

Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES
Google Livres

EUCLIDIS
OPERA OMNIA.

EDIDERUNT

I. L. HEIBERG ET H. MENGE.



LIPSIAE
IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI.

MDCCCLXXXVI.

EUCLIDIS
E L E M E N T A.

EDIDIT ET LATINE INTERPRETATUS EST

I. L. HEIBERG,

DR. PHIL.

UOL. III.

LIBRUM X CONTINENS.



LIPSIAE
IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI.

MDCCCLXXXVI.

Scl/Tech.

QA

31

E82

1883

v3

copy 1

PRAEFATIO.

Praeter codices solitos PBFVb, quos ipse contuli, nisi quod cod. Bodl. B ab initio usque ad finem definitionum alt. p. 136, 19 beneuolenter conferendum suscepit G. A. Stewart, u. d. Oxoniensis, in hoc libro X uti mihi licuit palimpsesto cod. Musei Britannici Add. 17211 (L), de quo cfr. uol. IV p. VI; continet

- X prop. 15 p. 44, 12 μετρήσει ad finem prop.
- X prop. 16 p. 46, 2 (μέγε)θος — p. 46, 8 ὅτι.
p. 46, 17 (με)τρεῖ ad finem prop.
- X, 16 lemma p. 46, 23 -μον ἐλλείπων ad finem.
- X prop. 31 p. 92, 19 (μέ)σαι ad finem prop.
- X prop. 32 totam.
- X prop. 32 lemma ab initio ad p. 96, 20 ὅλῳ.
- X prop. 80 p. 240, 9 δυνατόν ad finem prop.
- X prop. 81 ab initio ad p. 244, 10 ὑπό.
- X prop. 112 p. 358, 19 ΒΔ ad finem prop.
- X prop. 113 ab initio ad p. 362, 19 οὕτως.

In appendicem hic, ut semper, ea sola recepi, quae in uno saltem meorum codicum in textu legebantur; quare in mea editione quaedam eorum, quae Augustus in app. V habet, frustra quaeras; sunt enim scholia marginalia, quae in uol. V suo ordine edentur. Prolegomena critica quominus uel huic uel quarto uolumini

praemitterem, sicuti constitueram, prohibuit ratio scholariorum, quae quinto uolumine comprehenduntur. nam cum inde non pauca subsidia ad codices aestimandos peti posse uiderem, statui iis demum editis ad prolegomena illa adcedere.

Scrib. Hauniae mense Nouembri MDCCCLXXXV.

I. L. Heiberg.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ.

Όροι.

α'. Σίμμετρα μεγέθη λέγεται τὰ τῷ αὐτῷ μέτρῳ μετρούμενα, ἀσύμμετρα δέ, ὧν μηδὲν ἐνδέχεται κοινὸν μέτρον γενέσθαι.

5 β'. Εὐθεΐαι δυνάμει σύμμετροί εἰσιν, ὅταν τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα τῷ αὐτῷ χωρίῳ μετρῇται, ἀσύμμετροι δέ, ὅταν τοῖς ἀπ' αὐτῶν τετραγώνοις μηδὲν ἐνδέχῃται χωρίον κοινὸν μέτρον γενέσθαι.

γ'. Τούτων ὑποκειμένων δείκνυται, ὅτι τῇ προτε-
10 θείσῃ εὐθείᾳ ὑπάρχουσιν εὐθεΐαι πλήθει ἄπειροι σύμμετροί τε καὶ ἀσύμμετροι αἱ μὲν μήκει μόνον, αἱ δὲ καὶ δυνάμει. καλεῖσθω οὖν ἡ μὲν προτεθειῖσα εὐθεΐα ῥητή, καὶ αἱ ταύτῃ σύμμετροι εἴτε μήκει καὶ δυνάμει εἴτε δυνάμει μόνον ῥηταί, αἱ δὲ ταύτῃ ἀσύμμετροι
15 ἄλλοι καλεῖσθωσαν.

δ'. Καὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς προτεθείσης εὐθείας τετράγωνον ῥητόν, καὶ τὰ τούτῳ σύμμετρα ῥητά, τὰ δὲ τούτῳ ἀσύμμετρα ἄλλα καλεῖσθω, καὶ αἱ δυνάμεναι

Ad deff. cfr. Hero deff. 128—129, Anonymus Hultschii p. 256, Martianus Capella VI, 718.

Εὐκλείδου στοιχείων ι PV, Εὐκλείδου στοιχείων τῆς θέωνος ἐκδόσεως ι F, Εὐκλείδου στοιχείων ι τῆς θέωνος ἐκδόσεως b. 1. ὅροι] om. PFV, ὅροι τοῦ ι b, ὅρος τοῦ ι B. numeros om. codd. 5. Ante σύμμετροι ras. 1 litt P. 8. ἐνδέχεται b φ. 9. προστεθείσῃ b et e corr. F. 10. Post εὐθεΐα add. Theon: τουτέστιν ἀφ' ἧς θέσει τὰ μέτρα τό τε πηχναῖον καὶ τὸ παλαιστιναῖον καὶ τὸ δακτυλιαῖον ἢ τὸ ποδιαῖον λαμβάνεται (BFVb).

Liber X.

Definitiones.

1. Magnitudines commensurabiles uocantur, quas eadem mensura metiri licet, incommensurabiles autem, quarum communis mensura inueniri nequit.

2. Rectae potentia commensurabiles sunt, ubi quadrata earum eadem mensura metiri licet, incommensurabiles autem, ubi nullum spatium communis quadratorum earum mensura inueniri potest.

3. His suppositis demonstratur, rectas numero infinitas esse datae rectae commensurabiles et incommensurabiles partim longitudine tantum, partim potentia quoque. iam data recta rationalis uocetur, et quae ei commensurabiles sunt siue longitudine potentiaque siue potentia tantum, rationales, quae autem ei incommensurabiles sunt, irrationales uocentur.

4. Et quadratum datae rectae rationale uocetur, et quae ei commensurabilia sunt, rationalia, quae autem ei incommensurabilia sunt, irrationalia, et rectae, quae

πλήθει] om. F. σύμμετροι τε καὶ] supra scr. m. rec. P. 11. μόνον, αὶ δὲ] om. Theon (BFVb). 12. Post δυνάμει add. Theon: αὶ δὲ δυνάμει μόνον (BFVb). προστεθείσα b et e corr. F. 14. σύμμετροι b, corr. m. rec.; deinde add. Theon: κατὰ τὸ συναμφότερον (συν- om. b), τοντέστιν (καὶ del. F) μήκει καὶ δυνάμει (BFVb); idem P mg. m. 1 pro scholio. 16. προστεθείσης b et e corr. F. 17. ἑητά] om. F. 18. Ante ἄλογα add. κατὰ τὸ συναμφότερον F; idem P mg. m. 1 pro scholio. καλείσθωσαν Theon (BFVb).

αὐτὰ ἄλλοι, εἰ μὲν τετράγωνα εἴη, αὐταὶ αἱ πλευραὶ,
εἰ δὲ ἕτερά τινα εὐθύγραμμα, αἱ ἴσα αὐτοῖς τετράγωνα
ἀναγράφουσαι.

α'.

5 Δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ
τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μείζον ἢ τὸ ἥμισυ καὶ
τοῦ καταλειπομένου μείζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ
τοῦτο ἀεὶ γίγνεται, λειφθήσεται τι μέγεθος,
ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος με-
10 γέθους.

Ἐστω δύο μεγέθη ἄνισα τὰ AB , Γ , ὧν μείζον τὸ AB .
λέγω, ὅτι, ἐὰν ἀπὸ τοῦ AB ἀφαιρεθῇ μείζον ἢ τὸ ἥμισυ
καὶ τοῦ καταλειπομένου μείζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο
ἀεὶ γίγνεται, λειφθήσεται τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον
15 τοῦ Γ μεγέθους.

Τὸ Γ γὰρ πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ AB
μείζον. πεπολλαπλασιάσθω, καὶ ἔστω τὸ ΔE τοῦ μὲν Γ
πολλαπλάσιον, τοῦ δὲ AB μείζον, καὶ διηρήσθω τὸ ΔE
εἰς τὰ τῷ Γ ἴσα τὰ ΔZ , ZH , HE , καὶ ἀφηρήσθω ἀπὸ
20 μὲν τοῦ AB μείζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ $B\Theta$, ἀπὸ δὲ τοῦ $A\Theta$
μείζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΘK , καὶ τοῦτο ἀεὶ γιγνέσθω,
ἕως ἄν αἱ ἐν τῷ AB διαιρέσεις ἰσοπληθεῖς γένωνται
ταῖς ἐν τῷ ΔE διαιρέσεσιν.

Ἐστῶσαν οὖν αἱ AK , $K\Theta$, ΘB διαιρέσεις ἰσοπλη-
25 θεῖς οὔσαι ταῖς ΔZ , ZH , HE . καὶ ἐπεὶ μείζον ἔστι τὸ
 ΔE τοῦ AB , καὶ ἀφήρηται ἀπὸ μὲν τοῦ ΔE ἔλασσον
τοῦ ἡμίσεως τὸ EH , ἀπὸ δὲ τοῦ AB μείζον ἢ τὸ ἥμισυ

1. ἄλλοι α V, corr. m. 2. Deinde add. καλεῖσθωσαν Theon (BFVb). 2. ἴσαι φ. 5. ἐκκειμένων] ante ἀνίσων add. B mg. m. 1. 8. ἀεὶ] αἰεὶ F, ἀεὶ ἄν V? γίγνεται V (η e corr.), γίγνεται b. ληφθήσεται Vb. 9. ἐστίν Theon (BFVb).

quadratae iis aequales sunt, irrationales uocentur, in quadratis ipsa latera, in ceteris figuris rectilineis eae, ex quibus quadrata illis aequalia construi possunt.

I.

Propositis duabus magnitudinibus inaequalibus si a maiore plus quam dimidium subtrahitur et a reliqua plus quam dimidium, et hoc semper fit, magnitudo relinquetur, quae minor erit proposita magnitudine minore.

Sint duae magnitudines inaequales AB, Γ , quarum maior sit AB . dico, si ab AB plus quam dimidium subtrahatur et ab reliqua plus quam dimidium, et hoc semper fiat, magnitudinem relictum iri, quae minor sit magnitudine Γ .

Nam Γ multiplicata aliquando magnitudine AB maior erit [cfr. V def. 4]. multiplicetur et ΔE magnitudinis Γ multiplex sit, eadem autem $> AB$, et ΔE in partes magnitudini Γ aequales $\Delta Z, ZH, HE$ diuidatur, et ab AB plus quam dimidium subtrahatur $B\Theta$, ab $A\Theta$ autem plus quam dimidium ΘK , et hoc semper fiat, donec in AB totidem diuisiones fiant, quot in ΔE .

$\xi\lambda\alpha\tau\tau\omicron\nu$ F. $\tau\omicron\upsilon$] om. V? $\acute{\epsilon}\gamma\kappa\epsilon\iota\mu\acute{\epsilon}\nu\omicron\nu$ b. $\acute{\epsilon}\lambda\alpha\tau\tau\omicron\nu\varsigma$ F. 12. $\delta\eta\ \omicron\tau\iota$ b. 13. $\kappa\alpha\iota\text{---}\eta\mu\iota\sigma\nu$] om. P. $\kappa\alpha\iota$] (prius) $\kappa\alpha\iota\ \acute{\alpha}\nu\omicron$ V. 14. $\alpha\iota\epsilon\iota$ F. $\gamma\acute{\iota}\gamma\eta\tau\alpha\iota$ V, $\gamma\acute{\iota}\nu\eta\tau\alpha\iota$ b. $\lambda\eta\phi\theta\eta\varsigma\epsilon\tau\alpha\iota$ V. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ V. $\xi\lambda\alpha\tau\tau\omicron\nu$ F. 16. $\gamma\acute{\alpha}\rho$] $\acute{\alpha}\rho\alpha$ F. AB $\mu\epsilon\gamma\acute{\epsilon}\theta\omicron\upsilon\varsigma$ Theon (BFVb). 19. $\epsilon\iota\varsigma$] m. rec. B. $\acute{\alpha}\nu\omicron$] om. V. 21. $\gamma\iota\nu\acute{\epsilon}\sigma\theta\omega$ P. 23. $\tau\alpha\iota\varsigma$] corr. ex $\tau\alpha\iota$ m. rec. b. 24. $\omicron\upsilon\acute{\nu}$] om. b. $\delta\iota\alpha\iota\phi\acute{\epsilon}\sigma\iota\varsigma$ P, sed corr. 25. HZ F. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ F. 26. $\tau\omicron\upsilon$] (alt.) post ins. m. 1 F. 27. $\eta\mu\acute{\iota}\sigma\epsilon\omicron\varsigma$ b, $\eta\mu\acute{\iota}\sigma\omicron\upsilon\varsigma$ V. $\tau\acute{o}$] corr. ex $\tau\omicron\upsilon$ F. $\eta\ \tau\acute{o}\ \eta\mu\iota\sigma\nu$] $\tau\omicron\upsilon\ \eta\mu\acute{\iota}\sigma\epsilon\omega\varsigma$ F, $\tau\omicron\upsilon\ \eta\mu\acute{\iota}\sigma\epsilon\omicron\varsigma$ BVb.

τε $B\Theta$, λοιπὸν ἄρα τὸ $H\Delta$ λοιποῦ τοῦ ΘA μείζον
 ἐστίν. καὶ ἐπεὶ μείζον ἐστὶ τὸ $H\Delta$ τοῦ ΘA , καὶ
 ἀφ' ἧς τὸ $\mu\epsilon\nu H\Delta$ ἥμισυ τὸ HZ , τοῦ δὲ ΘA μείζον
 ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΘK , λοιπὸν ἄρα τὸ ΔZ λοιποῦ τοῦ AK
 5 μείζον ἐστίν. ἴσον δὲ τὸ ΔZ τῷ Γ . καὶ τὸ Γ ἄρα
 τοῦ AK μείζον ἐστίν. ἔλασσον ἄρα τὸ AK τοῦ Γ .

Καταλείπεται ἄρα ἀπὸ τοῦ AB μεγέθους τὸ AK
 μέγεθος ἔλασσον ὃν τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους
 τοῦ Γ . ὅπερ ἔδει δεῖξαι. — ὁμοίως δὲ δειχθήσεται,
 10 καὶ ἡμίση ἢ τὰ ἀφαιρούμενα.

β'.

Ἐὰν δύο μεγεθῶν [ἐκκειμένων] ἀνίσων ἀνθ-
 υφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μεί-
 ζονος τὸ καταλειπόμενον μηδέποτε καταμετρῇ
 15 τὸ πρὸ ἑαυτοῦ, ἀσύμμετρα ἐστὶ τὰ μεγέθη.

Δύο γὰρ μεγεθῶν ὄντων ἀνίσων τῶν AB , $\Gamma\Delta$ καὶ
 ἐλάσσονος τοῦ AB ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος
 ἀπὸ τοῦ μείζονος τὸ περιλειπόμενον μηδέποτε κατα-
 μετρῶν τὸ πρὸ ἑαυτοῦ· λέγω, ὅτι ἀσύμμετρά ἐστὶ τὰ
 20 AB , $\Gamma\Delta$ μεγέθη.

Εἰ γὰρ ἐστὶ σύμμετρα, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος.
 μετρῶν, εἰ δυνατόν, καὶ ἔστω τὸ E . καὶ τὸ μὲν AB
 τὸ $Z\Delta$ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΓZ ,

2. ἐστίν] comp. Fb, ἐστὶ BV. ἐστὶ] om. V. 4. ἡ τὸ
 ἥμισυ] τοῦ ἡμίσεος BVb, τοῦ ἡμίσεως F. 7. καταλείπεται Bb.

8. ἐκκειμένον b. ἐλάττονος F. 10. ἡμίση P, ἡμίσεια V.
 Seq. demonstr. altera, u. app. 12. ἐκκειμένων] mg. m.

1 P., ἀνθυφαιρουμένου V, corr. m. 2. 13. αἰεὶ F. ἐλάτ-
 τονος F. 15. τὰ] τό F, corr. m. 2. 16. καὶ ὅντος Theon (BFVb).

17. ἐλάττονος F. ἀνθυφαιρουμένου V, corr. m. 2. αἰεὶ F.

19. ἐστίν P. 21. ἐστὶ] supra scr. -αι V. τι] om. F. 23.

diuisiones igitur AK , $K\Theta$, ΘB numero aequales sint diuisionibus ΔZ , ZH , HE . et quoniam $\Delta E > AB$, et a ΔE minus quam dimidium subtractum est EH , ab AB autem plus quam dimidium $B\Theta$, erit $H\Delta > \Theta A$. et quoniam $H\Delta > \Theta A$, et ab $H\Delta$ dimidium subtractum est HZ , a ΘA autem plus quam dimidium ΘK , erit $\Delta Z > AK$. uerum $\Delta Z = \Gamma$. quare etiam $\Gamma > AK$. ergo $AK < \Gamma$.

Ergo ex magnitudine AB relinquitur magnitudo AK minor proposita magnitudine minore Γ ; quod erat demonstrandum.

Similiter autem demonstrabitur, etiam si, quae subtrahuntur, dimidia sunt.

II.

Si ex duabus magnitudinibus inaequalibus minore semper uicissim a maiore subtracta reliquum nunquam praecedentem magnitudinem metitur, magnitudines incommensurabiles erunt.

Datis enim duabus magnitudinibus inaequalibus AB , $\Gamma\Delta$ minor sit AB , et minore semper uicissim a

maiore subtracta reliquum ne unquam praecedentem magnitudinem metiatur. dico, magnitudines AB , $\Gamma\Delta$ incommensurabiles esse.

Nam si commensurabiles sunt, magnitudo aliqua eas metietur. metiatur, si fieri potest, et sit E . et AB magnitudinem $Z\Delta$ metiens se ipsa minorem relinquat

$Z\Delta$] mut. in $\Gamma\Delta$ m. 2 B, m. rec. b; ΔZ e corr. PV. $\epsilon\lambda\alpha\sigma\sigma\upsilon\alpha$ P, sed α del.

τὸ δὲ ΓΖ τὸ ΒΗ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον
 τὸ ΑΗ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γινέσθω, ἕως οὗ λειφθῇ τι μέ-
 γεθος, ὃ ἐστὶν ἔλασσον τοῦ Ε. γερονέτω, καὶ λελείφθω
 τὸ ΑΗ ἔλασσον τοῦ Ε. ἐπεὶ οὖν τὸ Ε τὸ ΑΒ μετρεῖ,
 5 ἀλλὰ τὸ ΑΒ το ΔΖ μετρεῖ, καὶ τὸ Ε ἄρα τὸ ΖΔ με-
 τρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα
 τὸ ΓΖ μετρήσει. ἀλλὰ τὸ ΓΖ τὸ ΒΗ μετρεῖ· καὶ τὸ Ε
 ἄρα τὸ ΒΗ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒ· καὶ
 λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΗ μετρήσει, τὸ μείζον τὸ ἔλασσον·
 10 ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὰ ΑΒ, ΓΔ μεγέθη
 μετρήσει τι μέγεθος· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ, ΓΔ
 μεγέθη.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγεθῶν ἀνίσων, καὶ τὰ ἐξῆς.

γ'.

15 Δύο μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων τὸ μέ-
 γιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Ἔστω τὰ δοθέντα δύο μεγέθη σύμμετρα τὰ ΑΒ, ΓΔ,
 ὧν ἔλασσον τὸ ΑΒ· δεῖ δὴ τῶν ΑΒ, ΓΔ τὸ μέγιστον
 κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

20 Τὸ ΑΒ γὰρ μέγεθος ἦτοι μετρεῖ τὸ ΓΔ ἢ οὐ. εἰ
 μὲν οὖν μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτό, τὸ ΑΒ ἄρα τῶν

1. ΒΗ] in ras. P, mut. in ΒΑ Β m. 2, in ΑΒ m. rec.; H
 e corr V. 2. γινέσθω F. ληφθῇ BVb. 3. ἔσται P. ἔλατ-
 τον F. ἐλλήφθω V. 4. τό] (pr.) τοῦ F. 5. ΖΔ P. ΖΔ]
 mut. in ΔΖ V, ΔΖ BFb. 8. ΒΗ] ΗΒ P. μετρεῖ] (prius)
 supra m. 2 F. 10. ἐστίν] om. V. 11. Post τι ras. 1 litt. V.
 ἐστίν P. 13. μεγεθῶν ἐκκειμένων F. καὶ τὰ ἐξῆς] ὅπερ

ἔδει δεῖξαι V (post ἐξῆς add. ^Δ(π) b); ἐκκειμένων ἀνίσων ἀνθ-
 υφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος τὸ καταλει-
 πόμενον μηδέποτε καταμετρεῖ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ, ἀσύμμετρα ἐστὶ
 τὰ μεγέθη m. 2 V, del. ἀνίσων lin. 13. 17. ἔστωσαν F. σύμ-

ΓZ , ΓZ autem BH metiens se ipsa minorem relinquat AH , et hoc semper fiat, donec relinquatur magnitudo minor magnitudine E . fiat et relinquatur $AH < E$. iam quoniam E magnitudinem AB metitur et AB magnitudinem ΔZ , etiam E magnitudinem $Z\Delta$ metitur. uerum etiam totam $\Gamma\Delta$ metitur. itaque etiam reliquam magnitudinem ΓZ metietur. sed ΓZ magnitudinem BH metitur. quare etiam E magnitudinem BH metitur. uerum etiam totam AB metitur. quare etiam reliquam AH metietur, maior minorem; quod fieri non potest. itaque magnitudines AB , $\Gamma\Delta$ nulla magnitudo metietur. ergo magnitudines AB , $\Gamma\Delta$ incommensurabiles erunt [def. 1].

Ergo si ex duabus magnitudinibus inaequalibus, et quae sequuntur.

III.

Datis duabus magnitudinibus commensurabilibus maximam earum mensuram communem inuenire.

Sint duae magnitudines datae commensurabiles AB , $\Gamma\Delta$, quarum minor sit AB . oportet igitur magnitudinum AB , $\Gamma\Delta$ maximam mensuram communem inuenire.

Nam magnitudo AB magnitudinem $\Gamma\Delta$ aut metitur aut non metitur. iam si metitur, et se ipsam quoque

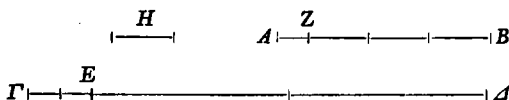
μετρα μεγέθη V. 18. ἔλαττον F. 20. μέγεθος] om. Theon (BFVb). ἥτοι] m. rec. P. 21. Post οὖν add. τὸ AB τὸ $\Gamma\Delta$ V. μετρεῖ] (prius) supra m. 1 B. αὐτό B, corr. m. 2. τῶν AB , $\Gamma\Delta$] om. V.

AB , $\Gamma\Delta$ κοινὸν μέτρον ἐστίν· καὶ φανερόν, ὅτι καὶ μέγιστον. μείζον γὰρ τοῦ AB μεγέθους τὸ AB οὐ μετρήσει.

Μὴ μετρεῖτω δὴ τὸ AB τὸ $\Gamma\Delta$. καὶ ἀνθυφαιρου-
 5 μένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὸ περι-
 λειπόμενον μετρήσει ποτὲ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ διὰ τὸ μὴ
 εἶναι ἀσύμμετρα τὰ AB , $\Gamma\Delta$ · καὶ τὸ μὲν AB τὸ $E\Delta$
 καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλασσον τὸ $E\Gamma$, τὸ δὲ
 $E\Gamma$ τὸ ZB καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλασσον τὸ
 10 AZ , τὸ δὲ AZ τὸ ΓE μετρεῖτω.

Ἐπεὶ οὖν τὸ AZ τὸ ΓE μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΓE τὸ
 ZB μετρεῖ, καὶ τὸ AZ ἄρα τὸ ZB μετρήσει. μετρεῖ
 δὲ καὶ ἑαυτό· καὶ ὅλον ἄρα τὸ AB μετρήσει τὸ AZ .
 ἀλλὰ τὸ AB τὸ ΔE μετρεῖ· καὶ τὸ AZ ἄρα τὸ $E\Delta$
 15 μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΓE · καὶ ὅλον ἄρα τὸ $\Gamma\Delta$
 μετρεῖ· τὸ AZ ἄρα τῶν AB , $\Gamma\Delta$ κοινὸν μέτρον ἐστίν.
 λέγω δὴ, ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ μή, ἔσται τι μέ-
 γεθος μείζον τοῦ AZ , ὃ μετρήσει τὰ AB , $\Gamma\Delta$. ἔστω
 τὸ H . ἐπεὶ οὖν τὸ H τὸ AB μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ AB
 20 τὸ $E\Delta$ μετρεῖ, καὶ τὸ H ἄρα τὸ $E\Delta$ μετρήσει. μετρεῖ
 δὲ καὶ ὅλον τὸ $\Gamma\Delta$ · καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΓE μετρήσει
 τὸ H . ἀλλὰ τὸ ΓE τὸ ZB μετρεῖ· καὶ τὸ H ἄρα
 τὸ ZB μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ AB , καὶ
 λοιπὸν τὸ AZ μετρήσει, τὸ μείζον τὸ ἐλασσον· ὅπερ

1. ἐστίν] comp. F, ἐστὶ Bb, ἐστὶ τῶν AB , $\Gamma\Delta$ V. καί]
 (alt.) μέτρον ἐστὶ V. 4. καί] om. B F V b. ἀνθυφαιρομένον V,
 sed corr. m. 2; ἀνθυφαιρόμενον F. 5. ἀεὶ] ἄρα ἀεὶ V b, ἄρα F,
 om. B (ἄρα ἀεὶ m. 2). 8. τὸ $E\Gamma$ — 9. ἐλασσον] m. 2 B. 10.
 δὲ AZ] AZ δέ P. 13. μετρήσει — 14. AB] mg. m. 1 P. 14.
 Post AZ ras. 1 litt. V. 16. μετρεῖ] μετρησεῖ F. Deinde add.
 Theon: τὸ AZ ἄρα τὰ AB , $\Gamma\Delta$ μετρεῖ (B F V b); idem m. rec. P.
 ἄρα] om. φ. ἐστὶ BV, comp. Fb. 18. τὰ] τό B, corr.
 m. 2. Post $\Gamma\Delta$ add. μετρεῖτω καί V, sed punctis del. 20.



metitur, AB magnitudinum AB , $\Gamma\Delta$ communis est mensura. et adparet, eandem maximam esse; nam magnitudo magnitudine AB maior AB non metietur.

itaque ne metiatur AB magnitudinem $\Gamma\Delta$. et minore semper uicissim a maiore subtracta reliquum aliquando magnitudinem praecedentem metietur, quia AB , $\Gamma\Delta$ incommensurabiles non sunt [cfr. prop. II]. et AB magnitudinem $E\Delta$ metiens se ipsa minorem relinquat $E\Gamma$, $E\Gamma$ autem ZB metiens se ipsa minorem relinquat AZ , et AZ magnitudinem ΓE metiatur. iam quoniam AZ magnitudinem ΓE metitur, ΓE autem ZB , etiam AZ magnitudinem ZB metietur. uerum etiam se ipsam metitur. quare etiam totam AB metietur AZ . sed AB magnitudinem ΔE metitur. itaque etiam AZ magnitudinem $E\Delta$ metietur. uerum etiam ΓE metitur. quare etiam totam $\Gamma\Delta$ metitur. itaque AZ magnitudinum AB ; $\Gamma\Delta$ communis est mensura. iam dico, eandem maximam esse. nam si minus, magnitudo erit maior magnitudine AZ , quae AB , $\Gamma\Delta$ metiatur. sit H . iam quoniam H magnitudinem AB metitur, et AB magnitudinem $E\Delta$ metitur, etiam H magnitudinem $E\Delta$ metietur. uerum etiam totam $\Gamma\Delta$ metitur. quare etiam reliquam ΓE metitur H . sed ΓE magnitudinem ZB metitur. itaque etiam H magnitudinem ZB metitur. uerum etiam totam AB metitur et reliquam AZ me-

$E\Delta$] (prius) ΔE P. 21. κατ] (alt.) om. V. 23. τό] (alt.) τόν P. 24. λοιπὸν ἄρα F.

ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μείζον τι μέγεθος τοῦ AZ τὰ AB , $\Gamma\Delta$ μετρήσει· τὸ AZ ἄρα τῶν AB , $\Gamma\Delta$ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστίν.

Δύο ἄρα μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων τῶν AB ,
5 $\Gamma\Delta$ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἡύρηται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι, ἐὰν μέγεθος δύο μεγέθη μετρήῃ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον
10 μετρήσῃ.

δ'.

Τριῶν μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὗρεῖν.

Ἔστω τὰ δοθέντα τρία μεγέθη σύμμετρα τὰ A, B, Γ .
15 δεῖ δὴ τῶν A, B, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὗρεῖν.

Εἰλήφθω γὰρ δύο τῶν A, B τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, καὶ ἔστω τὸ Δ . τὸ δὴ Δ τὸ Γ ἥτοι μετρεῖ ἢ οὐ [μετρεῖ]. μετρεῖτω πρότερον. ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὸ Γ μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ τὰ A, B , τὸ Δ ἄρα τὰ A, B, Γ
20 μετρεῖ· τὸ Δ ἄρα τῶν A, B, Γ κοινὸν μέτρον ἐστίν. καὶ φανερόν, ὅτι καὶ μέγιστον· μείζον γὰρ τοῦ Δ μεγέθους τὰ A, B οὐ μετρεῖ.

1. ἐστίν] om. F. μείζον] supra scr. m. 1 P. τι μείζον F, sed corr. 2. μεγέθη μετρήσει Theon (BFVb). τό] (alt.) m. 2 F. 3. ἐστὶ BVb, comp. F. 5. μέτρο P, sed corr. εὑρηται P. Deinde add. τὸ AZ V, sed punctis notat. 6. δεῖξαι] ποιῆσαι B et b (mg. γρ. δεῖξαι), δεῖ δεῖξαι F (mg. m. 2: γρ. ποιῆσαι). 9. μετρή] -η in ras. P. 15. Ante δεῖ ras. 1 litt. P. 16. δύο] om. V. 17. δὴ] m. rec. P. 18. μετρεῖ] om. P. 19. μετρεῖ δέ — 20. μετρεῖ] mg. m. 1 P. 20. Δ ἄρα] δὲ Δ P. τῶν] -ν postea add. F. ἐστὶ BV, comp. Fb. 21. καί] (alt.) om. BVb. 22. μέγεθος Fb. Post B ras. 1 litt. V. Post μετρεῖ add. εἰ γὰρ δυνατόν, μετρεῖτω τὰ A, B, Γ μείζον τοῦ Δ (μεγέθους add. V) τὸ E· καὶ ἐπεὶ τὰ A, B, Γ μετρεῖ,

tietur, maior minorem; quod fieri non potest. itaque magnitudo maior magnitudine AZ magnitudines AB , ΓA non metietur. ergo AZ magnitudinum AB , ΓA maxima mensura communis est.

Ergo datis duabus magnitudinibus commensurabilibus AB , ΓA maxima mensura communis inuenta est; quod erat demonstrandum.

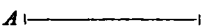
Corollarium.

Hinc manifestum est, si magnitudo duas magnitudines metiatur, eandem maximam earum mensuram communem metiri.

IV.

Datis tribus magnitudinibus commensurabilibus maximam earum mensuram communem inuenire.

Sint datae tres magnitudines commensurabiles A , B , Γ . oportet igitur magnitudinum A , B , Γ maximam mensuram communem inuenire.

Sumatur enim duarum magnitudinum A , B maxima mensura communis [prop. III] et sit Δ . Δ igitur A  magnitudinem Γ aut metitur aut non metitur. prius metiatur. iam quoniam Δ magnitudinem Γ metitur, et etiam A , B metitur, Δ magnitudines A , B , Γ metitur. Δ igitur magnitudinum A , B , Γ communis est mensura. et adparet, eandem maximam esse; nam magnitudo maior magnitudine Δ non metitur A , B .

καὶ τὰ A , B μετρήσει καὶ τὸ τῶν A , B μέγιστον κοινὸν (κοινὸν μέγιστον V) μέτρον τὸ Δ μετρήσει (μετρήσει τὸ Δ V) τὸ μείζον τὸ ἐλάττω (ἐλάσσον V). ὅπερ ἄτοπὸν ἐστίν (ἀδύνατον V) V et mg. m. 2 B.

Μὴ μετρεῖται δὴ τὸ Δ τὸ Γ . λέγω πρῶτον, ὅτι
 σύμμετρά ἐστι τὰ Γ , Δ . ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ
 A , B , Γ , μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος, ὃ δηλαδὴ καὶ τὰ
 A , B μετρήσει· ὥστε καὶ τὸ τῶν A , B μέγιστον κοινὸν
 5 μέτρον τὸ Δ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ · ὥστε τὸ
 εἰρημένον μέγεθος μετρήσει τὰ Γ , Δ · σύμμετρα ἄρα
 ἐστὶ τὰ Γ , Δ . εἰλήφθω οὖν αὐτῶν τὸ μέγιστον κοινὸν
 μέτρον, καὶ ἔστω τὸ E . ἐπεὶ οὖν τὸ E τὸ Δ μετρεῖ,
 ἀλλὰ τὸ Δ τὰ A , B μετρεῖ, καὶ τὸ E ἄρα τὰ A , B με-
 10 τρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ . τὸ E ἄρα τὰ A , B , Γ
 μετρεῖ· τὸ E ἄρα τῶν A , B , Γ κοινόν ἐστι μέτρον. λέγω
 δὴ, ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τι τοῦ E
 μείζον μέγεθος τὸ Z , καὶ μετρεῖται τὰ A , B , Γ . καὶ
 ἐπεὶ τὸ Z τὰ A , B , Γ μετρεῖ, καὶ τὰ A , B ἄρα μετρήσει
 15 καὶ τὸ τῶν A , B μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. τὸ
 δὲ τῶν A , B μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶ τὸ Δ · τὸ Z
 ἄρα τὸ Δ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ · τὸ Z ἄρα
 τὰ Γ , Δ μετρεῖ· καὶ τὸ τῶν Γ , Δ ἄρα μέγιστον κοινὸν
 μέτρον μετρήσει τὸ Z . ἔστι δὲ τὸ E · τὸ Z ἄρα τὸ E
 20 μετρήσει, τὸ μείζον τὸ ἔλασσον· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.
 οὐκ ἄρα μείζον τι τοῦ E μεγέθους [μέγεθος] τὰ A , B , Γ
 μετρεῖ· τὸ E ἄρα τῶν A , B , Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον
 ἐστίν, ἐὰν μὴ μετρηῇ τὸ Δ τὸ Γ , ἐὰν δὲ μετρηῇ, αὐτὸ το Δ .

1. ὅτι πρῶτον F. 2. ἐστι] (alt.) ἐστιν P. 4. μετρεῖ V. 5.
 μετρήσει τὸ Δ F. Post ὥστε ras. 2 litt. V. 6. μετρεῖ V.
 7. ἐστὶ] εἰσὶν P. οὖν] om. BFVb. τό] m. rec. P. 8.
 καί] om. F. ἔστω τὸ E] mg. m. 2 F. 9. μετρεῖ — A , B] om. F.
 μετρήσει] μετρεῖ V. 10. τὸ E — 11. μετρεῖ] om. Theon
 (BFVb). 11. μέτρον ἐστὶ V. ἐστιν P. 14. μετρεῖ] supra
 scr. F. ἄρα] om. BFVb. 15. B] B ἄρα BFb. 16. μέγιστον]
 m. rec P. 17. μετρεῖ] (prius) corr. ex μετρήσει m. rec. P.
 18. τὰ] τό b. 19. τὸ Z . ἐστὶ δὲ τὸ E] mg. m. 2 F; τὸ Z .
 τὸ δὲ τῶν Γ , Δ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶ τὸ E V. 20. μετρεῖ V.

iam ne metiatur Δ magnitudinem Γ . prius dico, Γ , Δ commensurabiles esse. nam quoniam A , B , Γ commensurabiles sunt, magnitudo aliqua eas metietur, quae nimirum etiam A , B metietur. quare etiam maximam earum mensuram communem Δ metietur [prop. III coroll.]. uerum etiam Γ metitur. quare magnitudo illa Γ , Δ metietur. itaque Γ , Δ commensurabiles sunt. sumatur igitur maxima earum mensura communis [prop. III] et sit E . iam quoniam E magnitudinem Δ metitur, et Δ magnitudines A , B metitur, etiam E magnitudines A , B metietur. uerum etiam Γ metitur. E igitur A , B , Γ metitur. E igitur magnitudinum A , B , Γ communis est mensura. iam dico, eandem maximam esse. nam si fieri potest, magnitudo magnitudine E maior sit Z et metiatur A , B , Γ . et quoniam Z magnitudines A , B , Γ metitur, etiam A , B metietur et maximam earum mensuram communem [prop. III coroll.]. maxima autem magnitudinum A , B mensura communis est Δ . Z igitur Δ metitur. uerum etiam Γ metitur. Z igitur Γ , Δ metitur. quare etiam maximam earum mensuram communem metietur [id.]. ea autem est E . Z igitur E metietur, maior minorem; quod fieri non potest. itaque magnitudo magnitudine E maior A , B , Γ non metitur. E igitur magnitudinum A , B , Γ maxima est mensura communis, si Δ magnitudinem Γ non metitur, sin metitur, ipsa Δ .

21. τὰ A , B , Γ μετρεῖ μέγεθος F . μέγεθος] m. rec. P. τὰ
 τό B , sed corr. Γ] Γ , Δ (eras.) μεγέθη V. 22. τό] (alt.)
 m. 2 F. 23. ἐάν] ἂν P.

Τριῶν ἄρα μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἡŷρηται [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι, ἐὰν μέγεθος τρία με-
6 γέθη μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει.

Ὅμοιως δὴ καὶ ἐπὶ πλειόνων το μέγιστον κοινὸν μέτρον ληφθήσεται, καὶ τὸ πόρισμα προχωρήσει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10

ε'.

Τὰ σύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Ἐστω σύμμετρα μεγέθη τὰ *A*, *B*· λέγω, ὅτι τὸ *A* πρὸς τὸ *B* λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

15 Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ *A*, *B*, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρεῖτω, καὶ ἔστω τὸ *Γ*. καὶ ὡσάκις τὸ *Γ* τὸ *A* μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ *Δ*, ὡσάκις δὲ τὸ *Γ* τὸ *B* μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ *Ε*.

Ἐπεὶ οὖν τὸ *Γ* τὸ *A* μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ *Δ*
20 μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν *Δ* κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, ὡσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν *Δ* μετρεῖ ἀριθμόν καὶ τὸ *Γ* μέγεθος τὸ *A*· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ *Γ* πρὸς τὸ *A*, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν *Δ*· ἀνάπαλιν ἄρα, ὡς τὸ *A* πρὸς τὸ *Γ*, οὕτως ὁ *Δ* πρὸς τὴν μονάδα. πάλιν
25 ἐπεὶ τὸ *Γ* τὸ *B* μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ *Ε* μονάδας,

2. εŷρηται P. ποιῆσαι B et F (supra scr. δεῖξαι). 4. μεγέθη F. 5. μέτρον] supra scr. F. 7. δέ BVb. 8. λειφθήσεται F. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. Theon (BFVb). 15. ἐστιν P. B μεγέθη F. 20. τόν] τό Bb. 21. μετρήσει b. ἀριθμόν] om. V. 22. καὶ] κατὰ F. 23. τόν] τό B. 25. τῷ E] corr. ex αὐτῷ m. rec. b.

Ergo datis tribus magnitudinibus commensurabilibus maxima mensura communis inuenta est.

Corollarium.

Hinc manifestum est, si magnitudo tres magnitudines metitur, eandem maximam earum mensuram communem metiri.

Iam similiter etiam in pluribus maxima mensura communis sumetur, et corollarium quoque progredietur. — quod erat demonstrandum.

V.

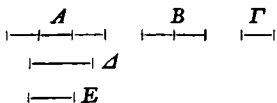
Magnitudines commensurabiles inter se rationem habent, quam numerus ad numerum.

Sint magnitudines commensurabiles A, B . dico, A ad B rationem habere, quam habeat numerus ad numerum.

Nam quoniam A, B commensurabiles sunt, magnitudo aliqua eas metietur. metiatur et sit Γ . et quoties Γ magnitudinem A metitur, totidem unitates sint in A , quoties autem Γ magnitudinem B metitur, totidem unitates sint in E .

iam quoniam Γ magnitudinem A secundum unitates numeri A metitur, sed etiam unitas numerum A secundum unitates eius metitur, unitas numerum A et Γ magnitudinem A aequaliter metitur.

itaque $\Gamma : A = 1 : A$ [VII def. 20]. e contrario igitur [V, 7 coroll.] $A : \Gamma = A : 1$. rursus quoniam Γ magnitudinem B secundum uni-



μετρει δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν E κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, ἰσάκεις ἄρα ἡ μονὰς τὸν E μετρει καὶ τὸ Γ τὸ B . ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ B , οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν E . ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ A πρὸς τὸ Γ , ὁ Δ 5 πρὸς τὴν μονάδα· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ A πρὸς τὸ B , οὕτως ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν E .

Τὰ ἄρα σύμμετρα μεγέθη τὰ A , B πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς ὁ Δ πρὸς ἀριθμὸν τὸν E . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10

ς'.

Ἐὰν δύο μεγέθη πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχη, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, σύμμετρα ἐστὶ τὰ μεγέθη.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ A , B πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχτω, 15 ὃν ἀριθμὸς ὁ Δ πρὸς ἀριθμὸν τὸν E . λέγω, ὅτι σύμμετρά ἐστι τὰ A , B μεγέθη.

Ὅσαι γὰρ εἰσιν ἐν τῷ Δ μονάδες, εἰς τοσαῦτα ἴσα διηρησθῶ τὸ A , καὶ ἐνὶ αὐτῶν ἴσον ἔστω τὸ Γ . ὅσαι δὲ εἰσιν ἐν τῷ E μονάδες, ἐκ τοσούτων μεγεθῶν ἴσων 20 τῷ Γ συγχεῖσθω τὸ Z .

Ἐπεὶ οὖν, ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Δ μονάδες, τοσαῦτά εἰσι καὶ ἐν τῷ A μεγέθει ἴσα τῷ Γ , ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ἡ μονὰς τοῦ Δ , τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ τὸ Γ τοῦ A . ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ A , οὕτως ἡ μονὰς πρὸς 25 τὸν Δ . μετρει δὲ ἡ μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν· μετρει ἄρα καὶ τὸ Γ τὸ A . καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ A , οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ [ἀριθμὸν], ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ A πρὸς τὸ Γ , οὕτως ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς

3. τό] (pr.) τόν P. 4. οὕτως ὁ V. 7. πρὸς ἀλλήλα] mg. m. 1 P. 11. ἔχει b. 14. δύο γὰρ μεγέθη] mg. m. 1 P.

tates numeri E metitur, sed etiam unitas numerum E secundum unitates eius metitur, unitas numerum E et Γ magnitudinem B aequaliter metitur. itaque [VII def. 20] $\Gamma : B = 1 : E$. demonstrauius autem, esse etiam $A : \Gamma = \Delta : 1$. itaque ex aequo [V, 22] $A : B = \Delta : E$.

Ergo magnitudines commensurabiles A, B inter se rationem habent, quam numerus Δ ad numerum E ; quod erat demonstrandum.

VI.

Si duae magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum, commensurabiles sunt.

Duae enim magnitudines A, B inter se rationem habeant, quam numerus Δ ad numerum E . dico, A, B magnitudines commensurabiles esse.

nam quot sunt in Δ unitates, in totidem partes aequales diuidatur A , et uni earum aequalis

sit Γ . quot autem sunt in E unitates, ex totidem magnitudinibus magnitudini Γ aequalibus componatur Z .

quoniam igitur, quot sunt in Δ unitates, totidem etiam in A magnitudines sunt magnitudini Γ aequales, quae pars est unitas numeri Δ , eadem pars est etiam Γ magnitudinis A . itaque $\Gamma : A = 1 : \Delta$ [VII def. 20]. uerum unitas numerum Δ metitur. quare etiam Γ

$\pi\rho\acute{o}s$ ἄλληλα τὰ A, B V. 15. τόν] τ' (τόν) F, τό φ. 21. τοσαῦται V, ι eras. 22. εἰσι] ἐστίν P. ἴσαι V, ι eras. 23. Δ ἀριθμοῦ F. τό] (alt.) ὁ P, in ras. V. τοῦ] e corr. V. 25. Δ ἀριθμόν F. Post μονάς ras. 4 litt. V. 26. καὶ ἐπεὶ καὶ V. τό] ὁ P. 27. ἀριθμόν] om. P, corr. ex ἀριθμός F.

τὴν μονάδα. πάλιν ἐπεί, ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ *E* μονάδες, τοσαῦτά εἰσι καὶ ἐν τῷ *Z* ἴσα τῷ *Γ*, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ *Γ* πρὸς τὸ *Z*, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν *E* [ἀριθμόν]. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ *A* πρὸς τὸ *Γ*, οὕτως ὁ *Δ* πρὸς τὴν μονάδα· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ *A* πρὸς τὸ *Z*, οὕτως ὁ *Δ* πρὸς τὸν *E*. ἀλλ' ὡς ὁ *Δ* πρὸς τὸν *E*, οὕτως ἐστὶ τὸ *A* πρὸς τὸ *B*· καὶ ὡς ἄρα τὸ *A* πρὸς τὸ *B*, οὕτως καὶ πρὸς τὸ *Z*. τὸ *A* ἄρα πρὸς ἐκάτερον τῶν *B*, *Z* τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσου ἄρα ἐστὶ τὸ *B* 10 τῷ *Z*. μετρεῖ δὲ τὸ *Γ* τὸ *Z*· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ *B*. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ *A*· τὸ *Γ* ἄρα τὰ *A*, *B* μετρεῖ. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ *A* τῷ *B*.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Πόρισμα.

Ἐκ δὲ τούτου φανερόν, ὅτι, ἐὰν ᾧσι δύο ἀριθμοί, ὡς οἱ *Δ*, *E*, καὶ εὐθεῖα, ὡς ἡ *A*, δύνατόν ἐστι ποιῆσαι ὡς ὁ *Δ* ἀριθμὸς πρὸς τὸν *E* ἀριθμόν, οὕτως τὴν εὐθεῖαν πρὸς εὐθεῖαν. ἐὰν δὲ καὶ τῶν *A*, *Z* μέση ἀνάλογον ληφθῇ, ὡς ἡ *B*, ἔσται ὡς ἡ *A* πρὸς τὴν *Z*, 20 οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *A* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *B*, τουτέστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. ἀλλ' ὡς ἡ *A* πρὸς τὴν *Z*, οὕτως ἐστὶν ὁ *Δ* ἀριθμὸς πρὸς τὸν *E* ἀριθμόν· γέγονεν ἄρα καὶ 25 ὡς ὁ *Δ* ἀριθμὸς πρὸς τὸν *E* ἀριθμόν, οὕτως τὸ ἀπὸ

1. εἰσὶν] εἰσὶ καὶ V. 2. τοσαῦται P, et FV, sed corr. εἰσιν P. Z μεγέθη F. ἴσαι V, sed corr. 3. ἀριθμόν] om. P. 4. τό] (alt.) τόν b. 5. τό] ὁ B. τό] τόν Bb. 6. ἀλλ' καὶ V. ὁ] postea ins. m. 1 F. 7. ἐστὶ] om. V. 8. καὶ τὸ A F. 9. λόγον P, sed corr. 11. μὴν] μετρεῖ P. τὸ Γ]

magnitudinem A metitur. et quoniam est $\Gamma:A=1:\Delta$, e contrario [V, 7 coroll.] erit $A:\Gamma=\Delta:1$. rursus quoniam, quot sunt in E unitates, totidem etiam in Z magnitudines magnitudini Γ aequales sunt, erit $\Gamma:Z=1:E$ [VII def. 20]. demonstrauius autem, esse etiam $A:\Gamma=\Delta:1$. itaque ex aequo [V, 22] est $A:Z=\Delta:E$. uerum $\Delta:E=A:B$. quare etiam $A:B=A:Z$. A igitur ad utrumque B, Z eandem rationem habet. ergo $B=Z$ [V, 9]. Γ autem Z metitur; quare etiam B metitur. uerum etiam A metitur. Γ igitur A, B metitur. itaque A et B commensurabiles sunt.

Ergo si duae magnitudines inter se, et quae sequuntur.

Corollarium.

Hinc iam manifestum est, si duo numeri sint Δ, E et recta A , fieri posse, ut faciamus, ut $\Delta:E$, ita rectam ad aliam rectam. sin rectarum A, Z media proportionalis sumitur B , erit $A:Z=A^2:B^2$, h. e. ut prima ad tertiam, ita figura in prima descripta ad figuram in secunda similem et similiter descriptam [VI, 20 coroll. 2, cfr. V def. 9]. sed $A:Z=\Delta:E$.

καὶ τὸ Γ V. 12. ἐστὶν P. B] e corr. V. 13. καὶ τὰ
ἐξῆς] λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, σύμμετρα ἔσται τὰ
μεγέθη· ὅπερ εἰδει δείξαι V. 16. ὥς] m. 2 F. εὐθείαι F.
ἢ A] e corr. V. 17. ὁ τὸν V, supra scr. m. 2 F. Δ] om. B F b. ἀριθμὸν F V. E] om. B F b; ὥς τὸν Δ ἀριθμὸν
πρὸς τὸν E ἀριθμὸν m. 2 B. τήν] om. V, ἢ P; del. m. rec. B. 18. εὐθείαν] -αν eras. V, εὐθεῖα P. εὐθείαν] τήν
εὐθείαν V et m. rec. B. 19. Z] B B, sed corr. 21. ὥς] ὅς ετερ? V. πρώτῃ] supra add. α F, α P B V b. τρίτῃ] ξ V, γ P b et corr. ex γ B m. 2 (ξ m. rec.); supra add. γ F. πρώτης] α P. 24. ἀριθμὸν] corr. ex ἀριθμὸς F. γέγονεν ἄρα] supra scr. m. rec. F.

τῆς *A* εὐθείας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *B* εὐθείας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ζ'.

Τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον
5 οὐκ ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Ἐστω ἀσύμμετρα μεγέθη τὰ *A*, *B*· λέγω, ὅτι τὸ *A*
πρὸς τὸ *B* λόγον οὐκ ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Εἰ γὰρ ἔχει τὸ *A* πρὸς τὸ *B* λόγον, ὃν ἀριθμὸς
πρὸς ἀριθμόν, σύμμετρον ἔσται τὸ *A* τῷ *B*. οὐκ ἔστι
10 δέ· οὐκ ἄρα τὸ *A* πρὸς τὸ *B* λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς
πρὸς ἀριθμόν.

Τὰ ἄρα ἀσύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ
ἔχει, καὶ τὰ ἐξῆς.

η'.

Ἐὰν δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἔχη,
ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, ἀσύμμετρα ἔσται
τὰ μεγέθη.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ *A*, *B* πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ
ἔχέτω, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· λέγω, ὅτι ἀσύμμετρά
20 ἔστι τὰ *A*, *B* μεγέθη.

Εἰ γὰρ ἔσται σύμμετρα, τὸ *A* πρὸς τὸ *B* λόγον
ἔξει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. οὐκ ἔχει δέ· ἀσύμ-
μετρα ἄρα ἐστὶ τὰ *A*, *B* μεγέθη.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα, καὶ τὰ ἐξῆς.

1. *A* εὐθείας] in ras. m. 1 b. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. Theon (BFVb). Seq. demonstr. alt.; u. app. 5. Post ἀριθμόν ras. 3 litt. V. 7. τό] ins. m. 1 F. 9. Ante ἔσται ras. 1 litt. F. ἔστιν BF. 10. γρ. τὸ *A* ἄρα πρὸς τὸ *B* λόγον οὐκ ἔχει mg. m. 1 b. 12. σύμμετρα b. λόγον οὐκ ἔχει πρὸς ἄλληλα BFb. 13. καὶ τὰ ἐξῆς] om. F (in mg. quaedam erasa), ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν BVb. 20. ἔστιν P, ἔσται V. 21. γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ *A* τῷ *B* Theon (BFVb). 22. ἔχει b. ὅνπερ V.

itaque inuenimus $A:E = A^2:B^2$. — quod erat demonstrandum.

VII.

Magnitudines incommensurabiles inter se rationem non habent, quam numerus ad numerum.

Sint magnitudines incommensurabiles A, B . dico, A ad B rationem non habere, quam habeat numerus ad numerum.

$\begin{array}{c} A \\ \hline B \end{array}$ Nam si A ad B rationem habet, quam numerus ad numerum, A et B commensurabiles erunt [prop. VI]. uerum non sunt. itaque A ad B rationem non habet, quam numerus ad numerum.

Ergo magnitudines incommensurabiles inter se rationem non habent, et quae sequuntur.

VIII.

Si duae magnitudines inter se rationem non habent, quam numerus ad numerum, magnitudines incommensurabiles erunt.

$\begin{array}{c} A \\ \hline B \end{array}$ Duae enim magnitudines A, B inter se rationem ne habeant, quam numerus ad numerum. dico, magnitudines A, B incommensurabiles esse.

Nam si commensurabiles sunt, A ad B rationem habet, quam numerus ad numerum [prop. V]. uerum non habet. itaque magnitudines A, B incommensurabiles sunt.

Ergo si duae magnitudines inter se, et quae sequuntur.

$\alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\nu$] corr. ex $\alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$ m. 1 P. 23. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$ P. 24. $\acute{\epsilon}\acute{\alpha}\nu$ — $\mu\epsilon\gamma\acute{\epsilon}\theta\eta$] om. F. $\pi\rho\acute{o}\varsigma$ $\acute{\alpha}\lambda\lambda\eta\lambda\alpha$] bis b. $\kappa\alpha\iota$ $\tau\acute{\alpha}$ $\acute{\epsilon}\xi\eta\varsigma$] $\lambda\acute{o}\gamma\omicron\nu$ $\mu\grave{\eta}$ $\acute{\epsilon}\chi\eta$, $\delta\upsilon\nu$ $\alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$ $\pi\rho\acute{o}\varsigma$ $\alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\nu$ $\acute{\alpha}\sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\rho\alpha$ $\acute{\epsilon}\sigma\tau\alpha\iota$ V.

θ'.

Τὰ ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τε-
 τράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν τετρά-
 γωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ
 5 τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντα,
 ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀρι-
 θμόν, καὶ τὰς πλευρὰς ἔξει μήκει συμμέτρους.
 τὰ δὲ ἀπὸ τῶν μήκει ἀσυνμέτρων εὐθειῶν τε-
 τράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει, ὥν περ
 10 τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν·
 καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ
 ἔχοντα, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετρά-
 γωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὰς πλευρὰς ἔξει μήκει
 συμμέτρους.

15 Ἐστῶσαν γὰρ αἱ A, B μήκει σύμμετροι· λέγω, ὅτι
 τὸ ἀπὸ τῆς A τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B τετρά-
 γωνον λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τε-
 τράγωνον ἀριθμόν.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ A τῇ B μήκει, ἡ A
 20 ἄρα πρὸς τὴν B λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.
 ἐχέτω, ὃν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ . ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ A
 πρὸς τὴν B , οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ , ἀλλὰ τοῦ μὲν
 τῆς A πρὸς τὴν B λόγου διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ
 τῆς A τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B τετράγωνον·
 25 τὰ γὰρ ὅμοια σχήματα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν
 ὁμολόγων πλευρῶν· τοῦ δὲ τοῦ Γ [ἀριθμοῦ] πρὸς
 τὸν Δ [ἀριθμόν] λόγου διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τοῦ
 Γ τετραγώνου πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ τετράγωνον· δύο
 γὰρ τετραγώνων ἀριθμῶν εἰς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν

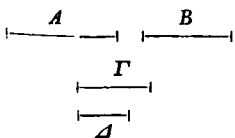
3. πρὸς ἄλληλα] supra scr. F. ἔχη V, corr. m. 1. 4.
 ἀριθμός] supra scr. m. 2 B. 5. τετράγωνα τὰ] supra scr. m.

IX.

Quadrata rectarum longitudine commensurabilium inter se rationem habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; et quadrata, quae inter se rationem habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, etiam latera longitudine commensurabilia habebunt. quadrata autem rectarum longitudine incommensurabilium inter se rationem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; et quadrata, quae inter se rationem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ne latera quidem longitudine commensurabilia habebunt.

Nam A, B longitudine commensurabiles sint. dico, $A^2:B^2$ rationem habere, quam habeat numerus quadratus ad numerum quadratum.

Quoniam enim A et B longitudine commensurabiles sunt, $A:B$ rationem habet, quam numerus ad numerum [prop. V]. sit $A:B = \Gamma:\Delta$. iam quoniam $A:B = \Gamma:\Delta$, et $A^2:B^2$ duplex est quam ratio $A:B$ (nam figurae similes inter se duplicatam rationem habent



2 B. 8. *συμμέτρων* b (corr. m. rec.), φ; αλ seq. ras. F. 9. *ὅν* BFb. 10. *ἀριθμόν*] om. V. 11. *μὴ ἔχοντα λόγον* V. 12. *ὅνπερ* V. 15. *γὰρ*] om. V. 16. *τό*] (prius) supra scr. m. 1 P. *τετράγωνον*] (alt.) m. 2 comp. F. 17. *ὅνπερ* V. 21. *ὅν*] *ὅν* Bb, *ὅν* corr. in *ὅν* δν FV. 22. *Γ ἀριθμός* BVb et e corr. F. *Δ ἀριθμόν* BFVb. 23. *τῆς*] e corr. V. *διπλάσιον* V, corr. m. 2. 24. *τό*] corr. ex *τόν* V. 26. *τοῦ*] (alt.) om. P, supra scr. F. *ἀριθμοῖ*] om. P. 27. *ἀριθμόν*] om. P. *ὁ τοῦ*] *τό* F. 28. Post *Γ* del. *πρὸς τὸν Δ* P. *τετραγώνον*] *τετραγών* seq. ras. 1 litt. F. *τόν*] *τό* B. 29. *μέσον* B, corr. m. 2.

ἀριθμός, καὶ ὁ τετράγωνος πρὸς τὸν τετράγωνον [ἀριθμὸν] διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς *A* τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *B* τετράγωνον, οὕτως ὁ ἀπὸ
 5 τοῦ *Γ* τετράγωνος [ἀριθμός] πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ *Δ* [ἀριθμοῦ] τετράγωνον [ἀριθμὸν].

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ ἀπὸ τῆς *A* τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *B*, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ *Γ* τετράγωνος πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ *Δ* [τετράγωνον]· λέγω, ὅτι σύμμετρος
 10 ἔστιν ἡ *A* τῇ *B* μήκει.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς *A* τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *B* [τετράγωνον], οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ *Γ* τετράγωνος πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ *Δ* [τετράγωνον], ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ ἀπὸ τῆς *A* τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *B*
 15 [τετράγωνον] λόγος διπλασίων ἐστὶ τοῦ τῆς *A* πρὸς τὴν *B* λόγον, ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ τοῦ *Γ* [ἀριθμοῦ] τετραγώνου [ἀριθμοῦ] πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ *Δ* [ἀριθμοῦ] τετράγωνον [ἀριθμὸν] λόγος διπλασίων ἐστὶ τοῦ τοῦ *Γ* [ἀριθμοῦ] πρὸς τὸν *Δ* [ἀριθμὸν] λόγου, ἔστιν ἄρα
 20 καὶ ὡς ἡ *A* πρὸς τὴν *B*, οὕτως ὁ *Γ* [ἀριθμός] πρὸς τὸν *Δ* [ἀριθμὸν]. ἡ *A* ἄρα πρὸς τὴν *B* λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς ὁ *Γ* πρὸς ἀριθμὸν τὸν *Δ*· σύμμετρος ἄρα ἔστιν ἡ *A* τῇ *B* μήκει.

Ἀλλὰ δὴ ἀσίμμετρος ἔστω ἡ *A* τῇ *B* μήκει· λέγω, ὅτι
 25 τὸ ἀπὸ τῆς *A* τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *B* [τετράγωνον] λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν.

Εἰ γὰρ ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς *A* τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *B* [τετράγωνον] λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθ-

1. ἀριθμὸν] om. B F V b.

F V b. ἀριθμός] om. P.

5. Γ] in ras. F, Γ ἀριθμοῦ

6. ἀριθμοῦ] om. P. ἀριθμὸν]

quam latera correspondentia [VI, 20 coroll.]), et $\Gamma^2 : \Delta^2$ duplex est quam ratio $\Gamma : \Delta$ (nam inter duos numeros quadratos unus medius est numerus, et numerus quadratus ad numerum quadratum duplicatam rationem habet quam latus ad latus [VIII, 11]), erit $A^2 : B^2 = \Gamma^2 : \Delta^2$.

Iam uero sit $A^2 : B^2 = \Gamma^2 : \Delta^2$. dico, A et B longitudine commensurabiles esse.

nam quoniam est $A^2 : B^2 = \Gamma^2 : \Delta^2$, et $A^2 : B^2$ duplex est quam ratio $A : B$, $\Gamma^2 : \Delta^2$ autem duplex quam $\Gamma : \Delta$, erit $A : B = \Gamma : \Delta$. itaque A ad B rationem habet, quam numerus Γ ad numerum Δ . ergo A et B longitudine commensurabiles sunt [prop. VI].

Iam uero A et B longitudine incommensurabiles sint. dico, $A^2 : B^2$ rationem non habere, quam habeat numerus quadratus ad numerum quadratum.

si enim $A^2 : B^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, A et B commen-

om. P. 8. B τετράγωνον BVb et e corr. F. τοῦ] corr. ex τῆς V. 9. τετράγωνον] om. P. 11. A] in ras. b. 12. τετράγωνον] om. P. 13. τόν] τό b. τετράγωνον] om. P. 14. τοῦ] m. 2 F. τό] τόν B, τόν τοῦ F. 15. τετράγωνον] om. P. 16. ἀριθμοῦ] om. P. τετράγωνος BV. 17. ἀριθμοῦ] om. P, ἀριθμός BV. ἀριθμοῦ] om. P. τετραγώνον P. 18. ἀριθμὸν] om. P. ἐστίν P. τοῦ] om. V. 19. ἀριθμοῦ] om. P. ἀριθμὸν] om. P. 20. ἀριθμός] om. P. 21. ἀριθμὸν] om. P. 22. τὸν Δ] m. 2 B. 25. A] corr. ex B m. 1 V. τετράγωνον] (alt.) om. P. 29. τετράγωνον] om. P.

μὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, σύμμετρος ἔσται ἡ *A* τῇ *B*. οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς *A* τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *B* [τετράγωνον] λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν.

5 Πάλιν δὴ τὸ ἀπὸ τῆς *A* τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *B* [τετράγωνον] λόγον μὴ ἔχέτω, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· λέγω, ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ *A* τῇ *B* μήκει.

Εἰ γάρ ἐστι σύμμετρος ἡ *A* τῇ *B*, ἔξει τὸ ἀπὸ τῆς
10 *A* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *B* λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν. οὐκ ἔχει δέ· οὐκ ἄρα σύμμετρός ἐστιν ἡ *A* τῇ *B* μήκει.

Τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων, καὶ τὰ ἐξῆς.

Πόρισμα.

15 Καὶ φανερὸν ἐκ τῶν δεδειγμένων ἔσται, ὅτι αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει, αἱ δὲ δυνάμει οὐ πάντως καὶ μήκει [εἴπερ τὰ ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, τὰ δὲ λόγον ἔχοντα,
20 ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, σύμμετρά ἐστιν. ὥστε αἱ μήκει σύμμετροι εὐθεῖται οὐ μόνον [εἰσὶ] μήκει σύμμετροι, ἀλλὰ καὶ δυνάμει.

πάλιν ἐπεὶ, ὅσα τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, μήκει
25 ἐδείχθη σύμμετρα καὶ δυνάμει ὄντα σύμμετρα τῷ τὰ τετράγωνα λόγον ἔχειν, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, ὅσα ἄρα τετράγωνα λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ἀλλὰ ἀπλῶς, ὃν

2. Post *B* add. μήκει m. 2 V. 3. τετράγωνον] om P. 5. δῆ] om. b, δέ BFV. 6. τετράγωνον] om. P. 8. ἐστιν] e

surabiles erunt. at non sunt. ergo $A^2:B^2$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum.

iam rursus $A^2:B^2$ rationem ne habeat, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. dico, A et B longitudine incommensurabiles esse.

nam si A et B commensurabiles sunt, $A^2:B^2$ rationem habebit, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. at non habet. ergo A et B longitudine commensurabiles non sunt.

Ergo quadrata rectarum longitudine commensurabilem, et quae sequuntur.

Corollarium.

Ex iis, quae demonstraui, manifestum est, rectas longitudine commensurabiles semper etiam potentia

corr. F. 9. εἰ] in ras. P. ἔσται P. 10. A τετράγωνον Bfb. B τετράγωνον Bfb. 12. Post B add. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἢ A τῇ B FVb, B m. 2. 13. Post συμμετρῶν add. εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν V. Post ἐξῆς add. Theon: ὅπερ εἶδει δεῖξαι (BFVb). 15. ἐκ] ἔστω ἐκ BFV. ἔσται] om. b.

17. οὐ] in ras. F, σύμμετροι οὐ V. εἴπερ] corr. ex ἤπερ m. 2 V. τὰ] corr. ex τοῖς m. 1 F. 21. Post μήκει add. αἰ m. 2 B. εἰσὶ] om. P. 23. ὅσα] ὧν P, corr. mg. m. 1. τετράγωνα λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα F. 26. τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν BFVb. Post ἀριθμὸν add.

οἶον ὁ λ καὶ ὁ ξ . ὁ γὰρ ξ πρὸς τὸν λ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, σύμμετροι δέ· αἱ δὲ εὐθεῖαι, ἀφ' ὧν ἀνεγράφησαν, ἀσύμμετροι εἰσιν· τὰ γὰρ τετράγωνα ἀλογὰ εἰσιν· ὥστε οὐκ αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει, αἱ δὲ δυνάμει οὐ πάντως καὶ μήκει b. 28. ἀλλ' BFV. ἀπλῶς] om. Fb, m. 2 B. ὅν] ὃν ἑτερός τις BFVb.

ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, σύμμετρα μὲν ἔσται αὐτὰ τὰ τετράγωνα δυνάμει, οὐκέτι δὲ καὶ μήκει· ὥστε τὰ μὲν μήκει σύμμετρα πάντως καὶ δυνάμει, τὰ δὲ δυνάμει οὐ πάντως καὶ μήκει, εἰ μὴ καὶ λόγον ἔχοιεν, ὃν τε-
5 τράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν.

λέγω δὴ, ὅτι [καὶ] αἱ μήκει ἀσύμμετροι οὐ πάντως καὶ δυνάμει, ἐπειδήπερ αἱ δυνάμει σύμμετροι δύνανται λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετρά-
γωνον ἀριθμόν, καὶ διὰ τοῦτο δυνάμει οὐσαι σύμ-
10 μετροὶ μήκει εἰσὶν ἀσύμμετροι. ὥστε οὐχ αἱ τῷ μήκει ἀσύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει, ἀλλὰ δύνανται μήκει οὐσαι ἀσύμμετροι δυνάμει εἶναι καὶ ἀσύμμετροι καὶ σύμμετροι.

αἱ δὲ δυνάμει ἀσύμμετροι πάντως καὶ μήκει ἀσύμ-
15 μετροὶ· εἰ γὰρ [εἰσὶ] μήκει σύμμετροι, ἔσονται καὶ δυνάμει σύμμετροι. ὑπόκεινται δὲ καὶ ἀσύμμετροι· ὅπερ ἄτοπον. αἱ ἄρα δυνάμει ἀσύμμετροι πάντως καὶ μήκει].

Λῆμμα.

20 Δέδεικται ἐν τοῖς ἀριθμητικοῖς, ὅτι οἱ ὅμοιοι ἐπί-
πεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν τε-
τράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ὅτι,
ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν, ὃν
τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ὅμοιοί
25 εἰσιν ἐπίπεδοι. καὶ δηλὸν ἐκ τούτων, ὅτι οἱ μὴ ὅμοιοι
ἐπίπεδοι ἀριθμοί, τουτέστιν οἱ μὴ ἀνάλογον ἔχοντες
τὰς πλευράς, πρὸς ἀλλήλους λόγον οὐκ ἔχουσιν, ὃν
τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. εἰ γὰρ
ἔξουσιν, ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἔσονται· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται.

1. ἀριθμόν τινα V. μέν] om. V. ἔσται] εἰσιν BF,
ἔστιν comp. b; ἔστι V, corr. in μέν m. 2. αὐτά] om. V;

commensurabiles esse, rectas autem potentia commensurabiles non semper etiam longitudine.¹⁾

Lemma.

In arithmeticeis demonstratum est, similes numeros planos eam inter se rationem habere, quam habeat numerus quadratus ad numerum quadratum [VIII, 26], et si duo numeri inter se rationem habeant, quam habeat numerus quadratus ad numerum quadratum, similes numeros planos eos esse.²⁾ unde adparet, numeros planos non similes (h. e. qui latera proportionalia non habent [cfr. VII def. 22]) inter se rationem non habere, quam habeat numerus quadratus ad numerum quadratum. nam si habebunt, similes erunt plani; quod contra hypothesim est. ergo numeri plani non

1) Quae sequitur p. 28, 17 — 30, 5 demonstratio corollarii et superflua est et a sermone Euclidis abhorret. praeterea offendit, quod plus demonstratur (λέγω δὴ lin. 6), quam positum erat.

2) Hoc nusquam demonstratur; sed est VIII, 26 conuersa, qua etiam in IX, 10 p. 358, 19 utitur.

supra τὰ ras. est. 2. Ante δυνάμει add. τουτέστιν αὖ εὐθεΐαι, ἀφ' ὧν ἀνεγράφησαν BFVb. τὰ] αὖ BFVb. 3. σύμμετροι BFVb. τὰ] αὖ BFVb. 4. Supra ἔχοιεν m. 2: τὰ τετράγωνα V. 6. καὶ] om. P. 7. Post δυνάμει add. ἀσύμμετροι V. ἐπειδήπερ] ἐπειδὴ γάρ P. 10. τῶ] om. FV. 11. ἀλλὰ καὶ V. 12. σύμμετροι καὶ ἀσύμμετροι P. 14. μήκει] -η- e corr. P. 15. εἶσι] om. P, εἶσιν B, comp. b. 16. ὑπόκειται b. Post καὶ del. δυνάμει F. 19. λήμμα] om. P. 20. δὴ ἐν F. ὅτι] supra scr. m. 1 b. 21. λόγον πρὸς ἀλλήλους ἔχουσιν F. ἔχουσι P, corr. m. rec. 23. δύο] supra scr. m. 1 F. 25. Supra ἐπίπεδοι scr. οἱ ἀριθμοί m. 1 b. μὴ] supra scr. m. 1 V. 29. ὑπόκεινται P.

οἱ ἄρα μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι πρὸς ἀλλήλους λόγον οὐκ ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

ι'.

5 Τῇ προτεθείσῃ εὐθείᾳ προσευρεῖν δύο εὐθείας ἀσυμμέτρους, τὴν μὲν μήκει μόνον, τὴν δὲ καὶ δυνάμει.

Ἔστω ἡ προτεθείσα εὐθεῖα ἡ *A*. δεῖ δὴ τῇ *A* προσευρεῖν δύο εὐθείας ἀσυμμέτρους, τὴν μὲν μήκει μόνον, τὴν δὲ καὶ δυνάμει.

Ἐκκείσθωσαν γὰρ δύο ἀριθμοὶ οἱ *B*, *Γ* πρὸς ἀλλήλους λόγον μὴ ἔχοντες, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, τουτέστι μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι, καὶ γεγονέτω ὡς ὁ *B* πρὸς τὸν *Γ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *A* 15 τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *Δ* τετράγωνον· ἐμάθομεν γάρ· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς *A* τῷ ἀπὸ τῆς *Δ*. καὶ ἐπεὶ ὁ *B* πρὸς τὸν *Γ* λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς *A* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *Δ* λόγον ἔχει, ὃν τε- 20 τράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ *A* τῇ *Δ* μήκει. εἰλήφθω τῶν *A*, *Δ* μέση ἀνάλογον ἡ *E*. ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ *A* πρὸς τὴν *Δ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *A* τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *E*. ἀσύμμετρος δὲ ἐστὶν ἡ *A* τῇ *Δ* μήκει· ἀσύμ- 25 μετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς *A* τετράγωνον τῷ

1. ἄρα μή] in ras. m. 1 P. οὐκ] ins. m. 1 V. 3. Seq. demonstr. alt., u. app. 6. συμμέτρους *B*, corr. m. 2. 7. καί] ins. postea F. 8. δεῖ] δ- in ras. V. 10. τὴν] τῆς P, corr. m. rec.; τῇ V, sed corr. 13. τουτέστιν P. Post ἐπίπεδοι add. L F, cui signo in mg. nihil resp.; in b seq. οἱ γὰρ ὅμοιοι ἐπίπεδοι πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς

similes inter se rationem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum.

X.

Data recta duas alias inuenire ei incommensurabiles, alteram longitudine tantum, alteram etiam potentia.

Data recta sit A . oportet igitur duas alias rectas inuenire rectae A incommensurabiles, alteram longitudine tantum, alteram etiam potentia.

Sumantur enim duo numeri B, Γ , qui inter se rationem non habeant, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, h. e. plani non similes [u. lemma], et fiat $B:\Gamma = A^2:\Delta^2$ (hoc enim didicimus [prop. VI

coroll.]). itaque A^2 et Δ^2 commensurabilia sunt [prop. VI]. et quoniam $B:\Gamma$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ne $A^2:\Delta^2$ quidem rationem habet, quam numerus quadratus ad

numerum quadratum. itaque A et Δ longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. sumatur rectarum A, Δ media proportionalis E . itaque $A:\Delta = A^2:E^2$ [V def. 9]. sed A et Δ longitudine incommensurabiles

πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν; in V seq. διὰ τοῦτο, punctis del.
 m. 2. 16. τῆς] τοῦ P. τῆς] τοῦ P. Δ] corr. ex B m.
 1 V, B b. 19. Α] corr. ex Δ m. 1 F. πρὸς] supra m. 1 V.
 τό] corr. ex τῷ V. Δ] B b. 21. ἐστίν] postea ins. F. 24.
 Ε τετράγωνον V. 25. ἐστίν P.

ἀπὸ τῆς *E* τετραγώνῳ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ *A* τῇ *E* δυνάμει.

Τῇ ἄρα προτεθείσῃ εὐθείᾳ τῇ *A* προσεύρηνται δύο εὐθείαι ἀσύμμετροι αἱ *Δ*, *E*, μήκει μὲν μόνον ἡ *Δ*,
5 δυνάμει δὲ καὶ μήκει δηλαδὴ ἡ *E* [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

ια'.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, τὸ δὲ
πρῶτον τῷ δευτέρῳ σύμμετρον ᾗ, καὶ τὸ τρί-
τον τῷ τετάρτῳ σύμμετρον ἔσται· καὶ τὸ πρῶτον
10 τῷ δευτέρῳ ἀσύμμετρον ᾗ, καὶ τὸ τρίτον τῷ
τετάρτῳ ἀσύμμετρον ἔσται.

Ἔστωσαν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον τὰ *A*, *B*, *Γ*, *Δ*,
ὥς τὸ *A* πρὸς τὸ *B*, οὕτως τὸ *Γ* πρὸς τὸ *Δ*, τὸ *A* δὲ
τῷ *B* σύμμετρον ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ τὸ *Γ* τῷ *Δ* σύμ-
15 μετρον ἔσται.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ *A* τῷ *B*, τὸ *A* ἄρα
πρὸς τὸ *B* λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. καὶ
ἐστὶν ὥς τὸ *A* πρὸς τὸ *B*, οὕτως τὸ *Γ* πρὸς τὸ *Δ*.
καὶ τὸ *Γ* ἄρα πρὸς τὸ *Δ* λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς
20 ἀριθμόν· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ *Γ* τῷ *Δ*.

Ἀλλὰ δὴ τὸ *A* τῷ *B* ἀσύμμετρον ἔστω· λέγω, ὅτι
καὶ τὸ *Γ* τῷ *Δ* ἀσύμμετρον ἔσται. ἐπεὶ γὰρ ἀσύμ-
μετρόν ἐστι τὸ *A* τῷ *B*, τὸ *A* ἄρα πρὸς τὸ *B* λόγον
οὐκ ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. καὶ ἐστὶν ὥς

3. προστεθείσῃ Pb. προσεύρηνται BFb. 4. ἡ] corr. ex τῇ B. Post *Δ* add. καὶ B et F, sed del. 5. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. PBFb. Seq. scholium in PBFb, u. app. 6. ια'] corr. ex ι' m. rec. P, ex ιγ' V. 8. πρῶτον] ᾱ P, et sic saepius. τό] ins. postea F. τρίτον] γ̄ P et b (et sic saepius). 15. ἐστὶν BVb. 16. ἐστὶν P. τὸ *Δ*] (alt.) postea ins. F. 17. B] corr. ex *A* m. 1 F. 18. τὸ *Δ*] corr. ex ὁ *A* V. 20. *Γ*] in ras. V. 21. ὅτι ἀσύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ *Γ* τῷ *Δ* V. 22.

sunt. itaque etiam A^2 et E^2 incommensurabilia sunt.¹⁾ quare A et E potentia incommensurabiles sunt.²⁾

Ergo data recta A duae aliae inuentae sunt Δ , E ei incommensurabiles, Δ longitudine tantum, E autem potentia et longitudine; quod erat demonstrandum.

XI.

Si quattuor magnitudines proportionales sunt, et prima secundaque commensurabiles sunt, etiam tertia quartaque commensurabiles erunt. et si prima secundaque incommensurabiles sunt, etiam tertia quartaque incommensurabiles sunt.

Quattuor magnitudines proportionales sint
 A ————— B —————
 Γ ————— Δ —————
 A, B, Γ, Δ , ita ut sit $A:B = \Gamma:\Delta$, et A, B commensurabiles sint. dico, etiam Γ, Δ commensurabiles esse.

Nam quoniam A, B commensurabiles sunt, $A:B$ rationem habet, quam numerus ad numerum [prop. V]. et $A:B = \Gamma:\Delta$. quare etiam $\Gamma:\Delta$ rationem habet, quam numerus ad numerum. ergo Γ, Δ commensurabiles sunt [prop. VI].

Iam uero A et B incommensurabiles sint. dico, etiam Γ, Δ incommensurabiles fore. nam quoniam A, B incommensurabiles sunt, $A:B$ rationem non habet,

1) Hoc ex prop. XI concludendum erat (quare Gregorius propp. X et XI permutauit). omnino tota prop. X cum lem-mate multis de causis suspecta est, et uix crediderim, eam a manu Euclidis profectam esse.

2) Quare etiam longitudine (prop. IX coroll.).

$\xi\sigma\tau\alpha\iota$] $\xi\sigma\tau\iota\nu$ BFb.
 supra scr. m. 1 F.

23. A] (alt.) supra scr. m. 1 V.
 24. $\sigma\upsilon\kappa$] m. rec. b.

$\alpha\zeta\alpha$]

τὸ *A* πρὸς τὸ *B*, οὕτως τὸ *Γ* πρὸς τὸ *Δ*. οὐδὲ τὸ *Γ* ἄρα πρὸς τὸ *Δ* λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ *Γ* τῷ *Δ*.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρα μεγέθη, καὶ τὰ ἐξῆς.

5

ιβ'.

Τὰ τῷ αὐτῷ μεγέθει σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα.

Ἐκάτερον γὰρ τῶν *A*, *B* τῷ *Γ* ἔστω σύμμετρον. λέγω, ὅτι καὶ τὸ *A* τῷ *B* ἐστὶ σύμμετρον.

10 Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ *A* τῷ *Γ*, τὸ *A* ἄρα πρὸς τὸ *Γ* λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐχέτω, ὃν ὁ *Δ* πρὸς τὸν *E*. πάλιν, ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ *Γ* τῷ *B*, τὸ *Γ* ἄρα πρὸς τὸ *B* λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐχέτω, ὃν ὁ *Z* πρὸς τὸν *H*.

15 καὶ λόγων δοθέντων ὁποσωνοῦν τοῦ τε, ὃν ἔχει ὁ *Δ* πρὸς τὸν *E*, καὶ ὁ *Z* πρὸς τὸν *H* εἰλήφθωσαν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἐν τοῖς δοθείσι λόγοις οἱ *Θ*, *K*, *Λ*. ὥστε εἶναι ὡς μὲν τὸν *Δ* πρὸς τὸν *E*, οὕτως τὸν *Θ* πρὸς τὸν *K*, ὡς δὲ τὸν *Z* πρὸς τὸν *H*, οὕτως τὸν *K* πρὸς τὸν *Λ*.

20 Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς τὸ *A* πρὸς τὸ *Γ*, οὕτως ὁ *Δ* πρὸς τὸν *E*, ἀλλ' ὡς ὁ *Δ* πρὸς τὸν *E*, οὕτως ὁ *Θ* πρὸς τὸν *K*, ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ *A* πρὸς τὸ *Γ*, οὕτως ὁ *Θ* πρὸς τὸν *K*. πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ *Γ* πρὸς τὸ *B*, οὕτως ὁ *Z* πρὸς τὸν *H*, ἀλλ' ὡς ὁ *Z* πρὸς τὸν *H*,
25 [οὕτως] ὁ *K* πρὸς τὸν *Λ*, καὶ ὡς ἄρα τὸ *Γ* πρὸς τὸ *B*, οὕτως ὁ *K* πρὸς τὸν *Λ*. ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ *A* πρὸς

1. οὐδέ] om. V. 2. ἄρα] om. V. λόγον] ἄρα λόγον οὐκ V. 4. τέσσαρα] τὰ δ F. Ante καὶ add. ἀνάλογον ἢ B F b; ἀνάλογον ἢ, τὸ δὲ πρῶτον τῷ δευτέρῳ σύμμετρον ἢ V. Post ἐξῆς add. ὅπερ ἔδει δεῖξαι V. 5. ιβ'] corr. ex ια' m. rec. P. 6. μεγέθη b. 15. ὁπόσων? V (comp.). 17. ἐξῆς]

quam numerus ad numerum [prop. VII]. et $A:B = \Gamma:\Delta$.
quare ne $\Gamma:\Delta$ quidem rationem habet, quam nume-
rus ad numerum. itaque Γ, Δ incommensurabiles sunt
[prop. VIII].

Ergo si quattuor magnitudines, et quae sequuntur.

XII.

Quae eidem magnitudini commensurabilia sunt,
etiam inter se commensurabilia sunt.

Utraque enim A, B magnitudini Γ sit commen-
surabilis. dico, etiam A, B commensurabiles esse.

nam quoniam A, Γ commensurabiles sunt, $A:\Gamma$
rationem habet, quam numerus ad numerum [prop. V].

A ———	Γ ———	B ———	sit $A:\Gamma = \Delta:E$.
——— Δ			rursus quoniam Γ, B
——— E	——— Θ		commensurabiles sunt,
——— Z	——— K		$\Gamma:B$ rationem habet,
——— H	——— A		quam numerus ad nu-
			merum [prop. V]. sit

$\Gamma:B = Z:H$. et datis quotlibet rationibus, $\Delta:E$ et
 $Z:H$, numeri sumantur deinceps in rationibus datis,
 Θ, K, A [cfr. VIII, 4], ita ut sit $\Delta:E = \Theta:K$, $Z:H$
 $= K:A$.

iam quoniam est $A:\Gamma = \Delta:E$ et $\Delta:E = \Theta:K$,
erit etiam $A:\Gamma = \Theta:K$ [V, 11]. rursus quoniam est
 $\Gamma:B = Z:H$ et $Z:H = K:A$, erit etiam $\Gamma:B = K:A$.

in ras. V; *ἐλάχιστοι ἐξῆς* F, sed corr. *δοθεῖσιν* P. 18. *τὸν Δ*
τόν postea ins. F, *ὁ Δ* P. 20. *τό*] (alt.) corr. ex *τόν* V. 22.
ὁ Α P. *τὸν Γ* P. 23. *ὁ Γ* P. *τό*] *τόν* P. B] corr.
ex Γ m. 1 b. 25. *οὕτως*] om. P. *καὶ ὡς* — 26. *Α*] bis F,
sed corr. 25. *ὁ Γ* P. 26. *ἔστιν* P. *τό*] *ὁ* F.

τὸ Γ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· δι' ἴσων ἄρα ἐστὶν ὡς
τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Α. τὸ Α ἄρα
πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς ὁ Θ πρὸς ἀριθμὸν
τὸν Α· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

- 5 Τὰ ἄρα τῷ αὐτῷ μεγέθει σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις
ἐστὶ σύμμετρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιγ'.

Ἐὰν ἡ δύο μεγέθη σύμμετρα, τὸ δὲ ἕτερον
αὐτῶν μεγέθει τινὶ ἀσύμμετρον ἦ, καὶ τὸ λοιπὸν
10 τῷ αὐτῷ ἀσύμμετρον ἔσται.

Ἐστω δύο μεγέθη σύμμετρα τὰ Α, Β, τὸ δὲ ἕτερον
αὐτῶν τὸ Α ἄλλῳ τινὶ τῷ Γ ἀσύμμετρον ἔστω· λέγω,
ὅτι καὶ τὸ λοιπὸν τὸ Β τῷ Γ ἀσύμμετρόν ἐστιν.

Εἰ γάρ ἐστι σύμμετρον τὸ Β τῷ Γ, ἀλλὰ καὶ τὸ Α
15 τῷ Β σύμμετρόν ἐστιν, καὶ τὸ Α ἄρα τῷ Γ σύμμετρόν
ἐστὶν. ἀλλὰ καὶ ἀσύμμετρον· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ
ἄρα σύμμετρόν ἐστι τὸ Β τῷ Γ· ἀσύμμετρον ἄρα.

Ἐὰν ἄρα ἡ δύο μεγέθη σύμμετρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Λήμμα.

- 20 Δύο δοθεῖσων εὐθειῶν ἀνίσων εὐρεῖν, τίνι μείζον
δύναται ἢ μείζων τῆς ἐλάσσονος.

Ἐστωσαν αὖ δοθεῖσαι δύο ἄνισοι εὐθεῖαι ΑΒ, Γ,

2. ὁ Α πρὸς τὸν Β b. 4. ἐστὶν P. 6. σύμμετρα] συμ-
supra scr. m. 1 P. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. Bb. Seq.
lemma, u. app. 7. ιγ'] ιβ' corr. in ιγ' m. rec. P, γ in ras. F;
ιδ', δ in ras. m. 1 B, ιγ' mg. 8. ἡ] om. V. μεγέθη] -γέ-
supra m. 1 P. ἀσύμμετρα F, sed corr.; σύμμετρα ἡ V. δ' F.
11. δύο] mg. γρ. αὐτῶ m. 1. b. 12. ἄλλῳ] ἐτέρῳ BFV.
13. τὸ Β] om. b. τῷ Γ] eras. b. ἐστὶ τὸ Β τῷ Γ b. 14.
εἰ — Γ] supra scr. m. rec. b. Γ τῷ Β P. 15. ἐστὶ B,
comp. Fb, om. V. καὶ — σύμμε-] supra scr. m. 1 F.
-τρον — 16. καὶ] in ras. F. 18. ὅπερ ἐστὶν F. 17. ἄρα] (alt.)

uerum etiam $A : \Gamma = \Theta : K$. ex aequo igitur $A : B = \Theta : A$ [V, 22]. itaque $A : B$ rationem habet, quam numerus Θ ad numerum A . itaque A, B commensurabiles sunt [prop. VI].

Ergo quae eidem magnitudini commensurabilia sunt, etiam inter se commensurabilia sunt; quod erat demonstrandum.

XIII.

Si duae magnitudines commensurabiles sunt, et alterutra earum magnitudini alicui incommensurabilis est, etiam reliqua eidem incommensurabilis erit.

A —————
 Γ —————
 B —————
 Sint duae magnitudines commensurabiles A, B , et A alii magnitudini Γ incommensurabilis sit. dico, etiam B, Γ incommensurabiles esse.

nam si B, Γ commensurabiles sunt et etiam A, B commensurabiles, etiam A, Γ commensurabiles erunt [prop. XII]. at eadem incommensurabiles sunt; quod fieri non potest. itaque B, Γ commensurabiles non sunt. incommensurabiles igitur.

Ergo si duae magnitudines commensurabiles sunt, et quae sequuntur.

Lemma.

Datis duabus rectis inaequalibus inuenire, quantum maior quadrata minorem excedat.

Sint datae duae rectae inaequales AB, Γ , quarum

postea ins. B. 18. ἡ] om. P. ἀσύμμετρα F, sed corr. καὶ τὰ ἐξῆς] τὸ δὲ ἕτερον αὐτῶν μεγέθει τιπὶ ἀσύμμετρον ἦ, καὶ τὸ λοιπὸν τῷ αὐτῷ ἀσύμμετρον ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι V. 19. 18. B. 20. ἀνίσων εὐθειῶν F. 21. ἐλάττωος F.

ὡν μείζων ἔστω ἡ AB . δεῖ δὴ εὐρεῖν, τίνι μείζων δύναται ἡ AB τῆς Γ .

Γεγράφθω ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ $A\Delta B$, καὶ εἰς αὐτὸ ἐνηρμόσθω τῇ Γ ἴση ἡ $A\Delta$, καὶ ἐπεξεύχθω
5 ἡ ΔB . φανερόν δὴ, ὅτι ὁρθὴ ἔστιν ἡ ὑπὸ $A\Delta B$ γωνία, καὶ ὅτι ἡ AB τῆς $A\Delta$, τουτέστι τῆς Γ , μείζων δύναται τῇ ΔB .

Ὅμοίως δὲ καὶ δύο δοθεῖσων εὐθειῶν ἡ δυναμένη αὐτὰς εὐρίσκεται οὕτως.

10 Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ $A\Delta$, ΔB , καὶ δέον ἔστω εὐρεῖν τὴν δυναμένην αὐτάς. κείσθωσαν γάρ, ὥστε ὁρθὴν γωνίαν περιέχειν τὴν ὑπὸ $A\Delta$, ΔB , καὶ ἐπεξεύχθω ἡ AB . φανερόν πάλιν, ὅτι ἡ τὰς $A\Delta$, ΔB δυναμένη ἔστιν ἡ AB . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15

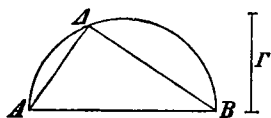
ιδ'.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾧσιν, δύνηται δὲ ἡ πρώτη τῆς δευτέρας μείζων τῷ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῇ [μήκει], καὶ ἡ τρίτη τῆς τετάρτης μείζων δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμετρου
20 ἑαυτῇ [μήκει]. καὶ ἐὰν ἡ πρώτη τῆς δευτέρας μείζων δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμετρου ἑαυτῇ [μήκει], καὶ ἡ τρίτη τῆς τετάρτης μείζων δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμετρου ἑαυτῇ [μήκει].

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ A , B , Γ , Δ ,
25 ὡς ἡ A πρὸς τὴν B , οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ , καὶ ἡ

1. ἔστω] corr. ex ἔστιν m. 2 B. 3. $AB\Delta$ P. 4. αὐτῷ e corr. F. ἡ $A\Delta$ ἴση F. 6. μείζων] corr. ex μείζων m. 1 F. 10. αἱ δοθεῖσαι] om. V. αἱ] αἱ δοθεῖσαι αἱ V. 11. τήν] ins. postea V. ἐκείσθωσαν BFVb. 13. Ante πάλιν ins. ἔστι m. 1 F. ὅτι πάλιν b. ὅτι ἡ] ἡ in ras. F. 14. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. Theon (BFVb). 15. ιδ'] δ in ras. F, corr. ex

maior sit AB . oportet igitur inuenire, quantum AB^2 excedat Γ^2 .



describatur in AB semicirculus $A\Delta B$, et in eum aptetur rectae Γ aequalis $A\Delta$ [IV, 1], et ducatur ΔB . manifestum igitur, $\angle A\Delta B$ rectum esse [III, 31], et $AB^2 = A\Delta^2 + \Delta B^2 = \Gamma^2 + \Delta B^2$ [I, 47].

Similiter etiam datis duabus rectis recta quadrata iis aequalis hoc modo inuenitur.

sint datae duae rectae $A\Delta$, ΔB , et oporteat rectam quadratam iis aequalem inuenire. ponantur enim ita, ut angulum rectum comprehendant $A\Delta B$, et ducatur AB . rursus manifestum est, esse $AB^2 = A\Delta^2 + \Delta B^2$ [I, 47]; quod erat demonstrandum.

XIV.

Si quattuor rectae proportionales sunt, et prima quadrata secundam excedit quadrato rectae sibi commensurabilis, etiam tertia quadrata quartam excedet quadrato rectae sibi commensurabilis. et si prima quadrata secundam excedit quadrato rectae sibi incommensurabilis, etiam tertia quadrata quartam excedet quadrato rectae sibi incommensurabilis.

Sint quattuor rectae proportionales A, B, Γ, Δ , ita ut sit $A : B = \Gamma : \Delta$, et sit $A^2 = B^2 + E^2$, $\Gamma^2 = \Delta^2 + Z^2$

17. $\tau\omega$] e corr. V.

18. $\mu\eta\kappa\epsilon\iota$] om. P. 19. $\alpha\pi\omicron\tau\eta\varsigma$ b. 20. $\mu\eta\kappa\epsilon\iota$] om. P. 21.

$\delta\upsilon\nu\eta\sigma\eta\tau\alpha\iota$ FV, sed corr. $\sigma\upsilon\mu\mu\epsilon\tau\rho\omicron\nu$ F, et B, corr. m. 2. $\xi\alpha\nu\tau\omega$ b.

$\mu\eta\kappa\epsilon\iota$] om. P. 22. $\delta\upsilon\nu\eta\sigma\eta\tau\alpha\iota$ F. 23. $\sigma\upsilon\mu\mu\epsilon\tau\rho\omicron\nu$ PF, et B,

corr. m. 2. $\xi\alpha\nu\tau\omega$ b. $\mu\eta\kappa\epsilon\iota$] om. P. 24. $\xi\sigma\tau\omega\sigma\alpha\nu$ $\delta\eta$ V.

25. A] e corr. V.

A μὲν τῆς *B* μείζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ τῆς *E*, ἡ δὲ *Γ* τῆς *Δ* μείζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ τῆς *Z*. λέγω, ὅτι, εἴτε σύμμετρός ἐστιν ἡ *A* τῇ *E*, σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ *Γ* τῇ *Z*, εἴτε ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ *A* τῇ *E*, ἀσύμμετρός
5 ἐστι καὶ ὁ *Γ* τῇ *Z*.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ *A* πρὸς τὴν *B*, οὕτως ἡ *Γ* πρὸς τὴν *Δ*, ἐστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς *A* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *B*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *Γ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *Δ*. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς *A* ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν *E*, *B*,
10 τῷ δὲ ἀπὸ τῆς *Γ* ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν *Δ*, *Z*. ἐστιν ἄρα ὡς τὰ ἀπὸ τῶν *E*, *B* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *B*, οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν *Δ*, *Z* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *Δ*. διελόντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς *E* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *B*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *Z* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *Δ*. ἐστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ *E*
15 πρὸς τὴν *B*, οὕτως ἡ *Z* πρὸς τὴν *Δ*. ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ *B* πρὸς τὴν *E*, οὕτως ἡ *Δ* πρὸς τὴν *Z*. ἐστὶ δὲ καὶ ὡς ἡ *A* πρὸς τὴν *B*, οὕτως ἡ *Γ* πρὸς τὴν *Δ*. δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ *A* πρὸς τὴν *E*, οὕτως ἡ *Γ* πρὸς τὴν *Z*. εἴτε οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ *A* τῇ *E*,
20 σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ *Γ* τῇ *Z*, εἴτε ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ *A* τῇ *E*, ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ *Γ* τῇ *Z*.

Ἐὰν ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

ιε'.

Ἐὰν δύο μεγέθη σύμμετρα συντεθῇ, καὶ τὸ
25 ὅλον ἐκατέρωφ αὐτῶν σύμμετρον ἔσται· καὶ τὸ ὅλον ἐνὶ αὐτῶν σύμμετρον ἦ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη σύμμετρα ἔσται.

Συγκείσθω γάρ δύο μεγέθη σύμμετρα τὰ *AB*, *BΓ*.

1. τῆς *B*] corr. ex τῇ *B* m. 1 b. *Γ* δέ BFb. 3. ἐστὶν] om. V. τῇ] corr. ex τῆς m. 1 P. ἐστὶν *B*. 4. *Z*] e corr.

[u. lemma]. dico, siue A, E commensurabiles sint, etiam Γ, Z commensurabiles esse, siue A, E incommensurabiles sint, etiam Γ, Z incommensurabiles esse.

nam quoniam est $A:B = \Gamma:\Delta$, erit etiam $A^2:B^2 = \Gamma^2:\Delta^2$ [VI, 22]. uerum $A^2 = E^2 + B^2$, $\Gamma^2 = \Delta^2 + Z^2$.

itaque $E^2 + B^2:B^2 = \Delta^2 + Z^2:\Delta^2$.

subtrahendo igitur [V, 17] $E^2:B^2 = Z^2:\Delta^2$.

quare etiam [VI, 22] $E:B = Z:\Delta$.

itaque e contrario [V, 7 coroll.] $B:E = \Delta:Z$.

uerum etiam $A:B = \Gamma:\Delta$.

ex aequo igitur [V, 22] $A:E = \Gamma:Z$.

itaque siue A, E com-

mensurabiles sunt, etiam Γ, Z commensurabiles sunt;

siue A, E incommensurabiles sunt, etiam Γ, Z in-

commensurabiles sunt [prop. XI].

Ergo si, et quae sequuntur.

XV.

Si duae magnitudines commensurabiles componuntur, etiam totum utrique earum commensurabile erit; et si totum alterutri earum commensurabile est, etiam magnitudines ab initio positae commensurabiles erunt.

Componantur enim duae magnitudines commensura-

m. 1 b. 5. $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$ PB. 7. $\kappa\alpha\iota$] om. V. 9. $\tau\tilde{\omega}$] corr. ex $\tau\acute{o}$ m. rec. P. A] in ras. m. 1 P. $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$ P. 10. $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$ P. Z, Δ P. 11. E, B] Δ, Z B. $\tau\acute{\alpha}$ F. B] Δ B. 12. Δ, Z] E, B B. $\tau\acute{\alpha}$ F. Δ] B in ras. m. 2 B. 13. $\acute{\alpha}\nu\acute{o}$] (alt.) ins. m. 2 F. 14. $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$ — 15. Δ] mg. m. 1 P. 14. η] supra scr. m. 2 F. 17. $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$ P. 19. $\epsilon\lambda\tau$] P. 20. $\epsilon\sigma\tau\iota$] $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$ P. Post $\epsilon\lambda\tau\epsilon$ del. $\sigma\acute{\upsilon}\nu$ b. $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$] om. V. 21. $\sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\rho\omicron\varsigma$ b. $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$ B. 22. $\acute{\alpha}\rho\alpha$] om. V. Ante $\kappa\alpha\iota$ add. $\tau\acute{\epsilon}\sigma\sigma\alpha\rho\epsilon\varsigma \epsilon\upsilon\delta\epsilon\iota\alpha\iota \acute{\alpha}\nu\acute{\alpha}\lambda\omicron\gamma\omicron\nu \acute{\omega}\sigma\iota\nu$ ($\acute{\omega}\sigma\iota$ V) FV. 23. $\iota\epsilon'$] e corr. PF; $\iota\epsilon'$ B, mg. $\iota\epsilon'$. 28. $\sigma\upsilon\gamma\kappa\epsilon\iota\sigma\theta\omega\sigma\alpha\nu$ BFb. $B\Gamma$] e corr. F.

λέγω, ὅτι καὶ ὅλον τὸ $ΑΓ$ ἐκατέρω τῶν $ΑΒ, ΒΓ$ ἐστὶ σύμμετρον.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστὶ τὰ $ΑΒ, ΒΓ$, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρεῖτω, καὶ ἔστω τὸ $Δ$. ἐπεὶ οὖν
5 τὸ $Δ$ τὰ $ΑΒ, ΒΓ$ μετρεῖ, καὶ ὅλον τὸ $ΑΓ$ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὰ $ΑΒ, ΒΓ$. τὸ $Δ$ ἄρα τὰ $ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ$ μετρεῖ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΓ$ ἐκατέρω τῶν $ΑΒ, ΒΓ$.

Ἀλλὰ δὴ τὸ $ΑΓ$ ἔστω σύμμετρον τῷ $ΑΒ$. λέγω δὴ, ὅτι καὶ τὰ $ΑΒ, ΒΓ$ σύμμετρά ἐστίν.

10 Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστὶ τὰ $ΑΓ, ΑΒ$, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρεῖτω, καὶ ἔστω τὸ $Δ$. ἐπεὶ οὖν τὸ $Δ$ τὰ $ΓΑ, ΑΒ$ μετρεῖ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ $ΒΓ$ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ $ΑΒ$. τὸ $Δ$ ἄρα τὰ $ΑΒ, ΒΓ$ μετρήσει· σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ $ΑΒ, ΒΓ$.

15 Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἐξῆς.

ις'.

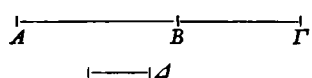
Ἐὰν δύο μεγέθη ἀσύμμετρα συντεθῇ, καὶ τὸ ὅλον ἐκατέρω αὐτῶν ἀσύμμετρον ἔσται· καὶ τὸ ὅλον ἐνὶ αὐτῶν ἀσύμμετρον ἦ, καὶ τὰ ἐξ
20 ἀρχῆς μεγέθη ἀσύμμετρα ἔσται.

Συγκείσθω γὰρ δύο μεγέθη ἀσύμμετρα τὰ $ΑΒ, ΒΓ$. λέγω, ὅτι καὶ ὅλον τὸ $ΑΓ$ ἐκατέρω τῶν $ΑΒ, ΒΓ$ ἀσύμμετρόν ἐστιν.

1. καί] καὶ τό V. τῶν] τῷ P. ἔσται b. σύμμετρον ἔστι V. 3. ἐστίν P. 6. τὰ] (prius) corr. ex τῶν F. 7. ἐστίν P. 8. $ΑΓ$] $ΑΒ, ΒΓ$ P; $ΑΓ$ ἐνὶ τῶν $ΑΒ, ΒΓ$ Theon (BFVb). τῷ] τῇ P, ἔστω δὴ τῷ (corr. ex τό V) Theon (BFVb). 9. δὴ] supra scr. F. 10. ἐστίν P. $ΑΓ$] $ΓΑ$ P, $Γ$ e corr. b; mg. γρ. $ΑΒ ΒΓ$ m. 1 b. 12. $ΑΓ$ FV. 13. τὰ] τό? V. 14. ἐστίν LPB. 15. Post μεγέθη add. σύμμετρα συντεθῇ, καὶ τὸ ὅλον ἐκατέρω αὐτῶν σύμμετρον ἔσται V. Post ἐξῆς add. ὅπερ ἔδει δεῖξαι V. 16. ις'] corr. ex ιδ' m. rec. P, mut. in ις' m.

biles AB , $B\Gamma$. dico, etiam totum $A\Gamma$ utrique AB , $B\Gamma$ commensurabile esse.

nam quoniam AB , $B\Gamma$ commensurabiles sunt, magnitudo aliqua eas metietur. metiatur et sit Δ . iam



quoniam Δ magnitudines AB , $B\Gamma$ metitur, etiam totum $A\Gamma$ metietur. uerum

etiam AB , $B\Gamma$ metitur. Δ igitur AB , $B\Gamma$, $A\Gamma$ metitur. ergo $A\Gamma$ utrique AB , $B\Gamma$ commensurabilis est [def. 1].

Iam uero $A\Gamma$, AB commensurabiles sint. dico, etiam AB , $B\Gamma$ commensurabiles esse.

nam quoniam $A\Gamma$, AB commensurabiles sunt, magnitudo aliqua eas metietur. metiatur et sit Δ . iam quoniam Δ magnitudines ΓA , AB metitur, etiam reliquam $B\Gamma$ metietur. uerum etiam AB metitur. Δ igitur AB , $B\Gamma$ metietur. itaque AB , $B\Gamma$ commensurabiles erunt.

Ergo si duae magnitudines, et quae sequuntur.

XVI.

Si duae magnitudines incommensurabiles componentur, etiam totum utrique earum incommensurabile est; et si totum alterutri earum incommensurabile est, etiam magnitudines ab initio positae incommensurabiles erunt.

Componentur enim duae magnitudines incommensurabiles AB , $B\Gamma$. dico, etiam totum $A\Gamma$ utrique AB , $B\Gamma$ incommensurabile esse.

2 F; η' B, mg. 15'. 19. $\sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\rho\omicron\nu$ B, corr. m. 2; item lin. 20.

21. $\sigma\upsilon\gamma\kappa\epsilon\lambda\epsilon\theta\acute{\omega}\sigma\alpha\nu$ V. $B\Gamma$] corr. ex ΓB F.

Εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ἀσύμμετρα τὰ ΓA , AB , μετρήσει
 τι [αὐτὰ] μέγεθος. μετρεῖτω, εἰ δυνατόν, καὶ ἔστω
 τὸ Δ . ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΓA , AB μετρεῖ, καὶ λοιπὸν
 ἄρα τὸ $B\Gamma$ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ AB . τὸ Δ
 ἄρα τὰ AB , $B\Gamma$ μετρεῖ. σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ AB , $B\Gamma$.
 ὑπέκειντο δὲ καὶ ἀσύμμετρα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.
 οὐκ ἄρα τὰ ΓA , AB μετρήσει τι μέγεθος· ἀσύμμετρα
 ἄρα ἐστὶ τὰ ΓA , AB . ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ
 τὰ $A\Gamma$, ΓB ἀσύμμετρά ἐστιν. τὸ $A\Gamma$ ἄρα ἐκατέρω
 τῶν AB , $B\Gamma$ ἀσύμμετρόν ἐστιν.

Ἀλλὰ δὴ τὸ $A\Gamma$ ἐνὶ τῶν AB , $B\Gamma$ ἀσύμμετρον ἔστω.
 ἔστω δὴ πρότερον τῷ AB . λέγω, ὅτι καὶ τὰ AB , $B\Gamma$
 ἀσύμμετρά ἐστιν. εἰ γὰρ ἔσται σύμμετρα, μετρήσει
 τι αὐτὰ μέγεθος. μετρεῖτω, καὶ ἔστω τὸ Δ . ἐπεὶ
 οὖν τὸ Δ τὰ AB , $B\Gamma$ μετρεῖ, καὶ ὅλον ἄρα τὸ $A\Gamma$
 μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ AB . τὸ Δ ἄρα τὰ ΓA , AB
 μετρεῖ. σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΓA , AB . ὑπέκειτο δὲ καὶ
 ἀσύμμετρα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὰ AB , $B\Gamma$
 μετρήσει τι μέγεθος· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ AB , $B\Gamma$.
 Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἐξῆς.

Λήμμα.

Ἐὰν παρὰ τινα εὐθεῖαν παραβληθῇ παραλληλό-
 γραμμον ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, τὸ παραβληθὲν

1. τὰ] τό P. 2. αὐτὰ] om. P. 4. AB] BA V. 5.
 ἐστὶν LP. 6. ὑπέκεινται LBb. ἀδύνατόν ἐστιν V. 8.
 ἐστὶν LP. 9. Ante $A\Gamma$ del. Γ m. 1 P. σύμμετρα B, corr.
 m. 2. ἐστὶ V, comp. Fb. ΓA F. 10. ἐστὶν] om. B. 11.
 ἔστω] om. P. 12. ἔστω δὴ πρότερον] καὶ πρῶτον Theon (BFVb).
 τῷ] e corr. V. 13. ἐστὶ] ἐστὶ V. σύμμετρα] supra scr.
 α- m. 1 F. 17. ἐστὶ] ἐστὶν P, comp. F, ἐστὶ LBVb. ὑπέ-
 κειντο F. 19. ἐστὶν LP. Post $B\Gamma$ add. ὁμοίως δὲ δειχ-
 θήσεται, ὅτι τὸ $A\Gamma$ καὶ λοιπὸν τῷ $B\Gamma$ ἀσύμμετρόν ἐστιν FVb.

nam si ΓA , AB incommensurabiles non sunt, magnitudo aliqua eas metietur. metiatur, si fieri potest, et sit Δ . iam quoniam Δ magnitudines ΓA , AB metitur, etiam reliquam $B\Gamma$ metietur. uerum etiam AB metitur. Δ igitur AB , $B\Gamma$ metitur. itaque AB , $B\Gamma$ commensurabiles sunt. supposuimus autem, easdem incommensurabiles esse; quod fieri non potest. itaque nulla magnitudo ΓA , AB metietur. ergo ΓA , AB incommensurabiles erunt. similiter demonstrabimus, etiam $A\Gamma$, ΓB incommensurabiles esse. ergo $A\Gamma$ utrique AB , $B\Gamma$ incommensurabilis est.

Iam uero $A\Gamma$ alterutri AB , $B\Gamma$ incommensurabilis sit. sit prius magnitudini AB incommensurabilis. dico, etiam AB , $B\Gamma$ incommensurabiles esse. nam si commensurabiles sunt, magnitudo aliqua eas metietur. metiatur et sit Δ . iam quoniam Δ magnitudines AB , $B\Gamma$ metitur, etiam totum $A\Gamma$ metietur. uerum etiam AB metitur. Δ igitur ΓA , AB metitur. itaque ΓA , AB commensurabiles sunt. supposuimus autem, easdem incommensurabiles esse; quod fieri non potest. itaque nulla magnitudo AB , $B\Gamma$ metietur. itaque AB , $B\Gamma$ incommensurabiles sunt.

Ergo si duae magnitudines, et quae sequuntur.

Lemma.

Si rectae alicui parallelogrammum adplicatur figura quadrata deficiens, adplicatum spatium rectangulo partium rectae adplicatione ortarum aequale est.

23. τετραγώνῳ] corr. ex παραλληλογράμῳ m. rec. b. τό]
 τῷ F. τὸ παραβληθέν] om. b.

ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ἐκ τῆς παραβολῆς γενομένων
 τμημάτων τῆς εὐθείας.

Παρὰ γὰρ εὐθείαν τὴν AB παραβεβλήσθω παραλ-
 ληλόγραμμον τὸ AD ἐλλείπον εἶδει τετραγώνῳ τῷ AB .
 5 λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ AD τῷ ὑπὸ τῶν AG , GB .

Καὶ ἐστὶν αὐτόθεν φανερόν· ἐπεὶ γὰρ τετραγώνον
 ἐστὶ τὸ AB , ἴση ἐστὶν ἡ AG τῇ GB , καὶ ἐστὶ τὸ AD
 τὸ ὑπὸ τῶν AG , GB , τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν AG , GB .

Ἐὰν ἄρα παρὰ τινὰ εὐθείαν, καὶ τὰ ἐξῆς.

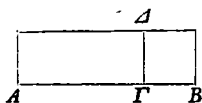
10

ιξ'.

Ἐὰν ὥσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ
 μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν
 μείζονα παραβληθῇ ἐλλείπον εἶδει τετραγώνῳ
 καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ μήκει, ἡ μείζων
 15 τῆς ἐλάσσονος μείζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμ-
 μέτρου ἑαυτῇ [μήκει]. καὶ ἐὰν ἡ μείζων τῆς
 ἐλάσσονος μείζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου
 ἑαυτῇ [μήκει], τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσ-
 σονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεί-
 20 πον εἶδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν
 διαιρεῖ μήκει.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ A , $BΓ$, ὧν μείζων
 ἡ $BΓ$, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος
 τῆς A , τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς A , ἴσον
 25 παρὰ τὴν $BΓ$ παραβεβλήσθω ἐλλείπον εἶδει τετραγώνῳ,

3. τὸ AD παραλληλόγραμμον Theon (BFVb, ante AD eras.
 $ΓΔ F$). 4. τετραγώνῳ] corr. ex παραλληλογραμμῳ m. rec. b.
 $ΔB$] $BΔ Fb$. 5. ἐστίν LB. τῷ] τὸ F. AG] corr. ex
 $ΓA$ m. 1 b. GB] $Γe$ corr. V. 7. ἐστὶν LB. GB] $BΓ$
 BV. ἐστὶν LPB. 8. $ΓΔ$] $ΔP$, $Δe$ corr. V. τουτέστι — $ΓB$] m. 2 V. τουτέστιν LPBV. 9. Post εὐθείαν add. παρα-



Rectae enim AB parallelogrammum adplicetur $A\Delta$ figura quadrata ΔB deficiens. dico, esse

$$A\Delta = A\Gamma \times \Gamma B.$$

et per se patet; nam quoniam ΔB quadratum est, erit $\Delta\Gamma = \Gamma B$. et $A\Delta = A\Gamma \times \Gamma\Delta = A\Gamma \times \Gamma B$.

Ergo si rectae alicui, et quae sequuntur.

XVII.

Si duae rectae inaequales datae sunt, et quartae parti quadrati minoris aequale spatium maiori adplicatur figura quadrata deficiens, quod eam in partes longitudine commensurabiles diuidat, maior quadrata minorem excedet quadrato rectae sibi commensurabilis. et si maior quadrata minorem excedit quadrato rectae sibi commensurabilis, et spatium quartae parti quadrati minoris aequale maiori adplicatur figura quadrata deficiens, eam in partes longitudine commensurabiles diuidet.

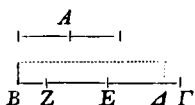
Sint duae rectae inaequales $A, B\Gamma$, quarum maior sit $B\Gamma$, et quartae parti quadrati minoris A , hoc est $(\frac{1}{2}A)^2$, aequale spatium rectae $B\Gamma$ adplicetur figura

βληθῆ παραλληλόγραμμον V. Post ἐξῆς add. τῆς προτάσεως LBVB, F m. 2. 10. ἢ F m. 2; ἢ B, mg. εἰ. 11. ὥσιν P. 12. ἐλάττονος F. 13. τετραγώνω] in ras. m. 1 b. 14. μήκη F. 15. ἐλάττονος F. συμμέτρω F. 16. μήκει] om. P. ἂν F. ἢ] ἢ b, et F, sed corr. 17. ἐλάττονος F. μείζον] mg. m. 2 F, μείζονα b. 18. μήκει] om. P. Post τετάρτω add. μέρει b, F m. 2. ἐλάττονος F. 20. εἰς] in ras. V, corr. ex εἰ m. rec. b. αὐτῇ V, sed corr. 21. διελεί B, διέλη Vb et corr. in διελεί F. μήκη F. 22. μείζον b, μείζον ἔστω F. 23. ἐλάττονος F. 24. τῆς] τ F. τουτέστιν P. τῶ] τό F, et V, sed corr. m. 1. τοῦ A B; τῇ A V, sed corr.

καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν $B\Delta$, $\Delta\Gamma$, σύμμετρος δὲ ἔστω ἡ $B\Delta$ τῇ $\Delta\Gamma$ μήκει· λέγω, ὅτι ἡ $B\Gamma$ τῆς A μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.

Τετμήσθω γὰρ ἡ $B\Gamma$ δίχα κατὰ τὸ E σημεῖον, καὶ
 5 κείσθω τῇ ΔE ἴση ἡ EZ . λοιπὴ ἄρα ἡ $\Delta\Gamma$ ἴση ἐστὶ τῇ BZ . καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ $B\Gamma$ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ E , εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Δ , τὸ ἄρα ὑπὸ $B\Delta$, $\Delta\Gamma$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $E\Delta$ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $E\Gamma$ τετραγώνῳ.
 10 καὶ τὰ τετραπλάσια· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν $B\Delta$, $\Delta\Gamma$ μετὰ τοῦ τετραπλασίου τοῦ ἀπὸ τῆς ΔE ἴσον ἐστὶ τῷ τετράκις ἀπὸ τῆς $E\Gamma$ τετραγώνῳ. ἀλλὰ τῷ μὲν τετραπλασίῳ τοῦ ὑπὸ τῶν $B\Delta$, $\Delta\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς A τετράγωνον, τῷ δὲ τετραπλασίῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔE
 15 ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔZ τετράγωνον· διπλασίων γάρ ἐστιν ἡ ΔZ τῆς ΔE . τῷ δὲ τετραπλασίῳ τοῦ ἀπὸ τῆς $E\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $B\Gamma$ τετράγωνον· διπλασίων γάρ ἐστι πάλιν ἡ $B\Gamma$ τῆς ΓE . τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν A , ΔZ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $B\Gamma$ τετραγώνῳ.
 20 ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς $B\Gamma$ τοῦ ἀπὸ τῆς A μείζον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔZ · ἡ $B\Gamma$ ἄρα τῆς A μείζον δύναται τῇ ΔZ . δεικτέον, ὅτι καὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ $B\Gamma$ τῇ ΔZ . ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ $B\Delta$ τῇ $\Delta\Gamma$ μήκει, σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $B\Gamma$ τῇ $\Gamma\Delta$ μήκει. ἀλλὰ ἡ $\Gamma\Delta$ ταῖς
 25 $\Gamma\Delta$, BZ ἐστὶ σύμμετρος μήκει· ἴση γάρ ἐστιν ἡ $\Gamma\Delta$ τῇ BZ . καὶ ἡ $B\Gamma$ ἄρα σύμμετρός ἐστὶ ταῖς BZ , $\Gamma\Delta$ μήκει· ὥστε καὶ λοιπῇ τῇ $Z\Delta$ σύμμετρός ἐστὶν ἡ $B\Gamma$

1. $\Delta\Gamma$] Γ in ras. F. 3. Post ἑαυτῇ add. μήκει Vb, F m. 2. 5. $\Delta\Gamma$] corr. ex $B\Gamma$ m. rec. b. ἐστίν P. 7. ὑπὸ τῶν BFV. 9. ἐστίν P. 10. τά] m. 2 V. τό] τὰ B. $B\Delta$] in ras. m. 1 P. 11. τετράκις Theon (BFVb). τοῦ] om.



quadrata deficiens, et sit $B\Delta \times \Delta\Gamma$ [u. lemma], et $B\Delta$, $\Delta\Gamma$ longitudine commensurabiles sint. dico, $B\Gamma^2$ excedere A^2 quadrato rectae sibi

commensurabilis.

nam $B\Gamma$ in puncto E in duas partes aequales sectetur, et ponatur $EZ = \Delta E$. itaque $\Delta\Gamma = BZ$. et quoniam recta $B\Gamma$ in E in partes aequales secta est, in Δ autem in inaequales, erit [II, 5]

$$B\Delta \times \Delta\Gamma + E\Delta^2 = E\Gamma^2.$$

et quadrupla eodem modo; quare

$$4 B\Delta \times \Delta\Gamma + 4 \Delta E^2 = 4 E\Gamma^2.$$

uerum $A^2 = 4 B\Delta \times \Delta\Gamma$, $\Delta Z^2 = 4 \Delta E^2$ (nam $\Delta Z = 2 \Delta E$), $B\Gamma^2 = 4 E\Gamma^2$ (nam rursus $B\Gamma = 2 \Gamma E$). itaque

$$A^2 + \Delta Z^2 = B\Gamma^2$$

quare $B\Gamma^2$ excedit A^2 quadrato ΔZ^2 . demonstrandum, $B\Gamma$, ΔZ commensurabiles esse. nam quoniam $B\Delta$, $\Delta\Gamma$ longitudine commensurabiles sunt, $B\Gamma$ et $\Gamma\Delta$ longitudine commensurabiles sunt [prop. XV]. uerum $\Gamma\Delta$ rectis $\Gamma\Delta$, BZ longitudine commensurabilis est; nam $\Gamma\Delta = BZ$. quare etiam $B\Gamma$ rectis BZ , $\Gamma\Delta$ longitudine commensurabilis est [prop. XII]. quare $B\Gamma$ etiam

Theon (BFVb). $E\Delta$ FVb. $\xi\alpha$ BF. 12. ΓE F. $\tau\epsilon\tau\rho\alpha\pi\lambda\alpha\sigma\iota\sigma$ τοῦ $\tau\epsilon\tau\rho\acute{\alpha}\nu\kappa\iota\varsigma$ Theon (BFVb). 13. $\tau\acute{\omega}\nu$] om. b. 14. $\delta\epsilon$] postea ins. F. $\tau\epsilon\tau\rho\acute{\alpha}\nu\kappa\iota\varsigma$, om. τοῦ, Theon (BFVb). 15. $\tau\epsilon\tau\rho\acute{\alpha}\gamma\omega\nu\nu\omicron\nu$ P, corr. m. 1. 16. $Z\Delta$ P. $\tau\epsilon\tau\rho\acute{\alpha}\nu\kappa\iota\varsigma$, om. τοῦ, Theon (BFVb). 18. ΓE] $E\Gamma$ V. 19. A , ΔZ] e corr. V. $\tau\epsilon\tau\rho\alpha\gamma\acute{\omega}\nu\omega$] $\square$ supra scr. m. 1 V. 20. Post ὥστε ras. 2 litt. V. 21. $\tau\eta$] corr. ex τοῦ F. $Z\Delta$ P. 22. $Z\Delta$ P. 23. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ P, corr. m. 2. 24. $\acute{\alpha}\lambda\lambda'$ F. 25. ZB F. 26. $\tau\alpha\acute{\iota}\varsigma$ BZ , $\Gamma\Delta$ $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ $\acute{\sigma}\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\rho\omicron\varsigma$ Theon (BFVb). $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ P. 27. $\mu\acute{\eta}\kappa\epsilon\iota$] η in ras. m. 1 P. $B\Gamma$] in ras. V.

μήκει· ἡ $B\Gamma$ ἄρα τῆς A μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.

Ἀλλὰ δὴ ἡ $B\Gamma$ τῆς A μείζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς A ἴσον
 5 παρὰ τὴν $B\Gamma$ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν $B\Delta$, $\Delta\Gamma$. δεικτέον, ὅτι σύμμετρός ἐστιν ἡ $B\Delta$ τῇ $\Delta\Gamma$ μήκει.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δείξομεν, ὅτι ἡ $B\Gamma$ τῆς A μείζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς $Z\Delta$.
 10 δύναται δὲ ἡ $B\Gamma$ τῆς A μείζον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ $B\Gamma$ τῇ $Z\Delta$ μήκει· ὥστε καὶ λοιπῇ συναμφοτέρῳ τῇ BZ , $\Delta\Gamma$ σύμμετρός ἐστιν ἡ $B\Gamma$ μήκει. ἀλλὰ συναμφοτέρος ἡ BZ , $\Delta\Gamma$ σύμμετρός ἐστι τῇ $\Delta\Gamma$ [μήκει]. ὥστε καὶ ἡ $B\Gamma$ τῇ $\Gamma\Delta$
 15 σύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ διελόντι ἄρα ἡ $B\Delta$ τῇ $\Delta\Gamma$ ἐστι σύμμετρος μήκει.

Ἐὰν ἄρα ᾧσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, καὶ τὰ ἐξῆς.

ιη'.

Ἐὰν ᾧσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ
 20 μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ [μήκει], ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μείζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμ-

2. Post ἑαυτῇ add. μήκει V. 4. τοῦ] in ras. V. 8. ὁμοίως δὴ V. δείξομεν] δει- corr. ex δη- F. 9. Post $Z\Delta$ del. m. 2: οὕτω γὰρ ὑπὸκειται V. 10. μείζον τῆς A P. 11. ἑαυτῆς P. 12. καὶ] m. 2 F. συναμφοτέρῳ] -ω e corr. V. τῇ] corr. ex τῷ F. 14. τῇ $\Delta\Gamma$ σύμμετρός ἐστι Theon (BFVb; τῇ $\Delta\Gamma$ postea ins. F). μήκει] om. P. Dein add. Theon: ἴση γὰρ ἐστὶν ἡ BZ τῇ $\Delta\Gamma$ (BFVb; τῇ corr. in τῆς m. 2 F, τῆς b; $\Gamma\Delta$ F). ὥστε] om. Theon (BFVb). $B\Gamma$ ἄρα Theon (BFVb).

reliquae $Z\Delta$ longitudine commensurabilis est. ergo $B\Gamma^2$ excedit A^2 quadrato rectae sibi commensurabilis.

Iam uero $B\Gamma^2$ excedat A^2 quadrato rectae sibi commensurabilis, et quartae parti quadrati A^2 aequale rectae $B\Gamma$ adplicetur spatium figura quadrata deficiens, et sit $B\Delta \times \Delta\Gamma$ [u. lemma]. demonstrandum, $B\Delta$, $\Delta\Gamma$ longitudine commensurabiles esse.

nam iisdem comparatis similiter demonstrabimus, esse $B\Gamma^2 = A^2 + Z\Delta^2$. $B\Gamma^2$ autem quadrato rectae sibi commensurabilis excedit quadratum A^2 . itaque $B\Gamma$, $Z\Delta$ longitudine commensurabiles sunt. quare $B\Gamma$ etiam reliquae $BZ + \Delta\Gamma$ longitudine commensurabilis est [prop. XV]. uerum $BZ + \Delta\Gamma$ rectae $\Delta\Gamma$ commensurabilis est [prop. VI]. quare etiam $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ longitudine commensurabiles sunt [prop. XII]. itaque etiam dirimendo $B\Delta$, $\Delta\Gamma$ longitudine commensurabiles sunt.

Ergo si duae rectae inaequales datae sunt, et quae sequuntur.

XVIII.

Si duae rectae inaequales datae sunt, et quartae parti quadrati minoris aequale spatium maiori adplicatur figura quadrata deficiens, quod eam in partes incommensurabiles diuidat, maior quadrata minorem excedet quadrato rectae sibi incommensurabilis. et si maior quadrata minorem excedit quadrato rectae sibi

σύμμετρος ἐστὶ τῇ $\Gamma\Delta$ Theon (BFVb; $\Delta\Gamma$ V). 15. μήκει· καί] om. Theon (BFVb). 17. καὶ τὰ ἐξῆς] τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῆναι ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ τὰ ἐξῆς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι V. 18. κ' B, ιγ' mg. 19. ὡσὶν B. 20. ἐλάττωτος F. 22. μήκει] om. P, μήκη F. 23. ἐλάττωτος F. τό F. συμμέτρον F.

μέτρου ἐαυτῇ. καὶ ἐὰν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος
 μείζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἐαυτῇ, τῷ δὲ
 τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν
 μείζονα παραβληθῇ ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ,
 5 εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ [μήκει].

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ $A, B\Gamma$, ὧν μείζων
 ἡ $B\Gamma$, τῷ δὲ τετάρτῳ [μέρει] τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος
 τῆς A ἴσον παρὰ τὴν $B\Gamma$ παραβεβλήσθω ἑλλείπον
 εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν $B\Delta\Gamma$, ἀσύμ-
 10 μετρος δὲ ἔστω ἡ $B\Delta$ τῇ $\Delta\Gamma$ μήκει· λέγω, ὅτι ἡ $B\Gamma$
 τῆς A μείζον δύνатаι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἐαυτῇ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων τῷ πρότερον
 ὁμοίως δεῖξομεν, ὅτι ἡ $B\Gamma$ τῆς A μείζον δύνатаι τῷ
 ἀπὸ τῆς $Z\Delta$. δεικτέον [οὖν], ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν
 15 ἡ $B\Gamma$ τῇ ΔZ μήκει. ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ
 $B\Delta$ τῇ $\Delta\Gamma$ μήκει, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $B\Gamma$
 τῇ $\Gamma\Delta$ μήκει. ἀλλὰ ἡ $\Delta\Gamma$ σύμμετρός ἐστι συναμ-
 φοτέραις ταῖς $BZ, \Delta\Gamma$. καὶ ἡ $B\Gamma$ ἄρα ἀσύμμετρός
 ἐστὶ συναμφοτέραις ταῖς $BZ, \Delta\Gamma$. ὥστε καὶ λοιπῇ τῇ
 20 $Z\Delta$ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ $B\Gamma$ μήκει. καὶ ἡ $B\Gamma$ τῆς A
 μείζον δύνатаι τῷ ἀπὸ τῆς $Z\Delta$. ἡ $B\Gamma$ ἄρα τῆς A
 μείζον δύνатаι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἐαυτῇ.

Δυνάσθω δὲ πάλιν ἡ $B\Gamma$ τῆς A μείζον τῷ ἀπὸ
 ἀσυμμέτρου ἐαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς A ἴσον
 25 παρὰ τὴν $B\Gamma$ παραβεβλήσθω ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ,

1. καὶ — 2. ἐαυτῇ] om. b. 1. μείζον V, sed corr. ἐλάτ-
 τονος F. 2. συμμέτρου F, et B, corr. m. 2. 3. ἐλάττονος F.
 5. διαιρεῖ P. μήκει] om. P, μήκη F. 7. ἐστὶν ἡ F. μέρει]
 mg. m. 1 P. τοῦ] τῷ F. ἐλάττονος F. 8. τῆς] τῇ F. 9.
 $B\Gamma\Delta$ b; $B\Delta, \Delta\Gamma$ V ($\Delta\Gamma$ in ras.), F, P m. rec. 11. συμ-
 μέτρου B, corr. m. rec. 12. τῷ] m. rec. B; τό P, corr. m. 2.
 προτέρῳ F. 14. ΔZ V. οὖν] om. P. ὅτι καὶ P. 15.

incommensurabilis, et spatium quartae parti quadrati minoris aequale maiori adplicatur figura quadrata deficiens, eam in partes incommensurabiles diuidit.

Sint duae rectae inaequales $A, B\Gamma$, quarum maior sit $B\Gamma$, quartae autem parti quadrati minoris A aequale spatium rectae $B\Gamma$ adplicetur figura quadrata deficiens, et sit $B\Delta \times \Delta\Gamma$ [u. lemma p. 46], et $B\Delta, \Delta\Gamma$ longitudine incommensurabiles sint. dico, $B\Gamma^2$ excedere A^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis.

iisdem enim, quae in priore propositione, comparatis similiter demonstrabimus, esse $B\Gamma^2 = A^2 + Z\Delta^2$. demonstrandum, $B\Gamma, \Delta Z$ longitudine incommensurabiles esse. nam quoniam $B\Delta, \Delta\Gamma$ longitudine incommensurabiles sunt, etiam $B\Gamma, \Gamma\Delta$ longitudine incommensurabiles sunt [prop. XVI]. uerum $\Delta\Gamma$ rectae $BZ + \Delta\Gamma$ commensurabilis est [prop. VI]. quare etiam $B\Gamma$ rectae $BZ + \Delta\Gamma$ incommensurabilis est [prop. XIII]. itaque $B\Gamma$ etiam reliquae $Z\Delta$ longitudine incommensurabilis est [prop. XVI]; et $B\Gamma^2 = A^2 + Z\Delta^2$. ergo $B\Gamma^2$ excedit A^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis.

Iam rursus $B\Gamma^2$ excedat A^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis, et spatium aequale $\frac{1}{4}A^2$ rectae $B\Gamma$ adplicetur figura quadrata deficiens, et sit $B\Delta \times \Delta\Gamma$.

$Z\Delta$ B. 16. μήκει] om. Vb, m. 2 B. ἄρα] om. V. ἐστίν P, comp. F. καί] m. 2 F. 17. $\Gamma\Delta$] in ras. F. ἀλλ' F. ἥ] supra scr. m. 1 V. ἀσύμμετρος F. 18. καί — 19. $\Delta\Gamma$] m. 2 B. 20. $Z\Delta$] " $\Delta'Z$ F. $B\Gamma$] (prius) ΓB V. 21. $B\Gamma$] B in ras. m. 1 B. 22. συμμέτρον B, corr. m. 2; item lin. 24. 24. τοῦ] τῷ F.

καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν $B\Delta$, $\Delta\Gamma$. δεικτέον, ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ $B\Delta$ τῇ $\Delta\Gamma$ μήκει.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δείξομεν, ὅτι ἡ $B\Gamma$ τῆς A μείζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς $Z\Delta$. ἀλλὰ
 5 ἡ $B\Gamma$ τῆς A μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ $B\Gamma$ τῇ $Z\Delta$ μήκει· ὥστε καὶ λοιπῇ συναμφοτέρῳ τῇ BZ , $\Delta\Gamma$ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ $B\Gamma$. ἀλλὰ συναμφοτέρος ἡ BZ , $\Delta\Gamma$ τῇ $\Delta\Gamma$ σύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ ἡ $B\Gamma$ ἄρα τῇ $\Delta\Gamma$ ἀσύμμετρός
 10 ἐστὶ μήκει· ὥστε καὶ διελόντι ἡ $B\Delta$ τῇ $\Delta\Gamma$ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει.

Ἐὰν ἄρα ὥσι δύο εὐθεῖαι, καὶ τὰ ἐξῆς.

Λήμμα.

Ἐπεὶ δέδεικται, ὅτι αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ
 15 δυνάμει [εἰσὶ σύμμετροι], αἱ δὲ δυνάμει οὐ πάντως καὶ μήκει, ἀλλὰ δὴ δύνανται μήκει καὶ σύμμετροι εἶναι καὶ ἀσύμμετροι, φανερόν, ὅτι, ἐὰν τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ σύμμετρός τις ᾗ μήκει, λέγεται ῥητὴ καὶ σύμμετρος αὐτῇ οὐ μόνον μήκει, ἀλλὰ καὶ δυνάμει,
 20 ἐπεὶ αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει. ἐὰν δὲ τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ σύμμετρός τις ᾗ δυνάμει, εἰ μὲν καὶ μήκει, λέγεται καὶ οὕτως ῥητὴ καὶ σύμμετρος αὐτῇ

1. $\Delta\Gamma$] m. 2 B. 2. ἡ ΔB ἐστὶν F. 4. ΔZ V. ἀλλ' FV. 5. συμμέτρον F, corr. m. 2. 6. ἑαυτῆς P, corr. m. 1. ἀσύμμετρα P, corr. m. 1. ΔZ V. 8. τῇ $\Delta\Gamma$] m. 2 F. ἀσύμμετρος F, sed corr. 9. ἐστὶν P. καί] om. P. καί — 10. μήκει] mg. F. 10. Ante ὥστε del. ἡ $B\Gamma$ ἄρα τῇ $\Delta\Gamma$ m. 1 P. 12. ὥσιν B. Post εὐθεῖαι add. ἀνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ V. 13. λήμμα] om. PBb. 14. ἐπεὶ δὲ V. 15. εἰσὶ σύμμετροι] om. P. οὐ] σύμμετροι οὐ P. 16. ἀλλὰ — μήκει] mg. m. 1 P. δι'] δηλαδὴ BVb, δὴ δηλαδ', del. δὴ, F. καὶ μήκει BFVb.

demonstrandum, $B\Delta$ et $\Delta\Gamma$ longitudine incommensurabiles esse.

iisdem enim comparatis similiter demonstrabimus, esse $B\Gamma^2 = A^2 + Z\Delta^2$. $B\Gamma^2$ autem A^2 excedit quadrato rectae sibi incommensurabilis. itaque $B\Gamma$, $Z\Delta$ longitudine incommensurabiles sunt. quare $B\Gamma$ etiam reliquae $BZ + \Delta\Gamma$ incommensurabilis est [prop. XVI]. uerum $BZ + \Delta\Gamma$ rectae $\Delta\Gamma$ longitudine commensurabilis est [prop. VI]. quare etiam $B\Gamma$ rectae $\Delta\Gamma$ longitudine incommensurabilis est [prop. XIII]. itaque etiam dirimendo $B\Delta$ et $\Delta\Gamma$ longitudine incommensurabiles sunt [prop. XVI].

Ergo si duae rectae, et quae sequuntur.

Lemma.

Quoniam demonstratum est [prop. IX coroll.], rectas longitudine commensurabiles semper etiam potentia commensurabiles esse, rectas autem potentia commensurabiles non semper etiam longitudine, sed posse longitudine tum commensurabiles esse tum incommensurabiles, adparet, si recta aliqua rationali propositae longitudine commensurabilis sit, eam rationalem eique commensurabilem uocari non modo longitudine, sed etiam potentia, quoniam rectae longitudine commensurabiles semper etiam potentia commensurabiles sunt; sin recta rationali propositae potentia commensurabilis sit, si etiam longitudine sit commensurabilis, eam sic quoque rationalem eique longitudine et potentia commensurabilem uocari; sin rursus recta rationali

19. $\alpha\tilde{\nu}\tau\eta$ F. 20. $\acute{\epsilon}\pi\epsilon\iota\ \alpha\acute{\iota}$] $\alpha\acute{\iota}\ \gamma\acute{\alpha}\rho$ Theon (BFVb). 22.
 $\kappa\alpha\acute{\iota}$] (alt.) m. 2 B. $\alpha\tilde{\nu}\tau\eta$ F.

μήκει καὶ δυνάμει· εἰ δὲ τῇ ἐκκειμένῃ πάλιν ῥητῇ
σύμμετρος τις οὕσα δυνάμει μήκει αὐτῇ ἢ ἀσύμμετρος,
λέγεται καὶ οὕτως ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος.

ιθ'.

5 Τὸ ὑπὸ ῥητῶν μήκει συμμέτρων κατὰ τινὰ
τῶν προειρημένων τρόπων εὐθειῶν περιεχό-
μενον ὀρθογώνιον ῥητόν ἐστιν.

Ἦν γὰρ ῥητῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τῶν
AB, BΓ ὀρθογώνιον περιεχέσθω τὸ AΓ· λέγω, ὅτι
10 ῥητόν ἐστι τὸ AΓ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετραγώνον τὸ AΔ·
ῥητόν ἄρα ἐστὶ τὸ AΔ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρος ἐστὶν ἡ
AB τῇ BΓ μήκει, ἴση δὲ ἐστὶν ἡ AB τῇ BΔ, σύμ-
μετρος ἄρα ἐστὶν ἡ BΔ τῇ BΓ μήκει. καὶ ἐστὶν ὥς
15 ἡ BΔ πρὸς τὴν BΓ, οὕτως τὸ ΔA πρὸς τὸ AΓ. σύμ-
μετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔA τῷ AΓ. ῥητόν δὲ τὸ ΔA·
ῥητόν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ AΓ.

Τὸ ἄρα ὑπὸ ῥητῶν μήκει συμμέτρων, καὶ τὰ ἐξῆς.

κ'.

20 Ἐὰν ῥητόν παρὰ ῥητὴν παραβληθῇ, πλάτος
ποιεῖ ῥητὴν καὶ σύμμετρον τῇ, παρ' ἣν παρὰ-
κεῖται, μήκει.

2. οὕσα τις FV. δυνάμει] -ει e corr., seq. spat. 2 litt. F.
αὐτῇ ἢ] ἡ αὐτῇ BFb, ἢ V. 3. οὕτως] comp. e corr. F. μόνον]
comp. mg. V (euan.). Seq. alt. lemma, u. app. 4. ιθ'] sic F,
sed infra κ'; mg. τημα β' Fb. 5. μήκει — 6. προ-] in ras.
m. 2 B. 5. εὐθειῶν κατὰ Theon (BFVb). 6. τρόπον? V. εὐ-
θειῶν] om. Theon (BFVb). 8. εὐθειῶν τῶν] in ras. V. 12.
τὸ AΔ ἄρα ῥητόν ἐστιν F. 13. AB] (alt.) BΔB. BΔ] ΔB in
ras. P, BA in ras. B. σύμμετρος — 14. BΓ] om. B; mg.
m. 2: ἴση lin. 13 — μήκει lin. 14, ut nos. 15. οὕτω V. τό]

propositae commensurabilis potentia, eadem longitudine ei incommensurabilis sit, sic quoque eam rationalem uocari potentia tantum commensurabilem.

XIX.

Rectangulum comprehensum rectis rationalibus longitudineque commensurabilibus secundum aliquem modorum, quos diximus [u. lemma], rationale est.

Rectis enim rationalibus longitudine commensurabilibus AB , $B\Gamma$ rectangulum comprehendatur $A\Gamma$. dico, $A\Gamma$ rationale esse.

 nam in AB construatur quadratum $A\Delta$. itaque $A\Delta$ rationale est [def. 4]. et quoniam AB , $B\Gamma$ longitudine commensurabiles sunt, et $AB = B\Delta$, $B\Delta$ et $B\Gamma$ longitudine commensurabiles sunt. et $B\Delta : B\Gamma = \Delta A : A\Gamma$ [VI, 1]. itaque ΔA , $A\Gamma$ commensurabilia sunt [prop. XI]. uerum ΔA rationale est. itaque etiam $A\Gamma$ rationale est [def. 4].

Ergo rectangulum comprehensum rectis rationalibus longitudineque commensurabilibus, et quae sequuntur.

XX.

Si spatium rationale rectae rationali adplicatur, latitudinem rationalem facit et ei longitudine commensurabilem, cui adplicatum est.

(alt.) corr. ex τήν m. rec. P. $A\Gamma$] e corr. P. 16. ἐστίν P, ἐστὶ καὶ V. τό] τῷ b. $A\Delta$ F. 17. ἐστίν P, om. FV. 18. μήκει συμμετρῶν] om. BVb. Ante καὶ add. εὐθειῶν F. καὶ τὰ ἐξῆς] om. PV. 19. κ'] seq. ras. 1 litt. B, κα' F. 21. ποιεῖ] -εῖ e corr. m. 1 F. τῇ] corr. ex τι m. rec. b.

Ῥητὸν γὰρ τὸ $ΑΓ$ παρὰ ῤητὴν κατὰ τινα πάλιν τῶν προειρημένων τρόπων τὴν $ΑΒ$ παραβεβλήσθω πλάτος ποιοῦν τὴν $ΒΓ$. λέγω, ὅτι ῤητὴ ἐστὶν ἡ $ΒΓ$ καὶ σύμμετρος τῇ $ΒΑ$ μήκει.

- 5 Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ τετράγωνον τὸ $ΑΔ$. ῤητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΔ$. ῤητὸν δὲ καὶ τὸ $ΑΓ$. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΔΑ$ τῷ $ΑΓ$. καὶ ἐστὶν ὡς τὸ $ΔΑ$ πρὸς τὸ $ΑΓ$, οὕτως ἡ $ΔΒ$ πρὸς τὴν $ΒΓ$. σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $ΔΒ$ τῇ $ΒΓ$. ἴση δὲ ἡ $ΔΒ$ τῇ
- 10 $ΒΑ$. σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ $ΑΒ$ τῇ $ΒΓ$. ῤητὴ δὲ ἐστὶν ἡ $ΑΒ$. ῤητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $ΒΓ$ καὶ σύμμετρος τῇ $ΑΒ$ μήκει.

Ἐὰν ἄρα ῤητὸν παρὰ ῤητὴν παραβληθῇ, καὶ τὰ ἐξῆς.

κά'.

- 15 Τὸ ὑπὸ ῤητῶν δυνάμει μόνον συμμετρῶν εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστὶν, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστὶν, καλεῖσθω δὲ μέση.

- Ἐπὶ γὰρ ῤητῶν δυνάμει μόνον συμμετρῶν εὐθειῶν
- 20 τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ ὀρθογώνιον περιεχέσθω τὸ $ΑΓ$. λέγω, ὅτι ἄλογόν ἐστὶ τὸ $ΑΓ$, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστὶν, καλεῖσθω δὲ μέση.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ τετράγωνον τὸ $ΑΔ$. ῤητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΔ$. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστὶν

1. ῤητὴν τὴν $ΑΒ$ V. 2. εἰρημένων Theon (BFVb). τὴν $ΑΒ$] om. V. 3. ποῶν P. 4. $ΑΒ$ P. 5. $ΑΒ$] corr. ex $ΑΓ$ m. 2 F. 6. ἐστὶν P. $ΑΓ$] $ΓΑ$ F. 7. ἐστὶν P. $ΔΑ$] $ΑΔ$ V. 8. τήν] om. BFb. 9. ἐστὶν P. $ΔΒ$] (alt.) post ras. V, $ΒΔ$ F. 10. $ΒΑ$] $Α$ e corr. m. 1 P. ἄρα — τῇ] in ras. m. 1 P. 12. $ΒΑ$ BVb. 13. ἄν F. παρὰ ῤητῇ] om. F. παραβληθῇ] om. P. Seq. lemma, u. app. 14.

Rationale enim spatium AG rectae AB rationali rursus secundum aliquem modorum, quos diximus [u. lemma p. 56], adplicetur latitudinem faciens $B\Gamma$. dico, $B\Gamma$ rationalem esse et rectae BA longitudine commensurabilem.

construatur enim in AB quadratum AA . AA igitur rationale est [def. 4]. uerum etiam AG rationale est. itaque AA , AG commensurabilia sunt. et $AA:AG = AB:B\Gamma$ [VI, 1]. itaque AB , $B\Gamma$ commensurabiles sunt [prop. XI]. uerum $AB = BA$. itaque etiam AB , $B\Gamma$ commensurabiles sunt. sed AB rationalis est. itaque etiam $B\Gamma$ rationalis est et rectae AB longitudine commensurabilis [def. 3].

Ergo si spatium rationale rectae rationali adplicatur, et quae sequuntur.

XXI.

Rectangulum rectis rationalibus potentia tantum commensurabilibus comprehensum irrationale est, et recta ei aequalis quadrata irrationalis est, uocetur autem media.

Rectis enim rationalibus et potentia tantum commensurabilibus AB , $B\Gamma$ rectangulum AG comprehendatur. dico, rectangulum AG irrationale esse, et rectam ei aequalem quadratam irrationalem; uocetur autem media.

nam in AB quadratum construatur AA . itaque AA rationale est [def. 4]. et quoniam AB , $B\Gamma$ longi-

$\alpha\alpha'$] α in ras. m. 1 B, $\alpha\beta'$ F et sic deinceps. 15. Post $\delta\eta\tau\omega\upsilon\upsilon$ add. $\delta\upsilon\omicron$ B. 16. $\xi\sigma\tau\iota$ PBV, comp. Fb. 17. $\xi\sigma\tau\iota$ BV, comp. Fb, $\xi\sigma\tau\alpha\iota$ P. 22. $\xi\sigma\tau\iota$ PBV, comp. Fb.

ἡ AB τῇ $BΓ$ μήκει· δυνάμει γὰρ μόνον ὑπόκεινται
 σύμμετροι· ἴση δὲ ἡ AB τῇ $BΔ$, ἀσύμμετρος ἄρα
 ἐστὶ καὶ ἡ $ΔB$ τῇ $BΓ$ μήκει. καὶ ἐστὶν ὡς ἡ $ΔB$
 πρὸς τὴν $BΓ$, οὕτως τὸ $ΔΔ$ πρὸς τὸ $ΑΓ$. ἀσύμμε-
 5 τρον ἄρα [ἐστὶ] τὸ $ΔΔ$ τῷ $ΑΓ$. ῥητὸν δὲ τὸ $ΔΑ$.
 ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΓ$. ὥστε καὶ ἡ δυναμένη τὸ
 $ΑΓ$ [τουτέστιν ἡ ἴσον αὐτῷ τετράγωνον δυναμένη]
 ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ μέση· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

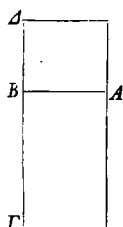
Λήμμα.

10 Ἐὰν ὡσι δύο εὐθεῖαι, ἐστὶν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν
 δευτέραν, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν
 δύο εὐθειῶν.

ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ZE , EH . λέγω, ὅτι ἐστὶν
 ὡς ἡ ZE πρὸς τὴν EH , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZE πρὸς
 15 τὸ ὑπὸ τῶν ZE , EH .

ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ZE τετράγωνον τὸ $ΔZ$,
 καὶ συμπληρώσθω τὸ $HΔ$. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ZE
 πρὸς τὴν EH , οὕτως τὸ $ZΔ$ πρὸς τὸ $ΔH$, καὶ ἐστὶ
 τὸ μὲν $ZΔ$ τὸ ἀπὸ τῆς ZE , τὸ δὲ $ΔH$ τὸ ὑπὸ τῶν
 20 $ΔE$, EH , τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ZE , EH , ἐστὶν ἄρα
 ὡς ἡ ZE πρὸς τὴν EH , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZE πρὸς
 τὸ ὑπὸ τῶν ZE , EH . ὁμοίως δὲ καὶ ὡς τὸ ὑπὸ τῶν

1. $BΓ$] $ΓB$ V. γάρ] comp. F, supra scr. δέ. 3. ἐστὶν B.
 $ΔB$] (alt.) $BΔ$ P. 4. $ΑΓ$] corr. ex AB m. rec. P. 5. ἐστὶν
 B, om P. $ΑΔ$ FV. $ΑΔ$ F. 6. ἐστὶν P. 7. ἡ] supra scr.
 m. 2 V. 8. ἐστὶ PV, comp. Fb. Ante ὅπερ add. P:
 διὰ τὸ (mg. m. 1) τὴν ἴσον ἀναγράφουσαν τετράγωνον τῷ $ΑΓ$
 χωρίῳ, ἣν καλεῖ μέσην, μέσην ἀνάλογον εἶναι τῶν AB , $BΓ$;
 eodem loco Theon: διὰ τὸ τὸ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον ἴσον εἶναι
 τῷ ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ καὶ μέσην ἀνάλογον αὐτὴν γίνεσθαι (γι-
 νεσθαι BV) τῶν AB , $BΓ$ (BFVb). 9. λήμμα γ V (cfr. app.).
 10. ὡσιν B. ὡς] δὲ ὡς F. 11. πρὸς] supra scr. m. 1 F.



tudine incommensurabiles sunt (supposuimus enim, eas potentia tantum commensurabiles esse), et $AB = B\Delta$, etiam ΔB , $B\Gamma$ longitudine incommensurabiles sunt. et $\Delta B : B\Gamma = A\Delta : A\Gamma$ [VI, 1]. itaque ΔA , $A\Gamma$ incommensurabilia sunt [prop. XI]. uerum ΔA rationale est; quare $A\Gamma$ irrationale est [def. 4]. itaque etiam recta spatio $A\Gamma$ aequalis quadrata¹⁾ irrationalis est [def. 4]; uocetur autem media; quod erat demonstrandum.

Lemma.

Datis duabus rectis est ut prima ad secundam, ita quadratum primae ad rectangulum duarum illarum rectarum.

Datae sint duae rectae ZE , EH . dico, esse

$$ZE : EH = ZE^2 : ZE \times EH.$$

Z E H describatur enim in ZE quadratum ΔZ , et expleatur $H\Delta$. iam quoniam est $ZE : EH = Z\Delta : \Delta H$ [VI, 1], et $Z\Delta = ZE^2$, $\Delta H = \Delta E \times EH = ZE \times EH$, erit

$$ZE : EH = ZE^2 : ZE \times EH.$$

1) Uerba *τουτέστιν* — *δυναμένη* lin. 7, quae nihil ex-
plicant, subditicia habeo (pro *δυναμένη* Augustus coni. *ἀναγκα-
φουσα*). quae adiiciuntur lin. 8 (u. not. crit.) in P apertissime
scholiastae sunt (*καλεῖ*); quare etiam additamentum simile codd.
Theoninorum ipsi Theoni, non Euclidi tribuendum est.

$\acute{\upsilon}\pi\acute{o}$] corr. ex $\acute{\alpha}\pi\acute{o}$ Fb. 14. $\pi\rho\acute{o}s$ — ZE] mg. m. 2 B. EH] HE F. 17. $\tau\acute{o}$] corr. ex $\tau\eta\varsigma$ F. 18. $\tau\acute{\eta}\nu$] om. b. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ P. 19. $\tau\acute{o}$ $\acute{\upsilon}\pi\acute{o}$ — 20. *τουτέστιν*] supra scr. F. 20. *τουτέστιν* P. 22. $\kappa\alpha\iota$ $\acute{\omega}s$] ins. m. 2 F.

HE, EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς EZ, τουτέστιν ὡς τὸ HΔ πρὸς τὸ ZΔ, οὕτως ἡ HE πρὸς τὴν EZ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κβ'.

5 Τὸ ἀπὸ μέσης παρὰ ρητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ρητὴν καὶ ἀσύμμετρον τῇ, παρ' ἣν παράκειται, μήκει.

Ἔστω μέση μὲν ἡ A, ρητὴ δὲ ἡ ΓΒ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς A ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω χωρίον ὀρθο-
10 γώνιον τὸ ΒΔ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΔ· λέγω, ὅτι ρητὴ ἐστὶν ἡ ΓΔ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΒ μήκει.

Ἐπεὶ γὰρ μέση ἐστὶν ἡ A, δύναται χωρίον περι-
εχόμενον ὑπὸ ρητῶν δυνάμει μόνον συμμετρων.
δυνάσθω τὸ HZ. δύναται δὲ καὶ τὸ ΒΔ· ἴσον ἄρα
15 ἐστὶ τὸ ΒΔ τῷ HZ. ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ἰσογώνιον·
τῶν δὲ ἴσων τε καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων
ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας·
ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν EH, οὕτως
ἡ EZ πρὸς τὴν ΓΔ. ἐστὶν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς
20 ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς EH, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς
τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ. σύμμετρον δὲ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ
τῷ ἀπὸ τῆς EH· ρητὴ γὰρ ἐστὶν ἑκατέρα αὐτῶν· σύμ-
μετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς EZ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ.
ρητὸν δὲ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς EZ· ρητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ
25 τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ· ρητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ. καὶ ἐπεὶ
ἀσύμμετρός ἐστὶν ἡ EZ τῇ EH μήκει· δυνάμει γὰρ
μόνον εἰσὶ σύμμετροι· ὡς δὲ ἡ EZ πρὸς τὴν EH,

2. ZΔ] corr. ex ΔZ V, ΔZ BFb. HE] in ras. V. ὅπερ
ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. Theon (BFVb). 6. σύμμετρον P,
corr. m. 2. τῇ] corr. ex τι m. rec. b. 8. καί — 9. χωρίον]
in ras. F. 9. ὀρθογώνιον] m. rec. V. 13. μόνον] in ras. F.

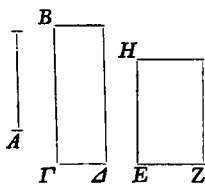
similiter etiam $HE \times EZ : EZ^2 = HA : ZA = HE : EZ$;
quod erat demonstrandum.

XXII.

Quadratum mediae rationali adplicatum latitudinem facit rationalem et ei, cui adplicatum est, longitudine incommensurabilem.

Sit media A , rationalis autem ΓB , et quadrato A^2 aequale rectae $B\Gamma$ adplicetur spatium rectangulum $B\Delta$ latitudinem faciens $\Gamma\Delta$. dico, $\Gamma\Delta$ rationalem esse et rectae ΓB longitudine incommensurabilem.

nam quoniam media est A , quadrata aequalis est spatio rectis potentia tantum commensurabilibus comprehenso [prop. XXI]. sit quadrata aequalis HZ . uerum quadrata etiam spatio $B\Delta$ aequalis est. itaque $B\Delta = HZ$. uerum idem ei aequiangulum est. parallelogrammorum autem aequalium et aequiangulorum latera aequales angulos comprehendunt in contraria propor-



tione sunt [VI, 14]. itaque $B\Gamma : EH = EZ : \Gamma\Delta$. quare etiam $B\Gamma^2 : EH^2 = EZ^2 : \Gamma\Delta^2$ [VI, 20]. uerum ΓB^2 et EH^2 commensurabilia sunt; nam utraque rationalis est. quare etiam EZ^2 et $\Gamma\Delta^2$ commensurabilia sunt

[prop. XI]. uerum EZ^2 rationale est; quare etiam $\Gamma\Delta^2$ rationale est [def. 4]. itaque $\Gamma\Delta$ rationalis est. et quoniam EZ , EH longitudine incommensurabiles sunt (nam potentia tantum commensurabiles sunt), et est

14. δύναται] δύνασθαι b. ΔB P. 15. ἐστίν P. ΔB P.
ἐστίν PB. αὐτό FV. 16. τε] corr. ex δέ m. 1 P, om.
FV. 21. ΓB] e corr. V, $B\Gamma$ F. 23. ἐστίν P. 24. ἐστίν P.
ἐστίν P. 25. ἐστίν] postea ins. F. 26. HE F.

οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ZE, EH ,
 ἀσύμμετρον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ἀπὸ τῆς EZ τῷ ὑπὸ τῶν
 ZE, EH . ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς EZ σύμμετρόν ἐστι
 τὸ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$. ῥηταὶ γάρ εἰσι δυνάμει· τῷ δὲ ὑπὸ
 5 τῶν ZE, EH σύμμετρόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν $\Delta\Gamma, \Gamma B$.
 ἴσα γάρ ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς A ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ
 τὸ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$ τῷ ὑπὸ τῶν $\Delta\Gamma, \Gamma B$. ὥς δὲ τὸ ἀπὸ
 τῆς $\Gamma\Delta$ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν $\Delta\Gamma, \Gamma B$, οὕτως ἐστὶν ἡ
 $\Delta\Gamma$ πρὸς τὴν ΓB · ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ $\Delta\Gamma$ τῇ
 10 ΓB μήκει. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $\Gamma\Delta$ καὶ ἀσύμμετρος τῇ
 ΓB μήκει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κγ'.

Ἡ τῇ μέσῃ σύμμετρος μέσῃ ἐστίν.

Ἔστω μέσῃ ἡ A , καὶ τῇ A σύμμετρος ἔστω ἡ B .
 15 λέγω, ὅτι καὶ ἡ B μέσῃ ἐστίν.

Ἐκκείσθω γάρ ῥητὴ ἡ $\Gamma\Delta$, καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς
 A ἴσον παρὰ τὴν $\Gamma\Delta$ παραβεβλήσθω χωρίον ὀρθο-
 γώνιον τὸ ΓE πλάτος ποιοῦν τὴν $E\Delta$. ῥητὴ ἄρα
 ἐστὶν ἡ $E\Delta$ καὶ ἀσύμμετρος τῇ $\Gamma\Delta$ μήκει. τῷ δὲ
 20 ἀπὸ τῆς B ἴσον παρὰ τὴν $\Gamma\Delta$ παραβεβλήσθω χωρίον
 ὀρθογώνιον τὸ ΓZ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔZ . ἐπεὶ
 οὖν σύμμετρός ἐστὶν ἡ A τῇ B , σύμμετρόν ἐστι καὶ
 τὸ ἀπὸ τῆς A τῷ ἀπὸ τῆς B . ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ
 τῆς A ἴσον ἐστὶ τὸ $E\Gamma$, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς B ἴσον ἐστὶ
 25 τὸ ΓZ · σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ $E\Gamma$ τῷ ΓZ . καὶ

2. ἐστὶν ἄρα FV. ἐστὶ] om. P. 3. τῷ] corr. ex τό V.
 ἐστὶ] om. V. 4. εἰσιν P. δυνάμει] eras. V, dein add. ὥς
 ἄρα δέδεικται. 5. συμμέτρων P, corr. m. 1. ἐστὶ] om.
 BFb. 6. εἰσι BVb. σύμμετρον F, sed corr. ἐστὶν P. 7.
 ΓB περιεχομένη V. 8. $\Gamma\Delta$] $\Delta\Gamma$ F. 9. ΓB] ΓA b. ἐστὶν]
 om. b. 11. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. BFb, comp. P. 12. κγ']

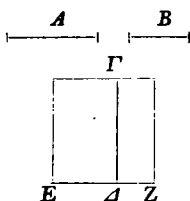
$EZ:EH = EZ^2:ZE \times EH$ [u. lemma], EZ^2 et $ZE \times EH$ incommensurabilia erunt [prop. XI]. uerum EZ^2 et ΓA^2 commensurabilia sunt (nam potentia rationales sunt); et $ZE \times EH$, $\Delta \Gamma \times \Gamma B$ commensurabilia sunt (nam quadrato A^2 aequalia sunt). itaque etiam ΓA^2 et $\Delta \Gamma \times \Gamma B$ incommensurabilia sunt [prop. XIII]. uerum $\Gamma A^2: \Delta \Gamma \times \Gamma B = \Delta \Gamma: \Gamma B$ [u. lemma]. itaque $\Delta \Gamma$, ΓB longitudine incommensurabiles sunt [prop. XI]. ergo ΓA rationalis est et rectae ΓB longitudine incommensurabilis; quod erat demonstrandum.

XXIII.

Recta mediae commensurabilis media est.

Sit media A , et rectae A commensurabilis sit B . dico, etiam B mediam esse.

ponatur enim rationalis ΓA , et quadrato A^2 aequale rectae ΓA adplicetur spatium rectangulum ΓE



latitudinem faciens $E\Delta$. itaque $E\Delta$ rationalis est et rectae ΓA longitudine

incommensurabilis [prop. XXII]. quadrato autem B^2 aequale rectae ΓA

adplicetur spatium rectangulum ΓZ latitudinem faciens ΔZ . iam quoniam

A et B commensurabiles sunt, etiam

A^2 et B^2 commensurabilia sunt. uerum $A^2 = E\Gamma$, $B^2 = \Gamma Z$. itaque $E\Gamma$, ΓZ commensurabilia sunt. et $E\Gamma: \Gamma Z = E\Delta: \Delta Z$ [VI, 1]. itaque $E\Delta$, ΔZ longitudine commen-

om. P. 14. $\xi\sigma\omega$] (alt.) om. BFb. 16. $\tau\phi$] $\tau\phi$ F. 20. $\Delta \Gamma$
 BVb. 21. ΓZ] corr. ex EZ F. $Z\Delta$ P. $\xi\pi\iota$ P, corr. m.
 rec. 22. $\xi\sigma\tau\iota$] postea ins. F, $\xi\sigma\tau\iota\nu$ P. 28. A] corr. ex AB V,
 $A \xi\sigma\tau\iota$ F. 24. $\xi\sigma\tau\iota$] (alt.) om. Vb. 25. ΓZ] (prius) Z in
 ras. m. 1 P.

ἐστὶν ὡς τὸ $ΕΓ$ πρὸς τὸ $ΓΖ$, οὕτως ἡ $ΕΔ$ πρὸς τὴν $ΔΖ$. σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ $ΕΔ$ τῇ $ΔΖ$ μήκει. ῥητὴ δέ ἐστὶν ἡ $ΕΔ$ καὶ ἀσύμμετρος τῇ $ΔΓ$ μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $ΔΖ$ καὶ ἀσύμμετρος τῇ $ΔΓ$ μήκει· αἱ
 5 $ΓΔ$, $ΔΖ$ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἡ δὲ τὸ ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων δυνάμενη μέση ἐστίν. ἡ ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν $ΓΔ$, $ΔΖ$ δυνάμενη μέση ἐστίν· καὶ δύναται τὸ ὑπὸ τῶν $ΓΔ$, $ΔΖ$ ἢ $Β$ · μέση ἄρα ἐστὶν ἡ $Β$.

Πόρισμα.

10

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι τὸ τῷ μέσῳ χωρίῳ σύμμετρον μέσον ἐστίν [δύνανται γὰρ αὐτὰ εὐθεῖαι, αἱ εἰσι δυνάμει σύμμετροι, ὧν ἡ ἑτέρα μέση· ὥστε καὶ ἡ λοιπὴ μέση ἐστίν].

15

Ὁσαύτως δὲ τοῖς ἐπὶ τῶν ῥητῶν εἰρημένοις καὶ ἐπὶ τῶν μέσων ἐξακολουθεῖ, τὴν τῇ μέσῃ μήκει σύμμετρον λέγεσθαι μέσῃν καὶ σύμμετρον αὐτῇ μὴ μόνον μήκει, ἀλλὰ καὶ δυνάμει, ἐπειδὴ περ καθόλου αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει. ἐὰν δὲ τῇ μέσῃ σύμ-
 20 μετρὸς τις ἢ δυνάμει, εἰ μὲν καὶ μήκει, λέγονται καὶ οὕτως μέσαι καὶ σύμμετροι μήκει καὶ δυνάμει, εἰ δὲ δυνάμει μόνον, λέγονται μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι.

4. ἐστίν PB. 5. εἰσιν PB. 6. ἡ δὲ τό] τὸ δὲ BFVb.

Post συμμέτρων add. εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστι καὶ b, F mg. m. 1, V m. 2; deinde seq. αὐτὸ ἄλογόν ἐστι, καλεῖσθω δὲ b, F mg. m. 1; ἡ δυνάμενη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν, καλεῖται δὲ μέση V m. 2. ἡ δυνάμενη BFb, et V (del. punctis). 7. μέση] supra scr. F. μέση ἐστίν] punctis del. V.

ἡ] m. 2 B. δυνάμενη] δυνάμει ἢ b. 8. ἐστὶ Vb, comp. F. 9. ἡ B] (prius) HB Bb. 12. ἐστὶ BV, comp. F. αὐτά] -τά in ras. V, αὐτῷ F, αὐτό αἱ B, αἱ add. m. 2 V. 13. εἰσιν

surabiles sunt [prop. XI]. uerum $E\Delta$ rationalis est et rectae $\Delta\Gamma$ longitudine incommensurabilis. itaque etiam ΔZ rationalis est [def. 3] et rectae $\Delta\Gamma$ longitudine incommensurabilis [prop. XIII]. itaque $\Gamma\Delta$, ΔZ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. recta autem quadrata aequalis spatio rectis potentia tantum commensurabilibus comprehenso media est [prop. XXI]. itaque recta quadrata spatio $\Gamma\Delta \times \Delta Z$ aequalis media est. et $B^2 = \Gamma\Delta \times \Delta Z$. ergo B media est.

Corollarium.

Hinc manifestum est, spatium spatio medio aequale medium esse.¹⁾

Lemma.

Congruenter iis, quae de rationalibus diximus [prop. XVIII coroll.], etiam in mediis sequitur, rectam mediae longitudine commensurabilem mediam uocari ei non modo longitudine, sed etiam potentia commensurabilem, quoniam omnino rectae longitudine commensurabiles semper etiam potentia commensurabiles sunt. sin recta mediae potentia commensurabilis est, si eadem longitudine est commensurabilis, sic quoque mediae et longitudine potentiaque commensurabiles uocantur, sin potentia tantum, mediae potentia tantum commensurabiles uocantur.

1) Sequentia lin. 12—14 obscura sunt et sine dubio subditiua.

PB. 20. *εἰ μὲν* — 21. *δὲ δυνάμει*] om. Fb; post *σύμμετροι* lin. 22 ea hab. V (punctis del., add. *τὸ δὲ ἐξῆς οὐχ εὐρέθη ἐν τῷ βιβλίῳ τοῦ ἑφεσίον καὶ ἐπατήθη?*) et B mg. m. 2 (add. in fine *μόνον*). 22. *μόνον*] (prius) del. m. 2 B. *σύμμετροι*] m. 2 B. Seq. lemma, u. app.

κδ'.

Τὸ ὑπὸ μέσων μήκει συμμετρῶν εὐθειῶν κατὰ τινὰ τῶν εἰρημένων τρόπων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μέσον ἐστίν.

- 5 Ἐπὶ γὰρ μέσων μήκει συμμετρῶν εὐθειῶν τῶν AB , $BΓ$ περιεχέσθω ὀρθογώνιον τὸ $ΑΓ$. λέγω, ὅτι τὸ $ΑΓ$ μέσον ἐστίν.

- Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ $ΑΔ$. μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΔ$. καὶ ἐπεὶ σύμμετρος
10 ἐστὶν ἡ AB τῇ $BΓ$ μήκει, ἴση δὲ ἡ AB τῇ $BΔ$, σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $ΔB$ τῇ $BΓ$ μήκει. ὥστε καὶ τὸ $ΔΑ$ τῷ $ΑΓ$ σύμμετρόν ἐστιν. μέσον δὲ τὸ $ΔΑ$ μέσον ἄρα καὶ τὸ $ΑΓ$. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κε'.

- 15 Τὸ ὑπὸ μέσων δυνάμει μόνον συμμετρῶν εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἥτοι ρητὸν ἢ μέσον ἐστίν.

- Ἐπὶ γὰρ μέσων δυνάμει μόνον συμμετρῶν εὐθειῶν τῶν AB , $BΓ$ ὀρθογώνιον περιεχέσθω τὸ $ΑΓ$.
20 λέγω, ὅτι τὸ $ΑΓ$ ἥτοι ρητὸν ἢ μέσον ἐστίν.

- Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$ τετράγωνα τὰ $ΑΔ$, BE . μέσον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν $ΑΔ$, BE . καὶ ἐκκείσθω ρητὴ ἡ ZH , καὶ τῷ μὲν $ΑΔ$ ἴσον παρατὴν ZH παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμ-
25 μον τὸ $HΘ$ πλάτος ποιοῦν τὴν $ZΘ$, τῷ δὲ $ΑΓ$ ἴσον παρὰ τὴν $ΘM$ παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον παραλλη-

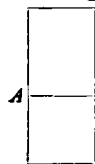
3. κατὰ — τρόπων] om. BFb, supra scr. m. 2 V (κατὰ τινὰ τῶν eras.). 6. περιεχέσθαι B, corr. m. 2. 9. $ΑΔ$] (prius) inter A et $Δ$ ras. 1 litt. V. 11. ἐστίν PB. $ΔB$] e corr. m. 2 V, BΔ F. 12. ἐστι V, comp. Fb. $ΔΑ$] e corr. m. 2 V. 16. εὐθειῶν] m. 2 V. 19. περιεχέσθω ὀρθογώνιον P.

XXIV.

Rectangulum rectis mediis comprehensum secundum aliquem modorum, quos diximus [u. lemma], commensurabilibus medium est.

Mediis enim AB , $B\Gamma$ longitudine commensurabilibus comprehendatur rectangulum $A\Gamma$. dico, $A\Gamma$ medium esse.

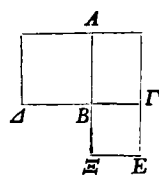
nam in AB quadratum describatur $A\Delta$. itaque $A\Delta$ medium est. et quoniam AB , $B\Gamma$ longitudine Γ commensurabiles sunt, et $AB = B\Delta$, etiam ΔB , $B\Gamma$ longitudine commensurabiles sunt. quare etiam ΔA , $A\Gamma$ commensurabilia sunt [VI, 1; prop. XI]. uerum ΔA medium est. ergo etiam $A\Gamma$ medium est [prop. XXIII coroll.]; quod erat demonstrandum.



XXV.

Rectangulum rectis mediis potentia tantum commensurabilibus comprehensum aut rationale aut medium est.

Rectis enim mediis AB , $B\Gamma$ potentia tantum commensurabilibus comprehendatur rectangulum $A\Gamma$. dico, $A\Gamma$ aut rationale aut medium esse.



nam in AB , $B\Gamma$ quadrata describantur $A\Delta$, BE . itaque utrumque $A\Delta$, BE medium est. et ponatur rationalis ZH , et quadrato $A\Delta$ aequale rectae ZH applicetur parallelogrammum rect-

περιέχεται B, corr. m. 2. 20. ἔστιν ἢ μέσον V. 23.
 ZE F, corr. m. 2. τῶ] corr. ex τό V. 25. τήν] corr. ex
 τό m. 2. F

λόγραμμον τὸ MK πλάτος ποιοῦν τὴν ΘK , καὶ ἔτι
 τῷ BE ἴσον ὁμοίως παρὰ τὴν KN παραβεβλήσθω
 τὸ NA πλάτος ποιοῦν τὴν KA . ἐπ' εὐθείας ἄρα
 εἰσὶν αἱ $Z\Theta$, ΘK , KA . ἐπεὶ οὖν μέσον ἐστὶν ἐκά-
 5 τερον τῶν AD , BE , καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ μὲν AD τῷ
 $H\Theta$, τὸ δὲ BE τῷ NA , μέσον ἄρα καὶ ἐκάτερον τῶν
 $H\Theta$, NA . καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ZH παράκειται ῥητὴ
 ἄρα ἐστὶν ἐκατέρα τῶν $Z\Theta$, KA καὶ ἀσύμμετρος τῇ
 ZH μήκει. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ AD τῷ BE ,
 10 σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ $H\Theta$ τῷ NA . καὶ ἐστὶν
 ὥς τὸ $H\Theta$ πρὸς τὸ NA , οὕτως ἡ $Z\Theta$ πρὸς τὴν KA .
 σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ $Z\Theta$ τῇ KA μήκει. αἱ $Z\Theta$, KA
 ἄρα ῥηταὶ εἰσι μήκει σύμμετροι. ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ
 ὑπὸ τῶν $Z\Theta$, KA . καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν AB τῇ
 15 BA , ἡ δὲ EB τῇ BG , ἐστὶν ἄρα ὥς ἡ AB πρὸς τὴν
 BG , οὕτως ἡ AB πρὸς τὴν $B\Xi$. ἀλλ' ὥς μὲν ἡ AB
 πρὸς τὴν BG , οὕτως τὸ AA πρὸς τὸ AG . ὥς δὲ ἡ
 AB πρὸς τὴν $B\Xi$, οὕτως τὸ AG πρὸς τὸ $ΓΞ$. ἐστὶν
 ἄρα ὥς τὸ AA πρὸς τὸ AG , οὕτως τὸ AG πρὸς τὸ
 20 $ΓΞ$. ἴσον δὲ ἐστὶ τὸ μὲν AD τῷ $H\Theta$, τὸ δὲ AG
 τῷ MK , τὸ δὲ $ΓΞ$ τῷ NA . ἐστὶν ἄρα ὥς τὸ $H\Theta$
 πρὸς τὸ MK , οὕτως τὸ MK πρὸς τὸ NA . ἐστὶν ἄρα
 καὶ ὥς ἡ $Z\Theta$ πρὸς τὴν ΘK , οὕτως ἡ ΘK πρὸς τὴν
 KA . τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $Z\Theta$, KA ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς
 25 ΘK . ῥητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν $Z\Theta$, KA . ῥητὸν ἄρα ἐστὶ
 καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘK . ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘK . καὶ εἰ
 μὲν σύμμετρός ἐστι τῇ ZH μήκει, ῥητὸν ἐστὶ τὸ ΘN .

2. ἴσον — KN] mg. m. 1 F, in textu ἄλλω παρὰ τὴν
 KN . 4. αἱ] corr. ex καὶ F m. 1, supra m. 2 P. 6. NA]
 N e corr. V. ἄρα ἐστί V. 7. NA] MA b et F (M in ras.).
 Ante ῥητὴ ras. 5 litt. V. 8. ἐστίν] ἐστὶ καὶ V. 9. καὶ ἐπεὶ]
 ἐπεὶ οὖν Theon (BFVb). 10. ἐστίν P. τό] m. 2 F. $\Theta H F$.

angulum $H\Theta$ latitudinem faciens $Z\Theta$, rectangulo autem $A\Gamma$ aequale rectae ΘM adplicetur parallelogrammum rectangulum MK latitudinem faciens ΘK , et praeterea quadrato BE aequale similiter rectae KN adplicetur NA latitudinem faciens KA . itaque $Z\Theta$, ΘK , KA in eadem recta sunt. iam quoniam utrumque AA , BE medium est, et $AA = H\Theta$, $BE = NA$, etiam utrumque $H\Theta$, NA medium est. et rationali ZH adplicata sunt. itaque utraque $Z\Theta$, KA rationalis est et rectae ZH longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. et quoniam AA , BE commensurabilia sunt, etiam $H\Theta$, NA commensurabilia sunt. et $H\Theta : NA = Z\Theta : KA$ [VI, 1]. itaque $Z\Theta$, KA longitudine commensurabiles sunt [prop. XI]. itaque $Z\Theta$, KA rationales sunt longitudine commensurabiles. itaque $Z\Theta \times KA$ rationale est [prop. XIX]. et quoniam $AB = BA$, $\Xi B = B\Gamma$, erit $AB : B\Gamma = AB : B\Xi$. uerum $AB : B\Gamma = AA : A\Gamma$ [VI, 1], et $AB : B\Xi = A\Gamma : \Gamma\Xi$ [VI, 1]. quare $AA : A\Gamma = A\Gamma : \Gamma\Xi$. uerum $AA = H\Theta$, $A\Gamma = MK$, $\Gamma\Xi = NA$. ergo $H\Theta : MK = MK : NA$. quare etiam $Z\Theta : \Theta K = \Theta K : KA$ [VI, 1]. itaque $Z\Theta \times KA = \Theta K^2$ [VI, 17]. uerum $Z\Theta \times KA$ rationale est. quare etiam ΘK^2 rationale est. itaque ΘK rationalis est. et si rectae ZH longitudine commensurabilis est, ΘN rationale est [prop. XIX]; sin

$\kappa\alpha\iota$] om. FV. Post $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$ add. $\acute{\alpha}\rho\alpha \kappa\alpha\iota$ V. 11. $\Theta H F$. $\tau\acute{o}\nu$ P, sed corr. AN e corr. m. 2 V. $\tau\eta\nu$] om. Bb. 13. $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$ P. 14. ΔB] e corr. Vb. 15. ΞB] corr. ex ZB V. ΔB] BA F. 16. $B\Xi$] corr. ex BZ P. 17. $\tau\eta\nu$] corr. in $\tau\acute{o}$ F, $\tau\acute{o}$ b. 18. ΞB B. $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$ — 20. $\Gamma\Xi$] mg. m. 2 B. 19. ΔA] in ras. V. $A\Gamma$] (alt.) ΓA F. 20. $\Gamma\Xi$] in ras. V. $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$ P. 24. $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$ P. 25. $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$ PB. 27. $\epsilon\sigma\tau\iota$ P. Post $\tau\eta$ add. ΘM τουτέστι $\tau\eta$ V, B. m. 2 (del. m. rec.). ΘN] e corr. m. 2 V.

εἰ δὲ ἀσύμμετρός ἐστι τῇ ZH μήκει, αἱ $K\Theta$, ΘM ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα τὸ ΘN . τὸ ΘN ἄρα ἦτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστίν. ἴσον δὲ τὸ ΘN τῷ AG . τὸ AG ἄρα ἦτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστίν.

5 Τὸ ἄρα ὑπὸ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων, καὶ τὰ ἐξῆς.

κς'.

Μέσον μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, μέσον τὸ AB μέσου τοῦ AG
 10 ὑπερεχέτω ῥητῷ τῷ AB , καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ EZ , καὶ τῷ AB ἴσον παρὰ τὴν EZ παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ $Z\Theta$ πλάτος ποιῶν τὴν $E\Theta$, τῷ δὲ AG ἴσον ἀφηρήσθω τὸ ZH . λοιπὸν ἄρα τὸ BA λοιπῷ τῷ $K\Theta$ ἐστίν ἴσον. ῥητὸν δέ ἐστι
 15 τὸ AB . ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ $K\Theta$. ἐπεὶ οὖν μέσον ἐστὶν ἐκάτερον τῶν AB , AG , καὶ ἐστὶ τὸ μὲν AB τῷ $Z\Theta$ ἴσον, τὸ δὲ AG τῷ ZH , μέσον ἄρα καὶ ἐκάτερον τῶν $Z\Theta$, ZH . καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν EZ παράκειται ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἐκάτερα τῶν ΘE , $E H$ καὶ ἀσύμμετρος
 20 τῇ EZ μήκει. καὶ ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ AB καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ $K\Theta$, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ $K\Theta$. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν EZ παράκειται ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $H\Theta$ καὶ σύμμετρος τῇ EZ μήκει. ἀλλὰ καὶ ἡ EH ῥητὴ ἐστι

1. $K\Theta$] corr. in ΘK m. 2 V. ΘN B, ΘM ἄρα P. 2. εἰσιν PB. ΘN] in ras. V. 3. ἦτοι] om. Fb. ἐστὶν ἢ μέσον V. 4. ἐστὶ BV, comp. Fb. 5. τὸ ἄρα] τῶν δέ F. μόνων F. καὶ τὰ ἐξῆς] εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἦτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστίν: ~ P. 6. Post ἐξῆς add. ὅπερ εἰδει δεῖξαι V. 7. καὶ P, corr. m. rec. 10. ὑπερέχει F, sed corr. 11. τῷ] τῷ μὲν B, τὸ μὲν b. 14. ΘK F. 15. AB] in ras. V. ἐστὶν P. ΘK b. 16. ἐστὶ] ἐστὶν B. 17. καὶ] om. b. 18. παράκεινται V. 21. ἐστὶ] ἐστὶν P. 22. Post καὶ ras. 1 litt. V.

rectae ZH longitudine incommensurabilis est, $K\Theta$, ΘM rationales sunt potentia tantum commensurabiles; quare ΘN medium est [prop. XXI]. ΘN igitur aut rationale aut medium est. uerum $\Theta N = A\Gamma$. $A\Gamma$ igitur aut rationale est aut medium.

Ergo rectangulum mediis potentia tantum commensurabilibus, et quae sequuntur.

XXVI.

Spatium medium non excedit medium spatio rationali.

Si enim fieri potest, medium AB excedat medium $A\Gamma$ rationali ΔB , et ponatur rationalis EZ , et spatio AB aequale rectae EZ adplicetur parallelogrammum rectangulum $Z\Theta$ latitudinem faciens $E\Theta$, spatio autem $A\Gamma$ aequale subtrahatur ZH . itaque relinquitur $B\Delta = K\Theta$. uerum ΔB rationale est. itaque etiam $K\Theta$ rationale est. iam quoniam utrumque AB , $A\Gamma$ medium est, et $AB = Z\Theta$, $A\Gamma = ZH$, etiam utrumque $Z\Theta$, ZH medium est. et rectae rationali EZ adplicata sunt. ergo utraque ΘE , EH rationalis est et rectae EZ longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. et quoniam ΔB rationale est et spatio $K\Theta$ aequale, etiam $K\Theta$ rationale est.¹⁾ et rectae rationali EZ adplicatum est; itaque $H\Theta$ rationalis est et rectae EZ longitudine commensurabilis [prop. XX]. uerum etiam

1) Uerba τὸ ΔB lin. 20 — ἐστὶ καὶ lin. 21 post lin. 14—15 superuacua sunt et fortasse interpolata. uerba ἐν τὸν δὲ lin. 14 — τὸ $K\Theta$ lin. 15 damnauit August.

καὶ ἀσύμμετρος τῇ EZ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν
 ἢ EH τῇ $H\Theta$ μήκει. καὶ ἐστὶν ὡς ἢ EH πρὸς τὴν
 $H\Theta$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς EH πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν EH ,
 $H\Theta$ · ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς EH τῷ ὑπὸ
 5 τῶν EH , $H\Theta$. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς EH σύμμετρά
 ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν EH , $H\Theta$ τετράγωνα· φητὰ γὰρ ἀμ-
 φότερα· τῷ δὲ ὑπὸ τῶν EH , $H\Theta$ σύμμετρόν ἐστὶ τὸ
 δις ὑπὸ τῶν EH , $H\Theta$ · διπλάσιον γὰρ ἐστὶν αὐτοῦ·
 ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν EH , $H\Theta$ τῷ δις ὑπὸ
 10 τῶν EH , $H\Theta$ · καὶ συναμφότερα ἄρα τὰ τε ἀπὸ τῶν
 EH , $H\Theta$ καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν EH , $H\Theta$, ὅπερ ἐστὶ τὸ
 ἀπὸ τῆς $E\Theta$, ἀσύμμετρόν ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν EH , $H\Theta$.
 φητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν EH , $H\Theta$ ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ
 τῆς $E\Theta$. ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἢ $E\Theta$. ἀλλὰ καὶ φητῇ·
 15 ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Μέσον ἄρα μέσου οὐχ ὑπερέχει φητῷ· ὅπερ ἔδει
 δεῖξαι.

κζ'.

Μέσας εὐρεῖν δυνάμει μόνον συμμέτρους
 20 φητὸν περιεχούσας.

Ἐκκείσθωσαν δύο φηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι
 αἱ A , B , καὶ εἰλήφθω τῶν A , B μέση ἀνάλογον ἢ Γ ,
 καὶ γερονέτω ὡς ἢ A πρὸς τὴν B , οὕτως ἢ Γ πρὸς
 τὴν Δ .

25 Καὶ ἐπεὶ αἱ A , B φηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμ-
 μετροι, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν A , B , τουντέστι τὸ ἀπὸ τῆς Γ ,
 μέσον ἐστίν. μέση ἄρα ἢ Γ . καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἢ A
 πρὸς τὴν B , [οὕτως] ἢ Γ πρὸς τὴν Δ , αἱ δὲ A , B

4. ἀσύμμετρον b. τό) e corr. b. 7. τό) corr. ex τῷ B.
 8. τῶν om. BF. 9. ἐστίν P. 10. τῶν] (prius) om. B. 11.
 τῶν] m. 2 F, om. B. ἐστίν PB. τὸ ἀπό] in ras. m. 1 P,

EH rationalis est et rectae EZ longitudine incommensurabilis. quare EH , $H\Theta$ longitudine incommensurabiles sunt [prop. XIII]. et $EH : H\Theta = EH^2 : EH \times H\Theta$ [prop. XXI lemma]. quare EH^2 , $EH \times H\Theta$ incommensurabilia sunt [prop. XI]. uerum quadrato EH^2 commensurabilia sunt $EH^2 + H\Theta^2$ (nam utrumque rationale est); et spatio $EH \times H\Theta$ commensurabile est $2 EH \times H\Theta$ [prop. VI]; nam eo duplo maius est. itaque $EH^2 + H\Theta^2$ et $2 EH \times H\Theta$ incommensurabilia sunt [prop. XIII]. itaque etiam $EH^2 + H\Theta^2 + 2 EH \times H\Theta$, hoc est $E\Theta^2$ [II, 4], quadratis $EH^2 + H\Theta^2$ incommensurabile est [prop. XVI]. uerum $EH^2 + H\Theta^2$ rationalia sunt. quare $E\Theta^2$ irrationale est [def. 4]. itaque $E\Theta$ irrationalis est [id.]. uerum eadem rationalis est; quod fieri non potest.

Ergo spatium medium non excedit medium spatio rationali; quod erat demonstrandum.

XXVII.

Medias inuenire potentia tantum commensurabiles spatium rationale comprehendentes.

Ponantur duae rationales potentia tantum commensurabiles A , B , et sumatur earum media proportionalis Γ [VI, 13], et fiat $A : B = \Gamma : \Delta$ [VI, 12]. et quoniam A , B rationales sunt potentia tantum commensurabiles, $A \times B$ medium erit [prop. XXI], hoc est Γ^2 [VI, 17].

τὰ ἀπό b. 13. ζητά — $H\Theta$] mg. m. 1 P. Seq. ras. 1 litt. V.
 14. ἄλογον b. 15. ἀδύνατον] -ατον in ras. V. 16. μέσον
 — 17. δεῖξαι] om. BFb; μέσον ἄρα μέσον in ras. m. 2 V;
 μέσον ἄρα μέσον οὐχ ὑπερέχει m. 2 B, καὶ τὰ ἐξῆς add. m.
 rec. 16. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P. 18. καὶ P, corr. m.
 rec. 25. εἶσιν PB. 26. τουτέστιν P. 27. ἐστίν] comp. Fb,
 ἐστὶ PBV. 28. οὕτως] om. P.

δυνάμει μόνον [εἰσὶ] σύμμετροι, καὶ αἱ Γ , Δ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. καὶ ἐστὶ μέση ἡ Γ · μέση ἄρα καὶ ἡ Δ . αἱ Γ , Δ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω, ὅτι καὶ ῥητὸν περιέχουσιν.
 5 ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ἡ A πρὸς τὴν B , οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ , ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ A πρὸς τὴν Γ , ἡ B πρὸς τὴν Δ . ἀλλ' ὡς ἡ A πρὸς τὴν Γ , ἡ Γ πρὸς τὴν B · καὶ ὡς ἄρα ἡ Γ πρὸς τὴν B , οὕτως ἡ B πρὸς τὴν Δ · το ἄρα ὑπὸ τῶν Γ , Δ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς B . ῥη-
 10 τὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς B ῥητὸν ἄρα [ἐστὶ] καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Γ , Δ .

Εὐρηγνται ἄρα μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κη'.

15 Μέσας εὐρεῖν δυνάμει μόνον συμμέτρους μέσον περιεχούσας.

Ἐκκεῖσθωσαν [τρεις] ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ A , B , Γ , καὶ εἰλήφθω τῶν A , B μέση ἀνάλογον ἡ Δ , καὶ γεγονέτω ὡς ἡ B πρὸς τὴν Γ , ἡ Δ πρὸς
 20 τὴν E .

Ἐπεὶ αἱ A , B ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν A , B , τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς Δ , μέσον ἐστίν. μέση ἄρα ἡ Δ . καὶ ἐπεὶ αἱ B , Γ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, καὶ ἐστὶν ὡς ἡ B πρὸς τὴν Γ ,

1. εἰσὶ] om. B F V b. καὶ — 2. σύμμετροι] om. B. 2. ἐστὶν B. 3. εἰσὶν B. 4. καὶ λέγω δὴ F, λέγω δὴ V b. 10. ἐστὶ] om. B F V b. ὑπό] bis b. 12. ἡῤρηγνται F V b. 18. ῥητὸν — δεῖξαι] καὶ τὰ ἐξῆς P. Seq. lemma, u. app. 14. κζ' P, corr. m. rec. 17. Ante τρεις add. γὰρ b, m. 2 F V. τρεις] om. P, τρεις εὐθεῖαι F. ἀσύμμετροι b. 19. Γ οὕτως V. 21. οὖν αἱ F. εἰσιν B, corr. m. 2. 22. τουτέστι P. 23.

itaque Γ media est [prop. XXI]. et quoniam est $A:B = \Gamma:\Delta$, et A, B potentia tantum commensurabiles sunt, etiam Γ, Δ potentia tantum commensurabiles sunt [prop. XI]. et Γ media est. itaque etiam Δ media est [prop. XXIII]. Γ, Δ igitur mediae sunt potentia tantum commensurabiles. dico, easdem spatium rationale comprehendere. nam quoniam est $A:B = \Gamma:\Delta$, permutando [V, 16] est $A:\Gamma = B:\Delta$. uerum $A:\Gamma = \Gamma:B$. quare etiam $\Gamma:B = B:\Delta$ [V, 11]. itaque $\Gamma \times \Delta = B^2$ [VI, 17]. B^2 autem rationale est. itaque etiam $\Gamma \times \Delta$ rationale est.

Ergo inuentae sunt mediae potentia tantum commensurabiles spatium rationale comprehendentes; quod erat demonstrandum.

XXVIII.

Medias inuenire potentia tantum commensurabiles spatium medium comprehendentes [cfr. prop. XXV].

A ————— | Δ ————— | Ponantur rationales potentia
 B ————— | tantum commensurabiles A, B ,
 Γ ————— | E ————— | Γ , et sumatur rectarum A, B
 media proportionalis Δ [VI,
 13], et fiat $B:\Gamma = \Delta:E$ [VI, 12].

quoniam A, B rationales sunt potentia tantum commensurabiles, $A \times B$ medium est [prop. XXI], hoc est Δ^2 [VI, 17]. itaque Δ media est [prop. XXI]. et

XXVIII. Cfr. Proclus p. 205, 10.

ἐστὶ BVB, comp. F. $\Gamma, B B$. 24. Post σύμμετροι rep. τὸ
 ἄρα lin. 22 — Δ lin. 23 B, del. m. 2. 24. τήν] om. b. Γ
 οὕτως V.

- ἡ Δ πρὸς τὴν E , καὶ αἱ Δ , E ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ
 σύμμετροι. μέση δὲ ἡ Δ · μέση ἄρα καὶ ἡ E · αἱ Δ , E
 ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω δὴ,
 5 πρὸς τὴν Γ , ἡ Δ πρὸς τὴν E , ἐναλλαξ ἄρα ὡς ἡ B
 πρὸς τὴν Δ , ἡ Γ πρὸς τὴν E . ὡς δὲ ἡ B πρὸς τὴν
 Δ , ἡ Δ πρὸς τὴν A · καὶ ὡς ἄρα ἡ Δ πρὸς τὴν A ,
 ἡ Γ πρὸς τὴν E · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν A , Γ ἴσον ἐστὶ τῷ
 ὑπὸ τῶν Δ , E . μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν A , Γ · μέσον
 10 ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ , E .

Εὗρηται ἄρα μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι μέ-
 σον περιέχουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λήμμα.

- Εὐρεῖν δύο τετραγώνους ἀριθμούς, ὥστε καὶ τὸν
 15 συγκεῖμενον ἐξ αὐτῶν εἶναι τετράγωνον.
 Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ AB , $B\Gamma$, ἕστωσαν
 δὲ ἥτοι ἄρτιοι ἢ περιττοί. καὶ ἐπεὶ, ἐάν τε ἀπὸ ἀρ-
 τίου ἄρτιος ἀφαιρεθῇ, ἐάν τε ἀπὸ περισσοῦ περισσός,
 ὁ λοιπὸς ἄρτιός ἐστιν, ὁ λοιπὸς ἄρα ὁ $ΑΓ$ ἄρτιός
 20 ἐστίν. τετμήσθω ὁ $ΑΓ$ δίχα κατὰ τὸ Δ . ἕστωσαν
 δὲ καὶ οἱ AB , $B\Gamma$ ἥτοι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἢ τετράγωνοι,
 οἳ καὶ αὐτοὶ ὅμοιοί εἰσιν ἐπίπεδοι· ὁ ἄρα ἐκ τῶν AB ,
 $B\Gamma$ μετὰ τοῦ ἀπὸ [τοῦ] $\Gamma\Delta$ τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῷ
 ἀπὸ τοῦ $B\Delta$ τετραγώνῳ. καὶ ἐστὶ τετράγωνος ὁ ἐκ
 25 τῶν AB , $B\Gamma$, ἐπειδὴ περ ἐδείχθη, ὅτι, ἐάν δύο ὅμοιοι
 ἐπίπεδοι πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ
 γενόμενος τετράγωνός ἐστιν. εὗρηται ἄρα δύο τετρά-

1. σύμμετροι δυνάμει μόνον εἰσὶ V. μόνον] om. P.
 εἰσίν P. 3. εἰσίν P. 5. οὕτως ἡ Δ V. 6. ἡ Γ — τὴν Δ]
 m. 2 B. 6. ὡς — 7. A (prius)] mg. m. 1 F. 8. οὕτως ἡ

quoniam B, Γ potentia tantum commensurabiles sunt, et est $B : \Gamma = \Delta : E$, etiam Δ, E potentia tantum commensurabiles sunt [prop. XI]. uerum Δ media est; itaque etiam E media est [prop. XXIII]. quare Δ, E mediae sunt potentia tantum commensurabiles.

iam dico, easdem spatium medium comprehendere. nam quoniam est $B : \Gamma = \Delta : E$, permutando [V, 16] erit $B : \Delta = \Gamma : E$. uerum $B : \Delta = \Delta : A$. itaque etiam $\Delta : A = \Gamma : E$. quare $A \times \Gamma = \Delta \times E$ [VI, 16]. sed $A \times \Gamma$ medium est. itaque etiam $\Delta \times E$ medium est.

Ergo inuentae sunt mediae potentia tantum commensurabiles medium comprehendentes; quod erat demonstrandum.

Lemma I.

Inuenire duos numeros quadratos eiusmodi, ut etiam numerus ex iis compositus quadratus sit.

ponantur duo numeri $AB, B\Gamma$, et aut pares sint aut impares. et quoniam, siue a numero pari par subtrahitur, siue ab impari impar, reliquus par est [IX, 24, 26], reliquus $A\Gamma$ par est. in duas partes aequales secetur $A\Gamma$ in Δ . sint autem $AB, B\Gamma$ etiam aut similes plani aut quadrati, qui et ipsi similes sunt plani. itaque $AB \times B\Gamma + \Gamma\Delta^2 = B\Delta^2$ [II, 6]. et $AB \times B\Gamma$ quadratus est, quoniam de-

ΓF . 11. ὑφ' ὧν Vb. μέσαι] om. V. μέσον — 12. δεῖξαι] καὶ τὰ ἐξ ἧς P. 12. ὅπερ — δεῖξαι] om. BFb. 14. ἀριθμούς] m. 2 F. 16. Ante of add. ὅμοιοι ἐπ' ἑπεδοι mg. m. 2 B. 17. δὴ V. ἐπελ] supra scr. m. 1 F. τε] om. V. 18. περικτὸν περικτὸς V et b, sed corr. m. 1. 20. ἐστὶ BV, comp. Fb. ΓA P. 22. οἱ] ἡ b. ἐκ] ὑπό V, corr. ex ἀπό m. 1 b. 23. τοῦ $\Gamma\Delta$] $\Gamma\Delta$ B (corr. m. rec.) et b, τῆς $\Gamma\Delta$ P. 24. ΔB P. τετραγώνου P, corr. m. 1. ἐστὶν B. 25. ἐδελχθη] om. b. 26. ποιῶσιν B. 27. ὑφ' ὧν FVb.

γωνιοὶ ἀριθμοὶ ὅ τε ἐκ τῶν AB , $B\Gamma$ καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ $\Gamma\Delta$, οἱ συντεθέντες ποιούσι τὸν ἀπὸ τοῦ $B\Delta$ τετράγωνον.

Καὶ φανερόν, ὅτι εὗρηται πάλιν δύο τετράγωνοι
 5 ὅ τε ἀπὸ τοῦ $B\Delta$ καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ $\Gamma\Delta$, ὥστε τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τὸν ὑπὸ AB , $B\Gamma$ εἶναι τετράγωνον, ὅταν οἱ AB , $B\Gamma$ ὅμοιοι ᾧσιν ἐπίπεδοι. ὅταν δὲ μὴ ᾧσιν ὅμοιοι ἐπίπεδοι, εὗρηται δύο τετράγωνοι ὅ τε ἀπὸ τοῦ $B\Delta$ καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ $\Delta\Gamma$, ὧν ἡ ὑπεροχὴ ὁ ὑπὸ
 10 τῶν AB , $B\Gamma$ οὐκ ἔστι τετράγωνος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λήμμα.

Εἶρεῖν δύο τετραγώνους ἀριθμούς, ὥστε τὸν ἐξ αὐτῶν συγκείμενον μὴ εἶναι τετράγωνον.

Ἔστω γὰρ ὁ ἐκ τῶν AB , $B\Gamma$, ὡς ἔφαμεν, τετρά-
 15 γωνος, καὶ ἄρτιος ὁ $\Gamma\Delta$, καὶ τετμήσθω ὁ $\Gamma\Delta$ διὰ τῷ Δ . φανερόν δὴ, ὅτι ὁ ἐκ τῶν AB , $B\Gamma$ τετράγωνος μετὰ τοῦ ἀπὸ [τοῦ] $\Gamma\Delta$ τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ [τοῦ] $B\Delta$ τετραγώνῳ. ἀφηρήσθω μονὰς ἡ ΔE · ὁ ἄρα ἐκ τῶν AB , $B\Gamma$ μετὰ τοῦ ἀπὸ [τοῦ] ΓE ἐλάσσων
 20 ἐστὶ τοῦ ἀπὸ [τοῦ] $B\Delta$ τετραγώνου. λέγω οὖν, ὅτι ὁ ἐκ τῶν AB , $B\Gamma$ τετράγωνος μετὰ τοῦ ἀπὸ [τοῦ] ΓE οὐκ ἔσται τετράγωνος.

Εἰ γὰρ ἔσται τετράγωνος, ἦτοι ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ [τοῦ] BE ἢ ἐλάσσων τοῦ ἀπὸ [τοῦ] BE , οὐκέτι δὲ

2. ποιῶσι V, sed corr. $B\Delta$] supra scr. m. 1 F. τετραγώνον F, sed corr. 4. Mg. add. ΞBb , m. 2 PFV. πάλιν ἡῶρηται F. ἡῶρηται Vb. τετράγωνα P, corr. m. 1. 5. ὁ] (alt.) om. P. 6. τόν] τήν FV. ὑπὸ τῶν V. AB] B ins. m. 2 P. τετράγωνον εἶναι B. 8. ἡῶρηται Vb, et corr. ex εὗρηται m. 2 F. 9. ὁ] om. P. $\Gamma\Delta$ BFV. ἡ] om. b. 10. AB] Δ P. Ante ὅπερ add. ὁ ἄρα P. ὅπερ

monstrauimus, si duo numeri plani similes inter se multiplicantes numerum aliquem efficiant, numerum inde productum quadratum esse [IX, 1]. ergo inuenti sunt duo numeri quadrati $AB \times B\Gamma$ et $\Gamma\Delta^2$, qui compositi quadratum $B\Delta$ efficiant. et manifestum est, rursus inuentos esse duos numeros quadratos $B\Delta^2$ et $\Gamma\Delta^2$ eius modi, ut eorum differentia $AB \times B\Gamma$ quadrata sit, si AB , $B\Gamma$ plani sint similes. sin non sunt similes plani, duo numeri quadrati inuenti sunt $B\Delta^2$ et $\Delta\Gamma^2$, quorum differentia $AB \times B\Gamma$ quadrata non sit; quod erat demonstrandum.

Lemma II.

Inuenire duos numeros quadratos eius modi, ut numerus ex iis compositus quadratus non sit.

Sit enim $AB \times B\Gamma$ quadratus, uti diximus [lemma I], et ΓA par sit et in Δ in duas partes aequales secetur. manifestum igitur, esse $AB \times B\Gamma + \Gamma\Delta^2 = B\Delta^2$ [u. lemma I]. subtrahatur unitas ΔE . itaque $AB \times B\Gamma + \Gamma E^2 < B\Delta^2$. dico igitur, numerum quadratum [IX, 1] $AB \times B\Gamma$ addito ΓE^2 quadratum non esse.

Nam si quadratus erit, aut aequalis est quadrato BE^2 aut minor quadrato BE^2 , maior autem non est,

[δεῖ δεῖξαι] om. BFVb, comp. P. 16. τῶ] κατὰ τῶ F. δ] om. P. 17. τοῦ] (alt.) τῆς P. 18. τοῦ] om. BFb, τῆς P, B m. 2. ὁμοίως μονάς P. 19. ἐκ] ἀπό b. τῶν] τοῦ P. B Γ τετραγώνος V. τοῦ] (alt.) om. BFb, τῆς P, B m. 2. ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ] in ras. m. 1 b. 20. τοῦ] om. BFb, τῆς P, m. 2 B. 21. ὁ] om. b. τοῦ] (alt.) om. BFb, τῆς P. 22. ἐστὶ P. 23. ἐστὶ] ἐστὶ BFb. ἐστὶν B, sed corr. 24. τοῦ] om. Bb, τῆς P. ἐλάσσων] ἡὼν F, ἐλασσον δν b; ἐλάσσον B, seq. ras. 1 litt., ἐλάσσονι m. rec. τοῦ — BE] om. V. τοῦ] om. BFb. οὐκ ἐστὶ b.

καὶ μείζων, ἵνα μὴ τμηθῇ ἡ μονάς. ἔστω, εἰ δυνα-
 τόν, πρότερον ὁ ἐκ τῶν AB , $BΓ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ $ΓΕ$
 ἴσος τῷ ἀπὸ $ΒΕ$, καὶ ἔστω τῆς $ΔΕ$ μονάδος διπλα-
 σίων ὁ $ΗΑ$. ἐπεὶ οὖν ὅλος ὁ $ΑΓ$ ὅλου τοῦ $ΓΔ$
 5 ἔστι διπλασίων, ὧν ὁ $ΑΗ$ τοῦ $ΔΕ$ ἔστι διπλασίων,
 καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ $ΗΓ$ λοιποῦ τοῦ $ΕΓ$ ἔστι διπλασίων.
 δίχα ἄρα τέμνεται ὁ $ΗΓ$ τῷ $Ε$. ὁ ἄρα ἐκ τῶν $ΗΒ$,
 $ΒΓ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ $ΓΕ$ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ $ΒΕ$ τετρα-
 γώνῳ. ἀλλὰ καὶ ὁ ἐκ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ
 10 $ΓΕ$ ἴσος ὑπόκειται τῷ ἀπὸ [τοῦ] $ΒΕ$ τετραγώνῳ. ὁ
 ἄρα ἐκ τῶν $ΗΒ$, $ΒΓ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ $ΓΕ$ ἴσος ἐστὶ τῷ
 ἐκ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ $ΓΕ$. καὶ κοινοῦ ἀφαι-
 ρεθέντος τοῦ ἀπὸ $ΓΕ$ συνάγεται ὁ $ΑΒ$ ἴσος τῷ $ΗΒ$.
 ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ ἐκ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ μετὰ τοῦ
 15 ἀπὸ [τοῦ] $ΓΕ$ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ $ΒΕ$. λέγω δὴ, ὅτι
 οὐδὲ ἐλάσσων τοῦ ἀπὸ $ΒΕ$ εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω
 τῷ ἀπὸ $ΒΖ$ ἴσος, καὶ τοῦ $ΔΖ$ διπλασίων ὁ $ΘΑ$. καὶ
 συναχθήσεται πάλιν διπλασίων ὁ $ΘΓ$ τοῦ $ΓΖ$. ὥστε
 καὶ τὸν $ΓΘ$ δίχα τεμῆσθαι κατὰ τὸ $Ζ$, καὶ διὰ τοῦτο
 20 τὸν ἐκ τῶν $ΘΒ$, $ΒΓ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ $ΖΓ$ ἴσον γίνεσθαι
 τῷ ἀπὸ $ΒΖ$. ὑπόκειται δὲ καὶ ὁ ἐκ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ μετὰ
 τοῦ ἀπὸ $ΓΕ$ ἴσος τῷ ἀπὸ $ΒΖ$. ὥστε καὶ ὁ ἐκ τῶν
 $ΘΒ$, $ΒΓ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ $ΓΖ$ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν $ΑΒ$,
 $ΒΓ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ $ΓΕ$. ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ ἐκ
 25 τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ $ΓΕ$ ἴσος ἐστὶ [τῷ] ἐλάσ-

1. μέζονι (ο et ι corr.) B; γρ. μέζονι κρείττον ἐστι supra
 scr. m. 2 V. μῆ] μήτε Theon (BFVb), P m. 2. Post μο-
 νάς add. Theon: μήτε ὁ ἐκ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ (τοῦ
 add. V) $ΓΔ$, ὅς ἐστιν ὁ (om. b, mg. B) ἀπὸ (τοῦ add. PVb)
 $ΒΔ$ (e corr. m. 2 V, $ΔΒ$ PBb), ἴσος ἢ τῷ ἐκ (ὑπό BV) τῶν
 (om. PB) $ΑΒ$, $ΒΓ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ (τοῦ add. PV) $ΓΕ$ (BFVb,
 P m. 2). εἰ] corr. ex ἡ m. 2 P. 2. τῆς $ΓΕ$ P. 3. τῆς
 $ΒΕ$ P. τῆς $ΔΕ$ μονάδος] om. V. διπλάσιος P. 4. $ΗΑ$

ne unitas diuidatur.¹⁾ prius, si fieri potest, sit $AB \times B\Gamma + \Gamma E^2 = BE^2$, et sit $HA = 2 \angle E$. iam quoniam $A\Gamma = 2 \Gamma \Delta$, $AH = 2 \angle E$, erit etiam $H\Gamma = 2 \angle E$. itaque $H\Gamma$ in E in duas partes aequales diuisus est. ergo $HB \times B\Gamma + \Gamma E^2 = BE^2$ [II, 6]. supposuimus autem, esse etiam $AB \times B\Gamma + \Gamma E^2 = BE^2$. quare $HB \times B\Gamma + \Gamma E^2 = AB \times B\Gamma + \Gamma E^2$. et subtracto, quod commune est, ΓE^2 concludimus, esse $AB = HB$; quod absurdum est. ergo $AB \times B\Gamma + \Gamma E^2$ quadrato BE^2 aequale non est. iam dico, ne minorem quidem esse quadrato BE^2 . nam si fieri potest, sit $AB \times B\Gamma + \Gamma E^2 = BZ^2$, et $\Theta A = 2 \angle Z$. et rursus concludemus, esse $\Theta \Gamma = 2 \angle Z$; quare etiam $\Gamma \Theta$ in Z in duas partes aequales diuisus est, et ea de causa $\Theta B \times B\Gamma + Z\Gamma^2 = BZ^2$ [II, 6]. supposuimus autem, esse etiam

1) Nam $AB \times B\Gamma + \Gamma E^2 < B\Delta^2$. sit latus x . ergo habebimus $BE^2 < x^2 < (BE + 1)^2$, h. e. $BE < x < BE + 1$, ita ut x fractio sit, quod fieri non potest.

$\tau\eta\varsigma \angle E$ μονάδος V. 5. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$ P. $\acute{\omega}\nu \delta]$ $\delta \delta\acute{\epsilon}$ P. διπλάσιος B F b. 6. $\kappa\alpha\iota \delta$ B F b. ΓH V. διπλάσιος B F b. 7. Ante $\tau\tilde{\omega}$ ins. $\acute{\alpha}\nu\theta$ m. 2 F. $H B]$ B e corr. F. 8. $\tau\tilde{\omega}\nu \Gamma E$ V. $\tau\tilde{\omega}\nu B E$ V. 10. $\tau\tilde{\omega}\nu]$ om. B F b. 11. $H B]$ H in ras. V. $B \Gamma]$ $B H$ b. $\tau\tilde{\omega}\nu \Gamma E$ V. 12. $\acute{\epsilon}\kappa]$ $\acute{\upsilon}\pi\acute{o}$ V. $\tau\tilde{\omega}\nu]$ $\tau\tilde{\omega}\nu$ P. $A B]$ A in ras. V. $\tau\tilde{\omega}\nu \Gamma E$ V. 13. $\tau\tilde{\omega}\nu \Gamma E$ V. $\delta]$ η P. $\acute{\iota}\sigma\omicron\varsigma \tau\tilde{\omega}]$ $\acute{\iota}\sigma\eta \tau\eta$ P. 15. $\tau\tilde{\omega}\nu \Gamma E]$ ΓE B F b, $\tau\eta\varsigma \Gamma E$ P. $\tau\tilde{\omega}\nu B E$ V. $\delta \acute{\upsilon}\nu\theta$ $\tau\tilde{\omega}\nu H B$, $B \Gamma$ $\acute{\iota}\sigma\omicron\varsigma \tau\tilde{\omega}$ $\acute{\epsilon}\kappa \tau\tilde{\omega}\nu A B$, $B \Gamma$ mg. F b. $\delta\eta]$ om. b. 16. $\acute{\epsilon}\lambda\alpha\sigma\sigma\omicron\nu$ F m. 1, V (sed corr.); $\acute{\epsilon}\lambda\alpha\sigma\sigma\omicron\nu$ F m. 2, b, B in ras. $\tau\tilde{\omega}\nu B E$ V. 17. $\tau\tilde{\omega}\nu B Z$ V. $\acute{\iota}\sigma\omicron\varsigma]$ om. F b, m. 2 B V. $\kappa\epsilon\acute{\iota}\sigma\theta\omega \delta$ V. $\kappa\alpha\acute{\iota}]$ om. V. 19. $\tau\acute{\epsilon}]$ $\tau\acute{o}\nu$ F. 20. $\tau\acute{o}\nu]$ $\tau\eta\eta$ F. $\acute{\epsilon}\kappa]$ $\acute{\upsilon}\pi\acute{o}$ b. $\tau\tilde{\omega}\nu Z \Gamma$ V. $\gamma\acute{\iota}\gamma\gamma\epsilon\sigma\theta\alpha\iota$ F, $\gamma\epsilon\gamma\epsilon\sigma\theta\alpha\iota$ V b. 21. $B Z]$ $Z B$ B et V (supra Z ras. est). 22. $\tau\tilde{\omega}\nu \Gamma E$ V, $B E$ b. $B Z]$ in ras. V, ΓE b. $\acute{\omega}\sigma\tau\epsilon$ — 23. $\tau\tilde{\omega}]$ $\sigma\upsilon\nu\alpha\chi\theta\acute{\eta}\sigma\epsilon\tau\alpha\iota \acute{\alpha}\rho\alpha \acute{\iota}\sigma\omicron\varsigma \delta$ Theon (B F V b). 24. $\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}]$ in ras. φ . Post ΓE add. Theon: $\tau\tilde{\omega} \acute{\epsilon}\kappa \tau\tilde{\omega}\nu \Theta B$ (E B b) $B \Gamma$ $\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}$ $\tau\tilde{\omega}\nu \acute{\alpha}\nu\theta$ ΓZ (B F V b). 25. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$ P. $\tau\tilde{\omega}]$ om. P. $\acute{\epsilon}\lambda\acute{\alpha}\tau\tau\omicron\nu\iota$ V.

σουι τοῦ ἀπὸ *ΒΕ*. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ [αὐτῷ] τῷ
 ἀπὸ *ΒΕ*. οὐκ ἄρα ὁ ἐκ τῶν *ΑΒ*, *ΒΓ* μετὰ τοῦ ἀπὸ
ΓΕ τετράγωνός ἐστιν [δυνατοῦ δὲ ὄντος καὶ κατὰ
 πλείονας τρόπους τοὺς εἰρημένους ἀριθμοὺς ἐπιδεικ-
 5 νύειν, ἀρκείσθωσαν ἡμῖν οἱ εἰρημένοι, ἵνα μὴ μακροτέ-
 ρας οὕσης τῆς πραγματείας ἐπὶ πλεόν αὐτὴν μηκύνωμεν].
 ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κθ'.

Εὐρεῖν δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμε-
 10 τρους, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μείζον
 δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῇ μήκει.

Ἐκκείσθω γάρ τις ῥητὴ ἡ *ΑΒ* καὶ δύο τετράγωνοι
 ἀριθμοὶ οἱ *ΓΔ*, *ΔΕ*, ὥστε τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τὸν
ΓΕ μὴ εἶναι τετράγωνον, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς *ΑΒ*
 15 ἡμικύκλιον τὸ *ΑΖΒ*, καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ *ΔΓ* πρὸς
 τὸν *ΓΕ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *ΒΑ* τετράγωνον πρὸς τὸ
 ἀπὸ τῆς *ΑΖ* τετράγωνον, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ *ΖΒ*.

Ἐπεὶ [οὖν] ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς *ΒΑ* πρὸς τὸ ἀπὸ
 τῆς *ΑΖ*, οὕτως ὁ *ΔΓ* πρὸς τὸν *ΓΕ*, τὸ ἀπὸ τῆς *ΒΑ*
 20 ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΑΖ* λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς ὁ
ΔΓ πρὸς ἀριθμὸν τὸν *ΓΕ*. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ
 ἐπὶ τῆς *ΒΑ* τῷ ἀπὸ τῆς *ΑΖ*. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς
ΑΒ. ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς *ΑΖ*. ῥητὴ ἄρα καὶ
 ἡ *ΑΖ*. καὶ ἐπεὶ ὁ *ΔΓ* πρὸς τὸν *ΓΕ* λόγον οὐκ ἔχει,
 25 ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν,

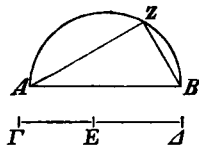
1. τοῦ *ΒΕ* *V*. αὐτῷ] om. *P*. 2. τῆς *ΒΕ* *P*; *ΓΕ* *b*.
 Dein add. Theon: οὐδὲ (om. *b*) μείζονι αὐτοῦ (*BFVb*). 3.
 ἐστὶ *PBV*, comp. *Fb*. δυνατοῦ] *τ* in ras. plurium litt. *B*.
 4. τρόπους] bis *b*. τὸ εἰρημένον Theon (*BFVb*). ἀριθμούς]
 om. Theon (*BFVb*). ἐπιδεικνύειν] ἐπι- supra scr. *F*, in ras.
B; ἐπιδεικνύναι *V*. 5. ἀρκείσθω ἡμῖν ὁ εἰρημένος Theon
 (*BFVb*). 7. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. Theon (*BFVb*). 9. εὐ-
 ρίσκειν *B*. 11. τῷ] corr. ex τοῦ *m*. 2 *B*. 13. τόν] τὴν *V*.

$AB \times B\Gamma + \Gamma E^2 = BZ^2$. quare etiam $\Theta B \times B\Gamma + \Gamma Z^2 = AB \times B\Gamma + \Gamma E^2$; quod absurdum est. itaque $AB \times B\Gamma + \Gamma E^2$ spatio minori, quam est quadratum BE^2 , aequale non est. demonstrauius autem, ne ipsi quidem BE^2 id aequale esse. ergo $AB \times B\Gamma + \Gamma E^2$ quadratus non est¹⁾; quod erat demonstrandum.

XXIX.

Duas rationales inuenire potentia tantum commensurabiles eius modi, ut maior quadrata minorem excedat quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis.

ponantur enim recta rationalis AB et duo numeri



quadrati $\Gamma\Delta$, ΔE eius modi, ut eorum differentia ΓE quadrata non sit [lemma I]. et in AB semicirculus describatur AZB , et fiat $\Delta\Gamma : \Gamma E = BA^2 : AZ^2$ [prop. VI coroll.], et

ducatur ZB .

quoniam est $BA^2 : AZ^2 = \Delta\Gamma : \Gamma E$, BA^2 ad AZ^2 rationem habet, quam numerus $\Delta\Gamma$ ad numerum ΓE . itaque BA^2 , AZ^2 commensurabilia sunt [prop. VI]. uerum AB^2 rationale est [def. 4]. itaque etiam AZ^2 rationale est [id.]. quare etiam AZ rationalis est. et quoniam $\Delta\Gamma : \Gamma E$ rationem non habet, quam numerus

1) δυνατόν lin. 3 — μὴ κύνωμεν lin. 6 Euclides non scripsit; uncis ea inclusit August II p. 359. nescio, an idem recte de ambobus lemmatis totis dubitationem iniecerit. sed satis antiquo tempore interpolata sunt.

15. ὥς] supra scr. m. 1 V. δ] ras. F. ΔΓ] in ras. m. 1 P. 17. τετραγώνον] om. V. 18. οὖν] om. P. 19. ΔΓ] ΓΔ V. 21. ἐστίν P. 23. καὶ ἡ] ἡ P. 24. ΔΓ] ΓΔ F. οὖν] supra scr. m. 1 P. 25. δν. ὁ V.

- οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς BA ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AZ λόγον
 ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθ-
 μόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῇ AZ μήκει· αἱ
 BA , AZ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι.
 5 καὶ ἐπεὶ [ἐστίν] ὡς ὁ $\Delta\Gamma$ πρὸς τὸν ΓE , οὕτως τὸ
 ἀπὸ τῆς BA πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AZ , ἀναστρέψαντι ἄρα
 ὡς ὁ $\Gamma\Delta$ πρὸς τὸν ΔE , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς
 τὸ ἀπὸ τῆς BZ . ὁ δὲ $\Gamma\Delta$ πρὸς τὸν ΔE λόγον ἔχει,
 ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν·
 10 καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BZ λόγον
 ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν·
 σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῇ BZ μήκει. καὶ ἐστὶ
 τὸ ἀπὸ τῆς AB ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν AZ , ZB · ἡ AB
 ἄρα τῆς AZ μείζον δύναται τῇ BZ συμμέτρῳ ἑαυτῇ.
 15 Εὐρηταὶ ἄρα δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι
 αἱ BA , AZ , ὥστε τὴν μείζονα τὴν AB τῆς ἐλάσσονος
 τῆς AZ μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ τῆς BZ συμμέτρου
 ἑαυτῇ μήκει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λ'.

- 20 Εὐρεῖν δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέ-
 τρους, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μείζον
 δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

- Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ AB καὶ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ
 οἱ ΓE , $E\Delta$, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν $\Gamma\Delta$
 25 μὴ εἶναι τετράγωνον, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς AB ἡμι-

1. AB F. ἄρα] supra scr. m. 1 P. AZ] Z e corr. V.

3. BA P. 4. AB , AZ BVb; AZ , AB F. εἰσιν B. 5.
 ἐστίν] om. P. τόν] mut. in τό m. 2 F. 10. καὶ τό — 11.
 ἀριθμόν] mg. m. 1 F (partem abstulit reparatio pergam.). 12.

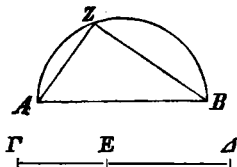
σύμμετρος P. ἐστίν P. 14. ἑαυτῇ μήκει V. 15. ηὐρηταὶ
 Fb. 17. μείζονα P. ZB Bb. συμμέτρῳ F. 18. ὅπερ

quadratus ad numerum quadratum [lemma I], ne BA^2 quidem ad AZ^2 rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare AB , AZ longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. itaque BA , AZ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. et quoniam $\angle\Gamma : \Gamma E = BA^2 : AZ^2$, conuertendo erit [V, 19 coroll.] $\Gamma\Delta : \Delta E = AB^2 : BZ^2$ [cfr. III, 31. I, 47]. sed $\Gamma\Delta : \Delta E$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare etiam $AB^2 : BZ^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque AB , BZ longitudine commensurabiles sunt [prop. IX]. et $AB^2 = AZ^2 + ZB^2$ [III, 31. I, 47]. itaque AB^2 excedit AZ^2 quadrato rectae BZ sibi commensurabilis.

Ergo inuentae sunt duae rationales potentia tantum commensurabiles BA , AZ eius modi, ut maior AB quadrata minorem AZ excedat quadrato rectae BZ sibi longitudine commensurabilis; quod erat demonstrandum.

XXX.

Inuenire duas rationales potentia tantum commensurabiles eius modi, ut maior quadrata minorem excedat quadrato rectae sibi longitudine incommensurabilis.



Ponatur rationalis AB et duo numeri quadrati ΓE , $E\Delta$ eius modi, ut numerus ex iis compositus $\Gamma\Delta$ quadratus non

$\epsilon\delta\epsilon\iota\ \delta\epsilon\epsilon\iota\alpha\iota$] : ~ P, om. BFb. Seq. lemma, u. app. 23. $\acute{\alpha}\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$] om. FV. 24. $\tau\acute{o}\nu$] (alt.) $\tau\acute{\omega}\nu$ b.

κύκλιον τὸ AZB , καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ $\Delta\Gamma$ πρὸς τὸν ΓE , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς BA πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AZ , καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ZB .

Ὁμοίως δὴ δεῖξομεν τῷ πρὸς τοῦτον, ὅτι αἱ BA , AZ
 5 ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν
 ὡς ὁ $\Delta\Gamma$ πρὸς τὸν ΓE , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς BA πρὸς
 τὸ ἀπὸ τῆς AZ , ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ $\Gamma\Delta$ πρὸς
 τὸν ΔE , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BZ .
 ὁ δὲ $\Gamma\Delta$ πρὸς τὸν ΔE λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγω-
 10 νος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ
 ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BZ λόγον ἔχει, ὃν
 τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμ-
 μετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῇ BZ μήκει. καὶ δύναται
 ἡ AB τῆς AZ μείζον τῷ ἀπὸ τῆς ZB ἀσυμμέτρου
 15 ἐαυτῇ.

Αἱ AB , AZ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμ-
 μετροι, καὶ ἡ AB τῆς AZ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς
 ZB ἀσυμμέτρου ἐαυτῇ μήκει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λα'.

20 Εὐρεῖν δύο μέσας δυνάμει μόνον συμμέ-
 τρους ῥητὸν περιεχούσας, ὥστε τὴν μείζονα
 τῆς ἐλάσσονος μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμ-
 μέτρου ἐαυτῇ μήκει.

Ἐκκείσθωσαν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι
 25 αἱ A , B , ὥστε τὴν A μείζονα οὖσαν τῆς ἐλάσσονος
 τῆς B μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἐαυτῇ μήκει.

1. Post καὶ del. ἐπεξεύχθω m. 1 P. $\Gamma\Delta$ P. τόν] om. Fb. 2. BA] e corr. m. 2 V. BZ b. 3. BZ P. 4. δέ b, corr. m. 1. ὡς ἐν τῷ Theon (BFVb). BA] e corr. m. 2 V. 5. εἰσιν B. 6. τόν] om. BF. 7. $\Gamma\Delta$] $\Delta\Gamma$ b. 9. $\Gamma\Delta$]

sit [lemma II], et in AB semicirculus AZB describatur. et fiat $\angle \Gamma : \Gamma E = BA^2 : AZ^2$ [prop. VI coroll.], et ducatur ZB .

iam similiter ac in praecedenti [p. 86, 18 sq.] demonstrabimus, BA et AZ rationales esse potentia tantum commensurabiles. et quoniam est $\angle \Gamma : \Gamma E = BA^2 : AZ^2$, conuertendo [V, 19 coroll.] erit $\Gamma \Delta : \Delta E = BA^2 : BZ^2$ [III, 31. I, 47]. uerum $\Gamma \Delta : \Delta E$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare ne AB^2 quidem ad BZ^2 rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque AB , BZ longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. et $AB^2 = AZ^2 + ZB^2$ [III, 31. I, 47].

Ergo AB , AZ rationales sunt potentia tantum commensurabiles, et AB quadrata excedit AZ quadrato rectae ZB sibi longitudine incommensurabilis; quod erat demonstrandum.

XXXI.

Inuenire duas medias potentia tantum commensurabiles spatium rationale comprehendentes eius modi, ut maior quadrata minorem excedat quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis.

Ponantur duae rectae rationales potentia tantum commensurabiles A , B eius modi, ut maior A quadrata excedat minorem B quadrato rectae sibi longitu-

in ras. V. οὐκ] postea ins. F. 13. τῇ] corr. ex ἡ V. δυνάμει b. -μει supra scr. F. 14. μείζων b. BZ Fb. ἀσυνμέτρῳ BFb. 16. AZ] BZ Theon (BFVb). εἶσιν P. 17. τῶ] τῇ P. 18. BZ F. ἀσυνμέτρῳ F. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, ὅπερ b. 22. ἀπό] -ό eras. V. ἀσυνμέτρον P. 26. ἀσυνμέτρον P, et F (ἀ del.). μήκει] om. FVb, m. 2 B.

καὶ τῷ ὑπὸ τῶν *A, B* ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς *Γ*. μέ-
 σον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν *A, B* μέσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς.
Γ· μέση ἄρα καὶ ἡ *Γ*. τῷ δὲ ἀπο τῆς *B* ἴσον ἔστω
 τὸ ὑπὸ τῶν *Γ, Δ*· ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς *B*· ῥητὸν
 5 ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν *Γ, Δ*. καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ *A*
 πρὸς τὴν *B*, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν *A, B* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς
B, ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν *A, B* ἴσον ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς
Γ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς *B* ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν *Γ, Δ*, ὡς ἄρα
 ἡ *A* πρὸς τὴν *B*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *Γ* πρὸς τὸ ὑπὸ
 10 τῶν *Γ, Δ*. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς *Γ* πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν
Γ, Δ, οὕτως ἡ *Γ* πρὸς τὴν *Δ*· καὶ ὡς ἄρα ἡ *A* πρὸς
 τὴν *B*, οὕτως ἡ *Γ* πρὸς τὴν *Δ*. σύμμετρος δὲ ἡ *A*
 τῇ *B* δυνάμει μόνον· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ *Γ* τῇ *Δ*
 δυνάμει μόνον. καὶ ἔστι μέση ἡ *Γ*· μέση ἄρα καὶ
 15 ἡ *Δ*. καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ *A* πρὸς τὴν *B*, ἡ *Γ* πρὸς
 τὴν *Δ*, ἡ δὲ *A* τῆς *B* μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμ-
 μέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ *Γ* ἄρα τῆς *Δ* μείζον δύναται τῷ
 ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.

Εὐρηνται ἄρα δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι
 20 αἱ *Γ, Δ* ῥητὸν περιέχουσai, καὶ ἡ *Γ* τῆς *Δ* μείζον
 δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

Ὅμοιως δὲ δειχθήσεται καὶ τῷ ἀπὸ ἀσυνμέτρου,
 ὅταν ἡ *A* τῆς *B* μείζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυνμέτρου
 ἑαυτῇ.

1. τῷ] corr. ex τῶν m. 1 P. 2. τῆς] corr. ex τοῦ m.
 2 F. 3. δέ] δ' F. 4. Δ] corr. ex A m. rec. b, A φ (non F).
 5. ἄρα ἔστι P. Ante ἐπεὶ ras. 3 litt. P. 7. ὑπό] ὁ- in
 ras. V. 8. ἔστι τό b. 14. ἔστιν PB. 15. οὕτως ἡ Γ FV.
 16. τῆς] τῇ F. τῷ] corr. ex τό F. ἀσυνμέτρου P, supra
 σ ras. 1 litt. B, συμμέτρω φ. 17. δυνήσεται Theon (BFVb).
 18. ἀσυνμέτρου P, supra σ ras. 1 litt. B, συμμέτρω F. 19.
 ηῦρενται Vb, F m. 2. ἄρα] supra scr. m. 2 B. 21. ἀσυν-
 μέτρου P, supra σ ras. 1 litt. B. 22. δέ FV. τῷ] τό FV.

dine commensurabilis [prop. XXIX]. et sit $\Gamma^2 = A \times B$.
 uerum $A \times B$ medium est [prop. XXI]. itaque etiam
 Γ^2 medium est; quare Γ est media [id.].
 sit autem $\Gamma \times \Delta = B^2$. uerum B^2 rationale
 est. itaque etiam $\Gamma \times \Delta$ rationale est. et
 quoniam est $A : B = A \times B : B^2$ [cfr. prop.
 XXI lemma], et $\Gamma^2 = A \times B$, $B^2 = \Gamma \times \Delta$,
 erit $A : B = \Gamma^2 : \Gamma \times \Delta$. est autem $\Gamma^2 : \Gamma \times \Delta = \Gamma : \Delta$
 [prop. XXI lemma]. quare etiam $A : B = \Gamma : \Delta$. uerum
 A, B potentia tantum commensurabiles sunt. itaque
 etiam Γ, Δ potentia tantum commensurabiles sunt
 [prop. XI]. et Γ media est. itaque etiam Δ media
 est [prop. XXIII]. et quoniam est $A : B = \Gamma : \Delta$, et
 A^2 excedit B^2 quadrato rectae sibi commensurabilis,
 etiam Γ^2 excedit Δ^2 quadrato rectae sibi commensu-
 rabilis [prop. XIV].

Ergo inuentae sunt duae mediae potentia tantum
 commensurabiles Γ, Δ spatium rationale comprehen-
 dentes, et Γ^2 excedit Δ^2 quadrato rectae sibi commen-
 surabilis.

Similiter demonstrabimus, Γ^2 excedere Δ^2 quadrato
 rectae sibi incommensurabilis, si A^2 excedat B^2 qua-
 drato rectae sibi incommensurabilis [prop. XXX].

συμμέτρον P, et F, corr. m. 1. 23. ἡ A] om. P. δυν-
 νήσεται B, δυνήσεται L, δύννεται ἡ A P. συμμέτρον P. 24.
 Seq. lemma, u. app.

λβ'.

Εὐρεῖν δύο μέσας δυνάμει μόνον συμμε-
τρους μέσον περιεχούσας, ὥστε τὴν μείζονα
τῆς ἐλάττονος μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμ-
5 μέτρου ἑαυτῇ.

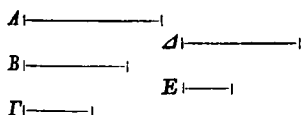
Ἐκκείσθωσαν τρεῖς ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι
αἱ *A*, *B*, *Γ*, ὥστε τὴν *A* τῆς *Γ* μείζον δύνασθαι τῷ
ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῇ, καὶ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν *A*, *B* ἴσον
ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς *Δ*. μέσον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς *Δ*. καὶ
10 ἡ *Δ* ἄρα μέση ἐστίν. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν *B*, *Γ* ἴσον ἔστω
τὸ ὑπὸ τῶν *Δ*, *E*. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ τῶν *A*,
B πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν *B*, *Γ*, οὕτως ἡ *A* πρὸς τὴν *Γ*,
ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν *A*, *B* ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς *Δ*,
τῷ δὲ ὑπὸ τῶν *B*, *Γ* ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν *Δ*, *E*, ἐστὶν
15 ἄρα ὡς ἡ *A* πρὸς τὴν *Γ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *Δ* πρὸς
τὸ ὑπὸ τῶν *Δ*, *E*. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς *Δ* πρὸς τὸ ὑπὸ
τῶν *Δ*, *E*, οὕτως ἡ *Δ* πρὸς τὴν *E*. καὶ ὡς ἄρα ἡ *A*
πρὸς τὴν *Γ*, οὕτως ἡ *Δ* πρὸς τὴν *E*. σύμμετρος δὲ
ἡ *A* τῇ *Γ* δυνάμει [μόνον]. σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ *Δ*
20 τῇ *E* δυνάμει μόνον. μέση δὲ ἡ *Δ*. μέση ἄρα καὶ
ἡ *E*. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ *A* πρὸς τὴν *Γ*, ἡ *Δ* πρὸς
τὴν *E*, ἡ δὲ *A* τῆς *Γ* μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμε-
τρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ *Δ* ἄρα τῆς *E* μείζον δυνήσεται τῷ
ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῇ. λέγω δὴ, ὅτι καὶ μέσον ἐστὶ
25 τὸ ὑπὸ τῶν *Δ*, *E*. ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν
B, *Γ* τῷ ὑπὸ τῶν *Δ*, *E*, μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν *B*, *Γ*

4. ἐλάττονος FV. μείζονα L, et B, sed corr. συμμε-
τρου] ἀ- add. m. rec. b. 5. αυτη L. 6. ῥηταὶ αἱ *A*, *B*, *Γ* V.

7. αἱ *A*, *B*, *Γ*] om. V, αἱ *A*, *B* b. μείζονα L, et B, sed
corr. 8. συμμετρου] ἀ- add. m. rec. b. τῷ] τό L. 10.
ἐστὶ V, comp. Fb. 11. τὸ ὑπὸ τῶν *Δ*, *E*] m. 1 b, supra scr.

XXXII.

Inuenire duas medias potentia tantum commensurabiles medium comprehendentes eius modi, ut maior quadrata minorem excedat quadrato rectae sibi commensurabilis.



Ponantur tres rectae rationales potentia tantum commensurabiles A, B, Γ eius modi, ut A^2 excedat

Γ^2 quadrato rectae sibi commensurabilis [prop. XXIX], et sit $\Delta^2 = A \times B$. itaque Δ^2 medium est; quare etiam Δ media est [prop. XXI]. sit autem $\Delta \times E = B \times \Gamma$. et quoniam est $A \times B : B \times \Gamma = A : \Gamma$ [prop. XXI lemma]¹⁾, et $\Delta^2 = A \times B$, $\Delta \times E = B \times \Gamma$, erit $A : \Gamma = \Delta^2 : \Delta \times E$. uerum $\Delta^2 : \Delta \times E = \Delta : E$ [prop. XXI lemma]. quare etiam $A : \Gamma = \Delta : E$. sed A, Γ potentia tantum commensurabiles sunt. quare etiam Δ, E potentia tantum commensurabiles sunt [prop. XI]. Δ autem media est. itaque etiam E media est [prop. XXIII]. et quoniam est $A : \Gamma = \Delta : E$, et A^2 excedit Γ^2 quadrato rectae sibi commensurabilis, etiam Δ^2 excedit E^2 quadrato rectae sibi commensurabilis [prop. XIV]. iam dico, $\Delta \times E$ etiam medium esse. nam

1) Nam $A : B = A \times B : B^2$ (cfr. supra p. 92, 5), $B : \Gamma = B^2 : B \times \Gamma$.

m. rec. $\tau\tilde{\omega}$ ἀπὸ τοῦ E . 13. ἐστίν L. 14. ἴσον ἐστὶ V. τὸ ὑπὸ τῶν Δ, E] m. 1 b, supra scr. m. rec. $\tau\tilde{\omega}$ ἀπὸ τοῦ E . 16. τὸ ὑπὸ τῶν Δ, E] m. 1 b, supra scr. τὸ ἀπὸ τοῦ E . ὡς δέ] ἀλλ' ὡς V. 19. μόνον] om. P. 22. $\tau\tilde{\omega}$] corr. ex τό m. 2 P. συμμέτρον] ἄ- add. m. rec. b, item lin. 24. ἐστίν L. 25. ἐστίν L. τό] $\tau\tilde{\omega}$ V, et b, sed corr. 26. $\tau\tilde{\omega}$ ὑπὸ τῶν Δ, E] m. 1 b, supra scr. m. rec. $\tau\tilde{\omega}$ ἀπὸ τοῦ E . τό] $\tau\tilde{\omega}$ P.

[αἱ γὰρ B, Γ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι], μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, E .

Εὐρηνται ἄρα δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Δ, E μέσον περιέχουσai, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.

Ὅμοιως δὴ πάλιν δειχθήσεται καὶ τῷ ἀπὸ ἀσυνμέτρου, ὅταν ἡ A τῆς Γ μείζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυνμέτρου ἑαυτῇ.

Λήμμα.

- 10 "Ἐστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ $AB\Gamma$ ὀρθὴν ἔχον τὴν A , καὶ ἤχθω κάθετος ἡ $A\Delta$. λέγω, ὅτι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν $\Gamma B\Delta$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς BA , τὸ δὲ ὑπὸ τῶν $B\Gamma\Delta$ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓA , καὶ τὸ ὑπὸ τῶν $B\Delta, \Delta\Gamma$ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς $A\Delta$, καὶ ἔτι τὸ ὑπὸ τῶν $B\Gamma, A\Delta$ ἴσον [ἐστὶ] τῷ ὑπὸ τῶν $BA, A\Gamma$.

Καὶ πρῶτον, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν $\Gamma B\Delta$ ἴσον [ἐστὶ] τῷ ἀπὸ τῆς BA .

- Ἐπεὶ γὰρ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἤκται ἡ $A\Delta$, τὰ $AB\Delta, A\Delta\Gamma$ ἄρα τρίγωνα ὁμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ τῷ $AB\Gamma$ καὶ ἀλλήλοις. καὶ ἐπεὶ ὁμοιόν ἐστι τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ $AB\Delta$ τριγώνῳ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓB πρὸς τὴν BA , οὕτως ἡ BA πρὸς τὴν $B\Delta$. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $\Gamma B\Delta$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB .

1. αἱ γὰρ — σύμμετροι] om. L F V b, mg. m. 2 B. εἰσιν P.

2. καὶ] om. L B. τὸ ὑπὸ τῶν Δ, E] m. 1 b, supra scr. m. rec. τὸ ἀπὸ τοῦ E . 3. ηὐρηνται L F V b. 4. τὴν μὲν V. 5. συμμέτρου] ἀ- add. m. rec. b. 6. τῷ] τό V. συμμέτρου L, et B F, sed corr. 7. δύναιται P b. συμμέτρου L, et B F, sed corr. 8. Post ἑαυτῇ add. ὅπερ ἔδει δεῖξαι V. Seq. lemma, u. app. 9. λήμμα] om. L. 10. ἔχων P. 11. A] ὑπὸ $BA\Gamma$ Theon (L B F V b); γρ. τὴν ὑπὸ $BA\Gamma$ mg. P. 12. $\Gamma B\Delta$] supra add. B P V. ἐστὶν L.

quoniam $B \times \Gamma = \Delta \times E$, et $B \times \Gamma$ medium est [prop. XXI], etiam $\Delta \times E$ medium est.

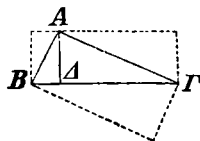
Ergo inuentae sunt duae mediae potentia tantum commensurabiles medium comprehendentes Δ , E eius modi, ut maior quadrata minorem excedat quadrato rectae sibi commensurabilis.

Similiter rursus demonstrabimus, Δ^2 excedere E^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis, si A^2 excedat Γ^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis [prop. XXX].

Lemma.

Sit $AB\Gamma$ triangulus rectangulus rectum habens angulum A , et ducatur perpendicularis $A\Delta$. dico, esse $\Gamma B \times B\Delta = BA^2$, $B\Gamma \times \Gamma\Delta = \Gamma A^2$, $B\Delta \times \Delta\Gamma = A\Delta^2$, $B\Gamma \times A\Delta = BA \times A\Gamma$.

et primum, esse $\Gamma B \times B\Delta = BA^2$.



nam quoniam in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basim perpendicularis ducta est $A\Delta$, trianguli $AB\Delta$, $A\Delta\Gamma$ et toti $AB\Gamma$ et inter se similes sunt [VI, 8]. et

quoniam $AB\Gamma \sim AB\Delta$, erit $\Gamma B : BA = BA : B\Delta$ [VI, 4]. quare [VI, 17] $\Gamma B \times B\Delta = BA^2$.

13. $B\Gamma\Delta$] supra add. ΓPF ; $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ e corr. V. $\iota\sigma\sigma\upsilon$] supra scr. m. 1 P. $\tau\eta\varsigma$] om. Bb. $A\Gamma \varphi$. $B\Delta\Gamma$, supra add. Δ m. rec., P. 14. $B\Gamma$] e corr. V. 15. $\xi\sigma\tau\iota$] om. LBFVb. $\tau\omega\nu$] om. P. 16. $\tau\omega\nu$] om. P. $\Gamma B\Delta$] FVb, B m. 2; $\Gamma B LB$; $\Gamma\Delta B P$; ΓB , $B\Delta$ FV m. 2, P m. rec. $\xi\sigma\tau\iota$] om. LBFVb. 19. $\tau\alpha$] corr. ex $\tau\eta\iota$ m. 2 B. $AB\Delta$] Δ in ras. m. 1 P. 20. $\Delta A\Gamma$? L. $\xi\sigma\tau\iota\nu$ LPB. 22. $AB\Delta$] B in ras. V. 23. BA] $AB \varphi$. BA] mut. in AB V. 24. ΓB , $B\Delta \varphi$, m. rec. P, m. 2 V.

Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ὑπο τῶν $BΓΔ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$.

Καὶ ἐπεὶ, ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, ἡ ἀχθεῖσα
 5 τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μέση ἀνάλογόν ἐστιν, ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $BΔ$ πρὸς τὴν $ΔΑ$, οὕτως ἡ $ΑΔ$ πρὸς τὴν $ΔΓ$. τὸ ἄρα ὑπο τῶν $BΔ$, $ΔΓ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΔΑ$.

Λέγω, ὅτι καὶ τὸ ὑπο τῶν $BΓ$, $ΑΔ$ ἴσον ἐστὶ τῷ
 10 ὑπὸ τῶν $ΒΑ$, $ΑΓ$. ἐπεὶ γάρ, ὡς ἔφαμεν, ὁμοιόν ἐστι τὸ $ΑΒΓ$ τῷ $ΑΒΔ$, ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $BΓ$ πρὸς τὴν $ΓΑ$, οὕτως ἡ $ΒΑ$ πρὸς τὴν $ΑΔ$ [ἐὰν δὲ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾖσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων]. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $BΓ$, $ΑΔ$ ἴσον
 15 ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν $ΒΑ$, $ΑΓ$. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λγ'.

Εὐρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον.

20 Ἐκκείσθωσαν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ $ΑΒ$, $BΓ$, ὥστε τὴν μείζονα τὴν $ΑΒ$ τῆς ἐλάσσονος τῆς $BΓ$ μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἐαυτῇ, καὶ τετμησθῶ ἡ $BΓ$ δίχα κατὰ τὸ $Δ$, καὶ τῷ ἀφ' ὁποτέρας τῶν $BΔ$, $ΔΓ$ ἴσον παρὰ τὴν $ΑΒ$ παραβε-
 25 βλήσθω παραλληλόγραμμον ἐλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΕΒ$, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς

1. $BΓ$, $ΓΔ$ m. rec. P, m. 2 V. ἐστὶ] om. Fb. 3. τριγώνῳ] supra scr. comp. m. 2 B. 6. $ΑΔ$] $ΔΑ$ B. 10. ἐστὶ] postea ins. F. 11. $ΑΒΓ$ τριγώνον F. $ΑΒΔ$] $ΑΓΔ$ BFb, et supra scr. B m. 1 V. 12. $ΓΑ$] $Α$ in ras. V. $ΑΔ$]

eadem de causa etiam $B\Gamma \times \Gamma\Delta = \Delta\Gamma^2$.

et quoniam, si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basim perpendicularis ducitur, recta ducta media est proportionalis partium basis [VI, 8 coroll.], erit $B\Delta : \Delta A = \Delta\Delta : \Delta\Gamma$. quare [VI, 17] $B\Delta \times \Delta\Gamma = \Delta A^2$.

dico, esse etiam $B\Gamma \times \Delta\Delta = BA \times \Delta\Gamma$. nam quoniam, ut diximus, trianguli $AB\Gamma$, $AB\Delta$ similes sunt, erit [VI, 4] $B\Gamma : \Gamma A = BA : \Delta\Delta$. itaque¹⁾ $B\Gamma \times \Delta\Delta = BA \times \Delta\Gamma$ [VI, 16]; quod erat demonstrandum.

XXXIII.

Inuenire duas rectas potentia incommensurabiles, quae summam quadratorum suorum rationalem efficiant, rectangulum autem medium.

Ponantur duae rationales potentia tantum commensurabiles AB , $B\Gamma$ eius modi, ut maior AB quadrata minorem $B\Gamma$ excedat quadrato rectae sibi incommensurabilis [prop. XXX], et $B\Gamma$ in Δ in duas partes aequales secetur, et quadrato $B\Delta^2$ uel $\Delta\Gamma^2$ aequale parallelogrammum rectae AB adplicetur figura quadrata deficiens [VI, 28] et sit $AE \times EB$, et in AB

1) Uerba quae praecedunt damnaui, quia non magis est, cur haec propositio omnibus uerbis citetur, quam VI, 17, quae bis in hoc lemmate tacite usus est.

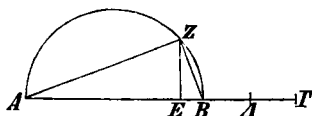
$\Delta A \varphi$. 13. $\omega\sigma\iota$ V. $\tau\acute{o}$] corr. ex $\tau\tilde{\omega}$ V. 15. $\tau\tilde{\omega}$] corr. ex $\tau\acute{o}$ m. 1 F, $\tau\acute{o}$ φ . $\tau\tilde{\omega}\nu$] om. Bb. Seq. demonstr. alt., u. app. $\tilde{\omega}\pi\epsilon\rho$ $\xi\delta\epsilon\iota$ $\delta\epsilon\iota\xi\alpha\iota$] comp. Pb, om. BF V. Seq. lemmata, u. app. 19. $\delta\acute{\epsilon}$ F. 21. $\acute{\epsilon}\lambda\acute{\alpha}\tau\tau\omicron\nu\omicron\varsigma$ b, comp. F. 22. $\mu\acute{\epsilon}\lambda\lambda\omicron\nu\alpha$ P, corr. m. rec. 23. $\tau\tilde{\omega}$] corr. ex $\tau\acute{o}$ m. 1 V. 25. $\pi\alpha\rho\alpha\lambda\lambda\eta\lambda\omicron\gamma\rho\alpha\mu\omicron\nu$ P. 26. AE , EB V, P m. rec.

AB ημικύκλιον τὸ *AZB*, καὶ ἤχθω τῇ *AB* πρὸς ὀρθὰς ἢ *EZ*, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ *AZ*, *ZB*.

Καὶ ἐπεὶ [δύο] εὐθείαι ἄνισοι εἰσιν αἱ *AB*, *ΒΓ*, καὶ ἡ *AB* τῆς *ΒΓ* μείζον δύνатаι τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου
 5 ἑαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς *ΒΓ*, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας αὐτῆς, ἴσον παρὰ τὴν *AB* παραβέβληται παραλληλόγραμμον ἐλλείπον εἶδει τετραγώνῳ καὶ ποιεῖ τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΕΒ*, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ *ΑΕ* τῇ *ΕΒ*. καὶ ἐστὶν ὡς ἡ *ΑΕ* πρὸς *ΕΒ*, οὕτως
 10 τὸ ὑπὸ τῶν *ΒΑ*, *ΑΕ* πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΒ*, *ΒΕ*, ἴσον δὲ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν *ΒΑ*, *ΑΕ* τῷ ἀπὸ τῆς *AZ*, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν *ΑΒ*, *ΒΕ* τῷ ἀπὸ τῆς *BZ*. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς *AZ* τῷ ἀπὸ τῆς *ZB*. αἱ *AZ*, *ZB* ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. καὶ ἐπεὶ ἡ *AB* ῥητὴ ἐστίν,
 15 ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς *AB*. ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν *AZ*, *ZB* ῥητὸν ἐστίν. καὶ ἐπεὶ πάλιν τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΕ*, *ΕΒ* ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς *EZ*, ὑπόκειται δὲ τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΕ*, *ΕΒ* καὶ τῷ ἀπὸ τῆς *ΒΑ* ἴσον, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ *ΖΕ* τῇ *ΒΑ*.
 20 διπλῇ ἄρα ἡ *ΒΓ* τῆς *ΖΕ*. ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΒ*, *ΒΓ* σύμμετρόν ἐστι τῷ ὑπὸ τῶν *ΑΒ*, *ΕΖ*. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΒ*, *ΒΓ*. μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΒ*, *ΕΖ*. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΒ*, *ΕΖ* τῷ ὑπὸ τῶν *AZ*, *ZB*. μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν *AZ*, *ZB*. ἐδείχθη
 25 δὲ καὶ ῥητὸν τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων.

1. *AB*] *ΑΕΒ* b. *ABZ* P. 3. δύο] om. P, post εὐθεῖαι ins. m. 2. αἱ] m. rec. P. 4. σύμμετρον FV, corr. m. 2.

5. τὸ (τῷ V) δὲ τέταρτον BFVb, corr. m. 2 BV (τετάρτῳ m. rec. b). τῆς] τῆς ἐλάσσονος τῆς Theon (BFVb). τουτέστιν P. τῷ] τό Fb, corr. ex τό m. 2 B. 6. ἴσον] om. Fb, m. 2 B. 7. παραλληλόγραμμον] om. Fb, m. 2 B. 8. *ΑΕ*, *ΕΒ* V, m. rec. P. 9. πρὸς τὴν *ΕΒ* V. 10. τῶν] (alt.) om. P.



describatur semicirculus AZB , et ducatur ad AB perpendicularis EZ , et ducantur AZ , ZB .

et quoniam AB , $B\Gamma$ inaequales sunt rectae, et AB^2 excedit $B\Gamma^2$ quadrato rectae sibi incommensurabilis, et quartae parti quadrati $B\Gamma^2$, hoc est $(\frac{1}{4}B\Gamma)^2$, aequale parallelogrammum rectae AB adplicatum est figura quadrata deficiens et efficit $AE \times EB$, AE et EB incommensurabiles erunt [prop. XVIII]. est autem $AE:EB = BA \times AE:AB \times BE$ [u. p. 95 not.]; et $BA \times AE = AZ^2$, $AB \times BE = BZ^2$ [u. lemma]. itaque AZ^2 , ZB^2 incommensurabilia sunt [prop. XI]. quare AZ , ZB potentia incommensurabiles sunt. et quoniam AB rationalis est, etiam AB^2 rationale est. itaque summa quadratorum $AZ^2 + ZB^2$ rationale est [I, 47]. et quoniam rursus $AE \times EB = EZ^2$ [u. lemma], et supposuimus, esse etiam $AE \times EB = B\Delta^2$, erit $ZE = B\Delta$. itaque $B\Gamma = 2 ZE$. quare etiam $AB \times B\Gamma$ et $AB \times EZ$ commensurabilia sunt [prop. VI]. uerum $AB \times B\Gamma$ medium est [prop. XXI]. itaque etiam $AB \times EZ$ medium est [prop. XXIII coroll.]. uerum $AB \times EZ = AZ \times ZB$ [u. lemma]. itaque etiam $AZ \times ZB$ medium est. demonstrauius autem, etiam summam quadratorum earum rationalem esse.

12. ZB P. 13. $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$ P. ZB] (prius) BZ FVb. 14. $\epsilon\sigma\tau\iota$ BV, comp. Fb. 15. $\delta\eta\tau\acute{o}\nu \acute{\alpha}\rho\alpha \epsilon\sigma\tau\iota$] mg. m. 1 F. 16. $\epsilon\sigma\tau\iota$ BV, comp. Fb. 19. $B\Delta$] (alt.) in ras. m. 1 P. 20. $\tau\eta\varsigma$] corr. ex $\tau\eta$ m. 1 V. 21. $\sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\rho\omicron\nu$] $\delta\iota\pi\lambda\acute{\alpha}\sigma\iota\omicron\nu$ Theon (BFVb); mg. m. 1: $\delta\iota\alpha \tau\acute{o} \tau\eta\nu B\Gamma \delta\iota\pi\lambda\acute{\alpha}\sigma\iota\omicron\nu \epsilon\iota\nu\alpha\iota \tau\eta\varsigma B\Delta$, $\tau\eta\nu \delta\epsilon B\Delta \epsilon\sigma\eta\nu \epsilon\iota\nu\alpha\iota \tau\eta EZ$ pro scholio P. $\tau\tilde{\omega}$] τοῦ Theon (BFV). 22. $AB\Gamma$ BFb, et V, corr. m. 2. 23. $\delta\epsilon$] om. b.

Εὗρονται ἄρα δύο εὐθείαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ AZ , ZB ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μέσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5

λδ'.

Εὐρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν.

Ἐκκείσθωσαν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι
10 αἱ AB , $BΓ$ ῥητόν περιέχουσαι τὸ ὑπ' αὐτῶν, ὥστε τὴν AB τῆς $BΓ$ μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ γεγραφθῶ ἐπὶ τῆς AB τὸ $AΔB$ ἡμικύκλιον, καὶ τετμήσθω ἡ $BΓ$ διχα κατὰ τὸ E , καὶ παραβελθήσθω παρὰ τὴν AB τῷ ἀπὸ τῆς BE ἴσον
15 παραλληλόγραμμον ἐλλείπον εἶδει τετραγώνῳ τὸ ὑπὸ τῶν AZB · ἀσύμμετρος ἄρα [ἐστίν] ἡ AZ τῇ ZB μήκει. καὶ ἦχθω ἀπὸ τοῦ Z τῇ AB πρὸς ὀρθᾶς ἡ $ZΔ$, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $AΔ$, $ΔB$.

Ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστίν ἡ AZ τῇ ZB , ἀσύμμετρον
20 ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν BA , AZ τῷ ὑπὸ τῶν AB , BZ . ἴσον δὲ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν BA , AZ τῷ ἀπὸ τῆς $AΔ$, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AB , BZ τῷ ἀπὸ τῆς $ΔB$ · ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $AΔ$ τῷ ἀπὸ τῆς $ΔB$. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB , μέσον ἄρα καὶ
25 το συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $AΔ$, $ΔB$. καὶ ἐπεὶ

1. ἡδῶνται FV. 3. ῥητῶν b, corr. m. 1. δ' BVb. ἀπ' F. 4. δεῖξαι] εὐρεῖν b, mg. m. 1: γρ. δεῖξαι; in F mg. m. 2: γρ. εὐρεῖν. 7. τό] corr. ex τόν P. 8. δέ F. 11. συμμέτρου F, corr. m. 1. 15. ἐλλείπον εἶδει τετραγώνῳ] om. Fb, m. 2 B. τό] ποιοῦν τό V. 16. τῶν AZB] non liquet F. AZ , ZB V. σύμμετρος φ, et B, corr. m. 2. ἐστίν] om. P, ἔσται φ. ZB] BZ P. 18. $ZΔ$] $ΔZ$ e corr. m. 2 V. $ΔB$]

διπλῇ ἐστὶν ἡ $B\Gamma$ τῆς ΔZ , διπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ τοῦ ὑπὸ τῶν AB , $Z\Delta$. ῥητόν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ ῥητόν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB , $Z\Delta$. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AB , $Z\Delta$ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB ῥητόν ἐστίν.

Εὐρηνται ἄρα δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ $A\Delta$, ΔB ποιοῦσαι τὸ [μὲν] συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10

λέ'.

Εὐρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους ποιούσας τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων.

Ἐκκείσθωσαν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ AB , $B\Gamma$ μέσον περιέχουσai, ὥστε τὴν AB τῆς $B\Gamma$ μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἐαυτῇ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ $A\Delta B$, καὶ τὰ λοιπὰ γεγονέτω τοῖς ἐπάνω ὁμοίως.

Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZB μήκει, ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ $A\Delta$ τῇ ΔB δυνάμει. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB , μέσον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB . καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ

1. διπλῇ] διπλασίῳ Theon (BFVb). 2. τοῦ] e corr. F. Post $Z\Delta$ add. ὥστε καὶ σύμμετρον V, B m. 2. 3. Post $B\Gamma$ add. Theon: ὑπόκειται γὰρ (οὕτως add. V) (BFVb). 4. $Z\Delta$] corr. in BZ m. 2 F, corr. ex BZ m. rec. b. τό] τῷ BF, τῷ δὲ τῷ b. τῷ] τό BFb. τῶν] om. Pb. 6. ηὐρηνται Vb. σύμμετροι P, corr. m. 1. 7. μὲν] om. P. 8. τετραγώνων F et V, sed corr. δέ F. 9. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 10. λς' F, corr. m. 1. 13. τετραγώνων b, et F,

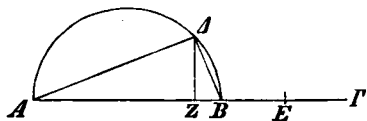
et quoniam $B\Gamma = 2 \Delta Z$, erit etiam $AB \times B\Gamma = 2 AB \times \Delta Z$. uerum $AB \times B\Gamma$ rationale est. itaque etiam $AB \times \Delta Z$ rationale est [prop. VI; def. 4]. uerum $AB \times \Delta Z = A\Delta \times \Delta B$ [prop. XXXII lemma]. quare etiam $A\Delta \times \Delta B$ rationale est.

Ergo inuentae sunt duae rectae potentia incommensurabiles $A\Delta$, ΔB , quae summam quadratorum suorum mediam efficiant, rectangulum autem rationale; quod erat demonstrandum.

XXXV.

Inuenire duas rectas potentia incommensurabiles, quae et summam quadratorum suorum mediam efficiant et rectangulum medium et simul summae quadratorum incommensurabile.

Ponantur duae mediae potentia tantum commensurabiles AB , $B\Gamma$ medium comprehendentes eius modi, ut AB^2 excedat $B\Gamma^2$ quadrato rectae sibi incommensurabilis [prop. XXXII], et in AB semicirculus describatur $A\Delta B$, et reliqua fiant, sicut supra.



et quoniam AZ , ZB longitudine incommensurabiles sunt, etiam $A\Delta$, ΔB potentia incommensura-

biles sunt [prop. XI]. et quoniam AB^2 medium est, etiam $A\Delta^2 + \Delta B^2$ medium est [prop. XXIII coroll.]. et

sed corr. 17. $B\Gamma$] (alt.) Γ b. 18. $\sigma\upsilon\mu\mu\epsilon\tau\rho\omicron\nu$ b et F, corr. m. 1.

19. $A\Delta B$] corr. ex $A\Gamma B$ m. 1 b, $AB\Delta$ φ. 20. $\gamma\epsilon\gamma\omicron\nu\epsilon\tau\omega$] supra scr. F.

$\acute{\epsilon}\pi\acute{\alpha}\nu\omega$ $\epsilon\lambda\eta\mu\epsilon\nu\omicron\iota\varsigma$ V. $\acute{\omicron}\mu\omicron\iota\omega\varsigma$] om. Fb, m. 2 B V. 21. $\acute{\epsilon}\pi\epsilon\iota$] om. B, corr. m. 2. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$] supra m. 1 P.

ZB] BZ B. 22. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$] $\acute{\alpha}\rho\alpha$ $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ F, $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ B.

- τῶν AZ , ZB ἴσον ἐστὶ τῷ ἀφ' ἑκατέρας τῶν BE , ΔZ , ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ BE τῇ ΔZ . διπλῇ ἄρα ἡ $B\Gamma$ τῆς $Z\Delta$. ὥστε καὶ τὸ ὑπο τῶν AB , $B\Gamma$ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν AB , $Z\Delta$. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB , $Z\Delta$. καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ ὑπο τῶν $A\Delta$, ΔB . μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB . καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ AB τῇ $B\Gamma$ μήκει, σύμμετρος δὲ ἡ ΓB τῇ BE , ἀσύμμετρος ἄρα καὶ ἡ AB τῇ BE μήκει. ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τῷ ὑπὸ τῶν AB , BE ἀσύμμετρόν ἐστιν. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AB ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB , τῷ δὲ ὑπὸ τῶν AB , BE ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB , $Z\Delta$, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB . ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ το συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB τῷ ὑπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB .

- Εὐρηνται ἄρα δύο εὐθεῖαι αἱ $A\Delta$, ΔB δυνάμει ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν μέσον καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λς'.

Ἐὰν δύο ρηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσιν, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν, καλεῖσθω δὲ ἐκ δύο ὀνομάτων.

- Συγκείσθωσαν γὰρ δύο ρηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ AB , $B\Gamma$. λέγω, ὅτι ὅλη ἡ AG ἄλογός ἐστιν.

1. AZ] ΔZ b. τῷ] τῷ ἀπὸ P, corr. m. rec. 3. ΔZ B F b. 4. τοῦ] τό F, corr. ex τό m. rec. P, mut. in τῷ m. 1 b. τὸ ὑπό — 5. ἄρα καὶ] mg. m. 2 B. 8. $B\Gamma$] ΓB F. ΓB] mut. in $B\Gamma$ V. 9. AB] BA e corr. m. 2 V. τό] ins. m. 2 F. 10. τῷ] corr. ex τό F. σύμμετρον F, corr. m. 1. ἄρα ἐστὶν b, ἄρα supra add. F. 11. ἐστὶν P. τῶν] ins. m. 2 F. 12. τῷ] corr. ex τά m. 1 F. 13. ΔZ B. τουτέστιν P. 14.

quoniam $AZ \times ZB = BE^2 = AZ^2$, erit $BE = AZ$. itaque $B\Gamma = 2 Z\Delta$. quare etiam $AB \times B\Gamma = 2 AB \times Z\Delta$. uerum $AB \times B\Gamma$ medium est. itaque etiam $AB \times Z\Delta$ medium est. et $AB \times Z\Delta = A\Delta \times \Delta B$ [prop. XXXII lemma]. itaque etiam $A\Delta \times \Delta B$ medium est. et quoniam $AB, B\Gamma$ longitudine incommensurabiles sunt, et $\Gamma B, BE$ commensurabiles, etiam AB, BE longitudine incommensurabiles sunt [prop. XIII]. quare etiam AB^2 et $AB \times BE$ incommensurabilia sunt [prop. XXI lemma; prop. XI]. uerum $A\Delta^2 + \Delta B^2 = AB^2$ [I, 47] et $AB \times Z\Delta = AB \times BE = A\Delta \times \Delta B$. itaque $A\Delta^2 + \Delta B^2$ et $A\Delta \times \Delta B$ incommensurabilia sunt.

Ergo inuentae sunt duae rectae $A\Delta, \Delta B$ potentia incommensurabiles, quae et summam quadratorum suorum mediam efficiant et rectangulum medium et simul summae quadratorum incommensurabile; quod erat demonstrandum.

XXXVI.

Si duae rectae rationales potentia tantum commensurabiles componuntur, tota irrationalis est, uocetur autem ex duobus nominibus.



Componantur enim duae rectae rationales potentia tan-

των] (prius) mut. in της m. 1 b. 16. αὶ $A\Delta, \Delta B$] om. V.
 18. αὐτῶν τετραγώνων V. μέσον καὶ] mg. V. καὶ τό]
 seq. ras. 1 litt. V, τὸ δὲ Fb, τὸ δ' B. 20. ὅπερ ἔδει δεῖξαι]
 comp. P, om. BFVb. Seq. ἀρχὴ τῶν κατὰ σύνθεσιν ἐξάδων
 BFb, mg. V; et in mg. ἐντεῦθεν ἀρχεται παραδιδόναι κατὰ
 σύνθεσιν ἐξ (ἐξῆς V) ἀλόγους BFVb. 21. λς'] mut. in λς' F.
 23. ἐστὶ BV, comp. Fb. καλεῖται P. 26. ὁλη] om. FVb,
 m. 2 B. AB b, corr. m. 1.

Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ AB τῇ $BΓ$ μήκει·
 δυνάμει γὰρ μόνον εἰσὶ σύμμετροι· ὥς δὲ ἡ AB πρὸς
 τὴν $BΓ$, οὕτως το ὑπὸ τῶν $ABΓ$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς
 $BΓ$, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ τῷ
 5 ἀπὸ τῆς $BΓ$. ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ σύμ-
 μετρόν ἐστι τὸ δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς
 $BΓ$ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$. αἱ γὰρ AB ,
 $BΓ$ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀσύμμετρον
 ἄρα ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ τοῖς ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$.
 10 καὶ συνθέντι τὸ δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ μετὰ τῶν ἀπὸ
 τῶν AB , $BΓ$, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$, ἀσύμμετρόν
 ἐστὶ τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$. ῥητὸν
 δὲ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$ · ἄλογον
 ἄρα [ἐστὶ] τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ · ὥστε καὶ ἡ $ΑΓ$ ἄλογός
 15 ἐστίν, καλείσθω δὲ ἐκ δύο ὀνομάτων· ὅπερ ἔδει
 δεῖξαι.

λξ'.

Ἐὰν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι
 συντεθῶσι ῥητὸν περιέχουσai, ἡ ὅλη ἄλογός
 20 ἐστίν, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμ-
 μετροι αἱ AB , $BΓ$ ῥητὸν περιέχουσai· λέγω, ὅτι ὅλη
 ἡ $ΑΓ$ ἄλογός ἐστιν.

1. σύμμετρός P, corr. m. 1. 3. ὑπό] α in ras. in extr.
 lin. F. τῶν] τῆς F. $ABΓ$] AB F; AB , $BΓ$ e corr. V, m.
 rec. P. ἀπὸ τῆς $BΓ$] seq. α eras. b, ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ F.
 4. ὑπὸ τῶν] ἀπὸ τῆς F. $BΓ$] om. F. 5. ἀπὸ τῆς] ὑπὸ
 τῶν AB F. 7. $BΓ$] (prius) AB F, sed corr.? αἱ — 8. σύμ-
 μετροι] om. Theon (BFVb). 8. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τό] τὸ
 ἄρα V, ὥστε καὶ τό BFb. 9. τοῖς] ἀσύμμετρόν ἐστι τοῖς F.
 $BΓ$ ἀσύμμετρόν ἐστι BVb. 10. συντεθέντι P et V, sed corr.;
 συντεθέν F, corr. m. 1 et 2. τῶν] (alt.) corr. ex τοῦ m. 2 F. 11.
 AB] corr. ex $ΑΓ$ V. τουτέστιν P. 12. ἐστίν P. 13. ἄλογός
 F, corr. m. 2. 14. ἐστὶ] om. BFVb. 15. ἐστὶ PBV, comp.

tum commensurabiles AB , $B\Gamma$. dico, totam AG irrationalem esse.

nam quoniam AB , $B\Gamma$ longitudine incommensurabiles sunt (nam potentia tantum sunt commensurabiles), et $AB : B\Gamma = AB \times B\Gamma : B\Gamma^2$ [prop. XXI lemma], etiam $AB \times B\Gamma$ et $B\Gamma^2$ incommensurabilia sunt [prop. XI]. uerum $AB \times B\Gamma$ et $2 AB \times B\Gamma$ commensurabilia sunt [prop. VI], et $AB^2 + B\Gamma^2$, $B\Gamma^2$ commensurabilia sunt (nam AB , $B\Gamma$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles) [prop. XV]. itaque $2 AB \times B\Gamma$ et $AB^2 + B\Gamma^2$ incommensurabilia sunt [prop. XIII]. et componendo

$2 AB \times B\Gamma + AB^2 + B\Gamma^2$, hoc est AG^2 [II, 4], et $AB^2 + B\Gamma^2$ incommensurabilia sunt [prop. XVI]. uerum $AB^2 + B\Gamma^2$ rationale est. itaque AG^2 irrationalis est [def. 4]. quare etiam AG irrationalis est [def. 4], uocetur autem ex duobus nominibus; quod erat demonstrandum.

XXXVII.

Si duae rectae mediae potentia tantum commensurabiles componuntur spatium rationale comprehendentes, tota irrationalis est, uocetur autem ex duabus mediis prima.

Componantur enim duae mediae potentia tantum commensurabiles AB , $B\Gamma$ spatium rationale comprehendentes [prop. XXVII]. dico, totam AG irrationalem esse.

Fb. Antē $\delta\pi\epsilon\rho$ schol. est, u. app. $\delta\pi\epsilon\rho$ $\epsilon\delta\epsilon\iota$ $\delta\epsilon\iota\chi\alpha\iota$] comp.
P, om. BFVb. 17. $\lambda\eta'$ F. 19. $\sigma\upsilon\nu\tau\epsilon\theta\acute{\omega}\sigma\iota\nu$ BF. 20. $\epsilon\sigma\tau\iota$
PBV, comp. Fb. 21. $\sigma\upsilon\gamma\kappa\alpha\lambda\epsilon\iota\sigma\theta\omega\sigma\alpha\nu$ b. 22. $\kappa\alpha\iota$ $\lambda\acute{\epsilon}\gamma\omega$ F.
 $\delta\lambda\eta$] post ras. 1 litt. P, om. Fb.

Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ AB τῇ $BΓ$ μήκει, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$ ἄρα ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ · καὶ συνθέντι τὰ ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$, ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$. ῥητον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ · ὑπόκεινται γὰρ αἱ AB , $BΓ$ ῥητον περιέχουσai· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ · ἄλογος ἄρα ἡ $ΑΓ$, καλεῖσθω δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10

λη'.

Ἐὰν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσι μέσον περιέχουσai, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν, καλεῖσθω δὲ ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ AB , $BΓ$ μέσον περιέχουσai· λέγω, ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ $ΑΓ$.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ $ΔΕ$, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ ἴσον παρὰ τὴν $ΔΕ$ παραβεβλήσθω τὸ $ΔΖ$ πλάτος ποιοῦν τὴν $ΔΗ$. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$ καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$, παραβεβλήσθω δὴ τοῖς ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$ παρὰ τὴν $ΔΕ$ ἴσον το $ΕΘ$ · λοιπὸν ἄρα τὸ $ΘΖ$ ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$. καὶ ἐπεὶ μέση ἐστὶν ἐκατέρα τῶν AB , $BΓ$, μέσα ἄρα ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν

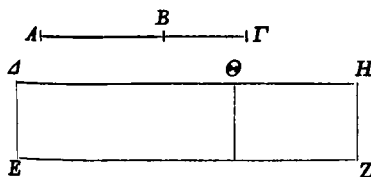
1. τῇ] m. rec. P. $ΑΓ$ b. 2. ἐστὶ τῷ] corr. ex ἔστω m. 2 B. τῷ] corr. ex τό F. 3. καί] om. Theon (BFVb). συντεθέντι P. ἄρα τά Theon (BFVb). τά] τό V. 4. ἐστὶν P. τὸ ἀπό] in ras. m. 1 P. 5. σύμμετρα F, sed. corr. ἐστὶν P. $BΓ$] postea ins. F. ῥητόν — 6. $BΓ$] (prius) om. Fb, m. 2 B. 6. γὰρ] m. 2 B, δέ Fb, B m. 1. αἱ] αἱ ἀπὸ τῶν b. 7. ἄλογος — 8. $ΑΓ$] mg. m. 1 P. 8. πρώτη] seq. schol., u. app. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 10. λδ' F.

nam quoniam AB , $B\Gamma$ longitudine incommensurabiles sunt, etiam $AB^2 + B\Gamma^2$ et $2 AB \times B\Gamma$ incommensurabilia sunt [cfr. p. 108, 1 sq.]. et componendo $AB^2 + B\Gamma^2 + 2 AB \times B\Gamma$, hoc est $A\Gamma^2$ [II, 4], et $AB \times B\Gamma$ incommensurabilia sunt [prop. XVI]. uerum $AB \times B\Gamma$ rationale est; supposuimus enim, AB et $B\Gamma$ spatium rationale comprehendere. itaque $A\Gamma^2$ irrationale est. ergo $A\Gamma$ irrationalis est [def. 4], uocetur autem ex duabus mediis prima; quod erat demonstrandum.

XXXVIII.

Si duae mediae potentia tantum commensurabiles componuntur medium comprehendentes, tota irrationalis est, uocetur autem ex duabus mediis secunda.

Componantur enim duae mediae potentia tantum commensurabiles AB , $B\Gamma$ medium comprehendentes [prop. XXVIII]. dico, $A\Gamma$ irrationalem esse.



ponatur enim rationalis ΔE , et quadrato $A\Gamma^2$ aequale rectae ΔE adplicetur ΔZ latitudinem efficiens ΔH [I, 44]. et

quoniam $A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2 + 2 AB \times B\Gamma$ [II, 4],

12. συντεθῶσιν PF. 13. ἐστὶ BV, comp. Fb. 17. γὰρ] om. FVb, m. 2 B. ἡ] corr. ex α V. τῶ] corr. ex τὸ m. 2 P. 21. Post $B\Gamma$ add. Theon: τὸ δὲ ἀπὸ τῆς $A\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τῷ ΔZ , καὶ τὸ ΔZ ἄρα ἴσον ἐστὶ τοῖς (τε add. V) ἀπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ (BVb, F mg. m. 1). δὴ παρὰ τὴν ΔE V. παρὰ τὴν ΔE] om. V. 22. ἐστὶ] m. 2 F. 24. μέση B, corr. m. 2. ἐστὶ] m. 2 V.

AB, BG . μέσον δὲ ὑπόκειται καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν
 AB, BG . καὶ ἐστὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν AB, BG ἴσον
τὸ $E\Theta$, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB, BG ἴσον τὸ $Z\Theta$.
μέσον ἄρα ἐκάτερον τῶν $E\Theta, \Theta Z$. καὶ παρὰ ρητὴν
5 τὴν ΔE παράκειται· ρητὴ ἄρα ἐστὶν ἐκατέρα τῶν
 $\Delta\Theta, \Theta H$ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔE μήκει. ἐπεὶ οὖν
ἀσύμμετρός ἐστὶν ἡ AB τῇ BG μήκει, καὶ ἐστὶν ὡς
ἡ AB πρὸς τὴν BG , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ
ὑπο τῶν AB, BG , ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς
10 AB τῷ ὑπὸ τῶν AB, BG . ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς
 AB σύμμετρόν ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν
 AB, BG τετραγώνων, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν AB, BG σύμ-
μετρόν ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AB, BG . ἀσύμμετρον ἄρα
ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BG τῷ δις
15 ὑπὸ τῶν AB, BG . ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν AB, BG
ἴσον ἐστὶ τὸ $E\Theta$, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB, BG ἴσον
ἐστὶ τὸ ΘZ . ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ $E\Theta$ τῷ ΘZ .
ὥστε καὶ ἡ $\Delta\Theta$ τῇ ΘH ἐστὶν ἀσύμμετρος μήκει. αἱ
 $\Delta\Theta, \Theta H$ ἄρα ρηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι.
20 ὥστε ἡ ΔH ἄλογός ἐστιν. ρητὴ δὲ ἡ ΔE . τὸ δὲ ὑπὸ
ἀλόγου καὶ ρητῆς περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν
ἐστίν· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔZ χωρίον, καὶ ἡ δυνά-
μην [αὐτὸ] ἄλογός ἐστιν. δύναται δὲ τὸ ΔZ ἢ AG .

1. καί] om. Bfb; τὸ ὑπὸ τῶν (om. Fb) AB, BG . μέσον
ἄρα Bb, postea ins. F; κείμενον· τὸ δις ὑπὸ τῶν AB, BG .
μέσον ἄρα mg. m. rec. B. ὑπὸ τῶν] spat. uac. F. 3. $Z\Theta$]
corr. ex ΘZ V. 5. παράκεινται V. 6. ἐπεὶ οὖν] καὶ ἐπεὶ
Theon (BFVb). 7. καί — 9. BG] om. Theon (BFVb). 9.
ἀσύμμετρον — 10. BG] punctis del. V. 9. ἄρα] om. FVb,
m. rec. B. ἐστίν P. ἀπὸ τῆς AB τῷ] συγκείμενον ἐκ τῶν
ἀπὸ τῶν AB, BG τῷ δις Theon (BFVb). 10. ἀλλὰ — 15.
 AB, BG (prius)] om. Theon (BFVb). In mg. καὶ ἐστὶν lin. 7
— AB, BG lin. 15 addito κείμενον et signis $\times \cup$ ad locum
suum relat. V (lin. 10 ἀπό pro ὑπό), eadem B mg. m. 2, nisi

rectae ΔE adplicetur $E\Theta$ quadratis $AB^2 + B\Gamma^2$ aequale. itaque reliquum $\Theta Z = 2 AB \times B\Gamma$. et quoniam media est utraque $AB, B\Gamma$, etiam $AB^2 + B\Gamma^2$ media sunt. supposuimus autem, etiam $2 AB \times B\Gamma$ medium esse. et $E\Theta = AB^2 + B\Gamma^2$, $\Theta Z = 2 AB \times B\Gamma$. itaque utrumque $E\Theta$, ΘZ medium est. et rationali ΔE adplicata sunt. itaque utraque $\Delta\Theta$, ΘH rationalis est et rectae ΔE longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. iam quoniam $AB, B\Gamma$ longitudine incommensurabiles sunt, et $AB : B\Gamma = AB^2 : AB \times B\Gamma$ [prop. XXI lemma], AB^2 et $AB \times B\Gamma$ incommensurabilia sunt [prop. XI]. uerum AB^2 et $AB^2 + B\Gamma^2$ commensurabilia sunt [prop. XV], et $AB \times B\Gamma$, $2 AB \times B\Gamma$ commensurabilia sunt [prop. VI]. itaque $AB^2 + B\Gamma^2$ et $2 AB \times B\Gamma$ incommensurabilia sunt [prop. XIII]. uerum $E\Theta = AB^2 + B\Gamma^2$, $\Theta Z = 2 AB \times B\Gamma$. itaque $E\Theta$, ΘZ incommensurabilia sunt. quare etiam $\Delta\Theta$, ΘH longitudine incommensurabiles sunt [VI, 1; prop. XI]. ergo $\Delta\Theta$, ΘH rationales sunt potentia tantum commensurabiles. quare ΔH irrationalis est [prop. XXXVI]. uerum ΔE rationalis est. rectangulum autem recta irrationali et rationali comprehensum irrationale est [prop. XX]. quare spatium ΔZ irrationale est, et recta ei aequalis quadrata irrationalis est [def. 4]. uerum $A\Gamma^2 = \Delta Z$. ergo $A\Gamma$ irrationalis est; uocetur

quod om. ἀπό lin. 14 — $AB, B\Gamma$ lin. 15 et del. ἀσύμμετρον lin 18 — ἐκ τῶν lin. 14. 17. ΘZ] mut. in $Z\Theta$ V, $Z\Theta$ Bf b. ἐστίν P. ΘZ] $Z\Theta$ Bb. 18. ἀσύμμετρος ἐστὶ V. μήκει] om. Fb, m. 2 B. Deinde add. ἐδείχθησαν δὲ ῥηταί V, m. 2 B. 19. εἰσιν PB. 20. ἐστὶ BV, comp. Fb. 22. ἐστίν P. καὶ] ὥστε καὶ V. 23. αὐτό] om. P. ἐστὶ PBV, comp. Fb. δὲ ἡ ΔZ τὸ $A\Gamma$ ἄρα ἄλογός ἐστιν F.

ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ $ΑΓ$, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων δευτέρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λθ'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συν-
 5 τεθῶσι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν
 ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν
 μέσον, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ
 μέλζων.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμε-
 10 τροι αἱ $ΑΒ$, $ΒΓ$ ποιοῦσαι τὰ προκείμενα· λέγω, ὅτι
 ἄλογός ἐστιν ἡ $ΑΓ$.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ μέσον ἐστίν, καὶ
 τὸ δις [ἄρα] ὑπὸ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ μέσον ἐστίν. τὸ δὲ
 συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ ῥητόν· ἀσύμ-
 15 μετρον ἄρα ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ τῷ συγ-
 κειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ · ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ
 τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$, ὅπερ
 ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$, ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ συγκειμένῳ
 ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ [ῥητόν δὲ τὸ συγκείμενον
 20 ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$]· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ
 τῆς $ΑΓ$. ὥστε καὶ ἡ $ΑΓ$ ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ
 μέλζων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μ'.

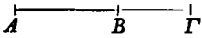
Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συν-
 25 τεθῶσι ποιοῦσαι το μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν
 ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, το δ' ὑπ' αὐτῶν

2. δευτέρα] seq. schol., u. app. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp.
 P, om. BFVb. 3. λθ'] om. b, μ' F. 4. συντεθῶσιν PBF.

autem ex duabus mediis secunda. quod erat demonstrandum.

XXXIX.

Si duae rectae potentia incommensurabiles componuntur, quae summam quadratorum suorum rationalem efficiant, rectangulum autem medium, tota recta irrationalis est, uocetur autem maior.

 Componantur enim duae rectae potentia incommensurabiles $AB, B\Gamma$, quae proposita efficiant [prop. XXXIII]. dico, $A\Gamma$ irrationalalem esse.

nam quoniam $AB \times B\Gamma$ medium est, etiam $2 AB \times B\Gamma$ medium est [prop. VI, XXIII coroll.]. est autem $AB^2 + B\Gamma^2$ rationale. itaque $2 AB \times B\Gamma$ et $AB^2 + B\Gamma^2$ incommensurabilia sunt [def. 4]. quare etiam $AB^2 + B\Gamma^2 + 2 AB \times B\Gamma$, hoc est $A\Gamma^2$ [II, 4], et $AB^2 + B\Gamma^2$ incommensurabilia sunt [prop. XVI]. ergo $A\Gamma^2$ irrationalale est; quare etiam $A\Gamma$ irrationalis est [def. 4]; uocetur autem maior. quod erat demonstrandum.

XL.

Si duae rectae potentia incommensurabiles componuntur, quae summam quadratorum suorum mediam efficiant, rectangulum autem rationale, tota recta irra-

5. μέν] τε V. 6. τετράγωνον b. τὸ δὲ BF, δὲ τὸ b. 7. ἐστὶ V, comp. Fb. 12. ἐστὶ PBV, comp. Fb. 13. ἄρα] om. P. 14. ἐστὶ PBV, comp. Fb. 16. τὰ] τὸ B. 18. ἐστὶν P. σύμμετρον b, corr. m. rec. ἐστὶν P. 19. ῥητόν — 20. BΓ] om. P. 20. ἄλογος F, corr. m. 1. 21. ἐστὶ PBV, comp. Fb. 22. μέζων] seq. schol., u. app. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. BFb, comp. P. 23. μὰ F. 24. συντεθῶσιν BF. 26. δὲ F.

ῥητόν, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ ῥητόν καὶ μέσον δυναμένη.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ AB , $BΓ$ ποιοῦσαι τὰ προκείμενα· λέγω, ὅτι ἄλογός
 5 ἐστὶν ἡ $ΑΓ$.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$ μέσον ἐστίν, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ ῥητόν, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$ τῷ δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ · ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς
 10 $ΑΓ$ ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$. ῥητόν δὲ τὸ δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ · ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$. ἄλογος ἄρα ἡ $ΑΓ$, καλείσθω δὲ ῥητόν καὶ μέσον δυναμένη. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μα'.

15 Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συνετεθῶσι ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός
 20 ἐστὶν, καλείσθω δὲ δύο μέσα δυναμένη.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ AB , $BΓ$ ποιοῦσαι τὰ προκείμενα· λέγω, ὅτι ἡ $ΑΓ$ ἄλογός ἐστιν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ $ΔΕ$, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ

1. ῥητόν, ἡ] in ras. V. ἐστὶ BV , comp. Fb. καλεῖται P.
 3. γὰρ] supra scr. m. 1 b. 4. αἱ] supra m. 1 P. προσ-
 κείμενα F, sed corr. 5. AB , corr. m. rec., P. 6. ὑπὸ F,
 corr. m. 2. 7. μέσον] μέσ- in ras. V. ἐστὶ $PBVb$, comp. F.
 δὲ] supra scr. m. 1 V. ῥητόν] corr. ex μέσον m. 2 V. σύμ-
 μετρον B, corr. m. rec. 8. ἐστὶν P. 10. τῷ — $BΓ$] bis b,
 mg. m. 1 P. Post καὶ add. συνθέντι Theon ($BFVb$), P m.

tionalis est, uocetur autem spatio rationali et medio aequalis quadrata.

$\left\{ \begin{array}{l} A \\ B \\ \Gamma \end{array} \right.$ Componantur enim duae rectae potentia incommensurabiles, quae proposita efficiant, AB , $B\Gamma$ [prop. XXXIV]. dico, $A\Gamma$ irrationalem esse.
nam quoniam $AB^2 + B\Gamma^2$ medium est, $2AB \times B\Gamma$ autem rationale, $AB^2 + B\Gamma^2$ et $2AB \times B\Gamma$ incommensurabilia sunt. quare etiam $A\Gamma^2$ et $2AB \times B\Gamma$ incommensurabilia sunt [prop. XVI]. uerum $2AB \times B\Gamma$ rationale est. itaque $A\Gamma^2$ irrationale est. quare $A\Gamma$ irrationalis est [def. 4]; uocetur autem spatio rationali et medio aequalis quadrata. quod erat demonstrandum.

XLI.

Si duae rectae potentia incommensurabiles componuntur, quae summam quadratorum suorum mediam efficiant, et rectangulum medium et simul summae quadratorum incommensurabile, tota recta irrationalis est, uocetur autem duobus spatiis mediis aequalis quadrata.

Componantur enim duae rectae potentia incommensurabiles AB , $B\Gamma$, quae proposita efficiant [prop. XXXV]. dico, $A\Gamma$ irrationalem esse.

ponatur rationalis ΔE , et rectae ΔE quadratis

rec. 12. ἄλογος — $A\Gamma$] mg. m. 1 P. 13. δυναμένη] seq. schol., u. app. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. BFb, comp. P. 14. $\mu\alpha'$] mut. in $\mu\beta'$ m. 2 F. 15. συντεθῶσιν PBF. 17. καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον] supra scr. m. 2 V. 19. τετραγώνωι PV. ἡ] m. 2 F. 20. ἐστὶ PBV, comp. Fb. 22. τὰ προκειμένα] τὸ τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ μέσον καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ μέσον καὶ ἐστὶ ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ τετραγώνων Theon (BFVb, τετραγώνω FVb).

τὴν ΔE τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ ἴσον τὸ ΔZ , τῷ
 δὲ δις ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ ἴσον τὸ $H\Theta$. ὅλον ἄρα τὸ
 $\Delta\Theta$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AG τετραγώνῳ. καὶ ἐπεὶ
 5 καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ ΔZ , μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΔZ .
 καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔE παράκειται ῥητὴ ἄρα ἐστὶν
 ἢ ΔH καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔE μήκει. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ
 καὶ ἡ HK ῥητὴ ἐστὶ καὶ ἀσύμμετρος τῇ HZ , τουτ-
 ἐστὶ τῇ ΔE , μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρά ἐστὶ τὰ ἀπὸ
 10 τῶν AB , $B\Gamma$ τῷ δις ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$, ἀσύμμετρόν
 ἐστὶ τὸ ΔZ τῷ $H\Theta$. ὥστε καὶ ἡ ΔH τῇ HK ἀσύμμε-
 τρός ἐστίν. καὶ εἰσι ῥηταί· αἱ ΔH , HK ἄρα ῥηταί
 εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ
 ΔK ἢ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων. ῥητὴ δὲ ἡ ΔE .
 15 ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ $\Delta\Theta$ καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός
 ἐστίν. δύναται δὲ τὸ $\Theta\Delta$ ἢ AG . ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ
 AG , καλεῖσθω δὲ δύο μέσα δυναμένη. ὅπερ ἔδει
 δεῖξαι.

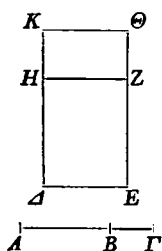
Λήμμα.

20 Ὅτι δὲ αἱ εἰρημέναι ἄλογοι μοναχῶς διαιροῦνται
 εἰς τὰς εὐθείας, ἐξ ὧν σύγκεινται ποιουσῶν τὰ προ-
 κείμενα εἶδη, ᾗδεξιόμεν ἤδη προεκθέμενοι λημμάτιον
 τοιοῦτον·

Ἐκκεῖσθω εὐθεῖα ἡ AB καὶ τετμήσθω ἡ ὅλη εἰς
 25 ἄνισα καθ' ἐκάτερον τῶν Γ , Δ , ὑποκεῖσθω δὲ μελίσων

1. ΔE] corr. ex ΔA m. 2 P. 3. $\Theta\Delta$ P. 6. ΔE] corr.
 ex Δ m. rec. B. 7. διὰ — 9. μήκει] mg. m. 2 F. 8. ἐστὶν B.
 τουτεστιν B. 9. ἀσύμμετρόν ἐστὶ τό BV. 10. τῷ — $B\Gamma$]
 mg. m. 1 P (τῷ corr. ex τό m. rec.). 11. ἄρα ἐστὶ P. ΔH]
 $H\Delta$ b. 12. ἐστὶ Vb, comp. F m. 2. εἰσιν B. Post αἱ
 del. δέ F. ἄρα] m. 2 F. 13. εἰσιν P. 14. ΔK] K e corr.
 m. 1 b. 16. ἐστὶ V, comp. b et m. 2 F. $\Theta\Delta$] in ras. Vb,
 $\Delta\Theta$ corr. ex ΔH m. 2 B. ἢ AG] m. 2 B. ἄρα] γὰρ B.

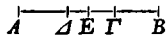
$AB^2 + BG^2$ aequale adplicetur ΔZ , rectangulo autem $2 AB \times BG$ aequale $H\Theta$. itaque $\Delta\Theta = \Delta\Gamma^2$ [II, 4].



et quoniam $AB^2 + BG^2$ medium est et $= \Delta Z$, etiam ΔZ medium est. et rectae rationali ΔE adplicatum est. itaque ΔH rationalis est et rectae ΔE longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. eadem de causa etiam HK rationalis est et rectae HZ , hoc est ΔE , longitudine incommensurabilis. et quoniam $AB^2 + BG^2$ et $2 AB \times BG$ incommensurabilia sunt, ΔZ et $H\Theta$ incommensurabilia sunt. quare etiam ΔH , HK incommensurabiles sunt [VI, 1; prop. XI]. et sunt rationales; itaque ΔH , HK rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo ΔK irrationalis est, ex duobus nominibus quae uocatur [prop. XXXVI]. ΔE autem rationalis est. itaque $\Delta\Theta$ irrationale est, et recta ei aequalis quadrata irrationalis [def. 4]. est autem $\Delta\Gamma^2 = \Delta\Theta$. ergo $\Delta\Gamma$ irrationalis est; uocetur autem duobus spatiis mediis aequalis quadrata. quod erat demonstrandum.

Lemma.

Rectas autem irrationales, quas nominauimus, uno tantum modo in rectas diuidi, ex quibus compositae sint proposita efficientibus, demonstrabimus huiusmodi lemmate praemisso.



17. *δυναμένη*] seq. schol., u. app. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*] om. BFVb. 19. *λήμματα*] om. BV, m. rec. P. 20. *ὅτι*] *τι* V. 21. *προσκειμένα* F, corr. m. 2. 22. *προθέμενοι* P, *προσενθέμενοι* B et F, sed corr. 24. Ante *εὐθεία* ras. 3 litt. V. *ἡ ὅλη*] *ὅλη* FVb. 25. *καὶ καθ'* F. *ἐκάτερα* BV. *ὑποκείσθω δέ*] *καὶ ὑποκείσθω* P.

ἡ $ΑΓ$ τῆς $ΔΒ$ · λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ μείζονά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$.

Τετμήσθω γὰρ ἡ $ΑΒ$ δίχα κατὰ τὸ $Ε$. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ $ΑΓ$ τῆς $ΔΒ$, κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ $ΔΓ$.
 5 λοιπὴ ἄρα ἡ $ΑΔ$ λοιπῆς τῆς $ΓΒ$ μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἡ $ΑΕ$ τῇ $ΕΒ$ · ἐλάττων ἄρα ἡ $ΔΕ$ τῆς $ΕΓ$ · τὰ $Γ$, $Δ$ ἄρα σημεία οὐκ ἴσον ἀπέχουσι τῆς διχοτομίας. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΕΓ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΕΒ$, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ ὑπὸ τῶν
 10 $ΑΔ$, $ΔΒ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ $ΔΕ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΕΒ$, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΕΓ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΔΕ$ · ὦν τὸ ἀπὸ τῆς $ΔΕ$ ἐλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς $ΕΓ$ · καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ ἐλασσόν
 15 ἐστὶ τοῦ ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$. ὥστε καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ ἐλασσόν ἐστὶ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$. καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ μείζον ἐστὶ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

20

μβ'.

Ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων κατὰ ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.

Ἔστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ $ΑΒ$ διηρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ $Γ$ · αἱ $ΑΓ$, $ΓΒ$ ἄρα ρηταὶ εἰσι δυνά-
 25 μει μόνον σύμμετροι. λέγω, ὅτι ἡ $ΑΒ$ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται εἰς δύο ρητάς δυνάμει μόνον συμμέτρους.

2. $ΑΔ$] $ΑΓ$ corr. in $ΑΒ$ m. rec. b. 4. Post κοινὴ del. δέ V. $ΔΓ$] $ΑΓ$ b, $ΔΓ$ καὶ P. 6. ἐλάσσων P. ἄρα ἐστίν P.
 7. $Δ$, $Γ$ P. 9. μὴν] om. P. 10. τῆς $ΔΕ$ V. τῷ] τοῦ b.

Ponatur recta AB et tota in Γ , Δ in partes inaequales secetur, et supponatur $A\Gamma > \Delta B$. dico, esse $A\Gamma^2 + \Gamma B^2 > A\Delta^2 + \Delta B^2$. nam AB in duas partes aequales secetur in E . et quoniam $A\Gamma > \Delta B$, subtrahatur, quae communis est, $\Delta\Gamma$. itaque relinquitur $A\Delta > \Gamma B$. uerum $AE = EB$. itaque $\Delta E < E\Gamma$. itaque puncta Γ , Δ a puncto medio aequaliter non distant. et quoniam $A\Gamma \times \Gamma B + E\Gamma^2 = EB^2$ [II, 5], et $A\Delta \times \Delta B + \Delta E^2 = EB^2$ [id.], erit $A\Gamma \times \Gamma B + E\Gamma^2 = A\Delta \times \Delta B + \Delta E^2$. quorum $\Delta E^2 < E\Gamma^2$. itaque reliquum $A\Gamma \times \Gamma B < A\Delta \times \Delta B$. quare etiam $2 A\Gamma \times \Gamma B < 2 A\Delta \times \Delta B$. ergo etiam reliquum¹⁾ $A\Gamma^2 + \Gamma B^2 > A\Delta^2 + \Delta B^2$; quod erat demonstrandum.

XLII.

Recta ex duobus nominibus in uno tantum puncto in nomina diuiditur.

Ex duobus nominibus sit AB in puncto Γ in nomina diuisa. itaque $A\Gamma$, ΓB rationales sunt potentia tantum commensurabiles [prop. XXXVI]. dico, AB in nullo alio puncto in duas rationales potentia tantum commensurabiles diuidi.

1) Nam

$$A\Gamma^2 + \Gamma B^2 + 2 A\Gamma \times \Gamma B = AB^2 = A\Delta^2 + \Delta B^2 + 2 A\Delta \times \Delta B$$

(II, 4).

11. ΓB] in ras. F. 12. $\tau\eta\varsigma$] postea ins. F. 13. $\acute{\omega}\nu$ — ΔE] om F. $\acute{\epsilon}\lambda\alpha\sigma\sigma\upsilon$ V. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$] om. V. 14. $\acute{\epsilon}\lambda\alpha\tau\tau\omicron\nu$ BVb, comp. F (in B supra scr. $\mu\epsilon\iota\zeta\omicron\nu$ m. rec., sed del.); item lin. 16. 16. $\kappa\alpha\iota$] supra scr. F. 18. $\acute{\alpha}\nu\omicron$] corr. ex $\upsilon\pi\omicron$ m. 2 V. 19. Ante $\acute{\omicron}\pi\epsilon\rho$ add. $\acute{\epsilon}\lambda\pi\epsilon\rho$ $\sigma\upsilon\nu\nu\alpha\mu\phi\acute{\omicron}\tau\epsilon\rho\alpha$ $\acute{\iota}\sigma\alpha$ $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ $\tau\acute{\omega}$ ($\tau\acute{\omega}\nu$ b) $\acute{\alpha}\nu\omicron$ $\tau\eta\varsigma$ AB Theon (BFVb), m. rec. P. 21. $\kappa\alpha\theta'$ b. 24. $\kappa\alpha\tau\acute{\alpha}$] supra scr. m. 1 P. $\acute{\epsilon}\lambda\iota\alpha\nu$ PBF.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διηρησθῶ καὶ κατὰ τὸ Δ , ὥστε καὶ τὰς $A\Delta$, ΔB ρητὰς εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους. φανερόν δὴ, ὅτι ἡ AG τῇ ΔB οὐκ ἔστιν ἡ αὐτή. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω. ἔσται δὴ καὶ ἡ $A\Delta$ τῇ ΓB ἡ αὐτή· καὶ ἔσται ὡς ἡ AG πρὸς τὴν ΓB , οὕτως ἡ $B\Delta$ πρὸς τὴν ΔA , καὶ ἔσται ἡ AB κατὰ τὸ αὐτὸ τῇ κατὰ τὸ Γ διαιρέσει διαιρεθεῖσα καὶ κατὰ τὸ Δ · ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. οὐκ ἄρα ἡ AG τῇ ΔB ἔστιν ἡ αὐτή. διὰ δὲ τοῦτο καὶ τὰ Γ , Δ σημεῖα οὐκ ἴσους ἀπέχουσι τῆς διχοτομίας. ὥς ἄρα διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν AG , ΓB τῶν ἀπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB , τούτῳ διαφέρει καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB τοῦ δις ὑπὸ τῶν AG , ΓB διὰ τὸ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AG , ΓB μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν AG , ΓB καὶ τὰ ἀπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB ἴσα εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς AB . ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν AG , ΓB τῶν ἀπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB διαφέρει ρητῶ· ρητὰ γὰρ ἀμφοτέρω· καὶ τὸ δις ἄρα ὑπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB τοῦ δις ὑπὸ τῶν AG , ΓB διαφέρει ρητῶ μέσα ὄντα· ὅπερ ἄτοπον· μέσον γὰρ μέσου οὐχ ὑπερέχει ρητῶ. Οὐκ ἄρα ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· καθ' ἓν ἄρα μόνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μγ'.

Ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη καθ' ἓν μόνον σημείον διαιρεῖται.

1. διαιρεῖσθω V. καὶ κατὰ] κατὰ BFVb. 3. ΔB] $B\Delta$ e corr. m. 2 V. 4. δὴ] corr. ex δέ V. $A\Delta$] corr. ex AG V. 5. ΓB] mut. in $B\Gamma$ V. ὡς ἡ — 6. ἔσται] m. 2 B. 6. τῇ] om. Fb. ἡ] ὡς ἡ b (corr.), ὡς supra scr. m. 1 F. αὐτό] αὐ- e corr. V; αὐτὸ τμήμα P, τμήμα supra scr. m. 2 V. 7. τῇ κατὰ] m. rec. P. Post καί add. τῇ supra m. 1 V. 8. ΔB] AB φ. 10. ἀπέχουσιν B. τοῦ διχοτομίου P, corr. m. rec. φ] ὡς φ. 12. AG , ΓB P. τοῦ] corr. ex ου

$\left. \begin{array}{l} A \\ \Delta \\ \Gamma \\ B \end{array} \right\}$ Nam, si fieri potest, in Δ diuidatur ita, ut etiam $A\Delta$, ΔB rationales sint potentia tantum commensurabiles. manifestum est igitur, $A\Gamma$ et ΔB easdem non esse. sint enim, si fieri potest. itaque etiam $A\Delta$ et ΓB eadem erunt. et erit $A\Gamma : \Gamma B = B\Delta : \Delta A$, et AB etiam in Δ eodem modo ac in Γ diuisa erit, id quod contra hypothesim est. quare $A\Gamma$, ΔB eadem non sunt. ea de causa Γ , Δ puncta a medio puncto aequaliter non distant [cfr. lemma]. quo igitur $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ ab $A\Delta^2 + \Delta B^2$ differt [u. lemma], eo etiam $2A\Delta \times \Delta B$ a $2A\Gamma \times \Gamma B$ differt, quia $A\Gamma^2 + \Gamma B^2 + 2A\Gamma \times \Gamma B = AB^2 = A\Delta^2 + \Delta B^2 + 2A\Delta \times \Delta B$ [II, 4]. uerum $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ ab $A\Delta^2 + \Delta B^2$ spatio rationali differt; nam utrumque rationale est. itaque etiam $2A\Delta \times \Delta B$ a $2A\Gamma \times \Gamma B$ spatio rationali differt, quamquam media sunt [prop. XXI]; quod absurdum est; nam spatium medium non excedit medium spatio rationali [prop. XXVI].

Ergo recta ex duobus nominibus non diuiditur in punctis diuersis; itaque in uno tantum diuiditur; quod erat demonstrandum.

XLIII.

Recta ex duabus mediis prima in uno tantum puncto diuiditur.

m. rec. P. $\tau\omega\nu$] om. P. $A\Gamma$, ΓB] $A\Delta$, ΔB P. 15. AB] supra scr. Δ b. 16. Post ΓB ras. magna V. $\tau\omega\nu$] corr. ex $\tau\omega$ b. 17. $\alpha\theta\alpha$] supra scr. m. 2 F. $A\Delta B$ P, corr. m. rec. 18. $A\Gamma B$ Pb, corr. m. rec. 19. $\acute{\omicron}\pi\epsilon\rho\ \acute{\alpha}\tau\omicron\pi\omicron\nu$] om. Theon (BFVb). $\gamma\acute{\alpha}\rho$] $\delta\acute{\epsilon}$ Theon (BFVb). 21. $\delta\iota\sigma\kappa\epsilon\iota\tau\alpha\iota$ P, corr. m. rec. $\acute{\omicron}\pi\epsilon\rho\ \xi\delta\epsilon\iota\ \delta\sigma\iota\zeta\alpha\iota$] comp. P, om. BFVb. 25. $\delta\iota\alpha\iota\sigma\kappa\epsilon\iota\tau\alpha\iota\ \epsilon\iota\varsigma\ \tau\alpha\ \acute{\omicron}\nu\acute{\omicron}\mu\alpha\tau\alpha$ Theon (BFVb).

Ἐστω ἐκ δύο μέσων πρώτη ἡ AB διηρημένη κατὰ τὸ Γ , ὥστε τὰς AG , GB μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους ῥητὸν περιεχούσας· λέγω, ὅτι ἡ AB κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

- 5 Εἰ γὰρ δυνατόν, διηρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ , ὥστε καὶ τὰς $A\Delta$, ΔB μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους ῥητὸν περιεχούσας. ἐπεὶ οὖν, ᾧ διαφέρει τὸ δις ὑπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB τοῦ δις ὑπὸ τῶν AG , GB , τούτῳ διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν AG , GB τῶν ἀπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB ,
 10 ῥητῷ δὲ διαφέρει τὸ δις ὑπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB τοῦ δις ὑπὸ τῶν AG , GB · ῥητὰ γὰρ ἀμφοτέρω· ῥητῷ ἄρα διαφέρει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AG , GB τῶν ἀπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB μέσα ὄντα· ὅπερ ἄτοπον.

- Οὐκ ἄρα ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη κατ' ἄλλο καὶ
 15 ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα· καθ' ἓν ἄρα μόνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μδ'.

Ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται.

- 20 Ἐστω ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἡ AB διηρημένη κατὰ τὸ Γ , ὥστε τὰς AG , GB μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους μέσον περιεχούσας· φανερόν δὲ, ὅτι τὸ Γ οὐκ ἔστι κατὰ τῆς διχοτομίας, ὅτι οὐκ εἰσὶ μήκει σύμμετροι. λέγω, ὅτι ἡ AB κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαι-
 25 ρεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διηρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ , ὥστε

1. ἡ AB] supra scr. F, corr. ex ἡ $A\Delta$ m. rec. P. 4. οὐ] om. b. 5. καί] om. Fb. 9. τῶν ἀπὸ] in ras. m. 1 P. 10. ΔB] supra scr. m. 1 F. 13. Post ὄντα add. μέσον μέσον ὑπερέχει ῥητῷ φ. 16. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 17. μδ'] mut. in μέ' F. 19. διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα

Sit AB ex duabus mediis prima in Γ ita diuisa, ut $A\Gamma$, ΓB mediae sint potentia tantum commensurabiles spatium rationale comprehendentes [prop. XXXVII]. dico, AB in nullo alio puncto diuidi.

nam, si fieri potest, in Δ ita diuidatur, ut etiam $A\Delta$, ΔB mediae sint potentia tantum commensurabiles spatium rationale comprehendentes. iam quoniam, quo differt $2 A\Delta \times \Delta B$ a $2 A\Gamma \times \Gamma B$, eo differt $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ ab $A\Delta^2 + \Delta B^2$ [prop. XLI lemma], et $2 A\Delta \times \Delta B$ a $2 A\Gamma \times \Gamma B$ spatio rationali differt (nam utrumque rationale est), etiam $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ ab $A\Delta^2 + \Delta B^2$ spatio rationali differt, quamquam media sunt; quod absurdum est [prop. XXVI].

Ergo recta ex duabus mediis prima in nomina non diuiditur in punctis diuersis; itaque in uno tantum diuiditur; quod erat demonstrandum.

XLIV.

Recta ex duabus mediis secunda in uno tantum puncto diuiditur.

Sit AB ex duabus mediis secunda in Γ diuisa, ita ut $A\Gamma$, ΓB mediae sint potentia tantum commensurabiles spatium medium comprehendentes [prop. XXXVIII]. manifestum est igitur, Γ punctum medium non esse, quod longitudine commensurabiles non sunt. dico, AB in nullo alio puncto diuidi.

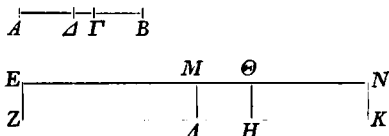
nam, si fieri potest, etiam in Δ diuidatur, ita ut

Theon (BFVb). 23. $\xi\sigma\tau\iota\nu$ B. $\tau\eta\nu \delta\iota\chi\sigma\tau\omicron\mu\iota\alpha\nu$ V. $\delta\tau\iota$ $\epsilon\pi\epsilon\iota\delta\eta\mu\epsilon\theta\epsilon$ Theon (BFVb). $\epsilon\lambda\epsilon\gamma\iota\nu$ PB. 26. $\kappa\alpha\iota$] om. Theon (BFVb).

τὴν $ΑΓ$ τῇ $ΔΒ$ μὴ εἶναι τὴν αὐτήν, ἀλλὰ μείζονα καθ' ὑπόθεσιν τὴν $ΑΓ$. δῆλον δὴ, ὅτι καὶ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$, ὡς ἐπάνω ἐδείξαμεν, ἐλάσσονα τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$. καὶ τὰς $ΑΔ$, $ΔΒ$ μέσας εἶναι δυνάμει
 5 μόνον συμμετρους μέσον περιεχούσας. καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ EZ , καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ ἴσον παρὰ τὴν EZ παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον παραβεβλήσθω τὸ EK , τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ ἴσον ἀφηγήσθω τὸ $ΕΗ$. λοιπὸν ἄρα τὸ $ΘΚ$ ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν
 10 $ΑΓ$, $ΓΒ$. πάλιν δὴ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$, ἅπερ ἐλάσσονα ἐδείχθη τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$, ἴσον ἀφηγήσθω τὸ $ΕΑ$. καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ $ΜΚ$ ἴσον τῷ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$. καὶ ἐπεὶ μέσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$, μέσον ἄρα [καὶ] τὸ $ΕΗ$. καὶ παρὰ ῥητὴν
 15 τὴν EZ παράκειται ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $EΘ$ καὶ ἀσύμμετρος τῇ EZ μήκει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ $ΘΝ$ ῥητὴ ἐστὶ καὶ ἀσύμμετρος τῇ EZ μήκει. καὶ ἐπεὶ αἱ $ΑΓ$, $ΓΒ$ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ $ΑΓ$ τῇ $ΓΒ$ μήκει. ὡς δὲ ἡ $ΑΓ$ πρὸς
 20 τὴν $ΓΒ$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ τῷ ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ σύμμετρά ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$. δυνάμει γάρ εἰσι

1. $ΑΓ$] $Γ$ in ras. F. 2. κατὰ P. δῆλον δὴ, ὅτι] δηλαδὴ Theon (BFVb); ὅτι add. B m. 2. 3. $ΑΓ$, $ΓΒ$ μείζονα τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$, ὡς ἐπάνω ἐδείξαμεν Theon (BFVb). 4. Ante καὶ add. ἔστω δέ* V, et in mg. m. 1 *ἐλάσσονα τῶν ἀπὸ $ΑΓ$, $ΓΒ$. 5. κείσθω V, corr. m. 1. 6. τῷ] corr. ex τό V. 7. παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον] om. Theon (BFVb). 9. $ΘΚ$] in ras. V. 10. ἅπερ — 11. $ΓΒ$] om. Fb, mg. m. 2 BV. 11. ἐλάττονα V. 12. $ΕΑ$] ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ B. Deinde add. πάλιν δὴ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ ἔλασσον ἐδείχθη τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ B, ἐπεὶ καὶ (καὶ ἐπεὶ V) τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ ἐλάσσονα (ἐλάττονα F) ἐδείχθη τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ FVb, in V del.

AG , AB eadem non sint, sed AG maior supponatur (manifestum est igitur, esse etiam $AA^2 + AB^2 < AG^2 + GB^2$, ut supra demonstrauius [prop. XLI lemma]), et ut AA , AB mediae sint potentia tantum commensurabiles spatium medium comprehendentes. et pona-



tur rationalis EZ , et quadrato AB^2 aequale rectae EZ parallelogrammum rectangulum EK adplicetur [I, 44], quadratis autem $AG^2 + GB^2$ aequale auferatur EH . itaque quod relinquitur, $ΘK = 2 AG \times GB$ [II, 4]. rursus quadratis $AA^2 + AB^2$ (quae minora esse quam $AG^2 + GB^2$, demonstrauius) aequale auferatur EA . itaque $MK = 2 AA \times AB$. et quoniam $AG^2 + GB^2$ media sunt, EH medium est. et rectae rationali EZ adplicatum est. ergo $EΘ$ rationalis est et rectae EZ longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. eadem de causa etiam $ΘN$ rationalis est et rectae EZ longitudine incommensurabilis. et quoniam AG , GB mediae sunt potentia tantum commensurabiles, AG et GB longitudine incommensurabiles sunt. sed $AG:GB = AG^2:AG \times GB$ [prop. XXI lemma]. itaque etiam AG^2 et $AG \times GB$ incommensurabilia sunt [prop.

ἐστὶ τῷ P. 13. ἐστὶ] in ras. m. 1 b, ἐστὶν B. 14. καὶ τό] τό BFV b. 16. ΘN] EH b, EN in ras. m. 1 F. 17. ἐστὶν P. 18. ἐστὶν B. 19. ΓB] BG B. 20. ΓB] in ras. V. 21. σύμμετρον V, corr. m. 1. AG] A e corr. V. 22. ἀλλά] supra scr. m. 1 V. τῷ] corr. ex τό m. 1 F. τῷ μὲν] e corr. V. 23. ΓB] B eras. B.

σύμμετροι αἱ $ΑΓ$, $ΓΒ$. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ σίμμετρόν ἐστι τὸ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$. καὶ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ ἄρα ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ ἴσον ἐστὶ
 5 τὸ $ΕΗ$, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ ἴσον τὸ $ΘΚ$. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΕΗ$ τῷ $ΘΚ$. ὥστε καὶ ἡ $ΕΘ$ τῇ $ΘΝ$ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει. καὶ εἰσι ρηταί· αἱ $ΕΘ$, $ΘΝ$ ἄρα ρηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἐὰν δὲ δύο ρηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσιν,
 10 ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων· ἡ $ΕΝ$ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ διηρημένη κατὰ τὸ $Θ$. κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσονται καὶ αἱ $ΕΜ$, $ΜΝ$ ρηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ ἔσται ἡ $ΕΝ$ ἐκ δύο ὀνομάτων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο διηρημένη τό τε $Θ$
 15 καὶ τὸ $Μ$, καὶ οὐκ ἔστιν ἡ $ΕΘ$ τῇ $ΜΝ$ ἡ αὐτή, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ μείζονά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$. ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ μείζονά ἐστι τοῦ δις ὑπὸ $ΑΔ$, $ΔΒ$. πολλῶν ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$, τουτέστι τὸ $ΕΗ$, μείζον ἐστὶ τοῦ δις ὑπὸ τῶν
 20 $ΑΔ$, $ΔΒ$, τουτέστι τοῦ $ΜΚ$. ὥστε καὶ ἡ $ΕΘ$ τῇ $ΜΝ$ μείζων ἐστίν. ἡ ἄρα $ΕΘ$ τῇ $ΜΝ$ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

1. Supra σύμμετροι add. α Fb. τῷ δέ — $ΓΒ$] mg. m. 1 P. 2. τό] corr. ex τῷ Vb. τὰ] supra scr. m. 2 F. 3. σύμμετρα b, et B, corr. m. 2; α- del. F. 4. $ΓΒ$ μήκει V. $ΓΒ$] (alt.) $Γ$ e corr. V. 5. ἴσον ἐστί P. 6. ἐστίν P. $ΕΗ$] H in ras. V. 8. $ΕΘ$] "Θ' E F. εἰσιν P. 9. ἐντεθῶσιν B, corr. m. 2. 10. ἐκ] ἐκ τῶν F. 11. ἄρα] om. P. ἐστίν P. 12. $ΘΚ$ b. 15. ἐστίν] ἔσται V. ἡ] supra scr. m. 1 F. ἡ] postea ins. F. ὅτι] ἐπειδήπερ Theon (BFVb). 17. Mg. m. 1: γρ. τὰ δὲ ἀπὸ (τῶν $Α$, $Δ$ F) Fb. 18. τῶν $ΑΔ$ FV. 19. τουτέστι P. 20. τουτέστιν P. τοῦ] e corr. V. $ΜΚ$] $Μ$ seq. ras. 1 litt. B. ἡ] supra scr. m.

XI]. uerum $A\Gamma^2$ et $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ commensurabilia sunt; nam $A\Gamma$, ΓB potentia commensurabiles sunt. et $A\Gamma \times \Gamma B$, $2 A\Gamma \times \Gamma B$ commensurabilia sunt [prop. VI]. quare etiam $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ et $2 A\Gamma \times \Gamma B$ incommensurabilia sunt [prop. XIII]. uerum $EH = A\Gamma^2 + \Gamma B^2$, $\Theta K = 2 A\Gamma \times \Gamma B$. itaque EH , ΘK incommensurabilia sunt. quare etiam $E\Theta$, ΘN longitudine incommensurabiles sunt [VI, 1; prop. XI]. et sunt rationales. itaque $E\Theta$, ΘN rationales sunt potentia tantum commensurabiles. sin duae rectae rationales potentia tantum commensurabiles componuntur, tota irrationalis est ex duobus nominibus, quae uocatur [prop. XXXVI]. itaque EN ex duobus nominibus est in Θ diuisa. eodem igitur modo demonstrabimus, etiam EM , MN rationales esse potentia tantum commensurabiles. et EN , quae ex duobus nominibus est, in punctis diuersis Θ et M diuisa erit [quod absurdum est; prop. XLII], et $E\Theta$, MN eadem non sunt, quod $A\Gamma^2 + \Gamma B^2 > A\Delta^2 + \Delta B^2$; uerum $A\Delta^2 + \Delta B^2 > 2 A\Delta \times \Delta B$.¹⁾ quare multo magis $A\Gamma^2 + \Gamma B^2 > 2 A\Delta \times \Delta B$, hoc est $EH > MK$. quare etiam $E\Theta > MN$ [VI, 1]. itaque $E\Theta$, MN eadem non sunt; quod erat demonstrandum.

1) U. prop. LIX lemma.

1 b. 21. $\mu\epsilon\iota\zeta\omicron\nu$ V, sed corr. $\tau\eta]$ $\tau\eta\varsigma$ b. Post $\alpha\upsilon\tau\eta$ add. η EN $\alpha\gamma\alpha$ $\acute{\epsilon}\kappa$ $\delta\upsilon\omicron$ $\delta\nu\omicron\mu\acute{\alpha}\tau\omega\nu$ $\kappa\alpha\lambda\omicron\nu\mu\acute{\epsilon}\nu\eta$ $\kappa\alpha\tau'$ $\acute{\alpha}\lambda\lambda\omicron$ $\kappa\alpha\iota$ $\acute{\alpha}\lambda\lambda\omicron$ $\sigma\eta\mu\epsilon\iota\omicron\nu$ $\delta\iota\alpha\iota\rho\epsilon\iota\tau\alpha\iota$. $\delta\pi\epsilon\rho$ $\acute{\alpha}\tau\omicron\pi\omicron\nu$. $\omicron\upsilon\kappa$ $\alpha\gamma\alpha$ $\acute{\epsilon}\kappa$ $\delta\upsilon\omicron$ $\mu\acute{\epsilon}\sigma\omega\nu$ $\delta\epsilon\upsilon\tau\acute{\epsilon}\rho\alpha$ $\kappa\alpha\tau'$ $\acute{\alpha}\lambda\lambda\omicron$ $\kappa\alpha\iota$ $\acute{\alpha}\lambda\lambda\omicron$ $\sigma\eta\mu\epsilon\iota\omicron\nu$ $\delta\iota\alpha\iota\rho\epsilon\iota\tau\alpha\iota$ η $\kappa\alpha\theta'$ $\xi\eta$ $\mu\acute{o}\nu\omicron\nu$ F. 22. $\delta\pi\epsilon\rho$ $\acute{\epsilon}\delta\epsilon\iota$ $\delta\epsilon\iota\chi\alpha\iota$] om. BVb.

μεί'.

Ἡ μείζων κατὰ τὸ αὐτὸ μόνον σημεῖον διαιρεῖται.

Ἐστω μείζων ἡ AB διηρημένη κατὰ τὸ Γ , ὥστε
 5 τὰς AG , GB δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι ποιούσας τὸ
 μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AG , GB τετραγώνων
 ῥητόν, τὸ δ' ὑπὸ τῶν AG , GB μέσον· λέγω, ὅτι ἡ
 AB κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διηρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ , ὥστε
 10 καὶ τὰς $A\Delta$, ΔB δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι ποιού-
 σας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB ῥη-
 τόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον. καὶ ἐπεί, ᾧ διαφέρει
 τὰ ἀπὸ τῶν AG , GB τῶν ἀπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB , τούτῳ
 διαφέρει καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB τοῦ δις ὑπὸ
 15 τῶν AG , GB , ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν AG , GB τῶν ἀπὸ
 τῶν $A\Delta$, ΔB ὑπερέχει ῥητῷ· ῥητὰ γὰρ ἀμφοτέρω·
 καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB ἄρα τοῦ δις ὑπὸ τῶν
 AG , GB ὑπερέχει ῥητῷ μέσα ὄντα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύ-
 νατον. οὐκ ἄρα ἡ μείζων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον
 20 διαιρεῖται· κατὰ τὸ αὐτὸ ἄρα μόνον διαιρεῖται· ὅπερ
 ἔδει δεῖξαι.

μς'.

Ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη καθ' ἓν μόνον
 σημεῖον διαιρεῖται.

Ἐστω ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἡ AB διηρημένη
 25 κατὰ τὸ Γ , ὥστε τὰς AG , GB δυνάμει ἀσυμμέτρους

1. μς' F. 2. Supra τό add. m. 2 καὶ ἐν P. διαιρεῖται
 εἰς τὰ ὀνόματα Theon (BFVb). 5. GB] supra scr. B. Supra
 ποιούσας scr. καὶ m. 1 V. 6. AG] ΓA Fb; mg. m. 1 AB ,
 $B\Gamma$ b. τετραγώνων] supra scr. ο b, -ων in ras. V. 7.
 ῥητός F. δέ BF. 9. καί] om. Theon (BFVb). 10. δν-

XLV.

Recta maior in uno tantum puncto diuiditur.

Sit AB maior in Γ ita diuisa, ut AG, GB potentia incommensurabiles sint efficientes summam $AG^2 + GB^2$ rationalem, $AG \times GB$ autem medium [prop. XXXIX]. dico, AB in nullo alio puncto diuidi.

$\begin{array}{l} A \\ \Delta \\ \Gamma \\ B \end{array}$ nam, si fieri potest, etiam in Δ diuidatur, ita ut $A\Delta, \Delta B$ potentia incommensurabiles sint efficientes summam $A\Delta^2 + \Delta B^2$ rationalem, $A\Delta \times \Delta B$ autem medium. et quoniam, quo $AG^2 + GB^2$ ab $A\Delta^2 + \Delta B^2$ differt [prop. XLI lemma], eo etiam $2 A\Delta \times \Delta B$ a $2 AG \times GB$ differt [cfr. p. 122, 10 sq.], et $AG^2 + GB^2$ excedit $A\Delta^2 + \Delta B^2$ spatio rationali (nam utrumque rationale est), etiam $2 A\Delta \times \Delta B$ excedit $2 AG \times GB$ spatio rationali, quamquam media sunt; quod fieri non potest [prop. XXVI]. itaque maior non diuiditur in punctis diuersis. ergo in uno tantum diuiditur; quod erat demonstrandum.

XLVI.

Recta spatio rationali et medio aequalis quadrata in uno tantum puncto diuiditur.

Sit AB recta spatio rationali et medio aequalis quadrata in Γ ita diuisa, ut AG, GB potentia incommensurabiles sint efficientes $AG^2 + GB^2$ medium,

$\nu\acute{\alpha}\mu\epsilon\iota\varsigma$ P, corr. m. 1. 11. $\tau\acute{\omega}\nu \acute{\alpha}\nu\theta\acute{\iota}$] m. 2 V. $\phi\eta\tau\acute{\omega}\nu$ F.
 12. $\delta\acute{\epsilon}$ F. $\acute{\alpha}\tau\acute{\omega}\nu$ P, corr. m. 1. 14. $\tau\acute{o}$] corr. ex $\tau\omicron\upsilon$ V.
 17. $\tau\acute{o}$] $\tau\acute{\alpha}$ V. 20. $\acute{o}\pi\epsilon\rho \acute{\epsilon}\delta\epsilon\iota \delta\epsilon\acute{\iota}\xi\alpha\iota$] comp. P, om. BFVb.
 24. Post $\delta\iota\alpha\iota\tau\epsilon\iota\tau\alpha\iota$ add. $\epsilon\acute{\iota}\varsigma \tau\acute{\alpha} \acute{o}\nu\omicron\mu\alpha\tau\alpha$ Theon (BFVb), P m. 2.

εἶναι ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ μέσον, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ ῥητόν· λέγω, ὅτι ἡ $ΑΒ$ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διηγήσθω καὶ κατὰ τὸ $Δ$, ὥστε
 5 καὶ τὰς $ΑΔ$, $ΔΒ$ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι ποιού-
 σας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$
 μέσον, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ ῥητόν. ἐπεὶ οὖν,
 ᾧ διαφέρει τὸ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ τοῦ δις ὑπὸ τῶν
 $ΑΔ$, $ΔΒ$, τούτῳ διαφέρει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$
 10 τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$
 τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ ὑπερέχει ῥητῶ, καὶ τὰ
 ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ ὑπ-
 ερέχει ῥητῶ μέσα ὄντα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα
 ἡ ῥητόν καὶ μέσον δυναμένη κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο ση-
 15 μεῖον διαιρεῖται. κατὰ ἓν ἄρα σημεῖον διαιρεῖται·
 ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μζ.

Ἡ δύο μέσα δυναμένη καθ' ἓν μόνον ση-
 μεῖον διαιρεῖται.

20 "Εστω [δύο μέσα δυναμένη] ἡ $ΑΒ$ διηρημένη κατὰ
 τὸ $Γ$, ὥστε τὰς $ΑΓ$, $ΓΒ$ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι
 ποιούσας τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$
 μέσον καὶ τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ μέσον καὶ ἔτι ἀσύμ-
 μετρον τῶ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν. λέγω, ὅτι
 25 ἡ $ΑΒ$ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται ποιούσα τὰ
 προκείμενα.

2. $ΓΒ$] in ras. V. δέ] δ' B, συγκείμενον ἐκ τῶν V. δίς] om. Theon (BFVb). ὑπό] corr. ex ἀπό V. 3. Post λέγω ras. 1 litt. F. $ΑΒ$ εὐθεῖα V. 4. καί] om. Bb, postea add. FV. 5. καί] supra scr. V. 6. ἀπὸ τῶν — 7. ῥητόν] in ras. m. 1 F. 6. $ΔΒ$] $ΔΒ$, KZ b. 7. δέ] δ' BFb, δὲ συγ-
 κείμενον ἐκ τῶν V. δίς] om. Theon (BFVb). 10. δέ] om.

$2 A\Gamma \times \Gamma B$ autem rationale [prop. XL]. dico, AB in nullo alio puncto diuidi.

nam si fieri potest, etiam in Δ ita diuidatur,
 $\left[\begin{array}{l} A \\ \Delta \\ \Gamma \\ B \end{array} \right.$ ut $A\Delta$, ΔB potentia incommensurabiles sint efficientes $A\Delta^2 + \Delta B^2$ medium, $2 A\Delta \times \Delta B$ autem rationale. iam quoniam, quo differt $2 A\Gamma \times \Gamma B$ a $2 A\Delta \times \Delta B$, eo etiam $A\Delta^2 + \Delta B^2$ ab $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ differt, $2 A\Gamma \times \Gamma B$ autem $2 A\Delta \times \Delta B$ excedit spatio rationali, etiam $A\Delta^2 + \Delta B^2$ excedit $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ spatio rationali, quamquam media sunt; quod fieri non potest [prop. XXVI]. itaque recta spatio rationali et medio aequalis quadrata non diuiditur in punctis diuersis. ergo in uno tantum puncto diuiditur; quod erat demonstrandum.

XLVII.

Recta duobus spatiis mediis aequalis quadrata in uno tantum puncto diuiditur.

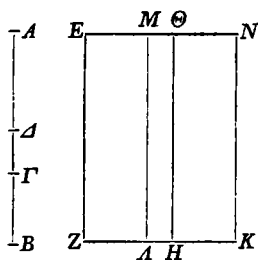
Sit AB in Γ ita diuisa, ut $A\Gamma$, ΓB potentia incommensurabiles sint efficientes $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ medium et $A\Gamma \times \Gamma B$ medium et simul quadratis $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ incommensurable [prop. XLI]. dico, AB in nullo alio puncto diuidi, ita ut proposita efficiat.

BV. δις ἄρα V. 11. τὰ] τό P. 12. τῶν] (alt.) corr. ex τὰ m. 2 F. 14. σημεῖα P, corr. m. 1. 15. καθ' BFb. κατὰ — 16. δεῖξαι] m. 2 V. 16. ὅπερ εἶδει δεῖξαι] comp. P, om. BF. 17. μὲν] e corr. F. 18. ἡ δύο μέσα] in ras. m. 1 F. 19. διαίρεται εἰς τὰ ὀνόματα Theon (BFVb). 20. δύο μέσα δυναμένη] om. P. 23. καὶ τό — μέσον] mg. m. 1 P. τό] τὸ συγκεῖμενον ἐν τῶν V. 24. τῷ συγκεῖμένῳ] ego; τὸ συγκεῖμενον PBFVb. Post αὐτῶν add. τῷ (corr. ex τό m. rec. P) συγκεῖμένῳ (corr. ex -μενον m. rec. P) ἐν τῶν ὑπ' (corr. ex ἀπ' m. 2 V, ἀπ' b) αὐτῶν (τετραγώνων add. b, F m. 2) BFVb, P mg. m. 1.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διηρησθῶ κατὰ τὸ Δ , ὥστε πάλιν
 δηλονότι τὴν $ΑΓ$ τῇ ΔB μὴ εἶναι τὴν αὐτήν, ἀλλὰ
 μείζονα καθ' ὑπόθεσιν τὴν $ΑΓ$, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ
 ἡ EZ , καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν EZ τοῖς μὲν ἀπὸ
 5 τῶν $ΑΓ$, $ΓB$ ἴσον τὸ $ΕΗ$, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$,
 $ΓB$ ἴσον τὸ ΘK . ὅλον ἄρα τὸ EK ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ
 τῆς AB τετραγώνῳ. πάλιν δὲ παραβεβλήσθω παρὰ
 τὴν EZ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, ΔB ἴσον τὸ $ΕΑ$. λοιπὸν
 ἄρα τὸ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, ΔB λοιπῷ τῷ MK ἴσον
 10 ἐστίν. καὶ ἐπεὶ μέσον ὑπόκειται τὸ συγκείμενον ἐκ
 τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓB$, μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ $ΕΗ$.
 καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν EZ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν
 ἡ ΘE καὶ ἀσύμμετρος τῇ EZ μήκει. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ
 καὶ ἡ ΘN ῥητὴ ἐστὶ καὶ ἀσύμμετρος τῇ EZ μήκει.
 15 καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ
 τῶν $ΑΓ$, $ΓB$ τῷ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓB$, καὶ τὸ $ΕΗ$
 ἄρα τῷ HN ἀσύμμετρόν ἐστιν· ὥστε καὶ ἡ $E\Theta$ τῇ
 ΘN ἀσύμμετρός ἐστιν. καὶ εἰσι ῥηταί· αἱ $E\Theta$, ΘN
 ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ EN ἄρα
 20 ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ διηρημένη κατὰ τὸ Θ . ὁμοίως
 δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ κατὰ τὸ M διήρηται. καὶ οὐκ
 ἐστὶν ἡ $E\Theta$ τῇ MN ἡ αὐτή· ἡ ἄρα ἐκ δύο ὀνομά-
 των κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διήρηται· ὅπερ ἐστὶν
 ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ δύο μέσα δυναμένη κατ' ἄλλο καὶ
 25 ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· καθ' ἓν ἄρα μόνον [σημεῖον]
 διαιρεῖται.

1. καὶ κατὰ V. 3. κείσθω P. 6. EK] corr. ex ΘK
 m. 2 P. 10. ἐστὶ BV, comp. Fb. 13. ΘE] $E\Theta$ P. 14.
 ἐστὶν P. 15. τό — 16. τῷ] in ras. m. 1 F. 16. τῷ] τῷ
 συγκειμένῳ ἐκ τῶν (τοῦ F) F V b. δις] supra scr. F. ὑπό]
 in ras. F. $ΓB$] $BΓ$ F. EN b. 17. ἄρα] om. V. τῷ]
 mut. in τῶν m. 2 V. HN] ΘK B F b, ΘK ἄρα V. 18.
 ἐστὶν] comp. Fb, ἐστὶ μήκει V. εἰσιν PB. 19. εἰσιν PB.

nam, si fieri potest, in Δ ita diuidatur, ut scilicet rursus $A\Gamma$, ΔB eadem non sint, sed supponatur maior



$A\Gamma$, et ponatur rationalis EZ , et rectae EZ quadratis $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ aequale adplicetur EH , rectangulo autem $2 A\Gamma \times \Gamma B$ aequale ΘK . itaque $EK = AB^2$ [II, 4]. iam rursus rectae EZ quadratis $A\Delta^2 + \Delta B^2$ aequale adplicetur $E\Lambda$. itaque quod relinquitur, $2 A\Delta \times \Delta B = MK$. et quoniam supponimus, $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ medium esse, etiam EH medium est. et rectae rationali EZ adplicatum est; itaque ΘE rationalis est et rectae EZ longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. eadem de causa etiam ΘN rationalis est et rectae EZ longitudine incommensurabilis. et quoniam $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ et $2 A\Gamma \times \Gamma B$ incommensurabilia sunt, etiam EH , HN incommensurabilia sunt. quare etiam $E\Theta$, ΘN incommensurabiles sunt [VI, 1; prop. XI]. et sunt rationales. itaque $E\Theta$, ΘN rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo EN ex duobus nominibus est in Θ diuisa [prop. XXXVI]. similiter demonstrabimus, eandem in M diuisam esse. et $E\Theta$, MN eadem non sunt. itaque recta ex duobus nominibus in punctis diuersis diuisa est; quod fieri non potest [prop. XLII]. itaque recta duobus spatiis mediis aequalis quadrata non diuiditur in punctis diuersis. ergo in uno tantum diuiditur.

21. διαίρεται V. 22. MN ἄρα b. ἐκ τῶν P. 23. ἄτοπόν ἐστιν V. 24. ἡ corr. ex ἐκ V. 25. ἔνα F. σημείον] om. P.

Ὅροι δεύτεροι.

α'. Ὑποκειμένης φητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων
 διηρημένης εἰς τὰ ὀνόματα, ἥς τὸ μείζον ὄνομα τοῦ
 ἐλάσσονος μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ
 5 μήκει, ἂν μὲν τὸ μείζον ὄνομα σύμμετρον ᾗ μήκει
 τῇ ἐκκειμένη φητῇ, καλεῖσθω [ἡ ὅλη] ἐκ δύο ὀνομά-
 των πρώτη.

β'. Ἐὰν δὲ τὸ ἐλάσσον ὄνομα σύμμετρον ᾗ μήκει
 τῇ ἐκκειμένη φητῇ, καλεῖσθω ἐκ δύο ὀνομάτων
 10 δευτέρα.

γ'. Ἐὰν δὲ μηδέτερον τῶν ὀνομάτων σύμμετρον
 ᾗ μήκει τῇ ἐκκειμένη φητῇ, καλεῖσθω ἐκ δύο ὀνομά-
 των τρίτη.

δ'. Πάλιν δὲ ἂν τὸ μείζον ὄνομα [τοῦ ἐλάσσονος]
 15 μείζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυνμέτρου ἑαυτῇ μήκει, ἂν
 μὲν τὸ μείζον ὄνομα σύμμετρον ᾗ μήκει τῇ ἐκκειμένη
 φητῇ, καλεῖσθω ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτη.

ε'. Ἐὰν δὲ τὸ ἐλάσσον, πέμπτη.

ς'. Ἐὰν δὲ μηδέτερον, ἕκτη.

20

μή'.

Εὐρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην.

Ἐκκεῖσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν
 συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ λόγον
 ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀρι-
 25 θμόν, πρὸς δὲ τὸν ΓΑ λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγω-
 νος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ἐκκεῖσθω

1. ὅροι δεύτεροι] mg. B, m. 2 V, om. F, μῆ' b. numeros
 om. codd. 4. ἐλάττονος BFb. αὐτῇ B, corr. m. rec.; et
 supra scr. ω b; ε- e corr. V. 5. μήκει] (alt.) om. V, m. 2 F
 (eras.). 6. φητῇ μήκει FV. ἡ ὅλη] supra scr. m. 2 P, ὅλη B.

Definitiones alterae.

1. Proposita recta rationali et recta ex duobus nominibus in nomina diuisa, cuius nomen maius potentia minus excedit quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis, si maius nomen rationali propositae longitudine commensurabile est, uocetur ex duobus nominibus prima.

2. Sin minus nomen rationali propositae longitudine commensurabile est, uocetur ex duobus nominibus secunda.

3. Sin neutrum nomen rationali propositae longitudine commensurabile est, uocetur ex duobus nominibus tertia.

4. Rursus si maius nomen potentia excedit quadrato rectae sibi longitudine incommensurabilis, si maius nomen rationali propositae longitudine commensurabile est, uocetur ex duobus nominibus quarta.

5. Sin minus commensurabile est, quinta.

6. Sin neutrum, sexta.

XLVIII.

Inuenire rectam ex duobus nominibus primam.

Exponentur duo numeri $ΑΓ$, $ΓΒ$ eius modi, ut $ΑΒ : ΒΓ$ rationem habeat, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, $ΑΒ$ autem ad $ΓΑ$ rationem non habeat, quam numerus quadratus ad numerum quadratum [prop. XXVIII lemma], et exponatur ratio-

8. μήκει] om. V. 9. φητῇ μήκει V. ἡ δὲ ἐκ F. 14. τοῦ ἐλάσσονος] m. 2 P, τοῦ ἐλάττονος V. 15. συμμετρων BFb, corr. m. 2. εἰσπῇ] supra scr. ω b. 16. ὀνομα] om. V. 19. Seq. schol., u. app. 20. μθ' F. 23. τόν] (prius) corr. ex τών V. 25. ΓΑ] ras. V.

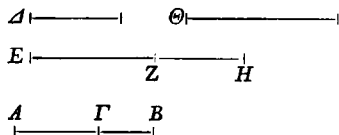
- τις ρητὴ ἡ Δ , καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ EZ .
 ρητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ EZ . καὶ γερονέτω ὡς ὁ BA
 ἀριθμὸς πρὸς τὸν AG , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς
 τὸ ἀπὸ τῆς ZH . ὁ δὲ AB πρὸς τὸν AG λόγον ἔχει,
 5 ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς EZ ἄρα
 πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς
 ἀριθμόν· ὥστε σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς EZ τῷ
 ἀπὸ τῆς ZH . καὶ ἐστὶ ρητὴ ἡ EZ . ρητὴ ἄρα καὶ ἡ
 ZH . καὶ ἐπεὶ ὁ BA πρὸς τὸν AG λόγον οὐκ ἔχει,
 10 ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν,
 οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς EZ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH λόγον
 ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν·
 ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ EZ τῇ ZH μήκει. αἱ EZ ,
 ZH ἄρα ρηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο
 15 ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ EH .

Λέγω, ὅτι καὶ πρῶτη.

- Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ BA ἀριθμὸς πρὸς τὸν AG ,
 οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH , μείζων
 δὲ ὁ BA τοῦ AG , μείζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς EZ
 20 τοῦ ἀπὸ τῆς ZH . ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς EZ ἴσα τὰ
 ἀπὸ τῶν ZH , Θ . καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ BA πρὸς τὸν
 AG , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH ,
 ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ AB πρὸς τὸν BG , οὕτως
 τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ . ὁ δὲ AB πρὸς
 25 τὸν BG λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετρά-
 γωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς EZ ἄρα πρὸς τὸ
 ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς
 τετράγωνον ἀριθμόν. σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ EZ τῇ

1. τις] supra scr. m. 1 V. 2. ἐστὶ καί] ἐστὶν B. 3.
 AG] GA FVb. Dein add. ἀριθμόν V. 4. ZH] H eras. F.
 ὁ δὲ — 5. ἀριθμόν] mg. m. 2 B. 5. ὃν ὁ F. 8. ἐστὶν B.

nalis aliqua Δ , et rectae Δ longitudine commensurabilis sit EZ ; itaque EZ rationalis est [def. 3]. et fiat



$BA:AG = EZ^2:ZH^2$
[prop. VI coroll.]. uerum
 $AB:AG$ rationem habet,
quam numerus ad numerum. itaque

etiam $EZ^2:ZH^2$ rationem habet, quam numerus ad numerum. quare EZ^2, ZH^2 commensurabilia sunt [prop. VI]. et EZ rationalis est. itaque etiam ZH rationalis est. et quoniam $BA:AG$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ne EZ^2 quidem ad ZH^2 rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque EZ, ZH longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. quare EZ, ZH rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo EH ex duobus nominibus est [prop. XXXVI]. dico, eandem primam esse.

nam quoniam est $BA:AG = EZ^2:ZH^2$, et $BA > AG$, erit etiam $EZ^2 > ZH^2$ [V, 14]. sit igitur $ZH^2 + \Theta^2 = EZ^2$. et quoniam est $BA:AG = EZ^2:ZH^2$, conuertendo [V, 19 coroll.] est $AB:BG = EZ^2:\Theta^2$. uerum $AB:BG$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque etiam $EZ^2:\Theta^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare EZ, Θ longitudine commensurabiles sunt [prop.

9. BA] mut. in AB V. οὐκ] postea ins. F. 14. ZH —
δυνάμει] m. 2 B. εἶσιν P. 15. ἄρα] m. rec. b. 17. ὁ]
in ras. m. 1 P. AB F. 18. τό] (prius) supra scr. m. 1 P.
μεῖζον F. 20. τῶ] corr. ex τό V. 21. AB P. 25. τόν]
om. BFb. $BΓ$] $Γ$ supra scr. V. 26. EZ] ZE corr. ex
 ZB F. 27. Θ] seq. ras. 1 litt. F.

Θ μήκει· ἡ EZ ἄρα τῆς ZH μείζον δύναται τῷ ἀπὸ
 συμμετρου ἐαυτῇ. καὶ εἰσι ρηταὶ αἱ EZ , ZH , καὶ
 σύμμετρος ἡ EZ τῇ Δ μήκει.

Ἡ EH ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη· ὅπερ
 5 ἔδει δεῖξαι.

μθ'.

Εὐρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέραν.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ $ΑΓ$, $ΓΒ$, ὥστε τὸν
 συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν $ΑΒ$ πρὸς μὲν τὸν $ΒΓ$ λό-
 10 γον ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον
 ἀριθμόν, πρὸς δὲ τὸν $ΑΓ$ λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετρά-
 γωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ἐκκείσ-
 θω ρητὴ ἡ Δ , καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἔστω ἡ EZ μήκει·
 ρητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ EZ . γερονέτω δὴ καὶ ὡς ὁ $ΓΑ$
 15 ἀριθμὸς πρὸς τὸν $ΑΒ$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς
 τὸ ἀπὸ τῆς ZH · σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς EZ
 τῷ ἀπὸ τῆς ZH . ρητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ZH . καὶ ἐπεὶ
 ὁ $ΓΑ$ ἀριθμὸς πρὸς τὸν $ΑΒ$ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετρά-
 γωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ
 20 ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH λόγον ἔχει, ὃν τε-
 τράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμ-
 μετρος ἄρα ἐστὶν ἡ EZ τῇ ZH μήκει· αἱ EZ , ZH
 ἄρα ρηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα
 ὀνομάτων ἐστὶν ἡ EH .

25 Δεικτέον δὴ, ὅτι καὶ δευτέρα.

2. εἰσιν PB. 3. ἀσύμμετρος F, ἀ- eras.; deinde add.
 μήκει, del. m. 1. Post μήκει del. ἀσύμμετροι m. 1 F. 4.
 ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 6. ν' F, et sic deinceps.
 8. τόν] corr. ex τό m. 2 V. 11. ΓΑ BVb. 12.
 τετράγωνος F. 13. EZ] ZH BVb, in ras. F, m. rec. P. 14.
 ρητὴ — EZ] καὶ ἡ ZH ἄρα ρητὴ ἐστὶν F. EZ] ZH BVb,
 m. rec. P. γερονέτω δὴ καὶ] καὶ ἔστω V. δέ F, supra
 scr. δὴ. 15. EZ] HZ F, et corr. ex ZH V, ZH Bb, P m.

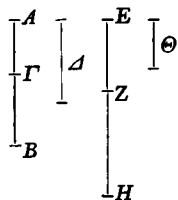
IX]. itaque EZ^2 excedit ZH^2 quadrato rectae sibi commensurabilis. et EZ , ZH rationales sunt, et EZ , Δ longitudine commensurabiles.

Ergo EH ex duobus nominibus est prima [def. alt. 1]; quod erat demonstrandum.

XLIX.

Inuenire rectam ex duobus nominibus secundam.

Exponentur duo numeri AG , GB eius modi, ut AB ad BF rationem habeat, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ad AG autem rationem non habeat, quam numerus quadratus ad numerum qua-



dratum [prop. XXVIII lemma]. et ponatur rationalis Δ , et rectae Δ longitudine commensurabilis sit EZ ; itaque EZ rationalis est. iam fiat etiam $GA:AB = EZ^2:ZH^2$ [prop. VI coroll.]. itaque EZ^2 , ZH^2 commensurabilia sunt [prop. VI]. quare etiam ZH ratio-

nalis est. et quoniam $GA:AB$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ne EZ^2 quidem ad ZH^2 rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque EZ , ZH longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. quare EZ , ZH rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo EH ex duobus nominibus est [prop. XXXVI]. iam demonstrandum, eandem secundam esse.

rec. 16. ZH] ZE BFVb, m. rec. P; item lin. 17 bis, 20, 22.
 16. EZ] HZ Bb, et corr. ex ZH V, ZH F, P m. rec. 17. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$ B.
 18. GA] in ras. V. 19. $\sigma\upsilon\delta'$ $\acute{\alpha}\rho\alpha$ Theon (BFVb). 20.
 EZ] HZ BFV, et e corr. m. 1 b. 22. EZ] HZ Bb, P m.
 rec.; ZH V, ZH' F. $\tau\eta\varsigma$ b. 23. $\acute{\epsilon}\lambda\alpha\upsilon\nu$ B. 25. $\delta\acute{\epsilon}$ P.

Ἐπεὶ γὰρ ἀνάπαλιν ἐστὶν ὡς ὁ BA ἀριθμὸς πρὸς τὸν $ΑΓ$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς HZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZE , μείζων δὲ ὁ BA τοῦ $ΑΓ$, μείζον ἄρα [καὶ] τὸ ἀπὸ τῆς HZ τοῦ ἀπὸ τῆς ZE . ἔστω τῷ ἀπὸ τῆς HZ ἴσα
 5 τὰ ἀπὸ τῶν EZ , Θ · ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ AB πρὸς τὸν $BΓ$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ . ἀλλ' ὁ AB πρὸς τὸν $BΓ$ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ZH ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετρά-
 10 γωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ZH τῇ Θ μήκει· ὥστε ἡ ZH τῆς ZE μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἐαυτῇ. καὶ εἰσι-
 ῥηται αἱ ZH , ZE δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ τὸ EZ ἑλασσον ὄνομα τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετρόν ἐστι
 15 τῇ Δ μήκει.

Ἡ EH ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ν'.

Εὐρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην.

20 Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ $ΑΓ$, $ΓB$, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν AB πρὸς μὲν τὸν $BΓ$ λόγον ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, πρὸς δὲ τὸν $ΑΓ$ λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἐκκείσθω
 25 δέ τις καὶ ἄλλος μὴ τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Δ , καὶ πρὸς ἐκάτερον τῶν BA , $ΑΓ$ λόγον μὴ ἔχέτω, ὃν τε-

1. AB P. ἀριθμός] om. b. 2. HZ] EZ BFVb, m. rec. P, item lin. 4 bis. ZE] ZH BFVb, m. rec. P, item lin. 4, 11. 3. μείζων — $ΑΓ$] mg. m. 1 P (μείζον, sed corr. m. 1). BA] A e corr. V. καί] om. P. 5. EZ] HZ BFVb, m. rec. P. ὁ] ἡ b φ (non F). 6. ZH] EZ BFVb, m. rec. P, item lin. 9, 11 bis. 8. καί — 10. ἀριθμόν] mg. m.

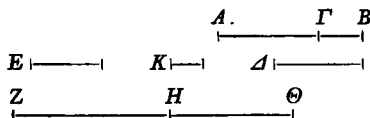
nam quoniam e contrario est [V, 7 coroll.] $BA:AF = HZ^2:ZE^2$, et $BA > AF$, erit $HZ^2 > ZE^2$ [V, 14]. sit $HZ^2 = ZE^2 + \Theta^2$. conuertendo [V, 19 coroll.] igitur est $AB:BF = ZH^2:\Theta^2$. uerum $AB:BF$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque etiam $ZH^2:\Theta^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque ZH, Θ longitudine commensurabiles sunt [prop. IX]. quare ZH^2 excedit ZE^2 quadrato rectae sibi commensurabilis. et rationales sunt ZH, ZE potentia tantum commensurabiles, et minus nomen EZ rationali propositae Δ commensurabilis est longitudine.

Ergo EH ex duobus nominibus secunda est [def. alt. 2]; quod erat demonstrandum.

L.

Inuenire rectam ex duobus nominibus tertiam.

Exponentur duo numeri AF, FB eius modi, ut AB ad BF rationem habeat, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ad AF autem rationem non habeat,



quam numerus quadratus ad numerum quadratum. exponatur autem etiam alius aliquis numerus non quadratus Δ , et ad utrumque BA, AF rationem ne habeat,

1 F. 12. εἰσιν B. 13. EZ, ZH BFVb, m. rec. P. 14. EZ] ZH BFVb, m. rec. P. ἑλάττω BVb, comp. F. σύμμετρόν ἐστι τῇ Theon (BFVb). σύμμετρόν ἐστι] om. Theon (BFVb). 16. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 20. κείσθωσαν, supra scr. ἐκ, V. δύο] corr. ex οἱ m. rec. P. 25. ἀριθμός] om. V.

τεράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ ἐκ-
 κείσθω τις ῥητὴ εὐθεῖα ἡ E , καὶ γεγονέτω ὡς ὁ Δ
 πρὸς τὸν AB , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς E πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς
 ZH · σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς E τῷ ἀπὸ τῆς
 5 ZH . καὶ ἐστὶ ῥητὴ ἡ E · ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ZH .
 καὶ ἐπεὶ ὁ Δ πρὸς τὸν AB λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετρά-
 γωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ
 ἀπὸ τῆς E πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH λόγον ἔχει, ὃν τετρά-
 γωνος ἀριθμοὺς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος
 10 ἄρα ἐστὶν ἡ E τῇ ZH μήκει. γεγονέτω δὲ πάλιν ὡς
 ἡ BA ἀριθμὸς πρὸς τὸν AG , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH
 πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $H\Theta$ · σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ
 τῆς ZH τῷ ἀπὸ τῆς $H\Theta$. ῥητὴ δὲ ἡ ZH · ῥητὴ ἄρα
 καὶ ἡ $H\Theta$. καὶ ἐπεὶ ὁ BA πρὸς τὸν AG λόγον οὐκ
 15 ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν,
 οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘH λόγον
 ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀρι-
 θμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ZH τῇ $H\Theta$ μήκει.
 αὐτὴ ZH , $H\Theta$ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σίμμετροι·
 20 ἡ $Z\Theta$ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ τρίτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν AB , οὕτως τὸ
 ἀπὸ τῆς E πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH , ὡς δὲ ὁ BA πρὸς
 τὸν AG , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς
 25 $H\Theta$, δι' ἴσων ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν AG , οὕτως
 τὸ ἀπὸ τῆς E πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $H\Theta$. ὁ δὲ Δ πρὸς
 τὸν AG λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς
 τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς E ἄρα πρὸς
 τὸ ἀπὸ τῆς $H\Theta$ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς

2. ῥητῇ] m. 2 F. 3. τῇ ZH b. 4. τό — 5. ZH] (prius) m.
 2 B. 5. καὶ ἐστὶ ῥητῇ] ῥητὴ δέ B. ἐστίν B. 10. δέ V.

quam numerus quadratus ad numerum quadratum; et ponatur aliqua recta rationalis E , et fiat $\Delta:AB = E^2:ZH^2$ [prop. VI coroll.]. itaque E^2, ZH^2 commensurabilia sunt [prop. VI]. et E rationalis est; quare etiam ZH rationalis est. et quoniam $\Delta:AB$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ne E^2 quidem ad ZH^2 rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque E, ZH longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. iam rursus fiat $BA:A\Gamma = ZH^2:H\Theta^2$ [prop. VI coroll.]. itaque $ZH^2, H\Theta^2$ commensurabilia sunt [prop. VI]. uerum ZH rationalis est; itaque etiam $H\Theta$ rationalis est. et quoniam $BA:A\Gamma$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ne ZH^2 quidem ad $H\Theta^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque $ZH, H\Theta$ longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. quare $ZH, H\Theta$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo $Z\Theta$ ex duobus nominibus est [prop. XXXVI]. iam dico, eandem tertiam esse. nam quoniam est $\Delta:AB = E^2:ZH^2$ et $BA:A\Gamma = ZH^2:H\Theta^2$, ex aequo [V, 22] erit $\Delta:A\Gamma = E^2:H\Theta^2$. uerum $\Delta:A\Gamma$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad

11. $BA] AB' F.$ $\tau\acute{o}\nu]$ om. B. 14. $\Gamma A F.$ 16. $\Theta H]$
 in ras. V, $H\Theta F.$ 18. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu]$ $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}$ καί F. $ZH]$ e corr. m. 2
 (ex HZ ?) V. $\tau\eta]$ m. rec. P. $\Theta H F.$ 19. $H\Theta]$ in ras. V.
 $\acute{\epsilon}\lambda\sigma\iota\nu$ B. 20. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota} BV,$ comp. Fb. 22. $\acute{\omega}\varsigma]$ supra scr.
 m. 1 F. 23. $ZH] HZ F.$ $BA] AB P, AB' F.$ 24. $\tau\acute{o}\nu]$
 om. P. $A\Gamma]$ corr. ex AB m. 1 F. 25. $H\Theta]$ $Z\Theta P,$ corr.
 m. rec. (euan.). 28. $\tau\epsilon\tau\rho\acute{\alpha}\gamma\omega\nu\omicron\varsigma F,$ corr. m. 1.

πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ E τῇ $H\Theta$ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ BA πρὸς τὸν AG , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $H\Theta$, μείζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ZH τοῦ ἀπὸ τῆς $H\Theta$. ἐστὼ
 5 οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ZH ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν $H\Theta$, K · ἀναστρέψαντι ἄρα [ἐστὶν] ὡς ὁ AB πρὸς τὸν $BΓ$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς K . ὁ δὲ AB πρὸς τὸν $BΓ$ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ZH ἄρα πρὸς τὸ
 10 ἀπὸ τῆς K λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· σύμμετρος ἄρα [ἐστὶν] ἡ ZH τῇ K μήκει. ἡ ZH ἄρα τῆς $H\Theta$ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμέτρου ἐαυτῇ. καὶ εἰσὶν αἱ ZH , $H\Theta$ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδετέρα αὐτῶν σύμμετρός
 15 ἐστὶ τῇ E μήκει.

Ἡ $Z\Theta$ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

να'.

Εὐρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην.

20 Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ AG , GB , ὥστε τὸν AB πρὸς τὸν $BΓ$ λόγον μὴ ἔχειν μήτε μὴν πρὸς τὸν AG , ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν. καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ A , καὶ τῇ A σύμμετρος ἐστὼ μήκει ἡ EZ · ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ EZ . καὶ γε-
 25 γονέτω ὡς ὁ BA ἀριθμὸς πρὸς τὸν AG , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH · σύμμετρον ἄρα

1. ἐστίν] m. 2 F, om. B. 3. τό] (alt.) om. b. 4. τῆς] (alt.) om. b. 6. ἐστίν] om. P. τόν] om. Fb. 11. ἐστίν] om. BFVb. 12. ἄρα] m. 2 V. δύναται] -να- in ras. P. 13. ἀσυμέτρου F, corr. m. rec.; ἀ- supra scr. F m. 2. $H\Theta$ ἄρα V. 15. ἐστὶν B. τῇ E ἐστὶν F. 16. τρίτη] corr. ex ῥητῇ m. rec. b; ῥητῇ F, mg. γρ. τρίτη m. rec. ὅπερ ἔδει

numerum quadratum. itaque ne E^2 quidem ad $H\Theta^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare E , $H\Theta$ longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. et quoniam est $BA:AG = ZH^2:H\Theta^2$, erit $ZH^2 > H\Theta^2$ [V, 14]. sit igitur $ZH^2 = H\Theta^2 + K^2$. itaque conuertendo [V, 19 coroll.] $AB:BG = ZH^2:K^2$. uerum $AB:BG$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare etiam $ZH^2:K^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque ZH , K longitudine commensurabiles sunt. itaque ZH^2 excedit $H\Theta^2$ quadrato rectae sibi commensurabilis. et ZH , $H\Theta$ rationales sunt potentia tantum cōmmensurabiles, et neutra rectae E longitudine commensurabilis est.

Ergo $Z\Theta$ ex duobus nominibus tertia est [def. alt. 3]; quod erat demonstrandum.

LI.

Inuenire rectam ex duobus nominibus quartam.

Exponantur duo numeri AG , GB eius modi, ut AB neque ad BG neque ad AG rationem habeat, quam numerus quadratus ad numerum quadratum [prop. XXVIII lemma]. et ponatur rationalis Δ , et rectae Δ longitudine commensurabilis sit EZ . itaque EZ rationalis est. et fiat $BA:AG = EZ^2:ZH^2$ [prop. VI coroll.]. itaque EZ^2 , ZH^2 commensurabilia sunt [prop. VI]. itaque etiam ZH ra-

δείξει] comp. P, om. B F V b. 21. τὸν BG] ἐκότερον αὐτῶν
Theon (B F V b). BG] corr. ex AG m. 1 P. μῦτε — 22.
AG] om. Theon (B F V b). 24. ἐστὶν B. 25. BA] A''B' F.
ἀριθμός] om. V. GA F. 26. σύμμετρος P, corr. m. 1.

ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς EZ τῷ ἀπὸ τῆς ZH· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ZH. καὶ ἐπεὶ ὁ BA πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH
 5 λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ EZ τῇ ZH μήκει. αἱ EZ, ZH ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε ἡ EH ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ τετάρτη.

10 Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ BA πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH [μείζων δὲ ὁ BA τοῦ ΑΓ], μείζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς EZ τοῦ ἀπὸ τῆς ZH. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς EZ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ZH, Θ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ AB ἀριθμὸς πρὸς τὸν
 15 BΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ὁ δὲ AB πρὸς τὸν BΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος
 20 ἄρα ἐστὶν ἡ EZ τῇ Θ μήκει· ἡ EZ ἄρα τῆς HZ μείζον δύνανται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰσιν αἱ EZ, ZH ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ EZ τῇ Δ σύμμετρός ἐστι μήκει.

Ἡ EH ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη· ὅπερ
 25 ἔδει δεῖξαι.

1. Post ZH add. ῥητὴ δὲ (seq. ras. 1 litt. F) ἡ EZ b, m. 2 F. ῥητὴ ἄρα] ἡ EZ ῥητὴ ἄρα V m. 2, ῥητὴ ἐστὶν ἄρα b. ἐστὶ] om. b, ἐστὶν PB. 2. καί] (prius) om. BFb. BA] AB P. οὐκ] postea add. m. 1 F. 6. τῇ] τῆς b. 7. εἰσιν B. 8. ἐστὶ BV, comp. Fb. 9. δὴ] supra scr. m. 1 P. καί] m. 2 F. 10. BA] corr. ex AB V. τόν] om. Bb, corr. ex τό m. rec. P. 11. μείζων — 12. ΑΓ] mg. m. 1 in ras. P.

tionalis est. et quoniam $BA : A\Gamma$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ne EZ^2 quidem ad ZH^2 rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque EZ, ZH longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. itaque EZ, ZH rationales sunt potentia tantum commensurabiles. quare EH ex duobus nominibus est [prop. XXXVI].

Iam dico, eandem quartam esse. nam quoniam est $BA : A\Gamma = EZ^2 : ZH^2$, erit $EZ^2 > ZH^2$ [V, 14]. sit igitur $EZ^2 = ZH^2 + \Theta^2$. itaque conuertendo [V, 19 coroll.] $AB : B\Gamma = EZ^2 : \Theta^2$. uerum $AB : B\Gamma$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque ne EZ^2 quidem ad Θ^2 rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare EZ, Θ longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. EZ^2 igitur excedit ZH^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis. et EZ, ZH rationales sunt potentia tantum commensurabiles, et EZ, Δ longitudine commensurabiles sunt.

Ergo EH ex duobus nominibus est quarta [def. alt. 4]; quod erat demonstrandum.

11. $BA]$ A e corr. V. 12. $\tau\eta\varsigma]$ (prius) om. P. 13. $\tau\tilde{\omega}]$
 $\tau\acute{o}$ F. 16. $\tau\acute{o}\nu]$ om. BFb. 18. $\Theta]$ ΘA b. 20. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu]$ om.
 Fb. $\acute{\alpha}\rho\alpha]$ om. F. $\tau\eta\varsigma]$ corr. ex $\tau\eta$ V. $HZ]$ corr. ex
 ZH V, EH F. 21. $\sigma\upsilon\mu\mu\acute{\epsilon}\tau\rho\omicron\nu$ b, corr. m. rec., et F, corr.
 m. 2. $\acute{\epsilon}\alpha\nu\tau\tilde{\eta}$ $\mu\acute{\eta}\kappa\epsilon\iota$ F. 24. $\acute{\omicron}\pi\epsilon\rho$ $\acute{\epsilon}\delta\epsilon\iota$ $\delta\epsilon\iota\acute{\xi}\alpha\iota]$ comp. P,
 om. BFVb.

νβ'.

Εύρειν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ $ΑΓ$, $ΓΒ$, ὥστε τὸν $ΑΒ$ πρὸς ἐκάτερον αὐτῶν λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ τις εὐθεῖα ἡ $Δ$, καὶ τῇ $Δ$ σύμμετρος ἔστω [μήκει] ἡ $ΕΖ$. ῥητὴ ἄρα ἡ $ΕΖ$. καὶ γεγονέτω ὡς ὁ $ΓΑ$ πρὸς τὸν $ΑΒ$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς $ΕΖ$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $ΖΗ$. ὁ δὲ $ΓΑ$ πρὸς τὸν $ΑΒ$ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν. οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς $ΕΖ$ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $ΖΗ$ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν. αἱ $ΕΖ$, $ΖΗ$ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ $ΕΗ$.

15 $Αλέγω$ δὴ, ὅτι καὶ πέμπτην.

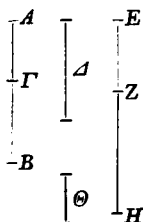
Ἐπεὶ γάρ ἴστιν ὡς ὁ $ΓΑ$ πρὸς τὸν $ΑΒ$, οὕτως το ἀπὸ τῆς $ΕΖ$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $ΖΗ$, ἀνάπαλιν ὡς ὁ $ΒΑ$ πρὸς τὸν $ΑΓ$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς $ΖΗ$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $ΖΕ$. μείζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $ΗΖ$ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΖΕ$. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς $ΗΖ$ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν $ΕΖ$, $Θ$. ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ $ΑΒ$ ἀριθμὸς πρὸς τὸν $ΒΓ$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς $ΗΖ$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $Θ$. ὁ δὲ $ΑΒ$ πρὸς τὸν $ΒΓ$ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν

3. τὸν] corr. ex τό V. 7. μήκει] om. P. $ΕΖ$] $ΖΗ$ Theon (BFVb), $ΗΖ$ m. rec. P. ῥητὴ ἄρα ἡ $ΕΖ$] ῥητὴ ἄρα ἡ $ΖΗ$ V, mg. ῥητὴ τῇ ἄρα $ΗΖ$ m. 2. $ΕΖ$] $ΖΗ$ Theon (BFb), $ΗΖ$ P m. rec. 8. $ΕΖ$] $Ζ$ post ras. 1 litt. V, $ΖΗ$ F, $ΗΖ$ Bb, P m. rec. 9. $ΖΗ$] $ΖΕ$ Theon (BFVb), m. rec. P. Deinde add. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΗΖ$ τῷ ἀπὸ τῆς $ΖΕ$. ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $ΖΕ$. καὶ ἐπεὶ Theon (BFVb), P m. rec. ($ΖΗ$ pro $ΗΖ$). δέ] om. Theon (BFVb). τόν] om. BFb. 11. τῆς] (prius) m. 2 B. $ΕΖ$] $ΗΖ$ FVb, m. 2 B, m. rec. P. ἄρα] om. B. πρὸς τὸ ἀπὸ] m. 2 B. $ΖΗ$] P, $ΖΕ$ BFVb,

LII.

Inuenire rectam ex duobus nominibus quintam.

Exponentur duo numeri $ΑΓ$, $ΓΒ$ eius modi, ut $ΑΒ$ ad neutrum rationem habeat, quam numerus quadratus ad numerum quadratum [prop. XXVIII lemma], et ponatur recta aliqua rationalis $Δ$, et rectae $Δ$ commensurabilis sit $ΕΖ$. itaque $ΕΖ$ rationalis est. et fiat



$$ΓΑ:ΑΒ=ΕΖ^2:ΖΗ^2$$

[prop. VI coroll.]. $ΓΑ$ autem ad $ΑΒ$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque ne $ΕΖ^2$ quidem ad $ΖΗ^2$ rationem habet,

quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare $ΕΖ$, $ΖΗ$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles [prop. IX]. ergo $ΕΗ$ ex duobus nominibus est [prop. XXXVI].

iam dico, eandem quintam esse. nam quoniam est $ΓΑ:ΑΒ=ΕΖ^2:ΖΗ^2$, e contrario [V, 7 coroll.] est $ΒΑ:ΑΓ=ΖΗ^2:ΖΕ^2$. itaque $ΗΖ^2 > ΖΕ^2$ [V, 14]. sit igitur $ΗΖ^2 = ΕΖ^2 + Θ^2$. itaque conuertendo [V,

m. rec. P. 12. τετράγωνος F, corr. m. 1. ἀριθμὸν] m. 2 V. Deinde add. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ HZ τῇ ZE (τῇ ZE om. V) μήκει b, mg. m. 1 F, m. 2 V. 13. εἶσιν PB. 14. ἄρα] om. P. EH] H e corr. m. 1 b. 15. καί] m. 2 F. 17. EZ] P; HZ BVb, P m. rec.; ZH F. ZH] P, ZE BFVb, P m. rec. Ante ὡς add. ἄρα m. rec. P. 18. οὕτως] om. BVb. ZH] P, EZ BFVb, P m. rec. 19. ZE] P, ZH BFVb, P m. rec. Dein add. ὁ δὲ ΒΑ τοῦ ΑΓ μείζων (corr. ex μείζον) ἐστὶ V; μείζον (μείζων m. rec. b) δὲ τὸ (ὁ m. rec. b) ΒΑ τοῦ ΑΓ b, in ras. F. μείζον ἄρα] sustulit rep. in F. ἄρα ἐστὶ V. τό] m. 2 F. HZ] P, EZ BFVb, P m. rec.; item lin. 20, 22. 20. τῆς] om. P. ZE] P, ZH BFVb, P m. rec. τῶ] supra scr. m. 1 b, postea add. m. 1 V, corr. ex τό F m. 1. 21. EZ] P, HZ BFb, m. rec. P, in ras. V.

τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ZH τῇ Θ μήκει· ὥστε ἡ
 5 ZH τῆς ZE μείζον δύνανται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαν-
 τῇ. καὶ εἰσιν αἱ HZ , ZE ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμ-
 μετροι, καὶ τὸ EZ ἑλαττον ὄνομα σύμμετρόν ἐστι τῇ
 ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Δ μήκει.

Ἡ EH ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη· ὅπερ
 10 ἔδει δεῖξαι.

νγ'.

Εὐρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἑκτην.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ $ΑΓ$, $ΓΒ$, ὥστε τὸν
 $ΑΒ$ πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετρά-
 15 γωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἔστω δὲ
 καὶ ἕτερος ἀριθμὸς ὁ Δ μὴ τετράγωνος ὢν μηδὲ πρὸς
 ἑκάτερον τῶν $ΒΑ$, $ΑΓ$ λόγον ἔχων, ὃν τετράγωνος
 ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ ἐκκείσθω τις
 ῥητὴ εὐθεῖα ἡ $Ε$, καὶ γερονέτω ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν
 20 $ΑΒ$, οὕτως το ἀπὸ τῆς $Ε$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH · σύμ-
 μετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $Ε$ τῷ ἀπὸ τῆς ZH . καὶ ἐστι
 ῥητὴ ἡ $Ε$ · ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ZH . καὶ ἐπεὶ οὐκ ἔχει

1. τετράγωνον] corr. ex τετράγωνος m. 1 b. 2. ZH] P, EZ B F V b, P m. rec.; item lin. 4, 5. Θ] ras. 1 litt. V.

4. ἐστίν] om. B V b. 5. τῆς] corr. ex τῇ V b. ZE] P, ZH B F V b, P m. rec. συμέτρον F, corr. m. 2. 6. εἰσι V, comp. F b. αἱ] m. rec. P. αἱ HZ , ZE] om. F V b; αἱ EZ , ZH supra scr. m. 2 B. 7. EZ] P, ZH B F V b, HZ m. rec. P.

9. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. B F V b. 13. $ΑΓ$] A, seq. ras. 1 litt., F. τόν] corr. ex τό m. 2 B. 16. μήτε P.

17. $ΒΑ$] supra scr. Γ m. 1 b, $ΑΒ$ F et V, sed corr. ἔχειν V, sed corr. 18. καί] m. 2 F. 20. οὕτως καί V. σύμ-
 μετρος Theon (B F V b), P m. rec. 21. ἄρα ἐστίν F V. τό —

19 coroll.] $AB:BF = HZ^2:\Theta^2$. uerum $AB:BF$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque ne ZH^2 quidem ad Θ^2 rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque ZH , Θ longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. quare ZH^2 excedit ZE^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis. et HZ , ZE rationales sunt potentia tantum commensurabiles, et minus nomen EZ rectae rationali propositae Δ longitudine commensurabilis est.

Ergo EH ex duobus nominibus est quinta [def. alt. 5]; quod erat demonstrandum.

LIII.

Inuenire rectam ex duobus nominibus sextam.

Exponentur duo numeri AF , FB eius modi, ut AB ad neutrum rationem habeat, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, sit autem etiam alius numerus Δ non quadratus neque ad alterutrum BA , AF rationem habens, quam numerus quadratus ad numerum quadratum [prop. XXVIII lemma]; et ponatur recta rationalis E , et fiat

$$\Delta:AB = E^2:ZH^2$$

[prop. VI coroll.]. itaque E^2 , ZH^2 commensurabilia sunt [prop. VI]. et E rationalis est; itaque etiam ZH rationalis est. et quoniam $\Delta:AB$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ne E^2 quidem ad ZH^2 rationem habet, quam nu-

ὁ Δ πρὸς τὸν AB λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς
 πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς E ἄρα
 πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀρι-
 5 E τῇ ZH μήκει. γεγυέντω δὴ πάλιν ὡς ὁ BA πρὸς
 τὸν AG , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $H\Theta$.
 σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ZH τῷ ἀπὸ τῆς ΘH . ῥη-
 τὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΘH · ῥητὴ ἄρα ἡ ΘH . καὶ ἐπεὶ
 ὁ BA πρὸς τὸν AG λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος
 10 ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς
 ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $H\Theta$ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος
 ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα
 ἐστὶν ἡ ZH τῇ $H\Theta$ μήκει. αἱ ZH , $H\Theta$ ἄρα ῥηταὶ
 εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων
 15 ἐστὶν ἡ $Z\Theta$.

Δεικτέον δὴ, ὅτι καὶ ἕκτη.

Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν AB , οὕτως τὸ
 ἀπὸ τῆς E πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH , ἐστὶ δὲ καὶ ὡς ὁ
 BA πρὸς τὸν AG , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ
 20 ἀπὸ τῆς $H\Theta$, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν AG ,
 οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς E πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $H\Theta$. ὁ δὲ Δ
 πρὸς τὸν AG λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς
 πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς E ἄρα
 πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $H\Theta$ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθ-
 25 μὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ
 E τῇ $H\Theta$ μήκει. ἐδείχθη δὲ καὶ τῇ ZH ἀσύμμετρος·
 ἑκατέρω ἄρα τῶν ZH , $H\Theta$ ἀσύμμετρός ἐστὶ τῇ E μήκει.
 καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ BA πρὸς τὸν AG , οὕτως τὸ ἀπὸ
 τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $H\Theta$, μείζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς

7. ἀσύμμετρον F, sed corr. ΘH] in ras. V, $H\Theta$ Fb.
 Deinde add. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ZH Theon (BFVb). 8. ἄρα

merus quadratus ad numerum quadratum. itaque E, ZH longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. iam rursus fiat $BA:AG = ZH^2:H\Theta^2$ [prop. VI coroll.]. itaque $ZH^2, \Theta H^2$ commensurabilia sunt [prop. VI]. itaque ΘH^2 rationale est; quare ΘH est rationalis. et quoniam $BA:AG$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ne ZH^2 quidem ad $H\Theta^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque $ZH, H\Theta$ longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. quare $ZH, H\Theta$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. itaque $Z\Theta$ ex duobus nominibus est.

iam demonstrandum, eandem sextam esse. nam quoniam est $A:AB = E^2:ZH^2$, et $BA:AG = ZH^2:H\Theta^2$, ex aequo erit [V, 22] $A:AG = E^2:H\Theta^2$. uerum $A:AG$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque ne E^2 quidem ad $H\Theta^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque $E, H\Theta$ longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. demonstrauius autem, etiam E, ZH incommensurabiles esse. itaque utraque $ZH, H\Theta$ rectae E longitudine incommensurabilis est. et quoniam est $BA:AG = ZH^2:H\Theta^2$, erit $ZH^2 > H\Theta^2$ [V, 14]. iam sit $ZH^2 = H\Theta^2 + K^2$. quare conuertendo [V, 19 coroll.] erit $AB:BG = ZH^2:K^2$. uerum $AB:BG$

καὶ Theon (BFVb). $\xi\eta\tau\eta - \Theta H$] mg. V. $H\Theta P.$ 9.
 BA] $AB' F.$ 10. οὐδέ] οὐδ' ἄρα FVb, οὐκ ἄρα B. τό]
 τά F. 14. εἰσιν B. 18. ἐστὶν B. 19. BA] $AB P.$ 21.
 δέ] m. 2 F. 23. οὐδέ] οὐδ' ἄρα Theon (BFVb). ἄρα]
 om. Theon (BFVb). 26. $HZ F.$ 27. ἐκατέρω — E] ἡ E
 ἄρα ἐκατέρω τῶν $ZH, H\Theta$ ἐστὶν ἀσύμμετρος V. ἄρα] supra
 scr. F. 28. οὕτως] om. b, m. 2 B. 29. Post $H\Theta$ add.
 μείζων δὲ ὁ AB τοῦ AG V. μείζων] bis F.

ZH τοῦ ἀπὸ τῆς $H\Theta$. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ [τῆς] ZH ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν $H\Theta$, K · ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ AB πρὸς $B\Gamma$, οὕτως τὸ ἀπὸ ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς K . ὁ δὲ AB πρὸς τὸν $B\Gamma$ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος
 5 ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ὥστε οὐδὲ τὸ ἀπὸ ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς K λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ZH τῇ K μήκει· ἡ ZH ἄρα τῆς $H\Theta$ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰσιν
 10 αἱ ZH , $H\Theta$ ρηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδετέρω αὐτῶν σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένη ρητῇ τῇ E .

Ἡ $Z\Theta$ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15 *Λήμμα.*

Ἐστω δύο τετράγωνα τὰ AB , $B\Gamma$ καὶ κείσθωσαν ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν AB τῇ BE · ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ZB τῇ BH . καὶ συμπεπληρώσθω τὸ $ΑΓ$ παραλληλόγραμμον· λέγω, ὅτι τετράγωνόν ἐστι
 20 τὸ $ΑΓ$, καὶ ὅτι τῶν AB , $B\Gamma$ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ $ΔH$, καὶ ἔτι τῶν $ΑΓ$, $ΓB$ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ $ΔΓ$.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν $ΔB$ τῇ BZ , ἡ δὲ BE τῇ BH , ὅλη ἄρα ἡ $ΔE$ ὅλη τῇ ZH ἐστὶν ἴση. ἀλλ' ἡ μὲν $ΔE$ ἑκατέρω τῶν $A\Theta$, $K\Gamma$ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ZH
 25 ἑκατέρω τῶν AK , $\Theta\Gamma$ ἐστὶν ἴση· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν $A\Theta$, $K\Gamma$ ἑκατέρω τῶν AK , $\Theta\Gamma$ ἐστὶν ἴση. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΓ$ παραλληλόγραμμον· ἐστὶ δὲ καὶ ὀρθογώνιον· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΓ$.

1. ZH] $Z\Theta$ b. τῆς] om. P. τῆς] om. Pb. 3. τὸν $B\Gamma$ V. τῆς ZH FV. 4. πρὸς τὸν $B\Gamma$] mg. m. 1 P. 6. τῆς ZH FV. 7. ἀσύμμετρα P, corr. m. 1. 9. συμ-

rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare ne ZH^2 quidem ad K^2 rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque ZH , K longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. itaque ZH^2 excedit $H\Theta^2$ quadrato rectae sibi incommensurabilis. et ZH , $H\Theta$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles, et neutra earum rationali propositae E longitudine commensurabilis est.

Ergo $Z\Theta$ recta ex duobus nominibus est sexta [def. alt. 6]; quod erat demonstrandum.

Lemma.

Sint duo quadrata AB , $B\Gamma$ et ita ponantur, ut AB , BE in eadem recta sint. itaque etiam ZB , BH in eadem sunt recta. et expleatur parallelogrammum $A\Gamma$. dico, $A\Gamma$ quadratum esse, et ΔH medium esse proportionale inter AB , $B\Gamma$, et praeterea $\Delta\Gamma$ medium esse proportionale inter $A\Gamma$, ΓB .

nam quoniam $\Delta B = BZ$, $BE = BH$, erit $\Delta E = HZ$. uerum $\Delta E = A\Theta = K\Gamma$, $ZH = AK = \Theta\Gamma$ [I, 34]. quare etiam

$$A\Theta = K\Gamma = AK = \Theta\Gamma.$$

μέτρον F, corr. m. 2. εαυτῇ μήκει F. 11. αὐτῶν] τῶν
 ZH , $H\Theta$ Theon (BFVb). εἰσιν P. ἐγκειμένη F. 12.
 E] EH b, H add. m. 2 F. 13. ἡ] om. b. ὅπερ εἶδει δεῖξαι]
comp. P, om. BFVb. 18. εἰσὶν B. 19. ὅτι τὸ $A\Gamma$ V.
εἰσιν P. 20. τὸ $A\Gamma$] om. V. ὅτι] εἰ BF, supra scr.
ὅτι m. 2. 21. εἰσιν P. 22. ZB B. 24. Post ἴση del.
ἀλλ' ἡ μὲν ΔE ἐκατέρω m. 1 P. HZ BFV. 25. $\Gamma\Theta$ V.
ἄρα] om. b. 26. $A\Theta$] A postea add. V. 27. εἰσὶν P.
εἰσιν PB. 28. εἰσὶν P.

Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ZB πρὸς τὴν BH , οὕτως ἡ ΔB πρὸς τὴν BE , ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ZB πρὸς τὴν BH , οὕτως τὸ AB πρὸς τὸ ΔH , ὡς δὲ ἡ ΔB πρὸς τὴν BE , οὕτως τὸ ΔH πρὸς τὸ $B\Gamma$, καὶ ὡς ἄρα τὸ AB
 5 πρὸς τὸ ΔH , οὕτως τὸ ΔH πρὸς τὸ $B\Gamma$. τῶν AB , $B\Gamma$ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔH .

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ μέσον ἀνάλογόν [ἐστὶ] τὸ $\Delta Γ$.

Ἐπεὶ γάρ ἐστὶν ὡς ἡ $ΑΔ$ πρὸς τὴν ΔK , οὕτως
 10 ἡ KH πρὸς τὴν $HΓ$. ἴση γάρ [ἐστὶν] ἑκατέρω ἑκατέρω· καὶ συνθέντι ὡς ἡ AK πρὸς $K\Delta$, οὕτως ἡ $K\Gamma$ πρὸς $ΓH$, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ AK πρὸς $K\Delta$, οὕτως τὸ $ΑΓ$ πρὸς τὸ $ΓΔ$, ὡς δὲ ἡ $K\Gamma$ πρὸς $ΓH$, οὕτως τὸ $\Delta Γ$ πρὸς $ΓB$, καὶ ὡς ἄρα τὸ $ΑΓ$ πρὸς $\Delta Γ$, οὕ-
 15 τως τὸ $\Delta Γ$ πρὸς τὸ $B\Gamma$. τῶν $ΑΓ$, $ΓB$ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ $\Delta Γ$. ἃ προέκειτο δεῖξαι.

νδ'.

Ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ρητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυνα-
 20 μένη ἄλογός ἐστὶν ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων.

Χωρίον γὰρ τὸ $ΑΓ$ περιεχέσθω ὑπὸ ρητῆς τῆς AB καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης τῆς $ΑΔ$. λέγω, ὅτι ἡ τὸ $ΑΓ$ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστὶν ἡ καλου-
 25 μένη ἐκ δύο ὀνομάτων.

3. τὴν BE — 5. $B\Gamma$] postea ins. m. 1 F. 4. οὕτω B. τό] m. 2 F. τὸ $B\Gamma$] corr. ex τὴν $B\Gamma$ m. 2 B. 5. οὕτω B. 6. ἄρα] om. b. 8. ἐστὶ] om. P. 10. τὴν] om. B F b. ἐστὶν] om. P. ἑκατέρω] om. P. 11. τὴν $K\Delta$ V. 12. τὴν $ΓH$ V. τὴν $K\Delta$ V. 13. τὴν $ΓH$ V. 14. τὸ $ΓB$ V, seq. ras. 1 litt. $\Delta Γ$] τὸ $ΓΔ$ V. 15. $\Delta Γ$] $ΓΔ$ V. τὸ $B\Gamma$] $B\Gamma$

itaque parallelogrammum AG aequilaterum est; est autem idem rectangulum. ergo AG quadratum est.

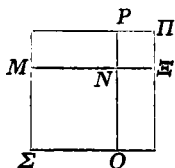
et quoniam est $ZB:BH=AB:BE$, et $ZB:BH=AB:\Delta H$, $\Delta B:BE=\Delta H:BG$ [VI, 1], erit etiam $AB:\Delta H=\Delta H:BG$. ergo ΔH medium est proportionale inter AB , BG .

Iam dico, ΔG etiam medium proportionale esse inter AG , GB .

nam quoniam est $AA:\Delta K=KH:H\Gamma$ (nam utraque utrique aequalis est), et componendo [V, 18] $AK:KA=KG:GH$, est autem $AK:KA=AG:GA$, $KG:GH=\Delta G:GB$, erit etiam $AG:\Delta G=\Delta G:GB$. ergo ΔG medium est proportionale inter AG , GB ; quae propositum erat demonstrare.

LIV.

Si spatium recta rationali et recta ex duobus nominibus prima comprehenditur, recta spatio aequalis quadrata irrationalis est ex duobus nominibus, quae uocatur.



Spatium enim AG recta rationali AB et recta ex duobus nominibus prima AA comprehendatur. dico, rectam spatio AG aequalem quadratam irrationalem esse ex duobus nominibus, quae uocatur.

B, ΓB Fb. 16. $\tilde{\alpha}$] $\delta\pi\epsilon\rho$ Theon (BFVb). Post $\delta\sigma\iota\tilde{\xi}\alpha\iota$
add. $\sigma > : \curvearrowright$ P. 18. $\tau\eta\varsigma$] m. 2 B. 22. $\chi\omega\rho\acute{\iota}\omicron\nu$ — 25. $\acute{\omicron}\nu\omicron$
 $\mu\acute{\alpha}\tau\omega\nu$] mg. m. 1 F. 22. AG] $AB\Gamma\Delta$ Theon (BFVb). 23.
 AB] AA F.

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη ἡ $ΑΔ$, διη-
 ρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ $Ε$, καὶ ἔστω τὸ μείζον
 ὄνομα τὸ $ΑΕ$. φανερόν δὴ, ὅτι αἱ $ΑΕ$, $ΕΔ$ φηταί
 εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ $ΑΕ$ τῆς $ΕΔ$
 5 μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ $ΑΕ$
 σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ φητῇ τῇ $ΑΒ$ μήκει. τε-
 τμήσθω δὴ ἡ $ΕΔ$ δίχα κατὰ τὸ $Ζ$ σημεῖον. καὶ ἐπεὶ
 ἡ $ΑΕ$ τῆς $ΕΔ$ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου
 ἑαυτῇ, ἂν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσ-
 10 σους, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς $ΕΖ$, ἴσον παρὰ τὴν μείζονα
 τὴν $ΑΕ$ παραβληθῇ ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, εἰς
 σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ. παραβεβλήσθω οὖν παρὰ
 τὴν $ΑΕ$ τῷ ἀπὸ τῆς $ΕΖ$ ἴσον τὸ ὑπὸ $ΑΗ$, $ΗΕ$. σύμ-
 μετρος ἄρα ἐστὶν ἡ $ΑΗ$ τῇ $ΕΗ$ μήκει. καὶ ἥχθωσαν
 15 ἀπὸ τῶν $Η$, $Ε$, $Ζ$ ὁποτέρᾳ τῶν $ΑΒ$, $ΓΔ$ παράλληλοι
 αἱ $ΗΘ$, $ΕΚ$, $ΖΑ$. καὶ τῷ μὲν $ΑΘ$ παραλληλογράμμῳ
 ἴσον τετράγωνον συνεστήτω τὸ $ΣΝ$, τῷ δὲ $ΗΚ$ ἴσον
 τὸ $ΝΠ$, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν $ΜΝ$
 τῇ $ΝΞ$. ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $ΡΝ$ τῇ $ΝΟ$. καὶ
 20 συμπεπληρώσθω τὸ $ΣΠ$ παραλληλόγραμμον· τετρά-
 γωνον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΣΠ$. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΗ$,
 $ΗΕ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΕΖ$, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ $ΑΗ$
 πρὸς $ΕΖ$, οὕτως ἡ $ΖΕ$ πρὸς $ΕΗ$. καὶ ὡς ἄρα τὸ $ΑΘ$
 πρὸς $ΕΑ$, τὸ $ΕΑ$ πρὸς $ΚΗ$. τῶν $ΑΘ$, $ΗΚ$ ἄρα μέσον
 25 ἀνάλογόν ἐστι τὸ $ΕΑ$. ἀλλὰ τὸ μὲν $ΑΘ$ ἴσον ἐστὶ

2. $Ε$] e corr. m. rec. P. 3. δὴ] corr. ex δέ B. 4.
 εἰσιν P. ἀσύμμετροι F, sed corr. 5. ἀσυμμέτρου b, sed
 corr.; in F supra add. ἀ- m. 2. καί] om. F. $ΕΑ$ F. 7.
 δὴ] δέ V. 8. ἀσυμμέτρου b, sed corr. 9. τετάρτῳ] Δ b.
 τοῦ] τῷ B. τῆς] e corr. V. 12. σύμμετρον P. διέλη
 Vb, διέλη corr. in διελεί F, διελεί B. Dein add. μήκει V. 13.
 ὑπὸ τῶν FV. $ΗΕ$] $ΗΘ$ P. 14. $ΑΗ$] H e corr. m. 1 V.

nam quoniam AA ex duobus nominibus prima est, in E in nomina diuidatur, et maius nomen sit AE . manifestum igitur, AE , EA rationales esse potentia tantum commensurabiles, et AE^2 excedere EA^2 quadrato rectae sibi commensurabilis, et AE rationali propositae AB longitudine commensurabilem esse [def. alt. 1]. iam EA in Z puncto in duas partes aequales secetur. et quoniam AE^2 excedit EA^2 quadrato rectae sibi commensurabilis, si quartae parti quadrati minoris, hoc est quadrato EZ^2 , aequale maiori AE adplicatur parallelogrammum figura quadrata deficiens, eam in partes commensurabiles diuidit [prop. XVII]. adplicetur igitur rectae AE quadrato EZ^2 aequale $AH \times HE$. itaque AH , EH longitudine commensurabiles sunt. et ab H , E , Z alterutri AB , GA parallelae ducantur $H\Theta$, EK , ZA . et parallelogrammo $A\Theta$ aequale quadratum ΣN construatur, et $N\Pi = HK$ [II, 14], et ita ponantur, ut MN , $N\Xi$ in eadem recta sint; quare etiam PN , NO in eadem sunt recta. et parallelogrammum $\Sigma\Pi$ expleatur; itaque $\Sigma\Pi$ quadratum est [u. lemma]. et quoniam est $AH \times HE = EZ^2$, erit $AH : EZ = ZE : EH$ [VI, 17]. quare etiam

$$A\Theta : EA = EA : KH \text{ [VI, 1].}$$

EH] HE in ras. V. 15. H] m. 2 F. AB] A eras. F.
 GA] in ras. V, BA F, GA B. 16. EK] E postea ins. m.
 1 F. ZA] mut. in AZ V, AZ BFb. παραλληλόγραμμον P,
 corr. m. 1. 17. ΣN] Σ corr. ex E BFb. 18. κείσθωσαν V.
 MN] corr. ex N m. 1 F. 19. ἐστίν B. NP P. 20.
 $\Sigma\Pi$] corr. ex $E\Pi$ B, item lin. 21. 21. τό] τῷ V. AHE b,
 et corr. in AH , EH m. 2 V, AH F, et B, corr. m. 2. 22.
 τῷ] τό V. 23. πρὸς τήν V. ZE] EZ P. EH] τήν H,
 ante H ras. 1 litt. V. 24. πρὸς τό, seq. ras. 1 litt., V. EA]
 E eras. V. τό KH V. ἄρα] postea add. m. 1 P.

τῷ ΣΝ, τὸ δὲ ΗΚ ἴσον τῷ ΝΠ· τῶν ΣΝ, ΝΠ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΛ. ἐστὶ δὲ τῶν αὐτῶν τῶν ΣΝ, ΝΠ μέσον ἀνάλογον καὶ τὸ ΜΡ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΛ τῷ ΜΡ· ὥστε καὶ τῷ ΟΞ ἴσον ἐστίν. ἐστὶ δὲ
 5 καὶ τὰ ΑΘ, ΗΚ τοῖς ΣΝ, ΝΠ ἴσα· ὅλον ἄρα τὸ ΑΓ ἴσον ἐστὶν ὅλῳ τῷ ΣΠ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΜΞ τετραγώνῳ· τὸ ΑΓ ἄρα δύναται ἢ ΜΞ.

Λέγω, ὅτι ἡ ΜΞ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ, σύμμε-
 10 τρός ἐστὶ καὶ ἡ ΑΕ ἐκατέρᾳ τῶν ΑΗ, ΗΕ. ὑπόκει-
 ται δὲ καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ σύμμετρος· καὶ αἱ ΑΗ, ΗΕ ἄρα τῇ ΑΒ σύμμετροί εἰσιν. καὶ ἐστὶ ρητὴ ἡ ΑΒ·
 ρητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἐκατέρᾳ τῶν ΑΗ, ΗΕ· ρητὸν ἄρα ἐστὶν ἐκάτερον τῶν ΑΘ, ΗΚ, καὶ ἐστὶ σύμμετρον τὸ
 15 ΑΘ τῷ ΗΚ. ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ τῷ ΣΝ ἴσον ἐστίν, τὸ δὲ ΗΚ τῷ ΝΠ· καὶ τὰ ΣΝ, ΝΠ ἄρα, τουτέστι τὰ ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ, ρητά ἐστὶ καὶ σύμμετρα. καὶ
 ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ μήκει, ἀλλ' ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΑΗ ἐστὶ σύμμετρος, ἡ δὲ ΔΕ τῇ ΕΖ
 20 σύμμετρος, ἀσύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΑΗ τῇ ΕΖ· ὥστε καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΕΛ ἀσύμμετρόν ἐστιν. ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ τῷ ΣΝ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ ΕΛ τῷ ΜΡ· καὶ τὸ ΣΝ ἄρα τῷ ΜΡ ἀσύμμετρόν ἐστιν. ἀλλ' ὥς τὸ ΣΝ

1. ΣΝ] (bis) corr. ex EN B, item lin. 3, 5. 2. ΕΛ] corr. ex A m. 1 F. ἐστὶν PB. 3. ἐστίν P. 4. τό] corr. ex τῷ m. 1 P. ΜΡ τῷ ΕΛ Theon (BFVb). ὥστε καὶ τῷ] ἀλλὰ τὸ μὲν ΜΡ τῷ ΟΞ (corr. ex ΞΟ V) ἴσον ἐστὶ (ἐστίν B) τὸ δὲ ΕΛ (ΕΔ F) τῷ ΖΓ, ὅλον ἄρα τὸ ΕΓ τοῖς ΜΡ Theon (BFVb). τῷ] corr. ex τό m. 1 P. ἐστίν] postea ins. m. 1 F. 5. ΕΝ, ΠΝ F. 6. τουτέστιν P. 9. ΑΝ F, corr. m. 1. ΗΕ] corr. ex EH m. 2 V, Ε" H' F. 10. ΕΛ ἐκατέρων F. 11. σύμμετρος — 12. ΑΒ] (prius) mg. m. 1 F. 11. καί] μήκει· καὶ V, B m. 2. αἱ] ἡ EF, in ras. B. ΕΗ P. 12. εἰσι V, comp. Fb. ἐστὶν B. 13. ἐστίν PB. 14. ἐστίν] ἐστὶ καὶ V.

itaque EA medium est proportionale inter ΣN , $N\Pi$.
 uerum etiam MP inter eadem ΣN , $N\Pi$ medium est
 proportionale [u. lemma]. quare $EA = MP$. itaque etiam
 $EA = O\Xi$ [I, 43]. uerum etiam $A\Theta + HK = \Sigma N + N\Pi$.
 quare totum¹⁾ $A\Gamma = \Sigma\Pi = M\Xi^2$. ergo $M\Xi$ quadrata
 spatio $A\Gamma$ aequalis est.

dico, $M\Xi$ ex duobus nominibus esse. nam quoniam
 AH rectae HE commensurabilis est, AE utrique rectae
 AH , HE commensurabilis est [prop. XV]. supposui-
 mus autem, etiam AE , AB commensurabiles esse.
 quare etiam AH , HE rectae AB commensurabiles
 sunt [prop. XII]. et AB rationalis est. itaque etiam
 utraque AH , HE rationalis est. quare etiam $A\Theta$,
 HK rationalia sunt [prop. XIX], et $A\Theta$, HK commen-
 surabilia. uerum $A\Theta = \Sigma N$, $HK = N\Pi$. itaque etiam
 ΣN , $N\Pi$, hoc est MN^2 , $N\Xi^2$, rationalia sunt et
 commensurabilia. et quoniam AE , EA longitudine in-
 commensurabiles sunt, et AE , AH commensurabiles,
 et AE , EZ commensurabiles, AH et EZ incommen-
 surabiles sunt [prop. XIII]. quare etiam $A\Theta$ et
 EA incommensurabilia sunt [VI, 1; prop. XI]. uerum
 $A\Theta = \Sigma N$, $EA = MP$. quare etiam ΣN , MP in-
 commensurabilia sunt. est autem $\Sigma N : MP = ON : NP$
 [VI, 1]. itaque ON , NP incommensurabiles sunt

1) Nam $EA = Z\Gamma$.

15. ΣN] corr. ex EN B, item lin. 16. 15. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu \acute{\iota}\sigma\omicron\nu$ V.
 $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ PBb, comp. F. 16. $\tau\acute{\alpha}] \tau\acute{o}$ F. $N\Pi \acute{\alpha}\rho\alpha]$ $\tau\acute{\omega}$ $N\Pi$ F.
 17. $\acute{\alpha}\sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\rho\alpha$ B. 18. $\acute{\alpha}\lambda\lambda\acute{\alpha}$ Bb. 19. AH] corr. ex
 AB V. $EZ]$ $EZ \acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ V. 20. $\kappa\alpha\acute{\iota}] \acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ V. Post EZ
 add. $\mu\eta\kappa\epsilon\iota$ Vb, m. 2 B. 21. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu]$ om. BFb. 22. $\Sigma N]$
 $N\Sigma'$ F.

πρὸς MP , ἢ ON πρὸς τὴν NP · ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ON τῇ NP . ἴση δὲ ἡ μὲν ON τῇ MN , ἡ δὲ NP τῇ $NΞ$ · ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ MN τῇ $NΞ$. καὶ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς MN σύμμετρον τῷ ἀπὸ τῆς $NΞ$, καὶ
 5 ῥητὸν ἐκάτερον· αἱ MN , $NΞ$ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι.

Ἡ $MΞ$ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ δύναται τὸ $ΑΓ$ · ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

νέ'.

- 10 Ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστὶν ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Περιεχέσθω γὰρ χωρίον τὸ $ΑΒΓΔ$ ὑπὸ ῥητῆς
 15 τῆς $ΑΒ$ καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας τῆς $ΑΔ$ · λέγω, ὅτι ἡ τὸ $ΑΓ$ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων πρώτη ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα ἐστὶν ἡ $ΑΔ$, διηγήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ E , ὥστε τὸ μείζον
 20 ὄνομα εἶναι τὸ $ΑΕ$ · αἱ $ΑΕ$, $EΔ$ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ $ΑΕ$ τῆς $EΔ$ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ τὸ ἐλαττον ὄνομα ἡ $EΔ$ σύμμετρόν ἐστὶ τῇ $ΑΒ$ μήκει. τετμήσθω ἡ $EΔ$ δίχα κατὰ τὸ Z , καὶ τῷ ἀπὸ τῆς EZ ἴσον παρὰ τὴν
 25 $ΑΕ$ παραβεβλήσθω ἐλλείπον εἰδει τετραγώνῳ τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΗΕ$ · σύμμετρος ἄρα ἡ $ΑΗ$ τῇ $ΗΕ$ μήκει. καὶ

1. τὸ MP V. οὕτως ἡ V. τήν] om. Bf b. MP F. ἐστὶν ἄρα F. 2. PN P. NM P. 4. τῆς] (prius) om. Fb, m. 2 B. $NΞ$] $MΞ$ F. 5. εἰσιν B. 6. μονονον P. 7. ἐκ] ἡ ἐκ Pb. 12. ἐκ] ἡ ἐκ b. 14. Post γὰρ del. τό B. 18. γὰρ] om. Fb, m. 2 B. 20. $ΑΕ$] (alt.) $ΕΑ$ P, corr. in A

[prop. XI]. uerum $ON = MN$, $NP = NΞ$. quare MN , $NΞ$ incommensurabiles sunt. et MN^2 , $NΞ^2$ commensurabilia sunt, et utrumque rationale. MN , $NΞ$ igitur rationales sunt potentia tantum commensurabiles.

Ergo $MΞ$ ex duobus nominibus est [prop. XXXVI], et $MΞ^2 = AΓ$; quod erat demonstrandum.

LV.

Si spatium recta rationali et recta ex duobus nominibus secunda comprehenditur, recta spatio aequalis quadrata irrationalis est ex duobus mediis prima, quae uocatur.

Spatium enim $ABΓΔ$ rationali AB et recta ex duobus nominibus secunda $ΔΔ$ comprehendatur. dico, rectam spatio $AΓ$ aequalem quadratam ex duobus mediis primam esse.

nam quoniam $ΔΔ$ ex duobus nominibus secunda est, in E in nomina diuidatur ita, ut AE maius nomen sit. itaque AE , $EΔ$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles, et AE^2 excedit $EΔ^2$ quadrato rectae sibi commensurabilis, et minus nomen $EΔ$ rectae AB longitudine commensurabile est [def. alt. 2]. iam $EΔ$ in Z in duas partes aequales secetur, et quadrato EZ^2 aequale rectae AE adplicetur $AH \times HE$ figura quadrata deficiens. itaque AH , HE longitudine commensurabiles sunt [prop. XVII]. et per H , E , Z rectis AB , $ΓΔ$ parallelae ducantur $HΘ$, EK , $ZΛ$, et paral-

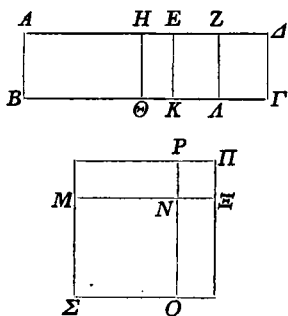
m. rec. εἶσιν PB. 21. τῆς $EΔ$] mg. m. 1 P. 22. ἑλασσον
P, comp. F. 23. AB] A ins. m. 1 F. 24. τῶ] corr. ex
τό m. 1 F. 25. τό] τῶ V. 26. AH , HE V e corr.

διὰ τῶν H, E, Z παράλληλοι ἤχθωσαν ταῖς $AB, \Gamma\Delta$
 αἱ $H\Theta, EK, ZA$, καὶ τῷ μὲν $A\Theta$ παραλληλογράμῳ
 ἴσον τετράγωνον συνεστήτω τὸ ΣN , τῷ δὲ HK ἴσον
 τετράγωνον τὸ $N\Pi$, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι
 5 τὴν MN τῇ $N\Xi$. ἐπ' εὐθείας ἄρα [ἐστὶ] καὶ ἡ PN
 τῇ NO . καὶ συμπεπληρώσθω τὸ $\Sigma\Pi$ τετράγωνον.
 φανερόν δὲ ἐκ τοῦ προδεδειγμένου, ὅτι τὸ MP μέσον
 ἀνάλογόν ἐστι τῶν $\Sigma N, N\Pi$, καὶ ἴσον τῷ $E\Delta$, καὶ
 ὅτι τὸ $A\Gamma$ χωρίον δύναται ἡ $M\Xi$. δεικτέον δὲ, ὅτι
 10 ἡ $M\Xi$ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη. ἐπεὶ ἀσύμμετρος
 ἐστὶν ἡ AE τῇ $E\Delta$ μήκει, σύμμετρος δὲ ἡ $E\Delta$ τῇ
 AB , ἀσύμμετρος ἄρα ἡ AE τῇ AB . καὶ ἐπεὶ σύμμε-
 τρός ἐστιν ἡ AH τῇ EH , σύμμετρος ἐστὶ καὶ ἡ AE
 ἐκατέρᾳ τῶν AH, HE . ἀλλὰ ἡ AE ἀσύμμετρος τῇ
 15 AB μήκει· καὶ αἱ AH, HE ἄρα ἀσύμμετροί εἰσι τῇ
 AB . αἱ BA, AH, HE ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον
 σύμμετροι· ὥστε μέσον ἐστὶν ἐκάτερον τῶν $A\Theta, HK$.
 ὥστε καὶ ἐκάτερον τῶν $\Sigma N, N\Pi$ μέσον ἐστίν. καὶ
 αἱ $MN, N\Xi$ ἄρα μέσαι εἰσίν. καὶ ἐπεὶ σύμμετρος ἡ
 20 AH τῇ HE μήκει, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ $A\Theta$ τῷ HK ,
 τουτέστι τὸ ΣN τῷ $N\Pi$, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς MN

1. $\Gamma\Delta$] $B\Gamma, \Gamma\Delta$ P, corr. m. 1; $\Delta\Gamma$ Bb. 2. ZA] mut. in
 AZ V, AZ Fb. 3. Post τετράγωνον del. τὸ $N\Pi$ m. 1 P.

EN B, sed corr. 5. $N\Xi$] mut. in NZ V. ἐστὶ] om. P,
 ἐστίν B. 8. $N\Pi$] ΠN F et in ras. V. 9. $M\Xi$] $MN, N\Xi$
 corr. ex $MN\Xi$ V; mg. m. 1 γρ. $MN, N\Xi$ b. δε V. 10.
 μέσον F, corr. m. 1. ἐπεὶ γάρ F. 12. ἄρα] ἄρα καὶ V,
 ἄρα ἐστίν F. Post AB add. μήκει V, m. 2 B. ἐπεὶ] om. P.

13. EH] HE F. ἐστίν B. 14. ἀλλὰ — 15. καὶ] καὶ ἐστι
 (ἐστίν B) ῥητὴ ἡ AE . ῥητὴ ἄρα καὶ ἐκατέρᾳ τῶν AH (AE F),
 HE . καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ AE τῇ AB , σύμμετρος δὲ
 ἡ AE ἐκατέρᾳ τῶν AH, HE , καὶ (om. B) Theon (BFVb). 15.
 ἄρα] m. 2 F. σύμμετροι BF, sed corr. εἰσιν PB. 16.
 Post AB add. μήκει m. 2 B. BA] om. P. εἰσιν B. 18.
 ἐστὶ PV, comp. Fb. 19. εἰσὶ V, comp. Fb. Ante ἡ add.



lelogrammo $A\Theta$ aequale construatur quadratum ΣN , parallelogrammo HK autem $N\Pi$, et ponantur ita, ut MN , $N\Xi$ in eadem recta sint; itaque etiam PN , NO in eadem sunt recta. expleatur quadratum $\Sigma\Pi$. tum ex iis, quae antea demonstrata sunt [prop. LIII lemma], adparet,

MP medium esse proportionale inter ΣN , $N\Pi$ et $= EA$ [p. 162, 1], et esse $M\Xi^2 = A\Gamma$ [p. 162, 5]. iam demonstrandum est, $M\Xi$ ex duabus mediis primam esse. quoniam AE , $E\Delta$ longitudine incommensurabiles sunt, et $E\Delta$, AB commensurabiles, AE , AB incommensurabiles erunt [prop. XIII]. et quoniam AH , EH commensurabiles sunt, etiam AE utrique AH , HE commensurabilis est [prop. XV]. uerum AE , AB longitudine incommensurabiles sunt. quare etiam AH , HE rectae AB incommensurabiles sunt [prop. XIII]. itaque BA et AH , HE rationales sunt potentia tantum commensurabiles. quare utrumque $A\Theta$, HK medium est [prop. XXI]. quare etiam utrumque ΣN , $N\Pi$ medium est. itaque etiam MN , $N\Xi$ mediae sunt. et quoniam AH , HE longitudine commensurabiles sunt, etiam $A\Theta$, HK , hoc est ΣN , $N\Pi$ siue MN^2 , $N\Xi^2$ commensurabilia sunt [VI, 1; prop. XI]. et quoniam AE , $E\Delta$ longitudine incommensurabiles sunt, et AE , AH commensurabiles, et $E\Delta$, EZ com-

ἔστιν BVb, m. 2 F.

MK F, corr. m. 2.

20. καὶ τὸ $A\Theta$] eras. V.

τῶ] τῇ P.

τῷ ἀπο τῆς $NΞ$ [ὥστε δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι αἱ MN ,
 $NΞ$]. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ AE τῇ $EΔ$ μήκει,
 ἀλλ' ἡ μὲν AE σύμμετρός ἐστι τῇ AH , ἡ δὲ $EΔ$ τῇ
 EZ σύμμετρος, ἀσύμμετρος ἄρα ἡ AH τῇ EZ . ὥστε
 5 καὶ τὸ $AΘ$ τῷ $EΔ$ ἀσύμμετρόν ἐστιν, τουτέστι τὸ $ΣN$
 τῷ MP , τουτέστιν ἡ ON τῇ NP , τουτέστιν ἡ MN
 τῇ $NΞ$ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει. ἐδείχθησαν δὲ αἱ MN ,
 $NΞ$ καὶ μέσαι οὐσαι καὶ δυνάμει σύμμετροι· αἱ MN ,
 $NΞ$ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω
 10 δὴ, ὅτι καὶ ῥητὸν περιέχουσιν. ἐπεὶ γὰρ ἡ $ΔE$ ὑπό-
 κειται ἐκατέρᾳ τῶν AB , EZ σύμμετρος, σύμμετρος
 ἄρα καὶ ἡ EZ τῇ $EΚ$. καὶ ῥητὴ ἐκατέρᾳ αὐτῶν· ῥη-
 τὸν ἄρα τὸ $EΔ$, τουτέστι τὸ MP . τὸ δὲ MP ἐστι τὸ
 ὑπὸ τῶν $MNΞ$. εἰν δὲ δύο μέσαι δυνάμει μόνον
 15 σύμμετροι συντεθῶσι ῥητὸν περιέχουσιν, ἡ ὅλη ἄλογός
 ἐστιν, καλεῖται δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Ἡ ἄρα $MΞ$ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη· ὅπερ ἔδει
 δεῖξαι.

νβ'.

20 Ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς
 ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης, ἡ τὸ χωρίον δυνα-
 μένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων
 δευτέρα.

Χωρίον γὰρ τὸ $ABΓΔ$ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς
 25 AB καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης τῆς $ΑΔ$ διηρη-
 μένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ E , ὧν μείζον ἐστι τὸ

1. ὥστε — 2. $NΞ$] om. P. ὥστε καὶ F, sed corr. 3.
 ἀλλὰ V. 4. σύμμετρος] om. FVb. ἀσύμμετρος] corr. ex
 σύμμετρος m. 2 F. 5. ἀσύμμετρος F, corr. m. 2. ἐστι BV,
 comp. Fb. $ΣN$] corr. ex EN B. 6. NP] in ras. V. 7.
 ἐστιν P. 8. δυνάμει μόνον V. αἱ — 9. σύμμετροι] mg.
 m. 2 V. 9. εἰσὶν B. 10. $ΔE$] in ras. V. 11. AB] corr.

mensurabiles, AH et EZ incommensurabiles sunt [prop. XIII]. quare $A\Theta$, EA , hoc est ΣN , MP , incommensurabilia sunt, siue ON , NP , hoc est MN , $N\Xi$, longitudine incommensurabiles [VI, 1; prop. XI]. demonstrauimus autem, MN , $N\Xi$ et medias esse et potentia commensurabiles. itaque MN , $N\Xi$ mediae sunt potentia tantum commensurabiles. iam dico, easdem spatium rationale comprehendere. nam quoniam supposuimus, AE utrique AB , EZ commensurabilem esse, etiam EZ , EK commensurabiles sunt. et utraque rationalis est. quare EA , hoc est MP , rationale est [prop. XIX]. uerum $MP = MN \times N\Xi$. sin duae mediae potentia tantum commensurabiles componuntur spatium rationale comprehendentes, tota irrationalis est, uocatur autem ex duabus mediis prima [prop. XXXVII].

Ergo $M\Xi$ ex duabus mediis prima est; quod erat demonstrandum.

LVI.

Si spatium recta rationali et recta ex duobus nominibus tertia comprehenditur, recta spatio aequalis quadrata irrationalis est ex duabus mediis secunda, quae uocatur.

Spatium enim $AB\Gamma\Delta$ comprehendatur rationali AB et recta ex duobus nominibus tertia $\Delta\Delta$ in nomina in E diuisa, quorum maius est AE . dico, rectam

ex EB m. rec. F. EZ] in ras. V. $\acute{\alpha}\mu\mu\epsilon\tau\rho\omicron\varsigma$] om. F. 12.
 $\acute{\alpha}\rho\alpha$ $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ P. EZ] mut. in ZE V, ZE P. 13. $\tau\omicron\upsilon\tau\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ P.
 14. MN , $N\Xi$ V. $\mu\acute{o}\nu\omicron\nu$] om. BFV. 15. $\sigma\upsilon\nu\tau\epsilon\theta\acute{\omega}\sigma\iota\nu$
 PB. η] m. 2 F. 16. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ V, comp. Fb. 17. $M\Xi$] MHZ ,
 del. Z, F. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$] m. 2 F. 24. $\phi\eta\tau\acute{\eta}\varsigma$] supra scr. F. 25.
 $\tau\epsilon\lambda\acute{\epsilon}\tau\eta\varsigma$] supra scr. F. 26. $\acute{\omega}\nu$] $\acute{\omega}\nu$ $\tau\acute{o}$ P. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\omega$ BFb.

ΑΕ λέγω, ὅτι ἡ τὸ *ΑΓ* χωρίον δυναμένη ἄλογίς ἐστιν ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

Κατασκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη ἡ *ΑΔ*, αἱ *ΑΕ*, *ΕΔ*
 5 ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ *ΑΕ*
 τῆς *ΕΔ* μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ οὐδετέρα τῶν *ΑΕ*, *ΕΔ* σύμμετρός [ἐστὶ] τῇ *ΑΒ* μήκει. ὁμοίως δὴ τοῖς προδεδειγμένοις δείξομεν, ὅτι ἡ *ΜΞ*
 ἐστὶν ἡ τὸ *ΑΓ* χωρίον δυναμένη, καὶ αἱ *ΜΝ*, *ΝΞ*
 10 μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε ἡ *ΜΞ* ἐκ δύο μέσων ἐστίν.

Δεικτέον δὴ, ὅτι καὶ δευτέρα.

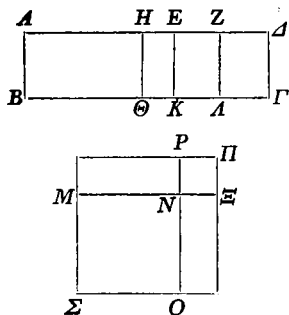
[Καὶ] ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ *ΔΕ* τῇ *ΑΒ* μήκει, τουτέστι τῇ *ΕΚ*, σύμμετρος δὲ ἡ *ΔΕ* τῇ *ΕΖ*, ἀσύμ-
 15 μετρος ἄρα ἐστὶν ἡ *ΕΖ* τῇ *ΕΚ* μήκει. καὶ εἰσι ῥηταὶ αἱ *ΖΕ*, *ΕΚ* ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. μέσον ἄρα [ἐστὶ] τὸ *ΕΑ*, τουτέστι τὸ *ΜΡ*· καὶ περιέχεται ὑπὸ τῶν *ΜΝΞ*· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπο τῶν *ΜΝΞ*.

20 Ἡ *ΜΞ* ἄρα ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

1. ἡ] supra scr. m. 1 b. 3. κατασκευάσθω Vb. γάρ] δέ V. 5. εἰσιν P. Post *ΑΕ* del. *ΕΔ* ἄρα ῥηταὶ εἰσιν m. 1 P. 7. ἐστὶ] om. P. 8. τοῖς πρότερον δεδειγμένοις Theon (BFVb). ἡ] m. rec. P. 9. ἡ] postea ina. F. καὶ ὅτι αἱ BFV. 10. εἰσὶν B. *ΜΞ*] *ΜΖ* FV. 11. ἐστὶ BV, comp. Fb. 13. καὶ] m. 2 BF, om. Vb. ἐπεὶ οὖν V. 15. *ΕΖ*] *ΖΕ* P. *ΕΚ*] *ΕΗ* P. 16. εἰσιν PB. 17. ἐστὶ] om. BFVb. τουτέστιν P. 18. *ΜΝ*, *ΝΞ* b. μέσον — 19. *ΜΝΞ*] mg. m. 2 F. 20. *ΜΞ*] *ΜΝ*, add. Ξ m. 2 B; *ΜΝΞ* FVb. ἄρα] supra scr. m. 1 F. ἐστὶ] om. P. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. BFVb.

spatio AG aequalem quadratam irrationalem esse ex duabus mediis secundam, quae uocatur.

Comparentur enim eadem, quae antea. et quoniam AA ex duobus nominibus tertia est, AE , EA



rationales sunt potentia tantum commensurabiles, et AE^2 excedit EA^2 quadrato rectae sibi commensurabilis, et neutra rectarum AE , EA rectae AB longitudine commensurabilis est [def. alt. 3]. iam eodem modo quo antea demonstrabimus, esse

$$M\Xi^2 = A\Gamma$$

[cfr. p. 162, 5], et MN , $N\Xi$ medias esse potentia tantum commensurabiles [cfr. p. 166, 10 sq.]. quare $M\Xi$ ex duabus mediis est.

iam demonstrandum est, eandem secundam esse. quoniam AE , AB , hoc est AE , EK , longitudine incommensurabiles sunt, et AE , EZ commensurabiles, EZ et EK longitudine incommensurabiles sunt [prop. XIII]. et rationales sunt; itaque ZE , EK rationales sunt potentia tantum commensurabiles. quare EA , hoc est MP , medium est [prop. XXI]. et rectis MN , $N\Xi$ comprehenditur. itaque $MN \times N\Xi$ medium est.

Ergo $M\Xi$ ex duabus mediis secunda est [prop. XXXVIII]; quod erat demonstrandum.

νξ'.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης, ἢ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἢ καλουμένη μείζων.

- 5 Χωρίον γὰρ τὸ $ΑΓ$ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς $ΑΒ$ καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης τῆς $ΑΔ$ διηρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ $Ε$, ὧν μείζον ἐστω τὸ $ΑΕ$. λέγω, ὅτι ἢ τὸ $ΑΓ$ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἢ καλουμένη μείζων.
- 10 Ἐπεὶ γὰρ ἢ $ΑΔ$ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη, αἱ $ΑΕ$, $ΕΔ$ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἢ $ΑΕ$ τῆς $ΕΔ$ μείζον δύνανται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἐαυτῇ, καὶ ἢ $ΑΕ$ τῇ $ΑΒ$ σύμμετρός [ἐστὶ] μήκει. τετμήσθω ἢ $ΔΕ$ δίχα κατὰ τὸ $Ζ$, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΕΖ$
- 15 ἴσον παρὰ τὴν $ΑΕ$ παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον τὸ ὑπὸ $ΑΗ$, $ΗΕ$. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἢ $ΑΗ$ τῇ $ΗΕ$ μήκει. ἥχθωσαν παράλληλοι τῇ $ΑΒ$ αἱ $ΗΘ$, $ΕΚ$, $ΖΑ$, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρὸ τούτου γεγονένω· φανερόν δὴ, ὅτι ἢ τὸ $ΑΓ$ χωρίον δυναμένη ἐστὶν ἢ
- 20 $ΜΞ$. δεικτέον δὴ, ὅτι ἢ $ΜΞ$ ἄλογός ἐστιν ἢ καλουμένη μείζων. ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστὶν ἢ $ΑΗ$ τῇ $ΕΗ$ μήκει, ἀσύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ $ΑΘ$ τῷ $ΗΚ$, τουτέστι τὸ $ΣΝ$ τῷ $ΝΠ$. αἱ $ΜΝ$, $ΝΞ$ ἄρα δυνάμει εἰδὼν

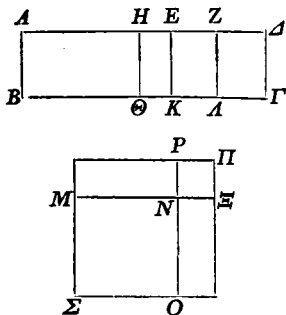
2. περιέχεται P. 4. μείζων V, sed corr. 8. ἢ] om. Fb.
 $ΑΕ$ P. χωρίον ἢ Fb. 10. ἐστὶν P. 11. εἰσιν P. 12.
 τῆς] τῇ b. τῷ] corr. ex τό V. σύμμετρον, ἀ- add. m. 2,
 Bfb. 13. ἐστὶ] om. P. 15. $ΑΕ$] supra A scr. $Δ$ b, E in
 ras. V. 16. ὑπὸ τῶν V. $ΑΗ$] corr. ex $ΑΕ$ m. 1 F. 17.
 $ΕΗ$ V. 18. $ΖΑ$] in ras., seq. ras. 3 litt. V, Z in ras. m. 1 B.
 λοιπὰ] supra scr. V. τὰ] om. FV. αὐτὰ] om. F. 21.
 σύμμετρος F, corr. m. 2. ἐστὶν] om. B. 22. τουτέστιτεστι P,
 corr. m. 1. 23. τῷ] corr. ex τό FV. ἄρα] om. b. εἰδὼν
 σύμμετροι V, corr. m. 2.

LVII.

Si spatium recta rationali et recta ex duobus nominibus quarta comprehenditur, recta spatio aequalis quadrata irrationalis est maior, quae uocatur.

Spatium enim AG rationali AB comprehendatur et AD recta ex duobus nominibus quarta in E in nomina diuisa, quorum maius sit AE . dico, rectam spatio AG aequalem quadratam irrationalem esse maiorem, quae uocatur.

nam quoniam AD ex duobus nominibus quarta est, AE , ED rationales sunt potentia tantum commensurabiles, et AE^2 excedit ED^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis, et AE , AB longitudine commensurabiles sunt [deff. alt. 4]. secetur AE in Z in duas partes aequales, et quadrato EZ^2 aequale rectae AE adplicetur parallelogrammum



$$AH \times HE.$$

itaque AH , HE longitudine incommensurabiles sunt [prop. XVIII]. rectae AB parallelae ducantur $HΘ$, EK , $ZΔ$, et reliqua eodem modo, quo antea [p. 166, 1 sq.], fiant. manifestum igitur est, esse $MΞ^2 = AG$. iam demonstrandum, $MΞ$ irrationalem esse maiorem, quae uocatur. quoniam AH , EH longitudine incommensurabiles sunt, etiam $AΘ$, HK , hoc est $ΣN$, $NΠ$, incommensurabilia sunt [VI, 1; prop. XI]. itaque MN , $NΞ$ potentia incommensurabiles sunt. et quoniam AE , AB longitudine commensurabiles sunt, AK rationale est [prop.

- ἀσύμμετροι. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ AE τῇ AB
 μήκει, φητόν ἐστι τὸ AK · καὶ ἐστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ
 τῶν MN , $NΞ$ · φητόν ἄρα [ἐστὶ] καὶ τὸ συγκείμενον
 ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν MN , $NΞ$. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός
 5 [ἐστιν] ἡ AE τῇ AB μήκει, τουτέστι τῇ EK , ἀλλὰ
 ἡ AE σύμμετρός ἐστι τῇ EZ , ἀσύμμετρος ἄρα ἡ EZ
 τῇ EK μήκει. αἱ EK , EZ ἄρα φηταὶ εἰσι δυνάμει
 μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα τὸ AE , τουτέστι τὸ MP .
 καὶ περιέχεται ὑπὸ τῶν MN , $NΞ$ · μέσον ἄρα ἐστὶ
 10 τὸ ὑπὸ τῶν MN , $NΞ$. καὶ φητόν τὸ [συγκείμενον]
 ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν MN , $NΞ$, καὶ εἰσιν ἀσύμμετροι αἱ
 MN , $NΞ$ δυνάμει. ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμ-
 μετροὶ συντεθῶσι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν
 ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων φητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον,
 15 ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν, καλεῖται δὲ μεῖζων.
 Ἡ $MΞ$ ἄρα ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μεῖζων,
 καὶ δύναται τὸ AG χωρίον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

νῆ'.

- Ἐὰν χωρίον περιέχῃται ὑπὸ φητῆς καὶ τῆς
 20 ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυνα-
 μένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη φητόν καὶ μέ-
 σον δυναμένη.

- Χωρίον γὰρ τὸ AG περιεχέσθω ὑπὸ φητῆς τῆς
 AB καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης τῆς AD διη-
 25 ρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ E , ὥστε τὸ μεῖζον
 ὄνομα εἶναι τὸ AE · λέγω [δή], ὅτι ἡ τὸ AG χωρίον

1. EA P. 2. ἐστὶ] ἐστιν P, dein del. ἡ AE τῇ AB m. 1. τό]
 e corr. m. 1 V. 3. MN] NMP . ἐστὶ] om. B F V b. καὶ]
 om. b. 5. ἐστιν] om. P. τουτέστιν P. ἀλλ' F. 6.
 ἐστιν P. τῇ] τῆς P. 7. εἰσιν P. 8. τουτέστιν b. τό]
 corr. ex τῷ m. 1 F. 9. μέσον — 10. $NΞ$] mg. m. 1 P. 10.

XIX]. et $AK = MN^2 + NΞ^2$. quare etiam $MN^2 + NΞ^2$ rationale est. et quoniam AE, AB , hoc est AE, EK , longitudine incommensurabiles sunt [prop. XIII], et AE, EZ commensurabiles, EZ, EK longitudine incommensurabiles sunt [prop. XIII]. itaque EK, EZ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. quare AE , hoc est MP , medium est [prop. XXI]. et rectis $MN, NΞ$ comprehenditur. itaque $MN \times NΞ$ medium est. et $MN^2 + NΞ^2$ rationale est, et $MN, NΞ$ potentia incommensurabiles sunt. sin duae rectae potentia incommensurabiles componuntur efficientes summam quadratorum suorum rationalem, rectangulum autem medium, tota irrationalis est, uocatur autem maior [prop. XXXIX].

Ergo $MΞ$ irrationalis est maior, quae uocatur, et $MΞ^2 = AΓ$; quod erat demonstrandum.

LVIII.

Si spatium recta rationali et recta ex duobus nominibus quinta comprehenditur, recta spatio aequalis quadrata irrationalis est spatio rationali et medio aequalis quadrata, quae uocatur.

Spatium enim $AΓ$ comprehendatur rationali AB et AA recta ex duobus nominibus quinta in E in nomina diuisa, ita ut AE maius nomen sit. dico, rectam spatio $AΓ$ aequalem quadratam irrationalem esse

ὑπό] συγκείμενον ἐκ V. συγκείμενον] om. P. 11. ἐκ τῶν] supra scr. F. καὶ ἐστὶν ἀσύμμετρος ἡ MN τῇ NΞ Theon (BFVb). 13. συνεθεῶσιν PB. 14. δέ comp. F. 15. ἐστὶ BV, comp. Fb. 19. καὶ τῆς] bis b. 26. δὴ] om. P. ἡ] supra scr. m. 1 P.

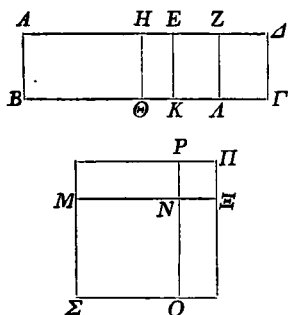
δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἢ καλουμένη ρητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Κατεσκευάσθω γάρ τὰ ἀντὰ τοῖς πρότερον δεδειγμένοις· φανερόν δὴ, ὅτι ἡ τὸ $ΑΓ$ χωρίον δυναμένη ἐστὶν
 5 ἡ $ΜΞ$. δεικτέον δὴ, ὅτι ἡ $ΜΞ$ ἐστὶν ἢ ρητὸν καὶ μέσον δυναμένη. ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ $ΑΗ$ τῇ $ΗΕ$, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ $ΑΘ$ τῷ $ΘΕ$, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς $ΜΝ$ τῷ ἀπὸ τῆς $ΝΞ$. αἱ $ΜΝ$, $ΝΞ$ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. καὶ ἐπεὶ ἡ $ΑΔ$ ἐκ
 10 δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη, καὶ [ἐστὶν] ἔλασσον αὐτῆς τμήμα τὸ $ΕΔ$, σύμμετρος ἄρα ἡ $ΕΔ$ τῇ $ΑΒ$ μήκει. ἀλλὰ ἡ $ΑΕ$ τῇ $ΕΔ$ ἐστὶν ἀσύμμετρος· καὶ ἡ $ΑΒ$ ἄρα τῇ $ΑΕ$ ἐστὶν ἀσύμμετρος μήκει [αἱ $ΒΑ$, $ΑΕ$ ρηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι]· μέσον ἄρα ἐστὶ
 15 τὸ $ΑΚ$, τουτέστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $ΜΝ$, $ΝΞ$. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ $ΔΕ$ τῇ $ΑΒ$ μήκει, τουτέστι τῇ $ΕΚ$, ἀλλὰ ἡ $ΔΕ$ τῇ $ΕΖ$ σύμμετρός ἐστιν, καὶ ἡ $ΕΖ$ ἄρα τῇ $ΕΚ$ σύμμετρός ἐστιν. καὶ ρητὴ ἡ $ΕΚ$ · ρητὸν ἄρα καὶ τὸ $ΕΑ$, τουτέστι τὸ $ΜΡ$, τουτέστι
 20 ἐστὶ τὸ ὑπὸ $ΜΝΞ$. αἱ $ΜΝ$, $ΝΞ$ ἄρα δυνάμει ἀσύμμετροί εἰσι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ρητόν.

3. κατασκευάσθω V, sed corr. γάρ] οὖν V. τοῖς προ-
 δεδειγμένοις Theon (BFVb). 5. δέ F. 7. ΗΕ] corr. ex
 ΕΗ V. ἐστὶν PB. 8. τῆς ΝΞ] τῶν ΝΞ P. 9. σύμ-
 μετροι V, corr. m. 2. ΑΔ] Δ e corr. V. 10. ἐστὶν] om. P.
 12. ἀλλ' F. 13. ΒΑ] mut. in ΑΒ m. 2 V, ΑΒ F. 14.
 εἰσιν B. 16. ἀσύμμετρος B, corr. m. 2. 17. ἀλλ' F. ΔΕ]
 corr. ex ΒΓ, ut uidetur, V. ἐστι PBV, comp. Fb. 18.
 Ante σύμμετρος ras. 1 litt. V. καὶ ρητὴ] ρητὴ δέ BFVb.
 19. Post ΕΚ add. ρητὴ ἄρα καὶ ἡ ΕΖ V. ΕΑ] supra add.
 Δ m. 1 b. τουτέστιν P. τουτέστιν P. 20. ὑπὸ τῶν FV.
 ΜΝ, ΝΞ B. 21. εἰσιν PB. 22. δέ F.

spatio rationali et medio aequalem quadratam, quae uocatur.

comparentur enim eadem, quae in superioribus demonstrationibus. manifestum igitur est, esse $M\Xi^2 = A\Gamma$



[p. 162, 1 sq.]. iam demonstrandum est, $M\Xi$ esse rectam spatio rationali et medio aequalem quadratam. nam, quoniam AH , HE incommensurabiles sunt [prop. XVIII], $A\Theta$, ΘE , hoc est MN^2 , $N\Xi^2$, incommensurabilia sunt [VI, 1; prop. XI]. itaque MN , $N\Xi$ potentia

incommensurabiles sunt. et quoniam $A\Delta$ ex duobus nominibus est quinta, et minor pars eius est $E\Delta$, $E\Delta$ et AB longitudine commensurabiles sunt [deff. alt. 5]. uerum AE , $E\Delta$ incommensurabiles sunt. quare etiam AB , AE longitudine incommensurabiles sunt [prop. XIII].¹⁾ itaque AK , hoc est $MN^2 + N\Xi^2$, medium est [prop. XXI]. et quoniam ΔE , AB , hoc est ΔE , EK , longitudine commensurabiles sunt, et ΔE , EZ commensurabiles, etiam EZ , EK commensurabiles sunt [prop. XII]. et EK rationalis est. itaque etiam $E\Delta$, hoc est MP siue $MN \times N\Xi$, rationale est [prop. XIX]. itaque MN , $N\Xi$ potentia incommensurabiles sunt summam quadratorum suorum mediam efficientes, rectangulum autem rationale.

1) Cum lin. 13 $\alpha\zeta\alpha$, quod edd. post AE habent, in codd. omittatur, malui delere $\alpha\zeta BA$ — lin. 14 $\sigma\upsilon\mu\mu\epsilon\tau\omicron\upsilon$.

Ἡ $MΞ$ ἄρα ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστὶ καὶ δύναται τὸ $ΑΓ$ χωρίον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

νθ'.

Ἐὰν χωρίον περιέχῃται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς
5 ἐκ δύο ὀνομάτων ἑκτῆς, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη
ἄλογός ἐστιν ἢ καλουμένη δύο μέσα δυναμένη.

Χωρίον γὰρ τὸ $ΑΒΓΔ$ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς
 $ΑΒ$ καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἑκτῆς τῆς $ΑΔ$ διηρη-
μένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ $Ε$, ὥστε τὸ μείζον
10 ὄνομα εἶναι τὸ $ΑΕ$ · λέγω, ὅτι ἡ τὸ $ΑΓ$ δυναμένη ἢ
δύο μέσα δυναμένη ἐστίν.

Κατεσκευάσθω [γὰρ] τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις.
φανερόν δὴ, ὅτι [ἡ] τὸ $ΑΓ$ δυναμένη ἐστίν ἢ $MΞ$,
καὶ ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ $MΝ$ τῇ $NΞ$ δυνάμει. καὶ
15 ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ $ΕΑ$ τῇ $ΑΒ$ μήκει, αἱ $ΕΑ$,
 $ΑΒ$ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον
ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΚ$, τουτέστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ
τῶν $MΝ$, $NΞ$. πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ $ΕΔ$
τῇ $ΑΒ$ μήκει, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $ΖΕ$ τῇ $ΕΚ$.
20 αἱ $ΖΕ$, $ΕΚ$ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι·
μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΕΛ$, τουτέστι τὸ $ΜΡ$, τουτέστι τὸ
ὑπὸ τῶν $MΝΞ$. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρος ἡ $ΑΕ$ τῇ $ΕΖ$,
καὶ τὸ $ΑΚ$ τῷ $ΕΛ$ ἀσύμμετρόν ἐστιν. ἀλλὰ τὸ μὲν

1. ἐστίν PB. 6. ἡ] postea ins. F. μέσας P, corr. m. 1.
7. ῥητῆς] om. F. 10. ἡ — δυναμένη] mg. m. 1 P. ἡ]
(alt.) ἄλογός ἐστιν ἢ καλουμένη Vb, e corr. F. 11. ἐστίν] del.
F, om. Vb. 12. κατασκευάσθω V. γὰρ] om. P. 13. ἡ]
om. PF. 15. ΕΑ] ΑΕ FVb. ΕΑ] ΑΕ' F, in ras. V. 16.
εἰσιν B. 17. ἐστίν P. "ἀπὸ τῶν ἐκ τῶν F. 18. NΞ]
mut. in ΞN V. 19. Post ΑΒ add. τουτέστι τῇ ΕΚ V. ἐστίν B.
ΖΕ] ΕΖ P. 20. αἱ] καὶ αἱ BFb. εἰσιν P. 21. ΜΡ]
corr. ex ME m. rec. b. τουτέστιν P. 22. ἡ] ἐστίν ἢ FV.
23. ἀσύμμετρος F.

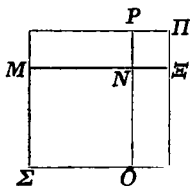
Ergo $M\Xi$ recta spatio rationali et medio aequalis quadrata est [prop. XL], et $M\Xi^2 = A\Gamma$; quod erat demonstrandum.

LIX.

Si spatium recta rationali et recta ex duobus nominibus sexta comprehenditur, recta spatio quadrata aequalis irrationalis est duobus spatiis mediis aequalis quadrata, quae uocatur.

Spatium enim $AB\Gamma\Delta$ comprehendatur recta rationali AB et recta ex duobus nominibus sexta $A\Delta$ in E in nomina diuisa, ita ut maius nomen sit AE . dico, rectam spatio $A\Gamma$ aequalem quadratam rectam esse duobus spatiis mediis aequalem quadratam.

compareantur eadem, quae in superioribus demonstrationibus. manifestum est igitur, esse $M\Xi^2 = A\Gamma$,



et MN , $N\Xi$ potentia incommensurabiles esse [p. 176, 6 sq.]. et quoniam EA , AB longitudine incommensurabiles sunt [diff. alt. 6], EA et AB rationales sunt potentia tantum commensurabiles. itaque AK , hoc est $MN^2 + N\Xi^2$, medium est [prop. XXI]. rursus quoniam

EA , AB longitudine incommensurabiles sunt [diff. alt. 6], ZE et EK incommensurabiles sunt [prop. XIII]. quare ZE , EK rationales sunt potentia tantum commensurabiles. itaque EA , hoc est MP siue $MN \times N\Xi$, medium est [prop. XXI]. et quoniam AE , EZ incommensurabiles sunt, etiam AK , EA

AK ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπο τῶν MN , $NΞ$,
τὸ δὲ EA ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν $MNΞ$ · ἀσύμμετρον ἄρα
ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $MNΞ$ τῷ ὑπὸ
τῶν $MNΞ$. καὶ ἐστὶ μέσον ἐκάτερον αὐτῶν, καὶ αἱ
5 MN , $NΞ$ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι.

Ἡ $MΞ$ ἄρα δύο μέσα δυναμένη ἐστὶ καὶ δύναται
τὸ $ΑΓ$. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[Λήμμα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν
10 ἀνίσων τετράγωνα μείζονά ἐστὶ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ἀνί-
σων περιεχομένου ὀρθογωνίου.

Ἐστω εὐθεῖα ἡ AB καὶ τετμήσθω εἰς ἄνισα
κατὰ τὸ Γ , καὶ ἔστω μείζων ἡ $ΑΓ$. λέγω, ὅτι τὰ
ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, ΓB μείζονά ἐστὶ τοῦ δις ὑπὸ τῶν
15 $ΑΓ$, ΓB .

Τετμήσθω γὰρ ἡ AB δίχα κατὰ τὸ Δ . ἐπεὶ οὖν
εὐθεῖα γραμμὴ τέμνεται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Δ , εἰς
δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Γ , τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, ΓB μετὰ
τοῦ ἀπὸ $\Gamma\Delta$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ $ΑΔ$. ὥστε τὸ ὑπὸ
20 τῶν $ΑΓ$, ΓB ἑλαττόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ $ΑΔ$. τὸ ἄρα δις
ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, ΓB ἑλαττον ἢ διπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ
 $ΑΔ$. ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, ΓB διπλάσιά [ἐστὶ] τῶν
ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $\Delta\Gamma$. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, ΓB μείζονά
ἐστὶ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, ΓB . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.]

25

ξ'.

Τὰ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων παρὰ ρήτην

2. ἐστὶ] m. 2 F. τῶν] om. BFb. 3. MN , $NΞ$ V. τῷ
τό FV. 4. MN , $NΞ$ m. 2 V. ἐστὶ P. μέσον] μὲν V.
6. δυνάμει V. 8. λήμμα] m. 2 P. 10. ἴσων V, sed corr.

incommensurabilia sunt [VI, 1; prop. XI]. uerum $AK = MN^2 + NΞ^2$, $EA = MN \times NΞ$. itaque $MN^2 + NΞ^2$ et $MN \times NΞ$ incommensurabilia sunt. et utrumque medium est, et MN , $NΞ$ potentia incommensurabiles sunt.

Ergo $MΞ$ recta est duobus spatiis mediis aequalis quadrata [prop. XLI], et $MΞ^2 = AΓ$; quod erat demonstrandum.

[Lemma.

Si recta linea in partes inaequales secatur, quadrata partium inaequalium maiora sunt duplo rectangulo partibus inaequalibus comprehenso.

Sit recta AB et in $Γ$ in partes inaequales secetur, et maior sit $AΓ$. dico, esse

$$AΓ^2 + ΓB^2 > 2 AΓ \times ΓB.$$

nam AB in $Δ$ in duas partes aequales secetur. iam quoniam recta linea in $Δ$ in partes aequales secta est, in $Γ$ autem in inaequales, erit $AΓ \times ΓB + ΓΔ^2 = AΔ^2$ [II, 5]. quare $AΓ \times ΓB < AΔ^2$. itaque $2 AΓ \times ΓB < 2 AΔ^2$. est autem $AΓ^2 + ΓB^2 = 2(AΔ^2 + ΔΓ^2)$ [II, 9]. ergo $AΓ^2 + ΓB^2 > 2 AΓ \times ΓB$; quod erat demonstrandum].¹⁾

LX.

Quadratum rectae ex duobus nominibus rectae ra-

1) Cum Euclides iam prop. XLIV p. 128, 17 hoc lemmate tacite usus sit, parum credibile est, id ab eo ipso hic demum additum esse. quare puto, lemma ab interpolatore adiectum esse, quem fugerit, id iam antea usurpatum esse. facile adparet res ipsa ex II, 7.

είσι V. ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων V. 12. ἔστω γάρ F. 13. μείζον τὸ AΓ P. 16. Δ] corr. ex B F. 17. γραμμὴ ἡ AB V. 19. ἀπὸ τῆς Vb. ΓΔ] in ras. V, ΔΓ P. τῆς AΔ V. 20. ἔλασσον P, comp. Fb. τῆς AΔ V. 22. τῆς AΔ V. ἔστι] om. P. 24. τῶν] om. P. 25. νθ', corr. m. 2, F.

παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην.

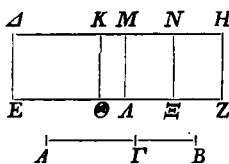
Ἔστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ AB διηρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ , ὥστε τὸ μείζον ὄνομα εἶναι τὸ AG , καὶ ἐκκείσθω ρητὴ ἡ ΔE , καὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB ἴσον παρὰ τὴν ΔE παραβεβλήσθω τὸ ΔEZH πλάτος ποιοῦν τὴν ΔH . λέγω, ὅτι ἡ ΔH ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη.

Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ΔE τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AG ἴσον τὸ $\Delta \Theta$, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς $B\Gamma$ ἴσον τὸ KA . λοιπὸν ἄρα τὸ δις ὑπὸ τῶν AG , ΓB ἴσον ἐστὶ τῷ MZ . τετμήσθω ἡ MH δίχα κατὰ τὸ N , καὶ παράλληλος ἤχθω ἡ $NΞ$ [ἐκατέρω τῶν MA , HZ]. ἐκάτερον ἄρα τῶν $MΞ$, NZ ἴσον ἐστὶ τῷ ἁπαξ ὑπὸ τῶν AGB . καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ AB διηρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ , αἱ AG , ΓB ἄρα ρηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AG , ΓB ρητά ἐστι καὶ σύμμετρα ἀλλήλοις· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AG , ΓB [σύμμετρον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AG , ΓB · ρητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AG , ΓB]. καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ ΔA · ρητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΔA . καὶ παρὰ ρητὴν τὴν ΔE παράκειται· ρητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔM καὶ σύμμετρος τῇ ΔE μήκει. πάλιν, ἐπεὶ αἱ AG , ΓB ρηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AG , ΓB , τουτέστι τὸ MZ . καὶ παρὰ ρητὴν τὴν MA παράκειται· ρητὴ ἄρα καὶ ἡ MH ἐστὶ καὶ ἀσύμ-

5. τῷ] corr. ex τό m. 1 F. AB] A e corr. B. 9. τῷ] corr. ex τό m. 1 F. 10. τό] mut. in τῷ m. 1 F. $\Delta \Theta$] Θ e corr. V. τῷ] corr. ex τό m. 1 F. 11. ἐστὶ] m. 2 F. 12. δίχα] m. 2 V. 13. $NΞ$] N eras. F, $Ξ$ b. ἐκατέρω — HZ] om. P. 14. Post ἄρα del. τῶν AH V. NZ] corr. ex $NΞ$

tionali adplicatum latitudinem efficit rectam ex duobus nominibus primam.

Sit AB recta ex duobus nominibus in Γ in nomina diuisa, ita ut maius nomen sit AG , et ponatur ratio-



nalis ΔE , et quadrato AB^2 aequale rectae ΔE adplicetur ΔEZH latitudinem efficiens ΔH . dico, ΔH rectam esse ex duobus nominibus primam.

nam rectae ΔE adplicetur $\Delta \Theta = AG^2$ et $KA = BG^2$. itaque reliquum [II, 4] $2AG \times GB = MZ$. iam MH in N in duas partes aequales secetur, et $NΞ$ parallela ducatur. itaque $MΞ = NZ = AG \times GB$. et quoniam AB ex duobus nominibus est in Γ in nomina diuisa, AG , GB rationales sunt potentia tantum commensurabiles [prop. XXXVI]. itaque AG^2 , GB^2 rationalia sunt et commensurabilia. quare etiam $AG^2 + GB^2$ [prop. XV]. et $AG^2 + GB^2 = \Delta A$. itaque etiam ΔA rationale est. et rectae rationali ΔE adplicatum est; quare ΔM rationalis est et rectae ΔE longitudine commensurabilis [prop. XX]. rursus quoniam AG , GB rationales sunt potentia tantum commensurabiles, $2AG \times GB$, hoc est MZ , medium est [prop. XXI]. et rectae rationali MA adplicatum est. itaque MH rationalis est et rectae MA , hoc est ΔE , longitudine

m. 1 F. 15. AG , GB in ras. V. 16. $\alpha\Gamma$] $\kappa\alpha\Gamma$ $\alpha\Gamma$ V. 18. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$] $\acute{\epsilon}\lambda\iota\sigma\iota$ B F b. $\kappa\alpha\Gamma$] (alt.) om. V. 19. Post GB del. $\kappa\alpha\Gamma$ $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ $\acute{\iota}\sigma\sigma\upsilon\nu$ F. $\acute{\sigma}\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\epsilon\sigma\tau\epsilon\upsilon$ — 20. GB] mg. m. 1 P. 20. $\acute{\phi}\eta\tau\acute{\omicron}\nu$ — 21. GB] om. P. 22. ΔA] A e corr. FV, ΔA P. $\tau\acute{o}$] $\tau\acute{o}$ F. ΔA] corr. ex ΔA m. rec. P. 23. ΔM] corr. ex ΔH m. 2 F. 27. $\acute{\alpha}\rho\alpha$ $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ B F V b. $\kappa\alpha\Gamma$] om. V. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$] om. B F V b. $\acute{\sigma}\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\epsilon\sigma\tau\epsilon\upsilon$ F, corr. m. 2.

μετρος τῇ $ΜΑ$, τουτέστι τῇ $ΔΕ$, μήκει. ἔστι δὲ καὶ ἡ $ΜΔ$ ῥητὴ καὶ τῇ $ΔΕ$ μήκει σύμμετρος· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ $ΔΜ$ τῇ $ΜΗ$ μήκει· καὶ εἰσι ῥηταί· αἱ $ΔΜ$, $ΜΗ$ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι·
 5 ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ $ΔΗ$.

Δεικτέον δὴ, ὅτι καὶ πρώτη.

Ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΓΒ$, καὶ τῶν $ΔΘ$, $ΚΑ$ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ $ΜΞ$. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ $ΔΘ$ πρὸς τὸ
 10 $ΜΞ$, οὕτως τὸ $ΜΞ$ πρὸς τὸ $ΚΑ$, τουτέστιν ὡς ἡ $ΔΚ$ πρὸς τὴν $ΜΝ$, ἡ $ΜΝ$ πρὸς τὴν $ΜΚ$. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $ΔΚ$, $ΚΜ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΜΝ$. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ τῷ ἀπὸ τῆς $ΓΒ$, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ $ΔΘ$ τῷ $ΚΑ$. ὥστε καὶ ἡ $ΔΚ$ τῇ
 15 $ΚΜ$ σύμμετρός ἐστιν. καὶ ἐπεὶ μείζονά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$, μείζον ἄρα καὶ τὸ $ΔΑ$ τοῦ $ΜΖ$. ὥστε καὶ ἡ $ΔΜ$ τῆς $ΜΗ$ μείζων ἐστίν. καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν $ΔΚ$, $ΚΜ$ τῷ ἀπὸ τῆς $ΜΝ$, τουτέστι τῷ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΜΗ$, καὶ
 20 σύμμετρος ἡ $ΔΚ$ τῇ $ΚΜ$. ἐὰν δὲ ὥσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἑλλεῖπον εἶδει τετραγώνῳ καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ, ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἐαυτῇ· ἡ $ΔΜ$ ἄρα
 25 τῆς $ΜΗ$ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἐαυτῇ. καὶ εἰσι ῥηταὶ αἱ $ΔΜ$, $ΜΗ$, καὶ ἡ $ΔΜ$ μείζον ὄνομα οὐσα σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ $ΔΕ$ μήκει.

1. $ΜΑ$] $ΔΜ$ in ras. V. ἔστιν PB. 3. $ΔΜ$] $ΜΔ$ P. καὶ εἰσι] e corr. V. εἰσιν B. 4. $ΔΜ$, $ΜΗ$ ἄρα] e corr. V. 5. ἄρα] supra scr. F, om. P. 7. Post ἐπεὶ add. γάρ BVb, F m. 2. 8. $ΑΓ$, $ΓΒ$ m. 2 V. 10. $ΔΚ$] $Κ$ in ras. V. 13. $ΓΒ$] $ΒΓ$ in ras. V. 15. $ΚΜ$ μήκει σύμ-

incommensurabilis [prop. XXII]. uerum MA rationalis est et rectae AE longitudine commensurabilis. itaque AM , MH longitudine incommensurabiles sunt [prop. XIII]. et sunt rationales. itaque AM , MH rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo AH ex duobus nominibus est [prop. XXXVI]. iam demonstrandum, eandem primam esse. quoniam $AG \times GB$ medium est proportionale inter AG^2 , GB^2 [cfr. prop. XXI lemma], etiam ME medium est proportionale inter AO , KA . itaque $AO : ME = ME : KA$, hoc est [VI, 1] $AK : MN = MN : MK$. itaque $AK \times KM = MN^2$ [VI, 17]. et quoniam AG^2 , GB^2 commensurabilia sunt, etiam AO , KA commensurabilia sunt. quare etiam AK , KM commensurabiles sunt [VI, 1; prop. XI]. et quoniam est $AG^2 + GB^2 > 2AG \times GB$ [u. ad lemma], erit $AA > MZ$. quare etiam $AM > MH$ [VI, 1; V, 14]. et

$$AK \times KM = MN^2 = \frac{1}{4} MH^2,$$

et AK , KM commensurabiles sunt. sin datae sunt duae rectae inaequales, et quartae parti quadrati minoris aequale spatium maiori adplicatur figura quadrata deficiens et eam in partes commensurabiles diuidit, maior quadrata minorem excedit quadrato rectae sibi commensurabilis [prop. XVII]. itaque AM^2 excedit MH^2 quadrato rectae sibi commensurabilis. et AM , MH rationales sunt, et maius nomen AM rectae rationali propositae AE longitudine commensurabilis est.

μετρός ἐστι V. Post ἐστιν add. μήναι m. 2 B. 16. τοῦ — GB] supra scr. F. 18. ἐστὶ PVb, comp. F. 20. Post KM add. μήναι V, m. 2 B. ὅσιν PB. 23. διαίρει b. 24. Ante μεῖζον ras. 1 litt. F. 25. τῶ] τό V. 26. καὶ ἡ — 27. ἐστὶ] in ras. F. 26. AM] MH P, HM Fb.

Ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ξά'.

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων πρώτης παρὰ ρη-
5 τὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο
ὀνομάτων δευτέραν.

Ἐστω ἐκ δύο μέσων πρώτη ἡ AB διηρημένη εἰς
τὰς μέσας κατα τὸ Γ , ὧν μείζων ἡ AG , καὶ ἐκκείσθω
ρητὴ ἡ AE , καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν AE τῷ ἀπὸ
10 τῆς AB ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ AZ πλάτος ποιοῦν
τὴν $ΔΗ$. λέγω, ὅτι ἡ $ΔΗ$ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρὸ τούτου. καὶ
ἐπεὶ ἡ AB ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη διηρημένη κατὰ
τὸ Γ , αἱ AG , GB ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον
15 σύμμετροι ρητὸν περιέχουσιν· ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν
 AG , GB μέσα ἐστίν. μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΔA$. καὶ παρὰ
ρητὴν τὴν AE παραβεβλήται· ρητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ MA
καὶ ἀσύμμετρος τῇ $ΔE$ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ ρητὸν ἐστὶ
τὸ δις ὑπὸ τῶν AG , GB , ρητὸν ἐστὶ καὶ τὸ MZ . καὶ
20 παρὰ ρητὴν τὴν MA παράκειται· ρητὴ ἄρα [ἐστὶ] καὶ
ἡ MH καὶ μήκει σύμμετρος τῇ MA , τουτέστι τῇ $ΔE$.
ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ $ΔM$ τῇ MH μήκει. καὶ εἰσι
ρηταί· αἱ $ΔM$, MH ἄρα ρηταί εἰσι δυνάμει μόνον
σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ $ΔΗ$.

1. ὀνομάτω b. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. BFVb, comp. P. 3. ξβ' F. 4. ρητῆς B, sed corr. 7. ἔστω] e corr. m. 2 F. 9. παρὰ τὴν $ΔE$ παραβεβλήσθω P. 10. AB] corr. ex AA m. 1 b. ἴσον τό P. 12. κατασκευάσθω V. 14. αἱ] in ras. m. 2 B. εἰσὶν B. 16. ἐστίν] ἐστὶ PB, comp. Fb, εἰσὶ V. 17. παράκειται Theon (BFVb). 19. ἐστὶ] om. B. 20. ρη, supra scr. τὴν P. ἐστὶ] om. BFVb. 21. σύμμετρος μήκει V. MA] M e corr. V. 22. ἐστίν] om. V. μήκει τῇ MH V. εἰσιν B.

Ergo ΔH ex duobus nominibus prima est [deff. alt. 1]; quod erat demonstrandum.

LXI.

Quadratum rectae ex duabus mediis primae rectae rationali adplicatum latitudinem efficit rectam ex duobus nominibus secundam.

Sit AB recta ex duabus mediis prima in Γ in medias diuisa, quarum maior sit $A\Gamma$, et ponatur rationalis ΔE , et rectae ΔE adplicetur quadrato AB^2 aequale parallelogrammum ΔZ latitudinem efficiens ΔH . dico, ΔH ex duobus nominibus secundam esse.



nam comparēntur eadem, quae in priore propositione. et quoniam AB ex duabus mediis prima est in Γ diuisa, $A\Gamma$, ΓB mediae sunt potentia tantum commensurabiles spatium rationale comprehendentes [prop. XXXVII]. quare etiam $A\Gamma^2$, ΓB^2 media sunt [prop. XXI]. itaque ΔA medium est. et rectae rationali ΔE adplicatum est. itaque $M\Delta$ rationalis est et rectae ΔE longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. rursus quoniam $2 A\Gamma \times \Gamma B$ rationale est, etiam MZ rationale est. et rectae rationali $M\Delta$ adplicatum est. itaque etiam MH rationalis est et rectae $M\Delta$ longitudine commensurabilis [prop. XX], hoc est rectae ΔE . itaque ΔM , MH longitudine incommensurabiles sunt [prop. XIII]. et sunt rationales. itaque ΔM , MH rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo ΔH ex duobus nominibus est [prop. XXXVI].

Δεικτέον δὴ, ὅτι καὶ δευτέρα.

Ἐπεὶ γὰρ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ μείζονά ἐστι τοῦ
 δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$, μείζον ἄρα καὶ τὸ $ΔΑ$ τοῦ
 $ΜΖ$. ὥστε καὶ ἡ $ΔΜ$ τῆς $ΜΗ$. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν
 5 ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ τῷ ἀπὸ τῆς $ΓΒ$, σύμμετρόν ἐστι
 καὶ τὸ $ΔΘ$ τῷ $ΚΑ$. ὥστε καὶ ἡ $ΔΚ$ τῇ $ΚΜ$ σύμμε-
 τρός ἐστιν. καὶ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν $ΔΚΜ$ ἴσον τῷ ἀπὸ
 τῆς $ΜΝ$. ἡ $ΔΜ$ ἄρα τῆς $ΜΗ$ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ
 συμμέτρου ἐαυτῇ. καὶ ἐστὶν ἡ $ΜΗ$ σύμμετρος τῇ $ΔΕ$
 10 μήκει.

Ἡ $ΔΗ$ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα.

ξβ'.

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων δευτέρας παρὰ
 ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ
 15 δύο ὀνομάτων τρίτην.

Ἐστω ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἡ $ΑΒ$ διηρημένη εἰς
 τὰς μέσας κατὰ τὸ $Γ$, ὥστε τὸ μείζον τμήμα εἶναι τὸ
 $ΑΓ$, ῥητὴ δέ τις ἔστω ἡ $ΔΕ$, καὶ παρὰ τὴν $ΔΕ$ τῷ
 ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβεβλήσθω
 20 τὸ $ΔΖ$ πλάτος ποιοῦν τὴν $ΔΗ$. λέγω, ὅτι ἡ $ΔΗ$ ἐκ
 δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη.

Κατεσκευάσθω τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις. καὶ
 ἐπεὶ ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἐστὶν ἡ $ΑΒ$ διηρημένη
 κατὰ τὸ $Γ$, αὖ $ΑΓ$, $ΓΒ$ ἄρα μέσαι εἰσὶ δύναμει μόνον
 25 σύμμετροι μέσον περιέχουσai. ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον

3. $ΑΓ$] $Γ$ in ras. m. 1 P. 7. ἐστὶν] ἐστὶ BV, comp. Fb.
 ἐστὶ] ἐστὶν P. $ΔΚΜ$] $Κ$ corr. ex $Μ$ m. 1 P; $ΔΚ$, $ΚΜ$ corr.
 ex $ΔΚ$, $ΝΜ$ V. 8. $ΜΗ$] corr. ex $ΜΝ$ m. 1 b. δύναται
 μείζον V. 12. ξβ'] corr. ex ξγ' F. 15. ὀνομάτων] corr. ex
 μέσων m. 2 B. τρίτην] in ras. m. 1 B. 16. ἔστω] in ras.
 m. 1 B. 18. ἔστω] γεγονέτω V. $ΔΕ$] in ras. m. 1 B. τήν]

iam demonstrandum est, eandem secundam esse.

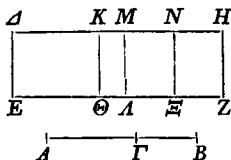
nam quoniam $AI^2 + IB^2 > 2 AI \times IB$ [prop. LIX lemma], erit etiam $AI > MI$. quare etiam $AM > MH$. et quoniam AI^2 , IB^2 commensurabilia sunt, etiam AI , IB commensurabilia sunt. quare etiam AK , KM commensurabiles sunt [VI, 1; prop. XI]. et $AK \times KM = MN^2$ [cfr. p. 184, 7 sq.]. itaque AM^2 excedit MH^2 quadrato rectae sibi commensurabilis [prop. XVII]; et MH , AE longitudine commensurabiles sunt.

Ergo AH ex duobus nominibus secunda est [deff. alt. 2].

LXII.

Quadratum rectae ex duabus mediis secundae rectae rationali adplicatum latitudinem efficit rectam ex duobus nominibus tertiam.

Sit AB ex duabus mediis secunda in Γ in medias diuisa, ita ut maior pars sit AI , rationalis autem sit AE , et rectae AE quadrato AB^2 aequale parallelogrammum AZ adplicetur latitudinem efficiens AH . dico, AH ex duobus nominibus tertiam esse.



comparentur eadem, quae in superioribus demonstrationibus. et quoniam AB ex duabus mediis secunda est in Γ diuisa, AI , IB mediae sunt potentia tantum commensurabiles spatium medium comprehen-

δητὴν τήν F. τῶ] corr. ex τό m. 1 F. 20. τήν] corr. ex τό m. 1 B, τό F. 22. καὶ κατεσκευάσθω, del. καί, F; κατασκευάσθω γάρ V. καί] postea ins. F. 23. ἐστὶ δευτέρα P. 24. IB] Γ in ras. V. μέσαι ἄρα V. εἶσιν PB. .

ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ μέσον ἐστίν. καὶ ἐστὶν
 ἴσον τῷ $ΔΑ$ · μέσον ἄρα καὶ τὸ $ΔΑ$. καὶ παράκειται
 παρὰ ῥητὴν τὴν $ΔΕ$ · ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $ΜΔ$ καὶ
 ἀσύμμετρος τῇ $ΔΕ$ μήκει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ
 5 $ΜΗ$ ῥητὴ ἐστὶ καὶ ἀσύμμετρος τῇ $ΜΔ$, τουτέστι τῇ
 $ΔΕ$, μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν $ΔΜ$, $ΜΗ$
 καὶ ἀσύμμετρος τῇ $ΔΕ$ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός
 ἐστὶν ἡ $ΑΓ$ τῇ $ΓΒ$ μήκει, ὥς δὲ ἡ $ΑΓ$ πρὸς τὴν $ΓΒ$,
 οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΓΒ$, ἀσύμ-
 10 μετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ τῷ ὑπὸ τῶν $ΑΓΒ$.
 ὥστε καὶ τὸ συγκεκλιμένον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$
 τῷ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓΒ$ ἀσύμμετρόν ἐστιν, τουτέστι τὸ
 $ΔΑ$ τῷ $ΜΖ$ · ὥστε καὶ ἡ $ΔΜ$ τῇ $ΜΗ$ ἀσύμμετρός
 ἐστὶν. καὶ εἰσι ῥηταί· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν
 15 ἡ $ΔΗ$.

Δεικτέον [δὴ], ὅτι καὶ τρίτη.

Ὅμοίως δὴ τοῖς προτέροις ἐπιλογιούμεθα, ὅτι μεί-
 ζων ἐστὶν ἡ $ΔΜ$ τῆς $ΜΗ$, καὶ σύμμετρος ἡ $ΔΚ$ τῇ
 $ΚΜ$. καὶ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν $ΔΚΜ$ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς
 20 $ΜΝ$ · ἡ $ΔΜ$ ἄρα τῆς $ΜΗ$ μείζων δύναται τῷ ἀπὸ
 συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ οὐδετέρα τῶν $ΔΜ$, $ΜΗ$ σύμ-
 μετρός ἐστὶ τῇ $ΔΕ$ μήκει.

Ἡ $ΔΗ$ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη ὅπερ
 ἔδει δεῖξαι.

1. ἐκ τῶν] om. Fb, m. 2 B. ἐστίν] ἐστὶ PVBb, comp. F.
 2. παράκειται] om. V. 3. τὴν $ΔΕ$ ῥητὴν P. ἐστὶν B. καὶ]
 om. B. $ΔΜ$ P. 4. διὰ] καὶ διὰ F. 6. ῥητὴ — 7. μήκει]
 mg. m. 2 V. 6. $ΜΝ$ V. 8. τῇ $ΓΒ$ — ἡ $ΑΓ$] supra scr.
 m. 2 F. 9. τῆς] τῶν B. $ΑΓ$, $ΒΑ$ B. σύμμετρον B, corr.
 m. 2. 10. τό] corr. ex τῷ V. τῷ] corr. ex τό m. 2 P.
 $ΑΓ$, $ΓΒ$ V. 11. $ΓΒ$] om. P. 12. $ΑΒΓ$ P. ἐστὶ PBFV,
 comp. b. τό] τῷ F. 13. $ΔΑ$] $ΔΑ$ F et, eras. A, b. καὶ]
 om. B. 14. ἐστὶ PBV, comp. Fb. 16. δὴ] om. P. 17.

dentes [prop. XXXVIII]. quare etiam $AG^2 + GB^2$ medium est. est autem $AG^2 + GB^2 = AA$. itaque etiam AA medium est. et rectae rationali AE adplicatum est. itaque MA rationalis est et rectae AE longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. eadem de causa etiam MH rationalis est et rectae MA , hoc est AE , longitudine incommensurabilis. itaque utraque AM , MH rationalis est et rectae AE longitudine incommensurabilis. et quoniam AG , GB longitudine incommensurabiles sunt, et $AG:GB = AG^2:AG \times GB$ [prop. XXI lemma], etiam AG^2 et $AG \times GB$ incommensurabilia sunt [prop. XI]. quare etiam $AG^2 + GB^2$ et $2 AG \times GB$, hoc est AA et MZ , incommensurabilia sunt. quare etiam AM , MH incommensurabiles sunt [VI, 1; prop. XI]. et sunt rationales. ergo AH ex duobus nominibus est [prop. XXXVI].

demonstrandum, eandem tertiam esse.

eodem igitur modo, quo antea [p. 188, 2 seq.], concludemus, esse $AM > MH$, et AK , KM commensurabiles esse. et $AK \times KM = MN^2$. itaque AM^2 excedit MH^2 quadrato rectae sibi commensurabilis [prop. XVII]. et neutra rectarum AM , MH rectae AE longitudine commensurabilis est.

Ergo AH ex duobus nominibus tertia est [deff. alt. 3]; quod erat demonstrandum.

$\delta\acute{\eta}$] $\delta\acute{\epsilon}$ V. $\pi\rho\acute{o}\tau\epsilon\rho\omicron\nu$ BFb. $\delta\tau\iota$] corr. ex $\tau\iota$ m. rec. P. 19. ΔKM] Δ e corr. V, corr. ex A m. rec. P. 21. $\sigma\upsilon\mu\mu\acute{\epsilon}\tau\rho\omicron\nu$] σ in ras. V. 22. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ PV. 23. $\delta\pi\epsilon\rho$ $\acute{\epsilon}\delta\epsilon\iota$ $\delta\epsilon\acute{\iota}\xi\alpha\iota$] comp. P, om. BFVb.

ξγ'.

Τὸ ἀπὸ τῆς μείζονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην.

- 5 Ἔστω μείζων ἡ AB διηρημένη κατὰ τὸ Γ , ὥστε μείζονα εἶναι τὴν AG τῆς GB , ῥητὴ δὲ ἡ AE , καὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB ἴσον παρὰ τὴν AE παραβεβλήσθω τὸ AZ παραλληλόγραμμον πλάτος ποιῶν τὴν AH λέγω, ὅτι ἡ AH ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη.
- 10 Κατεσκευάσθω τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ AB διηρημένη κατὰ τὸ Γ , αἱ AG , GB δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μέσον. ἐπεὶ οὖν ῥητόν ἐστι τὸ συγκείμενον
- 15 ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AG , GB , ῥητόν ἄρα ἐστὶ τὸ AA . ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ AM καὶ σύμμετρος τῇ AE μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AG , GB , τουτέστι τὸ MZ , καὶ παρὰ ῥητὴν ἐστὶ τὴν MA , ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ MH καὶ ἀσύμμετρος τῇ AE μήκει.
- 20 ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ AM τῇ MH μήκει. αἱ AM , MH ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ AH .

Δεικτέον [δὴ], ὅτι καὶ τετάρτη.

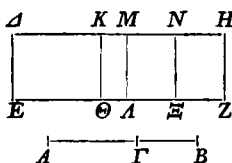
Ὅμοίως δὲ δεῖξομεν τοῖς πρότερον, ὅτι μείζων ἐστὶν

1. ξδ' F, et sic deinceps. 6. ῥη supra scr. τῇ V. δε τις V. 7. παρὰ — 8. AZ] mg. m. 1 F. 8. AH] corr. ex AE m. 1 F. 9. ἡ AH] corr. ex AH F. 10. κατασκευάσθω V. Dein add. γὰρ FV. προδεδειγμένοις F, corr. m. 2; προδεδιδαγμένοις P, mg. m. 1 γρ. προδεδειγμένοις. 12. GB ἄρα V. εἰσὶ σύμμετροι B, corr. m. 2. μὲν] supra scr. m. 1 F. 13. δ' BFV. 15. AA] corr. ex AA m. rec. P. 16. AM] MA BVb, " AM F. 17. AGB P. 18. ἐστι] om.

LXIII.

Quadratum maioris rectae rationali adplicatum latitudinem efficit rectam ex duobus nominibus quartam.

Sit maior AB in Γ diuisa, ita ut sit $A\Gamma > \Gamma B$, et rationalis sit ΔE , et quadrato AB^2 aequale rectae



ΔE adplicetur parallelogrammum ΔZ latitudinem efficiens ΔH . dico, ΔH ex duobus nominibus quartam esse.

comparentur eadem, quae in superioribus demonstrationibus. et quoniam AB maior est in Γ diuisa, $A\Gamma$, ΓB potentia sunt incommensurabiles efficientes summam quadratorum rationalem, rectangulum autem medium [prop. XXXIX]. iam quoniam $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ rationale est, ΔA rationale est. quare ΔM rationalis est et rectae ΔE longitudine commensurabilis [prop. XX]. rursus quoniam $2A\Gamma \times \Gamma B$ medium est, hoc est MZ , et rectae rationali MA adplicatum est, etiam MH rationalis est et rectae ΔE longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. itaque ΔM , MH longitudine incommensurabiles sunt [prop. XIII]. quare ΔM , MH rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo ΔH ex duobus nominibus est [prop. XXXVI].

demonstrandum, eandem quartam esse.

iam eodem modo, quo antea, demonstrabimus, esse

Theon (BFVb). MA] corr. ex MA m. rec. b, MA BF. Deinde add. *παράνεται* Theon (BFVb). 19. *ἐστίν* V. 20. *ἐστίν* P. ΔM] M e corr. m. 1 F. Ante *αί* del. *καί* F. 21. *ἄρα*] om. P. 23. *δὴ*] om. P. 24. *δὴ τοῖς πρότερον ἐπιλογούμεθα, ὅτι* Theon (BFVb).

ἡ ΔM τῆς MH , καὶ ὅτι τὸ ὑπὸ ΔKM ἴσον ἐστὶ τῷ
 ἀπὸ τῆς MN . ἐπεὶ οὖν ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς
 AG τῷ ἀπὸ τῆς GB , ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ
 $\Delta\Theta$ τῷ KA . ὥστε ἀσύμμετρος καὶ ἡ ΔK τῇ KM
 5 ἐστίν. ἐὰν δὲ ὥσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ
 μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παραλληλόγραμμον
 παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἑλλεῖπον εἶδει τετρα-
 γώνῳ καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ, ἡ μείζων τῆς
 ἐλάσσονος μείζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ
 10 μήκει· ἡ ΔM ἄρα τῆς MH μείζον δύναται τῷ ἀπὸ
 ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰσιν αἱ ΔM , MH ρηταὶ δυ-
 νάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΔM σύμμετρός ἐστι
 τῇ ἐκκειμένῃ ρητῇ τῇ ΔE .

Ἡ ΔH ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη· ὅπερ
 15 ἔδει δεῖξαι.

ξδ'.

Τὸ ἀπο τῆς ρητὸν καὶ μέσον δυναμένης πα-
 ρὰ ρητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ
 δύο ὀνομάτων πέμπτην.

20 Ἐστω ρητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἡ AB διηρημένη
 εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ Γ , ὥστε μείζονα εἶναι τὴν
 AG , καὶ ἐκκεῖσθω ρητὴ ἡ ΔE , καὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB
 ἴσον παρὰ τὴν ΔE παραβεβλήσθω τὸ ΔZ πλάτος
 ποιούν τὴν ΔH . λέγω, ὅτι ἡ ΔH ἐκ δύο ὀνομάτων
 25 ἐστὶ πέμπτη.

1. τῆς] τῇ V? MN BV. ὑπὸ τῶν V. ΔKM] supra
 add. K V. 3. τό] corr. ex τά? F. 4. ἀσύμμετρος] om.
 Theon (BFVb). KM ἀσύμμετρός ἐστιν Theon (BFVb).

5. ὥσιν BF. 6. Post ἴσον del. παρὰ τὴν μείζονα F. παρ-
 αλληλόγραμμον] om. V. 7. παρὰ τὴν μείζονα] om. Fb, m.
 2 B. 8. διαιρεῖ F, διαιρεῖ μήκει V. 10. ΔM] corr. ex
 ΔH F. 11. συμμέτρου F. 13. ΔE] corr. ex ΔH F. 14.

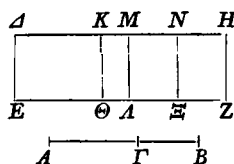
$\Delta M > MH$, et $\Delta K \times KM = MN^2$. iam quoniam $\Delta \Gamma^2$, ΓB^2 incommensurabilia sunt, etiam $\Delta \Theta$, $K\Lambda$ incommensurabilia sunt. quare ΔK , KM incommensurabiles sunt [VI, 1; prop. XI]. sin datae sunt duae rectae inaequales, et quartae parti quadrati minoris aequale parallelogrammum maiori adplicatur figura quadrata deficiens et eam in partes incommensurabiles diuidit, maior quadrata minorem excedit quadrato rectae sibi incommensurabilis [prop. XVIII]. itaque ΔM^2 excedit MH^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis. et ΔM , MH rationales sunt potentia tantum commensurabiles, et ΔM rationali propositae ΔE commensurabilis est.

Ergo ΔH ex duobus nominibus quarta est [deff. alt. 4]; quod erat demonstrandum.

LXIV.

Quadratum rectae spatio rationali et medio aequalis quadratae rectae rationali adplicatum latitudinem efficit rectam ex duobus nominibus quintam.

Sit AB recta spatio rationali et medio aequalis quadrata in Γ in rectas diuisa, ita ut $\Delta \Gamma$ maior sit, et ponatur ΔE rationalis, et quadrato AB^2 aequale rectae ΔE adplicetur ΔZ latitudinem efficiens ΔH . dico, ΔH ex duobus nominibus quintam esse.



$\delta\pi\epsilon\sigma\ \xi\delta\epsilon\iota\ \delta\epsilon\iota\ \xi\alpha\iota$] comp. P, om. BFVb. 17. καί] postea ins.
m. 1 F. 20. $\phi\eta\tau\eta$ F, sed corr. η AB] m. 2 V.

Κατεσκευάσθω τα αὐτα τοῖς πρὸ τούτου. ἐπεὶ οὖν
 ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστὶν ἡ AB διηρημένη
 κατὰ το Γ , αἱ AG , GB ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι
 ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετρα-
 5 γώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. ἐπεὶ οὖν μέ-
 σον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AG , GB ,
 μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔA . ὥστε ῥητὴ ἐστὶν ἡ ΔM καὶ
 μήκει ἀσύμμετρος τῇ ΔE . πάλιν, ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ
 δις ὑπὸ τῶν AGB , τουτέστι τὸ MZ , ῥητὴ ἄρα ἡ MH
 10 καὶ σύμμετρος τῇ ΔE . ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΔM τῇ
 MH . αἱ ΔM , MH ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον
 σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔH .

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ πέμπτη.

Ὅμοιως γὰρ δειχθήσεται, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΔKM
 15 ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς MN , καὶ ἀσύμμετρος ἡ ΔK τῇ
 KM μήκει· ἡ ΔM ἄρα τῆς MH μείζον δύναται τῷ
 ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰσιν αἱ ΔM , MH [ῥη-
 ται] δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ἐλάσσων ἡ MH
 σύμμετρος τῇ ΔE μήκει.

20 Ἡ ΔH ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη· ὅπερ
 εἶδει δεῖξαι.

ξέ'.

Τὸ ἀπὸ τῆς δύο μέσα δυναμένης παρὰ ῥη-
 τὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο
 25 ὀνομάτων ἕκτην.

Ἔστω δύο μέσα δυναμένη ἡ AB διηρημένη κατὰ
 τὸ Γ , ῥητὴ δὲ ἔστω ἡ ΔE , καὶ παρὰ τὴν ΔE τῷ

1. κατασκευάσθω V. Deinde add. γὰρ FV. πρὸ τούτου]
 πρότερον, corr. m. 2, F. 4. τετράγωνον F, corr. m. 2. 5.
 δέ F. 7. καὶ τό b. 8. τῇ] ἡ b. 9. AG , GB B et corr.
 in $AB\Gamma$ V. 10. Post ΔE add. μήκει m. 2 B. 11. ΔM
 in ras. V. 17. συμμέτρον, sed corr., Bfb. ῥηταί] om. P,

comparentur eadem, quae antea. iam quoniam AB recta est spatio rationali et medio aequalis quadrata in Γ diuisa, AG , GB potentia incommensurabiles sunt efficientes summam quadratorum mediam, rectangulum autem rationale [prop. XL]. iam quoniam $AG^2 + GB^2$ medium est, AM medium est. itaque AM rationalis est et rectae AE longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. rursus quoniam $2AG \times GB$, hoc est MZ , rationale est, MH rationalis est et rectae AE commensurabilis [prop. XX]. itaque AM , MH incommensurabiles sunt [prop. XIII]. quare AM , MH rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo AH ex duobus nominibus est [prop. XXXVI].

iam dico, eandem quintam esse.

nam similiter demonstrabimus, esse $AK \times KM = MN^2$ et AK , KM longitudine incommensurabiles. itaque AM^2 excedit MH^2 quadrato rectae sibi commensurabilis [prop. XVIII]. et AM , MH potentia tantum commensurabiles sunt, et minor MH rectae AE longitudine commensurabilis est.

Ergo AH ex duobus nominibus est quinta [deff. alt. 5]; quod erat demonstrandum.

LXV.

Quadratum rectae duobus spatiis mediis aequalis quadratae rectae rationali adplicatum latitudinem efficit rectam ex duobus nominibus sextam.

Sit AB recta duobus spatiis mediis aequalis qua-

m. 2 F. 20. $\angle H$] $\angle M$ PBb, $\angle H$ in ras. V, mut. in $\angle M$
 m. 2 F. $\delta\pi\epsilon\rho\ \xi\delta\epsilon\iota\ \delta\epsilon\iota\chi\alpha\iota$] comp. P, om. BVb. 27. δ' b.
 $\tau\eta\nu$] $\phi\eta\tau\epsilon\nu\ \tau\epsilon\nu$ F. $\tau\phi$] corr. ex $\tau\omicron$ m. 1 F.

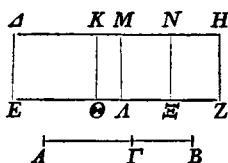
ἀπὸ τῆς AB ἴσον παραβεβλήσθω τὸ ΔZ πλάτος
 ποιοῦν τὴν ΔH . λέγω, ὅτι ἡ ΔH ἐκ δύο ὀνομάτων
 ἐστὶν ἕκτη.

- Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. καὶ
 5 ἐπεὶ ἡ AB δύο μέσα δυναμένη ἐστὶ διηρημένη κατὰ
 τὸ Γ , αἱ AG , GB ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι
 ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετρα-
 γώνων μέσον καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμ-
 μετρον τὸ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων συγκείμενον
 10 τῷ ὑπ' αὐτῶν. ὥστε κατὰ τὰ προδεδειγμένα μέσον
 ἐστὶν ἐκάτερον τῶν ΔA , MZ . καὶ παρὰ ρητὴν τὴν
 ΔE παράκειται· ρητὴ ἄρα ἐστὶν ἐκάτερα τῶν ΔM ,
 MH καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔE μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμε-
 τρὸν ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AG , GB
 15 τῷ δις ὑπὸ τῶν AG , GB , ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ
 ΔA τῷ MZ . ἀσύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΔM τῇ MH .
 αἱ ΔM , MH ἄρα ρηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμε-
 τροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔH .

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἕκτη.

- 20 Ὅμοίως δὲ πάλιν δείξομεν, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΔKM
 ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς MN , καὶ ὅτι ἡ ΔK τῇ KM
 μήκει ἐστὶν ἀσύμμετρος· καὶ διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἡ ΔM
 τῆς MH μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ
 μήκει. καὶ οὐδετέρα τῶν ΔM , MH σύμμετρός ἐστι
 25 τῇ ἐκκειμένῃ ρητῇ τῇ ΔE μήκει.

1. ἴσον] ἴσον παραλληλόγραμμον V. 4. κατασκευάσθω V,
 sed corr. 5. δύο] δ corr. ex μ F. 6. AG] GA F. 9.
 τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων Theon (BFVb).
 10. τῷ] τῷ ἐκ τῶν P. τά] om. b. προδεδειδαγμένα P,
 corr. m. 1. 12. παράκειται P. ἐστίν] ἐστὶ καὶ BFVb.
 15. ἐστίν P. 16. MZ] corr. ex $M\Gamma$ m. 1 F. 17. ΔM]
 corr. ex ΔM m. rec. P. 19. δὴ] om. BV. 20. δὴ] γάρ



drata in Γ diuisa, ΔE autem rationalis sit, et rectae ΔE quadrato AB^2 aequale adplicetur ΔZ latitudinem efficiens ΔH . dico, ΔH ex duobus nominibus sextam esse.

comparentur enim eadem, quae antea. et quoniam AB recta est duobus spatiis mediis aequalis quadrata in Γ diuisa, $A\Gamma$, ΓB potentia incommensurabiles sunt efficientes summam quadratorum mediam et rectangulum medium et praeterea summam quadratorum rectangulo incommensurabilem [prop. XLI]. quare ex iis, quae antea demonstrata sunt, ΔA et MZ media sunt. et rectae rationali ΔE adplicata sunt. quare utraque ΔM , MH rationalis est et rectae ΔE longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. et quoniam $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ et $2 A\Gamma \times \Gamma B$ incommensurabilia sunt, ΔA et MZ incommensurabilia sunt. quare etiam ΔM , MH incommensurabiles sunt [VI, 1; prop. XI]. itaque ΔM , MH rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo ΔH ex duobus nominibus est [prop. XXXVI].

iam dico, eandem sextam esse.

iam rursus similiter demonstrabimus, esse $\Delta K \times KM = MN^2$, et ΔK , KM longitudine incommensurabiles esse. eadem igitur de causa ΔM^2 excedit MH^2 quadrato rectae sibi longitudine incommensurabilis [prop. XVIII]. et neutra rectarum ΔM , MH rectae rationali propositae ΔE longitudine commensurabilis est.

Theon (BFVb).
Theon (BFVb).
in KMH m. 2.
sed corr.

$\pi\acute{\alpha}\lambda\iota\nu$] om. V. Deinde add. τοῖς πρὸ τούτου
 $\delta\tau\iota$] supra scr. F. 21. KM] MH F, corr.
22. διὰ ταῦτα BV. 23. συμμέτρον BF,

Ἡ ΔH ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη· ὅπερ
ἔδει δεῖξαι.

ξς'.

Ἡ $\tau\eta$ ἐκ δύο ὀνομάτων μήκει σύμμετρος καὶ
5 αὐτῇ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ $\tau\eta$ τάξει ἡ
αὐτῇ.

Ἐστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ AB , καὶ $\tau\eta$ AB μήκει
σύμμετρος ἔστω ἡ $\Gamma\Delta$. λέγω, ὅτι ἡ $\Gamma\Delta$ ἐκ δύο ὀνο-
μάτων ἐστὶ καὶ $\tau\eta$ τάξει ἡ αὐτῇ $\tau\eta$ AB .

10 Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ AB , διηρησθῶ
εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ E , καὶ ἔστω μείζον ὄνομα το
 AE . αἱ AE , EB ἄρα ρηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμ-
μετροι. γεγονέτω ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως ἡ
 AE πρὸς τὴν ΓZ . καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ EB πρὸς λοιπὴν
15 τὴν $Z\Delta$ ἐστίν, ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$. σύμμετρος
δὲ ἡ AB $\tau\eta$ $\Gamma\Delta$ μήκει· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν
 AE $\tau\eta$ ΓZ , ἡ δὲ EB $\tau\eta$ $Z\Delta$. καὶ εἰσι ρηταὶ αἱ AE ,
 EB . ρηταὶ ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ ΓZ , $Z\Delta$. καὶ [ἐπεὶ] ἐστίν
ὡς ἡ AE πρὸς ΓZ , ἡ EB πρὸς $Z\Delta$. ἐναλλάξ ἄρα
20 ἐστὶν ὡς ἡ AE πρὸς EB , ἡ ΓZ πρὸς $Z\Delta$. αἱ δὲ
 AE , EB δυνάμει μόνον [εἰσὶ] σύμμετροι· καὶ αἱ ΓZ ,
 $Z\Delta$ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. καὶ εἰσι ρηταὶ·
ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ $\Gamma\Delta$.

Λέγω δὴ, ὅτι $\tau\eta$ τάξει ἐστὶν ἡ αὐτῇ $\tau\eta$ AB .

1. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. B F V b. 5. ἐστὶν P.
ἡ] m. 2 B. 7. ἡ — 8. ὀνομάτων] mg. m. 2 B. 11. ὄνομα]
om. V. 14. ΓZ] mut. in B Z b. καὶ] in ras. V. 15.
 $Z\Delta$] ΔZ F V. $\Gamma\Delta$] corr. ex E Δ F. σύμμετρος — 16.
μήκει] m. 2 B. 16. ἐστὶ] om. b, m. 2 B. 17. $Z\Delta$] corr.
ex ΔZ V. αἱ AE , EB] mg. m. 2 V. 18. εἰσὶν B. ἐπεὶ]
om. P. 19. πρὸς ΓZ — 20. AE] mg. m. 2 B. 19. τὴν ΓZ
B V. ΓZ — πρὸς] supra scr. F. τὴν $Z\Delta$ V. ἄρα] om. F.

Ergo ΔH ex duobus nominibus sexta est [deff. alt. 6]; quod erat demonstrandum.

LXVI.

Recta rectae ex duobus nominibus longitudine commensurabilis et ipsa ex duobus nominibus est et ordine eadem.

Sit AB ex duobus nominibus, et $\Gamma\Delta$ rectae AB longitudine commensurabilis sit. dico, $\Gamma\Delta$ ex duobus nominibus esse et ordine eandem ac AB .

nam quoniam AB ex duobus nominibus est, in E in nomina diuidatur, et maius nomen sit AE . itaque AE , EB rationales sunt potentia tantum commensurabiles [prop. XXXVI]. fiat [VI, 12] $AB:\Gamma\Delta = AE:\Gamma Z$. itaque etiam $EB:Z\Delta = AB:\Gamma\Delta$ [V, 16; V, 19 coroll.]. uerum AB , $\Gamma\Delta$ longitudine commensurabiles sunt. itaque etiam AE , ΓZ et EB , $Z\Delta$ longitudine commensurabiles sunt [prop. XI]. et AE , EB rationales sunt. itaque etiam ΓZ , $Z\Delta$ rationales sunt. est autem $AE:\Gamma Z = EB:Z\Delta$ [V, 11]. itaque permutando [V, 16] $AE:EB = \Gamma Z:Z\Delta$. uerum AE , EB potentia tantum commensurabiles sunt. itaque etiam ΓZ , $Z\Delta$ potentia tantum commensurabiles sunt [prop. XI]. et sunt rationales. ergo $\Gamma\Delta$ ex duobus nominibus est [prop. XXXVI].

iam dico, eam ordine eandem esse ac AB .

- 20. οὐτως ἡ ΓZ V. 21. ἐστὶ] om. P. 23. $\Gamma\Delta$] Δ in ras. V. 24. δὲ] om. V. 25. οὐ] οὐ καὶ BFV.

Ἡ γὰρ AE τῆς EB μείζον δύναται ἥτοι τῷ ἀπὸ
 συμμέτρου ἑαυτῇ ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. εἰ μὲν οὖν
 ἡ AE τῆς EB μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου
 ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓZ τῆς $Z\Delta$ μείζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ
 5 συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ AE
 τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ ΓZ σύμμετρος αὐτῇ ἐσται,
 καὶ δια τοῦτο ἑκατέρα τῶν $AB, \Gamma\Delta$ ἐκ δύο ὀνομάτων
 ἐστὶ πρώτη, τουτέστι τῇ τάξει ἡ αὐτή. εἰ δὲ ἡ EB
 σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ $Z\Delta$ σύμ-
 10 μετρός ἐστιν αὐτῇ, καὶ διὰ τοῦτο πάλιν τῇ τάξει ἡ
 αὐτὴ ἐσται τῇ AB . ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἐσται ἐκ δύο
 ὀνομάτων δευτέρα. εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν AE, EB σύμ-
 μετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, οὐδετέρα τῶν $\Gamma Z, Z\Delta$
 σύμμετρος αὐτῇ ἐσται, καὶ ἐστὶν ἑκατέρα τρίτη. εἰ δὲ
 15 ἡ AE τῆς EB μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου
 ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓZ τῆς $Z\Delta$ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμ-
 μέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν ἡ AE σύμμετρός ἐστι τῇ
 ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ ΓZ σύμμετρός ἐστιν αὐτῇ, καὶ
 ἐστὶν ἑκατέρα τετάρτη. εἰ δὲ ἡ EB , καὶ ἡ $Z\Delta$, καὶ
 20 ἐσται ἑκατέρα πέμπτη. εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν AE, EB ,
 καὶ τῶν $\Gamma Z, Z\Delta$ οὐδετέρα σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκει-
 μένῃ ῥητῇ, καὶ ἐσται ἑκατέρα ἕκτη.

Ὡστε ἡ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων μήκει σύμμετρος ἐκ

1. AE] corr. ex AB m. 2 F. τῆς] corr. ex τῇ m. 2 F.
 2. ἀσυμμέτρου] corr. ex συμμέτρου m. 2 B. εἰ] corr. ex
 η V. 3. τῆς] corr. ex τῇ m. 2 F. ἀσυμμέτρου b, ἀ- supra
 add. m. 2 F. 4. τῆς] corr. ex τῇ m. 2 V. ΔZ V. δυ-
 νήσεται b. 5. ἀσυμμέτρου Fb. 7. $\Gamma\Delta$] postea add. F, dein
 del. BΓ. 8. εἰ] postea ins. F. 9. ΔZ Fb. 10. Post
 ἐστὶν del. ἡ m. 1 P. τοῦτο] corr. ex τοῦ m. 2 F. 11. ἐσται]
 (alt.) ἐστι b, om. V. 12. ἐστι δευτέρα V. δ' F. 13. οὐδὲ
 οὐδετέρα BF. 14. τρίτῃ] ῥητῇ b. εἰ δὲ ἡ] ἡ δὲ b. 15.
 τῆς] corr. ex τῇ m. 2 F. συμμέτρου BF, sed corr. 16. $Z\Delta$]

nam AE^2 excedit EB^2 aut quadrato rectae sibi commensurabilis aut incommensurabilis. iam si AE^2 excedit EB^2 quadrato rectae sibi commensurabilis, etiam ΓZ^2 excedet $Z\Delta^2$ quadrato rectae sibi commensurabilis [prop. XIV]. et siue AE rationali propositae commensurabilis est, etiam ΓZ ei commensurabilis erit [prop. XII]; quare utraque AB , $\Gamma\Delta$ ex duobus nominibus prima est [deff. alt. 1], hoc est ordine eadem. siue EB rationali propositae commensurabilis est, etiam $Z\Delta$ ei commensurabilis est [prop. XII]; quare rursus ordine eadem erit ac AB ; nam utraque earum ex duobus nominibus secunda erit [deff. alt. 2]. siue neutra rectarum AE , EB rationali propositae commensurabilis est, neutra rectarum ΓZ , $Z\Delta$ ei commensurabilis est [prop. XIII], et utraque tertia est [deff. alt. 3]. sin AE^2 excedit EB^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis, etiam ΓZ^2 excedit $Z\Delta^2$ quadrato rectae sibi incommensurabilis [prop. XIV]. et siue AE rationali propositae commensurabilis est, etiam ΓZ ei commensurabilis est [prop. XII], et utraque quarta est [deff. alt. 4]. siue EB , etiam $Z\Delta$ commensurabilis est, et utraque quinta est [deff. alt. 5]. siue neutra rectarum AE , EB , etiam neutra rectarum ΓZ , $Z\Delta$ rectae rationali propositae commensurabilis est, et utraque sexta est [deff. alt. 6].

Quare recta rectae ex duobus nominibus longitu-

ΔZ F. $\deltaυνήσεται$ Theon (BFVb). $συμμέτρον$ BF, sed corr. 17. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ — 18. $\xi\eta\tau\eta$] e corr. F. 19. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$] supra ser. m. 1 P, $\acute{\epsilon}\sigma\tau\alpha\iota$ FVb. η] (prius) m. 2 P. $\kappa\alpha\iota \acute{\epsilon}\sigma\tau\alpha\iota \acute{\epsilon}\kappa\alpha\tau\acute{\epsilon}\rho\alpha \pi\acute{\epsilon}\mu\mu\eta\tau\eta$] mg. m. 1 P.

δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἢ αὐτῇ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ξξ'.

Ἡ τῇ ἐκ δύο μέσων μήκει σύμμετρος καὶ
5 αὐτῇ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἢ αὐτῇ.

Ἐστω ἐκ δύο μέσων ἡ AB , καὶ τῇ AB σύμμετρος
ἔστω μήκει ἡ $\Gamma\Delta$ · λέγω, ὅτι ἡ $\Gamma\Delta$ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ
καὶ τῇ τάξει ἢ αὐτῇ τῇ AB .

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο μέσων ἐστὶν ἡ AB , διηγήσθω
10 εἰς τὰς μέσας κατὰ τὸ E · αἱ AE , EB ἄρα μέσαι εἰσὶ
δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ AB
πρὸς $\Gamma\Delta$, ἡ AE πρὸς ΓZ · καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ EB
πρὸς λοιπὴν τὴν $Z\Delta$ ἐστίν, ὡς ἡ AB πρὸς $\Gamma\Delta$.
σύμμετρος δὲ ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$ μήκει· σύμμετρος ἄρα
15 καὶ ἑκατέρω τῶν AE , EB ἑκατέρω τῶν ΓZ , $Z\Delta$.
μέσαι δὲ αἱ AE , EB · μέσαι ἄρα καὶ αἱ ΓZ , $Z\Delta$. καὶ
ἐπεὶ ἐστίν ὡς ἡ AE πρὸς EB , ἡ ΓZ πρὸς $Z\Delta$, αἱ
δὲ AE , EB δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, καὶ αἱ
 ΓZ , $Z\Delta$ [ἄρα] δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν. ἐδείχ-
20 θησαν δὲ καὶ μέσαι· ἡ $\Gamma\Delta$ ἄρα ἐκ δύο μέσων ἐστίν.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ τῇ τάξει ἢ αὐτῇ ἐστὶ τῇ AB .

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ AE πρὸς EB , ἡ ΓZ πρὸς
 $Z\Delta$, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AE πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν
 AEB , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓZ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν $\Gamma Z\Delta$.
25 ἐναλλὰξ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς AE πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓZ ,

1. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. B F V b. 3. ξξ'] ξ' in ras. F. 4.
τῇ] m. 2 B. καὶ αὐτῇ] om. Theon (B F V b). 7. ἡ $\Gamma\Delta$
μήκει V. 8. AB] $B\Delta$ P. 9. διηρημένη Theon (B F V b).
10. εἰς] ἐς V. AE] EA P. εἰσὶν P. 12. τὴν $\Gamma\Delta$ V.
τὴν ΓZ V. 13. $Z\Delta$] in ras. V, ΔZ B. τὴν $\Gamma\Delta$ V. 14.
ἀσύμμετρος δέ b, sed corr. 15. καὶ ἡ μὲν AE τῇ ΓZ ($Z\Gamma F$),
ἡ δὲ EB τῇ $Z\Delta$ (corr. ex $\Delta Z V$) Theon (B F V b). 16. μέσαι
δέ] καὶ εἰσι μέσαι Theon (B F V b). καὶ αἱ] καὶ b. 17. AE]

dine commensurabilis ex duobus nominibus est et ordine eadem; quod erat demonstrandum.

LXVII.

Recta rectae ex duabus mediis longitudine commensurabilis et ipsa ex duabus mediis est et ordine eadem.

Sit AB ex duabus mediis, et rectae AB longitudine commensurabilis sit $\Gamma\Delta$. dico, $\Gamma\Delta$ ex duabus mediis esse et ordine eandem ac AB .

$A \quad E \quad B$ nam quoniam AB ex duabus mediis est,
 $\overline{AE} \quad \overline{EB}$ in E in medias diuidatur. AE, EB igitur
 $\overline{\Gamma Z} \quad \overline{Z\Delta}$ mediae sunt potentia tantum commensurabiles. et fiat $AB : \Gamma\Delta = AE : \Gamma Z$ [VI, 12]. itaque etiam [V, 19 coroll.; V, 16] $EB : Z\Delta = AB : \Gamma\Delta$. uerum $AB, \Gamma\Delta$ longitudine commensurabiles sunt; itaque etiam utraque AE, EB utrique $\Gamma Z, Z\Delta$ commensurabilis est [prop. XI]. uerum AE, EB mediae sunt. itaque etiam $\Gamma Z, Z\Delta$ mediae sunt [prop. XXIII]. et quoniam est $AE : EB = \Gamma Z : Z\Delta$, et AE, EB potentia tantum commensurabiles sunt, etiam $\Gamma Z, Z\Delta$ potentia tantum commensurabiles sunt [prop. XI]. demonstrauius autem, easdem medias esse. ergo $\Gamma\Delta$ ex duabus mediis est.

iam dico, etiam ordine eam eandem esse ac AB .

nam quoniam est $AE : EB = \Gamma Z : Z\Delta$, erit etiam [prop. XXI lemma] $AE^2 : AE \times EB = \Gamma Z^2 : \Gamma Z \times Z\Delta$.

AB B. τὴν EB V. τὴν $Z\Delta$ V. 18. εἰς σύμμετροι B F V b.
 19. ἄρα] om. P. εἰς σύμμετροι B F V b. 20. $\Delta \Gamma$ F. ἐστὶ
 B V b, comp. F. 22. τὴν EB B V. οὕτως ἢ F. ΓZ
 $\Gamma\Delta$ F. 23. τὴν $Z\Delta$ V, $Z\Delta$ F. 24. ΓZ $Z\Gamma$ F. $\Gamma Z\Delta$
 supra scr. Z. m. 2 V. 25. ὥς] ἄρα ὥς F.

οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΕΒ$ πρὸς τὸ ὑπο τῶν $ΓΖΔ$.
 σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΕ$ τῷ ἀπὸ τῆς $ΓΖ$. σύμ-
 μετρον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΕΒ$ τῷ ὑπὸ τῶν $ΓΖΔ$.
 εἴτε οὖν ρητόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΕΒ$, καὶ τὸ ὑπο
 5 τῶν $ΓΖΔ$ ρητόν ἐστίν [καὶ διὰ τοῦτό ἐστιν ἐκ δύο
 μέσων πρώτη]. εἴτε μέσον, μέσον, καὶ ἐστίν ἑκατέρα
 δευτέρα.

Καὶ διὰ τοῦτο ἐσται ἡ $ΓΔ$ τῇ $ΑΒ$ τῇ τάξει ἡ
 αὐτή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10

ξη'.

Ἡ τῇ μείζονι σύμμετρος καὶ αὐτὴ μείζων
 ἐστίν.

Ἐστω μείζων ἡ $ΑΒ$, καὶ τῇ $ΑΒ$ σύμμετρος ἔστω
 ἡ $ΓΔ$. λέγω, ὅτι ἡ $ΓΔ$ μείζων ἐστίν.

15 Διηγήσθω ἡ $ΑΒ$ κατὰ τὸ $Ε$. αἱ $ΑΕ$, $ΕΒ$ ἄρα
 δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον
 ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ρητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν
 μέσον· καὶ γεγονέτω τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. καὶ ἐπεὶ
 ἐστίν ὥς ἡ $ΑΒ$ πρὸς τὴν $ΓΔ$, οὕτως ἢ τε $ΑΕ$ πρὸς
 20 τὴν $ΓΖ$ καὶ ἡ $ΕΒ$ πρὸς τὴν $ΖΔ$, καὶ ὥς ἄρα ἡ $ΑΕ$
 πρὸς τὴν $ΓΖ$, οὕτως ἡ $ΕΒ$ πρὸς τὴν $ΖΔ$. σύμμετρος
 δὲ ἡ $ΑΒ$ τῇ $ΓΔ$. σύμμετρος ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν
 $ΑΕ$, $ΕΒ$ ἑκατέρα τῶν $ΓΖ$, $ΖΔ$. καὶ ἐπεὶ ἐστίν ὥς ἡ
 $ΑΕ$ πρὸς τὴν $ΓΖ$, οὕτως ἡ $ΕΒ$ πρὸς τὴν $ΖΔ$, καὶ
 25 ἐναλλάξ ὥς ἡ $ΑΕ$ πρὸς $ΕΒ$, οὕτως ἡ $ΓΖ$ πρὸς $ΖΔ$,
 καὶ συνθέντι ἄρα ἐστίν ὥς ἡ $ΑΒ$ πρὸς τὴν $ΒΕ$, οὕτως

1. $ΓΖΔ$] $Δ$ in ras. m. 1 b; $ΓΔΖ$ P, γρ. $ΓΖΔ$ mg. m. 1.

2. δέ] corr. ex ἄρα m. 2 F. τό — 3. ἄρα] mg. m. 2 F. 4.
 ἐστίν B. 5. ἐσται BFb. καί — 6. πρώτη] om. P. 5. ἐστίν]
 comp. post ras. 1 litt. F, ἐσται V. 6. εἴτε μέσον τὸ ὑπὸ τῶν
 $ΑΕΒ$, μέσον καὶ τὸ ὑπὸ τῶν $ΓΖΔ$ Theon (BFVb). 8. ἐσται]

permutando [V, 16] erit $AE^2 : \Gamma Z^2 = AE \times EB : \Gamma Z \times Z\Delta$.
 uerum $AE^2, \Gamma Z^2$ commensurabilia sunt. itaque etiam
 $AE \times EB, \Gamma Z \times Z\Delta$ commensurabilia sunt [prop.
 XI]. itaque siue $AE \times EB$ rationale est, etiam
 $\Gamma Z \times Z\Delta$ rationale est; siue medium, medium est
 [prop. XXIII coroll.], et utraque secunda est [prop.
 XXXVII—XXXVIII].

Ea de causa $\Gamma\Delta$ ordine eadem erit ac AB ; quod
 erat demonstrandum.

LXVIII.

Recta maiori commensurabilis et ipsa maior erit.

Sit AB maior, et rectae AB commensurabilis sit
 $\Gamma\Delta$. dico, $\Gamma\Delta$ maiorem esse.

diuidatur AB in E . itaque AE, EB potentia in-
 commensurabiles sunt efficientes summam quadratorum
 rationalem, rectangulum autem medium [prop. XXXIX],

et fiant eadem, quae antea. et quoniam est
 $AB : \Gamma\Delta = AE : \Gamma Z$ et $AB : \Gamma\Delta = EB : Z\Delta$
 [cfr. p. 204, 11 sq.], erit etiam $AE : \Gamma Z = EB : Z\Delta$
 [V, 11]. uerum $AB, \Gamma\Delta$ commensurabiles
 sunt. quare etiam utraque AE, EB utrique
 $\Gamma Z, Z\Delta$ commensurabilis est [prop. XI]. et

om. Vb. καὶ ἡ BFVb. $\Gamma\Delta]$ $\Delta\Delta$ b. 9. ὅπερ ἔδει δεῖξαι]
 comp. P, om. BFVb. 10. ξη'] ξ seq. ras. 1 litt. F. 11.
 μελζονι] o eras. b. 14. ὅτι καὶ BFb. $\Gamma\Delta]$ Δ post ras. 1
 litt. b. ἐστὶ PV, comp. Fb; ἐστὶ καὶ B. 15. $AE]$ corr. ex
 AB E. $EB]$ m. rec. P. ἄρα] m. 2 F. 17. δ'] δέ F.
 ὑπ' αὐτῶν] corr. ex ὑπὸ τῶν m. 1 P. 18. καὶ γεγονέτω]
 γεγονέτω γάρ P. 19. τε] om. F. 20. $EB]$ BE' F. τήν]
 om. P. καὶ ὡς ἄρα] ἔστιν ἄρα καὶ ὡς in ras. V. ἡ AE — 21.
 $Z\Delta]$ in ras. V. 21. $\Gamma Z]$ EB V. $EB]$ ΓZ V. τήν] om.
 Bb. 22. $AB]$ corr. ex EB m. 2 F. 24. τήν] (alt.) om. P.
 25. τήν EB V. τήν $Z\Delta$ V.

ἡ $\Gamma\Delta$ πρὸς τὴν ΔZ . καὶ ὥς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AB
 πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BE , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$ πρὸς τὸ
 ἀπὸ τῆς ΔZ . ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ὥς τὸ ἀπὸ
 τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AE , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$
 5 πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓZ . καὶ ὥς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AB
 πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν AE , EB , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$
 πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$. καὶ ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν
 ὡς τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$, οὕτως τὰ
 ἀπὸ τῶν AE , EB πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$. σύμ-
 10 μετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς AB τῷ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$. σύμμετρα
 ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AE , EB τοῖς ἀπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$.
 καὶ ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AE , EB ἅμα ρητόν, καὶ τὰ ἀπὸ
 τῶν ΓZ , $Z\Delta$ ἅμα ρητόν ἐστίν. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ δις
 ὑπὸ τῶν AE , EB σύμμετρόν ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν
 15 ΓZ , $Z\Delta$. καὶ ἐστὶ μέσον τὸ δις ὑπὸ τῶν AE , EB .
 μέσον ἄρα καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$. αἱ ΓZ , $Z\Delta$
 ἄρα δυνάμει ἀσύμμετροί εἰσι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκέ-
 μενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ἅμα ρητόν, τὸ
 δὲ δις ὑπ' αὐτῶν μέσον· ὅλη ἄρα ἡ $\Gamma\Delta$ ἄλογός ἐστίν
 20 ἢ καλουμένη μείζων.

Ἡ ἄρα τῇ μείζονι σύμμετρος μείζων ἐστίν· ὅπερ
 ἔδει δείξαι.

ξθ'.

Ἡ τῇ ρητόν καὶ μέσον δυναμένη σύμμετρος
 25 [καὶ αὐτῇ] ρητόν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν.

1. τὴν ΔZ] ΔB mut. in ΔZ m. rec. P; τὴν $Z\Delta$ FV. 3. ΔZ] $Z\Delta$ F. 4. τὸ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$ πρὸς] m. rec. P. 5. τό] (alt.) e corr. V. 6. τὰ] τό Fb, et B, corr. m. 2. 7. τὰ] τό PFb, et B, sed corr. ΓZ] $\Gamma\Delta$ F. 8. τὰ] τό F, et B, sed corr. 9. τὰ] τό F, et B, sed corr. ΓZ] EZ b, et F, sed. corr.; Γ in ras. B. 11. AE] A e corr. b. ΓZ] EZ b, et F, sed corr. 12. τὰ] τό F. τὰ] τό PF. 13. ἐστὶ V. 15. καὶ

quoniam est $AE: \Gamma Z = EB: Z\Delta$ et permutando [V, 16]
 $AE: EB = \Gamma Z: Z\Delta$, etiam componendo erit [V, 18]
 $AB: BE = \Gamma\Delta: \Delta Z$. quare etiam $AB^2: BE^2 = \Gamma\Delta^2: \Delta Z^2$
 [VI, 20]. iam similiter demonstrabimus, esse etiam

$$AB^2: AE^2 = \Gamma\Delta^2: \Gamma Z^2.$$

quare etiam $AB^2: AE^2 + EB^2 = \Gamma\Delta^2: \Gamma Z^2 + Z\Delta^2$.
 permutando igitur [V, 16]

$$AB^2: \Gamma\Delta^2 = AE^2 + EB^2: \Gamma Z^2 + Z\Delta^2.$$

uerum $AB^2, \Gamma\Delta^2$ commensurabilia sunt. itaque etiam
 $AE^2 + EB^2$ et $\Gamma Z^2 + Z\Delta^2$ commensurabilia sunt
 [prop. XI]. et $AE^2 + EB^2$ rationale est, et¹⁾ ΓZ^2
 $+ Z\Delta^2$ rationale. eodem modo etiam $2AE \times EB$
 et $2\Gamma Z \times Z\Delta$ commensurabilia sunt. et $2AE \times EB$
 medium est. itaque etiam $2\Gamma Z \times Z\Delta$ medium est
 [prop. XXIII coroll.]. itaque $\Gamma Z, Z\Delta$ potentia incom-
 mensurabiles sunt [prop. XIII; cfr. p. 206, 15 et 22] effi-
 cientes summam quadratorum rationalem, rectangulum
 autem medium. itaque tota $\Gamma\Delta$ irrationalis est maior,
 quae uocatur [prop. XXXIX].

Ergo recta maiori commensurabilis maior est; quod
 erat demonstrandum.

LXIX.

Recta rectae spatio rationali et medio aequali qua-
 dratae commensurabilis ipsa spatio rationali et medio
 quadrata aequalis est.

1) Post $Z\Delta$ lin. 13 Augustus non male addidit $\alpha\gamma\alpha$.

$\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota \mu\acute{\epsilon}\sigma\sigma\omicron\nu$] $\mu\acute{\epsilon}\sigma\sigma\omicron\nu$ δέ V. 16. ΓZ] supra add. E b. ΓZ]
 Γ in ras. m. 2 P, supra scr. E b. 17. $\epsilon\iota\sigma\iota\nu \acute{\alpha}\sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\omicron\upsilon$] BFVb.
 $\epsilon\iota\sigma\iota\nu$ P. 19. $\eta \delta\lambda\eta$ Vb. 21. $\delta\pi\epsilon\rho \acute{\epsilon}\delta\epsilon\iota \delta\epsilon\iota\chi\alpha\iota$] comp. P,
 om. BFVb. 24. $\phi\eta\tau\acute{\omicron}\nu$] -ον in ras. B. 25. $\kappa\alpha\iota \alpha\upsilon\tau\acute{\eta}$] om. P.

Ἐστω ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἡ AB , καὶ τῇ AB σύμμετρος ἔστω ἡ $\Gamma\Delta$. δεικτέον, ὅτι καὶ ἡ $\Gamma\Delta$ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν.

- Διηγήσθω ἡ AB εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ E . αἱ
 5 AE , EB ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ
 μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγ' ὄντων μέσον,
 τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. καὶ τὰ αὐτὰ κατασκευάσθω
 τοῖς πρότερον. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ΓZ ,
 $Z\Delta$ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, καὶ σύμμετρον τὸ μὲν
 10 συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AE , EB τῷ συγκειμένῳ
 ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$, τὸ δὲ ὑπὸ AE , EB τῷ ὑπὸ
 ΓZ , $Z\Delta$. ὥστε καὶ τὸ [μὲν] συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ
 τῶν ΓZ , $Z\Delta$ τετραγώνων ἐστὶ μέσον, τὸ δ' ὑπὸ τῶν
 ΓZ , $Z\Delta$ ῥητόν.
 15 ῥητὸν ἄρα καὶ μέσον δυναμένη ἐστὶν ἡ $\Gamma\Delta$. ὅπερ
 ἔδει δεῖξαι.

ο'.

Ἡ τῇ δύο μέσα δυναμένη σύμμετρος δύο
 μέσα δυναμένη ἐστίν.

- 20 Ἐστω δύο μέσα δυναμένη ἡ AB , καὶ τῇ AB
 σύμμετρος ἡ $\Gamma\Delta$. δεικτέον, ὅτι καὶ ἡ $\Gamma\Delta$ δύο μέσα
 δυναμένη ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ δύο μέσα δυναμένη ἐστὶν ἡ AB , διη-
 γήσθω εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ E . αἱ AE , EB ἄρα
 25 δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ τε συγκείμενον

1. καὶ τῇ AB] supra scr. m. 1 F. 2. δεικτέον] λέγω V.
 3. ἐστὶ B, comp. Fb. 7. δέ F. κατασκευάσθω b. 8.
 αἱ] ἡ V. 11. δ' P. τῶν AE V. 12. τῶν ΓZ (corr. ex
 ΓH) V. μὲν] om. P. 13. τετραγώνων P. δέ F. 15.
 ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 17. ο'] seq. ras. 1
 litt. F. 18. καὶ αὐτῇ δύο V. 21. ἡ] ἔστω ἡ V. δεικτέον]
 λέγω V. 22. δὴ ὅτι B. 24. κατὰ τὸ E εἰς τὰς εὐθείας V. εὐ-
 θείας] m. 2 B.

Sit AB spatio rationali et medio aequalis quadrata, et rectae AB commensurabilis sit $\Gamma\Delta$. demonstrandum, etiam $\Gamma\Delta$ spatio rationali et medio aequalem esse quadratam.

$\begin{array}{l} A \\ | \\ E \\ | \\ B \end{array} \quad \begin{array}{l} \Gamma \\ | \\ Z \\ | \\ \Delta \end{array}$ diuidatur AB in rectas in E ; itaque AE , EB potentia incommensurabiles sunt efficientes summam quadratorum mediam, rectangulum autem rationale [prop. XL]; et comparentur eadem, quae antea. iam similiter demonstrabimus, ΓZ , $Z\Delta$ potentia incommensurabiles esse et $AE^2 + EB^2$, $\Gamma Z^2 + Z\Delta^2$ commensurabilia et $AE \times EB$, $\Gamma Z \times Z\Delta$ commensurabilia. quare etiam $\Gamma Z^2 + Z\Delta^2$ medium est, $\Gamma Z \times Z\Delta$ autem rationale.

Ergo $\Gamma\Delta$ spatio rationali et medio aequalis est quadrata; quod erat demonstrandum.

LXX.

Recta rectae duobus spatiis mediis aequali quadratae commensurabilis ipsa duobus spatiis mediis quadrata est aequalis.

Sit AB duobus spatiis mediis aequalis quadrata, et rectae AB commensurabilis $\Gamma\Delta$. demonstrandum, etiam $\Gamma\Delta$ duobus spatiis mediis aequalem esse quadratam.

$\begin{array}{l} A \\ | \\ E \\ | \\ B \end{array} \quad \begin{array}{l} \Gamma \\ | \\ Z \\ | \\ \Delta \end{array}$ nam quoniam AB duobus spatiis mediis aequalis est quadrata, in E in rectas diuidatur. itaque AE , EB potentia incommensurabiles sunt efficientes summam quadratorum mediam et rectangulum medium et praeterea $AE^2 + EB^2$, $AE \times EB$ incommensurabilia [prop. XLI];

ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν [τετραγώνων] μέσον καὶ τὸ ὑπ'
αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ
τῶν ἀπὸ τῶν AE , EB τετραγώνων τῷ ὑπὸ τῶν AE ,
 EB · καὶ κατεσκευάσθω τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. ὁμοίως
5 δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ΓZ , $Z\Delta$ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμ-
μετροὶ καὶ σύμμετρον τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ
τῶν AE , EB τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓZ ,
 $Z\Delta$, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AE , EB τῷ ὑπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$.
ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$
10 τετραγώνων μέσον ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$ μέσον
καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν
 ΓZ , $Z\Delta$ τετραγώνων τῷ ὑπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$.

Ἡ ἄρα $\Gamma\Delta$ δύο μέσα δυναμένη ἐστίν· ὅπερ ἔδει
δείξαι.

15

οα'.

Ῥητοῦ καὶ μέσον συντιθεμένου τέσσαρες
ἄλλοι γίνονται ἥτοι ἐκ δύο ὀνομάτων ἢ ἐκ
δύο μέσων πρώτη ἢ μεῖζων ἢ ῥητὸν καὶ μέσον
δυναμένη.

20 Ἔστω ῥητὸν μὲν τὸ AB , μέσον δὲ τὸ $\Gamma\Delta$ · λέγω,
ὅτι ἢ τὸ $A\Delta$ χωρίον δυναμένη ἥτοι ἐκ δύο ὀνομάτων
ἐστὶν ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη ἢ μεῖζων ἢ ῥητὸν καὶ
μέσον δυναμένη.

Τὸ γὰρ AB τοῦ $\Gamma\Delta$ ἥτοι μεῖζόν ἐστὶν ἢ ἔλασσον.
25 ἔστω πρότερον μεῖζον· καὶ ἐκκεῖσθω ῥητὴ ἢ EZ , καὶ
παραβεβλήσθω παρὰ τὴν EZ τῷ AB ἴσον τὸ EH
πλάτος ποιούν τὴν $E\Theta$ · τῷ δὲ $\Delta\Gamma$ ἴσον παρὰ τὴν EZ

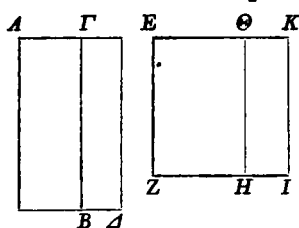
1. τετραγώνων] om. P. ὑπ'] mut. in ἀπ' m. 2 F, ἀπ' b. 3. AE] (prius) corr. ex AB m. 2 F. 5. ΓZ] in ras. m. 1 P. 8. τὸ δέ] ὥστε καὶ τό P. 9. $\Gamma\Delta$, ΔZ P. 12. τῷ] τό V. 13. $\Gamma\Delta$ ἄρα B. $\Gamma\Delta$] Δ postea ins. V. ὅπερ ἔδει δείξαι] comp. P, om. B F V b. 15. οβ', β eras. F. 17. γίνονται] γίνονται B F V b et,

et comparentur eadem, quae antea. iam similiter demonstrabimus, ΓZ , $Z\Delta$ potentia incommensurabiles esse, et $AE^2 + EB^2$, $\Gamma Z^2 + Z\Delta^2$ commensurabilia, et $AE \times EB$, $\Gamma Z \times Z\Delta$ commensurabilia. quare etiam $\Gamma Z^2 + Z\Delta^2$ medium est et $\Gamma Z \times Z\Delta$ medium et praeterea $\Gamma Z^2 + Z\Delta^2$, $\Gamma Z \times Z\Delta$ incommensurabilia.

Ergo $\Gamma\Delta$ duobus spatiis mediis aequalis est quadrata; quod erat demonstrandum.

LXXI.

Spatiis rationali et medio compositis quattuor irrationales oriuntur, aut recta ex duobus nominibus aut ex duabus mediis prima aut maior aut spatio rationali et medio aequalis quadrata.



Sit AB rationale, $\Gamma\Delta$ autem medium. dico, rectam spatio AA aequalem quadratam aut ex duobus nominibus esse aut ex duabus mediis primam aut maiorem aut spatio rationali et medio

aequalem quadratam.

est enim aut $AB > \Gamma\Delta$ aut $AB < \Gamma\Delta$. sit prius $AB > \Gamma\Delta$. et ponatur rationalis EZ , et rectae EZ spatio AB aequale adplicetur EH latitudinem efficiens $E\Theta$; spatio autem $\Delta\Gamma$ aequale rectae EZ adplicetur ΘI latitudinem efficiens ΘK . et quoniam AB rationale est

supra add. γ m. 1. P. ἤτοι] corr. in ἦ τε m. rec. P, corr. ex ὁ τῇ V, ex ἦ F; ἦ τε B. 21. ἦ] m. 2 F. AA] A e corr. V. ἤτοι] ἦ V. 27. τῶ] corr. ex τό m. 1 F. Post EZ add. Theon: τούτοις τῇ ΘH (BFVb).

παραβεβλήσθω τὸ ΘI πλάτος ποιοῦν τὴν ΘK . καὶ
 ἐπεὶ ρητόν ἐστι τὸ AB καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ EH , ρητόν
 ἄρα καὶ τὸ EH . καὶ παρὰ [ρητήν] τὴν EZ παραβε-
 βληται πλάτος ποιοῦν τὴν $E\Theta$. ἡ $E\Theta$ ἄρα ρητὴ ἐστι
 5 καὶ σύμμετρος τῇ EZ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ
 τὸ ΓA καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ ΘI , μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ
 τὸ ΘI . καὶ παρὰ ρητήν τὴν EZ παράκειται πλάτος
 ποιοῦν τὴν ΘK . ρητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘK καὶ ἀσύμμετρος
 τῇ EZ μήκει. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ΓA , ρητόν δὲ
 10 τὸ AB , ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ AB τῷ ΓA . ὥστε
 καὶ τὸ EH ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ ΘI . ὥς δὲ τὸ EH
 πρὸς τὸ ΘI , οὕτως ἐστὶν ἡ $E\Theta$ πρὸς τὴν ΘK . ἀσύμ-
 μετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $E\Theta$ τῇ ΘK μήκει. καὶ εἰσιν
 ἀμφοτέραι ρηταί· αἱ $E\Theta$, ΘK ἄρα ρηταί εἰσι δυνάμει
 15 μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ EK
 διηρημένη κατὰ τὸ Θ . καὶ ἐπεὶ μείζον ἐστὶ τὸ AB
 τοῦ ΓA , ἴσον δὲ τὸ μὲν AB τῷ EH , το δὲ ΓA τῷ
 ΘI , μείζον ἄρα καὶ τὸ EH τοῦ ΘI . καὶ ἡ $E\Theta$ ἄρα
 μείζων ἐστὶ τῆς ΘK . ἥτοι οὖν ἡ $E\Theta$ τῆς ΘK μείζον
 20 δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἐαυτῇ μήκει ἢ τῷ ἀπὸ
 ἀσυμμέτρου. δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου
 ἐαυτῇ· καὶ ἐστὶν ἡ μείζων ἡ ΘE σύμμετρος τῇ ἐκκει-
 μένῃ ρητῇ τῇ EZ . ἡ ἄρα EK ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ

1. ΘI] mut. in ΘH F, I eras. V. 3. καί] (prius) m. 2 F.
 ρητήν] om. P. 4. $E\Theta$] (prius) ΘE F. ρητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ
 $E\Theta$ Theon (BFVb). ἐστὶν P. 6. ΘI] I in ras. F. 7.
 ΘI] I in ras. F. Post παράκειται add. Theon: τουτέστι
 (-in V) τὴν ΘH (BFVb). 8. ἄρα] corr. ex ἔσται F. 9.
 EZ] Z postea ins. m. 1 V. ΓA] eras. V. 11. EH] ZH
 e corr. V. ΘI] corr. ex $\Theta \Gamma$ P, I in ras. F. 12. ΘI] I
 in ras. F. 13. ἐστὶν B. 15. EK] corr. ex $E\Theta$ m. rec. b.
 16. Post Θ ras. 1 litt. B. μείζων V, sed corr. 18. ΘI]
 I e corr. F. καί] m. 2 F. ΘI] I in ras. F. 20. ἐαυτῇ μήκει]
 om. V. 21. ἀσυμμέτρου] συμμέτρου F, corr. m. 2; συμμέτρου B,

et $AB = EH$, etiam EH rationale est. et rectae EZ adplicatum est latitudinem efficiens $E\Theta$. itaque $E\Theta$ rationalis est et rectae EZ longitudine commensurabilis [prop. XX]. rursus quoniam $\Gamma\Delta$ medium est et $\Gamma\Delta = \Theta I$, etiam ΘI medium est. et rectae rationali EZ adplicatum est latitudinem efficiens ΘK . itaque ΘK rationalis est et rectae EZ longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. et quoniam $\Gamma\Delta$ medium est, AB autem rationale, AB et $\Gamma\Delta$ incommensurabilia sunt. quare etiam EH , ΘI incommensurabilia sunt. uerum $EH : \Theta I = E\Theta : \Theta K$ [VI, 1]. quare etiam $E\Theta$, ΘK longitudine incommensurabiles sunt [prop. XI]. et utraque rationalis est. itaque $E\Theta$, ΘK rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo EK ex duobus nominibus est in Θ diuisa [prop. XXXVI]. et quoniam $AB > \Gamma\Delta$ et $AB = EH$, $\Gamma\Delta = \Theta I$, erit etiam $EH > \Theta I$. itaque etiam $E\Theta > \Theta K$ [V, 14]. iam $E\Theta^2$ excedit ΘK^2 quadrato rectae aut sibi commensurabilis aut incommensurabilis. prius excedat quadrato rectae sibi commensurabilis; et maior ΘE rationali propositae EZ commensurabilis est. ergo EK ex duobus nominibus est prima [deff. alt. 1]. EZ autem rationalis est. sin spatium recta rationali et recta ex duobus nominibus prima comprehenditur, recta spatio aequalis quadrata ex duobus nominibus est [prop. LIV]. itaque recta spatio EI aequalis quadrata ex duobus nominibus est; quare etiam recta spatio $\Delta\Delta$ aequalis quadrata ex duobus nominibus est. iam uero $E\Theta^2$ excedat ΘK^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis; et maior $E\Theta$

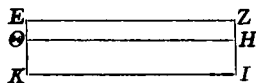
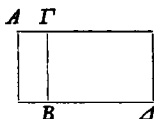
πρώτη. ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ
 ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης, ἡ τὸ χωρίον
 δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. ἡ ἄρα το ΕΙ δυνα-
 μένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ το ΑΔ
 5 δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. ἀλλὰ δὴ δυνάσθω
 ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μείζον τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ· καὶ
 ἐστὶν ἡ μείζων ἡ ΕΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ
 τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τε-
 τάρτη. ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ
 10 ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης, ἡ τὸ χωρίον
 δυναμένη ἄλογός ἐστὶν ἡ καλουμένη μείζων. ἡ ἄρα τὸ
 ΕΙ χωρίον δυναμένη μείζων ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ το ΑΔ
 δυναμένη μείζων ἐστίν.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἔλασσον τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· καὶ τὸ
 15 ΕΗ ἄρα ἔλασσόν ἐστι τοῦ ΘΙ· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ ἐλάσσων
 ἐστὶ τῆς ΘΚ. ἦτοι δὲ ἡ ΘΚ τῆς ΕΘ μείζον δύναται
 τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. δυ-
 νάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· καὶ
 ἐστὶν ἡ ἐλάσσων ἡ ΕΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ
 20 τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευ-
 τέρα. ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ
 ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας, ἡ τὸ χωρίον
 δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη. ἡ ἄρα τὸ ΕΙ
 χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη· ὥστε καὶ
 25 ἡ το ΑΔ δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη. ἀλλὰ

2. ῥητῶν V. 3. ἐκ] ἡ ἐκ F. ἐστὶ P. ἡ ἄρα] corr.
 ex παρα m. 2 P. ΕΙ] I in ras. F. 5. δυναμένη] corr. ex
 ἀδυναμένη V. 6. Ante ἡ ras. 3 litt. F. ΘΚ] corr. ex ΟΣ
 m. 2 F. μείζων b. συμμέτρου B, sed corr. 7. ἐστὶν]
 ἐστὶ, supra scr. ω, B; ἔστω P. ἢ] (prius) om. B. 11. μείζων
 V, sed corr. 12. ΕΙ] I in ras. F. 15. ΘΙ] ΘΚ b et corr.
 ex ΘΓF. ΕΘ ἄρα b. ἔλασσον b. 17. συμμέτρου — ἀπό] mg.
 m. 1 P. συμμέτρου] ἀσυμμέτρου V, sed α eras. ἀσυμμέτρου]

rationali propositae EZ longitudine commensurabilis est. itaque EK ex duobus nominibus est quarta [deff. alt. 4]. EZ autem rationalis est. sin spatium recta rationali et recta ex duobus nominibus quarta comprehenditur, recta spatio aequalis quadrata irrationalis est maior, quae uocatur [prop. LVII]. itaque recta spatio EI aequalis quadrata maior est. ergo etiam recta spatio AA aequalis quadrata maior est.

iam uero sit $AB < \Gamma\Delta$. quare etiam $EH < \Theta I$. itaque etiam $E\Theta < \Theta K$ [VI, 1; V, 14]. uerum ΘK^2 excedit $E\Theta^2$ quadrato rectae aut sibi commensurabilis aut incommensurabilis. prius excedat quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis. et minor $E\Theta$ rationali propositae EZ longitudine commensurabilis est. itaque EK ex duobus nominibus est secunda [deff. alt. 2]. EZ autem rationalis est. sin spatium recta rationali et recta ex duobus nominibus secunda comprehenditur, recta spatio aequalis quadrata ex duobus



mediis est prima [prop. LV]. itaque recta spatio EI aequalis quadrata ex duobus mediis est prima. ergo etiam recta spatio AA aequalis quadrata ex duobus mediis prima est. iam uero ΘK^2 excedat ΘE^2 quadrato rectae

sibi incommensurabilis; et minor $E\Theta$ rationali propositae EZ commensurabilis est. itaque EK ex duobus nominibus est quinta [deff. alt. 5]. EZ autem ratio-

$\sigma\upsilon\mu\mu\epsilon\tau\epsilon\tau\omicron\upsilon$ BV, sed corr. 19. η] (prius) m. 2 F, om. B. 21.
 $\delta\epsilon$] (alt.) m. 2 F. $\pi\epsilon\pi\iota\acute{\epsilon}\chi\epsilon\tau\alpha\iota$ P. 23. EI] I in ras. F. 24.
 $\chi\omega\rho\iota\omicron\nu$] om. V. 25. AA $\chi\omega\rho\iota\omicron\nu$ BFb.

- δὴ ἡ ΘK τῆς ΘE μείζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου
 ἐαυτῇ. καὶ ἐστὶν ἡ ἐλάσσων ἡ $E\Theta$ σύμμετρος τῇ ἐκ-
 κειμένῃ $\phi\eta\tau\eta$ τῇ EZ . ἡ ἄρα EK ἐκ δύο ὀνομάτων
 ἐστὶ πέμπτῃ. $\phi\eta\tau\eta$ δὲ ἡ EZ . ἐὰν δὲ χωρίον περιέχεται
 5 ὑπὸ $\phi\eta\tau\eta$ ς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτῃς, ἡ τὸ
 χωρίον δυναμένη $\phi\eta\tau\eta$ καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν.
 ἡ ἄρα τὸ EI χωρίον δυναμένη $\phi\eta\tau\eta$ καὶ μέσον δυ-
 ναμένη ἐστίν. ὥστε καὶ ἡ τὸ $ΑΔ$ χωρίον δυναμένη
 $\phi\eta\tau\eta$ καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν.
- 10 Ῥητοῦ ἄρα καὶ μέσον συντιθεμένου τέσσαρες ἄλογοι
 γίνονται ἥτοι ἐκ δύο ὀνομάτων ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη
 ἢ μείζων ἢ $\phi\eta\tau\eta$ καὶ μέσον δυναμένη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

οβ'.

- Δύο μέσων ἀσυμμέτρων ἀλλήλοις συντιθε-
 15 μένων αἱ λοιπαὶ δύο ἄλογοι γίνονται ἥτοι ἐκ
 δύο μέσων δευτέρα ἢ [ἡ] δύο μέσα δυναμένη.
 Συγκείσθω γὰρ δύο μέσα ἀσύμμετρα ἀλλήλοις τὰ
 AB , $\GammaΔ$. λέγω, ὅτι ἡ τὸ $ΑΔ$ χωρίον δυναμένη ἥτοι
 ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα ἢ δύο μέσα δυναμένη.
- 20 Τὸ γὰρ AB τοῦ $\GammaΔ$ ἥτοι μείζον ἐστὶν ἢ ἐλάσσον.
 ἔστω, εἰ τύχοι, πρότερον μείζον τὸ AB τοῦ $\GammaΔ$. καὶ

1. ΘE] supra scr. η b, ΘH e corr. F, $E\Theta$ V (E in ras.).
 συμμέτρου F, et B, sed corr. m. 2. 2. ἡ] (prius) om. B. 4.
 ἐστὶ] postea ins. F, ἐστίν P. 7. δυναμένη — 8. χωρίον] in
 ras. F. 9. $\phi\eta\tau\eta$ — δυναμένη] mg. m. 2 B. ἐστὶ P Bb.
 10. ἀνάλογοι P, sed corr. m. rec. 11. γίνονται F Vb. ἥτοι
 ἡ V. 12. ἡ $\phi\eta\tau\eta$] m. 2 V. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P,
 om. B F Vb. 13. ογ', sed corr. m. 2, F. 14. συμμέτρων,
 corr. m. 2, F. συντιθέντων Theon (B F Vb); συντιθεμένων
 supra scr. m. 2 B. 15. Post δύο ras. 2 litt. V. γίνονται
 Fb, et supra scr. γ, V. ἐκ] ἡ ἐκ V. 16. ἡ] deleo. 17.
 συγκείσθω F V. τὰ] τό b. 18. $ΑΔ$] corr. ex $\GammaΔ$ m. 2 F.
 19. ἡ] ἡ ἡ P. 21. εἰ τύχοι] om. Theon (B F Vb).

nalis est. sin spatium recta rationali et recta ex duobus nominibus quinta comprehenditur, recta spatio aequalis quadrata recta spatio rationali et medio aequalis quadrata est [prop. LVIII]. itaque recta spatio EI aequalis quadrata recta spatio rationali et medio aequalis quadrata est. quare etiam recta spatio AA aequalis quadrata recta spatio rationali et medio aequalis quadrata est.

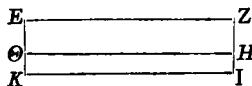
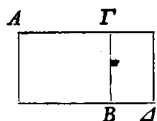
Ergo spatiis rationali et medio compositis quattuor irrationales oriuntur, aut recta ex duobus nominibus aut ex duabus mediis prima aut maior aut spatio rationali et medio aequalis quadrata; quod erat demonstrandum.

LXXII.

Duobus mediis sibi incommensurabilibus compositis reliquae duae irrationales oriuntur, aut recta ex duabus mediis secunda aut duobus spatiis mediis aequalis quadrata.

Componantur enim duo media sibi incommensurabilia AB , ΓA . dico, rectam spatio AA aequalem quadratam aut ex duabus mediis secundam esse aut duobus spatiis mediis aequalem quadratam.

nam aut $AB > \Gamma A$ aut $AB < \Gamma A$. sit uerbi gratia prius $AB > \Gamma A$, et ponatur recta rationalis EZ , et



spatio AB aequale rectae EZ adplicetur EH latitudinem efficiens $E\Theta$, spatio autem ΓA aequale ΘI latitudinem efficiens ΘK . et quoniam utrumque AB , ΓA medium est, etiam utrumque EH , ΘI medium est. et rectae

ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ EZ , καὶ τῷ μὲν AB ἴσον παρὰ τὴν EZ παραβεβλήσθω τὸ EH πλάτος ποιοῦν τὴν $E\Theta$, τῷ δὲ $\Gamma\Delta$ ἴσον τὸ ΘI πλάτος ποιοῦν τὴν ΘK . καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶν ἐκάτερον τῶν AB , $\Gamma\Delta$, μέσον ἄρα
 5 καὶ ἐκάτερον τῶν EH , ΘI . καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ZE παράκειται πλάτος ποιοῦν τὰς $E\Theta$, ΘK . ἐκατέρα ἄρα τῶν $E\Theta$, ΘK ῥητὴ ἐστὶ καὶ ἀσύμμετρος τῇ EZ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ AB τῷ $\Gamma\Delta$, καὶ ἐστὶν ἴσον το μὲν AB τῷ EH , τὸ δὲ $\Gamma\Delta$ τῷ ΘI , ἀσύμμετρον ἄρα
 10 ἐστὶ καὶ τὸ EH τῷ ΘI . ὥς δὲ τὸ EH πρὸς τὸ ΘI , οὕτως ἐστὶν ἡ $E\Theta$ πρὸς ΘK . ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ $E\Theta$ τῇ ΘK μήκει. αὖ $E\Theta$, ΘK ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ EK . ἦτοι δὲ ἡ $E\Theta$ τῆς ΘK μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμ-
 15 μέτρου ἑαυτῇ ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. δυνάσθω πρό- τερον τῷ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ οὐδετέρα τῶν $E\Theta$, ΘK σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ EZ μήκει. ἡ EK ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη. ῥητὴ δὲ ἡ EZ . εἰ δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς
 20 καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης, ἢ τὸ χωρίον δυνα- μένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα. ἡ ἄρα τὸ EI , τουτ- ἐστὶ τὸ $A\Delta$, δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα. ἀλλὰ δὴ ἡ $E\Theta$ τῆς ΘK μείζον δυνάσθω τῷ ἀπο ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ ἀσύμμετρός ἐστὶν ἐκα-
 25 τέρα τῶν $E\Theta$, ΘK τῇ EZ μήκει. ἡ ἄρα EK ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἑκτη. εἰ δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἑκτης, ἢ τὸ χωρίον

1. τις ῥητὴ F. τῷ] corr. ex τό m. 2 P. 2. EH] EZ b.
 3. Post ἴσον add. παρὰ τὴν ΘH V, del. m. 2. 4. ἐπεὶ — ἄρα καὶ] om. b. 5. τῶν] corr. ex τό m. 2 b. EH] supra add. Θ b. ΘI] Γ , supra add. H , b. καὶ] m. 2 F. 6.

rationali EZ adplicata sunt latitudines efficientia $E\Theta$, ΘK . itaque utraque $E\Theta$, ΘK rationalis est et rectae EZ longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. et quoniam AB , ΓA incommensurabilia sunt, et $AB = EH$, $\Gamma A = \Theta I$, etiam EH , ΘI incommensurabilia sunt. uerum $EH : \Theta I = E\Theta : \Theta K$ [VI, 1]. itaque etiam $E\Theta$, ΘK longitudine incommensurabiles sunt [prop. XI]. quare $E\Theta$, ΘK rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo EK ex duobus nominibus est [prop. XXXVI]. uerum $E\Theta^2$ excedit ΘK^2 quadrato rectae aut sibi commensurabilis aut incommensurabilis. prius excedat quadrato rectae longitudine commensurabilis. et neutra rectarum $E\Theta$, ΘK rectae rationali propositae EZ longitudine commensurabilis est. itaque EK ex duobus nominibus est tertia [deff. alt. 3]. uerum EZ rationalis est. sin spatium recta rationali et recta ex duobus nominibus tertia comprehenditur, recta spatio aequalis quadrata ex duabus mediis est secunda [prop. LVI]. itaque recta spatio EI , hoc est AA , aequalis quadrata ex duabus mediis est secunda. iam uero $E\Theta^2$ excedat ΘK^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis; et utraque $E\Theta$, ΘK rectae EZ longitudine incommensurabilis est. itaque EK ex duobus nominibus est sexta [deff. alt. 6]. sin spatium recta rationali et recta ex duobus nominibus sexta comprehenditur, recta

παράσκειτα P, παράσκεινται V. ποιοῦντα Vb. 7. ΘK ἄρα V. ἔστιν P. 8. ἀσύμμετρος P, corr. m. rec. ἔστιν P. AB] supra add. H V. ἔστιν] m. 2 F. 10. πρὸς] m. 2 F. τό] τῷ F. 11. πρὸς τὴν V. 12. εἰσιν P. 14. ἀσύμμετρον V, sed corr. 15. συμμέτρον BV, corr. m. 2. 16. ἀσύμμετρον V, sed corr.; ἀ- supra add. b m. 1. 17. ἔστιν P. 18. τέττη] corr. ex ξητῇ m. rec. b. 25. τῇ] corr. ex τῆς B. ἐκ] m. rec. P.

δυναμένη ἢ δύο μέσα δυναμένη ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ τὸ *ΑΔ* χωρίον δυναμένη ἢ δύο μέσα δυναμένη ἐστίν.

[Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἔλαττον ἢ τὸ *ΑΒ* τοῦ *ΓΔ*, ἢ τὸ *ΑΔ* χωρίον δυναμένη ἢ ἐκ δύο μέσων
5 δευτέρα ἐστίν ἥτοι δύο μέσα δυναμένη].

Δύο ἄρα μέσων ἀσυμμέτρων ἀλλήλοις συντιθεμένων αἱ λοιπαὶ δύο ἄλογοι γίνονται ἥτοι ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἢ δύο μέσα δυναμένη.

Ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων καὶ αἱ μετ' αὐτὴν ἄλογοι οὕτε
10 τῇ μέσῃ οὔτε ἀλλήλαις εἶδιν αἱ αὐταί. τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ μέσης παρα ρητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ρητὴν καὶ ἀσύμμετρον τῇ παρ' ἣν παράκειται μήκει. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων παρα ρητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην.
15 τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων πρώτης παρὰ ρητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέραν. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων δευτέρας παρὰ ρητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μείζονος παρὰ ρητὴν
20 παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ρητὸν καὶ μέσον δυναμένης παρὰ ρητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς δύο μέσα δυναμένης παρὰ ρητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν

1. ἡ δύο] δύο BV. ὥστε καὶ ἡ] ἡ ἄρα V. 2. *ΑΒ* b. χωρίον] om. V. ἡ] om. BFV. δύο] β P, δύο m. rec. μέσας F.
3. ὁμοίως — 5. δυναμένη] om. P. 4. τὸ *ΑΔ* χωρίον] τὸ χωρίον τὸ *ΑΔ* V. ἡ] om. F. 5. ἥτοι δύο μέσα] ἡ ρητὸν καὶ μέσον B. 6. ἡ δύο F. 7. γίνονται PFVb. ἥτοι ἡ V.
8. ἡ] ἡ ἢ V. δύο] in ras. m. 1 P. 9. ογ', γ in ras., F. αἱ] supra scr. b. 11. ἀπὸ τῆς F. 12. τῇ] corr. ex

spatio aequalis quadrata recta est duobus spatiis mediis aequalis quadrata [prop. LIX]. quare recta spatio AA aequalis quadrata recta duobus spatiis mediis aequalis quadrata est.

Ergo duobus spatiis mediis sibi incommensurabilibus compositis reliquae duae irrationales oriuntur, aut recta ex duabus mediis secunda aut duobus spatiis mediis aequalis quadrata.

Recta ex duobus nominibus et irrationales ab ea deriuatae neque mediae neque inter se eadem sunt. nam quadratum mediae rectae rationali adplicatum latitudinem efficit rationalem et rectae, cui adplicatum est, longitudine incommensurabilem [prop. XXII]. quadratum autem rectae ex duobus nominibus rationali adplicatum latitudinem efficit rectam ex duobus nominibus primam [prop. LX]. quadratum autem rectae ex duabus mediis primae rationali adplicatum latitudinem efficit rectam ex duobus nominibus secundam [prop. LXI]. quadratum autem rectae ex duabus mediis secundae rationali adplicatum latitudinem efficit rectam ex duobus nominibus tertiam [prop. LXII]. quadratum autem maioris rationali adplicatum latitudinem efficit rectam ex duobus nominibus quartam [prop. LXIII]. quadratum autem rectae spatio rationali et medio aequalis quadratae rationali adplicatum latitudinem efficit rectam ex duobus nominibus quintam [prop. LXIV].

$\tau\eta\nu$ V. $\eta\nu$] corr. ex $\eta\iota$ F. 13. $\delta\acute{\epsilon}$] δ' P. παραβαλό-
μενον P. 15. $\tau\omicron$ $\delta\acute{\epsilon}$ — 19. $\tau\rho\acute{\iota}\tau\eta\nu$] mg. m. 2 V. 16. $\pi\omicron\iota\epsilon\acute{\iota}$]
om. V. 17. $\delta\acute{\epsilon}$] δ' P. 19. $\delta\acute{\epsilon}$] δ' P. 21. $\delta\acute{\epsilon}$] δ' P. 23.
 $\tau\omicron$] e corr. V. $\delta\acute{\epsilon}$] δ' P. 24. $\pi\lambda\acute{\alpha}\tau\omicron\varsigma$] corr. ex $\pi\acute{\alpha}\tau\omicron\varsigma$ m. 1 P.

ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτην. τὰ δ' εἰρημένα πλάτη διαφέρει τοῦ τε πρώτου καὶ ἀλλήλων, τοῦ μὲν πρώτου, ὅτι ῥητὴ ἐστίν, ἀλλήλων δέ, ὅτι τῇ τάξει οὐκ εἰσὶν αἱ αὐταί· ὥστε καὶ αὐταὶ αἱ ἄλλοι διαφέρουσιν ἀλλήλων.

5

ογ'.

Ἐὰν ἀπὸ ῥητῆς ῥητὴ ἀφαιρεθῇ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν· καλείσθω δὲ ἀποτομή.

Ἀπὸ γὰρ ῥητῆς τῆς *AB* ῥητὴ ἀφαιρεθῶ ἡ *BF*
10 δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ· λέγω, ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ *AF* ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ *AB* τῇ *BF* μήκει, καὶ ἐστίν ὡς ἡ *AB* πρὸς τὴν *BF*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *AB* πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν *AB*, *BF*, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ
15 τὸ ἀπὸ τῆς *AB* τῷ ὑπὸ τῶν *AB*, *BF*. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς *AB* σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν *AB*, *BF* τετραγώνια, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν *AB*, *BF* σύμμετρόν ἐστι τὸ δις ὑπὸ τῶν *AB*, *BF*. καὶ ἐπειδήπερ τὰ ἀπὸ τῶν *AB*, *BF* ἴσα ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν *AB*, *BF* μετὰ τοῦ
20 ἀπὸ *GA*, καὶ λοιπῷ ἄρα τῷ ἀπὸ τῆς *AF* ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν *AB*, *BF*. ῥητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν *AB*,

1. τὰ δ'] ἐπεὶ οὖν τὰ Theon (BFVb). εἰρημένα] εἰ- e corr. V. 3. τῇ] om. F. 4. ὥστε] δῆλον ὡς Theon (BFVb).

5. Seq. δευτέρα τάξεις ἐτέρων λόγων (om. b) τῶν κατὰ ἀφαίρεσιν PBVb (videtur fuisse in F, sed sust. reparatio); ἀρχὴ τῶν κατ' ἀφαιρέσιν ἐξάδων m. 2 B. ογ'] postea add. F (ab initio haec prop. a praecedentibus dirempta non erat). 7. τῇ] om. b. ἡ λοιπὴ] λοιπῇ F. 8. ἐστὶ BV, comp. Fb. δέ] δὴ B. 9. ῥητῆς] διττῆς F. BF] ΓB F. 11. ἡ καλουμένη] καλείσθω δέ V. 12. ἀσύμμετρος] corr. ex ἄρα σύμμετρος m. rec. P, ex σύμμετρος m. 2 B. ἡ AB τῇ BF ἀσύμμετρός ἐστι V. 13. τῇ] τὰς F. 14. ἀσύμμετρον] -ον e corr. V, corr. ex -ος m. rec. P. 16. σύμμετρα — τῶν]

quadratum autem rectae duobus spatiis mediis aequalis quadratae rationali adplicatum latitudinem efficit rectam ex duobus nominibus sextam [prop. LXV]. latitudines autem, quas significauimus, differunt et a prima et inter se, a prima, quia ea rationalis est, inter se autem, quia ordine non sunt eadem. ergo etiam ipsae rectae irrationales inter se differunt.

LXXIII.

Si a recta rationali rationalis aufertur potentia tantum toti commensurabilis, reliqua irrationalis est, uocetur autem apotome.

A rationali enim AB rationalis auferatur $B\Gamma$ potentia tantum toti commensurabilis. dico, reliquam $A\Gamma$ irrationalem esse apotomen, quae uocatur.

nam quoniam AB , $B\Gamma$ longitudine incommensurabiles sunt, et est $AB : B\Gamma = AB^2 : AB \times B\Gamma$ [prop. XXI lemma], etiam AB^2 , $AB \times B\Gamma$ incommensurabilia sunt [prop. XI]. uerum AB^2 et $AB^2 + B\Gamma^2$ commensurabilia sunt [prop. XV], et $AB \times B\Gamma$, $2 AB \times B\Gamma$ commensurabilia [prop. VI]. et quoniam est [II, 7]

$$AB^2 + B\Gamma^2 = 2 AB \times B\Gamma + \Gamma A^2,$$

etiam $A\Gamma^2$, $AB^2 + B\Gamma^2$ incommensurabilia sunt [prop. XIII, XVI]. uerum $AB^2 + B\Gamma^2$ rationale est. ergo

mg. m. 2 B. 17. τῷ] τό corr. ex τά m. 1 b. τό] τῷ b.
 18. BΓ] e corr. V. καὶ ἐπειδήπερ τά] τὰ ἄρα Theon (BFVb).
 19. ἴσα] ἀσύμμετρα Theon (BFVb). μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΑ] om. Theon (BFVb). 20. καὶ] in ras. V. σύμμετρα B, corr. m. 2. 21. Post BΓ add. Theon: ἐπεὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AB, BΓ ἴσα ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν AB, BΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ (τοῦ add. V) ΓΑ (BFVb).

ΒΓ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ· καλείσθω δὲ ἀποτομή.
ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

οδ'.

Ἐὰν ἀπὸ μέσης μέση ἀφαιρεθῇ δυνάμει
5 μόνον σύμμετρος οὕσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς
ὅλης ῥητὸν περιέχουσα, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν·
καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομή πρώτη.

Ἀπὸ γὰρ μέσης τῆς ΑΒ μέση ἀφηγήσθω ἡ ΒΓ
δυνάμει μόνον σύμμετρος οὕσα τῇ ΑΒ, μετὰ δὲ τῆς
10 ΑΒ ῥητὸν ποιοῦσα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· λέγω, ὅτι
ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν· καλείσθω δὲ μέσης ἀπο-
τομή πρώτη.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ ΑΒ, ΒΓ μέσαι εἰσὶν, μέσα ἐστὶ καὶ
τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ῥητὸν δὲ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ,
15 ΒΓ· ἀσύμμετρα ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δις ὑπο
τῶν ΑΒ, ΒΓ· καὶ λοιπῷ ἄρα τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμ-
μετρόν ἐστι τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἐπεὶ κἂν τὸ
ὅλον ἐνὶ αὐτῶν ἀσύμμετρον ᾗ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μερέθῃ
ἀσύμμετρα ἐσται. ῥητὸν δὲ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ·
20 ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ·
καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομή πρώτη.

οε'.

Ἐὰν ἀπὸ μέσης μέση ἀφαιρεθῇ δυνάμει
μόνον σύμμετρος οὕσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς

1. ἄλογον in ras. V. ἐστὶν ἄρα b. ἐστὶν ἡ ΑΓ] καὶ
τὸ ἀπὸ τῶν ΑΓ· ὥστε καὶ ἡ ΑΓ in ras. m. 2 V. 2. ὅπερ
ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 3. οδ'] corr. ex οε' F.

6. περιέχῃ Theon (BVb, περιέχει F). ἐστὶ PBV, comp.
Fb. 7. μέση V (seq. ras. 1 litt.) et P, corr. m. rec. 10.
ποιοῦσα] P F V b, περιέχουσα B et mg. m. 1 F b, add. γρ. Post
ὅτι add. καὶ b, m. 2 F. 11. ἐστὶ BV, comp. F. καλεῖται P.

AF irrationalis est [def. 4]; uocetur autem apotome; quod erat demonstrandum.

LXXIV.

Si a recta media aufertur media potentia tantum commensurabilis toti, cum tota autem spatium rationale comprehendens, reliqua irrationalis est; uocetur autem prima apotome mediae.

A media enim AB media auferatur $B\Gamma$ potentia tantum rectae AB commensurabilis, cum AB autem spatium rationale comprehendens $AB \times B\Gamma$ [prop. XXVII]. dico, reliquam AF irrationalem esse, uocetur autem prima apotome mediae.

$\left\{ \begin{array}{l} B \\ \\ \Gamma \\ \\ A \end{array} \right.$ nam quoniam AB , $B\Gamma$ mediae sunt, etiam AB^2 , $B\Gamma^2$ media sunt. uerum $2AB \times B\Gamma$ rationale est. itaque $AB^2 + B\Gamma^2$ et $2AB \times B\Gamma$ incommensurabilia sunt. quare etiam $2AB \times B\Gamma$ reliquo [cfr. II, 7] AF^2 incommensurabile est, quoniam, si totum alterutri incommensurabile est, etiam magnitudines ab initio sumptae incommensurabiles erunt [prop. XVI]. uerum $2AB \times B\Gamma$ rationale est. quare AF^2 irrationale est. ergo AF irrationalis est [def. 4]; uocetur autem prima apotome mediae.

LXXV.

Si a media media aufertur potentia tantum toti commensurabilis, cum tota autem spatium medium

$\mu\acute{\epsilon}\sigma\eta$ seq. ras. 1 litt. V, supra scr. ς F. 13. $\epsilon\lambda\sigma\iota$ V, comp. Fb. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$] m. 2 F. 14. Ante $\delta\acute{\epsilon}$ del. $\tau\acute{o}$ P. 15. $\acute{\alpha}\rho\alpha$ $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ b. $\tau\tilde{\omega}$ — 16. $B\Gamma$] mg. m. 1 P. 17. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$] corr. ex $\acute{\alpha}\rho\alpha$ F. $\tau\acute{\omega}\nu$] om. P. 21. $\delta\acute{\epsilon}$] $\delta\eta$ P. $\mu\acute{\epsilon}\sigma\eta$ Fb. 22. $\omicron\varsigma$ F, sed corr.

ὅλης μέσον περιέχουσα, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν·
καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομή δευτέρα.

Ἀπὸ γὰρ μέσης τῆς AB μέση ἀφηγήσθω ἡ $ΓB$
δυνάμει μόνον σύμμετρος οὕσα τῇ ὅλῃ τῇ AB , μετὰ
5 δὲ τῆς ὅλης τῆς AB μέσον περιέχουσα τὸ ὑπὸ τῶν
 $AB, BΓ$. λέγω, ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ $ΑΓ$ ἄλογός ἐστιν· κα-
λείσθω δὲ μέσης ἀποτομή δευτέρα.

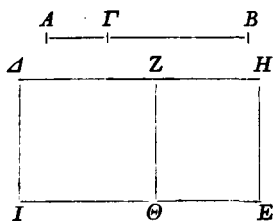
Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ $ΔΙ$, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν
 $AB, BΓ$ ἴσον παρὰ τὴν $ΔΙ$ παραβεβλήσθω τὸ $ΔΕ$
10 πλάτος ποιοῦν τὴν $ΔΗ$, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν $AB, BΓ$
ἴσον παρὰ τὴν $ΔΙ$ παραβεβλήσθω τὸ $ΔΘ$ πλάτος
ποιοῦν τὴν $ΔΖ$. λοιπὸν ἄρα τὸ $ΖΕ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ
τῆς $ΑΓ$. καὶ ἐπεὶ μέσα καὶ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν
 $AB, BΓ$, μέσον ἄρα καὶ τὸ $ΔΕ$. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν
15 $ΔΙ$ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν $ΔΗ$. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν
ἡ $ΔΗ$ καὶ ἀσύμμετρος τῇ $ΔΙ$ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον
ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν $AB, BΓ$, καὶ τὸ δις ἄρα ὑπὸ τῶν
 $AB, BΓ$ μέσον ἐστίν. καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ $ΔΘ$. καὶ
τὸ $ΔΘ$ ἄρα μέσον ἐστίν. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν $ΔΙ$
20 παραβέβληται πλάτος ποιοῦν τὴν $ΔΖ$. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν
ἡ $ΔΖ$ καὶ ἀσύμμετρος τῇ $ΔΙ$ μήκει. καὶ ἐπεὶ αἱ $AB,$

1. περιέχῃ Theon (BFb, περιέχει F). ἐστὶ BV, comp. Fb. 2. μέση V, P (corr. m. rec.), F (supra scr. σ m. 2). 3. μέση] supra scr. m. 1 V. ΓB] e corr. V. 5. δὲ τῆς] δὲ P. 6. ὅτι ἡ] ὅτι καὶ V: ἐστὶ PBV, comp. b. 7. μέση P (corr. m. rec.), F (corr. m. 2), e corr. V. 8. ΔΚ b, et FV, sed corr. 9. ΔΙ] I in ras. B, ΔΚ FVb (in V corr.). ΔΕ] E in ras. B. 10. ΔΗ] corr. ex HΔ m. 2 F. 11. ΔΚ FVb, sed corr. Ante ΔΘ del. ΔΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ (corr. ex HΔ m. 2), τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB, BΓ (supra scr. m. 2) ἴσον παρὰ τὴν ΔΚ (corr. ex ΔΙ) παραβεβλήσθω F. 12. ΔΖ] Z in ras. F. ΖΕ] ΖΘ F. ἐστὶ] om. F. 13. καὶ σύμμετρα] om. Theon (BFVb). ἐστὶν P. 14. καί] (alt.) postea ins. m. 1 F. 15. ΔΙ] ΔΚ FVb, sed corr. παράκειται] om. b. Ante ΔΗ del. Ζ F. 16. Post ΔΗ del. Ζ F. ΔΙ]

comprehendens, reliqua irrationalis est; uocetur autem mediae apotome secunda.

A media enim AB media auferatur ΓB potentia tantum toti AB commensurabilis, cum tota autem AB medium comprehendens $AB \times B\Gamma$ [prop. XXVIII]. dico, reliquam $A\Gamma$ irrationalem esse, uocetur autem mediae apotome secunda.

ponatur enim rationalis ΔI , et quadratis $AB^2 + B\Gamma^2$ aequale rectae ΔI adplicetur ΔE latitudinem efficiens



ΔH , spatio autem $2 AB \times B\Gamma$ aequale rectae ΔI adplicetur $\Delta \Theta$ latitudinem efficiens ΔZ . itaque reliquum $ZE = A\Gamma^2$ [II, 7]. et quoniam $AB^2, B\Gamma^2$ media sunt et commensurabilia, etiam ΔE medium est.¹⁾

et rectae rationali ΔI adplicatum est latitudinem efficiens ΔH . itaque ΔH rationalis est et rectae ΔI longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. rursus quoniam $AB \times B\Gamma$ medium est, etiam $2 AB \times B\Gamma$ medium est [prop. XXIII coroll.]. et est $= \Delta \Theta$. itaque etiam $\Delta \Theta$ medium est. et rationali ΔI adplicatum est latitudinem efficiens ΔZ . quare ΔZ rationalis est et rectae ΔI longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. et quoniam $AB, B\Gamma$ potentia tantum com-

1) Sequitur ex prop. XV et prop. XXIII coroll. ceterum idem tacite usurpatur p. 226, 13 sq.

ΔK FVb, sed corr. 17. καὶ τό — 18. $B\Gamma$] in ras. F. 18. ἐστίν] ἐστὶ PBV, comp. b; cum proximis sustulit rep. in F.

19. ἐστὶ PBV, comp. Fb. ΔK FVb, sed corr. 20. παρὰ-
νειται F. ΔH F, corr. m. 2. 21. ΔH F. ΔI] ΔK b,
et V, sed corr.; corr. ex ΔI m. 2 F.

$BΓ$ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα
 ἐστὶν ἡ AB τῇ $BΓ$ μήκει· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ
 ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τῷ ὑπὸ τῶν $AB, BΓ$. ἀλλὰ
 τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AB σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν AB ,
 5 $BΓ$, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν $AB, BΓ$ σύμμετρόν ἐστι τὸ δις
 ὑπὸ τῶν $AB, BΓ$ · ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ δις
 ὑπὸ τῶν $AB, BΓ$ τοῖς ἀπὸ τῶν $AB, BΓ$. ἴσον δὲ
 τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν $AB, BΓ$ τὸ ΔE , τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν
 $AB, BΓ$ τὸ $\Delta\Theta$ · ἀσύμμετρον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ΔE τῷ
 10 $\Delta\Theta$. ὥς δὲ τὸ ΔE πρὸς τὸ $\Delta\Theta$, οὕτως ἡ $H\Delta$ πρὸς
 τὴν ΔZ · ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ $H\Delta$ τῇ ΔZ . καὶ
 εἰσιν ἀμφοτέραι ρηταί· αἱ ἄρα $H\Delta, \Delta Z$ ρηταί εἰσι
 δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ZH ἄρα ἀποτομή ἐστίν.
 ρητὴ δὲ ἡ ΔI · τὸ δὲ ὑπὸ ρητῆς καὶ ἀλόγου περι-
 15 εχόμενον ἄλογόν ἐστίν, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός
 ἐστίν. καὶ δύναται τὸ ZE ἢ $ΑΓ$ · ἡ $ΑΓ$ ἄρα ἄλογός
 ἐστίν· καλεῖσθω δὲ μέσης ἀποτομῇ δευτέρᾳ. ὅπερ
 εἶδει δεῖξαι.

ος'.

- 20 Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ δυνάμει
 ἀσύμμετρος οὕσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης
 ποιούσα τὰ μὲν ἀπ' αὐτῶν ἅμα ρητόν, τὸ δ' ὑπ'
 αὐτῶν μέσον, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστίν· καλεῖσθω
 δὲ ἐλάσσων.
 25 Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς AB εὐθεῖα ἀφηρήσθω ἡ $BΓ$

1. $BΓ$] $ΓB$ F. ἀσύμμετρος] σύμμετρος b. 2. καὶ
 τῇ P. 3. τῆς AB] om. b. 4. ἐστίν P. 5. τῷ] corr. ex
 τὸ m. 1 F. 6. ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ (om. V) τὰ ἀπὸ τῶν $AB, BΓ$
 τῷ δις ὑπὸ τῶν $AB, BΓ$ Theon (BFVb). 7. ὑπὸ] ὑ- in ras. m.
 1 P. ἴσον — 8. $BΓ$] mg. m. 2 B. 8. τό] τῷ F. 9. ἐστὶ]
 om. BFVb. 11. $H\Delta$] ΔH P. ΔZ] corr. ex $Z\Delta$ V. 12.
 εἰσι] εἰσιν B. 13. ἐστὶ BV, comp. Fb. 14. ΔI] ΔK FVb,

mensurabiles sunt, AB , $B\Gamma$ longitudine incommensurabiles sunt. itaque etiam AB^2 , $AB \times B\Gamma$ incommensurabilia sunt [prop. XXI lemma, prop. XI]. uerum AB^2 , $AB^2 + B\Gamma^2$ commensurabilia sunt [prop. XV] et $AB \times B\Gamma$, $2 AB \times B\Gamma$ commensurabilia [prop. VI]. itaque $2 AB \times B\Gamma$ et $AB^2 + B\Gamma^2$ incommensurabilia sunt [prop. XIII]. est autem $\Delta E = AB^2 + B\Gamma^2$, $\Delta\Theta = 2 AB \times B\Gamma$. itaque ΔE , $\Delta\Theta$ incommensurabilia sunt. uerum $\Delta E : \Delta\Theta = H\Delta : \Delta Z$ [VI, 1]. itaque $H\Delta$, ΔZ incommensurabiles sunt [prop. XI]. et utraque rationalis est. itaque $H\Delta$, ΔZ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. quare ZH apotome est [prop. LXXIII]. uerum ΔI rationalis est. spatium autem recta rationali et irrationali comprehensum irrationale est [prop. XX], et recta ei aequalis quadrata irrationalis est. et $A\Gamma^2 = ZE$. ergo $A\Gamma$ irrationalis est [def. 4]; uocetur autem mediae apotome secunda; quod erat demonstrandum.

LXXVI.

Si a recta aufertur recta potentia incommensurabilis toti et cum tota efficiens summam quadratorum rationalem, rectangulum autem medium, reliqua irrationalis est; uocetur autem minor.


A recta enim AB recta auferatur $B\Gamma$ potentia toti incom-

sed corr. 15. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ PV, comp. Fb. $\acute{\alpha}\rho\alpha$ $\alpha\upsilon\tau\acute{o}$ Theon (BFVb).

16. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$] $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ PBV, comp. Fb. η $A\Gamma$] (alt.) m. 2 F.

17. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ PBV, comp. Fb. $\delta\acute{\epsilon}$] $\delta\acute{\epsilon}$ $\acute{\epsilon}\kappa$ F. $\mu\acute{\epsilon}\sigma\eta$ P, et V, corr. m. 2. $\acute{\omicron}\pi\epsilon\rho$ $\acute{\epsilon}\delta\epsilon\iota$ $\delta\epsilon\iota\chi\alpha\iota$] comp. P, om. BFVb. 22.

$\delta\acute{\epsilon}$ F. 23. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ BV, comp. Fb.

δυνάμει ἀσύμμετρος οὕσα τῇ ὅλῃ ποιοῦσα τὰ προκείμενα. λέγω, ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ $ΑΓ$ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΒ$,
 5 $ΒΓ$ τετραγώνων ῥητόν ἐστιν, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν $ΑΒ$,
 $ΒΓ$ μέσον, ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$
 τῷ δις ὑπὸ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ καὶ ἀναστρέψαντι λοιπῷ
 τῷ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$.
 ῥητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ
 10 τῆς $ΑΓ$ ἄλογος ἄρα ἡ $ΑΓ$ καλείσθω δὲ ἐλάσσων.
 ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

οξ'.

Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ δυνάμει
 ἀσύμμετρος οὕσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης
 15 ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν
 τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν ῥητόν,
 ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν· καλείσθω δὲ ἡ μετὰ ῥητοῦ
 μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς $ΑΒ$ εὐθεῖα ἀφηρήσθω ἡ $ΒΓ$
 20 δυνάμει ἀσύμμετρος οὕσα τῇ $ΑΒ$ ποιοῦσα τὰ προκείμενα· λέγω, ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ $ΑΓ$ ἄλογός ἐστιν ἡ προειρημένη.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν
 $ΑΒ$, $ΒΓ$ τετραγώνων μέσον ἐστίν, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν

1. οὕσα ἀσύμμετρος V. τὰ προκείμενα] μετὰ τῆς ὅλης
 τῆς $ΑΒ$ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ ἅμα ῥητόν,
 τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ ἅμα μέσον Theon (BFVb). 4.
 μέν] m. 2 V. $ΑΒ$] B in ras. m. 2 P. 5. $ΒΓ$] $ΓΒ$ P.
 τετραγώνων] $\square$ eras. V. ἐστι PBV, comp. Fb. δὲ δις]
 δ' V. 6. τῶν] m. rec. P. $ΑΒ$] in ras. m. 1 P. 8.
 ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ (m. 2 F) τῷ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$
 (haec 4 uerba om. F) Theon (BFVb). 9. Mg. γρ. ῥητόν δὲ

mensurabilis et proposita efficiens [prop. XXXIII]. dico, reliquam AG irrationalem esse minorem, quae uocatur.

nam quoniam $AB^2 + BG^2$ rationale est, et $2AB \times BG$ medium, incommensurabilia sunt $AB^2 + BG^2$ et $2AB \times BG$. et e contrario reliquo [II, 7] AG^2 incommensurabile est $AB^2 + BG^2$ [prop. XVI]. uerum $AB^2 + BG^2$ rationale est. itaque AG^2 irrationale est. ergo AG irrationalis est [def. 4]; uocetur autem minor; quod erat demonstrandum.

LXXVII.

Si a recta aufertur recta potentia incommensurabilis toti, cum tota autem efficiens summam quadratorum mediam, duplum autem rectangulum rationale, reliqua irrationalis est; uocetur autem recta cum rationali totum medium efficiens.

A recta enim AB auferatur recta BG potentia rectae AB incommensurabilis proposita efficiens [prop. XXXIV]. dico, reliquam AG irrationalem esse, quam significauimus.

nam quoniam $AB^2 + BG^2$ medium est, $2AB \times BG$

τὸ συγκεῖμενον Fb. ἄρα] ἐστὶ P. 10. ἄλογος — AG] om. P.
 11. ὅπερ εἶδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 12. σὴ' F. 17.
 ἐστὶ PBV, comp. Fb. δὲ ἢ] δέ BFVb. Supra μετὰ scr. ἀπό
 comp. m. 1 b. 19. AB] corr. ex AG m. 2 F. 20. ἀσύμ-
 μετρος οὕσα δυνάμει V. τῇ ὅλῃ τῇ Theon (BFVb). τὰ
 προκειμένα] τὸ μὲν συγκεῖμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB , BG τε-
 τραγώνων μέσον, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB , BG ῥητόν Theon
 (BFVb). 21. ἐστὶ BV, comp. F. ἢ προειρημένη] καλεῖσθω
 (καλεῖται B) δὲ ἢ (om. Vb) μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα
 Theon (BFVb). 24. ἐστὶ PBV, comp. Fb.

AB, BΓ ῥητόν, ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AB, BΓ τῷ δις ὑπὸ τῶν AB, BΓ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ δις ὑπὸ τῶν AB, BΓ. καὶ ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AB, BΓ ῥητόν· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΓ ἄλογόν ἐστιν· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ· κα-
λείσθω δὲ ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.
ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ση'.

Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ δυνάμει
 10 ἀσύμμετρος οὐσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης
 ποιοῦσα τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν
 τετραγώνων μέσον τό τε δις ὑπ' αὐτῶν μέσον
 καὶ ἔτι τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα ἀσίμμετρα
 τῷ δις ὑπ' αὐτῶν, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν· κα-
 15 λείσθω δὲ ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς *AB* εὐθεῖα ἀφηρήσθω ἡ
BΓ δυνάμει ἀσύμμετρος οὐσα τῇ *AB* ποιοῦσα τὰ προ-
 κείμενα· λέγω, ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ *ΑΓ* ἄλογός ἐστιν ἡ κα-
 λουμένη ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.
 20 Ἐκλείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ *ΔΙ*, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν
AB, BΓ ἴσον παρὰ τὴν *ΔΙ* παραβεβλήσθω τὸ *ΔΕ*
πλάτος ποιοῦν τὴν *ΔΗ*, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν *AB, BΓ*
ἴσον ἀφηρήσθω τὸ ΔΘ [*πλάτος* ποιοῦν τὴν *ΔΖ*].
 λοιπὸν ἄρα τὸ *ΖΕ* ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς *ΑΓ*· ὥστε

2. *BΓ* τετράγωνα Bfb. *BΓ*] B m. 2 V. καί] om. P.

3. σύμμετρον F. 4. καὶ — δις] ῥητόν δὲ τό V. ῥητόν]
 om. V. 6. δὲ ἡ] δέ b. 7. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. BFVb,
 comp. P. 8. οὐδ' F. 10. δέ] om. P. 11. τε] in ras. V,
 μὲν Bfb. ἀπ'] ἀπὸ τῶν V. 12. τε] in ras. V, δέ Bfb.

13. καὶ ἔτι] ἔτι τε Theon (BFVb). 14. ἡ] λέγω ὅτι ἡ V.
 ἐστὶ BV, comp. Fb. 15. ἡ] om. FVb. 17. τὰ προκεί-
 μενα] τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν *AB, BΓ* τετραγώνων
 μέσον, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν *AB, BΓ* μέσον ἔτι τε (om. V, m. 2 F)

A autem rationale, $AB^2 + B\Gamma^2$ et $2AB \times B\Gamma$ incommensurabilia sunt. itaque etiam reliquum [II, 7] $A\Gamma^2$ et $2AB \times B\Gamma$ incommensurabilia sunt [prop. XVI]. et $2AB \times B\Gamma$ rationale est. itaque $A\Gamma^2$
 Γ irrationale est. ergo $A\Gamma$ irrationalis est [def. 4];
 B uocetur autem recta cum rationali totum medium efficiens; quod erat demonstrandum.

LXXVIII.

Si a recta aufertur recta potentia incommensurabilis toti, cum tota autem efficiens et summam quadratorum mediam et duplum rectangulum medium praetereaue summam quadratorum duplo rectangulo incommensurabilem, reliqua irrationalis est; uocetur autem recta cum medio totum medium efficiens.

A recta enim AB recta auferatur $B\Gamma$ potentia rectae AB incommensurabilis proposita efficiens [prop. XXXV]. dico, reliquam $A\Gamma$ irrationalem esse, quae uocetur recta cum medio totum medium efficiens.

ponatur enim rationalis ΔI , et quadratis $AB^2 + B\Gamma^2$ aequale rectae ΔI adplicetur ΔE latitudinem efficiens

Δ	Z	H
I	Θ	E

ΔH , spatio autem $2AB \times B\Gamma$ aequale auferatur $\Delta\Theta$. itaque reliquum $ZE = A\Gamma^2$ [II, 7]. quare $A\Gamma$ spatio ZE quadrata aequalis est. et quoniam AB^2

A

Γ

B

τὰ ἀπὸ τῶν $AB, B\Gamma$ ἀσύμμετρα τῷ δις ὑπὸ τῶν $AB, B\Gamma$ Theon (BFVb). 18. ἐστὶ BV , comp. F. ἡ καλουμένη] καλεῖσθαι δὲ Theon (BFVb). 19. μέσον] supra scr. F. 20. ΔI] ΔK in ras. V, item lin. 21. ἴσον] ἴσον τὸ ΔE V. τήν] corr. ex ῥητήν m. 1 P, ῥητήν τήν V, m. 2 B. τὸ ΔE] om. V. 23. πλάτος — ΔZ] om. P.

ἡ $ΑΓ$ δύναται τὸ $ΖΕ$. καὶ ἐπεὶ το συγκείμενον ἐκ
 τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ τετραγώνων μέσον ἐστὶ καὶ
 ἐστὶν ἴσον τῷ $ΔΕ$, μέσον ἄρα [ἐστὶ] τὸ $ΔΕ$. καὶ
 παρὰ ρητὴν τὴν $ΔΙ$ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν $ΔΗ$.
 5 ρητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $ΔΗ$ καὶ ἀσύμμετρος τῇ $ΔΙ$ μήκει.
 πάλιν, ἐπεὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ μέσον ἐστὶ καὶ
 ἐστὶν ἴσον τῷ $ΔΘ$, τὸ ἄρα $ΔΘ$ μέσον ἐστίν. καὶ παρὰ
 ρητὴν τὴν $ΔΙ$ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν $ΔΖ$.
 ρητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $ΔΖ$ καὶ ἀσύμμετρος τῇ $ΔΙ$ μήκει.
 10 καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ τῷ δις
 ὑπὸ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ $ΔΕ$ τῷ
 $ΔΘ$. ὥς δὲ τὸ $ΔΕ$ πρὸς τὸ $ΔΘ$, οὕτως ἐστὶ καὶ ἡ
 $ΔΗ$ πρὸς τὴν $ΔΖ$. ἀσύμμετρος ἄρα ἡ $ΔΗ$ τῇ $ΔΖ$.
 καὶ εἰσιν ἀμφοτέραι ρηταί· αἱ $ΗΔ$, $ΔΖ$ ἄρα ρηταί
 15 εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ
 $ΖΗ$. ρητὴ δὲ ἡ $ΖΘ$. τὸ δὲ ὑπὸ ρητῆς καὶ ἀποτομῆς
 περιεχόμενον [ὀρθογώνιον] ἄλογόν ἐστιν, καὶ ἡ δυνα-
 μένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν. καὶ δύναται τὸ $ΖΕ$ ἡ $ΑΓ$.
 ἡ $ΑΓ$ ἄρα ἄλογός ἐστιν· καλεῖσθω δὲ ἡ μετὰ μέσου
 20 μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

οθ'.

Τῇ ἀποτομῇ μία [μόνον] προσαρμόζει εὐθεῖα
 ρητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ.

1. $ΑΓ$] $ΑΓ$ μεῖζον b. καί] m. 2 F. 3. ἐστὶ] om. P.
 4. $ΔΙ$] $ΔΚ$ in ras. V, item lin. 5, 8, 9; $ΔΗ$ P. 5. σύμμετρος
 B, corr. m. 2. 7. τῷ] corr. ex τό m. 1 F. ἐστίν] ἐστὶ PBV,
 comp. Fb. 9. ἐστίν PB. καί] (prius) om. B. 10. ἀσύμμετρος F.
 ἐστὶν P. 11. τό] corr. ex τῷ m. 2 F. τῷ] corr. ex τό m.
 2 F. 12. $ΔΘ$] (alt.) $Θ$, add. Z m. 2, F. ἐστίν PB. καί]
 om. P. 13. τήν] om. P. $ΔΗ$] $Δ$ in ras. V, $ΗΔ$ Fb. 14.
 ἄρα] m. 2 F. 15. εἰσιν P. 16. $ΖΘ$] $ΔΚ$ in ras. V. δέ] δ' P.

+ $B\Gamma^2$ medium est et = ΔE , ΔE medium est. et rationali ΔI adplicatum est latitudinem efficiens ΔH . itaque ΔH rationalis est et rectae ΔI longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. rursus quoniam $2AB \times B\Gamma$ medium est et = $\Delta\Theta$, $\Delta\Theta$ medium est. et rationali ΔI adplicatum est latitudinem efficiens ΔZ . itaque ΔZ rationalis est et rectae ΔI longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. et quoniam $AB^2 + B\Gamma^2$ et $2AB \times B\Gamma$ incommensurabilia sunt, etiam ΔE , $\Delta\Theta$ incommensurabilia sunt. uerum $\Delta E : \Delta\Theta = \Delta H : \Delta Z$ [VI, 1]. itaque ΔH , ΔZ incommensurabiles sunt [prop. XI]. et utraque rationalis est. itaque $H\Delta$, ΔZ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. quare ZH apotome est [prop. LXXIII]. $Z\Theta$ autem rationalis est. spatium autem recta rationali et apotome comprehensum irrationale est [prop. XX], et recta ei potentia aequalis irrationalis est. est autem $A\Gamma^2 = ZE$. ergo $A\Gamma$ irrationalis est; uocetur autem recta cum medio totum medium efficiens. quod erat demonstrandum.

LXXIX.

Apotomae una tantum congruit recta rationalis potentia tantum toti commensurabilis.

17. ὀρθογώνιον] om. P. ἔστι PBV, comp. Fb. 18. ἔστι PBV, comp. Fb. 19. ἔστι BV, comp. Fb. ἦ] om. P.
 20. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 21. οἱ] corr. ex π' m. 2 F. 22. μόνον] om. P, μόνη V et F supra scr. ov m. 1.

Ἐστω ἀποτομή ἡ AB , προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ $BΓ$. αἱ $ΑΓ$, $ΓΒ$ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· λέγω, ὅτι τῇ AB ἑτέρα οὐ προσαρμόζει ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὕσα τῇ ὅλῃ.

- 5 Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ $BΔ$. καὶ αἱ $ΑΔ$, $ΔΒ$ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἐπεὶ, ὃ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$. τῷ γὰρ αὐτῷ τῷ ἀπὸ τῆς AB ἀμφοτέρω ὑπερέχει· ἐναλλάξ ἄρα, ὃ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$, τούτῳ ὑπερέχει [καὶ] τὸ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$. τὰ δὲ ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ ὑπερέχει ῥητῷ· ῥητὰ γὰρ ἀμφοτέρω.
- 10 καὶ τὸ δις ἄρα ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ ὑπερέχει ῥητῷ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· μέσα γὰρ ἀμφοτέρω, μέσον δὲ μέσον οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ. τῇ ἄρα AB ἑτέρα οὐ προσαρμόζει ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὕσα τῇ ὅλῃ.
- 15 Μία ἄρα μόνῃ τῇ ἀποτομῇ προσαρμόζει ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὕσα τῇ ὅλῃ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

π'.

Τῇ μέσῃς ἀποτομῇ πρώτη μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος

3. ῥητῇ] m. 2 F. 5. προσαρμοζέσθω b. καί] om. B.
6. $ΔΒ$] $BΔ$ F. 9. τῷ ἀπὸ τῆς] τό F. 10. AB — ὑπερέχει] ἀπ' ἀμφοτέρων ὑπεροχῆς τῷ ἀπὸ τῆς AB BFb; in B del.
m. 2, mg. τῷ γὰρ αὐτῷ — ὑπερέχει m. 2. ὃ] ὡς b. 11. $ΑΔ$, $ΔΒ$] $ΑΓ$, $ΓΒ$ F, corr. m. 2. ἀπό — 12. ὑπερέχει] in ras. F. 12. καί] om. P. $ΔΒ$] m. 2 F. 14. ῥητῇ] corr. ex ῥητῇ V et m. rec. B. Post γὰρ add. εἰσιν FVb, ἐστὶν B. 15. τό] corr. ex τῷ m. 1 F. ἄρα] om. V. 17. Post γὰρ add. εἰσιν Vb,

^A Sit AB apotome, ei autem congruens $B\Gamma$.
^B itaque $A\Gamma$, ΓB rationales sunt potentia tantum
 commensurabiles [prop. LXXIII]. dico, nullam
^A aliam rationalem potentia tantum toti commensurabilem rectae AB congruere.

nam si fieri potest, congruat $B\Delta$. itaque etiam
^A $A\Delta$, ΔB rationales sunt potentia tantum commensurabiles [prop. LXXIII]. et quoniam
 $(A\Delta^2 + \Delta B^2) \div 2 A\Delta \times \Delta B = (A\Gamma^2 + \Gamma B^2) \div 2 A\Gamma \times \Gamma B$
 (nam utrumque excedit eodem spatio AB^2 [II, 7]), permutando erit

$(A\Delta^2 + \Delta B^2) \div (A\Gamma^2 + \Gamma B^2) = 2 A\Delta \times \Delta B \div 2 A\Gamma \times \Gamma B$.
 uerum $A\Delta^2 + \Delta B^2$ excedit $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ spatio rationali;
 nam utraque rationalia sunt. itaque etiam $2 A\Delta \times \Delta B$
 excedit $2 A\Gamma \times \Gamma B$ spatio rationali; quod fieri non
 potest; nam utrumque medium est [prop. XXI], medium
 autem non excedit medium spatio rationali [prop. XXVI].
 itaque rectae AB nulla alia rationalis potentia tantum
 toti commensurabilis congruit.

Ergo una tantum recta rationalis potentia tantum
 toti commensurabilis apotomae congruit; quod erat
 demonstrandum.

LXXX.

Mediae apotomae primae una tantum congruit recta
 media potentia tantum toti commensurabilis, cum tota
 autem spatium rationale comprehendens.

ἔστιν BF. 18. τῇ] corr. ex τὰ m. 2 F. ὁητῇ V. 20.
 μία — 21. ὁλῇ] bis F, sed corr. 20. μόνον BFb. προσ-
 αρμόσει BFVb. 21. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb.
 22. πα' F, et sic deinceps. 23. μέσης] corr. ex μέση m.
 rec. P, μέση BFV, μέση b. μία] om. b.

οὐσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα.

Ἔστω γὰρ μέσης ἀποτομῇ πρώτη ἡ AB , καὶ τῇ AB προσαρμोजέτω ἡ $BΓ$. αἱ $ΑΓ$, $ΓB$ ἄρα μέσαι εἰσὶ
 5 δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι τὸ ὑπὸ
 τῶν $ΑΓ$, $ΓB$. λέγω, ὅτι τῇ AB ἑτέρα οὐ προσαρμोजει
 μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὐσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ
 τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμोजέτω καὶ ἡ $ΔB$. αἱ ἄρα
 10 $ΑΔ$, $ΔB$ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν
 περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔB$. καὶ ἐπεὶ, ὃ ὑπερέχει
 τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔB$ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔB$,
 τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓB$ τοῦ δις ὑπὸ
 τῶν $ΑΓ$, $ΓB$. τῷ γὰρ αὐτῷ [πάλιν] ὑπερέχουσι τῷ
 15 ἀπὸ τῆς AB . ἐναλλάξ ἄρα, ὃ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν
 $ΑΔ$, $ΔB$ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓB$, τούτῳ ὑπερέχει καὶ
 τὸ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔB$ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓB$.
 τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔB$ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$,
 $ΓB$ ὑπερέχει ῥητῷ. ῥητὰ γὰρ ἀμφοτέρω. καὶ τὰ ἀπὸ
 20 τῶν $ΑΔ$, $ΔB$ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓB$ [τετραγώνων]
 ὑπερέχει ῥητῷ. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. μέσα γάρ ἐστιν
 ἀμφοτέρω, μέσον δὲ μέσον οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ.

Τῇ ἄρα μέσης ἀποτομῇ πρώτῃ μίᾳ μόνον προσ-
 αρμोजει εὐθεῖα μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὐσα
 25 τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα. ὅπερ ἔδει
 δεῖξαι.

3. μέση BVb, om. F. 4. προσαρμोजει F, corr. m. 2. αἱ] corr. ex εἰ m. 1 F. ἄρα ΑΓ, ΓB BFVb. εἰσὶν B. 5. σύμμετρος V, corr. m. 1. 6. προσαρμोजει V. 8. περιέχουσαι V, corr. m. 1. 10. ΑΔ] m. 2 F. εἰσὶν LB. 12. τὰ] corr. ex τό m. 2 F. τοῦ] τῷ F. ΑΓ, ΓB F. 13. ὑπερέχει b, corr. m. 1. 14. τῷ] corr. ex τό V. πάλιν] om. P. ὑπερ-

$\left\{ \begin{array}{l} A \\ B \\ \Gamma \\ \Delta \end{array} \right.$ Sit enim AB mediae apotome prima, et rectae AB congruat $B\Gamma$. itaque $A\Gamma$, ΓB mediae sunt potentia tantum commensurabiles spatium rationale comprehendentes $A\Gamma \times \Gamma B$ [prop. LXXIV]. dico, rectae AB nullam aliam mediam potentia tantum tota commensurabilem congruere cum tota spatium rationale comprehendentem.

nam si fieri potest, etiam ΔB congruat. $\Delta\Delta$, ΔB igitur mediae sunt potentia tantum commensurabiles spatium rationale comprehendentes $\Delta\Delta \times \Delta B$ [prop. LXXIV]. et quoniam est

$(\Delta\Delta^2 + \Delta B^2) \div 2 \Delta\Delta \times \Delta B = (A\Gamma^2 + \Gamma B^2) \div 2 A\Gamma \times \Gamma B$
 (nam eodem spatio AB^2 excedunt [II, 7]), permutando erit

$(\Delta\Delta^2 + \Delta B^2) \div (A\Gamma^2 + \Gamma B^2) = 2 \Delta\Delta \times \Delta B \div 2 A\Gamma \times \Gamma B$.
 uerum $2 \Delta\Delta \times \Delta B$ excedit $2 A\Gamma \times \Gamma B$ spatio rationali; nam utrumque rationale est. itaque etiam $\Delta\Delta^2 + \Delta B^2$ excedit $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ spatio rationali; quod fieri non potest; nam utraque media sunt [prop. XXIV], medium autem non excedit medium spatio rationali [prop. XXVI].

Ergo mediae apotomae primae una tantum recta media congruit potentia tantum toti commensurabilis, cum tota autem spatium rationale comprehendens; quod erat demonstrandum.

έχουσιν LBF. τῶ] τὰ b. 15. τὰ] καὶ τὰ LB. 17. τό] τὰ P. 18. τὸ δέ — 19. ΓB] καὶ V. 20. τετραγώνων] om. P. 21. ὑπερέξει P, ξ supra scr. B. 22. δέ] γάρ L. 23. μέση uel μέση LBFVb. 25. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. LBFVb.

πα'.

Τῇ μέσῃς ἀποτομῇ δευτέρᾳ μίᾳ μόνον προσ-
αρμοζέει εὐθεῖα μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος
τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχουσα.

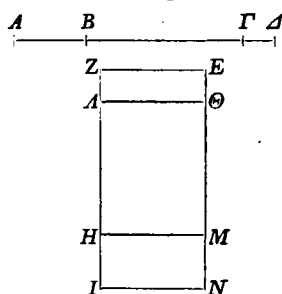
- 5 Ἔστω μέσῃς ἀποτομῇ δευτέρᾳ ἡ AB καὶ τῇ AB
προσαρμοζούσα ἡ $BΓ$. αἱ ἄρα $ΑΓ$, $ΓΒ$ μέσαι εἰσὶ
δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι τὸ ὑπὸ
τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$. λέγω, ὅτι τῇ AB ἑτέρα οὐ προσαρμόσει
εὐθεῖα μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ,
10 μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχουσα.

- Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ $ΒΔ$. καὶ αἱ $ΑΔ$,
 $ΔΒ$ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον
περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$. καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ
ἡ EZ , καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ ἴσον παρὰ τὴν
15 EZ παραβελλήσθω τὸ $ΕΗ$ πλάτος ποιοῦν τὴν $ΕΜ$.
τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ ἴσον ἀφηρήσθω τὸ $ΘΗ$
πλάτος ποιοῦν τὴν $ΘΜ$. λοιπὸν ἄρα τὸ $ΕΑ$ ἴσον ἐστὶ
τῷ ἀπὸ τῆς $ΑΒ$. ὥστε ἡ $ΑΒ$ δύναται τὸ $ΕΑ$. πάλιν
δὴ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ ἴσον παρὰ τὴν EZ παρα-
20 βελλήσθω τὸ $ΕΙ$ πλάτος ποιοῦν τὴν $ΕΝ$. ἔστι δὲ καὶ
τὸ $ΕΑ$ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ τετραγώνῳ. λοιπὸν ἄρα
τὸ $ΘΙ$ ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$. καὶ ἐπεὶ
μέσαι εἰσὶν αἱ $ΑΓ$, $ΓΒ$, μέσα ἄρα ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν
 $ΑΓ$, $ΓΒ$. καὶ ἐστὶν ἴσα τῷ $ΕΗ$. μέσον ἄρα καὶ τὸ
25 $ΕΗ$. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν EZ παράκειται πλάτος ποιοῦν

2. μέση uel μέση LBFVb. μόνῃ V. 5. μέση uel
μέση LBFb, e corr. V. δευτέρᾳ] om. b. AB] B in ras.
m. 1 P. καὶ τῇ AB] om. V. 6. ἡ] δὲ ἡ V. αἱ] supra
scr. m. rec. b. εἰσὶν LBP. 7. τό] τά L? 8. τῶν] om. b.
προσαρμοζέει LBb. 11. $ΔΒ$ F. καί] om. B. 12. εἰσὶν
LB. 16. $ΑΒ$, $ΒΓ$ b. 20. $ΕΙ$] supra scr. Z F. ἐστὶν L.
21. καὶ λοιπόν V. 22. ἴσον — 24. τῷ $ΕΗ$] mg. m. 1 F.

LXXXI.

Mediae apotomae secundae una tantum recta media congruit potentia tantum toti commensurabilis, cum tota autem spatium medium comprehendens.



Sit AB mediae apotome secunda et rectae AB congruens $BΓ$. itaque $AΓ$, $ΓB$ mediae sunt potentia tantum commensurabiles medium comprehendentes $AΓ \times ΓB$ [prop. LXXV]. dico, rectae AB nullam aliam rectam mediam congruere potentia tantum toti commensu-

rabilem, cum tota autem medium comprehendentem.

nam si fieri potest, congruat $BΔ$. itaque etiam $AΔ$, $ΔB$ mediae sunt potentia tantum commensurabiles medium comprehendentes $AΔ \times ΔB$ [prop. LXXV]. et ponatur rationalis EZ , et quadratis $AΓ^2 + ΓB^2$ aequale rectae EZ adplicetur EH latitudinem efficiens EM ; spatio autem $2 AΓ \times ΓB$ aequale auferatur $ΘH$ latitudinem efficiens $ΘM$. itaque reliquum $EA = AB^2$ [II, 7]. itaque AB spatio EA aequalis est quadrata. iam rursus quadratis $AΔ^2 + ΔB^2$ aequale rectae EZ adplicetur EI latitudinem efficiens EN . est autem $EA = AB^2$. itaque reliquum $ΘI = 2 AΔ \times ΔB$ [II, 7]. et quoniam $AΓ$, $ΓB$ mediae sunt, etiam $AΓ^2 + ΓB^2$ media sunt. et $AΓ^2 + ΓB^2 = EH$. quare etiam EH medium est. et rectae rationali EZ adplicatum est latitudinem efficiens EM . itaque EM rationalis est

22. ἐστίν L. Post ἐπεὶ del. m. 1: ἴσον ἐστὶ τῷ δέξ P. 23. ἐστίν L, εἰσὶ Fb. 24. EH] seq. ἴσον ἐστὶ τῷ EH F.

τὴν EM · ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ EM καὶ ἀσύμμετρος τῇ EZ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν AG , GB , καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AG , GB μέσον ἐστίν. καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ ΘH · καὶ τὸ ΘH ἄρα μέσον ἐστίν. καὶ
 5 παρὰ ῥητὴν τὴν EZ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΘM · ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΘM καὶ ἀσύμμετρος τῇ EZ μήκει. καὶ ἐπεὶ αἱ AG , GB δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AG τῇ GB μήκει. ὥς δὲ ἡ AG πρὸς τὴν GB , οὕτως ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AG
 10 πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AG , GB · ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AG τῷ ὑπὸ τῶν AG , GB . ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AG σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν AG , GB , τῷ δὲ ἰπὶ τῶν AG , GB σύμμετρόν ἐστι τὸ δις ὑπὸ τῶν AG , GB · ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AG , GB
 15 τῷ δις ὑπὸ τῶν AG , GB . καὶ ἐστὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν AG , GB ἴσον τὸ EH , τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν AG , GB ἴσον τὸ $H\Theta$ · ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ EH τῷ ΘH . ὥς δὲ τὸ EH πρὸς τὸ ΘH , οὕτως ἐστὶν ἡ EM πρὸς τὴν ΘM · ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ EM τῇ $M\Theta$ μήκει.
 20 καὶ εἰσιν ἀμφοτέραι ῥηταί· αἱ EM , $M\Theta$ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $E\Theta$, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΘM . ὁμοίως δὲ δεῖ-
 25 σύμμετρος οὖσα τῇ $\Theta\lambda\eta$ · ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Τῇ ἄρα μέσης ἀποτομῇ δευτέρᾳ μίᾳ μόνον προσ-

1. EM] (alt.) EN L?, ME b. 2. ἐστίν L. 3. δις ἄρα V. ἐστίν] L, comp. Fb, ἐστὶ PBV. 4. τῷ ΘH] om. L, m. 2 B. ἐστίν] L, comp. Fb, ἐστὶ PBV. 5. ἐστίν L. 7. GB] in ras. V. ἀσύμμετροί F, sed corr. 9. ἐστίν L, ἄρα ἐστὶ B. 10. ἀσύμμετρον — 11. GB] m. 2 V. 10. ἐστὶ καὶ B. 11. AG] (prius) φ (non F, habuit B). 12. ἐστὶν P.

et rectae EZ longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. rursus quoniam $A\Gamma \times \Gamma B$ medium est, etiam $2 A\Gamma \times \Gamma B$ medium est [prop. XXIII coroll.]. et $\Theta H = 2 A\Gamma \times \Gamma B$. itaque etiam ΘH medium est. et rectae rationali EZ adplicatum est latitudinem efficiens ΘM . itaque ΘM rationalis est et rectae EZ longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. et quoniam $A\Gamma, \Gamma B$ potentia tantum commensurabiles sunt $A\Gamma$ et ΓB longitudine incommensurabiles sunt. uerum $A\Gamma : \Gamma B = A\Gamma^2 : A\Gamma \times \Gamma B$ [prop. XXI coroll.]. quare $A\Gamma^2$ et $A\Gamma \times \Gamma B$ incommensurabilia sunt [prop. XI]. uerum $A\Gamma^2, A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ commensurabilia, et $A\Gamma \times \Gamma B, 2 A\Gamma \times \Gamma B$ commensurabilia. quare $A\Gamma^2 + \Gamma B^2, 2 A\Gamma \times \Gamma B$ incommensurabilia sunt [prop. XIII]. est autem $EH = A\Gamma^2 + \Gamma B^2, H\Theta = 2 A\Gamma \times \Gamma B$. itaque $EH, \Theta H$ incommensurabilia sunt. est autem $EH : \Theta H = EM : \Theta M$ [VI, 1]. itaque $EM, M\Theta$ longitudine incommensurabiles sunt [prop. XI]. et utraque rationalis est. quare $EM, M\Theta$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. itaque $E\Theta$ apotome est [prop. LXXIII], ei autem congruens ΘM . iam similiter demonstrabimus, etiam ΘN ei congruere. itaque apotomae rectae diuersae congruunt potentia tantum toti commensurabiles; quod fieri non potest [prop. LXXIX].

Ergo mediae apotomae secundae una tantum recta

15. $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$ P. 17. $H\Theta$] in ras. V. EH] mut. in HE m. 1 V, HE Bb. 18. $\tau\acute{o}$] (alt.) om. b. 19. $M\Theta$] in ras. m. 1 B, ΘM P. 20. $\acute{\alpha}\rho\alpha$] postea ins. m. 1 V. 21. $\epsilon\lambda\epsilon\iota$] om. φ . $\sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\rho\omicron\iota$] -οι e corr. P. 23. ΘN] N in ras. V. $\pi\rho\omicron\sigma\alpha\mu\acute{o}\tau\tau\epsilon\iota$ V. $\acute{\alpha}\pi\omicron\tau\omicron\mu\eta\ \tau\eta\ E\Theta$ V. 24. $\mu\acute{o}\nu\omicron\nu$] supra scr. m. 1 F. 25. $\acute{\omicron}\pi\epsilon\rho\ \acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu\ \acute{\alpha}\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\omicron\nu$] om. V. 26. $\mu\acute{\epsilon}\sigma\eta$ BFVb.

αρμόζει εὐθεῖα μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχουσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

πβ'.

8 Τῇ ἐλάσσονι μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ ποιοῦσα μετὰ τῆς ὅλης τὸ μὲν ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν μέσον.

Ἔστω ἡ ἐλάσσων ἡ AB , καὶ τῇ AB προσαρμόζουσα
10 ἔστω ἡ $BΓ$. αἱ ἄρα $ΑΓ$, $ΓΒ$ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν μέσον· λέγω, ὅτι τῇ AB ἑτέρα εὐθεῖα οὐ προσαρμόσει τὰ αὐτὰ ποιοῦσα.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ $BΔ$ · καὶ αἱ $ΑΔ$,
15 $ΔΒ$ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὰ προειρημένα. καὶ ἐπεὶ, ὥς ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ τετράγωνα τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$
20 τετραγώνων ὑπερέχει ῥητῶ· ῥητὰ γάρ ἐστιν ἀμφοτέρω· καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ ἄρα τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ ὑπερέχει ῥητῶ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· μέσα γὰρ ἐστὶν ἀμφοτέρω.

Τῇ ἄρα ἐλάσσονι μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα
25 δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ καὶ ποιοῦσα τὰ μὲν

1. εὐθεῖα — μόνον] om. P. 2. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 4. πβ'] corr. ex πγ' F. 5. μόνη V, μόν' η F. 9. ἡ] (prius) ins. m. 2 F. 10. ἄρα] supra scr. m. 1 V. σύμμετροι F. 13. τῇ] corr. ex ἡ m. 2 F. ἑτέροι εὐθεῖαι F. προσαρμόζει b. 14. καὶ] om. B. αἱ] om. b. 15. Ante εἰσὶν ras. 4 litt. V. τὰ] τό V, et F, corr. m. 2. προειρημένα] μὲν ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ (m. 2 F) τετράγωνα (-γώνων FV) ἅμα ῥητόν, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ μέσον

media congruit potentia tantum toti commensurabilis, cum tota autem spatium medium comprehendens; quod erat demonstrandum.

LXXXII.

Rectae minori una tantum recta potentia toti incommensurabilis congruit cum tota efficiens summam quadratorum rationalem, rectangulum autem duplum medium.

Sit AB minor, et rectae AB congruat $B\Gamma$. itaque $A\Gamma$, ΓB potentia incommensurabiles sunt efficientes summam quadratorum rationalem, rectangulum autem duplum medium [prop. LXXVI]. dico, rectae AB nullam aliam rectam congruere eadem efficientem.

nam si fieri potest, congruat $B\Delta$. itaque etiam $A\Delta$, ΔB potentia incommensurabiles sunt efficientes, quae diximus [prop. LXXVI]. et quoniam est [II, 7; cfr. p. 238, 7 sq.]

$(A\Delta^2 + \Delta B^2) \div (A\Gamma^2 + \Gamma B^2) = 2 A\Delta \times \Delta B \div 2 A\Gamma \times \Gamma B$,
et $A\Delta^2 + \Delta B^2$ excedit $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ spatio rationali (nam utraque rationalia sunt), etiam $2 A\Delta \times \Delta B$ excedit $2 A\Gamma \times \Gamma B$ spatio rationali; quod fieri non potest [prop. XXVI]; nam utrumque medium est.

Ergo rectae minori una tantum recta congruit potentia toti incommensurabilis et cum tota efficiens

Theon (BFVb). 16. $\tau\acute{\alpha}$] in ras. m. 1 P. 17. $\tau\acute{o}$] $\tau\acute{\alpha}$ B; $\tau\acute{\omega}$ F, sed corr. m. 1. 18. $\psi\pi\acute{o}$ — $\delta\acute{\epsilon}$] mg. m. 2 B. $\tau\acute{o}\psi$ — 19. ΔB] e corr. m. 1 F. 19. $A\Delta$] Δ e corr. m. 1 V. 20. $\psi\pi\epsilon\rho\acute{\epsilon}\chi\epsilon\iota$] m. 2 B. $\epsilon\lambda\acute{o}\iota\nu$ b. 21. $\acute{\alpha}\rho\alpha$] m. 2 B, om. FVb. 23. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$] m. 2 F. 24. $\acute{\alpha}\rho\alpha$] om. P. Ante $\mu\lambda\alpha$ del. $\tau\eta$ AB m. 2 V. $\mu\acute{o}\nu\eta$ V. 25. $\delta\upsilon\nu\acute{\alpha}\mu\epsilon\iota \mu\acute{o}\nu\omicron\nu$ FVb. $\sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\rho\omicron\varsigma$ FVb, et B, corr. m. 2. $\kappa\alpha\iota$] om. V. $\tau\acute{\alpha}$] $\tau\acute{o}$ PFV.

ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα ἅμα ῥητόν, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν μέσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

πγ'.

Τῇ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ μία
 5 μόνον προσαρμόξει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος
 οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιούσα τὸ μὲν
 συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων
 μέσον, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν ῥητόν.

Ἔστω ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσα ἡ AB ,
 10 καὶ τῇ AB προσαρμόζεται ἡ $BΓ$. αἱ ἄρα $ΑΓ$, $ΓΒ$
 δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιούσαι τὰ προκείμενα·
 λέγω, ὅτι τῇ AB ἑτέρα οὐ προσαρμόσει τὰ αὐτὰ
 ποιούσα.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμόζεται ἡ $BΔ$ καὶ αἱ $ΑΔ$,
 15 $ΔΒ$ ἄρα εὐθεῖαι δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιούσαι
 τὰ προκείμενα. ἐπεὶ οὖν, ὥς ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΔ$,
 $ΔΒ$ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ
 δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$
 ἀκολούθως τοῖς πρὸ αὐτοῦ, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ$,
 20 $ΔΒ$ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ ὑπερέχει ῥητῷ· ῥητὰ
 γάρ ἐστιν ἀμφοτέρω· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ ἄρα
 τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ ὑπερέχει ῥητῷ· ὅπερ ἐστὶν
 ἀδύνατον· μέσα γάρ ἐστιν ἀμφοτέρω. οὐκ ἄρα τῇ AB
 ἑτέρα προσαρμόσει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα

1. τετράγωνον P, τετραγώνων V, et F, corr. m. 2. Post ῥητόν add. μετὰ τῆς ὅλης V. 2. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 3. πδ' F. 4. μετὰ τοῦ V. Post ῥητοῦ add. καὶ m. 2 F. 5. μόνῃ V. 10. καὶ τῇ AB] om. B. προσαρμόξονσα Vb, προσαρμόζονσα δὲ B, ἀρμόζονσα F. 11. τὰ προκείμενα] τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ ῥητόν Theon

summam quadratorum rationalem, rectangulum autem duplum medium; quod erat demonstrandum.

LXXXIII.

Rectae cum rationali totum medium efficienti una tantum recta congruit potentia toti incommensurabilis, cum tota autem summam quadratorum mediam efficiens, rectangulum autem duplum rationale.

Sit AB recta cum rationali totum medium efficiens, et rectae AB congruat $B\Gamma$. itaque $A\Gamma$, ΓB potentia incommensurabiles sunt proposita efficientes [prop. LXXVII]. dico, rectae AB nullam aliam congruere eadem efficientem.

nam si fieri potest, congruat $B\Delta$. itaque etiam $A\Delta$, ΔB rectae potentia incommensurabiles sunt proposita efficientes [prop. LXXVII]. iam quoniam, sicut in priore propositione [p. 246, 16 sq.]

$(A\Delta^2 + \Delta B^2) \div (A\Gamma^2 + \Gamma B^2) = 2A\Delta \times \Delta B \div 2A\Gamma \times \Gamma B$,
et $2A\Delta \times \Delta B$ excedit $2A\Gamma \times \Gamma B$ spatio rationali (nam utrumque rationale est), etiam $A\Delta^2 + \Delta B^2$ excedit $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ spatio rationali; quod fieri non potest; nam utraque media sunt [prop. XXVI]. itaque rectae AB nulla alia recta congruet potentia toti incommensurabilis, cum tota autem efficiens, quae dixi-

(BFVb). 12. λέγω — 16. προκειμένα] om. P. 12. ταῦτα V.

14. $A\Delta$] Δ e corr. m. 1 b. 16. τὰ προκειμένα] τὸ μὲν συγ-
κελεμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ
δις ὑπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB (AB , $B\Delta$ φ) φητόν Theon (BFVb). τὰ]
corr. ex τό F. 18. Post ΓB uacat una linea et spat. 6 litt. b.

21. ἐστίν] om. V, m. 2 F. 23. γὰρ εἰσιν V.

τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὰ προειρημένα·
μία ἄρα μόνον προσαρμόσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

πδ'.

Τῇ μετὰ μέσον μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ μία
5 μόνῃ προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος
οὔσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τό τε
συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων
μέσον τό τε δις ὑπ' αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμ-
μετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν.

10 Ἔστω ἡ μετὰ μέσον μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ AB ,
προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ $BΓ$. αἱ ἄρα $ΑΓ$, $ΓΒ$ δυ-
νάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὰ προειρημένα. λέγω,
ὅτι τῇ AB ἑτέρα οὐ προσαρμόσει ποιοῦσα τὰ προει-
ρημένα.

15 Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ $ΒΔ$, ὥστε καὶ
τὰς $ΑΔ$, $ΔΒ$ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι ποιούσας τὰ
τε ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ τετράγωνα ἅμα μέσον καὶ τὸ
δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ μέσον καὶ ἔτι τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΔ$,
 $ΔΒ$ ἀσύμμετρα τῷ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ καὶ ἐκκείσθω
20 ῥητὴ ἡ EZ , καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ ἴσον παρὰ
τὴν EZ παραβεβλήσθω τὸ $ΕΗ$ πλάτος ποιοῦν τὴν

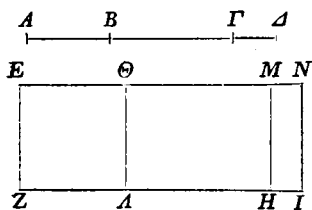
1. τὰ προειρημένα] τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν ῥητόν Theon (BFVb).

2. μία ἄρα] τῇ ἄρα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ μία BVb et F, om. μία. προσαρμόζει Vb, καὶ τὰ ἐξῆς F. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 3. πδ'] sic m. 2 F. 5. μόνον BFb. Post δυνάμει del. μόνον m. 1 P. 8. τό τε] καὶ τό Theon (BFVb). ὑπὸ τῶν b. ἀσύμμετρος F, sed corr. 9. τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τῷ δις ὑπ' αὐτῶν Theon (BFVb). 11. αὐτῇ] om. Theon (BFVb). 12. τὰ προειρημένα] τό τε (μὲν F) συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ (ὑπ' αὐτῶν V) μέσον, ἔτι (corr. ex ἔστι F) δὲ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ τετράγωνα (τά add. F) ἀσύμμετρα τῷ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ Theon (BFVb).

mus. ergo una tantum congruet; quod erat demonstrandum.

LXXXIV.

Rectae cum medio totum medium efficienti una tantum congruit recta potentia toti incommensurabilis, cum tota autem efficiens summam quadratorum mediam et duplum rectangulum medium praetereaue summae quadratorum incommensurable.



Sit AB recta cum medio totum medium efficiens, ei autem congruens $B\Gamma$. itaque $A\Gamma$, ΓB potentia incommensurabiles sunt efficientes, quae diximus [prop. LXXVIII]. dico, rectae AB

nullam aliam congruere efficientem, quae diximus.

nam si fieri potest, congruat $B\Delta$, ita ut etiam $A\Delta$, ΔB potentia incommensurabiles sint efficientes $A\Delta^2 + \Delta B^2$ medium et $2 A\Delta \times \Delta B$ medium et praeterea $A\Delta^2 + \Delta B^2$, $2 A\Delta \times \Delta B$ incommensurabilia [prop. LXXVIII]. et ponatur rationalis EZ , et quadratis $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ aequale rectae EZ adplicetur EH latitudinem efficiens EM , spatio autem $2 A\Gamma \times \Gamma B$ aequale rectae EZ adplicetur ΘH latitudinem efficiens ΘM .

13. Post προσαρμόσει add. Theon: δυνάμει ἀσύμμετρος οὕσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης (BFVb). προσηρμένα] -ει- in ras. m. 1 P, προκείμενα Theon (BFVb). 16. εἶναι ἀσύμμετρον BFV, εἶσιν ἀσύμμ. b. τὰ τε] τό τε P, τὰ μὲν BFb, τό τε συγκείμενον e corr. V. 17. ἀπό] ἐκ V. $A\Delta$, ΔB] in ras. V. τετραγώνων P et V (supra -ων ras. est). ἅμα] supra scr. V. τό] supra scr. V. 18. ὑπό — ΔB] ὑπ' αὐτῶν V. τὰ] om. P. 19. Post ΔB del. m. 2 τετράγωνα V. ἀσύμμετρον P. 20. τοῖς] corr. ex τοῖς m. 1 V.

EM , τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ, ΓΒ$ ἴσον παρὰ τὴν EZ
 παραβεβλήσθω τὸ $ΘΗ$ πλάτος ποιοῦν τὴν $ΘΜ$. λοιπὸν
 ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ ἴσον ἐστὶ τῷ $ΕΑ$. ἡ ἄρα $ΑΒ$
 δύναται τὸ $ΕΑ$. πάλιν τοῖς ἀπὸ τῶν $ΑΔ, ΔΒ$ ἴσον
 5 παρὰ τὴν EZ παραβεβλήσθω τὸ $ΕΙ$ πλάτος ποιοῦν
 τὴν $ΕΝ$. ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ ἴσον τῷ $ΕΑ$.
 λοιπὸν ἄρα τὸ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ, ΔΒ$ ἴσον [ἐστὶ] τῷ
 $ΘΙ$. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ
 τῶν $ΑΓ, ΓΒ$ καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ $ΕΗ$, μέσον ἄρα ἐστὶ
 10 καὶ τὸ $ΕΗ$. καὶ παρὰ ρητὴν τὴν EZ παράκειται πλάτος
 ποιοῦν τὴν $ΕΜ$. ρητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $ΕΜ$ καὶ ἀσύμ-
 μετρος τῇ EZ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δις
 ὑπὸ τῶν $ΑΓ, ΓΒ$ καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ $ΘΗ$, μέσον ἄρα
 καὶ τὸ $ΘΗ$. καὶ παρὰ ρητὴν τὴν EZ παράκειται
 15 πλάτος ποιοῦν τὴν $ΘΜ$. ρητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $ΘΜ$ καὶ
 ἀσύμμετρος τῇ EZ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρά ἐστι
 τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΓ, ΓΒ$ τῷ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ, ΓΒ$, ἀσύμ-
 μετρόν ἐστι καὶ τὸ $ΕΗ$ τῷ $ΘΗ$. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ
 καὶ ἡ $ΕΜ$ τῇ $ΜΘ$ μήκει. καὶ εἰσιν ἀμφοτέραι ρηταί·
 20 αἱ ἄρα $ΕΜ, ΜΘ$ ρηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι·
 ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $ΕΘ$, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ
 $ΘΜ$. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι ἡ $ΕΘ$ πάλιν ἀποτομὴ
 ἐστὶν, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ $ΘΝ$. τῇ ἄρα ἀποτομῇ
 ἄλλη καὶ ἄλλη προσαρμόζει ρητὴ δυνάμει μόνον σύμ-
 25 μετρος οὖσα τῇ ὅλῃ· ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον. οὐκ ἄρα
 τῇ $ΑΒ$ ἑτέρα προσαρμόσει εὐθεΐα.

1. παρὰ — 2. παραβεβλήσθω] ἀφηγήσθω V. 2. $HΘ B$.
 $MΘ$ in ras. V, $ΘN F$. λοιπὸν — 6. EN] mg. m. 1 F. 4.
 τοῖς μὲν P. 6. τήν] bis V. 7. ἐστὶ] ἐστὶν P, om. FVb,
 m. 2 B. 9. τῷ] τό F. μέσον — 10. $ΕΗ$] mg. m. 2 V,
 om. καί. 13. τῷ] corr. ex τό V, τό F. $ΘΗ$] $HΘ$ F. 15.
 ρητὴ — $ΘΜ$] mg. m. 1 P (ἐστὶ τῇ). 17. ἀσύμμετρον — 18.

itaque reliquum [II, 7] $AB^2 = EA$. quare AB spatio EA aequalis est quadrata. rursus quadratis $AA^2 + AB^2$ aequale rectae EZ adplicetur EI latitudinem efficiens EN . uerum etiam $AB^2 = EA$. itaque reliquum [II, 7]

$$2AA \times AB = \Theta I.$$

et quoniam $AI^2 + IB^2$ medium est, et $AI^2 + IB^2 = EH$, etiam EH medium est. et rectae rationali EZ adplicatum est latitudinem efficiens EM . itaque EM rationalis est et rectae EZ longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. rursus quoniam medium est $2AI \times IB$, et $2AI \times IB = \Theta H$, etiam ΘH medium est. et rationali EZ adplicatum est latitudinem efficiens ΘM . itaque ΘM rationalis est et rectae EZ longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. et quoniam $AI^2 + IB^2$ et $2AI \times IB$ incommensurabilia sunt, etiam EH , ΘH incommensurabilia sunt. itaque etiam EM , $M\Theta$ longitudine incommensurabiles sunt [VI, 1; prop. XI]. et utraque rationalis est. itaque EM , $M\Theta$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. quare $E\Theta$ apotome est [prop. LXXIII] et ΘM ei congruens. iam similiter demonstrabimus, rursus $E\Theta$ apotomen esse, ei autem congruentem ΘN . itaque apotomae diuersae rectae congruunt potentia tantum toti commensurabiles; quod demonstratum est fieri non posse [prop. LXXIX]. itaque rectae AB nulla alia recta congruet.

ΘH] mg. m. 1 V. 18. ἄρα ἐστὶ Bf. ΘH] $H\Theta'$ F. ἐστὶν PB. 19. μήκει] om. b. 21. προσαρμόττονσα V. 22. ΘM] $H\Theta$ b, et F, corr. ex $M\Theta$. 23. ἐστὶ PB V, comp. Fb. 24. καὶ ἄλλη ῥητή B. ῥητή] m. 2 B. 25. ἀδύνατον εἰδέσθαι V. 26. Post AB del. εὐθεία m. 1 V. προσαρμόζει b.

Τῇ ἄρα *AB* μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει
 ἀσύμμετρος οὕσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα
 τὰ τε ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα ἅμα μέσον καὶ τὸ δις ὑπ'
 αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα ἀσύμ-
 5 μετρα τῷ δις ὑπ' αὐτῶν ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ὅροι τρίτοι.

α'. Ὑποκειμένης ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς, ἐὰν μὲν ἡ ὅλη
 τῆς προσαρμοζούσης μείζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμετρου
 ἑαυτῇ μήκει, καὶ ἡ ὅλη σύμμετρος ἢ τῇ ἐκκειμένη
 10 ῥητῇ μήκει, καλεῖσθω ἀποτομὴ πρώτη.

β'. Ἐὰν δὲ ἡ προσαρμόζουσα σύμμετρος ἢ τῇ ἐκ-
 κειμένη ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης
 μείζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῇ, καλεῖσθω
 ἀποτομὴ δευτέρα.

15 γ'. Ἐὰν δὲ μηδετέρα σύμμετρος ἢ τῇ ἐκκειμένη
 ῥητῇ μήκει, ἡ δὲ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μείζον δύ-
 νηται τῷ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῇ, καλεῖσθω ἀποτομὴ
 τρίτη.

δ'. Πάλιν, ἐὰν ἡ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μείζον
 20 δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμετρου ἑαυτῇ [μήκει], ἐὰν μὲν
 ἡ ὅλη σύμμετρος ἢ τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ μήκει, καλεῖσθω
 ἀποτομὴ τετάρτη.

ε'. Ἐὰν δὲ ἡ προσαρμόζουσα, πέμπτη.

ς'. Ἐὰν δὲ μηδετέρα, ἕκτη.

1 μόνῃ V. προσαρμόσει BFV. 3. τὰ] om. b, τό P.
 τετράγωνον P. μέσα V. 4. καὶ ἔτι] ἔτι τε BFVb. 5.
 δις] om. b. αὐτῶν] eras. B. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. BV.
 6. ὅροι τρίτοι] PV, mg. m. 2 B, om. F; πεί' b, mg. m. 2 B.
 numeros om. codd. 7. ἡ] om. B. 8. δύννεται φ. ἀσυμ-
 μέτρον BV, sed corr. 9. ἡ] supra scr. m. 1 b, om. V. 11.
 εἰ V. 12. καὶ ἡ — 13. ἑαυτῇ] om. Fb, mg. m. 2 B. 12.

Ergo rectae AB una tantum congruit recta potentia toti incommensurabilis, cum tota autem efficiens summam quadratorum mediam et duplum rectangulum medium praetereaue summam quadratorum duplo rectangulo incommensurabilem; quod erat demonstrandum.

Definitiones tertiae.

1. Datis recta rationali et apotome, si tota quadrata congruentem excedit quadrato rectae sibi commensurabilis, et tota rationali propositae longitudine commensurabilis est, uocetur apotome prima.

2. Sin congruens rationali propositae longitudine commensurabilis est, et tota quadrata congruentem excedit quadrato rectae sibi commensurabilis, uocetur apotome secunda.

3. Sin neutra rationali propositae longitudine commensurabilis est, et tota quadrata congruentem excedit quadrato rectae sibi commensurabilis, uocetur apotome tertia.

4. Rursus si tota quadrata congruentem excedit quadrato rectae sibi incommensurabilis, si tota rationali propositae longitudine commensurabilis est, uocetur apotome quarta.

5. Sin congruens ei commensurabilis est, quinta.

6. Sin neutra, sexta.

καί] supra scr. m. 1 V. 13. δύναται PV. Post καλείσθω ras. 2 litt. V. 15. εἰ V. 16. ἡ δὲ δὴ — 17. εἰς τῇ] om. Fb, m. 2 B. 16. δύναται V. 19. ἡ] m. 2 B. τῇ προσ-
αρμοζούσῃ B, sed corr. (ante τῇ ras. 1 litt.). 20. συμμετρου
B, corr. m. 2. μήκει] om. P. μέν] supra scr. m. 1 F. 21.
ἡ] m. 2 B. 24. -ρα ε- in ras. m. 1 P.

πε'.

Εὐρεῖν τὴν πρώτην ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ A , καὶ τῇ A μήκει σύμμετρος
 ἔστω ἡ BH . ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ BH . καὶ ἐκκείσθωσαν
 5 δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΔE , EZ , ὧν ἡ ὑπεροχὴ ὁ
 $Z\Delta$ μὴ ἔστω τετράγωνος· οὐδ' ἄρα ὁ $E\Delta$ πρὸς τὸν
 ΔZ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετρά-
 γωνον ἀριθμόν. καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ $E\Delta$ πρὸς τὸν
 ΔZ , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς BH τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ
 10 τῆς $H\Gamma$ τετράγωνον· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς
 BH τῷ ἀπὸ τῆς $H\Gamma$. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς BH .
 ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $H\Gamma$. ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ
 $H\Gamma$. καὶ ἐπεὶ ὁ $E\Delta$ πρὸς τὸν ΔZ λόγον οὐκ ἔχει,
 ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ'
 15 ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς BH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $H\Gamma$ λόγον ἔχει,
 ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν·
 ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ BH τῇ $H\Gamma$ μήκει. καὶ εἰσιν
 ἀμφοτέραι ῥηταί· αἱ BH , $H\Gamma$ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει
 μόνον σύμμετροι· ἡ ἄρα $B\Gamma$ ἀποτομή ἐστίν.

20 Λέγω δὴ, ὅτι καὶ πρώτη.

Ὡς γὰρ μεῖζόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς BH τοῦ ἀπὸ τῆς
 $H\Gamma$, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ . καὶ ἐπεὶ ἐστίν ὡς ὁ $E\Delta$
 πρὸς τὸν $Z\Delta$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς BH πρὸς τὸ ἀπὸ
 τῆς $H\Gamma$, καὶ ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΔE πρὸς
 25 τὸν EZ , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς HB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ .

1. πε'] om. BFb. 3. ῥητὴ] m. 2 B. μήκει] om. V. 4.
 ἔστω] ἔσται F, corr. m. 1; ἔστω μήκει V. ἐστίν P. BH]
 corr. ex HB V. 5. ἡ] m. 2 F. 6. ΔZ BVb. οὐκ FV.
 7. ΔZ] "ZΔ" F. 8. πεποιήσθω F. ὁ] m. 2 F. 10.
 τετράγωνον] om. V. σύμμετρος V, corr. m. 1. ἐστίν V.
 11. HB F. HΓ] supra scr. Θ b; ΘΓ F, sed corr. (?).
 ῥητόν — BH] m. 2 B. 13. HΓ] in ras. V, corr. ex ΓΔ
 m. 1 b. 14. ἀριθμὸς] om. V. ἀριθμόν] om. V. οὐδέ

LXXXV.

Inuenire apotomen primam.

Ponatur rationalis A , et rectae A longitudine commensurabilis sit BH . itaque etiam BH rationalis est. et ponantur duo numeri quadrati ΔE , EZ , quorum

A ————— B Γ H differentia $Z\Delta$ quadratus
 Θ ————— E Z Δ numerus ne sit [prop.
 XXVIII lemma I]. itaque

$E\Delta : \Delta Z$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. et fiat $E\Delta : \Delta Z = BH^2 : H\Gamma^2$ [prop. VI coroll.]. itaque BH^2 , $H\Gamma^2$ commensurabilia sunt [prop. VI]. uerum BH^2 rationale est. itaque etiam $H\Gamma^2$ rationale est. quare etiam $H\Gamma$ rationalis est. et quoniam $E\Delta : \Delta Z$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ne BH^2 quidem ad $H\Gamma^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque BH , $H\Gamma$ longitudine incommensurabiles sunt. et utraque rationalis est. itaque BH , $H\Gamma$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo $B\Gamma$ apotome est [prop. LXXIII].

Iam dico, eandem primam esse.

sit enim $\Theta^2 = BH^2 \div H\Gamma^2$ [prop. XIII lemma]. et quoniam est

$$E\Delta : Z\Delta = BH^2 : H\Gamma^2,$$

etiam conuertendo [V, 19 coroll.] est

$$\Delta E : EZ = HB^2 : \Theta^2.$$

uerum $\Delta E : EZ$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; nam uterque quadratus

FVb. 15. $\alpha\varphi\alpha$] supra scr. m. 1 V. $H\Gamma$] e corr. V. 17. BH] HB φ . 18. $\epsilon\lambda\sigma\iota\nu$ P. 19. $\epsilon\sigma\iota$ V, comp. b, $\epsilon\lambda\sigma\iota$ comp. φ . 22. Θ] in spat. 2 litt. φ . $E\Delta$] ΔE V. 23. $\tau\acute{o}\nu$] $\tau\acute{o}$ b. ΔZ BVb. 24. ΔE] in ras. m. 1 P.

- ὁ δὲ ΔE πρὸς τὸν EZ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἐκάτερος γὰρ τετράγωνός ἐστιν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς HB ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς
 5 τετράγωνον ἀριθμὸν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ BH τῇ Θ μήκει. καὶ δύναται ἡ BH τῆς $H\Gamma$ μείζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ · ἡ BH ἄρα τῆς $H\Gamma$ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμέτρου ἐαυτῇ μήκει. καὶ ἐστὶν ἡ ὅλη ἡ BH σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ μήκει τῇ A . ἡ $B\Gamma$ ἄρα
 10 ἀποτομή ἐστὶ πρώτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ πρώτη ἀποτομή ἡ $B\Gamma$ ὅπερ ἔδει εὐρεῖν.

πς'.

Εἰρεῖν τὴν δευτέραν ἀποτομήν.

- 15 Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ A καὶ τῇ A σύμμετρος μήκει ἡ $H\Gamma$. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $H\Gamma$. καὶ ἐκκείσθωσαν δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΔE , EZ , ὧν ἡ ὑπεροχὴ ὁ ΔZ μὴ ἔστω τετράγωνος. καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ $Z\Delta$ πρὸς τὸν ΔE , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓH τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς
 20 HB τετράγωνον. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓH τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς HB τετραγώνῳ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓH . ῥητὸν ἄρα [ἐστὶ] καὶ τὸ ἀπὸ τῆς HB · ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ BH . καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς $H\Gamma$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς HB λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς
 25 τετράγωνον ἀριθμὸν, ἀσύμμετρός ἐστὶν ἡ ΓH τῇ HB μήκει. καὶ εἰσιν ἀμφοτέραι ῥηταί· αἱ ΓH , HB ἄρα

1. EZ] in ras. V. Post λόγον del. οὐκ F. 2. τετράγωνος] τετράγωνον F, sed corr. 3. ἐστὶ PBV, comp. Fb. ἄρα] om. φ.

4. Θ] $H\Theta$ b. 5. BH] HB P. 6. τῆς] τῇ b. 7. Θ . ἡ] ΘH b; $H\Theta$. ἡ F. 8. ἀσύμμετρον P, et eras. ἀ- V. ἡ] (prius) om. BVb. 9. μήκει] om. F. τῇ A μήκει BV. 13. πς'] om. F, in figura πς'. 14. τήν] supra scr. m. 1 P. 15. ἀσύμμετρος P, corr. m. rec.; σύμμετρος ἔστω V. 16. ἐστὶν

est. itaque etiam $HB^2 : \Theta^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare BH, Θ longitudine commensurabiles sunt [prop. IX]. est autem $BH^2 \div HI^2 = \Theta^2$. itaque BH quadrata excedit HI quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis. et tota BH rationali propositae A commensurabilis est. itaque BF apotome prima est [deff. tert. 1].

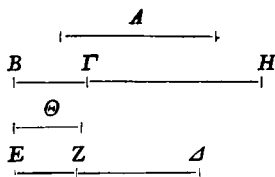
Ergo inuenta est BF apotome prima; quod erat inueniendum.

LXXXVI.

Inuenire apotomen secundam.

Ponatur rationalis A et rectae A longitudine commensurabilis HI . itaque HI rationalis est. et ponantur duo numeri quadrati AE, EZ , quorum differentia AZ numerus quadratus ne sit [prop. XXVIII lemma I]. et fiat $AZ : AE = HI^2 : HB^2$ [prop. VI coroll.]. itaque HI^2, HB^2 commensurabilia sunt [prop. VI]. uerum HI^2 rationale est. quare etiam HB^2 rationale est. itaque etiam BH rationalis est. et quoniam $HI^2 : HB^2$

rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, HI et HB longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. et utraque rationalis est. itaque HI, HB



καὶ ἡ P. 17. τετράγωνοι] om. F, ins. m. 2 ante δύο. ὁ]
 ἡ V. 18. πεποιθισθω F. AZ FVb. 20. σύμμετρος P,
 corr. m. rec. 21. τετραγώνω] om. V. 22. ἐστὶ] om. BFVb.
 25. ἐστίν] ἄρα ≠ ἐστίν (sic) b, ἄρα ἐστίν V; ἄρα add. m. 2 F.
 HB] BH BF. 26. μήκει e corr. V. HB] B e corr. V.
 ἄρα] om. Pφ.

φηται εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστίν.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ δευτέρα.

Ὡς γὰρ μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς
 5 ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ
 τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, οὕτως ὁ ΕΔ ἀριθμὸς
 πρὸς τὸν ΔΖ ἀριθμόν, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς
 τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ, οὕτως ὁ ΔΕ
 πρὸς τὸν ΕΖ. καὶ ἐστὶν ἐκότερος τῶν ΔΕ, ΕΖ τε-
 10 τράγωνος· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ
 λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον
 ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει. καὶ
 δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μείζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ΒΗ
 ἄρα τῆς ΗΓ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμέτρου ἐαυτῇ
 15 μήκει. καὶ ἐστὶν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΓΗ τῇ ἐκκειμένῃ
 φητῇ σύμμετρος τῇ Α. ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστὶ δευτέρα.

Εὐρηται ἄρα δευτέρα ἀποτομή ἡ ΒΓ· ὅπερ ἔδει
 δεῖξαι.

πξ'.

20 Εὐρεῖν τὴν τρίτην ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω φητὴ ἡ Α, καὶ ἐκκείσθωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ
 οἱ Ε, ΒΓ, ΓΔ λόγον μὴ ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους, ὃν
 τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ὁ δὲ
 ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον ἔχτω, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς

2. ἐστὶ PBV, comp. Fb. 3. δὴ] om. V. 6. ἀριθμός] om. V. 7. ἀριθμόν] om. V. 8. οὕτως] s τῶν (corr. ex τό) F. 9. ὁ] supra scr. F. ΔΕ] ΕΔ F. 12. ἐστὶν] ἐστὶ μήκει V. μήκει] om. FVb, m. 2 B. καὶ δύναται] m. 2 supra scr. B, -ύνα- in ras. V, καὶ ἐστὶν Fb, Bm. 1. 13. μείζων Fb et B, sed corr. m. 2; seq. ras. 6 litt. V. τῷ] in ras. m. 1 B, τοῦ b. τῆς] om. V. ἡ ΒΗ — 14. συμέτρου] mg. m. 1 V (συμέτρου etiam in textu). 14. ἀσυμέτρου b, corr. m. rec. 15. σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ φητῇ Theon (BFVb).

rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo $B\Gamma$ apotome est [prop. LXXIII].

Iam dico, eandem secundam esse.

sit enim $\Theta^2 = B\Gamma^2 \div H\Gamma^2$ [prop. XIII lemma]. iam quoniam est $BH^2 : H\Gamma^2 = EA : AZ$,

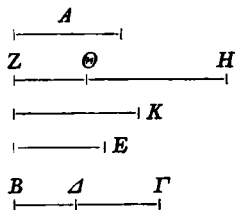
conuertendo [V, 19 coroll.] erit $BH^2 : \Theta^2 = AE : EZ$. et uterque AE , EZ quadratus est. itaque $BH^2 : \Theta^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque BH , Θ longitudine commensurabiles sunt [prop. IX]. et $BH^2 \div H\Gamma^2 = \Theta^2$. quare BH quadrata excedit $H\Gamma$ quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis. et congruens ΓH rationali propositae A commensurabilis est. itaque $B\Gamma$ apotome est secunda [deff. tert. 2].

Ergo inuenta est apotome secunda $B\Gamma$; quod erat demonstrandum.

LXXXVII.

Inuenire apotomen tertiam.

Ponatur rationalis A , et ponantur tres numeri E , $B\Gamma$, ΓA rationem inter se non habentes, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ΓB autem ad BA rationem habeat, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, et fiat $E : B\Gamma = A^2 : ZH^2$ [prop. XXVIII lemma I], et $B\Gamma : \Gamma A = ZH^2 : H\Theta^2$. iam quon-



16. μήκει τῇ A Bb, τῇ A μήκει V. ἄρα] ἄρα φητὶ F. ἐστὶν PB. 17. ἄρα ἢ V. $B\Gamma$] φ (de F non liquet). ὅπερ εἶδει δεῖξαι] φ et comp. P, ὅπερ εἶδει εὐρεῖν V, om. Bb. 19. πς' F (euan.). 21. ἢ φητὶ ἢ P. 22. ΓA] corr. ex A m. 2 F. 24. ΓB] corr. ex ΓA m. rec. b.

πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν ὁ *E*
 πρὸς τὸν *BΓ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *A* τετράγωνον πρὸς
 τὸ ἀπὸ τῆς *ZH* τετράγωνον, ὡς δὲ ὁ *BΓ* πρὸς τὸν
ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *ZH* τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ
 5 τῆς *HΘ*. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ὁ *E* πρὸς τὸν *BΓ*, οὕτως
 τὸ ἀπὸ τῆς *A* τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ZH* τε-
 τράγωνον, σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς *A* τετρά-
 γωνον τῷ ἀπὸ τῆς *ZH* τετραγώνῳ. ρητὸν δὲ τὸ ἀπὸ
 τῆς *A* τετράγωνον. ρητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς *ZH*.
 10 ρητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ *ZH*. καὶ ἐπεὶ ὁ *E* πρὸς τὸν *BΓ*
 λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον
 ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς *A* τετράγωνον πρὸς τὸ
 ἀπὸ τῆς *ZH* [τετράγωνον] λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος
 ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα
 15 ἐστὶν ἡ *A* τῇ *ZH* μήκει. πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ *BΓ*
 πρὸς τὸν *ΓΔ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *ZH* τετράγωνον πρὸς
 τὸ ἀπὸ τῆς *HΘ*, σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς *ZH*
 τῷ ἀπὸ τῆς *HΘ*. ρητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς *ZH*. ρητὸν
 ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς *HΘ*. ρητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ *HΘ*. καὶ
 20 ἐπεὶ ὁ *BΓ* πρὸς τὸν *ΓΔ* λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετρά-
 γωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα
 τὸ ἀπὸ τῆς *ZH* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *HΘ* λόγον ἔχει, ὃν
 τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμ-
 μετρος ἄρα ἐστὶν ἡ *ZH* τῇ *HΘ* μήκει. καὶ εἰσιν ἀμ-
 25 φότεραι ρηταί· αἱ *ZH*, *HΘ* ἄρα ρηταί εἰσι δυνάμει
 μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ *ZΘ*.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ τρίτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστὶν ὡς μὲν ὁ *E* πρὸς τὸν *BΓ*, οὕτως
 τὸ ἀπὸ τῆς *A* τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ZH*, ὡς

1. πεποιείσθω F. 4. *ZH*] corr. ex *AH F*. 6. *A* τετρά-
 γωνον] *A V*. 7. ἐστὶ] om. *V*. τετράγωνον] om. *V*. 8. τε-

iam est $E:BF = A^2:ZH^2$, A^2 et ZH^2 commensurabilia sunt [prop. VI]. uerum A^2 rationale est. itaque etiam ZH^2 rationale est. quare ZH rationalis est. et quoniam $E:BF$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ne A^2 quidem ad ZH^2 rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque A , ZH longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. rursus quoniam est

$$BF:FA = ZH^2:H\Theta^2,$$

ZH^2 et $H\Theta^2$ commensurabilia sunt [prop. VI]. uerum ZH^2 rationale est; itaque etiam $H\Theta^2$ rationale est. quare $H\Theta$ rationalis est. et quoniam $BF:FA$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ne ZH^2 quidem ad $H\Theta^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare ZH , $H\Theta$ longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. et utraque rationalis est. itaque ZH , $H\Theta$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo $Z\Theta$ apotome est [prop. LXXIII].

Iam dico, eandem tertiam esse.

nam quoniam est $E:BF = A^2:ZH^2$, $BF:FA = ZH^2:H\Theta^2$, ex aequo [V, 22] $E:FA = A^2:H\Theta^2$.

τρεγώνω] om. V. δέ] έστι, add. δέ m. 2, V. 9. τετράγωνον] om. V. 12. ούδέ b. 13. τετράγωνον] om. P. 15. τή] corr. ex τής B, τής F. 16. τον] om. B. 17. HΘ] e corr. F. 18. τω] προς τό Fb. ζητόν — ZH] mg. m. 1 V. 19. άρα και] in ras. V. ζητή — HΘ] mg. m. 1 F. έστιν] om. b. 21. ούδέ b. 22. τό] (alt.) supra scr. m. 1 F. HΘ] H eras. V. 24. ZH] HZ F. 25. αί — ελσι] mg. m. 2 B, in textu αί ελσι. ελσιν P. 27. τείτη] corr. ex ζητή m. 1 P. 28. ούτω B.

δὲ ὁ $B\Gamma$ πρὸς τὸν $\Gamma\Delta$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς
τὸ ἀπὸ τῆς ΘH , δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ E πρὸς τὸν
 $\Gamma\Delta$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘH . ὁ
δὲ E πρὸς τὸν $\Gamma\Delta$ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος
5 ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ
τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $H\Theta$ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος
ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα
ἢ A τῇ $H\Theta$ μήκει. οὐδετέρα ἄρα τῶν ZH , $H\Theta$ σύμ-
μετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ A μήκει. ᾧ οὖν
10 μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ZH τοῦ ἀπὸ τῆς $H\Theta$, ἔστω
τὸ ἀπὸ τῆς K . ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ὁ $B\Gamma$ πρὸς τὸν $\Gamma\Delta$,
οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $H\Theta$, ἀναστρέ-
ψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ $B\Gamma$ πρὸς τὸν $B\Delta$, οὕτως τὸ
ἀπὸ τῆς ZH τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς K . ὁ δὲ
15 $B\Gamma$ πρὸς τὸν $B\Delta$ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς
πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ZH ἄρα
πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς K λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς
πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν. σύμμετρός ἄρα ἐστὶν ἢ ZH
τῇ K μήκει, καὶ δύναται ἢ ZH τῆς $H\Theta$ μείζον τῷ
20 ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ οὐδετέρα τῶν ZH , $H\Theta$
σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ A μήκει· ἢ $Z\Theta$
ἄρα ἀποτομή ἐστὶ τρίτη.

Εὐρίηται ἄρα ἡ τρίτη ἀποτομή ἢ $Z\Theta$ · ὅπερ ἔδει
δείξαι.

25

πη'.

Εὐρεῖν τὴν τετάρτην ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἢ A καὶ τῇ A μήκει σύμμετρος
ἢ BH · ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἢ BH . καὶ ἐκκείσθωσαν

1. τόν] om. P. οὕτω B. 3. ΘH] corr. ex $H\Theta$ V. 4.
τὸν $\Gamma\Delta$] corr. ex Γ m. 2 F. 9. ἐστὶν V. 11. $B\Gamma$] ras. 2

uerum $E: \Gamma\Delta$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; itaque ne A^2 quidem ad $H\Theta^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare A , $H\Theta$ longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. itaque neutra rectarum ZH , $H\Theta$ rationali propositae A commensurabilis est longitudine. iam sit $ZH^2 \div H\Theta^2 = K^2$ [prop. XIII lemma]. quoniam igitur est $B\Gamma:\Gamma\Delta = ZH^2:H\Theta^2$, conuertendo [V, 19 coroll.] est $B\Gamma:B\Delta = ZH^2:K^2$. uerum $B\Gamma:B\Delta$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque etiam $ZH^2:K^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare ZH , K longitudine commensurabiles sunt [prop. IX], et ZH quadrata excedit $H\Theta$ quadrato rectae sibi commensurabilis. et neutra rectarum ZH , $H\Theta$ rationali propositae A longitudine commensurabilis est. itaque $Z\Theta$ apotome est tertia [deff. tert. 3].

Ergo inuenta est apotome tertia $Z\Theta$; quod erat demonstrandum.

LXXXVIII.

Inuenire apotomen quartam.

Ponatur rationalis A et rectae A longitudine commensurabilis BH . itaque etiam BH rationalis est.

litt. V, corr. ex BE F. τόν] om. P. $\Gamma\Delta$] eras. V, corr. ex $\Gamma\Gamma$ m. 1 b. 12. τό] (alt.) supra scr. m. 1 b. 13. $B\Gamma$] corr. ex ΓB V. 15. πρόσ] πρόν P. 16. ἄρα] supra scr. F. 19. τῇ K — ἡ ZH] mg. m. 1 P. Post μείζον add. Theon: τῶ ἀπὸ τῆς K . ἡ ἄρα ZH τῆς $H\Theta$ μείζον δύναται (BVb, F mg. m. 1). 23. ἡ] om. FV. τρίτη] om. F. ὅπερ εἶδει δεῖξαι] comp. P, om. Bb. 24. δεῖξαι] εὐρεῖν Vφ. 25. πζ' F, et sic deinceps. 27. μῆκει b. 28. ἄρ P, corr. m. 2. εἶσιν PBV. καί] (prius) corr. ex κα P, om. FV.

δύο ἀριθμοὶ οἱ ΔZ , ZE , ὥστε τὸν ΔE ὅλον πρὸς
 ἑκάτερον τῶν ΔZ , EZ λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος
 ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καὶ πεποιήσθω
 ὡς ὁ ΔE πρὸς τὸν EZ , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς BH τε-
 5 τράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $HΓ$ · σύμμετρον ἄρα ἐστὶ
 τὸ ἀπὸ τῆς BH τῷ ἀπὸ τῆς $HΓ$. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ
 τῆς BH · ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $HΓ$ · ῥητὴ ἄρα
 ἐστὶν ἡ $HΓ$. καὶ ἐπεὶ ὁ ΔE πρὸς τὸν EZ λόγον οὐκ
 ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν,
 10 οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς BH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $HΓ$ λόγον
 ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν·
 ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ BH τῇ $HΓ$ μήκει. καὶ εἰσιν
 ἀμφοτέραι ῥηταί· αἱ BH , $HΓ$ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει
 μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $BΓ$.

15 [Λέγω δὴ, ὅτι καὶ τετάρτη].

Ὡς οὖν μεῖζόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς BH τοῦ ἀπὸ τῆς
 $HΓ$, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ . ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ὁ ΔE
 πρὸς τὸν EZ , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς BH πρὸς τὸ ἀπὸ
 τῆς $HΓ$, καὶ ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ $E\Delta$ πρὸς
 20 τὸν ΔZ , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς HB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ .
 ὁ δὲ $E\Delta$ πρὸς τὸν ΔZ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος
 ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ
 τῆς HB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος
 ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα
 25 ἐστὶν ἡ BH τῇ Θ μήκει. καὶ δύναται ἡ BH τῆς $HΓ$
 μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ · ἡ ἄρα BH τῆς $HΓ$ μεῖζον δύ-
 νηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἐαυτῇ. καὶ ἐστὶν ὅλη ἡ BH

2. EZ] eras. V. $\mu\eta]$ om. φ. 4. $\tau\acute{o}\nu]$ mg. m. 1 P. 5.
 πρὸς] om. φ. $H\Gamma]$ $B\Gamma$ supra scr. H b. ἐστίν P, et V
 del. v. 8. ἐστίν] ἐστὶ καὶ FV. 9. πρὸς — 10. τῆς (prius)]
 om. φ lacuna relicta. 9. ἀριθμόν] om. V. 10. οὐδέ b.
 11. ἀριθμός] om. V. ἀριθμόν] om. V. 12. ἐστίν] om. FV.

A ————— | B ————— | Γ ————— | H et ponantur duo numeri ΔZ ,
 Θ ————— | Δ ————— | Z ————— | E ZE , ita ut totus ΔE ad
 utrumque ΔZ , EZ rationem
 non habeat, quam numerus quadratus ad numerum
 quadratum. et fiat $\Delta E : EZ = BH^2 : H\Gamma^2$ [prop. VI
 coroll.]. itaque BH^2 , $H\Gamma^2$ commensurabilia sunt
 [prop. VI]. uerum BH^2 rationale est. itaque etiam
 $H\Gamma^2$ rationale est. quare $H\Gamma$ rationalis est. et
 quoniam $\Delta E : EZ$ rationem non habet, quam numerus
 quadratus ad numerum quadratum, ne BH^2 quidem
 ad $H\Gamma^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad
 numerum quadratum. quare BH , $H\Gamma$ longitudine in-
 commensurabiles sunt [prop. IX]. et utraque ratio-
 nalis est. itaque BH , $H\Gamma$ rationales sunt potentia
 tantum commensurabiles. ergo $B\Gamma$ apotome est [prop.
 LXXIII]. iam sit $\Theta^2 = BH^2 \div H\Gamma^2$ [prop. XIII lemma].
 quoniam igitur est $\Delta E : EZ = BH^2 : H\Gamma^2$, etiam conuer-
 tendo [V, 19 coroll.] est $E\Delta : \Delta Z = BH^2 : \Theta^2$. uerum
 $E\Delta : \Delta Z$ rationem non habet, quam numerus quadratus
 ad numerum quadratum. itaque ne BH^2 quidem ad Θ^2
 rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum
 quadratum. quare BH , Θ longitudine incommensura-
 biles sunt [prop. IX]. est autem $BH^2 \div H\Gamma^2 = \Theta^2$.
 itaque BH quadrata excedit $H\Gamma$ quadrato rectae sibi

BH] $\mu\eta$ φ . $\mu\eta\kappa\epsilon\iota$] om. FV. $\kappa\alpha\iota$ — 13. $\delta\eta\tau\alpha\iota$] mg. m.
 1 V. 13. $\epsilon\lambda\iota\sigma\iota\eta$ P. 14. $\sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\rho\omicron\nu$ $\omicron\nu\kappa$ φ . $B\Gamma$] B e corr. φ ,
 BH P. 15. $\lambda\acute{\epsilon}\gamma\omega$ — $\tau\epsilon\tau\acute{\alpha}\rho\tau\eta$] om. PB, $\kappa\alpha\iota$ φ . $\delta\eta$] om. V.
 17. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$] om. V. 18. $\pi\rho\acute{o}\varsigma$ $\tau\acute{o}\nu$ EZ] $\tau\omicron\upsilon\tau\acute{o}\nu$ $\acute{\alpha}\pi\omicron$ $\tau\eta\varsigma$ EZ b,
 corr. mg. m. 1. $\pi\rho\acute{o}\varsigma$ $\tau\acute{o}$] $\tau\omicron\upsilon\tau\acute{o}\nu$ b. 19. $H\Gamma$] H in ras. m.
 1 B. $\acute{\alpha}\nu\alpha\sigma\tau\rho\acute{\epsilon}\psi\alpha\iota$ φ . 20. $\tau\acute{o}\nu$] om. P, $\tau\acute{o}$ b. BH V. 21.
 $E\Delta$] Δ in ras. m. 1 B. 22. $\omicron\upsilon\delta\acute{\epsilon}$ Vb. 24. $\acute{\alpha}\rho\iota\theta\mu\acute{o}\nu$] om. V.
 $\acute{\alpha}\rho\alpha$] in ras. V. 25. BH] (alt.) mut. in HB V, HB Bfb.
 27. $\sigma\omicron\mu\mu\epsilon\tau\rho\omicron\nu$ b, corr. m. rec. $\acute{\epsilon}\alpha\nu\tau\eta$ $\mu\eta\kappa\epsilon\iota$ B. η $\delta\lambda\eta$ η V.

σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ *A*. ἡ ἄρα *BΓ* ἀποτομή ἐστὶ τετάρτη.

Εὐρηται ἄρα ἡ τετάρτη ἀποτομή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

πθ'.

5 *Εὐρεῖν τὴν πέμπτην ἀποτομήν.*

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ *A*, καὶ τῇ *A* μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ *ΓΗ*. ῥητὴ ἄρα [ἐστίν] ἡ *ΓΗ*. καὶ ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ *ΔΖ*, *ΖΕ*, ὥστε τὸν *ΔΕ* πρὸς ἐκάτερον τῶν *ΔΖ*, *ΖΕ* λόγον πάλιν μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος
 10 ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ *ΖΕ* πρὸς τὸν *ΕΔ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *ΓΗ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΗΒ*.¹ ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς *ΗΒ*. ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ *ΒΗ*. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ *ΔΕ* πρὸς τὸν *ΕΖ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *ΒΗ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς
 15 *ΗΓ*, ὁ δὲ *ΔΕ* πρὸς τὸν *ΕΖ* λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς *ΒΗ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΗΓ* λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ *ΒΗ* τῇ *ΗΓ* μήκει. καὶ εἰσιν
 20 ἀμφοτέραι ῥηταί· αἱ *ΒΗ*, *ΗΓ* ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ *ΒΓ* ἄρα ἀποτομή ἐστίν.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ πέμπτη.

῾Ωι γὰρ μεζὺν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς *ΒΗ* τοῦ ἀπὸ τῆς *ΗΓ*, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς *Θ*. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ
 25 τῆς *ΒΗ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΗΓ*, οὕτως ὁ *ΔΕ* πρὸς τὸν

1. *BΓ* ἄρα *B*. 2. ἐστὶν *P*. 3. ἡ] καὶ ἡ *F*, ἡ *BΓB*. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. *P*, om. *BFVb*. 7. ἐστίν] om. *P*. 8. *ΖΕ*] *ΕΖ F*. *ΔΕ*] *ΔΕ* in ras. *V*. 9. τῶν] τὸν *φ*. πάλιν] om. *Fb*. 10. πεποιήσθω *F*. 11. τόν] om. *P*. 12. Post *ΗΒ* add. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς *ΗΓ* (*ΓΗ V*) τῷ ἀπὸ

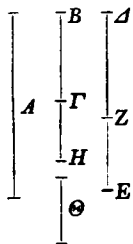
incommensurabilis. et tota BH rationali propositae A commensurabilis est longitudine. itaque $B\Gamma$ apotome est quarta [deff. tert. 4].

Ergo inuenta est quarta apotome; quod erat demonstrandum.

LXXXIX.

Inuenire apotomen quintam.

Ponatur rationalis A , et rectae A longitudine commensurabilis sit ΓH . itaque ΓH rationalis est. et



ponantur duo numeri AZ , ZE , ita ut AE rursus ad neutrum numerorum AZ , ZE rationem habeat, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. et fiat $ZE:EA = \Gamma H^2:HB^2$. itaque etiam HB^2 rationale est [prop. VI]. quare etiam BH rationalis est. et quoniam est $AE:EZ = BH^2:H\Gamma^2$, et $AE:EZ$ rationem

non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ne BH^2 quidem ad $H\Gamma^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque BH , $H\Gamma$ longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. et utraque rationalis est. quare BH , $H\Gamma$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo $B\Gamma$ apotome est [prop. LXXIII].

Iam dico, eandem quintam esse.

sit enim $\Theta^2 = BH^2 \div H\Gamma^2$ [prop. XIII lemma]. quoniam igitur est

$$BH^2 : H\Gamma^2 = AE : EZ,$$

$\tau\eta\varsigma BH$. $\phi\eta\tau\acute{o}\nu$ δὲ τὸ ἀπὸ $\tau\eta\varsigma \Gamma H$ b, mg. FV. $\phi\eta\tau\acute{o}\nu - HB$ mg. V. $\acute{\alpha}\rho\alpha - 13$. $\phi\eta\tau\acute{\eta}$] om. P. 15. $H\Gamma$] Γ in ras. V.

16. οὐδ' $\acute{\alpha}\rho\alpha$] οὐδέ P. 18. $\tau\epsilon\tau\rho\acute{\alpha}\gamma\omega\nu\omicron\nu$] $\tau\epsilon\tau\rho\acute{\alpha}\gamma\omega\nu\omicron\varsigma$ b, sed corr.

21. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ BV, comp. Fb. 25. $H\Gamma -$ p. 270, 1. EZ] in ras. F.

ΕΖ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ὁ δὲ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ
 5 πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει. καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μείζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ΗΒ ἄρα τῆς ΗΓ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἐαυτῇ μήκει. καὶ ἐστὶν ἡ προσ-
 10 αρομόζουσα ἡ ΓΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Α μήκει· ἡ ἄρα ΒΓ ἀποτομή ἐστὶ πέμπτη.

Εὗρηται ἄρα ἡ πέμπτη ἀποτομή ἡ ΒΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

γ'.

15 Εὗρεῖν τὴν ἕκτην ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α καὶ τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Ε, ΒΓ, ΓΔ λόγον μὴ ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἔτι δὲ καὶ ὁ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον μὴ ἔχέτω, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς
 20 πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ὡς δὲ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ
 25 ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ

1. ἀναστρέψαντι — 2. ΕΔ] e corr. F. 1. ἐστίν] om. B F b. ΕΔ] ΔΕ P. 4. ΗΒ F. 7. Θ] ΗΘ F. ΒΗ] ΗΒ B F V. μείζον] om. P. 8. ἄρα ΗΒ V. ΒΗ P. δύναται] om. V. 9. ἀσυμμέτρου] ἀ- in ras. V, m. 2 B. ἐαυτῇ δύναται V. 10. Post ΓΗ eras. καὶ ἀ- V. 11. ΒΓ ἄρα b.

conuertendo [V, 19 coroll.] est $E\Delta : \Delta Z = BH^2 : \Theta^2$.
uerum $E\Delta : \Delta Z$ rationem non habet, quam numerus
quadratus ad numerum quadratum. itaque ne BH^2
quidem ad Θ^2 rationem habet, quam numerus quadratus
ad numerum quadratum. quare BH , Θ longitudine
incommensurabiles sunt [prop. IX]. est autem

$$BH^2 \div H\Gamma^2 = \Theta^2.$$

itaque HB quadrata excedit $H\Gamma$ quadrato rectae sibi
incommensurabilis. et congruens ΓH rationali pro-
positae A longitudine commensurabilis est. itaque
 $B\Gamma$ apotome est quinta [deff. tert. 5].

Ergo inuenta est apotome quinta $B\Gamma$; quod erat
demonstrandum.

XC.

Inuenire apotomen sextam.

Ponatur rationalis A et tres numeri E , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$
inter se rationem non habentes, quam numerus qua-

A |————|
Z Θ H
K |————|
E |————|
B Δ Γ

dratus ad numerum quadratum; et
praeterea ne ΓB quidem ad $B\Delta$
rationem habeat, quam numerus
quadratus ad numerum quadra-
tum. et fiat $E : B\Gamma = A^2 : ZH^2$,
 $B\Gamma : \Gamma\Delta = ZH^2 : H\Theta^2$.

iam quoniam est $E : B\Gamma = A^2 : ZH^2$, erunt A^2 ,
 ZH^2 commensurabilia [prop. VI]. uerum A^2 rationale
est. itaque etiam ZH^2 rationale est. quare etiam

12. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 16. συγγείσθω
B, corr. m. 2. Post E eras. B F. 18. ΓB] supra add.
 $\Gamma\Delta$ B; $B\Gamma$ V. 19. $B\Delta$] corr. ex $B\Gamma$ m. rec. P. 20. πε-
ποιήσθω P, sed corr.; πεποιείσθω F. μὲν ὁ] ὁ μὲν V. 22.
τόν] om. B. 23. $H\Theta$] ΘH b. 26. ῥητόν — 27. ZH]
mg. V. 27. καί] ἐστὶ καί BFb. ἐστὶν PB.

ἡ ZH . καὶ ἐπεὶ ὁ E πρὸς τὸν $B\Gamma$ λόγον οὐκ ἔχει,
 ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν,
 οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH λόγον
 ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.
 5 ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ A τῇ ZH μήκει. πάλιν, ἐπεὶ
 ἐστὶν ὡς ὁ $B\Gamma$ πρὸς τὸν $\Gamma\Delta$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH
 πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $H\Theta$, σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ZH
 τῷ ἀπὸ τῆς $H\Theta$. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ZH . ῥητὸν
 ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $H\Theta$. ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ $H\Theta$. καὶ
 10 ἐπεὶ ὁ $B\Gamma$ πρὸς τὸν $\Gamma\Delta$ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος
 ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ
 τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $H\Theta$ λόγον ἔχει, ὃν τετρά-
 γωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος
 ἄρα ἐστὶν ἡ ZH τῇ $H\Theta$ μήκει. καὶ εἰσιν ἀμφοτέραι
 15 ῥηταί. αἱ ZH , $H\Theta$ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμ-
 μετροί. ἡ ἄρα $Z\Theta$ ἀποτομή ἐστίν.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἔκτῃ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστὶν ὡς μὲν ὁ E πρὸς τὸν $B\Gamma$, οὕτως
 τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH , ὡς δὲ ὁ $B\Gamma$
 20 πρὸς τὸν $\Gamma\Delta$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς
 $H\Theta$, δι' ἴσιν ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ E πρὸς τὸν $\Gamma\Delta$, οὕτως
 τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $H\Theta$. ὁ δὲ E πρὸς
 τὸν $\Gamma\Delta$ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς
 τετράγωνον ἀριθμόν. οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς
 25 τὸ ἀπὸ τῆς $H\Theta$ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς
 πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ
 A τῇ $H\Theta$ μήκει. οὐδετέρα ἄρα τῶν ZH , $H\Theta$ σύμ-
 μετρός ἐστι τῇ A ῥητῇ μήκει. ὃ οὖν μείζον ἐστὶ

1. HZ P. 3. οὐδέ Vb. 5. ἐστὶ V. A] K φ. τῇ]
 τῆς F. 6. ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν B. 7. ἄρα ἐστὶ V. 11. οὐδέ V.
 15. σύμμετροι μόνον V. 16. ἐστὶ BV, comp. Fb. 17. δῆ]

ZH rationalis est. et quoniam $E : B\Gamma$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ne A^2 quidem ad ZH^2 rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque A, ZH longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. rursus quoniam est

$$B\Gamma : \Gamma\Delta = ZH^2 : H\Theta^2,$$

ZH^2 et $H\Theta^2$ commensurabilia sunt [prop. VI]. uerum ZH^2 rationale est; quare etiam $H\Theta^2$ rationale est. itaque $H\Theta$ rationalis est. et quoniam $B\Gamma : \Gamma\Delta$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ne ZH^2 quidem ad $H\Theta^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque $ZH, H\Theta$ longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. et utraque rationalis est. itaque $ZH, H\Theta$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo $Z\Theta$ apotome est [prop. LXXIII].

Iam dico, eandem sextam esse. nam quoniam est $E : B\Gamma = A^2 : ZH^2$, $B\Gamma : \Gamma\Delta = ZH^2 : H\Theta^2$, ex aequo [V, 22] est $E : \Gamma\Delta = A^2 : H\Theta^2$. uerum $E : \Gamma\Delta$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque ne A^2 quidem ad $H\Theta^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare $A, H\Theta$ longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. ergo neutra rectarum $ZH, H\Theta$ rationali A commensurabilis est longitudine. iam sit $K^2 = ZH^2 \div H\Theta^2$ [prop.

supra scr. m. 1 P. 21. ἐστὶν ἄρα F. 24. οὐδ' — 26. ἀριθμὸν] mg. m. 2 B. 24. οὐδ' ἄρα] οὐδέ b. A] A ἄρα b.
25. HΘ] mut. in ΘH m. 2 V, ΘH b. 27. οὐδετέρα ἄρα] καὶ οὐδετέρα BVb. 28. τῇ A ῥητῇ] τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ A b et e corr. F (post A del. ῥητῇ). φ] ὡς b. οὐν] οὐ P, corr. m. 2.

τὸ ἀπὸ τῆς ZH τοῦ ἀπὸ τῆς $H\Theta$, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς K .
 ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ὁ $B\Gamma$ πρὸς τὸν $\Gamma\Delta$, οὕτως τὸ ἀπὸ
 τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $H\Theta$, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν
 ὡς ὁ ΓB πρὸς τὸν $B\Delta$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς
 5 τὸ ἀπὸ τῆς K . ὁ δὲ ΓB πρὸς τὸν $B\Delta$ λόγον οὐκ
 ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν·
 οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς K λόγον
 ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν·
 ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ZH τῇ K μήκει. καὶ δύναται
 10 ἡ ZH τῆς $H\Theta$ μείζον τῷ ἀπὸ τῆς K · ἡ ZH ἄρα τῆς
 $H\Theta$ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἐαυτῇ μήκει.
 καὶ οὐδετέρω τῶν ZH , $H\Theta$ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκει-
 μένῃ ρητῇ μήκει τῇ A . ἡ ἄρα $Z\Theta$ ἀποτομή ἐστὶν ἕκτη.
 Εὗρηται ἄρα ἡ ἕκτη ἀποτομή ἡ $Z\Theta$. ὅπερ ἔδει
 15 δεῖξαι.

9α'.

Ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ρητῆς καὶ ἀπο-
 τομῆς πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἀποτομή
 ἐστίν.

20 Περιεχέσθω γὰρ χωρίον τὸ AB ὑπὸ ρητῆς τῆς AG
 καὶ ἀποτομῆς πρώτης τῆς AD . λέγω, ὅτι ἡ τὸ AB
 χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ ἀποτομή ἐστὶ πρώτη ἡ AD , ἔστω αὐτῇ
 προσαρμόζουσα ἡ ΔH . αἱ AH , $H\Delta$ ἄρα ρηταὶ εἰσι
 25 δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ὅλη ἡ AH σύμμετρός
 ἐστὶ τῇ ἐκκειμένῃ ρητῇ τῇ AG , καὶ ἡ AH τῆς $H\Delta$
 μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἐαυτῇ μήκει· ἐὰν

3. ἄρα] om. F. 4. ΓB] $B\Gamma$ FB. $B\Delta$] supra add. Γ
 m. 1 b, ΔB corr. ex $B\Delta$ uel $B\Gamma$ V. 5. τῆς] τοῦ φ. 8.
 ἔχει] οὐκ ἔχει P. 10. τῷ] corr. ex τό m. 1 F. ἡ] in ras.
 m. 1 P. 11. συμέτρου B , corr. m. 2. 13. τῇ A μήκει V.
 14. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. Seq. demonstr.

XIII lemma]. quoniam igitur est $B\Gamma:\Gamma\Delta = ZH^2:H\Theta^2$, conuertendo [V, 19 coroll.] est

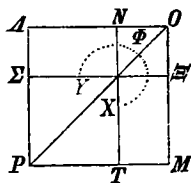
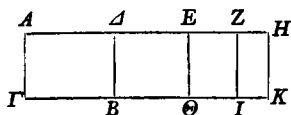
$$\Gamma B : B\Delta = ZH^2 : K^2.$$

uerum $\Gamma B : B\Delta$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque ne ZH^2 quidem ad K^2 rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare ZH , K longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. est autem $ZH^2 \div H\Theta^2 = K^2$. itaque ZH quadrata excedit $H\Theta$ quadrato rectae sibi incommensurabilis. et neutra rectarum ZH , $H\Theta$ rationali propositae A commensurabilis est longitudine. itaque $Z\Theta$ apotome est sexta [def. tert. 6].

Ergo inuenta est apotome sexta $Z\Theta$; quod erat demonstrandum.

XCI.

Si spatium comprehenditur recta rationali et apotome prima, recta spatio aequalis quadrata apotome est.



Spatium enim AB rationali $A\Gamma$ et apotome prima $A\Delta$ comprehendatur. dico, rectam spatio AB aequalem quadratam apotomen esse.

nam quoniam $A\Delta$ apotome est prima, ei congruens sit ΔH . itaque AH , $H\Delta$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles [prop.

alt., u. app. 16. α' F, $\alpha\beta'$ BVb, et sic deinceps. 19. $\epsilon\sigma\tau\iota$ BV, comp. Fb. 20. $\tau\omicron$] $\tau\omicron$ V. 21. η] m. 2 F. 23. $\gamma\acute{\alpha}\rho$] om. b, m. 2 B. $\pi\rho\acute{\omega}\tau\eta$ $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$ BFV. 24. AH , $H\Delta$] in ras. m. 2 V. 27. $\acute{\alpha}\sigma\sigma\mu\mu\epsilon\tau\rho\omicron\nu$ F, et V, sed corr.

ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔH ἴσον παρὰ τὴν AH παραβληθῇ ἔλλειπον εἶδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ. τετμήσθω ἡ ΔH δίχα κατὰ τὸ E , καὶ τῷ ἀπὸ τῆς EH ἴσον παρὰ τὴν AH παραβελήσθω ἔλλειπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν AZ , ZH σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZH . καὶ διὰ τῶν E , Z , H σημείων τῇ AG παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ $E\Theta$, ZI , HK .

- Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZH μήκει,
 10 καὶ ἡ AH ἄρα ἑκατέρα τῶν AZ , ZH σύμμετρός ἐστὶ μήκει. ἀλλὰ ἡ AH σύμμετρός ἐστὶ τῇ AG καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν AZ , ZH σύμμετρός ἐστὶ τῇ AG μήκει. καὶ ἐστὶ φητὴ ἡ AG φητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν AZ , ZH ὥστε καὶ ἑκάτερον τῶν AI , ZK φητόν ἐστὶν.
 15 καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστὶν ἡ ΔE τῇ EH μήκει, καὶ ἡ ΔH ἄρα ἑκατέρα τῶν ΔE , EH σύμμετρός ἐστὶ μήκει. φητὴ δὲ ἡ ΔH καὶ ἀσύμμετρος τῇ AG μήκει· φητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΔE , EH καὶ ἀσύμμετρος τῇ AG μήκει· ἑκάτερον ἄρα τῶν $\Delta\Theta$, EK μέσον ἐστὶν.
 20 Κεῖσθω δὴ τῷ μὲν AI ἴσον τετράγωνον τὸ AM , τῷ δὲ ZK ἴσον τετράγωνον ἀφηγήσθω κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ τὴν ὑπὸ LOM τὸ $N\Xi$ · περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστὶ τὰ AM , $N\Xi$ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ OP , καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.
 25 ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν AZ , ZH περιεχόμενον

1. μέρει] -ερ- in ras. B. τοῦ ἀπό] m. 2 F. 2. τήν] corr. ex τῆς m. 2 F. AH] A in ras. F. 3. διαιρεῖ] supra add. μήκει m. 2 V, διελεί BF, διέλη b. 4. τῷ] τὸ F. 6. ZH] (alt.) HZ F. 8. ἤχθωσαν] ἤχθω- in ras. m. 1 P. ZI] mut. in ZH m. 2 F. 9. τῇ] τῆς F. 11. ἀλλ' F. AG] Γ e corr. m. 1 F. 13. ἐστὶν F. 14. AI] AG P, I in ras. V. ἐστὶν] ἐστὶ BV, comp. Fb. 15. καί] (alt.) om. V. 19. ἐστὶ PBV, comp. Fb. 20. καὶ κεῖσθω V. 22. AO , OM

LXXIII]. et tota AH rationali propositae AG commensurabilis est, et AH quadrata excedit HA quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis [deff. tert. 1]. itaque si quartae parti quadrati AH^2 aequale rectae AH adplicatur spatium figura quadrata deficiens, in partes commensurabiles eam diuidit [prop. XVII]. secetur AH in duas partes aequales in E , et quadrato EH^2 aequale rectae AH adplicetur spatium figura quadrata deficiens, et sit $AZ \times ZH$. itaque AZ , ZH commensurabiles sunt. et per puncta E , Z , H rectae AG parallelae ducantur $E\Theta$, ZI , HK .

et quoniam AZ , ZH longitudine commensurabiles sunt, etiam AH utrique AZ , ZH commensurabilis est [prop. XV]. uerum AH , AG commensurabiles sunt. quare etiam utraque AZ , ZH rectae AG longitudine commensurabilis est [prop. XII]. et AG rationalis est. quare etiam utraque AZ , ZH rationalis est. itaque etiam utrumque AI , ZK rationale est [VI, 1; prop. XI]. et quoniam AE , EH longitudine commensurabiles sunt, etiam AH utrique AE , EH longitudine commensurabilis est [prop. XV]. uerum AH rationalis est et rectae AG longitudine incommensurabilis. quare etiam utraque AE , EH rationalis est et rectae AG longitudine incommensurabilis [prop. XIII]. ergo utrumque $A\Theta$, EK medium est [prop. XX].

ponatur igitur quadratum $AM = AI$, et spatio ZK aequale auferatur quadratum $N\Xi$ communem angulum habens AOM . itaque quadrata AM , $N\Xi$

PF, τῶν AO , OM Bb. 23. ἐστὶ] εἰς V. τετράγωνον] om. V.
25. τό] in ras. V. τῶν] m. 2 F. περιεχόμενον] -ον in ras. V.

ὁρθογώνιον τῷ ἀπὸ τῆς EH τετραγώνῳ, ἔστιν ἄρα
ὡς ἡ AZ πρὸς τὴν EH , οὕτως ἡ EH πρὸς τὴν ZH .
ἀλλ' ὡς μὲν ἡ AZ πρὸς τὴν EH , οὕτως τὸ AI πρὸς
τὸ EK , ὡς δὲ ἡ EH πρὸς τὴν ZH , οὕτως ἔστι τὸ
5 EK πρὸς τὸ KZ . τῶν ἄρα AI , KZ μέσον ἀνάλογόν
ἔστι τὸ EK . ἔστι δὲ καὶ τῶν AM , $NΞ$ μέσον ἀνά-
λογον τὸ MN , ὡς ἐν τοῖς ἔμπροσθεν ἐδείχθη, καὶ
ἔστι τὸ [μὲν] AI τῷ AM τετραγώνῳ ἴσον, τὸ δὲ KZ
τῷ $NΞ$. καὶ τὸ MN ἄρα τῷ EK ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ
10 τὸ μὲν EK τῷ $ΔΘ$ ἔστιν ἴσον, τὸ δὲ MN τῷ $ΔΞ$.
τοῦ ἄρα $ΔK$ ἴσον ἔστι τῷ $ΓΦΧ$ γνώμονι καὶ τῷ $NΞ$.
ἔστι δὲ καὶ τὸ AK ἴσον τοῖς AM , $NΞ$ τετραγώνοις.
λοιπὸν ἄρα τὸ AB ἴσον ἔστι τῷ $ΣΤ$. τὸ δὲ $ΣΤ$ τὸ
ἀπὸ τῆς AN ἔστι τετράγωνον. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς AN
15 τετράγωνον ἴσον ἔστι τῷ AB . ἡ AN ἄρα δύναται
τὸ AB .

Λέγω δὴ, ὅτι ἡ AN ἀποτομή ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστιν ἐκάτερον τῶν AI , ZK , καὶ
ἔστιν ἴσον τοῖς AM , $NΞ$, καὶ ἐκάτερον ἄρα τῶν AM ,
20 $NΞ$ ῥητόν ἐστιν, τουτέστι τὸ ἀπὸ ἐκατέρας τῶν AO ,
 ON . καὶ ἐκατέρα ἄρα τῶν AO , ON ῥητὴ ἐστίν.
πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἔστι τὸ $ΔΘ$ καὶ ἔστιν ἴσον τῷ $ΔΞ$,
μέσον ἄρα ἔστι καὶ τὸ $ΔΞ$. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν $ΔΞ$
μέσον ἐστίν, τὸ δὲ $NΞ$ ῥητόν, ἀσύμμετρον ἄρα ἔστι
25 τὸ $ΔΞ$ τῷ $NΞ$. ὡς δὲ τὸ $ΔΞ$ πρὸς τὸ $NΞ$, οὕτως
ἔστιν ἡ AO πρὸς τὴν ON . ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ

2. τήν] (prius) om. P. 6. Post ἀνάλογον ras. 3 litt. V. 7. NM B. 8. μὲν] om. BFVb. 9. τό] τῷ b. MN] EK in ras. V. EK] MN in ras. V. ἔστιν ἴσον V. 10. τό] (prius) τῷ V. τῷ] ἴσον ἔστι τό V. τῷ $ΔΘ$] in ras. m. 1 P. ἔστιν ἴσον] om. V, ἴσον ἐστίν F. τῷ δὲ MN ἴσον ἔστι τὸ $ΔΞ$. ἴσον ἄρα τὸ $ΔK$ τῷ V. 12. ἴσον] om. V (supra

circum eandem diametrum posita sunt [VI, 26]. sit OP diametrus eorum, et describatur figura [cfr. uol. I p. 137 not.]. iam quoniam est $AZ \times ZH = EH^2$, erit [VI, 17] $AZ:EH = EH:ZH$. uerum $AZ:EH = AI:EK$ et $EH:ZH = EK:KZ$ [VI, 1]. itaque EK medium proportionale est inter AI , KZ . est autem etiam MN medium proportionale inter AM , $NΞ$, sicuti supra [prop. LIII lemma] demonstratum est, et $AI = AM$, $KZ = NΞ$. itaque etiam $MN = EK$. est autem $EK = AO$, $MN = AΞ$ [I, 43]. itaque $AK = TΦX + NΞ$. uerum etiam $AK = AM + NΞ$. itaque reliquum $AB = ΣT$. est autem $ΣT = AN^2$. quare $AN^2 = AB$. ergo AN quadrata spatio AB aequalis est.

Iam dico, AN apotomen esse.

nam quoniam utrumque AI , ZK rationale est, et

$$AI = AM, ZK = NΞ,$$

etiam utrumque AM , $NΞ$, hoc est AO^2 , ON^2 , rationale est. quare etiam utraque AO , ON rationalis est. rursus quoniam AO medium est, et $AO = AΞ$, etiam $AΞ$ medium est. iam quoniam $AΞ$ medium est, $NΞ$ autem rationale, $AΞ$ et $NΞ$ incommensurabilia sunt. uerum $AΞ:NΞ = AO:NO$ [VI, 1]. itaque AO , ON longitudine incommensurabiles sunt [prop. XI]. et utraque rationalis est; itaque AO , ON ra-

est ras.). 13. $ΣT$] corr. ex BT V. τὸ δὲ $ΣT$] supra scr. m. 1 P. τὸ] corr. ex. τὸ FV. 15. ἐστὶ] postea ins. F. τὸ] τὸ F. 17. καὶ ἡ P. 19. ἐστὶ V. ἴσων] ἴσα Bb, om. V. $NΞ$ ἴσα V. 20. ἐστὶ BV, comp. Fb. 21. ἐστὶ PBV, comp. Fb. 23. ἐστὶ] ἐστὶν P, om. V. 24. ἐστὶν] ἐστὶ PBVb, comp. F. 25. $NΞ$] (prius) corr. ex NK m. 1 b. τὸ] (tert.) in ras. m. 1 P.

$\Lambda\Omega$ τῇ $\Omega\Lambda$ μήκει. καὶ εἰσιν ἀμφοτέραι ρηταί· αἱ $\Lambda\Omega$, $\Omega\Lambda$ ἄρα ρηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἡ $\Lambda\Lambda$. καὶ δύναται τὸ AB χωρίον· ἡ ἄρα τὸ AB χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστίν.

5 Ἐὰν ἄρα χωρίον περιέχεται ὑπὸ ρητῆς καὶ τὰ ἐξῆς.

αβ'.

Ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ρητῆς καὶ ἀποτομῆς δευτέρας, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστὶ πρώτη.

10 Χωρίον γὰρ τὸ AB περιεχέσθω ὑπὸ ρητῆς τῆς AG καὶ ἀποτομῆς δευτέρας τῆς AD . λέγω, ὅτι ἡ τὸ AB χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστὶ πρώτη.

Ἔστω γὰρ τῇ AD προσαρμόζουσα ἡ $ΔΗ$. αἱ ἄρα AH , $HΔ$ ρηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ
15 προσαρμόζουσα ἡ $ΔΗ$ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ρητῇ τῇ AG , ἡ δὲ ὅλη ἡ AH τῆς προσαρμοζούσης τῆς $HΔ$ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμέτρου ἐαυτῇ μήκει. ἐπεὶ οὖν ἡ AH τῆς $HΔ$ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμέτρου ἐαυτῇ, ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς
20 $HΔ$ ἴσον παρὰ τὴν AH παραβληθῇ ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ. τετμησθῶ οὖν ἡ $ΔΗ$ δίχα κατὰ τὸ E . καὶ τῷ ἀπὸ τῆς EH ἴσον παρὰ τὴν AH παραβεβλήσθω ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ,

2. $\Omega\Lambda$] $\Lambda\Omega$ e corr. V. εἰσιν V, sed ν del. 4. τὸ AB ἄρα V. 5. καὶ τὰ ἐξῆς] καὶ ἀποτομῆς πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστίν Theon (BFVb). 8. μέση BFVb et P, sed corr. m. 1. 11. AD] AB b; δὲ AD P, corr. m. 1. 12. AB] corr. ex AD V. μέση BFb, et V, corr. m. 2. 14. $HΔ$] $ΔΗ$ F. δυναμένη V, corr. m. 2. 16. τῆς] om. F. 17. $HΔ$] eras. V. Ante συμέτρου ras. 1 litt. V. 18. AH] H in ras. V. τῆς] corr. ex τῇ m. 2 V. 19. τοῦ]

tionales sunt potentia tantum commensurabiles. quare AN apotome est [prop. LXXIII]. et quadrata spatio AB est aequalis. itaque recta spatio AB aequalis quadrata apotome est.

Ergo si spatium comprehenditur recta rationali, et quae sequuntur.

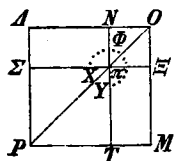
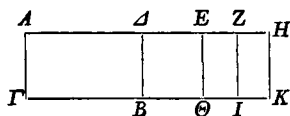
XCII.

Si spatium recta rationali et apotome secunda comprehenditur, recta spatio aequalis quadrata mediae apotome est prima.

Spatium enim AB recta rationali AG et apotome secunda AD comprehendatur. dico, rectam spatio AB aequalem quadratam mediae apotomen primam esse.

nam ΔH rectae AD congruens sit. itaque AH , $H\Delta$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles [prop. LXXIII], et congruens ΔH rationali propositae AG commensurabilis est, tota autem AH quadrata excedit congruentem $H\Delta$ quadrato rectae sibi commensurabilis longitudine [deff. tert. 2]. iam quoniam AH^2 excedit $H\Delta^2$ quadrato rectae sibi com-

mensurabilis, si $\frac{1}{4}H\Delta^2$ aequale rectae AH adplicatur spatium figura quadrata deficiens, in partes commensurabiles eam diuidit [prop. XVII]. iam ΔH in puncto E in duas partes aequales secetur. et quadrato EH^2 aequale



τῷ b. 20. AH] H e corr. V. 21. $\delta\epsilon\lambda\epsilon\iota$ Theon (BFVb).
Dein add. $\mu\eta\kappa\epsilon\iota$ V. 22. ΔH] e corr. m. 2 V. EH] ΘH P.

καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν AZ, ZH · σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZH μήκει. καὶ ἡ AH ἄρα ἐκατέρω τῶν AZ, ZH σύμμετρός ἐστι μήκει. ρητὴ δὲ ἡ AH καὶ ἀσύμμετρος τῇ $ΑΓ$ μήκει· καὶ ἐκατέρω ἄρα τῶν AZ, ZH
 5 ρητὴ ἐστὶ καὶ ἀσύμμετρος τῇ $ΑΓ$ μήκει· ἐκάτερον ἄρα τῶν AI, ZK μέσον ἐστίν. πάλιν, ἐπεὶ σύμμετρός ἐστὶν ἡ $ΔΕ$ τῇ $ΕΗ$, καὶ ἡ $ΔΗ$ ἄρα ἐκατέρω τῶν $ΔΕ, ΕΗ$ σύμμετρός ἐστίν. ἀλλ' ἡ $ΔΗ$ σύμμετρός ἐστι τῇ $ΑΓ$ μήκει [ρητὴ ἄρα καὶ ἐκατέρω τῶν $ΔΕ, ΕΗ$ καὶ
 10 σύμμετρος τῇ $ΑΓ$ μήκει]. ἐκάτερον ἄρα τῶν $ΔΘ, ΕΚ$ ρητόν ἐστιν.

Συνεστιάτω οὖν τῷ μὲν AI ἴσον τετράγωνον τὸ AM , τῷ δὲ ZK ἴσον ἀφηρησθῶ τὸ $NΞ$ περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὅν τῷ AM τὴν ὑπὸ τῶν $ΑΟΜ$ · περὶ
 15 τὴν αὐτὴν ἄρα ἐστὶ διάμετρον τὰ $AM, NΞ$ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ OP , καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν τὰ AI, ZK μέσα ἐστὶ καὶ ἐστὶν ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν $ΑΟ, ON$, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΟ, ON$ [ἄρα] μέσα ἐστίν· καὶ αἱ $ΑΟ, ON$ ἄρα μέσαι εἰσὶ
 20 δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν AZ, ZH ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΕΗ$, ἐστὶν ἄρα ὥς ἡ AZ πρὸς τὴν $ΕΗ$, οὕτως ἡ $ΕΗ$ πρὸς τὴν ZH · ἀλλ' ὥς μὲν ἡ AZ πρὸς τὴν $ΕΗ$, οὕτως τὸ AI πρὸς τὸ EK · ὥς δὲ ἡ $ΕΗ$ πρὸς τὴν ZH , οὕτως [ἐστὶ] τὸ EK πρὸς
 25 τὸ ZK · τῶν ἄρα AI, ZK μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ

1. ἀσύμμετρος b, sed corr. 2. Post μήκει add. καὶ διὰ τῶν E, Z, H σημείων τῇ $ΑΓ$ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ $EΘ, ΖΙ, ΗΚ$ (corr. ex ZK V). καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZH μήκει b, V mg. m. 1, F mg., sed euan. 4. ἄρα] om. FV. 6. AI] mut. in AZ F, AZ b. ZH b, et e corr. F. ἐστὶ BV, comp. Fb. 7. ἡ $ΔΗ$] $HΔ$ F. 8. ἐστὶ] m. 2 B. 9. ρητὴ — 10. μήκει] om. P. 9. $ΔΕ, ΕΗ$] E bis in ras. V. 10. καὶ ἐκάτερον b. 11. ἐστὶ PBV, comp. Fb. 12. τῷ] corr.

rectae AH spatium adplicetur figura quadrata deficiens, et sit $AZ \times ZH$. itaque AZ , ZH longitudine commensurabiles sunt. itaque etiam AH utrique AZ , ZH longitudine commensurabilis est [prop. XV]. uerum AH rationalis est et rectae AI longitudine incommensurabilis. itaque etiam utraque AZ , ZH rationalis est et rectae AI longitudine incommensurabilis [prop. XIII]. quare utrumque AI , ZK medium est [prop. XX]. rursus quoniam AE , EH commensurabiles sunt, etiam AH utrique AE , EH commensurabilis est [prop. XV].¹⁾ uerum AH , AI longitudine commensurabiles sunt. ergo utrumque AO , EK rationale est.

iam construatur quadratum $AM = AI$, et spatio ZK aequale auferatur $N\Xi$ in eodem angulo AO positum, quo AM . itaque quadrata AM , $N\Xi$ circumeandem diametrum posita sunt [VI, 26]. sit OP eorum diameter, et describatur figura [cfr. uol. I p. 137 not.]. iam quoniam AI , ZK media sunt et $AI = AO^2$, $ZK = ON^2$, etiam AO^2 , ON^2 media sunt. quare etiam AO , ON mediae sunt potentia tantum commensurabiles. et quoniam $AZ \times ZH = EH^2$, erit [VI, 17] $AZ:EH = EH:ZH$. uerum $AZ:EH = AI:EK$

1) Hoc promptius ex prop. VI concludi poterat; nam $AH = 2 AE = 2 EH$.

ex δ V, τό F. 14. $\delta\upsilon\ \tau\hat{\omega}\ AM$] e corr. F. $\tau\acute{\eta}\nu\ \tau\hat{\omega}\ P$. $\tau\hat{\omega}\nu$] om. V. 15. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu\ \acute{\alpha}\rho\alpha\ V$. 17. Post $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ add. Theon: $\kappa\alpha\iota\ \sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\rho\alpha\ \acute{\alpha}\lambda\lambda\acute{\eta}\lambda\omicron\iota\varsigma$ (BFVb; in V post $\kappa\alpha\iota$ ras. 1 litt.). $\acute{\iota}\sigma\omicron\nu\ F$. 19. $\acute{\alpha}\rho\alpha$] om. P. $\mu\acute{\epsilon}\sigma\alpha\iota\ \acute{\epsilon}\iota\sigma\iota\ V$, sed corr. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\ PB$, comp. Fb. $\kappa\alpha\iota$] corr. ex $\delta\nu$. V. $\alpha\iota$ — 20. $\delta\nu$] mg. m. 2 $\bar{V}$. 19. $\acute{\epsilon}\iota\sigma\iota$] $\acute{\epsilon}\iota\sigma\iota\nu\ \lambda\acute{\epsilon}\gamma\omega\ \delta\tau\iota\ \kappa\alpha\iota\ P$. 20. $\mu\acute{\omicron}\nu\omicron\nu$] eras. V. $\sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\rho\alpha\ V$, corr. m. 2. $\kappa\alpha\iota\ \acute{\epsilon}\pi\epsilon\iota$] $\acute{\epsilon}\pi\epsilon\iota\ \gamma\acute{\alpha}\rho\ P$. 21. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$] supra scr. m. 1 F. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$] corr. ex $\acute{\iota}\sigma\omicron\nu$ m. 1 F. 23. AI] $AH\ P$. 24. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$] om. P. 25. ZK] (alt.) Z corr. ex K m. 1 V.

ΕΚ. ἔστι δὲ καὶ τῶν ΑΜ, ΝΞ τετραγώνων μέσον ἀνάλογον τὸ ΜΝ· καὶ ἔστιν ἴσον τὸ μὲν ΑΙ τῷ ΑΜ, τὸ δὲ ΖΚ τῷ ΝΞ· καὶ τὸ ΜΝ ἄρα ἴσον ἔστι τῷ ΕΚ. ἀλλὰ τῷ μὲν ΕΚ ἴσον [ἔστι] τὸ ΑΘ, τῷ δὲ ΜΝ ἴσον
 5 τὸ ΑΞ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΚ ἴσον ἔστι τῷ ΤΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ. ἐπεὶ οὖν ὅλον τὸ ΑΚ ἴσον ἔστι τοῖς ΑΜ, ΝΞ, ὥν τὸ ΑΚ ἴσον ἔστι τῷ ΤΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ, λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ ἴσον ἔστι τῷ ΤΣ. τὸ δὲ ΤΣ ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΝ· τὸ ἀπὸ τῆς ΑΝ ἄρα
 10 ἴσον ἔστι τῷ ΑΒ χωρίῳ· ἡ ΑΝ ἄρα δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Λέγω [δὴ], ὅτι ἡ ΑΝ μέσης ἀποτομῆ ἔστι πρώτη.
 Ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστι τὸ ΕΚ καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΑΞ, ῥητὸν ἄρα ἔστι τὸ ΑΞ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν
 15 ΑΟ, ΟΝ. μέσον δὲ ἐδείχθη τὸ ΝΞ· ἀσύμμετρον ἄρα ἔστι τὸ ΑΞ τῷ ΝΞ· ὥς δὲ τὸ ΑΞ πρὸς τὸ ΝΞ, οὕτως ἔστιν ἡ ΑΟ πρὸς ΟΝ· αἱ ΑΟ, ΟΝ ἄρα ἀσύμμετροί εἰσι μήκει. αἱ ἄρα ΑΟ, ΟΝ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσai· ἡ ΑΝ ἄρα μέσης
 20 ἀποτομῆ ἔστι πρώτη· καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Ἡ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομῆ ἔστι πρώτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

αγ'.

Ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀπο-

1. ΕΚ] ΕΙ F. ΝΞ] ΜΝ F, sed corr. 3. ΖΚ] corr. ex KZ m. 1 V. 4. τῷ] τό V. ἔστι] om. P. τό] τῷ V. τῷ] τό V. ἴσον ἔστι Bb. 5. τό] (prius) τῷ V φ. 7. ὥν] ὅν φ. ἔστι] m. 2 F. 8. ΤΣ] in ras. V. 9. τὸ δὲ ΤΣ ἔστι] τουτέστι B. 10. ἔστιν P. τό] τὸ ἀπὸ τῆς P; τὸ ἀπὸ τῆς ΑΝ mg. m. 1 b. 12. δὴ] om. P. μέση PBFb, μέσης φ, e corr. m. 2 V. ἔστιν P. 13. τὸ ΕΚ — 14. τῷ ΑΞ] in ras. F. 13. ἔστιν] ἔστι b. Post ἴσον add. τῷ (τό F) ΝΜ τουτέστι Fb, m. 2 V.

[VI, 1] et [id.] $EH:ZH = EK:ZK$. quare EK medium est proportionale inter AI , ZK . uerum etiam MN medium est proportionale inter AM , $NΞ$ [prop. LIII lemma]. et $AI = AM$, $ZK = NΞ$. quare etiam $MN = EK$. uerum $AK = EK$, $AΞ = MN$ [I, 43]. quare $AK = TΦX + NΞ$. iam quoniam $AK = AM + NΞ$, quorum $AK = TΦX + NΞ$, erit reliquum $AB = TΣ$. sed $TΣ = AN^2$. itaque $AN^2 = AB$. ergo AN quadrata spatio AB aequalis est.

Iam dico, AN mediae esse apotomen primam. nam quoniam EK rationale est, et $EK = AΞ$, etiam $AΞ$ rationale est, hoc est $AO < ON$. demonstrauius autem, $NΞ$ medium esse [u. p. 282, 18]. quare $AΞ$, $NΞ$ incommensurabilia sunt. est autem

$$AΞ : NΞ = AO : ON$$

[VI, 1]. quare AO , ON longitudine incommensurabiles sunt [prop. XI]. itaque AO , ON mediae sunt potentia tantum commensurabiles spatium rationale comprehendentes. itaque AN mediae apotome est prima [prop. LXXIV]. et est $AN^2 = AB$.

Ergo recta spatio AB aequalis quadrata mediae apotome est prima; quod erat demonstrandum.

XCIH.

Si spatium recta rationali et apotome tertia com-

16. *ἐστίν* P. *τῷ* $NΞ$] m. 2 B. *ὡς δέ*] καὶ ὡς ἄρα B.
 17. *ἐστίν*] om. V. *πρὸς τὴν* FV. *ἄρα* — 18. *μήκει*] *δυναμει εἰς μόνον σύμμετροι* in ras. V, mg. add. m. rec.: *ἄρα μήκει εἰσὶν ἀσύμμετροι· τὰ δὲ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα σύμμετρα· αἱ* AO , ON *ἄρα.* 17. *σύμμετροι* F. 19. AN] ON b, AH F. *μέση* BFVb. 21. *ἡ* — *χωρίον*] om. φ. *δυνα-* in spatio 9 litt. F. *μέση* BFb. 22. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*] comp. P, om. BFVb.

τομῆς τρίτης, ἥ τὸ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομῇ ἐστὶ δευτέρα.

Χωρίον γὰρ τὸ AB περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς AG καὶ ἀποτομῆς τρίτης τῆς AD . λέγω, ὅτι ἡ τὸ AB
5 χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομῇ ἐστὶ δευτέρα.

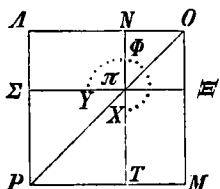
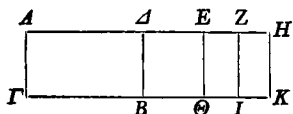
Ἐστω γὰρ τῇ AD προσαρμόζουσα ἡ $ΔΗ$. αἱ $ΑΗ$,
 $ΗΔ$ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ
οὐδετέρα τῶν $ΑΗ$, $ΗΔ$ σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκ-
κειμένη ῥητῇ τῇ AG , ἥ δὲ ὅλη ἡ $ΑΗ$ τῆς προσαρμο-
10 ζούσης τῆς $ΔΗ$ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμέτρου
ἐαυτῇ. ἐπεὶ οὖν ἡ $ΑΗ$ τῆς $ΗΔ$ μείζον δύναται τῷ
ἀπὸ συμέτρου ἐαυτῇ, ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ
ἀπὸ τῆς $ΔΗ$ ἴσον παρὰ τὴν $ΑΗ$ παραβληθῇ ἐλλείπον
εἶδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διελεί. τετμήσθω
15 οὖν ἡ $ΔΗ$ δίχα κατὰ τὸ E , καὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΕΗ$ ἴσον
παρὰ τὴν $ΑΗ$ παραβεβλήσθω ἐλλείπον εἶδει τετραγώνῳ,
καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν AZ , ZH . καὶ ἡχθωσαν διὰ τῶν
 E , Z , H σημείων τῇ AG παράλληλοι αἱ $ΕΘ$, ZI , $ΗΚ$.
σύμμετροι ἄρα εἰσὶν αἱ AZ , ZH . σύμμετρον ἄρα καὶ
20 τὸ AI τῷ ZK . καὶ ἐπεὶ αἱ AZ , ZH σύμμετροί εἰσι
μήκει, καὶ ἡ $ΑΗ$ ἄρα ἐκατέρα τῶν AZ , ZH σύμ-
μετρός ἐστι μήκει. ῥητὴ δὲ ἡ $ΑΗ$ καὶ ἀσύμμετρος
τῇ AG μήκει· ὥστε καὶ αἱ AZ , ZH . ἐκάτερον ἄρα τῶν

1. μέση BFVb. 5. μέση BFb, et V, corr. m. 2. ἐστὶν P.
9. -αρμοζ-] in ras. V. 10. ἀσύμμετρον b. 11. ἐπεὶ — 12.
ἐαυτῇ] punctis notat. V. 11. $ΗΔ$] $ΔΗ$ P. 12. τοῦ] corr.
ex τῷ m. 1 b. 14. διελεί μήκει V. 15. τῷ] τό φ. 18.
 $Η$] ὁμ. V. ZI] mut. in IZ V. 19. εἰσὶν] εἰ- e corr. V.
20. εἰσὶν P. 23. ὥστε καὶ αἱ AZ , ZH] καὶ ἐκατέρα ἄρα
(supra scr. m. 1 V) τῶν AZ , ZH ῥητὴ ἐστὶ καὶ ἀσύμμετρος τῇ
 AG μήκει· καὶ Theon (BFVb).

prehenditur, recta spatio aequalis quadrata mediae apotome est secunda.

Spatium enim AB recta rationali AG et apotome tertia AD comprehendatur. dico, rectam spatio AB aequalem quadratam mediae apotomen esse secundam.

nam ΔH rectae AD congruens sit. itaque AH , $H\Delta$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles,



et neutra rectarum AH , $H\Delta$ rationali propositae AG longitudine commensurabilis est, tota autem AH congruentem ΔH excedit quadrato rectae sibi commensurabilis [deff. tert. 3]. quoniam igitur AH^2 excedit ΔH^2 quadrato rectae sibi commensurabilis, si $\frac{1}{4}\Delta H^2$ aequale rectae AH adplicatur

spatium figura quadrata deficiens, in partes commensurabiles eam diuidet [prop. XVII]. iam ΔH in E in duas partes aequales secetur, et quadrato EH^2 aequale rectae AH adplicetur spatium figura quadrata deficiens, et sit $AZ \times ZH$. et per puncta E , Z , H rectae AG parallelae ducantur $E\Theta$, ZI , HK . itaque AZ , ZH commensurabiles sunt. quare AI , ZK commensurabilia sunt [VI, 1; prop. XI]. et quoniam AZ , ZH longitudine commensurabiles sunt, etiam AH utrique AZ , ZH longitudine commensurabilis est [prop. XV]. uerum AH rationalis est et rectae AG longitudine incommensurabilis. quare etiam AZ , ZH [prop. XIII]. itaque utrumque AI , ZK medium est [prop. XX]. rursus quoniam ΔE , EH longitudine commen-

AI , ZK μέσον ἐστίν. πάλιν, ἐπεὶ σύμμετρος ἐστὶν ἡ
 ΔE τῇ EH μήκει, καὶ ἡ ΔH ἄρα ἐκατέρω τῶν ΔE ,
 EH σύμμετρος ἐστὶ μήκει. ῥητὴ δὲ ἡ $H\Delta$ καὶ ἀσύμ-
μετρος τῇ AG μήκει· ῥητὴ ἄρα καὶ ἐκατέρω τῶν ΔE ,
5 EH καὶ ἀσύμμετρος τῇ AG μήκει· ἐκάτερον ἄρα τῶν
 $\Delta\Theta$, EK μέσον ἐστίν. καὶ ἐπεὶ αἱ AH , $H\Delta$ δυνάμει
μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ μήκει ἡ
 AH τῇ $H\Delta$. ἀλλ' ἡ μὲν AH τῇ AZ σύμμετρος ἐστὶ
μήκει, ἡ δὲ ΔH τῇ EH · ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AZ
10 τῇ EH μήκει. ὥς δὲ ἡ AZ πρὸς τὴν EH , οὕτως ἐστὶ
τὸ AI πρὸς τὸ EK · ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ AI
τῷ EK .

Συνεσιτάτω οὖν τῷ μὲν AI ἴσον τετράγωνον τὸ
 AM , τῷ δὲ ZK ἴσον ἀφηρησθῶ τὸ $N\Xi$ περὶ τὴν αὐτὴν
15 γωνίαν ὃν τῷ AM · περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρον
ἐστὶ τὰ AM , $N\Xi$. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ OP , καὶ
καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν AZ ,
 ZH ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς EH , ἔστιν ἄρα ὥς ἡ AZ
πρὸς τὴν EH , οὕτως ἡ EH πρὸς τὴν ZH . ἀλλ' ὥς
20 μὲν ἡ AZ πρὸς τὴν EH , οὕτως ἐστὶ τὸ AI πρὸς τὸ
 EK · ὥς δὲ ἡ EH πρὸς τὴν ZH , οὕτως ἐστὶ τὸ EK
πρὸς τὸ ZK · καὶ ὥς ἄρα τὸ AI πρὸς τὸ EK , οὕτως
τὸ EK πρὸς τὸ ZK · τῶν ἄρα AI , ZK μέσον ἀνά-
λογόν ἐστὶ τὸ EK . ἔστι δὲ καὶ τῶν AM , $N\Xi$ τετρα-
25 γώνων μέσον ἀνάλογον τὸ MN · καὶ ἐστὶν ἴσον το
μὲν AI τῷ AM , τὸ δὲ ZK τῷ $N\Xi$ · καὶ τὸ EK ἄρα

1. ἐστίν] ἐστὶ P B V, comp. F b. ἐστίν] ἐστὶ V. 3. μήκει]
om. B. ΔH F, $H\Delta$ in ras. V. 4. ῥητὴ — 5. μήκει] m.
2 B. 5. καὶ ἐκάτερον V. 6. EK] ΘK P. ἐστὶ B V,
comp. F b. δυνάμεις, c euan., V. 7. εἰσὶ σύμμετροι V.
ἐστίν V. μήκει] om. V. 8. AH] H in ras. V, deinde
add. μήκει m. 2. $H\Delta$] ΔH P. ἀλλ' — 9. τῇ EH] mg.

surabiles sunt, etiam ΔH utrique ΔE , EH longitudine commensurabilis est [prop. XV; cfr. p. 283 not.]. uerum $H\Delta$ rationalis est et rectae AI longitudine incommensurabilis. quare etiam utraque ΔE , EH rationalis est et rectae AI longitudine incommensurabilis [prop. XIII]. itaque utrumque $\Delta\Theta$, EK medium est [prop. XX]. et quoniam AH , $H\Delta$ potentia tantum commensurabiles sunt, AH et $H\Delta$ longitudine incommensurabiles sunt; uerum AH , AZ et ΔH , EH longitudine commensurabiles sunt. quare AZ , EH longitudine incommensurabiles sunt [prop. XIII]. est autem $AZ:EH = AI:EK$ [VI, 1]. ergo AI , EK incommensurabilia sunt [prop. XI].

construatur igitur quadratum $AM = AI$, et auferatur spatio ZK aequale $N\Xi$ in eodem angulo positum, quo AM . itaque AM , $N\Xi$ circum eandem diametrum posita sunt [VI, 26]. sit OP eorum diametrus, et figura describatur [cfr. uol. I p. 137 not.]. iam quoniam est $AZ \times ZH = EH^2$, erit $AZ:EH = EH:ZH$ [VI, 17]. est autem $AZ:EH = AI:EK$ [VI, 1], et $EH:ZH = EK:ZK$ [id.]. quare etiam $AI:EK = EK:ZK$. itaque EK medium est proportionale inter AI , ZK . uerum etiam MN medium est proportionale inter quadrata AM , $N\Xi$ [prop. LIII lemma]. et $AI = AM$,

m. 1 P. 8. Post μέν ras. 1 litt. V. AZ μήκει V. $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$ V. 9. μήκει] om. V. $\alpha\gamma\alpha$] supra scr. m. 1 F. 10. AZ] supra scr. Δ b. EH] in ras. V. 11. τό] (pr.) τό ἀπὸ τῆς F. τό] τῆς b. EK] $E\Delta$ supra scr. K b. $\alpha\sigma\upsilon\mu\mu\epsilon\tau\rho\omicron\nu$ — 12. EK] om. P. 11. ἐστὶ τό] m. 2 F. 13. τῶ] corr. ex τό m. 1 F. $\tau\epsilon\tau\rho\alpha\gamma\omega\gamma\omega\upsilon\omega\nu$ P, sed corr. 15. δν] supra scr. m. 1 F. τῶ] τό F. 17. ὑπὸ] ἀπὸ b. 22. καὶ ὡς — 23. τὸ ZK] mg. m. 2 B. 23. τὸ ZK] ZK PB.

ἴσον ἐστὶ τῷ MN . ἀλλὰ τὸ μὲν MN ἴσον ἐστὶ τῷ $AΞ$,
 τὸ δὲ EK ἴσον [ἐστὶ] τῷ $ΛΘ$. καὶ ὅλον ἄρα τὸ $ΔΚ$
 ἴσον ἐστὶ τῷ $ΤΦΧ$ γινώμονι καὶ τῷ $NΞ$. ἐστὶ δὲ καὶ
 τὸ $ΔΚ$ ἴσον τοῖς $ΑΜ$, $NΞ$. λοιπὸν ἄρα τὸ $ΑΒ$ ἴσον
 5 ἐστὶ τῷ $ΣΤ$, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς $ΑΝ$ τετραγώνῳ.
 ἡ $ΑΝ$ ἄρα δύναται τὸ $ΑΒ$ χωρίον.

Λέγω, ὅτι ἡ $ΑΝ$ μέσης ἀποτομῆ ἐστὶ δευτέρα.

Ἐπεὶ γὰρ μέσα ἐδείχθη τὰ $ΑΙ$, ZK καὶ ἐστὶν ἴσα
 τοῖς ἀπὸ τῶν $ΛΟ$, $ΟΝ$, μέσον ἄρα καὶ ἐκάτερον τῶν
 10 ἀπὸ τῶν $ΛΟ$, $ΟΝ$. μέση ἄρα ἐκάτερα τῶν $ΛΟ$, $ΟΝ$.
 καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστὶ τὸ $ΑΙ$ τῷ ZK , σύμμετρον ἄρα
 καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΛΟ$ τῷ ἀπὸ τῆς $ΟΝ$. πάλιν, ἐπεὶ
 ἀσύμμετρον ἐδείχθη τὸ $ΑΙ$ τῷ EK , ἀσύμμετρον ἄρα
 ἐστὶ καὶ τὸ $ΑΜ$ τῷ MN , τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς $ΛΟ$
 15 τῷ ὑπὸ τῶν $ΛΟ$, $ΟΝ$. ὥστε καὶ ἡ $ΛΟ$ ἀσύμμετρός
 ἐστὶ μήκει τῇ $ΟΝ$. αἱ $ΛΟ$, $ΟΝ$ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει
 μένον σύμμετροι.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ μέσον περιέχουσιν.

Ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐδείχθη τὸ EK καὶ ἐστὶν ἴσον
 20 τῷ ὑπὸ τῶν $ΛΟ$, $ΟΝ$, μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ
 τῶν $ΛΟ$, $ΟΝ$. ὥστε αἱ $ΛΟ$, $ΟΝ$ μέσαι εἰσὶ δυνάμει
 μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι. ἡ $ΑΝ$ ἄρα μέσης
 ἀποτομῆ ἐστὶ δευτέρα· καὶ δύναται τὸ $ΑΒ$ χωρίον.

Ἡ ἄρα τὸ $ΑΒ$ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομῆ
 25 ἐστὶ δευτέρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

1. τό] corr. ex τῷ m. rec. P. τῷ] corr. ex τό m. rec. P.
 2. $AΞ$] $AΞ$ F. τό] corr. ex τῷ m. rec. P. ἐστὶ] P, om.
 BFVb. τῷ] corr. ex τό m. rec. P. Post $ΛΘ$ in b adp. :~,
 deinde spatium 1 lin. uacat. 3. $NΞ$] mut. in NZ m. rec. B.
 4. ἴσον] (prius) m. 2 FV. 5. $ΑΝ$] $ΑΜ$ P; $ΑΝ$ F, corr.
 m. 2. 6. $ΑΝ$] $Α$ eras. V. 7. μέση BFVb. ἐστὶν P. 11.
 σύμμετρον] (prius) σύμμετρος F. 12. τῆς] corr. ex τῶν F.
 Post $ΛΟ$ add. $ΟΝ$ B et supra m. 1 P. τῆς] corr. ex

$ZK = NΞ$. itaque etiam $EK = MN$. uerum $MN = AΞ$ [I, 43], $EK = AΘ$. quare etiam $AK = TΦX + NΞ$. est autem etiam

$$AK = AM + NΞ.$$

itaque reliquum $AB = ΣT = AN^2$. ergo AN quadrata spatio AB aequalis est.

dico, AN mediae apotomen esse secundam. nam quoniam demonstrauius, AI , ZK media esse, et $AI = AO^2$, $ZK = ON^2$, etiam utrumque AO^2 , ON^2 medium est. quare utraque AO , ON media est. et quoniam AI , ZK commensurabilia sunt [VI, 1; prop. XI], etiam AO^2 , ON^2 commensurabilia sunt. rursus quoniam demonstrauius, AI et EK incommensurabilia esse, etiam AM et MN , hoc est AO^3 et $AO \times ON$, incommensurabilia sunt. quare etiam AO , ON longitudine incommensurabiles sunt [VI, 1; prop. XI]. ergo AO , ON mediae sunt potentia tantum commensurabiles. iam dico, easdem spatium medium comprehendere. nam quoniam demonstrauius, EK medium esse, et $EK = AO \times ON$, etiam $AO \times ON$ medium est. quare AO , ON mediae sunt potentia tantum commensurabiles medium comprehendentes. itaque AN mediae apotome est secunda [prop. LXXV]. et spatio AB aequalis est quadrata.

Ergo recta spatio AB aequalis quadrata mediae apotome est secunda; quod erat demonstrandum.

τῶν F. 14. ἐστίν P. MN] NM P. 15. τῶ] corr. ex τό
 m. 1 F. 16. εἰσόν P. 18. περιέχουσαι V. 19. γάρ] om.
 Fb, m. 2 B. 20. μέσον — 21. ON (prius)] mg. V. 22.
 σύμμετροι P. AN b. μέση BFVb. 23. ἐστίν P. χωρίον]
 om. Theon (BFVb). 24. μέση BFVb. 25. ὅπερ ἔδει δεῖξαι]
 comp. P, om. BFVb.

98'.

Ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης, ἢ τὸ χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν.

5 Χωρίον γὰρ τὸ AB περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς AG καὶ ἀποτομῆς τετάρτης τῆς AD . λέγω, ὅτι ἡ τὸ AB χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν.

Ἔστω γὰρ τῇ AD προσαρμόζουσα ἡ ΔH . αἱ ἄρα AH , $H\Delta$ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ
 10 AH σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ AG μήκει, ἢ δὲ ὅλη ἡ AH τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔH μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ μήκει. ἐπεὶ οὖν ἡ AH τῆς $H\Delta$ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ μήκει, ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς
 15 ΔH ἴσον παρὰ τὴν AH παραβληθῇ ἐλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελεί. τετμήσθω οὖν ἡ ΔH δίχα κατὰ τὸ E , καὶ τῷ ἀπὸ τῆς EH ἴσον παρὰ τὴν AH παραβεβλήσθω ἐλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν AZ , ZH ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ
 20 μήκει ἡ AZ τῇ ZH . ἤχθωσαν οὖν διὰ τῶν E , Z , H παράλληλοι ταῖς AG , BA αἱ $E\Theta$, ZI , HK . ἐπεὶ οὖν ῥητὴ ἐστὶν ἡ AH καὶ σύμμετρος τῇ AG μήκει, ῥητὸν ἄρα ἐστὶν ὅλον τὸ AK . πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστὶν ἡ ΔH τῇ AG μήκει, καὶ εἰσιν ἀμφοτέραι ῥηταί, μέσον
 25 ἄρα ἐστὶ τὸ ΔK . πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZH μήκει, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ AI τῷ ZK .

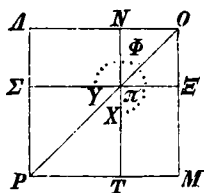
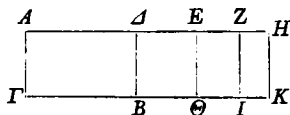
2. τετάρτης ἀποτομῆς V. 4. ἐστὶ BV, comp. Fb. 5. ῥητῆς τῆς] corr. ex τῆς m. 2 F, ῥητῆς V. 6. AD] $AB\Delta$ b, Δ in ras. m. 1 B. ἡ] supra scr. P. 7. AB] om. Bb, m. 2 V. 8. AD] mut. in AB m. 2 F, AB b. 11. ΔH] $H\Delta$ V. 12. δυναμένη P. συμμέτρου B, corr. m. 2. 15. ἴσον] μέσον φ. 16. ἀσύμμετρον P, σύμμετρα b. διελεί μήκει V.

XCIV.

Si spatium recta rationali et apotome quarta comprehenditur, recta spatio aequalis quadrata minor est.

Spatium enim AB rationali $A\Gamma$ et apotome quarta $A\Delta$ comprehendatur. dico, rectam spatio AB aequalem quadratam minorem esse.

sit enim ΔH rectae $A\Delta$ congruens. itaque AH , $H\Delta$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles,



et AH rationali propositae $A\Gamma$ longitudine commensurabilis est, tota autem AH quadrata congruentem ΔH excedit quadrato rectae sibi longitudine incommensurabilis [deff. tert. 4]. iam quoniam AH^2 excedit $H\Delta^2$ quadrato rectae sibi longitudine incommensurabilis, si $\frac{1}{4}AH^2$

aequale rectae AH adplicetur spatium figura quadrata deficiens, in partes incommensurabiles eam diuidet [prop. XVIII]. ΔH igitur in E in duas partes aequales secetur, et quadrato EH^2 aequale rectae AH adplicetur spatium figura quadrata deficiens, et sit $AZ \times ZH$. itaque AZ , ZH incommensurabiles sunt. iam per E , Z , H rectis $A\Gamma$, $B\Delta$ parallelae ducantur $E\Theta$, ZI , HK . quoniam igitur AH rationalis est et rectae $A\Gamma$ longitudine commensurabilis, AK rationale est. rursus

17. EH] E e corr. V. 19. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$ PV. 20. $\mu\acute{\eta}\kappa\epsilon\iota$] om. V. ZH] HZ F. $\delta\iota\alpha$ P. E, Z] Z, E PFb, in ras. m. 2 B. 21. $B\Delta$] eras. V, ΓB b. 23. $\delta\lambda\omicron\nu$] supra scr. m. 1 b. 52. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$ P. 26. $\acute{\alpha}\sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\rho\omicron\nu$] $\acute{\alpha}$ - del. F. $\acute{\alpha}\rho\alpha$ $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}$ F.

συνεστάτω οὖν τῷ μὲν AI ἴσον τετράγωνον τὸ AM ,
 τῷ δὲ ZK ἴσον ἀφηρησθῶ περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν
 τὴν ὑπὸ τῶν LOM τὸ $NΞ$. περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διά-
 μετρόν ἐστι τὰ AM , $NΞ$ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν
 5 διάμετρος ἡ OP , καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ
 οὖν τὸ ὑπὸ τῶν AZ , ZH ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς EH ,
 ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ AZ πρὸς τὴν EH , οὕτως
 ἡ EH πρὸς τὴν ZH . ἀλλ' ὡς μὲν ἡ AZ πρὸς τὴν
 EH , οὕτως ἐστὶ τὸ AI πρὸς τὸ EK , ὡς δὲ ἡ EH
 10 πρὸς τὴν ZH , οὕτως ἐστὶ τὸ EK πρὸς τὸ ZK . τῶν
 ἄρα AI , ZK μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ EK . ἐστὶ δὲ
 καὶ τῶν AM , $NΞ$ τετραγώνων μέσον ἀνάλογον τὸ MN ,
 καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ μὲν AI τῷ AM , τὸ δὲ ZK τῷ $NΞ$.
 καὶ τὸ EK ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ MN . ἀλλὰ τῷ μὲν EK
 15 ἴσον ἐστὶ τὸ $ΔΘ$, τῷ δὲ MN ἴσον ἐστὶ τὸ $ΔΞ$. ὅλον
 ἄρα τὸ $ΔK$ ἴσον ἐστὶ τῷ $ΓΦX$ γνώμονι καὶ τῷ $NΞ$.
 ἐπεὶ οὖν ὅλον τὸ AK ἴσον ἐστὶ τοῖς AM , $NΞ$ τετρα-
 γώνοις, ὧν τὸ $ΔK$ ἴσον ἐστὶ τῷ $ΓΦX$ γνώμονι καὶ
 τῷ $NΞ$ τετραγώνῳ, λοιπὸν ἄρα τὸ AB ἴσον ἐστὶ τῷ
 20 $ΣΤ$, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς AN τετραγώνῳ· ἡ AN ἄρα
 δύναται τὸ AB χωρίον.

Λέγω, ὅτι ἡ AN ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστι τὸ AK καὶ ἐστὶν ἴσον τοῖς
 ἀπὸ τῶν AO , ON τετράγωνοις, τὸ ἄρα συγκεείμενον
 25 ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AO , ON ῥητόν ἐστιν. πάλιν, ἐπεὶ
 τὸ $ΔK$ μέσον ἐστίν, καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ $ΔK$ τῷ δις
 ὑπὸ τῶν AO , ON , τὸ ἄρα δις ὑπὸ τῶν AO , ON μέσον

2. Post ZK ras. 1 litt. F. 3. τῶν] om. BFV. $ΛΟΝ$
 φ et, supra scr. M , b. τό] e corr. m. rec. b. 4. ἐστὶ] εἰσι P.
 5. ἡ] m. rec. P. 7. AZ] AH , supra scr. Z , b. τήν]
 om. P. 8. AZ] Z in ras. F. 9. οὕτως] οὕτως ἐστὶν ἡ EH
 πρὸς τὴν ZH . ἀλλ' ὡς μὲν ἡ AZ πρὸς τὴν EH , οὕτως b.

quoniam ΔH , $\Delta \Gamma$ longitudine incommensurabiles sunt, et utraque rationalis est, ΔK medium est [prop. XXI]. rursus quoniam AZ , ZH longitudine incommensurabiles sunt, AI et ZK incommensurabilia sunt [VI, 1; prop. XI]. iam construatur quadratum $AM = AI$, et spatio ZK aequale auferatur $N\Xi$ in eodem angulo positum ΔOM . itaque quadrata AM , $N\Xi$ circum eandem diametrum posita sunt [VI, 26]. sit OP eorum diametrus, et describatur figura [cfr. uol. I p. 137 not.]. iam quoniam $AZ \times ZH = EH^2$, erit $AZ : EH = EH : ZH$ [VI, 17]. est autem $AZ : EH = AI : EK$, $EH : ZH = EK : ZK$ [VI, 1]. quare EK medium est proportionale inter AI , ZK . uerum etiam MN medium est proportionale inter quadrata AM , $N\Xi$ [prop. LIII lemma], et $AI = AM$, $ZK = N\Xi$. quare etiam $EK = MN$. uerum $\Delta \Theta = EK$, $\Delta \Xi = MN$ [I, 43]. itaque $\Delta K = \Gamma\Phi X + N\Xi$. iam quoniam est $AK = AM + N\Xi$, quorum $\Delta K = \Gamma\Phi X + N\Xi$, erit $AB = \Sigma T = \Delta N^2$. ergo ΔN quadrata spatio AB aequalis est.

dico, ΔN irrationalem esse minorem, quae uocatur. nam quoniam AK rationale est, et $AK = \Delta O^2 + ON^2$, $\Delta O^2 + ON^2$ rationale est. rursus quoniam ΔK medium est, et $\Delta K = 2 \Delta O \times ON$, $2 \Delta O \times ON$ medium est.

$\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}$] om. V. AI] supra scr. Γ b. EH] E e corr. F, ras. 2 litt. V. 10. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}$] om. V. 11. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ P. 12. $\tau\epsilon\tau\tau\alpha\gamma\omega\acute{\nu}\omega\nu$] om. V. 13. AI] $\Delta\Gamma$ P. $N\Xi$] N in ras. V. 14. $\acute{\iota}\sigma\omicron\nu \acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}$] $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu \acute{\iota}\sigma\omicron\nu$ F, $\acute{\iota}\sigma\omicron\nu$ V. $\tau\tilde{\omega}$] (alt.) $\tau\acute{o}$ corr. in $\tau\acute{o}\nu$ (?) V. 15. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}$] om. V. $\tau\acute{o}$] $\tau\tilde{\omega}$ V. $\Theta\Delta$ B. $\tau\tilde{\omega}$] corr. ex $\tau\acute{o}$ m. 1 V, $\tau\acute{o}$ P. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}$] om. V. $\tau\acute{o}$] $\tau\tilde{\omega}$ P. 20. $\tau\epsilon\tau\tau\alpha\gamma\omega\acute{\nu}\omega\nu$] om. V. 22. ΔH F. $\acute{\alpha}\nu\acute{\alpha}\lambda\omicron\gamma\omicron\varsigma$ Fb. 24. $\tau\acute{\omega}\nu$] $\tau\acute{o}\nu$ P. 25. ON $\tau\epsilon\tau\tau\alpha\gamma\omega\acute{\nu}\omega\nu$ V. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ BVb, comp. F. 26. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$] comp. F, $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}$ PBVb. $\tau\acute{o}$ ΔK] om. V. $\tau\tilde{\omega}$] e corr. V.

ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐδείχθη τὸ AI τῷ ZK ,
 ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AO τετραγώνου τῷ
 ἀπὸ τῆς ON τετραγώνῳ. αἱ AO , ON ἄρα δυνάμει
 εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν
 5 ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν
 μέσον. ἡ AN ἄρα ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων·
 καὶ δύναται τὸ AB χωρίον.

Ἡ ἄρα τὸ AB χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν·
 ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10

9ε'.

Ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀπο-
 τομῆς πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη [ἡ] μετὰ
 ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Χωρίον γὰρ τὸ AB περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς
 15 AG καὶ ἀποτομῆς πέμπτης τῆς AD . λέγω, ὅτι ἡ τὸ
 AB χωρίον δυναμένη [ἡ] μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον
 ποιοῦσά ἐστιν.

Ἔστω γὰρ τῇ AD προσαρμόζουσα ἡ AH . αἱ ἄρα
 AH , HA ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ
 20 προσαρμόζουσα ἡ HA σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκει-
 μένῃ ῥητῇ τῇ AG , ἡ δὲ ὅλη ἡ AH τῆς προσαρμο-
 ζούσης τῆς AH μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου
 ἐαυτῇ. ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς AH
 ἴσον παρὰ τὴν AH παραβληθῇ ἐλλείπον εἶδει τετρα-

1. ἐστὶ BVb, comp. F. 2. σύμμετρον B, corr. m. 2. ἄρα
 ἐστὶ V. τετραγώνου] om. V. 3. ἀσύμμετροί εἰσι δυνάμει V,
 deinde del. m. 2: διὰ τὸ δεύτερον θεώρημα τοῦ βιβλίου. 6.
 AH F. ἀνάλογος P, sed corr. 7. AB] B corr. ex Γ m. 2 F.
 8. ἐστὶ B. 9. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 12.
 ἡ] (alt.) om. FVb, m. 2 B. 13. ἐστι BV, comp. Fb. 16.
 ἡ] om. FVb, m. 2 B. 20. HA] in ras. m. 1 b, AH P.
 μήκει] om. V. 21. AG μήκει V. 22. συμμέτρου B, corr. m. 2.

et quoniam demonstrauius, AI et ZK incommensurabilia esse, etiam AO^2 , ON^2 incommensurabilia sunt. itaque AO , ON potentia incommensurabiles sunt efficientes summam quadratorum rationalem, duplum autem rectangulum medium. quare AN irrationalis est minor, quae uocatur [prop. LXXVI]. et $AN^2 = AB$.

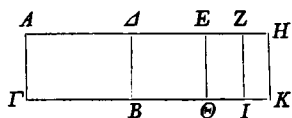
Ergo recta spatium AB aequalis quadrata minor est; quod erat demonstrandum.

XCV.

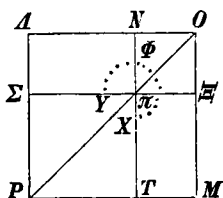
Si spatium recta rationali et apotome quinta comprehenditur, recta spatium aequalis quadrata recta est cum rationali totum medium efficiens.

Spatium enim AB recta rationali AG et apotome quinta AD comprehendatur. dico, rectam spatium AB aequalem quadratam rectam esse cum rationali totum medium efficientem.

nam ΔH rectae AD congruens sit. itaque AH , HA rationales sunt potentia tantum commensurabiles,



et congruens $H\Delta$ rationali propositae AG longitudine commensurabilis est, tota autem AH quadrata excedit congruentem ΔH quadrato rectae sibi incommensurabilis [deff. tert. 5]. itaque si $\frac{1}{4} \Delta H^2$ aequale rectae AH adplicatur spatium figura quadrata deficiens, in partes incommensurabiles eam diuidet [prop.



XVIII]. ΔH igitur in puncto E in duas partes aequales

γώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελεί. τετμήσθω οὖν ἡ
 ΔH δίχα κατὰ τὸ E σημείον, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς EH
 ι σον παρὰ τὴν AH παραβεβλήσθω ἑλλείπον εἶδει τε-
 τραγώνῳ καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν AZ, ZH ἀσύμμετρος
 5 ἄρα ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZH μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός
 ἐστὶν ἡ AH τῇ GA μήκει, καὶ εἰσιν ἀμφοτέραι ρηταί,
 μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ AK . πάλιν, ἐπεὶ ρητὴ ἐστὶν ἡ
 ΔH καὶ σύμμετρος τῇ AG μήκει, ρητόν ἐστι τὸ ΔK .
 συνεστάτω οὖν τῷ μὲν AI ἴσον τετράγωνον τὸ AM ,
 10 τῷ δὲ ZK ἴσον τετράγωνον ἀφηρήσθω τὸ $NΞ$ περὶ
 τὴν αὐτὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ LOM . περὶ τὴν αὐτὴν
 ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ $AM, NΞ$ τετράγωνα. ἔστω
 αὐτῶν διάμετρος ἡ OP , καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.
 ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι ἡ AN δύναται τὸ AB χωρίον.
 15 Λέγω, ὅτι ἡ AN ἡ μετὰ ρητοῦ μέσον τὸ ὅλον
 ποιοῦσά ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐδείχθη τὸ AK καὶ ἐστὶν ἴσον
 τοῖς ἀπὸ τῶν AO, ON , τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ τῶν
 ἀπὸ τῶν AO, ON μέσον ἐστίν. πάλιν, ἐπεὶ ρητόν
 20 ἐστὶ τὸ ΔK καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ δις ὑπὸ τῶν AO, ON ,
 καὶ αὐτὸ ρητόν ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ
 AI τῷ ZK , ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AO
 τῷ ἀπὸ τῆς ON . αἱ AO, ON ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμ-
 μετροὶ ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν
 25 τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν ρητόν. ἡ
 λοιπὴ ἄρα ἡ AN ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μετὰ

1. Post διελεί del. μήκει V. 3. AH] H e corr. m. 1 V.

4. τό] corr. ex τῷ P. 5. τῇ] supra scr. m. 1 b. Post
 μήκει add. καὶ ἡχθῶσαν διὰ τῶν E, Z, H τῇ AG (A b) παράλ-
 ληλοι αἱ $EΘ, ZI, HK$ b, mg. FV. 6. GA] in ras. V, AG P.

8. Ante σύμμετρος ras. 1 litt. V. ἄρα ἐστὶ Vb, m. 2 F. 9.
 ἐστάτω b, ἔστω V. 10. τετράγωνον] supra scr. F. τὸ $NΞ$]

secetur, et quadrato EH^2 aequale rectae AH adplicetur spatium figura quadrata deficiens et sit $AZ \times ZH$. itaque AZ , ZH longitudine incommensurabiles sunt. et quoniam AH , ΓA longitudine incommensurabiles, et utraque rationalis est, AK medium est [prop. XXI]. rursus quoniam ΔH rationalis est et rectae $\Delta \Gamma$ longitudine commensurabilis, ΔK rationale est [prop. XIX]. construatur igitur quadratum $AM = AI$, et spatio ZK aequale auferatur quadratum $N\Xi$ in eodem angulo AOM positum. itaque quadrata AM , $N\Xi$ circum eandem diametrum posita sunt [VI, 26]. sit OP eorum diametrus, et describatur figura [uol. I p. 137 not.]. eodem igitur modo demonstrabimus, esse $AN^2 = AB$.

dico, AN rectam esse cum rationali totum medium efficientem. quoniam enim demonstrauius, AK medium esse, et $AK = AO^2 + ON^2$, $AO^2 + ON^2$ medium est. rursus quoniam ΔK rationale est, et

$$\Delta K = 2 AO \times ON,$$

hoc et ipsum rationale est. et quoniam AI , ZK incommensurabilia sunt, etiam AO^2 , ON^2 incommensurabilia sunt. quare AO , ON potentia incommensurabiles sunt efficientes summam quadratorum mediam, duplum autem rectangulum rationale. itaque reliqua

om. Theon (BFVb). 11. ὑπὸ τῶν BFb. AOM τὸ $N\Xi$ ($M\Xi \varphi$) Theon (BFVb). 12. ἐστὶ] εἶσι in ras. m. 2 V. τὰ] in ras. m. 2 V. AM] A in ras. m. 2 V. 18. συγκείμενον] om. V. 19. ἐστὶ BV, comp. Fb. 21. αὐτό] τὸ δις ἄρα ὑπὸ τῶν AO , ON Theon (BFVb). ἐστὶ PBV, comp. Fb. 22. AI] mut. in AE m. 2 F, AE b. 23. ON] (prius) e corr. V. 25. ἡ] om. B. 26. καλουμένη] κα- supra scr. m. 1 b. ἡ μετὰ b.

ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα· καὶ δύναται τὸ AB χωρίον.

Ἡ τὸ AB ἄρα χωρίον δυναμένη μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5

95'.

Ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς ἑκτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Χωρίον γὰρ τὸ AB περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς AG
10 καὶ ἀποτομῆς ἑκτης τῆς AD · λέγω, ὅτι ἡ τὸ AB χωρίον δυναμένη [ἡ] μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἐστω γὰρ τῇ AD προσαρμόζουσα ἡ $ΔΗ$ · αἱ ἄρα AH , $HΔ$ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ
15 οὐδετέρα αὐτῶν σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ AG μήκει, ἡ δὲ ὅλη ἡ AH τῆς προσαρμοζούσης τῆς $ΔΗ$ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ μήκει. ἐπεὶ οὖν ἡ AH τῆς $HΔ$ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ μήκει, ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ
20 ἀπὸ τῆς $ΔΗ$ ἴσον παρὰ τὴν AH παραβληθῇ ἐλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διелеῖ. τετμήσθω οὖν ἡ $ΔΗ$ δίχα κατὰ τὸ E [σημεῖον], καὶ τῷ ἀπὸ τῆς EH ἴσον παρὰ τὴν AH παραβεβλήσθω ἐλλείπον εἶδει

3. ἄρα τὸ AB V. ἄρα] om. PB, m. 2 F. χωρίον ἄρα B. 4. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 6. ὑπ' P. 8. ἐστι BV, comp. Fb. 9. AB] $ABΓP$. 10. ἑκτης τῆς] corr. ex ἑκτης m. rec. P. 11. ἡ] om. BFVb. 14. καὶ οὐδετέρα] in ras. F. 15. αὐτῶν] τῶν AH , $HΔ$ BVb, e corr. F. 16. τῆς] (alt.) τῇ F. 17. συμμέτρου P. ἑαυτοῦ F. 18. ἐπεὶ — 19. μήκει] mg. m. 2 B. 19. ἑαυτῆς B, ἑαυτοῦ F. τοῦ] τῷ b. 20. AH] $ΔH$ B. παραβάλλωμεν B, παρα-

AN irrationalis est cum rationali totum medium efficiens, quae uocatur [prop. LXXVII]. et $AN^2 = AB$.

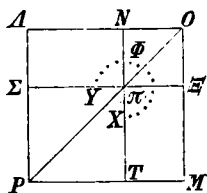
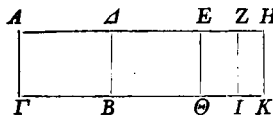
Ergo recta spatio AB aequalis quadrata recta cum rationali totum medium efficiens est; quod erat demonstrandum.

XCVI.

Si spatium recta rationali et sexta apotome comprehenditur, recta spatio aequalis quadrata recta est cum medio totum medium efficiens.

Spatium enim AB rationali AF et sexta apotome AD comprehendatur. dico, rectam spatio AB aequalem quadratam rectam esse cum medio totum medium efficientem.

nam ΔH rectae AD congruens sit. itaque AH , $H\Delta$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles, et neutra earum rationali propositae AF longitudine commensurabilis est, tota autem AH congruentem ΔH quadrata



excedit quadrato rectae sibi longitudine incommensurabilis [deff. tert. 6]. iam quoniam AH^2 excedit $H\Delta^2$ quadrato rectae sibi incommensurabilis longitudine, si $\frac{1}{4} \Delta H^2$ aequale

rectae AH adplicatur spatium figura quadrata deficiens, in partes incommensurabiles eam diuidet [prop. XVIII]. ΔH igitur in puncto E in duas partes aequales secetur, et quadrato EH^2 aequale rectae AH adplicetur

βαλλόμενον F, παραβάλλωμεν Vb. 22. σημείον] om. P. τῷ
τό F. 23. ἴσον] om. V. ἴσον ἔλλειπον V.

τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν AZ, ZH ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZH μήκει. ὥς δὲ ἡ AZ πρὸς τὴν ZH , οὕτως ἐστὶ τὸ AI πρὸς τὸ ZK . ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ AI τῷ ZK . καὶ ἐπεὶ αἱ AH, AG ῥηταὶ
 5 εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον ἐστὶ τὸ AK .
 πάλιν, ἐπεὶ αἱ $AG, \Delta H$ ῥηταὶ εἰσι καὶ ἀσύμμετροι μήκει, μέσον ἐστὶ καὶ τὸ ΔK . ἐπεὶ οὖν αἱ $AH, H\Delta$ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AH τῇ $H\Delta$ μήκει. ὥς δὲ ἡ AH πρὸς τὴν $H\Delta$,
 10 οὕτως ἐστὶ τὸ AK πρὸς τὸ $K\Delta$. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ AK τῷ $K\Delta$. συνεστατάω οὖν τῷ μὲν AI ἴσον τετράγωνον τὸ AM , τῷ δὲ ZK ἴσον ἀφηγήσθω περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὸ $N\Xi$. περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ $AM, N\Xi$ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν
 15 διάμετρος ἡ OP , καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ὁμοίως δὴ τοῖς ἐπάνω δεῖξομεν, ὅτι ἡ AN δύναται τὸ AB χωρίον.

Λέγω, ὅτι ἡ AN [ἡ] μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσά ἐστιν.

20 Ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐδείχθη τὸ AK καὶ ἐστὶν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν AO, ON , τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AO, ON μέσον ἐστίν. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐδείχθη τὸ ΔK καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ δις ὑπὸ τῶν AO, ON , καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AO, ON μέσον ἐστίν. καὶ
 25 ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐδείχθη τὸ AK τῷ ΔK , ἀσύμμετρα [ἄρα] ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AO, ON τετράγωνα τῷ δις ὑπὸ τῶν AO, ON . καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ

1. ἀσύμμετρον P, corr. m. 1. 2. ZH] HZ F. 3. AI] ἀπὸ AI F. 4. ἐστίν P. AI] corr. ex AG m. rec. P. 5. AK] corr. ex ΔK m. rec. P. 6. πάλιν — 7. ΔK] om. P. 10. $K\Delta$] ΔK V. 11. $K\Delta$] corr. ex ΔK V. 12. ἀφηγήσθω

spatium figura quadrata deficiens, et sit $AZ \times ZH$. itaque AZ , ZH longitudine incommensurabiles sunt, est autem $AZ : ZH = AI : ZK$ [VI, 1]. itaque AI , ZK incommensurabilia sunt [prop. XI]. et quoniam AH , AG rationales sunt potentia tantum commensurabiles, AK medium est [prop. XXI]. rursus quoniam AG , AH rationales sunt et longitudine incommensurabiles, etiam AK medium est [id.]. quoniam igitur AH , HA potentia tantum commensurabiles sunt, AH et HA longitudine incommensurabiles sunt. est autem $AH : HA = AK : KA$ [VI, 1]. itaque AK , KA incommensurabilia sunt [prop. XI]. construatur igitur quadratum $AM = AI$, et spatio ZK aequale auferatur $N\Xi$ in eodem angulo positum. itaque quadrata AM , $N\Xi$ circum eandem diametrum posita sunt [VI, 26]. sit OP eorum diametrus, et describatur figura [uol. I p. 137 not.]. eodem igitur modo, quo supra, demonstrabimus, esse $AN^2 = AB$.

dico, AN rectam esse cum medio totum medium efficientem. nam quoniam demonstrauius, AK medium esse, et $AK = AO^2 + ON^2$, $AO^2 + ON^2$ medium est. rursus quoniam demonstrauius AK medium esse, et $AK = 2AO \times ON$, etiam $2AO \times ON$ medium est. et quoniam demonstrauius, AK et AK incommensurabilia esse, etiam $AO^2 + ON^2$ et $2AO \times ON$ incommensurabilia sunt. et quoniam AI , ZK incom-

τὸ $N\Xi$ V. 13. περὶ — γωνίαν] om. Fb, mg. m. 2 B. ἀντήν] (prius) ἀντήν τὴν ὑπὸ AOM V. τὸ $N\Xi$] om. V. 14. ἐστὶ] εἶσι V. τετράγωνα] om. V. 16. δύναται — 18. AN] mg. m. 2 V. 18. ἡ] (alt.) om. P. 20. ἴσον] m. 2 F. 22. ἐστὶ PBVb, comp. F. 24. ἐστὶ PBV, comp. Fb. 26. ἄρα] om. BFVb.

AI τῷ ZK , ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AO τῷ
 ἀπὸ τῆς ON . αἱ AO , ON ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμ-
 μετροὶ ποιοῦσαι τὸ τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν
 τετραγώνων μέσον καὶ τὸ δις ὑπ' αὐτῶν μέσον ἐτι τε
 5 τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα ἀσύμμετρα τῷ δις ὑπ' αὐτῶν.
 ἡ ἄρα AN ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μετὰ μέσου
 μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα· καὶ δύναται τὸ AB χωρίον.
 Ἡ ἄρα τὸ χωρίον δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ
 ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10

95'.

Το ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλό-
 μενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην.

Ἐστω ἀποτομή ἡ AB , ῥητὴ δὲ ἡ $ΓΔ$, καὶ τῷ ἀπὸ
 τῆς AB ἴσον παρὰ τὴν $ΓΔ$ παραβεβλήσθω τὸ $ΓΕ$
 15 πλάτος ποιοῦν τὴν $ΓΖ$. λέγω, ὅτι ἡ $ΓΖ$ ἀποτομή ἐστι
 πρώτη.

Ἐστω γὰρ τῇ AB προσαρμόζουσα ἡ BH . αἱ ἄρα
 AH , HB ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ
 τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AH ἴσον παρὰ τὴν $ΓΔ$ παραβεβλήσθω
 20 τὸ $ΓΘ$, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς BH τὸ $ΚΑ$. ὅλον ἄρα τὸ $ΓΔ$
 ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AH , HB . ὦν τὸ $ΓΕ$ ἴσον
 ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB . λοιπὸν ἄρα τὸ $ΖΔ$ ἴσον ἐστὶ
 τῷ δις ὑπὸ τῶν AH , HB . τετμήσθω ἡ ZM δίχα
 κατὰ τὸ N σημεῖον, καὶ ἦχθω διὰ τοῦ N τῇ $ΓΔ$
 25 παράλληλος ἡ $NΞ$. ἐκάτερον ἄρα τῶν $ZΞ$, AN
 ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν AH , HB . καὶ ἐπεὶ τὰ ἀπὸ

2. ON] (prius) NOP . 3. $τε$] $μὲν$ $BFVb$. $συγκείμενον$]
 m. 2 V. 4. $καί$] ins. m. 1 V. $ἐτι$] $ε-$ in ras. V. 6. AN]
 corr. ex AN B. 7. $ποιοῦσαι$ φ. 8. $χωρίον$] AB BFb , AB
 $χωρίον$ V. 9. $ὅπερ$ $ἔδει$ $δεῖξαι$] : ~ P. 11. $ἀπό$] om. b.

τῶν AH, HB ῥητά ἐστίν, καὶ ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AH, HB ἴσον τὸ ΔM , ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΔM . καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓA παραβέβληται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓM . ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓM καὶ σύμμετρος τῇ ΓA μήκει.
 5 πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AH, HB , καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν AH, HB ἴσον τὸ $Z A$, μέσον ἄρα τὸ $Z A$. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓA παρὰ κείται πλάτος ποιοῦν τὴν $Z M$. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $Z M$ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓA μήκει. καὶ ἐπεὶ τὰ μὲν ἀπὸ τῶν AH, HB ῥητά
 10 ἐστίν, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν AH, HB μέσον, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AH, HB τῷ δις ὑπὸ τῶν AH, HB . καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν AH, HB ἴσον ἐστὶ τὸ ΓA , τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν AH, HB τὸ $Z A$. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔM τῷ $Z A$. ὥς δὲ τὸ ΔM πρὸς τὸ
 15 $Z A$, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓM πρὸς τὴν $Z M$. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓM τῇ $Z M$ μήκει. καὶ εἰσιν ἀμφοτέραι ῥηταί· αἱ ἄρα $\Gamma M, MZ$ ῥηταί· εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΓZ ἄρα ἀποτομή ἐστίν.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ πρώτη.

20 Ἐπεὶ γὰρ τῶν ἀπὸ τῶν AH, HB μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν AH, HB , καὶ ἐστὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AH ἴσον τὸ $\Gamma \Theta$, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς BH ἴσον τὸ $K A$, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν AH, HB τὸ $N A$, καὶ τῶν $\Gamma \Theta, K A$ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ $N A$. ἐστίν ἄρα ὥς τὸ
 25 $\Gamma \Theta$ πρὸς τὸ $N A$, οὕτως τὸ $N A$ πρὸς τὸ $K A$. ἀλλ' ὥς μὲν τὸ $\Gamma \Theta$ πρὸς τὸ $N A$, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓK πρὸς

1. ῥητά — 2. HB] mg. m. 2 B. 1. ἐστίν] ἐστὶ PBVb, comp. F. καὶ ἐστὶ τοῖς] τοῖς δὲ V. 3. παρὰ κείται Theon (BFVb); παραβέβληται supra add. m. 2 B. 6. τῷ] corr. ex τό FV. 8. ἐστίν] ἐστὶ καὶ F. καὶ ἀσύμμετρος] bis b. 10. ἐστὶ BV, comp. b, εἰσι F? μέσα P, et F, corr. m. 1. 11. ἄρα] om. B. ἐστίν P. 12. καὶ] καὶ ἐστὶ BFVb. ἐστὶ]

rationale est, et $\Delta M = AH^2 + HB^2$, ΔM rationale est. et rectae rationali $\Gamma\Delta$ adplicatum est latitudinem efficiens ΓM . itaque ΓM rationalis est et rectae $\Gamma\Delta$ longitudine commensurabilis [prop. XX]. rursus quoniam medium est $2 AH \times HB$, et $Z\Delta = 2 AH \times HB$, $Z\Delta$ medium est. et rectae rationali $\Gamma\Delta$ adplicatum est latitudinem efficiens ZM . itaque ZM rationalis est et rectae $\Gamma\Delta$ longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. et quoniam $AH^2 + HB^2$ rationale est, $2 AH \times HB$ autem medium, $AH^2 + HB^2$ et $2 AH \times HB$ incommensurabilia sunt. et

$$\Gamma\Delta = AH^2 + HB^2, Z\Delta = 2 AH \times HB.$$

itaque ΔM , $Z\Delta$ incommensurabilia sunt. est autem $\Delta M : Z\Delta = \Gamma M : ZM$ [VI, 1]. itaque ΓM , ZM longitudine incommensurabiles sunt [prop. XI]. et utraque rationalis est. itaque ΓM , MZ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo ΓZ apotome est [prop. LXXIII].

iam dico, eandem primam esse. quoniam enim $AH \times HB$ medium est proportionale inter AH^2 et HB^2 [prop. XXI lemma], et $\Gamma\Theta = AH^2$, $K\Lambda = BH^2$, $N\Lambda = AH \times HB$, erit etiam $N\Lambda$ medium proportionale inter $\Gamma\Theta$, $K\Lambda$. quare $\Gamma\Theta : N\Lambda = N\Lambda : K\Lambda$. est autem $\Gamma\Theta : N\Lambda = \Gamma K : NM$ et $N\Lambda : K\Lambda = NM : KM$ [VI, 1]. itaque $\Gamma K \times KM = MN^2$ [VI, 17] $= \frac{1}{4} ZM^2$.

om. BF Vb. 13. HB] corr. ex AB m. 1 b, HB ἴσον V. 15. τήν] om. B. 18. ἐστὶ B Vb, comp. F. 21. ἐστὶ] (alt.) ἐστὶν P. τῷ] corr. ex τό m. 1 F. 22. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν AH, HB ἴσον τὸ NΛ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς BH ἴσον τὸ KΛ· καὶ κτλ. Theon (BF Vb). 24. NΛ] e corr. V. ἐστὶν — 25. πρὸς τὸ NΛ] mg. m. 1 P. 25. NΛ] corr. ex AN V. οὕτως — 26. NΛ] mg. m. 2 B. 26. NΛ] corr. ex AN V. ἐστὶν] m. 2 F. ἦ] ras. 1 litt. b.

- τὴν NM · ὥς δὲ τὸ NA πρὸς τὸ KA , οὕτως ἐστὶν ἡ NM πρὸς τὴν KM · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $ΓΚ$, KM ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς NM , τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ZM . καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ
 5 τῆς AH τῷ ἀπὸ τῆς HB , σύμμετρόν [ἐστὶ] καὶ τὸ $ΓΘ$ τῷ KA . ὥς δὲ τὸ $ΓΘ$ πρὸς τὸ KA , οὕτως ἡ $ΓΚ$ πρὸς τὴν KM · σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ $ΓΚ$ τῇ KM . ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ $ΓΜ$, MZ , καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ZM ἴσον παρὰ τὴν
 10 $ΓΜ$ παραβέβληται ἐλλείπον εἶδει τετραγώνῳ τὸ ὑπὸ τῶν $ΓΚ$, KM , καὶ ἐστὶ σύμμετρος ἡ $ΓΚ$ τῇ KM , ἡ ἄρα $ΓΜ$ τῆς MZ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ ἐστὶν ἡ $ΓΜ$ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ $ΓΔ$ μήκει· ἡ ἄρα $ΓΖ$ ἀποτομή ἐστὶ πρώτη.
 15 Τὸ ἄρα ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

9η'.

Τὸ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν δευ-
 20 τέραν.

Ἐστω μέσης ἀποτομῆς πρώτη ἡ AB , ῥητὴ δὲ ἡ $ΓΔ$, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB ἴσον παρὰ τὴν $ΓΔ$ παραβεβλήσθω τὸ $ΓΕ$ πλάτος ποιούν τὴν $ΓΖ$ · λέγω, ὅτι ἡ $ΓΖ$ ἀποτομή ἐστὶ δευτέρα.

- 25 Ἐστω γὰρ τῇ AB προσαρμόζουσα ἡ BH · αἱ ἄρα AH , HB μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AH ἴσον παρὰ τὴν

1. ὥς δέ — 2. KM] om. F, uidetur fuisse in mg. 2. Post prius KM add. καὶ ὥς ἄρα ἡ $ΓΚ$ πρὸς τὴν NM ($MN F$), οὕτως ἡ

et quoniam AH^2 , HB^2 commensurabilia sunt, etiam $\Gamma\Theta$, $K\Lambda$ commensurabilia sunt. est autem

$$\Gamma\Theta : K\Lambda = \Gamma K : KM$$

[VI, 1]. itaque ΓK , KM commensurabiles sunt [prop. XI]. iam quoniam sunt duae rectae inaequales ΓM , MZ , et $\frac{1}{2} ZM^2$ aequale spatium rectae ΓM adplicatum est $\Gamma K \times KM$ figura quadrata deficiens, et ΓK , KM commensurabiles sunt, ΓM^2 excedit MZ^2 quadrato rectae sibi commensurabilis longitudine [prop. XVII]. et ΓM rationali propositae $\Gamma\Lambda$ longitudine commensurabilis est. itaque ΓZ apotome est prima [deff. tert. 1].

Ergo quadratum apotomes rectae rationali adplicatum latitudinem efficit apotomen primam; quod erat demonstrandum.

XCVIII.

Quadratum mediae apotomes primae rectae rationali adplicatum latitudinem efficit apotomen secundam.

Sit AB mediae apotome prima, $\Gamma\Lambda$ autem rationalis, et quadrato AB^2 aequale rectae $\Gamma\Lambda$ adplicetur ΓE latitudinem efficiens ΓZ . dico, ΓZ apotomen esse secundam.

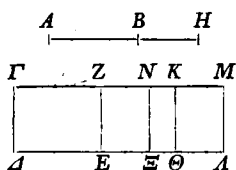
nam BH rectae AB congruens sit. itaque AH , HB mediae sunt potentia tantum commensurabiles

NM πρὸς τὴν KM FVb. 3. *τουτέστιν* P. 4. *σύμμετρος* P, corr. m. rec. *έστιν* P. 5. *έστι*] om. P. 11. *έστιν* P. *ἀσύμμετρος* F. 12. ΓM] $M\Gamma$ e corr. V; KM supra scr. Γ b. MZ] ZM F. *ἀσυμμέτρον* b, *ἀ*- add. m. 2 F. 15. *παρὰ φητήν*] om. V. 16. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*] comp. P, om. BFVb. 21. *μέση* BFVb. 22. Post *παρὰ* del. *φη* m. 1 P. $\Gamma\Lambda$] ΓM F. 23. ΓE] corr. ex $\Gamma\Theta$ m. rec. P. 25. BH] corr. ex ZH m. 2 V. *αὶ ἄρα*] *ἄρα ἡ* F. 26. *εἰσὶν* B.

- ΓΑ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΚ,
 τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον το ΚΑ πλάτος ποιοῦν τὴν
 ΚΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ,
 ΗΒ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΓΑ. καὶ παρὰ ρητὴν τὴν ΓΔ
 5 παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ρητὴ ἄρα ἐστὶν
 ἡ ΓΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὸ ΓΑ
 ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ
 ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΕ, λοιπὸν ἄρα τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ,
 ΗΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΖΑ. ρητὸν δέ [ἐστι] τὸ δις ὑπὸ
 10 τῶν ΑΗ, ΗΒ· ρητὸν ἄρα τὸ ΖΑ. καὶ παρὰ ρητὴν
 τὴν ΖΕ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ρητὴ ἄρα
 ἐστὶ καὶ ἡ ΖΜ καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. ἐπεὶ οὖν
 τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, τουτέστι τὸ ΓΑ, μέσον
 ἐστίν, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, τουτέστι τὸ ΖΑ,
 15 ρητόν, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΑ τῷ ΖΑ. ὥς δὲ τὸ
 ΓΑ πρὸς τὸ ΖΑ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΖΜ·
 ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΓΜ τῇ ΖΜ μήκει. καὶ εἰσιν ἀμ-
 φότεραι ρηταί· αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ρηταί εἰσι δυνάμει
 μόνον σύμμετροι· ἡ ΓΖ ἄρα ἀποτομή ἐστίν.
- 20 Λέγω δὴ, ὅτι καὶ δευτέρα.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν, καὶ ἤχθω
 διὰ τοῦ Ν τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἐκάτερον ἄρα
 τῶν ΖΞ, ΝΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ
 ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τετραγώνων μέσον ἀνά-

1. τὸ ἄρα βεβλήσθω φ. τὸ ΓΘ] om. V, supra est ras.
 ΓΚ] ΓΚ τὸ ΓΘ V. 3. ΓΑ] ΓΔ b. 4. Post HB add.
 καὶ ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσα καὶ ἴσα τῷ ΓΑ V. 5.
 ρητὴ] -τὴ in ras. P. 6. ἡ ΓΜ καί] m. 2 F. 8. ἐστὶ τῷ
 ΓΕ] τῷ ΓΕ ὧν φ. 9. ἐστὶ] om. P. 10. ἄρα] ἐστὶ καὶ V,
 supra add. ἄρα m. 2; ἄρα καί F? (καὶ φ). 12. ἐστίν B. 14.
 ἐστὶ PBFV, comp. b. HB ρητόν V. ΖΑ] ΓΑ, supra scr.
 Ζ, b. 15. ρητόν] om. V. ἄρα] m. 2 F. 16. πρὸς τὸ
 τῷ B, corr. m. 2. ἐστίν] om. V. 17. ἀσύμμετρος — ΖΜ]



spatium rationale comprehen-
dentes [prop. LXXIV]. et qua-
drato AH^2 aequale rectae $\Gamma\Delta$
adplicetur $\Gamma\Theta$ latitudinem efficiens
 ΓK , quadrato autem HB^2 aequale
 $K\Delta$ latitudinem efficiens KM .

quare totum $\Gamma\Delta = AH^2 + HB^2$. quare etiam $\Gamma\Delta$
medium est. et rectae rationali $\Gamma\Delta$ adplicatum est
latitudinem efficiens ΓM . itaque ΓM rationalis est
et rectae $\Gamma\Delta$ longitudine incommensurabilis [prop.
XXII]. et quoniam est

$$\Gamma\Delta = AH^2 + HB^2,$$

quorum $AB^2 = \Gamma E$, erit reliquum $2AH \times HB = ZA$
[II, 7]. uerum $2AH \times HB$ rationale est. itaque ZA
rationale est. et rectae rationali ZE adplicatum est
latitudinem efficiens ZM . itaque etiam ZM rationalis
est et rectae $\Gamma\Delta$ longitudine commensurabilis [prop.
XX]. quoniam igitur $AH^2 + HB^2$, hoc est $\Gamma\Delta$, me-
dium est, et $2AH \times HB$, hoc est ZA , rationale, $\Gamma\Delta$
et ZA incommensurabilia sunt. est autem

$$\Gamma\Delta : ZA = \Gamma M : ZM$$

[VI, 1]. itaque ΓM , ZM longitudine incommensura-
biles sunt [prop. XI]. et utraque rationalis est. itaque
 ΓM , MZ rationales sunt potentia tantum commen-
surabiles. ergo ΓZ apotome est [prop. LXXIII].

iam dico, eandem secundam esse. ZM enim in N
in duas partes aequales secetur, et per N rectae $\Gamma\Delta$
parallela ducatur $N\Xi$. itaque $Z\Xi = NA = AH \times HB$.

mg. m. 2 B. 18. ἄρα] φ, post MZ hab. F. 19. ἐστὶ BVb,
comp. F. 20. ὅτι ἐστὶ Vb. δευτέρα ἐστὶν B. 23. $Z\Xi$]
Z in ras. B. 24. ἐπεὶ] ἐτι B (supra est ras.).

λογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν AH , HB , καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ
 μὲν ἀπὸ τῆς AH τῷ $\Gamma\Theta$, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AH , HB
 τῷ NA , τὸ δὲ ἀπὸ τῆς BH τῷ KA , καὶ τῶν $\Gamma\Theta$,
 KA ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ NA . ἐστὶν ἄρα ὡς
 5 τὸ $\Gamma\Theta$ πρὸς τὸ NA , οὕτως τὸ NA πρὸς τὸ KA .
 ἀλλ' ὡς μὲν τὸ $\Gamma\Theta$ πρὸς τὸ NA , οὕτως ἐστὶν ἡ ΓK
 πρὸς τὴν NM , ὡς δὲ τὸ NA πρὸς τὸ KA , οὕτως
 ἐστὶν ἡ NM πρὸς τὴν MK . ὡς ἄρα ἡ ΓK πρὸς τὴν
 NM , οὕτως ἐστὶν ἡ NM πρὸς τὴν KM . τὸ ἄρα ὑπὸ
 10 τῶν ΓK , KM ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς NM , τουτέστι
 τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ZM [καὶ ἐπεὶ σύμ-
 μετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς AH τῷ ἀπὸ τῆς BH , σύμμε-
 τρόν ἐστι καὶ τὸ $\Gamma\Theta$ τῷ KA , τουτέστιν ἡ ΓK τῇ KM].
 ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι εἰσιν αἱ ΓM , MZ , καὶ
 15 τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς MZ ἴσον παρὰ τὴν
 μείζονα τὴν ΓM παραβέβληται ἐλλείπον εἶδει τετρα-
 γώνῳ τὸ ὑπὸ τῶν ΓK , KM καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν
 διαιρεῖ, ἡ ἄρα ΓM τῆς MZ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ
 συμμετρου ἐαυτῇ μήκει. καὶ ἐστὶν ἡ προσαρμόζουσα
 20 ἡ ZM σύμμετρος μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓA . ἡ
 ἄρα ΓZ ἀποτομή ἐστὶ δευτέρα.

Τὸ ἄρα ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ῥητὴν
 παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν δευτέραν.
 ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

25

εθ'.

Τὸ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ
 ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν
 τρίτην.

1. ἐστὶν] ἐστι V. ἴσον] supra scr. m. 1 V. 2. τῷ] in
 ras. V. 3. τῷ] τῶν mut. in τό m. 1 V. τό] τῷ P. τῷ]
 τό PV. τῶν] τῷ b. 5. τὸ NA] (alt.) mg. m. 2 F. πρὸς
 τὸ KA] τὸ NA φ. Deinde del. m. 1: ἀλλ' ὡς μὲν τὸ $\Gamma\Theta$ πρὸς

et quoniam $AH \times HB$ medium est proportionale inter AH^2 et HB^2 [prop. XXI lemma], et $AH^2 = \Gamma\Theta$, $AH \times HB = NA$, $BH^2 = KA$, etiam NA medium est proportionale inter $\Gamma\Theta$, KA . itaque erit $\Gamma\Theta : NA = NA : KA$. uerum $\Gamma\Theta : NA = \Gamma K : NM$, $NA : KA = NM : MK$ [VI, 1]. quare $\Gamma K : NM = NM : KM$. itaque $\Gamma K \times KM = NM^2$ [VI, 17], hoc est $= \frac{1}{4} ZM^2$. iam quoniam sunt duae rectae inaequales ΓM , MZ , et $\frac{1}{4} MZ^2$ aequale maiori ΓM adplicatum est spatium $\Gamma K \times KM$ figura quadrata deficiens et eam in partes commensurabiles¹⁾ diuidit, ΓM^2 excedit MZ^2 quadrato rectae sibi commensurabilis longitudine [prop. XVII]. et congruens ZM rationali propositae ΓA longitudine commensurabilis est. itaque ΓZ apotome est secunda [deff. tert. 2].

Ergo quadratum mediae apotomes primae rectae rationali adplicatum latitudinem efficit apotomen secundam; quod erat demonstrandum.

IC.

Quadratum mediae apotomes secundae rectae rationali adplicatum latitudinem efficit apotomen tertiam.

1) Nam AH^2 et BH^2 commensurabilia sunt, et

$$AH^2 : BH^2 = \Gamma\Theta : KA = \Gamma K : KM$$

[VI, 1]; tum u. prop. XI.

τὸ NA , οὕτως τὸ NA πρὸς τὸ KA V. 8. NM] N in ras. V.
 9. ἐστίν] om. V. 11. τοῦ] τῷ F. καὶ ἐπεὶ — 13.
 KM] om. P. 12. ἐστίν] om. Fb. Post BH del. οὕτως
 m. 1 V. 13. ἐστίν] supra scr. m. 1 FV. 14. δύο εὐθεῖαι]
 supra scr. m. 1 F. καὶ τῷ] τῷ δὲ BFVb. 15. τῆς] e corr. V.
 MZ] corr. ex ZM V. 17. τό] mut. in τῷ m. 2 P. 18.
 τῆς] corr. ex τῇ m. rec. V. 20. Mg. γρ. ἀσύμμετρος m. 1 P.
 ΓA] ΓA μήκει φ. 22. πρώτης] om. P. 24. ὅπερ ἔδει
 δεῖξαι] : P, om. BFVb.

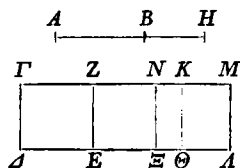
"Εστω μέσης ἀποτομή δευτέρα ἡ AB , φητὴ δὲ ἡ ΓA , καὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB ἴσον παρα τὴν ΓA παραβεβλήσθω τὸ ΓE πλάτος ποιοῦν τὴν ΓZ . λέγω, ὅτι ἡ ΓZ ἀποτομή ἐστὶ τρίτη.

- 5 "Εστω γὰρ τῇ AB προσαρμόζουσα ἡ BH . αἱ ἄρα AH , HB μέσα εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσai. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AH ἴσον παρα τὴν ΓA παραβεβλήσθω τὸ $\Gamma \Theta$ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓK , τῷ δὲ ἀπὸ τῆς BH ἴσον παρὰ τὴν $K \Theta$ παραβεβλήσθω
 10 τὸ $K A$ πλάτος ποιοῦν τὴν $K M$. ὅλον ἄρα τὸ ΓA ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AH , HB [καὶ ἐστὶ μέσα τὰ ἀπὸ τῶν AH , HB]. μέσον ἄρα καὶ τὸ ΓA . καὶ παρὰ φητὴν τὴν ΓA παραβέβληται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓM . φητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓM καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓA μήκει. καὶ
 15 ἐπεὶ ὅλον τὸ ΓA ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AH , HB , ὧν τὸ ΓE ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB , λοιπὸν ἄρα τὸ AZ ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν AH , HB . τετμήσθω οὖν ἡ ZM δίχα κατὰ τὸ N σημεῖον, καὶ τῇ ΓA παράλληλος ἦχθω ἡ $N \Xi$. ἐκάτερον ἄρα τῶν $Z \Xi$, $N A$ ἴσον
 20 ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν AH , HB . μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AH , HB . μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ $Z A$. καὶ παρὰ φητὴν τὴν EZ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ZM . φητὴ ἄρα καὶ ἡ ZM καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓA μήκει. καὶ ἐπεὶ αἱ AH , HB δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, ἀσύμ-
 25 μετρος ἄρα [ἐστὶ] μήκει ἡ AH τῇ HB . ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AH τῷ ὑπὸ τῶν AH , HB . ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AH σύμμετρά ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν

1. μέση BV . δευτέρα] in ras. V. 4. τρίτη ἐστὶν $BFVb$. 9. $K \Theta$] corr. ex $\Gamma \Theta$ V. 10. KM] corr. ex $K A$ m. 1 F. ΓA] corr. ex $K A$ V. 11. καὶ — 12. HB] om. FVb , m. 2 B. 13. φητόν P. 17. AZ] corr. ex $Z A$ V. 21.

Sit AB mediae apotome secunda, ΓA autem rationalis, et quadrato AB^2 aequale rectae ΓA adplicetur ΓE latitudinem efficiens ΓZ . dico, ΓZ apotomen tertiam esse.

nam BH rectae AB congruens sit. itaque AH, HB mediae sunt potentia tantum commensurabiles spatium



medium comprehendentes [prop. LXXV]. et quadrato AH^2 aequale rectae ΓA adplicetur $\Gamma \Theta$

latitudinem efficiens ΓK , quadrato autem BH^2 aequale rectae $K \Theta$

adplicetur $K A$ latitudinem efficiens $K M$. itaque totum $\Gamma A = AH^2 + HB^2$. et

$AH^2 + HB^2$ medium est. itaque etiam ΓA medium est. et rationali ΓA adplicatum est latitudinem efficiens ΓM . quare ΓM rationalis est et rectae ΓA longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. et quoniam

est $\Gamma A = AH^2 + HB^2$, quorum $\Gamma E = AB^2$, erit reliquum $AZ = 2 AH \times HB$ [II, 7]. iam

ZM in puncto N in duas partes aequales secetur, et rectae ΓA parallela ducatur $N \Xi$. itaque

$Z \Xi = NA = AH \times HB$. uerum $AH \times HB$ medium est. itaque etiam ZA medium est. et rectae rationali EZ

adplicatum est latitudinem efficiens ZM . quare ZM rationalis est et rectae ΓA longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. et quoniam AH, HB potentia tantum commensurabiles sunt, AH et HB longitudine incommensurabiles sunt. quare etiam AH^2 et $AH \times HB$

incommensurabilia sunt [prop. XXI lemma, prop. XI].

ZA] corr. ex $Z A$ m. rec. P, mut. in AZ V. 23. καί] (primum)

ἐστίν V. 25. ἐστίν] om. P. AH] H in ras. V. τῇ] om. b.

AH, HB , τῷ δὲ ὑπὸ τῶν AH, HB τὸ δις ὑπὸ τῶν
 AH, HB ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AH, HB
 τῷ δις ὑπὸ τῶν AH, HB . ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν
 AH, HB ἴσον ἐστὶ τὸ $ΓΑ$, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν AH ,
 5 HB ἴσον ἐστὶ τὸ $ΖΑ$. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΓΑ$
 τῷ $ΖΑ$. ὥς δὲ τὸ $ΓΑ$ πρὸς τὸ $ΖΑ$, οὕτως ἐστὶν ἡ
 $ΓΜ$ πρὸς τὴν $ΖΜ$. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ $ΓΜ$ τῇ
 $ΖΜ$ μήκει. καὶ εἰσιν ἀμφοτέραι ῥηταί· αἱ ἄρα $ΓΜ$,
 $ΜΖ$ ῥηταί· εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομῇ
 10 ἄρα ἐστὶν ἡ $ΓΖ$.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ τρίτη.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς AH τῷ ἀπὸ
 τῆς HB , σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ $ΓΘ$ τῷ $ΚΑ$. ὥστε
 καὶ ἡ $ΓΚ$ τῇ $ΚΜ$. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν AH, HB
 15 μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν AH, HB , καὶ ἐστι
 τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AH ἴσον τὸ $ΓΘ$, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς HB
 ἴσον τὸ $ΚΑ$, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν AH, HB ἴσον τὸ $ΝΑ$,
 καὶ τῶν $ΓΘ, ΚΑ$ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ $ΝΑ$.
 ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ $ΓΘ$ πρὸς τὸ $ΝΑ$, οὕτως τὸ $ΝΑ$
 20 πρὸς τὸ $ΚΑ$. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ $ΓΘ$ πρὸς τὸ $ΝΑ$,
 οὕτως ἐστὶν ἡ $ΓΚ$ πρὸς τὴν $ΝΜ$, ὡς δὲ τὸ $ΝΑ$ πρὸς
 τὸ $ΚΑ$, οὕτως ἐστὶν ἡ $ΝΜ$ πρὸς τὴν $ΚΜ$. ὡς ἄρα
 ἡ $ΓΚ$ πρὸς τὴν $ΜΝ$, οὕτως ἐστὶν ἡ $ΜΝ$ πρὸς τὴν
 $ΚΜ$. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $ΓΚ, ΚΜ$ ἴσον ἐστὶ τῷ [ἀπὸ
 25 τῆς $ΜΝ$, τουτέστι τῷ] τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς $ΖΜ$.
 ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ $ΓΜ, ΜΖ$, καὶ
 τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς $ΖΜ$ ἴσον παρὰ τὴν
 $ΓΜ$ παραβέβληται ἐλλείπον εἶδει τετραγώνῳ καὶ εἰς

1. τό] σύμμετρόν ἐστι τό Theon (BFVb). 2. Post HB
 del. τὸ $ΖΑ$ V. ἀσύμμετρα — 3. HB] om. P. 2. ἀσύμμετρα
 — 5. $ΖΑ$] mg. m. 1 V. 2. ἄρα] om. b. ἐστὶν ἄρα V. ἀπό]

uerum AH^2 et $AH^2 + HB^2$, $AH \times HB$ et $2 AH \times HB$ commensurabilia sunt. itaque $AH^2 + HB^2$ et $2 AH \times HB$ incommensurabilia sunt [prop. XIII]. est autem

$$\Gamma A = AH^2 + HB^2, ZA = 2 AH \times HB.$$

quare ΓA , ZA incommensurabilia sunt. est autem $\Gamma A : ZA = \Gamma M : ZM$ [VI, 1]. quare ΓM , ZM longitudine incommensurabiles sunt [prop. XI]. et utraque rationalis est. itaque ΓM , MZ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo ΓZ apotome est [prop. LXXIII].

Iam dico, eandem tertiam esse. nam quoniam AH^2 , HB^2 commensurabilia sunt, etiam $\Gamma\Theta$, $K\Lambda$ commensurabilia sunt. quare etiam ΓK , KM commensurabiles sunt [VI, 1; prop. XI]. et quoniam $AH \times HB$ medium est proportionale inter AH^2 et HB^2 [prop. XXI lemma], et $\Gamma\Theta = AH^2$, $K\Lambda = HB^2$, $N\Lambda = AH \times HB$, etiam $N\Lambda$ medium est proportionale inter $\Gamma\Theta$, $K\Lambda$. itaque $\Gamma\Theta : N\Lambda = N\Lambda : K\Lambda$. est autem

$$\Gamma\Theta : N\Lambda = \Gamma K : NM, N\Lambda : K\Lambda = NM : KM$$

[VI, 1]. quare $\Gamma K : MN = MN : KM$. itaque [VI, 17] $\Gamma K \times KM = MN^2 = \frac{1}{4} ZM^2$. quoniam igitur duae rectae inaequales sunt ΓM , MZ , et $\frac{1}{4} ZM^2$ aequale rectae ΓM spatium adplicatum est figura quadrata deficiens et eam in partes commensurabiles diuidit,

ὕπό B. 4. ΓA] corr. ex ΓA m. rec. P. $\tau\omega$] τό V. 5. τό] (prius) mut. in $\tau\omega$ V. 7. ΓM] $H\Gamma$ b. ZM] MZ P, ΓM b.
8. Post ZM eras. $\mu\eta$ V. 9. MZ] ZM F. 12. $\sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\rho\omicron\varsigma$ P, corr. m. rec. 13. $\alpha\rho\alpha$ $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ V. $K\Lambda$] ΓA P. 14. KM $\sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\rho\omicron\varsigma$ $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ V. $\tau\omega\upsilon$] (alt.) om. b. 15. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$] (prius) $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ P.
17. ὕπό] ἀπό F. 20. τὸν $K\Lambda$ P. 21. NM] MN b. 22. $K\Lambda$] NK ? P. MN F. ὡς — 23. τὴν KM] punctis del. V.
23. MN] NM V. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$] om. V. MN] NM V. 24. ἀπό — 25. $\tau\omega$] mg. m. 1 P.

σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ, ἡ $ΓΜ$ ἄρα τῆς $ΜΖ$ μείζον δύναται τῷ ἀπο συμμέτρου ἐαυτῇ. καὶ οὐδετέρα τῶν $ΓΜ$, $ΜΖ$ σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ $ΓΔ$ · ἡ ἄρα $ΓΖ$ ἀποτομή ἐστι τρίτη.

- 5 Τὸ ἄρα ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τρίτην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ρ'.

Τὸ ἀπὸ ἐλάσσονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τετάρτην.

Ἔστω ἐλάσσων ἡ $ΑΒ$, ῥητὴ δὲ ἡ $ΓΔ$, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ ἴσον παρὰ ῥητὴν τὴν $ΓΔ$ παραβεβλήσθω τὸ $ΓΕ$ πλάτος ποιοῦν τὴν $ΓΖ$ · λέγω, ὅτι ἡ $ΓΖ$ ἀποτομή ἐστι τετάρτη.

- 15 Ἔστω γὰρ τῇ $ΑΒ$ προσαρμόξουσα ἡ $ΒΗ$ · αἱ ἄρα $ΑΗ$, $ΗΒ$ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΗ$, $ΗΒ$ τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν $ΑΗ$, $ΗΒ$ μέσον. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς $ΑΗ$ ἴσον παρὰ τὴν $ΓΔ$ παραβεβλήσθω
20 τὸ $ΓΘ$ πλάτος ποιοῦν τὴν $ΓΚ$, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς $ΒΗ$ ἴσον το $ΚΑ$ πλάτος ποιοῦν τὴν $ΚΜ$ · ὅλον ἄρα τὸ $ΓΑ$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΑΗ$, $ΗΒ$. καὶ ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΗ$, $ΗΒ$ ῥητόν· ῥητόν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ $ΓΑ$. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν $ΓΔ$ παρά-
25 κειται πλάτος ποιοῦν τὴν $ΓΜ$ · ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ $ΓΜ$ καὶ σύμμετρος τῇ $ΓΔ$ μήκει. καὶ ἐπεὶ ὅλον τὸ $ΓΑ$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΑΗ$, $ΗΒ$, ὧν τὸ $ΓΕ$ ἴσον ἐστὶ

1. σύμμετρον P. $ΜΖ$] ZM P. 3. μήκει] om. b. 4. ἐστιν P. 5. τὸ] corr. ex τῷ m. 2 F. ἀπό] m. 2 F. παρὰ ῥητὴν] mg. m. 2 V. 6. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. B F V b, comp. P.

ΓM^2 excedit MZ^2 quadrato rectae sibi commensurabilis. et neutra rectarum ΓM , MZ rationali propositae ΓA longitudine commensurabilis est. itaque ΓZ apotome est tertia [deff. tert. 3].

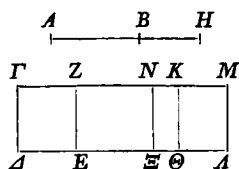
Ergo quadratum mediae apotomes secundae rectae rationali adplicatum latitudinem efficit apotomen secundam; quod erat demonstrandum.

C.

Quadratum minoris rectae rationali adplicatum latitudinem efficit apotomen quartam.

Sit AB minor, ΓA autem rationalis, et quadrato AB^2 aequale rationali ΓA adplicetur ΓE latitudinem efficiens ΓZ . dico, ΓZ apotomen quartam esse.

nam BH rectae AB congruens sit. itaque AH , HB potentia incommensurabiles sunt efficientes $AH^2 + HB^2$



rationalis, $2AH \times HB$ autem medium [prop. LXXVI]. et quadrato AH^2 aequale rectae ΓA adplicetur $\Gamma \Theta$ latitudinem efficiens ΓK , et $KA = BH^2$ latitudinem efficiens KM . itaque totum

$\Gamma A = AH^2 + HB^2$. et $AH^2 + HB^2$ rationale est. quare etiam ΓA rationale est. et rationali ΓA adplicatum est latitudinem efficiens ΓM . itaque ΓM rationalis est et rectae ΓA longitudine commensurabilis [prop. XX]. et quoniam totum $\Gamma A = AH^2 + HB^2$,

11. ἐλάσσων] ἐ- in ras. m. 1 P. 14. ἐστίν P. τετάρτη
ἐστίν V. 15. γὰρ] m. 2 F. 16. HB] supra scr. m. 1 P.
19. μὲν] om. V. 21. KM] ΓK b. 25. καί] om. Fb,
ἐστίν V.

τῷ ἀπὸ τῆς AB , λοιπὸν ἄρα τὸ ZA ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν AH, HB . τετμήσθω οὖν ἡ ZM δίχα κατὰ τὸ N σημείον, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ N ὁποτέρᾳ τῶν GA, MA παράλληλος ἡ $NΞ$. ἐκάτερον ἄρα τῶν $ZΞ, NA$
 5 ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν AH, HB . καὶ ἐπεὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AH, HB μέσον ἐστὶ καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ ZA , καὶ τὸ ZA ἄρα μέσον ἐστίν. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ZE παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ZM . ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ZM καὶ ἀσύμμετρος τῇ GA μήκει. καὶ ἐπεὶ το μὲν
 10 συγκαίμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AH, HB ῥητόν ἐστιν, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν AH, HB μέσον, ἀσύμμετρα [ἄρα] ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AH, HB τῷ δις ὑπὸ τῶν AH, HB . ἴσον δέ [ἐστὶ] τὸ GA τοῖς ἀπὸ τῶν AH, HB , τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν AH, HB ἴσον τὸ ZA . ἀσύμμετρον ἄρα
 15 [ἐστὶ] τὸ GA τῷ ZA . ὥς δὲ τὸ GA πρὸς τὸ ZA , οὕτως ἐστὶν ἡ GM πρὸς τὴν MZ . ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ GM τῇ MZ μήκει. καὶ εἰσιν ἀμφοτέραι ῥηταί· αἱ ἄρα GM, MZ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ GZ .

20 Λέγω [δὴ], ὅτι καὶ τετάρτη.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ AH, HB δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AH τῷ ἀπὸ τῆς HB . καὶ ἐστὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AH ἴσον τὸ $\Gamma\Theta$, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς HB ἴσον τὸ KA . ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ $\Gamma\Theta$ τῷ
 25 KA . ὥς δὲ τὸ $\Gamma\Theta$ πρὸς τὸ KA , οὕτως ἐστὶν ἡ GK πρὸς τὴν KM . ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ GK τῇ KM μήκει. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν AH, HB μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν AH, HB , καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ μὲν ἀπὸ τῆς AH τῷ $\Gamma\Theta$, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς HB τῷ KA ,

1. τῷ] (alt.) τῶν P. 2. οὖν] οὖν καὶ P. 3. τοῦ N σημείου V. 5. τῶν] om. P. 6. τῷ] corr. ex τό m. 1 B.

quorum $\Gamma E = AB^2$, erit reliquum $Z A = 2 A H \times H B$ [II, 7]. iam $Z M$ in puncto N in duas partes aequales secetur, et per N utrique ΓA , $M A$ parallela ducatur $N \Xi$. itaque $Z \Xi = N A = A H \times H B$. et quoniam $2 A H \times H B$ medium est et $2 A H \times H B = Z A$, etiam $Z A$ medium est. et rectae rationali $Z E$ adplicatum est latitudinem efficiens $Z M$. itaque $Z M$ rationalis est et rectae ΓA longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. et quoniam $A H^2 + H B^2$ rationale est, $2 A H \times H B$ autem medium, $A H^2 + H B^2$ et $2 A H \times H B$ incommensurabilia sunt. uerum $\Gamma A = A H^2 + H B^2$ et $Z A = 2 A H \times H B$. quare ΓA , $Z A$ incommensurabilia sunt. est autem $\Gamma A : Z A = \Gamma M : M Z$ [VI, 1]. quare ΓM , $M Z$ longitudine incommensurabiles sunt [prop. XI]. et utraque rationalis est. itaque ΓM , $M Z$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo ΓZ apotome est [prop. LXXIII].

Iam dico, eandem quartam esse. nam quoniam $A H$, $H B$ potentia incommensurabiles sunt, etiam $A H^2$ et $H B^2$ incommensurabilia sunt. et $\Gamma \Theta = A H^2$, $K A = H B^2$. quare $\Gamma \Theta$, $K A$ incommensurabilia sunt. uerum $\Gamma \Theta : K A = \Gamma K : K M$ [VI, 1]. itaque ΓK , $K M$ longitudine incommensurabiles sunt [prop. XI]. et

7. ἐστὶ PBV, comp. Fb. 10. ἐστὶ PBV, comp. Fb. 11. ἄρα] om. P. 13. δ' b. ἐστὶ] om. P. 14. τό] corr. ex τῷ m. 1 F. 15. ἐστὶ] om. P. τό] in ras. m. 1 P. Supra ΓA τῷ ras. est in V. ΓA] $Z A$ P. $Z A$] ΓA P. 16. πρὸς τῇ] τῇ P. $Z M$ F. ἀσύμμετρος — 17. $M Z$] om. P. 20. δὴ] om. FVb, m. 2 B. 22. ἄρα] ἐστὶ V. $H B$] corr. ex $B H$ m. 2 V. 23. τό] corr. ex τῷ m. 1 F. 26. ΓK] $K \Gamma$ P. 27. μήκει] mg. m. 2 V. 28. τό] (alt.) τῷ P V. 29. μέν] om. V. τῷ] τό P et V, corr. m. 1. τό] τῷ P. τῷ] τό P. Supra $K A$ add. N m. 1 b.

τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AH , HB τῷ NA , τῶν ἄρα $\Gamma\Theta$, KA
μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ NA . ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ $\Gamma\Theta$
πρὸς τὸ NA , οὕτως τὸ NA πρὸς τὸ KA . ἀλλ' ὡς
μὲν τὸ $\Gamma\Theta$ πρὸς τὸ NA , οὕτως ἐστὶν ἡ ΓK πρὸς τὴν
5 NM , ὡς δὲ τὸ NA πρὸς τὸ KA , οὕτως ἐστὶν ἡ NM
πρὸς τὴν KM . ὡς ἄρα ἡ ΓK πρὸς τὴν MN , οὕτως
ἐστὶν ἡ MN πρὸς τὴν KM . τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓK ,
 KM ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς MN , τουτέστι τῷ τετάρτῳ
μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ZM . ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί
10 εἰσιν αἱ ΓM , MZ , καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς
 MZ ἴσον παρὰ τὴν ΓM παραβέβληται ἑλλείπον εἶδει
τετραγώνῳ τὸ ὑπὸ τῶν ΓK , KM καὶ εἰς ἀσύμμετρα
αὐτὴν διαιρεῖ, ἡ ἄρα ΓM τῆς MZ μείζον δύναται τῷ
ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ ἐστὶν ὅλη ἡ ΓM σύμ-
15 μετρος μήκει τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ ΓA . ἡ ἄρα ΓZ
ἀποτομή ἐστὶ τετάρτη.

Τὸ ἄρα ἀπὸ ἐλάσσονος καὶ τὰ ἐξῆς.

ρα'.

Τὸ ἀπὸ τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον
20 ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος
ποιεῖ ἀποτομὴν πέμπτην.

Ἐστω ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσα ἡ AB ,
ῥητὴ δὲ ἡ ΓA , καὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB ἴσον παρὰ τὴν
 ΓA παραβεβλήσθω τὸ ΓE πλάτος ποιῶν τὴν ΓZ .
25 λέγω, ὅτι ἡ ΓZ ἀποτομή ἐστὶ πέμπτη.

Ἐστω γὰρ τῇ AB προσαρμόζουσα ἡ BH . αἱ ἄρα

1. ὑπό] corr. ex ἀπό V. τῶν] (alt.) τῷ b. 3. NA] AN F. οὕτως — 4. NA] mg. m. 2 B. 3. KA] KA' F.
4. μέν] om. V. ἐστὶν] m. 2 F. 6. ὡς] καὶ ὡς b, mg. V.
ἄρα — 7. τὴν KM] mg. V. 6. τὴν] (alt.) τό φ. 8. NM P.

quoniam $AH \times HB$ inter AH^2 , HB^2 medium est proportionale [prop. XXI lemma], et $AH^2 = \Gamma\Theta$, $HB^2 = KA$, $AH \times HB = NA$, inter $\Gamma\Theta$, KA medium proportionale est NA . itaque $\Gamma\Theta : NA = NA : KA$. uerum $\Gamma\Theta : NA = \Gamma K : NM$, $NA : KA = NM : KM$ [VI, 1]. itaque $\Gamma K : MN = MN : KM$. quare $\Gamma K \times KM = MN^2$ [VI, 17] $= \frac{1}{4} ZM^2$. iam quoniam sunt duae rectae inaequales ΓM , MZ , et $\frac{1}{4} MZ^2$ aequale rectae ΓM adplicatum est $\Gamma K \times KM$ figura quadrata deficiens et eam in partes incommensurabiles diuidit, ΓM^2 excedit MZ^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis [prop. XVIII]. et tota ΓM rationali propositae ΓA commensurabilis est longitudine. itaque ΓZ apotome est quarta [deff. tert. 4].

Ergo quadratum minoris, et quae sequuntur.

CI.

Quadratum rectae cum rationali totum medium efficientis rectae rationali adplicatum latitudinem efficit apotomen quintam.

Sit AB recta cum rationali totum medium efficiens, ΓA autem rationalis, et quadrato AB^2 aequale rectae ΓA adplicetur ΓE latitudinem efficiens ΓZ . dico, ΓZ apotomen quintam esse.

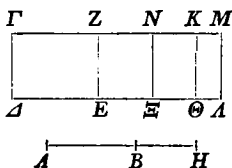
nam BH rectae AB congruens sit. itaque rectae

10. καὶ τῶ] τῶ δέ FV. τοῦ] m. 2 F. 12. τό] τῶ b. 14. συμμέτρον Pb et V, sed corr. ἐστίν] om. V φ. 15. μήκει] ἐστὶ V. 17. καὶ τὰ ἐξῆς] παρὰ φητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομήν τετάρτην Theon (BFVb). 22. ἡ] (prius) om. V. 23. φητὴ — AB] mg. m. 1 P. τῶ] e corr. P. 24. ΓA] ΔΓ F. ΓZ] corr. ex ΓA P. 25. ΓZ] ZΓ e corr. V, ΔΓ φ. 26. γὰρ] m. 2 F.

AH, HB εὐθεῖαι δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι
 τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων
 μέσον, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν ρητόν. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ
 τῆς AH ἴσον παρὰ τὴν $ΓΔ$ παραβεβλήσθω τὸ $ΓΘ$,
 5 τῷ δὲ ἀπὸ τῆς HB ἴσον τὸ $ΚΑ$. ὅλον ἄρα τὸ $ΓΑ$
 ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AH, HB . τὸ δὲ συγκείμενον
 ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AH, HB ἅμα μέσον ἐστίν· μέσον
 ἄρα ἐστὶ τὸ $ΓΑ$. καὶ παρὰ ρητὴν τὴν $ΓΔ$ παράκειται
 πλάτος ποιοῦν τὴν $ΓΜ$. ρητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $ΓΜ$ καὶ
 10 ἀσύμμετρος τῇ $ΓΔ$. καὶ ἐπεὶ ὅλον τὸ $ΓΑ$ ἴσον ἐστὶ
 τοῖς ἀπὸ τῶν AH, HB , ὧν τὸ $ΓΕ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ
 τῆς AB , λοιπὸν ἄρα τὸ $ΖΑ$ ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ
 τῶν AH, HB . τετμήσθω οὖν ἡ ZM δίχα κατὰ τὸ N ,
 καὶ ἤχθω διὰ τοῦ N ὁποτέρᾳ τῶν $ΓΔ, ΜΑ$ παράλ-
 15 ληλος ἡ $NΞ$. ἐκάτερον ἄρα τῶν $ZΞ, ΝΑ$ ἴσον ἐστὶ
 τῷ ὑπὸ τῶν AH, HB . καὶ ἐπεὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν $AH,$
 HB ρητόν ἐστι καὶ [ἐστίν] ἴσον τῷ $ΖΑ$, ρητόν ἄρα
 ἐστὶ τὸ $ΖΑ$. καὶ παρὰ ρητὴν τὴν EZ παράκειται
 πλάτος ποιοῦν τὴν ZM . ρητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ZM καὶ
 20 σύμμετρος τῇ $ΓΔ$ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν $ΓΑ$ μέσον
 ἐστίν, τὸ δὲ $ΖΑ$ ρητόν, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΓΑ$
 τῷ $ΖΑ$. ὥς δὲ τὸ $ΓΑ$ πρὸς τὸ $ΖΑ$, οὕτως ἡ $ΓΜ$
 πρὸς τὴν MZ . ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ $ΓΜ$ τῇ MZ
 μήκει. καὶ εἰσιν ἀμφοτέραι ρηταί· αἱ ἄρα $ΓΜ, ΜΖ$
 25 ρηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα
 ἐστὶν ἡ $ΓΖ$.

3. μέν] om. V. 5. Post δέ ras. 2 litt. V. HB] mut.
 in AB m. 2 F, in ras. V. ΓΑ] A in ras. m. 1 P, corr. ex
 A B. 6. τὸ δέ — 7. ἀπὸ τῶν] τὰ δὲ ἀπὸ τῆς V. 7. ἐστίν]
 ἐστὶ PB, comp. FV; εἶναι V, supra scr. ἐστὶ m. 1. 8. ΓΑ]
 mut. in ΑΓ m. 1 F. 9. ΓΜ] ΓΗ φ. ρητῇ] ρη- om. φ.
 11. ΓΕ] ΒΑ B. 18. οὖν] om. Vφ. 14. καὶ — N] supra

AH , HB potentia incommensurabiles sunt efficientes summam quadratorum mediam, duplum autem rectan-



gulum rationale [prop. LXXVII]. et rectae $\Gamma\Delta$ adplicetur $\Gamma\Theta = AH^2$,

$K\Delta = HB^2$. itaque totum

$$\Gamma\Delta = AH^2 + HB^2.$$

uerum $AH^2 + HB^2$ medium est; itaque etiam $\Gamma\Delta$ medium est. et

rationali $\Gamma\Delta$ adplicatum est latitudinem efficiens ΓM .

itaque ΓM rationalis est et rectae $\Gamma\Delta$ incommensurabilis [prop. XXII]. et quoniam $\Gamma\Delta = AH^2 + HB^2$,

quorum $\Gamma E = AB^2$, erit reliquum $Z\Delta = 2AH \times HB$ [II, 7]. iam ZM in N in duas partes aequales secetur,

et per N utrique $\Gamma\Delta$, $M\Delta$ parallela ducatur $N\Xi$. quare $Z\Xi = N\Delta = AH \times HB$. et quoniam $2AH \times HB$

rationale est, et $2AH \times HB = Z\Delta$, $Z\Delta$ rationale est. et rationali EZ adplicatum est latitudinem efficiens

ZM . itaque ZM rationalis est et rectae $\Gamma\Delta$ longitudine commensurabilis [prop. XX]. et quoniam $\Gamma\Delta$

medium est, $Z\Delta$ autem rationale, $\Gamma\Delta$ et $Z\Delta$ incommensurabilia sunt. est autem $\Gamma\Delta : Z\Delta = \Gamma M : MZ$

[VI, 1]. quare ΓM , MZ longitudine incommensurabiles sunt [prop. XI]. et utraque rationalis est. itaque

ΓM , MZ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo ΓZ apotome est [prop. LXXIII].

scr. m. 1 P. 17. $\xi\sigma\tau\nu$] om. P. $Z\Delta$] Z (uel Ξ) corr. ex N V, item lin. 18. 18. EZ] e corr. m. 1 V. 19. ZM] (alt.) ZH b. 20. $\alpha\sigma\upsilon\mu\mu\epsilon\tau\rho\omicron\varsigma$ B, supra σ ras. est in V. $\Gamma\Delta$] corr. ex ΓZ b; ΓZ V, Z eras. 21. $\xi\sigma\tau\nu$] $\xi\sigma\tau\iota$ PBFV, comp. b. 23. $\tau\acute{\eta}\nu$] $\tau\acute{o}$ V. $\xi\sigma\tau\nu$] $\xi\sigma\tau\iota$ καί Vφ. 24. ΓM , MZ $\acute{\alpha}\rho\alpha$ V.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ πέμπτη.

- Ὅμοίως γὰρ δεῖξομεν, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν $\Gamma K M$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $N M$, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς $Z M$. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς $A H$ τῷ ἀπὸ τῆς $H B$, ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς $A H$ τῷ $\Gamma \Theta$, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς $H B$ τῷ $K A$, ἀσύμμετρον ἄρα τὸ $\Gamma \Theta$ τῷ $K A$. ὥς δὲ τὸ $\Gamma \Theta$ πρὸς τὸ $K A$, οὕτως ἡ ΓK πρὸς τὴν $K M$. ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΓK τῇ $K M$ μήκει. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓM , $M Z$, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς $Z M$ ἴσον παρὰ τὴν ΓM παραβέβληται ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ, ἡ ἄρα ΓM τῆς $M Z$ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ. καὶ ἐστὶν ἡ προσαρμόζουσα ἡ $Z M$ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ ΓA . ἡ ἄρα ΓZ ἀποτομή ἐστὶ πέμπτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ρβ'.

Τὸ ἀπὸ τῆς μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν ἑκτην.

- Ἔστω ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ $A B$, ῥητὴ δὲ ἡ ΓA , καὶ τῷ ἀπὸ τῆς $A B$ ἴσον παρὰ τὴν ΓA παραβεβλήσθω τὸ ΓE πλάτος ποιοῦν τὴν ΓZ . λέγω, ὅτι ἡ ΓZ ἀποτομή ἐστὶν ἑκτη.

- Ἔστω γὰρ τῇ $A B$ προσαρμόζουσα ἡ $B H$. αἱ ἄρα $A H$, $H B$ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ

1. δὴ] m. 2 F. 2. ΓK , $K M$ FV. 4. ἐστὶ] om. Vφ. 5. $A H$] (alt.) A e corr. F. 6. $\Gamma \Theta$] Θ in ras. m. 1 P. 8. τὴν] om. P. $K M$] ΓM P et B in ras. ἄρα ἐστὶν Vφ. $K M$] ΓM P et in ras. B. 9. εἰσι P, corr. m. 1. 10. $Z M$] $M Z$

Iam dico, eandem quintam esse. nam similiter demonstrabimus, esse $\Gamma K \times KM = NM^2 = \frac{1}{4} ZM^2$. et quoniam AH^2 , HB^2 incommensurabilia sunt, et $AH^2 = \Gamma\Theta$, $HB^2 = KA$, $\Gamma\Theta$ et KA incommensurabilia sunt. est autem $\Gamma\Theta : KA = \Gamma K : KM$ [VI, 1]. quare ΓK , KM longitudine incommensurabiles sunt [prop. XI]. iam quoniam sunt duae rectae inaequales ΓM , MZ , et $\frac{1}{4} ZM^2$ aequale rectae ΓM adplicatum est spatium figura quadrata deficiens et eam in partes incommensurabiles diuidit, ΓM^2 excedit MZ^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis [prop. XVIII]. et congruens ZM rationali propositae ΓA commensurabilis est.

Ergo ΓZ apotome est quinta [deff. tert. 5]; quod erat demonstrandum.

CII.

Quadratum rectae cum medio totum medium efficientis rectae rationali adplicatum latitudinem efficit apotomen sextam.

Sit AB recta cum medio totum medium efficiens, ΓA autem rationalis, et quadrato AB^2 aequale rectae ΓA adplicetur ΓE latitudinem efficiens ΓZ . dico, ΓZ apotomen sextam esse.

nam BH rectae AB congruens sit. itaque AH , HB potentia incommensurabiles sunt efficientes sum-

P, et V (?), sed corr. m. 1. 13. $\xi\alpha\nu\tau\eta\eta\ \mu\acute{\eta}\chi\epsilon\iota$ V. 14. ZM MZ P. 15. $\delta\pi\epsilon\rho\ \xi\delta\epsilon\iota\ \delta\epsilon\iota\chi\alpha\iota$] om. B F V b. In hac pag. et sequenti multi loci euan. in F. 21. $\pi\alpha\rho\acute{\alpha}$] $\pi\alpha\rho\acute{\alpha}\ \phi\eta\tau\eta\nu$ V φ . $\tau\eta\nu$] supra scr. m. 1 V. 22. $\tau\eta\nu$] $\tau\eta$ b. 24. $\alpha\rho\mu\acute{o}\xi\omicron\upsilon\sigma\alpha$, supra scr. $\pi\rho\omicron\sigma$ m. 1, F. HB P. 25. Post HB ras. 5 litt. V. Supra $\tau\epsilon$ scr. $\mu\acute{\epsilon}\nu$ m. 1 b.

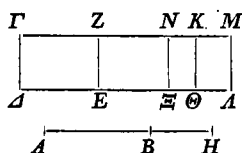
τὸ δις ὑπὸ τῶν AH, HB μέσον καὶ ἀσύμμετρον τα
 ἀπὸ τῶν AH, HB τῷ δις ὑπὸ τῶν AH, HB . παρα-
 βεβλήσθω οὖν παρὰ τὴν $ΓΑ$ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AH
 ἴσον τὴν $ΓΘ$ πλάτος ποιοῦν τὴν $ΓΚ$, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς
 5 BH τὸ $ΚΑ$. ὅλον ἄρα τὸ $ΓΑ$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν
 AH, HB . μέσον ἄρα [ἐστὶ] καὶ τὸ $ΓΑ$. καὶ παρὰ
 ῥητὴν τὴν $ΓΑ$ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν $ΓΜ$.
 ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $ΓΜ$ καὶ ἀσύμμετρος τῇ $ΓΑ$ μήκει.
 ἐπεὶ οὖν τὸ $ΓΑ$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AH, HB ,
 10 ὧν τὸ $ΓΕ$ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς AB , λοιπὸν ἄρα τὸ $ΖΑ$
 ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν AH, HB . καὶ ἐστὶ τὸ δις
 ὑπὸ τῶν AH, HB μέσον· καὶ τὸ $ΖΑ$ ἄρα μέσον ἐστίν.
 καὶ παρα ῥητὴν τὴν $ΖΕ$ παράκειται πλάτος ποιοῦν
 τὴν $ΖΜ$. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $ΖΜ$ καὶ ἀσύμμετρος τῇ
 15 $ΓΑ$ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὰ ἀπὸ τῶν AH, HB ἀσύμμετρά
 ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν AH, HB , καὶ ἐστὶ τοῖς μὲν ἀπὸ
 τῶν AH, HB ἴσον τὸ $ΓΑ$, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν AH ,
 HB ἴσον τὸ $ΖΑ$, ἀσύμμετρον ἄρα [ἐστὶ] τὸ $ΓΑ$ τῷ
 $ΖΑ$. ὥς δὲ τὸ $ΓΑ$ πρὸς τὸ $ΖΑ$, οὕτως ἐστὶν ἡ $ΓΜ$
 20 πρὸς τὴν $ΜΖ$. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ $ΓΜ$ τῇ $ΜΖ$
 μήκει. καὶ εἰσιν ἀμφοτέραι ῥηταί. αἱ $ΓΜ, ΜΖ$ ἄρα
 ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα
 ἐστὶν ἡ $ΓΖ$.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἔκτῃ.

25 Ἐπεὶ γὰρ τὸ $ΖΑ$ ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν AH ,
 HB , τετμήσθω δίχα ἡ $ΖΜ$ κατὰ τὸ N , καὶ ἥχθω διὰ
 τοῦ N τῇ $ΓΑ$ παράλληλος ἡ $NΞ$. ἐκάτερον ἄρα τῶν

1. μέσον] ῥητόν F. καί] καὶ ἔτι V, ἔτι δὲ BFb. ἀσύμ-
 μετρα BFVb. τὰ] τό P. 5. Post $ΚΑ$ add. πλάτος ποιοῦν
 τὴν KM mg. m. 2 V. 6. ἐστὶ] om. P. 8. ἐστίν] ἐστὶ καὶ V.

10. ἴσον ἐστὶ Vφ. τῷ] τό φ. 11. ἐστὶ] γίνεται V. δις]
 corr. ex δι m. 2 P. 12. ἐστὶ PBV, comp. Fb. 16. τοῖς]



nam quadratorum mediam et $2AH \times HB$ medium et $AH^2 + HB^2$, $2AH \times HB$ incommensurabilia [prop. LXXVIII]. iam rectae ΓA adplicetur $\Gamma \Theta = AH^2$ latitudinem efficiens ΓK et $KA = BH^2$. itaque totum $\Gamma A = AH^2 + HB^2$. quare etiam ΓA medium est. et rationali ΓA adplicatum est latitudinem efficiens ΓM . itaque ΓM rationalis est et rectae ΓA longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. iam quoniam $\Gamma A = AH^2 + HB^2$, quorum $\Gamma E = AB^2$, erit reliquum $ZA = 2AH \times HB$ [II, 7]. et $2AH \times HB$ medium est. quare etiam ZA medium est. et rationali ZE adplicatum est latitudinem efficiens ZM . quare ZM rationalis est et rectae ΓA longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. et quoniam $AH^2 + HB^2$, $2AH \times HB$ incommensurabilia sunt, et

$$\Gamma A = AH^2 + HB^2, ZA = 2AH \times HB,$$

ΓA et ZA incommensurabilia sunt. est autem [VI, 1] $\Gamma A : ZA = \Gamma M : MZ$. quare ΓM , MZ longitudine incommensurabiles sunt [prop. XI]. et utraque rationalis est. itaque ΓM , MZ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo ΓZ apotome est [prop. LXXIII].

Iam dico, eandem sextam esse. nam quoniam est $ZA = 2AH \times HB$, recta ZM in N in duas partes aequales secetur, et per N rectae ΓA parallela du-

$\tau\tilde{\omega}$ V. ἀπὸ τῶν] om. P. 17. ΓA — 18. ἴσον τὸ] om. b.
 18. ἔστι] om. P. 19. τὸ] (alt.) om. P. ZA] corr. ex
 $Z A$? F. 20. τῇν] om. P. MZ] in ras. V. MZ] corr.
 ex ZM V. 21. ἀρα] om. V. 22. εἶεν P. εἶεν ἀρα B.

$Z\Xi$, NA ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν AH , HB . καὶ ἐπεὶ
 αἱ AH , HB δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ἀσύμμετρον
 ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AH τῷ ἀπὸ τῆς HB . ἀλλὰ τῷ
 μὲν ἀπὸ τῆς AH ἴσον ἐστὶ τὸ $\Gamma\Theta$, τῷ δὲ ἀπὸ
 5 τῆς HB ἴσον ἐστὶ τὸ KA . ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ
 $\Gamma\Theta$ τῷ KA . ὥς δὲ τὸ $\Gamma\Theta$ πρὸς τὸ KA , οὕτως ἐστὶν
 ἡ ΓK πρὸς τὴν KM . ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓK
 τῇ KM . καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν AH , HB μέσον ἀνά-
 λογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν AH , HB , καὶ ἐστὶ τῷ μὲν ἀπὸ
 10 τῆς AH ἴσον τὸ $\Gamma\Theta$, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς HB ἴσον τὸ KA ,
 τῷ δὲ ὑπὸ τῶν AH , HB ἴσον τὸ NA , καὶ τῶν ἄρα
 $\Gamma\Theta$, KA μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ NA . ἐστὶν ἄρα ὡς
 τὸ $\Gamma\Theta$ πρὸς τὸ NA , οὕτως τὸ NA πρὸς τὸ KA . καὶ
 διὰ τὰ αὐτὰ ἡ ΓM τῆς MZ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ
 15 ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ οὐδετέρα αὐτῶν σύμμετρός
 ἐστὶ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓA . ἡ ΓZ ἄρα ἀποτομή
 ἐστὶν ἕκτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ργ'.

Ἡ τῇ ἀποτομῇ μήκει σύμμετρος ἀποτομή
 20 ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

Ἐστω ἀποτομή ἡ AB , καὶ τῇ AB μήκει σύμμετρος
 ἐστω ἡ ΓA . λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓA ἀποτομή ἐστὶ καὶ
 τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ AB .

Ἐπεὶ γὰρ ἀποτομή ἐστὶν ἡ AB , ἐστω αὐτῇ προσ-

2. εἰσὶ σύμμετροι b. 4. τὸ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Theta$ P. 5. ἐστὶ]
 om. V. 6. τῷ] corr. ex τό m. 2 P. 8. ἀπὸ τῶν] om. P;
 ὑπὸ τῶν supra scr. α m. 1 b; ὑπὸ τῶν ins. m. 2 F. 11. τῷ
 δὲ ὑπὸ — NA] mg. m. 2 V. τῷ] τό V. AH] H e corr. V.
 ἴσον ἐστὶ P. 12. NA] N b. 13. NA] (prius) A , supra
 add. N m. 2, F. 14. τὰ αὐτὰ] corr. ex ταῦτα V. MZ]
 corr. ex ZM V. 15. ἀσυμμέτρου] corr. ex συμμέτρου m. 2 B.

catur $N\Xi$. itaque $Z\Xi = NA = AH \times HB$. et quoniam AH , HB potentia incommensurabiles sunt, AH^2 et HB^2 incommensurabilia sunt. est autem $\Gamma\Theta = AH^2$, $KA = HB^2$. quare $\Gamma\Theta$, KA incommensurabilia sunt. est autem $\Gamma\Theta : KA = \Gamma K : KM$ [VI, 1]. itaque ΓK , KM incommensurabiles sunt [prop. XI]. et quoniam $AH \times HB$ medium est proportionale inter AH^2 et HB^2 [prop. XXI lemma], et $\Gamma\Theta = AH^2$, $KA = HB^2$, $NA = AH \times HB$, etiam NA medium est proportionale inter $\Gamma\Theta$, KA . itaque $\Gamma\Theta : NA = NA : KA$. et eadem de causa [cfr. p. 326, 9 sq.] ΓM^2 excedit MZ^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis [prop. XVIII]. et neutra earum rationali propositae ΓA commensurabilis est.

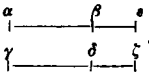
Ergo ΓZ apotome est sexta [deff. tert. 6]; quod erat demonstrandum.¹⁾

CIII.

Recta apotomae longitudine commensurabilis apotome est et ordine eadem.

Sit AB apotome, et rectae AB longitudine commensurabilis sit ΓA . dico, ΓA quoque apotomen esse et ordine eandem ac AB .

nam quoniam AB apotome est, BE ei congruens

1) In B figura haec est . deinde in mg. adiicitur uera addito ἐν ἄλλῳ.

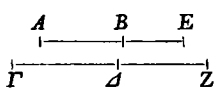
16. ΓA] A in ras. m. 1 F. 17. ὅπερ εἶδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 21. σύμμετρος ἔστω μήκει BFb. 23. ἡ] m. 2 P. 24. προσαρμόζουσα ἔστω αὐτῇ V. αὐτῇ ἡ Fb.

αρμόζουσα ἡ BE · αἱ AE , EB ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει
μόνον σύμμετροι. καὶ τῷ τῆς AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$ λόγῳ
ὁ αὐτὸς γερονέτω ὁ τῆς BE πρὸς τὴν ΔZ · καὶ ὥς
ἐν ἄρα πρὸς ἓν, πάντα [ἐστὶ] πρὸς πάντα· ἐστὶν ἄρα
5 καὶ ὥς ὅλη ἡ AE πρὸς ὅλην τὴν ΓZ , οὕτως ἡ AB
πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$. σύμμετρος δὲ ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$ μήκει·
σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ AE μὲν τῇ ΓZ , ἡ δὲ BE τῇ
 ΔZ . καὶ αἱ AE , EB ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμ-
μετροι· καὶ αἱ ΓZ , $Z\Delta$ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον
10 σύμμετροι [ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἡ $\Gamma\Delta$].

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ AB].

Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὥς ἡ AE πρὸς τὴν ΓZ , οὕτως ἡ
 BE πρὸς τὴν ΔZ , ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὥς ἡ AE πρὸς
τὴν EB , οὕτως ἡ ΓZ πρὸς τὴν $Z\Delta$. ἦτοι δὴ ἡ AE
15 τῆς EB μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ ἢ
τῷ ἀπὸ ἀσυνμέτρου. εἰ μὲν οὖν ἡ AE τῆς EB μείζον
δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓZ τῆς $Z\Delta$
μείζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ
μὲν σύμμετρός ἐστὶν ἡ AE τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει,
20 καὶ ἡ ΓZ , εἰ δὲ ἡ BE , καὶ ἡ ΔZ , εἰ δὲ οὐδετέρω
τῶν AE , EB , καὶ οὐδετέρω τῶν ΓZ , $Z\Delta$. εἰ δὲ ἡ
 AE [τῆς EB] μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυνμέτρου
ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓZ τῆς $Z\Delta$ μείζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ
ἀσυνμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστὶν ἡ AE
25 τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΓZ , εἰ δὲ ἡ BE , καὶ

1. ἡ BE] αὐτῇ ἡ EB φ. AE] om. φ, $A B$. 3. ὁ] (prius)
om. φ. ΔZ] $Z\Delta$ B. 4. ἐστὶ] om. P. ἐστὶν ἄρα] om.
V φ. 5. ὅλη ἄρα V. 7. ἄρα] ἄρα ἐστὶ V φ (del. V). καὶ]
om. φ. μὲν AE V φ (post AE hab. μὲν F). BE δὲ B F b.
τῇ] supra scr. V m. 1. 8. ΔZ] $Z\Delta$ B F. καὶ αἱ] καὶ
εἰσιν αἱ V, αἱ δὲ B. εἰσι] om. V. 10. ἀποτομή — 11.
 AB] om. P. 12. οὖν] γάρ Theon (B F V b). AE] corr. ex
 EA V. 13. τῇ] om. B, m. 2 F. $Z\Delta$ F. ἄρα] om. V.

sit. itaque AE , EB rationales sunt potentia tantum commensurabiles [prop. LXXIII].
 fiat $BE:AZ = AB:ΓΔ$ [VI, 12].
 quare etiam ut unum ad unum,
 ita omnia ad omnia [V, 12]. itaque $AE:ΓΖ = AB:ΓΔ$.
 uerum AB , $ΓΔ$ longitudine commensurabiles sunt.
 itaque etiam AE , $ΓΖ$ et BE , $ΔΖ$ commensurabiles
 sunt [prop. XI]. uerum AE , EB rationales sunt po-
 tentia tantum commensurabiles. itaque etiam $ΓΖ$,
 $ΖΔ$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles
 [prop. XIII].

Iam quoniam est $AE:ΓΖ = BE:ΔΖ$, permutando
 [V, 16] est $AE:EB = ΓΖ:ΖΔ$. AE^2 igitur EB^2 ex-
 cedit quadrato rectae aut sibi commensurabilis aut
 incommensurabilis. iam si AE^2 excedit EB^2 quadrato
 rectae sibi commensurabilis, etiam $ΓΖ^2$ excedet $ΖΔ^2$
 quadrato rectae sibi commensurabilis [prop. XIV]. et
 siue AE rationali propositae longitudine commensu-
 rabilis est, etiam $ΓΖ$ ei commensurabilis est [prop.
 XII], siue BE , etiam $ΔΖ$ [id.], siue neutra rectarum
 AE , EB , etiam neutra rectarum $ΓΖ$, $ΖΔ$ [prop. XIII].
 sin AE^2 excedit quadrato rectae sibi incommensura-
 bilis, etiam $ΓΖ^2$ excedet $ΖΔ^2$ quadrato rectae sibi
 incommensurabilis [prop. XIV]. et siue AE rationali
 propositae longitudine commensurabilis est, etiam $ΓΖ$

14. δῆ] om. P, δέ BV. 15. τῶ] corr. ex τοῦ m. 2 P. 16.
 Ante εἴ ins. καί (?) m. 2 F. εἴ] e corr. V. 17. ἀσυμμέτρων
 B, corr. m. 2; ἀ- supra add. m. 2 F. τῆς] τῇ F. 18.
 ἀσυμμέτρων B, et F, sed corr. 19. AE] AΘ e corr. F. 20.
 ΓΖ] ΖΓ F. 21. οὐδέτερά] οὐθετέρα P. 22. τῆς EB] mg. m.
 1 P. δύναται] supra add. ἦσε m. 2 F, δυνήσεται b. συμ-
 μέτρων P, corr. m. 1. 23. τῆς] corr. ex τῇ V.

ἡ ΔZ , εἰ δὲ οὐδετέρω τῶν AE , EB , οὐδετέρω τῶν GZ , $Z\Delta$.

Ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἡ $\Gamma\Delta$ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ AB . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5

ρδ'.

Ἡ τῇ μέσης ἀποτομῇ σύμμετρος μέσης ἀποτομή ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

Ἐστω μέσης ἀποτομῇ ἡ AB , καὶ τῇ AB μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ $\Gamma\Delta$. λέγω, ὅτι καὶ ἡ $\Gamma\Delta$ μέσης
10 ἀποτομῇ ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ AB .

Ἐπεὶ γὰρ μέσης ἀποτομῇ ἐστὶν ἡ AB , ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ EB . αἱ AE , EB ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ γερονέτω ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως ἡ BE πρὸς τὴν ΔZ . σύμμετρος
15 ἄρα [ἐστὶ] καὶ ἡ AE τῇ ΓZ , ἡ δὲ BE τῇ ΔZ . αἱ δὲ AE , EB μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ ΓZ , $Z\Delta$ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσης ἄρα ἀποτομῇ ἐστὶν ἡ $\Gamma\Delta$.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ τῇ τάξει ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῇ AB .

20 Ἐπεὶ [γὰρ] ἐστὶν ὡς ἡ AE πρὸς τὴν EB , οὕτως ἡ ΓZ πρὸς τὴν $Z\Delta$ [ἀλλ' ὡς μὲν ἡ AE πρὸς τὴν EB , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AE πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AE , EB ,

1. οὐδετέρω] (alt.) οὐδὲ οὐδετέρω BVb; οὐδέ m. 2 add. F, sed euan. 3. τῇ AB] om. F. 4. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. Pb, om. BV.

6. μέση BFVb. μέση BV, et F, corr. m. 2. ἀποτομῆς b (σ supra add. F m. 2). 7. ἐστὶν P. 8. μέση BFb, et V (σ fuit add. m. 2, sed eras.). μήκει] m. 2 B, om. FVb. 9. λέγω δὴ V. μέση B, et F supra add. σ m. 2; in V add. σ m. 2, sed eras. 10. ἐστὶ P. 11. μέση B. αὐτῇ] ἡ V, αὐτῇ ἡ Fb. 12. ἡ] αὐτῇ ἡ V. AE] EA BFb. εἰσὶν B.

ei commensurabilis est, siue BE , etiam ΔZ [prop. XII], siue neutra rectarum AE , EB , neutra rectarum ΓZ , $Z\Delta$ [prop. XIII].

Ergo $\Gamma\Delta$ apotome est [prop. LXXIII] et ordine eadem ac AB [deff. tert. 1—6]; quod erat demonstrandum.

CIV.

Recta mediae apotomae commensurabilis mediae apotome est et ordine eadem.

Sit AB mediae apotome, et rectae AB longitudine commensurabilis sit $\Gamma\Delta$. dico, etiam $\Gamma\Delta$ mediae apotomen esse et ordine eandem ac AB .

nam quoniam AB mediae apotome est, sit EB ei congruens. itaque AE , EB mediae sunt potentia tantum commensurabiles [prop. LXXIV—LXXV]. et fiat [VI, 12] $AB:\Gamma\Delta = BE:\Delta Z$. itaque etiam AE , ΓZ et BE , ΔZ commensurabiles sunt [V, 12; prop. XI]. uerum AE , EB mediae sunt potentia tantum commensurabiles. itaque etiam ΓZ , $Z\Delta$ mediae sunt [prop. XXIII] potentia tantum commensurabiles [prop. XIII]. ergo $\Gamma\Delta$ mediae est apotome [prop. LXXIV—LXXV].

Iam dico, eam ordine quoque eandem esse ac AB .

14. οὕτως — ΔZ] mg. m. 1 P. ἡ] corr. ex ὁ m. 2 V. 15. ἐστίν] om. P, ἐστίν B. AE] AE μὲν BFb. 16. καί — 17. σύμμετροι] mg. m. 2 B. 17. ΓZ] Z e corr. V. 18. μέση B. ἀποτομῆς V. 19. λέγω] δεικτέον Theon (BFVb). δὴ] corr. ex δὲ ὅτι m. 1 F; δέ V. ἐστίν] om. Theon (BFVb). 20. γὰρ] om. P. οὕτως ἐστίν F. 21. τήν] om. BFb. ἀλλ' — p. 336, 2. $Z\Delta$] om. P.

ὥς δὲ ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ
 πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ], ἔστιν ἄρα καὶ ὥς τὸ ἀπο
 τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ
 τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ [καὶ ἐναλλάξ ὥς
 5 τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ, οὕτως τὸ ὑπὸ
 τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ]. σύμμετρον
 δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΖ· σύμμετρον ἄρα
 ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ.
 εἴτε οὖν ρητόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ρητόν ἐσται
 10 καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ, εἴτε μέσον [ἐστὶ] τὸ ὑπὸ
 τῶν ΑΕ, ΕΒ, μέσον [ἐστὶ] καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ.
 Μέσης ἄρα ἀποτομὴ ἐστὶν ἡ ΓΔ καὶ τῇ τάξει ἡ
 αὐτὴ τῇ ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ρε'.

- 15 Ἡ τῇ ἐλάσσονι σύμμετρος ἐλάσσων ἐστίν.
 Ἔστω γὰρ ἐλάσσων ἡ ΑΒ καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος
 ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ ἐλάσσων ἐστίν.
 Γεγονέτω γὰρ τὰ αὐτά· καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΕ, ΕΒ δυ-
 νάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει
 20 εἰσὶν ἀσύμμετροι. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὥς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν
 ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ, ἔστιν ἄρα καὶ ὥς τὸ
 ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς
 ΓΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΔ. συνθέντι ἄρα ἐστὶν ὥς τὰ
 ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ, οὕτως τὰ
 25 ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΔ [καὶ ἐναλλάξ].

1. ΓΖ] (alt.) ΖΓ F. 2. ὥς] om. φ. 4. καί — 6. ΖΔ]
 om. P. 6. τῶν] (alt.) om. b. 9. ΕΒ] B in ras. m. 1 P.
 ἔσται] ἐστι. Theon (BFVb). 10. ἐστὶ] om. P 11. ἐστὶ]
 om. P. 12. μέση BVb. 13. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om.
 BFVb. 15. τῇ] corr. in τῆς m. 2 F, τῆς b. ἐλάσσονι] ἐλασσον
 F m. 1, ἐλάσσονος b, F m. 2. Deinde del. μήκει F. 16. γάρ]

quoniam est $AE:EB = \Gamma Z:Z\Delta$ [V, 12; V, 16], erit etiam [prop. XXI lemma]

$$AE^2:AE \times EB = \Gamma Z^2:\Gamma Z \times Z\Delta.$$

uerum $AE^2, \Gamma Z^2$ commensurabilia sunt. itaque etiam $AE \times EB, \Gamma Z \times Z\Delta$ commensurabilia sunt [V, 16; prop. XI]. siue igitur $AE \times EB$ rationale est, etiam $\Gamma Z \times Z\Delta$ rationale est [def. 4], siue $AE \times EB$ medium est, etiam $\Gamma Z \times Z\Delta$ medium est [prop. XXIII coroll.].

Ergo $\Gamma\Delta$ apotome est et ordine eadem ac AB [prop. LXXIV—LXXV]; quod erat demonstrandum.

CV.

Recta minori commensurabilis minor est.

Sit enim AB minor et rectae AB commensurabilis $\Gamma\Delta$. dico, etiam $\Gamma\Delta$ minorem esse.

nam fiant eadem. et quoniam AE, EB potentia sunt incommensurabiles [prop. LXXVI], etiam $\Gamma Z, Z\Delta$ potentia incommensurabiles sunt [prop. XIII]. iam quoniam est $AE:EB = \Gamma Z:Z\Delta$ [V, 12; V, 16], erit etiam $AE^2:EB^2 = \Gamma Z^2:Z\Delta^2$ [VI, 20 coroll.]. itaque etiam componendo [V, 18] est

$$AE^2 + EB^2:EB^2 = \Gamma Z^2 + Z\Delta^2:Z\Delta^2.$$

om. Theon (BFVb). 17. $\Gamma\Delta$] (prius) Γ e corr. m. 1 F. $\xi\sigma\tau\iota$ PBV, comp. Fb. 18. $\alpha\upsilon\tau\alpha\ \tau\omicron\iota\varsigma\ \pi\rho\acute{o}\tau\epsilon\rho\omicron\nu$ V. 19. ΓZ] Z e corr. m. 1 b. 20. $\tau\eta\nu$] om. Bb. 21. $\tau\eta\nu$] m. 2 F. 23. $Z\Delta$] ΔZ B. $\xi\sigma\tau\iota\nu$] supra scr. m. 1 V. $\tau\acute{\alpha}$] corr. ex $\tau\omicron$ m. 1 V. 24. $\tau\acute{\omega}\nu$] $\tau\eta\varsigma$ P. $\omicron\upsilon\tau\omega$ Bb. 25. $Z\Delta$] (prius) supra scr. m. 2 F (Z incertum est). $\kappa\alpha\iota\ \epsilon\nu\alpha\lambda\lambda\acute{\alpha}\xi$] om. P. Dein del. $\acute{\omega}\varsigma\ \tau\omicron\ \acute{\alpha}\pi\omicron\ \tau\eta\varsigma\ BE\ \pi\rho\acute{o}\varsigma\ \tau\omicron\ \acute{\alpha}\pi\omicron\ \tau\eta\varsigma\ Z\Delta$, $\omicron\upsilon\tau\omega\varsigma\ \tau\acute{\alpha}\ \acute{\alpha}\pi\omicron\ \tau\acute{\omega}\nu\ AE, EB\ \pi\rho\acute{o}\varsigma\ \tau\acute{\alpha}\ \acute{\alpha}\pi\omicron\ \tau\acute{\omega}\nu\ \Gamma Z, Z\Delta\ V$.

σύμμετρον δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς BE τῷ ἀπὸ τῆς ΔZ ·
 σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν
 AE , EB τετραγώνων τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν
 ΓZ , $Z\Delta$ τετραγώνων. ῥητὸν δέ ἐστι τὸ συγκείμενον
 5 ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AE , EB τετραγώνων· ῥητὸν ἄρα
 ἐστὶ καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$
 τετραγώνων. πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς AE
 πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AE , EB , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓZ
 πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$, σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς
 10 AE τετραγώνων τῷ ἀπὸ τῆς ΓZ τετραγώνῳ, σύμ-
 μετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AE , EB τῷ ὑπὸ τῶν
 ΓZ , $Z\Delta$. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AE , EB · μέσον
 ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$ · αἱ ΓZ , $Z\Delta$ ἄρα δυ-
 νάμει εἶσιν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι το μὲν συγκείμενον
 15 ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν
 μέσον.

Ἐλάσσω ἄρα ἐστὶν ἡ $\Gamma\Delta$ · ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ρς'.

Ἡ τῇ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ
 20 σύμμετρος μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά
 ἐστίν.

Ἐστω μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ AB
 καὶ τῇ AB σύμμετρος ἡ $\Gamma\Delta$ · λέγω, ὅτι καὶ ἡ $\Gamma\Delta$
 μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστίν.

25 Ἐστω γὰρ τῇ AB προσαρμόζουσα ἡ BE · αἱ AE ,
 EB ἄρα δυνάμει εἶσιν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν
 συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AE , EB τετραγώνων

1. ἐστὶν P. τό] corr. ex τῷ m. 1 F, ex τά (?) V. ΔZ
 $Z\Delta$ P. 3. τετραγώνων Pb et comp. ins. m. 1 V. 4. $\Gamma\Delta$,
 ΔZ b. 5. ῥηταί F, sed corr. 6. ἐστὶ] εἶσι F. 7. τό]

uerum BE^2 , ΓZ^2 commensurabilia sunt. itaque etiam $AE^2 + EB^2$ et $\Gamma Z^2 + Z\Delta^2$ commensurabilia sunt [V, 16; prop. XI]. uerum $AE^2 + EB^2$ rationale est [prop. LXXVI]. itaque etiam $\Gamma Z^2 + Z\Delta^2$ rationale est [def. 4]. rursus quoniam est

$$AE^2 : AE \times EB = \Gamma Z^2 : \Gamma Z \times Z\Delta$$

[prop. XXI lemma], et AE^2 , ΓZ^2 commensurabilia sunt, etiam $AE \times EB$, $\Gamma Z \times Z\Delta$ commensurabilia sunt. $AE \times EB$ autem medium est [prop. LXXVI]. quare etiam $\Gamma Z \times Z\Delta$ medium est [prop. XXIII coroll.]. itaque ΓZ , $Z\Delta$ potentia incommensurabiles sunt efficientes summam quadratorum rationalem, rectangulum autem medium.

Ergo $\Gamma\Delta$ minor est [prop. LXXVI]; quod erat demonstrandum.

CVI.

Recta rectae cum rationali totum medium efficienti commensurabilis recta est cum rationali totum medium efficiens.

Sit AB recta cum rationali totum medium efficiens et rectae AB commensurabilis $\Gamma\Delta$. dico, etiam $\Gamma\Delta$ rectam esse cum rationali totum medium efficientem.

nam BE rectae AB congruens sit. itaque AE , EB potentia incommensurabiles sunt efficientes $AE^2 + EB^2$

om. V. 9. Post $Z\Delta$ add. καὶ ἐναλλάξ BFb. 13. ἄρα ἐστὶ καὶ BFb. $Z\Delta$ (alt.) Z in ras. m. 1 B. 17. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFb. De additamento in V u. app. nr. 24. 19. ποιούση μῆκος F. 20. Ante μετὰ add. καὶ αὐτῇ BFb, m. 2 V. ποιούσα τὸ ὅλον b. 22. ποιούσα τὸ ὅλον V. 24. τὸ ὅλον μέσον b. 25. BE] E e corr. m. 1 P.

μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. καὶ τὰ αὐτὰ κατε-
 σκευάσθω. ὁμοίως δὲ δείξομεν τοῖς πρότερον, ὅτι αἱ
 ΓΖ, ΖΔ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ ταῖς ΑΕ, ΕΒ, καὶ
 5 ΕΒ τετραγώνων τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ,
 ΖΔ τετραγώνων, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ
 τῶν ΓΖ, ΖΔ· ὥστε καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ δυνάμει εἰσὶν
 ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ
 τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν
 10 ῥητόν.

Ἡ ΓΔ ἄρα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά
 ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ρξ'.

Ἡ τῇ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούση
 15 σύμμετρος καὶ αὐτὴ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον
 ποιοῦσά ἐστίν.

Ἐστω μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ,
 καὶ τῇ ΑΒ ἔστω σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ
 ΓΔ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστίν.

20 Ἐστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΕ, καὶ τὰ
 αὐτὰ κατεσκευάσθω· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν
 ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ'
 αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον
 καὶ ἔτι ἀσύμμετρον το συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν
 25 τετραγώνων τῷ ὑπ' αὐτῶν. καὶ εἰσιν, ὥς ἐδείχθη,
 αἱ ΑΕ, ΕΒ σύμμετροι ταῖς ΓΖ, ΖΔ, καὶ τὸ συγκεί-
 μενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων τῷ συγ-

3. τῷ] e corr. V. εἰσὶν B. 4. τό] τὸ μὲν Bb, μὲν
 supra scr. m. 2 F. 5. τῶν ΓΖ — 6. ΕΒ] mg. m. 2 B (τῶν
 ΑΕ, ΕΒ etiam in textu sunt a m. 1). 6. δ' Fb. 12. ὅπερ

$\begin{array}{l} A \\ | \\ B \\ | \\ E \end{array} \begin{array}{l} \Gamma \\ | \\ \Delta \\ | \\ Z \end{array}$
 medium, $AE \times EB$ autem rationale [prop. LXXVII]. et eadem comparentur. similiter igitur atque antea [p. 336, 20 sq.] demonstrabimus, esse $\Gamma Z : Z\Delta = AE : EB$, et $AE^2 + EB^2, \Gamma Z^2 + Z\Delta^2$ ac $AE \times EB, \Gamma Z \times Z\Delta$ commensurabilia esse. quare etiam $\Gamma Z, Z\Delta$ potentia incommensurabiles sunt efficientes $\Gamma Z^2 + Z\Delta^2$ medium, $\Gamma Z \times Z\Delta$ autem rationale.

Ergo $\Gamma\Delta$ recta est cum rationali totum medium efficiens [prop. LXXVII]; quod erat demonstrandum.

CVII.

Recta rectae cum medio totum medium efficienti commensurabilis et ipsa recta cum medio totum medium efficiens est.

Sit AB recta cum medio totum medium efficiens, et rectae AB commensurabilis sit $\Gamma\Delta$. dico, etiam $\Gamma\Delta$ rectam esse cum medio totum medium efficientem.

$\begin{array}{l} A \\ | \\ B \\ | \\ E \end{array} \begin{array}{l} \Gamma \\ | \\ \Delta \\ | \\ Z \end{array}$
 nam BE rectae AB congruens sit, et eadem comparentur. itaque AE, EB potentia incommensurabiles sunt efficientes summam quadratorum mediam et rectangulum medium praetereaue summam quadratorum rectangulo incommensurabilem [prop. LXXVIII]. sunt autem, ut demonstratum est [p. 334, 14 sq.], AE, EB rectis $\Gamma Z, Z\Delta$ commensurabiles, et $AE^2 + EB^2, \Gamma Z^2 + Z\Delta^2$ ac $AE \times EB, \Gamma Z \times Z\Delta$

$\xi\delta\epsilon\iota\ \delta\epsilon\iota\chi\alpha\iota$] comp. P, om. BFb. De V u. app. nr. 25. 14.
 $\pi\omicron\iota\omicron\upsilon\sigma\eta\ \mu\eta\kappa\epsilon\iota$ F. 18. $\xi\sigma\tau\omega$] om. BFb. 21. $\acute{\alpha}\rho\alpha$] m. 2
 euan. F. 25. $\alpha\upsilon\tau\acute{o}\nu$ F.

κειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$, τὸ δὲ ὑπο τῶν AE , EB τῷ ὑπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$ καὶ αἱ ΓZ , $Z\Delta$ ἄρα δυνάμει εἶσιν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν
 5 μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν [τετραγώνων] τῷ ὑπ' αὐτῶν.

Ἡ $\Gamma\Delta$ ἄρα μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ρη'.

10 Ἀπὸ ρητοῦ μέσου ἀφαιρουμένου ἢ τὸ λοιπὸν χωρίον δυναμένη μία δύο ἀλόγων γίνεται ἥτοι ἀποτομὴ ἢ ἐλάσσων.

Ἀπὸ γὰρ ρητοῦ τοῦ $B\Gamma$ μέσον ἀφηρήσθω τὸ $B\Delta$ · λέγω, ὅτι ἢ τὸ λοιπὸν δυναμένη τὸ $E\Gamma$ μία δύο
 15 ἀλόγων γίνεται ἥτοι ἀποτομὴ ἢ ἐλάσσων.

Ἐκκείσθω γὰρ ρητὴ ἢ ZH , καὶ τῷ μὲν $B\Gamma$ ἴσον παρὰ τὴν ZH παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον παραλληλό-
 γραμμον τὸ $H\Theta$, τῷ δὲ ΔB ἴσον ἀφηρήσθω τὸ HK ·
 λοιπὸν ἄρα τὸ $E\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τῷ $\Lambda\Theta$. ἐπεὶ οὖν ρητὸν
 20 μὲν ἐστὶ τὸ $B\Gamma$, μέσον δὲ τὸ $B\Delta$, ἴσον δὲ τὸ μὲν $B\Gamma$ τῷ $H\Theta$, τὸ δὲ $B\Delta$ τῷ HK , ρητὸν μὲν ἄρα ἐστὶ τὸ $H\Theta$, μέσον δὲ τὸ HK . καὶ παρὰ ρητὴν τὴν ZH παράκειται· ρητὴ μὲν ἄρα ἢ $Z\Theta$ καὶ σύμμετρος τῇ

1. τὸ δέ — 2. καὶ] mg. m. 2 F. 3. τε] om. P. 6. τε-
 τραγώνων] om. P. 8. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFb.

10. Post ρητοῦ del. καὶ F. 11. γίνεται BFb. 12. ἐλάτ-
 των PVb. 13. $B\Gamma$] in ras. V. 14. λοιπὸν χωρίον BFb.

τὸ $E\Gamma$ δυναμένη BFb. 15. λόγων F, corr. m. 2. γί-
 γνεται BFb. ἐλάττων B. 17. Post παραβεβλήσθω del. τὸ

HB m. 1 P, ras. 4 litt. V. 18. ΔB] e corr. V, $B\Delta$ P. 19.
 $E\Gamma$] ΓE B. $\Lambda\Theta$] $\Theta\Lambda$ F. 20. μὲν] (prius) om. b. 21.

ρητὸν] bis b. 23. παράκειται BF. ἄρα ἐστὶν BFb.

commensurabilia. quare etiam ΓZ , $Z\Delta$ potentia incommensurabiles sunt efficientes summam quadratorum mediam et rectangulum medium praetereaue summam quadratorum rectangulo incommensurabilem.

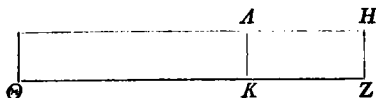
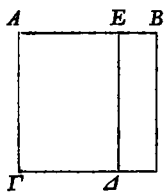
Ergo $\Gamma\Delta$ recta est cum medio totum medium efficiens [prop. LXXVIII]; quod erat demonstrandum.

CVIII.

Spatio medio a rationali ablato recta reliquo spatio aequalis quadrata alterutra rectarum irrationalium est aut apotome aut minor.

nam a spatio rationali $B\Gamma$ medium auferatur $B\Delta$. dico, rectam reliquo $E\Gamma$ aequalem quadratam alterutra rectarum irrationalium esse aut apotomen aut minorem.

ponatur enim rationalis ZH , et spatio $B\Gamma$ aequale rectae ZH adplicetur rectangulum $H\Theta$, spatio autem ΔB aequale auferatur HK . itaque reliquum $E\Gamma = \Delta\Theta$.



iam quoniam $B\Gamma$ rationale est, $B\Delta$ autem medium, et $B\Gamma = H\Theta$, $B\Delta = HK$, $H\Theta$ rationale est, HK autem medium. et rationali ZH adplicata sunt. itaque $Z\Theta$ rationalis est et rectae ZH longitudine commensura-

bilis [prop. XX], ZK autem rationalis et rectae ZH longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. quare $Z\Theta$, ZK longitudine incommensurabiles sunt. [prop.

ZH μήκει, ῥητὴ δὲ ἡ ZK καὶ ἀσύμμετρος τῇ ZH μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ $Z\Theta$ τῇ ZK μήκει. αἱ $Z\Theta$, ZK ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $K\Theta$, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ
 5 KZ . ἦτοι δὴ ἡ ΘZ τῆς ZK μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἢ οὐ.

Δυνασθῶ πρότερον τῷ ἀπὸ συμέτρου. καὶ ἐστὶν ὅλη ἡ ΘZ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ZH · ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἐστὶν ἡ $K\Theta$. τὸ δ' ὑπὸ ῥητῆς
 10 καὶ ἀποτομῆς πρώτης περιεχόμενον ἡ δυναμένη ἀποτομὴ ἐστὶν. ἡ ἄρα τὸ $A\Theta$, τουτέστι το $E\Gamma$, δυναμένη ἀποτομὴ ἐστὶν.

Εἰ δὲ ἡ ΘZ τῆς ZK μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἐστὶν ὅλη ἡ $Z\Theta$ σύμμετρος τῇ ἐκ-
 15 κειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ZH , ἀποτομὴ τετάρτη ἐστὶν ἡ $K\Theta$. τὸ δ' ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης περιεχόμενον ἡ δυναμένη ἐλάσσων ἐστὶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ρθ'.

Ἀπὸ μέσου ῥητοῦ ἀφαιρουμένου ἄλλαι δύο
 20 ἄλογοι γίνονται ἦτοι μέσης ἀποτομὴ πρώτη ἢ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἀπὸ γὰρ μέσου τοῦ $B\Gamma$ ῥητὸν ἀφηρήσθω τὸ $B\Delta$. λέγω, ὅτι ἡ τὸ λοιπὸν τὸ $E\Gamma$ δυναμένη μία δύο ἀλόγων

1. ZH] (prius) HZ F. 2. Post μήκει (alt.) add. καὶ εἰσιν ἀμφοτέραι ῥηταὶ b. 3. $Z\Theta$] ΘZ BF. εἰσιν P. 4. δέ] δ' P. 5. ZK φ. δῆ] P, δέ BFb, et supra scr. m. 2 V. ΘZ] $Z\Theta$ b. 6. ἀσυμμέτρου P. ἢ οὐ] ἑαυτῇ ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου BFb. ἢ — 7. συμέτρου] mg. m. 1 P. 7. τῷ] corr. ex τό m. 1 b, m. rec. P. ἀσυμμέτρου P. 8. ΘZ] corr. ex $Z\Theta$ V, $Z\Theta$ F. 9. δέ BFb. 10. περιεχόμενον] om. BFb. 11. ἡ] ins. m. 1 B. τό] (prius) ins. m. 2 V. 13. ΘZ] in ras. b, $Z\Theta$ F. τῆς] τῇ b. συμέτρου. V, corr.

XIII]. itaque $Z\Theta$, ZK rationales sunt potentia tantum commensurabiles. quare $K\Theta$ apotome est [prop. LXXIII], KZ autem ei congruens. iam ΘZ^2 excedit ZK^2 quadrato rectae aut commensurabilis aut incommensurabilis.

Prius excedat quadrato commensurabilis. et tota ΘZ rationali propositae ZH longitudine commensurabilis est. quare $K\Theta$ apotome est prima [deff. tert. 1]. recta autem spatio comprehenso recta rationali et apotome prima aequalis quadrata apotome est [prop. XCI]. ergo recta spatio $A\Theta$, hoc est $E\Gamma$, aequalis quadrata apotome est.

sin ΘZ^2 excedit ZK^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis, et tota $Z\Theta$ rationali propositae ZH longitudine commensurabilis est, $K\Theta$ apotome est quarta [deff. tert. 4]. recta autem spatio comprehenso recta rationali et apotome quarta aequalis quadrata minor est [prop. XCIV]; quod erat demonstrandum.

CIX.

Spatio rationali a medio ablato aliae duae rectae irrationales oriuntur aut mediae apotome prima aut recta cum rationali totum medium efficiens.

A medio enim $B\Gamma$ rationale auferatur $B\Delta$. dico, rectam spatio reliquo $E\Gamma$ aequalem quadratam alterutram rectarum irrationalium esse aut mediae apotomen

m. 2. 14. ΘZ BF. 15. ZH] corr. ex $Z\Theta$ m. 1 F. ἀποτομή ἄρα BFb. 16. δέ B. 17. Post ἐστίν add. ἡ ἄρα τὸ (om. b) $A\Theta$, τούτῃ τὸ $E\Gamma$, δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν BF, mg. m. 1 b. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFb. 19. Post ἀπό add. τοῦ b, m. 2 F. 20. γίνονται B. μέση B. 22. ἀπό] corr. ex ὑπό V. ἀπό — $B\Delta$] bis b. 23. μίαν] om. b. λόγων b.

γίνεται ἥτοι μέσης ἀποτομή πρώτη ἢ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσα.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ZH , καὶ παραβεβλήσθω ὁμοίως τὰ χωρία. ἔστι δὴ ἀκολουθῶς ῥητὴ μὲν ἡ $ZΘ$
 5 καὶ ἀσύμμετρος τῇ ZH μήκει, ῥητὴ δὲ ἡ KZ καὶ σύμμετρος τῇ ZH μήκει· αἱ $ZΘ$, ZK ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $KΘ$, προσαρμόζουσα δὲ ταύτῃ ἡ ZK . ἥτοι δὴ ἡ $ΘZ$ τῆς ZK μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ ἢ τῷ
 10 ἀπὸ ἀσυνμέτρου.

Εἰ μὲν οὖν ἡ $ΘZ$ τῆς ZK μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἐστὶν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ZK σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ZH , ἀποτομὴ δευτέρα ἐστὶν ἡ $KΘ$. ῥητὴ δὲ ἡ ZH · ὥστε ἡ τὸ $ΛΘ$,
 15 τουτέστι τὸ $ΕΓ$, δυναμένη μέσης ἀποτομὴ πρώτη ἐστίν.

Εἰ δὲ ἡ $ΘZ$ τῆς ZK μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυνμέτρου, καὶ ἐστὶν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ZK σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ZH , ἀποτομὴ πέμπτη ἐστὶν ἡ $KΘ$ · ὥστε ἡ τὸ $ΕΓ$ δυναμένη μετὰ ῥητοῦ μέσον
 20 τὸ ὅλον ποιούσά ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

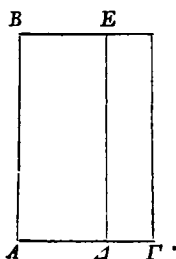
ρι'.

Ἀπὸ μέσου μέσου ἀφαιρουμένου ἀσυνμέ-

1. γίνεται Bb. μέση Bb. 4. ἔστιν P. δὴ] corr. ex δέ m. 2 B, δέ Fb. 5. καί] om. φ. ZH] ZI b. ZK B. 6. $ZΘ$] $ΘZ$ P. εἰσιν P. 8. αὐτῇ BFb. δὴ] δέ BV. $ΘZ$] in ras. m. 1 b. 10. συμέτρου V, corr. m. 1. 11. $ΘZ$] $ZΘ$ V. 14. Post ZH add. τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς δευτέρας ἡ δυναμένη μέσης ἀποτομὴ ἐστὶ πρώτη b, F mg. m. 2. 15. τουτέστιν P. μέση BF. ἐστὶ πρώτη V. 16. $ΘZ$] in ras. V, $ZΘ$ P. 17. καί] ἑαυτῇ, καί BFb. 18. μήκει] om. b. 19. $KΘ$] $ΘK$ F. Post $ΕΓ$ del. χωρίον m. 1 P. 20. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFb. 22. μέσον] (alt.) supra scr. m. 1 P, μέσον supra scr. m. 2 F.

primam aut rectam cum rationali totum medium efficientem.

ponatur enim rationalis ZH , et spatia similiter adplicentur. itaque eodem modo [p. 342, 19 sq.] se-



quitur, $ZΘ$ rationalem esse et rectae ZH longitudine incommensurabilem, KZ autem rationalem et rectae ZH longitudine commensurabilem. itaque $ZΘ$, ZK rationales sunt potentia tantum commensurabiles [prop. XIII]. ergo $KΘ$ apotome est [prop. LXXIII], ei autem congruens

ZK . iam $ΘZ^2$ excedit ZK^2 quadrato rectae aut sibi commensurabilis aut incommensurabilis.

iam si $ΘZ^2$ excedit ZK^2 quadrato rectae sibi commensurabilis, et congruens ZK rationali propositae ZH longitudine commensurabilis est, $KΘ$ apotome est secunda [deff. tert. 2]. ZH autem rationalis est. quare recta spatio $AΘ$, hoc est $EΓ$, aequalis quadrata mediae apotome est prima [prop. XCII]. sin $ΘZ^2$ excedit ZK^2 quadrato rectae incommensurabilis, et congruens ZK rationali propositae ZH longitudine commensurabilis est, $KΘ$ apotome est quinta [deff. tert. 5]. quare recta spatio $EΓ$ aequalis quadrata recta est cum rationali totum medium efficiens [prop. XCV]; quod erat demonstrandum.

CX.

Spatio medio a medio ablato toti incommensurabili reliquae duae irrationales oriuntur aut mediae apo-

τρον τῷ ὅλῳ αἱ λοιπαὶ δύο ἄλλοι γίνονται
ἤτοι μέσης ἀποτομῇ δευτέρα ἢ μετὰ μέσου
μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἀφηρήσθω γὰρ ὡς ἐπὶ τῶν προκειμένων κατα-
5 γραφῶν ἀπὸ μέσου τοῦ ΒΓ μέσον τὸ ΒΔ ἀσύμμετρον
τῷ ὅλῳ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΕΓ δυναμένη μία ἐστὶ δύο
ἀλόγων ἤτοι μέσης ἀποτομῇ δευτέρα ἢ μετὰ μέσου
μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐστὶν ἐκάτερον τῶν ΒΓ, ΒΔ, καὶ
10 ἀσύμμετρον τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ, ἐστὶ ἀκολούθως φητὴ
ἐκάτερα τῶν ΖΘ, ΖΚ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει.
καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ, τουτέστι τὸ
ΗΘ τῷ ΗΚ, ἀσύμμετρος καὶ ἡ ΘΖ τῇ ΖΚ· αἱ ΖΘ,
ΖΚ ἄρα φηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀπο-
15 τομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ [προσαρμόζουσα δὲ ἡ ΖΚ. ἤτοι
δὴ ἡ ΖΘ τῆς ΖΚ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου
ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ].

Εἰ μὲν δὴ ἡ ΖΘ τῆς ΖΚ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ
συνμέτρου ἑαυτῇ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΘ, ΖΚ σύμ-
20 μετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ φητὴ μήκει τῇ ΖΗ, ἀποτομὴ
τρίτη ἐστὶν ἡ ΚΘ. φητὴ δὲ ἡ ΚΑ, τὸ δ' ὑπὸ φητῆς
καὶ ἀποτομῆς τρίτης περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν
ἐστίν, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν, καλεῖται δὲ

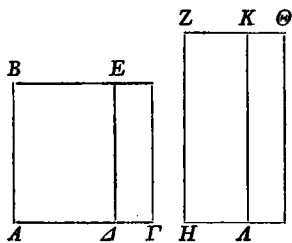
1. γίνονται B. 2. μέση Bb. 5. ΒΔ] B e corr. V. 6.
ἐστὶν B. 7. μέση Bb. μετά] μετὰ τοῦ P. 12. ἐστὶν P.
Deinde add. ὑπόκειται P, et V, sed del. 13. καὶ] ἐστὶ καὶ b,
ἐστὶν καὶ B. αἱ] καὶ ἡ b. ΖΘ] ΘΖ FV. 14. ΖΚ]
ΘΚ P. 15. ἐστὶν] om. Bb. προσαρμόζουσα — 17. ἑαυτῇ]
om. P, mg. V. 16. δὴ] δέ BV. 18. δὴ] οὖν BFb. ΖΘ]
ΘΖ B. ΖΚ] Ζ postea ins. V. 19. οὐδετέρα V. τῶν]
corr. ex τῷ m. 2 V. ΖΘ] ΘΖ Bb et in ras. V. 20. ἐστὶ]
om. Fb. 21. ΚΑ] corr. ex ΚΑ m. 2 F. δ'] δέ BFb. 23.
ἐστὶ PBV, comp. Fb; item alt.

tome secunda aut recta cum medio totum medium efficiens.

Auferatur enim ut in figuris iam propositis [p. 347] a medio $B\Gamma$ spatium medium $B\Delta$ toti incommensurable. dico, rectam spatio $E\Gamma$ aequalem quadratam alterutram esse rectarum irrationalium aut mediae apotomen secundam aut rectam cum medio totum medium efficientem.

nam quoniam utrumque $B\Gamma$, $B\Delta$ medium est, et $B\Gamma$, $B\Delta$ incommensurabilia¹⁾, similiter concludemus [p. 342, 19 sq.], utramque $Z\Theta$, ZK rationalem esse et rectae ZH longitudine incommensurabilem [prop. XXII]. et quoniam $B\Gamma$, $B\Delta$, hoc est $H\Theta$, HK , incommensurabilia sunt, etiam ΘZ , ZK incommensurabiles sunt [VI, 1; prop. XI]. itaque $Z\Theta$, ZK rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo $K\Theta$ apotome est [prop. LXXIII].

iam si $Z\Theta^2$ excedit ZK^2 quadrato rectae sibi commensurabilis, et neutra rectarum $Z\Theta$, ZK rationali propositae ZH longitudine commensurabilis est, $K\Theta$ apotome est tertia [deff. tert. 3]. uerum $K\Delta$ rationalis est, rectangulum autem recta rationali et apotome tertia comprehensum irrationale est, et recta ei aequalis quadrata irrationalis est, uocatur autem mediae apotome se-



1) Cum uerba καὶ ἀσύμμετρον τὸ $B\Gamma$ τῷ $B\Delta$ lin. 9—10 nihil faciant ad demonstrandum id, quod sequitur, non immerito ab Augusto omittuntur. Gregorius omisit ἔσται lin. 10 — τῷ $B\Delta$ lin. 12.

μέσης ἀποτομή δευτέρα· ὥστε ἡ τὸ $\Lambda\Theta$, τουτέστι τὸ $E\Gamma$, δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστὶ δευτέρα.

Εἰ δὲ ἡ $Z\Theta$ τῆς ZK μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ [μήκει], καὶ οὐδετέρα τῶν ΘZ , ZK
 5 σύμμετρός ἐστὶ τῇ ZH μήκει, ἀποτομή ἕκτη ἐστὶν ἡ $K\Theta$. τὸ δ' ὑπὸ φητῆς καὶ ἀποτομῆς ἕκτης ἡ δυναμένη ἐστὶ μετὰ μέσον μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα. ἡ τὸ $\Lambda\Theta$ ἄρα, τουτέστι τὸ $E\Gamma$, δυναμένη μετὰ μέσον μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10 ρια'.

Ἡ ἀποτομή οὐκ ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Ἐστω ἀποτομή ἡ AB · λέγω, ὅτι ἡ AB οὐκ ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.

15 Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ $\Delta\Gamma$, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB ἴσον παρὰ τὴν $\Gamma\Delta$ παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον τὸ ΓE πλάτος ποιοῦν τὴν ΔE . ἐπεὶ οὖν ἀποτομή ἐστὶν ἡ AB , ἀποτομή πρώτη ἐστὶν ἡ ΔE . ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ EZ · αἱ ΔZ , ZE ἄρα
 20 φηταί· εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΔZ τῆς ZE μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΔZ σύμμετρός ἐστὶ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ $\Delta\Gamma$. πάλιν, ἐπεὶ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ AB , ἐκ δύο ἄρα

1. ἀποτομή μέση B. ὥσπερ FV. τό] om. b. τουτέστιν B. τό] ἢ τό Bb. 2. μέση B. ἐστὶν ἀποτομή Fb.

3. $Z\Theta$] ΘZ Bb et in ras. V. συμμέτρον V, corr. m. 1. 4. μήκει] om. PV. οὐδετέρα FV. 5. ἐστὶ] om. Bbφ. 6. δέ Bb. 7. ἐστὶ] ἐστὶν ἡ BFb. ἡ] ὥστε ἡ BFb, et e corr. V.

8. ἄρα] del. V, om. BFb. τουτέστιν PB. Ante τό add. ἡ m. 2 F. ἡ μετὰ F. 9. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. B.

11. τῇ] supra scr. m. 1 b. 13. ἡ AB] (alt.) om. φ. 15. $\Delta\Gamma$] in ras. m. 1 P. 16. φητὴν τὴν BFb. In sequentibus multa renouata et euan. in F. 18. ἄρα πρώτη b. 19. αὐτῇ] αὐτῇ ἡ b. 21. ἀσυμμέτρον B, sed ἀ- eras. 23. ἄρα] om. Bb.

cunda [prop. XCIII]. ergo recta spatio $\Delta\Theta$, hoc est $E\Gamma$, aequalis quadrata mediae apotome est secunda.

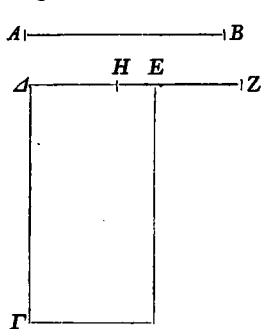
sin $Z\Theta^2$ excedit ZK^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis, et neutra rectarum ΘZ , ZK rectae ZH commensurabilis est longitudine, $K\Theta$ sexta est apotome [deff. tert. 6]. recta autem spatio comprehenso recta rationali et apotome sexta aequalis quadrata recta est cum medio totum medium efficiens [prop. XCVI]. ergo recta spatio $\Delta\Theta$, hoc est $E\Gamma$, aequalis quadrata recta est cum medio totum medium efficiens; quod erat demonstrandum.

CXI.

Apotome eadem non est ac recta ex duobus nominibus.

Sit AB apotome. dico, AB eandem non esse ac rectam ex duobus nominibus.

nam, si fieri potest, sit. et ponatur rationalis $\Delta\Gamma$ et quadrato AB^2 aequale rectae $\Gamma\Delta$ adplicetur rectangulum ΓE latitudinem efficiens ΔE . quoniam igitur



AB apotome est, ΔE apotome est prima [prop. XCVII]. sit EZ ei congruens. itaque ΔZ , ZE rationales sunt potentia tantum commensurabiles, et ΔZ^2 excedit ZE^2 quadrato rectae sibi commensurabilis, et ΔZ rationali propositae $\Delta\Gamma$ longitudine commensurabilis est [deff. tert. 1].

rursus quoniam AB ex duobus nominibus est, ΔE ex duobus nominibus est prima [prop. LX]. in H in nomina diuidatur, et ΔH maius

- ὀνομάτων πρώτη ἐστὶν ἡ ΔΕ. διηρησθῶ εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Η, καὶ ἔστω μείζον ὄνομα τὸ ΔΗ· αὖ ΔΗ, ΗΕ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΔΗ τῆς ΗΕ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου
 5 ἐαυτῇ, καὶ τὸ μείζον ἡ ΔΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ μήκει τῇ ΔΓ. καὶ ἡ ΔΖ ἄρα τῇ ΔΗ σύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΗΖ σύμμετρός ἐστι τῇ ΔΖ μήκει. [ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΖ τῇ ΗΖ, ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ ΔΖ, ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ
 10 ΗΖ. ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΖ τῇ ΗΖ μήκει] ἀσύμμετρος δὲ ἡ ΔΖ τῇ ΕΖ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΕΖ μήκει. αὖ ΗΖ, ΖΕ ἄρα ῥηταὶ [εἰσι] δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΗ. ἀλλὰ καὶ ῥητὴ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.
 15 Ἡ ἄρα ἀποτομὴ οὐκ ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[Πόρισμα].

- Ἡ ἀποτομὴ καὶ αὖ μετ' αὐτὴν ἄλλοι οὔτε τῇ μέσῃ οὔτε ἀλλήλαις εἰσὶν αὐταί.
 20 Τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ μέσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ῥητὴν καὶ ἀσύμμετρον τῇ, παρ' ἣν παράκειται, μήκει, τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν

1. ὀνομάτων ἄρα Bb. ἐστὶ πρώτη F?, πρώτη supra scr. m. 2 V. διηρησμένη b, mg. m. 1: γρ. διηρησθῶ. 4. ΗΕ] ΕΗ F. τῷ] τὸ φ. 5. τὸ μείζον] P, et V, supra scr. ἡ; om. b, ἡ μείζων B; om. φ, sed post ΔΗ lacuna est 6 litt. 7. Ante μήκει del. τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ μήκει τῇ ΔΓ m. 1 b. λοιπὴ ἄρα τῇ BFV. ΗΖ] in ras. m. 1 b; ΖΗ F, seq. ras. 1 litt. 8. ἐστὶ τῇ] ἐστὶν ἡ BVb et supra scr. ἡ φ. ἐπεὶ — 10. ΗΖ (prius)] om. P, mg. V. 9. ΗΖ] Ζ ante ras. 1 litt. V. ἐστὶν] om. V. Post ῥητὴ in mg. m. 1 add. μήκει ἀσύμμετρος m. 1 b. ἐστὶν B, om. V. 10. ἐπεὶ — μήκει] om.

nomen sit. itaque ΔH , HE rationales sunt potentia tantum commensurabiles, et ΔH^2 excedit HE^2 quadrato rectae sibi commensurabilis, et maius nomen ΔH rationali propositae ΔF longitudine commensurabile est [deff. alt. 1]. itaque etiam ΔZ rectae ΔH longitudine commensurabilis est [prop. XII]. quare etiam reliqua HZ rectae ΔZ longitudine commensurabilis est [prop. XV]. uerum ΔZ , EZ longitudine incommensurabiles sunt. quare etiam ZH , EZ longitudine incommensurabiles sunt [prop. XIII]. itaque HZ , ZE rationales sunt potentia tantum commensurabiles. EH igitur apotome est [prop. LXXIII]. uerum eadem rationalis est; quod fieri non potest.

Ergo apotome eadem non est ac recta ex duobus nominibus; quod erat demonstrandum.

Apotome et irrationales eam sequentes neque mediae neque inter se eadem sunt. nam quadratum mediae rectae rationali adplicatum latitudinem efficit rationalem et rectae, cui adplicatum est, longitudine incommensurabilem [prop. XXII], quadratum autem apotomes rationali adplicatum latitudinem efficit apotomen primam [prop. XCVII], quadratum autem mediae apotomes primae rationali adplicatum latitudinem efficit apotomen secundam [prop. XCVIII], quadratum autem

PV. 11. EZ] mut. in ZE V. ἄρα ἐστὶ] δέ in ras. 4 litt. φ. 12. ἐστὶν P. Post μῆκει add. καὶ εἶσι φηταί mg. m. 2 B. 13. εἶσι] om. PV. 14. EH] corr. ex HE V, HE P, EN φ. 15. ἡ] (alt.) om. b. 16. ὅπερ εἶδει δεῖξαι] comp. P, om. BFb. 17. πόρσιμα] om. P, γιν' BVb, ρι' F. 21. τῇ] τι b. 22. ἀπό] om. F.

- παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην, τὸ
 δὲ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλ-
 λόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν δευτέραν, τὸ δὲ ἀπὸ
 μέσης ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον
 5 πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τρίτην, τὸ δὲ ἀπὸ ἐλάσσονος
 παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν
 τετάρτην, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον
 ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ
 ἀποτομὴν πέμπτην, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μετὰ μέσου μέσον
 10 τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος
 ποιεῖ ἀποτομὴν ἕκτην. ἐπεὶ οὖν τὰ εἰρημένα πλάτη
 διαφέρει τοῦ τε πρώτου καὶ ἀλλήλων, τοῦ μὲν πρώτου,
 ὅτι ῥητὴ ἐστίν, ἀλλήλων δὲ, ἐπεὶ τῇ τάξει οὐκ εἰσὶν
 αἱ αὐταί, δῆλον, ὥς καὶ αὐταὶ αἱ ἄλογοι διαφέρουσιν
 15 ἀλλήλων. καὶ ἐπεὶ δέδεικται ἡ ἀποτομὴ οὐκ οὔσα ἡ
 αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων, ποιούσι δὲ πλάτη παρὰ
 ῥητὴν παραβαλλόμενα αἱ μετὰ τὴν ἀποτομὴν ἀποτομὰς
 ἀκολουθῶς ἐκάστη τῇ τάξει τῇ καθ' αὐτήν, αἱ δὲ
 μετὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τὰς ἐκ δύο ὀνομάτων καὶ
 20 αὐταὶ τῇ τάξει ἀκολουθῶς, ἕτεραι ἄρα εἰσὶν αἱ μετὰ
 τὴν ἀποτομὴν καὶ ἕτεραι αἱ μετὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων,
 ὥς εἶναι τῇ τάξει πάσας ἀλόγους ἢ γ,

Μέσῃν,

Ἐκ δύο ὀνομάτων,

- 25 Ἐκ δύο μέσων πρώτην,

Ἐκ δύο μέσων δευτέραν,

Μείζονα,

Ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένην,

1. τὸ δέ — 3. δευτέραν] mg. m. 1 V. 5. ἐλάττονος Bb,
 comp. F. 9. μετὰ] om. F. 11. οὖν] corr. ex οὐ m. 1 P.
 12. πρώτου] (prius) in ras. V. 13. ἐπεὶ] ὅτι B. 17.
 παραβαλλόμενα F, corr. m. 2. αἱ] om. P, supra scr. m. 1 V,

mediae apotomes secundae rationali adplicatum latitudinem efficit apotomen tertiam [prop. XCIX], quadratum autem minoris rationali adplicatum latitudinem efficit apotomen quartam [prop. C], quadratum autem rectae cum rationali totum medium efficientis rationali adplicatum latitudinem efficit apotomen quintam [prop. CI], quadratum autem rectae cum medio totum medium efficientis rationali adplicatum latitudinem efficit apotomen sextam [prop. CII]. iam quoniam latitudines, quas diximus, et a prima et inter se differunt, a prima, quia rationalis est, inter se autem, quia ordine eadem non sunt, adparet, ipsas quoque irrationales inter se differre. Et quoniam demonstrauius, apotomen eandem non esse ac rectam ex duobus nominibus [prop. CXI], et rationali adplicatae rectae irrationales apotomen sequentes latitudines efficiunt apotomas secundum suum quaeque ordinem, irrationales autem rectam ex duobus nominibus sequentes rectas ex duobus nominibus et ipsae secundum suum quaeque ordinem, aliae sunt irrationales apotomen sequentes, aliae irrationales rectam ex duobus nominibus sequentes, ita ut omnes XIII irrationales ordine hae sint:

1. Media.
2. Recta ex duobus nominibus.
3. Ex duabus mediis prima.
4. Ex duabus mediis secunda.
5. Maior.
6. Recta spatio rationali et medio aequalis quadrata.

μέν B, αὐ μέν b, μέν supra add. m. 2 F. 19. τὰς ἐκ δύο
 ὀνομάτων] om. V. 20. αὐτὰς b. εἶσιν ἄρα V. 21. αὐ]
 om. F. μετὰ] κατὰ P.

- Δύο μέσα δυναμένην,
 Ἀποτομήν,
 Μέσης ἀποτομήν πρώτην,
 Μέσης ἀποτομήν δευτέραν,
 5 Ἐλάσσονα,
 Μετὰ ρητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσαν,
 Μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσαν.

[ριβ'.

Τὸ ἀπὸ ρητῆς παρὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων
 10 παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομήν, ἧς
 τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνο-
 μάτων ὀνόμασι καὶ ἔτι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ
 ἔτι ἡ γινομένη ἀποτομή τὴν αὐτὴν ἔξει τάξιν
 τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.

15 Ἐστω ρητὴ μὲν ἡ *A*, ἐκ δύο ὀνομάτων δὲ ἡ *BΓ*,
 ἧς μείζον ὄνομα ἔστω ἡ *ΔΓ*, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς *A* ἴσον
 ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν *BΓ*, *EZ*. λέγω, ὅτι ἡ *EZ* ἀποτομή
 ἐστίν, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς *ΓΔ*, *ΔB*,
 καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ *EZ* τὴν αὐτὴν ἔξει
 20 τάξιν τῇ *BΓ*.

Ἐστω γὰρ πάλιν τῷ ἀπὸ τῆς *A* ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν
BΔ, *H*. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν *BΓ*, *EZ* ἴσον ἐστὶ τῷ
 ὑπὸ τῶν *BΔ*, *H*, ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ *ΓB* πρὸς τὴν *BΔ*,

De his 13 irrationalibus cfr. Martianus Capella VI, 720.

5. ἐλάττονα BFb. 8. ριβ'] om. b, ρια' F, ριδ' BV. 11.
 τέ ἐστι F. 12. ὀνόμασιν PBF. 15. δὲ ὀνομάτων V. 16.
 ΔΓ] ΓΔ F. 17. BΓ] ΓB F. 18. ἐστι] ἐστίν P. ΓΔ] Γ
 e corr. V. ΔB] Δ supra scr. m. 2 V. 19. τάξιν ἔξει V.
 ἔξει] ἔχει BFb, in B supra scr. ξ m. 2. 22. BΔ] Δ e
 corr. V, ΔB F. τό] τῷ P V. τῷ] mut. in τό m. 1 P, τό V.
 23. Post τῶν ras. 1 litt. P. ΓB] BΓ F.

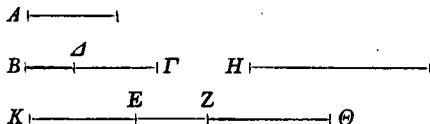
7. Recta duobus spatiis mediis aequalis quadrata.
8. Apotome.
9. Mediae apotome prima.
10. Mediae apotome secunda.
11. Minor.
12. Recta cum rationali totum medium efficiens.
13. Recta cum medio totum medium efficiens.

CXII.¹⁾

Quadratum rectae rationalis rectae ex duobus nominibus adplicatum latitudinem efficit apotomen, cuius nomina nominibus rectae ex duobus nominibus commensurabilia sunt praetereaue in eadem proportionem, et praeterea apotome ita orta eundem ordinem habebit ac recta ex duobus nominibus.

Sit A rationalis, $B\Gamma$ autem ex duobus nominibus, cuius maius nomen sit $\Delta\Gamma$, et sit $B\Gamma \times EZ = A^2$. dico, EZ apotomen esse, cuius nomina rectis $\Gamma\Delta$, ΔB commensurabilia et in eadem proportionem sint, et praeterea rectam EZ eundem ordinem habere ac $B\Gamma$.

nam rursus sit $B\Delta \times H = A^2$. iam quoniam est $B\Gamma \times EZ = B\Delta \times H$, erit $\Gamma B : B\Delta = H : EZ$ [VI, 16].



uerum $\Gamma B > B\Delta$. itaque etiam $H > EZ$ [V, 16; V, 14].

1) Dubito, an haec propositio et sequentes Euclidis non sint. sed de hac re alibi uiderimus.

- οὕτως ἡ H πρὸς τὴν EZ . μείζων δὲ ἡ $ΓΒ$ τῆς $BΔ$.
 μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ H τῆς EZ . ἔστω τῇ H ἴση
 ἡ $EΘ$. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ $ΓΒ$ πρὸς τὴν $BΔ$, οὕτως ἡ
 $ΘΕ$ πρὸς τὴν EZ . διελόντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $ΓΔ$ πρὸς
 5 τὴν $BΔ$, οὕτως ἡ $ΘΖ$ πρὸς τὴν ZE . γεγονέτω ὡς
 ἡ $ΘΖ$ πρὸς τὴν ZE , οὕτως ἡ ZK πρὸς τὴν KE . καὶ
 ὅλη ἄρα ἡ $ΘΚ$ πρὸς ὅλην τὴν KZ ἐστὶν, ὡς ἡ ZK
 πρὸς KE . ὡς γὰρ ἐν τῶν ἡγούμενων πρὸς ἐν τῶν
 ἐπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα
 10 τὰ ἐπόμενα. ὡς δὲ ἡ ZK πρὸς KE , οὕτως ἐστὶν ἡ
 $ΓΔ$ πρὸς τὴν $ΔΒ$. καὶ ὡς ἄρα ἡ $ΘΚ$ πρὸς KZ , οὕτως ἡ
 $ΓΔ$ πρὸς τὴν $ΔΒ$. σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς $ΓΔ$ τῷ
 ἀπὸ τῆς $ΔΒ$. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΘΚ$
 τῷ ἀπὸ τῆς KZ . καὶ ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $ΘΚ$ πρὸς
 15 τὸ ἀπὸ τῆς KZ , οὕτως ἡ $ΘΚ$ πρὸς τὴν KE , ἐπεὶ αἱ
 τρεῖς αἱ $ΘΚ$, KZ , KE ἀνάλογόν εἰσιν. σύμμετρος
 ἄρα ἡ $ΘΚ$ τῇ KE μήκει. ὥστε καὶ ἡ $ΘΕ$ τῇ $EΚ$
 σύμμετρός ἐστι μήκει. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς A ἴσον
 ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν $EΘ$, $BΔ$, ῥητὸν δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς
 20 A , ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν $EΘ$, $BΔ$. καὶ
 παρὰ ῥητὴν τὴν $BΔ$ παράκειται. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ
 $EΘ$ καὶ σύμμετρος τῇ $BΔ$ μήκει. ὥστε καὶ ἡ σύμ-
 μετρος αὐτῇ ἡ $EΚ$ ῥητὴ ἐστὶ καὶ σύμμετρος τῇ $BΔ$
 μήκει. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ $ΓΔ$ πρὸς $ΔΒ$, οὕτως ἡ
 25 ZK πρὸς KE , αἱ δὲ $ΓΔ$, $ΔΒ$ δυνάμει μόνον εἰσὶ

1. μείζων — 2. ἔστω] in ras. V. 1. $ΓΒ$] $BΓP$. 2.
 ἐστὶ] om. V. 3. $ΓΒ$] $BΓPV$. 4. τήν] om. Bb. 5. τήν]
 om. Bb. $ΔΒ$ FVb. τήν] om. BFb. γεγονέτω — 6.
 ZE] om. b. 6. τήν] om. BF. ZK] KZB . τήν] om.
 BFb. 7. πρὸς] bis φ. 8. τήν KE FV. ὡς γάρ] om. P,
 supra scr. V. τῶν] om. P. ἡγούμενον P. 10. τήν KE V.
 11. $ΔΒ$] $BΔF$. τήν KZ BFb. 12. $ΔΒ$] e corr. V,

sit $E\Theta = H$. itaque $\Gamma B : B\Delta = \Theta E : EZ$. quare diri-
 mendo [V, 17] $\Gamma\Delta : B\Delta = \Theta Z : ZE$. fiat $\Theta Z : ZE = ZK : KE$.
 quare etiam $\Theta K : KZ = ZK : KE$; nam ut unum prae-
 cedentium ad unum sequentium, ita omnia praecedentia
 ad omnia sequentia [V, 12]. est autem $ZK : KE =$
 $\Gamma\Delta : \Delta B$. quare etiam $\Theta K : KZ = \Gamma\Delta : \Delta B$. uerum
 $\Gamma\Delta^2$, ΔB^2 commensurabilia sunt [prop. XXXVI].
 itaque etiam ΘK^2 , KZ^2 commensurabilia sunt [VI, 20
 coroll.; prop. XI]. est autem $\Theta K^2 : KZ^2 = \Theta K : KE$,
 quoniam tres rectae ΘK , KZ , KE proportionales sunt
 [V def. 9]. itaque ΘK , KE longitudine commensura-
 biles sunt [prop. XI]. quare etiam ΘE , EK longi-
 tudine commensurabiles sunt [prop. XV]. et quoniam
 $A^2 = E\Theta \times B\Delta$, et A^2 rationale est, etiam $E\Theta \times B\Delta$
 rationale est. et rationali $B\Delta$ adplicatum est. itaque
 $E\Theta$ rationalis est et rectae $B\Delta$ longitudine commen-
 surabilis [prop. XX]. quare etiam EK , quae ei com-
 mensurabilis est, rationalis est [def. 3] et rectae $B\Delta$
 longitudine commensurabilis [prop. XII]. iam quoniam
 est $\Gamma\Delta : \Delta B = ZK : KE$, et $\Gamma\Delta$, ΔB potentia tantum
 commensurabiles sunt, etiam ZK , KE potentia tantum

$B\Delta$ F. 13. ΘK] $\Gamma\Delta$ φ . 14. KZ] ZK in ras. V. 15.
 Post KZ add. $\acute{\epsilon}\delta\epsilon\lambda\chi\theta\eta$ γὰρ ὡς ἡ $\Gamma\Delta$ πρὸς ΔB , οὕτως ἡ ZK
 πρὸς $K\Theta$. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ $\Gamma\Delta$ πρὸς ΔB , οὕτως ἡ ΘK πρὸς
 KE . τρεῖς οὖν εὐθεῖαι εἰσιν ἀνάλογον πρώτη μὲν ἡ ΘK , δευ-
 τέρα δὲ ἡ KZ , τρίτη ἡ KE . ἔστιν οὖν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης
 πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας εἶδος, οὕτως ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην,
 τοιούτεστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΘK πρὸς τὸ ἀπὸ KZ b. τήν] om. b.
 16. εἰσι BVb, comp. F. 17. ἄρα ἔστιν BFb. ΘK] K
 e corr. V. Post $\mu\eta\kappa\sigma\iota$ add. καὶ διελόντι b, m. 2 F. ὥστε]
 -τε e corr. V. EK] $E\Theta$ b. 19. $E\Theta$] ΘE V. ἔστιν L.
 20. ἔστιν L. ΔB LBFb, e corr. V. 21. ΔB BF. 22.
 Post ὥστε ras. 1 litt. V. 23. ἔστιν L. ΔB F. 24. ὡς]
 om. L, supra scr. m. 2 B. 25. ZK] corr. ex ZH m. 2 F.
 δέ] m. 2 F. $\Gamma\Delta$] $\Delta\Gamma$ F. εἰσίν L.

σύμμετροι, καὶ αἱ ZK , KE δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. ῥητὴ δὲ ἐστὶν ἡ KE . ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ZK . αἱ ZK , KE ἄρα ῥηταὶ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ EZ .

5 Ἦτοι δὲ ἡ ΓA τῆς ΔB μείζον δύνανται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυνμέτρου.

Εἰ μὲν οὖν ἡ ΓA τῆς ΔB μείζον δύνανται τῷ ἀπὸ συμμέτρου [ἑαυτῇ], καὶ ἡ ZK τῆς KE μείζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός
10 ἐστὶν ἡ ΓA τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ZK . εἰ δὲ ἡ $B A$, καὶ ἡ KE . εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΓA , ΔB , καὶ οὐδετέρα τῶν ZK , KE .

Εἰ δὲ ἡ ΓA τῆς ΔB μείζον δύνανται τῷ ἀπὸ ἀσυνμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ZK τῆς KE μείζον δυνήσεται
15 τῷ ἀπὸ ἀσυνμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν ἡ ΓA σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ZK . εἰ δὲ ἡ $B A$, καὶ ἡ KE . εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΓA , ΔB , καὶ οὐδετέρα τῶν ZK , KE . ὥστε ἀποτομὴ ἐστὶν ἡ ZE , ἧς τὰ ὀνόματα τὰ ZK , KE σύμμετρά ἐστι τοῖς
20 τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι τοῖς ΓA , ΔB καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ τὴν αὐτὴν τάξιν ἔχει τῇ $B \Gamma$. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ριγ'.

Τὸ ἀπὸ ῥητῆς παρὰ ἀποτομὴν παραβαλλόμενον
25 μενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων, ἧς

1. KE ἄρα LBF. 2. Post KE add. καὶ σύμμετρός τῇ $B A$ μήκει LBFb. ἐστὶν ἄρα V. ἐστὶν LPB. 3. ZK] (prius) KZ BFb (de L non liquet). Deinde add. καὶ σύμμετρός τῇ ΓA μήκει LBFb. ῥηταὶ εἰσὶν L, ῥηταὶ εἰσὶ BFb. εἰσὶ] om. LBFb. 4. EZ] ZE in ras. V. 6. τῷ] supra scr. m. rec. V. συμμέτρου V, sed corr. 8. ἀσυνμέτρου L, et V, sed ἀ-eras. ἑαυτῇ] om. P. ZK] KZ B. 11. $B A$] mut. in ΔB V, ΔB b. οὐδετέρα P. 12. καὶ — 13. ΔB] mg. m. 2 F. 12. οὐδετέρα P. KE] E in ras. m. 1 P. 13.

commensurabiles sunt [prop. XI]. uerum KE rationalis est; itaque etiam ZK rationalis est. itaque ZK , KE rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo EZ apotome est [prop. LXXIII].

Iam $\Gamma\Delta^2$ excedit ΔB^2 quadrato rectae aut sibi commensurabilis aut incommensurabilis.

si igitur $\Gamma\Delta^2$ excedit ΔB^2 quadrato rectae commensurabilis, etiam ZK^2 excedit KE^2 quadrato rectae sibi commensurabilis [prop. XIV]. et siue $\Gamma\Delta$ rationali propositae longitudine commensurabilis est, etiam ZK ei commensurabilis est [prop. XI, XII], siue $B\Delta$, etiam KE [prop. XII], siue neutra rectarum $\Gamma\Delta$, ΔB , neutra rectarum ZK , KE . sin $\Gamma\Delta^2$ excedit ΔB^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis, etiam ZK^2 excedit KE^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis [prop. XIV]. et siue $\Gamma\Delta$ rationali propositae longitudine commensurabilis est, etiam ZK ei commensurabilis est, siue $B\Delta$, etiam KE , siue neutra rectarum $\Gamma\Delta$, ΔB , neutra rectarum ZK , KE . ergo ZE apotome est, cuius nomina ZK , KE nominibus $\Gamma\Delta$, ΔB rectae ex duobus nominibus commensurabilia sunt et in eadem. proportionem, et eundem ordinem habet ac $B\Gamma$ [deff. alt. et tert.]; quod erat demonstrandum.

CXIII.

Quadratum rectae rationalis apotomae adplicatum latitudinem efficit rectam ex duobus nominibus, cuius

ΔB] $B\Delta$? L. 14. καί — 15. ἐάντῃ] om. P, mg. m. 2 V.
 16. ἐστίν L. Ante ZK eras. H V. 17. οὐδέτερά V. 18.
 οὐδέτερά PVφ (non F). ὥστε] -ε in ras. V. 19. τὰ] (alt.)
 om. P, m. 2 V. ἐστίν L. 20. ἐκ] ἐκ τῶν V. ὀνόμασιν
 LPBF. 21. ἔχει τὰξιν LBFb. $B\Gamma$] BB P. 23. εἰγ']
 PL, εἰβ' F, εἰδ' b, εἰε' BV. 24. παρὰ] ἀρα L.

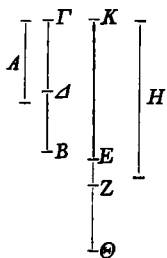
τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἔτι δὲ ἡ γινομένη ἐκ δύο ὀνομάτων τὴν αὐτὴν τάξιν ἔχει τῇ ἀποτομῇ.

- 5 Ἐστω ρητὴ μὲν ἡ A , ἀποτομὴ δὲ ἡ $B\Delta$, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς A ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν $B\Delta$, $K\Theta$, ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς A ρητῆς παρὰ τὴν $B\Delta$ ἀποτομὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν $K\Theta$. λέγω, ὅτι ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ $K\Theta$, ἥς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς $B\Delta$ ὀνόμασι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ $K\Theta$ τὴν αὐτὴν ἔχει τάξιν τῇ $B\Delta$.

- Ἐστω γὰρ τῇ $B\Delta$ προσαρμόζουσα ἡ $\Delta\Gamma$. αἱ $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ ἄρα ρηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ τῷ ἀπὸ τῆς A ἴσον ἔστω καὶ τὸ ὑπὸ τῶν $B\Gamma$, H . ρητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς A ρητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν $B\Gamma$, H . καὶ παρὰ ρητὴν τὴν $B\Gamma$ παραβέβληται ρητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ H καὶ σύμμετρος τῇ $B\Gamma$ μήκει. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν $B\Gamma$, H ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν $B\Delta$, $K\Theta$, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓB πρὸς $B\Delta$, οὕτως ἡ $K\Theta$ πρὸς H . 20 μείζων δὲ ἡ $B\Gamma$ τῆς $B\Delta$ · μείζων ἄρα καὶ ἡ $K\Theta$ τῆς H . κείσθω τῇ H ἴση ἡ $ΚΕ$ · σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ $ΚΕ$ τῇ $B\Gamma$ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΓB πρὸς $B\Delta$, οὕτως ἡ ΘK πρὸς $ΚΕ$, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως ἡ $K\Theta$ πρὸς ΘE . γεγενέτω 25 ὡς ἡ $K\Theta$ πρὸς ΘE , οὕτως ἡ ΘZ πρὸς ZE · καὶ λοιπὴ

1. ἐστὶν L. 2. ὀνόμασιν PLBF. γιγνομένη LBb, γενομένη PVφ. 3. ἔχει] supra add. ξ m. 2 B. 6. Δ] ΔB b. ὥστε] -ε in ras. V. 7. $B\Delta$] ΔB φ. 8. ποιεῖν LFb, e corr. m. 1 B. ὅτι] ὅτι καὶ PV. 9. ἐστὶ] ἐστὶν L. 10. ὀνόμασιν PLBF. ἔτι] ὅτι LBFb. 11. ἔξει LB. 13. εἰσιν L. 14. καί] om. LBFVb. 15. H] m. 2 F. 18. ἐστὶν PV, om. LBFb. 19. ΓB] $B\Gamma$ PV. 20. τῆς] (prius) πρὸς b.

nomina nominibus apotomes commensurabilia sunt et in eadem proportionione, et praeterea recta ex duobus nominibus ita orta eundem ordinem habet atque apotome.



Sit A rationalis, $B\Delta$ autem apotome, et sit $B\Delta \times K\Theta = A^2$, ita ut quadratum rectae rationalis A apotomae $B\Delta$ adplicatum latitudinem efficiat $K\Theta$. dico, $K\Theta$ ex duobus nominibus esse, cuius nomina nominibus rectae $B\Delta$ commensurabilia sint et in eadem proportionione, et praeterea $K\Theta$ eundem ordinem habere ac $B\Delta$.

nam $\Delta\Gamma$ rectae $B\Delta$ congruens sit. itaque $B\Gamma, \Gamma\Delta$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles [prop. LXXIII]. sit etiam $B\Gamma \times H = A^2$. uerum A^2 rationale est. itaque etiam $B\Gamma \times H$ rationale est. et rationali $B\Gamma$ adplicatum est. itaque H rationalis est et rectae $B\Gamma$ longitudine commensurabilis [prop. XX]. iam quoniam est $B\Gamma \times H = B\Delta \times K\Theta$, erit [VI, 16] $\Gamma B : B\Delta = K\Theta : H$. est autem $B\Gamma > B\Delta$. itaque etiam $K\Theta > H$ [V, 16; V, 14]. ponatur $KE = H$. itaque $KE, B\Gamma$ longitudine commensurabiles sunt. et quoniam est $\Gamma B : B\Delta = \Theta K : KE$, conuertendo [V, 19 coroll.] est $B\Gamma : \Gamma\Delta = K\Theta : \Theta E$. fiat $K\Theta : \Theta E = \Theta Z : ZE$. itaque etiam $KZ : ZE = K\Theta : \Theta E = B\Gamma : \Gamma\Delta$ [V, 19]. uerum $B\Gamma, \Gamma\Delta$ potentia tantum commensurabiles sunt. itaque etiam KZ, ZE potentia tantum commensura-

$\acute{\alpha}\rho\alpha \acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}$ BFb. 21. KE] e corr. V, EK P. 22. $\tau\eta\nu B\Delta$ BFb. 23. $\tau\eta\nu KE$ BFb. 25. $K\Theta$] corr. ex. KH m. 2 F.

ἄρα ἡ KZ πρὸς $Z\Theta$ ἐστίν, ὥς ἡ $K\Theta$ πρὸς ΘE , τουτ-
 ἐστίν [ὥς] ἡ $B\Gamma$ πρὸς $\Gamma\Delta$. αἱ δὲ $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ δυνάμει
 μόνον [εἰσὶ] σύμμετροι· καὶ αἱ KZ , $Z\Theta$ ἄρα δυνάμει
 μόνον εἰσὶ σύμμετροι. καὶ ἐπεὶ ἐστίν ὥς ἡ $K\Theta$ πρὸς
 5 ΘE , ἡ KZ πρὸς $Z\Theta$, ἀλλ' ὥς ἡ $K\Theta$ πρὸς ΘE , ἡ ΘZ
 πρὸς ZE , καὶ ὥς ἄρα ἡ KZ πρὸς $Z\Theta$, ἡ ΘZ πρὸς
 ZE · ὥστε καὶ ὥς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, τὸ ἀπὸ
 τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας· καὶ ὥς ἄρα ἡ
 KZ πρὸς ZE , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς KZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς
 10 $Z\Theta$. σύμμετρον δὲ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς KZ τῷ ἀπὸ τῆς
 $Z\Theta$ · αἱ γὰρ KZ , $Z\Theta$ δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι· σύμ-
 μετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ KZ τῇ ZE μήκει· ὥστε ἡ KZ
 καὶ τῇ KE σύμμετρός [ἐστὶ] μήκει. ῥητὴ δὲ ἐστίν ἡ
 KE καὶ σύμμετρος τῇ $B\Gamma$ μήκει· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ
 15 KZ καὶ σύμμετρος τῇ $B\Gamma$ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἐστίν ὥς
 ἡ $B\Gamma$ πρὸς $\Gamma\Delta$, οὕτως ἡ KZ πρὸς $Z\Theta$, ἐναλλαξ ὥς
 ἡ $B\Gamma$ πρὸς KZ , οὕτως ἡ $\Delta\Gamma$ πρὸς $Z\Theta$. σύμμετρος
 δὲ ἡ $B\Gamma$ τῇ KZ · σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ $Z\Theta$ τῇ $\Gamma\Delta$
 μήκει. αἱ $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ δὲ ῥηταὶ εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμ-
 20 μετροι· καὶ αἱ KZ , $Z\Theta$ ἄρα ῥηταὶ εἰσὶ δυνάμει μόνον
 σύμμετροι· ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἄρα ἡ $K\Theta$.

Εἰ μὲν οὖν ἡ $B\Gamma$ τῆς $\Gamma\Delta$ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ
 συμμέτρου ἐαυτῇ, καὶ ἡ KZ τῆς $Z\Theta$ μείζον δυνήσεται
 τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἐαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν
 25 ἡ $B\Gamma$ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ KZ , εἰ δὲ ἡ

1. $Z\Theta$] ΘZ F et in ras. V. ΘE] corr. ex ZE V. τουτ-
 ἐστίν — 2. πρὸς] in ras. V. 2. ὥς] om. P, supra scr. V.
 δέ] om. BF. $\Gamma\Delta$] $\Gamma\Delta$, ΔE BF. 3. εἰσὶ] om. PV. σύμ-
 μετροι — 4. εἰσὶ] mg. m. 2 B. 3. KZ] ZK P. 5. $Z\Theta$]
 ΘZ in ras. V. ΘZ] in ras. m. rec. B. 6. $Z\Theta$] in ras. m.
 rec. B, " ΘZ b. οὕτως ἡ B. ΘZ] ' $Z\Theta$ b. 7. ZE] EZ F.
 ὥστε] -ε in ras. V. ὥς] m. 2 F. οὕτως τό BFb. 8.
 πρώτης] eras. F. πρὸς — δευτέρας] mg. m. 2 F. 9. ZE]

biles sunt [prop. XI]. et quoniam est $K\Theta : \Theta E = KZ : Z\Theta$,
 $K\Theta : \Theta E = \Theta Z : ZE$, erit etiam

$$KZ : Z\Theta = \Theta Z : ZE.$$

quare etiam ut primum ad tertium, ita quadratum
 primi ad quadratum secundi [V def. 9]. itaque etiam
 $KZ : ZE = KZ^2 : Z\Theta^2$. uerum KZ^2 , $Z\Theta^2$ commensu-
 rabilia sunt; nam KZ , $Z\Theta$ potentia commensurabiles
 sunt. itaque etiam KZ , ZE longitudine commensu-
 rabiles sunt [prop. XI]. quare etiam KZ , KE longi-
 tudine commensurabiles sunt [prop. XV]. KE autem
 rationalis est et rectae $B\Gamma$ longitudine commensura-
 bilis. itaque etiam KZ rationalis est et rectae $B\Gamma$
 longitudine commensurabilis [prop. XII]. et quoniam
 est $B\Gamma : \Gamma\Delta = KZ : Z\Theta$, permutando [V, 16] est
 $B\Gamma : KZ = \Delta\Gamma : Z\Theta$. uerum $B\Gamma$, KZ commensura-
 biles sunt. itaque etiam $Z\Theta$, $\Delta\Gamma$ longitudine com-
 mensurabiles sunt [prop. XI]. $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ autem ratio-
 nales sunt potentia tantum commensurabiles. itaque
 etiam KZ , $Z\Theta$ rationales sunt [def. 3] potentia tantum
 commensurabiles [prop. XIII]. ergo $K\Theta$ ex duobus
 nominibus est [prop. XXXVI].

Iam si $B\Gamma^2$ excedit $\Gamma\Delta^2$ quadrato rectae sibi com-
 mensurabilis, etiam KZ^2 excedit $Z\Theta^2$ quadrato rectae
 sibi commensurabilis [prop. XIV]. et siue $B\Gamma$ rationali
 propositae longitudine commensurabilis est, etiam KZ

corr. ex $Z\Theta$ P. 11. γάρ] ἄρα B. 12. τῇ] τῆς Vb. ὥστε]
 -ε in ras. V, ὥστε καὶ b. 13. ἐστὶ] om. PV. 14. ἀσύμ-
 μετρος b. 16. πρὸς] (prius) bis b. 17. οὕτως — 18. KZ]
 bis F. 17. $\Delta\Gamma$] $\Gamma\Delta$ P. 18. $Z\Theta$] in ras. V, ΘZ P. $\Gamma\Delta$]
 in ras. V, $\Delta\Gamma$ P. 19. αὐ] αὐ δέ V. δέ] om. FV, ΔE Bb.
 20. καὶ — 21. $K\Theta$] mg. m. 1 V. 20. KZ] $K\Theta$ B. 21.
 δύο ἄρα BFb. ἄρα] om. BFb. 22. $\Gamma\Delta$] $B\Delta$ PFb et B
 eras. V. 23. ἀσύμμετρον F, sed corr. 24. ἀσύμμετρον P.

ΓΔ σύμμετρος ἐστὶ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΖΘ, εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΒΓ, ΓΔ, οὐδετέρα τῶν ΚΖ, ΖΘ.

Εἰ δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ 5 ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΚΖ τῆς ΖΘ μείζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρος ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΚΖ, εἰ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἡ ΖΘ, εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΒΓ, ΓΔ, οὐδετέρα τῶν ΚΖ, ΖΘ.

10 Ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΚΘ, ἧς τὰ ὀνόματα τὰ ΚΖ, ΖΘ σίμμετρά [ἐστὶ] τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι τοῖς ΒΓ, ΓΔ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ ΚΘ τῇ ΒΓ τὴν αὐτὴν ἕξει τάξιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ριδ'.

15 Ἐὰν χωρίον περιέχῃται ὑπὸ ἀποτομῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά τε ἐστὶ τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἢ τὸ χωρίον δυναμένη ῥητὴ ἐστὶν.

20 Περιεχέσθω γὰρ χωρίον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΓΔ ὑπὸ ἀποτομῆς τῆς ΑΒ καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τῆς ΓΔ, ἧς μείζον ὄνομα ἔστω τὸ ΓΕ, καὶ ἔστω τὰ ὀνόματα τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τὰ ΓΕ, ΕΔ σύμμετρά τε τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι τοῖς ΑΖ, ΖΒ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ

1. ΓΔ] ΔΓ Β et e corr. V. 2. ΒΓ — τῶν] postea add. m. 1 P. Post ΓΔ add. καὶ b, m. 2 F. 4. δύνηται Bb. 5. συμμέτρου V, sed. corr. ΚΖ] Ζ e corr. V, ΚΔ P. ΖΘ] ΘΖ in ras. V. 6. συμμέτρου V, sed corr. 7. ἐστὶν] m. 2 F. 8. ΖΘ] ΘΖ F. ΓΔ καὶ b. 11. σύμμετα B. ἐστὶ] om. P, supra scr. V. ὀνόμασιν B. 13. ΒΓ] ΒΔ PFb. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. BFb. 14. ριε' b et e corr. F, ρις' BV. 17. τε] om. BFV. ὀνόμασιν PFB. 19. ἐστὶ

ei commensurabilis est [prop. XII], siue $\Gamma\Delta$ rationali propositae longitudine commensurabilis est, etiam $Z\Theta$ ei commensurabilis est [id.], siue neutra rectarum $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, etiam neutra rectarum KZ , $Z\Theta$ [prop. XIII]. sin $B\Gamma^2$ excedit $\Gamma\Delta^2$ quadrato rectae sibi incommensurabilis, etiam KZ^2 excedit $Z\Theta^2$ quadrato rectae sibi incommensurabilis [prop. XIV]. et siue $B\Gamma$ rationali propositae longitudine commensurabilis est, etiam KZ ei commensurabilis est, siue $\Gamma\Delta$, etiam $Z\Theta$ [prop. XII], siue neutra rectarum $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, neutra rectarum KZ , $Z\Theta$.

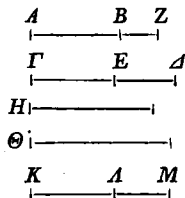
Ergo $K\Theta$ ex duobus nominibus est, cuius nomina KZ , $Z\Theta$ nominibus apotomes $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ commensurabilia sunt et in eadem proportionem, et praeterea $K\Theta$ eundem ordinem habet ac $B\Gamma$ [cfr. deff. alt. et tert.]; quod erat demonstrandum.

CXIV.

Si spatium comprehenditur apotome et recta ex duobus nominibus, cuius nomina nominibus apotomes et commensurabilia sunt et in eadem proportionem,

recta spatio aequalis quadrata rationalis est.

Spatium enim $AB \times \Gamma\Delta$ comprehendatur apotome AB et recta ex duobus nominibus $\Gamma\Delta$, cuius nomen maius sit ΓE , et ΓE , $E\Delta$ nomina rectae ex duobus nominibus nominibus apotomes AZ , ZB et commensurabilia sint et in eadem



B, comp. FVb.
(prius) $\xi\sigma\tau\iota$ BFb.
24. $\acute{o}\nu\omicron\mu\alpha\sigma\iota\nu$ B.

20. $\gamma\acute{\alpha}\rho$] corr. ex $\tau\acute{o}$ m. 1 V.
23. $E\Delta$] Δ e corr. m. 1 b.

22. $\xi\sigma\tau\omega$] $\tau\epsilon$] m. 2 B.

λόγω, καὶ ἔστω ἡ τὸ ὑπὸ τῶν AB , ΓA δυναμένη ἡ H . λέγω, ὅτι ῥητὴ ἐστὶν ἡ H .

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ Θ , καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Θ ἴσον παρὰ τὴν ΓA παραβεβλήσθω πλάτος ποιοῦν τὴν KA .
 5 ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ KA , ἧς τὰ ὀνόματα ἔστω τὰ KM , MA σύμμετρα τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι τοῖς ΓE , $E A$ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ. ἀλλὰ καὶ αἱ ΓE , $E A$ σύμμετροί τε εἰσι ταῖς AZ , ZB καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ AZ πρὸς τὴν ZB ,
 10 οὕτως ἡ KM πρὸς MA . ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ AZ πρὸς τὴν KM , οὕτως ἡ BZ πρὸς τὴν AM . καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ AB πρὸς λοιπὴν τὴν KA ἐστὶν ὡς ἡ AZ πρὸς KM . σύμμετρος δὲ ἡ AZ τῇ KM . σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ AB τῇ KA . καὶ ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς
 15 KA , οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΓA , AB πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓA , KA . σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓA , AB τῷ ὑπὸ τῶν ΓA , KA . ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΓA , KA τῷ ἀπὸ τῆς Θ . σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓA , AB τῷ ἀπὸ τῆς Θ . τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΓA , AB ἴσον ἐστὶ τὸ
 20 ἀπὸ τῆς H . σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς H τῷ ἀπὸ τῆς Θ . ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Θ . ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς H . ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ H . καὶ δύναται τὸ ὑπὸ τῶν ΓA , AB .

Ἐὰν ἄρα χωρίον περιέχεται ὑπὸ ἀποτομῆς καὶ τῆς
 25 ἐκ δύο ὀνομάτων, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ῥητὴ ἐστὶν.

1. ἡ] om. BFb. ἡ] e corr. V. H] HA b. 3. Θ] (prius) B Θ F. 4. τὴν] (prius) m. 2 F. 6. τῆς ἐκ] ἐκ τῶν V. 7. ἀλλὰ — 9. λόγῳ] mg. m. 1 F. 8. τοῖς b. 9. AZ] corr. ex AG V. 11. BZ] ZB B. 12. ἡ] (prius) post ras. 1 litt. F. 13. πρὸς — AZ] om. F. τὴν KM BFb.

proportione, et sit $H^2 = AB \times \Gamma\Delta$. dico, H rationalem esse.

ponatur enim rationalis Θ , et spatium quadrato Θ^2 aequale rectae $\Gamma\Delta$ adplicetur latitudinem efficiens $K\Lambda$. itaque $K\Lambda$ apotome est, cuius nomina sint KM , $M\Lambda$ commensurabilia ΓE , $E\Delta$ nominibus rectae ex duobus nominibus et in eadem proportionem [prop. XCII]. uerum ΓE , $E\Delta$ etiam rectis AZ , ZB et commensurabilia sunt et in eadem proportionem. itaque $AZ : ZB = KM : M\Lambda$. quare permutando [V, 16] $AZ : KM = BZ : AM$. itaque etiam $AB : K\Lambda = AZ : KM$ [V, 19]. uerum AZ , KM commensurabiles sunt [prop. XII]. itaque etiam AB , $K\Lambda$ commensurabiles sunt [prop. XI]. est autem $AB : K\Lambda = \Gamma\Delta \times AB : \Gamma\Delta \times K\Lambda$ [VI, 1]. itaque etiam $\Gamma\Delta \times AB$ et $\Gamma\Delta \times K\Lambda$ commensurabilia sunt [prop. IX]. uerum $\Gamma\Delta \times K\Lambda = \Theta^2$. itaque $\Gamma\Delta \times AB$ et Θ^2 commensurabilia sunt. est autem $H^2 = \Gamma\Delta \times AB$. quare H^2 , Θ^2 commensurabilia sunt. uerum Θ^2 rationale est. itaque etiam H^2 rationale est. quare H rationalis est; et spatio $\Gamma\Delta \times AB$ aequalis est quadrata.

Ergo si spatium comprehenditur apotome et recta ex duobus nominibus, cuius nomina nominibus apotomes et commensurabilia sunt et in eadem proportionem, recta spatio aequalis quadrata rationalis est.

14. ἐστίν B. AB] KM σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ AB φ (et F?). 15. τὴν KΛ BFb. οὕτω B. ΓΔ] ante lacunam 2 litt. F, AΓ b. AB] ΔB b. πρὸς τὸ] om. φ. 16. τὸ] m. 2 V. 17. τῶν] (prius) om. P. 18. Θ] ΘZ B, sed corr. 19. ἀπό] corr. ex ὑπό m. 2 F. τῶ] corr. ex τό m. 1 F. τό] corr. ex τῶ m. 1 F. 20. τὸ] καὶ τό BFb. 22. ἐκτὴ] corr. ex ἐκτόν V. 25. ἐστίν P. 26. ὀνόμασιν PB. 27. ἐστὶ BV, comp. Fb. Deinde add. ὅπερ εἶδει δεῖξαι F.

Πόρισμα.

Καὶ γέγονεν ἡμῖν καὶ διὰ τούτου φανερόν, ὅτι
δυνατόν ἐστι ρητὸν χωρίον ὑπὸ ἀλόγων εὐθειῶν περι-
έχεσθαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5

ριε'.

Ἀπὸ μέσης ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ
οὐδεμία οὐδεμιᾶ τῶν πρότερον ἢ αὐτή.

Ἔστω μέση ἢ Α· λέγω, ὅτι ἀπὸ τῆς Α ἄπειροι
ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾶ τῶν πρότερον
10 ἢ αὐτή.

Ἐκκείσθω ρητὴ ἢ Β, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν Β, Α ἴσον
ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Γ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἢ Γ· τὸ γὰρ
ὑπὸ ἀλόγου καὶ ρητῆς ἄλογόν ἐστιν. καὶ οὐδεμιᾶ τῶν
πρότερον ἢ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον
15 παρὰ ρητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ μέσην. πάλιν
δὴ τῷ ὑπο τῶν Β, Γ ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Δ· ἄλογον
ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α. ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἢ Δ· καὶ
οὐδεμιᾶ τῶν πρότερον ἢ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς
τῶν πρότερον παρὰ ρητὴν παραβαλλόμενον πλάτος
20 ποιεῖ τὴν Γ. ὁμοίως δὴ τῆς τοιαύτης τάξεως ἐπ' ἄπειρον
προβαινούσης φανερόν, ὅτι ἀπὸ τῆς μέσης ἄπειροι
ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾶ τῶν πρότερον
ἢ αὐτή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

1. πόρισμα] mg. PV, om. BFb. 4. ὅπερ ἔδει δεῖξαι]
om. BFb. 5. ριε'] om. V, ριε' b et corr. ex ριδ' F, ριζ' B.

6. γίνονται B, γ supra add. m. 1 P. 7. οὐδεμία] om.
PFVb. Post πρότερον add. δεκατριῶν ἀλόγων m. rec. F.

9. γίνονται PFB. οὐδεμία] om. PFVb. 10. ἢ] ἐστὶν ἢ BF.

11. Ante B ras. 1 litt. B. B, A] A, B F. 12. ἔστω] m. 2 F.
τό] (prius) τῷ F. 13. ἐστὶ PB, comp. FVb. 14. ἀπὸ B.

16. ἄλογον — 17. Δ (prius)] om. FV. 17. ἐστὶν P. τό — ἐστὶν]
om. P. ἄλογος — 18. αὐτή] in ras. m. 1 F. 18. ἀπὸ B.

Corollarium.

Et hinc quoque nobis adparuit, fieri posse, ut spatium rationale rectis irrationalibus comprehendatur. — quod erat demonstrandum.

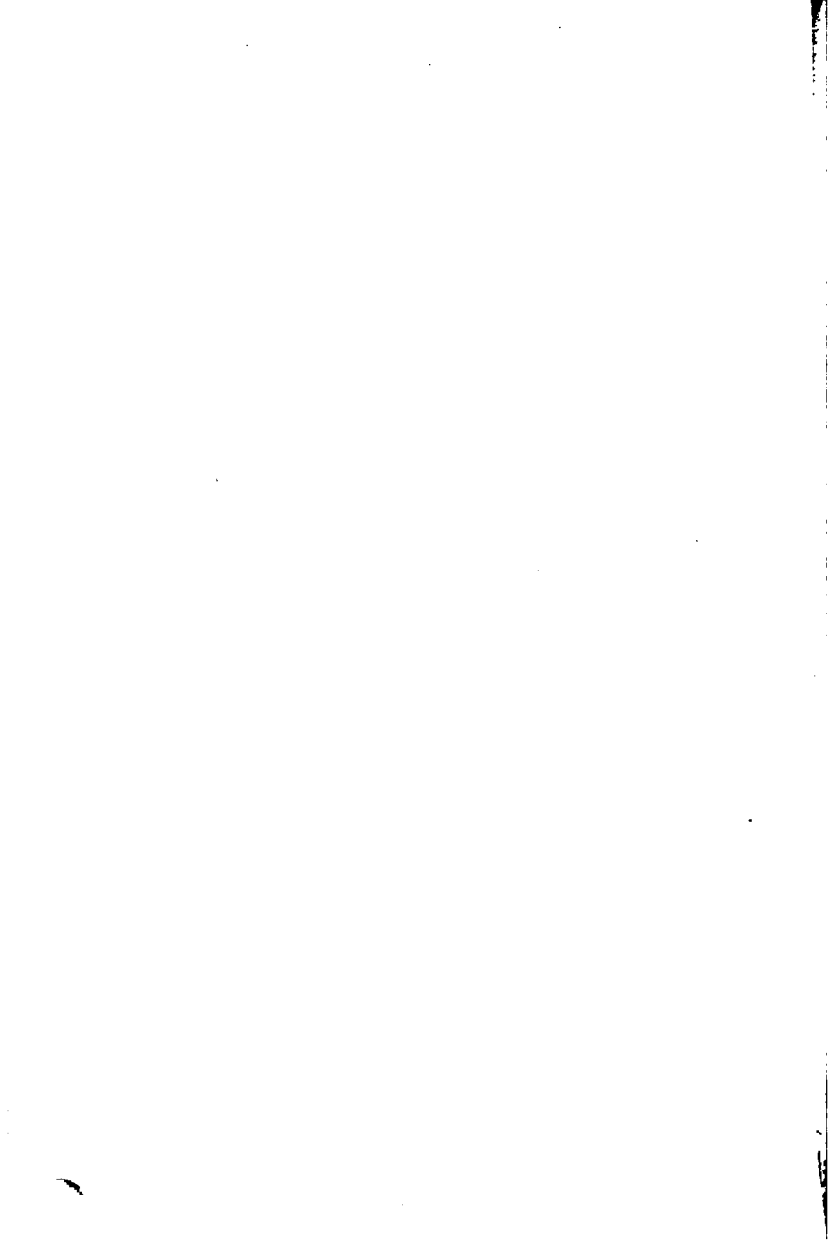
CXV.

A media irrationales infinitae multitudinis oriuntur, et nulla eadem est atque ulla priorum.

Sit A media. dico, ab A irrationales infinitae multitudinis oriri et nullam eandem esse atque ullam priorum.

ponatur rationalis B , et sit $\Gamma^2 = B \times A$. itaque Γ irrationalis est [def. 4]; nam spatium recta irrationali et rationali comprehensum A ————— |
 B ————— |
 Γ ————— |
 A ————— |
 irrationale est [prop. XX]. nec eadem est atque ulla priorum; neque enim ullius priorum quadratum rectae rationali adplicatum latitudinem efficit mediam. rursus sit $\Delta^2 = B \times \Gamma$. itaque Δ^2 irrationale est [prop. XX]. quare Δ irrationalis est [def. 4]. nec eadem est atque ulla priorum; neque enim ullius priorum quadratum rectae rationali adplicatum latitudinem efficit Γ . iam hac ordinatione similiter in infinitum progrediente adparet, a media irrationales infinitae multitudinis oriri, et nullam eandem esse atque ullam priorum; quod erat demonstrandum.

20. τῆς τοιαύτης] τοῖς τῆς αὐτῆς φ. 21. προβαίνουσαι B, corr. m. 2. 22. γίνονται B. οὐδεμίαν] om. PFVb. 23. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. Bfb, comp. P. Seq. additamenta quaedam, u. app. In fine libri Εὐκλείδου στοιχείων ἰ P, τέλος τοῦ ἰ τῶν Εὐκλείδου στοιχείων m. 2 B, τέλος τοῦ ἰ τῶν Εὐκλείδου στοιχείων τῆς Θέωνος ἐκδόσεως F, Εὐκλείδου λόγος ἰ τῆς Θέωνος ἐκδόσεως b.



APPENDIX.



1.

Ad libr. X prop. 1.

Ἄλλως τὸ α' θεώρημα.

Ἐκκείσθω δύο μεγέθη ἄνισα τὰ AB , Γ · καὶ ἐπεὶ
 ἐλασσὸν ἐστὶ τὸ Γ , πολλαπλασιαζόμενον ἐστὶ ποτὲ τοῦ
 AB μεγέθους μείζον. γερονέτω ὡς τὸ ZM καὶ διη-
 5 ρήσθω εἰς [τὰ] ἴσα τῷ Γ , καὶ ἔστω τὰ $M\Theta$, ΘH , HZ ,
 καὶ ἀπὸ τοῦ AB ἀφηγήσθω μείζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ
 BE , καὶ ἀπὸ τοῦ EA μείζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ $E\Delta$, καὶ
 τοῦτο ἀεὶ γινέσθω, ἕως αἱ ἐν τῷ ZM διαιρέσεις ἴσαι
 γένωνται ταῖς ἐν τῷ AB διαιρέσεσιν. γερονέτωσαν
 10 ὡς αἱ BE , $E\Delta$, ΔA , καὶ τῷ ΔA ἕκαστον τῶν KA ,
 AN , $N\Xi$ ἔστω ἴσον, καὶ τοῦτο γινέσθω, ἕως αἱ διαι-
 ρέσεις τοῦ $K\Xi$ ἴσαι γένωνται ταῖς τοῦ ZM .

Καὶ ἐπεὶ τὸ BE μείζον ἢ τὸ ἥμισυ ἐστὶ τοῦ BA ,
 τὸ BE μείζον ἐστὶ τοῦ EA · πολλῶν ἄρα μείζον ἐστὶ
 15 τοῦ ΔA . ἀλλὰ τὸ ΔA ἴσον ἐστὶ τῷ ΞN · τὸ BE ἄρα
 μείζον ἐστὶ τοῦ $N\Xi$. πάλιν, ἐπεὶ τὸ $E\Delta$ μείζον ἢ τὸ
 ἥμισυ ἐστὶ τοῦ EA , μείζον ἐστὶ τοῦ ΔA . ἀλλὰ τὸ
 ΔA ἐστὶν ἴσον τῷ NA · τὸ $E\Delta$ ἄρα μείζον ἐστὶ τοῦ

1. Post ἀφαιρούμενα p. 6, 10 habent BFVb, mg. m. 1 postea add. P.

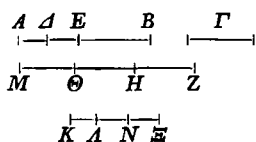
1. τὸ α' θεώρημα] om. V, τὸ αὐτό BFb (mg. α B). 2. κείσθω V. 3. ἐλαττον F. 5. τὰ] (prius) om. P. Γ] corr. ex AB . καὶ ἔστω] om. FVb. HZ] IZ F. 6. ἦ] m. 2 P. 7. BE] in ras. V. καὶ — $E\Delta$] mg. m. 2 V. EA]

1.

Ad libr. X prop. 1.

Aliter primum theorema.

Ponantur duae magnitudines inaequales AB , Γ .
et quoniam est $\Gamma < AB$, multiplicata aliquando Γ



maior erit magnitudine AB . fiat
 ZM et in partes magnitudini Γ
aequales diuidatur, et sint $M\Theta$,
 ΘH , HZ , et ab AB auferatur
 BE maior dimidia et ab EA

maior dimidia $E\Delta$, et hoc semper deinceps fiat, donec
diuisiones rectae ZM diuisionibus rectae AB numero
aequales sint. sint BE , $E\Delta$, ΔA , et sit

$$KA = AN = N\Xi = \Delta A,$$

et hoc fiat, donec diuisiones magnitudinis $K\Xi$ diui-
sionibus rectae ZM numero aequales sint.

et quoniam $BE > \frac{1}{2} BA$, erit $BE > EA$. itaque
multo magis $BE > \Delta A$. uerum $\Delta A = \Xi N$. itaque
 $BE > N\Xi$. rursus quoniam $E\Delta > \frac{1}{2} EA$, erit $E\Delta > \Delta A$.
uerum $\Delta A = NA$. itaque $E\Delta > NA$. itaque tota

AE P. 8. $\acute{\alpha}\epsilon\lambda\iota$] om. BFVb. $\gamma\gamma\nu\epsilon\sigma\theta\omega$ F. 9. $\delta\iota\alpha\iota\rho\epsilon\sigma\sigma\alpha\iota$
BFVb. 10. $\tau\omega$] corr. ex $\tau\acute{o}$ m. 2 V. 11. $\gamma\gamma\nu\epsilon\sigma\theta\omega$ φ . $\xi\omega\varsigma$] $\xi\omega\varsigma$ $\acute{\alpha}\nu$ V φ . $\alpha\iota$] om. φ . 12. $\gamma\epsilon\nu\omicron\nu\tau\alpha\iota$ P φ . $\tau\alpha\iota\varsigma$] $\epsilon\iota\varsigma$
 $\tau\alpha\iota\varsigma$ φ . 13. BA] corr. ex AB m. 2 V. 14. $\tau\acute{o}$] $\tau\acute{o}$ $\delta\acute{\epsilon}$ B,
 $\tau\omicron\upsilon$ φ . $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$] (prius) om. F. 16. $\tau\omicron\upsilon$ — $\mu\epsilon\iota\zeta\omicron\nu$] om. B.
17. $\tau\omicron\upsilon$ ΔA — 18. $\acute{\iota}\sigma\omicron\nu$] $\tau\acute{o}$ EA — $\mu\epsilon\iota\zeta\omicron\nu$ $\delta\acute{\epsilon}$ $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ $\tau\acute{o}$ ΔA φ .
18. $\acute{\iota}\sigma\omicron\nu$ $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ Vb. $E\Delta$] in ras. V.

NA . ὅλον ἄρα τὸ AB μείζον ἐστὶ τοῦ EA . ἴσον
 δὲ τὸ AA τῷ AK . ὅλον ἄρα τὸ BA μείζον ἐστὶ
 τοῦ EK . ἀλλὰ τοῦ BA μείζον ἐστὶ τὸ MZ . πολλῶν
 ἄρα τὸ MZ μείζον ἐστὶ τοῦ EK . καὶ ἐπεὶ τὰ EN ,
 5 NA , AK ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν, ἐστὶ δὲ καὶ τὰ MO , OH ,
 HZ ἴσα ἀλλήλοις, καὶ ἐστὶν ἴσον το πλῆθος τῶν ἐν
 τῷ MZ τῷ πλῆθει τῶν ἐν τῷ EK , ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ
 KA πρὸς τὸ ZH , οὕτως τὸ $KΞ$ πρὸς τὸ ZM . μείζον
 δὲ τὸ ZM τοῦ $KΞ$. μείζον ἄρα καὶ τὸ HZ τοῦ AK .
 10 καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ZH ἴσον τῷ Γ , τὸ δὲ KA τῷ AD .
 τὸ Γ ἄρα μείζον ἐστὶ τοῦ AD . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

2.

Ad libr. X prop. 6.

Ἄλλως τὸ 5'.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ A , B πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχτω,
 ὃν ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Δ . λέγω, ὅτι σύμ-
 15 μετρὰ ἐστὶ τὰ μεγέθη.

Ὅσαι γάρ εἰσιν ἐν τῷ Γ μονάδες, εἰς τοσαῦτα ἴσα
 διηροῦσθω τὸ A , καὶ ἐν ταύταις ἴσον ἔστω τὸ E . ἐστὶν
 ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ ἀριθμὸν, τὸ E πρὸς τὸ A .
 ἐστὶ δὲ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ , τὸ A πρὸς τὸ B .
 20 δι' ἴσον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ , τὸ E
 πρὸς τὸ B . μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Δ . μετρεῖ
 ἄρα καὶ τὸ E τὸ B . μετρεῖ δὲ καὶ τὸ E τὸ A , ἐπεὶ
 καὶ ἡ μονὰς τὸν Γ . τὸ E ἄρα ἐκάτερον τῶν A , B

2. Post δεῖξαι p. 22, 2 BFVb, mg. m. 1 P.

1. AB] $B\Delta$ P. 2. τό] (prius) τῷ B. τῷ] τοῦ b. 3.
 τό] corr. ex τοῦ m. 1 F. 4. μείζον ἐστὶ τὸ MZ b. 5. AK]
 KA in ras. V. 6. HZ] ZH F. τῶν ἐν τῷ MZ] m. 2 V.
 7. τῷ] (alt.) ἴσον τῷ PBFb. EK] E in ras. V. 8. τό]

$\angle B > \angle A$. est autem $\angle A = \angle K$. itaque tota $BA > EK$. uerum $MZ > BA$. itaque multo magis $MZ > EK$. et quoniam $EN = NA = AK$, et $M\Theta = \Theta H = HZ$, et numerus partium rectae MZ numero partium rectae EK aequalis est, erit

$$KA : ZH = KE : ZM$$

[V, 15]. Est autem $ZM > KE$. itaque etiam $HZ > AK$ [V, 14]. et $ZH = \Gamma$, $KA = AD$. ergo $\Gamma > AD$; quod erat demonstrandum.

2.

Ad libr. X prop. 6.

Aliter propositio VI.

Duae enim magnitudines A , B rationem inter se habeant, quam [numerus Γ ad numerum A . dico, magnitudines commensurabiles esse.

A ————— | nam quot sunt in Γ uni-
 B ————— | E ————— | tates, in totidem partes ae-
 Γ ————— | A ————— | quales diuidatur A , et uni-
earum aequalis sit E . itaque
 $1 : \Gamma = E : A$ [V, 15]. uerum etiam $\Gamma : A = A : B$.
itaque ex aequo est [V, 22] $1 : A = E : B$. unitas
autem A metitur. itaque etiam E magnitudinem B
metitur. uerum etiam magnitudinem A metitur E ,
quoniam unitas numerum Γ metitur. itaque E utramque
 A , B metitur. ergo A , B commensurabiles sunt, et

(primum) om. F. KE] corr. ex EK m. 2 V. 10. AD] A V
e corr. 12. $\tau\acute{o}$] $\tau\acute{o}$ $\alpha\upsilon\tau\acute{o}$ F. 15. $\epsilon\lambda\iota\sigma\iota$ F. 18. $\tau\acute{o}\nu$ A PB.
19. $\tau\acute{o}\nu$] $\tau\acute{o}$ FV, om. b. A] B ϕ . $\tau\acute{o}$] $\tau\acute{o}\nu$ B. B] A F.
21. $\tau\acute{o}\nu$ B B. $\kappa\alpha\iota$] om. FV b. A] m. 2 F, seq. $\acute{\alpha}\rho\iota\theta\mu\acute{o}\nu$
corr. ex $\acute{\alpha}\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$. 22. $\mu\epsilon\tau\rho\epsilon\iota$ $\delta\acute{\epsilon}$ — $\acute{\epsilon}\pi\epsilon\iota$] om. PB, $\acute{\epsilon}\mu\epsilon\tau\rho\epsilon\iota$
 $\delta\acute{\epsilon}$ $\kappa\alpha\iota$ $\tau\acute{o}$ A , $\acute{\epsilon}\pi\epsilon\iota$ $\kappa\alpha\iota$ η $\mu\omicron\nu\acute{\alpha}\varsigma$ $\tau\acute{o}\nu$ Γ mg. m. 2 B.

μετρεῖ· τὰ A, B ἄρα σύμμετρά ἐστιν, καὶ ἐστὶν αὐτῶν κοινὸν μέτρον τὸ E · ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

3.

Ad libr. X prop. 9.

Ἄλλως τὸ θ'.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ A τῇ B , λόγον ἔχει,
 5 ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐχέτω, ὃν ὁ Γ πρὸς τὸν
 Δ , καὶ ὁ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν E ποιεῖτω,
 ὁ δὲ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Z ποιεῖτω, ὁ δὲ
 Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν H ποιεῖτω. ἐπεὶ οὖν
 ὁ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν E πεποίηκεν,
 10 τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Z πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα
 ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ , τουτέστιν ὡς ἡ A πρὸς τὴν B ,
 [οὕτως] ὁ E πρὸς τὸν Z . ἀλλ' ὡς ἡ A πρὸς τὴν B ,
 οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν A, B · ἔστιν
 ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν A, B , οὕτως
 15 ὁ E πρὸς τὸν Z . πάλιν, ἐπεὶ ὁ Δ ἑαυτὸν πολλα-
 πλασιάσας τὸν H πεποίηκεν, ὁ δὲ Γ τὸν Δ πολλα-
 πλασιάσας τὸν Z πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς
 τὸν Δ , τουτέστιν ὡς ἡ A πρὸς τὴν B , οὕτως ὁ Z
 πρὸς τὸν H . ἀλλ' ὡς ἡ A πρὸς τὴν B , οὕτως τὸ
 20 ὑπὸ τῶν A, B πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B · ἔστιν ἄρα ὡς τὸ
 ὑπὸ τῶν A, B πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B , οὕτως ὁ Z πρὸς
 τὸν H . ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν A, B ,
 οὕτως ἦν ὁ E πρὸς τὸν Z · δι' ἴσου ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ
 τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B , οὕτως ὁ E πρὸς τὸν H .
 25 ἔστι δὲ ἐκότερος τῶν E, H τετράγωνος· ὁ μὲν γὰρ E

3. Post ἀριθμόν p. 32, 3 B F V b, mg. m. 1 P.

1. ἐστὶν] (prius) ἐστὶ B V, comp. F b. 2. ὅπερ ἔδει δεῖξαι]
 comp. F?, om. B V b. 3. τὸ θ'] om. B. 5. Γ πρὸς τὸν Δ]

communis earum mensura est E ; quod erat demonstrandum.

3.

Ad libr. X prop. 9.

Aliter propositio IX.

Nam quoniam A, B commensurabiles sunt, rationem habent, quam numerus ad numerum [prop. VI]. sit

A -----	$A : B = \Gamma : \Delta$, et Γ se ipsum
B -----	multiplicans efficiat E , Γ autem
Γ -----	numerum Δ multiplicans Z , Δ
Δ -----	autem se ipsum multiplicans H .
E -----	iam quoniam est $\Gamma \times \Gamma = E$,
Z -----	$\Gamma \times \Delta = Z$, erit $\Gamma : \Delta = E : Z$
H -----	[VII, 17], hoc est $E : Z = A : B$.

uerum $A : B = A^2 : A \times B$. itaque

$A^2 : A \times B = E : Z$. rursus quoniam est $\Delta \times \Delta = H$,

$\Gamma \times \Delta = Z$, erit $\Gamma : \Delta = Z : H$ [VII, 17], hoc est

$A : B = Z : H$. uerum $A : B = A \times B : B^2$. itaque

$A \times B : B^2 = Z : H$. erat autem $A^2 : A \times B = E : Z$.

itaque ex aequo [V, 22] $A^2 : B^2 = E : H$. uerum uterque

$\tau\omicron\lambda\alpha$ πρὸς τὸν Δ τέσσαρα F, sed corr. m. 1. 7. ὁ δὲ Γ τὸν] τὸν δὲ BFVb. ποιεῖτω] om. BFb. 9. πεποίηκε b. 10. τὸν] (prius) corr. ex ὅν m. 1 V. 12. οὕτως] om. P. οὕτως — τὴν B] om. B. 20. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ τῶν A, B πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B mg. b. 22. ἀπὸ τῆς A πρὸς τό] m. 2 V (τοῦ pro τῆς). B'', A' F. Deinde del. m. 2 πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B V. 23. Z] mut. in H F. Post ἄρα add. ἔστιν b, m. 2 F. 25. ἔστιν B.

ἀπὸ τοῦ Γ ἐστίν, ὁ δὲ H ἀπὸ τοῦ Δ · τὸ ἀπὸ τῆς A ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἀλλὰ δὴ ἐχέτω τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B
 5 λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ E πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν τὸν H · λέγω, ὅτι σύμμετρος ἐστίν ἡ A τῇ B .

Ἐστω γὰρ τοῦ μὲν E πλευρὰ ὁ Γ , τοῦ δὲ H ὁ Δ , καὶ ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Z ποιεῖτω· οἱ E , Z , H ἄρα ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν
 10 Δ λόγῳ. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν A , B μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν A , B , τῶν δὲ E , H ὁ Z , ἐστίν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν A , B , οὕτως ὁ E πρὸς τὸν Z . ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τῶν A , B πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B , οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν H , ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς A
 15 πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν A , B , οὕτως ἡ A πρὸς τὴν B . αἱ A , B ἄρα σύμμετροί εἰσιν· λόγον γὰρ ἔχουσιν, ὃν ἀριθμὸς ὁ E πρὸς ἀριθμόν τὸν Z , τουτέστιν ὃν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ · ὡς γὰρ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ , ὁ E πρὸς τὸν Z · ὁ γὰρ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν E πεποίηκεν,
 20 τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Z πεποίηκεν· ἐστίν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ , ὁ E πρὸς τὸν Z .

4.

Ad libr. X prop. 10.

Τῇ ἄρα προτεθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ῥητῇ, ἀφ' ἧς ἔφαμεν τὰ μέτρα λαμβάνεσθαι, οἶον τῇ A , προσεύρηται δυνάμει μὲν σύμμετρος ἡ Δ , τουτέστι ῥητὴ δυνάμει μόνον

4. Post ἡ E p. 34, 5 PBFb; mg. m. 1 V, add. κείμενον.

3. ἀριθμός] comp. corr. ex comp. πρὸς m. 1 F. 6. Post B add. μήκει V, m. 2 B. 7. μέν] om. b. ὁ] (prius) ἡ corr. ex ὁ, supra scr. ὁ F; ἡ b. 10. τῶν] corr. ex τό B.

E, H numerus quadratus est; est enim $E = \Gamma^2, H = \Delta^2$. ergo $A^2 : B^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; quod erat demonstrandum.

Iam uero $A^2 : B^2$ rationem habeat, quam numerus quadratus E ad numerum quadratum H . dico, A et B commensurabiles esse.

sit enim Γ latus numeri E , Δ autem numeri H . et sit $\Gamma \times \Delta = Z$. itaque E, Z, H deinceps proportionales sunt in ratione $\Gamma : \Delta$ [VIII, 11]. et quoniam est $A^2 : A \times B = A \times B : B^2$ et $E : Z = Z : H$, erit $A^2 : A \times B = E : Z$. est autem $A \times B : B^2 = Z : H$ et $A^2 : A \times B = A : B$. ergo A, B commensurabiles sunt; rationem enim habent, quam numerus E ad numerum Z [prop. VI], hoc est $\Gamma : \Delta$. nam $\Gamma : \Delta = E : Z$; est enim $\Gamma \times \Gamma = E, \Gamma \times \Delta = Z$ [VII, 17]; quare $\Gamma : \Delta = E : Z$.¹⁾

4.

Ad libr. X prop. 10.

Ergo ad rectam propositam rationalem, unde diximus mensuras sumi [cfr. p. 2, 10 not. crit.], uelut A , inuenta est Δ potentia commensurabilis, hoc est rationalis potentia tantum commensurabilis, irrationalis

1) Hae ambages, ὡς δέ lin. 13 — H lin. 14 et ὡς γάρ lin. 18 — τὸν Z lin. 21, a Gregorio in codd. deesse dicuntur; in meis tamen omnibus leguntur.

11. ἐστὶ] εἰσὶν P. 16. εἰσι V, comp. Fb. γάρ] m. 2 F. 17. ὅν] om. F. 18. Z] e corr. m. 1 b. 19. Post Γ ras. 1 litt. F. πεποίηκε V. 21. οὕτως ὁ E V. Post Z add. ὅπερ ἔδει δεῖξαι FV. 22. προσεθείστη PV. ἔστη] ἔστη- eras., deinde mg. m. rec. κείμενον. προσεύρηται p. 34, 3 — ἡ E p. 34, 5 B addito ὅπερ ἔδει δεῖξαι et deleta reliqua parte propositionis. 23. οἶονεῖ BVb, γρ. οἶόν ἐστιν ἡ A mg. Fb. προσήρηται BFb. 24. μέν] μόνον B, μέν ἡ F.

σύμμετρος, ἄλογος δὲ ἡ *E*. ἀλόγους γὰρ καθόλου καλεῖ τὰς καὶ μήκει καὶ δυνάμει ἀσύμμετρον τῇ ῥητῇ.

5.

Uulgo X, 13.

Εἰς τὸ ιγ' λῆμμα ἐκ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

Ἐὰν ἡ δύο μεγέθη, καὶ τὸ μὲν σύμμετρον ἡ τῷ
5 αὐτῷ, τὸ δὲ ἕτερον ἀσύμμετρον, ἀσύμμετρα ἔσται τὰ
μεγέθη.

Ἔστω γὰρ δύο μεγέθη τὰ *A*, *B*, ἄλλο δὲ τὸ *Γ*,
καὶ τὸ μὲν *A* τῷ *Γ* σύμμετρον ἔστω, τὸ δὲ *B* τῷ *Γ*
ἀσύμμετρον. λέγω, ὅτι καὶ τὸ *A* τῷ *B* ἀσύμμετρον
10 ἔστιν.

Εἰ γάρ ἐστι σύμμετρον τὸ *A* τῷ *B*, ἔστι δὲ καὶ
τὸ *Γ* τῷ *A*, καὶ τὸ *Γ* ἄρα τῷ *B* σύμμετρον ἔστιν.
ὅπερ οὐχ ὑπόκειται.

6.

Ad libr. X prop. 18.

Ῥητὰς γὰρ καλεῖ τὰς τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ ἦτοι μήκει
15 καὶ δυνάμει συμμέτρους ἢ καὶ δυνάμει μόνον. εἰσὶ
δὲ καὶ ἄλλαι εὐθεΐαι, αἱ μήκει μὲν ἀσύμμετροί εἰσι τῇ
ἐκκειμένη ῥητῇ, δυνάμει δὲ μόνον σύμμετροι, καὶ διὰ
τοῦτο πάλιν λέγονται ῥηταὶ καὶ σύμμετροι πρὸς ἀλ-
λήλας, καθ' ὃ ῥηταί, ἀλλὰ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας

5. Post δεῖξαι p. 38, 6 B F V b, mg. m. 2 P. 6. Post
σύμμετρος p. 58, 3 P B F V b.

1. σύμμετρος] om. V, m. rec. P. δέ] γάρ F. 2. Post ῥητῇ
eras. οὕτως P. 3. εἰς τὸ ιγ'] om. F V b. εἰς — ἀπαγωγῆς]
mg. F, ιγ' in ras. B, mg. ἐν ἄλλῳ λῆμμα; in F numerus eras.

4. δύο μεγέθη ἡ F. τῷ αὐτῷ] postea add. F m. 1. 5.
δ' B F b. 8. Γ] (prius) γάμμα F. 11. ἀσύμμετρον F, sed
ἀ- eras. 12. Γ] (prius) corr. ex A V. A] corr. ex Γ V.

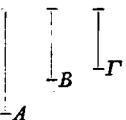
autem E ; irrationales enim omnino uocat rectas rationali incommensurabiles et longitudine et potentia.

5.

Uulgo X, 13.

Ad prop. XIII lemma ex reductione in absurdum.

Si duae magnitudines sunt, et altera commensurabilis, altera incommensurabilis eidem magnitudini est, magnitudines incommensurabiles erunt.

sint enim A, B duae magnitudines,

 alia autem Γ , et A, Γ commensurabiles
 sint, B, Γ autem incommensurabiles. dico,
 etiam A, B incommensurabiles esse.

nam si A, B commensurabiles sunt, et etiam Γ, A commensurabiles sunt, etiam Γ, B commensurabiles sunt [prop. XII]; quod contra hypothesin est.

6.

Ad libr. X prop. 18.

Rationales enim uocat rectas rationali propositae commensurabiles aut longitudine et potentia aut potentia tantum. sunt autem aliae¹⁾ quoque rectae, quae rationali propositae longitudine incommensurabiles sunt, potentia autem tantum commensurabiles; quare rursus uocantur rationales et inter se commensurabiles, quatenus rationales sunt, commensurabiles autem inter se aut longitudine et potentia aut po-

1) Hoc quid sibi uelit, non intellego.

B] A ? P. ἀσύμμετρον F, sed corr. 15. καί] (alt.) om. b.
 16. εἶσιν ἀσύμμετροι F. εἶσιν B.

ἦτοι μήκει δηλαδὴ καὶ δυνάμει ἢ δυνάμει μόνον. καὶ εἰ μὲν μήκει, λέγονται καὶ αὐταὶ ῥηταὶ μήκει σύμμετροι ἐπακουμένον, ὅτι καὶ δυνάμει· εἰ δὲ δυνάμει μόνον πρὸς ἀλλήλας εἰσὶ σύμμετροι, λέγονται καὶ αὐταὶ οὕτως ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. ὅτι δὲ αἱ ῥηταὶ σύμμετροί εἰσιν, ἐντεῦθεν δῆλον· ἐπεὶ γὰρ ῥηταὶ εἰσιν αἱ τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ σύμμετροι, τὰ δὲ τῷ αὐτῷ σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα, αἱ ἄρα ῥηταὶ σύμμετροί εἰσιν.

7.

Ad libr. X prop. 20.

10

Λήμμα.

Ἡ δυναμένη ἄλογον χωρίον ἄλογός ἐστιν.

Δυνάσθω γὰρ ἡ *A* ἄλογον χωρίον, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς *A* τετράγωνον ἴσον ἔστω ἀλόγῳ χωρίῳ. λέγω, ὅτι ἡ *A* ἄλογός ἐστιν.

15

Εἰ γὰρ ἔσται ῥητὴ *η* *A*, ῥητὸν ἔσται καὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον· οὕτως γὰρ [ἐστίν] ἐν τοῖς ὅροις. οὐκ ἔστι δέ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν *η* *A*. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

8.

Ad libr. X prop. 23 corollarium.

Εἰσὶ δὲ πάλιν καὶ ἄλλαι εὐθδεῖται, αἷ μήκει μὲν

7. Post ἐξῆς p. 60, 13 PBFVb. 8. Post σύμμετροι p. 68, 22 PV, mg. m 2 B.

1. καί] (alt.) om. b. 2. ῥηταί] om. V. 3. εἰ] om. b.
5. οὕτως] om. BFVb. Post σύμμετροι del. εἰσιν m. 1 P.
ὅτι — 6. εἰσιν] mg. m. 1 P. 6. ἐντεῦθεν] ἐν- in ras. m.
1 P. δῆλον ἐντεῦθεν F. ἐπεὶ] ὅτι b, mg. m. 1 γρ. ἐπεὶ
γὰρ διὰ τὸ βί' τοῦ ι'. 9. εἰσιν] εἰσι b, εἰσιν· ὅπερ ἔδει
δεῖξαι V. 11. Ἡ] om. V, add. num. β'. ἐστὶ BV, comp.
Fb. 13. ἴσον ἔστω] supra scr. m. 2 V; om. BFb. ἀλόγῳ
χωρίῳ] corr. ex ἄλογον ἔστω V, ἄλογον ἔστω Bb, ἔστω ἄλογον F.

tentia tantum. et si longitudine commensurabiles sunt, et ipsae rationales longitudine commensurabiles uocantur, subaudito, eas potentia quoque commensurabiles esse; sin potentia tantum inter se commensurabiles sunt, et ipsae sic rationales potentia tantum commensurabiles uocantur. rationales autem commensurabiles esse, hinc manifestum est: quoniam enim rationales sunt, quae rationali propositae commensurabiles sunt, et quae eidem commensurabilia sunt, etiam inter se commensurabilia sunt [prop. XII], rectae rationales commensurabiles sunt.

7.

Ad libr. X prop. 20.

Lemma.

Recta spatio irrationali aequalis quadrata irrationalis est.

nam A^2 spatio irrationali sit aequale. dico, A irrationalalem esse.

A |—————| nam si A rationalis est, etiam A^2
 B |————| rationale erit; ita enim in definitio-
 Γ |————| nibus est [def. 4]. at non est. ergo
 A irrationalis est; quod erat demonstrandum.

8.

Ad libr. X prop. 23 coroll.

Sunt autem rursus aliae¹⁾ quoque rectae, quae

1) Sc. praeter rationales, de quibus u. app. nr. 6.

15. $\xi\sigma\tau\alpha\iota$] $\xi\sigma\tau\iota$ V. 16. $\xi\sigma\tau\iota\nu$] om. BFVb. 17. $\xi\sigma\tau\iota\nu$ B.
 $\alpha\rho\alpha$] m. 2 F. η A $\xi\sigma\tau\iota\nu$ BFVb. $\delta\pi\epsilon\rho$ $\xi\delta\epsilon\iota$ $\delta\epsilon\iota\chi\alpha\iota$]
om. B. 18. $\epsilon\lambda\epsilon\gamma$ P. $\epsilon\lambda\epsilon\gamma$ $\delta\epsilon$ — p. 386, 7. $\delta\upsilon\nu\acute{\alpha}\mu\epsilon\iota$ (prius)]
punctis del. V (cfr. p. 69 not. crit.).

ἀσύμμετροί εἰσι τῇ μέσῃ, δυνάμει δὲ μόνον σύμμετροι,
 καὶ λέγονται πάλιν μέσαι διὰ τὸ σύμμετροι εἶναι δυ-
 νάμει τῇ μέσῃ καὶ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας, καθὸ
 μέσαι, ἀλλὰ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας ἦτοι μήκει δηλαδὴ
 5 καὶ δυνάμει ἢ δυνάμει μόνον. καὶ εἰ μὲν μήκει, λέ-
 γονται καὶ αὗται μέσαι μήκει σύμμετροι ἐπομένον τοῦ,
 ὅτι καὶ δυνάμει· εἰ δὲ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι,
 λέγονται καὶ οὕτως μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι.
 Ὅτι δὲ αἱ μέσαι σύμμετροί εἰσιν, οὕτως δεικτέον.
 10 ἐπεὶ αἱ μέσαι μέσῃ τινὶ σύμμετροί εἰσιν, τὰ δὲ τῷ
 αὐτῷ σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα, αἱ ἄρα
 μέσαι σύμμετροί εἰσιν.

9.

Ad libr. X prop. 27.

Λήμμα.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων ἐν λόγῳ ὁποιοῦν καὶ
 15 ἄλλον τινὸς δέον ποιῆσαι ὥς τὸν ἀριθμὸν πρὸς τὸν
 ἀριθμὸν οὕτως τοῦτον πρὸς ἄλλον τινά.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ AB , $\Gamma\Delta$
 λόγον ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους ὁποιοῦν, ἄλλος δέ τις
 ὁ ΓE . δεῖ ποιῆσαι τὸ προκείμενον.

20 Ἀναγεγράφθω γὰρ ὑπὸ τῶν $\Delta\Gamma$, ΓE παραλληλό-
 γραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΔE , καὶ τῷ ΔE ἴσον παρὰ
 τὸν AB παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον τὸ BZ
 πλάτος ποιοῦν τὴν AZ . ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΔE

9. Post δεῖξαι p. 78, 13 V.

1. εἰσιν P. 9. ὅτι — 12. εἰσιν] etiam in mg. sup. m.
 rec. B. 10. εἰσι BV. 13 λήμμα] m. 2 V.

mediae longitudine incommensurabiles sunt, potentia autem tantum commensurabiles, et rursus mediae uocantur, quia mediae commensurabiles sunt potentia, et inter se commensurabiles, quatenus mediae sunt, commensurabiles autem inter se aut longitudine et potentia aut potentia tantum. et si longitudine commensurabiles sunt, et ipsae mediae longitudine commensurabiles uocantur, cum per se sequatur, eas potentia quoque commensurabiles esse; sin potentia tantum commensurabiles sunt, sic quoque mediae uocantur potentia tantum commensurabiles.

Medias autem commensurabiles esse, sic demonstrandum: quoniam mediae alicui mediae commensurabiles sunt, et quae eidem commensurabilia sunt, inter se quoque commensurabilia sunt [prop. XII], mediae sunt commensurabiles.

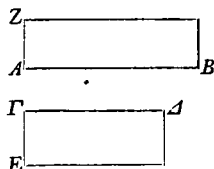
9.

Ad libr. X prop. 27.

Lemma.

Datis duobus numeris in quavis ratione et alio quodam numero oportet efficere, ut sit, ut numerus ad numerum, ita hic ad alium quendam.

Sint AB , ΓA numeri dati rationem quamvis inter se habentes, alius autem aliquis ΓE . oportet efficere, quod propositum est.



describatur enim parallelogrammum rectangulum $\Delta E = \Delta \Gamma \times \Gamma E$, et spatio ΔE aequale rectae AB adplicetur parallelogrammum BZ latitudinem efficiens AZ . iam

παράλληλόγραμμον τῷ BZ παραλληλογράμῳ, ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ἰσογώνιον, τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἀνάλογον ἄρα ἔστιν ὡς ὁ AB πρὸς τὸν $\Gamma\Delta$, οὕτως ὁ ΓE πρὸς τὸν AZ . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10.

Ad libr. X prop. 29.

Λήμμα εἰς τὸ κθ'.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων καὶ εὐθείας δέον ποιῆσαι ὡς τὸν ἀριθμὸν πρὸς τὸν ἀριθμόν, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς εὐθείας τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπ' ἄλλης τινός.

- 10 Ἐστῶσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ A, B , εὐθεῖα δὲ ἡ Γ , καὶ δέον ἔστι ποιῆσαι τὸ προκείμενον. πεποιήσθω γὰρ ὡς ὁ A πρὸς τὸν B , ἡ Γ εὐθεῖα πρὸς ἄλλην τινὰ τὴν Δ , καὶ εἰλήφθω τῶν Γ, Δ μέση ἀνάλογον ἡ E . ἐπεὶ οὖν ἔστιν ὡς ὁ A πρὸς τὸν B ,
 15 ἡ Γ εὐθεῖα πρὸς τὴν Δ , ἀλλ' ὡς ἡ Γ πρὸς τὴν Δ , τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς E , ὡς ἄρα ὁ A πρὸς τὸν B , τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς E τετράγωνον.

11.

Ad libr. X prop. 31.

Λήμμα εἰς τὸ λα'.

- Ἐὰν ὧσι δύο εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινί, ἔσται ὡς ἡ
 20 εὐθεῖα πρὸς τὴν εὐθεῖαν, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν δύο πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐλαχίστης.

Ἐστῶσαν δὴ δύο εὐθεῖαι αἱ $AB, B\Gamma$ ἐν λόγῳ τινί λέγω, ὅτι ἔστιν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $B\Gamma$, οὕτως τὸ

10. Post prop. XXIX p. 88, 18 V. 11. Post prop. XXXI p. 92, 24 V.

4. AB] e corr. V.

quoniam $\angle E = BZ$, et eadem aequiangulara sunt, et parallelogrammorum aequalium et aequiangulorum latera angulos aequales comprehendunt in contraria proportionem sunt [VI, 14], erit $AB : \Gamma A = \Gamma E : AZ$; quod erat demonstrandum.

10.

Ad libr. X prop. 29.

Lemma ad prop. XXIX.

Datis duobus numeris et recta oportet efficere, ut sit, ut numerus ad numerum, ita quadratum rectae ad quadratum alius alicuius rectae.

Sint duo numeri dati A, B , recta autem Γ ; et oportet efficere, quod propositum est. fiat enim $A : B = \Gamma : \Delta$ [prop. VI coroll.], et rectarum Γ, Δ media proportionalis sumatur E [VI, 13]. iam quoniam est $A : B = \Gamma : \Delta$, $\Gamma : \Delta = \Gamma^2 : E^2$ [V def. 9], erit $A : B = \Gamma^2 : E^2$.

11.

Ad libr. X prop. 31.

Lemma ad prop. XXXI.

Si duae rectae in ratione aliqua sunt, erit ut recta ad rectam, ita rectangulum duarum rectarum ad quadratum minimae.

Duae igitur rectae $AB, B\Gamma$ in ratione aliqua sint. dico, esse $AB : B\Gamma = AB \times B\Gamma : B\Gamma^2$. describatur

ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Gamma$. ἀναγεγράφθω
 γὰρ ἀπὸ τῆς $B\Gamma$ τετραγώνον τὸ $B\Delta E\Gamma$, καὶ συμ-
 πεπληρώσθω τὸ $A\Delta$ παραλληλόγραμμον. φανερόν δὴ,
 ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $B\Gamma$, οὕτως τὸ $A\Delta$
 5 παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ BE παραλληλόγραμμον.
 καὶ ἐστὶ τὸ μὲν $A\Delta$ τὸ ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$. ἴση γὰρ
 ὁ $B\Gamma$ τῇ $B\Delta$. τὸ δὲ BE τὸ ἀπὸ τῆς $B\Gamma$. ὡς ἄρα ἡ
 AB πρὸς τὴν $B\Gamma$, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ πρὸς
 τὸ ἀπὸ τῆς $B\Gamma$. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

12.

Ad libr. X prop. 32.

10

 $A\eta\mu\mu\alpha$ εἰς τὸ $\lambda\beta'$.

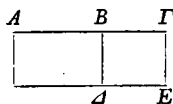
Ἐὰν ὥσι τρεῖς εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινί, ἔσται ὡς ἡ
 πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς πρώτης καὶ
 μέσης πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς μέσης καὶ ἐλαχίστης.

Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινὶ αἱ AB , $B\Gamma$,
 15 $\Gamma\Delta$. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως
 τὸ ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$.

Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ A σημείου τῇ AB πρὸς ὀρθὰς
 ἡ AE , καὶ κείσθω τῇ $B\Gamma$ ἴση ἡ AE , καὶ διὰ τοῦ
 E σημείου τῇ $A\Delta$ εὐθείᾳ παράλληλος ἦχθω ἡ EK ,
 20 διὰ δὲ τῶν B , Γ , Δ σημείων τῇ AE παράλληλοι ἦχ-
 θωσαν αἱ ZB , $\Gamma\Theta$, ΔK . καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ AB
 πρὸς τὴν $B\Gamma$, οὕτως τὸ AZ παραλληλόγραμμον πρὸς
 τὸ $B\Theta$ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$,
 οὕτως τὸ $B\Theta$ πρὸς τὴν ΓK , δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ AB
 25 πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως τὸ AZ παραλληλόγραμμον πρὸς

12. Post prop. XXXII p. 96, 8 V, mg. m. rec. B.

3. Post $A\Delta$ ins. Γ m. 1 V. 4. $A\Delta$] A eras. V. 7. τῆς]
 in ras. V. $B\Gamma$] Γ e corr. V. 12. τὸ ὑπὸ] in ras. V.



enim in $B\Gamma$ quadratum $B\Delta E\Gamma$, et expleatur parallelogrammum $A\Delta$. manifestum igitur est, esse

$$AB : B\Gamma = A\Delta : BE \text{ [VI, 1].}$$

et est $A\Delta = AB \times B\Gamma$ (nam $B\Gamma = B\Delta$), $BE = B\Gamma^2$. itaque erit $AB : B\Gamma = AB \times B\Gamma : B\Gamma^2$; quod erat demonstrandum.

12.

Ad libr. X prop. 32.

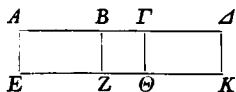
Lemma ad prop. XXXII.

Si tres rectae in ratione aliqua sunt, erit ut prima ad tertiam, ita rectangulum primae ac mediae ad rectangulum mediae ac minimae.

Tres rectae AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ in ratione aliqua sint. dico, esse

$$AB : \Gamma\Delta = AB \times B\Gamma : B\Gamma \times \Gamma\Delta.$$

ducatur enim ab A puncto ad AB perpendicularis AE , et ponatur $AE = B\Gamma$, et per E punctum rectae



$A\Delta$ parallela ducatur EK , per puncta autem B , Γ , Δ rectae AE parallelae ducantur ZB , $\Gamma\Theta$, ΔK . et quoniam est $AB : B\Gamma = AZ : B\Theta$

[VI, 1], et $B\Gamma : \Gamma\Delta = B\Theta : \Gamma K$ [VI, 1], ex aequo erit

τὸ ΓΚ παραλληλόγραμμον. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΑΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἴση γὰρ ἡ ΑΕ τῇ ΒΓ· τὸ δὲ ΓΚ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ· ἴση γὰρ ἡ ΒΓ τῇ ΓΘ.

Ἐὰν ἄρα τρεῖς ὥσιν εὐθείαι ἐν λόγῳ τινί, ἔσται
5 ὥς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς πρώτης καὶ μέσης πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς μέσης καὶ τρίτης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

13.

Ad libr. X prop. 32 lemma.

Ἡ καὶ ὅτι, ἐὰν ἀναγράψωμεν τὸ ΕΓ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον καὶ συμπληρώσωμεν τὸ ΑΖ, ἴσον
10 ἔσται τὸ ΕΓ τῷ ΑΖ· ἐκότερον γὰρ αὐτῶν διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΕΓ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ, τὸ δὲ ΑΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ.

14.

Ad libr. X prop. 33.

Αἴημα εἰς τὸ λγ'.

15 Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄνισα, ἔσται ὥς ἡ εὐθεῖα πρὸς τὴν εὐθείαν, οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς μείζονος πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς ἐλάττονος.

Εὐθεῖα γὰρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω εἰς ἄνισα κατὰ τὸ Ε· λέγω, ὅτι ὥς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως τὸ
20 ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΓΔΒ, καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΑΓ, ΒΔ

13. Inter ΑΓ et ὅπερ p. 98, 15 PBFVb. 14. Post prop. XXXIII p. 102, 4 V, mg. m. rec. B.

3. ΓΔ] Δ in ras. V. 5. πρὸς — 7. δεῖξαι] καὶ ἐξῆς B.
8. ἡ] om. FV. καί] καὶ ἦται b. 9. συμπληρώσωμεν P,
corr. m. 2. 10. τό] corr. ex. τῷ V. 11. ΕΓ] e corr. V.

$AB: \Gamma A = AZ: \Gamma K$ [V, 22]. et $AZ = AB \times B\Gamma$ (nam $AE = B\Gamma$), $\Gamma K = B\Gamma \times \Gamma A$ (nam $B\Gamma = \Gamma \Theta$). ergo si tres rectae in ratione aliqua sunt, erit ut prima ad tertiam, ita rectangulum primae ac mediae ad rectangulum mediae ac tertiae; quod erat demonstrandum.¹⁾

13.

Ad libr. X prop. 32 lemma.

Uel etiam quod, si rectangulum $E\Gamma$ descripserimus, et AZ expleuerimus [u. fig. p. 97], erit $E\Gamma = AZ$; nam utrumque $= 2 AB\Gamma$ [I, 41]. et $E\Gamma = B\Gamma \times A\Delta$, $AZ = BA \times A\Gamma$. ergo est

$$B\Gamma \times A\Delta = BA \times A\Gamma.$$

14.

Ad libr. X prop. 33.

Lemma ad prop. XXXIII.

Si recta in partes inaequales secatur, erit ut recta ad rectam, ita rectangulum totius ac maioris ad rectangulum totius ac minoris.

Recta enim AB in E in partes inaequales secetur. dico, esse

$$AE: EB = BA \times AE: AB \times BE.$$

describatur enim in AB quadratum $A\Gamma\Delta B$, et per punctum E alterutri rectarum $A\Gamma$, $B\Delta$ paral-

1) In B in pag. seq. figura est nostrae similis, nisi quod litterae A , E omissae sunt, et pro B est Θ ; adduntur numeri quidam et $\sigma\chi\eta\mu\alpha$ τοῦ $\lambda\eta\mu\mu\alpha\tau\omicron\varsigma$ τοῦ $\pi\rho\omicron\gamma\rho\alpha\phi\acute{\epsilon}\nu\tau\omicron\varsigma$, omnia m. rec. in textu prop. 32 (ad καὶ ἐπεὶ p. 94, 11) signo quodam ad hoc lemma reuocamur.

τό] τῷ b. 12. τῶν] (prius) om. P. τό] (sec.) τῷ b. 14.
 εἰς τὸ λγ'] πρὸ τοῦ λδ' postea add. B. 16. ἔσται] in ras. V.
 18. τις ἤ] e corr. V m. 2.

παράλληλος ἤχθω ἡ EZ . φανερόν οὖν, ὅτι ὡς ἡ AE
 πρὸς τὴν EB , οὕτως τὸ AZ παραλληλόγραμμον πρὸς
 τὸ ZB παραλληλόγραμμον. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν AZ τὸ
 ὑπὸ τῶν BA, AE . ἴση γὰρ ἡ AG τῇ AB . τὸ δὲ ZB
 5 τὸ ὑπὸ τῶν AB, BE . ἴση γὰρ ἡ BD τῇ AB . ὡς ἄρα
 ἡ AE πρὸς τὴν EB , οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν BA, AE
 πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AB, BE . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15.

Ad libr. X prop. 34.

Λήμμα.

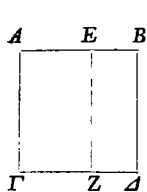
Ἐὰν ὥσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τμηθῇ δὲ ἡ ἐλαχίστη
 10 αὐτῶν εἰς ἴσα, τὸ ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν διπλάσιον
 ἔσται τοῦ τῆς μείζονος καὶ τῆς ἡμισείας τῆς ἐλαχίστης.

Ἐστωσάν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ AB, BG , ὧν μείζων
 ἔστω ἡ AB , καὶ τετμήσθω ἡ BG δίχα κατὰ τὸ Δ .
 λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν AB, BG διπλάσιόν ἐστι τοῦ
 15 ὑπὸ τῶν AB, BD .

Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ B σημεῖον τῇ BG πρὸς ὀρθὰς
 ἡ BE , καὶ κείσθω τῇ BA ἴση ἡ BE , καὶ κατα-
 γεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς
 τὴν AG , οὕτως τὸ BZ πρὸς τὸ AH , συνθέντι ἄρα
 20 ὡς ἡ BG πρὸς τὴν AG , οὕτως τὸ BH πρὸς τὸ AH .
 διπλασίον δὲ ἐστὶν ἡ BG τῆς AG . διπλάσιον ἄρα
 ἐστὶ καὶ τὸ BH τοῦ AH . καὶ ἐστὶ το μὲν BH τὸ
 ὑπὸ τῶν AB, BG . ἴση γὰρ ἡ AB τῇ BE . τὸ δὲ
 AH τὸ ὑπὸ τῶν AB, BD . ἴση γὰρ τῇ μὲν BD ἡ AG ,
 25 τῇ δὲ AB ἡ AD . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15. Post prop. XXXIV p. 104, 9 V, mg. m. rec. B (uix
 legi potest).

4. ZB] BZ B. 5. τῶν] om. V. AB] (prius) e corr. V.
 8. λήμμα προγραφόμενον B. 19. τήν] om. V. 21. ΔG] $\Gamma \Delta$ B.



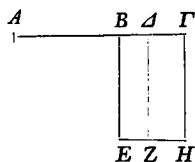
lela ducatur EZ . manifestum igitur est, esse $AE:EB = AZ:ZB$ [VI, 1]. et $AZ = BA \times AE$ (nam $A\Gamma = AB$), $ZB = AB \times BE$ (nam $AB = AB$). itaque erit $AE:EB = BA \times AE:AB \times BE$; quod erat demonstrandum.

15.

Ad libr. X prop. 34.

Lemma.

Si sunt duae rectae inaequales, et minor in partes aequales secatur, rectangulum duarum rectarum duplo maius erit rectangulo maioris et dimidia minoris.



Sint duae rectae inaequales AB , $B\Gamma$, quarum maior sit AB , et $B\Gamma$ in duas partes aequales secetur in Δ . dico, esse $AB \times B\Gamma = 2 AB \times B\Delta$.

ducatur enim a puncto B ad $B\Gamma$ perpendicularis BE , et ponatur $BE = BA$, et describatur figura. iam quoniam est $\Delta B:\Delta\Gamma = BZ:\Delta H$ [VI, 1], componendo [V, 18] erit $B\Gamma:\Delta\Gamma = BH:\Delta H$. uerum $B\Gamma = 2\Delta\Gamma$. itaque etiam $BH = 2\Delta H$. et $BH = AB \times B\Gamma$ (nam $AB = BE$), $\Delta H = AB \times B\Delta$ (nam $B\Delta = \Delta\Gamma$, $AB = \Delta Z$); quod erat demonstrandum.

16.

Ad libr. X prop. 36.

Ἐκάλεσε δὲ αὐτὴν ἐκ δύο ὀνομάτων διὰ τὸ ἐκ
 δύο ρητῶν αὐτὴν συγκεῖσθαι κύριον ὄνομα καλῶν
 τὸ ρητόν, καθ' ὃ ρητόν.

17.

Ad libr. X prop. 37.

Ἐκάλεσε δὲ αὐτὴν ἐκ δύο μέσων πρώτην διὰ τὸ
 5 ρητόν περιέχειν καὶ προτερεῖν τὸ ρητόν.

18.

Ad libr. X prop. 38.

Ἐκάλεσε δὲ αὐτὴν ἐκ δύο μέσων δευτέραν διὰ το
 μέσον περιέχειν τὸ ὑπ' αὐτῶν καὶ μὴ ρητόν, δευ-
 τερεύειν δὲ τὸ μέσον τοῦ ρητοῦ. ὅτι δὲ τὸ ὑπὸ ρητῆς
 καὶ ἀλόγου περιεχόμενον ἄλογόν ἐστιν, δῆλον. εἰ γὰρ
 10 ἔσται ρητόν καὶ παραβέβληται παρὰ ρητὴν, εἴη ἂν καὶ
 ἡ ἑτέρα αὐτοῦ πλευρὰ ρητὴ. ἀλλὰ καὶ ἄλογος ὅπερ
 ἄτοπον. τὸ ἄρα ὑπὸ ρητῆς καὶ ἀλόγου ἄλογόν ἐστιν.

19.

Ad libr. X prop. 39.

Ἐκάλεσε δὲ αὐτὴν μείζονα διὰ τὸ τὰ ἀπὸ τῶν AB,
 BΓ ρητὰ μείζονα εἶναι τοῦ δις ὑπὸ τῶν AB, BΓ
 15 μέσου, καὶ δέον εἶναι ἀπὸ τῆς τῶν ρητῶν οἰκειότητος

16. Inter ὀνομάτων et ὅπερ p. 108, 15 PBFb. 17. Inter
 πρώτη et ὅπερ p. 110, 8 PBFb. 18. Inter δευτέρα et ὅπερ
 p. 114, 2 PBFb, pro scholio V m. 1. 19. Inter μείζων et
 ὅπερ p. 114, 22 PBFb, mg. V.

1. ἐκάλεσεν PBF. 2. ρητῶν] ὀνομάτων F. συγκεῖσθαι]
 καλεῖσθαι F (sed corr. mg.). 4. ἐκάλεσεν PBF. 5. πρω-

16.

Ad libr. X prop. 36.

Uocauit autem eam ex duobus nominibus, quia ex duabus rationalibus composita est, proprie rationale, quatenus rationale est, nomen uocans.

17.

Ad libr. X prop. 37.

Uocauit autem eam ex duabus mediis primam, quia spatium rationale comprehendunt, et rationale principatum habet.

18.

Ad libr. X prop. 38.

Uocauit autem eam ex duabus mediis secundam, quia medium comprehendunt rectangulum, et medium rationali postpōnitur.

Spatium autem rectis rationali et irrationali comprehensum irrationale esse, adparet. nam si rationale est et rectae rationali adplicatum est, etiam alterum eius latus rationale est [prop. XX]. at idem irrationale est; quod absurdum est. ergo spatium rectis rationali et irrationali comprehensum irrationale est.

19.

Ad libr. X prop. 39.

Uocauit autem eam maiorem, quia rationalia $AB^2 + B\Gamma^2$ maiora sunt medio $2AB \times B\Gamma$, et

τερεύειν F. 6. ἐκάλεσεν PBF. τό] τὸ τό FV. 8. δέ]
(prius) om. V. 9. ἐστὶ BV, comp. Fb. 11. πλευρὰ αὐτοῦ F.
13. ἐκάλεσεν PBF. 15. μέσων PBFb.

τὴν ὀνομασίαν τάττεσθαι. ὅτι δὲ μείζονά ἐστι τὰ ἀπο
τῶν $AB, B\Gamma$ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $AB, B\Gamma$, οὕτως δεικτέον.

Φανερόν μὲν οὖν, ὅτι ἄνισοί εἰσιν αἱ $AB, B\Gamma$.
εἰ γὰρ ἦσαν ἴσαι, ἴσα ἂν ἦν καὶ τὰ ἀπὸ τῶν $AB, B\Gamma$
5 τῷ δις ὑπὸ τῶν $AB, B\Gamma$, καὶ ἦν ἂν καὶ τὸ ὑπὸ τῶν
 $AB, B\Gamma$ ῥητόν· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· ἄνισοι ἄρα εἰσιν
αἱ $AB, B\Gamma$. ὑποκείσθω μείζων ἡ AB , καὶ κείσθω
τῇ $B\Gamma$ ἴση ἡ $B\Delta$. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $AB, B\Delta$ ἴσα ἐστὶ
τῷ τε δις ὑπὸ τῶν $AB, B\Delta$ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔA .
10 ἴση δὲ ἡ ΔB τῇ $B\Gamma$. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $AB, B\Gamma$ ἴσα
ἐστὶ τῷ τε δις ὑπὸ τῶν $AB, B\Gamma$ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς
 ΔA . ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν $AB, B\Gamma$ μείζονα εἶναι τοῦ
δις ὑπὸ τῶν $AB, B\Gamma$ τῷ ἀπὸ ΔA .

20.

Ad libr. X prop. 40.

Ῥητόν δὲ καὶ μέσον δυναμένη καλεῖται αὕτη διὰ
15 τὸ δύνασθαι δύο χωρία, τὸ μὲν ῥητόν, τὸ δὲ μέσον·
καὶ διὰ τὴν τοῦ ῥητοῦ προύπαρξιν πρῶτον ἐκάλεσεν.

21.

Ad libr. X prop. 41.

Καλεῖ δὲ αὐτὴν δύο μέσα δυναμένην διὰ το δύ-
νασθαι αὐτὴν δύο μέσα χωρία τό τε συγκείμενον ἐκ
τῶν ἀπὸ τῶν $AB, B\Gamma$ καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν $AB, B\Gamma$.

20. Inter δυναμένη et ὅπερ p. 116, 13 PBFb, mg. V.

21. Inter δυναμένη et ὅπερ p. 118, 17 PBFVb.

1. δέ] δὲ καὶ P. ἀπό] corr. ex ὑπό m. 2 F. 2. οὕτω
BVb. 3. οὖν] οὖν ἐστίν F. 8. ἀπό] ὑπό V. BΔ] corr.
ex BΓ V. 9. ἀπό] ὑπό F. τῆς] τῶν F, om. Bb. ΔA]

oportet nomen a proprietate rationalium dari. esse autem $AB^2 + B\Gamma^2 > 2 AB \times B\Gamma$, sic demonstrandum est.

iam manifestum est, AB , $B\Gamma$ inaequales esse. nam si aequales essent, esset etiam $AB^2 + B\Gamma^2 = 2 AB \times B\Gamma$, et $AB \times B\Gamma$ et ipsum rationale esset; quod contra hypothesin est. supponatur $AB > B\Gamma$, et ponatur $B\Delta = B\Gamma$. itaque $AB^2 + B\Delta^2 = 2 AB \times B\Delta + \Delta A^2$ [II, 7]. uerum $\Delta B = B\Gamma$. itaque

$$AB^2 + B\Gamma^2 = 2 AB \times B\Gamma + \Delta A^2.$$

ergo $AB^2 + B\Gamma^2$ excedit $2 AB \times B\Gamma$ quadrato ΔA^2 .

20.

Ad libr. X prop. 40.

Spatio autem rationali ac medio aequalis quadrata uocatur haec, quia quadrata duobus spatiis aequalis est, alteri rationali, alteri medio, et propter principatum rationalis primum hoc nominauit.

21.

Ad libr. X prop. 41.

Uocat autem eam duobus spatiis mediis aequalem quadratam, quia duobus spatiis mediis quadrata est aequalis, $AB^2 + B\Gamma^2$ et $2 AB \times B\Gamma$ [u. fig. p. 119].

$A\Delta$ P. 10. ἀπό] ὑπό F. ἴσα — 12. $A\Delta$] m. 2 V. 11. ἀπό] corr. ex ὑπό m. 2 F. 12. τά] τό F. εἶναι] ἐστι BFVb. 13. ἀπό] corr. ex ὑπό m. 2 F. ΔA] τῆς ΔA b et corr. ex τῶν ΔA F. 14. ῥητόν — αὐτῇ] καλεῖται δὲ αὐτῇ? V. δυναμένην BFb, et P, corr. m. 2. καλεῖται αὐτῇ] αὐτὴν καλεῖ BFb. 16. τήν] τόν V. Post πρῶτον add. τὸ ῥητόν BFb, m. rec. P. ἐκάλεσε V. 17. καλεῖ — δυναμένην] om. V. 19. ἀπὸ τῶν] om. V. τό] τοῦ P.

22.

Ad libr. X deff. alt.

Ἐξ οὖν οὐσῶν τῶν οὕτως καταλαμβανομένων εὐ-
 θειῶν τάττει πρώτας τῇ τάξει τρεῖς, ἐφ' ὧν ἡ μείζων
 τῆς ἐλάσσονος μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῇ,
 δευτέρας δὲ τῇ τάξει τὰς λοιπὰς τρεῖς, ἐφ' ὧν τῷ ἀπὸ
 5 ἀσυμμέτρου, διὰ τὸ προτερεῖν τὸ σύμμετρον τοῦ ἀσυμ-
 μέτρου· καὶ ἔτι πρώτην μέν, ἐφ' ἧς τὸ μείζον ὄνομα
 σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, δευτέραν δέ, ἐφ'
 ἧς τὸ ἐλασσον, διὰ τὸ πάλιν προτερεῖν τὸ μείζον τοῦ
 ἐλάσσονος τῷ ἐμπεριέχειν τὸ ἐλασσον, τρίτην δέ, ἐφ'
 10 ὧν μηδέτερον τῶν ὀνομάτων σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκ-
 κειμένῃ ῥητῇ. καὶ ἐπὶ τῶν ἐξῆς τριῶν ὁμοίως τὴν
 πρώτην τῆς εἰρημένης δευτέρας τάξεως τετάρτην καλῶν
 καὶ τὴν δευτέραν πέμπτην καὶ τὴν τρίτην ἕκτην.

23.

Ad libr. X prop. 90.

Ἔστι δὲ καὶ συντομώτερον δεῖξαι τὴν εὕρεσιν τῶν
 15 εἰρημένων ἐξ ἀποτομῶν. καὶ δὴ ἔστω εὕρεῖν τὴν
 πρώτην. ἐκκείσθω ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτη ἡ $ΑΓ$,
 ἧς μείζον ὄνομα ἡ $ΑΒ$, καὶ τῇ $ΒΓ$ ἴση κείσθω ἡ $ΒΔ$.
 αἱ $ΑΒ$, $ΒΓ$ ἄρα, τουτέστιν αἱ $ΑΒ$, $ΒΔ$, ῥηταί εἰσι
 δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ $ΑΒ$ τῆς $ΒΓ$, τουτ-
 20 ἐστι τῆς $ΒΔ$, μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῇ,

22. Post ἕκτη p. 136, 19 PBFb; mg. V, sed add. κείμενον.

23. Post δεῖξαι p. 274, 15 PBFVb.

1. οὖν] m. 2 F. οὕτω Bfb. 3. Ante συμμετρου ras.
 1 litt. B. 4. τῷ] mut. in τό m. rec. P, corr. ex τό F, τό b.
 5. ἀσυμμέτρου] ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ V. ἀσυμμέτρου] συμμετρου V.
 6. πρώτη B, sed corr. m. 1. 7. δεύτερον P, corr. m. rec. 8.
 ἔλαττον Bb, comp. F. 9. ἐλάττονος Bb, comp. F. τῷ] e corr. V.

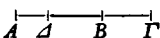
22.

Ad libr. X deff. alt.

Cum igitur rectae ita inuentae sex sint, ordine primas tres ponit, in quibus maior quadrata minorem excedit quadrato rectae sibi commensurabilis, secundas autem ordine tres reliquas, in quibus quadrato rectae sibi incommensurabilis excedit, quia commensurabile antecedit incommensurabile; et praeterea primam, in qua maius nomen rationali propositae commensurabile est, secundam autem, in qua minus, quia rursus maius antecedit minus, quia minus comprehendit; tertiam autem, in qua neutrum nomen rationali propositae commensurabile est. et in sequentibus tribus similiter, primam secundae classis, quam nominauimus, quartam uocans, secundam quintam, tertiam sextam.

23.

Ad libr. X prop. 90.

Licet autem breuius quoque inuentionem sex apotomarum, quas diximus, demonstrare. sit enim propositum primam inuenire. ponatur AG  recta ex duobus nominibus prima, cuius maius nomen sit AB , et ponatur $BA = BG$. itaque AB , BG , hoc est AB , BA , rationales sunt potentia tantum commensurabiles [prop. XXXVI], et AB^2 excedit BG^2 , hoc est BA^2 , quadrato rectae sibi commensurabilis, et AB rationali propositae commensu-

10. ἐστὶ σύμμετρον BFb. 11. ἐπὶ] corr. ex ἐπεὶ V. 14. $\alpha\alpha'$ BVb. ἐστὶν B. εὐρησιν FV? 15. ξξ] om. b.
16. ἡ] (prius) om. PV. 17. ἐκκελεσθω V. 18. εἰσιν B.

καὶ ἡ AB σύμμετρος ἐστὶ τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ μήκει· ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἐστὶν ἡ AA . ὁμοίως δὴ καὶ τὰς λοιπὰς ἀποτομὰς εὐρήσομεν ἐκθέμενοι τὰς ἰσαριθμούς ἐκ δύο ὀνομάτων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

24.

Ad libr. X prop. 115.

5

Ἄλλως.

Ἐστω μέση ἡ AG · λέγω, ὅτι ἀπὸ τῆς AG ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾶ τῶν πρότερον ἡ αὐτή.

- Ἦχθω τῇ AG πρὸς ὀρθὰς ἡ AB , καὶ ἔστω ῥητὴ
 10 ἡ AB , καὶ συμπληρώσθω τὸ $BΓ$ · ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ $BΓ$, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν. δυνάσθω αὐτὸ ἡ $ΓΔ$ · ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ $ΓΔ$. καὶ οὐδεμιᾶ τῶν πρότερον ἡ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ μέσην.
 15 πάλιν συμπληρώσθω τὸ $ΕΔ$ · ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΕΔ$, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν. δυνάσθω αὐτὸ ἡ $ΔΖ$ · ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ $ΔΖ$. καὶ οὐδεμιᾶ τῶν πρότερον ἡ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν $ΓΔ$.
 20 Ἀπὸ μέσης ἄρα ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾶ τῶν πρότερον ἡ αὐτή ἐστὶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

24. Post δεῖξαι p. 370, 23 PBFVb.

3. ἐκθέμενοι] ν e corr. P.	τάς] om. V.	ἰσαριθμούς B.
4. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. BFVb, comp. P.	οὐδεμία] om. PFV.	7. γίνονται V.
8. ἡ] ἐστὶν ἡ B.	10. ἄλογον] in	11. ἐστὶ P B V,
ras. φ. ἄλογον — 11. B Γ] mg. m. 1 P.		

rabilis est [deff. alt. 1]. ergo AA apotome est prima. similiter igitur reliquas quoque apotomas inueniemus expositis rectis ex duobus nominibus eiusdem numeri; quod erat demonstrandum.

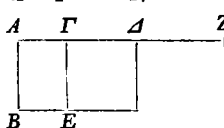
24.

Ad libr. X prop. 115.

Aliter.

Sit AF media. dico, ab AF irrationales infinitas numero oriri, et nullam ulli priorum similem esse.

Ducatur AB ad AF perpendicularis, et rationalis sit AB , et expleatur BF . itaque BF irrationale est [prop. XX], et recta ei aequalis quadrata irrationalis



est. sit $\Gamma\Delta^2 = BF$. itaque $\Gamma\Delta$ irrationalis est. nec ulli priorum similis est. neque enim ullius priorum quadratum rectae rationali ad-

plicatum latitudinem efficit mediam. rursus expleatur $E\Delta$. itaque $E\Delta$ irrationale est [prop. XX], et recta ei aequalis quadrata irrationalis est. sit $\Delta Z^2 = E\Delta$. itaque ΔZ irrationalis est. nec ulli priorum similis est. neque enim ullius priorum quadratum rationali adplicatum latitudinem efficit $\Gamma\Delta$.

Ergo a media irrationales numero infinitae oriuntur, et nulla ulli priorum similis est; quod erat demonstrandum.

comp. Fb. 16. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$] comp. Fb, $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ PBV. 20. $\alpha\pi\omicron\tau\eta\varsigma$
 Bb, $\tau\eta\varsigma$ add. m. 2 F. $\gamma\acute{\iota}\gamma\nu\nu\nu\nu\tau\alpha\iota$ B. $\omicron\upsilon\delta\epsilon\mu\iota\alpha$] om. PFVb.
 21. $\omicron\upsilon\delta\epsilon\mu\iota\alpha\nu$ φ . $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ $\delta\pi\epsilon\rho$ $\acute{\epsilon}\delta\epsilon\iota$ $\delta\epsilon\iota\acute{\xi}\alpha\iota$] om. BFb.

25.

Ἡ τῇ ἐλάσσονι σύμμετρος ἐλάσσων ἐστίν.

Ἐστω ἐλάσσων ἡ A , καὶ τῇ A σύμμετρος [ἔστω] ἡ B . λέγω, ὅτι ἡ B ἐλάσσων ἐστίν.

Κείσθω ρητὴ ἡ $\Gamma\Delta$ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς A ἴσον παρὰ
 5 τὴν $\Gamma\Delta$ παραβεβλήσθω τὸ ΓE πλάτος ποιοῦν τὴν
 ΓZ . ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ τετάρτη ἡ ΓZ . τῷ δὲ ἀπὸ τῆς
 B ἴσον παρὰ τὴν ZE παραβεβλήσθω τὸ ZH πλάτος
 ποιοῦν τὴν $Z\Theta$. ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ A τῇ B ,
 σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς A τῷ ἀπὸ τῆς B .
 10 ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς A ἴσον ἐστὶ τὸ ΓE , τῷ δὲ
 ἀπὸ τῆς B ἴσον ἐστὶ τὸ ZH . σύμμετρον ἄρα ἐστὶ
 τὸ ΓE τῷ ZH . ὥς δὲ τὸ ΓE πρὸς τὸ ZH , οὕτως
 ἐστὶν ἡ ΓZ πρὸς τὴν $Z\Theta$. σύμμετρος ἄρα ἐστὶν
 ἡ ΓZ τῇ $Z\Theta$ μήκει. ἀποτομὴ δὲ ἐστὶ τετάρτη ἡ ΓZ .
 15 ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $Z\Theta$ τετάρτη. τὸ HZ ἄρα
 περιέχεται ὑπὸ ρητῆς τῆς ZE καὶ ἀποτομῆς τετάρτης
 τῆς $Z\Theta$. εἰάν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ ρητῆς καὶ
 ἀποτομῆς τετάρτης, ἢ τὸ χωρίον δυνάμενη ἐλάσσων
 ἐστίν. δύναται δε τὸ ZH ἡ B . ἐλάσσων ἄρα ἐστίν
 20 ἡ B . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

25. Alia demonstr. prop. 105, post nr. 24 PFV, mg. m. 1 b, m. 2 B, in V etiam ad prop. 105 mg. m. 1 (V_2).

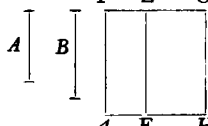
1. ἄλλως τὸ ρς' V_2 , ριξ' b, ριη' B; ριε' F, ριξ' m. 2. ἐλάττων F. 2. ἐλάττων F. ἔστω] om. PV. 3. ἐστὶ P, comp. V, et postea ins. φ. 4. ἐκείσθω Bb V_2 . ρητὴ ἡ $\Gamma\Delta$] γὰρ ἡ $\Gamma\Delta$ ρητὴ B V_2 , ἡ $\Gamma\Delta$ ρητὴ b, ἡ $\Gamma\Delta$ F. A] Δ φ. 6. τῷ] τό PB. 7. Post ZE add. $\Gamma\Delta$ P, et V, sed del. 8. τῇ B] corr. ex BHB m. 1 V. 9. ἐστὶ] om. BFb V_2 . τῷ] corr. ex τό B, mut. in τό V_2 . 10. ἐστὶν P, om. V_2 . τό] τῷ V_2 et B, sed corr. 11. ἐστὶ] om. BFb V_2 . τό] corr. ex τῷ V_2 . ZH] in ras. m. 1 P. 13. ἐστίν] om. F V_2 . ΓZ] in ras. m. 1 P. ἐστίν] om. V_2 . 14. ἡ ΓZ] postea

25.

Recta minori commensurabilis minor est.

Sit minor A , et rectae A commensurabilis B . dico, B minorem esse.

ponatur ΓA rationalis, et quadrato A^2 aequale rectae ΓA adplicetur ΓE latitudinem efficiens ΓZ .

Γ Z Θ itaque ΓZ apotome est quarta
 [prop. C]. et quadrato B^2 aequale
 rectae ZE adplicetur ZH latitudinem
 efficiens $Z\Theta$. iam quoniam A , B
 A E H commensurabiles sunt, etiam A^2 , B^2

commensurabilia sunt. est autem $\Gamma E = A^2$, $ZH = B^2$.
 itaque ΓE , ZH commensurabilia sunt. est autem
 $\Gamma E : ZH = \Gamma Z : Z\Theta$. itaque ΓZ , $Z\Theta$ longitudine com-
 mensurabiles sunt [prop. XI]. ΓZ autem apotome
 est quarta. itaque etiam $Z\Theta$ apotome est quarta
 [prop. CIII]. itaque HZ rationali ZE et apotome
 quarta $Z\Theta$ comprehenditur. sin spatium recta rationali
 et apotome quarta comprehenditur, recta spatio ae-
 qualis quadrata minor est [prop. XCIV]. et $B^2 = ZH$.
 ergo B minor est; quod erat demonstrandum.

add. V_2 . 15. ἐστὶ ἐστὶν P . $Z\Theta$ ΘZ P . τό HZ — 16.
 ZE mg. m. 2 B , ῥητὴ δὲ ἡ ZE Bb , ῥητὴ ῥητὴ δὲ ἡ ZE F .

18. ἐλάττων B . 19. ἐστὶ PVV_2 , comp. Bfb . ἐλάσσων
 — 20. δεῖξαι om. F . 19. ἄρα om. P . 20. ὅπερ εἶδει δεῖξαι]
 comp. P , om. BbV_2 . In b add. λείπον, ὅτι ἡ τοῦτον τοῦ θεω-
 ρήματος πρότασις ἡ αὐτὴ ἐστὶ τῇ τοῦ $\rho\sigma'$, ὅθεν καὶ ἐν τοῖς
 ἔσω παραλέλειπται, ἡ δὲ καταγραφὴ καὶ τὸ σχῆμα οὐ τὰ αὐτὰ
 εἶσιν· γέγραπται δὲ ἐν ἄλλῳ καὶ ριζ', διὸ καὶ ἡμεῖς τοῦτο παρα-
 τεδείκαμεν.

26.

Ἡ τῇ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ
σύμμετρος μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσά
ἐστίν.

Ἐστω μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσα ἡ *A*,
5 σύμμετρος δὲ αὐτῇ ἡ *B*. λέγω, ὅτι ἡ *B* μετὰ ῥητοῦ
μέσον τὸ ὅλον ποιούσά ἐστίν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ *ΓΔ*, καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς *A* ἴσον
παρὰ τὴν *ΓΔ* παραβεβλήσθω τὸ *ΓΕ* πλάτος ποιῶν
τὴν *ΓΖ*. ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ πέμπτῃ ἡ *ΓΖ*. τῷ δὲ ἀπὸ
10 τῆς *B* ἴσον παρὰ τὴν *ΖΕ* παραβεβλήσθω τὸ *ΖΗ* πλάτος
ποιῶν τὴν *ΖΘ*. ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστίν ἡ *A* τῇ *B*,
σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς *A* τῷ ἀπὸ τῆς *B*. ἀλλὰ
τῷ μὲν ἀπὸ τῆς *A* ἴσον τὸ *ΓΕ*, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς *B*
ἴσον τὸ *ΖΗ*. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ *ΓΕ* τῷ *ΖΗ*.
15 σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ *ΓΖ* τῇ *ΖΘ* μήκει. ἀποτομὴ δὲ
πέμπτῃ ἡ *ΓΖ*. ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ πέμπτῃ καὶ ἡ *ΖΘ*.
ῥητὴ δὲ ἡ *ΖΕ*. εἰάν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς
καὶ ἀποτομῆς πέμπτῃς, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μετὰ
ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσά ἐστίν. δύναται δὲ τὸ
20 *ΖΗ* ἡ *B*. ἡ *B* ἄρα ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποι-
οῦσά ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

26. Alia demonstr. prop. 106, post nr. 25 PFV, mg. m.
1 b, m. 2 B, in V etiam ad prop. 106 mg. m. 1 (*V*₂).

1. ἄλλως τὸ εἰς *V*₂, ριη' Fb, ριθ' B. ἡ — 3. ἐστίν]
om. *V*₂. 2. Ante μετὰ add. καὶ αὐτῇ m. 2 F, καὶ αὐτῇ ἡ b,
ἡ F. 4. ἔστω ἡ BFb *V*₂. 5. καὶ τῇ *A* σύμμετρος ἡ B *V*₂.
λέγω — 6. ἐστίν] mg. *V*₂. 5. ἡ B] supra scr. m. 1 F.
9. ἐστίν P. πέμπτῃ ἐστίν F. 12. B] BΔ φ. 13. ΓΕ]
corr. ex ZE V, ZE b. 15. καί] ἐστὶ καί *V*₂. ΖΘ] corr. ex
ΓΘ V, ΓΘ P. 16. πέμπτῃ] (prius) om. b. ἡ] ἐστίν ἡ b *V*₂.
17. ῥητόν P. ῥητὴ δὲ ἡ ZE] om. *V*₂. 19. ἐστὶ Vb *V*₂,

26.

Recta rectae cum rationali totum medium efficienti commensurabilis cum rationali totum medium efficiens est.

Sit A recta cum rationali totum medium efficiens, ei autem commensurabilis B . dico, B rectam esse cum rationali totum medium efficientem.

ponatur rationalis ΓA , et quadrato A^2 aequale rectae ΓA adplicetur ΓE latitudinem efficiens ΓZ .

itaque ΓZ apotome est quinta [prop. CI]. quadrato autem B^2 aequale rectae $Z E$ adplicetur $Z H$ latitudinem efficiens $Z \Theta$. iam quoniam A, B commensurabiles sunt, etiam A^2, B^2 commensurabilia sunt. est autem $\Gamma E = A^2$, $Z H = B^2$. itaque $\Gamma E, Z H$ commensurabilia sunt. quare etiam $\Gamma Z, Z \Theta$ longitudine commensurabiles sunt [VI, 1; prop. XI]. ΓZ autem apotome est quinta. itaque etiam $Z \Theta$ apotome est quinta [prop. CIII]; $Z E$ autem rationalis est. sin spatium recta rationali et apotome quinta comprehenditur, recta spatio aequalis quadrata recta est cum rationali totum medium efficiens [prop. XCV]. est autem $B^2 = Z H$. ergo B recta est cum rationali totum medium efficiens; quod erat demonstrandum.

comp. BF. δέ] om. V. 20. ἡ] (tert.) P V V₂, om. BFb.

21. ἐστιν] supra scr. V₂. ὅπερ εἶδει δεῖξαι] comp. P, om. BFb V₂. In b add. m. 1: ὁσάντως καὶ τοῦτον τοῦ θεωρήματος ἡ πρότασις ἡ αὐτὴ ἐστὶ τῇ τοῦ ρζ', οὐ μὲν ἡ καταγραφὴ καὶ τὸ σχῆμα ἐκείνων τὰ αὐτὰ εἶσιν. ἐστὶ δὲ ἐν ἑτέρῳ καὶ ριη', διὸ καὶ ἡμῖν παραγέγραπται. εἴτα τὸ ἐνδον ριζ' ἐν ἐκείνῳ ἐστὶ ριθ' καὶ ἐξῆς τὰ λοιπὰ.

27.

Προκείσθω ἡμῖν δεῖξαι, ὅτι ἐπὶ τῶν τετραγώνων σχημάτων ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ διάμετρος τῇ πλευρᾷ μήκει.

Ἔστω τετράγωνον τὸ $ABΓΔ$, διάμετρος δὲ αὐτοῦ
5 ἡ $ΑΓ$. λέγω, ὅτι ἡ $ΓΑ$ ἀσύμμετρος ἐστὶ τῇ $ΑΒ$ μήκει.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω σύμμετρος· λέγω, ὅτι συμβήσεται τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἄρτιον εἶναι καὶ περισσόν· φανερόν μὲν οὖν, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς $ΑΒ$. καὶ ἐπεὶ σύμμετρος ἐστὶν ἡ $ΓΑ$ τῇ $ΑΒ$,
10 ἡ $ΓΑ$ ἄρα πρὸς τὴν $ΑΒ$ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐχέτω, ὃν ὁ $ΕΖ$ πρὸς $Η$, καὶ ἔστωσαν οἱ $ΕΖ$, $Η$ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· οὐκ ἄρα μονὰς ἐστὶν ὁ $ΕΖ$. εἰ γὰρ ἔσται μονὰς ὁ $ΕΖ$, ἔχει δὲ λόγον πρὸς τὸν $Η$, ὃν ἔχει ἡ $ΑΓ$ πρὸς
15 τὴν $ΑΒ$, καὶ μείζων ἡ $ΑΓ$ τῆς $ΑΒ$, μείζων ἄρα καὶ ἡ $ΕΖ$ τοῦ $Η$ ἀριθμοῦ· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα μονὰς ἐστὶν ὁ $ΕΖ$ · ἀριθμὸς ἄρα. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ $ΓΑ$ πρὸς τὴν $ΑΒ$, οὕτως ὁ $ΕΖ$ πρὸς τὸν $Η$, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $ΓΑ$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΒ$, οὕτως ὁ ἀπὸ
20 τοῦ $ΕΖ$ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ $Η$. διπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς $ΓΑ$ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ · διπλασίον ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ $ΕΖ$ τοῦ ἀπὸ τοῦ $Η$ · ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ $ΕΖ$ · ὥστε καὶ αὐτὸς ὁ $ΕΖ$ ἄρτιός ἐστιν. εἰ γὰρ ἦν περισσός, καὶ ὁ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνος περισσὸς ἦν,

Post. nr. 26 PBFVb.

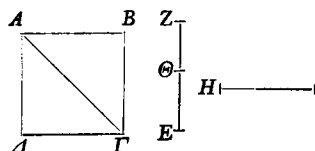
ριξ' b, ρκ' B; ρις' corr. in ριθ' m. 2 F. 1. ὅτι] m. 2 B.
2. σύμμετρος F, corr. m. 2. 5. $ΓΑ$] $ΑΓ$ FV. σύμμετρος
F, corr. m. 2. 7. περιττόν V. 8. ἐστὶ τοῦ Bb, ἐστὶ add.
m. 2 F. 9. τῆς] corr. ex. τοῦ m. 1 b. $ΓΑ$] $ΑΓ$ F. 10.
 $ΓΑ$] in ras. V, $ΑΓ$ F. ἄρα] om. V. 11. ὃν] in ras. B.

27.

Propositum sit nobis demonstrare, in figuris quadratis diametrum latusque longitudine incommensurabilia esse.

Sit $AB\Gamma A$ quadratum, diametrus autem eius $A\Gamma$. dico, ΓA , AB longitudine incommensurabiles esse.

nam si fieri potest, commensurabiles sint. dico, fore, ut idem numerus et par et impar sit. manifestum igitur, esse $A\Gamma^2 = 2 AB^2$ [I, 47]. et quoniam ΓA , AB commensurabiles sunt, $\Gamma A : AB$ rationem habet,



quam numerus ad numerum [prop. VI]. sit

$$\Gamma A : AB = EZ : H,$$

et EZ , H minimi sint eorum, qui eandem rationem habent

[cfr. VII, 33]. itaque EZ unitas non est. si enim est unitas, et $EZ : H = A\Gamma : AB$, et $A\Gamma > AB$, erit etiam $EZ > H$, unitas numero [V, 14]; quod absurdum est. quare EZ unitas non est. ergo numerus est. et quoniam est $\Gamma A : AB = EZ : H$, erit etiam $\Gamma A^2 : AB^2 = EZ^2 : H^2$ [VI, 20 coroll.; VIII, 11]. verum $\Gamma A^2 = 2 AB^2$. itaque etiam $EZ^2 = 2 H^2$. quare EZ^2 par est. itaque etiam ipse EZ par est. nam si impar esset, etiam quadratum eius impar esset,

EZ] E in ras. m. 1 P. τὸν H BFb. 12. H] om. b.
 14. ἔχει δέ] καὶ ἔχει BFb. πρὸς] (prius) comp. corr. ex
 comp. καὶ m. 1 F. 16. Post EZ add. μονάς Bb, m. rec. V.
 17. ἐστίν] (prius) m. 2 F. ΓA] $A\Gamma$ B. 18. τὸν] ο in
 ras. B. 19. ΓA] Γ in ras. V. AB] B in ras. m. 1 P. 21.
 τῆς] τοῦ PFV. ἀπὸ τῆς] m. rec. V. τῆς] τοῦ P. δι-
 πλάσιον F, διπλάσιος V. δὲ] τό Fb. 22. τοῦ] (primum)
 τῆς F. 23. ὥστε] -e e corr. V. 24. ἦν] ἄν ἦν V.

ἐπειδήπερ, ἐὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσιν, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν περισσὸν ἦ, ὁ ὅλος περισσὸς ἐστίν· ὁ EZ ἄρα ἄρτιος ἐστίν. τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Θ. καὶ ἐπεὶ οἱ EZ, H ἐλάχιστοι εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον
 5 ἔχόντων [αὐτοῖς], πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. καὶ ὁ EZ ἄρτιος· περισσὸς ἄρα ἐστίν ὁ H. εἰ γὰρ ἦν ἄρτιος, τοὺς EZ, H δυὰς ἐμέτρει· πᾶς γὰρ ἄρτιος ἔχει μέρος ἡμισυ· πρῶτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄρτιος ἐστίν ὁ H· περισσὸς
 10 ἄρα. καὶ ἐπεὶ διπλάσιος ὁ EZ τοῦ EΘ, τετραπλάσιος ἄρα ὁ ἀπὸ EZ τοῦ ἀπὸ EΘ. διπλάσιος δὲ ὁ ἀπὸ τοῦ EZ τοῦ ἀπὸ τοῦ H· διπλάσιος ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ H τοῦ ἀπὸ EΘ· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ H. ἄρτιος ἄρα διὰ τὰ εἰρημένα ὁ H· ἀλλὰ καὶ περισσὸς· ὅπερ ἐστὶν
 15 ἀδύνατον. οὐκ ἄρα σύμμετρός ἐστιν ἡ ΓΑ τῇ AB μήκει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἄλλως.

[Δεικτέον καὶ ἐτέρως, ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ τοῦ τετραγώνου διάμετρος τῇ πλευρᾷ].
 20 Ἔστω ἀντὶ μὲν τῆς διαμέτρου ἡ A, ἀντὶ δὲ τῆς πλευρᾶς ἡ B· λέγω, ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ A τῇ B μήκει. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω [σύμμετρος· καὶ γερονέτω] πάλιν ὥς ἡ A πρὸς τὴν B, οὕτως ὁ EZ ἀριθμὸς πρὸς τὸν H, καὶ ἔστωσαν ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον
 25 ἔχόντων αὐτοῖς οἱ EZ, H· οἱ EZ, H ἄρα πρῶτοι πρὸς

1. συντεθῶσι PFV. 2. ὁ] om. B, καὶ ὁ FV. 3. ἐστίν] comp. Fb, ἐστι PBV. Θ] e corr. B. 4. H ἀριθμοὶ BFb. 5. αὐτοῖς] om. P. εἰσὶ PVb, comp. F. καὶ] καὶ ἐστίν BFb. 7. μετρεῖ F, corr. m. 2; ἀν ἐμέτρει bene edd. 10. διπλάσιος] διπλάσιός ἐστιν F, διπλασίῳ ἐστίν Bb. 11. ἀπὸ]

quoniam, si numeri impares componuntur, et multitudo eorum impar est, totus impar est [IX, 23]. ergo EZ par est. in Θ in duas partes aequales secetur. et quoniam EZ , H minimi sunt eorum, qui eandem rationem habent, inter se primi sunt [VII, 21]. et EZ par est. itaque H impar est. nam si par esset, binas numeros EZ , H metiretur (omnis enim numerus par partem dimidiam habet [VII def. 6]), qui inter se primi sunt; quod fieri non potest. ergo H par non est. impar igitur est. et quoniam $EZ = 2 E\Theta$, erit [VIII, 11] $EZ^2 = 4 E\Theta^2$. est autem $EZ^2 = 2 H^2$. itaque $H^2 = 2 E\Theta^2$. quare H^2 par est. itaque propter ea, quae diximus [p. 408, 23 sq.], H par est. at idem impar est; quod fieri non potest. ergo ΓA , AB longitudine commensurabiles non sunt; quod erat demonstrandum.

Aliter.

Sit pro diametro A , pro latere autem B . dico, A et B longitudine incommensurabiles esse. nam si fieri potest, sit rursus ut $A:B$, ita numerus EZ ad H [cfr. prop. VI], et EZ , H minimi sint eorum, qui eandem rationem habent [cfr. VII, 33]. itaque EZ , H primi sunt inter se [VII, 21]. primum dico, H unitatem

m. 2 F. EZ] τοῦ EZ Bb, m. 2 F. $E\Theta$] τοῦ $E\Theta$ Bbφ.
 12. H] (prius) H ἡ b. 13. $E\Theta$] ΘE in ras. V, τοῦ $E\Theta$ BFb. 14. ἐστίν] om. V. 15. ΓA] in ras. V, supra scr. Δ b. 16. Post μήκει add. ἀσύμμετρος ἄρα (ἄρα m. 2 F) BFb. ὅπερ εἶδει δεῖξαι] comp. P, om. b, οἷ: ~ B. 17. ἄλλως] om. BFVb, ριξ' mg. F. 18. δεικτέον — 19. πλευρᾷ] om. P, mg. V. 20. ἔστω γάρ BFb. 22. σύμμετρος καὶ γεγονένω] om. PV, m. 2 F. 25. αὐτοῖς] om. Fb, m. 2 B. οἱ] (prius) e corr. V. πρῶτοι] supra scr. m. 1 F.

ἀλλήλους εἰσίν. λέγω πρῶτον, ὅτι ὁ *H* οὐκ ἔστι μονάς.
 εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω μονάς. καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ *A*
 πρὸς τὴν *B*, οὕτως ὁ *EZ* πρὸς τὸν *H*, καὶ ὡς ἄρα
 τὸ ἀπὸ τῆς *A* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *B*, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ
 5 *EZ* πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ *H*. διπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς
A τοῦ ἀπὸ τῆς *B*· διπλάσιος ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ *EZ*
 τοῦ ἀπὸ τοῦ *H*. καὶ ἔστι μονάς ὁ *H*· δυὰς ἄρα ὁ
 ἀπὸ *EZ* τετράγωνος· ὅπερ ἔστιν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα
 μονάς ἔστιν ὁ *H*· ἀριθμὸς ἄρα. καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς
 10 τὸ ἀπὸ τῆς *A* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *B*, οὕτως ὁ ἀπὸ *EZ*
 πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ *H*, καὶ ἀνάπαλιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς
B πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *A*, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ *H* πρὸς τὸν
 ἀπὸ τοῦ *EZ*, μετρεῖ δὲ τὸ ἀπὸ τῆς *B* τὸ ἀπὸ τῆς *A*,
 μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ *H* τετράγωνος τὸν ἀπὸ τοῦ
 15 *EZ*· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ αὐτὴ ὁ *H* τὸν *EZ* μετρεῖ.
 μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν ὁ *H*· ὁ *H* ἄρα τοὺς *EZ*, *H*
 μετρεῖ πρῶτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἔστιν
 ἀδύνατον. οὐκ ἄρα σύμμετρός ἐστιν ἡ *A* τῇ *B* μήκει·
 ἀσύμμετρος ἄρα ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

28.

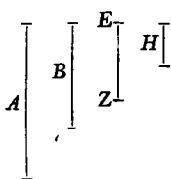
20

Σχόλιον.

Εὐρημένων δὴ τῶν μήκει ἀσυμμέτρων εὐθειῶν,
 ὡς τῶν *A*, *B*, εὐρίσκεται καὶ ἄλλα πλείστα μεγέθη ἐκ
 δύο διαστάσεων, λέγω δὴ ἐπίπεδα, ἀσύμμετρα ἀλλήλοις.
 εἰ γὰρ τῶν *A*, *B* εὐθειῶν μέσην ἀνάλογον λάβωμεν
 25 τὴν *Γ*, ἔσται ὡς ἡ *A* πρὸς τὴν *B*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς

 28. Post. nr. 27 PBFVb.

1. εἰσὶ PVb, comp. F. ὅτι'' πρῶτον b. 3. ὁ] ἡ F.
 τόν] τὴν Fb. 4. τό] ὁ P. τό] τόν P. τοῦ] τῆς PV.



non esse. nam si fieri potest, sit unitas. et quoniam est $A:B = EZ:H$, erit etiam $A^2:B^2 = EZ^2:H^2$ [VI, 20 coroll.; VIII, 11]. uerum $A^2 = 2B^2$ [I, 47]. itaque etiam $EZ^2 = 2H^2$. et H unitas est. itaque numerus quadratus EZ^2 binas est; quod fieri non potest. quare H unitas non est; ergo numerus est. et quoniam est $A^2:B^2 = EZ^2:H^2$, et e contrario [V, 7 coroll.] $B^2:A^2 = H^2:EZ^2$, et B^2 metitur A^2 , etiam H^2 metitur EZ^2 . quare etiam latus ipsum H numerum EZ metitur. uerum H etiam se ipsum metitur. itaque H numeros EZ , H metitur inter se primos; quod fieri non potest. quare A , B longitudine commensurabiles non sunt. ergo incommensurabiles sunt; quod erat demonstrandum.

28.

Scholium.

Inuentis igitur rectis longitudine incommensurabilibus, uelut A , B , etiam plurimae aliae magnitudines duarum dimensionum, scilicet planae, inter se incommensurabiles inueniuntur. nam si inter rectas A , B mediam proportionalem sumpserimus Γ , erit ut $A:B$, ita figura plana in A descripta ad figuram in Γ si-

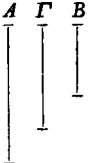
6. διπλάσιον P. 7. ὁ ἀπὸ] ἐστὶν ὁ Fb, ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ B.
 10. τό] (prius) supra m. 1 V. ἀπὸ] (tert.) om. BFb. 11. ἀπὸ τοῦ] om. BFb. 13. τό] (alt.) corr. ex τῷ m. 1 F. 14. ὁ] τό F. 15. αὐτῆς B. 18. ἡ A] e corr. V. 19. ἐστὶν] om. BFb. 20. ὅπερ ἐδει δεῖξαι] comp. P, om. BFb. 21. σχόλιον] om. FVb (in fig. ριγ' F), ρα' B. 22. ἐδρίσκονται B (corr. m. 2) Fb. 23. δὴ] δὴ ὅτι F. ἐπίπεδον F. σύμμετρα B, sed corr. 24. εὐθειῶν] om. BF.

A ἐπίπεδον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *Γ* τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον, εἴτε τετράγωνον εἴη τὰ ἀναγραφόμενα εἴτε ἕτερα εὐθύγραμμα ὅμοια εἴτε κύκλοι περὶ διαμέτρους τὰς *A*, *Γ*, ἐπέπερ οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους
 5 εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. εὗρηται ἄρα καὶ ἐπίπεδα χωρὶα ἀσύμμετρα ἀλλήλοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Δεδειγμένων δὲ καὶ τῶν ἐκ δύο διαστάσεων διαφορῶν ἀσυμμέτρων χωρίων δείξομεν τοῖς ἀπὸ τῆς τῶν
 10 στερεῶν θεωρίας, ὡς ἔστι καὶ στερεὰ σύμμετρά τε καὶ ἀσίμμετρα ἀλλήλοις. ἐὰν γὰρ ἐπὶ τῶν ἀπὸ τῶν *A*, *B* τετραγώνων ἢ τῶν ἴσων αὐτοῖς εὐθυγράμμων ἀναστήσωμεν ἰσοῦσῃ στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἢ πυραμίδας ἢ πρίσματα, ἔσται τὰ ἀνασταθέντα πρὸς ἀλλήλα ὡς αἱ
 15 βάσεις. καὶ εἰ μὲν σύμμετροί εἰσιν αἱ βάσεις, σύμμετρα ἔσται καὶ τὰ στερεά, εἰ δὲ ἀσύμμετροι, ἀσύμμετρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἀλλὰ μὴν καὶ δύο κύκλων ὄντων τῶν *A*, *B* ἐὰν ἀπ' αὐτῶν ἰσοῦσεῖς κῶνους ἢ κυλίνδρους ἀναγράψωμεν,
 20 ἔσονται πρὸς ἀλλήλους ὡς αἱ βάσεις, τουτέστιν ὡς οἱ *A*, *B* κύκλοι. καὶ εἰ μὲν σύμμετροί εἰσιν οἱ κύκλοι, σύμμετροι ἔσονται καὶ οἱ τε κῶνοι πρὸς ἀλλήλους καὶ

1. ἐπίπεδον] εἶδος BFb. τῆς] om. P. καί] τε καὶ V.
 2. ἀναγεγραμμένον BF, mg. b. ἀναγεγραμμένα BFb. 3. εἴτε] (prius) εἴτε καὶ P. 4. ἐπεὶ γάρ, supra scr. περ m. 1 F. Mg. μαθήσῃ τοῦτο ἐν τῷ β' τοῦ ιβ' ἐν τοῖς στερεοῖς m. rec. B. 6. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] :~ BFb, et P, sed supra scr. m. 1 comp. 8. ρκβ' B. 9. χωρίων ἀσυμμέτρων B. τοῖς] ἐν τοῖς Vb. 11. ἀπὸ τῶν] om. F. 12. ἀναστήσω V, deinde supra scr. αὐτοῖς m. 1. 13. ἰσονψῇ] ἰ- in ras. m. 1 B. ἰσονψῇ στερεὰ παραλληλεπίπεδα] mg. V, in textu del. ἰσονψῇ γραμμὰς ἢ παραλληλεπίπεδα. παραλληλοεπίπεδα F, παράλληλα ἐπίπεδα b. ἡ] e corr. F; οἶον, supra scr. ἡ m. 1 b. 14. ὡς] postea ins. m.

milem et similiter descriptam [VI, 19 coroll.], siue quadrata sunt figurae descriptae siue aliae rectilineae

 similes siue circuli circum diametros A, Γ , quoniam circuli eam inter se rationem habent, quam quadrata diametrorum [XII, 2]. ergo etiam plana spatia inter se incommensurabilia inuenta sunt; quod erat demonstrandum.

Inuentis iam spatiis quoque diuersis duarum dimensionum incommensurabilibus per ea, quae ad theoriam solidorum pertinent, demonstrabimus, solida quoque esse inter se commensurabilia et incommensurabilia. si enim in quadratis rectarum A, B uel figuris rectilineis iis aequalibus solida construxerimus eiusdem altitudinis uel parallelepipeda uel pyramidas uel prismata, solida constructa eam inter se rationem habebunt, quam bases [XI, 32. XII, 5; 6]. et si bases commensurabiles sunt, etiam solida commensurabilia erunt, sin incommensurabiles, incommensurabilia [prop. XI]; quod erat demonstrandum.

praeterea si A, B duo circuli sunt, si in iis conos uel cylindros eiusdem altitudinis construxerimus, eam inter se rationem habebunt, quam bases, hoc est quam circuli A, B [XII, 11]. et si circuli commensurabiles sunt, etiam coni cylindrique inter se commensurabiles

1 V. 16. ἀσύμμετροί εἰσιν αἱ βάσεις V. 17. ὅπερ ἔδει δεῖξαι]
 om. BFb. 18. οὕτως B. κύκλων] in ras. V. 20. ὥς]
 om. P, m. 2 V. Post alt. ὥς ras. 3 litt. V. 21. εἰσιν]
 εἶεν V. 22. καὶ] om. B. τε] om. b. πρὸς ἀλλήλους]
 ἀλλήλους BFb.

οἱ κύλινδροι, εἰ δὲ ἀσύμμετροί εἰσιν οἱ κύκλοι, ἀσύμμετροι ἔσονται καὶ οἱ κῶνοι καὶ οἱ κύλινδροι. καὶ φανερόν ἡμῖν γέγονεν, ὅτι οὐ μόνον ἐπὶ γραμμῶν καὶ ἐπιφανειῶν ἐστὶ συμμετρία τε καὶ ἀσυμμετρία, 5 ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τῶν στερεῶν σχημάτων.

1. δέ] δ' F. εἰσιν] εἰεν b. 3. γέγονε V. ὅτι] δι' ὃ P V. ἐπὶ] ἐπὶ τε P. 4. καί] ἢ P. ἐστὶν σύμμετρα P. ἀσύμμετρα P. Mg. γρ. σύμμετρα καὶ ἀσύμμετρα m. 1 b. 5. στερεῶν] ἐτέρων F.

erunt, sin incommensurabiles sunt circuli, etiam coni cylindrique incommensurabiles erunt [prop. XI]. et nobis adparuit, commensurabilitatem incommensurabilitatemque non solum in lineis planisque esse, sed etiam in corporibus solidis.
