

Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES
Google Livres

EUCLIDIS
OPERA OMNIA.

EDIDERUNT

I. L. HEIBERG ET H. MENGE.



LIPSIAE
IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI.

MDCCCLXXXVI.

EUCLIDIS
E L E M E N T A.

EDIDIT ET LATINE INTERPRETATUS EST

I. L. HEIBERG,

DR. PHIL.

UOL. III.

LIBRUM X CONTINENS.



LIPSIAE

IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI.

MDCCCLXXXVI.

TEUBNER
VERLAG
LEIPZIG

LEIPZIG: TYPEB. G. TEUBNER.

PRAEFATIO.

Praeter codices solitos PBFVb, quos ipse contuli, nisi quod cod. Bodl. B ab initio usque ad finem definitionum alt. p. 136, 19 beneuolenter conferendum suscepit G. A. Stewart, u. d. Oxoniensis, in hoc libro X uti mihi licuit palimpsesto cod. Musei Britannici Add. 17211 (L), de quo cfr. uol. IV p. VI; continet

- X prop. 15 p. 44, 12 *μετρήσει* ad finem prop.
- X prop. 16 p. 46, 2 (*μέγε*)θος — p. 46, 8 *ὅτι*.
p. 46, 17 (*με*)τρεῖ ad finem prop.
- X, 16 lemma p. 46, 23 *-μον ἐλλείπεν* ad finem.
- X prop. 31 p. 92, 19 (*μέ*)σαι ad finem prop.
- X prop. 32 totam.
- X prop. 32 lemma ab initio ad p. 96, 20 *ὅλω*.
- X prop. 80 p. 240, 9 *δυνατόν* ad finem prop.
- X prop. 81 ab initio ad p. 244, 10 *ὑπό*.
- X prop. 112 p. 358, 19 *ΒΔ* ad finem prop.
- X prop. 113 ab initio ad p. 362, 19 *οὕτως*.

In appendicem hic, ut semper, ea sola recepi, quae in uno saltem meorum codicum in textu legebantur; quare in mea editione quaedam eorum, quae Augustus in app. V habet, frustra quaeras; sunt enim scholia marginalia, quae in uol. V suo ordine edentur. Prolegomena critica quominus uel huic uel quarto uolumini

praemitterem, sicuti constitueram, prohibuit ratio scholariorum, quæ quinto uolumine comprehenduntur. nam cum inde non pauca subsidia ad codices aestimandos peti posse uiderem, statui iis demum editis ad prolegomena illa adcedere.

Scrib. Hauniae mense Nouembri MDCCCLXXXV.

I. L. Heiberg.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ.

Όροι.

α'. Σίμμετρα μεγέθη λέγεται τὰ τῷ αὐτῷ μέτρῳ μετρούμενα, ἀσύμμετρα δέ, ὧν μηδὲν ἐνδέχεται κοινὸν μέτρον γενέσθαι.

5 β'. Εὐθδεῖται δυνάμει σύμμετροί εἰσιν, ὅταν τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα τῷ αὐτῷ χωρίῳ μετρῇται, ἀσύμμετροι δέ, ὅταν τοῖς ἀπ' αὐτῶν τετραγώνοις μηδὲν ἐνδέχεται χωρίου κοινὸν μέτρον γενέσθαι.

γ'. Τούτων ὑποκειμένων δείκνυνται, ὅτι τῇ προτε-
10 θείσῃ εὐθείᾳ ὑπάρχουσιν εὐθεῖαι πλήθει ἄπειροι σύμμετροί τε καὶ ἀσύμμετροι αἱ μὲν μήκει μόνον, αἱ δὲ καὶ δυνάμει. καλεῖσθω οὖν ἡ μὲν προτεθείσα εὐθεῖα ῥητή, καὶ αἱ ταύτῃ σύμμετροι εἴτε μήκει καὶ δυνάμει εἴτε δυνάμει μόνον ῥηταί, αἱ δὲ ταύτῃ ἀσύμμετροι
15 ἄλλοι καλεῖσθωσαν.

δ'. Καὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς προτεθείσης εὐθείας τετράγωνον ῥητόν, καὶ τὰ τοῦτῳ σύμμετρα ῥητά, τὰ δὲ τοῦτῳ ἀσύμμετρα ἄλογα καλεῖσθω, καὶ αἱ δυνάμεναι

Ad deff. cfr. Hero deff. 128—129, Anonymus Hultschii p. 256, Martianus Capella VI, 718.

Εὐκλείδου στοιχείων ι PV, Εὐκλείδου στοιχείων τῆς θέωνος ἐκδόσεως ι F, Εὐκλείδου στοιχείων ι τῆς θέωνος ἐκδόσεως b. 1. ὅροι] om. PFV, ὅροι τοῦ ι b, ὅρος τοῦ ι B. numeros om. codd. 5. Ante σύμμετροι ras. 1 litt P. 8. ἐνδέχεται b φ. 9. προστεθείση b et e corr. F. 10. Post εὐθείᾳ add. Theon: τουτέστιν ἀφ' ἧς θέσει τὰ μέτρα τό τε πηγμαῖον καὶ τὸ παλαιστικαῖον καὶ τὸ δακτυλιαῖον ἢ τὸ ποδιαῖον λαμβάνεται (BFVb).

Liber X.

Definitiones.

1. Magnitudines commensurabiles uocantur, quas eadem mensura metiri licet, incommensurabiles autem, quarum communis mensura inueniri nequit.

2. Rectae potentia commensurabiles sunt, ubi quadrata earum eadem mensura metiri licet, incommensurabiles autem, ubi nullum spatium communis quadratorum earum mensura inueniri potest.

3. His suppositis demonstratur, rectas numero infinitas esse datae rectae commensurabiles et incommensurabiles partim longitudine tantum, partim potentia quoque. iam data recta rationalis uocetur, et quae ei commensurabiles sunt siue longitudine potentiaque siue potentia tantum, rationales, quae autem ei incommensurabiles sunt, irrationales uocentur.

4. Et quadratum datae rectae rationale uocetur, et quae ei commensurabilia sunt, rationalia, quae autem ei incommensurabilia sunt, irrationalia, et rectae, quae

πλήθει] om. F. *σύμμετροί τε καί*] supra scr. m. rec. P. 11. *μόνον, αἱ δέ*] om. Theon (BFVb). 12. Post *δυνάμει* add. Theon: *αἱ δέ δυνάμει μόνον* (BFVb). *προστεθείσα* b et e corr. F. 14. *σύμμετροι* b, corr. m. rec.; deinde add. Theon: *κατὰ τὸ συναμφοτέρον* (syn- om. b), *τουτέστιν* (καί del. F) *μήκει καὶ δυνάμει* (BFVb); idem P mg. m. 1 pro scholio. 16. *προστεθείσης* b et e corr. F. 17. *ζητά*] om. F. 18. Ante *ἄλογα* add. *κατὰ τὸ συναμφοτέρον* F; idem P mg. m. 1 pro scholio. *καλεῖσθωσαν* Theon (BFVb).

ἀντὰ ἄλλοι, εἰ μὲν τετράγωνα εἴη, ἀντὰ αἱ πλευραί,
εἰ δὲ ἕτερά τινα εὐθύγραμμα, αἱ ἴσα αὐτοῖς τετράγωνα
ἀναγράφουσαι.

α'.

5 Δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ
τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μείζον ἢ τὸ ἥμισυ καὶ
τοῦ καταλειπομένου μείζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ
τοῦτο ἀεὶ γίγνεται, λειφθήσεται τι μέγεθος,
ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος με-
10 γέθους.

Ἔστω δύο μεγέθη ἄνισα τὰ AB, Γ , ὧν μείζον τὸ AB .
λέγω, ὅτι, ἐὰν ἀπὸ τοῦ AB ἀφαιρεθῇ μείζον ἢ τὸ ἥμισυ
καὶ τοῦ καταλειπομένου μείζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο
ἀεὶ γίγνεται, λειφθήσεται τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον
15 τοῦ Γ μεγέθους.

Τὸ Γ γὰρ πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ AB
μείζον. πεπολλαπλασιάσθω, καὶ ἔστω τὸ ΔE τοῦ μὲν Γ
πολλαπλάσιον, τοῦ δὲ AB μείζον, καὶ διηγήσθω τὸ ΔE
εἰς τὰ τῷ Γ ἴσα τὰ $\Delta Z, ZH, HE$, καὶ ἀφηγήσθω ἀπὸ
20 μὲν τοῦ AB μείζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ $B\Theta$, ἀπὸ δὲ τοῦ $A\Theta$
μείζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΘK , καὶ τοῦτο ἀεὶ γιγνέσθω,
ἕως ἂν αἱ ἐν τῷ AB διαιρέσεις ἰσοπληθεῖς γένωνται
ταῖς ἐν τῷ ΔE διαιρέσεσιν.

Ἔστωσαν οὖν αἱ $AK, K\Theta, \Theta B$ διαιρέσεις ἰσοπλη-
25 θεῖς οὐσαι ταῖς $\Delta Z, ZH, HE$. καὶ ἐπεὶ μείζον ἔστι τὸ
 ΔE τοῦ AB , καὶ ἀφήρηται ἀπὸ μὲν τοῦ ΔE ἔλασσον
τοῦ ἡμίσεως τὸ EH , ἀπὸ δὲ τοῦ AB μείζον ἢ τὸ ἥμισυ

1. ἄλογα V, corr. m. 2. Deinde add. καλείσθωσαν Theon (BFVb). 2. ἴσαι φ. 5. ἐκκειμένων] ante ἀνίσων add. B mg. m. 1. 8. ἀεὶ] αἰεὶ F, ἀεὶ ἂν V? γίγνεται V (η e corr.), γίγνεται b. ληφθήσεται Vb. 9. ἔστιν Theon (BFVb).

quadratae iis aequales sunt, irrationales uocentur, in quadratis ipsa latera, in ceteris figuris rectilineis eae, ex quibus quadrata illis aequalia construi possunt.

I.

Propositis duabus magnitudinibus inaequalibus si a maiore plus quam dimidium subtrahitur et a reliqua plus quam dimidium, et hoc semper fit, magnitudo relinquetur, quae minor erit proposita magnitudine minore.

Sint duae magnitudines inaequales AB , Γ , quarum maior sit AB . dico, si ab AB plus quam dimidium subtrahatur et ab reliqua plus quam dimidium, et hoc semper fiat, magnitudinem relictum iri, quae minor sit magnitudine Γ .

Nam Γ multiplicata aliquando magnitudine AB maior erit [cfr. V def. 4]. multiplicetur et ΔE magnitudinis Γ multiplex sit, eadem autem $> AB$, et ΔE in partes magnitudini Γ aequales ΔZ , ZH , HE diuidatur, et ab AB plus quam dimidium subtrahatur $B\Theta$, ab $A\Theta$ autem plus quam dimidium ΘK , et hoc semper fiat, donec in AB totidem diuisiones fiant, quot in ΔE .

ἐλάττων F. τοῦ] om. V? ἐγκειμένον b. ἐλάττονος F. 12. δὴ οὕτω b. 13. καὶ — ἡμῖν] om. P. καὶ] (prius) καὶ ἀπὸ V. 14. αἰεὶ F. γίνεσθαι V, γίνηται b. ληφθήσεται V. εἰσιν V. ἐλάττων F. 16. γὰρ] ἄρα F. AB μεγέθους Theon (BFVb). 19. εἰς] m. rec. B. ἀπὸ] om. V. 21. γινέσθω P. 23. ταῖς] corr. ex ται m. rec. b. 24. οὖν] om. b. διαιρέσεις P, sed corr. 25. HZ F. εἰσιν F. 26. τοῦ] (alt.) post ins. m. 1 F. 27. ἡμίσεος b, ἡμίσεος V. τό] corr. ex τοῦ F. ἢ τὸ ἡμῖν] τοῦ ἡμίσεος F, τοῦ ἡμίσεος B V b.

τὸ $B\Theta$, λοιπὸν ἄρα τὸ $H\Delta$ λοιποῦ τοῦ ΘA μείζον
 ἐστίν. καὶ ἐπεὶ μείζον ἐστὶ τὸ $H\Delta$ τοῦ ΘA , καὶ
 ἀφ' ἧς τὸ $H\Delta$ ἡμισυ τὸ HZ , τοῦ δὲ ΘA μείζον
 ἢ τὸ ἡμισυ τὸ ΘK , λοιπὸν ἄρα τὸ ΔZ λοιποῦ τοῦ AK
 5 μείζον ἐστίν. ἴσον δὲ τὸ ΔZ τῷ Γ · καὶ τὸ Γ ἄρα
 τοῦ AK μείζον ἐστίν. ἔλασσον ἄρα τὸ AK τοῦ Γ .

Καταλείπεται ἄρα ἀπὸ τοῦ AB μεγέθους τὸ AK
 μέγεθος ἔλασσον ὢν τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους
 τοῦ Γ · ὅπερ ἔδει δεῖξαι. — ὁμοίως δὲ δειχθήσεται,
 10 καὶ ἡμίση ἢ τὰ ἀφαιρούμενα.

β'.

Ἐὰν δύο μεγεθῶν [ἐκκειμένων] ἀνίσων ἀνθ-
 υφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μεί-
 ζονος τὸ καταλειπόμενον μηδέποτε καταμετρῇ
 15 τὸ πρὸ ἐαυτοῦ, ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Δύο γὰρ μεγεθῶν ὄντων ἀνίσων τῶν AB , $\Gamma\Delta$ καὶ
 ἐλάσσονος τοῦ AB ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος
 ἀπὸ τοῦ μείζονος τὸ περιλειπόμενον μηδέποτε κατα-
 μετρῆται τὸ πρὸ ἐαυτοῦ· λέγω, ὅτι ἀσύμμετρά ἐστὶ τὰ
 20 AB , $\Gamma\Delta$ μεγέθη.

Εἰ γάρ ἐστι σύμμετρα, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος.
 μετρῆται, εἰ δυνατόν, καὶ ἔστω τὸ E · καὶ τὸ μὲν AB
 τὸ $Z\Delta$ καταμετροῦν λειπέτω ἐαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΓZ ,

2. ἐστίν] comp. Fb, ἐστὶ BV. ἐστὶ] om. V. 4. ἡ τὸ
 ἡμισυ] τοῦ ἡμίσεος BVb, τοῦ ἡμίσεως F. 7. καταλείπεται Bb.

8. ἐκκειμένου b. ἐλάττονος F. 10. ἡμίση P, ἡμίσεια V.
 Seq. demonstr. altera, u. app. 12. ἐκκειμένων] mg. m.
 1 P. ἀνθυφαιρουμένου V, corr. m. 2. 13. αἰεὶ F. ἐλάτ-
 τονος F. 15. τὰ] τό F, corr. m. 2. 16. καὶ ὅντος Theon (BFVb).

17. ἐλάττονος F. ἀνθυφαιρουμένου V, corr. m. 2. αἰεὶ F.
 19. ἐστίν P. 21. ἐστὶ] supra scr. -αι V. τι] om. F. 23.

diuisiones igitur AK , $K\Theta$, ΘB numero aequales sint diuisionibus ΔZ , ZH , HE . et quoniam $\Delta E > AB$, et a ΔE minus quam dimidium subtractum est EH , ab AB autem plus quam dimidium $B\Theta$, erit $H\Delta > \Theta A$. et quoniam $H\Delta > \Theta A$, et ab $H\Delta$ dimidium subtractum est HZ , a ΘA autem plus quam dimidium ΘK , erit $\Delta Z > AK$. uerum $\Delta Z = \Gamma$. quare etiam $\Gamma > AK$. ergo $AK < \Gamma$.

Ergo ex magnitudine AB relinquitur magnitudo AK minor proposita magnitudine minore Γ ; quod erat demonstrandum.

Similiter autem demonstrabitur, etiam si, quae subtrahuntur, dimidia sunt.

II.

Si ex duabus magnitudinibus inaequalibus minore semper uicissim a maiore subtracta reliquum nunquam praecedentem magnitudinem metitur, magnitudines incommensurabiles erunt.

Datis enim duabus magnitudinibus inaequalibus AB , $\Gamma\Delta$ minor sit AB , et minore semper uicissim a

maiore subtracta reliquum ne unquam praecedentem magnitudinem metiatur. dico, magnitudines AB , $\Gamma\Delta$ incommensurabiles esse.

Nam si commensurabiles sunt, magnitudo aliqua eas metietur. metiatur, si fieri potest, et sit E . et AB magnitudinem $Z\Delta$ metiens se ipsa minorem relinquat

$Z\Delta$] mut. in $\Gamma\Delta$ m. 2 B, m. rec. b; ΔZ e corr. PV. $\epsilon\lambda\acute{\alpha}\sigma\sigma\alpha$ P, sed α del.

τὸ δὲ ΓΖ τὸ ΒΗ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον
 τὸ ΑΗ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γινέσθω, ἕως οὗ λειφθῇ τι μέ-
 γεθος, ὃ ἐστὶν ἔλασσον τοῦ Ε. γερονέτω, καὶ λελεῖφθω
 τὸ ΑΗ ἔλασσον τοῦ Ε. ἐπεὶ οὖν τὸ Ε τὸ ΑΒ μετρεῖ,
 5 ἀλλὰ τὸ ΑΒ τὸ ΔΖ μετρεῖ, καὶ τὸ Ε ἄρα τὸ ΖΔ με-
 τρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα
 τὸ ΓΖ μετρήσει. ἀλλὰ τὸ ΓΖ τὸ ΒΗ μετρεῖ· καὶ τὸ Ε
 ἄρα τὸ ΒΗ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒ· καὶ
 λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΗ μετρήσει, τὸ μείζον τὸ ἔλασσον·
 10 ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὰ ΑΒ, ΓΔ μεγέθη
 μετρήσει τι μέγεθος· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ, ΓΔ
 μεγέθη.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγεθῶν ἀνίσων, καὶ τὰ ἐξῆς.

γ'.

15 Δύο μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων τὸ μέ-
 γιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Ἐστω τὰ δοθέντα δύο μεγέθη σύμμετρα τὰ ΑΒ, ΓΔ,
 ὧν ἔλασσον τὸ ΑΒ· δεῖ δὴ τῶν ΑΒ, ΓΔ τὸ μέγιστον
 κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

20 Τὸ ΑΒ γὰρ μέγεθος ἤτοι μετρεῖ τὸ ΓΔ ἢ οὐ. εἰ
 μὲν οὖν μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτό, τὸ ΑΒ ἄρα τῶν

1. ΒΗ] in ras. P, mut. in ΒΑ B m. 2, in ΑΒ m. rec.; H
 e corr V. 2. γινέσθω F. ληφθῇ BVb. 3. ἐστὶ P. ἔλατ-
 τον F. εἰλήφθω V. 4. τό] (pr.) τοῦ F. 5. ΖΔ P. ΖΔ]
 mut. in ΔΖ V, ΔΖ BFb. 8. ΒΗ] ΗΒ P. μετρεῖ] (prius)
 supra m. 2 F. 10. ἐστὶν] om. V. 11. Post τι ras. 1 litt. V.
 ἐστὶν P. 13. μεγεθῶν ἐκκειμένων F. καὶ τὰ ἐξῆς] ὅπερ

ἔδει δεῖξαι V (post ἐξῆς add. ^Δ π) b); ἐκκειμένων ἀνίσων ἀνθ-
 ραιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος τὸ καταλει-
 πόμενον μηδέποτε καταμετρητὸν τὸ πρὸ ἑαυτοῦ, ἀσύμμετρα ἐστὶ
 τὰ μεγέθη m. 2 V, del. ἀνίσων lin. 13. 17. ἔτωσαν F. σύμ-

ΓZ , ΓZ autem BH metiens se ipsa minorem relinquat AH , et hoc semper fiat, donec relinquatur magnitudo minor magnitudine E . fiat et relinquatur $AH < E$. iam quoniam E magnitudinem AB metitur et AB magnitudinem ΔZ , etiam E magnitudinem $Z\Delta$ metitur. uerum etiam totam $\Gamma\Delta$ metitur. itaque etiam reliquam magnitudinem ΓZ metietur. sed ΓZ magnitudinem BH metitur. quare etiam E magnitudinem BH metitur. uerum etiam totam AB metitur. quare etiam reliquam AH metietur, maior minorem; quod fieri non potest. itaque magnitudines AB , $\Gamma\Delta$ nulla magnitudo metietur. ergo magnitudines AB , $\Gamma\Delta$ incommensurabiles erunt [def. 1].

Ergo si ex duabus magnitudinibus inaequalibus, et quae sequuntur.

III.

Datis duabus magnitudinibus commensurabilibus maximam earum mensuram communem inuenire.

Sint duae magnitudines datae commensurabiles AB , $\Gamma\Delta$, quarum minor sit AB . oportet igitur magnitudinum AB , $\Gamma\Delta$ maximam mensuram communem inuenire.

Nam magnitudo AB magnitudinem $\Gamma\Delta$ aut metitur aut non metitur. iam si metitur, et se ipsam quoque

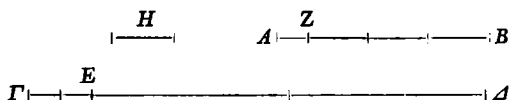
μετρα μεγέθη V. 18. ἔλαττον F. 20. μέγεθος] om. Theon (BFVb). ἥτοι] m. rec. P. 21. Post οὖν add. τὸ AB τὸ $\Gamma\Delta$ V. μετρεῖ] (prius) supra m. 1 B. αὐτό B, corr. m. 2. τῶν AB , $\Gamma\Delta$] om. V.

AB , $\Gamma\Delta$ κοινὸν μέτρον ἐστίν· καὶ φανερόν, ὅτι καὶ μέγιστον. μείζον γὰρ τοῦ AB μεγέθους τὸ AB οὐ μετρήσει.

Μὴ μετρεῖτω δὴ τὸ AB τὸ $\Gamma\Delta$. καὶ ἀνθυφαιρου-
 5 μένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὸ περι-
 λειπόμενον μετρήσει ποτὲ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ διὰ τὸ μὴ
 εἶναι ἀσύμμετρα τὰ AB , $\Gamma\Delta$ · καὶ τὸ μὲν AB τὸ $E\Delta$
 καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλασσον τὸ $E\Gamma$, τὸ δὲ
 $E\Gamma$ τὸ ZB καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλασσον τὸ
 10 AZ , τὸ δὲ AZ τὸ ΓE μετρεῖτω.

Ἐπεὶ οὖν τὸ AZ τὸ ΓE μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΓE τὸ
 ZB μετρεῖ, καὶ τὸ AZ ἄρα τὸ ZB μετρήσει. μετρεῖ
 δὲ καὶ ἑαυτό· καὶ ὅλον ἄρα τὸ AB μετρήσει τὸ AZ .
 ἀλλὰ τὸ AB τὸ ΔE μετρεῖ· καὶ τὸ AZ ἄρα τὸ $E\Delta$
 15 μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΓE · καὶ ὅλον ἄρα τὸ $\Gamma\Delta$
 μετρεῖ· τὸ AZ ἄρα τῶν AB , $\Gamma\Delta$ κοινὸν μέτρον ἐστίν.
 λέγω δὴ, ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ μή, ἔσται τι μέ-
 γεθος μείζον τοῦ AZ , ὃ μετρήσει τὰ AB , $\Gamma\Delta$. ἔστω
 τὸ H . ἐπεὶ οὖν τὸ H τὸ AB μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ AB
 20 τὸ $E\Delta$ μετρεῖ, καὶ τὸ H ἄρα τὸ $E\Delta$ μετρήσει. μετρεῖ
 δὲ καὶ ὅλον τὸ $\Gamma\Delta$ · καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΓE μετρήσει
 τὸ H . ἀλλὰ τὸ ΓE τὸ ZB μετρεῖ· καὶ τὸ H ἄρα
 τὸ ZB μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ AB , καὶ
 λοιπὸν τὸ AZ μετρήσει, τὸ μείζον τὸ ἐλασσον· ὅπερ

1. ἐστίν] comp. F, ἐστὶ Bb, ἐστὶ τῶν AB , $\Gamma\Delta$ V. καί]
 (alt.) μέτρον ἐστὶ V. 4. καί] om. BFVb. ἀνθυφαιρομένον V,
 sed corr. m. 2; ἀνθυφαιρόμενον F. 5. ἀεὶ] ἄρα ἀεὶ Vb, ἄρα F,
 om. B (ἄρα ἀεὶ m. 2). 8. τὸ $E\Gamma$ — 9. ἐλασσον] m. 2 B. 10.
 δὲ AZ] AZ δέ P. 13. μετρήσει — 14. AB] mg. m. 1 P. 14.
 Post AZ ras. 1 litt. V. 16. μετρεῖ] μετρησεῖ F. Deinde add.
 Theon: τὸ AZ ἄρα τὰ AB , $\Gamma\Delta$ μετρεῖ (BFVb); idem m. rec. P.
 ἄρα] om. φ. ἐστὶ BV, comp. Fb. 18. τὰ] τό B, corr.
 m. 2. Post $\Gamma\Delta$ add. μετρεῖτω καί V, sed punctis del. 20.



metitur, AB magnitudinum AB , $\Gamma\Delta$ communis est mensura. et adparet, eandem maximam esse; nam magnitudo magnitudine AB maior AB non metietur.

itaque ne metiatur AB magnitudinem $\Gamma\Delta$. et minore semper uicissim a maiore subtracta reliquum aliquando magnitudinem praecedentem metietur, quia AB , $\Gamma\Delta$ incommensurabiles non sunt [cfr. prop. II]. et AB magnitudinem $E\Delta$ metiens se ipsa minorem relinquat $E\Gamma$, $E\Gamma$ autem ZB metiens se ipsa minorem relinquat AZ , et AZ magnitudinem ΓE metiatur. iam quoniam AZ magnitudinem ΓE metitur, ΓE autem ZB , etiam AZ magnitudinem ZB metietur. uerum etiam se ipsam metitur. quare etiam totam AB metietur AZ . sed AB magnitudinem ΔE metitur. itaque etiam AZ magnitudinem $E\Delta$ metietur. uerum etiam ΓE metitur. quare etiam totam $\Gamma\Delta$ metitur. itaque AZ magnitudinum AB , $\Gamma\Delta$ communis est mensura. iam dico, eandem maximam esse. nam si minus, magnitudo erit maior magnitudine AZ , quae AB , $\Gamma\Delta$ metiatur. sit H . iam quoniam H magnitudinem AB metitur, et AB magnitudinem $E\Delta$ metitur, etiam H magnitudinem $E\Delta$ metietur. uerum etiam totam $\Gamma\Delta$ metitur. quare etiam reliquam ΓE metitur H . sed ΓE magnitudinem ZB metitur. itaque etiam H magnitudinem ZB metitur. uerum etiam totam AB metitur et reliquam AZ me-

$E\Delta$] (prius) ΔE P. 21. $\kappa\alpha\lambda$] (alt.) om. V. 23. $\tau\acute{o}$] (alt.) $\tau\acute{o}\nu$ P. 24. $\lambda\omicron\iota\pi\acute{o}\nu$ $\acute{\alpha}\rho\alpha$ F.

ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μείζον τι μέγεθος τοῦ AZ
τὰ AB , $\Gamma\Delta$ μετρήσει· τὸ AZ ἄρα τῶν AB , $\Gamma\Delta$ τὸ
μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστίν.

Δύο ἄρα μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων τῶν AB ,
5 $\Gamma\Delta$ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἡϋρῆται· ὅπερ ἔδει
δείξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι, ἐὰν μέγεθος δύο με-
γέθη μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον
10 μετρήσει.

δ'.

Τριῶν μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων το
μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Ἔστω τὰ δοθέντα τρία μεγέθη σύμμετρα τὰ A , B , Γ .
15 δεῖ δὴ τῶν A , B , Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Εἰλήφθω γὰρ δύο τῶν A , B τὸ μέγιστον κοινὸν
μέτρον, καὶ ἔστω τὸ Δ · τὸ δὴ Δ τὸ Γ ἥτοι μετρεῖ ἢ
οὐ [μετρεῖ]. μετρεῖται πρότερον. ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὸ
 Γ μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ τὰ A , B , τὸ Δ ἄρα τὰ A , B , Γ
20 μετρεῖ· τὸ Δ ἄρα τῶν A , B , Γ κοινὸν μέτρον ἐστίν.
καὶ φανερόν, ὅτι καὶ μέγιστον· μείζον γὰρ τοῦ Δ
μεγέθους τὰ A , B οὐ μετρεῖ.

1. ἐστίν] om. F. μείζον] supra scr. m. 1 P. τι μείζον F, sed corr. 2. μεγέθη μετρήσει Theon (BFVb). τό] (alt.) m. 2 F. 3. ἐστὶ BVb, comp. F. 5. μέτρο P, sed corr. εὑρῆται P. Deinde add. τὸ AZ V, sed punctis notat. 6. δείξαι] ποιῆσαι B et b (mg. γρ. δείξαι), δεῖ δείξαι F (mg. m. 2: γρ. ποιῆσαι). 9. μετρῇ] -ῃ in ras. P. 15. Ante δεῖ ras. 1 litt. P. 16. δύο] om. V. 17. δὴ] m. rec. P. 18. μετρεῖ] om. P. 19. μετρεῖ δέ — 20. μετρεῖ] mg. m. 1 P. 20. Δ ἄρα] δὲ Δ P. τῶν] -ν postea add. F. ἐστὶ BV, comp. Fb. 21. καί] (alt.) om. BVb. 22. μέγεθος Fb. Post B ras. 1 litt. V. Post μετρεῖ add. εἰ γὰρ δυνατόν, μετρεῖται τὰ A , B , Γ μείζον τοῦ Δ (μεγέθους add. V) τὸ E· καὶ ἐπεὶ τὰ A , B , Γ μετρεῖ,

tietur, maior minorem; quod fieri non potest. itaque magnitudo maior magnitudine AZ magnitudines AB , ΓA non metietur. ergo AZ magnitudinum AB , ΓA maxima mensura communis est.

Ergo datis duabus magnitudinibus commensurabilibus AB , ΓA maxima mensura communis inuenta est; quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Hinc manifestum est, si magnitudo duas magnitudines metiatur, eandem maximam earum mensuram communem metiri.

IV.

Datis tribus magnitudinibus commensurabilibus maximam earum mensuram communem inuenire.

Sint datae tres magnitudines commensurabiles A , B , Γ . oportet igitur magnitudinum A , B , Γ maximam mensuram communem inuenire.

Sumatur enim duarum magnitudinum A , B maxima mensura communis [prop. III] et sit Δ . Δ igitur magnitudinem Γ aut metitur aut non metitur. prius metiatur. iam quoniam Δ magnitudinem Γ metitur, et etiam A , B metitur, Δ magnitudines A , B , Γ metitur. Δ igitur magnitudinum A , B , Γ communis est mensura. et adparet, eandem maximam esse; nam magnitudo maior magnitudine Δ non metitur A , B .

καὶ τὰ A , B μετρήσει καὶ τὸ τῶν A , B μέγιστον κοινὸν (κοινὸν μέγιστον V) μέτρον τὸ Δ μετρήσει (μετρήσει τὸ Δ V) τὸ μείζον τὸ ἔλαττον (ἔλαττον V). ὅπερ ἄτοπὸν ἐστίν (ἀδύνατον V) V et mg. m. 2 B.

Μὴ μετρεῖται δὴ τὸ Δ τὸ Γ. λέγω πρῶτον, ὅτι
 σύμμετρά ἐστι τὰ Γ, Δ. ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ
 Α, Β, Γ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος, ὃ δηλαδὴ καὶ τὰ
 Α, Β μετρήσει· ὥστε καὶ τὸ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν
 5 μέτρον τὸ Δ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ· ὥστε τὸ
 εἰρημένον μέγεθος μετρήσει τὰ Γ, Δ· σύμμετρα ἄρα
 ἐστὶ τὰ Γ, Δ. εἰλήφθω οὖν αὐτῶν τὸ μέγιστον κοινὸν
 μέτρον, καὶ ἔστω τὸ Ε. ἐπεὶ οὖν τὸ Ε τὸ Δ μετρεῖ,
 ἀλλὰ τὸ Δ τὰ Α, Β μετρεῖ, καὶ τὸ Ε ἄρα τὰ Α, Β με-
 10 τρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ. τὸ Ε ἄρα τὰ Α, Β, Γ
 μετρεῖ· τὸ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ κοινόν ἐστι μέτρον. λέγω
 δὴ, ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τι τοῦ Ε
 μείζον μέγεθος τὸ Ζ, καὶ μετρεῖται τὰ Α, Β, Γ. καὶ
 ἐπεὶ τὸ Ζ τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ, καὶ τὰ Α, Β ἄρα μετρήσει
 15 καὶ τὸ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. τὸ
 δὲ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶ τὸ Δ· τὸ Ζ
 ἄρα τὸ Δ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ· τὸ Ζ ἄρα
 τὰ Γ, Δ μετρεῖ· καὶ τὸ τῶν Γ, Δ ἄρα μέγιστον κοινὸν
 μέτρον μετρήσει τὸ Ζ. ἔστι δὲ τὸ Ε· τὸ Ζ ἄρα τὸ Ε
 20 μετρήσει, τὸ μείζον τὸ ἔλασσον· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.
 οὐκ ἄρα μείζον τι τοῦ Ε μεγέθους [μέγεθος] τὰ Α, Β, Γ
 μετρεῖ· τὸ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον
 ἐστίν, ἐὰν μὴ μετρῇ τὸ Δ τὸ Γ, ἐὰν δὲ μετρῇ, αὐτὸ το Δ.

1. ὅτι πρῶτον F. 2. ἐστι] (alt.) ἐστιν P. 4. μετρεῖ V. 5.
 μετρήσει τὸ Δ F. Post ὥστε ras. 2 litt. V. 6. μετρεῖ V.
 7. ἐστὶ] εἰσίν P. οὖν] om. BFVb. τό] m. rec. P. 8.
 καί] om. F. ἔστω τὸ Ε] mg. m. 2 F. 9. μετρεῖ — Α, Β] om. F.
 μετρήσει] μετρεῖ V. 10. τὸ Ε — 11. μετρεῖ] om. Theon
 (BFVb). 11. μέτρον ἐστὶ V. ἐστίν P. 14. μετρεῖ] supra
 scr. F. ἄρα] om. BFVb. 15. Β] Β ἄρα BFb. 16. μέγιστον]
 m. rec. P. 17. μετρεῖ] (prius) corr. ex μετρήσει m. rec. P.
 18. τά] τό b. 19. τὸ Ζ. ἐστὶ δὲ τὸ Ε] mg. m. 2 F; τὸ Ζ·
 τὸ δὲ τῶν Γ, Δ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶ τὸ Ε V. 20. μετρεῖ V.

iam ne metiatur Δ magnitudinem Γ . prius dico, Γ , Δ commensurabiles esse. nam quoniam A , B , Γ commensurabiles sunt, magnitudo aliqua eas metietur, quae nimirum etiam A , B metietur. quare etiam maximam earum mensuram communem Δ metietur [prop. III coroll.]. uerum etiam Γ metitur. quare magnitudo illa Γ , Δ metietur. itaque Γ , Δ commensurabiles sunt. sumatur igitur maxima earum mensura communis [prop. III] et sit E . iam quoniam E magnitudinem Δ metitur, et Δ magnitudines A , B metitur, etiam E magnitudines A , B metietur. uerum etiam Γ metitur. E igitur A , B , Γ metitur. E igitur magnitudinum A , B , Γ communis est mensura. iam dico, eandem maximam esse. nam si fieri potest, magnitudo magnitudine E maior sit Z et metiatur A , B , Γ . et quoniam Z magnitudines A , B , Γ metitur, etiam A , B metietur et maximam earum mensuram communem [prop. III coroll.]. maxima autem magnitudinum A , B mensura communis est Δ . Z igitur Δ metitur. uerum etiam Γ metitur. Z igitur Γ , Δ metitur. quare etiam maximam earum mensuram communem metietur [id.]. ea autem est E . Z igitur E metietur, maior minorem; quod fieri non potest. itaque magnitudo magnitudine E maior A , B , Γ non metitur. E igitur magnitudinum A , B , Γ maxima est mensura communis, si Δ magnitudinem Γ non metitur, sin metitur, ipsa Δ .

21. τὰ A , B , Γ ^{III} μετρεῖ μέγεθος F . μέγεθος] m. rec. P . τὰ
 τό B , sed corr. Γ] Γ , Δ (eras.) μεγέθη V . 22. τό] (alt.)
 m. 2 F . 23. εἰν] εἰν P .

Τριῶν ἄρα μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἡϋρῆται [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι, ἐὰν μέγεθος τρία με-
5 γέθη μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει.

Ὅμοίως δὴ καὶ ἐπὶ πλειόνων το μέγιστον κοινὸν μέτρον ληφθήσεται, καὶ τὸ πόρισμα προχωρήσει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10

ε'.

Τὰ σύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Ἐστω σύμμετρα μεγέθη τὰ *A*, *B*. λέγω, ὅτι τὸ *A* πρὸς τὸ *B* λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

15 Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ *A*, *B*, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρεῖτω, καὶ ἔστω τὸ *Γ*. καὶ ὡσάκις τὸ *Γ* τὸ *A* μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ *Δ*, ὡσάκις δὲ τὸ *Γ* τὸ *B* μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ *Ε*.

Ἐπεὶ οὖν τὸ *Γ* τὸ *A* μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ *Δ*
20 μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν *Δ* κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, ὡσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν *Δ* μετρεῖ ἀριθμόν καὶ τὸ *Γ* μέγεθος τὸ *A*. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ *Γ* πρὸς τὸ *A*, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν *Δ*. ἀνάπαλιν ἄρα, ὡς τὸ *A* πρὸς τὸ *Γ*, οὕτως ὁ *Δ* πρὸς τὴν μονάδα. πάλιν
25 ἐπεὶ τὸ *Γ* τὸ *B* μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ *Ε* μονάδας,

2. εϋρῆται P. ποιῆσαι B et F (supra scr. δεῖξαι). 4. μεγέθη F. 5. μέτρον] supra scr. F. 7. δέ BVb. 8. λειφθήσεται F. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. Theon (BFVb). 15. ἐστιν P. B μεγέθη F. 20. τόν] τό Bb. 21. μετρήσει b. ἀριθμόν] om. V. 22. καί] κατὰ F. 23. τόν] τό B. 25. τῷ E] corr. ex αὐτῷ m. rec. b.

Ergo datis tribus magnitudinibus commensurabilibus maxima mensura communis inuenta est.

Corollarium.

Hinc manifestum est, si magnitudo tres magnitudines metitur, eandem maximam earum mensuram communem metiri.

Iam similiter etiam in pluribus maxima mensura communis sumetur, et corollarium quoque progredietur. — quod erat demonstrandum.

V.

Magnitudines commensurabiles inter se rationem habent, quam numerus ad numerum.

Sint magnitudines commensurabiles A, B . dico, A ad B rationem habere, quam habeat numerus ad numerum.

Nam quoniam A, B commensurabiles sunt, magnitudo aliqua eas metietur. metiatur et sit Γ . et quoties Γ magnitudinem A metitur, totidem unitates sint in A , quoties autem Γ magnitudinem B metitur, totidem unitates sint in E .

iam quoniam Γ magnitudinem A secundum unitates numeri A metitur, sed etiam unitas numerum A secundum unitates eius metitur, unitas numerum A et Γ magnitudinem A aequaliter metitur. itaque $\Gamma : A = 1 : A$ [VII

def. 20]. e contrario igitur [V, 7 coroll.] $A : \Gamma = A : 1$. rursus quoniam Γ magnitudinem B secundum uni-

μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν E κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, ἰσάκεις ἄρα ἡ μονὰς τὸν E μετρεῖ καὶ τὸ Γ τὸ B . ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ B , οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν E . ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ A πρὸς τὸ Γ , ὁ Δ 5 πρὸς τὴν μονάδα· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ A πρὸς τὸ B , οὕτως ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν E .

Τὰ ἄρα σύμμετρα μεγέθη τὰ A , B πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς ὁ Δ πρὸς ἀριθμὸν τὸν E . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10

ε'.

Ἐὰν δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχῃ, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, σύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ A , B πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχέτω, 15 ὃν ἀριθμὸς ὁ Δ πρὸς ἀριθμὸν τὸν E . λέγω, ὅτι σύμμετρά ἐστι τὰ A , B μεγέθη.

Ὅσαι γὰρ εἰσιν ἐν τῷ Δ μονάδες, εἰς τοσαῦτα ἴσα διηρησθῶ τὸ A , καὶ ἐνὶ αὐτῶν ἴσον ἔστω τὸ Γ . ὅσαι δὲ εἰσιν ἐν τῷ E μονάδες, ἐκ τοσούτων μεγεθῶν ἴσων 20 τῷ Γ συγκείσθω τὸ Z .

Ἐπεὶ οὖν, ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Δ μονάδες, τοσαῦτά εἰσι καὶ ἐν τῷ A μεγέθει ἴσα τῷ Γ , ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ἡ μονὰς τοῦ Δ , τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ τὸ Γ τοῦ A . ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ A , οὕτως ἡ μονὰς πρὸς 25 τὸν Δ . μετρεῖ δὲ ἡ μονὰς τὸν Δ ἀριθμόν· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Γ τὸ A . καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ A , οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ [ἀριθμόν], ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ A πρὸς τὸ Γ , οὕτως ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς

3. τό] (pr.) τόν P. 4. οὕτως ὁ V. 7. πρὸς ἄλληλα] mg. m. 1 P. 11. ἔχει b. 14. δύο γὰρ μεγέθη] mg. m. 1 P.

tates numeri E metitur, sed etiam unitas numerum E secundum unitates eius metitur, unitas numerum E et Γ magnitudinem B aequaliter metitur. itaque [VII def. 20] $\Gamma : B = 1 : E$. demonstrauius autem, esse etiam $A : \Gamma = \Delta : 1$. itaque ex aequo [V, 22] $A : B = \Delta : E$.

Ergo magnitudines commensurabiles A, B inter se rationem habent, quam numerus Δ ad numerum E ; quod erat demonstrandum.

VI.

Si duae magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum, commensurabiles sunt.

Duae enim magnitudines A, B inter se rationem habeant, quam numerus Δ ad numerum E . dico, A, B magnitudines commensurabiles esse.

$\begin{array}{c} A \\ \text{--- --- --- } \\ \text{--- } \Delta \\ \text{---} E \end{array}$	$\begin{array}{c} B \\ \text{--- --- } \\ \text{---} Z \end{array}$	$\begin{array}{c} \Gamma \\ \text{--- } \end{array}$	$\left[\begin{array}{c} \\ H \\ \end{array} \right.$	nam quot sunt in Δ unitates, in totidem par- tes aequales diuidatur A , et uni earum aequalis
---	---	--	---	---

sit Γ . quot autem sunt in E unitates, ex totidem magnitudinibus magnitudini Γ aequalibus componatur Z .

quoniam igitur, quot sunt in Δ unitates, totidem etiam in A magnitudines sunt magnitudini Γ aequales, quae pars est unitas numeri Δ , eadem pars est etiam Γ magnitudinis A . itaque $\Gamma : A = 1 : \Delta$ [VII def. 20]. uerum unitas numerum Δ metitur. quare etiam Γ

πρὸς ἄλληλα τὰ A, B V. 15. τόν] τ' (τόν) F, τό φ. 21. τσαῦται V, ι eras. 22. εἶσι] ἐστίν P. ἴσαι V, ι eras. 23. Δ ἀριθμοῦ F. τό] (alt.) ὁ P, in ras. V. τοῦ] e corr. V. 25. Δ ἀριθμόν F. Post μονάς ras. 4 litt. V. 26. καὶ ἐπεὶ καὶ V. τό] ὁ P. 27. ἀριθμόν] om. P, corr. ex ἀριθμός F.

τὴν μονάδα. πάλιν ἐπεί, ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ *E* μονάδες, τοσαῦτά εἰσι καὶ ἐν τῷ *Z* ἴσα τῷ *Γ*, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ *Γ* πρὸς τὸ *Z*, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν *E* [ἀριθμόν]. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ *A* πρὸς τὸ *Γ*, οὕτως ὁ *Δ* πρὸς
 5 τὴν μονάδα· δι' ἴσου ἄρα ἔστιν ὡς τὸ *A* πρὸς τὸ *Z*, οὕτως ὁ *Δ* πρὸς τὸν *E*. ἀλλ' ὡς ὁ *Δ* πρὸς τὸν *E*, οὕτως ἔστι τὸ *A* πρὸς τὸ *B*· καὶ ὡς ἄρα τὸ *A* πρὸς τὸ *B*, οὕτως καὶ πρὸς τὸ *Z*. τὸ *A* ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν *B*, *Z* τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἔστι τὸ *B*
 10 τῷ *Z*. μετρεῖ δὲ τὸ *Γ* τὸ *Z*· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ *B*. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ *A*· τὸ *Γ* ἄρα τὰ *A*, *B* μετρεῖ. σύμμετρον ἄρα ἔστι τὸ *A* τῷ *B*.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Πόρισμα.

15 Ἐκ δὲ τούτου φανερόν, ὅτι, ἐὰν ὧσι δύο ἀριθμοί, ὡς οἱ *Δ*, *E*, καὶ εὐθεῖα, ὡς ἡ *A*, δύνατόν ἐστι ποιῆσαι ὡς ὁ *Δ* ἀριθμὸς πρὸς τὸν *E* ἀριθμόν, οὕτως τὴν εὐθεῖαν πρὸς εὐθεῖαν. ἐὰν δὲ καὶ τῶν *A*, *Z* μέση ἀνάλογον ληφθῇ, ὡς ἡ *B*, ἔσται ὡς ἡ *A* πρὸς τὴν *Z*,
 20 οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *A* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *B*, τουτέστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὁμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. ἀλλ' ὡς ἡ *A* πρὸς τὴν *Z*, οὕτως ἔστιν ὁ *Δ* ἀριθμὸς πρὸς τὸν *E* ἀριθμόν· γέγονεν ἄρα καὶ
 25 ὡς ὁ *Δ* ἀριθμὸς πρὸς τὸν *E* ἀριθμόν, οὕτως τὸ ἀπὸ

1. εἰσὶν] εἰσὶ καὶ V. 2. τοσαῦται P, et FV, sed corr. εἰσιν P. Z μεγέθη F. ἴσαι V, sed corr. 3. ἀριθμόν] om. P. 4. τό] (alt.) τόν b. 5. τό] ὁ B. τό] τόν Bb. 6. ἀλλ' καὶ V. 7. ἔστι] om. V. 8. καὶ τὸ A F. 9. λόγον P, sed corr. 11. μὴν] μετρεῖ P. τὸ Γ]

magnitudinem A metitur. et quoniam est $\Gamma:A=1:\Delta$, e contrario [V, 7 coroll.] erit $A:\Gamma=\Delta:1$. rursus quoniam, quot sunt in E unitates, totidem etiam in Z magnitudines magnitudini Γ aequales sunt, erit $\Gamma:Z=1:E$ [VII def. 20]. demonstrauius autem, esse etiam $A:\Gamma=\Delta:1$. itaque ex aequo [V, 22] est $A:Z=\Delta:E$. uerum $\Delta:E=A:B$. quare etiam $A:B=A:Z$. A igitur ad utrumque B, Z eandem rationem habet. ergo $B=Z$ [V, 9]. Γ autem Z metitur; quare etiam B metitur. uerum etiam A metitur. Γ igitur A, B metitur. itaque A et B commensurabiles sunt.

Ergo si duae magnitudines inter se, et quae sequuntur.

Corollarium.

Hinc iam manifestum est, si duo numeri sint Δ, E et recta A , fieri posse, ut faciamus, ut $\Delta:E$, ita rectam ad aliam rectam. sin rectarum A, Z media proportionalis sumitur B , erit $A:Z=A^2:B^2$, h. e. ut prima ad tertiam, ita figura in prima descripta ad figuram in secunda similem et similiter descriptam [VI, 20 coroll. 2, cfr. V def. 9]. sed $A:Z=\Delta:E$.

καὶ τὸ Γ V. 12. ἐστὶν P. B] e corr. V. 13. καὶ τὰ ἐξῆς] λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, σύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι V. 16. ὡς] m. 2 F. εὐθείαι F. ἢ A] e corr. V. 17. ὁ] τὸν V, supra scr. m. 2 F. Δ] om. BFb. ἀριθμὸν FV. E] om. BFb; ὡς τὸν Δ ἀριθμὸν πρὸς τὸν E ἀριθμὸν m. 2 B. τήν] om. V, ἢ P; del. m. rec. B. 18. εὐθεῖαν] -αν eras. V, εὐθεῖα P. εὐθεῖαν] τήν εὐθεῖαν V et m. rec. B. 19. Z] B B, sed corr. 21. ὡς] ὅς εἰς? V. πρώτῃ] supra add. ᾧ F, ᾧ PBVb. τρίτῃ] ξ V, γ P b et corr. ex γ B m. 2 (ξ m. rec.); supra add. γ F. πρώτης] ᾧ P. 24. ἀριθμὸν] corr. ex ἀριθμός F. γέγονεν ἄρα] supra scr. m. rec. F.

τῆς *A* εὐθείας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *B* εὐθείας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ζ.

Τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Ἔστω ἀσύμμετρα μεγέθη τὰ *A*, *B*· λέγω, ὅτι τὸ *A* πρὸς τὸ *B* λόγον οὐκ ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Εἰ γὰρ ἔχει τὸ *A* πρὸς τὸ *B* λόγον, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, σύμμετρον ἔσται τὸ *A* τῷ *B*. οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα τὸ *A* πρὸς τὸ *B* λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Τὰ ἄρα ἀσύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει, καὶ τὰ ἐξῆς.

η'.

Ἐὰν δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἔχη, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ *A*, *B* πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἔχέτω, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· λέγω, ὅτι ἀσύμμετρά 20 ἔστι τὰ *A*, *B* μεγέθη.

Εἰ γὰρ ἔσται σύμμετρα, τὸ *A* πρὸς τὸ *B* λόγον ἔξει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. οὐκ ἔχει δέ· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ *A*, *B* μεγέθη.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα, καὶ τὰ ἐξῆς.

1. *A* εὐθείας] in ras. m. 1 b. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. Theon (BFVb). Seq. demonstr. alt.; u. app. 5. Post ἀριθμόν ras. 3 litt. V. 7. τό] ins. m. 1 F. 9. Ante ἔσται ras. 1 litt. F. ἔστιν BF. 10. γρ. τὸ *A* ἄρα πρὸς τὸ *B* λόγον οὐκ ἔχει mg. m. 1 b. 12. σύμμετρα b. λόγον οὐκ ἔχει πρὸς ἄλληλα BFb. 13. καὶ τὰ ἐξῆς] om. F (in mg. quaedam erasa), ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν BVb. 20. ἐστὶν P, ἔσται V. 21. γὰρ σύμμετρόν ἐστὶ τὸ *A* τῷ *B* Theon (BFVb). 22. ἔχει b. ὅνπερ V.

itaque inuenimus $A:E = A^2:B^2$. — quod erat demonstrandum.

VII.

Magnitudines incommensurabiles inter se rationem non habent, quam numerus ad numerum.

Sint magnitudines incommensurabiles A, B . dico, A ad B rationem non habere, quam habeat numerus ad numerum.

Nam si A ad B rationem habet, quam
 $\frac{A}{B}$ numerus ad numerum, A et B commensurabiles
 $\frac{B}{A}$ erunt [prop. VI]. uerum non sunt. itaque A
 ad B rationem non habet, quam numerus ad numerum.

Ergo magnitudines incommensurabiles inter se rationem non habent, et quae sequuntur.

VIII.

Si duae magnitudines inter se rationem non habent, quam numerus ad numerum, magnitudines incommensurabiles erunt.

Duae enim magnitudines A, B inter se
 $\frac{A}{B}$ rationem ne habeant, quam numerus ad nu-
 $\frac{B}{A}$ merum. dico, magnitudines A, B incommen-
 surabiles esse.

Nam si commensurabiles sunt, A ad B rationem habet, quam numerus ad numerum [prop. V]. uerum non habet. itaque magnitudines A, B incommensurabiles sunt.

Ergo si duae magnitudines inter se, et quae sequuntur.

ἀριθμόν] corr. ex ἀριθμός m. 1 P. 23. ἐστίν P. 24.
 ἑάν — μεγέθη] om. F. πρὸς ἀλλήλα] bis b. καὶ τὰ ἐξῆς]
 λόγον μὴ ἔχῃ, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν ἀσύμμετρα ἔσται V.

θ'.

Τὰ ἀπὸ τῶν μήκει συμμετρων εὐθειῶν τε-
 τράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν τετρά-
 γωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ
 5 τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντα,
 ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀρι-
 θμόν, καὶ τὰς πλευρὰς ἔξει μήκει συμμετρους.
 τὰ δὲ ἀπὸ τῶν μήκει ἀσυμμέτρων εὐθειῶν τε-
 τράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει, ὅνπερ
 10 τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν·
 καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ
 ἔχοντα, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετρά-
 γωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὰς πλευρὰς ἔξει μήκει
 συμμετρους.

15 Ἔστωσαν γὰρ αἱ A, B μήκει σύμμετροι· λέγω, ὅτι
 τὸ ἀπὸ τῆς A τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B τετρά-
 γωνον λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τε-
 τράγωνον ἀριθμόν.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ A τῇ B μήκει, ἡ A
 20 ἄρα πρὸς τὴν B λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.
 ἐχέτω, ὃν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ . ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ A
 πρὸς τὴν B , οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ , ἀλλὰ τοῦ μὲν
 τῆς A πρὸς τὴν B λόγου διπλασίῳ ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ
 τῆς A τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B τετράγωνον·
 25 τὰ γὰρ ὅμοια σχήματα ἐν διπλασίῳ λόγῳ ἐστὶ τῶν
 ὁμολόγων πλευρῶν· τοῦ δὲ τοῦ Γ [ἀριθμοῦ] πρὸς
 τὸν Δ [ἀριθμόν] λόγου διπλασίῳ ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τοῦ
 Γ τετραγώνου πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ τετράγωνον· δύο
 γὰρ τετραγώνων ἀριθμῶν εἰς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν

3. πρὸς ἄλληλα] supra scr. F. ἔχη V, corr. m. 1. 4.
 ἀριθμός] supra scr. m. 2 B. 5. τετράγωνα τὰ] supra scr. m.

IX.

Quadrata rectarum longitudine commensurabilium inter se rationem habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; et quadrata, quae inter se rationem habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, etiam latera longitudine commensurabilia habebunt. quadrata autem rectarum longitudine incommensurabilium inter se rationem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; et quadrata, quae inter se rationem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ne latera quidem longitudine commensurabilia habebunt.

Nam A, B longitudine commensurabiles sint. dico, $A^2 : B^2$ rationem habere, quam habeat numerus quadratus ad numerum quadratum.

Quoniam enim A et B longitudine commensurabiles sunt, $A : B$ rationem habet, quam numerus ad numerum [prop. V]. sit $A : B = \Gamma : \Delta$. iam quoniam $A : B = \Gamma : \Delta$, et $A^2 : B^2$ duplex est quam ratio $A : B$ (nam figurae similes inter se duplicatam rationem habent

2 B. 8. *συμμέτρων* b (corr. m. rec.), φ; αλ seq. ras. F. 9. *ὅν* BFb. 10. *ἀριθμόν*] om. V. 11. *μὴ ἔχοντα λόγον* V. 12. *ὅνπερ* V. 15. *γάρ*] om. V. 16. *τό*] (prius) supra scr. m. 1 P. *τετραγώνου*] (alt.) m. 2 comp. F. 17. *ὅνπερ* V. 21. *ὅν*] *οὖν ὅν* Bb, *οὖν* corr. in *οὖν ὅν* FV. 22. *Γ ἀριθμός* BVb et e corr. F. *Δ ἀριθμόν* BFVb. 23. *τῆς*] e corr. V. *διπλάσιον* V, corr. m. 2. 24. *τό*] corr. ex *τόν* V. 26. *τοῦ*] (alt.) om. P, supra scr. F. *ἀριθμοῦ*] om. P. 27. *ἀριθμόν*] om. P. *ὁ τοῦ*] *τό* F. 28. Post *Γ* del. *πρὸς τὸν Δ* P. *τετραγώνου*] *τετραγών* seq. ras. 1 litt. F. *τόν*] *τό* B. 29. *μέσον* B, corr. m. 2.

ἀριθμός, καὶ ὁ τετράγωνος πρὸς τὸν τετράγωνον [ἀριθμὸν] διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς *A* τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *B* τετράγωνον, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ *Γ* τετράγωνος [ἀριθμὸς] πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ *Δ* [ἀριθμοῦ] τετράγωνον [ἀριθμόν].

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ ἀπὸ τῆς *A* τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *B*, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ *Γ* τετράγωνος πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ *Δ* [τετράγωνον]· λέγω, ὅτι σύμμετρος
10 ἔστιν ἡ *A* τῇ *B* μήκει.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς *A* τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *B* [τετράγωνον], οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ *Γ* τετράγωνος πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ *Δ* [τετράγωνον], ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ ἀπὸ τῆς *A* τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *B*
15 [τετράγωνον] λόγος διπλασίων ἐστὶ τοῦ τῆς *A* πρὸς τὴν *B* λόγον, ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ τοῦ *Γ* [ἀριθμοῦ] τετραγώνου [ἀριθμοῦ] πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ *Δ* [ἀριθμοῦ] τετράγωνον [ἀριθμόν] λόγος διπλασίων ἐστὶ τοῦ τοῦ *Γ* [ἀριθμοῦ] πρὸς τὸν *Δ* [ἀριθμόν] λόγον, ἔστιν ἄρα
20 καὶ ὡς ἡ *A* πρὸς τὴν *B*, οὕτως ὁ *Γ* [ἀριθμὸς] πρὸς τὸν *Δ* [ἀριθμόν]. ἡ *A* ἄρα πρὸς τὴν *B* λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς ὁ *Γ* πρὸς ἀριθμόν τὸν *Δ*· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ *A* τῇ *B* μήκει.

Ἀλλὰ δὴ ἀσίμμετρος ἔστω ἡ *A* τῇ *B* μήκει· λέγω,
25 ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς *A* τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *B* [τετράγωνον] λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Εἰ γὰρ ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς *A* τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *B* [τετράγωνον] λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθ-

1. ἀριθμόν] om. BFVb. 5. Γ] in ras. F, Γ ἀριθμοῦ FVb. ἀριθμὸς] om. P. 6. ἀριθμοῦ] om. P. ἀριθμόν]

quam latera correspondentia [VI, 20 coroll.]), et $\Gamma^2 : \Delta^2$ duplex est quam ratio $\Gamma : \Delta$ (nam inter duos numeros quadratos unus medius est numerus, et numerus quadratus ad numerum quadratum duplicatam rationem habet quam latus ad latus [VIII, 11]), erit $A^2 : B^2 = \Gamma^2 : \Delta^2$.

Iam uero sit $A^2 : B^2 = \Gamma^2 : \Delta^2$. dico, A et B longitudine commensurabiles esse.

nam quoniam est $A^2 : B^2 = \Gamma^2 : \Delta^2$, et $A^2 : B^2$ duplex est quam ratio $A : B$, $\Gamma^2 : \Delta^2$ autem duplex quam $\Gamma : \Delta$, erit $A : B = \Gamma : \Delta$. itaque A ad B rationem habet, quam numerus Γ ad numerum Δ . ergo A et B longitudine commensurabiles sunt [prop. VI].

Iam uero A et B longitudine incommensurabiles sint. dico, $A^2 : B^2$ rationem non habere, quam habeat numerus quadratus ad numerum quadratum.

si enim $A^2 : B^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, A et B commen-

om. P. 8. B τετράγωνον BVb et e corr. F. τοῦ] corr. ex τῆς V. 9. τετράγωνον] om. P. 11. A] in ras. b. 12. τετράγωνον] om. P. 13. τόν] τό b. τετράγωνον] om. P. 14. τοῦ] m. 2 F. τό] τόν B, τόν τοῦ F. 15. τετράγωνον] om. P. 16. ἀριθμοῦ] om. P. τετράγωνος BV. 17. ἀριθμοῦ] om. P. ἀριθμός BV. ἀριθμοῦ] om. P. τετραγώνον P. 18. ἀριθμόν] om. P. ἐστίν P. τοῦ] om. V. 19. ἀριθμοῦ] om. P. ἀριθμόν] om. P. 20. ἀριθμός] om. P. 21. ἀριθμόν] om. P. 22. τόν Δ] m. 2 B. 25. A] corr. ex B m. 1 V. τετράγωνον] (alt.) om. P. 29. τετράγωνον] om. P.

μὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, σύμμετρος ἔσται ἡ *A* τῇ *B*. οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς *A* τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *B* [τετράγωνον] λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν.

5 Πάλιν δὴ τὸ ἀπὸ τῆς *A* τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *B* [τετράγωνον] λόγον μὴ ἔχέτω, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· λέγω, ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ *A* τῇ *B* μήκει.

10 Εἰ γάρ ἐστι σύμμετρος ἡ *A* τῇ *B*, ἔξει τὸ ἀπὸ τῆς *A* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *B* λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν. οὐκ ἔχει δέ· οὐκ ἄρα σύμμετρός ἐστιν ἡ *A* τῇ *B* μήκει.

Τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων, καὶ τὰ ἐξῆς.

Πόρισμα.

15 Καὶ φανερόν ἐκ τῶν δεδειγμένων ἔσται, ὅτι αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει, αἱ δὲ δυνάμει οὐ πάντως καὶ μήκει [εἴπερ τὰ ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, τὰ δὲ λόγον ἔχοντα, 20 ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, σύμμετρά ἐστιν. ὥστε αἱ μήκει σύμμετροι εὐθεῖται οὐ μόνον [εἰσὶ] μήκει σύμμετροι, ἀλλὰ καὶ δυνάμει.

25 πάλιν ἐπεὶ, ὅσα τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, μήκει ἐδείχθη σύμμετρα καὶ δυνάμει ὄντα σύμμετρα τῷ τὰ τετράγωνα λόγον ἔχειν, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, ὅσα ἄρα τετράγωνα λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ἀλλὰ ἀπλῶς, ὃν

2. Post *B* add. μήκει m. 2 V. 3. τετράγωνον] om P. 5. δῆ] om. b, δέ BFV. 6. τετράγωνον] om. P. 8. ἐστιν] e

surabiles erunt. at non sunt. ergo $A^2:B^2$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum.

iam rursus $A^2:B^2$ rationem ne habeat, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. dico, A et B longitudine incommensurabiles esse.

nam si A et B commensurabiles sunt, $A^2:B^2$ rationem habebit, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. at non habet. ergo A et B longitudine commensurabiles non sunt.

Ergo quadrata rectarum longitudine commensurabilem, et quae sequuntur.

Corollarium.

Ex iis, quae demonstrauius, manifestum est, rectas longitudine commensurabiles semper etiam potentia

corr. F. 9. εἰ] in ras. P. ἔσται P. 10. A τετράγωνον BFb. B τετράγωνον BFb. 12. Post B add. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ A τῇ B FVb, B m. 2. 13. Post συμμετρων add. εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν V. Post ἐξῆς add. Theon: ὅπερ ἔδει δεῖξαι (BFVb). 15. ἐκ] ἔστω ἐκ BFV. ἔσται] om. b. 17. οὐ] in ras. F, σύμμετροι οὐ V. εἴπερ] corr. ex ἦπερ m. 2 V. τά] corr. ex τοῖς m. 1 F. 21. Post μήκει add. αἰ m. 2 B. εἰσί] om. P. 23. ὅσα] ὧν P, corr. mg. m. 1. τετράγωνα λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα F. 26. τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν BFVb. Post ἀριθμὸν add. οἶον ὁ $\bar{\lambda}$ καὶ ὁ $\bar{\xi}$. ὁ γὰρ $\bar{\xi}$ πρὸς τὸν $\bar{\lambda}$ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, σύμμετροι δέ· αἱ δὲ εὐθεῖαι, ἀφ' ὧν ἀνεγράφησαν, ἀσύμμετροί εἰσιν· τὰ γὰρ τετράγωνα ἀλογά εἰσιν· ὥστε οὖν αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει, αἱ δὲ δυνάμει οὐ πάντως καὶ μήκει b. 28. ἀλλ' BFV. ἀπλῶς] om. Fb, m. 2 B. ὃν] ὃν ἑτερός τις BFVb.

ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, σύμμετρα μὲν ἔσται ἀντὰ τὰ τετράγωνα δυνάμει, οὐκέτι δὲ καὶ μήκει· ὥστε τὰ μὲν μήκει σύμμετρα πάντως καὶ δυνάμει, τὰ δὲ δυνάμει οὐ πάντως καὶ μήκει, εἰ μὴ καὶ λόγον ἔχουσιν, ὃν τε-
 5 τράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

λέγω δὴ, ὅτι [καὶ] αἱ μήκει ἀσύμμετροι οὐ πάντως καὶ δυνάμει, ἐπειδὴ περ αἱ δυνάμει σίμμετροι δύνανται λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετρά-
 10 μετροι μήκει εἰσὶν ἀσύμμετροι. ὥστε οὐχ αἱ τῷ μήκει ἀσύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει, ἀλλὰ δύνανται μήκει οὔσαι ἀσύμμετροι δυνάμει εἶναι καὶ ἀσύμμετροι καὶ σύμμετροι.

αἱ δὲ δυνάμει ἀσύμμετροι πάντως καὶ μήκει ἀσύμ-
 15 μετροι· εἰ γὰρ [εἰσὶν] μήκει σύμμετροι, ἔσονται καὶ δυνάμει σύμμετροι. ὑπόκεινται δὲ καὶ ἀσύμμετροι· ὅπερ ἄτοπον. αἱ ἄρα δυνάμει ἀσύμμετροι πάντως καὶ μήκει].

Λήμμα.

20 Δέδεικται ἐν τοῖς ἀριθμητικοῖς, ὅτι οἱ ὅμοιοι ἐπί-
 πεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν τε-
 τράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ὅτι,
 ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν, ὃν
 τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ὅμοιοι
 25 εἰσιν ἐπίπεδοι. καὶ δηλον ἐκ τούτων, ὅτι οἱ μὴ ὅμοιοι
 ἐπίπεδοι ἀριθμοί, τουτέστιν οἱ μὴ ἀνάλογον ἔχοντες
 τὰς πλευράς, πρὸς ἀλλήλους λόγον οὐκ ἔχουσιν, ὃν
 τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. εἰ γὰρ
 ἔξουσιν, ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἔσονται· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται.

1. ἀριθμόν τινα V. μὲν] om. V. ἔσται] εἰσιν BF,
 ἔστιν comp. b; ἔστι V, corr. in μὲν m. 2. αὐτά] om. V;

commensurabiles esse, rectas autem potentia commensurabiles non semper etiam longitudine.¹⁾

Lemma.

In arithmetiis demonstratum est, similes numeros planos eam inter se rationem habere, quam habeat numerus quadratus ad numerum quadratum [VIII, 26], et si duo numeri inter se rationem habeant, quam habeat numerus quadratus ad numerum quadratum, similes numeros planos eos esse.²⁾ unde adparet, numeros planos non similes (h. e. qui latera proportionalia non habent [cfr. VII def. 22]) inter se rationem non habere, quam habeat numerus quadratus ad numerum quadratum. nam si habebunt, similes erunt plani; quod contra hypothesim est. ergo numeri plani non

1) Quae sequitur p. 28, 17 — 30, 5 demonstratio corollarii et superflua est et a sermone Euclidis abhorret. praeterea offendit, quod plus demonstratur (λέγω δὴ lín. 6), quam propositum erat.

2) Hoc nusquam demonstratur; sed est VIII, 26 conuersa, qua etiam in IX, 10 p. 358, 19 utitur.

supra τὰ ras. est. 2. Ante δυνάμει add. τουτέστιν αἱ εὐθείαι, ἀφ' ὧν ἀνεγράφησαν BFVb. τὰ] αἱ BFVb. 3. σύμμετροι BFVb. τὰ] αἱ BFVb. 4. Supra ἔχοιεν m. 2: τὰ τετράγωνα V. 6. καὶ] om. P. 7. Post δυνάμει add. ἀσύμμετροι V. ἐπειδὴ περ] ἐπειδὴ γάρ P. 10. τῶ] om. FV. 11. ἀλλὰ καὶ V. 12. σύμμετροι καὶ ἀσύμμετροι P. 14. μήκει] -η- e corr. P. 15. εἰσι] om. P, εἰσιν B, comp. b. 16. ὑπόκειται b. Post καὶ del. δυνάμει F. 19. λῆμμα] om. P. 20. δὴ ἐν F. ὅτι] supra scr. m. 1 b. 21. λόγον πρὸς ἀλλήλους ἔχουσιν F. ἔχουσι P, corr. m. rec. 23. δύο] supra scr. m. 1 F. 25. Supra ἐπίπεδοι scr. οἱ ἀριθμοί m. 1 b. μὴ] supra scr. m. 1 V. 29. ὑπόκεινται P.

οἱ ἄρα μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι πρὸς ἀλλήλους λόγον οὐκ ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

ι'.

5 Τῇ προτεθείσῃ εὐθείᾳ προσευρεῖν δύο εὐθείας ἀσυμμέτρους, τὴν μὲν μήκει μόνον, τὴν δὲ καὶ δυνάμει.

Ἔστω ἡ προτεθείσα εὐθεῖα ἡ *A*. δεῖ δὴ τῇ *A* προσευρεῖν δύο εὐθείας ἀσυμμέτρους, τὴν μὲν μήκει μόνον, τὴν δὲ καὶ δυνάμει.

Ἐκκείσθωσαν γὰρ δύο ἀριθμοὶ οἱ *B*, *Γ* πρὸς ἀλλήλους λόγον μὴ ἔχοντες, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, τουτέστι μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι, καὶ γερονέτω ὡς ὁ *B* πρὸς τὸν *Γ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *A* 15 τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *Δ* τετράγωνον· ἐμάθομεν γάρ· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς *A* τῷ ἀπὸ τῆς *Δ*. καὶ ἐπεὶ ὁ *B* πρὸς τὸν *Γ* λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς *A* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *Δ* λόγον ἔχει, ὃν τε- 20 τράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ *A* τῇ *Δ* μήκει. εἰλήφθω τῶν *A*, *Δ* μέση ἀνάλογον ἡ *E*. ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ *A* πρὸς τὴν *Δ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *A* τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *E*. ἀσύμμετρος δὲ ἐστὶν ἡ *A* τῇ *Δ* μήκει· ἀσύμ- 25 μετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς *A* τετράγωνον τῷ

1. ἄρα μή] in ras. m. 1 P. οὐκ] ins. m. 1 V. 3. Seq. demonstr. alt., u. app. 6. συμμέτρους *B*, corr. m. 2. 7. καί] ins. postea F. 8. δεῖ] δ- in ras. V. 10. τὴν] τῆς P, corr. m. rec.; τῇ V, sed corr. 13. τουτέστιν P. Post ἐπίπεδοι add. [F, cui signo in mg. nihil resp.; in b seq. οἱ γὰρ ὅμοιοι ἐπίπεδοι πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς

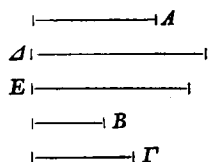
similes inter se rationem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum.

X.

Data recta duas alias inuenire ei incommensurabiles, alteram longitudine tantum, alteram etiam potentia.

Data recta sit A . oportet igitur duas alias rectas inuenire rectae A incommensurabiles, alteram longitudine tantum, alteram etiam potentia.

Sumantur enim duo numeri B, Γ , qui inter se rationem non habeant, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, h. e. plani non similes [u. lemma], et fiat $B:\Gamma = A^2:\Delta^2$ (hoc enim didicimus [prop. VI coroll.]). itaque A^2 et Δ^2 commen-



surabilia sunt [prop. VI]. et quoniam $B:\Gamma$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ne $A^2:\Delta^2$ quidem rationem habet, quam numerus quadratus ad

numerus quadratum. itaque A et Δ longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. sumatur rectarum A, Δ media proportionalis E . itaque $A:\Delta = A^2:E^2$ [V def. 9]. sed A et Δ longitudine incommensurabiles

πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν; in V seq. διὰ τοῦτο, punctis del. m. 2. 16. τῆς] τοῦ P. τῆς] τοῦ P. Δ] corr. ex B m. 1 V, B b. 19. A] corr. ex Δ m. 1 F. πρὸς] supra m. 1 V. τό] corr. ex τῷ V. Δ] B b. 21. ἐστίν] postea ins. F. 24. E τετράγωνον V. 25. ἐστίν P.

ἀπὸ τῆς *E* τετραγώνῳ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ *A* τῇ *E* δυνάμει.

Τῇ ἄρα προτεθείσῃ εὐθείᾳ τῇ *A* προσεύρηνται δύο εὐθεῖαι ἀσύμμετροι αἱ *Δ*, *E*, μήκει μὲν μόνον ἡ *Δ*,
5 δυνάμει δὲ καὶ μήκει δηλαδὴ ἡ *E* [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

ια'.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, τὸ δὲ
πρῶτον τῷ δευτέρῳ σύμμετρον ᾗ, καὶ τὸ τρί-
τον τῷ τετάρτῳ σύμμετρον ἔσται· καὶ τὸ πρῶτον
10 τῷ δευτέρῳ ἀσύμμετρον ᾗ, καὶ τὸ τρίτον τῷ
τετάρτῳ ἀσύμμετρον ἔσται.

Ἔστωσαν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον τὰ *A*, *B*, *Γ*, *Δ*,
ὥς τὸ *A* πρὸς τὸ *B*, οὕτως τὸ *Γ* πρὸς τὸ *Δ*, τὸ *A* δὲ
τῷ *B* σύμμετρον ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ τὸ *Γ* τῷ *Δ* σύμ-
15 μετρον ἔσται.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ *A* τῷ *B*, τὸ *A* ἄρα
πρὸς τὸ *B* λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. καὶ
ἐστὶν ὡς τὸ *A* πρὸς τὸ *B*, οὕτως τὸ *Γ* πρὸς τὸ *Δ*.
καὶ τὸ *Γ* ἄρα πρὸς τὸ *Δ* λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς
20 ἀριθμόν· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ *Γ* τῷ *Δ*.

Ἀλλὰ δὴ τὸ *A* τῷ *B* ἀσύμμετρον ἔστω· λέγω, ὅτι
καὶ τὸ *Γ* τῷ *Δ* ἀσύμμετρον ἔσται. ἐπεὶ γὰρ ἀσύμ-
μετρόν ἐστι τὸ *A* τῷ *B*, τὸ *A* ἄρα πρὸς τὸ *B* λόγον
οὐκ ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. καὶ ἐστὶν ὡς

3. προστεθείσῃ Pb. προσεύρηνται BFb. 4. ᾗ] corr.
ex τῇ B. Post *Δ* add. καὶ B et F, sed del. 5. ὅπερ ἔδει
δεῖξαι] om. PBFb. Seq. scholium in PBFb, u. app. 6. ια']
corr. ex ι' m. rec. P, ex ιγ' V. 8. πρῶτον] α' P, et sic sae-
pius. τό] ins. postea F. τρίτον] γ' P et b (et sic saepius).
15. ἐστὶν BVb. 16. ἐστὶν P. τὸ *Δ*] (alt.) postea ins. F. 17.
B] corr. ex *A* m. 1 F. 18. τὸ *Δ*] corr. ex ὁ *A* V. 20. *Γ*]
in ras. V. 21. ὅτι ἀσύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ *Γ* τῷ *Δ* V. 22.

sunt. itaque etiam A^2 et E^2 incommensurabilia sunt.¹⁾
quare A et E potentia incommensurabiles sunt.²⁾

Ergo data recta A duae aliae inuentae sunt Δ , E
ei incommensurabiles, Δ longitudine tantum, E autem
potentia et longitudine; quod erat demonstrandum.

XI.

Si quattuor magnitudines proportionales sunt, et
prima secundaque commensurabiles sunt, etiam tertia
quartaque commensurabiles erunt. et si prima secunda-
que incommensurabiles sunt, etiam tertia quartaque
incommensurabiles sunt.

Quattuor magnitudi-
nes proportionales sint
 A , B , Γ , Δ , ita ut sit
 $A:B = \Gamma:\Delta$, et A , B commensurabiles sint. dico,
etiam Γ , Δ commensurabiles esse.

Nam quoniam A , B commensurabiles sunt, $A:B$
rationem habet, quam numerus ad numerum [prop. V].
et $A:B = \Gamma:\Delta$. quare etiam $\Gamma:\Delta$ rationem habet,
quam numerus ad numerum. ergo Γ , Δ commensura-
biles sunt [prop. VI].

Iam uero A et B incommensurabiles sint. dico,
etiam Γ , Δ incommensurabiles fore. nam quoniam A , B
incommensurabiles sunt, $A:B$ rationem non habet,

1) Hoc ex prop. XI concludendum erat (quare Gregorius
propp. X et XI permutauit). omnino tota prop. X cum lem-
mate multis de causis suspecta est, et uix crediderim, eam a
manu Euclidis profectam esse.

2) Quare etiam longitudine (prop. IX coroll.).

$\xi\sigma\tau\alpha\iota$] $\xi\sigma\tau\iota\nu$ BFb.
supra scr. m. 1 F.

23. A] (alt.) supra scr. m. 1 V.
24. $\sigma\nu\kappa$] m. rec. b.

$\alpha\varphi\alpha$]

τὸ A πρὸς τὸ B , οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ . οὐδὲ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Γ τῷ Δ .

Ἐὰν ἄρα τέσσαρα μεγέθη, καὶ τὰ ἐξῆς.

5

ιβ'.

Τὰ τῷ αὐτῷ μεγέθει σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα.

Ἐκάτερον γὰρ τῶν A, B τῷ Γ ἔστω σύμμετρον. λέγω, ὅτι καὶ τὸ A τῷ B ἐστὶ σύμμετρον.

10 Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ A τῷ Γ , τὸ A ἄρα πρὸς τὸ Γ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν. ἐθέτω, ὃν ὁ Δ πρὸς τὸν E . πάλιν, ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ Γ τῷ B , τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ B λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν. ἐθέτω, ὃν ὁ Z πρὸς τὸν H .

15 καὶ λόγων δοθέντων ὁποσωνοῦν τοῦ τε, ὃν ἔχει ὁ Δ πρὸς τὸν E , καὶ ὁ Z πρὸς τὸν H εἰλήφθωσαν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἐν τοῖς δοθείσι λόγοις οἱ Θ, K, A . ὥστε εἶναι ὡς μὲν τὸν Δ πρὸς τὸν E , οὕτως τὸν Θ πρὸς τὸν K , ὡς δὲ τὸν Z πρὸς τὸν H , οὕτως τὸν K πρὸς τὸν A .

20 Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς τὸ A πρὸς τὸ Γ , οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν E , ἀλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν E , οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν K , ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ A πρὸς τὸ Γ , οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν K . πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ B , οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν H , ἀλλ' ὡς ὁ Z πρὸς τὸν H ,
25 [οὕτως] ὁ K πρὸς τὸν A , καὶ ὡς ἄρα τὸ Γ πρὸς τὸ B , οὕτως ὁ K πρὸς τὸν A . ἐστὶ δὲ καὶ ὡς τὸ A πρὸς

1. οὐδέ] om. V. 2. ἄρα] om. V. λόγον] ἄρα λόγον οὖν V. 4. τέσσαρα] τὰ δ F. Ante καὶ add. ἀνάλογον ἢ Bfb; ἀνάλογον ἢ, τὸ δὲ πρῶτον τῷ δευτέρῳ σύμμετρον ἢ V. Post ἐξῆς add. ὅπερ ἔδει δεῖξαι V. 5. ιβ'] corr. ex ια m. rec. P. 6. μεγέθη b. 15. ὁπόσων? V (comp.). 17. ἐξῆς]

quam numerus ad numerum [prop. VII]. et $A:B = \Gamma:\Delta$.
quare ne $\Gamma:\Delta$ quidem rationem habet, quam nume-
rus ad numerum. itaque Γ, Δ incommensurabiles sunt
[prop. VIII].

Ergo si quattuor magnitudines, et quae sequuntur.

XII.

Quae eidem magnitudini commensurabilia sunt,
etiam inter se commensurabilia sunt.

Utraque enim A, B magnitudini Γ sit commen-
surabilis. dico, etiam A, B commensurabiles esse.

nam quoniam A, Γ commensurabiles sunt, $A:\Gamma$
rationem habet, quam numerus ad numerum [prop. V].

A ———	Γ ———	B ———	sit $A:\Gamma = \Delta:E$.
	——— Δ		rursus quoniam Γ, B
	——— E	——— Θ	commensurabiles sunt,
	——— Z	——— K	$\Gamma:B$ rationem habet,
	——— H	——— A	quam numerus ad nu-
			merum [prop. V]. sit

$\Gamma:B = Z:H$. et datis quotlibet rationibus, $\Delta:E$ et
 $Z:H$, numeri sumantur deinceps in rationibus datis,
 Θ, K, A [cfr. VIII, 4], ita ut sit $\Delta:E = \Theta:K$, $Z:H$
 $= K:A$.

iam quoniam est $A:\Gamma = \Delta:E$ et $\Delta:E = \Theta:K$,
erit etiam $A:\Gamma = \Theta:K$ [V, 11]. rursus quoniam est
 $\Gamma:B = Z:H$ et $Z:H = K:A$, erit etiam $\Gamma:B = K:A$.

in ras. V; $\epsilon\lambda\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau\omicron\iota \epsilon\acute{\xi}\eta\varsigma$ F, sed corr. $\delta\omicron\theta\epsilon\iota\sigma\iota\nu$ P. 18. $\tau\omicron\nu \Delta$
 $\tau\omicron\nu$ postea ins. F, $\delta \Delta$ P. 20. $\tau\omicron$] (alt.) corr. ex $\tau\omicron\nu$ V. 22.
 $\delta \Delta$ P. $\tau\omicron\nu \Gamma$ P. 23. $\delta \Gamma$ P. $\tau\omicron$] $\tau\omicron\nu$ P. B] corr.
ex Γ m. 1 b. 25. $\omicron\upsilon\tau\alpha\varsigma$] om. P. $\kappa\alpha\iota \acute{\omega}\varsigma$ — 26. A] bis F,
sed corr. 25. $\delta \Gamma$ P. 26. $\epsilon\acute{\sigma}\tau\iota\nu$ P. $\tau\omicron$] δ F.

τὸ Γ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς
τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Α. τὸ Α ἄρα
πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς ὁ Θ πρὸς ἀριθμὸν
τὸν Α· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

5 Τὰ ἄρα τῷ αὐτῷ μεγέθει σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις
ἐστὶ σύμμετρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιγ'.

Ἐὰν ἡ δύο μεγέθη σύμμετρα, τὸ δὲ ἕτερον
αὐτῶν μεγέθει τινὶ ἀσύμμετρον ἦ, καὶ τὸ λοιπὸν
10 τῷ αὐτῷ ἀσύμμετρον ἔσται.

Ἐστω δύο μεγέθη σύμμετρα τὰ Α, Β, τὸ δὲ ἕτερον
αὐτῶν τὸ Α ἄλλῳ τινὶ τῷ Γ ἀσύμμετρον ἔστω· λέγω,
ὅτι καὶ τὸ λοιπὸν τὸ Β τῷ Γ ἀσύμμετρόν ἐστιν.

Εἰ γάρ ἐστι σύμμετρον τὸ Β τῷ Γ, ἀλλὰ καὶ τὸ Α
15 τῷ Β σύμμετρόν ἐστιν, καὶ τὸ Α ἄρα τῷ Γ σύμμετρόν
ἐστιν. ἀλλὰ καὶ ἀσύμμετρον· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ
ἄρα σύμμετρόν ἐστι τὸ Β τῷ Γ· ἀσύμμετρον ἄρα.

Ἐὰν ἄρα ἡ δύο μεγέθη σύμμετρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Λήμμα.

20 Δύο δοθεῖσων εὐθειῶν ἀνίσων εὐρεῖν, τίνι μείζον
δύναται ἢ μείζων τῆς ἐλάσσονος.

Ἐστῶσαν αὖ δοθεῖσαι δύο ἄνισοι εὐθεῖαι αὖ ΑΒ, Γ,

2. ὁ Α πρὸς τὸν Β b. 4. ἐστίν P. 6. σύμμετρα] συμ-
supra scr. m. 1 P. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. Bb. Seq.
lemma, u. app. 7. ιγ'] ιβ' corr. in ιγ' m. rec. P, γ in ras. F;
ιδ', δ in ras. m. 1 B, ιγ' mg. 8. ἡ] om. V. μεγέθη] -γέ-
supra m. 1 P. ἀσύμμετρα F, sed corr.; σύμμετρα ἡ V. δ' F.
11. δύο] mg. γρ. αὐτῷ m. 1. b. 12. ἄλλῳ] ἐτέρῳ BFV.
13. τὸ Β] om. b. τῷ Γ] eras. b. ἐστὶ τὸ Β τῷ Γ b. 14.
εἰ — Γ] supra scr. m. rec. b. Γ τῷ Β P. 15. ἐστὶ Β
comp. Fb, om. V. καὶ — σύμμε-] supra scr. m. 1 F.
-τρον — 16. καὶ] in ras. F. 16. ὅπερ ἐστίν F. 17. ἄρα] (alt.)

uerum etiam $A:\Gamma = \Theta:K$. ex aequo igitur $A:B = \Theta:A$ [V, 22]. itaque $A:B$ rationem habet, quam numerus Θ ad numerum A . itaque A, B commensurabiles sunt [prop. VI].

Ergo quae eidem magnitudini commensurabilia sunt, etiam inter se commensurabilia sunt; quod erat demonstrandum.

XIII.

Si duae magnitudines commensurabiles sunt, et alterutra earum magnitudini alicui incommensurabilis est, etiam reliqua eidem incommensurabilis erit.

A —————
 Γ —————
 B —————

Sint duae magnitudines commensurabiles A, B , et A alii magnitudini Γ incommensurabilis sit. dico, etiam B, Γ incommensurabiles esse.

nam si B, Γ commensurabiles sunt et etiam A, B commensurabiles, etiam A, Γ commensurabiles erunt [prop. XII]. at eadem incommensurabiles sunt; quod fieri non potest. itaque B, Γ commensurabiles non sunt. incommensurabiles igitur.

Ergo si duae magnitudines commensurabiles sunt, et quae sequuntur.

Lemma.

Datis duabus rectis inaequalibus inuenire, quantum maior quadrata minorem excedat.

Sint datae duae rectae inaequales AB, Γ , quarum

postea ins. B. 18. ἦ] om. P. ἀσύμμετρα F, sed corr. καὶ τὰ ἐξῆς] τὸ δὲ ἕτερον αὐτῶν μεγέθει τινὶ ἀσύμμετρον ἦ, καὶ τὸ λοιπὸν τῷ αὐτῷ ἀσύμμετρον ἔσται ὅπερ ἔδει δείξαι V. 19. ιε' B. 20. ἀνίσων εὐθειῶν F. 21. ἐλάττονος F.

ὡν μείζων ἔστω ἡ AB . δεῖ δὴ εὐρεῖν, τίνι μείζον δύναται ἡ AB τῆς Γ .

Γεγραφθῶ ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ $A\Delta B$, καὶ εἰς αὐτὸ ἐνηρμόσθω τῇ Γ ἴση ἡ $A\Delta$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔB . φανερόν δὴ, ὅτι ὀρθή ἐστὶν ἡ ὑπὸ $A\Delta B$ γωνία, καὶ ὅτι ἡ AB τῆς $A\Delta$, τουτέστι τῆς Γ , μείζον δύναται τῇ ΔB .

Ὅμοίως δὲ καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἡ δυναμένη αὐτάς εὐρίσκεται οὕτως.

10 Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ $A\Delta$, ΔB , καὶ δέον ἔστω εὐρεῖν τὴν δυναμένην αὐτάς. κείσθωσαν γάρ, ὥστε ὀρθὴν γωνίαν περιέχειν τὴν ὑπὸ $A\Delta$, ΔB , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AB . φανερόν πάλιν, ὅτι ἡ τὰς $A\Delta$, ΔB δυναμένη ἐστὶν ἡ AB . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15

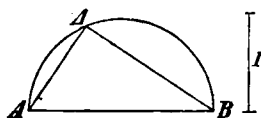
ιδ'.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾧσιν, δύνηται δὲ ἡ πρώτη τῆς δευτέρας μείζον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ [μήκει], καὶ ἡ τρίτη τῆς τετάρτης μείζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου 20 ἑαυτῇ [μήκει]. καὶ ἐὰν ἡ πρώτη τῆς δευτέρας μείζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυσμμέτρου ἑαυτῇ [μήκει], καὶ ἡ τρίτη τῆς τετάρτης μείζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυσμμέτρου ἑαυτῇ [μήκει].

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ A , B , Γ , Δ , 25 ὡς ἡ A πρὸς τὴν B , οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ , καὶ ἡ

1. ἔστω] corr. ex ἐστὶν m. 2 B. 3. $AB\Delta$ P. 4. αὐτῷ e corr. F. ἡ $A\Delta$ ἴση F. 6. μείζον] corr. ex μείζων m. 1 F. 10. αἱ δοθεῖσαι] om. V. αἱ] αἱ δοθεῖσαι αἱ V. 11. τήν] ins. postea V. ἐκείσθωσαν BFVb. 13. Ante πάλιν ins. ἐστὶ m. 1 F. ὅτι πάλιν b. ὅτι ἡ] ἡ in ras. F. 14. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. Theon (BFVb). 15. ιδ'] δ in ras. F, corr. ex

maior sit AB . oportet igitur inuenire, quantum AB^2 excedat Γ^2 .



describatur in AB semicirculus $A\Delta B$, et in eum aptetur rectae Γ aequalis $A\Delta$ [IV, 1], et ducatur ΔB . manifestum igitur, $\angle A\Delta B$ rectum esse [III, 31], et $AB^2 = A\Delta^2 + \Delta B^2 = \Gamma^2 + \Delta B^2$ [I, 47].

Similiter etiam datis duabus rectis recta quadrata iis aequalis hoc modo inuenitur.

sint datae duae rectae $A\Delta$, ΔB , et oporteat rectam quadratam iis aequalem inuenire. ponantur enim ita, ut angulum rectum comprehendant $A\Delta B$, et ducatur AB . rursus manifestum est, esse $AB^2 = A\Delta^2 + \Delta B^2$ [I, 47]; quod erat demonstrandum.

XIV.

Si quattuor rectae proportionales sunt, et prima quadrata secundam excedit quadrato rectae sibi commensurabilis, etiam tertia quadrata quartam excedet quadrato rectae sibi commensurabilis. et si prima quadrata secundam excedit quadrato rectae sibi incommensurabilis, etiam tertia quadrata quartam excedet quadrato rectae sibi incommensurabilis.

Sint quattuor rectae proportionales A, B, Γ, Δ , ita ut sit $A:B = \Gamma:\Delta$, et sit $A^2 = B^2 + E^2$, $\Gamma^2 = \Delta^2 + Z^2$

17. $\tau\phi$] e corr. V.
 18. μήκει] om. P. 19. ἀπὸ τῆς b. 20. μήκει] om. P. 21. δυνήσεται FV, sed corr. συμμέτρον F, et B, corr. m. 2. ἐαντῶ b. μήκει] om. P. 22. δυνήσεται F. 23. συμμέτρον PF, et B, corr. m. 2. ἐαντῶ b. μήκει] om. P. 24. ἔστωσαν δὴ V. 25. A] e corr. V.

A μὲν τῆς B μείζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ τῆς E , ἡ δὲ Γ τῆς Δ μείζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ τῆς Z . λέγω, ὅτι, εἴτε σύμμετρός ἐστιν ἡ A τῇ E , σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Z , εἴτε ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ A τῇ E , ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ὁ Γ τῇ Z .

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ A πρὸς τὴν B , οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ , ἐστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ . ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς A ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν E, B ,
 10 τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Γ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν Δ, Z . ἐστιν ἄρα ὡς τὰ ἀπὸ τῶν E, B πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B , οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν Δ, Z πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ . διελόντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς E πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Z πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ . ἐστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ E
 15 πρὸς τὴν B , οὕτως ἡ Z πρὸς τὴν Δ . ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ B πρὸς τὴν E , οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Z . ἐστὶ δὲ καὶ ὡς ἡ A πρὸς τὴν B , οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ . δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ A πρὸς τὴν E , οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Z . εἴτε οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ A τῇ E ,
 20 σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Z , εἴτε ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ A τῇ E , ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Z .

Ἐὰν ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

ιε'.

Ἐὰν δύο μεγέθη σύμμετρα συντεθῇ, καὶ τὸ
 25 ὅλον ἐκατέρῳ αὐτῶν σύμμετρον ἔσται· καὶ τὸ ὅλον ἐνὶ αὐτῶν σύμμετρον ἦ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη σύμμετρα ἔσται.

Συγκείσθω γὰρ δύο μεγέθη σύμμετρα τὰ $AB, B\Gamma$.

1. τῆς B] corr. ex τῇ B m. 1 b. Γ δέ BFb. 3. ἐστιν] om. V. τῇ] corr. ex τῆς m. 1 P. ἐστιν B. 4. Z] e corr.

[u. lemma]. dico, siue A, E commensurabiles sint, etiam Γ, Z commensurabiles esse, siue A, E incommensurabiles sint, etiam Γ, Z incommensurabiles esse.

nam quoniam est $A:B = \Gamma:\Delta$, erit etiam $A^2:B^2 = \Gamma^2:\Delta^2$ [VI, 22]. uerum $A^2 = E^2 + B^2$, $\Gamma^2 = \Delta^2 + Z^2$.

itaque $E^2 + B^2:B^2 = \Delta^2 + Z^2:\Delta^2$.

subtrahendo igitur [V, 17] $E^2:B^2 = Z^2:\Delta^2$.

quare etiam [VI, 22] $E:B = Z:\Delta$.

itaque e contrario [V, 7

coroll.] $B:E = \Delta:Z$. uerum etiam

$A:B = \Gamma:\Delta$. ex aequo igitur [V, 22]

$A:E = \Gamma:Z$. itaque siue A, E com-

mensurabiles sunt, etiam Γ, Z commensurabiles sunt,

siue A, E incommensurabiles sunt, etiam Γ, Z in-

commensurabiles sunt [prop. XI].

Ergo si, et quae sequuntur.

XV.

Si duae magnitudines commensurabiles componuntur, etiam totum utrique earum commensurabile erit; et si totum alterutri earum commensurabile est, etiam magnitudines ab initio positae commensurabiles erunt.

Componentur enim duae magnitudines commensura-

m. 1 b. 5. $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$ PB. 7. $\kappa\alpha\iota$] om. V. 9. $\tau\tilde{\omega}$] corr. ex $\tau\acute{o}$ m. rec. P. A] in ras. m. 1 P. $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$ P. 10. $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$ P. Z, Δ P. 11. E, B] Δ, Z B. $\tau\acute{\alpha}$ F. B] Δ B. 12. Δ, Z] $E B$ B. $\tau\acute{\alpha}$ F. Δ] B in ras. m. 2 B. 13. $\alpha\pi\acute{o}$] (alt.) ins. m. 2 F. 14. $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$ — 15. Δ] mg. m. 1 P. 14. η] supra scr. m. 2 F. 17. $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$ P. 19. $\epsilon\lambda\tau'$ P. 20. $\epsilon\sigma\tau\iota$] $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$ P. Post $\epsilon\lambda\tau\epsilon$ del. $\sigma\upsilon\nu$ b. $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$] om. V. 21. $\sigma\upsilon\mu\mu\epsilon\tau\rho\omicron\varsigma$ b. $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$ B. 22. $\acute{\alpha}\rho\alpha$] om. V. Ante $\kappa\alpha\iota$ add. $\tau\epsilon\sigma\sigma\alpha\rho\epsilon\varsigma \epsilon\upsilon\theta\epsilon\iota\alpha\iota \alpha\nu\acute{\alpha}\lambda\omicron\gamma\omicron\nu \acute{\omega}\sigma\iota$ (V) FV. 23. $\iota\epsilon'$] e corr. PF; $\iota\zeta'$ B, mg. $\iota\epsilon'$. 28. $\sigma\upsilon\gamma\kappa\upsilon\epsilon\iota\sigma\theta\omega\sigma\alpha\nu$ BFb. $B\Gamma$] e corr. F.

λέγω, ὅτι καὶ ὅλον τὸ $ΑΓ$ ἐκατέρω τῶν $ΑΒ, ΒΓ$ ἐστὶ σύμμετρον.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστὶ τὰ $ΑΒ, ΒΓ$, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρεῖτω, καὶ ἔστω τὸ $Δ$. ἐπεὶ οὖν
5 τὸ $Δ$ τὰ $ΑΒ, ΒΓ$ μετρεῖ, καὶ ὅλον τὸ $ΑΓ$ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὰ $ΑΒ, ΒΓ$. τὸ $Δ$ ἄρα τὰ $ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ$ μετρεῖ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΓ$ ἐκατέρω τῶν $ΑΒ, ΒΓ$.

Ἀλλὰ δὴ τὸ $ΑΓ$ ἔστω σύμμετρον τῷ $ΑΒ$ · λέγω δὴ, ὅτι καὶ τὰ $ΑΒ, ΒΓ$ σύμμετρά ἐστίν.

10 Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστὶ τὰ $ΑΓ, ΑΒ$, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρεῖτω, καὶ ἔστω τὸ $Δ$. ἐπεὶ οὖν τὸ $Δ$ τὰ $ΓΑ, ΑΒ$ μετρεῖ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ $ΒΓ$ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ $ΑΒ$ · τὸ $Δ$ ἄρα τὰ $ΑΒ, ΒΓ$ μετρήσει· σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ $ΑΒ, ΒΓ$.

15 Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἐξῆς.

ις'.

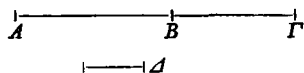
Ἐὰν δύο μεγέθη ἀσύμμετρα συντεθῇ, καὶ τὸ ὅλον ἐκατέρω αὐτῶν ἀσύμμετρον ἔσται· καὶ τὸ ὅλον ἐνὶ αὐτῶν ἀσύμμετρον ἦ, καὶ τὰ ἐξ
20 ἀρχῆς μεγέθη ἀσύμμετρα ἔσται.

Συγκείσθω γὰρ δύο μεγέθη ἀσύμμετρα τὰ $ΑΒ, ΒΓ$ · λέγω, ὅτι καὶ ὅλον τὸ $ΑΓ$ ἐκατέρω τῶν $ΑΒ, ΒΓ$ ἀσύμμετρόν ἐστιν.

1. καί] καὶ τό V. τῶν] τῷ P. ἔσται b. σύμμετρον ἔστι V. 3. ἐστίν P. 6. τὰ] (prius) corr. ex τῶν F.
7. ἐστίν P. 8. $ΑΓ$] $ΑΒ, ΒΓ$ P; $ΑΓ$ ἐνὶ τῶν $ΑΒ, ΒΓ$ Theon (BFVb). τῷ] τῇ P, ἔστω δὴ τῷ (corr. ex τό V) Theon (BFVb).
9. δὴ] supra scr. F. 10. ἐστίν P. $ΑΓ$] $ΓΑ$ P, $Γ$ e corr. b; mg. γρ. $ΑΒ ΒΓ$ m. 1 b. 12. $ΑΓ$ FV. 13. τὰ] τό? V. 14. ἐστίν LPB. 15. Post μεγέθη add. σύμμετρα συντεθῇ, καὶ τὸ ὅλον ἐκατέρω αὐτῶν σύμμετρον ἔσται V. Post ἐξῆς add. ὅπερ εἶδει δεῖξαι V. 16. ις'] corr. ex ιδ' m. rec. P, mut. in ιζ' m.

biles AB , $B\Gamma$. dico, etiam totum $A\Gamma$ utrique AB , $B\Gamma$ commensurabile esse.

nam quoniam AB , $B\Gamma$ commensurabiles sunt, magnitudo aliqua eas metietur. metiatur et sit Δ . iam



quoniam Δ magnitudines AB , $B\Gamma$ metitur, etiam totum $A\Gamma$ metietur. uerum

etiam AB , $B\Gamma$ metitur. Δ igitur AB , $B\Gamma$, $A\Gamma$ metitur. ergo $A\Gamma$ utrique AB , $B\Gamma$ commensurabilis est [def. 1].

Iam uero $A\Gamma$, AB commensurabiles sint. dico, etiam AB , $B\Gamma$ commensurabiles esse.

nam quoniam $A\Gamma$, AB commensurabiles sunt, magnitudo aliqua eas metietur. metiatur et sit Δ . iam quoniam Δ magnitudines ΓA , AB metitur, etiam reliquam $B\Gamma$ metietur. uerum etiam AB metitur. Δ igitur AB , $B\Gamma$ metietur. itaque AB , $B\Gamma$ commensurabiles erunt.

Ergo si duae magnitudines, et quae sequuntur.

XVI.

Si duae magnitudines incommensurabiles componentur, etiam totum utrique earum incommensurabile est; et si totum alterutri earum incommensurabile est, etiam magnitudines ab initio positae incommensurabiles erunt.

Componentur enim duae magnitudines incommensurabiles AB , $B\Gamma$. dico, etiam totum $A\Gamma$ utrique AB , $B\Gamma$ incommensurabile esse.

2 F; η' B, mg. $\iota\epsilon'$. 19. $\sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\rho\omicron\nu$ B, corr. m. 2; item lin. 20.
21. $\sigma\upsilon\gamma\kappa\epsilon\lambda\omicron\theta\omega\sigma\alpha\nu$ V. $B\Gamma$] corr. ex ΓB F.

Εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ἀσύμμετρα τὰ ΓA , AB , μετρήσει
 τι [αὐτὰ] μέγεθος. μετρεῖτω, εἰ δυνατόν, καὶ ἔστω
 τὸ Δ . ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΓA , AB μετρεῖ, καὶ λοιπὸν
 ἄρα τὸ $B\Gamma$ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ AB · τὸ Δ
 5 ἄρα τὰ AB , $B\Gamma$ μετρεῖ. σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ AB , $B\Gamma$.
 ὑπέκειντο δὲ καὶ ἀσύμμετρα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.
 οὐκ ἄρα τὰ ΓA , AB μετρήσει τι μέγεθος· ἀσύμμετρα
 ἄρα ἐστὶ τὰ ΓA , AB . ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ
 τὰ $A\Gamma$, ΓB ἀσύμμετρά ἐστιν. τὸ $A\Gamma$ ἄρα ἑκατέρω
 10 τῶν AB , $B\Gamma$ ἀσύμμετρόν ἐστιν.

Ἀλλὰ δὴ τὸ $A\Gamma$ ἐνὶ τῶν AB , $B\Gamma$ ἀσύμμετρον ἔστω.
 ἔστω δὴ πρότερον τῷ AB · λέγω, ὅτι καὶ τὰ AB , $B\Gamma$
 ἀσύμμετρά ἐστιν. εἰ γὰρ ἔσται σύμμετρα, μετρήσει
 τι αὐτὰ μέγεθος. μετρεῖτω, καὶ ἔστω τὸ Δ . ἐπεὶ
 15 οὖν τὸ Δ τὰ AB , $B\Gamma$ μετρεῖ, καὶ ὅλον ἄρα τὸ $A\Gamma$
 μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ AB · τὸ Δ ἄρα τὰ ΓA , AB
 μετρεῖ. σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΓA , AB · ὑπέκειντο δὲ καὶ
 ἀσύμμετρα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὰ AB , $B\Gamma$
 μετρήσει τι μέγεθος· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ AB , $B\Gamma$.
 20 Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἐξῆς.

Λήμμα.

Ἐὰν παρὰ τινα εὐθεῖαν παραβληθῇ παραλληλό-
 γραμμον ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, τὸ παραβληθὲν

1. τὰ] τό P. 2. αὐτὰ] om. P. 4. AB] BA V. 5.
 ἐστὶν LP. 6. ὑπόκεινται LBb. ἀδύνατόν ἐστιν V. 8.
 ἐστὶν LP. 9. Ante $A\Gamma$ del. Γ m. 1 P. σύμμετρα B, corr.
 m. 2. ἐστι V, comp. Fb. ΓA F. 10. ἐστὶν] om. B. 11.
 ἔστω] om. P. 12. ἔστω δὴ πρότερον] καὶ πρῶτον Theon (BFVb).
 τῷ] e corr. V. 13. ἔσται] ἐστὶ V. σύμμετρα] supra scr.
 α- m. 1 F. 17. ἐστὶ] ἐστὶν P, comp. F, ἔσται LBVb. ὑπέ-
 κειντο F. 19. ἐστὶν LP. Post $B\Gamma$ add. ὁμοίως δὲ δειχ-
 θήσεται, ὅτι τὸ $A\Gamma$ καὶ λοιπῷ τῷ $B\Gamma$ ἀσύμμετρόν ἐστιν FVb.

nam si ΓA , AB incommensurabiles non sunt, magdo aliqua eas metietur. metiatur, si fieri potest, et sit Δ . iam quoniam Δ magnitudines ΓA , AB metitur, etiam reliquam $B\Gamma$ metietur. uerum etiam AB metitur. Δ igitur AB , $B\Gamma$ metitur. itaque AB , $B\Gamma$ commensurabiles sunt. supposuimus autem, easdem incommensurabiles esse; quod fieri non potest. itaque nulla magnitudo ΓA , AB metietur. ergo ΓA , AB incommensurabiles erunt. similiter demonstrabimus, in $A\Gamma$, ΓB incommensurabiles esse. ergo $A\Gamma$ que AB , $B\Gamma$ incommensurabilis est.

Iam uero $A\Gamma$ alterutri AB , $B\Gamma$ incommensurabilis sit prius magnitudini AB incommensurabilis. dico, in AB , $B\Gamma$ incommensurabiles esse. nam si commensurabiles sunt, magnitudo aliqua eas metietur. metiatur et sit Δ . iam quoniam Δ magnitudines AB , $B\Gamma$ metitur, etiam totum $A\Gamma$ metietur. uerum etiam AB metitur. Δ igitur ΓA , AB metitur. itaque ΓA , AB commensurabiles sunt. supposuimus autem, easdem incommensurabiles esse; quod fieri non potest. itaque nulla magnitudo AB , $B\Gamma$ metietur. itaque AB , $B\Gamma$ incommensurabiles sunt.

Ergo si duae magnitudines, et quae sequuntur.

Lemma.

Si rectae alicui parallelogrammum adplicatur figura quadrata deficiens, adplicatum spatium rectangulo partem rectae adplicatione ortarum aequale est.

3. τετραγώνῳ] corr. ex παραλληλογράμμῳ m. rec. b. τό]
F. τὸ παραβληθέν] om. b.

ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ἐκ τῆς παραβολῆς γενομένων
τμημάτων τῆς εὐθείας.

Παρὰ γὰρ εὐθείαν τὴν AB παραβεβλήσθω παρα-
λληλόγραμμον τὸ AD ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ τῷ AB .
5 λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ AD τῷ ὑπὸ τῶν AG , GB .

Καὶ ἐστὶν αὐτόθεν φανερόν· ἐπεὶ γὰρ τετράγωνόν
ἐστὶ τὸ AB , ἴση ἐστὶν ἡ AG τῇ GB , καὶ ἐστὶ τὸ AD
τὸ ὑπὸ τῶν AG , GB , τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν AG , GB .

Ἐὰν ἄρα παρά τινα εὐθείαν, καὶ τὰ ἐξῆς.

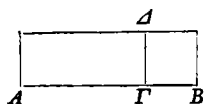
10

ιζ'.

Ἐὰν ᾧσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ
μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν
μείζονα παραβληθῇ ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ
καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ μήκει, ἡ μείζων
15 τῆς ἐλάσσονος μείζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμ-
μέτρου ἑαυτῇ [μήκει]. καὶ ἐὰν ἡ μείζων τῆς
ἐλάσσονος μείζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου
ἑαυτῇ [μήκει], τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλά-
σσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἑλλεί-
20 πον εἶδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν
διαίρει μήκει.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ A , $BΓ$, ὧν μείζων
ἡ $BΓ$, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος
τῆς A , τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς A , ἴσον
25 παρὰ τὴν $BΓ$ παραβεβλήσθω ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ,

3. τὸ AD παραλληλόγραμμον Theon (BFVb, ante AD eras.
 $ΓΔ$ F). 4. τετραγώνῳ] corr. ex παραλληλογράμμῳ m. rec. b.
 AB] $BΔ$ Fb. 5. ἐστὶν LB. τῷ] τὸ F. AG] corr. ex
 $ΓA$ m. 1 b. GB] $Γ$ e corr. V. 7. ἐστὶν LB. GB] $BΓ$
BV. ἐστὶν LPB. 8. $ΓΔ$] $ΔP$, $Δ$ e corr. V. τουτέστι — GB] m. 2 V. τουτέστιν LPBV. 9. Post εὐθείαν add. παρα-



Rectae enim AB parallelogram-
mum adplicetur AD figura quadrata
 AB deficiens. dico, esse

$$AD = AG \times GB.$$

et per se patet; nam quoniam AB quadratum est, erit
 $AG = GB$. et $AD = AG \times GB = AG \times GB$.

Ergo si rectae alicui, et quae sequuntur.

XVII.

Si duae rectae inaequales datae sunt, et quartae
parti quadrati minoris aequale spatium maiori adpli-
catur figura quadrata deficiens, quod eam in partes
longitudine commensurabiles diuidat, maior quadrata
minorem excedet quadrato rectae sibi commensurabilis.
et si maior quadrata minorem excedit quadrato rectae
sibi commensurabilis, et spatium quartae parti qua-
drati minoris aequale maiori adplicatur figura quadrata
deficiens, eam in partes longitudine commensurabiles
diuidet.

Sint duae rectae inaequales A, BG , quarum maior
sit BG , et quartae parti quadrati minoris A , hoc est
 $(\frac{1}{2}A)^2$, aequale spatium rectae BG adplicetur figura

βληθῆ παραλληλόγραμμον V. Post ἐξῆς add. τῆς προτάσεως
LBVb, F m. 2. 10. ἡ F m. 2; ἡ B, mg. ἡ. 11. ὅσιν P.

12. ἐλάττονος F. 13. τετραγώνω] in ras. m. 1 b. 14.
μήκη F. 15. ἐλάττονος F. συμμέτρων F. 16. μήκει] om. P.

ἄν F. ἡ] ἡ b, et F, sed corr. 17. ἐλάττονος F. μείζον]
mg. m. 2 F, μείζονα b. 18. μήκει] om. P. Post τετάρτῳ

add. μέρει b, F m. 2. ἐλάττονος F. 20. εἰς] in ras. V,
corr. ex εἰ m. rec. b. αὐτῇ V, sed corr. 21. διελεί B, διέλη

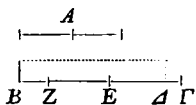
Vb et corr. in διελεί F. μήκη F. 22. μείζον b, μείζων
ἔστω F. 23. ἐλάττονος F. 24. τῆς] τ F. τούτεστιν P.

τῷ] τό F, et V, sed corr. m. 1. τοῦ A B; τῇ A V, sed corr.

καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν $ΒΔ$, $ΔΓ$, σύμμετρος δὲ ἔστω ἡ $ΒΔ$ τῇ $ΔΓ$ μήκει· λέγω, ὅτι ἡ $ΒΓ$ τῆς $Α$ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμετρου ἐαυτῇ.

- Τετμήσθω γὰρ ἡ $ΒΓ$ δίχα κατὰ τὸ $Ε$ σημεῖον, καὶ
 5 κείσθω τῇ $ΔΕ$ ἴση ἡ $ΕΖ$. λοιπὴ ἄρα ἡ $ΔΓ$ ἴση ἐστὶ τῇ $ΒΖ$. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ $ΒΓ$ τέμνεται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ $Ε$, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ $Δ$, τὸ ἄρα ὑπὸ $ΒΔ$, $ΔΓ$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΕΔ$ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΕΓ$ τετραγώνῳ.
 10 καὶ τὰ τετραπλάσια· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν $ΒΔ$, $ΔΓ$ μετὰ τοῦ τετραπλασίου τοῦ ἀπὸ τῆς $ΔΕ$ ἴσον ἐστὶ τῷ τετράκις ἀπὸ τῆς $ΕΓ$ τετραγώνῳ. ἀλλὰ τῷ μὲν τετραπλασίῳ τοῦ ὑπὸ τῶν $ΒΔ$, $ΔΓ$ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $Α$ τετράγωνον, τῷ δὲ τετραπλασίῳ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΔΕ$
 15 ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΔΖ$ τετράγωνον· διπλασίων γάρ ἐστιν ἡ $ΔΖ$ τῆς $ΔΕ$. τῷ δὲ τετραπλασίῳ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΕΓ$ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΒΓ$ τετράγωνον· διπλασίων γάρ ἐστι πάλιν ἡ $ΒΓ$ τῆς $ΓΕ$. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $Α$, $ΔΖ$ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΒΓ$ τετραγώνῳ.
 20 ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς $ΒΓ$ τοῦ ἀπὸ τῆς $Α$ μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς $ΔΖ$ · ἡ $ΒΓ$ ἄρα τῆς $Α$ μεῖζον δύναται τῇ $ΔΖ$. δεικτέον, ὅτι καὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ $ΒΓ$ τῇ $ΔΖ$. ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ $ΒΔ$ τῇ $ΔΓ$ μήκει, σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $ΒΓ$ τῇ $ΓΔ$ μήκει. ἀλλὰ ἡ $ΓΔ$ ταῖς
 25 $ΓΔ$, $ΒΖ$ ἐστὶ σύμμετρος μήκει· ἴση γάρ ἐστιν ἡ $ΓΔ$ τῇ $ΒΖ$. καὶ ἡ $ΒΓ$ ἄρα σύμμετρός ἐστι ταῖς $ΒΖ$, $ΓΔ$ μήκει· ὥστε καὶ λοιπῇ τῇ $ΖΔ$ σύμμετρός ἐστιν ἡ $ΒΓ$

1. $ΔΓ$] $Γ$ in ras. F. 3. Post ἐαυτῇ add. μήκει Vb, F m. 2. 5. $ΔΓ$] corr. ex $ΒΓ$ m. rec. b. ἐστίν P. 7. ὑπὸ τῶν BFV. 9. ἐστίν P. 10. τὰ] m. 2 V. τό] τὰ B. $ΒΔ$] in ras. m. 1 P. 11. τετράκις Theon (BFVb). τοῦ] om.



quadrata deficiens, et sit $B\Delta \times \Delta\Gamma$ [u. lemma], et $B\Delta$, $\Delta\Gamma$ longitudine commensurabiles sint. dico, $B\Gamma^2$ excedere A^2 quadrato rectae sibi

commensurabilis.

nam $B\Gamma$ in puncto E in duas partes aequales sectetur, et ponatur $EZ = \Delta E$. itaque $\Delta\Gamma = BZ$. et quoniam recta $B\Gamma$ in E in partes aequales secta est, in Δ autem in inaequales, erit [II, 5]

$$B\Delta \times \Delta\Gamma + E\Delta^2 = E\Gamma^2.$$

et quadrupla eodem modo; quare

$$4 B\Delta \times \Delta\Gamma + 4 \Delta E^2 = 4 E\Gamma^2.$$

uerum $A^2 = 4 B\Delta \times \Delta\Gamma$, $\Delta Z^2 = 4 \Delta E^2$ (nam $\Delta Z = 2 \Delta E$), $B\Gamma^2 = 4 E\Gamma^2$ (nam rursus $B\Gamma = 2 \Gamma E$). itaque

$$A^2 + \Delta Z^2 = B\Gamma^2$$

quare $B\Gamma^2$ excedit A^2 quadrato ΔZ^2 . demonstrandum, $B\Gamma$, ΔZ commensurabiles esse. nam quoniam $B\Delta$, $\Delta\Gamma$ longitudine commensurabiles sunt, $B\Gamma$ et $\Gamma\Delta$ longitudine commensurabiles sunt [prop. XV]. uerum $\Gamma\Delta$ rectis $\Gamma\Delta$, BZ longitudine commensurabilis est; nam $\Gamma\Delta = BZ$. quare etiam $B\Gamma$ rectis BZ , $\Gamma\Delta$ longitudine commensurabilis est [prop. XII]. quare $B\Gamma$ etiam

Theon (BFVb). $E\Delta$ FVb. $\iota\sigma\alpha$ BF. 12. ΓE F. $\tau\epsilon\tau\rho\alpha\pi\lambda\alpha\sigma\iota\omega$ τοῦ] $\tau\epsilon\tau\rho\acute{\alpha}\nu\iota\varsigma$ Theon (BFVb). 13. $\tau\acute{\omega}\nu$] om. b. 14. $\delta\acute{\epsilon}$] postea ins. F. $\tau\epsilon\tau\rho\acute{\alpha}\nu\iota\varsigma$, om. τοῦ, Theon (BFVb). 15. $\tau\epsilon\tau\rho\acute{\alpha}\gamma\alpha\upsilon\upsilon\omicron\nu$ P, corr. m. 1. 16. $Z\Delta$ P. $\tau\epsilon\tau\rho\acute{\alpha}\nu\iota\varsigma$, om. τοῦ, Theon (BFVb). 18. ΓE] $E\Gamma$ V. 19. Δ , ΔZ] e corr. V. $\tau\epsilon\tau\rho\acute{\alpha}\gamma\alpha\upsilon\upsilon\omicron\nu$] $\square$ supra scr. m. 1 V. 20. Post $\acute{\alpha}\sigma\tau\epsilon$ ras. 2 litt. V. 21. $\tau\eta$] corr. ex τοῦ F. $Z\Delta$ P. 22. $Z\Delta$ P. 23. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ P, corr. m. 2. 24. $\acute{\alpha}\lambda\lambda'$ F. 25. ZB F. 26. $\tau\alpha\iota\varsigma$ BZ , $\Gamma\Delta$ $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ $\sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\rho\omicron\varsigma$ Theon (BFVb). $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ P. 27. $\mu\acute{\eta}\kappa\epsilon\iota$] η in ras. m. 1 P. $B\Gamma$] in ras. V.

μήκει· ἡ $B\Gamma$ ἄρα τῆς A μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμετρου ἐαυτῇ.

Ἀλλὰ δὴ ἡ $B\Gamma$ τῆς A μείζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ συμμετρου ἐαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς A ἴσον
 5 παρὰ τὴν $B\Gamma$ παραβεβλήσθω ἐλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν $B\Delta$, $\Delta\Gamma$. δεικτέον, ὅτι σύμμετρός ἐστιν ἡ $B\Delta$ τῇ $\Delta\Gamma$ μήκει.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δείξομεν, ὅτι ἡ $B\Gamma$ τῆς A μείζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς $Z\Delta$.
 10 δύναται δὲ ἡ $B\Gamma$ τῆς A μείζον τῷ ἀπὸ συμμετρου ἐαυτῇ. σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ $B\Gamma$ τῇ $Z\Delta$ μήκει· ὥστε καὶ λοιπῇ συναμφοτέρῳ τῇ BZ , $\Delta\Gamma$ σύμμετρός ἐστιν ἡ $B\Gamma$ μήκει. ἀλλὰ συναμφοτέρος ἡ BZ , $\Delta\Gamma$ σύμμετρός ἐστι τῇ $\Delta\Gamma$ [μήκει]. ὥστε καὶ ἡ $B\Gamma$ τῇ $\Gamma\Delta$
 15 σύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ διελόντι ἄρα ἡ $B\Delta$ τῇ $\Delta\Gamma$ ἐστὶ σύμμετρος μήκει.

Ἐὰν ἄρα ὥσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, καὶ τὰ ἐξῆς.

ιη'.

Ἐὰν ὥσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ
 20 μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ [μήκει], ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μείζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμ-

2. Post ἐαυτῇ add. μήκει V. 4. τοῦ] in ras. V. 8. ὁμοίως δὴ V. δείξομεν] διει- corr. ex δη- F. 9. Post $Z\Delta$ del. m. 2: οὕτω γὰρ ὑπόκειται V. 10. μείζον τῆς A P. 11. ἐαυτῆς P. 12. καὶ] m. 2 F. συναμφοτέρῳ] -ω e corr. V. τῇ] corr. ex τῷ F. 14. τῇ $\Delta\Gamma$ σύμμετρός ἐστι Theon (BFVb; τῇ $\Delta\Gamma$ postea ins. F). μήκει] om. P. Dein add. Theon: ἰση γὰρ ἐστὶν ἡ BZ τῇ $\Delta\Gamma$ (BFVb; τῇ corr. in τῆς m. 2 F, τῆς b; $\Gamma\Delta$ F). ὥστε] om. Theon (BFVb). $B\Gamma$ ἄρα Theon (BFVb).

reliquae $Z\Delta$ longitudine commensurabilis est. ergo $B\Gamma^2$ excedit A^2 quadrato rectae sibi commensurabilis.

Iam uero $B\Gamma^2$ excedat A^2 quadrato rectae sibi commensurabilis, et quartae parti quadrati A^2 aequale rectae $B\Gamma$ adplicetur spatium figura quadrata deficiens, et sit $B\Delta \times \Delta\Gamma$ [u. lemma]. demonstrandum, $B\Delta$, $\Delta\Gamma$ longitudine commensurabiles esse.

nam iisdem comparatis similiter demonstrabimus, esse $B\Gamma^2 = A^2 + Z\Delta^2$. $B\Gamma^2$ autem quadrato rectae sibi commensurabilis excedit quadratum A^2 . itaque $B\Gamma$, $Z\Delta$ longitudine commensurabiles sunt. quare $B\Gamma$ etiam reliquae $BZ + \Delta\Gamma$ longitudine commensurabilis est [prop. XV]. uerum $BZ + \Delta\Gamma$ rectae $\Delta\Gamma$ commensurabilis est [prop. VI]. quare etiam $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ longitudine commensurabiles sunt [prop. XII]. itaque etiam dirimendo $B\Delta$, $\Delta\Gamma$ longitudine commensurabiles sunt.

Ergo si duae rectae inaequales datae sunt, et quae sequuntur.

XVIII.

Si duae rectae inaequales datae sunt, et quartae parti quadrati minoris aequale spatium maiori adplicatur figura quadrata deficiens, quod eam in partes incommensurabiles diuidat, maior quadrata minorem excedet quadrato rectae sibi incommensurabilis. et si maior quadrata minorem excedit quadrato rectae sibi

σύμμετρος ἐστὶ τῇ $\Gamma\Delta$ Theon (BFVb; $\Delta\Gamma$ V). 15. μήκει καί] om. Theon (BFVb). 17. καὶ τὰ ἐξῆς] τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῆ ἑλλειπὸν εἶδει τετραγώνῳ, καὶ τὰ ἐξῆς· ὅπερ εἶδει δεῖξαι V. 18. κ' B, ιη' mg. 19. ὥσιν B. 20. ἐλάττωνος F. 22. μήκει] om. P, μήκη F. 23. ἐλάττωνος F. τό F. συμμέτρον F.

μέτρου ἐαυτῇ. καὶ ἐὰν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος
μείζον δύννηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἐαυτῇ, τῷ δὲ
τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν
μείζονα παραβληθῇ ἑλλεῖπον εἶδει τετραγώνῳ,
5 εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ [μήκει].

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ $A, B\Gamma$, ὧν μείζων
ἡ $B\Gamma$, τῷ δὲ τετάρτῳ [μέρει] τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος
τῆς A ἴσον παρὰ τὴν $B\Gamma$ παραβεβλήσθω ἑλλεῖπον
εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν $B\Delta\Gamma$, ἀσύμ-
10 μετρος δὲ ἔστω ἡ $B\Delta$ τῇ $\Delta\Gamma$ μήκει· λέγω, ὅτι ἡ $B\Gamma$
τῆς A μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἐαυτῇ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων τῷ πρότερον
ὁμοίως δείξομεν, ὅτι ἡ $B\Gamma$ τῆς A μείζον δύναται τῷ
ἀπὸ τῆς $Z\Delta$. δεικτέον [οὖν], ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν
15 ἡ $B\Gamma$ τῇ ΔZ μήκει. ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ
 $B\Delta$ τῇ $\Delta\Gamma$ μήκει, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $B\Gamma$
τῇ $\Gamma\Delta$ μήκει. ἀλλὰ ἡ $\Delta\Gamma$ σύμμετρός ἐστι συναμ-
φοτέραις ταῖς $BZ, \Delta\Gamma$ · καὶ ἡ $B\Gamma$ ἄρα ἀσύμμετρός
ἐστὶ συναμφοτέραις ταῖς $BZ, \Delta\Gamma$. ὥστε καὶ λοιπῇ τῇ
20 $Z\Delta$ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ $B\Gamma$ μήκει. καὶ ἡ $B\Gamma$ τῆς A
μείζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς $Z\Delta$ · ἡ $B\Gamma$ ἄρα τῆς A
μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἐαυτῇ.

Δυνάσθω δὴ πάλιν ἡ $B\Gamma$ τῆς A μείζον τῷ ἀπὸ
ἀσυμμέτρου ἐαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς A ἴσον
25 παρὰ τὴν $B\Gamma$ παραβεβλήσθω ἑλλεῖπον εἶδει τετραγώνῳ,

1. καὶ — 2. ἐαυτῇ] om. b. 1. μείζον V, sed corr. ἐλάτ-
τονος F. 2. συμμέτρου F, et B, corr. m. 2. 3. ἐλάττονος F.
5. διαιρῇ P. μήκει] om. P, μήκη F. 7. ἐστὶν ἡ F. μέρει]
mg. m. 1 P. τοῦ] τῷ F. ἐλάττονος F. 8. τῆς] τῇ F. 9.
 $B\Gamma\Delta$ b; $B\Delta, \Delta\Gamma$ V ($\Delta\Gamma$ in ras.), F, P m. rec. 11. συμ-
μέτρον B, corr. m. rec. 12. τῷ] m. rec. B; τό P, corr. m. 2.
προτέρῳ F. 14. ΔZ V. οὖν] om. P. ὅτι καὶ P. 15.

incommensurabilis, et spatium quartae parti quadrati minoris aequale maiori adplicatur figura quadrata deficiens, eam in partes incommensurabiles diuidit.

Sint duae rectae inaequales $A, B\Gamma$, quarum maior sit $B\Gamma$, quartae autem parti quadrati minoris A aequale spatium rectae $B\Gamma$ adplicetur figura quadrata deficiens, et sit $B\Delta \times \Delta\Gamma$ [u. lemma p. 46], et $B\Delta, \Delta\Gamma$ longitudine incommensurabiles sint. dico, $B\Gamma^2$ excedere A^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis.

iiisdem enim, quae in priore propositione, comparatis similiter demonstrabimus, esse $B\Gamma^2 = A^2 + Z\Delta^2$. demonstrandum, $B\Gamma, \Delta Z$ longitudine incommensurabiles esse. nam quoniam $B\Delta, \Delta\Gamma$ longitudine incommensurabiles sunt, etiam $B\Gamma, \Gamma\Delta$ longitudine incommensurabiles sunt [prop. XVI]. uerum $\Delta\Gamma$ rectae $BZ + \Delta\Gamma$ commensurabilis est [prop. VI]. quare etiam $B\Gamma$ rectae $BZ + \Delta\Gamma$ incommensurabilis est [prop. XIII]. itaque $B\Gamma$ etiam reliquae $Z\Delta$ longitudine incommensurabilis est [prop. XVI]; et $B\Gamma^2 = A^2 + Z\Delta^2$. ergo $B\Gamma^2$ excedit A^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis.

Iam rursus $B\Gamma^2$ excedat A^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis, et spatium aequale $\frac{1}{4}A^2$ rectae $B\Gamma$ adplicetur figura quadrata deficiens, et sit $B\Delta \times \Delta\Gamma$.

$Z\Delta B$. 16. μήκει] om. Vb, m. 2 B. ἄρα] om. V. ἐστίν P, comp. F. καί] m. 2 F. 17. $\Gamma\Delta$] in ras. F. ἀλλ' F. ἥ] supra scr. m. 1 V. ἀσύμμετρος F. 18. καί — 19. $\Delta\Gamma$] m. 2 B. 20. $Z\Delta$] " ΔZ " F. $B\Gamma$] (prius) ΓB V. 21. $B\Gamma$] B in ras. m. 1 B. 22. συμμέτρου B, corr. m. 2; item lin. 24. 24. τοῦ] τῷ F.

καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν $B\Delta$, $\Delta\Gamma$. δεικτέον, ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ $B\Delta$ τῇ $\Delta\Gamma$ μήκει.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δείξομεν, ὅτι ἡ $B\Gamma$ τῆς A μείζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς $Z\Delta$. ἀλλὰ
 5 ἡ $B\Gamma$ τῆς A μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ $B\Gamma$ τῇ $Z\Delta$ μήκει· ὥστε καὶ λοιπῇ συναμφοτέρῳ τῇ BZ , $\Delta\Gamma$ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ $B\Gamma$. ἀλλὰ συναμφοτέρος ἡ BZ , $\Delta\Gamma$ τῇ $\Delta\Gamma$ σύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ ἡ $B\Gamma$ ἄρα τῇ $\Delta\Gamma$ ἀσύμμετρός
 10 ἐστὶ μήκει· ὥστε καὶ διελόντι ἡ $B\Delta$ τῇ $\Delta\Gamma$ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει.

Ἐὰν ἄρα ὧσι δύο εὐθεῖαι, καὶ τὰ ἐξῆς.

Λήμμα.

Ἐπεὶ δέδεικται, ὅτι αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ
 15 δυνάμει [εἰσὶ σύμμετροι], αἱ δὲ δυνάμει οὐ πάντως καὶ μήκει, ἀλλὰ δὴ δύνανται μήκει καὶ σύμμετροι εἶναι καὶ ἀσύμμετροι, φανερόν, ὅτι, ἐὰν τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ σύμμετρός τις ἢ μήκει, λέγεται ῥητὴ καὶ σύμμετρος αὐτῇ οὐ μόνον μήκει, ἀλλὰ καὶ δυνάμει,
 20 ἐπεὶ αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει. ἐὰν δὲ τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ σύμμετρός τις ἢ δυνάμει, εἰ μὲν καὶ μήκει, λέγεται καὶ οὕτως ῥητὴ καὶ σύμμετρος αὐτῇ

1. $\Delta\Gamma$] m. 2 B. 2. ἡ ΔB ἐστὶν F. 4. ΔZ V. ἀλλ' FV. 5. συμμέτρου F, corr. m. 2. 6. ἑαυτῆς P, corr. m. 1. ἀσύμμετρα P, corr. m. 1. ΔZ V. 8. τῇ $\Delta\Gamma$] m. 2 F. ἀσύμμετρος F, sed corr. 9. ἐστὶν P. καὶ] om. P. καὶ — 10. μήκει] mg. F. 10. Ante ὥστε del. ἡ $B\Gamma$ ἄρα τῇ $\Delta\Gamma$ m. 1 P. 12. ὧσιν B. Post εὐθεῖαι add. ἀνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ V. 13. λήμμα] om. PBb. 14. ἐπεὶ δέ V. 15. εἰσὶ σύμμετροι] om. P. οὐ] σύμμετροι οὐ P. 16. ἀλλὰ — μήκει] mg. m. 1 P. δῖ]. δηλαδὴ BVb, δὴ δηλαδὴ, del. δῖ, F. καὶ μήκει BFVb.

demonstrandum, BA et AG longitudine incommensurabiles esse.

iisdem enim comparatis similiter demonstrabimus, esse $BI^2 = A^2 + Z\Delta^2$. BI^2 autem A^2 excedit quadrato rectae sibi incommensurabilis. itaque BI , $Z\Delta$ longitudine incommensurabiles sunt. quare BI etiam reliquae $BZ + \Delta\Gamma$ incommensurabilis est [prop. XVI]. uerum $BZ + \Delta\Gamma$ rectae $\Delta\Gamma$ longitudine commensurabilis est [prop. VI]. quare etiam BI rectae $\Delta\Gamma$ longitudine incommensurabilis est [prop. XIII]. itaque etiam dirimendo BA et AG longitudine incommensurabiles sunt [prop. XVI].

Ergo si duae rectae, et quae sequuntur.

Lemma.

Quoniam demonstratum est [prop. IX coroll.], rectas longitudine commensurabiles semper etiam potentia commensurabiles esse, rectas autem potentia commensurabiles non semper etiam longitudine, sed posse longitudine tum commensurabiles esse tum incommensurabiles, adparet, si recta aliqua rationali propositae longitudine commensurabilis sit, eam rationalem eique commensurabilem uocari non modo longitudine, sed etiam potentia, quoniam rectae longitudine commensurabiles semper etiam potentia commensurabiles sunt; sin recta rationali propositae potentia commensurabilis sit, si etiam longitudine sit commensurabilis, eam sic quoque rationalem eique longitudine et potentia commensurabilem uocari; sin rursus recta rationali

19. $\alpha\tilde{\nu}\eta$ F. 20. $\epsilon\pi\epsilon\lambda\ \alpha\acute{\iota}$] $\alpha\acute{\iota}\ \gamma\acute{\alpha}\rho$ Theon (BFVb). 22.
 $\kappa\alpha\acute{\iota}$] (alt.) m. 2 B. $\alpha\tilde{\nu}\eta$ F.

μήκει καὶ δυνάμει· εἰ δὲ τῇ ἐκκειμένη πάλιν ῥητῇ
σύμμετρος τις οὕσα δυνάμει μήκει αὐτῇ ἢ ἀσύμμετρος,
λέγεται καὶ οὕτως ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος.

ιθ'.

5 Τὸ ὑπὸ ῥητῶν μήκει] συμμέτρων κατὰ τινὰ
τῶν προειρημένων τρόπων εὐθειῶν περιεχό-
μενον ὀρθογώνιον ῥητόν ἐστιν.

Ἐπὶ γὰρ ῥητῶν μήκει] συμμέτρων εὐθειῶν τῶν
AB, BΓ ὀρθογώνιον περιεχέσθω τὸ AΓ· λέγω, ὅτι
10 ῥητόν ἐστι τὸ AΓ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ AΔ·
ῥητόν ἄρα ἐστὶ τὸ AΔ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρος ἐστὶν ἡ
AB τῇ BΓ μήκει, ἴση δὲ ἐστὶν ἡ AB τῇ BΔ, σύμ-
μετρος ἄρα ἐστὶν ἡ BΔ τῇ BΓ μήκει. καὶ ἐστὶν ὥς
15 ἡ BΔ πρὸς τὴν BΓ, οὕτως τὸ AΔ πρὸς τὸ AΓ. σύμ-
μετρον ἄρα ἐστὶ τὸ AΔ τῷ AΓ. ῥητόν δὲ τὸ AΔ·
ῥητόν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ AΓ.

Τὸ ἄρα ὑπὸ ῥητῶν μήκει συμμέτρων, καὶ τὰ ἐξῆς.

κ'.

20 Ἐὰν ῥητόν παρὰ ῥητὴν παραβληθῇ, πλάτος
ποιεῖ ῥητὴν καὶ σύμμετρον τῇ, παρ' ἣν παρά-
κειται, μήκει.

2. οὐσά τις FV. δυνάμει] -ει e corr., seq. spat. 2 litt. F. αὐτῇ ἢ] ἡ αὐτῇ BFb, ἢ V. 3. οὕτως] comp. e corr. F. μόνον] comp. mg. V (euan.). Seq. alt. lemma, u. app. 4. ιθ'] sic F, sed infra κ'; mg. τμήμα β' Fb. 5. μήκει — 6. προ-] in ras. m. 2 B. 5. εὐθειῶν κατὰ Theon (BFVb). 6. τρόπον? V. εὐ-
θειῶν] om. Theon (BFVb). 8. εὐθειῶν τῶν] in ras. V. 12. τὸ AΔ ἄρα ῥητόν ἐστιν F. 13. AB] (alt.) BΔB. BΔ] ΔB in ras. P, BA in ras. B. σύμμετρος — 14. BΓ] om. B; mg. m. 2: ἴση lin. 13 — μήκει lin. 14, ut nos. 15. οὕτω V. τό]

propositae commensurabilis potentia, eadem longitudine ei incommensurabilis sit, sic quoque eam rationalem uocari potentia tantum commensurabilem.

XIX.

Rectangulum comprehensum rectis rationalibus longitudineque commensurabilibus secundum aliquem modorum, quos diximus [u. lemma], rationale est.

Rectis enim rationalibus longitudine commensurabilibus AB , $B\Gamma$ rectangulum comprehendatur $A\Gamma$. dico, $A\Gamma$ rationale esse.

 nam in AB construatur quadratum $A\Delta$. itaque $A\Delta$ rationale est [def. 4]. et quoniam AB , $B\Gamma$ longitudine commensurabiles sunt, et $AB = B\Delta$, $B\Delta$ et $B\Gamma$ longitudine commensurabiles sunt. et $B\Delta : B\Gamma = \Delta A : A\Gamma$ [VI, 1]. itaque ΔA , $A\Gamma$ commensurabilia sunt [prop. XI]. uerum ΔA rationale est. itaque etiam $A\Gamma$ rationale est [def. 4].

Ergo rectangulum comprehensum rectis rationalibus longitudineque commensurabilibus, et quae sequuntur.

XX.

Si spatium rationale rectae rationali 'adplicatur, latitudinem rationalem facit et ei longitudine] commensurabilem, cui adplicatum est.

(alt.) corr. ex $\tau\eta\nu$ m. rec. P. $A\Gamma$] e corr. P. 16. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ P, $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ καί V. τό] $\tau\omega$ b. $A\Delta$ F. 17. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ P, om. FV. 18. μήκει συμμέτρων] om. BVb. Ante καί add. εὐθειῶν F. καὶ τὰ ἐξῆς] om. PV. 19. κ'] seq. ras. 1 litt. B, κα' F. 21. ποιεῖ] -εῖ e corr. m. 1 F. $\tau\eta$] corr. ex $\tau\iota$ m. rec. b.

Ῥητὸν γὰρ τὸ $ΑΓ$ παρὰ ῤητὴν κατὰ τινα πάλιν τῶν προειρημένων τρόπων τὴν $ΑΒ$ παραβεβλήσθω πλάτος ποιοῦν τὴν $ΒΓ$. λέγω, ὅτι ῤητὴ ἐστὶν ἡ $ΒΓ$ καὶ σύμμετρος τῇ $ΒΑ$ μήκει.

- 5 Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ τετράγωνον τὸ $ΑΔ$. ῤητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΔ$. ῤητὸν δὲ καὶ τὸ $ΑΓ$. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΔΑ$ τῷ $ΑΓ$. καὶ ἐστὶν ὡς τὸ $ΔΑ$ πρὸς τὸ $ΑΓ$, οὕτως ἡ $ΔΒ$ πρὸς τὴν $ΒΓ$. σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $ΔΒ$ τῇ $ΒΓ$. ἴση δὲ ἡ $ΔΒ$ τῇ
10 $ΒΑ$. σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ $ΑΒ$ τῇ $ΒΓ$. ῤητὴ δὲ ἐστὶν ἡ $ΑΒ$. ῤητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $ΒΓ$ καὶ σύμμετρος τῇ $ΑΒ$ μήκει.

Ἐὰν ἄρα ῤητὸν παρὰ ῤητὴν παραβληθῇ, καὶ τὰ ἐξῆς.

κά'.

- 15 Τὸ ὑπὸ ῤητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστὶν, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστὶν, καλεῖσθω δὲ μέση.

- Ἐπὶ γὰρ ῤητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν
20 τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ ὀρθογώνιον περιεχέσθω τὸ $ΑΓ$. λέγω, ὅτι ἄλογόν ἐστὶ τὸ $ΑΓ$, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστὶν, καλεῖσθω δὲ μέση.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ τετράγωνον τὸ $ΑΔ$. ῤητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΔ$. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρος ἐστὶν

1. ῤητὴν τὴν $ΑΒ$ V. 2. εἰρημένων Theon (BFVb). τὴν $ΑΒ$] om. V. 3. ποιοῦν P. 4. $ΑΒ$ P. 5. $ΑΒ$] corr. ex $ΑΓ$ m. 2 F. 6. ἐστὶν P. $ΑΓ$] $ΓΑ$ F. 7. ἐστὶν P. $ΔΑ$] $ΑΔ$ V. 8. τήν] om. BFb. 9. ἐστὶν P. $ΔΒ$] (alt.) post ras. V, $ΒΔ$ F. 10. $ΒΑ$] $Α$ e corr. m. 1 P. ἄρα — τῇ] in ras. m. 1 P. 12. $ΒΑ$ BVb. 13. ἂν F. παρὰ ῤητὴν] om. F. παραβληθῇ] om. P. Seq. lemma, u. app. 14.

Rationale enim spatium AG rectae AB rationali rursus secundum aliquem modorum, quos diximus [u. lemma p. 56], adplicetur latitudinem faciens $B\Gamma$. dico, $B\Gamma$ rationalem esse et rectae BA longitudine commensurabilem.

construatur enim in AB quadratum AA . AA igitur rationale est [def. 4]. uerum etiam AG rationale est. itaque AA , AG commensurabilia sunt. et $AA:AG = AB:B\Gamma$ [VI, 1]. itaque AB , $B\Gamma$ commensurabiles sunt [prop. XI]. uerum $AB = BA$. itaque etiam AB , $B\Gamma$ commensurabiles sunt. sed AB rationalis est. itaque etiam $B\Gamma$ rationalis est et rectae AB longitudine commensurabilis [def. 3].

Ergo si spatium rationale rectae rationali adplicatur, et quae sequuntur.

XXI.

Rectangulum rectis rationalibus potentia tantum commensurabilibus comprehensum irrationale est, et recta ei aequalis quadrata irrationalis est, uocetur autem media.

Rectis enim rationalibus et potentia tantum commensurabilibus AB , $B\Gamma$ rectangulum AG comprehendatur. dico, rectangulum AG irrationale esse, et rectam ei aequalem quadratam irrationalem; uocetur autem media.

nam in AB quadratum construatur AA . itaque AA rationale est [def. 4]. et quoniam AB , $B\Gamma$ longi-

$\kappa\alpha'$] α in ras. m. 1 B, $\kappa\beta'$ F et sic deinceps. 15. Post $\phi\eta\tau\omega\nu$ add. $\delta\upsilon\omicron$ B. 16. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ PBV, comp. Fb. 17. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ BV, comp. Fb, $\acute{\epsilon}\sigma\tau\alpha\iota$ P. 22. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ PBV, comp. Fb.

ἡ AB τῇ $BΓ$ μήκει· δυνάμει γὰρ μόνον ὑπόκεινται
 σύμμετροι· ἴση δὲ ἡ AB τῇ $BΔ$, ἀσύμμετρος ἄρα
 ἐστὶ καὶ ἡ $ΔB$ τῇ $BΓ$ μήκει. καὶ ἐστὶν ὡς ἡ $ΔB$
 πρὸς τὴν $BΓ$, οὕτως τὸ $ΑΔ$ πρὸς τὸ $ΑΓ$ · ἀσύμμε-
 5 τρον ἄρα [ἐστὶ] τὸ $ΔΑ$ τῷ $ΑΓ$. ῥητὸν δὲ τὸ $ΔΑ$ ·
 ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΓ$ · ὥστε καὶ ἡ δυναμένη τὸ
 $ΑΓ$ [τουτέστιν ἡ ἴσον αὐτῷ τετράγωνον δυναμένη]
 ἄλογός ἐστιν, καλεισθῶ δὲ μέση· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λήμμα.

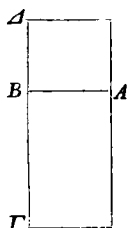
10 Ἐὰν ὡσι δύο εὐθεῖαι, ἐστὶν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν
 δευτέραν, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν
 δύο εὐθειῶν.

ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ZE , EH . λέγω, ὅτι ἐστὶν
 ὡς ἡ ZE πρὸς τὴν EH , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZE πρὸς
 15 τὸ ὑπὸ τῶν ZE , EH .

ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ZE τετράγωνον τὸ $ΔZ$,
 καὶ συμπεπληρώσθω τὸ $HΔ$. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ZE
 πρὸς τὴν EH , οὕτως τὸ $ZΔ$ πρὸς τὸ $ΔH$, καὶ ἐστὶ
 τὸ μὲν $ZΔ$ τὸ ἀπὸ τῆς ZE , τὸ δὲ $ΔH$ τὸ ὑπὸ τῶν
 20 $ΔE$, EH , τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ZE , EH , ἐστὶν ἄρα
 ὡς ἡ ZE πρὸς τὴν EH , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZE πρὸς
 τὸ ὑπὸ τῶν ZE , EH . ὁμοίως δὲ καὶ ὡς τὸ ὑπὸ τῶν

1. $BΓ$] $ΓB$ V. γάρ] comp. F, supra scr. δέ. 3. ἐστὶν B.
 $ΔB$] (alt.) $BΔ$ P. 4. $ΑΓ$] corr. ex AB m. rec. P. 5. ἐστὶν
 B, om P. $ΑΔ$ FV. $ΑΔ$ F. 6. ἐστὶν P. 7. ἡ] supra scr.
 m. 2 V. 8. ἐστὶ PV, comp. Fb. Ante ὅπερ add. P:
 διὰ τὸ (mg. m. 1) τὴν ἴσον ἀναγράφουσαν τετράγωνον τῷ $ΑΓ$
 χωρίῳ, ἣν καλεῖ μέσην, μέσην ἀνάλογον εἶναι τῶν AB , $BΓ$;
 eodem loco Theon: διὰ τὸ τὸ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον ἴσον εἶναι
 τῷ ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ καὶ μέσην ἀνάλογον αὐτὴν γίνεσθαι (γί-
 νεσθαι BV) τῶν AB , $BΓ$ (BFVb). 9. λήμμα γ V (cfr. app.).

10. ὡσιν B. ὡς] δὲ ὡς F. 11. πρὸς] supra scr. m. 1 F.



tudine incommensurabiles sunt (supposuimus enim, eas potentia tantum commensurabiles esse), et $AB = BD$, etiam AB , BD longitudine incommensurabiles sunt. et $AB : BD = AD : AG$ [VI, 1]. itaque AD , AG incommensurabilia sunt [prop. XI]. uerum AD rationale est; quare AG irrationale est [def. 4]. itaque etiam recta spatio AG aequalis quadrata¹⁾ irrationalis est [def. 4]; uocetur autem media; quod erat demonstrandum.

Lemma.

Datis duabus rectis est ut prima ad secundam, ita quadratum primae ad rectangulum duarum illarum rectorum.

Datae sint duae rectae ZE , EH . dico, esse

$$ZE : EH = ZE^2 : ZE \times EH.$$

Z E H describatur enim in ZE quadratum $Z\Delta$, et expleatur $H\Delta$. iam quoniam est $ZE : EH = Z\Delta : \Delta H$ [VI, 1], et $Z\Delta = ZE^2$, $\Delta H = \Delta E \times EH = ZE \times EH$, erit

$$ZE : EH = ZE^2 : ZE \times EH.$$

1) Uerba *τουτέστιν* — *δυναμένη* lin. 7, quae nihil explicant, subditicia habeo (pro *δυναμένη* Augustus coni. *ἀναγκαφουσα*). quae adiiciuntur lin. 8 (u. not. crit.) in P apertissime scholiastae sunt (*καλεῖ*); quare etiam additamentum simile codd. Theoninorum ipsi Theoni, non Euclidi tribuendum est.

$\acute{\upsilon}\pi\acute{o}$] corr. ex $\acute{\alpha}\pi\acute{o}$ Fb. 14. $\pi\rho\acute{o}\varsigma$ — ZE] mg. m. 2 B. EH] HE F. 17. $\tau\acute{o}$] corr. ex $\tau\eta\varsigma$ F. 18. $\tau\eta\nu$] om. b. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ P. 19. $\tau\acute{o}$ $\acute{\upsilon}\pi\acute{o}$ — 20. *τουτέστιν*] supra scr. F. 20. *τουτέστιν* P. 22. $\kappa\alpha\iota$ $\acute{\omega}\varsigma$] ins. m. 2 F.

HE, EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς EZ, τουτέστιν ὡς τὸ HΔ πρὸς τὸ ZΔ, οὕτως ἡ HE πρὸς τὴν EZ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κβ'.

- 5 Τὸ ἀπὸ μέσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ῥητὴν καὶ ἀσύμμετρον τῇ, παρ' ἣν παρᾶκειται, μήκει.

Ἔστω μέση μὲν ἡ A, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΒ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς A ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω χωρίον ὀρθο-
10 γώνιον τὸ ΒΔ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΔ· λέγω, ὅτι ῥητὴ ἐστὶν ἡ ΓΔ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΒ μήκει.

Ἐπεὶ γὰρ μέση ἐστὶν ἡ A, δύναται χωρίον περι-
εχόμενον ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμετρων.
δυνάσθω τὸ HZ. δύναται δὲ καὶ τὸ ΒΔ· ἴσον ἄρα
15 ἐστὶ τὸ ΒΔ τῷ HZ. ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ἰσογώνιον·
τῶν δὲ ἴσων τε καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων
ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας·
ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν EH, οὕτως
ἡ EZ πρὸς τὴν ΓΔ. ἐστὶν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς
20 ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς EH, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς
τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ. σύμμετρον δὲ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ
τῷ ἀπὸ τῆς EH· ῥητὴ γάρ ἐστὶν ἑκατέρω αὐτῶν· σύμ-
μετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς EZ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ.
ῥητὸν δὲ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς EZ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ
25 τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ. καὶ ἐπεὶ
ἀσύμμετρός ἐστὶν ἡ EZ τῇ EH μήκει· δυνάμει γὰρ
μόνον εἰσὶ σύμμετροι· ὡς δὲ ἡ EZ πρὸς τὴν EH,

2. ZΔ] corr. ex ΔZ V, ΔZ B F b. HE] in ras. V. ὅπερ
ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. Theon (B F V b). 6. σύμμετρον P.
corr. m. 2. τῇ] corr. ex τι m. rec. b. 8. καί — 9. χωρίον]
in ras. F. 9. ὀρθογώνιον] m. rec. V. 13. μόνον] in ras. F.

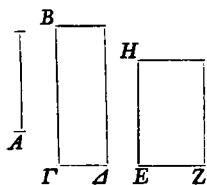
similiter etiam $HE \times EZ : EZ^2 = H\Delta : Z\Delta = HE : EZ$;
quod erat demonstrandum.

XXII.

Quadratum mediae rationali adplicatum latitudinem facit rationalem et ei, cui adplicatum est, longitudine incommensurabilem.

Sit media A , rationalis autem ΓB , et quadrato A^2 aequale rectae $B\Gamma$ adplicetur spatium rectangulum $B\Delta$ latitudinem faciens $\Gamma\Delta$. dico, $\Gamma\Delta$ rationalem esse et rectae ΓB longitudine incommensurabilem.

nam quoniam media est A , quadrata aequalis est spatio rectis potentia tantum commensurabilibus comprehenso [prop. XXI]. sit quadrata aequalis HZ . uerum quadrata etiam spatio $B\Delta$ aequalis est. itaque $B\Delta = HZ$. uerum idem ei aequiangulum est. parallelogrammorum autem aequalium et aequiangulorum latera aequales angulos comprehendunt in contraria propor-



tione sunt [VI, 14]. itaque $B\Gamma : EH = EZ : \Gamma\Delta$. quare etiam $B\Gamma^2 : EH^2 = EZ^2 : \Gamma\Delta^2$ [VI, 20]. uerum ΓB^2 et EH^2 commensurabilia sunt; nam utraque rationalis est. quare etiam EZ^2 et $\Gamma\Delta^2$ commensurabilia sunt

[prop. XI]. uerum EZ^2 rationale est; quare etiam $\Gamma\Delta^2$ rationale est [def. 4]. itaque $\Gamma\Delta$ rationalis est. et quoniam EZ , EH longitudine incommensurabiles sunt (nam potentia tantum commensurabiles sunt), et est

14. δύναται] δύνασθαι b. ΔB P. 15. ἐστίν P. ΔB P.
ἐστίν PB. αὐτό FV. 16. τε] corr. ex δέ m. 1 P, om.
FV. 21. ΓB] e corr. V, $B\Gamma$ F. 23. ἐστίν P. 24. ἐστίν P.
ἐστίν P. 25. ἐστίν] postea ins. F. 26. HE F.

οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ZE, EH ,
 ἀσύμμετρον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ἀπὸ τῆς EZ τῷ ὑπὸ τῶν
 ZE, EH . ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς EZ σύμμετρόν ἐστι
 τὸ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$. ῥηταὶ γάρ εἰσι δυνάμει· τῷ δὲ ὑπὸ
 5 τῶν ZE, EH σύμμετρόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν $\Delta\Gamma, \Gamma B$.
 ἴσα γάρ ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς A ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ
 τὸ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$ τῷ ὑπὸ τῶν $\Delta\Gamma, \Gamma B$. ὥς δὲ τὸ ἀπὸ
 τῆς $\Gamma\Delta$ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν $\Delta\Gamma, \Gamma B$, οὕτως ἐστὶν ἡ
 $\Delta\Gamma$ πρὸς τὴν ΓB . ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ $\Delta\Gamma$ τῇ
 10 ΓB μήκει. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $\Gamma\Delta$ καὶ ἀσύμμετρος τῇ
 ΓB μήκει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κγ'.

Ἡ τῇ μέσῃ σύμμετρος μέσῃ ἐστίν.

Ἔστω μέση ἡ A , καὶ τῇ A σύμμετρος ἔστω ἡ B .
 15 λέγω, ὅτι καὶ ἡ B μέση ἐστίν.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ $\Gamma\Delta$, καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς
 A ἴσον παρὰ τὴν $\Gamma\Delta$ παραβεβλήσθω χωρίον ὀρθο-
 γώνιον τὸ ΓE πλάτος ποιοῦν τὴν $E\Delta$. ῥητὴ ἄρα
 ἐστὶν ἡ $E\Delta$ καὶ ἀσύμμετρος τῇ $\Gamma\Delta$ μήκει. τῷ δὲ
 20 ἀπὸ τῆς B ἴσον παρὰ τὴν $\Gamma\Delta$ παραβεβλήσθω χωρίον
 ὀρθογώνιον τὸ ΓZ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔZ . ἐπεὶ
 οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ A τῇ B , σύμμετρόν ἐστι καὶ
 τὸ ἀπὸ τῆς A τῷ ἀπὸ τῆς B . ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ
 τῆς A ἴσον ἐστὶ τὸ $E\Gamma$, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς B ἴσον ἐστὶ
 25 τὸ ΓZ . σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ $E\Gamma$ τῷ ΓZ . καί

2. ἐστιν ἄρα FV. ἐστὶ] om. P. 3. τῷ] corr. ex τό V.
 ἐστὶ] om. V. 4. εἰσιν P. δυνάμει] eras. V, dein add. ὥς
 ἄρα δέδεικται. 5. συμμέτρων P, corr. m. 1. ἐστὶ] om.
 BFb. 6. εἰσι BVb. σύμμετρον F, sed corr. ἐστίν P. 7.
 ΓB περιεχομένῳ V. 8. $\Gamma\Delta$] $\Delta\Gamma$ F. 9. ΓB] ΓA b. ἐστίν]
 om. b. 11. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. BFb, comp. P. 12. κγ']

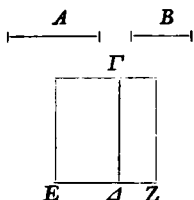
$EZ:EH = EZ^2:ZE \times EH$ [u. lemma], EZ^2 et $ZE \times EH$ incommensurabilia erunt [prop. XI]. uerum EZ^2 et $\Gamma\Delta^2$ commensurabilia sunt (nam potentia rationales sunt); et $ZE \times EH$, $\Delta\Gamma \times \Gamma B$ commensurabilia sunt (nam quadrato A^2 aequalia sunt). itaque etiam $\Gamma\Delta^2$ et $\Delta\Gamma \times \Gamma B$ incommensurabilia sunt [prop. XIII]. uerum $\Gamma\Delta^2: \Delta\Gamma \times \Gamma B = \Delta\Gamma: \Gamma B$ [u. lemma]. itaque $\Delta\Gamma$, ΓB longitudine incommensurabiles sunt [prop. XI]. ergo $\Gamma\Delta$ rationalis est et rectae ΓB longitudine incommensurabilis; quod erat demonstrandum.

XXIII.

Recta mediae commensurabilis media est.

Sit media A , et rectae A commensurabilis sit B . dico, etiam B mediam esse.

ponatur enim rationalis $\Gamma\Delta$, et quadrato A^2 aequale rectae $\Gamma\Delta$ adplicetur spatium rectangulum ΓE



latitudinem faciens $E\Delta$. itaque $E\Delta$ rationalis est et rectae $\Gamma\Delta$ longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. quadrato autem B^2 aequale rectae $\Gamma\Delta$ adplicetur spatium rectangulum ΓZ latitudinem faciens ΔZ . iam quoniam A et B commensurabiles sunt, etiam

A^2 et B^2 commensurabilia sunt. uerum $A^2 = E\Gamma$, $B^2 = \Gamma Z$. itaque $E\Gamma$, ΓZ commensurabilia sunt. et $E\Gamma: \Gamma Z = E\Delta: \Delta Z$ [VI, 1]. itaque $E\Delta$, ΔZ longitudine commen-

om. P. 14. $\xi\sigma\tau\omega$ (alt.) om. BFb. 16. $\tau\tilde{\omega}$ τό F. 20. $\Delta\Gamma$ BVb. 21. ΓZ corr. ex EZ F. $Z\Delta$ P. $\xi\pi\iota$ P, corr. m. rec. 22. $\xi\sigma\tau\iota$ postea ins. F, $\xi\sigma\tau\iota\nu$ P. 23. A] corr. ex AB V, A $\xi\sigma\tau\iota$ F. 24. $\xi\sigma\tau\iota$] (alt.) om. Vb. 25. ΓZ] (prius) Z in ras. m. 1 P.

ἐστὶν ὡς τὸ $ΕΓ$ πρὸς τὸ $ΓΖ$, οὕτως ἡ $ΕΔ$ πρὸς τὴν $ΔΖ$. σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ $ΕΔ$ τῇ $ΔΖ$ μήκει. ῥητὴ δέ ἐστὶν ἡ $ΕΔ$ καὶ ἀσύμμετρος τῇ $ΔΓ$ μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $ΔΖ$ καὶ ἀσύμμετρος τῇ $ΔΓ$ μήκει· αἱ
 5 $ΓΔ$, $ΔΖ$ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἡ δὲ τὸ ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων δυναμένη μέση ἐστίν. ἡ ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν $ΓΔ$, $ΔΖ$ δυναμένη μέση ἐστίν· καὶ δύναται τὸ ὑπὸ τῶν $ΓΔ$, $ΔΖ$ ἢ $Β$ · μέση ἄρα ἐστὶν ἡ $Β$.

Πόρισμα.

10

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι τὸ τῷ μέσῳ χωρίῳ σύμμετρον μέσον ἐστίν [δύνανται γὰρ αὐτὰ εὐθεῖαι, αἱ εἰσι δυνάμει σύμμετροι, ὧν ἡ ἑτέρα μέση· ὥστε καὶ ἡ λοιπὴ μέση ἐστίν].

15

Ὡσαύτως δὲ τοῖς ἐπὶ τῶν ῥητῶν εἰρημένοις καὶ ἐπὶ τῶν μέσων ἐξακολουθεῖ, τὴν τῇ μέσῃ μήκει σύμμετρον λέγεσθαι μέσῃν καὶ σύμμετρον αὐτῇ μὴ μόνον μήκει, ἀλλὰ καὶ δυνάμει, ἐπειδήπερ καθόλου αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει. ἐὰν δὲ τῇ μέσῃ σύμ-
 20 μετρὸς τις ἢ δυνάμει, εἰ μὲν καὶ μήκει, λέγονται καὶ οὕτως μέσαι καὶ σύμμετροι μήκει καὶ δυνάμει, εἰ δὲ δυνάμει μόνον, λέγονται μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι.

4. ἐστίν PB. 5. εἰσιν PB. 6. ἡ δὲ τό] τὸ δὲ B F V b. Post συμμέτρων add. εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστι καὶ b, F mg. m. 1, V m. 2; deinde seq. αὐτὸ ἄλογόν ἐστι, καλεῖσθω δὲ b, F mg. m. 1; ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν, καλεῖται δὲ μέση V m. 2. ἡ δυναμένη B F b, et V (del. punctis). 7. μέση] supra scr. F. μέση ἐστίν] punctis del. V. ἡ] m. 2 B. δυναμένη] δυνάμει ἡ b. 8. ἐστὶ V b, comp. F. 9. ἡ B] (prius) H B Bb. 12. ἐστὶ B V, comp. F. αὐτά] -τά in ras. V, αὐτῷ F, αὐτό αἱ B, αἱ add. m. 2 V. 13. εἰσιν

surabiles sunt [prop. XI]. uerum EA rationalis est et rectae AF longitudine incommensurabilis. itaque etiam AZ rationalis est [def. 3] et rectae AF longitudine incommensurabilis [prop. XIII]. itaque FA , AZ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. recta autem quadrata aequalis spatio rectis potentia tantum commensurabilibus comprehenso media est [prop. XXI]. itaque recta quadrata spatio $FA \times AZ$ aequalis media est. et $B^2 = FA \times AZ$. ergo B media est.

Corollarium.

Hinc manifestum est, spatium spatio medio aequale medium esse.¹⁾

Lemma.

Congruenter iis, quae de rationalibus diximus [prop. XVIII coroll.], etiam in mediis sequitur, rectam mediae longitudine commensurabilem mediam uocari ei non modo longitudine, sed etiam potentia commensurabilem, quoniam omnino rectae longitudine commensurabiles semper etiam potentia commensurabiles sunt. sin recta mediae potentia commensurabilis est, si eadem longitudine est commensurabilis, sic quoque mediae et longitudine potentiaque commensurabiles uocantur, sin potentia tantum, mediae potentia tantum commensurabiles uocantur.

1) Sequentia lin. 12—14 obscura sunt et sine dubio subditiua.

PB. 20. $\epsilon\lambda\ \mu\acute{\epsilon}\nu$ — 21. $\delta\epsilon\ \delta\upsilon\nu\acute{\alpha}\mu\epsilon\iota$] om. Fb; post $\sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\upsilon\omicron\iota$ lin. 22 ea hab. V (punctis del., add. $\tau\omicron\ \delta\lambda\ \epsilon\acute{\iota}\xi\eta\varsigma\ \sigma\acute{\upsilon}\chi\ \epsilon\upsilon\phi\epsilon\theta\eta\ \epsilon\upsilon\ \tau\omicron\ \beta\iota\beta\lambda\iota\omicron\nu\ \tau\omicron\ \epsilon\phi\epsilon\sigma\iota\omicron\nu\ \kappa\alpha\iota\ \epsilon\pi\alpha\tau\acute{\eta}\theta\eta$?) et B mg. m. 2 (add. in fine $\mu\acute{\omicron}\nu\omicron\nu$). 22. $\mu\acute{\omicron}\nu\omicron\nu$] (prius) del. m. 2 B. $\sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\upsilon\omicron\iota$] m. 2 B. Seq. lemma, u. app.

κδ'.

Τὸ ὑπὸ μέσων μήκει συμμετρῶν εὐθειῶν κατὰ τινα τῶν εἰρημένων τρόπων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μέσον ἐστίν.

- 5 Ἐπὶ γὰρ μέσων μήκει συμμετρῶν εὐθειῶν τῶν AB , $BΓ$ περιέχσθω ὀρθογώνιον τὸ $ΑΓ$. λέγω, ὅτι τὸ $ΑΓ$ μέσον ἐστίν.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ $ΑΔ$. μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΔ$. καὶ ἐπεὶ σύμμετρος
10 ἐστὶν ἡ AB τῇ $BΓ$ μήκει, ἴση δὲ ἡ AB τῇ $BΔ$, σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $ΔB$ τῇ $BΓ$ μήκει· ὥστε καὶ τὸ $ΔΑ$ τῷ $ΑΓ$ σύμμετρόν ἐστιν. μέσον δὲ τὸ $ΔΑ$. μέσον ἄρα καὶ τὸ $ΑΓ$. ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

κε'.

- 15 Τὸ ὑπὸ μέσων δυνάμει μόνον συμμετρῶν εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἥτοι ρητὸν ἢ μέσον ἐστίν.

Ἐπὶ γὰρ μέσων δυνάμει μόνον συμμετρῶν εὐθειῶν τῶν AB , $BΓ$ ὀρθογώνιον περιέχσθω τὸ $ΑΓ$.
20 λέγω, ὅτι τὸ $ΑΓ$ ἥτοι ρητὸν ἢ μέσον ἐστίν.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$ τετράγωνα τὰ $ΑΔ$, BE . μέσον ἄρα ἐστὶν ἐκάτερον τῶν $ΑΔ$, BE . καὶ ἐκείσθω ρητὴ ἡ ZH , καὶ τῷ μὲν $ΑΔ$ ἴσον παρατὴν ZH παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμ-
25 μον τὸ $HΘ$ πλάτος ποιοῦν τὴν $ZΘ$, τῷ δὲ $ΑΓ$ ἴσον παρὰ τὴν $ΘM$ παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον παραλλη-

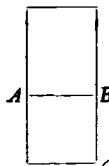
3. κατὰ — τρόπων] om. BFb, supra scr. m. 2 V (κατὰ τινα τῶν eras.). 6. περιέχσθαι B, corr. m. 2. 9. $ΑΔ$] (prius) inter A et $Δ$ ras. 1 litt. V. 11. ἐστίν PB. $ΔB$] e corr. m. 2 V, $BΔ$ F. 12. ἐστι V, comp. Fb. $ΔΑ$] e corr. m. 2 V. 16. εὐθειῶν] m. 2 V. 19. περιέχσθω ὀρθογώνιον P.

XXIV.

Rectangulum rectis mediis comprehensum secundum aliquem modorum, quos diximus [u. lemma], commensurabilibus medium est.

Mediis enim AB , $B\Gamma$ longitudine commensurabilibus comprehendatur rectangulum $A\Gamma$. dico, $A\Gamma$ medium esse.

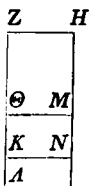
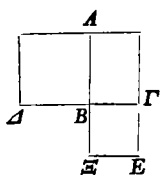
nam in AB quadratum describatur $A\Delta$. itaque $A\Delta$ medium est. et quoniam AB , $B\Gamma$ longitudine Γ commensurabiles sunt, et $AB = B\Delta$, etiam ΔB , $B\Gamma$ longitudine commensurabiles sunt. quare etiam ΔA , $A\Gamma$ commensurabilia sunt [VI, 1; prop. XI]. uerum ΔA medium est. ergo etiam $A\Gamma$ medium est [prop. XXIII coroll.]; quod erat Δ demonstrandum.



XXV.

Rectangulum rectis mediis potentia tantum commensurabilibus comprehensum aut rationale aut medium est.

Rectis enim mediis AB , $B\Gamma$ potentia tantum commensurabilibus comprehendatur rectangulum $A\Gamma$. dico, $A\Gamma$ aut rationale aut medium esse.



nam in AB , $B\Gamma$ quadrata describantur $A\Delta$, BE . itaque utrumque $A\Delta$, BE medium est. et ponatur rationalis ZH , et quadrato $A\Delta$ aequale rectae ZH applicetur parallelogrammum rect-

$\pi\epsilon\rho\acute{\iota}\epsilon\chi\epsilon\sigma\theta\alpha\iota$ B, corr. m. 2. 20. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ η $\mu\acute{\epsilon}\sigma\sigma\omicron\nu$ V. 23.
 $Z\epsilon F$, corr. m. 2. $\tau\tilde{\omega}$] corr. ex τό V. 25. $\tau\eta\nu$] corr. ex
 τό m. 2. F

λόγραμμον τὸ MK πλάτος ποιοῦν τὴν ΘK , καὶ ἔτι
 τῷ BE ἴσον ὁμοίως παρὰ τὴν KN παραβεβλήσθω
 τὸ NA πλάτος ποιοῦν τὴν KA . ἐπ' εὐθείας ἄρα
 εἰσὶν αἱ $Z\Theta$, ΘK , KA . ἐπεὶ οὖν μέσον ἐστὶν ἐκά-
 5 τερον τῶν AD , BE , καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ μὲν AD τῷ
 $H\Theta$, τὸ δὲ BE τῷ NA , μέσον ἄρα καὶ ἐκότερον τῶν
 $H\Theta$, NA . καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ZH παρακείται· ῥητὴ
 ἄρα ἐστὶν ἐκατέρω τῶν $Z\Theta$, KA καὶ ἀσύμμετρος τῇ
 ZH μήκει. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ AD τῷ BE ,
 10 σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ $H\Theta$ τῷ NA . καὶ ἐστὶν
 ὡς τὸ $H\Theta$ πρὸς τὸ NA , οὕτως ἡ $Z\Theta$ πρὸς τὴν KA .
 σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ $Z\Theta$ τῇ KA μήκει. αἱ $Z\Theta$, KA
 ἄρα ῥηταὶ εἰσι μήκει σύμμετροι· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ
 ὑπὸ τῶν $Z\Theta$, KA . καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν AB τῇ
 15 BA , ἡ δὲ ΞB τῇ $B\Gamma$, ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν
 $B\Gamma$, οὕτως ἡ AB πρὸς τὴν $B\Xi$. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ AB
 πρὸς τὴν $B\Gamma$, οὕτως τὸ AA πρὸς τὸ AG . ὡς δὲ ἡ
 AB πρὸς τὴν $B\Xi$, οὕτως τὸ AG πρὸς τὸ $\Gamma\Xi$. ἐστὶν
 ἄρα ὡς τὸ AA πρὸς τὸ AG , οὕτως τὸ AG πρὸς τὸ
 20 $\Gamma\Xi$. ἴσον δὲ ἐστὶ τὸ μὲν AD τῷ $H\Theta$, τὸ δὲ AG
 τῷ MK , τὸ δὲ $\Gamma\Xi$ τῷ NA . ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ $H\Theta$
 πρὸς τὸ MK , οὕτως τὸ MK πρὸς τὸ NA . ἐστὶν ἄρα
 καὶ ὡς ἡ $Z\Theta$ πρὸς τὴν ΘK , οὕτως ἡ ΘK πρὸς τὴν
 KA . τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $Z\Theta$, KA ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς
 25 ΘK . ῥητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν $Z\Theta$, KA . ῥητὸν ἄρα ἐστὶ
 καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘK . ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘK . καὶ εἰ
 μὲν σύμμετρός ἐστι τῇ ZH μήκει, ῥητόν ἐστι τὸ ΘN .

2. ἴσον — KN] mg. m. 1 F, in textu ἄλλω παρὰ τὴν
 KN . 4. αἱ] corr. ex ταί F m. 1, supra m. 2 P. 6. NA]

N e corr. V. ἄρα ἐστὶ V. 7. NA] MA b et F (M in ras.).

Ante ῥητὴ ras. 5 litt. V. 8. ἐστὶν] ἐστὶ καὶ V. 9. καὶ ἐπεὶ]
 ἐπεὶ οὖν Theon (BFVb). 10. ἐστὶν P. τό] m. 2 F. ΘHF .

angulum $H\Theta$ latitudinem faciens $Z\Theta$, rectangulo autem $A\Gamma$ aequale rectae ΘM adplicetur parallelogrammum rectangulum MK latitudinem faciens ΘK , et praeterea quadrato BE aequale similiter rectae KN adplicetur NA latitudinem faciens KA . itaque $Z\Theta$, ΘK , KA in eadem recta sunt. iam quoniam utrumque AA , BE medium est, et $AA = H\Theta$, $BE = NA$, etiam utrumque $H\Theta$, NA medium est. et rationali ZH adplicata sunt. itaque utraque $Z\Theta$, KA rationalis est et rectae ZH longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. et quoniam AA , BE commensurabilia sunt, etiam $H\Theta$, NA commensurabilia sunt. et $H\Theta : NA = Z\Theta : KA$ [VI, 1]. itaque $Z\Theta$, KA longitudine commensurabiles sunt [prop. XI]. itaque $Z\Theta$, KA rationales sunt longitudine commensurabiles. itaque $Z\Theta \times KA$ rationale est [prop. XIX]. et quoniam $AB = BA$, $\Xi B = B\Gamma$, erit $AB : B\Gamma = AB : B\Xi$. uerum $AB : B\Gamma = AA : A\Gamma$ [VI, 1], et $AB : B\Xi = A\Gamma : \Gamma\Xi$ [VI, 1]. quare $AA : A\Gamma = A\Gamma : \Gamma\Xi$. uerum $AA = H\Theta$, $A\Gamma = MK$, $\Gamma\Xi = NA$. ergo $H\Theta : MK = MK : NA$. quare etiam $Z\Theta : \Theta K = \Theta K : KA$ [VI, 1]. itaque $Z\Theta \times KA = \Theta K^2$ [VI, 17]. uerum $Z\Theta \times KA$ rationale est. quare etiam ΘK^2 rationale est. itaque ΘK rationalis est. et si rectae ZH longitudine commensurabilis est, ΘN rationale est [prop. XIX]; sin

$\kappa\alpha\iota$] om. FV. Post $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ add. $\acute{\alpha}\rho\alpha \kappa\alpha\iota$ V. 11. ΘH F. $\tau\acute{o}\nu$ P, sed corr. AN e corr. m. 2 V. $\tau\acute{\eta}\nu$] om. Bb. 13. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ P. 14. AB] e corr. Vb. 15. ΞB] corr. ex ZB V. AB] BA F. 16. $B\Xi$] corr. ex BZ P. 17. $\tau\acute{\eta}\nu$] corr. in $\tau\acute{o}$ F, $\tau\acute{o}$ b. 18. ΞB B. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ — 20. $\Gamma\Xi$] mg. m. 2 B. 19. AA] in ras. V. $A\Gamma$] (alt.) ΓA F. 20. $\Gamma\Xi$] in ras. V. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ P. 24. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ P. 25. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ PB. 27. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ P. Post $\tau\acute{\eta}$ add. ΘM τουτέστι $\tau\acute{\eta}$ V, B. m. 2 (del. m. rec.). ΘN] e corr. m. 2 V.

εἰ δὲ ἀσύμμετρός ἐστι τῇ ZH μήκει, αἱ $K\Theta$, ΘM ῥηταί
εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα τὸ ΘN . τὸ
 ΘN ἄρα ἦτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστίν. ἴσον δὲ τὸ ΘN
τῷ AG . τὸ AG ἄρα ἦτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστίν.

5 Τὸ ἄρα ὑπὸ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων, καὶ
τὰ ἐξῆς.

κς'.

Μέσον μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, μέσον τὸ AB μέσου τοῦ AG
10 ὑπερέχέτω ῥητῷ τῷ AB , καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ EZ ,
καὶ τῷ AB ἴσον παρὰ τὴν EZ παραβεβλήσθω παρ-
αλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ $Z\Theta$ πλάτος ποιῶν
τὴν $E\Theta$, τῷ δὲ AG ἴσον ἀφηρήσθω τὸ ZH . λοιπὸν
ἄρα τὸ $B\Delta$ λοιπῷ τῷ $K\Theta$ ἐστίν ἴσον. ῥητὸν δέ ἐστι
15 τὸ ΔB . ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ $K\Theta$. ἐπεὶ οὖν μέσον
ἐστὶν ἐκάτερον τῶν AB , AG , καὶ ἐστὶ τὸ μὲν AB τῷ
 $Z\Theta$ ἴσον, τὸ δὲ AG τῷ ZH , μέσον ἄρα καὶ ἐκάτερον
τῶν $Z\Theta$, ZH . καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν EZ παράκειται·
ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἐκάτερα τῶν ΘE , $E H$ καὶ ἀσύμμετρος
20 τῇ EZ μήκει. καὶ ἐπεὶ ῥητὸν ἐστὶ τὸ ΔB καὶ ἐστὶν
ἴσον τῷ $K\Theta$, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ $K\Theta$. καὶ παρὰ
ῥητὴν τὴν EZ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $H\Theta$ καὶ
σύμμετρος τῇ EZ μήκει. ἀλλὰ καὶ ἡ $E H$ ῥητὴ ἐστὶ

1. $K\Theta$] corr. in ΘK m. 2 V. ΘN B, ΘM ἄρα P. 2.
εἰσιν PB. ΘN] in ras. V. 3. ἦτοι] om. Fb. ἐστὶν ἢ
μέσον V. 4. ἐστὶ BV, comp. Fb. 5. τὸ ἄρα] τῶν δὲ F.
μόνων F. καὶ τὰ ἐξῆς] εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον
ἦτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστίν: ~ P. 6. Post ἐξῆς add. ὅπερ ἔδει
δεῖξαι V. 7. καὶ P, corr. m. rec. 10. ὑπερέχει F, sed corr.
11. τῷ] τῷ μὲν B, τὸ μὲν b. 14. ΘK F. 15. ΔB] in
ras. V. ἐστὶν P. ΘK b. 16. ἐστὶ] ἐστὶν B. 17. καὶ]
om. b. 18. παράκειται V. 21. ἐστὶ] ἐστὶν P. 22. Post
καὶ ras. 1 litt. V.

rectae ZH longitudine incommensurabilis est, $K\Theta$, ΘM rationales sunt potentia tantum commensurabiles; quare ΘN medium est [prop. XXI]. ΘN igitur aut rationale aut medium est. uerum $\Theta N = A\Gamma$. $A\Gamma$ igitur aut rationale est aut medium.

Ergo rectangulum mediis potentia tantum commensurabilibus, et quae sequuntur.

XXVI.

Spatium medium non excedit medium spatio rationali.

Si enim fieri potest, medium AB excedat medium $A\Gamma$ rationali $\angle B$, et ponatur rationalis EZ , et spatio AB aequale rectae EZ adplicetur parallelogrammum rectangulum $Z\Theta$ latitudinem faciens $E\Theta$, spatio autem $A\Gamma$ aequale subtrahatur ZH . itaque relinquitur $B\Delta = K\Theta$. uerum $\angle B$ rationale est. itaque etiam $K\Theta$ rationale est. iam quoniam utrumque AB , $A\Gamma$ medium est, et $AB = Z\Theta$, $A\Gamma = ZH$, etiam utrumque $Z\Theta$, ZH medium est. et rectae rationali EZ adplicata sunt. ergo utraque ΘE , EH rationalis est et rectae EZ longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. et quoniam $\angle B$ rationale est et spatio $K\Theta$ aequale, etiam $K\Theta$ rationale est.¹⁾ et rectae rationali EZ adplicatum est; itaque $H\Theta$ rationalis est et rectae EZ longitudine commensurabilis [prop. XX]. uerum etiam

1) Uerba τὸ $\angle B$ lin. 20 — ἐστὶ καὶ lin. 21 post lin. 14—15 superuacua sunt et fortasse interpolata. uerba ὁρτὸν δὲ lin. 14 — τὸ $K\Theta$ lin. 15 damnavit August.

καὶ ἀσύμμετρος τῇ EZ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν
 ἢ EH τῇ $H\Theta$ μήκει. καὶ ἐστὶν ὥς ἡ EH πρὸς τὴν
 $H\Theta$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς EH πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν EH ,
 $H\Theta$ · ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς EH τῷ ὑπὸ
 5 τῶν EH , $H\Theta$. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς EH σύμμετρά
 ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν EH , $H\Theta$ τετράγωνα· ῥητὰ γὰρ ἀμ-
 φότερα· τῷ δὲ ὑπὸ τῶν EH , $H\Theta$ σύμμετρόν ἐστι τὸ
 δις ὑπὸ τῶν EH , $H\Theta$ · διπλάσιον γὰρ ἐστὶν αὐτοῦ·
 ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν EH , $H\Theta$ τῷ δις ὑπὸ
 10 τῶν EH , $H\Theta$ · καὶ συναμφότερα ἄρα τὰ τε ἀπὸ τῶν
 EH , $H\Theta$ καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν EH , $H\Theta$, ὅπερ ἐστὶ τὸ
 ἀπὸ τῆς $E\Theta$, ἀσύμμετρόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν EH , $H\Theta$.
 ῥητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν EH , $H\Theta$ · ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ
 τῆς $E\Theta$. ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ $E\Theta$. ἀλλὰ καὶ ῥητῇ·
 15 ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Μέσον ἄρα μέσον οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ· ὅπερ ἔδει
 δεῖξαι.

• κζ'.

Μέσας εὐρεῖν δυνάμει μόνον συμμέτρους
 20 ῥητὸν περιεχούσας.

Ἐκκείσθωσαν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι
 αἱ A , B , καὶ εἰλήφθω τῶν A , B μέση ἀνάλογον ἢ Γ ,
 καὶ γεγονέτω ὥς ἡ A πρὸς τὴν B , οὕτως ἡ Γ πρὸς
 τὴν Δ .

25 Καὶ ἐπεὶ αἱ A , B ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμ-
 μετροι, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν A , B , τοντέστι τὸ ἀπὸ τῆς Γ ,
 μέσον ἐστίν. μέση ἄρα ἡ Γ . καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὥς ἡ A
 πρὸς τὴν B , [οὕτως] ἢ Γ πρὸς τὴν Δ , αἱ δὲ A , B

4. ἀσύμμετρον b. τό] e corr. b. 7. τό] corr. ex τῷ B.
 8. τῶν om. BF. 9. ἐστὶν P. 10. τῶν] (prius) om. B. 11.
 τῶν] m. 2 F, om. B. ἐστὶν PB. τό ἀπό] in ras. m. 1 P,

EH rationalis est et rectae EZ longitudine incommensurabilis. quare EH , $H\Theta$ longitudine incommensurabiles sunt [prop. XIII]. et $EH:H\Theta=EH^2:EH\times H\Theta$ [prop. XXI lemma]. quare EH^2 , $EH\times H\Theta$ incommensurabilia sunt [prop. XI]. uerum quadrato EH^2 commensurabilia sunt $EH^2+H\Theta^2$ (nam utrumque rationale est); et spatio $EH\times H\Theta$ commensurabile est $2\ EH\times H\Theta$ [prop. VI]; nam eo duplo maius est. itaque $EH^2+H\Theta^2$ et $2\ EH\times H\Theta$ incommensurabilia sunt [prop. XIII]. itaque etiam $EH^2+H\Theta^2+2\ EH\times H\Theta$, hoc est $E\Theta^2$ [II, 4], quadratis $EH^2+H\Theta^2$ incommensurabile est [prop. XVI]. uerum $EH^2+H\Theta^2$ rationalia sunt. quare $E\Theta^2$ irrationale est [def. 4]. itaque $E\Theta$ irrationalis est [id.]. uerum eadem rationalis est; quod fieri non potest.

Ergo spatium medium non excedit medium spatio rationali; quod erat demonstrandum.

XXVII.

Medias inuenire potentia tantum commensurabiles spatium rationale comprehendentes.

Ponantur duae rationales potentia tantum commensurabiles A , B , et sumatur earum media proportionalis Γ [VI, 13], et fiat $A:B=\Gamma:\Delta$ [VI, 12]. et quoniam A , B rationales sunt potentia tantum commensurabiles, $A\times B$ medium erit [prop. XXI], hoc est Γ^2 [VI, 17].

τὰ ἀπό b. 13. ζητά — $H\Theta$] mg. m. 1 P. Seq. ras. 1 litt. V.

14. ἄλογον b. 15. ἀδύνατον] -ατον in ras. V. 16. μέσον — 17. δείξαι] om. Bfb; μέσον ἄρα μέσον in ras. m. 2 V; μέσον ἄρα μέσον οὐχ ὑπερέχει m. 2 B, καὶ τὰ ἐξῆς add. m. rec. 16. ὅπερ ἔδει δείξαι] comp. P. 18. καὶ P, corr. m. rec. 25. εἶσιν PB. 26. τουτέστιν P. 27. ἐστίν] comp. Fb, ἐστὶ PBV. 28. οὕτως] om. P.

δυνάμει μόνον [εἰσὶ] σύμμετροι, καὶ αἱ Γ , Δ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. καὶ ἐστὶ μέση ἡ Γ μέση ἄρα καὶ ἡ Δ . αἱ Γ , Δ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω, ὅτι καὶ ῥητὸν περιέχουσιν.
 5 ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ A πρὸς τὴν B , οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ , ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ A πρὸς τὴν Γ , ἡ B πρὸς τὴν Δ . ἀλλ' ὡς ἡ A πρὸς τὴν Γ , ἡ Γ πρὸς τὴν B καὶ ὡς ἄρα ἡ Γ πρὸς τὴν B , οὕτως ἡ B πρὸς τὴν Δ . το ἄρα ὑπὸ τῶν Γ , Δ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς B . ῥη-
 10 τὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς B ῥητὸν ἄρα [ἐστὶ] καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Γ , Δ .

Εὗρηνται ἄρα μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κη'.

15 Μέσας εὕρεῖν δυνάμει μόνον συμμέτρους μέσον περιεχούσας.

Ἐκκείσθωσαν [τρεις] ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ A , B , Γ , καὶ εἰλήφθω τῶν A , B μέση ἀνάλογον ἡ Δ , καὶ γερονέτω ὡς ἡ B πρὸς τὴν Γ , ἡ Δ πρὸς
 20 τὴν E .

Ἐπεὶ αἱ A , B ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν A , B , τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς Δ , μέσον ἐστίν. μέση ἄρα ἡ Δ . καὶ ἐπεὶ αἱ B , Γ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, καὶ ἐστὶν ὡς ἡ B πρὸς τὴν Γ ,

1. εἰσὶ] om. B F V b. καὶ — 2. σύμμετροι] om. B. 2. ἐστὶν B. 3. εἰσὶν B. 4. καὶ λέγω δὴ F, λέγω δὴ V b. 10. ἐστὶ] om. B F V b. ὑπό] bis b. 12. ἠῤῥηνται F V b. 13. ῥητόν — δεῖξαι] καὶ τὰ ἐξῆς P. Seq. lemma, v. app. 14. κζ' P, corr. m. rec. 17. Ante τρεις add. γὰρ b, m. 2 F V. τρεις] om. P, τρεις εὐθείαι F. ἀσύμμετροι b. 19. Γ οὕτως V. 21. οὖν αἱ F. εἰσιν B, corr. m. 2. 22. τουτέστι P. 23.

ἡ Δ πρὸς τὴν E , καὶ αἱ Δ , E ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ
 σύμμετροι. μέση δὲ ἡ Δ · μέση ἄρα καὶ ἡ E · αἱ Δ , E
 ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω δὴ,
 5 πρὸς τὴν Γ , ἡ Δ πρὸς τὴν E , ἐναλλαξ ἄρα ὡς ἡ B
 πρὸς τὴν Δ , ἡ Γ πρὸς τὴν E . ὡς δὲ ἡ B πρὸς τὴν
 Δ , ἡ Δ πρὸς τὴν A · καὶ ὡς ἄρα ἡ Δ πρὸς τὴν A ,
 ἡ Γ πρὸς τὴν E · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν A , Γ ἴσον ἐστὶ τῷ
 ὑπὸ τῶν Δ , E . μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν A , Γ · μέσον
 10 ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ , E .

Εὗρηται ἄρα μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι μέ-
 σον περιέχουσai· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Δῆγμα.

Εὐρεῖν δύο τετραγώνους ἀριθμούς, ὥστε καὶ τὸν
 15 συγκείμενον ἐξ αὐτῶν εἶναι τετράγωνον.

Ἐκκεῖσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ AB , $B\Gamma$, ἔστωσαν
 δὲ ἥτοι ἄρτιοι ἢ περιττοί. καὶ ἐπεὶ, ἐάν τε ἀπὸ ἀρ-
 τίου ἄρτιος ἀφαιρεθῇ, ἐάν τε ἀπὸ περισσοῦ περισσός,
 ὁ λοιπὸς ἄρτιός ἐστιν, ὁ λοιπὸς ἄρα ὁ $A\Gamma$ ἄρτιός
 20 ἐστιν. τετμήσθω ὁ $A\Gamma$ δίχα κατὰ τὸ Δ . ἔστωσαν
 δὲ καὶ οἱ AB , $B\Gamma$ ἥτοι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἢ τετράγωνοι,
 οἱ καὶ αὐτοὶ ὅμοιοι εἰσιν ἐπίπεδοι· ὁ ἄρα ἐκ τῶν AB ,
 $B\Gamma$ μετὰ τοῦ ἀπὸ [τοῦ] $\Gamma\Delta$ τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῷ
 ἀπὸ τοῦ $B\Delta$ τετραγώνῳ. καὶ ἐστὶ τετράγωνος ὁ ἐκ
 25 τῶν AB , $B\Gamma$, ἐπειδὴ περ ἐδείχθη, ὅτι, ἐὰν δύο ὅμοιοι
 ἐπίπεδοι πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ
 γενόμενος τετράγωνός ἐστιν. εὗρηται ἄρα δύο τετρά-

1. σύμμετροι δυνάμει μόνον εἰσὶ V. μόνον] om. P.
 εἰσὶν P. 3. εἰσὶν P. 5. οὕτως ἡ Δ V. 6. ἡ Γ — τὴν Δ]
 m. 2 B. 6. ὡς — 7. A (prius)] mg. m. 1 F. 8. οὕτως ἡ

quoniam B, Γ potentia tantum commensurabiles sunt, et est $B:\Gamma = \Delta:E$, etiam Δ, E potentia tantum commensurabiles sunt [prop. XI]. uerum Δ media est; itaque etiam E media est [prop. XXIII]. quare Δ, E mediae sunt potentia tantum commensurabiles.

iam dico, easdem spatium medium comprehendere. nam quoniam est $B:\Gamma = \Delta:E$, permutando [V, 16] erit $B:\Delta = \Gamma:E$. uerum $B:\Delta = \Delta:A$. itaque etiam $\Delta:A = \Gamma:E$. quare $A \times \Gamma = \Delta \times E$ [VI, 16]. sed $A \times \Gamma$ medium est. itaque etiam $\Delta \times E$ medium est.

Ergo inuentae sunt mediae potentia tantum commensurabiles medium comprehendentes; quod erat demonstrandum.

Lemma I.

Inuenire duos numeros quadratos eiusmodi, ut etiam numerus ex iis compositus quadratus sit.

ponantur duo numeri $AB, B\Gamma$, et aut pares sint aut impares. et quoniam, siue a numero pari par subtrahitur, siue ab impari impar, reliquus par est [IX, 24, 26], reliquus $A\Gamma$ par est. in duas partes aequales secetur $A\Gamma$ in Δ . sint autem $AB, B\Gamma$ etiam aut similes plani aut quadrati, qui et ipsi similes sunt plani. itaque $AB \times B\Gamma + \Gamma \Delta^2 = B \Delta^2$ [II, 6]. et $AB \times B\Gamma$ quadratus est, quoniam de-

ΓF . 11. ἡῶρηται Vb. μέσαι] om. V. μέσον — 12. δεῖξαι] καὶ τὰ ἐξῆς P. 12. ὅπερ — δεῖξαι] om. BFb. 14. ἀριθμούς] m. 2 F. 16. Ante οἱ add. ὅμοιοι ἐπιπείδοι mg. m. 2 B. 17. δὴ V. ἐπεὶ] supra scr. m. 1 F. τε] om. V. 18. περιττὸν περιττός V et b, sed corr. m. 1. 20. ἐστὶ BV, comp. Fb. $\Gamma A P$. 22. οἷ] ἡ b. ἐκ] ὑπό V, corr. ex ἀπό m. 1 b. 23. τοῦ $\Gamma \Delta$] $\Gamma \Delta B$ (corr. m. rec.) et b, τῆς $\Gamma \Delta P$. 24. $\Delta B P$. τετραγώνου P, corr. m 1. ἐστὶν B. 25. ἐδείχθη] om. b. 26. ποιῶσιν B. 27. ἡῶρηται FVb.

γωνοὶ ἀριθμοὶ ὃ τε ἐκ τῶν AB , $BΓ$ καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ $ΓΔ$, οὗ συντεθέντες ποιούσι τὸν ἀπὸ τοῦ $BΔ$ τετράγωνον.

Καὶ φανερόν, ὅτι εὗρηνται πάλιν δύο τετράγωνοι
 5 ὃ τε ἀπὸ τοῦ $BΔ$ καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ $ΓΔ$, ὥστε τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τὸν ὑπὸ AB , $BΓ$ εἶναι τετράγωνον, ὅταν οἱ AB , $BΓ$ ὅμοιοι ᾧσιν ἐπίπεδοι. ὅταν δὲ μὴ ᾧσιν ὅμοιοι ἐπίπεδοι, εὗρηνται δύο τετράγωνοι ὃ τε ἀπὸ τοῦ $BΔ$ καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ $ΔΓ$, ὧν ἡ ὑπεροχὴ ὁ ὑπὸ
 10 τῶν AB , $BΓ$ οὐκ ἔστι τετράγωνος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λήμμα.

Εἴρειν δύο τετραγώνους ἀριθμούς, ὥστε τὸν ἐξ αὐτῶν συγκείμενον μὴ εἶναι τετράγωνον.

Ἐστω γὰρ ὁ ἐκ τῶν AB , $BΓ$, ὡς ἔφαμεν, τετρά-
 15 γωνος, καὶ ἄρτιος ὁ $ΓΔ$, καὶ τετμήσθω ὁ $ΓΔ$ δίχα τῷ $Δ$. φανερόν δὴ, ὅτι ὁ ἐκ τῶν AB , $BΓ$ τετράγωνος μετὰ τοῦ ἀπὸ [τοῦ] $ΓΔ$ τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ [τοῦ] $BΔ$ τετραγώνῳ. ἀφηρήσθω μονὰς ἡ $ΔΕ$ · ὁ ἄρα ἐκ τῶν AB , $BΓ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ [τοῦ] $ΓΕ$ ἐλάσσων
 20 ἐστὶ τοῦ ἀπὸ [τοῦ] $BΔ$ τετραγώνου. λέγω οὖν, ὅτι ὁ ἐκ τῶν AB , $BΓ$ τετράγωνος μετὰ τοῦ ἀπὸ [τοῦ] $ΓΕ$ οὐκ ἔσται τετράγωνος.

Εἰ γὰρ ἔσται τετράγωνος, ἦτοι ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ [τοῦ] $ΒΕ$ ἢ ἐλάσσων τοῦ ἀπὸ [τοῦ] $ΒΕ$, οὐκ ἐτι δὲ

2. ποιῶσι V, sed corr. $BΔ$] supra scr. m. 1 F. τε-
 τραγώνου F, sed corr. 4. Mg. add. $\mathbb{W}$ Bb, m. 2 PFV. πάλιν
 ἡῶρηται F. ἡῶρηται Vb. τετράγωνα P, corr. m. 1.
 5. ὁ] (alt.) om. P. 6. τόν] τήν FV. ὑπὸ τῶν V. AB]
 B ins. m. 2 P. τετράγωνον εἶναι B. 8. ἡῶρηται Vb, et
 corr. ex εῶρηται m. 2 F. 9. ὁ] om. P. $ΓΔ$ BFV. ἡ]
 om. b. 10. AB] A P. Ante ὅπερ add. ὁ ἄρα P. ὅπερ

monstrauimus, si duo numeri plani similes inter se multiplicantes numerum aliquem efficiant, numerum inde productum quadratum esse [IX, 1]. ergo inuenti sunt duo numeri quadrati $AB \times B\Gamma$ et $\Gamma\Delta^2$, qui compositi quadratum $B\Delta$ efficiant. et manifestum est, rursus inuentos esse duos numeros quadratos $B\Delta^2$ et $\Gamma\Delta^2$ eius modi, ut eorum differentia $AB \times B\Gamma$ quadrata sit, si AB , $B\Gamma$ plani sint similes. sin non sunt similes plani, duo numeri quadrati inuenti sunt $B\Delta^2$ et $\Delta\Gamma^2$, quorum differentia $AB \times B\Gamma$ quadrata non sit; quod erat demonstrandum.

Lemma II.

Inuenire duos numeros quadratos eius modi, ut numerus ex iis compositus quadratus non sit.

Sit enim $AB \times B\Gamma$ quadratus, uti diximus
 $\begin{array}{c} \text{---}\Delta \\ | \\ \text{---}H \\ | \\ \Theta \text{---}\Delta \\ | \\ E \text{---}\Delta \\ | \\ \text{---}Z \\ | \\ \text{---}\Gamma \\ | \\ \text{---}B \end{array}$ [lemma I], et $\Gamma\Delta$ par sit et in Δ in duas partes aequales secetur. manifestum igitur, esse $AB \times B\Gamma + \Gamma\Delta^2 = B\Delta^2$ [u. lemma I]. subtrahatur unitas ΔE . itaque $AB \times B\Gamma + \Gamma E^2 < B\Delta^2$. dico igitur, numerum quadratum [IX, 1] $AB \times B\Gamma$ addito ΓE^2 quadratum non esse.

Nam si quadratus erit, aut aequalis est quadrato BE^2 aut minor quadrato BE^2 , maior autem non est,

$\xi\theta\epsilon\iota\ \delta\epsilon\iota\chi\alpha\iota$] om. B F V b, comp. P. 16. $\tau\tilde{\omega}$] $\kappa\alpha\tau\grave{\alpha}\ \tau\tilde{\omega}$ F. δ] om. P. 17. $\tau\tilde{o}\tilde{u}$] (alt.) $\tau\tilde{\eta}\varsigma$ P. 18. $\tau\tilde{o}\tilde{u}$] om. B F b, $\tau\tilde{\eta}\varsigma$ P, B m. 2. $\delta\mu\omega\iota\omega\varsigma\ \mu\omega\nu\acute{\alpha}\varsigma$ P. 19. $\acute{\epsilon}\kappa$] $\acute{\alpha}\pi\omicron$ b. $\tau\tilde{\omega}\tilde{n}$] $\tau\tilde{o}\tilde{u}$ P. $B\Gamma\ \tau\epsilon\tau\rho\acute{\alpha}\gamma\omega\nu\omicron\varsigma$ V. $\tau\tilde{o}\tilde{u}$] (alt.) om. B F b, $\tau\tilde{\eta}\varsigma$ P, B m. 2. $\acute{\epsilon}\lambda\acute{\alpha}\sigma\sigma\omega\nu\ \acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\ \tau\tilde{o}\tilde{u}$] in ras. m. 1 b. 20. $\tau\tilde{o}\tilde{u}$] om. B F b, $\tau\tilde{\eta}\varsigma$ P, m. 2 B. 21. $\acute{\omicron}$] om. b. $\tau\tilde{o}\tilde{u}$] (alt.) om. B F b, $\tau\tilde{\eta}\varsigma$ P. 22. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ P. 23. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\alpha\iota$] $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ B F b. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ B, sed corr. 24. $\tau\tilde{o}\tilde{u}$] om. B b, $\tau\tilde{\eta}\varsigma$ P. $\acute{\epsilon}\lambda\acute{\alpha}\sigma\sigma\omega\nu$] $\chi\omega\nu$ F, $\acute{\epsilon}\lambda\alpha\sigma\sigma\omega\nu\ \delta\nu$ b; $\acute{\epsilon}\lambda\acute{\alpha}\sigma\sigma\omega\nu$ B, seq. ras. 1 litt., $\acute{\epsilon}\lambda\acute{\alpha}\sigma\sigma\omega\nu\iota$ m. rec. $\tau\tilde{o}\tilde{u}$ — BE] om. V. $\tau\tilde{o}\tilde{u}$] om. B F b. $\omicron\nu\kappa\ \acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ b.

καὶ μείζων, ἵνα μὴ τμηθῇ ἢ μονάς. ἔστω, εἰ δυνα-
 τόν, πρότερον ὁ ἐκ τῶν AB , $BΓ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ $ΓΕ$
 ἴσος τῷ ἀπὸ $ΒΕ$, καὶ ἔστω τῆς $ΔΕ$ μονάδος διπλα-
 σίων ὁ $ΗΑ$. ἐπεὶ οὖν ὅλος ὁ $ΑΓ$ ὅλου τοῦ $ΓΔ$
 5 ἔστι διπλασίων, ὧν ὁ $ΑΗ$ τοῦ $ΔΕ$ ἔστι διπλασίων,
 καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ $ΗΓ$ λοιποῦ τοῦ $ΕΓ$ ἔστι διπλασίων·
 δίχα ἄρα τέτμηται ὁ $ΗΓ$ τῷ $Ε$. ὁ ἄρα ἐκ τῶν $ΗΒ$,
 $BΓ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ $ΓΕ$ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ $ΒΕ$ τετρα-
 γώνῳ. ἀλλὰ καὶ ὁ ἐκ τῶν AB , $BΓ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ
 10 $ΓΕ$ ἴσος ὑπόκειται τῷ ἀπὸ [τοῦ] $ΒΕ$ τετραγώνῳ· ὁ
 ἄρα ἐκ τῶν $ΗΒ$, $BΓ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ $ΓΕ$ ἴσος ἐστὶ τῷ
 ἐκ τῶν AB , $BΓ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ $ΓΕ$. καὶ κοινοῦ ἀφαι-
 ρεθέντος τοῦ ἀπὸ $ΓΕ$ συνάγεται ὁ AB ἴσος τῷ $ΗΒ$.
 ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ ἐκ τῶν AB , $BΓ$ μετὰ τοῦ
 15 ἀπὸ [τοῦ] $ΓΕ$ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ $ΒΕ$. λέγω δὴ, ὅτι
 οὐδὲ ἐλάσσων τοῦ ἀπὸ $ΒΕ$ εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω
 τῷ ἀπὸ BZ ἴσος, καὶ τοῦ $ΔΖ$ διπλασίων ὁ $ΘΑ$. καὶ
 συναχθήσεται πάλιν διπλασίων ὁ $ΘΓ$ τοῦ $ΓΖ$. ὥστε
 καὶ τὸν $ΓΘ$ δίχα τετμησθαι κατὰ τὸ Z , καὶ διὰ τοῦτο
 20 τὸν ἐκ τῶν $ΘΒ$, $BΓ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ $ZΓ$ ἴσον γίνεσθαι
 τῷ ἀπὸ BZ . ὑπόκειται δὲ καὶ ὁ ἐκ τῶν AB , $BΓ$ μετὰ
 τοῦ ἀπὸ $ΓΕ$ ἴσος τῷ ἀπὸ BZ . ὥστε καὶ ὁ ἐκ τῶν
 $ΘΒ$, $BΓ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ $ΓΖ$ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν AB ,
 $BΓ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ $ΓΕ$. ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ ἐκ
 25 τῶν AB , $BΓ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ $ΓΕ$ ἴσος ἐστὶ [τῷ] ἐλάσ-

1. μείζονι (ο et ι corr.) B; γρ. μείζονι κρείττον ἐστι supra ser. m. 2 V. μῆ] μῆτε Theon (BFVb), P m. 2. Post μονάς add. Theon: μῆτε ὁ ἐκ τῶν AB , $BΓ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ (τοῦ add. V) $ΓΔ$, ὅς ἐστιν ὁ (om. b, mg. B) ἀπὸ (τοῦ add. PVb) $BΔ$ (e corr. m. 2 V, $ΔB$ PBb), ἴσος ἢ τῷ ἐκ (ὑπό BV) τῶν (om. PB) AB , $BΓ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ (τοῦ add. PV) $ΓΕ$ (BFVb, P m. 2). εἰ] corr. ex ἡ m. 2 P. 2. τῆς $ΓΕ$ P. 3. τῆς $ΒΕ$ P. τῆς $ΔΕ$ μονάδος] om. V. διπλάσιος P. 4. $ΗΑ$

ne unitas diuidatur.¹⁾ prius, si fieri potest, sit $AB \times B\Gamma + \Gamma E^2 = BE^2$, et sit $HA = 2AE$. iam quoniam $A\Gamma = 2\Gamma A$, $AH = 2AE$, erit etiam $H\Gamma = 2E\Gamma$. itaque $H\Gamma$ in E in duas partes aequales diuisus est. ergo $HB \times B\Gamma + \Gamma E^2 = BE^2$ [II, 6]. supposuimus autem, esse etiam $AB \times B\Gamma + \Gamma E^2 = BE^2$. quare $HB \times B\Gamma + \Gamma E^2 = AB \times B\Gamma + \Gamma E^2$. et subtracto, quod commune est, ΓE^2 concludimus, esse $AB = HB$; quod absurdum est. ergo $AB \times B\Gamma + \Gamma E^2$ quadrato BE^2 aequale non est. iam dico, ne minorem quidem esse quadrato BE^2 . nam si fieri potest, sit $AB \times B\Gamma + \Gamma E^2 = BZ^2$, et $\Theta A = 2AZ$. et rursus concludemus, esse $\Theta\Gamma = 2\Gamma Z$; quare etiam $\Gamma\Theta$ in Z in duas partes aequales diuisus est, et ea de causa $\Theta B \times B\Gamma + Z\Gamma^2 = BZ^2$ [II, 6]. supposuimus autem, esse etiam

1) Nam $AB \times B\Gamma + \Gamma E^2 < B\Delta^2$. sit latus x . ergo habebimus $BE^2 < x^2 < (BE + 1)^2$, h. e. $BE < x < BE + 1$, ita ut x fractio sit, quod fieri non potest.

τῆς ΔE μονάδος V. 5. ἐστίν P. ὅν δὲ P. διπλάσιος Bfb. 6. καὶ ὁ Bfb. ΓH V. διπλάσιος Bfb. 7. Ante τῶ ins. ἀπό m. 2 F. HB] B e corr. F. 8. τοῦ ΓE V. τοῦ BE V. 10. τοῦ] om. Bfb. 11. HB] H in ras. V. $B\Gamma$] BH b. τοῦ ΓE V. 12. ἐκ] ὑπό V. τῶν] τοῦ P. AB] A in ras. V. τοῦ ΓE V. 13. τοῦ ΓE V. δ] ἡ P. ἴσος τῶ] ἴση τῇ P. 15. τοῦ ΓE] ΓE Bfb, τῆς ΓE P. τοῦ BE V. ὁ ὑπὸ τῶν HB , $B\Gamma$ ἴσος τῶ ἐκ τῶν AB , $B\Gamma$ mg. Fb. δῆ] om. b. 16. ἔλασσον F m. 1, V (sed corr.); ἔλάσσονι F m. 2, b, B in ras. τοῦ BE V. 17. τοῦ BZ V. ἴσος] om. Fb, m. 2 BV. κείσθω ὁ V. καί] om. V. 19. τό] τόν F. 20. τόν] τήν F. ἐκ] ὑπό b. τοῦ $Z\Gamma$ V. γίνεσθαι F, γενέσθαι Vb. 21. BZ] ZB B et V (supra Z ras. est). 22. τοῦ ΓE V, BE b. BZ] in ras. V, ΓE b. ὥστε — 23. τῶ] συναχθήσεται ἄρα ἴσος ὁ Theon (BFVb). 24. μετά] in ras. φ. Post ΓE add. Theon: τῶ ἐκ τῶν ΘB (EB b) $B\Gamma$ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓZ (BFVb). 25. ἐστίν P. τῶ] om. P. ἐλάττονι V.

σони τοῦ ἀπὸ BE. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ [αὐτῷ] τῷ
 ἀπὸ BE. οὐκ ἄρα ὁ ἐκ τῶν AB, BΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ
 ΓΕ τετράγωνός ἐστιν [δυνατοῦ δὲ ὄντος καὶ κατὰ
 πλείονας τρόπους τοὺς εἰρημένους ἀριθμοὺς ἐπιδεικ-
 5 νύειν, ἀρκείσθωσαν ἡμῖν οἱ εἰρημένοι, ἵνα μὴ μακροτέ-
 ρας οὔσης τῆς πραγματείας ἐπὶ πλεον αὐτὴν μηκύνωμεν].
 ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

καθ'.

Εὐρεῖν δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέ-
 10 τρους, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μείζον
 δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμετρου ἐαυτῇ μήκει.

Ἐκκείσθω γάρ τις ῥητὴ ἡ AB καὶ δύο τετράγωνοι
 ἀριθμοὶ οἱ ΓΔ, ΔΕ, ὥστε τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τὸν
 ΓΕ μὴ εἶναι τετράγωνον, καὶ γεγραφθῶ ἐπὶ τῆς AB
 15 ἡμικύκλιον τὸ AZB, καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΔΓ πρὸς
 τὸν ΓΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τετράγωνον πρὸς τὸ
 ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΖΒ.

Ἐπεὶ [οὖν] ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ
 τῆς ΑΖ, οὕτως ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ, τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ
 20 ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς ὁ
 ΔΓ πρὸς ἀριθμὸν τὸν ΓΕ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ
 ἐπὶ τῆς ΒΑ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΖ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς
 ΑΒ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ· ῥητὴ ἄρα καὶ
 ἡ ΑΖ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ λόγον οὐκ ἔχει,
 25 ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν,

1. τοῦ BE V. αὐτῷ] om. P. 2. τῆς BE P; ΓΕ b. Dein add. Theon: οὐδὲ (om. b) μείζονι αὐτοῦ (BFVb). 3. ἐστὶ PBV, comp. Fb. δυνατοῦ] τ in ras. plurium litt. B.
 4. τρόπους] bis b. τὸ εἰρημένον Theon (BFVb). ἀριθμούς] om. Theon (BFVb). ἐπιδεικνύειν] ἐπι- supra scr. F, in ras. B; ἐπιδεικνύναι V. 5. ἀρκείσθω ἡμῖν ὁ εἰρημένος Theon (BFVb). 7. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. Theon (BFVb). 9. εὐ-
 ρίσκειν B. 11. τῷ] corr. ex τοῦ m. 2 B. 13. τόν] τήν V.

$AB \times B\Gamma + \Gamma E^2 = BZ^2$. quare etiam $\Theta B \times B\Gamma + \Gamma Z^2 = AB \times B\Gamma + \Gamma E^2$; quod absurdum est. itaque $AB \times B\Gamma + \Gamma E^2$ spatio minori, quam est quadratum BE^2 , aequale non est. demonstrauius autem, ne ipsi quidem BE^2 id aequale esse. ergo $AB \times B\Gamma + \Gamma E^2$ quadratus non est¹⁾; quod erat demonstrandum.

XXIX.

Duas rationales inuenire potentia tantum commensurabiles eius modi, ut maior quadrata minorem excedat quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis.

ponantur enim recta rationalis AB et duo numeri quadrati $\Gamma\Delta$, ΔE eius modi, ut eorum differentia ΓE quadrata non sit [lemma I]. et in AB semicirculus describatur AZB , et fiat $\Delta\Gamma : \Gamma E = BA^2 : AZ^2$ [prop. VI coroll.], et ducatur ZB .

quoniam est $BA^2 : AZ^2 = \Delta\Gamma : \Gamma E$, BA^2 ad AZ^2 rationem habet, quam numerus $\Delta\Gamma$ ad numerum ΓE . itaque BA^2 , AZ^2 commensurabilia sunt [prop. VI]. uerum AB^2 rationale est [def. 4]. itaque etiam AZ^2 rationale est [id.]. quare etiam AZ rationalis est. et quoniam $\Delta\Gamma : \Gamma E$ rationem non habet, quam numerus

1) $\deltaυνατοῦ$ lin. 3 — $μηκύνωμεν$ lin. 6 Euclides non scripsit; uncis ea inclusit August II p. 359. nescio, an idem recte de ambobus lemmatis totis dubitationem iniecerit. sed satis antiquo tempore interpolata sunt.

15. $\acute{\omega}\varsigma$] supra scr. m. 1 V. δ] ras. F. $\Delta\Gamma$] in ras. m. 1 P. 17. $\tauετράγωνον$] om. V. 18. $οὖν$] om. P. 19. $\Delta\Gamma$] $\Gamma\Delta$ V. 21. $ἐστίν$ P. 23. $καὶ ἡ$] ἡ P. 24. $\Delta\Gamma$] $\Gamma\Delta$ F. $οὐκ$] supra scr. m. 1 P. 25. $\deltaν$ δ V.

- οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς BA ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AZ λόγον
 ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθ-
 μόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῇ AZ μήκει· αἱ
 BA , AZ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι.
 5 καὶ ἐπεὶ [ἐστὶν] ὡς ὁ $\Delta\Gamma$ πρὸς τὸν ΓE , οὕτως τὸ
 ἀπὸ τῆς BA πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AZ , ἀναστρέψαντι ἄρα
 ὡς ὁ $\Gamma\Delta$ πρὸς τὸν ΔE , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς
 τὸ ἀπὸ τῆς BZ . ὁ δὲ $\Gamma\Delta$ πρὸς τὸν ΔE λόγον ἔχει,
 ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν·
 10 καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BZ λόγον
 ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν·
 σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῇ BZ μήκει. καὶ ἐστὶ
 τὸ ἀπὸ τῆς AB ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν AZ , ZB · ἡ AB
 ἄρα τῆς AZ μείζον δύναται τῇ BZ συμμέτρῳ ἑαυτῇ.
 15 Εὐρηνται ἄρα δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι
 αἱ BA , AZ , ὥστε τὴν μείζονα τὴν AB τῆς ἐλάσσονος
 τῆς AZ μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ τῆς BZ συμμέτρου
 ἑαυτῇ μήκει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λ'.

- 20 Εὐρεῖν δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέ-
 τρους, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μείζον
 δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

- Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ AB καὶ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ
 οἱ ΓE , $E\Delta$, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν $\Gamma\Delta$
 25 μὴ εἶναι τετράγωνον, καὶ γεγραφθῶ ἐπὶ τῆς AB ἡμι-

1. AB F. ἄρα] supra scr. m. 1 P. AZ] Z e corr. V.

3. BA P. 4. AB , AZ BVb; AZ , AB F. εἰσιν B. 5.
 ἐστὶν] om. P. τόν] mut. in τό m. 2 F. 10. καὶ τό — 11.
 ἀριθμόν] mg. m. 1 F (partem abstulit reparatio pergam.). 12.

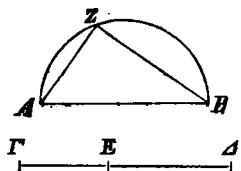
σύμμετρος P. ἐστὶν P. 14. ἑαυτῇ μήκει V. 15. ἡϋρηνται
 Fb. 17. μείζονα P. ZB Bb. συμμέτρῳ F. 18. ὅπερ

quadratus ad numerum quadratum [lemmā I], ne BA^2 quidem ad AZ^2 rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare AB , AZ longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. itaque BA , AZ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. et quoniam $\angle\Gamma : \angle E = BA^2 : AZ^2$, conuertendo erit [V, 19 coroll.] $\angle\Gamma : \angle E = AB^2 : BZ^2$ [cfr. III, 31. I, 47]. sed $\angle\Gamma : \angle E$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare etiam $AB^2 : BZ^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque AB , BZ longitudine commensurabiles sunt [prop. IX]. et $AB^2 = AZ^2 + ZB^2$ [III, 31. I, 47]. itaque AB^2 excedit AZ^2 quadrato rectae BZ sibi commensurabilis.

Ergo inuentae sunt duae rationales potentia tantum commensurabiles BA , AZ eius modi, ut maior AB quadrata minorem AZ excedat quadrato rectae BZ sibi longitudine commensurabilis; quod erat demonstrandum.

XXX.

Inuenire duas rationales potentia tantum commensurabiles eius modi, ut maior quadrata minorem excedat quadrato rectae sibi longitudine incommensurabilis.



Ponatur rationalis AB et duo numeri quadrati ΓE , $E\Delta$ eius modi, ut numerus ex iis compositus $\Gamma\Delta$ quadratus non

$\epsilon\delta\epsilon\iota\ \delta\epsilon\iota\zeta\alpha\iota$] : ~ P, om. BFb. Seq. lemma, u. app. 23. $\acute{\alpha}\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$] om. FV. 24. $\tau\acute{\epsilon}\nu$] (alt.) $\tau\acute{\omega}\nu$ b.

κύκλιον τὸ AZB , καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ $\Delta\Gamma$ πρὸς τον ΓE , οὕτως τὸ ἀπο τῆς BA πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AZ , καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ZB .

Ὅμοίως δὴ δεῖξομεν τῷ πρὸ τούτου, ὅτι αἱ BA , AZ
 5 ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν
 ὡς ὁ $\Delta\Gamma$ πρὸς τὸν ΓE , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς BA πρὸς
 τὸ ἀπὸ τῆς AZ , ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ $\Gamma\Delta$ πρὸς
 τον ΔE , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς το ἀπὸ τῆς BZ .
 ὁ δὲ $\Gamma\Delta$ πρὸς τον ΔE λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγω-
 10 νος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα το
 ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BZ λόγον ἔχει, δν
 τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμ-
 μετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῇ BZ μήκει. καὶ δύναται
 ἡ AB τῆς AZ μείζον τῷ ἀπὸ τῆς ZB ἀσυμμέτρου
 15 ἑαυτῇ.

Αἱ AB , AZ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμ-
 μετροι, καὶ ἡ AB τῆς AZ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς
 ZB ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λα'.

20 $Eὕρεῖν$ δύο μέσας δυνάμει μόνον συμμέ-
 τρους ῥητὸν περιεχούσας, ὥστε την μείζονα
 τῆς ἐλάσσονος μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμ-
 μέτρου ἑαυτῇ μήκει.

Ἐκκείσθωσαν δύο ῥηταί δυνάμει μόνον σύμμετροι
 25 αἱ A , B , ὥστε την A μείζονα οὖσαν τῆς ἐλάσσονος
 τῆς B μείζον δύνασθαι τῷ ἀπο συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

1. Post καὶ del. ἐπεξεύχθω m. 1 P. $\Gamma\Delta$ P. τόν] om. Fb. 2. BA] e corr. m. 2 V. BZ b. 3. BZ P. 4. δέ b, corr. m. 1. ὡς ἐν τῷ Theon (BFVb). BA] e corr. m. 2 V. 5. εἰσιν B. 6. τόν] om. BF. 7. $\Gamma\Delta$] $\Delta\Gamma$ b. 9. $\Gamma\Delta$]

sit [lemma II], et in AB semicirculus AZB describatur. et fiat $\angle \Gamma : \Gamma E = BA^2 : AZ^2$ [prop. VI coroll.], et ducatur ZB .

iam similiter ac in praecedenti [p. 86, 18 sq.] demonstrabimus, BA et AZ rationales esse potentia tantum commensurabiles. et quoniam est $\angle \Gamma : \Gamma E = BA^2 : AZ^2$, conuertendo [V, 19 coroll.] erit $\angle \Gamma A : \angle E = BA^2 : BZ^2$ [III, 31. I, 47]. uerum $\angle \Gamma A : \angle E$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare ne AB^2 quidem ad BZ^2 rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque AB , BZ longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. et $AB^2 = AZ^2 + ZB^2$ [III, 31. I, 47].

Ergo AB , AZ rationales sunt potentia tantum commensurabiles, et AB quadrata excedit AZ quadrato rectae ZB sibi longitudine incommensurabilis; quod erat demonstrandum.

XXXI.

Inuenire duas medias potentia tantum commensurabiles spatium rationale comprehendentes eius modi, ut maior quadrata minorem excedat quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis.

Ponantur duae rectae rationales potentia tantum commensurabiles A , B eius modi, ut maior A quadrata excedat minorem B quadrato rectae sibi longitu-

in ras. V. οὐκ] postea ins. F. 13. τῇ] corr. ex ἡ V. δυνάμει b, -μει supra scr. F. 14. μέγαν b. BZ Fb. ἀσυνμέτρω B Fb. 16. AZ] BZ Theon (BFVb). εἶον P. 17. τῇ] τῇ P. 18. BZ F. ἀσυνμέτρω F. ὅπερ εἶδει δεῖξαι] comp. P, ὅπερ b. 22. ἀπό] -ό eras. V. ἀσυνμέτρω P. 26. ἀσυνμέτρω P, et F (ἀ del.). μήμει] om. F Vb, m. 2 B.

καὶ τῷ ὑπὸ τῶν *A, B* ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς *Γ*. μέ-
 σον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν *A, B* μέσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς
Γ· μέση ἄρα καὶ ἡ *Γ*. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς *B* ἴσον ἔστω
 τὸ ὑπὸ τῶν *Γ, Δ*· ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς *B*· ῥητὸν
 5 ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν *Γ, Δ*. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὥς ἡ *A*
 πρὸς τὴν *B*, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν *A, B* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς
B, ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν *A, B* ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς
Γ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς *B* ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν *Γ, Δ*, ὥς ἄρα
 ἡ *A* πρὸς τὴν *B*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *Γ* πρὸς τὸ ὑπὸ
 10 τῶν *Γ, Δ*. ὥς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς *Γ* πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν
Γ, Δ, οὕτως ἡ *Γ* πρὸς τὴν *Δ*· καὶ ὥς ἄρα ἡ *A* πρὸς
 τὴν *B*, οὕτως ἡ *Γ* πρὸς τὴν *Δ*. σύμμετρος δὲ ἡ *A*
 τῇ *B* δυνάμει μόνον· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ *Γ* τῇ *Δ*
 δυνάμει μόνον. καὶ ἐστὶ μέση ἡ *Γ*· μέση ἄρα καὶ
 15 ἡ *Δ*. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὥς ἡ *A* πρὸς τὴν *B*, ἡ *Γ* πρὸς
 τὴν *Δ*, ἡ δὲ *A* τῆς *B* μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμ-
 μέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ *Γ* ἄρα τῆς *Δ* μείζον δύναται τῷ
 ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.

Εὗρηται ἄρα δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι
 20 αἱ *Γ, Δ* ῥητὸν περιέχουσαι, καὶ ἡ *Γ* τῆς *Δ* μείζον
 δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

Ὅμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου,
 ὅταν ἡ *A* τῆς *B* μείζον δύνῃται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου
 ἑαυτῇ.

1. τῷ] corr. ex τῶν m. 1 P. 2. τῆς] corr. ex τοῦ m.
 2 F. 3. δέ] δ' F. 4. Δ] corr. ex A m. rec. b, A φ (non F).
 5. ἄρα ἐστὶ P. Ante ἐπεὶ ras. 3 litt. P. 7. ὑπό] ὑ- in
 ras. V. 8. ἐστὶ τό b. 14. ἐστὶν PB. 15. οὕτως ἡ Γ FV.
 16. τῆς] τῇ F. τῷ] corr. ex τό F. ἀσύμμετρον P, supra
 σ ras. 1 litt. B, συμμέτρῳ φ. 17. δυνήσεται Theon (BFVb).
 18. ἀσύμμετρον P, supra σ ras. 1 litt. B, συμμέτρῳ F. 19.
 ἑὗρηται Vb, F m. 2. ἄρα] supra scr. m. 2 B. 21. ἀσυσ-
 μέτρου P, supra σ ras. 1 litt. B. 22. δέ FV. τῷ] τό FV.

dine commensurabilis [prop. XXIX]. et sit $\Gamma^2 = A \times B$.
 uerum $A \times B$ medium est [prop. XXI]. itaque etiam
 Γ^2 medium est; quare Γ est media [id.].
 sit autem $\Gamma \times \Delta = B^2$. uerum B^2 rationale
 est. itaque etiam $\Gamma \times \Delta$ rationale est. et
 quoniam est $A : B = A \times B : B^2$ [cfr. prop.
 XXI lemma], et $\Gamma^2 = A \times B$, $B^2 = \Gamma \times \Delta$,
 erit $A : B = \Gamma^2 : \Gamma \times \Delta$. est autem $\Gamma^2 : \Gamma \times \Delta = \Gamma : \Delta$
 [prop. XXI lemma]. quare etiam $A : B = \Gamma : \Delta$. uerum
 A, B potentia tantum commensurabiles sunt. itaque
 etiam Γ, Δ potentia tantum commensurabiles sunt
 [prop. XI]. et Γ media est. itaque etiam Δ media
 est [prop. XXIII]. et quoniam est $A : B = \Gamma : \Delta$, et
 A^2 excedit B^2 quadrato rectae sibi commensurabilis,
 etiam Γ^2 excedit Δ^2 quadrato rectae sibi commensu-
 rabilis [prop. XIV].

Ergo inuentae sunt duae mediae potentia tantum
 commensurabiles Γ, Δ spatium rationale compren-
 dentes, et Γ^2 excedit Δ^2 quadrato rectae sibi commen-
 surabilis.

Similiter demonstrabimus, Γ^2 excedere Δ^2 quadrato
 rectae sibi incommensurabilis, si A^2 excedat B^2 qua-
 drato rectae sibi incommensurabilis [prop. XXX].

συμμέτρον P, et F, corr. m. 1. 23. ἡ A] om. P. 24. δυνήσεται B, δυνήσεται L, δύνηται ἡ A P. 24. συμμέτρον P. 24. Seq. lemma, u. app.

λβ'.

Εὐρεῖν δύο μέσας δυνάμει μόνον συμμε-
τρους μέσον περιεχούσας, ὥστε τὴν μείζονα
τῆς ἐλάσσονος μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμ-
5 μέτρου ἐαυτῇ.

Ἐκκείσθωσαν τρεῖς ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι
αἱ A, B, Γ , ὥστε τὴν A τῆς Γ μείζον δύνασθαι τῷ
ἀπὸ συμμετρου ἐαυτῇ, καὶ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν A, B ἴσον
ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Δ . μέσον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Δ · καὶ
10 ἡ Δ ἄρα μέση ἐστίν. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν B, Γ ἴσον ἔστω
τὸ ὑπὸ τῶν Δ, E . καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ τῶν $A,$
 B πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν B, Γ , οὕτως ἡ A πρὸς τὴν Γ ,
ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν A, B ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Δ ,
τῷ δὲ ὑπὸ τῶν B, Γ ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν Δ, E , ἐστὶν
15 ἄρα ὡς ἡ A πρὸς τὴν Γ , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς
τὸ ὑπὸ τῶν Δ, E . ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς τὸ ὑπὸ
τῶν Δ, E , οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν E · καὶ ὡς ἄρα ἡ A
πρὸς τὴν Γ , οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν E . σύμμετρος δὲ
ἡ A τῇ Γ δυνάμει [μόνον]. σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ Δ
20 τῇ E δυνάμει μόνον. μέση δὲ ἡ Δ · μέση ἄρα καὶ
ἡ E . καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ A πρὸς τὴν Γ , ἡ Δ πρὸς
τὴν E , ἡ δὲ A τῆς Γ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμε-
τρου ἐαυτῇ, καὶ ἡ Δ ἄρα τῆς E μείζον δυνήσεται τῷ
ἀπὸ συμμετρου ἐαυτῇ. λέγω δὴ, ὅτι καὶ μέσον ἐστὶ
25 τὸ ὑπὸ τῶν Δ, E . ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν
 B, Γ τῷ ὑπὸ τῶν Δ, E , μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν B, Γ

4. ἐλάττονος FV. μείζονα L, et B, sed corr. συμμε-
τρου] ἀ- add. m. rec. b. 5. αὐτῇ L. 6. ῥηταὶ αἱ A, B, Γ V.
7. αἱ A, B, Γ] om. V, αἱ A, B b. μείζονα L, et B, sed
corr. 8. συμμετρου] ἀ- add. m. rec. b. τῷ] τό L. 10.
ἐστὶ V, comp. Fb. 11. τὸ ὑπὸ τῶν Δ, E] m. 1 b, supra scr.

XXXII.

Inuenire duas medias potentia tantum commensurabiles medium comprehendentes eius modi, ut maior quadrata minorem excedat quadrato rectae sibi commensurabilis.

A ————— | Δ ————— |
 B ————— | E ————— |
 Γ ————— |

Ponantur tres rectae rationales potentia tantum commensurabiles A, B, Γ eius modi, ut A^2 excedat Γ^2 quadrato rectae sibi commensurabilis [prop. XXIX], et sit $\Delta^2 = A \times B$. itaque Δ^2 medium est; quare etiam Δ media est [prop. XXI]. sit autem $\Delta \times E = B \times \Gamma$. et quoniam est $A \times B : B \times \Gamma = A : \Gamma$ [prop. XXI lemma]¹⁾, et $\Delta^2 = A \times B$, $\Delta \times E = B \times \Gamma$, erit $A : \Gamma = \Delta^2 : \Delta \times E$. uerum $\Delta^2 : \Delta \times E = \Delta : E$ [prop. XXI lemma]. quare etiam $A : \Gamma = \Delta : E$. sed A, Γ potentia tantum commensurabiles sunt. quare etiam Δ, E potentia tantum commensurabiles sunt [prop. XI]. Δ autem media est. itaque etiam E media est [prop. XXIII]. et quoniam est $A : \Gamma = \Delta : E$, et A^2 excedit Γ^2 quadrato rectae sibi commensurabilis, etiam Δ^2 excedit E^2 quadrato rectae sibi commensurabilis [prop. XIV]. iam dico, $\Delta \times E$ etiam medium esse. nam

1) Nam $A : B = A \times B : B^2$ (cfr. supra p. 92, 5), $B : \Gamma = B^2 : B \times \Gamma$.

m. rec. $\tau\tilde{\omega}$ ἀπὸ τοῦ E . 13. ἐστίν L . 14. ἴσον ἐστὶ V . τὸ ὑπὸ $\tau\tilde{\omega}\nu \Delta, E$] m. 1 b, supra scr. m. rec. $\tau\tilde{\omega}$ ἀπὸ τοῦ E . 16. τὸ ὑπὸ $\tau\tilde{\omega}\nu \Delta, E$] m. 1 b, supra scr. τὸ ἀπὸ τοῦ E . ὡς δέ] ἀλλ' ὡς V . 19. μόνον] om. P . 22. $\tau\tilde{\omega}$] corr. ex τό m. 2 P . συμμέτρον] ἀ- add. m. rec. b, item lin. 24. 24. ἐστίν L . 25. ἐστίν L . τό] $\tau\tilde{\omega}$ V , et b, sed corr. 26. $\tau\tilde{\omega}$ ὑπὸ $\tau\tilde{\omega}\nu \Delta, E$] m. 1 b, supra scr. m. rec. $\tau\tilde{\omega}$ ἀπὸ τοῦ E . τό] $\tau\tilde{\omega}$ P .

[αἱ γὰρ B, Γ φηταὶ εἶσι δυνάμει μόνον σύμμετροι], μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν A, E .

Εὐρηνται ἄρα δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ A, E μέσον περιέχουσai, ὥστε τὴν μετξονα τῆς ἐλάσσονος μετξον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἐαντῇ.

Ὅμοίως δὴ πάλιν δειχθήσεται καὶ τῷ ἀπὸ ἀσυνμέτρου, ὅταν ἡ A τῆς Γ μετξον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυνμέτρου ἐαντῇ.

Λήμμα.

- 10 Ἐστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ $AB\Gamma$ ὀρθὴν ἔχον τὴν A , καὶ ἤχθω κάθετος ἡ AD . λέγω, ὅτι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν $\Gamma B\Delta$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς BA , τὸ δὲ ὑπὸ τῶν $B\Gamma\Delta$ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓA , καὶ τὸ ὑπὸ τῶν $B\Delta, \Delta\Gamma$ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς AD , καὶ ἐτι τὸ ὑπὸ τῶν $B\Gamma, A\Delta$ ἴσον [ἐστὶ] τῷ ὑπὸ τῶν $BA, A\Gamma$.

Καὶ πρῶτον, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν $\Gamma B\Delta$ ἴσον [ἐστὶ] τῷ ἀπὸ τῆς BA .

- Ἐπεὶ γὰρ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἦκται ἡ AD , τὰ $AB\Delta, A\Delta\Gamma$ ἄρα τρίγωνα ὁμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ τῷ $AB\Gamma$ καὶ ἀλλήλοις. καὶ ἐπεὶ ὁμοιόν ἐστι τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ $AB\Delta$ τριγώνῳ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓB πρὸς τὴν BA , οὕτως ἡ BA πρὸς τὴν $B\Delta$. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $\Gamma B\Delta$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB .

1. αἱ γὰρ — σύμμετροι] om. L F V b, mg. m. 2 B. εἰσιν P.
2. καὶ] om. L B. τὸ ὑπὸ τῶν Δ, E] m. 1 b, supra scr. m. rec. τὸ ἀπὸ τοῦ E . 3. ἡὐρηνται L F V b. 4. τὴν μὲν V. 5. συμμέτρου] ἀ-add. m. rec. b. 6. τῷ] τό V. συμμέτρου L, et B F, sed corr. 7. δύνεται P b. συμμέτρου L, et B F, sed corr. 8. Post ἐαντῇ add. ὅπερ ἔδει δείξαι V. Seq. lemma, u. app. 9. λήμμα] om. L. 10. ἔχων P. 11. A] ὑπὸ $B A \Gamma$ Theon (L B F V b); γρ. τῆς ὑπὸ $B A \Gamma$ mg. P. 12. $\Gamma B \Delta$] supra add. B P V. ἐστὶν L.

quoniam $B \times \Gamma = \Delta \times E$, et $B \times \Gamma$ medium est [prop. XXI], etiam $\Delta \times E$ medium est.

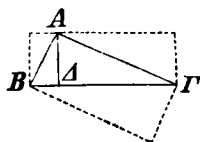
Ergo inuentae sunt duae mediae potentia tantum commensurabiles medium comprehendentes Δ, E eius modi, ut maior quadrata minorem excedat quadrato rectae sibi commensurabilis.

Similiter rursus demonstrabimus, Δ^2 excedere E^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis, si Δ^2 excedat Γ^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis [prop. XXX].

Lemma.

Sit $AB\Gamma$ triangulus rectangulus rectum habens angulum A , et ducatur perpendicularis AD . dico, esse $\Gamma B \times BA = BA^2$, $B\Gamma \times \Gamma A = \Gamma A^2$, $BA \times \Delta \Gamma = \Delta A^2$, $B\Gamma \times \Delta A = BA \times \Delta \Gamma$.

et primum, esse $\Gamma B \times BA = BA^2$.



nam quoniam in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basim perpendicularis ducta est AD , trianguli $AB\Delta$, $A\Delta\Gamma$ et toti $AB\Gamma$ et inter se similes sunt [VI, 8]. et

quoniam $AB\Gamma \sim AB\Delta$, erit $\Gamma B : BA = BA : B\Delta$ [VI, 4]. quare [VI, 17] $\Gamma B \times BA = BA^2$.

13. $B\Gamma\Delta$] supra add. ΓPF ; $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ e corr. V. $\iota\sigma\upsilon\eta$] supra scr. m. 1 P. $\tau\eta\varsigma$] om. Bb. $\Delta\Gamma\varphi$. $B\Delta\Gamma$, supra add. Δ m. rec., P. 14. $B\Gamma$] e corr. V. 15. $\iota\sigma\tau\iota$] om. LBFVb. $\tau\omega\nu$] om. P. 16. $\tau\omega\nu$] om. P. $\Gamma B\Delta$] FVb, B m. 2; $\Gamma B LB$; $\Gamma\Delta B P$; ΓB , $B\Delta$ FV m. 2, P m. rec. $\iota\sigma\tau\iota$] om. LBFVb. 19. $\tau\acute{\alpha}$] corr. ex $\tau\eta\iota$ m. 2 B. $AB\Delta$] Δ in ras. m. 1 P. 20. $\Delta A\Gamma$? L. $\iota\sigma\tau\iota\nu$ LPB. 22. $AB\Delta$] B in ras. V. 23. BA] $AB\varphi$. BA] mut. in AB V. 24. ΓB , $B\Delta\varphi$, m. rec. P, m. 2 V.

Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ὑπο τῶν $BΓΔ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$.

Καὶ ἐπεὶ, ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, ἡ ἀχθεῖσα
5 τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μέση ἀνάλογόν ἐστιν, ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $BΔ$ πρὸς τὴν $ΔΑ$, οὕτως ἡ $ΑΔ$ πρὸς τὴν $ΔΓ$. τὸ ἄρα ὑπο τῶν $BΔ$, $ΔΓ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΔΑ$.

Λέγω, ὅτι καὶ τὸ ὑπο τῶν $BΓ$, $ΑΔ$ ἴσον ἐστὶ τῷ
10 ὑπὸ τῶν $ΒΑ$, $ΑΓ$. ἐπεὶ γάρ, ὡς ἔφαμεν, ὁμοιόν ἐστι τὸ $ΑΒΓ$ τῷ $ΑΒΔ$, ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $BΓ$ πρὸς τὴν $ΓΑ$, οὕτως ἡ $ΒΑ$ πρὸς τὴν $ΑΔ$ [ἐὰν δὲ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾧσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων]. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $BΓ$, $ΑΔ$ ἴσον
15 ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν $ΒΑ$, $ΑΓ$. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λγ'.

Εὐρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον.

20 Ἐκκείσθωσαν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ $ΑΒ$, $BΓ$, ὥστε τὴν μείζονα τὴν $ΑΒ$ τῆς ἐλάσσονος τῆς $BΓ$ μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἐαυτῇ, καὶ τετμήσθω ἡ $BΓ$ δίχα κατὰ τὸ $Δ$, καὶ τῷ ἀφ' ὁποτέρας τῶν $BΔ$, $ΔΓ$ ἴσον παρὰ τὴν $ΑΒ$ παραβε-
25 βλήσθω παραλληλόγραμμον ἐλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΕΒ$, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς

1. $BΓ$, $ΓΔ$ m. rec. P, m. 2 V. ἐστὶ] om. Fb. 3.
 τριγώνῳ] supra scr. comp. m. 2 B. 6. $ΑΔ$] $ΔΑ$ B. 10.
 ἐστὶ] postea ins. F. 11. $ΑΒΓ$ τριγώνον F. $ΑΒΔ$] $ΑΓΔ$
 BFb, et supra scr. B m. 1 V. 12. $ΓΔ$] $Α$ in ras. V. $ΑΔ$]

eadem de causa etiam $B\Gamma \times \Gamma\Delta = \Delta\Gamma^2$.

et quoniam, si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basim perpendicularis ducitur, recta ducta media est proportionalis partium basis [VI, 8 coroll.], erit $B\Delta : \Delta A = \Delta A : \Delta\Gamma$. quare [VI, 17] $B\Delta \times \Delta\Gamma = \Delta A^2$.

dico, esse etiam $B\Gamma \times \Delta A = BA \times A\Gamma$. nam quoniam, ut diximus, trianguli $AB\Gamma$, $AB\Delta$ similes sunt, erit [VI, 4] $B\Gamma : \Gamma A = BA : \Delta A$. itaque¹⁾ $B\Gamma \times \Delta A = BA \times A\Gamma$ [VI, 16]; quod erat demonstrandum.

XXXIII.

Inuenire duas rectas potentia incommensurabiles, quae summam quadratorum suorum rationalem efficiant, rectangulum autem medium.

Ponantur duae rationales potentia tantum commensurabiles AB , $B\Gamma$ eius modi, ut maior AB quadrata minorem $B\Gamma$ excedat quadrato rectae sibi incommensurabilis [prop. XXX], et $B\Gamma$ in Δ in duas partes aequales secetur, et quadrato $B\Delta^2$ uel $\Delta\Gamma^2$ aequale parallelogrammum rectae AB adplicetur figura quadrata deficiens [VI, 28] et sit $AE \times EB$, et in AB

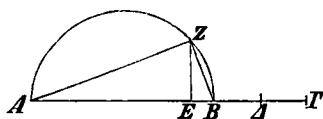
1) Uerba quae praecedunt damnaui, quia non magis est, cur haec propositio omnibus uerbis citetur, quam VI, 17, qua bis in hoc lemmate tacite usus est.

ΔA φ. 13. ὡς V. τό] corr. ex τῷ V. 15. τῷ] corr. ex τό m. 1 F, τό φ. τῶν] om. Bb. Seq. demonstr. alt., u. app. ὅπερ εἶδει δεῖξαι] comp. Pb, om. BFV. Seq. lemmata, u. app. 19. δέ F. 21. ἐλάττωος b, comp. F. 22. μείζονα P, corr. m. rec. 23. τῷ] corr. ex τό m. 1 V. 25. παραλληλόγραμον P. 26. AE, EB V, P m. rec.

AB ημικύκλιον τὸ AZB , καὶ ἤχθω τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἡ EZ , καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ AZ , ZB .

Καὶ ἐπεὶ [δύο] εὐθεῖαι ἄνισοι εἰσιν αἱ AB , $BΓ$, καὶ ἡ AB τῆς $BΓ$ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου
 5 ἑαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς $BΓ$, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας αὐτῆς, ἴσον παρὰ τὴν AB παραβέβληται παραλληλόγραμμον ἐλλείπον εἶδει τετραγώνῳ καὶ ποιεῖ τὸ ὑπὸ τῶν AEB , ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AE τῇ EB . καὶ ἐστὶν ὥς ἡ AE πρὸς EB , οὕτως
 10 τὸ ὑπὸ τῶν BA , AE πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AB , BE , ἴσον δὲ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν BA , AE τῷ ἀπὸ τῆς AZ , τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AB , BE τῷ ἀπὸ τῆς BZ . ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AZ τῷ ἀπὸ τῆς ZB . αἱ AZ , ZB ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. καὶ ἐπεὶ ἡ AB ῥητὴ ἐστὶν,
 15 ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB . ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AZ , ZB ῥητόν ἐστὶν. καὶ ἐπεὶ πάλιν τὸ ὑπὸ τῶν AE , EB ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς EZ , ὑπόκειται δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AE , EB καὶ τῷ ἀπὸ τῆς BA ἴσον, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ZE τῇ BA .
 20 διπλῇ ἄρα ἡ $BΓ$ τῆς ZE . ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ σύμμετρόν ἐστι τῷ ὑπὸ τῶν AB , EZ . μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$. μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB , EZ . ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AB , EZ τῷ ὑπὸ τῶν AZ , ZB . μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AZ , ZB . ἐδείχθη
 25 δὲ καὶ ῥητόν τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων.

1. AB] AEB b. ABZ P. 3. δύο] om. P, post εὐθεῖαι ins. m. 2. αἱ] m. rec. P. 4. συμμέτρου FV, corr. m. 2.
 5. τὸ (τῷ V) δὲ τέταρτον BFVb, corr. m. 2 BV (τετάρτῳ m. rec. b). τῆς] τῆς ἐλάσσονος τῆς Theon (BFVb). τουτέστιν P. τῷ] τό Fb, corr. ex τό m. 2 B. 6. ἴσον] om. Fb, m. 2 B. 7. παραλληλόγραμμον] om. Fb, m. 2 B. 8. AE , EB V, m. rec. P. 9. πρὸς τὴν EB V. 10. τῶν] (alt.) om. P.



describatur semicirculus AZB , et ducatur ad AB perpendicularis EZ , et ducantur AZ , ZB .

et quoniam AB , $B\Gamma$ inaequales sunt rectae, et AB^2 excedit $B\Gamma^2$ quadrato rectae sibi incommensurabilis, et quartae parti quadrati $B\Gamma^2$, hoc est $(\frac{1}{2} B\Gamma)^2$, aequale parallelogrammum rectae AB adplicatum est figura quadrata deficiens et efficit $AE \times EB$, AE et EB incommensurabiles erunt [prop. XVIII]. est autem $AE : EB = BA \times AE : AB \times BE$ [u. p. 95 not.]; et $BA \times AE = AZ^2$, $AB \times BE = BZ^2$ [u. lemma]. itaque AZ^2 , ZB^2 incommensurabilia sunt [prop. XI]. quare AZ , ZB potentia incommensurabiles sunt. et quoniam AB rationalis est, etiam AB^2 rationale est. itaque summa quadratorum $AZ^2 + ZB^2$ rationale est [I, 47]. et quoniam rursus $AE \times EB = EZ^2$ [u. lemma], et supposuimus, esse etiam $AE \times EB = B\Delta^2$, erit $ZE = B\Delta$. itaque $B\Gamma = 2 ZE$. quare etiam $AB \times B\Gamma$ et $AB \times EZ$ commensurabilia sunt [prop. VI]. uerum $AB \times B\Gamma$ medium est [prop. XXI]. itaque etiam $AB \times EZ$ medium est [prop. XXIII coroll.]. uerum $AB \times EZ = AZ \times ZB$ [u. lemma]. itaque etiam $AZ \times ZB$ medium est. demonstrauius autem, etiam summam quadratorum earum rationalem esse.

12. ZB P. 13. $\xi\sigma\tau\iota\nu$ P. ZB] (prius) BZ FVb. 14. $\xi\sigma\tau\iota$ BV, comp. Fb. 15. $\phi\eta\tau\acute{o}\nu \acute{\alpha}\rho\alpha \xi\sigma\tau\iota$] mg. m. 1 F. 16. $\xi\sigma\tau\iota$ BV, comp. Fb. 19. $B\Delta$] (alt.) in ras. m. 1 P. 20. $\tau\eta\varsigma$] corr. ex $\tau\eta$ m. 1 V. 21. $\sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\rho\omicron\nu$] $\delta\iota\pi\lambda\acute{\alpha}\sigma\iota\omicron\nu$ Theon (BFVb); mg. m. 1: $\delta\iota\acute{\alpha} \tau\acute{o} \tau\eta\nu B\Gamma \delta\iota\pi\lambda\acute{\alpha}\sigma\iota\omicron\nu \epsilon\iota\nu\alpha\iota \tau\eta\varsigma B\Delta$, $\tau\eta\nu \delta\epsilon B\Delta \iota\sigma\eta\nu \epsilon\iota\nu\alpha\iota \tau\eta EZ$ pro scholio P. $\tau\omega$] τοῦ Theon (BFV).

22. $AB\Gamma$ BFb, et V, corr. m. 2. 23. $\delta\epsilon$] om. b.

Εὐρηνται ἄρα δύο εὐθείαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ AZ , ZB ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μέσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5

λδ'.

Εὐρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν.

Ἐκκείσθωσαν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι
10 αἱ AB , $BΓ$ ῥητόν περιέχουσαι τὸ ὑπ' αὐτῶν, ὥστε τὴν AB τῆς $BΓ$ μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς AB τὸ $AΔB$ ἡμικύκλιον, καὶ τετμήσθω ἡ $BΓ$ δίχα κατὰ τὸ E , καὶ παραβελήσθω παρὰ τὴν AB τῷ ἀπὸ τῆς BE ἴσον
15 παραλληλόγραμμον ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ τὸ ὑπὸ τῶν AZB · ἀσύμμετρος ἄρα [ἐστίν] ἡ AZ τῇ ZB μήκει. καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Z τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἡ $ZΔ$, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $AΔ$, $ΔB$.

Ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ AZ τῇ ZB , ἀσύμμετρον
20 ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν BA , AZ τῷ ὑπὸ τῶν AB , BZ . ἴσον δὲ τὸ μὲν ὑπὲρ τῶν BA , AZ τῷ ἀπὸ τῆς $AΔ$, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AB , BZ τῷ ἀπὸ τῆς $ΔB$ · ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $AΔ$ τῷ ἀπὸ τῆς $ΔB$. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB , μέσον ἄρα καὶ
25 τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $AΔ$, $ΔB$. καὶ ἐπεὶ

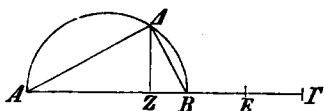
1. ἡϋρηνται FV. 3. ῥητῶν b, corr. m. 1. δ' BVb. ἀπ' F. 4. δεῖξαι] εὐρεῖν b, mg. m. 1: γρ. δεῖξαι; in F mg. m. 2: γρ. εὐρεῖν. 7. τό] corr. ex τόν P. 8. δέ F. 11. συμμέτρον F, corr. m. 1. 15. ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ] om. Fb, m. 2 B. τό] ποιοῦν τό V. 16. τῶν AZB] non liquet F. AZ , ZB V. σύμμετρος φ, et B, corr. m. 2. ἐστίν] om. P, ἔσται φ. ZB] BZ P. 18. $ZΔ$] $ΔZ$ e corr. m. 2 V. $ΔB$]

Ergo inuentae sunt duae rectae potentia incommensurabiles AZ , ZB , quae summam quadratorum suorum rationalem efficiant, rectangulum autem medium; quod erat demonstrandum.

XXXIV.

Inuenire duas rectas potentia incommensurabiles, quae summam quadratorum suorum mediam efficiant, rectangulum autem rationale.

Ponantur duae mediae potentia tantum commensurabiles spatium rationale comprehendentes AB , $B\Gamma$



eius modi, ut AB^2 excedat $B\Gamma^2$ quadrato rectae sibi incommensurabilis [prop. XXXI], et in AB

describatur $A\Delta B$ semicirculus, et $B\Gamma$ in E in duas partes aequales secetur, et rectae AB quadrato BE^2 aequale parallelogrammum adplicetur $AZ \times ZB$ figura quadrata deficiens [VI, 28]. itaque AZ , ZB longitudine incommensurabiles sunt [prop. XVIII]. et a Z ad rectam AB perpendicularis ducatur $Z\Delta$, et ducantur $A\Delta$, ΔB .

quoniam AZ , ZB incommensurabiles sunt, etiam $BA \times AZ$ et $AB \times BZ$ incommensurabilia sunt [prop. XI]. uerum $BA \times AZ = A\Delta^2$, $AB \times BZ = \Delta B^2$ [prop. XXXII lemma]. ergo $A\Delta^2$, ΔB^2 incommensurabilia sunt.

et quoniam AB^2 medium est, etiam $A\Delta^2 + \Delta B^2$ medium est [III, 31. I, 47].

corr. ex $\Delta\Gamma$ V. 19. καὶ ἐπεὶ V, ἐπεὶ οὖν m. rec. P. 23. ἐστὶν P. τῆς] (alt.) om. P. ΓB b, corr. m. 1. 25. ΔB] in ras. V.

διπλῇ ἐστὶν ἡ $B\Gamma$ τῆς ΔZ , διπλασίον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ τοῦ ὑπὸ τῶν AB , $Z\Delta$. ῥητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB , $Z\Delta$. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AB , $Z\Delta$ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB ῥητὸν ἐστὶν.

Εὐρηνται ἄρα δύο εὐθείαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ $A\Delta$, ΔB ποιοῦσαι τὸ [μὲν] συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10

λε'.

Εὐρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους ποιούσας τὸ τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐ-
15 τῶν τετραγώνων.

Ἐκκείσθωσαν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ AB , $B\Gamma$ μέσον περιέχουσai, ὥστε τὴν AB τῆς $B\Gamma$ μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἐαυτῇ, καὶ γε-
γράφθω ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ $A\Delta B$, καὶ τὰ
20 λοιπὰ γεγονέντω τοῖς ἐπάνω ὁμοίως.

Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZB μήκει, ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ $A\Delta$ τῇ ΔB δυνάμει. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB , μέσον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB . καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ

1. διπλῇ] διπλασίῳ Theon (BFVb). 2. τοῦ] e corr. F. Post $Z\Delta$ add. ὥστε καὶ σύμμετρον V, B m. 2. 3. Post $B\Gamma$ add. Theon: ὑπόκειται γὰρ (οὕτως add. V) (BFVb). 4. $Z\Delta$] corr. in BZ m. 2 F, corr. ex BZ m. rec. b. τό] τῷ BF, τῷ δὲ τῷ b. τῷ] τό BFb. τῶν] om. Pb. 6. ἡύρηται Vb. σύμμετροι P, corr. m. 1. 7. μὲν] om. P. 8. τετραγώνων F et V, sed corr. δέ F. 9. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 10. λε' F, corr. m. 1. 13. τετραγώνων b, et F,

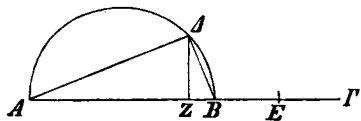
et quoniam $B\Gamma = 2 \Delta Z$, erit etiam $AB \times B\Gamma = 2 AB \times Z\Delta$. uerum $AB \times B\Gamma$ rationale est. itaque etiam $AB \times Z\Delta$ rationale est [prop. VI; def. 4]. uerum $AB \times Z\Delta = A\Delta \times \Delta B$ [prop. XXXII lemma]. quare etiam $A\Delta \times \Delta B$ rationale est.

Ergo inuentae sunt duae rectae potentia incommensurabiles $A\Delta$, ΔB , quae summam quadratorum suorum mediam efficiant, rectangulum autem rationale; quod erat demonstrandum.

XXXV.

Inuenire duas rectas potentia incommensurabiles, quae et summam quadratorum suorum mediam efficiant et rectangulum medium et simul summae quadratorum incommensurabile.

Ponantur duae mediae potentia tantum commensurabiles AB , $B\Gamma$ medium comprehendentes eius modi, ut AB^2 excedat $B\Gamma^2$ quadrato rectae sibi incommensurabilis [prop. XXXII], et in AB semicirculus describatur $A\Delta B$, et reliqua fiant, sicut supra.



et quoniam AZ , ZB longitudine incommensurabiles sunt, etiam $A\Delta$, ΔB potentia incommensura-

biles sunt [prop. XI]. et quoniam AB^2 medium est, etiam $A\Delta^2 + \Delta B^2$ medium est [prop. XXIII coroll.]. et

sed corr. 17. $B\Gamma$] (alt.) Γb . 18. $\sigma\upsilon\mu\mu\epsilon\tau\epsilon\sigma\upsilon\upsilon$ b et F, corr. m. 1.

19. $A\Delta B$] corr. ex $A\Gamma B$ m. 1 b, $AB\Delta$ φ . 20. $\gamma\epsilon\gamma\omicron\nu\epsilon\tau\omega$] supra scr. F.

$\acute{\epsilon}\pi\acute{\alpha}\nu\omega$ $\epsilon\lambda\eta\mu\epsilon\nu\omicron\iota\varsigma$ V. $\acute{\omicron}\mu\omicron\lambda\omicron\varsigma$] om. Fb, m. 2 B $\dot{\nu}$.

21. $\acute{\epsilon}\pi\epsilon\iota$] om. B, corr. m. 2. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$] supra m. 1 P.

ZB] BZ B. 22. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$] $\acute{\alpha}\rho\alpha$ $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ F, $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ B.

- τῶν AZ , ZB ἴσον ἐστὶ τῷ ἄφ' ἐκατέρας τῶν BE , ΔZ , ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ BE τῇ ΔZ . διπλῇ ἄρα ἡ $B\Gamma$ τῆς $Z\Delta$. ὥστε καὶ τὸ ὑπο τῶν AB , $B\Gamma$ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν AB , $Z\Delta$. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$. μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB , $Z\Delta$. καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ ὑπο τῶν $A\Delta$, ΔB . μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB . καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστὶν ἡ AB τῇ $B\Gamma$ μήκει, σύμμετρος δὲ ἡ ΓB τῇ BE , ἀσύμμετρος ἄρα καὶ ἡ AB τῇ BE μήκει. ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τῷ ὑπὸ τῶν AB , BE ἀσύμμετρόν ἐστιν. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AB ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB , τῷ δὲ ὑπὸ τῶν AB , BE ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB , $Z\Delta$, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB . ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ το συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB τῷ ὑπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB .

- Εὗρονται ἄρα δύο εὐθεῖαι αἱ $A\Delta$, ΔB δυνάμει ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν μέσον καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λς'.

Ἐὰν δύο ρηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσιν, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν, καλεῖσθω δὲ ἐκ δύο ὀνομάτων.

- 25 Συγκεισθῶσαν γὰρ δύο ρηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ AB , $B\Gamma$ λέγω, ὅτι ὅλη ἡ $A\Gamma$ ἄλογός ἐστιν.

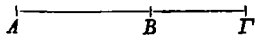
1. AZ] ΔZ b. τῷ] τῷ ἀπό P, corr. m. rec. 3. ΔZ B F b. 4. τοῦ] τό F, corr. ex τό m. rec. P, mut. in τῷ m. 1 b. τὸ ὑπό — 5. ἄρα καί] mg. m. 2 B. 8. $B\Gamma$] ΓB F. ΓB] mut. in $B\Gamma$ V. 9. AB] BA e corr. m. 2 V. τό] ins. m. 2 F. 10. τῷ] corr. ex τό F. σύμμετρον F, corr. m. 1. ἄρα ἐστὶν b, ἄρα supra add. F. 11. ἐστὶν P. τῶν] ins. m. 2 F. 12. τῷ] corr. ex τά m. 1 F. 13. ΔZ B. τουτέστιν P. 14.

quoniam $AZ \times ZB = BE^2 = AZ^2$, erit $BE = AZ$. itaque $B\Gamma = 2 Z\Delta$. quare etiam $AB \times B\Gamma = 2 AB \times Z\Delta$. uerum $AB \times B\Gamma$ medium est. itaque etiam $AB \times Z\Delta$ medium est. et $AB \times Z\Delta = A\Delta \times \Delta B$ [prop. XXXII lemma]. itaque etiam $A\Delta \times \Delta B$ medium est. et quoniam $AB, B\Gamma$ longitudine incommensurabiles sunt, et $\Gamma B, BE$ commensurabiles, etiam AB, BE longitudine incommensurabiles sunt [prop. XIII]. quare etiam AB^2 et $AB \times BE$ incommensurabilia sunt [prop. XXI lemma; prop. XI]. uerum $A\Delta^2 + \Delta B^2 = AB^2$ [I, 47] et $AB \times Z\Delta = AB \times BE = A\Delta \times \Delta B$. itaque $A\Delta^2 + \Delta B^2$ et $A\Delta \times \Delta B$ incommensurabilia sunt.

Ergo inuentae sunt duae rectae $A\Delta, \Delta B$ potentia incommensurabiles, quae et summam quadratorum suorum mediam efficiant et rectangulum medium et simul summae quadratorum incommensurabile; quod erat demonstrandum.

XXXVI.

Si duae rectae rationales potentia tantum commensurabiles componuntur, tota irrationalis est, uocetur autem ex duobus nominibus.


 Componantur enim duae
rectae rationales potentia tan-

των] (prius) mut. in τῆς m. 1 b. 16. αὐτῶν, ΔB] om. V.

18. αὐτῶν τετραγώνων V. μέσον καὶ] mg. V. καὶ τό] seq. ras. 1 litt. V, τὸ δὲ Fb, τὸ δ' B. 20. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. Seq. ἀρχὴ τῶν κατὰ σύνθεσιν ἐξάδων BFb, mg. V; et in mg. ἐντεῦθεν ἀρχεται παραδιδόναι κατὰ σύνθεσιν ἐξ (ἐξῆς V) ἀλόγους BFVb. 21. 15'] mut. in 15' F.

23. ἐστὶ BV, comp. Fb. καλεῖται P. 26. ὅλη] om. FVb, m. 2 B. AB b, corr. m. 1.

Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ AB τῇ $BΓ$ μήκει·
 δυνάμει γὰρ μόνον εἰσὶ σύμμετροι· ὥς δὲ ἡ AB πρὸς
 τὴν $BΓ$, οὕτως το ὑπὸ τῶν $ABΓ$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς
 $BΓ$, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ τῷ
 5 ἀπὸ τῆς $BΓ$. ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ σύμ-
 μετρόν ἐστι τὸ δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς
 $BΓ$ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$ · αἱ γὰρ AB ,
 $BΓ$ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀσύμμετρον
 ἄρα ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ τοῖς ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$.
 10 καὶ συνθέντι τὸ δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ μετὰ τῶν ἀπὸ
 τῶν AB , $BΓ$, τοντέστι τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$, ἀσύμμετρόν
 ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$. ῥητὸν
 δὲ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$ ἄλογον
 ἄρα [ἐστὶ] τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ · ὥστε καὶ ἡ $ΑΓ$ ἄλογός
 15 ἐστίν, καλεῖσθω δὲ ἐκ δύο ὀνομάτων· ὅπερ ἔδει
 δεῖξαι.

λξ.

Ἐὰν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι
 συντεθῶσι ῥητὸν περιέχουσai, ἡ ὅλη ἄλογός
 20 ἐστίν, καλεῖσθω δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμ-
 μετροι αἱ AB , $BΓ$ ῥητὸν περιέχουσai· λέγω, ὅτι ὅλη
 ἡ $ΑΓ$ ἄλογός ἐστιν.

1. σύμμετρος P, corr. m. 1. 3. ὑπό] α in ras. in extr.
 lin. F. τῶν] τῆς F. $ABΓ$] AB F; AB , $BΓ$ e corr. V, m.
 rec. P. ἀπὸ τῆς $BΓ$] seq. α eras. b, ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ F.
 4. ὑπὸ τῶν] ἀπὸ τῆς F. $BΓ$] om. F. 5. ἀπὸ τῆς] ὑπὸ
 τῶν AB F. 7. $BΓ$] (prius) AB F, sed corr.? αἱ — 8. σύμ-
 μετροι] om. Theon (BFVb). 8. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τό] τὸ
 ἄρα V, ὥστε καὶ τό BFb. 9. τοῖς] ἀσύμμετρόν ἐστι τοῖς F.
 $BΓ$ ἀσύμμετρόν ἐστι BVb. 10. συντεθέντι P et V, sed corr.;
 συντεθέν F, corr. m. 1 et 2. τῶν] (alt.) corr. ex τοῦ m. 2 F. 11.
 AB] corr. ex $ΑΓ$ V. τουτέστιν P. 12. ἐστίν P. 13. ἄλογος
 F, corr. m. 2. 14. ἐστὶ] om. BFVb. 15. ἐστι PBV, comp.

tum commensurabiles AB , $B\Gamma$. dico, totam AG irrationalem esse.

nam quoniam AB , $B\Gamma$ longitudine incommensurabiles sunt (nam potentia tantum sunt commensurabiles), et $AB:B\Gamma = AB \times B\Gamma : B\Gamma^2$ [prop. XXI lemma], etiam $AB \times B\Gamma$ et $B\Gamma^2$ incommensurabilia sunt [prop. XI]. uerum $AB \times B\Gamma$ et $2 AB \times B\Gamma$ commensurabilia sunt [prop. VI], et $AB^2 + B\Gamma^2$, $B\Gamma^2$ commensurabilia sunt (nam AB , $B\Gamma$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles) [prop. XV]. itaque $2 AB \times B\Gamma$ et $AB^2 + B\Gamma^2$ incommensurabilia sunt [prop. XIII]. et componendo

$2 AB \times B\Gamma + AB^2 + B\Gamma^2$, hoc est AG^2 [II, 4], et $AB^2 + B\Gamma^2$ incommensurabilia sunt [prop. XVI]. uerum $AB^2 + B\Gamma^2$ rationale est. itaque AG^2 irrationalis est [def. 4]. quare etiam AG irrationalis est [def. 4], uocetur autem ex duobus nominibus; quod erat demonstrandum.

XXXVII.

Si duae rectae mediae potentia tantum commensurabiles componuntur spatium rationale comprehendentes, tota irrationalis est, uocetur autem ex duobus mediis prima.

Componantur enim duae mediae potentia tantum commensurabiles AB , $B\Gamma$ spatium rationale comprehendentes [prop. XXVII]. dico, totam AG irrationalem esse.

Fb. Ante $\delta\pi\epsilon\rho$ schol. est, u. app. $\delta\pi\epsilon\rho$ $\xi\delta\epsilon\iota$ $\delta\epsilon\iota\xi\alpha\iota$] comp. P, om. BFVb. 17. $\lambda\eta'$ F. 19. $\sigma\upsilon\nu\tau\epsilon\theta\omega\sigma\iota\nu$ BF. 20. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ PBV, comp. Fb. 21. $\sigma\upsilon\gamma\kappa\alpha\lambda\epsilon\iota\sigma\theta\omega\sigma\alpha\nu$ b. 22. $\kappa\alpha\iota$ $\lambda\acute{\epsilon}\gamma\omega$ F. $\delta\lambda\eta$] post ras. 1 litt. P, om. Fb.

Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ AB τῇ $BΓ$ μήκει, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν $AB, BΓ$ ἄρα ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δις ὑπὸ τῶν $AB, BΓ$ καὶ συνθέντι τὰ ἀπὸ τῶν $AB, BΓ$ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $AB, BΓ$, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ
 5 τῆς AG , ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ ὑπὸ τῶν $AB, BΓ$. ῥητον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν $AB, BΓ$ ὑπόκεινται γὰρ αἱ $AB, BΓ$ ῥητον περιέχουσai· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AG · ἄλογος ἄρα ἡ AG , καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10

λη'.

Ἐὰν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσι μέσον περιέχουσai, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

Συγκλείσθωσαν γὰρ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμ-
 15 μετροι αἱ $AB, BΓ$ μέσον περιέχουσai· λέγω, ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ AG .

Ἐκκλείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ $ΔE$, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς AG ἴσον παρὰ τὴν $ΔE$ παραβεβλήσθω τὸ $ΔZ$ πλάτος ποιοῦν τὴν $ΔH$. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς AG ἴσον ἐστὶ
 20 τοῖς τε ἀπὸ τῶν $AB, BΓ$ καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν $AB, BΓ$, παραβεβλήσθω δὴ τοῖς ἀπὸ τῶν $AB, BΓ$ παρὰ τὴν $ΔE$ ἴσον το $EΘ$ · λοιπὸν ἄρα τὸ $ΘZ$ ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν $AB, BΓ$. καὶ ἐπεὶ μέση ἐστὶν ἑκατέρα τῶν $AB, BΓ$, μέσα ἄρα ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν

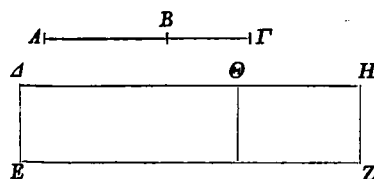
1. τῇ] m. rec. P. AG b. 2. ἐστὶ τῷ] corr. ex ἔστω m. 2 B. τῷ] corr. ex τό F. 3. καὶ] om. Theon (BFVb). συντεθέντι P. ἄρα τὰ Theon (BFVb). τὰ] τό V. 4. ἐστὶν P. τὸ ἀπό] in ras. m. 1 P. 5. σύμμετρα F, sed. corr. ἐστὶν P. $BΓ$] postea ins. F. ῥητόν — 6. $BΓ$] (prius) om. Fb, m. 2 B. 6. γὰρ] m. 2 B, δέ Fb, B m. 1. αἱ] αἱ ἀπὸ τῶν b. 7. ἄλογος — 8. AG] mg. m. 1 P. 8. πρώτη] seq. schol., u. app. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 10. λθ' F.

nam quoniam AB , $B\Gamma$ longitudine incommensurabiles sunt, etiam $AB^2 + B\Gamma^2$ et $2AB \times B\Gamma$ incommensurabilia sunt [cfr. p. 108, 1 sq.]. et componendo $AB^2 + B\Gamma^2 + 2AB \times B\Gamma$, hoc est $A\Gamma^2$ [II, 4], et $AB \times B\Gamma$ incommensurabilia sunt [prop. XVI]. uerum $AB \times B\Gamma$ rationale est; supposuimus enim, AB et $B\Gamma$ spatium rationale comprehendere. itaque $A\Gamma^2$ irrationale est. ergo $A\Gamma$ irrationalis est [def. 4], uocetur autem ex duabus mediis prima; quod erat demonstrandum.

XXXVIII.

Si duae mediae potentia tantum commensurabiles componuntur medium comprehendentes, tota irrationalis est, uocetur autem ex duabus mediis secunda.

Componantur enim duae mediae potentia tantum commensurabiles AB , $B\Gamma$ medium comprehendentes [prop. XXVIII]. dico, $A\Gamma$ irrationalem esse.



ponatur enim rationalis ΔE , et quadrato $A\Gamma^2$ aequale rectae ΔE adplicetur ΔZ latitudinem efficiens ΔH [I, 44]. et

quoniam $A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2 + 2AB \times B\Gamma$ [II, 4],

12. συντεθῶσιν PF. 13. ἐστὶ BV, comp. Fb. 17. γὰρ] om. FVb, m. 2 B. ἡ] corr. ex α V. τῶ] corr. ex τὸ m. 2 P. 21. Post $B\Gamma$ add. Theon: τὸ δὲ ἀπὸ τῆς $A\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τῶ ΔZ , καὶ τὸ ΔZ ἄρα ἴσον ἐστὶ τοῖς (τε add. V) ἀπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ καὶ τῶ $\delta\lambda\varsigma$ ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ (BVb, F mg. m. 1). δὴ παρὰ τὴν ΔE V. παρὰ τὴν ΔE] om. V. 22. ἐστὶ] m. 2 F. 24. μέση B, corr. m. 2. ἐστὶ] m. 2 V.

AB, BG . μέσον δὲ ὑπόκειται καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν
 AB, BG . καὶ ἐστὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν AB, BG ἴσον
τὸ $E\Theta$, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB, BG ἴσον τὸ $Z\Theta$.
μέσον ἄρα ἐκάτερον τῶν $E\Theta, \Theta Z$. καὶ παρὰ ρητὴν
5 τὴν ΔE παράκειται ρητὴ ἄρα ἐστὶν ἐκάτερα τῶν
 $\Delta\Theta, \Theta H$ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔE μήκει. ἐπεὶ οὖν
ἀσύμμετρός ἐστὶν ἡ AB τῇ BG μήκει, καὶ ἐστὶν ὡς
ἡ AB πρὸς τὴν BG , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ
ὑπο τῶν AB, BG , ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς
10 AB τῷ ὑπὸ τῶν AB, BG . ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς
 AB σύμμετρόν ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν
 AB, BG τετραγώνων, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν AB, BG σύμ-
μετρόν ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AB, BG . ἀσύμμετρον ἄρα
ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BG τῷ δις
15 ὑπὸ τῶν AB, BG . ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν AB, BG
ἴσον ἐστὶ τὸ $E\Theta$, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB, BG ἴσον
ἐστὶ τὸ ΘZ . ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ $E\Theta$ τῷ ΘZ .
ὥστε καὶ ἡ $\Delta\Theta$ τῇ ΘH ἐστὶν ἀσύμμετρος μήκει. αἱ
 $\Delta\Theta, \Theta H$ ἄρα ρηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι.
20 ὥστε ἡ ΔH ἄλογός ἐστιν. ρητὴ δὲ ἡ ΔE . τὸ δὲ ὑπὸ
ἀλόγου καὶ ρητῆς περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν
ἐστὶν. ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔZ χωρίον, καὶ ἡ δυνα-
μένη [αὐτὸ] ἄλογός ἐστιν. δύναται δὲ τὸ ΔZ ἢ AG .

1. καί] om. BFb; τὸ ὑπὸ τῶν (om. Fb) AB, BG . μέσον
ἄρα Bb, postea ins. F; κείμενον τὸ δις ὑπὸ τῶν AB, BG .
μέσον ἄρα mg. m. rec. B. ὑπὸ τῶν] spat. uac. F. 3. $Z\Theta$]
corr. ex ΘZ V. 5. παράκειται V. 6. ἐπεὶ οὖν] καὶ ἐπεὶ
Theon (BFVb). 7. καί — 9. BG] om. Theon (BFVb). 9.
ἀσύμμετρον — 10. BG] punctis del. V. 9. ἄρα] om. FVb,
m. rec. B. ἐστὶν P. ἀπὸ τῆς AB τῷ] συγκείμενον ἐκ τῶν
ἀπὸ τῶν AB, BG τῷ δις Theon (BFVb). 10. ἀλλὰ — 15.
 AB, BG (prius)] om. Theon (BFVb). In mg. καὶ ἐστὶν lin. 7
— AB, BG lin. 15 addito κείμενον et signis $\times \downarrow$ ad locum
suum relat. V (lin. 10 ἀπό pro ὑπό), eadem B mg. m. 2, nisi

rectae ΔE adplicetur $E\Theta$ quadratis $AB^2 + B\Gamma^2$ aequale. itaque reliquum $\Theta Z = 2 AB \times B\Gamma$. et quoniam media est utraque $AB, B\Gamma$, etiam $AB^2 + B\Gamma^2$ media sunt. supposuimus autem, etiam $2 AB \times B\Gamma$ medium esse. et $E\Theta = AB^2 + B\Gamma^2$, $Z\Theta = 2 AB \times B\Gamma$. itaque utrumque $E\Theta, \Theta Z$ medium est. et rationali ΔE adplicata sunt. itaque utraque $\Delta\Theta, \Theta H$ rationalis est et rectae ΔE longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. iam quoniam $AB, B\Gamma$ longitudine incommensurabiles sunt, et $AB : B\Gamma = AB^2 : AB \times B\Gamma$ [prop. XXI lemma], AB^2 et $AB \times B\Gamma$ incommensurabilia sunt [prop. XI]. uerum AB^2 et $AB^2 + B\Gamma^2$ commensurabilia sunt [prop. XV], et $AB \times B\Gamma, 2 AB \times B\Gamma$ commensurabilia sunt [prop. VI]. itaque $AB^2 + B\Gamma^2$ et $2 AB \times B\Gamma$ incommensurabilia sunt [prop. XIII]. uerum $E\Theta = AB^2 + B\Gamma^2$, $\Theta Z = 2 AB \times B\Gamma$. itaque $E\Theta, \Theta Z$ incommensurabilia sunt. quare etiam $\Delta\Theta, \Theta H$ longitudine incommensurabiles sunt [VI, 1; prop. XI]. ergo $\Delta\Theta, \Theta H$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. quare ΔH irrationalis est [prop. XXXVI]. uerum ΔE rationalis est. rectangulum autem recta irrationali et rationali comprehensum irrationale est [prop. XX]. quare spatium ΔZ irrationale est, et recta ei aequalis quadrata irrationalis est [def. 4]. uerum $A\Gamma^2 = \Delta Z$. ergo $A\Gamma$ irrationalis est; uocetur

quod om. ἀπό lin. 14 — $AB, B\Gamma$ lin. 15 et del. ἀσύμμετρον
lin 13 — ἐκ τῶν lin. 14. 17. ΘZ] mut. in $Z\Theta$ V, $Z\Theta$ Bfb.
ἐστίν P. ΘZ] $Z\Theta$ Bb. 18. ἀσύμμετρος ἐστι V. μήκει]
om. Fb, m. 2 B. Deinde add. ἐδείχθησαν δὲ ἔρηται V, m.
2 B. 19. εἰσιν PB. 20. ἐστι BV, comp. Fb. 22. ἐστίν P.
καὶ ὥστε καὶ V. 23. αὐτό] om. P. ἐστι PBV, comp. Fb.
δὲ ἡ ΔZ τὸ $A\Gamma$ ἄρα ἀλογός ἐστιν F.

ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ $ΑΓ$, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων δευτέρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λθ'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συν-
5 τεθῶσι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν
ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν
μέσον, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ
μείζων.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμε-
10 τροι αἱ $ΑΒ$, $ΒΓ$ ποιοῦσαι τὰ προκείμενα· λέγω, ὅτι
ἄλογός ἐστιν ἡ $ΑΓ$.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ μέσον ἐστίν, καὶ
τὸ δις [ἄρα] ὑπὸ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ μέσον ἐστίν. τὸ δὲ
συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ ῥητόν· ἀσύμ-
15 μετρον ἄρα ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ τῷ συγ-
κειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ · ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ
τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$, ὅπερ
ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$, ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ συγκειμένῳ
ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ [ῥητόν δὲ τὸ συγκείμενον
20 ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$]· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ
τῆς $ΑΓ$. ὥστε καὶ ἡ $ΑΓ$ ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ
μείζων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μ'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συν-
25 τεθῶσι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν
ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν

2. δευτέρα] seq. schol., u. app. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp.
P, om. B F V b. 3. λθ'] om. b, μ' F. 4. συντεθῶσιν P B F.

autem ex duabus mediis secunda. quod erat demonstrandum.

XXXIX.

Si duae rectae potentia incommensurabiles componuntur, quae summam quadratorum suorum rationalem efficiant, rectangulum autem medium, tota recta irrationalis est, uocetur autem maior.

Componantur enim duae rectae
 $\overline{A} \quad \overline{B} \quad \overline{\Gamma}$ potentia incommensurabiles $AB, B\Gamma$,
 quae proposita efficiant [prop. XXXIII]. dico, $A\Gamma$ ir-
 rationalem esse.

nam quoniam $AB \times B\Gamma$ medium est, etiam $2 AB \times B\Gamma$ medium est [prop. VI, XXIII coroll.]. est autem $AB^2 + B\Gamma^2$ rationale. itaque $2 AB \times B\Gamma$ et $AB^2 + B\Gamma^2$ incommensurabilia sunt [def. 4]. quare etiam $AB^2 + B\Gamma^2 + 2 AB \times B\Gamma$, hoc est $A\Gamma^2$ [II, 4], et $AB^2 + B\Gamma^2$ incommensurabilia sunt [prop. XVI]. ergo $A\Gamma^2$ irrationale est; quare etiam $A\Gamma$ irrationalis est [def. 4]; uocetur autem maior. quod erat demonstrandum.

XL.

Si duae rectae potentia incommensurabiles componuntur, quae summam quadratorum suorum mediam efficiant, rectangulum autem rationale, tota recta irra-

5. μέν] τε V. 6. τετράγωνον b. τὸ δέ BF, δὲ τό b. 7. ἐστὶ V, comp. Fb. 12. ἐστὶ PBV, comp. Fb. 13. ἄρα] om. P. ἐστὶ PBV, comp. Fb. 16. τὰ] τό B. 18. ἐστὶν P. σύμμετρον b, corr. m. rec. ἐστὶν P. 19. ῥητόν — 20. BΓ] om. P. 20. ἄλογος F, corr. m. 1. 21. ἐστὶ PBV, comp. Fb. 22. μελίστων] seq. schol., u. app. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. BFb, comp. P. 23. μὰ F. 24. συντεθῶσιν BF. 26. δέ F.

ῥητόν, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ AB , $BΓ$ ποιοῦσαι τὰ προκείμενα· λέγω, ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ $ΑΓ$.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$ μέσον ἐστίν, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ ῥητόν, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$ τῷ δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$. ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$. ῥητὸν δὲ τὸ δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$. ἄλογος ἄρα ἡ $ΑΓ$, καλείσθω δὲ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μα'.

15 Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συνεθεῶσι ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ δύο μέσα δυναμένη.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ AB , $BΓ$ ποιοῦσαι τὰ προκείμενα· λέγω, ὅτι ἡ $ΑΓ$ ἄλογός ἐστιν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ $ΔΕ$, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ

1. ῥητόν, ἡ] in ras. V. ἐστὶ BV , comp. Fb. καλεῖται P.
3. γὰρ] supra scr. m. 1 b. 4. αἱ] supra m. 1 P. προσ-
κείμενα F, sed corr. 5. AB , corr. m. rec., P. 6. ὑπὸ F,
corr. m. 2. 7. μέσον] μέσ- in ras. V. ἐστὶ $PBVb$, comp. F.
δὲ] supra scr. m. 1 V. ῥητόν] corr. ex μέσον m. 2 V. σύμ-
μετρον B, corr. m. rec. 8. ἐστὶν P. 10. τῷ — $BΓ$] bis b,
mg. m. 1 P. Post καί add. συνθέντι Theon ($BFVb$), P m.

tionalis est, uocetur autem spatio rationali et medio aequalis quadrata.

$\left\{ \begin{array}{l} A \\ B \\ \Gamma \end{array} \right.$ Componantur enim duae rectae potentia incommensurabiles, quae proposita efficiant, AB , $B\Gamma$ [prop. XXXIV]. dico, $A\Gamma$ irrationalem esse.
nam quoniam $AB^2 + B\Gamma^2$ medium est, $2AB \times B\Gamma$ autem rationale, $AB^2 + B\Gamma^2$ et $2AB \times B\Gamma$ incommensurabilia sunt. quare etiam $A\Gamma^2$ et $2AB \times B\Gamma$ incommensurabilia sunt [prop. XVI]. uerum $2AB \times B\Gamma$ rationale est. itaque $A\Gamma^2$ irrationale est. quare $A\Gamma$ irrationalis est [def. 4]; uocetur autem spatio rationali et medio aequalis quadrata. quod erat demonstrandum.

XLI.

Si duae rectae potentia incommensurabiles componuntur, quae summam quadratorum suorum mediam efficiant, et rectangulum medium et simul summae quadratorum incommensurabile, tota recta irrationalis est, uocetur autem duobus spatiis mediis aequalis quadrata.

Componantur enim duae rectae potentia incommensurabiles AB , $B\Gamma$, quae proposita efficiant [prop. XXXV]. dico, $A\Gamma$ irrationalem esse.

ponatur rationalis ΔE , et rectae ΔE quadratis

rec. 12. ἄλογος — $A\Gamma$] mg. m. 1 P. 13. δυναμένη] seq. schol., u. app. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. BFb, comp. P. 14. μα'] mut. in μβ' m. 2 F. 15. συντεθῶσιν PBF. 17. καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον] supra scr. m. 2 V. 19. τετραγώνωι PV. ἡ] m. 2 F. 20. ἐστὶ PBV, comp. Fb. 22. τὰ προκείμενα] τὸ τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ μέσον καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ τετραγώνων Theon (BFVb, τετραγώνω FVb).

τὴν ΔE τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ ἴσον τὸ ΔZ , τῷ
 δὲ δις ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ ἴσον τὸ $H\Theta$. ὅλον ἄρα τὸ
 $\Delta\Theta$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AG τετραγώνῳ. καὶ ἐπεὶ
 5 καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ ΔZ , μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΔZ .
 καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔE παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν
 ἢ ΔH καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔE μήκει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ
 καὶ ἡ HK ῥητὴ ἐστὶ καὶ ἀσύμμετρος τῇ HZ , τουτ-
 ἐστὶ τῇ ΔE , μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρά ἐστὶ τὰ ἀπὸ
 10 τῶν AB , $B\Gamma$ τῷ δις ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$, ἀσύμμετρόν
 ἐστὶ τὸ ΔZ τῷ $H\Theta$. ὥστε καὶ ἡ ΔH τῇ HK ἀσύμμε-
 τρός ἐστιν. καὶ εἰσι ῥηταί· αἱ ΔH , HK ἄρα ῥηταί
 εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ
 ΔK ἢ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων. ῥητὴ δὲ ἡ ΔE .
 15 ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ $\Delta\Theta$ καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός
 ἐστὶν. δύναται δὲ τὸ $\Theta\Delta$ ἢ AG . ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ
 AG , καλεῖσθω δὲ δύο μέσα δυναμένην. ὅπερ ἔδει
 δεῖξαι.

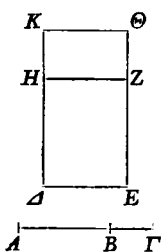
Λήμμα.

20 Ὅτι δὲ αἱ εἰρημέναι ἄλογοι μοναχῶς διαιροῦνται
 εἰς τὰς εὐθείας, ἐξ ὧν σύγκεινται ποιουνσῶν τὰ προ-
 κείμενα εἶδη, δειξομεν ἤδη προεκθέμενοι λημμάτων
 τοιοῦτον·

Ἐκκείσθω εὐθεῖα ἡ AB καὶ τετμήσθω ἡ ὅλη εἰς
 25 ἄνισα καθ' ἑκάτερον τῶν Γ , Δ , ὑποκείσθω δὲ μεῖζων

1. ΔE] corr. ex ΔA m. 2 P. 3. $\Theta\Delta$ P. 6. ΔE] corr.
 ex Δ m. rec. B. 7. διὰ — 9. μήκει] mg. m. 2 F. 8. ἐστὶν B.
 τουτεστιν B. 9. ἀσύμμετρόν ἐστὶ τό BV. 10. τῷ — $B\Gamma$]
 mg. m. 1 P (τῷ corr. ex τό m. rec.). 11. ἄρα ἐστὶ P. ΔH]
 $H\Delta$ b. 12. ἐστὶ Vb, comp. F m. 2. εἰσιν B. Post αἱ
 del. δέ F. ἄρα] m. 2 F. 13. εἰσιν P. 14. ΔK] K e corr.
 m. 1 b. 16. ἐστὶ V, comp. b et m. 2 F. $\Theta\Delta$] in ras. Vb,
 $\Delta\Theta$ corr. ex ΔH m. 2 B. ἡ AG] m. 2 B. ἄρα] γάρ B.

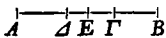
$AB^2 + BG^2$ aequale adplicetur ΔZ , rectangulo autem $2 AB \times BG$ aequale $H\Theta$. itaque $\Delta\Theta = A\Gamma^2$ [II, 4].



et quoniam $AB^2 + BG^2$ medium est et $= \Delta Z$, etiam ΔZ medium est. et rectae rationali ΔE adplicatum est. itaque ΔH rationalis est et rectae ΔE longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. eadem de causa etiam HK rationalis est et rectae HZ , hoc est ΔE , longitudine incommensurabilis. et quoniam $AB^2 + BG^2$ et $2 AB \times BG$ incommensurabilia sunt, ΔZ et $H\Theta$ incommensurabilia sunt. quare etiam ΔH , HK incommensurabiles sunt [VI, 1; prop. XI]. et sunt rationales; itaque ΔH , HK rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo ΔK irrationalis est, ex duobus nominibus quae uocatur [prop. XXXVI]. ΔE autem rationalis est. itaque $\Delta\Theta$ irrationale est, et recta ei aequalis quadrata irrationalis [def. 4]. est autem $A\Gamma^2 = \Delta\Theta$. ergo $A\Gamma$ irrationalis est; uocetur autem duobus spatiis mediis aequalis quadrata. quod erat demonstrandum.

Lemma.

Rectas autem irrationales, quas nominauimus, uno tantum modo in rectas diuidi, ex quibus compositae sint proposita efficientibus, demonstrabimus huiusmodi lemmate praemisso.



17. δυναμένη] seq. schol., u. app. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. B F V b. 19. λήμμα] om. B V, m. rec. P. 20. ὅτι] τι V. 21. προσκειμένα F, corr. m. 2. 22. προθέμενοι P, προσεκθέμενοι B et F, sed corr. 24. Ante εὐθεία ras. 3 litt. V. ἡ ὅλη] ὅλη F V b. 25. καὶ καθ' F. ἐκάτερα B V. ὑποκείσθω δέ] καὶ ὑποκείσθω P.

ἡ $ΑΓ$ τῆς $ΔΒ$ · λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ μείζονά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$.

Τετμήσθω γὰρ ἡ $ΑΒ$ δίχα κατὰ τὸ $Ε$. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ $ΑΓ$ τῆς $ΔΒ$, κοινὴ ἀφηγήσθω ἡ $ΔΓ$.
 5 λοιπὴ ἄρα ἡ $ΑΔ$ λοιπῆς τῆς $ΓΒ$ μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἡ $ΑΕ$ τῇ $ΕΒ$ · ἐλάττων ἄρα ἡ $ΔΕ$ τῆς $ΕΓ$ · τὰ $Γ$, $Δ$ ἄρα σημεῖα οὐκ ἴσον ἀπέχουσι τῆς διχοτομίας. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΕΓ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΕΒ$, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ ὑπὸ τῶν
 10 $ΑΔ$, $ΔΒ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ $ΔΕ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΕΒ$, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΕΓ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΔΕ$ · ὥν τὸ ἀπὸ τῆς $ΔΕ$ ἐλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς $ΕΓ$ · καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ ἐλασσόν
 15 ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$. ὥστε καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ ἐλασσόν ἐστι τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$. καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ μείζον ἐστι τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

20

μβ'.

Ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων κατὰ ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.

Ἔστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ $ΑΒ$ διηρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ $Γ$ · αἱ $ΑΓ$, $ΓΒ$ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνά-
 25 μει μόνον σύμμετροι. λέγω, ὅτι ἡ $ΑΒ$ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται εἰς δύο ῥητάς δυνάμει μόνον συμμέτρους.

2. $ΑΔ$] $ΑΓ$ corr. in $ΑΒ$ m. rec. b. 4. Post κοινὴ del.
 δέ $Γ$. $ΔΓ$] $ΑΓ$ b, $ΔΓ$ καὶ P. 6. ἐλάσσων P. ἄρα ἐστίν P.
 7. $Δ$, $Γ$ P. 9. μήν] om. P. 10. τῆς $ΔΕ$ V. τῷ] τοῦ b.

Ponatur recta AB et tota in Γ , Δ in partes inaequales secetur, et supponatur $A\Gamma > \Delta B$. dico, esse $A\Gamma^2 + \Gamma B^2 > A\Delta^2 + \Delta B^2$. nam AB in duas partes aequales secetur in E . et quoniam $A\Gamma > \Delta B$, subtrahatur, quae communis est, $\Delta\Gamma$. itaque relinquitur $A\Delta > \Gamma B$. uerum $AE = EB$. itaque $\Delta E < E\Gamma$. itaque puncta Γ , Δ a puncto medio aequaliter non distant. et quoniam $A\Gamma \times \Gamma B + E\Gamma^2 = EB^2$ [II, 5], et $A\Delta \times \Delta B + \Delta E^2 = EB^2$ [id.], erit $A\Gamma \times \Gamma B + E\Gamma^2 = A\Delta \times \Delta B + \Delta E^2$. quorum $\Delta E^2 < E\Gamma^2$. itaque reliquum $A\Gamma \times \Gamma B < A\Delta \times \Delta B$. quare etiam $2 A\Gamma \times \Gamma B < 2 A\Delta \times \Delta B$. ergo etiam reliquum¹⁾ $A\Gamma^2 + \Gamma B^2 > A\Delta^2 + \Delta B^2$; quod erat demonstrandum.

XLII.

Recta ex duobus nominibus in uno tantum puncto in nomina diuiditur.

Ex duobus nominibus sit AB in puncto Γ in nomina diuisa. itaque $A\Gamma$, ΓB rationales sunt potentia tantum commensurabiles [prop. XXXVI]. dico, AB in nullo alio puncto in duas rationales potentia tantum commensurabiles diuidi.

1) Nam

$$A\Gamma^2 + \Gamma B^2 + 2 A\Gamma \times \Gamma B = AB^2 = A\Delta^2 + \Delta B^2 + 2 A\Delta \times \Delta B \quad (\text{II, 4}).$$

11. ΓB] in ras. F. 12. $\tau\eta\varsigma$] postea ins. F. 13. $\acute{\omega}\nu - \Delta E$] om F. $\acute{\epsilon}\lambda\alpha\sigma\omicron\nu$ V. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$] om. V. 14. $\acute{\epsilon}\lambda\alpha\tau\tau\omicron\nu$ BVb, comp. F (in B supra scr. $\mu\epsilon\iota\zeta\omicron\nu$ m. rec., sed del.); item lin. 16. 16. $\kappa\alpha\iota$] supra scr. F. 18. $\acute{\alpha}\pi\acute{o}$] corr. ex $\acute{\upsilon}\pi\acute{o}$ m. 2 V. 19. Ante $\acute{\omicron}\pi\epsilon\rho$ add. $\acute{\epsilon}\acute{\iota}\pi\epsilon\rho$ $\sigma\upsilon\nu\nu\alpha\mu\phi\acute{o}\tau\epsilon\rho\alpha$ $\acute{\iota}\sigma\alpha$ $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ $\tau\acute{\omega}$ ($\tau\acute{\omega}\nu$ b) $\acute{\alpha}\pi\acute{o}$ $\tau\eta\varsigma$ AB Theon (BFVb), m. rec. P. 21. $\kappa\alpha\theta'$ b. 24. $\kappa\alpha\tau\acute{\alpha}$] supra scr. m. 1 P. $\acute{\epsilon}\acute{\iota}\sigma\iota\nu$ PBF.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διηγήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ , ὥστε καὶ τὰς $\Delta\Delta$, ΔB ρητὰς εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους. φανερόν δὴ, ὅτι ἡ $ΑΓ$ τῇ ΔB οὐκ ἔστιν ἡ αὐτή. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω. ἔσται δὲ καὶ ἡ $\Delta\Delta$ τῇ ΓB ἡ αὐτή· καὶ ἔσται ὥς ἡ $ΑΓ$ πρὸς τὴν ΓB , οὕτως ἡ $B\Delta$ πρὸς τὴν ΔA , καὶ ἔσται ἡ AB κατὰ τὸ αὐτὸ τῇ κατὰ τὸ Γ διαιρέσει διαιρεθεῖσα καὶ κατὰ τὸ Δ · ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. οὐκ ἄρα ἡ $ΑΓ$ τῇ ΔB ἔστιν ἡ αὐτή. διὰ δὲ τοῦτο καὶ τὰ Γ , Δ σημεῖα οὐκ ἴσον ἀπέχουσι τῆς διχοτομίας. ὥς ἄρα διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, ΓB τῶν ἀπὸ τῶν $\Delta\Delta$, ΔB , τούτῳ διαφέρει καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν $\Delta\Delta$, ΔB τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, ΓB διὰ τὸ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, ΓB μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, ΓB καὶ τὰ ἀπὸ τῶν $\Delta\Delta$, ΔB μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $\Delta\Delta$, ΔB ἴσα εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς AB . ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, ΓB τῶν ἀπὸ τῶν $\Delta\Delta$, ΔB διαφέρει ρητῶ· ρητὰ γὰρ ἀμφοτέρω· καὶ τὸ δις ἄρα ὑπὸ τῶν $\Delta\Delta$, ΔB τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, ΓB διαφέρει ρητῶ μέσα ὄντα· ὅπερ ἄτοπον· μέσον γὰρ μέσου οὐχ ὑπερέχει ρητῶ. Οὐκ ἄρα ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· καθ' ἓν ἄρα μόνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μγ'.

Ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται.

1. διαιρεῖσθω V. καὶ κατὰ] κατὰ BFVb. 3. ΔB] $B\Delta$ e corr. m. 2 V. 4. δὴ] corr. ex δέ V. $\Delta\Delta$] corr. ex $ΑΓ$ V. 5. ΓB] mut. in ΓB V. ὥς ἡ — 6. ἔσται] m. 2 B. 6. τὴν] om. Fb. ἡ] ὥς ἡ b (corr.), ὥς supra scr. m. 1 F. αὐτό] αὐ- e corr. V; αὐτὸ τμήμα P, τμήμα supra scr. m. 2 V. 7. τῇ κατὰ] m. rec. P. Post καὶ add. τῇ supra m. 1 V. 8. ΔB] AB φ. 10. ἀπέχουσιν B. τοῦ διχοτομίου P, corr. m. rec. ὥ] ὥς φ. 12. $ΑΓ$, ΓB P. τοῦ] corr. ex ου

^A Nam, si fieri potest, in Δ diuidatur ita, ut
^A etiam $A\Delta$, ΔB rationales sint potentia tantum
^A commensurabiles. manifestum est igitur, $A\Gamma$ et
^A ΔB easdem non esse. sint enim, si fieri potest.
^A itaque etiam $A\Delta$ et ΓB eadem erunt. et erit
^A $A\Gamma : \Gamma B = B\Delta : \Delta A$, et AB etiam in Δ eodem
^A modo ac in Γ diuisa erit, id quod contra hypo-
^A thesim est. quare $A\Gamma$, ΔB eadem non sunt.
^B ea de causa Γ , Δ puncta a medio puncto
 aequaliter non distant [cfr. lemma]. quo igitur
 $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ ab $A\Delta^2 + \Delta B^2$ differt [u. lemma], eo
 etiam $2A\Delta \times \Delta B$ a $2A\Gamma \times \Gamma B$ differt, quia $A\Gamma^2$
 $+ \Gamma B^2 + 2A\Gamma \times \Gamma B = AB^2 = A\Delta^2 + \Delta B^2 + 2A\Delta$
 $\times \Delta B$ [II, 4]. uerum $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ ab $A\Delta^2 + \Delta B^2$
 spatio rationali differt; nam utrumque rationale est.
 itaque etiam $2A\Delta \times \Delta B$ a $2A\Gamma \times \Gamma B$ spatio ratio-
 nali differt, quamquam media sunt [prop. XXI]; quod
 absurdum est; nam spatium medium non excedit me-
 dium spatio rationali [prop. XXVI].

Ergo recta ex duobus nominibus non diuiditur in
 punctis diuersis; itaque in uno tantum diuiditur; quod
 erat demonstrandum.

XLIII.

Recta ex duabus mediis prima in uno tantum
 puncto diuiditur.

m. rec. P. $\tau\omega\nu$] om. P. $A\Gamma, \Gamma B$] $A\Delta, \Delta B$ P. 15. AB] supra scr. Δ b. 16. Post ΓB ras. magna V. $\tau\omega\nu$] corr. ex $\tau\omega$ b. 17. $\alpha\gamma\alpha$] supra scr. m. 2 F. $A\Delta B$ P, corr. m. rec. 18. $A\Gamma B$ Pb, corr. m. rec. 19. $\acute{o}\pi\epsilon\rho\ \acute{\alpha}\tau\omicron\pi\omicron\nu$] om. Theon (BFVb). $\gamma\acute{\alpha}\rho$] $\delta\acute{\epsilon}$ Theon (BFVb). 21. $\delta\iota\epsilon\gamma\epsilon\iota\tau\alpha\iota$ P, corr. m. rec. $\acute{o}\pi\epsilon\rho\ \acute{\epsilon}\delta\epsilon\iota\ \delta\epsilon\iota\chi\epsilon\iota\tau\alpha\iota$] comp. P, om. BFVb. 25. $\delta\iota\alpha\iota\gamma\epsilon\iota\tau\alpha\iota\ \epsilon\iota\varsigma\ \tau\grave{\alpha}\ \acute{o}\nu\omicron\mu\alpha\tau\alpha$ Theon (BFVb).

"Εστω ἐκ δύο μέσων πρώτη ἡ AB διηρημένη κατὰ τὸ Γ , ὥστε τὰς $ΑΓ$, ΓB μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους ῥητὸν περιεχούσας· λέγω, ὅτι ἡ AB κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

- 5 $Εἰ$ γὰρ δυνατόν, διηρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ , ὥστε καὶ τὰς $ΑΔ$, ΔB μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους ῥητὸν περιεχούσας. ἐπεὶ οὖν, ᾧ διαφέρει τὸ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, ΔB τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, ΓB , τούτῳ διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, ΓB τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, ΔB ,
 10 ῥητῶ δὲ διαφέρει τὸ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, ΔB τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, ΓB · ῥητὰ γὰρ ἀμφοτέρω· ῥητῶ ἄρα διαφέρει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, ΓB τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, ΔB μέσα ὄντα· ὅπερ ἄτοπον.

- Οὐκ ἄρα ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη κατ' ἄλλο καὶ
 15 ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα· καθ' ἓν ἄρα μόνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μδ'.

Ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται.

- 20 "Εστω ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἡ AB διηρημένη κατὰ τὸ Γ , ὥστε τὰς $ΑΓ$, ΓB μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους μέσον περιεχούσας· φανερόν δὴ, ὅτι τὸ Γ οὐκ ἔστι κατὰ τῆς διχοτομίας, ὅτι οὐκ εἰσὶ μήκει σύμμετροι. λέγω, ὅτι ἡ AB κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαι-
 25 ρεῖται.

$Εἰ$ γὰρ δυνατόν, διηρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ , ὥστε

1. ἡ AB] supra scr. F, corr. ex ἡ $ΑΔ$ m. rec. P. 4. οὐ] om. b. 5. καὶ] om. Fb. 9. τῶν ἀπό] in ras. m. 1 P. 10. ΔB] supra scr. m. 1 F. 13. Post ὄντα add. μέσον μέσον ὑπερέχει ῥητῶ φ. 16. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 17. μδ'] mut. in με' F. 19. διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα

Sit AB ex duabus mediis prima in Γ ita diuisa, ut $A\Gamma$, ΓB mediae sint potentia tantum commensurabiles spatium rationale comprehendentes [prop. XXXVII]. dico, AB in nullo alio puncto diuidi.

nam, si fieri potest, in Δ ita diuidatur, ut etiam $A\Delta$, ΔB mediae sint potentia tantum commensurabiles spatium rationale comprehendentes. iam quoniam, quo differt $2 A\Delta \times \Delta B$ a $2 A\Gamma \times \Gamma B$, eo differt $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ ab $A\Delta^2 + \Delta B^2$ [prop. XLI lemma], et $2 A\Delta \times \Delta B$ a $2 A\Gamma \times \Gamma B$ spatio rationali differt (nam utrumque rationale est), etiam $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ ab $A\Delta^2 + \Delta B^2$ spatio rationali differt, quamquam media sunt; quod absurdum est [prop. XXVI].

Ergo recta ex duabus mediis prima in nomina non diuiditur in punctis diuersis; itaque in uno tantum diuiditur; quod erat demonstrandum.

XLIV.

Recta ex duabus mediis secunda in uno tantum puncto diuiditur.

Sit AB ex duabus mediis secunda in Γ diuisa, ita ut $A\Gamma$, ΓB mediae sint potentia tantum commensurabiles spatium medium comprehendentes [prop. XXXVIII]. manifestum est igitur, Γ punctum medium non esse, quod longitudine commensurabiles non sunt. dico, AB in nullo alio puncto diuidi.

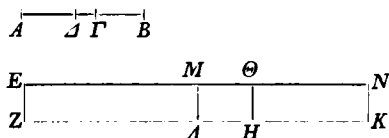
nam, si fieri potest, etiam in Δ diuidatur, ita ut

Theon (BFVb). 23. $\xi\sigma\tau\iota\nu$ B. $\tau\eta\nu$ διχοτομίας V. $\delta\tau\iota$ $\epsilon\pi\epsilon\iota\delta\eta\pi\epsilon\rho$ Theon (BFVb). $\epsilon\lambda\epsilon\gamma$ PB. 26. $\kappa\alpha\iota$] om. Theon (BFVb).

τὴν $ΑΓ$ τῇ $ΔΒ$ μὴ εἶναι τὴν αὐτήν, ἀλλὰ μείζονα καθ' ὑπόθεσιν τὴν $ΑΓ$. δῆλον δὴ, ὅτι καὶ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$, ὡς ἐπάνω ἐδείξαμεν, ἐλάσσονα τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$. καὶ τὰς $ΑΔ$, $ΔΒ$ μέσας εἶναι δυνάμει
 5 μόνον συμμετρους μέσον περιεχούσας. καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ EZ , καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ ἴσον παρὰ τὴν EZ παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον παραβεβλήσθω τὸ EK , τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ ἴσον ἀφηγήσθω τὸ $ΕΗ$. λοιπὸν ἄρα τὸ $ΘΚ$ ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν
 10 $ΑΓ$, $ΓΒ$. πάλιν δὴ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$, ἅπερ ἐλάσσονα ἐδείχθη τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$, ἴσον ἀφηγήσθω τὸ $ΕΑ$. καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ $ΜΚ$ ἴσον τῷ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$. καὶ ἐπεὶ μέσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$, μέσον ἄρα [καὶ] τὸ $ΕΗ$. καὶ παρὰ ῥητὴν
 15 τὴν EZ παράκειται ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $EΘ$ καὶ ἀσύμμετρος τῇ EZ μήκει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ $ΘΝ$ ῥητὴ ἐστὶ καὶ ἀσύμμετρος τῇ EZ μήκει. καὶ ἐπεὶ αἱ $ΑΓ$, $ΓΒ$ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ $ΑΓ$ τῇ $ΓΒ$ μήκει. ὡς δὲ ἡ $ΑΓ$ πρὸς
 20 τὴν $ΓΒ$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ τῷ ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ σύμμετρά ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$. δυνάμει γάρ εἰσι

1. $ΑΓ$] $Γ$ in ras. F. 2. κατὰ P. δῆλον δὴ, ὅτι] δηλαδὴ Theon (BFVb); ὅτι add. B m. 2. 3. $ΑΓ$, $ΓΒ$ μείζονα τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$, ὡς ἐπάνω ἐδείξαμεν Theon (BFVb). 4. Ante καὶ add. ἔστω δέ* V, et in mg. m. 1 *ἐλάσσονα τῶν ἀπὸ $ΑΓ$, $ΓΒ$. 5. κείσθω V, corr. m. 1. 6. τῷ] corr. ex τό V. 7. παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον] om. Theon (BFVb). 9. $ΘΚ$] in ras. V. 10. ἅπερ — 11. $ΓΒ$] om. Fb, mg. m. 2 BV. 11. ἐλάττονα V. 12. $ΕΑ$] ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ B. Deinde add. πάλιν δὴ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ ἐλασσον ἐδείχθη τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ B, ἐπεὶ καὶ (καὶ ἐπεὶ V) τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ ἐλάσσονα (ἐλάττονα F) ἐδείχθη τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ FVb, in V del.

AG , AB eadem non sint, sed AG maior supponatur (manifestum est igitur, esse etiam $AA^2 + AB^2 < AG^2 + GB^2$, ut supra demonstrauius [prop. XLI lemma]), et ut AA , AB mediae sint potentia tantum commensurabiles spatium medium comprehendentes. et pona-



tur rationalis EZ , et quadrato AB^2 aequale rectae EZ parallelogrammum rectangulum EK adplicetur [I, 44], quadratis autem $AG^2 + GB^2$ aequale auferatur EH . itaque quod relinquitur, $\Theta K = 2 AG \times GB$ [II, 4]. rursus quadratis $AA^2 + AB^2$ (quae minora esse quam $AG^2 + GB^2$, demonstrauius) aequale auferatur EA . itaque $MK = 2 AA \times AB$. et quoniam $AG^2 + GB^2$ media sunt, EH medium est. et rectae rationali EZ adplicatum est. ergo $E\Theta$ rationalis est et rectae EZ longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. eadem de causa etiam ΘN rationalis est et rectae EZ longitudine incommensurabilis. et quoniam AG , GB mediae sunt potentia tantum commensurabiles, AG et GB longitudine incommensurabiles sunt. sed $AG:GB = AG^2:AG \times GB$ [prop. XXI lemma]. itaque etiam AG^2 et $AG \times GB$ incommensurabilia sunt [prop.

ἐστὶ τῷ P. 13. ἐστὶ] in ras. m. 1 b, ἐστὶν B. 14. καὶ τό] τό BFV b. 16. ΘN] EH b, EN in ras. m. 1 F. 17. ἐστὶν P. 18. εἰσὶν B. 19. GB] $B\Gamma$ B. 20. GB] in ras. V. 21. σύμμετρον V, corr. m. 1. AG] A e corr. V. 22. ἀλλά] supra scr. m. 1 V. τῷ] corr. ex τό m. 1 F. τῷ μέν] e corr. V. 23. GB] B eras. B.

σύμμετροι αὖ $ΑΓ$, $ΓΒ$. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ σύμμετρόν ἐστι τὸ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$. καὶ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ ἄρα ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ ἴσον ἐστὶ
 5 τὸ $ΕΗ$, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ ἴσον τὸ $ΘΚ$. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΕΗ$ τῷ $ΘΚ$. ὥστε καὶ ἡ $ΕΘ$ τῇ $ΘΝ$ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει. καὶ εἰσι ρηταί· αὖ $ΕΘ$, $ΘΝ$ ἄρα ρηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἐὰν δὲ δύο ρηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσιν,
 10 ἡ ὄλη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων· ἡ $ΕΝ$ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ διηρημένη κατὰ τὸ $Θ$. κατὰ τὰ αὐτὰ δὲ δειχθήσονται καὶ αὖ $ΕΜ$, $ΜΝ$ ρηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ ἔσται ἡ $ΕΝ$ ἐκ δύο ὀνομάτων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο διηρημένη τό τε $Θ$
 15 καὶ τὸ $Μ$, καὶ οὐκ ἐστιν ἡ $ΕΘ$ τῇ $ΜΝ$ ἡ αὐτή, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ μείζονά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$. ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ μείζονά ἐστι τοῦ δις ὑπὸ $ΑΔ$, $ΔΒ$. πολλῶν ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$, τουτέστι τὸ $ΕΗ$, μείζον ἐστὶ τοῦ δις ὑπὸ τῶν
 20 $ΑΔ$, $ΔΒ$, τουτέστι τοῦ $ΜΚ$. ὥστε καὶ ἡ $ΕΘ$ τῆς $ΜΝ$ μείζων ἐστίν. ἡ ἄρα $ΕΘ$ τῇ $ΜΝ$ οὐκ ἐστιν ἡ αὐτή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

1. Supra σύμμετροι add. α Fb. τῷ δέ — $ΓΒ$] mg. m. 1 P. 2. τό] corr. ex τῷ Vb. τά] supra scr. m. 2 F. 3. σύμμετρα b, et B, corr. m. 2; α- del. F. 4. $ΓΒ$ μήκει V. $ΓΒ$] (alt.) $Γ$ e corr. V. 5. ἴσον ἐστὶ P. 6. ἐστίν P. $ΕΗ$] H in ras. V. 8. $ΕΘ$] "Θ' E F. εἰσιν P. 9. ἐντεθῶσιν B, corr. m. 2. 10. ἐκ] ἐκ τῶν F. 11. ἄρα] om. P. ἐστίν P. 12. $ΘΚ$ b. 15. ἐστιν] ἔσται V. ἡ] supra scr. m. 1 F. ἡ] postea ins. F. ὅτι] ἐπειδήπερ Theon (BFVb). 17. Mg. m. 1: γρ. τὰ δὲ ἀπὸ (τῶν $Α$, $Δ$ F) Fb. 18. τῶν $ΑΔ$ FV. 19. τουτέστι P. 20. τουτέστιν P. τοῦ] e corr. V. $ΜΚ$] M seq. ras. 1 litt. B. ἡ] supra scr. m.

XI]. uerum AG^2 et $AG^2 + GB^2$ commensurabilia sunt; nam AG , GB potentia commensurabiles sunt. et $AG \times GB$, $2AG \times GB$ commensurabilia sunt [prop. VI]. quare etiam $AG^2 + GB^2$ et $2AG \times GB$ incommensurabilia sunt [prop. XIII]. uerum $EH = AG^2 + GB^2$, $\Theta K = 2AG \times GB$. itaque EH , ΘK incommensurabilia sunt. quare etiam $E\Theta$, ΘN longitudine incommensurabiles sunt [VI, 1; prop. XI]. et sunt rationales. itaque $E\Theta$, ΘN rationales sunt potentia tantum commensurabiles. sin duae rectae rationales potentia tantum commensurabiles componuntur, tota irrationalis est ex duobus nominibus, quae uocatur [prop. XXXVI]. itaque EN ex duobus nominibus est in Θ diuisa. eodem igitur modo demonstrabimus, etiam EM , MN rationales esse potentia tantum commensurabiles. et EN , quae ex duobus nominibus est, in punctis diuersis Θ et M diuisa erit [quod absurdum est; prop. XLII], et $E\Theta$, MN eadem non sunt, quod $AG^2 + GB^2 > AD^2 + DB^2$; uerum $AD^2 + DB^2 > 2AD \times DB$.¹⁾ quare multo magis $AG^2 + GB^2 > 2AD \times DB$, hoc est $EH > MK$. quare etiam $E\Theta > MN$ [VI, 1]. itaque $E\Theta$, MN eadem non sunt; quod erat demonstrandum.

1) U. prop. LIX lemma.

1 b. 21. *μείζον* V, sed corr. *τῇ*] *τῆς* b. Post *αὐτῇ* add. *ἡ EN ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων καλουμένη κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημείον διαιρεῖται ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἐκ δύο μέσων δευτέρᾳ κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημείον διαιρεῖται ἢ καθ' ἓν μόνον* F. 22. *ὅπερ εἶδει δεῖξαι*] om. BVb.

μέ'.

Ἡ μείζων κατὰ τὸ αὐτὸ μόνον σημεῖον διαιρεῖται.

Ἔστω μείζων ἡ AB διηρημένη κατὰ τὸ Γ , ὥστε
 5 τὰς AG , GB δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι ποιούσας τὸ
 μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AG , GB τετραγώνων
 ῥητόν, τὸ δ' ὑπὸ τῶν AG , GB μέσον· λέγω, ὅτι ἡ
 AB κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διηρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ , ὥστε
 10 καὶ τὰς $A\Delta$, ΔB δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι ποιού-
 σας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB ῥη-
 τόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον. καὶ ἐπεί, ᾧ διαφέρει
 τὰ ἀπὸ τῶν AG , GB τῶν ἀπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB , τούτῳ
 διαφέρει καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB τοῦ δις ὑπὸ
 15 τῶν AG , GB , ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν AG , GB τῶν ἀπὸ
 τῶν $A\Delta$, ΔB ὑπερέχει ῥητῶ· ῥητὰ γὰρ ἀμφοτέρω·
 καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB ἄρα τοῦ δις ὑπὸ τῶν
 AG , GB ὑπερέχει ῥητῶ μέσα ὄντα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύ-
 νατον. οὐκ ἄρα ἡ μείζων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον
 20 διαιρεῖται· κατὰ τὸ αὐτὸ ἄρα μόνον διαιρεῖται· ὅπερ
 εἶδει δεῖξαι.

μς'.

Ἡ ῥητόν καὶ μέσον δυναμένη καθ' ἓν μόνον
 σημμεῖον διαιρεῖται.

Ἔστω ῥητόν καὶ μέσον δυναμένη ἡ AB διηρημένη
 25 κατὰ τὸ Γ , ὥστε τὰς AG , GB δυνάμει ἀσυμμέτρους

1. μς' F. 2. Supra τό add. m. 2 καὶ ἐν P. διαιρεῖται
 εἰς τὰ ὀνόματα Theon (BFVb). 5. GB] supra scr. B. Supra
 ποιούσας scr. καὶ m. 1 V. 6. AG] GA Fb; mg. m. 1 AB ,
 $B\Gamma$ b. τετραγώνων] supra scr. o b, -ων in ras. V. 7.
 ῥητός F. δέ BF. 9. καὶ] om. Theon (BFVb). 10. δν-

XLV.

Recta maior in uno tantum puncto diuiditur.

Sit AB maior in Γ ita diuisa, ut $A\Gamma$, ΓB potentia incommensurabiles sint efficientes summam $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ rationalem, $A\Gamma \times \Gamma B$ autem medium [prop. XXXIX]. dico, AB in nullo alio puncto diuidi.

$\left[\begin{array}{l} A \\ \Delta \\ \Gamma \\ B \end{array} \right.$ nam, si fieri potest, etiam in Δ diuidatur, ita ut $A\Delta$, ΔB potentia incommensurabiles sint efficientes summam $A\Delta^2 + \Delta B^2$ rationalem, $A\Delta \times \Delta B$ autem medium. et quoniam, quo $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ ab $A\Delta^2 + \Delta B^2$ differt [prop. XLI lemma], eo etiam $2 A\Delta \times \Delta B$ a $2 A\Gamma \times \Gamma B$ differt [cfr. p. 122, 10 sq.], et $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ excedit $A\Delta^2 + \Delta B^2$ spatio rationali (nam utrumque rationale est), etiam $2 A\Delta \times \Delta B$ excedit $2 A\Gamma \times \Gamma B$ spatio rationali, quamquam media sunt; quod fieri non potest [prop. XXVI]. itaque maior non diuiditur in punctis diuersis. ergo in uno tantum diuiditur; quod erat demonstrandum.

XLVI.

Recta spatio rationali et medio aequalis quadrata in uno tantum puncto diuiditur.

Sit AB recta spatio rationali et medio aequalis quadrata in Γ ita diuisa, ut $A\Gamma$, ΓB potentia incommensurabiles sint efficientes $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ medium,

$\nu\acute{\alpha}\mu\epsilon\iota\varsigma$ P, corr. m. 1. 11. $\tau\acute{\omega}\nu \acute{\alpha}\nu\omicron$] m. 2 V. $\phi\eta\tau\acute{\omega}\nu$ F.
 12. $\delta\acute{\epsilon}$ F. $\acute{\alpha}\tau\acute{\omega}\nu$ P, corr. m. 1. 14. $\tau\acute{o}$] corr. ex $\tau\acute{o}\upsilon$ V.
 17. $\tau\acute{o}$] $\tau\acute{\alpha}$ V. 20. $\acute{o}\pi\epsilon\rho \xi\delta\epsilon\iota \delta\epsilon\iota\chi\alpha\iota$] comp. P, om. BFVb.
 24. Post $\delta\iota\alpha\iota\kappa\epsilon\iota\tau\alpha\iota$ add. $\epsilon\iota\varsigma \tau\acute{\alpha} \acute{o}\nu\omicron\mu\alpha\tau\alpha$ Theon (BFVb), P m. 2.

εἶναι ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν
 ΑΓ, ΓΒ μέσον, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ῥητόν·
 λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διηρησθῶ καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε
 5 καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι ποιού-
 σας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ
 μέσον, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ῥητόν. ἐπεὶ οὖν,
 ὧ διαφέρει τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν
 ΑΔ, ΔΒ, τούτῳ διαφέρει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ
 10 τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ
 τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ὑπερέχει ῥητῶ, καὶ τὰ
 ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπ-
 ερέχει ῥητῶ μέσα ὄντα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα
 ἡ ῥητόν καὶ μέσον δυναμένη κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο ση-
 15 μεῖον διαιρεῖται. κατὰ ἓν ἄρα σημεῖον διαιρεῖται·
 ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μζ.

Ἡ δύο μέσα δυναμένη καθ' ἓν μόνον ση-
 μεῖον διαιρεῖται.

20 Ἔστω [δύο μέσα δυναμένη] ἡ ΑΒ διηρημένη κατὰ
 τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι
 ποιούσας τὸ τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ
 μέσον καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον καὶ ἔτι ἀσύμ-
 μετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν. λέγω, ὅτι
 25 ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται ποιούσα τὰ
 προκείμενα.

2. ΓΒ] in ras. V. δέ] δ' B, συγκείμενον ἐκ τῶν V. δίς] om. Theon (BFVb). ὑπό] corr. ex ἀπό V. 3. Post λέγω ras. 1 litt. F. ΑΒ εὐθεῖα V. 4. καί] om. Bb, postea add. FV. 5. καί] supra scr. V. 6. ἀπό τῶν — 7. ῥητόν] in ras. m. 1 F. 6. ΔΒ] ΔB, KZ b. 7. δέ] δ' BFb, δὲ συγ- κείμενον ἐκ τῶν V. δίς] om. Theon (BFVb). 10. δέ] om.

2 $AG \times GB$ autem rationale [prop. XL]. dico, AB in nullo alio puncto diuidi. •

nam si fieri potest, etiam in Δ ita diuidatur, ut $A\Delta$, ΔB potentia incommensurabiles sint efficientes $A\Delta^2 + \Delta B^2$ medium, 2 $A\Delta \times \Delta B$ autem rationale. iam quoniam, quo differt 2 $AG \times GB$ a 2 $A\Delta \times \Delta B$, eo etiam $A\Delta^2 + \Delta B^2$ ab $AG^2 + GB^2$ differt, 2 $AG \times GB$ autem 2 $A\Delta \times \Delta B$ excedit spatio rationali, etiam $A\Delta^2 + \Delta B^2$ excedit $AG^2 + GB^2$ spatio rationali, quamquam media sunt; quod fieri non potest [prop. XXVI]. itaque recta spatio rationali et medio aequalis quadrata non diuiditur in punctis diuersis. ergo in uno tantum puncto diuiditur; quod erat demonstrandum.

XLVII.

Recta duobus spatiis mediis aequalis quadrata in uno tantum puncto diuiditur.

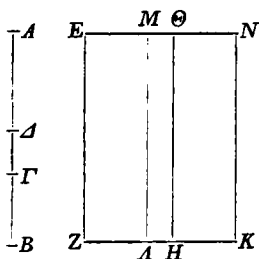
Sit AB in Γ ita diuisa, ut AG , GB potentia incommensurabiles sint efficientes $AG^2 + GB^2$ medium et $AG \times GB$ medium et simul quadratis $AG^2 + GB^2$ incommensurabile [prop. XLI]. dico, AB in nullo alio puncto diuidi, ita ut proposita efficiat.

B V. δὲς ἄρα V. 11. τὰ] τό P. 12. τῶν] (alt.) corr. ex τὰ m. 2 F. 14. σημεία P, corr. m. 1. 15. καθ' BFb. κατά — 16. δεῖξαι] m. 2 V. 16. ὅπερ εἶδει δεῖξαι] comp. P, om. BF. 17. μξ'] e corr. F. 18. ἡ δύο μέσα] in ras. m. 1 F. 19. διαίρεται εἰς τὰ ὀνόματα Theon (BFVb). 20. δύο μέσα δυναμένη] om. P. 23. καὶ τό — μέσον] mg. m. 1 P. τό] τὸ συγκείμενον ἐν τῶν V. 24. τῷ συγκειμένῳ] ego; τὸ συγκείμενον PBFVb. Post αὐτῶν add. τῷ (corr. ex τό m. rec. P) συγκειμένῳ (corr. ex -μενον m. rec. P) ἐν τῶν ὑπ' (corr. ex ἀπ' m. 2 V, ἀπ' b) αὐτῶν (τετραγώνων add. b, F m. 2) BFVb, P mg. m. 1.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διηγήσθω κατὰ τὸ Δ , ὥστε πάλιν
 δηλονότι τὴν $ΑΓ$ τῇ ΔB μὴ εἶναι τὴν αὐτήν, ἀλλὰ
 μείζονα καθ' ὑπόθεσιν τὴν $ΑΓ$, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ
 ἢ EZ , καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν EZ τοῖς μὲν ἀπὸ
 5 τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ ἴσον τὸ $ΕΗ$, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$,
 $ΓΒ$ ἴσον τὸ ΘK . ὅλον ἄρα τὸ EK ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ
 τῆς $ΑΒ$ τετραγώνῳ. πάλιν δὲ παραβεβλήσθω παρὰ
 τὴν EZ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, ΔB ἴσον τὸ $ΕΑ$. λοιπὸν
 ἄρα τὸ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, ΔB λοιπῷ τῷ MK ἴσον
 10 ἐστίν. καὶ ἐπεὶ μέσον ὑπόκειται τὸ συγκείμενον ἐκ
 τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$, μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ $ΕΗ$.
 καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν EZ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν
 ἢ ΘE καὶ ἀσύμμετρος τῇ EZ μήκει. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ
 καὶ ἢ ΘN ῥητὴ ἐστὶ καὶ ἀσύμμετρος τῇ EZ μήκει.
 15 καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ
 τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ τῷ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$, καὶ τὸ $ΕΗ$
 ἄρα τῷ $ΗΝ$ ἀσύμμετρόν ἐστιν· ὥστε καὶ ἢ $E\Theta$ τῇ
 ΘN ἀσύμμετρός ἐστιν. καὶ εἰσι ῥηταί· αἱ $E\Theta$, ΘN
 ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἢ $ΕΝ$ ἄρα
 20 ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ διηρημένη κατὰ τὸ Θ . ὁμοίως
 δὲ δέξομεν, ὅτι καὶ κατὰ τὸ M διήρηται. καὶ οὐκ
 ἐστὶν ἢ $E\Theta$ τῇ MN ἢ αὐτὴ· ἢ ἄρα ἐκ δύο ὀνομά-
 των κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διήρηται· ὅπερ ἐστὶν
 ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἢ δύο μέσα δυναμένη κατ' ἄλλο καὶ
 25 ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· καθ' ἓν ἄρα μόνον [σημεῖον]
 διαιρεῖται.

1. καὶ κατὰ V. 3. κείσθω P. 6. EK] corr. ex ΘK
 m. 2 P. 10. ἐστὶ BV, comp. Fb. 13. ΘE] $E\Theta$ P. 14.
 ἐστὶν P. 15. τό — 16. τῷ] in ras. m. 1 F. 16. τῷ] τῷ
 συγκειμένῳ ἐκ τῶν (τοῦ F) FVb. δις] supra scr. F. ὑπό]
 in ras. F. $ΓΒ$] $ΒΓ$ F. $ΕΝ$ b. 17. ἄρα] om. V. τῷ]
 mut. in τῶν m. 2 V. $ΗΝ$] ΘK BFb, ΘK ἄρα V. 18.
 ἐστὶν] comp. Fb, ἐστὶ μήκει V. εἰσιν PB. 19. εἰσιν PB.

nam, si fieri potest, in Δ ita diuidatur, ut scilicet rursus $A\Gamma$, ΔB eadem non sint, sed supponatur maior



$A\Gamma$, et ponatur rationalis EZ , et rectae EZ quadratis $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ aequale adplicetur EH , rectangulo autem $2 A\Gamma \times \Gamma B$ aequale $\odot K$. itaque $EK = AB^2$ [II, 4]. iam rursus rectae EZ quadratis $\Delta\Delta^2 + \Delta B^2$ aequale adplicetur $E\Lambda$. itaque quod re-

linquitur, $2 \Delta\Delta \times \Delta B = MK$. et quoniam supposuimus, $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ medium esse, etiam EH medium est. et rectae rationali EZ adplicatum est; itaque $\odot E$ rationalis est et rectae EZ longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. eadem de causa etiam $\odot N$ rationalis est et rectae EZ longitudine incommensurabilis. et quoniam $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ et $2 A\Gamma \times \Gamma B$ incommensurabilia sunt, etiam EH , HN incommensurabilia sunt. quare etiam $E\odot$, $\odot N$ incommensurabiles sunt [VI, 1; prop. XI]. et sunt rationales. itaque $E\odot$, $\odot N$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo EN ex duobus nominibus est in $\odot$ diuisa [prop. XXXVI]. similiter demonstrabimus, eandem in M diuisam esse. et $E\odot$, MN eadem non sunt. itaque recta ex duobus nominibus in punctis diuersis diuisa est; quod fieri non potest [prop. XLII]. itaque recta duobus spatiis mediis aequalis quadrata non diuiditur in punctis diuersis. ergo in uno tantum diuiditur.

21. διαιρεῖται V. 22. MN ἄρα b. ἐκ τῶν P. 23. ἄτοπόν ἐστιν V. 24. ἢ] corr. ex ἐκ V. 25. ἕνα F. σημεῖον] om. P.

Ὅροι δεύτεροι.

α'. Ὑποκειμένης φητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων
 διηρημένης εἰς τὰ ὀνόματα, ἥς τὸ μείζον ὄνομα τοῦ
 ἐλάσσονος μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῇ
 5 μήκει, ἐὰν μὲν τὸ μείζον ὄνομα σύμμετρον ᾗ μήκει
 τῇ ἐκκειμένῃ φητῇ, καλεῖσθω [ἢ ὅλη] ἐκ δύο ὀνομά-
 των πρώτη.

β'. Ἐὰν δὲ τὸ ἐλάσσον ὄνομα σύμμετρον ᾗ μήκει
 τῇ ἐκκειμένῃ φητῇ, καλεῖσθω ἐκ δύο ὀνομάτων
 10 δευτέρα.

γ'. Ἐὰν δὲ μηδέτερον τῶν ὀνομάτων σύμμετρον
 ᾗ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ φητῇ, καλεῖσθω ἐκ δύο ὀνομά-
 των τρίτη.

δ'. Πάλιν δὲ ἐὰν τὸ μείζον ὄνομα [τοῦ ἐλάσσονος]
 15 μείζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, ἐὰν
 μὲν τὸ μείζον ὄνομα σύμμετρον ᾗ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ
 φητῇ, καλεῖσθω ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτη.

ε'. Ἐὰν δὲ τὸ ἐλάσσον, πέμπτη.

ς'. Ἐὰν δὲ μηδέτερον, ἕκτη.

20

μη'.

Εὐρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν
 συγκεῖμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ λόγον
 ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀρι-
 25 θμόν, πρὸς δὲ τὸν ΓΑ λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγω-
 νος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ἐκκείσθω

1. ὅροι δεύτεροι] mg. B, m. 2 V, om. F, μη' b. numeros
 om. codd. 4. ἐλάττονος Bfb. αὐτῇ B, corr. m. rec.; et
 supra scr. ω b; ἐ- e corr. V. 5. μήκει] (alt.) om. V, m. 2 F
 (eras.). 6. φητῇ μήκει FV. ἢ ὅλη] supra scr. m. 2 P, ὅλη B.

Definitiones alterae.

1. Proposita recta rationali et recta ex duobus nominibus in nomina diuisa, cuius nomen maius potentia minus excedit quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis, si maius nomen rationali propositae longitudine commensurabile est, uocetur ex duobus nominibus prima.

2. Sin minus nomen rationali propositae longitudine commensurabile est, uocetur ex duobus nominibus secunda.

3. Sin neutrum nomen rationali propositae longitudine commensurabile est, uocetur ex duobus nominibus tertia.

4. Rursus si maius nomen potentia excedit quadrato rectae sibi longitudine incommensurabilis, si maius nomen rationali propositae longitudine commensurabile est, uocetur ex duobus nominibus quarta.

5. Sin minus commensurabile est, quinta.

6. Sin neutrum, sexta.

XLVIII.

Inuenire rectam ex duobus nominibus primam.

Exponentur duo numeri $ΑΓ$, $ΓΒ$ eius modi, ut $ΑΒ : ΒΓ$ rationem habeat, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, $ΑΒ$ autem ad $ΓΑ$ rationem non habeat, quam numerus quadratus ad numerum quadratum [prop. XXVIII lemma], et exponatur ratio-

8. μήκει] om. V. 9. ὅτῃ μήκει V. ἡ ὅλη ἐκ F. 14. τοῦ ἐλάσσονος] m. 2 P, τοῦ ἐλάττονος V. 15. συμμέτρον BFb, corr. m. 2. ἐαυτῇ] supra scr. ω b. 16. ὄνομα] om. V. 19. Seq. schol., u. app. 20. μδ' F. 23. τόν] (prius) corr. ex τῶν V. 25. ΓΑ] ras. V.

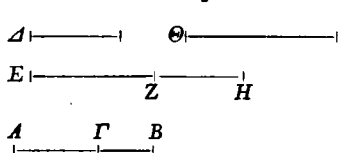
τις ρητὴ ἢ Δ , καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἔστω μήκει ἢ EZ .
 ρητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἢ EZ . καὶ γεγονέντω ὡς ὁ BA
 ἀριθμὸς πρὸς τὸν $ΑΓ$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς
 τὸ ἀπὸ τῆς ZH . ὁ δὲ AB πρὸς τὸν $ΑΓ$ λόγον ἔχει,
 5 ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς EZ ἄρα
 πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς
 ἀριθμόν· ὥστε σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς EZ τῷ
 ἀπὸ τῆς ZH . καὶ ἐστὶ ρητὴ ἢ EZ . ρητὴ ἄρα καὶ ἢ
 ZH . καὶ ἐπεὶ ὁ BA πρὸς τὸν $ΑΓ$ λόγον οὐκ ἔχει,
 10 ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν,
 οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς EZ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH λόγον
 ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν·
 ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἢ EZ τῇ ZH μήκει. αἱ EZ ,
 ZH ἄρα ρηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο
 15 ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἢ EH .

Λέγω, ὅτι καὶ πρώτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ BA ἀριθμὸς πρὸς τὸν $ΑΓ$,
 οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH , μείζων
 δὲ ὁ BA τοῦ $ΑΓ$, μείζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς EZ
 20 τοῦ ἀπὸ τῆς ZH . ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς EZ ἴσα τὰ
 ἀπὸ τῶν ZH , Θ . καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ BA πρὸς τὸν
 $ΑΓ$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH ,
 ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ AB πρὸς τὸν $BΓ$, οὕτως
 τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ . ὁ δὲ AB πρὸς
 25 τὸν $BΓ$ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετρά-
 γωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς EZ ἄρα πρὸς τὸ
 ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς
 τετράγωνον ἀριθμόν. σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἢ EZ τῇ

1. τις] supra scr. m. 1 V. 2. ἐστὶ καὶ] ἐστὶν B. 3.
 ΑΓ] ΓΑ FVb. Dein add. ἀριθμόν V. 4. ΖΗ] Η eras. F.
 ὁ δέ — 5. ἀριθμόν] mg. m. 2 B. 5. ὃν ὁ F. 8. ἐστὶν B.

nalis aliqua Δ , et rectae Δ longitudine commensurabilis sit EZ ; itaque EZ rationalis est [def. 3]. et fiat



$BA: A\Gamma = EZ^2: ZH^2$
[prop. VI coroll.]. uerum
 $AB: A\Gamma$ rationem habet,
quam numerus
ad numerum. itaque

etiam $EZ^2: ZH^2$ rationem habet, quam numerus ad numerum. quare EZ^2, ZH^2 commensurabilia sunt [prop. VI]. et EZ rationalis est. itaque etiam ZH rationalis est. et quoniam $BA: A\Gamma$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ne EZ^2 quidem ad ZH^2 rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque EZ, ZH longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. quare EZ, ZH rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo EH ex duobus nominibus est [prop. XXXVI]. dico, eandem primam esse.

nam quoniam est $BA: A\Gamma = EZ^2: ZH^2$, et $BA > A\Gamma$, erit etiam $EZ^2 > ZH^2$ [V, 14]. sit igitur $ZH^2 + \Theta^2 = EZ^2$. et quoniam est $BA: A\Gamma = EZ^2: ZH^2$, conuertendo [V, 19 coroll.] est $AB: B\Gamma = EZ^2: \Theta^2$. uerum $AB: B\Gamma$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque etiam $EZ^2: \Theta^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare EZ, Θ longitudine commensurabiles sunt [prop.

9. BA] mut. in AB V. $\theta\upsilon\kappa$] postea ins. F. 14. ZH — $\delta\upsilon\nu\acute{\alpha}\mu\epsilon\iota$] m. 2 B. $\epsilon\lambda\epsilon\iota\nu$ P. 15. $\acute{\alpha}\rho\alpha$] m. rec. b. 17. $\acute{\omicron}$] in ras. m. 1 P. AB F. 18. $\tau\acute{\omicron}$] (prius) supra scr. m. 1 P. $\mu\epsilon\iota\zeta\omicron\nu$ F. 20. $\tau\acute{\omega}$] corr. ex $\tau\acute{\omicron}$ V. 21. AB P. 25. $\tau\acute{\omicron}\nu$] om. BFb. $B\Gamma$] Γ supra scr. V. 26. EZ] ZE corr. ex ZB F. 27. Θ] seq. ras. 1 litt. F.

Θ μήκει· ἡ EZ ἄρα τῆς ZH μείζον δύναται τῷ ἀπὸ
 συμμετρου ἐαντῇ. καὶ εἰσι ρηταὶ αἱ EZ, ZH, καὶ
 σύμμετρος ἡ EZ τῇ Δ μήκει.

Ἡ EH ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη· ὅπερ
 5 ἔδει δεῖξαι.

μθ'.

Εὐρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέραν.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν
 συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ λό-
 10 γον ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον
 ἀριθμόν, πρὸς δὲ τὸν ΑΓ λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετρά-
 γωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ἐκκείσ-
 θω ρητὴ ἡ Δ, καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἔστω ἡ EZ μήκει·
 ρητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ EZ. γεγονέτω δὴ καὶ ὡς ὁ ΓΑ
 15 ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς
 τὸ ἀπὸ τῆς ZH· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς EZ
 τῷ ἀπὸ τῆς ZH. ρητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ZH. καὶ ἐπεὶ
 ὁ ΓΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΒ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετρά-
 γωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ
 20 ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH λόγον ἔχει, ὃν τε-
 τράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμ-
 μετρος ἄρα ἐστὶν ἡ EZ τῇ ZH μήκει· αἱ EZ, ZH
 ἄρα ρηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα
 ὀνομάτων ἐστὶν ἡ EH.

25 Δεικτέον δὴ, ὅτι καὶ δευτέρα.

2. εἰσιν PB. 3. ἀσύμμετρος F, ἀ- eras.; deinde add.
 μήκει, del. m. 1. Post μήκει del. ἀσύμμετροι m. 1 F. 4.
 ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 6. ν' F, et sic dein-
 ceps. 8. τὸν] corr. ex τό m. 2 V. 11. ΓΑ BVb. 12.
 τετράγωνος F. 13. EZ] ZH BVb, in ras. F, m. rec. P. 14.
 ρητὴ — EZ] καὶ ἡ ZH ἄρα ρητὴ ἐστὶν F. EZ] ZH BVb,
 m. rec. P. γεγονέτω δὴ καὶ] καὶ ἔστω V. δέ F, supra
 scr. δῆ. 15. EZ] HZ F, et corr. ex ZH V, ZH Bb, P m.

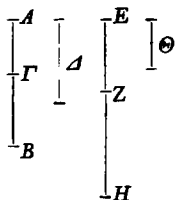
IX]. itaque EZ^2 excedit ZH^2 quadrato rectae sibi commensurabilis. et EZ , ZH rationales sunt, et EZ , Δ longitudine commensurabiles.

Ergo EH ex duobus nominibus est prima [def. alt. 1]; quod erat demonstrandum.

XLIX.

Inuenire rectam ex duobus nominibus secundam.

Exponantur duo numeri AG , GB eius modi, ut AB ad BG rationem habeat, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ad AG autem rationem non habeat, quam numerus quadratus ad numerum quadratum [prop. XXVIII lemma]. et po-



natur rationalis Δ , et rectae Δ longitudine commensurabilis sit EZ ; itaque EZ rationalis est. iam fiat etiam $GA:AB = EZ^2:ZH^2$ [prop. VI coroll.]. itaque EZ^2 , ZH^2 commensurabilia sunt [prop. VI]. quare etiam ZH ratio-

nalis est. et quoniam $GA:AB$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ne EZ^2 quidem ad ZH^2 rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque EZ , ZH longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. quare EZ , ZH rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo EH ex duobus nominibus est [prop. XXXVI]. iam demonstrandum, eandem secundam esse.

rec. 16. ZH] ZE BFVb, m. rec. P; item lin. 17 bis, 20, 22.

16. EZ] HZ Bb, et corr. ex ZH V, ZH F, P m. rec. 17. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$ B.

18. GA] in ras. V. 19. $\omicron\upsilon\delta'$ $\acute{\alpha}\rho\alpha$ Theon (BFVb). 20.

EZ] HZ BFV, et e corr. m. 1 b. 22. EZ] HZ Bb, P m. rec.; ZH V, ZH' F. $\tau\eta\varsigma$ b. 23. $\acute{\epsilon}\lambda\omicron\upsilon\upsilon$ B. 25. $\delta\acute{\epsilon}$ P.

Ἐπεὶ γὰρ ἀνάπαλιν ἐστὶν ὡς ὁ BA ἀριθμὸς πρὸς τὸν AG , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς HZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZE , μείζων δὲ ὁ BA τοῦ AG , μείζον ἄρα [καὶ] τὸ ἀπὸ τῆς HZ τοῦ ἀπὸ τῆς ZE . ἔστω τῷ ἀπὸ τῆς HZ ἴσα
 5 τὰ ἀπὸ τῶν EZ , Θ . ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ AB πρὸς τὸν BG , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ . ἀλλ' ὁ AB πρὸς τὸν BG λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ZH ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετρά-
 10 γωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ZH τῇ Θ μήκει· ὥστε ἡ ZH τῆς ZE μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἐαυτῇ. καὶ εἰσι φηταὶ αἱ ZH , ZE δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ τὸ EZ ἔλασσον ὄνομα τῇ ἐκκειμένῃ φητῇ σύμμετρόν ἐστι
 15 τῇ Δ μήκει.

Ἡ EH ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ν'.

Εὐρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην.

20 Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ AG , GB , ὥστε τὸν συγκεείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν AB πρὸς μὲν τὸν BG λόγον ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, πρὸς δὲ τὸν AG λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἐκκείσθω
 25 δέ τις καὶ ἄλλος μὴ τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Δ , καὶ πρὸς ἑκάτερον τῶν BA , AG λόγον μὴ ἔχέτω, ὃν τε-

1. AB P. ἀριθμός] om. b. 2. HZ] EZ BFVb, m. rec. P, item lin. 4 bis. ZE] ZH BFVb, m. rec. P, item lin. 4, 11. 3. μείζων — AG] mg. m. 1 P (μείζον, sed corr. m. 1). BA] A e corr. V. καί] om. P. 5. EZ] HZ BFVb, m. rec. P. δ] ἡ b φ (non F). 6. ZH] EZ BFVb, m. rec. P, item lin. 9, 11 bis. 8. καί — 10. ἀριθμόν] mg. m.

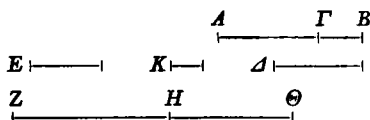
nam quoniam e contrario est [V, 7 coroll.] $BA:AG = HZ^2:ZE^2$, et $BA > AG$, erit $HZ^2 > ZE^2$ [V, 14]. sit $HZ^2 = EZ^2 + \Theta^2$. conuertendo [V, 19 coroll.] igitur est $AB:B\Gamma = ZH^2:\Theta^2$. uerum $AB:B\Gamma$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque etiam $ZH^2:\Theta^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque ZH, Θ longitudine commensurabiles sunt [prop. IX]. quare ZH^2 excedit ZE^2 quadrato rectae sibi commensurabilis. et rationales sunt ZH, ZE potentia tantum commensurabiles, et minus nomen EZ rationali propositae A commensurabilis est longitudine.

Ergo EH ex duobus nominibus secunda est [def. alt. 2]; quod erat demonstrandum.

L.

Inuenire rectam ex duobus nominibus tertiam.

Exponentur duo numeri $AG, \Gamma B$ eius modi, ut AB ad $B\Gamma$ rationem habeat, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ad AG autem rationem non habeat,



quam numerus quadratus ad numerum quadratum. exponatur autem etiam alius aliquis numerus non quadratus A , et ad utrumque BA, AG rationem ne habeat,

1 F. 12. εἶναι B. 13. EZ, ZH BFVb, m. rec. P. 14. EZ] ZH BFVb, m. rec. P. ἐλαττον BVb, comp. F. σύμμετρον ἐστὶ τῇ Θεόν (BFVb). σύμμετρον ἐστὶ] om. Theon (BFVb). 16. ὅπερ εἶδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 20. κείσθωσαν, supra scr. ἐκ, V. δύο] corr. ex ol m. rec. P. 25. ἀριθμός] om. V.

- τεράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ ἐκ-
 κείσθω τις ῥητὴ εὐθεία ἡ E , καὶ γερονέτω ὡς ὁ Δ
 πρὸς τὸν AB , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς E πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς
 ZH · σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς E τῷ ἀπὸ τῆς
 5 ZH . καὶ ἐστὶ ῥητὴ ἡ E · ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ZH .
 καὶ ἐπεὶ ὁ Δ πρὸς τὸν AB λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετρά-
 γωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ
 ἀπὸ τῆς E πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH λόγον ἔχει, ὃν τετρά-
 γωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος
 10 ἄρα ἐστὶν ἡ E τῇ ZH μήκει. γερονέτω δὴ πάλιν ὡς
 ἡ BA ἀριθμὸς πρὸς τὸν AG , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH
 πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $H\Theta$ · σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ
 τῆς ZH τῷ ἀπὸ τῆς $H\Theta$. ῥητὴ δὲ ἡ ZH · ῥητὴ ἄρα
 καὶ ἡ $H\Theta$. καὶ ἐπεὶ ὁ BA πρὸς τὸν AG λόγον οὐκ
 15 ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν,
 οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘH λόγον
 ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀρι-
 θμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ZH τῇ $H\Theta$ μήκει.
 αἱ $ZH, H\Theta$ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σίμμετροι·
 20 ἡ $Z\Theta$ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ τρίτη.

- Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν AB , οὕτως τὸ
 ἀπὸ τῆς E πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH , ὡς δὲ ὁ BA πρὸς
 τὸν AG , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς
 25 $H\Theta$, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν AG , οὕτως
 τὸ ἀπὸ τῆς E πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $H\Theta$. ὁ δὲ Δ πρὸς
 τὸν AG λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς
 τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς E ἄρα πρὸς
 τὸ ἀπὸ τῆς $H\Theta$ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς

2. ῥητῇ] m. 2 F. 3. τῇ ZH b. 4. τό — 5. ZH] (prins) m.
 2 B. 5. καὶ ἐστὶ ῥητῇ] ῥητὴ δὲ B. ἐστίν B. 10. δὲ V.

quam numerus quadratus ad numerum quadratum; et ponatur aliqua recta rationalis E , et fiat $\Delta:AB = E^2:ZH^2$ [prop. VI coroll.]. itaque E^2, ZH^2 commensurabilia sunt [prop. VI]. et E rationalis est; quare etiam ZH rationalis est. et quoniam $\Delta:AB$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ne E^2 quidem ad ZH^2 rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque E, ZH longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. iam rursus fiat $BA:A\Gamma = ZH^2:H\Theta^2$ [prop. VI coroll.]. itaque $ZH^2, H\Theta^2$ commensurabilia sunt [prop. VI]. uerum ZH rationalis est; itaque etiam $H\Theta$ rationalis est. et quoniam $BA:A\Gamma$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ne ZH^2 quidem ad $H\Theta^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque $ZH, H\Theta$ longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. quare $ZH, H\Theta$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo $Z\Theta$ ex duobus nominibus est [prop. XXXVI]. iam dico, eandem tertiam esse. nam quoniam est $\Delta:AB = E^2:ZH^2$ et $BA:A\Gamma = ZH^2:H\Theta^2$, ex aequo [V, 22] erit $\Delta:A\Gamma = E^2:H\Theta^2$. uerum $\Delta:A\Gamma$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad

11. $BA]$ AB' F. $\tau\acute{o}\nu]$ om. B. 14. ΓA F. 16. $\Theta H]$ in ras. V, $H\Theta$ F. 18. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu]$ $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}$ καί F. $ZH]$ e corr. m. 2 (ex HZ ?) V. $\tau\eta]$ m. rec. P. ΘH F. 19. $H\Theta]$ in ras. V. $\acute{\epsilon}\lambda\epsilon\upsilon\upsilon$ B. 20. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}$ BV, comp. Fb. 22. $\acute{\omega}\varsigma]$ supra scr. m. 1 F. 23. $ZH]$ HZ F. $BA]$ AB P, AB' F. 24. $\tau\acute{o}\nu]$ om. P. $A\Gamma]$ corr. ex AB m. 1 F. 25. $H\Theta]$ $Z\Theta$ P, corr. m. rec. (euan.). 28. $\tau\epsilon\tau\rho\acute{\alpha}\gamma\omega\nu\omicron\varsigma$ F, corr. m. 1.

πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ
E τῇ *HΘ* μήκει. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ *ΒΑ* πρὸς τὸν
ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *ZH* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *HΘ*,
 μείζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς *ZH* τοῦ ἀπὸ τῆς *HΘ*. ἔστω
 5 οὖν τῷ ἀπὸ τῆς *ZH* ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν *HΘ*, *Κ*· ἀνα-
 στρέψαντι ἄρα [ἐστὶν] ὡς ὁ *ΑΒ* πρὸς τὸν *ΒΓ*, οὕτως
 τὸ ἀπὸ τῆς *ZH* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *Κ*. ὁ δὲ *ΑΒ* πρὸς
 τὸν *ΒΓ* λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τε-
 τράγωνον ἀριθμὸν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς *ZH* ἄρα πρὸς τὸ
 10 ἀπὸ τῆς *Κ* λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς
 τετράγωνον ἀριθμὸν· σύμμετρος ἄρα [ἐστὶν] ἡ *ZH* τῇ
Κ μήκει. ἡ *ZH* ἄρα τῆς *HΘ* μείζον δύνатаι τῷ ἀπὸ
 συμμέτρου ἐαυτῇ. καὶ εἰσιν αἱ *ZH*, *HΘ* ῥηταὶ δυνά-
 μει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδετέρα αὐτῶν σύμμετρός
 15 ἐστὶ τῇ *E* μήκει.

Ἡ *ZΘ* ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη· ὅπερ
 ἔδει δεῖξαι.

να'.

Εὐρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην.

20 Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ *ΑΓ*, *ΓΒ*, ὥστε τὸν
ΑΒ πρὸς τὸν *ΒΓ* λόγον μὴ ἔχειν μήτε μὴν πρὸς τὸν
ΑΓ, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀρι-
 θμὸν. καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ *Δ*, καὶ τῇ *Δ* σύμμετρος
 ἔστω μήκει ἡ *EZ*· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ *EZ*. καὶ γε-
 25 γονέτω ὡς ὁ *ΒΑ* ἀριθμὸς πρὸς τὸν *ΑΓ*, οὕτως τὸ
 ἀπὸ τῆς *EZ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ZH*· σύμμετρον ἄρα

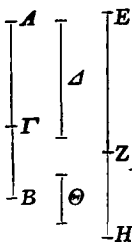
1. ἐστίν] m. 2 F, om. B. 3. τό] (alt.) om. b. 4. τῆς]
 (alt.) om. b. 6. ἐστίν] om. P. τόν] om. Fb. 11. ἐστίν]
 om. BFVb. 12. ἄρα] m. 2 V. δύνатаι] -να- in ras. P.
 13. ἀσύμμετρον F, corr. m. rec.; ἀ- supra scr. F m. 2. *HΘ*
 ἄρα V. 15. ἐστὶν B. τῇ E ἐστὶν F. 16. τρίτη] corr. ex
 ῥητὴ m. rec. b; ῥητὴ F, mg. γρ. τρίτη m. rec. ὅπερ ἔδει

numerus quadratum. itaque ne E^2 quidem ad $H\Theta^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare E , $H\Theta$ longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. et quoniam est $BA:AG = ZH^2:H\Theta^2$, erit $ZH^2 > H\Theta^2$ [V, 14]. sit igitur $ZH^2 = H\Theta^2 + K^2$. itaque conuertendo [V, 19 coroll.] $AB:B\Gamma = ZH^2:K^2$. uerum $AB:B\Gamma$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare etiam $ZH^2:K^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque ZH , K longitudine commensurabiles sunt. itaque ZH^2 excedit $H\Theta^2$ quadrato rectae sibi commensurabilis. et ZH , $H\Theta$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles, et neutra rectae E longitudine commensurabilis est.

Ergo $Z\Theta$ ex duobus nominibus tertia est [def. alt. 3]; quod erat demonstrandum.

LJ.

Inuenire rectam ex duobus nominibus quartam.



Exponentur duo numeri AG , ΓB eius modi, ut AB neque ad $B\Gamma$ neque ad AG rationem habeat, quam numerus quadratus ad numerum quadratum [prop. XXVIII lemma]. et ponatur rationalis Δ , et rectae Δ longitudine commensurabilis sit EZ . itaque EZ rationalis est. et fiat $BA:AG = EZ^2:ZH^2$ [prop. VI coroll.]. itaque EZ^2 , ZH^2 com-

mensurabilia sunt [prop. VI]. itaque etiam ZH ra-

δείξαι] comp. P, om. BFVb. 21. τὸν $B\Gamma$] ἐκάτερον αὐτῶν
Theon (BFVb). $B\Gamma$] corr. ex AG m. 1 P. μήτε — 22.
 AG] om. Theon (BFVb). 24. ἐστὶν B. 25. BA] $A''B'$ F.
ἀριθμός] om. V. ΓA F. 26. σύμμετρος P, corr. m. 1.

ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς *EZ* τῷ ἀπὸ τῆς *ZH*. ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ *ZH*. καὶ ἐπεὶ ὁ *BA* πρὸς τὸν *ΑΓ* λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς *EZ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ZH*
 5 λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ *EZ* τῇ *ZH* μήκει. αἱ *EZ*, *ZH* ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε ἡ *EH* ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ τετάρτη.

10 Ἐπεὶ γάρ ἐστίν ὡς ὁ *BA* πρὸς τὸν *ΑΓ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *EZ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ZH* [μείζων δὲ ὁ *BA* τοῦ *ΑΓ*], μείζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς *EZ* τοῦ ἀπὸ τῆς *ZH*. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς *EZ* ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν *ZH*,
 15 *Θ*. ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ *AB* ἀριθμὸς πρὸς τὸν *ΒΓ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *EZ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *Θ*. ὁ δὲ *AB* πρὸς τὸν *ΒΓ* λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς *EZ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *Θ* λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος
 20 ἄρα ἐστὶν ἡ *EZ* τῇ *Θ* μήκει· ἡ *EZ* ἄρα τῆς *HZ* μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ. καὶ εἰσιν αἱ *EZ*, *ZH* ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ *EZ* τῇ *Δ* σύμμετρός ἐστι μήκει.

Ἡ *EH* ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη· ὅπερ
 25 ἔδει δεῖξαι.

1. Post *ZH* add. ῥητὴ δὲ (seq. ras. 1 litt. F) ἡ *EZ* b, m. 2 F. ῥητὴ ἄρα] ἡ *EZ* ῥητὴ ἄρα V m. 2, ῥητὴ ἐστὶν ἄρα b. ἐστὶ] om. b, ἐστὶν PB. 2. καὶ] (prius) om. BFb. *BA*] *AB* P. οὐκ] postea add. m. 1 F. 6. τῇ] τῆς b. 7. εἰσιν B. 8. ἐστὶ BV, comp. Fb. 9. δὴ] supra scr. m. 1 P. καὶ] m. 2 F. 10. *BA*] corr. ex *AB* V. τόν] om. Bb, corr. ex τό m. rec. P. 11. μείζων — 12. *ΑΓ*] mg. m. 1 in ras. P.

tionalis est. et quoniam $BA : A\Gamma$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ne EZ^2 quidem ad ZH^2 rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque EZ, ZH longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. itaque EZ, ZH rationales sunt potentia tantum commensurabiles. quare EH ex duobus nominibus est [prop. XXXVI].

Iam dico, eandem quartam esse. nam quoniam est $BA : A\Gamma = EZ^2 : ZH^2$, erit $EZ^2 > ZH^2$ [V, 14]. sit igitur $EZ^2 = ZH^2 + \Theta^2$. itaque conuertendo [V, 19 coroll.] $AB : B\Gamma = EZ^2 : \Theta^2$. uerum $AB : B\Gamma$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque ne EZ^2 quidem ad Θ^2 rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare EZ, Θ longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. EZ^2 igitur excedit ZH^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis. et EZ, ZH rationales sunt potentia tantum commensurabiles, et EZ, A longitudine commensurabiles sunt.

Ergo EH ex duobus nominibus est quarta [def. alt. 4]; quod erat demonstrandum.

11. BA] A e corr. V. 12. $\tau\eta\varsigma$] (prius) om. P. 13. $\tau\tilde{\omega}$] $\tau\acute{o}$ F. 16. $\tau\acute{o}\nu$] om. BFb. 18. Θ] ΘA b. 20. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$] om. Fb. $\acute{\alpha}\rho\alpha$] om. F. $\tau\eta\varsigma$] corr. ex $\tau\eta$ V. HZ] corr. ex ZH V, EH F. 21. $\sigma\upsilon\mu\mu\epsilon\tau\rho\omicron\nu$ b, corr. m. rec., et F, corr. m. 2. $\acute{\epsilon}\alpha\nu\tau\tilde{\eta}$ $\mu\acute{\eta}\kappa\epsilon\iota$ F. 24. $\acute{\omicron}\pi\epsilon\rho$ $\acute{\epsilon}\delta\epsilon\iota$ $\delta\epsilon\acute{\iota}\xi\alpha\iota$] comp. P, om. BFVb.

νβ'.

Εὐρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ $ΑΓ$, $ΓΒ$, ὥστε τὸν $ΑΒ$ πρὸς ἐκάτερον αὐτῶν λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετρά-
 5 γωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ ἐκκεί-
 σθω ῥητὴ τις εὐθεῖα ἡ $Δ$, καὶ τῇ $Δ$ σύμμετρος ἔστω
 [μήκει] ἡ $ΕΖ$. ῥητὴ ἄρα ἡ $ΕΖ$. καὶ γερονέτω ὡς ὁ
 $ΓΑ$ πρὸς τὸν $ΑΒ$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς $ΕΖ$ πρὸς τὸ ἀπὸ
 τῆς $ΖΗ$. ὁ δὲ $ΓΑ$ πρὸς τὸν $ΑΒ$ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν
 10 τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν. οὐδὲ
 τὸ ἀπὸ τῆς $ΕΖ$ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $ΖΗ$ λόγον ἔχει,
 ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν. αἱ
 $ΕΖ$, $ΖΗ$ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι.
 ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ $ΕΗ$.

15 Λέγω δὴ, ὅτι καὶ πέμπτη.

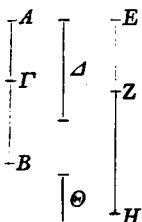
Ἐπεὶ γάρ ἴστιν ὡς ὁ $ΓΑ$ πρὸς τὸν $ΑΒ$, οὕτως
 το ἀπὸ τῆς $ΕΖ$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $ΖΗ$, ἀνάπαλιν ὡς ὁ
 $ΒΑ$ πρὸς τὸν $ΑΓ$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς $ΖΗ$ πρὸς τὸ
 ἀπὸ τῆς $ΖΕ$. μείζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $ΗΖ$ τοῦ ἀπὸ
 20 τῆς $ΖΕ$. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς $ΗΖ$ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν
 $ΕΖ$, $Θ$. ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ $ΑΒ$ ἀριθμὸς
 πρὸς τὸν $ΒΓ$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς $ΗΖ$ πρὸς τὸ ἀπὸ
 τῆς $Θ$. ὁ δὲ $ΑΒ$ πρὸς τὸν $ΒΓ$ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν

3. τόν] corr. ex τό V. 7. μήκει] om. P. $ΕΖ$] $ΖΗ$
 Theon (BFVb), $ΗΖ$ m. rec. P. ῥητὴ ἄρα ἡ $ΕΖ$] ῥητὴ ἄρα
 ἡ $ΖΗ$ V, mg. ῥητὴ τῇ ἄρα $ΗΖ$ m. 2. $ΕΖ$] $ΖΗ$ Theon (BFb),
 $ΗΖ$ P m. rec. 8. $ΕΖ$] Z post ras. 1 litt. V, $ΖΗ$ F, $ΗΖ$ Bb,
 P m. rec. 9. $ΖΗ$] $ΖΕ$ Theon (BFVb), m. rec. P. Deinde
 add. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΗΖ$ τῷ ἀπὸ τῆς $ΖΕ$. ῥητὴ
 ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $ΖΕ$. καὶ ἐπεὶ Theon (BFVb), P m. rec. ($ΖΗ$
 pro $ΗΖ$). δέ] om. Theon (BFVb). τόν] om. BFb. 11.
 τῆς] (prius) m. 2 B. $ΕΖ$] $ΗΖ$ FVb, m. 2 B, m. rec. P.
 ἄρα] om. B. πρὸς τὸ ἀπὸ] m. 2 B. $ΖΗ$] P, $ΖΕ$ BFVb,

LII.

Inuenire rectam ex duobus nominibus quintam.

Exponentur duo numeri $ΑΓ$, $ΓΒ$ eius modi, ut $ΑΒ$ ad neutrum rationem habeat, quam numerus quadratus ad numerum quadratum [prop. XXVIII lemma], et ponatur recta aliqua rationalis $Α$, et rectae $Α$ commensurabilis sit $ΕΖ$. itaque $ΕΖ$ rationalis est. et fiat



$$ΓΑ:ΑΒ=ΕΖ^2:ΖΗ^2$$

[prop. VI coroll.]. $ΓΑ$ autem ad $ΑΒ$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque ne $ΕΖ^2$ quidem ad $ΖΗ^2$ rationem habet,

quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare $ΕΖ$, $ΖΗ$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles [prop. IX]. ergo $ΕΗ$ ex duobus nominibus est [prop. XXXVI].

iam dico, eandem quintam esse. nam quoniam est $ΓΑ:ΑΒ=ΕΖ^2:ΖΗ^2$, e contrario [V, 7 coroll.] est $ΒΑ:ΑΓ=ΖΗ^2:ΖΕ^2$. itaque $ΖΗ^2 > ΖΕ^2$ [V, 14]. sit igitur $ΖΗ^2 = ΕΖ^2 + Θ^2$. itaque conuertendo [V,

m. rec. P. 12. τετράγωνος F, corr. m. 1. ἀριθμὸν] m. 2 V. Deinde add. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ HZ τῇ ZE (τῇ ZE om. V) μήκει b, mg. m. 1 F, m. 2 V. 13. εἶσιν PB. 14. ἄρα] om. P. EH] H e corr. m. 1 b. 15. καὶ] m. 2 F. 17. EZ] P; HZ BVb, P m. rec.; ZH F. ZH] P, ZE BFVb, P m. rec. Ante ὡς add. ἄρα m. rec. P. 18. οὕτως] om. BVb. ZH] P, EZ BFVb, P m. rec. 19. ZE] P, ZH BFVb, P m. rec. Dein add. ὁ δὲ ΒΑ τοῦ ΑΓ μείζων (corr. ex μείζον) ἐστὶ V; μείζον (μείζων m. rec. b) δὲ τὸ (δ m. rec. b) ΒΑ τοῦ ΑΓ b, in ras. F. μείζον ἄρα] sustulit rep. in F. ἄρα ἐστὶ V. τό] m. 2 F. HZ] P, EZ BFVb, P m. rec.; item lin. 20, 22. 20. τῇς] om. P. ZE] P, ZH BFVb, P m. rec. τῷ] supra scr. m. 1 b, postea add. m. 1 V, corr. ex τό F m. 1. 21. EZ] P, HZ BFb, m. rec. P, in ras. V.

τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ZH τῇ Θ μήκει· ὥστε ἡ
 5 ZH τῆς ZE μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἐαυ-
 τῇ. καὶ εἰσιν αἱ HZ , ZE ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμ-
 μετροι, καὶ τὸ EZ ἑλαττον ὄνομα σύμμετρόν ἐστι τῇ
 ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ Δ μήκει.

Ἡ EH ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη· ὅπερ
 10 ἔδει δεῖξαι.

νγ'.

Εὐρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτην.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ $ΑΓ$, $ΓΒ$, ὥστε τὸν
 $ΑΒ$ πρὸς ἐκάτερον αὐτῶν λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετρά-
 15 γωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἔστω δὲ
 καὶ ἕτερος ἀριθμὸς ὁ Δ μὴ τετράγωνος ὢν μηδὲ πρὸς
 ἐκάτερον τῶν $ΒΑ$, $ΑΓ$ λόγον ἔχων, ὃν τετράγωνος
 ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ ἐκκείσθω τις
 ῥητὴ εὐθεῖα ἡ $Ε$, καὶ γεγονέτω ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν
 20 $ΑΒ$, οὕτως το ἀπὸ τῆς $Ε$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH · σύμ-
 μετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $Ε$ τῷ ἀπὸ τῆς ZH . καὶ ἐστὶ
 ῥητὴ ἡ $Ε$ · ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ZH . καὶ ἐπεὶ οὐκ ἔχει

1. τετράγωνον] corr. ex τετράγωνος m. 1 b. 2. ZH] P, EZ BFVb, P m. rec.; item lin. 4, 5. Θ] ras. 1 litt. V.

4. ἐστίν] om. BVb. 5. τῆς] corr. ex τῇ Vb. ZE] P, ZH BFVb, P m. rec. συμέτρον F, corr. m. 2. 6. εἰσι V, comp. Fb. αἱ] m. rec. P. αἱ HZ , ZE] om. FVb; αἱ EZ , ZH supra scr. m. 2 B. 7. EZ] P, ZH BFVb, HZ m. rec. P.

9. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 13. $ΑΓ$] A, seq. ras. 1 litt., F. τόν] corr. ex τό m. 2 B. 16. μήτε P.

17. $ΒΑ$] supra scr. Γ m. 1 b, $ΑΒ$ F et V, sed corr. ἔχειν V, sed corr. 18. καί] m. 2 F. 20. οὕτως καὶ V. σύμ-
 μετρος Theon (BFVb), P m. rec. 21. ἄρα ἐστίν FV. τό —

19 coroll.] $AB:BF = HZ^2:\Theta^2$. uerum $AB:BF$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque ne ZH^2 quidem ad Θ^2 rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque ZH , Θ longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. quare ZH^2 excedit ZE^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis. et HZ , ZE rationales sunt potentia tantum commensurabiles, et minus nomen EZ rectae rationali propositae Δ longitudine commensurabilis est.

Ergo EH ex duobus nominibus est quinta [def. alt. 5]; quod erat demonstrandum.

LIII.

Inuenire rectam ex duobus nominibus sextam.

Exponentur duo numeri AG , GB eius modi, ut AB ad neutrum rationem habeat, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, sit autem etiam alius numerus Δ non quadratus neque ad alterutrum BA , AG rationem habens, quam numerus quadratus ad numerum quadratum [prop. XXVIII lemma];

et ponatur recta rationalis E , et fiat

$$\Delta:AB = E^2:ZH^2$$

[prop. VI coroll.]. itaque E^2 , ZH^2 commensurabilia sunt [prop. VI]. et E rationalis est;

itaque etiam ZH rationalis est. et quoniam $\Delta:AB$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ne E^2 quidem ad ZH^2 rationem habet, quam nu-

ὁ Δ πρὸς τὸν AB λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς
 πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς E ἄρα
 πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀρι-
 5 E τῇ ZH μήκει. γεγονέντω δὴ πάλιν ὡς ὁ BA πρὸς
 τὸν AG , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $H\Theta$.
 σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ZH τῷ ἀπὸ τῆς ΘH . ῥη-
 τὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΘH ῥητὴ ἄρα ἡ ΘH . καὶ ἐπεὶ
 ὁ BA πρὸς τὸν AG λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος
 10 ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς
 ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $H\Theta$ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος
 ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα
 ἐστὶν ἡ ZH τῇ $H\Theta$ μήκει. αἱ ZH , $H\Theta$ ἄρα ῥηταὶ
 εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων
 15 ἐστὶν ἡ $Z\Theta$.

Δεικτέον δὴ, ὅτι καὶ ἕκτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν AB , οὕτως τὸ
 ἀπὸ τῆς E πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH , ἔστι δὲ καὶ ὡς ὁ
 BA πρὸς τὸν AG , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ
 20 ἀπὸ τῆς $H\Theta$, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν AG ,
 οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς E πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $H\Theta$. ὁ δὲ Δ
 πρὸς τὸν AG λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς
 πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς E ἄρα
 πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $H\Theta$ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθ-
 25 μὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ
 E τῇ $H\Theta$ μήκει. ἐδείχθη δὲ καὶ τῇ ZH ἀσύμμετρος·
 ἐκατέρα ἄρα τῶν ZH , $H\Theta$ ἀσύμμετρός ἐστι τῇ E μήκει.
 καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ BA πρὸς τὸν AG , οὕτως τὸ ἀπὸ
 τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $H\Theta$, μείζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς

7. ἀσύμμετρον F, sed corr. ΘH] in ras. V, $H\Theta$ Fb.
 Deinde add. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ZH Theon (BFVb). 8. ἄρα

merus quadratus ad numerum quadratum. itaque E, ZH longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. iam rursus fiat $BA:AG = ZH^2:H\Theta^2$ [prop. VI coroll.]. itaque $ZH^2, \Theta H^2$ commensurabilia sunt [prop. VI]. itaque ΘH^2 rationale est; quare ΘH est rationalis. et quoniam $BA:AG$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ne ZH^2 quidem ad $H\Theta^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque $ZH, H\Theta$ longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. quare $ZH, H\Theta$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. itaque $Z\Theta$ ex duobus nominibus est.

iam demonstrandum, eandem sextam esse. nam quoniam est $A:AB = E^2:ZH^2$, et $BA:AG = ZH^2:H\Theta^2$, ex aequo erit [V, 22] $A:AG = E^2:H\Theta^2$. uerum $A:AG$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque ne E^2 quidem ad $H\Theta^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque $E, H\Theta$ longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. demonstrauius autem, etiam E, ZH incommensurabiles esse. itaque utraque $ZH, H\Theta$ rectae E longitudine incommensurabilis est. et quoniam est $BA:AG = ZH^2:H\Theta^2$, erit $ZH^2 > H\Theta^2$ [V, 14]. iam sit $ZH^2 = H\Theta^2 + K^2$. quare conuertendo [V, 19 coroll.] erit $AB:BG = ZH^2:K^2$. uerum $AB:BG$

καί Theon (BFVb). $\delta\eta\tau\eta - \Theta H$] mg. V. $H\Theta P.$ 9.
 BA] $AB' F.$ 10. οὐδέ] οὐδ' ἄρα FVb, οὐκ ἄρα B. τό]
 $\tau\acute{\alpha} F.$ 14. εἰσιν B. 18. ἔστιν B. 19. BA] $AB P.$ 21.
 $\delta\acute{\epsilon}] m. 2 F.$ 23. οὐδέ] οὐδ' ἄρα Theon (BFVb). ἄρα]
om. Theon (BFVb). 26. $HZ F.$ 27. ἐκατέρα — E] ἡ $\bar{E}$
 $\bar{\alpha}\bar{\rho}\alpha$ ἐκατέρα τῶν $ZH, H\Theta$ ἐστὶν ἀσύμμετρος V. ἄρα] supra
scr. F. 28. οὕτως] om. b, m. 2 B. 29. Post $H\Theta$ add.
μεῖζων δὲ ὁ AB τοῦ AG V. μεῖζον] bis F.

ZH τοῦ ἀπὸ τῆς $H\Theta$. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ [τῆς] ZH
 ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν $H\Theta$, K ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ AB
 πρὸς $B\Gamma$, οὕτως τὸ ἀπὸ ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς K . ὁ
 δὲ AB πρὸς τὸν $B\Gamma$ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος
 5 ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ὥστε οὐδὲ τὸ
 ἀπὸ ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς K λόγον ἔχει, ὃν τετράγω-
 νος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν. ἀσύμμετρος
 ἄρα ἐστὶν ἡ ZH τῇ K μήκει· ἡ ZH ἄρα τῆς $H\Theta$
 μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἐαυτῇ. καὶ εἰσιν
 10 αἱ ZH , $H\Theta$ φηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐ-
 δετέρα αὐτῶν σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένη
 φητῇ τῇ E .
 Ἡ $Z\Theta$ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη· ὅπερ
 εἶδει δεῖξαι.

15

Λήμμα.

Ἐστω δύο τετράγωνα τὰ AB , $B\Gamma$ καὶ κείσθωσαν
 ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν AB τῇ BE · ἐπ' εὐθείας
 ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ZB τῇ BH . καὶ συμπεπληρώσθω τὸ
 AG παραλληλόγραμμον· λέγω, ὅτι τετράγωνόν ἐστι
 20 τὸ AG , καὶ ὅτι τῶν AB , $B\Gamma$ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ
 AH , καὶ ἔτι τῶν AG , GB μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ AG .
 Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν AB τῇ BZ , ἡ δὲ BE
 τῇ BH , ὅλη ἄρα ἡ AE ὅλη τῇ ZH ἐστὶν ἴση. ἀλλ'
 ἡ μὲν AE ἑκατέρᾳ τῶν $A\Theta$, $K\Gamma$ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ZH
 25 ἑκατέρᾳ τῶν AK , $\Theta\Gamma$ ἐστὶν ἴση· καὶ ἑκατέρᾳ ἄρα
 τῶν $A\Theta$, $K\Gamma$ ἑκατέρᾳ τῶν AK , $\Theta\Gamma$ ἐστὶν ἴση. ἰσό-
 πλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ AG παραλληλόγραμμον· ἐστὶ δὲ
 καὶ ὀρθογώνιον· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ AG .

1. ZH] $Z\Theta$ b. τῆς] om. P. τῆς] om. Pb. 3. τὸν
 $B\Gamma$ V. τῆς ZH FV. 4. πρὸς τὸν $B\Gamma$] mg. m. 1 P. 6.
 τῆς ZH FV. 7. ἀσύμμετρα P, corr. m. 1. 9. συμ-

rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare ne ZH^2 quidem ad K^2 rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque ZH , K longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. itaque ZH^2 excedit $H\Theta^2$ quadrato rectae sibi incommensurabilis. et ZH , $H\Theta$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles, et neutra earum rationali propositae E longitudine commensurabilis est.

Ergo $Z\Theta$ recta ex duobus nominibus est sexta [def. alt. 6]; quod erat demonstrandum.

Lemma.

Sint duo quadrata AB , $B\Gamma$ et ita ponantur, ut ΔB , BE in eadem recta sint. itaque etiam ZB , BH in eadem sunt recta. et expleatur parallelogrammum $A\Gamma$. dico, $A\Gamma$ quadratum esse, et ΔH medium esse proportionale inter AB , $B\Gamma$, et praeterea $\Delta\Gamma$ medium esse proportionale inter $A\Gamma$, ΓB .

nam quoniam $\Delta B = BZ$, $BE = BH$, erit $\Delta E = HZ$. uerum $\Delta E = A\Theta = K\Gamma$, $ZH = AK = \Theta\Gamma$ [I, 34]. quare etiam

$$A\Theta = K\Gamma = AK = \Theta\Gamma.$$

μέτρον F, corr. m. 2. εαυτῇ μήκει F. 11. αὐτῶν] τῶν
 ZH , $H\Theta$ Theon (BFVb). εἰσιν P. ἐγκειμένη F. 12.
 E] EH b, H add. m. 2 F. 13. ἡ] om. b. ὅπερ εἶδει δεῖξαι]
 comp. P, om. BFVb. 18. ἐστίν B. 19. ὅτι τὸ $A\Gamma$ V.
 εἰσιν P. 20. τὸ $A\Gamma$] om. V. ὅτι] ἐτι BF, supra scr.
 ὅτι m. 2. 21. ἐστίν P. 22. ZB B. 24. Post $\iota\sigma\eta$ del.
 ἀλλ' ἡ μὲν ΔE ἐκαστέρα m. 1 P. HZ BFV. 25. $\Gamma\Theta$ V.
 ἄρα] om. b. 26. $A\Theta$] A postea add. V. 27. ἐστίν P.
 ἐστίν PB. 28. ἐστίν P.

Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ZB πρὸς τὴν BH , οὕτως ἡ ΔB πρὸς τὴν BE , ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ZB πρὸς τὴν BH , οὕτως τὸ AB πρὸς τὸ ΔH , ὡς δὲ ἡ ΔB πρὸς τὴν BE , οὕτως τὸ ΔH πρὸς τὸ $B\Gamma$, καὶ ὡς ἄρα τὸ AB πρὸς τὸ ΔH , οὕτως τὸ ΔH πρὸς τὸ $B\Gamma$. τῶν AB , $B\Gamma$ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔH .

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ μέσον ἀνάλογόν [ἐστι] τὸ $\Delta Γ$.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ $ΑΔ$ πρὸς τὴν ΔK , οὕτως ἡ KH πρὸς τὴν $HΓ$. ἴση γάρ [ἐστὶν] ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ συνθέντι ὡς ἡ AK πρὸς $K\Delta$, οὕτως ἡ $KΓ$ πρὸς $ΓH$, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ AK πρὸς $K\Delta$, οὕτως τὸ $ΑΓ$ πρὸς τὸ $ΓΔ$, ὡς δὲ ἡ $KΓ$ πρὸς $ΓH$, οὕτως τὸ $\Delta Γ$ πρὸς $ΓΒ$, καὶ ὡς ἄρα τὸ $ΑΓ$ πρὸς $\Delta Γ$, οὕτως τὸ $\Delta Γ$ πρὸς τὸ $B\Gamma$. τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ $\Delta Γ$. ἃ προέκειτο δεῖξαι.

νδ'.

Ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης, ἢ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἢ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων.

Χωρίον γὰρ τὸ $ΑΓ$ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς AB καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης τῆς $ΑΔ$. λέγω, ὅτι ἢ τὸ $ΑΓ$ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἢ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων.

3. τὴν BE — 5. $B\Gamma$] postea ins. m. 1 F. 4. οὕτω B. τ'] m. 2 F. τὸ $B\Gamma$] corr. ex τὴν $B\Gamma$ m. 2 B. 5. οὕτω B. 6. ἄρα] om. b. 8. ἐστι] om. P. 10. τὴν] om. BFb. ἐστὶν] om. P. ἑκατέρᾳ] om. P. 11. τὴν $K\Delta$ V. 12. τὴν $ΓH$ V. τὴν $K\Delta$ V. 13. τὴν $ΓH$ V. 14. τὸ $ΓΒ$ V, seq. ras. 1 litt. $\Delta Γ$] τὸ $ΓΔ$ V. 15. $\Delta Γ$] $ΓΔ$ V. τὸ $B\Gamma$] $B\Gamma$

itaque parallelogrammum AG aequilaterum est; est autem idem rectangulum. ergo AG quadratum est.

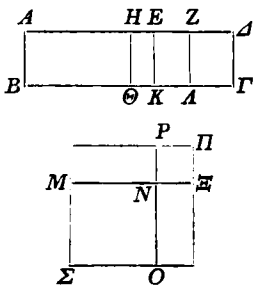
et quoniam est $ZB:BH=AB:BE$, et $ZB:BH=AB:\Delta H$, $AB:BE=AH:BG$ [VI, 1], erit etiam $AB:\Delta H=AH:BG$. ergo AH medium est proportionale inter AB , BG .

Iam dico, ΔG etiam medium proportionale esse inter AG , GB .

nam quoniam est $AA:\Delta K=KH:H\Gamma$ (nam utraque utrique aequalis est), et componendo [V, 18] $AK:KA=KG:GH$, est autem $AK:KA=AG:GA$, $KG:GH=AG:GB$, erit etiam $AG:\Delta G=\Delta G:BG$. ergo ΔG medium est proportionale inter AG , GB ; quae propositum erat demonstrare.

LIV.

Si spatium recta rationali et recta ex duobus nominibus prima comprehenditur, recta spatio aequalis quadrata irrationalis est ex duobus nominibus, quae uocatur.



Spatium enim AG recta rationali AB et recta ex duobus nominibus prima AA comprehendatur. dico, rectam spatio AG aequalem quadratam irrationalem esse ex duobus nominibus, quae uocatur.

B, ΓB Fb. 16. $\tilde{\alpha}$] $\tilde{\sigma}\pi\epsilon\rho$ Theon (BFVb). Post $\delta\epsilon\iota\chi\tau\alpha\iota$ add. $\sigma > \gamma$ — P. 18. $\tau\eta\varsigma$] m. 2 B. 22. $\chi\omega\rho\iota\sigma$ — 25. $\delta\nu\omicron\mu\acute{\alpha}\tau\omega\nu$] mg. m. 1 F. 22. AG] $AB\Gamma\Delta$ Theon (BFVb). 23. AB] AA F.

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη ἡ $ΑΔ$, διη-
 ρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ $Ε$, καὶ ἔστω τὸ μείζον
 ὄνομα τὸ $ΑΕ$. φανερόν δὴ, ὅτι αἱ $ΑΕ$, $ΕΔ$ ῥηταί
 εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ $ΑΕ$ τῆς $ΕΔ$
 5 μείζον δύνανται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ $ΑΕ$
 σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ $ΑΒ$ μήκει. τε-
 τμήσθω δὴ ἡ $ΕΔ$ δίχα κατὰ τὸ $Ζ$ σημεῖον. καὶ ἐπεὶ
 ἡ $ΑΕ$ τῆς $ΕΔ$ μείζον δύνανται τῷ ἀπὸ συμμέτρου
 ἑαυτῇ, ἂν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσ-
 10 σονος, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς $ΕΖ$, ἴσον παρὰ τὴν μείζονα
 τὴν $ΑΕ$ παραβληθῇ ἑλλεῖπον εἶδει τετραγώνῳ, εἰς
 σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ. παραβεβλήσθω οὖν παρὰ
 τὴν $ΑΕ$ τῷ ἀπὸ τῆς $ΕΖ$ ἴσον τὸ ὑπὸ $ΑΗ$, $ΗΕ$. σύμ-
 μετρος ἄρα ἐστὶν ἡ $ΑΗ$ τῇ $ΕΗ$ μήκει. καὶ ἥχθωσαν
 15 ἀπὸ τῶν $Η$, $Ε$, $Ζ$ ὁποτέρᾳ τῶν $ΑΒ$, $ΓΔ$ παράλληλοι
 αἱ $ΗΘ$, $ΕΚ$, $ΖΑ$. καὶ τῷ μὲν $ΑΘ$ παραλληλογράμμῳ
 ἴσον τετράγωνον συνεστήτω τὸ $ΣΝ$, τῷ δὲ $ΗΚ$ ἴσον
 τὸ $ΝΠ$, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν $ΜΝ$
 τῇ $ΝΞ$. ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $ΡΝ$ τῇ $ΝΟ$. καὶ
 20 συμπεπληρώσθω τὸ $ΣΠ$ παραλληλόγραμμον· τετρά-
 γωνον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΣΠ$. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΗ$,
 $ΗΕ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΕΖ$, ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $ΑΗ$
 πρὸς $ΕΖ$, οὕτως ἡ $ΖΕ$ πρὸς $ΕΗ$. καὶ ὡς ἄρα τὸ $ΑΘ$
 πρὸς $ΕΑ$, τὸ $ΕΑ$ πρὸς $ΚΗ$. τῶν $ΑΘ$, $ΗΚ$ ἄρα μέσον
 25 ἀνάλογόν ἐστι τὸ $ΕΑ$. ἀλλὰ τὸ μὲν $ΑΘ$ ἴσον ἐστὶ

2. $Ε$] e corr. m. rec. P. 3. δὴ] corr. ex δέ B. 4.
 εἰσιν P. ἀσύμμετροι F, sed corr. 5. ἀσυμμέτρου b, sed
 corr.; in F supra add. ἀ- m. 2. καί] om. F. $ΕΑ$ F. 7.
 δὴ] δέ V. 8. ἀσυμμέτρου b, sed corr. 9. τετάρτῳ] Δ b.
 τοῦ] τῷ B. τῆς] e corr. V. 12. σύμμετρον P. διέλη
 Vb, διέλη corr. in διελεί F, διελεί B. Dein add. μήκει V. 13.
 ὑπὸ τῶν FV. $ΗΕ$] $ΗΘ$ P. 14. $ΑΗ$] H e corr. m. 1 V.

nam quoniam AA ex duobus nominibus prima est, in E in nomina diuidatur, et maius nomen sit AE . manifestum igitur, AE , EA rationales esse potentia tantum commensurabiles, et AE^2 excedere EA^2 quadrato rectae sibi commensurabilis, et AE rationali propositae AB longitudine commensurabilem esse [def. alt. 1]. iam EA in Z puncto in duas partes aequales secetur. et quoniam AE^2 excedit EA^2 quadrato rectae sibi commensurabilis, si quartae parti quadrati minoris, hoc est quadrato EZ^2 , aequale maiori AE adplicatur parallelogrammum figura quadrata deficiens, eam in partes commensurabiles diuidit [prop. XVII]. adplicetur igitur rectae AE quadrato EZ^2 aequale $AH \times HE$. itaque AH , EH longitudine commensurabiles sunt. et ab H , E , Z alterutri AB , GA parallelae ducantur $H\Theta$, EK , ZA . et parallelogrammo $A\Theta$ aequale quadratum ΣN construatur, et $N\Pi = HK$ [II, 14], et ita ponantur, ut MN , $N\xi$ in eadem recta sint; quare etiam PN , NO in eadem sunt recta. et parallelogrammum $\Sigma\Pi$ expleatur; itaque $\Sigma\Pi$ quadratum est [u. lemma]. et quoniam est $AH \times HE = EZ^2$, erit $AH : EZ = ZE : EH$ [VI, 17]. quare etiam

$$A\Theta : EA = EA : KH \text{ [VI, 1].}$$

EH] HE in ras. V. 15. H] m. 2 F. AB] A eras. F. GA] in ras. V, BA F, GA B. 16. EK] E postea ins. m. 1 F. ZA] mut. in AZ V, AZ BFb. παραλληλόγραμμον P, corr. m. 1. 17. ΣN] Σ corr. ex E BFb. 18. κείσθωσαν V. MN] corr. ex N m. 1 F. 19. εἰσὶν B. N P P. 20. $\Sigma\Pi$] corr. ex $E\Pi$ B, item lin. 21. 21. τό] τῷ V. AHE b, et corr. in AH , EH m. 2 V, AH F, et B, corr. m. 2. 22. τῷ] τό V. 23. πρὸς τὴν V. ZE] EZ P. EH] τὴν H, ante H ras. 1 litt. V. 24. πρὸς τό, seq. ras. 1 litt. V. EA] E eras. V. τό KH V. ἄρα] postea add. m. 1 P.

τῷ ΣΝ, τὸ δὲ ΗΚ ἴσον τῷ ΝΠ· τῶν ΣΝ, ΝΠ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΛ. ἐστὶ δὲ τῶν αὐτῶν τῶν ΣΝ, ΝΠ μέσον ἀνάλογον καὶ τὸ ΜΡ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΛ τῷ ΜΡ· ὥστε καὶ τῷ ΟΞ ἴσον ἐστίν. ἐστὶ δὲ
 5 καὶ τὰ ΑΘ, ΗΚ τοῖς ΣΝ, ΝΠ ἴσα· ὅλον ἄρα τὸ ΑΓ ἴσον ἐστὶν ὅλῳ τῷ ΣΠ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΜΞ τετραγώνῳ· τὸ ΑΓ ἄρα δύναται ἢ ΜΞ.

Λέγω, ὅτι ἡ ΜΞ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ, σύμμε-
 10 τρός ἐστὶ καὶ ἡ ΑΕ ἐκατέρα τῶν ΑΗ, ΗΕ. ὑπόκει-
 ται δὲ καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ σύμμετρος· καὶ αἱ ΑΗ, ΗΕ ἄρα τῇ ΑΒ σύμμετροί εἰσιν. καὶ ἐστὶ ρητὴ ἡ ΑΒ·
 ρητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἐκατέρα τῶν ΑΗ, ΗΕ· ρητὸν ἄρα ἐστὶν ἐκάτερον τῶν ΑΘ, ΗΚ, καὶ ἐστὶ σύμμετρον τὸ
 15 ΑΘ τῷ ΗΚ. ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ τῷ ΣΝ ἴσον ἐστίν, τὸ δὲ ΗΚ τῷ ΝΠ· καὶ τὰ ΣΝ, ΝΠ ἄρα, τουτέστι τὰ ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ, ρητά ἐστὶ καὶ σύμμετρα. καὶ
 ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ μήκει, ἀλλ' ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΑΗ ἐστὶ σύμμετρος, ἡ δὲ ΔΕ τῇ ΕΖ
 20 σύμμετρος, ἀσύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΑΗ τῇ ΕΖ· ὥστε καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΕΔ ἀσύμμετρόν ἐστιν. ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ τῷ ΣΝ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ ΕΔ τῷ ΜΡ· καὶ τὸ ΣΝ ἄρα τῷ ΜΡ ἀσύμμετρόν ἐστιν. ἀλλ' ὥς τὸ ΣΝ

1. ΣΝ] (bis) corr. ex ΕΝ Β, item lin. 3, 5. 2. ΕΛ] corr. ex Α m. 1 F. ἐστὶν PB. 3. ἐστίν P. 4. τό] corr. ex τῷ m. 1 P. ΜΡ τῷ ΕΛ Theon (BFVb). ὥστε καὶ τῷ] ἀλλὰ τὸ μὲν ΜΡ τῷ ΟΞ (corr. ex ΞΟ V) ἴσον ἐστὶ (ἐστίν B) τὸ δὲ ΕΛ [(ΕΔ F) τῷ ΖΓ, ὅλον ἄρα τὸ ΕΓ τοῖς ΜΡ Theon (BFVb). τῷ] corr. ex τό m. 1 P. ἐστίν] postea ins. m. 1 F. 5. ΕΝ, ΠΝ F. 6. τουτέστιν P. 9. ΑΝ F, corr. m. 1. ΗΕ] corr. ex ΕΗ m. 2 V, Ε' Η' F. 10. ΕΔ ἐκατέ-
 ρων F. 11. σύμμετρος — 12. ΑΒ] (prius) mg. m. 1 F. 11. καί] μήκει· καὶ V, B m. 2. αἱ] ἡ ΕF, in ras. B. ΕΗ P. 12. εἰσι V, comp. Fb. ἐστὶν B. 13. ἐστίν PB. 14. ἐστίν] ἐστὶ καὶ V.

itaque EA medium est proportionale inter ΣN , $N\Pi$.
 uerum etiam MP inter eadem ΣN , $N\Pi$ medium est
 proportionale [u. lemma]. quare $EA = MP$. itaque etiam
 $EA = O\Xi$ [I, 43]. uerum etiam $A\Theta + HK = \Sigma N + N\Pi$.
 quare totum¹⁾ $A\Gamma = \Sigma\Pi = M\Xi^2$. ergo $M\Xi$ quadrata
 spatio $A\Gamma$ aequalis est.

dico, $M\Xi$ ex duobus nominibus esse. nam quoniam
 AH rectae HE commensurabilis est, AE utrique rectae
 AH , HE commensurabilis est [prop. XV]. supposui-
 mus autem, etiam AE , AB commensurabiles esse.
 quare etiam AH , HE rectae AB commensurabiles
 sunt [prop. XII]. et AB rationalis est. itaque etiam
 utraque AH , HE rationalis est. quare etiam $A\Theta$,
 HK rationalia sunt [prop. XIX], et $A\Theta$, HK commen-
 surabilia. uerum $A\Theta = \Sigma N$, $HK = N\Pi$. itaque etiam
 ΣN , $N\Pi$, hoc est MN^2 , $N\Xi^2$, rationalia sunt et
 commensurabilia. et quoniam AE , EA longitudine in-
 commensurabiles sunt, et AE , AH commensurabiles,
 et AE , EZ commensurabiles, AH et EZ incom-
 mensurabiles sunt [prop. XIII]. quare etiam $A\Theta$ et
 EA incommensurabilia sunt [VI, 1; prop. XI]. uerum
 $A\Theta = \Sigma N$, $EA = MP$. quare etiam ΣN , MP in-
 commensurabilia sunt. est autem $\Sigma N : MP = ON : NP$
 [VI, 1]. itaque ON , NP incommensurabiles sunt

1) Nam $EA = Z\Gamma$.

15. ΣN] corr. ex EN B, item lin. 16. 15. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu \acute{\iota}\sigma\omicron\nu$ V.
 $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ PBb, comp. F. 16. $\tau\acute{\alpha}] \tau\acute{o}$ F. $N\Pi \acute{\alpha}\rho\alpha]$ $\tau\acute{o}$ $N\Pi$ F.
 17. $\acute{\alpha}\sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\rho\alpha$ B. 18. $\acute{\alpha}\lambda\lambda\acute{\alpha}$ Bb. 19. AH] corr. ex
 AB V. $EZ]$ $EZ \acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ V. 20. $\kappa\alpha\lambda]$ $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ V. Post EZ
 add. $\mu\acute{\eta}\kappa\epsilon\iota$ Vb, m. 2 B. 21. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu]$ om. BfB. 22. $\Sigma N]$
 $N\Sigma'$ F.

πρὸς MP , ἢ ON πρὸς τὴν NP · ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἢ ON τῇ NP . ἴση δὲ ἡ μὲν ON τῇ MN , ἡ δὲ NP τῇ $NΞ$ · ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἢ MN τῇ $NΞ$. καὶ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς MN σύμμετρον τῷ ἀπὸ τῆς $NΞ$, καὶ
 5 ῥητὸν ἐκάτερον· αἱ MN , $NΞ$ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι.

Ἡ $MΞ$ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ δύνатаι τὸ $ΑΓ$ · ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

νέ'.

- 10 Ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἢ καλουμένη ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Περιεχέσθω γὰρ χωρίον τὸ $ΑΒΓΔ$ ὑπὸ ῥητῆς
 15 τῆς $ΑΒ$ καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας τῆς $ΑΔ$ · λέγω, ὅτι ἡ τὸ $ΑΓ$ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων πρώτη ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα ἐστὶν ἡ $ΑΔ$, διηρῆσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ $Ε$, ὥστε τὸ μείζον
 20 ὄνομα εἶναι τὸ $ΑΕ$ · αἱ $ΑΕ$, $ΕΔ$ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ $ΑΕ$ τῆς $ΕΔ$ μείζον δύνάται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἐαυτῇ, καὶ τὸ ἔλαττον ὄνομα ἡ $ΕΔ$ σύμμετρόν ἐστι τῇ $ΑΒ$ μήκει. τετμήσθω ἡ $ΕΔ$ δίχα κατὰ τὸ $Ζ$, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΕΖ$ ἴσον παρὰ τὴν
 25 $ΑΕ$ παραβεβλήσθω ἑλλεῖπον εἶδει τετραγώνῳ τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΗΕ$ · σύμμετρος ἄρα ἡ $ΑΗ$ τῇ $ΗΕ$ μήκει. καὶ

1. τὸ MP V. οὕτως ἡ V. τήν] om. Bf b. MP F. ἐστὶν ἄρα F. 2. PN P. NM P. 4. τῆς] (prius) om. Fb, m. 2 B. $NΞ$] $MΞ$ F. 5. εἶσιν B. 6. μονονον P. 7. ἐκ] ἢ ἐκ P b. 12. ἐκ] ἢ ἐκ b. 14. Post γὰρ del. τό B. 18. γὰρ] om. Fb, m. 2 B. 20. $ΑΕ$] (alt.) $ΕΑ$ P, corr. in A

[prop. XI]. uerum $ON = MN$, $NP = NΞ$. quare MN , $NΞ$ incommensurabiles sunt. et MN^2 , $NΞ^2$ commensurabilia sunt, et utrumque rationale. MN , $NΞ$ igitur rationales sunt potentia tantum commensurabiles.

Ergo $MΞ$ ex duobus nominibus est [prop. XXXVI], et $MΞ^2 = AΓ$; quod erat demonstrandum.

LV.

Si spatium recta rationali et recta ex duobus nominibus secunda comprehenditur, recta spatio aequalis quadrata irrationalis est ex duobus mediis prima, quae uocatur.

Spatium enim $ABΓΔ$ rationali AB et recta ex duobus nominibus secunda $ΔΔ$ comprehendatur. dico, rectam spatio $AΓ$ aequalem quadratam ex duobus mediis primam esse.

nam quoniam $ΔΔ$ ex duobus nominibus secunda est, in E in nomina diuidatur ita, ut AE maius nomen sit. itaque AE , $EΔ$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles, et AE^2 excedit $EΔ^2$ quadrato rectae sibi commensurabilis, et minus nomen $EΔ$ rectae AB longitudine commensurabile est [def. alt. 2]. iam $EΔ$ in Z in duas partes aequales secetur, et quadrato EZ^2 aequale rectae AE adplicetur $AH \times HE$ figura quadrata deficiens. itaque AH , HE longitudine commensurabiles sunt [prop. XVII]. et per H , E , Z rectis AB , $ΓΔ$ parallelae ducantur $HΘ$, EK , $ZΛ$, et paral-

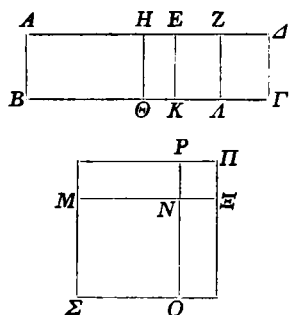
m. rec. εἰς PB. 21. τῆς $EΔ$] mg. m. 1 P. 22. ἑλασσον
P, comp. F. 23. AB] A ins. m. 1 F. 24. τῶ] corr. ex
τὸ m. 1 F. 25. τὸ] τῶ V. 26. AH , HE V e corr.

διὰ τῶν H, E, Z παράλληλοι ἤχθωσαν ταῖς $AB, ΓΔ$
αἱ $HΘ, EK, ΖΑ$, καὶ τῷ μὲν $AΘ$ παραλληλογράμμῳ
ἴσον τετράγωνον συνεστήτω τὸ $ΣΝ$, τῷ δὲ $ΗΚ$ ἴσον
τετράγωνον τὸ $ΝΠ$, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι
5 τὴν MN τῇ $NΞ$. ἐπ' εὐθείας ἄρα [ἐστὶ] καὶ ἡ PN
τῇ NO . καὶ συμπεπληρώσθω τὸ $ΣΠ$ τετράγωνον.
φανερὸν δὴ ἐκ τοῦ προδεδειγμένου, ὅτι τὸ MP μέσον
ἀνάλογόν ἐστι τῶν $ΣΝ, ΝΠ$, καὶ ἴσον τῷ $ΕΔ$, καὶ
ὅτι τὸ $ΑΓ$ χωρίον δύναται ἡ $MΞ$. δεικτέον δὴ, ὅτι
10 ἡ $MΞ$ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη. ἐπεὶ ἀσύμμετρός
ἐστὶν ἡ $ΑΕ$ τῇ $ΕΔ$ μήκει, σύμμετρος δὲ ἡ $ΕΔ$ τῇ
 AB , ἀσύμμετρος ἄρα ἡ $ΑΕ$ τῇ AB . καὶ ἐπεὶ σύμμε-
τρός ἐστὶν ἡ $ΑΗ$ τῇ $ΕΗ$, σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ $ΑΕ$
ἐκατέρα τῶν $ΑΗ, ΗΕ$. ἀλλὰ ἡ $ΑΕ$ ἀσύμμετρος τῇ
15 AB μήκει· καὶ αἱ $ΑΗ, ΗΕ$ ἄρα ἀσύμμετροί εἰσι τῇ
 AB . αἱ $ΒΑ, ΑΗ, ΗΕ$ ἄρα ρηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον
σύμμετροι· ὥστε μέσον ἐστὶν ἐκάτερον τῶν $AΘ, ΗΚ$.
ὥστε καὶ ἐκάτερον τῶν $ΣΝ, ΝΠ$ μέσον ἐστίν. καὶ
αἱ $MN, NΞ$ ἄρα μέσαι εἰσίν. καὶ ἐπεὶ σύμμετρος ἡ
20 $ΑΗ$ τῇ $ΗΕ$ μήκει, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ $AΘ$ τῷ $ΗΚ$,
τουτέστι τὸ $ΣΝ$ τῷ $ΝΠ$, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς MN

1. $ΓΔ$] $ΒΓ, ΓΔ P$, corr. m. 1; $ΔΓ Bb$. 2. $ΖΑ$] mut. in $AZ V, AZ Fb$. 3. Post τετράγωνον del. τὸ $ΝΠ$ m. 1 P.

$ΕΝ B$, sed corr. 5. $NΞ$] mut. in $NZ V$. ἐστὶ] om. P, ἐστίν B. 8. $ΝΠ$] $ΠΝ F$ et in ras. V. 9. $MΞ$] $MN, NΞ$ corr. ex $MNΞ V$; mg. m. 1 γρ. $MN, NΞ b$. δὲ V. 10. μέσον F, corr. m. 1. ἐπεὶ γάρ F. 12. ἄρα] ἄρα καὶ V, ἄρα ἐστίν F. Post AB add. μήκει V, m. 2 B. ἐπεὶ] om. P.

13. $ΕΗ$] $ΗΕ F$. ἐστίν B. 14. ἀλλὰ — 15. καὶ] καὶ ἐστι (ἐστίν B) ρητὴ ἡ $ΑΕ$. ρητὴ ἄρα καὶ ἐκατέρα τῶν $ΑΗ (ΑΕ F), ΗΕ$. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστὶν ἡ $ΑΕ$ τῇ AB , σύμμετρος δὲ ἡ $ΑΕ$ ἐκατέρα τῶν $ΑΗ, ΗΕ$, καὶ (om. B) Theon ($BFVb$). 15. ἄρα] m. 2 F. σύμμετροι BF , sed corr. εἰσίν PB . 16. Post AB add. μήκει m. 2 B. $ΒΑ$] om. P. εἰσίν B. 18. ἐστὶ PV , comp. Fb. 19. εἰσὶ V, comp. Fb. Ante ἡ add.



lelogrammo $A\Theta$ aequale construatur quadratum ΣN , parallelogrammo HK autem $N\Pi$, et ponantur ita, ut MN , $N\Xi$ in eadem recta^s sint; itaque etiam PN , NO in eadem sunt recta. expleatur quadratum $\Sigma\Pi$. tum ex iis, quae antea demonstrata sunt [prop. LIII lemma], adparet,

MP medium esse proportionale inter ΣN , $N\Pi$ et $= EA$ [p. 162, 1], et esse $M\Xi^2 = A\Gamma$ [p. 162, 5]. iam demonstrandum est, $M\Xi$ ex duabus mediis primam esse. quoniam AE , $E\Delta$ longitudine incommensurabiles sunt, et $E\Delta$, AB commensurabiles, AE , AB incommensurabiles erunt [prop. XIII]. et quoniam AH , EH commensurabiles sunt, etiam AE utrique AH , HE commensurabilis est [prop. XV]. uerum AE , AB longitudine incommensurabiles sunt. quare etiam AH , HE rectae AB incommensurabiles sunt [prop. XIII]. itaque BA et AH , HE rationales sunt potentia tantum commensurabiles. quare utrumque $A\Theta$, HK medium est [prop. XXI]. quare etiam utrumque ΣN , $N\Pi$ medium est. itaque etiam MN , $N\Xi$ mediae sunt. et quoniam AH , HE longitudine commensurabiles sunt, etiam $A\Theta$, HK , hoc est ΣN , $N\Pi$ siue MN^2 , $N\Xi^2$ commensurabilia sunt [VI, 1; prop. XI]. et quoniam AE , $E\Delta$ longitudine incommensurabiles sunt, et AE , AH commensurabiles, et $E\Delta$, EZ com-

τῷ ἀπο τῆς $NΞ$ [ὥστε δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι αἱ MN ,
 $NΞ$]. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ $ΑΕ$ τῇ $ΕΔ$ μήκει,
ἀλλ' ἡ μὲν $ΑΕ$ σύμμετρός ἐστι τῇ $ΑΗ$, ἡ δὲ $ΕΔ$ τῇ
 $ΕΖ$ σύμμετρος, ἀσύμμετρος ἄρα ἡ $ΑΗ$ τῇ $ΕΖ$. ὥστε
5 καὶ τὸ $ΑΘ$ τῷ $ΕΔ$ ἀσύμμετρόν ἐστιν, τουτέστι τὸ $ΣΝ$
τῷ $ΜΡ$, τουτέστιν ἡ $ΟΝ$ τῇ $ΝΡ$, τουτέστιν ἡ $ΜΝ$
τῇ $ΝΞ$ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει. ἐδείχθησαν δὲ αἱ MN ,
 $NΞ$ καὶ μέσαι οὖσαι καὶ δυνάμει σύμμετροι· αἱ MN ,
 $NΞ$ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω
10 δὴ, ὅτι καὶ ῥητὸν περιέχουσιν. ἐπεὶ γὰρ ἡ $ΔΕ$ ὑπό-
κειται ἐκατέρᾳ τῶν $ΑΒ$, $ΕΖ$ σύμμετρος, σύμμετρος
ἄρα καὶ ἡ $ΕΖ$ τῇ $ΕΚ$. καὶ ῥητὴ ἐκατέρα αὐτῶν· ῥη-
τὸν ἄρα τὸ $ΕΔ$, τουτέστι τὸ $ΜΡ$. τὸ δὲ $ΜΡ$ ἐστι τὸ
ὑπὸ τῶν $ΜΝΞ$. ἐὰν δὲ δύο μέσαι δυνάμει μόνον
15 σύμμετροι συντεθῶσι ῥητὸν περιέχουσαι, ἡ ὅλη ἄλογός
ἐστιν, καλεῖται δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Ἡ ἄρα $ΜΞ$ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη· ὅπερ ἔδει
δειξαι.

νς'.

20 Ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς
ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης, ἡ τὸ χωρίον δυνα-
μένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων
δευτέρα.

Χωρίον γὰρ τὸ $ΑΒΓΔ$ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς
25 $ΑΒ$ καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης τῆς $ΑΔ$ διηρη-
μένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ $Ε$, ὧν μείζον ἐστι τὸ

1. ὥστε — 2. $NΞ$] om. P. ὥστε καὶ F, sed corr. 3.
ἀλλὰ V. 4. σύμμετρος] om. FVb. ἀσύμμετρος] corr. ex
σύμμετρος m. 2 F. 5. ἀσύμμετρος F, corr. m. 2. ἐστι BV,
comp. Fb. ΣΝ] corr. ex EN B. 6. NP] in ras. V. 7.
ἐστιν P. 8. δυνάμει μόνον V. αἱ — 9. σύμμετροι] mg.
m. 2 V. 9. εἰσὶν B. 10. ΔΕ] in ras. V. 11. ΑΒ] corr.

mensurabiles, AH et EZ incommensurabiles sunt [prop. XIII]. quare AO , EA , hoc est EN , MP , incommensurabilia sunt, siue ON , NP , hoc est MN , $NΞ$, longitudine incommensurabiles [VI, 1; prop. XI]. demonstrauius autem, MN , $NΞ$ et medias esse et potentia commensurabiles. itaque MN , $NΞ$ mediae sunt potentia tantum commensurabiles. iam dico, easdem spatium rationale comprehendere. nam quoniam supposuimus, AE utrique AB , EZ commensurabilem esse, etiam EZ , EK commensurabiles sunt. et utraque rationalis est. quare EA , hoc est MP , rationale est [prop. XIX]. uerum $MP = MN \times NΞ$. sin duae mediae potentia tantum commensurabiles componuntur spatium rationale comprehendentes, tota irrationalis est, uocatur autem ex duabus mediis prima [prop. XXXVII].

Ergo $MΞ$ ex duabus mediis prima est; quod erat demonstrandum.

LVI.

Si spatium recta rationali et recta ex duobus nominibus tertia comprehenditur, recta spatio aequalis quadrata irrationalis est ex duabus mediis secunda, quae uocatur.

Spatium enim $ABΓΔ$ comprehendatur rationali AB et recta ex duobus nominibus tertia $ΑΔ$ in nomina in E diuisa, quorum maius est AE . dico, rectam

ex EB m. rec. F. EZ] in ras. V. $σύμμετρος$] om. F. 12.
 $ἀρα ἐστὶ$ P. EZ] mut. in ZE V, ZE P. 13. $τὸντέστιν$ P.
 14. MN , $NΞ$ V. $μόνον$] om. BFV. 15. $συντεθῶσιν$
 P B. $ἦ$] m. 2 F. 16. $ἐστὶ$ V, comp. Fb. 17. $MΞ$] MHZ ,
 del. Z, F. $ἐστὶ$] m. 2 F. 24. $φῆτῆς$] supra scr. F. 25.
 $τῷτῆς$] supra scr. F. 26. $ὧν$] $ὧν τό$ P. $ἔστω$ BFb.

AE · λέγω, ὅτι ἡ τὸ AG χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

Κατασκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη ἡ AD , αἱ AE , ED
 5 ἄρα ρηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ AE τῆς ED μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἐναντῇ, καὶ οὐδετέρα τῶν AE , ED σύμμετρός [ἐστὶ] τῇ AB μήκει. ὁμοίως δὴ τοῖς προδεδειγμένοις δεῖξομεν, ὅτι ἡ $MΞ$ ἐστὶν ἡ τὸ AG χωρίον δυναμένη, καὶ αἱ MN , $NΞ$
 10 μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε ἡ $MΞ$ ἐκ δύο μέσων ἐστίν.

Δεικτέον δὴ, ὅτι καὶ δευτέρα.

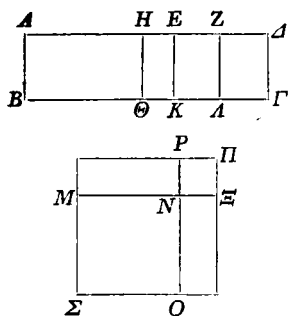
[Καὶ] ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστὶν ἡ AE τῇ AB μήκει, τουτέστι τῇ EK , σύμμετρος δὲ ἡ AE τῇ EZ , ἀσύμ-
 15 μετρος ἄρα ἐστὶν ἡ EZ τῇ EK μήκει. καὶ εἰσι ρηταὶ· αἱ ZE , EK ἄρα ρηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. μέσον ἄρα [ἐστὶ] τὸ EA , τουτέστι τὸ MP · καὶ περιέχεται ὑπὸ τῶν $MNΞ$ · μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν $MNΞ$.

20 Ἡ $MΞ$ ἄρα ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

1. ἡ] supra scr. m. 1 b. 3. κατασκευάσθω Vb. γὰρ] δέ V. 5. εἰσιν P. Post AE del. ED ἄρα ρηταὶ εἰσιν m. 1 P. 7. ἐστὶ] om. P. 8. τοῖς πρότερον δεδειγμένοις Theon (BFVb). ἡ] m. rec. P. 9. ἡ] postea ins. F. καὶ ὅτι αἱ BFV. 10. εἰσὶν B. $MΞ$] MZ FV. 11. ἐστὶ BV, comp. Fb. 13. καὶ] m. 2 BF, om. Vb. ἐπεὶ οὖν V. 15. EZ] ZE P. EK] EH P. 16. εἰσιν PB. 17. ἐστὶ] om. BFVb. τουτέστιν P. 18. MN , $NΞ$ b. μέσον — 19. $MNΞ$] mg. m. 2 F. 20. $MΞ$] MN , add. $Ξ$ m. 2 B; $MNΞ$ FVb. ἄρα] supra scr. m. 1 F. ἐστὶ] om. P. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. BFVb.

spatio AG aequalem quadratam irrationalem esse ex duabus mediis secundam, quae uocatur.

Comparentur enim eadem, quae antea. et quoniam AA ex duobus nominibus tertia est, AE , EA



rationales sunt potentia tantum commensurabiles, et AE^2 excedit EA^2 quadrato rectae sibi commensurabilis, et neutra rectarum AE , EA rectae AB longitudine commensurabilis est [def. alt. 3]. iam eodem modo quo antea demonstrabimus, esse

$$M\Xi^2 = AG$$

[cfr. p. 162, 5], et MN , $N\Xi$ medias esse potentia tantum commensurabiles [cfr. p. 166, 10 sq.]. quare $M\Xi$ ex duabus mediis est.

iam demonstrandum est, eandem secundam esse. quoniam AE , AB , hoc est AE , EK , longitudine incommensurabiles sunt, et AE , EZ commensurabiles, EZ et EK longitudine incommensurabiles sunt [prop. XIII]. et rationales sunt; itaque ZE , EK rationales sunt potentia tantum commensurabiles. quare EA , hoc est MP , medium est [prop. XXI]. et rectis MN , $N\Xi$ comprehenditur. itaque $MN \times N\Xi$ medium est.

Ergo $M\Xi$ ex duabus mediis secunda est [prop. XXXVIII]; quod erat demonstrandum.

νζ.

Ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ρητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἢ καλουμένη μείζων.

- 5 Χωρίον γὰρ τὸ $ΑΓ$ περιεχέσθω ὑπὸ ρητῆς τῆς $ΑΒ$ καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης τῆς $ΑΔ$ διηρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ $Ε$, ὧν μείζον ἔστω τὸ $ΑΕ$ · λέγω, ὅτι ἡ τὸ $ΑΓ$ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἢ καλουμένη μείζων.
- 10 Ἐπεὶ γὰρ ἡ $ΑΔ$ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη, αἱ $ΑΕ$, $ΕΔ$ ἄρα ρηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ $ΑΕ$ τῆς $ΕΔ$ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἐαυτῇ, καὶ ἡ $ΑΕ$ τῇ $ΑΒ$ σύμμετρός [ἐστὶ] μήκει. τετμήσθω ἡ $ΔΕ$ δίχα κατὰ τὸ $Ζ$, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΕΖ$
- 15 ἴσον παρὰ τὴν $ΑΕ$ παραβελθήσθω παραλληλόγραμμον τὸ ὑπὸ $ΑΗ$, $ΗΕ$ · ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ $ΑΗ$ τῇ $ΗΕ$ μήκει. ἥχθωσαν παράλληλοι τῇ $ΑΒ$ αἱ $ΗΘ$, $ΕΚ$, $ΖΑ$, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρὸ τούτου γεγονέτω· φανερόν δὴ, ὅτι ἡ τὸ $ΑΓ$ χωρίον δυναμένη ἐστὶν ἢ
- 20 $ΜΞ$. δεικτέον δὴ, ὅτι ἡ $ΜΞ$ ἄλογός ἐστιν ἢ καλουμένη μείζων. ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ $ΑΗ$ τῇ $ΕΗ$ μήκει, ἀσύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ $ΑΘ$ τῷ $ΗΚ$, τουτέστι τὸ $ΣΝ$ τῷ $ΝΠ$ · αἱ $ΜΝ$, $ΝΞ$ ἄρα δυνάμει εἰσὶν

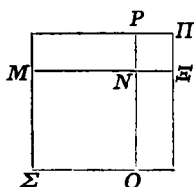
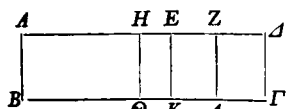
2. περιέχεται P. 4. μείζω V, sed corr. 8. ἢ] om. Fb.
 $ΑΕ$ P. χωρίον ἢ Fb. 10. ἐστὶν P. 11. εἰσιν P. 12.
 τῆς] τῇ b. τῷ] corr. ex τό V. σύμμετρον, ἀ- add. m. 2,
 BFb. 13. ἐστὶ] om. P. 15. $ΑΕ$] supra $Δ$ scr. $Δ$ b, E in
 ras. V. 16. ὑπὸ τῶν V. $ΑΗ$] corr. ex $ΑΕ$ m. 1 F. 17.
 $ΕΗ$ V. 18. $ΖΑ$] in ras., seq. ras. 3 litt. V, Z in ras. m. 1 B.
 λοιπὰ] supra scr. V. τά] om. FV. αὐτά] om. F. 21.
 σύμμετρος F, corr. m. 2. ἐστὶν] om. B. 22. τουτέστιτεστι P,
 corr. m. 1. 23. τῷ] corr. ex τό FV. ἄρα] om. b. εἰσὶ
 σύμμετροι V, corr. m. 2.

LVII.

Si spatium recta rationali et recta ex duobus nominibus quarta comprehenditur, recta spatio aequalis quadrata irrationalis est maior, quae uocatur.

Spatium enim AF rationali AB comprehendatur et AD recta ex duobus nominibus quarta in E in nomina diuisa, quorum maius sit AE . dico, rectam spatio AF aequalem quadratam irrationalem esse maiorem, quae uocatur.

nam quoniam AD ex duobus nominibus quarta est, AE , ED rationales sunt potentia tantum commensurabiles, et AE^2 excedit ED^2



quadrato rectae sibi incommensurabilis, et AE , AB longitudine commensurabiles sunt [deff. alt. 4]. secetur AE in Z in duas partes aequales, et quadrato EZ^2 aequale rectae AE adplicetur parallelogrammum

$$AH \times HE.$$

itaque AH , HE longitudine incommensurabiles sunt [prop. XVIII]. rectae AB parallelae ducantur $HΘ$, EK , ZA , et reliqua eodem modo, quo antea [p. 166, 1 sq.], fiant. manifestum igitur est, esse $MΞ^2 = AF$. iam demonstrandum, $MΞ$ irrationalem esse maiorem, quae uocatur. quoniam AH , EH longitudine incommensurabiles sunt, etiam $AΘ$, HK , hoc est $ΣN$, $NΠ$, incommensurabilia sunt [VI, 1; prop. XI]. itaque MN , $NΞ$ potentia incommensurabiles sunt. et quoniam AE , AB longitudine commensurabiles sunt, AK rationale est [prop.

ἀσύμμετροι. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ AE τῇ AB
 μήκει, φητόν ἐστι τὸ AK . καὶ ἐστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ
 τῶν MN , $NΞ$. φητόν ἄρα [ἐστὶ] καὶ τὸ συγκείμενον
 ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν MN , $NΞ$. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός
 5 [ἐστιν] ἡ AE τῇ AB μήκει, τουτέστι τῇ EK , ἀλλὰ
 ἡ AE σύμμετρός ἐστι τῇ EZ , ἀσύμμετρος ἄρα ἡ EZ
 τῇ EK μήκει. αἱ EK , EZ ἄρα φηταὶ εἶσι δυνάμει
 μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα τὸ AE , τουτέστι τὸ MP .
 καὶ περιέχεται ὑπὸ τῶν MN , $NΞ$. μέσον ἄρα ἐστὶ
 10 τὸ ὑπὸ τῶν MN , $NΞ$. καὶ φητόν τὸ [συγκείμενον]
 ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν MN , $NΞ$, καὶ εἰσιν ἀσύμμετροι αἱ
 MN , $NΞ$ δυνάμει. ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμ-
 μετροὶ συντεθῶσι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν
 ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων φητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον,
 15 ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν, καλεῖται δὲ μεῖζων.
 Ἡ $MΞ$ ἄρα ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μεῖζων,
 καὶ δύναται τὸ AG χωρίον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

νῆ'.

Ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ φητῆς καὶ τῆς
 20 ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυνα-
 μένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη φητόν καὶ μέ-
 σον δυναμένη.

Χωρίον γὰρ τὸ AG περιεχέσθω ὑπὸ φητῆς τῆς
 AB καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης τῆς AD διη-
 25 ρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ E , ὥστε τὸ μεῖζον
 ὄνομα εἶναι τὸ AE . λέγω [δὴ], ὅτι ἡ τὸ AG χωρίον

1. EAP . 2. ἐστὶ] ἐστιν P, dein del. ἡ AE τῇ AB m. 1. τό]
 e corr. m. 1 V. 3. MN] NMP . ἐστὶ] om. B F V b. καί]
 om. b. 4. ἐστὶν] om. P. τουτέστιν P. ἀλλ' F. 5.
 ἐστὶν P. τῇ] τῆς P. 6. εἰσιν P. 7. τουτέστιν b. τό]
 corr. ex τῷ m. 1 F. 8. μέσον — 9. $NΞ$] mg. m. 1 P. 10.

XIX]. et $AK = MN^2 + N\Xi^2$. quare etiam $MN^2 + N\Xi^2$ rationale est. et quoniam AE, AB , hoc est AE, EK , longitudine incommensurabiles sunt [prop. XIII], et AE, EZ commensurabiles, EZ, EK longitudine incommensurabiles sunt [prop. XIII]. itaque EK, EZ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. quare AE , hoc est MP , medium est [prop. XXI]. et rectis $MN, N\Xi$ comprehenditur. itaque $MN \times N\Xi$ medium est. et $MN^2 + N\Xi^2$ rationale est, et $MN, N\Xi$ potentia incommensurabiles sunt. sin duae rectae potentia incommensurabiles componuntur efficientes summam quadratorum suorum rationalem, rectangulum autem medium, tota irrationalis est, uocatur autem maior [prop. XXXIX].

Ergo $M\Xi$ irrationalis est maior, quae uocatur, et $M\Xi^2 = A\Gamma$; quod erat demonstrandum.

LVIII.

Si spatium recta rationali et recta ex duobus nominibus quinta comprehenditur, recta spatio aequalis quadrata irrationalis est spatio rationali et medio aequalis quadrata, quae uocatur.

Spatium enim $A\Gamma$ comprehendatur rationali AB et AD recta ex duobus nominibus quinta in E in nomina diuisa, ita ut AE maius nomen sit. dico, rectam spatio $A\Gamma$ aequalem quadratam irrationalem esse

$\acute{\upsilon}\pi\acute{o}$] συγκεῖμενον ἐκ V. συγκεῖμενον] om. P. 11. ἐκ τῶν] supra scr. F. καὶ ἐστὶν ἀσύμμετρος ἡ MN τῇ NΞ Theon (BFVb). 13. συντεθῶσιν PB. 14. δέ comp. F. 15. ἐστὶ BV, comp. Fb. 19. καὶ τῆς] bis b. 26. δὴ] om. P. ἡ] supra scr. m. 1 P.

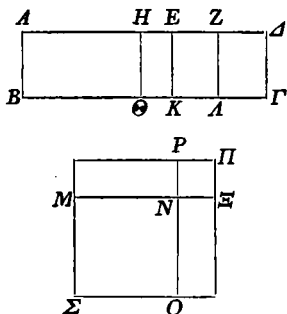
δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἢ καλουμένη φητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον δεδειγμένοις· φανερόν δὴ, ὅτι ἡ τὸ $ΑΓ$ χωρίον δυναμένη ἐστίν
 5 ἢ $ΜΞ$. δεικτέον δὴ, ὅτι ἡ $ΜΞ$ ἐστίν ἢ φητὸν καὶ μέσον δυναμένη. ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ $ΑΗ$ τῇ $ΗΕ$, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ $ΑΘ$ τῷ $ΘΕ$, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς $ΜΝ$ τῷ ἀπὸ τῆς $ΝΞ$. αἱ $ΜΝ$, $ΝΞ$ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. καὶ ἐπεὶ ἡ $ΑΔ$ ἐκ
 10 δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη, καὶ [ἐστίν] ἔλασσον αὐτῆς τμήμα τὸ $ΕΔ$, σύμμετρος ἄρα ἡ $ΕΔ$ τῇ $ΑΒ$ μήκει. ἀλλὰ ἡ $ΑΕ$ τῇ $ΕΔ$ ἐστίν ἀσύμμετρος· καὶ ἡ $ΑΒ$ ἄρα τῇ $ΑΕ$ ἐστίν ἀσύμμετρος μήκει [αἱ $ΒΑ$, $ΑΕ$ φηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι]· μέσον ἄρα ἐστὶ
 15 τὸ $ΑΚ$, τουτέστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $ΜΝ$, $ΝΞ$. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ $ΔΕ$ τῇ $ΑΒ$ μήκει, τουτέστι τῇ $ΕΚ$, ἀλλὰ ἡ $ΔΕ$ τῇ $ΕΖ$ σύμμετρός ἐστιν, καὶ ἡ $ΕΖ$ ἄρα τῇ $ΕΚ$ σύμμετρός ἐστιν. καὶ φητὴ ἡ $ΕΚ$ · φητὸν ἄρα καὶ τὸ $ΕΑ$, τουτέστι τὸ $ΜΡ$, τουτέστι
 20 ἐστὶ τὸ ὑπὸ $ΜΝΞ$. αἱ $ΜΝ$, $ΝΞ$ ἄρα δυνάμει ἀσύμμετροί εἰσι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν φητόν.

3. κατασκευάσθω V, sed corr. γὰρ] οὖν V. τοῖς προ-
 δεδειγμένοις Theon (BFVb). 5. δέ F. 7. $ΗΕ$] corr. ex
 $ΕΗ$ V. ἐστίν PB. 8. τῆς $ΝΞ$] τῶν $ΝΞ$ P. 9. σύμ-
 μετροι V, corr. m. 2. $ΑΔ$] $Δ$ e corr. V. 10. ἐστίν] om. P.
 12. ἀλλ' F. 13. $ΒΑ$] mut. in $ΑΒ$ m. 2 V, $ΑΒ$ F. 14.
 εἰσιν B. 16. ἀσύμμετρος B, corr. m. 2. 17. ἀλλ' F. $ΔΕ$]
 corr. ex $ΒΓ$, ut uidetur, V. ἐστὶ PBV, comp. Fb. 18.
 Ante σύμμετρος ras. 1 litt. V. καὶ φητὴ] φητὴ δέ BFVb.
 19. Post $ΕΚ$ add. φητὴ ἄρα καὶ ἡ $ΕΖ$ V. $ΕΑ$] supra add.
 $Δ$ m. 1 b. τουτέστιν P. τουτέστιν P. 20. ὑπὸ τῶν FV.
 $ΜΝ$, $ΝΞ$ B. 21. εἰσιν PB. 22. δέ F.

spatio rationali et medio aequalem quadratam, quae uocatur.

comparentur enim eadem, quae in superioribus demonstrationibus. manifestum igitur est, esse $M\Xi^2 = A\Gamma$



[p. 162, 1 sq.]. iam demonstrandum est, $M\Xi$ esse rectam spatio rationali et medio aequalem quadratam. nam quoniam AH , HE incommensurabiles sunt [prop. XVIII], $A\Theta$, ΘE , hoc est MN^2 , $N\Xi^2$, incommensurabilia sunt [VI, 1; prop. XI]. itaque MN , $N\Xi$ potentia

incommensurabiles sunt. et quoniam $A\Delta$ ex duobus nominibus est quinta, et minor pars eius est $E\Delta$, $E\Delta$ et AB longitudine commensurabiles sunt [deff. alt. 5]. uerum AE , $E\Delta$ incommensurabiles sunt. quare etiam AB , AE longitudine incommensurabiles sunt [prop. XIII].¹⁾ itaque AK , hoc est $MN^2 + N\Xi^2$, medium est [prop. XXI]. et quoniam ΔE , AB , hoc est ΔE , EK , longitudine commensurabiles sunt, et ΔE , EZ commensurabiles, etiam EZ , EK commensurabiles sunt [prop. XII]. et EK rationalis est. itaque etiam $E\Delta$, hoc est MP siue $MN \times N\Xi$, rationale est [prop. XIX]. itaque MN , $N\Xi$ potentia incommensurabiles sunt summam quadratorum suorum mediam efficientes, rectangulum autem rationale.

1) Cum lin. 13 $\alpha\theta\alpha$, quod edd. post AE habent, in codd. omittatur, malui delere $\alpha\theta$ BA — lin. 14 $\sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\rho\omicron\iota$.

Ἡ ΜΞ ἄρα ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστὶ καὶ δύναται τὸ ΑΓ χωρίον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

νθ'.

Ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς
5 ἐκ δύο ὀνομάτων ἑκτῆς, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη
ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη δύο μέσα δυναμένη.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς
ΑΒ καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἑκτῆς τῆς ΑΔ διηρη-
μένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὥστε τὸ μεῖζον
10 ὄνομα εἶναι τὸ ΑΕ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΓ δυναμένη ἡ
δύο μέσα δυναμένη ἐστίν.

Κατεσκευάσθω [γὰρ] τὰ αὐτὰ τοῖς προοδεδειγμένοις.
φανερόν δῃ, ὅτι [ἡ] τὸ ΑΓ δυναμένη ἐστίν ἡ ΜΞ,
καὶ ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΜΝ τῇ ΝΞ δυνάμει. καὶ
15 ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΕΑ τῇ ΑΒ μήκει, αἱ ΕΑ,
ΑΒ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον
ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ, τουτέστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ
τῶν ΜΝ, ΝΞ. πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΕΔ
τῇ ΑΒ μήκει, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΕ τῇ ΕΚ·
20 αἱ ΖΕ, ΕΚ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι·
μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΛ, τουτέστι τὸ ΜΡ, τουτέστι τὸ
ὑπὸ τῶν ΜΝΞ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρος ἡ ΑΕ τῇ ΕΖ,
καὶ τὸ ΑΚ τῷ ΕΑ ἀσύμμετρόν ἐστιν. ἀλλὰ τὸ μὲν

1. ἐστίν PB. 6. ἡ] postea ins. F. μέσας P, corr. m. 1.
7. ῥητῆς] om. F. 10. ἡ — δυναμένη] mg. m. 1 P. ἡ]
(alt.) ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη Vb, e corr. F. 11. ἐστίν] del.
F, om. Vb. 12. κατασκευάσθω V. γὰρ] om. P. 13. ἡ]
om. PF. 15. ΕΑ] ΑΕ FVb. ΕΑ] ΑΕ' F, in ras. V. 16.
εἰσιν B. 17. ἐστίν P. "ἀπὸ τῶν ἐκ τῶν F. 18. ΝΞ]
mut. in ΞΝ V. 19. Post AB add. τουτέστι τῇ ΕΚ V. ἐστίν B.
ΖΕ] ΕΖ P. 20. αἱ] καὶ αἱ BFb. εἰσιν P. 21. ΜΡ]
corr. ex ME m. rec. b. τουτέστιν P. 22. ἡ] ἐστιν ἡ FV.
23. ἀσύμμετρος F.

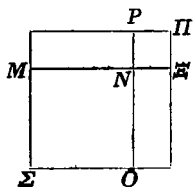
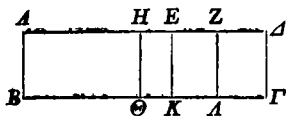
Ergo $M\Xi$ recta spatio rationali et medio aequalis quadrata est [prop. XL], et $M\Xi^2 = A\Gamma$; quod erat demonstrandum.

LIX.

Si spatium recta rationali et recta ex duobus nominibus sexta comprehenditur, recta spatio quadrata aequalis irrationalis est duobus spatiis mediis aequalis quadrata, quae uocatur.

Spatium enim $AB\Gamma\Delta$ comprehendatur recta rationali AB et recta ex duobus nominibus sexta $A\Delta$ in E in nomina diuisa, ita ut maius nomen sit AE . dico, rectam spatio $A\Gamma$ aequalem quadratam rectam esse duobus spatiis mediis aequalem quadratam.

comparentur eadem, quae in superioribus demonstrationibus. manifestum est igitur, esse $M\Xi^2 = A\Gamma$,



et MN , $N\Xi$ potentia incommensurabiles esse [p. 176, 6 sq.]. et quoniam EA , AB longitudine incommensurabiles sunt [deff. alt. 6], EA et AB rationales sunt potentia tantum commensurabiles. itaque AK , hoc est $MN^2 + N\Xi^2$, medium est [prop. XXI]. rursus quo-

niam $E\Delta$, AB longitudine incommensurabiles sunt [deff. alt. 6], ZE et EK incommensurabiles sunt [prop. XIII]. quare ZE , EK rationales sunt potentia tantum commensurabiles. itaque EA , hoc est MP siue $MN \times N\Xi$, medium est [prop. XXI]. et quoniam AE , EZ incommensurabiles sunt, etiam AK , EA

AK ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπο τῶν $MN, NΞ$,
τὸ δὲ EA ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν $MNΞ$ ἀσύμμετρον ἄρα
ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $MNΞ$ τῷ ὑπὸ
τῶν $MNΞ$. καὶ ἐστὶ μέσον ἐκάτερον αὐτῶν, καὶ αἱ
5 $MN, NΞ$ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι.

Ἡ $MΞ$ ἄρα δύο μέσα δυναμένη ἐστὶ καὶ δύναται
τὸ $ΑΓ$. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[Λήμμα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν
10 ἀνίσων τετράγωνα μείζονά ἐστὶ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ἀνί-
σων περιεχομένου ὀρθογωνίου.

Ἐστω εὐθεῖα ἡ AB καὶ τετμήσθω εἰς ἄνισα
κατὰ τὸ Γ , καὶ ἔστω μείζων ἡ $ΑΓ$. λέγω, ὅτι τὰ
ἀπὸ τῶν $ΑΓ, ΓB$ μείζονά ἐστὶ τοῦ δις ὑπὸ τῶν
15 $ΑΓ, ΓB$.

Τετμήσθω γὰρ ἡ AB δίχα κατὰ τὸ Δ . ἐπεὶ οὖν
εὐθεῖα γραμμὴ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Δ , εἰς
δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Γ , τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $ΑΓ, ΓB$ μετὰ
τοῦ ἀπὸ $\Gamma\Delta$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ $ΑΔ$. ὥστε τὸ ὑπὸ
20 τῶν $ΑΓ, ΓB$ ἑλαττόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ $ΑΔ$. τὸ ἄρα δις
ὑπὸ τῶν $ΑΓ, ΓB$ ἑλαττον ἢ διπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ
 $ΑΔ$. ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΓ, ΓB$ διπλάσιά [ἐστὶ] τῶν
ἀπὸ τῶν $ΑΔ, ΔΓ$. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $ΑΓ, ΓB$ μείζονά
ἐστὶ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ, ΓB$. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.]

25

ξ'.

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων παρὰ ῥητὴν

2. ἐστὶ] m. 2 F. τῶν] om. BFb. 3. $MN, NΞ$ V. τῷ]
τό FV. 4. $MN, NΞ$ m. 2 V. ἐστὶ P. μέσον] μὲν V.
6. δυνάμει V. 8. λήμμα] m. 2 P. 10. ἴσων V, sed corr.

incommensurabilia sunt [VI, 1; prop. XI]. uerum $AK = MN^2 + N\xi^2$, $EA = MN \times N\xi$. itaque $MN^2 + N\xi^2$ et $MN \times N\xi$ incommensurabilia sunt. et utrumque medium est, et MN , $N\xi$ potentia incommensurabiles sunt.

Ergo $M\xi$ recta est duobus spatiis mediis aequalis quadrata [prop. XLI], et $M\xi^2 = A\Gamma$; quod erat demonstrandum.

[Lemma.

Si recta linea in partes inaequales secatur, quadrata partium inaequalium maiora sunt duplo rectangulo partibus inaequalibus comprehenso.

Sit recta AB et in Γ in partes inaequales secetur, et maior sit $A\Gamma$. dico, esse

$$A\Gamma^2 + \Gamma B^2 > 2 A\Gamma \times \Gamma B.$$

nam AB in Δ in duas partes aequales secetur. iam quoniam recta linea in Δ in partes aequales secta est, in Γ autem in inaequales, erit $A\Gamma \times \Gamma B + \Gamma \Delta^2 = A\Delta^2$ [II, 5]. quare $A\Gamma \times \Gamma B < A\Delta^2$. itaque $2 A\Gamma \times \Gamma B < 2 A\Delta^2$. est autem $A\Gamma^2 + \Gamma B^2 = 2(A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2)$ [II, 9]. ergo $A\Gamma^2 + \Gamma B^2 > 2 A\Gamma \times \Gamma B$; quod erat demonstrandum.¹⁾

LX.

Quadratum rectae ex duobus nominibus rectae ra-

1) Cum Euclides iam prop. XLIV p. 128, 17 hoc lemmate tacite usus sit, parum credibile est, id ab eo ipso hic demum additum esse. quare puto, lemma ab interpolatore adiectum esse, quem fugerit, id iam antea usurpatum esse. facile adparet res ipsa ex II, 7.

είσι V. ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων V. 12. ἔστω γάρ F. 13. μείζον τὸ $A\Gamma$ P. 16. Δ] corr. ex B F. 17. γεγραμμένη ἢ AB V. 19. ἀπὸ τῆς Vb. $\Gamma\Delta$] in ras. V, $\Delta\Gamma$ P. τῆς $A\Delta$ V. 20. ἔλασσον P, comp. Fb. τῆς $A\Delta$ V. 22. τῆς $A\Delta$ V. ἔστι] om. P. 24. τῶν] om. P. 25. $\nu\theta'$, corr. m. 2, F.

παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην.

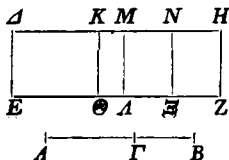
Ἔστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ AB διηρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ , ὥστε τὸ μείζον ὀνομα εἶναι τὸ
 5 $ΑΓ$, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔE , καὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB ἴσον παρὰ τὴν ΔE παραβεβλήσθω τὸ ΔEZH πλάτος ποιοῦν τὴν ΔH . λέγω, ὅτι ἡ ΔH ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη.

Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ΔE τῷ μὲν ἀπὸ
 10 τῆς $ΑΓ$ ἴσον τὸ $\Delta \Theta$, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς $BΓ$ ἴσον τὸ $KΛ$. λοιπὸν ἄρα τὸ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓB$ ἴσον ἐστὶ τῷ MZ . τετμήσθω ἡ MH δίχα κατὰ τὸ N , καὶ παράλληλος ἤχθω ἡ $NΞ$ [ἐκατέρω τῶν $ΜΑ$, HZ]. ἐκάτερον ἄρα τῶν $MΞ$, NZ ἴσον ἐστὶ τῷ ἅπαξ ὑπὸ τῶν
 15 $ΑΓB$. καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ AB διηρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ , αἱ $ΑΓ$, $ΓB$ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓB$ ῥητά ἐστὶ καὶ σύμμετρα ἀλλήλοις. ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓB$ [σύμμετρόν
 20 ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓB$. ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓB$]. καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ ΔA . ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΔA . καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔE παράκειται ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔM καὶ σύμμετρος τῇ ΔE μήκει. πάλιν, ἐπεὶ αἱ $ΑΓ$, $ΓB$ ῥηταί εἰσι
 25 δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓB$, τουτέστι τὸ MZ . καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν $ΜΑ$ παράκειται ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ MH ἐστὶ καὶ ἀσύμ-

5. τῷ] corr. ex τό m. 1 F. AB] A e corr. B. 9. τῷ] corr. ex τό m. 1 F. 10. τό] mut. in τῷ m. 1 F. $\Delta \Theta$] Θ e corr. V. τῷ] corr. ex τό m. 1 F. 11. ἐστὶ] m. 2 F. 12. δίχα] m. 2 V. 13. $NΞ$] N eras. F, $Ξ$ b. ἐκατέρω — HZ] om. P. 14. Post ἄρα del. τῶν AH V. NZ] corr. ex $NΞ$

tionali adplicatum latitudinem efficit rectam ex duobus nominibus primam.

Sit AB recta ex duobus nominibus in Γ in nomina diuisa, ita ut maius nomen sit $A\Gamma$, et ponatur rationalis ΔE , et quadrato AB^2 aequale rectae ΔE adplicetur ΔEZH latitudinem efficiens ΔH . dico, ΔH rectam esse ex duobus nominibus primam.



nam rectae ΔE adplicetur $\Delta\Theta = A\Gamma^2$ et $KA = B\Gamma^2$. itaque reliquum [II, 4] $2A\Gamma \times \Gamma B = MZ$. iam MH in N in duas partes aequales secetur, et NZ parallela ducatur. itaque $MZ = NZ = A\Gamma \times \Gamma B$. et quoniam AB ex duobus nominibus est in Γ in nomina diuisa, $A\Gamma$, ΓB rationales sunt potentia tantum commensurabiles [prop. XXXVI]. itaque $A\Gamma^2$, ΓB^2 rationalia sunt et commensurabilia. quare etiam $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ [prop. XV]. et $A\Gamma^2 + \Gamma B^2 = \Delta A$. itaque etiam ΔA rationale est. et rectae rationali ΔE adplicatum est; quare ΔM rationalis est et rectae ΔE longitudine commensurabilis [prop. XX]. rursus quoniam $A\Gamma$, ΓB rationales sunt potentia tantum commensurabiles, $2A\Gamma \times \Gamma B$, hoc est MZ , medium est [prop. XXI]. et rectae rationali MA adplicatum est. itaque MH rationalis est et rectae MA , hoc est ΔE , longitudine

m. 1 F. 15. $A\Gamma$, ΓB in ras. V. 16. $\alpha\lambda$] $\kappa\alpha\lambda$ $\alpha\lambda$ V. 18. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$] $\acute{\epsilon}\lambda\epsilon\iota$ BFb. $\kappa\alpha\lambda$] (alt.) om. V. 19. Post ΓB del. $\kappa\alpha\lambda$ $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ $\acute{\iota}\sigma\sigma\alpha\iota$ F. $\acute{\sigma}\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\rho\omicron\nu$ — 20. ΓB] mg. m. 1 P. 20. $\phi\eta\tau\acute{o}\nu$ — 21. ΓB] om. P. 22. ΔA] A e corr. FV, ΔA P. $\tau\acute{o}$] $\tau\acute{\omega}$ F. ΔA] corr. ex ΔA m. rec. P. 23. ΔM] corr. ex ΔH m. 2 F. 27. $\acute{\alpha}\rho\alpha$ $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ BFVb. $\kappa\alpha\lambda$] om. V. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$] om. BFVb. $\acute{\sigma}\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\rho\omicron\varsigma$ F, corr. m. 2.

μετρος τῇ MA , τουτέστι τῇ AE , μήκει. ἔστι δὲ καὶ ἡ MA ῥητὴ καὶ τῇ AE μήκει σύμμετρος· ἀσύμμετρος ἄρα ἔστιν ἡ AM τῇ MH μήκει· καὶ εἰσι ῥηταί· αἱ AM , MH ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι·
 5 ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἔστιν ἡ $ΔH$.

Δεικτέον δὴ, ὅτι καὶ πρώτη.

Ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν AG , GB μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν AGB , καὶ τῶν $ΔΘ$, KA ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ $MΞ$. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ $ΔΘ$ πρὸς τὸ
 10 $MΞ$, οὕτως τὸ $MΞ$ πρὸς τὸ KA , τουτέστιν ὡς ἡ $ΔK$ πρὸς τὴν MN , ἡ MN πρὸς τὴν MK . τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $ΔK$, KM ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς MN . καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς AG τῷ ἀπὸ τῆς GB , σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ $ΔΘ$ τῷ KA . ὥστε καὶ ἡ $ΔK$ τῇ
 15 KM σύμμετρός ἐστιν. καὶ ἐπεὶ μείζονά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν AG , GB τοῦ δις ὑπὸ τῶν AG , GB , μείζον ἄρα καὶ τὸ $ΔA$ τοῦ MZ . ὥστε καὶ ἡ $ΔM$ τῆς MH μείζων ἐστίν. καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν $ΔK$, KM τῷ ἀπὸ τῆς MN , τουτέστι τῷ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς MH , καὶ
 20 σύμμετρος ἡ $ΔK$ τῇ KM . ἐὰν δὲ ὥσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ, ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· ἡ $ΔM$ ἄρα
 25 τῆς MH μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰσι ῥηταὶ αἱ $ΔM$, MH , καὶ ἡ $ΔM$ μείζον ὀνομα οὐσα σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ $ΔE$ μήκει.

1. MA] AM in ras. V. ἔστιν PB. 3. $ΔM$] MA P. καὶ εἰσι] e corr. V. εἰσιν B. 4. $ΔM$, MH ἄρα] e corr. V. 5. ἄρα] supra scr. F, om. P. 7. Post ἐπεὶ add. γάρ BVb, F m. 2. 8. AG , GB m. 2 V. 10. $ΔK$] K in ras. V. 13. GB] BF in ras. V. 15. KM μήκει σύμ-

incommensurabilis [prop. XXII]. uerum MA rationalis est et rectae AE longitudine commensurabilis. itaque AM , MH longitudine incommensurabiles sunt [prop. XIII]. et sunt rationales. itaque AM , MH rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo AH ex duobus nominibus est [prop. XXXVI]. iam demonstrandum, eandem primam esse. quoniam $AG \times GB$ medium est proportionale inter AG^2 , GB^2 [cfr. prop. XXI lemma], etiam $M\Xi$ medium est proportionale inter $A\Theta$, KA . itaque $A\Theta : M\Xi = M\Xi : KA$, hoc est [VI, 1] $AK : MN = MN : MK$. itaque $AK \times KM = MN^2$ [VI, 17]. et quoniam AG^2 , GB^2 commensurabilia sunt, etiam $A\Theta$, KA commensurabilia sunt. quare etiam AK , KM commensurabiles sunt [VI, 1; prop. XI]. et quoniam est $AG^2 + GB^2 > 2AG \times GB$ [u. ad lemma], erit $AA > MZ$. quare etiam $AM > MH$ [VI, 1; V, 14]. et

$$AK \times KM = MN^2 = \frac{1}{4} MH^2,$$

et AK , KM commensurabiles sunt. sin datae sunt duae rectae inaequales, et quartae parti quadrati minoris aequale spatium maiori adplicatur figura quadrata deficiens et eam in partes commensurabiles diuidit, maior quadrata minorem excedit quadrato rectae sibi commensurabilis [prop. XVII]. itaque AM^2 excedit MH^2 quadrato rectae sibi commensurabilis. et AM , MH rationales sunt, et maius nomen AM rectae rationali propositae AE longitudine commensurabilis est.

μετρός ἐστι V. Post ἐστίν add. μήκει m. 2 B. 16. τοῦ — GB] supra scr. F. 18. ἐστὶ PVb, comp. F. 20. Post KM add. μήκει V, m. 2 B. ὥσιν PB. 23. διαιρεῖ b. 24. Ante μεῖζον ras. 1 litt. F. 25. τῶ τό V. 26. καὶ ἡ — 27. ἐστὶ] in ras. F. 26. AM] MH P, HM Fb.

Ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη ὅπερ
ἔδει δεῖξαι.

ξά'.

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων πρώτης παρὰ ρη-
5 τὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο
ὀνομάτων δευτέραν.

Ἔστω ἐκ δύο μέσων πρώτη ἡ AB διηρημένη εἰς
τὰς μέσας κατὰ τὸ Γ , ὧν μελῶν ἡ AG , καὶ ἐκκείσθω
ρητὴ ἡ AE , καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν AE τῷ ἀπὸ
10 τῆς AB ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ AZ πλάτος ποιοῦν
τὴν $ΔΗ$ · λέγω, ὅτι ἡ $ΔΗ$ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρὸ τούτου. καὶ
ἐπεὶ ἡ AB ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη διηρημένη κατὰ
τὸ Γ , αἱ AG , GB ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον
15 σύμμετροι ρητὸν περιέχουσιν· ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν
 AG , GB μέσα ἐστίν. μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ AA . καὶ παρὰ
ρητὴν τὴν AE παραβέβληται· ρητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ MA
καὶ ἀσύμμετρος τῇ AE μήκει. πάλιν, ἐπεὶ ρητὸν ἐστὶ
τὸ δις ὑπὸ τῶν AG , GB , ρητὸν ἐστὶ καὶ τὸ MZ . καὶ
20 παρὰ ρητὴν τὴν MA παράκειται· ρητὴ ἄρα [ἐστὶ] καὶ
ἡ MH καὶ μήκει σύμμετρος τῇ MA , τουτέστι τῇ AE .
ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AM τῇ MH μήκει. καὶ εἰσι
ρηταί· αἱ AM , MH ἄρα ρηταί εἰσι δυνάμει μόνον
σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ $ΔΗ$.

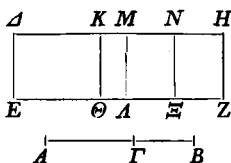
1. ὀνομάτω b. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. BFVb, comp. P. 3.
ξβ' F. 4. ρητῆς B, sed corr. 7. ἔστω] e corr. m. 2 F. 9.
παρὰ τὴν AE παραβεβλήσθω P. 10. AB] corr. ex AA m.
1 b. ἴσον τό P. 12. κατεσκευάσθω V. 14. αἱ] in ras.
m. 2 B. εἰσίν B. 16. ἐστίν] ἐστί PB, comp. Fb, εἰσὶ V.
17. παράκειται Theon (BFVb). 19. ἐστι] om. B. 20. ρη,
supra scr. τὴν P. ἐστὶ] om. BFVb. 21. σύμμετρος μήκει V.
 MA] M e corr. V. 22. ἐστίν] om. V. μήκει τῇ MH V.
εἰσίν B.

Ergo ΔH ex duobus nominibus prima est [deff. alt. 1]; quod erat demonstrandum.

LXI.

Quadratum rectae ex duabus mediis primae rectae rationali adplicatum latitudinem efficit rectam ex duobus nominibus secundam.

Sit AB recta ex duabus mediis prima in Γ in medias diuisa, quarum maior sit $A\Gamma$, et ponatur rationalis ΔE , et rectae ΔE adplicetur quadrato AB^2 aequale parallelogrammum ΔZ latitudinem efficiens ΔH . dico, ΔH ex duobus nominibus secundam esse.



nam comparentur eadem, quae in priore propositione. et quoniam AB ex duabus mediis prima est in Γ diuisa, $A\Gamma$, ΓB mediae sunt potentia tantum commensurabiles spatium rationale comprehendentes [prop. XXXVII]. quare etiam $A\Gamma^2$, ΓB^2 media sunt [prop. XXI]. itaque ΔA medium est. et rectae rationali ΔE adplicatum est. itaque $M\Delta$ rationalis est et rectae ΔE longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. rursus quoniam $2 A\Gamma \times \Gamma B$ rationale est, etiam MZ rationale est. et rectae rationali $M\Delta$ adplicatum est. itaque etiam MH rationalis est et rectae $M\Delta$ longitudine commensurabilis [prop. XX], hoc est rectae ΔE . itaque ΔM , MH longitudine incommensurabiles sunt [prop. XIII]. et sunt rationales. itaque ΔM , MH rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo ΔH ex duobus nominibus est [prop. XXXVI].

Δεικτέον δὴ, ὅτι καὶ δευτέρα.

Ἐπεὶ γὰρ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ μείζονά ἐστι τοῦ
 δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$, μείζον ἄρα καὶ τὸ $ΔΑ$ τοῦ
 $ΜΖ$ · ὥστε καὶ ἡ $ΔΜ$ τῆς $ΜΗ$. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν
 5 ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ τῷ ἀπὸ τῆς $ΓΒ$, σύμμετρόν ἐστι
 καὶ τὸ $ΔΘ$ τῷ $ΚΑ$ · ὥστε καὶ ἡ $ΔΚ$ τῇ $ΚΜ$ σύμμε-
 τρός ἐστιν. καὶ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν $ΔΚΜ$ ἴσον τῷ ἀπὸ
 τῆς $ΜΝ$ · ἡ $ΔΜ$ ἄρα τῆς $ΜΗ$ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ
 συμμέτρου ἐαυτῇ. καὶ ἐστὶν ἡ $ΜΗ$ σύμμετρος τῇ $ΔΕ$
 10 μῇκει.

Ἡ $ΔΗ$ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα.

ξβ'.

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων δευτέρας παρὰ
 ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ
 15 δύο ὀνομάτων τρίτην.

Ἔστω ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἡ $ΑΒ$ διηρημένη εἰς
 τὰς μέσας κατὰ τὸ $Γ$, ὥστε τὸ μείζον τμήμα εἶναι τὸ
 $ΑΓ$, ῥητὴ δέ τις ἔστω ἡ $ΔΕ$, καὶ παρὰ τὴν $ΔΕ$ τῷ
 ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβεβλήσθω
 20 τὸ $ΔΖ$ πλάτος ποιῶν τὴν $ΔΗ$ · λέγω, ὅτι ἡ $ΔΗ$ ἐκ
 δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη.

Κατεσκευάσθω τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις. καὶ
 ἐπεὶ ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἐστὶν ἡ $ΑΒ$ διηρημένη
 κατὰ τὸ $Γ$, αἱ $ΑΓ$, $ΓΒ$ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον
 25 σύμμετροι μέσον περιέχουσai· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον

3. $ΑΓ$] $Γ$ in ras. m. 1 P. 7. ἐστιν] ἐστὶ BV, comp. Fb.
 ἐστὶ] ἐστὶν P. $ΔΚΜ$] $Κ$ corr. ex $Μ$ m. 1 P; $ΔΚ$, $ΚΜ$ corr.
 ex $ΔΚ$, $ΝΜ$ V. 8. $ΜΗ$] corr. ex $ΜΝ$ m. 1 b. δύναται
 μείζον V. 12. ξβ'] corr. ex ξγ' F. 15. ὀνομάτων] corr. ex
 μέσων m. 2 B. τρίτην] in ras. m. 1 B. 16. ἔστω] in ras.
 m. 1 B. 18. ἔστω] γεγονέτω V. $ΔΕ$] in ras. m. 1 B. τήν]

iam demonstrandum est, eandem secundam esse.

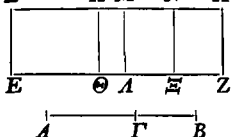
nam quoniam $AG^2 + GB^2 > 2AG \times GB$ [prop. LIX lemma], erit etiam $AA > MZ$. quare etiam $AM > MH$. et quoniam AG^2 , GB^2 commensurabilia sunt, etiam AO , KA commensurabilia sunt. quare etiam AK , KM commensurabiles sunt [VI, 1; prop. XI]. et $AK \times KM = MN^2$ [cfr. p. 184, 7 sq.]. itaque AM^2 excedit MH^2 quadrato rectae sibi commensurabilis [prop. XVII]; et MH , AE longitudine commensurabiles sunt.

Ergo AH ex duobus nominibus secunda est [deff. alt. 2].

LXII.

Quadratum rectae ex duabus mediis secundae rectae rationali adplicatum latitudinem efficit rectam ex duobus nominibus tertiam.

Sit AB ex duabus mediis secunda in Γ in medias diuisa, ita ut maior pars sit AG , rationalis autem sit AE , et rectae AE quadrato AB^2 aequale parallelogrammum AZ adplicetur latitudinem efficiens AH . dico, AH ex duobus nominibus tertiam esse.



comparentur eadem, quae in superioribus demonstrationibus. et quoniam AB ex duabus mediis secunda est in Γ diuisa, AG , GB mediae sunt potentia tantum commensurabiles spatium medium comprehen-

ξητην την F. τῷ] corr. ex τό m. 1 F. 20. την] corr. ex τό m. 1 B, τό F. 22. καὶ κατασκευάσθω, del. καί, F; κατασκευάσθω γάρ V. καί] postea ins. F. 23. ἐστὶ δευτέρα P. 24. ΓB] Γ in ras. V. μέσαι ἄρα V. εἰσὶν PB.

ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ μέσον ἐστίν. καὶ ἐστὶν
 ἴσον τῷ $ΔΑ$ · μέσον ἄρα καὶ τὸ $ΔΑ$. καὶ παράκειται
 παρὰ ῥητὴν τὴν $ΔΕ$ · ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $ΜΔ$ καὶ
 ἀσύμμετρος τῇ $ΔΕ$ μήκει. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ
 5 $ΜΗ$ ῥητὴ ἐστὶ καὶ ἀσύμμετρος τῇ $ΜΑ$, τουτέστι τῇ
 $ΔΕ$, μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν $ΔΜ$, $ΜΗ$
 καὶ ἀσύμμετρος τῇ $ΔΕ$ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός
 ἐστὶν ἡ $ΑΓ$ τῇ $ΓΒ$ μήκει, ὥς δὲ ἡ $ΑΓ$ πρὸς τὴν $ΓΒ$,
 οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΓΒ$, ἀσύμ-
 10 μετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ τῷ ὑπο τῶν $ΑΓΒ$.
 ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$
 τῷ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓΒ$ ἀσύμμετρόν ἐστὶν, τουτέστι τὸ
 $ΔΑ$ τῷ $ΜΖ$ · ὥστε καὶ ἡ $ΔΜ$ τῇ $ΜΗ$ ἀσύμμετρός
 ἐστὶν. καὶ εἰσι ῥηταί· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν
 15 ἡ $ΔΗ$.

Δεικτέον [δὴ], ὅτι καὶ τρίτη.

Ὅμοίως δὲ τοῖς προτέροις ἐπιλογιούμεθα, ὅτι μεί-
 ζων ἐστὶν ἡ $ΔΜ$ τῆς $ΜΗ$, καὶ σύμμετρος ἡ $ΔΚ$ τῇ
 $ΚΜ$. καὶ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν $ΔΚΜ$ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς
 20 $ΜΝ$ · ἡ $ΔΜ$ ἄρα τῆς $ΜΗ$ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ
 συμμέτρου ἐαυτῇ. καὶ οὐδετέρα τῶν $ΔΜ$, $ΜΗ$ σύμ-
 μετρός ἐστὶ τῇ $ΔΕ$ μήκει.

Ἡ $ΔΗ$ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη· ὅπερ
 ἔδει δεῖξαι.

1. ἐκ τῶν] om. Fb, m. 2 B. ἐστίν] ἐστὶ PVBb, comp. F.
 2. παράκειται] om. V. 3. τὴν $ΔΕ$ ῥητὴν P. ἐστίν B. καί]
 om. B. $ΔΜ$ P. 4. διὰ] καὶ διὰ F. 6. ῥητὴ — 7. μήκει]
 mg. m. 2 V. 6. $ΜΝ$ V. 8. τῇ $ΓΒ$ — ἡ $ΑΓ$] supra scr.
 m. 2 F. 9. τῆς] τῶν B. $ΑΓ$, $ΒΑ$ B. σύμμετρον B, corr.
 m. 2. 10. τό] corr. < x τῷ V. τῷ] corr. ex τό m. 2 P.
 $ΑΓ$, $ΓΒ$ V. 11. $ΓΒ$] om. P. 12. $ΑΒΓΡ$ P. ἐστὶ PBFV,
 comp. b. τό] τῷ F. 13. $ΔΑ$] $ΔΑ$ F et, eras. A, b. καί]
 om. B. 14. ἐστὶ PVB, comp. Fb. 16. δὴ] om. P. 17.

dentes [prop. XXXVIII]. quare etiam $AG^2 + GB^2$ medium est. est autem $AG^2 + GB^2 = AA$. itaque etiam AA medium est. et rectae rationali AE adplicatum est. itaque MA rationalis est et rectae AE longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. eadem de causa etiam MH rationalis est et rectae MA , hoc est AE , longitudine incommensurabilis. itaque utraque AM , MH rationalis est et rectae AE longitudine incommensurabilis. et quoniam AG , GB longitudine incommensurabiles sunt, et $AG:GB = AG^2:AG \times GB$ [prop. XXI lemma], etiam AG^2 et $AG \times GB$ incommensurabilia sunt [prop. XI]. quare etiam $AG^2 + GB^2$ et $2AG \times GB$, hoc est AA et MZ , incommensurabilia sunt. quare etiam AM , MH incommensurabiles sunt [VI, 1; prop. XI]. et sunt rationales. ergo AH ex duobus nominibus est [prop. XXXVI].

demonstrandum, eandem tertiam esse.

eodem igitur modo, quo antea [p. 188, 2 seq.], concludemus, esse $AM > MH$, et AK , KM commensurabiles esse. et $AK \times KM = MN^2$. itaque AM^2 excedit MH^2 quadrato rectae sibi commensurabilis [prop. XVII]. et neutra rectarum AM , MH rectae AE longitudine commensurabilis est.

Ergo AH ex duobus nominibus tertia est [deff. alt. 3]; quod erat demonstrandum.

$\delta\eta'$] $\delta\epsilon$ V. $\pi\rho\acute{o}\tau\epsilon\rho\alpha\nu$ BFb. $\delta\tau\iota$] corr. ex $\tau\iota$ m. rec. P. 19. ΔKM] Δ e corr. V, corr. ex Δ m. rec. P. 21. $\sigma\upsilon\mu\mu\epsilon\tau\rho\alpha\nu$] σ in ras. V. 22. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ PV. 23. $\delta\pi\epsilon\rho$ $\acute{\epsilon}\delta\epsilon\iota$ $\delta\epsilon\iota\chi\alpha\iota$] comp. P, om. BFVb.

ξγ'.

Τὸ ἀπὸ τῆς μείζονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην.

- 5 Ἐστω μείζων ἡ AB διηρημένη κατὰ τὸ Γ , ὥστε μείζονα εἶναι τὴν $ΑΓ$ τῆς $ΓΒ$, ῥητὴ δὲ ἡ ΔE , καὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB ἴσον παρὰ τὴν ΔE παραβεβλήσθω τὸ ΔZ παραλληλόγραμμον πλάτος ποιοῦν τὴν ΔH λέγω, ὅτι ἡ ΔH ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη.
- 10 Κατεσκευάσθω τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ AB διηρημένη κατὰ τὸ Γ , αἱ $ΑΓ$, $ΓΒ$ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μέσον. ἐπεὶ οὖν ῥητόν ἐστι τὸ συγκείμενον
- 15 ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$, ῥητόν ἄρα ἐστὶ τὸ ΔA . ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΔM καὶ σύμμετρος τῇ ΔE μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$, τουτέστι τὸ MZ , καὶ παρὰ ῥητὴν ἐστὶ τὴν $ΜΑ$, ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ MH καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔE μήκει.
- 20 ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔM τῇ MH μήκει. αἱ ΔM , MH ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔH .

Δεικτέον [δὴ], ὅτι καὶ τετάρτη.

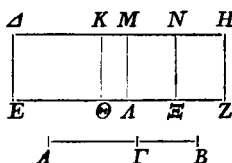
Ὅμοίως δὴ δείξομεν τοῖς πρότερον, ὅτι μείζων ἐστὶν

1. ξδ' F, et sic deinceps. 6. ῥη supra scr. τῇ V. δέ τις V. 7. παρὰ — 8. ΔZ] mg. m. 1 F. 8. ΔH] corr. ex ΔE m. 1 F. 9. ἡ ΔH] corr. ex AH F. 10. κατασκευάσθω V. Dein add. γάρ FV. προδεδειμένοις F, corr. m. 2; προδεδιδαγμένοις P, mg. m. 1 γρ. προδεδειγμένοις. 12. $ΓΒ$ ἄρα V. εἰσὶ σύμμετροι B, corr. m. 2. μέν] supra scr. m. 1 F. 13. δ' BFV. 15. ΔA] corr. ex ΔA m. rec. P. 16. ΔM] MA BVb, " ΔM F. 17. $ΑΓΒ$ P. 18. ἐστὶ] om.

LXIII.

Quadratum maioris rectae rationali adplicatum latitudinem efficit rectam ex duobus nominibus quartam.

Sit maior AB in Γ diuisa, ita ut sit $A\Gamma > \Gamma B$, et rationalis sit ΔE , et quadrato AB^2 aequale rectae



ΔE adplicetur parallelogrammum ΔZ latitudinem efficiens ΔH . dico, ΔH ex duobus nominibus quartam esse.

comparentur eadem, quae in superioribus demonstrationibus. et quoniam AB maior est in Γ diuisa, $A\Gamma$, ΓB potentia sunt incommensurabiles efficientes summam quadratorum rationalem, rectangulum autem medium [prop. XXXIX]. iam quoniam $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ rationale est, ΔA rationale est. quare ΔM rationalis est et rectae ΔE longitudine commensurabilis [prop. XX]. rursus quoniam $2 A\Gamma \times \Gamma B$ medium est, hoc est MZ , et rectae rationali MA adplicatum est, etiam MH rationalis est et rectae ΔE longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. itaque ΔM , MH longitudine incommensurabiles sunt [prop. XIII]. quare ΔM , MH rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo ΔH ex duobus nominibus est [prop. XXXVI].

demonstrandum, eandem quartam esse.

iam eodem modo, quo antea, demonstrabimus, esse

Theon (BFVb). MA] corr. ex $M\Delta$ m. rec. b, $M\Delta$ BF. Deinde add. $\pi\alpha\rho\acute{\alpha}\nu\sigma\iota\tau\alpha\iota$ Theon (BFVb). 19. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$ V. 20. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$ P. ΔM] M e corr. m. 1 F. Ante $\alpha\lambda$ del. $\kappa\alpha\iota$ F. 21. $\tilde{\alpha}\rho\alpha$] om. P. 23. $\delta\eta$] om. P. 24. $\delta\eta$ τοῖς πρότερον ἐπιλογιούμεθα, ὅτι Theon (BFVb).

ἡ $\triangle M$ τῆς MH , καὶ ὅτι τὸ ὑπὸ $\triangle K M$ ἴσον ἐστὶ τῷ
 ἀπὸ τῆς MN . ἐπεὶ οὖν ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς
 $ΑΓ$ τῷ ἀπὸ τῆς $ΓΒ$, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ
 $\triangle Θ$ τῷ $ΚΑ$. ὥστε ἀσύμμετρος καὶ ἡ $\triangle K$ τῇ KM
 5 ἐστίν. ἐὰν δὲ ὥσι δύο εὐθεῖαι ἄνιστοι, τῷ δὲ τετάρτῳ
 μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παραλληλόγραμμον
 παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλείπον εἶδει τετρα-
 γώνῳ καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ, ἡ μείζων τῆς
 ἐλάσσονος μείζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ
 10 μήκει· ἡ $\triangle M$ ἄρα τῆς MH μείζον δύνатаι τῷ ἀπὸ
 ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰσιν αἱ $\triangle M$, MH ῥηταὶ δυ-
 νάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ $\triangle M$ σύμμετρός ἐστι
 τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ $\triangle E$.

Ἡ $\triangle H$ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη· ὅπερ
 15 ἔδει δεῖξαι.

ξδ'.

Τὸ ἀπο τῆς ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένης πα-
 ρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ
 δύο ὀνομάτων πέμπτην.

20 Ἔστω ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἡ $ΑΒ$ διηρημένη
 εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ $Γ$, ὥστε μείζονα εἶναι τὴν
 $ΑΓ$, καὶ ἐκκεῖσθω ῥητὴ ἡ $\triangle E$, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΑΒ$
 ἴσον παρὰ τὴν $\triangle E$ παραβεβλήσθω τὸ $\triangle Z$ πλάτος
 ποιοῦν τὴν $\triangle H$. λέγω, ὅτι ἡ $\triangle H$ ἐκ δύο ὀνομάτων
 25 ἐστὶ πέμπτη.

1. τῆς] τῇ V? MN BV. ὑπὸ τῶν V. $\triangle K M$] supra
 add. K V. 3. τό] corr. ex τά? F. 4. ἀσύμμετρος] om.
 Theon (BFVb). KM ἀσύμμετρός ἐστίν Theon (BFVb).
 5. ὥσιν BF. 6. Post ἴσον del. παρὰ τὴν μείζονα F. παρ-
 αλληλόγραμμον] om. V. 7. παρὰ τὴν μείζονα] om. Fb, m.
 2 B. 8. διαιρεῖ F, διαιρεῖ μήκει V. 10. $\triangle M$] corr. ex
 $\triangle H$ F. 11. συμμέτρου F. 13. $\triangle E$] corr. ex $\triangle H$ F. 14.

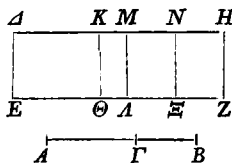
$\Delta M > MH$, et $\Delta K \times KM = MN^2$. iam quoniam $\Delta \Gamma^2$, ΓB^2 incommensurabilia sunt, etiam $\Delta \Theta$, $K\Lambda$ incommensurabilia sunt. quare ΔK , KM incommensurabiles sunt [VI, 1; prop. XI]. sin datae sunt duae rectae inaequales, et quartae parti quadrati minoris aequale parallelogrammum maiori adplicatur figura quadrata deficiens et eam in partes incommensurabiles diuidit, maior quadrata minorem excedit quadrato rectae sibi incommensurabilis [prop. XVIII]. itaque ΔM^2 excedit MH^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis. et ΔM , MH rationales sunt potentia tantum commensurabiles, et ΔM rationali propositae ΔE commensurabilis est.

Ergo ΔH ex duobus nominibus quarta est [deff. alt. 4]; quod erat demonstrandum.

LXIV.

Quadratum rectae spatio rationali et medio aequalis quadratae rectae rationali adplicatum latitudinem efficit rectam ex duobus nominibus quintam.

Sit AB recta spatio rationali et medio aequalis quadrata in Γ in rectas diuisa, ita ut $\Delta \Gamma$ maior sit, et ponatur ΔE rationalis, et quadrato AB^2 aequale rectae ΔE adplicetur ΔZ latitudinem efficiens ΔH . dico, ΔH ex duobus nominibus quintam esse.



$\delta\pi\epsilon\rho$ $\xi\delta\epsilon\iota$ $\delta\epsilon\iota\chi\alpha\iota$] comp. P, om. BFVb. 17. $\kappa\alpha\iota$] postea ins. m. 1 F. 20. $\phi\eta\tau\acute{\eta}$ F, sed corr. η AB] m. 2 V.

Κατεσκευάσθω τα αὐτα τοῖς πρὸ τούτου. ἐπεὶ οὖν
 ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστὶν ἡ AB διηρημένη
 κατὰ το Γ , αἱ AG , GB ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι
 5 ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετρα-
 γώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. ἐπεὶ οὖν μέ-
 σον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AG , GB ,
 μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔA . ὥστε ῥητὴ ἐστὶν ἡ ΔM καὶ
 μήκει ἀσύμμετρος τῇ ΔE . πάλιν, ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ
 δις ὑπὸ τῶν AGB , τουτέστι τὸ MZ , ῥητὴ ἄρα ἡ MH
 10 καὶ σύμμετρος τῇ ΔE . ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΔM τῇ
 MH . αἱ ΔM , MH ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον
 σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔH .

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ πέμπτη.

Ὅμοιως γὰρ δειχθήσεται, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΔKM
 15 ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς MN , καὶ ἀσύμμετρος ἡ ΔK τῇ
 KM μήκει· ἡ ΔM ἄρα τῆς MH μείζον δύναται τῷ
 ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰσιν αἱ ΔM , MH [ῥη-
 ται] δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ἐλάσσων ἡ MH
 σύμμετρος τῇ ΔE μήκει.

20 Ἡ ΔH ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη· ὅπερ
 ἔδει δεῖξαι.

ξέ'.

Τὸ ἀπὸ τῆς δύο μέσα δυναμένης παρὰ ῥη-
 τὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο
 25 ὀνομάτων ἑκτὴν.

Ἔστω δύο μέσα δυναμένη ἡ AB διηρημένη κατὰ
 τὸ Γ , ῥητὴ δὲ ἔστω ἡ ΔE , καὶ παρὰ τὴν ΔE τῷ

1. κατασκευάσθω V. Deinde add. γὰρ FV. πρὸ τούτου]
 πρότερον, corr. m. 2, F. 4. τετράγωνον F, corr. m. 2. 5.
 δέ F. 7. καὶ τό b. 8. τῇ] ἡ b. 9. AG , GB B et corr.
 in $AB\Gamma$ V. 10. Post ΔE add. μήκει m. 2 B. 11. ΔM
 in ras. V. 17. συμμέτρον, sed corr., BFb. ῥηταί] om. P,

comparentur eadem, quae antea. iam quoniam AB recta est spatio rationali et medio aequalis quadrata in Γ diuisa, AG , GB potentia incommensurabiles sunt efficientes summam quadratorum mediam, rectangulum autem rationale [prop. XL]. iam quoniam $AG^2 + GB^2$ medium est, AA medium est. itaque AM rationalis est et rectae AE longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. rursus quoniam $2AG \times GB$, hoc est MZ , rationale est, MH rationalis est et rectae AE commensurabilis [prop. XX]. itaque AM , MH incommensurabiles sunt [prop. XIII]. quare AM , MH rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo AH ex duobus nominibus est [prop. XXXVI].

iam dico, eandem quintam esse.

nam similiter demonstrabimus, esse $AK \times KM = MN^2$ et AK , KM longitudine incommensurabiles. itaque AM^2 excedit MH^2 quadrato rectae sibi commensurabilis [prop. XVIII]. et AM , MH potentia tantum commensurabiles sunt, et minor MH rectae AE longitudine commensurabilis est.

Ergo AH ex duobus nominibus est quinta [deff. alt. 5]; quod erat demonstrandum.

LXV.

Quadratum rectae duobus spatiis mediis aequalis quadratae rectae rationali adplicatum latitudinem efficit rectam ex duobus nominibus sextam.

Sit AB recta duobus spatiis mediis aequalis qua-

m. 2 F. 20. AH] AM PBb, AH in ras. V, mut. in AM
 m. 2 F. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BVb. 27. δ' b.
 τήν] ὁρίων τήν F. τῶ] corr. ex τό m. 1 F.

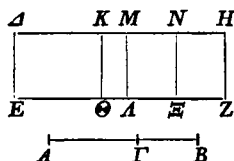
ἀπὸ τῆς AB ἴσον παραβεβλήσθω τὸ ΔZ πλάτος
 ποιοῦν τὴν ΔH . λέγω, ὅτι ἡ ΔH ἐκ δύο ὀνομάτων
 ἐστὶν ἕκτη.

- Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. καὶ
 5 ἐπεὶ ἡ AB δύο μέσα δυναμένη ἐστὶ διηρημένη κατὰ
 τὸ Γ , αἱ AG , GB ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι
 ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετρα-
 γώνων μέσον καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον καὶ ἐτι ἀσύμ-
 μετρον τὸ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων συγκείμενον
 10 τῷ ὑπ' αὐτῶν. ὥστε κατὰ τὰ προδεδειγμένα μέσον
 ἐστὶν ἐκάτερον τῶν ΔA , MZ . καὶ παρὰ ρητὴν τὴν
 ΔE παράκειται· ρητὴ ἄρα ἐστὶν ἐκάτερα τῶν ΔM ,
 MH καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔE μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμε-
 τρόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AG , GB
 15 τῷ δις ὑπὸ τῶν AG , GB , ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ
 ΔA τῷ MZ . ἀσύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΔM τῇ MH .
 αἱ ΔM , MH ἄρα ρηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμε-
 τροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔH .

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἕκτη.

- 20 Ὅμοίως δὲ πάλιν δείξομεν, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΔKM
 ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς MN , καὶ ὅτι ἡ ΔK τῇ KM
 μήκει ἐστὶν ἀσύμμετρος· καὶ διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἡ ΔM
 τῆς MH μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ
 μήκει. καὶ οὐδετέρα τῶν ΔM , MH σύμμετρός ἐστι
 25 τῇ ἐκκειμένῃ ρητῇ τῇ ΔE μήκει.

1. ἴσον] ἴσον παραλληλόγραμμον V. 4. κατασκευάσθω V,
 sed corr. 5. δύο] δ corr. ex μ F. 6. AG] GA F. 9.
 τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων Theon (BFVb).
 10. τῷ] τῷ ἐκ τῶν P. τά] om. b. προδεδειδαγμένα P,
 corr. m. 1. 12. παράκειται P. ἐστίν] ἐστὶ καὶ BFVb.
 15. ἐστὶν P. 16. MZ] corr. ex MG m. 1 F. 17. ΔM]
 corr. ex AM m. rec. P. 19. δὴ] om. BV. 20. δὴ] γὰρ



drata in Γ diuisa, ΔE autem rationalis sit, et rectae ΔE quadrato AB^2 aequale adplicetur ΔZ latitudinem efficiens ΔH . dico, ΔH ex duobus nominibus sextam esse.

comparentur enim eadem, quae antea. et quoniam AB recta est duobus spatiis mediis aequalis quadrata in Γ diuisa, $A\Gamma$, ΓB potentia incommensurabiles sunt efficientes summam quadratorum mediam et rectangulum medium et praeterea summam quadratorum rectangulo incommensurabilem [prop. XLI]. quare ex iis, quae antea demonstrata sunt, ΔA et MZ media sunt. et rectae rationali ΔE adplicata sunt. quare utraque ΔM , MH rationalis est et rectae ΔE longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. et quoniam $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ et $2 A\Gamma \times \Gamma B$ incommensurabilia sunt, ΔA et MZ incommensurabilia sunt. quare etiam ΔM , MH incommensurabiles sunt [VI, 1; prop. XI]. itaque ΔM , MH rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo ΔH ex duobus nominibus est [prop. XXXVI].

iam dico, eandem sextam esse.

iam rursus similiter demonstrabimus, esse $\Delta K \times KM = MN^2$, et ΔK , KM longitudine incommensurabiles esse. eadem igitur de causa ΔM^2 excedit MH^2 quadrato rectae sibi longitudine incommensurabilis [prop. XVIII]. et neutra rectarum ΔM , MH rectae rationali propositae ΔE longitudine commensurabilis est.

Theon (BFVb). $\pi\acute{\alpha}\lambda\iota\nu$] om. V. Deinde add. τοῖς πρὸ τούτου
 Theon (BFVb). $\delta\tau\iota$] supra scr. F. 21. KM] MH F, corr.
 in KMH m. 2. 22. διὰ ταῦτα BV. 23. συμμέτρον BF,
 sed corr.

Ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἔκτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ξς'.

Ἡ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων μήκει σύμμετρος καὶ
5 αὐτὴ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

Ἔστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ AB , καὶ τῇ AB μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ $\Gamma\Delta$. λέγω, ὅτι ἡ $\Gamma\Delta$ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ AB .

- 10 Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ AB , διηρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ E , καὶ ἔστω μείζον ὄνομα το AE . αἱ AE , EB ἄρα ρηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. γεγονένω ὥς ἡ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως ἡ AE πρὸς τὴν ΓZ . καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ EB πρὸς λοιπὴν
15 τὴν $Z\Delta$ ἐστίν, ὥς ἡ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$. σύμμετρος δὲ ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$ μήκει· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν AE τῇ ΓZ , ἡ δὲ EB τῇ $Z\Delta$. καὶ εἰσι ρηταὶ αἱ AE , EB . ρηταὶ ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ ΓZ , $Z\Delta$. καὶ [ἐπεὶ] ἐστίν ὥς ἡ AE πρὸς ΓZ , ἡ EB πρὸς $Z\Delta$. ἐναλλάξ ἄρα
20 ἐστὶν ὥς ἡ AE πρὸς EB , ἡ ΓZ πρὸς $Z\Delta$. αἱ δὲ AE , EB δυνάμει μόνον [εἰσὶ] σύμμετροι· καὶ αἱ ΓZ , $Z\Delta$ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. καὶ εἰσι ρηταί· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ $\Gamma\Delta$.

Λέγω δὴ, ὅτι τῇ τάξει ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῇ AB .

1. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 5. ἐστὶν P.
ἡ] m. 2 B. 7. ἡ — 8. ὀνομάτων] mg. m. 2 B. 11. ὄνομα]
om. V. 14. ΓZ] mut. in BZ b. καί] in ras. V. 15.
 $Z\Delta$] ΔZ FV. $\Gamma\Delta$] corr. ex $E\Delta$ F. σύμμετρος — 16.
μήκει] m. 2 B. 16. ἐστὶ] om. b, m. 2 B. 17. $Z\Delta$] corr.
ex ΔZ V. αἱ AE , EB] mg. m. 2 V. 18. εἰσὶν B. ἐπεὶ]
om. P. 19. πρὸς ΓZ — 20. AE] mg. m. 2 B. 19. τὴν ΓZ
BV. ΓZ — πρὸς] supra scr. F. τὴν $Z\Delta$ V. ἄρα] om. F.

Ergo ΔH ex duobus nominibus sexta est [deff. alt. 6]; quod erat demonstrandum.

LXVI.

Recta rectae ex duobus nominibus longitudine commensurabilis et ipsa ex duobus nominibus est et ordine eadem.

Sit AB ex duobus nominibus, et $\Gamma\Delta$ rectae AB longitudine commensurabilis sit. dico, $\Gamma\Delta$ ex duobus nominibus esse et ordine eandem ac AB .

nam quoniam AB ex duobus nominibus est, in E in nomina diuidatur, et maius nomen sit AE . itaque AE , EB rationales sunt potentia tantum commensurabiles [prop. XXXVI]. fiat [VI, 12] $AB:\Gamma\Delta = AE:\Gamma Z$. itaque etiam $EB:Z\Delta = AB:\Gamma\Delta$ [V, 16; V, 19 coroll.]. uerum AB , $\Gamma\Delta$ longitudine commensurabiles sunt. itaque etiam AE , ΓZ et EB , $Z\Delta$ longitudine commensurabiles sunt [prop. XI]. et AE , EB rationales sunt. itaque etiam ΓZ , $Z\Delta$ rationales sunt. est autem $AE:\Gamma Z = EB:Z\Delta$ [V, 11]. itaque permutando [V, 16] $AE:EB = \Gamma Z:Z\Delta$. uerum AE , EB potentia tantum commensurabiles sunt. itaque etiam ΓZ , $Z\Delta$ potentia tantum commensurabiles sunt [prop. XI]. et sunt rationales. ergo $\Gamma\Delta$ ex duobus nominibus est [prop. XXXVI].

iam dico, eam ordine eandem esse ac AB .

20. οὕτως ἡ ΓZ V. 21. ἐλάτ] om. P. 23. $\Gamma\Delta$] Δ in ras. V. 24. δῆ] om. V. 25. ὅτι] ὅτι καὶ BFV.

Ἡ γὰρ AE τῆς EB μείζον δύναται ἥτοι τῷ ἀπὸ
 συμμετρῶν ἑαυτῇ ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμετρῶν. εἰ μὲν οὖν
 ἡ AE τῆς EB μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμετρῶν
 ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓZ τῆς $Z\Delta$ μείζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ
 5 συμμετρῶν ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ AE
 τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ ΓZ σύμμετρος αὐτῇ ἔσται,
 καὶ δια τοῦτο ἑκατέρα τῶν $AB, \Gamma\Delta$ ἐκ δύο ὀνομάτων
 ἐστὶ πρώτη, τουτέστι τῇ τάξει ἡ αὐτή. εἰ δὲ ἡ EB
 σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ $Z\Delta$ σύμ-
 10 μετρός ἐστιν αὐτῇ, καὶ διὰ τοῦτο πάλιν τῇ τάξει ἡ
 αὐτὴ ἔσται τῇ AB . ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἔσται ἐκ δύο
 ὀνομάτων δευτέρα. εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν AE, EB σύμ-
 μετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, οὐδετέρα τῶν $\Gamma Z, Z\Delta$
 σύμμετρος αὐτῇ ἔσται, καὶ ἐστὶν ἑκατέρα τρίτη. εἰ δὲ
 15 ἡ AE τῆς EB μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμετρῶν
 ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓZ τῆς $Z\Delta$ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμ-
 μετρῶν ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν ἡ AE σύμμετρός ἐστι τῇ
 ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ ΓZ σύμμετρός ἐστιν αὐτῇ, καὶ
 ἐστὶν ἑκατέρα τετάρτη. εἰ δὲ ἡ EB , καὶ ἡ $Z\Delta$, καὶ
 20 ἔσται ἑκατέρα πέμπτη. εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν AE, EB ,
 καὶ τῶν $\Gamma Z, Z\Delta$ οὐδετέρα σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκει-
 μένῃ ῥητῇ, καὶ ἔσται ἑκατέρα ἕκτη.

Ὡστε ἡ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων μήκει σύμμετρος ἐκ

1. AE] corr. ex AB m. 2 F. τῆς] corr. ex τῇ m. 2 F.
 2. ἀσυμμετρῶν] corr. ex συμμετρῶν m. 2 B. εἰ] corr. ex
 η V. 3. τῆς] corr. ex τῇ m. 2 F. ἀσυμμετρῶν b, ἀ- supra
 add. m. 2 F. 4. τῆς] corr. ex τῇ m. 2 V. ΔZ V. δυν-
 νήσεται b. 5. ἀσυμμετρῶν Fb. 7. $\Gamma\Delta$] postea add. F, dein
 del. BΓ. 8. εἰ] postea ins. F. 9. ΔZ Fb. 10. Post
 ἐστὶν del. ἡ m. 1 P. τοῦτο] corr. ex τοῦ m. 2 F. 11. ἔσται]
 (alt.) ἐστι b, om. V. 12. ἐστὶ δευτέρα V. δ' F. 13. οὐδὲ
 οὐδετέρα BF. 14. τρίτη] ῥητὴ b. εἰ δὲ ἡ] ἡ δὲ b. 15.
 τῆς] corr. ex τῇ m. 2 F. συμμετρῶν BF, sed corr. 16. $Z\Delta$]

nam AE^2 excedit EB^2 aut quadrato rectae sibi commensurabilis aut incommensurabilis. iam si AE^2 excedit EB^2 quadrato rectae sibi commensurabilis, etiam ΓZ^2 excedet $Z\Delta^2$ quadrato rectae sibi commensurabilis [prop. XIV]. et siue AE rationali propositae commensurabilis est, etiam ΓZ ei commensurabilis erit [prop. XII]; quare utraque AB , $\Gamma\Delta$ ex duobus nominibus prima est [deff. alt. 1], hoc est ordine eadem. siue EB rationali propositae commensurabilis est, etiam $Z\Delta$ ei commensurabilis est [prop. XII]; quare rursus ordine eadem erit ac AB ; nam utraque earum ex duobus nominibus secunda erit [deff. alt. 2]. siue neutra rectarum AE , EB rationali propositae commensurabilis est, neutra rectarum ΓZ , $Z\Delta$ ei commensurabilis est [prop. XIII], et utraque tertia est [deff. alt. 3]. sin AE^2 excedit EB^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis, etiam ΓZ^2 excedit $Z\Delta^2$ quadrato rectae sibi incommensurabilis [prop. XIV]. et siue AE rationali propositae commensurabilis est, etiam ΓZ ei commensurabilis est [prop. XII], et utraque quarta est [deff. alt. 4]. siue EB , etiam $Z\Delta$ commensurabilis est, et utraque quinta est [deff. alt. 5]. siue neutra rectarum AE , EB , etiam neutra rectarum ΓZ , $Z\Delta$ rectae rationali propositae commensurabilis est, et utraque sexta est [deff. alt. 6].

Quare recta rectae ex duobus nominibus longitu-

ΔZ F. $\deltaυνήσεται$ Theon (BFVb). $\sigmaυμμέτρον$ BF, sed corr. 17. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ — 18. $\delta\eta\tau\eta$] e corr. F. 19. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$] supra scr. m. 1 P, $\acute{\epsilon}\sigma\tau\alpha\iota$ FVb. η] (prius) m. 2 P. $\kappa\alpha\iota \acute{\epsilon}\sigma\tau\alpha\iota \acute{\epsilon}\nu\alpha\tau\acute{\epsilon}\rho\alpha \pi\acute{\epsilon}\mu\mu\eta\tau\eta$] mg. m. 1 P.

δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ξξ'.

Ἡ τῇ ἐκ δύο μέσων μήκει σύμμετρος καὶ
5 αὐτῇ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

Ἐστω ἐκ δύο μέσων ἡ AB , καὶ τῇ AB σύμμετρος
ἔστω μήκει ἡ $\Gamma\Delta$. λέγω, ὅτι ἡ $\Gamma\Delta$ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ
καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτῇ τῇ AB .

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο μέσων ἐστὶν ἡ AB , διηρησθῶ
10 εἰς τὰς μέσας κατὰ τὸ E . αἱ AE , EB ἄρα μέσαι εἰσὶ
δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ γεγονένω ὥς ἡ AB
πρὸς $\Gamma\Delta$, ἡ AE πρὸς ΓZ . καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ EB
πρὸς λοιπὴν τὴν $Z\Delta$ ἐστίν, ὥς ἡ AB πρὸς $\Gamma\Delta$.
σύμμετρος δὲ ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$ μήκει· σύμμετρος ἄρα
15 καὶ ἑκατέρα τῶν AE , EB ἑκατέρα τῶν ΓZ , $Z\Delta$.
μέσαι δὲ αἱ AE , EB · μέσαι ἄρα καὶ αἱ ΓZ , $Z\Delta$. καὶ
ἐπεὶ ἐστίν ὥς ἡ AE πρὸς EB , ἡ ΓZ πρὸς $Z\Delta$, αἱ
δὲ AE , EB δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, καὶ αἱ
 ΓZ , $Z\Delta$ [ἄρα] δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν. ἐδείχ-
20 θησαν δὲ καὶ μέσαι· ἡ $\Gamma\Delta$ ἄρα ἐκ δύο μέσων ἐστίν.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτῇ ἐστὶ τῇ AB .

Ἐπεὶ γὰρ ἐστίν ὥς ἡ AE πρὸς EB , ἡ ΓZ πρὸς
 $Z\Delta$, καὶ ὥς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AE πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν
 AE , B , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓZ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓZ , Δ .
25 ἐναλλάξ ὥς τὸ ἀπὸ τῆς AE πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓZ ,

1. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. B F V b. 3. ξξ'] ξ' in ras. F. 4.
τῇ] m. 2 B. καὶ αὐτῇ] om. Theon (B F V b). 7. ἡ $\Gamma\Delta$
μήκει V. 8. AB] $B\Delta$ P. 9. διηρημένη Theon (B F V b).
10. εἰς] ἐς V. AE] EA P. εἰσὶν P. 12. τὴν $\Gamma\Delta$ V.
τὴν ΓZ V. 13. $Z\Delta$] in ras. V, ΔZ B. τὴν $\Gamma\Delta$ V. 14.
ἀσύμμετρος δὲ b, sed corr. 15. καὶ ἡ μὲν AE τῇ ΓZ ($Z\Gamma F$),
ἡ δὲ EB τῇ $Z\Delta$ (corr. ex ΔZ V) Theon (B F V b). 16. μέσαι
δὲ] καὶ εἰσὶ μέσαι Theon (B F V b). καὶ αἱ] καὶ b. 17. AE]

dine commensurabilis ex duobus nominibus est et ordine eadem; quod erat demonstrandum.

LXVII.

Recta rectae ex duabus mediis longitudine commensurabilis et ipsa ex duabus mediis est et ordine eadem.

Sit AB ex duabus mediis, et rectae AB longitudine commensurabilis sit $\Gamma\Delta$. dico, $\Gamma\Delta$ ex duabus mediis esse et ordine eandem ac AB .

$A \quad E \quad B$ nam quoniam AB ex duabus mediis est,
 $\overline{AE} \quad \overline{EB}$ in E in medias diuidatur. AE, EB igitur
 $\Gamma \quad Z \quad \Delta$ mediae sunt potentia tantum commensurabiles. et fiat $AB : \Gamma\Delta = AE : \Gamma Z$ [VI, 12]. itaque etiam [V, 19 coroll.; V, 16] $EB : Z\Delta = AB : \Gamma\Delta$. uerum $AB, \Gamma\Delta$ longitudine commensurabiles sunt; itaque etiam utraque AE, EB utrique $\Gamma Z, Z\Delta$ commensurabilis est [prop. XI]. uerum AE, EB mediae sunt. itaque etiam $\Gamma Z, Z\Delta$ mediae sunt [prop. XXIII]. et quoniam est $AE : EB = \Gamma Z : Z\Delta$, et AE, EB potentia tantum commensurabiles sunt, etiam $\Gamma Z, Z\Delta$ potentia tantum commensurabiles sunt [prop. XI]. demonstrauius autem, easdem medias esse. ergo $\Gamma\Delta$ ex duabus mediis est.

iam dico, etiam ordine eam eandem esse ac AB .

nam quoniam est $AE : EB = \Gamma Z : Z\Delta$, erit etiam [prop. XXI lemma] $AE^2 : AE \times EB = \Gamma Z^2 : \Gamma Z \times Z\Delta$.

AB B. $\tau\eta\nu EB$ V. $\tau\eta\nu Z\Delta$ V. 18. $\epsilon\iota\sigma\iota$ $\sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\epsilon\tau\omicron\iota$ B F V b.
 19. $\alpha\tilde{\rho}\alpha$] om. P. $\epsilon\iota\sigma\iota$ $\sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\epsilon\tau\omicron\iota$ B F V b. 20. $\Delta \Gamma F$. $\epsilon\sigma\tau\iota$
 B V b, comp. F. 22. $\tau\eta\nu EB$ B V. $\omicron\tilde{\upsilon}\tau\omega\varsigma \eta F$. ΓZ
 $\Gamma\Delta$ F. 23. $\tau\eta\nu Z\Delta$ V, $Z\Delta$ F. 24. ΓZ] $Z\Gamma$ F. $\Gamma Z\Delta$
 supra scr. Z m. 2 V. 25. $\acute{\omega}\varsigma$] $\alpha\tilde{\rho}\alpha \acute{\omega}\varsigma$ F.

οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΕΒ$ πρὸς τὸ ὑπο τῶν $ΓΖΔ$.
 σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΕ$ τῷ ἀπὸ τῆς $ΓΖ$ · σύμ-
 μετρον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΕΒ$ τῷ ὑπὸ τῶν $ΓΖΔ$.
 εἴτε οὖν ῥητόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΕΒ$, καὶ τὸ ὑπο
 5 τῶν $ΓΖΔ$ ῥητόν ἐστιν [καὶ διὰ τοῦτό ἐστιν ἐκ δύο
 μέσων πρώτη]. εἴτε μέσον, μέσον, καὶ ἐστιν ἑκατέρα
 δευτέρα.

Καὶ διὰ τοῦτο ἐστὶ ἡ $ΓΔ$ τῇ $ΑΒ$ τῇ τάξει ἡ
 αὐτῇ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10

ξη'.

Ἡ τῇ μείζονι σύμμετρος καὶ αὐτῇ μείζων
 ἐστίν.

Ἐστω μείζων ἡ $ΑΒ$, καὶ τῇ $ΑΒ$ σύμμετρος ἔστω
 ἡ $ΓΔ$ · λέγω, ὅτι ἡ $ΓΔ$ μείζων ἐστίν.

15

Διηρησθῶ ἡ $ΑΒ$ κατὰ τὸ $Ε$ · αἱ $ΑΕ$, $ΕΒ$ ἄρα
 δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον
 ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν
 μέσον· καὶ γεγονέτω τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. καὶ ἐπεὶ
 ἐστὶν ὡς ἡ $ΑΒ$ πρὸς τὴν $ΓΔ$, οὕτως ἢ τε $ΑΕ$ πρὸς
 20 τὴν $ΓΖ$ καὶ ἡ $ΕΒ$ πρὸς τὴν $ΖΔ$, καὶ ὡς ἄρα ἡ $ΑΕ$
 πρὸς τὴν $ΓΖ$, οὕτως ἡ $ΕΒ$ πρὸς τὴν $ΖΔ$. σύμμετρος
 δὲ ἡ $ΑΒ$ τῇ $ΓΔ$ · σύμμετρος ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν
 $ΑΕ$, $ΕΒ$ ἑκατέρα τῶν $ΓΖ$, $ΖΔ$. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ
 $ΑΕ$ πρὸς τὴν $ΓΖ$, οὕτως ἡ $ΕΒ$ πρὸς τὴν $ΖΔ$, καὶ
 25 ἐναλλάξ ὡς ἡ $ΑΕ$ πρὸς $ΕΒ$, οὕτως ἡ $ΓΖ$ πρὸς $ΖΔ$,
 καὶ συνθέντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $ΑΒ$ πρὸς τὴν $ΒΕ$, οὕτως

1. $ΓΖΔ$] $Δ$ in ras. m. 1 b; $ΓΔΖ$ P, γρ. $ΓΖΔ$ mg. m. 1.

2. δέ] corr. ex ἄρα m. 2 F. τό — 3. ἄρα] mg. m. 2 F. 4.
 ἐστὶν B. 5. ἐστὶ Bf. καὶ — 6. πρώτη] om. P. 5. ἐστὶν]
 comp. post ras. 1 litt. F, ἐστὶ V. 6. εἴτε μέσον τὸ ὑπὸ τῶν
 $ΑΕΒ$, μέσον καὶ τὸ ὑπὸ τῶν $ΓΖΔ$ Theon (Bf V b). 8. ἐστὶ]

permutando [V, 16] erit $AE^2 : \Gamma Z^2 = AE \times EB : \Gamma Z \times Z\Delta$.
 uerum AE^2 , ΓZ^2 commensurabilia sunt. itaque etiam
 $AE \times EB$, $\Gamma Z \times Z\Delta$ commensurabilia sunt [prop.
 XI]. itaque siue $AE \times EB$ rationale est, etiam
 $\Gamma Z \times Z\Delta$ rationale est; siue medium, medium est
 [prop. XXIII coroll.], et utraque secunda est [prop.
 XXXVII—XXXVIII].

Ea de causa $\Gamma\Delta$ ordine eadem erit ac AB ; quod
 erat demonstrandum.

LXVIII.

Recta maiori commensurabilis et ipsa maior erit.

Sit AB maior, et rectae AB commensurabilis sit
 $\Gamma\Delta$. dico, $\Gamma\Delta$ maiorem esse.

diuidatur AB in E . itaque AE , EB potentia in-
 commensurabiles sunt efficientes summam quadratorum
 rationalem, rectangulum autem medium [prop. XXXIX],

et fiant eadem, quae antea. et quoniam est
 $AB : \Gamma\Delta = AE : \Gamma Z$ et $AB : \Gamma\Delta = EB : Z\Delta$
 [cfr. p. 204, 11 sq.], erit etiam $AE : \Gamma Z = EB : Z\Delta$
 [V, 11]. uerum AB , $\Gamma\Delta$ commensurabiles
 sunt. quare etiam utraque AE , EB utrique
 ΓZ , $Z\Delta$ commensurabilis est [prop. XI]. et

om. Vb. καὶ ἡ BF Vb. $\Gamma\Delta$] $A\Delta$ b. 9. ὅπερ εἶδει δεῖξαι]
 comp. P, om. BF Vb. 10. ξη'] ξ seq. ras. 1 litt. F. 11.
 μείζονι] o eras. b. 14. ὅτι καὶ BF b. $\Gamma\Delta$] Δ post ras. 1
 litt. b. ἐστὶ PV, comp. Fb; ἐστὶ καὶ B. 15. AE] corr. ex
 AB F. EB] m. rec. P. ἄρα] m. 2 F. 17. δ'] δέ F.
 ὑπ' αὐτῶν] corr. ex ὑπὸ τῶν m. 1 P. 18. καὶ γεγρονέτω]
 γεγρονέτω γάρ P. 19. τε] om. F. 20. EB] BE' F. τήν]
 om. P. καὶ ὡς ἄρα] ἐστὶν ἄρα καὶ ὡς in ras. V. ἡ AE — 21.
 $Z\Delta$] in ras. V. 21. ΓZ] EB V. EB] ΓZ V. τήν] om.
 Bb. 22. AB] corr. ex EB m. 2 F. 24. τήν] (alt.) om. P.
 25. τήν EB V. τήν $Z\Delta$ V.

ἡ $\Gamma\Delta$ πρὸς τὴν ΔZ · καὶ ὥς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AB
 πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BE , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$ πρὸς τὸ
 ἀπὸ τῆς ΔZ . ὁμοίως δὲ δειξομεν, ὅτι καὶ ὥς τὸ ἀπὸ
 τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AE , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$
 5 πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓZ . καὶ ὥς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AB
 πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν AE , EB , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$
 πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$ · καὶ ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν
 ὡς τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$, οὕτως τὰ
 ἀπὸ τῶν AE , EB πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$. σύμ-
 10 μετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς AB τῷ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$ · σύμμετρα
 ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AE , EB τοῖς ἀπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$.
 καὶ ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AE , EB ἅμα ῥητόν, καὶ τὰ ἀπὸ
 τῶν ΓZ , $Z\Delta$ ἅμα ῥητόν ἐστιν. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ δις
 ὑπὸ τῶν AE , EB σύμμετρόν ἐστι τῷ δις ὑπὸ τῶν
 15 ΓZ , $Z\Delta$. καὶ ἐστὶ μέσον τὸ δις ὑπὸ τῶν AE , EB .
 μέσον ἄρα καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$. αἱ ΓZ , $Z\Delta$
 ἄρα δυνάμει ἀσύμμετροί εἰσι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκεί-
 μενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ἅμα ῥητόν, τὸ
 δὲ δις ὑπ' αὐτῶν μέσον· ὅλη ἄρα ἡ $\Gamma\Delta$ ἄλογός ἐστιν
 20 ἡ καλουμένη μελίων.

Ἡ ἄρα τῇ μελίωνι σύμμετρος μελίων ἐστίν· ὅπερ
 εἶδει δεῖξαι.

ξθ'.

Ἡ τῇ ῥητόν καὶ μέσον δυναμένη σύμμετρος
 25 [καὶ αὐτῇ] ῥητόν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν.

1. τὴν ΔZ] ΔB mut. in ΔZ m. rec. P; τὴν $Z\Delta$ FV. 3.
 ΔZ] $Z\Delta$ F. 4. τὸ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$ πρὸς] m. rec. P. 5. τό] (alt.)
 e corr. V. 6. τὰ] τό Fb, et B, corr. m. 2. 7. τὰ] τό PFb,
 et B, sed corr. ΓZ] $\Gamma\Delta$ F. 8. τὰ] τό F, et B, sed corr.
 9. τὰ] τό F, et B, sed corr. ΓZ] EZ b, et F, sed. corr.;
 Γ in ras. B. 11. AE] A e corr. b. ΓZ] EZ b, et F, sed
 corr. 12. τὰ] τό F. τὰ] τό PF. 13. ἐστὶν V. 15. καὶ

quoniam est $AE: \Gamma Z = EB: Z\Delta$ et permutando [V, 16] $AE: EB = \Gamma Z: Z\Delta$, etiam componendo erit [V, 18] $AB: BE = \Gamma\Delta: \Delta Z$. quare etiam $AB^2: BE^2 = \Gamma\Delta^2: \Delta Z^2$ [VI, 20]. iam similiter demonstrabimus, esse etiam

$$AB^2: AE^2 = \Gamma\Delta^2: \Gamma Z^2.$$

quare etiam $AB^2: AE^2 + EB^2 = \Gamma\Delta^2: \Gamma Z^2 + Z\Delta^2$. permutando igitur [V, 16]

$$AB^2: \Gamma\Delta^2 = AE^2 + EB^2: \Gamma Z^2 + Z\Delta^2.$$

uerum $AB^2, \Gamma\Delta^2$ commensurabilia sunt. itaque etiam $AE^2 + EB^2$ et $\Gamma Z^2 + Z\Delta^2$ commensurabilia sunt [prop. XI]. et $AE^2 + EB^2$ rationale est, et¹⁾ $\Gamma Z^2 + Z\Delta^2$ rationale. eodem modo etiam $2AE \times EB$ et $2\Gamma Z \times Z\Delta$ commensurabilia sunt. et $2AE \times EB$ medium est. itaque etiam $2\Gamma Z \times Z\Delta$ medium est [prop. XXIII coroll.]. itaque $\Gamma Z, Z\Delta$ potentia incommensurabiles sunt [prop. XIII; cfr. p. 206; 15 et 22] efficientes summam quadratorum rationalem, rectangulum autem medium. itaque tota $\Gamma\Delta$ irrationalis est maior, quae uocatur [prop. XXXIX].

Ergo recta maiori commensurabilis maior est; quod erat demonstrandum.

LXIX.

Recta rectae spatio rationali et medio aequali quadratae commensurabilis ipsa spatio rationali et medio quadrata aequalis est.

1) Post $Z\Delta$ lin. 13 Augustus non male addidit ἄρα.

ἔστι μέσον] μέσον δέ V. 16. ΓZ] supra add. E b. ΓZ] Γ in ras. m. 2 P, supra scr. E b. 17. εἰς τὸν ἀσύμμετρον BFVb. εἰσιν P. 19. ἡ ὅλη Vb. 21. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 24. ῥητόν] -ον in ras. B. 25. καὶ αὐτῇ] om. P.

Ἐστω ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἡ AB , καὶ τῇ AB σύμμετρος ἔστω ἡ $\Gamma\Delta$. δεικτέον, ὅτι καὶ ἡ $\Gamma\Delta$ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν.

- Διηρήσθω ἡ AB εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ E . αἱ
 5 AE , EB ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ
 μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγ' ὄντων μέσον,
 τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· καὶ τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω
 τοῖς πρότερον. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ΓZ ,
 $Z\Delta$ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, καὶ σύμμετρον τὸ μὲν
 10 συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AE , EB τῷ συγκειμένῳ
 ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$, τὸ δὲ ὑπὸ AE , EB τῷ ὑπὸ
 ΓZ , $Z\Delta$ ὥστε καὶ τὸ [μὲν] συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ
 τῶν ΓZ , $Z\Delta$ τετραγώνων ἐστὶ μέσον, τὸ δ' ὑπὸ τῶν
 ΓZ , $Z\Delta$ ῥητόν.
 15 Ῥητὸν ἄρα καὶ μέσον δυναμένη ἐστὶν ἡ $\Gamma\Delta$. ὅπερ
 ἔδει δεῖξαι.

ο'.

Ἡ τῇ δύο μέσα δυναμένη σύμμετρος δύο
 μέσα δυναμένη ἐστίν.

- 20 Ἐστω δύο μέσα δυναμένη ἡ AB , καὶ τῇ AB
 σύμμετρος ἡ $\Gamma\Delta$. δεικτέον, ὅτι καὶ ἡ $\Gamma\Delta$ δύο μέσα
 δυναμένη ἐστίν.

- Ἐπεὶ γὰρ δύο μέσα δυναμένη ἐστὶν ἡ AB , διη-
 ρήσθω εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ E . αἱ AE , EB ἄρα
 25 δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον

1. καὶ τῇ AB] supra scr. m. 1 F. 2. δεικτέον] λέγω V.
 3. ἐστὶ B, comp. Fb. 7. δέ F. κατασκευάσθω b. 8.
 αἱ] ἡ V. 11. δ' P. τῶν AE V. 12. τῶν ΓZ (corr. ex
 ΓH) V. μὲν] om. P. 13. τετραγώνων P. δέ F. 15.
 ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 17. ο'] seq. ras. 1
 litt. F. 18. καὶ αὐτῇ δύο V. 21. ἡ] ἔστω ἡ V. δεικτέον]
 λέγω V. δὴ ὅτι B. 24. κατὰ τὸ E εἰς τὰς εὐθείας V. εὐ-
 θείας] m. 2 B.

Sit AB spatio rationali et medio aequalis quadrata, et rectae AB commensurabilis sit $\Gamma\Delta$. demonstrandum, etiam $\Gamma\Delta$ spatio rationali et medio aequalem esse quadratam.

$\begin{array}{l} A \\ | \\ E \\ | \\ B \end{array} \quad \begin{array}{l} \Gamma \\ | \\ Z \\ | \\ \Delta \end{array}$
 diuidatur AB in rectas in E ; itaque AE , EB potentia incommensurabiles sunt efficientes summam quadratorum mediam, rectangulum autem rationale [prop. XL]; et comparentur eadem, quae antea. iam similiter demonstrabimus, ΓZ , $Z\Delta$ potentia incommensurabiles esse et $AE^2 + EB^2$, $\Gamma Z^2 + Z\Delta^2$ commensurabilia et $AE \times EB$, $\Gamma Z \times Z\Delta$ commensurabilia. quare etiam $\Gamma Z^2 + Z\Delta^2$ medium est, $\Gamma Z \times Z\Delta$ autem rationale.

Ergo $\Gamma\Delta$ spatio rationali et medio aequalis est quadrata; quod erat demonstrandum.

LXX.

Recta rectae duobus spatiis mediis aequali quadratae commensurabilis ipsa duobus spatiis mediis quadrata est aequalis.

Sit AB duobus spatiis mediis aequalis quadrata, et rectae AB commensurabilis $\Gamma\Delta$. demonstrandum, etiam $\Gamma\Delta$ duobus spatiis mediis aequalem esse quadratam.

$\begin{array}{l} A \\ | \\ E \\ | \\ B \end{array} \quad \begin{array}{l} \Gamma \\ | \\ Z \\ | \\ \Delta \end{array}$
 nam quoniam AB duobus spatiis mediis aequalis est quadrata, in E in rectas diuidatur. itaque AE , EB potentia incommensurabiles sunt efficientes summam quadratorum mediam et rectangulum medium et praeterea $AE^2 + EB^2$, $AE \times EB$ incommensurabilia [prop. XLI];

ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν [τετραγώνων] μέσον καὶ τὸ ὑπ'
αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ
τῶν ἀπὸ τῶν AE , EB τετραγώνων τῷ ὑπὸ τῶν AE ,
 EB · καὶ κατεσκευάσθω τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. ὁμοίως
5 δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ΓZ , $Z\Delta$ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμ-
μετροὶ καὶ σύμμετρον τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ
τῶν AE , EB τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓZ ,
 $Z\Delta$, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AE , EB τῷ ὑπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$.
ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$
10 τετραγώνων μέσον ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$ μέσον
καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν
 ΓZ , $Z\Delta$ τετραγώνων τῷ ὑπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$.

Ἡ ἄρα $\Gamma\Delta$ δύο μέσα δυναμένη ἐστίν· ὅπερ ἔδει
δείξαι.

15

οα'.

Ῥητοῦ καὶ μέσου συντιθεμένου τέσσαρες
ἄλλοι γίνονται ἥτοι ἐκ δύο ὀνομάτων ἢ ἐκ
δύο μέσων πρώτη ἢ μεῖζων ἢ ῥητὸν καὶ μέσον
δυναμένη.

20 Ἔστω ῥητὸν μὲν τὸ AB , μέσον δὲ τὸ $\Gamma\Delta$ · λέγω,
ὅτι ἢ τὸ $A\Delta$ χωρίον δυναμένη ἦτοι ἐκ δύο ὀνομάτων
ἐστίν ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη ἢ μεῖζων ἢ ῥητὸν καὶ
μέσον δυναμένη.

Τὸ γὰρ AB τοῦ $\Gamma\Delta$ ἦτοι μεῖζόν ἐστίν ἢ ἔλασσον.
25 ἔστω πρότερον μεῖζον· καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἢ EZ , καὶ
παραβεβλήσθω παρὰ τὴν EZ τῷ AB ἴσον τὸ EH
πλάτος ποιοῦν τὴν $E\Theta$ · τῷ δὲ $\Delta\Gamma$ ἴσον παρὰ τὴν EZ

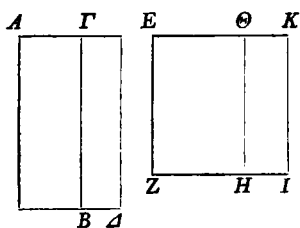
1. τετραγώνων] om. P. ὑπ'] mut. in ἀπ' m. 2 F, ἀπ' b. 3. AE] (prius) corr. ex AB m. 2 F. 5. ΓZ] in ras. m. 1 P. 8. τὸ δέ] ὥστε καὶ τό P. 9. $\Gamma\Delta$, ΔZ P. 12. τῷ] τό V. 13. $\Gamma\Delta$ ἄρα B. $\Gamma\Delta$] Δ postea ins. V. ὅπερ ἔδει δείξαι] comp. P, om. B F V b. 15. οβ', β eras. F. 17. γίνονται] γίνονται B F V b et,

et comparentur eadem, quae antea. iam similiter demonstrabimus, ΓZ , $Z\Delta$ potentia incommensurabiles esse, et $AE^2 + EB^2$, $\Gamma Z^2 + Z\Delta^2$ commensurabilia, et $AE \times EB$, $\Gamma Z \times Z\Delta$ commensurabilia. quare etiam $\Gamma Z^2 + Z\Delta^2$ medium est et $\Gamma Z \times Z\Delta$ medium et praeterea $\Gamma Z^2 + Z\Delta^2$, $\Gamma Z \times Z\Delta$ incommensurabilia.

Ergo $\Gamma\Delta$ duobus spatiis mediis aequalis est quadrata; quod erat demonstrandum.

LXXI.

Spatiis rationali et medio compositis quattuor irrationales oriuntur, aut recta ex duobus nominibus aut ex duobus mediis prima aut maior aut spatio rationali et medio aequalis quadrata.



Sit AB rationale, $\Gamma\Delta$ autem medium. dico, rectam spatio $A\Delta$ aequalem quadratam aut ex duobus nominibus esse aut ex duobus mediis primam aut maiorem aut spatio rationali et medio

aequalem quadratam.

est enim aut $AB > \Gamma\Delta$ aut $AB < \Gamma\Delta$. sit prius $AB > \Gamma\Delta$. et ponatur rationalis EZ , et rectae EZ spatio AB aequale adplicetur EH latitudinem efficiens $E\Theta$; spatio autem $\Delta\Gamma$ aequale rectae EZ adplicetur ΘI latitudinem efficiens ΘK . et quoniam AB rationale est

supra add. γ m. 1. P. ἤτοι corr. in ἡ τε m. rec. P, corr. ex δ τῇ V, ex ἡ F; ἡ τε B. 21. ἡ] m. 2 F. $A\Delta$] A e corr. V. ἤτοι] ἡ V. 27. τῶ] corr. ex τό m. 1 F. Post EZ add. Theon: τοῦτέστι τῇν ΘH (BFVb).

παραβεβλήσθω τὸ ΘI πλάτος ποιοῦν τὴν ΘK . καὶ
 ἐπεὶ ρητὸν ἐστὶ τὸ AB καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ EH , ρητὸν
 ἄρα καὶ τὸ EH . καὶ παρὰ [ρητὴν] τὴν EZ παραβέ-
 βληται πλάτος ποιοῦν τὴν $E\Theta$. ἡ $E\Theta$ ἄρα ρητὴ ἐστὶ
 5 καὶ σύμμετρος τῇ EZ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ
 τὸ ΓA καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ ΘI , μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ
 τὸ ΘI . καὶ παρὰ ρητὴν τὴν EZ παράκειται πλάτος
 ποιοῦν τὴν ΘK . ρητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘK καὶ ἀσύμμετρος
 τῇ EZ μήκει. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ΓA , ρητὸν δὲ
 10 τὸ AB , ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ AB τῷ ΓA . ὥστε
 καὶ τὸ EH ἀσύμμετρόν ἐστὶ τῷ ΘI . ὥς δὲ τὸ EH
 πρὸς τὸ ΘI , οὕτως ἐστὶν ἡ $E\Theta$ πρὸς τὴν ΘK . ἀσύμ-
 μετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $E\Theta$ τῇ ΘK μήκει. καὶ εἰσιν
 ἀμφοτέραι ρηταί· αἱ $E\Theta$, ΘK ἄρα ρηταὶ εἰσι δυνάμει
 15 μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ EK
 διηρημένη κατὰ τὸ Θ . καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστὶ τὸ AB
 τοῦ ΓA , ἴσον δὲ τὸ μὲν AB τῷ EH , τὸ δὲ ΓA τῷ
 ΘI , μεῖζον ἄρα καὶ τὸ EH τοῦ ΘI . καὶ ἡ $E\Theta$ ἄρα
 μεῖζων ἐστὶ τῆς ΘK . ἦτοι οὖν ἡ $E\Theta$ τῆς ΘK μεῖζον
 20 δύνатаι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἐαυτῇ μήκει ἢ τῷ ἀπὸ
 ἀσυμμέτρου. δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου
 ἐαυτῇ· καὶ ἐστὶν ἡ μεῖζων ἡ ΘE σύμμετρος τῇ ἐκκει-
 μένῃ ρητῇ τῇ EZ . ἡ ἄρα EK ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ

1. ΘI] mut. in ΘH F, I eras. V. 3. καί] (prius) m. 2 F.
 ρητὴν] om. P. 4. $E\Theta$] (prius) ΘE F. ρητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ
 $E\Theta$ Theon (BFVb). ἐστὶν P. 6. ΘI] I in ras. F. 7.
 ΘI] I in ras. F. Post παράκειται add. Theon: τουτέστι
 (-ιν V) τὴν ΘH (BFVb). 8. ἄρα] corr. ex ἐσται F. 9.
 EZ] Z postea ins. m. 1 V. ΓA] eras. V. 11. EH] ZH
 e corr. V. ΘI] corr. ex $\Theta \Gamma$ P, I in ras. F. 12. ΘI] I
 in ras. F. 13. ἐστὶν B. 15. EK] corr. ex $E\Theta$ m. rec. b.
 16. Post Θ ras. 1 litt. B. μεῖζων V, sed corr. 18. ΘI]
 I e corr. F. καί] m. 2 F. ΘI] I in ras. F. 20. ἐαυτῇ μήκει]
 om. V. 21. ἀσυμμέτρου] συμμέτρω F, corr. m. 2; συμμέτρου B,

et $AB = EH$, etiam EH rationale est. et rectae EZ adplicatum est latitudinem efficiens $E\Theta$. itaque $E\Theta$ rationalis est et rectae EZ longitudine commensurabilis [prop. XX]. rursus quoniam $\Gamma\Delta$ medium est et $\Gamma\Delta = \Theta I$, etiam ΘI medium est. et rectae rationali EZ adplicatum est latitudinem efficiens ΘK . itaque ΘK rationalis est et rectae EZ longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. et quoniam $\Gamma\Delta$ medium est, AB autem rationale, AB et $\Gamma\Delta$ incommensurabilia sunt. quare etiam EH , ΘI incommensurabilia sunt. verum $EH : \Theta I = E\Theta : \Theta K$ [VI, 1]. quare etiam $E\Theta$, ΘK longitudine incommensurabiles sunt [prop. XI]. et utraque rationalis est. itaque $E\Theta$, ΘK rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo EK ex duobus nominibus est in Θ diuisa [prop. XXXVI]. et quoniam $AB > \Gamma\Delta$ et $AB = EH$, $\Gamma\Delta = \Theta I$, erit etiam $EH > \Theta I$. itaque etiam $E\Theta > \Theta K$ [V, 14]. iam $E\Theta^2$ excedit ΘK^2 quadrato rectae aut sibi commensurabilis aut incommensurabilis. prius excedat quadrato rectae sibi commensurabilis; et maior ΘE rationali propositae EZ commensurabilis est. ergo EK ex duobus nominibus est prima [deff. alt. 1]. EZ autem rationalis est. sin spatium recta rationali et recta ex duobus nominibus prima comprehenditur, recta spatio aequalis quadrata ex duobus nominibus est [prop. LIV]. itaque recta spatio EI aequalis quadrata ex duobus nominibus est; quare etiam recta spatio $A\Delta$ aequalis quadrata ex duobus nominibus est. iam uero $E\Theta^2$ excedat ΘK^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis; et maior $E\Theta$

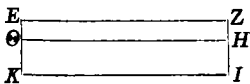
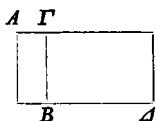
πρώτη. ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ
 ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης, ἡ τὸ χωρίον
 δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. ἡ ἄρα το ΕΙ δυνα-
 5 δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ το ΑΔ
 ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μείζον τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἐαυτῇ· καί
 ἐστὶν ἡ μείζων ἡ ΕΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ
 τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τε-
 τάρτη. ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ
 10 ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης, ἡ τὸ χωρίον
 δυναμένη ἀλογός ἐστὶν ἡ καλουμένη μείζων. ἡ ἄρα τὸ
 ΕΙ χωρίον δυναμένη μείζων ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ το ΑΔ
 δυναμένη μείζων ἐστίν.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἔλασσον τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· καὶ τὸ
 15 ΕΗ ἄρα ἔλασσόν ἐστι τοῦ ΘΙ· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ ἐλάσσων
 ἐστὶ τῆς ΘΚ. ἦτοι δὲ ἡ ΘΚ τῆς ΕΘ μείζον δύναται
 τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἐαυτῇ ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. δυ-
 νάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἐαυτῇ μήκει· καί
 ἐστὶν ἡ ἐλάσσων ἡ ΕΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ
 20 τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευ-
 τέρα. ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπο
 ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας, ἡ τὸ χωρίον
 δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη. ἡ ἄρα τὸ ΕΙ
 χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη· ὥστε καὶ
 25 ἡ το ΑΔ δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη. ἀλλὰ

2. ῥητῶν V. 3. ἐκ] ἡ ἐκ F. ἐστὶ P. ἡ ἄρα] corr.
 ex παρα m. 2 P. ΕΙ] I in ras. F. 5. δυναμένη] corr. ex
 ἀδυναμένη V. 6. Ante ἡ ras. 3 litt. F. ΘΚ] corr. ex ΟΣ
 m. 2 F. μείζων b. συμμέτρου B, sed corr. 7. ἐστὶν]
 ἐστι, supra scr. ω, B; ἔστω P. ἦ] (prius) om. B. 11. μείζον
 V, sed corr. 12. ΕΙ] I in ras. F. 15. ΘΙ] ΘΚ b et corr.
 ex ΘΓF. ΕΘ ἄρα b. ἔλασσον b. 17. συμμέτρου — ἀπό] mg.
 m. 1 P. συμμέτρου] ἀσυμμέτρου V, sed α eras. ἀσυμμέτρου]

rationali propositae EZ longitudine commensurabilis est. itaque EK ex duobus nominibus est quarta [deff. alt. 4]. EZ autem rationalis est. sin spatium recta rationali et recta ex duobus nominibus quarta comprehenditur, recta spatio aequalis quadrata irrationalis est maior, quae uocatur [prop. LVII]. itaque recta spatio EI aequalis quadrata maior est. ergo etiam recta spatio $A\Delta$ aequalis quadrata maior est.

iam uero sit $AB < \Gamma\Delta$. quare etiam $EH < \Theta I$. itaque etiam $E\Theta < \Theta K$ [VI, 1; V, 14]. uerum ΘK^2 excedit $E\Theta^2$ quadrato rectae aut sibi commensurabilis aut incommensurabilis. prius excedat quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis. et minor $E\Theta$ rationali propositae EZ longitudine commensurabilis est. itaque EK ex duobus nominibus est secunda [deff. alt. 2]. EZ autem rationalis est. sin spatium recta rationali et recta ex duobus nominibus secunda comprehenditur, recta spatio aequalis quadrata ex duabus



mediis est prima [prop. LV]. itaque recta spatio EI aequalis quadrata ex duabus mediis est prima. ergo etiam recta spatio $A\Delta$ aequalis quadrata ex duabus mediis prima est. iam uero ΘK^2 excedat $E\Theta^2$ quadrato rectae

sibi incommensurabilis; et minor $E\Theta$ rationali propositae EZ commensurabilis est. itaque EK ex duobus nominibus est quinta [deff. alt. 5]. EZ autem ratio-

$\sigma\upsilon\mu\mu\acute{\epsilon}\tau\epsilon\omicron\nu$ BV, sed corr. 19. η] (prius) m. 2 F, om. B. 21.
 $\delta\epsilon$] (alt.) m. 2 F. $\pi\epsilon\acute{\rho}\iota\acute{\epsilon}\chi\epsilon\tau\alpha\iota$ P. 23. EI] I in ras. F. 24.
 $\chi\omega\rho\acute{\iota}\omicron\nu$] om. V. 25. $A\Delta$ $\chi\omega\rho\acute{\iota}\omicron\nu$ BFb.

- δὴ ἡ ΘΚ τῆς ΘΕ μείζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου
 ἐαυτῇ. καὶ ἐστὶν ἡ ἐλάσσων ἡ ΕΘ σύμμετρος τῇ ἐκ-
 κειμένῃ ρητῇ τῇ ΕΖ· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων
 ἐστὶ πέμπτη. ρητὴ δὲ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ χωρίον περιέχεται
 5 ὑπὸ ρητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης, ἡ τὸ
 χωρίον δυναμένη ρητον καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν.
 ἡ ἄρα τὸ ΕΙ χωρίον δυναμένη ρητὸν καὶ μέσον δυ-
 ναμένη ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη
 ρητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν.
- 10 Ῥητοῦ ἄρα καὶ μέσου συντιθεμένου τέσσαρες ἄλογοι
 γίνονται ἥτοι ἐκ δύο ὀνομάτων ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη
 ἢ μείζων ἢ ρητὸν καὶ μέσον δυναμένη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

οβ'.

- Δύο μέσων ἀσυμμέτρων ἀλλήλοις συντιθε-
 15 μένων αἱ λοιπαὶ δύο ἄλογοι γίνονται ἥτοι ἐκ
 δύο μέσων δευτέρα ἢ [ἡ] δύο μέσα δυναμένη.
 Συγκείσθω γὰρ δύο μέσα ἀσύμμετρα ἀλλήλοις τὰ
 ΑΒ, ΓΔ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη ἥτοι
 ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα ἢ δύο μέσα δυναμένη.
- 20 Τὸ γὰρ ΑΒ τοῦ ΓΔ ἥτοι μείζον ἐστὶν ἢ ἐλάσσον.
 ἔστω, εἰ τύχοι, πρότερον μείζον τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· καὶ

1. ΘΕ] supra scr. η b, ΘΗ e corr. F, ΕΘ V (E in ras.).
 συμμέτρου F, et B, sed corr. m. 2. 2. ἡ] (prius) om. B. 4.
 ἐστὶ] postea ins. F, ἐστίν P. 7. δυναμένη — 8. χωρίον] in
 ras. F. 9. ρητόν — δυναμένη] mg. m. 2 B. ἐστὶ P B b.
 10. ἀνάλογοι P, sed corr. m. rec. 11. γίνονται F V b. ἥτοι
 ἡ V. 12. ἡ ρητόν] m. 2 V. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P,
 om. B F V b. 13. ογ', sed corr. m. 2, F. 14. συμμέτρων,
 corr. m. 2, F. συντιθέτων Theon (B F V b); συντιθεμένων
 supra scr. m. 2 B. 15. Post δύο ras. 2 litt. V. γίνονται
 F b, et supra scr. γ, V. ἐκ] ἡ ἐκ V. 16. ἡ] deleo. 17.
 συγκείσθω F V. τὰ] τό b. 18. ΑΔ] corr. ex ΓΔ m. 2 F.
 19. ἡ] ἡ ἡ P. 21. εἰ τύχοι] om. Theon (B F V b).

nalis est. sin spatium recta rationali et recta ex duobus nominibus quinta comprehenditur, recta spatio aequalis quadrata recta spatio rationali et medio aequalis quadrata est [prop. LVIII]. itaque recta spatio EI aequalis quadrata recta spatio rationali et medio aequalis quadrata est. quare etiam recta spatio AA aequalis quadrata recta spatio rationali et medio aequalis quadrata est.

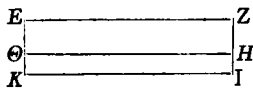
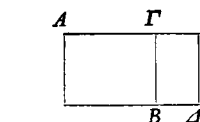
Ergo spatiis rationali et medio compositis quattuor irrationales oriuntur, aut recta ex duobus nominibus aut ex duobus mediis prima aut maior aut spatio rationali et medio aequalis quadrata; quod erat demonstrandum.

LXXII.

Duobus mediis sibi incommensurabilibus compositis reliquae duae irrationales oriuntur, aut recta ex duobus mediis secunda aut duobus spatiis mediis aequalis quadrata.

Componentur enim duo media sibi incommensurabilia $AB, \Gamma\Delta$. dico, rectam spatio AA aequalem quadratam aut ex duobus mediis secundam esse aut duobus spatiis mediis aequalem quadratam.

nam aut $AB > \Gamma\Delta$ aut $AB < \Gamma\Delta$. sit uerbi gratia prius $AB > \Gamma\Delta$, et ponatur recta rationalis EZ , et



spatio AB aequale rectae EZ adplicetur EH latitudinem efficiens $E\Theta$, spatio autem $\Gamma\Delta$ aequale ΘI latitudinem efficiens ΘK . et quoniam utrumque $AB, \Gamma\Delta$ medium est, etiam utrumque $EH, \Theta I$ medium est. et rectae

ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ EZ , καὶ τῷ μὲν AB ἴσον παρὰ τὴν EZ παραβεβλήσθω τὸ EH πλάτος ποιοῦν τὴν $E\Theta$, τῷ δὲ ΓA ἴσον τὸ ΘI πλάτος ποιοῦν τὴν ΘK . καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶν ἐκάτερον τῶν AB , ΓA , μέσον ἄρα
 5 καὶ ἐκάτερον τῶν EH , ΘI . καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ZE παράκειται πλάτος ποιοῦν τὰς $E\Theta$, ΘK . ἐκατέρα ἄρα τῶν $E\Theta$, ΘK ῥητὴ ἐστὶ καὶ ἀσύμμετρος τῇ EZ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ AB τῷ ΓA , καὶ ἐστὶν ἴσον το μὲν AB τῷ EH , τὸ δὲ ΓA τῷ ΘI , ἀσύμμετρον ἄρα
 10 ἐστὶ καὶ τὸ EH τῷ ΘI . ὥς δὲ τὸ EH πρὸς τὸ ΘI , οὕτως ἐστὶν ἡ $E\Theta$ πρὸς ΘK . ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ $E\Theta$ τῇ ΘK μήκει. αἱ $E\Theta$, ΘK ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ EK . ἦτοι δὲ ἡ $E\Theta$ τῆς ΘK μείζον δύνανται τῷ ἀπὸ συμ-
 15 μέτρου ἐαυτῇ ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. δυνάσθω πρό- τερον τῷ ἀπὸ συμέτρου ἐαυτῇ μήκει· καὶ οὐδετέρα τῶν $E\Theta$, ΘK σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ EZ μήκει· ἡ EK ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη. ῥητὴ δὲ ἡ EZ . ἐὰν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς
 20 καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης, ἡ τὸ χωρίον δυνα- μένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα· ἡ ἄρα τὸ EI , τουτ- ἐστὶ τὸ $A\Delta$, δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα. ἀλλὰ δὴ ἡ $E\Theta$ τῆς ΘK μείζον δυνάσθω τῷ ἀπο ἀσυμμέτρου ἐαυτῇ μήκει· καὶ ἀσύμμετρός ἐστὶν ἐκα-
 25 τέρα τῶν $E\Theta$, ΘK τῇ EZ μήκει· ἡ ἄρα EK ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἑκτη. ἐὰν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἑκτης, ἡ τὸ χωρίον

1. τις ῥητὴ F. τῷ] corr. ex τό m. 2 P. 2. EH] EZ b.
 3. Post ἴσον add. παρὰ τὴν ΘH V, del. m. 2. 4. ἐπεὶ —
 ἄρα καί] om. b. 5. τῶν] corr. ex τό m. 2 b. EH] supra
 add. Θ b. ΘI] $\Theta \Gamma$, supra add. H, b. καί] m. 2 F. 6.

rationali EZ adplicata sunt latitudines efficientia $E\Theta$, ΘK . itaque utraque $E\Theta$, ΘK rationalis est et rectae EZ longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. et quoniam AB , ΓA incommensurabilia sunt, et $AB = EH$, $\Gamma A = \Theta I$, etiam EH , ΘI incommensurabilia sunt. uerum $EH : \Theta I = E\Theta : \Theta K$ [VI, 1]. itaque etiam $E\Theta$, ΘK longitudine incommensurabiles sunt [prop. XI]. quare $E\Theta$, ΘK rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo EK ex duobus nominibus est [prop. XXXVI]. uerum $E\Theta^2$ excedit ΘK^2 quadrato rectae aut sibi commensurabilis aut incommensurabilis. prius excedat quadrato rectae longitudine commensurabilis. et neutra rectarum $E\Theta$, ΘK rectae rationali propositae EZ longitudine commensurabilis est. itaque EK ex duobus nominibus est tertia [deff. alt. 3]. uerum EZ rationalis est. sin spatium recta rationali et recta ex duobus nominibus tertia comprehenditur, recta spatio aequalis quadrata ex duabus mediis est secunda [prop. LVI]. itaque recta spatio EI , hoc est $A\Delta$, aequalis quadrata ex duabus mediis est secunda. iam uero $E\Theta^2$ excedat ΘK^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis; et utraque $E\Theta$, ΘK rectae EZ longitudine incommensurabilis est. itaque EK ex duobus nominibus est sexta [deff. alt. 6]. sin spatium recta rationali et recta ex duobus nominibus sexta comprehenditur, recta

παράκειται P, παράκεινται V. ποιοῦντα Vb. 7. ΘK ἄρα V. ἔστιν P. 8. ἀσύμμετρος P, corr. m. rec. ἔστιν P. AB] supra add. H V. ἔστιν] m. 2 F. 10. πρὸς] m. 2 F. τό] τῷ F. 11. πρὸς τὴν V. 12. εἰσιν P. 14. ἀσύμμετρον V, sed corr. 15. συμμέτρον BV, corr. m. 2. 16. ἀσύμμετρον V, sed corr.; ἀ- supra add. b m. 1. 17. ἔστιν P. 18. τρίτη] corr. ex ῥητή m. rec. b. 25. τῇ] corr. ex τῆς B. ἐκ] m. rec. P.

δυναμένη ἢ δύο μέσα δυναμένη ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ τὸ $ΑΔ$ χωρίον δυναμένη ἢ δύο μέσα δυναμένη ἐστίν.

[Ὅμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι καὶ ἔλαττον ἢ τὸ $ΑΒ$ τοῦ $ΓΔ$, ἢ τὸ $ΑΔ$ χωρίον δυναμένη ἢ ἐκ δύο μέσων
5 δευτέρα ἐστίν ἥτοι δύο μέσα δυναμένη].

Δύο ἄρα μέσων ἀσυμμέτρων ἀλλήλοις συντιθεμένων αἱ λοιπαὶ δύο ἄλογοι γίνονται ἥτοι ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἢ δύο μέσα δυναμένη.

Ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων καὶ αἱ μετ' αὐτὴν ἄλογοι οὔτε
10 τῇ μέσῃ οὔτε ἀλλήλαις εἶσιν αἱ αὐταί. τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ μέσης παρὰ ρητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ρητὴν καὶ ἀσύμμετρον τῇ παρ' ἣν παράκειται μήκει. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων παρὰ ρητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην.
15 τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων πρώτης παρὰ ρητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέραν. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων δευτέρας παρὰ ρητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μείζονος παρὰ ρητὴν
20 παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ρητὸν καὶ μέσον δυναμένης παρὰ ρητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς δύο μέσα δυναμένης παρὰ ρητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν

1. ἡ δύο] δύο BV. ὥστε καὶ ἡ] ἡ ἄρα V. 2. $ΑΒ$ b. χωρίον] om. V. ἡ] om. BFV. δύο] β P, δύο m. rec. μέσας F.
3. ὁμοίως — 5. δυναμένη] om. P. 4. τὸ $ΑΔ$ χωρίον] τὸ χωρίον τὸ $ΑΔ$ V. ἡ] om. F. 5. ἥτοι δύο μέσα] ἡ ῥητὸν καὶ μέσον B. 6. ἡ δύο F. 7. γίνονται PFVb. ἥτοι ἡ V.
8. ἡ] ἡ ἡ V. δύο] in ras. m. 1 P. 9. ογ', γ in ras., F. αἱ] supra scr. b. 11. ἀπὸ τῆς F. 12. τῇ] corr. ex

spatio aequalis quadrata recta est duobus spatiis mediis aequalis quadrata [prop. LIX]. quare recta spatio AA aequalis quadrata recta duobus spatiis mediis aequalis quadrata est.

Ergo duobus spatiis mediis sibi incommensurabilibus compositis reliquae duae irrationales oriuntur, aut recta ex duabus mediis secunda aut duobus spatiis mediis aequalis quadrata.

Recta ex duobus nominibus et irrationales ab ea deriuatae neque mediae neque inter se eadem sunt. nam quadratum mediae rectae rationali adplicatum latitudinem efficit rationalem et rectae, cui adplicatum est, longitudine incommensurabilem [prop. XXII]. quadratum autem rectae ex duobus nominibus rationali adplicatum latitudinem efficit rectam ex duobus nominibus primam [prop. LX]. quadratum autem rectae ex duabus mediis primae rationali adplicatum latitudinem efficit rectam ex duobus nominibus secundam [prop. LXI]. quadratum autem rectae ex duabus mediis secundae rationali adplicatum latitudinem efficit rectam ex duobus nominibus tertiam [prop. LXII]. quadratum autem maioris rationali adplicatum latitudinem efficit rectam ex duobus nominibus quartam [prop. LXIII]. quadratum autem rectae spatio rationali et medio aequalis quadratae rationali adplicatum latitudinem efficit rectam ex duobus nominibus quintam [prop. LXIV].

τήν V. ἥν] corr. ex ἥι F. 13. δέ] δ' P. παραβαλό-
μενον P. 15. τὸ δέ — 19. τριτήν] mg. m. 2 V. 16. ποιεῖ]
om. V. 17. δέ] δ' P. 19. δέ] δ' P. 21. δέ] δ' P. 23.
τό] e corr. V. δέ] δ' P. 24. πλάτος] corr. ex πάτος m. 1 P.

ἐκ δίῳ ὀνομάτων ἔκτην. τὰ δ' εἰρημένα πλάτῃ δια-
φέρει τοῦ τε πρώτου καὶ ἀλλήλων, τοῦ μὲν πρώτου,
ὅτι ρητὴ ἐστίν, ἀλλήλων δέ, ὅτι τῇ τάξει οὐκ εἰσὶν
αἱ αὐταί· ὥστε καὶ αὐταὶ αἱ ἄλογοι διαφέρουσιν ἀλλήλων.

5

ογ'.

Ἐὰν ἀπὸ ρητῆς ρητὴ ἀφαιρεθῇ δυνάμει
μόνον σύμμετρος οὕσα τῇ ὅλῃ, ἡ λοιπὴ ἄλογός
ἐστίν· καλείσθω δὲ ἀποτομή.

Ἀπὸ γὰρ ρητῆς τῆς *AB* ρητὴ ἀφαιρεθῇ ἡ *BF*
10 δυνάμει μόνον σύμμετρος οὕσα τῇ ὅλῃ· λέγω, ὅτι ἡ
λοιπὴ ἡ *AG* ἄλογός ἐστίν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστίν ἡ *AB* τῇ *BF* μήκει,
καὶ ἐστίν ὥς ἡ *AB* πρὸς τὴν *BF*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς
AB πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν *AB*, *BF*, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ
15 τὸ ἀπὸ τῆς *AB* τῷ ὑπὸ τῶν *AB*, *BF*. ἀλλὰ τῷ μὲν
ἀπὸ τῆς *AB* σύμμετρά ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν *AB*, *BF* τε-
τράγωνα, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν *AB*, *BF* σύμμετρόν ἐστὶ τὸ
δις ὑπὸ τῶν *AB*, *BF*. καὶ ἐπειδήπερ τὰ ἀπὸ τῶν
AB, *BF* ἴσα ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν *AB*, *BF* μετὰ τοῦ
20 ἀπὸ *GA*, καὶ λοιπῷ ἄρα τῷ ἀπὸ τῆς *AG* ἀσύμμετρά
ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν *AB*, *BF*. ρητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν *AB*,

1. τὰ δ'] ἐπεὶ οὖν τὰ Theon (BFVb). εἰρημένα] εἰ- e
corr. V. 3. τῇ] om. F. 4. ὥστε] δηλον ὥς Theon (BFVb).

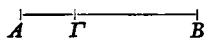
5. Seq. δευτέρα τάξις ἐτέρων λόγων (om. b) τῶν κατὰ ἀφαί-
ρεσιν PBVb (videtur fuisse in F, sed sust. reparatio); ἀρχὴ
τῶν κατ' ἀφαιρέσιν ἐξάδων m. 2 B. ογ'] postea add. F (ab
initio haec prop. a praecedentibus dirempta non erat). 7.
τῇ] om. b. ἡ λοιπὴ] λοιπῇ F. 8. ἐστὶ BV, comp. Fb.
δέ] δὴ B. 9. ρητῆς] διττῆς F. BF] ΓB F. 11. ἡ
καλουμένη] καλείσθω δέ V. 12. ἀσύμμετρός] corr. ex ἄρα
σύμμετρος m. rec. P, ex σύμμετρος m. 2 B. ἡ *AB* τῇ *BF*
ἀσύμμετρός ἐστὶ V. 13. τήν] τὰς F. 14. ἀσύμμετρον] -ον
e corr. V, corr. ex -ος m. rec. P. 16. σύμμετρα — τῶν]

quadratum autem rectae duobus spatiis mediis aequalis quadratae rationali adplicatum latitudinem efficit rectam ex duobus nominibus sextam [prop. LXV]. latitudines autem, quas significauimus, differunt et a prima et inter se, a prima, quia ea rationalis est, inter se autem, quia ordine non sunt eadem. ergo etiam ipsae rectae irrationales inter se differunt.

LXXIII.

Si a recta rationali rationalis aufertur potentia tantum toti commensurabilis, reliqua irrationalis est, uocetur autem apotome.

A rationali enim AB rationalis auferatur $B\Gamma$ potentia tantum toti commensurabilis. dico, reliquam AG irrationalem esse apotomen, quae uocatur.

 nam quoniam AB , $B\Gamma$ longitudine incommensurabiles sunt, et est $AB : B\Gamma = AB^2 : AB \times B\Gamma$ [prop. XXI lemma], etiam AB^2 , $AB \times B\Gamma$ incommensurabilia sunt [prop. XI]. uerum AB^2 et $AB^2 + B\Gamma^2$ commensurabilia sunt [prop. XV], et $AB \times B\Gamma$, $2 AB \times B\Gamma$ commensurabilia [prop. VI]. et quoniam est [II, 7]

$$AB^2 + B\Gamma^2 = 2 AB \times B\Gamma + \Gamma A^2,$$

etiam AG^2 , $AB^2 + B\Gamma^2$ incommensurabilia sunt [prop. XIII, XVI]. uerum $AB^2 + B\Gamma^2$ rationale est. ergo

mg. m. 2 B. 17. $\tau\omega$] $\tau\acute{o}$ corr. ex $\tau\acute{\alpha}$ m. 1 b. $\tau\acute{o}$] $\tau\omega$ b.
 18. $B\Gamma$] e corr. V. $\kappa\alpha\iota \epsilon\pi\epsilon\iota\delta\eta\pi\epsilon\rho \tau\acute{\alpha}] \tau\acute{\alpha} \acute{\alpha}\rho\alpha$ Theon (BFVb).
 19. $\iota\sigma\alpha$] $\acute{\alpha}\sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\rho\alpha$ Theon (BFVb). $\mu\epsilon\tau\acute{\alpha} \tau\omicron\upsilon \acute{\alpha}\nu\omicron \Gamma A$] om. Theon (BFVb).
 20. $\kappa\alpha\iota$] in ras. V. $\acute{\alpha}\sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\rho\alpha$ B, corr. m. 2.
 21. Post $B\Gamma$ add. Theon: $\epsilon\pi\epsilon\iota \kappa\alpha\iota \tau\acute{\alpha} \acute{\alpha}\nu\omicron \tau\omicron\omega\nu AB, B\Gamma \iota\sigma\alpha \epsilon\sigma\tau\iota \tau\omega \delta\iota\varsigma \upsilon\pi\omicron \tau\omicron\omega\nu AB, B\Gamma \mu\epsilon\tau\acute{\alpha} \tau\omicron\upsilon \acute{\alpha}\nu\omicron$ (τοῦ add. V) ΓA (BFVb).

ΒΓ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ· καλείσθω δὲ ἀποτομή.
ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

οδ'.

Ἐὰν ἀπὸ μέσης μέση ἀφαιρεθῇ δυνάμει
5 μόνον σύμμετρος οὕσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς
ὅλης ῥητὸν περιέχουσα, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν·
καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ πρώτη.

Ἀπὸ γὰρ μέσης τῆς ΑΒ μέση ἀφηρήσθω ἡ ΒΓ
δυνάμει μόνον σύμμετρος οὕσα τῇ ΑΒ, μετὰ δὲ τῆς
10 ΑΒ ῥητὸν ποιοῦσα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· λέγω, ὅτι
ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν· καλείσθω δὲ μέσης ἀπο-
τομὴ πρώτη.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ ΑΒ, ΒΓ μέσαι εἰσὶν, μέσα ἐστὶ καὶ
τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ῥητὸν δὲ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ,
15 ΒΓ· ἀσύμμετρα ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δις ὑπο
τῶν ΑΒ, ΒΓ· καὶ λοιπῷ ἄρα τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμ-
μετρόν ἐστι τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἐπεὶ καὶ τὸ
ὅλον ἐνὶ αὐτῶν ἀσύμμετρον ἦ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη
ἀσύμμετρα ἔσται. ῥητὸν δὲ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ·
20 ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ·
καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ πρώτη.

οε'.

Ἐὰν ἀπὸ μέσης μέση ἀφαιρεθῇ δυνάμει
μόνον σύμμετρος οὕσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς

1. ἄλογον in ras. V. ἐστὶν ἄρα b. ἐστὶν ἡ ΑΓ] καὶ
τὸ ἀπὸ τῶν ΑΓ· ὥστε καὶ ἡ ΑΓ in ras. m. 2 V. 2. ὅπερ
ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 3. οδ'] corr. ex oe' F.

6. περιέχῃ Theon (BVb, περιέχει F). ἐστὶ PBV, comp.
Fb. 7. μέση V (seq. ras. 1 litt.) et P, corr. m. rec. 10.
ποιοῦσα] PFVb, περιέχουσα B et mg. m. 1 Fb, add. γρ. Post
ὅτι add. καὶ b, m. 2 F. 11. ἐστὶ BV, comp. F. καλεῖται P.

AG irrationalis est [def. 4]; uocetur autem apotome; quod erat demonstrandum.

LXXIV.

Si a recta media aufertur media potentia tantum commensurabilis toti, cum tota autem spatium rationale comprehendens, reliqua irrationalis est; uocetur autem prima apotome mediae.

A media enim AB media auferatur $B\Gamma$ potentia tantum rectae AB commensurabilis, cum AB autem spatium rationale comprehendens $AB \times B\Gamma$ [prop. XXVII]. dico, reliquam AG irrationalem esse, uocetur autem prima apotome mediae.

$\left. \begin{array}{l} B \\ \\ \Gamma \\ \\ A \end{array} \right\}$ nam quoniam AB , $B\Gamma$ mediae sunt, etiam AB^2 , $B\Gamma^2$ media sunt. uerum $2AB \times B\Gamma$ rationale est. itaque $AB^2 + B\Gamma^2$ et $2AB \times B\Gamma$ incommensurabilia sunt. quare etiam $2AB \times B\Gamma$ reliquo [cfr. II, 7] AG^2 incommensurabile est, quoniam, si totum alterutri incommensurabile est, etiam magnitudines ab initio sumptae incommensurabiles erunt [prop. XVI]. uerum $2AB \times B\Gamma$ rationale est. quare AG^2 irrationale est. ergo AG irrationalis est [def. 4]; uocetur autem prima apotome mediae.

LXXV.

Si a media media aufertur potentia tantum toti commensurabilis, cum tota autem spatium medium

$\mu\epsilon\sigma\eta$ seq. ras. 1 litt. V, supra scr. s F. 13. $\epsilon\iota\sigma\iota$ V, comp. Fb. $\epsilon\iota\sigma\iota$] m. 2 F. 14. Ante $\delta\epsilon$ del. $\tau\acute{o}$ P. 15. $\alpha\gamma\alpha$ $\epsilon\iota\sigma\iota$ b. $\tau\acute{\omega}$ — 16. $B\Gamma$] mg. m. 1 P. 17. $\epsilon\sigma\tau\iota$] corr. ex $\alpha\gamma\alpha$ F. $\tau\acute{\omega}\nu$] om. P. 21. $\delta\epsilon$] $\delta\eta$ P. $\mu\epsilon\sigma\eta$ Fb. 22. $\alpha\gamma$ F, sed corr.

ὅλης μέσον περιέχουσα, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν· καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομη δευτέρα.

Ἀπὸ γὰρ μέσης τῆς AB μέση ἀφηγήσθω ἡ ΓB δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ τῇ AB , μετὰ
5 δὲ τῆς ὅλης τῆς AB μέσον περιέχουσα τὸ ὑπὸ τῶν $AB, B\Gamma$ · λέγω, ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ $A\Gamma$ ἄλογός ἐστιν· κα-
λείσθω δὲ μέσης ἀποτομη δευτέρα.

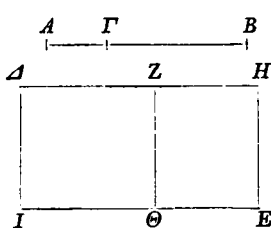
Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΔI , καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν $AB, B\Gamma$ ἴσον παρὰ τὴν ΔI παραβεβλήσθω τὸ ΔE
10 πλάτος ποιοῦν τὴν ΔH , τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν $AB, B\Gamma$ ἴσον παρὰ τὴν ΔI παραβεβλήσθω τὸ $\Delta \Theta$ πλάτος
ποιοῦν τὴν ΔZ · λοιπὸν ἄρα τὸ ZE ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ
τῆς $A\Gamma$. καὶ ἐπεὶ μέσα καὶ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν
 $AB, B\Gamma$, μέσον ἄρα καὶ τὸ ΔE . καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν
15 ΔI παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΔH · ῥητὴ ἄρα ἐστὶν
ἡ ΔH καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔI μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον
ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν $AB, B\Gamma$, καὶ τὸ δις ἄρα ὑπὸ τῶν
 $AB, B\Gamma$ μέσον ἐστίν. καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ $\Delta \Theta$ · καὶ
τὸ $\Delta \Theta$ ἄρα μέσον ἐστίν. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔI
20 παραβέβληται πλάτος ποιοῦν τὴν ΔZ · ῥητὴ ἄρα ἐστὶν
ἡ ΔZ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔI μήκει. καὶ ἐπεὶ αἱ $AB,$

1. περιέχῃ Theon (BFb, περιέχει F). ἐστὶ BV, comp. Fb. 2. μέση V, P (corr. m. rec.), F (supra scr. σ m. 2). 3. μέση] supra scr. m. 1 V. ΓB] e corr. V. 5. δὲ τῆς] δέ P. 6. ὅτι ἡ] ὅτι καὶ V. ἐστὶ PBV, comp. b. 7. μέση P (corr. m. rec.), F (corr. m. 2), e corr. V. 8. ΔK b, et FV, sed corr. 9. ΔI] I in ras. B, ΔK FVb (in V corr.). ΔE] E in ras. B. 10. ΔH] corr. ex H Δ m. 2 F. 11. ΔK FVb, sed corr. Ante $\Delta \Theta$ del. ΔE πλάτος ποιοῦν τὴν ΔH (corr. ex H Δ m. 2), τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν $AB, B\Gamma$ (supra scr. m. 2) ἴσον παρὰ τὴν ΔK (corr. ex ΔI) παραβεβλήσθω F. 12. ΔZ] Z in ras. F. ZE] $Z\Theta$ F. ἐστὶ] om. F. 13. καὶ σύμμετρα] om. Theon (BFVb). ἐστὶν P. 14. καὶ] (alt.) postea ins. m. 1 F. 15. ΔI] ΔK FVb, sed corr. παράκειται] om. b. Ante ΔH del. Z F. 16. Post ΔH del. Z F. ΔI]

comprehendens, reliqua irrationalis est; uocetur autem mediae apotome secunda.

A media enim AB media auferatur ΓB potentia tantum toti AB commensurabilis, cum tota autem AB medium comprehendens $AB \times B\Gamma$ [prop. XXVIII]. dico, reliquam $A\Gamma$ irrationalem esse, uocetur autem mediae apotome secunda.

ponatur enim rationalis ΔI , et quadratis $AB^2 + B\Gamma^2$ aequale rectae ΔI adplicetur ΔE latitudinem efficiens



ΔH , spatio autem $2 AB \times B\Gamma$ aequale rectae ΔI adplicetur $\Delta \Theta$ latitudinem efficiens ΔZ . itaque reliquum $ZE = A\Gamma^2$ [II, 7]. et quoniam $AB^2, B\Gamma^2$ media sunt et commensurabilia, etiam ΔE medium est.¹⁾

et rectae rationali ΔI adplicatum est latitudinem efficiens ΔH . itaque ΔH rationalis est et rectae ΔI longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. rursus quoniam $AB \times B\Gamma$ medium est, etiam $2 AB \times B\Gamma$ medium est [prop. XXIII coroll.]. et est $= \Delta \Theta$. itaque etiam $\Delta \Theta$ medium est. et rationali ΔI adplicatum est latitudinem efficiens ΔZ . quare ΔZ rationalis est et rectae ΔI longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. et quoniam $AB, B\Gamma$ potentia tantum com-

1) Sequitur ex prop. XV et prop. XXIII coroll. ceterum idem tacite usurpatur p. 226, 13 sq.

ΔK FVb, sed corr. 17. καὶ τό — 18. $B\Gamma$] in ras. F. 18. ἐστίν] ἐστὶ PBV, comp. b; cum proximis sustulit rep. in F.

19. ἐστὶ PBV, comp. Fb. ΔK FVb, sed corr. 20. παρὰ-
κεῖται F. ΔH F, corr. m. 2. 21. ΔH F. ΔI] ΔK b,
et V, sed corr.; corr. ex ΔI m. 2 F.

$BΓ$ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα
 ἐστὶν ἡ AB τῇ $BΓ$ μήκει· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ
 ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τῷ ὑπὸ τῶν $AB, BΓ$. ἀλλὰ
 τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AB σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν AB ,
 5 $BΓ$, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν $AB, BΓ$ σύμμετρόν ἐστι τὸ δις
 ὑπὸ τῶν $AB, BΓ$ τοῖς ἀπὸ τῶν $AB, BΓ$. ἴσον δὲ
 τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν $AB, BΓ$ τὸ ΔE , τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν
 $AB, BΓ$ τὸ $\Delta\Theta$ · ἀσύμμετρον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ΔE τῷ
 10 $\Delta\Theta$. ὥς δὲ τὸ ΔE πρὸς τὸ $\Delta\Theta$, οὕτως ἡ $H\Delta$ πρὸς
 τὴν ΔZ · ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ $H\Delta$ τῇ ΔZ . καὶ
 εἰσιν ἀμφοτέραι ρηταί· αἱ ἄρα $H\Delta, \Delta Z$ ρηταί εἰσι
 δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ZH ἄρα ἀποτομή ἐστίν.
 ρητὴ δὲ ἡ ΔI · τὸ δὲ ὑπὸ ρητῆς καὶ ἀλόγου περι-
 15 εχόμενον ἄλογόν ἐστίν, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός
 ἐστίν. καὶ δύναται τὸ ZE ἢ AI · ἡ AI ἄρα ἄλογός
 ἐστίν· καλεῖσθω δὲ μέσης ἀποτομῇ δευτέρα. ὅπερ
 ἔδει δεῖξαι.

ος'.

- 20 Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ δυνάμει
 ἀσύμμετρος οὕσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης
 ποιοῦσα τὰ μὲν ἀπ' αὐτῶν ἅμα ρητόν, τὸ δ' ὑπ'
 αὐτῶν μέσον, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστίν· καλεῖσθω
 δὲ ἐλάσσων.
 25 Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς AB εὐθεῖα ἀφηρήσθω ἡ $BΓ$

1. $BΓ$] $ΓB$ F. ἀσύμμετρος] σύμμετρος b. 2. καὶ
 τῇ P. 3. τῆς AB] om. b. 4. ἐστίν P. 5. τῷ] corr. ex
 τό m. 1 F. 6. ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ (om. V) τὰ ἀπὸ τῶν $AB, BΓ$
 τῷ δις ὑπὸ τῶν $AB, BΓ$ Theon (BFVb). 7. ὑπό] ὑ- in ras. m.
 1 P. ἴσον — 8. $BΓ$] mg. m. 2 B. 8. τό] τῷ F. 9. ἐστὶ]
 om. BFVb. 11. $H\Delta$] ΔH P. ΔZ] corr. ex $Z\Delta$ V. 12.
 εἰσι] εἰσιν B. 13. ἐστὶ BV, comp. Fb. 14. ΔI] ΔK FVb,

mensurabiles sunt, AB , $B\Gamma$ longitudine incommensurabiles sunt. itaque etiam AB^2 , $AB \times B\Gamma$ incommensurabilia sunt [prop. XXI lemma, prop. XI]. uerum AB^2 , $AB^2 + B\Gamma^2$ commensurabilia sunt [prop. XV] et $AB \times B\Gamma$, $2 AB \times B\Gamma$ commensurabilia [prop. VI]. itaque $2 AB \times B\Gamma$ et $AB^2 + B\Gamma^2$ incommensurabilia sunt [prop. XIII]. est autem $\triangle E = AB^2 + B\Gamma^2$, $\triangle \Theta = 2 AB \times B\Gamma$. itaque $\triangle E$, $\triangle \Theta$ incommensurabilia sunt. uerum $\triangle E : \triangle \Theta = H\Delta : \triangle Z$ [VI, 1]. itaque $H\Delta$, $\triangle Z$ incommensurabiles sunt [prop. XI]. et utraque rationalis est. itaque $H\Delta$, $\triangle Z$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. quare ZH apotome est [prop. LXXIII]. uerum $\triangle I$ rationalis est. spatium autem recta rationali et irrationali comprehensum irrationale est [prop. XX], et recta ei aequalis quadrata irrationalis est. et $AI^2 = ZE$. ergo AI irrationalis est [def. 4]; uocetur autem mediae apotome secunda; quod erat demonstrandum.

LXXVI.

Si a recta aufertur recta potentia incommensurabilis toti et cum tota efficiens summam quadratorum rationalem, rectangulum autem medium, reliqua irrationalis est; uocetur autem minor.



A recta enim AB recta auferatur $B\Gamma$ potentia toti incom-

sed corr. 15. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ PV, comp. Fb. $\acute{\alpha}\rho\alpha$ $\alpha\upsilon\tau\acute{o}$ Theon (BFVb).
 16. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$] $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ PBV, comp. Fb. $\acute{\eta}$ AI] (alt.) m. 2 F.
 17. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ PBV, comp. Fb. $\delta\acute{\epsilon}$] $\delta\acute{\epsilon}$ $\acute{\epsilon}\kappa$ F. $\mu\acute{\epsilon}\sigma\eta$ P, et V,
 corr. m. 2. $\acute{\omicron}\pi\epsilon\rho$ $\acute{\epsilon}\delta\epsilon\iota$ $\delta\epsilon\iota\chi\alpha\iota$] comp. P, om. BFVb. 22.
 $\delta\acute{\epsilon}$ F. 23. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ BV, comp. Fb.

δυνάμει ἀσύμμετρος οὕσα τῇ ὅλῃ ποιοῦσα τὰ προκείμενα. λέγω, ὅτι ἡ λοιπὴ ἢ ΑΓ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, 5 ΒΓ τετραγώνων ῥητόν ἐστιν, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον, ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ ἀναστρέψαντι λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρόν ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ῥητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ 10 τῆς ΑΓ ἄλογος ἄρα ἡ ΑΓ καλείσθω δὲ ἐλάσσων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

οξ'.

Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ δυνάμει ἀσύμμετρος οὕσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης 15 ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν ῥητόν, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν· καλείσθω δὲ ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς ΑΒ εὐθεῖα ἀφηρήσθω ἡ ΒΓ 20 δυνάμει ἀσύμμετρος οὕσα τῇ ΑΒ ποιοῦσα τὰ προκείμενα· λέγω, ὅτι ἡ λοιπὴ ἢ ΑΓ ἄλογός ἐστιν ἡ προειρημένη.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων μέσον ἐστίν, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν

1. οὕσα ἀσύμμετρος V. τὰ προκείμενα] μετὰ τῆς ὅλης τῆς ΑΒ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἅμα ῥητόν, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἅμα μέσον Theon (BFVb). 4. μέν] m. 2 V. ΑΒ] B in ras. m. 2 P. 5. ΒΓ] ΓΒ P. τετραγώνων] □ eras. V. ἐστὶ PBV, comp. Fb. δὲ δις] δ' V. 6. τῶν] m. rec. P. ΑΒ] in ras. m. 1 P. 8. ἀσύμμετρόν ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ (m. 2 F) τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ (haec 4 uerba om. F) Theon (BFVb). 9. Mg. γρ. ῥητόν δὲ

mensurabilis et proposita efficiens [prop. XXXIII]. dico, reliquam AG irrationalem esse minorem, quae uocatur.

nam quoniam $AB^2 + BG^2$ rationale est, et $2AB \times BG$ medium, incommensurabilia sunt $AB^2 + BG^2$ et $2AB \times BG$. et e contrario reliquo [II, 7] AG^2 incommensurabile est $AB^2 + BG^2$ [prop. XVI]. uerum $AB^2 + BG^2$ rationale est. itaque AG^2 irrationale est. ergo AG irrationalis est [def. 4]; uocetur autem minor; quod erat demonstrandum.

LXXVII.

Si a recta aufertur recta potentia incommensurabilis toti, cum tota autem efficiens summam quadratorum mediam, duplum autem rectangulum rationale, reliqua irrationalis est; uocetur autem recta cum rationali totum medium efficiens.

A recta enim AB auferatur recta BG potentia rectae AB incommensurabilis proposita efficiens [prop. XXXIV]. dico, reliquam AG irrationalem esse, quam significauimus.

nam quoniam $AB^2 + BG^2$ medium est, $2AB \times BG$

τὸ συγκείμενον Fb. ἄρα] ἐστὶ P. 10. ἄλογος — AG] om. P.
 11. ὅπερ εἰδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 12. οἷ' F. 17.
 ἐστὶ PBV, comp. Fb. δὲ ἡ] δέ BFVb. Supra μετὰ scr. ἀπό
 comp. m. 1 b. 19. AB] corr. ex AG m. 2 F. 20. ἀσύμ-
 μετρος οὕσα δυνάμει V. τῇ ὅλῃ τῇ Theon (BFVb). τὰ
 προκείμενα] τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB , BG τε-
 τραγῶνων μέσον, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB , BG ῥητόν Theon
 (BFVb). 21. ἐστὶ BV, comp. F. ἡ προειρημένη] καλεῖσθαι
 (καλεῖται B) δὲ ἡ (om. Vb) μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσα
 Theon (BFVb). 24. ἐστὶ PBV, comp. Fb.

AB , $BΓ$ ῥητόν, ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$ τῷ δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ καὶ ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ ῥητόν· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ ἄλογόν ἐστιν· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ $ΑΓ$ · καλείσθω δὲ ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

οη'.

Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ δυνάμει
10 ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον τό τε δις ὑπ' αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα ἀσίμμετρα τῷ δις ὑπ' αὐτῶν, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν· κα-
15 λείσθω δὲ ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς AB εὐθεῖα ἀφηγήσθω ἡ $BΓ$ δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ AB ποιοῦσα τὰ προ-
κείμενα· λέγω, ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ $ΑΓ$ ἄλογός ἐστιν ἡ κα-
λουμένη ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.
20 Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ $ΔΙ$, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$ ἴσον παρὰ τὴν $ΔΙ$ παραβεβλήσθω τὸ $ΔΕ$ πλάτος ποιοῦν τὴν $ΔΗ$, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ ἴσον ἀφηγήσθω τὸ $ΔΘ$ [πλάτος ποιοῦν τὴν $ΔΖ$]. λοιπὸν ἄρα τὸ $ΖΕ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ ὥστε

2. $BΓ$ τετράγωνα BFb. $BΓ$] B m. 2 V. καί] om. P.
3. σύμμετρον F. 4. καί — δις] ῥητόν δὲ τό V. ῥητόν] om. V. 6. δὲ ἡ] δέ b. 7. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. BFVb, comp. P. 8. οθ' F. 10. δέ] om. P. 11. τε] in ras. V, μέν BFb. ἀπ'] ἀπὸ τῶν V. 12. τε] in ras. V, δέ BFb.
13. καὶ ἔτι] ἔτι τε Theon (BFVb). 14. ἡ] λέγω ὅτι ἡ V. ἐστὶ BV, comp. Fb. 15. ἡ] om. FVb. 17. τὰ προκεί-
μενα] τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$ τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ μέσον ἔτι τε (om. V, m. 2 F)

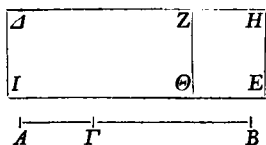
$\left. \begin{array}{l} A \\ \Gamma \\ B \end{array} \right\}$ autem rationale, $AB^2 + B\Gamma^2$ et $2AB \times B\Gamma$ incommensurabilia sunt. itaque etiam reliquum [II, 7] AI^2 et $2AB \times B\Gamma$ incommensurabilia sunt [prop. XVI]. et $2AB \times B\Gamma$ rationale est. itaque AI^2 irrationale est. ergo AI irrationalis est [def. 4]; uocetur autem recta cum rationali totum medium efficiens; quod erat demonstrandum.

LXXVIII.

Si a recta aufertur recta potentia incommensurabilis toti, cum tota autem efficiens et summam quadratorum mediam et duplum rectangulum medium praetereaue summam quadratorum duplo rectangulo incommensurabilem, reliqua irrationalis est; uocetur autem recta cum medio totum medium efficiens.

A recta enim AB recta auferatur $B\Gamma$ potentia rectae AB incommensurabilis proposita efficiens [prop. XXXV]. dico, reliquam AI irrationalem esse, quae uocetur recta cum medio totum medium efficiens.

ponatur enim rationalis AI , et quadratis $AB^2 + B\Gamma^2$ aequale rectae AI adplicetur AE latitudinem efficiens



ΔH , spatio autem $2AB \times B\Gamma$ aequale auferatur $\Delta \Theta$. itaque reliquum $ZE = AI^2$ [II, 7]. quare AI spatio ZE quadrata aequalis est. et quoniam AB^2

τὰ ἀπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ ἀσύμμετρα τῷ δις ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ Theon (BFVb). 18. ἐστὶ BV , comp. F. ἡ καλουμένη] καλεῖσθαι δέ Theon (BFVb). 19. μέσον] supra scr. F. 20. ΔI] ΔK in ras. V, item lin. 21. 21. ἴσον] ἴσον τὸ ΔE V. τήν] corr. ex φητὴν m. 1 P, φητὴν τήν V, m. 2 B. τὸ ΔE] om. V. 23. πλάτος — ΔZ] om. P.

- ἡ $ΑΓ$ δύναται τὸ $ΖΕ$. καὶ ἐπεὶ το συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΒ, ΒΓ$ τετραγώνων μέσον ἐστὶ καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ $ΔΕ$, μέσον ἄρα [ἐστὶ] τὸ $ΔΕ$. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν $ΔΙ$ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν $ΔΗ$.
- 5 ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $ΔΗ$ καὶ ἀσύμμετρος τῇ $ΔΙ$ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν $ΑΒ, ΒΓ$ μέσον ἐστὶ καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ $ΔΘ$, τὸ ἄρα $ΔΘ$ μέσον ἐστίν. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν $ΔΙ$ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν $ΔΖ$. ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $ΔΖ$ καὶ ἀσύμμετρος τῇ $ΔΙ$ μήκει.
- 10 καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΒ, ΒΓ$ τῷ δις ὑπὸ τῶν $ΑΒ, ΒΓ$, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ $ΔΕ$ τῷ $ΔΘ$. ὥς δὲ τὸ $ΔΕ$ πρὸς τὸ $ΔΘ$, οὕτως ἐστὶ καὶ ἡ $ΔΗ$ πρὸς τὴν $ΔΖ$. ἀσύμμετρος ἄρα ἡ $ΔΗ$ τῇ $ΔΖ$. καὶ εἰσὶν ἀμφοτέραι ῥηταί· αἱ $ΗΔ, ΔΖ$ ἄρα ῥηταί.
- 15 εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $ΖΗ$. ῥητὴ δὲ ἡ $ΖΘ$. τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς περιεχόμενον [ὀρθογώνιον] ἄλογόν ἐστίν, καὶ ἡ δύναμνη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν. καὶ δύναται τὸ $ΖΕ$ ἡ $ΑΓ$. ἡ $ΑΓ$ ἄρα ἄλογός ἐστιν· καλεῖσθω δὲ ἡ μετὰ μέσου
- 20 μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

οθ'.

Τῇ ἀποτομῇ μία [μόνον] προσαρμόζει εὐθεῖα ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ.

1. $ΑΓ$] $ΑΓ$ μεῖζον b. καί] m. 2 F. 3. ἐστὶ] om. P.
 4. $ΔΙ$] $ΔΚ$ in ras. V, item lin. 5, 8, 9; $ΔΗ$ P. 5. σύμμετρος B, corr. m. 2. 7. τῷ] corr. ex τό m. 1 F. ἐστίν] ἐστὶ PBV, comp. Fb. 9. ἐστίν PB. καί] (prius) om. B. 10. ἀσύμμετρός F. ἐστὶν P. 11. τό] corr. ex τῷ m. 2 F. τῷ] corr. ex τό m. 2 F. 12. $ΔΘ$] (alt.) Θ, add. Z m. 2, F. ἐστίν PB. καί] om. P. 13. τήν] om. P. $ΔΗ$] $Δ$ in ras. V, $ΗΔ$ Fb. 14. ἄρα] m. 2 F. 15. εἰσὶν P. 16. $ΖΘ$] $ΔΚ$ in ras. V. δέ] δ' P.

$+B\Gamma^2$ medium est et $=\Delta E$, ΔE medium est. et rationali ΔI adplicatum est latitudinem efficiens ΔH . itaque ΔH rationalis est et rectae ΔI longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. rursus quoniam $2AB \times B\Gamma$ medium est et $=\Delta\Theta$, $\Delta\Theta$ medium est. et rationali ΔI adplicatum est latitudinem efficiens ΔZ . itaque ΔZ rationalis est et rectae ΔI longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. et quoniam $AB^2 + B\Gamma^2$ et $2AB \times B\Gamma$ incommensurabilia sunt, etiam ΔE , $\Delta\Theta$ incommensurabilia sunt. uerum $\Delta E : \Delta\Theta = \Delta H : \Delta Z$ [VI, 1]. itaque ΔH , ΔZ incommensurabiles sunt [prop. XI]. et utraque rationalis est. itaque $H\Delta$, ΔZ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. quare ZH apotome est [prop. LXXIII]. $Z\Theta$ autem rationalis est. spatium autem recta rationali et apotome comprehensum irrationale est [prop. XX], et recta ei potentia aequalis irrationalis est. est autem $A\Gamma^2 = ZE$. ergo $A\Gamma$ irrationalis est; uocetur autem recta cum medio totum medium efficiens. quod erat demonstrandum.

LXXIX.

Apotomae una tantum congruit recta rationalis potentia tantum toti commensurabilis.

17. ὁρθογώνιον] om. P. ἔστι PBV, comp. Fb. 18. ἔστι PBV, comp. Fb. 19. ἔστι BV, comp. Fb. ἦ] om. P.
 20. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 21. οἱ] corr. ex π' m. 2 F. 22. μόνον] om. P, μόνη V et F supra scr. on m. 1.

Ἐστω ἀποτομὴ ἡ AB , προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ $BΓ$. αἱ $ΑΓ$, $ΓΒ$ ἄρα φηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· λέγω, ὅτι τῇ AB ἑτέρα οὐ προσαρμόζει φητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ.

- 5 Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ $BΔ$ · καὶ αἱ $ΑΔ$, $ΔΒ$ ἄρα φηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἐπεὶ, ὥς ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ · τῷ γὰρ αὐτῷ τῷ
 10 ἀπὸ τῆς AB ἀμφοτέρω ὑπερέχει· ἐναλλάξ ἄρα, ὥς ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$, τούτῳ ὑπερέχει [καὶ] τὸ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$. τὰ δὲ ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ ὑπερέχει φητῶ· φητὰ γὰρ ἀμφοτέρω.
 15 καὶ τὸ δις ἄρα ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ ὑπερέχει φητῶ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· μέσα γὰρ ἀμφοτέρω, μέσον δὲ μέσον οὐχ ὑπερέχει φητῶ. τῇ ἄρα AB ἑτέρα οὐ προσαρμόζει φητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ.
- 20 Μία ἄρα μόνη τῇ ἀποτομῇ προσαρμόζει φητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

π'.

Τῇ μέσης ἀποτομῇ πρώτη μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος

3. φητῇ] m. 2 F. 5. προσαρμοζέσθω b. καί] om. B.
 6. $ΔΒ$] $BΔ$ F. 9. τῷ ἀπὸ τῆς] τό F. 10. AB — ὑπερέχει] ἀπ' ἀμφοτέρων ὑπεροχῆς τῷ ἀπὸ τῆς AB BFb; in B del. m. 2, mg. τῷ γὰρ αὐτῷ — ὑπερέχει m. 2. ὥ] ὡς b. 11. $ΑΔ$, $ΔΒ$] $ΑΓ$, $ΓΒ$ F, corr. m. 2. ἀπό — 12. ὑπερέχει] in ras. F. 12. καί] om. P. $ΔΒ$] m. 2 F. 14. φητῇ] corr. ex φητῇ V et m. rec. B. Post γὰρ add. εἰσιν FVb, ἐστὶν B. 15. τό] corr. ex τῷ m. 1 F. ἄρα] om. V. 17. Post γὰρ add. εἰσιν Vb,

A Sit AB apotome, ei autem congruens BF .
 B itaque AF , FB rationales sunt potentia tantum
commensurabiles [prop. LXXIII]. dico, nullam
 B aliam rationalem potentia tantum toti commensurabilem rectae AB congruere.

nam si fieri potest, congruat BA . itaque etiam
 A AA , AB rationales sunt potentia tantum commensurabiles [prop. LXXIII]. et quoniam
 $(AA^2 + AB^2) \div 2AA \times AB = (AF^2 + FB^2) \div 2AF \times FB$
(nam utrumque excedit eodem spatio AB^2 [II, 7]), permutando erit

$(AA^2 + AB^2) \div (AF^2 + FB^2) = 2AA \times AB \div 2AF \times FB$.
uerum $AA^2 + AB^2$ excedit $AF^2 + FB^2$ spatio rationali;
nam utraque rationalia sunt. itaque etiam $2AA \times AB$
excedit $2AF \times FB$ spatio rationali; quod fieri non
potest; nam utrumque medium est [prop. XXI], medium
autem non excedit medium spatio rationali [prop. XXVI].
itaque rectae AB nulla alia rationalis potentia tantum
toti commensurabilis congruit.

Ergo una tantum recta rationalis potentia tantum
toti commensurabilis apotomae congruit; quod erat
demonstrandum.

LXXX.

Mediae apotomae primae una tantum congruit recta
media potentia tantum toti commensurabilis, cum tota
autem spatium rationale comprehendens.

ἔστιν BF. 18. τῇ] corr. ex τὰ m. 2 F. ἐστὶν V. 20.
μὴ — 21. ὅλη] bis F, sed corr. 20. μόνον BFb. προσ-
αρμόσει BFVb. 21. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb.
22. πα' F, et sic deinceps. 23. μέσης] corr. ex μέση m.
rec. P, μέση BFV, μέση b. μὴ] om. b.

οὕσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα.

Ἔστω γὰρ μέσης ἀποτομῇ πρώτη ἡ AB , καὶ τῇ AB προσαρμοζέτω ἡ $BΓ$. αἱ $ΑΓ$, $ΓB$ ἄρα μέσαι εἰσὶ
 5 δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσai τὸ ὑπὸ
 τῶν $ΑΓ$, $ΓB$. λέγω, ὅτι τῇ AB ἑτέρα οὐ προσαρμόζει
 μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὕσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ
 τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω καὶ ἡ $ΔB$. αἱ ἄρα
 10 $ΑΔ$, $ΔB$ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν
 περιέχουσai τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔB$. καὶ ἐπεὶ, ὃ ὑπερέχει
 τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔB$ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔB$,
 τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓB$ τοῦ δις ὑπὸ
 τῶν $ΑΓ$, $ΓB$. τῷ γὰρ αὐτῷ [πάλιν] ὑπερέχουσι τῷ
 15 ἀπὸ τῆς AB . ἐναλλάξ ἄρα, ὃ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν
 $ΑΔ$, $ΔB$ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓB$, τούτῳ ὑπερέχει καὶ
 τὸ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔB$ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓB$.
 τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔB$ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$,
 $ΓB$ ὑπερέχει ῥητῷ. ῥητὰ γὰρ ἀμφοτέρω. καὶ τὰ ἀπὸ
 20 τῶν $ΑΔ$, $ΔB$ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓB$ [τετραγώνων]
 ὑπερέχει ῥητῷ. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. μέσα γάρ ἐστιν
 ἀμφοτέρω, μέσον δὲ μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ.

Τῇ ἄρα μέσης ἀποτομῇ πρώτη μίᾳ μόνον προσ-
 αρμόζει εὐθεῖα μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὕσα
 25 τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα. ὅπερ ἔδει
 δεῖξαι.

3. μέση BVb, om. F. 4. προσαρμόζει F, corr. m. 2. αἱ] corr. ex εἰ m. 1 F. ἄρα ΑΓ, ΓB BFVb. εἰσὶν B. 5. σύμμετρος V, corr. m. 1. 6. προσαρμόσει V. 8. περιέχουσai V, corr. m. 1. 10. ΑΔ] m. 2 F. εἰσιν LB. 12. τὰ] corr. ex τό m. 2 F. τοῦ] τῷ F. ΑΓ, ΓB F. 13. ὑπερεῖχε b, corr. m. 1. 14. τῷ] corr. ex τό V. πάλιν] om. P. ὑπερ-

$\left. \begin{array}{l} A \\ B \\ \Gamma \\ \Delta \end{array} \right\}$ Sit enim AB mediae apotome prima, et rectae AB congruat $B\Gamma$. itaque $A\Gamma$, ΓB mediae sunt potentia tantum commensurabiles spatium rationale comprehendentes $A\Gamma \times \Gamma B$ [prop. LXXIV]. dico, rectae AB nullam aliam mediam potentia tantum toti commensurabilem congruere cum tota spatium rationale comprehendentem.

nam si fieri potest, etiam AA , AB igitur mediae sunt potentia tantum commensurabiles spatium rationale comprehendentes $AA \times AB$ [prop. LXXIV]. et quoniam est

$(AA^2 + AB^2) \div 2 AA \times AB = (A\Gamma^2 + \Gamma B^2) \div 2 A\Gamma \times \Gamma B$
 (nam eodem spatio AB^2 excedunt [II, 7]), permutando erit

$(AA^2 + AB^2) \div (A\Gamma^2 + \Gamma B^2) = 2 AA \times AB \div 2 A\Gamma \times \Gamma B$.
 uerum $2 AA \times AB$ excedit $2 A\Gamma \times \Gamma B$ spatio rationali; nam utrumque rationale est. itaque etiam $AA^2 + AB^2$ excedit $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ spatio rationali; quod fieri non potest; nam utraque media sunt [prop. XXIV], medium autem non excedit medium spatio rationali [prop. XXVI].

Ergo mediae apotomae primae una tantum recta media congruit potentia tantum toti commensurabilis, cum tota autem spatium rationale comprehendens; quod erat demonstrandum.

έχουσιν LBF. τῶ] τὰ b. 15. τὰ] καὶ τὰ LB. 17. τό]
 τὰ P. 18. τὸ δέ — 19. ΓΒ] καὶ V. 20. τετραγώνων] om. P.
 21. ὑπερέξει P, ξ supra scr. B. 22. δέ] γὰρ L. 23. μέση
 uel μέση LBFVb. 25. ὁπερ εἰδει δεῖξαι] comp. P, om.
 LBFVb.

πα'.

Τῇ μέσῃς ἀποτομῇ δευτέρᾳ μία μόνον προσ-
αρμοῖξει εὐθεῖα μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος
τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχουσα.

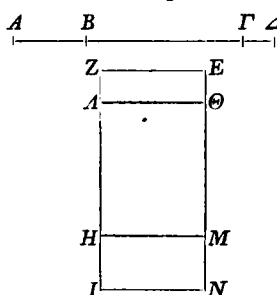
- 5 Ἐστω μέσῃς ἀποτομῇ δευτέρᾳ ἡ AB καὶ τῇ AB
προσαρμοῖξουσα ἡ $BΓ$ · αἱ ἄρα $ΑΓ$, $ΓΒ$ μέσαι εἰσὶ
δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι τὸ ὑπὸ
τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ · λέγω, ὅτι τῇ AB ἑτέρα οὐ προσαρμόσει
εὐθεῖα μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὕσα τῇ ὅλῃ,
10 μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχουσα.

- Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοξέτω ἡ $ΒΔ$ · καὶ αἱ $ΑΔ$,
 $ΔΒ$ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον
περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ · καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ
ἡ EZ , καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ ἴσον παρὰ τὴν
15 EZ παραβεβλήσθω τὸ $ΕΗ$ πλάτος ποιοῦν τὴν $ΕΜ$ ·
τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ ἴσον ἀφηγήσθω τὸ $ΘΗ$
πλάτος ποιοῦν τὴν $ΘΜ$ · λοιπὸν ἄρα τὸ $ΕΑ$ ἴσον ἐστὶ
τῷ ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ · ὥστε ἡ $ΑΒ$ δύναται τὸ $ΕΑ$ · πάλιν
δὴ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ ἴσον παρὰ τὴν EZ παρα-
20 βεβλήσθω τὸ $ΕΙ$ πλάτος ποιοῦν τὴν $ΕΝ$ · ἐστὶ δὲ καὶ
τὸ $ΕΑ$ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ τετραγώνῳ· λοιπὸν ἄρα
τὸ $ΘΙ$ ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ · καὶ ἐπεὶ
μέσαι εἰσὶν αἱ $ΑΓ$, $ΓΒ$, μέσα ἄρα ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν
 $ΑΓ$, $ΓΒ$ · καὶ ἐστὶν ἴσα τῷ $ΕΗ$ · μέσον ἄρα καὶ τὸ
25 $ΕΗ$ · καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν EZ παράκειται πλάτος ποιοῦν

2. μέση uel μέση LBFVb. μόνῃ V. 5. μέση uel
μέση LBFb, e corr. V. δευτέρᾳ] om. b. AB] B in ras.
m. 1 P. καὶ τῇ AB] om. V. 6. ἡ] δὲ ἡ V. αἱ] supra
scr. m. rec. b. εἰσὶν LBP. 7. τό] τά L? 8. τῶν] om. b.
προσαρμοῖξει LBb. 11. ΔΒ F. καί] om. B. 12. εἰσὶν
LB. 16. AB, BΓ b. 20. EI] supra scr. Z F. ἐστὶν L.
21. καὶ λοιπόν V. 22. ἴσον — 24. τῷ ΕΗ] mg. m. 1 F.

LXXXI.

Mediae apotomae secundae una tantum recta media congruit potentia tantum toti commensurabilis, cum tota autem spatium medium comprehendens.



Sit AB mediae apotome secunda et rectae AB congruens $B\Gamma$. itaque $A\Gamma$, ΓB mediae sunt potentia tantum commensurabiles medium comprehendentes $A\Gamma \times \Gamma B$ [prop. LXXV]. dico, rectae AB nullam aliam rectam mediam congruere potentia tantum toti commensu-

rabilem, cum tota autem medium comprehendentem.

nam si fieri potest, congruat $B\Delta$. itaque etiam $A\Delta$, ΔB mediae sunt potentia tantum commensurabiles medium comprehendentes $A\Delta \times \Delta B$ [prop. LXXV]. et ponatur rationalis EZ , et quadratis $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ aequale rectae EZ adplicetur EH latitudinem efficiens EM ; spatio autem $2 A\Gamma \times \Gamma B$ aequale auferatur ΘH latitudinem efficiens ΘM . itaque reliquum $EA = AB^2$ [II, 7]. itaque AB spatio EA aequalis est quadrata. iam rursus quadratis $A\Delta^2 + \Delta B^2$ aequale rectae EZ adplicetur EI latitudinem efficiens EN . est autem $EA = AB^2$. itaque reliquum $\Theta I = 2 A\Delta \times \Delta B$ [II, 7]. et quoniam $A\Gamma$, ΓB mediae sunt, etiam $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ media sunt. et $A\Gamma^2 + \Gamma B^2 = EH$. quare etiam EH medium est. et rectae rationali EZ adplicatum est latitudinem efficiens EM . itaque EM rationalis est

22. ἐστίν L. Post ἐπεὶ del. m. 1: ἴσων ἐστὶ τῷ δις P. 23. ἐστίν L, εἰς Fb. 24. EH] seq. ἴσων ἐστὶ τῷ EH F.

τὴν EM ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ EM καὶ ἀσύμμετρος τῇ EZ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν AG , GB , καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AG , GB μέσον ἐστίν. καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ ΘH · καὶ τὸ ΘH ἄρα μέσον ἐστίν. καὶ
 5 παρὰ ῥητὴν τὴν EZ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΘM · ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΘM καὶ ἀσύμμετρος τῇ EZ μήκει. καὶ ἐπεὶ αἱ AG , GB δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AG τῇ GB μήκει. ὥς δὲ ἡ AG πρὸς τὴν GB , οὕτως ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AG
 10 πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AG , GB · ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AG τῷ ὑπὸ τῶν AG , GB . ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AG σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν AG , GB , τῷ δὲ ὑπὸ τῶν AG , GB σύμμετρόν ἐστι τὸ δις ὑπὸ τῶν AG , GB · ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AG , GB
 15 τῷ δις ὑπὸ τῶν AG , GB . καὶ ἐστὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν AG , GB ἴσον τὸ EH , τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν AG , GB ἴσον τὸ $H\Theta$ · ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ EH τῷ ΘH . ὥς δὲ τὸ EH πρὸς τὸ ΘH , οὕτως ἐστὶν ἡ EM πρὸς τὴν ΘM · ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ EM τῇ $M\Theta$ μήκει.
 20 καὶ εἰσιν ἀμφοτέραι ῥηταί· αἱ EM , $M\Theta$ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $E\Theta$, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΘM . ὁμοίως δὲ δεῖξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΘN αὐτῇ προσαρμόζει· τῇ ἄρα ἀποτομῇ ἄλλη καὶ ἄλλη προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει μόνον
 25 σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Τῇ ἄρα μέσης ἀποτομῇ δευτέρᾳ μία μόνον προσ-

1. EM] (alt.) EN L?, ME b. 2. ἐστίν L. 3. δις ἄρα V. ἐστίν] L, comp. Fb, ἐστὶ PBV. 4. τῷ ΘH] om. L, m. 2 B. ἐστίν] L, comp. Fb, ἐστὶ PBV. 6. ἐστίν L. 7. GB] in ras. V. ἀσύμμετροί F, sed corr. 9. ἐστίν L, ἄρα ἐστὶ B. 10. ἀσύμμετρον — 11. GB] m. 2 V. 10. ἐστὶ καὶ B. 11. AG] (prius) φ (non F, habuit B). 12. ἐστὶν P.

et rectae EZ longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. rursus quoniam $AG \times GB$ medium est, etiam $2AG \times GB$ medium est [prop. XXIII coroll.]. et $\Theta H = 2AG \times GB$. itaque etiam ΘH medium est. et rectae rationali EZ adplicatum est latitudinem efficiens ΘM . itaque ΘM rationalis est et rectae EZ longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. et quoniam AG , GB potentia tantum commensurabiles sunt AG et GB longitudine incommensurabiles sunt. uerum $AG:GB = AG^2:AG \times GB$ [prop. XXI coroll.]. quare AG^2 et $AG \times GB$ incommensurabilia sunt [prop. XI]. uerum AG^2 , $AG^2 + GB^2$ commensurabilia, et $AG \times GB$, $2AG \times GB$ commensurabilia. quare $AG^2 + GB^2$, $2AG \times GB$ incommensurabilia sunt [prop. XIII]. est autem $EH = AG^2 + GB^2$, $H\Theta = 2AG \times GB$. itaque EH , ΘH incommensurabilia sunt. est autem $EH:\Theta H = EM:\Theta M$ [VI, 1]. itaque EM , $M\Theta$ longitudine incommensurabiles sunt [prop. XI]. et utraque rationalis est. quare EM , $M\Theta$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. itaque $E\Theta$ apotome est [prop. LXXIII], ei autem congruens ΘM . iam similiter demonstrabimus, etiam ΘN ei congruere. itaque apotomae rectae diuersae congruunt potentia tantum toti commensurabiles; quod fieri non potest [prop. LXXIX].

Ergo mediae apotomae secundae una tantum recta

15. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ P. 17. $H\Theta$] in ras. V. EH] mut. in HE m.
 1 V, HE Bb. 18. $\tau\acute{o}$] (alt.) om. b. 19. $M\Theta$] in ras. m.
 1 B, ΘM P. 20. $\acute{\alpha}\rho\alpha$] postea ins. m. 1 V. 21. $\acute{\epsilon}\iota\sigma\iota$] om. φ .
 $\sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\rho\omicron\iota$] -oi e corr. P. 23. ΘN] N in ras. V. $\pi\rho\omicron\sigma$ -
 $\alpha\rho\mu\acute{o}\tau\tau\epsilon\iota$ V. $\acute{\alpha}\pi\omicron\tau\omicron\mu\eta\ \tau\eta\ E\Theta$ V. 24. $\mu\acute{o}\nu\omicron\nu$] supra scr.
 m. 1 F. 25. $\acute{\omicron}\pi\epsilon\rho\ \acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu\ \acute{\alpha}\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\omicron\nu$] om. V. 26. $\mu\acute{\epsilon}\sigma\eta$
 BFVb.

αρμοῖζει εὐθεῖα μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὐσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχουσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

πβ'.

5 Τῇ ἐλάσσονι μίᾳ μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὐσα τῇ ὅλῃ ποιοῦσα μετὰ τῆς ὅλης τὸ μὲν ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν μέσον.

Ἔστω ἡ ἐλάσσων ἡ AB , καὶ τῇ AB προσαρμόζουσα
10 ἔστω ἡ $BΓ$. αἱ ἄρα $ΑΓ, ΓΒ$ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν μέσον· λέγω, ὅτι τῇ AB ἑτέρα εὐθεῖα οὐ προσαρμόσει τὰ αὐτὰ ποιοῦσα.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ $BΔ$ · καὶ αἱ $ΑΔ, ΔΒ$
15 ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὰ προειρημένα. καὶ ἐπεὶ, ὥς ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΔ, ΔΒ$ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ, ΓΒ$, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ, ΔΒ$ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ, ΓΒ$, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν $ΑΔ, ΔΒ$ τετράγωνα τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ, ΓΒ$
20 τετραγώνων ὑπερέχει ῥητῶ· ῥητὰ γὰρ ἔστιν ἀμφοτέρω· καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ, ΔΒ$ ἄρα τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ, ΓΒ$ ὑπερέχει ῥητῶ· ὅπερ ἔστιν ἀδύνατον· μέσα γὰρ ἔστιν ἀμφοτέρω.

Τῇ ἄρα ἐλάσσονι μίᾳ μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα
25 δυνάμει ἀσύμμετρος οὐσα τῇ ὅλῃ καὶ ποιοῦσα τὰ μὲν

1. εὐθεῖα — μόνον] om. P. 2. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 4. πβ'] corr. ex πγ' F. 5. μόνῃ V, μόν' η F. 9. ἡ] (prius) ins. m. 2 F. 10. ἄρα] supra scr. m. 1 V. σύμμετροι F. 13. τῇ] corr. ex ἡ m. 2 F. ἑτέροι εὐθεῖαι F. προσαρμόζει b. 14. καί] om. B. αἱ] om. b. 15. Ante εἰσὶν ras. 4 litt. V. τά] τό V, et F, corr. m. 2. προειρημένα] μὲν ἀπὸ τῶν $ΑΔ, ΔΒ$ (m. 2 F) τετράγωνα (-γώνων FV) ἅμα ῥητόν, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ, ΔΒ$ μέσον

media congruit potentia tantum toti commensurabilis, cum tota autem spatium medium comprehendens; quod erat demonstrandum.

LXXXII.

Rectae minori una tantum recta potentia toti incommensurabilis congruit cum tota efficiens summam quadratorum rationalem, rectangulum autem duplum medium.

Sit AB minor, et rectae AB congruat $B\Gamma$. itaque $A\Gamma$, ΓB potentia incommensurabiles sunt efficientes

A B Γ Δ summam quadratorum rationalem, rectangulum autem duplum medium [prop. LXXVI]. dico, rectae AB nullam aliam rectam congruere eadem efficientem.

nam si fieri potest, congruat $B\Delta$. itaque etiam $A\Delta$, ΔB potentia incommensurabiles sunt efficientes, quae diximus [prop. LXXVI]. et quoniam est [II, 7; cfr. p. 238, 7 sq.]

$(A\Delta^2 + \Delta B^2) \div (A\Gamma^2 + \Gamma B^2) = 2A\Delta \times \Delta B \div 2A\Gamma \times \Gamma B$,
et $A\Delta^2 + \Delta B^2$ excedit $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ spatio rationali (nam utraque rationalia sunt), etiam $2A\Delta \times \Delta B$ excedit $2A\Gamma \times \Gamma B$ spatio rationali; quod fieri non potest [prop. XXVI]; nam utrumque medium est.

Ergo rectae minori una tantum recta congruit potentia toti incommensurabilis et cum tota efficiens

Theon (BFVb). 16. $\tau\acute{\alpha}$] in ras. m. 1 P. 17. $\tau\acute{o}$] $\tau\acute{\alpha}$ B; $\tau\acute{\omega}$ F, sed corr. m. 1. 18. $\acute{\upsilon}\pi\acute{o}$ — $\delta\acute{\epsilon}$] mg. m. 2 B. $\tau\acute{o}\upsilon$ — 19. ΔB] e corr. m. 1 F. 19. $A\Delta$] Δ e corr. m. 1 V. 20. $\acute{\upsilon}\pi\epsilon\rho\acute{\epsilon}\chi\epsilon\iota$] m. 2 B. $\epsilon\acute{\iota}\sigma\iota\nu$ b. 21. $\acute{\alpha}\rho\alpha$] m. 2 B, om. FVb. 23. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$] m. 2 F. 24. $\acute{\alpha}\rho\alpha$] om. P. Ante $\mu\acute{\iota}\alpha$ del. $\tau\eta$ AB m. 2 V. $\mu\acute{o}\nu\eta$ V. 25. $\delta\nu\acute{\nu}\alpha\mu\epsilon\iota$ $\mu\acute{o}\nu\omicron\nu$ FVb. $\sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\rho\omicron\varsigma$ FVb, et B, corr. m. 2. $\kappa\alpha\acute{\iota}$] om. V. $\tau\acute{\alpha}$] $\tau\acute{o}$ PFV.

ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα ἅμα ῥητόν, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν μέσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

πγ'.

Τῇ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ μία
5 μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος
οὕσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ μὲν
συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων
μέσον, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν ῥητόν.

Ἐστω ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ AB ,
10 καὶ τῇ AB προσαρμοζέτω ἡ $BΓ$. αἱ ἄρα $ΑΓ$, $ΓΒ$
δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὰ προκείμενα·
λέγω, ὅτι τῇ AB ἑτέρα οὐ προσαρμόσει τὰ αὐτὰ
ποιοῦσα.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ $BΔ$ καὶ αἱ $ΑΔ$,
15 $ΔΒ$ ἄρα εὐθεῖαι δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι
τὰ προκείμενα. ἐπεὶ οὖν, ὥς ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΔ$,
 $ΔΒ$ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ
δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$
ἀκολουθῶς τοῖς πρὸ αὐτοῦ, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ$,
20 $ΔΒ$ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ ὑπερέχει ῥητῶ· ῥητὰ
γὰρ ἐστὶν ἀμφοτέρω· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ ἄρα
τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ ὑπερέχει ῥητῶ· ὅπερ ἐστὶν
ἀδύνατον· μέσα γὰρ ἐστὶν ἀμφοτέρω. οὐκ ἄρα τῇ AB
ἑτέρα προσαρμόσει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὕσα

1. τετράγωνον P, τετραγώνων V, et F, corr. m. 2. Post ῥητόν add. μετὰ τῆς ὅλης V. 2. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 3. πδ' F. 4. μετὰ τοῦ V. Post ῥητοῦ add. καὶ m. 2 F. 5. μόνῃ V. 10. καὶ τῇ AB] om. B. προσ-
αρμόζουσα Vb, προσαρμόζουσα δὲ B, ἀρμόζουσα F. 11. τὰ
προκείμενα] τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ τε-
τραγώνων μέσον, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ ῥητόν Theon

summam quadratorum rationalem, rectangulum autem duplum medium; quod erat demonstrandum.

LXXXIII.

Rectae cum rationali totum medium efficiendi una tantum recta congruit potentia toti incommensurabilis, cum tota autem summam quadratorum mediam efficiens, rectangulum autem duplum rationale.

Sit AB recta cum rationali totum medium efficiens, et rectae AB congruat $B\Gamma$. itaque $A\Gamma$, ΓB potentia incommensurabiles sunt proposita efficientes [prop. LXXVII]. dico, rectae AB nullam aliam congruere eadem efficientem.

nam si fieri potest, congruat $B\Delta$. itaque etiam $A\Delta$, ΔB rectae potentia incommensurabiles sunt proposita efficientes [prop. LXXVII]. iam quoniam, sicut in priore propositione [p. 246, 16 sq.]

$(A\Delta^2 + \Delta B^2) \div (A\Gamma^2 + \Gamma B^2) = 2A\Delta \times \Delta B \div 2A\Gamma \times \Gamma B$,
et $2A\Delta \times \Delta B$ excedit $2A\Gamma \times \Gamma B$ spatio rationali (nam utrumque rationale est), etiam $A\Delta^2 + \Delta B^2$ excedit $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ spatio rationali; quod fieri non potest; nam utraque media sunt [prop. XXVI]. itaque rectae AB nulla alia recta congruet potentia toti incommensurabilis, cum tota autem efficiens, quae dixi-

(BFVb). 12. λέγω — 16. προκειμένα] om. P. 12. ταῦτα V.

14. $A\Delta$] Δ e corr. m. 1 b. 16. τὰ προκειμένα] τὸ μὲν συγκείμενον ἐν τῶν ἀπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB (AB , $B\Delta$ φ) ἑητόν Theon (BFVb). τὰ] corr. ex τό F. 18. Post ΓB uacat una linea et spat. 6 litt. b.

21. ἔστιν] om. V, m. 2 F. 23. γὰρ εἰσιν V.

τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιουῖσα τὰ προειρημένα· μία ἄρα μόνον προσαρμόσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

πδ'.

Τῇ μετὰ μέσον μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ μία
 5 μόνῃ προσαρμόζει εὐθείᾳ δυνάμει ἀσύμμετρος
 οὔσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιουῖσα τό τε
 συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων
 μέσον τό τε δις ὑπ' αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμ-
 μετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν.

10 Ἔστω ἡ μετὰ μέσον μέσον τὸ ὅλον ποιουῖσα ἡ *AB*,
 προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ *BΓ*. αἱ ἄρα *ΑΓ*, *ΓΒ* δυ-
 νάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιουῖσαι τὰ προειρημένα. λέγω,
 ὅτι τῇ *AB* ἑτέρα οὐ προσαρμόσει ποιουῖσα τὰ προει-
 ρημένα.

15 Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ *ΒΔ*, ὥστε καὶ
 τὰς *ΑΔ*, *ΔΒ* δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι ποιούσας τὰ
 τε ἀπὸ τῶν *ΑΔ*, *ΔΒ* τετράγωνα ἅμα μέσον καὶ τὸ
 δις ὑπὸ τῶν *ΑΔ*, *ΔΒ* μέσον καὶ ἔτι τὰ ἀπὸ τῶν *ΑΔ*,
ΔΒ ἀσύμμετρα τῷ δις ὑπὸ τῶν *ΑΔ*, *ΔΒ*· καὶ ἐκκείσθω
 20 ῥητὴ ἡ *EZ*, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* ἴσον παρὰ
 τὴν *EZ* παραβεβλήσθω τὸ *ΕΗ* πλάτος ποιοῦν τὴν

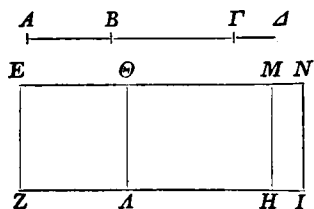
1. τὰ προειρημένα] τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν ῥητόν Theon (BFVb).

2. μία ἄρα] τῇ ἄρα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ μία BVb et F, om. μία. προσαρμόζει Vb, καὶ τὰ ἐξῆς F. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 3. πδ'] sic m. 2 F. 5. μόνον BFb. Post δυνάμει del. μόνον m. 1 P. 8. τό τε] καὶ τό Theon (BFVb). ὑπὸ τῶν b. ἀσύμμετρος F, sed corr. 9. τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τῷ δις ὑπ' αὐτῶν Theon (BFVb). 11. αὐτῇ] om. Theon (BFVb). 12. τὰ προειρημένα] τό τε (μὲν F) συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* (ὑπ' αὐτῶν V) μέσον, ἔτι (corr. ex ἔστι F) δὲ τὰ ἀπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* τετράγωνα (τά add. F) ἀσύμμετρα τῷ δις ὑπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* Theon (BFVb).

mus. ergo una tantum congruet; quod erat demonstrandum.

LXXXIV.

Rectae cum medio totum medium efficienti una tantum congruit recta potentia toti incommensurabilis, cum tota autem efficiens summam quadratorum mediam et duplum rectangulum medium praetereaue summae quadratorum incommensurable.



Sit AB recta cum medio totum medium efficiens, ei autem congruens $BΓ$. itaque $AΓ$, $ΓB$ potentia incommensurabiles sunt efficientes, quae diximus [prop. LXXVIII]. dico, rectae AB

nullam aliam congruere efficientem, quae diximus.

nam si fieri potest, congruat $BΔ$, ita ut etiam $AΔ$, $ΔB$ potentia incommensurabiles sint efficientes $AΔ^2 + ΔB^2$ medium et $2 AΔ \times ΔB$ medium et praeterea $AΔ^2 + ΔB^2$, $2 AΔ \times ΔB$ incommensurabilia [prop. LXXVIII]. et ponatur rationalis EZ , et quadratis $AΓ^2 + ΓB^2$ aequale rectae EZ adplicetur EH latitudinem efficiens EM , spatio autem $2 AΓ \times ΓB$ aequale rectae EZ adplicetur $ΘH$ latitudinem efficiens $ΘM$.

13. Post προσαρμόσει add. Theon: δυνάμει ἀσύμμετρος οὕσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης (BFVb). προειρημέναι] -ει- in ras. m. 1 P, προκείμενα Theon (BFVb). 16. εἶναι ἀσύμμετρος BFV, εἶναι ἀσύμμ. b. τὰ τε] τό τε P, τὰ μὲν BFb, τό τε συγκείμενον e corr. V. 17. ἀπό] ἐκ V. $AΔ$, $ΔB$] in ras. V. τετραγώνων P et V (supra -ων ras. est). ἄμα] supra scr. V. τό] supra scr. V. 18. ὑπό — $ΔB$] ὑπ' αὐτῶν V. τὰ] om. P. 19. Post $ΔB$ del. m. 2 τετράγωνα V. ἀσύμμετρον P. 20. τοῖς] corr. ex τούς m. 1 V.

EM , τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν AG, GB ἴσον παρὰ τὴν EZ
 παραβεβλήσθω τὸ ΘH πλάτος ποιοῦν τὴν ΘM . λοιπὸν
 ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AB ἴσον ἐστὶ τῷ EA . ἢ ἄρα AB
 δύναται τὸ EA . πάλιν τοῖς ἀπὸ τῶν AD, DB ἴσον
 5 παρὰ τὴν EZ παραβεβλήσθω τὸ EI πλάτος ποιοῦν
 τὴν EN . ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB ἴσον τῷ EA .
 λοιπὸν ἄρα τὸ δις ὑπὸ τῶν AD, DB ἴσον [ἐστὶ] τῷ
 ΘI . καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ
 τῶν AG, GB καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ EH , μέσον ἄρα ἐστὶ
 10 καὶ τὸ EH . καὶ παρὰ ρητὴν τὴν EZ παράκειται πλάτος
 ποιοῦν τὴν EM . ρητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ EM καὶ ἀσύμ-
 μετρος τῇ EZ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δις
 ὑπὸ τῶν AG, GB καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ ΘH , μέσον ἄρα
 καὶ τὸ ΘH . καὶ παρὰ ρητὴν τὴν EZ παράκειται
 15 πλάτος ποιοῦν τὴν ΘM . ρητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘM καὶ
 ἀσύμμετρος τῇ EZ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρά ἐστι
 τὰ ἀπὸ τῶν AG, GB τῷ δις ὑπὸ τῶν AG, GB , ἀσύμ-
 μετρόν ἐστι καὶ τὸ EH τῷ ΘH . ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ
 καὶ ἡ EM τῇ $M\Theta$ μήκει. καὶ εἰσιν ἀμφοτέραι ρηταί·
 20 αἱ ἄρα $EM, M\Theta$ ρηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι·
 ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $E\Theta$, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ
 ΘM . ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι ἡ $E\Theta$ πάλιν ἀποτομὴ
 ἐστὶν, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΘN . τῇ ἄρα ἀποτομῇ
 ἄλλη καὶ ἄλλη προσαρμόζει ρητὴ δυνάμει μόνον σύμ-
 25 μετρος οὕσα τῇ ὅλῃ· ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον. οὐκ ἄρα
 τῇ AB ἐτέρᾳ προσαρμόσει εὐθείᾳ.

1. παρὰ — 2. παραβεβλήσθω] ἀφηγήσθω V. 2. $H\Theta B$.
 $M\Theta$ in ras. V, ΘN F. λοιπὸν — 6. EN] mg. m. 1 F. 4.
 τοῖς μὲν P. 6. τῇ] bis V. 7. ἐστὶ] ἐστὶν P, om. FVb,
 m. 2 B. 9. τῷ] τό F. μέσον — 10. EH] mg. m. 2 V,
 om. καί. 13. τῷ] corr. ex τό V, τό F. ΘH] $H\Theta$ F. 15.
 ρητὴ — ΘM] mg. m. 1 P (ἐστὶ τῇ). 17. ἀσύμμετρον — 18.

itaque reliquum [II, 7] $AB^2 = EA$. quare AB spatio EA aequalis est quadrata. rursus quadratis $AA^2 + AB^2$ aequale rectae EZ adplicetur EI latitudinem efficiens EN . uerum etiam $AB^2 = EA$. itaque reliquum [II, 7]

$$2AA \times AB = \Theta I.$$

et quoniam $AI^2 + IB^2$ medium est, et $AI^2 + IB^2 = EH$, etiam EH medium est. et rectae rationali EZ adplicatum est latitudinem efficiens EM . itaque EM rationalis est et rectae EZ longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. rursus quoniam medium est $2AI \times IB$, et $2AI \times IB = \Theta H$, etiam ΘH medium est. et rationali EZ adplicatum est latitudinem efficiens ΘM . itaque ΘM rationalis est et rectae EZ longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. et quoniam $AI^2 + IB^2$ et $2AI \times IB$ incommensurabilia sunt, etiam EH , ΘH incommensurabilia sunt. itaque etiam EM , $M\Theta$ longitudine incommensurabiles sunt [VI, 1; prop. XI]. et utraque rationalis est. itaque EM , $M\Theta$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. quare $E\Theta$ apotome est [prop. LXXIII] et ΘM ei congruens. iam similiter demonstrabimus, rursus $E\Theta$ apotomen esse, ei autem congruentem ΘN . itaque apotomae diuersae rectae congruunt potentia tantum toti commensurabiles; quod demonstratum est fieri non posse [prop. LXXIX]. itaque rectae AB nulla alia recta congruet.

ΘH] mg. m. 1 V. 18. ἄρα ἐστὶ BFb. ΘH] $H\Theta'$ F. ἐστὶν PB. 19. μήναι] om. b. 21. προσαγορόντοςα V. 22. ΘM] $H\Theta$ b, et F, corr. ex $M\Theta$. 23. ἐστὶ PBV, comp. Fb. 24. καὶ ἄλλη ὁπή B. ὁπή] m. 2 B. 25. ἀδύνατον εἰδείσθαι V. 26. Post AB del. εὐθεία m. 1 V. προσαγορόξει b.

Τῇ ἄρα *AB* μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει
 ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα
 τὰ τε ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα ἅμα μέσον καὶ τὸ δις ὑπ'
 αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα ἀσύμ-
 5 μετρα τῷ δις ὑπ' αὐτῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ὅροι τρίτοι.

α'. Ὑποκειμένης ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς, ἐὰν μὲν ἡ ὅλη
 τῆς προσαρμοζούσης μείζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου
 ἐαυτῇ μήκει, καὶ ἡ ὅλη σύμμετρος ἢ τῇ ἐκκειμένη
 10 ῥητῇ μήκει, καλεῖσθω ἀποτομὴ πρώτη.

β'. Ἐὰν δὲ ἡ προσαρμόζουσα σύμμετρος ἢ τῇ ἐκ-
 κειμένη ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης
 μείζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἐαυτῇ, καλεῖσθω
 ἀποτομὴ δευτέρα.

15 γ'. Ἐὰν δὲ μηδετέρα σύμμετρος ἢ τῇ ἐκκειμένη
 ῥητῇ μήκει, ἡ δὲ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μείζον δύ-
 νηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἐαυτῇ, καλεῖσθω ἀποτομὴ
 τρίτη.

δ'. Πάλιν, ἐὰν ἡ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μείζον
 20 δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυνμέτρου ἐαυτῇ [μήκει], ἐὰν μὲν
 ἡ ὅλη σύμμετρος ἢ τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ μήκει, καλεῖσθω
 ἀποτομὴ τετάρτη.

ε'. Ἐὰν δὲ ἡ προσαρμόζουσα, πέμπτη.

ς'. Ἐὰν δὲ μηδετέρα, ἕκτη.

1 μόνῃ V. προσαρμόσει BFV. 3. τὰ] om. b, τό P.
 τετράγωνον P. μέσα V. 4. καὶ ἔτι] ἔτι τε BFVb. 5.
 δῖς] om. b. αὐτῶν] eras. B. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. BV.
 6. ὅροι τρίτοι] PV, mg. m. 2 B, om. F; πε' b, mg. m. 2 B.
 numeros om. codd. 7. ἡ] om. B. 8. δύνεται φ. ἀσυν-
 μέτρον BV, sed corr. 9. ἡ] supra scr. m. 1 b, om. V. 11.
 εἰ V. 12. καὶ ἡ — 13. ἐαυτῇ] om. Fb, mg. m. 2 B. 12.

Ergo rectae AB una tantum congruit recta potentia toti incommensurabilis, cum tota autem efficiens summam quadratorum mediam et duplum rectangulum medium praetereaue summam quadratorum duplo rectangulo incommensurabilem; quod erat demonstrandum.

Definitiones tertiae.

1. Datis recta rationali et apotome, si tota quadrata congruentem excedit quadrato rectae sibi commensurabilis, et tota rationali propositae longitudine commensurabilis est, uocetur apotome prima.

2. Sin congruens rationali propositae longitudine commensurabilis est, et tota quadrata congruentem excedit quadrato rectae sibi commensurabilis, uocetur apotome secunda.

3. Sin neutra rationali propositae longitudine commensurabilis est, et tota quadrata congruentem excedit quadrato rectae sibi commensurabilis, uocetur apotome tertia.

4. Rursus si tota quadrata congruentem excedit quadrato rectae sibi incommensurabilis, si tota rationali propositae longitudine commensurabilis est, uocetur apotome quarta.

5. Sin congruens ei commensurabilis est, quinta.

6. Sin neutra, sexta.

καί] supra scr. m. 1 V. 13. δύναται PV. Post καλείσθω ras. 2 litt. V. 15. εἰ V. 16. ἡ δὲ ὅλη — 17. ἐαυτῇ] om. Fb, m. 2 B. 16. δύναται V. 19. ἡ] m. 2 B. τῇ προσ- αροζούσῃ B, sed corr. (ante τῇ ras. 1 litt.). 20. συμμετρων B, corr. m. 2. μήκει] om. P. μέν] supra scr. m. 1 F. 21. ἡ] m. 2 B. 24. -ρα ε- in ras. m. 1 P.

πε'.

Εύρεῖν τὴν πρώτην ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ A , καὶ τῇ A μήκει σύμμετρος
 ἔστω ἡ BH . ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ BH . καὶ ἐκκείσθωσαν
 5 δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΔE , EZ , ὧν ἡ ὑπεροχὴ ὁ
 $Z\Delta$ μὴ ἔστω τετράγωνος· οὐδ' ἄρα ὁ $E\Delta$ πρὸς τὸν
 ΔZ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετρά-
 γωνον ἀριθμόν. καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ $E\Delta$ πρὸς τὸν
 ΔZ , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς BH τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ
 10 τῆς $H\Gamma$ τετράγωνον· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς
 BH τῷ ἀπὸ τῆς $H\Gamma$. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς BH .
 ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $H\Gamma$. ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ
 $H\Gamma$. καὶ ἐπεὶ ὁ $E\Delta$ πρὸς τὸν ΔZ λόγον οὐκ ἔχει,
 ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ'
 15 ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς BH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $H\Gamma$ λόγον ἔχει,
 ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν·
 ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ BH τῇ $H\Gamma$ μήκει. καὶ εἰσιν
 ἀμφοτέραι ῥηταί· αἱ BH , $H\Gamma$ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει
 μόνον σύμμετροι· ἡ ἄρα $B\Gamma$ ἀποτομὴ ἐστίν.

20 Λέγω δὴ, ὅτι καὶ πρώτη.

Ὡς γὰρ μεῖζόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς BH τοῦ ἀπὸ τῆς
 $H\Gamma$, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ . καὶ ἐπεὶ ἐστίν ὡς ὁ $E\Delta$
 πρὸς τὸν $Z\Delta$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς BH πρὸς τὸ ἀπὸ
 τῆς $H\Gamma$, καὶ ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΔE πρὸς
 25 τὸν EZ , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς HB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ .

1. πε'] om. B F b. 3. ῥητῇ] m. 2 B. μήκει] om. V. 4.
 ἔστω] ἔσται F, corr. m. 1; ἔστω μήκει V. ἐστίν P. BH]
 corr. ex HB V. 5. ἡ] m. 2 F. 6. ΔZ B V b. οὐκ F V.
 7. ΔZ] "ZΔ" F. 8. πεποιήσθω F. ὁ] m. 2 F. 10.
 τετράγωνον] om. V. σύμμετρος V, corr. m. 1. ἐστίν V.
 11. HB F. HΓ] supra scr. Θ b; Θ Γ F, sed corr. (?).
 ῥητόν — BH] m. 2 B. 13. HΓ] in ras. V, corr. ex ΓΔ
 m. 1 b. 14. ἀριθμός] om. V. ἀριθμόν] om. V. οὐδέ

LXXXV.

Inuenire apotomen primam.

Ponatur rationalis A , et rectae A longitudine commensurabilis sit BH . itaque etiam BH rationalis est. et ponantur duo numeri quadrati ΔE , EZ , quorum

A ————— B Γ H differentia $Z\Delta$ quadratus
 Θ ————— E Z Δ numerus ne sit [prop.
 XXVIII lemma I]. itaque

$E\Delta : \Delta Z$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. et fiat $E\Delta : \Delta Z = BH^2 : H\Gamma^2$ [prop. VI coroll.]. itaque BH^2 , $H\Gamma^2$ commensurabilia sunt [prop. VI]. uerum BH^2 rationale est. itaque etiam $H\Gamma^2$ rationale est. quare etiam $H\Gamma$ rationalis est. et quoniam $E\Delta : \Delta Z$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ne BH^2 quidem ad $H\Gamma^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque BH , $H\Gamma$ longitudine incommensurabiles sunt. et utraque rationalis est. itaque BH , $H\Gamma$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo $B\Gamma$ apotome est [prop. LXXIII].

Iam dico, eandem primam esse.

sit enim $\Theta^2 = BH^2 \div H\Gamma^2$ [prop. XIII lemma]. et quoniam est

$$E\Delta : Z\Delta = BH^2 : H\Gamma^2,$$

etiam conuertendo [V, 19 coroll.] est

$$\Delta E : EZ = HB^2 : \Theta^2.$$

uerum $\Delta E : EZ$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; nam uterque quadratus

FVb. 15. $\alpha\phi\alpha$] supra scr. m. 1 V. $H\Gamma$] e corr. V. 17. BH] HB ϕ . 18. $\epsilon\lambda\sigma\iota\nu$ P. 19. $\epsilon\sigma\tau\iota$ V, comp. b, $\epsilon\lambda\sigma\iota$ comp. ϕ . 22. Θ] in spat. 2 litt. ϕ . $E\Delta$] ΔE V. 23. $\tau\acute{o}\nu$] $\tau\acute{o}$ b. ΔZ BVb. 24. ΔE] in ras. m. 1 P.

ὁ δὲ ΔE πρὸς τὸν EZ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἐκάτερος γὰρ τετράγωνός ἐστιν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς HB ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς
 5 τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ BH τῇ Θ μήκει. καὶ δύναται ἡ BH τῆς $H\Gamma$ μείζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ · ἡ BH ἄρα τῆς $H\Gamma$ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἐαυτῇ μήκει. καὶ ἐστὶν ἡ ὅλη ἡ BH σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ A . ἡ $B\Gamma$ ἄρα
 10 ἀποτομή ἐστὶ πρώτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ πρώτη ἀποτομή ἡ $B\Gamma$ · ὅπερ ἔδει εὐρεῖν.

πς'.

Εἵρεῖν τὴν δευτέραν ἀποτομήν.

15 Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ A καὶ τῇ A σύμμετρος μήκει ἡ $H\Gamma$. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $H\Gamma$. καὶ ἐκκείσθωσαν δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΔE , EZ , ὧν ἡ ὑπεροχὴ ὁ ΔZ μὴ ἔστω τετράγωνος. καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ $Z\Delta$ πρὸς τὸν ΔE , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓH τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς
 20 HB τετράγωνον. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓH τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς HB τετράγωνῳ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓH . ῥητὸν ἄρα [ἐστὶ] καὶ τὸ ἀπὸ τῆς HB · ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ BH . καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς $H\Gamma$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς HB λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς
 25 τετράγωνον ἀριθμόν, ἀσύμμετρός ἐστὶν ἡ ΓH τῇ HB μήκει. καὶ εἰσὶν ἀμφοτέραι ῥηταί· αἱ ΓH , HB ἄρα

1. EZ] in ras. V. Post λόγον del. οὐκ F. 2. τετράγωνος] τετράγωνον F, sed corr. 3. ἐστὶ PBV, comp. Fb. ἄρα] om. φ.
 4. Θ] $H\Theta$ b. 5. BH] HB P. 6. τῆς] τῇ b. 7. Θ . ἡ] ΘH b; $H\Theta$. ἡ F. 8. ἀσύμμετρον P, et eras. ἀ- V. ἡ] (prius) om. BVb. 9. μήκει] om. F. τῇ A μήκει BV. 13. πς'] om. F, in figura πε'. 14. τήν] supra scr. m. 1 P. 15. ἀσύμμετρος P, corr. m. rec.; σύμμετρος ἐστω V. 16. ἐστὶν

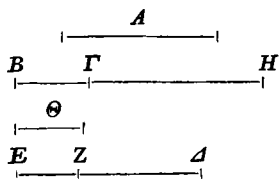
est. itaque etiam $HB^2 : \Theta^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare BH, Θ longitudine commensurabiles sunt [prop. IX]. est autem $BH^2 \div H\Gamma^2 = \Theta^2$. itaque BH quadrata excedit $H\Gamma$ quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis. et tota BH rationali propositae A commensurabilis est. itaque $B\Gamma$ apotome prima est [deff. tert. 1].

Ergo inuenta est $B\Gamma$ apotome prima; quod erat inueniendum.

LXXXVI.

Inuenire apotomen secundam.

Ponatur rationalis A et rectae A longitudine commensurabilis $H\Gamma$. itaque $H\Gamma$ rationalis est. et ponantur duo numeri quadrati $\Delta E, EZ$, quorum differentia ΔZ numerus quadratus ne sit [prop. XXVIII lemma I]. et fiat $Z\Delta : \Delta E = \Gamma H^2 : HB^2$ [prop. VI coroll.]. itaque $\Gamma H^2, HB^2$ commensurabilia sunt [prop. VI]. uerum ΓH^2 rationale est. quare etiam HB^2 rationale est. itaque etiam BH rationalis est. et quoniam $H\Gamma^2 : HB^2$



rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ΓH et HB longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. et utraque rationalis est. itaque $\Gamma H, HB$

καὶ ἡ P. 17. τετράγωνοι] om. F, ins. m. 2 ante δύο. δ]
 ἡ V. 18. πεποιεῖσθω F. ΔZ FVb. 20. σύμμετρος P,
 corr. m. rec. 21. τετραγώνω] om. V. 22. ἐστὶ] om. BFVb.
 25. ἐστὶν] ἄρα ≠ ἐστὶν (sic) b, ἄρα ἐστὶν V; ἄρα add. m. 2 F.
 HB] BH BF. 26. μήκει] e corr. V. HB] B e corr. V.
 ἄρα] om. Pφ.

δηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστιν.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ δευτέρα.

Ὅτι γὰρ μείζον ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς
 5 ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ
 τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, οὕτως ὁ ΕΔ ἀριθμὸς
 πρὸς τὸν ΔΖ ἀριθμὸν, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς
 τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ, οὕτως ὁ ΔΕ
 πρὸς τὸν ΕΖ. καὶ ἐστιν ἐκάτερος τῶν ΔΕ, ΕΖ τε-
 10 τράγωνος· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ
 λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον
 ἀριθμὸν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει. καὶ
 δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μείζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ΒΗ
 ἄρα τῆς ΗΓ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἐαυτῇ
 15 μήκει. καὶ ἐστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΓΗ τῇ ἐκκειμένῃ
 ῥητῇ σύμμετρος τῇ Α. ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστι δευτέρα.
 • Εὗρηται ἄρα δευτέρα ἀποτομή ἡ ΒΓ· ὅπερ ἔδει
 δεῖξαι.

πξ'.

20 Εὐρεῖν τὴν τρίτην ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ ἐκκείσθωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ
 οἱ Ε, ΒΓ, ΓΔ λόγον μὴ ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους, ὃν
 τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ὁ δὲ
 ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον ἔχέτω, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς

2. ἐστι PBV, comp. Fb. 3. δὴ] om. V. 6. ἀριθμός] om. V. 7. ἀριθμὸν] om. V. 8. οὕτως] u τῶν (corr. ex τό) F. 9. ὁ] supra scr. F. ΔΕ] ΕΔ F. 12. ἐστὶν] ἐστὶ μήκει V. μήκει] om. FVb, m. 2 B. καὶ δύναται] m. 2 supra scr. B, -ύνα- in ras. V, καὶ ἐστὶν Fb, Bm. 1. 13. μείζων Fb et B, sed corr. m. 2; seq. ras. 6 litt. V. τῷ] in ras. m. 1 B, τοῦ b. τῆς] om. V. ἡ ΒΗ — 14. συμμέτρου] mg. m. 1 V (συμμέτρου etiam in textu). 14. ἀσυμμέτρου b, corr. m. rec. 15. σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ Theon (BFVb).

rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo $B\Gamma$ apotome est [prop. LXXIII].

Iam dico, eandem secundam esse.

sit enim $\Theta^2 = B\Gamma^2 \div H\Gamma^2$ [prop. XIII lemma]. iam quoniam est $BH^2 : H\Gamma^2 = EA : AZ$,

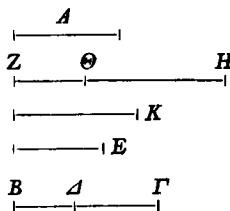
conuertendo [V, 19 coroll.] erit $BH^2 : \Theta^2 = AE : EZ$. et uterque AE , EZ quadratus est. itaque $BH^2 : \Theta^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque BH , Θ longitudine commensurabiles sunt [prop. IX]. et $BH^2 \div H\Gamma^2 = \Theta^2$. quare BH quadrata excedit $H\Gamma$ quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis. et congruens ΓH rationali propositae A commensurabilis est. itaque $B\Gamma$ apotome est secunda [deff. tert. 2].

Ergo inuenta est apotome secunda $B\Gamma$; quod erat demonstrandum.

LXXXVII.

Inuenire apotomen tertiam.

Ponatur rationalis A , et ponantur tres numeri E , $B\Gamma$, ΓA rationem inter se non habentes, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ΓB autem ad $B A$ rationem habeat, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, et fiat $E : B\Gamma = A^2 : ZH^2$ [prop. XXVIII lemma I], et $B\Gamma : \Gamma A = ZH^2 : H\Theta^2$. iam quon-



16. μήκει τῇ A Bb, τῇ A μήκει V. ἄρα] ἄρα φησὶ F. ἔστιν PB. 17. ἄρα ἢ V. $B\Gamma$] φ (de F non liquet). ὅπερ ἔδει δεῖξαι] φ et comp. P, ὅπερ ἔδει εὐρεῖν V, om. Bb. 19. πς' F (euan.). 21. ἢ φησὶ ἢ P. 22. ΓA] corr. ex A m. 2 F. 24. ΓB] corr. ex ΓA m. rec. b.

πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ πεποιήσθω ὥς μὲν ὁ *Ε*
 πρὸς τὸν *ΒΓ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *Α* τετράγωνον πρὸς
 τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΗ* τετράγωνον, ὥς δὲ ὁ *ΒΓ* πρὸς τὸν
ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΗ* τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ
 5 τῆς *ΗΘ*. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὥς ὁ *Ε* πρὸς τὸν *ΒΓ*, οὕτως
 τὸ ἀπὸ τῆς *Α* τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΗ* τε-
 τράγωνον, σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς *Α* τετρά-
 γωνον τῷ ἀπὸ τῆς *ΖΗ* τετραγώνῳ. φητὸν δὲ τὸ ἀπὸ
 τῆς *Α* τετράγωνον. φητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΗ*.
 10 φητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ *ΖΗ*. καὶ ἐπεὶ ὁ *Ε* πρὸς τὸν *ΒΓ*
 λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον
 ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς *Α* τετράγωνον πρὸς τὸ
 ἀπὸ τῆς *ΖΗ* [τετράγωνον] λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος
 ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα
 15 ἐστὶν ἡ *Α* τῇ *ΖΗ* μήκει. πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὥς ὁ *ΒΓ*
 πρὸς τὸν *ΓΔ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΗ* τετράγωνον πρὸς
 τὸ ἀπὸ τῆς *ΗΘ*, σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΗ*
 τῷ ἀπὸ τῆς *ΗΘ*. φητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΗ*. φητὸν
 ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς *ΗΘ*. φητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ *ΗΘ*. καὶ
 20 ἐπεὶ ὁ *ΒΓ* πρὸς τὸν *ΓΔ* λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετρά-
 γωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα
 τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΗ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΗΘ* λόγον ἔχει, ὃν
 τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμ-
 μετρος ἄρα ἐστὶν ἡ *ΖΗ* τῇ *ΗΘ* μήκει. καὶ εἰσὶν ἀμ-
 25 φότεραι φηταί· αἱ *ΖΗ*, *ΗΘ* ἄρα φηταί εἰσι δυνάμει
 μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ *ΖΘ*.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ τρίτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστὶν ὥς μὲν ὁ *Ε* πρὸς τὸν *ΒΓ*, οὕτως
 τὸ ἀπὸ τῆς *Α* τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΗ*, ὥς

1. πεποιεῖσθω F. 4. ΖΗ] corr. ex ΑΗ F. 6. Α τετρά-
 γωνον] Α V. 7. ἐστὶ] om. V. τετράγωνον] om. V. 8. τε-

iam est $E:BF = A^2:ZH^2$, A^2 et ZH^2 commensurabilia sunt [prop. VI]. uerum A^2 rationale est. itaque etiam ZH^2 rationale est. quare ZH rationalis est. et quoniam $E:BF$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ne A^2 quidem ad ZH^2 rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque A , ZH longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. rursus quoniam est

$$BF:ΓΔ = ZH^2:HΘ^2,$$

ZH^2 et $HΘ^2$ commensurabilia sunt [prop. VI]. uerum ZH^2 rationale est; itaque etiam $HΘ^2$ rationale est. quare $HΘ$ rationalis est. et quoniam $BF:ΓΔ$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ne ZH^2 quidem ad $HΘ^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare ZH , $HΘ$ longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. et utraque rationalis est. itaque ZH , $HΘ$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo $ZΘ$ apotome est [prop. LXXIII].

Iam dico, eandem tertiam esse.

nam quoniam est $E:BF = A^2:ZH^2$, $BF:ΓΔ = ZH^2:HΘ^2$, ex aequo [V, 22] $E:ΓΔ = A^2:HΘ^2$.

τραγώνω] om. V. δέ] ἐστι, add. δέ m. 2, V. 9. τετράγωνον] om. V. 12. οὐδέ b. 13. τετράγωνον] om. P. 15. τῇ] corr. ex τῆς B, τῆς F. 16. τόν] om. B. 17. $HΘ$] e corr. F. 18. τῷ] πρὸς τό Fb. ῥητόν — ZH] mg. m. 1 V. 19. ἄρα καί] in ras. V. ῥητή — $HΘ$] mg. m. 1 F. ἐστίν] om. b. 21. οὐδέ b. 22. τό] (alt.) supra scr. m. 1 F. $HΘ$] H eras. V. 24. ZH] HZ F. 25. αἱ — ἐλσι] mg. m. 2 B, in textu αἱ ἐλσι. ἐλσιν P. 27. τετρη] corr. ex ῥητή m. 1 P. 28. οὕτω B.

δὲ ὁ $B\Gamma$ πρὸς τὸν $\Gamma\Delta$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς
τὸ ἀπὸ τῆς ΘH , δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ E πρὸς τὸν
 $\Gamma\Delta$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘH . ὁ
δὲ E πρὸς τὸν $\Gamma\Delta$ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος
5 ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ
τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $H\Theta$ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος
ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα
ἡ A τῇ $H\Theta$ μήκει. οὐδετέρα ἄρα τῶν ZH , $H\Theta$ σύμ-
μετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ A μήκει. ὥ οὖν
10 μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ZH τοῦ ἀπὸ τῆς $H\Theta$, ἐστὶ
τὸ ἀπὸ τῆς K . ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ὁ $B\Gamma$ πρὸς τὸν $\Gamma\Delta$,
οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $H\Theta$, ἀναστρέ-
ψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ $B\Gamma$ πρὸς τὸν $B\Delta$, οὕτως τὸ
ἀπὸ τῆς ZH τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς K . ὁ δὲ
15 $B\Gamma$ πρὸς τὸν $B\Delta$ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς
πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ZH ἄρα
πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς K λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς
πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν. σύμμετρός ἄρα ἐστὶν ἡ ZH
τῇ K μήκει, καὶ δύναται ἡ ZH τῆς $H\Theta$ μεῖζον τῷ
20 ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ οὐδετέρα τῶν ZH , $H\Theta$
σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ A μήκει· ἡ $Z\Theta$
ἄρα ἀποτομή ἐστὶ τρίτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ τρίτη ἀποτομή ἡ $Z\Theta$. ὅπερ ἔδει
δειξαι.

25

πη'.

Εὕρεῖν τὴν τετάρτην ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ A καὶ τῇ A μήκει σύμμετρος
ἡ BH . ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ BH . καὶ ἐκκείσθωσαν

1. τόν] om. P. οὕτω B. 3. ΘH] corr. ex $H\Theta$ V. 4.
τὸν $\Gamma\Delta$] corr. ex Γ m. 2 F. 9. ἐστὶν V. 11. $B\Gamma$] ras. 2

uerum $E: \Gamma A$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; itaque ne A^2 quidem ad $H\Theta^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare $A, H\Theta$ longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. itaque neutra rectarum $ZH, H\Theta$ rationali propositae A commensurabilis est longitudine. iam sit $ZH^2 \div H\Theta^2 = K^2$ [prop. XIII lemma]. quoniam igitur est $B\Gamma: \Gamma A = ZH^2: H\Theta^2$, conuertendo [V, 19 coroll.] est $B\Gamma: B A = ZH^2: K^2$. uerum $B\Gamma: B A$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque etiam $ZH^2: K^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare ZH, K longitudine commensurabiles sunt [prop. IX], et ZH quadrata excedit $H\Theta$ quadrato rectae sibi commensurabilis. et neutra rectarum $ZH, H\Theta$ rationali propositae A longitudine commensurabilis est. itaque $Z\Theta$ apotome est tertia [deff. tert. 3].

Ergo inuenta est apotome tertia $Z\Theta$; quod erat demonstrandum.

LXXXVIII.

Inuenire apotomen quartam.

Ponatur rationalis A et rectae A longitudine commensurabilis BH . itaque etiam BH rationalis est.

litt. V, corr. ex BE F. $\tau\acute{o}\nu$] om. P. ΓA] eras. V, corr. ex $\Gamma\Gamma$ m. 1 b. 12. $\tau\acute{o}$] (alt.) supra scr. m. 1 b. 13. $B\Gamma$] corr. ex ΓB V. 15. $\pi\rho\acute{o}\varsigma$] $\pi\rho\acute{o}\nu$ P. 16. $\acute{\alpha}\rho\alpha$] supra scr. F. 19. $\tau\eta$ K — η ZH] mg. m. 1 P. Post $\mu\epsilon\iota\zeta\omicron\nu$ add. Theon: $\tau\tilde{\omega}$ $\acute{\alpha}\nu\theta$ $\tau\eta\varsigma$ K . η $\acute{\alpha}\rho\alpha$ ZH $\tau\eta\varsigma$ $H\Theta$ $\mu\epsilon\iota\zeta\omicron\nu$ $\delta\acute{\upsilon}\nu\nu\alpha\tau\alpha\iota$ (BVb, F mg. m. 1). 28. η] om. FV. $\tau\rho\acute{\iota}\tau\eta$] om. F. $\delta\pi\epsilon\rho$ $\xi\delta\epsilon\iota$ $\delta\epsilon\iota\chi\alpha\iota$] comp. P, om. Bb. 24. $\delta\epsilon\iota\chi\alpha\iota$] $\epsilon\acute{\upsilon}\rho\epsilon\iota\nu$ Vφ. 25. $\pi\zeta'$ F, et sic deinceps. 27. $\mu\eta\kappa\epsilon\iota$ b. 28. $\acute{\alpha}\rho$ P, corr. m. 2. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$ PBV. $\kappa\alpha\iota$] (prius) corr. ex $\kappa\alpha$ P, om. FV.

δύο ἀριθμοὶ οἱ ΔZ , ZE , ὥστε τὸν ΔE ὅλον πρὸς
 ἑκάτερον τῶν ΔZ , EZ λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος
 ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καὶ πεποιήσθω
 ὡς ὁ ΔE πρὸς τὸν EZ , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς BH τε-
 5 τράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $HΓ$ · σύμμετρον ἄρα ἐστὶ
 τὸ ἀπὸ τῆς BH τῷ ἀπὸ τῆς $HΓ$. φητὸν δὲ τὸ ἀπὸ
 τῆς BH · φητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $HΓ$ · φητὴ ἄρα
 ἐστὶν ἡ $HΓ$. καὶ ἐπεὶ ὁ ΔE πρὸς τὸν EZ λόγον οὐκ
 ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν,
 10 οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς BH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $HΓ$ λόγον
 ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν·
 ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ BH τῇ $HΓ$ μήκει. καὶ εἰσὶν
 ἀμφοτέραι φηταί· αἱ BH , $HΓ$ ἄρα φηταί εἶσι δυνάμει
 μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $BΓ$.

15 [Λέγω δὴ, ὅτι καὶ τετάρτη].

Ἔτι οὖν μεῖζόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς BH τοῦ ἀπὸ τῆς
 $HΓ$, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ . ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ὁ ΔE
 πρὸς τὸν EZ , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς BH πρὸς τὸ ἀπὸ
 τῆς $HΓ$, καὶ ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ $E\Delta$ πρὸς
 20 τὸν ΔZ , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς HB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ .
 ὁ δὲ $E\Delta$ πρὸς τὸν ΔZ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος
 ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ
 τῆς HB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος
 ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα
 25 ἐστὶν ἡ BH τῇ Θ μήκει. καὶ δύναται ἡ BH τῆς $HΓ$
 μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ · ἡ ἄρα BH τῆς $HΓ$ μεῖζον δύ-
 νηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἐαυτῇ. καὶ ἐστὶν ὅλη ἡ BH

2. EZ] eras. V. μῆ] om. φ. 4. τόν] mg. m. 1 P. 5. πρὸς] om. φ. $HΓ$] $BΓ$ supra scr. H b. ἐστὶν P, et V del. v. 8. ἐστὶν] ἐστὶ καὶ FV. 9. πρὸς — 10. τῆς (prius)] om. φ lacuna relicta. 9. ἀριθμόν] om. V. 10. οὐδέ b. 11. ἀριθμός] om. V. ἀριθμόν] om. V. 12. ἐστὶν] om. FV.

A ———— | B ———— | Γ ———— | H et ponantur duo numeri ΔZ ,
 Θ ———— | Δ ———— | Z ———— | E ZE , ita ut totus ΔE ad
 utrumque ΔZ , EZ rationem
 non habeat, quam numerus quadratus ad numerum
 quadratum. et fiat $\Delta E : EZ = BH^2 : H\Gamma^2$ [prop. VI
 coroll.]. itaque BH^2 , $H\Gamma^2$ commensurabilia sunt
 [prop. VI]. uerum BH^2 rationale est. itaque etiam
 $H\Gamma^2$ rationale est. quare $H\Gamma$ rationalis est. et
 quoniam $\Delta E : EZ$ rationem non habet, quam numerus
 quadratus ad numerum quadratum, ne BH^2 quidem
 ad $H\Gamma^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad
 numerum quadratum. quare BH , $H\Gamma$ longitudine in-
 commensurabiles sunt [prop. IX]. et utraque ratio-
 nalis est. itaque BH , $H\Gamma$ rationales sunt potentia
 tantum commensurabiles. ergo $B\Gamma$ apotome est [prop.
 LXXIII]. iam sit $\Theta^2 = BH^2 \div H\Gamma^2$ [prop. XIII lemma].
 quoniam igitur est $\Delta E : EZ = BH^2 : H\Gamma^2$, etiam conuer-
 tendo [V, 19 coroll.] est $E\Delta : \Delta Z = BH^2 : \Theta^2$. uerum
 $E\Delta : \Delta Z$ rationem non habet, quam numerus quadratus
 ad numerum quadratum. itaque ne BH^2 quidem ad Θ^2
 rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum
 quadratum. quare BH , Θ longitudine incommensura-
 biles sunt [prop. IX]. est autem $BH^2 \div H\Gamma^2 = \Theta^2$.
 itaque BH quadrata excedit $H\Gamma$ quadrato rectae sibi

BH] $\mu\eta$ φ . $\mu\eta\kappa\epsilon\iota$] om. FV. $\kappa\alpha\iota$ — 13. $\delta\eta\tau\alpha\iota$] mg. m.
 1 V. 13. $\epsilon\lambda\iota\sigma\iota\nu$ P. 14. $\sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\rho\omicron\nu$ $\omicron\upsilon\kappa$ φ . $B\Gamma$] B e corr. φ ,
 BH P. 15. $\acute{\epsilon}\gamma\omega$ — $\tau\epsilon\tau\acute{\alpha}\rho\tau\eta$] om. PB, $\kappa\alpha\iota$ φ . $\delta\eta$] om. V.
 17. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$] om. V. 18. $\pi\rho\acute{o}\varsigma$ $\tau\acute{o}\nu$ EZ] $\tau\omicron\upsilon$ $\acute{\alpha}\nu\omicron$ $\tau\eta\varsigma$ EZ b,
 corr. mg. m. 1. $\pi\rho\acute{o}\varsigma$ $\tau\acute{o}$] $\tau\omicron\upsilon$ b. 19. $H\Gamma$] H in ras. m.
 1 B. $\acute{\alpha}\nu\alpha\sigma\tau\rho\acute{\epsilon}\varphi\alpha\iota$ φ . 20. $\tau\acute{o}\nu$] om. P, $\tau\acute{o}$ b. BH V. 21.
 $E\Delta$] Δ in ras. m. 1 B. 22. $\omicron\upsilon\delta\acute{\epsilon}$ Vb. 24. $\acute{\alpha}\rho\iota\theta\mu\acute{o}\nu$] om. V.
 $\acute{\alpha}\rho\alpha$] in ras. V. 25. BH] (alt.) mut. in HB V, HB Bf. b.
 27. $\sigma\upsilon\mu\mu\epsilon\tau\rho\omicron\nu$ b, corr. m. rec. $\acute{\epsilon}\alpha\nu\tau\eta$ $\mu\eta\kappa\epsilon\iota$ B. η $\acute{o}\lambda\eta$ η V.

σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ A . ἡ ἄρα $BΓ$ ἀποτομή ἐστὶ τετάρτη.

Εὐρηται ἄρα ἡ τετάρτη ἀποτομή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

πθ'.

5 Εὐρεῖν τὴν πέμπτην ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ A , καὶ τῇ A μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ $ΓΗ$. ῥητὴ ἄρα [ἐστίν] ἡ $ΓΗ$. καὶ ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ $ΔΖ$, $ΖΕ$, ὥστε τὸν $ΔΕ$ πρὸς ἐκάτερον τῶν $ΔΖ$, $ΖΕ$ λόγον πάλιν μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος
 10 ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ $ΖΕ$ πρὸς τὸν $ΕΔ$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς $ΓΗ$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $ΗΒ$. ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΗΒ$. ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $ΒΗ$. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ $ΔΕ$ πρὸς τὸν $ΕΖ$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς $ΒΗ$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς
 15 $ΗΓ$, ὁ δὲ $ΔΕ$ πρὸς τὸν $ΕΖ$ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $ΒΗ$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $ΗΓ$ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ $ΒΗ$ τῇ $ΗΓ$ μήκει. καὶ εἰσὶν
 20 ἀμφοτέραι ῥηταί· αἱ $ΒΗ$, $ΗΓ$ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ $ΒΓ$ ἄρα ἀποτομή ἐστίν.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ πέμπτη.

Ὡς γὰρ μεῖζόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΒΗ$ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΗΓ$, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς $Θ$. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ
 25 τῆς $ΒΗ$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $ΗΓ$, οὕτως ὁ $ΔΕ$ πρὸς τὸν

1. $BΓ$ ἄρα B . 2. ἐστὶν P . 3. ἡ] καὶ ἡ F , ἡ $BΓB$. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P , om. $B F V b$. 7. ἐστίν] om. P . 8. $ΖΕ$] $ΕΖ F$. $ΔΕ$] $ΔΕ$ in ras. V . 9. τῶν] τὸν $φ$. πάλιν] om. $F b$. 10. πεποιεῖσθω F . 11. τόν] om. P . 12. Post $ΗΒ$ add. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΗΓ$ ($ΓΗ V$) τῷ ἀπὸ

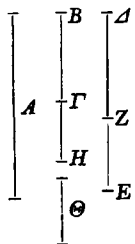
incommensurabilis. et tota BH rationali propositae A commensurabilis est longitudine. itaque $B\Gamma$ apotome est quarta [deff. tert. 4].

Ergo inuenta est quarta apotome; quod erat demonstrandum.

LXXXIX.

Inuenire apotomen quintam.

Ponatur rationalis A , et rectae A longitudine commensurabilis sit ΓH . itaque ΓH rationalis est. et



ponantur duo numeri ΔZ , ZE , ita ut ΔE rursus ad neutrum numerorum ΔZ , ZE rationem habeat, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. et fiat $ZE:E\Delta = \Gamma H^2:HB^2$. itaque etiam HB^2 rationale est [prop. VI]. quare etiam BH rationalis est. et quoniam est $\Delta E:EZ = BH^2:H\Gamma^2$, et $\Delta E:EZ$ rationem

non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ne BH^2 quidem ad $H\Gamma^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque BH , $H\Gamma$ longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. et utraque rationalis est. quare BH , $H\Gamma$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo $B\Gamma$ apotome est [prop. LXXIII].

Iam dico, eandem quintam esse.

sit enim $\Theta^2 = BH^2 \div H\Gamma^2$ [prop. XIII lemma]. quoniam igitur est

$$BH^2 : H\Gamma^2 = \Delta E : EZ,$$

$\tau\eta\varsigma BH$. $\phi\eta\tau\acute{o}\nu$ δὲ τὸ ἀπὸ $\tau\eta\varsigma \Gamma H$ b, mg. FV. $\phi\eta\tau\acute{o}\nu - HB$
 mg. V. $\acute{\alpha}\rho\alpha - 13$. $\phi\eta\tau\acute{\eta}$] om. P. 15. $H\Gamma$] Γ in ras. V.
 16. οὐδ' $\acute{\alpha}\rho\alpha$] οὐδέ P. 18. $\tau\epsilon\tau\rho\acute{\alpha}\gamma\omega\nu\omicron\nu$] $\tau\epsilon\tau\rho\acute{\alpha}\gamma\omega\nu\omicron\varsigma$ b, sed corr.
 21. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ BV, comp. Fb. 25. $H\Gamma - p. 270, 1. EZ$] in ras. F.

ΕΖ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ὁ δὲ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ
 5 πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει. καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μείζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ΗΒ ἄρα τῆς ΗΓ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἐαυτῇ μήκει. καὶ ἐστὶν ἡ προσ-
 10 αρμόζουσα ἡ ΓΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ρητῇ τῇ Α μήκει· ἡ ἄρα ΒΓ ἀποτομή ἐστὶ πέμπτη.

Εὗρηται ἄρα ἡ πέμπτη ἀποτομή ἡ ΒΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

γ'.

15 Εὕρεῖν τὴν ἕκτην ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ρητὴ ἡ Α καὶ τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Ε, ΒΓ, ΓΔ λόγον μὴ ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἔτι δὲ καὶ ὁ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον μὴ ἔχέτω, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς
 20 πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ὡς δὲ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ
 25 ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. ρητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α· ρητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ρητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ

1. ἀναστρέψαντι — 2. ΕΔ] e corr. F. 1. ἐστὶν] om. B F b. ΕΔ] ΔΕ P. 4. ΗΒ F. 7. Θ] ΗΘ F. ΒΗ] ΗΒ B F V. μείζον] om. P. 8. ἄρα ΗΒ V. ΒΗ P. δύναται] om. V. 9. ἀσυμμέτρου] ἀ- in ras. V, m. 2 B. ἐαυτῇ δύναται V. 10. Post ΓΗ eras. καὶ ἀ- V. 11. ΒΓ ἄρα b.

conuertendo [V, 19 coroll.] est $EA:AZ = BH^2:\Theta^2$.
 uerum $EA:AZ$ rationem non habet, quam numerus
 quadratus ad numerum quadratum. itaque ne BH^2
 quidem ad Θ^2 rationem habet, quam numerus quadratus
 ad numerum quadratum. quare BH , Θ longitudine
 incommensurabiles sunt [prop. IX]. est autem

$$BH^2 \div H\Gamma^2 = \Theta^2.$$

itaque HB quadrata excedit $H\Gamma$ quadrato rectae sibi
 incommensurabilis. et congruens ΓH rationali pro-
 positae A longitudine commensurabilis est. itaque
 $B\Gamma$ apotome est quinta [deff. tert. 5].

Ergo inuenta est apotome quinta $B\Gamma$; quod erat
 demonstrandum.

XC.

Inuenire apotomen sextam.

Ponatur rationalis A et tres numeri E , $B\Gamma$, ΓA
 inter se rationem non habentes, quam numerus qua-
 dratus ad numerum quadratum; et
 praeterea ne ΓB quidem ad $B A$
 rationem habeat, quam numerus
 quadratus ad numerum quadra-
 tum. et fiat $E:B\Gamma = A^2:ZH^2$,
 $B\Gamma:\Gamma A = ZH^2:H\Theta^2$.

iam quoniam est $E:B\Gamma = A^2:ZH^2$, erunt A^2 ,
 ZH^2 commensurabilia [prop. VI]. uerum A^2 rationale
 est. itaque etiam ZH^2 rationale est. quare etiam

12. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 16. συγκείσθω
 B, corr. m. 2. Post E eras. B F. 18. ΓB] supra add.
 ΓA B; $B\Gamma$ V. 19. $B A$] corr. ex $B\Gamma$ m. rec. P. 20. πε-
 ποιήσθω P, sed corr.; πεποιείσθω F. μὲν ὁ] ὁ μὲν V. 22.
 τόν] om. B. 23. $H\Theta$] ΘH b. 26. ῥητόν — 27. ZH]
 mg. V. 27. καί] ἐστὶ καί BFb. ἐστὶν PB.

- ἡ ZH . καὶ ἐπεὶ ὁ E πρὸς τὸν $BΓ$ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.
- 5 ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ A τῇ ZH μήκει. πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ $BΓ$ πρὸς τὸν $ΓΔ$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $HΘ$, σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ZH τῷ ἀπὸ τῆς $HΘ$. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ZH . ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $HΘ$. ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ $HΘ$. καὶ
- 10 ἐπεὶ ὁ $BΓ$ πρὸς τὸν $ΓΔ$ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $HΘ$ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ZH τῇ $HΘ$ μήκει. καὶ εἰσιν ἀμφοτέραι
- 15 ῥηταί· αἱ ZH , $HΘ$ ἄρα ῥηταί· εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ἄρα $ZΘ$ ἀποτομή ἐστίν.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἔκτε.

- Ἐπεὶ γάρ ἐστὶν ὡς μὲν ὁ E πρὸς τὸν $BΓ$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH , ὡς δὲ ὁ $BΓ$
- 20 πρὸς τὸν $ΓΔ$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $HΘ$, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ E πρὸς τὸν $ΓΔ$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $HΘ$. ὁ δὲ E πρὸς τὸν $ΓΔ$ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς
- 25 τὸ ἀπὸ τῆς $HΘ$ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ A τῇ $HΘ$ μήκει. οὐδετέρα ἄρα τῶν ZH , $HΘ$ σύμμετρός ἐστι τῇ A ῥητῇ μήκει. ᾧ οὖν μείζον ἐστι

1. HZ P. 3. οὐδέ Vb. 5. ἐστὶ V. A] $K \Phi$. τῇ]
 τῆς F. 6. ἡ $BΓ$ πρὸς τὴν B. 7. ἄρα ἐστὶ V. 11. οὐδέ V.
 15. σύμμετροι μόνον V. 16. ἐστι BV, comp. Fb. 17. δῆ]

ZH rationalis est. et quoniam $E:BF$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ne A^2 quidem ad ZH^2 rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque A, ZH longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. rursus quoniam est

$$BF:FA = ZH^2:HO^2,$$

ZH^2 et HO^2 commensurabilia sunt [prop. VI]. uerum ZH^2 rationale est; quare etiam HO^2 rationale est. itaque HO rationalis est. et quoniam $BF:FA$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ne ZH^2 quidem ad HO^2 rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque ZH, HO longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. et utraque rationalis est. itaque ZH, HO rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo ZO apotome est [prop. LXXIII].

Iam dico, eandem sextam esse. nam quoniam est $E:BF = A^2:ZH^2$, $BF:FA = ZH^2:HO^2$, ex aequo [V, 22] est $E:FA = A^2:HO^2$. uerum $E:FA$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque ne A^2 quidem ad HO^2 rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare A, HO longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. ergo neutra rectarum ZH, HO rationali A commensurabilis est longitudine. iam sit $K^2 = ZH^2 \div HO^2$ [prop.

supra scr. m. 1 P. 21. ἐστὶν ἄρα F. 24. οὐδ' — 26. ἀριθμὸν] mg. m. 2 B. 24. οὐδ' ἄρα] οὐδέ b. A] A ἄρα b.
25. HO] mut. in OH m. 2 V, OH b. 27. οὐδετέρα ἄρα]
καὶ οὐδετέρα BVb. 28. τῇ A ῥητῇ] τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ A
b et e corr. F (post A del. ῥητῇ). φ] ὥς b. οὖν] οὐ P,
corr. m. 2.

τὸ ἀπὸ τῆς ZH τοῦ ἀπὸ τῆς $H\Theta$, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς K .
 ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ὁ $B\Gamma$ πρὸς τὸν $\Gamma\Delta$, οὕτως τὸ ἀπὸ
 τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $H\Theta$, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν
 ὡς ὁ ΓB πρὸς τὸν $B\Delta$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς
 5 τὸ ἀπὸ τῆς K . ὁ δὲ ΓB πρὸς τὸν $B\Delta$ λόγον οὐκ
 ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν·
 οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς K λόγον
 ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν·
 ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ZH τῇ K μήκει. καὶ δύναται
 10 ἡ ZH τῆς $H\Theta$ μείζον τῷ ἀπὸ τῆς K . ἡ ZH ἄρα τῆς
 $H\Theta$ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἐαυτῇ μήκει.
 καὶ οὐδετέρα τῶν ZH , $H\Theta$ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκει-
 μένῃ ῥητῇ μήκει τῇ A . ἡ ἄρα $Z\Theta$ ἀποτομή ἐστὶν ἕκτη.
 Εὗρηται ἄρα ἡ ἕκτη ἀποτομή ἡ $Z\Theta$. ὅπερ ἔδει
 15 δεῖξαι.

9α'.

Ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀπο-
 τομῆς πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἀποτομή
 ἐστὶν.

20 Περιεχέσθω γὰρ χωρίον τὸ AB ὑπὸ ῥητῆς τῆς AG
 καὶ ἀποτομῆς πρώτης τῆς AD . λέγω, ὅτι ἡ τὸ AB
 χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστὶν.

Ἐπεὶ γὰρ ἀποτομή ἐστὶ πρώτη ἡ AD , ἔστω αὐτῇ
 προσαρμόζουσα ἡ ΔH . αἱ AH , $H\Delta$ ἄρα ῥηταὶ εἰσι
 25 δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ὅλη ἡ AH σύμμετρός
 ἐστὶ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ AG , καὶ ἡ AH τῆς $H\Delta$
 μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἐαυτῇ μήκει· ἐὰν

3. ἄρα] om. F. 4. ΓB] $B\Gamma FB$. $B\Delta$] supra add. Γ
 m. 1 b, ΔB corr. ex $B\Delta$ uel $B\Gamma V$. 5. τῆς] τοῦ φ. 8.
 ἔχει] οὐκ ἔχει P. 10. τῷ] corr. ex τό m. 1 F. ἡ] in ras.
 m. 1 P. 11. συμέτρου B , corr. m. 2. 13. τῇ A μήκει V.
 14. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. Seq. demonstr.

XIII lemma]. quoniam igitur est $B\Gamma : \Gamma A = ZH^2 : H\Theta^2$,
conuertendo [V, 19 coroll.] est

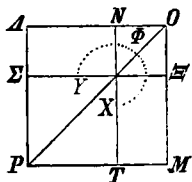
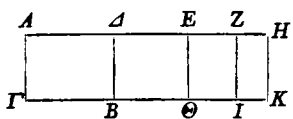
$$\Gamma B : B A = ZH^2 : K^2.$$

uerum $\Gamma B : B A$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque ne ZH^2 quidem ad K^2 rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare ZH, K longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. est autem $ZH^2 \div H\Theta^2 = K^2$. itaque ZH quadrata excedit $H\Theta$ quadrato rectae sibi incommensurabilis. et neutra rectarum $ZH, H\Theta$ rationali propositae A commensurabilis est longitudine. itaque $Z\Theta$ apotome est sexta [deff. tert. 6].

Ergo inuenta est apotome sexta $Z\Theta$; quod erat demonstrandum.

XCI.

Si spatium comprehenditur recta rationali et apotome prima, recta spatio aequalis quadrata apotome est.



Spatium enim AB rationali $A\Gamma$ et apotome prima $A\Delta$ comprehendatur. dico, rectam spatio AB aequalem quadratam apotomen esse.

nam quoniam $A\Delta$ apotome est prima, ei congruens sit ΔH . itaque $AH, H\Delta$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles [prop.

alt., u. app. 16. γ' F, $\gamma\beta'$ BVb, et sic deinceps. 19. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ BV, comp. Fb. 20. $\tau\acute{o}] \tau\acute{\omega}$ V. 21. $\eta]$ m. 2 F. 23. $\gamma\acute{\alpha}\rho]$ om. b, m. 2 B. $\pi\rho\acute{\omega}\tau\eta \acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ BFV. 24. $AH, H\Delta]$ in ras. m. 2 V. 27. $\acute{\alpha}\sigma\upsilon\mu\acute{\epsilon}\tau\rho\omicron\nu$ F, et V, sed corr.

ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔH ἴσον παρὰ
 τὴν AH παραβληθῇ ἐλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, εἰς
 σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ. τετμήσθω ἡ ΔH δίχα κατὰ
 τὸ E , καὶ τῷ ἀπὸ τῆς EH ἴσον παρὰ τὴν AH παρα-
 5 βεβλήσθω ἐλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ
 τῶν AZ , ZH · σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZH .
 καὶ διὰ τῶν E , Z , H σημείων τῇ AG παράλληλοι
 ἤχθωσαν αἱ $E\Theta$, ZI , HK .

Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZH μήκει,
 10 καὶ ἡ AH ἄρα ἐκατέρᾳ τῶν AZ , ZH σύμμετρός ἐστι
 μήκει. ἀλλὰ ἡ AH σύμμετρός ἐστι τῇ AG · καὶ ἐκα-
 τέρα ἄρα τῶν AZ , ZH σύμμετρός ἐστι τῇ AG μήκει.
 καὶ ἐστι ρητὴ ἡ AG · ρητὴ ἄρα καὶ ἐκατέρᾳ τῶν AZ ,
 ZH · ὥστε καὶ ἐκάτερον τῶν AI , ZK ρητόν ἐστίν.
 15 καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστὶν ἡ ΔE τῇ EH μήκει, καὶ ἡ
 ΔH ἄρα ἐκατέρᾳ τῶν ΔE , EH σύμμετρός ἐστι μήκει.
 ρητὴ δὲ ἡ ΔH καὶ ἀσύμμετρος τῇ AG μήκει· ρητὴ
 ἄρα καὶ ἐκατέρᾳ τῶν ΔE , EH καὶ ἀσύμμετρος τῇ AG
 μήκει· ἐκάτερον ἄρα τῶν $\Delta\Theta$, EK μέσον ἐστίν.

20 Κεῖσθω δὴ τῷ μὲν AI ἴσον τετράγωνον τὸ AM ,
 τῷ δὲ ZK ἴσον τετράγωνον ἀφηρησθῶ κοινὴν γωνίαν
 ἔχον αὐτῷ τὴν ὑπὸ $AO\Gamma$ τὸ $N\Xi$ · περὶ τὴν αὐτὴν
 ἄρα διάμετρον ἐστὶ τὰ AM , $N\Xi$ τετράγωνα. ἔστω
 αὐτῶν διάμετρος ἡ OP , καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.
 25 ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν AZ , ZH περιεχόμενον

1. μέρει] -ερ- in ras. B. τοῦ ἀπό] m. 2 F. 2. τὴν]
 corr. ex τῆς m. 2 F. AH] A in ras. F. 3. διαιρεῖ] supra
 add. μήκει m. 2 V, διελεῖ BF, διέλεη b. 4. τῷ] τὸ F. 6.
 ZH] (alt.) HZ F. 8. ἤχθωσαν] ἤχθω- in ras. m. 1 P. ZI]
 mut. in ZH m. 2 F. 9. τῇ] τῆς F. 11. ἀλλ' F. AG] Γ e
 corr. m. 1 F. 13. ἐστίν P. 14. AI] AG P, I in ras. V.
 ἐστίν] ἐστι BV, comp. Fb. 15. καί] (alt.) om. V. 19.
 ἐστὶ PBV, comp. Fb. 20. καὶ κεῖσθω V. 22. AO , OM

LXXIII]. et tota AH rationali propositae AF commensurabilis est, et AH quadrata excedit HA quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis [deff. tert. 1]. itaque si quartae parti quadrati AH^2 aequale rectae AH adplicatur spatium figura quadrata deficiens, in partes commensurabiles eam diuidit [prop. XVII]. secetur AH in duas partes aequales in E , et quadrato EH^2 aequale rectae AH adplicetur spatium figura quadrata deficiens, et sit $AZ \times ZH$. itaque AZ , ZH commensurabiles sunt. et per puncta E , Z , H rectae AF parallelae ducantur $E\Theta$, ZI , HK .

et quoniam AZ , ZH longitudine commensurabiles sunt, etiam AH utrique AZ , ZH commensurabilis est [prop. XV]. uerum AH , AF commensurabiles sunt. quare etiam utraque AZ , ZH rectae AF longitudine commensurabilis est [prop. XII]. et AF rationalis est. quare etiam utraque AZ , ZH rationalis est. itaque etiam utrumque AI , ZK rationale est [VI, 1; prop. XI]. et quoniam AE , EH longitudine commensurabiles sunt, etiam AH utrique AE , EH longitudine commensurabilis est [prop. XV]. uerum AH rationalis est et rectae AF longitudine incommensurabilis. quare etiam utraque AE , EH rationalis est et rectae AF longitudine incommensurabilis [prop. XIII]. ergo utrumque $A\Theta$, EK medium est [prop. XX].

ponatur igitur quadratum $AM = AI$, et spatio ZK aequale auferatur quadratum $N\Xi$ communem angulum habens AOM . itaque quadrata AM , $N\Xi$

PF, τῶν AO , OM Bb. 23. ἐστὶ] εἶσι V. τετράγωνα] om. V.
25. τό] in ras. V. τῶν] m. 2 F. περιεχόμενον] -ον in ras. V.

ὀρθογώνιον τῷ ἀπὸ τῆς EH τετραγώνῳ, ἔστιν ἄρα
ὡς ἡ AZ πρὸς τὴν EH , οὕτως ἡ EH πρὸς τὴν ZH .
ἀλλ' ὡς μὲν ἡ AZ πρὸς τὴν EH , οὕτως τὸ AI πρὸς
τὸ EK , ὡς δὲ ἡ EH πρὸς τὴν ZH , οὕτως ἔστι τὸ
5 EK πρὸς τὸ KZ . τῶν ἄρα AI , KZ μέσον ἀνάλογόν
ἔστι τὸ EK . ἔστι δὲ καὶ τῶν AM , $NΞ$ μέσον ἀνά-
λογον τὸ MN , ὡς ἐν τοῖς ἔμπροσθεν ἐδείχθη, καὶ
ἔστι τὸ [μὲν] AI τῷ AM τετραγώνῳ ἴσον, τὸ δὲ KZ
τῷ $NΞ$. καὶ τὸ MN ἄρα τῷ EK ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ
10 τὸ μὲν EK τῷ $\Delta\Theta$ ἔστιν ἴσον, τὸ δὲ MN τῷ $\Lambda\Xi$.
το ἄρα ΔK ἴσον ἔστι τῷ $\Gamma\Phi X$ γνώμονι καὶ τῷ $NΞ$.
ἔστι δὲ καὶ τὸ AK ἴσον τοῖς AM , $NΞ$ τετραγώνοις.
λοιπὸν ἄρα τὸ AB ἴσον ἔστι τῷ ΣT . τὸ δὲ ΣT τὸ
ἀπὸ τῆς AN ἔστι τετράγωνον. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς AN
15 τετράγωνον ἴσον ἔστι τῷ AB . ἡ AN ἄρα δύναται
τὸ AB .

Λέγω δὴ, ὅτι ἡ AN ἀποτομή ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν AI , ZK , καὶ
ἔστιν ἴσον τοῖς AM , $NΞ$, καὶ ἑκάτερον ἄρα τῶν AM ,
20 $NΞ$ ῥητόν ἐστιν, τουτέστι τὸ ἀπὸ ἑκατέρας τῶν AO ,
 ON . καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν AO , ON ῥητὴ ἐστίν.
πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἔστι τὸ $\Delta\Theta$ καὶ ἔστιν ἴσον τῷ $\Lambda\Xi$,
μέσον ἄρα ἔστι καὶ τὸ $\Lambda\Xi$. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν $\Lambda\Xi$
μέσον ἐστίν, τὸ δὲ $NΞ$ ῥητόν, ἀσύμμετρον ἄρα ἔστι
25 τὸ $\Lambda\Xi$ τῷ $NΞ$. ὡς δὲ τὸ $\Lambda\Xi$ πρὸς τὸ $NΞ$, οὕτως
ἔστιν ἡ AO πρὸς τὴν ON . ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ

2. τήν] (prius) om. P. 6. Post ἀνάλογον ras. 3 litt. V. 7. NM B. 8. μέν] om. BFVb. 9. τό] τῷ b. MN] EK in ras. V. EK] MN in ras. V. ἔστιν ἴσον V. 10. τό] (prius) τῷ V. τῷ] ἴσον ἔστι τό V. τῷ $\Delta\Theta$] in ras. m. 1 P. ἔστιν ἴσον] om. V, ἴσον ἐστίν F. τῷ δὲ MN ἴσον ἔστι τὸ $\Lambda\Xi$. ἴσον ἄρα τὸ ΔK τῷ V. 12. ἴσον] om. V (supra

circum eandem diametrum posita sunt [VI, 26]. sit OP diametrus eorum, et describatur figura [cfr. uol. I p. 137 not.]. iam quoniam est $AZ \times ZH = EH^2$, erit [VI, 17] $AZ:EH = EH:ZH$. uerum $AZ:EH = AI:EK$ et $EH:ZH = EK:KZ$ [VI, 1]. itaque EK medium proportionale est inter AI , KZ . est autem etiam MN medium proportionale inter AM , $NΞ$, sicuti supra [prop. LIII lemma] demonstratum est, et $AI = AM$, $KZ = NΞ$. itaque etiam $MN = EK$. est autem $EK = AO$, $MN = AΞ$ [I, 43]. itaque $AK = TΦX + NΞ$. uerum etiam $AK = AM + NΞ$. itaque reliquum $AB = ΣT$. est autem $ΣT = AN^2$. quare $AN^2 = AB$. ergo AN quadrata spatio AB aequalis est.

Iam dico, AN apotomen esse.

nam quoniam utrumque AI , ZK rationale est, et

$$AI = AM, ZK = NΞ,$$

etiam utrumque AM , $NΞ$, hoc est AO^2 , ON^2 , rationale est. quare etiam utraque AO , ON rationalis est. rursus quoniam AO medium est, et $AO = AΞ$, etiam $AΞ$ medium est. iam quoniam $AΞ$ medium est, $NΞ$ autem rationale, $AΞ$ et $NΞ$ incommensurabilia sunt. uerum $AΞ:NΞ = AO:NO$ [VI, 1]. itaque AO , ON longitudine incommensurabiles sunt [prop. XI]. et utraque rationalis est; itaque AO , ON ra-

est ras.). 13. $ΣT$] corr. ex BF V. τὸ δὲ $ΣT$] supra scr. m. 1 P. τὸ] corr. ex. τῶ FV. 15. ἐστὶ] postea ins. F. τῶ] τὸ F. 17. καὶ ἡ P. 19. ἐστὶ V. ἴσων] ἴσα Bb, om. V. $NΞ$ ἴσα V. 20. ἐστὶ BV, comp. Fb. 21. ἐστὶ PBV, comp. Fb. 23. ἐστὶ] ἐστὶν P, om. V. 24. ἐστὶν] ἐστὶ PBVb, comp. F. 25. $NΞ$] (prius) corr. ex NK m. 1 b. τὸ] (tert.) in ras. m. 1 P.

$\Lambda\omicron$ τῇ $\omicron\mathbf{N}$ μήκει. καὶ εἰσιν ἀμφοτέραι ρηταί· αἱ $\Lambda\omicron$, $\omicron\mathbf{N}$ ἄρα ρηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $\Lambda\mathbf{N}$. καὶ δύνανται τὸ $\mathbf{AB}$ χωρίον· ἡ ἄρα τὸ $\mathbf{AB}$ χωρίον δυναμένη ἀποτομὴ ἐστίν.

5 Ἐὰν ἄρα χωρίον περιέχεται ὑπὸ ρητῆς καὶ τὰ ἐξῆς.

αβ'.

Ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ρητῆς καὶ ἀποτομῆς δευτέρας, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομὴ ἐστὶ πρώτη.

10 Χωρίον γὰρ τὸ $\mathbf{AB}$ περιεχέσθω ὑπὸ ρητῆς τῆς $\mathbf{A\Gamma}$ καὶ ἀποτομῆς δευτέρας τῆς $\mathbf{A\Delta}$. λέγω, ὅτι ἡ τὸ $\mathbf{AB}$ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομὴ ἐστὶ πρώτη.

Ἔστω γὰρ τῇ $\mathbf{A\Delta}$ προσαρμόζουσα ἡ $\mathbf{\Delta H}$. αἱ ἄρα $\mathbf{AH}$, $\mathbf{H\Delta}$ ρηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ
15 προσαρμόζουσα ἡ $\mathbf{\Delta H}$ σύμμετρός ἐστὶ τῇ ἐκκειμένη ρητῇ τῇ $\mathbf{A\Gamma}$, ἡ δὲ ὅλη ἡ $\mathbf{AH}$ τῆς προσαρμοζούσης τῆς $\mathbf{H\Delta}$ μείζον δύνανται τῷ ἀπὸ συμέτρου ἑαυτῇ μήκει. ἐπεὶ οὖν ἡ $\mathbf{AH}$ τῆς $\mathbf{H\Delta}$ μείζον δύνανται τῷ ἀπὸ συμέτρου ἑαυτῇ, ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς
20 $\mathbf{H\Delta}$ ἴσον παρὰ τὴν $\mathbf{AH}$ παραβληθῇ ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ. τετμήσθω οὖν ἡ $\mathbf{\Delta H}$ δίχα κατὰ τὸ $\mathbf{E}$. καὶ τῷ ἀπὸ τῆς $\mathbf{EH}$ ἴσον παρὰ τὴν $\mathbf{AH}$ παραβελήσθω ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ,

2. $\omicron\mathbf{N}$] $\mathbf{NO}$ e corr. V. εἰσιν V, sed v del. 4. τὸ $\mathbf{AB}$ ἄρα V. 5. καὶ τὰ ἐξῆς] καὶ ἀποτομῆς πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἀποτομὴ ἐστίν Theon (BFVb). 8. μέση BFVb et P, sed corr. m. 1. 11. $\mathbf{A\Delta}$] $\mathbf{AB}$ b; δὲ $\mathbf{A\Delta}$ P, corr. m. 1. 12. $\mathbf{AB}$] corr. ex $\mathbf{A\Delta}$ V. μέση BFb, et V, corr. m. 2. 14. $\mathbf{H\Delta}$] $\mathbf{\Delta H}$ F. δυναμένη V, corr. m. 2. 16. τῆς] om. F. 17. $\mathbf{H\Delta}$] eras. V. Ante συμέτρου ras. 1 litt. V. 18. $\mathbf{AH}$] $\mathbf{H}$ in ras. V. τῆς] corr. ex τῇ m. 2 V. 19. τοῦ]

tionales sunt potentia tantum commensurabiles. quare AN apotome est [prop. LXXIII]. et quadrata spatio AB est aequalis. itaque recta spatio AB aequalis quadrata apotome est.

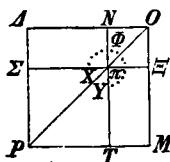
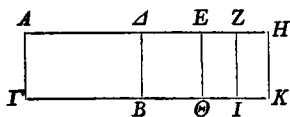
Ergo si spatium comprehenditur recta rationali, et quae sequuntur.

XCII.

Si spatium recta rationali et apotome secunda comprehenditur, recta spatio aequalis quadrata mediae apotome est prima.

Spatium enim AB recta rationali AG et apotome secunda AD comprehendatur. dico, rectam spatio AB aequalem quadratam mediae apotomen primam esse.

nam $\triangle H$ rectae AD congruens sit. itaque AH , HA rationales sunt potentia tantum commensurabiles



[prop. LXXIII], et congruens $\triangle H$ rationali propositae AG commensurabilis est, tota autem AH quadrata excedit congruentem HA quadrato rectae sibi commensurabilis longitudine [deff. tert. 2]. iam quoniam AH^2 excedit HA^2 quadrato rectae sibi commen-

surabilis, si $\frac{1}{4}HA^2$ aequale rectae AH adplicatur spatium figura quadrata deficiens, in partes commensurabiles eam diuidit [prop. XVII]. iam $\triangle H$ in puncto E in duas partes aequales secetur. et quadrato EH^2 aequale

$\tau\omega$ b. 20. AH] H e corr. V. 21. $\delta\iota\epsilon\lambda\epsilon\iota$ Theon (BFVb).
Dein add. $\mu\eta\kappa\epsilon\iota$ V. 22. $\triangle H$] e corr. m. 2 V. EH] ΘH P.

καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν AZ, ZH σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZH μήκει. καὶ ἡ AH ἄρα ἐκατέρᾳ τῶν AZ, ZH σύμμετρός ἐστι μήκει. ρητὴ δὲ ἡ AH καὶ ἀσύμμετρος τῇ AG μήκει· καὶ ἐκατέρᾳ ἄρα τῶν AZ, ZH
 5 ρητὴ ἐστὶ καὶ ἀσύμμετρος τῇ AG μήκει· ἐκάτερον ἄρα τῶν AI, ZK μέσον ἐστίν. πάλιν, ἐπεὶ σύμμετρός ἐστὶν ἡ AE τῇ EH , καὶ ἡ AH ἄρα ἐκατέρᾳ τῶν AE, EH σύμμετρός ἐστίν. ἀλλ' ἡ AH σύμμετρός ἐστὶ τῇ AG μήκει [ρητὴ ἄρα καὶ ἐκατέρᾳ τῶν AE, EH καὶ
 10 σύμμετρος τῇ AG μήκει]. ἐκάτερον ἄρα τῶν AO, EK ρητόν ἐστιν.

Συνεστιάτω οὖν τῷ μὲν AI ἴσον τετράγωνον τὸ AM , τῷ δὲ ZK ἴσον ἀφηγήσθω τὸ $NΞ$ περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὅν τῷ AM τὴν ὑπὸ τῶν AO, OM · περὶ
 15 τὴν αὐτὴν ἄρα ἐστὶ διάμετρον τὰ $AM, NΞ$ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ OP , καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν τὰ AI, ZK μέσα ἐστὶ καὶ ἐστὶν ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν AO, ON , καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AO, ON [ἄρα] μέσα ἐστίν· καὶ αἱ AO, ON ἄρα μέσαι εἰσὶ
 20 δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν AZ, ZH ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς EH , ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ AZ πρὸς τὴν EH , οὕτως ἡ EH πρὸς τὴν ZH · ἀλλ' ὡς μὲν ἡ AZ πρὸς τὴν EH , οὕτως τὸ AI πρὸς τὸ EK · ὡς δὲ ἡ EH πρὸς τὴν ZH , οὕτως [ἐστὶ] τὸ EK πρὸς
 25 τὸ ZK · τῶν ἄρα AI, ZK μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ

1. ἀσύμμετρος b, sed corr. 2. Post μήκει add. καὶ διὰ τῶν E, Z, H σημείων τῇ AG παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ EΘ, ZI, HK (corr. ex ZK V). καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZH μήκει b, V mg. m. 1, F mg., sed euan. 4. ἄρα] om. FV. 6. AI] mut. in AZ F, AZ b. ZH b, et e corr. F. ἐστὶ BV, comp. Fb. 7. ἡ ΔH] HΔ F. 8. ἐστὶ] m. 2 B. 9. ρητὴ — 10. μήκει] om. P. 9. ΔE, EH] E bis in ras. V. 10. καὶ ἐκάτερον b. 11. ἐστὶ PBV, comp. Fb. 12. τῷ] corr.

rectae AH spatium adplicetur figura quadrata deficiens, et sit $AZ \times ZH$. itaque AZ , ZH longitudine commensurabiles sunt. itaque etiam AH utrique AZ , ZH longitudine commensurabilis est [prop. XV]. uerum AH rationalis est et rectae AI longitudine incommensurabilis. itaque etiam utraque AZ , ZH rationalis est et rectae AI longitudine incommensurabilis [prop. XIII]. quare utrumque AI , ZK medium est [prop. XX]. rursus quoniam AE , EH commensurabiles sunt, etiam AH utrique AE , EH commensurabilis est [prop. XV].¹⁾ uerum AH , AI longitudine commensurabiles sunt. ergo utrumque AO , EK rationale est.

iam construatur quadratum $AM = AI$, et spatio ZK aequale auferatur $N\Xi$ in eodem angulo AOM positum, quo AM . itaque quadrata AM , $N\Xi$ circum eandem diametrum posita sunt [VI, 26]. sit OP eorum diametrus, et describatur figura [cfr. uol. I p. 137 not.]. iam quoniam AI , ZK media sunt et $AI = AO^2$, $ZK = ON^2$, etiam AO^2 , ON^2 media sunt. quare etiam AO , ON mediae sunt potentia tantum commensurabiles. et quoniam $AZ \times ZH = EH^2$, erit [VI, 17] $AZ:EH = EH:ZH$. uerum $AZ:EH = AI:EK$

1) Hoc promptius ex prop. VI concludi poterat; nam $AH = 2 AE = 2 EH$.

ex ó V, τό F. 14. ὅν τῷ AM] e corr. F. τήν] τῷ P. τῶν] om. V. 15. ἐστὶν ἄρα V. 17. Post ἐστὶ add. Theon: καὶ σύμμετρα ἀλλήλοις (BFVb; in V post καὶ ras. 1 litt.). ἴσον F. 19. ἄρα] om. P. μέσαι εἰσὶ V, sed corr. ἐστὶ PB, comp. Fb. καὶ] corr. ex δυ- V. αὶ — 20. δυ-] mg. m. 2 V. 19. εἰσὶ] εἰσὶν λέγω ὅτι καὶ P. 20. μόνον] eras. V. σύμμετρα V, corr. m. 2. καὶ ἐπεὶ] ἐπεὶ γάρ P. 21. ἐστὶ] supra scr. m. 1 F. ἐστὶν] corr. ex ἴσον m. 1 F. 23. AI] AH P. 24. ἐστὶ] om. P. 25. ZK] (alt.) Z corr. ex K m. 1 V.

ΕΚ. ἔστι δὲ καὶ τῶν ΑΜ, ΝΞ τετραγώνων μέσον
 ἀνάλογον τὸ ΜΝ· καὶ ἔστιν ἴσον τὸ μὲν ΑΙ τῷ ΑΜ,
 τὸ δὲ ΖΚ τῷ ΝΞ· καὶ τὸ ΜΝ ἄρα ἴσον ἔστι τῷ ΕΚ.
 ἀλλὰ τῷ μὲν ΕΚ ἴσον [ἔστι] τὸ ΑΘ, τῷ δὲ ΜΝ ἴσον
 5 τὸ ΑΞ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΚ ἴσον ἔστι τῷ ΤΦΧ γινώμονι
 καὶ τῷ ΝΞ. ἐπεὶ οὖν ὅλον τὸ ΑΚ ἴσον ἔστι τοῖς
 ΑΜ, ΝΞ, ὧν τὸ ΑΚ ἴσον ἔστι τῷ ΤΦΧ γινώμονι
 καὶ τῷ ΝΞ, λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ ἴσον ἔστι τῷ ΤΣ.
 τὸ δὲ ΤΣ ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΝ· τὸ ἀπὸ τῆς ΑΝ ἄρα
 10 ἴσον ἔστι τῷ ΑΒ χωρίῳ· ἡ ΑΝ ἄρα δύναται τὸ ΑΒ
 χωρίον.

Λέγω [δὴ], ὅτι ἡ ΑΝ μέσης ἀποτομή ἔστι πρώτη.

Ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστι τὸ ΕΚ καὶ ἔστιν ἴσον τῷ
 ΑΞ, ῥητόν ἄρα ἔστι τὸ ΑΞ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν
 15 ΑΟ, ΟΝ. μέσον δὲ ἐδείχθη τὸ ΝΞ· ἀσύμμετρον ἄρα
 ἔστι τὸ ΑΞ τῷ ΝΞ· ὥς δὲ τὸ ΑΞ πρὸς τὸ ΝΞ,
 οὕτως ἔστιν ἡ ΑΟ πρὸς ΟΝ· αἱ ΑΟ, ΟΝ ἄρα ἀσύμ-
 μετροὶ εἰσι μήκει. αἱ ἄρα ΑΟ, ΟΝ μέσαι εἰσι δυνάμει
 μόνον σύμμετροι ῥητόν περιέχουσιν· ἡ ΑΝ ἄρα μέσης
 20 ἀποτομή ἔστι πρώτη· καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Ἡ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή
 ἔστι πρώτη· ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

9γ'.

Ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀπο-

1. ΕΚ] ΕΙ F. ΝΞ] ΜΝ F, sed corr. 3. ΖΚ] corr. ex KZ m. 1 V. 4. τῷ] τό V. ἔστι] om. P. τό] τῷ V. τῷ] τό V. ἴσον ἔστι Bb. 5. τό] (prius) τῷ V φ. 7. ὧν] ὅν φ. ἔστι] m. 2 F. 8. ΤΣ] in ras. V. 9. τὸ δὲ ΤΣ ἔστι] τουτέστι B. 10. ἔστιν P. τό] τὸ ἀπὸ τῆς P; τὸ ἀπὸ τῆς ΑΝ mg. m. 1 b. 12. δὴ] om. P. μέση PBFb, μέσης φ, e corr. m. 2 V. ἔστιν P. 13. τὸ ΕΚ — 14. τῷ ΑΞ] in ras. F. 13. ἔστιν] ἔστι b. Post ἴσον add. τῷ (τό F) ΝΜ τουτέστι Fb, m. 2 V.

[VI, 1] et [id.] $EH:ZH = EK:ZK$. quare EK medium est proportionale inter AI , ZK . uerum etiam MN medium est proportionale inter AM , $NΞ$ [prop. LIII lemma]. et $AI = AM$, $ZK = NΞ$. quare etiam $MN = EK$. uerum $AO = EK$, $AΞ = MN$ [I, 43]. quare $AK = TΦX + NΞ$. iam quoniam $AK = AM + NΞ$, quorum $AK = TΦX + NΞ$, erit reliquum $AB = TΣ$. sed $TΣ = AN^2$. itaque $AN^2 = AB$. ergo AN quadrata spatio AB aequalis est.

Iam dico, AN mediae esse apotomen primam. nam quoniam EK rationale est, et $EK = AΞ$, etiam $AΞ$ rationale est, hoc est $AO < ON$. demonstrauius autem, $NΞ$ medium esse [u. p. 282, 18]. quare $AΞ$, $NΞ$ incommensurabilia sunt. est autem

$$AΞ : NΞ = AO : ON$$

[VI, 1]. quare AO , ON longitudine incommensurabiles sunt [prop. XI]. itaque AO , ON mediae sunt potentia tantum commensurabiles spatium rationale comprehendentes. itaque AN mediae apotome est prima [prop. LXXIV]. et est $AN^2 = AB$.

Ergo recta spatio AB aequalis quadrata mediae apotome est prima; quod erat demonstrandum.

XCH.

Si spatium recta rationali et apotome tertia com-

16. *ἐστίν* P. *τῷ* $NΞ$] m. 2 B. *ὡς δέ*] καὶ ὡς ἄρα B.
 17. *ἐστίν*] om. V. *πρὸς τὴν* FV. *ἄρα* — 18. *μήκει*] *δυναμεί* *εἰσὶν* *μόνον* *σύμμετροι* in ras. V, mg. add. m. rec.: *ἄρα μήκει* *εἰσὶν* *ἀσύμμετροι*. τὰ δὲ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα σύμμετρα· αἱ AO , ON ἄρα. 17. *σύμμετροι* F. 19. AN] ON b, AH F. μέση BFVb. 21. ἡ — χωρίον] om. φ. δυνα-] in spatio 9 litt. F. μέση BFb. 22. *ὅπερ* *ἔδει* *δειξαι*] comp. P, om. BFVb.

τομῆς τρίτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Χωρίον γὰρ τὸ AB περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς AG καὶ ἀποτομῆς τρίτης τῆς AD . λέγω, ὅτι ἡ τὸ AB
5 χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

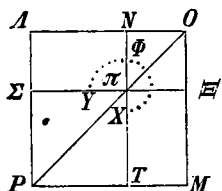
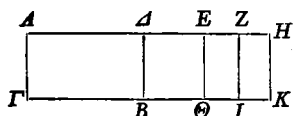
Ἔστω γὰρ τῇ AD προσαρμόζουσα ἡ $ΔΗ$. αἱ $ΑΗ$, $ΗΔ$ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδετέρα τῶν $ΑΗ$, $ΗΔ$ σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ AG , ἡ δὲ ὅλη ἡ $ΑΗ$ τῆς προσαρμο-
10 ζούσης τῆς $ΔΗ$ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμέτρου ἑαυτῇ. ἐπεὶ οὖν ἡ $ΑΗ$ τῆς $ΗΔ$ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμέτρου ἑαυτῇ, ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς $ΔΗ$ ἴσον παρὰ τὴν $ΑΗ$ παραβληθῇ ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διελεί. τετιμήσθω
15 οὖν ἡ $ΔΗ$ δίχα κατὰ τὸ E , καὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΕΗ$ ἴσον παρὰ τὴν $ΑΗ$ παραβεβλήσθω ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν AZ , ZH . καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν E , Z , H σημείων τῇ AG παράλληλοι αἱ $EΘ$, ZI , HK . σύμμετροι ἄρα εἰσὶν αἱ AZ , ZH . σύμμετρον ἄρα καὶ
20 τὸ AI τῷ ZK . καὶ ἐπεὶ αἱ AZ , ZH σύμμετροί εἰσι μήκει, καὶ ἡ $ΑΗ$ ἄρα ἑκατέρα τῶν AZ , ZH σύμμετρός ἐστι μήκει. ῥητὴ δὲ ἡ $ΑΗ$ καὶ ἀσύμμετρος τῇ AG μήκει· ὥστε καὶ αἱ AZ , ZH . ἑκάτερον ἄρα τῶν

1. μέση B F V b. 5. μέση B F b, et V, corr. m. 2. ἐστιν P.
9. -αρμοζ-] in ras. V. 10. ἀσύμμετρον b. 11. ἐπεὶ — 12.
ἑαυτῇ] punctis notat. V. 11. $ΗΔ$] $ΔΗ$ P. 12. τοῦ] corr.
ex τῷ m. 1 b. 14. διελεί μήκει V. 15. τῷ] τό φ. 18.
 H] $om.$ V. ZI] mut. in IZ V. 19. εἰσὶν] εἰ- e corr. V.
20. εἰσὶν P. 23. ὥστε καὶ αἱ AZ , ZH] καὶ ἑκατέρα ἄρα
(supra scr. m. 1 V) τῶν AZ , ZH ῥητὴ ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ
 AG μήκει· καὶ Theon (B F V b).

prehenditur, recta spatio aequalis quadrata mediae apotome est secunda.

Spatium enim AB recta rationali AG et apotome tertia AD comprehendatur. dico, rectam spatio AB aequalem quadratam mediae apotomen esse secundam.

nam ΔH rectae AD congruens sit. itaque AH , HA rationales sunt potentia tantum commensurabiles,



et neutra rectarum AH , HA rationali propositae AG longitudine commensurabilis est, tota autem AH congruentem. ΔH excedit quadrato rectae sibi commensurabilis [deff. tert. 3]. quoniam igitur AH^2 excedit ΔH^2 quadrato rectae sibi commensurabilis, si $\frac{1}{4}\Delta H^2$ aequale rectae AH adplicatur

spatium figura quadrata deficiens, in partes commensurabiles eam diuidet [prop. XVII]. iam ΔH in E in duas partes aequales secetur, et quadrato EH^2 aequale rectae AH adplicetur spatium figura quadrata deficiens, et sit $AZ \times ZH$. et per puncta E , Z , H rectae AG parallelae ducantur $E\Theta$, ZI , HK . itaque AZ , ZH commensurabiles sunt. quare AI , ZK commensurabilia sunt [VI, 1; prop. XI]. et quoniam AZ , ZH longitudine commensurabiles sunt, etiam AH utrique AZ , ZH longitudine commensurabilis est [prop. XV]. uerum AH rationalis est et rectae AG longitudine incommensurabilis. quare etiam AZ , ZH [prop. XIII]. itaque utrumque AI , ZK medium est [prop. XX]. rursus quoniam ΔE , EH longitudine commen-

AI , ZK μέσον ἐστίν. πάλιν, ἐπεὶ σύμμετρος ἐστὶν ἡ
 ΔE τῇ EH μήκει, καὶ ἡ ΔH ἄρα ἐκατέρω τῶν ΔE ,
 EH σύμμετρος ἐστὶ μήκει. ζητὴ δὲ ἡ $H\Delta$ καὶ ἀσύμ-
 5 $μετρος$ τῇ AG μήκει· ζητὴ ἄρα καὶ ἐκατέρω τῶν ΔE ,
 $\Delta\Theta$, EK μέσον ἐστίν. καὶ ἐπεὶ αἱ AH , $H\Delta$ δυνάμει
 μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ μήκει ἡ
 AH τῇ $H\Delta$. ἀλλ' ἡ μὲν AH τῇ AZ σύμμετρος ἐστὶ
 μήκει, ἡ δὲ ΔH τῇ EH · ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AZ
 10 τῇ EH μήκει. ὥς δὲ ἡ AZ πρὸς τὴν EH , οὕτως ἐστὶ
 τὸ AI πρὸς τὸ EK · ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ AI
 τῷ EK .

Συνεσιτάτω οὖν τῷ μὲν AI ἴσον τετράγωνον τὸ
 AM , τῷ δὲ ZK ἴσον ἀφηγήσθω τὸ $N\Xi$ περὶ τὴν αὐτὴν
 15 γωνίαν ὅν τῷ AM · περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρον
 ἐστὶ τὰ AM , $N\Xi$. ἐστω αὐτῶν διάμετρος ἡ OP , καὶ
 καταγεγράψθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν AZ ,
 ZH ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς EH , ἐστὶν ἄρα ὥς ἡ AZ
 πρὸς τὴν EH , οὕτως ἡ EH πρὸς τὴν ZH . ἀλλ' ὥς
 20 μὲν ἡ AZ πρὸς τὴν EH , οὕτως ἐστὶ τὸ AI πρὸς τὸ
 EK · ὥς δὲ ἡ EH πρὸς τὴν ZH , οὕτως ἐστὶ τὸ EK
 πρὸς τὸ ZK · καὶ ὥς ἄρα τὸ AI πρὸς τὸ EK , οὕτως
 τὸ EK πρὸς τὸ ZK · τῶν ἄρα AI , ZK μέσον ἀνά-
 λογόν ἐστὶ τὸ EK . ἐστὶ δὲ καὶ τῶν AM , $N\Xi$ τετρα-
 25 γώνων μέσον ἀνάλογον τὸ MN · καὶ ἐστὶν ἴσον το
 μὲν AI τῷ AM , τὸ δὲ ZK τῷ $N\Xi$ · καὶ τὸ EK ἄρα

1. ἐστίν] ἐστὶ P B V, comp. F b. ἐστὶν] ἐστὶ V. 3. μήκει]
 om. B. ΔH F, $H\Delta$ in ras. V. 4. ζητὴ — 5. μήκει] m.
 2 B. 5. καὶ ἐκάτερον V. 6. EK] ΘK P. ἐστὶ B V,
 comp. F b. δυνάμει, c euan., V. 7. εἰσὶ σύμμετροι V.
 ἐστίν V. μήκει] om. V. 8. AH] H in ras. V, deinde
 add. μήκει m. 2. $H\Delta$] ΔH P. ἀλλ' — 9. τῇ EH] mg.

surabiles sunt, etiam $\angle H$ utrique $\angle E$, EH longitudine commensurabilis est [prop. XV; cfr. p. 283 not.]. uerum HA rationalis est et rectae AI longitudine incommensurabilis. quare etiam utraque $\angle E$, EH rationalis est et rectae AI longitudine incommensurabilis [prop. XIII]. itaque utrumque $\angle O$, EK medium est [prop. XX]. et quoniam AH , HA potentia tantum commensurabiles sunt, AH et HA longitudine incommensurabiles sunt; uerum AH , AZ et $\angle H$, EH longitudine commensurabiles sunt. quare AZ , EH longitudine incommensurabiles sunt [prop. XIII]. est autem $AZ:EH = AI:EK$ [VI, 1]. ergo AI , EK incommensurabilia sunt [prop. XI].

construatur igitur quadratum $AM = AI$, et auferatur spatio ZK aequale $N\Xi$ in eodem angulo positum, quo AM . itaque AM , $N\Xi$ circum eandem diametrum posita sunt [VI, 26]. sit OP eorum diametrus, et figura describatur [cfr. uol. I p. 137 not.]. iam quoniam est $AZ \times ZH = EH^2$, erit $AZ:EH = EH:ZH$ [VI, 17]. est autem $AZ:EH = AI:EK$ [VI, 1], et $EH:ZH = EK:ZK$ [id.]. quare etiam $AI:EK = EK:ZK$. itaque EK medium est proportionale inter AI , ZK . uerum etiam MN medium est proportionale inter quadrata AM , $N\Xi$ [prop. LIII lemma]. et $AI = AM$,

m. 1 P. 8. Post μέν ras. 1 litt. V. AZ μήκει V. $\xi\sigma\tau\iota\nu$ V.
 9. μήκει] om. V. $\alpha\gamma\alpha$] supra scr. m. 1 F. 10. AZ] supra scr. $\angle$ b. EH] in ras. V. 11. τό] (pr.) τὸ ἀπὸ τῆς F. τό] τῇν b. EK] EA supra scr. K b. $\alpha\sigma\upsilon\mu\mu\epsilon\tau\rho\omicron\nu$ — 12. EK] om. P. 11. $\xi\sigma\tau\iota$ τό] m. 2 F. 13. τῷ] corr. ex τό m. 1 F. $\tau\epsilon\tau\rho\alpha\gamma\omega\acute{\nu}\omega\nu$ P, sed corr. 15. ὅν] supra scr. m. 1 F. τῷ] τό F. 17. ὑπὸ] ἀπὸ b. 22. καὶ ὥς — 23. τὸ ZK] mg. m. 2 B. 23. τὸ ZK] ZK PB.

ἴσον ἐστὶ τῷ MN . ἀλλὰ τὸ μὲν MN ἴσον ἐστὶ τῷ $ΛΞ$,
 τὸ δὲ EK ἴσον [ἐστὶ] τῷ $ΔΘ$ · καὶ ὅλον ἄρα τὸ $ΔΚ$
 ἴσον ἐστὶ τῷ $ΤΦΧ$ γνώμονι καὶ τῷ $NΞ$. ἐστὶ δὲ καὶ
 τὸ $ΑΚ$ ἴσον τοῖς $ΑΜ$, $NΞ$ · λοιπὸν ἄρα τὸ $ΑΒ$ ἴσον
 5 ἐστὶ τῷ $ΣΤ$, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς $ΑΝ$ τετραγώνῳ·
 ἡ $ΑΝ$ ἄρα δύναται τὸ $ΑΒ$ χωρίον.

Λέγω, ὅτι ἡ $ΑΝ$ μέσης ἀποτομῆς ἐστὶ δευτέρα.

Ἐπεὶ γὰρ μέσα ἐδείχθη τὰ $ΑΙ$, ZK καὶ ἐστὶν ἴσα
 τοῖς ἀπὸ τῶν $ΔΟ$, $ΟΝ$, μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν
 10 ἀπὸ τῶν $ΔΟ$, $ΟΝ$ · μέση ἄρα ἑκάτερα τῶν $ΔΟ$, $ΟΝ$.
 καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστὶ τὸ $ΑΙ$ τῷ ZK , σύμμετρον ἄρα
 καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΔΟ$ τῷ ἀπὸ τῆς $ΟΝ$. πάλιν, ἐπεὶ
 ἀσύμμετρον ἐδείχθη τὸ $ΑΙ$ τῷ EK , ἀσύμμετρον ἄρα
 ἐστὶ καὶ τὸ $ΑΜ$ τῷ MN , τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς $ΔΟ$
 15 τῷ ὑπὸ τῶν $ΔΟ$, $ΟΝ$ · ὥστε καὶ ἡ $ΔΟ$ ἀσύμμετρός
 ἐστὶ μήκει τῇ $ΟΝ$ · αἱ $ΔΟ$, $ΟΝ$ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει
 μίνον σύμμετροι.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ μέσον περιέχουσιν.

Ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐδείχθη τὸ EK καὶ ἐστὶν ἴσον
 20 τῷ ὑπὸ τῶν $ΔΟ$, $ΟΝ$, μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ
 τῶν $ΔΟ$, $ΟΝ$ · ὥστε αἱ $ΔΟ$, $ΟΝ$ μέσαι εἰσὶ δυνάμει
 μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι. ἡ $ΑΝ$ ἄρα μέσης
 ἀποτομῆς ἐστὶ δευτέρα· καὶ δύναται τὸ $ΑΒ$ χωρίον.

Ἡ ἄρα τὸ $ΑΒ$ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομῆς
 25 ἐστὶ δευτέρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

1. τό] corr. ex τῷ m. rec. P. τῷ] corr. ex τό m. rec. P.

2. $ΛΞ$] $ΑΞ$ F. τό] corr. ex τῷ m. rec. P. ἐστὶ] P, om. BFVb. τῷ] corr. ex τό m. rec. P. Post $ΔΘ$ in b adp. :~, deinde spatium 1 lin. uacat. 3. $NΞ$] mut. in NZ m. rec. B.

4. ἴσον] (prius) m. 2 FV. 5. $ΑΝ$] $ΑΜ$ P; $ΑΝ$ F, corr. m. 2. 6. $ΑΝ$] $Α$ eras. V. 7. μέση BFVb. ἐστὶν P. 11. σύμμετρον] (prius) σύμμετρος F. 12. τῆς] corr. ex τῶν F.

Post $ΔΟ$ add. $ΟΝ$ B et supra m. 1 P. τῆς] corr. ex

$ZK = NΞ$. itaque etiam $EK = MN$. uerum $MN = AΞ$ [I, 43], $EK = AΘ$. quare etiam $AK = TΦX + NΞ$. est autem etiam

$$AK = AM + NΞ.$$

itaque reliquum $AB = ΣT = AN^2$. ergo AN quadrata spatio AB aequalis est.

dico, AN mediae apotomen esse secundam. nam quoniam demonstrauius, AI , ZK media esse, et $AI = AO^2$, $ZK = ON^2$, etiam utrumque AO^2 , ON^2 medium est. quare utraque AO , ON media est. et quoniam AI , ZK commensurabilia sunt [VI, 1; prop. XI], etiam AO^2 , ON^2 commensurabilia sunt. rursus quoniam demonstrauius, AI et EK incommensurabilia esse, etiam AM et MN , hoc est AO^2 et $AO \times ON$, incommensurabilia sunt. quare etiam AO , ON longitudine incommensurabiles sunt [VI, 1; prop. XI]. ergo AO , ON mediae sunt potentia tantum commensurabiles. iam dico, easdem spatium medium comprehendere. nam quoniam demonstrauius, EK medium esse, et $EK = AO \times ON$, etiam $AO \times ON$ medium est. quare AO , ON mediae sunt potentia tantum commensurabiles medium comprehendentes. itaque AN mediae apotome est secunda [prop. LXXV]. et spatio AB aequalis est quadrata.

Ergo recta spatio AB aequalis quadrata mediae apotome est secunda; quod erat demonstrandum.

τῶν F. 14. ἐστίν P. MN] NM P. 15. τῶ] corr. ex τό m. 1 F. 16. ἐστίν P. 18. περιέχουσαι V. 19. γάρ] om. Fb, m. 2 B. 20. μέσον — 21. ON (prius)] mg. V. 22. σύμμετροι P. AN b. μέση BFVb. 23. ἐστίν P. χωρόν] om. Theon (BFVb). 24. μέση BFVb. 25. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb.

98'.

Ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης, ἢ τὸ χωρίον δυναμένη ἐλάσσω ἐστίν.

5 Χωρίον γὰρ τὸ AB περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς AG καὶ ἀποτομῆς τετάρτης τῆς AD . λέγω, ὅτι ἡ τὸ AB χωρίον δυναμένη ἐλάσσω ἐστίν.

Ἔστω γὰρ τῇ AD προσαρμόζουσα ἡ ΔH . αἱ ἄρα AH , $H\Delta$ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ
 10 AH σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ AG μήκει, ἡ δὲ ὅλη ἡ AH τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔH μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἐαυτῇ μήκει. ἐπεὶ οὖν ἡ AH τῆς $H\Delta$ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἐαυτῇ μήκει, ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς
 15 ΔH ἴσον παρὰ τὴν AH παραβληθῇ ἐλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελεί. τετμήσθω οὖν ἡ ΔH δίχα κατὰ τὸ E , καὶ τῷ ἀπὸ τῆς EH ἴσον παρὰ τὴν AH παραβεβλήσθω ἐλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν AZ , ZH . ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ
 20 μήκει ἡ AZ τῇ ZH . ἤχθωσαν οὖν διὰ τῶν E , Z , H παράλληλοι ταῖς AG , $B\Delta$ αἱ $E\Theta$, ZI , HK . ἐπεὶ οὖν ῥητὴ ἐστὶν ἡ AH καὶ σύμμετρος τῇ AG μήκει, ῥητὸν ἄρα ἐστὶν ὅλον τὸ AK . πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστὶν ἡ ΔH τῇ AG μήκει, καὶ εἰσιν ἀμφοτέραι ῥηταί, μέσον
 25 ἄρα ἐστὶ τὸ ΔK . πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZH μήκει, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ AI τῷ ZK .

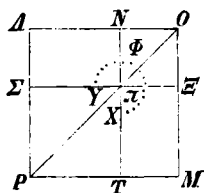
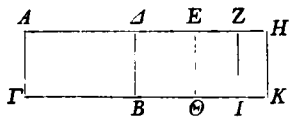
2. τετάρτης ἀποτομῆς V. 4. ἐστὶ BV, comp. Fb. 5. ῥητῆς τῆς] corr. ex τῆς m. 2 F, ῥητῆς V. 6. AD] $AB\Delta$ b, Δ in ras. m. 1 B. ἡ] supra scr. P. 7. AB] om. Bb, m. 2 V. 8. AD] mut. in AB m. 2 F, AB b. 11. ΔH] $H\Delta$ V. 12. δυναμένη P. συμμέτρου B, corr. m. 2. 15. ἴσον] μέσον φ. 16. ἀσύμμετρον P, σύμμετρα b. διελεί μήκει V.

XCIV.

Si spatium recta rationali et apotome quarta comprehenditur, recta spatio aequalis quadrata minor est.

Spatium enim AB rationali AG et apotome quarta AD comprehendatur. dico, rectam spatio AB aequalem quadratam minorem esse.

sit enim $\triangle H$ rectae AD congruens. itaque AH , HD rationales sunt potentia tantum commensurabiles,



et AH rationali propositae AG longitudine commensurabilis est, tota autem AH quadrata congruentem $\triangle H$ excedit quadrato rectae sibi longitudine incommensurabilis [deff. tert. 4]. iam quoniam AH^2 excedit HD^2 quadrato rectae sibi longitudine incommensurabilis, si $\frac{1}{4} AD^2$

aequale rectae AH adplicetur spatium figura quadrata deficiens, in partes incommensurabiles eam diuidet [prop. XVIII]. $\triangle H$ igitur in E in duas partes aequales secetur, et quadrato EH^2 aequale rectae AH adplicetur spatium figura quadrata deficiens, et sit $AZ \times ZH$. itaque AZ , ZH incommensurabiles sunt. iam per E , Z , H rectis AG , BD parallelae ducantur $EΘ$, ZI , HK . quoniam igitur AH rationalis est et rectae AG longitudine commensurabilis, AK rationale est. rursus

17. EH] E e corr. V. 19. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$ PV. 20. $\mu\acute{\eta}\kappa\epsilon\iota$] om. V. ZH] HZ F. $\delta\iota\alpha$ P. E, Z] Z, E PFb, in ras. m. 2 B. 21. BD] $eras.$ V, ΓB b. 23. $\acute{\sigma}\lambda\omicron\nu$] supra scr. m. 1 b. 52. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$ P. 26. $\acute{\alpha}\sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\epsilon\rho\omicron\nu$] $\acute{\alpha}$ - del. F. $\acute{\alpha}\rho\alpha \acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}$ F.

συνεστάτω οὖν τῷ μὲν AI ἴσον τετράγωνον τὸ AM ,
 τῷ δὲ ZK ἴσον ἀφηγήσθω περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν
 τὴν ὑπὸ τῶν LOM τὸ $NΞ$. περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διά-
 μετρόν ἐστι τὰ AM , $NΞ$ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν
 5 διάμετρος ἡ OP , καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ
 οὖν τὸ ὑπὸ τῶν AZ , ZH ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς EH ,
 ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὥς ἡ AZ πρὸς τὴν EH , οὕτως
 ἡ EH πρὸς τὴν ZH . ἀλλ' ὥς μὲν ἡ AZ πρὸς τὴν
 EH , οὕτως ἐστὶ τὸ AI πρὸς τὸ EK , ὥς δὲ ἡ EH
 10 πρὸς τὴν ZH , οὕτως ἐστὶ τὸ EK πρὸς τὸ ZK . τῶν
 ἄρα AI , ZK μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ EK . ἐστι δὲ
 καὶ τῶν AM , $NΞ$ τετραγώνων μέσον ἀνάλογον τὸ MN ,
 καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ μὲν AI τῷ AM , τὸ δὲ ZK τῷ $NΞ$.
 καὶ τὸ EK ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ MN . ἀλλὰ τῷ μὲν EK
 15 ἴσον ἐστὶ τὸ $ΔΘ$, τῷ δὲ MN ἴσον ἐστὶ τὸ $ΔΞ$. ὅλον
 ἄρα τὸ $ΔK$ ἴσον ἐστὶ τῷ $ΓΦΧ$ γνώμονι καὶ τῷ $NΞ$.
 ἐπεὶ οὖν ὅλον τὸ AK ἴσον ἐστὶ τοῖς AM , $NΞ$ τετρα-
 γώνοις, ὧν τὸ $ΔK$ ἴσον ἐστὶ τῷ $ΓΦΧ$ γνώμονι καὶ
 τῷ $NΞ$ τετραγώνῳ, λοιπὸν ἄρα τὸ AB ἴσον ἐστὶ τῷ
 20 $ΣΤ$, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς AN τετραγώνῳ· ἡ AN ἄρα
 δύναται τὸ AB χωρίον.

Λέγω, ὅτι ἡ AN ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστι τὸ AK καὶ ἐστὶν ἴσον τοῖς
 ἀπὸ τῶν AO , ON τετράγωνοις, τὸ ἄρα συγκείμενον
 25 ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AO , ON ῥητόν ἐστιν. πάλιν, ἐπεὶ
 τὸ $ΔK$ μέσον ἐστίν, καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ $ΔK$ τῷ δις
 ὑπὸ τῶν AO , ON , τὸ ἄρα δις ὑπὸ τῶν AO , ON μέσον

2. Post ZK ras. 1 litt. F. 3. τῶν] om. B F V. $ΔON$
 φ et, supra scr. M, b. τό] e corr. m. rec. b. 4. ἐστι] εἶσι P.
 5. ἡ] m. rec. P. 7. AZ] AH , supra scr. Z, b. τὴν]
 om. P. 8. AZ] Z in ras. F. 9. οὕτως] οὕτως ἐστὶν ἡ EH
 πρὸς τὴν ZH . ἀλλ' ὥς μὲν ἡ AZ πρὸς τὴν EH , οὕτως b.

quoniam ΔH , $\Delta \Gamma$ longitudine incommensurabiles sunt, et utraque rationalis est, ΔK medium est [prop. XXI]. rursus quoniam AZ , ZH longitudine incommensurabiles sunt, AI et ZK incommensurabilia sunt [VI, 1; prop. XI]. iam construatur quadratum $AM = AI$, et spatio ZK aequale auferatur $N\Xi$ in eodem angulo positum ΔOM . itaque quadrata AM , $N\Xi$ circum eandem diametrum posita sunt [VI, 26]. sit OP eorum diametrus, et describatur figura [cfr. uol. I p. 137 not.]. iam quoniam $AZ \times ZH = EH^2$, erit $AZ : EH = EH : ZH$ [VI, 17]. est autem $AZ : EH = AI : EK$, $EH : ZH = EK : ZK$ [VI, 1]. quare EK medium est proportionale inter AI , ZK . uerum etiam MN medium est proportionale inter quadrata AM , $N\Xi$ [prop. LIII lemma], et $AI = AM$, $ZK = N\Xi$. quare etiam $EK = MN$. uerum $\Delta \Theta = EK$, $\Delta \Xi = MN$ [I, 43]. itaque $\Delta K = \Gamma \Phi X + N\Xi$. iam quoniam est $AK = AM + N\Xi$, quorum $\Delta K = \Gamma \Phi X + N\Xi$, erit $AB = \Sigma T = AN^2$. ergo AN quadrata spatio AB aequalis est.

dico, AN irrationalem esse minorem, quae uocatur. nam quoniam AK rationale est, et $AK = AO^2 + ON^2$, $AO^2 + ON^2$ rationale est. rursus quoniam ΔK medium est, et $\Delta K = 2 AO \times ON$, $2 AO \times ON$ medium est.

$\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}$] om. V. AI] supra scr. Γ b. EH] E e corr. F, ras. 2 litt. V. 10. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}$] om. V. 11. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$ P. 12. $\tau\epsilon\tau\rho\alpha\gamma\acute{\omega}\nu\omega\upsilon$] om. V. 13. AI] $\Delta \Gamma$ P. $N\Xi$] N in ras. V. 14. $\acute{\iota}\sigma\omicron\nu \acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}$] $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu \acute{\iota}\sigma\omicron\nu$ F, $\acute{\iota}\sigma\omicron\nu$ V. $\tau\tilde{\omega}$] (alt.) $\tau\acute{o}$ corr. in $\tau\acute{o}\nu$ (?) V. 15. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}$] om. V. $\tau\acute{o}$] $\tau\tilde{\omega}$ V. $\Theta \Delta$ B. $\tau\tilde{\omega}$] corr. ex $\tau\acute{o}$ m. 1 V, $\tau\acute{o}$ P. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}$] om. V. $\tau\acute{o}$] $\tau\tilde{\omega}$ P. 20. $\tau\epsilon\tau\rho\alpha\gamma\acute{\omega}\nu\omega\upsilon$] om. V. 22. ΔH F. $\acute{\alpha}\nu\acute{\alpha}\lambda\omicron\gamma\omicron\varsigma$ Fb. 24. $\tau\tilde{\omega}\nu$] $\tau\acute{o}\nu$ P. 25. ON $\tau\epsilon\tau\rho\alpha\gamma\acute{\omega}\nu\omega\upsilon$ V. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}$ BVb, comp. F. 26. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$] comp. F, $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}$ PBVb. $\tau\acute{o}$ ΔK] om. V. $\tau\tilde{\omega}$] e corr. V.

ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐδείχθη τὸ AI τῷ ZK ,
 ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AO τετραγώνου τῷ
 ἀπὸ τῆς ON τετραγώνῳ. αἱ AO , ON ἄρα δυνάμει
 εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν
 5 ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν
 μέσον. ἡ AN ἄρα ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.
 καὶ δύναται τὸ AB χωρίον.

Ἡ ἄρα τὸ AB χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν.
 ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10

κε'.

Ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀπο-
 τομῆς πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη [ἡ] μετὰ
 ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Χωρίον γὰρ τὸ AB περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς
 15 AG καὶ ἀποτομῆς πέμπτης τῆς AD . λέγω, ὅτι ἡ τὸ
 AB χωρίον δυναμένη [ἡ] μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον
 ποιοῦσά ἐστιν.

Ἐστω γὰρ τῇ AD προσαρμόζουσα ἡ $ΔH$. αἱ ἄρα
 AH , $HΔ$ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ
 20 προσαρμόζουσα ἡ $HΔ$ σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκει-
 μένῃ ῥητῇ τῇ AG , ἡ δὲ ὅλη ἡ AH τῆς προσαρμο-
 ζούσης τῆς $ΔH$ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου
 ἐαντῇ. ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς $ΔH$
 ἴσον παρὰ τὴν AH παραβληθῇ ἐλλείπον εἶδει τετρα-

1. ἐστὶ B V b, comp. F. 2. σύμμετρον B, corr. m. 2. ἄρα
 ἐστὶ V. τετραγώνου] om. V. 3. ἀσύμμετροι εἰσι δυνάμει V,
 deinde del. m. 2: διὰ τὸ δεύτερον θεώρημα τοῦ βιβλίου. 6.
 $ΔH$ F. ἀνάλογος P, sed corr. 7. AB] B corr. ex Γ m. 2 F.
 8. ἐστὶ B. 9. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. B F V b. 12.
 ἡ] (alt.) om. F V b, m. 2 B. 13. ἐστὶ B V, comp. F b. 16.
 ἡ] om. F V b, m. 2 B. 20. $HΔ$] in ras. m. 1 b, $ΔH$ P.
 μήκει] om. V. 21. AG μήκει V. 22. συμμέτρου B, corr. m. 2.

et quoniam demonstrauius, AI et ZK incommensurabilia esse, etiam AO^2 , ON^2 incommensurabilia sunt. itaque AO , ON potentia incommensurabiles sunt efficientes summam quadratorum rationalem, duplum autem rectangulum medium. quare AN irrationalis est minor, quae uocatur [prop. LXXVI]. et $AN^2 = AB$.

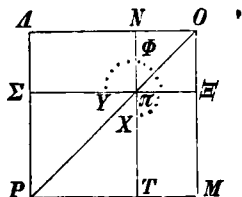
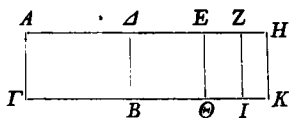
Ergo recta spatio AB aequalis quadrata minor est; quod erat demonstrandum.

XCV.

Si spatium recta rationali et apotome quinta comprehenditur, recta spatio aequalis quadrata recta est cum rationali totum medium efficiens.

Spatium enim AB recta rationali AG et apotome quinta AD comprehendatur. dico, rectam spatio AB aequalem quadratam rectam esse cum rationali totum medium efficientem.

nam $\triangle H$ rectae AD congruens sit. itaque AH , HA rationales sunt potentia tantum commensurabiles,



et congruens HA rationali propositae AG longitudine commensurabilis est, tota autem AH quadrata excedit congruentem $\triangle H$ quadrato rectae sibi incommensurabilis [deff. tert. 5]. itaque si $\frac{1}{4} \triangle H^2$ aequale rectae AH adplicatur spatium figura quadrata deficiens, in partes incommensurabiles eam diuidet [prop.

XVIII]. $\triangle H$ igitur in puncto E in duas partes aequales

- γώνω, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελεί. τετμήσθω οὖν ἡ ΔH δίχα κατὰ τὸ E σημεῖον, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς EH ἴσον παρὰ τὴν AH παραβεβλήσθω ἐλλείπον εἶδει τετραγώνω καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν AZ, ZH · ἀσύμμετρος
 5 ἄρα ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZH μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστὶν ἡ AH τῇ GA μήκει, καὶ εἰσὶν ἀμφοτέραι ρηταί, μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ AK . πάλιν, ἐπεὶ ρητὴ ἐστὶν ἡ ΔH καὶ σύμμετρος τῇ AG μήκει, ρητόν ἐστι τὸ ΔK .
 10 συνεστάτω οὖν τῷ μὲν AI ἴσον τετράγωνον τὸ AM , τῷ δὲ ZK ἴσον τετράγωνον ἀφηρήσθω τὸ $N\Xi$ περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ LOM · περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρον ἐστὶ τὰ $AM, N\Xi$ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ OP , καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι ἡ AN δύναται τὸ AB χωρίον.
 15 Λέγω, ὅτι ἡ AN ἡ μετὰ ρητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

- Ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐδείχθη τὸ AK καὶ ἐστὶν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν AO, ON , τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AO, ON μέσον ἐστίν. πάλιν, ἐπεὶ ρητόν
 20 ἐστὶ τὸ ΔK καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ δις ὑπὸ τῶν AO, ON , καὶ αὐτὸ ρητόν ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ AI τῷ ZK , ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AO τῷ ἀπὸ τῆς ON · αἱ AO, ON ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν
 25 τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν ρητόν. ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ AN ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μετὰ

1. Post διελεί del. μήκει V. 3. AH] H e corr. m. 1 V.
 4. τό] corr. ex τῷ P. 5. τῇ] supra scr. m. 1 b. Post μήκει add. καὶ ἡχθῶσαν διὰ τῶν E, Z, H τῇ AG (A b) παράλληλοι αἱ $E\Theta, ZI, HK$ b, mg. FV. 6. GA] in ras. V, AG P.
 8. Ante σύμμετρος ras. 1 litt. V. ἄρα ἐστὶ V b, m. 2 F. 9. ἐστάτω b, ἔστω V. 10. τετράγωνον] supra scr. F. · τὸ $N\Xi$]

secetur, et quadrato EH^2 aequale rectae AH adplicetur spatium figura quadrata deficiens et sit $AZ \times ZH$. itaque AZ , ZH longitudine incommensurabiles sunt. et quoniam AH , ΓA longitudine incommensurabiles, et utraque rationalis est, AK medium est [prop. XXI]. rursus quoniam ΔH rationalis est et rectae AI longitudine commensurabilis, ΔK rationale est [prop. XIX]. construatur igitur quadratum $AM = AI$, et spatio ZK aequale auferatur quadratum $N\Xi$ in eodem angulo AOM positum. itaque quadrata AM , $N\Xi$ circum eandem diametrum posita sunt [VI, 26]. sit OP eorum diametrus, et describatur figura [uol. I p. 137 not.]. eodem igitur modo demonstrabimus, esse $AN^2 = AB$.

dico, AN rectam esse cum rationali totum medium efficientem. quoniam enim demonstrauius, AK medium esse, et $AK = AO^2 + ON^2$, $AO^2 + ON^2$ medium est. rursus quoniam ΔK rationale est, et

$$\Delta K = 2 AO \times ON,$$

hoc et ipsum rationale est. et quoniam AI , ZK incommensurabilia sunt, etiam AO^2 , ON^2 incommensurabilia sunt. quare AO , ON potentia incommensurabiles sunt efficientes summam quadratorum mediam, duplum autem rectangulum rationale. itaque reliqua

om. Theon (BFVb). 11. ὑπὸ τῶν BFb. AOM τὸ $N\Xi$ ($M\Xi$ φ) Theon (BFVb). 12. ἐστὶ] εἶσι in ras. m. 2 V. τὰ] in ras. m. 2 V. AM] A in ras. m. 2 V. 18. συγκείμενον] om. V. 19. ἐστὶ BV, comp. Fb. 21. αὐτό] τὸ δις ἄρα ὑπὸ τῶν AO , ON Theon (BFVb). ἐστὶ PBV, comp. Fb. 22. AI] mut. in AE m. 2 F, AE b. 23. ON] (prius) e corr. V. 25. ἡ] om. B. 26. καλουμένη] κα- supra scr. m. 1 b. ἡ μετὰ b.

φητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα· καὶ δύναται τὸ AB χωρίον.

Ἡ τὸ AB ἄρα χωρίον δυναμένη μετὰ φητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5

95'.

Ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ φητῆς καὶ ἀποτομῆς ἑκτῆς, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μετὰ μέσον μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Χωρίον γὰρ τὸ AB περιεχέσθω ὑπὸ φητῆς τῆς AG
10 καὶ ἀποτομῆς ἑκτῆς τῆς AD · λέγω, ὅτι ἡ τὸ AB χωρίον δυναμένη [ἡ] μετὰ μέσον μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἐστω γὰρ τῇ AD προσαρμόζουσα ἡ $ΔH$ · αἱ ἄρα AH , $HΔ$ φηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ
15 οὐδετέρω αὐτῶν σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένη φητῇ τῇ AG μήκει, ἡ δὲ ὅλη ἡ AH τῆς προσαρμοζούσης τῆς $ΔH$ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ μήκει. ἐπεὶ οὖν ἡ AH τῆς $HΔ$ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ μήκει, ἔαν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ
20 ἀπὸ τῆς $ΔH$ ἴσον παρὰ τὴν AH παραβληθῇ ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελεί. τετμήσθω οὖν ἡ $ΔH$ δίχα κατὰ τὸ E [σημεῖον], καὶ τῷ ἀπὸ τῆς EH ἴσον παρὰ τὴν AH παραβεβλήσθω ἑλλείπον εἶδει

3. ἄρα τὸ AB V. ἄρα] om. PB, m. 2 F. χωρίον ἄρα B. 4. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. B F V b. 6. ὑπ' P. 8. ἐστι BV, comp. F b. 9. AB] $ABΓ$ P. 10. ἑκτῆς τῆς] corr. ex ἑκτῆς m. rec. P. 11. ἡ] om. B F V b. 14. καὶ οὐδετέρω] in ras. F. 15. αὐτῶν] τῶν AH , $HΔ$ B V b, e corr. F. 16. τῆς] (alt.) τῇ F. 17. συμμέτρον P. ἑαυτοῦ F. 18. ἐπεὶ — 19. μήκει] mg. m. 2 B. 19. ἑαυτῆς B, ἑαυτοῦ F. τοῦ] τῷ b. 20. AH] $ΔH$ B. παραβέλωμεν B, παρα-

AN irrationalis est cum rationali totum medium efficiens, quae uocatur [prop. LXXVII]. et $AN^2 = AB$.

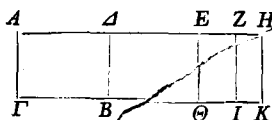
Ergo recta spatio AB aequalis quadrata recta cum rationali totum medium efficiens est; quod erat demonstrandum.

XCVI.

Si spatium recta rationali et sexta apotome comprehenditur, recta spatio aequalis quadrata recta est cum medio totum medium efficiens.

Spatium enim AB rationali AF et sexta apotome AD comprehendatur. dico, rectam spatio AB aequalem quadratam rectam esse cum medio totum medium efficientem.

nam ΔH rectae AD congruens sit. itaque AH , $H\Delta$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles,



et neutra earum rationali propositae AF longitudine commensurabilis est, tota autem AH congruentem ΔH quadrata excedit quadrato rectae sibi longitudine incommensurabilis [def. tert. 6]. iam quoniam AH^2 excedit $H\Delta^2$ quadrato rectae sibi incommensurabilis longitudine, si $\frac{1}{4} \Delta H^2$ aequale

rectae AH adplicatur spatium figura quadrata deficiens, in partes incommensurabiles eam diuidet [prop. XVIII]. ΔH igitur in puncto E in duas partes aequales secetur, et quadrato EH^2 aequale rectae AH adplicetur

βαλλόμενον F, παραβάλλωμεν Vb. 22. σημείον] om. P. τῶ] τό F. 23. ἴσον] om. V. ἴσον ἐλλείπον V.

- τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν AZ, ZH ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZH μήκει. ὥς δὲ ἡ AZ πρὸς τὴν ZH , οὕτως ἐστὶ τὸ AI πρὸς τὸ ZK ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ AI τῷ ZK . καὶ ἐπεὶ αἱ AH, AG ῥηταὶ
- 5 εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον ἐστὶ τὸ AK . πάλιν, ἐπεὶ αἱ $AG, \Delta H$ ῥηταὶ εἰσι καὶ ἀσύμμετροι μήκει, μέσον ἐστὶ καὶ τὸ ΔK . ἐπεὶ οὖν αἱ $AH, H\Delta$ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AH τῇ $H\Delta$ μήκει. ὥς δὲ ἡ AH πρὸς τὴν $H\Delta$,
- 10 οὕτως ἐστὶ τὸ AK πρὸς τὸ $K\Delta$. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ AK τῷ $K\Delta$. συνεστάτω οὖν τῷ μὲν AI ἴσον τετράγωνον τὸ AM , τῷ δὲ ZK ἴσον ἀφηγήσθω περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὸ $N\Xi$. περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ $AM, N\Xi$ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν
- 15 διάμετρος ἡ OP , καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ὁμοίως δὲ τοῖς ἐπάνω δεξιόμεν, ὅτι ἡ AN δύναται τὸ AB χωρίον.

Λέγω, ὅτι ἡ AN [ἡ] μετὰ μέσον μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

- 20 Ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐδείχθη τὸ AK καὶ ἐστὶν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν AO, ON , τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AO, ON μέσον ἐστίν. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐδείχθη τὸ ΔK καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ δις ὑπὸ τῶν AO, ON , καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AO, ON μέσον ἐστίν. καὶ
- 25 ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐδείχθη τὸ AK τῷ ΔK , ἀσύμμετρα [ἄρα] ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AO, ON τετράγωνα τῷ δις ὑπὸ τῶν AO, ON . καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ

1. ἀσύμμετρον P, corr. m. 1. 2. ZH] HZ F. 3. AI] ἀπὸ AI F. 4. ἐστὶν P. AI] corr. ex AG m. rec. P. 5. AK] corr. ex ΔK m. rec. P. 6. πάλιν — 7. ΔK] om. P. 10. $K\Delta$] ΔK V. 11. $K\Delta$] corr. ex ΔK V. 12. ἀφηγήσθω

spatium figura quadrata deficiens, et sit $AZ \times ZH$. itaque AZ , ZH longitudine incommensurabiles sunt. est autem $AZ:ZH = AI:ZK$ [VI, 1]. itaque AI , ZK incommensurabilia sunt [prop. XI]. et quoniam AH , AI rationales sunt potentia tantum commensurabiles, AK medium est [prop. XXI]. rursus quoniam AI , AH rationales sunt et longitudine incommensurabiles, etiam AK medium est [id.]. quoniam igitur AH , $H\Delta$ potentia tantum commensurabiles sunt, AH et $H\Delta$ longitudine incommensurabiles sunt. est autem $AH:H\Delta = AK:K\Delta$ [VI, 1]. itaque AK , $K\Delta$ incommensurabilia sunt [prop. XI]. construatur igitur quadratum $AM = AI$, et spatio ZK aequale auferatur $N\Xi$ in eodem angulo positum. itaque quadrata AM , $N\Xi$ circum eandem diametrum posita sunt [VI, 26]. sit OP eorum diametrus, et describatur figura [uol. I p. 137 uot.]. eodem igitur modo, quo supra, demonstrabimus, esse $AN^2 = AB$.

dico, AN rectam esse cum medio totum medium efficientem. nam quoniam demonstrauius, AK medium esse, et $AK = AO^2 + ON^2$, $AO^2 + ON^2$ medium est. rursus quoniam demonstrauius ΔK medium esse, et $\Delta K = 2AO \times ON$, etiam $2AO \times ON$ medium est. et quoniam demonstrauius, AK et ΔK incommensurabilia esse, etiam $AO^2 + ON^2$ et $2AO \times ON$ incommensurabilia sunt. et quoniam AI , ZK incom-

$\tau\acute{o}$ $N\Xi$ V. 13. $\pi\epsilon\rho\acute{\iota}$ — $\gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha\nu$] om. Fb, mg. m. 2 B. $\alpha\upsilon\tau\eta\eta\nu$] (prius) $\alpha\upsilon\tau\eta\eta\nu$ $\tau\eta\nu$ $\upsilon\pi\acute{o}$ ΛOM V. $\tau\acute{o}$ $N\Xi$] om. V. 14. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$] $\acute{\epsilon}\lambda\iota\iota$ V. $\tau\epsilon\tau\rho\acute{\alpha}\gamma\omega\nu\alpha$] om. V. 16. $\delta\upsilon\nu\alpha\tau\alpha\iota$ — 18. ΛN] mg. m. 2 V. 18. η] (alt.) om. P. 20. $\acute{\iota}\sigma\sigma\omicron\nu$] m. 2 F. 22. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ PBVb, comp. F. 24. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ PBV, comp. Fb. 26. $\acute{\alpha}\rho\alpha$] om. BFVb.

ΑΙ τῷ ΖΚ, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΟ τῷ ἀπὸ τῆς ΟΝ· αἱ ΑΟ, ΟΝ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ δις ὑπ' αὐτῶν μέσον ἔτι τε
 5 τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα ἀσύμμετρα τῷ δις ὑπ' αὐτῶν. ἡ ἄρα ΑΝ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα· καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Ἡ ἄρα τὸ χωρίον δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10

95'.

Το ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην.

Ἐστω ἀποτομή ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ
 15 πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Ἐστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόξουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω
 20 τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ τὸ ΚΑ. ὅλον ἄρα τὸ ΓΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΑ ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. τετμήσθω ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν σημεῖον, καὶ ἥχθω διὰ τοῦ Ν τῇ ΓΔ
 25 παράλληλος ἡ ΝΞ· ἐκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΑΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ ἐπεὶ τὰ ἀπὸ

2. ΟΝ] (prius) ΝΟΡ. 3. τε] μὲν ΒFVb. συγκείμενον] m. 2 V. 4. καὶ] ins. m. 1 V. ἔτι] ε- in ras. V. 6. ΑΝ] corr. ex ΑΝ Β. 7. ποιοῦσαι φ. 8. χωρίον] ΑΒ ΒFb, ΑΒ χωρίον V. 9. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] : ~ Ρ. 11. ἀπὸ] om. b.

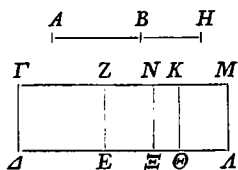
mensurabilia sunt, etiam AO^2 , ON^2 incommensurabilia sunt. itaque AO , ON potentia incommensurabiles sunt efficientes summam quadratorum mediam et duplum rectangulum medium et praeterea quadrata et duplum rectangulum incommensurabilia. itaque AN irrationalis est cum medio totum medium efficiens, quae uocatur [prop. LXXVIII]. et $AN^2 = AB$.

Ergo recta spatio illo aequalis quadrata recta est cum medio totum medium efficiens; quod erat demonstrandum.

XCVII.

Quadratum apotomes rectae rationali adplicatum latitudinem efficit apotomen primam.

Sit AB apotome, ΓA autem rationalis, et quadrato AB^2 aequale rectae ΓA adplicetur ΓE latitudinem efficiens ΓZ . dico, ΓZ primam esse apotomen.



nam BH rectae AB congruens sit. itaque AH , HB rationales sunt potentia tantum commensurabiles [prop. LXXIII]. et rectae ΓA adplicetur $\Gamma \Theta = AH^2$, $KA = BH^2$. itaque totum $\Gamma A = AH^2 + HB^2$.

quorum $\Gamma E = AB^2$. itaque reliquum $ZA = 2AH \times HB$ [II, 7]. iam ZM in puncto N in duas partes aequales secetur, et per N rectae ΓA parallela ducatur $NΞ$. itaque $ZΞ = AN = AH \times HB$. et quoniam $AH^2 + HB^2$

12. $\pi\sigma\iota$ P, corr. m. 1. 17. AB] B in ras. V. BH] HB
e corr. V. 19. AH] corr. ex AA m. 1 F. 22. ZA] AZ P.
23. $\tau\hat{\omega}\nu$] om. P. 25. $ZΞ$] $ΞZ$ F. AN] corr. ex NA V.
26. $\tau\hat{\omega}$ $\alpha\pi\alpha\chi$ $\upsilon\pi\acute{o}$ V.

- τῶν AH , HB ῥητά ἐστιν, καὶ ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AH ,
 HB ἴσον τὸ ΔM , ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΔM . καὶ παρὰ
ῥητὴν τὴν $\Gamma\Delta$ παραβέβληται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓM .
ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓM καὶ σύμμετρος τῇ $\Gamma\Delta$ μήκει.
5 πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AH , HB , καὶ
τῷ δις ὑπὸ τῶν AH , HB ἴσον τὸ $Z\Lambda$, μέσον ἄρα τὸ
 $Z\Lambda$. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν $\Gamma\Delta$ παράκειται πλάτος ποιοῦν
τὴν ZM . ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ZM καὶ ἀσύμμετρος τῇ
 $\Gamma\Delta$ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὰ μὲν ἀπὸ τῶν AH , HB ῥητά
10 ἐστὶν, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν AH , HB μέσον, ἀσύμμετρα
ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AH , HB τῷ δις ὑπὸ τῶν AH ,
 HB . καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν AH , HB ἴσον ἐστὶ τὸ
 $\Gamma\Delta$, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν AH , HB τὸ $Z\Lambda$. ἀσύμμετρον
ἄρα ἐστὶ τὸ ΔM τῷ $Z\Lambda$. ὥς δὲ τὸ ΔM πρὸς τὸ
15 $Z\Lambda$, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓM πρὸς τὴν ZM . ἀσύμμετρος
ἄρα ἐστὶν ἡ ΓM τῇ ZM μήκει. καὶ εἰσὶν ἀμφοτέραι
ῥηταί· αἱ ἄρα ΓM , MZ ῥηταί· εἰσι δυνάμει μόνον
σύμμετροι· ἡ ΓZ ἄρα ἀποτομή ἐστίν.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ πρώτη.

- 20 Ἐπεὶ γὰρ τῶν ἀπὸ τῶν AH , HB μέσον ἀνάλογόν
ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν AH , HB , καὶ ἐστὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς
 AH ἴσον τὸ $\Gamma\Theta$, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς BH ἴσον τὸ $K\Lambda$,
τῷ δὲ ὑπὸ τῶν AH , HB τὸ $N\Lambda$, καὶ τῶν $\Gamma\Theta$, $K\Lambda$
ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστὶ τὸ $N\Lambda$. ἔστιν ἄρα ὥς τὸ
25 $\Gamma\Theta$ πρὸς τὸ $N\Lambda$, οὕτως τὸ $N\Lambda$ πρὸς τὸ $K\Lambda$. ἀλλ'
ὥς μὲν τὸ $\Gamma\Theta$ πρὸς τὸ $N\Lambda$, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓK πρὸς

1. ῥητά → 2. HB] mg. m. 2 B. 1. ἐστίν] ἐστὶ PVBb, comp. F. καὶ ἐστὶ τοῖς] τοῖς δέ V. 3. παράκειται Theon (BFVb); παραβέβληται supra add. m. 2 B. 6. τῷ] corr. ex τό FV. 8. ἐστίν] ἐστὶ καὶ F. καὶ ἀσύμμετρος] bis b. 10. ἐστὶ BV, comp. b, εἰσι F? μέσα P, et F, corr. m. 1. 11. ἄρα] om. B. ἐστίν P. 12. καί] καὶ ἐστὶ BFVb. ἐστί]

rationale est, et $\Delta M = AH^2 + HB^2$, ΔM rationale est. et rectae rationali $\Gamma\Delta$ adplicatum est latitudinem efficiens ΓM . itaque ΓM rationalis est et rectae $\Gamma\Delta$ longitudine commensurabilis [prop. XX]. rursus quoniam medium est $2 AH \times HB$, et $Z\Delta = 2 AH \times HB$, $Z\Delta$ medium est. et rectae rationali $\Gamma\Delta$ adplicatum est latitudinem efficiens ZM . itaque ZM rationalis est et rectae $\Gamma\Delta$ longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. et quoniam $AH^2 + HB^2$ rationale est, $2 AH \times HB$ autem medium, $AH^2 + HB^2$ et $2 AH \times HB$ incommensurabilia sunt. et

$$\Gamma\Delta = AH^2 + HB^2, Z\Delta = 2 AH \times HB.$$

itaque ΔM , $Z\Delta$ incommensurabilia sunt. est autem $\Delta M : Z\Delta = \Gamma M : ZM$ [VI, 1]. itaque ΓM , ZM longitudine incommensurabiles sunt [prop. XI]. et utraque rationalis est. itaque ΓM , MZ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo ΓZ apotome est [prop. LXXIII].

iam dico, eandem primam esse. quoniam enim $AH \times HB$ medium est proportionale inter AH^2 et HB^2 [prop. XXI lemma], et $\Gamma\Theta = AH^2$, $K\Delta = BH^2$, $N\Delta = AH \times HB$, erit etiam $N\Delta$ medium proportionale inter $\Gamma\Theta$, $K\Delta$. quare $\Gamma\Theta : N\Delta = N\Delta : K\Delta$. est autem $\Gamma\Theta : N\Delta = \Gamma K : NM$ et $N\Delta : K\Delta = NM : KM$ [VI, 1]. itaque $\Gamma K \times KM = MN^2$ [VI, 17] $= \frac{1}{4} ZM^2$.

om. BFVb. 13. HB] corr. ex AB m. 1 b, HB ἴσον V. 15. τῇν] om. B. 18. ἐστὶ BVb, comp. F. 21. ἐστὶ] (alt.) ἐστὶν P. τῷ] corr. ex τό m. 1 F. 22. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν AH, HB ἴσον τὸ NΔ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς BH ἴσον τὸ KΔ· καὶ κτλ. Theon (BFVb). 24. NΔ] e corr. V. ἐστὶν — 25. πρὸς τὸ NΔ] mg. m. 1 P. 25. NΔ] corr. ex AN V. οὕτως — 26. NΔ] mg. m. 2 B. 26. NΔ] corr. ex AN V. ἐστὶν] m. 2 F. ἡ] ras. 1 litt. b.

- τὴν NM . ὥς δὲ τὸ NA πρὸς τὸ KA , οὕτως ἐστὶν ἡ NM πρὸς τὴν KM . τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $ΓK$, KM ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς NM , τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ZM . καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ
 5 τῆς AH τῷ ἀπὸ τῆς HB , σύμμετρόν [ἐστὶ] καὶ τὸ $ΓΘ$ τῷ KA . ὥς δὲ τὸ $ΓΘ$ πρὸς τὸ KA , οὕτως ἡ $ΓK$ πρὸς τὴν KM . σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ $ΓK$ τῇ KM . ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ $ΓM$, MZ , καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ZM ἴσον παρὰ τὴν
 10 $ΓM$ παραβέβληται ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ τὸ ὑπὸ τῶν $ΓK$, KM , καὶ ἐστὶ σύμμετρος ἡ $ΓK$ τῇ KM , ἡ ἄρα $ΓM$ τῆς MZ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ ἐστὶν ἡ $ΓM$ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ $ΓΔ$ μήκει· ἡ ἄρα $ΓZ$ ἀποτομή ἐστὶ πρώτη.
 15 Τὸ ἄρα ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

9η'.

- Τὸ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν δευ-
 20 τέραν.

- "Ἐστω μέσης ἀποτομῆς πρώτη ἡ AB , ῥητὴ δὲ ἡ $ΓΔ$, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB ἴσον παρὰ τὴν $ΓΔ$ παραβεβλήσθω τὸ $ΓΕ$ πλάτος ποιῶν τὴν $ΓΖ$. λέγω, ὅτι ἡ $ΓΖ$ ἀποτομή ἐστὶ δευτέρα.
 25 "Ἐστω γὰρ τῇ AB προσαρμόζουσα ἡ BH . αἱ ἄρα AH , HB μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AH ἴσον παρὰ τὴν

1. ὥς δέ — 2. KM] om. F, uidetur fuisse in mg. 2. Post prius KM add. καὶ ὥς ἄρα ἡ $ΓK$ πρὸς τὴν NM (MNF), οὕτως ἡ

et quoniam AH^2 , HB^2 commensurabilia sunt, etiam $\Gamma\Theta$, KA commensurabilia sunt. est autem

$$\Gamma\Theta : KA = \Gamma K : KM$$

[VI, 1]. itaque ΓK , KM commensurabiles sunt [prop. XI]. iam quoniam sunt duae rectae inaequales ΓM , MZ , et $\frac{1}{4} ZM^2$ aequale spatium rectae ΓM adplicatum est $\Gamma K \times KM$ figura quadrata deficiens, et ΓK , KM commensurabiles sunt, ΓM^2 excedit MZ^2 quadrato rectae sibi commensurabilis longitudine [prop. XVII]. et ΓM rationali propositae ΓA longitudine commensurabilis est. itaque ΓZ apotome est prima [deff. tert. 1].

Ergo quadratum apotomes rectae rationali adplicatum latitudinem efficit apotomen primam; quod erat demonstrandum.

XCVIII.

Quadratum mediae apotomes primae rectae rationali adplicatum latitudinem efficit apotomen secundam.

Sit AB mediae apotome prima, ΓA autem rationalis, et quadrato AB^2 aequale rectae ΓA adplicetur ΓE latitudinem efficiens ΓZ . dico, ΓZ apotomen esse secundam.

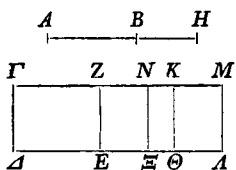
nam BH rectae AB congruens sit. itaque AH , HB mediae sunt potentia tantum commensurabiles

NM πρὸς τὴν KM FVb. 3. *τουτέστιν* P. 4. *σύμμετρος* P, corr. m. rec. *έστιν* P. 5. *έστι*] om. P. 11. *έστιν* P. *ἀσύμμετρος* F. 12. ΓM] $M\Gamma$ e corr. V; KM supra scr. Γ b. MZ] ZM F. *ἀσυμμέτρον* b, α - add. m. 2 F. 15. *παρὰ φητήν*] om. V. 16. *ὅπερ έδει δείξαι*] comp. P, om. BFVb. 21. *μέση* BFVb. 22. Post *παρὰ* del. *φη* m. 1 P. ΓA] ΓM F. 23. ΓE] corr. ex $\Gamma\Theta$ m. rec. P. 25. BH] corr. ex ZH m. 2 V. *αί άρα*] *άρα ή* F. 26. *είσιν* B.

- ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΚ,
 τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΑ πλάτος ποιοῦν τὴν
 ΚΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ,
 ΗΒ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΓΑ. καὶ παρὰ ρητὴν τὴν ΓΔ
 5 παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ρητὴ ἄρα ἐστὶν
 ἡ ΓΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὸ ΓΑ
 ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ
 ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΕ, λοιπὸν ἄρα τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ,
 ΗΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΖΑ. ρητὸν δέ [ἐστὶ] τὸ δις ὑπὸ
 10 τῶν ΑΗ, ΗΒ· ρητὸν ἄρα τὸ ΖΑ. καὶ παρὰ ρητὴν
 τὴν ΖΕ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ρητὴ ἄρα
 ἐστὶ καὶ ἡ ΖΜ καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. ἐπεὶ οὖν
 τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, τουτέστι τὸ ΓΑ, μέσον
 ἐστίν, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, τουτέστι τὸ ΖΑ,
 15 ρητόν, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΑ τῷ ΖΑ. ὥς δὲ τὸ
 ΓΑ πρὸς τὸ ΖΑ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΖΜ·
 ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΓΜ τῇ ΖΜ μήκει. καὶ εἰσιν ἀμ-
 φότεραι ρηταί· αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ρηταί εἰσι δυνάμει
 μόνον σύμμετροι· ἡ ΓΖ ἄρα ἀποτομή ἐστίν.
- 20 Λέγω δὴ, ὅτι καὶ δευτέρα.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν, καὶ ἤχθω
 διὰ τοῦ Ν τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἐκάτερον ἄρα
 τῶν ΖΞ, ΝΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ
 ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τετραγώνων μέσον ἀνά-

1. τὸ ἄρα βεβλήσθω φ. τὸ ΓΘ] om. V, supra est ras.
 ΓΚ] ΓΚ τὸ ΓΘ V. 3. ΓΑ] ΓΔ b. 4. Post ΗΒ add.
 καὶ ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσα καὶ ἴσα τῷ ΓΑ V. 5.
 ρητῇ] -τή in ras. P. 6. ἡ ΓΜ καί] m. 2 F. 8. ἐστὶ τῷ
 ΓΕ] τῷ ΓΕ ὧν φ. 9. ἐστὶ] om. P. 10. ἄρα] ἐστὶ καὶ V,
 supra add. ἄρα m. 2; ἄρα καὶ F? (καὶ φ). 12. ἐστὶν B. 14.
 ἐστὶ PBFV, comp. b. ΗΒ ρητόν V. ΖΑ] ΓΑ, supra scr.
 Ζ, b. 15. ρητόν] om. V. ἄρα] m. 2 F. 16. πρὸς τό]
 τῷ B, corr. m. 2. ἐστίν] om. V. 17. ἀσύμμετρος — ΖΜ]



spatium rationale comprehen-
dentes [prop. LXXIV]. et qua-
drato AH^2 aequale rectae $\Gamma\Delta$
adplicetur $\Gamma\Theta$ latitudinem efficiens
 ΓK , quadrato autem HB^2 aequale
 $K\Delta$ latitudinem efficiens KM .

quare totum $\Gamma\Delta = AH^2 + HB^2$. quare etiam $\Gamma\Delta$
medium est. et rectae rationali $\Gamma\Delta$ adplicatum est
latitudinem efficiens ΓM . itaque ΓM rationalis est
et rectae $\Gamma\Delta$ longitudine incommensurabilis [prop.
XXII]. et quoniam est

$$\Gamma\Delta = AH^2 + HB^2,$$

quorum $AB^2 = \Gamma E$, erit reliquum $2AH \times HB = ZA$
[II, 7]. uerum $2AH \times HB$ rationale est. itaque ZA
rationale est. et rectae rationali ZE adplicatum est
latitudinem efficiens ZM . itaque etiam ZM rationalis
est et rectae $\Gamma\Delta$ longitudine commensurabilis [prop.
XX]. quoniam igitur $AH^2 + HB^2$, hoc est $\Gamma\Delta$, me-
dium est, et $2AH \times HB$, hoc est ZA , rationale, $\Gamma\Delta$
et ZA incommensurabilia sunt. est autem

$$\Gamma\Delta : ZA = \Gamma M : ZM$$

[VI, 1]. itaque ΓM , ZM longitudine incommensura-
biles sunt [prop. XI]. et utraque rationalis est. itaque
 ΓM , MZ rationales sunt potentia tantum commen-
surabiles. ergo ΓZ apotome est [prop. LXXIII].

iam dico, eandem secundam esse. ZM enim in N
in duas partes aequales secetur, et per N rectae $\Gamma\Delta$
parallela ducatur $NΞ$. itaque $ZΞ = NA = AH \times HB$.

mg. m. 2 B. 18. ἄρα] φ, post MZ hab. F. 19. ἐστὶ BVb,
comp. F. 20. ὅτι ἐστὶ Vb. δευτέρα ἐστὶν B. 23. $ZΞ$]
 Z in ras. B. 24. ἐπεὶ] ἐτι B (supra est ras.).

λογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν AH , HB , καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ
 μὲν ἀπὸ τῆς AH τῷ $\Gamma\Theta$, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AH , HB
 τῷ NA , τὸ δὲ ἀπὸ τῆς BH τῷ KA , καὶ τῶν $\Gamma\Theta$,
 KA ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ NA . ἐστὶν ἄρα ὡς
 5 τὸ $\Gamma\Theta$ πρὸς τὸ NA , οὕτως τὸ NA πρὸς τὸ KA .
 ἀλλ' ὡς μὲν τὸ $\Gamma\Theta$ πρὸς τὸ NA , οὕτως ἐστὶν ἡ ΓK
 πρὸς τὴν NM , ὡς δὲ τὸ NA πρὸς τὸ KA , οὕτως
 ἐστὶν ἡ NM πρὸς τὴν MK . ὡς ἄρα ἡ ΓK πρὸς τὴν
 NM , οὕτως ἐστὶν ἡ NM πρὸς τὴν KM . τὸ ἄρα ὑπὸ
 10 τῶν ΓK , KM ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς NM , τουτέστι
 τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ZM [καὶ ἐπεὶ σύμ-
 μετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς AH τῷ ἀπὸ τῆς BH , σύμμε-
 τρόν ἐστι καὶ τὸ $\Gamma\Theta$ τῷ KA , τουτέστιν ἡ ΓK τῇ KM].
 ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓM , MZ , καὶ
 15 τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς MZ ἴσον παρὰ τὴν
 μεῖζονα τὴν ΓM παραβέβληται ἐλλείπον εἶδει τετρα-
 γώνῳ τὸ ὑπὸ τῶν ΓK , KM καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν
 διαιρεῖ, ἡ ἄρα ΓM τῆς MZ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ
 συμμέτρου ἐαυτῇ μήκει. καὶ ἐστὶν ἡ προσαρμόζουσα
 20 ἡ ZM σύμμετρος μήκει τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ ΓA . ἡ
 ἄρα ΓZ ἀποτομή ἐστὶ δευτέρα.

Τὸ ἄρα ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ῥητὴν
 παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν δευτέραν.
 ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

25

εθ'.

Τὸ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ
 ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν
 τρίτην.

1. ἐστὶν] ἐστι V. ἴσον] supra scr. m. 1 V. 2. τῷ] in
 ras. V. 3. τῷ] τῶν mut. in τό m. 1 V. τό] τῷ P. τῷ]
 τό PV. τῶν] τῷ b. 5. τὸ NA] (alt.) mg. m. 2 F. πρὸς
 τὸ KA] τὸ NA φ. Deinde del. m. 1: ἀλλ' ὡς μὲν τὸ $\Gamma\Theta$ πρὸς

et quoniam $AH \times HB$ medium est proportionale inter AH^2 et HB^2 [prop. XXI lemma], et $AH^2 = \Gamma\Theta$, $AH \times HB = NA$, $BH^2 = KA$, etiam NA medium est proportionale inter $\Gamma\Theta$, KA . itaque erit $\Gamma\Theta : NA = NA : KA$. uerum $\Gamma\Theta : NA = \Gamma K : NM$, $NA : KA = NM : MK$ [VI, 1]. quare $\Gamma K : NM = NM : KM$. itaque $\Gamma K \times KM = NM^2$ [VI, 17], hoc est $= \frac{1}{4} ZM^2$. iam quoniam sunt duae rectae inaequales ΓM , MZ , et $\frac{1}{4} MZ^2$ aequale maiori ΓM adplicatum est spatium $\Gamma K \times KM$ figura quadrata deficiens et eam in partes commensurabiles¹⁾ diuidit, ΓM^2 excedit MZ^2 quadrato rectae sibi commensurabilis longitudine [prop. XVII]. et congruens ZM rationali propositae ΓA longitudine commensurabilis est. itaque ΓZ apotome est secunda [deff. tert. 2].

Ergo quadratum mediae apotomes primae rectae rationali adplicatum latitudinem efficit apotomen secundam; quod erat demonstrandum.

IC.

Quadratum mediae apotomes secundae rectae rationali adplicatum latitudinem efficit apotomen tertiam.

1) Nam AH^2 et BH^2 commensurabilia sunt, et

$$AH^2 : BH^2 = \Gamma\Theta : KA = \Gamma K : KM$$

[VI, 1]; tum u. prop. XI.

$\tau\acute{o}$ NA , οὕτως $\tau\acute{o}$ NA πρὸς $\tau\acute{o}$ KA V. 8. NM] N in ras. V.
9. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$] om. V. 11. $\tau\acute{o}\tilde{\upsilon}$] $\tau\acute{o}$ F. καὶ $\acute{\epsilon}\pi\epsilon\iota$ — 13.
 KM] om. P. 12. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$] om. Fb. Post BH del. οὕτως
m. 1 V. 13. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$] supra scr. m. 1 FV. 14. $\delta\acute{\upsilon}\omicron$ $\epsilon\acute{\upsilon}\theta\epsilon\iota\alpha\iota$] supra scr. m. 1 F. καὶ $\tau\acute{o}\tilde{\upsilon}$] $\tau\acute{o}\tilde{\upsilon}$ δὲ BFVb. 15. $\tau\eta\varsigma$] e corr. V.
 MZ] corr. ex ZM V. 17. $\tau\acute{o}$] mut. in $\tau\acute{o}\tilde{\upsilon}$ m. 2 P. 18.
 $\tau\eta\varsigma$] corr. ex $\tau\eta$ m. rec. V. 20. Mg. γρ. ἀσύμμετρος m. 1 P.
 ΓA] ΓA μήκει φ. 22. $\pi\rho\acute{\omega}\tau\eta\varsigma$] om. P. 24. ὅπερ $\acute{\epsilon}\delta\epsilon\iota$
 $\delta\epsilon\iota\chi\alpha\iota$] : $\curvearrowright$ P, om. BFVb.

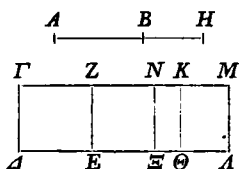
"Εστω μέσης ἀποτομή δευτέρα ἡ AB , ῥητὴ δὲ ἡ ΓA , καὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB ἴσον παρὰ τὴν ΓA παραβεβλήσθω τὸ ΓE πλάτος ποιοῦν τὴν ΓZ . λέγω, ὅτι ἡ ΓZ ἀποτομή ἐστὶ τρίτη.

- 5 "Εστω γὰρ τῇ AB προσαρμόζουσα ἡ BH . αἱ ἄρα AH , HB μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσai. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AH ἴσον παρὰ τὴν ΓA παραβεβλήσθω τὸ $\Gamma \Theta$ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓK , τῷ δὲ ἀπὸ τῆς BH ἴσον παρὰ τὴν $K \Theta$ παραβεβλήσθω
 10 τὸ $K A$ πλάτος ποιοῦν τὴν $K M$. ὅλον ἄρα τὸ ΓA ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AH , HB [καὶ ἐστὶ μέσα τὰ ἀπὸ τῶν AH , HB]. μέσον ἄρα καὶ τὸ ΓA . καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓA παραβεβλήται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓM . ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓM καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓA μήκει. καὶ
 15 ἐπεὶ ὅλον τὸ ΓA ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AH , HB , ὧν τὸ ΓE ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB , λοιπὸν ἄρα τὸ AZ ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν AH , HB . τετμήσθω οὖν ἡ ZM δίχα κατὰ τὸ N σημεῖον, καὶ τῇ ΓA παράλληλος ἤχθω ἡ $N \Xi$. ἐκάτερον ἄρα τῶν $Z \Xi$, $N A$ ἴσον
 20 ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν AH , HB . μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AH , HB . μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ $Z A$. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν EZ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ZM . ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ZM καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓA μήκει. καὶ
 25 ἐπεὶ αἱ AH , HB δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, ἀσύμμετρος ἄρα [ἐστὶ] μήκει ἡ AH τῇ HB . ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AH τῷ ὑπὸ τῶν AH , HB . ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AH σύμμετρά ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν

1. μέση BV . δευτέρα] in ras. V. 4. τρίτη ἐστὶν $B F V b$. 9. $K \Theta$] corr. ex $\Gamma \Theta$ V. 10. $K M$] corr. ex $K A$ m. 1 F. ΓA] corr. ex $K A$ V. 11. καὶ — 12. $H B$] om. $F V b$, m. 2 B. 13. ῥητόν P. 17. $A Z$] corr. ex $Z A$ V. 21.

Sit AB mediae apotome secunda, ΓA autem rationalis, et quadrato AB^2 aequale rectae ΓA adplicetur ΓE latitudinem efficiens ΓZ . dico, ΓZ apotomen tertiam esse.

nam BH rectae AB congruens sit. itaque AH, HB mediae sunt potentia tantum commensurabiles spatium



medium comprehendentes [prop. LXXV]. et quadrato AH^2 aequale rectae ΓA adplicetur $\Gamma \Theta$

latitudinem efficiens ΓK , quadrato autem BH^2 aequale rectae $K \Theta$

adplicetur $K A$ latitudinem efficiens $K M$. itaque totum $\Gamma A = AH^2 + HB^2$. et

$AH^2 + HB^2$ medium est. itaque etiam ΓA medium est. et rationali ΓA adplicatum est latitudinem efficiens ΓM . quare ΓM rationalis est et rectae ΓA

longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. et quoniam est $\Gamma A = AH^2 + HB^2$, quorum $\Gamma E = AB^2$,

erit reliquum $AZ = 2 AH \times HB$ [II, 7]. iam ZM in puncto N in duas partes aequales secetur, et rectae ΓA parallela ducatur $N \Xi$. itaque

$Z \Xi = NA = AH \times HB$. uerum $AH \times HB$ medium est. itaque etiam ZA medium est. et rectae rationali EZ

adplicatum est latitudinem efficiens ZM . quare ZM rationalis est et rectae ΓA longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. et quoniam AH, HB potentia tantum commensurabiles sunt, AH et HB longitudine incommensurabiles sunt. quare etiam AH^2 et $AH \times HB$

incommensurabilia sunt [prop. XXI lemma, prop. XI].

$Z A$] corr. ex $Z A$ m. rec. P, mut. in $A Z$ V. 23. $\kappa \alpha \iota$] (primum)

$\xi \sigma \tau \iota \nu$ V. 25. $\xi \sigma \tau \iota$] om. P. $A H$] H in ras. V. $\tau \eta$] om. b.

AH, HB , τῷ δὲ ὑπὸ τῶν AH, HB τὸ δις ὑπὸ τῶν
 AH, HB ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AH, HB
 τῷ δις ὑπὸ τῶν AH, HB . ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν
 AH, HB ἴσον ἐστὶ τὸ $ΓΑ$, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν AH ,
 5 HB ἴσον ἐστὶ τὸ $ΖΑ$. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΓΑ$
 τῷ $ΖΑ$. ὥς δὲ τὸ $ΓΑ$ πρὸς τὸ $ΖΑ$, οὕτως ἐστὶν ἡ
 $ΓΜ$ πρὸς τὴν $ΖΜ$. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ $ΓΜ$ τῇ
 $ΖΜ$ μήκει. καὶ εἰσιν ἀμφοτέραι ρηταί· αἱ ἄρα $ΓΜ$,
 $ΜΖ$ ρηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομῇ
 10 ἄρα ἐστὶν ἡ $ΓΖ$.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ τρίτη.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς AH τῷ ἀπὸ
 τῆς HB , σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ $ΓΘ$ τῷ $ΚΑ$. ὥστε
 καὶ ἡ $ΓΚ$ τῇ $ΚΜ$. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν AH, HB
 15 μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν AH, HB , καὶ ἐστὶ
 τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AH ἴσον τὸ $ΓΘ$, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς HB
 ἴσον τὸ $ΚΑ$, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν AH, HB ἴσον τὸ $ΝΑ$,
 καὶ τῶν $ΓΘ, ΚΑ$ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ $ΝΑ$.
 ἔστιν ἄρα ὥς τὸ $ΓΘ$ πρὸς τὸ $ΝΑ$, οὕτως τὸ $ΝΑ$
 20 πρὸς τὸ $ΚΑ$. ἀλλ' ὥς μὲν τὸ $ΓΘ$ πρὸς τὸ $ΝΑ$,
 οὕτως ἐστὶν ἡ $ΓΚ$ πρὸς τὴν $ΝΜ$, ὥς δὲ τὸ $ΝΑ$ πρὸς
 τὸ $ΚΑ$, οὕτως ἐστὶν ἡ $ΝΜ$ πρὸς τὴν $ΚΜ$. ὥς ἄρα
 ἡ $ΓΚ$ πρὸς τὴν $ΜΝ$, οὕτως ἐστὶν ἡ $ΜΝ$ πρὸς τὴν
 $ΚΜ$. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $ΓΚ, ΚΜ$ ἴσον ἐστὶ τῷ [ἀπὸ
 25 τῆς $ΜΝ$, τουτέστι τῷ] τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς $ΖΜ$.
 ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ $ΓΜ, ΜΖ$, καὶ
 τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς $ΖΜ$ ἴσον παρὰ τὴν
 $ΓΜ$ παραβέβληται ἐλλεῖπον εἶδει τετραγώνῳ καὶ εἰς

1. τῷ] σύμμετρόν ἐστι τό Theon (BFVb). 2. Post HB
 del. τὸ $ΖΑ$ V. ἀσύμμετρα — 3. HB] om. P. 2. ἀσύμμετρα
 — 5. $ΖΑ$] mg. m. 1 V. 2. ἄρα] om. b. ἔστιν ἄρα V. ἀπό]

uerum AH^2 et $AH^2 + HB^2$, $AH \times HB$ et $2AH \times HB$ commensurabilia sunt. itaque $AH^2 + HB^2$ et $2AH \times HB$ incommensurabilia sunt [prop. XIII]. est autem

$$\Gamma A = AH^2 + HB^2, ZA = 2AH \times HB.$$

quare ΓA , ZA incommensurabilia sunt. est autem $\Gamma A : ZA = \Gamma M : ZM$ [VI, 1]. quare ΓM , ZM longitudine incommensurabiles sunt [prop. XI]. et utraque rationalis est. itaque ΓM , MZ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo ΓZ apotome est [prop. LXXIII].

Iam dico, eandem tertiam esse. nam quoniam AH^2 , HB^2 commensurabilia sunt, etiam $\Gamma\Theta$, KA commensurabilia sunt. quare etiam ΓK , KM commensurabiles sunt [VI, 1; prop. XI]. et quoniam $AH \times HB$ medium est proportionale inter AH^2 et HB^2 [prop. XXI lemma], et $\Gamma\Theta = AH^2$, $KA = HB^2$, $NA = AH \times HB$, etiam NA medium est proportionale inter $\Gamma\Theta$, KA . itaque $\Gamma\Theta : NA = NA : KA$. est autem

$$\Gamma\Theta : NA = \Gamma K : NM, NA : KA = NM : KM$$

[VI, 1]. quare $\Gamma K : MN = MN : KM$. itaque [VI, 17] $\Gamma K \times KM = MN^2 = \frac{1}{4} ZM^2$. quoniam igitur duae rectae inaequales sunt ΓM , MZ , et $\frac{1}{4} ZM^2$ aequale rectae ΓM spatium adplicatum est figura quadrata deficiens et eam in partes commensurabiles diuidit,

ὑπό B. 4. ΓA] corr. ex ΓA m. rec. P. τῶ] τό V. 5. τό] (prius) mut. in τῶ V. 7. ΓM] $H\Gamma$ b. ZM] MZ P, ΓM b. 8. Post ZM eras. μή V. 9. MZ] ZM F. 12. σύμμετρος P, corr. m. rec. 13. ἄρα ἐστὶ V. KA] ΓA P. 14. KM σύμμετρος ἐστὶ V. τῶν] (alt.) om. b. 15. ἐστὶ] (prius) ἐστὶν P. 17. ὑπὸ] ἀπὸ F. 20. τὸν KA P. 21. NM] MN bφ. 22. KA] NK ? P. MN F. ὧς — 23. τὴν KM] punctis del. V. 23. MN] NM V. ἐστὶν] om. V. MN] NM V. 24. ἀπὸ — 25. τῶ] mg. m. 1 P.

σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ, ἡ $ΓΜ$ ἄρα τῆς $ΜΖ$ μείζον
δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ οὐδετέρα τῶν
 $ΓΜ$, $ΜΖ$ σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ
 $ΓΔ$ · ἡ ἄρα $ΓΖ$ ἀποτομή ἐστι τρίτη.

- 5 Τὸ ἄρα ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ ῥητὴν
παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τρίτην· ὅπερ
ἔδει δεῖξαι.

ρ'.

- Τὸ ἀπὸ ἐλάσσονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλό-
10 μενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τετάρτην.

Ἐστω ἐλάσσων ἡ $ΑΒ$, ῥητὴ δὲ ἡ $ΓΔ$, καὶ τῷ ἀπὸ
τῆς $ΑΒ$ ἴσον παρὰ ῥητὴν τὴν $ΓΔ$ παραβεβλήσθω τὸ
 $ΓΕ$ πλάτος ποιοῦν τὴν $ΓΖ$ · λέγω, ὅτι ἡ $ΓΖ$ ἀποτομή
ἐστι τετάρτη.

- 15 Ἐστω γὰρ τῇ $ΑΒ$ προσαρμόζουσα ἡ $ΒΗ$ · αἱ ἄρα
 $ΑΗ$, $ΗΒ$ δυνάμει εἰδὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν
συνκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΗ$, $ΗΒ$ τετραγώνων
ῥητόν, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν $ΑΗ$, $ΗΒ$ μέσον. καὶ τῷ
μὲν ἀπὸ τῆς $ΑΗ$ ἴσον παρὰ τὴν $ΓΔ$ παραβεβλήσθω
20 τὸ $ΓΘ$ πλάτος ποιοῦν τὴν $ΓΚ$, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς $ΒΗ$
ἴσον τὸ $ΚΑ$ πλάτος ποιοῦν τὴν $ΚΜ$ · ὅλον ἄρα τὸ
 $ΓΑ$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΑΗ$, $ΗΒ$. καὶ ἐστι τὸ
συνκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΗ$, $ΗΒ$ ῥητόν· ῥητόν
ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ $ΓΑ$. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν $ΓΔ$ παρὰ-
25 κείται πλάτος ποιοῦν τὴν $ΓΜ$ · ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ $ΓΜ$
καὶ σύμμετρος τῇ $ΓΔ$ μήκει. καὶ ἐπεὶ ὅλον τὸ $ΓΑ$
ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΑΗ$, $ΗΒ$, ὧν τὸ $ΓΕ$ ἴσον ἐστὶ

1. σύμμετρον P. $ΜΖ$] ZM P. 3. μήκει] om. b. 4.
ἐστιν P. 5. τό] corr. ex τῷ m. 2 F. ἀπό] m. 2 F. παρὰ
ῥητὴν] mg. m. 2 V. 6. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. B F V b, comp. P.

ΓM^2 excedit MZ^2 quadrato rectae sibi commensurabilis. et neutra rectarum ΓM , MZ rationali propositae ΓA longitudine commensurabilis est. itaque ΓZ apotome est tertia [deff. tert. 3].

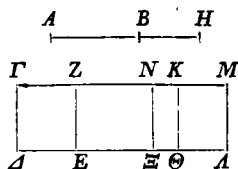
Ergo quadratum mediae apotomes secundae rectae rationali adplicatum latitudinem efficit apotomen secundam; quod erat demonstrandum.

C.

Quadratum minoris rectae rationali adplicatum latitudinem efficit apotomen quartam.

Sit AB minor, ΓA autem rationalis, et quadrato AB^2 aequale rationali ΓA adplicetur ΓE latitudinem efficiens ΓZ . dico, ΓZ apotomen quartam esse.

nam BH rectae AB congruens sit. itaque AH , HB potentia incommensurabiles sunt efficientes $AH^2 + HB^2$



rationale, $2AH \times HB$ autem medium [prop. LXXVI]. et quadrato AH^2 aequale rectae ΓA adplicetur $\Gamma \Theta$ latitudinem efficiens ΓK , et $KA = BH^2$ latitudinem efficiens KM . itaque totum

$\Gamma A = AH^2 + HB^2$. et $AH^2 + HB^2$ rationale est. quare etiam ΓA rationale est. et rationali ΓA adplicatum est latitudinem efficiens ΓM . itaque ΓM rationalis est et rectae ΓA longitudine commensurabilis [prop. XX]. et quoniam totum $\Gamma A = AH^2 + HB^2$,

11. ἐλάσσων] ἐ- in ras. m. 1 P. 14. ἐστιν P. τετάρτη
ἐστίν V. 15. γὰρ] m. 2 F. 16. HB] supra scr. m. 1 P.
19. μέν] om. V. 21. KM] ΓK b. 25. καί] om. Fb,
ἐστιν V.

τῷ ἀπὸ τῆς AB , λοιπὸν ἄρα τὸ ZA ἴσον ἐστὶ τῷ δις
 ὑπὸ τῶν AH, HB . τετμήσθω οὖν ἡ ZM δίχα κατὰ
 τὸ N σημεῖον, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ N ὁποτέρᾳ τῶν $GA,$
 MA παράλληλος ἡ $NΞ$. ἐκάτερον ἄρα τῶν $ZΞ, NA$
 5 ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν AH, HB . καὶ ἐπεὶ τὸ δις ὑπὸ
 τῶν AH, HB μέσον ἐστὶ καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ ZA , καὶ
 τὸ ZA ἄρα μέσον ἐστίν. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ZE
 παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ZM . ῥητὴ ἄρα ἐστὶν
 ἡ ZM καὶ ἀσύμμετρος τῇ GA μήκει. καὶ ἐπεὶ το μὲν
 10 συγκεείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AH, HB ῥητόν ἐστίν,
 τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν AH, HB μέσον, ἀσύμμετρα [ἄρα]
 ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AH, HB τῷ δις ὑπὸ τῶν AH, HB .
 ἴσον δέ [ἐστι] τὸ GA τοῖς ἀπὸ τῶν AH, HB , τῷ δὲ
 δις ὑπὸ τῶν AH, HB ἴσον τὸ ZA . ἀσύμμετρον ἄρα
 15 [ἐστὶ] τὸ GA τῷ ZA . ὥς δὲ τὸ GA πρὸς τὸ ZA ,
 οὕτως ἐστὶν ἡ GM πρὸς τὴν MZ . ἀσύμμετρος ἄρα
 ἐστὶν ἡ GM τῇ MZ μήκει. καὶ εἰσιν ἀμφοτέραι ῥηταί·
 αἱ ἄρα GM, MZ ῥηταί· εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι·
 ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ GZ .

20 Λέγω [δὴ], ὅτι καὶ τετάρτη.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ AH, HB δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι,
 ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AH τῷ ἀπὸ τῆς HB .
 καὶ ἐστὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AH ἴσον τὸ $ΓΘ$, τῷ δὲ ἀπὸ
 τῆς HB ἴσον τὸ $ΚΑ$. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΓΘ$ τῷ
 25 $ΚΑ$. ὥς δὲ τὸ $ΓΘ$ πρὸς τὸ $ΚΑ$, οὕτως ἐστὶν ἡ $ΓΚ$
 πρὸς τὴν $ΚΜ$. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ $ΓΚ$ τῇ $ΚΜ$
 μήκει. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν AH, HB μέσον ἀνά-
 λογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν AH, HB , καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ
 μὲν ἀπὸ τῆς AH τῷ $ΓΘ$, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς HB τῷ $ΚΑ$,

1. τῷ] (alt.) τῶν P. 2. οὖν] οὖν καὶ P. 3. τοῦ N
 σημείου V. 5. τῶν] om. P. 6. τῷ] corr. ex τό m. 1 B.

quorum $GE = AB^2$, erit reliquum $ZA = 2AH \times HB$ [II, 7]. iam ZM in puncto N in duas partes aequales secetur, et per N utrique GA , MA parallela ducatur NE . itaque $ZE = NA = AH \times HB$. et quoniam $2AH \times HB$ medium est et $2AH \times HB = ZA$, etiam ZA medium est. et rectae rationali ZE adplicatum est latitudinem efficiens ZM . itaque ZM rationalis est et rectae GA longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. et quoniam $AH^2 + HB^2$ rationale est, $2AH \times HB$ autem medium, $AH^2 + HB^2$ et $2AH \times HB$ incommensurabilia sunt. uerum $GA = AH^2 + HB^2$ et $ZA = 2AH \times HB$. quare GA , ZA incommensurabilia sunt. est autem $GA:ZA = GM:MZ$ [VI, 1]. quare GM , MZ longitudine incommensurabiles sunt [prop. XI]. et utraque rationalis est. itaque GM , MZ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo GZ apotome est [prop. LXXIII].

Iam dico, eandem quartam esse. nam quoniam AH , HB potentia incommensurabiles sunt, etiam AH^2 et HB^2 incommensurabilia sunt. et $GA = AH^2$, $KA = HB^2$. quare GA , KA incommensurabilia sunt. uerum $GA:KA = GK:KM$ [VI, 1]. itaque GK , KM longitudine incommensurabiles sunt [prop. XI]. et

7. ἐστὶ PBV, comp. Fb. 10. ἐστὶ PBV, comp. Fb. 11. ἄρα] om. P. 13. δ' b. ἐστὶ] om. P. 14. τό] corr. ex τῷ m. 1 F. 15. ἐστὶ] om. P. τό] in ras. m. 1 P. Supra GA τῷ ras. est in V. GA] ZA P. ZA] GA P. 16. πρὸς τὴν] τῇ P. ZM F. ἀσύμμετρος — 17. MZ] om. P. 20. δὴ] om. FVb, m. 2 B. 22. ἄρα] ἐστὶ V. HB] corr. ex BH m. 2 V. 23. τό] corr. ex τῷ m. 1 F. 26. $ΓΚ$] $ΚΓ$ P. 27. μήκει] mg. m. 2 V. 28. τό] (alt.) τῷ PV. 29. μὲν] om. V. τῷ] τό P et V, corr. m. 1. τό] τῷ P. τῷ] τό P. Supra KA add. N m. 1 b.

τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AH , HB τῷ NA , τῶν ἄρα $\Gamma\Theta$, KA
μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ NA . ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ $\Gamma\Theta$
πρὸς τὸ NA , οὕτως τὸ NA πρὸς τὸ KA . ἀλλ' ὡς
μὲν τὸ $\Gamma\Theta$ πρὸς τὸ NA , οὕτως ἐστὶν ἡ ΓK πρὸς τὴν
5 NM , ὡς δὲ τὸ NA πρὸς τὸ KA , οὕτως ἐστὶν ἡ NM
πρὸς τὴν KM . ὡς ἄρα ἡ ΓK πρὸς τὴν MN , οὕτως
ἐστὶν ἡ MN πρὸς τὴν KM . τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓK ,
 KM ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς MN , τουτέστι τῷ τετάρτῳ
μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ZM . ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί
10 εἰσιν αἱ ΓM , MZ , καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς
 MZ ἴσον παρὰ τὴν ΓM παραβέβληται ἑλλείπον εἶδει
τετραγώνῳ τὸ ὑπὸ τῶν ΓK , KM καὶ εἰς ἀσύμμετρα
αὐτὴν διαιρεῖ, ἡ ἄρα ΓM τῆς MZ μείζον δύναται τῷ
ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ ἐστὶν ὅλη ἡ ΓM σύμ-
15 μετρος μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓA . ἡ ἄρα ΓZ
ἀποτομή ἐστὶ τετάρτη.

Τὸ ἄρα ἀπὸ ἐλάσσονος καὶ τὰ ἐξῆς.

ρα'.

Τὸ ἀπὸ τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον
20 ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος
ποιεῖ ἀποτομὴν πέμπτην.

Ἐστω ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσα ἡ AB ,
ῥητὴ δὲ ἡ ΓA , καὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB ἴσον παρὰ τὴν
 ΓA παραβέβλησθω τὸ ΓE πλάτος ποιῶν τὴν ΓZ .
25 λέγω, ὅτι ἡ ΓZ ἀποτομή ἐστὶ πέμπτη.

Ἐστω γὰρ τῇ AB προσαρμόζουσα ἡ BH . αἱ ἄρα

1. ὑπὸ] corr. ex ἀπό V. τῶν] (alt.) τῷ b. 3. NA] AN F. οὕτως — 4. NA] mg. m. 2 B. 3. KA] KA' F.
4. μέν] om. V. ἐστίν] m. 2 F. 6. ὡς] καὶ ὡς b, mg. V.
ἄρα — 7. τὴν KM] mg. V. 6. τήν] (alt.) τό φ. 8. NMP .

quoniam $AH \times HB$ inter AH^2 , HB^2 medium est proportionale [prop. XXI lemma], et $AH^2 = \Gamma\Theta$, $HB^2 = KA$, $AH \times HB = NA$, inter $\Gamma\Theta$, KA medium proportionale est NA . itaque $\Gamma\Theta : NA = NA : KA$. uerum $\Gamma\Theta : NA = \Gamma K : NM$, $NA : KA = NM : KM$ [VI, 1]. itaque $\Gamma K : MN = MN : KM$. quare $\Gamma K \times KM = MN^2$ [VI, 17] $= \frac{1}{4} ZM^2$. iam quoniam sunt duae rectae inaequales ΓM , MZ , et $\frac{1}{4} MZ^2$ aequale rectae ΓM adplicatum est $\Gamma K \times KM$ figura quadrata deficiens et eam in partes incommensurabiles diuidit, ΓM^2 excedit MZ^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis [prop. XVIII]. et tota ΓM rationali propositae ΓA commensurabilis est longitudine. itaque ΓZ apotome est quarta [deff. tert. 4].

Ergo quadratum minoris, et quae sequuntur.

CI.

Quadratum rectae cum rationali totum medium efficientis rectae rationali adplicatum latitudinem efficit apotomen quintam.

Sit AB recta cum rationali totum medium efficiens, ΓA autem rationalis, et quadrato AB^2 aequale rectae ΓA adplicetur ΓE latitudinem efficiens ΓZ . dico, ΓZ apotomen quintam esse.

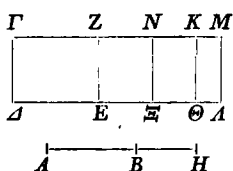
nam BH rectae AB congruens sit. itaque rectae

10. καὶ τῶ] τῶ δὲ FV. τοῦ] m. 2 F. 12. τό] τῶ b. 14. συμμέτρου Pb et V, sed corr. ἐστίν] om. V φ. 15. μήκει] ἐστὶ V. 17. καὶ τὰ ἐξῆς] παρὰ φητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομήν τετάρτην Theon (BFVb). 22. ἡ] (prius) om. V. 23. φητὴ — AB] mg. m. 1 P. τῶ] e corr. P. 24. ΓΔ] ΔΓ F. ΓΖ] corr. ex ΓΔ P. 25. ΓΖ] ΖΓ e corr. V, ΑΓ φ. 26. γάρ] m. 2 F.

AH, HB εὐθεῖαι δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι
 τὸ μὲν συγκαίμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων
 μέσον, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν ρητόν. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ
 τῆς AH ἴσον παρὰ τὴν $ΓΔ$ παραβεβλήσθω τὸ $ΓΘ$,
 5 τῷ δὲ ἀπὸ τῆς HB ἴσον τὸ $ΚΑ$. ὅλον ἄρα τὸ $ΓΑ$
 ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AH, HB . τὸ δὲ συγκαίμενον
 ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AH, HB ἅμα μέσον ἐστίν· μέσον
 ἄρα ἐστὶ τὸ $ΓΑ$. καὶ παρὰ ρητὴν τὴν $ΓΔ$ παράκειται
 πλάτος ποιοῦν τὴν $ΓΜ$. ρητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $ΓΜ$ καὶ
 10 ἀσύμμετρος τῇ $ΓΔ$. καὶ ἐπεὶ ὅλον τὸ $ΓΑ$ ἴσον ἐστὶ
 τοῖς ἀπὸ τῶν AH, HB , ὧν τὸ $ΓΕ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ
 τῆς AB , λοιπὸν ἄρα τὸ $ΖΑ$ ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ
 τῶν AH, HB . τετμήσθω οὖν ἡ ZM δίχα κατὰ τὸ N ,
 καὶ ἤχθω διὰ τοῦ N ὁποτέρᾳ τῶν $ΓΔ, ΜΑ$ παράλ-
 15 ληλος ἡ $NΞ$. ἐκάτερον ἄρα τῶν $ZΞ, ΝΑ$ ἴσον ἐστὶ
 τῷ ὑπὸ τῶν AH, HB . καὶ ἐπεὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AH ,
 HB ρητόν ἐστι καὶ [ἐστίν] ἴσον τῷ $ΖΑ$, ρητόν ἄρα
 ἐστὶ τὸ $ΖΑ$. καὶ παρὰ ρητὴν τὴν EZ παράκειται
 πλάτος ποιοῦν τὴν ZM . ρητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ZM καὶ
 20 σύμμετρος τῇ $ΓΔ$ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν $ΓΑ$ μέσον
 ἐστίν, τὸ δὲ $ΖΑ$ ρητόν, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΓΑ$
 τῷ $ΖΑ$. ὥς δὲ τὸ $ΓΑ$ πρὸς τὸ $ΖΑ$, οὕτως ἡ $ΓΜ$
 πρὸς τὴν MZ . ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ $ΓΜ$ τῇ MZ
 μήκει. καὶ εἰσὶν ἀμφοτέραι ρηταί· αἱ ἄρα $ΓΜ, ΜΖ$
 25 ρηταὶ εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα
 ἐστὶν ἡ $ΓΖ$.

3. μὲν] om. V. 5. Post δέ ras. 2 litt. V. HB] mut.
 in AB m. 2 F, in ras. V. ΓΑ] A in ras. m. 1 P, corr. ex
 A B. 6. τὸ δέ — 7. ἀπὸ τῶν] τὰ δὲ ἀπὸ τῆς V. 7. ἐστίν]
 ἐστὶ PB, comp. FV; εἶναι V, supra scr. ἐστι m. 1. 8. ΓΑ]
 mut. in ΑΓ m. 1 F. 9. ΓΜ] ΓΗ φ. ρητῇ] ρη- om. φ.
 11. ΓΕ] ΒΑ B. 13. οὖν] om. V φ. 14. καὶ — Ν] supra

AH , HB potentia incommensurabiles sunt efficientes summam quadratorum mediam, duplum autem rectan-



gulum rationale [prop. LXXVII]. et rectae ΓA adplicetur $\Gamma\Theta = AH^2$, $KA = HB^2$. itaque totum

$$\Gamma A = AH^2 + HB^2.$$

uerum $AH^2 + HB^2$ medium est; itaque etiam ΓA medium est. et

rationali ΓA adplicatum est latitudinem efficiens ΓM . itaque ΓM rationalis est et rectae ΓA incommensurabilis [prop. XXII]. et quoniam $\Gamma A = AH^2 + HB^2$, quorum $\Gamma E = AB^2$, erit reliquum $ZA = 2AH \times HB$ [II, 7]. iam ZM in N in duas partes aequales secetur, et per N utrique ΓA , MA parallela ducatur $NΞ$. quare $ZΞ = NA = AH \times HB$. et quoniam $2AH \times HB$ rationale est, et $2AH \times HB = ZA$, ZA rationale est. et rationali EZ adplicatum est latitudinem efficiens ZM . itaque ZM rationalis est et rectae ΓA longitudine commensurabilis [prop. XX]. et quoniam ΓA medium est, ZA autem rationale, ΓA et ZA incommensurabilia sunt. est autem $\Gamma A : ZA = \Gamma M : MZ$ [VI, 1]. quare ΓM , MZ longitudine incommensurabiles sunt [prop. XI]. et utraque rationalis est. itaque ΓM , MZ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo ΓZ apotome est [prop. LXXIII].

scr. m. 1 P. 17. $\xi\sigma\tau\iota\nu$] om. P. ZA] Z (uel Ξ) corr. ex NV , item lin. 18. 18. EZ] e corr. m. 1 V. 19. ZM] (alt.) ZH b. 20. $\acute{\alpha}\nu\mu\epsilon\tau\epsilon\sigma$ B, supra σ ras. est in V. ΓA] corr. ex ΓZ b; ΓZ V, Z eras. 21. $\xi\sigma\tau\iota\nu$] $\xi\sigma\tau\iota$ PBFV, comp. b. 23. $\tau\eta\nu$] $\tau\acute{o}$ V. $\xi\sigma\tau\iota\nu$] $\xi\sigma\tau\iota$ καὶ Vφ. 24. ΓM , MZ ἄρα V.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ πέμπτη.

- Ὅμοιως γὰρ δεῖξομεν, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν $\Gamma K M$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $N M$, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς $Z M$. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς $A H$ τῷ ἀπὸ τῆς $H B$, ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς $A H$ τῷ $\Gamma \Theta$, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς $H B$ τῷ $K A$, ἀσύμμετρον ἄρα το $\Gamma \Theta$ τῷ $K A$. ὥς δὲ τὸ $\Gamma \Theta$ πρὸς τὸ $K A$, οὕτως ἡ ΓK πρὸς τὴν $K M$. ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΓK τῇ $K M$ μήκει. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἀνισοὶ εἰσιν αἱ $\Gamma M, M Z$, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς $Z M$ ἴσον παρὰ τὴν ΓM παραβέβληται ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ, ἡ ἄρα ΓM τῆς $M Z$ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ ἐστὶν ἡ προσαρμόζουσα ἡ $Z M$ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓA . ἡ ἄρα ΓZ ἀποτομή ἐστὶ πέμπτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ρβ'.

Τὸ ἀπὸ τῆς μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν ἑκτην.

- Ἔστω ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ $A B$, ῥητὴ δὲ ἡ ΓA , καὶ τῷ ἀπὸ τῆς $A B$ ἴσον παρὰ τὴν ΓA παραβεβλήσθω τὸ ΓE πλάτος ποιοῦν τὴν ΓZ . λέγω, ὅτι ἡ ΓZ ἀποτομή ἐστὶν ἑκτη.

- Ἔστω γὰρ τῇ $A B$ προσαρμόζουσα ἡ $B H$. αἱ ἄρα $A H, H B$ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ

1. δῆ] m. 2 F. 2. $\Gamma K, K M$ FV. 4. ἐστὶ] om. Vφ. 5. $A H$] (alt.) A e corr. F. 6. $\Gamma \Theta$] Θ in ras. m. 1 P. 8. τήν] om. P. $K M$] ΓM P et B in ras. ἄρα ἐστὶν Vφ. $K M$] ΓM P et in ras. B. 9. εἰσι P, corr. m. 1. 10. $Z M$] $M Z$

Iam dico, eandem quintam esse. nam similiter demonstrabimus, esse $\Gamma K \times KM = NM^2 = \frac{1}{4} ZM^2$. et quoniam AH^2 , HB^2 incommensurabilia sunt, et $AH^2 = \Gamma\Theta$, $HB^2 = KA$, $\Gamma\Theta$ et KA incommensurabilia sunt. est autem $\Gamma\Theta:KA = \Gamma K:KM$ [VI, 1]. quare ΓK , KM longitudine incommensurabiles sunt [prop. XI]. iam quoniam sunt duae rectae inaequales ΓM , MZ , et $\frac{1}{4} ZM^2$ aequale rectae ΓM adplicatum est spatium figura quadrata deficiens et eam in partes incommensurabiles diuidit, ΓM^2 excedit MZ^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis [prop. XVIII]. et congruens ZM rationali propositae ΓA commensurabilis est.

Ergo ΓZ apotome est quinta [deff. tert. 5]; quod erat demonstrandum.

CII.

Quadratum rectae cum medio totum medium efficientis rectae rationali adplicatum latitudinem efficit apotomen sextam.

Sit AB recta cum medio totum medium efficiens, ΓA autem rationalis, et quadrato AB^2 aequale rectae ΓA adplicetur ΓE latitudinem efficiens ΓZ . dico, ΓZ apotomen sextam esse.

nam BH rectae AB congruens sit. itaque AH , HB potentia incommensurabiles sunt efficientes sum-

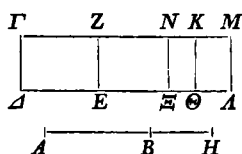
P, et V (?), sed corr. m. 1. 13. $\epsilon\alpha\nu\tau\eta\mu\eta\kappa\epsilon\iota$ V. 14. ZM MZ P. 15. $\acute{o}\pi\epsilon\rho\ \acute{\epsilon}\delta\epsilon\iota\ \delta\epsilon\iota\chi\alpha\iota$] om. BF Vb. In hac pag. et sequenti multi loci euan. in F. 21. $\pi\alpha\rho\acute{\alpha}$] $\pi\alpha\rho\acute{\alpha}\ \delta\eta\tau\eta\eta\nu$ Vφ. $\tau\eta\nu$] supra scr. m. 1 V. 22. $\tau\eta\nu$] $\tau\eta$ b. 24. $\acute{\alpha}\rho\mu\acute{o}\delta\omicron\upsilon\sigma\alpha$, supra scr. $\pi\rho\omicron\sigma$ m. 1, F. HB P. 25. Post HB ras. 5 litt. V. Supra $\tau\epsilon$ scr. $\mu\acute{\epsilon}\nu$ m. 1 b.

τὸ δις ὑπὸ τῶν AH , HB μέσον καὶ ἀσύμμετρον τα
ἀπὸ τῶν AH , HB τῷ δις ὑπὸ τῶν AH , HB . παρα-
βεβλήσθω οὖν παρὰ τὴν $ΓΔ$ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AH
ἴσον τὸ $ΓΘ$ πλάτος ποιοῦν τὴν $ΓΚ$, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς
5 BH τὸ $ΚΑ$. ὅλον ἄρα τὸ $ΓΑ$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν
 AH , HB μέσον ἄρα [ἐστὶ] καὶ τὸ $ΓΑ$. καὶ παρὰ
ῥητὴν τὴν $ΓΔ$ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν $ΓΜ$.
ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $ΓΜ$ καὶ ἀσύμμετρος τῇ $ΓΔ$ μήκει.
ἐπεὶ οὖν τὸ $ΓΑ$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AH , HB ,
10 ὧν τὸ $ΓΕ$ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς AB , λοιπὸν ἄρα τὸ $ΖΑ$
ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν AH , HB . καὶ ἐστὶ τὸ δις
ὑπὸ τῶν AH , HB μέσον· καὶ τὸ $ΖΑ$ ἄρα μέσον ἐστίν.
καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν $ΖΕ$ παράκειται πλάτος ποιοῦν
τὴν $ΖΜ$. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $ΖΜ$ καὶ ἀσύμμετρος τῇ
15 $ΓΔ$ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὰ ἀπὸ τῶν AH , HB ἀσύμμετρά
ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν AH , HB , καὶ ἐστὶ τοῖς μὲν ἀπὸ
τῶν AH , HB ἴσον τὸ $ΓΑ$, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν AH ,
 HB ἴσον τὸ $ΖΑ$, ἀσύμμετρον ἄρα [ἐστὶ] τὸ $ΓΑ$ τῷ
 $ΖΑ$. ὥς δὲ τὸ $ΓΑ$ πρὸς τὸ $ΖΑ$, οὕτως ἐστὶν ἡ $ΓΜ$
20 πρὸς τὴν $ΜΖ$. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ $ΓΜ$ τῇ $ΜΖ$
μήκει. καὶ εἰσιν ἀμφοτέραι ῥηταί. αἱ $ΓΜ$, $ΜΖ$ ἄρα
ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα
ἐστὶν ἡ $ΓΖ$.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἕκτη.

25 Ἐπεὶ γὰρ τὸ $ΖΑ$ ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν AH ,
 HB , τετμήσθω δίχα ἡ $ΖΜ$ κατὰ τὸ N , καὶ ἤχθω διὰ
τοῦ N τῇ $ΓΔ$ παράλληλος ἡ $NΞ$. ἑκάτερον ἄρα τῶν

1. μέσον] ῥητόν F. καὶ] καὶ ἔτι V, ἔτι δὲ BFb. ἀσύμ-
μετρα BFVb. τὰ] τό P. 5. Post $ΚΑ$ add. πλάτος ποιοῦν
τὴν KM mg. m. 2 V. 6. ἐστὶ] om. P. 8. ἐστίν] ἐστὶ καὶ V.
10. ἴσον ἐστὶ Vφ. τῷ] τό φ. 11. ἐστὶ] γίνεται V. δις]
corr. ex δι m. 2 P. 12. ἐστὶ PBV, comp. Fb. 16. τοῖς]



mam quadratorum mediam et $2AH \times HB$ medium et $AH^2 + HB^2$, $2AH \times HB$ incommensurabilia [prop. LXXVIII]. iam rectae ΓA adplicetur $\Gamma\Theta = AH^2$ latitudinem efficiens ΓK et $KA = BH^2$. itaque totum $\Gamma A = AH^2 + HB^2$. quare etiam ΓA medium est. et rationali ΓA adplicatum est latitudinem efficiens ΓM . itaque ΓM rationalis est et rectae ΓA longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. iam quoniam $\Gamma A = AH^2 + HB^2$, quorum $\Gamma E = AB^2$, erit reliquum $ZA = 2AH \times HB$ [II, 7]. et $2AH \times HB$ medium est. quare etiam ZA medium est. et rationali ZE adplicatum est latitudinem efficiens ZM . quare ZM rationalis est et rectae ΓA longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. et quoniam $AH^2 + HB^2$, $2AH \times HB$ incommensurabilia sunt, et

$$\Gamma A = AH^2 + HB^2, ZA = 2AH \times HB,$$

ΓA et ZA incommensurabilia sunt. est autem [VI, 1] $\Gamma A : ZA = \Gamma M : MZ$. quare ΓM , MZ longitudine incommensurabiles sunt [prop. XI]. et utraque rationalis est. itaque ΓM , MZ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo ΓZ apotome est [prop. LXXIII].

Iam dico, eandem sextam esse. nam quoniam est $ZA = 2AH \times HB$, recta ZM in N in duas partes aequales secetur, et per N rectae ΓA parallela du-

$\tau\phi$ V. ἀπὸ τῶν] om. P. 17. ΓA — 18. ἴσον τό] om. b.
 18. ἐστὶ] om. P. 19. τό] (alt.) om. P. ZA] corr. ex
 ZA ? F. 20. τήν] om. P. MZ] in ras. V. MZ] corr.
 ex ZM V. 21. ἀρα] om. V. 22. εἰσιν P. εἰσιν ἀρα B.

$Z\Xi$, NA ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν AH , HB . καὶ ἐπεὶ
αἱ AH , HB δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ἀσύμμετρον
ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AH τῷ ἀπὸ τῆς HB . ἀλλὰ τῷ
μὲν ἀπὸ τῆς AH ἴσον ἐστὶ τὸ $\Gamma\Theta$, τῷ δὲ ἀπὸ
5 τῆς HB ἴσον ἐστὶ τὸ KA . ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ
 $\Gamma\Theta$ τῷ KA . ὥς δὲ τὸ $\Gamma\Theta$ πρὸς τὸ KA , οὕτως ἐστὶν
ἡ ΓK πρὸς τὴν KM . ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓK
τῇ KM . καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν AH , HB μέσον ἀνά-
λογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν AH , HB , καὶ ἐστὶ τῷ μὲν ἀπὸ
10 τῆς AH ἴσον τὸ $\Gamma\Theta$, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς HB ἴσον τὸ KA ,
τῷ δὲ ὑπὸ τῶν AH , HB ἴσον τὸ NA , καὶ τῶν ἄρα
 $\Gamma\Theta$, KA μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ NA . ἔστιν ἄρα ὥς
τὸ $\Gamma\Theta$ πρὸς τὸ NA , οὕτως τὸ NA πρὸς τὸ KA . καὶ
διὰ τὰ αὐτὰ ἡ ΓM τῆς MZ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ
15 ἀσυμμέτρου ἐαυτῇ. καὶ οὐδετέρα αὐτῶν σύμμετρός
ἐστὶ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓA . ἡ ΓZ ἄρα ἀποτομῇ
ἐστὶν ἕκτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θγ'.

Ἡ τῇ ἀποτομῇ μήκει σύμμετρος ἀποτομῇ
20 ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτῇ.

Ἐστω ἀποτομῇ ἡ AB , καὶ τῇ AB μήκει σύμμετρος
ἔστω ἡ ΓA . λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓA ἀποτομῇ ἐστὶ καὶ
τῇ τάξει ἡ αὐτῇ τῇ AB .

Ἐπεὶ γὰρ ἀποτομῇ ἐστὶν ἡ AB , ἔστω αὐτῇ προσ-

2. εἰσὶ σύμμετροι b. 4. τὸ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Theta$ P. 5. ἐστὶ]
om. V. 6. τῷ] corr. ex τό m. 2 P. 8. ἀπὸ τῶν] om. P;
ὑπὸ τῶν supra scr. α m. 1 b; ὑπὸ τῶν ins. m. 2 F. 11. τῷ
δὲ ὑπὸ — NA] mg. m. 2 V. τῷ] τό V. AH] H e corr. V.
ἴσον ἐστὶ P. 12. NA] N b. 13. NA] (prius) A , supra
add. N m. 2, F. 14. τὰ αὐτά] corr. ex ταῦτα V. MZ]
corr. ex ZM V. 15. ἀσυμμέτρου] corr. ex συμμέτρου m. 2 B.

catur $N\Xi$. itaque $Z\Xi = NA = AH \times HB$. et quoniam AH , HB potentia incommensurabiles sunt, AH^2 et HB^2 incommensurabilia sunt. est autem $\Gamma\Theta = AH^2$, $K\Lambda = HB^2$. quare $\Gamma\Theta$, $K\Lambda$ incommensurabilia sunt. est autem $\Gamma\Theta : K\Lambda = \Gamma K : KM$ [VI, 1]. itaque ΓK , KM incommensurabiles sunt [prop. XI]. et quoniam $AH \times HB$ medium est proportionale inter AH^2 et HB^2 [prop. XXI lemma], et $\Gamma\Theta = AH^2$, $K\Lambda = HB^2$, $NA = AH \times HB$, etiam NA medium est proportionale inter $\Gamma\Theta$, $K\Lambda$. itaque $\Gamma\Theta : NA = NA : K\Lambda$. et eadem de causa [cfr. p. 326, 9 sq.] ΓM^2 excedit MZ^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis [prop. XVIII]. et neutra earum rationali propositae $\Gamma\Delta$ commensurabilis est.

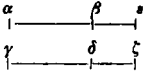
Ergo ΓZ apotome est sexta [def. tert. 6]; quod erat demonstrandum.¹⁾

CIII.

Recta apotomae longitudine commensurabilis apotome est et ordine eadem.

Sit AB apotome, et rectae AB longitudine commensurabilis sit $\Gamma\Delta$. dico, $\Gamma\Delta$ quoque apotomen esse et ordine eandem ac AB .

nam quoniam AB apotome est, BE ei congruens

1) In B figura haec est  deinde in mg. adiicitur uera addito $\epsilon\upsilon$ ἄλλω.

16. $\Gamma\Delta$] Δ in ras. m. 1 F. 17. $\delta\pi\epsilon\rho\ \xi\delta\epsilon\iota\ \delta\epsilon\iota\chi\alpha\iota$] comp. P, om. BFVb. 21. $\sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\rho\omicron\varsigma\ \xi\sigma\tau\omega\ \mu\acute{\eta}\kappa\epsilon\iota$ BFb. 23. η] m. 2 P. 24. $\pi\rho\omicron\sigma\alpha\rho\mu\acute{o}\xi\omicron\upsilon\sigma\alpha\ \xi\sigma\tau\omega\ \alpha\upsilon\tau\eta$ V. $\alpha\upsilon\tau\eta$ η Fb.

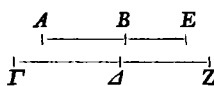
αρμόζουσα ἡ BE · αἱ AE , EB ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει
μόνον σύμμετροι. καὶ τῷ τῆς AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$ λόγῳ
ὁ αὐτὸς γερονέτω ὁ τῆς BE πρὸς τὴν ΔZ · καὶ ὥς
ἐν ἄρα πρὸς ἐν, πάντα [ἐστὶ] πρὸς πάντα· ἐστὶν ἄρα
5 καὶ ὥς ὅλη ἡ AE πρὸς ὅλην τὴν ΓZ , οὕτως ἡ AB
πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$. σύμμετρος δὲ ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$ μήκει·
σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ AE μὲν τῇ ΓZ , ἡ δὲ BE τῇ
 ΔZ . καὶ αἱ AE , EB ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμ-
μετροί· καὶ αἱ ΓZ , $Z\Delta$ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον
10 σύμμετροι [ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἡ $\Gamma\Delta$].

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ AB].

Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὥς ἡ AE πρὸς τὴν ΓZ , οὕτως ἡ
 BE πρὸς τὴν ΔZ , ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὥς ἡ AE πρὸς
τὴν EB , οὕτως ἡ ΓZ πρὸς τὴν $Z\Delta$. ἦτοι δὴ ἡ AE
15 τῆς EB μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ ἢ
τῷ ἀπὸ ἀσυνμέτρου. εἰ μὲν οὖν ἡ AE τῆς EB μείζον
δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓZ τῆς $Z\Delta$
μείζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ
μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ AE τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει,
20 καὶ ἡ ΓZ , εἰ δὲ ἡ BE , καὶ ἡ ΔZ , εἰ δὲ οὐδετέρα
τῶν AE , EB , καὶ οὐδετέρα τῶν ΓZ , $Z\Delta$. εἰ δὲ ἡ
 AE [τῆς EB] μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυνμέτρου
ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓZ τῆς $Z\Delta$ μείζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ
ἀσυνμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ AE
25 τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΓZ , εἰ δὲ ἡ BE , καὶ

1. ἡ BE] αὐτῇ ἡ EB φ. AE] om. φ, $A B$. 3. ὁ] (prius)
om. φ. ΔZ] $Z\Delta$ B. 4. ἐστὶ] om. P. ἐστὶν ἄρα] om.
V φ. 5. ὅλη ἄρα V. 7. ἄρα] ἄρα ἐστὶ V φ (del. V). καί]
om. φ. μὲν AE V φ (post AE hab. μὲν F). BE δὲ B F b.
τῇ] supra scr. V m. 1. 8. ΔZ] $Z\Delta$ B F. καὶ αἱ] καὶ
εἰσιν αἱ V, αἱ δὲ B. εἰσι] om. V. 10. ἀποτομή — 11.
 AB] om. P. 12. οὖν] γάρ Theon (B F V b). AE] corr. ex
 EA V. 13. τήν] om. B, m. 2 F. $Z\Delta$ F. ἄρα] om. V.

sit. itaque AE , EB rationales sunt potentia tantum



commensurabiles [prop. LXXIII].

fiat $BE:AZ = AB:GA$ [VI, 12].

quare etiam ut unum ad unum,

ita omnia ad omnia [V, 12]. itaque $AE:ΓΖ = AB:ΓΑ$.

uerum AB , $ΓΑ$ longitudine commensurabiles sunt.

itaque etiam AE , $ΓΖ$ et BE , $ΔΖ$ commensurabiles

sunt [prop. XI]. uerum AE , EB rationales sunt po-

tentia tantum commensurabiles. itaque etiam $ΓΖ$,

$ZΔ$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles

[prop. XIII].

Iam quoniam est $AE:ΓΖ = BE:ΔΖ$, permutando

[V, 16] est $AE:EB = ΓΖ:ZΔ$. AE^2 igitur EB^2 ex-

cedit quadrato rectae aut sibi commensurabilis aut

incommensurabilis. iam si AE^2 excedit EB^2 quadrato

rectae sibi commensurabilis, etiam $ΓΖ^2$ excedet $ZΔ^2$

quadrato rectae sibi commensurabilis [prop. XIV]. et

siue AE rationali propositae longitudine commensu-

rabilis est, etiam $ΓΖ$ ei commensurabilis est [prop.

XII], siue BE , etiam $ΔΖ$ [id.], siue neutra rectarum

AE , EB , etiam neutra rectarum $ΓΖ$, $ZΔ$ [prop. XIII].

sin AE^2 excedit quadrato rectae sibi incommensura-

bilis, etiam $ΓΖ^2$ excedet $ZΔ^2$ quadrato rectae sibi

incommensurabilis [prop. XIV]. et siue AE rationali

propositae longitudine commensurabilis est, etiam $ΓΖ$

14. δῆ] om. P, δέ BV. 15. τῶ] corr. ex τοῦ m. 2 P. 16. Ante εἰ ins. καὶ (?) m. 2 F. εἰ] e corr. V. 17. ἀσυμμέτρου B, corr. m. 2; ἀ- supra add. m. 2 F. τῆς] τῇ F. 18. ἀσυμμέτρου B, et F, sed corr. 19. ΑΕ] ΑΘ e corr. F. 20. ΓΖ] ΖΓ F. 21. οὐδετέρα] οὐδετέρα P. 22. τῆς EB] mg. m. 1 P. δύναται] supra add. ησε m. 2 F, δυνήσεται b. συμμέτρου P, corr. m. 1. 23. τῆς] corr. ex τῇ V.

ἡ ΔZ , εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν AE , EB , οὐδετέρα τῶν ΓZ , $Z\Delta$.

Ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἡ $\Gamma\Delta$ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ AB · ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5

ρδ'.

Ἡ τῇ μέσης ἀποτομῇ σύμμετρος μέσης ἀποτομή ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

Ἐστω μέσης ἀποτομή ἡ AB , καὶ τῇ AB μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ $\Gamma\Delta$ · λέγω, ὅτι καὶ ἡ $\Gamma\Delta$ μέσης
10 ἀποτομή ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ AB .

Ἐπεὶ γὰρ μέσης ἀποτομή ἐστὶν ἡ AB , ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ EB . αἱ AE , EB ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως ἡ BE πρὸς τὴν ΔZ · σύμμετρος
15 ἄρα [ἐστὶ] καὶ ἡ AE τῇ ΓZ , ἡ δὲ BE τῇ ΔZ . αἱ δὲ AE , EB μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ ΓZ , $Z\Delta$ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσης ἄρα ἀποτομή ἐστὶν ἡ $\Gamma\Delta$.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ τῇ τάξει ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῇ AB .
20 Ἐπεὶ [γάρ] ἐστὶν ὡς ἡ AE πρὸς τὴν EB , οὕτως ἡ ΓZ πρὸς τὴν $Z\Delta$ [ἀλλ' ὡς μὲν ἡ AE πρὸς τὴν EB , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AE πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AE , EB ,

1. οὐδετέρα] (alt.) οὐδὲ οὐδετέρα BVb; οὐδέ m. 2 add. F, sed euan. 3. τῇ AB] om. F. 4. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. Pb, om. BV.

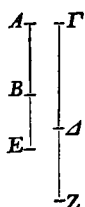
6. μέση BFVb. μέση BV, et F, corr. m. 2. ἀποτομῆς b (σ supra add. F m. 2). 7. ἐστὶν P. 8. μέση BFb, et V (σ fuit add. m. 2, sed eras.). μήκει] m. 2 B, om. FVb. 9. λέγω δὴ V. μέση B, et F supra add. σ m. 2; in V add. σ m. 2, sed eras. 10. ἐστὶ P. 11. μέση B. αὐτῇ] ἡ V, αὐτῇ ἡ Fb. 12. ἡ] αὐτῇ ἡ V. AE] EA BFb. εἰσὶν B.

ei commensurabilis est, siue BE , etiam ΔZ [prop. XII], siue neutra rectarum AE , EB , neutra rectarum ΓZ , $Z\Delta$ [prop. XIII].

Ergo $\Gamma\Delta$ apotome est [prop. LXXIII] et ordine eadem ac AB [deff. tert. 1—6]; quod erat demonstrandum.

CIV.

Recta mediae apotomae commensurabilis mediae apotome est et ordine eadem.



Sit AB mediae apotome, et rectae AB longitudine commensurabilis sit $\Gamma\Delta$. dico, etiam $\Gamma\Delta$ mediae apotomen esse et ordine eandem ac AB .

nam quoniam AB mediae apotome est, sit EB ei congruens. itaque AE , EB mediae sunt potentia tantum commensurabiles [prop. LXXIV—LXXV]. et fiat [VI, 12] $AB: \Gamma\Delta = BE: \Delta Z$. itaque etiam AE , ΓZ et BE , ΔZ commensurabiles sunt [V, 12; prop. XI]. uerum AE , EB mediae sunt potentia tantum commensurabiles. itaque etiam ΓZ , $Z\Delta$ mediae sunt [prop. XXIII] potentia tantum commensurabiles [prop. XIII]. ergo $\Gamma\Delta$ mediae est apotome [prop. LXXIV—LXXV].

Iam dico, eam ordine quoque eandem esse ac AB .

14. οὕτως — ΔZ] mg. m. 1 P. $\eta]$ corr. ex δ m. 2 V. 15. $\epsilon\sigma\tau\iota$] om. P, $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$ B. $AE]$ AE $\mu\acute{\epsilon}\nu$ BFb. 16. καί — 17. $\sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\rho\omicron\iota$] mg. m. 2 B. 17. $\Gamma Z]$ Z e corr. V. 18. $\mu\acute{\epsilon}\sigma\eta$ B. $\alpha\pi\omicron\tau\omicron\mu\eta\varsigma$ V. 19. $\lambda\acute{\epsilon}\gamma\omega]$ $\delta\epsilon\iota\kappa\tau\acute{\epsilon}\omicron\nu$ Theon (BFVb). $\delta\eta]$ corr. ex $\delta\epsilon$ $\delta\tau\iota$ m. 1 F; $\delta\acute{\epsilon}$ V. $\epsilon\sigma\tau\iota\nu]$ om. Theon (BFVb). 20. γάρ] om. P. οὕτως $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$ F. 21. $\tau\eta\nu]$ om. BFb. $\alpha\lambda\lambda\prime$ — p. 336, 2. $Z\Delta]$ om. P.

ὥς δὲ ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ
 πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ], ἔστιν ἄρα καὶ ὥς τὸ ἀπο
 τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ
 τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ [καὶ ἐναλλάξ ὥς
 5 τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ, οὕτως τὸ ὑπὸ
 τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ]. σύμμετρον
 δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΖ· σύμμετρον ἄρα
 ἔστι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ.
 εἴτε οὖν ῥητόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ῥητόν ἐστι
 10 καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ, εἴτε μέσον [ἐστὶ] τὸ ὑπὸ
 τῶν ΑΕ, ΕΒ, μέσον [ἐστὶ] καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ.
 Μέσης ἄρα ἀποτομή ἐστὶν ἡ ΓΔ καὶ τῇ τάξει ἡ
 αὐτῇ τῇ ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ρε'.

- 15 Ἡ τῇ ἐλάσσονι σύμμετρος ἐλάσσων ἐστίν.
 Ἔστω γὰρ ἐλάσσων ἡ ΑΒ καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος
 ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ ἐλάσσων ἐστίν.
 Γεγονέτω γὰρ τὰ αὐτά· καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΕ, ΕΒ δυ-
 νάμει εἶσιν ἀσύμμετροι, καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει
 20 εἶσιν ἀσύμμετροι. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὥς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν
 ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ, ἔστιν ἄρα καὶ ὥς τὸ
 ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς
 ΓΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΔ. συνθέντι ἄρα ἐστὶν ὥς τὰ
 ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ, οὕτως τὰ
 25 ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΔ [καὶ ἐναλλάξ].

1. ΓΖ] (alt.) Ζ Γ F. 2. ὥς] om. φ. 4. καί — 6. ΖΔ]
 om. P. 6. τῶν] (alt.) om. b. 9. ΕΒ] B in ras. m. 1 P.
 ἔσται] ἐστὶ Theon (BFVb). 10. ἐστὶ] om. P. 11. ἐστὶ]
 om. P. 12. μέση BVb. 13. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om.
 BFVb. 15. τῇ] corr. in τῆς m. 2 F, τῆς b. ἐλάσσονι] ἐλασσον
 F m. 1, ἐλάσσονος b, F m. 2. Deinde del. μήκει F. 16. γὰρ]

quoniam est $AE:EB = \Gamma Z:ZA$ [V, 12; V, 16], erit etiam [prop. XXI lemma]

$$AE^2:AE \times EB = \Gamma Z^2:\Gamma Z \times ZA.$$

uerum $AE^2, \Gamma Z^2$ commensurabilia sunt. itaque etiam $AE \times EB, \Gamma Z \times ZA$ commensurabilia sunt [V, 16; prop. XI]. siue igitur $AE \times EB$ rationale est, etiam $\Gamma Z \times ZA$ rationale est [def. 4], siue $AE \times EB$ medium est, etiam $\Gamma Z \times ZA$ medium est [prop. XXIII coroll.].

Ergo ΓA apotome est et ordine eadem ac AB [prop. LXXIV—LXXV]; quod erat demonstrandum.

CV.

Recta minori commensurabilis minor est.

Sit enim AB minor et rectae AB commensurabilis ΓA . dico, etiam ΓA minorem esse.



nam fiant eadem. et quoniam AE, EB potentia sunt incommensurabiles [prop. LXXVI], etiam $\Gamma Z, ZA$ potentia incommensurabiles sunt [prop. XIII]. iam quoniam est $AE:EB = \Gamma Z:ZA$ [V, 12; V, 16], erit etiam $AE^2:EB^2 = \Gamma Z^2:ZA^2$ [VI, 20 coroll.]. itaque etiam componendo [V, 18] est

$$AE^2 + EB^2:EB^2 = \Gamma Z^2 + ZA^2:ZA^2.$$

om. Theon (BFVb). 17. ΓA] (prius) Γ e corr. m. 1 F. $\epsilon\sigma\tau\iota$ PBV, comp. Fb. 18. $\alpha\upsilon\tau\acute{\alpha}$ τοῖς πρότερον V. 19. ΓZ] Z e corr. m. 1 b. 20. $\tau\eta\nu$] om. Bb. 21. $\tau\eta\nu$] m. 2 F. 23. ZA] ΔZ B. $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$] supra scr. m. 1 V. $\tau\acute{\alpha}$] corr. ex τό m. 1 V. 24. $\tau\omega\nu$] $\tau\eta\varsigma$ P. οὕτω Bb. 25. ZA] (prius) supra scr. m. 2 F (Z incertum est). καὶ ἐναλλάξ] om. P. Dein del. ὡς τὸ ἀπὸ $\tau\eta\varsigma$ BE πρὸς τὸ ἀπὸ $\tau\eta\varsigma$ ZA, οὕτως τὰ ἀπὸ $\tau\omega\nu$ AE, EB πρὸς τὰ ἀπὸ $\tau\omega\nu$ $\Gamma Z, ZA$ V.

σύμμετρον δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς BE τῷ ἀπὸ τῆς ΔZ ·
 σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν
 AE , EB τετραγώνων τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν
 ΓZ , $Z\Delta$ τετραγώνων. ῥητὸν δέ ἐστι τὸ συγκείμενον
 5 ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AE , EB τετραγώνων· ῥητὸν ἄρα
 ἐστὶ καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$
 τετραγώνων. πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς AE
 πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AE , EB , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓZ
 πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$, σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς
 10 AE τετραγώνων τῷ ἀπὸ τῆς ΓZ τετραγώνῳ, σύμ-
 μετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AE , EB τῷ ὑπὸ τῶν
 ΓZ , $Z\Delta$. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AE , EB · μέσον
 ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$ · αἱ ΓZ , $Z\Delta$ ἄρα δυ-
 νάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον
 15 ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν
 μέσον.

Ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ $\Gamma\Delta$ ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ρς'.

Ἡ τῇ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦση
 20 σύμμετρος μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά
 ἐστίν.

Ἐστω μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ AB
 καὶ τῇ AB σύμμετρος ἡ $\Gamma\Delta$ · λέγω, ὅτι καὶ ἡ $\Gamma\Delta$
 μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστίν.

25 Ἐστω γὰρ τῇ AB προσαρμόζουσα ἡ BE · αἱ AE ,
 EB ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν
 συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AE , EB τετραγώνων

1. ἐστίν P. τό] corr. ex τῷ m. 1 F, ex τὰ (?) V. ΔZ
 $Z\Delta$ P. 3. τετραγώνων Pb et comp. ins. m. 1 V. 4. $\Gamma\Delta$,
 ΔZ b. 5. ῥηταί F, sed corr. 6. ἐστὶ] εἰσὶ F. 7. τό]

uerum BE^2 , ΔZ^2 commensurabilia sunt. itaque etiam $AE^2 + EB^2$ et $\Gamma Z^2 + Z\Delta^2$ commensurabilia sunt [V, 16; prop. XI]. uerum $AE^2 + EB^2$ rationale est [prop. LXXVI]. itaque etiam $\Gamma Z^2 + Z\Delta^2$ rationale est [def. 4]. rursus quoniam est

$$AE^2 : AE \times EB = \Gamma Z^2 : \Gamma Z \times Z\Delta$$

[prop. XXI lemma], et AE^2 , ΓZ^2 commensurabilia sunt, etiam $AE \times EB$, $\Gamma Z \times Z\Delta$ commensurabilia sunt. $AE \times EB$ autem medium est [prop. LXXVI]. quare etiam $\Gamma Z \times Z\Delta$ medium est [prop. XXIII coroll.]. itaque ΓZ , $Z\Delta$ potentia incommensurabiles sunt efficientes summam quadratorum rationalem, rectangulum autem medium.

Ergo $\Gamma\Delta$ minor est [prop. LXXVI]; quod erat demonstrandum.

CVI.

Recta rectae cum rationali totum medium efficienti commensurabilis recta est cum rationali totum medium efficiens.

Sit AB recta cum rationali totum medium efficiens et rectae AB commensurabilis $\Gamma\Delta$. dico, etiam $\Gamma\Delta$ rectam esse cum rationali totum medium efficientem.

nam BE rectae AB congruens sit. itaque AE , EB potentia incommensurabiles sunt efficientes $AE^2 + EB^2$

om. V. 9. Post $Z\Delta$ add. $\kappa\alpha\iota \epsilon\nu\alpha\lambda\lambda\acute{\alpha}\xi$ BFb. 13. ἄρα ἐστὶ
καὶ BFb. $Z\Delta$] (alt.) Z in ras. m. 1 B. 17. ὅπερ ἔδει
δειξαι] comp. P, om. BFb. De additamento in V u. app.
nr. 24. 19. ποιούσῃ μῆκος F. 20. Ante $\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}$ add. $\kappa\alpha\iota$
 $\alpha\nu\tau\eta$ BFb, m. 2 V. $\kappa\alpha\iota \tau\omicron \delta\lambda\omicron\nu$ b. 22. $\kappa\alpha\iota \tau\omicron \delta\lambda\omicron\nu$
 $\delta\lambda\omicron\nu$ V. 24. $\tau\omicron \delta\lambda\omicron\nu \mu\epsilon\sigma\sigma\omicron\nu$ b. 25. BE] E e corr. m. 1 P.

μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. καὶ τὰ αὐτὰ κατε-
 σκευάσθω. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν τοῖς πρότερον, ὅτι αἱ
 ΓΖ, ΖΔ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν ταῖς ΑΕ, ΕΒ, καὶ
 5 ΕΒ τετραγώνων τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ,
 ΖΔ τετραγώνων, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ
 τῶν ΓΖ, ΖΔ ὥστε καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ δυνάμει εἰσὶν
 ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ
 τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν
 10 ῥητόν.

Ἡ ΓΔ ἄρα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά
 ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ρξ'.

Ἡ τῇ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ
 15 σύμμετρος καὶ αὐτὴ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον
 ποιοῦσά ἐστίν.

Ἐστω μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ,
 καὶ τῇ ΑΒ ἔστω σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ
 ΓΔ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστίν.

20 Ἐστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΕ, καὶ τὰ
 αὐτὰ κατεσκευάσθω· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν
 ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ'
 αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον
 καὶ ἔτι ἀσύμμετρον το συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν
 25 τετραγώνων τῷ ὑπ' αὐτῶν. καὶ εἰσιν, ὥς ἐδείχθη,
 αἱ ΑΕ, ΕΒ σύμμετροι ταῖς ΓΖ, ΖΔ, καὶ τὸ συγκεί-
 μενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων τῷ συγ-

3. τῷ] e corr. V. εἰσὶν B. 4. τό] τὸ μὲν Bb, μὲν
 supra scr. m. 2 F. 5. τῶν ΓΖ — 6. ΕΒ] mg. m. 2 B (τῶν
 ΑΕ, ΕΒ etiam in textu sunt a m. 1). 6. δ' Fb. 12. ὅπερ

$\begin{array}{l} \text{---} A \\ | \\ \text{---} B \\ | \\ \text{---} E \end{array} \begin{array}{l} \text{---} \Gamma \\ | \\ \text{---} \Delta \\ | \\ \text{---} Z \end{array}$
 medium, $AE \times EB$ autem rationale [prop. LXXVII]. et eadem comparentur. similiter igitur atque antea [p. 336, 20 sq.] demonstrabimus, esse $\Gamma Z : Z\Delta = AE : EB$, et $AE^2 + EB^2, \Gamma Z^2 + Z\Delta^2$ ac $AE \times EB, \Gamma Z \times Z\Delta$ commensurabilia esse. quare etiam $\Gamma Z, Z\Delta$ potentia incommensurabiles sunt efficientes $\Gamma Z^2 + Z\Delta^2$ medium, $\Gamma Z \times Z\Delta$ autem rationale.

Ergo $\Gamma\Delta$ recta est cum rationali totum medium efficiens [prop. LXXVII]; quod erat demonstrandum.

CVII.

Recta rectae cum medio totum medium efficienti commensurabilis et ipsa recta cum medio totum medium efficiens est.

Sit AB recta cum medio totum medium efficiens, et rectae AB commensurabilis sit $\Gamma\Delta$. dico, etiam $\Gamma\Delta$ rectam esse cum medio totum medium efficientem.

$\begin{array}{l} \text{---} A \\ | \\ \text{---} B \\ | \\ \text{---} E \end{array} \begin{array}{l} \text{---} \Gamma \\ | \\ \text{---} \Delta \\ | \\ \text{---} Z \end{array}$
 nam BE rectae AB congruens sit, et eadem comparentur. itaque AE, EB potentia incommensurabiles sunt efficientes summam quadratorum mediam et rectangulum medium praetereaue summam quadratorum rectangulo incommensurabilem [prop. LXXVIII]. sunt autem, ut demonstratum est [p. 334, 14 sq.], AE, EB rectis $\Gamma Z, Z\Delta$ commensurabiles, et $AE^2 + EB^2, \Gamma Z^2 + Z\Delta^2$ ac $AE \times EB, \Gamma Z \times Z\Delta$

$\xi\delta\epsilon\iota\ \delta\epsilon\iota\chi\alpha\iota$] comp. P, om. BFb. De V u. app. nr. 25. 14.
 $\kappa\omicron\iota\omicron\upsilon\sigma\eta\ \mu\eta\kappa\epsilon\iota$ F. 18. $\xi\sigma\tau\omega$] om. BFb. 21. $\alpha\tilde{\rho}\alpha$] m. 2
 euan. F. 25. $\alpha\tilde{\upsilon}\tau\acute{o}\nu$ F.

κειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$, τὸ δὲ ὑπο τῶν AE , EB τῷ ὑπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$ καὶ αἱ ΓZ , $Z\Delta$ ἄρα
 δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον
 5 μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ'
 αὐτῶν [τετραγώνων] τῷ ὑπ' αὐτῶν.

Ἡ $\Gamma\Delta$ ἄρα μετὰ μέσον μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά
 ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ρη'.

- 10 Ἀπὸ ῥητοῦ μέσον ἀφαιρουμένου ἢ τὸ λοιπὸν
 χωρίον δυναμένη μία δύο ἀλόγων γίνεται ἥτοι
 ἀποτομὴ ἢ ἐλάσσων.

Ἀπὸ γὰρ ῥητοῦ τοῦ $B\Gamma$ μέσον ἀφηρήσθω τὸ $B\Delta$.
 λέγω, ὅτι ἢ τὸ λοιπὸν δυναμένη τὸ $E\Gamma$ μία δύο
 15 ἀλόγων γίνεται ἥτοι ἀποτομὴ ἢ ἐλάσσων.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἢ ZH , καὶ τῷ μὲν $B\Gamma$ ἴσον
 παρὰ τὴν ZH παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον παραλληλό-
 γραμμον τὸ $H\Theta$, τῷ δὲ ΔB ἴσον ἀφηρήσθω τὸ HK .
 λοιπὸν ἄρα τὸ $E\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τῷ $\Lambda\Theta$. ἐπεὶ οὖν ῥητὸν
 20 μὲν ἐστὶ τὸ $B\Gamma$, μέσον δὲ τὸ $B\Delta$, ἴσον δὲ τὸ μὲν $B\Gamma$
 τῷ $H\Theta$, τὸ δὲ $B\Delta$ τῷ HK , ῥητὸν μὲν ἄρα ἐστὶ τὸ
 $H\Theta$, μέσον δὲ τὸ HK . καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ZH
 παράκειται· ῥητὴ μὲν ἄρα ἢ $Z\Theta$ καὶ σύμμετρος τῇ

1. τὸ δέ — 2. καὶ] mg. m. 2 F. 3. τε] om. P. 6. τε-
 τραγώνων] om. P. 8. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BfB.

10. Post ῥητοῦ del. καὶ F. 11. γίνεται BfB. 12. ἐλάτ-
 των PVb. 13. $B\Gamma$] in ras. V. 14. λοιπὸν χωρίον BfB.

τὸ $E\Gamma$ δυναμένη BfB. 15. λόγων F, corr. m. 2. γί-
 γνεται BfB. ἐλάττων B. 17. Post παραβεβλήσθω del. τὸ

$H\Theta$ m. 1 P, ras. 4 litt. V. 18. ΔB] e corr. V, $B\Delta$ P. 19.
 $E\Gamma$] ΓE B. $\Lambda\Theta$] $\Theta\Delta$ F. 20. μὲν] (prius) om. b. 21.

ῥητόν] bis b. 23. παράκειται BF. ἄρα ἐστίν BfB.

commensurabilia. quare etiam ΓZ , $Z\Delta$ potentia incommensurabiles sunt efficientes summam quadratorum mediam et rectangulum medium praetereaue summam quadratorum rectangulo incommensurabilem.

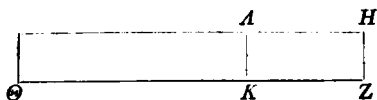
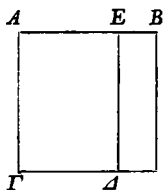
Ergo $\Gamma\Delta$ recta est cum medio totum medium efficiens [prop. LXXVIII]; quod erat demonstrandum.

CVIII.

Spatio medio a rationali ablato recta reliquo spatio aequalis quadrata alterutra rectarum irrationalium est aut apotome aut minor.

nam a spatio rationali $B\Gamma$ medium auferatur $B\Delta$. dico, rectam reliquo $E\Gamma$ aequalem quadratam alterutra rectarum irrationalium esse aut apotomen aut minorem.

ponatur enim rationalis ZH , et spatio $B\Gamma$ aequale rectae ZH adplicetur rectangulum $H\Theta$, spatio autem ΔB aequale auferatur HK . itaque reliquum $E\Gamma = \Delta\Theta$.



iam quoniam $B\Gamma$ rationale est, $B\Delta$ autem medium, et $B\Gamma = H\Theta$, $B\Delta = HK$, $H\Theta$ rationale est, HK autem medium. et rationali ZH adplicata sunt. itaque $Z\Theta$ rationalis est et rectae ZH longitudine commensurabilis [prop. XX], ZK autem rationalis et rectae ZH longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. quare $Z\Theta$, ZK longitudine incommensurabiles sunt [prop.

ZH μήκει, ῥητὴ δὲ ἡ ZK καὶ ἀσύμμετρος τῇ ZH μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ $Z\Theta$ τῇ ZK μήκει. αἱ $Z\Theta$, ZK ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $K\Theta$, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ
 5 KZ . ἦτοι δὴ ἡ ΘZ τῆς ZK μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἢ οὐ.

Δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου. καὶ ἐστὶν ὅλη ἡ ΘZ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ZH · ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἐστὶν ἡ $K\Theta$. τὸ δ' ὑπὸ ῥητῆς
 10 καὶ ἀποτομῆς πρώτης περιεχόμενον ἢ δυναμένη ἀποτομὴ ἐστὶν. ἡ ἄρα τὸ $\Lambda\Theta$, τουτέστι το $E\Gamma$, δυναμένη ἀποτομὴ ἐστὶν.

Εἰ δὲ ἡ ΘZ τῆς ZK μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἐστὶν ὅλη ἡ $Z\Theta$ σύμμετρος τῇ ἐκ-
 15 κειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ZH , ἀποτομὴ τετάρτη ἐστὶν ἡ $K\Theta$. τὸ δ' ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης περιεχόμενον ἢ δυναμένη ἐλάσσων ἐστὶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ρθ'.

Ἀπὸ μέσου ῥητοῦ ἀφαιρουμένου ἄλλαι δύο
 20 ἄλογοι γίνονται ἦτοι μέσης ἀποτομὴ πρώτη ἢ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἀπὸ γὰρ μέσου τοῦ $B\Gamma$ ῥητὸν ἀφηρήσθω τὸ $B\Lambda$. λέγω, ὅτι ἡ τὸ λοιπὸν τὸ $E\Gamma$ δυναμένη μία δύο ἀλόγων

1. ZH] (prius) HZ F. 2. Post μήκει (alt.) add. καὶ εἰσιν ἀμφοτέραι ῥηταί b. 3. $Z\Theta$] ΘZ BF. εἰσιν P. 4. δέ] δ' P. 5. ZK φ. δὴ] P, δέ BFb, et supra scr. m. 2 V. ΘZ] $Z\Theta$ b. 6. ἀσυμμέτρον P. ἢ οὐ] ἑαυτῇ ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου BFb. ἡ — 7. συμέτρου] mg. m. 1 P. 7. τῷ] corr. ex τό m. 1 b, m. rec. P. ἀσυμμέτρον P. 8. ΘZ] corr. ex $Z\Theta$ V, $Z\Theta$ F. 9. δέ BFb. 10. περιεχόμενον] om. BFb. 11. ἡ] ins. m. 1 B. τό] (prius) ins. m. 2 V. 13. ΘZ] in ras. b, $Z\Theta$ F. τῆς] τῇ b. συμέτρου V, corr.

XIII]. itaque $Z\Theta$, ZK rationales sunt potentia tantum commensurabiles. quare $K\Theta$ apotome est [prop. LXXIII], KZ autem ei congruens. iam ΘZ^2 excedit ZK^2 quadrato rectae aut commensurabilis aut incommensurabilis.

Prius excedat quadrato commensurabilis. et tota ΘZ rationali propositae ZH longitudine commensurabilis est. quare $K\Theta$ apotome est prima [deff. tert. 1]. recta autem spatio comprehenso recta rationali et apotome prima aequalis quadrata apotome est [prop. XCI]. ergo recta spatio $A\Theta$, hoc est $E\Gamma$, aequalis quadrata apotome est.

sin ΘZ^2 excedit ZK^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis, et tota $Z\Theta$ rationali propositae ZH longitudine commensurabilis est, $K\Theta$ apotome est quarta [deff. tert. 4]. recta autem spatio comprehenso recta rationali et apotome quarta aequalis quadrata minor est [prop. XCIV]; quod erat demonstrandum.

CIX.

Spatio rationali a medio ablato aliae duae rectae irrationales oriuntur aut mediae apotome prima aut recta cum rationali totum medium efficiens.

A medio enim $B\Gamma$ rationale auferatur $B\Delta$. dico, rectam spatio reliquo $E\Gamma$ aequalem quadratam alterutram rectarum irrationalium esse aut mediae apotomen

m. 2. 14. ΘZ BF. 15. ZH] corr. ex $Z\Theta$ m. 1 F. ἀποτομή ἄρα BFb. 16. δέ B. 17. Post ἐστίν add. ἡ ἄρα τὸ (om. b) $A\Theta$, τούτέστι τὸ $E\Gamma$, δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν BF, mg. m. 1 b. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFb. 19. Post ἀπό add. τοῦ b, m. 2 F. 20. γίνονται B. μέση B. 22. ἀπό] corr. ex ὑπό V. ἀπό — $B\Delta$] bis b. 23. μία] om. b. λόγων b.

γίνεται ἥτοι μέσης ἀποτομή πρώτη ἢ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ZH , καὶ παραβελήσθω ὁμοίως τὰ χωρία. ἔστι δὴ ἀκολούθως ῥητὴ μὲν ἡ $Z\Theta$ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ZH μήκει, ῥητὴ δὲ ἡ KZ καὶ σύμμετρος τῇ ZH μήκει· αἱ $Z\Theta$, ZK ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $K\Theta$, προσαρμόζουσα δὲ ταύτῃ ἡ ZK . ἥτοι δὴ ἡ ΘZ τῆς ZK μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυνμέτρου.

Εἰ μὲν οὖν ἡ ΘZ τῆς ZK μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἐστὶν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ZK σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ μήκει τῇ ZH , ἀποτομὴ δευτέρα ἐστὶν ἡ $K\Theta$. ῥητὴ δὲ ἡ ZH · ὥστε ἡ τὸ $\Lambda\Theta$, τουτέστι τὸ $E\Gamma$, δυναμένη μέσης ἀποτομὴ πρώτη ἐστίν.

Εἰ δὲ ἡ ΘZ τῆς ZK μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυνμέτρου, καὶ ἐστὶν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ZK σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ μήκει τῇ ZH , ἀποτομὴ πέμπτη ἐστὶν ἡ $K\Theta$ · ὥστε ἡ τὸ $E\Gamma$ δυναμένη μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

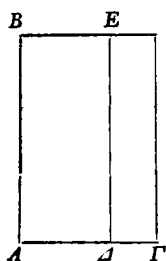
ρι'.

Ἀπὸ μέσου μέσου ἀφαιρουμένου ἀσυνμέ-

1. γίνεσθαι Bb. μέση Bb. 4. ἔστιν P. δὴ] corr. ex δέ m. 2 B, δέ Fb. 5. καὶ] om. φ. ZH] ZI b. ZK B. 6. $Z\Theta$] ΘZ P. εἰσιν P. 8. αὐτῇ BFb. δὴ] δέ BV. ΘZ] in ras. m. 1 b. 10. συμέτρου V, corr. m. 1. 11. ΘZ] $Z\Theta$ V. 14. Post ZH add. τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς δευτέρας ἡ δυναμένη μέσης ἀποτομὴ ἐστὶ πρώτη b, F mg. m. 2. 15. τουτέστιν P. μέση BF. ἐστὶ πρώτη V. 16. ΘZ] in ras. V, $Z\Theta$ P. 17. καὶ] ἑαυτῇ, καὶ BFb. 18. μήκει] om. b. 19. $K\Theta$] ΘK F. Post $E\Gamma$ del. χωρίων m. 1 P. 20. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFb. 22. μέσον] (alt.) supra scr. m. 1 P, μέσον supra scr. m. 2 F.

primam aut rectam cum rationali totum medium efficientem.

ponatur enim rationalis ZH , et spatia similiter adplicentur. itaque eodem modo [p. 342, 19 sq.] se-



quitur, $ZΘ$ rationalem esse et rectae ZH longitudine incommensurabilem, KZ autem rationalem et rectae ZH longitudine commensurabilem. itaque $ZΘ$, ZK rationales sunt potentia tantum commensurabiles [prop. XIII]. ergo $KΘ$ apotome est [prop. LXXIII], ei autem congruens

ZK . iam $ΘZ^2$ excedit ZK^2 quadrato rectae aut sibi commensurabilis aut incommensurabilis.

iam si $ΘZ^2$ excedit ZK^2 quadrato rectae sibi commensurabilis, et congruens ZK rationali propositae ZH longitudine commensurabilis est, $KΘ$ apotome est secunda [deff. tert. 2]. ZH autem rationalis est. quare recta spatio $AΘ$, hoc est $EΓ$, aequalis quadrata mediae apotome est prima [prop. XCII]. sin $ΘZ^2$ excedit ZK^2 quadrato rectae incommensurabilis, et congruens ZK rationali propositae ZH longitudine commensurabilis est, $KΘ$ apotome est quinta [deff. tert. 5]. quare recta spatio $EΓ$ aequalis quadrata recta est cum rationali totum medium efficiens [prop. XCV]; quod erat demonstrandum.

CX.

Spatio medio a medio ablato toti incommensurabili reliquae duae irrationales oriuntur aut mediae apo-

τρον τῷ ὅλῳ αἱ λοιπαὶ δύο ἄλλοι γίνονται
ἤτοι μέσης ἀποτομῇ δευτέρα ἢ μετὰ μέσον
μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἀφηρήσθω γὰρ ὥς ἐπὶ τῶν προκειμένων κατα-
5 γραφῶν ἀπὸ μέσου τοῦ ΒΓ μέσον τὸ ΒΔ ἀσύμμετρον
τῷ ὅλῳ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΕΓ δυναμένη μία ἐστὶ δύο
ἀλόγων ἤτοι μέσης ἀποτομῇ δευτέρα ἢ μετὰ μέσον
μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐστὶν ἐκάτερον τῶν ΒΓ, ΒΔ, καὶ
10 ἀσύμμετρον τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ, ἔσται ἀκολουθῶς ρητὴ
ἐκατέρα τῶν ΖΘ, ΖΚ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει.
καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ, τουτέστι τὸ
ΗΘ τῷ ΗΚ, ἀσύμμετρος καὶ ἡ ΘΖ τῇ ΖΚ· αἱ ΖΘ,
ΖΚ ἄρα ρηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀπο-
15 τομῇ ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ [προσαρμόζουσα δὲ ἡ ΖΚ. ἤτοι
δὴ ἡ ΖΘ τῆς ΖΚ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου
ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυνμέτρου ἑαυτῇ].

Εἰ μὲν δὴ ἡ ΖΘ τῆς ΖΚ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ
συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΘ, ΖΚ σύμ-
20 μετρὸς ἐστὶ τῇ ἐκκειμένῃ ρητῇ μήκει τῇ ΖΗ, ἀποτομῇ
τρίτῃ ἐστὶν ἡ ΚΘ. ρητὴ δὲ ἡ ΚΑ, τὸ δ' ὑπὸ ρητῆς
καὶ ἀποτομῆς τρίτης περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν
ἐστίν, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν, καλεῖται δὲ

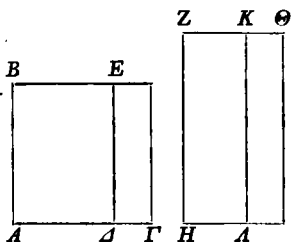
1. γίνονται B. 2. μέση Bb. 5. ΒΔ] B e corr. V. 6.
ἐστὶν B. 7. μέση Bb. μετὰ] μετὰ τοῦ P. 12. ἐστὶν P.
Deinde add. ὑπόκειται P, et V, sed del. 13. καί] ἐστὶ καὶ b,
ἐστὶν καὶ B. αἱ] καὶ ἡ b. ΖΘ] ΘΖ FV. 14. ΖΚ]
ΘΚ P. 15. ἐστὶν] om. Bb. προσαρμόζουσα — 17. ἑαυτῇ]
om. P, mg. V. 16. δὴ] δέ BV. 18. δὴ] οὖν BFb. ΖΘ]
ΘΖ B. ΖΚ] Ζ postea ins. V. 19. οὐδετέρα V. τῶν]
corr. ex τῷ m. 2 V. ΖΘ] ΘΖ Bb et in ras. V. 20. ἐστὶ]
om. Fb. 21. ΚΑ] corr. ex ΚΑ m. 2 F. δ'] δέ BFb. 23.
ἐστὶ PBV, comp. Fb; item alt.

tome secunda aut recta cum medio totum medium efficiens.

Auferatur enim ut in figuris iam propositis [p. 347] a medio $B\Gamma$ spatium medium $B\Delta$ toti incommensurabile. dico, rectam spatio $E\Gamma$ aequalem quadratam alterutram esse rectarum irrationalium aut mediae apotomen secundam aut rectam cum medio totum medium efficientem.

nam quoniam utrumque $B\Gamma$, $B\Delta$ medium est, et $B\Gamma$, $B\Delta$ incommensurabilia¹⁾, similiter concludemus [p. 342, 19 sq.], utramque $Z\Theta$, ZK rationalem esse et rectae ZH longitudine incommensurabilem [prop. XXII]. et quoniam $B\Gamma$, $B\Delta$, hoc est $H\Theta$, HK , incommensurabilia sunt, etiam ΘZ , ZK incommensurabiles sunt [VI, 1; prop. XI]. itaque $Z\Theta$, ZK rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo $K\Theta$ apotome est [prop. LXXIII].

iam si $Z\Theta^2$ excedit ZK^2 quadrato rectae sibi commensurabilis, et neutra rectarum $Z\Theta$, ZK rationali propositae ZH longitudine commensurabilis est, $K\Theta$ apotome est tertia [deff. tert. 3]. uerum $K\Delta$ rationalis est, rectangulum autem recta rationali et apotome tertia comprehensum irrationale est, et recta ei aequalis quadrata



irrationalis est, uocatur autem mediae apotome se-

1) Cum uerba καὶ ἀσύμμετρον τὸ $B\Gamma$ τῷ $B\Delta$ lin. 9 — 10 nihil faciant ad demonstrandum id, quod sequitur, non immerito ab Augusto omittuntur. Gregorius omisit ἔσται lin. 10 — τῷ $B\Delta$ lin. 12.

μέσης ἀποτομή δευτέρα· ὥστε ἡ τὸ $\Lambda\Theta$, τουτέστι τὸ $E\Gamma$, δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστὶ δευτέρα.

Εἰ δὲ ἡ $Z\Theta$ τῆς ZK μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ [μήκει], καὶ οὐδέτερά τῶν ΘZ , ZK
 5 σύμμετρός ἐστι τῇ ZH μήκει, ἀποτομή ἕκτη ἐστὶν ἡ $K\Theta$. τὸ δ' ὑπὸ φητῆς καὶ ἀποτομῆς ἕκτης ἡ δυναμένη ἐστὶ μετὰ μέσον μέσον τὸ ὅλον ποιούσα. ἡ τὸ $\Lambda\Theta$ ἄρα, τουτέστι τὸ $E\Gamma$, δυναμένη μετὰ μέσον μέσον τὸ ὅλον ποιούσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10

ρια'.

Ἡ ἀποτομή οὐκ ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Ἔστω ἀποτομή ἡ AB · λέγω, ὅτι ἡ AB οὐκ ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.

15

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· καὶ ἐκκείσθω φητὴ ἡ $\Delta\Gamma$, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB ἴσον παρὰ τὴν $\Gamma\Delta$ παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον τὸ ΓE πλάτος ποιούν τὴν ΔE . ἐπεὶ οὖν ἀποτομή ἐστὶν ἡ AB , ἀποτομή πρώτη ἐστὶν ἡ ΔE . ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ EZ · αἱ ΔZ , ZE ἄρα
 20 φηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΔZ τῆς ZE μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΔZ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ φητῇ μήκει τῇ $\Delta\Gamma$. πάλιν, ἐπεὶ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ AB , ἐκ δύο ἄρα

1. ἀποτομὴ μέση B. ὥπερ FV. τό] om. b. τουτέστιν B. τό] ἢ τό Bb. 2. μέση B. ἐστὶν ἀποτομή Fb.

8. $Z\Theta$] ΘZ Bb et in ras. V. συμέτρου V, corr. m. 1. 4. μήκει] om. PV. οὐδέτερά FV. 5. ἐστὶ] om. Bbφ. 6. δὲ Bb. 7. ἐστὶ] ἐστὶν ἡ BFb. ἡ] ὥστε ἡ BFb, et e corr. V.

8. ἄρα] del. V, om. BFb. τουτέστιν PB. Ante τό add. ἡ m. 2 F. ἡ μετὰ F. 9. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. B.

11. τῇ] supra scr. m. 1 b. 13. ἡ AB] (alt.) om. φ. 15. $\Delta\Gamma$] in ras. m. 1 P. 16. φητὴν τὴν BFb. In sequentibus multa renouata et euan. in F. 18. ἄρα πρώτη b. 19. αὐτῇ] αὐτῇ ἡ b. 21. ἀσυμμέτρου B, sed ἀ- eras. 23. ἄρα] om. Bb.

cunda [prop. XCIII]. ergo recta spatio $A\Theta$, hoc est $E\Gamma$, aequalis quadrata mediae apotome est secunda.

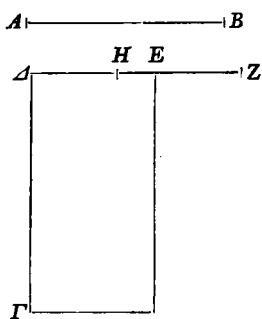
sin $Z\Theta^2$ excedit ZK^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis, et neutra rectarum ΘZ , ZK rectae ZH commensurabilis est longitudine, $K\Theta$ sexta est apotome [deff. tert. 6]. recta autem spatio comprehenso recta rationali et apotome sexta aequalis quadrata recta est cum medio totum medium efficiens [prop. XCVI]. ergo recta spatio $A\Theta$, hoc est $E\Gamma$, aequalis quadrata recta est cum medio totum medium efficiens; quod erat demonstrandum.

CXI.

Apotome eadem non est ac recta ex duobus nominibus.

Sit AB apotome. dico, AB eandem non esse ac rectam ex duobus nominibus.

nam, si fieri potest, sit. et ponatur rationalis $\Delta\Gamma$ et quadrato AB^2 aequale rectae $\Gamma\Delta$ adplicetur rectangulum ΓE latitudinem efficiens ΔE . quoniam igitur



AB apotome est, ΔE apotome est prima [prop. XCVII]. sit EZ ei congruens. itaque ΔZ , ZE rationales sunt potentia tantum commensurabiles, et ΔZ^2 excedit ZE^2 quadrato rectae sibi commensurabilis, et ΔZ rationali propositae $\Delta\Gamma$ longitudine commensurabilis est [deff. tert. 1].

rursus quoniam AB ex duobus nominibus est, ΔE ex duobus nominibus est prima [prop. LX]. in H in nomina diuidatur, et ΔH maius

- ὀνομάτων πρώτη ἐστὶν ἡ ΔΕ. διηρησθῶ εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Η, καὶ ἔστω μείζον ὄνομα τὸ ΔΗ· αἱ ΔΗ, ΗΕ ἄρα ρηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΔΗ τῆς ΗΕ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου 5 ἑαυτῇ, καὶ τὸ μείζον ἡ ΔΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένη ρητῇ μήκει τῇ ΔΓ. καὶ ἡ ΔΖ ἄρα τῇ ΔΗ σύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΗΖ σύμμετρός ἐστι τῇ ΔΖ μήκει. [ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστὶν ἡ ΔΖ τῇ ΗΖ, ρητὴ δέ ἐστὶν ἡ ΔΖ, ρητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ 10 ΗΖ. ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστὶν ἡ ΔΖ τῇ ΗΖ μήκει] ἀσύμμετρος δὲ ἡ ΔΖ τῇ ΕΖ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΕΖ μήκει. αἱ ΗΖ, ΖΕ ἄρα ρηταὶ [εἰσι] δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΗ. ἀλλὰ καὶ ρητὴ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.
- 15 Ἡ ἄρα ἀποτομὴ οὐκ ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[Πόρισμα].

- Ἡ ἀποτομὴ καὶ αἱ μετ' αὐτὴν ἄλλοι οὔτε τῇ μέσῃ οὔτε ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ αὐταί.
- 20 Τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ μέσης παρὰ ρητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ρητὴν καὶ ἀσύμμετρον τῇ, παρ' ἣν παρακείται, μήκει, τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ρητὴν

1. ὀνομάτων ἄρα Bb. ἐστὶ πρώτη F?, πρώτη supra scr. m. 2 V. διηρημένη b, mg. m. 1: γο. διηρησθῶ. 4. ΗΕ] ΕΗ F. τῷ] τὸ φ. 5. τὸ μείζον] P, et V, supra scr. ἡ; om. b, ἡ μείζων B; om. φ, sed post ΔΗ lacuna est 6 litt. 7. Ante μήκει del. τῇ ἐκκειμένη ρητῇ μήκει τῇ ΔΓ m. 1 b. λοιπὴ ἄρα τῇ BFV. ΗΖ] in ras. m. 1 b; ΖΗ F, seq. ras. 1 litt. 8. ἐστὶ τῇ] ἐστὶν ἡ BVb et supra scr. ἡ φ. ἐπεὶ — 10. ΗΖ (prius)] om. P, mg. V. 9. ΗΖ] Ζ ante ras. 1 litt. V. ἐστὶν] om. V. Post ρητὴ in mg. m. 1 add. μήκει ἀσύμμετρος m. 1 b. ἐστὶν B, om. V. 10. ἐπεὶ — μήκει] om.

nomen sit. itaque ΔH , HE rationales sunt potentia tantum commensurabiles, et ΔH^2 excedit HE^2 quadrato rectae sibi commensurabilis, et maius nomen ΔH rationali propositae $\Delta \Gamma$ longitudine commensurabile est [deff. alt. 1]. itaque etiam ΔZ rectae ΔH longitudine commensurabilis est [prop. XII]. quare etiam reliqua HZ rectae ΔZ longitudine commensurabilis est [prop. XV]. uerum ΔZ , EZ longitudine incommensurabiles sunt. quare etiam ZH , EZ longitudine incommensurabiles sunt [prop. XIII]. itaque HZ , ZE rationales sunt potentia tantum commensurabiles. EH igitur apotome est [prop. LXXIII]. uerum eadem rationalis est; quod fieri non potest.

Ergo apotome eadem non est ac recta ex duobus nominibus; quod erat demonstrandum.

Apotome et irrationales eam sequentes neque mediae neque inter se eadem sunt. nam quadratum mediae rectae rationali adplicatum latitudinem efficit rationalem et rectae, cui adplicatum est, longitudine incommensurabilem [prop. XXII], quadratum autem apotomes rationali adplicatum latitudinem efficit apotomen primam [prop. XCVII], quadratum autem mediae apotomes primae rationali adplicatum latitudinem efficit apotomen secundam [prop. XCVIII], quadratum autem

PV. 11. EZ] mut. in ZE V. $\alpha\theta\alpha \epsilon\sigma\tau\iota$] $\delta\epsilon$ in ras. 4 litt. ϕ . 12. $\epsilon\sigma\tau\iota\gamma$ P. Post $\mu\eta\kappa\epsilon\iota$ add. $\kappa\alpha\iota \epsilon\lambda\epsilon\iota \phi\eta\tau\alpha\iota$ mg. m. 2 B. 13. $\epsilon\lambda\epsilon\iota$] om. PV. 14. EH] corr. ex HE V, HE P, EN ϕ . 15. η] (alt.) om. b. 16. $\delta\pi\epsilon\rho \epsilon\delta\epsilon\iota \delta\epsilon\iota\chi\alpha\iota$] comp. P, om. BFb. 17. $\pi\acute{o}\tau\iota\sigma\mu\alpha$] om. P, $\phi\iota\gamma'$ BVb, $\phi\iota\alpha'$ F. 21. $\epsilon\eta$] $\tau\iota$ b. 22. $\alpha\pi\acute{o}$] om. F.

παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην, το
 δὲ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλ-
 λόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν δευτέραν, τὸ δὲ ἀπὸ
 μέσης ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον
 5 πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τρίτην, τὸ δὲ ἀπὸ ἐλάσσονος
 παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν
 τετάρτην, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον
 ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ
 ἀποτομὴν πέμπτην, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μετὰ μέσου μέσον
 10 τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος
 ποιεῖ ἀποτομὴν ἕκτην. ἐπεὶ οὖν τὰ εἰρημένα πλάτη
 διαφέρει τοῦ τε πρώτου καὶ ἀλλήλων, τοῦ μὲν πρώτου,
 ὅτι ῥητὴ ἐστίν, ἀλλήλων δὲ, ἐπεὶ τῇ τάξει οὐκ εἰσὶν
 αἱ αὐταί, δῆλον, ὥς καὶ αὐταὶ αἱ ἄλογοι διαφέρουσιν
 15 ἀλλήλων. καὶ ἐπεὶ δέδεικται ἡ ἀποτομὴ οὐκ οὔσα ἡ
 αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων, ποιούσι δὲ πλάτη παρὰ
 ῥητὴν παραβαλλόμενα αἱ μετὰ τὴν ἀποτομὴν ἀποτομὰς
 ἀκολουθῶς ἐκάστη τῇ τάξει τῇ καθ' αὐτήν, αἱ δὲ
 μετὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τὰς ἐκ δύο ὀνομάτων καὶ
 20 αὐταὶ τῇ τάξει ἀκολουθῶς, ἕτεραι ἄρα εἰσὶν αἱ μετὰ
 τὴν ἀποτομὴν καὶ ἕτεραι αἱ μετὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων,
 ὥς εἶναι τῇ τάξει πάσας ἀλόγους ἰγ,

Μέσῃν,

Ἐκ δύο ὀνομάτων,

25 Ἐκ δύο μέσων πρώτην,

Ἐκ δύο μέσων δευτέραν,

Μείζονα,

Ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένην,

1. τὸ δέ — 3. δευτέραν] mg. m. 1 V. 5. ἐλάττονος Bb,
 comp. F. 9. μετὰ] om. F. 11. οὖν] corr. ex οὐ m. 1 P.
 12. πρώτου] (prius) in ras. V. 13. ἐπεὶ] ὅτι B. 17.
 παραβαλλόμενα F, corr. m. 2. αἱ] om. P, supra scr. m. 1 V,

mediae apotomes secundae rationali adplicatum latitudinem efficit apotomen tertiam [prop. XCIX], quadratum autem minoris rationali adplicatum latitudinem efficit apotomen quartam [prop. C], quadratum autem rectae cum rationali totum medium efficientis rationali adplicatum latitudinem efficit apotomen quintam [prop. CI], quadratum autem rectae cum medio totum medium efficientis rationali adplicatum latitudinem efficit apotomen sextam [prop. CII]. iam quoniam latitudines, quas diximus, et a prima et inter se differunt, a prima, quia rationalis est, inter se autem, quia ordine eadem non sunt, adparet, ipsas quoque irrationales inter se differre. Et quoniam demonstrauius, apotomen eandem non esse ac rectam ex duobus nominibus [prop. CXI], et rationali adplicatae rectae irrationales apotomen sequentes latitudines efficiunt apotomas secundum suum quaeque ordinem, irrationales autem rectam ex duobus nominibus sequentes rectas ex duobus nominibus et ipsae secundum suum quaeque ordinem, aliae sunt irrationales apotomen sequentes, aliae irrationales rectam ex duobus nominibus sequentes, ita ut omnes XIII irrationales ordine hae sint:

1. Media.
2. Recta ex duobus nominibus.
3. Ex duabus mediis prima.
4. Ex duabus mediis secunda.
5. Maior.
6. Recta spatio rationali et medio aequalis quadrata.

μέν B, αὶ μέν b, μέν supra add. m. 2 F. 19. τὰς ἐκ δύο
 ὀνομάτων] om. V. 20. αὐτὰς b. εἰσιν ἄρα V. 21. αὶ]
 om. F. μετὰ] κατὰ P.

- Δύο μέσα δυναμένην,
 Ἀποτομήν,
 Μέσης ἀποτομήν πρώτην,
 Μέσης ἀποτομήν δευτέραν,
 5 Ἐλάσσονα,
 Μετὰ ρητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσαν,
 Μετὰ μέσον μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσαν.

[ριβ'.

Τὸ ἀπὸ ρητῆς παρὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων
 10 παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομήν, ἥς
 τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνο-
 μάτων ὀνόμασι καὶ ἔτι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ
 ἔτι ἡ γινομένη ἀποτομή τὴν αὐτὴν ἔξει τάξιν
 τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.

15 Ἐστω ρητὴ μὲν ἡ *A*, ἐκ δύο ὀνομάτων δὲ ἡ *BΓ*,
 ἥς μείζον ὄνομα ἔστω ἡ *ΔΓ*, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς *A* ἴσον
 ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν *BΓ*, *EZ*. λέγω, ὅτι ἡ *EZ* ἀποτομή
 ἐστίν, ἥς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς *ΓΔ*, *ΔB*,
 καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ *EZ* τὴν αὐτὴν ἔξει
 20 τάξιν τῇ *BΓ*.

Ἐστω γὰρ πάλιν τῷ ἀπὸ τῆς *A* ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν
BΔ, *H*. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν *BΓ*, *EZ* ἴσον ἐστὶ τῷ
 ὑπὸ τῶν *BΔ*, *H*, ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ *ΓB* πρὸς τὴν *BΔ*,

De his 13 irrationalibus cfr. Martianus Capella VI, 720.

5. ἐλάττονα B F b. 8. ριβ'] om. b, ρια' F, ριδ' B V. 11.
 τέ ἐστι F. 12. ὀνόμασιν P B F. 15. δὲ ὀνομάτων V. 16.
ΔΓ] *ΓΔ* F. 17. *BΓ*] *ΓB* F. 18. ἐστι] ἐστίν P. *ΓΔ*] *Γ*
 e corr. V. *ΔB*] *Δ* supra scr. m. 2 V. 19. τάξιν ἔξει V.
 ἔξει] ἔχει B F b, in B supra scr. ξ m. 2. 22. *BΔ*] *Δ* e
 corr. V, *ΔB* F. τό] τῷ P V. τῷ] mut. in τό m. 1 P, τό V.
 23. Post τῶν ras. 1 litt. P. *ΓB*] *BΓ* F.

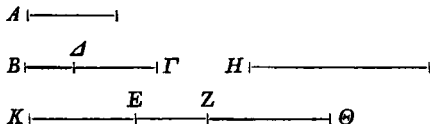
7. Recta duobus spatiis mediis aequalis quadrata.
8. Apotome.
9. Mediae apotome prima.
10. Mediae apotome secunda.
11. Minor.
12. Recta cum rationali totum medium efficiens.
13. Recta cum medio totum medium efficiens.

CXII.¹⁾

Quadratum rectae rationalis rectae ex duobus nominibus adplicatum latitudinem efficit apotomen, cuius nomina nominibus rectae ex duobus nominibus commensurabilia sunt praetereaue in eadem proportionem, et praeterea apotome ita orta eundem ordinem habebit ac recta ex duobus nominibus.

Sit A rationalis, $B\Gamma$ autem ex duobus nominibus, cuius maius nomen sit $\Delta\Gamma$, et sit $B\Gamma \times EZ = A^2$. dico, EZ apotomen esse, cuius nomina rectis $\Gamma\Delta$, ΔB commensurabilia et in eadem proportionem sint, et praeterea rectam EZ eundem ordinem habere ac $B\Gamma$.

nam rursus sit $B\Delta \times H = A^2$. iam quoniam est $B\Gamma \times EZ = B\Delta \times H$, erit $\Gamma B : B\Delta = H : EZ$ [VI, 16].



uerum $\Gamma B > B\Delta$. itaque etiam $H > EZ$ [V, 16; V, 14].

1) Dubito, an haec propositio et sequentes Euclidis non sint. sed de hac re alibi uiderimus.

οὕτως ἡ H πρὸς τὴν EZ . μείζων δὲ ἡ $ΓΒ$ τῆς $BΔ$.
 μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ H τῆς EZ . ἔστω τῇ H ἴση
 ἡ $EΘ$. ἐστὶν ἄρα ὥς ἡ $ΓΒ$ πρὸς τὴν $BΔ$, οὕτως ἡ
 $ΘΕ$ πρὸς τὴν EZ . διελόντι ἄρα ἐστὶν ὥς ἡ $ΓΔ$ πρὸς
 5 τὴν $BΔ$, οὕτως ἡ $ΘΖ$ πρὸς τὴν $ΖΕ$. γεγονέτω ὥς
 ἡ $ΘΖ$ πρὸς τὴν $ΖΕ$, οὕτως ἡ $ΖΚ$ πρὸς τὴν $ΚΕ$. καὶ
 ὅλη ἄρα ἡ $ΘΚ$ πρὸς ὅλην τὴν $ΚΖ$ ἐστὶν, ὥς ἡ $ΖΚ$
 πρὸς $ΚΕ$. ὥς γὰρ ἐν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἐν τῶν
 ἐπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα
 10 τὰ ἐπόμενα. ὥς δὲ ἡ $ΖΚ$ πρὸς $ΚΕ$, οὕτως ἐστὶν ἡ
 $ΓΔ$ πρὸς τὴν $ΔΒ$. καὶ ὥς ἄρα ἡ $ΘΚ$ πρὸς $ΚΖ$, οὕτως ἡ
 $ΓΔ$ πρὸς τὴν $ΔΒ$. σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς $ΓΔ$ τῷ
 ἀπὸ τῆς $ΔΒ$. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΘΚ$
 τῷ ἀπὸ τῆς $ΚΖ$. καὶ ἐστὶν ὥς τὸ ἀπὸ τῆς $ΘΚ$ πρὸς
 15 τὸ ἀπὸ τῆς $ΚΖ$, οὕτως ἡ $ΘΚ$ πρὸς τὴν $ΚΕ$, ἐπεὶ αἱ
 τρεῖς αἱ $ΘΚ$, $ΚΖ$, $ΚΕ$ ἀνάλογόν εἰσιν. σύμμετρος
 ἄρα ἡ $ΘΚ$ τῇ $ΚΕ$ μήκει. ὥστε καὶ ἡ $ΘΕ$ τῇ $ΕΚ$
 σύμμετρός ἐστι μήκει. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς A ἴσον
 ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν $EΘ$, $BΔ$, ῥητὸν δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς
 20 A , ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν $EΘ$, $BΔ$. καὶ
 παρὰ ῥητὴν τὴν $BΔ$ παράκειται. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ
 $EΘ$ καὶ σύμμετρος τῇ $BΔ$ μήκει. ὥστε καὶ ἡ σύμ-
 μετρος αὐτῇ ἡ $ΕΚ$ ῥητὴ ἐστὶ καὶ σύμμετρος τῇ $BΔ$
 μήκει. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὥς ἡ $ΓΔ$ πρὸς $ΔΒ$, οὕτως ἡ
 25 $ΖΚ$ πρὸς $ΚΕ$, αἱ δὲ $ΓΔ$, $ΔΒ$ δυνάμει μόνον εἰσὶ

1. μείζων — 2. ἔστω] in ras. V. 1. $ΓΒ$] $ΒΓ$ P. 2.
 ἐστὶ] om. V. 3. $ΓΒ$] $ΒΓ$ PV. 4. τήν] om. Bb. 5. τήν]
 om. Bb. $ΔΒ$ FVb. τήν] om. BFb. γεγονέτω — 6.
 $ΖΕ$] om. b. 6. τήν] om. BF. $ΖΚ$] $ΚΖ$ B. τήν] om.
 BFb. 7. πρὸς] bis φ. 8. τήν $ΚΕ$ FV. ὥς γάρ] om. P,
 supra scr. V. τῶν] om. P. ἡγούμενον P. 10. τήν $ΚΕ$ V.
 11. $ΔΒ$] $ΒΔ$ F. τήν $ΚΖ$ BFb. 12. $ΔΒ$] e corr. V,

sit $E\Theta = H$. itaque $\Gamma B : B\Delta = \Theta E : EZ$. quare dirimendo [V, 17] $\Gamma\Delta : B\Delta = \Theta Z : ZE$. fiat $\Theta Z : ZE = ZK : KE$. quare etiam $\Theta K : KZ = ZK : KE$; nam ut unum praecedentium ad unum sequentium, ita omnia praecedentia ad omnia sequentia [V, 12]. est autem $ZK : KE = \Gamma\Delta : \Delta B$. quare etiam $\Theta K : KZ = \Gamma\Delta : \Delta B$. uerum $\Gamma\Delta^2$, ΔB^2 commensurabilia sunt [prop. XXXVI]. itaque etiam ΘK^2 , KZ^2 commensurabilia sunt [VI, 20 coroll.; prop. XI]. est autem $\Theta K^2 : KZ^2 = \Theta K : KE$, quoniam tres rectae ΘK , KZ , KE proportionales sunt [V def. 9]. itaque ΘK , KE longitudine commensurabiles sunt [prop. XI]. quare etiam ΘE , EK longitudine commensurabiles sunt [prop. XV]. et quoniam $A^2 = E\Theta \times B\Delta$, et A^2 rationale est, etiam $E\Theta \times B\Delta$ rationale est. et rationali $B\Delta$ adplicatum est. itaque $E\Theta$ rationalis est et rectae $B\Delta$ longitudine commensurabilis [prop. XX]. quare etiam EK , quae ei commensurabilis est, rationalis est [def. 3] et rectae $B\Delta$ longitudine commensurabilis [prop. XII]. iam quoniam est $\Gamma\Delta : \Delta B = ZK : KE$, et $\Gamma\Delta$, ΔB potentia tantum commensurabiles sunt, etiam ZK , KE potentia tantum

$B\Delta$ F. 13. ΘK] $\Gamma\Delta$ φ. 14. KZ] ZK in ras. V. 15. Post KZ add. *ἐδείχθη γὰρ ὡς ἡ $\Gamma\Delta$ πρὸς ΔB , οὕτως ἡ ZK πρὸς KE . ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ $\Gamma\Delta$ πρὸς ΔB , οὕτως ἡ ΘK πρὸς KE . τρεῖς οὖν εὐθείαι εἰσιν ἀνάλογον πρώτη μὲν ἡ ΘK , δευτέρα δὲ ἡ KZ , τρίτη ἡ KE . ἐστὶν οὖν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας εἶδος, οὕτως ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, τουτέστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΘK πρὸς τὸ ἀπὸ KZ b. τήν] om. b.*

16. εἰσι BVb, comp. F. 17. ἄρα ἐστὶν BFb. ΘK] K e corr. V. Post *μήκει* add. *καὶ διελόντι* b, m. 2 F. ὥστε] -τε e corr. V. EK] $E\Theta$ b. 19. $E\Theta$] ΘE V. ἐστὶν L.

20. ἐστὶν L. ΔB LBFb, e corr. V. 21. ΔB BF. 22. Post ὥστε ras. 1 litt. V. 23. ἐστὶν L. ΔB F. 24. ὡς] om. L., supra scr. m. 2 B. 25. ZK] corr. ex ZH m. 2 F.

δε] m. 2 F. $\Gamma\Delta$] $\Delta\Gamma$ F. εἰσὶν L.

σύμμετροι, καὶ αὖ ZK , KE δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. ῥητὴ δὲ ἐστὶν ἡ KE . ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ZK . αὖ ZK , KE ἄρα ῥηταὶ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ EZ .

Ἦτοι δὲ ἡ $\Gamma\Delta$ τῆς ΔB μείζον δύνатаι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυσυμμέτρου.

Εἰ μὲν οὖν ἡ $\Gamma\Delta$ τῆς ΔB μείζον δύνатаι τῷ ἀπὸ συμμέτρου [ἑαυτῇ], καὶ ἡ ZK τῆς KE μείζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ $\Gamma\Delta$ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ZK · εἰ δὲ ἡ $B\Delta$, καὶ ἡ KE · εἰ δὲ οὐδετέρω τῶν $\Gamma\Delta$, ΔB , καὶ οὐδετέρω τῶν ZK , KE .

Εἰ δὲ ἡ $\Gamma\Delta$ τῆς ΔB μείζον δύνатаι τῷ ἀπὸ ἀσυσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ZK τῆς KE μείζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν ἡ $\Gamma\Delta$ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ZK · εἰ δὲ ἡ $B\Delta$, καὶ ἡ KE · εἰ δὲ οὐδετέρω τῶν $\Gamma\Delta$, ΔB , καὶ οὐδετέρω τῶν ZK , KE · ὥστε ἀποτομὴ ἐστὶν ἡ ZE , ἥς τὰ ὀνόματα τὰ ZK , KE σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι τοῖς $\Gamma\Delta$, ΔB καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ τὴν αὐτὴν τάξιν ἔχει τῇ $B\Gamma$. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

οἷγ'.

Τὸ ἀπὸ ῥητῆς παρὰ ἀποτομὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων, ἥς

1. KE ἄρα LBF. 2. Post KE add. καὶ σύμμετρός τῇ $B\Delta$ μήκει LBFb. ἐστὶν ἄρα V. ἐστὶν LPB. 3. ZK] (prius) KZ BFb (de L non liquet). Deinde add. καὶ σύμμετρός τῇ $\Gamma\Delta$ μήκει LBFb. ῥηταὶ εἰσὶν L, ῥηταὶ εἰσὶ BFb. εἰσὶ] om. LBFb. 4. EZ] ZE in ras. V. 6. τῷ] supra scr. m. rec. V. συμμέτρου V, sed corr. 8. ἀσυσυμμέτρου L, et V, sed ἀ-eras. ἑαυτῇ] om. P. ZK] KZ B. 11. $B\Delta$] mut. in ΔB V, ΔB b. οὐδετέρω P. 12. καὶ — 13. ΔB] mg. m. 2 F. 12. οὐδετέρω P. KE] E in ras. m. 1 P. 13.

commensurabiles sunt [prop. XI]. uerum KE rationalis est; itaque etiam ZK rationalis est. itaque ZK , KE rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo EZ apotome est [prop. LXXIII].

Iam $\Gamma\Delta^2$ excedit ΔB^2 quadrato rectae aut sibi commensurabilis aut incommensurabilis.

si igitur $\Gamma\Delta^2$ excedit ΔB^2 quadrato rectae commensurabilis, etiam ZK^2 excedit KE^2 quadrato rectae sibi commensurabilis [prop. XIV]. et siue $\Gamma\Delta$ rationali propositae longitudine commensurabilis est, etiam ZK ei commensurabilis est [prop. XI, XII], siue $B\Delta$, etiam KE [prop. XII], siue neutra rectarum $\Gamma\Delta$, ΔB , neutra rectarum ZK , KE . sin $\Gamma\Delta^2$ excedit ΔB^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis, etiam ZK^2 excedit KE^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis [prop. XIV]. et siue $\Gamma\Delta$ rationali propositae longitudine commensurabilis est, etiam ZK ei commensurabilis est, siue $B\Delta$, etiam KE , siue neutra rectarum $\Gamma\Delta$, ΔB , neutra rectarum ZK , KE . ergo ZE apotome est, cuius nomina ZK , KE nominibus $\Gamma\Delta$, ΔB rectae ex duobus nominibus commensurabilia sunt et in eadem proportionem, et eundem ordinem habet ac $B\Gamma$ [deff. alt. et tert.]; quod erat demonstrandum.

CXIII.

Quadratum rectae rationalis apotomae adplicatum latitudinem efficit rectam ex duobus nominibus, cuius

ΔB] $B\Delta$? L. 14. καί — 15. ξαντῇ] om. P, mg. m. 2 V.
 16. ἐστίν L. Ante ZK eras. H V. 17. οὐθετέρα V. 18. οὐθετέρα PVφ (non F). ὥστε] -s in ras. V. 19. τὰ] (alt.) om. P, m. 2 V. ἐστίν L. 20. ἐκ] ἐκ τῶν V. ὀνόμασιν LPBF. 21. ἔχει τὰξιν LBFb. $B\Gamma$] BB P. 23. οὐγ'] PL, οὐβ' F, οὐδ' b, οὐε' BV. 24. παρὰ] ἀρὰ L.

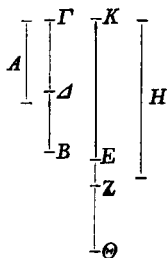
τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἐτι δὲ ἡ γινομένη ἐκ δύο ὀνομάτων τὴν αὐτὴν τάξιν ἔχει τῇ ἀποτομῇ.

5 Ἐστω ρητὴ μὲν ἡ A , ἀποτομὴ δὲ ἡ $B\Delta$, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς A ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν $B\Delta$, $K\Theta$, ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς A ρητῆς παρὰ τὴν $B\Delta$ ἀποτομὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν $K\Theta$. λέγω, ὅτι ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ $K\Theta$, ἥς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς $B\Delta$ ὀνόμασι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἐτι ἡ $K\Theta$ τὴν αὐτὴν ἔχει τάξιν τῇ $B\Delta$.

Ἐστω γὰρ τῇ $B\Delta$ προσαρμόζουσα ἡ $\Delta\Gamma$. αἱ $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ ἄρα ρηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ τῷ ἀπὸ τῆς A ἴσον ἔστω καὶ τὸ ὑπὸ τῶν $B\Gamma$, H . ρητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς A ρητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν $B\Gamma$, H . καὶ παρὰ ρητὴν τὴν $B\Gamma$ παραβέβληται· ρητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ H καὶ σύμμετρος τῇ $B\Gamma$ μήκει. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν $B\Gamma$, H ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν $B\Delta$, $K\Theta$, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓB πρὸς $B\Delta$, οὕτως ἡ $K\Theta$ πρὸς H .
 15 μελίων δὲ ἡ $B\Gamma$ τῆς $B\Delta$ · μελίων ἄρα καὶ ἡ $K\Theta$ τῆς H . κείσθω τῇ H ἴση ἡ KE · σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ KE τῇ $B\Gamma$ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΓB πρὸς $B\Delta$, οὕτως ἡ ΘK πρὸς KE , ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως ἡ $K\Theta$ πρὸς ΘE . γερονέτω
 20 ὡς ἡ $K\Theta$ πρὸς ΘE , οὕτως ἡ ΘZ πρὸς ZE · καὶ λοιπὴ

1. ἐστὶν L. 2. ὀνόμασιν PLBF. γινομένη LBb, γενομένη PVφ. 3. ἔχει] supra add. ξ m. 2 B. 6. A] AB b. ὥστε] -ε in ras. V. 7. $B\Delta$] ΔB φ. 8. ποιεῖν LFb, e corr. m. 1 B. ὅτι] ὅτι καὶ PV. 9. ἐστι] ἐστὶν L. 10. ὀνόμασιν PLBF. ἔτι] ὅτι LBFb. 11. ἔξει LB. 13. εἰσὶν L. 14. καὶ] om. LBFVb. 15. H] m. 2 F. 18. ἐστὶν PV, om. LBFb. 19. ΓB] $B\Gamma$ PV. 20. τῆς] (prius) πρὸς b.

nomina nominibus apotomes commensurabilia sunt et in eadem proportionem, et praeterea recta ex duobus nominibus ita orta eundem ordinem habet atque apotome.



Sit A rationalis, $B\Delta$ autem apotome, et sit $B\Delta \times K\Theta = A^2$, ita ut quadratum rectae rationalis A apotomae $B\Delta$ adplicatum latitudinem efficiat $K\Theta$. dico, $K\Theta$ ex duobus nominibus esse, cuius nomina nominibus rectae $B\Delta$ commensurabilia sint et in eadem proportionem, et praeterea $K\Theta$ eundem ordinem habere ac $B\Delta$.

nam $\Delta\Gamma$ rectae $B\Delta$ congruens sit. itaque $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles [prop. LXXIII]. sit etiam $B\Gamma \times H = A^2$. uerum A^2 rationale est. itaque etiam $B\Gamma \times H$ rationale est. et rationali $B\Gamma$ adplicatum est. itaque H rationalis est et rectae $B\Gamma$ longitudine commensurabilis [prop. XX]. iam quoniam est $B\Gamma \times H = B\Delta \times K\Theta$, erit [VI, 16] $\Gamma B : B\Delta = K\Theta : H$. est autem $B\Gamma > B\Delta$. itaque etiam $K\Theta > H$ [V, 16; V, 14]. ponatur $KE = H$. itaque KE , $B\Gamma$ longitudine commensurabiles sunt. et quoniam est $\Gamma B : B\Delta = \Theta K : KE$, conuertendo [V, 19 coroll.] est $B\Gamma : \Gamma\Delta = K\Theta : \Theta E$. fiat $K\Theta : \Theta E = \Theta Z : ZE$. itaque etiam $KZ : Z\Theta = K\Theta : \Theta E = B\Gamma : \Gamma\Delta$ [V, 19]. uerum $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ potentia tantum commensurabiles sunt. itaque etiam KZ , $Z\Theta$ potentia tantum commensura-

$\alpha\pi\alpha$ ἐστὶ BFb. 21. KE] e corr. V, EK P. 22. $\tau\eta\nu$ $B\Delta$ BFb. 23. $\tau\eta\nu$ KE BFb. 25. $K\Theta$] corr. ex. KH m. 2 F.

ἄρα ἡ KZ πρὸς $Z\Theta$ ἐστίν, ὥς ἡ $K\Theta$ πρὸς ΘE , τουτ-
 ἐστίν [ὥς] ἡ $B\Gamma$ πρὸς $\Gamma\Delta$. αἱ δὲ $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ δυνάμει
 μόνον [εἰσὶ] σύμμετροι· καὶ αἱ KZ , $Z\Theta$ ἄρα δυνάμει
 μόνον εἰσὶ σύμμετροι. καὶ ἐπεὶ ἐστίν ὥς ἡ $K\Theta$ πρὸς
 5 ΘE , ἡ KZ πρὸς $Z\Theta$, ἀλλ' ὥς ἡ $K\Theta$ πρὸς ΘE , ἡ ΘZ
 πρὸς ZE , καὶ ὥς ἄρα ἡ KZ πρὸς $Z\Theta$, ἡ ΘZ πρὸς
 ZE · ὥστε καὶ ὥς ἡ πρώτη πρὸς τὴν-τρίτην, τὸ ἀπὸ
 τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας· καὶ ὥς ἄρα ἡ
 KZ πρὸς ZE , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς KZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς
 10 $Z\Theta$. σύμμετρον δὲ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς KZ τῷ ἀπὸ τῆς
 $Z\Theta$ · αἱ γὰρ KZ , $Z\Theta$ δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι· σύμ-
 μετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ KZ τῇ ZE μήκει· ὥστε ἡ KZ
 καὶ τῇ KE σύμμετρός [ἐστὶ] μήκει. ῥητὴ δὲ ἐστίν ἡ
 KE καὶ σύμμετρος τῇ $B\Gamma$ μήκει· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ
 15 KZ καὶ σύμμετρος τῇ $B\Gamma$ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἐστίν ὥς
 ἡ $B\Gamma$ πρὸς $\Gamma\Delta$, οὕτως ἡ KZ πρὸς $Z\Theta$, ἐναλλάξ ὥς
 ἡ $B\Gamma$ πρὸς KZ , οὕτως ἡ $\Delta\Gamma$ πρὸς $Z\Theta$. σύμμετρος
 δὲ ἡ $B\Gamma$ τῇ KZ · σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ $Z\Theta$ τῇ $\Gamma\Delta$
 μήκει. αἱ $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ δὲ ῥηταὶ εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμ-
 20 μετροι· καὶ αἱ KZ , $Z\Theta$ ἄρα ῥηταὶ εἰσὶ δυνάμει μόνον
 σύμμετροι· ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἄρα ἡ $K\Theta$.

Εἰ μὲν οὖν ἡ $B\Gamma$ τῆς $\Gamma\Delta$ μείζον δύνανται τῷ ἀπὸ
 συμμέτρου ἐαυτῇ, καὶ ἡ KZ τῆς $Z\Theta$ μείζον δυνήσεται
 τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἐαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστίν
 25 ἡ $B\Gamma$ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ KZ , εἰ δὲ ἡ

1. $Z\Theta$] ΘZ F et in ras. V. ΘE] corr. ex ZE V. τουτ-
 ἐστίν — 2. πρὸς] in ras. V. 2. ὥς] om. P, supra scr. V.
 δέ] om. BF. $\Gamma\Delta$] $\Gamma\Delta$, ΔE BF. 3. εἰσὶ] om. PV. σύμ-
 μετροι — 4. εἰσὶ] mg. m. 2 B. 3. KZ] ZK P. 5. $Z\Theta$] ΘZ in ras. V. ΘZ] in ras. m. rec. B. 6. $Z\Theta$] in ras. m.
 rec. B, " ΘZ b. οὕτως ἡ B. ΘZ] $'\Theta Z$ b. 7. ZE] EZ F.
 ὥστε] -ε in ras. V. ὥς] m. 2 F. οὕτως τό BF b. 8.
 πρώτης] eras. F. πρὸς — δευτέρας] mg. m. 2 F. 9. ZE]

biles sunt [prop. XI]. et quoniam est $K\Theta : \Theta E = KZ : Z\Theta$,
 $K\Theta : \Theta E = \Theta Z : ZE$, erit etiam

$$KZ : Z\Theta = \Theta Z : ZE.$$

quare etiam ut primum ad tertium, ita quadratum
 primi ad quadratum secundi [V def. 9]. itaque etiam
 $KZ : ZE = KZ^2 : Z\Theta^2$. uerum KZ^2 , $Z\Theta^2$ commensu-
 rabilia sunt; nam KZ , $Z\Theta$ potentia commensurabiles
 sunt. itaque etiam KZ , ZE longitudine commensu-
 rabiles sunt [prop. XI]. quare etiam KZ , KE longi-
 tudine commensurabiles sunt [prop. XV]. KE autem
 rationalis est et rectae $B\Gamma$ longitudine commensura-
 bilis. itaque etiam KZ rationalis est et rectae $B\Gamma$
 longitudine commensurabilis [prop. XII]. et quoniam
 est $B\Gamma : \Gamma\Delta = KZ : Z\Theta$, permutando [V, 16] est
 $B\Gamma : KZ = \Delta\Gamma : Z\Theta$. uerum $B\Gamma$, KZ commensura-
 biles sunt. itaque etiam $Z\Theta$, $\Delta\Gamma$ longitudine com-
 mensurabiles sunt [prop. XI]. $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ autem ratio-
 nales sunt potentia tantum commensurabiles. itaque
 etiam KZ , $Z\Theta$ rationales sunt [def. 3] potentia tantum
 commensurabiles [prop. XIII]. ergo $K\Theta$ ex duobus
 nominibus est [prop. XXXVI].

Iam si $B\Gamma^2$ excedit $\Gamma\Delta^2$ quadrato rectae sibi com-
 mensurabilis, etiam KZ^2 excedit $Z\Theta^2$ quadrato rectae
 sibi commensurabilis [prop. XIV]. et siue $B\Gamma$ rationali
 propositae longitudine commensurabilis est, etiam KZ

corr. ex $Z\Theta$ P. 11. γάρ] ἄρα B. 12. τῇ] τῆς Vb. ὥστε]
 -ε in ras. V, ὥστε καὶ b. 13. ἐστὶ] om. P.V. 14. ἀσύμ-
 μετρος b. 16. πρὸς] (prius) bis b. 17. οὕτως — 18. KZ]
 bis F. 17. ΔΓ] ΓΔ P. 18. ZΘ] in ras. V, ΘZ P. ΓΔ]
 in ras. V, ΔΓ P. 19. αὐ] αὐ δέ V. δέ] om. FV, ΔE Bb.
 20. καὶ — 21. KΘ] mg. m. 1 V. 20. KZ] KΘ B. 21.
 δύο ἄρα BFb. ἄρα] om. BFb. 22. ΓΔ] BΔ PFb et B
 eras. V. 23. ἀσύμμετρον F, sed corr. 24. ἀσύμμετρον P.

ΓΔ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΖΘ, εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΒΓ, ΓΔ, οὐδετέρα τῶν ΚΖ, ΖΘ.

Εἰ δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ 5 ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΚΖ τῆς ΖΘ μείζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΚΖ, εἰ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἡ ΖΘ, εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΒΓ, ΓΔ, οὐδετέρα τῶν ΚΖ, ΖΘ.

10 Ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΚΘ, ἥς τὰ ὀνόματα τὰ ΚΖ, ΖΘ σύμμετρά [ἐστι] τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι τοῖς ΒΓ, ΓΔ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ ΚΘ τῇ ΒΓ τὴν αὐτὴν ἔξει τάξιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ριδ'.

15 Ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ἀποτομῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων, ἥς τὰ ὀνόματα σύμμετρά τέ ἐστι τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ῥητὴ ἐστίν.

20 Περιεχέσθω γὰρ χωρίον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΓΔ ὑπὸ ἀποτομῆς τῆς ΑΒ καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τῆς ΓΔ, ἥς μείζον ὄνομα ἔστω τὸ ΓΕ, καὶ ἔστω τὰ ὀνόματα τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τὰ ΓΕ, ΕΔ σύμμετρά τε τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι τοῖς ΑΖ, ΖΒ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ

1. ΓΔ] ΔΓ Β et e corr. V. 2. ΒΓ — τῶν] postea add. m. 1 P. Post ΓΔ add. καὶ b, m. 2 F. 4. δύνηται Bb.
5. συμμέτρου V, sed. corr. ΚΖ] Ζ e corr. V, ΚΔ P. ΖΘ] ΘΖ in ras. V. 6. συμμέτρου V, sed corr. 7. ἐστίν] m. 2 F. 8. ΖΘ] ΘΖ F. ΓΔ καὶ b. 11. σύμμετα B. ἐστι] om. P, supra scr. V. ὀνόμασιν B. 13. ΒΓ] ΒΔ PFb. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. BFb. 14. ριε' b et e corr. F, ρις' BV. 17. τε] om. BFV: ὀνόμασιν PFb. 19. ἐστι

ei commensurabilis est [prop. XII], siue $\Gamma\Delta$ rationali propositae longitudine commensurabilis est, etiam $Z\Theta$ ei commensurabilis est [id.], siue neutra rectarum $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, etiam neutra rectarum KZ , $Z\Theta$ [prop. XIII]. sin $B\Gamma^2$ excedit $\Gamma\Delta^2$ quadrato rectae sibi incommensurabilis, etiam KZ^2 excedit $Z\Theta^2$ quadrato rectae sibi incommensurabilis [prop. XIV]. et siue $B\Gamma$ rationali propositae longitudine commensurabilis est, etiam KZ ei commensurabilis est, siue $\Gamma\Delta$, etiam $Z\Theta$ [prop. XII], siue neutra rectarum $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, neutra rectarum KZ , $Z\Theta$.

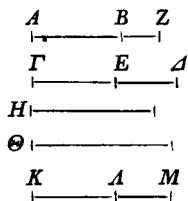
Ergo $K\Theta$ ex duobus nominibus est, cuius nomina KZ , $Z\Theta$ nominibus apotomes $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ commensurabilia sunt et in eadem proportionem, et praeterea $K\Theta$ eundem ordinem habet ac $B\Gamma$ [cfr. def. alt. et tert.]; quod erat demonstrandum.

CXIV.

Si spatium comprehenditur apotome et recta ex duobus nominibus, cuius nomina nominibus apotomes et commensurabilia sunt et in eadem proportionem,

recta spatio aequalis quadrata rationalis est.

Spatium enim $AB \times \Gamma\Delta$ comprehendatur apotome AB et recta ex duobus nominibus $\Gamma\Delta$, cuius nomen maius sit ΓE , et ΓE , $E\Delta$ nomina rectae ex duobus nominibus nominibus apotomes AZ , ZB et commensurabilia sint et in eadem



B, comp. F Vb.
(prius) $\xi\sigma\tau\iota$ BFb.
24. $\acute{o}\nu\acute{o}\mu\alpha\sigma\iota\nu$ B.

20. $\gamma\acute{\alpha}\rho$] corr. ex $\tau\acute{o}$ m. 1 V.
23. $E\Delta$] Δ e corr. m. 1 b.

22. $\xi\sigma\tau\omega$] $\tau\epsilon$] m. 2 B.

λόγῳ, καὶ ἔστω ἡ τὸ ὑπὸ τῶν $AB, ΓΔ$ δυναμένη ἡ H . λέγω, ὅτι ῥητὴ ἐστὶν ἡ H .

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ $Θ$, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς $Θ$ ἴσον παρὰ τὴν $ΓΔ$ παραβεβλήσθω πλάτος ποιοῦν τὴν $ΚΑ$.
 5 ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $ΚΑ$, ἧς τὰ ὀνόματα ἔστω τὰ $KM, ΜΑ$ σύμμετρα τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι τοῖς $ΓΕ, ΕΔ$ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ. ἀλλὰ καὶ αἱ $ΓΕ, ΕΔ$ σύμμετροί τε εἰσι ταῖς AZ, ZB καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ AZ πρὸς τὴν ZB ,
 10 οὕτως ἡ KM πρὸς $ΜΑ$. ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ AZ πρὸς τὴν KM , οὕτως ἡ BZ πρὸς τὴν $ΑΜ$ · καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ AB πρὸς λοιπὴν τὴν $ΚΑ$ ἐστὶν ὡς ἡ AZ πρὸς KM . σύμμετρος δὲ ἡ AZ τῇ KM · σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ AB τῇ $ΚΑ$. καὶ ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς
 15 $ΚΑ$, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν $ΓΔ, AB$ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν $ΓΔ, ΚΑ$ · σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν $ΓΔ, AB$ τῷ ὑπὸ τῶν $ΓΔ, ΚΑ$. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν $ΓΔ, ΚΑ$ τῷ ἀπὸ τῆς $Θ$ · σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν $ΓΔ, AB$ τῷ ἀπὸ τῆς $Θ$. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν $ΓΔ, AB$ ἴσον ἐστὶ τὸ
 20 ἀπὸ τῆς H · σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς H τῷ ἀπὸ τῆς $Θ$. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς $Θ$ · ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς H · ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ H . καὶ δύναται τὸ ὑπὸ τῶν $ΓΔ, AB$.

Ἐὰν ἄρα χωρίον περιέχεται ὑπὸ ἀποτομῆς καὶ τῆς
 25 ἐκ δύο ὀνομάτων, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ῥητὴ ἐστὶν.

1. ἡ] om. B F b. ἡ] e corr. V. H] H A b. 3. Θ] (prius) B Θ F. 4. τήν] (prius) m. 2 F. 6. τῆς ἐκ] ἐκ τῶν V. 7. ἀλλὰ — 9. λόγῳ] mg. m. 1 F. 8. τοῖς b. 9. AZ] corr. ex A Γ V. 11. BZ] Z B B. 12. ἡ] (prius) post ras. 1 litt. F. 13. πρὸς — AZ] om. F. τὴν KM B F b.

proportione, et sit $H^2 = AB \times \Gamma\Delta$. dico, H rationalem esse.

ponatur enim rationalis Θ , et spatium quadrato Θ^2 aequale rectae $\Gamma\Delta$ adplicetur latitudinem efficiens KA . itaque KA apotome est, cuius nomina sint KM , MA commensurabilia ΓE , $E\Delta$ nominibus rectae ex duobus nominibus et in eadem proportionem [prop. XCII]. uerum ΓE , $E\Delta$ etiam rectis AZ , ZB et commensurabilia sunt et in eadem proportionem. itaque $AZ : ZB = KM : MA$. quare permutando [V, 16] $AZ : KM = BZ : AM$. itaque etiam $AB : KA = AZ : KM$ [V, 19]. uerum AZ , KM commensurabiles sunt [prop. XII]. itaque etiam AB , KA commensurabiles sunt [prop. XI]. est autem $AB : KA = \Gamma\Delta \times AB : \Gamma\Delta \times KA$ [VI, 1]. itaque etiam $\Gamma\Delta \times AB$ et $\Gamma\Delta \times KA$ commensurabilia sunt [prop. IX]. uerum $\Gamma\Delta \times KA = \Theta^2$. itaque $\Gamma\Delta \times AB$ et Θ^2 commensurabilia sunt. est autem $H^2 = \Gamma\Delta \times AB$. quare H^2 , Θ^2 commensurabilia sunt. uerum Θ^2 rationale est. itaque etiam H^2 rationale est. quare H rationalis est; et spatio $\Gamma\Delta \times AB$ aequalis est quadrata.

Ergo si spatium comprehenditur apotome et recta ex duobus nominibus, cuius nomina nominibus apotomes et commensurabilia sunt et in eadem proportionem, recta spatio aequalis quadrata rationalis est.

14. *ἐστίν* B. *AB*] *KM* *σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΒ φ* (et F?). 15. *τὴν ΚΑ ΒΦβ.* *οὕτω* B. *ΓΔ*] ante lacunam 2 litt. F, *ΑΓ β.* *ΑΒ*] *ΔΒ* b. *πρὸς τό*] om. φ. 16. *τό*] m. 2 V. 17. *τῶν*] (prius) om. P. 18. *Θ*] *ΘΖ Β*, sed corr. 19. *ἀπό*] corr. ex *ὑπό* m. 2 F. *τῶ*] corr. ex *τό* m. 1 F. *τό*] corr. ex *τῶ* m. 1 F. 20. *τό*] καὶ *τό ΒΦβ.* 22. *ῥητῇ*] corr. ex *ῥητόν* V. 25. *ἐστίν* P. 26. *ὀνόμασιν* PB. 27. *ἔστι ΒV*, comp. Fb. Deinde add. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι* F.

Πόρισμα.

Καὶ γέγονεν ἡμῖν καὶ διὰ τούτου φανερόν, ὅτι δυνατόν ἐστι ρητὸν χωρίον ὑπὸ ἀλόγων εὐθειῶν περιέχεται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5

ριε'.

Ἀπὸ μέσης ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾶ τῶν πρότερον ἢ αὐτή.

Ἔστω μέση ἢ *A*. λέγω, ὅτι ἀπὸ τῆς *A* ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾶ τῶν πρότερον
10 ἢ αὐτή.

Ἐκκείσθω ρητὴ ἢ *B*, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν *B*, *A* ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς *Γ*. ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἢ *Γ*. τὸ γὰρ ὑπὸ ἀλόγου καὶ ρητῆς ἄλογόν ἐστιν. καὶ οὐδεμιᾶ τῶν πρότερον ἢ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον
15 παρὰ ρητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ μέσσην. πάλιν δὴ τῷ ὑπὸ τῶν *B*, *Γ* ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς *Δ*. ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς *Δ*. ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἢ *Δ*. καὶ οὐδεμιᾶ τῶν πρότερον ἢ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ρητὴν παραβαλλόμενον πλάτος
20 ποιεῖ τὴν *Γ*. ὁμοίως δὴ τῆς τοιαύτης τάξεως ἐπ' ἄπειρον προβαινούσης φανερόν, ὅτι ἀπὸ τῆς μέσης ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾶ τῶν πρότερον ἢ αὐτή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

1. πόρισμα] ms. PV, om. B F b. 4. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. B F b. 5. ριε'] om. V, ρις' b et corr. ex ριδ' F, ριξ' B.

6. γίνονται B, γ supra add. m. 1 P. 7. οὐδεμία] om. P F V b. Post πρότερον add. δεκατριῶν ἀλόγων m. rec. F.

9. γίνονται P F B. οὐδεμία] om. P F V b. 10. ἢ] ἐστὶν ἢ B F.

11. Ante B ras. 1 litt. B. B, A] A, B F. 12. ἔστω] m. 2 F.

τό] (prius) τῷ F. 13. ἐστὶ P B, comp. F V b. 14. ἀπὸ B.

16. ἄλογον — 17. Δ (prius)] om. F V. 17. ἐστὶν P. τό — ἐστὶν] om. P. ἄλογος — 18. αὐτή] in ras. m. 1 F. 18. ἀπὸ B.

Corollarium.

Et hinc quoque nobis adparuit, fieri posse, ut spatium rationale rectis irrationalibus comprehendatur. — quod erat demonstrandum.

CXV.

A media irrationales infinitae multitudinis oriuntur, et nulla eadem est atque ulla priorum.

Sit A media. dico, ab A irrationales infinitae multitudinis oriri et nullam eandem esse atque ullam priorum.

ponatur rationalis B , et sit $\Gamma^2 = B \times A$. itaque Γ irrationalis est [def. 4]; nam spatium recta irrationali et rationali comprehensum A —————
 B —————
 Γ —————
 A —————
 irrationale est [prop. XX]. nec eadem est atque ulla priorum; neque enim ullius priorum quadratum rectae rationali adplicatum latitudinem efficit mediam. rursus sit $\Delta^2 = B \times \Gamma$. itaque Δ irrationale est [prop. XX]. quare Δ irrationalis est [def. 4]. nec eadem est atque ulla priorum; neque enim ullius priorum quadratum rectae rationali adplicatum latitudinem efficit Γ . iam hac ordinatione similiter in infinitum progrediente adparet, a media irrationales infinitae multitudinis oriri, et nullam eandem esse atque ullam priorum; quod erat demonstrandum.

20. τῆς τοιαύτης] τοῖς τῆς αὐτῆς φ. 21. προβαίνουσαι B , corr. m. 2. 22. γίνονται B . οὐδεμίαν] om. PFVb. 23. ὅπερ εἶδει δεῖξαι] om. BFb, comp. P. Seq. additamenta quaedam, u. app. In fine libri *Εὐκλείδου στοιχείων* τὸ P , τέλος τοῦ τῶν *Εὐκλείδου στοιχείων* m. 2 B , τέλος τοῦ τῶν *Εὐκλείδου στοιχείων* τῆς *Θέωνος ἐκδόσεως* F , *Εὐκλείδου λόγος* τῆς *Θέωνος ἐκδόσεως* b .

APPENDIX.



1.

Ad libr. X prop. 1.

"Ἀλλως τὸ α' θεώρημα.

Ἐκκείσθω δύο μεγέθη ἄνισα τὰ AB , Γ · καὶ ἐπεὶ
 ἔλασσόν ἐστι τὸ Γ , πολλαπλασιαζόμενον ἐστὶ ποτὲ τοῦ
 AB μεγέθους μείζον. γεγονέτω ὥς τὸ ZM καὶ διη-
 5 ρήσθω εἰς [τὰ] ἴσα τῷ Γ , καὶ ἔστω τὰ $M\Theta$, ΘH , HZ ,
 καὶ ἀπὸ τοῦ AB ἀφηγήσθω μείζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ
 BE , καὶ ἀπὸ τοῦ EA μείζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ $E\Delta$, καὶ
 τοῦτο αὐτὸ γινέσθω, ἕως αἱ ἐν τῷ ZM διαιρέσεις ἴσαι
 γένωνται ταῖς ἐν τῷ AB διαιρέσεσιν. γεγονέτωσαν
 10 ὥς αἱ BE , $E\Delta$, ΔA , καὶ τῷ ΔA ἕκαστον τῶν KA ,
 AN , $N\Xi$ ἔστω ἴσον, καὶ τοῦτο γινέσθω, ἕως αἱ διαι-
 ρέσεις τοῦ $K\Xi$ ἴσαι γένωνται ταῖς τοῦ ZM .

Καὶ ἐπεὶ τὸ BE μείζον ἢ τὸ ἥμισυ ἐστὶ τοῦ BA ,
 τὸ BE μείζον ἐστὶ τοῦ EA · πολλῶν ἄρα μείζον ἐστὶ
 15 τοῦ ΔA . ἀλλὰ τὸ ΔA ἴσον ἐστὶ τῷ ΞN · τὸ BE ἄρα
 μείζον ἐστὶ τοῦ $N\Xi$. πάλιν, ἐπεὶ τὸ $E\Delta$ μείζον ἢ τὸ
 ἥμισυ ἐστὶ τοῦ EA , μείζον ἐστὶ τοῦ ΔA . ἀλλὰ τὸ
 ΔA ἐστὶν ἴσον τῷ NA · τὸ $E\Delta$ ἄρα μείζον ἐστὶ τοῦ

1. Post ἀφαιρούμενα p. 6, 10 habent B F V b, mg. m. 1 postea add. P.

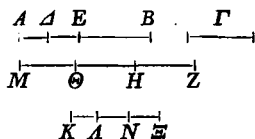
1. τὸ α' θεώρημα] om. V, τὸ αὐτό B F b (mg. α B). 2. κείσθω V. 3. ἑλαττον F. 5. τὰ] (prius) om. P. Γ] corr. ex A B. καὶ ἔστω] om. F V b. HZ] I Z F. 6. ἢ] m. 2 P. 7. BE] in ras. V. καὶ — $E\Delta$] mg. m. 2 V. EA]

1.

Ad libr. X prop. 1.

Aliter primum theorema.

Ponantur duae magnitudines inaequales AB , Γ .
et quoniam est $\Gamma < AB$, multiplicata aliquando Γ
maior erit magnitudine AB . fiat



ZM et in partes magnitudini Γ
aequales diuidatur, et sint $M\Theta$,
 ΘH , HZ , et ab AB auferatur
 BE maior dimidia et ab EA

maior dimidia $E\Delta$, et hoc semper deinceps fiat, donec
diuisiones rectae ZM diuisionibus rectae AB numero
aequales sint. sint BE , $E\Delta$, ΔA , et sit

$$KA = AN = NX = \Delta A,$$

et hoc fiat, donec diuisiones magnitudinis KXi diui-
sionibus rectae ZM numero aequales sint.

et quoniam $BE > \frac{1}{2} BA$, erit $BE > EA$. itaque
multo magis $BE > \Delta A$. uerum $\Delta A = XiN$. itaque
 $BE > NX$. rursus quoniam $E\Delta > \frac{1}{2} EA$, erit $E\Delta > \Delta A$.
uerum $\Delta A = NA$. itaque $E\Delta > NA$. itaque tota

AE P. 8. ἀεὶ] om. B F V b. γιγνέσθω F. 9. διαίρεσει
B F V b. 10. τῷ] corr. ex τό m. 2 V. 11. γιγνέσθω φ. ἕως]
ἕως ἄν V φ. αὐ] om. φ. 12. γέγονται P φ. ταῖς] εἰς
τάς φ. 13. BA] corr. ex AB m. 2 V. 14. τό] τὸ δέ B,
τοῦ φ. ἐστὶ] (prius) om. F. 16. τοῦ — μείζον] om. B.
17. τοῦ ΔA — 18. ἴσον] τὸ EA — μείζον δέ ἐστὶ τὸ ΔA φ.
18. ἴσον ἐστὶ V b. $E\Delta$] in ras. V.

NA . ὅλον ἄρα τὸ AB μείζον ἐστὶ τοῦ EA . ἴσοι
 δὲ τὸ AA τῷ AK . ὅλον ἄρα τὸ BA μείζον ἐστὶ
 τοῦ EK . ἀλλὰ τοῦ BA μείζον ἐστὶ τὸ MZ . πολλῶ
 ἄρα τὸ MZ μείζον ἐστὶ τοῦ EK . καὶ ἐπεὶ τὰ EN ,
 5 NA , AK ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν, ἐστὶ δὲ καὶ τὰ MO , OH ,
 HZ ἴσα ἀλλήλοις, καὶ ἐστὶν ἴσον το πλῆθος τῶν ἐν
 τῷ MZ τῷ πλήθει τῶν ἐν τῷ EK , ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ
 KA πρὸς τὸ ZH , οὕτως τὸ $KΞ$ πρὸς τὸ ZM . μείζον
 δὲ τὸ ZM τοῦ $KΞ$. μείζον ἄρα καὶ τὸ HZ τοῦ AK .
 10 καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ZH ἴσον τῷ Γ , τὸ δὲ KA τῷ AA .
 τὸ Γ ἄρα μείζον ἐστὶ τοῦ AA . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

2.

Ad libr. X prop. 6.

Ἄλλως τὸ 5'.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ A , B πρὸς ἄλληλα λόγον ἐχέτω,
 ὃν ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Δ . λέγω, ὅτι σύμ-
 15 μετρά ἐστὶ τὰ μεγέθη.

Ὅσαι γάρ εἰσιν ἐν τῷ Γ μονάδες, εἰς τοσαῦτα ἴσα
 διηρήσθω τὸ A , καὶ ἐνὶ αὐτῶν ἴσον ἔστω τὸ E . ἐστὶν
 ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ ἀριθμὸν, τὸ E πρὸς τὸ A .
 ἐστὶ δὲ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ , τὸ A πρὸς τὸ B .
 20 δι' ἴσον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ , τὸ E
 πρὸς τὸ B . μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Δ . μετρεῖ
 ἄρα καὶ τὸ E τὸ B . μετρεῖ δὲ καὶ τὸ E τὸ A , ἐπεὶ
 καὶ ἡ μονὰς τὸν Γ . τὸ E ἄρα ἐκάτερον τῶν A , B

2. Post δεῖξαι p. 22, 2 BFVb, mg. m. 1 P.

1. AB] BA P. 2. τό] (prius) τῷ B. τῷ] τοῦ b. 3.
 τό] corr. ex τοῦ m. 1 F. 4. μείζον ἐστὶ τὸ MZ b. 5. AK]
 KA in ras. V. 6. HZ] ZH F. τῶν ἐν τῷ MZ] m. 2 V.
 7. τῷ] (alt.) ἴσον τῷ PBFb. EK] E in ras. V. 8. τό]

$\angle B > \angle A$. est autem $\angle A = \angle K$. itaque tota $BA > EK$. uerum $MZ > BA$. itaque multo magis $MZ > EK$. et quoniam $EN = NA = AK$, et $M\Theta = \Theta H = HZ$, et numerus partium rectae MZ numero partium rectae EK aequalis est, erit

$$KA : ZH = KE : ZM$$

[V, 15]. est autem $ZM > KE$. itaque etiam $HZ > AK$ [V, 14]. et $ZH = \Gamma$, $KA = A\Delta$. ergo $\Gamma > A\Delta$; quod erat demonstrandum.

2.

Ad libr. X prop. 6.

Aliter propositio VI.

Duae enim magnitudines A , B rationem inter se habeant, quam numerus Γ ad numerum Δ . dico, magnitudines commensurabiles esse.

nam quot sunt in Γ unitates, in totidem partes aequales diuidatur A , et unit earum aequalis sit E . itaque $1 : \Gamma = E : A$ [V, 15]. uerum etiam $\Gamma : \Delta = A : B$. itaque ex aequo est [V, 22] $1 : \Delta = E : B$. unitas autem Δ metitur. itaque etiam E magnitudinem B metitur. uerum etiam magnitudinem A metitur E , quoniam unitas numerum Γ metitur. itaque E utramque A , B metitur. ergo A , B commensurabiles sunt, et

(primum) om. F. $K\Xi$] corr. ex ΞK m. 2 V. 10. $A\Delta$] $A V$ e corr. 12. τό] τὸ αὐτό F. 15. εἰσι F. 18. τὸν A PB. 19. τόν] τό FV, om. b. A] B φ. τό] τόν B. B] A F. 21. τὸν B B. καί] om. FVb. Δ] m. 2 F, seq. ἀριθμὸν corr. ex ἀριθμός. 22. μετρεῖ δέ — ἐπεὶ] om. PB, ἐμέτρει δὲ καὶ τὸ A , ἐπεὶ καὶ ἡ μονὰς τὸν Γ mg. m. 2 B.

μετρεῖ· τὰ A, B ἄρα σύμμετρά ἐστίν, καὶ ἐστὶν αὐτῶν κοινὸν μέτρον τὸ E . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

3.

Ad libr. X prop. 9.

Ἄλλως τὸ Θ' .

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ A τῇ B , λόγον ἔχει,
 5 ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐχέτω, ὃν ὁ Γ πρὸς τὸν
 Δ , καὶ ὁ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν E ποιεῖτω,
 ὁ δὲ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Z ποιεῖτω, ὁ δὲ
 Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν H ποιεῖτω. ἐπεὶ οὖν
 ὁ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν E πεποίηκεν,
 10 τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Z πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα
 ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ , τουτέστιν ὡς ἡ A πρὸς τὴν B ,
 [οὕτως] ὁ E πρὸς τὸν Z . ἀλλ' ὡς ἡ A πρὸς τὴν B ,
 οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν A, B . ἔστιν
 ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν A, B , οὕτως
 15 ὁ E πρὸς τὸν Z . πάλιν, ἐπεὶ ὁ Δ ἑαυτὸν πολλα-
 πλασιάσας τὸν H πεποίηκεν, ὁ δὲ Γ τὸν Δ πολλα-
 πλασιάσας τὸν Z πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς
 τὸν Δ , τουτέστιν ὡς ἡ A πρὸς τὴν B , οὕτως ὁ Z
 πρὸς τὸν H . ἀλλ' ὡς ἡ A πρὸς τὴν B , οὕτως τὸ
 20 ὑπὸ τῶν A, B πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B . ἔστιν ἄρα ὡς τὸ
 ὑπὸ τῶν A, B πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B , οὕτως ὁ Z πρὸς
 τὸν H . ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν A, B ,
 οὕτως ἦν ὁ E πρὸς τὸν Z . δι' ἴσου ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ
 τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B , οὕτως ὁ E πρὸς τὸν H .
 25 ἔστι δὲ ἐκάτερος τῶν E, H τετράγωνος· ὁ μὲν γὰρ E

3. Post ἀριθμὲν p. 32, 3 BFVb, mg. m. 1 P.

1. ἐστὶν] (prius) ἐστι BV, comp. Fb. 2. ὅπερ ἔδει δεῖξαι]
 comp. F?, om. BVb. 3. τὸ Θ'] om. B. 5. Γ πρὸς τὸν Δ]

communis earum mensura est E ; quod erat demonstrandum.

3.

Ad libr. X prop. 9.

Aliter propositio IX.

Nam quoniam A, B commensurabiles sunt, rationem habent, quam numerus ad numerum [prop. VI]. sit

A ————	$A : B = \Gamma : \Delta$, et Γ se ipsum
B ————	multiplicans efficiat E , Γ autem
Γ ————	numerum Δ multiplicans Z , Δ
Δ ————	autem se ipsum multiplicans H .
E ————	iam quoniam est $\Gamma \times \Gamma = E$,
Z ————	$\Gamma \times \Delta = Z$, erit $\Gamma : \Delta = E : Z$
H ————	[VII, 17], hoc est $E : Z = A : B$.

uerum $A : B = A^2 : A \times B$. itaque
 $A^2 : A \times B = E : Z$. rursus quoniam est $\Delta \times \Delta = H$,
 $\Gamma \times \Delta = Z$, erit $\Gamma : \Delta = Z : H$ [VII, 17], hoc est
 $A : B = Z : H$. uerum $A : B = A \times B : B^2$. itaque
 $A \times B : B^2 = Z : H$. erat autem $A^2 : A \times B = E : Z$.
 itaque ex aequo [V, 22] $A^2 : B^2 = E : H$. uerum uterque

τρία πρὸς τὸν Δ τέσσαρα F, sed corr. m. 1. 7. ὁ δὲ Γ τὸν
 τὸν δὲ B F V b. ποιεῖται] om. B F b. 9. πεποίηκε b. 10.
 τὸν] (prius) corr. ex ὅν m. 1 V. 12. οὕτως] om. P. οὕτως
 — τὴν B] om. B. 20. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ τῶν A, B πρὸς
 τὸ ἀπὸ τῆς B mg. b. 22. ἀπὸ τῆς A πρὸς τό] m. 2 V (τοῦ pro
 τῆς). B'', A' F. Deinde del. m. 2 πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B V.
 23. Z] mut. in H F. Post ἄρα add. ἔστιν b, m. 2 F. 25.
 ἔστιν B.

ἀπὸ τοῦ Γ ἐστίν, ὁ δὲ H ἀπὸ τοῦ Δ . τὸ ἀπὸ τῆς A ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἀλλὰ δὴ ἐχέτω τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B 5 λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ E πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν τὸν H . λέγω, ὅτι σύμμετρός ἐστιν ἡ A τῇ B .

Ἔστω γὰρ τοῦ μὲν E πλευρὰ ὁ Γ , τοῦ δὲ H ὁ Δ , καὶ ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Z ποιεῖτω· οἱ E , Z , H ἄρα ἐξῆς εἰσὶν ἀνάλογον ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν 10 Δ λόγῳ. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν A , B μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν A , B , τῶν δὲ E , H ὁ Z , ἐστίν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν A , B , οὕτως ὁ E πρὸς τὸν Z . ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τῶν A , B πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B , οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν H , ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς A 15 πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν A , B , οὕτως ἡ A πρὸς τὴν B . αἱ A , B ἄρα σύμμετροί εἰσιν· λόγον γὰρ ἔχουσιν, ὃν ἀριθμὸς ὁ E πρὸς ἀριθμόν τὸν Z , τουτέστιν ὃν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ . ὡς γὰρ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ , ὁ E πρὸς τὸν Z . ὁ γὰρ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν E πεποίηκεν, 20 τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Z πεποίηκεν· ἐστίν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ , ὁ E πρὸς τὸν Z .

4.

Ad libr. X prop. 10.

Τῇ ἄρα προτεθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ῥητῇ, ἀφ' ἧς ἔφαμεν τὰ μέτρα λαμβάνεσθαι, οἶον τῇ A , προσεύρηται δυνάμει μὲν σύμμετρος ἡ Δ , τουτέστι ῥητὴ δυνάμει μόνον

4. Post ἡ E p. 34, 5 PBFb; mg. m. 1 V, add. *κείμενον*.

3. ἀριθμός] comp. corr. ex comp. πρὸς m. 1 F. 6. Post B add. *μήκει* V, m. 2 B. 7. μέν] om. b. ὁ] (prius) ἡ corr. ex ὁ, supra scr. ὁ F; ἡ b. 10. τῶν] corr. ex τό B.

E, H numerus quadratus est; est enim $E = \Gamma^2, H = \Delta^2$. ergo $A^2 : B^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; quod erat demonstrandum.

Iam uero $A^2 : B^2$ rationem habeat, quam numerus quadratus E ad numerum quadratum H . dico, A et B commensurabiles esse.

sit enim Γ latus numeri E , Δ autem numeri H . et sit $\Gamma \times \Delta = Z$. itaque E, Z, H deinceps proportionales sunt in ratione $\Gamma : \Delta$ [VIII, 11]. et quoniam est $A^2 : A \times B = A \times B : B^2$ et $E : Z = Z : H$, erit $A^2 : A \times B = E : Z$. est autem $A \times B : B^2 = Z : H$ et $A^2 : A \times B = A : B$. ergo A, B commensurabiles sunt; rationem enim habent, quam numerus E ad numerum Z [prop. VI], hoc est $\Gamma : \Delta$. nam $\Gamma : \Delta = E : Z$; est enim $\Gamma \times \Gamma = E, \Gamma \times \Delta = Z$ [VII, 17]; quare $\Gamma : \Delta = E : Z$.¹⁾

4.

Ad libr. X prop. 10.

Ergo ad rectam propositam rationalem, unde diximus mensuras sumi [cfr. p. 2, 10 not. crit.], uelut A , inuenta est Δ potentia commensurabilis, hoc est rationalis potentia tantum commensurabilis, irrationalis

1) Hae ambages, ὡς δέ lin. 13 — H lin. 14 et ὡς γάρ lin. 18 — τὸν Z lin. 21, a Gregorio in codd. deesse dicuntur; in meis tamen omnibus leguntur.

11. ἐστὶ] εἶσιν P. 16. εἶσι V, comp. Fb. γάρ] m. 2 F. 17. ὅν] om. F. 18. Z] e corr. m. 1 b. 19. Post Γ ras. 1 litt. F. πεποίηκε V. 21. οὕτως ὁ E V. Post Z add. ὅπερ ἔδει δεῖξαι FV. 22. προστεθείσῃ PV. ἐπηγ] ἐπ- eras., deinde mg. m. rec. κείμενον. προσεύχονται p. 34, 3 — ἡ E p. 34, 5 B addito ὅπερ ἔδει δεῖξαι et deleta reliqua parte propositionis. 23. οἶονεῖ BVb, γρ. οἶόν ἐστιν ἡ A mg. Fb. προσεύχεται BFb. 24. μέν] μόνον B, μὲν ἡ F.

σύμμετρος, ἄλογος δὲ ἡ *E*. ἀλόγους γὰρ καθόλου
καλεῖ τὰς καὶ μήκει καὶ δυνάμει ἀσύμμετρος τῇ ῥητῇ.

5.

Uulgo X, 13.

Εἰς τὸ ιγ' λῆμμα ἐκ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

Ἐὰν ἡ δύο μεγέθη, καὶ τὸ μὲν σύμμετρον ἡ τῷ
5 αὐτῷ, τὸ δὲ ἕτερον ἀσύμμετρον, ἀσύμμετρα ἔσται τὰ
μεγέθη.

Ἔστω γὰρ δύο μεγέθη τὰ *A*, *B*, ἄλλο δὲ τὸ *Γ*,
καὶ τὸ μὲν *A* τῷ *Γ* σύμμετρον ἔστω, τὸ δὲ *B* τῷ *Γ*
ἀσύμμετρον. λέγω, ὅτι καὶ τὸ *A* τῷ *B* ἀσύμμετρόν
10 ἔστιν.

Εἰ γὰρ ἔστι σύμμετρον τὸ *A* τῷ *B*, ἔστι δὲ καὶ
τὸ *Γ* τῷ *A*, καὶ τὸ *Γ* ἄρα τῷ *B* σύμμετρόν ἐστιν.
ὅπερ οὐχ ὑπόκειται.

6.

Ad libr. X prop. 18.

Ῥητὰς γὰρ καλεῖ τὰς τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ ἦτοι μήκει
15 καὶ δυνάμει συμμέτρους ἢ καὶ δυνάμει μόνον. εἰσὶ
δὲ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι, αἱ μήκει μὲν ἀσύμμετροί εἰσι τῇ
ἐκκειμένῃ ῥητῇ, δυνάμει δὲ μόνον σύμμετροι, καὶ διὰ
τοῦτο πάλιν λέγονται ῥηταὶ καὶ σύμμετροι πρὸς ἀλ-
λήλας, καθ' ὃ ῥηταί, ἀλλὰ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας

5. Post δεῖξαι p. 38, 6 B F V b, mg. m. 2 P. 6. Post
σύμμετρος p. 58, 3 P B F V b.

1. σύμμετρος] om. V, m. rec. P. δέ] γάρ F. 2. Post ῥητῇ
eras. οὕτως P. 3. εἰς τὸ ιγ'] om. F V b. εἰς — ἀπαγωγῆς]
mg. F, ιγ' in ras. B, mg. ἐν ἄλλῳ λῆμμα; in F numerus eras.
4. δύο μεγέθη ἡ F. τῷ αὐτῷ] postea add. F m. 1. 5.
δ' B F b. 8. Γ] (prius) γάμμα F. 11. ἀσύμμετρον F, sed
ἀ- eras. 12. Γ] (prius) corr. ex A V. A] corr. ex Γ V.

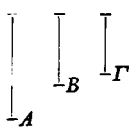
autem *E*; irrationales enim omnino uocat rectas rationali incommensurabiles et longitudine et potentia.

5.

Uulgo X, 13.

Ad prop. XIII lemma ex reductione in absurdum.

Si duae magnitudines sunt, et altera commensurabilis, altera incommensurabilis eidem magnitudini est, magnitudines incommensurabiles erunt.


 sint enim *A*, *B* duae magnitudines, alia autem *Γ*, et *A*, *Γ* commensurabiles sint, *B*, *Γ* autem incommensurabiles. dico, etiam *A*, *B* incommensurabiles esse.

nam si *A*, *B* commensurabiles sunt, et etiam *Γ*, *A* commensurabiles sunt, etiam *Γ*, *B* commensurabiles sunt [prop. XII]; quod contra hypothesin est.

6.

Ad libr. X prop. 18.

Rationales enim uocat rectas rationali propositae commensurabiles aut longitudine et potentia aut potentia tantum. sunt autem aliae¹⁾ quoque rectae, quae rationali propositae longitudine incommensurabiles sunt, potentia autem tantum commensurabiles; quare rursus uocantur rationales et inter se commensurabiles, quatenus rationales sunt, commensurabiles autem inter se aut longitudine et potentia aut po-

1) Hoc quid sibi uelit, non intellego.

B] *A*? P. ἀσύμμετρον F, sed corr. 15. καὶ] (alt.) om. b.
16. εἶσιν ἀσύμμετροι F. εἶσιν B.

ἤτοι μήκει δηλαδὴ καὶ δυνάμει ἢ δυνάμει μόνον. καὶ εἰ μὲν μήκει, λέγονται καὶ αὐταὶ φηταὶ μήκει σύμμετροι ἐπακουομένου, ὅτι καὶ δυνάμει· εἰ δὲ δυνάμει μόνον πρὸς ἀλλήλας εἰσὶ σύμμετροι, λέγονται καὶ αὐταὶ οὕτως φηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. ὅτι δὲ αἱ φηταὶ σύμμετροί εἰσιν, ἐντεῦθεν δῆλον· ἐπεὶ γὰρ φηταὶ εἰσιν αἱ τῇ ἐκκειμένῃ φητῇ σύμμετροι, τὰ δὲ τῷ αὐτῷ σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα, αἱ ἄρα φηταὶ σύμμετροι εἰσιν.

7.

Ad libr. X prop. 20.

10

Λῆμμα.

Ἡ δυναμένη ἄλογον χωρίον ἄλογός ἐστιν.

Δυνάσθω γὰρ ἡ *A* ἄλογον χωρίον, τοντέστι τὸ ἀπὸ τῆς *A* τετράγωνον ἴσον ἔστω ἀλόγῳ χωρίῳ. λέγω, ὅτι ἡ *A* ἄλογός ἐστιν.

15

Εἰ γὰρ ἔσται φητὴ ἡ *A*, φητὸν ἔσται καὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον· οὕτως γὰρ [ἐστίν] ἐν τοῖς ὅροις. οὐκ ἔστι δέ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ *A*· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

8.

Ad libr. X prop. 23 corollarium.

Εἰσὶ δὲ πάλιν καὶ ἄλλαι εὐθεταί, αἱ μήκει μὲν

7. Post ἐξῆς p. 60, 13 PBFVb. 8. Post σύμμετροι p. 68, 22 PV, mg. m 2 B.

1. καί] (alt.) om. b. 2. φηταί] om. V. 3. εἰ] om. b.
5. οὕτως] om. B F V b. Post σύμμετροι del. εἰσιν m. 1 P.
ὅτι — 6. εἰσιν] mg. m. 1 P. 6. ἐντεῦθεν] ἐν- in ras. m.
1 P. δῆλον ἐντεῦθεν F. ἐπεὶ] ὅτι b, mg. m. 1 γρ. ἐπεὶ
γὰρ διὰ τὸ βί' τοῦ ι'. 9. εἰσιν] εἰσι b, εἰσιν· ὅπερ ἔδει
δεῖξαι V. 11. Ἡ] om. V, add. num. β'. ἔστι BV, comp.
F b. 13. ἴσον ἔστω] supra scr. m. 2 V; om. B F b. ἀλόγῳ
χωρίῳ] corr. ex ἄλογον ἔστω V, ἄλογον ἔστω B b, ἔστω ἄλογον F.

tentia tantum. et si longitudine commensurabiles sunt, et ipsae rationales longitudine commensurabiles uocantur, subaudito, eas potentia quoque commensurabiles esse; sin potentia tantum inter se commensurabiles sunt, et ipsae sic rationales potentia tantum commensurabiles uocantur. rationales autem commensurabiles esse, hinc manifestum est: quoniam enim rationales sunt, quae rationali propositae commensurabiles sunt, et quae eidem commensurabilia sunt, etiam inter se commensurabilia sunt [prop. XII], rectae rationales commensurabiles sunt.

7.

Ad libr. X prop. 20.

Lemma.

Recta spatio irrationali aequalis quadrata irrationalis est.

nam A^2 spatio irrationali sit aequale. dico, A irrationalem esse.

A ————— | nam si A rationalis est, etiam A^2
 B ————— | rationale erit; ita enim in definitio-
 Γ ————— | nibus est [def. 4]. at non est. ergo
 A irrationalis est; quod erat demonstrandum.

8.

Ad libr. X prop. 23 coroll.

Sunt autem rursus aliae¹⁾ quoque rectae, quae

1) Sc. praeter rationales, de quibus u. app. nr. 6.

15. $\xi\sigma\alpha\iota$] $\xi\sigma\tau\iota$ V. 16. $\xi\sigma\tau\iota\nu$] om. BFVb. 17. $\xi\sigma\tau\iota\nu$ B.
 $\alpha\phi\alpha$] m. 2 F. η A $\xi\sigma\tau\iota\nu$ BFVb. $\delta\pi\epsilon\rho$ $\xi\delta\epsilon\iota$ $\delta\epsilon\iota\chi\alpha\iota$] om. B. 18. $\epsilon\lambda\epsilon\iota\nu$ P. $\epsilon\lambda\epsilon\iota$ $\delta\epsilon$ — p. 386, 7. $\delta\upsilon\nu\acute{\alpha}\mu\epsilon\iota$ (prius)]
punctis del. V (cfr. p. 69 not. crit.).

ἄσύμμετροί εἰσι τῇ μέσῃ, δυνάμει δὲ μόνον σύμμετροι, καὶ λέγονται πάλιν μέσαι διὰ τὸ σύμμετροι εἶναι δυνάμει τῇ μέσῃ καὶ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας, καθὸ μέσαι, ἀλλὰ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας ἦτοι μήκει δηλαδὴ
 5 καὶ δυνάμει ἢ δυνάμει μόνον. καὶ εἰ μὲν μήκει, λέγονται καὶ αὗται μέσαι μήκει σύμμετροι ἐπομένον τοῦ, ὅτι καὶ δυνάμει· εἰ δὲ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, λέγονται καὶ οὕτως μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι.

Ὅτι δὲ αἱ μέσαι σύμμετροί εἰσιν, οὕτως δεικτέον.
 10 ἐπεὶ αἱ μέσαι μέσῃ τινὶ σύμμετροί εἰσιν, τὰ δὲ τῷ αὐτῷ σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα, αἱ ἄρα μέσαι σύμμετροί εἰσιν.

9.

Ad libr. X prop. 27.

Λήμμα.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων ἐν λόγῳ ὁποιῶσιν καὶ
 15 ἄλλον τινὸς θέον ποιῆσαι ὥς τὸν ἀριθμὸν πρὸς τὸν ἀριθμὸν οὕτως τοῦτον πρὸς ἄλλον τινά.

Ἐστῶσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ AB , ΓA λόγον ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους ὅποιονοῦν, ἄλλος δέ τις ὁ ΓE . δεῖ ποιῆσαι τὸ προκείμενον.

20 Ἀναγεγράφθω γὰρ ὑπὸ τῶν $\Delta \Gamma$, ΓE παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΔE , καὶ τῷ ΔE ἴσον παρὰ τὸν AB παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον τὸ BZ πλάτος ποιοῦν τὴν AZ . ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΔE

9. Post δεῖξαι p. 78, 13 V.

1. εἰσιν P. 9. ὅτι — 12. εἰσιν] etiam in mg. sup. m.
 rec. B. 10. εἰσι BV. 13 λήμμα] m. 2 V.

mediae longitudine incommensurabiles sunt, potentia autem tantum commensurabiles, et rursus mediae uocantur, quia mediae commensurabiles sunt potentia, et inter se commensurabiles, quatenus mediae sunt, commensurabiles autem inter se aut longitudine et potentia aut potentia tantum. et si longitudine commensurabiles sunt, et ipsae mediae longitudine commensurabiles uocantur, cum per se sequatur, eas potentia quoque commensurabiles esse; sin potentia tantum commensurabiles sunt, sic quoque mediae uocantur potentia tantum commensurabiles.

Medias autem commensurabiles esse, sic demonstrandum: quoniam mediae alicui mediae commensurabiles sunt, et quae eidem commensurabilia sunt, inter se quoque commensurabilia sunt [prop. XII], mediae sunt commensurabiles.

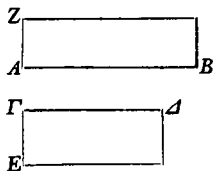
9.

• Ad libr. X prop. 27.

Lemma.

Datis duobus numeris in quavis ratione et alio quodam numero oportet efficere, ut sit, ut numerus ad numerum, ita hic ad alium quendam.

Sint AB , ΓA numeri dati rationem quamuis inter se habentes, alius autem aliquis ΓE . oportet efficere, quod propositum est.



describatur enim parallelogrammum rectangulum $\Delta E = \Delta \Gamma \times \Gamma E$, et spatium ΔE aequale rectae AB adplicetur parallelogrammum BZ latitudinem efficiens AZ . iam

παράλληλόγραμμον τῷ BZ παραλληλογράμῳ, ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ἰσογώνιον, τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ AB πρὸς τὸν $\Gamma\Delta$, οὕτως ὁ ΓE πρὸς τὸν AZ . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10.

Ad libr. X prop. 29.

Λήμμα εἰς τὸ κθ'.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων καὶ εὐθείας δέον ποιῆσαι ὡς τὸν ἀριθμὸν πρὸς τὸν ἀριθμὸν, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς εὐθείας τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπ' ἄλλης τινός.

- 10 "Ἐστῶσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ A, B , εὐθεῖα δὲ ἡ Γ , καὶ δέον ἐστὶ ποιῆσαι τὸ προκείμενον. πεποιήσθω γὰρ ὡς ὁ A πρὸς τὸν B , ἡ Γ εὐθεῖα πρὸς ἄλλην τινὰ τὴν Δ , καὶ εἰλήφθω τῶν Γ, Δ μέση ἀνάλογον ἡ E . ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ὁ A πρὸς τὸν B ,
 15 ἡ Γ εὐθεῖα πρὸς τὴν Δ , ἀλλ' ὡς ἡ Γ πρὸς τὴν Δ , τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς E , ὡς ἄρα ὁ A πρὸς τὸν B , τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς E τετράγωνον.

11.

Ad libr. X prop. 31.

Λήμμα εἰς τὸ λα'.

- "Ἐὰν ᾧσι δύο εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινί, ἔσται ὡς ἡ
 20 εὐθεῖα πρὸς τὴν εὐθεῖαν, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν δύο πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐλαχίστης.

"Ἐστῶσαν δὴ δύο εὐθεῖαι αἱ $AB, B\Gamma$ ἐν λόγῳ τινί· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $B\Gamma$, οὕτως τὸ

10. Post prop. XXIX p. 88, 18 V. 11. Post prop. XXXI p. 92, 24 V.

4. AB] e corr. V.

quoniam $\angle E = \angle Z$, et eadem aequiangula sunt, et parallelogrammorum aequalium et aequiangulorum latera angulos aequales comprehendunt in contraria proportionem sunt [VI, 14], erit $AB : \Gamma A = \Gamma E : AZ$; quod erat demonstrandum.

10.

Ad libr. X prop. 29.

Lemma ad prop. XXIX.

Datis duobus numeris et recta oportet efficere, ut sit, ut numerus ad numerum, ita quadratum rectae ad quadratum alius alicuius rectae.

Sint duo numeri dati A, B , recta autem Γ ; et oportet efficere, quod propositum est. fiat enim $A : B = \Gamma : \Delta$ [prop. VI coroll.], et rectarum Γ, Δ media proportionalis sumatur E [VI, 13]. iam quoniam est $A : B = \Gamma : \Delta$, $\Gamma : \Delta = \Gamma^2 : E^2$ [V def. 9], erit $A : B = \Gamma^2 : E^2$.

11.

Ad libr. X prop. 31.

Lemma ad prop. XXXI.

Si duae rectae in ratione aliqua sunt, erit ut recta ad rectam, ita rectangulum duarum rectarum ad quadratum minimae.

Duae igitur rectae $AB, B\Gamma$ in ratione aliqua sint. dico, esse $AB : B\Gamma = AB \times B\Gamma : B\Gamma^2$. describatur

ὑπὸ τῶν $AB, B\Gamma$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Gamma$. ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς $B\Gamma$ τετραγώνον τὸ $B\Delta E\Gamma$, καὶ συμπληρώσθω τὸ $A\Delta$ παραλληλόγραμμον. φανερόν δὴ, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $B\Gamma$, οὕτως τὸ $A\Delta$
 5 παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ BE παραλληλόγραμμον. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν $A\Delta$ τὸ ὑπὸ τῶν $AB, B\Gamma$. ἴση γὰρ ὁ $B\Gamma$ τῇ $B\Delta$. τὸ δὲ BE τὸ ἀπὸ τῆς $B\Gamma$. ὡς ἄρα ἡ AB πρὸς τὴν $B\Gamma$, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν $AB, B\Gamma$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Gamma$. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

12.

Ad libr. X prop. 32.

10

 $A\tilde{\eta}\mu\mu\alpha$ εἰς τὸ $\lambda\beta'$.

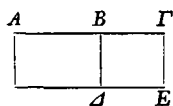
Ἐὰν ὧσι τρεῖς εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινί, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς πρώτης καὶ μέσης πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς μέσης καὶ ἐλαχίστης.

Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινὶ αἱ $AB, B\Gamma$,
 15 $\Gamma\Delta$. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν $AB, B\Gamma$ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν $B\Gamma, \Gamma\Delta$.

Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ A σημείου τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἡ AE , καὶ κείσθω τῇ $B\Gamma$ ἴση ἡ AE , καὶ διὰ τοῦ E σημείου τῇ $A\Delta$ εὐθείᾳ παράλληλος ἦχθω ἡ EK ,
 20 διὰ δὲ τῶν B, Γ, Δ σημείων τῇ AE παράλληλοι ἦχθωσαν αἱ $ZB, \Gamma\Theta, \Delta K$. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $B\Gamma$, οὕτως τὸ AZ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ $B\Theta$ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως τὸ $B\Theta$ πρὸς τὸ ΓK , δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ AB
 25 πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως τὸ AZ παραλληλόγραμμον πρὸς

12. Post prop. XXXII p. 96, 8 V, mg. m. rec. B.

3. Post $A\Delta$ ins. Γ m. 1 V. 4. $A\Delta$] A eras. V. 7. τῆς] in ras. V. $B\Gamma$] Γ e corr. V. 12. τὸ ὑπὸ] in ras. V.



enim in $B\Gamma$ quadratum $B\Delta E\Gamma$, et expleatur parallelogrammum $A\Delta$. manifestum igitur est, esse

$$AB : B\Gamma = A\Delta : BE \text{ [VI, 1].}$$

et esi $A\Delta = AB \times B\Gamma$ (nam $B\Gamma = B\Delta$), $BE = B\Gamma^2$. itaque erit $AB : B\Gamma = AB \times B\Gamma : B\Gamma^2$; quod erat demonstrandum.

12.

Ad libr. X prop. 32.

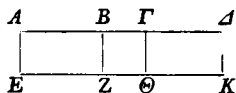
Lemma ad prop. XXXII.

Si tres rectae in ratione aliqua sunt, erit ut prima ad tertiam, ita rectangulum primae ac mediae ad rectangulum mediae ac minimae.

Tres rectae AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ in ratione aliqua sint. dico, esse

$$AB : \Gamma\Delta = AB \times B\Gamma : B\Gamma \times \Gamma\Delta.$$

ducatur enim ab A puncto ad AB perpendicularis AE , et ponatur $AE = B\Gamma$, et per E punctum rectae



$A\Delta$ parallela ducatur EK , per

puncta autem B , Γ , Δ rectae AE parallelae ducantur ZB , $\Gamma\Theta$, ΔK .

et quoniam est $AB : B\Gamma = AZ : B\Theta$

[VI, 1], et $B\Gamma : \Gamma\Delta = B\Theta : \Gamma K$ [VI, 1], ex aequo erit

τὸ ΓΚ παραλληλόγραμμον. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΑΖ τὸ
ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἴση γὰρ ἡ ΑΕ τῇ ΒΓ· τὸ δὲ ΓΚ
τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ· ἴση γὰρ ἡ ΒΓ τῇ ΓΘ.

Ἐὰν ἄρα τρεῖς ὥσιν εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινί, ἴσται
5 ὥς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς πρώτης
καὶ μέσης πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς μέσης καὶ τρίτης· ὅπερ
ἔδει δεῖξαι.

13.

Ad libr. X prop. 32 lemma.

Ἡ καὶ ὅτι, ἐὰν ἀναγράψωμεν τὸ ΕΓ ὀρθογώνιον
παραλληλόγραμμον καὶ συμπληρώσωμεν τὸ ΑΖ, ἴσον
10 ἔσται τὸ ΕΓ τῷ ΑΖ· ἐκότερον γὰρ αὐτῶν διπλάσιόν
ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΕΓ τὸ ὑπὸ
τῶν ΒΓ, ΑΔ, τὸ δὲ ΑΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. τὸ
ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ.

14.

Ad libr. X prop. 33.

Λήμμα εἰς τὸ λγ'.

15 Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄνισα, ἔσται ὥς ἡ
εὐθεῖα πρὸς τὴν εὐθείαν, οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ
τῆς μείζονος πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς ἐλάττονος.

Εὐθεῖα γὰρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω εἰς ἄνισα κατὰ
τὸ Ε· λέγω, ὅτι ὥς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως τὸ
20 ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνον τὸ
ΑΓΔΒ, καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΑΓ, ΒΔ

13. Inter ΑΓ et ὅπερ p. 98, 15 PBFVb. 14. Post
prop. XXXIII p. 102, 4 V, mg. m. rec. B.

3. ΓΔ] Δ in ras. V. 5. πρὸς — 7. δεῖξαι] καὶ ἐξῆς B.
8. ἡ] om. FV. καί] καὶ ἡκται b. 9. συμπληρώσωμεν P,
corr. m. 2. 10. τό] corr. ex. τῷ V. 11. ΕΓ] e corr. V.

$AB: \Gamma A = AZ: \Gamma K$ [V, 22]. et $AZ = AB \times B\Gamma$ (nam $AE = B\Gamma$), $\Gamma K = B\Gamma \times \Gamma A$ (nam $B\Gamma = \Gamma \Theta$). ergo si tres rectae in ratione aliqua sunt, erit ut prima ad tertiam, ita rectangulum primae ac mediae ad rectangulum mediae ac tertiae; quod erat demonstrandum.¹⁾

13.

Ad libr. X prop. 32 lemma.

Uel etiam quod, si rectangulum $E\Gamma$ describerimus, et AZ expleuerimus [u. fig. p. 97], erit $E\Gamma = AZ$; nam utrumque $= 2 AB\Gamma$ [I, 41]. et $E\Gamma = B\Gamma \times A\Delta$, $AZ = BA \times A\Gamma$. ergo est

$$B\Gamma \times A\Delta = BA \times A\Gamma.$$

14.

Ad libr. X prop. 33.

Lemma ad prop. XXXIII.

Si recta in partes inaequales secatur, erit ut recta ad rectam, ita rectangulum totius ac maioris ad rectangulum totius ac minoris.

Recta enim AB in E in partes inaequales secetur. dico, esse

$$AE: EB = BA \times AE: AB \times BE.$$

describatur enim in AB quadratum $A\Gamma\Delta B$, et per punctum E alterutri rectarum $A\Gamma$, $B\Delta$ paral-

1) In B in pag. seq. figura est nostrae similis, nisi quod litterae A, E omissae sunt, et pro B est Θ ; adduntur numeri quidam et σχῆμα τοῦ λήμματος τοῦ προγραφέντος, omnia m. rec. in textu prop. 32 (ad καὶ ἐπεὶ p. 94, 11) signo quodam ad hoc lemma reuocamur.

τό] τῷ b. 12. τῶν] (prius) om. P. τό] (sec.) τῷ b. 14.
 εἰς τὸ ἰγ'] πρὸ τοῦ λδ' postea add. B. 15. ἔσται] in ras. V.
 18. τις ἦ] e corr. V m. 2.

παράλληλος ἤχθω ἡ EZ . φανερόν οὖν, ὅτι ὡς ἡ AE
 πρὸς τὴν EB , οὕτως τὸ AZ παραλληλόγραμμον πρὸς
 τὸ ZB παραλληλόγραμμον. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν AZ τὸ
 ὑπὸ τῶν BA, AE . ἴση γὰρ ἡ AG τῇ AB . τὸ δὲ ZB
 5 τὸ ὑπὸ τῶν AB, BE . ἴση γὰρ ἡ BA τῇ AB . ὡς ἄρα
 ἡ AE πρὸς τὴν EB , οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν BA, AE
 πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AB, BE . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15.

Ad libr. X prop. 34.

Λήμμα.

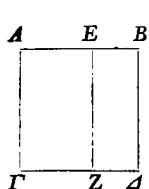
Ἐὰν ὥσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τμηθῇ δὲ ἡ ἐλαχίστη
 10 αὐτῶν εἰς ἴσα, τὸ ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν διπλάσιον
 ἔσται τοῦ τῆς μείζονος καὶ τῆς ἡμισείας τῆς ἐλαχίστης.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ AB, BG , ὧν μείζων
 ἔστω ἡ AB , καὶ τετμήσθω ἡ BG δίχα κατὰ τὸ Δ .
 λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν AB, BG διπλάσιόν ἐστι τοῦ
 15 ὑπὸ τῶν AB, BA .

Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ B σημεῖον τῇ BG πρὸς ὀρθὰς
 ἡ BE , καὶ κείσθω τῇ BA ἴση ἡ BE , καὶ κατα-
 γεγράψθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς
 τὴν AG , οὕτως τὸ BZ πρὸς τὸ ΔH , συνθέντι ἄρα
 20 ὡς ἡ BG πρὸς τὴν AG , οὕτως τὸ BH πρὸς τὸ ΔH .
 διπλασίον δὲ ἐστὶν ἡ BG τῆς AG . διπλάσιον ἄρα
 ἐστὶ καὶ τὸ BH τοῦ ΔH . καὶ ἐστὶ τὸ μὲν BH τὸ
 ὑπὸ τῶν AB, BG . ἴση γὰρ ἡ AB τῇ BE . τὸ δὲ
 ΔH τὸ ὑπὸ τῶν AB, BA . ἴση γὰρ τῇ μὲν BA ἡ AG ,
 25 τῇ δὲ AB ἡ AZ . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15. Post prop. XXXIV p. 104, 9 V, mg. m. rec. B (ux
 legi potest).

4. ZB] BZ B. 5. τῶν] om. V. AB] (prius) e corr. V.
 8. λήμμα προγραφόμενον B. 19. τήν] om. V. 21. AG] GA B.



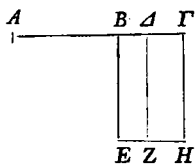
lela ducatur EZ . manifestum igitur est, esse $AE:EB = AZ:ZB$ [VI, 1]. et $AZ = BA \times AE$ (nam $AG = AB$), $ZB = AB \times BE$ (nam $AB = AB$). itaque erit $AE:EB = BA \times AE:AB \times BE$; quod erat demonstrandum.

15.

Ad libr. X prop. 34.

Lemma.

Si sunt duae rectae inaequales, et minor in partes aequales secatur, rectangulum duarum rectarum duplo maius erit rectangulo maioris et dimidia minoris.



Sint duae rectae inaequales AB , $BΓ$, quarum maior sit AB , et $BΓ$ in duas partes aequales secetur in $Δ$. dico, esse $AB \times BΓ = 2 AB \times BΔ$.

ducatur enim a puncto B ad $BΓ$ perpendicularis BE , et ponatur $BE = BA$, et describatur figura. iam quoniam est $AB:ΔΓ = BZ:ΔH$ [VI, 1], componendo [V, 18] erit $BΓ:ΔΓ = BH:ΔH$. uerum $BΓ = 2 ΔΓ$. itaque etiam $BH = 2 ΔH$. et $BH = AB \times BΓ$ (nam $AB = BE$), $ΔH = AB \times BΔ$ (nam $BΔ = ΔΓ$, $AB = ΔZ$); quod erat demonstrandum.

16.

Ad libr. X prop. 36.

Ἐκάλεσε δὲ αὐτὴν ἐκ δύο ὀνομάτων διὰ τὸ ἐκ
 δύο ρητῶν αὐτὴν συγκεῖσθαι κύριον ὄνομα καλῶν
 τὸ ρητόν, καθ' ὃ ρητόν.

17.

Ad libr. X prop. 37.

Ἐκάλεσε δὲ αὐτὴν ἐκ δύο μέσων πρώτην διὰ τὸ
 5 ρητόν περιέχειν καὶ προτερεῖν τὸ ρητόν.

18.

Ad libr. X prop. 38.

Ἐκάλεσε δὲ αὐτὴν ἐκ δύο μέσων δευτέραν διὰ το
 μέσον περιέχειν τὸ ὑπ' αὐτῶν καὶ μὴ ρητόν, δευ-
 τερεύειν δὲ τὸ μέσον τοῦ ρητοῦ. ὅτι δὲ τὸ ὑπὸ ρητῆς
 καὶ ἀλόγου περιεχόμενον ἄλογόν ἐστιν, δῆλον. εἰ γὰρ
 10 ἔσται ρητόν καὶ παραβέβληται παρὰ ρητὴν, εἴη αὖ καὶ
 ἡ ἑτέρα αὐτοῦ πλευρὰ ρητὴ. ἀλλὰ καὶ ἄλογος· ὅπερ
 ἄτοπον. τὸ ἄρα ὑπὸ ρητῆς καὶ ἀλόγου ἄλογόν ἐστιν.

19.

Ad libr. X prop. 39.

Ἐκάλεσε δὲ αὐτὴν μείζονα διὰ το τὰ ἀπὸ τῶν *AB*,
BΓ ρητὰ μείζονα εἶναι τοῦ δις ὑπὸ τῶν *AB*, *BΓ*
 15 μέσου, καὶ δέον εἶναι ἀπὸ τῆς τῶν ρητῶν οἰκειότητος

16. Inter ὀνομάτων et ὅπερ p. 108, 15 PBFb. 17. Inter
 πρώτη et ὅπερ p. 110, 8 PBFb. 18. Inter δευτέρα et ὅπερ
 p. 114, 2 PBFb, pro scholio V m. 1. 19. Inter μείζων et
 ὅπερ p. 114, 22 PBFb, mg. V.

1. ἐκάλεσεν PBF. 2. [ρητῶν] ὀνομάτων F. συγκεῖσθαι]
 καλεῖσθαι F (sed corr. mg.). 4. ἐκάλεσεν PBF. 5. πρω-

16.

Ad libr. X prop. 36.

Uocavit autem eam ex duobus nominibus, quia ex duabus rationalibus composita est, proprie rationale, quatenus rationale est, nomen uocans.

17.

Ad libr. X prop. 37.

Uocavit autem eam ex duabus mediis primam, quia spatium rationale comprehendunt, et rationale principatum habet.

18.

Ad libr. X prop. 38.

Uocavit autem eam ex duabus mediis secundam, quia medium comprehendunt rectangulum, et medium rationali postponitur.

Spatium autem rectis rationali et irrationali comprehensum irrationale esse, adparet. nam si rationale est et rectae rationali adplicatum est, etiam alterum eius latus rationale est [prop. XX]. at idem irrationale est; quod absurdum est. ergo spatium rectis rationali et irrationali comprehensum irrationale est.

19.

Ad libr. X prop. 39.

Uocavit autem eam maiorem, quia rationalia $AB^2 + B\Gamma^2$ maiora sunt medio $2AB \times B\Gamma$, et

τερεύειν F. 6. ἐκάλειπεν PBF. τό τὸ τό FV. 8. δέ]
 (prius) om. V. 9. ἐστι BV, comp. Fb. 11. πλευρὰ αὐτοῦ F.
 13. ἐκάλειπεν PBF. 15. μέσων PBFb.

τὴν ὀνομασίαν τάττεσθαι. ὅτι δὲ μείζονά ἐστι τὰ ἀπο
τῶν AB , $BΓ$ τοῦ δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$, οὕτως δεικτέον.

Φανερόν μὲν οὖν, ὅτι ἄνισοί εἰσιν αἱ AB , $BΓ$.
εἰ γὰρ ἦσαν ἴσαι, ἴσα ἂν ἦν καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$
5 τῷ δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$, καὶ ἦν ἂν καὶ τὸ ὑπὸ τῶν
 AB , $BΓ$ ῥητόν· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· ἄνισοι ἄρα εἰσὶν
αἱ AB , $BΓ$. ὑποκείσθω μείζων ἡ AB , καὶ κείσθω
τῇ $BΓ$ ἴση ἡ $BΔ$ · τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AB , $BΔ$ ἴσα ἐστὶ
τῷ τε δις ὑπὸ τῶν AB , $BΔ$ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΔΑ$.
10 ἴση δὲ ἡ $ΔΒ$ τῇ $BΓ$ · τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$ ἴσα
ἐστὶ τῷ τε δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς
 $ΑΔ$ · ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$ μείζονα εἶναι τοῦ
δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ τῷ ἀπὸ $ΔΑ$.

20.

Ad libr. X prop. 40.

Ῥητον δὲ καὶ μέσον δυναμένη καλεῖται αὕτη διὰ
15 τὸ δύνασθαι δύο χωρία, τὸ μὲν ῥητόν, τὸ δὲ μέσον·
καὶ διὰ τὴν τοῦ ῥητοῦ προύπαρξιν πρῶτον ἐκάλεσεν.

21.

Ad libr. X prop. 41.

Καλεῖ δὲ αὐτὴν δύο μέσα δυναμένην διὰ το δύ-
νασθαι αὐτὴν δύο μέσα χωρία τό τε συγκείμενον ἐκ
τῶν ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$ καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$.

20. Inter δυναμένη et ὅπερ p. 116, 13 PBFb, mg. V.
21. Inter δυναμένη et ὅπερ p. 118, 17 PBFVb.

1. δέ] δὲ καὶ P. ἀπό] corr. ex ὑπό m. 2 F. 2. οὕτω
BVb. 3. οὖν] οὖν ἔστιν F. 8. ἀπό] ὑπό V. $BΔ$] corr.
ex $BΓ$ V. 9. ἀπό] ὑπό F. τῆς] τῶν F, om. Bb. $ΔΑ$]

oportet nomen a proprietate rationalium dari. esse autem $AB^2 + B\Gamma^2 > 2 AB \times B\Gamma$, sic demonstrandum est.

iam manifestum est, AB , $B\Gamma$ inaequales esse. nam si aequales essent, esset etiam $AB^2 + B\Gamma^2 = 2 AB \times B\Gamma$, et $AB \times B\Gamma$ et ipsum rationale esset; quod contra hypothesin est. supponatur $AB > B\Gamma$, et ponatur $B\Delta = B\Gamma$. itaque $AB^2 + B\Delta^2 = 2 AB \times B\Delta + \Delta A^2$ [II, 7]. verum $\Delta B = B\Gamma$. itaque

$$AB^2 + B\Gamma^2 = 2 AB \times B\Gamma + \Delta A^2.$$

ergo $AB^2 + B\Gamma^2$ excedit $2 AB \times B\Gamma$ quadrato ΔA^2 .

20.

Ad libr. X prop. 40.

Spatio autem rationali ac medio aequalis quadrata uocatur haec, quia quadrata duobus spatiis aequalis est, alteri rationali, alteri medio, et propter principatum rationalis primum hoc nominavit.

21.

Ad libr. X prop. 41.

Uocat autem eam duobus spatiis mediis aequalem quadratam, quia duobus spatiis mediis quadrata est aequalis, $AB^2 + B\Gamma^2$ et $2 AB \times B\Gamma$ [u. fig. p. 119].

ΔA P. 10. ἀπό] ὑπό F. ἴσα — 12. ΔA] m. 2 V. 11. ἀπό] corr. ex ὑπό m. 2 F. 12. τὰ] τό F. εἶναι] ἐστι BFVb.

13. ἀπό] corr. ex ὑπό m. 2 F. ΔA] τῆς ΔA b et corr. ex τῶν ΔA F. 14. φητόν — αὐτῇ] καλεῖται δὲ αὐτῇ? V. δυναμένην BFb, et P, corr. m. 2. καλεῖται αὐτῇ] αὐτὴν καλεῖ BFb. 16. τήν] τὸν V. Post πρῶτον add. τὸ φητόν BFb, m. rec. P. ἐκάλεσε V. 17. καλεῖ — δυναμένην] om. V. 19. ἀπὸ τῶν] om. V. τό] τοῦ P.

22.

Ad libr. X deff. alt.

Ἐξ οὖν οὐσῶν τῶν οὕτως καταλαμβανομένων εὐ-
 θειῶν τάττει πρώτας τῇ τάξει τρεῖς, ἐφ' ὧν ἡ μείζων
 τῆς ἐλάσσονος μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἐαυτῇ,
 δευτέρας δὲ τῇ τάξει τὰς λοιπὰς τρεῖς, ἐφ' ὧν τῷ ἀπὸ
 5 ἀσυμμέτρου, διὰ τὸ προτερεῖν τὸ σύμμετρον τοῦ ἀσυμ-
 μέτρου· καὶ ἔτι πρώτην μὲν, ἐφ' ἧς τὸ μείζον ὄνομα
 σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, δευτέραν δέ, ἐφ'
 ἧς τὸ ἔλασσον, διὰ τὸ πάλιν προτερεῖν τὸ μείζον τοῦ
 ἐλάσσονος τῷ ἐμπεριέχειν τὸ ἔλασσον, τρίτην δέ, ἐφ'
 10 ὧν μηδέτερον τῶν ὀνομάτων σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκ-
 κειμένῃ ῥητῇ. καὶ ἐπὶ τῶν ἐξῆς τριῶν ὁμοίως τὴν
 πρώτην τῆς εἰρημένης δευτέρας τάξεως τετάρτην καλῶν
 καὶ τὴν δευτέραν πέμπτην καὶ τὴν τρίτην ἕκτην.

23.

Ad libr. X prop. 90.

Ἔστι δὲ καὶ συντομώτερον δεῖξαι τὴν εὐρεσιν τῶν
 15 εἰρημένων ἕξ ἀποτομῶν. καὶ δὴ ἔστω εὐρεῖν τὴν
 πρώτην. ἐκκείσθω ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτη ἡ $ΑΓ$,
 ἧς μείζον ὄνομα ἡ $ΑΒ$, καὶ τῇ $ΒΓ$ ἴση κείσθω ἡ $ΒΔ$.
 αἱ $ΑΒ$, $ΒΓ$ ἄρα, τουτέστιν αἱ $ΑΒ$, $ΒΔ$, ῥηταί εἰσι
 δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ $ΑΒ$ τῆς $ΒΓ$, τουτ-
 20 ἐστι τῆς $ΒΔ$, μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἐαυτῇ,

22. Post ἕκτη p. 136, 19 PBFb; mg. V, sed add. κείμενον.

23. Post δεῖξαι p. 274, 15 PBFVb.

1. οὖν] m. 2 F. οὕτω Bf b. 3. Ante συμμέτρου ras.
 1 litt. B. 4. τῷ] mut. in τό m. rec. P, corr. ex τό F, τό b.
 5. ἀσυμμέτρου] ἀσυμμέτρου ἐαυτῇ V. ἀσυμμέτρου] συμμέτρου V.
 6. πρώτη B, sed corr. m. 1. 7. δεύτερον P, corr. m. rec. 8.
 ἔλαττον Bb, comp. F. 9. ἐλάττονος Bb, comp. F. τῷ] e corr. V.

22.

Ad libr. X deff. alt.

Cum igitur rectae ita inuentae sex sint, ordine primas tres ponit, in quibus maior quadrata minorem excedit quadrato rectae sibi commensurabilis, secundas autem ordine tres reliquas, in quibus quadrato rectae sibi incommensurabilis excedit, quia commensurabile antecedit incommensurabile; et praeterea primam, in qua maius nomen rationali propositae commensurabile est, secundam autem, in qua minus, quia rursus maius antecedit minus, quia minus comprehendit; tertiam autem, in qua neutrum nomen rationali propositae commensurabile est. et in sequentibus tribus similiter, primam secundae classis, quam nominauimus, quartam uocans, secundam quintam, tertiam sextam.

23.

Ad libr. X prop. 90.

Licet autem breuius quoque inuentionem sex apotomorum, quas diximus, demonstrare. sit enim propositum primam inuenire. ponatur AG recta ex duobus nominibus prima, cuius maius nomen sit AB , et ponatur $BA = BF$. itaque AB , BF , hoc est AB , BA , rationales sunt potentia tantum commensurabiles [prop. XXXVI], et AB^2 excedit BF^2 , hoc est BA^2 , quadrato rectae sibi commensurabilis, et AB rationali propositae commensu-

10. ἐστὶ σύμμετρον BFb. 11. ἐπὶ] corr. ex ἐπεὶ V. 14. $\zeta\alpha'$ BVb. $\xi\sigma\tau\iota\nu$ B. $\epsilon\tilde{\sigma}\theta\eta\sigma\iota\nu$ FV? 15. $\xi\xi$] om. b.
16. η] (prius) om. PV. 17. ἐκκείσθω V. 18. εἶσιν B.

καὶ ἡ AB σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει· ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἐστὶν ἡ AD . ὁμοίως δὲ καὶ τὰς λοιπὰς ἀποτομὰς εὐρήσομεν ἐκθέμενοι τὰς ἰσαριθμοὺς ἐκ δύο ὀνομάτων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

24.

Ad libr. X prop. 115.

5

Ἄλλως.

Ἐστω μέση ἡ AG · λέγω, ὅτι ἀπὸ τῆς AG ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾶ τῶν πρότερον ἡ αὐτή.

Ἦχθω τῇ AG πρὸς ὀρθὰς ἡ AB , καὶ ἔστω ῥητὴ
 10 ἡ AB , καὶ συμπεπληρώσθω τὸ BG · ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ BG , καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν. δυνάσθω αὐτὸ ἡ GA · ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ GA . καὶ οὐδεμιᾶ τῶν πρότερον ἡ αὐτή· το γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ μέσην.
 15 πάλιν συμπεπληρώσθω τὸ EA · ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ EA , καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν. δυνάσθω αὐτὸ ἡ AZ · ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ AZ . καὶ οὐδεμιᾶ τῶν πρότερον ἡ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν GA .

20 Ἀπὸ μέσης ἄρα ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾶ τῶν πρότερον ἡ αὐτή ἐστὶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

24. Post δεῖξαι p. 370, 23 PBFVb.

- | | | |
|--|---------------------------------|-----------------|
| 3. ἐκθέμενοι] <i>ν</i> e corr. P. | τάς] om. V. | εἰσαριθμούς B. |
| 4. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. B F V b, comp. P. | 7. γίνονται V. | |
| οὐδεμία] om. P F V. | 8. ἡ] ἐστὶν ἡ B. | 10. ἄλογον] in |
| ras. φ. | ἄλογον — 11. BG] mg. m. 1 P. | 11. ἐστὶ P B V, |

rabilis est [deff. alt. 1]. ergo AA apotome est prima. similiter igitur reliquas quoque apotomas inueniemus expositis rectis ex duobus nominibus eiusdem numeri; quod erat demonstrandum.

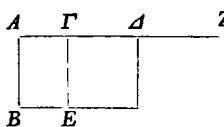
24.

Ad libr. X prop. 115.

Aliter.

Sit AG media. dico, ab AG irrationales infinitas numero oriri, et nullam ulli priorum similem esse.

Ducatur AB ad AG perpendicularis, et rationalis sit AB , et expleatur BG . itaque BG irrationale est [prop. XX], et recta ei aequalis quadrata irrationalis est. sit $GA^2 = BG$. itaque GA



est. sit $GA^2 = BG$. itaque GA irrationalis est. nec ulli priorum similis est. neque enim ullius priorum quadratum rectae rationali ad-

plicatum latitudinem efficit mediam. rursus expleatur EA . itaque EA irrationale est [prop. XX], et recta ei aequalis quadrata irrationalis est. sit $AZ^2 = EA$. itaque AZ irrationalis est. nec ulli priorum similis est. neque enim ullius priorum quadratum rationali adplicatum latitudinem efficit GA .

Ergo a media irrationales numero infinitae oriuntur, et nulla ulli priorum similis est; quod erat demonstrandum.

comp. Fb. 16. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$] comp. Fb, $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ PBV. 20. $\acute{\alpha}\pi\omicron\ \tau\eta\varsigma$
Bb, $\tau\eta\varsigma$ add. m. 2 F. $\gamma\acute{\iota}\gamma\nu\omicron\nu\tau\alpha\iota$ B. $\omicron\acute{\upsilon}\delta\epsilon\mu\acute{\iota}\alpha$] om. PFVb.
21. $\omicron\acute{\upsilon}\delta\epsilon\mu\acute{\iota}\alpha\nu$ φ. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ ὅπερ $\acute{\epsilon}\delta\epsilon\iota$ $\delta\epsilon\acute{\iota}\xi\alpha\iota$] om. BFb.

25.

Ἡ τῇ ἐλάσσονι σύμμετρος ἐλάσσων ἐστίν.

Ἐστω ἐλάσσων ἡ A , καὶ τῇ A σύμμετρος [ἔστω] ἡ B . λέγω, ὅτι ἡ B ἐλάσσων ἐστίν.

- Κείσθω ῥητὴ ἡ $\Gamma\Delta$ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς A ἴσον παρὰ
 5 τὴν $\Gamma\Delta$ παραβεβλήσθω τὸ ΓE πλάτος ποιοῦν τὴν
 ΓZ . ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ τετάρτη ἡ ΓZ . τῷ δὲ ἀπὸ τῆς
 B ἴσον παρὰ τὴν ZE παραβεβλήσθω τὸ ZH πλάτος
 ποιοῦν τὴν $Z\Theta$. ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστὶν ἡ A τῇ B ,
 σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς A τῷ ἀπὸ τῆς B .
 10 ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς A ἴσον ἐστὶ τὸ ΓE , τῷ δὲ
 ἀπὸ τῆς B ἴσον ἐστὶ τὸ ZH . σύμμετρον ἄρα ἐστὶ
 τὸ ΓE τῷ ZH . ὥς δὲ τὸ ΓE πρὸς τὸ ZH , οὕτως
 ἐστὶν ἡ ΓZ πρὸς τὴν $Z\Theta$. σύμμετρος ἄρα ἐστὶν
 ἡ ΓZ τῇ $Z\Theta$ μήκει. ἀποτομὴ δὲ ἐστὶ τετάρτη ἡ ΓZ .
 15 ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $Z\Theta$ τετάρτη. τὸ HZ ἄρα
 περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς τῆς ZE καὶ ἀποτομῆς τετάρτης
 τῆς $Z\Theta$. εἰν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ
 ἀποτομῆς τετάρτης, ἴ τὸ χωρίον δυναμένη ἐλάσσων
 ἐστίν. δύναται δὲ τὸ ZH ἡ B . ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν
 20 ἡ B . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

25. Alia demonstr. prop. 105, post nr. 24 PFV, mg. m. 1 b, m. 2 B, in V etiam ad prop. 105 mg. m. 1 (V₂).

1. ἄλλως τὸ ρς' V₂, ριζ' b, ριη' B; ριέ' F, ριζ' m. 2. ἐλάττων F. 2. ἐλάττων F. ἔστω] om. PV. 3. ἐστὶ P, comp. V, et postea ins. φ. 4. ἐκείσθω BbV₂. ῥητὴ ἡ $\Gamma\Delta$] γὰρ ἡ $\Gamma\Delta$ ῥητὴ BV₂, ἡ $\Gamma\Delta$ ῥητὴ b, ἡ $\Gamma\Delta$ F. A] Δ φ. 6. τῷ] τό PB. 7. Post ZE add. $\Gamma\Delta$ P, et V, sed del. 8. τῇ B] corr. ex BHB m. 1 V. 9. ἐστὶ] om. BFbV₂. τῷ] corr. ex τό B, mut. in τό V₂. 10. ἐστίν P, om. V₂. τό] τῷ V₂ et B, sed corr. 11. ἐστὶ] om. BFbV₂. τό] corr. ex τῷ V₂. ZH] in ras. m. 1 P. 13. ἐστίν] om. FV₂. ΓZ] in ras. m. 1 P. ἐστίν] om. V₂. 14. ἡ ΓZ] postea

25.

Recta minori commensurabilis minor est.

Sit minor A , et rectae A commensurabilis B . dico, B minorem esse.

ponatur ΓA rationalis, et quadrato A^2 aequale rectae ΓA adplicetur ΓE latitudinem efficiens ΓZ .

Γ Z Θ itaque ΓZ apotome est quarta
[prop. C]. et quadrato B^2 aequale
rectae ZE adplicetur ZH latitudinem
efficiens $Z\Theta$. iam quoniam A , B
 A E H commensurabiles sunt, etiam A^2 , B^2

commensurabilia sunt. est autem $\Gamma E = A^2$, $ZH = B^2$.
itaque ΓE , ZH commensurabilia sunt. est autem
 $\Gamma E : ZH = \Gamma Z : Z\Theta$. itaque ΓZ , $Z\Theta$ longitudine com-
mensurabiles sunt [prop. XI]. ΓZ autem apotome
est quarta. itaque etiam $Z\Theta$ apotome est quarta
[prop. CIII]. itaque HZ rationali ZE et apotome
quarta $Z\Theta$ comprehenditur. sin spatium recta rationali
et apotome quarta comprehenditur, recta spatio ae-
qualis quadrata minor est [prop. XCIV]. et $B^2 = ZH$.
ergo B minor est; quod erat demonstrandum.

add. V_2 . 15. ἐστὶ] ἐστίν P. $Z\Theta$] ΘZ P. τό HZ — 16.
 ZE] mg. m. 2 B, ἐν τῇ δὲ ἡ ZE Bb, ἐν τῇ ἐν τῇ δὲ ἡ ZE F.
18. ἐλάττων B. 19. ἐστὶ PVV_2 , comp. Bf b. ἐλάσσων
— 20. δεῖξαι] om. F. 19. ἄρα] om. P. 20. ὅπερ ἔδει δεῖξαι]
comp. P, om. Bb V_2 . In b add. ἵστέον, ὅτι ἡ τούτου τοῦ θεω-
ρήματος πρότασις ἡ αὐτὴ ἐστὶ τῇ τοῦ ρς', ὅθεν καὶ ἐν τοῖς
ἔσω παραλείπεται, ἡ δὲ καταγραφὴ καὶ τὸ σχῆμα οὐ τὰ αὐτὰ
εἰσιν· γέγραπται δὲ ἐν ἄλλῳ καὶ ριζ', διὸ καὶ ἡμεῖς τοῦτο παρα-
τεδείκαμεν.

26.

Ἡ τῇ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ
σύμμετρος μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσά
ἐστίν.

Ἐστω μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσα ἡ *A*,
5 σύμμετρος δὲ αὐτῇ ἡ *B*. λέγω, ὅτι ἡ *B* μετὰ ῥητοῦ
μέσον τὸ ὅλον ποιούσά ἐστίν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ *ΓΔ*, καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς *A* ἴσον
παρὰ τὴν *ΓΔ* παραβεβλήσθω τὸ *ΓΕ* πλάτος ποιῶν
τὴν *ΓΖ*. ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ πέμπτῃ ἡ *ΓΖ*. τῷ δὲ ἀπὸ
10 τῆς *B* ἴσον παρὰ τὴν *ΖΕ* παραβεβλήσθω τὸ *ΖΗ* πλάτος
ποιῶν τὴν *ΖΘ*. ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστίν ἡ *A* τῇ *B*,
σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς *A* τῷ ἀπὸ τῆς *B*. ἀλλὰ
τῷ μὲν ἀπὸ τῆς *A* ἴσον τὸ *ΓΕ*, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς *B*
ἴσον τὸ *ΖΗ*. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ *ΓΕ* τῷ *ΖΗ*.
15 σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ *ΓΖ* τῇ *ΖΘ* μήκει. ἀποτομὴ δὲ
πέμπτῃ ἡ *ΓΖ*. ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ πέμπτῃ καὶ ἡ *ΖΘ*.
ῥητὴ δὲ ἡ *ΖΕ*. ἐὰν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς
καὶ ἀποτομῆς πέμπτῃς, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μετὰ
ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσά ἐστίν. δύναται δὲ τὸ
20 *ΖΗ* ἡ *B*. ἡ *B* ἄρα ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποι-
οῦσά ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

26. Alia demonstr. prop. 106, post nr. 25 PFV, mg. m.
1 b, m. 2 B, in V etiam ad prop. 106 mg. m. 1 (V₂).

1. ἄλλως τὸ ρξ' V₂, ριη' Fb, ριδ' B. ἡ — 3. ἐστίν] om. V₂. 2. Ἀντὲ μετὰ add. καὶ αὐτῇ m. 2 F, καὶ αὐτῇ ἡ b, ἡ F. 4. ἔστω ἡ BFbV₂. 5. καὶ τῇ *A* σύμμετρος ἡ *B* V₂. λέγω — 6. ἐστίν] mg. V₂. 5. ἡ *B*] supra scr. m. 1 F. 9. ἐστίν P. πέμπτῃ ἐστίν F. 12. *B*] *BA* φ. 13. *ΓΕ*] corr. ex *ZE* V, *ZE* b. 15. καὶ] ἐστὶ καὶ V₂. *ZΘ*] corr. ex *ΓΘ* V, *ΓΘ* P. 16. πέμπτῃ] (prius) om. b. ἡ] ἐστίν ἡ bV₂. 17. ῥητόν P. ῥητὴ δὲ ἡ *ZE*] om. V₂. 19. ἐστὶ VbV₂,

26.

Recta rectae cum rationali totum medium efficiens commensurabilis cum rationali totum medium efficiens est.

Sit A recta cum rationali totum medium efficiens, ei autem commensurabilis B . dico, B rectam esse cum rationali totum medium efficientem.

ponatur rationalis $\Gamma\Delta$, et quadrato A^2 aequale rectae $\Gamma\Delta$ adplicetur ΓE latitudinem efficiens ΓZ .

itaque ΓZ apotome est quinta [prop. CI]. quadrato autem B^2 aequale rectae $Z E$ adplicetur $Z H$ latitudinem efficiens $Z \Theta$. iam quoniam A, B commensurabiles sunt, etiam A^2, B^2 commensurabilia sunt. est autem $\Gamma E = A^2$, $Z H = B^2$. itaque $\Gamma E, Z H$ commensurabilia sunt. quare etiam $\Gamma Z, Z \Theta$ longitudine commensurabiles sunt [VI, 1; prop. XI]. ΓZ autem apotome est quinta. itaque etiam $Z \Theta$ apotome est quinta [prop. CIII]; $Z E$ autem rationalis est. sin spatium recta rationali et apotome quinta comprehenditur, recta spatio aequalis quadrata recta est cum rationali totum medium efficiens [prop. XCV]. est autem $B^2 = Z H$. ergo B recta est cum rationali totum medium efficiens; quod erat demonstrandum.

comp. BF. δέ] om. V. 20. ἡ] (tert.) PVV₂, om. BFb.

21. ἐστίν] supra scr. V₂. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFbV₂. In b add. m. 1: ὡσαύτως καὶ τούτου τοῦ θεωρήματος ἡ πρότασις ἢ αὐτὴ ἐστὶ τῇ τοῦ ρξ', οὐ μὲν ἢ καταγραφῇ καὶ τὸ σχῆμα ἐκείνῳ τὰ αὐτὰ εἶσιν. ἐστὶ δὲ ἐν ἑτέρῳ καὶ ριη', διὸ καὶ ἡμῖν παραγέγραπται. εἴτα τὸ ἐνδον ριξ' ἐν ἐκείνῳ ἐστὶ ριθ' καὶ ἐξῆς τὰ λοιπά.

27.

Προκείσθω ἡμῖν δεῖξαι, ὅτι ἐπὶ τῶν τετραγώνων σχημάτων ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ διάμετρος τῇ πλευρᾷ μήκει.

Ἔστω τετράγωνον τὸ $AB\Gamma A$, διάμετρος δὲ αὐτοῦ
5 ἡ $A\Gamma$. λέγω, ὅτι ἡ ΓA ἀσύμμετρός ἐστι τῇ AB μήκει.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω σύμμετρος· λέγω, ὅτι συμβήσεται τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἄρτιον εἶναι καὶ περισσόν. φανερόν μὲν οὖν, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς $A\Gamma$ διπλασίον τοῦ ἀπὸ τῆς AB . καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΓA τῇ AB ,
10 ἡ ΓA ἄρα πρὸς τὴν AB λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν. ἐχέτω, ὃν ὁ EZ πρὸς H , καὶ ἔστωσαν οἱ EZ , H ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· οὐκ ἄρα μονὰς ἐστὶν ὁ EZ . εἰ γὰρ ἔσται μονὰς ὁ EZ , ἔχει δὲ λόγον πρὸς τὸν H , ὃν ἔχει ἡ $A\Gamma$ πρὸς
15 τὴν AB , καὶ μείζων ἡ $A\Gamma$ τῆς AB , μείζων ἄρα καὶ ἡ EZ τοῦ H ἀριθμοῦ· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα μονὰς ἐστὶν ὁ EZ · ἀριθμὸς ἄρα. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΓA πρὸς τὴν AB , οὕτως ὁ EZ πρὸς τὸν H , καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓA πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AB , οὕτως ὁ ἀπὸ
20 τοῦ EZ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ H . διπλασίον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓA τοῦ ἀπὸ τῆς AB · διπλασίον ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ EZ τοῦ ἀπὸ τοῦ H · ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ EZ · ὥστε καὶ αὐτὸς ὁ EZ ἄρτιός ἐστιν. εἰ γὰρ ἦν περισσός, καὶ ὁ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνος περισσός ἦν,

Post. nr. 26 PBFVb.

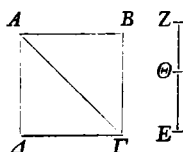
ριζ' b, ρκ' B; ρις' corr. in ριθ' m. 2 F. 1. ὅτι] m. 2 B.
2. σύμμετρος F, corr. m. 2. 5. ΓA] $A\Gamma$ FV. σύμμετρος
F, corr. m. 2. 7. περιττόν V. 8. ἐστι τοῦ Bb, ἐστι add.
m. 2 F. 9. τῆς] corr. ex. τοῦ m. 1 b. ΓA] $A\Gamma$ F. 10.
 ΓA] in ras. V, $A\Gamma$ F. ἄρα] om. V. 11. ὃν] in ras. B.

27.

Propositum sit nobis demonstrare, in figuris quadratis diametrum latusque longitudine incommensurabilia esse.

Sit $AB\Gamma A$ quadratum, diametrus autem eius $A\Gamma$. dico, ΓA , AB longitudine incommensurabiles esse.

nam si fieri potest, commensurabiles sint. dico, fore, ut idem numerus et par et impar sit. manifestum igitur, esse $A\Gamma^2 = 2 AB^2$ [I, 47]. et quoniam ΓA , AB commensurabiles sunt, $\Gamma A : AB$ rationem habet,



quam numerus ad numerum [prop. VI]. sit

$$\Gamma A : AB = EZ : H,$$

et EZ , H minimi sint eorum, qui eandem rationem habent

[cfr. VII, 33]. itaque EZ unitas non est. si enim est unitas, et $EZ : H = A\Gamma : AB$, et $A\Gamma > AB$, erit etiam $EZ > H$, unitas numero [V, 14]; quod absurdum est. quare EZ unitas non est. ergo numerus est. et quoniam est $\Gamma A : AB = EZ : H$, erit etiam $\Gamma A^2 : AB^2 = EZ^2 : H^2$ [VI, 20 coroll.; VIII, 11]. uerum $\Gamma A^2 = 2 AB^2$. itaque etiam $EZ^2 = 2 H^2$. quare EZ^2 par est. itaque etiam ipse EZ par est. nam si impar esset, etiam quadratum eius impar esset,

EZ] E in ras. m. 1 P. τὸν H BFb. 12. H] om. b.
 14. ἔχει δέ] καὶ ἔχει BFb. πρὸς] (prius) comp. corr. ex
 comp. καὶ m. 1 F. 16. Post EZ add. μονάς Bb, m. rec. V.
 17. ἐστίν] (prius) m. 2 F. ΓA] $A\Gamma$ B. 18. τόν] ο in
 ras. B. 19. ΓA] Γ in ras. V. AB] B in ras. m. 1 P. 21.
 τῆς] τοῦ PFV. ἀπὸ τῆς] m. rec. V. τῆς] τοῦ P. δι-
 πλάσιον F, διπλάσιος V. ὁ] τό Fb. 22. τοῦ] (primum)
 τῆς F. 23. ὥστε] -ε e corr. V. 24. ἦν] ἂν ἦν V.

ἐπειδὴ περ, ἐὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσιν,
 τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν περισσὸν ἢ, ὁ ὅλος περισσὸς ἐστίν.
 ὁ EZ ἄρα ἄρτιός ἐστιν. τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Θ.
 καὶ ἐπεὶ οἱ EZ, H ἐλάχιστοι εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον
 5 ἐχόντων [αὐτοῖς], πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. καὶ
 ὁ EZ ἄρτιος· περισσὸς ἄρα ἐστὶν ὁ H. εἰ γὰρ ἦν
 ἄρτιος, τοὺς EZ, H δυὰς ἐμέτρει· πᾶς γὰρ ἄρτιος
 ἔχει μέρος ἡμισυ· πρῶτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ
 ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄρτιός ἐστιν ὁ H· περισσὸς
 10 ἄρα. καὶ ἐπεὶ διπλάσιος ὁ EZ τοῦ EΘ, τετραπλάσιος
 ἄρα ὁ ἀπὸ EZ τοῦ ἀπὸ EΘ. διπλάσιος δὲ ὁ ἀπὸ τοῦ
 EZ τοῦ ἀπὸ τοῦ H· διπλάσιος ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ H τοῦ
 ἀπὸ EΘ· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ H. ἄρτιος ἄρα
 διὰ τὰ εἰρηγμένα ὁ H· ἀλλὰ καὶ περισσὸς· ὅπερ ἐστὶν
 15 ἀδύνατον. οὐκ ἄρα σύμμετρός ἐστιν ἡ ΓΑ τῇ AB
 μῆκει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἄλλως.

[Δεικτέον καὶ ἐτέρως, ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ τοῦ
 τετραγώνου διάμετρος τῇ πλευρᾷ].
 20 Ἐστω ἀντὶ μὲν τῆς διαμέτρου ἡ A, ἀντὶ δὲ τῆς
 πλευρᾶς ἡ B· λέγω, ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ A τῇ B
 μῆκει. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω [σύμμετρος· καὶ γεγενέτω]
 πάλιν ως ἡ A πρὸς τὴν B, οὕτως ὁ EZ ἀριθμὸς πρὸς
 τὸν H, καὶ ἔστωσαν ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον
 25 ἐχόντων αὐτοῖς οἱ EZ, H· οἱ EZ, H ἄρα πρῶτοι πρὸς

1. συντεθῶσι PFV. 2. ὁ] om. B, καὶ ὁ FV. 3. ἐστίν]
 comp. Fb, ἐστὶ PBV. Θ] e corr. B. 4. H ἀριθμοὶ BFb.
 5. αὐτοῖς] om. P. εἰσί PVb, comp. F. καί] καὶ ἐστὶν
 BFb. 7. μετρεῖ F, corr. m. 2; ἀν ἐμέτρει bene edd. 10.
 διπλάσιος] διπλάσιός ἐστιν F, διπλασίῳ ἐστὶν Bb. 11. ἀπό]

quoniam, si numeri impares componuntur, et multitudo eorum impar est, totus impar est [IX, 23]. ergo EZ par est. in Θ in duas partes aequales secetur. et quoniam EZ , H minimi sunt eorum, qui eandem rationem habent, inter se primi sunt [VII, 21]. et EZ par est. itaque H impar est. nam si par esset, binas numeros EZ , H metiretur (omnis enim numerus par partem dimidiam habet [VII def. 6]), qui inter se primi sunt; quod fieri non potest. ergo H par non est. impar igitur est. et quoniam $EZ = 2E\Theta$, erit [VIII, 11] $EZ^2 = 4E\Theta^2$. est autem $EZ^2 = 2H^2$. itaque $H^2 = 2E\Theta^2$. quare H^2 par est. itaque propter ea, quae diximus [p. 408, 23 sq.], H par est. at idem impar est; quod fieri non potest. ergo ΓA , AB longitudine commensurabiles non sunt; quod erat demonstrandum.

Aliter.

Sit pro diametro A , pro latere autem B . dico, A et B longitudine incommensurabiles esse. nam si fieri potest, sit rursus ut $A:B$, ita numerus EZ ad H [cfr. prop. VI], et EZ , H minimi sint eorum, qui eandem rationem habent [cfr. VII, 33]. itaque EZ , H primi sunt inter se [VII, 21]. primum dico, H unitatem

m. 2 F. EZ] τοῦ EZ Bb, m. 2 F. $E\Theta$] τοῦ $E\Theta$ Bbq.
 12. H] (prius) H ἢ b. 13. $E\Theta$] ΘE in ras. V, τοῦ $E\Theta$ BFb.
 14. ἐστίν] om. V. 15. ΓA] in ras. V, supra scr. Δ b.
 16. Post μήκει add. ἀσύμμετρος ἄρα (ἄρα m. 2 F) BFb.
 ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. b, οἷ : ~ B. 17. ἄλλως]
 om. BFVb, ριξ' mg. F. 18. δεικτέον — 19. πλεονῶν] om. P,
 mg. V. 20. ἔστω γάρ BFb. 22. σύμμετρος· καὶ γεγονέτω]
 om. PV, m. 2 F. 25. αὐτοῖς] om. Fb, m. 2 B. οἱ] (prius)
 e corr. V. πρῶτοι] supra scr. m. 1 F.

ἀλλήλους εἰσίν. λέγω πρῶτον, ὅτι ὁ *H* οὐκ ἔστι μονάς.
 εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω μονάς. καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ *A*
 πρὸς τὴν *B*, οὕτως ὁ *EZ* πρὸς τὸν *H*, καὶ ὡς ἄρα
 τὸ ἀπὸ τῆς *A* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *B*, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ
 5 *EZ* πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ *H*. διπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς
A τοῦ ἀπὸ τῆς *B*· διπλάσιος ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ *EZ*
 τοῦ ἀπὸ τοῦ *H*. καὶ ἔστι μονάς ὁ *H*· δυὰς ἄρα ὁ
 ἀπὸ *EZ* τετράγωνος· ὅπερ ἔστιν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα
 μονάς ἔστιν ὁ *H*· ἀριθμὸς ἄρα. καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς
 10 τὸ ἀπὸ τῆς *A* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *B*, οὕτως ὁ ἀπὸ *EZ*
 πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ *H*, καὶ ἀνάπαλιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς
B πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *A*, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ *H* πρὸς τὸν
 ἀπὸ τοῦ *EZ*, μετρῇ δὲ τὸ ἀπὸ τῆς *B* τὸ ἀπὸ τῆς *A*,
 μετρῇ ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ *H* τετράγωνος τὸν ἀπὸ τοῦ
 15 *EZ*· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ αὐτῇ ὁ *H* τὸν *EZ* μετρῇ.
 μετρῇ δὲ καὶ ἑαυτὸν ὁ *H*· ὁ *H* ἄρα τοὺς *EZ*, *H*
 μετρῇ πρῶτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἔστιν
 ἀδύνατον. οὐκ ἄρα σύμμετρος ἔστιν ἡ *A* τῇ *B* μήκει·
 ἀσύμμετρος ἄρα ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

28.

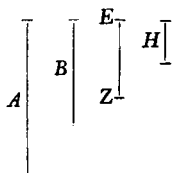
20

Σχόλιον.

Εὐρημένων δὴ τῶν μήκει ἀσυμμέτρων εὐθειῶν,
 ὡς τῶν *A*, *B*, εὐρίσκεται καὶ ἄλλα πλεῖστα μερέθη ἐκ
 δύο διαστάσεων, λέγω δὴ ἐπίπεδα, ἀσύμμετρα ἀλλήλοις.
 ἐὰν γὰρ τῶν *A*, *B* εὐθειῶν μέσην ἀνάλογον λάβωμεν
 25 τὴν *Γ*, ἔσται ὡς ἡ *A* πρὸς τὴν *B*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς

 28. Post. nr. 27 PBFVb.

1. εἰσί PVb, comp. F.	ὅτι'' πρῶτον b.	3. ὁ] ἡ F.
τόν] τήν Fb.	4. τό] ὁ P.	τό] τόν P.
		τοῦ] τῆς PV.



non esse. nam si fieri potest, sit unitas. et quoniam est $A:B = EZ:H$, erit etiam $A^2:B^2 = EZ^2:H^2$ [VI, 20 coroll.; VIII, 11]. uerum $A^2 = 2 B^2$ [I, 47]. itaque etiam $EZ^2 = 2 H^2$. et

H unitas est. itaque numerus quadratus EZ^2 binas est; quod fieri non potest. quare H unitas non est; ergo numerus est. et quoniam est $A^2:B^2 = EZ^2:H^2$, et e contrario [V, 7 coroll.] $B^2:A^2 = H^2:EZ^2$, et B^2 metitur A^2 , etiam H^2 metitur EZ^2 . quare etiam latus ipsum H numerum EZ metitur. uerum H etiam se ipsum metitur. itaque H numeros EZ , H metitur inter se primos; quod fieri non potest. quare A , B longitudine commensurabiles non sunt. ergo incommensurabiles sunt; quod erat demonstrandum.

28.

Scholium.

Inuentis igitur rectis longitudine incommensurabilibus, uelut A , B , etiam plurimae aliae magnitudines duarum dimensionum, scilicet planae, inter se incommensurabiles inueniuntur. nam si inter rectas A , B mediam proportionalem sumpserimus Γ , erit ut $A:B$, ita figura plana in A descripta ad figuram in Γ si-

6. διπλάσιον P. 7. ὁ ἀπό] ἔστιν ὁ Fb, ἔστιν ὁ ἀπὸ τοῦ B. 10. τό] (prius) supra m. 1 V. ἀπό] (tert.) om. BFb. 11. ἀπὸ τοῦ] om. BFb. 13. τό] (alt.) corr. ex τῷ m. 1 F. 14. ὁ] τό F. 15. αὐτῆς B. 18. ἡ A] e corr. V. 19. ἔστιν] om. BFb. 20. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFb. 20. σχόλιον] om. FVb (in fig. ριγ' F), ρα' B. 22. εὐρίσκονται B (corr. m. 2) Fb. 23. δὴ] δὴ ὅτι F. ἐπίπεδον F. σύμμετρα B, sed corr. 24. εὐθειῶν] om. BF.

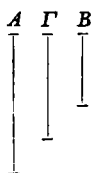
A ἐπίπεδον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *Γ* τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον, εἴτε τετράγωνον εἴη τὰ ἀναγραφόμενα εἴτε ἕτερα εὐθύγραμμα ὅμοια εἴτε κύκλοι περὶ διαμέτρους τὰς *A*, *Γ*, ἐπεὶπερ οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. εὐρηται ἄρα καὶ ἐπίπεδα χωρὶα ἀσύμμετρα ἀλλήλοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λεδευγμένων δὴ καὶ τῶν ἐκ δύο διαστάσεων διαφορῶν ἀσυμμέτρων χωρίων δείξομεν τοῖς ἀπὸ τῆς τῶν στερεῶν θεωρίας, ὡς ἔστι καὶ στερεὰ σύμμετρά τε καὶ ἀσίμμετρα ἀλλήλοις. ἐὰν γὰρ ἐπὶ τῶν ἀπὸ τῶν *A*, *B* τετραγώνων ἢ τῶν ἴσων αὐτοῖς εὐθυγράμμων ἀναστήσωμεν ἰσοῦσῃ στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἢ πυραμίδας ἢ πρίσματα, ἔσται τὰ ἀνασταθέντα πρὸς ἀλλήλα ὡς αἱ βάσεις. καὶ εἰ μὲν σύμμετροί εἰσιν αἱ βάσεις, σύμμετρα ἔσται καὶ τὰ στερεά, εἰ δὲ ἀσύμμετροι, ἀσύμμετρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἀλλὰ μὴν καὶ δύο κύκλων ὄντων τῶν *A*, *B* ἐὰν ἀπ' αὐτῶν ἰσοῦσφεις κώνους ἢ κυλίνδρους ἀναγράψωμεν, ἔσονται πρὸς ἀλλήλους ὡς αἱ βάσεις, τουτέστιν ὡς οἱ *A*, *B* κύκλοι. καὶ εἰ μὲν σύμμετροί εἰσιν οἱ κύκλοι, σύμμετροι ἔσονται καὶ οἱ τε κῶνοι πρὸς ἀλλήλους καὶ

1. ἐπίπεδον] εἶδος BFb. τῆς] om. P. καί] τε καὶ V.
2. ἀναγεγραμμένον BF, mg. b. ἀναγεγραμμένα BFb. 3. εἴτε] (prius) εἴτε καὶ P. 4. ἐπεὶ γὰρ, supra scr. περ m. 1 F. Mg. μαθήσῃ τοῦτο ἐν τῷ β' τοῦ ιβ' ἐν τοῖς στερεοῖς m. rec. B. 6. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] :~ BFb, et P, sed supra scr. m. 1 comp. 8. ραβ' B. 9. χωρίων ἀσυμμέτρων B. τοῖς] ἐν τοῖς Vb. 11. ἀπὸ τῶν] om. F. 12. ἀναστήσω V, deinde supra scr. αὐτοῖς m. 1. 13. ἰσούσῃ] ἰ- in ras. m. 1 B. ἰσούσῃ στερεὰ παραλληλεπίπεδα] mg. V, in textu del. ἰσούσῃ γραμμὰς ἢ παραλληλεπίπεδα. παραλληλοεπίπεδα F, παράλληλα ἐπίπεδα b. ἦ] e corr. F; οἶον, supra scr. ἦ m. 1 b. 14. ὡς] postea ins. m.

milem et similiter descriptam [VI, 19 coroll.], siue quadrata sunt figurae descriptae siue aliae rectilineae



similes siue circuli circum diametros A , Γ , quoniam circuli eam inter se rationem habent, quam quadrata diametrorum [XII, 2]. ergo etiam plana spatia inter se incommensurabilia inuenta sunt; quod erat demonstrandum.

Inuentis iam spatiis quoque diuersis duarum dimensionum incommensurabilibus per ea, quae ad theoriam solidorum pertinent, demonstrabimus, solida quoque esse inter se commensurabilia et incommensurabilia. si enim in quadratis rectarum A , B uel figuris rectilineis iis aequalibus solida construxerimus eiusdem altitudinis uel parallelepipeda uel pyramidas uel prismata, solida constructa eam inter se rationem habebunt, quam bases [XI, 32. XII, 5; 6]. et si bases commensurabiles sunt, etiam solida commensurabilia erunt, sin incommensurabiles, incommensurabilia [prop. XI]; quod erat demonstrandum.

praeterea si A , B duo circuli sunt, si in iis conos uel cylindros eiusdem altitudinis construxerimus, eam inter se rationem habebunt, quam bases, hoc est quam circuli A , B [XII, 11]. et si circuli commensurabiles sunt, etiam coni cylindrique inter se commensurabiles

1 V. 16. ἀσύμμετροί εἰσιν αἱ βάσεις V. 17. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. BFb. 18. ὅγν' B. κύκλων] in ras. V. 20. ὥς] om. P, m. 2 V. Post alt. ὥς ras. 3 litt. V. 21. εἰσιν] εἶεν V. 22. καὶ] om. B. τε] om. b. πρὸς ἀλλήλους] ἀλλήλοις BFb.

οἱ κύλινδροι, εἰ δὲ ἀσύμμετροί εἰσιν οἱ κύκλοι, ἀσύμμετροι ἔσονται καὶ οἱ κῶνοι καὶ οἱ κύλινδροι. καὶ φανερόν ἡμῖν γέγονεν, ὅτι οὐ μόνον ἐπὶ γραμμῶν καὶ ἐπιφανειῶν ἐστὶ συμμετρία τε καὶ ἀσυμμετρία,
 5 ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τῶν στερεῶν σχημάτων.

1. δέ] δ' F. εἰσιν] εἶεν b. 3. γέγονε V. ὅτι] δι' ὅ
 P V. ἐπὶ] ἐπὶ τε P. 4. καὶ] ἢ P. ἐστὶν σύμμετρα P.
 ἀσύμμετρα P. Mg. γρ. σύμμετρα καὶ ἀσύμμετρα m. 1 b. 5.
 στερεῶν] ἑτέρων F.

erunt, sin incommensurabiles sunt circuli, etiam coni cylindrique incommensurabiles erunt [prop. XI]. et nobis adparuit, commensurabilitatem incommensurabilitatemque non solum in lineis planisque esse, sed etiam in corporibus solidis.
