latitudinem tantum habet: aut terminus atque finis corporis & loci, vel magnitudo duorum interuallorum: vel etiam finis & terminus cuiusuis figuræ solidæ aut planæ apparens in duobus longitudinis scilicet atq; latitudinis interuallis. Fit autem fluxu lineæ secundum latitudinem fluentis à dextris ad sinistra. Intelligitur autem superficies esse omnis vmbra,

bra,

bra, omnisq; color. vnde & Pythagoræi superficies appellarunt colores. Sic intelligetur etiam quando aër terræ miscetur: aut corpori alio solido. vel aër aquæ: aut aqua poculo, vel simili alicui vasi. Superficies plana est, quæ ex æquo inter suas posita est lineas rectas. recta existens explicata: quam cum recta linea in duobus punctis tangit: etiam tota ipsa omni loco omnimode applicata conuenit. hoc est quæ toti lineæ rectæ applicata conuenit. præterea breuissima ex omnibus quæ ijsdem continentur terminis superficiebus: cuius deniq; omnes partes applicatæ conuenire solent. Superficies verò non planæ sunt: quæ hoc modo se non habent: hoc est quæ secundum lineam rectam non sunt explicatæ, sed quandam habent inæqualitatem: neq; per omnia sunt erectæ.

Corpus solidum est: quod longitudinem, latitudinem, & profunditatem habet: vel quod tribus vtitur interuallis. Vocantur autem corpora solida: ipsa loca. Corpus itaq; mathematicum est, quod tria habet interualla: sed corpus simpliciter dicitur, quod tribus *constat interuallis cum repercussione aut duritie atq; reflexione. Omne verò corpus terminatur atq; finitur superficiebus: atq; fit quando superficies ab anterioribus ad posteriora ducitur.*

Angulus est ad vnum punctum contractio: quæ fit atq; perficitur per superficiem aut lineam refractam. appellatur verò refracta linea: quæ si protrahatur ipsa sibi ipsi concidit. Anguli autem omnes aut sunt plani, aut solidi: atq; hi plani & solidi anguli: alij sunt rectilinei, alij verò rectilinei non sunt. Communiter itaq; planus angulus est, inclinatio duarum linearum in eodem plano sese mutuo tangentium, & non è directo positarum. Sunt autem non continuæ sese mutuo tangentes lineæ: quando atera protracta suo nutu in alteram non incidit. Aliter. Angulus planus est inclinatio lineæ in plano ad vnum punctum, vel contractio ad vnum punctum per lineam fractam. Angulus verò planus rectilineus nominatur, quando lineæ quæ eum continent fuerint rectæ. vel enim angulus planus est nutus & counio linearum inter se, in eo-

dem

dem plano, aut lineæ rectæ ad vnum punctum reflexio. atque sic Pythagorei angulos hos appellarunt glochinos, hoc est, cuspidales angulos. Angulorum quidem in planis superficiebus non rectilineorum: est infinita multitudo: rectilineorum verò angulorum species sunt tres. alij siquidem recti, alij acuti, alij denique obtusi vocantur. Angulus itaque rectus est, qui est opposito angulo æqualis. Oppositi verò anguli sunt, quos facit recta super recta stans. Nam si recta super recta fuerit constituta: feceritque angulos cõtiguos inter se æquales: tum vterque æqualium angulorum est rectus. Acutus est angulus qui minor est recto: obtusus qui recto maior. Nam si recta super recta constituta fecerit angulos inæquales: tum minor nominatur acutus; maior verò obtusus. Omnis itaque angulus rectus: omni recto est æqualis, non autem omnis acutus omni acuto æqualis erit: neque omnis obtusus omni obtuso æqualis. quia cùm recta super recta fuerit constituta, atque ab angulo recto declinauerit: tum eousque minuitur acutus angulus: donec in vnum coeant duæ lineæ rectæ, & altera alteri congreditur: seu altera in alteram incidit. sic etiam recta super alia recta constituta, & ab angulo recto declinãte, eousq; maior fit angulu obtusus, donec perpendicularis quasi resupinata incumbens rectæ: ei quæ subiecta est continua fiat. Angulus itaq; rectus: et tempus præsens seu instans: deniq; vnitas: eodem se habent modo. nam angulus rectus idem existens consistit. cùm tamen acutus & obtusus in infinitum vsq; mutentur. sic & vnitas eadem permanet: diuisio verò & compositio numerorum circa ipsam fit: eodem modo tempus præsens seu instans: & ipsum consistit: præteritum verò & futurum in infinitum procedit. Angulus solidus communiter est contractio ad vnum punctum, quando superficies ex ijsdem partibus habuerit concaua. Atq; aliter: Angulus solidus est qui pluribus quàm duobus planis angulis continetur: vel contractio solida ad vnum punctum superficiei refractæ ad lineam: quæ etiam protracta: ipsa sibijpsi non coincidit. Intelligitur verò protracta esse, quando non apparet totam suam longitudinem egressa esse: sic & planum pro-

tractum

tractum esse intelligimus. Propriè tamen anguli rectilinei solidi appellantur, quorum superficies quæ angulos faciunt: continentur angulis rectilineis: vt pyramidũ et polyedrorum atq; cuborum. anguli verò solidi non rectilinei sunt, qui hoc modo se non habent, vt anguli conorum.

Figurà est, quæ termino vel terminis quibusdam continetur: aut est id quod inclusum est vno vel pluribus finibus atq; terminis. hoc est id quod bene figuratum & effermotum existit. Alio etiam modo dicitur figura ab eo quod est finis & limes includens figuratum. nominatur verò figura à fingendo, hoc est ab eo quod est inclusum, aut quod includit. Differt verò id quod continet à termino atq; fine. quia & punctum est terminus atq; finis, verum non efficit figuram. termini verò figurarum sunt superficies & lineæ. & sic termini scilicet appellantur à distinguendo & terminando aliquousq; ipsam figuram, hoc est, ostẽdunt figurarum fines & extremitates. Figuræ verò aliæ quidem sunt planæ, aliæ verò solidæ. planæ quæ in eodem plano omnes habẽt lineas: solidæ autem, quæ in eodem plano non omnes habent lineas. Atq; ex figuris quæ in superficiebus existunt, nonnullæ sunt incompositæ: quædam verò compositæ. incompositæ quidem quæ ex lineis factæ non sunt. compositæ autem quæ ex lineis fiunt: figurarum verò compositarum & in superficiebus existentium: aliæ sunt factæ & compositæ ex partibus eiusdem generis: aliæ verò ex partibus alterius generis, vt sectores sicuti vocant circulorum & semicirculi, & hapsides & maiora circulorum segmenta, eodem nomine appellari possent menisci seu lunulæ & reliquæ huius generis figuræ.

Circulus est figura plana vnica linea cōtēta, figura ipsa appellatur circulus: linea verò figurā ipsam continens circumferentia: ad quam omnes rectæ à puncto quod in figura est ductæ: sunt inter se æquales. Si itaq; punctum illud in eodem fuerit plano: appellatur centrum: sed si in eodem plano non fuerit, polus dicitur, vt se res habet in circulis sphærarum. Alio modo etiam circulus nominatur: figura quæ ad omnes partes æqualia facit interualla: fit la: fit verò circulus, quando recta quædam linea, in eodem existens plano, vno extremo manente, alterum circumductum ad eundem redit locum, vnde cœperat moueri.

Diameter verò circuli est recta quædam linea per centrum ducta: & ex vtraque parte circumferentia circuli terminata: quæ etiam circulum secat in duas partes æquales: vel est recta per centrum vsque ad circumferentiā ducta. Semicirculus est figura, diametro & circuli circumferentia intertexta contenta. vel figura diametro & circumferentia circuli contenta. Commni nomine segmentum circuli est, siue sit maius siue minus semicirculo: figura quæ recta & circuli circumferentia continetur. Angulus in segmento circuli est, quando in circumferentia segmenti sumptum fuerit aliquod punctum: à quo puncto ad extremitates lineæ rectæ ductæ fuerint rectæ aliæ: ille inquam angulus duabus hisce rectis contentus.

Sector circuli est figura duabus rectis & vnica circumferentia contenta. vel est figura contenta rectis, quæ quemuis in circulo ad cen trum constitutum angulum comprehendunt: et circumferentia circuli illis intercepta. Omnis verò circumferentia iuxta intelligentiam quidem ad figuram comprehensam: nominatur Caua: sed secundum intelligentiam eius quod figuram comprehendit, conuexa.

Meniscus seu Lunula est figura duabus contenta circumferentijs, vel duobus circulis non circa vnum idemq́ centrum existentibus. excessus concauæ & conuexæ superficiei: vel etiam figura quæ clauditur duabus circumferentijs habentibus concaua in easdem partes. Corona est figura duabus conuexis circumferentijs contenta: vel excessus duorũ circulorum circa vnum idemq́ centrum. Pelicis seu securis est figura quatuor comprehensa circumferentijs duabus concauis, & duabus conuexis. Sed vt in vniuersum dicam figurarum planarum circumferentijs contentarum multitudo innumera est: taceo earum, quæ in superficiebus existunt. Figuræ planæ rectilineæ, aliæ quidem sunt triangulares seu trilateræ: aliæ quadrangulares aut quadrilateræ: nonnullæ deniq; in infinitum

mul-

multangulæ & multilateræ. Triangulus itaque est figura plana tribus lineis rectis contenta: atque tres habens angulos. Generalißimæ vero triangulorum aut trilaterarum figurarum species sunt sex. à lateribus quidem alij trianguli nominantur æquilateri, alij æquicruri, quidam scaleni. ab angulis verò denominati quidam rectanguli, nonnulli oxigonij, reliqui amblygonij. atqui triangulorum rectangulorum duo sunt genera: triangulus æquicrurus, & triangulus scalenus: propterea quòd non sit triangulus rectangulus æquilaterus. cæteri omnes trianguli non rectanguli, excepto æquilatero non duas tantum habẽt naturas: sed in infinitum vsque egrediuntur numerum. Est verò triangulus æquilaterus, quando tria habet æqualia latera, & tres æquales angulos. Æquicrurus autem cùm duo tantum æqualia habet latera. Scalenus denique triangulus, quicunque tria habet inæqualia latera. Triangulus rectangulus est, qui vnum habet angulum rectum: oxygonius qui tres habet acutos. Ambligonius qui vnum habet angulum obtusum.

Quare

Quare trianguli æquilateri omnes sunt oxygonij: verum æquicruri & scaleni: alij sunt rectanguli, alij oxigonij, quidam amblygonij.

Figura plana quadrilatera est: quæ quatuor continetur lineis rectis: & quatuor habet angulos, quarum aliæ sunt æquilateræ, aliæ verò æquilateræ non sunt: & quæ æqualia habent latera: nonnullæ sunt rectangulæ, aliæ verò rectangulæ non sunt. Itaq; figuræ quadrilateræ rectangulæ appellantur quadrata: rectangulæ verò, sed non æquilateræ: oblongæ seu altera parte lõgiores: sic quoq; quadrilateræ figuræ, quæ æquilateræ quidẽ sunt: non autem rectangulæ dicuntur Rhombi. denique quæ neq; latera habent æqualia, neq; angulos rectos: sed latera tantum opposita æqualia, & angulos oppositos æquales: vocantur Rhomboeidea. Præterea ex figuris quatuor lateribus contentis quædam nominantur parallelogramma: aliæ verò parallelogramma non sunt. Parallelogramma ergo sunt quæ latera opposita habent æquedistantia: quæ verò hæc sic non habent, neq; parallelogramma vocabuntur. Sed parallelogramma rectangula, dicuntur

cuntur

cuntur rectis angulum rectum comprehendentibus contineri. Nam illud parallelogrammum est maximum eorum, quæ lateribus æqualibus continentur, quod est in angulo recto; quia infinitum intelligimus. Ea verò parallelogramma quæ fiunt diuersa, & inter se differentia lateribus quibus continentur: & aream differentem habentia: fiunt minora: illud autem quod angulum habet rectum, est maximum. ideoq; cùm acuti anguli semper minores inueniantur: ij qui metiri volebant hasce figuras: terminum & finem seu modum posuerunt doctrinam de angulo recto aut figura rectangula quadrilatera. Omnis verò parallelogrammi eorum parallelogrammorum quæ circa eius diametrum sunt vnum quodcunq; illud sit: cum duobus complementis appellatur gnomon. In vniuersum verò gnomon est id quod assumit qualecunq; concinnum, vel qualemcunq; numerum (vt Georgius Valla inquit) atq; totam ipsam figuram facit similem ei quod assumpsit. Præter iam numeratas figuras quadrilateras: aliæ nominantur Trapezia: alia Trapezoidea.

Sunt

Sunt autem Trapezia quæcunq; duo latera habent æquidistantia. Trapezoeidea verò, quæ nulla habent æquedistantia latera. Ex trapezijs verò quædam sunt æquicrura, quædam verò scalena. æquicrura quidem quæ habent latera nō æquedistantia inter se æqualia. Scalena verò quæ latera non æquedistantia habent inæqualia. Figuræ multilateræ planæ sunt, quæ pluribus quàm quatuor rectis lineis continentur. vt sunt pentagona, hexagona, et sic continenter progrediendo in infinitum, reliqua polygona.

Basis dicitur figuræ planæ, linea inferiore intersecta loco: & latus figuræ planæ est linea vna ex ijs quæ figuram claudunt. Diagonius vel diagonalis est recta linea ab angulo in angulum ducta. Kathetus seu perpendicularis est recta linea à puncto aliquo ad rectam aliam ducta. Kathetus verò ad angulos rectos dicitur: quæ angulos contiguos facit rectos in linea recta super quā est erecta. Æquedistantes lineæ vocantur quæ nunquā concurrunt: & quæ in eodem plano existentes: atq; ex vtraq; parte protractæ, ex neutra

tamen

tamen concurrunt: quæ neq; annuunt neque abnuunt in eodem plano: sed perpendiculares omnes habent æquales, quæ à punctis vnius lineæ, ad alterius lineæ puncta ducuntur. Æquedistantes verò non sunt, quæcunq; annuentes perpendiculares faciunt maiores. Trianguli altitudo nominatur recta perpendicularis, à vertice ad basim ducta.

Stereometriæ nomina.

Superficies in figuris solidis aliæ quidem dicuntur esse incompositæ: aliæ verò compositæ. Sunt autem incompositæ, quæcunq; protractæ ipse in seipsas incidunt, vt superficies sphæræ. Compositæ verò quæcunq; protractæ sese mutuo secant. Ex superficiebus autem compositis: aliæ factæ sunt ex diuersarum & dissimilium generum: aliæ ex similium generum partibus. ex dissimilium quidem vt superficies conorum & cylindrorum, atq; aliarum huiuscemodi figurarum. ex similium verò sunt superficies solidorum rectilineorum. Quanquam & iuxta aliam diuisionem superfiperficies in figuris solidis quædam sunt simplices, quædam mixtæ. Simplices sunt in solidis planis, superficies sphærica: mixtæ autem conica atque cylindrica & his similes. nam hæ sunt mixtæ ex plana & circumferentiali. Speiricæ enim mixtæ sunt ex duabus circumferentiis. sunt etiam aliæ plures, vt compositæ, sic mixtæ infinitæ. Lineæ in solidis figuris aliquæ quidem sunt simplices, nonnullæ verò mixtæ. simplices quidem lineæ rectæ & circumferentiales. mixtæ, vt sunt conicæ & speiricæ, atque hæ sane sunt ordinatæ: inordinatarum verò linearum infinitus est numerus, sicuti & compositarum.

Sphæra est figura solida vnica superficie contenta, ad quam ab vno puncto in medio sphæræ posito: omnes lineæ rectæ productæ sunt inter se æquales. vel est figura solida, extremis partibus rotunda, ita vt à medio omnes distantias omnifarie habeat æquales. Nam quando Semicirculi alicuius diametro manente, ipse semicirculus circumducitur: atque redit in eum vnde cœperat moueri locum: tum superficies, quæ fit per semicirculi circumfe-

cumfe-

cumferentiam appellatur superficies sphærica. solidum autem ita comprehensum: sphæra vocatur. medium verò huius figuræ solidæ seu sphæræ punctum, nominatur centrum. Diameter verò sphæræ appellatur axis, atque est linea recta quædam per centrum ducta, terminata ex vtraque parte in sphæræ superficie immutabilis permanens: circa quam sphæra ipsa mouetur & vertitur. Extremitates vel extrema puncta axis appellantur Poli, quod si sphæra secetur, tum sectio fiet circulus. Circuli polus in sphæra dicitur punctum, in superficie sphæræ, à quo omnes lineæ rectæ, ad circumferentiam ductæ: sunt inter se æquales. Sicuti verò in figuris planis isoperimetris: circulus est maxima figura plana: ita in figuris solidis isoperimetris: maxima est figura sphærica: ideoque capacissima, & quæ in se comprehendit cætera omnia.

Conus est figura solida, habens basim circulum, & ad vnum punctum in vertice contractum: quòd si enim à puncto sublimiori ad circuli circumferentiam ducta fuerit linea quædam recta: eaque fuerit circumducta, donec in eum vnde ceperat moueri, locum redeat; figura quæ hoc modo fit, conus erit. Aliter, Quando trianguli rectanguli vno latere manente, quæ rectum continent angulum: triangulus iste circumducitur, donec redeat ad eum, vnde ceperat moueri locum: figura quæ hoc fit modo, est conus. atq; comprehensio facta per subtendens latus trianguli appellatur conica superficies. figura verò solida comprehensa, Conus. Basis coni, circulus ipse. vertex eius punctum sublime. Axis coni recta à vertice ad centrũ circuli ducta: hoc est recta illa immobilis & permanens, circa quam conus vertitur. Æquicrurus conus dicitur, qui latera trianguli habet æqualia. Scalenus verò conus, qui est inæqualis. Rectangulus conus est, quando latus immobile, fuerit æquale lateri circumducto. vel quo facto per axem coni angulus qui in superficie fit, fit rectangulus. Oxigonius conus est, cuius latus immobile maius est quàm quod circumducitur: vel quo facto, triangulus qui fit, est oxigonius. Amblygonius conus est, cuius latus immobile minus est, quàm quod circumducitur: vel quo *secto, triangulus qui fit in superficie, est triangulus amblygonius. Colurus conus appellatur, qui habet verticem mutilum & truncatum. Superficies verò coni nunc conuexa, nunc contaua dicitur: Si autem conus sectus fuerit, per verticem: efficit triangularem illam sectionem. sed si basi æquedistanter secetur, facit circulum: quod si non æquedistanter sectus sit, efficit aliud quoddam lineæ genus: quod solemus appellare consectionem. Ex quibus sectionibus coni, alia dicitur rectangula, alia verò amblygonia, est quæ oxygonia appellatur. Oxigonia itaq; est quæ sibiipsi coniuncta, & seipsam tangens: efficit figuram arealem: quæ à quibusdam nominatur Elleipsis. Sectio verò rectangula parabole. denique Amblygonia hyperbole dicitur.*

Cylindrus est figura solida, quam perfici & absolui intelligimus, quando parallelogrammum rectangulum circumuoluitur circa vnum ex lateribus immobile & fixum latus parallelogrammi, quod quidem parallelogrammum si reuertatur vnde ceperat moueri, efficit cylindrum. Atq; recta immobilis circa quam cylindrus vertitur, appellatur axis. & eius basis sunt circuli, qui fiunt per æqualia parallelogrammi latera. Sed cylindri sectiones: aliæ sunt parallelogramma, aliæ verò oxygoniorum conorum sectiones. Secatur verò solidum corpus per superficiem, superficies per lineam, linea per punctum. Interdum verò dicitur per lineam secari, facto respectu & collatione ad punctum, sic & superficies per superficiem secatur, facto respectu & collatione ad lineam.

Speira fit, quando circulus aliquis in alio circulo centrum suum habens: atq; erectus ad circuli planum: circumductus in eum vnde cœperat moueri locum redierit: atq; eadem hæc figura nominatur orbis. Est autem disiuncta seu discontinua speira, quæ habet disiunctionem: coniuncta aut continua, quæ concidit in vno puncto, atq; minor fit, permutaturq; ea, in qua circulus circumductus seipsum secat: fiunt autem & harum figurarum sectiones propriæ quædam lineæ. atq; orbes quadrati sunt discisiones cylindrorum. Fiunt autem & alia multa prisinata ex sphpeis

ris &

ris & superficiebus mixtis.

Figuræ solidæ rectilineæ, quædam sunt Pyramides, aliæ cubi, nonnullæ polyedra, suntque prismata docideis & Plinthideis, & sphinisci appellantur: aliæq; his similes. Pyramis est figura solida superficiebus planis contenta: atque ab vno plano, ad vnum punctum constituta. Aliter verò sic definitur. Pyramis est figura facta, & in vnum punctum contracta, à basi trilatera, aut quadrilatera, aut polygona, hoc est, vt vno dicam verbo, à basi rectilinea per triangulorum compositionem. Propriè tamen pyramis æquilatera dicitur, quæ quatuor triangulis æquilateris continetur: & angulis. vocatur verò hæc figura alio nomine Tetraedrum. Eicosaedrum est figura solida, viginti triangulis æquilateris contenta. Sunt autem quinque tantum eiusmodi figuræ solidæ, quæ æqualibus & similibus superficiebus continentur: atq; postea à Græcis nominatæ fuerunt figuræ Platonicæ. hæc autem quinq; figurarum latera, rationem habent ad sphæram, & Euclides libro 13. elementorum demonstrauit, quo-

modo has quinq; figuras sphæra comprehēdat: nam Euclides tantum duas Platonis putat esse figuras. Archimedes verò tredecim ait inueniri tales figuras: quæ sphæræ inscribi poßint: dum his quinq; octo adiungit: quas tamen & ipse Plato esse sciebat, vt quidam volunt. Tessarecædecaedron manifestum est constare ex octo triangulis, & sex quadratis: quódue, vt Pythagoræi volunt, ex terra & aëre factum & compositum est: sicuti illud etiam antiquis quibusdam notum fuit. Aliud quoddam corpus constat ex octo quadratis, & sex triangulis: quod videtur difficilius esse. Vniuersaliter tamen dicemus figuras solidas rectilineas quasdam esse pyramides, alias prismata, nonnullas neq; pyramides, neq; prismata. quid autem pyramis sit, antea est dictum. Octaedrum est figura solida octo contenta triangulis æquilateris. Dodecaedrum est figura duodecim contenta pentagonis æquilateris, & æquiangulis. Verum pentagonum ex quo fit dodecaedrum, est æquale tribus triangulis ad duo latera. Cubus est figura solida sex contenta quadratis æquila-

quilateris & æquiangulis. vocatur etiam hæc figura hexaedrum. Prismata verò sunt quæ à basi rectilinearum figurarum compositionem connectunt ad figuram rectilineam. Figuræ verò quæ neq; pyramides, neq; prismata existunt: sunt quæ à basi rectilineæ figuræ per rectilineam compositionem ad rectam connectunt. Vocantur autem prismata quædam parallelopleura, quæ scilicet hexaedra existentia: habent plana opposita æquedistantia. Sunt autem plana æquedistantia, quæ si protracta fuerint, non concurrunt inter se, vel in quibus descriptis æqualibus & similibus triangulis aliquibus: vnum quodq; latus est æquedistans. Kathetus seu perpendicularis in solido dicitur recta, quæ à puncto sublimi ad planum ducta: omnibus rectis eam in eodem plano tangentibus, est ad angulos rectos. Prismata autem parallelopleura quædam sunt rectangula, quædam verò rectangula non sunt. Rectangula quidem quæcunq; habent lineam rectangulorum, tribus angulis contentam. Quæ verò sic se non habent: illa etiam non sunt rectangula. Do-

cis est figura, cuius longitudo latitudine & crassitie maior est. interdum verò habet latitudinem & crassitiem æquales. Crassities autem profunditas & altitudo eadem dicitur esse. Plinthis est figura, quæ habet longitudinem minorem latitudine & profunditate: nonnunquam hæc sunt inter se æqualia. Sphæniscus est figura solida, quæ habet hæc omnia inter se inæqualia, longitudinem, latitudinem, & profunditatem: quidam hanc figuram etiam appellant bomiscum (à specie veterum ararum.)

Affectiones rerum geometricarum & stereometricarum.

Tangit autem linea lineam, superficiem, & corpus, in puncto & in linea. punctum verò si alterum tanget punctum, fiet vnum punctum. sic & linea lineam tangens, tota totam: similiter fiet vna. Recta verò circulum dicetur tangere: quæ circulum tangens si producta fuerit: ex neutra tamen parte circulum secabit. Circuli verò sese mutuo tangere dicuntur: qui cùm sese mutuo tangunt: non secant sese. Recta verò ad planum

num

num erecta est, quando ad omnes lineas rectas quæ ipsam in eodem plano tangunt, fecerit angulos rectos. Planum verò ad alterum planum erectum est: quando lineæ rectæ in vno aliquo eorum plano, communi ipsorum sectioni ad angulos rectos ductæ: etiam reliquo plano ad angulos rectos fuerint.

Æquedistantia plana sunt: quæ nunquam concurrunt. Differunt in solidis & in planis. atq; etiam lineis, similitudo & æqualitas. Sic enim in sexto Euclidis elementorum. Duabus datis figuris rectilineis, alteræ similem quidem figuram: alteræ verò æqualem propositum est constituere. atq; in ea propositione medium proportionale inuenientes: per eam medietatem id quod propositum est, probamus: in solidis verò per duas medietates. Nunc verò dicemus vniuersaliter de æqualibus quidem, quòd æquales lineæ, superficies, corpora sint: quæcunq; tota totis, vel genere vel figuratione conueniunt. dicitur etiam æquale, quod est isoperimetrum ambitu et comprehensione, & æquale lineis: vnde & area atq; sola area. Anguli æquales sunt: qui ap-

plicati toti totis, in planis & solidis eadem contractione vel genere, vel figuratione conueniunt. Æquales verò circuli sunt, quorum diametri sunt æquales inter se. quia nequit fieri vt intelligamus ab ijsdẽ diametris alium atq; aliũ circulum fieri. sed si diameter fuerit data: etiam circulus datus erit magnitudine. Æqualiter verò à centro distare dicuntur lineæ rectæ: quando à centro ad ipsas ductæ perpendiculares fuerint æquales. Longius verò distare in quam perpẽdicularis maior incidit. Figuræ verò solidæ æquales & similes sunt: quæ continentur planis æqualibus, similiterq; positis, numero, & magnitudine æqualibus.

Similes figuræ rectilineæ sunt, quæ habent ad vnum angulos æquales. & aliter. quæ angulos ad vnum habent æquales: & latera æquales angulos continentia æqualia. Reciprocæ figuræ sunt: in quibus in alterutra figura sunt rationes antecedentes & consequentes. Similia circulorum segmenta sunt, quæ angulos recipiunt æquales: vel in quibus anguli sunt æquales. Simili ratione & spherarum segmenta: similes figuræ solidæ sunt, quæ

simi-

similibus similiterq; positis planis continentur. Omnis verò circulus, omni circulo similis est specie: quia circuli generatio seu procreatio, est vna eademq;: sic species eius vna: sed segmentorum non eadem est similitudo. sed quæcunq; similem habent inclinationem, hoc est angulos in ipsis existentes inter se æquales: illa appellantur similia. dissimilia verò, quæ se ita non habent. Eodem modo se res habet in cæteris planis & solidis figuris.

Magnitudo est quæ crescit & augetur, atq; secatur, diuidiq; potest in infinitum vsq;. sunt autem tres eius species, linea, superficies, corpus. est autem infinita magnitudo, qua non potest maior intelligi secundum essentiam & subsistentiam quantamcunq;: ita vt nullus finis vel terminus eius inueniri queat. Pars est magnitudo aliqua, alterius magnitudinis, minor maioris: quando minor exactè metitur maiorem. Dicitur autem pars in loco non sicuti mundi pars est terra, neq; hominis pars ipsum caput. neq; verò vt rectæ ad angulos rectos diametro circuli ductæ, dicimus partem esse, angulum extra semicirculum inter-

ceptum recta ad angulos rectos ducta. Fieri enim nequit, vt angulus hic qui ceratoides appellatur, metiatur angulum rectum. cum omnis angulus rectilineus, minor sit angulo ceratoide. Itaq; in magnitudinibus sumemus partem eam quæ est rerum similiũ generum: atq; sic dicemus partem in magnitudinibus: vt tertiam anguli recti dicemus esse partem recti anguli. Neq; hoc sophismatium concedendum, quo dicimus, si pars est id quod aliquid metitur: etiam quod metitur, pars erit. sed linea recta pedalis metitur solidum. Ergo linea recta pedalis, est pars solidi: & linea recta pedalis est solidum. Id quod absurdum erit. Nam linea recta pedis vnius metitur longitudinem, profunditatem, & latitudinem corporis solidi. quasi ea quæ lineæ rectæ sint similium generum: non autem ipsum solidum.

Multiplex est maior magnitudo minoris: quando minor eam metitur.

Quid sit pars, quid ratio, & quæ similium sint generum, & quid proportio: diligentius quidem explicata sunt in Arithmeticæ elementis. Nunc verò de his dicemus, quod sicuti in ti in alijs similium generum ipsa applicatur proportio: ita quoq; in rebus similium generum, quæ in magnitudinibus existunt. Magnitudines dicuntur rationem habere inter sesque multiplicatæ sese mutuo excedere possunt. sed respondendum ijs qui hanc oppugnant definitionem, atq; dicunt, illa habere rationem inter se, quæ multiplicata sese mutuo possunt excedere: nihil autem tam est similis generis, quàm sit punctum puncto. itaq; manifestum est, quòd punctum multiplicatum excedet punctum. His, inquam, sic est respondendum, quod punctum non recipiat multiplicationem magnitudinis. quia id quod inter magnitudinem non numeratur: illud etiam neque magnitudinis multiplicationem admittit. solum autem multiplicationem vt numerus recipit. sic enim quoniam in linea recta infinita sunt puncta, hæc illorum sunt multiplicia: ita simpliciter & absolutè de puncto disserunt, ac si esset magnitudo interuallum habens, omnino ex aduerso Euclidi, qui docet punctū esse, cuius nulla sit pars: & dicat rationem habere inter se magnitudines.

nes. In eadem ratione dicuntur magnitudines esse prima ad secundam, et tertia ad quartam: quando primæ & tertiæ æquemultiplices, secundæ & quartæ alias quascunq; æquemultiplices, vel simul excedunt, vel simul deficiunt, vel simul illis fuerint æquales, sumpta inter se. Quæ verò eandem rationem habent nominantur proportionales magnitudines: proportio verò in tribus terminis est minima. atq; hoc in loco termini accipiuntur, vel magnitudinum, vel numerorum ipsis impositorum. sicuti enim circuli terminus est circumferentia, & trianguli termini sunt latera: ita 9. ad 6. huius rationis termini sunt hiijdem numeri. Quando verò tres magnitudines fuerint proportionales: tum prima ad tertiã habere rationem dicetur duplam, quam ad secundam. Inquit itaq; Eratosthenes, quòd sicuti in æqualibus interuallis, atq; secundum rectam lineam positis: interualla dupla fiunt: ita quoq; in rationibus quodammodo secundum rectam lineam propositis. prima ad tertiam dicitur habere duplam rationem, quàm ad secundam. Nam 9. distat à 6. sesquialtera &

ra, & 6 à 4 eadem sesquialtera: quare 9 à 4. distant, duabus sesquialteris. nam duo isti excessus sunt ijdem vni excessui. exempli gratia in 9. & 4. nam 9. excedit 6. tribus. & 6. excedit 4. duobus. verum 3. & 2. composita & addita: efficiunt 5. qui merus est excessus 9. & 4. Sicuti verò in maioribus conferendis ad minores: excessus faciunt duplas rationes & triplas: ita quoq; à minoribus, faciunt defectus. Quando verò æque multiplicium, primæ magnitudinis multiplex excedit secundæ magnitudinis multiplicem: tum prima ad secundam maiorem dicetur habere rationem, quam tertia ad quartam. Atque in hac definitione termini, voluit Euclides indicare nobis & proponere: in quibús nam maior sit quærenda & inuenienda ratio alia ratione. & cùm magnitudines in eadem ratione existentes, notis suis designarit per æquemultiplices simul excedentes, vel simul deficientes: nunc docet quæ in maiore sint ratione: illæ quæ habent excessum. Quomodo verò hic fiat excessus ipse exponit in quinto vniuersalis rationum doctrinæ elementaris libro, atq;

in theo-

in theoremate inæqualium magnitudinum demonstrant. Homologæ magnitudines dicuntur esse, antecedentes antecedentibus & consequentes consequentibus. Ratio quidem dicta est esse, duorum similium generum habitudo quædam inter se: sed in magnitudinibus proprie dicemus, quod ratio sit duarum magnitudinum eiusdem generis, iuxta quantitatem quædam habitudo & affectio: ita vt in illis sit proportio: talium rationum similitudo. Inuersa ratio est consequentis ad antecedentem ratio. Compositio rationis est, sumptio antecedentis cum consequente, ac si vnus esset terminus, ad ipsum consequentem. Cætera de his, tradit Euclides in quinto libro elementorum. Linea infinita neq; multiplicari potest vnquam: neq; altera ad alteram conferri. quæ enim eiusdem generis non sunt: non possunt rationẽ inter se habere, & quandam habitudinem vt linea ad lineam, superficies ad superficiem: & reliqua similiter. Proportiones aliæ quidem sunt continuæ, aliæ discontinuæ seu separatæ: continuæ sunt, quæ coniunctas & non dissectas habent habitudines:

sepa-

separatæ verò proportiones sunt: quando rationes hoc modo se non habent: verum disiunctæ inter se sunt: neq; vno medio termino inter se copulatæ. quia medius terminus, vnius est antecedens, & alterius consequens. Continua ratio: vt 8. 4. 2. separata: vt 8. 4. 6. 3. est interuallum inter magnitudines propositas. Multa tradit Euclides in decimo elementorum libro de commensurabilibus & incommensurabilibus.

Magnitudo rationalis & irrationalis, vtraq; earum non est ex numero earum rerū, quæ per se considerantur, sed collatione facta ad aliquid aliud. Nam quæcunq; magnitudines sunt commensurabiles inter se: illæ etiam dicuntur inter se rationales. atque numeri sunt commensurabiles: quia quisq; eorum talis est, vt minimus numerus eum metiri possit. simili modo cubitus & palmus habent commensurabilitatem inter se. nam quemuis eorum, digitus minima mensura metitur. * * Cùm verò in magnitudinibus existat infinitum, neq; vlla sit minima mensura: idcirco patet, quòd magnitudinis ratio nalis, nulla sit certa & definita minima mensura, vt digitus: sed in nobis est situm quantamcunque volumus proponere notam & cognitam minimam mensuram, in qua sit vnitas. quia vt dictum est, quæuis magnitudo per se, neque rationalis, neque irrationalis: cùm omnis linea recta per se neque rationalis, neque irrationalis sit. Verum si conferatur ad vnitatem subiectam in positione: inuenietur vel rationalis, vel irrationalis. itaque latere quadrati proposito rationali: inuenitur diameter potentia rationalis: nam longitudine deprehenditur irrationalis. sic etiam diametro existente rationali: latus potentia erit rationalis. cùm tamen vtraque per se neque rationalis, neque irrationalis existat. Sic ergo proponentes minimam aliquam mēsuram rectarum linearum. * * mathematici nominarunt rationalem, & quæ ei sunt commensurabiles: simili modo & quadratum ab ea descriptum rationale: & figuras huic quadrato commensurabiles nominarunt rationales. sic cubum ex tali descriptum linea recta, & hinc commensurabilia solida.

Incx-

Inexplicabile, hoc est, irrationale solidum intelligendum est, quod incommensurabile est cubo à rationali descripto. planum verò irrationale, id quod incommensurabile est quadrato à rationali descripto. longitudinem verò, hoc est, rectam rationalem à commensurabili. Sed quia commensurabile in lineis rectis duplex intelligitur esse. vnum quidem quando hæ lineæ rectæ commensurabiles fuerint: & figuræ ab ipsis descriptæ inter se cōmensurabiles, alterũ verò, quando eædẽ figuræ incommensurabiles inter se fuerint: ideoq; & duplex est differentia ad rationalem iuxta veteres mathematicos. aliæ enim dicuntur potentia rationales, aliæ irrationales potentia, reliquæ longitudine. Potentia itaq; rationales sunt vt dictum est à nobis, quæcunq; ipsæmet sunt incommensurabiles rationali: & quadrata ab ipsis descripta commensurabilia quadrato à rationali descripto. Longitudine verò, quando quadrata ab ipsis descripta, in quadratis numeris fuerint: vel latera habent commensurabilia rationali longitudine. deniq; vniuersaliter nominatur ra-

tionali commensurabilis, rationalis siue longitudine, siue potentia tantum. Definiunt etiam rationalem hoc modo. Rationalis est, quæ per numeros sit nota: verùm hæc non est vera definitio rationalis: sed eius accidentis: nam si exempli gratia rationales proponunt, quadratorum à rationali cubitali descriptorum. nouimus quot palmorum aut digitorum vnaquæq; sit: vnde ex accidentibus eam appellamus rationalem, per numeros cognitam. Differt autem rationalis à data, quòd rationalis quidem omnino sit data: data verò non necessariò sit rationalis. nam rationalis quantitate & qualitate manifesta est: data verò quantitate & magnitudine tantum: sunt enim quædam irrationales datæ. Euclides inquit rationale quadratum à proposita recta descriptum. Vbi nominatur proposita recta ea, quæ principium est mensurarum, & tanquam regula ad dimensionem longitudinis, positione quadam à nobis est assumpta. Vt si quis proponat quantum sit interuallum inter duo proposita puncta: ille nihil ratione dignum quæret, quot sint pedum & cubitorum: necesse

necesse esset nos petere ab ea, quæ exhiberetur quantitate cubitum vel pedem, atq; cùm vteremur illa proposita rationali linea recta inquiremus propositum interuallum, an esset omnino mensura rationalis.

Sunt autem dimensionum in magnitudinibus, quæ certas magnitudines exactè metiuntur genera ista. digitus, palmus minor, palmus maior, pes, vlna, seu cubitus, passus, orgya: mensura minima verò omnium est digitus. Diuiditur verò in partes, dimidiam scilicet tertias & reliquas. Sunt autem & aliæ mensuræ ab aliquibus excogitatæ, istæ scilicet: Passus, Acæna, seu pertica, Plethrum, Iugerum, Stadium, Milliare, Schœnus, Schœnus persica, & Schœnus græca, cæteraq; his similes.

FINIS.