LES
ELEMENS
D'EUCLIDE,
LIVRE PREMIER.

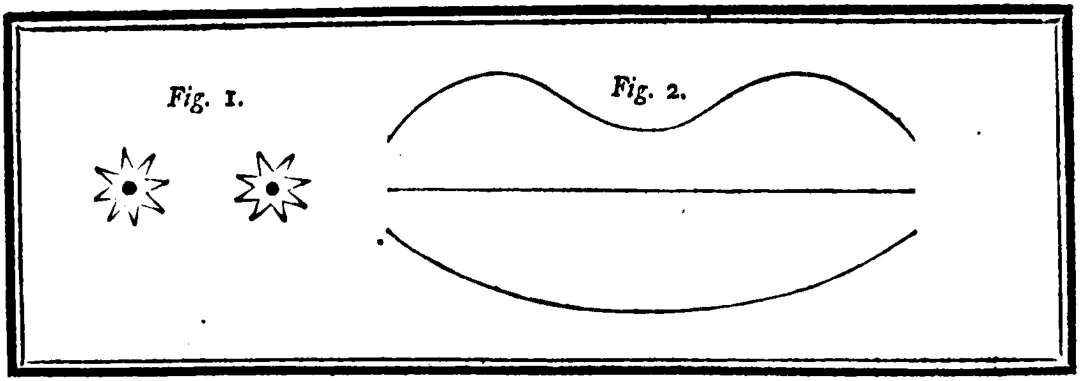
ELEMENS
DE
GEOMETRIE,
CONTENANT
LES SIX PREMIERS LIVRES
D'EUCLIDE,
MIS DANS UN NOUVEL ORDRE, ET À LA PORTÉE DE LA JEUNESSE SOUS LES DIRECTIONS

DE MR. LE PROFESSEUR KOENIG,

AUGMENTÉS DE L'ONZIÈME ET DOUZIEME LIVRE

PAR J. J. BLASSIERE.

A LA HAYE,
Chez PIERRE VAN OS,
M. D. CC. LXII.



DEFINITIONS.

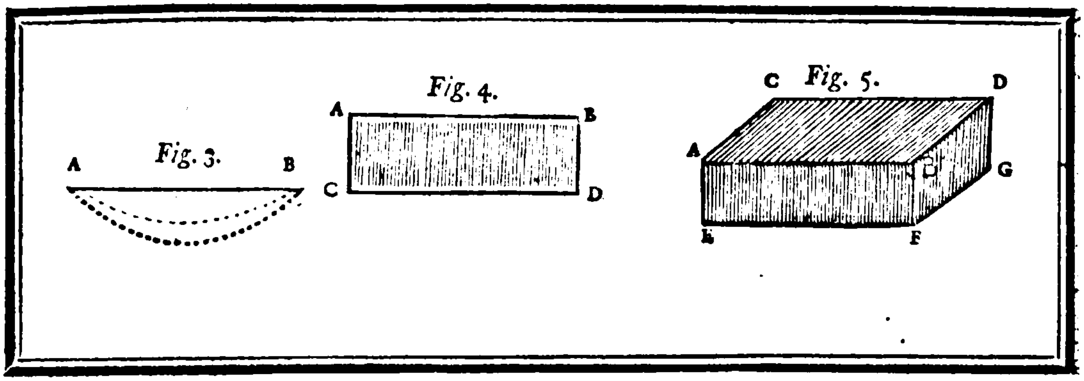
I.

LE *Point* est une marque sans parties. *Fig.* 1.

Dans cette définition, aussi bien que dans la seconde & la cinquième, Euclide explique simplement la maniere de concevoir les premiers objets de la Géométrie, le point, la ligne, & la surface; *il ne démontre pas qu'il y ait de tels objets dans la classe des êtres réels. Ces notions, quoique très utiles en Géométrie, ne sont que des abstractions, qu'il faut éviter de réaliser, en se les représentant comme ayant une existence effective hors de l'esprit, où elles ont pris naissance. Il n'existe pas de points mathématiques dans la nature, (du moins ce qu'Euclide en dit ne le prouve pas); mais il existe des choses étendues, qu'on est en droit de traiter comme de simples marques non-étendues, toutes les fois qu'on ne veut pas les considérer comme ayant des parties, mais simplement comme limites de quelque autre étendue. Ainsi, lorsqu'il est question de mesurer la distance de deux astres, l'Astronome procède comme si ces astres n'étoient que des points sans parties: & il a raison; puisqu'il ne veut point connoître leur étendue, mais celle de la distance qui les sépare, & dont il les envisage comme les termes. Il en est de même des autres notions de cette espece. On se représente sous l'image d'une ligne, ou bien d'une longueur sans largeur, toute étendue dont la seule longueur nous intéresse, quelle que puisse être sa largeur & sa profondeur, ou ses autres qualités. L'imagination, toûjours disposée à transformer en réalités ce qui n'en a point, forme de ces abstractions une classe d'êtres qui paroissent avoir de l'existence hors de l'entendement. Il est très permis au Géometre d'adopter ces êtres, entant qu'ils peuvent lui servir à faire entendre facilement ce qu'il veut proposer sur les différentes manieres d'envisager l'étendue; mais il ne lui est nullement permis de se faire illusion sur leur origine & leur véritable usage.*

II.

La Ligne est une longueur sans largeur. *Fig.* 2.



DEFINITIONS.

III.

LEs *Extrêmités de la Ligne* sont des points (A, B,). *Fig.* 3.

IV.

La Ligne Droite est celle qui est également située entre ses extrêmités (A, B,). *Fig.* 3.

Cette définition est imparfaite, puisqu'elle n'offre aucune marque essentielle de la ligne droite; aussi Euclide n'en a-t'il rien pu tirer; elle ne se trouve plus citée dans le corps de l'ouvrage. Il est obligé d'avoir recours à d'autres principes (par exemp. à l'axiome 12.), toutes les fois qu'il a besoin d'employer des vérités qui dépendent d'une définition parfaite de la ligne droite.

V.

La Superficie, ou *Surface*, est une étendue ayant de la longueur & de la largeur sans profondeur. *Fig.* 4.

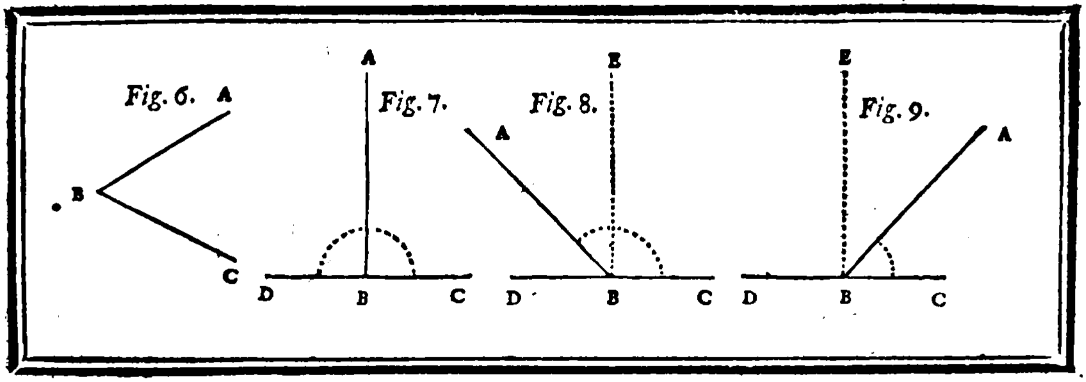
VI.

Les *Extrêmités de la Superficie* sont des lignes (AB, CD, AC, BD,). *Fig.* 4.

VII.

On nomme *Superficie Plane*, ou simplement un *Plan* (AD), celle qui est également située entre ses extrêmités. (AB, CD, AC, BD). *Fig.* 5.

Cette définition est encore dans le cas de la quatrieme.



DEFINITIONS.

VIII.

L'*Angle Plan* eſt l'inclinaiſon mutuelle de deux lignes (AB, BC,) qui ſe rencontrent, & qui ſe trouvent ſituées dans un même plan. *Fig.* 6.

IX.

L'Angle eſt nommé *Rectiligne*, ſi les lignes, entre leſquelles il eſt compris, ſont droites. *Fig.* 6.

X.

Quand une ligne droite (AB), tombant ſur une autre ligne droite (CD), fait les angles contigus (ABD, ABC) égaux entr'eux, ces angles ſont appellés *Angles Droits*. La ligne (AB), qui tombe de cette maniere ſur l'autre (CD), eſt appellée *Perpendiculaire. Fig.* 7.

XI.

L'Angle Obtus (ABC) eſt un angle plus grand qu'un angle droit (EBC). *Fig.* 8.

XII.

L'Angle Aigu (ABC) eſt un angle plus petit qu'un angle droit (EBC). *Fig.* 9.

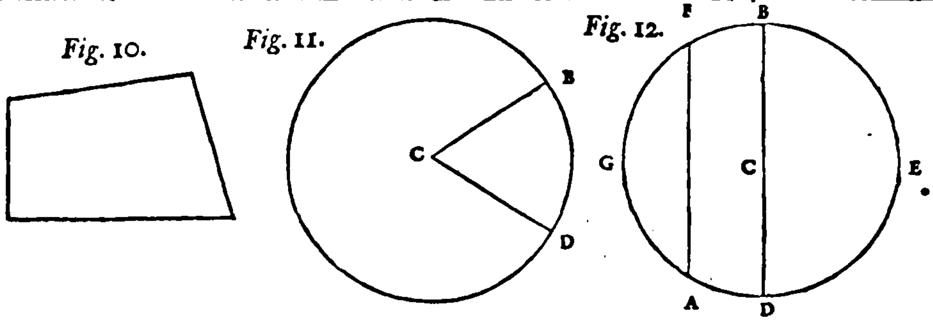
XIII.

On nomme *Terme* l'extrêmité de quelque étendue.

Fig. 10.

Fig. 11.

Fig. 12.



DEFINITIONS.

XIV.

UNe *Figure* eſt une étendue limitée d'un ou de pluſieurs termes. *Fig.* 10.

XV.

Le Cercle eſt une figure plane terminée par une ſeule ligne, ayant la propriété que toutes les lignes droites (CB, CD,) tirées d'un même point (C) à cette ſeule ligne, nommée *Circonférence*, ſont égales entr'elles. *Fig.* 11.

XVI.

On nomme ce point (C) *Centre*, & les droites (CB, CD,) tirées du centre à la circonférence, des *Rayons*. *Fig.* 11.

XVII.

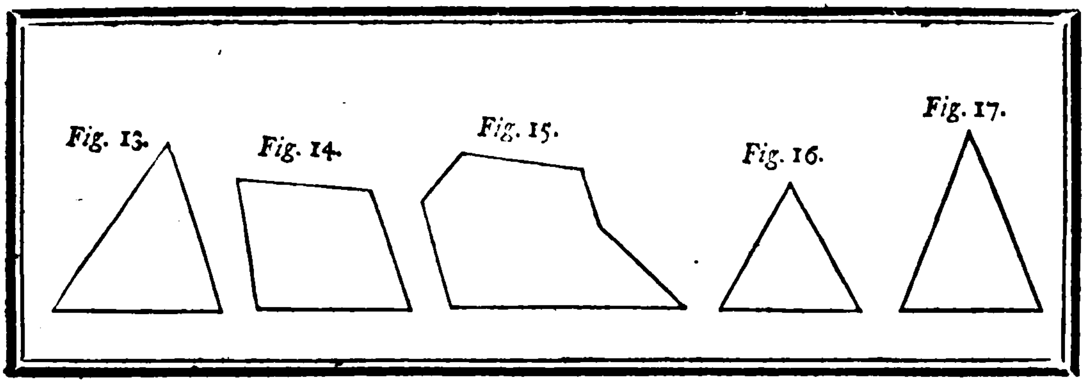
On nomme *Diametre* du cercle toute droite (DB) tirée par le centre, & terminée à la circonférence de part & d'autre (*Fig.* 12). Un diametre partage le cercle en deux parties égales.

XVIII.

Le *Demi-cercle* eſt une figure plane (DEB) terminée par le diametre (DB) & par la demi-circonférence (DEB), c. a. d. cette portion de la circonférence (DEB) qui aboutit de part & d'autre à ce diametre (DB). *Fig* 12.

XIX.

Un *Segment de cercle* eſt une figure compriſe d'une ligne droite (AF), nommée *Corde*, & d'une partie de la circonférence (AGF ou AEF) qu'on appelle *Arc*. *Fig.* 12.



DEFINITIONS.

XX.

ON appelle en général *Figures Rectilignes*, toutes celles qui ſont terminées par des lignes droites.• *Fig.* 13. 14. 15. 16. 17.

XXI.

Et en particulier *Figures Trilatéres*, ou figures à trois côtés, celles qui ſont compriſes de trois lignes droites. *Fig.* 13. 16. 17.

XXII.

De même *Figures Quadrilatéres*, ou Figures à quatre côtés, toutes celles qui ſont compriſes de quatre lignes droites. *Fig.* 14.

XXIII.

Et généralement *Figures Multilatéres*, ou figures à pluſieurs côtés, toutes celles qui ſe trouvent terminées par plus de quatre lignes droites. *Fig.* 15.

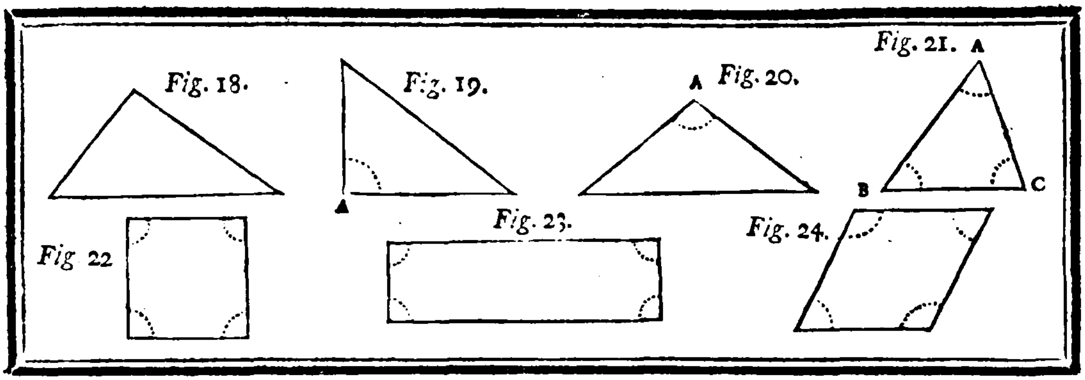
XXIV.

Pour ce qui eſt des figures trilatéres en particulier:

On nomme *Triangle Equilatéral*, celui dont les trois côtés ſont égaux entr'eux. *Fig.* 16.

XXV.

Mais s'il n'y a que deux côtés égaux entr'eux, le *Triangle* eſt *Iſoſcéle*. *Fig.* 17.



DEFINITIONS

XXVI.

Et lorſque les trois côtés ſont inégaux entr'eux, le *Triangle* eſt *Scalene. Fig.* 18.

XXVII.

Pareillement; parmi ces mêmes figures trilatéres:

On nomme *Triangle Rectangle*, un Triangle qui a un angle droit. *Fig.* 19.

XXVIII.

Et *Triangle Amblygone*, ou *Obtus-angle*, un Triangle qui a un angle obtus (A). *Fig.* 20.

XXIX.

Enfin, on appelle *Triangle Oxygone*, ou *Acutangle*, un Triangle qui a les trois angles aigus (A, B, C,). *Fig.* 21.

XXX.

De la même maniere dans l'eſpece des figures quadrilatéres:

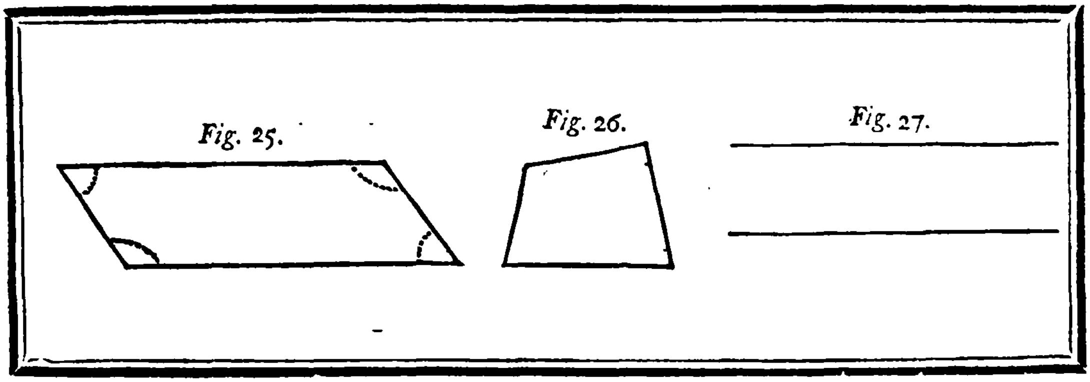
On nomme *Quarré*, celle qui eſt quadrilatére, équilatérale & rectangulaire. *Fig.* 22.

XXXI.

Et on entend par *Rectangle*, une figure quadrilatére, rectangulaire, non-équilatérale. *Fig.* 23.

XXXII.

Par *Rhombe*, une figure quadrilatére, équilatérale, non-rectangulaire. *Fig.* 24.



DEFINITIONS.

XXXIII.

ET par *Rhomboïde*, une figure quadrilatére, ayant les angles & les côtés opposés égaux entr'eux, mais ni équilatérale, ni équiangulaire. *Fig.* 25.

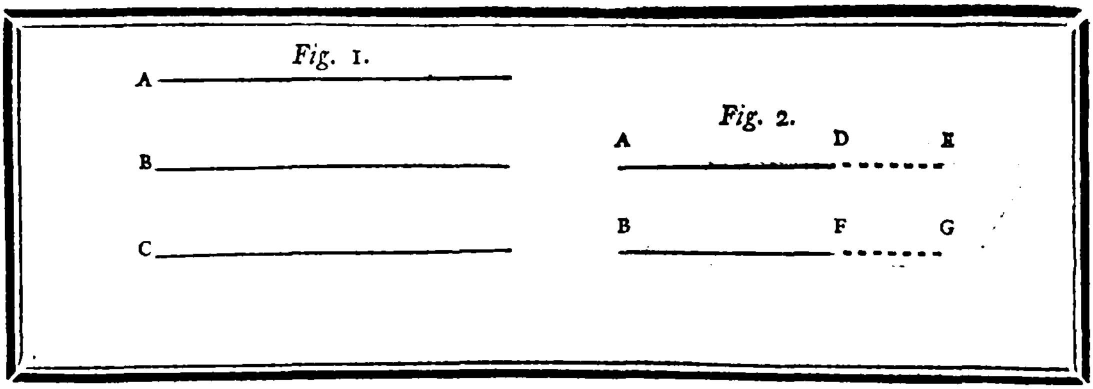
XXXIV.

Toute autre Figure quadrilatére est appellée. *Trapéze. Fig.* 26.

XXXV.

Enfin on nomme *Lignes Paralleles*, des lignes droites situées dans un même plan, qui, quoique prolongées à l'infini de part & d'autre, ne se rencontrent jamais. *Fig.* 27.

C'est pour cela qu'on designe par le terme de parallélogramme, *toute Figure Quadrilatére dont les côtés opposés sont paralleles. Fig.* 25.



DEMANDES

I.

On demande que d'un point à un autre point on puiſſe mener une ligne droite.

II.

Qu'on puiſſe prolonger une ligne droite quelconque à l'infini.

III.

Que d'un centre quelconque & d'un rayon quelconque, on puiſſe décrire un cercle.

AXIOMES
OU
NOTIONS COMMUNES.

I.

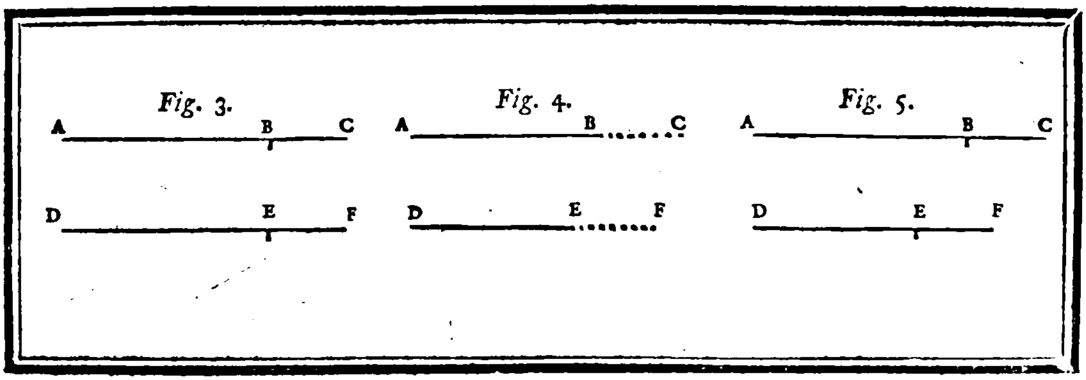
Deux grandeurs égales à une même troiſieme ſont égales entr'elles.

Si la ligne A eſt égale à la ligne B, & la ligne C égale à la même ligne B; la ligne A ſera égale à la ligne C. Fig. 1.

II.

Si à des grandeurs égales on ajoute des grandeurs égales, les Touts ſeront égaux.

Si à la ligne AD on ajoute la partie DE, & qu'à la ligne BF, qui eſt égale à la ligne AD, on ajoute la partie FG, égale à la partie DE; les Touts AE, BG, ſeront égaux entr'eux. Fig. 2.



AXIOMES.

III.

Si de grandeurs égales, on retranche des grandeurs égales; les reftes font égaux.

Si de la ligne entiere AC, on retranche la partie BC, & de la ligne entiere DF, égale à AC, on retranche la partie EF, égale à BC; les reftes AB, DE, feront égaux. Fig. 3.

IV.

Si à des grandeurs inégales, on ajoute des grandeurs égales; les touts font inégaux.

Si à la ligne AB, on ajoute la partie BC, & qu'à la ligne DE, plus petite que AB, on ajoute la partie EF, égale à la partie BC; les touts AC, DF, feront inégaux. Fig. 4.

V.

Si de grandeurs inégales, on retranche des grandeurs égales; les reftes font inégaux.

Si de la ligne AC, on retranche la partie BC, & de la ligne DF plus petite que AC, on retranche la partie EF, égale à BC; les reftes AB, DE, font inégaux. Fig. 5.

VI.

Les grandeurs doubles, ou *également multiples d'une même grandeur*; font égales entr'elles.

VII.

Les grandeurs égales à la moitié, ou *également fousmultiples d'une même grandeur*, font égales entr'elles.

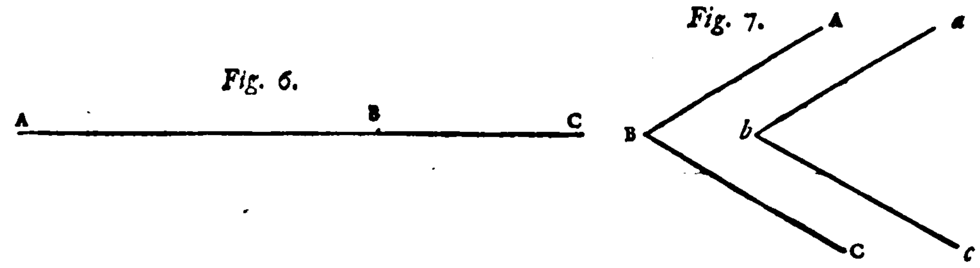


Fig. 6. *Fig. 7.*

AXIOMES.

VIII.

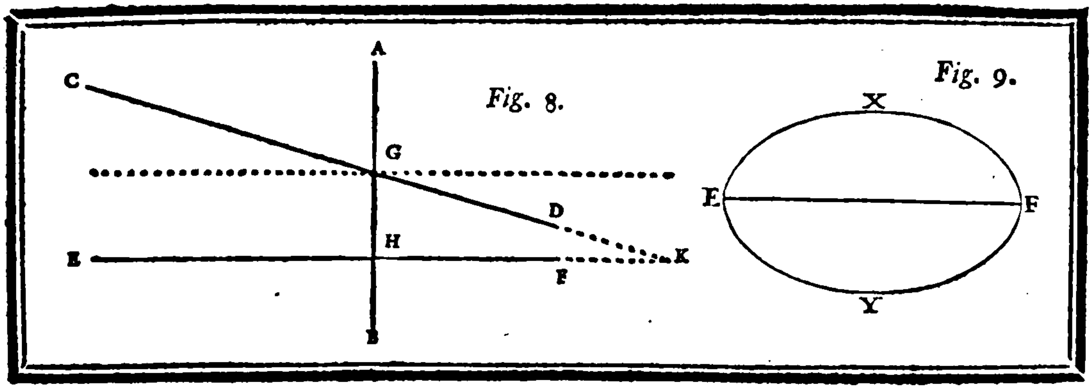
LE Tout eſt plus grand que ſa partie.

Toute la ligne AC eſt plus grande que ſa partie BC. Fig. 6.

IX.

Les grandeurs (c. à. d. *les étendues limitées*), qui conviennent; ſont égales & ſemblables. Et réciproquement; les *grandeurs égales & ſemblables conviennent.*

Cet axiome eſt appellé le principe de la congruence*; & il tient par une liaiſon intime au grand principe de la* ſimilitude*, dont il ſera queſtion au commencement du VI Livre. Ces deux principes ſont les grandes ſources d'invention en Géométrie. Pour ce qui eſt de la notion de la congruence, elle renferme la notion* des termes, *& la notion de la* poſſibilité de leur coïncidence. *Deux étendues limitées conviennent, entant que leurs limites peuvent coïncider parfaitement; entant qu'elles peuvent être renfermées dans les mêmes bornes. Euclide regarde le principe de la congruence comme une notion commune: il y eſt autoriſé par l'uſage où tous les hommes ſont, d'examiner l'égalité des choſes qui doivent avoir cette propriété, en les ajuſtant les unes ſur les autres, ou en les renfermant entre les mêmes bornes, de maniere que l'œil puiſſe juger de la coïncidence de leurs limites. On auroit tort de s'imaginer, qu'une telle maxime ne peut conduire qu'à une pratique de tâtonnement, incompatible avec la préciſion de la Géométrie. Euclide ſait faire de cette maxime un principe très ſcientifique. Il ne ſuppoſe ſur la congruence, qu'un fort petit nombre de vérités ſimples, deſquelles il démontre rigoureuſement, les vérites plus compoſées qui en dépendent. Voici ces vérités ſimples.*



AXIOMES.

1. Tous les points conviennent.

2. Les lignes droites égales entr'elles conviennent. Et réciproquement; les lignes droites dont les extrêmités conviennent; sont égales.

3. Si dans deux angles égaux (ABC, abc,) les sommets, (B & b,) conviennent, & une des jambes (BA) à une des jambes (ba); l'autre jambe (BC) conviendra aussi à l'autre jambe (bc). *Item*, tous les angles dont les jambes conviennent; sont égaux, *Fig.* 7.

Euclide n'a pas énoncé séparément, ces axiomes particuliers subordonnés à l'axiome général, mais il n'en fait pas moins usage; comme il est aisé de s'en convaincre par l'analyse de plusieurs de ses démonstrations.

X.

Tous les angles droits sont égaux entr'eux.

XI.

Si une ligne droite (AB) coupe deux autres lignes droites (CD, EF,) situées sur un même plan, ensorte qu'elle fasse les angles interieurs (DGH, FHG,) du même côté, moindres que deux droits; ces deux lignes (CD, EF) prolongées à l'infini se rencontreront du côté (K), où les deux angles sont moindres que deux droits. *Fig.* 8.

Cette vérité n'est pas assez simple, pour pouvoir être reçue au nombre des axiomes. Elle est une suite de la XXVII proposition du premier Livre; ce n'est que là où elle pourra être établie convenablement.

XII.

Il est impossible, que deux lignes droites puissent renfermer un espace.

Si les deux lignes EF & EXF renferment un espace, ces deux lignes ne peuvent être toutes les deux des lignes droites, il faut absolument que l'une du moins comme EXF soit un ligne courbe.

EXPLICATION DES SIGNES.

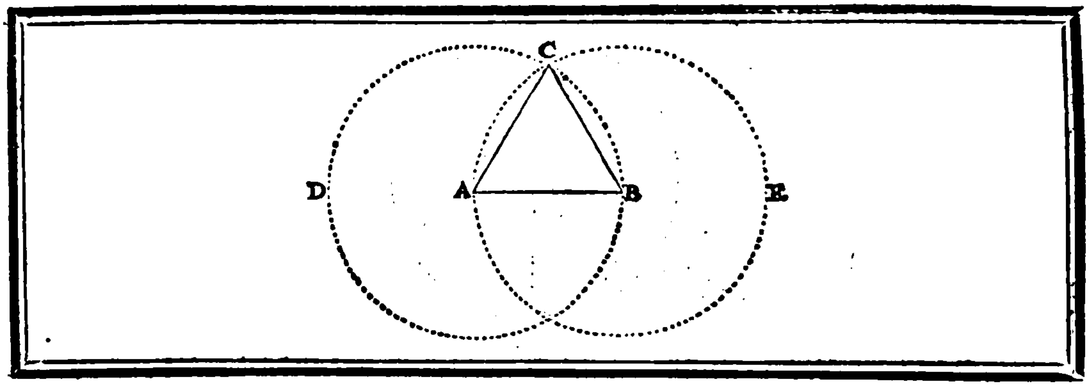
$\perp$ - - - -	Perpendiculaire	∟ - - - -	Angle droit
$<$ - - - -	Plus grand que	$\triangle$ - - - -	Triangle
$>$ - - - -	Plus petit que.	$=$ - - - -	Egal
$+$ - - - -	Plus	$\square$ - - - -	Quarré
$-$ - - - -	Moins	$\odot$ - - - -	Cercle
∀ - - - -	Angle	$\circ$ - - - -	Circonférence

ABREVIATIONS.

Plle. - - - - Parallele.

Pgr. - - - - Parallélogramme.

Rgle. - - - Rectangle.



PROPOSITION I. *PROBLEME I.*

Sur une droite donnée & terminée (A B); conſtruire un triangle équilatéral (A B C).

DONNEE	CHERCHEE.
La droite terminée AB.	*La conſtruction d'un △ équilatéral ſur la droite terminée A B.*

Réſolution.

1. Du point A comme centre & du rayon A B decrivez le cercle B C D. Dem. 3.
2. Du point B comme centre & du rayon B A decrivez le cercle A C E. Dem. 3.
3. Marquez le point d'interſection C.
4. Du point A au point C tirez la droite A C. Dem. 1.
5. Du point B au point C tirez la droite B C. Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Puiſque le point A eſt le centre du ⊙ B C D *(Ref. 1)*, & que les lignes A B, A C ſont tirees du centre A à la ○ B C D *(Ref. 4.)*.

1. Ces deux lignes A B, A C ſont des rayons d'un meme ⊙. D. 16. L. 1.
2. Par conſequent, la ligne A C eſt = a la ligne A B. D. 15. L. 1.

De même, puiſque le point B eſt le centre du ⊙ A C E *(Ref. 2.)*, & que les lignes B A, B C, ſont tirées du centre B à la ○ A C E *(Ref. 5.)*.

3. Ces deux lignes ſont encore des rayons d'un même cercle A C E. D. 16. L. 1.
4. Partant, la ligne B C eſt auſſi = à la même ligne A B. D. 15. L. 1.
5. Les lignes A C, B C ſont donc = à une meme troiſiéme A B. *(Arg. 2. & 4.)*

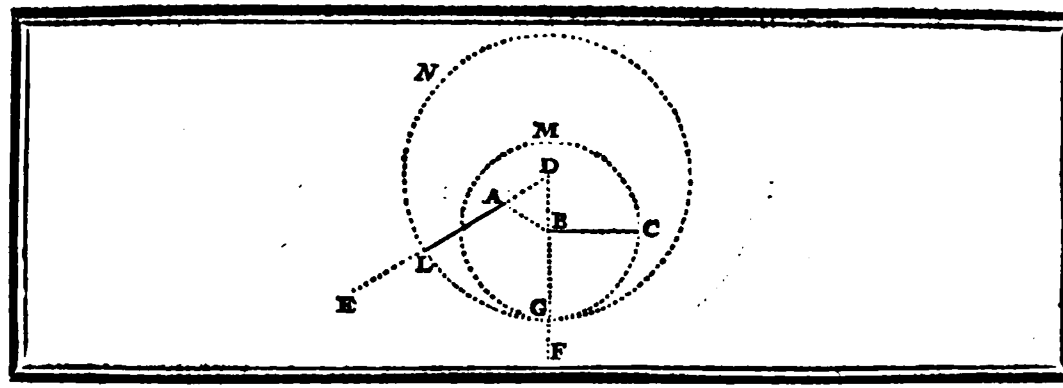
Or *ſi deux grandeurs ſont égales à une même troiſieme elles ſont égales entr'elles.* Ax. 1.

6. La ligne A C eſt donc = à la ligne B C.

Mais chacune de ces deux lignes = entr'elles *(Arg 6.)* eſt auſſi = à la ligne A B, *Arg. 5)*.

7. Donc les trois lignes A B, B C, A C, qui forment les trois cotés du △ A B C, ſont toutes les trois = entr'elles.
8. Partant, le △ A B C conſtruit ſur la droite donnée & terminée A B, eſt un triangle équilateral. D. 24. L. 1.

C. Q. F. F.



PROPOSITION II. PROBLEME II.

D'Un point donné (A); mener une droite (AL), égale à une autre droite donnée (BC).

Donnees	Cherchee.
1. *Le Point A.*	*A L = B C.*
2. *La droite B C.*	

Résolution.

1. Du point A au point B tirez la droite AB.	Dem. 1.
2. Sur cette droite AB construisez le △ équilatéral ADB.	P. 1. L. 1.
3. Prolongez à l'infini les côtés DA & DB de ce △.	Dem. 2.
4. Du point B comme centre, & de la droite B C comme rayon décrivez le ⊙ CGM.	Dem. 3.
5. Item; du point D comme centre, & de la droite D G comme rayon décrivez le ⊙ GLN, qui coupe la droite prolongée DA quelque part en L.	Dem. 3.

Demonstration.

Puisque les lignes B C & B G sont menées du centre B à la ○ CGM. (*Ref.* 4.)

1. Ces deux lignes sont des rayons d'un même ⊙ CGM. — D. 16. L. 1.
2. Par conséquent, B C = B G. — D. 15. L. 1.

De même; les lignes DG & DL étant tirées du centre D à la ○ GLN (*Ref.* 5.)

3. Ces lignes sont aussi des rayons d'un même ⊙ GLN. — D. 16. L. 1.
4. Et par la même raison, DG = DL. — D. 15. L. 1.

Or les lignes DA & DB, étant des côtés d'un △ équilatéral ADB (*Ref.* 2.)

5. La ligne DA est = à la ligne DB. — D. 24. L. 1.

Retranchant donc des lignes égales DG, DL (*Arg.* 4.), leurs parties égales DB, DA (*Arg.* 5.)

6. La ligne restante AL est = à la ligne restante BG. — Ax. 3.

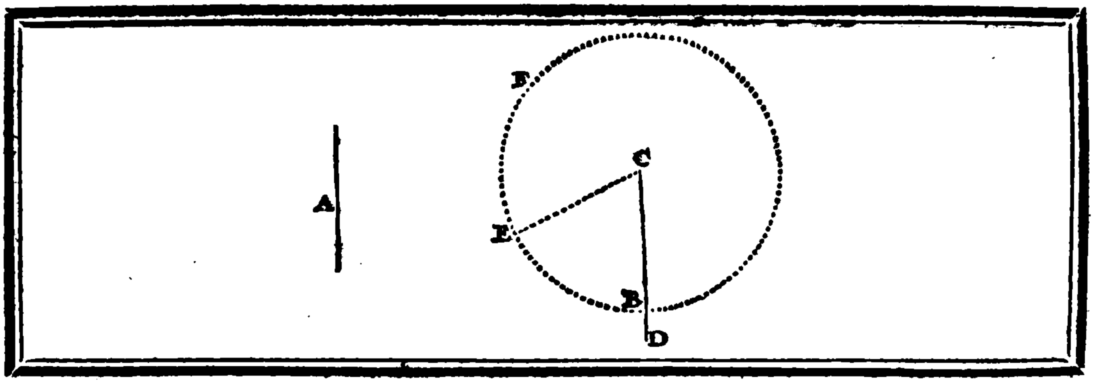
Puisque la ligne A L est donc = à la ligne B G (*Arg.* 6.) & que la ligne B C est aussi = à la même ligne B G (*Arg.* 2.)

7. La ligne AL est = à la ligne B C. — Ax. 1.

Mais il est manifeste, que cette ligne A L, est une ligne menée du point donné A (*Ref.* 3.)

8. Partant on a mené du point donné A, une droite AL, égale à la droite donnée B C.

C. Q. F. F.



PROPOSITION III. *PROBLEME III.*

DEux droites inégales (A & CD) étant données; retrancher de la plus grande (CD,) une partie (CB) égale à la plus petite A.

Donnee.	Cherchee.
La ligne CD > ligne A.	*De CD retrancher CB = A.*

Résolution.

1. Du point C menez la droite CE = à la donnée A. — P. 2. L. 1.
2. Du centre C & du rayon CE décrivez le ⊙ CEB; qui coupe la plus grande CD en B. — Dem. 3.

Demonstration.

LEs droites CB CE, étant menées du centre C à la ○ BEF (*Ref.* 2.)

1. Elles sont des rayons, d'un même ⊙ BEF. — D. 16. L. 1.
2. Partant, CB = CE. — D. 15. L. 1.

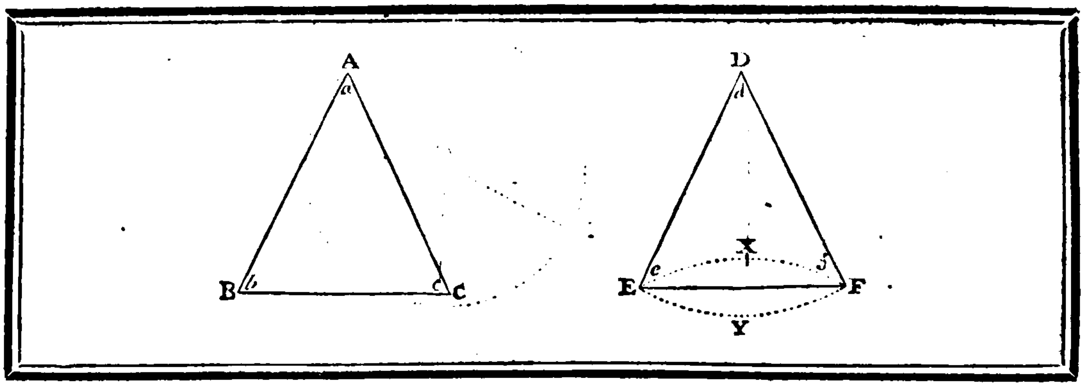
Or la droite A étant = à la droite CE (*Ref.* 1.); & la droite CB étant = à la même droite CE (*Arg.* 2.)

3. La droite A est = à la droite CB. — Ax. 1.

Mais la droite CB, fait partie de la droite entiere CD.

4. Partant, on a retranché de la plus grande CD, une partie CB = à la plus petite donnée A.

C. Q. F. F.



PROPOSITION IV. *THEORE'ME. I.*

SI deux triangles (BAC, EDF), ont deux côtés égaux à deux côtés chacun à chacun; (c. à. d. AB = DE, & AC = DF), & de plus, l'angle compris (a) égal à l'angle compris (d): ils auront auſſi la baſe (BC), égale à la baſe (EF); & les deux autres angles (b & c) égaux aux deux autres angles (e & f), chacun à chacun de ceux qui ſe trouvent oppoſés à des côtés égaux; & le triangle entier (BAC) ſera égal au triangle entier (EDF).

HYPOTHESE.	THESE.
I. AB = DE.	*I. BC = EF.*
II. AC = DF.	*II. ∀ b = ∀ e & ∀ c = ∀ f.*
III. ∀ a = ∀ d.	*III. △ BAC = △ EDF.*

Préparation.

Imaginez que le △ BAC ſoit poſé ſur le △ EDF; de maniere que
1. Le ſommet A tombe ſur le ſommet D.
2. Et que le côté AB tombe ſur le côté DE.

DEMONSTRATION.

PUiſque la ligne AB eſt = à la ligne DE (*Hyp.* 1), que le point A tombe ſur le point D (*Prep.* 1), & la ligne AB ſur la ligne DE (*Prep.* 2).

1. Le point B tombera néceſſairement ſur le point E. Ax. 9.

De même; puiſque ∀ a = ∀ d (*Hyp.* 3), que le ſommet A tombe ſur le ſommet D (*Prep.* 1) & la jambe AB ſur la jambe DE (*Prep.* 2.)

2. La jambe AC tombera néceſſairement ſur la jambe DF. Ax. 9.

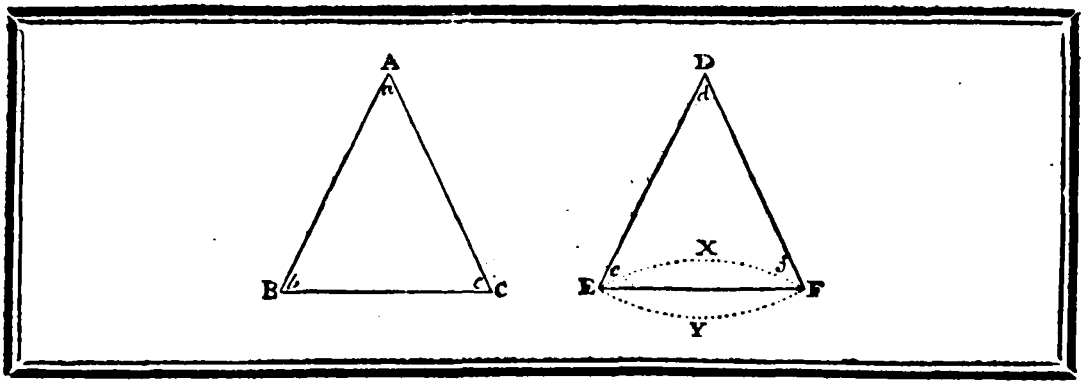
De plus, à cauſe que cette jambe AC eſt = à la jambe DF.

3. Il faut, que le point C tombe auſſi ſur le point F. Ax. 9.
4. C'eſt pourquoi les extrêmités B & C de la baſe BC, conviennent aux extrêmités E & F de la baſe EF.
5. Et par conſequent, la baſe entiere BC convient à la baſe entiere EF.

Car ſi la baſe BC ne convenoit pas à la baſe EF, nonobſtant que les extrêmités B & C de la baſe BC, conviennent aux extrêmités E & F de la baſe EF; deux lignes droites renfermeroient un eſpace (EXF, ou EYF); ce qui eſt impoſſible. Ax. 12.

Puis donc que la baſe BC convient à la baſe EF. (*Arg.* 5.)

6. Cette



6. Cette base B C sera = à la base E F. Ax. 9.

C. Q. F. D. I.

Derechef, la base BC convenant à la base E F *(Arg.* 5), & les deux autres côtés AB, AC du △ BAC convenant aux deux autres côtés DE, DF du △ EDF *(Prep.* 2, *Arg.* 2.)

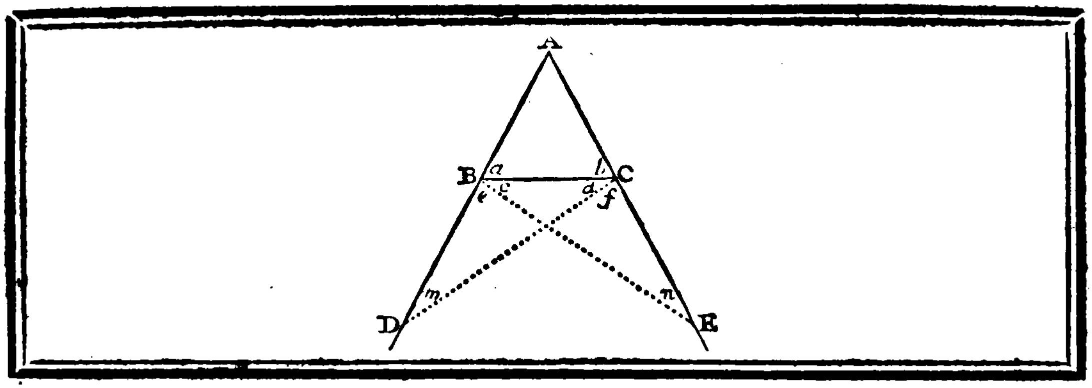
7. Ces deux △ BAC, EDF sont nécessairement égaux entr'eux. Ax. 9.

C. Q. F. D. III.

Enfin, puisque les ∀ *b* & ∀ *e* opposés aux côtés égaux AC, DF *(Hyp* 2); Item, les ∀ *c* & ∀ *f* opposés aux côtés égaux AB, DE *(Hyp.* 1), conviennent & par leurs sommets & par leurs jambes. *(Arg.* 1. 2. 3. 5.)

8. Il s'en suit, que les ∀ *b* & ∀ *e* de même que les ∀ *c* & ∀ *f*, opposés à des côtés égaux, sont égaux entr'eux. Ax. 9.

C. Q. F. D. II.



PROPOSITION V. THEOREME. II.

Dans tout triangle isoscèle (B A C): les angles (*a* & *b*) sur la base (B C) sont égaux entr'eux, & les côtés égaux (A B, A C) étant prolongés: les angles (*c* + *e*, & *d* + *f*) sous la base (B C) sont aussi égaux entr'eux.

HYPOTHESE.	THESE.
I. Le △ B A C est isoscèle.	*I. ∀ a & ∀ b sur la base sont = entr'eux.*
II. A B & A C sont prolongés indéfiniment.	*II. ∀ c + e & ∀ d + f sous la base sont aussi = entr'eux.*

Préparation.

1. Sur le côté prolongé A B prenez un point quelconque D.
2. Faites A E = A D. — Prop. 3. L. 1.
3. Par les points B & E, item C & D tirez les droites B E, C D. — Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque dans le △ D A C les deux côtés A D, A C sont égaux aux deux côtés A E, A B du △ E A B chacun à chacun (*Prep.* 2. *Hyp.* 1); & que ∀ A compris entre ces côtés égaux est commun aux deux △.

1. La base D C est = à la base B E; & les deux autres ∀ *m* & *b* + *d* du △ D A C, sont égaux aux deux autres ∀ *n* & *a* + *c* du △ E A B chacun à chacun de ceux qui sont opposés à des côtés égaux. — Prop. 4. L. 1

De plus la ligne entiere A D étant = à la ligne entière A E (*Prep.* 2), & la partie A B = à la partie A C (*Hyp.* 1.); *en retranchant &c.*

2. Les lignes restantes B D, C E sont aussi = entr'elles. — Ax. 3.

Derechef, puisque dans le △ D B C les côtés D B, D C sont égaux aux côtés C E, E B du △ E C B chacun à chacun (*Arg.* 2. & 1.) & qu'outre cela ∀ compris *m* est égal à ∀ compris *n* (*Arg.* 1.).

3. Les deux autres ∀ sont = aux deux autres ∀ opposés à des côtés égaux, chacun à chacun c. à. d. ∀ *c* + *e* = ∀ *d* + *f* & ∀ *d* = ∀ *c*. — Prop. 4. L. 1.

Les ∀ entiers *a* + *c* & *b* + *d* étant donc = entr'eux, & leurs parties ∀ *c* & ∀ *d* l'étant de même (*Arg.* 1 & 3.); *en retranchant &c.*

4. Les ∀ restants *a* & *b* sont aussi = entr'eux. — Ax. 3.

Mais ces ∀ sont les deux ∀ sur la base B C.

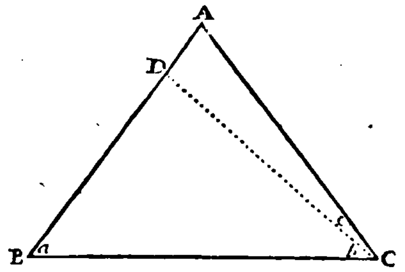
5. Donc ∀ *a* & ∀ *b* sur la base B C sont = entr'eux.

C. Q. F. D. I.

De plus, puisque ∀ *e* + *c* = ∀ *d* + *f* (*Arg.* 3.) sont les ∀ sous la base.

6. Il est clair que les ∀ *e* + *c* & ∀ *d* + *f* sous la base sont aussi = entr'eux.

C. Q. F. D. II.



PROPOSITION VI. *THEOREME III.*

SI un triangle (ABC) a deux angles (*a* & *b* + *c*) égaux entr'eux : les côtés opposés à ces angles égaux, feront auffi égaux entr'eux.

HYPOTHESE.	THESE.
Dans le △ ACB, ∀ a = ∀ b + c.	*Le côté CA = au côté BA.*

DEMONSTRATION.

Si non,

1. Les côtés CA, BA feront néceffairement inégaux.	N. C.
2. Par conféquent l'un, comme BA, fera > l'autre CA.	N. C.

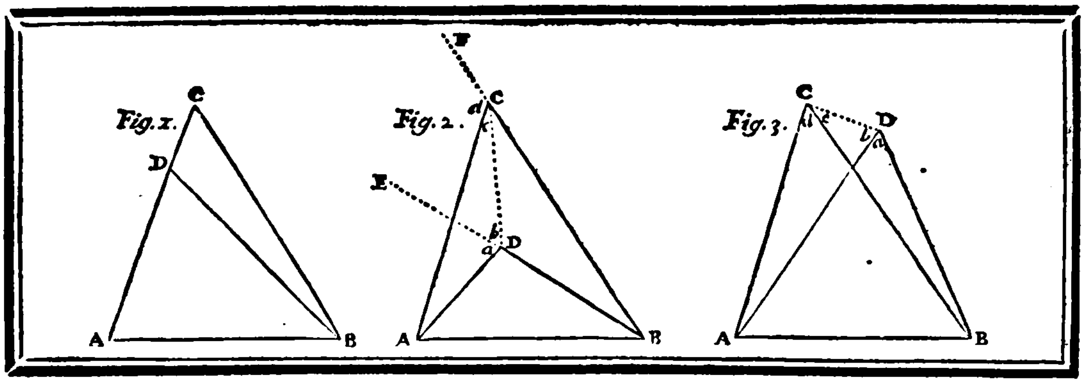
Préparation.

1. Retranchez donc du > côté BA, une partie égale au < côté CA.	P. 3. L. 1.
2. Menez du point C au point D la droite CD.	Dem. 1.

DAns les △ ACB, DBC le côté BD = au côté CA (*Prep.* 1), le côté BC eft commun aux deux △, & ∀ compris *a* = ∀ compris *b* + *c* (*Hyp.*)

1. Partant deux △ ACB, DBC ont deux côtés = à deux côtés chacun à chacun, & ∀ compris *a* = ∀ compris *b* + *c*.	
2. C'eft pourquoi le △ ACB eft = au △ DBC.	P. 4. L. 1.
Mais le △ ACB étant le tout, & le △ DBC fa partie.	
3 Il s'enfuivroit que le tout feroit = à fa partie.	
4. Ce qui eft impoffible.	Ax. 8.
Les côtés CA, BA, oppofés aux ∀ égaux *a* & *b* + *c*, ne pouvant donc être inégaux.	
5. Ces côtés font égaux entr'eux, ou CA = BA.	N. C.

C. Q. F. D.



PROPOSITION VII. *THEOREME IV.*

DEs extrêmités (A & B) d'une ligne droite (AB), desquelles on a mené à un même point (C), deux droites (AC, BC): on ne peut mener à quelqu'autre point (D), situé du même côté de cette ligne, deux autres droites (AD, BD), égales aux deux premieres chacune à chacune.

HYPOTHESE.

1. AC, BC, item AD, BD sont des droites;
2. tirées des mêmes points A & B;
3. à deux points differens D & C, situés du même côté par rapport à la ligne AB.

THESE.

Il est impossible que AC soit = AD, & BC = BD.

DEMONSTRATION.

Si non.

Il y a du même côté de la ligne AB un point D tel, que AC soit = AD, & BC = BD. Par conséquent ce point se trouvera

Cas 1. Ou sur un des côtés AC, ou BC. *Fig.* 1.
Cas 2. Ou dans le △ ACB. *Fig.* 2.
Cas 3. Ou hors du △ ACB. *Fig.* 3.

CAS. I. Si on suppose le point D sur un des côtés, comme sur le côté AC. *Fig.* 1.

PUis donc qu'on suppose, que le point D est un point dans AC différent du point C.
1. La ligne AD est ou > ou < la ligne AC.
2. Partant il est impossible que AD soit = AC. N. C.

C. Q. F. D.

CAS. II. Si on suppose le point D au dedans du △ ACB. *Fig.* 2.

Préparation.

1. Du point D au point C tirez la droite DC. Dem. 1.
2. Prolongez à discrétion BD en E & BC en F. Dem. 2.

Puisque AC est supposée = AD.
1. Le Δ CAD sera un Δ isoscéle. D. 25. L. 1.
2. Par conséquent les ∀ sur la base *a* + *b* & *c* seront égaux entr'eux. P. 5. L. 1.
De même BC étant supposée = BD.
3. Le Δ CBD sera aussi un Δ isoscéle. D. 25. L. 1.
4. Et à cause de cela les ∀ sous la base, *b* & *c* + *d*, seront aussi égaux entr'eux. P. 5. L. 1.
C'est pourquoi, si on ôte de ∀ *c* + *d* sa partie ∀ *d*.
5. ∀ *b* sera > ∀ *c*. N. C.
Et si au même ∀ *b*, on ajoute ensuite ∀ *a*.
6. ∀ entier *a* + *b* sera à plus forte raison > ∀ *c*. N. C.
7. Partant ∀ *a* + *b* & ∀ *c* ne sont point égaux. N. C.
Mais on a démontré qu'en vertu de la supposition de ce cas, ∀ *a* + *b* & ∀ *c* doivent être égaux (*Arg.* 2).
8. D'où il suit que cette supposition ne sçauroit avoir lieu, à moins que ces ∀ ne soient à la fois égaux & inégaux.
9 Ce qui est impossible. N. C.
10. Partant, la supposition, qui fait AC = AD & BC = BD, est impossible elle-même.

C. Q. F. D.

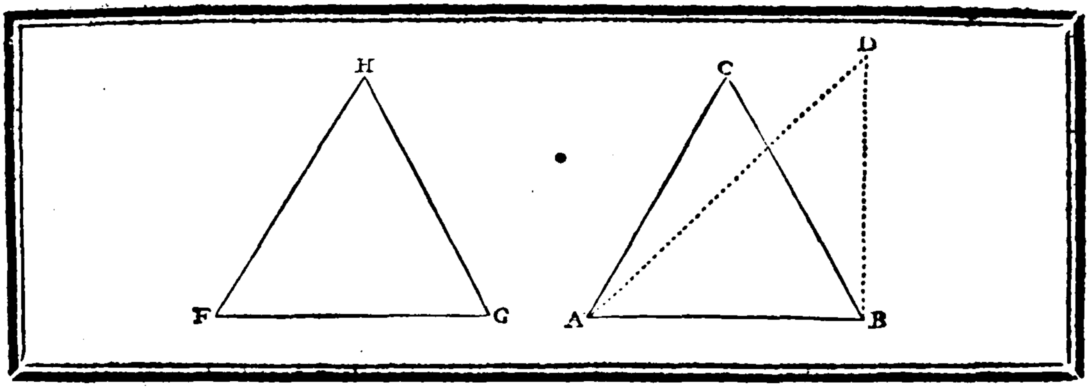
CAS III. Si on suppose le point D hors du Δ ACB. *Fig.* 3.

Préparation.

Du point D au point C tirez donc la droite DC. Dem. 1.

Puisqu'on suppose AC = AD
1. Le Δ CAD sera un Δ isoscéle. D. 25. L. 1.
2. Par conséquent ∀ *b* & ∀ *d* + *c* sur la base sont égaux entr'eux. P. 5. L. 1.
Derechef, puisqu'on suppose aussi BC = BD;
3. Le Δ CBD sera aussi un Δ isoscéle. D. 25. L. 1.
4. Par conséquent ∀ *c* & ∀ *b* + *a* sur la base seront aussi égaux entr'eux. P. 5. L. 1.
Otant donc du dernier de ces ∀ *b* + *a* sa partie ∀ *a*.
5. L'∀ *c* sera > ∀ restant *b*. N. C.
Si à ce même ∀ *c* on ajoute donc ∀ *d*.
6. L'∀ entier *c* + *d* sera à plus forte raison > ∀ *b*. N. C.
7. Partant, ∀ *c* + *d* & ∀ *b* ne sont point égaux entr'eux.
Or, on vient de prouver, qu'en vertu de la supposition de ce cas, ∀ *d* + *c* & ∀ *b* sont égaux entr'eux (*Arg.* 2).
8. D'où il suit encore que cette supposition ne sçauroit avoir lieu, à moins que ces angles ne soient à la fois égaux & inégaux.
9. Ce qui est impossible. N. C.
10. Partant, la supposition, qui fait AC = AD & BC = BD est impossible.

C. Q. F. D.



PROPOSITION VIII. *THEOREME. V.*

TOus les triangles, (FHG, ACB), qui ont les trois côtés (FH, HG, GF) égaux aux trois côtés (AC, CB, BA) chacun à chacun: font égaux entr'eux, & les angles compris par des côtés égaux, font auſſi égaux chacun à chacun.

HYPOTHESE.

I. FH = AC.
II. HG = CB.
III. GF = BA.

THESE.

$\triangle$ *FHG* = $\triangle$ *ACB*, *et* $\begin{cases} \forall F = \forall A, \\ \forall G = \forall B \\ \forall H = \forall C \end{cases}$

Préparation.

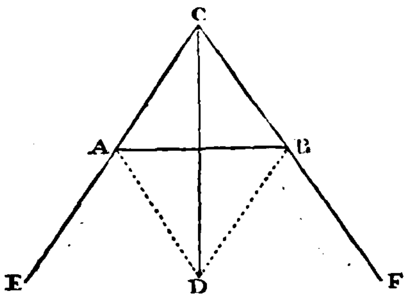
Qu'on s'imagine, que le $\triangle$ FHG foit poſé ſur le $\triangle$ ACB, enſorte
1. Que le point F convienne au point A.
2. Et la baſe FG à la baſe AB.

DEMONSTRATION.

PUis donc que le point F convient au point A (*Prep.* 1) & la ligne FG à la ligne AB (*Prep.* 2), & que ces lignes ſont égales (*Hyp.* 3).

1. Il faut que le point G convienne au point B. Ax. 9.
Les points extrèmes F & G du côté FG, convenant donc aux points extrèmes A & B du côté AB, (*Prep.* 1. *Arg.* 1.); & les droites FH, GH étant égales aux droites AC, BC, chacune à chacune.
2. Les droites FH, GH, conviendront néceſſairement aux droites AC, BC, chacune à chacune.
Si non; on pourroit tirer des extrêmités A & B, d'une ligne AB, à deux points differens C & D, & du même côté, deux droites AC, BC égales à deux autres droites AD, BD chacune à chacune. Ce qui eſt impoſſible. P. 7. L. 1.
3. Ces côtés conviennent donc.
4. Mais la baſe FG convenant à la baſe AB (*Prep.* 2.), le côté FH au côté AC & le côté GH au côté BC (*Arg.* 2.)
5. Il ſuit que les $\triangle$ ACB, FGH ſont égaux entr'eux; auſſi bien que leurs $\forall$ compris par des côtés égaux chacun à chacun. Ax. 9.

C. Q. F. D.



PROPOSITION IX. *PROBLEME IV.*

UN angle rectiligne (ECF) étant donné ; le couper en deux parties égales (ECD, FCD).

DONNE	CHERCHE.
∀ *rectiligne ECF.*	∀ *ECD* = ∀ *FCD.*

Résolution.

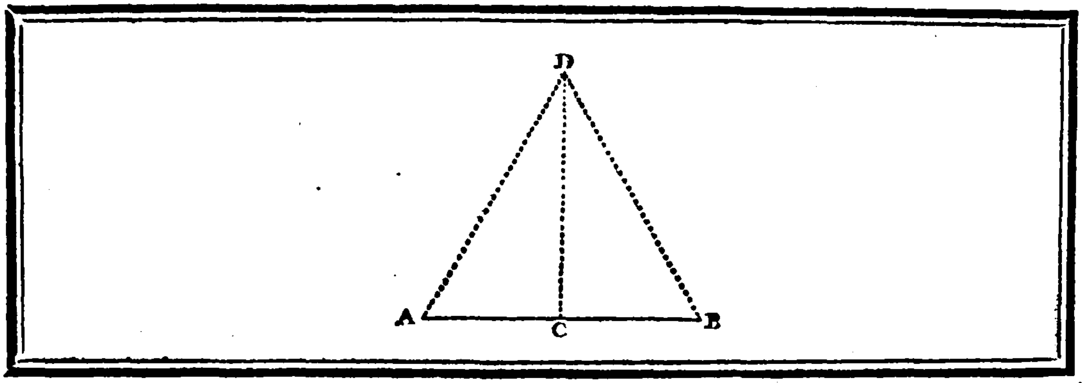
1. PRenez CA de longueur arbitraire.	
2. Faites CB = CA.	P. 3. L. 1.
3. Du point A au point B tirez la droite AB.	Dem. 1.
4. Sur la droite AB construisez le Δ équilatéral ADB.	P. 1. L. 1.
5. Du point C au point D tirez la droite CD.	Dem. 1.

DEMONSTRATION.

PUisque AC = CB (*Ref.* 2), DA = DB (*Ref.* 4), & le côté DC commun aux deux Δ CAD, CBD;

1. Ces deux Δ ont les trois côtés égaux chacun à chacun.
2. Partant les ∀ FCD, ECD, compris par les côtés égaux CA, CD; & CB, CD sont égaux entr'eux. P. 8. L. 1.

C. Q. F. F.



PROPOSITION X. PROBLEME V.

COuper en deux parties égales, (AC, CB) une ligne donnée & terminée (AB).

DONNEE. *La droite terminée AB*

CHERCHEE. *AC = BC.*

Résolution.

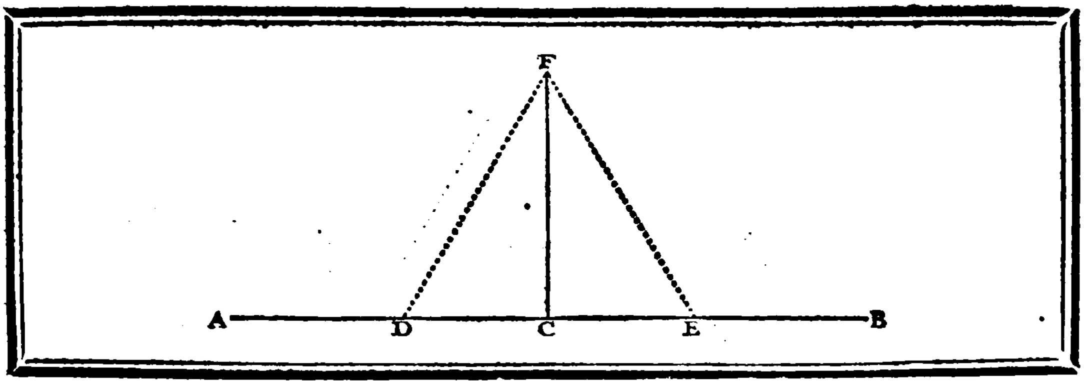
1. SUr la droite AB construisez le △ équilatéral ADB. P. 1. L. 1.
2. Coupez en deux parties egales ∀ ADB par la droite DC. P. 9. L. 1.

DEMONSTRATION.

PUisque AD = BD (*Ref.* 1.), que le côté DC est commun aux deux △ ADC, BDC & ∀ compris ADC = ∀ compris BDC (*Ref.* 2).

1. Ces deux △ ADC, BDC, ont deux côtez égaux à deux côtez chacun à chacun ; & ∀ compris ADC = ∀ compris BDC (*Ref.* 2).
2. Partant, la base AC = à la base BC. P. 4. L. 1.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XI. *PROBLEME VI.*

D'un point quelconque (C), dans une droite indéfinie (AB), élever une perpendiculaire (CF) sur cette droite.

Donnee	Cherchee.
La droite indéfinie AB & le point C dans cette droite.	*La droite CF elevée du point C ⊥ sur AB.*

Résolution.

1. DE part & d'autre du point C, prenez les droites CD, CE = entr'elles.	Prop. 3. L. 1.
2. Sur la droite DE construisez le △ équilatéral DFE.	Prop. 1. L. 1.
3. Du point F au point C tirez la droite FC.	Dem. 1.

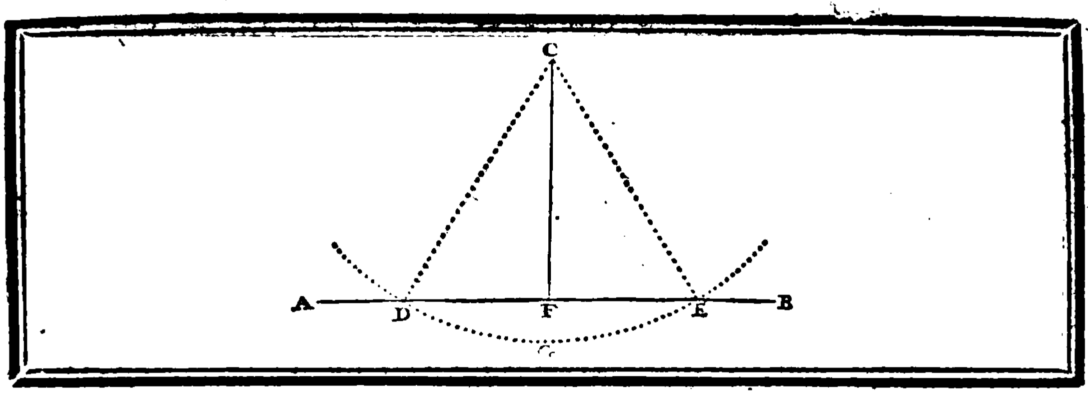
Demonstration.

Puisque CD est = à CE (*Ref.* 1), FD = FE (*Ref.* 2), & que le côté CF est commun aux deux △ DFC, EFC.

1. Il est évident que ces deux △ ont les trois côtés égaux aux trois côtés chacun à chacun.
2. Par conséquent, les ∀ contigus FCD, FCE (compris par les côtés égaux FC, CD, item FC, CE) sont égaux entr'eux. Prop. 8. L. 1.
   Mais c'est la droite FC qui tombant sur AB, forme ces ∀ contigus = entr'eux.
3. Partant, la droite FC est ⊥ sur AB. Def. 10. L. 1.

C. Q. F. F.

D



PROPOSITION XII. *PROBLEME VII.*

D'un point donné (C), hors d'une ligne droite indéfinie (AB); abaisser sur cette droite une ligne perpendiculaire (CF).

DONNEE	CHERCHEE.
La droite indéfinie A B et le point C hors de cette droite.	*La droite C F abaissée du point C ⊥ sur A B.*

Résolution.

1. DE l'autre côté de la droite AB, par rapport au point donné C, prenez un point quelconque G.
2. Du point C comme centre, & du rayon CG, décrivez un arc de ⊙ DGE, qui coupe la ligne indéfinie AB en deux points D & E. — Dem. 3.
3. Coupez la ligne DE en deux parties égales, au point F. — P. 10. L. 1.
4. Du point C au point F tirez la droite CF. — Dem. 1.

Préparation.

Du point C aux points D & E tirez les droites CD & CE. — Dem. 1.

DEMONSTRATION.

PUisque les lignes CD, CE, sont tirées du centre C à la ○ DGE (*Ref.* 2. & *Prep.*),

1. Ces lignes sont des rayons d'un même ⊙. — D. 16. L. 1.
2. Partant, la ligne CD est = à la ligne CE. — D. 15. L. 1.

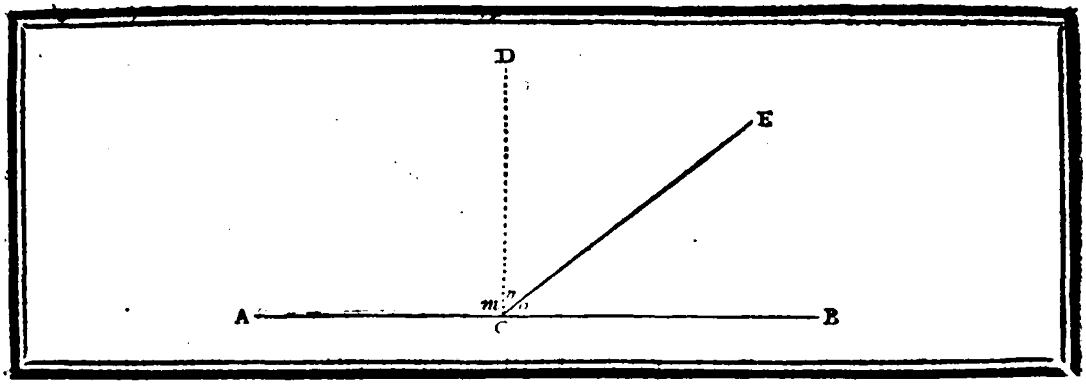
Puis donc que CD est = à CE (*Arg.* 2), DF = FE (*Ref.* 3) & que le côté CF est commun aux deux △ DCF, ECF

3. Ces deux △ ont les trois côtés égaux aux trois côtés chacun à chacun.
4. Partant, les ∀ CFD, CFE, compris par les côtés égaux FC, FD, & FC, FE sont = entr'eux. — P. 8. L. 1.

Mais ces deux ∀ CFD, CFE = entr'eux (*Arg.* 4), sont des ∀ contigus formés par la ligne CF qui tombe sur la ligne AB,

5. Partant, chacun de ces deux ∀ CFD, CFE, est un ∟, & la ligne CF est ⊥ sur la ligne AB. — D. 10. L. 1.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XIII. THEOREME VI.

SI une ligne droite (EC) tombe fur une autre ligne droite (AB): elle fait ou deux angles droits, ou deux angles égaux à deux droits.

Hypothese	These.
EC eft une droite tombant fur AB, au point C.	*I. Ou chacun des ∀ ACE, ECB eft un ∟.*
	II. Ou leur fomme eft = à deux ∟.

SUP. I. Si ∀ ACE eft = à ∀ ECB

DEMONSTRATION.

PUifque les angles contigus ACE, ECB, formés par les droites CE & AB font égaux entr'eux *(Sup)*.

1. Il s'enfuit que chacun d'eux eft un ∟. D. 10. L. 1.

C. Q. F. D.

SUP. II. Si ∀ ACE n'eft pas = à ∀ ECB.

Préparation.

Du point de rencontre C élevez fur AB la ⊥ CD. P. 11. L. 1.

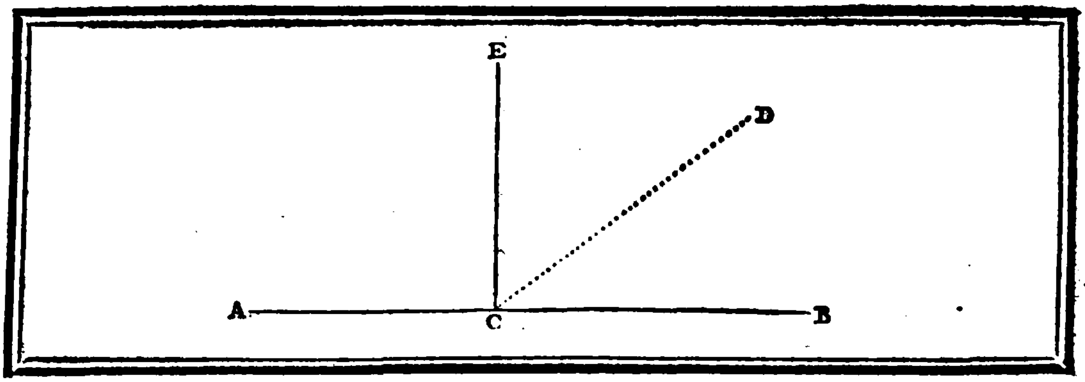
DEMONSTRATION.

PUifque DC eft ⊥ fur AB *(Prep)*.

1. Les deux ∀ DCA & DCB font des ∟. D. 10. L. 1.
   Mais comme ∀ DCB eft = aux deux ∀ $n + o$; fi on ajoute de part & d'autre ∀ DCA ou ∀ m.
2. Les deux ∀ DCA + DCB font = aux trois ∀ $m + n + o$. Ax. 2.
   Derechef, puifque ∀ ECA eft = aux deux ∀ $m + n$, fi on ajoute de part & d'autre ∀ ECB ou ∀ o.
3. Les deux ∀ ECA, ECB font auffi = à ces mêmes trois ∀ $m + n + o$. Ax. 2.
4. Par conféquent, les deux ∀ ECA & ECB font = aux deux ∀ DCA & DCB. Ax. 1.
   Mais les deux ∀ DCA & DCB étant deux ∟ *(Arg. 1)*.
5. Il eft évident, que la fomme des deux ∀ ECA & ECB eft auffi = à deux ∟. Ax. 1.

D 2

C. Q. F. D.



PROPOSITION XIV. *THEOREME VII.*

SI deux droites (AC, BC) rencontrent de part & d'autre une droite (EC), en un même point (C), faisant avec cette droite (EC) la somme des deux angles contigus (ACE, ECB) égale à deux angles droits: ces deux lignes droites (AC, BC) se rencontreront directement.

Hypothese.

I. Les deux lignes AC, BC se rencontrent au point C.
II. Les ∀ contigus ACE + ECB sont = à deux ∟.

These.

Les lignes AC, BC, se rencontrent directement c. à. d. elles ne forment qu'une même ligne droite AB.

Demonstration.

Si non.

On pourra prolonger AC quelque part de C, en D, ensorte que le prolongement DC ne fasse avec AC, qu'une même ligne droite ACD. — Dem. 2.

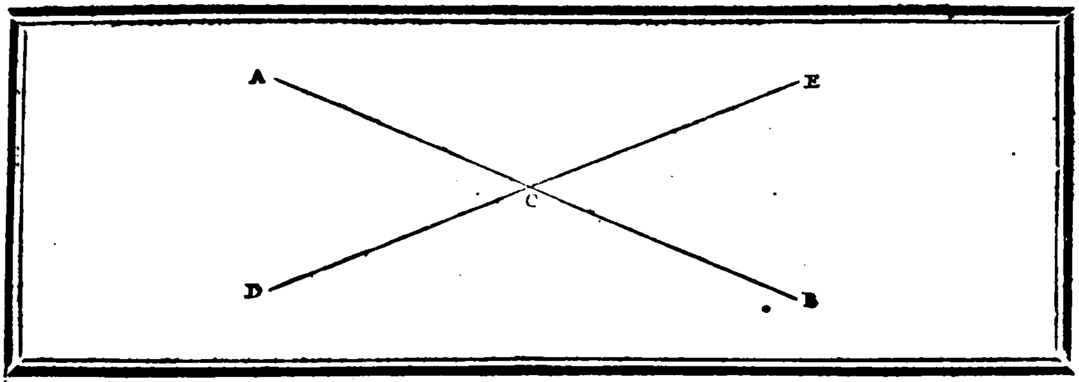
Préparation.

Prolongez donc AC, de C en D. — Dem. 2.

PUis donc que la ligne ACD est une ligne droite sur laquelle tombe la ligne EC.

1. Il s'ensuit, que la somme des ∀ contigus ACE + ECD est = à deux ∟. — P. 13. L. 1.
   Mais les ∀ ACE + ECB étant aussi = à deux ∟ (*Hyp.* 2).
2. Les deux ∀ ACE + ECB sont donc = aux deux ∀ ACE+ECD. — Ax. 1.
   Otant donc de part & d'autre ∀ commun ACE.
3. Les ∀ restans ECB & ECD seront égaux entr'eux. — Ax. 3.
   Mais ∀ ECB étant le tout, & ∀ ECD sa partie,
4. Il s'ensuit, que le tout est égal à sa partie.
5. Ce qui est impossible. — Ax. 8.
6. Partant, les lignes AC & BC se rencontrent directement; ou ne forment qu'une même ligne droite AB.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XV. *THEOREME VIII.*

SI deux lignes droites (AB, DE) s'entre-coupent (en C): les angles (ECA, DCB & ACD, BCE), opposés au sommet (C), sont égaux entr'eux.

HYPOTHESE.	THESE.
AB, DE sont des lignes droites, qui s'entre-coupent au point C.	*I.* ∀ *ECA* = ∀ *DCB.* *II.* ∀ *ACD* = ∀ *BCE.*

DEMONSTRATION.

PUisque la droite AC tombe sur la droite DE (*Hyp.*),

1. La somme des deux ∀ contigus ECA + ACD est = à deux ∟. — Prop. 13. L. 1.

Derechef, puisque la droite DC tombe sur la droite AB (*Hyp.*),

2. La somme des ∀ contigus ACD + DCB est aussi = à deux ∟. — Prop. 13. L. 1.
3. Par conséquent, les ∀ ECA + ACD sont égaux aux ∀ ACD + DCB. — Ax. 1.

Retranchant donc de ces sommes égales (*Arg.* 3), ∀ ACD, qui leur est commun.

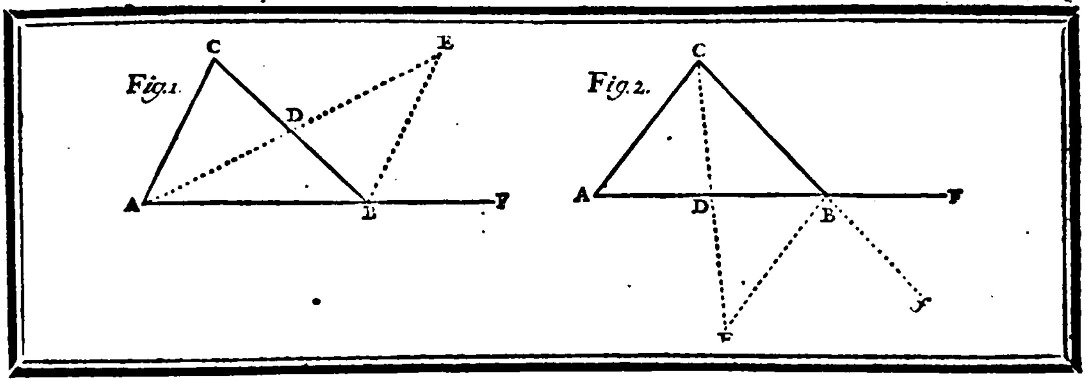
4. Les ∀ restans ECA, DCB, opposés au sommet C, sont = entr'eux. — Ax. 3.

C. Q. F. D. I.

Par un raisonnement semblable on prouvera

5. Que ∀ ACD est = à ∀ BCE qui lui est opposé au sommet.

C. Q. F. D. II.



PROPOSITION XVI. *THEOREME IX.*

EN tout triangle (ACB), dont un des côtés (comme AB) eſt prolongé, l'angle extérieur (CBF) eſt plus grand que chacun des intérieurs oppoſés (ACB, CAB).

HYPOTHESE.	THESE.
I. ACB eſt un △. *II. ∀ CBF eſt un ∀ extérieur formé par le côté prolongé AB.* *III. Les ∀ ACB & CAB ſont intérieurement oppoſés.*	*∀ extérieur CBF > que ∀ intérieur oppoſé ACB, ou CAB.*

Préparation.

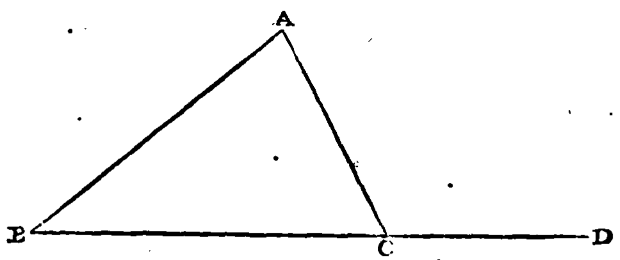
1. PArtagez CB en deux également au point D (*Fig.* 1). — P. 10. L. 1.
2. Du point A au point D tirez la ligne AD & prolongez la indéfiniment en E. — Dem. 1.
3. Faites DE = DA. — Prop. 3. L. 1.
4. Du point B au point E tirez la droite BE. — Dem. 1.

DEMONSTRATION.

LEs droites AE, BC (*Fig.* 1) s'entre-coupent au point D. (*Prep.* 2).

1. Par conſéquent, les ∀ oppoſés au ſommet CDA, BDE ſont = entr'eux. — Prop. 15. L. 1.
   Puis donc que dans les △ ACD, DEB, le côté CD eſt = au côté DB (*Pr.* 1), AD = DE (*Prep.* 3) & ∀ compris CDA eſt = à ∀ compris BDE. (*Arg.* 1).
2. Il ſuit que les autres ∀ ſont = aux autres ∀, chacun à chacun de ceux qui ſont oppoſés à des côtés égaux. — Prop. 4. L. 1.
   Or les ∀ ACD, DBE ſont oppoſés aux côtés égaux AD, DE (*Prep.* 3).
3. Donc ∀ ACD eſt = à ∀ DBE.
   Or ∀ CBF étant le tout, & ∀ DBE ſa partie.
4. Il s'enſuit que ∀ CBF > ∀ DBE. — Ax. 8.
5. Partant, ∀ extérieur CBF eſt auſſi > ∀ intérieur ACB. — N. C.
   De la même manière, en partageant le côté AB en deux également, au point D (*Fig.* 2), on prouvera par un raiſonnement ſemblable,
6. Que ∀ extérieur AB*f* eſt > ∀ intérieur CAB.
   Mais cet ∀ AB*f* eſt oppoſé au ſommet à ∀ CBF. — Prop. 15. L. 1.
7. D'où il ſuit que ∀ AB*f* = ∀ CBF. — N. C.
8. Partant, il eſt encore vrai que ∀ extérieur CBF > ∀ intérieur CAB.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XVII. THEOREME. X.

En tout triangle (BAC), deux angles quelconques (comme ABC, ACB) sont moindres que deux droits.

HYPOTHESE.	THESE.
ABC est un △.	*Les ∀ ABC + ACB sont < deux ∟.*

Préparation.

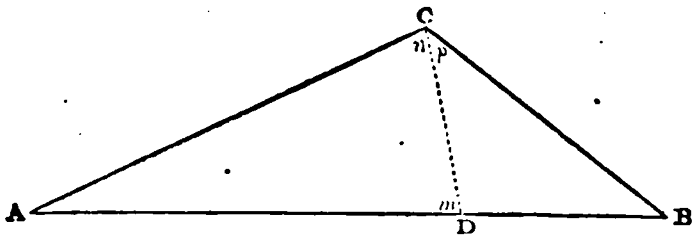
Prolongez le côté BC (sur lequel les deux ∀ ABC, ACB sont placés) en D. Dem. 2.

DEMONSTRATION.

Puisque ∀ ACD est un ∀ extérieur du △ BAC.

1. Il est > que son intérieur opposé ABC. Prop. 16. L. 1.
Puis donc que ∀ ACD est > ∀ ABC; si on ajoute de part & d'autre ∀ ACB,
2. Les ∀ ACD + ACB feront > que les ∀ ABC + ACB. Ax. 4.
Mais les ∀ ACD + ACB sont des ∀ contigus, formés par la droite AC, qui tombe sur BD (*Prep*).
3. Par conséquent, ces ∀ ACD + ACB sont = à deux ∟. Prop. 13. L. 1.
Or les ∀ ACD + ACB étant = à deux ∟ (*Arg.* 3) & ces mêmes ∀ étant > que les ∀ ABC + ACB (*Arg.* 2).
4. Il s'ensuit que les ∀ ABC + ACB sont < deux ∟. N. C.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XVIII. *THEOREME XI.*

DAns tout triangle (ACB); les plus grands côtés sont opposés aux plus grands angles.

HYPOTHESE.	THESE.
ACB est un △, ou AB est un côté > AC.	*∀ ACB, opposé au > côté AB, est plus grand que ∀ ABC opposé au moindre côté AC.*

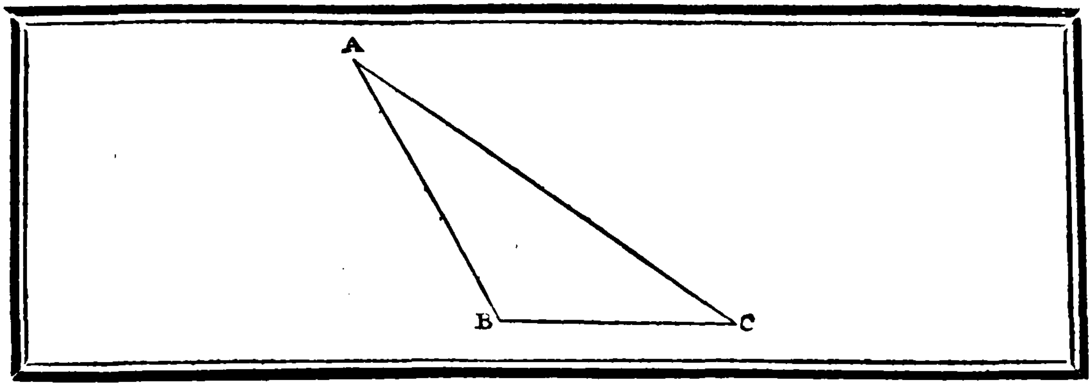
Préparation.

Puisque le côté AB > AC (*Hyp.*).
1. Faites AD = AC. Prop. 3. L. 1.
2. Du point C au point D tirez la droite CD. Dem. 1.

DEMONSTRATION.

PUisque le côté AD est = au côté AC (*Prep.* 1).
1. Le △ ACD est isoscéle. D. 25. L. 1.
2. Partant, les ∀ *m* & *n* sur la base CD sont = entr'eux. Prop. 5. L. 1.
Or ∀ *m* étant un ∀ extérieur du △ DCB.
3. Il s'ensuit, qu'il est > ∀ intérieur opposé DBC. Prop. 16. L. 1.
Mais ∀ *m* est = à ∀ *n* (*Arg.* 2).
4. Donc ∀ *n* est aussi > ∀ DBC N. C.
Et si à ∀ *n* on ajoute encore ∀ *p*.
5. ∀ *n* + *p*, ou ∀ ACB, opposé au plus grand côté AB, sera à plus forte raison > ∀ DBC, ou ABC opposé au moindre côté AC. N. C.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XIX. *THEOREME XII.*

En tout triangle (BAC), les plus grands angles sont opposés aux plus grands côtés.

Hypothese.	These.
Dans le △ BAC, ∀ C est > ∀ A.	*Le côté AB opposé à ∀ C est > le côté CB opposé à ∀ A.*

Demonstration.

Si non.
Le côté AB est ou égal, ou plus petit que le côté CB. N. C.

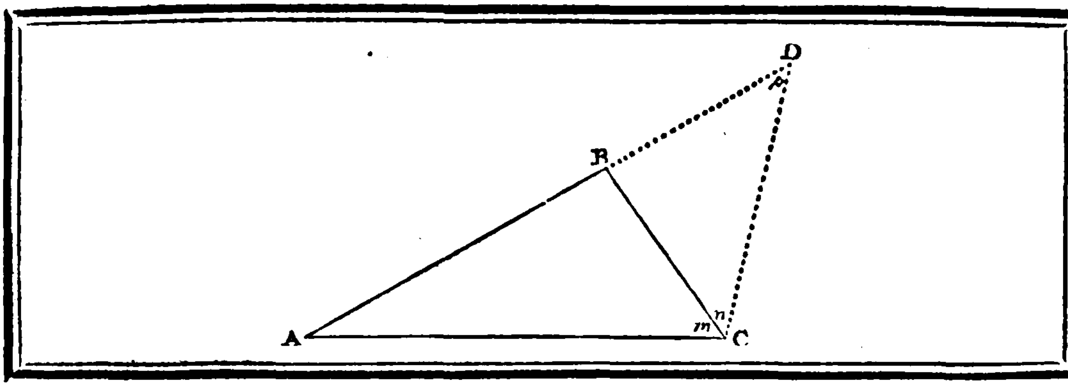
CAS. I. Supposé que AB soit = à CB.

Puis donc que le côté AB est = au côté CB (*Sup.* 1).
1. Le △ BAC est isocele. Def. 25. L. 1.
2. Partant, les ∀ C & A sur la base sont = entr'eux. Prop. 5. L. 1.
   Or ces ∀ C & A ne sont pas = entr'eux (*Hyp*).
3. Donc les côtés AB & CB ne sont point = entr'eux non plus.

CAS. II. Supposé que AB soit < CB.

Puis donc que le côté AB est < le côté CB (*Sup.* 2).
1. Il s'ensuit que ∀ C, opposé au plus petit côté AB, est < ∀ A opposé au plus grand côté CB. Prop. 18. L. 1.
   Or ∀ C n'est pas < ∀ A (*Hyp*).
2. Par conséquent le côté AB ne sauroit être < le côté CB.
   Le côté AB n'étant donc ni = au côté CB (*Cas.* 1.); ni < le côté CB (*Cas.* 2).
3. Il s'ensuit, que ce côté AB est > le côté CB. N. C.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XX. *THEOREME XIII.*

EN tout triangle (ABC): deux côtés quelconques (AB, BC) ſont plus grands que le troiſieme (AC).

HYPOTHESE.	THESE.
ABC eſt un △.	*Deux côtés quelconques, comme AB+BC, ſont > le troiſieme AC,*

Préparation.

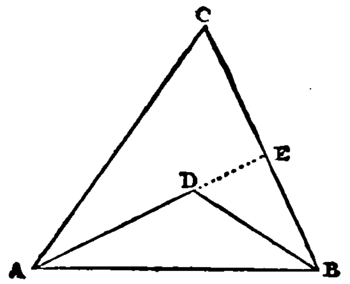
1. PRolongez un des deux côtés, comme AB, à l'infini.	Dem. 2.
2. Faites BD = à BC.	Prop. 3. L. 1.
3. Du point C au point D tirez la droite CD.	Dem. 1.

DEMONSTRATION.

PUiſque dans le △ BDC le côté BD eſt = au côté BC (*Prep. 2*).

1. Ce triangle eſt iſoſcele.	Def. 25. L. 1.
2. Par conſéquent, les ∀ ſur la baſe *n* & *p* ſont = entr'eux.	Prop. 5. L. 1.
Or ∀ *m*+*n* étant le tout & ∀ *n* ſa partie.	
3. Il s'enſuit, que ∀ *m*+*n* eſt > ∀ *n*.	Ax. 8.
Mais ∀ *m*+*n* étant > ∀ *n* (*Arg.* 3) & cet ∀ *n* étant = à ∀ *p* (*Arg.* 2).	
4. Il eſt évident, que ∀ *m*+*n* eſt > ∀ *p*.	N. C.
Puis donc que dans le △ ADC, ∀ *m*+*n* eſt > ∀ *p* (*Arg.* 4).	
5. Le côté AD oppoſé au plus grand ∀ *m*+*n* eſt auſſi > le côté AC oppoſé au plus petit ∀ *p*.	Prop. 19. L. 1.
Mais à cauſe que la droite BD eſt = à la droite BC (*Prep.* 2); ſi on ajoute de part & d'autre le côté AB,	
6. Il s'enſuit, que AB+BD, ou AD eſt = à la ſomme des deux côtés AB+BC.	Ax. 2.
Mais AD eſt > le côté AC (*Arg.* 5).	
7. Partant, la ſomme des deux côtés AB+BC eſt auſſi > le troiſieme côté AC.	N. C.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXI. *THEOREME XIV.*

SI des extrêmités (A & B) d'un côté (AB) de quelque triangle (ACB), on tire à un point quelconque (D), pris au dedans de ce triangle, deux lignes droites (DA, DB): ces deux droites feront plus petites que les deux côtés (CA, CB) de ce triangle; mais elles comprendront un plus grand angle (ADB).

HYPOTHESE.	THESE.
DA, DB font deux droites tirées, des points A & B au point D, pris au dedans du △ ACB.	*I.* DA + DB < CA + CB. *II.* ∀ ADB > ∀ C.

Préparation.

PRolongez la droite DA, jusqu'à ce qu'elle rencontre le côté CB en E. Dem. 2.

DEMONSTRATION.

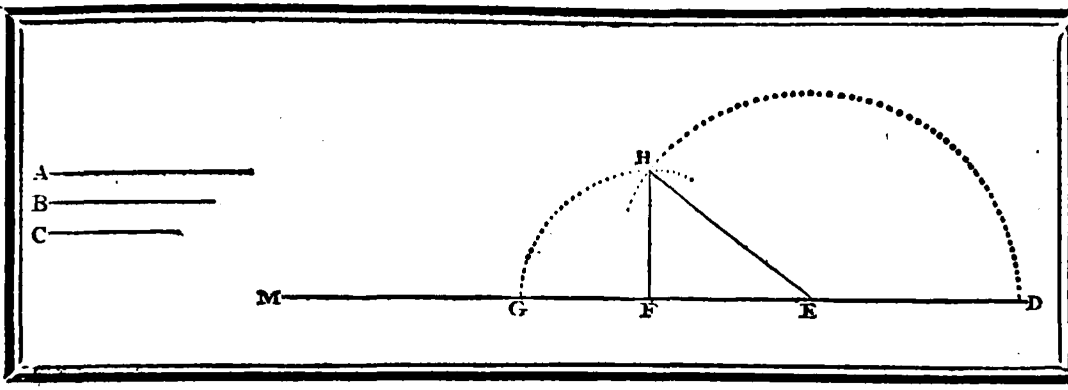
PUisque la figure ACE eft un △ (*Def.* 21. *L.* 1).

1. Les deux côtés CA + CE font > le troifieme AE. Prop. 20. L. 1.
Si on ajoute de part & d'autre la ligne EB,
2. Les côtés CA + CB (c. à. d. CA + CE + EB) font > les lignes AE + EB. Ax. 4.
Derechef, la figure DEB étant auffi un △ (*Def.* 21. *L.* 1).
3. Les deux côtés EB + ED font > le troifieme DB. Prop. 20. L. 1.
Si on ajoute donc de part & d'autre, la partie commune DA;
4. Les lignes AE + EB (c. à. d. EB + ED + DA) font > les lignes DA + DB. Ax. 4.
Mais on a prouvé, que les côtés CA + CB font > les lignes AE + EB (*Arg.* 2).
5. Partant, à plus forte raifon les côtés CA + CB feront > les lignes DA + DB. N. C.

C. Q. F. D. I.

De même; puifque ∀ ADB eft un ∀ extérieur du △ DEB (*Prep.*) & que ∀ DEB eft fon intérieur oppofé,
1. Il fuit, que ∀ ADB eft > ∀ DEB. Prop. 16. L. 1.
2. Par la même raifon; ∀ DEB eft > ∀ C.
Or puifque ∀ ADB > ∀ DEB (*Arg.* 1), & que ∀ DEB eft > ∀ C (*Arg.* 2).
3. Il eft évident, que ∀ ADB eft à plus forte raifon > ∀ C. N. C.

C. Q. F. D. II.



PROPOSITION XXII. *PROBLEME VIII.*

DE trois lignes droites, égales à trois autres droites données (A, B, C), conſtruire un triangle (F H E); en ſuppoſant que deux quelconques de ces droites données ſoient plus grandes que la troiſieme.

DONNEES.	CHERCHEE.
Les lignes droites A, B, C telles que *A+B > C, A + C > B, C + B > A.*	*La conſtruction d'un △ FHE, tel que* *EH ſoit = A, FE = B, & FH = C.*

Réſolution.

1. TIrez la droite indéterminée D M. — Dem. 1.
2. Faites E D = à la donnée A, FE = à la donnée B, & FG = à la donnée C. — Prop. 3. L. 1.
3. Du point E comme centre & du rayon E D decrivez le ⊙ DH.
4. Du point F comme centre & du rayon FG decrivez le ⊙ GH. — Dem. 3.
5. Des points E & F, au point d'interſection H, tirez les droites EH, FH. — Dem. 2.

DEMONSTRATION.

LEs droites E D, E H étant tirées du centre E à la ○ DH (*Ref.* 3 & 5).

1. Ces deux droites E D, E H ſont des rayons d'un même ⊙ DH. — Def. 16. L. 1.
2. Par conſéquent, la droite E D eſt = à la droite E H. — Def. 15. L. 1.

Puis donc que E D eſt = à E H (*Arg.* 2) & que la droite donnée A eſt auſſi = à la même ligne E D (*Ref.* 2).

3. Il s'enſuit, que E H eſt = à la donnée A. — Ax. 1.

Par un raiſonnement ſemblable on prouvera, que

4. La ligne F H eſt = à la donnée C.

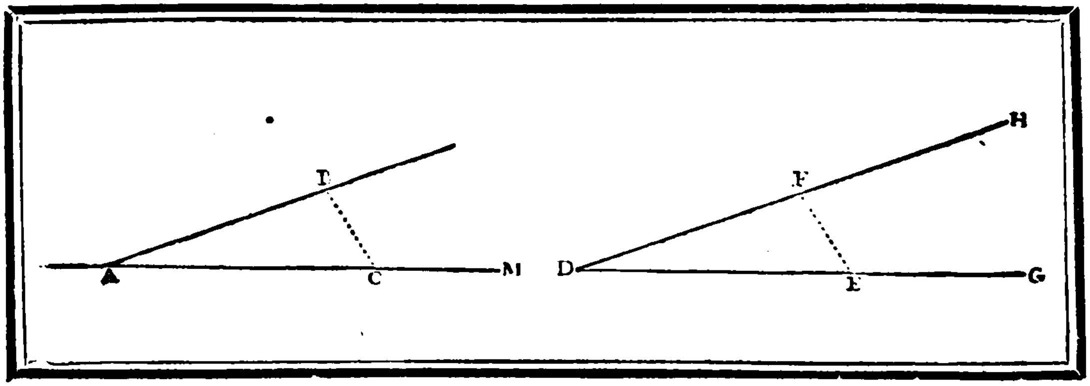
Or le côté E H étant = à la donnée A (*Arg.* 3), le côté FH = à la donnée C (*Arg.* 4), & enfin le côté FE = à la donnée B (*Ref.* 2).

5. Il eſt évident, que les trois côtés E H, FE, FH du △ FHE, que l'on vient de conſtruire, ſont = aux trois droites données A, B, C.

C. Q. F. F.

R E M A R Q U E.

La condition ajoutée, que deux des données quelconques ſoient plus grandes que la troiſieme, eſt eſſentielle, en vertu de la XX Prop. *du* 1 Livre; *ſans cette condition les cercles décrits des centres* E & F *ne ſçauroient s'entre-couper, défaut qui rendroit la conſtruction impoſſible.*



PROPOSITION XXIII. *PROBLEME IX.*

UNe droite indéterminée (AM) étant donnée, avec un de ses points (A); décrire sur cette droite & à ce point un angle rectiligne (BAC), égal à un autre angle rectiligne donné (HDG).

Donnee

I. La droite indéterminée AM;
II. Le point A dans la droite AM.
III. L'angle rectiligne HDG.

Cherchee.

Un angle BAC décrit sur AM; au point A = à ∀ HDG.

Résolution.

1. SUr les jambes DG, DH, de l'angle donné HDG, prenez deux points quelconques E & F.
2. Du point E au point F tirez la droite EF. — Dem. 1.
3. Sur la droite indeterminée AM & au point A, construisez un △ ABC, dont les trois côtés soient égaux aux trois côtés du △ DFE. — Prop. 22. L. 1.

Demonstration.

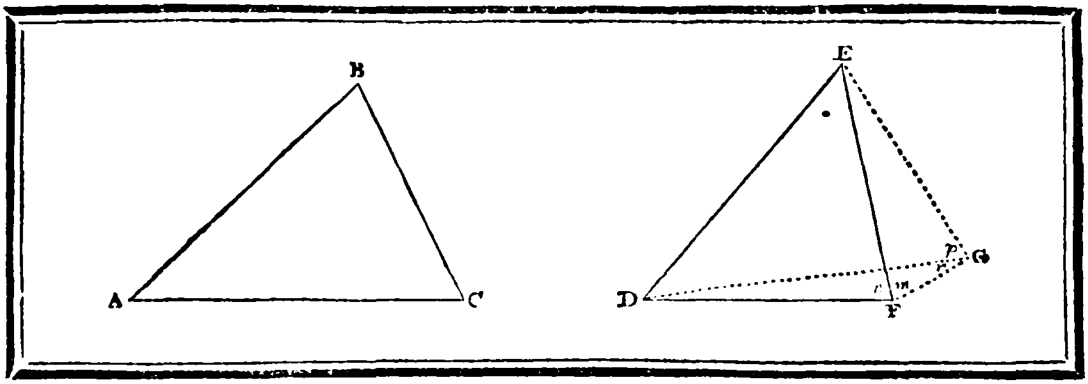
PUisque les trois côtés AB, AC, BC du △ ABC sont = aux trois côtés DF, DE, FE du △ DFE chacun à chacun (*Ref.* 3).

1. Il s'ensuit, que les ∀ BAC & HDG, opposés aux côtés égaux BC, FE, sont = entr'eux. — Prop. 8. L. 1.

Mais ∀ BAC étant = à ∀ donné HDG, & se trouvant décrit outre cela sur la droite donnée AM au point donné A (*Ref.* 3).

2. Il s'ensuit, qu'on a décrit sur une droite donnée AM, & à son point donné A, un ∀ rectiligne BAC = à un autre ∀ rectiligne donné HDG.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XXIV. THEOREME XV.

SI deux triangles (ABC, DEF), ont deux côtés (BA, BC) égaux à deux côtés (ED, EF) chacun à chacun; mais l'angle compris (B) plus grand que l'angle compris (DEF): la base (AC) opposée au plus grand angle, sera aussi plus grande que la base (DF) opposée au plus petit angle.

Hypothese.	These.
I. BA = ED	*La base AC est > la base DF.*
II. BC = EF.	
III. ∀ B > ∀ DEF.	

Préparation.

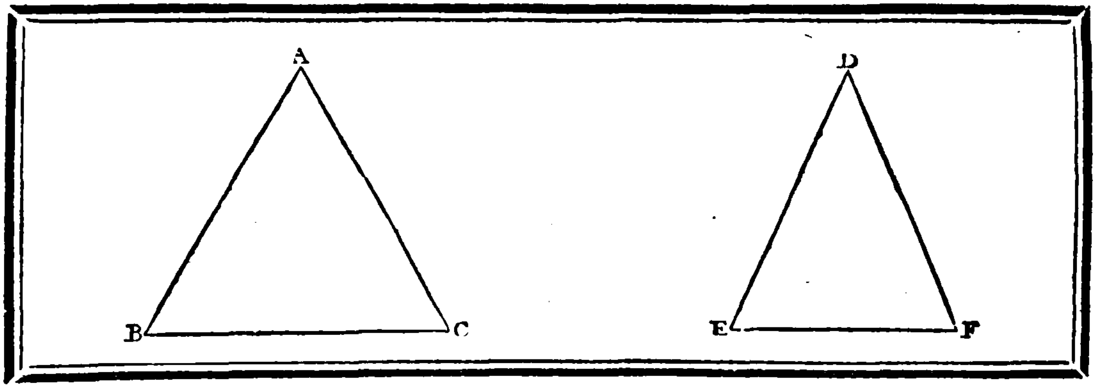
1. SUr la ligne DE au point E décrivez ∀ DEG = à ∀ donné B.	Prop. 23. L. 1.
2. Faites EG = à BC ou à EF.	Prop. 3. L. 1.
3. Des points D & F au point G tirez les droites DG, FG.	Dem. 1.

Demonstration.

PUisque dans le △ ABC les côtés BA, BC sont = aux côtés ED, EG du △ DEG (*Hyp.* 1. *Prep.* 2) & ∀ compris B = à ∀ compris DEG (*Prep.* 1).

1. Il suit, que la base AC est = à la base DG.	Prop. 5. L. 1.
Derechef; puisque EG est = au côté EF (*Prep.* 2, *Hyp.* 2).	
2. Le △ FEG est un △ isoscéle.	Def. 25. L. 1.
3. Partant, ∀ *m* = ∀ *r* + *p*.	Prop. 5. L. 1.
Puis donc que ∀ *m* = ∀ *r* + *p* (*Arg.* 3); si on retranche du dernier sa partie *p*,	
4. L'angle *m* sera > ∀ *r*.	N. C.
Et si a ∀ *m* on ajoute encore ∀ *n*;	
5. L'angle entier *m* + *n* sera beaucoup > ∀ *r*.	N. C.
6. Par consequent, le côté DG, opposé au plus grand ∀ *m* + *n*, est > le côté DF opposé au plus petit ∀ *r*.	Prop. 19. L. 1.
Or la droite DG étant > DF (*Arg.* 6) & cette même droite DG étant = à la base AC (*Arg.* 1).	
7. Il est évident, que la base AC est aussi > la base DF.	N. C.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXV. *THEOREME XVI.*

Si deux triangles (BAC, EDF), ont deux côtés égaux à deux côtés chacun à chacun, mais la base (BC) plus grande que la base (EF): l'angle (BAC) opposé à la plus grande base (BC), sera aussi plus grand que l'angle (D) opposé à la plus petite base (EF).

Hypothese.	These.
I. AB = DE.	*L'angle A opposé à la plus grande base BC est > ∀ D opposé à la plus petite base EF.*
II. AC = DF.	
III. BC > EF.	

Demonstration.

Si non.

L'angle A est ou égal ou plus petit que l'angle D. N. C.

CAS. I. Supposé que ∀ A soit = à ∀ D.

Puisque ∀ A est = à ∀ D (*Sup.* 1) & que les côtés AB, AC & DE, DF, qui comprennent ces ∀, sont égaux chacun à chacun (*Hyp.* 1 & 2).

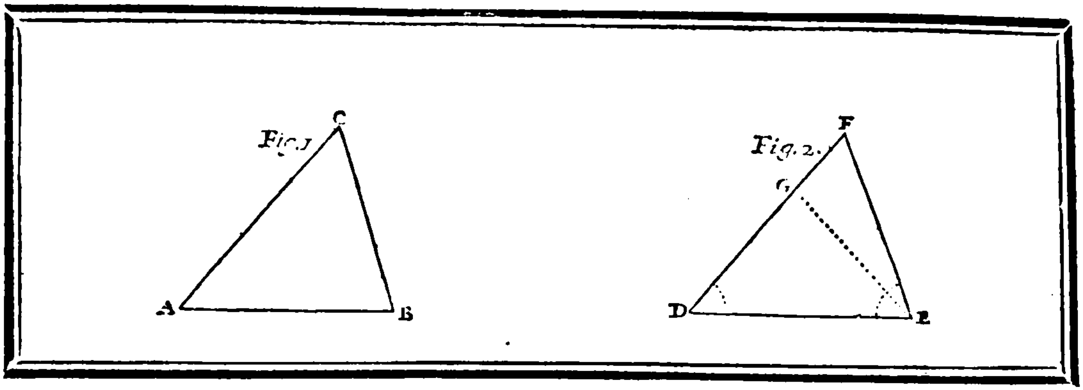
1. La base BC est = à la base EF. Prop. 4. L. 1.
Mais la base BC n'est point = à la base EF (*Hyp.* 3).
2. Donc ∀ A ne peut point être = à ∀ D.

CAS. II. Supposé que ∀ A soit < ∀ D.

Puisque ∀ A est < ∀ D (*Sup.* 2). & que les côtés AB, AC & DE, DF, qui comprennent ces ∀, sont égaux chacun à chacun (*Hyp.* 1 & 2).

1. La base BC est < la base EF. Prop. 24. L. 1.
Or la base BC n'est pas < que la base EF (*Hyp.* 3).
2. Donc ∀ A n'est pas < ∀ D.
Mais on a démontré qu'il ne lui est pas égal non plus (*Cas* 1).
3. Par conséquent ∀ A, qui est opposé à la plus grande base BC, est > ∀ D, qui est opposé à la plus petite base EF.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXVI. *THEOREME XVII.*

SI deux triangles (ACB, DFE), ont deux angles (A & B) égaux à deux angles (D & FED) chacun à chacun, & un côté égal à un côté; ſoit, que ce côté, (comme AB & DE) ſoit adjacent aux deux angles égaux; ſoit, qu'il ſe trouve oppoſé (comme AC & DF) à un de ces angles: ils auront auſſi les deux autres côtés (AC, BC ou AB, BC) égaux aux deux autres côtés (DF, EF ou DE, EF) chacun à chacun, & le troiſieme angle (C) égal au troiſieme angle (F).

CAS. I.

Hypothese		These.
I. ∀ *A* = ∀ *D.*	Lorſque les côtés égaux AB, DE	*I.* *AC* = *DF.*
II. ∀ *B* = ∀ *FED.*	ſont adjacens aux angles égaux A & D,	*II.* *BC* = *EF.*
III. *AB* = *DE.*	item B & FED, (*Fig.* 1 & 2).	*III.* ∀ *C* = ∀ *F.*

Demonstration.

SI non.

Les côtés ſont inégaux, & l'un, comme DF, ſera > l'autre AC.

Préparation.

1. Retranchez donc du plus grand côté DF une partie DG = à AC. Prop. 3. L. 1.
2. Du point G au point E tirez la droite GE. Dem. 1.

PUis donc que dans les Δ ACB, DGE le côté AC eſt = au côté DG (*Prep.* 1), AB = DE (*Hyp.* 3) & que ∀ compris A eſt = à ∀ compris D (*Hyp.* 1).

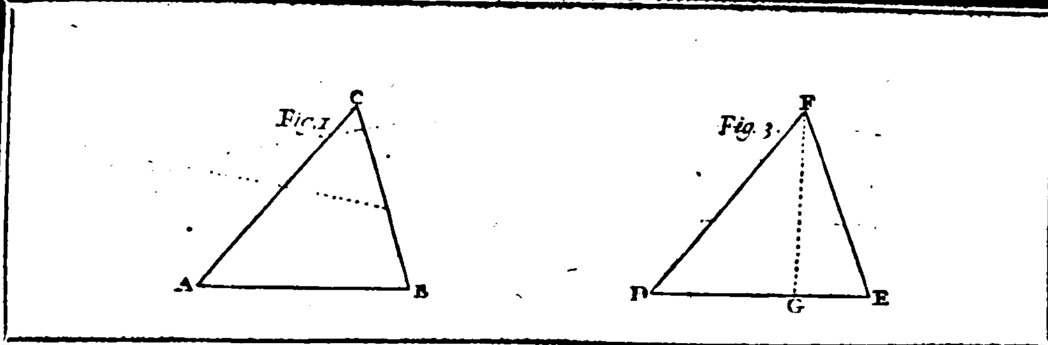
1. Les ∀ B & GED, oppoſés aux côtés égaux AC & DG, ſont = entr'eux. Prop. 4. L. 1.
Mais ∀ B étant = à ∀ GED (*Arg.* 1) & ce même ∀ B étant auſſi = à ∀ FED (*Hyp.* 2).
2. Il s'enſuit, que ∀ GED eſt = à ∀ FED. Ax. 1.
Or ∀ FED étant le tout & ∀ GED ſa partie.
3. Le tout ſeroit = à ſa partie.
4. Ce qui eſt impoſſible. Ax. 8.
5. Les côtes AC, DF ne ſont donc point inégaux.
6. Partant, il ſont égaux, ou AC = DF. N. C.

C. Q. F. D. I.

Puis donc que dans les Δ ACB, DFE, le côté AC eſt = au côté DF (*Arg.* 6), AB = DE (*Hyp.* 3), & que ∀ compris A eſt = à ∀ compris D (*Hyp.* 1).

7. Le troiſieme côté BC eſt auſſi = au troiſieme côte EF, & les ∀ C & F oppoſés aux côtés egaux AB, DE ſont auſſi = entr'eux. Prop. 4. L. 1.

C. Q. F. D. II. & III.



CAS. II.

Hypothese.

I. ∀ A = ∀ D.
II. ∀ B = ∀ E.
III. AC = DF.

Lorsque les côtés égaux AC, DF se trouvent opposés aux angles égaux B & E (*Fig.* 1 & 3.).

These.

I. AB = DE.
II. BC = EF.
III. ∀ C = ∀ F.

Demonstration.

Si non.

Les côtés AB, DE sont inégaux: & l'un, comme DE, sera > l'autre AB.

Préparation.

1. Retranchez donc du plus grand côté DE une partie DG = à AB. Prop. 3. L. 1.
2. Du point G au point F tirez la droite GF. Dem. 1.

Puis donc que dans les △ ACB, DFG le côté AC est = au côté DF (*Hyp.* 3), AB = DG (*Prep.* 1) & que ∀ compris A est = à ∀ compris D (*Hyp.* 1).

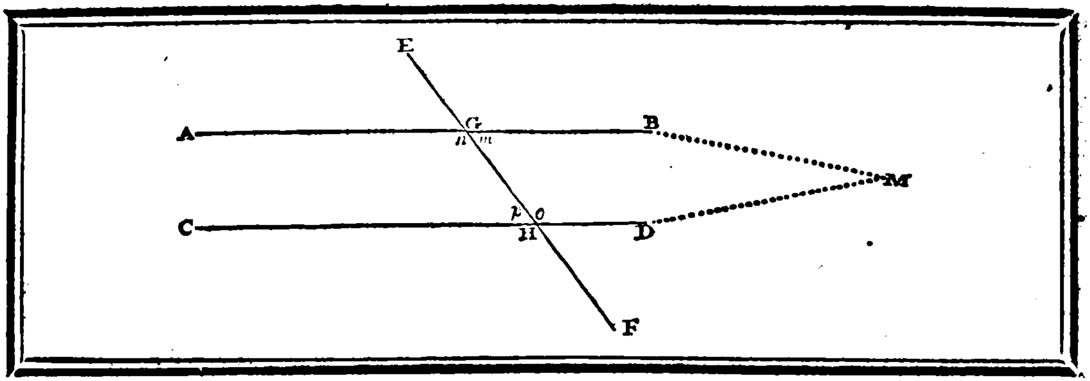
1. Les autres ∀ B & DGF, opposés aux côtés égaux AC, DF, sont = entr'eux. Prop. 4. L. 1.
L'angle B étant donc = ∀ DGF (*Arg.* 1.) & ce même ∀ B étant aussi égal à ∀ E (*Hyp.* 2).
2. Il s'ensuit, que ∀ E est = à ∀ DGF. Ax. 1.
Mais l'angle DGF est un ∀ extérieur du △ GFE & ∀ E est son intérieur opposé.
3. Donc ∀ extérieur seroit égal à son intérieur opposé.
4. Ce qui est impossible. Prop. 16. L. 1.
5. Partant, les côtés AB, DE ne sont point inégaux.
6. Ils sont donc égaux, ou AB = DE. N. C.

C. Q. F. D. I.

Puis donc que dans les △ ACB, DFE le côté AC est = au côté DF (*Hyp.* 3), AB = DE (*Arg.* 6) & que ∀ compris A est = à ∀ compris D (*Hyp.* 1).

7. Il est évident, que le troisieme côté BC est = au troisieme côté EF & que les ∀ C & F, opposés aux côtés égaux AB, DE, sont = entr'eux. Prop. 4. L. 1.

C. Q. F. D. II. & III.



PROPOSITION XXVII. *THEOREME XVIII.*

SI une ligne droite (EF), tombant sur deux autres lignes droites (AB, CD) situées dans un même plan, fait les angles alternes (*m* & *p* ou *n* & *o*) égaux entr'eux: ces deux lignes (AB, CD) sont paralleles.

HYPOTHESE.	THESE.
I. AB, CD sont deux lignes droites, situées dans un même plan,	*Les lignes AB, CD sont Plles.*
II. La ligne EF les coupe tellement que ∀ m = ∀ p ou ∀ n = ∀ o.	

DEMONSTRATION.

SI non.

Les droites AB, CD prolongées doivent se couper quelque part. — D. 35. L. 1.

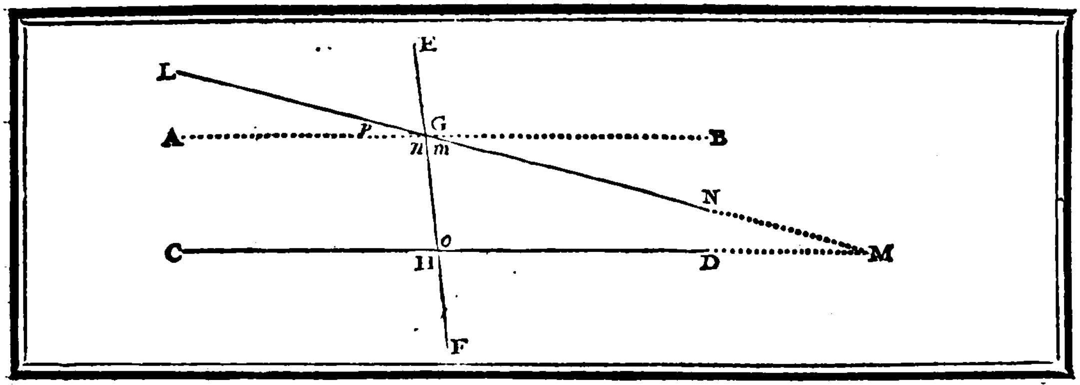
Préparation.

Prolongez les donc jusqu'à ce qu'elles se coupent en M. — Dem. 2.

PUis donc que ∀ *n* est un angle extérieur du △ GMH, & ∀ *o* son intérieur opposé;

1. L'angle *n* est > ∀ *o*. — Prop. 16. L. 1.
   Mais ∀ *n* est = à ∀ *o* (*Hyp.* 2).
2. Cet ∀ *n* n'est donc point > ∀ *o*. — N. C.
3. Partant il est impossible que les droites AB, CD s'entrecoupent en un point comme M.
4. D'où il suit qu'elles sont des droites Plles. — Def. 35. L. 1.

C. Q. F. D.



REMARQUE.

S*I on reçoit au nombre des axiomes, la proposition qu'Euclide suppose comme évidente par elle-même,* * *à sçavoir*, qu'une ligne droite (EF), qui coupe une de deux paralleles (comme AB), en coupera nécessairement l'autre (CD) aussi, pourvû que cette ligne coupante (EF) soit prolongée suffisamment : *on peut démontrer sans peine l'axiome XI, dont la vérité est un peu éloignée des notions communes, & qui sert cependant de fondement à la Proposition XXIX. Voici de quelle maniere cela se peut faire.*

LEMME.

SI une ligne droite (EF), tombant sur deux autres lignes droites (LN, CD) situées dans un même plan, fait les angles alternes ($p+n$ & o) inégaux entr'eux : ces deux lignes (LN & CD), prolongées suffisamment, s'il est nécessaire, se rencontreront quelque part (en M), du côté où se trouve le plus petit des angles alternes (o).

Préparation.

CAr puisqu'on suppose ∀ $p+n$ > ∀ o.

1. On peut décrire dans le plus grand ∀ $p+n$, sur la droite EF au point G, l'angle n = ∀ o, Prop. 23. L. 1.
2. Et prolonger AG à volonté en B. Dem. 2.

DEMONSTRATION.

PUis donc que les deux lignes AB, CD sont coupées par une troisieme EF, ensorte que les ∀ alternes n & o sont = entr'eux (*Prep.* 1).

1. Ces deux lignes AB, CD sont Plles. Prop. 27. L. 1.

Mais la ligne LN coupe une des deux Plles, à sçavoir AB en G.

2. Donc, si on la prolonge suffisamment, elle coupera aussi l'autre CD quelque part en M, du côté où se trouve le plus petit des ∀ alternes o. Ax. Sup.

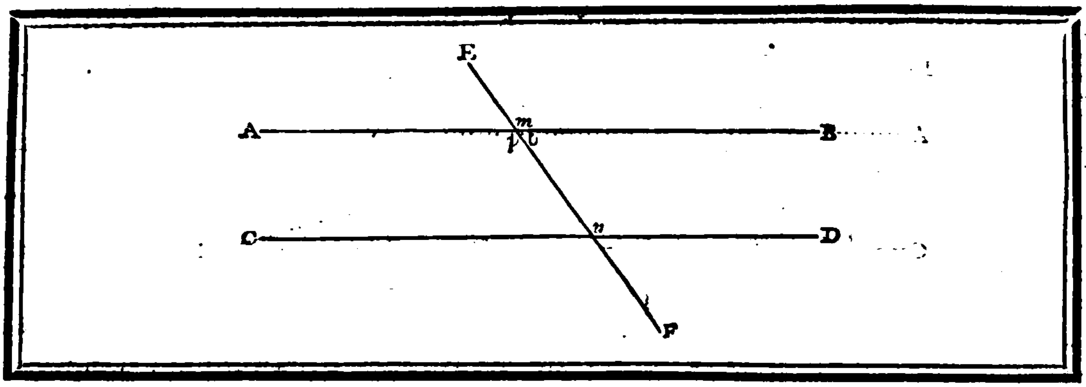
C. Q. F. D.

Corollaire.

LOrsque ∀ o < ∀ $p+n$, les deux angles intérieurs $o+m$ sont nécessairement < deux ∟ ; vû que les deux angles $p+n$ & m sont égaux à deux ∟. P. 13. L. 1.
Par conséquent, lorsque les deux ∀ intérieurs sont < deux ∟ ; les lignes LN, CD, qui forment ces angles avec EF, se rencontreront quelque part du côté de la ligne EF, où ces angles se trouvent placés, pourvû qu'on les prolonge suffisamment. Lem.

C. Q. F. D.

* Voyez la Prép. des Propositions XXX, XXXVII & de plusieurs autres.



PROPOSITION XXVIII. *THEOREME XIX.*

SI une ligne droite (EF), tombant sur deux autres lignes droites (AB, CD) situées dans un même plan, fait l'angle extérieur (*m*) égal à son intérieur (*n*) opposé du même côté; ou bien les deux intérieurs ($o + n$) du même côté égaux à deux droits: ces deux lignes (AB, CD) sont paralleles entr'elles.

CAS. I.

HYPOTHESE.	THESE.
$\forall\, m = \forall\, n$.	*AB, CD sont des lignes Plles.*

DEMONSTRATION.

PUisque les ∀ *m* & *p* sont des ∀ opposés au sommet.

1. Ils sont = entr'eux. — Prop. 15. L. 1.
   L'angle *p* étant donc = à ∀ *m* (*Arg.* 1) & ∀ *n* étant = au même ∀ *m* (*Hyp.*).
2. Il est évident que ∀ *p* est aussi = à ∀ *n*. — Ax. 1.
   Mais les ∀ égaux *p* & *n* (*Arg.* 2), sont en même tems des ∀ alternes.
3. Par conséquent, les droites AB, CD sont Plles. — Prop. 27. L. 1.

CAS. II.

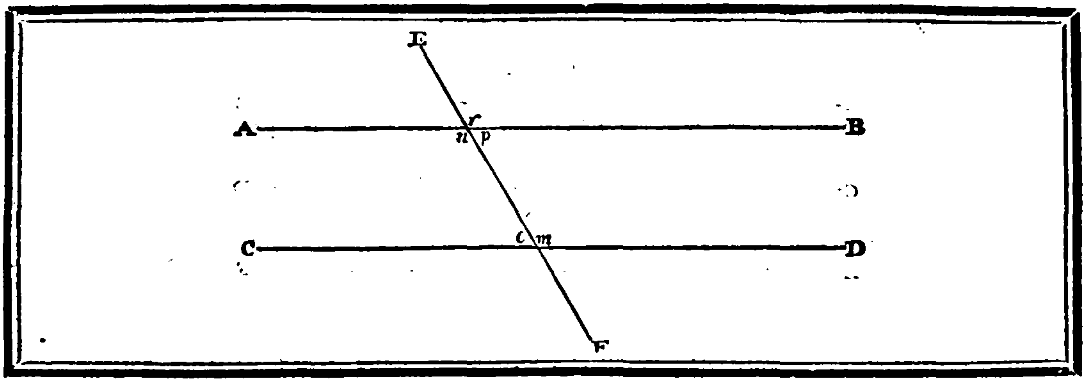
HYPOTHESE.	THESE.
Les ∀ $o + n$ *sont* = *à* 2 ∟.	*AB, CD sont des lignes Plles.*

DEMONSTRATION.

PUisque la droite EF, tombant sur la droite AB, forme avec elles les ∀ contigus *o* & *p*.

1. Ces ∀ $o + p$ sont = à deux ∟. — Prop. 13. L. 1.
   Les ∀ $o + p$ étant donc = à deux ∟ (*Arg.* 1) & les ∀ $o + n$ étant aussi = à deux ∟ (*Hyp.*).
2. Il s'ensuit que les ∀ $o + p$ sont = aux ∀ $o + n$. — Ax. 1.
   Et si on retranche de part & d'autre l'angle commun *o*;
3. Les ∀ restans *p* & *n* seront = entr'eux. — Ax. 3.
   Or ces ∀ égaux *p* & *n* (*Arg.* 3), sont en même tems des ∀ alternes.
4. Par conséquent, les droites AB, CD sont Plles. — Prop. 27. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXIX. *THEOREME XX.*

UNe ligne droite (EF), tombant sur deux autres droites paralleles (AB, CD), fait les angles alternes (*n* & *m*) égaux; de plus l'angle extérieur (*r*) égal à son intérieur opposé du même côté (*m*); & enfin les deux intérieurs opposés du même côté (*p* + *m*) égaux à deux droits.

Hypothese.

AB, CD sont deux lignes Plles, coupées par une même droite EF.

These.

I. ∀ *n* = ∀ *m*.
II. ∀ *r* = ∀ *m*.
III. Les ∀ *p* + *m* = *à* 2 ∟.

Demonstration.

SI non.
Les ∀ *m* & *n* sont inégaux, — N. C.
Et l'un comme ∀ *m* sera < l'autre ∀ *n*.

PUis donc que ∀ *m* < ∀ *n*; si on ajoute de part & d'autre ∀ commun *p*.
1. Les ∀ *m* + *p* seront < les ∀ *n* + *p*. — Ax. 4.
Mais à cause que ∀ *n* & ∀ *p* sont des ∀ contigus, formés par la droite EF, qui tombe sur AB.
2. Ces ∀ *n* + *p* sont = à deux ∟. — Prop. 13. L. 1.
3. Partant, les ∀ *m* + *p* (moindres que les ∀ *n*+*p*) sont aussi < deux ∟. — N. C.
4. D'où il suit que les lignes AB, CD ne sont pas Plles. — Corol. du Lem.
Mais les droites AB, CD sont Plles (*Hyp.*).
5. Par conséquent, les ∀ *m* & *n* ne sont point inégaux. — Prop. 27. L. 1.
6. Ils sont donc égaux, ou ∀ *n* = ∀ *m*. — N. C.

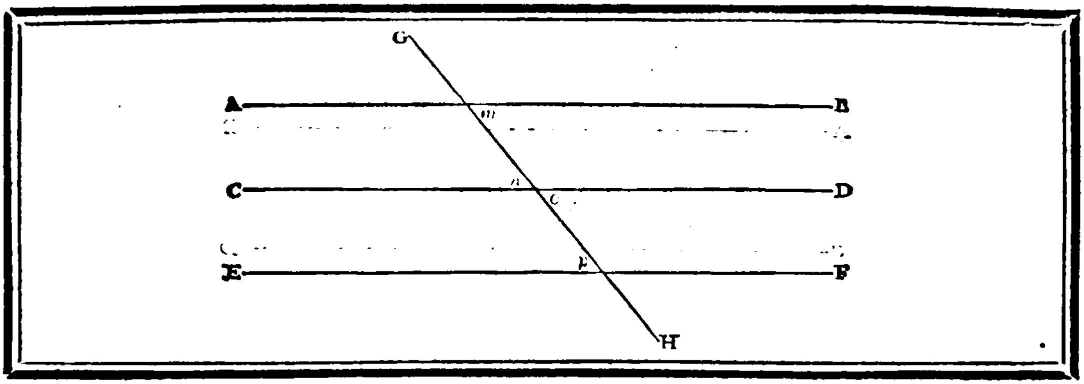
C. Q. F. D. I.

De plus, ∀ *r* & ∀ *n* étant opposés au sommet.
7. Ces angles sont = entr'eux. — Prop. 15. L. 1.
Mais ∀ *m* étant = à ∀ *n* (*Arg.* 6) & ∀ *r* étant = au même ∀ *n* (*Arg.* 7).
8. Il s'ensuit, que ∀ *r* est = à ∀ *m*. — Ax. 1.

C. Q. F. D. II.

De même; ∀ *n* étant = à ∀ *m* (*Arg.* 6); si on ajoute ∀ commun *p*.
9. Les ∀ *n* + *p* seront = aux ∀ *m* + *p*. — Ax. 2.
Mais les ∀ *n* + *p* sont = à deux ∟ (*Arg.* 2).
10. D'où il suit que les ∀ *m* + *p* sont aussi = à deux ∟. — Ax. 1.

C. Q. F. D. III.



PROPOSITION XXX. *THEOREME XXI.*

LEs lignes droites (AB, EF), paralleles à une même droite (CD), sont paralleles entr'elles.

HYPOTHESE.	THESE.
AB, EF sont des droites Plles à CD.	*Les droites AB, EF sont Plles entr'elles.*

Préparation.

TIrez la droite GH qui coupe les trois lignes AB, CD, EF.

DEMONSTRATION.

PUisque les droites AB, CD sont deux Plles (*Hyp.*) coupées par une même droite GH (*Prep.*).

1. Les ∀ alternes *m* & *n* sont = entr'eux. — Prop. 29. L. 1.

De même, puisque les droites CD, EF sont deux Plles (*Hyp.*) coupées par une même droite GH (*Prep.*).

2. L'angle extérieur *n* est = à son intérieur *p* opposé du même côté. — Prop. 29. L. 1.

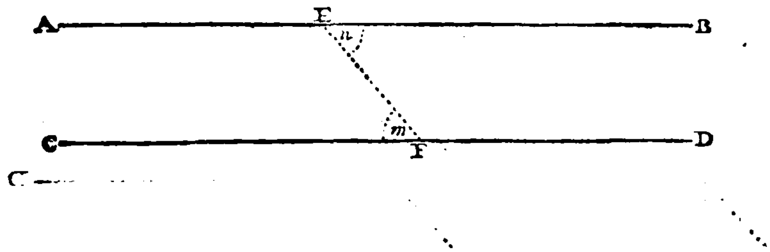
Mais ∀ *n* étant = à ∀ *m* (*Arg.* 1), & le même ∀ *n* étant aussi = à ∀ *p* (*Arg.* 2).

3 Les ∀ *m* & *p* seront = entr'eux. — Ax. 1.

Or ces ∀ égaux *m* & *p* (*Arg.* 3), sont des ∀ alternes, formés par les deux droites AB, EF, qui sont coupées par la droite GH.

4. Par conséquent, ces droites AB, EF sont Plles. — Prop. 27. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXXI. *PROBLEME X.*

PAr un point donné (E), tirer une ligne droite (AB) parallele à une autre droite donnée (CD).

DONNEE	CHERCHEE.
La droite CD avec le point E.	*La droite AB Plle à CD & passant par le point E.*

Résolution.

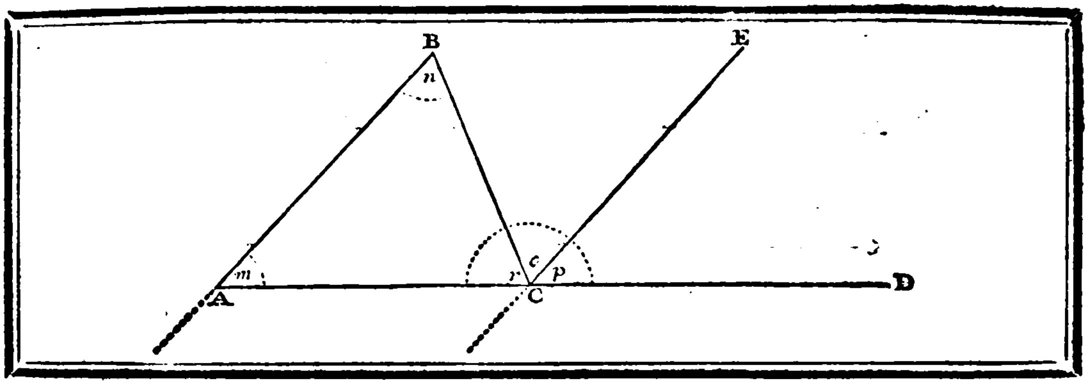
1. DAns la droite donnée CD prenez un point quelconque F.
2. Du point F au point E tirez la droite FE. Dem. 1.
3. Sur la droite FE au point E, dans le plan où se trouvent les lignes CD, FE, construisez un ∀ n = à ∀ m, Prop. 23. L. 1.
4. Et prolongez la jambe EB. Dem. 2.

DEMONSTRATION.

PUisque les ∀ alternes m & n, formés par la droite EF, qui coupe les deux lignes AB, CD, sont = entr'eux (*Ref.* 3).

1. Les droites AB, CD sont Plles. Prop. 27. L. 1.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XXXII. *THEOREME XXII.*

EN tout triangle (ABC), un des côtés (comme AC) étant prolongé: l'angle extérieur ($o+p$) eſt égal à la ſomme des deux intérieurs oppoſés ($n+m$); & les trois angles du triangle ($n+m+r$) ſont égaux à deux droits.

HYPOTHESE.	THESE.
ABC eſt un △, dont un des côtés	I. ∀ $o+p$ *eſt* = *aux* ∀ $m+n$.
AC eſt prolongé indéfiniment en D.	II. *Les* ∀ $n+m+r$ *ſont* = *à* 2 L.

Préparation.

PAr le point C tirez la droite CE Plle à la droite AB. Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

PUiſque les droites AB, CE ſont deux Plles (*Prep.*) coupées par une même droite BC,

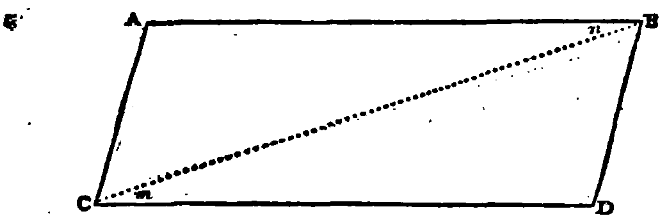
1. Les ∀ alternes n & o ſont = entr'eux. Prop. 29. L. 1.
   De même; puiſque les droites AB, CE ſont deux Plles (*Prep.*) coupées par une même droite AD,
2. L'angle extérieur p eſt = à ſon intérieur m oppoſé du même côté. Prop. 29. L. 1.
   L'angle o étant donc = à ∀ n (*Arg.* 1) & ∀ p = ∀ m (*Arg.* 2).
3. L'angle $o+p$ eſt = aux angles n & m pris enſemble. Ax. 2.

C. Q. F. D. I.

Puis donc que ∀ $o+p$ eſt = aux ∀ $n+m$ (*Arg.* 3); ſi on ajoute de part & d'autre l'angle commun r,

4. Les ∀ $o+p+r$ feront = aux trois ∀ $n+m+r$ du △ ABC. Ax. 2.
   Mais ces ∀ $o+p+r$ ſont des ∀ contigus, formés par la ligne BC, qui rencontre AD au même point C.
5. Par conſéquent, les ∀ $o+p+r$ ſont = à deux L. Prop. 13. L. 1.
6. Partant, les trois ∀ $n+m+r$, qui ſont = aux ∀ $o+p+r$ (*Arg.* 4), ſont auſſi = à deux L. Ax. 1.

C. Q. F. D. II.



PROPOSITION XXXIII. *THEOREME XXIII.*

LEs droites (A C, B D), qui joignent de même part les extrêmités (A, C & B, D) de deux autres droites (A B, C D) égales & paralleles : font aussi égales & paralleles entr'elles.

HYPOTHESE.

A C, B D sont deux droites, qui joignent de même part les extrêmités de deux autres droites $=$ *& Plles A B, C D.*

THESE.

I. Les droites A C, B D sont égales,
II. Et ces droites A C, B D sont Plles.

Préparation.

DU point B au point C tirez la droite B C.

DEMONSTRATION.

PUisque les droites AB, CD sont deux Plles (*Hyp.*), coupées par une même droite B C (*Prep.*).

1. Les $\forall$ alternes *n* & *m* sont $=$ entr'eux. Prop. 29. L. 1.

Puis donc que dans les deux $\triangle$ CAB, BDC le côté CD est $=$ au côté AB (*Hyp.*), le côté BC commun aux deux $\triangle$ & $\forall$ compris *m* $=$ à $\forall$ compris *n* (*Arg.* 1).

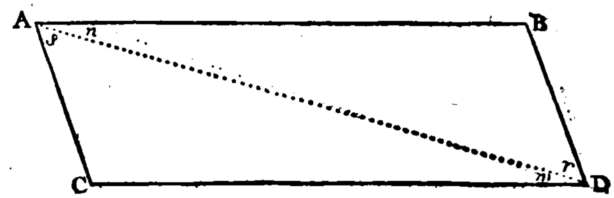
2. Il s'ensuit, que la base A C est $=$ à la base B D; C. Q. F. D. I. Prop. 4. L. 1.

3. Item, que les $\forall$ A C B, D B C qui sont opposés aux côtés égaux AB C D, sont aussi $=$ entr'eux.

Or ces $\forall$ égaux A C B, D B C (*Arg.* 3) font des $\forall$ alternes formés par les droites A C, B D coupées par la droite B C.

5. Par conséquent, les droites A C, B D sont Plles. Prop. 27. L. 1.

C. Q. F. D. II.



PROPOSITION XXXIV. THEOREME XXIV.

En tout parallélogramme (BC), les côtés opposés (AC, BD item CD, AB) & les angles opposés (B, C item $m+r$, $n+s$) sont égaux entr'eux & la diagonale (AD) le coupe en deux également.

HYPOTHESE.	THESE.
I. BC est un Pgr.	*I. Les côtés AC, BD item CD, AB sont = entr'eux, & ∀ C = ∀ B.*
II. AD est la diagonale de ce Pgr.	*II. ∀ $m+r$ = ∀ $n+s$.*
	III. Les △ CAD, BDA formés par la diagonale sont = entr'eux.

DEMONSTRATION.

Puisque les droites AB, CD sont deux Plles (*Hyp.* 1) coupées par une même droite AD (*Hyp.* 2).

1. Les ∀ alternes *m* & *n* sont = entr'eux. — Prop. 29. L. 1.

Derechef, puisque les droites AC, BD sont deux Plles (*Hyp.* 1) coupées par une même droite AD (*Hyp.* 2).

2. Les ∀ alternes *r* & *s* sont = entr'eux. — Prop. 29. L. 1.

Mais les △ CAD, BDA ont deux ∀ *m* & *s* = à deux ∀ *n* & *r* (*Arg.* 1 & 2). & le coté AD adjacent à ces ∀ égaux est commun aux deux △.

3. Partant, les côtés AC & BD, opposés aux ∀ égaux *m* & *n*, item les côtés CD, AB, opposés aux ∀ égaux *s* & *r* sont = entr'eux & le troisieme ∀ C est = au troisieme ∀ B. — Prop. 26. L. 1.

C. Q. F. D. I.

Or ∀ *m* étant = à ∀ *n* (*Arg.* 1) & ∀ *r* = ∀ *s* (*Arg.* 2);

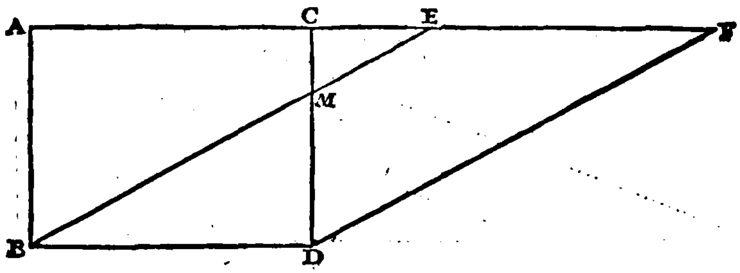
4. L'angle entier $m+r$ est = à l'angle entier $n+s$. — Ax. 2.

C. Q. F. D. II.

Enfin, puisque dans les △ CAD, BDA le côté CD est = au côté AB (*Arg.* 3), le côté AD commun aux deux △ & ∀ compris *m* = à ∀ compris *n* (*Arg.* 1).

5 Ces deux △ CAD, BDA, formés par la diagonale AD sont = entr'eux. — Prop. 4. L. 1.

C. Q. F. D. III.



PROPOSITION XXXV. *THEOREME XXV.*

Les parallélogrammes (AD, ED) placés ſur la même baſe (BD) & entre les mêmes paralleles (AF, BD): ſont égaux entr'eux.

HYPOTHESE

I. AD & ED ſont deux Pgrs,
II. Et ces deux Pgrs ſont placés ſur la même baſe BD & entre les mêmes Plles AF, BD.

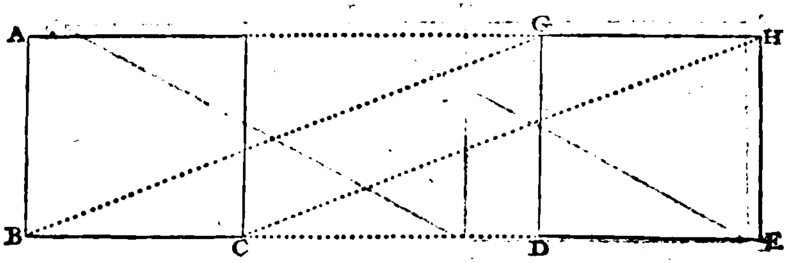
THESE.

Le Pgr AD eſt = au Pgr ED.

DEMONSTRATION.

Puiſque la figure AD eſt un Pgr (*Hyp.* 1).
1. Les côtés oppoſés AC, BD & AB, CD font = entr'eux. Prop. 34. L. 1.
De même; puiſque la figure ED eſt un Pgr (*Hyp.* 1).
2. Les côtés oppoſés EF, BD & BE, DF font = entr'eux. Prop. 34. L. 1.
Or la droite AC étant = à la droite BD (*Arg.* 1) & la droite EF étant auſſi = à la même droite BD (*Arg.* 2).
3. Il s'enſuit, que la droite AC eſt = à la droite EF. Ax. 1.
Puis donc que AC eſt = à EF (*Arg.* 3); ſi on ajoute de part & d'autre la droite commune CE.
4. La droite AE eſt néceſſairement = à la droite CF. Ax. 2.
Dans les Δ ABE, CDF le côté AB eſt donc = au côté CD (*Arg.* 1), le côté BE eſt = au côté DF (*Arg.* 2) & la baſe AE eſt = à la baſe CF (*Arg.* 4).
5. Par conſéquent, le Δ ABE eſt = au Δ CDF. Prop. 8. L. 1.
Retranchant donc de ces Δ égaux ABE, CDF (*Arg.* 5) leur partie commune CME;
6. Les trapezes reſtans ABMC, MDFE font = entr'eux. Ax. 3.
Ajoutant enfin a ces trapezes égaux ABMC, MDFE (*Arg.* 6) la partie commune MBD,
7. Les Pgrs AD & ED feront = entr'eux. Ax. 2.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXXVI. THEOREME XXVI.

Les parallélogrammes (AC, GE), placés sur des bases égales (BC, DE) & entre les mêmes paralleles (AH, BE), sont égaux entr'eux.

Hypothese.	These.
I. AC, GE sont deux Pgrs,	*Le Pgr AC est = au Pgr GE.*
II. Et ces deux Pgrs sont placés sur des bases égales BC, DE & entre les mêmes Plles AH, BE.	

Préparation.

1. Du point B au point G tirez la droite BG.
2. Du point C au point H tirez la droite CH. } Dem. 1.

Demonstration.

Puisque la figure GE est un Pgr (*Hyp.* 1).

1. Les côtés opposés DE, GH sont = entr'eux. Prop. 34. L. 1.

Or la droite BC est = à DE (*Hyp.* 2) & GH est = à la même droite DE (*Arg.* 1).

2. Donc BC est = à GH. Ax. 1.

Mais puisque BC est = à GH (*Arg.* 2): & que ces droites sont outre cela des Plles (*Hyp.* 2), dont les extrêmités sont jointes par les droites GB, HC (*Prep.* 1 & 2).

3. Il est évident, que ces droites GB, HC sont = & Plles. Prop. 33. L. 1.
4. Partant, la figure GC est un Pgr. Def. 35. L. 1.

De plus, les Pgrs AC, GC étant placés sur la même base BC, & entre les mêmes Plles AH, BE (*Hyp.* 2).

5. Ces Pgrs AC, GC sont = entr'eux. Prop. 35. L. 1.

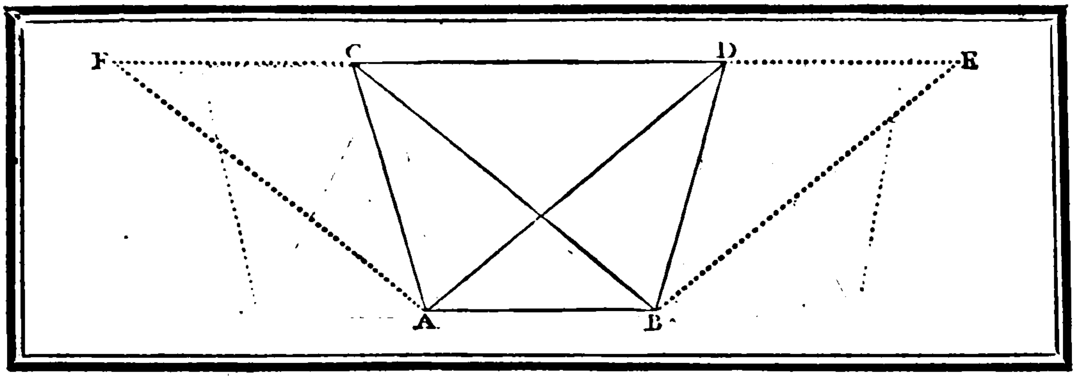
Par un raisonnement semblable on prouvera,

6. Que le Pgr GC est = au Pgr GE.

Puis donc que le Pgr AC est = au Pgr GC (*Arg.* 5), & que le Pgr GE est = au même Pgr GC (*Arg.* 6).

7. Il s'ensuit que le Pgr AC est = au Pgr GE. Ax. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXXVII. *THEOREME XXVII.*

LEs triangles (ACB, ADB), placés sur une même base (AB) & entre les mêmes paralleles (AB, CD), sont égaux entr'eux.

HYPOTHESE.	THESE.
I. ACB, ADB sont deux △,	*Le △ ACB est = au △ ADB.*
II. Et ces deux △ sont placés sur la même base AB & entre les mêmes Plles AB, CD.	

Préparation.

1. PRolongez la droite CD de part & d'autre à l'infini. — Dem. 2.
2. Par les points A & B tirez les droites AF, BE Plles aux côtés BC, AD; qui rencontreront la prolongée CD quelque part en F & en E (*Rem. de la Prop. XXVII*). — Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

PUisque dans la figure BF les côtés opposés AB, FC & AF, BC sont Plles (*Hyp.* 2. & *Prep.* 2).

1. La figure BF est un Pgr. — Def. 35. L. 1.

Par un raisonnement semblable on prouvera,

2. Que la figure AE est un Pgr.

Mais les Pgrs BF, AE, sont placés sur la même base AB & entre les mêmes Plles AB, FE (*Hyp.* 2. & *Prep.* 1).

3. Par conséquent, le Pgr BF est = au Pgr AE. — Prop. 35. L. 1.

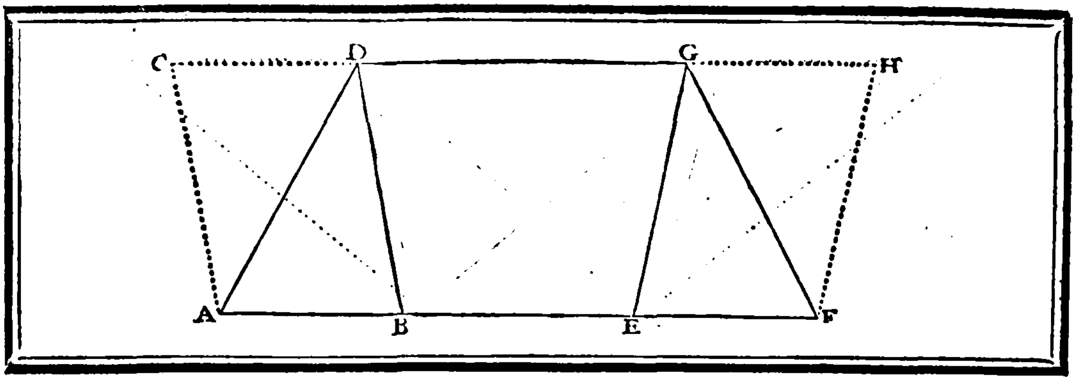
Or les droites AC, BD sont des diagonales des Pgrs BF, AE (*Prep.* 1 & 2).

4. C'est pourquoi ces diagonales AC, BD partagent les Pgrs BF, AE en deux également. — Prop. 34. L. 1.
5. Partant, le △ ACB est la moitié du Pgr BF & le △ ADB la moitié du Pgr AE.

Puis donc que les Pgrs entiers, BF, AE sont égaux entr'eux (*Arg.* 3), & que les △ ACB, ADB sont les moitiés de ces Pgrs (*Arg.* 5).

6. Il est évident que les △ ACB, ADB sont aussi égaux entr'eux. — Ax. 7.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXXVIII. *THEOREME XXVIII.*

LEs triangles (ADB, EGF), placés ſur des baſes égales (AB, EF) & entre les mêmes paralleles (AF, DG), ſont égaux entr'eux.

HYPOTHESE.	THESE.
I. ADB, EGF ſont deux △, *II. Et ces deux △ ſont placés ſur des baſes = AB, EF.* *& entre les mêmes Plles AF, DG.*	*Le △ ADB eſt = au △ EGF.*

Préparation.

1. PRolongez la droite DG de part & d'autre à l'infini. — Dem. 2.
2. Par les points A & F tirez les droites AC, FH Plles aux côtés BD, EG; qui rencontreront la prolongée DG quelque part en C & en H (*Rem. de la Prop. XXVII*). — Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

PUiſque dans la figure BC les côtés oppoſés AB, CD & AC, BD ſont Plles (*Hyp.* 2 & *Prep.* 2);

1. La figure BC eſt un Pgr. — Def. 35. L. 1.

Par un raiſonnement ſemblable on prouvera,

2. Que la figure EH eſt un Pgr.

Mais les Pgrs BC, EH (*Arg.* 1 & 2) ſont placés ſur des baſes = AB, EF & entre les mêmes Plles AF, CH (*Hyp.* 2).

3. Par conſéquent, le Pgr BC eſt = au Pgr EH. — Prop. 36. L. 1.

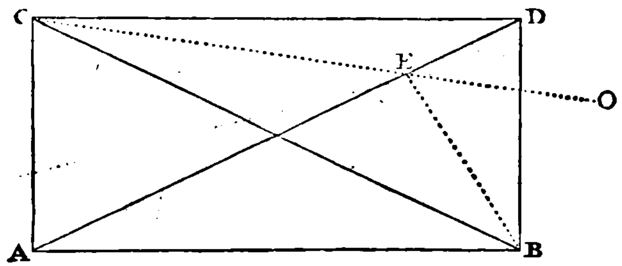
Or les droites AD, FG étant des diagonales des Pgrs BC, EH. (*Prep.* 1. & 2).

4. Ces droites AD, FG partagent les Pgrs BC, EH en deux également. — Prop. 34. L. 1.
5. Partant, le △ ADB eſt la moitié du Pgr BC, & le △ EGF la moitié du Pgr EH.

Puis donc que les Pgrs entiers BC, EH ſont = entr'eux (*Arg.* 3) & que les △ ADB, EGF ſont leurs moitiés de ces Pgrs (*Arg.* 5).

6. Il s'enſuit que ces △ ADB, EGF ſont auſſi = entr'eux. — Ax. 7.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXXIX. THEOREME XXIX.

LEs triangles égaux (ACB, ADB), placés fur une même bafe (AB) & du même côté, font entre les mêmes paralleles (AB, CD).

HYPOTHESE.	THESE.
I. Les △ ACB, ADB font égaux, *II. Et ces △ font placés fur la même bafe AB.*	*Les △ ACB, ADB font entre les mêmes Plles AB, CD.*

DEMONSTRATION.

SI non.

Les droites AB, CD ne font pas Plles, & on pourra tirer par le point C quelque autre droite CO Plle à AB.

Préparation.

1. TIrez donc par le point C la droite CO Plle à AB; laquelle coupera la droite AD quelque part en E (*Rem. de la Prop.* XXVII). Prop. 31. L. 1.
2. Du point B au point d'interfection E tirez la droite BE. Dem. 1

PUifque les deux △ ACB, AEB font fur la même bafe AB (*Hyp.* 2) & entre les mêmes Plles AB, CO (*Prep.* 1).

1. Le △ ACB eft = au △ AEB. Prop. 37. L. 1.

Or le △ ADB étant = au △ ACB (*Hyp.* 1) & le △ AEB étant = au même △ ACB (*Arg.* 1).

2. Le △ ADB eft = au △ AEB. Ax. 1.

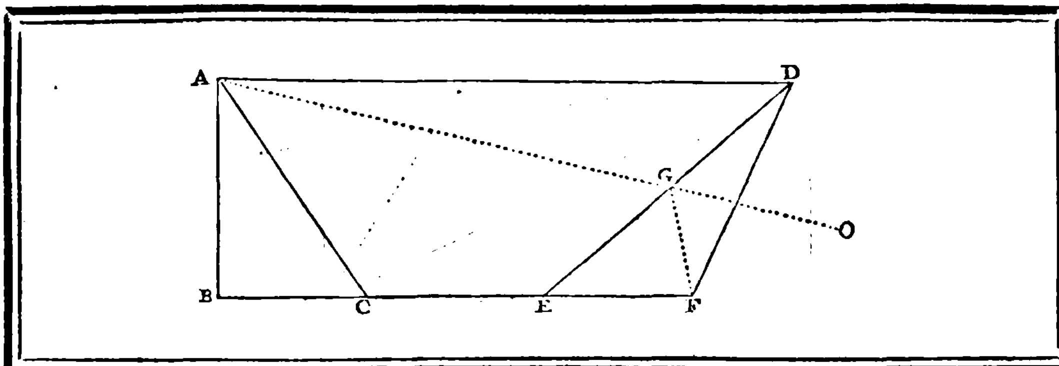
Mais le △ ADB étant le tout & le △ AEB fa partie,

3. Il s'enfuit que le tout eft égal à fa partie,
4. Ce qui eft impoffible. Ax. 8.
5. Partant, la droite CO n'eft pas Plle à AB.

On prouvera de même, que nulle autre droite, hormis la feule CD ne peut-être Plle à AB.

6. Par conféquent, la droite CD, tirée par les fommets des △ ACB, ADB, eft Plle à la bafe AB.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XL. *THEOREME XXX.*

LEs triangles égaux (BAC, EDF), placés sur des bases égales (BC, EF) & du même côté, sont entre les mêmes paralleles (BF, AD).

Hypothese.

I. Les △ BAC, EDF, sont égaux,
II. Et ces △ sont placés sur des bases = BC, EF.

These.

Les △ BAC, EDF sont entre les mêmes Plles BF, AD.

Demonstration.

SI non.
Les droites BF, AD ne sont pas Plles, & on pourra tirer par le point A quelque autre droite AO Plle à BF.

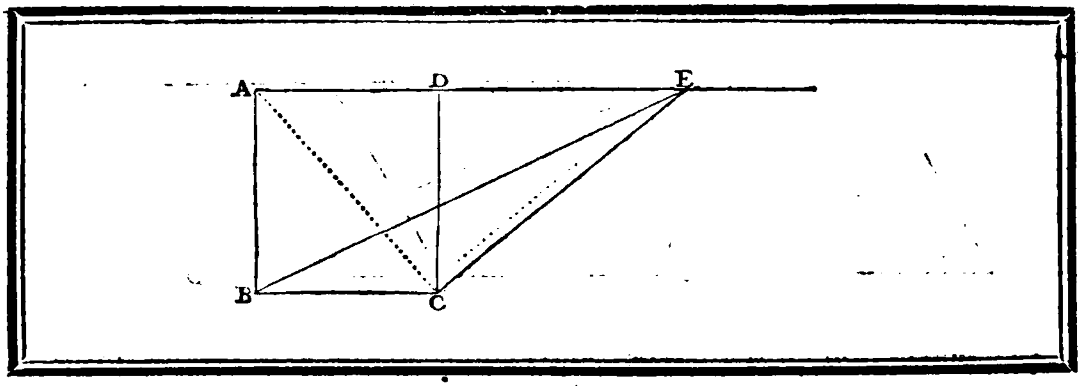
Préparation.

1. TIrez donc par le point A la droite AO Plle à BF; laquelle coupera la droite ED quelque part en G (*Rem. de la Prop. XXVII.*). Prop. 31. L. 1
2. Du point F au point d'intersection G tirez la droite FG. Dem. 1.

PUisque les △ BAC, EGF sont placés sur des bases égales BC, EF (*Hyp.* 2), & entre les mêmes Plles BF, AO (*Prep.* 1).

1. Le △ BAC est = au △ EGF. Prop. 38. L. 1.
Or le △ EDF est = au △ BAC (*Hyp.* 1), & le △ EGF est = au même △ BAC (*Arg.* 1).
2. C'est pourquoi le △ EDF est = au △ EGF. Ax. 1.
Mais le △ EDF étant le tout, & le △ EGF sa partie,
3. Il s'ensuit que le tout est égal à sa partie.
4. Ce qui est impossible. Ax. 8.
5. Partant AO n'est pas Plle à BF.
On prouvera de même que nulle autre droite, hormis la seule AD ne peut être Plle à BF.
6. Par conséquent, la droite AD, tirée par les sommets des △ BAC, EDF, est Plle à la droite BF.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XLI. *THEOREME XXXI.*

SI un parallélogramme (BD) & un triangle (BEC) sont placés sur une même base (BC), & entre les mêmes paralleles (BC, AE): le parallélogramme sera double du triangle.

HYPOTHESE.	THESE.
I. BD est un Pgr, & BEC un △. *II. Ces figures sont placées sur la même base BC, & entre les mêmes Plles BC, AE.*	*Le Pgr BD est double du △ BEC.*

Préparation.

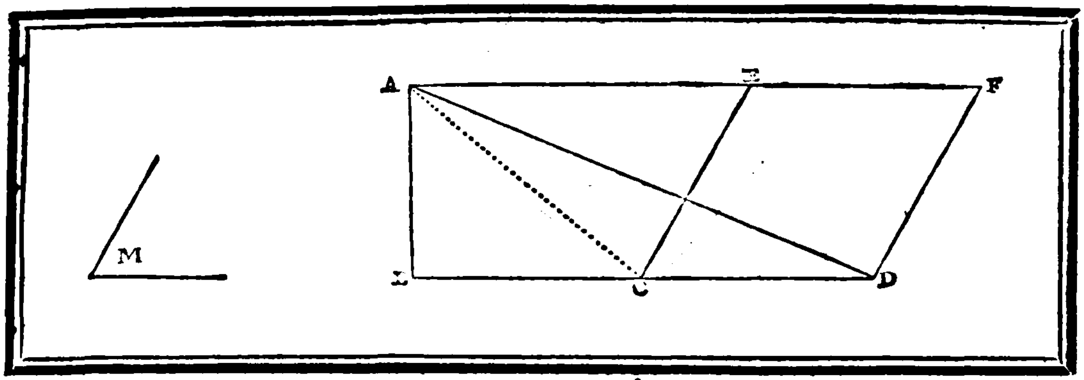
DU point A au point C tirez la droite AC. Dem. 1.

DEMONSTRATION.

PUisque les △ BAC, BEC sont placés sur une même base BC & entre les mêmes Plles BC, AE (*Hyp.* 2).

1. Le △ BAC est = au △ BEC. Prop. 37. L. 1.
Or la droite AC étant la diagonale du Pgr BD (*Prep.*).
2. Cette diagonale partage le Pgr en deux également. Prop. 34. L. 1.
3. Partant, le Pgr BD est double du △ BAC.
Mais ce △ BAC étant = au △ BEC (*Arg.* 1).
4. Le Pgr BD est aussi double du △ BEC. Ax. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XLII. PROBLEME XI.

Construire un parallélogramme (ED); égal à un triangle donné (BAD); & qui ait un angle (DCE) égal à un angle rectiligne donné (M).

DONNEES	CHERCHEE.
I. Le △ BAD,	*La Construction d'un Pgr = au △ BAD;*
II. Et ∀ rectiligne M.	*& qui ait un ∀ DCE = à ∀ donné M.*

Résolution.

1. Coupez la base BD en deux parties égales, au point C.	Prop. 10. L. 1.
2. Sur la droite BD au point C construisez un ∀ DCE = à ∀ donné M.	Prop. 23. L. 1.
3. Par le point A tirez la droite AF Plle à BD.	Prop. 31. L. 1.
4. Prolongez la jambe CE de l'angle DCE, jusqu'à ce qu'elle rencontre la droite AF en un point E *(Rem. de la Prop. XXVII).*	Dem. 2.
5. Par le point D tirez DF Plle à CE, & prolongez la jusqu'à ce qu'elle rencontre AF en un point F *(Rem. de la Prop. XXVII).*	Prop. 31. L. 1. Dem. 2.

Préparation.

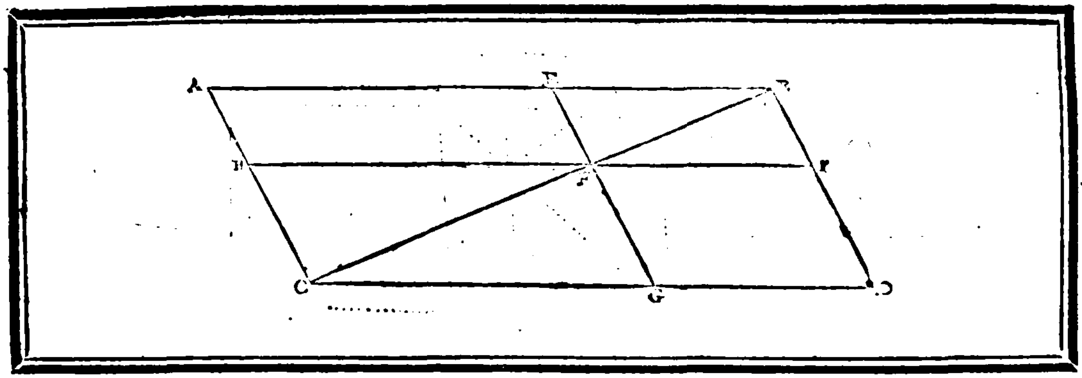
Du point A au point C tirez la droite AC.	Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque les △ BAC, CAD sont placés sur des bases égales BC, CD *(Ref. 1)* & entre les mêmes Plles BD, AF *(Ref. 3).*

1. Le △ BAC est = au △ CAD.	Prop. 38. L. 1.
2. Partant, le △ BAD est double du △ CAD.	N. C.
Mais dans la figure ED les côtés CD, EF & CE, DF sont Plles *(Ref. 3 & 5).*	
3. Par conséquent, ED est un Pgr.	Def. 35. L. 1.
Or ce Pgr ED & le △ CAD sont placés sur une même base CD, & entre les mêmes Plles BD, AF *(Ref. 1. 3 & Prep.).*	
4. D'où il suit, que le Pgr ED est double du △ CAD.	Prop. 41. L. 1.
Puis donc que le Pgr ED est double du △ CAD *(Arg. 4)* & que le △ BAD est aussi double du même △ CAD *(Arg. 2).*	
5. Il est évident, que le Pgr ED est = au △ BAD,	Ax. 6.
Et comme son angle DCE est outre cela = à ∀ donné M *(Ref. 2).*	
6. Ce Pgr ED est = au △ donné BAD; & a un ∀ DCE = à ∀ donné M.	

C. Q. F. F.



PROPOSITION XLIII. *THEOREME XXXII.*

EN tout parallélogramme (AD): les complémens (AF, FD) des parallélogrammes (HG, EI) alentour de la diagonale (BC) sont égaux entr'eux.

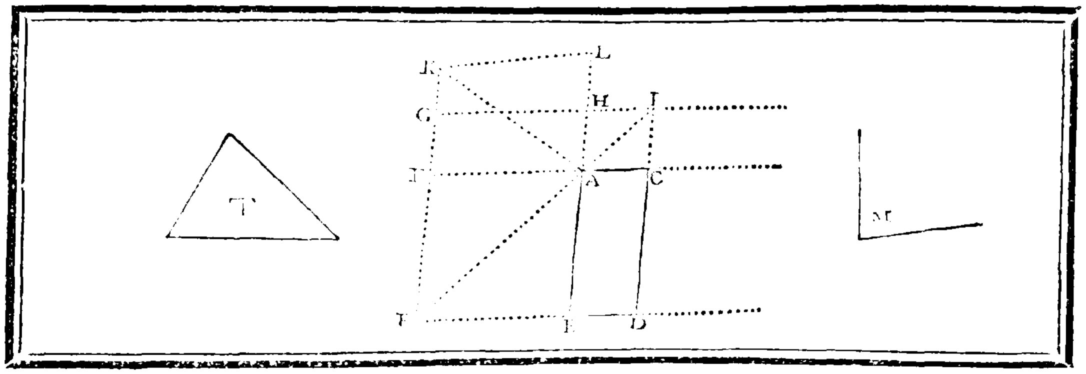
HYPOTHESE	THESE.
I. AD est un Pgr, dont BC est la diagonale.	*Les Pgrs AF, FD qui sont les complémens*
II. HG, EI sont des Pgrs alentour de la diagonale.	*des Pgrs HG, EI sont = entr'eux.*

DEMONSTRATION.

PUisque AD est un Pgr, dont BC est la diagonale (*Hyp.* 1).

1. Cette diagonale partage le Pgr en deux également. Prop. 34. L. 1.
2. Partant, le △ CAB est = au △ BDC.
   De même; EI étant un Pgr, dont BF est la diagonale (*Hyp.* 2).
3. Elle partage aussi le Pgr en deux également. Prop. 34. L. 1.
4. C'est pourquoi, le △ FEB est = au △ BIF.
   Enfin, HG est un Pgr, dont FC est la diagonale (*Hyp.* 2),
5. Qui par conséquent, le partage aussi en deux également. Prop. 34. L. 1.
6. Partant, le △ CHF est = au △ FGC.
   Puis donc que le △ FEB est = au △ BIF (*Arg.* 4) & le △ CHF = au △ FGC (*Arg.* 6).
7. Le △ FEB avec le △ CHF est = aux △ BIF & FGC pris ensemble. Ax. 2.
   Mais les △ entiers CAB, BDC étant = entr'eux (*Arg.* 2); si on retranche de part & d'autre les △ FEB + CHF & les △ BIF + FGC qui leurs sont égaux (*Arg.* 7).
8. Les Pgrs restans AF, FD, qui sont les complémens des Pgrs HG, EI, seront aussi = entr'eux. Ax. 3.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XLIV. *PROBLEME XII.*

SUr une ligne droite donnée (AB); construire un parallélogramme (BC) égal à un triangle donné (T); & qui ait un angle (BAC) égal à un angle rectiligne donné (M).

DONNEES	CHERCHEE.
I. La droite AB. *II. Le △ T,* *III. Et ∀ rectiligne M.*	*La construction d'un Pgr sur la droite AB = au △ T; & qui ait un ∀ BAC = à ∀ donné M.*

Résolution.

1. PRolongez la droite AB indéfiniment. — Dem. 2.
2. Faites AL = à un des côtés du △ donné T, — Prop. 3. L. 1.
3. Et construisez le ∠ AKL = au ∠ donné T. — Prop. 22. L. 1
4. Decrivez ensuite le Pgr EH = au △ AKL; & qui ait un ∀ HAE = à ∀ donné M. — Prop. 42. L. 1.
5. Par le point B tirez une droite BF Plle à EA ou GH. — Prop. 31. L. 1.
6. Prolongez GH indéfiniment: de même GE, jusqu'à ce qu'elle rencontre BF en F (*Rem. de la Prop. XXVII*). — Dem. 2
7. Par les points F & A tirez la droite FA, qui prolongée coupera le prolongement de GH quelque part en I (*Rem. de la Prop. XXVII*). — Dem. 1.
8. Par le point de rencontre I tirez la droite ID Plle à HB ou GF, — Prop. 31. L. 1.
9. Et prolongez FB, EA, jusqu'à ce qu'elles rencontrent ID aux points D & C (*Rem. de la Prop. XXVII*). — Dem. 2.

DEMONSTRATION.

PUisque dans la figure DG les côtés opposés GI, FD & GF, ID sont Plles (*Res. 5. 6. 8. & 9.*).

1. La figure DG est un Pgr. — Def. 35. L. 1.

Derechef,

Derechef, les côtés opposés E A, F B & E F, A B; item H I, A C & H A, I C, des figures E B, H C, étant Plles (*Ref.* 5. 6. 8. & 9).

2. Ces figures E B, H C sont des Pgrs. — Def. 35. L. 1.

Mais la droite F I est la diagonale du Pgr D G (*Ref.* 7) & E B, H C sont des Pgrs alentour de cette diagonale (*Arg.* 2 & *Ref.* 7)

3. Par conséquent, les Pgrs B C, E H qui en sont les complémens, sont = entr'eux. — Prop. 43. L. 1.

Or le Pgr E H est = au Δ A K L (*Ref.* 4) & le Δ donné T est = au même Δ A K L (*Ref.* 3).

4. D'où il suit, que le Pgr E H est = au Δ donné T. — Ax. 1.

Le Pgr E H étant donc = au Δ donné T (*Arg.* 4) & ce même Pgr E H étant = au Pgr B C (*Arg.* 3).

5. Le Pgr B C est = au Δ donné T. — Ax. 1.

De plus, à cause que les ∀ H A E, B A C sont opposés au sommet.

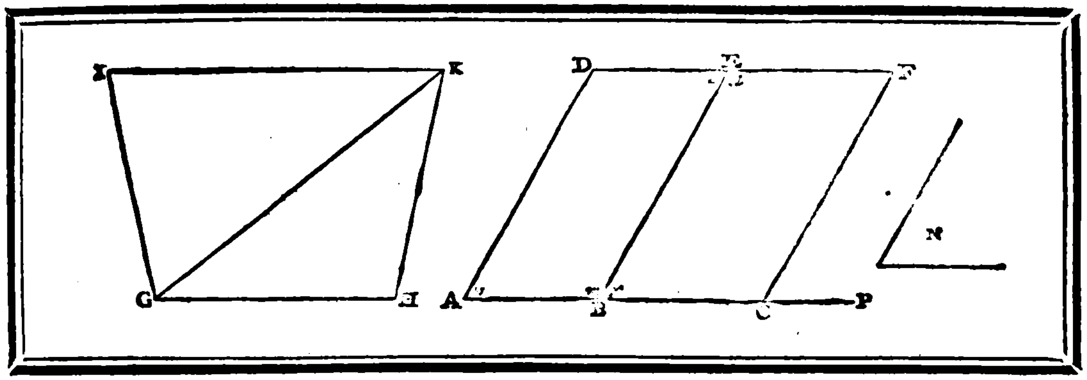
6. Ces angles sont = entr'eux. — Prop. 15. L. 1.

C'est pourquoi, ∀ H A E étant = à ∀ donné M (*Ref.* 4).

7. L'angle B A C est aussi = à cet ∀ donné M. — Ax. 1.

8. On a donc, sur la droite donnée A B, construit un Pgr B C = au Δ donné T (*Arg.* 5); & qui a un ∀ B A C = à ∀ donné M (*Arg.* 7).

C. Q. F. F.



PROPOSITION LXV. *PROBLEME XIII.*

CONstruire un parallélogramme (AF); égal à une figure rectiligne donnée (IH); & qui ait un angle (*n*) égal à un angle rectiligne donné (N).

DONNEES	CHERCHEE.
I. Une figure rectiligne IH, *II. Et un ∀ rectiligne N.*	*La construction d'un Pgr = à la figure rectiligne IH; & qui ait un ∀ n = à ∀ donné N.*

Résolution.

1. TIrez la diagonale GK. — Dem. 1.
2. Sur une droite infinie AP construisez le Pgr AE = au △ GHK; qui ait un ∀ *n* = à ∀ donné N. — Prop. 42. L. 1.
3. Sur le côté BE du Pgr AE construisez le Pgr BF = au △ GIK; qui ait un ∀ *r* = ∀ donné N. — Prop. 44. L. 1.

DEMONSTRATION.

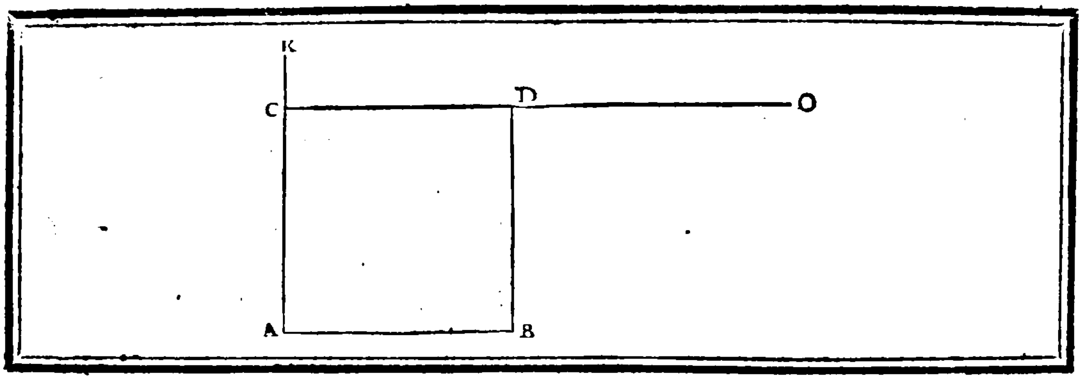
PUisque ∀ N est = à chacun des ∀ *n* & *r* (*Ref.* 2. & 3).

1. L'angle *n* est = à ∀ *r*. — Ax. 1.
   Si l'on ajoute de part & d'autre ∀ commun *m*;
2. Les ∀ *n* + *m* seront = aux ∀ *r* + *m*. — Ax. 2.
   Mais à cause que les côtés AD, BE sont des Plles (*Ref.* 2) coupées par une même droite AB.
3. Les deux ∀ intérieurs *n* + *m* sont = à deux ∟. — Prop. 29. L. 1.
4. Par conséquent, les ∀ contigus *r* + *m*, qui leurs sont égaux (*Arg.* 2), sont aussi = à deux ∟. — Ax. 1.
   Les droites AB, BC, qui rencontrent de part & d'autre la ligne BE au point B, faisant donc avec cette droite BE la somme des ∀ contigus *r* + *m* = à deux ∟ (*Arg.* 4).
5. Ces droites AB, BC ne forment qu'une même ligne droite AC. — Prop. 14. L. 1.
   De plus, les droites DE, AC étant deux Plles (*Ref.* 2) coupées par une même droite BE.

6. Les

6. Les ∀ alternes *r* & *s* font égaux entr'eux, Prop. 29. L. 1.
Et si l'on ajoute de part & d'autre ∀ commun *u*;
7. Les ∀ *r* + *u* seront = aux ∀ *s* + *u*. Ax. 2.
Mais à cause que les côtés E F, B C sont deux Plles (*Ref.* 3) coupées par une même droite B E.
8. Les ∀ intérieurs *r* + *u* font = à deux ∟. Prop. 29. L. 1.
9. D'où il suit, que les ∀ contigus *s* + *u*, qui leurs sont égaux (*Arg.* 7), sont aussi = à deux ∟. Ax. 1.
Les droites D E, E F, qui rencontrent de part & d'autre la ligne B E au point E, faisant donc avec cette droite B E la somme des ∀ contigus *s* + *u* = à deux ∟ (*Arg.* 9).
10. Ces droites D E, E F ne forment qu'une même ligne droite D F. Prop. 14. L. 1.
Mais comme les droites A D, B E; item B E, C F sont des côtés opposés des Pgrs A E, B F (*Ref.* 2 & 3).
11. La droite A D est = & Plle à B E, & B E est = & Plle à C F. Prop. 34. L. 1.
12. Partant A D est = & Plle à C F. - - - - - - Prop. 30. L. 1. Ax. 1.
De plus, ces droites = & Plles A D, C F sont jointes par les droites A C, D F (*Arg.* 5 & 10).
13. Partant, la figure A F est un Pgr, - - - - - - Prop. 33. L. 1. Def. 35 L. 1.
Et puisque le Pgr B F est = au △ G I K (*Ref.* 3), le Pgr A E = au △ G H K & ∀ *n* = à ∀ donné N (*Ref.* 2).
14. Le Pgr entier A F est = à la figure rectiligne I H; & il a un ∀ *n* = à ∀ donné N. Ax. 2.

C. Q. F. F



PROPOSITION XLVI. *PROBLEME XIV.*

SUr une ligne droite donnée (AB) conſtruire un quarré (AD).

Donnee. *La droite AB.*

Cherchee. *La conſtruction d'un quarré ſur la droite AB.*

Réſolution.

1. DU point A élevez ſur la droite AB la perpendiculaire AK. Prop. 11. L. 1.
2. Retranchez de la droite AK une partie AC = à AB. Prop. 3. L. 1.
3. Par le point C tirez la droite CO Plle à AB, } Prop. 31. L. 1.
4. Et par le point B tirez la droite BD Plle à AC, laquelle coupera } CO quelque part en D *(Rem. de la Prop. XXVII)*.

Demonstration.

PUiſque dans la figure AD les côtés oppoſés AB, CD, de même que AC, BD ſont Plles *(Reſ. 3 & 4)*.

1. La figure AD eſt un Pgr. Def. 35. L. 1.
2. Partant, les côtés oppoſés AB, CD & AC, BD ſont = entr'eux. Prop. 34. L. 1.
   Mais AC eſt = à AB *(Reſ 2)*.
3. Par conſequent, les quatre côtes AB, CD, AC, BD ſont = entr'eux. Ax. 1.
   Derechef, puiſque les droites AB, CD ſont Plles. *(Reſ. 3)*.
4. Les ∀ intérieurs oppoſés A & ACD ſont = à deux L. Prop. 29. L. 1.
   Or l'angle A étant un L *(Reſ. 1)*.
5. Il eſt évident, que ∀ ACD eſt un L auſſi. N. C.
   De plus, à cauſe que AD eſt un Pgr *(Arg. 1)*.
6. Les angles oppoſés ſont = entr'eux. Prop. 34. L. 1.
7. C'eſt pourquoi, les ∀ BDC & B, oppoſés aux ∀ droits A & ACD, ſont auſſi des L.
   La figure AD étant donc un Pgr *(Arg. 1)* équilatéral *(Arg. 3)* & rectangulaire *(Arg. 7)*.
8. Il s'enſuit, que cette figure AD conſtruite ſur la droite AB eſt un quarré. Def. 30. L. 1.

C. Q. F. F.

COROLLAIRE I.

TOut parallélogramme, qui a deux côtés égaux AB, AC alentour d'un angle droit, est un quarré. Car en tirant par les points C & B les paralleles CD, BD aux deux côtés AB, AC, on aura construit le quarré AD (Def. 30. L. 1).

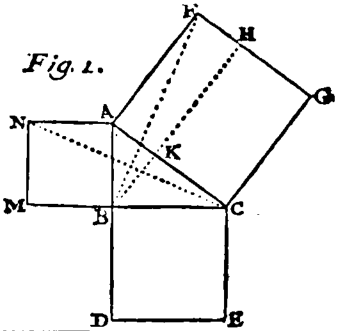
COROLLAIRE II.

SI dans un parallélogramme un seul angle est droit, les trois autres le sont aussi; ou bien, un tel parallélogramme est rectangle. Car puisque les angles opposés A & BDC sont égaux (Prop. 34. L. 1) & que l'angle A est un angle droit, l'angle BDC sera aussi droit; deplus les lignes AB, CD, item AC, BD étant des paralleles, les angles intérieurs A & ACD, item A & B sont égaux à deux droits (Prop. 29. L. 1). Mais l'angle A étant un angle droit, il est manifeste que les angles ACD & B sont des droits aussi.

COROLLAIRE III.

SI deux lignes sont égales, les quarrés décrits sur ces lignes seront égaux; & réciproquement, si les quarrés sont égaux, leurs côtés le seront aussi.

Fig. 1.



PROPOSITION XLVII. *THEOREME XXXIII.*

DAns tout triangle rectangle (ABC): le quarré de l'hypothenuſe (AC) eſt égal aux quarrés des deux autres côtés (AB, BC), qui renferment l'angle droit (ABC).

HYPOTHESE.	THESE.
Le △ ABC eſt Rgle, ou ∀ ABC eſt ∟.	*Le □ de l'hypothenuſe AC eſt = au □ de AB & au □ de BC pris enſemble.*

Préparation.

1. COnſtruiſez (*Fig.* 1.) ſur les trois côtés AC, AB, BC des □ AG, AM, CD. — Prop. 46. L. 1.
2. Par le point B tirez la droite BH Plle à AF ou CG. — Prop. 31. L. 1.
3. Du point B au point F tirez la droite BF, }
4. Et du point C au point N la droite CN. } — Dem. 1.

DEMONSTRATION.

PUiſque la figure AM eſt un □ (*Prep.* 1).

1. L'angle ABM eſt un ∟. — Def. 30. L. 1.

Mais ∀ ABC étant auſſi un ∟ (*Hyp*).

2. Les deux ∀ contigus ABM, ABC font = à deux ∟. — Ax. 2.

Les droites MB, BC, qui rencontrent de part & d'autre la ligne AB au point B, faiſant donc avec cette droite AB la ſomme des ∀ contigus ABM, ABC = à deux ∟ (*Arg* 2).

3. Ces droites MB, BC ne font qu'une même ligne droite MC qui eſt Plle à NA. — {Prop. 14. L. 1. Prop. 29. L. 1.}

Par la même raiſon on prouvera que

4. La droite AB ne forme avec BD qu'une même droite AD qui eſt Plle à CE.

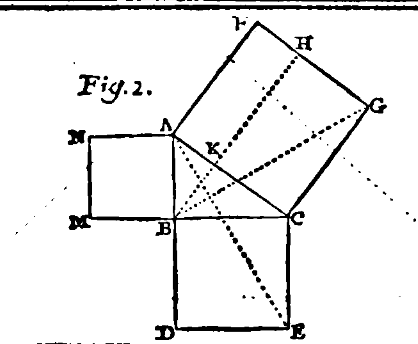
De plus, à cauſe que AG, AM ſont des □ (*Prep.* 1).

5. Les ∀ FAC, NAB ſont = entr'eux (puiſqu'ils ſont des angles droits); & les côtés AF, AC, item AB, AN ſont auſſi = entr'eux. — Def. 30. L. 1.

Si donc on ajoute à ces ∀ égaux, FAC, NAB (*Arg.* 5), ∀ commun CAB;

6. L'angle

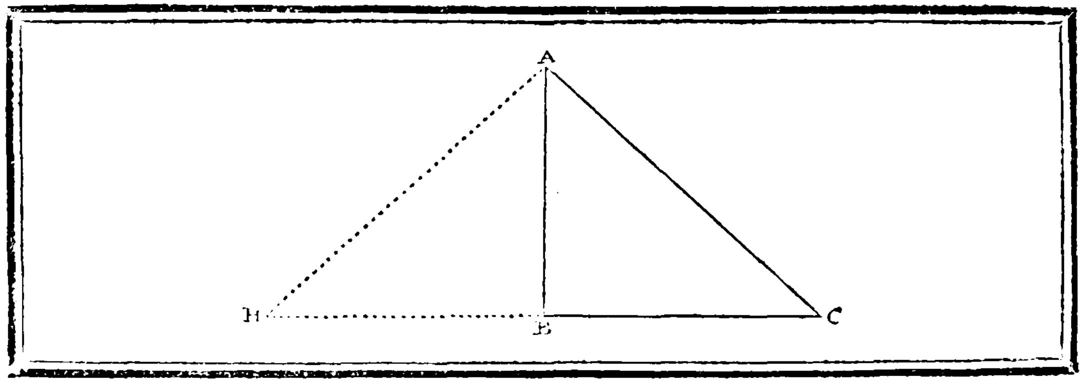
Fig. 2.



6. L'angle entier F A B fera = à ∀ entier N A C. Ax. 2.
Puis donc que dans les △ A F B, A C N les côtés A F, AB & A C, A N font = chacun à chacun (*Arg.* 5), & que ∀ compris F A B eft = à ∀ compris N A C (*Arg.* 6).
7. Le △ A F B fera = au △ A C N. Prop. 4. L. I.
Mais le △ A F B & le Pgr A H font placés fur la même bafe A F & entre les mêmes Plles A F, B H (*Prep.* 2).
8. D'où il fuit, que le Pgr A H eft double du △ A F B. Prop. 41. L. I.
De même; le △ A C N & le □ A M étant placés fur la même bafe A N & entre les mêmes Plles A N, M C (*Arg.* 3).
9. Le □ A M eft double du △ A C N. Prop. 41. L. I.
Les △ A F B, A C N étant donc = entr'eux (*Arg.* 7) & le Pgr A H & le □ A M en étant doubles (*Arg.* 8 & 9).
10. Il s'enfuit, que le Pgr A H eft = au □ A M. Ax. 6.

De la même maniere; en tirant (*Fig.* 2) les lignes B G, A E on démontrera, que le Pgr C H eft = au □ C D.
11. Mais le Pgr A H avec le Pgr C H forment le □ A G.
12. C'eft pourquoi, ce □ A G eft = à la fomme des □ A M & C D. Ax. I.
Or comme le □ A G eft le □ de l'hypothenufe A C, & les □ A M & C D les □ des deux autres côtés qui renferment l'angle droit A B C.
13. Le □ de l'hypothenufe A C eft = au □ des deux autres côtés A B & B C pris enfemble.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XLVIII. THEOREME XXXIV.

SI le quarré de l'un des cotés (CA) d'un triangle (CBA) est égal aux quarrés des deux autres cotés (AB, BC): l'angle (ABC) compris de ces deux cotés (AB, BC) est droit.

Hypothese.	These.
Le □ de CA est = aux □ de AB & au □ de BC.	*L'angle ABC compris des cotés AB, BC est* ∟.

Préparation.

1. DU point B, sur la droite BA, élevez la perpendiculaire BH. — Prop. 11. L. 1.
2. Faites BH = BC. — Prop. 3. L. 1.
3. Du point H au point A tirez la droite HA. — Dem. 1.

Demonstration

PUisque BH est = à BC (*Prep.* 2).

1. Le □ de BH sera = au □ de BC. — Prop. 46. L. 1. Coroll. 3.

Si on ajoute de part & d'autre le □ de AB.

2. Les □ de AB & BH seront = aux □ de AB & BC pris ensemble. — Ax. 2.

Mais le ∠ HBA étant Rgle en B (*Prep.* 1).

3. Il s'ensuit, que le □ de HA est = aux □ de AB & BH. — Prop. 47. L. 1.

Puis donc que le □ de CA est = aux □ de AB & BC (*Hyp.* 1), le □ de HA = aux □ de AB & BH (*Arg.* 3) & que les □ de AB & BH sont = aux □ de AB & BC (*Arg.* 2).

4. Il faut nécessairement, que le □ de CA soit = au □ de HA. — Ax. 1.
5. Partant, CA est = à HA. — Prop. 46. L. 1. Coroll. 3.

Or dans les ∠ CBA, HBA le côté CA est = au côté HA (*Arg.* 5), AB est commun aux deux ∠ & la base BC est = à la base BH (*Prep.* 2).

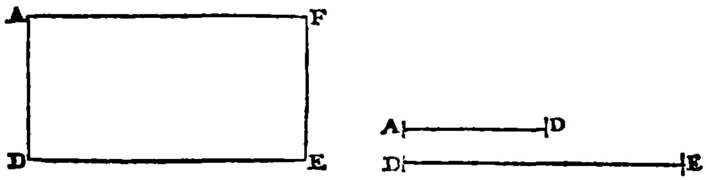
6. Par conséquent, les ∀ ABC, ABH, compris par les côtes égaux AB, BC & AB, BH, sont = entr'eux. — Prop. 8. L. 1.

Mais l'angle ABH est un ∟ (*Prep.* 1).

7. Partant l'angle ABC sera aussi droit

C. Q. F. D.

LES
ELEMENS
D'EUCLIDE,
LIVRE SECOND.



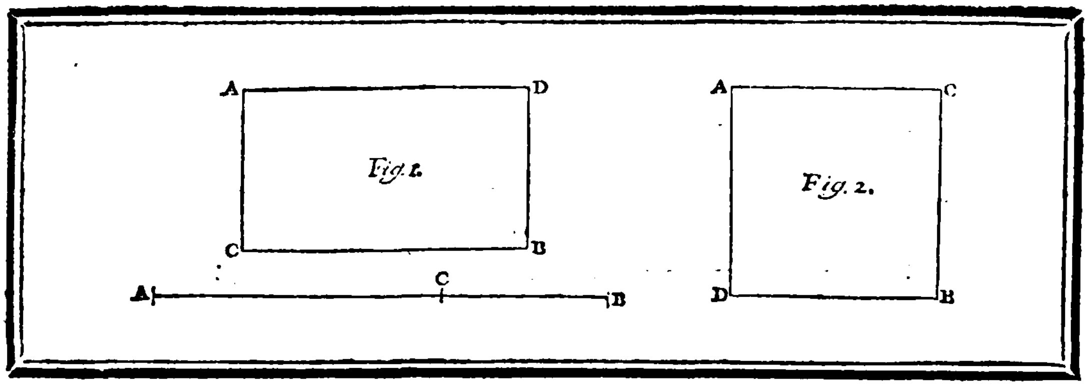
DEFINITIONS.

I.

ON dit de tout Parallélogramme rectangle (DF); qu'il est compris des deux côtés (AD, DE) qui environnent l'angle droit (ADE).

1. *Un Parallélogramme rectangle peut être désigné de cette maniere; parcequ'un angle droit & les deux côtés qui l'environnent sont les déterminantes d'une telle figure. Aussitôt que la longueur des côtés* AD, DE, *alentour de l'angle droit, est fixée, la grandeur du Rectangle est déterminée en tout sens; puisqu'on acheve de le construire en tirant par les extrêmités* A & E *de ces côtés des paralleles à ces mêmes côtés* AD, DE, *selon la* Def. 35. & Prop. 31. L. 1.

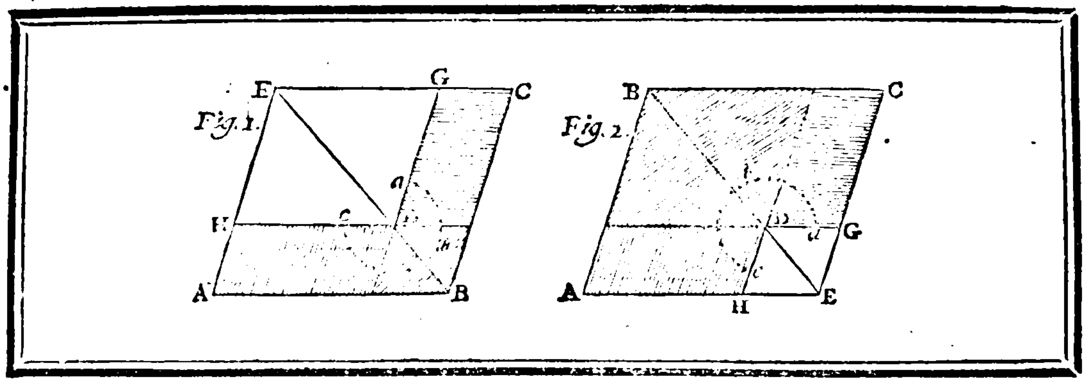
2. *Pour abréger, on désigne souvent un Parallélogramme rectangle* DF *par les trois lettres alentour de l'angle droit, en cette maniere; le Pgr Rgle* ADE. *On le marque aussi ainsi. Le Pgr Rgle* AD; DE; *ce qui veut dire le Pgr Rgle qui résulteroit des deux côtés* AD & DE *formant un angle droit: on le prononce simplement, le Pgr Rgle sous* AD & DE; *ou le Pgr Rgle de* AD & DE.



DEFINITIONS.

3. *Quelquefois les parties d'une ligne droite ſervent à indiquer un tel parallélogramme rectangle; par ex.* (Fig. 1). *la droite* AB *étant partagée en* C, *on peut conſtruire* (Prop. 31. L. 1.) *de ces deux lignes* AC, CB *un parallélogramme rectangle, en les joignant à angle droit. On déſigne donc ce parallélogramme ainſi. Le Pgr Rgle* AC; CB; *ou bien ſimplement le Pgr Rgle* ACB; *où la lettre du milieu marque le point qui eſt commun aux deux lignes. De la même maniere, on entend par le Pgr Rgle ABC, celui qu'on conſtruiroit ſelon les mêmes regles, en prenant* AB *pour un côté &* BC *pour l'autre.*

4. *Dans le cas où les lignes AD, & DB alentour de l'angle droit ſont égales* (Fig. 2), *le parallélogramme* DC *eſt un quarré* (Def. 30. L. 1). *Comme dans ce cas, un des côtés* DB *avec l'angle droit déterminent le quarré, que l'on peut conſtruire de ces données* (*par la* Prop. 31. L. 1). *On pourra auſſi déſigner ce quarré par ſes déterminantes, de cette façon, le* □ *de* DB; *ou le* □ *de* AD.

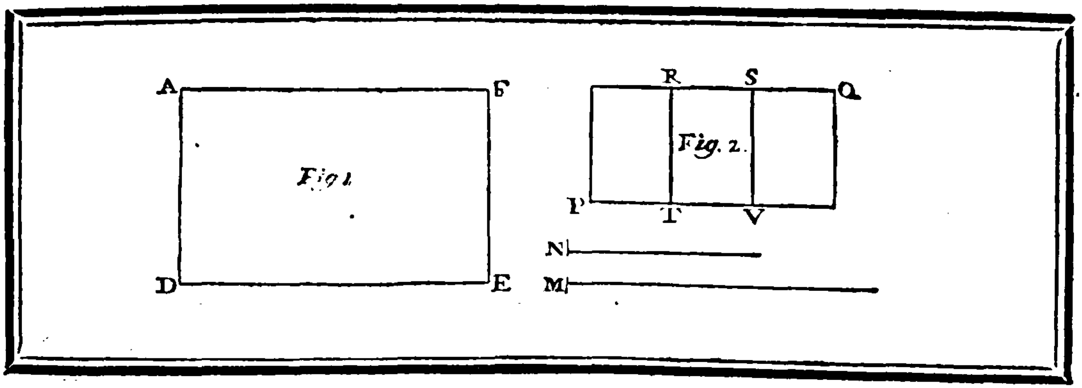


DEFINITIONS.

II.

ON appelle *Gnomon*, ou *Equerre*, la figure (ABCGDH) composée d'un parallélogramme (DB) alentour de la diagonale (BE) & de deux complémens (AD, DC).

On marque le Gnomon par un arc de cercle **abc**, *qui passe par les deux complémens* (AD, DC) *& le Pgr alentour de la diagonale, desquels il est composé. On peut former dans chaque Pgr deux Gnomons différens; d'abord, en retranchant* (Fig. 1) *du Pgr entier, le plus grand Pgr* (ED) *alentour de la diagonale; ou bien, en retranchant* (Fig. 2) *le plus petit Pgr* (ED) *alentour de la diagonale.*



AXIOMES.

I.

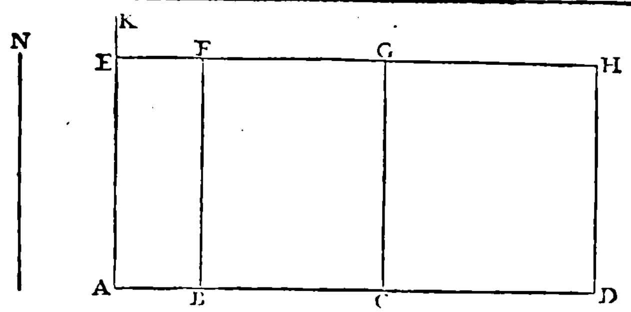
LE tout eſt égal à toutes ſes parties priſes enſemble.

Le Pgr entier PQ, (Fig. 2) *eſt égal à toutes ſes parties, les Pgrs* PR, TS, VQ *pris enſemble.*

II.

LEs parallélogrammes rectangles compris de côtés égaux; ſont égaux.

Le Pgr Rglc DF (Fig. 1) *eſt compris des droites* AD, DE; *par conſéquent ſi la droite* N *eſt égale à* AD, *& la droite* M *égale à* DE, *le Rgle formé des droites* N *&* M *ſera néceſſairement égal au Rgle* DF. *Cela eſt évident par un des premiers principes de nos raiſonnemens, qui demande, que toutes les déterminées de deux ſujets ſoient les mêmes, auſſitôt qu'il ne ſe trouve pas de différence dans leurs déterminantes.*



PROPOSITION I. *THEOREME I.*

SI de deux lignes droites (AD & N), l'une (comme AD) eſt coupée en tant de parties (AB, BC, CD) que l'on voudra: le rectangle compris de ces deux droites (AD & N) eſt égal aux rectangles compris de la droite entiere (N), & de chaque partie (AB, BC, CD) de la coupée (AD).

HYPOTHESE.	THESE.
AD & N ſont deux droites, dont l'une AD eſt coupée en pluſieurs parties AB, BC, CD.	*Le Rgle AD. N eſt = aux Rgles AB. N + BC. N + CD. N.*

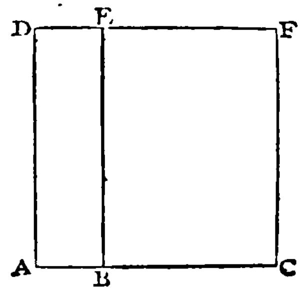
Préparation.

1. SUr AD au point A élevez la ⊥ AK.	Prop. 11. L. 1.
2. De la droite AK retranchez une partie EA = N.	Prop. 3. L. 1.
3. Par les points D & E tirez les droites DH, EH Plles à AE, AD,	Prop. 31. L. 1.
4. Et par les points de ſection B, & C, les droites BF, CG Plles à AE ou DH.	

DEMONSTRATION.

1. LE Rgle AH eſt = aux Rgles AF, BG, CH pris enſemble.	Ax. 1. L. 2.
Mais à cauſe que le Rgle AH eſt compris des droites EA, AD (*Prep.* 3) & que AE = N (*Prep.* 2).	
2. Ce Rgle AH eſt compris des droites AD & N.	Ax. 2. L. 2.
De même; à cauſe que le Rgle AF eſt compris des droites EA, AB (*Prep.* 4) & que EA = N (*Prep.* 2).	
3. Ce Rgle AF eſt compris des droites AB & N.	Ax. 2. L. 2.
4. De la même maniere, le Rgle BG eſt compris des droites BC & N; parce qu'il eſt compris des droites FB & BC & que FB = N;	Prop. 34. L. 1.
Et ainſi de tous les autres.	
5. Partant, le Rgle compris des droites AD & N eſt = aux Rgles compris des droites AB & N, BC & N, CD & N pris enſemble. c. à. d. le Rgle AD. N eſt = aux Rgles AB. N + BC. N + CD. N.	Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION II. THEOREME II.

SI une ligne droite (AC) est coupée en tant de parties (AB, BC), que l'on voudra: les rectangles compris de la droite entiere (CA) & de chacune de ses parties (AB, BC), sont égaux au quarré de la droite entiere (AC).

HYPOTHESE.

AC est une droite coupée en plusieurs parties AB, BC.

THESE.

Le Rgle CAB + le Rgle ACB sont = au ☐ de AC.

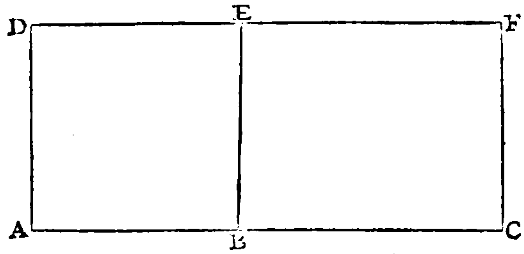
Préparation.

1. SUr la droite AC construisez le ☐ AF. — Prop 46. L. 1.
2. Par le point de section B tirez la droite BE Plle à AD, ou CF. — Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

1. LE Rgle entier AF est = aux Rgles AE, BF pris ensemble. — Ax. 1. L. 2.
   Mais ce Rgle AF est le ☐ de la ligne AC (*Prep.* 1).
2. Partant, les Rgles AE, BF pris ensemble égalent le quarré de la ligne AC. — Ax. 1. L. 1.
3. Or le Rgle AE, est compris des droites CA, AB; à cause qu'il est compris des droites DA, AB dont DA = CA (*Prep.* 1). — Ax. 2. L. 2.
4. De même, BF est un Rgle compris des droites AC, CB; parcequ'il est compris des droites EB, BC; dont EB = AC (*Prep.* 1 & 2). — Prop. 34. L. 1.
5. C'est pourquoi, le Rgle compris des droites CA, AB avec le Rgle compris des droites AC, CB est = au ☐ de la droite AC; ou bien le Rgle CAB + le Rgle ACB sont = au ☐ de AC. — Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION III. *THEOREME III.*

SI une ligne droite (AC) eſt coupée comme l'on voudra (en B): le rectangle compris de la droite entiere (CA) & de l'une de ſes parties (AB) eſt égal au rectangle compris des deux parties (AB, BC), & au quarré de la partie (AB), priſe auparavant.

Hypothese.	These.
AC eſt une droite coupée en deux parties quelconques AB, BC.	*Le Rgle CAB eſt = au Rgle ABC + le □ de AB.*

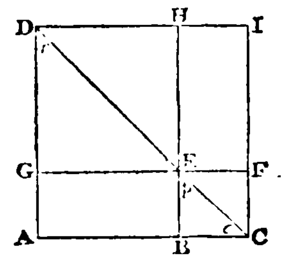
Préparation.

1. SUr la droite AB conſtruiſez le □ AE. — Prop 46. L. 1.
2. Prolongez le côté DE indéfiniment vers F. — Dem. 2.
3. Par le point C tirez la droite CF Plle à AD ou BE, & prolongez la, juſqu'à ce qu'elle rencontre DF au point F. — Prop. 31. L. 1. Dem. 2.

Demonstration.

1. LE Rgle AF eſt = aux Rgles AE & BF pris enſemble. — Ax. 1. L. 2.
2. Mais le Rgle AF eſt compris des droites CA, AB; parce qu'il eſt compris de CA & AD, dont AD=AB (*Prep.* 1). — Ax. 2. L. 2.
3. Et le Rgle BF eſt compris de AB, BC; à cauſe qu'il eſt compris de EB, BC, dont EB=AB (*Prep.* 1).
   De plus, le Rgle AE étant le □ de la droite AB (*Prep.* 1).
4. Le Rgle de CA . AB eſt = au Rgle de AB . BC avec le □ de AB; ou bien le Rgle CAB eſt = au Rgle ABC + le □ de AB. — Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION IV. *THEOREME IV.*

SI l'on coupe une droite (AC) en deux parties quelconques (AB, BC): le quarré de la droite entiere (AC) est égal aux quarrés des deux parties (AB, BC), & au double rectangle compris de ces deux parties (AB, BC).

HYPOTHESE.	THESE.
AC est une droite coupée en deux parties quelconques AB, BC.	*Le □ de AC est = au □ de AB + au □ de BC + 2 Rgles ABC.*

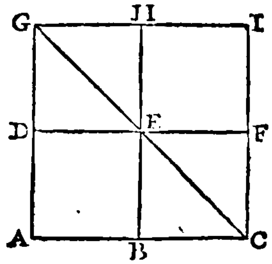
Préparation.

1. SUr AC construisez le □ AI. — Prop. 46. L. 1.
2. Par le point de section B tirez BH Plle à CI, ou AD. — Prop. 31. L. 1.
3. Tirez la diagonale CD qui coupera BH quelque part en E. — Dem. 1.
4. Par le point E tirez GF Plle aux côtés opposés DI ou AC. — Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

PUisque les lignes AD, BH, CI; de même AC, GF, DI sont Plles (*Prep.* 1. 2. & 4).

1. Les quatre figures AE, EI, BF, GH sont des Pgrs. — Def. 35. L. 1.
Et parce que chacune de ces figures renferme un des angles droits du □ AI. — {Prop. 46. L. 1. Coroll. 2.}
2. Ces Pgrs sont aussi Rgles.
De plus; à cause que les côtés DA, AC du □ AI sont égaux (*Def.* 30. *L.* 1).
3. L'angle *r* est = à ∀ *o*. — Prop. 5. L. 1.
Et à cause du parallélisme des droites AD, BH (*Prep.* 2.) coupées par la droite DC (*Prep.* 3).
4. L'angle intérieur *r* est = à son ∀ extérieur opposé *p*. — Prop. 29. L. 1.
5. Partant, ∀ *o* = ∀ *p*. — Ax. 1. L. 1.
6. C'est pourquoi, le côté BE est = au côté BC, — Prop. 6. L. 1.
7. Et le Rgle BF est un □; & nommément le □ de BC. — Def. 30. L. 1.
8. On prouvera de la meme maniere, que le Pgr GH est un □; & nommément le □ de AB; à cause que GE = AB. — Prop. 34. L. 1.
De plus BE étant = à BC (*Arg.* 6).
9. Le Rgle AE, ou le Rgle de AB . BE sera = au Rgle de AB . BC. — Ax. 2. L. 2.
Mais le Rgle AE est = au Rgle EI (*Prop.* 43. *L.* 1).
10. D'où il suit, que le Rgle EI est aussi = à un Rgle de AB . BC. — Ax. 1. L. 1.



11. Par conséquent, les deux Rgles AE, EI pris ensemble, sont égaux au double rectangle des parties AB, BC.
Puis donc que les deux □ GH & BF sont les quarrés des deux parties AB & BC (*Arg.* 7 & 8). & que les Rgles AE, EI pris ensemble, sont = au double Rgle des parties AB, BC.
12. Il s'ensuit, que le □ de la ligne entiere AC est = au □ de AB + au □ de BC + 2 Rgles ABC.

C. Q. F. D.

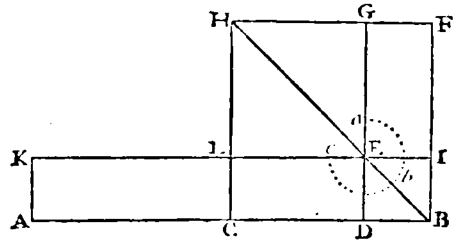
COROLLAIRE I.

Q*uand deux droites* HB, DF *Plles aux côtés d'un quarré s'entrecoupent en un même point* E *de la diagonale, les Rgles* BF, DH *formés autour de la diagonale sont des quarrés.*

COROLLAIRE II.

S*I l'on coupe la ligne* AC *en deux également en* B, *les complémens* AE, EI *sont des quarrés, & ces complémens égaux entr'eux, sont aussi égaux aux quarrés alentour de la diagonale, & le quarré de la ligne entiere* AC *est quadruple du quarré d'une des parties* AB *ou* BC.

Car BF, DH *sont des quarrés*, (par le Coroll. précédent), *égaux entr'eux; à cause que* BC = AB = DE. *De plus* AE *étant* = *à* BF *&* EI *étant* = *à* BF, (Prop. 36. L. 1); *les complémens* AE, EI *sont donc des quarrés aussi: & puisqu'ils sont égaux entr'eux; le* □ *de* AC = 4 □ *de* AB = 4 □ *de* BC.



PROPOSITION V. *THEOREME V.*

UNe droite (AB) étant partagée en deux parties égales (AC, CB) & en deux inégales (AD, DB); le rectangle compris des deux parties inégales (AD, DB) & le quarré de la partie (CD), comprise entre les points de section (C & D), font égaux au quarré de la moitié (AC ou CB) de la droite entiere (AB).

HYPOTHESE.	THESE.
A B est une droite coupée en deux également en C, & en deux inegalement en D.	*Le Rgle A D B + le □ de C D sont = au □ de C B.*

Préparation.

1. SUr la droite CB construisez le □ CF. — Prop. 46. L. 1.
2. Par le point de section D, tirez DG Plle à BF ou CH. — Prop. 31. L. 1.
3. Tirez la diagonale BH, qui coupera DG quelque part en E. — Dem. 1.
4. Par le point de section E, tirez IL Plle à BC ou FH, & par le point A, la droite AK Plle à CL, qui coupera le prolongement de IL en K. — Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

PUisque la figure CF est un quarré (*Prep.* 1).

1. Les Rgles LG, DI, alentour de la diagonale sont des □. — Prop. 4. L. 2. Coroll. 1.
2. Et nommément DI le □ de DB, & LG le □ de CD; à cause que LE = CD. — Prop. 34. L. 1.
3. De plus, le complément CE est = au complément EF. — Prop. 43. L. 1.

   Qu'on ajoute de part & d'autre le □ DI.
4. Le Rgle CI sera = au Rgle DF. — Ax. 2. L. 1.

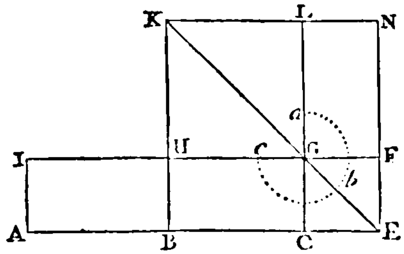
   Mais parce que AC = CB (*Hyp.*).
5. Le Rgle AL est = au Rgle CI. — Ax. 2. L. 2.
6. Partant, le Rgle AL est = au Rgle DF. — Ax. 1. L. 1.

   Si donc on ajoute de part & d'autre le Rgle CE;
7. Le Rgle entier AE sera = aux Rgles DF & CE pris ensemble; c. à. d. au Gnomon abc. — Ax. 2. L. 1.
8. Mais le Rgle AE est compris de AD, DB; parce qu'il est compris de AD, DE, dont DE = DB (*Arg.* 1). — Ax. 2. L. 2.
9. Par conséquent, le Rgle de AD . DB est aussi = au gnomon abc. — Ax. 1. L. 1.

   Ajoutant de nouveau de part & d'autre le □ LG, qui est le quarré de CD (*Arg.* 2).
10. Le Rgle AD . DB avec le □ de CD sera = au Gnomon abc avec le □ LG. — Ax. 2. L. 1.

    Or ce Gnomon abc avec le □ LG est = au □ CF, qui est le quarré de la moitié CB, de la droite entiere AB (*Prep.* 1).
11. Partant, le Rgle ADB + le □ de CD sont = au □ de CB. — Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION VI. *THEOREME VI.*

SI une droite (AC) eſt partagée en deux parties égales (AB, BC), & qu'on y ajoute directement une partie quelconque (CE): le rectangle compris de la droite entiere (AE) & de l'ajoutée (EC) avec le quarré de la moitié (BC), eſt égal au quarré de la droite (BE) compoſée de la moitié (BC) de l'entiere (AC) & de l'ajoutée (CE).

HYPOTHESE	THESE.
I. AC eſt une droite coupée en deux également en B.	*Le Rgle AEC + le □ de BC eſt = au □ de BE.*
II. A laquelle on ajoute directement une partie CE.	

Préparation.

1. SUr la droite BE conſtruiſez le □ BN. Prop. 46. L. 1.
2. Par le point C, tirez la droite CL Plle à EN ou BK. Prop. 31. L. 1.
3. Tirez la Diagonale EK, qui coupera CL quelque part en G. Dem. 1.
4. Par le point G, tirez FH Plle à EB ou NK,
5. Et par le point A, la droite AI Plle à BK, qui coupera le prolongement de FH quelque part en I. } Prop. 31. L. 1.

DEMONSRATION.

PUiſque la figure BN eſt un quarré (*Prep.* 1).

1. Les Rgles CF, HL, alentour de la diagonale, ſont des quarrés. { Prop. 4. L. 2. Coroll. 1.

Et à cauſe que HG eſt = à BC (*Prop.* 34. *L.* 1).

2. Le □ HL eſt = au □ de BC. { Prop. 46. L. 1. Coroll. 3.

De plus AB étant = à BC. (*Hyp.* 1).

3. Le Rgle AH eſt = au Rgle BG. Ax. 2. L. 2.

Mais le Rgle BG eſt = au Rgle GN. (*Prop.* 43. *L.* 1).

4. Le Rgle AH eſt donc auſſi = au Rgle GN. Ax. 1. L. 1.

Et ſi on ajoute de part & d'autre le Rgle BF;

5. Le Rgle entier AF ſera = aux Rgles GN & BF pris enſemble; c. à. d. au Gnomon *abc*. Ax. 2. L. 1.
6. Mais ce Rgle AF eſt compris des droites AE, EC; parceque EC = EF (*Arg.* 1).
7. C'eſt pourquoi le Rgle AE. EC eſt auſſi = au Gnomon *abc*. Ax. 1. L. 1.

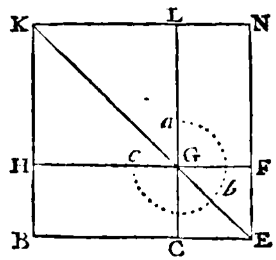
Si on ajoute donc de part & d'autre le □ HL; qui n'eſt autre choſe que le □ de BC (*Arg.* 2);

8. Le Rgle AE. EC avec le □ de BC ſera = au Gnomon *abc* avec le □ HL. Ax. 2. L. 1.

Mais le Gnomon *abc* & le □ HL forment le □ BN, ou le □ de BE (*Prep.* 1).

9. Partant, le Rgle AEC + le □ de BC eſt = au □ de BE. Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION VII. *THEOREME VII.*

SI une ligne droite (BE) est coupée en deux parties quelconques (BC, CE): le quarré de la droite entiere (BE) & le quarré de l'une des parties (comme CE), sont égaux au double rectangle compris de la droite entiere (BE) & de la même partie (EC) prise auparavant, avec le quarré de l'autre partie (BC).

HYPOTHESE.	THESE.
BE est une droite coupée inégalement en C.	*Le □ de BE + le □ de CE sont = à 2 Rgles BEC + au □ de BC.*

Préparation.

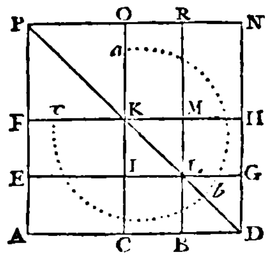
1. SUr BE construisez le □ BN. — Prop. 46. L. 1.
2. Par le point C, tirez la droite CL Plle à EN ou BK. — Prop. 31. L. 1.
3. Tirez la diagonale EK, qui coupera CL quelque part en G. — Dem. 1.
4. Par le point G, tirez la droite FH Plle à EB ou NK. — Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

PUisque la figure BN est un quarré (*Prep.* 1).

1. Les Rgles alentour de la diagonale CF, HL sont des □. — Prop. 4. L. 2. Coroll. 1.
2. Et nommément CF le □ de CE, & HL le □ de BC; à cause que HG = BC. — Prop. 34. L. 1.
   Mais le Rgle BG étant = au Rgle NG (*Prop.* 43. *L.* 1); si on ajoute de part & d'autre le □ CF;
3. Le Rgle BF sera = au Rgle NC. — Ax. 2. L. 1.
4. Partant, le double Rgle BF est = aux Rgles BF & NC pris ensemble,
   Et à cause que les Rgles BF & NC ne sont que le Gnomon *abc* avec le □ CF.
5. Ce Gnomon *abc* avec le □ CF sera aussi double du Rgle BF; ou bien = au double Rgle BF. — Ax. 1. L. 1.
   Mais le Rgle BF est = au Rgle compris de BE, EC, à cause que EF = EC (*Arg.* 1).
6. C'est pourquoi, le Gnomon *abc* avec le □ CF est = au double Rgle compris de BE, EC. — Ax. 1. L. 1.
   Si on ajoute donc de part & d'autre le □ HL, qui est = au □ de BC (*Arg.* 2).
7. Le Gnomon *abc* + le □ CF + le □ HL feront = au double Rgle BE. EC + au □ de BC. — Ax. 2. L. 1.
   Puis donc que le Gnomon *abc* + le □ HL sont = au □ de BE, & que le □ CF n'est autre chose que le □ de CE (*Arg.* 2).
8. Il est manifeste, que le □ de BE + le □ de CE sont = à 2 Rgles BEC + au □ de BC. — Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION VIII. THEOREME VIII.

SI une droite (AB) eſt partagée en deux parties quelconques (AC, CB): le rectangle quadruple compris de la droite entiere (AB) & d'une des parties (BC), avec le quarré de l'autre partie (AC), ſont égaux au quarré de la droite (AD), compoſée de l'entiere (AB) & de l'ajoutée (BD) égale à la partie (BC).

HYPOTHESE.	THESE.
AB eſt une droite partagée en C, à laquelle on ajoute directement la droite BD = BC.	*Le Rgle quadruple ABC + le □ de AC ſont = au □ de AD.*

Préparation.

1. SUr AD conſtruiſez le quarré AN. — Prop. 46. L. 1.
2. Par les points B & C, tirez BR & CO Plles à DN ou AP. — Prop. 31. L. 1.
3. Tirez la diagonale DP, qui coupera BR & CO quelque part en L & en K. — Dem. 1.
4. Par les points L & K, tirez GE & HF Plles à DA ou NP. — Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

PUiſque la figure AN eſt un quarré (*Prep.* 1).

1. Les Rgles alentour de la diagonale CH, ER, FO ſont des quarrés. — Prop. 4. L. 2. Coroll. 1.

Et parce que dans le □ CH, le côté CD eſt partagé en deux également en B (*Hyp.*).

2. Les Rgles BG, CL, LH, IM ſont quatre quarrés égaux, — Prop. 4. L. 2. Coroll. 2.
3. Et le □ CH eſt = au quadruple □ CL.

De plus, à cauſe que ER eſt un quarré (*Arg.* 1).

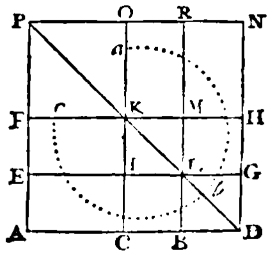
4. Le Rgle EK eſt = au Rgle KR. — Prop. 43. L. 1.

Mais puiſque IK = IC (*Arg.* 2), & CO Plle à AP (*Prep.* 2).

5. Le Rgle AI eſt = au Rgle EK. — Prop. 36. L. 1.
6. Partant, le Rgle AI eſt auſſi = au Rgle KR. — Ax. 1. L. 1.

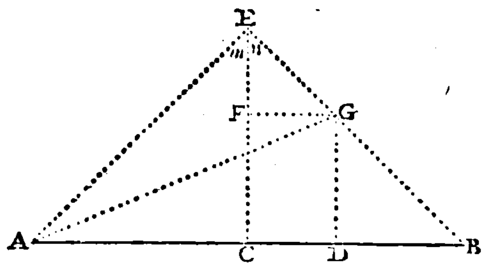
De même, à cauſe que KM = MH (*Arg.* 2), & HF Plle à NP (*Prep.* 4).

7. Le Rgle KR eſt = au Rgle MN. — Prop. 36. L. 1.
8. Partant, les quatre Rgles AI, EK, KR, MN, ſont = entr'eux. — Ax. 1. L. 1.



9. Par conséquent, leur somme est = au quadruple Rgle AI.
Si on ajoute de part & d'autre le □ CH, qui est = au quadruple □ CL (*Arg.* 3).
10. Le Gnomon *abc*, qui en resulte d'une part, est = au Rgle quadruple AI & au quadruple □ CL pris ensemble; c. à. d. au Rgle quadruple AL, attendu que le Rgle AI + le □ CL est = au Rgle AL. Ax. 2. L. 1.
En ajoutant de nouveau de part & d'autre le □ de AC, qui est = au □ FO; à cause que AC = FK (*Prop.* 34. *L.* 1);
11. Le Rgle quadruple AL & le □ de AC seront = au □ AN. Ax. 2. L. 1.
Mais le Rgle AL est = au Rgle compris de AB, BC; à cause que BC = BL (*Arg.* 2), & le □ AN est = au □ de AD (*Prep.* 1).
12. Partant, le Rgle quadruple ABC + le □ de AC sont = au □ de AD. Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION IX. *THEOREME IX.*

SI une droite (AB) eſt coupée en deux parties égales (AC, CB), & en deux inégales (AD, DB): les quarrés des deux parties inégales (AD, DB) ſont doubles du quarré de la moitié (AC) de l'entiere (AB) & du quarré de la partie (CD) compriſe entre les deux points de ſection (C & D).

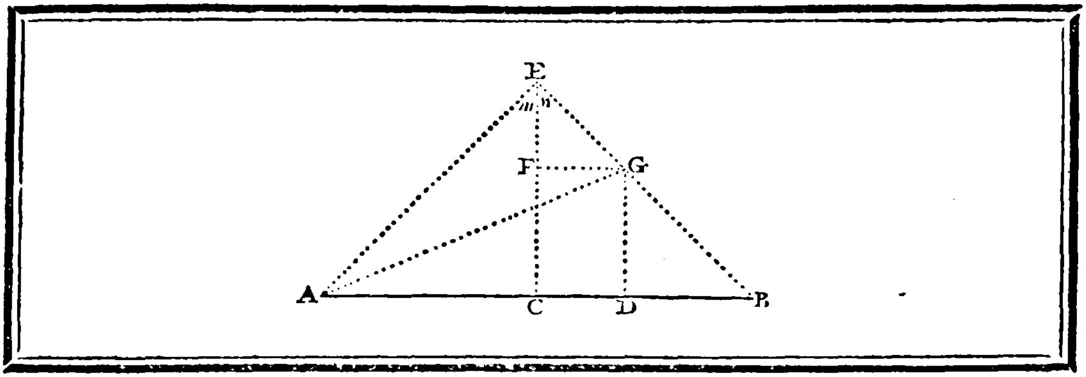
HYPOTHESE.	THESE.
AB eſt une droite partagée en deux également en C, & en deux inégalement en D.	*Le □ de AD + le □ de DB ſont doubles du □ de AC + du □ de CD.*

Préparation

1. DU point C élevez ſur AB la ⊥ CE. Prop. 11. L. 1.
2. Faites CE = à AC ou BC. Prop. 3. L. 1.
3. Des points A & B au point E tirez les droites AE; BE. Dem. 1.
4. Par les points D & G tirez les droites DG & GF Plles à CE & AB. Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

PUiſque CE eſt = à AC (*Prep.* 2).
1. L'angle CAE eſt = à ∠ *m*. Prop. 5. L. 1.
Mais ∠ ECA eſt un ∟ (*Prep.* 1).
2. C'eſt pourquoi, les deux autres ∠ CAE & *m* pris enſemble ſont auſſi = à un ∟. Prop. 32. L. 1.
3. Partant, chacun d'eux eſt un demi ∟; parcequ'ils ſont = entr'eux (*Arg.* 1).
On prouvera de la même maniere, que
4. Chacun des ∠ CBE & *n* eſt un demi ∟,
5. Et ainſi, ∠ entier *m* + *n* eſt = à un ∟. Ax. 2. L. 1.
Derechef, ∠ *n* étant un demi ∟ (*Arg.* 4) & ∠ EFG un ∟; à cauſe qu'il eſt = à ſon interieur oppoſé ECB (*Prop.* 29. *L.* 1), lequel eſt ∟ (*Prep.* 1).
6. L'angle EGF eſt auſſi un demi ∟. Prop. 32. L. 1.
7. Et par conſéquent, EF eſt = à FG, Prop. 6. L. 1.
Par un raiſonnement ſemblable on prouvera, que
8. L'angle BGD eſt = à un demi ∟, & DG = DB.
Maintenant, à cauſe que le □ de AE eſt = au □ de AC & au □ de CE pris enſemble (*Prop.* 47. *L.* 1), & que AC = CE (*Prep.* 2).
9. Le □ de AE eſt double du □ de AC.
On prouvera de même, que
10. Le □ de EG eſt double du □ de FG, c. à. d. du □ de CD, puiſque FG = CD. Prop. 34. L. 1.



12. Par conſéquent, le □ de AE & le □ de EG pris enſemble, ſont doubles du □ de AC & du □ de CD. Ax. 2. L. 1.

Et parceque le □ de AE & le □ de EG pris enſemble ſont = au □ de AG (*Prop.* 47. *L.* 1. & *Arg.* 5).

13. Le □ de AG eſt auſſi double du □ de AC & du □ de CD pris enſemble. Ax. 1. L. 1.

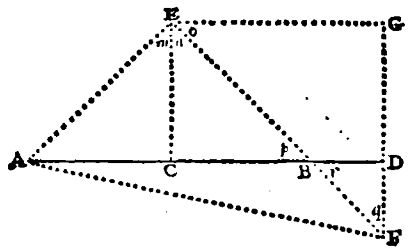
Mais ∀ ECA étant = à un ∟ (*Prep.* 1) & ∀ GDC = à ∀ ECA (*Prop.* 29. *L.* 1).

14. Le □ de AG eſt = au □ de AD & au □ de DG. Prop. 47. L. 1.

15. Ou le □ de AG eſt = au □ de AD & au □ de DB pris enſemble ; à cauſe que DB eſt = à DG. (*Arg.* 8).

16. Partant, le □ de AD & le □ de DB pris enſemble ſont doubles du □ de AC & du □ de CD ; ou le □ de AD + le □ de DB ſont doubles du □ de AC + du □ de CD. Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION X. THEOREME X.

SI on partage une droite (AB) en deux également (en C), & qu'on y ajoute directement une autre droite (BD): le quarré de la droite (AD) composée de l'entiere (AB) & de l'ajoutée (BD), avec le quarré de l'ajoutée (BD) sont doubles du quarré de la moitié (AC) de l'entiere (AB), & du quarré de la droite (CD), composée de la moitie (CB) de l'entiere (AB) & de l'ajoutée (BD),

HYPOTHESE.	THESE.
AB est une droite partagée également en C, & à laquelle on ajoute directement une partie BD.	*Le □ de AD + le □ de BD sont doubles du □ de AC + du □ de CD.*

Préparation.

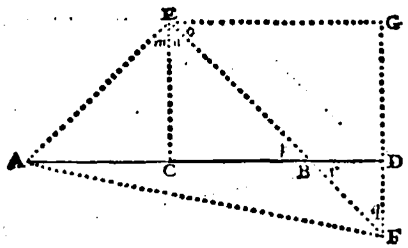
1. SUr AB, au point C, élevez la ⊥ CE. — Prop. 11. L. 1.
2. Faites CE = à AC ou BC. — Prop. 3. L. 1.
3. Des points A & B au point E tirez les droites AE & BE, — Dem. 1.
4. Par les points E & D menez EG, DG Plles a AD & CE; & prolongez DG jusqu'a ce qu'elle coupe le prolongement de EB en F. — Prop. 31. L. 1. Dem. 2.

DEMONSTRATION.

PUisque dans le △ ACE le côté AC est = au CE (*Prep.* 2).

1. L'angle CAE est = à ∠ *m*. — Prop. 5. L. 1.
   Or ∠ ACE est un ∟ (*Prep.* 1).
2. Ainsi chacun des ∠ CAE, & *m* est un demi ∟. — Prop. 32. L. 1.
   Par un raisonnement semblable on prouvera, que
3. Chacun des ∠ *p* & *n* est un demi ∟.
4. Partant, ∠ *m* + *n* sera = a un ∟. — Ax. 2. L. 1.
   De plus, ∠ *p* étant un demi ∟ (*Arg.* 3).
5. L'angle *r* sera aussi un demi ∟. — Prop. 15. L. 1.
   Mais ∠ BDF étant outre cela ∟ (*Prop.* 29. *L.* 1), puisqu'il est alterne de ∠ ECD qui est ∟ (*Prep.* 1).
6. L'angle *q* est aussi un demi ∟. — Prop. 32. L. 1.
7. Partant, le côté BD = au côté DF. — Prop. 6. L. 1.
   De même; ∠ *q* étant un demi ∟ (*Arg.* 6) & ∠ G un ∟, comme diagonalement opposé à ∠ ECD. (*Prop.* 34. *L.* 1).
8. L'angle *o* est un demi ∟. — Prop. 32. L. 1.
9. Donc EG est = à GF. — Prop. 6. L. 1.

Ensuite



Ensuite A C étant = à C E (*Prop.* 2).

10. Le □ de A C est = au □ de C E. { Prop. 46. L. 1. Coroll. 3.

11. Partant, les □ de A C & de C E pris ensemble sont doubles du □ de A C,
Et ces □ de A C & C E étant = au □ de A E. (*Prop.* 47. *L.* 1).

12. Le □ de A E sera aussi double du □ de A C. Ax. 6. L. 1.
De la même maniere on prouvera, que

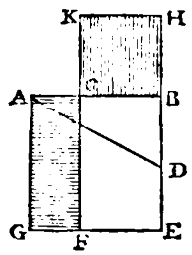
13. Le □ de E F est double du □ de E G, c. à. d. du □ de C D; puisque E G = C D. Prop. 34. L. 1.

14. Par conséquent, le □ de A E avec le □ de E F sont doubles du □ de A C & du □ de C D.
Mais le □ de A E & le □ de E F étant = au □ de A F (*Prop.* 47. *L.* 1).

15. Le □ de A F est double du □ de A C & du □ de C D.
Et ce même □ de A F étant outre cela = au □ de A D & au □ de D F (*Prop.* 47. *L.* 1), ou de B D, attendu que D F = B D (*Arg.* 7).

16. Il s'ensuit donc, que le □ de A D + le □ de B D sont doubles du □ de A C + du □ de C D.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XI. *PROBLEME I.*

COuper une ligne droite donnée (AB) de façon; que le rectangle de l'entiére (BA) & de l'une de ses parties (AC) soit égal au quarré de l'autre partie (CB).

DONNEE	CHERCHE.
La droite AB.	*Le point d'intersection C tel que le Rgle BAC soit = au □ de CB.*

Résolution.

1. SUr la droite AB construisez le quarré AE. Prop. 46. L. 1.
2. Partagez le côté BE en deux également au point D, & tirez du point D au point A la droite DA. Prop. 10. L. 1. Dem. 1.
3. Sur le prolongement de EB, faites DH = à DA. Prop. 3. L. 1.
4. Sur la droite BH construisez le quarré CH, Prop 46. L. 1.
5. Et prolongez le côté KC en F. Dem. 2.

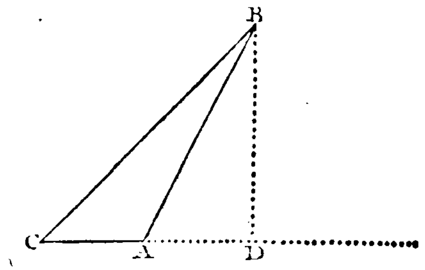
DEMONSTRATION.

PUisque la droite BE est coupée en deux également en D, & que la droite BH y est ajoutée directement.

1. Le Rgle EH.HB + □ de BD est = au □ de DH. Prop. 6. L. 2.
2. Et ce □ de DH est = au □ de DA; parceque DH = DA (*Ref.* 3). {Prop. 46. L. 1. Coroll. 3.
3. Partant, le Rgle EH.HB + □ de BD est = au □ de DA. Ax. 1. L. 1.
   Mais ce même □ de DA est = au □ de AB + au □ de BD (*Prop.* 47. *L.* 1).
4. C'est pourquoi, le Rgle EH.HB + □ de BD = au □ de AB + au □ de BD. Ax. 1. L. 1.
   Si donc on retranche de part & d'autre le □ de BD;
5. Le Rgle EH.HB sera = au □ de AB. Ax. 3. L. 1.
   Maintenant; si du Rgle EH.HB qui est = au Rgle FH, (*Ref.* 4. 5) & du □ de AB qui est = au □ AE (*Ref.* 1), on retranche le Rgle commun FB;
6. Il restera le □ CH = au Rgle GC. Ax. 3. L. 1.
   Ce □ CH étant donc = au □ de BC (*Ref.* 4) & le Rgle GC = au Rgle BA.AC; à cause que AG = AB (*Ref.* 1).
7. Il s'ensuit, que la droite AB est coupée en C de façon que le Rgle BAC est = au □ de CB. Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. F.

M



PROPOSITION XII. *THEOREME XI.*

EN tout triangle amblygone (CBA) le quarré du côté (BC): qui eſt oppoſé à l'angle obtus (A) eſt plus grand que les quarrés des deux autres côtés (AB, CA), du double rectangle compris d'un des côtés (CA) alentour de l'angle obtus, ſur le prolongement duquel tombe la perpendiculaire abaiſſée de l'angle oppoſé (B), & de la partie (AD) compriſe entre cette perpendiculaire & le ſommet de l'angle obtus (A).

HYPOTHESE.	THESE.
I. CBA eſt un △ amblygone, *II. Et BD la ⊥ abaiſſée du ſommet de l'angle B, ſur le prolongement du coté oppoſé CA.*	*Le □ de BC eſt = au □ de AB + au □ de AC + au double Rgle CAD.*

DEMONSTRATION.

PUiſque la droite CD eſt coupée en deux parties quelconques CA, AD (*Hyp.* 2).

1. Le □ de CD eſt = au double Rgle CA . AD & aux □ de CA & de AD pris enſemble. — Prop. 4. L. 2.

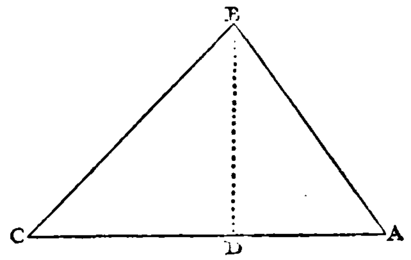
Si on ajoute donc de part & d'autre le □ de BD.

2. Le □ de CD + le □ de BD ſera = au double Rgle CA.AD + au □ de CA + au □ de AD + au □ de BD. — Ax. 2. L. 1.

Mais le □ de CD avec le □ de BD eſt = au □ de BC, & le □ de AD avec le □ de BD eſt = au □ de AB (*Prop.* 47. *L.* 1).

3. Par conſequent, le □ de BC eſt = au double Rgle de CAD + au □ de CA + au □ de AB. — Ax. 1. L. 1.

C. Q. F.D.



PROPOSITION XIII. *THEOREME XII.*

En tout triangle oxygone (CBA) : le quarré d'un des côtés (BA) opposé à un des angles aigus (C) est plus petit que les quarrés des deux autres côtés (CB, CA), du double rectangle compris d'un des côtés (AC) alentour de l'angle aigû, sur lequel tombe la perpendiculaire (BD), abaissée de l'angle opposé (B), & de la partie (CD) comprise entre cette perpendiculaire & le sommet de l'angle aigû (C).

Hypothese.

I. CBA est un △ oxygone,
II. Et BD la ⊥ abaissée du sommet de l'angle B sur le côté opposé CA.

These.

Le □ de BA + le double Rgle ACD est = au □ de CA + au □ de CB.

Demonstration.

Puisque la droite CA est partagée en deux parties quelconques CD, DA (*Hyp.* 2).

1. Le □ de CA avec le □ de CD est = au double Rgle AC.CD avec le □ de AD. — Prop 7. L. 2.

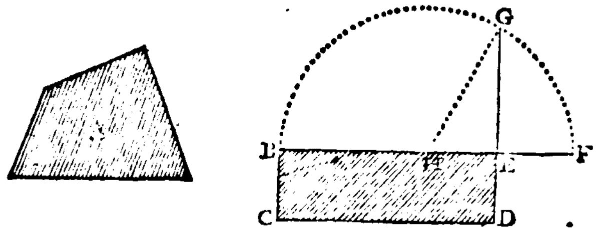
Si donc on ajoute de part & d'autre le □ de DB,

2. Le □ de CA + le □ de CD + le □ de DB sera = au double Rgle AC.CD + au □ de AD + au □ de DB. — Ax. 2. L. 1.

Mais le □ de CD + le □ de DB est = au □ de CB, & le □ de AD + le □ de DB est = au □ de BA (*Prop.* 47. *L.* 1).

3. C'est pourquoi, le □ de BA + le double Rgle ACD est = au □ de CA + au □ de CB. — Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XIV. *PROBLEME II.*

Construire un quarré; égal à une figure rectiligne donnée (A).

DONNEE	CHERCHEE.
La figure rectiligne A.	*La construction d'un quarré = à la figure rectiligne donnée A.*

Résolution.

1. Faites le Pgr Rgle CE = à la figure A. — Prop. 45. L. 1.
2. Prolongez le côté BE, & faites EF = à ED. — Prop. 3. L. 1.
3. Partagez la droite BF en deux parties égales au point H. — Prop. 10. L. 1.
4. Et du point H comme centre, & du rayon HB décrivez le ⊙ BGF. — Dem. 3.
5. Prolongez le côté DE, jusqu'a ce qu'il coupe la ○ BGF en G. — Dem. 1.

Préparation.

Tirez du point H au point G la droite HG. — Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque la droite BF est coupée en deux également en H & en deux inégalement en E (*Ref.* 3 & 2).

1. Le Rgle BE.EF & le □ de HE pris ensemble font = au □ de HF. — Prop. 5. L. 2.
2. Et parceque HF = HG (*Def.* 15. *L.* 1); le □ de HF est = au □ HG. — Prop. 46. L. 1. Coroll. 3.
   Le Rgle BE.EF + le □ HE est = au □ de HG.
   Mais le □ de HG etant = au □ HE & au □ de EG pris ensemble (*Prop.* 47. *L.* 1).
3. Le Rgle BE.EF + le □ de HE est aussi = au □ de HE + au □ de EG. — Ax. 1. L. 1.
   Si on retranche donc de part & d'autre le □ de HE;
4. Le Rgle BE.EF sera = au □ de EG. — Ax. 3. L. 1.
   Et ce Rgle BE.EF étant de plus = au Rgle BE.ED; à cause que EF = ED. (*Ref.* 2).
5. Le Rgle BE.ED sera aussi = au □ de EG. — Ax. 1. L. 1.
   Mais le Rgle BE.ED est = à la figure donnée A (*Ref.* 1).
6. Par conséquent, le □ de EG sera aussi égal à cette figure rectiligne donnée A. — Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. F.

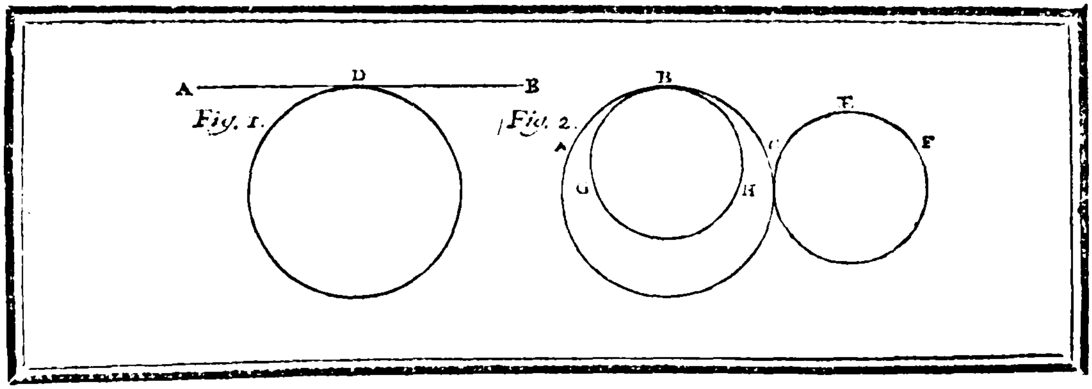
REMARQUE.

Si le point H tombe sur le point E, les droites BE, EF, ED, seront chacune égales à EG; est le Pgr Rgle CE, lui même, sera le quarré cherché. (*Coroll.* 1 & 3. *de la Prop.* 46. *L.* 1).

LES

ELEMENS D'EUCLIDE,

LIVRE TROISIE'ME.



DEFINITIONS

I.

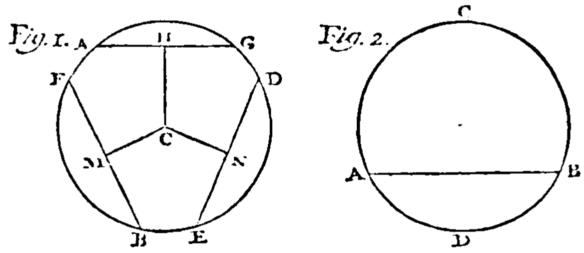
ON nomme *tangente d'un cercle*, une ligne droite (ADB), qui touche le cercle ſans le couper, quoique prolongée de part & d'autre à l'infini *Fig.* 1.

II.

On dit que *deux cercles ſe touchent*, quand leurs circonférences (ABC, CEF ou ABC, GBH) ſe touchent ſans ſe couper. *Fig.* 2.

III.

Deux cercles ſe touchent extérieurement, *quand l'un* (CEF) *tombe au dehors de l'autre* (ABC): *Mais* deux cercles ſe touchent intérieurement, *quand l'un* (GBH) *tombe au dedans de l'autre* (ABC) *Fig.* 2.



DEFINITIONS

IV.

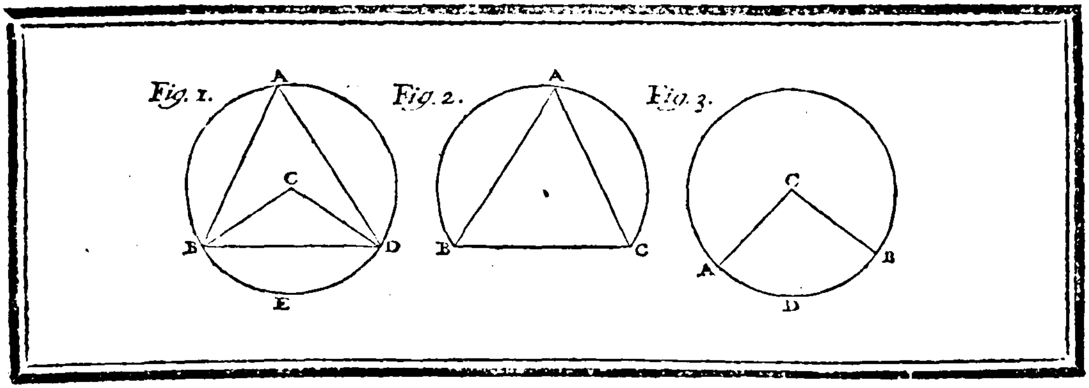
LA distance d'une ligne droite (FB) du centre du cercle, *est la perpendiculaire* (CM) *abaissée du centre du cercle* (C) *sur cette ligne droite* (FB); C'est pour cela que l'on dit; que *deux lignes droites* (FB, DE) *sont également distantes du centre du cercle*, quand les perpendiculaires (CM, CN), abaissées du centre (C) sur ces lignes droites (FB, DE) sont égales. *Fig.* 1.

V.

Mais on dit qu'*une ligne droite* (AG) *est plus éloignée du centre du cercle que* (BF ou ED), lorsque la perpendiculaire (CH) abaissée du centre (C) sur cette ligne droite est plus grande que (CM ou CN) *Fig.* 1.

VI.

L'angle mixtiligne du segment, est cet angle (CAB ou DAB) formé de l'arc (CA ou DA) du segment (ACB ou ADB) & de sa corde (AB); *Fig.* 2.



DEFINITIONS.

VII.

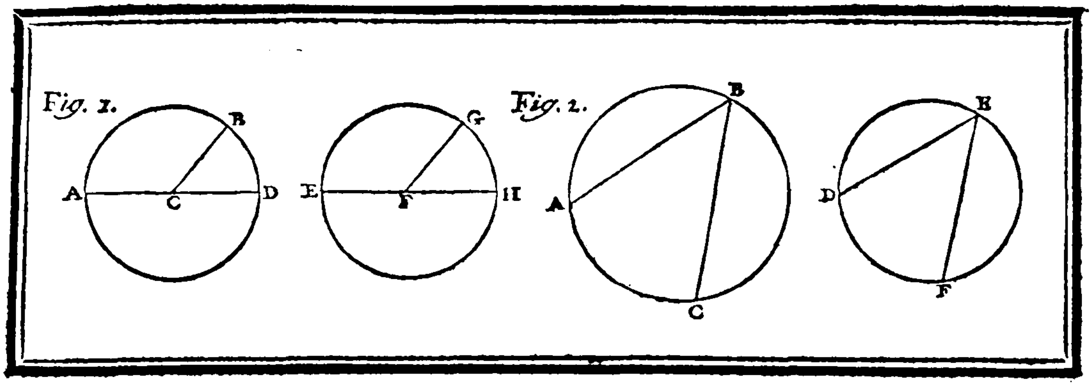
L*'angle dans le ſegment*, eſt un angle (BAC) compris de deux lignes droites (AB, AC) tirées d'un point (A) de l'arc du ſegment, & terminées aux extrémités (B & C) de la corde (BC) *Fig.* 2. *Quand les lignes droites* (AB, AD) *partent d'un point* (A) *pris dans la circonférence du cercle, l'angle* (BAD) *eſt* un angle à la circonférence: *mais quand les lignes droites* (CB, CD) *partent du centre, l'angle* (BCD) *eſt* un angle au centre. *Fig.* 1.

VIII.

On dit, qu'*un angle s'appuye ſur un arc de cercle*, quand les lignes droites (AB, AD ou CB, CD), qui forment cet angle (BAD ou BCD), ſont tirées ; ſoit d'un même point (A) de la circonférence; ſoit de ſon centre (C), aux extrêmités (B & D) de l'arc (BED). *Fig.* 1.

IX.

Un ſecteur de cercle, eſt une figure compriſe de deux rayons (CA, CB), & de l'arc, (ADB) compris entre ces deux rayons. *Fig.* 3.



AXIOMES.

I.

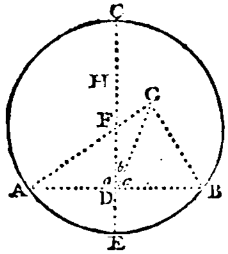
LEs cercles égaux (ABD, EGH), ſont ceux dont les diamétres (AD, EH), ou les rayons (CB, FG) ſont égaux. *Fig.* 1.

Le rayon eſt la déterminante du cercle; parcequ'un cercle eſt décrit par le mouvement du rayon autour du centre: Or quand les déterminantes de deux figures ſont les mêmes, il eſt naturel que les déterminées le ſoient auſſi; & c'eſt la raiſon pourquoi l'égalité des rayons entraine néceſſairement l'égalité parfaite des cercles décrits de ces rayons.

II.

LEs ſegmens de cercle (ABC, DEF), qui peuvent contenir des angles égaux (ABC, DEF), ſont ſemblables. *Fig.* 2.

Les cercles ſont des figures ſemblables: par conſéquent tout ce qu'on détermine dans deux cercles de la même maniere, doit conſerver ce caractere de ſimilitude. Si on retranche donc deux ſegmens ABC, DEF, *au moien de deux angles égaux* ABC, DEF *qu'on y place, ces ſegmens doivent être ſemblables, comme ayant été retranchés ſemblablement de deux touts ſemblables. Cette propoſition eſt proprement un théorême, qui peut être démontré de la véritable notion de la ſimilitude, qu'Euclide n'a point développé.*



PROPOSITION I. *PROBLEME I.*

Trouver le centre (F) d'un cercle donné (ACBE).

DONNE	CHERCHE.
Le cercle ACBE.	*Le centre F de ce ⊙.*

Résolution.

1. Tirez la corde AB.	Dem. 1.
2. Coupez la en deux egalement au point D.	Prop. 10. L. 1.
3. Du point D élevez sur AB, la ⊥ DC, & prolongez la en E.	Prop. 11. L. 1.
4. Coupez la droite CE en deux également au point F; Ce point F sera le centre cherché du ⊙ donné ACBE.	Prop. 10. L. 1.

DEMONSTRATION.

SI non. Quelqu'autre point, comme H ou G pris dans la ligne ou hors de la ligne EC, sera le centre cherché du ⊙ ACBE.

CAS. I.

Supposé, que le centre se trouve dans la ligne EC, en un point H différent du point F.

Puisque le centre du ⊙ est dans la ligne EC, en un point H différent du point F (*Sup.* 1).

1. Les rayons HE & HC sont = entr'eux. — Def. 15. L. 1.
Mais FE étant = à FC (*Ref.* 4) & HC < FC (*Ax.* 8. *L.* 1).
2. HC sera aussi < FE, & à plus forte raison < HE.
3. Partant, HE n'est point = à HC.
4. Le point H pris dans la ligne EC, différent du point F, ne peut donc être le centre du ⊙ ACBE.

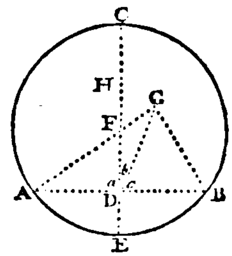
CAS II.

Supposé, que le centre se trouve hors de la ligne EC, en un point G.

Préparation.

Tirez donc du centre G les droites GA, GD, GB. — Dem. 1.

Puisque dans les △ AGD, DGB le côté GA est = au côté GB (*Prep.* & *Def.* 15. *L.* 1), le côté GD commun aux deux △, & la base AD = à la base DB (*Ref.* 2).

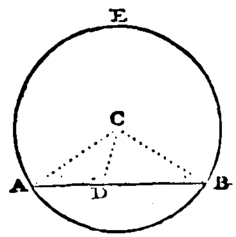


1. Les ∠ contigus $a + b$ & c, opposés aux côtés égaux G A, G B, sont = entr'eux. Prop. 8. L. 1.
2. Partant ∠ $a + b$ est un ∟. Def. 10. L. 1.
   Mais ∠ a étant aussi un ∟ (*Ref.* 3).
3. Il suit, que ∠ $a + b$ est = à ∠ a; ce qui est impossible. Ax. 8. L. 1.
4. Partant le point G pris hors de la ligne E C, ne peut être le centre du ⊙ A C B E.
   Ce centre n'étant donc ni dans la ligne E C, en un point H différent du point F (*Cas.* I); ni hors de la ligne E C, en un point G (*Cas.* II).
5. Le centre cherché du ⊙ A C B E sera nécessairement en F.

C. Q. F. F.

C O R O L L A I R E.

Si dans un cercle A C B E, une corde E C coupe une autre corde A B en deux également & à angles droits; cette corde C E est un diametre, & par conséquent le centre du cercle s'y trouve (*Def.* 17. *L.* 1).



PROPOSITION II. THEOREME I.

SI on prend deux points quelconques (A & B) dans la circonférence d'un cercle (AEB): la droite (AB), qui joint ces deux points, tombera au dedans du cercle.

HYPOTHESE

Les deux points A & B sont pris dans le ○ AEB.

THESE.

La droite AB tombe au dedans du ⊙ AEB.

Préparation.

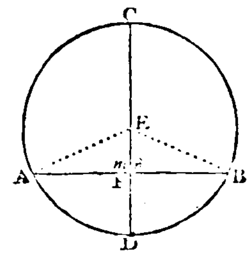
1. CHerchez le centre C du ⊙ AEB. Prop. 1. L. 3.
2. Tirez les droites CA, CD, CB. Dem. 1.

DEMONSTRATION.

PUisque dans le △ ACB, le côté CA est = au côté CB (*Prep.* 2 & *Def.* 15. *L.* 1).

1. Les ∀ CAD, CBD sont = entr'eux. Prop. 5. L. 1.
   Mais ∀ CDA étant un ∀ extérieur du △ CDB.
2. Il est > que son intérieur CBD. Prop. 16. L. 1.
   Et à cause que ∀ CBD est = à ∀ CAD (*Arg.* 1).
3. Cet ∀ CDA sera aussi > ∀ CAD.
4. Partant, le côté CA opposé au plus grand ∀ CDA est > le côté CD opposé au moindre ∀ CAD. Prop. 19. L. 1.
5. Doù il suit, que l'extrémité D de ce côté CD tombe au dedans du ⊙ AEB.
   Et comme on peut démontrer la même chose, de tout autre point pris dans la droite AB.
6. Il est évident, que la droite entiere AB tombe au dedans du ⊙ AEB.

C. Q. F. D.



PROPOSITION III. *THEOREME II.*

SI un diametre (CD) coupe une corde (AB) en deux également (en F): il la coupe à angles droits. Et *reciproquement*; si un diametre (CD) coupe une corde (AB) à angles droits: il la coupe aussi en deux également.

I.

Hypothese. *CD est un diametre du ⊙ ACBD, qui coupe AB en deux également au point F.*

These. *Le diametre CD est ⊥ sur la corde AB.*

Préparation

TIrez les rayons EA, EB. Dem. 1.

Démonstration.

DAns les Δ AEF, BEF, le côté EA est = au côté EB (*Prep. & Def.* 15. *L.* 1), le côté EF est commun aux deux Δ, & la base AF = à la base BF (*Hyp.*).

1. Par conséquent, les ∀ contigus *m* & *n*, opposés aux côtés égaux EA, EB, sont = entr'eux. Prop. 8. L. 1.
2. Partant, la droite CD, qui forme sur AB des ∀ contigus *m* & *n* = entr'eux, est ⊥ sur AB. Def. 10. L. 1.

C. Q. F. D.

II.

Hypothese. *La droite CD est un diametre du ⊙ ACBD, qui est ⊥ sur la corde AB; ou qui fait ∀ m = ∀ n.*

These. *AF est = à FB.*

Demonstration.

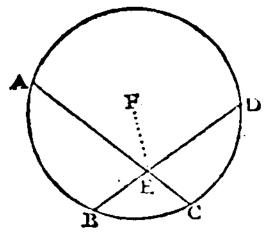
LEs côtés EA, EB du Δ AEB étant = entr'eux (*Prep. & Def.* 15. *L.* 1).

1. Les ∀ EAF, EBF le seront aussi. Prop. 5. L. 1.

Puis donc que dans les Δ AEF, BEF, les ∀ EAF, EBF sont = (*Arg.* 1), de même que les ∀ *m* & *n* (*Hyp.*), & le côté EF commun aux deux Δ.

2. La base AF sera = à la base FB. Prop. 26. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION IV. *THEOREME III.*

SI dans un cercle (ADCB) deux cordes (AC, DB) s'entrecoupent: elles s'entre-couperont en deux inégalement.

HYPOTHESE.

Les deux cordes AC, DB du ⊙ ADCB s'entre-coupent au point E.

THESE.

Ces cordes s'entre-coupent en deux inégalement.

DEMONSTRATION.

SI non.

Les cordes AC, DB s'entre-coupent en deux également.

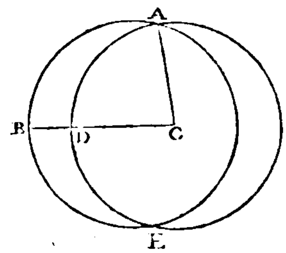
Préparation.

Tirez du centre F au point E la portion de diametre FE. Dem. 1.

PUisque le diametre, ou sa partie FE, coupe en deux également chacune des cordes AC, DB du ⊙ ADCB (*Sup.*).

1. Cette droite FE est ⊥ sur chacune des cordes AC, DB. Prop. 3. L. 1.
2. Partant, les ∀ FEB, FEA sont = entr'eux; ce qui est impossible. Ax. 10. L. 1. Ax. 8. L. 1.
3. C'est pourquoi, les deux cordes AC, DB s'entre-coupent en deux inégalement.

C. Q. F. D.



PROPOSITION V. THEOREME IV.

SI deux cercles (ABE, ADE) s'entre-coupent mutuellement: ils n'ont pas un même centre (C).

HYPOTHESE.	THESE.
ABE, ADE sont deux ⊙ qui s'entre-coupent mutuellement aux points A & E.	*Ces deux cercles n'ont pas un même centre C.*

DEMONSTRATION.

SI non.
Les cercles ABE, ADE ont un même centre C.

Préparation.

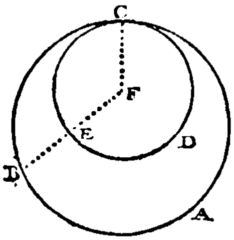
1. Tirez du point C à un point de section A le rayon CA. } Dem. 1.
2. Et du même point C la droite CB, qui coupe les deux ⊙ aux points D & B.

PUisque les droites CA, CD sont tirées du centre C à la ○ ADE (*Prep.* 1. & 2).

1. Ces droites CA, CD sont = entr'elles. Def. 15. L. 1.
Par un raisonnement semblable on prouvera, que
2. Les droites CA, CB sont = entr'elles.
3. Partant, CB seroit = à CD; ce qui est impossible. Ax. 8. L. 1.
4. Donc les deux cercles ABE, ADE n'ont pas un même centre C.

C. Q. F. D.

Fig. 6.



PROPOSITION VI. *THEOREME V.*

SI deux cercles (BCA, ECD) ſe touchent intérieurement en (C): ils n'ont pas un même centre (F).

Hypothese.	These.
Le ⊙ ECD touche le ⊙ BCA intérieurement en C.	*Ces deux ⊙ n'ont point un même centre F.*

Demonstration.

Si non.

Les ⊙ BCA, ECD ont un même centre F.

Préparation.

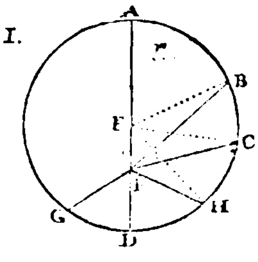
Tirez donc les rayons FB, FC. Dem. 1.

Puiſque le point F eſt le centre du ⊙ BCA (*Sup*).

1. Les rayons FB, FC ſont = entr'eux. } Def. 15. L. 1.
   Derechef; le point F étant auſſi le centre du ⊙ ECD (*Sup*).
2. Les rayons FE, FC ſont = entr'eux.
3. Partant FB = FE (*Ax.* 1. *L.* 1); ce qui eſt impoſſible. Ax. 8. L. 1.
4. C'eſt pourquoi les deux ⊙ BCA, ECD n'ont point un même centre F.

C. Q. F. D.

Fig. I.



PROPOSITION VII. THEOREME VI.

SI d'un point quelconque (F) dans un cercle (AHG), différent de son centre (E), on tire à sa circonférence tant de lignes droites (FA, FB, FC, FH) que l'on voudra, la plus grande de toutes est (FA) qui passe par le centre, & la plus petite est sa prolongée (FD). Quant aux autres; celle (FB ou FC), qui est plus proche de la ligne (FA) passant par le centre, est plus grande qu'une autre (FC ou FH), qui en est plus éloignée. Enfin; de part & d'autre de la plus petite (FD), on ne sauroit tirer de ce même point (F) plus de deux lignes droites (FH, FG) égales entr'elles.

HYPOTHESE.

I. Le point F pris dans le ⊙ AHG, est different du centre E.

II. La droite FA, tirée du point F, passe par le centre E du ⊙ AHG,

III. Et les droites FB, FC, FH sont tirées du point F à la circonférence AHG.

THESE.

I. La droite FA est la plus grande de toutes les droites tirées du point F à la circonference AHG,

II. Et sa prolongée FD est la plus petite de toutes ces droites.

III. De toutes les autres droites FB, ou la droite FC, plus proche de FA, est > FC ou FH, qui en est plus eloignée.

IV. Du point F, de part & d'autre de la plus petite FD, on ne peut tirer plus de deux droites FH, FG = entr'elles.

I. *Préparation.*

TIrez les rayons EB, EC, EH &c. *Fig.* I.

DEMONSTRATION.

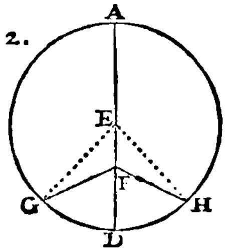
1. LEs deux côtés FE+EB du △ FEB sont > le troisieme FB. Prop. 20. L. I.
Or EB est = à EA (*Def.* 15. *L.* I).
2. Donc FE+EA, ou FA est > FB.
De la même maniere on prouvera, que
3. La droite FA, est la plus grande de toutes les droites tirées du point F à la circonférence AHG.

C. Q. F. D. I.

4. Derechef; les deux côtés FE+FH du △ FEH sont > le troisieme EH. Prop. 20. L. I.
Et ED etant = à EH (*Def.* 15. *L.* I)

5. Les

Fig. 2.



5. Les droites F E + F H font aussi $>$ E D.
En retranchant donc de part & d'autre la partie F E;
6. La droite F H sera $>$ F D; ou F D $<$ F H. Ax. 5. L. 1.
On demontrera de la même maniere que
7. La droite F D, qui est la prolongée de F A, est la plus petite de toutes les droites quelconques tirées du point F à la circonférence A H G.

C. Q. F. D. II.

De plus, le côté F E étant commun aux deux △ F E B, F E C, le côté E B = au côté E C (*Def.* 15. *L.* 1), & ∀ compris F E B $>$ ∀ compris F E C (*Ax.* 8. *L.* 1);
8. La base F B sera $>$ la base F C. Prop. 24. L. 1.
Par un raisonnement semblable on prouvera que
9. La droite F C est $>$ F H.
10. Partant, la droite F B ou F C plus proche de la ligne F A, passant par le centre, est $>$ celle F C ou F H qui en est plus éloignée.

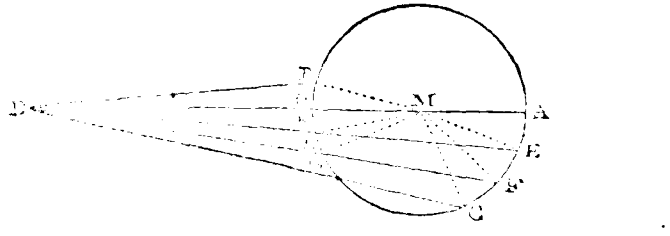
C. Q. F. D. III.

II. *Préparation.* *Fig.* 2.

1. Faites ensuite ∀ F E G = à ∀ F E H, & prolongez E G jusqu'à la rencontre de la ○ A H G. Prop. 23. L. 1.
2. Du point F au point G tirez la droite F G. Dem. 1.

Maintenant, E F étant commun aux deux △ F E H, F E G, le côté E H = au côté E G (*Def.* 15. *L.* 1), & ∀ compris F E H = à ∀ compris F E G (*II Prep.* 1).
11. La base F H sera = à la base F G. Prop. 4. L. 1.
Mais parceque tout autre droite, différente de F G, se trouve nécessairement, ou plus proche de la ligne F D ou plus éloignée d'elle, que F G.
12. Une telle droite sera aussi $<$ ou $>$ F G (*Arg.* 10).
13. C'est pourquoi on ne peut tirer du point F, de part & d'autre de la plus petite F D, plus de deux lignes droites F H, F G = entr'elles.

C. Q. F. D. IV.



PROPOSITION VIII. *THEOREME VII.*

SI d'un point quelconque (D), pris hors d'un cercle (BGCA), on tire à ſa circonférence concave, tant des lignes droites (DA, DE, DF, DC) qu'on voudra, celle (DA) qui paſſe par le centre (M): eſt la plus grande de toutes. Quant aux autres; la plus proche (DE ou DF) de celle (DA) qui paſſe par le centre, eſt plus grande grande qu'une autre (DF ou DC) qui en eſt plus éloignée: mais au contraire de celles (DH, DK, DL, DG), qui ſe terminent à la circonférence convexe: celle (DH) dont le prolongement paſſe par le centre, eſt la plus petite de toutes. Quant aux autres; la plus proche (DK ou DL), de celle (DH), dont le prolongement paſſe par le centre, eſt plus petite qu'une autre (DL ou DG), qui eſt plus éloignée. Enfin de part & d'autre la plus petite (DH), on ne peut tirer du point (D) que deux lignes droites (DK, DB) égales entr'elles.

HYPOTHESE.

I. *Le point D eſt pris hors d'un ⊙ BGCA dans un même plan.*

II. *Les droites DA, DE, DF, DC, ſont tirées de ce point, à la partie concave du ⊙ BGCA.*

III. *Et ces droites [illegible] la partie convexe aux [illegible].*

THESE.

I. *La droite DA, paſſant par le centre M, eſt la plus grande de toutes les droites, DA, DE, DF, DC.*

II. *Les droites DE ou DF, ſelon qu'elles ſont plus proches de la ligne DA ſont > DF ou DC, qui en ſont plus éloignées.*

III. *La droite DH, dont le prolongement paſſe par le centre M, eſt la plus petite de toutes les droites DH, DK, DL, DG.*

IV. *Les droites DK ou DL, ſelon qu'elles ſont plus proches de la ligne DH, ſont < DL ou DG, qui en ſont plus éloignées.*

V. *Du point D, de part & d'autre de la droite DH, on ne peut tirer plus de deux droites DK, DB = entr'elles.*

I. Préparation.

TIrez les rayons ME, MF, MC, MK, ML.

DEMONSTRATION.

1. LES [illegible] DMF [illegible] ∠ DME ſont > le troiſième DE. Prop. [illegible]
[illegible] ME = [illegible]

[illegible] DM + MA

2. D M + M A ou D A sera $>$ D E.
De la même maniere on prouvera que
3. La droite D A passant par le centre M est $>$ toute autre droite tirée du point D à la partie concave du ⊙ B G C A.

C. Q. F. D. I.

De plus le côté D M étant commun aux deux △ D M E, D M F, le côté M E = au côté M F (*Def.* 15. *L.* 1) & ∀ compris D M E $>$ ∀ compris D M F (*Ax.* 8. *L.* 1).
4. La base D E sera aussi $>$ la base D F. Prop. 24. L. 1.
Par un raisonnement semblable on démontrera que
5. La droite D F est $>$ D C, & ainsi des autres.
6. Partant, les droites D E ou D F, selon qu'elles sont plus proches, de la ligne D A passant par le centre, sont $>$ D F ou D C qui en sont plus éloignées.

C. Q. F. D. II.

7. Derechef, les côtés D K + K M du △ D K M sont $>$ le troisieme D M. Prop. 20. L. 1.
Si on retranche de part & d'autre les parties égales M K, M H (*Def.* 15. *L.* 1).
8. La ligne restante D K sera $>$ D H; ou D H $<$ D K.
On prouvera de même que
9. La droite D H est $<$ D L, & ainsi des autres.
10. Partant, la droite D H, dont le prolongement passe par le centre M, est la plus petite de toutes les droites tirées du point D à la partie convexe du ⊙ B G C A.

C. Q. F. D. III.

De même, les droites D K, M K étant tirées des extrémités D & M du côté D M du △ D L M à un point K, pris au dedans de ce △ (*Hyp.* 3).
11. Il s'ensuit que D K + M K $<$ D L + M L. Prop. 21. L. 1.
Et en retranchant ces parties égales M K, M L (*Def.* 15. *L.* 1).
12. La droite D K sera $<$ D L.
On démontrera de la même maniere, que
13. La droite D L est $<$ D G; & ainsi des autres.
14. Partant, les droites D K ou D L, selon qu'elles sont plus proches de la ligne D H, dont le prolongement passe par le centre, sont $<$ D L ou D G, qui en sont plus éloignées.

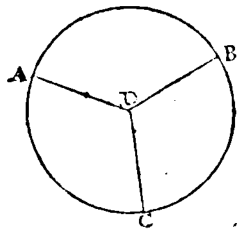
C. Q. F. D. IV.

II. *Préparation.*

1. Faites ensuite ∀ D M B = à ∀ D M K, & prolongez M B jusqu'à la rencontre de la ○. Prop. 23. L. 1.
2. Du point D au point B tirez la droite D B. Dem. 1.

Maintenant, le côté D M étant commun aux deux △ D K M, D B M, le côté M K = au côté M B (*Def.* 15. *L.* 1), & ∀ compris D M K = à ∀ compris D M B (*II Prep.* 1).
15. La base D K sera = à la base D B. Prop. 4. L. 1.
Mais parceque toute autre droite différente de D B, se trouve nécessairement ou plus proche de la ligne D H ou plus éloignée d'elle, que D B.
16. Une telle droite sera aussi $<$ ou $>$ B D (*Arg.* 14).
17. C'est pourquoi on ne peut tirer du point D, de part & d'autre de la droite D H, plus de deux lignes droites D K, D B = entr'elles.

C. Q. F. D. V.



PROPOSITION IX. *THEOREME VIII.*

SI d'un point quelconque (D), pris au dedans d'un cercle (ABC), on peut tirer à sa circonférence plus de deux lignes droites (DA, DB, DC) égales entr'elles, ce point sera le centre du cercle.

HYPOTHESE.	THESE.
Du point D, pris au dedans du ⊙ ABC, on peut tirer à la ○ ABC plus de deux droites DA, DB, DC = entr'elles	*Le point D est le centre du cercle ABC.*

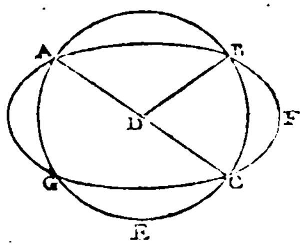
DEMONSTRATION.

SI non.
Quelqu'autre point sera le centre.

PUisque donc le point D n'est pas le centre (*Sup.*), & que de ce point D, on peut tirer à la circonférence plus de deux droites DA, DB, DC = entr'elles (*Hyp*).

1. Il s'ensuivroit, que d'un point D, autre que le centre, on pourroit tirer plus de deux droites = entr'elles; ce qui est impossible. Prop. 7. L. 3.
2. Partant, le point D est le centre du ⊙ ABC.

C. Q. F. D.



PROPOSITION X. *THEOREME IX.*

SI deux cercles (ABCEG, ABFCG) s'entrecoupent: ils ne s'entrecouperont pas en plus de deux points (A & B).

HYPOTHESE.	THESE.
Les deux ⊙ ABCEG, ABFCG s'entrecoupent.	*Il ne sçauroient s'entrecouper en plus de deux points A & B.*

DEMONSTRATION.

SI non.
Ils s'entre-coupent en plus de deux points, comme en A, B, C &c.

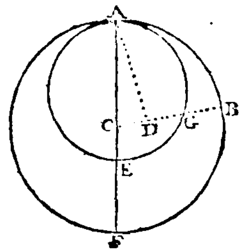
Préparation.

1. TRouvez le centre D du ⊙ ABCEG. Prop. 1. L. 3.
2. Tirez du centre D aux points de section A, B, C, &c les rayons DA, DB, DC. Dem. 1.

PUisque le point D est pris au dedans du ⊙ ABFCG, & que plus de deux droites DA, DB, DC, tirées de ce point à la ○ du ⊙ ABFCG, sont = entr'elles (*Prep.* 1. & *Def.* 15. *L.* 1).

1. Le point D est le centre de ce cercle. Prop. 9. L. 3.
   Mais ce point étant aussi le centre du cercle ABCEG (*Prep.* 1).
2. Il s'ensuivroit que deux cercles ABFCG, ABCEG qui s'entrecoupent ont un centre commun D; ce qui est impossible. Prop. 5. L. 3.
3. Partant, deux ⊙ ABCEG, ABFCG ne sçauroient s'entrecouper en plus de deux points.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XI. *THEOREME X.*

SI deux cercles se touchent intérieurement (en A): la droite qui joint leurs centres, étant prolongée, passera par le point de leur attouchement (A).

HYPOTHESE.	THESE.
La droite C A joint les centres des deux ⊙ A G E, A B F, qui se touchent intérieurement en A.	*Cette droite étant prolongée, passe par le point d'attouchement A de ces deux ⊙*

DEMONSTRATION.

SI non.
Cette droite qui joint les centres, passera quelqu'autre part, comme la droite C G B.

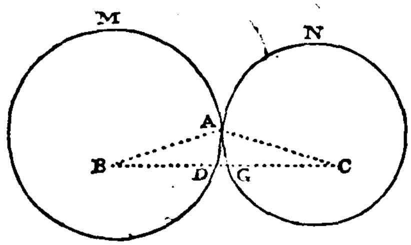
Préparation.

TIrez donc des centres C & D au point d'attouchement les droites C A, D A. Dem. 1.

PUisque dans le $\triangle$ C D A, les deux côtés C D & D A pris ensemble, sont $>$ le troisieme C A *(Prop.* 20. *L.* 1*)*, & que C A est $=$ à C B (*Def.* 15. *L.* 1).

1. Les droites C D $+$ D A seront aussi $>$ C B,
   Si on retranche donc de part & d'autre la partie commune C D;
2. La droite D A sera $>$ D B. Ax. 5. L. 1.
   Mais la droite D A étant $=$ à D G *(Prep.* & *Def.* 15. *L.* 1*)*.
3. D G seroit aussi $>$ D B; ce qui est impossible. Ax. 8. L. 1.
4. C'est pourquoi la droite C A, qui joint les centres des ⊙ A G E, A B F se touchant intérieurement, étant prolongée, passera par le point d'attouchement A.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XII. *THEOREME XI.*

SI deux cercles (DAM, GAN) se touchent extérieurement: la droite (BC), qui joint leurs centres, passera par le point d'attouchement (A).

Hypothese.	These.
La droite BC joint les centres des deux ⊙ DAM, GAN, qui se touchent extérieurement en A.	*La droite BC passe par le point d'attouchement des deux ⊙.*

Demonstration.

SI non.

Cette droite, qui joint les centres, passera autre part, comme BDGC.

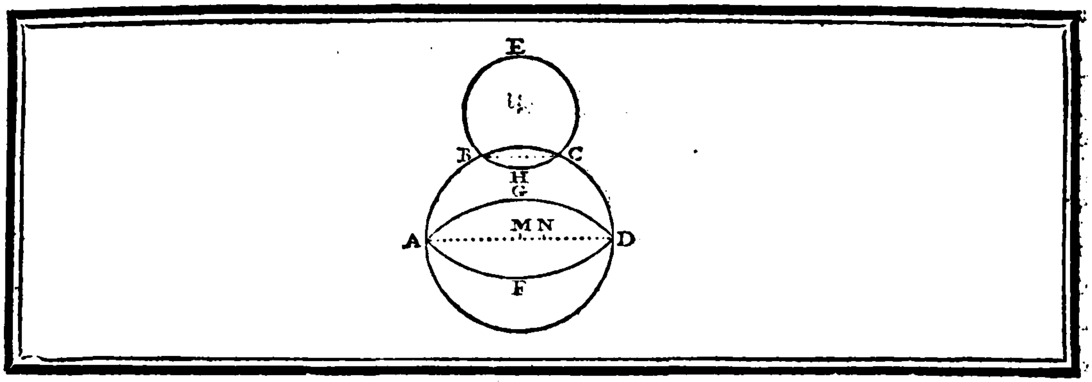
Préparation.

TIrez donc des centres B & C au point d'attouchement A les rayons BA, CA. Dem. 1.

PUisque BA est = à BD & CA = à CG (*Def.* 15. *L.* 1).

1. Les droites BA+CA sont = aux droites BD+CG; Ax. 2. L. 1.
Et si on ajoute aux droites BD+CG la partie DG;
2. BD+DG+CG, ou la base BC du △ BAC est > les deux côtés BA +CA; ce qui est impossible. Prop. 20. L. 1.
3. La droite BC, qui joint les centres, passera donc par le point d'attouchement A.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XIII. THEOREME XII.

DEux cercles (ABCD, AGDF ou ABCD, BECH), qui se touchent; soit intérieurement; soit extérieurement: ne se touchent pas en plus d'un point.

HYPOTHESE	THESE.
I. Les deux ⊙ ABCD, AGDF se touchent intérieurement, *II. Et les deux ⊙ ABCD, BECH se touchent extérieurement.*	*Les ⊙ ABCD, AGDF ou ABCD,* *BECH ne se touchent pas en plus d'un point.*

DEMONSTRATION.

SI non.

I. Les ⊙ ABCD, AGDF se touchent intérieurement en plus d'un point, comme en A & en D.

II. Ou bien les ⊙ ABCD, BECH se touchent extérieurement en plus d'un point, comme en B & en C.

I. *Préparation.*

1. TRouvez les centres M & N des ⊙ ABCD, AGDF. Prop. 1. L. 3.
2. Tirez par les centres la droite MN & prolongez la de part & d'autre, jusqu'à la rencontre de la ○. Dem. 1. & 2.

PUisque la droite MN joint les centres M & N des deux ⊙ ABCD, AGDF, (*Prep.* 2), qui se touchent intérieurement (*Sup.* 1).

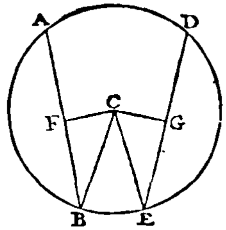
1. Cette droite passera par les points d'attouchement A & D. Prop. 11. L. 3.
Or AM est = à MD (I. *Prep.* 2. & *Def.* 15. *L.* 1).
2. La droite AM est donc > ND & à plus forte raison AN > ND. Ax. 8. L. 1.
Mais par la raison que AN est = à ND (I. *Prep.* 2. & *Def.* 15. *L.* 1).
3. La droite AN seroit à la fois > ND & = à ND; ce qui est impossible.
4. Partant, deux ⊙ ABCD, AGDF, qui se touchent intérieurement, ne sauroient se toucher en plus d'un point. C. Q. F. D.

II. *Préparation.*

TIrez par les points d'attouchement B & C des ⊙ ABCD, BECH, la droite BC. Dem. 1.

PUisque la droite BC joint deux points B & C, pris dans les ○ des cercles ABCD, BECH (II *Prep.*).

1. Cette droite tombera au dedans des deux ⊙ ABCD, BECH. Prop. 2. L. 3.
Mais le ⊙ BECH touchant extérieurement le ⊙ ABCD (*Sup.* 2).
2. La droite BC, tirée dans le ⊙ BECH, tombera hors du ⊙ ABCD. Def. 3. L. 3.
3. D'où il suit, que la droite BC tomberoit à la fois dans le ⊙ ABCD (*Arg.* 1) & hors du même ⊙ (*Arg.* 2); ce qui est impossible.
4. C'est pourquoi deux ⊙ ABCD, BCEH, qui se touchent extérieurement, ne se touchent pas en plus d'un point. C. Q. F. D.



PROPOSITION XIV. *THEOREME XIII.*

DAns un cercle (ABED) les cordes égales (AB, DE) font également éloignées du centre (C) : & les cordes (AB, DE) également éloignées du centre (C): font égales.

CAS I.

Hypothese.	Préparation.	These.
Les cordes AB, DE font égales.		*Ces cordes font également éloignées du centre C.*

1. TRouvez le centre C du ⊙ ABED. Prop. 1. L. 3.
2. Abaissez fur les cordes AB, DE les ⊥ CF, CG. Prop. 12. L. 1.
3. Tirez du centre C aux points E & B les rayons CE, CB. Dem. 1.

Demonstration.

LEs cordes AB, DE étant = entr'elles (*Hyp.*), & partagées en deux également en F & G (*Prep.* 2, & *Prop.* 3. *L.* 3).

1. Leurs moitiés FB, GE le font auffi, Ax. 7. L. 1.
2. Partant, le □ de FB eft = au □ GE. Prop. 46. L. 1. Coroll. 3.
   Mais à caufe que le □ de CB eft = au □ de CE (*Prep.* 3. & *Prop.* 46. *Coroll.* 3).
3. Il s'enfuit, que le □ de FB + le □ de FC eft = au □ de GE + au □ de CG. Prop. 47. L. 1. Ax. 1. L. 1.
   Retranchant donc de part & d'autre les □ égaux de FB & de GE (*Arg.* 2);
4. Le □ reftant de FC fera = au □ de GC (*Ax.* 3. *L.* 1); ou FC = GC. Prop. 46. L. 1. Coroll. 3.
5. Partant, les cordes AB, DE font également éloignées du centre C du ⊙ ABED. Def. 4. L. 3.

C. Q. F. D.

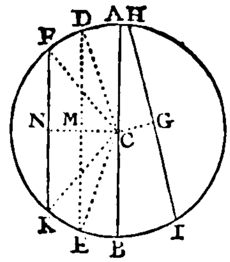
CAS II.

Hypothese.	These.
Les cordes AB, DE, font également éloignées du centre C du ⊙ ABED.	*Ces cordes font égales.*

PUifque FC eft = à GC (*Hyp.* & *Def.* 4. *L.* 3), & CB = CE (*Prep.* 3 & *Def.* 15. *L.* 1).

1. Le □ de FC fera = au □ de CG & le □ de CB = au □ de CE. Prop. 46. L. 1. Coroll. 3.
2. Partant, le □ de FC + le □ de FB eft auffi = au □ de CG + au □ de GE. Prop. 47. L. 1. Ax. 1. L. 1.
   En retranchant donc de part & d'autre les □ égaux de FC & de CG (*Arg.* 1);
3. Le □ reftant de FB fera = au □ de GE (*Ax.* 3. *L.* 1); ou FB = GE. Prop. 46. L. 1. Coroll. 3.
4. Partant, FB, GE étant les demicordes (*Prep.* 2. *Prop.* 3. *L.* 3), les cordes entieres AB, DE font auffi égales entr'elles. Ax. 6. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XV. THEOREME XIV.

LE diametre (AB) d'un cercle (AIK) eſt plus grand que chacune de ſes cordes (HI, FK); & une corde (HI) plus proche du diametre eſt plus grande que toute autre (FK), qui en eſt plus éloignée.

HYPOTHESE.	THESE.
I. AB eſt le diametre du ⊙ AIK.	*I. Le diametre AB eſt > chacune des cordes HI, FK.*
II. Et la corde HI, eſt plus proche du diametre que la corde FK.	*II. La corde HI eſt > la corde FK.*

Préparation.

1. DU centre C abaiſſez ſur HI & FK les ⊥ CG, CN.	Prop. 12. L. 1.
2. De CN, la plus grande de ces ⊥, retranchez une partie CM = à CG.	Prop. 3. L. 1.
3. Elevez au point M ſur CN une ⊥ DM, & prolongez la en E.	Prop. 11. L. 1.
4. Tirez les rayons CD, CF, CE, CK.	Dem. 1.

DEMONSTRATION.

PUiſque les droites CD, CE, CA, CB ſont = entr'elles (*Prep.* 4 & *Def.* 15. *L.* 1).

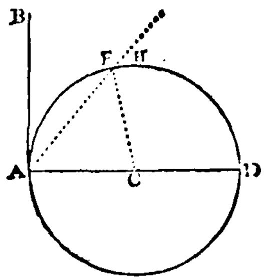
1. Il ſuit, que CD + CE eſt = à CA + CB ou AB.	Ax. 2. L. 1.
Mais CD + CE eſt > DE (*Prop.* 20. *L.* 1).	
2. C'eſt pourquoi AB eſt auſſi > DE, ou > HI; à cauſe que HI = DE (*Prep.* 2).	Def. 4. L. 3. Prop. 14. L. 3.
3 On prouvera par un raiſonnement ſemblable, que AB eſt auſſi > FK.	

C. Q. F. D. I.

De plus, les △ CDE, CFK ayant deux côtés CD, CE = à deux côtés CF, CK chacun à chacun (*Prep.* 4. & *Def.* 15. *L.* 1), & ∀ compris DCE > ∀ compris FCK (*Ax.* 8. *L.* 1).

4. La baſe DE ſera > la baſe FK.	Prop. 24. L. 1.
5. Et parceque HI eſt = à DE (*Prep.* 2.), HI eſt auſſi > FK.	Def. 4. L. 3. Prop. 14. L. 3.

C. Q. F. D. II.



PROPOSITION XVI. *THEOREME XV.*

Toute droite (AB) perpendiculaire au diametre d'un cercle (AHD), à son extrêmité (A), tombe hors de ce cercle; & on ne peut tirer aucune ligne droite entre cette perpendiculaire (AB) & la circonférence; de plus l'angle mixtiligne (HAD), formé par une partie de la circonférence (HEA) & le diametre (AD): est plus grand que tout angle rectiligne aigû quelconque; & l'angle (HAB) formé par la perpendiculaire (AB), & la même partie de la circonférence (HEA): est plus petit que tout autre angle rectiligne aigû quelconque.

HYPOTHESE.

I. AB est tirée perpendiculairement à l'extrêmité A du diametre,

II. Et forme avec l'arc HEA un ∀ mixtiligne HAB,

III. Le diametre AD forme avec le même arc HEA un ∀ mixtiligne HAD.

THESE.

I. La ⊥ AB tombe hors du ⊙ AHD.

II. On ne peut tirer aucune droite entre la ⊥ AB & l'arc HEA.

III. L'angle mixtiligne HAD est > tout ∀ rectiligne aigû.

IV. L'angle mixtiligne HAB est < tout ∀ rectiligne aigû.

DEMONSTRATION.

I. SI non.

La ⊥ AB tombera au dedans du ⊙ AHD & le coupera quelque part en E, comme AE.

Préparation.

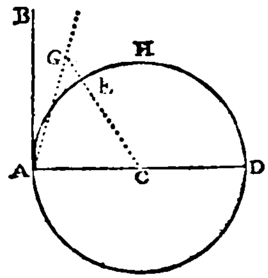
Du centre C au point de section E tirez le rayon CE. Dem. 1.

Puisque CA est = à CE (*Def.* 15. *L.* 1).

1. L'angle CAE sera = à ∀ CEA. Prop. 5. L. 1.
2. Et à cause que ∀ CAE est un ∟ (*Sup.*); ∀ CEA est aussi un ∟. Ax. 1. L. 1.
3. C'est pourquoi, les deux ∀ CAE + CEA, du △ AEC, ne feront pas < 2 ∟; ce qui est impossible. Prop. 17. L. 1.
4. La ⊥ AB tombe donc hors du cercle.

C. Q. F. D.

 II Si non.



II. SI non.

On pourra tirer une droite, comme A G, entre la ⊥ AB & la circonference du ⊙ AHD.

Préparation.

Du centre C, abaissez sur A G la ⊥ CG. Prop. 12. L. 1.

PUisque ∀ CGA est un ∟; & ∀ CAG < un ∟ (*Ax.* 8. *L.* 1); comme n'étant que la partie d'un ∟ CAB (*Hyp.* 1).

1. Il suit que le côté CA est > le côté CG. Prop. 19. L. 1.
Mais CA étant = à CE (*Def.* 15. *L.* 1).
2. La droite CE seroit aussi > CG; ce qui est impossible. Ax. 8. L. 1.
3. On ne peut donc tirer aucune droite entre la ⊥ AB & la ○ du ⊙ AHD.

C. Q. F. D. II.

III. & IV. SI non.

On peut tirer une droite, comme AG, qui forme de part & d'autre avec le diametre A D & avec la ⊥ AB, un ∀ rectiligne aigû GAD > ∀ mixtiligne HAD, & un ∀ rectiligne GAB < ∀ mixtiligne EAB.

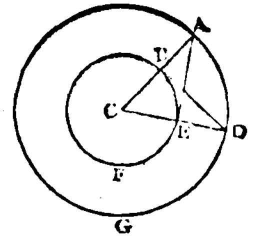
PUis donc que la droite A G, tirée à l'extrêmité A du diamétre AD, forme avec le diametre & avec la ⊥ AB un ∀ rectiligne aigû GAD > ∀ mixtiligne HAD, & un ∀ rectiligne GAB < ∀ mixtiligne EAB (*Sup.*).

1. Cette droite AG tombera nécessairement sur l'extrêmité A du diametre AD, entre la ⊥ AB & la circonference du ⊙ AHD; ce qui est impossible. Dem. précéd.
2. L'angle mixtiligne HAD est donc >, & ∀ mixtiligne HAB < tout ∀ rectiligne aigû.

C. Q. F. D. III. & IV.

COROLLAIRE.

TOute droite, tirée perpendiculairement, à l'extrêmité d'un diametre, touche le cercle en un seul point.



PROPOSITION XVII. *PROBLEME II.*

TIrer d'un point donné (A) hors d'un cercle (BEF) ; une tangente (AE) à ce cercle.

DONNE.	CHERCHEE.
Le point A hors du ⊙ BEF.	*La tangente AE tirée du point A au ⊙ BEF.*

Résolution.

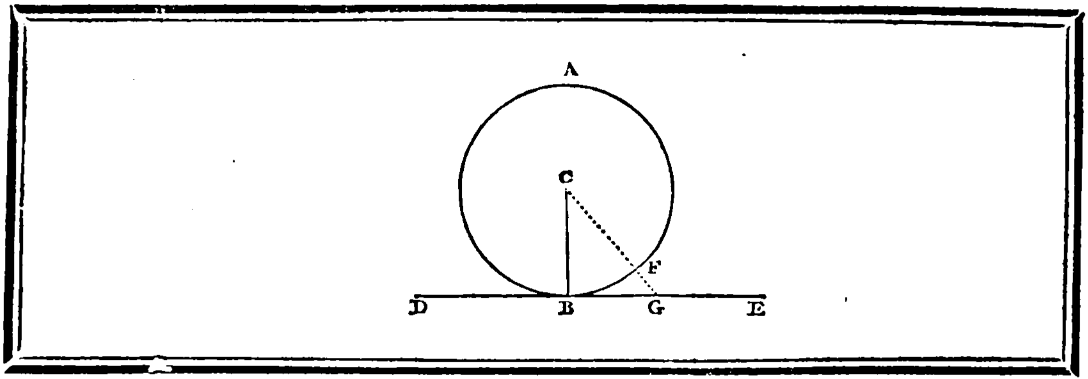
1. CHerchez le centre C du ⊙ BEF, & tirez CA. Prop. 1. L. 3.
2. Du centre C & du rayon CA décrivez de ⊙ ADG. Dem. 3.
3. Du point B, ou le rayon CA coupe la ○ BEF, élevez sur CA la ⊥ BD. Prop. 11. L. 1.
4. Du centre C, au point D, où la ⊥ BD coupe la ○ ADG, tirez le rayon CD. Dem. 1.
5. Du point A au point E, où CD coupe la ○ BEF tirez la droite AE, qui sera la tangente cherchée.

DEMONSTRATION.

PUisque dans les △ CBD, CEA le côté CB est = au côté CE, le côté CA = au côté CD (*Def.* 15. *L.* 1) & ∀ compris BCD commun aux deux △.

1. Les ∀ CBD, CEA, opposés aux côtés égaux CD, CA, sont = entr'eux. Prop. 4. L. 1.
2. C'est pourquoi ∀ CBD étant un ∟ (*Ref.* 3), ∀ CEA sera droit aussi. Ax. 1. L. 1.
3. Partant, la droite AE, tirée du point donné A, est tangente du ⊙ BEF. {Prop. 16. L. 3. / Cor. Def. 1. L. 3}

C. Q. F. F.



PROPOSITION XVIII. *THEOREME XVI.*

SI une droite (DE) touche un cercle (AFB) en un point (B): le rayon (CB) tiré du centre au point d'attouchement (B), eſt perpendiculaire ſur la tangente (DE).

HYPOTHESE.	THESE.
I. La droite DE touche le ⊙ AFB au point B,	*Le rayon CB eſt $\perp$ ſur la tangente DE.*
II. Et le rayon CB paſſe par le point d'attouchement B.	

DEMONSTRATION.

SI non.
On pourra abaiſſer du centre C une autre droite CG $\perp$ ſur la tangente. DE.

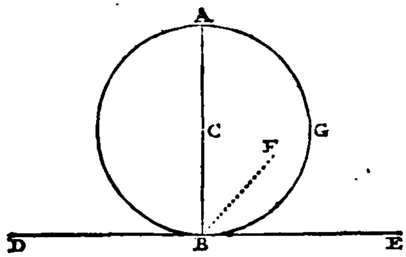
Préparation.

ABaiſſez donc du centre C ſur la tangente DE la $\perp$ CG. — Prop. 12. L. 1.

PUiſque l'angle BGC du $\triangle$ BCG eſt un ∟ *(Prep.)*.

1. L'angle CBG ſera $<$ un ∟. — Prop. 17. L. 1.
2. Partant, CB eſt $>$ CG, — Prop. 19. L. 1.
   Et CF étant $=$ CB *(Def.* 15. *L.* 1).
3. La droite CF eſt auſſi $>$ CG; ce qui eſt impoſſible. — Ax. 8. L. 1.
4. C'eſt pourquoi le rayon CB eſt $\perp$ ſur la tangente DE.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XIX. *THEOREME XVII.*

SI une ligne droite (DE) touche un cercle (AGB en B): la perpendiculaire (BA) élevée du point d'attouchement (B) sur cette tangente, passera par le centre (C) du cercle.

HYPOTHESE.	THESE.
I. La droite DE est tangente du ⊙ AGB, *II. Et BA est la ⊥ élevée du point d'attouchement B sur cette tangente.*	*La droite BA passe par le centre C du ⊙ AGB.*

DEMONSTRATION.

SI non.
Le centre se trouvera dans un point F hors de la droite BA.

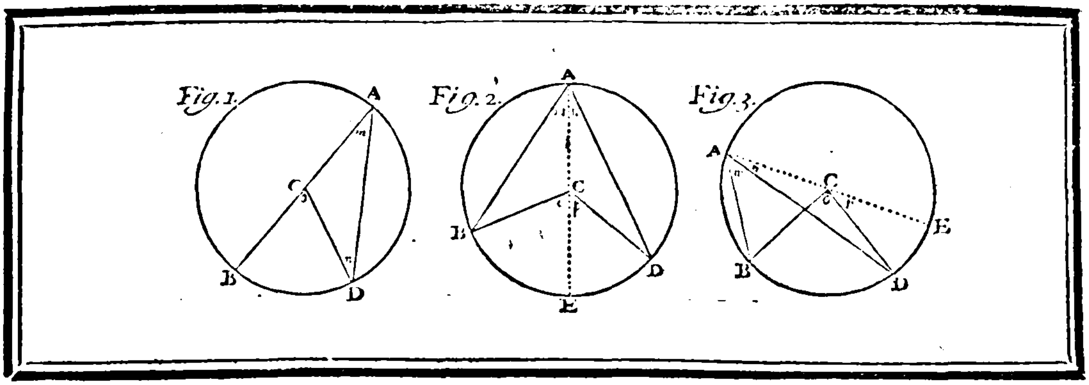
Préparation.

TIrez donc du point d'attouchement B au centre F la droite BF. Dem. 1.

PUisque la droite BF est tirée du point d'attouchement B au centre F du ⊙ AGB (*Prep.*).

1. L'angle FBE est un ∟. Prop. 18. L. 3.
Mais ∀ ABE étant aussi un ∟ (*Hyp.* 2.).
2. L'angle ABE est = à ∀ FBE; ce qui est impossible. Ax. 10. L. 1.
3. C'est pourquoi le centre C sera nécessairement dans la droite BA. Ax. 8. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XX. *THEOREME XVIII.*

DAns le cercle: l'angle au centre (BCD) est double de l'angle à la circonférence (BAD), quand ces angles s'appuyent sur le même arc (BD).

Hypothese.	These.
I. L'angle BCD est au centre, & ∀ BAD à la ○. *II. Les jambes BC, CD & BA, AD de ces ∀ s'appuyent sur le même arc BD.*	*L'angle au centre BCD est double de ∀ à la ○ BAD.*

Demonstration.

CAS I.

SI le centre C, tombe sur une des jambes AB de ∀ à la ○. (*Fig.* 1).

PUisque dans le △ CAD le côté CA est = au côté CD (*Def.* 15. *L.* 1).
1. L'angle *m* est = à ∀ *n* & ∀ *m* + *n* double ∀ *m*. {Prop. 5. L. 1. Ax. 2. L. 1.}
Mais ∀ *o* est = à ∀ *m* + *n* (*Prop.* 32. *L.* 1).
2. Donc ∀ *o* est double de ∀ *m* ou ∀ BCD double de ∀ BAD. Ax. 6. L. 1.

C. Q. F. D.

CAS II.

SI le centre C tombe au dedans de ∀ à la ○ (*Fig.* 2).

Préparation.

TIrez le diametre ACE. Dem. 1.

On prouvera, comme dans le premier Cas.
1. Que le ∀ *o* est double de ∀ *m* & ∀ *p* double ∀ *n*.
2. D'où il suit que ∀ *o* + *p* est double de ∀ *m* + *n*, ou ∀ BCD double de ∀ BAD. Ax. 8. L. 1.

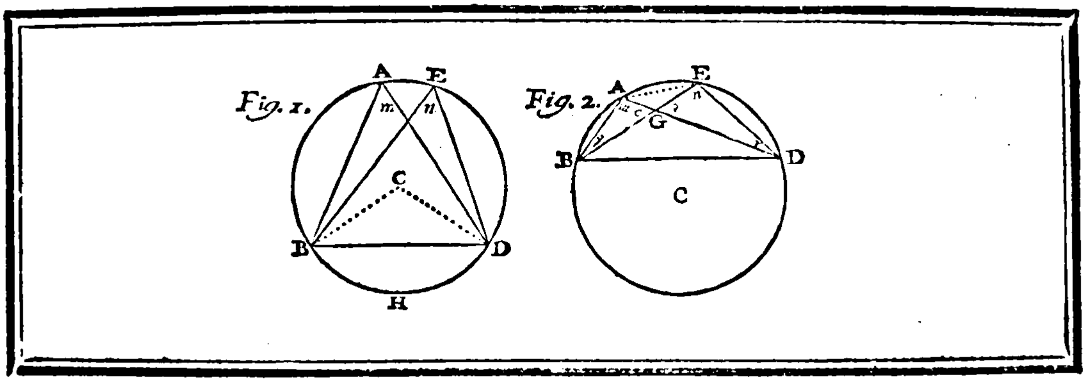
C. Q. F. D.

CAS III.

SI le centre C tombe au dehors de ∀ à la ○ (*Fig.* 3).

En tirant le diametre ACE; on démontrera encore par un raisonnement semblable à celui du premier Cas, que
1. L'angle *p* est double de ∀ *n*, & ∀ *o* + *p* double de ∀ *m* + *n*;
En retranchant donc d'une part ∀ *p*, & de l'autre ∀ *n*,
2. L'angle restant *o* sera double de ∀ *m* ou ∀ BCD double de ∀ BAD. Ax. 3. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXI. *THEOREME XIX.*

DAns le cercle, les angles (*m* & *n*), placés dans un même segment de cercle (B A E D), sont égaux entr'eux.

HYPOTHESE.	THESE.
Les ∀ *m & n sont dans le même segment de* ⊙ *B A E D.*	∀ *m est* = *à* ∀ *n.*

DEMONSTRATION.

CAS I.

SI le segment BAED est $>$ le demi ⊙ (*Fig.* 1).

Préparation.

1. CHerchez le centre C du ⊙ BAED. Prop. 1. L. 3.
2. Et tirez les rayons CB, CD. Dem. 1.

PUisque ∀ BCD est double de chacun des ∀ *m* & *n* (*Prop.* 20. *L.* 3).
1. Il s'ensuit que ∀ *m* est = à ∀ *n*. Ax. 7. L. 1.

CAS II.

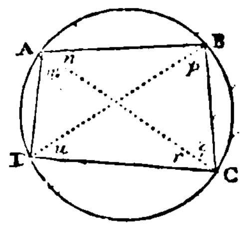
SI le segment BAED est $<$ le demi ○ (*Fig.* 2).

Préparation.

TIrez la droite AE. Dem. 1.

1. LEs trois ∀ *m* + *o* + *q* du △ BAG sont égaux aux trois ∀ *p* + *m* + *r* du △ GED. {Prop. 32. L. 1. & Ax. 1. L. 1.}
Mais ∀ *q* est = à ∀ *r* (*Cas* 1), & ∀ *o* = à ∀ *p* (*Prop.* 15. *L.* 1), en retranchant donc d'une part les ∀ *q* + *o* & de l'autre leurs égaux les ∀ *p* + *r*,
2. Les ∀ restans *m* & *n* seront = entr'eux. Ax. 3. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXII. *THEOREME XX.*

LEs figures quadrilatères (DABC) inſcrites dans un cercle: ont les angles oppoſés (BAD, BCD ou ABC, ADC) égaux à deux droits.

HYPOTHESE.	THESE.
La figure DABC eſt un quadrilatère inſcrit dans un ⊙.	*Les* ∀ *oppoſés BAD + BCD, ou ABC + ADC ſont* = *à 2* ∟.

Préparation.

TIrez les diagonales AC, BD. Dem. 1.

DEMONSTRATION.

PUiſque les ∀ *u* & *n* ſont des ∀ à la ○, placés dans le même ſegment DABC.

1. Ces ∀ *u* & *n* ſont = entr'eux. Prop. 21. L. 3.

On prouvera de même, que

2. Les ∀ *p* & *m* ſont = entr'eux.

3. C'eſt pourquoi, les ∀ *u* + *p* ſont = aux ∀ *n* + *m* ou à ∀ BAD. Ax. 2. L. 1.

Si on ajoute donc de part & d'autre ∀ *r* + *q*, ou BCD;

4. Les ∀ *u* + *p* + (*r* + *q*) ſont = aux ∀ BAD + BCD. Ax. 2. L. 1.

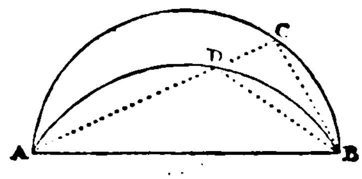
Mais les trois ∀ *u* + *p* + (*r* + *q*) du △ DBC étant = à 2 ∟ (*Prop.* 32. *L.* 1).

5. Les deux ∀ oppoſés BAD + BCD du quadrilatère DABC ſont auſſi = à 2 ∟. Ax. 1. L. 1.

On démontrera par un raiſonnement ſemblable, que

6. Les ∀ ABC + ADC ſont = à 2 ∟.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXIII. *THEOREME XXI.*

SUr une même ligne droite (AB) & du même côté: on ne ſçauroit placer deux ſegmens de cercles (ADB, ACB) ſemblables & inégaux.

Hypothese

Les ſegmens ſemblables ADB, ACB ſont placés ſur une même ligne droite & du même côté.

These.

Ces ſegmens ne ſçauroient être ſemblables & inégaux.

Demonstration.

SI non.

Les ſegmens ADB, ACB placés ſur la même corde AB & du même côté ſeront ſemblables & inégaux.

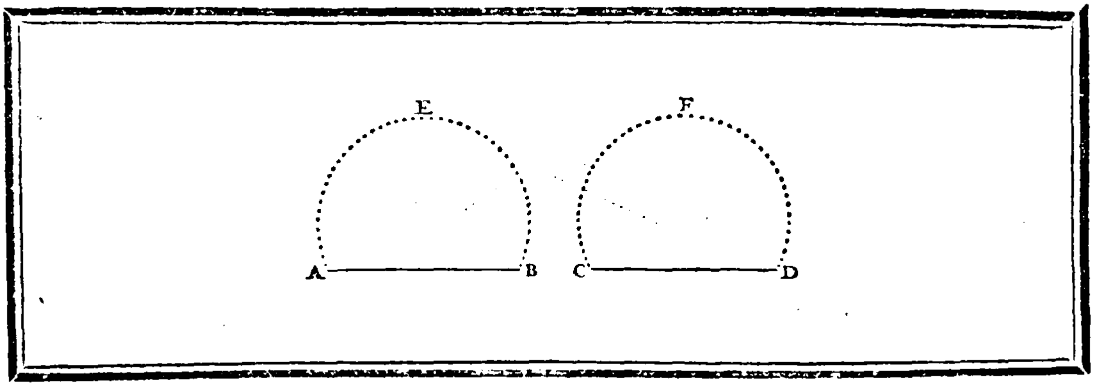
Préparation.

1. TIrez une droite quelconque AC, qui coupe les ſegmens ADB, ACB aux points D & C.
2. Tirez les droites BD, BC. } Dem. 1.

PUiſque les ∀ BDA, BCA ſont placés dans des ſegmens ſemblables ADB, ACB (*Hyp.* & *Prep.* 1 & 2).

1. Ces ∀ ſont donc = entr'eux. Ax. 2. L. 3.
2. L'angle extérieur ADB du △ BDC ſeroit donc = à ſon intérieur oppoſé BCD; ce qui eſt impoſſible. Prop. 16. L. 1.
3. Partant, on ne ſçauroit placer ſur une même ligne droite AB & du même côté deux ſegmens de ⊙ ADB, ACB ſemblables & inégaux.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXIV. *THEOREME XXII.*

LEs ſegmens de cercles ſemblables (AEB, CFD) ſouſtendus par des cordes égales (AB, CD) ſont égaux entr'eux.

HYPOTHESE.	THESE.
I. Les ſegmens de ⊙ AEB, CFD ſont ſemblables, *II. Et ces ſegmens ſont ſouſtendus par des cordes égales AB, CD.*	*Les ſegmens AEB, CFD ſont = entr'eux.*

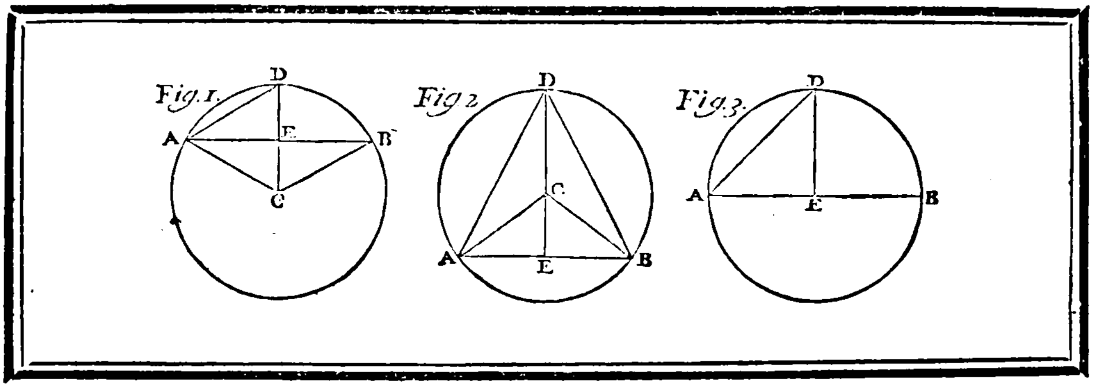
DEMONSTRATION.

SI non.
Le ſegment AEB ne ſera point = au ſegment CFD.

PUis donc que le ſegment AEB n'eſt point = au ſegment CFD (*Sup*), & que la corde AB eſt = à la corde CD. (*Hyp.* 2),

1. On pourra placer ſur une corde AB, ou ſur ſon égale CD, deux ſegmens de ⊙ ſemblables & inégaux AEB, CFD; ce qui eſt impoſſible. Prop. 23. L 1.
2. Ces ſegmens ſont donc = entr'eux.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXV. PROBLEME III.

UN ſegment de cercle (ADB) étant donné; décrire le cercle dont il eſt un ſegment.

DONNEE	CHERCHEE.
Le ſegment de ⊙ ADB.	*Le centre C du ⊙, dont ADB eſt un ſegment.*

Réſolution.

1. PArtagez la corde AB en deux également au point E. — Prop. 10. L. 1.
2. Du point E ſur AB élevez la ⊥ ED. — Prop. 11. L. 1.
3. Tirez la droite AD. — Dem. 1.
   Et ∀ ADE ſera >, ou <, ou = ∀ DAE.

CAS I & II.

Si ∀ ADE eſt ou >, ou < ∀ DAE. (*Fig.* 1. & 2).

4. FAites ſur DA au point A, ∀ DAC = à ∀ ADE. — Prop. 23. L. 1.
5. Prolongez DE en C (*Fig.* 1), & tirez BC (*Fig.* 1. & 2). — Dem. 2. & 1.

DEMONSTRATION.

PUiſque dans le △ ADC, l'angle DAC eſt = à ∀ ADC (*Ref.* 4).

1. Le côté AC eſt = au côté DC. — Prop. 5. L. 1.
   Mais dans les △ AEC, BEC, le côté AE eſt = au côté EB, le côté EC commun aux deux △ & ∀ compris AEC = à ∀ compris BEC (*Ref.* 2 & *Ax.* 10. *L.* 1).
2. La baſe AC ſera = à la baſe BC. — Prop. 4. L. 1.
3. Partant, les trois droites AC, DC, BC, tirées d'un point C, à la ○ ADB, ſont = entr'elles. — Ax. 1. L. 1.
4. C'eſt pourquoi le point C eſt le centre du ⊙, dont ADB eſt un ſegment. — Prop. 9. L. 3.

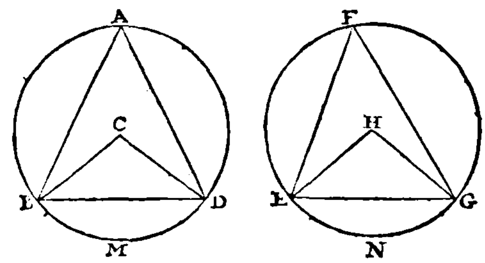
C. Q. F. F.

CAS III.

Si ∀ ADE eſt = à ∀ DAE. (*Fig.* 3).

1. LE côté AE eſt donc = au côté ED. — Prop. 5. L. 1.
2. Partant, AE étant = EB (*Ref.* 1), les trois droites AE, ED, EB tirées d'un point E à la ○ ADB ſont = entr'elles. — Ax. 1. L. 1.
3. D'où il ſuit que le point E eſt le centre du ⊙ dont ADB eſt un ſegment. — Prop. 9. L. 3.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XXVI. *THEOREME XXIII.*

DAns les cercles égaux (BADM, EFGN): les angles égaux; tant ceux au centre (C & H), que ceux à la circonférence (A & F), s'appuyent sur des arcs égaux (BMD, ENG).

HYPOTHESE.

I. Les ∀ A, F sont des ∀ à la ○, = entr'eux.
II. Les ∀ C & H sont des ∀ au centre = entr'eux.
III. Ces ∀ sont placés dans des ⊙ égaux BADM, EFGN.

THESE.

Les arcs BMD, ENG sur lesquels ces ∀ s'appuyent sont = entr'eux.

Préparation.

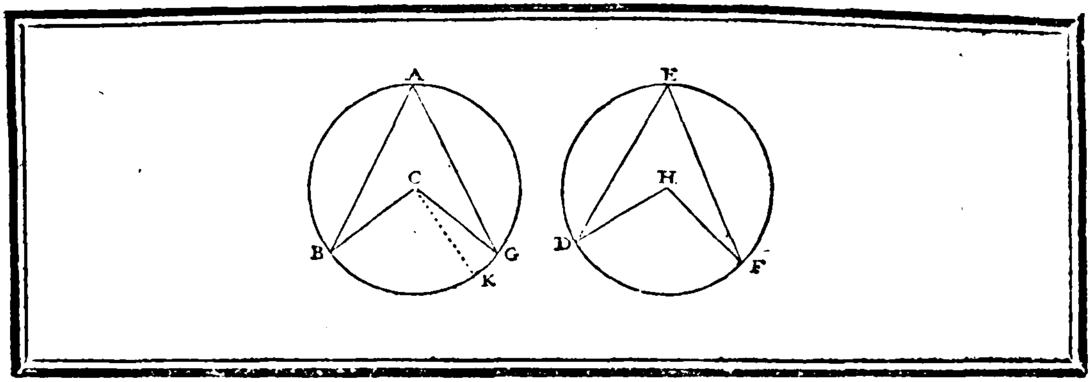
TIrez les cordes BD, EG.

DEMONSTRATION.

LEs deux côtés CB, CD du △ BCD étant = aux deux côtés HE, HG du △ EHG (*Hyp.* 3 & *Ax.* 1. *L.* 3), & ∀ compris C = à ∀ compris H (*Hyp.* 2).

1. La base BD sera = à la base EG. — Prop. 4. L. 1.
Et puisque ∀ A est = à ∀ F (*Hyp.* 1).
2. Le segment BAD est semblable au segment EFG. — Ax. 2. L. 3.
3. C'est pourquoi la base BD étant = à la base EG (*Arg.* 1) ces segmens seront = entr'eux. — Prop. 24. L. 3.
Si on retranche donc des ⊙ égaux BADM, EFGN (*Hyp.* 3) les segmens egaux BAD, EFG (*Arg.* 3),
4. Les arcs restans BMD, ENG seront aussi = entr'eux. — Ax. 3. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXVII. *THEOREME XXIV.*

DAns les cercles égaux (BAG, DEF), les angles, tant ceux au centre (BCG, & H), que ceux à la circonférence (A & E), qui s'appuyent sur des arcs égaux (BG, DF): sont égaux entr'eux.

Hypothese.

I. Les ⊙ BAG, DEF sont =, de même que leurs arcs BG, DF.
II. Les ∀ au centre BCG & H, de même que ceux à la ○ A & E, s'appuyent sur des arcs égaux.

These.

I. Les ∀ au centre BCG & H sont = entr'eux.
II. Et les ∀ à la ○ A & E sont aussi = entr'eux.

Demonstration.

SI non.
Les ∀ au centre BCG & H; seront inégaux, & l'un comme BCG sera $>$ l'autre H.

Préparation.

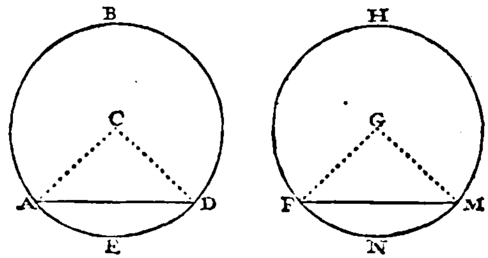
FAites sur BC au point C, l'angle BCK = à ∀ H. Prop. 23. L. 1.

1. L'arc BK est donc = à l'arc DF. Prop. 26. L. 3.
Mais l'arc DF étant = à l'arc BG. (*Hyp.* 2).
2. L'arc BK seroit aussi = à l'arc BG; ce qui est impossible; Ax. 1. L. 1. Ax. 8. L. 1.
3. Partant, les ∀ au centre BCG & H sont = entr'eux.

C. Q. F. D. I.

Et ces ∀ étant doubles des ∀ à la ○ A & E (*Prop.* 20. *L.* 3).
4. Les ∀ à la ○ A & E sont aussi = entr'eux. Ax. 7. L. 1.

C. Q. F. D. II.



PROPOSITION XXVIII. *THEOREME XXV.*

DAns les cercles égaux (ABDE, FHMN): les cordes égales (AD, FM) soutendent des arcs égaux (ABD, FHM ou AED, FNM).

HYPOTHESE.

I. Les ⊙ ABDE, FHMN sont égaux.
II. Et les cordes AD, FM sont égales.

THESE.

Les cordes AD, FM soustendent des arcs égaux ABD, FHM ou AED, FNM.

Préparation.

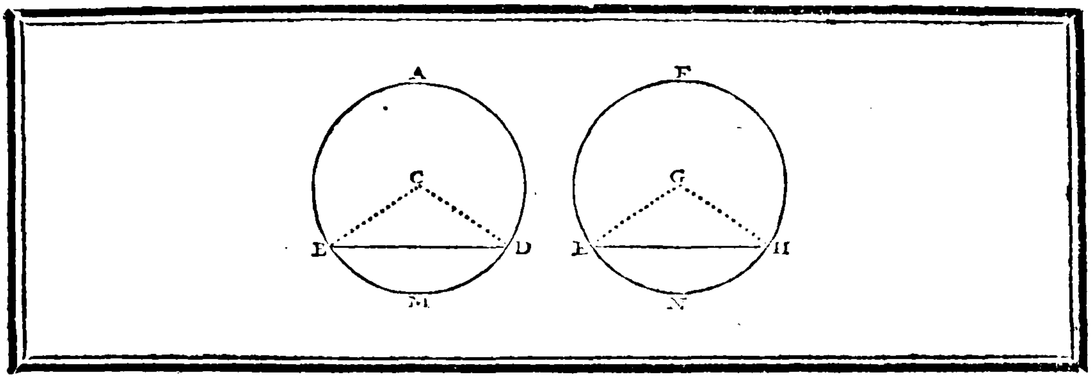
1. CHerchez les centres C & G des deux ⊙ ABDE, FHMN. Prop. 1. L. 3.
2. Tirez les rayons CA, CD item GF, GM. Dem. 1.

DEMONSTRATION.

PUisque les ⊙ ABDE, FHMN sont égaux (*Hyp.* 1).

1. Les côtés CA, CD, & GF, GM des △ ACD, FGM sont = aussi. Ax. 1. L. 3.
   Et les cordes AD, FM étant outre cela egales (*Hyp.* 2).
2. Les ∀ ACD, FGM sont = entr'eux. Prop. 8. L. 1.
3. Partant, les arcs AED, FNM soustendus par les cordes AD, FM seront aussi = entr'eux. Prop. 26. L. 3.
4. Et les ○ entieres étant de plus égales (*Hyp.* 1), les arcs ABD, FHM sont aussi égaux. Ax. 3. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXIX. *THEOREME XXVI.*

DAns les cercles égaux (BADM, EFHN): les arcs égaux (BMD, ENH) font foustendus par des cordes égales (BD, EH).

HYPOTHESE.

I. Les ⊙ BADM, EFHN font égaux.
II. Les arcs BMD, ENH font égaux auſſi.

THESE.

Les cordes BD, EH, qui ſoustendent ces arcs ſont = entr'elles.

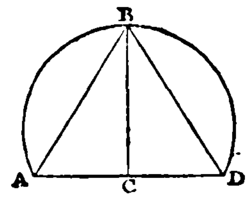
Préparation.

1. CHerchez les centres C & G des deux ⊙ BADM, EFHN. Prop. 1. L. 3.
2. Tirez les rayons CB, CD, GE, GH. Dem. 1.

DEMONSTRATION.

PUiſque les ⊙ BADM, EFHN ſont égaux (*Hyp.* 1).
1. Les côtes CB, CD, & GE, GH des △ BCD, EGH ſont = entr'eux. Ax. 1. L. 3.
Mais les arcs BMD, ENH étant auſſi égaux (*Hyp.* 2).
2. Les ∀ C & G, compris par ces côtes égaux, ſeront = entr'eux. Prop. 27. L. 3.
3. Partant, la corde BD eſt = à la corde EH. Prop. 4. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXX. PROBLÊME IV.

COuper un arc (ABD) en deux parties égales (AB, BD).

DONNE.	CHERCHEE.
L'arc ABD.	*La division de l'arc ABD en deux parties égales AB, BD.*

Résolution.

1. DU point A au point D tirez la corde AD. — Dem. 1.
2. Coupez cette corde en deux également au point C. — Prop. 10. L. 1.
3. Du point C élevez sur AD la ⊥ CB; qui, prolongée suffisamment, coupera l'arc ABD en deux également au point B. — Prop. 11. L. 1.

Préparation.

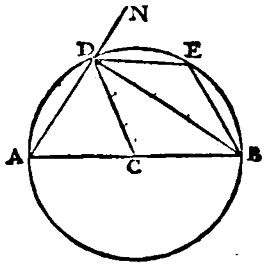
TIrez les cordes AB, DB. — Dem. 1.

DEMONSTRATION.

PUisque le côté AC est = au côté CD (*Ref.* 2.), CB commun aux deux △ ABC, DBC, & ∀ compris ACB = à ∀ compris DCB (*Ax.* 10. *L.* 1. & *Ref.* 3).

1. La base AB est = à la base DB. — Prop. 4. L. 1.
2. Partant, les arcs AB & DB soutendus par les cordes égales AB, DB sont aussi = entr'eux, & l'arc entier ABD est coupé en deux également en B. — Prop. 28. L. 3.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XXXI. *THEOREME XXVII.*

L'angle (ADB), placé dans le demi cercle (ADEB), eſt un droit; mais l'angle (DAB), qui eſt placé dans un ſegment (DAB) plus grand que le demi cercle, eſt plus petit qu'un droit; & celui (DEB), qui eſt placé dans un ſegment (DEB) plus petit que le demi cercle, eſt plus grand qu'un droit. Outre cela, l'angle mixtiligne (BDA) du plus grand ſegment, eſt plus grand qu'un angle droit; & celui (BDE) du plus petit ſegment, eſt moindre qu'un angle droit.

CAS I.

HYPOTHESE.	THESE.
L'angle ADB eſt placé dans un demi ⊙ ADEB.	*Cet ∀ ADB eſt un ∟.*

Préparation.

1. Tirez le rayon CD. — Dem. 1.
3. Et prolongez AD en N. — Dem. 2.

DEMONSTRATION.

Puiſque dans le △ ADC le côte CA eſt = au côté CD (*Def.* 15. *L.* 1).
1. L'angle CDA eſt = à ∀ CAD. — Prop. 5. L. 1.
* Derechef, dans le △ CDB; le côté CD étant = au côté CB (*Def.* 15. *L.* 1),
2. L'angle CDB eſt = à ∀ CBD. — Prop. 5. L. 1.
3. Partant, ∀ ADB eſt = aux ∀ CAD+CBD. — Ax. 2. L. 1.
Mais ∀ NDB eſt auſſi = aux ∀ CAD+CBD (*Prop.* 32. *L.* 1).
4. C'eſt pourquoi, cet ∀ NDB eſt = à ∀ ADB. — Ax. 1. L. 1.
5. D'où il ſuit que ∀ ADB eſt un ∟. — Def. 10. L. 1.

C. Q. F. D.

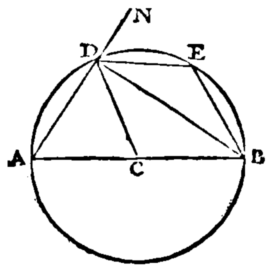
CAS II.

HYPOTHESE.	THESE.
L'angle DAB eſt placé dans un ſegment DAB > le demi ⊙.	*Cet ∀ DAB eſt < un ∟.*

DEMONSTRATION.

Puiſque dans le △ ADB, l'angle ADB eſt un ∟ (*Cas.* 1).
1. L'angle DAB ſera < un ∟. — Prop. 17. L. 1.

C. Q. F. D.



CAS III.

HYPOTHESE.

L'angle DEB est placé dans un segment DEB < la demi ⊙.

THESE.

Cet ∀ DEB est > un ∟.

DEMONSTRATION.

1. LEs ∀ opposés DAB+DEB, du quadrilatere ADEB sont = à 2 ∟. Prop. 22. L. 3.
2. C'est pourquoi, ∀ DAB étant < un ∟ (*Cas II*), DEB sera nécessairement > un ∟.

C. Q. F. D.

CAS IV.

HYPOTHESE.

Les ∀ mixtilignes BDA, BDE, sont formés par la droite BD & les arcs DA, DE.

THESE.

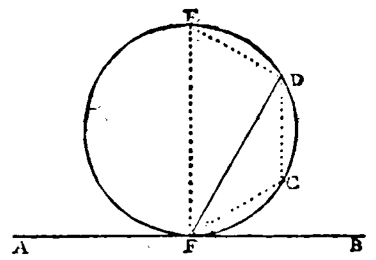
L'angle BDA est > un ∟, & l'angle BDE est < un ∟.

DEMONSTRATION.

PUisque les ∀ rectilignes ADB, NDB sont des ∟ (*Cas* I).

1. L'angle mixtiligne BDA sera nécessairement > un ∟, & ∀ mixtiligne BDE < un ∟. Ax. 8. L. 1.

C. Q. F.D.



PROPOSITION XXXII. THEOREME XXVIII.

SI une ligne droite (AB) touche un cercle (ECF), & que du point d'attouchement (F) on tire une corde quelconque (FD): les angles (DFB, DFA) formés par la corde & la tangente, sont égaux à ceux (FED, FCD,) qui sont placés dans les segmens alternes (FED, FCD).

Hypothese.	These.
I. La droite AB est tangente du ⊙ ECF.	*I. L'angle FED est = à ∀ DFB.*
II. Et FD est une corde de ce ⊙ tirée du point d'attouchement.	*II. L'angle FCD est = à ∀ DFA.*

Préparation.

1. SUr AB, au point d'attouchement F, élevez la ⊥ FE. Prop. 11. L. 1.
2. Prenez dans l'arc DF un point quelconque C & tirez ED, DC, CF. Dem. 1.

Demonstration.

PUisque la droite AB touche le ⊙ ECF (*Hyp.* 1), & que FE est une ⊥ élevée sur AB au point d'attouchement F (*Prep.* 1).

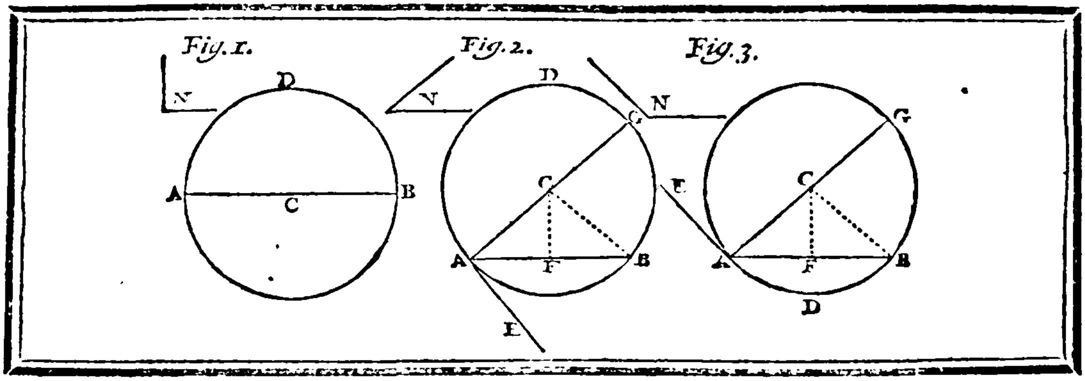
1. La droite FE est un diametre du ⊙ ECF. Prop. 19. L. 3.
2. Partant, ∀ FDE est un ∟. Prop. 31. L. 3.
3. C'est pourquoi, les ∀ DEF + DFE sont = à un ∟. Prop. 32. L. 1.
   Mais ∀ EFB ou ∀ DFE + ∀ DFB étant aussi = à un ∟ (*Prep.* 1).
4. Les ∀ DEF + DFE sont = aux ∀ DFB + DFE. Ax. 1. L. 1.
5. D'où il suit que ∀ DEF est = à ∀ DFB; ou ∀ placé dans le segment DEF = à ∀ formé par la tangente BF & la corde DF. Ax. 3. L. 1. Prop. 21. L. 3.

C. Q. F. D. I.

Les ∀ FED + FCD étant = à 2 ∟ (*Prop.* 22. *L.* 3), & les ∀ contigus DFB + DFA étant aussi = à 2 ∟ (*Prop.* 13. *L.* 1). Ax. 1. L. 1.

6. Les ∀ FED + FCD sont = aux ∀ DFB + DFA.
7. C'est pourquoi, ∀ FED étant = à ∀ DFB (*Arg.* 5, l'angle FCD est aussi = à ∀ DFA.; ou ∀ placé dans le segment FCD = à ∀ compris par la tangente AF & la corde DF. Ax. 3. L. 1. Prop. 21. L. 3.

C. Q. F. D. II.



PROPOSITION XXXIII. *PROBLEME V.*

SUr une droite donnée (AB); décrire un ſegment de cercle (ADB), qui contienne un angle égal à un angle donné (N).

DONNEE	CHERCHEE.
La droite AB avec ∀ N.	*Le ſegment ADB décrit ſur AB, qui contienne un ∀ = à ∀ N.*

CAS I. Si ∀ donné eſt ∟, (*Fig.* 1).

DEMONSTRATION.

ON n'a qu'à décrire ſur AB un demi ⊙ ADB. Dem. 3.
1. Ce demi ⊙ contiendra un ∀ = à ∀ droit donné N. Prop. 31. L. 3.

CAS II. Si ∀ donné eſt aigû, (*Fig.* 2.); ou obtus (*Fig.* 3).

Réſolution.

1. FAites ſur AB, au point A, l'angle BAE = à ∀ donné N. Prop. 23. L. 1.
2. Du point A elevez ſur AE la ⊥ AG. Prop. 11. L. 1.
3. Coupez la droite AB en deux également au point F. Prop. 10. L. 1.
4. Elevez ſur AB, au point F, la ⊥ FC, qui coupera AG quelque part en C. Prop. 11. L. 1.
5. De ce point C comme centre, & du rayon CA, décrivez le ⊙ ADG; Dem. 3.

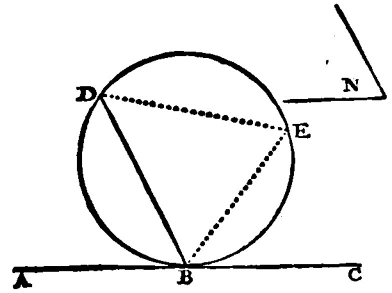
Préparation.

TIrez la droite CB. Dem. 1.

DEMONSTRATION.

PUiſque dans les △ ACF, BCF, le côté AF eſt = au côté BF (*Reſ.* 3), FC commun aux deux △, & ∀ compris AFC = à ∀ compris BFC (*Ax.* 10. *L.* 1 & *Reſ.* 4).
1. La baſe CA eſt = à la baſe CB. Prop. 4. L. 1.
2. Partant, le ⊙ décrit du centre C & du rayon CA, paſſera auſſi par le point B, & ADB eſt un ſegment décrit ſur AB. {Def. 15. L. 1. Def. 19. L. 1.}
Mais la droite AE touchant le ⊙ ADB au point A (*Reſ.* 2. & *Prop.* 16. *L.* 3. *Coroll.*) & AB étant une corde tirée de ce point d'attouchement A (*Arg.* 2.).
3. L'angle compris dans le ſegment alterne ADB eſt = à ∀ BAE. Prop. 32. L. 3.
4. C'eſt pourquoi, ∀ BAE étant = à ∀ donné N (*Reſ.* 1), ∀ compris dans le ſegment ADB décrit ſur AB, eſt auſſi = à ∀ donné N. Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XXXIV. *PROBLEME VI.*

Retrancher d'un cercle donné (BDE) un ſegment (BED), qui contienne un angle (DEB) égal à un angle rectiligne donné (N).

Donne.	Cherche.
Le ⊙ BDE, & ∀ rectiligne N.	*Le ſegment BED retranché de ce ⊙, contenant un ∀ DEB = à ∀ donné N.*

Réſolution.

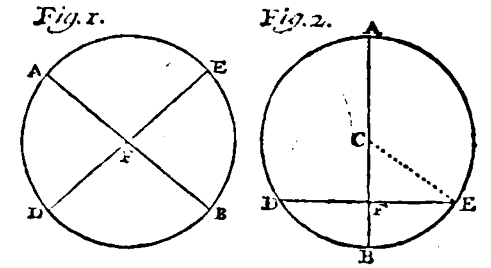
1. D'Un point quelconque A tirez au ⊙ BDE la tangente ABC. Prop. 17. L. 3.
2. Du point d'attouchement B, menez la corde BD, enſorte qu'elle forme ſur AB ∀ DBA = à ∀ donné N. Prop. 23. L. 1.

Demonstration.

Puiſque ∀ donné N eſt = à ∀ DBA (*Reſ.* 2), & ∀ DEB = à ∀ DBA (*Prop.* 32. *L.* 3). Ax. 1. L. 1.

1. Les ∀ DEB & N ſont = entr'eux.
2. On a donc retranché du ⊙ BDE, un ſegment BED, qui contient un ∀ DEB = à ∀ donné N. Prop. 21. L. 3.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XXXV. *THEOREME XXIX.*

SI dans un cercle (DAEB) deux cordes (AB, DE) s'entrecoupent: le rectangle compris des deux parties (AF, FB) de l'une, est égal au rectangle compris sous les deux parties (DF, FE) de l'autre.

HYPOTHESE.	THESE.
I. AB, DE sont deux cordes d'un même ⊙ DAEB,	*Le Rgle AF.FB est = au Rgle DF.FE.*
II. Et ces cordes s'entrecoupent en un point F.	

CAS I. Si les deux cordes passent par le centre F du ⊙ (*Fig.* 1).

DEMONSTRATION.

1. LEs droites AF, FB, DF, FE sont donc = entr'elles, — Def. 15. L. 1.
2. Et par consequent le Rgle AF.FB est = au Rgle DF.FE. — Ax. 2. L. 2.

CAS II. Si l'une des cordes AB, passant par le centre coupe l'autre DE à L (*Fig.* 2).

Préparation.

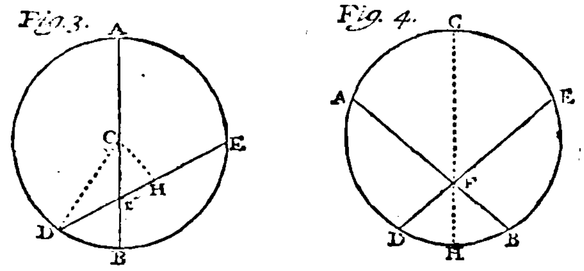
TIrez le rayon CE. — Dem. 1.

DEMONSTRATION.

PUisque la droite AB est coupée en deux également en C, & en deux inégalement en F.

1. Le Rgle AF.FB + le □ de CF est = au □ de CB, ou = au □ de CE. — {Prop. 5. L. 2. Ax. 1. L. 1.
   Mais le □ de FE + le □ de CF est aussi = au □ de CE (*Prop.* 47. *L.* 1).
2. D'où il suit que le Rgle AF.FB + le □ de CF est = au □ de FE + au □ de CF. — Ax. 1. L. 1.
3. Partant, le Rgle AF.FB est = au □ de FE, — Ax. 3. L. 1.
   Et par la raison que DF est = à FE (*Prop.* 3. *L.* 3), ou DF.FE = au □ de FE (*Ax.* 2. *L.* 2).
4. Le Rgle AF.FB est aussi = au Rgle DF.FE. — Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.



CAS III. Si l'une des cordes AB, passant par le centre, coupe l'autre DE obliquement. (*Fig.* 3).

Préparation.

1. DU centre C abbaissez sur DE la ⊥ CH, Prop. 12. L. 1.
2. Et tirez le rayon CD. Dem. 1.

DEMONSTRATION.

PUisque DH est = à HE (*Prep.* 1. & *Prop.* 3. *L.* 3).
1. Le Rgle DF.FE + le □ de FH est = au □ de DH. Prop. 5. L. 2.
2. C'est pourquoi, le Rgle DF.FE + le □ de FH + le □ de CH est = au □ de DH + au □ de CH; Ax. 2. L. 1.
Mais le □ de FH + le □ de CH est = au □ de CF, & le □ de DH + le □ de CH = au □ de CD (*Prop.* 47. *L.* 1).
3. Le Rgle DF.FE + le □ de CF est donc = au □ de CD, ou au □ de CB. Ax. 1. L. 1.
De plus le Rgle AF.FB + le □ de CF étant = au meme □ de CB (*Prop.* 5. *L.* 2).
4. Le Rgle DF.FE + le □ de CF est aussi = au Rgle AF.FB + au □ de CF, Ax. 1. L. 1.
5. Ou, en retranchant le □ commun de CF, le Rgle DF.FE est = au Rgle AF.FB. Ax. 3. L. 1.

C. Q. F. D.

CAS IV. Si aucune des cordes AB, DE ne passe par le centre. (*Fig.* 4).

Préparation.

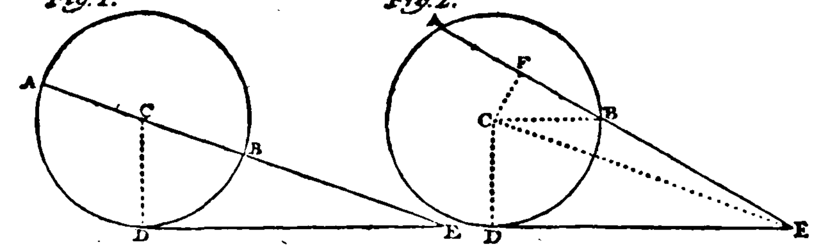
1. TIrez par le point F le diametre GH. Dem. 1.

DEMONSTRATION.

PUisque chacun des Rgles AF.FB & DF.FE est = au Rgle GF.FH, par le troisieme Cas;
1. Ces Rgles AF.FB & DF.FE sont aussi = entr'eux. Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.

Fig. 1. Fig. 2.



PROPOSITION XXXVI. *THEOREME XXX.*

SI d'un point quelconque (E) pris hors d'un cercle (ABD), on tire à ce cercle deux lignes droites, dont l'une (DE) le touche, & l'autre (EA) le coupe: le rectangle compris de la secante entiere (AE) & de sa partie extérieure (EB) est égal au quarré de la tangente (ED).

HYPOTHESE.	THESE.
I. Le point E est pris hors du ⊙ ABD. *II. Et de ce point on a tiré la tangente ED & la secante EA.*	*Le Rgle AE.EB est = au □ de ED.*

CAS I. Si la secante AE passe par le centre (*Fig.* 1).

Préparation.

TIrez au point d'attouchement D, le rayon CD. — Dem. 1.

DEMONSTRATION.

1. LE Rayon CD est donc ⊥ sur la tangente ED, — Prop. 18. L. 3.
Et à cause que la droite AB est coupée en deux également en C, & que la droite BE y est ajoutée directement,
2. Le Rgle AE.EB + le □ de CB est = au □ de CE. — Prop. 6. L. 2.
De plus, le □ de CE étant aussi = au □ de DE + au □ de CD (*Prop.* 47. *L.* 1), ou au □ de DE + au □ CB (*Prop.* 46. *L.* 1. *Coroll.* 3);
3. Le Rgle AE.EB + le □ de CB est = au □ de DE + au □ de CB. — Ax. 1. L. 1.
4. Partant, le Rgle AE.EB sera = au □ de DE. — Ax. 3. L. 1.

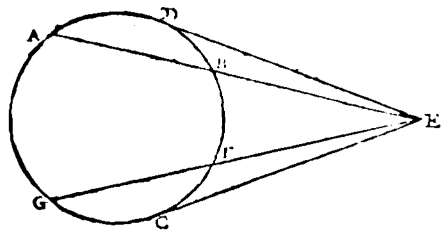
C. Q. F. D.

CAS II. Si la secante AE ne passe pas par le centre (*Fig.* 2).

Préparation.

1. ABaissez du centre C sur AE la ⊥ CF. — Prop. 12. L. 1.
2. Tirez les rayons CB, CD, & la droite CE. — Dem. 1.

DEMON-



DEMONSTRATION.

Puisque la droite AB est coupée en deux également en F (*Prep.* 1. & *Prop.* 3. *L.* 3), & que la droite BE y est ajoutée directement,

1. Le Rgle AE.EB + le ☐ de FB est = au ☐ FE. — Prop. 6. L. 2.
2. Partant, le Rgle AE.EB + le ☐ FB + le ☐ de FC est = au ☐ de FE + au ☐ de FC, ou = au ☐ de CE. — {Ax. 2. L. 1. Prop. 47. L. 1.

   Mais par la raison que le ☐ de DE + le ☐ de CD est = au ☐ de CE & le ☐ de FB + le ☐ de FC = au ☐ de CB (*Prop.* 47. *L.* 1), ou = au ☐ de CD (*Def.* 15. & *Prop.* 46. *L.* 1, *Coroll.* 3).
3. Le Rgle AE.EB + le ☐ de CD est = au ☐ de DE + au ☐ de CD.
4. Par conséquent, le Rgle AE.EB est = au ☐ de DE. — Ax. 3. L. 1.

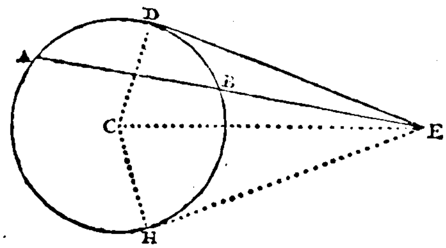
C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

Il est évident que si (*Fig.* 3) d'un point quelconque (E), pris hors d'un cercle (ADBF), on tire plusieurs droites (AE, EG &c) qui coupent le cercle (en B & F &c): les rectangles compris des secantes entieres (AE, GE), & des parties exterieures (EB, EF), sont égaux entr'eux; puisqu'en tirant du point E la tangente (ED), ces rectangles seront tous égaux au quarré de la même tangente (ED).

COROLLAIRE II.

Il est aussi évident que, si d'un point quelconque (E), pris hors d'un cercle (ADBF), on tire à ce cercle deux tangentes (ED, EC), elles seront egales entr'elles; puisque le quarré de chacune est égal au même rectangle (AE.EB).



PROPOSITION XXXVII. *THEOREME XXXI.*

SI d'un point quelconque (E), pris hors d'un cercle (ADH), on tire à ce cercle deux lignes droites dont l'une (AE) coupe le cercle, & l'autre (ED), se termine à sa circonférence convexe; & que le rectangle, compris de la secante entiere (AE) & de la partie extérieure (EB), soit égal au quarré de la droite (ED), qui se termine à la circonférence convexe: celle-ci touchera le cercle (en D).

HYPOTHESE.	THESE.
I. La droite A E coupe le ⊙ A D H en B, *II. Et la droite E D se termine à sa ○ convexe.* *III. Le Rgle A E . E B est = au □ de E D.*	*La droite E D touche le ⊙ A D H au point D.*

Préparation.

1. DU point E tirez au ⊙ ADH la tangente EH. — Prop. 17. L. 3.
2. Tirez les rayons CD, CH & la droite CE. — Dem. 1.

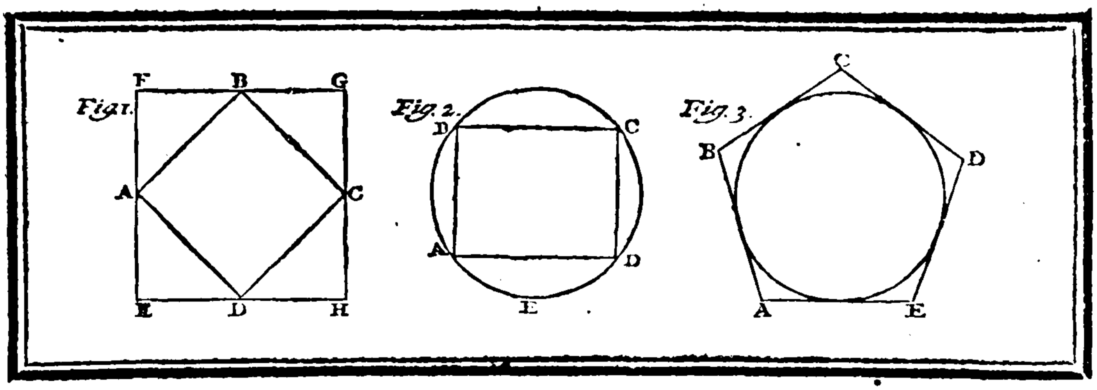
DEMONSTRATION.

PUisque le Rgle de AE . EB est = au □ de ED (*Hyp.* 3) & que le Rgle AE . EB est aussi = au □ de EH (*Prep.* 1 & *Prop.* 36. *L.* 3).

1. Le □ de ED est = au □ de EH (*Ax.* 1. *L.* 1), ou ED = EH, — Prop. 46. L. 1. Coroll. 3.
   Et comme de plus, dans les △ CDE, CHE, le côté CD est = au côté CH (*Def.* 15. *L.* 1), & CE commun aux deux △.
2. L'angle CDE est = à ∀ CHE. — Prop. 8. L. 1.
3. C'est pourquoi, ∀ CHE étant un ∟ (*Prep.* 1 & *Prop.* 18. *L.* 3), ∀ CDE est un ∟ aussi, — Ax. 1. L. 1.
4. Et la droite ED touche le ⊙ ADH au point D. — Prop. 16. L. 3. Coroll. 3.

C. Q. F. D.

LES
ELEMENS
D'EUCLIDE,
LIVRE QUATRIEME.



DEFINITIONS

I.

ON dit qu'*une figure rectiligne* (ABCD) *eſt inſcrite dans une autre figure rectiligne* (EFGH), quand chacun des angles (A, B, C, D) de la figure inſcrite, touche chacun des côtés (EF, FG, GH, HE) de la figure dans laquelle elle eſt inſcrite (*Fig.* 1).

II.

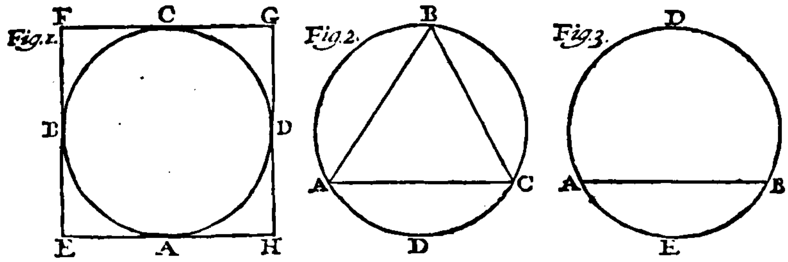
Pareillement on dit qu'*une figure rectiligne* (EFGH) eſt *circonſcrite à une autre figure rectiligne* (ABCD); quand chacun des côtés (EF, FG, GH, HE) de la figure circonſcrite touche chacun des angles (A, B, C, D) de la figure à laquelle elle eſt circonſcrite (*Fig.* 1).

III.

Une figure rectiligne (ABCD) eſt *inſcrite dans un cercle*, quand chacun des angles (A, B, C, D) de la figure inſcrite touche la circonférence du cercle (ABCDE) dans lequel elle eſt inſcrite (*Fig.* 2).

IV.

Et *une figure rectiligne* (ABCDE) *eſt circonſcrite à un cercle*, quand chacun de ſes côtés (AB, BC, CD, DE, EA) touche le cercle, auquel elle eſt circonſcrite (*Fig.* 3).



DEFINITIONS

V.

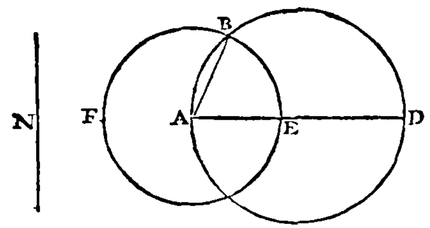
UN *cercle* (ABCD) *est inscrit dans une figure rectiligne* (EFGH), quand sa circonférence touche chacun des côtés (EF, FG, GH, HE) de la figure à laquelle il est inscrit (*Fig.* 1).

VI.

Mais *un cercle* (ABCD) *est circonscrit à une figure rectiligne* (ABC), quand la circonférence du cercle touche chacun des angles (A, B, C) de la figure à laquelle il est circonscrit (*Fig.* 2).

VII.

Une ligne droite (AB) *est appliquée dans un cercle* (ADBE), quand ses extrêmités (A & B) sont dans la circonférence du cercle (*Fig.* 3).



PROPOSITION I. *PROBLEME I.*

Appliquer dans un cercle donné (ABD), une ligne droite (AB) égale à une ligne droite donnée (N), laquelle ne soit pas plus grande que le diamêtre du cercle (ABD).

DONNE.	CHERCHE.
Un ⊙ ABD, avec une droite N, qui n'est pas > le diamêtre de ce ⊙.	*La droite AB appliquée dans le ⊙ ABD, & qui soit = à la droite N.*

Résolution.

1. Tirez le diamêtre AD du ⊙ ABD. Dem. 1.

CAS I.

Si AD est = à N.

On aura appliqué dans le ⊙ donné ABD une droite AD = à la donnée N. Def. 7. L. 4.

C. Q. F. F.

CAS II.

Si AD est > N.

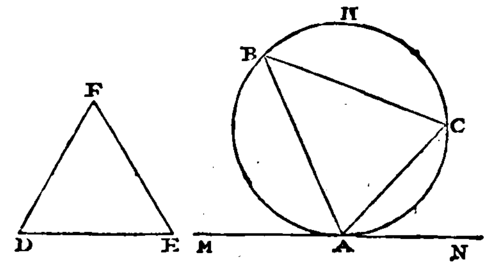
1. Faites AE = à N. Prop. 3. L. 1.
2. Du centre A & du rayon AE décrivez le ⊙ EBF, & tirez AB. Dem. 3.

DEMONSTRATION.

Puisque AB est = à AE (*Def.* 15. *L.* 1), & que la droite N est = à AE (*Ref.* 1),

1. La droite AB, appliquée dans le ⊙ ABD, sera aussi = à N. Ax. 1. L. 1. Def. 7. L. 4.

C. Q. F. F.



PROPOSITION II. PROBLEME II.

INscrire dans un cercle donné (ABHC); un triangle (ABC) équiangle à un triangle donné (DFE).

DONNE.	CHERCHE.
Un ⊙ ABHC avec le △ DFE.	*Le △ ABC inscrit dans le ⊙ ABHC, & qui soit équiangle au △ DFE.*

Résolution.

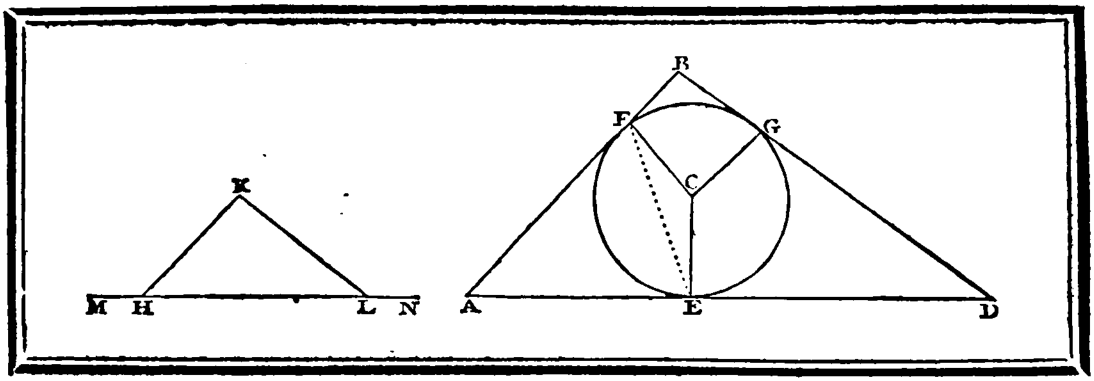
1. TIrez d'un point quelconque M, au ⊙ ABHC, la tangente MN. Prop. 17. L. 3.
2. Faites sur MN, au point d'attouchement A, l'angle BAM = à ∀ FED, & ∀ CAN = à ∀ FDE. Prop. 23. L. 1.
3. Tirez BC. Dem. 1.

DEMONSTRATION.

PUisque ∀ BCA = à ∀ BAM (*Prop.* 32. *L.* 3), & ∀ FED = au même ∀ BAM (*Ref.* 2); Item ∀ CBA = à ∀ CAN (*Prop.* 32. *L.* 3), & ∀ FDE aussi = à ∀ CAN (*Ref.* 2).

1. Il s'enfuit que ∀ BCA est = à ∀ FED, & ∀ CBA = à ∀ FDE. Ax. 1. L. 1.
3. Partant, le troisieme ∀ BAC, du △ ABC, est aussi = au troisieme ∀ DFE du △ DFE, & ce △ ABC est inscrit dans le ⊙ ABHC. Prop. 32. L. 1. Def. 3. L. 4.

C. Q. F. F.



PROPOSITION III. *PROBLEME III.*

Circonſcrire à un cercle donné (EFG) un triangle (ABD), qui ſoit équiangle à un triangle donné (HKL).

DONNE.
Le ⊙ EFG, avec le △ HKL.

CHERCHE.
Le △ ABD circonſcrit au ⊙ EFG, qui ſoit équiangle au △ HKL.

Réſolution.

1. Prolongez de part & d'autre le côté HL du △ HKL. — Dem. 2.
2. Cherchez le centre C du ⊙ EFG, & tirez le rayon CE. — Prop. 1. L. 3.
3. Faites ſur CE, au point C, l'angle ECF = à ∠ KHM, & ∠ ECG = à ∠ KLN. — Prop. 23. L. 1.
4. Sur CE, CF, CG élevez les ⊥ prolongées AD, AB, DB. — Prop. 11. L. 1.

Préparation.

Tirez la droite FE.

DEMONSTRATION.

Puiſque les ∠ CEA, CFA ſont des ∟ (*Reſ.* 4),

1. Les ∠ FEA + EFA ſont < 2 ∟, & les droites AD, AB ſe rencontreront quelque part en A. — Ax. 8. L. 1. / Ax. 11. L. 1.

On démontrera de la même maniere, que

2. Les droites AD, DB item AB, DB ſe rencontreront quelque part en D & B,

Et par la raiſon que les droites AD, AB, DB ſont ⊥ à l'extremité E, F, G des rayons EF, CF, CG (*Reſ.* 4),

3. Ces droites touchent le ⊙ EFG; & le △ ABD formé par ces droites eſt circonſcrit au ⊙ EFG. — Prop. 16. L. 3. / Cor. D. 4. L. 4.

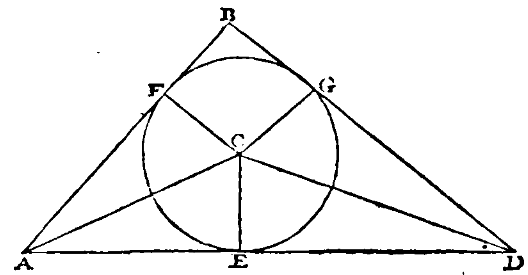
De plus, les 4 ∠ CEA + CFA + ECF + FAE du quadrilatère AFCE étant = à 4 ∟ (*Prop.* 32. *L.* 1), & les ∠ CEA + CFA = à 2 ∟ (*Reſ.* 4),

4. Les ∠ ECF + FAE ſont auſſi = à 2 ∟, — Ax. 3. L. 1.
5. Ou égaux aux ∠ KHM + KHL, à cauſe que ceux-ci ſont auſſi = à 2 ∟. — Ax. 1. L. 1. / Prop. 13. L. 1.

Mais ∠ ECF étant = à ∠ KHM (*Reſ.* 3),

6. L'angle FAE eſt = à ∠ KHL, & par la même raiſon ∠ GDE = à ∠ KLH. — Ax. 3. L. 1.
7. C'eſt pourquoi le troiſieme ∠ FBG, du △ ABD, eſt = au troiſieme ∠ HKL, du △ HKL. — Prop. 32. L. 1.
8. Le △ ABD circonſcrit au ⊙ EFG eſt donc auſſi équiangle au △ donné HKL.

 C. Q. F. F.



PROPOSITION IV. *PROBLEME IV.*

INſcrire dans un triangle donné (ABD) un cercle (EFG).

DONNE.	CHERCHE.
Le △ *ABD.*	*Le* ⊙ *EFG inſcrit dans le* △ *ABD.*

Réſolution.

1. COupez les ∀ BAD, BDA en deux également par les droites AC, DC prolongées juſqu'à ce qu'elles ſe rencontrent en C. — Prop. 9. L. 1.
2. Du point C abaiſſez ſur AD la ⊥ CE. — Prop. 12. L. 1.
3. Et de ce même point C comme centre, & du rayon CE, décrivez le ⊙ EFG. — Dem. 3.

Préparation.

ABaiſſez du point C ſur AB & DB les ⊥ CF, CG. — Prop. 12. L. 1.

DEMONSTRATION.

PUiſque dans les △ AFC, ACE, l'angle FAC eſt = à ∀ CAE (*Ref.* 1), ∀ CFA = à ∀ CEA (*Prep. Ref.* 2 & *Ax.* 10. *L.* 1); & AC commun aux deux △,

1. La droite CF eſt = à CE. — Prop. 26. L. 1.

On démontrera de même, que

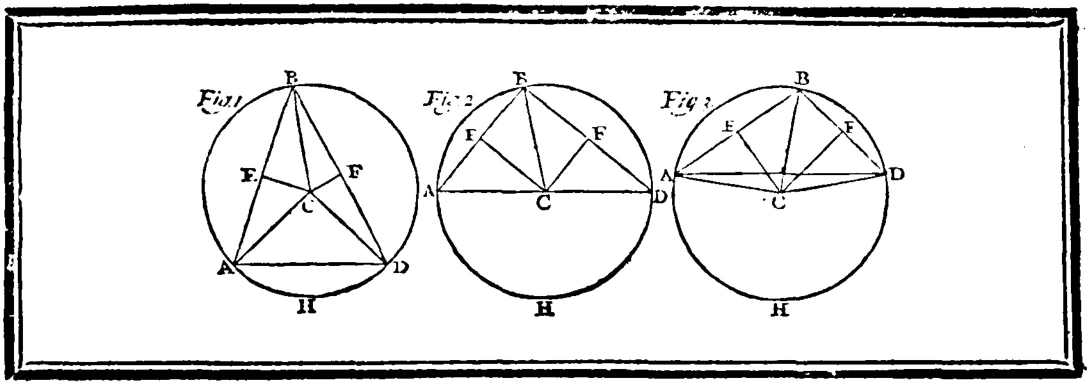
2. La droite CG eſt = à CE.
3. Partant, les droites CF, CE, CG ſont = entr'elles; & le ⊙ décrit du centre C & du rayon CE, paſſera auſſi par les points F & G. — Ax. 1. L. 1. Def. 15. L. 1.

Et par la raiſon que les côtés AD, AB, DB ſont ⊥ à l'extrêmité E, F, G du rayons CE, CF, CG (*Ref.* 2 & *Prep.*),

4. Ces côtés toucheront le ⊙ aux points E, F, G. — Prop. 16. L. 3. Coroll.

Le ⊙ EFG eſt donc inſcrit dans le △ ABD. — Def. 5. L. 4.

C. Q. F. F.



PROPOSITION V. *PROBLEME V.*

CIrconſcrire un cercle (ABDH) à un triangle donné (ABD).

DONNE. *Le △ ABD.*

CHERCHE. *Le ⊙ ABDH circonſcrit au △ ABD.*

Réſolution.

1. PArtagez les côtés AB, DB en deux également, aux points E & F. — Prop. 10. L. 1.
2. Sur AB, DB, aux points E & F, élevez les ⊥ EC, FC prolongées juſqu'à ce qu'elles ſe rencontrent en C. — Prop. 11. L. 1.
3. Et, ſoit que le point C tombe au dedans (*Fig.* 1), au dehors (*Fig.* 3), ou ſur un des côtés (*Fig.* 2) du △ ABD, décrivez du centre C & du rayon CA le ⊙ ABDH. — Dem. 3.

Préparation.

TIrez les droites CD, CB. — Dem. 1.

DEMONSTRATION.

PUiſque dans les △ AEC, BEC, le côté AE eſt = au côté EB (*Ref.* 1), EC commun aux deux △, & ∀ compris AEC = à ∀ compris BEC (*Ref.* 2. & *Ax.* 10. *L.* 1),

1. La droite CB eſt = à CA. — Prop. 4. L. 1.

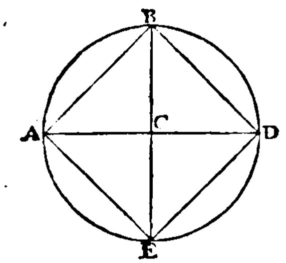
On démontrera de même, que

2. La droite CB eſt = à CD.
3. Partant, les droites CA, CB, CD ſont = entr'elles; & le ⊙ ABDH décrit du centre C & du rayon CA, paſſera auſſi par les points B & D. — Ax. 1. L. 1, Def. 15. L. 1.
4. Ce ⊙ ABDH eſt donc circonſcrit au △ ABD. — Def. 6. L. 4.

C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

SI le triangle ABD eſt acutangle, le point C tombe au dedans de ce triangle (*Fig.* 1); mais ſi ce triangle eſt obtuſangle, le point C tombera au dehors (*Fig.* 3); enfin s'il eſt rectangle, le point C tombera ſur un des côtés (*Fig.* 2).



PROPOSITION VI. *PROBLEME VI.*

INſcrire dans un cercle donné (ABDE); un quarré (ABDE).

DONNE.	CHERCHE.
Le ⊙ ABDE.	*Le □ ABDE inſcrit dans ce ⊙.*

Réſolution.

1. TIrez les diamètres AD, BE, enſorte qu'ils ſe coupent à ∟. — Prop. 11. L. 1.
2. Joignez leurs extrémités par les droites AB, BD, DE, EA. — Dem. 1.

DEMONSTRATION.

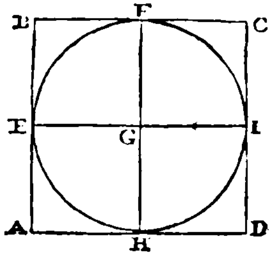
PUis donc que dans les △ ABC, DBC le côté AC eſt = à CD (*Ref.* 1. & *Def.* 15. *L.* 1), BC commun aux deux △, & ∀ compris BCA = à ∀ compris BCD (*Ref.* 1. & *Ax.* 10. *L.* 1),

1. La droite AB eſt = à BD. — Prop. 4. L. 1.

   Par un raiſonnement ſemblable on demontrera, que
2. La droite BD eſt = à DE, DE = à EA & EA = à AB.
3. Partant, les droites AB, BD, DE, EA ſont = entr'elles, ou le quadrilatere ABDE eſt équilatère. — Ax. 1. L. 1.

   Et à cauſe que chacun des ∀ ABD, BDE, DEA, BAE eſt placé dans un demi ⊙.
4. Ces ∀ feront des ∟, & le quadrilatère équilatère ABDE eſt auſſi rectangulaire. — Prop. 31. L. 3.
5. C'eſt pourquoi ce quadrilatère eſt un quarré inſcrit dans le ⊙ ABDE. — Def. 30. L. 1. Def. 3. L. 4.

C. Q. F. F.



PROPOSITION VII. *PROBLEME VII.*

Circonfcrire un quarré (ABCD) à un cercle donné (HEFI).

DONNE.	CHERCHE.
Le ⊙ HEFI.	*Le □ ABCD circonfcrit au ⊙ HEFI.*

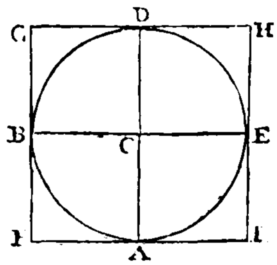
Réfolution.

1. Tirez les diamètres EI, HF enforte qu'ils fe coupent à ∠ ∟. Prop. 11. L. 1.
2. Sur les extrémités H, E, F, I de ces diamètres, élevez les ⊥ AD, AB, BC, CD. Prop. 11. L. 1.

DEMONSTRATION.

1. Les droites DA, AB, BC, CD font donc des tangentes du ⊙ HEFI. {Prop. 16. L. 3 Coroll.
2. Et la droite AD eft Plle à EI, de même que la droite BC; à caufe que ∠ HGE + GHA, item ∠ FGE + GFB font = à 2 ∟ (*Ref.* 1 & 2). Prop. 28. L. 1.
3. Partant AD eft auffi Plle à BC; & par la même raifon AB, HF, DC font Plles. Prop. 30. L. 1.
4. C'eft pourquoi les quadrilatéres AI, EC, AF, HC, AC font des Pgmes. Def. 35. L. 1.
5. D'où il fuit, que les droites AD, EI, BC, item AB, HF, DC, font = entr'elles. Prop. 34. L. 1.
6. Et par la raifon que EI eft = à HF (*Def.* 15. *L.* 1), les droites AD, BC, AB, DC font auffi égales. Ax. 1. L. 1.
   Mais ∠ EID du Pgme AI étant un ∟ (*Ref.* 2),
7. L'angle A, qui lui eft diagonalement oppofé, eft ∟ auffi. Prop. 34. L. 1.
   Par un raifonnement femblable on prouvera, que
8. Les ∠ B, C, D font des ∟.
9. Par conféquent on a circonfcrit au ⊙ HEFI un quadrilatére ABCD équilatére (*Arg* 6.) & rectangulaire (*Arg.* 7 & 8); ou un quarre. {Def. 4. L. 1. Def. 30. L. 1.

C. Q. F. F.



PROPOSITION VIII. *PROBLEME VIII.*

INscrire un cercle (ABDE) dans un quarré donné (FGHI).

DONNE.	CHERCHE.
Le □ *FGHI.*	*Le* ⊙ *ABDE inscrit dans le* □ *FGHI.*

Résolution.

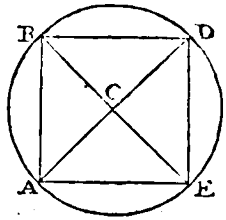
1. COupez les côtés FI, FG du quarré FGHI en deux également. Prop. 10. L. 1.
2. Par les points de section A & B, tirez AD Plle à FG ou IH & BE Plle à FI ou GH. Prop. 31. L. 1.
3. Du point C, ou AD, BE s'entrecoupent, comme centre & du rayon CA, décrivez le ⊙ ABDE. Dem. 3.

DEMONSTRATION.

PUisque les figures FE, BH, FD, AH, FC, AE, BD, CH sont des Pgmes (*Res.* 2. & *Def.* 35. *L.* 1).

1. La droite FA est = à BC & FB = à AC. Prop. 34. L. 1.
   Mais les droites entières FI, FG étant égales (*Def.* 30. *L.* 1) & FA, FB étant les moitiés de ces droites (*Res.* 1).
2. La droite FA est = à FB. Ax. 7. L. 1.
3. Partant BC est aussi = à AC; & par la même raison AC est = à CE & BC = à CD. Ax. 1. L. 1.
4. D'où il suit, que les droites AC, BC, CE, CD sont = entr'elles, & que le ⊙ décrit du centre C & du rayon CA; passe aussi par les points B, D, E, Ax. 1. L. 1. Def. 15. L. 1.
   Or les ∨ DAF, EBG, ADH, BEI étant des ∟ (*Prop.* 34. *L.* 1), comme intérieurs opposés aux ∟ GFA, HGB, IHD, FIE (*Def.* 30. *L.* 1).
5. Les droites FI, FG, GH, HI sont des tangentes du ⊙ ABDE. Prop. 16. L. 3. Coroll.
6. C'est pourquoi ce ⊙ est inscrit dans le quarré FGHI. Def. 5. L. 4.

C. Q. F. F.



PROPOSITION IX. *PROBLEME IX.*

Circonſcrire un cercle (ABDE); à un quarré donné (ABDE).

DONNE.	CHERCHE.
Le □ *ABDE.*	*Le* ⊙ *ABDE circonſcrit au* □ *ABDE.*

Réſolution.

1. Tirez les diagonales AD, BE. Dem. 1.
2. Du point C, où ces diagonales ſe coupent, comme centre & du rayon CA décrivez le ⊙ ABDE. Dem. 3.

DEMONSTRATION.

Puiſque dans les △ ABE, EBD le côté AB eſt = au côté BD, AE = à ED (*Def.* 30. *L.* 1) & BE commun aux deux △.

1. L'angle ABE eſt = à ∀ EBD, & ∀ entier ABD eſt coupé en deux également par la droite BE. Prop. 8. L. 1.

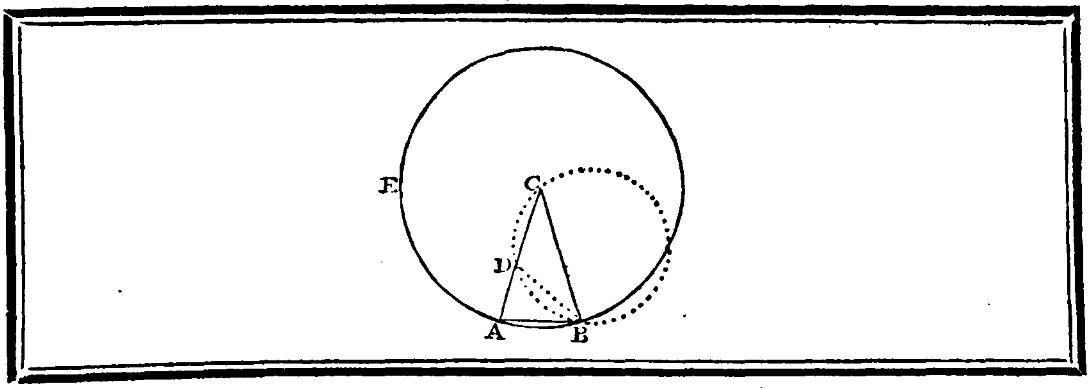
On prouvera de même que

2. Les autres ∀ BAE, BDE, AED ſont coupés en deux également par les droites AD, BE.

Or les ∀ entiers ABD, BAE étant = entr'eux (*Def.* 30. *L.* 1).

3. Leurs moitiés les ∀ CBA, CAB ſeront = auſſi. Ax. 7. L. 1.
4. Partant CA eſt = à CB, & par la même raiſon CA eſt = à CE, & CB = à CD. Prop. 6. L. 1.
5. D'où il ſuit, que les droites CA, CB, CE, CD ſont = entr'elles, & que le ⊙ décrit du centre C & du rayon CA, paſſera auſſi par les points B, D, E. {Ax. 1. L. 1. Def. 15. L. 1.}
6. C'eſt pourquoi le ⊙ ABDE eſt circonſcrit au quarré ABDE. Def. 6. L. 4.

C. Q. F. F.



PROPOSITION X. *PROBLEME X.*

Construire un triangle isoscéle (ACB); qui ait chacun des angles (CAB, CBA) sur la base (AB) double de l'angle au sommet (ACB).

Donne.	Cherche.
Une ligne CA prise à volonté.	*Le △ isoscéle ACB, qui ait ∀ CAB ou CBA = à 2 ∀ ACB.*

Résolution.

1. Tirez donc une ligne quelconque CA. — Dem. 1.
2. Coupez cette ligne, ensorte que le Rgle de CA.AD soit = au □ de CD. — Prop. 11. L. 2.
3. Du centre C & du rayon CA décrivez le ⊙ ABE. — Dem. 3.
4. Appliquez dans ce ⊙ la droite AB = à CD, & tirez CB. — Prop. 1. L. 4.

Préparation.

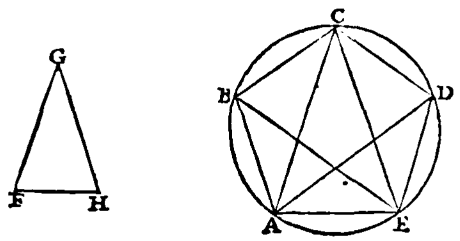
1. Tirez la droite DB, — Dem. 1.
2. Et circonscrivez un ⊙ au △ CDB. — Prop. 5. L. 4.

Demonstration.

Puis donc que le Rgle CA.AD est = au □ de CD (*Ref.* 2), & que le □ de AB est = au □ de CD (*Ref.* 4. & *Prop.* 46. *Coroll.* 3. *L.* 1).

1. Le Rgle CA.AD sera aussi = au □ de AB. — Ax. 1. L. 1.
2. Partant la droite AB est tangente du ⊙ CDB. — Prop. 37. L. 3.
3. D'où il suit que ∀ DBA est = à ∀ BCD. — Prop. 32. L. 3.
   En ajoutant donc de part & d'autre ∀ DBC,
4. L'angle ABC sera = aux ∀ BCD + DBC. — Ax. 2. L. 1.
   Mais ∀ BDA étant aussi = aux ∀ BCD + DBC (*Prop.* 32. *L.* 1).
5. L'angle BDA est donc = à ∀ ABC. — Ax. 1. L. 1.
   De même, puisque CB est = à CA (*Ref.* 4 & *Def.* 15. *L.* 1).
6. L'angle BAC est = à ∀ ABC. — Prop. 5. L. 1.
7. C'est pourquoi, ∀ BDA est = à ∀ BAC, & DB est = à AB. — Ax. 1. L. 1. / Prop. 6. L. 1.
   Et à cause que CD est aussi = à AB (*Ref.* 4).
8. La droite DB sera = à CD, & ∀ CBD = à ∀ BCD. — Ax. 1. L. 1. / Prop. 5. L. 1.
   En ajoutant de part & d'autre ∀ DBA ou son égal ∀ BCD (*Arg.* 3).
9. Les ∀ CBD + DBA ou ∀ CAB est = 2 ∀ BCD; Et on a construit un △ isoscéle CAB, qui a chacun des ∀ sur la base double de ∀ au sommet. — Ax. 2. L. 1.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XI. *PROBLEME XI.*

DAns un cercle donné (ACE); inſcrire un pentagone (ABCDE) équilatéral & équiangle.

DONNE.
Le ⊙ *ACE.*

CHERCHE.
Le pentagone équilatéral & équiangle ABCDE; qui ſoit inſcrit dans le ⊙ *ACE.*

Réſolution.

1. COnſtruiſez le △ iſoſcéle FGH, qui ait chacun des ∀ à la baſe FH double de ∀ au ſommet G. Prop. 10. L. 4.
2. Inſcrivez dans le ⊙ ACE un △ ACE équiangle au △ FGH. Prop. 2. L. 4.
3. Coupez les ∀ à la baſe CAE & CEA en deux également par les droites AD, EB, Prop. 9. L. 1.
4. Et tirez les droites AB, BC, CD, DE. Dem. 1.

DEMONSTRATION.

PUiſque chacun des ∀ CAE, CEA eſt double de ∀ ACE (*Reſ.* 1. & 2), & que ces angles ſont coupés en deux également (*Reſ.* 3).

1. Les cinq ∀ ACE, CAD, DAE, BEA CEB, ſeront = entr'eux. Ax. 7. L. 1.
2. D'où il ſuit, que les arcs AE, ED, DC, CB, BA ſont = entr'eux; de même que les cordes AE, ED, DC, CB, BA. Prop. 26. L. 3. Prop. 29. L. 3.

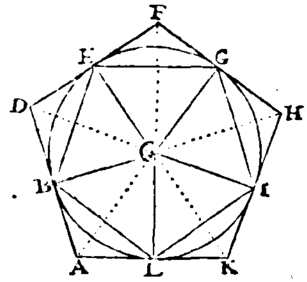
Mais, ſi on ajoute de part & d'autre aux arcs égaux AE = CD (*Arg.* 2) l'arc ABC.

3. L'arc entier EABC eſt = à l'arc entier ABCD; & ∀ CDE eſt = à ∀ DEA. Ax. 2. L. 1. Prop. 27. L. 3.

On demontrera de même que

4. Chacun des ∀ EAB, ABC, BCD eſt = à ∀ CDE ou DEA.
5. C'eſt pourquoi on a inſcrit dans le ⊙ ACE, un pentagone équilatéral (*Arg.* 2) & équiangle (*Arg.* 4). Def. 3. L. 4.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XII. *PROBLEME XII.*

CIrconſcrire à un cercle donné (LEG) un pentagone (ADFHK) équilatéral & équiangle.

DONNE.	CHERCHE.
Le ⊙ *LEG.*	*Le Pentagone équilatéral & équiangle* ADFHK, *qui ſoit circonſcrit au* ⊙ *LEG.*

Réſolution.

1. INſcrivez dans le ⊙ LEG, un pentagone équilatéral & équiangle. Prop. 11. L. 4.
2. Tirez aux points B, E, G, I, L les rayons CB, CE, CG, CI CL. Dem. 1.
3. Elevez ſur les extrémités de ces rayons les ⊥ prolongées AD, DF, FH, HK, KA. Prop. 11. L. 1.

Préparation.

TIrez les droites CA, CD, CF, CH, CK. Dem. 1.

DEMONSTRATION.

PUiſque les droites AD, DF, FH, HK, KA ſont ⊥ à l'extrêmité des rayons CB, CE, CG, CI, CL (*Reſ.* 3).

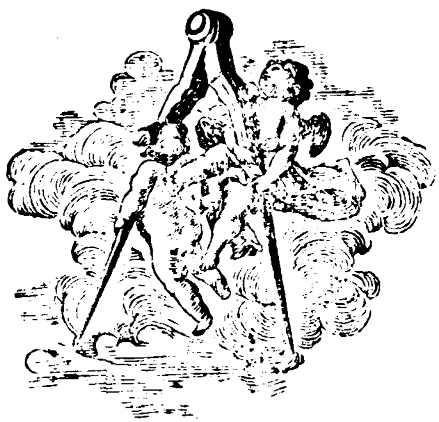
1. Ces droites toucheront le ⊙ au point B, E, G, I, L, { Prop. 16. L. 3. Coroll.
Et les ∀ DBE + DEB, FEG + FGE, HGI + HIG, KIL + KLI, ABL + ALB, pris deux à deux ſont < 2 ∟. Ax. 8. L. 1.
2. Les droites AD, DF, FH, HK, KA ſe rencontreront donc aux points D, F, H, K, A. { Rem. de Prop. 27. L. 1.

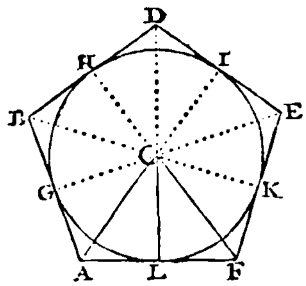
Mais, puiſque dans les △ CEF, CGF le côté FE eſt = au côté FG (*Prop.* 37. *L.* 3. *Coroll.* & *Reſ.* 3), CE = GC (*Def.* 15. *L.* 1) & CF commun aux deux △,

3 L'angle

3. L'angle CFE eſt = à ∀ CFG & ∀ ECF = à ∀ GCF. Prop. 8. L. 1.
4. Par conſéquent, ∀ EFG eſt double de ∀ CFG, & ∀ ECG double de ∀ FCG; par la même raiſon ∀ GHI eſt double de ∀ CHG & ∀ GCI double de ∀ GCH.
5. De plus, ∀ ECG eſt = à ∀ GCI, à cauſe des arcs égaux EG, GI (*Ref.* 1). Prop. 28. L. 3.
6. Partant, ∀ FCG eſt = à ∀ GCH. Ax. 7. L. 1.
Mais les ∀ CGF, CGH des △ CFG, CHG étant de plus égaux (*Ref.* 3. & *Ax.* 10. *L.* 1) & CG commun aux deux △,
7. La droite FG eſt = à GH & ∀ CFG eſt = à ∀ CHG. Prop. 26. L. 1.
8. C'eſt pourquoi FH eſt double de FG, & par la même raiſon DF eſt double de EF. Ax. 2. L. 1.
Et puiſque de plus la droite FG eſt = à EF (*Prop.* 37. *L.* 3. *Coroll.*).
9. La droite FH eſt auſſi = à DF, (*Ax.* 6. *L.* 1) & les droites HK, KA, AD ſeront par la même raiſon = à FH ou DF.
Derechef ∀ EFG ou DFH étant double de ∀ CFG, l'angle GHI ou FHK double de ∀ CHG & de plus ∀ CFG = à ∀ CHG (*Arg.* 7).
10. Les ∀ DFH, FHK ſeront = entr'eux, & les ∀ HKA, KAD, ADF ſont par la même raiſon = à DFH ou FHK.
11. Partant, on a circonſcrit au ⊙ LEG un pentagone ADFHK (*Arg.* 1). équilatéral (*Arg.* 9) & équiangle (*Arg.* 10). Def. 4. L. 4.

C. Q. F. F.





PROPOSITION XIII. *PROBLEME XIII.*

INscrire dans un pentagone équilatéral & équiangle (ABDEF) ; un cercle (GHIKL):

DONNE.	CHERCHE.
Le Pentagone équilatéral & équiangle ABDEF.	*Le ⊙ GHIKL inscrit dans ce pentagone.*

Résolution.

1. COupez les deux ∀ BAF, AFE du pentagone ABDEF en deux également, par les droites prolongées CA, CF. — Prop. 9. L. 1.
2. Du point C, où ces droites se joignent, abaissez sur AF la ⊥ CL. — Prop. 12. L. 1.
3. Du point C, comme centre & du rayon CL, décrivez le ⊙ GHIKL. — Dem. 3.

Préparation.

1. TIrez les droites CB, CD, CE. — Dem. 1.
2. Du point C abaissez sur AB, BD, DE, EF les ⊥ CG, CH, CI, CK. — Prop. 12. L. 1.

DEMONSTRATION.

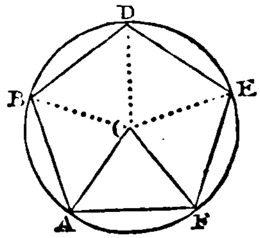
PUisque dans les △ ACF, ACB le côté AF est = au côté AB, le côté CA commun aux deux △ & ∀ CAF = à ∀ CAB (*Ref.* 1 & *donné*).

1. Il s'ensuit que ∀ CFA est = à ∀ CBA. — Prop. 4. L. 1.
   Mais ∀ AFE étant = ∀ DBA & double de ∀ CFA (*Ref.* 1).
2. Il s'ensuit que ∀ DBA est aussi double de ∀ CBA ; ou ∀ CBD = à ∀ CBA. — Ax. 6. L. 1.
   On démontrera de même, que
3. L'angle CDB est = à ∀ CDE, & ∀ CED = à ∀ CEF.
   On a donc dans les △ CBG, CBH, l'angle CBG = à ∀ CBH (*Arg.* 2), l'angle CGB = à ∀ CHB (*Prep.* 2 & *Ax.* 10. *L.* 1) & CB commun aux deux △. — Prop. 26. L. 1.
4. Partant, la droite CG est = à CH ; & par la même raison CI, CK, CL sont = à CH ou à CG.
5. Le ⊙ décrit du centre C & du rayon CL passera donc aussi par les points G, H, I, K. — Def. 15. L. 1.
   Et parceque les droites AB, BD, DE, EF, FA sont ⊥ à l'extrémité des rayons CG, CH, CI, CK, CL (*Prep.* 2 & *Ref.* 2).
6. Ces droites toucheront le ⊙ GHIKL (*Prop.* 16. *L.* 3. *Coroll.*) ; & ce ⊙ est inscrit dans le pentagone ABDEF. — Def. 5. L. 4.

C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

SI les deux angles voisins (BAF, EFA) d'une figure équilatére & équiangulaire sont coupés en deux également, & que du point (C) où les droites (AC, FC), qui les coupent en deux également se rencontrent, on tire des droites (CB, CD, CE) aux angles restants de la figure, ces droites couperont aussi les angles restants en deux également.



PROPOSITION XIV. *PROBLEME XIV.*

CIrconſcrire un cercle (ADF); à un pentagone (ABDEF) équiangle & équilatéral.

DONNE.	CHERCHE.
Le pentagone ABDEF équiangle & équilatéral.	*Le ⊙ ADF circonſcrit à ce pentagone.*

Réſolution.

1. COupez les ∀ BAF, AFE en deux également par les droites prolongées CA, CF. — Prop. 9. L. 1.
2. Du point C, où ces droites ſe coupent, comme centre, & du rayon CA décrivez le ⊙ ADF. — Dem. 3.

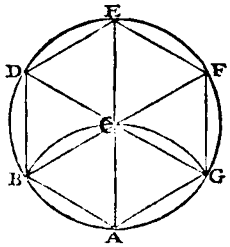
Préparation.

TIrez les droites CB, CD, CE. — Dem. 1.

DEMONSTRATION.

1. LEs droites CB, CD, CE coupent donc en deux également les ∀ ABD, BDE, DEF, — Prop. 13. L. 4. Coroll.
2. Et à cauſe que ∀ BAF eſt = à ∀ AFE, l'angle CAF ſera auſſi = à ∀ CFA. — Ax. 7. L. 1.
3. C'eſt pourquoi CA eſt = à CF. — Prop. 6. L. 1.
   On démontrera de même, que
4. Chacune des droites CB, CD, CE eſt = à CA ou à CF.
5. D'où il ſuit que le ⊙ décrit du centre C & du rayon CA paſſera auſſi par les points B, D, E, F, — Def. 15. L. 1.
6. Par conſequent le ⊙ ADF eſt circonſcrit au pentagone donné ABDEF. — Def. 6. L. 4.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XV. *PROBLEME XV.*

INscrire un Hexagone (ABDEFG) équilatéral & équiangle ; dans un cercle donné (BEG).

DONNE.	CHERCHE.
Le ⊙ *BEG.*	*L'Hexagone équilatéral & équiangle ABDEFG, inscrit dans le* ⊙ *BEG.*

Résolution.

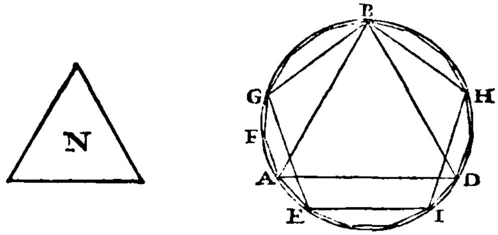
1. CHerchez le centre C du ⊙ BEG, & tirez un diametre quelconque AE. Prop. 1. L. 3.
2. Du point A comme centre, & du rayon AC décrivez l'arc de ⊙ BCG. Dem. 3.
3. Tirez les rayons CG, CB prolongés en D & F. Dem. 1 & 2.
4. Tirez les droites AB, BD, DE, EF, FG, GA. Dem. 1.

DEMONSTRATION.

PUisque dans le △ BCA, le côté BC est = au côté AC, & AB = aussi à AC (*Ref.* 3. & *Def.* 15. *L.* 1).

1. Ce △ est équilatéral & équiangle. Def. 24. L. 1.
2. C'est pourquoi, ∀ BCA est = à la troisieme partie de 2 ∟, & par la même raison ∀ ACG est aussi = à la troisieme partie de 2 ∟. Prop. 5. L. 1. Prop. 32. L. 1.
   Mais les ∀ BCA + ACG + GCF étant = à 2 ∟ (*Prop.* 13. *L.* 1).
3. L'angle GCF sera aussi = à la troisieme partie de 2 ∟; & les ∀ BCA, ACG, GCF sont = entr'eux. Ax. 1. L. 1.
4. Par conséquent, les ∀ FCE, ECD, DCB, qui les égalent comme leurs opposés au sommet, sont aussi = entr'eux. Prop. 15. L. 1.
5. Partant, les arcs BA, AG, GF, FE, ED, DB sont = entr'eux, de même que les cordes BA, AG, GF, FE, ED, DB. Prop. 26. L. 3.
6. L'Hexagone ABDEFG, inscrit dans le ⊙ BEG, est donc équilatéral. Prop. 29. L. 3.
   De plus l'arc BA étant = à l'arc ED (*Arg.* 5); si on ajoute l'arc commun AGFE.
7. L'arc BAGFE sera = à l'arc AGFED. Ax. 2. L. 1.
8. D'où il suit, que ∀ EDB est = à ∀ DBA; & par la même raison, chacun des ∀ FED, GFE, AGF est = à ∀ EDB ou à ∀ DBA. Prop. 27. L. 3.
9. L'Hexagone équilatéral ABDEFG, inscrit dans le ⊙ BEG, est donc aussi équiangle. Def. 3. L. 4.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XVI. *PROBLEME XVI.*

INſcrire un quindécagone (EAFG &c.) équilatéral & équiangle, dans un cercle donné (EBI).

DONNE.	CHERCHE.
Le ⊙ *EBI.*	*Le quindécagone équilatéral & équiangle EAFG &c.*

Réſolution.

1. COnſtruiſez un Δ équilatéral N. — Prop. 1. L. 1.
2. Inſcrivez dans le ⊙ EBI un Δ ABD équiangle au Δ équilatéral N. — Prop. 2. L. 4.
3. Et un pentagone équilatéral & équiangle EGBHI. — Prop. 11. L. 4.
4. Tirez la corde AE, & appliquez la 15 fois de ſuite, dans le ⊙ EBI. — Prop. 1. L. 4.

DEMONSTRATION.

PUiſque le Δ ABD eſt équiangle à un Δ équilatéral N (*Ref.* 2).

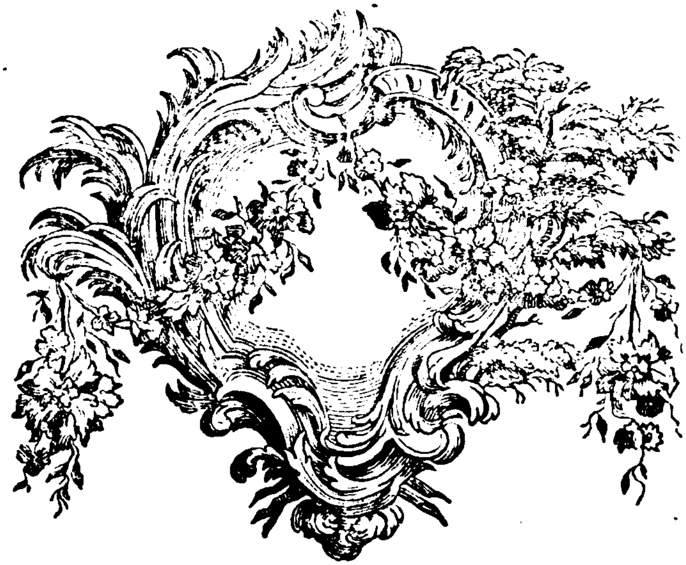
1. Ce Δ eſt auſſi équilatéral, ou AD eſt = à AB = à BD, — Prop. 6. L. 1.
2. Et les arcs AD, AB, BD ſont = entr'eux, ou chacun eſt la troiſième partie de la ○ entiere. — Prop. 28. L. 3.

   Derechef, à cauſe que le pentagone EGBHI eſt équilatéral, (*Ref.* 3).
3. Chacun des arcs EG, GB, BH, HI, IE eſt la cinquième partie de la ○ entiere. — Prop. 28. L. 3.

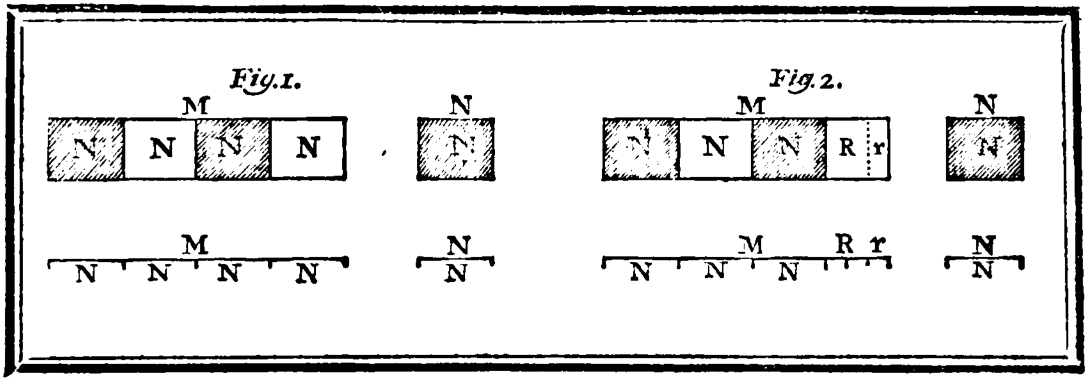
   Mais l'arc AB étant la troiſième partie (*Arg.* 2), & l'arc EG ou GB chacun la cinquième partie de la ○ (*Arg.* 3).
4. On peut appliquer dans l'arc AB cinq côtés du quindécagone, & dans chacun des arcs EG, GB trois côtés du quindécagone, ou dans l'arc EGB ſix côtés du quindécagone.
5. Partant, on pourra appliquer un de ces côtés dans l'arc AE, & le quindécagone équilatéral EAFG &c. ſera inſcrit au ⊙ EBI. — Def. 3. L 4.

   De plus, puiſque chacun de ſes ∀ FAE s'appuye ſur un arc FHE qui eſt = à treize quinziemes parties de la circonférence,
6. Ces angles ſeront tous = entr'eux. — Prop. 27. L. 3.
7. On a donc inſcrit dans le ⊙ EBI, un quindécagone EAFG, équilatéral & equiangle.

C. Q. F. F.



LES
ELEMENS
D'EUCLIDE,
LIVRE CINQUIEME.



DEFINITIONS.

I.

ON appelle *partie*, une moindre grandeur qui en mesure une plus grande.

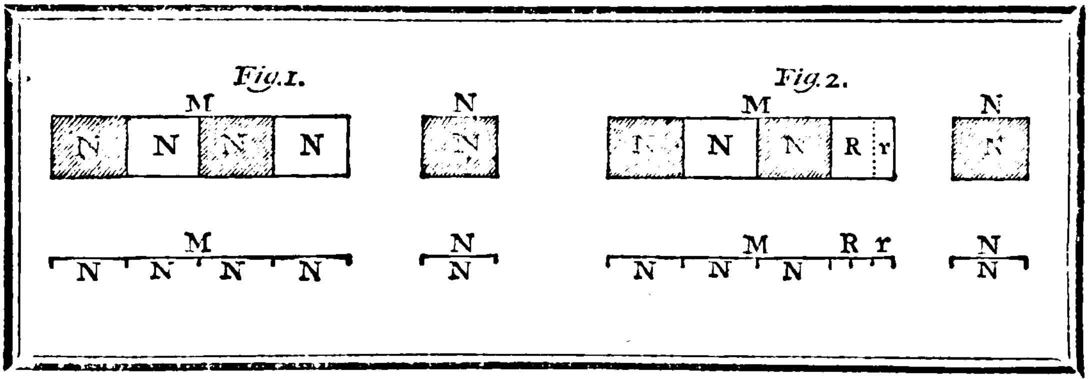
§. 1. *Par l'expression* mesurer une grandeur, *Euclide entend*, *s'y* trouver contenu un certain nombre de fois sans reste, *c. à. d. une moindre grandeur* N (*Fig.* 1.) *en mesure une plus grande* M, *lorsque la grandeur* N *est contenue dans* M *sans reste deux, trois, quatre, & en général tant de fois qu'on voudra; ou, ce qui revient au même, lorsque la moindre grandeur* N *répétée deux, trois, quatre, & en général tant de fois qu'on voudra, produit un Tout égal à la plus grande* M.

§. 2. *Les modernes nomment ces sortes de parties, qui mesurent le Tout sans reste*, des parties aliquotes; *donnant le nom de* parties aliquantes *à celles qui ne peuvent mesurer le Tout qu'avec un reste; tandis qu'une autre quantité déterminée peut les mesurer exactement, aussi bien que le Tout.*

Ainsi les nombres 2, 3, 4, 6 *sont autant de parties aliquotes du nombre* 12 *considéré comme un Tout; attendu que chacun des nombres* 2, 3, 4, 6 *se trouve répété dans* 12 *un certain nombre de fois sans reste. Au contraire les nombres* 5, 7, 9 *&c. sont des parties aliquantes du même Tout* 12; *car ces nombres ne mesurent* 12 *qu'avec un reste: quoiqu'ils puissent tous être mesurés par l'unité, aussi bien que* 12; *ce qui réussit souvent avec d'autres nombres différens de l'unité: comme dans le cas du nombre* 9, *qui est commensurable au nombre* 12 *par le nombre* 3, *aussi bien que par l'unité.*

De même la grandeur N (*Fig.* 2) *est une partie aliquante de la grandeur* M (= N + N + N + R *&c*), *si* N *mesure* M *en laissant un reste* R; *bien entendû néanmoins que ce reste* R *soit tel, qu'il mesure lui-même, la grandeur* N, *ou du moins, qu'une de ses parties déterminée* r *mesure ce reste* R *de même que la grandeur* N, *& par conséquent aussi toute la grandeur* M; *autrement* N *ne seroit point une partie aliquante de* M, *mais une partie incommensurable.*

§. 3. *On appelle en général* nombre commensurable, *celui qui peut résulter de l'unité, ou d'une de ses parties aliquotes répétée un nombre de fois déterminé: Ou, ce qui revient au même, celui qui peut être mesuré par l'unité, ou une de ses parties aliquotes. Ainsi les nombres*



DEFINITIONS.

nombres 6, 9, 17, *& les fractionnaires* $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$ *font des nombres commenſurables; puiſque les premiers peuvent réſulter de l'addition ſucceſſive & déterminée de l'unité; & les derniers de celle des fractions* $\frac{1}{3}$ *&* $\frac{1}{7}$, *parties aliquotes de l'unité.*

§ 4. *Conformément à cette définition, on apelle* quantité commenſurable, *celle qui réſulte de la répétition déterminée d'une quantité determinée quelconque. Une quantité eſt donc commenſurable, quand elle contient une de ſes parties, autant de fois qu'un nombre déterminé contient l'unité.*

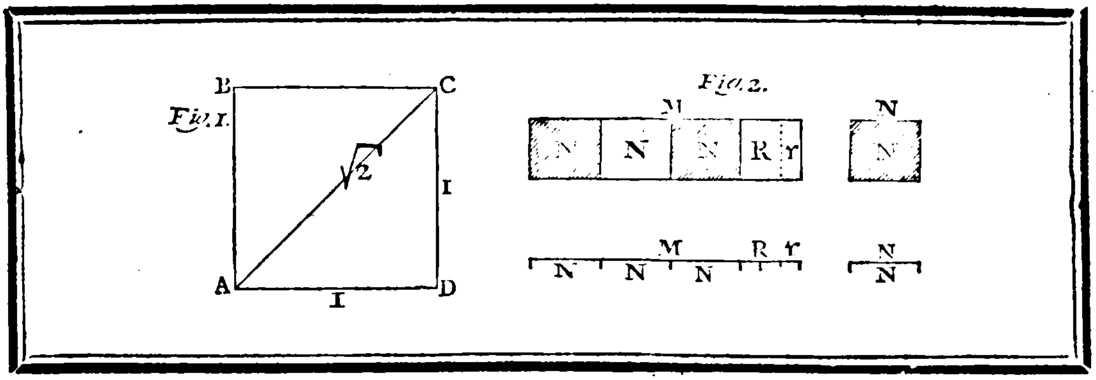
§. 5. *La commenſurabilité eſt donc quelque choſe de rélatif. Les grandeurs* M *&* N *ſont commenſurables entant qu'une meſure commune & déterminée* r, *qu'on eſt autoriſé à prendre pour unité, peut les meſurer toutes les deux exactement; ou entant que ces deux grandeurs peuvent naître de la répétition déterminée de la même quantité* r, *quelle qu'elle puiſſe être.*

§. 6. *Il ſuit de cette notion des nombres commenſurables, qu'ils ſont tous ou des multiples les uns des autres, ou des parties aliquotes, ou bien des parties aliquantes. Car ſi les quantités* M *&* N *ſont commenſurables,* N *meſure* M, *ou* M *meſure* N, *ou un autre nombre déterminé* r *les meſure toutes deux. Dans le premier Cas, le nombre* M *eſt un multiple de* N; *dans le ſecond Cas* M *eſt une partie aliquote de* N; *& dans le troiſième, le plus petit des deux eſt une partie aliquante du plus grand. La même choſe eſt vraye des grandeurs rationelles en général.*

§. 7. *Le nombre, qui ne peut réſulter de la répétition déterminée de l'unité ou d'une de ſes parties aliquotes, eſt appellé* irrationel *ou* incommenſurable *rélativement à l'unité. Et en général, les grandeurs, qui ne peuvent naître de la répétition déterminée d'une même quantité déterminée conſidérée comme unité, ſont* incommenſurables entr'elles, *ou* irrationelles. *Ainſi la racine quarrée du nombre* 2 *fait un nombre incommenſurable à l'unité; car*

$$\sqrt{2} \text{ eſt} = \text{à } 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{2}{10000} + \frac{1}{100000} \text{ \&c. \& ainſi à l'infini.}$$

Tellement qu'il eſt impoſſible de trouver une partie aliquote, qui ajoutée à elle même un nombre de



DEFINITIONS.

de fois déterminé, reproduise l'unité, & qui ajoutée à elle même un autre nombre de fois déterminé, fasse en même tems naître la racine quarrée du nombre 2. *Puis donc que la diagonale* (AC) *du quarré* (ABCD) *représente la racine quarrée du nombre deux, le côte* (AD *ou* DC) *du quarré étant pris pour unité; on voit que la diagonale d'un quarré est incommensurable à son côté* (Fig. 1).

§. 8. *Il suit de-là, que* si deux grandeurs M & N sont incommensurables, M ne peut-être ni un multiple de N, ni une partie aliquote, ni enfin une partie aliquante de ce même N. *Car supposant le contraire, il arriveroit nécessairement, que les grandeurs* M *&* N *pourroient être mesurées, par une même grandeur déterminée, représentative de l'unité; ce qui repugne à l'hypothese de l'incommensurabilité* (Fig. 2).

Au reste quand Euclide parle de parties *dans ce Cinquieme Livre, il entend toujours des parties aliquotes, conformément à cette définition. Il n'explique les parties aliquantes que dans la IV Définition du VIIe Livre.*

II.

Une grandeur plus grande est nommée *un multiple* d'une moindre; lorsque la moindre peut mesurer la plus grande.

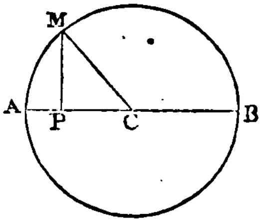
Ainsi le nombre 12 *est dit être un multiple du nombre* 4; *parceque* 4 *mesure* 12 *sans reste.*

Au terme de multiple repond celui de sousmultiple, *qui désigne qu'une moindre grandeur est une partie aliquote d'une plus grande; ainsi* 4 *est un sousmultiple de* 12, *comme* 12 *est un multiple de* 4.

III.

La *Raison* est une certaine rélation mutuelle de deux grandeurs homogènes, comparées l'une à l'autre selon leur quantité.

Cette définition est incomplette, à moins qu'on ne soit disposé à la sauver au moyen d'une interpretation convenable du terme κατὰ πηλικότητα selon la quantité *ou* selon la quantuplicité, *terme qu'Euclide n'a point défini.*



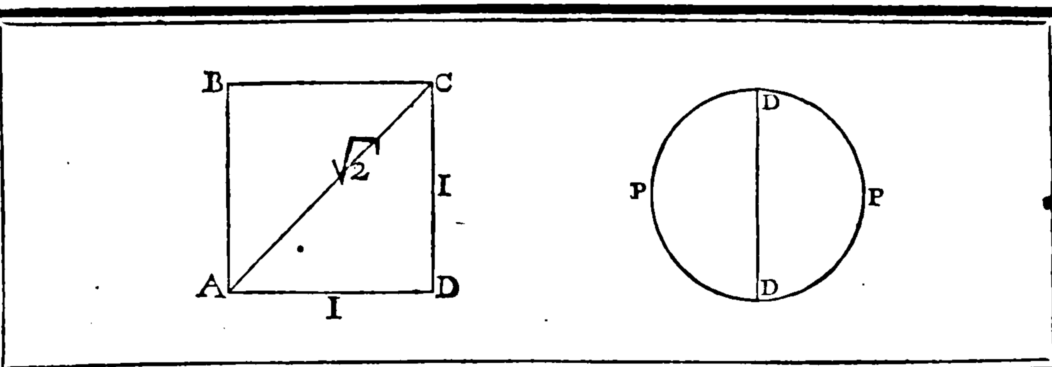
DEFINITIONS.

§. 1. *L'idée de la raison enveloppe sans doute* une certaine relation *des quantités de deux grandeurs homogènes ; mais ce caractère général ne suffit pas ; vû que les quantités de deux grandeurs homogènes sont susceptibles de plusieurs sortes de relations, différentes de celle de la raison. Ainsi ; lorsque dans un cercle* AMB *on se represente le quarré de la perpendiculaire* PM *comme constamment égal à la différence des quarrés du rayon* MC, *&* *de la portion du rayon* PC, *c. à. d.* $\overline{PM}^2 = \overline{MC}^2$ *moins* $\overline{PC}^2$, *on considère sans doute une certaine relation des grandeurs homogènes* PM, PC. *Cependant il est manifeste que cette relation n'est point une raison, attendû que la comparaison des quantités ne se fait, qu'au moyen du rayon* MC, *qui est une troisieme grandeur homogène, prise hors des quantités* PM, PC *qu'on compare. La même chose a lieu dans toutes les especes de relations, qu'on représente en Algébre par des Equations.*

§. 2. *Les quantités homogènes pouvant donc être raportées les unes aux autres de plusieurs manieres différentes, il faut spécifier plus particulierement la relation qui constitue le caractère distinctif de la raison. Voici comment Mr. Leibnitz, à qui on est redevable de cette remarque, définit la raison ;* La relation qui a lieu entre deux grandeurs homogènes, lorsqu'on fait servir la quantité de l'une à déterminer la quantité de l'autre, indépendemment de toute autre troisieme grandeur homogène quelconque. *Cette définition caractérise la raison parce qu'elle a de plus essentiel: Une raison a lieu, lorsque comparant deux grandeurs homogènes* A *&* B, *qu'on nomme* termes, *la quantité de l'un des termes* B, *prise pour mesure connue & fixée, sert à déterminer la quantité de l'autre terme homogène* A. *Il existe par conséquent une raison entre les grandeurs homogènes* A *&* B, *entant que la quantité du terme* B, *prise pour unité ou mesure, suffit à faire connoitre la quantité du terme* A, *sans qu'il soit besoin de faire entrer dans la détermination une autre grandeur quelconque, qui ne resulte point de la comparaison des deux termes* A *&* B. *D'où l'on voit, que la raison est la plus simple de toutes les relations.*

§. 3. *Une* raison *est* rationelle *ou* commensurable, *lorsque les termes de la raison* M *&* N *sont des grandeurs commensurables entr'elles ; & la* raison *est nommée* incommensurable, *lorsque ces mêmes termes se trouvent dans le cas de l'incommensurabilité l'une à l'égard de l'autre.* (§. 6. & 7. Def. 1).

Les



DEFINITIONS.

Les raisons qui ont lieu entre les nombres 3 *&* 7 *ou* 8 *&* 11 *&c. sont des raisons rationelles, & au contraire celles qui subsistent entre les nombres* 1 *&* $\sqrt{2}$, 3 *&* $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ *&* $\sqrt{5}$ *sont autant de raisons incommensurables.*

§. 4. L'antécédent *d'une raison* M *à* N *est le premier des deux termes qu'on compare; & l'autre est nommé son* conséquent.

De plus on represente la raison, qui se trouve entre deux grandeurs M *& son conséquent* N, *en cette maniere.*

M : N *Caractéristique qu'on énonce*, la raison de l'antécédant M au conséquent N; *ou simplement* la raison de M à N.

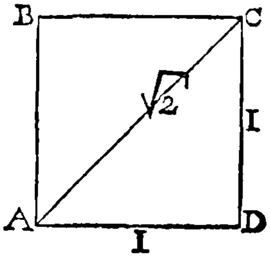
§. 5. *On appelle* exposant de la raison, *le quotient qui resulte de la division de l'antécédent* M *par son conséquent homogene* N. *Ainsi l'exposant de la raison* 6 : 2 *est* $\frac{6}{2} = 3$; *celui de la raison* 5 : 7 *est* $\frac{5}{7}$. *On donne à ce quotient le nom d'exposant, parcequ'il expose combien de fois le conséquent contient son antécédent, ou qu'il y est contenu.*

§. 6 *Les raisons incommensurables ont des exposans, entant qu'on généralise la notion de la division, & qu'on soumet les quantités incommensurables à ses opérations; ce qui peut se faire. Car quoiqu'on ne puisse diviser effectivement* 1 *par* $\sqrt{2}$; *on peut cependant représenter le resultat de cette division arithmétiquement, sous la forme de la fraction* $\frac{1}{\sqrt{2}}$ *ou* 1 : $\sqrt{2}$, (*qu'on énonce* un divisé par racine de deux), *que la Géométrie fait exprimer par des lignes.*

Ainsi elle represente l'expression 1: $\sqrt{2}$, *par le rapport du côté* (AB) *à la diagonale* (AC) *du quarré.*

§. 7. *Il y a donc des exposans rationels & d'irrationels, selon que les termes de la raison sont de l'un ou de l'autre genre. En général, de quelque nature que puissent être les grandeurs qui forment la raison, on représentera toujours son exposant sous la forme d'une fraction, où l'antécédent devient le numerateur & le conséquent le dénominateur.*

Conformément à ce principe, l'exposant de la raison qu'il y a entre le diametre D *& la circonference* P, *sera représenté par la fraction* $\frac{D}{P}$ *c. à. d.* D *divisé par* P.



DEFINITIONS.

§. 8. La définition de l'exposant donne à connoitre qu'il règne une correspondance intime, ou plutôt une identité, entre les raisons & les fractions. Car les unes aussi bien que les autres supposent la division de la quantité en parties soit rationelles, soit irrationelles; pourvû qu'on se forme une notion plus générale de la division, qui soit applicable aux quantités non-rationelles. Une fraction n'est autre chose qu'une Partie qui se rapporte au Tout, comme le numerateur au dénominateur, & par-là elle représente en même tems une raison. La fraction ($\frac{2}{3}$) *deux tiers par exemple, signifie deux parties d'un Tout partagé en trois parties. Or deux parties sont visiblement à trois parties (c. à. d. au Tout répérsenté par l'unité) comme le nombre deux est au nombre trois. Par conséquent la raison de* $\frac{2}{3}$: 1 *est la même que la raison* 2 : 3, *& il n'y a d'autre différence, sinon que dans le premier cas la raison est exprimée par la comparaison d'une partie à l'unité, & dans le second par celle d'un nombre entier à un autre nombre entier.*

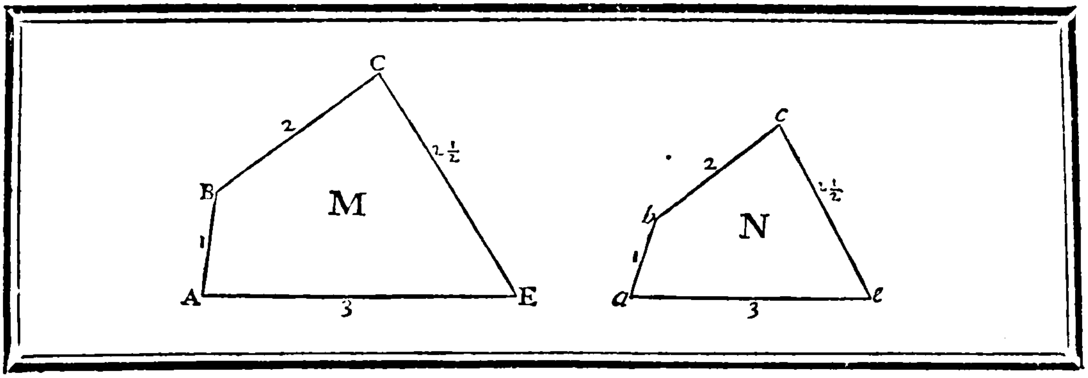
De la même maniere, lorsqu'on affirme que le côté (AB) *du quarré est* $\frac{1}{\sqrt{2}}$ *de la diagonale* (AC)*; on ne dit autre chose, sinon, que le côté du quarré considéré comme partie, se rapporte à la diagonale considérée comme unité & Tout, de la même maniere, que l'unité se raporte à la racine quarrée du nombre* 2.

§. 9. Cette conformité de la fraction & de la raison, a engagé Mr. Leibnitz à les représenter l'une & l'autre par le même signe; tellement qu'en voyant 2 : 3, *on peut dire*, la raison du nombre 2 au nombre 3, *ou bien* la fraction deux tiers, *ou ce qui revient au même*, deux divisé par trois.

§. 10. Ces principes faisant voir que l'exposant d'une raison (2 : 3) *se rapporte à l'unité de la même maniere que l'antécédent* (2) *se rapporte à son conséquent* (3), *ou bien le numerateur* (2) *à son dénominateur* (3)*; il est clair qu'une raison est determinée par son exposant; & que les* raisons sont égales *ou* les mêmes, *lorsque leurs exposans sont les mêmes. Par ex. La raison de* 6 : 2 *est la même que la raison de* 24 : 8*; parceque l'exposant* 6 : 2 (6 divisé par 2), *est égal à l'exposant* 24 : 8 (24 divisé par 8).

§. 11. Comme les raisons qui ont les mêmes exposans sont égales; celles qui ont des exposans différens doivent être nommées inégales*: & en particulier, une* raison plus grande *est*

celle



DEFINITIONS.

celle dont l'expoſant eſt plus grand, & une raiſon plus petite *celle dont l'expoſant eſt moindre.*

La raiſon de 7 : 3 *eſt* > *la raiſon de* 7 : 4 *parceque ſept tiers eſt une plus grande quantité que ſept quarts.*

§. 12. *Deux raiſons égales s'appellent une* proportion. *Selon Mr. Leibntiz on l'exprime au moyen du ſigne d'égalité, de cette maniere*

$$6 : 2 = 24 : 8.$$

Caractériſtique qu'on peut énoncer, la raiſon de 6 à 2 eſt égale à la raiſon de 24 à 8; *ou bien*, 6 eſt à 2 comme 24 eſt à 8. *Et puiſque* 6 : 2 *repréſente auſſi une fraction, la même expreſſion peut-être expliquée ainſi.* L'expoſant (6 diviſé par 2) *de la premiere raiſon* eſt égal à l'expoſant (24 diviſé par 8) *de la ſeconde raiſon.*

§. 13. *On nomme* ſemblables *des ſujets dont les déterminations intrinſeques ſont les mêmes, autant qu'il eſt poſſible d'en juger par ce qu'on trouve dans le ſujet même, ſans employer des moyens de comparaiſon externes.*

La ſimilitude ſuppoſant donc une parfaite identité à l'égard de toutes les déterminations qui ſe trouvent dans le ſujet, & une abſtraction totale de toutes celles qu'on ne rencontre que hors du ſujet; on ne conçoit dans les ſujets ſemblables qu'une grandeur relative, *cela veut dire, une grandeur qui ſe rapporte à une meſure ou unité priſe dans le ſujet même qu'on conſidère comme ſemblable à un autre.*

Ainſi deux figures M & N *ſont ſemblables, quand elles n'offrent aucune différence, ni dans la forme des lignes qui en ſont les limites, ni dans leur nombre, ni dans leur inclinaiſon, ni enfin dans leur grandeur relative, c. à d. dans cette grandeur qu'on aſſigneroit à leurs différentes parties, en les raportant à des grandeurs intrinſeques corresſpondantes, comme à des unités.*

Par ex. Si prenant dans la figure M *le côté* AB *pour unité on trouve*

$$BC = 2, \quad CE = 2\tfrac{1}{2}, \quad AE = 3$$

On trouvera pareillement dans la figure N

$$bc = 2, \quad ce = 2\tfrac{1}{2}, \quad ae = 3$$

pourvû qu'on prenne pour unité le côté ab, *qui correſpond au côté* AB.

DEFINITIONS.

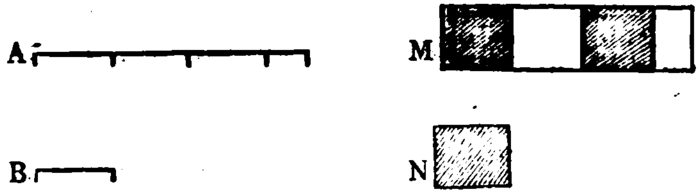
§. 14. *Une* raison *est donc* semblable à une autre raison; *lorsque leur grandeur rélative est la même, ou bien lorsque leurs exposants sont identiques. Car hors des exposans ces sujets ne présentant à l'Esprit aucune autre détermination intrinséque; ils ne peuvent manquer d'être parfaitement semblables, aussitôt que ces exposans sont les mêmes.*

§. 15. Les raisons égales sont *donc* en même tems des raisons semblables. *Par conséquent puisque la proportionalité consiste dans l'égalité des deux raisons, qui se trouvent entre le premier & le second terme, & entre le troisieme & le quatrieme; on est fondé à définir la Proportion par* une similitude de deux raisons.

§. 16. *C'est cette égalité des exposans, que les Géomètres modernes ont embrassée comme le caractère distinctif de la proportionalité, qu'ils ont mis à la place de celui que propose Euclide dans la Ve. Définition de ce Livre, & dont ils déduisent avec une grande facilité toute la doctrine des proportions, au moyen de l'Arithmétique* numérique & littérale; *entant que cette science si fort amplifiée aujourd'hui, manie avec la même facilité les quantités entieres, fractionaires & irrationelles. En effet, l'Arithmétique, celle surtout qui emploie des Lettres plutôt que des nombres, est très propre à expliquer les affections générales des quantités. C'est sa nature de représenter des quantités denuées de toutes ces déterminations particulieres, qui ne doivent pas être prises en considération, & de nous montrer leurs affections & leurs rapports dans la plus grande généralité. Les lignes ne remplissent pas si bien ce but, que les caractéres: neanmoins les Géomètres anciens n'ont pas laissé d'employer des lignes pour expliquer la doctrine des proportions. N'ayant aucune idée sur le calcul littéral que nous avons aujourd'hui, ne connoissant pas même les avantages d'une caractéristique numerique semblable à la nôtre, & regardant d'ailleurs l'unité comme le plus petit nombre, ils ne pouvoient guères faire autrement, que de se renfermer dans l'Arithmétique des entiers, sans pouvoir toucher à celle des fractions & des irrationels. C'est-là, ce qui les a obligé d'expliquer par des lignes, leurs raisonnemens abstraits sur la proportionalité en général. Mais s'il se trouve quelque inconvenient dans cette méthode, elle donne l'avantage réel, qu'on peut s'instruire de la doctrine des proportions, sans savoir les regles du Calcul littéral & même l'Arithmétique; avantage qui peut faire plaisir aux Commençans.*

C'est pour cette raison que nous n'avons pas voulu abandonner cette methode; contens d'avoir fait connoitre la marche des Auteurs modernes, nous tâcherons de repandre du jour sur celle d'Euclide, afin qu'un lecteur médiocrement attentif puisse le suivre, sans le secours des principes d'une autre science.

IV.



DEFINITIONS.

VI.

Deux grandeurs font dites *avoir une raifon l'une à l'autre*; lorfqu'il eft poffible, qu'un multiple de la plus petite, égale ou furpaffe la plus grande.

§. 1. *Il y a raifon entre les lignes* A *&* B; *parceque la ligne* B, *par ex: prife trois fois & demi, égale la ligne* A, *& prife quatre fois, la furpaffe. Il y a pareillement une raifon entre les Rgles* M *&* N; *parceque le Rgle* N *pris trois fois & demi, égale le Rgle* M, *& que pris un plus grand nombre de fois, il le furpaffe.*

Au contraire, il n'y a pas de raifon entre la ligne B *& le Rgle* M, *attendu que la ligne* B, *repetée tant de fois qu'on voudra, ne peut jamais produire une grandeur qui égale ou qui furpaffe le Rgle* M. *La raifon ne peut donc avoir lieu, qu'autant qu'on compare des grandeurs homogènes ou du même genre, c. à. d. des nombres à des nombres, des lignes à des lignes, des furfaces à des furfaces, & des folides à des folides.*

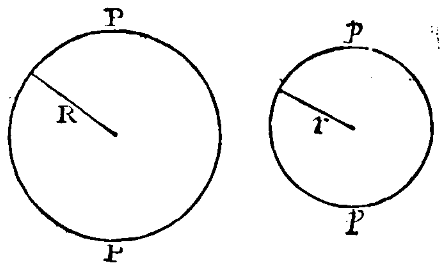
§. 2. *En vertu de cette définition, il n'y a point de raifon entre une grandeur finie & une infinie, encore qu'on les fuppofe de même genre. Car une grandeur conçue infinie, eft conçue fans limites; par conféquent une grandeur finie répétée tant de fois que l'on voudra, (pourvû que le nombre des répétitions foit déterminé) ne peut jamais parvenir, ni à égaler, ni à furpaffer une telle grandeur infinie.*

V.

On dit que *des grandeurs font en même raifon* la première à la feconde & la troifième à la quatrième: lorfque des équimultiples quelconques de la première & de la troifième, comparés à d'autres équimultiples quelconques de la feconde & de la quatrième, chacun à chacun (c. à. d. *le multiple du* I *terme à celui du* II, *& le multiple du* III *terme à celui du* IV.) fe trouvent conftamment ou plus grands, ou égaux, ou plus petits, de part & d'autre, felon quelque multiplication que ce puiffe être.

§. 1. *Euclide voulant délivrer dans cette définition un caractère général de la proportionalité*

de



DEFINITIONS.

de quatre grandeurs, s'arrête à celui qu'offrent les équimultiples des antécédens, comparés à des équimultiples des conséquens. Et il prévient des termes qu'il employera dans la suite, en disant qu'il nommera grandeurs proportionelles *ou* en même raison, *celles dont les équimultiples ont une telle correspondance constante entr'eux, que les équimultiples des antécédens, sont toujours à la fois ou plus grands, ou égaux, ou plus petits, que les équimultiples des conséquens, comparés chacun à chacun, selon quelque multiplication que ce puisse être.*

§. 2. *Il suppose tacitement, qu'on lui accorde, qu'il y a en effet des grandeurs douées de cette correspondance des multiples, apparemment, parcequ'il a cru qu'on pouvoit s'en assurer aisément par la seule inspection de toutes les figures semblables. En effet, un rayon* (*r*) *par ex. étant à sa circonférence* (*p*), *comme un autre rayon* (R) *à la sienne* (P), *il est assez manifeste, que si le triple du premier rayon* (*r*) *est moindre que sa circonférence* (*p*), *le triple du second rayon* (R) *sera aussi moindre que la sienne* (P). *Item, que si le quadruple du premier rayon* (*r*) *est plus grand que sa circonférence* (*p*): *le quadruple du second rayon* (R) *sera aussi plus grand que la sienne* (P). *Et l'on voit que la même chose est vraye de tous les autres équimultiples qu'on pourra prendre, soit des rayons, soit des circonférences. Les exemples numériques font voir pareillement, qu'il y a des grandeurs douées de la propriété énoncée dans la définition. Par ex. Les nombres* 2 *&* 6 *item* 8 *&* 24, *sont quatre grandeurs dans le cas de cette correspondance. Car si l'on multiplie les deux antécédens* 2 *&* 8 *par un même nombre quelconque* M, *& les deux conséquens* 6 *&* 24, *par un autre nombre quelconque* N; *le multiple* 2 M *du premier antécédent, ne sauroit être* $=$, *ou* $>$, *ou* $<$ *que le multiple* 6 N *de son conséquent, sans que le multiple du second antécédent* 8 M, *ne soit en même tems* $=$, *ou* $>$, *ou* $<$ *que le multiple* 24 N *de son conséquent. Car il est évident*

Si 2 M *est* $=$ *à* 6 N,
2 M + 2 M + 2 M + 2 M *est aussi* $=$ *à* 6 N + 6 N + 6 N + 6 N. *c. à. d.* 8 M $=$ 24 N.
Item *Si* 2 M *est* $>$ 6 N, *alors*
2 M + 2 M + 2 M + 2 M *est aussi* $>$ 6 N + 6 N + 6 N + 6 N. *c. à. d.* 8 M $>$ 24 N.
& enfin *Si* 2 M *est* $<$ 6 N, *alors*
2 M + 2 M + 2 M + 2 M *est aussi* $<$ 6 N + 6 N + 6 N + 6 N. *c. à. d.* 8 M $<$ 24 N.

Cela

DEFINITIONS.

Cela étant ainsi, on doit dire, selon Euclide, que la raison du nombre 2 *au nombre* 6, *est* la même *que celle du nombre* 8 *au nombre* 24; *ou bien, que les quatre nombres* 2, 6, 8, 24 *sont proportionels* (voyez la Def. VI).

§. 3. *Au contraire les nombres* 2 & 3, *item* 7 & 8, *n'ayant pas cette propriété, ne doivent point recevoir la même dénomination. Car si l'on multiplie les antécédens par* 3, & *les conséquens par* 2, *il en résulte les quatre multiples* 6, 6, 21, 16; *où le multiple* 6 *du I antécédent est égal au multiple* 6 *de son conséquent; sans que* 21, *multiple du II antécédent, soit égal à* 16 *multiple de son conséquent. D'où il suit que* 2 & 3, *item* 7 & 8, *ne doivent point être appellés* des nombres en même raison; *ni tous les quatre, des* nombres proportionels. *C'est-là le sens de cette Définition, qui a si fort embarrassé les Commentateurs, que plusieurs ont cru devoir lui substituer la XX du VII Livre, relative à la proportionalité des seuls nombres rationels, qui paroît plus simple: sçavoir, que* quatre nombres sont proportionels, lorsque le premier est le même multiple du second, ou la même partie soit aliquote soit aliquante, que le troisième est du quatrième.

Nous allons faire quelques remarques, qui serviront à lever ces difficultés.

§. 4. *On suppose qu'Euclide n'a pas jugé convenable de se servir de cette Définition de la proportionalité du VII Livre, parcequ'il avoit en vûe d'établir dans le V la doctrine générale des proportions pour toutes sortes de grandeurs, tant rationelles, qu'irrationelles, & même celles dont le rapport est jusques ici inexprimable en nombres, tel que celui du diamètre à la circonférence. En effet, personne ne doutant que la proportionalité ne puisse subsister entre des grandeurs incommensurables, & même celles dont le rapport échappe aux nombres finis, puisqu'elle a lieu entre les côtés de tous les quarrés & leurs diagonales, les diamètres de tous les cercles & leurs circonférences,* l'Elémentateur *auroit eu tort de fonder cette Théorie sur une Définition particulière, rélative aux seules grandeurs rationelles, vû que ces sortes de grandeurs ne sont ni des multiples les unes des autres, ni des parties aliquotes, ni des parties aliquantes. Son dessein exigeant donc une propriété plus générale de la proportionalité, il lui a plu de choisir celle de la* correspondance des équimultiples, *comme applicable, à toutes les grandeurs proportionelles de quelque nature qu'elles puissent être; réservant la Définition citée du VII Livre, pour la seule doctrine des nombres rationels, qui sont dans le cas d'être toujours ou des multiples les uns des autres, ou des parties aliquotes, ou des parties aliquantes.*

§. 5. *Pour ce qui est du principe de cette V Définition, on ne peut douter qu'Euclide ne l'ait tiré de la considération de la* similitude *& de ses proprietés, au moins si la VIII Définition est de lui, laquelle dit en propres termes que la* proportion consiste dans la similitude des raisons. *On ne pouvoit rencontrer plus heureusement: la notion de la similitude est la véritable source où il faut puiser les principes généraux sur la proportionalité. Il seroit aisé de le faire voir, si c'étoit ici le lieu de développer cette notion dans toute son étendue. Nous nous dispensons d'entrer dans ce détail. On sent assez, par la seule idée confuse de la similitude, que les proportions résultent de la comparaison des grandeurs correspondantes qui résident dans les figures semblables, ou plus généralement, dans les* Sujets, *dans*

 les

DEFINITIONS.

les Etres semblables. *Il y a proportion entre les côtés de tous les quarrés & leurs diagonales; entre tous les diamètres & leurs circonférences: pourquoi? Sans doute, parceque tous les quarrés & tous les cercles sont des figures semblables. De même il y a proportion entre les quatre termes de deux raisons, parceque ces raisons forment deux* sujets *semblables, où les antécédens & les conséquens se correspondent, comme dans le cas particulier de deux cercles, les rayons correspondent aux circonférences; ou dans celui de deux quarrés, les côtés aux diagonales.*

§. 6. *Si Euclide avoit eu une notion distincte de la similitude, & qu'il eût voulu remonter aux premières sources métaphysiques pour en déduire la doctrine de la proportionalité, il auroit pû se contenter de la Définition VIII, qui fait consister la proportion dans* la similitude des raisons. *En suivant cette route, les V & VI Définitions devenoient des axiomes, ou des théorèmes préliminaires, démontrables de quelques vérités générales plus simples, admises comme notions communes. C'eût été sans doute la véritable manirèe de traiter ce sujet; la doctrine des proportions étant plus étendue que la Géométrie, indépendante des principes de cette science, & intimement liée aux vérités universelles qui découlent de la nature de l'Etre considéré dans toute sa généralité.*

§. 7. *Mais ce Géomètre n'a point fait usage du principe qu'il avoit entre les mains, non plus que les Auteurs qui ont manié le même sujet après lui. Il a pris le parti de former du caractère de la correspondance des équimultiples, une Définition* de nom, *comme il étoit en droit de le faire, puisqu'en Logique il est permis de donner à une chose douée d'une certaine propriété, un certain nom: & ce parti a produit deux inconvéniens,* 1°. *Qu'on trouve à la tête de ce V Livre deux Définitions de la proportionalité, la V & la VI, qui peuvent passer pour une seule, & la VIII, ce qui est contraire à la précision de la méthode, qui n'en admet qu'une.* 2°. *Que la V Définition étant purement nominale, on n'en peut raisonner avec sureté, qu'autant qu'on suppose la possibilité de la chose définie, c. à. d. autant qu'on suppose qu'il y a effectivement des choses douées du caractère énoncé dans la Définition. A la rigueur, cette possibilité de la chose définie doit être démontrée en Géométrie. Euclide lui-même en donne l'exemple. Il ne raisonne point des Définitions nominales, du triangle équilatéral, par ex., ou du quarré, avant qu'il ait fait voir la possibilité de ces figures, en donnant leur construction. Conformément à cette maxime, avant de se servir de la Définition V, il auroit dû faire voir qu'il est possible qu'il y ait des grandeurs telles, que les équimultiples des antécédens, comparés aux équimultiples des conséquens, soient toujours ou égaux, ou plus grands, ou plus petits: & dès-lors ayant satisfait aux loix de sa propre méthode, il auroit prévenu toutes les difficultés, que cette petite omission fait naître dans l'esprit de ceux qui ne connoissent pas assez les règles relatives à cette matière.*

§. 8. *Au reste, si l'on adopte comme première notion de la proportionalité la VIII Définition de ce Livre, ou ce qui revient au même, si avec la plupart des Auteurs modernes on la fait consister dans l'*identité des exposans de deux raisons (R : P & r : p) que l'on compare, *on peut se convaincre aisément, même sans calcul, que l'inverse de la proposition contenue dans la V Définition*

DEFINITIONS.

finition, découle de cette notion de la proportionalité, à sçavoir, si quatre grandeurs R & P, r & p, sont proportionelles, les équimultiples de la I & de la III sont constamment ou égaux, ou plus grands, ou plus petits, que d'autres équimultiples de la II & de la IV, comparés chacun à chacun.

Car les deux raisons R : P *&* r : p *étant semblables, en vertu de cette Définition, il suit que* R *se rapporte à* P *considéré comme Tout ou comme partie, de la même manière que* r *se rapporte à* p *considéré pareillement ou comme Tout ou comme partie; tellement que les moindres termes,* R *&* r *par exemple, sont des parties semblables des plus grands* P *&* p. *Les deux raisons* R : P *&* r : p *forment donc deux* sujets semblables, *de la même manière que deux circonférences, & deux rayons tirés à ces circonférences, forment deux figures semblables.*

§. 9. *Mais puisque la diversité & la dissimilitude, ne peuvent s'introduire: où l'on ne suppose que des principes d'identité & de similitude, on ne peut refuser de recevoir au nombre des axiomes évidens par les notions communes, cette vérité, que* des opérations semblables, faites semblablement, sur des Sujets semblables, doivent produire des résultats semblables. *Par conséquent, si on multiplie les antécédens* (R *&* r) *des deux raisons semblables, par le même nombre* m, *& les conséquens* P *&* p *par le même nombre* n, *les résultats ne peuvent manquer de rester dans le même cas de similitude; & la comparaison des équimultiples des antécédens aux équimultiples des conséquens, doit toujours conduire aux mêmes rapports d'égalité, de majorité, ou de minorité, selon quelque multiplication que ce puisse être. Car d'abord les raisons* R : P, *&* r : p *sont semblables par l'hypothèse, & les opérations qui produisent les équimultiples de chaque couple de termes, sont semblables, puisqu'on les multiplie par le même nombre. De plus, entant que ces équimultiples sont formés des termes correspondans c. à. d. des antécédens & des conséquens, les opérations se font semblablement dans des Sujets semblables. Par conséquent les résultats doivent rester dans cet état de similitude, tellement que ce que le premier antécédent est devenu comparativement à son conséquent, le second antécédent le soit devenu comparativement au sien. D'où il suit que, s'il y a une égalité entre le multiple du premier antécédent & celui de son conséquent, la même égalité aura lieu entre l'équimultiple du second antécédent & celui de son conséquent, comme on l'a fait voir pour le cas particulier du §. 2.*

§. 10. *Au reste, cette proposition n'est qu'un cas particulier, de cette autre plus générale, qui pourroit se démontrer des mêmes principes, sçavoir*, si quatre grandeurs A, B, C, D, sont en proportion, & que quatre autres a, b, c, d, le soient pareillement, les produits Aa, Bb, Cc, Dd, résultant de la multiplication des termes correspondans, seront aussi en proportion.

Car 1°. *la raison* A : B *est semblable à la raison* C : D. 2°. *Les termes* A *&* a, B *&* b, C *&* c, D *&* d, *se correspondent semblablement dans les deux proportions,* 3°. *Les produits* Aa, Bb, Cc, Dd *résultent semblablement de la même opération. Par conséquent la raison entre le premier produit* Aa *& le second* Bb, *doit nécessairement se trouver semblable à celle qui a lieu entre le troisième produit* Cc, *& le quatrième* Dd; *ou bien ces qua-*

DEFINITIONS.

tre produits doivent être en proportion. Si on suppose a = c & b = d, *on tombe dans le cas particulier qu'on a traité dans le §. précédent.* (Voyez App. Prop. 3).

§. 11. *On déduit des mêmes principes la liaison qui règne entre les vérités contenues dans les V & VIII Définitions; à sçavoir,*

Que deux raisons R : P & r : p sont semblables, si les équimultiples de leurs antécédens (m R & m r) correspondent tellement aux équimultiples (n P & n p) de leurs conséquens, chacun à chacun, qu'il y ait toujours de part & d'autre ou égalité, * ou majorité, ou minorité, selon quelque multiplication que ce puisse être.

Car puisque m R *est* =, >, *ou* < nP, *selon que* m r *est* =, >, *ou* < np; *il est clair que* m R *est comparativement à* n P, *ce que* m r *est comparativement à* n p. *Et d'autant que cette correspondance est constante, la raison de* m R : n P *doit être semblable à la raison de* m r : n p. *Or qui ne sent la vérité de ce principe*, que, lorsque les mêmes opérations, faites semblablement, ne produisent aucune différence dans deux sujets sur lesquels elles se font, ces sujets doivent être semblables? *Par conséquent, puisque dans ce cas la multiplication des deux antécédens par un même nombre, aussi bien que celle des deux conséquens par un autre même nombre, constituent des opérations identiques faites semblablement, il faut bien que la raison* R : P *soit semblable à la raison de* r : p. *Autrement il naîtroit de la diversité dans les résultats des deux multiplications faites semblablement; ce qui est contraire à la supposition.*

Ce sont là à peu près les principes généraux, qui peuvent servir à réduire aux notions communes les vérités contenues dans ces Définitions. Il ne nous est pas permis d'approfondir davantage cette matière en ce lieu; il faudroit composer un Traité en forme sur la similitude, ce qui nous écarteroit trop de la route qu'Euclide a suivie.

§. 12. *Remarquez encore que ce qui est vrai de la correspondance des multiples, est vrai par rapport à celle des sousmultiples, des Puissances semblables, des Radicaux semblables &c. Mais il paroît assez qu'Euclide n'a pas voulu embrasser cette généralité, pour ne pas s'éloigner de la clarté des notions communes: & en particulier on peut croire qu'il a préféré l'usage des multiples à celui des sousmultiples, parcequ'il n'auroit pû prescrire de prendre des sousmultiples, sans montrer auparavant comment on doit partager une grandeur en parties égales; au-lieu que la formation des multiples n'avoit pas besoin d'un pareil principe. Ce Géomètre étoit en droit de demander qu'on pût doubler, tripler &c. ou prendre tel multiple qu'on voudroit d'une grandeur, au-lieu qu'il devoit aprendre par la résolution d'un problême, comment on peut retrancher une partie aliquote quelconque d'une ligne donnée: & la résolution de ce problême supposant la doctrine de la similitude, elle ne pouvoit être donnée que dans la IX Prop. du VI Livre.*

VI.

On nommera *proportionelles*, les grandeurs qui sont en même raison.

VII.

* A la rigueur, le seul cas de l'égalité pourroit suffire. Car si $mR = nP$ & $mr = np$ on en peut démontrer que $n : m = R : P = r : p$. (*Voyez Append. Prop.* 4).

DEFINITIONS.

VII.

Mais si dans cette comparaison des équimultiples, le multiple de la première surpasse le multiple de la seconde, sans que le multiple de la troisième surpasse le multiple de la quatrième, on dira que *la raison de la première à la seconde, est plus grande que la raison de la troisième à la quatrième.*

§. 1. *Comme il y a des raisons égales, il doit y en avoir d'inégales; & par consequent de plus grandes & de plus petites.*

Lorsqu'on juge de la raison par son exposant, on dit qu'une plus grande raison *est celle qui a un plus grand exposant, ou bien qu'une raison* A : B *est* > *qu'une autre* a : b, *lorsque l'antécédent de la première* A *contient plus de fois son conséquent* B; *que l'antécédent* a *de la seconde ne contient le sien* b; *ou bien encore, lorsque l'antécédent de la première raison est une plus grande partie de son conséquent, que l'antécédent de la seconde ne l'est du sien.*

Ainsi la raison de 12 : 3 *est* > *la raison de* 8 : 4,
parceque l'antecédent 12 *contient son conséquent* 3, *quatre fois; au-lieu que l'antécédent* 8, *ne contient son conséquent* 4, *que deux fois. Tout au contraire*

la raison de 3 : 12 *est* < *la raison de* 4 : 8.

Parceque l'antécédent 4 *est la moitié de son consequent* 8, *au-lieu que l'antécédent* 3 *n'est que le quart de son conséquent* 12. *La même chose est manifeste par les exposans. Ainsi*

12 : 3 > 8 : 4, *c. à. d.* 12 *divisé par* 3 *est* > 8 *divisé par* 4, *ou bien* trois, *exposant de la premiere raison est* > deux, *exposant de la seconde raison. De même*

$$3 : 12 < 4 : 8 \text{ parceque } \tfrac{3}{12} \text{ ou } \tfrac{1}{4} < \tfrac{4}{8} \text{ ou } \tfrac{1}{2}.$$

§. 2. *Le principe des exposans est donc très commode pour distinguer immédiatement si une raison est égale à une autre raison, ou si elle est plus grande, ou moindre. Cependant l'Auteur de ces Elémens, qui n'a pas fait usage de la doctrine des exposans, nous propose un autre caractère de la majorité des raisons. Selon lui, une raison est plus grande, lors*qu'un certain multiple du premier antécédent, peut surpasser le multiple du conséquent, sans qu'un pareil multiple du second antécédent surpasse le multiple de son conséquent.

Les raisons 3 : 2 *&* 11 : 9 *sont dans ce cas. Car si on multiplie les antécédens par* 9 *& les conséquens par* 13, *il en résulte* 27, 26; 99, 117;

$$\begin{array}{cccccc} 3 & : & 2 & ; & 11 & : & 9 \\ 9 & & 13 & & 9 & & 13 \\ \hline 27 & : & 26 & ; & 99 & : & 117 \end{array}$$

DEFINITIONS.

où la correſpondance des multiples ne ſe ſoutient pas, le premier antécédent 27 *ſe trouvant plus grand que ſon conſéquent* 26, *pendant que le ſecond antécédent* 99 *eſt moindre que ſon conſéquent* 117.

§. 3. *Pour reconnoître auſſitôt l'inégalité de deux raiſons* A : B & C : D. *par ce caractère de la non-correſpondance des multiples, on choiſira pour multiplicateurs les deux termes de l'une des deux raiſons, par ex:* C : D, *& on multipliera les antécédens* A *&* C, *par le conſéquent* D *de la raiſon choiſie* C : D; *& les deux conſéquens* B *&* D, *par l'antécédent* C *de la même raiſon, en cette manière:*

$$\begin{array}{ccccccc} A & : & B & ; & C & : & D \\ D & & C & & D & & C \\ \hline A.D & : & B.C & ; & C.D & : & D.C \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} 3 & : & 5 & ; & 7 & : & 9 \\ 9 & & 7 & & 9 & & 7 \\ \hline 27 & : & 35 & ; & 63 & : & 63 \end{array}$$

Cela fait, les deux produits C.D *&* D.C *ſe trouveront égaux, pendant que les deux autres* A.D *&* B.C *ſont inégaux. Et en particulier, le multiple d'un des antécédens eſt plus grand que celui de ſon conſéquent, pendant que le multiple de l'autre eſt égal au ſien, ſi l'on choiſit pour multiplicateurs les termes de la plus petite raiſon. Au contraire, le multiple de l'antécédent eſt moindre que celui de ſon conſéquent, pendant que les autres ſont égaux, ſi l'on prend pour multiplicateurs les termes de la plus grande raiſon.*

Par ex. La raiſon de 7 : 5 *eſt* > *la raiſon de* 11 : 9, *Si l'on multiplie donc les antécédens* 7 *&* 11, *par* 9, *conſéquent de la plus petite raiſon; & les conſéquens* 5 *&* 9, *par* 11 *antécédent de la même raiſon;*

$$\begin{array}{ccccccc} 7 & : & 5 & ; & 11 & : & 9 \\ 9 & & 11 & & 9 & : & 11 \\ \hline 63 & : & 55 & ; & 99 & : & 99 \end{array}$$

il en réſulte ces quatre nombres, 63 : 55 ; 99 : 99 *où* 63 *eſt* > 55 *pendant que* 99 *eſt* = 99.

§. 4. *Au contraire, ſi l'on multiplie les deux antécédens par* 5 *& les deux conſéquens par* 7, *termes de la plus grande raiſon,*

$$\begin{array}{ccccccc} 7 & : & 5 & ; & 11 & : & 9 \\ 5 & & 7 & & 5 & & 7 \\ \hline 35 & : & 35 & ; & 55 & : & 63 \end{array}$$

les produits ſont 35 : 35 ; 55 : 63 *où* 35 *eſt* = 35, *pendant que* 55 *eſt* < 63.

§. 5. *Si l'on veut avoir des multiplicateurs, qui produiſent quatre multiples tels que le premier ſoit plus grand que le ſecond, pendant que le troiſième eſt moindre que le quatrième, il faut prendre pour multiplicateurs les termes d'une raiſon moyenne entre les deux raiſons propoſées, & multiplier les antécédens par le conſéquent de cette raiſon moyenne, & les conſéquens par ſon antécédent.*

Par ex: L'expoſant de la raiſon 7 : 5. *eſt* $\frac{7}{5}$, *& celui de la raiſon* 11 : 9 *eſt* $\frac{11}{9}$, *ou bien* $1\frac{2}{9} = \frac{6\frac{1}{9}}{5}$ *(en multipliant & rédiviſant par* 5*). Par conſéquent il faut prendre une raiſon* < *celle de* 7 : 5 *&* > *celle de* $6\frac{1}{9}$: 5. *Or il eſt évident que tous les nombres aſſignables entre les limi-*

DEFINITIONS.

limites $6\frac{1}{9}$ & 7 fournissent une telle raison, en les comparant au nombre 5. Qu'on s'arrête par ex: à la raison de $6\frac{3}{9} : 5$, ou $6\frac{1}{3} : 5$, qui se réduit à la raison de 19 : 15, on a deux multiplicateurs satisfaisans à la question. Car le premier produit 35, est $>$ le second produit $31\frac{2}{3}$, pendant que le troisième 55 est $<$ le quatrième 57; voici le calcul;

$$\begin{array}{cccccccc} 7 & : & 5 & ; & 11 & ; & 9 \\ 5 & & 6\frac{1}{3} & & 5 & & 6\frac{1}{3} \\ \hline 35 & : & 31\frac{2}{3} & ; & 55 & : & 57 \end{array}$$

VIII.

La proportion est une similitude des raisons. (*Voyez* Def. V §. 5 & 6).

IX.

La proportion consiste au moins en trois termes.

§. 1. *La proportion consistant dans l'égalité de deux raisons, & chaque raison ayant deux termes, la proportion a proprement quatre termes, dont le premier & le quatrième sont appellés* extrêmes, *& le second & le troisième* moyens. *On regarde ces quatre termes comme n'en faisant que trois, quand le conséquent de la première raison tient en même tems lieu de l'antécédent de la seconde raison. C'est pour cela qu'on distingue les proportions en discrètes & continues. Une proportion est* discrète, *lorsque les deux termes moyens sont inégaux, & elle est nommée* continue, *quand ces mêmes termes sont égaux.*

Ainsi cette proportion $2 : 4 = 5 : 10$ *est discrète, parceque les deux termes moyens 4 & 5 sont inégaux. Au contraire la proportion* $2 : 4 = 4 : 8$ *est du nombre des continues, à cause de l'égalité des termes moyens 4 & 4.*

§. 2. *Une suite de grandeurs en proportion continue, forme une* progression Géométrique. *Tels sont les nombres*

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, &c.

De même 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, &c.

Dans ces deux suites il règne partout la même raison entre les deux termes qui se succèdent immédiatement, c. à. d.

$$1 : 2 = 2 : 4 = 4 : 8 = 8 : 16 \text{ ou}$$
$$1 : 3 = 3 : 9 = 9 : 27 = 27 : 81 \text{ \&c.}$$

§. 3. *On appelle* termes équidistans d'une progression, *deux termes qui se trouvent séparés par un même nombre d'autres termes. Ainsi dans la première de ces progressions, les termes 1 & 8, 8 & 64 sont équidistans, parceque de part & d'autre ils se trouvent séparés par deux termes intermédiaires.*

§. 4. *Cette*

DEFINITIONS.

§. 4. *Cette Définition fait voir, qu'entre les termes équidiſtans, il ſe trouve toujours le même nombre de raiſons égales, ou bien, que pour arriver de l'un des équidiſtans* 1, *à l'autre* 8, *il faut toujours paſſer par trois raiſons égales* 1 : 2, 2 : 4, 4 : 8; *comme pour arriver du terme* 8 *à l'équidiſtant* 64, *il faut paſſer par les trois raiſons* 8 : 16, 16 : 32, 32 : 64 *égales entr'elles & à chacune des trois précédentes. On démontrera en ſon lieu, que tous les termes équidiſtans d'une progreſſion Géométrique ſont en même raiſon.* (*Voyez l'Appendice de ce V Livre Prop. VI*).

§. 5. *On peut appeller* raiſon primordiale d'une progreſſion, *celle qui ſe trouve entre les deux termes avec leſquels on a commencé à former la progreſſion, ou qu'on regarde comme ayant ſervi à la commencer. Par exemple. Si on part de la raiſon de* 1 : 2, *pour faire comme* 1 *eſt à* 2 *ainſi* 2 *eſt à* 4; *& comme* 2 *eſt à* 4 *ainſi* 4 *eſt à* 8 *&c. on détermine la progreſſion des nombres* 1, 2, 4, 8, 16 *&c. par les deux premiers termes* 1 *&* 2 *choiſis arbitrairement; c'eſt donc cette raiſon qui ſe trouve entre ces deux premiers termes arbitraires* 1 *&* 2, *qu'on peut appeller la raiſon primordiale de cette progreſſion.*

Si l'on vouloit commencer la progreſſion par les termes 1 *&* 4, *par exemple, on formeroit d'abord la progreſſion,*

1, 4, 16, 64, 256, *&c.*

puis prenant les moyennes proportionelles 2, 8, 32, 128 *&c, entre chaque deux termes, qui ſe ſuivent immédiatement, on trouveroit la même progreſſion.*

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 *&c.*

où il n'y a d'autre différence, ſinon que dans ce dernier cas, on regarde la progreſſion comme née de la raiſon primordiale 1 : 4. *On pourroit prendre pour raiſon primordiale de cette même progreſſion, telle autre raiſon qu'on voudroit; puiſqu'au moyen de la Compoſition & Décompoſition des raiſons, dont il ſera traité à la fin de ce Livre, on peut toujours, d'une raiſon primordiale quelconque, remonter ou deſcendre à toutes les autres raiſons poſſibles.*

X.

Si trois grandeurs ſont proportionelles, on dit que la première eſt à la troiſième *en raiſon doublée de la première à la ſeconde.*

XI.

Si quatre grandeurs ſont proportionelles, on dit que la première eſt à la quatrième en raiſon triplée de la première à la ſeconde. On dira de même *qu'une raiſon eſt quadruplée, quintuplée, ſextuplée &c*, en augmentant d'une unité la dénomination de la raiſon, à meſure que la proportion ſera pouſſée plus loin d'un terme.

§. 1. *Par des* grandeurs proportionelles, *il faut entendre des grandeurs en proportion continue* (Def. IX. § 1), *qui conſtituent une progreſſion Géométrique, où les termes équidiſtans ſont en même*

DEFINITIONS.

même raison. Toutes les raisons pouvant être considérées comme dérivées d'une raison primordiale quelconque, il a paru convenable aux Géomètres, de donner à ces raisons dérivées des dénominations qui indiquent leur dérivation de la raison primordiale. Ainsi, puisqu'on arrive au conséquent 4 *de la raison* 1 : 4, *en passant par les deux raisons* 1 : 2, *&* 2 : 4, *on nomme cette raison de* 1 : 4, *une raison* doublée *de la raison primordiale de* 1 : 2. *Pareillement, comme partant de la même raison primordiale* 1 : 2, *on ne parvient au conséquent* 64, *de la raison dérivée* 1 : 64, *qu'en passant par les six raisons intermédiaires égales*

$$1 : 2 = 2 : 4 = 4 : 8 = 8 : 16 = 16 : 32 = 32 : 64.$$

la raison de 1 : 64, *est appellée une raison* sextuplée *de la raison primordiale* 1 : 2.

Une raison A : B *devient donc* doublée, triplée, quadruplée, *& en général* multipliée *d'une raison primordiale donnée* a : b, *selon le nombre des raisons intermédiaires toutes égales à la raison primordiale* a : b, *qui sont interposées entre les termes* A *&* B.

§. 2. *Pareillement, si entre les deux termes* (1 *&* 64) *d'une raison prise comme primordiale, on place un ou plusieurs termes* (2, 4, 8, 16, 32), *en sorte que ces termes moyens forment avec les extrêmes* (1 *&* 64) *appartenans à la primordiale, une progression continue, les raisons intermédiaires qui subsistent entre le premier terme* (1) *& chacun des moyens* (2, 4, 8 *&c.*), *sont appellées des raisons* sousmultipliées *de la raison primordiale des extrêmes. En particulier, quand il n'y a que deux raisons intermédiaires égales, on nomme l'une & l'autre* sousdoublée *de la raison des extrêmes; quand il y en a trois, chacune est appellée* soustriplée *de la même raison; & ainsi de suite à l'infini. Si par exemple on place entre les termes* 1 *&* 64, *le terme* 8, *on a deux raisons intermédiaires égales* 1 : 8, & 8 : 64 *entre celles des termes extrêmes; dont chacune est nommée* sousdoublée *de la raison de* 1 *à* 64. *Si entre les mêmes extrêmes* 1 *&* 64, *on place les deux moyens* 4, *&* 16, *il en résulte trois raisons intermédiaires égales* 1 : 4 = 4 : 16 = 16 : 64, *dont chacune est nommée* soustriplée *de la raison des extrêmes de* 1 *à* 64.

Ainsi on voit en général que pour avoir une raison, sousquadruplée *par ex., il faut établir entre les termes de la raison primordiale trois termes moyens en proportion continue; & que pour en avoir une* sousquintuplée *de la même raison, il est besoin d'en établir quatre, & de même à l'infini, toujours un terme de moins que n'est le nombre des raisons intermédiaires qui doivent être interposées.*

§. 3. *Au reste ces dénominations tirent leur origine de l'analogie qu'on remarque entre la maniere selon laquelle une grandeur étendue résulte d'une autre grandeur étendue de même genre, & celle selon laquelle une raison peut naître d'une autre raison primordiale. On considère les raisons comme des quantités d'une espèce particuliere, & toutes comme homogènes & comparables entr'elles; Car dans la contemplation des raisons, l'esprit ne s'arrête qu'à la relation, à la quantuplicité des termes, sans faire attention à ce qui peut leur convenir comme grandeurs d'une telle ou telle autre espèce. C'est pour cela qu'on se représente les raisons comme égales, & inégales, & comme étant susceptibles d'une multiplicité, & d'une sousmultiplicité les unes à l'égard des autres; Et on les conçoit ainsi, afin que d'une raison quelconque il puisse naître toutes les autres raisons, par la voye d'une composition & résolution propre à cette espèce* de

DEFINITIONS.

de quantités, de la même maniere que d'une ligne, ou d'une ſurface multipliée ou diviſée convenablement, on peut faire réſulter toutes les lignes & toutes les ſurfaces à l'infini.

Ces idées ſeront mieux développées dans l'Appendice de ce Livre.

XII.

On dit que les antécédens ſont *homologues* (ou *correſpondans*) aux antécédens, & les conſéquens aux conſéquens.

On a vû que les raiſons qui forment une proportion, ſont des ſujets ſemblables. Or les antécédens & les conſéquens ayant la même rélation dans les deux raiſons, ces termes doivent être conſidérés comme des parties ſemblables de deux Touts ſemblables. C'eſt pour cela qu'il faut toujours les comparer dans le même ordre, afin que cette ſimilitude ou correſpondance ne ſoit jamais troublée.

XIII.

On appelle *raiſon alterne* la comparaiſon de l'antécédent de la premiere raiſon à l'antécédent de la ſeconde, & du conſéquent de la premiere raiſon au conſéquent de la ſeconde.

$$\left.\begin{array}{r} \textit{Si } A : B = C : D \\ 4 : 5 = 16 : 20 \end{array}\right\} \textit{ on peut inférer } \left\{\begin{array}{l} A : C = B : D \\ 4 : 16 = 5 : 20. \end{array}\right.$$

Quand on diſpoſe la proportion de cette maniere, on dit communément qu'on le fait en alternant, *ou* alternando.

XIV.

Mais lorſqu'on change les conſéquens en antécédens & les antécédens en conſéquens dans le même ordre, on dit que la comparaiſon des termes ſe fait par *inverſion* de raiſon, ou *invertendo.*

$$\left.\begin{array}{r} A : B = C : D \\ 3 : 9 = 4 : 12 \end{array}\right\} \textit{ Donc invertendo } \left\{\begin{array}{l} B : A = D : C \\ 9 : 3 = 12 : 4. \end{array}\right.$$

XV.

Mais la comparaiſon ſe fait par compoſition, ou *componendo*, quand on compare la ſomme des conſéquens & antécédens à leurs conſéquens reſpectifs.

$$\left.\begin{array}{r} A : B = C : D. \\ 3 : 9 = 4 : 12. \end{array}\right\} \begin{array}{c} \textit{Donc compo-} \\ \textit{nendo} \end{array} \left\{\begin{array}{l} A+B : B = C+D : D. \\ 3+9 : 9 = 4+12 : 12. \end{array}\right.$$

XVI.

On procéde par *diviſion* de raiſon, ou *dividendo*, lorſque l'excès, dont l'antécédent ſurpaſſe ſon conſéquent, eſt comparé au conſéquent.

Si

DEFINITIONS.

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Si}\ A : B = C : D \\ 9 : 3 = 12 : 4. \end{array}\right\} \textit{ on peut faire dividendo } \left\{\begin{array}{l} A - B : B = C - D : D. \\ 9 - 3 : 3 = 12 - 4 : 4. \end{array}\right.$$

XVII.

Et l'on va par *conversion de raison*, ou *convertendo*, quand on compare l'antécédent à l'excès dont ce même antécédent surpasse son conséquent.

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Si}\ A : B = C : D \\ 9 : 3 = 12 : 4 \end{array}\right\} \textit{ il s'ensuit convertendo } \left\{\begin{array}{l} A : A - B = C : C - D. \\ 9 : 9 - 3 = 12 : 12 - 4. \end{array}\right.$$

XVIII.

On argumente *par égalité de raison*, ou *ex æquo*, lorsque comparant deux suites de grandeurs de même nombre, telles que les raisons de la premiére soient égales aux raisons de la seconde, chacune à chacune (soit que la comparaison se fasse dans le méme ordre, soit dans un ordre renversé), on conclut que les extrémes des deux suites sont en proportion.

Le sens de cette Définition est celui-ci; Si A, B, C, D *est une suite de quatre grandeurs,* & a, b, c, d *une suite de quatre autres grandeurs, tellement que*

$$\left.\begin{array}{ccccccc} A & : & B & = & a & : & b \\ B & : & C & = & b & : & c \\ C & : & D & = & c & : & d \end{array}\right\} \textit{ ou dans un ordre renversé } \left\{\begin{array}{ccccccc} A & : & B & = & c & : & d \\ B & : & C & = & b & : & c \\ C & : & D & = & a & : & b \end{array}\right.$$

Dans l'un & l'autre cas il est permis d'inférer ex æquo, *que la raison de la I suite des extrêmes* A : D *est égale à la raison des extrêmes* a : d *de la II suite; ou bien que* A : D = a : d.

$$\begin{array}{lcccc} \text{I.} & A, & B, & C, & D \\ \text{II.} & a, & b, & c, & d \\ \hline & A : & D = & a : & d \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 15, & 3, & 45, & 9 \\ 10, & 2, & 30, & 6 \\ \hline 15 : & 9, = & 10 : & 6 \end{array}$$

XIX.

L'Egalité de raison est appellée *ordonnée* lorsque les raisons de la premiere suite sont égales aux raisons de la seconde suite chacune à chacune, dans le méme ordre direct.

$$\textit{Soit par ex.} \quad \begin{array}{ccccccc} A & : & B & = & a & : & b \\ B & : & C & = & b & : & c \\ C & : & D & = & c & : & d \end{array}$$

Ici les raisons sont égales chacune à chacune, dans le même ordre direct, puisque dans l'une & dans l'autre suite on va de la premiere grandeur vers la derniere Si l'on conclut donc que les extrêmes sont proportionels, ou bien que A : D = a : d, *on dit qu'on argumente par égalité* ordonnée *ou* directe, *autrement ex* æquo ordinate.

DEFINITIONS.

XX.

Au contraire, l'*égalité de raiſon* eſt appellée *renverſée* ou *troublée*, dans le ſecond cas, c. à. d. lorſque les raiſons de la premiere ſuite ſont égales à celles de la ſeconde ſuite chacune à chacune; en prenant ces dernieres dans un ordre renverſé.

§. 1. *Soient encore les deux ſuites de grandeurs*

$$\left.\begin{array}{l} A,\ B,\ C,\ D \\ a,\ b,\ c,\ d. \end{array}\right\} \text{où l'on ſuppoſe} \left\{\begin{array}{l} A : B = c : d \\ B : C = b : c \\ C : D = a : b \end{array}\right.$$

Ici les raiſons de la I ſuite ſont égales aux raiſons de la II ſuite, chacune à chacune, mais dans un ordre renverſé, tellement que la raiſon entre la premiere & la ſeconde grandeur de la I ſuite, eſt égale à la raiſon entre la pénultiéme & la derniere grandeur de la II ſuite &c. & ainſi de même en avançant dans la premiere & en rétrogradant dans la ſeconde. Si l'on conclut donc que $A : D = a : d$,
on nomme cette analogie ex æquo inverſè *ou* perturbatè.

§. 2. *Les commençans n'auront pas de peine à diſtinguer le cas de l'égalité ordonnée ou directe, de celui de l'égalité troublée ou renverſée, s'ils ſe ſouviennent que lorſque deux termes ſe retrouvent dans deux proportions, & qu'ils y occupent indifféremment ou la premiere & la troiſieme, ou la ſeconde & la quatrieme place, c'eſt toujours le cas de l'égalité ordonnée; par ex.*

$$\begin{array}{c} A : B = a : b \\ B : C = b : c \\ \hline A : C = a : c. \end{array} \quad \textit{ou} \quad \begin{array}{c} B : A = b : a \\ B : C = b : c \\ \hline A : C = a : c. \end{array} \quad \textit{ou} \quad \begin{array}{c} A : B = a : b \\ C : B = c : b \\ \hline A : C = a : c. \end{array}$$

On a toujours deux proportions qui ont de commun les deux termes B & b, *occupants la premiere & la troiſieme, ou la ſeconde & la quatrieme place; par conſéquent, les deux autres termes* A & C *ſont proportionels aux deux autres* a & c, *en les prenant dans le même ordre.*

§. 3. *Au contraire, lorſque les deux termes, qui ſont communs aux deux proportions, ou ſont les moyens ou les extrêmes, c'eſt le cas de l'égalité troublée; par ex: ſi*

$$\begin{array}{c} A : B = b : c \\ B : C = a : b \\ \hline A : C = a : c \end{array} \quad \textit{ou bien} \quad \begin{array}{c} B : A = c : b \\ B : C = a : b \\ \hline A : C = a : c \end{array} \quad \textit{ou} \quad \begin{array}{c} A : B = b : c. \\ C : B = b : a. \\ \hline A : C = a : c. \end{array}$$

Dans ces trois cas les termes B & b, *qui ſe retrouvent dans les deux proportions, y ſont ou les extrêmes ou les moyens; par conſéquent les autres termes ſont en proportion, tellement que les deux termes, qui viennent de la même proportion* A & C *ou* a & c, *demeurent extrêmes ou moyens. Ou, ce qui revient au même, les quatre autres termes différens* A, C & a, c *ſont proportionels comparés dans un ordre renverſé, en ce que la comparaiſon deſcend de la I proportion dans la II, & remonte auſſitôt de la II à la I.*

Ce ſont les dénominations qu'on donne aux différentes manieres de conclure par analogie, préſentement l'Auteur va démontrer qu'elles ſont légitimes.

DEMANDES.

I.

ON demande qu'on puiſſe doubler, tripler, quadrupler une grandeur donnée quelconque, ou en général qu'on puiſſe en prendre tel multiple qu'on voudra.

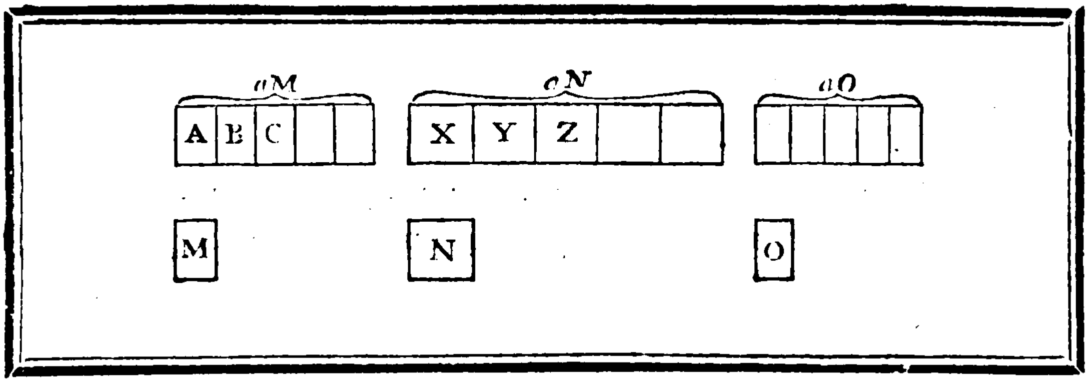
I I.

Que dans une grandeur plus grande, on puiſſe prendre une ou pluſieurs parties égales à une moindre grandeur de même genre.

ABBREVIATIONS.

Gdr. . . . . . Grandeur.

Equimult. . . . Equimultiple.



PROPOSITION I. THEOREME I.

SI plusieurs grandeurs (a M, a N, a O) sont équimultiples d'un pareil nombre d'autres grandeurs (M, N, O &c), chacune de chacune, la somme (a M + a N + a O &c) des premieres sera autant multiple de la somme (M + N + O &c) des secondes, qu'une des premieres (a M) est multiple de sa correspondante (M).

Hypothese.				These.
a M, a N, a O	*sont des équimultiples de*	M, N, O	*chacune de chacune.*	a M + a N + a O *est autant multiple de* M + N + O *que* a M *l'est de* M, *ou* a N *de* N *&c.*

Préparation.

La Gdr. a M étant autant multiple de M, que a N l'est de N (*Hyp*.), on peut prendre dans a N autant de grandeurs X, Y, Z &c. chacune égale à sa correspondante N, qu'on en peut prendre dans a M, comme A, B, C, &c. chacune égale à sa correspondante M.

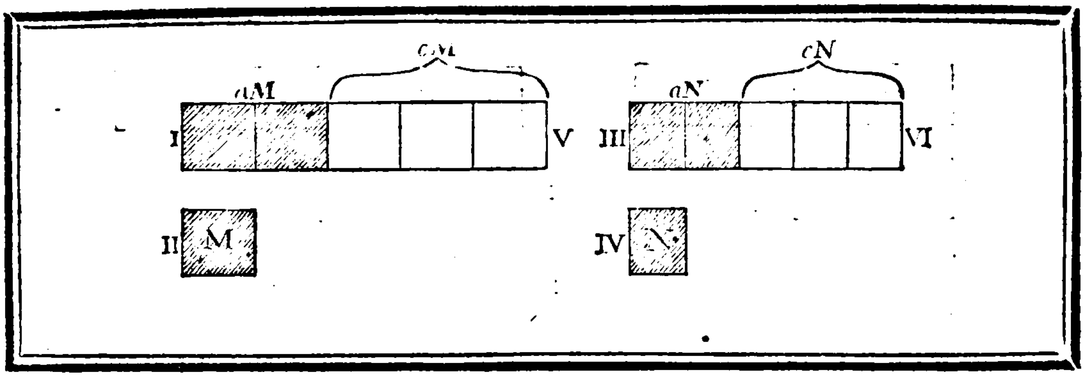
Faites donc A, B, C égale chacune à M & X, Y, Z égale chacune à N. — Dem. 2.

Demonstration.

PUisque a M est autant multiple de M, que a N l'est de N. (*Hyp*),

1. La gdr. a M doit contenir autant de grandeurs A, B, C &c. égales chacune à M, que a N en contient d'égales à N, comme X, Y, Z &c.
   Mais A = M & X = N (*Prep*.),
2. Donc A + X = M + N. — Ax. 2. L. 1.
   De même B étant = M & Y = N (*Prep*.),
3. Il suit que B + Y = M + N. — Ax. 2. L. 1.
   Derechef, puisque C = M & Z = N (*Prep*.),
4. On aura C + Z = M + N. — Ax. 2. L. 1.
   Par conséquent il se trouve dans a M autant de grandeurs = M, Qu'il s'en trouve dans a M + a N = M + N.
5. D'où il suit que a M + a N est autant multiple de M + N, que a M l'est de M, ou que a N l'est de N, & par la même raison a M + a N + a O autant multiple de M + N + O, que a M l'est de M ou a N de N &c.

C. Q. F. D.



PROPOSITION II. *THEOREME II.*

SI la premiere grandeur (*a*M) eſt multiple de la ſeconde (M), autant que la troiſieme (*a* N) l'eſt de la quatrieme (N); & que la cinquieme (*c*M) ſoit encore multiple de la ſeconde (M), autant que la ſixieme (*c*N) l'eſt de la quatrieme (N): la grandeur (*a*M + *c*M) compoſée de la premiere & cinquieme, eſt multiple de la ſeconde (M), autant que la grandeur (*a*N + *c*N) compoſée de la troiſieme & ſixieme l'eſt de la quatrieme (N).

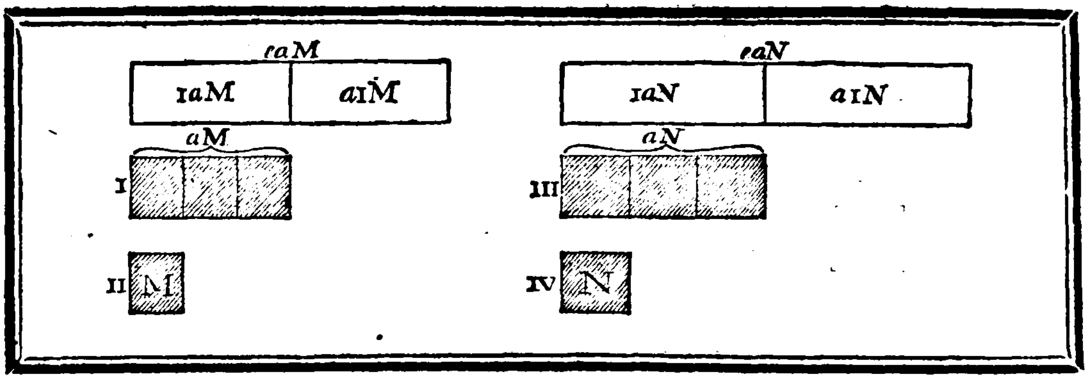
Hypothese.							These.
a M		*c* M		M			*a* M + *c* M *eſt autant multiple de* M
&	*de même que*	&	*ſont des équimult de*	&	*chacune de chacune.*		*que a* N + *c* N *l'eſt de* N.
a N		*c* N		N			

Demonstration.

PUiſque *a*M eſt autant multiple de M, que *a* N l'eſt de N (*Hyp.*),

1. La grandeur *a* M contient M le même nombre de fois que *a* N contient N.
   De même, puiſque *c* M eſt autant multiple de M, que *c* N l'eſt de N (*Hyp.*),
2. La grandeur *c* M contient M le même nombre de fois que *c* N contient N.
3. Partant la grandeur entiere *a* M + *c* M contient M le même nombre de fois que la grandeur entiere *a* N + *c* N contient N. Ax. 2. L. 1.
4. Par conſequent *a* M + *c* M eſt autant multiple de M, que *a* N + *c* N l'eſt de N.

C. Q. F. D.



PROPOSITION III. THEOREME III.

SI la premiere grandeur (a M) est multiple de la seconde M, autant que la troisieme (a N) l'est de la quatrieme (N), & qu'on prenne des équimultiples (eaM, eaN) de la premiere (a M) & de la troisieme (a N): ces deux dernieres grandeurs (eaM, eaN) seront également multiples de la seconde (M) & de la quatrieme (N).

Hypothese.

1. a M & a N *sont deux équimultiples de* M & N *chacune de chacune.*
2. eaM & eaN *sont deux équimultiples de* a M & a N *chacune de chacune.*

These.

ea M est autant multiple de M, *que ea N l'est de* N.

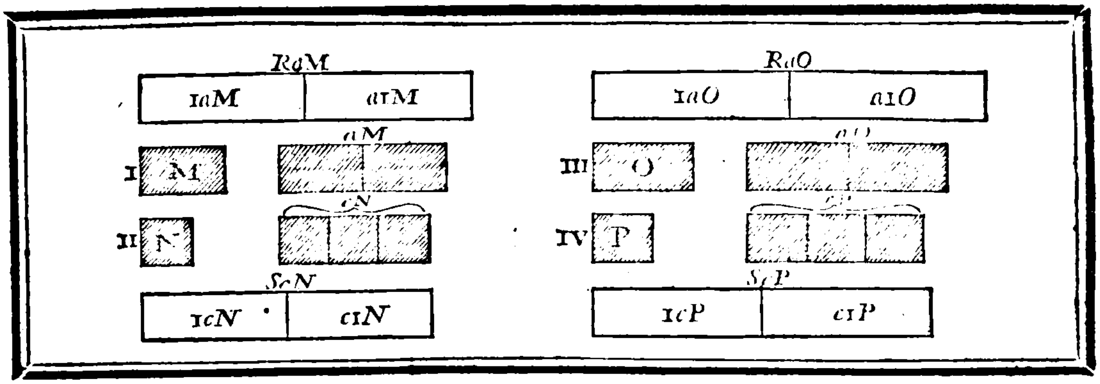
Préparation.

Partagez donc ea M en ses parties 1aM, a1M &c. chacune $=$ aM.
& ea N en ses parties 1aN, a1N &c. chacune $=$ aN.

Demonstration.

PUisque ea M est autant multiple de aM, que eaN l'est de aN (*Hyp.* 2),
1. Il se trouve dans eaM autant de grandeurs $=$ a M,
qu'il s'en trouve dans eaN $=$ a N.
2. Le nombre des parties 1aM, a1M &c. dans eaM, est donc égal au nombre des parties 1aN, a1N &c. dans eaN.
Mais par la raison que aM est autant multiple de M, que a N l'est de N, & que 1aM$=$$a$M, 1$aN=$$a$N,
3. La grandeur 1aM est autant multiple de M que 1aN l'est de N.
4. Et par la même raison a1M est autant multiple de M, que a1N l'est de N.
Puis donc que la I gdr 1aM est autant multiple de la II[e] gdr M,
que la III gdr 1a N l'est de la IV[e] gdr N,
& que la V gdr a1 M est autant multiple de la II[e] gdr M,
que la VI gdr a1N l'est de la IV[e] gdr N,
5. Il s'ensuit que la grandeur eaM, composée de la I. & V gdr 1aM + a1M, est autant multiple de la II gdr M, que la grandeur ea N, composée de la III & VI gdr 1aN+a1N, l'est de la IV gdr N. Prop. 2. L. 5.

C. Q. F. D.



PROPOSITION IV. *THEOREME IV.*

SI quatre grandeurs (M, N, O, P) sont proportionelles : les équimultiples (*a* M, *a* O) de la premiere (M) & de la troisieme (O), comparés, chacun à chacun, à des équimultiples (*c* N, *c* P) de la seconde (N) & de la quatrieme (P), seront en même raison, selon quelque multiplication que ce puisse être.

HYPOTHESE.	THESE.
I. M : N = O : P.	*a* M : *c* N : = *a* O : *c* P.
II. {*a* M & *a* O} *sont des équimult. de* {M & O} *item* {*c* N & *c* P} *des équimult. de* {N & P}.	

Préparation.

1. Prenez R *a* M, R *a* O équimultiples de *a* M & de *a* O. }Dem. 1. L. 5.
2. De même S *c* N, S *c* P équimultiples de *c* N & de *c* P.

DEMONSTRATION.

PUis donc que *a* M est autant multiple de M, que *a* O l'est de O (*Hyp.* 2), & que les grandeurs R *a* M, R *a* O sont des équimultiples des grandeurs *a* M, *a* O (*Prep.* 1),

1. La grandeur R *a* M est autant multiple de M, que la grandeur R *a* O l'est de O. Prop. 3. L. 5.
2. Par la même raison ; la grandeur S *c* N est autant multiple de N, que S *c* P l'est de P.

Et d'autant que M : N = O : P (*Hyp.* 1), & que R *a* M, R *a* O sont des équimultiples quelconques du I terme M & du III O ; & S *c* N, S *c* P des équimultiples quelconques du II terme N & du IV P (*Arg.* 1 & 2),

3. Si R *a* M est >, = ou < S *c* N, pareillement R *a* O sera >, = ou < S *c* P. Def. 5. L. 5.

Mais les grandeurs R *a* M & R *a* O sont des équimultiples quelconques des grandeurs *a* M & *a* O, & les grandeurs S *c* N, S *c* P des équimultiples quelconques des grandeurs *c* N, & *c* P (*Prep.* 1 & 2).

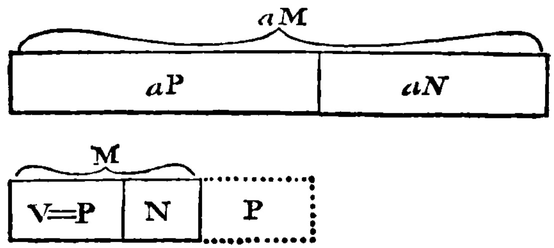
4. Partant, la raison, de *a* M à *c* N est égale à la raison de *a* O à *c* P ; ou *a* M : *c* N = *a* O : *c* P. Def. 5. L. 5.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

IL s'ensuit de l'*Arg.* 3, que, selon que S *c* N est >, =, ou < R *a* M ; pareillement S *c* P sera >, = ou < R *a* O ; c'est pourquoi *c* N : *a* M = *c* P : *a* O (*Def.* 5. *L.* 5).

Donc, si quatre grandeurs sont proportionelles, elles le sont aussi par inversion de raison, ou *invertendo*.



PROPOSITION V. *THEOREME V.*

SI une grandeur (aM) eſt autant multiple d'une autre grandeur (M), que la retranchée (aN) l'eſt de la retranchée (N), le reſte (aP) ſera autant multiple du reſte (V), que la grandeur entiére (aM), l'eſt de la grandeur entiére (M).

Hypothese.

I. *Les gdrs.* aM & M *ſont deux Touts, les gdrs.* aN & N *leurs parties retranchées* & *les gdrs.* aP & V *les reſtes.*

II. aM *eſt multiple de* M, *autant que* aN *l'eſt de* N.

These.

aP *eſt autant multiple de* V, *que* aM *l'eſt de* M.

Préparation.

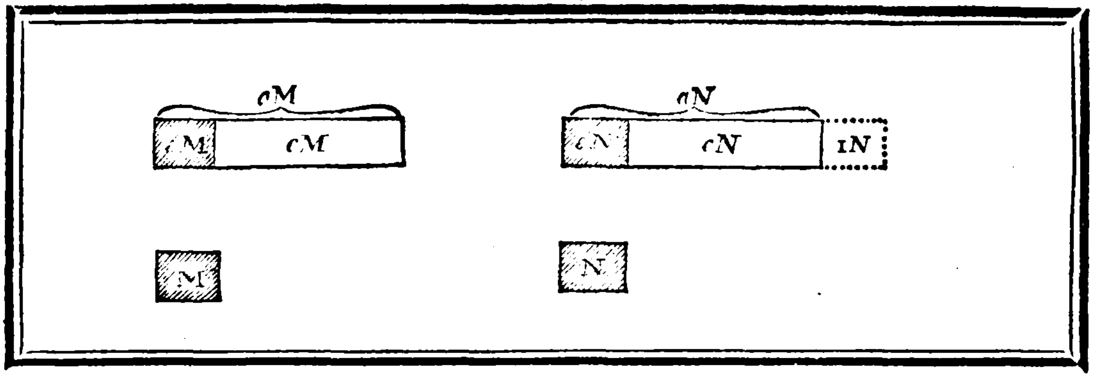
Prenez une grandeur P telle, que aP ſoit autant multiple de P, que aN l'eſt de N, ou aM de M. Dem. 2. L. 5.

Demonstration.

PUis donc que aN eſt autant multiple de N, que aP l'eſt de P *(Prep.)*,

1. La ſomme $aN + aP$, ou aM, des premieres, eſt autant multiple de la ſomme $N+P$ des dernieres, que aN l'eſt de N. Prop. 1. L. 5.
   Mais aM eſt autant multiple de M, ou de $N+V$, que aN l'eſt de N (*Hyp.* 2);
2. Partant, la même gdr. aM eſt équimultiple des gdrs. $N+P$, & $N+V$.
3. Par conſéquent, $N+P = N+V$. Ax. 7. L. 1.
   Et retranchant la gdr. commune N,
4. Il s'enſuit que la gdr. P eſt $=$ a la gdr. V. Ax. 3. L. 1.
5. Partant, aP étant autant multiple de P, que aM l'eſt de M *(Prep.)*, le même aP eſt autant multiple de V, que aM l'eſt de M.

C. Q. F. D.



PROPOSITION VI. *THEOREME VI.*

SI deux grandeurs (a M, a N) sont équimultiples de deux autres grandeurs (M & N), chacune de chacune, & les retranchées (c M & c N) équimultiples des mêmes grandeurs, les restes (e M & e N) seront respectivement ou égaux à ces grandeurs (M & N), ou ils en seront des équimultiples.

Hypothese.

I. a M & a N *sont deux Touts,* c M & c N *leurs parties retranchées,* e M & e N *leurs restes.*

II. a M & a N *item* c M & c N *sont des équimult. de* M & N

These.

I. *Si* e M $=$ M, e N *sera* $=$ N.

II. *Si* e M *est multiple de* M, e N *sera équimultiple de* N.

CAS I. Si e M est $=$ M.

Préparation.

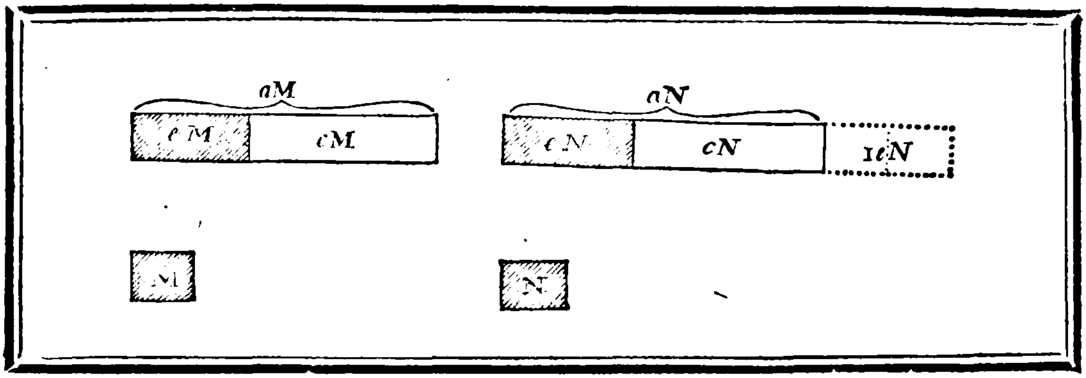
Faites 1 N $=$ N. Dem. 2. L. 5.

Demonstration.

PUisque c M est autant multiple de M, que c N l'est de N (*Hyp.* 2), & que e M $=$ M (*Sup.* 1), & 1 N $=$ N (*Prep.*),

1. La gdr. c M $+$ e M, ou a M, sera autant multiple de M, que c N $+$ 1 N l'est de N.
   Or a M étant autant multiple de M, que a N, ou e N $+$ c N l'est de N (*Hyp.* 2).
2. Les deux gdrs. c N $+$ 1 N & e N $+$ c N sont équimultiples de la même gdr. N.
3. C'est pourquoi la gdr. c N $+$ 1 N $=$ e N $+$ c N. Ax. 6. L. 1.
   Retranchant donc la gdr. commune c N,
4. Il suit que 1 N est $=$ e N. Ax. 3. L. 1.
   Mais 1 N est $=$ N (*Prep.*);
5. Partant, e N est $=$ N. Ax. 1. L. 1.
6. Donc si e M est $=$ M, e N est $=$ N.

C. Q. F. D. 1.



C A S II. Si eM eſt multiple de M.

Préparation.

Prenez $1eN$ autant multiple de N, que eM l'eſt de M. Dem. 1. L. 5.

DEMONSTRATION.

PUiſque eM eſt autant multiple de M, que $1eN$ l'eſt de N (*Prep.*), & que cM eſt autant multiple de M, que cN l'eſt de N (*Hyp.* 2),

1. La grandeur $eM+cM$, ou aM, ſera autant multiple de M, que $1eN+cN$ l'eſt de N. Prop. 2. L. 5.

   Mais aM étant autant multiple de M, que aN, ou $eN+cN$, l'eſt de N (*Hyp.* 2),

2. Les deux gdrs. $1eN+cN$ & $eN+cN$ ſont donc équimultiples de la même gdr. N.

3. Par conſéquent, $1eN+cN$ eſt $= eN+cN$. Ax. 6. L. 1.

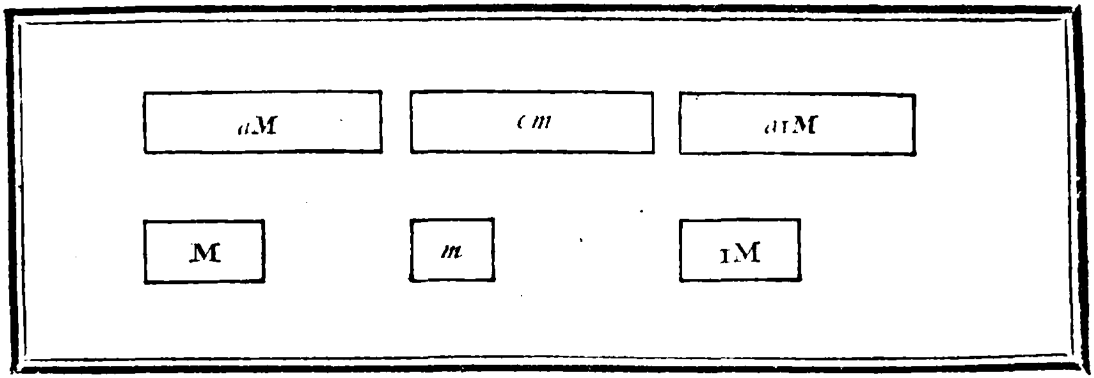
   En retranchant donc la gdr. commune cN,

4. Il ſuit que la grandeur $1eN$ eſt $= eN$. Ax. 3. L. 1.

   Or $1eN$ eſt autant multiple de N, que eM l'eſt de M (*Prep.*);

5. Donc, ſi eM eſt multiple de M, eN ſera équimultiple de N.

C. Q. F. D. 11.



PROPOSITION VII. *THEOREME VII.*

LEs grandeurs égales (M & 1 M), ont même raiſon à une même grandeur (*m*); & une même grandeur (*m*) a même raiſon à des grandeurs égales (M & 1 M).

Hypothese.

M & 1 M *ſont deux gdrs. égales, & m en eſt une troiſieme.*

These.

I. $M : m = 1M : m$.
II. $m : M = m : 1M$.

Préparation.

1. Prenez *a* M & *a* 1 M équimultiples de M & de 1 M.
2. Et *em* un multiple quelconque de *m*. } Dem. 1. L. 5.

Demonstration.

PUiſque *a*M & *a*1M ſont des équimult. de M & de 1M (*Prep.* 1), & que $M = 1M$ (*Hyp.*),

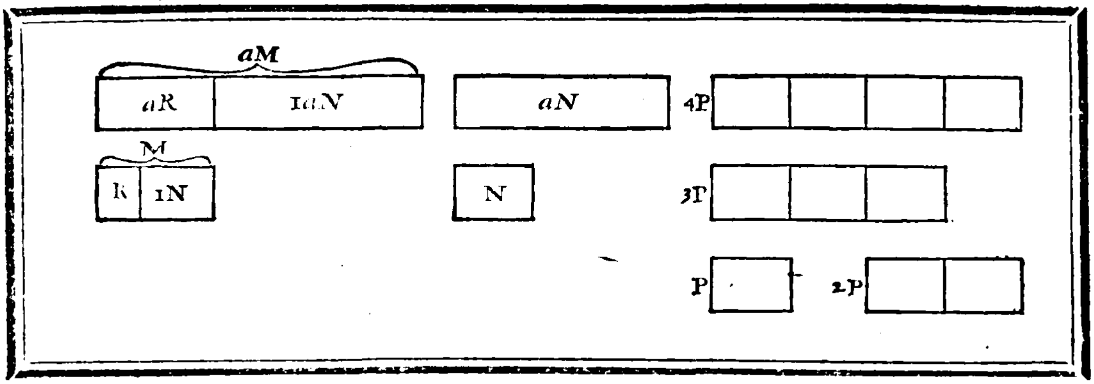
1. La gdr *a* M eſt $=$ *a* 1 M. Ax. 6. L. 1.
2. Donc, ſi *a* M eſt $>$, $=$, ou $<$ *em*; *a* 1 M ſera pareillement $>$, $=$, ou $<$ *em*. Mais *a*M & *a*1M ſont des équimult. du I terme M & du III terme 1M, comme *em* & *em* en ſont du II terme *m* & du IV terme *m*;
3. Partant $M : m = 1M : m$. Def. 5. L. 5.

C. Q. F. D. I.

Et puiſque $aM = a1M$ (*Arg.* 1),

4. Il ſuit encore que, ſi *em* eſt $>$, $=$ ou $<$ *a*M, le même *em* doit en même tems être $>$, $=$ ou $<$ *a*1M.
5. Donc, $m : M = m : 1M$. Def. 5. L. 5.

C. Q. F. D. II.



PROPOSITION VIII. *THEOREME VIII.*

Si deux grandeurs (M & N) sont inégales, la plus grande (M) aura une plus grande raison à une même grandeur (P), que la plus petite (N); & au contraire la même grandeur (P) aura une plus grande raison à la plus petite (N), qu'à la plus grande (M).

HYPOTHESE.	THESE.
I. M $>$ N.	*I.* M : P $>$ N : P.
II. P *est une gdr. quelconque.*	*II.* P : N $>$ P : M.

I. *Préparation.*

1. Rétranchez de la plus grande M la partie 1 N $=$ à la plus petite N;
   Et le reste R sera ou $<$, ou $>$ ou enfin $=$ N;
   Supposez premierement que ce reste soit $<$ N.
2. De ce reste R prenez un multiple *a* R $>$ P,
3. Autant que *a* R est multiple de R, prenez 1 *a* N & *a* N multiples de 1 N & de N. } Dem. 1. L. 5.
4. Faites la gdr. 2 P double de P; la gdr 3 P triple de P; & ainsi de suite jusques à ce que vous soyez parvenu au premier multiple de P, qui surpasse *a* N, que vous supposerez être 4 P.

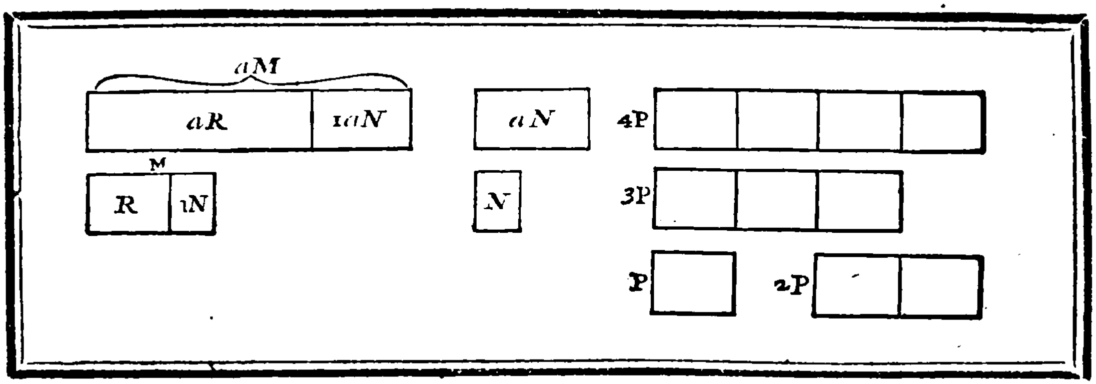
DEMONSTRATION.

Puisque 4 P est le premier des multiples de P, qui est $>$ *a* N (*Prep.* 4),
1. Le multiple précédent 3 P n'est pas $>$ *a* N; Ou bien *a* N n'est pas $<$ 3 P.
De plus *a* R & 1 *a* N étant équimult. de R & de 1 N (*Prep.* 3),
2. La gdr. $a\overline{R+1\,aN}$, ou *a* M est autant multiple de $\overline{R+1\,N}$, ou M que *a* R l'est de R, Prop. 1. L. 5.
Ou bien que *a* N de N. (*Prep.* 3).
3. Donc *a* M & *a* N sont des équimult. de M & de N.
D'ailleurs; *a* N & 1 *a* N étant des équimult. des gdrs. égales N & 1 N (*Prep.* 3 & 1),
4. La gdr. *a* N est $=$ 1 *a* N. Ax. 6. L. 1.
Mais *a* N n'est pas $<$ 3 P (*Arg.* 1);
5. Partant 1 *a* N n'est pas non plus $<$ 3 P.
Or *a* R est $>$ P. (*Prep.* 2).
6. Donc, en ajoutant, $a\overline{R+1\,aN}$, ou *a* M $>$ 4 P.
Puis donc que *a* M est $>$ 4 P, & *a* N $<$ 4 P (*Prep.* 4); & que *a* M & *a* N sont des equimult. des antécédens M & N, & 4 P & 4 P d'autres équimult. des conséquens P & P (*Arg.* 3 & *Prep.* 4).
7. Il suit que M : P $>$ N : P. Def. 7. L. 5.

C. Q. F. D. I.

De plus, comme on vient d'établir que *a* N est $<$ 4 P (*Prep.* 4), & *a* M $>$ 4 P (*Arg.* 6),
8. Il est évident que la gdr. 4 P est $>$ *a* N, & que la même gdr. 4 P est $<$ *a* M.
Or 4 P & 4 P étant des équimult. des antécédens P & P; & *a* N & *a* M d'autres équimult. des conséquens N & M,
9. Il suit que P : N $>$ P : M. Def. 7. L. 5.

C. Q. F. D. II.



II. *Préparation.*

Si on suppose en second lieu R $>$ 1 N ou N.

5. Prenez de 1 N un multiple 1 a N $>$ P.
6. Et autant que 1 a N est multiple de 1 N, prenez a R multiple de R, item a N multiple de N. Dem. 1. L. 5.
7. Prenez encore 4 P pour le premier multiple de P $>$ a R; ainsi le multiple précédent 3 P ne sera pas $>$ a R, ou bien a R ne sera pas $<$ 3 P.

Demonstration.

D'Abord on prouvera, comme dans le raisonnement précédent (*Arg.* 1. 2 & 3), que

1. Les gdrs. a M & a N sont équimult. des gdrs. M & N.
De plus, a R & a N étant des équimult. de R & de N (*Prep.* 6), & R étant $>$ N (*Sup.*),
2. Il s'ensuit que a R est $>$ a N.
Maintenant a R n'étant pas $<$ 3 P (*Prep.* 7),
Et la gdr. 1 a N étant $>$ P (*Prep.* 5),
3. On aura, en ajoutant a $\overline{\text{R} + 1\,a\,\text{N}}$, ou a M $>$ 4 P.
Mais a R étant $<$ 4 P (*Prep.* 7), & ce même a R étant $>$ a N (*Arg.* 2),
4. A plus forte raison a N est $<$ 4 P.
Or a M & a N sont des équimult. des antécédens M & N (*Arg.* 1), & 4 P & 4 P d'autres équimult. des conséquens; P & P & de plus a M $>$ 4 P, & a N $<$ 4 P (*Arg.* 3 & 4).
5. Parconséquent M : P $>$ N : P. Def. 7. L. 5.

C. Q. F. D. I.

De plus, sans changer de préparation, on démontre comme dans le cas précédent (*Arg.* 8 & 9). que

6. La raison de P : N est $>$ la raison de P : M.

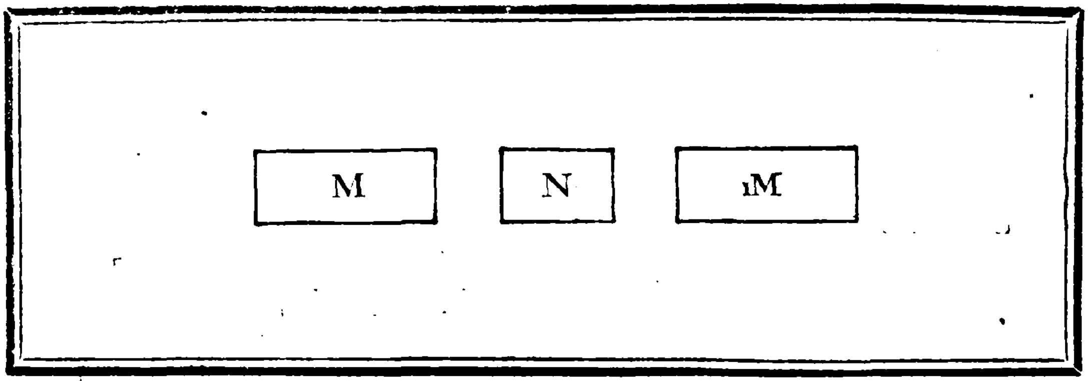
C. Q. F. D. II.

III.

Et en appliquant la même préparation & le même raisonnement au dernier Cas lorsque R $=$ 1 N,

7. On achevera la démonstration comme dans les deux Cas précédens.

C. Q. F. D. I & II.



PROPOSITION IX. *THEOREME IX.*

Les grandeurs (M & 1 M) qui ſont en même raiſon à une même grandeur (N): ſont égales entr'elles. Et celles (M & 1 M) auxquelles une même grandeur (N) a même raiſon : ſont auſſi égales entr'elles.

HYPOTHESE.	THESE.
M : N = 1 M : N.	*La gdr.* M = 1 M.

DEMONSTRATION.

I.

Sinon, les deux gdrs. M & 1 M ſont inégales.

1. Les deux gdrs. M & 1 M n'ont donc pas même raiſon à la même gdr. N. Prop. 8. L. 5.
Mais elles ont même raiſon à cette même gdr. N (*Hyp.*);
2. La gdr. M eſt donc = à la gdr. 1 M.

C. Q. F. D.

HYPOTHESE.	THESE.
N : M = N : 1 M.	*La gdr.* M = 1 M.

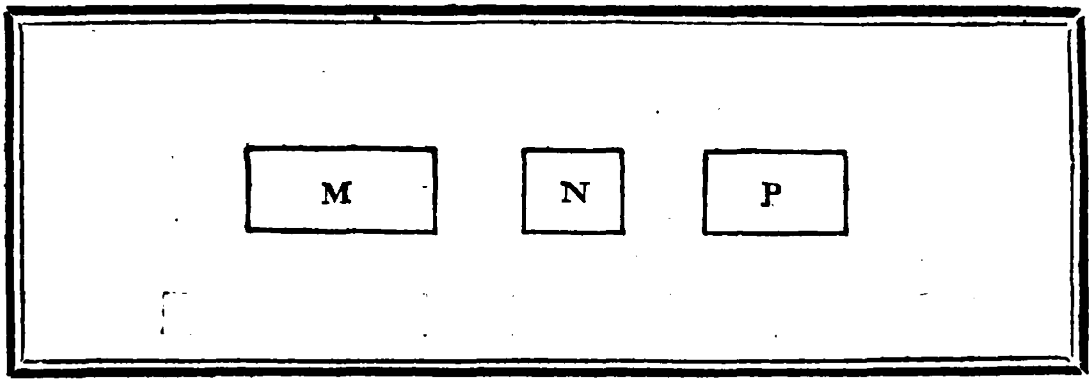
DEMONSTRATION.

II.

Sinon, les deux gdrs. M & 1 M ſont inégales.

1. La même gdr. N n'a donc pas même raiſon aux deux gdrs. M & 1 M. Prop. 8. L. 5.
Or elle a même raiſon à ces deux gdrs. (*Hyp.*);
2. Donc la gdr. M eſt = à la gdr. 1 M.

C. Q. F. D.



PROPOSITION X. *THEOREME X.*

DE deux grandeurs (M & P), celle (M) qui a plus grande raiſon à une méme (N), eſt la plus grande. Au contraire, celle (P) à laquelle une même grandeur (N) a plus grande raiſon, eſt la plus petite.

HYPOTHESE.	THESE.
M : N *eſt* $>$ P : N.	*La gdr.* M *eſt* $>$ P.

DEMONSTRATION.

I.

Sinon; M eſt $=$ P, ou $<$ P.

CAS I. Si M eſt $=$ P.

1. LEs deux gdrs. M & P auroient donc même raiſon à la même gdr. N. Prop. 7. L. 5.
   Or elles n'ont point même raiſon à la même gdr. N (*Hyp.*);
2. La gdr. M n'eſt donc point $=$ à la gdr. P.

CAS II. Si M eſt $<$ P.

3. LA raiſon de M : N feroit $<$ la raiſon P : N. Prop. 8. L. 5.
   Or la raiſon de M : N n'eſt pas $<$ la raiſon P : N (*Hyp.*);
4. Donc la gdr. M n'eſt pas $<$ la gdr. P.
   Mais M n'étant pas non plus $=$ P (*Arg.* 2),
5. Il reſte donc que M ſoit $>$ P. C. Q. F. D. 1.

HYPOTHESE.	THESE
N : P $>$ N : M.	*La gdr.* P *eſt* $<$ M.

DEMONSTRATION.

II.

Sinon; P eſt $=$, ou $>$ M.

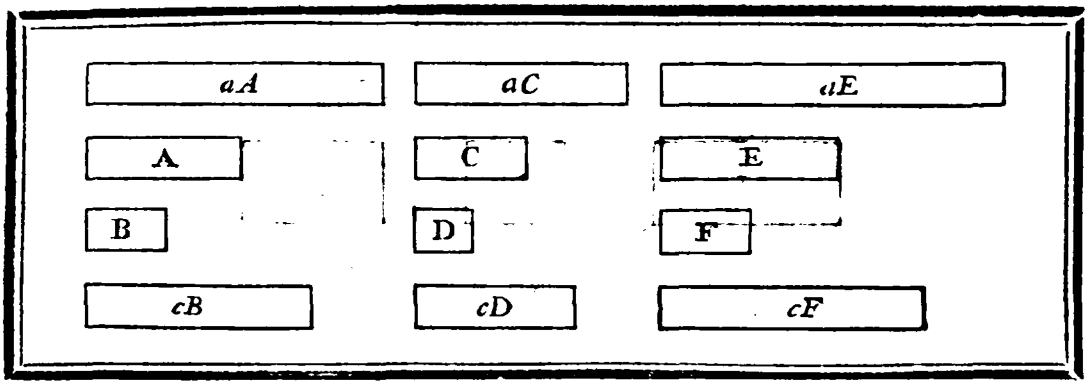
CAS I. Si P eſt $=$ M.

1. LA raiſon N : M devroit être $=$ à la raiſon de N : P. Prop. 7. L. 5.
2. Ce qui étant contraire à l'hypothèſe, P ne ſera pas $=$ M.

CAS II. Si P eſt $>$ M.

3. LA raiſon N : M devient $>$ la raiſon N : P. Prop. 8. L. 5.
4. Ce qui étant encore contraire à l'hypothèſe, P ne ſera pas $>$ M.
   Mais P n'eſt pas non plus $=$ M (*Arg.* 2);
5. Il reſte donc que P ſoit $<$ M.

C. Q. F. D. II.



PROPOSITION XI. *THEOREME XI.*

LEs raifons (A : B & E : F) qui font égales à une même troifieme raifon (C:D), font égales entr'elles.

Hypothese.

Les raifons $\begin{cases} A : B \\ \text{\&} \\ E : F \end{cases}$ *font* = *à la même raifon* C : D.

These.

A : B = E : F.

Préparation.

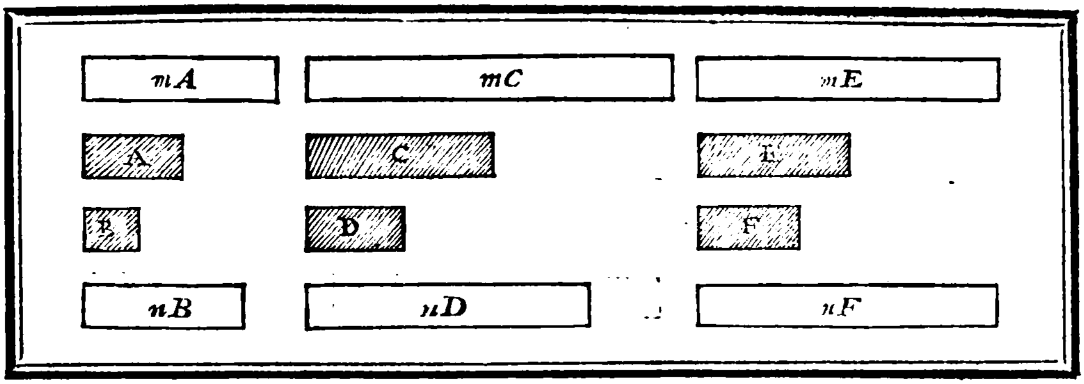
1. Prenez des équimultiples quelconques *a*A, *a*C, *a*E des trois antécédens A, C, E. — Dem. 1. L. 5.
2. Et d'autres équimultiples quelconques *c*B, *c*D, *c*F des trois conféquens B, D, F. — Dem. 1. L. 5.

Demonstration.

PUifque A : B = C : D (*Hyp*);

1. Si le multiple *a*A eft $>$, $=$, ou $<$ le multiple *c*B; l'équimultiple *a*C eft pareillement $>$, $=$, ou $<$ l'équimultiple *c*D. — Def. 5. L. 5.
   De même puifque C : D = E : F (*Hyp*).
2. Si le multiple *a*C eft $>$, $=$ ou $<$ le multiple *c*D; l'équimultiple *a*E fera pareillement $>$, $=$, ou $<$ l'équimultiple *c*F. — Def. 5. L. 5.
3. Par conféquent fi le multiple *a*A eft $>$, $=$ ou $<$, le multiple *c*B; l'équimultiple *a*E eft pareillement $>$, $=$, ou $<$ l'équimultiple *c*F.
4. Partant, A : B = E : F. — Def. 5. L. 5.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XII. *THEOREME XII.*

SI plusieurs grandeurs (A, B, C, D, E, F, &c.) sont en proportion (ou bien si plusieurs raisons sont égales) : la somme de tous les antécédens ($A+C+E$ &c.) est à la somme de tous les conséquens ($B+D+F$ &c.), comme un antécédent est à son conséquent.

Hypothese.

Les gdrs. A, B, C, D, E, F *sont proportionelles ou* $A : B = C : D = E : F$ *&c.*

These.

$A + C + E : B + D + F = A : B.$

Préparation.

1. Prenez les équimultiples mA, mC, mE des antécédens A, C, E;
2. De même les équimultiples nB, nD, nF des conséquens B, D, F.

} Dem. 1. L. 5.

Demonstration.

PUis donc que $A : B = C : D = E : F$ (*Hyp.*);

1. Si mA est $>$, $=$, ou $<$ nB, mC est pareillement $>$, $=$, ou $<$ nD; & de même mE est $>$, $=$ ou $<$ nF. Def. 5. L. 5.

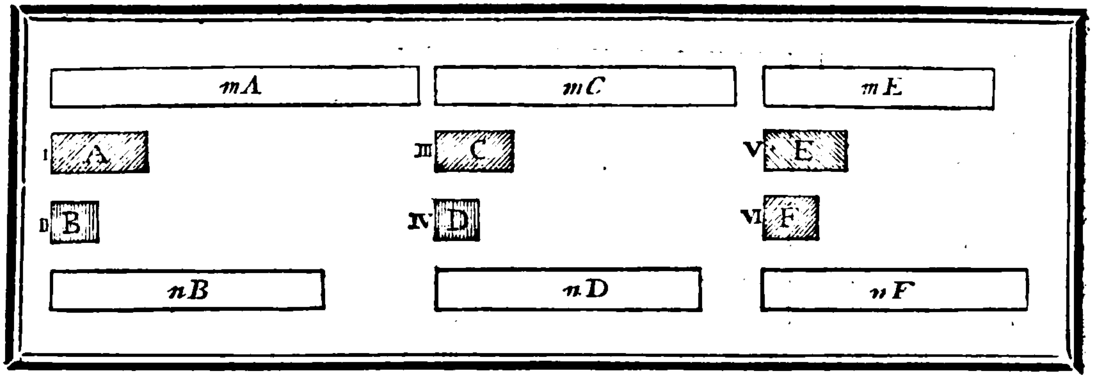
En ajoutant donc de part & d'autre les gdrs. $>$, $=$ ou $<$.

2. Les gdrs. $mA + mC + mE$ seront constamment $>$, $=$, ou $<$ les gdrs. $nB + nD + nF$, selon que mA est $>$, $=$, ou $<$ nB.

Or les gdrs. $mA + mC + mE$ & mA sont des équimultiples des gdrs. $A+C+E$ & A (*Prep.* 1 & *Prop.* 1. *L.* 5); item les gdrs. $nB + nD + nF$ & nB sont des équimultiples des gdrs. $B+D+F$ & B (*Prep.* 2 & *Prop.* 1. *L.* 5);

3. Partant $A + C + E : B+D+F = A : B$. Def. 5. L. 5.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XIII. *THEOREME XIII.*

Si la premiere grandeur (A) a même raiſon à la ſeconde (B), que la troiſieme (C) à la quatrieme (D); mais que la troiſieme (C) ait plus grande raiſon à la quatrieme (D), que la cinquieme (E) à la ſixieme (F): la raiſon de la premiere (A) à la ſeconde (B) ſera auſſi plus grande, que la raiſon de la cinquieme (E) à la ſixieme (F).

HYPOTHESE.	THESE.
I. A : B = C : D.	A : B > E : F.
II. C : D > E : F.	

Préparation.

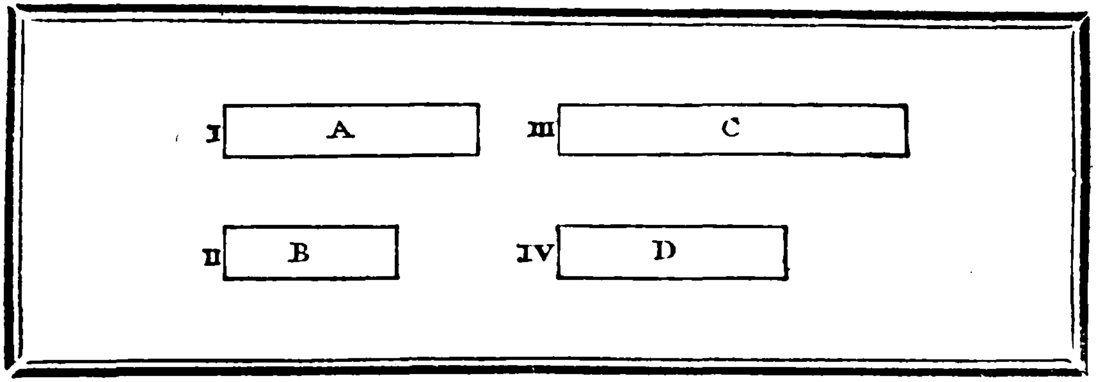
1. La raiſon de C : D étant > la raiſon de E : F (*Hyp.* 2), prenez des équimult. *m*C & *m*E des antécédens C & E; & pareillement d'autres équimultiples *n*D & *n*F des conſéquens D & F, tellement que *m*C ſoit > *n*D ſans que *m*E ſoit > *n*F; Dem. 1. L. 5. Def. 7. L. 5.
2. Prenez *m*A autant multiple de A que *m*C l'eſt de C. §. 5.
3. De même *n*B autant multiple de B que *n*D l'eſt de D. Dem. 1. L. 5.

DEMONSTRATION.

Puis donc que A : B = C : D (*Hyp.* 1), & que *m*A, *m*C ſont des équimultiples des antécédens & *n*B, *n*D des équimultiples des conſéquens (*Prep.* 2 & 3),

1. La gdr. *m*A ſera >, =, ou < *n*B; ſelon que *m*C ſera >, =, ou < *n*D. Def. 5. L. 5.
Or *m*C eſt > *n*D (*Prep.* 1);
2. Donc *m*A eſt auſſi > *n*B.
Mais en même tems *m*E n'eſt pas > *n*F (*Prep.* 1), & les gdrs. *m*A & *m*E ſont des équimultiples des antécédens A & E, & *n*B, *n*F des équimultiples des conſéquens B & F (*Prep.* 1 & 2),
3. Partant la raiſon A : B eſt > la raiſon E : F. Def. 7. L. 5.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XIV. *THEOREME XIV.*

SI quatre grandeurs (A, B, C, D) ſont proportionelles: ſelon que la premiere (A) ſera plus grande, égale, ou moindre, que la troiſieme (C), la ſeconde (B) ſera auſſi plus grande, égale, ou moindre que la quatrieme (D).

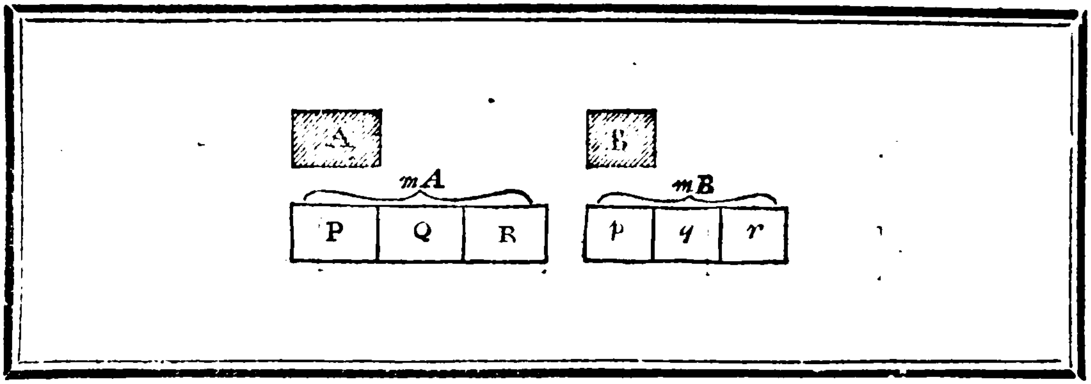
HYPOTHESE.	THESE.
I. $A : B = C : D$.	*Selon que* A *eſt* $>$, $=$ *ou* $<$ C.
II. A *eſt* $>$, $=$ *ou* $<$ C.	B *ſera* $>$, $=$ *ou* $<$ D.

CAS I. Si A eſt $>$ C.

DEMONSTRATION.

1. LA raiſon de $A : B$ eſt donc $>$ la raiſon $C : B$. Prop. 8. L. 5.
   Mais $A : B = C : D$ (*Hyp.* 1);
2. Donc la raiſon de $C : D$ eſt $>$ la raiſon $C : B$. Prop. 13. L. 5.
3. D'où il ſuit, que D eſt $<$ B ou B $>$ D. Prop. 10. L. 5.
   On démontrera de la même maniere pour les deux autres cas; ſi $A = C$, que B ſera $= D$; & ſi A eſt $<$ C, que B ſera $<$ D.
4. Par conſéquent, ſelon que A eſt $>$, $=$, ou $<$ C, pareillement B eſt $>$, $=$, ou $<$ D.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XV. *THEOREME XV.*

LEs parties (A & B) font en méme raifon que leurs équimultiples (m A & m B).

HYPOTHESE	THESE.
Les gdrs. mA *&* mB *font des équimult. des gdrs.* A *&* B.	$A : B = mA : mB$.

Préparation.

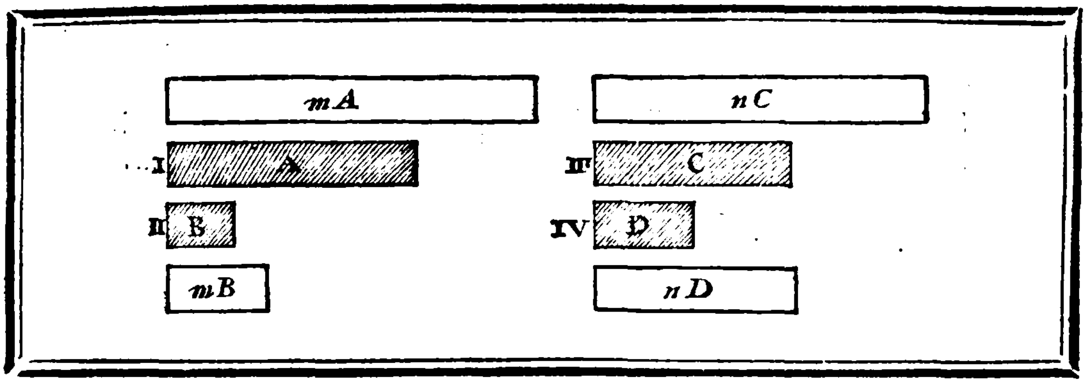
1. Divifez mA en ces parties P, Q, R chacune $=$ A. } Dem. 2. L. 5.
2. Et mB en ces parties p, q, r chacune $=$ B.

DEMONSTRATION.

PUifque les gdrs. mA, mB font équimultiples des gdrs. A & B (*Hyp*).

1. Le nombre des parties P, Q, R &c. eft $=$ au nombre des parties p, q, r &c.
   Et d'autant que $P = Q = R$ *(Prep.* 1*)*, & $p = q = r$ (*Prep.* 2),
2. La gdr. $P : p = Q : q = R : r$ &c. — Prop. 7. L. 5. Prop. 11. L. 5.
3. C'eft pourquoi $P + Q + R$, ou $mA : p + q + r$ ou $mB = P : p$. — Prop. 12. L. 5.
   Mais à caufe que $P = A$ & $p = B$ (*Prep.* 1 & 2),
4. La gdr. $P : p = A : B$. — Prop. 7. L. 5.
5. Partant $A : B = mA : mB$. — Prop. 11. L. 5.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XVI. *THEOREME XVI.*

SI quatre grandeurs (A, B, C, D) sont en proportion, elles le seront encore en raison alterne.

HYPOTHESE.	THESE.
$A : B = C : D.$	$A : C = B : D.$

Préparation.

1. Prenez des équimult. quelconques mA, & mB des termes A & B de la premiere raison.
2. Prenez d'autres équimult. quelconques nC, nD des termes C & D de la seconde raison.

} Dem. 1. L. 5.

DEMONSTRATION.

PUis donc que A & B sont des parties des équimult. mA & mB (*Prep.* 1),

1. On aura $A : B = mA : mB.$ — Prop. 15. L. 5.
   Mais $A : B = C : D$ (*Hyp.*);
2. Donc $C : D = mA : mB.$ — Prop. 11. L. 5.
3. De même $C : D = nC : nD.$ — Prop. 15. L. 5.
4. Partant $mA : mB = nC : nD.$ — Prop. 11. L. 5.
5. C'est pourquoi, selon que mA est $>$, $=$, ou $<$ nC, pareillement mB sera $>$, $=$, ou $<$ nD. — Prop. 14. L. 5.
   Or mA & mB étant des équimult. des termes A & B pris comme antécédens (*Prep.* 1), & nC, nD étant d'autres equimultiples des termes C & D considérés comme conséquens (*Prep.* 2),
6. Partant $A : C = B : D.$ — Def. 5. L. 5.

C. Q. F. D.

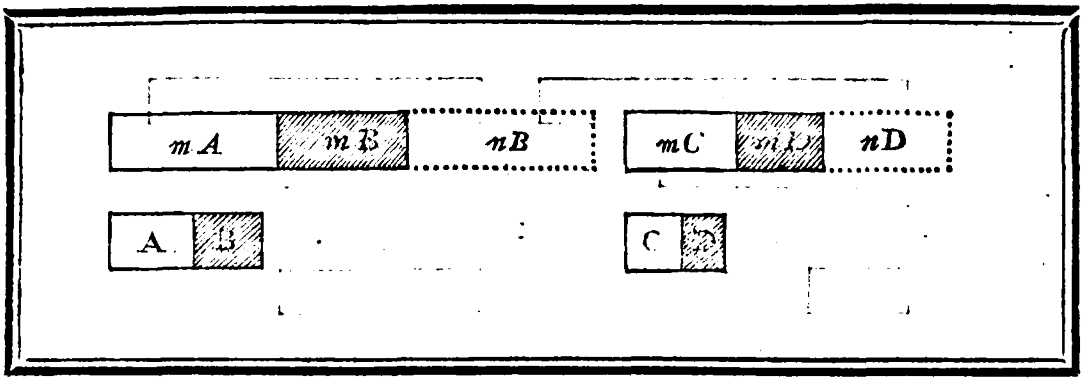
Remarque.

IL suit de cette proposition, que si quatre grandeurs sont proportionelles, selon que la premiere est plus grande, égale, ou moindre que la seconde, la troisieme est de même plus grande, égale, ou moindre que la quatrieme.

Car puisque $A : B = C : D$ (*Hyp*),

1. On aura $A : C = B : D.$ — Prop. 16. L. 5.
2. Donc, selon que A & $>$ $=$ ou $<$ B, C sera pareillement $>$, $=$ ou $<$ D. — Prop. 14. L. 5.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XVII. *THEOREME XVII.*

SI les grandeurs composées ($A+B$ & $C+D$ comparées à leurs parties B & D) sont proportionelles: les grandeurs divisées le seront aussi.

Hypothese.	These.
$A+B : B = C+D : D$	$A : B = C : D$.

Préparation.

1. Prenez des équimult. quelconques mA, mB, mC, mD des grandeurs A, B, C, D.
2. Prenez encore des équimult. quelconques nB, nD des grandeurs B & D. Dem. 1. L. 5.

Demonstration.

1. LA gdr. entiere $mA+mB$ est donc autant multiple de la gdr. $A+B$, que mA l'est de A, ou mC de C. Prop. 1. L. 5.
2. De même, la gdr. entiere $mC+mD$ est autant multiple de la gdr. $C+D$, que mC l'est de C. Prop. 1. L. 5.
3. Par conséquent $mA+mB$ est multiple de $A+B$, autant que $mC+mD$ l'est de $C+D$.
4. On voit aussi que les gdrs. entieres $mB+nB$, $mD+nD$ sont équimult. des gdrs B & D. Prop. 2. L. 5.

Or $A+B:B = C+D:D$: (*Hyp*)., & $mA+mB$, $mC+mD$ sont équimult. des antécédens $A+B$ & $C+D$ (*Arg.* 3); item $mB+nB$, $mD+nD$ sont équimult. des conséquens B & D (*Arg.* 4.);

5. Par conséquent, si $mA+mB$ est $>$, $=$, ou $<$ $mB+nB$; $mC+mD$ est aussi $>$, $=$, ou $<$ $mD+nD$. Def. 5. L. 5.

Mais, si $mA+mB$ est $>$, $=$, ou $<$ $mB+nB$; en rétranchant la partie commune mB, 5. 8 & 9.

6. Le reste mA est encore $>$, $=$, ou $<$ le reste nB.

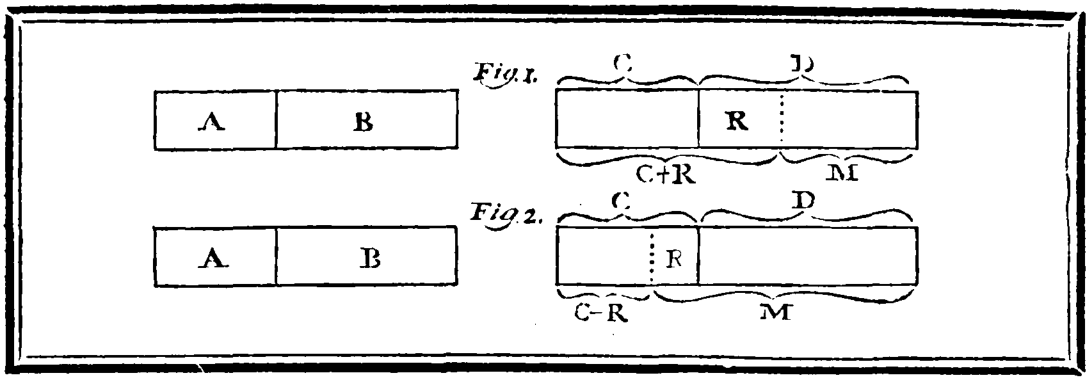
De même, si $mC+mD$ est $>$, $=$, ou $<$ $mD+nD$; en rétranchant la partie commune mD,

7. Le reste mC est encore $>$, $=$, ou $<$ le reste nD.
8. C'est pourquoi, si mA est $>$, $=$, ou $<$ nB; mC est pareillement $>$, $=$, ou $<$ nD.

Mais mA & mC sont des équimult. de A & de C pris comme antécedens (*Prep.* 1); & nB, nD des équimult. de B & D considérés comme conséquens (*Prep.* 2);

9. Partant $A : B = C : D$. Def. 5. L. 5.

C. Q. F.D.



PROPOSITION XVIII. *THEOREME XVIII.*

Si des grandeurs divisées sont proportionelles ($A : B = C : D$), elles seront encore proportionelles en composant ($A+B : B = C+D : D$).

Hypothese.	These.
$A : B = C : D.$	$A + B : B = C + D : D.$

Demonstration.

Sinon, $A+B : B = C+D$: autre gdr. $M < $ ou $> D$.

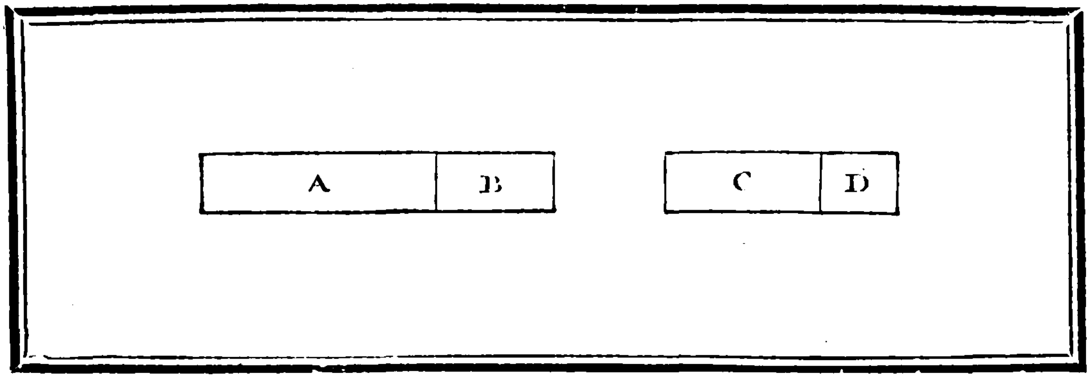
CAS I. Soit d'abord $M < D$, ou $M + R = D$ (*Fig.* 1).

Puis donc que $A + B : B = C + D : M$, ou $A+B : B = C+M+R : M$.
1. On aura dividendo $A : B = C + R : M$. Prop. 17. L. 5.
Mais $A : B = C : D$. (*Hyp.*);
2. Partant $C + R : M = C : D$. Prop. 11. L. 5.
Or $C + R$ est $> C$ (*Ax.* 8. *L.* 1);
3. Donc M est $> D$, & la supposition que M soit $< D$, est impossible. Prop. 14. L. 5.

CAS II. Soit ensuite $M > D$, ou $M = D + R$ (*Fig.* 2).

Puis donc que $A + B : B = C + D : M$, ou $A + B : B = C + D : D + R$.
4. On aura dividendo $A : B = C - R : D + R$. Prop. 17. L. 5.
Mais $A : B = C : D$. (*Hyp.*)
6. Partant $C - R : M = C : D$. Prop. 11. L. 5.
Or $C - R$ est $< C$ (*Ax.* 8. *L.* 1);
7. La gdr. M est donc $< D$, & la supposition que M soit $> D$, est impossible. Prop. 14. L. 5.
La gdr. M ne pouvant donc être ni $< D$ (*Arg.* 3), ni $> D$ (*Arg.* 7),
8. Il s'ensuit que M est $= D$; & que $A + B : B = C + D : D$.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XIX. *THEOREME XIX.*

SI le Tout (A+B) eſt au Tout (C+D), comme le retranché (A) eſt au retranché (C), le reſte (B) ſera auſſi au reſte (D), comme le Tout (A+B) eſt au Tout (C+D).

Hypotheſe.	These.
$+ B : C + D = A : C.$	$B : D = A + B : C + D.$

Demonstration.

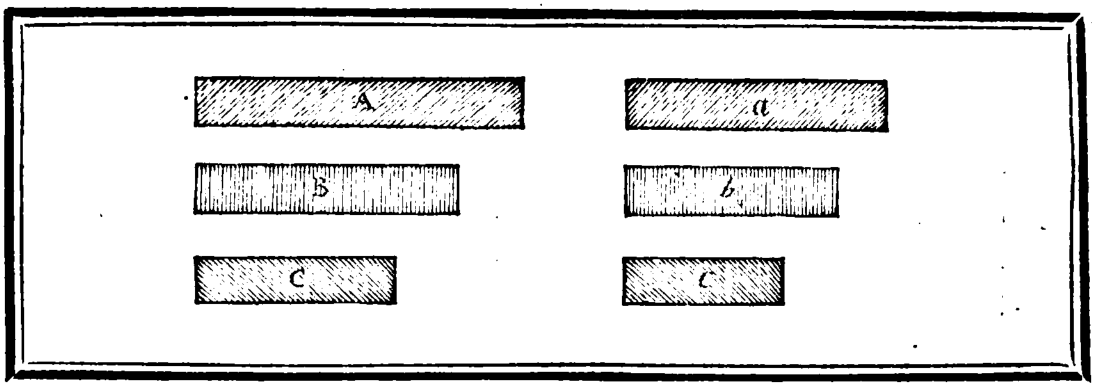
PUiſque	$A + B : C + D = A : C.$	(*Hyp.*).	
1. Donc alternando	$A + B : A = C+D : C.$		Prop. 16. L. 5.
2. Puis dividendo	$B : A = D : C.$		Prop. 17. L. 5.
3. Et alternant de nouveau	$B : D = A : C.$		Prop. 16. L. 5.
Mais d'autant que	$A + B : C + D = A : C.$	(*Hyp.*).	
4. Il ſuit que	$B : D = A+B : C+D.$		Prop. 11. L. 5.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

SI des grandeurs, compoſées ſont proportionelles, c. à. d. que $A+B : A = C+D : C$
On peut inférer par *converſion de raiſon* $A+B : B = C+D : D$ (*Def.* 17. *L.* 5).

Car d'abord	$A + B : C + D = A : C$	(*Hyp.* & *Prop.* 14).
C'eſt pourquoi	$A + B : C + D = B : D$	(*Prop.* 19).
Donc	$A + B : B = C + D : D$	(*Prop.* 14).



PROPOSITION XX. *THEOREME XX.*

S'il y a une ſuite de trois grandeurs (A, B, C) d'un côté, & une ſuite de trois autres grandeurs (a, b, c) de l'autre, telles que les raiſons de la premiere ſuite ſoient égales aux raiſons de la ſeconde ſuite, chacune à chacune, priſes dans le même ordre direct, il ſera vrai, par égalite de raiſon, que ſelon que la premiere grandeur (A) eſt plus grande, égale, ou moindre que la troiſieme (C) dans une des ſuites, de même dans l'autre, la premiere grandeur (a) ſera auſſi plus grande, égale, ou moindre que la troiſieme (c).

Hypothese.

I. $A : B = a : b$.
II. $B : C = b : c$.

These.

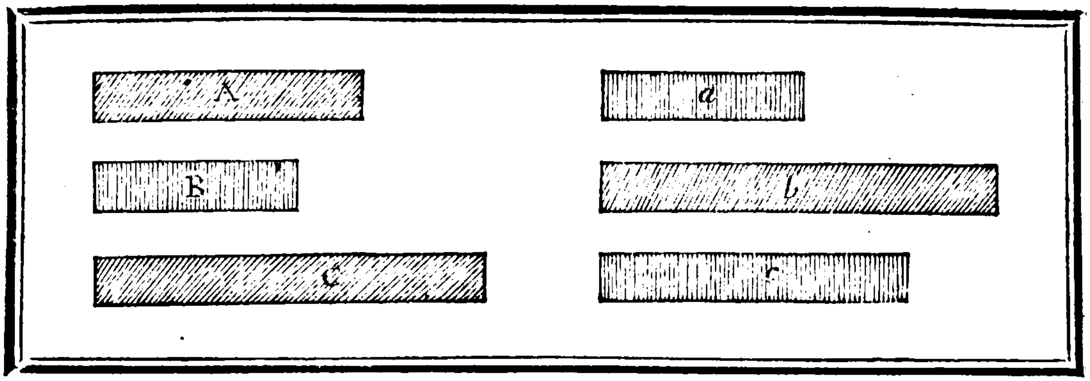
Selon que A *eſt* $>, =,$ *ou* $<$ C,
a *eſt auſſi* $>, =,$ *ou* $<$ c.

Demonstration.

CAS I. Soit $A > C$.

Puis donc que A eſt $> C$
1. La Raiſon $A : B$ eſt $> C : B$. Prop. 8. L. 5.
Mais $A : B = a : b$. (*Hyp.* 1).
& $C : B = c : b$. (*Hyp.* 2 & *Prop.* 4. *L.* 5 *Coroll.*).
2. Donc la raiſon $a : b$ eſt $> c : b$. Prop. 13. L. 5.
3. Partant a eſt auſſi $> c$. Prop. 10. L. 5.
4. On prouvera de la même manière, ſi A eſt $=$ C, qu'auſſi a eſt $= c$; & encore de même; ſi A eſt $<$ C, qu'auſſi a eſt $< c$.
5. Partant, ſelon que A eſt $>, =,$ ou $<$ C, a ſera auſſi $>, =,$ ou $< c$.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXI. *THEOREME XXI.*

S'il y a une ſuite de trois grandeurs (A, B, C) d'un côté, & une ſuite de trois autres grandeurs (*a*, *b*, *c*) de l'autre, telles que les raiſons de la premiere ſuite ſoient égales à celles de la ſeconde ſuite, chacune à chacune, dans un ordre troublé, il ſera vrai, par égalité de raiſon, que ſelon que la premiere grandeur (A) eſt plus grande, égale, ou moindre que la troiſieme (C) dans une des ſuites, de même dans l'autre la premiere grandeur (*a*) ſera auſſi plus grande, égale, ou moindre que la troiſieme (*c*).

Hypothese.	These.
I. $A : B = b : c$.	*Selon que* A *eſt* $>$, $=$, *ou* $<$ C.
II. $B : C = a : b$.	*a eſt auſſi* $>$, $=$, *ou* $<$ *c*.

Demonstration.

CAS I. Soit $A > C$.

Puis donc que — A eſt $> C$

1. La raiſon de — $A : B > C : B$. — Prop. 8. L. 5.

Mais — $A : B = b : c$ (*Hyp.* 1).

& invertendo — $C : B = b : a$ (*Hyp.* 2. & *Prop.* 4. *L.* 5. *Coroll.*).

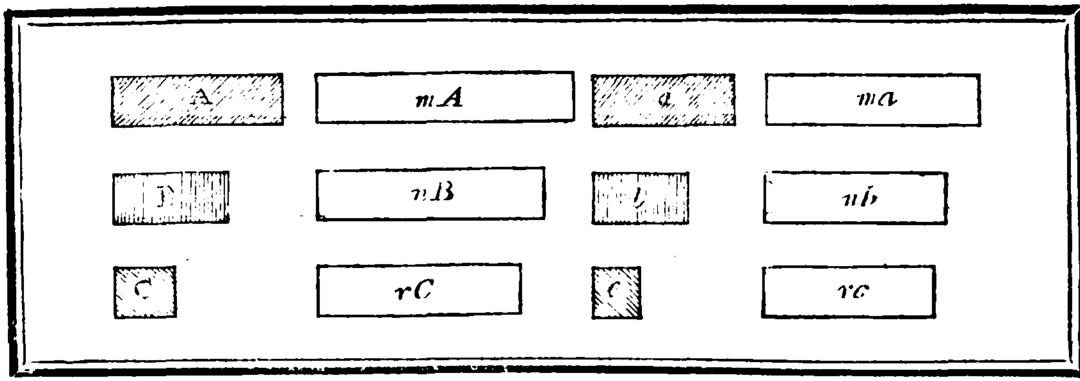
2. Partant, la raiſon — $b : c > b : a$. — Prop. 13. L. 5.

3. Et de-là — *c* eſt $< a$, ou $a > c$. — Prop. 10. L. 5.

4. On démontrera de-là même maniere, ſi A eſt $= C$, qu'auſſi *a* eſt $= c$; & encore de même, ſi A eſt $< C$, qu'auſſi *a* eſt $< c$.

5. Partant, ſelon que A eſt $>$, $=$, ou $<$ C, *a* ſera auſſi $>$, $=$, ou $< c$.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXII. *THEOREME XXII.*

S'il y a deux suites de grandeurs (A, B, C &c. a, b, c &c.) de même nombre de part & d'autre, telles que les raisons de l'une soient égales aux raisons de l'autre, chacune à chacune, prises dans un ordre direct, les extrêmes seront proportionelles par égalité de raison ordonnée, ou *ex æquo ordinatè.*

HYPOTHESE.	THESE.
I. $A : B = a : b$.	$A : C = a : c$.
II. $B : C = b : c$.	

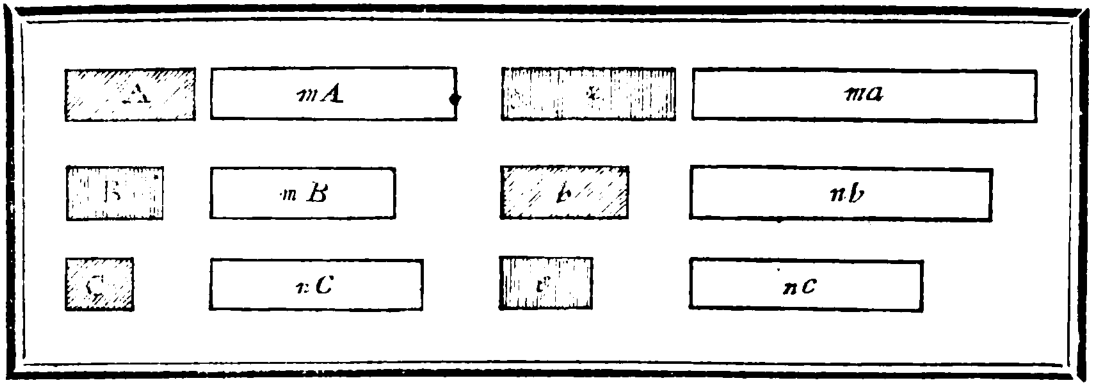
Préparation.

1. Prenez mA & ma équimult. de A & a.
2. De même nB & nb autres équimult. de B & b. — Dem. 1. L. 5.
3. Enfin rC & rc équimult. de C & c.

DEMONSTRATION.

Puisque $A : B = a : b$ (*Hyp.* 1).
1. On aura $mA : nB = ma : nb$ — Prop. 4. L. 5.
De même $B : C = b : c$ (*Hyp.* 2).
2. Par conséquent $nB : rC = nb : rc$. — Prop. 4. L. 5.
3. Donc mA, nB, rC & ma, nb, rc forment deux suites de grandeurs, telles que les raisons de l'une sont égales aux raisons de l'autre, chacune à chacune, dans un ordre direct.
4. Partant, par égalité de raison, selon que la premiere mA d'une des suites est $>$, $=$, ou $<$ que la troisieme rC, de même la premiere ma de l'autre suite sera $>$, $=$, ou $<$ que la troisieme rc. — Prop. 20. L. 5.
5. D'où il suit que $A : C = a : c$. — Def. 5. L. 5.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXIII. THEOREME XXIII.

S'il y a deux ſuites de grandeurs (A, B, C &c *a*, *b*, *c* &c) de même nombre de part & d'autre, telles que les raiſons de l'une ſoient égales aux raiſons de l'autre, chacune à chacune, dans un ordre renverſé ou troublé, les extrêmes feront proportionelles par égalité de raiſon troublée, ou *ex æquo perturbatè*.

Hypothese.

I. $A : B = b : c.$
II. $B : C = a : b.$

These.

$A : C = a : c.$

Préparation.

1. Prenez mA, mB, ma équimult. des gdrs. A, B, *a*.
2. De même nC, nb, nc autres equimult. des gdrs. C, *b*, *c*.

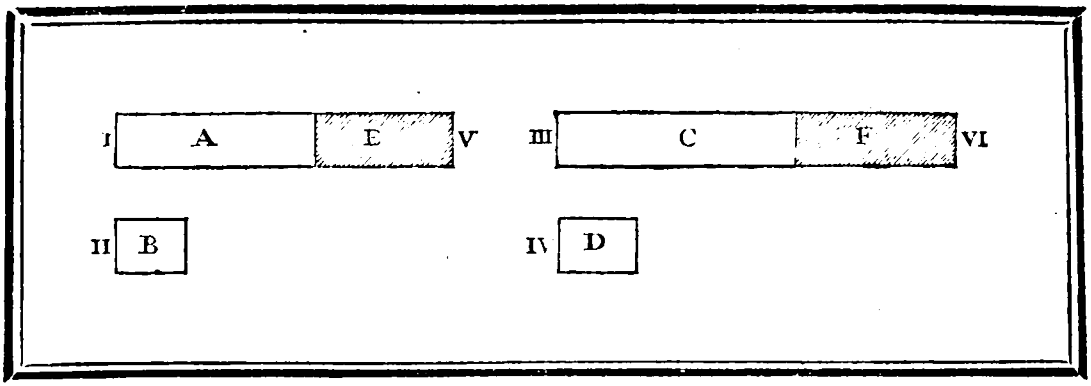
} Dem. 1. L. 5.

Demonstration.

Puiſque mA & mB ſont des équimult. de A & de B (*Prep.* 1).

1. On aura $A : B = mA : mB.$ Prop. 15. L. 5.
2. Par la même raiſon $b : c = nb : nc.$
   Mais $A : B = b : c.$ (*Hyp.* 1).
3. Donc $mA : mB = nb : nc.$ Prop. 11. L. 5.
   Et à cauſe que $B : C = a : b.$ (*Hyp.* 2).
4. On aura $mB : nC = ma : nb.$ Prop. 4. L. 5.
5. D'où il ſuit que mA, mB, nC, & ma, mb, nc forment deux ſuites de gdrs. telles que les raiſons de l'une ſont égales aux raiſons de l'autre, chacune à chacune, dans un ordre renverſé.
6. Partant, par égalité de raiſon, ſelon que la premiere mA de l'une des ſuites eſt $>$, $=$ ou $<$ que la troiſieme nC, de même la premiere ma de l'autre ſuite ſera $>$, $=$, ou $<$ que la troiſieme nc. Prop. 21. L. 5.
7. C'eſt pourquoi $A : C = a : c.$ Def. 5. L. 5.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXIV. *THEOREME XXIV.*

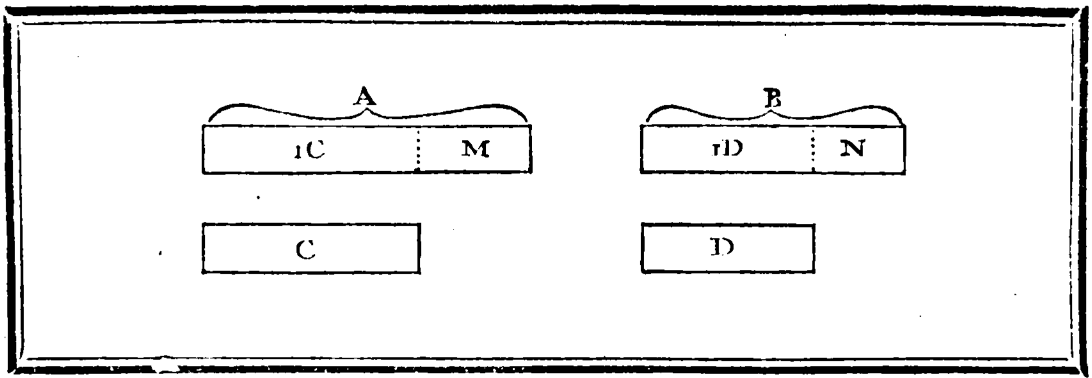
SI quatre grandeurs (A, B, C, D) ſont proportionelles, & qu'une cinquieme (E) ſoit à la ſeconde (B), comme une ſixieme (F) eſt à la quatrieme (D), la compoſée (A+E) de la premiere & de la cinquieme ſera à la ſeconde (B), comme la compoſée (C+F) de la troiſieme & de la ſixieme ſera à la quatrieme (D).

Hypothese.	These.
I. $A : B = C : D$.	$A + E : B = C + F : D$.
II. $E : B = F : D$.	

Demonstration.

Puiſque	$E : B = F : D$	(*Hyp.* 2).	
1. Il ſuit par inverſion	$B : E = D : F$.		Prop. 4. L. 5. Coroll.
Et d'autant que	$A : B = C : D$	(*Hyp.* 1).	
2. Par égalité ordonnée	$A : E = C : F$.		Prop. 22. L. 5.
3. Donc par compoſition	$A + E : E = C + F : F$.		Prop. 18. L. 5.
Mais à cauſe que	$E : B = F : D$	(*Hyp.* 2).	
4. Il ſuit encore par égalité ordonnée que	$A + E : B = C + F : D$.		Prop. 22. L. 5.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXV. *THEOREME XXV.*

SI quatre grandeurs (A, B, C, D) sont proportionelles, la somme de la plus grande (A) & de la plus petite (D) excède la somme des deux autres (B & C).

HYPOTHESE.

I. A : B = C : D.

II. A *est le plus grand terme & par conséquent* (*) D *le plus petit.*

THESE.

A + D > B + C.

Préparation.

Faites 1C = C & 1 D = D.

DEMONSTRATION.

PUis donc que A : B = C : D (*Hyp.* 1), & que C = 1 C & D = 1 D (*Prep.*).

1. Il suit que A : B = 1C : 1D. — Prop. 7. L. 5.
2. C'est pourquoi A : B = M : N. — Prop. 19. L. 5.
   Mais la gdr. A étant > B (*Hyp.* 2).
3. La gdr. M est aussi > N. — Prop. 16. L. 5. Rem.
   De plus, à cause que C = 1 C & D = 1 D (*Prep.* 1 & 2).
4. Il s'ensuit que 1 C + D = 1 D + C. — Ax. 2. L. 1.
   Et comme M est > N (*Arg.* 3).
5. Il s'ensuit de plus que 1 C + D + M > 1 D + C + N, c. à. d. que A + D est > B + C. — Ax. 4. L. 1.

C. Q. F. D.

(*) L'Auteur suppose la conséquence de cette Hypothèse suffisamment évidente par les vérités précédentes. Car, puisque A : B = C : D (*Hyp.* 1), & que A > C (*Hyp.* 2), B est > D (*Prop.* 14. *L.* 5). De même A étant > B (*Hyp.* 2), C est > D (*Rem. de Prop.* 16. *L.* 5); Partant D est le plus petit des IV termes.

APPENDICE.

DE LA

COMPOSITION ET DÉCOMPOSITION

DES

RAISONS

ET DES

LOGARITHMES.

APPENDICE.

De la Composition & Décomposition des Raisons & des Logarithmes.

DEFINITION I.

MULTIPLIER, *dans un sens général*, n'est autre chose que trouver une grandeur P, qui soit à une grandeur homogène F, dans la raison donnée d'une autre grandeur quelconque f, à une unité homogène.

§. 1. *Pour peu qu'on se rende attentif à ce qui se passe dans la multiplication numérique, on trouvera qu'il y est question de résoudre ce Problème général.* Une raison $1 : f$ étant donnée, avec une grandeur quelconque F, trouver une autre grandeur de même genre P, telle que $1 : f = F : P$?

Par ex. en multipliant 5 par 3, on cherche un PRODUIT 15, *qui contienne le* FACTEUR 5 *trois fois, comme l'autre* FACTEUR 3 *contient l'unité sous entendue trois fois. La multiplication des nombres rationels s'achève donc arithmétiquement, en répétant l'un des Facteurs autant de fois que l'unité se trouve répétée dans l'autre. Mais ce caractère de l'*addition répétée, *qui fixe suffisamment la nature de la multiplication numérique rationelle, n'étant guères applicable à l'idée de cette opération prise dans un sens plus général*, c. à. d. *entant qu'elle manie les grandeurs non-rationelles, on est obligé, pour la définir, de se servir du caractère plus étendu de la proportionalité, en la regardant, comme la maniere* de trouver une IV proportionelle à l'unité & aux deux Facteurs.

§. 2. *On reconnoit sans peine que multiplier, & trouver une IV. proportionelle à trois termes donnés, sont des opérations analogues, ou plutôt identiques. Il y a cette différence, que, dans la première, on regarde le premier terme comme une unité homogène à un des Facteurs* f; *ce qui dispense de faire mention de la division du produit par le premier terme; au-lieu que dans la dernière, on envisage souvent le premier terme comme une grandeur quelconque; ce qui oblige de faire succéder à la multiplication des termes moyens, la division du Produit par le premier. Au reste la raison ne subsistant qu'entre grandeurs de même genre, il est clair que l'unité* 1 *& l'un des deux Facteurs f doivent nécessairement être homogènes; au-lieu qu'il n'est pas absolument nécessaire que les Facteurs f &* F *le soient. Ces deux Facteurs peuvent être hétérogènes, comme une ligne & un plan; un plan & un solide &c; tellement que leur produit ne soit néanmoins qu'un plan ou un solide*, c. à. d. *une quantité homogène au second Facteur* F. *Car les deux premiers termes,* 1 *& f ne doivent être considérés que comme une simple raison, où l'on fait abstraction de la quantité spécifique & absolue des termes. A la vérité on dit communément, qu'une ligne multipliée par une ligne fait naître un plan; & qu'un plan multiplié par une ligne produit un solide; mais ces expressions n'étant pas tout à fait justes, elles ne doivent pas être prises au pied de la lettre.* Euclide *démontre dans la* Proposition *XII du VI* Livre, *qu'une ligne multipliée par une ligne produit une ligne; & il prouve*, Proposition *XXIII, que les plans des parallelogrammes semblables, sont comme les produits de leurs côtés homologues. De sorte que la multiplication d'une ligne par une autre, ne produit pas un plan, mais un nombre, ou une quantité, qui suit la raison du plan.*

DEFINITION II.

DIVISER, *dans un ſens général*, une grandeur D par une autre d, c'eſt trouver une grandeur Q, qui ſe rapporte à l'unité, de la même manière que D ſe rapporte à une grandeur homogène d.

On nomme la gdr. d, *le* DIVISEUR ; *la gdr.* D, *le* DIVIDENDE, *& la gdr.* Q *le* QUOTIENT. *Par conſéquent* Diviſer le Dividende D par le Diviſeur d, c'eſt trouver un Quotient Q, qui par ſon rapport à l'unité 1, indique la raiſon du Dividende au Diviſeur.

Par ex. en diviſant 6 par 2, on a pour Quotient 3, qui contenant l'unité trois fois, indique que le Dividende 6 contient le Diviſeur 2, trois fois. D'où l'on voit qu'en général

Le Divif. 2 eſt au Divid. 6, comme l'unité 1 eſt au quotient 3.

La Définition avertit aſſez que le Dividende & le Diviſeur doivent être des grandeurs de même genre; & que l'unité & le Quotient doivent être dans le même cas. Car dans cette opération la raiſon de d à D eſt donnée, & on demande qu'on l'exprime par la raiſon de l'unité à Q; il faut donc que les termes apartenants à la même raiſon ſoient de même genre.

La diviſion ſe réduit donc à trouver une quatrieme proportionelle au Diviſeur, au Dividende, & à l'unité.

DEMANDE I.

ON demande qu'on puiſſe multiplier & diviſer des grandeurs conformément aux Définitions I & II.

On ſe contente ici de demander qu'on puiſſe trouver une quatriéme proportionelle à l'unité & à deux autres grandeurs données, ce qui s'appelle multiplier; qu'on puiſſe trouver une quatrième proportionelle à deux grandeurs données & à l'unité, ce qui s'appelle diviſer? On ſe contente, dis-je, de demander ces vérités de pratique, parceque ce n'eſt pas ici le lieu d'enſeigner les régles de l'effection, réſervée aux ſciences qui traitent des grandeurs particulières qu'on propoſe à multiplier ou à diviſer. L'Arithmétique exécute ces opérations par des chiffres; la Géométrie par des conſtructions linéaires; & l'Algébre, comme la ſcience des grandeurs en général, ne les exécute ſouvent point, ſe contentant de les indiquer par des caractères convenables: & comme ces caractères ſont d'un grand uſage, nous nous en ſervirons, après en avoir expliqué la ſignification.

HYPOTHESE I.

ON répréſente le produit de deux Facteurs f & F, par l'expreſſion fF, *qui dénote par conſéquent une grandeur telle que* $1 : f = F : fF$ (Def. 1). *De même le produit de la grandeur* m *par* fF, *eſt répréſenté par l'expreſſion* mfF; *ſignifiant* $1 : m = fF : mfF$, *& ainſi des autres.*

COROL.

COROLLAIRE I.

La transposition des Lettres ne change point la valeur du produit, c. a. d. $fF = Ff$.

Car	$1 : f = F : fF$,	(*Hyp.* 1 & *Def.* 1).	
Et	$1 : F = f : Ff$.		
Donc alternando	$1 : f = F : Ff$.		Prop. 16. L. 5.
Partant	$F : fF = F : Ff$.		Prop. 11. L. 5.
Mais	$F = F$		
Donc	$fF = Ff$.		Prop. 14. L. 5.

COROLLAIRE II.

Lorsqu'on multiplie deux Facteurs égaux r *&* r; *le produit* rr *est appellé un* QUARRÉ, *& le Facteur* r *sa* RACINE. *Par conséquent l'unité* 1 *est à la racine* r, *comme cette racine* r *est au quarré* rr. c. à. d. $1 : r = r : rr$. (Def. 1).

En multipliant de la même maniére le quarré rr *par la racine* r, *on trouve le* cube rrr. *Partant*

$$1 : r = rr : rrr. \text{ (Def. 1).}$$

De même, en multipliant le Cube rrr *par la racine* r, *le produit* $rrrr$ *est appellé un* QUARRÉ-QUARRÉ. *Donc*

$$1 : r = rrr : rrrr. \text{(Def. 1).}$$

Et ainsi des autres produits à l'infini, auxquels on donne le nom de PUISSANCES. *On les nomme premiere, seconde, troisieme, &c, puissance; selon que dans l'expression la lettre* (r) *désignant la racine, est répétée une, deux, trois &c fois. On les marque aussi de cette maniere* r^1, r^2, r^3, *caractéristique d'un usage fort étendu, qui a son fondement dans la composition & décomposition des raisons, comme nous l'expliquerons dans la suite.*

COROLLAIRE III.

Puisque toutes les raisons sont égales à la raison $1 : r$, *il s'ensuit que*

$$1 : r^1 = r^1 : r^2 = r^2 : r^3 = r^3 : r^4 \ \&c. \qquad \text{Prop. 11. L. 5.}$$

c. à. d. *toutes les raisons entre les Puissances successives sont des raisons égales & continues. Ou ce qui est la même chose; La suite des Puissances*

$$1,\ r,\ r^2,\ r^3,\ r^4 \ \&c.$$

forme une Progression Géométrique. Def. 9. L. 5. §. 2.

HYPOTHESE II.

Le quotient Q, qui résulte de la Division de la grandeur D par une autre d, sera réprésenté par le caractère $\frac{D}{d}$; ou D: d tellement que $d : D = 1 : \frac{D}{d}$ (*Déf.* 2).

Les autres caractères plus composés auront la même signification. Ainsi $\frac{D}{ad}$, réprésentera le Quotient qui vient en divisant la grandeur $\frac{D}{d}$ par a; de maniere que

$$a : \frac{D}{d} = 1 : \frac{D}{ad}$$

DEFI-

DEFINITION III.

LEs produits, comme mA, mB, qui résultent de la multiplication de deux grandeurs A & B, par un même Facteur m, seront nommés des Equiproduits.

Il ne faut pas confondre les Equimultiples avec les Equiproduits. Lorsque le Facteur m est un nombre entier & rationel quelconque (par exemp. 7), les quantités m A, *m* B *(c. à. d.* 7 A, 7 B) *sont des Equimultiples de* A *& de* B; *mais lorsque la grandeur m répresenté une grandeur non-rationelle quelconque comme une racine numérique sourde, où une circonférence de cercles, ou toute autre grandeur de l'espéce de celles qu'on nomme* transcendante, *les quantités m* A *& m* B *ne sont plus des Equimultiples, mais des Equiproduits des grandeurs* A *&* B.

PROPOSITION I.

LEs Equiproduits mA & mB sont comme les Facteurs A & B.

DEMONSTRATION.

P*Uisque m* A *est un produit de* A *par m*; & *m* B *un produit de* B *par m*; *on peut inférer*

$$\left.\begin{array}{l} 1 : m = A : mA \\ 1 : m = B : mB \end{array}\right\} \qquad \text{Def. 1.}$$

Partant $A : mA = B : mB$ — Prop. 11. L. 5.

Donc alternando $A : B = mA : mB$ — Prop. 16. L. 5.

Ou ce qui est la même chose $mA : mB = A : B$.

C. Q. F. D.

PROPOSITION II.

SI quatre grandeurs A, B, C, D, sont en proportion, les Equiproduits mA & mC des antécédens, comparés à d'autres Equiproduits nB, nD des conséquens, chacun à chacun, sont encore en proportion.

DEMONSTRATION.

P*Uisque m* A & *m* C *sont des Equiproduits de* A & C (Hyp.).
On aura $A : C = mA : mC$.
Derechef nB & nD *étant des Equiproduits de* B & D (Hyp.).
On aura $B : D = nB : nD$. — Prop. 1. (for the four lines above)
Mais $A : C = B : D$ (Hyp. & Prop. 16. L. 5).
Partant $mA : mC = nB \; nD$. — Prop. 11. L. 5.
Et alternando $mA : nB = mC : nD$. — Prop. 16. L. 5.

C. Q. F. D.

PROPOSITION III.

SI quatre grandeurs A, B, C, D sont en proportion, & que quatre autres a, b, c, d le soient aussi, les produits aA, bB, cC, dD, qui résultent en multipliant chacune par chacune, sont encore en proportion.

DEMONSTRATION.

CAr puisque A : B = C : D, *prenant les Equiproduits* aA & aC *des antécédens; item les Equiproduits* bB & bD *des conséquens*,
on aura $a\text{A} : b\text{B} = a\text{C} : b\text{D}$. Prop. 2.

De même, puisque $a : b = c : d$; *si on prend les Equiproduits* aC & cC *des antécédens*, & *les Equiproduits* bD & dD *des conséquens*
on aura $a\text{C} : b\text{D} = c\text{C} : d\text{D}$. Prop. 2.
Partant $a\text{A} : b\text{B} = c\text{C} : d\text{D}$. Prop. 11. L. 5.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

SI *quatre grandeurs* A, B, C, D *sont en proportion*, *leurs Quarrés*, *leurs Cubes*, & *leurs Puissances quelconques de même dénomination*, *sont encore en proportion*.

PROPOSITION IV.

SI quatre grandeurs A, B, C, D sont en proportion, le produit AD des extrêmes, est toujours égal au produit BC des moyens.

DEMONSTRATION.

P*Uisque*	A : B = C : D, (Hyp).	
Et	D : C = D : C,	
Il suit que	AD : BC = CD : DC,	Prop. 3.
Mais	CD = DC (Hyp. 1. Coroll. 1).	
Partant	AD = BC.	Prop. 16. L. 5. Rem.

C. Q. F. D.

DEFINITION. IV.

ON appelle RAISON D'EGALITÉ, celle où les deux termes sont égaux entr'eux. Et RAISON D'INEGALITÉ lorsque ces termes sont inégaux.

En particulier on nomme Raison de plus grande inegalité, *lorsque l'antécédent est plus grand que son conséquent. Au contraire* Raison de moindre inégalité, *lorsque l'antécédent est moindre que son conséquent.*

COROLLAIRE.

LE *conséquent devenant l'unité*, *les raisons* B : 1, C : 1 &c, *sont des raisons de plus grande inégalité*, *lorsque les antécédens* B & C *sont* > *que l'unité. Et par conséquent ces mêmes raisons renversées* 1 : B, 1 : C *seront des raisons de moindre inégalité.*

DEFI-

DEFINITION V.

QUand on renverſe les termes d'une raiſon, tellement que l'antécédent devienne conſéquent, & le conſéquent antécédent, cette ſeconde raiſon eſt appellée la RECIPROQUE de la premiere qu'on nomme DIRECTE.

Par ex. La raiſon directe 3 : 1 *a pour réciproque la raiſon* 1 : 3. *De même prenant* B : A *pour directe, ſa réciproque eſt* A : B. *En général la grandeur* $\frac{1}{A}$ *eſt la réciproque de la grandeur* A. *Car une grandeur* A *ſe rapportant naturellement à l'unité comme conſéquent,* A *eſt autant que* $\frac{A}{1}$.

COROLLAIRE.

SI la directe, par ex. 3 : 2, *eſt une raiſon de plus grande inégalité, ſa réciproque* 2 : 3 *ſera néceſſairement une raiſon de moindre inégalité.*

DEFINITION VI.

ON dit qu'une RAISON M : N eſt COMPOSÉE DE DEUX OU DE PLUSIEURS RAISONS COMPOSANTES A : B, C : D, E : F, &c. lorſqu'elle eſt égale à la raiſon qui ſe trouve entre le produit ACE de tous les antécédens, comparé au produit BDF de tous les conſéquens.

Par ex. ſoient les raiſons ſimples 5 : 2, 2 : 3, 3 : 7 *&c. on dira que la raiſon de* 5 : 7 *eſt une raiſon compoſée des trois propoſées. Car le produit de leurs antécédens eſt* 30, *& celui de leurs conſéquens* 42,

Or $$5 : 7 = 30 : 42.$$

HYPOTHESE III.

L'Analogie qui règne entre la compoſition des raiſons, & celle des grandeurs, conduit à indiquer la compoſition des raiſons directes, comme l'addition des grandeurs poſitives, par le ſigne +.

Ainſi l'expreſſion $+\overline{A:B}+\overline{C:D}$, *ou ſimplement* $\overline{A:B}+\overline{C:D}$ *déſigne que la premiere raiſon* A : B *doit être compoſée avec la ſeconde* C : D, *ſelon la définition précédente.*

Mais lorſqu'une raiſon doit entrer dans la compoſition réciproquement (*Def.* 5), tellement que ſon antécédent multiplie le produit des conſéquens, & ſon conſéquent celui des antécédens, on fait précéder une telle raiſon par le ſigne —.

Ainſi $\overline{A:B}+\overline{C:D}-\overline{E:F}$ *dénote que les raiſons* A : B, *&* C : D *doivent être compoſées avec la réciproque de la raiſon* E : F, *c. à. d. avec la raiſon* F : E; *d'où réſulte la raiſon* ACF : BDE.

C'eſt pourquoi les Auteurs voulant exprimer une raiſon compoſée par les compoſantes ont coutume de ſe ſervir de l'expreſſion ſuivante

$$AC : BD = \overline{A:B}+\overline{C:D} \ \textit{item} \ ACF:BDE = \overline{A:B}+\overline{C:D}-\overline{E:F}.$$

Et

Et il en est de même des autres exemples. On va expliquer le fondement de cette signification du signe — .

PROPOSITION V.

S'Il y a une suite d'autant de grandeurs A, B, C, D &c. qu'on voudra: la raison de la première A à la dernière D, est composée de toutes les raisons intermédiaires A : B, B : C, C : D.

DEMONSTRATION.

C*Ar composant la raison* A : B *avec la raison* B : C, *il en résulte la raison* A B : C B. Def. 6.
Mais les termes AB : BC *sont des Equiproduits des Facteurs* A & C (Def. 3);
Partant A : C = AB : BC. Prop. 1.
De même, composant les trois raisons A : B, B : C, C : D, *on parvient à la raison* ABC : BCD. Def. 6.
Mais ces termes sont des Equiproduits des Facteurs A & D (Def. 3);
Partant A : D = ABC : BCD. Prop. 1.

C. Q. F.D.

COROLLAIRE I.

S*I les raisons composantes ne sont pas* continues, *c. à. d. telles que le conséquent de la précédente devienne l'antécédent de la suivante; on peut les rendre telles en cherchant successivement des IVemes. proportionelles à chacune des raisons données (hormis la Ire:) & au conséquent de celle qui la précéde.*

Par ex. soient les composantes $\overline{A : B}$, + $\overline{C:D}$ + $\overline{E:F}$, *on les rendra continues, en faisant,*

C : D = B:Q.
E : F = Q:S.

Car en mettant les raisons B : Q, *item* Q:S *à la place de leurs égales* C : D, & E : F; *on a les raisons composantes* A : B, B: Q, Q : S *qui sont continues.*

COROLLAIRE. II.

U*Ne raison d'égalité* A : A *ne produit aucun changement dans la composition des raisons. Car si on compose la raison* A : A *avec la raison* B : C; *on trouve la raison* A B : A C, *égale à la raison de* B : C, (Prop. 1). *Vérité qui fournit le principe d'Analogie suivant :* de même que Zéro ne produit aucun changement dans la composition des grandeurs, la raison d'égalité n'en produit aucun dans la composition des raisons.

COROLLAIRE III.

U*Ne raiſon directe* A : B, *compoſée avec ſa réciproque* B : A, *produit une raiſon d'égalité, vû que les termes* AB *&* BA *de la compoſée ſont égaux* (Def. 4 & Cor. 1. Hyp. 1).

COROLLAIRE IV.

P*Uis donc que la compoſée* AB:BA, *comme raiſon d'égalité* (Cor. 3), *équivaut à Zéro en matière de compoſition des raiſons* (Cor. 2); *les compoſantes* A : B *&* B : A *doivent être conſiderées comme d'une nature contraire rélativement à cette même compoſition. Car la directe* A : B, *comme une raiſon d'inégalité, produiſant un changement dans la compoſition, ſa réciproque anéantit ce changement, en ramenant la compoſée à la première valeur.*

Par ex. Compoſant la directe A : B *avec la raiſon* M : N, *la compoſée* AM : BM *ceſſe d'être égale à la primitive* M : N. *Mais en continuant la compoſition avec la réciproque* B : A, *ce changement eſt redétruit; attendu que la compoſée* BAM : BAN *rédevient égale à la primitive* M : N (Prop. 1).

HYPOTHESE IV.

PUiſque dans la compoſition des raiſons, on eſt obligé de regarder la raiſon d'égalité (p. ex. A : A ou AB : BA) comme équivalente à Zéro (*Coroll.* 2); on répréſente ſa nature, (ou ſon effet dans cette compoſition), par l'expreſſion A : A = o ou AB : BA = o.

COROLLAIRE.

E*T d'autant qu'une raiſon directe* A : B, *compoſée avec ſa réciproque* B : A *produit une raiſon d'égalité* AB : BA *équivalente à Zero en cette eſpéce de compoſition* (Prop. 5. Coroll. 3. Dem. 2.) *il s'enſuit que* $\overline{A : B} + \overline{B : A} = o$ (Hyp. 3. & 4). *D'où l'on déduit, (en ajoutant de part & d'autre* $- \overline{B : A}$)

$$\overline{A : B} = - \overline{B : A}.$$

Ce qui fait voir qu'une raiſon négative $- \overline{B : A}$ eſt équivalente à la réciproque A : B de celle qui ſe trouve affectée du ſigne —. *Ou bien*, que ſi on fait précéder une raiſon quelconque B : A du ſigne —, que l'expreſſion négative qui en reſulte dénote la réciproque de cette raiſon. *C'eſt en cette manière que les ſignes + & — mis au devant d'une même raiſon, expriment leur nature contraire* (Prop. 5 Coroll. 4). *Et cela fait comprendre pourquoi les raiſons négatives doivent entrer réciproquement dans la compoſition* (Hyp. 3).

REMARQUE.

L*Es Commençans doivent ſe mettre au fait de la correſpondance qui règne entre la compoſition des raiſons & celle des grandeurs, & faire attention à la manière de la répréſenter par les Caractères +, —, o, pour qu'ils ne ſe trouvent point arrêtés dans les écrits de pluſieurs Auteurs célèbres qui en font uſage. Cette correſpondance eſt manifeſte; car comme dans la*

Com-

composition des grandeurs les positives augmentent la somme, que les négatives diminuent, & que celles qui sont égales à Zéro n'altèrent point ; de même dans la composition des raisons, celles de plus grande inégalité augmentent la composée, celles de moindre inégalité la diminuent, & celles d'égalité n'y font aucun changement. Ce principe fait voir qu'on peut se servir utilement des signes +, —, o dans les deux espéces de composition, pourvû qu'on les explique conformément aux principes de chacune.

PROPOSITION VI.

DAns toute Progression Géométrique, les termes équidistans sont proportionels; ou bien leurs raisons sont égales.

DEMONSTRATION.

Q*Ue les grandeurs* A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, *&c, répréſentent les termes d'une Progression Géométrique, où les termes* B *&* E, *item* F *&* I, *soient des termes équidistans. On a donc en vertu de l'égalité & continuité des raisons qui règne dans les Progressions Géométriques,*

$$\left.\begin{array}{ccccccc} B & : & C & = & F & : & G \\ C & : & D & = & G & : & H \\ D & : & E & = & H & : & I \end{array}\right\}$$ Def. 9. L. 5. §. 2.

Donc $$B : E = F : I$$ Prop. 22. L. 5.

C. Q. F. D.

PROPOSITION VII.

DAns une Progression Géométrique A, B, C, D, E, F, G, &c, deux termes quelconques sont entr'eux, comme les Puissances de deux autres termes, qui se suivent immédiatement, exprimées par le nombre des raisons égales, interposées entre les deux termes qu'on compare.

DEMONSTRATION.

S*Oient les deux termes qu'on compare* C *&* G, *entre lesquels il se trouve quatre raisons égales, à sçavoir, les raisons* C : D, D : E, E : F, F : G. *je dis que*

$$C : G = C^4 : D^4$$

Car $$\left\{\begin{array}{ccccccc} C & : & D & = & C & : & D \\ D & : & E & = & C & : & D \\ E & : & F & = & C & : & D \\ F & : & G & = & C & : & D \end{array}\right\}$$ Def. 9. L. 5. §. 2.

Donc $$CDEF : DEFG = C^4 : D^4.$$ Prop. 3.

Mais $$CDEF : DEFG = C : G.$$ Prop. 1.

Et

Partant	$C : G = C^4 : D^4$	Prop. 11. L. 5.
Et puisque	$A : B = C : D$ (Def. 9. L. 5. & § 2.).	
On aura	$\underline{A^4 : B^4 = C^4 : D^4}$	Prop. 3.
Partant	$C : G = A^4 : B^4$	Prop. 11. L. 5.

Ou en général, comme la puissance IVme d'un terme quelconque est à la même puissance du terme suivant. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

P*Uisque la suite des Puissances* 1. R, RR, RRR, *&c. commençant par l'unité, forme une Progression Géométrique* (Hyp. 1. Cor. 3), *il est manifeste qu'entre l'unité & la première puissance* R *il n'y a qu'une raison. Mais qu'il y en a deux égales entre l'unité & le quarré* RR; *qu'il y en a trois entre l'unité & le cube* RRR *& ainsi de suite. C'est pourquoi on marque ces puissances avec les chiffres* 1, 2, 3, 4 *&c. nommés,* EXPOSANS, *de cette manière* R^1, R^2, R^3, R^4 *&c. Où ces exposans dénotent la multiplicité de la raison primordiale* $1 : R$; *c. à. d. combien de fois cette raison doit être continuée, avant qu'on arrive au terme dont on considère l'exposant.*

COROLLAIRE II.

T*Outes les puissances de l'unité à l'infini sont égales à l'unité.*

Car expliquant r par 1.	$1 : 1 = 1 : 1^2$ (Hyp. 1. Coroll. 2).	
Or	$1 = 1$	
Donc	$1 = 1^2$	Prop. 14. L. 5.
De même	$1 : 1 = 1^2 : 1^3$ (Hyp. 1. Coroll. 2).	
Or	$1 = 1^2$.	
Donc	$1 = 1^3$.	Prop. 14. L. 5.

Et ainsi de même des autres puissances à l'infini.

COROLLAIRE III.

L*Orsque deux ou plusieurs raisons sont exprimées par une même primordiale* ($R : 1$) *ayant pour conséquent l'unité; leur composition s'exécutera par la simple addition des Exposans des antécédens, c. à. d. de leurs exposans de multiplicité. Car supposons qu'il faille composer la raison* $R^3 : 1$ *avec la raison* $R^2 : 1$. *la composée sera* $= \overline{R^3 : 1} + \overline{R^2 : 1}$, (Def. 6. & Hyp. 3).

Mais $\overline{R^3 : 1} = \overline{R : 1} + \overline{R : 1} + \overline{R : 1}$ (Def. 6.)

& $\overline{R^2 : 1} = \overline{R : 1} + \overline{R : 1}$ (Def. 6.)

Partant $\overline{R^3 : 1} + \overline{R^2 : 1} = \overline{R : 1} + \overline{R : 1} + \overline{R : 1} + \overline{R : 1} + \overline{R : 1}$
$= \overline{R^5 : 1}$. Def. 6.

Mais $\overline{R^5 : 1} = \overline{R^{3+2} : 1}$

Par conséquent l'Exposant de multiplicité de la composée est la somme des Exposans des composantes.

DEFI-

DEFINITION. IX.

Une grandeur R est considérée comme la Racine d'une autre grandeur E, lorsqu'un de ses produits successifs R^2, R^3, ou R^4, &c, devient égal à la grandeur proposée E. En particulier on nomme R la racine quarrée de E, lorsque R R ou $R^2 = E$: & la raciné cubique, quand R R R ou $R^3 = E$; & ainsi de suite.

On marque la racine par le signe $\sqrt{\ }$; *& l'ordre des racines par les chiffres* 2, 3, 4, *&c. nommés* Exposans radicaux. *Ainsi* $\sqrt[2]{E}$, $\sqrt[3]{E}$, $\sqrt[4]{E}$, *dénotent successivement* la racine quarrée, cubique, quarré-quarrée *de* E; *& ainsi de suite à l'infini.*

DEMANDE II.

Qu'on puisse trouver les racines quarrées, cubiques, & toutes les autres racines des grandeurs déterminées.

L'Arithmétique détermine ces racines ou exactement, ou à peu près, par ses opérations. L'Algèbre abrége ces opérations au moyen de ses formules générales. Et la Géométrie assigne un certain nombre de ces racines, par des constructions linéaires. On suppose donc que l'extraction effective des racines est possible, afin de pouvoir établir les vérités Théorétiques qui en dépendent.

PROPOSITION VIII.

La racine d'une grandeur E, exprimée par un Exposant radical déterminé, est égale à la première moyenne proportionelle entre l'unité & la grandeur E; si l'on prend autant de ces moyennes proportionelles, que l'Exposant radical contient d'unités, moins une.

Demonstration.

Supposons pour fixer les idées, qu'il soit question de la racine quatrième de E, *que nous nommerons* R; *je dis, que prenant entre* 1 *&* E, *quatre moyennes proportionelles moins une, c. à. d. trois, que nous nommerons* R, S, T; *la première* R *est égale à la racine quatrième de* E.

Car, puisque les grandeurs 1, R, S, T, E, *sont en proportion continue,*

	$1 : E = 1^4 : R^4$	Prop. 7.
Mais	$1 = 1^4$	Prop. 7. Coroll. 2.
Partant	$E = R^4$	Prop. 14. L. 5.
Ou	$\sqrt[4]{E} = R$ (Def. 9.)	

Et comme le même raisonnement est applicable à tous les Cas, l'énoncé de la Proposition se soutient dans toute sa généralité.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

L'Interposition des moyennes proportionelles R, S, T, *résout la raison de* 1 : E, *en autant de raisons égales à celle de* 1 : R, *que l'Exposant radical contient d'unités. Par ex. dans ce cas, les* *trois moyennes proportionelles* R, S, T, *résolvent la raison de* 1 : E, *en ces quatres raisons égales*, 1 : R = R : S = S : T = T : E.

C'est pourquoi si l'on considère la raison de 1 : E, *ou de* 1 : E^1 *comme primordiale*, & *celle de* 1 : R *comme une de ses dérivées; cette raison de* 1 : R *est sousquadruplée de la raison entière* 1 : E, *ou elle est* $\frac{1}{4}$ *des composantes. Celle de* 1 : S = $\overline{1:R} + \overline{R:S}$ (Def. 6) *en est* $\frac{2}{4}$, *celle de* 1 : T = $\overline{1:R} + \overline{R:S} + \overline{S:T}$ *en est* $\frac{3}{4}$, *enfin celle de* 1 : E = $\overline{1:R} + \overline{R:S} + \overline{S:T} + \overline{T:E}$ *en est* $\frac{4}{4}$ *ou* 1, *c. à. d. elle est egale à la raison entière.*

COROLLAIRE II.

Si l'on veut donc exprimer les racines analogiquement à la Caractéristique des puissances; il faut regarder R *comme* = $E^{\frac{1}{4}}$; *où la puissance fractionaire* $\frac{1}{4}$ *marque que la raison de* 1 : $E^{\frac{1}{4}}$ *est une des quatre raisons égales interposées entre la raison* 1 : E. *Ce qui s'accorde avec les principes antérieurs. Car supposant que* $E^{\frac{1}{4}}$ *dénote la première des trois moyennes proportionelles entre* 1 & E, *ou ce qui est la même chose, la racine quatrieme de* E

On a $1 : E^1 = 1^4 : E^{(\frac{1}{4})4}$ Prop. 7.

Mais $1 = 1^4$ (Prop. 7. Coroll. 2) & $E^1 = E^{(\frac{1}{4})4}$. *Car* $(\frac{1}{4})^4 = 1$.

Par conséquent $1 : E^1 = 1 : E^1$. *Ce qui est vrai, les expressions étant identiques.*

De la même maniere qu'on exprime R *par* $E^{\frac{1}{4}}$, *on doit exprimer* S *par* $E^{\frac{2}{4}}$; T *par* $E^{\frac{3}{4}}$; E *par* $E^{\frac{4}{4}} = E^1$.

COROLLAIRE III.

Il suit de ces principes, que les expressions $\sqrt[2]{E}$ & $E^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{E}$ & $E^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[5]{E^3}$ *ou* $E^{\frac{3}{5}}$; &c. *sont identiques. Cependant les dernières sont plus expressives que les premières, en ce qu'elles réprésentent ces grandeurs comme appartenantes à l'ordre des puissances, ou comme des termes d'autant de raisons dérivées par la voye de l'interposition & de la continuation, c. à. d. de la résolution & de la composition d'une même raison primordiale, ce qui fait leur caractère essentiel.*

COROLLAIRE IV.

On voit ce qu'il faut faire pour la résolution des raisons, (comme 1 : R^3, *ou* R^3 : 1, *ayant pour antécédent, ou pour conséquent l'unité) lorsqu'il est question d'en dériver une sousmultipliée quelconque selon un Exposant donné, par ex.* 5. *On divisera par cet Exposant* 5 *l'Exposant de multiplicité* 3 *de la raison proposée, le quotient* $\frac{3}{5}$ *sera l'Exposant de la sousmultipliée* 1 : $R^{\frac{3}{5}}$ *qu'on cherche.*

COROL-

COROLLAIRE V.

Si l'on continue la Progression Géométrique A, B, C, D, *&c. ou* 1 R^1, R^2, R^3,

$$\left\{\begin{matrix} d, & c, & b, & & A, & B, & C, & D, & \&c. \\ \frac{1}{R^3} & \frac{1}{R^2} & \frac{1}{R^1} & & 1 & R^1 & R^2 & R^3, & \&c. \end{matrix}\right\}$$

de l'autre côté de l'unité pour avoir les termes b, c, d, *&c, ou* $\frac{1}{R^1}$ $\frac{1}{R^2}$ $\frac{1}{R^3}$ *&c. On commence cette partie de la progression par la réciproque de la raison* 1 : R, *c. à. d. par la raison* R : 1 *en faisant* $\overset{1}{R}$: $1 = 1 : \frac{1}{R^1}$ *Item* $\overset{1}{R}$: $1 = \frac{1}{R^1} : \frac{1}{R^2}$ *&c. ainsi de suite; tellement que les termes* $\frac{1}{R^1}$, $\frac{1}{R^2}$, $\frac{1}{R^3}$ *&c. deviennent les réciproques des termes équidistans de l'unité* R^1, R^2, R^3, *&c. Ce qui montre que les raisons* A : b, A : c, A : d, *sont les réciproques des raisons* A : B, A : C, A : D *&c. Cette vérité est manifeste: car la directe* A : C *ou* 1 : R^2 *a pour sa réciproque* R^2 : 1 *& celle-ci est égale à la raison de* 1 : $\frac{1}{R^2}$ (Prop. 6); *& l'on voit que ce même raisonnement s'applique à tous les autres cas.*

COROLLAIRE VI.

Puisque les raisons dérivées se composent par la simple addition de leurs Exposans de multiplicité & que les directes, & leurs réciproques sont d'un effet contraire dans la composition des raisons, tellement qu'elles s'entrédetruisent, il est de l'ordre analogique de donner à ces réciproques des Exposans de multiplicité négatifs; afin qu'étant ajoutés dans la composition aux Exposans positifs, ils anéantissent ceux de leurs directes. Par ex. s'il faut composer, la raison R^5 : 1 *avec la raison* 1: R^2; *on trouve la composée* $R^5 : R^2 = R^3 : 1$ (Prop. 5). *Mais en donnant à la raison* 1 : R^2 *cette forme* R^{-2} : 1, *& en la composant ensuite avec la raison* $R^5 : 1$, *on trouve la composée* R^{5-2} : 1 *égale à la raison de* R^3 : 1.

COROLLAIRE VII.

Il suit de là que les expressions $\frac{1}{R^1}$ *&* R^{-1}, $\frac{1}{R^2}$ *&* R^{-2}, $\frac{1}{R^3}$ *&* R^{-3}, *& toutes les autres semblables sont identiques: & par conséquent que* $\frac{1}{R^2}$: 1. *designe la même chose que* 1 : R^2 *c. à. d. la réciproque de la raison* R^2 : 1.

COROLLAIRE VIII.

Et d'autant que la raison d'égalité ne produit ni augmentation ni diminution dans la composition des raisons (Prop. 5 Cor. 2), *il est de l'ordre analogique de lui assigner* Zéro pour Exposant de de sa multiplicité. *Ainsi lorsqu'on compose les raisons directes* $R^2 : 1$ *&* $R^3 : 1$ *&c, avec leurs réciproques* $R^{-2} : 1$ *&* $R^{-3} : 1$ *&c. On trouve toujours les raisons* $R^0 : 1$, $R^0 : 1$ *&c, désignant la raison d'égalité*, $1 : 1$. *D'où il suit que le caractère* R^0 *réprésente constamment l'unité, quelle que puisse être la valeur de* R.

COROLLAIRE IX.

PUisque la raison $1 : R^3$ *est composée des raisons* $\overline{1 : R} + \overline{1 : R} + \overline{1 : R}$. (Def. 6 & Hyp. 3.), *Et celle de* $1 : R^{-\frac{3}{4}}$, *des raisons* $1 : R^{-\frac{1}{4}}, + 1 : R^{-\frac{1}{4}} + 1 : R^{-\frac{1}{4}}$ *& ainsi des autres: On voit qu'en général les raisons exprimées par une même primordiale* $1 : R$, *se composent par la simple addition des Exposans, soit affirmatifs, soit négatifs; & dans l'un ou l'autre cas, soit entiers, ou fractionnaires, c. à. d. potentiels ou radicaux.*

COROLLAIRE X.

SI *on suppose qu'une raison donnée* $\overline{F : 1}$ *soit exprimée par une raison* $R^{\frac{m}{n}} : 1$ *dérivée de la primordiale* $R : 1$, *& une autre* $f : 1$, *de même par une autre dérivée* $R^{\frac{p}{q}} : 1$.

Il est clair que la composée $fF : 1 = R^{\frac{m}{n}} : 1 + R^{\frac{p}{q}} : 1$. *sera exprimée par la raison* $R^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} : 1$: *où l'Exposant de* R *est la somme des Exposans des composantes* $R^{\frac{m}{n}} : 1$. *&* $R^{\frac{p}{q}} : 1$.

PROPOSITION IX.

UNe raison primordiale $1 : R$ peut être décomposée à l'infini par la voye de l'interposition, & composée à l'infini par la voye de la continuation.

DEMONSTRATION.

ENtre *les deux termes* 1 *&* R *de la raison donnée, on peut prendre une moyenne proportionelle* $R^{\frac{1}{2}}$, *qui résout la raison donnée dans les deux raisons égales* $1 : R^{\frac{1}{2}}$, *&* $R^{\frac{1}{2}} : R^1$ (Prop. 8).

Chacune de ces deux raisons pouvant de même être résolue par l'interposition des moyennes proportionelles $Q = R^{\frac{1}{4}}$ *&* $S = R^{\frac{3}{4}}$ (Cor. 1. Prop. 8) *en deux raisons égales, la raison entière* $1 : R$ *se trouvera décomposée en quatre raisons continues & égales* $1 : Q : R^{\frac{1}{2}} : S : R$; *ou bien* $1 : R^{\frac{1}{4}} : R^{\frac{2}{4}} : R^{\frac{3}{4}} : R^1$.

Et comme par l'interposition de quatre autres moyennes proportionelles, chacune de ces raisons peut-être résolue en deux autres, d'où naîtra par rapport à la raison entière $1 : R$, *une résolution en huit raisons égales; & cette interposition pouvant être répétée à l'infini, il est manifeste que toute raison donnée peut être résolue en une infinité de raisons continues & égales, par l'interposition d'une infinité de moyennes proportionelles.*

De même, en formant des termes 1 *&* R *une Progression Géométrique* $1, R^1, R^2, R^3,$ $R^4,$

R^4, *&c; on trouve les raisons composées* $1 : R^2$, $1 : R^3$, $1 : R^4$ *&c. doublées, triplées, quadruplées, &c. de la raison donnée* $1 : R$. *Et comme cette continuation peut être poussée à l'infini, & que chacune de ces raisons multipliées, peut-être composée avec chacune des raisons sousmultipliées* $1 : Q.$, $1 : R^{\frac{1}{2}}$ *&c; il est clair que cette composition des raisons va à l'infini.*

C. Q. F. D.

REMARQUE.

LEs *raisons* $1 : R^1$, $R^1 : R^2$, $R^2 : R^3$, *&c. étant égales, la resolution* $1 : Q$, $Q : R^{\frac{1}{2}}$, $R^{\frac{1}{2}} : S$, $S : R^1$ *&c. de la premiere, est en même tems la résolution de toutes les autres. Si on compose donc une des multipliées, par ex. la doublée,* $1 : R^2$, *avec une des sousmultipliées; comme par ex. avec la sousdoublée* $1 : R^{\frac{1}{2}}$, *on trouvera la raison composée* $1 : R^{\frac{5}{2}}$; *moyenne entre la doublée & la triplée; où le conséquent* $R^{\frac{5}{2}}$ *est la moyenne proportionelle entre* R^2, *&* R^3. *Il en est de même de toutes les autres compositions.*

De plus, les raisons $R^2 : 1$, $R^3 : 1$ *&c. étant les réciproques des directes multipliées* $1 : R^2$, $1 : R^3$; *&c. de même que les raisons* $R^{\frac{1}{4}} : 1$ *&* $R^{\frac{3}{4}} : 1$ *&c. sont les réciproques des directes sousmultipliées* $1 : R^{\frac{1}{4}}$, $1 : R^{\frac{3}{4}}$ *&c; On voit que la résolution & composition de la raison* $1 : R$, *donne les derivées de sa réciproque* $R : 1$, *en renversant les termes.*

PROPOSITION X.

LA moyenne proportionelle R, entre deux termes M & N, est plus grande que le moindre terme M, & plus petite que le plus grand N.

DEMONSTRATION.

P*uisque*	$M : R = R : N.$ (Hyp.)	
Il s'ensuit que	$M^2 : R^2$ *ou* $RR : NN = M : N.$	Prop. 7.
Mais	M *est* $< N$ (Hyp.)	
Donc	M^2 *est* $< R^2$ *&* RR *est* $< NN$	Prop. 16. L. 5.
D'où il suit que	M *est* $< R$ *& que* R *est* $< N.$	Rem.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

Si l'on place entre M *&* R *une autre moyenne proportionelle* Q; M *est* $<$ Q, *&* Q *est* $<$ R. *Et si l'on en place une autre nouvelle* S, *entre* R *&* B, *il suit encore que* R $<$ S *& que*, S *est* $<$ B. *Partant* M $<$ Q, Q $<$ R, R $<$ S, S $<$ N. *c. a. d. les moyennes proportionelles croissent successivement depuis le moindre terme* M, *jusqu'au plus grand* N.

COROLLAIRE II.

Puisqu'on peut prendre une infinité de moyennes proportionelles a, b, c, d, *&c. entre* M *&* N, *il est clair que les termes* M a, b, c, d, ... *&* N *passeront successivement par tous les dégrés de grandeurs depuis* M *jusqu'à* N.

COROLLAIRE III.

Par conséquent toute grandeur quelconque K $>$ M *&* $<$ N, *sera égale à quelqu'une des moyennes proportionelles* a, b, c, d, *&c. prises entre* M *&* N.

PROPOSITION XI.

Toute raison 1 : K peut être considérée comme une dérivée de quelque primordiale 1 : B (supposant K & B $>$ 1.)

DEMONSTRATION.

D'Abord si K *est* = *à* B, *ou à une des Puissances de* B, *la vérité est manifeste. Puisqu'en ce cas*, K *devient* = *à* B^1 *ou* B^2 *ou* B^3 *&c. Si* K *est* $<$ B, *cette grandeur* K *sera* = *à l'une des moyennes proportionelles* $B^{\frac{n}{m}}$, *qu'on pourra prendre à l'infini entre* 1 *&* B. (Prop. 10. Coroll. 3.) * *Par conséquent la raison* 1 : K *sera* = *à la raison* 1 : $B^{\frac{n}{m}}$. *Mais cette dernière raison, est une raison dérivée de la Primordiale* 1 : B. *Donc aussi en ce cas une raison peut être considérée comme dérivée d'une même Primordiale. Si* K *est* $>$ B, *la gdr.* K *tombera entre deux termes quelconques comme* B^3 *&* B^4, *Par conséquent parmi les moyennes proportionelles de cette raison* B^3 : B^4, ** *il y en aura une* $B^{\frac{x}{y}}$ = *à* K. (Prop. 10. Cor. 3.) *Partant la raison* 1 : K *sera* = *à la raison* 1 : $B^{\frac{x}{y}}$. *Mais cette dernière raison est une dérivée de la Primordiale* 1 : B. (Prop. 8. Coroll. 1.). *Donc la vérité de la proposition est encore manifeste dans ce cas.* C. Q. F. D.

DEFI-

* En prenant 1 & B à la place de les gdrs. M & N du (Coroll. 3. Prop. 10.)

** En prenant B^3 & B^4 au lieu des gdrs M & N du même Coroll.

DEFINITION X.

LA suite de toutes les raisons possibles, tant directes, que réciproques, considérées comme ayant été dérivées d'une même raison Primordiale, peut être nommée UN SYSTÊME DE RAISONS.

COROLLAIRE.

Toutes les raisons A : B, C : D *&c. peuvent donc être exprimées, par une même Primordiale* 1 : R, *tellement que* $A : B = 1 : R^{\frac{m}{n}}$ *&* $C : D = 1 : R^{\frac{x}{y}}$. *Par conséquent, au lieu de faire les opérations de composition, ou de résolution, sur les raisons* A : B, C : D, *&c. on peut les faire sur leurs égales*, $1 : R^{\frac{m}{n}}$ *&* $1 : R^{\frac{x}{y}}$.

REMARQUE.

LA Primordiale est arbitraire, mais aussitôt qu'on la détermine, tout le Systéme de raisons qui en dépend est déterminé. Comme chaque raison peut être prise pour Primordiale, il est clair qu'on peut imaginer une infinité de ces Systêmes.

DEFINITION XI.

LOrsqu'après avoir établi un Systême de raisons, on fait correspondre à la Primordiale, (1 : R), *une quantité arbitraire quelconque* L; *& qu'ensuite on fait pareillement correspondre aux autres dérivées (multipliées ou sousmultipliées &c.) de la Primordiale, d'autres quantités multiples ou sousmultiples de l'arbitraire* L; *tellement que de quelque manière que les dérivées augmentent ou diminuent, par la voye de la composition ou résolution des raisons, leurs quantités correspondantes augmentent ou diminuent pareillement selon la composition ou résolution des grandeurs; alors ces quantités, analogues en cette manière aux grandeurs des raisons, sont nommées leurs* MESURES, *ou leurs* LOGARITHMES; *Et toute la suite de ces Mesures ou Logarithmes appartenant à un même Systême de raisons, s'appelle* UN SYSTÊME DE LOGARITHMES.

COROLLAIRE I.

LEs Logarithmes étant destinés à ramener la composition & résolution des raisons, laquelle s'exécute par la multiplication ou division des termes, à la composition & résolution des grandeurs, qui s'effectuë au moyen de l'addition & de la soustraction: ou bien, le but de l'institution des Logarithmes étant d'indiquer, par leur rapport au Logarithme Primordial, la multiplicité ou sousmultiplicité de leurs raisons correspondantes, relativement à la raison Primordiale; il est clair, que les raisons égales doivent avoir des Logarithmes égaux; & qu'en composant une raison $1 : R^2$ *de deux raisons égales* $\overline{1 : R} + \overline{1 : R}$, *il faut composer son Logarithme de deux Logarithmes égaux* 1 L *&* 1 L, *pour avoir le Logarithme* 2 L *de la com-*

posée $1 : R^2$. *Et que pareillement en resolvant la raison* $1 : R$ *en deux ou plusieurs autres égales p. ex.* $1 : R^{\frac{1}{2}}$ & $R^{\frac{1}{2}} : R$, *il faut aussi resoudre son Logarithme* L, *en deux autres égaux*, $\frac{1}{2}L$ & $\frac{1}{2}L$, *pour avoir le Logarithme de chacune.*

Et en général, comme l'exposant de multiplicité ou de sousmultiplicité, p. ex. 2 *ou* $\frac{3}{4}$ *d'une raison composée* $1 : R^2$ *ou* $1 : R^{\frac{3}{4}}$ *est multiple ou sous multiple de l'exposant de multiplicité* 1 *de la Primordiale* $1 : R^1$: *ainsi le Logarithme* 2L *ou.* $\frac{3}{4}L$ *de la composée, est multiple ou sousmultiple du Logarithme* L *de cette même Primordiale. D'où l'on voit, qu'on trouve les Logarithmes dérivés, en multipliant le Logarithme Primordial* L *par les exposans de multiplicité des raisons dérivées auxquelles ils doivent apartenir.*

COROLLAIRE II.

LE Logarithme Primordial L *étant arbitraire, on peut supposer* $L = +1$. *Et en ce cas les exposans de multiplicité des raisons dérivées deviennent eux mêmes les Logarithmes de ces raisons. Mais si on fait* $L = -1$ *ces mêmes exposans, pris avec leurs signes contraires, se changent en Logarithmes.*

COROLLAIRE III.

LA raison d'égalité $1 : 1$ *ou* $1 : R^0$ &c. (Prop. 8. Cor. 8.) *ne produisant ni augmentation, ni diminution dans la composition des raisons, il est de l'ordre analogique de lui assigner Zéro pour Logarithme, attendu que Zéro ajouté ou retranché des grandeurs, n'y produit aucun changement.*

COROLLAIRE IV.

PUis donc que de la composition d'une raison directe $1 : R$ *avec sa réciproque* $R : 1$, *il résulte une raison d'égalité*, $R : R$, *dont le Logarithme est égal à Zéro* (Cor. 3.); *il s'ensuit que leurs Logarithmes doivent avoir des signes contraires, tellement que si celui de la directe* $1 : R$ *est positif, celui de sa réciproque* $R : 1$ *soit négatif, afin que s'entredétruisant il en resulte Zéro, qui est le Logarithme de la raison d'égalité provenue de leur composition.*

D'où l'on voit, que le Logarithme d'une raison réciproque est égal au Logarithme de sa directe pris négativement

C'est-à-dire $\quad Log.\ \overline{R : 1} = -\ Log.\ \overline{1 : R}$

Car puisque $\quad \overline{R : R} = \overline{1 : R} + \overline{R : 1}$ $\quad$ Def. 6.

Il s'ensuit $\quad Log.\ \overline{R : R} = Log.\ \overline{1 : R} + Log.\ \overline{R : 1}$ $\quad$ Def. 11. Coroll. 1.

Or $\quad Log.\ \overline{R : R} = 0.$

Donc $Log.\ \overline{1 : R} + Log.\ \overline{R : 1} = 0.$ & *ajoutant départ & d'autre* $- Log.\ 1 : R.$

On a $\quad Log.\ \overline{R : 1} = -\ Log.\ \overline{1 : R}.$ $\quad$ Ax. 2. L. 1.

COROL-

COROLLAIRE V.

Le Logarithme d'une raiſon compoſée de directes & de réciproques, eſt donc l'aggrégat des Logarithmes, ſoit poſitifs ſoit négatifs des compoſantes.

Par exempl. la raiſon $\overline{AB : DE} = \overline{A : D} + \overline{B : E}.$

Partant $Log.\ \overline{AB : DE} = Log.\ \overline{A : D} + Log.\ \overline{B : E}.$ Def. 11. Coroll. 1.

Derechef en réduiſant la décompoſition à l'unité:

Puiſque la raiſon $\overline{AB : DE} = \overline{A : 1} + \overline{B : 1} + \overline{1 : D} + \overline{1 : E}$

Il s'enſuit que $Log.\ \overline{AB : DE} = Log.\ \overline{A : 1} + Log.\ \overline{B : 1} + Log.\ \overline{1 : D} + Log.\ \overline{1 : E}.$ Def. 11. Cor. 1.

Mais d'autant que les Logarithmes des réciproques ſont égaux à ceux de leurs directes pris négativement.

On aura $Log.\ \overline{1 : D} = -Log.\ \overline{D : 1}$, *&* $Log.\ \overline{1 : E} = -Log.\ \overline{E : 1}$ Def. 11. Cor 4.

Par conſéquent $Log.\ \overline{AB : DE} = Log.\ \overline{A : 1} + Log.\ \overline{B : 1} - Log.\ \overline{D : 1} - Log.\ \overline{E : 1}.$

COROLLAIRE. VI.

Si l'on ſe détermine une fois à donner à une Primordiale de plus grande inégalité R : 1, *& à toutes ſes dérivées* $R^2 : 1$, $R^3 : 1$ *&c.* $R^{\frac{1}{2}} : 1$, $R^{\frac{1}{3}} : 1$ *&c. l'unité pour conſéquent, les Logarithmes de ces raiſons pourront être apellés les Logarithmes des quantités ou nombres* R, R^2, R^3, $R^{\frac{1}{2}}$, $R^{\frac{1}{3}}$ *&c. en ſupprimant l'unité, leur commun conſéquent, comme devant être ſous entendu, parce que tout nombre eſt eſſentiellement rélatif à l'unité. Par ex. ſi on ſuppoſe que la Primordiale ſoit la raiſon de* 10 : 1, *& ſon Logarithme correſpondant* L; *celui de ſa doublée* 100 : 1, *ſera* 2 L, *& celui de ſa triplée* 1000 : 1 *ſera* 3 L *&c.* (Def. 11. Coroll. 1.). *On peut donc dire que* 1 L *eſt le Logarithme de* 10, *que* 2 L *eſt celui de* 100, *&* 3 L *celui de* 1000 *&c. vû que les nombres* 10, 100, 1000 *&c ſe rapportent tous à l'unité, & expriment tacitement les raiſons de* 10 : 1, 100 : 1, 1000 : 1 *&c.*

Ainſi dans le Syſtême ordonné de cette manière, le Logarithme d'un nombre quelconque N, *n'eſt autre choſe que le Logarithme de la raiſon de* N : 1.

REMARQUE.

On peut choiſir une grandeur quelconque L, *d'un genre quelconque, pour être la meſure de la Primordiale, (comme un nombre, une ligne, une ſurface, un ſolide &c.) & en dériver les meſures des autres raiſons, en reſtant toujours dans le même Syſtême & dans le même genre de grandeurs. L'analogie ſubſiſte, pourvû que les méſures ſoient entr'elles comme les nombres qui expriment la multiplicité des raiſons.*

Quand on aſſigne à la Primordiale pour meſure de ſa raiſon, un nombre toutes les autres meſures deviennent numériques, & prennent proprement le nom de Logarithmes terme: qui veut dire Nombres des Raiſons, *en grec* αριθμοι λογων.

PROPOSITION XII.

LE Logarithme du Produit f F eſt égal à la ſomme des Logarithmes des Facteurs f & F.

DEMONSTRATION.

LE Logarithme du Produit f F *eſt proprement celui de la raiſon* f F : 1.
Mais cette raiſon eſt compoſée de la raiſon f : 1 *&* F : 1.

c. a. d. $\overline{\text{f F} : 1} = \overline{\text{f} : 1} + \overline{\text{F} : 1}$. Def. 6.

Partant les Logarithmes reduiſant la compoſition des raiſons à celle des grandeurs,

Il s'enſuit que $Log.\ \overline{\text{f F} : 1} = Log.\ \overline{\text{f} : 1} + Log.\ \overline{\text{F} : 1}$. Def. 11. Coroll. 1.

Or l'unité étant ſousentendue comme conſéquent, en prononcent les nombres, on peut la ſupprimer.

Partant $Log.\ \text{f F} = Log.\ \text{f} + Log.\ \text{F}$. Def. 11. Coroll. 6.

C. Q. F. D.

PROPOSITION XIII.

LE Logarithme du quotient $\frac{\text{M}}{\text{N}}$ eſt égal au Logarithme du Dividende moins le Logarithme du Diviſeur.

DEMONSTRATION.

LE Logarithme du nombre $\frac{\text{M}}{\text{N}}$ *eſt proprement le Logarithme de la raiſon*

$$\overline{\tfrac{\text{M}}{\text{N}} : 1} = \overline{\text{M} : \text{N}}. \qquad \text{Def. 2.}$$

Or cette raiſon eſt compoſée de la raiſon M : 1 *& de la raiſon* 1 : N

c. à. d. $\overline{\tfrac{\text{M}}{\text{N}} : 1} = \overline{\text{M} : 1} + \overline{1 : \text{N}}$, Def. 6.

Par conſéquent les Logarithmes répréſentant la compoſition des raiſons par celle des grandeurs; (Def. 11. Coroll. 1.)

Il ſuit que le $Log.\ \overline{\tfrac{\text{M}}{\text{N}} : 1}$ *ou* $Log.\ \overline{\text{M} : \text{N}} = Log.\ \overline{\text{M} : 1} + Log.\ \overline{1 : \text{N}}$

Mais le $Log.\ \overline{1 : \text{N}}$ *eſt* $= -\ Log.\ \overline{\text{N} : 1}$ (Def. 11. Coroll. 4.)

Partant le $Log.\ \overline{\tfrac{\text{M}}{\text{N}} : 1} = Log.\ \overline{\text{M} : 1} - Log.\ \overline{\text{N} : 1}$,

Et en ſupprimant les unités qui ſont les conſéquens,

On aura $Log.\ \frac{\text{M}}{\text{N}} = Log.\ \text{M} - Log.\ \text{N}$. Def. 11. Cor. 5.

C. Q. F. D.

PROPOSITION XIV.

Le Logarithme d'une Puissance est égal au Logarithme de la racine de cette Puissance, multiplié par l'exposant potentiel. Et réciproquement; le Logarithme de la racine est égal à celui de la Puissance, divisé par l'exposant radical.

DEMONSTRATION.

Le Logarithme d'une Puissance quelconque, comme R^3, *est proprement le Logarithme de la Raison* $R^3 : 1$. (Def. 11. Cor. 1.)

Mais $R^3 : 1 = \overline{R:1} + \overline{R:1} + \overline{R:1} = 3\,\overline{R:1}$ Def. 6.

Partant Log. $R^3 : 1 =$ *Log.* $\overline{R:1}$ + *Log.* $\overline{R:1}$ + *Log.* $\overline{R:1} = 3.$ *Log.* $\overline{R:1}$ { Def. 11. Coroll. 1.

Par conséquent en supprimant l'unité

Log. $R^3 = 3$ *Log.* R. { Def. 11. Coroll. 6.

Mais le facteur 3 est l'exposant potentiel de R.

Donc, le Logarithme d'une Puissance, est égal au Logarithme de la racine de cette Puissance, multiplié par l'exposant potentiel.

C. Q. F. D. 1°.

Puis donc que *Log.* $R^3 = 3$ *Log.* R

Il s'ensuit que $\frac{1}{3}$ *Log.* $R^3 =$ *Log.* R

Mais le Diviseur 3 est l'exposant radical de la racine cubique de la Grandeur R^3.

Donc le Logarithme de la racine est égal à celui de la Puissance divisé par l'exposant radical.

C. Q. F. D. 2°.

REMARQUE.

On a calculé les Logarithmes de tous les nombres naturels, depuis l'unité jusqu'à dix mille, & même jusqu'à cent mille, & on les a reduits en Tables. On y a choisi pour raison Primordiale celle de 10 : 1, à laquelle on a donné l'unité pour Logarithme, par conséquent la raison doublée 100 : 1, ou simplement le nombre 100 a dû recevoir 2 pour Logarithme; & de même la triplée 1000 : 1, ou le nombre 1000, a dû avoir 3 pour le sien; & ainsi de même des autres Puissances du nombre 10.

Cherchant ensuite successivement un grand nombre de moyennes proportionelles entre 10 & 1, on est parvenu à résoudre la raison Primordiale 10 : 1 en plusieurs raisons moyennes, & on a trouvé leurs Logarithmes correspondants en prenant la moitié de la somme des Logarithmes des deux termes extrêmes. De tous ces Logarithmes on n'a rapporté dans la Table que ceux des nombres entiers, compris entre 1 & 10. On a fait la même chose avec les raisons de 100 : 1, de 1000 : 1 &c. en se contentant de ne ranger dans la Table que les Logarithmes des nombres entiers selon leur suite naturelle.

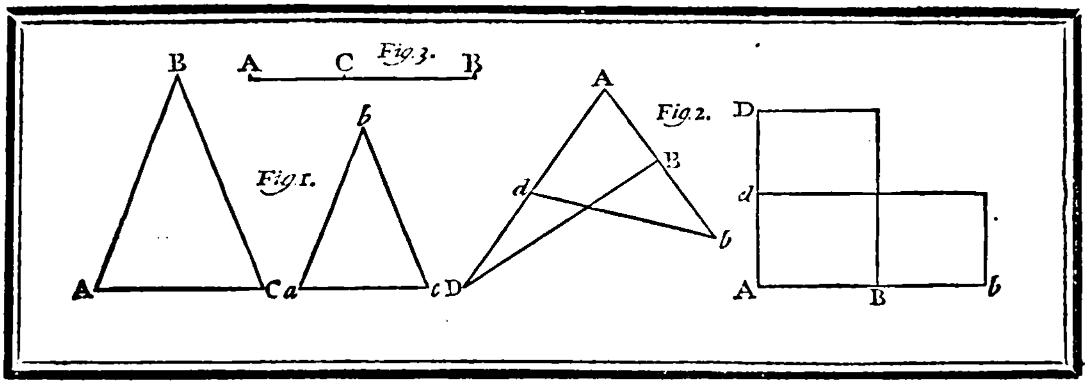
Une

Une explication plus détaillée des adresses de calcul rélatives à la Logarithmo-technie, *ou construction de la Table des Logarithmes, n'entre pas dans le Plan que nous nous sommes proposés de suivre: les Commençans trouveront ce détail dans tous les Auteurs, & il n'auront pas de peine à l'entendre & à acquérir la pratique du calcul Logarithmique, pour peu qu'ils se soient rendu familiers avec les principes que nous venons d'établir.*

LES

ELEMENS D'EUCLIDE,

LIVRE SIXIEME.



DEFINITIONS.

I.

ON nomme *figures ſemblables* (Fig. 1.) celles (ABC, abc), qui ont les angles (A, B, C, & a, b, c,) égaux chacun à chacun, & les côtés (AB, AC, BC & ab, ac, bc,) comprenant ces angles égaux proportionels (c. à. d. AB : AC = ab : ac, item AB : BC = ab : bc, & AC : BC = ac : bc).

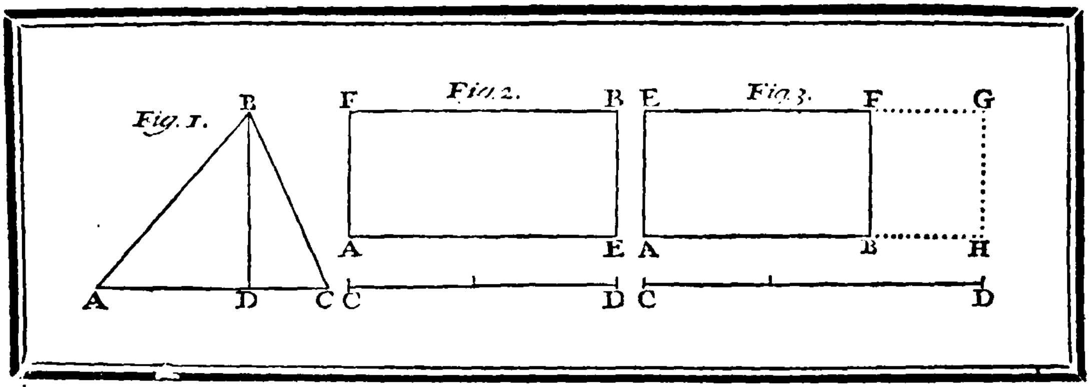
I I.

LEs figures (DAB, dAb) ſont réciproques (Fig. 2.) quand les antécédens (AD, Ab) & les conſéquens (Ad, AB) des raiſons ſe trouvent dans l'une & l'autre figure (c. à. d. AD : Ad = Ab : AB).

Ou les figures (DAB, dAb) *ſont* réciproques; *quand les deux côtés* (AD, AB & Ad, Ab) *dans chacune de ces figures, environnant un même angle* (A) *ou des angles égaux, deviennent les extrêmes ou les moyens* (Voy. Def. 9. §. 1. L. 5.) *d'une même proportion* (*c. à. d. ſi* AD: Ad=Ab:AB).

I I I.

UNe ligne droite (AB) eſt dite être diviſée *en moyenne & extrême raiſon*, (Fig. 3.) quand la droite entière (AB) eſt à la plus grande partie (BC), comme cette plus grande partie (BC) eſt à la plus petite (AC).



DEFINITIONS.

IV.

L*A hauteur d'une figure* (ABC) (Fig. 1.) eſt la perpendiculaire (BD) abaiſſée du ſommet (B) ſur la baſe (AC).

REMARQUE

I*L ſuit de cette Définition que ſi deux figures, placées ſur une même droite*, *ont la même hauteur*, *elles ſeront auſſi entre les mêmes Parallèles; puiſque par la nature des Parallèles les perpendiculaires abaiſſées de l'une à l'autre ſont toujours égales*.

V.

U*Ne raiſon* (AB.BC.CD:DE.EF.FG) *eſt compoſée de pluſieurs autres* ($\overline{AB:DE}$ + $\overline{BC:EF}$ + $\overline{CD:FG}$), lorſque ſes termes réſultent de la multiplication des termes de ces raiſons compoſantes (*Voy. Def.* 6. *de l'Append.*).

VI.

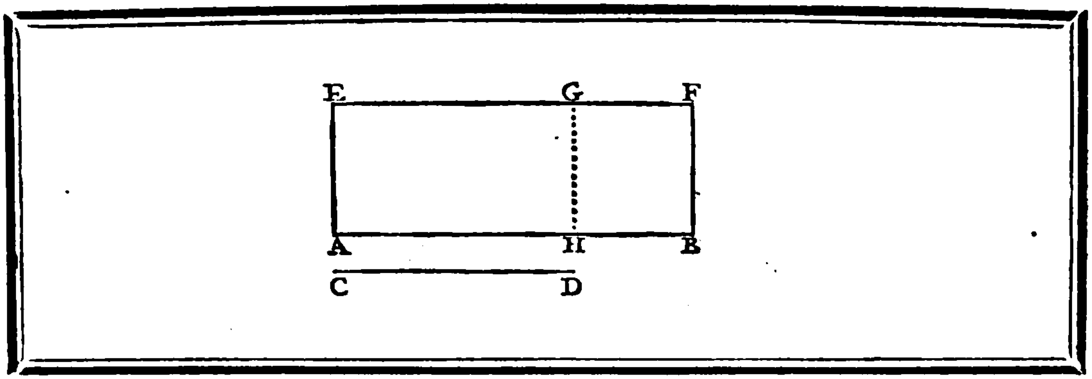
ON dit qu'*un Parallélogramme* (AB) (Fig. 2.) *eſt appliqué à quelque ligne droite* (CD), quand il a pour baſe ou pour côté cette ligne droite propoſée (CD).

VII.

U*N Parallélogramme défaillant* (AF) (Fig. 3.) eſt celui dont la baſe (AB) eſt plus petite que la ligne propoſée (CD) à laquelle il eſt dit être appliqué.

VIII.

MAis *le défaut d'un Parallélogramme défaillant* (AF) (Fig. 3.) eſt un Parallélogramme (BG) compris du reſte de la droite propoſée (CD) & de l'autre côté (BF) du Parallélogramme défaillant.



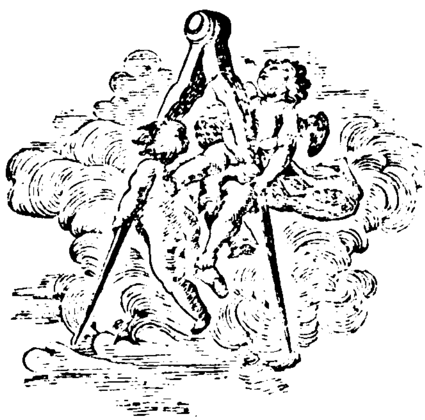
DEFINITIONS.

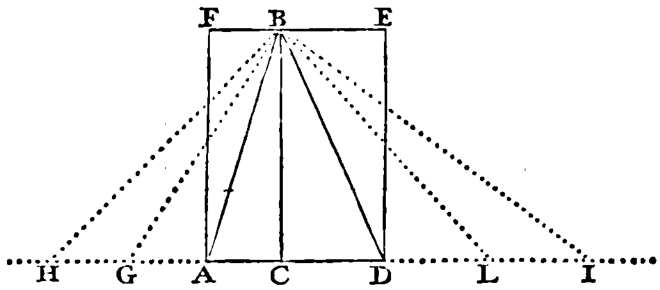
IX.

UN *Parallélogramme excédant* (AF) eſt celui dont la baſe (AB) eſt plus grande que la ligne propoſée (CD), à laquelle il eſt dit être appliqué.

X.

ET *l'excès d'un Parallélogramme excédant* (A F) eſt un Parallélogramme (HF) compris du ſurplus, dont la baſe AB ſurpaſſe la droite propoſée (CD), & de l'autre côté (BF) du Parallélogramme excédant.





PROPOSITION I. THEOREME I.

LEs Triangles (ABC, CBD) & les Parallélogrammes (CF, CE), qui ont la même hauteur, font entr'eux en raifon de leurs bafes (AC, CD).

Hypothese	These.
Les △ ABC, CBD & les Pgmes CF, CE ont la même hauteur.	*I. Le △ ABC : △ CBD = AC : CD.* *II. Le Pgme CF : Pgme CE = AC : CD.*

Préparation.

1. Prolongez AD indéfiniment en H & en I. — Dem. 2. L. 1.
2. Faites AG = AC = GH, item DL = CD = LI. — Prop. 3. L. 1.
3. Tirez BG, BH, BL, BI. — Dem. 1. L. 1.

DEMONSTRATION.

PUifque les △ ABC, GBA, HBG font fur des bafes égales AC, AG, GH (*Prep.* 2) & entre les mêmes Plles HI, FE (Hyp. & Def. 35. L. 1. & Rem. Def. 4. L. 6.)

1. Ces △ font = entr'eux. — Prop. 38. L. 1.
2. D'où il fuit que le △ HBC & la bafe HC font des équimult. du △ ABC & de la bafe AC.

On démontrera par un raifonnement femblable, que

3. Le △ CBI & la bafe CI font des équimult. du △ CBD & de la bafe CD.
4. Par conféquent les gdrs HBC & HC font equimult. des gdrs ABC & AC (*Arg.* 2), & les gdrs CBI & CI font d'autres équimult. des gdrs CBD & CD (*Arg* 3).

Or fi le △ HBC eft >, =, ou < le △ CBI, la bafe HC eft auffi >, =, ou < la bafe CI. (Prop. 38. L. 1.)

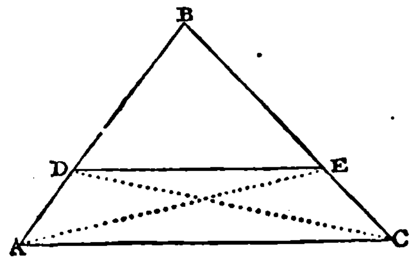
5. Partant le △ ABC : △ CBD = AC : CD. — Def. 5. L. 5.

C. Q. F. D. I.

Mais les △ ACB, CBD étant les moitiés des Pgmes CF, CE (*Prop.* 41. *L.* 1),

5. Il s'enfuit que △ ACB : △ CBD = Pgme CF : Pgme CE. — Prop. 15. L. 5.
6. C'eft pourquoi le Pgme CF : Pgme CE = AC : CD. — Prop. 11. L. 5.

C. Q. F. D. II.



PROPOSITION II. THEOREME II.

SI une ligne droite (DE) eſt tirée parallèlement à un côté (AC) d'un Triangle (ABC): elle coupera les deux autres côtés (AB, BC) proportionellement (c. à. d. que AD : DB = CE : EB); & réciproquement, ſi une ligne droite (DE) coupe proportionellement les deux côtés (AB, BC), elle ſera parallèle au troiſieme côté (AC).

Hypothese.	These.
La droite DE eſt Plle à AC.	*AD : DB = CE : EB.*

Préparation.

Tirez les droites AE, CD. — Dem. 1. L. 1.

I. Demonstration.

PUis donc que DE eſt Plle à AC (*Hyp.*)

1. Le △ DAE eſt = au △ ECD. — Prop. 37. L. 1.
2. Partant △ DAE : △ DBE = △ ECD : △ DBE. — Prop. 7. L. 5.
   Mais le △ DAE : △ DBE = AD : DB,
   & le △ ECD : △ DBE = CE : EB (*Prop. 1. L. 6*).
3. Donc AD : DB = CE : EB. — Prop. 11. L. 5.

C. Q. F. D. I.

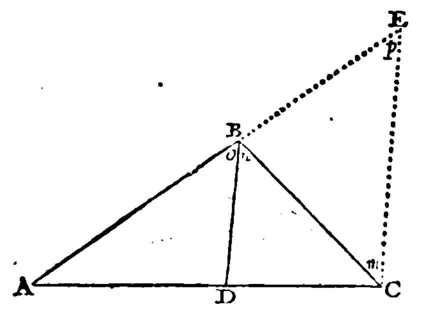
Hypothese.	These.
AD : DB = CE : EB.	*La droite DE eſt Plle à AC.*

II. Demonstration.

PUiſque les △ DAE, DBE ſont entre les mêmes Plles, de même que les △ ECD, DBE,

1. On aura le △ DAE : △ DBE = AD : DB, } Prop. 1. L. 6.
   & le △ ECD : △ DBE = CE : EB.
   Mais AD : DB = CE : EB (*Hyp.*),
2. Donc le △ DAE : △ DBE = △ ECD : △ DBE. — Prop. 11. L. 5.
3. C'eſt pourquoi le △ DAE eſt = au △ ECD. — Prop. 9. L. 5.
4. Partant la droite DE eſt Plle à AC. — Prop. 39. L. 1.

C. Q. F. D. II.



PROPOSITION III. *THEOREME III.*

SI l'angle (B) d'un triangle (ABC) eſt partagé en deux également par une ligne droite (BD) qui coupe la baſe du triangle en (D), les ſegmens de la baſe (AD, DC) ſeront proportionels aux deux côtés (AB, BC) du triangle. Et réciproquement, ſi les ſegmens de la baſe (AD, DC) ſont proportionels aux deux côtés (AB, BC) du triangle (ABC), la ligne droite (BD) tirée du ſommet (B) du triangle au point de ſection (D), coupera auſſi l'angle au ſommet (ABC) en deux également.

HYPOTHESE.
La droite BD coupe ∀ ABC en deux également ou ∀ o = ∀ n.

THESE.
AD : DC = AB : BC.

Préparation.

1. Par le point C tirez CE Plle à DB. — Prop. 31. L. 1.
2. Prolongez AB juſqu'à ce qu'elle rencontre CE en E. — Dem. 2. L. 1.

I. DEMONSTRATION.

PUiſque les droites DB, CE ſont Plles (*Prep.* 1);
1. Il s'enſuit que AD : DC = AB : BE. — Prop. 2. L. 6.
2. Et que ∀ *n* = à ∀ *m*, & ∀ *o* = ∀ *p*. — Prop. 29. L. 1.
Mais, ∀ *o* étant = à ∀ *n* (*Hyp*).
3. L'angle *m* eſt auſſi = à ∀ *p*, & BC = à BE. — {Ax. 1. L. 1. Prop. 6. L. 1.
4. C'eſt pourquoi AD : DC = ou AB : BC — Pr. 7. & 11. L. 5.

C. Q. F. D.

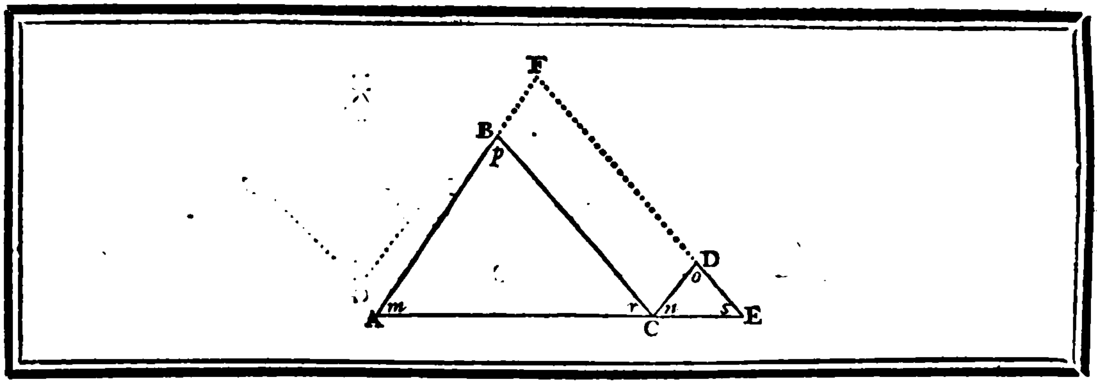
HYPOTHESE.
AD : DC = AB : BC.

THESE.
La droite BD coupe ∀ ABC en deux également ou ∀ o = ∀ n.

II. DEMONSTRATION.

PUiſque les droites DB, CE ſont Plles (*Prep.* 1),
1. Il s'enſuit que AD : DC = AB : BE. — Prop. 2. L. 6.
Mais AD : DC = AB : BC (*Hyp.*);
2. C'eſt pourquoi AB : BE = AB : BC. — Prop. 11. L. 5.
3. Par conſéquent, BE eſt = BC, & ∀ *m* = ∀ *p*. — {Prop. 9. L. 5. Prop. 5. L. 1.
Mais ∀ *m* eſt auſſi = à ∀ *n*, & ∀ *p* = à ∀ *o* (*Prop.* 29. *L.* 1).
4. Partant ∀ *n* eſt = à ∀ *o*, ou la droite BD coupe ∀ ABC en deux également. — Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION IV. *THEOREME IV.*

Les triangles équiangles (ABC, CDE) ont les côtés (AC, AB & CE, CD &c), qui comprennent des angles égaux (*m* & *n* &c), proportionels; & les côtés (AB, CD &c) opposés aux angles égaux (*r* & *s* &c), font homologues.

Hypothese.

Les △ ABC, CDE sont équiangles;
ou ∠ m = à ∠ n, ∠ r = à ∠ s,
& ∠ p = à ∠ o.

These.

I. $\begin{cases} AB : AC = CD : CE. \\ AC : BC = CE : DE. \\ AB : BC = CD : DE. \end{cases}$

II. *Les côtés* $\begin{cases} AB, CD \\ AC, CE \\ BC, DE \end{cases}$ *opposés aux ∠ égaux, sont homologues.*

Préparation.

1. Placez les △ ABC, CDE, ensorte que les bases AC, CE se rencontrent directement.
2. Prolongez les côtés AB, DE indéfiniment en F. — Dem. 2. L. 1.

Demonstration.

Puisque les ∠ *m* + *r* du △ ABC sont $<$ 2∟ (*Prop.* 17. *L.* 1), & que ∠ *r* est = à ∠ *s* (*Hyp*),

1. Les ∠ *m* + *s* sont aussi $<$ 2∟, & AB, DE se rencontreront quelque part en F. — Prop. 27. L. 1. Rem.

Mais ∠ *m* étant = à ∠ *n* & ∠ *r* = à ∠ *s* (*Hyp*),

2. Les droites AF, CD item BC, FE sont Plles, — Prop. 28. L. 1.
3. Et le quadrilatere CF est un Pgme. — Def. 35. L. 1.
4. Partant les côtés opposés BC, FD; item CD, BF sont = entr'eux. — Prop. 34. L. 1.

Or BC étant Plle au côté FE du △ FAE (*Arg.* 2),

5. Donc AB : BF = AC : CE. — Prop. 2. L. 6.
6. Ou alternando AB : AC = BF : CE. — Prop. 16. L. 5.
7. Ou bien AB : AC = CD : CE; parce que CD est = à BF (*Arg.* 4). — Prop. 7. L. 5.

Pareillement CD étant Plle au côté AF du △ FEA; on prouvera de même

8. Que AC : BC = CE : DE.
9. Parconséquent AB : BC = CD : DE. — Prop. 22. L. 5.

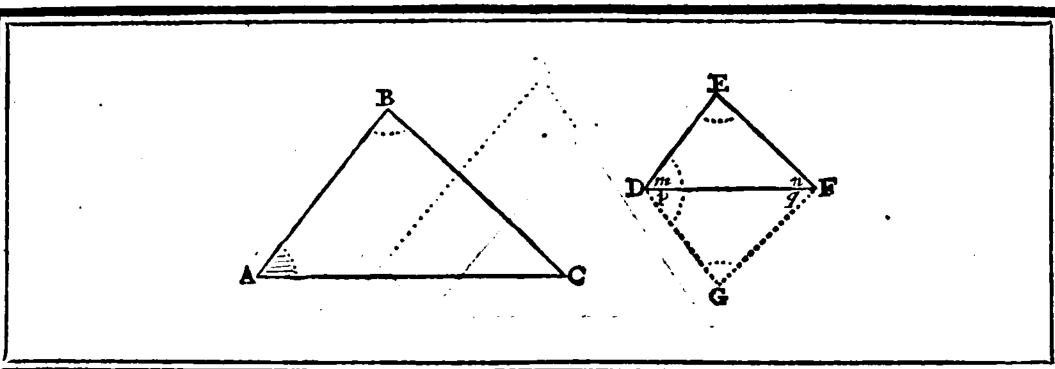
C. Q. F. D. I.

Or les côtés AB, CD, item AC, CE & BC, DE, sont opposés aux ∠ égaux *r* & *s*, item *p* & *o*, & *m* & *n*.

10. Partant les côtés AB, CD; AC, CE; BC, DE opposés aux ∠ égaux, sont homologues. — Def. 12. L. 5.

C. Q. F. D. II.

Coroll. *Les triangles équiangles sont donc aussi semblables.* (Def. 1. L. 6).



PROPOSITION V. THEOREME V.

SI deux triangles (ABC, DEF) ont les côtés proportionels, ces triangles seront équiangles; & les angles (A & *m*, C & *n* &c) opposés aux côtés homologues, (BC, EF & AB, DE &c) seront égaux entr'eux.

HYPOTHESE.

Les △ ABC, DEF ont les côtés proportionels, c. à d.

I. $\begin{cases} AB : AC = DE : DF. \\ AB : BC = DE : EF. \\ AC : BC = DF : EF. \end{cases}$

II. *Les côtés BC, EF, AB, DE, AC, DF sont homologues.*

THESE.

I. Les △ ABC, DEF sont équiangles.

II. Les ∀ opposés aux côtés homologues sont égaux; ou ∀ A = à ∀ m, ∀ C = à ∀ n, & ∀ B = à ∀ E.

Préparation.

1. Faites sur la droite DF au point D, ∀ *p* = à ∀ A; Et au point F, ∀ *q* = à ∀ C. Prop. 23. L. 1.
2. Prolongez les côtés DG, FG jusques à ce qu'ils se rencontrent en G. Prop. 27. L. 1. Rem.

DEMONSTRATION.

PUisque dans les △ équiangles ABC, DGF, (*Prep.* 1. & *Prop.* 32. *L.* 1), & specialement ∀ C = ∀ *q* & ∀ B = ∀ G.

1. AB : AC = DG : DF. Prop. 4. L. 6.

Mais AB : AC = DE : DF (*Hyp.* 1);

2. Donc DG : DF = DE : DF. Et DG est = à DE. Prop. 11. L. 5. Prop. 9. L. 5.

Par un même raisonnement on prouvera que

3. La droite GF est = à EF.

Puis donc que dans les deux △ DEF, DGF les deux côtés DE, EF sont = aux deux côtés DG, GF (*Arg.* 2 & 3), & que la base DF est commune aux deux △,

4. Les ∀ *n* & *m* sont = aux ∀ *q* & *p* chacun à chacun, Prop. 8. L. 1.
5. Et les △ DEF, DGF sont équiangles.

Mais le △ DGF est équiangle au △ ABC (*Prep.* 1 & *Prop.* 32. *L.* 1);

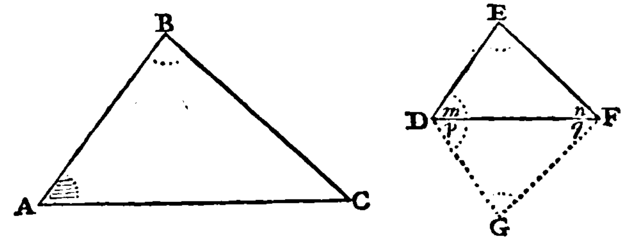
6. Il s'ensuit donc que les △ ABC, DEF seront aussi équiangles. Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D. I.

7. De plus, les ∀ A, C, & B opposés aux côtés BC, AB, AC, étant égaux chacun à chacun aux ∀ *m*, *n* & E opposés aux côtés EF, DE, DF; homologues aux côtés BC, AB, AC chacun à chacun, parceque les uns & les autres de ces ∀, sont égaux chacun à chacun aux ∀ *p*, *q*, G (*Prep.* 1. *Prop.* 32. *L.* 1 & *Arg.* 4),
8. Il s'ensuit, que les ∀ A, *m*; item C, *n*; & B, E opposés aux côtés homologues sont égaux.

C. Q. F. D. II.

Coroll. *Ces triangles sont donc aussi semblables* (Def. 1. L. 6.).



PROPOSITION VI. *THEOREME VI.*

SI deux triangles (ABC, DEF) ont un angle (A) égal à un angle (m), & les côtés (BA, AC & ED, DF), qui comprennent ces angles, proportionels: les triangles sont équiangles; & les angles (C & n item B & E) opposés aux côtés homologues, (BA, ED item AC, DF) sont égaux entr'eux.

HYPOTHESE.

I. ∀ A = à ∀ m.
II. BA : AC = ED : DF.
III. BA, ED; AC, DF sont homologues.

THESE.

I. Les △ ABC, DEF sont équiangles.
II. Les ∀ C & n, item les ∀ B & E sont = entr'eux.

Préparation.

1. Faites sur la droite DF au point D, ∀ p = à ∀ A, ou = à ∀ m, & au point F, ∀ q = à ∀ C. Prop. 23. L. 1.
2. Prolongez les côtés DG, FG jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en G. Prop. 27. L. 1. Rem.

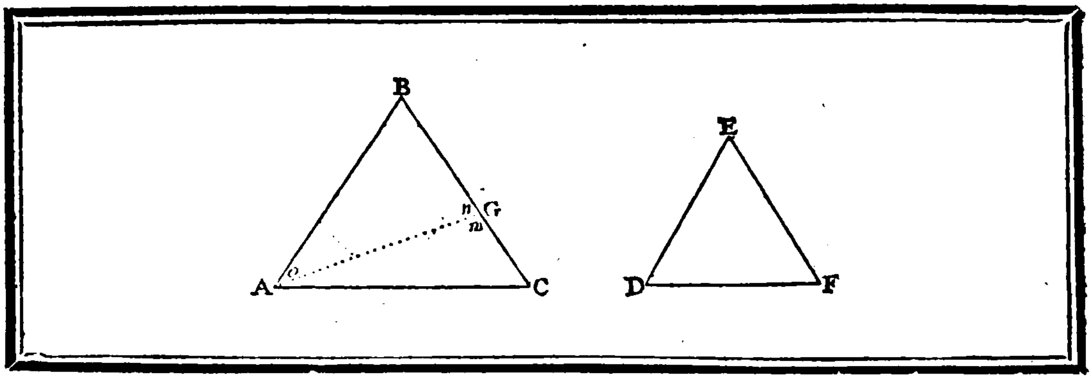
DEMONSTRATION.

PUisque les △ ABC, DGF sont équiangles (*Prep.* 1. & *Prop.* 32. *L.* 1), & specialement ∀ C = ∀ q & ∀ B = ∀ G.

1. BA : AC = GD : DF. Prop. 4. L. 6.
Or BA : AC = ED : DF (*Hyp.* 2),
2. C'est pourquoi GD : DF = ED : DF. Prop. 11. L. 5.
3. D'où il suit que GD est = à ED. Prop. 9. L. 5.
Les deux △ DEF, DGF ayant donc deux côtés ED, DF = à deux côtés GD, DF (*Arg.* 3) & ∀ compris m = à ∀ compris p (*Prep.* 1),
4. Les deux autres ∀ n & q item E & G sont = entr'eux; & ces deux △ DEF, DGF sont équiangles. Prop. 4. L. 1.
Mais les △ ABC, DGF étant aussi équiangles (*Prep.* 1 & *Prop.* 32. *L.* 1),
5. Il suit que les △ ABC, DEF sont équiangles Ax. 1. L. 1.
C. Q. F. D. 1.

De plus, chacun des angles C & n étant = à ∀ q (*Prep.* 1 & *Arg.* 4),
6. L'angle C est = à ∀ n. Ax. 1. L. 1.
7. Partant, ∀ A étant = à ∀ m (*Hyp.* 1), l'angle B est aussi = à ∀ E. Prop. 32. L. 1.
Et les côtés BA, ED & AC, DF opposés à ces angles, étant homologues (*Hyp.* 3. & *Def.* 12. *L.* 5),
8. Il s'ensuit que les ∀ C & n, item B & E opposés à ces côtés homologues, sont = entr'eux. C. Q. F. D. II.

Coroll. *Ces triangles sont donc aussi semblables entr'eux* (Prop. 4. L. 6. Coroll.).



PROPOSITION VII. *THEOREME VII.*

SI deux triangles (ABC, DEF) ont un angle (B) égal à un angle (E), & les côtés (BA, AC & ED, DF) qui comprennent deux autres angles (A & D), proportionels; les angles reſtans (C & F) étant l'un & l'autre, ou aigus, ou obtus, les triangles ſeront équiangles, & les angles (A & D) autour deſquels les côtés ſont proportionels ſeront égaux entr'eux.

HYPOTHESE.	THESE.
I. ∀ B eſt = à ∀ E.	*Les △ ABC, DEF ſont équiangles,*
II. BA : AC = ED : DF.	*& les ∀ BAC & D ſont = entr'eux.*
III. Les ∀ C & F ſont l'un & l'autre, ou aigus, ou obtus.	

DEMONSTRATION.

Sinon les ∀ BAC & D ſont inégaux; & l'un comme BAC eſt > l'autre D.

Préparation.

Faites donc ſur AB, au point A, ∀ *o* = à ∀ D. Prop. 23. L. 1.

CAS I. Si les ∀ C & F ſont l'un & l'autre aigus.

PUis donc que ∀ *o* eſt = à ∀ D ((*Prep.*) & ∀ B = à ∀ E (*Hyp.* 1),

1. Il s'enſuit que ∀ *n* eſt = à ∀ F; & que les △ ABG, DEF ſont équiangles. Prop. 32. L. 1.
2. Partant BA : AG = ED : DF. Prop. 4. L. 6.
   Mais BA : AC = ED : DF (*Hyp.* 2),
3. Par conſéquent BA : AG = BA : AC; Prop. 11. L. 5.
4. D'où il ſuit que AG eſt = à AC. Prop. 9. L. 5.
5. C'eſt pourquoi ∀ C eſt = à ∀ *m*. Prop. 5. L. 1.
   Et à cauſe que dans ce Cas ∀ C eſt < L.
6. L'angle *m* ſera auſſi < L; & ∀ *n* qui lui eſt contigu > L, Prop. 13. L. 1.
   Mais cet ∀ *n* étant = à ∀ F (*Arg.* 1), qui eſt dans ce Cas < L,
7. Ce même ∀ *n* ſeroit auſſi < L; ce qui eſt impoſſible.
8. Les ∀ BAC & D ſont donc = entr'eux, & le troiſième ∀ C eſt = à ∀ F; ou les △ ABC, DEF ſont équiangles. Prop. 32. L. 1.

C. Q. F. D.

CAS II. Si les ∀ C & F font l'un & l'àutre obtus.

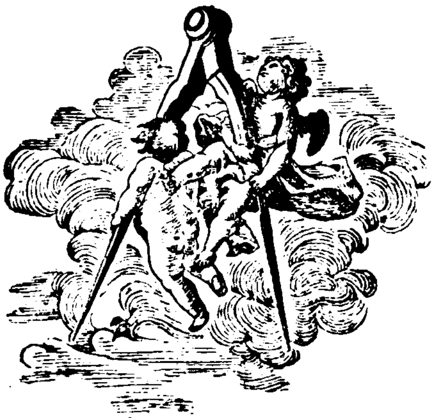
PAr le même raifonnement *(Arg. 1. jufqu'à 5)* du premier Cas, on prouvera que
1. L'angle C eft = à ∀ *m*.
2. Donc ∀ *m* eft auffi > L, & les ∀ C + *m* feront > 2 L; ce qui eft impoffible. Prop. 17. L. 1.
3. Partant, les ∀ B A C & D font = entr'eux, & le troifième ∀ C eft = à ∀ F, ou les Δ ABC, DEF font équiangles. Prop. 32. L. 1.

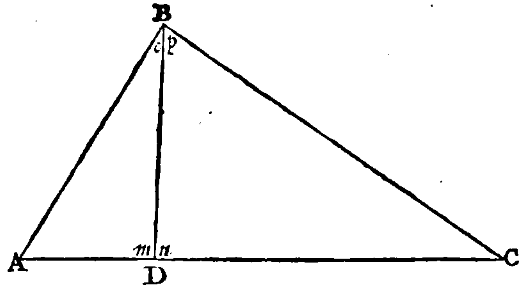
C. Q. F. D.

Remarque.

S*I les* ∀ C & F *font l'un & l'autre droits*, les Δ ABC & DEF *font équiangles* (*Hyp.* 1 & *Prop.* 32. L. 2).

Coroll. *Ces fortes de triangles font donc auffi femblables entr'eux* (Prop. 4. L. 6. Coroll.).





PROPOSITION VIII. *THEOREME VIII.*

SI de l'angle droit (ABC) d'un triangle rectangle (A B C) on abaisse sur l'hypothenuse (A C) une perpendiculaire (B D): elle partagera ce triangle en deux autres (A D B, B D C) semblables entr'eux, & semblables au triangle total (A B C).

HYPOTHESE.	THESE.
I. Le △ A B C est Rgle en B.	*Les △ A D B, B D C sont semblables entr'eux,*
II. B D est ⊥ sur A C.	*& chacun est aussi semblable au △ total A B C.*

DEMONSTRATION.

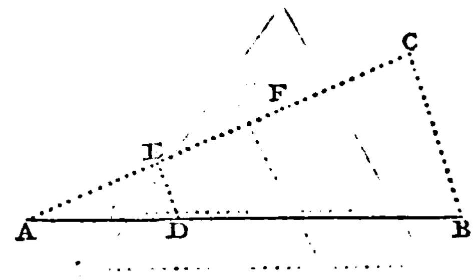
PUisque dans les deux △ Rgles A D B, A B C, l'angle *m* est = à ∀ ABC (*Ax.* 10. *L.* 1), & ∀ A commun aux deux △,

1. L'angle *o* est = à ∀ C, & les deux △ A B C, A D B sont équiangles. Prop. 32. L. 1.
2. Partant ces deux △ sont aussi semblables. {Prop. 4. L. 6. Coroll.
   On démontrera par un même raisonnement, que
3. Le △ B D C est semblable au △ A B C.
   De même, dans les deux △ Rgles A D B, B D C l'angle *m* étant = à ∀ *n* (*Ax.* 10. *L.* 1), & ∀ *o* = à ∀ C (*Arg.* 1),
4. L'angle A est = à ∀ *p*, & les deux △ A D B, B D C sont équiangles. Prop. 32. L. 1.
5. D'où il suit que ces △ sont semblables. {Prop. 4. L. 6. Coroll.
6. La ⊥ B D partage donc le △ A B C en deux △ A D B, B D C semblables entr'eux (*Arg.* 5), & semblables chacun au △ total A B C (*Arg.* 2 & 3).

C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

IL est manifeste que cette perpendiculaire B D, abaissée du sommet de l'angle droit sur la base, est une moyenne proportionelle entre les deux segmens A D & D C de cette base; car les triangles A D B, B D C étant équiangles, on aura A D : D B = D B : D C (*Prop.* 4. *L.* 6). De même, chaque côté A B ou B C du triangle A B C est une moyenne proportionelle entre la base A C & le segment A D ou D C adjacent à ce côté. Car puisque chacun des triangles A D B, B D C est équiangle au △ total A B C, on aura A C : A B = A B : A D, & A C : B C = B C : D C (*Prop.* 4. *L.* 6).



PROPOSITION IX. *PROBLEME I.*

Retrancher d'une ligne droite donnée (AB), une partie démandée quelconque. (*par ex. la troisième partie*).

Donnee.	Cherchee.
La droite A B.	*La droite retranchée A D qui soit la troisième partie de A B.*

Résolution.

1. Tirez du point A une droite indéfinie AC, qui forme avec AB un angle quelconque BAC. — Dem. 1. L. 1.
2. Prenez sur AC trois parties égales AE, EF, FC de longueur arbitraire. — Prop. 3. L. 1.
3. Joignez CB. — Dem. 1. L. 1.
4. Et par E, tirez ED Plle à CB, qui coupera la droite AB de manière que AD en sera la troisième partie. — Prop. 31. L. 1.

Demonstration.

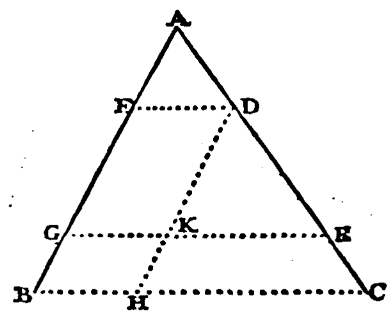
Puisque ED est Plle au côté CB du △ CAB (*Prep.* 4),

1. CE : EA = BD : DA. — Prop. 2. L. 6.

Or CE est double de EA (*Ref.* 2);

2. Partant BD est aussi double de DA. — Def. 8. L. 5.
3. Par conséquent AB est triple de AD.
4. La droite retranchée AD est donc la troisième partie de AB.

C. Q. F. F.



PROPOSITION X. *PROBLEME II.*

COuper une droite donnée entière (AB), ſemblablement à une droite donnée (AC) coupée en tant de points (D, E &c) que l'on voudra.

DONNEE.	CHERCHEE.
I. La droite entière AB, *II. Et la droite AC coupée aux points D & E &c.*	*Couper AB ſemblablement à AC aux points F & G, enſorte que AF : FG = AD : DE & que FG : GB = DE : EC.*

Réſolution.

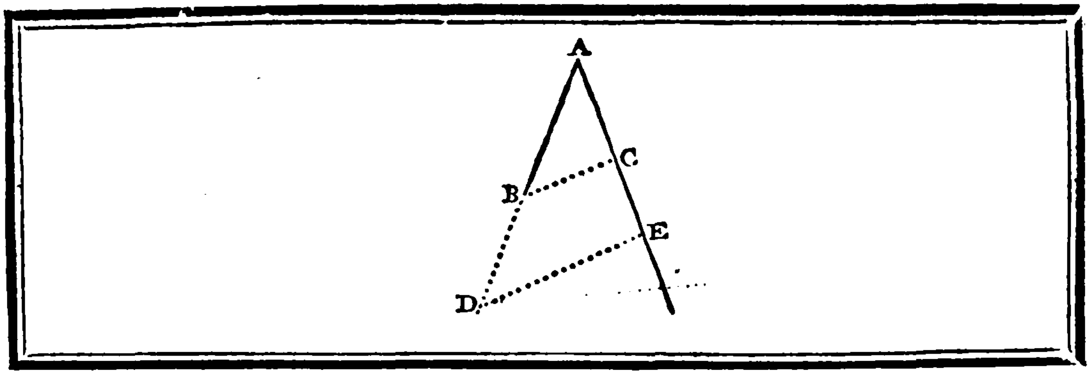
1. Joignez les droites données AB, AC ſous un angle quelconque BAC. — Dem. 1. L. 1.
2. Tirez CB, & des points D & E, les droites DF, EG Plles à CB, item DH Plle à AB. — Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

PUiſque DF eſt Plle au côté EG du △ AGE (*Ref.* 2. & *Prop.* 30. *L.* 1), & KE Plle au côté HC du △ DHC (*Ref.* 2),

1. AF : FG = AD : DE
Et DK : KH = DE : EC. — Prop. 7. L. 6.
Mais les figures KF, HG étant des Pgmes (*Ref.* 2. & *Def.* 35. *L.* 1).
2. Il s'enſuit que FG eſt = à DK, & GB = KH. — Prop. 34. L. 1.
3. Donc FG : GB = DE : EC. — Pr. 7 & 11 L. 5.
4. Partant la droite donnée AB eſt coupée ſemblablement à AC aux points F & G; enſorte que AF : FG = AD : DE & FG : GB = DE : EC.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XI. *PROBLEME III.*

TRouver une troisième proportionelle (CE) à deux lignes droites données (AB, AC).

Donnee.

Les deux droites AB, AC.

Cherchee.

La droite CE, troisième proportionelle aux deux droites AB, AC, c. à d. telle que AB : AC = AC : CE.

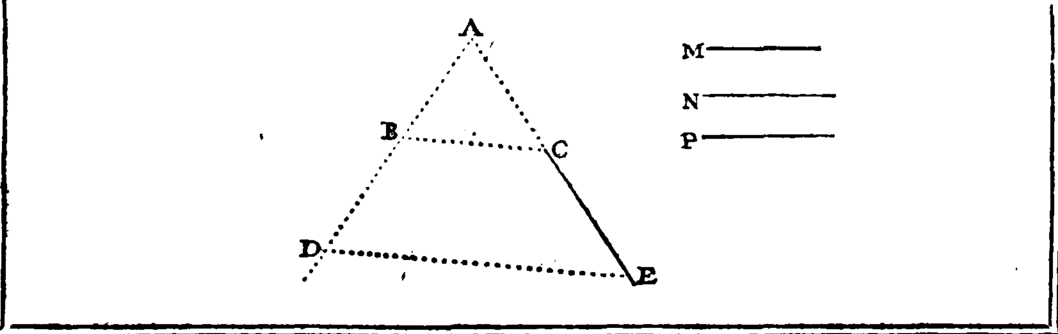
Résolution.

1. Joignez les deux droites AB, AC, en un ∀ quelconque BAC.	
2. Prolongez les, & faites BD = AC.	Prop. 3. L. 1.
3. Joignez BC,	Dem. 1. L. 1.
4. Et par l'extrémité D de la droite AD, tirez DE Plle à BC.	Prop. 31. L. 1.

Demonstration.

PUis donc que	BC est Plle à DE (*Ref.* 4),	
1.	AB : BD = AC : CE.	Prop. 2. L. 6.
Mais	BD est = à AC (*Ref.* 2);	
2. Partant	AB : AC = AC : CE.	Pr. 7 & 11. L. 5.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XII. PROBLEME IV.

Trouver une quatriéme proportionelle (CE) à trois lignes droites données (M, N, P).

DONNEE.
Les trois droites M, N, P.

CHERCHEE.
La droite CE, quatrième proportionelle à M, N, P, c. à. d. telle que M : N = P : CE.

Résolution.

1. Menez les deux droites AD, AE, formant un ∀ quelconque DAE. — Prop. 3. L. 1.
2. Faites AB = M; BD = N; AC = P. — Dem. 1. L. 1.
3. Joignez BC.
4. Par l'extrêmité D de la droite AD, tirez DE Plle à BC. — Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

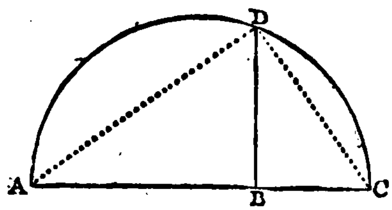
Puis donc que BC eſt Plle à DE (*Ref.* 4),

1. AB : BD = AC : CE, — Prop. 2. L. 6.

Or AB = M, BD = N, & AC = P (*Ref.* 2);

2. Partant M : N = P : CE. — Pr. 7 & 11. L. 5.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XIII. *PROBLEME V.*

TRouver une moyenne proportionelle (BD); entre deux lignes droites données (AB, BC).

DONNEE.
Les deux droites AB, BC.

CHERCHEE.
La droite BD, moyenne proportionelle entre AB & BC, c. à. d. telle que AB : BD = BD : BC.

Résolution.

1. Joignez les deux droites AB, BC en une même droite AC.
2. Décrivez sur AC le demi ⊙ ADC. — Dem. 3. L. 1.
3. Sur AC, au point B, élevez la ⊥ BD, jusqu'à la ○ en D. — Prop. 11. L. 1.

Préparation.

Joignez AD, & CD. — Dem. 1. L. 1.

DEMONSTRATION.

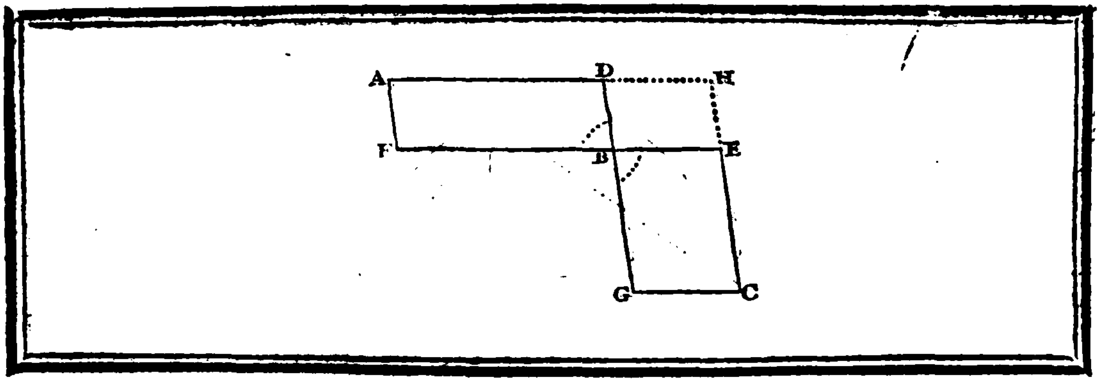
PUis donc que ∀ ADC se trouve dans un demi cercle (*Ref.* 2, & *Prep.*).

1. C'est un angle droit. — Prop. 31. L. 3.

3. C'est pourquoi le △ ADC est rectangle en D, & BD est une ⊥ abaissée du sommet D de l'angle droit, à la base AC (*Ref.* 3).

3. Par conséquent AB : BD = BD : BC. — Prop. 8. L. 6. Coroll.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XIV. THEOREME IX.

DAns les Parallélogrammes égaux (AB, BC), qui ont un angle (FBD) égal à un angle (GBE), les côtés (FB, BD & GB, BE), alentour de ces angles égaux, sont réciproquement proportionels (c. à. d. FB : BE = GB : BD). Et les Parallélogrammes, qui ont un angle (FBD) égal à un angle (GBE) & les côtés (FB, BD & GB, BE), alentour de ces angles égaux, réciproquement proportionels, sont égaux.

HYPOTHESE.	THESE.
I. Le Pgr AB est = au Pgr BC.	*FB : BE = GB : BD.*
II. ∀ FBD est = à ∀ GBE.	

Préparation.

1. Disposez les deux Pgrs AB, BC, tellement que les côtés FB, BE ne forment qu'une même ligne droite FE.
2. Achevez le Pgr DE. — Dem. 2. L. 1.

I. DEMONSTRATION.

PUisque les ∀ FBD, GBE sont égaux (*Hyp.* 2); & que les droites FB, BE ne forment qu'une même droite FE (*Prep.* 1).

1. Les droites GB, BD ne forment aussi qu'une même droite GD. — Prop. 14. L. 1.

Mais le Pgr AB étant = au Pgr BC (*Hyp.* 1).

2. Le Pgr AB : Pgr DE = Pgr BC : Pgr DE. — Prop. 7. L. 5.

Or les Pgrs AB, DE item BC, DE ont la même hauteur (*Prep.* 2. *Arg.* 1 & *Def.* 4. *L.* 6. *Rem.*).

3. C'est pourquoi le Pgr AB : Pgr DE = FB : BE & le Pgr BC : Pgr DE = GB : BD. — Prop. 1. L. 6.
4. Partant FB : BE = GB : BD (*Arg.* 2). — Prop. 11. L. 5.

C. Q. F. D.

HYPOTHESE.	THESE.
I. FB : BE = GB : BD.	*Le Pgr AB est = au Pgr BC.*
II. ∀ FBD est = à ∀ GBE.	

II. DEMONSTRATION.

1. ON démontrera comme auparavant que les droites GB, BD ne forment qu'une même droite GD.

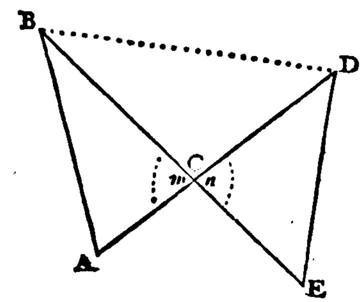
Or les Pgrs AB, DE item BC, DE ont la même hauteur (*Prep.* 2. *Arg.* 1 & *Def.* 4. *L.* 6. *Rem.*).

2. Partant le Pgr AB : Pgr DE = FB : BE. & le Pgr BC : Pgr DE = GB : BD. — Prop. 1. L. 6.

Or FB : BE = GB : BD (*Hyp.* 1).

3. C'est pourquoi le Pgr AB : Pgr DE = Pgr BC : Pgr DE. — Prop. 11. L. 5.
4. Partant le Pgr AB est = au Pgr BC. — Prop. 9. L. 5.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XV. *THEOREME X.*

SI deux triangles égaux (ACB, ECD) ont un angle (*m*) égal à un angle (*n*): les côtés (AC, CB, & EC, CD), alentour de ces angles égaux, sont réciproquement proportionels. Et si deux triangles (ACB, ECD) ont un angle (*m*) égal à un angle (*n*), & les côtés (AC, CB, & EC, CD), alentour de ces angles égaux, réciproquement proportionels, ces triangles sont égaux.

CAS I.

Hypothese.

I. Le △ ACB est = au △ ECD.
II. ∀ m est = à ∀ n.

These.

Les côtés AC, CB, & EC, CD, sont réciproquement proportionels, ou AC : CD = EC : CB.

Préparation.

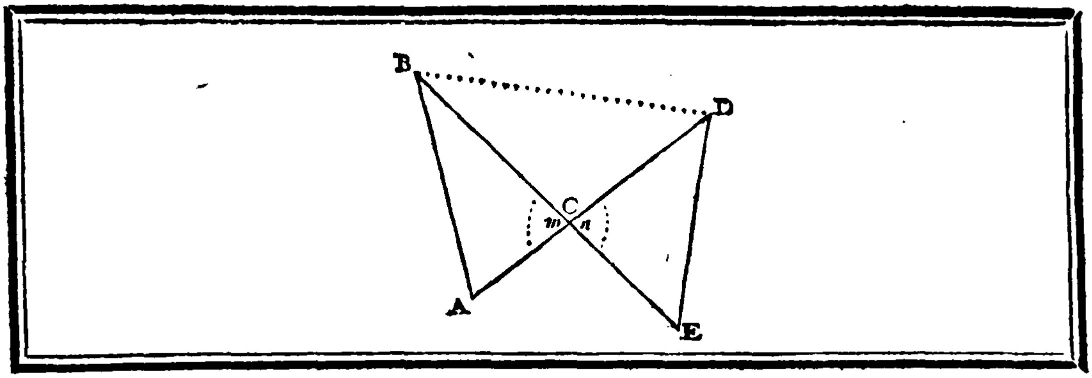
1. Disposez les deux △ ACB, ECD, ensorte que les côtés AC, CD, ne forment qu'une même droite AD.
2. Tirez la droite BD. — Dem. 1. L. 1.

Demonstration.

Puisque ∀ *m* = ∀ *n* (*Hyp.* 2), & que les droites AC, CD, ne forment qu'une même droite AD (*Prep.* 1),

1. Les lignes EC, CB, ne formeront aussi qu'une même droite EB. — Prop. 14. L. 1.
   Mais le △ ACB étant = au △ ECD (*Hyp.* 1),
2. Le △ ACB : △ CBD = △ ECD : △ CBD. — Prop. 7. L. 5.
   Or les △ ACB, CBD, item ECD, CBD, ont la même hauteur (*Prep.* 2 *Arg.* 1 & *Def. L.* 6. *Rem.*);
3. C'est pourquoi le △ ACB : △ CBD = AC : CD.
   & le △ ECD : △ CBD = EC : CB. — Prop. 1. L. 6.
4. Partant AC : CD = EC : CB. (*Arg.* 2 & *Prop.* 11. *L.* 5.).

C. Q. F. D.



CAS II.

Hypothese

I. AC : CD = EC : CB.
II. Et ∀ m = à ∀ n.

These.

Le △ ACB, est = au △ ECD.

Préparation.

1. Disposez les deux △ ACB, ECD, ensorte que les côtés AC, CD ne forment qu'une même droite AD.
2. Tirez la droite BD.

Demonstration.

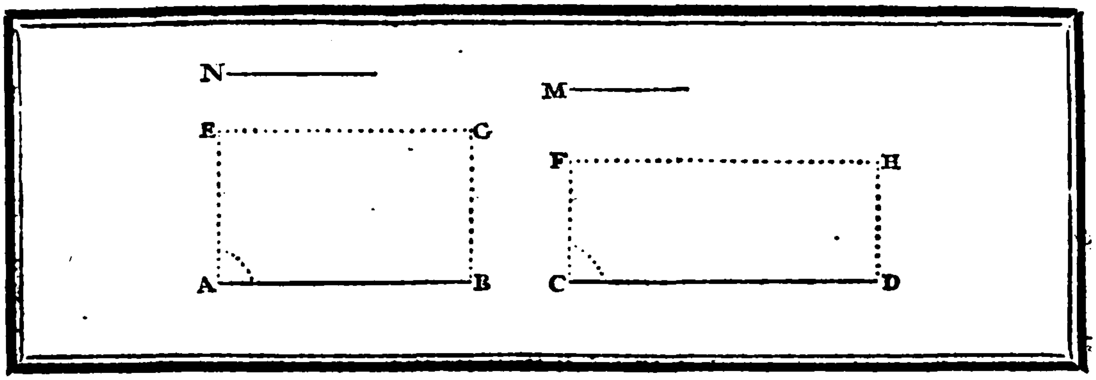
1. On démontrera, comme dans le premier Cas, que EC, CB ne forment qu'une même droite EB.
Et puisque les △ ACB, CBD, item les △ ECD, CBD, ont la même hauteur (*Prep.* 2 *Arg.* 1. & *Def.* 4. *L.* 6 *Rem.*).

2. Le △ ACB : △ CBD = AC : CD,
De même le △ ECD : △ CBD = EC : CB. } Prop. 1. L. 6.
Or AC : CD = EC : CB (*Hyp.* 1);

3. C'est pourquoi △ ABC : △ CBD = △ ECD : △ CBD. Prop. 11. L. 5.

4. D'où il suit que le △ ABC est = au △ ECD. Prop. 9. L. 5.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XVI. *THEOREME XI.*

SI quatre lignes droites (AB, CD, M, N) sont proportionelles, le rectangle des extrêmes (AB.N) est égal à celui des moyennes (CD.M). Et si le rectangle des extrêmes (AB.N) est égal au rectangle des moyennes (CD.M), les quatre droites (AB, CD, M, N,) sont proportionelles.

HYPOTHESE.
AB : CD = M : N.

THESE.
Le Rgle AB . N = au Rgle CD . M.

Préparation.

1. Sur les extrémités A & C, des droites AB, CD, élevez les ⊥ AE, CF. Prop. 11. L. 1.
2. Faites AE = N, & CF = M. Prop. 3. L. 1.
3. Achevez les Rgles EB, FD. Prop. 31. L. 1.

I. DEMONSTRATION.

PUis donc que AB : CD = M : N (*Hyp.*) : & que M = CF & N = AE (*Prep.* 2),

1. AB : CD = CF : AE. Pr. 7 & 11 L. 5.
2. Les côtes des Rgles EB, FD, alentour des ∀ égaux A & C, (*Prep.* 1 & *Ax.* 10. *L.* 1) sont donc réciproques. Def. 2. L. 6.
3. Par conséquent le Rgle EB = au Rgle FD, ou le Rgle sous AB . AE = au Rgle sous CD . CF. Prop. 14. L. 6. Def. 1. L. 1.
Partant AE étant = N & CF = M (*Prep.* 2),
4. Le Rgle sous AB . N est aussi = au Rgle sous CD . M. Ax. 2. L. 2.

C. Q. F. D. I.

HYPOTHESE.
Le Rgle AB . N est = au Rgle CD . M.

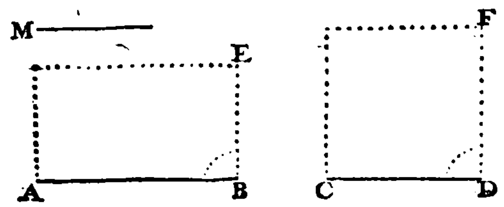
THESE.
AB : CD = M : N.

II. DEMONSTRATION.

PUisque le Rgle AB . N est = au Rgle CD . M (*Hyp.*) : & que AE = N, & CF = M (*Prep.* 2),

1. Le Rgle sous AB . AE est = au Rgle sous CD . CF. Ax. 2. L. 2.
Or ces côtés environnant les ∀ égaux EAB, FCD (*Prep.* 1. & *Ax.* 10. *L.* 1).
2. AB : CD = CF : AE. Prop. 14. L. 6.
Et d'autant que CF = M & AE = N (*Prep.* 2),
3. AB : CD = M : N. Pr. 7. & 11 L. 5.

C. Q. F. D. II.



PROPOSITION XVII. THEOREME XII.

SI trois lignes droites (AB, CD, M) ſont proportionelles, le rectangle (AB.M) des deux extrêmes eſt égal au quarré de la moyenne (CD). Et ſi le rectangle des deux extrêmes (AB.M) eſt égal au quarré de la moyenne (CD), les trois droites (AB, CD, M) ſont proportionelles.

Hypothese.	These.
AB : CD = CD : M.	*Le Rgle AB.M eſt = au* □ *de CD.*

Préparation.

1. Sur les extrêmités B & D des droites AB, CD, élevez les ⊥ BE, DF. Prop. 11. L. 1.
2. Faites BE = M, & DF = DC. Prop. 3. L. 1.
3. Achevez les Rgles EA, FC. Prop. 31. L. 1.

I. Demonstration.

PUiſque AB : CD = CD : M (*Hyp*), que CD = DF & M = BE (*Prep*, 2).

1. AB : CD = DF : BE. Pr. 7 & 11. L. 5.

Les côtés des Rgles EA, FC, alentour des angles égaux B & D (*Prep.* 1 & *Ax.* 10. *L.* 1.) ſont donc réciproques. Def. 2. L. 6.

2. Partant le Rgle EA eſt = au Rgle FC, ou le Rgle ſous AB.BE = au Rgle ſous CD.DF. {Prop. 14. L. 6. Def. 1. L. 2.}
3. C'eſt pourquoi BE étant = M & DF = CD (*Prep.* 2), le Rgle AB.M eſt auſſi = au □ de CD. Ax. 2. L. 2.

C. Q. F. D.

Hypothese.	These.
Le Rgle AB.M eſt = au □ *de CD.*	*AB : CD = CD : M.*

II. Demonstration.

PUiſque le Rgle ſous AB.M eſt = au □ de CD (*Hyp.*), & que BE eſt = M, & DF = CD (*Prep.* 2),

1. Le Rgle ſous AB.BE eſt = au Rgle ſous CD.DF. Ax. 2. L. 2.

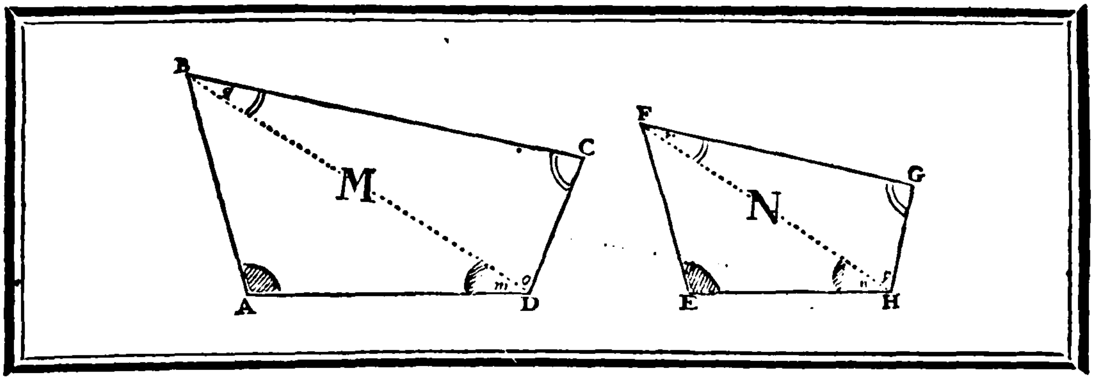
Or ces côtés environnent les ∀ égaux EBA, FDC; (*Ax.* 10. *L.* 1 & *Pr.* 1).

2. Donc AB : CD = DF : BE, Prop. 14. L. 6.

Et par la raiſon que DF = CD & BE = M (*Prep.* 2),

3. AB : CD = CD : M. Pr 7 & 11. L. 5.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XVIII. PROBLEME VI.

D'Une ligne droite donnée (AD), décrire une figure rectiligne (M) semblable à une autre figure rectiligne donnée (N) & semblablement posée.

Donnee.	Cherchee.
I. La droite A D.	*Le Rectiligne M, semblable au Rectiligne N*
II. Le Rectiligne N.	*& semblablement posé.*

Résolution.

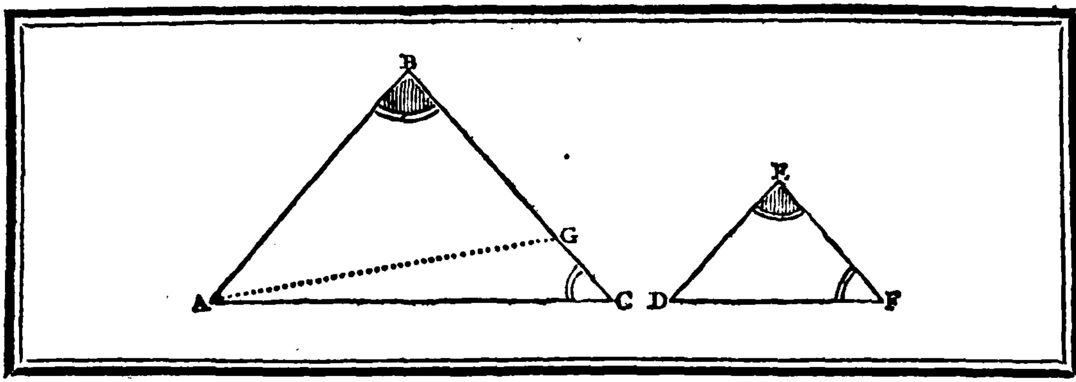
1. Joignez H F. — Dem. 1. L. 1.
2. Sur A D, aux points A & D, faites ∀ A = ∀ E & ∀ *m* = ∀ *n*; c'est pourquoi le troisieme ∀ A B D sera = au troisième ∀ E F H.
3. Sur D B, au point D, faites ∀ *o* = ∀ *p* & au point B, ∀ *q* = ∀ *r*. Par conséquent le troisième ∀ C sera = au troisième ∀ G. — Prop. 23. & 32 L. 1. & Remarq. de Prop. 27. L. 1.

Demonstration.

PUis donc que le △ A B D est équiangle au △ E F H, & le △ D B C équiangle au △ H F G (*Ref.* 2 & 3),

1. B D : F H = B A : F E = A D : E H.
 & B D : F H = D C : H G = C B : G F. — Prop. 4. L. 6.
2. Partant B A : F E = A D : E H = D C : H G = C B : G F. — Prop. 11. L. 5.
 Maintenant ∀ *m* étant = à ∀ *n* (*Ref.* 2), ainsi que ∀ *o* = ∀ *p* (*Ref.* 3),
3. L'angle entier *m* + *o* est = à l'angle entier *n* + *p*. — Ax. 2. L. 1.
4. Par la même raison ∀ A B C = ∀ E F G.
 De plus ∀ A = ∀ E (*Ref.* 2), & ∀ C = ∀ G (*Ref.* 3).
5. C'est pourquoi le Rectilig. M est équiangle au Rectilig. N, & leurs côtés alentour des angles égaux sont proportionels.
6. Le Rectilig. M, construit sur la donnée A D, est donc semblable au Rectilig. E G, & il est semblablement posé. — Def. 1. L. 6.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XIX. THEOREME XIII.

LEs triangles semblables (ABC, DEF) sont entr'eux en raison doublée de leurs côtés homologues quelconques (CB, FE ou AC, DF &c).

HYPOTHESE.

Les triangles ABC, DEF sont semblables, de manière que ∀ C = ∀ F, & les côtés AC, DF item CB, FE sont homologues.

THESE.

Le △ ABC est au △ DEF en raison doublée de CB à FE c. à. d. comme $\overline{CB}^2 : \overline{FE}^2$ *.

Préparation.

Prenez à CB, FE la troisième proportionelle CG, & tirez AG. {Prop. 11. L. 6. Dem. 1. L. 1.

DEMONSTRATION.

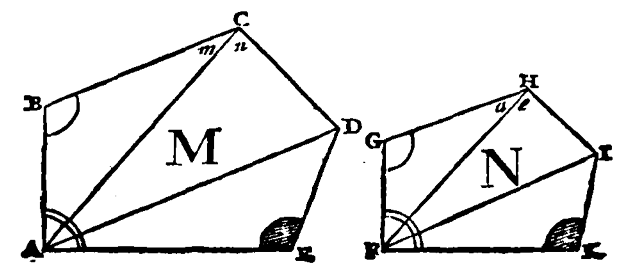
PUis donc que AC : CB = DF : FE (*Hyp. & Def.* 1. *L.* 6),
1. En alternant AC : DF = CB : FE. Prop. 16. L. 5.
Mais CB : FE = FE : CG (*Prep.*);
2. Par conséquent AC : DF = FE : CG. Prop. 11. L. 5.
3. Les côtés des △ AGC, DEF alentour des ∀ égaux C & F (*Hyp.*), sont donc réciproques. (*Def.* 2. *L.* 6.).
4. Partant le △ AGC est = au △ DEF. Prop. 15. L. 6.
Or les △ ABC, AGC ayant la même hauteur,
5. Le △ ABC : △ AGC = CB : CG. Prop. 1. L. 6.
6. Partant le △ ABC : △ DEF = CB : CG. Prop. 7. L. 5.
Mais, puisque CB : FE = FE : CG (*Prep.*),
7. CB : CG en raison doublée de CB à FE ou comme $\overline{CB}^2 : \overline{FE}^2$ *. Def. 10. L. 5.
8. Par conséquent le △ ABC : △ DEF en raison doublée de CB à FE, ou comme $\overline{CB}^2 : \overline{FE}^2$ *. Prop. 11. L. 5.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

LOrsque trois lignes (CB, FE, CG) sont proportionelles, la première est toujours à la troisième, comme le △ fait de la première est à un △ semblable fait de la seconde, en le supposant semblablement posé.

* *Voyez Append.* Prop. VII. & Hyp. 1. Cor. 2 *item* Cor. 2. de la Prop. suivante.



PROPOSITION XX. *THEOREME XIV.*

LEs Polygones semblables (M & N) peuvent être divisés par des diagonales (AC, AD; FH, FI) tirées semblablement, en un même nombre de triangles (ABC, ACD, ADE, & FGH, FHI, FIK) semblables entr'eux & proportionels à leurs Touts; de plus les Polygones (M & N) sont en raison doublée de leurs côtés homologues quelconques (AB, FG; ou BC, GH &c).

Hypothese.

Le Polygone M est semblable au Polygone N; tellement que les ∀ A, B, C &c, sont = aux ∀ F, G, H &c, chacun à chacun, & les côtés AB, FG; ou BC, GH &c, homologues.

These.

Par des Diagonales tirées semblablement

I. On peut diviser ces Polygones en un même nombre de triangles semblables.

II. Proportionels à leurs Touts.

III. Et le Polyg. M : Polyg. N en raison doublée des côtés homologues AB, FG; ou comme $\overline{AB}^2 : \overline{FG}^2$.

Préparation.

Tirez AC, FH, de même AD, FI semblablement, c. à. d. des ∀ égaux A & F, aux ∀ égaux C & H, item D & I. — Dem. 1. L. 1.

Demonstration.

PUis donc que ∀ B = ∀ G & AB : BC = FG : GH (*Hyp.* & *Def.* 1. L. 6),

1. Le △ ABC est équiangle au △ FGH, — Prop. 6. L. 6.
2. C'est pourquoi ces △ sont semblables, & ∀ *m* = ∀ *a*. — Prop. 4. L. 6. Coroll.

Or ∀ entier *m* + *n* est = à ∀ entier *a* + *e* (*Hyp.*); — Ax. 3. L. 1.

3. Partant ∀ *n* est = ∀ *e*.

Puis donc que par la simil. des △ ABC & FGH (*Arg.* 2), AC : BC = FH : GH.
& par la simil. des Polyg. M & N BC : CD = GH : HI. — Def. 1. L. 6.

4. Il suit par égalité de raison, que AC : CD = FH : HI. — Prop. 22. L. 5.

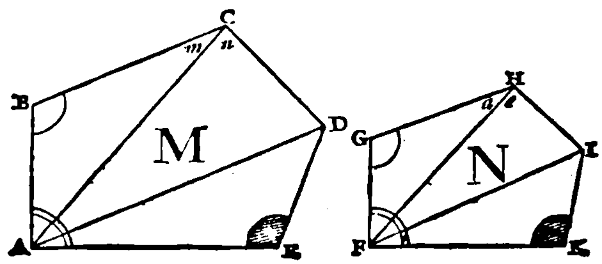
c. à. d. les côtés alentour des ∀ égaux *n* & *e* sont proportionels.

5. Le △ ACD est donc équiangle au △ FHI; — Prop. 6. L. 6.

Et par conséquent il lui est semblable. — Prop. 4. L. 6. Coroll.

6. Par la même raison, tous les autres △ ADE, FIK &c, sont semblables.
7. Les Polyg. semblables peuvent donc être divisés dans le même nombre de △ semblables, par des diagonales tirées semblablement.

C. Q. F. D. 1.



De même, parceque les Δ ABC, FGH font semblables (*Arg.* 2),

6. Le $\Delta ABC : \Delta FGH = \overline{AC}^2 : \overline{FH}^2$; * Prop. 19. L. 6.
De même le $\Delta ACD : \Delta FHI = \overline{AC}^2 : \overline{FH}^2$. *

7. Donc le $\Delta ABC : \Delta FGH = \Delta ACD : \Delta FHI$. Prop. 11. L. 5.
On démontrera de même que

8. Le $\Delta ADE : \Delta FIK = \Delta ACD : \Delta FHI$.

9. C'est pourquoi $\Delta ABC : \Delta FGH = \Delta ACD : \Delta FHI = \Delta ADE : \Delta FIK$. Prop. 11. L. 5.

10. Comparant donc la somme des Antécédens à celle des Conséquens,
le $\Delta ABC + \Delta ACD$ &c. $\Delta FGH + \Delta FHI$ &c. $= \Delta ABC : \Delta FGH$, &c. Prop. 12. L. 5.
c. à. d. le Polyg. M : Polyg. N $= \Delta ABC : \Delta FGH = \Delta ACD : \Delta FHI$ &c. Prop. 7. L. 5.

C. Q. F. D. II.

Puis donc que le $\Delta ABC : \Delta FGH = \overline{AB}^2 : \overline{FG}^2$ * (*Prop.* 19. *L.* 6.),

11. Le Polyg. M : Polyg. N $= \overline{AB}^2 : \overline{FG}^2$. * Prop. 11. L. 5.

C. Q. F. D. III.

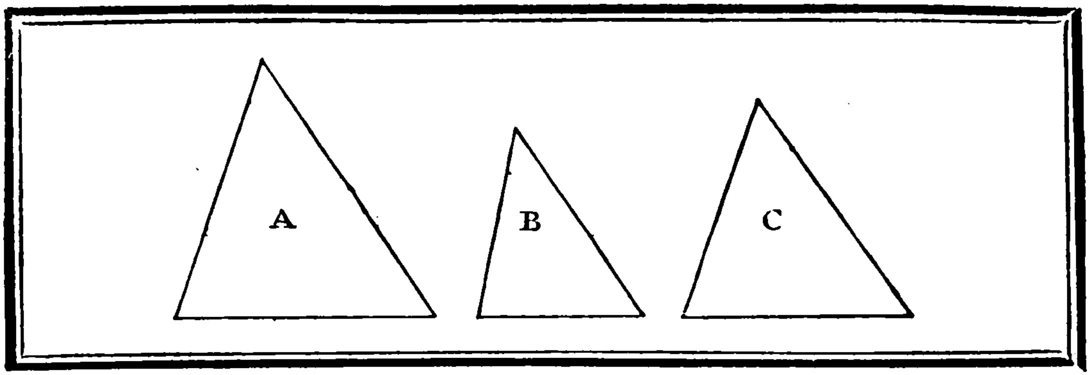
COROLLAIRE I.

Puisqu'on peut appliquer cette Démonstration aux Quadrilatères, & qu'on vient de prouver la même vérité des Triangles (*Prop.* 19), il est clair qu'en général *toutes les Figures rectilignes semblables sont entr'elles en raison doublée de leurs côtés homologues quelconques.* C'est pourquoi prenant aux côtés homologues AB, FG une III^me proportionelle X; puisqu' AB est à X, en raison doublée de AB : FG; & qu'un Rectiligne M est à un autre Rectiligne semblable N, en raison doublée des mêmes côtés AB : FG, on voit *que si trois lignes sont proportionelles, la première est à la troisième, comme le Rectiligne décrit de la première est au Rectiligne décrit de la seconde, semblablement & en une position semblable* (Prop. 11. L. 5).

COROLLAIRE II.

En particulier, tous les Quarrés étant semblables (*Def.* 30. *L.* 1 & *Def.* 1. *L.* 6), deux Rectilignes semblables quelconques M & N, font toujours en raison des Quarrés de leurs côtés homologues AB, CD. Car de part & d'autre ces Figures sont en raison doublée de ces mêmes côtés.

* *C'est pourquoi l'expression* $\overline{AB}^2 : \overline{CD}^2$, *désigne également la raison des Quarrés Géométriques des lignes* AB *&* CD, *& la raison de leurs Quarrés Arithmétiques ou Algébriques (entendus selon* Hyp. 1. Coroll. 2 *de l'*Append.). *ou enfin la raison doublée de ces mêmes lignes ; puisque ce n'est qu'une seule & même raison.*



PROPOSITION XXI. *THEOREME XV.*

LEs figures rectilignes A, C, semblables à une même (B), sont semblables entr'elles.

HYPOTHESE.

Les Figures rectilignes A et C sont semblables à la Figure B.

THESE.

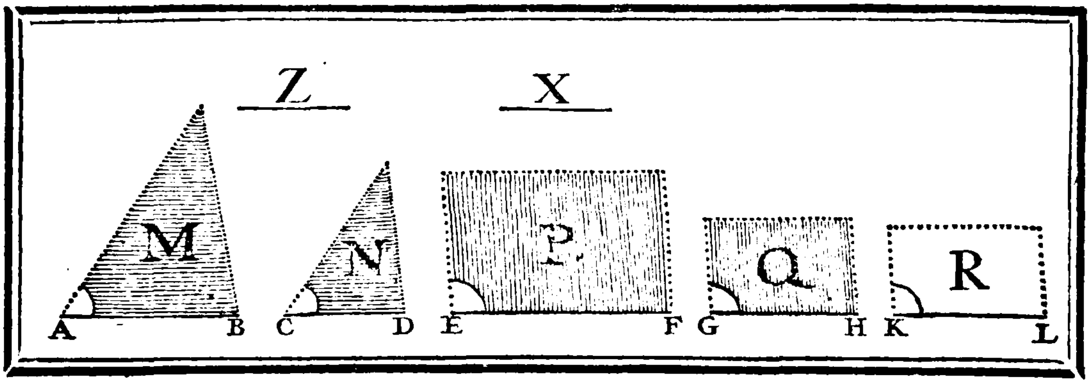
La Figure rectiligne A est semblable à la Figure rectiligne C.

DEMONSTRATION.

PUis donc que chacune des figures A et C est semblable à la figure B (*Hyp.*),

1. Chacune de ces figures sera aussi équiangle à la figure B, & aura les côtés alentour des ∀ égaux, proportionels aux côtés de la figure B. Def. 1. L. 6.
2. Par conséquent ces figures A et C seront aussi équiangles entr'elles, & leurs côtes alentour des ∀ égaux, seront proportionels. {Ax. 1. L. 1. Prop. 11. L. 5.}
3. Partant les figures A et C, sont semblables. Def. 1. L. 6.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXII. *THEOREME XVI.*

SI quatre lignes droites (AB, CD, EF, GH) font proportionelles, les figures rectilignes femblables & femblablement pofées (M, N, item P, Q), décrites de ces lignes, feront proportionelles. Et fi les figures rectilignes femblables & femblablement pofées (M, N, P, Q), décrites de ces lignes, font proportionelles, ces droites (AB, CD, EF, GH) feront elles mêmes proportionelles.

I.

Hypothese.

I. AB : CD = EF : GH.
II. Les Figures M & N, décrites des lignes AB, CD, item *les Fig. P & Q décrites des lignes EF, GH, font femblables, & femblablement pofées.*

These.

M : N = P : Q.

Préparation.

Prenez aux lignes AB, CD la III^{me} proportionelle Z.
Et aux lignes EF, GH la III^{me} proportionelle X. } Prop. 11. L. 6.

Demonstration.

PUifque	AB	:	CD	=	EF	:	GH	} (*Hyp.* 1),
&	CD	:	Z	=	GH	:	X	} (*Hyp.*1. *Prep.*&*Prop.*11.*L.*5),
1.	AB	:	Z	=	EF	:	X	Prop. 22. L. 5.

Or à caufe de la fimilitude des figures M & N, P & Q, & de leur defcription femblable des droites AB & CD, item EF & GH (*Hyp.* 2.);

2.	AB	:	Z	=	M	:	N. }	{Prop. 20. L 6.
&	EF	:	X	=	P	:	Q. }	{Coroll. 2.
3. C'eft pourquoi	M	:	N	=	P	:	Q. (*Arg.* 1).	Prop. 11. L. 5.

C. Q. F. D.

II.

HYPOTHESE.

I. *M : N = P : Q.*
II. *Ces Figures sont semblables, & décrites en des positions semblables des droites A B, C D, item E F, G H.*

THESE.

AB : CD = EF : GH.

Préparation.

1. Aux lignes A B, C D, E F prenez la IV^me. proportionelle K L. Prop. 12. L. 6.
2. De cette K L décrivez la Figure rectil. R, semblable & semblablement posée, aux Figures P ou Q. Prop. 18. L. 6.

DEMONSTRATION.

Puisque A B : C D = E F : K L (*Prep.* 1); & qu'on a décrit de ces droites, les Fig. M & N, item P & R semblables chacune à chacune, & en des positions semblables (*Hyp.* 2 & *Prep.* 2),

1. M : N = P : R (*Partie I de cette Propos.*).
Or M : N = P : Q (*Hyp.* 1),
2. Partant P : R = P : Q. Prop. 11. L. 5.
3. C'est pourquoi R = Q. Prop. 9. L. 5.
De plus, ces mêmes figures égales, sont aussi semblables & décrites semblablement des droites G H, K L (*Prep.* 2).
4. Partant G H = K L *.
Puis donc que A B : C D = E F : K L (*Prep.* 1), & que G H = K L (*Arg.* 4),
5. A B : C D = E F : G H. Prop. 7. L. 5.

C. Q. F. D. II.

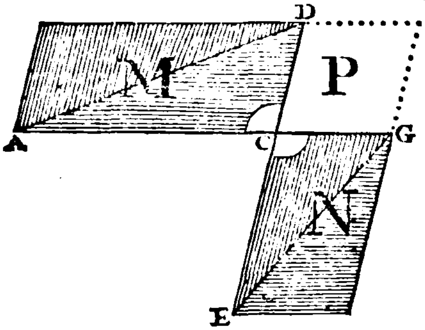
* *LEMME.*

Les Rectilignes (Q & R) *égaux & semblables ont leurs côtés homologues* (G H & K L) *égaux.*

Car à cause de leur similitude

1. Q : R = □ de G H : □ de K L. Prop. 20. L. 6. Coroll. 2.
Or Q étant = à R (*Arg.* 3),
2. Le □ de G H est = au □ de K L. Prop. 16. L. 5. Rem.
Par conséquent G H = K L. Prop. 46. L. 11. Coroll. 3.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXIII. *THEOREME XVII.*

LEs Parallélogrammes équiangles (M & N) font entr'eux en raifon compofée des raifons de leurs côtés (AC, CD & EC, CG) alentour des angles égaux.

HYPOTHESE.	THESE.
Les Pgrs M & N font équiangles; *fi bien que* $\angle ACD = \angle ECG$.	*Pgr M : Pgr N* $=$ *AC.CD : EC.CG.*

Préparation.

1. Difpofez AC & CG en une même droite AG; cela fait, EC & CD formeront auffi une même droite ED. Prop. 14. L. 1.
2. Achevez le Pgr P. Dem. 1. L. 1.

DEMONSTRATION.

PUifque les Pgrs M, P, N, forment une fuite de trois grandeurs,

1. La raifon de la première M à la dernière N, fe trouve compofée des deux raifons intermédiaires M : P & P : N. Prop. 5. & Hyp. 3. App.

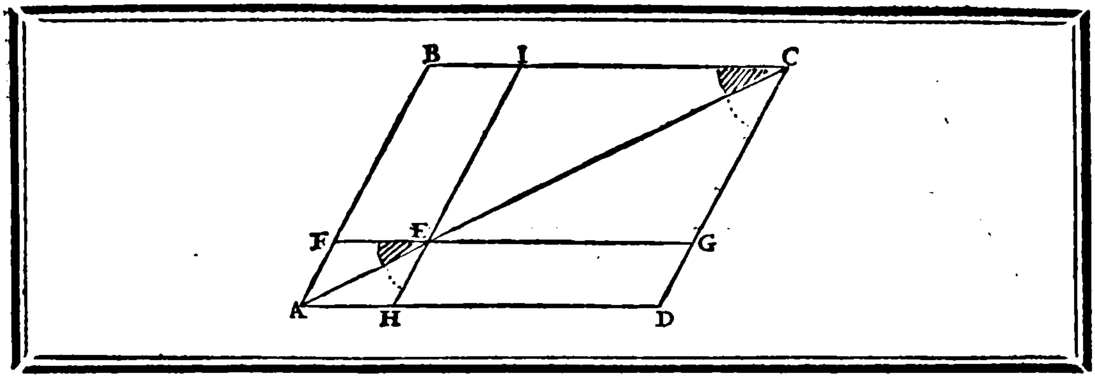
c. à. d. la raifon $\overline{M : N} = \overline{M : P} + \overline{P : N}$.
Or à caufe que $AC : CG = M : P$.
& $DC : CE = P : N$. Prop. 1. L. 6.

2. La raifon des côtés AC : CG eft la même que celle des Pgrs M : P; & la raifon des côtés DC : CE, la même que celle des Pgrs P : N. Puis donc que la raifon de M : N fe trouve compofée des raifons M : P & P : N (*Arg.* 1),
3. Cette même raifon fe trouve compofée de leurs égales; des raifons AC : CG, & CD : EC, des côtés alentour des angles égaux ACD, ECG. Prop. 3. App.
4. Par conféquent $M : N = AC.CG : EC.CG$. Def. 5. L. 6. Def. 6. App.

C. Q. F. D.

Coroll. I. *Les Pgrs équiangles font donc comme les produits qui réfultent de la multiplication de leurs côtés alentour des angles égaux.* (Déf. 1 & 6. App.).

Coroll. II. *Les mêmes vérités conviennent aux Triangles* (ACD, ECG) *qui ont un Angle* (ACD) *égal à un angle* (ECG). *Car les Diagonales* (AD, EG) *partagent les Pgrs en deux également* (Prop. 34. L. 1).



PROPOSITION XXIV. *THEOREME XVIII.*

EN tout Parallélogramme (BD), les Parallélogrammes (FH, IG) alentour de la diagonale (AC) font femblables & au Tout & entr'eux.

Hypothese.

I. BD eft un Pgr.
II. FH, IG font des Pgrs alentour de la diagonale AC.

These.

I. Les Pgrs AFEH, EICG font femblables au Pgr ABCD,
II. Et femblables entr eux.

Demonstration.

PUifque FE eft Plle à BC (*Hyp.* 1. & 2. & *Prop.* 30. *L.* 1.),

1. Le △ AFE eft équiangle au △ ABC, felon l'ordre des lettres. De même, parceque HE eft Plle à DC, — Prop. 29. L. 1.
2. Le △ AHE eft équiangle au △ ADC, felon l'ordre des lettres.
3. Le Pgr AFEH eft donc auffi equiang. au Pgr ABCD, felon l'ordre des lettres.

Et à caufe que dans les △ AHE, ADC, les ∀ AHE & D font égaux (*Arg.* 2), comme dans les △ AFE, ABC, les ∀ AFE & B (*Arg.* 1),

4. AH : HE = AD : DC & AF : FE = AB : BC — Prop. 4. L. 6.

De plus, à caufe que les ∀ AEH, ACD ; item FEA, BCA font égaux (*Arg.* 1 & 2)

5. HE : AE = DC : AC & AE : EF = AC : CB — Prop. 4. L. 6.
6. Donc par égalité HE : EF = DC : CB. — Prop. 22. L. 5.

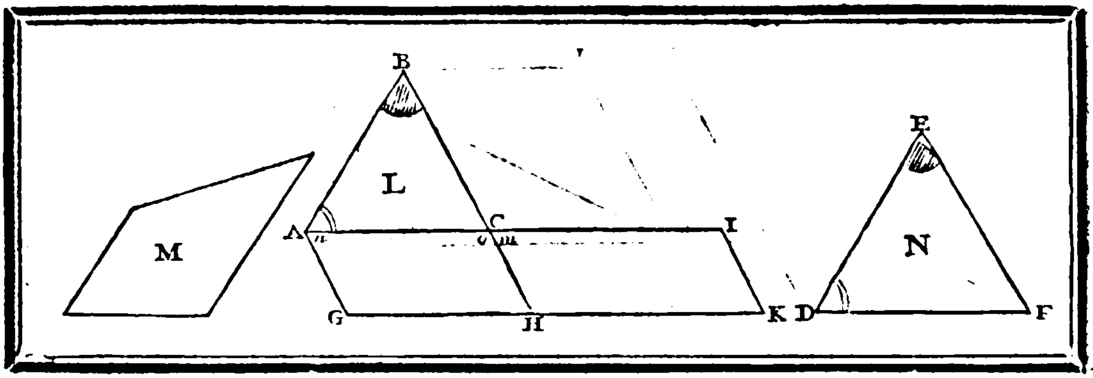
Et encore, à caufe que les ∀ EAH, EFA font communs, de part & d'autre, aux deux triangles AHE, ADC & AFE, ABC,

7. HA : EA = DA : CA & EA : AF = CA : AB — Prop. 4. L. 6.
8. Donc par égalité HA : AF = DA : AB — Prop. 22. L. 5.
9. C'eft pourquoi les Pgrs AFEH, ABCD, ont leurs angles égaux, chacun à chacun, dans l'ordre des lettres (*Arg.* 3); & les côtés alentour des angles égaux, proportionels (*Arg.* 4. 6. 8.).
10. Par confequent ces Pgrs font femblables. — Def. 1. L. 6.
11. On démontre de la même manière, que les Pgrs EICG, ABCD font femblables.

C. Q. F. D. I.

12. Par conféquent les Pgrs AFEH, EICG font auffi femblables entr'eux. — Prop. 21. L. 6.

C. Q. F. D. II.



PROPOSITION XXV. *PROBLEME VII.*

Construire un Rectiligne (N), semblable à un Rectiligne donné (L), & égal à un autre (M).

Donnee.

I. Le Rectiligne L.
II. Et le Rectiligne M.

Cherchee.

Le Rectiligne N, semblable au Rectiligne L, & = au Rectiligne M.

Résolution.

1. Appliquez à la droite AC, un Pgr AH = au Rectiligne donné L. — Prop. 44. L. 1.
2. Et à la droite CH un Pgr CK = au Rectiligne donné M, ayant un ∀ *m* = à ∀ *n*. — Prop. 45. L. 1.
3. Cela fait, les côtés AC, CI & GH, HK se rencontreront directement. — Prop. 14, 29, & 34. L. 1.
4. Prenez entre AC, & CI, une moyenne proportionelle DF. — Prop. 13. L. 6.
5. De cette droite DF, décrivez le Rectil. N, semblable & semblablement posé au Rect.l. L. — Prop. 18. L. 6.

Demonstration.

Puisque les Pgrs AH, CK, ont la même hauteur (*Ref.* 2 & 3),

1\. Pgr AH : Pgr CK = AC : CI, — Prop. 1. L. 6.

Or le Pgr AH = Rectil. L, & le Pgr CK = Rectil. M (*Ref.* 1 & 2);

2\. Partant L : M = AC : CI. — Prop. 11. L. 5.

Mais AC : DF = DF : CI (*Ref.* 4); & des droites AC, DF ont été décrits les Rectilignes semblables & semblablement posés L & N (*Ref.* 5);

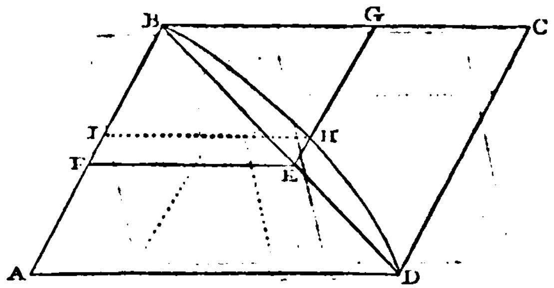
3\. Partant L : N = AC : CI. — Prop. 20. L. 6. Coroll.

4\. D'où il suit que L : N = L : M. (*Arg.* 2); — Prop. 11. L. 5.

5\. C'est pourquoi N = M. — Prop. 14. L. 5.

6\. On a donc construit un Rectiligne N, semblable au Rectiligne L (*Ref.* 5), & égal au Rectiligne M. (*Arg.* 5).

C. Q. F. F.



PROPOSITION XXVI. *THEOREME XIX.*

Si d'un Parallélogramme (AC) on retranche un Parallélogramme (FG), semblable & semblablement posé au Parallélogramme entier (AC), ayant un angle (FBG) commun avec lui: le Parallélogramme (FG) est placé alentour de la diagonale (BD) du Parallélogramme entier (AC).

Hypothese

I. AC est un Pgr, dont BD est la diagonale.
II. FG est un Pgr semblable à AC, & ayant un ∀ FBG commun avec AC.

These.

Le Pgr FG est placé alentour de la diagonale BD du Pgr AC.

Demonstration.

Si non. Soit une autre ligne BHD, différente de BED, la diagonale du Pgr AC, coupant le côté GE en un point H.

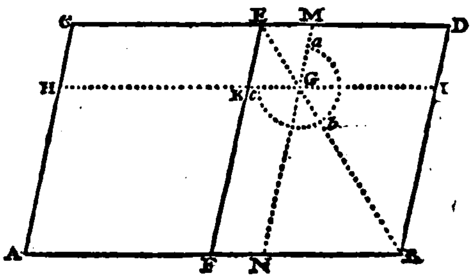
Préparation.

Par ce point H tirez HI Plle à CB ou DA. — Prop. 31. L. 1.

Les Pgrs AC, IG étant donc placés alentour de la même diagonale BHD, & ∀ FBG étant commun aux deux Pgrs (*Sup. & Prep.*),

1. Le Pgr AC est semblable au Pgr IG. — Prop. 24. L. 6.
2. Partant CB : BA = GB : BI. — Def. 1. L. 6.
   Mais les Pgrs AC & FG étant aussi semblables, & ∀ B commun aux deux Pgrs (*Hyp.* 2),
3. On aura CB : BA = GB : BF. — Def. 1. L. 6.
4. Par conséquent GB : BI = GB : BF. — Prop. 11. L. 5.
5. Donc BI = BF. — Prop. 14. L. 5.
6. Ce qui est impossible. — Ax. 8. L. 1.
7. Ainsi toute ligne BHD, différente de la ligne BED, n'est point la diagonale du Pgr AC.
8. Partant, la ligne BED est la véritable diagonale, & le Pgr FG est placé alentour d'elle.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXVII. THEOREME XX.

De tous les Parallélogrammes (A G) appliqués ſelon une même ligne droite (AB), & défaillans de Parallélogrammes (N I) ſemblables & ſemblablement poſés, à un autre Parallélogramme (F D) décrit de la moitié (F B) de la ligne entière (A B); Le plus grand eſt le Parallélogramme (AE) appliqué à l'autre moitié (A F), & ſemblable à ſon défaut (F D).

Hypothese.

I. A E eſt un Pgr appliqué à la moitié A F, de la droite A B.

II. Lequel eſt ſemblable & ſemblablement poſé à ſon défaut, le Pgr F D, déjà décrit de l'autre moitié F B.

These.

A E eſt le plus grand de tous les Pgrs, tel que A G, applicables ſelon A B, ayant leurs défauts, tel que N I, ſemblables & ſemblablement poſés au Pgr F D, défaut de A E, décrit de F B moitié de A B.

Préparation.

1. Tirez la Diagonale B E. — Dem. 1. L. 1.
2. Et par un point quelconque G, pris dans B E, tirez I H M N Plles à B A, A C. — Prop. 31. L. 1.
   Afin d'avoir un Pgr quelconque A G, appliqué ſelon A B, défaillant d'un Pgr N I; ſemblable au Pgr F D & ſemblablement poſé. — Prop. 26. L. 6.

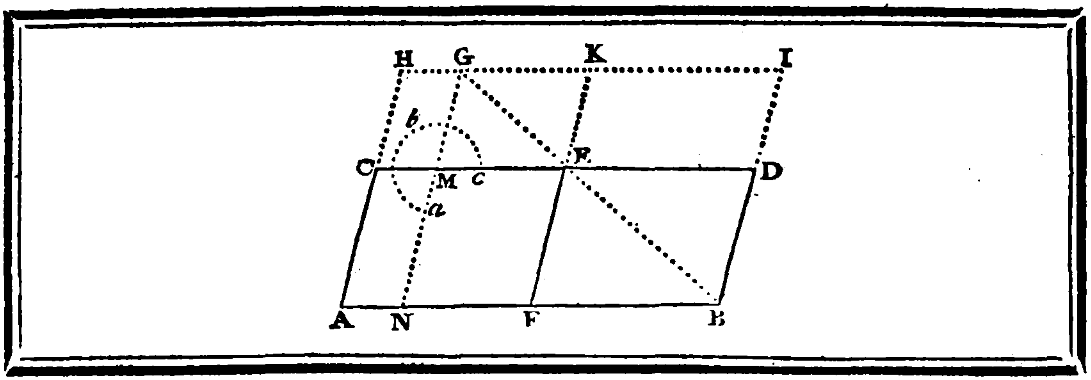
Demonstration.

CAS I. Lorſque le point N tombe dans la moitié F B.

Puiſque le Pgr G D eſt = au Pgr G F (*Prop.* 43. *L.* 1); en ajoutant le Pgr commun N I,

1. Le Pgr N D ſera = au Pgr F I. — Ax. 2. L. 1.
   Mais à cauſe que le Pgr AK eſt auſſi = au Pgr F I (*Prop.* 36. *L.* 1),
2. Le Pgr N D eſt = au Pgr A K. — Ax. 1. L. 1.
   Si l'on ajoute donc de part & d'autre le Pgr F G.
3. Le Gnomon *a b c* eſt = au Pgr A G, — Ax. 2. L. 1.
4. Partant le Pgr entier F D, ou ſon égal le Pgr AE (*Hyp.* 2), eſt > Pgr A G. — Ax. 8. L. 1.

C. Q. F. D.



CAS II. Lorsque le point N tombe dans la moitié AF.

Le Pgr NE étant = au Pgr IE (*Prop.* 43. *L.* 1), si l'on ajoute de part & d'autre le Pgr commun FD,

1. Le Pgr ND sera = au Pgr FI; — Ax. 2. L. 1.

Mais à cause que le Pgr AK est aussi = au Pgr FI (*Prop.* 36. *L.* 1),

2. Le Pgr ND sera = au Pgr AK. — Ax. 1. L. 1.

Si l'on rétranche donc de part & d'autre le Pgr commun FM,

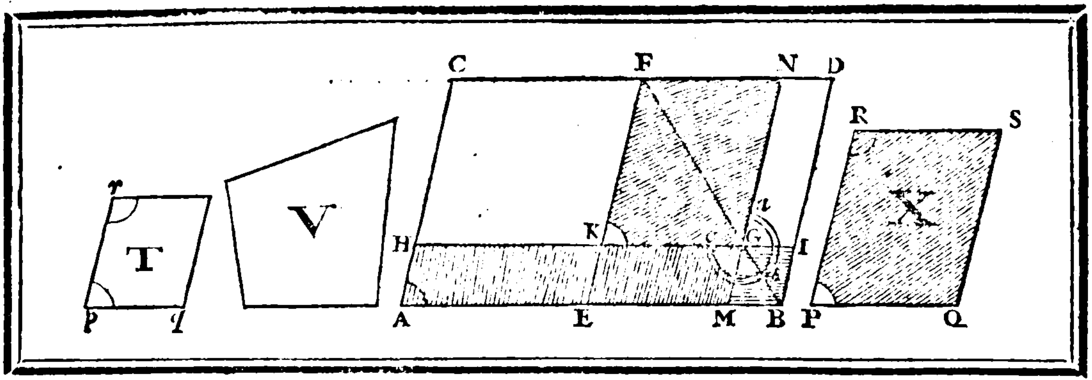
3. Reste le Pgr FD = au Gnomon *abc*. — Ax. 3. L. 1.

Or le Pgr FD est = au Pgr AE; — Prop. 36. L. 1.

4. C'est pourquoi le Pgr AE = au Gnomon *abc*. — Ax. 1. L. 1.

5. Par conséquent le Pgr AE > que le Pgr AG. — Ax. 8. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXVIII. *PROBLEME VIII.*

SElon une droite donnée (AB), appliquer un Parallélogramme (AG) egal à un Rectiligne donné (V), & defaillant d'un Parallélogramme (MI), semblable à un Parallélogramme donné (T); mais il faut que le Rectiligne donné (V), ne soit pas plus grand, qu'un Parallélogramme (AF) appliqué à la moitié de la droite donnée, ayant son défaut (ED) semblable au Parallélogramme donné (T).

DONNEE.

I. La droite A B, & le Pgr T.
II. Le Rectiligne V, qui n'est pas > qu'un Pgr ED, semblable à T, appliqué à AE, moitié de A B.

CHERCHEE.

La construction d'un Pgr AG, appliqué selon A B, qui soit = à V, & defaillant d'un Pgr M I, semblable à T.

Résolution.

1. Coupez AB en deux également en E. — Prop. 10. L. 1.
2. Construisez sur EB un Pgr ED, semblable au Pgr T & semblablement posé. — Prop. 18. L. 6.
3. Achevez le Pgr AD. — Prop. 31. L. 1.
   Le Pgr AF sera ou =, ou > V; puisqu'il ne peut être < V, par la détermination.

CAS I. Si AF est = à V.

On aura appliqué selon AB, un Pgr AF = au Rectil. V, & défaillant d'un Pgr ED semblable au Pgr T.

C. Q. F. F.

CAS II. Si AF est > V, & par-là ED > V, parceque AF = ED. — Prop. 36. L. 1.

4. Construisez un Pgr X, semblable au Pgr T, (ou au Pgr ED) (*Res.* 2), & semblablement posé, & égal à l'excès dont ED, ou son égal AF, surpasse V (c. à. d. faites X = ED — V), & que RS, FD item RP, FE en soyent les côtés homologues. — Prop. 45. L. 1.
   Et d'autant que X est semblable à ED & < ED; (parceque ED = V+X),
   Les côtés RS, RP sont < que leur côtés homologues FD, FE.
5. Faites donc FN = à RS, & FK = à RP. — Prop. 3. L. 1.
6. Et achevez le Pgr NK. — Prop. 31. L. 1.

Demonstration.

Le Pgr KN étant donc égal & semblable au Pgr X (*Ref.* 4, 5 & 6); qui est lui même semblable au Pgr ED (*Ref.* 4),

1. Le Pgr KN est semblable au Pgr ED. Prop. 21. L. 6.
2. C'est pourquoi ces deux Pgrs KN, ED, sont alentour de la même diagonale. Prop. 26. L. 6.
   Tirez cette diagonale FGB, & achevez de décrire la figure.
   Puis donc que le Pgr MI, est aussi alentour de la même diagonale FB,
3. Il est semblable au Pgr ED. Prop. 24. L. 6.
4. Par conséquent semblable au Pgr T (*Ref.* 2.). Prop. 21. L. 6.
   Or le Pgr DG étant = au Pgr EG (*Prop.* 43. *L.* 1), si l'on ajoute de part & d'autre ce Pgr commun MI,
5. Le Pgr MD sera = au Pgr EI. Ax. 2. L. 1.
   Mais le Pgr AK étant aussi = au Pgr EI (*Prop.* 36. *L.* 1),
6. Le Pgr MD est = au Pgr AK. Ax. 1. L. 1.
   Et ajoutant de plus le Pgr commun EG, de part & d'autre,
7. Le Gnomon *abc* sera = au Pgr AG. Ax. 2. L. 1.
   Or le Pgr ED étant = aux figures V & X prises ensemble, (*Ref.* 4) ou V & KN, puisque X est = KN, (*Ref.* 5 & 6); si l'on ôte le commun KN, de part & d'autre
8. Reste le Gnomon *abc* = à V. Ax. 3. L. 1.
9. Partant le Pgr AG est = à V. (*Arg.* 7). Ax. 1. L. 1.
   Or ce Pgr AG a pour défaut le Pgr MI, semblable au Pgr donné T (*Arg.* 4);
10. On a donc appliqué selon AB, un Pgr AG = à V, défaillant d'un Pgr MI semblable au Pgr T. Def. 8. L. 6.

C. Q. F. F.

Remarque.

Divers *Editeurs de* Nouveaux Elémens d'Euclide, *ont omis cette Proposition & la suivante, comme inutiles, parcequ'ils n'en connoissoient pas l'usage. Elles sont cependant essentiellement nécessaires pour l'Analyse des Anciens, en ce qu'elles correspondent à la résolution algébrique des égalités du second Degré; où le 1^er terme peut être affecté d'une quantité quelconque; le dernier étant un rectangle quelconque.*

Cette XXVIII. *Proposition répond au cas, où le dernier terme de l'égalité reduite à zéro, devient positif.*

Car reduisant l'espace donné V *en un Pgr équiangle au Pgr* T; *posez* $V = nl$; *la raison des côtés* QP, PR *du Pgr* X (*ou* T), $m : n$; *de plus* $AB = a$, $AM = x$, & $MB = a - x$.

Partant, à cause que le défaut MI, *doit être semblable au Pgr* T *ou au Pgr* X,

$$QP : PR = : BM : MG \quad (Def.\ 1.\ L.\ 6)$$

$$m : n = : a - x : \frac{n}{m}(a - x)$$

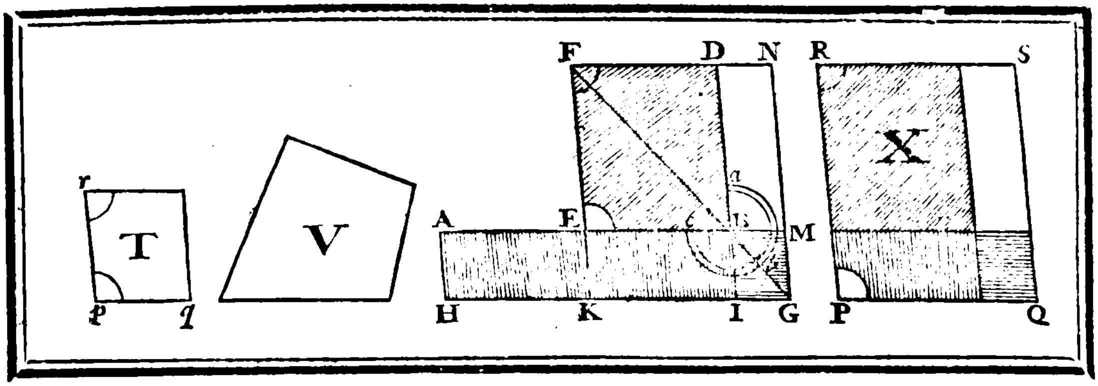
Et, d'autant que le Pgr GA ($= MA . MG$) *doit être égal à l'espace donné* V ($= nl$), *On arrive à l'égalité suivante* (*Prop.* 23. *L.* 6).

$$\frac{n}{m}(a - x)\, x = V \text{ ou } nl$$

Qui se reduit à cette autre, $\frac{n}{m} xx - \frac{n}{m} ax + V = 0$

Ou bien, en mettant pour V *sa valeur, & multipliant par m, puis divisant par n.*

$$xx - ax + ml = 0.$$



PROPOSITION XXIX. *PROBLEME IX.*

SElon une droite donnée (AB), appliquer un Parallélogramme (AG), égal à un Rectiligne donné (V), excédant d'un Parallélogramme (MI), semblable à un Parallélogramme donné (T).

Donnee.	Cherchee.
I. La droite AB, & le Pgr T. *II. Le Rectiligne V.*	*La construction d'un Pgr AG, appliqué selon AB, égal au Rectil. V, & ayant pour excès un Pgr MI, semblable à T.*

Résolution.

1. Coupez AB en deux également, en E. — Prop. 10. L. 1.
2. De la moitié EB, décrivez un Pgr ED, semblable au Pgr T, & semblablement posé. — Prop. 18. L. 6.
3. Décrivez un Pgr X (ou PS) = V + ED, semblable & semblablement posé au Pgr T; & par conséquent semblable au Pgr ED (*Ref.* 2. *Prop.* 21. *L.* 6): & soyent les côtés RS, FD; RP, FE homologues.
4. Puis donc que X, (comme = V + ED), est > ED; le côté RS est > que FD, & le côté RP > que FE. C'est pourquoi apres avoir prolongé FD & FE, faites FN = RS & FK = RP; & achevez le Pgr FKGN, qui sera égal & semblable au Pgr X. — Prop. 31. L. 1.

Demonstration.

LE Pgr KN étant donc égal & semblable au Pgr X, qui est lui même semblable au Pgr ED (*Ref.* 3),

1. Le Pgr KN est semblable au Pgr ED. — Prop. 21. L. 6.
2. C'est pourquoi ces deux Pgrs KN, ED, sont alentour d'une même diagonale. — Prop. 26. L. 6.

Tirez cette diagonale FBG, & achevez de décrire la figure.
Puis donc que X est = V + ED, & que X = au Pgr KN (*Ref.* 3 & 4),

3. Le Pgr KN = V + ED. — Ax. 1. L. 1.

Otant donc de part & d'autre le Pgr commun ED,

4. Reste le Gnomon *abc* = au Rectil. V. — Ax. 3. L. 1.

Or, à cause que AE = EB (*Ref.* 1),

5. Le Pgr AK = au Pgr EI. — Prop. 36. L. 1.
6. Et par cette raison ce Pgr AK est = au Pgr NB. — Prop. 43. L. 1.

Ajoutant

Ajoutant donc de part & d'autre le Pgr commun MK,

7. Résulte le Pgr AG$=$au Gnomon *abc*. Ax. 2. L. 1.

Or le Gnomon *abc* est$=$au Rectil. V (*Arg.* 4);

8. Partant le Pgr AG est$=$au Rectil. V. Ax. 1. L. 1.

Puis donc que ce Pgr AG a pour excès le Pgr MI, semblable au Pgr ED (*Prop.* 24. *L.* 6); & par conséquent semblable au Pgr T (*Ref.* 2. *Prop.* 21. *L.* 6),

9. On a appliqué selon AB, un Pgr AG$=$au Rectil. V, ayant pour excès un Pgr MI, semblable au Pgr T.

C. Q. F. F.

Remarque.

SI, *comme dans le cas précédent, on fait* AB$=a$; *l'espace donné* V (*reduit à un Pgr équiang. au Pgr* T)$=nl$; *la raison des côtés* QP, PR *du Pgr* X (*qui est celle des côtés du Pgr* T) $m : n$; *de plus* AM$=x$ *&* *par conséquent* MB$=x-a$. *L'on arrive à une égalité de la même espéce.*

Car, à cause que le défaut MI *doit être semblable au Pgr* T *ou* X, *on a comme auparavant cette Analogie*

$$\text{QP} : \text{PR} = \text{MB} : \text{MG} \quad (Def.\ 1.\ L.\ 6).$$
$$m : n = x-a : \tfrac{n}{m}(x-a)$$

Et d'autant que le Pgr AG ($=$AM . MG), *doit être égal à l'espace donné* V ($=nl$), *on a l'égalité suivante*

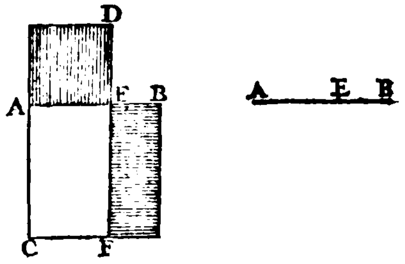
$$\tfrac{n}{m}(x-a)x = \text{V}. \quad (Prop.\ 23.\ L.\ 6).$$

Qui se reduit à celle-ci. $\frac{n}{m}xx - \frac{n}{m}ax - \text{V} = 0$.

Ou bien, en mettant pour V *sa valeur* nl, *puis multipliant par* m *&* *divisant par* n

$$xx - ax - ml = 0.$$

D'où l'on voit, que la Prop. XXIX *regarde le cas, où le dernier terme de l'égalité reduite à zéro, est négatif.*



PROPOSITION XXX. *PROBLEME X.*

Couper une droite donnée (AB) en extréme & moyenne raison (en E).

Donnee.
La droite A B.

Cherchee.
Le point E, tel que A B soit coupé en extrême & moyenne raison; de manière que B A : AE = A E : B E.

Résolution.

1. De la droite AB décrivez un quarré BC. — Prop. 46. L. 1.
2. Appliquez au côte CA, un Pgr CD = au quarré BC, dont l'excès AD soit semblable à BC; qui sera par conséquent un quarré. — Prop. 29. L. 6.

Demonstration.

Puis donc que BC = CD (*Ref.* 2.); si l'on ôte le Rgle commun CE,

1. Reste BF = AD. — Ax. 3. L. 1.

Mais BF est aussi équiangle avec AD (*Prop.* 15. *L.* 1);

2. Leurs côtés FE, EB; ED, AE alentour des angles égaux, sont donc réciproquement proportionels, c. à d. FE : ED = AE : EB. — Prop. 14. L. 6.

Or FE est = CA (*Prop.* 34. *L.* 1), ou = à BA, & ED = AE (*Def.* 30. *L.* 1).

3. C'est pourquoi BA : AE = AE : EB. — Pr. 7. & 11. L. 5.

Mais parceque BA est > AE (*Ax.* 8. *L.* 1.),

4. La droite AE est > EB. — Prop. 14. L. 5.
5. Partant la droite AB est coupée en extrême & moyenne raison en E; tellement que AE en est le plus grand segment. — Def. 3. L. 6.

C. Q. F. F.

Autrement.

Partagez BA en E, ensorte que le Rgle AB . BE soit = au □ de AE. — Prop. 11. L. 2.

Demonstration.

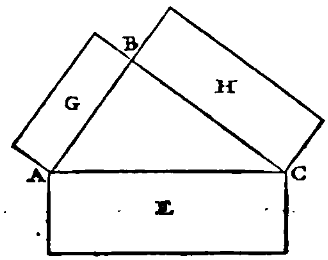
Puis donc que BA . BE est = au □ de AE (*Ref.*),

1. BA : AE = AE : BE. — Prop. 17. L. 6.

Et parceque BA est > AE (*Ax.* 8. *L.* 1.).

2. La droite AE est > BE — Prop. 14. L. 5.
3. Partant la droite AB est coupée en extrême & moyenne raison en E. — Def. 3. L. 6.

C. Q. F. F.



D PROPOSITION XXXI. *THEOREME XXI.*

DAns tout triangle rectangle (ABC), la figure (E) décrite de l'hypothenuse (AC) est égale à la somme des figures semblables & semblablement posées (G & H), décrites des deux côtés (AB, BC) alentour de l'angle droit.

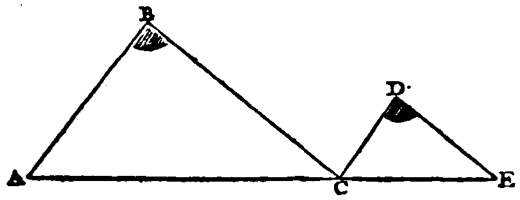
HYPOTHESE.	THESE.
I. ABC est un △ Rgle en B. *II. La figure E est décrite de l'hypothenuse AC de ce △.* *III. Et les figures G & H sont semblables à E & décrites semblablement des deux autres côtés AB, BC.*	*La figure E est = aux figures G + H.*

DEMONSTRATION.

PUis donc que les figures E, G, H sont semblables & décrites semblablement des côtés homologues AC, AB, BC (*Hyp.* 3),

1.	G : E = □ de AB : □ de AC. Et H : E = □ de BC : □ de AC.	Prop. 20. L. 6. Coroll. 2.
2.	Partant G + H : E = □ de AB + □ de BC : □ de AC.	Prop. 24. L. 5.
	Or à cause que le △ ABC est rectangle en B (*Hyp.* 1),	
3.	Le □ de AB + □ de BC est = au □ de AC.	Prop. 47. L. 1.
4.	Donc la figure E est = aux figures G + H.	Prop. 16. L. 5. Rem.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXXII. *THEOREME XXII.*

Si deux triangles (ABC, CDE), qui ont deux côtés (AB, BC) proportionels à deux côtés (CD, DE), s'entretouchent (en C), de manière que leurs côtés homologues (AB, CD, BC, DE) soient Parallèles, les deux autres côtés (AC, CE) se rencontreront directement.

HYPOTHESE.

I. AB : BC = CD : DE.
II. Les △ ABC, CDE s'entretouchent en C.
III. De manière que AB est Plle à CD, & BC Plle à DE.

THESE.

Les deux autres côtés AC, CE de ces △, se rencontrent directement, ou ils ne forment qu'une même droite AE.

DEMONSTRATION.

Puisque les Plles AB, CD sont coupées par la droite BC, & les Plles BC, DE par la droite DC (*Hyp.* 2),

1. L'angle B est = à ∀ BCD & ∀ D est aussi = à ∀ BCD. — Prop. 29. L. 1.
2. Partant ∀ B est = à ∀ D. — Ax. 1. L. 1.

Et comme de plus AB : BC = CD : DE (*Hyp.* 1),

3. Les △ ABC, CDE sont équiangles. — Prop. 6. L. 6.
4. Donc l'angle A est = à ∀ DCE, comme opposés aux côtés homologues BC, DE.

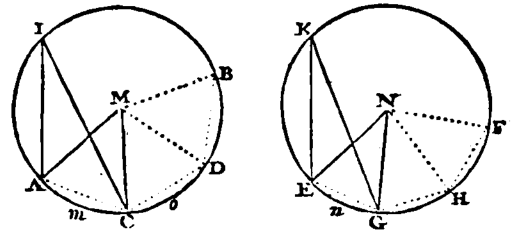
Ajoutant donc de part & d'autre ∀ B, ou son = ∀ BCD (*Arg.* 1), avec ∀ commun BCA,

5. Les ∀ A+B+BCA seront = aux ∀ DCE+BCD+BCA. — Ax. 2. L. 1.

Or les ∀ A+B+BCA sont = à 2 ∟ (*Prop.* 32. *L.* 1),

6. Par conséquent les ∀ DCE+BCD+BCA sont aussi = à 2 ∟. — Ax. 1. L. 1.
7. D'où il suit que les droites AC, CE se rencontrent directement, ou qu'elles ne forment qu'une même ligne droite AE. — Prop. 14. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXXIII. *THEOREME XXIII.*

DAns les cercles égaux (AIBC, EKFG), les angles, ſoit aux centres ſoit aux circonférences (AMC, ENG ou AIC, EKG), de même que les ſecteurs (AMC*m*, ENG*n*), ſont en raiſon des arcs (A*m*C, E*n*G) ſur leſquels ils appuyent.

HYPOTHESE.	THESE.
I. Les ⊙ AIBC, EKFG ſont = entr'eux.	*I. ∀ AMC : ∀ ENG = AmC : EnG.*
II. Les ∀ aux centres AMC, ENG, & les ∀ aux ○ AIC, EKG appuyent ſur les arcs AmC, EnG.	*II. ∀ AIC : ∀ EKG = AmC : EnG.*
	III. Sect. AMCm : Sect. ENGn = AmC : EnG.

Préparation.

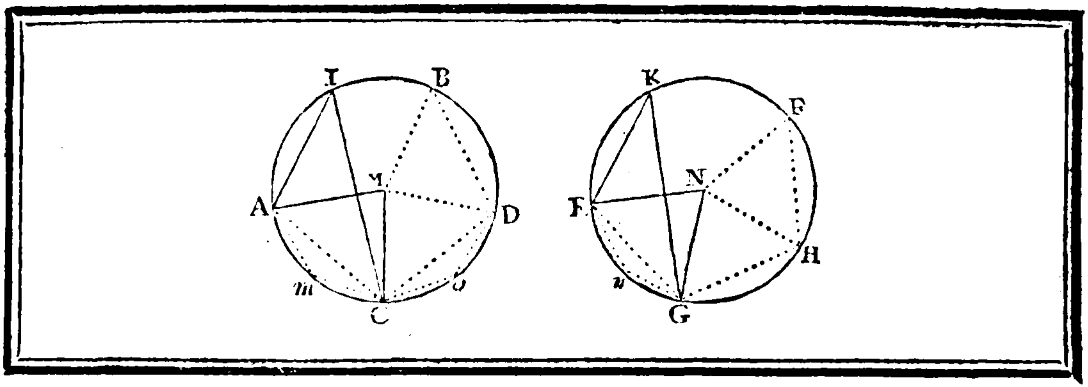
1. Joignez les cordes AC, EG. — Dem. 1. L. 1.
2. Appliquez dans la ○AIBC, les cordes CD, DB &c, chacune = à AC, & dans la ○EKFG un pareil nombre de cordes, GH, HF &c, chacune = à EG. — Prop. 1. L. 4.
3. Tirez MD, MB &c, item NH, NF &c. — Dem. 1. L. 1.

DEMONSTRATION.

PUiſque d'un côté les cordes AC, CD, DB, & de l'autre les cordes EG, GH, HF ſont = entr'elles *Prép.* 2),

1. Les arcs A*m*C, C*o*D, DB ſont tous égaux d'un côté; comme les arcs E*n*G, GH, HF le ſont de l'autre. — Prop. 28. L. 3.
2. Partant les ∀ AMC, CMD, DMB &c; item ENG, GNH, HNF &c, ſont auſſi = entr'eux, d'un côté & de l'autre. — Prop. 27. L. 3.
3. C'eſt pourquoi ∀ AMB & l'arc ACDB, ſont des équimultiples de ∀ AMC & de l'arc A*m*C.
4. Et par la même raiſon ∀ ENF & l'arc EGHF ſont des équimultiples de ∀ ENG & de l'arc E*n*G.
   Mais à cauſe de l'égalité des deux ⊙AIBC, EKFG (*Hyp.* 1),
   Selon que l'arc ACDB eſt >, = ou < que l'arc EGHF; ∀ AMB eſt auſſi >= ou < que ∀ ENF. — Prop. 27. L. 3.
5. C'eſt pourquoi ∀ AMC : ∀ ENG = A*m*C : E*n*G. — Def. 5. L. 5.

C. Q. F. D. 1.



De plus, ∀ AMC étant double de ∀ AIC, & ∀ ENG double de ∀ EKG (*Prop.* 20. *L.* 3),

6. Il s'enfuit que ∀ AMC : ∀ ENG = ∀ AIC : ∀ EKG. Prop. 15. L. 5.

7. Partant ∀ AIC : ∀ EKG = A*m*C : E*n*G. Prop. 11. L. 5.

C. Q. F. D. II.

PREP. 4. Dans les arcs AC, CD, prenez les points *m* & *o*; & joignez A*m*, C*m*; C*o*, D*o* &c. Dem. 1. L. 1.

Puis donc que les deux côtés AM, MC font = aux deux côtés CM, MD (*Def.* 15. *L.* 1.), & que les ∀ compris AMC, CMD font égaux (*Arg.* 2),

8. La baſe AC eſt = à la baſe CD, & le △ AMC = au △ CMD. Prop. 4 L. 1.

De plus, par la raiſon que l'arc A*m*C eſt = C*o*D (*Arg.* 1),

9. Le complément AIBDC du premier eſt = au complément CAIBD du ſecond. Ax. 3. L. 1.

10. C'eſt pourquoi ∀ A*m*C eſt = ∀ C*o*D. Prop. 27. L. 3.

11. Le Segment A*m*C eſt donc ſemblable au Segment C*o*D Ax. 2. L. 3.

Et ils ſont outre cela ſoutendus par des cordes égales (*Arg.* 8).

12. Par cette raiſon le Segment A*m*C eſt = au Segment C*o*D. Prop. 24. L. 3.

Or comme le △ AMC eſt auſſi = au △ CMD (*Arg.* 8),

13. Le Secteur AMC*m* eſt = au Secteur CMD*o*. Ax. 2. L. 1.

De la même manière, le Secteur DMB eſt égal à chacun des deux précédens AMC*m*, CMD*o*.

14. Les trois Secteurs AMC, CMD, DMB ſont donc égaux entr'eux.

15. On démontre de même, que les trois Secteurs ENG, GNH, HNF ſont = entr'eux.

16. C'eſt pourquoi le Sect. AMBDC & l'arc ACDB ſont d'un côté des équimultiples du Sect. AMC*m* & de l'arc A*m*C; comme de l'autre côté, le Sect. ENFHG, & l'arc EGHF ſont des équimultiples du Sect. ENG*n*, & de l'arc E*n*G.

Or à cauſe que les ⊙ AIBC, EKFG ſont égaux (*Hyp.* 1),

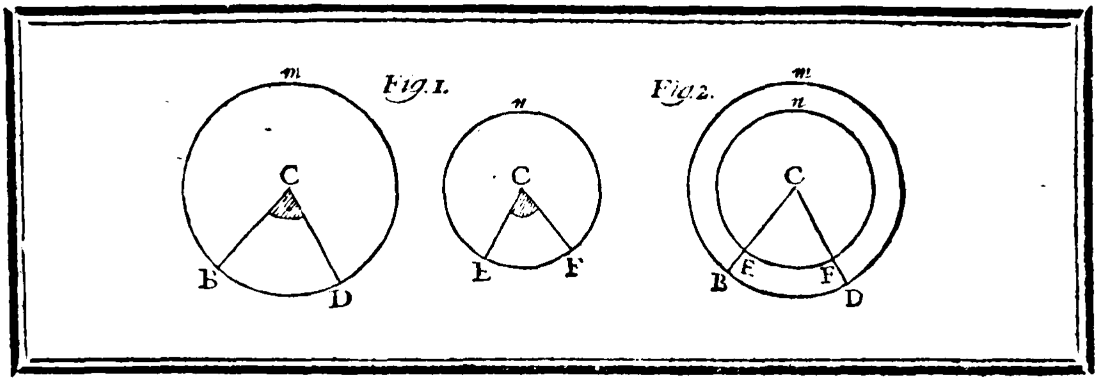
Selon que l'arc ACDB eſt >, = ou < que l'arc EGHF: (*)

le Sect. AMBDC eſt auſſi >, = ou < que le Sect. ENFHG.

17. Partant Sect. AMC : Sect. ENG = A*m*C : E*n*G. Def. 5. L. 5.

C. Q. F. D. III.

(*) *La preuve ſe trouve dans les raiſonnemens de cette III partie de la Démonſtration, juſqu'à Arg.* 12 *incluſivement. On n'a qu'à ſupoſer l'arc* A*m*C = *à l'arc* E*n*G. *Car par la* ∀ AMC *eſt* = *à* ∀ ENG (Prop. 27. L. 3) *item* AC = EG (Prop. 4. L. 1). *D'où l'on tire comme précedemment, que le Sect.* AMC*m eſt* = *au Sect.* ENG*n*. *Partant, ſi l'arc* AMC *eſt* > *ou* < *l'arc* E*n*G, *le Sect.* AMC*m eſt auſſi* > *ou* < *Sect.* ENG*n*.



COROLLAIRE I.

L'angle au centre, eſt à 4 angles droits, comme l'arc ſur lequel il appuye, eſt à la circonférence Car (*Fig* 1) $\angle BCD : \llcorner = BD$: à un quart de $\bigcirc$.
C'eſt pourquoi, quadruplant les conſéquens,

$$\angle BCD : 4\llcorner = BD : \bigcirc.$$ Prop. 15. L. 5.

COROLLAIRE II.

Les arcs EF, BD de cercles inégaux, ſont ſemblables, s'ils ſoutiennent des angles égaux C & C, ſoit aux centres, ſoit aux circonférences (*Fig.* 2).

Car $EF : \bigcirc EnF = \angle ECF : 4\llcorner$
Mais $\angle BCD$ ou $\angle ECF : 4\llcorner = BD : \bigcirc BmD$ } (*Corol.* 1);
Partant $EF : \bigcirc EnF = BD : \bigcirc BmD$. Prop. 11. L. 5.
Les arcs EF, BD ſont donc ſemblables.

COROLLAIRE III.

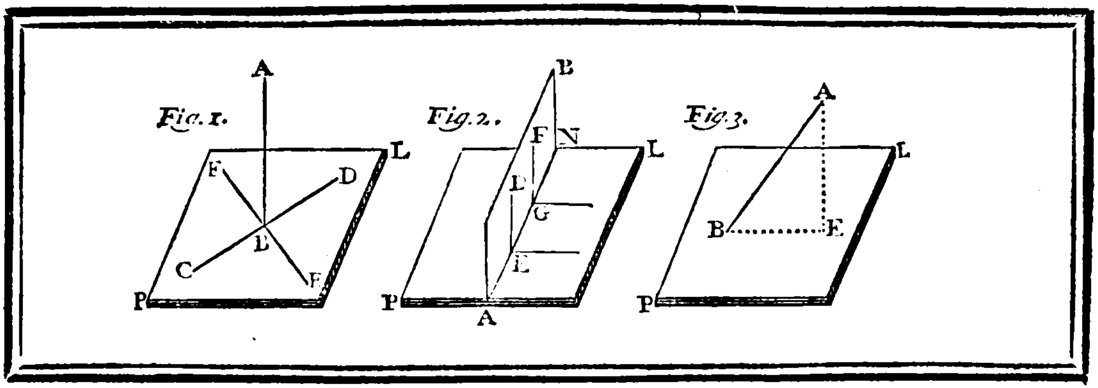
Deux rayons CB, CD rétranchent de circonférences concentriques, des arcs ſemblables EF, BD (*Fig.* 2).

Rémarque.

C'Eſt en vertu de la proportionalité, établie dans le Coroll. I, *qu'un arc de cercle* (BD) *eſt appellé la MESURE de ſon angle Correſpondant* (BCD); *c. à d. de l'angle au centre, ſoutenu par cet arc; la circonférence circulaire étant la ſeule ligne courbe, où les arcs augmentent ou diminuent, dans la raiſon des angles correſpondans, alentour d'un même point.*

On conçoit tout cercle diviſé en 360 parties égales, qu'on apelle DEGRÉS; & chacun de ces dégrés en 60 autres parties égales, qu'on nomme MINUTES; & chaque minute encore en 60 autres parties égales, dites SECONDES &c. En conſéquence de cette hypothèſe, & de la correſpondance établie entre les arcs & les angles, on eſt obligé de concevoir la totalité des angles, qui peuvent entourer un point dans un même plan (c. à d. la ſomme de $4\llcorner$); *comme partagée en 360 parties égales. Tellement que l'angle d'un dégré n'eſt autre choſe que la 360ième partie de $4\llcorner$, ou la 90ième d'un $\llcorner$; d'une amplitude par conſéquent à pouvoir être ſoutendu par la 360ième partie d'une circonférence.*

LES
ELEMENS D'EUCLIDE,
LIVRE ONZIEME.



DEFINITIONS.

I.

ON nomme *Corps* ou *Solide* ce qui eſt êtendu en Longueur, Largeur & Profondeur.

I I.

Les termes, ou *Extremitez* d'un Solide ſont des Superficies.

I I I.

Une ligne droite (AB) *eſt perpendiculaire à un Plan* (*PL*) (*Fig.* 1.) ſi elle eſt perpendiculaire à toutes les lignes (CD & FE) qu'elle rencontre dans ce Plan. *c. à. d. Que la ligne AB ſera perpendiculaire au Plan PL, ſi elle eſt perpendiculaire aux lignes CD & FE; leſquelles étant tirées dans le Plan PL, paſſent par le point B, de ſorte que les Angles ABC, ABD, ABE & ABF ſoient droits.*

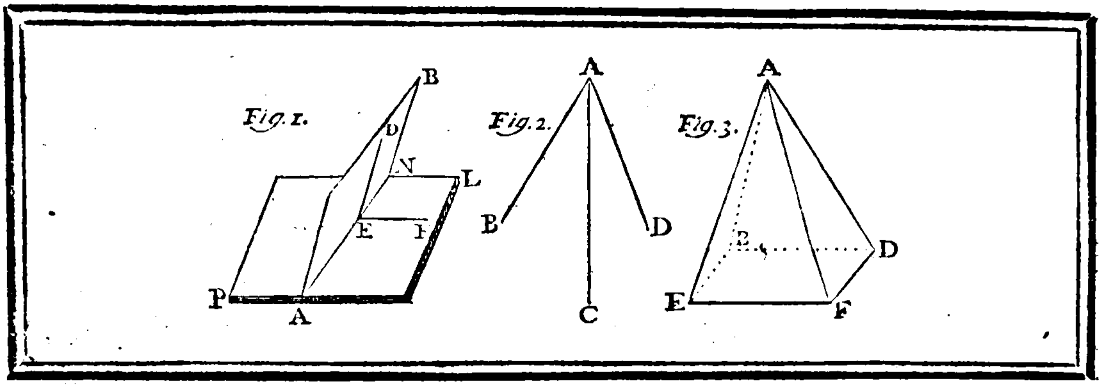
I V.

Un Plan (*AB Fig.* 2.) *eſt perpendiculaire à un autre* (PL), ſi les lignes (DE & FG) menées dans un des Plans (*comme dans AB*) perpendiculairement à la Section commune (AN) des Plans, ſont auſſi perpendiculaires à l'autre Plan (PL).

On nomme Section commune des Plans une ligne qui eſt dans les deux Plans: comme la ligne AN, qui eſt auſſi bien dans le Plan AB que dans le Plan PL. Si donc les lignes DE & FG tirées perpendiculairement ſur AN dans le Plan AB, ſont auſſi perpendiculaires au Plan PL: le Plan AB ſera perpendiculaire au Plan PL.

V.

L'inclinaiſon d'une ligne (*AB*) *à un Plan*, (*Fig.* 3.) eſt l'angle aigu (ABE) compris de la droite (AB) & d'une autre (BE) tirée dans le Plan (PL) du point B, à l'extremité (E) de la perpendiculaire AE abaiſſée du point élevé (A) de la droite (AB) ſur ce Plan PL.



DEFINITIONS.

VI.

UN *Plan* (AB) (*Fig.* 1.) *est incliné à un autre* (PL); lorsque les lignes droites ED & EF tirées dans chacun des Plans (c. a. d. DE dans le Plan AB, & EF dans le Plan PL) d'un même point E, perpendiculairement à leur Section commune AN, forment un angle aigu DEF.

VII.

Les Plans sont semblablement inclinés, lorsque leurs angles d'Inclinaison sont égaux.

VIII.

Les Plans sont Paralleles, lorsqu'étant prolongés à l'infini, de part & d'autre, ils ne se rencontrent jamais.

IX.

Les Solides ou Corps sont semblables; lorsqu'ils sont terminés par un pareil nombre de surfaces, semblables & homologues.

X.

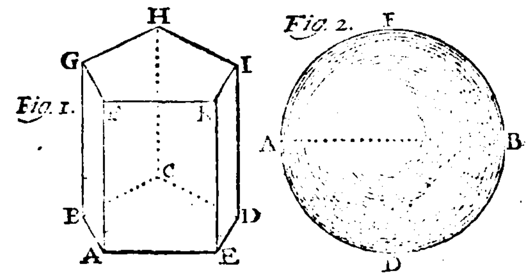
Les Solides sont semblables & égaux; lorsqu'ils sont terminéz par un même nombre de surfaces semblables & égales.

XI.

Un Angle Solide est l'inclinaison de plus de deux lignes droites qui se rencontrent en un point A (*Fig.* 2.) & ne font point dans un même Plan: ou plutôt *un Angle Solide* (A) est un Angle formé par plus de deux Angles plans (BAC, CAD & BAD) qui ont tous le même point (A) pour sommet, & ne sont point dans le même Plan.

XII.

La Pyramide (EBADF) (*Fig.* 3.) est un solide terminé par plus de deux Plans triangulaires (BAD, BAE, &c.) qui ont tous un même sommet (A), & dont les bazes (savoir les lignes EB, BD, &c.) sont dans le même Plan (EBDF).



DEFINITIONS.

XIII.

LE *Prisme* est un solide (AHE) (*Fig.* 1.) dont deux Plans opposéz (savoir GHIKF & BCDA) sont égaux semblables & paralleles; & dont les autres côtés (comme GA, AK, KD &c.) sont des Parallelogrammes. *Si les Plans opposés & paralleles sont des Triangles, le Prisme est nommé triangulaire.* (& ce n'est que de ces Prismes qu'Euclide parle dans le XI. & XII. Livre.) *Si les Plans opposéz sont des Polygones on le nommera un Prisme-Polygone.*

XIV.

La Sphère est un solide (AFBD) (*Fig.* 2.) dont la superficie est décrite par la circonference d'un demi Cercle (AFB) faisant un tour entier sur son Diamètre immobile (AB).

XV.

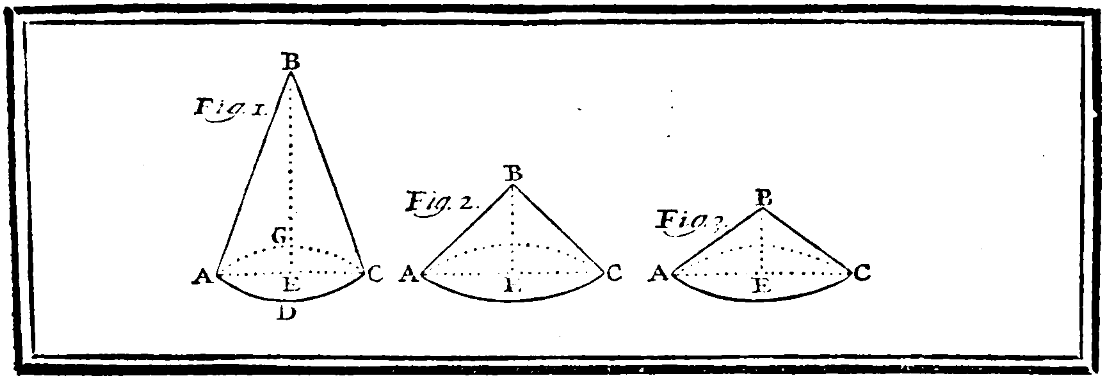
L'Axe de la Sphère est le Diamêtre immobile AB à l'entour duquel le demi Cercle à tourné, lorsqu'il a dècrit la superficie de la Sphère.

XVI.

Le Centre de la Sphère est le même que celui du demi Cercle, qui a décrit sa superficie.

XVII.

On nomme *Diamêtre de la Sphère*, une ligne droite quelconque passant par le centre, & terminée de part & d'autre par la superficie de la Sphère.



DEFINITIONS.

XVIII.

LE *Cone* eſt un ſolide, (ABCD) (*Fig.* 1 2 & 3.) dont les deux ſuperficies ſont décrites par l'Hypothenuſe (AB) & un coté (AE) d'un triangle rectangle (ABE), le côté (BE) demeurant immobile, & le triangle faiſant un tour entier ſur ce coté.

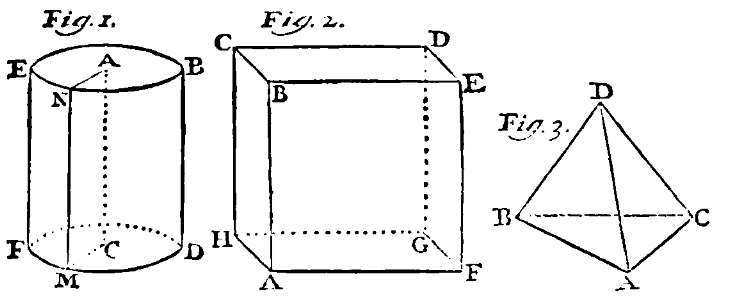
Si le coté immobile (BE) du triangle (ABE) (*Fig.* 2.) eſt égal à l'autre coté (AE) comprenant l'angle droit, le Cone ſera nommé Rectangle; Si BE eſt plus petit que AE (*Fig.* 3.) il ſera Amblygone; & Oxygone ſi BE eſt plus grand que AE (*Fig.* 1.)

XIX.

L'Axe du Cone eſt la ligne immobile (BE) ſur laquelle le triangle ABE a tourné lorſqu'il a décrit la ſuperficie du Cone.

XX.

La baze du Cone eſt le Cercle (AGCD) (*Fig.* 1.) décrit par le côté mobile AE.



DEFINITIONS.

XXI.

LE *Cylindre* eſt un ſolide (EBDF *Fig.* 1.) dont les trois ſuperficies ſont décrites par les trois cotés (AN, NM & MC) d'un Parallelogramme Rectangle (ANMC), le coté (AC) demeurant immobile, & le Parallelogramme faiſant un tour entier ſur ce côté.

XXII.

L'Axe du Cylindre eſt le coté immobile AC, à l'entour duquel le Parallelogramme s'eſt mû, lorſqu'il a décrit les ſuperficies du Cylindre.

XXIII.

Les bazes du Cylindre (ſavoir ENB & FMD) ſont des Cercles décrits par les deux cotés oppoſez (NA, MC) mûs à l'entour des points A & C.

XXIV.

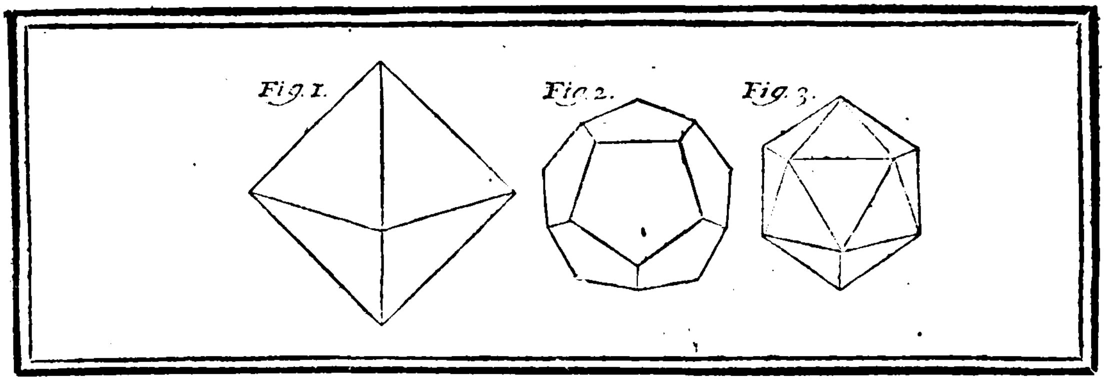
Les Cones & les Cylindres ſemblables, ſont ceux dont les Axes, & les Diamètres de leurs Bazes, ſont proportionels.

XXV.

Le Cube ou Exaëdre (*Fig.* 2.) eſt un ſolide terminé par ſix quarrez égaux.

XXVI.

Le Tètraëdre eſt une Pyramide (BDCA *Fig.* 3.) terminée par quatre triangles équilateraux & égaux (ſavoir les △ BDC, BAD, ADC & BAC).



DEFINITIONS.

XXVII.

L'*Octaëdre* (*Fig.* 1.) eſt un ſolide terminé par huit triangles équilateraux & égaux.

XXVIII.

Le Dodecaëdre (*Fig.* 2.) eſt un ſolide terminé par douze Pentagones équilateraux & égaux.

XXIX.

L'Icoſaëdre (*Fig.* 3.) eſt un ſolide terminé par vingt triangles équilateraux & égaux.

XXX.

Le Parallelipipède eſt un ſolide terminé par ſix Plans quadrilatères, deſquels les oppoſez ſont paralleles.

XXXI.

Un Solide eſt nommé Inſcript dans un Solide, lorſque tous les angles du ſolide inſcript touchent les angles, les cotés, ou les Plans du ſolide dans lequel il eſt inſcript.

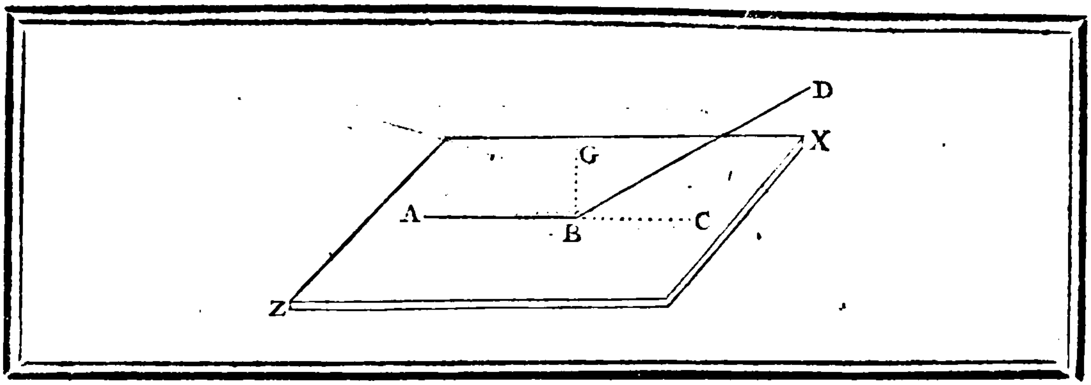
XXXII.

Un Solide eſt nommé Circonſcript autour d'un Solide, lorſque les angles, les côtés ou les Plans du ſolide circonſcript touchent tous les angles du ſolide inſcript.

EXPLICATION DES SIGNES.

∽ - - - - - - Semblable.

 - - - - - - Parallelipipède.



PROPOSITION. I. *THEOREME I.*

SI une partie (AB) d'une ligne droite eſt dans un Plan (ZX); l'autre partie ſera dans le même Plan.

HYPOTHESE.
AB eſt une partie d'une droite ſituée dans le Plan ZX.

THÊSE.
l'Autre partie de la droite (comme BC) ſera dans le même Plan ZX.

DEMONSTRATION.

SI non.
Elle ſera hors du Plan comme eſt BD.

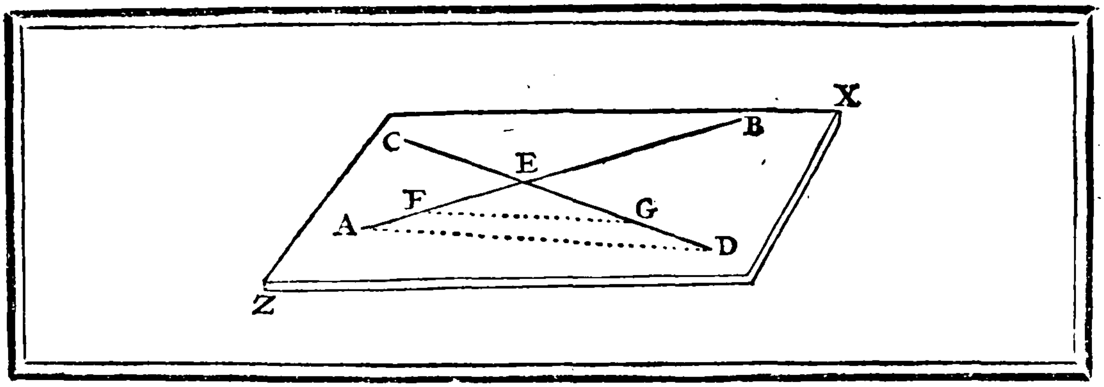
Préparation.

1. SUr AB au point B elevéz dans le Plan ZX la ⊥ GB. Prop. 11. L. 1.
2. Sur BG au même point B dans le Plan ZX elevéz la ⊥ BC.

PUiſque ∀ ABG eſt un ∟, de même que ∀ GBC & qu'ils concourent dans le même point B.

1. Les lignes AB & BC font une même droite AC. Prop. 14. L. 1.
Cependant la ligne BD eſt une partie de la droite ſituée hors du Plan (*Sup.*).
2. Donc les lignes BD & BC ont une partie Commune AB.
3. Ce qui eſt impoſſible.
4. Donc BD ne peut-être une partie d'une droite avec AB (*Arg.* 1)
Et comme la même demonſtration a lieu pour toutes les parties differentes de BC il s'enſuit.
5. Que toutes les parties d'une droite ſont dans le même Plan.

C. Q. F. D.



PROPOSITION II. THEOREME II.

SI deux lignes se coupent en E; elles sont dans le même Plan (ZX) & toutes les parties d'un triangle (EAD) sont dans le même Plan (ZX).

Hypothese.	These.
I. AB, & CD, se coupent en E.	*I. AB, & CD, sont dans le même Plan.*
II. EAD est un △.	*II. tout le △ EAD est dans le Plan ZX.*

Demonstration.

SI non.

Les lignes AB & CD ne sont point dans le même Plan de même qu'une partie du △ EAD. comme AFGD.

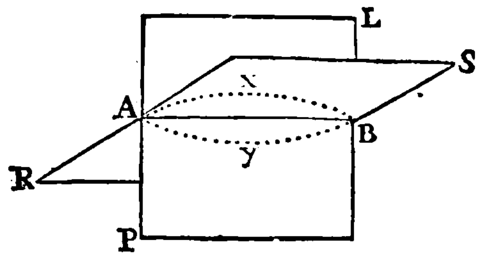
Preparation.

Tirez GF.

PUisque la partie AFGD du △ EAD n'est point dans le même Plan (ZX) avec EFG. (*Sup.*)

1. Il s'ensuit que la partie GD de la ligne CD est dans un Plan different que l'autre partie CG de la même droite; & que la partie AF de la droite AB, est dans un Plan different que son autre partie FB. de même pour AFGD & FEG.
2. Ce qui est impossible. Prop. I. L. II.
3. Les parties des deux lignes & du △ ne pouvant être situées dans des Plans differens.
4. Sont donc dans le même Plan.

C. Q. F. D. I. & II.



PROPOSITION III. *THEOREME III.*

SI deux Plans (RS & PL) s'entre-coupent; leur commune Section sera une ligne droite (AB).

HYPOTHESE.	THESE.
RS & PL sont deux Plans qui s'entre coupent.	*Leur commune Section AB est une seule droite.*

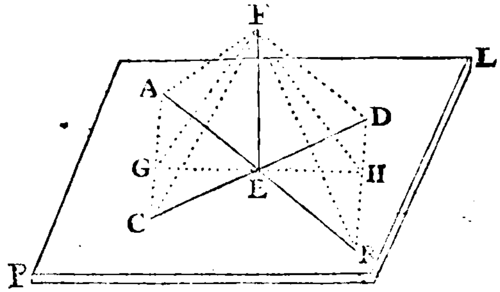
DEMONSTRATION.

SI non.
La Section formera deux droites differentes.
Comme AxB pour le Plan RS; & AyB pour le Plan PL.

PUisque les droites differentes AxB & AyB ont les mêmes extremités A & B.

1. Ces droites AxB & AyB renferment l'espace AxBy.
2. Ce qui est impossible. Ax. 12. L. 1.
3. Partant la Section des Plans PL & RS ne forme point deux droites differentes AxB & AyB.
4. Donc leur Section commune, sera une même droite AB.

C. Q. F. D.



PROPOSITION IV. *THEOREME IV.*

SI deux lignes droites (AB & CD) s'entre-coupent, & qu'au point (E) de leur Section on eleve une perpendiculaire (EF) sur ces lignes (AB & CD): Elle sera aussi perpendiculaire sur le Plan (PL) passant par ces lignes (AB & CD).

HYPOTHESE.

I. AB & CD sont des droites situées dans le Plan PL.
II. Elles s'entre-coupent en E.
III. EF est ⊥ sur ces lignes au point E.

THESE.

EF est ⊥ sur le Plan PL.

Preparation.

1. PRenez EC à volonté, & faites EB, ED & AE chacune égale à EC.
2. Joignez les points A, & C, Item B & D.
3. Tirez par le point E dans le même Plan PL, la droite GH qui sera terminée par les droites AC & BD aux points G & H.
4. Tirez AF, GF, CF, DF, HF & BF.

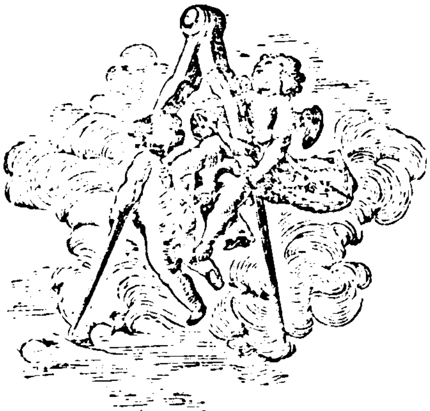
DEMONSTRATION.

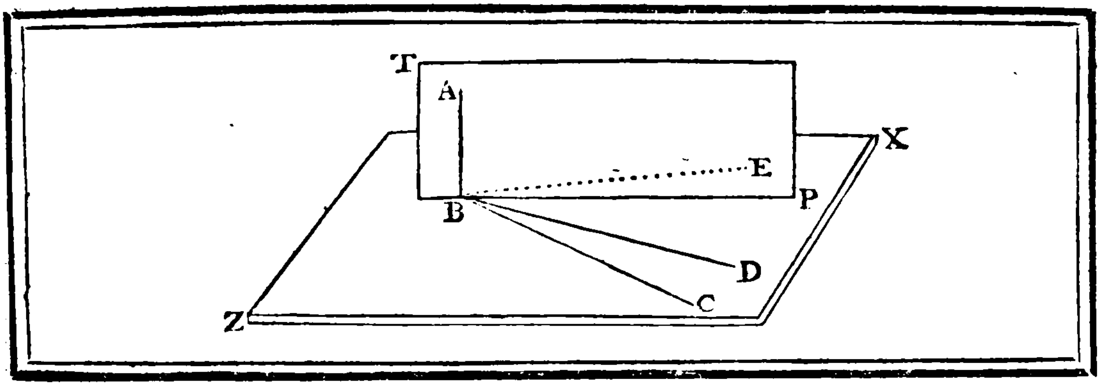
LEs △ AEF, CEF, BEF, & DEF, ont le coté EF commun.
Les cotés AE, CE, BE, & DE égaux. (*Prép.* 1.) & les ∠ contigus AEF, CEF, BEF & DEF égaux. (*Hyp.* 3.)
1. Partant les bazes AF, CF, BF & DF sont égales. Prop. 4. L. 1.
Dans les △ AEC & DEB, les cotés AE, CE, ED & EB sont = (*Prép.* 1.) & les ∠ AEC & DEB aussi égaux. Prop. 15. L. 1.
2. Donc AC = BD }
3. Et ∠ EAC = ∠ EBD } Prop. 4. L. 1.
Les △ GAE & EBH ont ∠ AEG = ∠ HEB. Prop. 15. L. 1.
∠ EAG = ∠ EBH (*Arg.* 3.) & AE = EB. (*Prép.* 1.).

4. Par-

4. Partant les cotés GA & GE font égaux aux cotés HB & EH. Prop. 26. L. 1.
Dans les △ AFC & FDB, les trois cotés AF, FC & AC du premier font égaux aux trois cotés FB, FD & DB du fecond. (*Arg.* 1 & 2.)
5. Donc les trois ∀ du △ AFC font égaux aux trois ∀ du △ FDB chacun a chacun, *c. a. d.* ∀ FAG = ∀ FBH &c. Prop. 8. L. 1.
Les △ GAF & HBF ont les deux cotés AF & AG; = aux deux cotés FB & BH. (*Arg.* 1 & 4.)
De plus ∀ FAG = ∀ FBH. (*Arg.* 5.)
6. Donc GF = FH. Prop. 4. L. 1.
Enfin dans les △ GFE & FEH, les cotés GF, GE & FE font égaux aux cotés FH, EH, & EF. (*Arg.* 4 & 6.)
7. Partant les trois angles du △ GFE font = aux trois angles du △ FEH, chacun a chacun *c. a. d.* ∀ FEG = ∀ FEH, &c. Prop. 8. L. 1.
Or ces angles FEG & FEH font formés par la droite EF tombant fur GH (parce que GE & EH n'eft qu'une même droite *Prép.* 3.)
8. Donc ces angles FEG & FEH font ∟, & FE ⊥ fur GH. {Prop. 13. L. 1. Def. 10. L. 1.}
Mais HG eft dans le même Plan, que les lignes AB & CD. (*Prép.* 3.)
Et EF eft ⊥ fur ces lignes, par (*l'Hyp.* 3.)
9. Partant EF eft ⊥ fur le Plan PL. Def. 3. L. 11.

C. Q. F. D.





PROPOSITION V. THEOREME V.

SI une ligne droite (AB) eſt perpendiculaire ſur trois lignes (BC, BD & BE) qui ſe rencontrent en un point (B); ces trois lignes (BC, BD, & BE) ſeront dans le même Plan (ZX).

HYPOTHESE.
I. BC, BD & BE ſe rencontrent en B.
II. AB eſt ⊥ ſur ces lignes.

THESE.
BC, BD & BE ſont dans le même Plan ZX.

DEMONSTRATION.

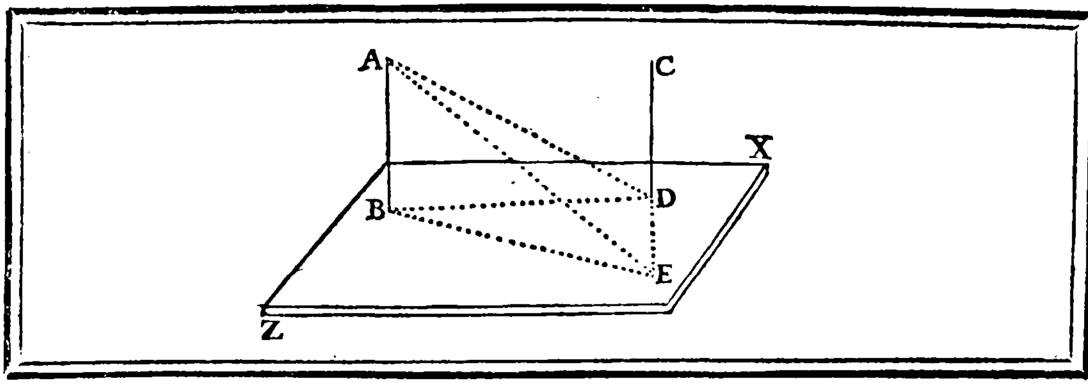
SI non.
Une de ces trois comme BE eſt dans un Plan different.

Préparation.

FAite paſſer le Plan TP par la perpendiculaire AB & par la ligne BE.

PUiſque TP & ZX ſont des Plans differens qui ſe touchent en B.
1. Ils ſe couperont étant prolongés, & leur commune Section ſera la droite BP commune aux deux Plans. Prop. 3. L. 11.
Or AB eſt ⊥ ſur BD & BC. (*Hyp.* 11.).
2. Partant AB ſera auſſi ⊥ ſur le Plan ZX ou ces lignes ſe trouvent. Prop. 4. L. 11.
3. Donc AB eſt ⊥ ſur BP & ∀ ABP un angle ∟ (*Arg.* 1.).
Mais ∀ ABE eſt ∟. (*Hyp.* 11.).
Et BE eſt dans le même Plan avec AB & BP. (*Prép. & Arg.* 1.).
4. Partant ∀ ABE = ∀ ABP *c. a. d.* la partie = au tout.
5. Ce qui eſt impoſſible. Ax. 8. L. 1.
6. Donc BE n'eſt point dans un Plan different que BD & BC.
7. Partant ces trois lignes ſont dans le même Plan ZX.

C. Q. F. D.



PROPOSITION VI. *THEOREME VI.*

SI deux lignes droites (AB & CD) sont perpendiculaires sur un Plan (ZX); Elles sont Paralleles.

HYPOTHESE.	THESE.
AB & CD sont ⊥ sur le Plan ZX.	*AB & CD sont paralleles.*

Préparation.

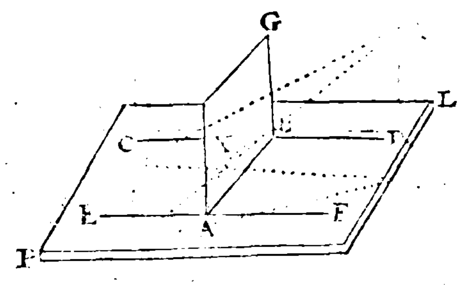
1. JOignez les points B & D dans le Plan ZX.
2. Sur BD au point D dans ce même Plan, élévez la ⊥ DE. Prop. 11. L. 1.
3. Faites DE = AB. Prop. 3. L. 1.
4. Tirez AD, AE & BE.

DEMONSTRATION.

PUisque dans les △ ABD & BDE, le coté DE est = AB (*Prép.* 3.) que BD est commun, & que les ∀ ABD & BDE sont ∟ (*Hyp.*, *Prép.* 2. *&* *Def.* 3. 11.)

1. Le coté AD est = BE. Prop. 4. L. 1.
   Dans les △ ABE & ADE, le coté AE est commun, AB est = DE, & BE = AD (*Prép.* 3. *&* *Arg.* 1.)
2. Partant ∀ ABE est = ∀ ADE. Prop. 8. L. 1.
   Or ∀ ABE est ∟. Def. 3. L. 11.
3. Donc ∀ ADE est aussi ∟. Ax. 1. L. 1.
   Mais ∀ CDE est ∟. Def. 3. L. 11.
4. Partant DE est ⊥ sur CD, DA & DB. (*Hyp. Prép.* 2. *&* *Arg* 3.).
5. Donc ces lignes CD, DA & DB sont dans le même Plan, *c. a. d.* CD est dans le Plan qui passe par DA & DB. Prop. 5. L. 11.
6. De même AB est aussi dans le même Plan qui passe par DA, & DB. Prop. 2. L. 11.
7. Donc AB & CD sont dans le même Plan.
   Or les ∀ interieurs ABD & BDC sont des ∀ droits (*par l'Hyp.*).
8. Par consequent AB est parallele à CD. Prop. 28. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION VII. *THEOREME VII.*

SI l'on joint deux points (A & B) situés dans deux Paralleles (DC & FE) par une droite (AB); Elle sera dans le même Plan (PL) que les Paralleles.

HYPOTHESE.	THÈSE.
I. A & B *sont deux points pris à volonté dans les Paralleles* *E F & C D.*	*A B est dans le même Plan P L que les Plles C D & E F.*
II. A B est la droite qui joint ces points.	

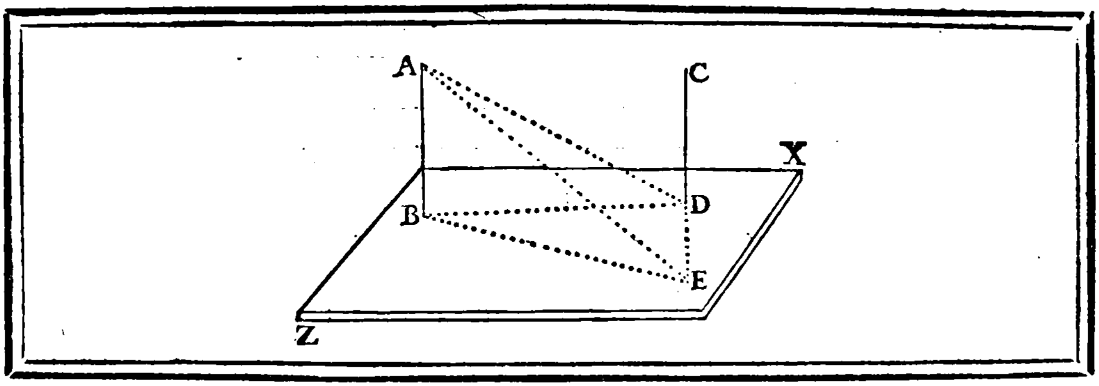
DEMONSTRATION.

SI non.
Elle sera dans un Plan different AG, comme est la ligne AxB.

PUisque AxB est dans le Plan AG, different du Plan PL, & que ses extremités A & B sont dans les lignes CD & EF, situées dans Plan PL.

1. La ligne AxB sera commune aux deux Plans, *c. a. d.* AxB est la commune Section des deux Plans AG & PL. Prop. 3. L. 11.
Mais AB est aussi une droite ayant les mêmes extremités A & B par (*Hyp.* 11.).
2. Partant AB & AxB sont deux droites differentes ayant les mêmes extrêmités.
3. Ce qui est impossible. Ax, 12. L. 1.
4. C'est pourquoi la ligne droite (AB) qui joint les points A & B n'est point dans un Plan AG different de celui ou les Paralleles CD & EF se trouvent.
5. Donc AB est dans le même Plan PL que les Plles CD & EF.

C. Q. F. D.



PROPOSITION VIII. *THEOREME VIII.*

SI deux lignes (AB & CD) font paralleles, & que l'une (comme AB) eſt perpendiculaire ſur un Plan (ZX); l'autre CD ſera auſſi perpendiculaire ſur le même Plan.

HYPOTHESE.	THESE.
I. AB & CD ſont Plles.	*CD eſt ⊥ ſur le même Plan ZX.*
II. AB eſt ⊥ ſur le Plan ZX.	

Préparation.

1. JOignez les points B & D dans le Plan ZX. — Dem. 1. L. 1.
2. Sur BD au point D, dans le Plan ZX, élevéz la ⊥ DE. — Prop. 12. L. 1.
3. Faites DE = AB. — Prop. 3. L. 4.
4. Tiréz AD, AE & BE. — Dem. 1. L. 1.

DEMONSTRATION.

PUiſque BD eſt dans le Plan XZ, & que AB eſt ⊥ ſur ce Plan (*Hyp.* II.)

1. ∠ ABD eſt ∟. — Def. 3. L. 11.
2. Partant ∠ BDC eſt auſſi ∟. — Prop. 29. L. 1.

Or ∠ BDE eſt ∟, DE eſt = AB (*Prép.* 2. & 3.) & BD étant commun aux deux △ ABD & BDE.

3. La baze AD eſt égal à la baze BE. — Prop. 4. L. 1.

Dans les deux △ ADE & ABE, AB eſt = DE (*Prép.* 3.) AD = BE (*Arg.* 3.) & AE commun.

4. Partant ∠ ABE = ∠ ADE. — Prop. 8. L. 1.

Or ∠ ABE eſt ∟. — Def. 3. L. 11.

5. Donc ∠ ADE eſt auſſi ∟. — Ax. 1. L. 1.
6. Partant DE eſt ⊥ ſur BD & AD. (*Prép.* 2. & *Arg.* 5.).
7. C'eſt pourquoi DE eſt auſſi ⊥ ſur le Plan paſſant par ces lignes BD & AD. — Prop. 4. L. 11.

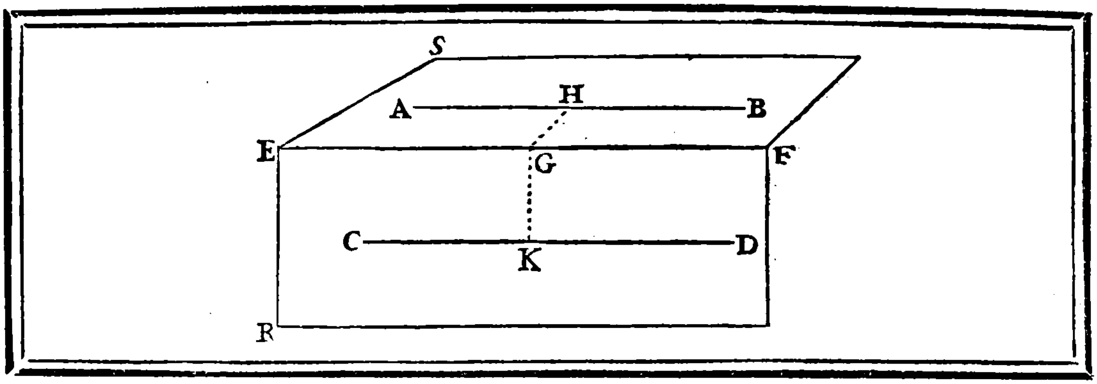
Mais AD joint deux points A & D pris dans AB & CD, qui ſont parallele (*par Hyp.* 1.).

8. Donc CD eſt dans le même Plan avec AB & AD. — Prop. 7. L. 11.
9. Partant DE eſt ⊥ ſur DC, ou DC ⊥ ſur DE. — Def. 3. L. 11.

Puis donc que CD eſt ⊥ ſur DB & ED. (*Arg.* 2. & 9.)

10. CD ſera auſſi ⊥ ſur le Plan paſſant par ces lignes (*c. a. d.*) ſur le Plan ZX. — Prop. 4. L. 11.

C. Q. F. D.



PROPOSITION IX. *THEOREME IX.*

LEs lignes (AB & CD) qui font paralleles à une même ligne (EF) quoique fituées dans les Plans differents (SF & RF); font paralleles entr'elles.

Hypothese.	These.
I. AB eft dans le Plan SF, & CD dans le Plan RF.	*AB eft Plle CD.*
II. AB & CD font chacun Plle EF.	

Préparation.

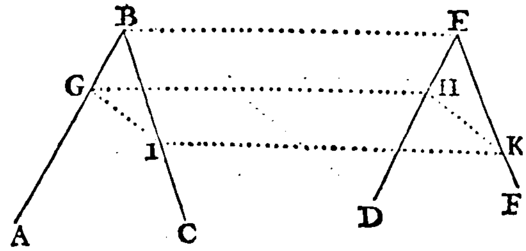
1. D'Un point H de la ligne AB dans le Plan FS abaiffez une ⊥ HG fur EF. Prop. 11. L. 1:
2. Du Point G dans le Plan RF abaiffez la ⊥ GK fur CD.

Demonstration.

PUifque EG ou EF eft ⊥ fur GH & GK (*Prép.* 1. & 2.)

1. EG fera ⊥ fur le Plan qui paffe par ces lignes. Prop. 4. L. 11.
   Or AB eft Plle EF (*Hyp.* 2.)
2. Donc AB eft ⊥ fur le Plan qui paffe par ces lignes HG & GK. Prop. 8. L. 11.
3. De la même manière CD eft auffi ⊥ fur ce même Plan.
   Les lignes AB & CD étant donc ⊥ fur un même Plan. (*Arg.* 2 & 3.).
4. Elles font paralleles entr'elles. Prop. 6. L. 11.

C. Q. F. D.



PROPOSITION X. *THEOREME X.*

SI deux lignes droites (AB & BC) qui se touchent (en B), sont paralleles à deux autres lignes (DE & EF) situées dans un autre Plan, & qui se touchent en E; Elles formeront des angles égaux. (ABC & DEF.).

HYPOTHESE.	THESE.
AB & CD se touchent en B, dans un Plan different de celui où DE & EF sont, qui se touchent aussi en E.	∀ *ABC est* = ∀ *DEF.*

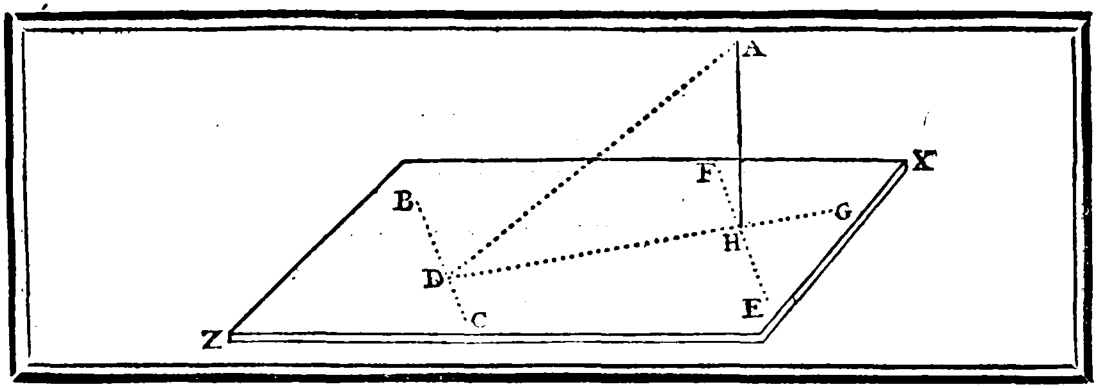
Préparation.

1. COupéz à volonté des droites AB & BC, les parties BG & BI,
2. Faites HE = BG, & EK = BI. — Prop. 3. L. 1.
3. Joignez les points BE, GH, GI, HK & IK. — Dem. 1. L. 1.

DEMONSTRATION.

LA ligne BG étant égale & parallele à HE (*Prép.* 2. & *Hyp.*).
1. GH sera = & Plle à BE. — Prop. 33. L. 1.
2. De la même manière IK est = & Plle à BE.
3. Partant GH est = & Plle à IK. - - - - — {Prop. 9. L. 11. Ax. 1. L. 1.
4. Donc GI est = & Plle à KH. — Prop. 33. L. 1.
Et puisque dans les △ GBI & HEK les trois cotés BG, BI, & GI du premier, sont égaux aux trois cotés HE, EK & HK du dernier, chacun à chacun (*Prép.* 2. & *Arg.* 4.).
5. l'Angle GBI ou ABC est = ∀ HEK ou DEF. — Prop. 8. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XI. *PROBLEME I.*

D'Un point donné (A) hors d'un Plan (ZX), abaisser une perpendiculaire (AH) à ce Plan.

DONNEES.	CHERCHEES.
I. Le Plan ZX.	*La droite AH abaissez du*
II. Un point A hors de ce Plan.	*point A, ⊥ sur le Plan ZX.*

Resolution.

1. DAns le Plan ZX tiréz à volonté la droite BC.
2. Du point A abaissez sur BC la ⊥ AD. Prop. 12. L. 1.
3. Au point D dans le Plan ZX élevéz la ⊥ DG sur BC. Prop. 11. L. 1.
4. Du point A abaissez sur DG la ⊥ AH. Prop. 12. L. 1.

Préparation.

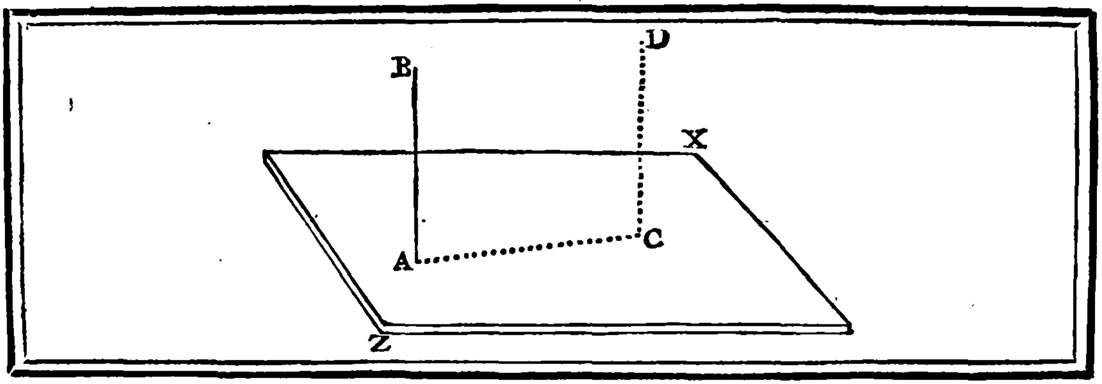
TIréz par le point H la droite FE parallele à BC. Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

PUisque la droite BC est ⊥ sur DA & DG (*Ref.* 2. & 3.).

1. Elle sera ⊥ sur le Plan qui passe par ces lignes. Prop. 4. L. 11.
   Mais FE est Plle à BC. (*Prép.*).
2. Donc FE est aussi ⊥ sur ce même Plan qui passe par DG & DA. Prop. 8. L. 11.
   Or AH est dans le même Plan que DA & DG (*Prop.* 2. *L.* 11.) & touche FE en H. (*Ref.* 4. & *Prép.*).
3. Donc ∠ FHA est ∟. Def. 3. L. 11.
   Et d'autant que ∠ AHD est un ∟. (*Ref.* 4.).
4. AH est ⊥ sur deux lignes FE & DG situées dans le Plan ZX & qui se coupent en H.
5. Donc AH est ⊥ sur le Plan ZX. Prop. 4. L. 11.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XII. *PROBLEME II.*

D'Un point donné (A) dans un Plan (XZ), élever une perpendiculaire BA.

Donnees.	Cherchee.
Un point A dans le Plan XZ.	*La droite BA élevée du point A ⊥ sur le Plan XZ.*

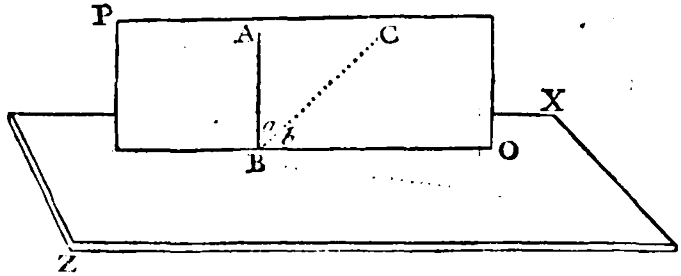
Resolution.

1. PRenez à volonté un point D hors du Plan XZ.
2. De ce point D, decendéz la ⊥ DC sur ce Plan. Prop. 11. L. 11.
3. Joignez les points A & C. Dem. 1. L. 1.
4. Du point A tiréz AB Plle à DC. Prop. 31. L. 1.

Demonstration.

PUisque la ligne AB est Plle à DC (*Ref.* 4.)
& que DC est ⊥ sur le Plan XZ. (*Ref.* 2.).
1. AB sera aussi ⊥ sur le même Plan XZ. Prop. 8. L. 11.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XIII. *THEOREME XI.*

D'Un point (B) dans un Plan (ZX) on ne peut tirer du même coté qu'une ſeule perpendiculaire (AB).

HYPOTHESE.	THESE.
AB eſt ⊥ au point B, ſur le Plan XZ.	*Il eſt impoſſible de tirer du point B une autre ⊥ ſur le Plan XZ du même coté que AB.*

DEMONSTRATION.

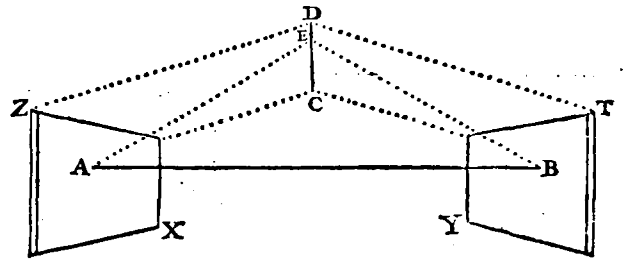
SI *non.*
On peut élever du point B encore une ⊥.

Préparation.

DU point B élevéz une ⊥ BC different de AB.

PUiſque les lignes AB & BC ſe touchent au point B,
1. Ils ſont dans le même Plan PO. — Prop. 2. L. 11.
Or ils ſont chacun ⊥ ſur le Plan XZ. (*Sup.*).
2. Partant les ∀ $a + b$, & b ſont chacun ∟. — Def. 10. L. 1.
3. Donc ∀ $a + b =$ ∀ b, c. a. d. le tout égal à la partie.
4. Ce qui eſt impoſſible. — Ax. 8. L. 1.
Mais AB eſt ⊥ ſur le Plan XZ. (*Hyp.*)
5. Donc BC n'eſt point ⊥ ſur XZ.
6. Partant il eſt impoſſible de mèner une autre ligne du côté de AB & du point B qui ſoit ⊥ ſur le Plan XZ.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XIV. *THEOREME XII.*

LEs Plans (XZ & TY) ſur leſquels une même ligne (AB) eſt perpendiculaire; ſont paralleles.

HYPOTHESE.	THESE.
AB eſt ⊥ *ſur les Plans* XZ *&* *TY.*	*Le Plan* XZ *eſt Plle au Plan* TY.

DEMONSTRATION.

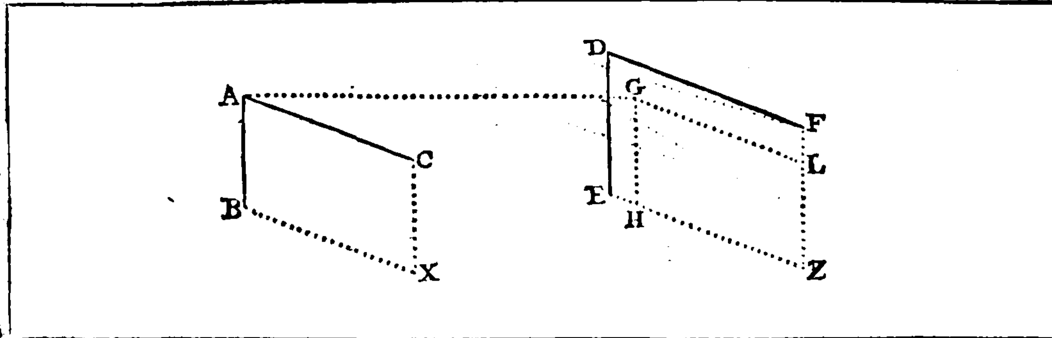
SI non.
Les Plans XZ & TY, prolongez ſe couperont quelque part. Def. 8. L. II.

Préparation.

1. PRolongéz les Plans XZ & TY juſqu'à ce qu'ils ſe coupent en DC.
2. Prenez un point E dans la ligne de ſection DC.
3. Tiréz EA & EB.

PUiſque AB eſt ⊥ ſur le Plan TY, (*Hyp.*)
& que EB eſt dans ce Plan (*Prép.* 3.)
1. ∀ ABE eſt un ∟. Def. 3. L. II.
2. De même ∀ BAE eſt ∟.
3. Partant le △ BAE à deux ∀ droits.
4. Ce qui eſt impoſſible. Prop. 17. L. I.
5. D'où il ſuit que les lignes AE & EB ne ſe rencontrent point non plus que les Plans TY & XZ. Prop. I. L. II.
6. Donc ces Plans TY & XZ, ſont paralleles. Def. 8. L. II.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XV. *THEOREME XIII.*

SI deux lignes (AB & AC) ſituées dans un Plan (AX) & s'entre touchant (en A) ſont paralleles, à deux autres lignes (DE & DF), s'entre touchant & ſituées dans un autre Plan (DZ); ces Plans (AX & DZ) ſeront paralleles.

Hypothese.
AB & AC ſituées dans le Plan AX & qui ſe touchent en A, ſont paralleles à DE & EF qui ſe touchent en D, & qui ſont ſituées dans le Plan DZ.

These.
Le Plan AX dans lequel les lignes AB & AC ſe trouvent eſt paralléle au Plan DZ ou les lignes DE & DF ſe trouvent.

Préparation.

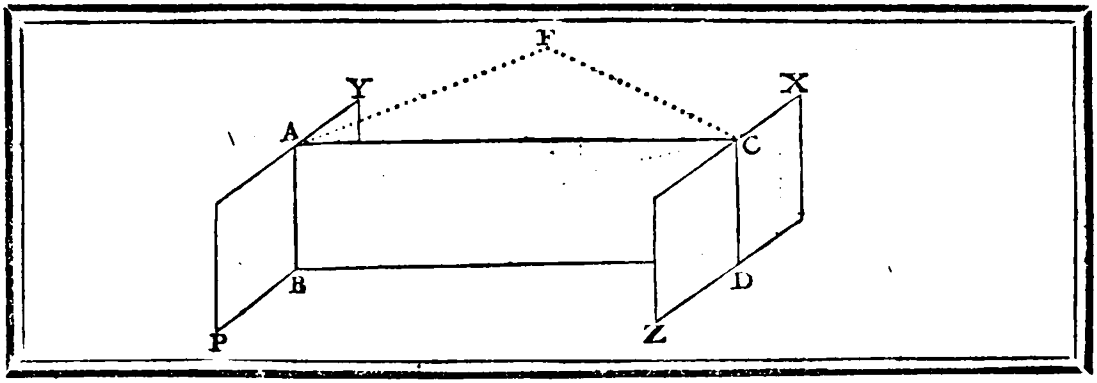
1. DU point A abaiſſez la ⊥ AG ſur le Plan DZ. — Prop. 11. L. 11.
2. Tirez GH Plle à DE, & GL Plle à DF. — Prop. 31. L. 1.

Demonstration.

PUiſque les lignes GH & GL ſont Plle à DE & DF. (*Prép.* 2.).

1. Ils ſeront auſſi Plle à AB & AC. — Prop. 9. L. 11.
   Et GL étant Plle à AC.
2. Les ∀ CAG + AGL ſont = 2 L. — Prop. 29. L. 1.
   Mais ∀ AGL eſt L. (*Prép.* 1.).
3. Partant ∀ CAG eſt auſſi L.
4. De la même manière on demontrera que ∀ BAG eſt L.
5. Donc GA eſt ⊥ ſur le Plan AX. — Prop. 4. L. 11.
   Or le même GA eſt auſſi ⊥ ſur le Plan DZ. (*Prép.* 1.).
6. C'eſt pourquoi le Plan AX eſt Plle au Plan DZ. — Prop. 14. L. 11.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XVI. *THEOREME XIV.*

SI deux Plans paralleles (ZX & YP) font coupez par un autre Plan, (ABDC) les lignes de commune Section (CD & AB) feront paralleles.

HYPOTHESE.	THÈSE.
I. Les Plans ZX & PY font Plle	*Les lignes de commune Section*
II. Ils font coupez par le Plan ABCD.	*CD & AB font Plle.*

DEMONSTRATION.

SI nõn.
Les lignes AB & CD étant prolongées doivent fe couper quelque part.

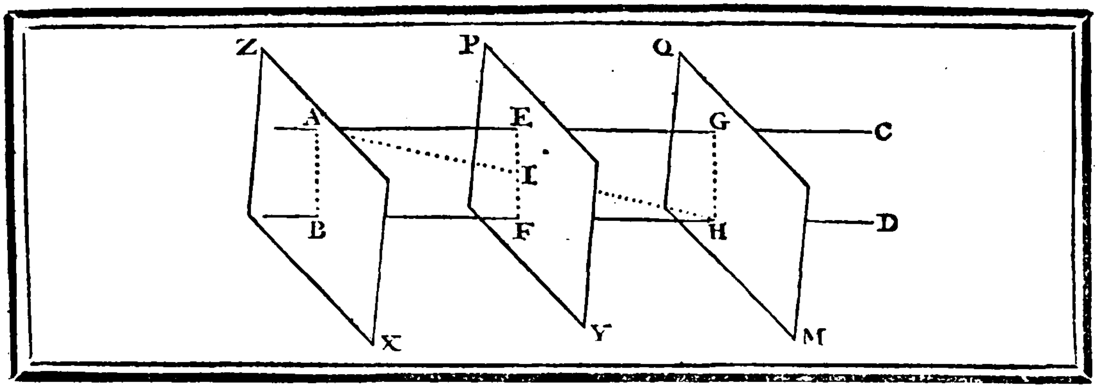
Preparation.

PRolongez les donc jufqu'à ce qu'elles fe coupent en F. Dem. 2. L. 1.

PUifque les droites BAF & DCF, fe rencontrent en F.

1. Les Plans PY & ZX, dans lefquels ces lignes fe trouvent, fe renconcontreront auffi: (Puifque BAF eft entierement dans le Plan PY, & DCF entièrement dans le Plan ZX). Prop. 1. L. 11.
2. Ce qui eft impoffible. (*Hyp.* 1.)
3. Partant AB & CD ne fe rencontrent point.
4. Donc AB & CD font paralleles. Def. 35. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XVII. *THEOREME. XV.*

SI deux lignes droites (AC & BD) font coupées par des Plans paralleles (XZ, PY & QM): Elles feront coupées proportionellement. (c. a. d., que AE: EF = BF: FH &c.).

Hypothese.
I. AC & BD font deux droites.
II. Coupees par les Plans Plle XZ; PY & QM.

These.
AE : EG = BF : FH.

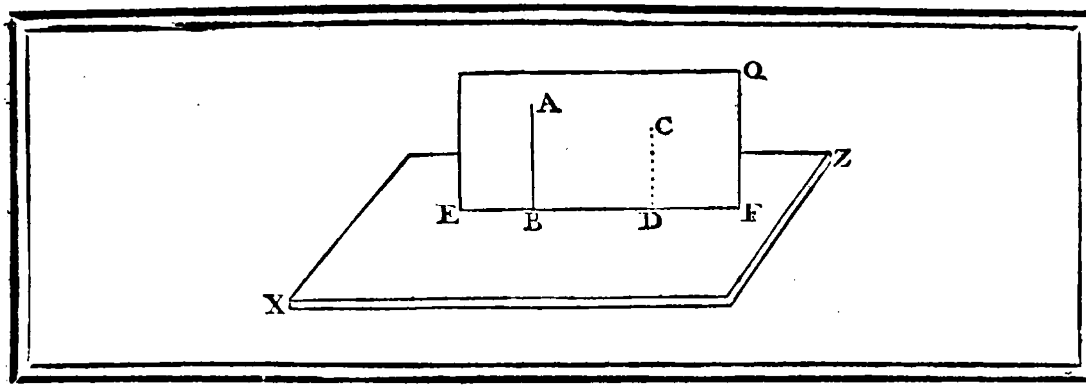
Préparation.

1. JOignez les points A & B, Item G & H
2. Tirez AH qui paffera par le point I, au travers du Plan PY. } Dem. 1: L: 1:
3. Tirez EI & IF.

Demonstration.

PUifque les Plans Plles ZX & PY font coupés par le Plan du △ ABH.
1. AB eft Plle à IF. Prop. 16. L. 11.
2. De la même manière EI eft Plle à GH.
3. Partant AI : IH = BF : FH
4. Et AI : IH = AE : EG } Prop. 2. L. 6.
5. Donc AE : EG = BF : FH. Prop. 11. L. 5.

C. Q. F. D.



PROPOSITION. XVIII. *THEOREME XVI.*

SI une droite (AB) eſt perpendiculaire à un Plan (ZX): Tous les Plans (comme QE) qui paſſent par cette ligne (AB) ſeront perpendiculaire ſur le même Plan (ZX).

Hypothese.	These.
AB eſt ⊥ *ſur le Plan* ZX.	*Tous les Plans* (comme QE), *paſſant par la* ⊥ *AB. ſont* ⊥ *ſur le Plan* ZX.

Préparation.

1. FAites paſſer le Plan QE, par la ligne AB, qui coupera le Plan ZX en EF. Prop. 3. L. 1.
2. Prenez dans cette droite EF, un point D, à volonté.
3. De ce point D, tiréz dans le Plan QE, la ligne DC Plle à AB. Prop. 31. L. 1.

Demonstration.

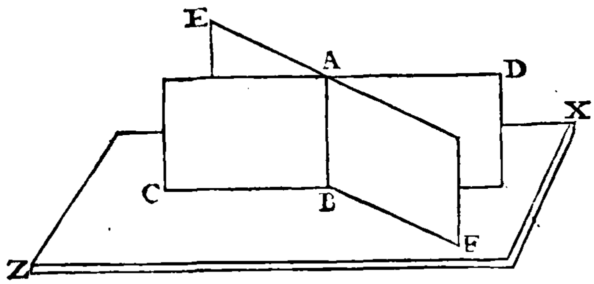
PUiſque la droite AB eſt ⊥ ſur le Plan ZX, & que DC eſt Plle à AB. (*Hyp. & Prép.* 3.).

1. Le ligne DC eſt ⊥ ſur le Plan ZX. Prop. 8. L. 11.
2. Partant CD eſt auſſi ⊥ ſur la ligne de ſection commune EF. Def. 3. L. 11.
3. Donc le Plan EQ dans lequel les lignes AB & CD ſe trouvent, eſt ⊥ ſur le Plan SX. Def. 4. L. 11.

& comme la même Demonſtration à lieu pour tout autre Plan paſſant par la ⊥ AB. On peut conclure.

4. Que tous les Plans paſſant par cette ligne ſont perpendiculaire ſur le Plan ZX.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XIX. *THEOREME XVII.*

SI deux Plans (CD & EF) qui insistent perpendiculairement sur un Plan (ZX) s'entre-coupent; la ligne de commune Section (AB) sera aussi perpendiculaire sur le même Plan (ZX).

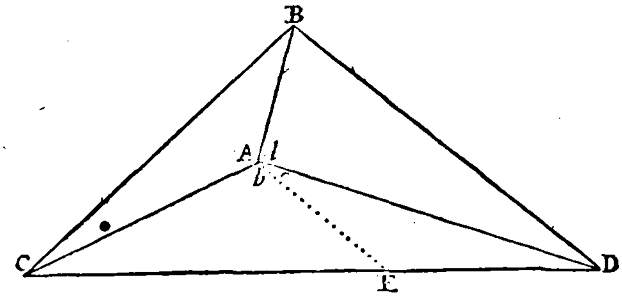
Hypothese.	These.
I. Les Plans CD & EF sont ⊥ sur le Plan ZX. *II. Ils s'entre-coupent en AB.*	*La commune Section AB est ⊥ sur le Plan ZX.*

Demonstration.

PUisque CB, section commune du Plan CD avec le Plan XZ, est aussi dans le Plan ZX. Prop. 3. L. 11.

1. On peut élever du point B une ⊥, sur CB (*Par le 11e Prop. de ce Livre*) qui sera dans le Plan CD. (*Hyp.* 1.) Prop. 18. L. 11.
Et comme la ligne FB section commune des Plans FE & XZ, est aussi dans le Plan XZ. Prop. 3. L. 11.
2. On peut aussi du même point B & du même coté que la précedente élever encore une ⊥ qui tombera dans le Plan FE. Prop. 18. L. 11.
Mais du point B on ne peut élever qu'une ⊥. Prop. 13. L. 11.
3. Partant ces perpendiculaires doivent coïncider; c'est-à-dire, que ces deux lignes ne doivent faire qu'une seule qui soit commune aux deux Plans.
Or ces Plans n'ont de commun que la ligne AB. (*Hyp.* 2.).
4. Donc AB est perpendiculaire sur le Plan XZ.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XX. *THEOREME XVIII.*

SI trois angles-plans (CAB, BAD & DAC) forment un angle solide A: deux de ces angles (comme BAD & CAB) pris comme l'on voudra feront plus grand que le troisiéme (CAD).

Hypothese.
Les trois $\angle$ plans CAB, d, & c+b forment $\angle$ solide A.

These.
$\angle$ CAB + d $>$ $\angle$ b+c

Demonstration.

CAS I.

Lorsque les trois angles CAB, *d*, & *c* + *b* sont égaux.

PUisque les $\angle$ CAB, *d* & *c* + *b* sont égaux.
1. Il s'ensuit que $\angle$ CAB + *d* feront $>$ $\angle$ *c* + *b*. Ax. 4. L 1.

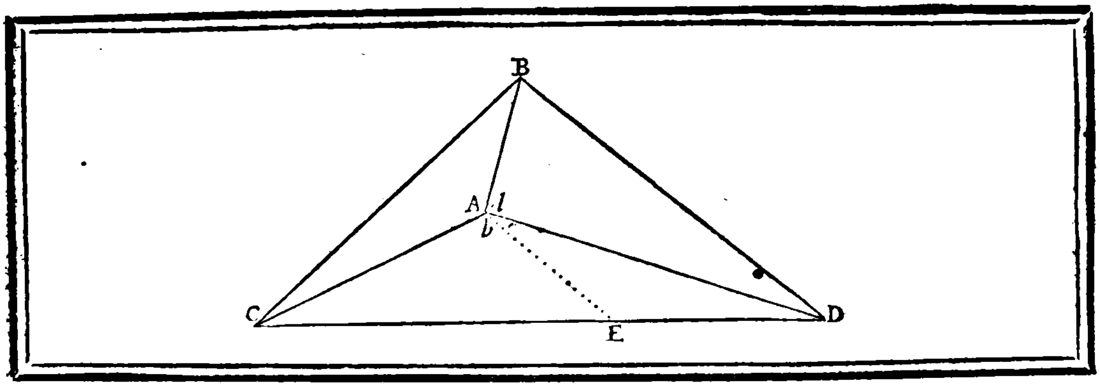
C. Q. F. D.

CAS II.

Lorsque des trois angles CAB, *d* & *c* + *b*, deux comme CAB & *d* sont égaux, & que le troisiéme *c* + *b* est plus petit que chacun d'eux.

PUisque $\angle$ CAB est $>$ que $\angle$ *c* + *b*.
1. $\angle$ CAB + $\angle$ *d* feront beaucoup $>$ $\angle$ *c* + *b* Ax. 4. L. 1.

C. Q. F. D.



CAS III.

Lorſque les trois angles ſont inégaux, & que $b + c$ eſt > que CAB ou d.

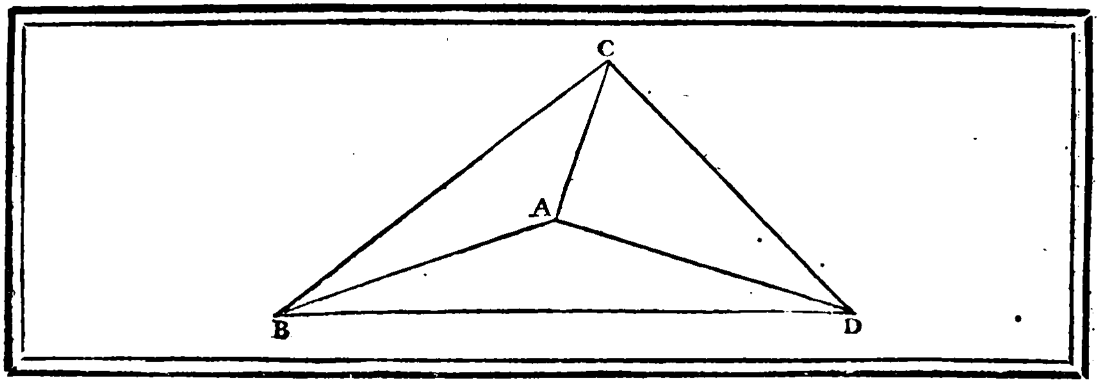
Préparation.

1. AVec AC au point A faites ∀ b = ∀ CAB dans le Plan CAD. Prop. 23. L. 1.
2. Faites AE = AB. Prop. 3. L. 1.
3. Du point C par E tirez la droite CED } Dem. 1. L. 1.
4. Des points C & D tirez CB & BD.

LEs △ BCA & CAE ont les cotés AB & AE égaux. (*Prép.* 2.)
Le coté CA commun, & ∀ b = ∀ CAB (*Prép.* 1.).
1. Partant le coté BC eſt = au coté CE. Prop. 4. L. 1.
Or dans le △ CBD * les cotés CB + BD ſont > CD. Prop. 20. L. 1.
Si donc on retranche de CB + BD la partie CB, & de CD, la partie égale à CE.
2. Le reſte ſavoir BD, ſera > ED. Ax. 5. L. 1.
Dans les △ BAD & EAD, les cotés AB & AE ſont égaux, (*Prép.* 2.) & AD commun.
Mais la baze BD > que la baze ED. (*Arg.* 2.).
3. Donc ∀ d eſt > ∀ c. Prop. 25. L. 1.
Si donc on ajoute d'un coté ∀ CAB, & de l'autre ſon égal b.
4. ∀ CAB + d feront > ∀ $b + c$ ou CAD. Ax. 4. L. 1.

C. Q. F. D.

* *Il eſt aiſé à démontrer que les lignes CB, CD, & BD, ſont dans le même Plan CBD par la Prop. 2. L. 11. & par conſequent qu'elles forment un △ CBD.*



PROPOSITION XXI. *THEOREME XIX.*

Tous les angles-plan (BAC, CAD & DAB) qui forment un angle solide (A): sont moindre qne quatres angles droits.

HYPOTHESE.	THESE.
Les ∀ BAC, CAD & DAB forment ∀ solide A.	*Les ∀ plan BAC + CAD + DAB sont* < 4 ∟

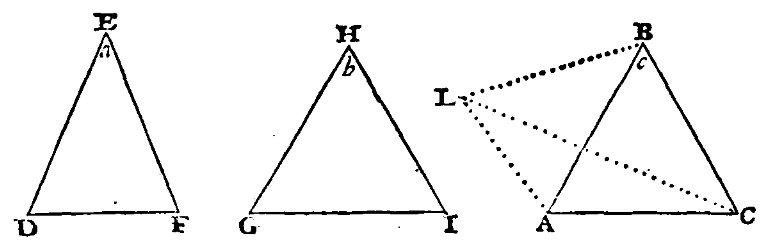
Préparation.

1. Sur les cotés BA, AC, & AD prenez les trois points B, C & D.
2. Tirez BC, BD & CD. Dem. 1. L. 1.
3. Faites passer par ces lignes un Plan BCD, qui formera avec les Plans BAC, CAD & BAD, trois ∀ solides; Savoir ∀ solide B; formé par les ∀ plan CBA, ABD & CBD. ∀ solide C; formé par les ∀ plan BCA, ACD & BCD; & enfin ∀ solide D; formé par les ∀ plan CDA, ADB & BDC. Def. 11. L. 11.

DEMONSTRATION.

Puisque ∀ solide D, est formé par les ∀ plan CDA, ADB & BDC,
1. Les ∀ CDA + ADB sont > ∀ BDC. Prop. 20. L. 11.
2. De la même manière ∀ ABD + ABC sont > ∀ DBC } Prop. 20. L. 11.
3. Et ∀ ACB + ACD > ∀ BCD.
4. Partant les six ∀ plan CDA + ADB + ABD + ABC + ACB + ACD sont > que les trois ∀ plan BDC + DBC + BCD. Or ces trois ∀ plan BDC + DBC + BCD sont = 2. ∟. Prop. 32. L. 1.
5. Donc les six ∀ plan CDA + ADB + ABD + &c. sont > 2 ∟. (*Arg.* 4.). Mais les neuf ∀ des △ BCA, CAD & DAB savoir les six mentionez (*Arg.* 5.). & les trois ∀ restans BAC, CAD & DAB sont ensemble égaux six ∟. Prop. 32 L. 1. Si donc on en retranche les six ∀ nommez CDA + ADB + ABD + ABC + ACB + ACD qui sont ensemble > 2 ∟. (*Arg.* 5.).
6. Le reste savoir les ∀ plan BAC + CAD + DAB seront < quatre ∟. Mais ces ∀ plan BAC, CAD, & DAB forment ∀ solide A.
7. Partant les ∀ plan formant ∀ solide A sont moindre que quatres droits.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXII. *THEOREME XX.*

S'Il y a trois angles-plan, deux desquels pris comme l'on voudra soyent plus grand que le troisiéme, & que les cotés qui comprennent ces angles soyent des droites égales. Il sera possible de construire un triangle des trois lignes (DF, GI, & AC,) qui soutiennent ces angles.

HYPOTHESE.

I. Des trois ∀ donnéz a, b, & c, deux quelconques sont > que le troisieme, comme b + a > c, ou a + c > b, ou b + c > a.
II. Les cotés HG, HI, DE, EF, AB & BC qui comprennent ces ∀, sont égaux.

THESE.

Des droites GI, DF & AC qui soutiennent les ∀, on peut construire un △.

DEMONSTRATION.

LEs trois angles donnez, *a*, *b* & *c* font ou égaux, ou inégaux.

CAS I. Si les ∀ *a*, *b* & *c* sont égaux.

PUisque les cotés qui comprennent les angles, sont égaux. (*Hyp.* 2.).
1. Les △ DEF, GHI & ABC sont égaux. Prop. 4 L. I.
2. Donc DF = GI = AC.
3. Partant DF + AC > GI. Ax. 4. L. I.
4. Donc on peut construire un △ de ces trois lignes DF, AC & GI. Prop. 22. L. I.

C. Q. F. D.

CAS II. Si les angles donnez *a*, *b*, & *c* sont inégaux.

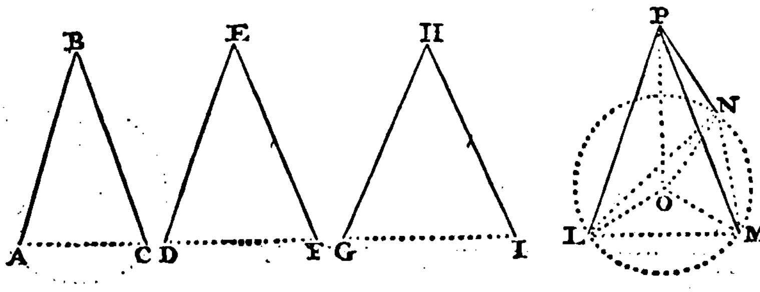
Préparation.

1. AU sommet d'un des ∀ comme en B, faites ∀ ABL = ∀ *a*. Prop. 23. L. I.
2. Faites BL = DE. Prop. 3. L. I.
3. Tirez LC & LA Dem. I. L. I.

DEMONSTRATION.

PUisque les deux angles *a* + *c* sont > *b* (*Hyp.* 1.) & que LB = HG = BC = HI. (*Prép.* 2. & *Hyp.* 2.).
1. La baze LC sera > GI. Prop. 24. L. I.
Or LC < LA + AC. Prop. 20. L. I.
2. Donc a plus forte raison GI < LA + AC.
Mais LA = DF. (*Prép.* 1. & *Prop.* 4. *L.* 1.)
3. Donc GI < DF + AC. Ax. 1. L. I.
4. Partant on peut construire un △ des trois lignes DF, AC & GI.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXIII. *PROBLEME III.*

ETant donnés trois angles-plan (ABC, DEF & GHI) deux desquels pris comme l'on voudra soyent toujours plus grand que le troisieme, & dont la somme (∀ ABC, + ∀ DEF + ∀ GHI) est moindre que quatre angles droits: en faire un angle solide (P).

DONNEES.

I. Trois ∀ ABC, DEF & GHI, deux desquels pris comme l'on voudra sont toujours plus grand que le troisieme, comme ∀ B + E > H, B + H > E, & E + H > B.

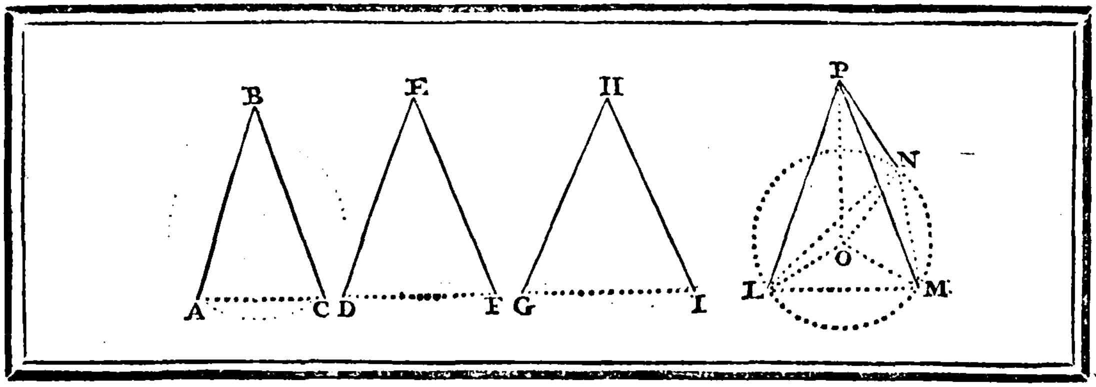
II. ∀ B + E + H < quatres ∟.

CHERCHEE.

Des trois ∀ B, E & H faire un ∀ solide P.

Resolution.

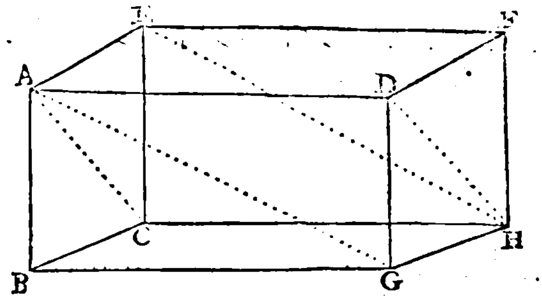
1. PRenez AB à volonté, & faites les cotés BC, DE, EF, GH & HI égaux entr'eux & à AB. Prop. 3. L. 1.
2. Tiréz les bazes AC. DF, & GI. Dem. 1. L. 1.
3. De ces trois bazes AC, DF, & GI faites un △ LMN de façon que NM soit = GI, NL = AC, & LM = DF. {Prop. 22. L. 1. Prop. 22. L. 11.}
4. Inscrivez le △ LMN dans un Cercle LMN. Prop. 5. L. 4.
5. Du centre O, aux ∀ L, M & N, tiréz les droites LO, ON & OM.
6. Du point O, élevéz la ⊥ OP, sur le Plan du cercle LMN. Prop. 12. L. 11.
7. Coupéz OP de façon que le quarré sur le rayon LO, plus le quarré sur PO soyent égaux au quarré sur AB.
8. Tiréz les droites LP, PN & PM.



DEMONSTRATION.

PUisque P O est ⊥ sur le Plan du ⊙ L M N. (*Ref.* 6.).
1. Le △ P O L sera Rectangle en O, (*Ref.* 5. & 8.).
2. Partant le □ sur P O + le □ sur O L est = au □ sur L P. — Prop. 47. L. 1.
Mais ces quarrez sur P O & L O sont = □ A B. (*Ref.* 7.). — Ax. 1.
3. Donc □ A B est = au □ L P & A B = L P. — Prop. 46. L. 1.
4. De la même manière P N & P M sont chacun = à A B. — Corol. 3.
Or N M est à = G I, N L = A C, & L M = D F. (*Ref.* 3.)
5. Partant △ N M P est = au △ G H I, △ N P L = △ A B C, △ L P M = △ D E F. ∀ N P M = H, ∀ L P N = B, & ∀ L P M = ∀ E. — Prop. 8. L. 1.
Mais ces trois ∀ N P M, L P N & L P M forment ∀ solide P.
6. Donc on a construit un ∀ solide P, des trois donnés B, E & H.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XXIV. *THEOREME XXI.*

DAns tout Paralelipipéde (AH): Les Plans oppofés (BD & CF, Item BE & FG, Item AF & BH) font des paralelogrammes femblables & égaux, chacun à chacun; (c. a. d. le Pgr. AG eft égal & femblable au Pgr. EH &c.).

HYPOTHESE.	THESE.
Dans le ⊟ donné BF le Plan BD eft oppofé à CF. BE à FG & AF a BH.	*Les plans oppofés BD, CF, Item BE & FG, Item AF & BH font des Pgr. égaux & ∽ chacun à chacun.*

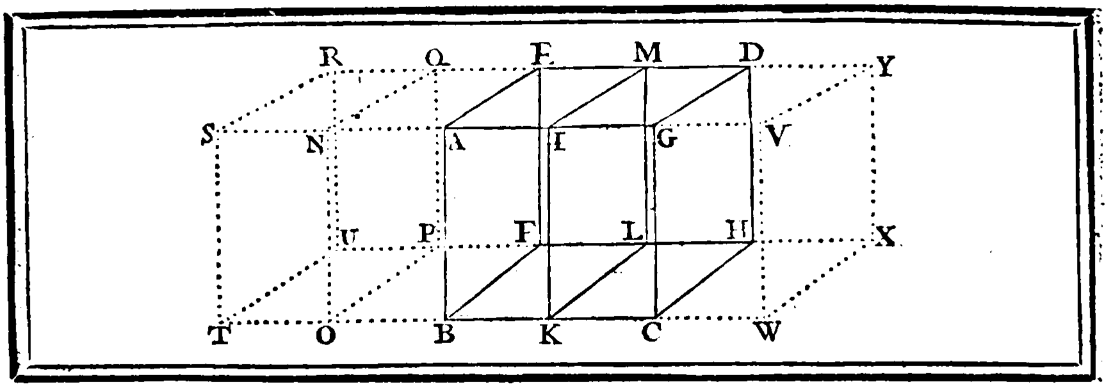
Préparation.

1. TIréz les diagonales oppofés EH & AG. Item AC & DH.

DEMONSTRATION.

PUifque les Plans Plle BD & CF font coupéz par le Plan ABCE.
1. La ligne BA eft Plle à EC. Prop. 16. L. 11.
2. De la même manière CH eft Plle à GB.
Et les même Plans Plle BD & CF étant auffi coupés par le Plan DGHF.
3. La ligne DG fera Plle à FH.
4. De même AE eft Plle à BC & DF Plle à GH.
Et puifque ces lignes Plles (*Arg.* 1. 2. & 4.) font les oppofés des quadrilatères AE CB & DF HG.
5. Ces quadrilatères AE CB & DF HG font des Paralelogrammes. Def. 35. L. 1.
6. De la même façon les autres Plans oppofés BD & CF, Item AF & BH font des Paralelogrammes.
Et comme AB & BG font Plle à EC & CH, chacun à chacun. (*Arg.* 1. & 2.)
7. ∀ ABG eft = ∀ ECH. Prop. 10. L. 11.
Or AB eft = à EC & BG = CH. Prop. 34. L. 1.
8. Donc le △ ABG eft = & ∽ au △ ECH. - - - { Prop. 4. L. 1. Prop. 4. L. 6.
Mais le Pgr. BD eft le double du △ ABG } (*Prop.* 41. *L.* 1.).
Et le Pgr. CF le double du △ ECH. }
Or ces Pgr. ont chacun un ∀ commun avec les △ équiangles.
9. Partant les Pgr. BD & CF font égaux & ∽. Def. 1. L. 6.
10. De la même manière on demontrera que le Pgr. BD eft = & ∽ Pgr. CF, & Pgr. AF = & ∽ Pgr. BH.
11. Donc les Plans oppofés d'un ⊟ font des Pgr. ∽ & égaux.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXV. *THEOREME XXII.*

SI un paralelipipède (BEDC) eſt coupé par un Plan (KIML) parallele aux Plans oppoſés (AEFB & CGDH): Les deux paralelipipédes provenants (ſavoir les BEMK & KMDC) ſeront entr'eux comme leurs bazes (BFLK & KLHC).

Hypothese.

Le *BEDC eſt coupé en deux* *BM & MC, par un Plan KM, Plle aux Plans oppoſés* BE & CD.

These.

Le *BM :* *MC* = *baze* BL : *baze* LC.

Préparation.

1. PRolongez BC de part & d'autre, de même que FH. — Dem. 2. L. 1.
2. Prenez ſur le prolongement de BC pluſieurs lignes égales à BK Et CK: comme BO & TO chacune = à BK, & CW = KC. — Prop. 3. L. 1.
3. Par ces points T, O, & W. tirez des droites TU, OP & WX Plle à BF ou CH, juſqu'à ce qu'elles rencontrent l'autre Plle prolongée dans les points U, P & X. — Prop. 31. L. 1.
4. Par les lignes TU, OP, & WX faites paſſer des Plans TR, OQ & WY, Plle aux Plans BE & CD, qui rencontreront le Plan de la baze ſuperieure AE DG, en SR, NQ & VY.

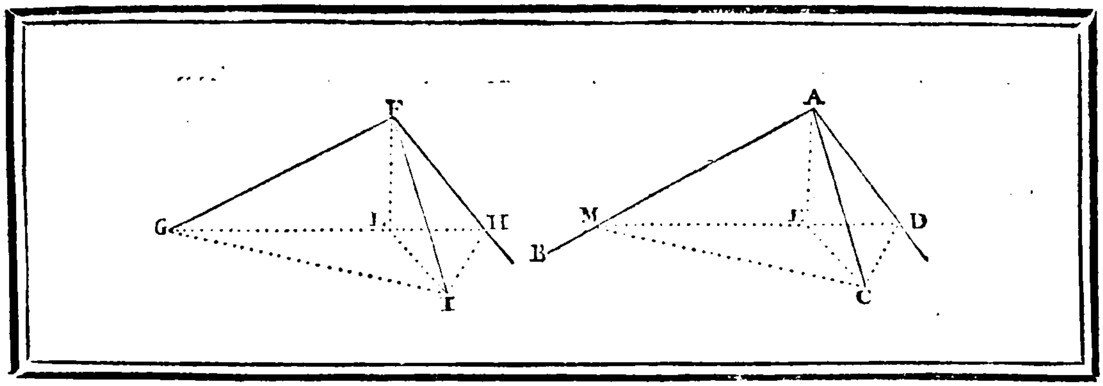
DEMONSTRATION.

PUiſque les lignes BO & TO, ſont chacune = à BK & CW = KC (*Prép.* 2.) & que les lignes OP, TU & WX Plles à BF ou CH, rencontrent le prolongement de FH, dans les points, P, U & X (*Prép.* 3.).

1. Les

1. Les Pgr. TP & BP font = au Pgr. BL; & Pgr. CX = Pgr. KH. Prop. 35. L. 1.
Les Plans AR ou AQ & TF ou OF étant Plles; & le Plan NP Plle au Plan AF; de plus les lignes SA & RE étant Plle aux lignes BT ou FU, qui font les prolongements des Plles AI, BK, FL, & EM.
2. Le folide provenant OQEB fera un ▭ égal & ∽ au ▭ BEMK. Def. 10. L. 11.
3. De la même manière on prouvera que le folide TRQO eft égal & ∽ ▭ BEMK; Item que le folide CDYW eft ∽ & = ▭ KMDC.
Or il y a autant de ▭s. OQEB, &c. égaux, qu'il y a de Pgr. égaux OF, TP &c. & ces ▭s forment enfemble le ▭ TE : de plus il y a autant de Pgr. OF &c. égaux, qu'on a pris de parties égales, chacune à la ligne BK, qui font enfemble la toute TB.
4. Partant le ▭ TE eft autant multiple du ▭ BEMK que les parties (TO, OB) de la ligne TB pris enfemble font multiples de la ligne BK.
5. De même le ▭ CDYW eft autant multiple du ▭ KMDC que la ligne WC l'eft de la ligne KC.
6. Donc felon que le ▭ TREB fera > = ou < que le ▭ BEMK, la ligne TB fera > = ou < que la ligne BK & felon que le ▭ CDYW fera > = ou < ▭ KMDC, la ligne CW fera > = ou < que la ligne KC.
7. Partant le ▭ BEMK : ▭ KMDC = BK : KC. Def. 5. L. 5.
Or BK : KC = baze BL : baze KH. Prop. 1. L. 6.
8. Donc ▭ BEMK : ▭ KMDC = baze BL : baze KH. Prop. 11. L. 5.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXVI. *PROBLEME IV.*

D'Un point (A) fur une droite donnée (A B), faire un angle folide (AB): égal à un angle folide donné (F).

Donnees.	**Cherchees.**
I. Un point A, dans une droite AB	*Au point A un angle folide =*
II. Un angle folide F.	*à l'angle folide F.*

Refolution.

1. D'Un point I pris à volonté fur une des lignes de fection autour de ∀ folide F, decendez une ⊥ I L fur le Plan oppofé G F H.	Prop. 11. L. 11.
2. Tirez L F, L G, L H, H I & G I dans les Plans qui forment ∀ folide.	Dem. 1. L. 1.
3. Sur la droite donnée A B, prenez AM = F G.	Prop. 3. L. 1.
4. Faites au point A, un ∀ plan MAD = ∀ plan GFH.	Prop. 23. L. 1.
5. Coupéz AD = F H.	Prop. 3. L. 1.
6. Sur le même Plan MAD, faites un ∀ plan MAE égal à ∀ plan GFL.	Prop. 23. L 1.
7. Coupéz AE = FL.	Prop. 3. L. 1.
8. Du point E, fur le Plan MAD élevez la ⊥ EC.	Prop. 12. L. 11.
9. Faites EC = LI.	Prop. 3. L. 1.
10. Tiréz AC.	Dem. 1. L. 1.

Préparation.

TIréz ME, ED, CD, & CM, dans Plans MAD, CAD & MAC.

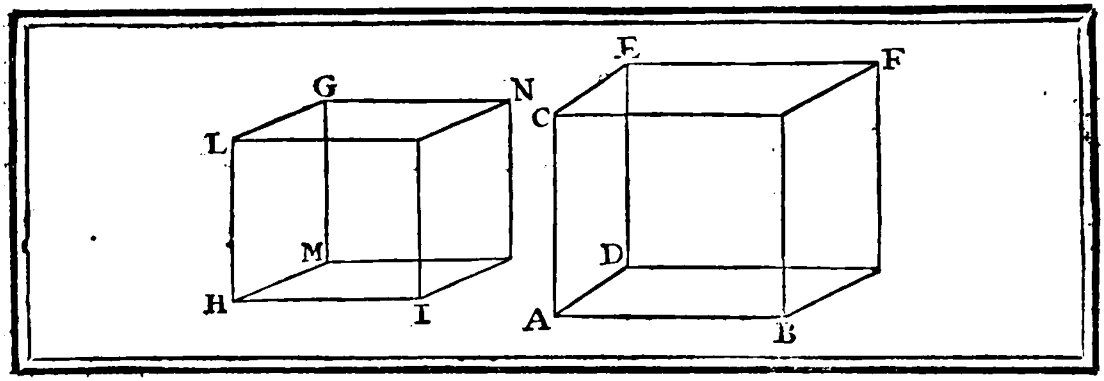
DEMON-

DEMONSTRATION.

Puisque dans les △ GFH & MAD, les cotés FG & FH sont égaux aux cotés AM & AD chacun à chacun. (*Ref.* 3 & 5.) & que ∀ GFH est = à ∀ MAD. (*Ref.* 4.).

1. GH sera = à MD. Prop. 4. L. 1.
2. De la même manière dans les △ GFL & AME, GL est = à ME Prop. 4. L. 1.
   Si donc on retranche GL de GH & ME de MD.
3. LH sera = à ED. Ax. 3. L. 1.
   Et comme dans les △ LHI, & EDC, ED est = à LH, LI = EC & les ∀ DEC & HLI, des ∀ L. (*Arg.* 3. *Ref.* 9. & *Def.* 3. *L.* 11.).
4. IH sera = à CD. Prop. 4. L. 1.
   De même dans les △ FLI & AEC; LI est = à EC, & LF = AE, de plus ∀ FLI & ∀ AEC. L. (*Ref.* 7 & 9. & *Def.* 3. *L.* 11.).
5. Donc FI = AC. Prop. 4. L. 1.
6. De la même manière on demontrera que GI est = MC.
   Puis donc que les trois cotés HI, FI & FH du △ IFH, sont égaux aux trois cotés DC, AC & AD, du △ CAD. (*Arg.* 4 & 5.).
7. ∀ IFH sera = à ∀ CAD. Prop. 8. L. 1.
8. De même △ GFI est = au △ MAC, & ∀ GFI = ∀ MAC.
   l'Angle plan GFH étant donc = à ∀ plan MAD. (*Ref.* 4.)
   l'Angle plan IFH = à ∀ plan CAD (*Arg.* 7.).
   Et l'angle plan GFI = à ∀ plan MAC (*Arg.* 8.)
   De plus les ∀ plan GFH, IFH & GFI, forment l'∀ solide F.
   Et les ∀ plan MAD, CAD & MAC forment l'∀ solide A.
9. Donc l'angle solide A est = à ∀ solide F. Def. 9. L. 11.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XXVII. *PROBLEME V.*

SUr une ligne droite donnée (A B) : décrire un paralelipipéde (A F), semblable & semblablement posé, à un paralelipipéde donné. (H N).

DONNEES.	CHERCHEES.
I. La droite A B.	*Sur A B faire un ▭ A F, ∽ & semblablement posé à un ▭ H N.*
II. Le ▭ H N.	

Resolution.

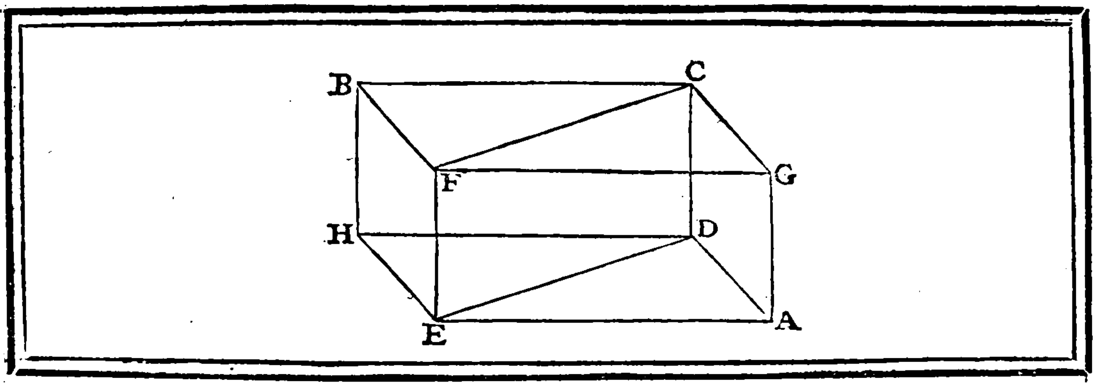
1. AU point A de la ligne AB faites un ∀ solide CADB, = à ∀ solide H, ou LHMI. — Prop. 26. L. 11.
2. Coupéz AC de façon que HI : HL = AB : AC } — Prop. 12. L. 6.
3. Item AD de façon que HL : HM = AC : AD }
4. Achevez les Pgr. AE, BD & BC. — Prop. 31. L. 1.
5. Achevez le ▭ AF.

DEMONSTRATION.

LEs trois Pgr. AE, BD, & BC sont ∽, & semblablement posés aux trois Pgr. HG, MI & LI du ▭ HN, chacun à chacun (*Ref.* L. 2. 3 & 4. & *Def.* 1. *L.* 6.) — Prop. 24. L. 11.
Et leurs opposes le sont de même.

1. Partant les six Plans ou Pgrs qui forment le ▭ AF, sont ∽, & semblablement posés aux six Plans ou Pgr. qui forment le ▭ donné HN.
2. Donc le ▭ AF construit sur AB, est semblable & semblablement posé au ▭ donné HN. — Def. 9. L. 11.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XXVIII. *THEOREME XXIII.*

UN paralelipipéde (AB) coupé par un Plan (FCDE) passant par les diagonales (FC & ED) des Plans opposés (BG & AH): est coupé en deux également.

Hypothese.
Le ▭ AB est coupé par un Plan FD passant par les diagonales FC & ED, des Plans opposés BG & AH.

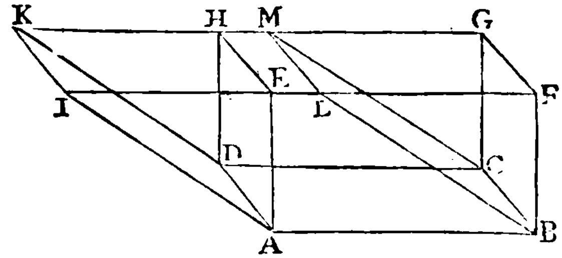
Thése.
Le Plan FD coupe le ▭ AB en deux également.

Demonstration.

Puisque le Plan FA est un Pgr. Prop. 24. L. 11.

1. Les cotés EF & GA, sont égaux & Plles Prop. 33. L. 1.
2. De même CD & GA font égaux & Plles Prop. 9. L. 11.
3. Partant EF est = & Plle à CD. Ax. 1. L. 1.
4. Donc ED = & Plle à FC. Prop. 33. L. 1.
5. D'où il s'ensuit que FCDE est un Pgr. Def. 35. L. 1.
   Mais le Pgr. BCGF est = & Plle au Pgr. HDAE. Prop. 24. L. 11.
6. Partant les △ BCF & FGC font = & ∽ aux △ HDE & EDA. Prop. 34. L. 1.
   De plus les Pgr. FEAG & GADC, font = & ∽ aux Pgr. BHDC, & BHEF, chacun à chacun. Prop. 4. L. 6. Prop. 24. L. 11.
7. Donc tous les Plans qui forment le prisme BFD sont égaux & ∽ à tous les Plans qui forment le prisme DFG.
8. Donc le prisme BFD ou BHEDCF est égal & ∽ au prisme DFG ou DEFCGA. Def. 10. L. 11.
9. Partant le Plan FCDE, coupe le ▭ AB en deux également.

C. Q. F. D.



PROPOSITION. XXIX. *THEOREME XXIV.*

LEs paralelipipédes (H B & K B) placés sur la même baze B D, ayant même hauteur (A E) & desquels les lignes insistantes (A E, A I, &c.) sont dans la même direction (I F, G K) : sont égaux.

HYPOTHESE.

I. Les ▭s K B & H B, ont la même baze B D.
II. Ils ont la même hauteur A E.
III. Les lignes insistantes A E, A I &c. sont dans la même direction I F & K G.

THESE.

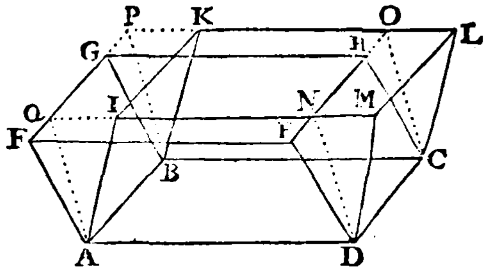
▭ *H B est* = ▭ *K B.*

DEMONSTRATION.

PUisque les Pgr. K C ou K M C D, & H C ou H G C D, ont la même baze D C, & qu'il sont dans la même direction de K G qui est Plle à D C. (*Hyp.* 3.).

1. Le Pgr. K C est = au Pgr. H C. Prop. 35. L. 1.
Si donc on retranche de ces Pgr. égaux le trapéze commun H M C D.
2. Les restes, savoir les △ K H D & M G C seront égaux. Ax. 3. L. 1.
3. De la même manière △ I E A est = au △ L F B.
4. Le Pgr. K E ou K H E I, est aussi = au Pgr. M F ou M G F L.
(Puisqu'il sont chacun = au Pgr. D C B A, moins le Pgr. H M L E. *Def.* 30. & *Prop.* 24. *L.* 11.).
Or le Plan G B ou C F est = au Plan H A ou D E, & le Plan M B, ou L C est = au Plan K A ou I D. Prop. 24. L. 11.
5. Partant le prisme H A K D est = au prisme G B M C. Def. 10. L. 11.
Si donc on ajoute à ces prismes égaux, la partie H M C B L E A D.
6. Le prisme H A K D + partie H M C B L E A D est = prisme G B M C + partie H M C B L E A D. Ax. 2. L 1.
Or prisme H A K D + partie H M C B L E A D est = au ▭ K B. }
Et prisme G B M C + partie H M C B L E A D est = au ▭ H B. } Ax. 1. L. 2.
7. Donc le ▭ K B est égal au ▭ H B. Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXX. *THEOREME XXV.*

Les paralelipipédes (FGHEDCBA & IMLKBCA) placés ſur la même baze (ABCD), ayant même hauteur, & deſquels les lignes inſiſtantes (FA, AI &c.) ne ſont point dans la même direction : ſont égaux.

HYPOTHESE.	THESE.
I. Les ▱ˢ HA & LA ſont placés ſur la même baze AC.	*▱ FHCA eſt = ▱ ILCA.*
II. Ils ont la même hauteur.	
III. Les lignes inſiſtantes AF & AI, ne ſont point dans la même direction.	

Préparation.

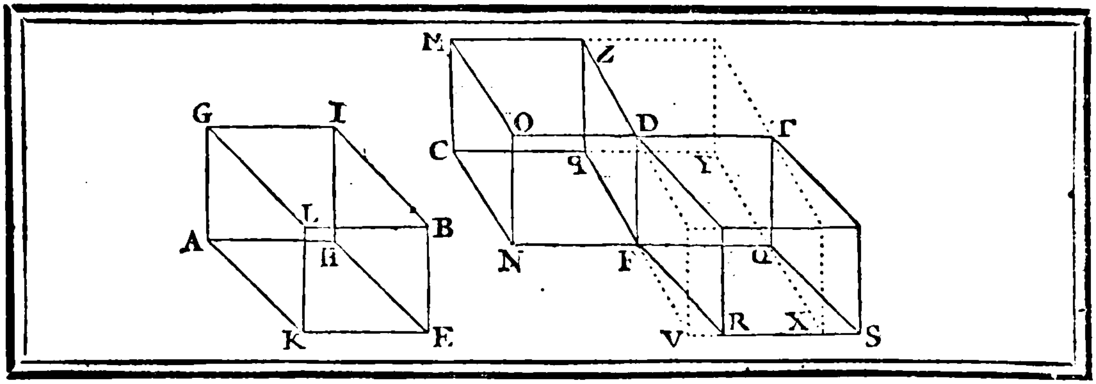
1. Prolongez LK & FG vers P, juſqu'à ce qu'elles s'y rencontrent. } Dem. 2. L. 1.
2. Prolongez IM, juſqu'à ce qu'elle rencontre FG en Q. }
3. Et EH juſqu'en O. }
4. Tiréz QA, PB, OC & ND. Dem. 1. L. 1.

DEMONSTRATION.

Puiſque les ▱ˢ FHCA & QOCA ont la même baze ABCD & que leurs lignes inſiſtantes AF, AQ; ED, DN; BG, BP; & HC, CO; ſont dans les directions FP & EO.

1. Le ▱ FHCA eſt égal au ▱ QOCA. Prop. 29. L. 11.
2. De la même manière le ▱ QOCA eſt = au ▱ ILCA.
3. Partant le ▱ FHCA eſt égal au ▱ ILCA. Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXXI. *THEOREME XXVI.*

LEs paralelipipédes (KI & NZ) dont les bazes (KH & Nq) sont égales & qui ont la même hauteur: sont égaux.

HYPOTHESE.

I. Les ▱. KI & NZ, ont leurs bazes KH & Nq, égales.
II. Ils ont la même hauteur.

THÈSE.

Le ▱ KI est = au ▱ NZ.

DEMONSTRATION.

CAS I.

SI les lignes insistantes AG, &c. du ▱ KI; & les insistantes CM &c. du ▱ NZ, sont ⊥ sur leurs bazes, ou si les inclinaisons des insistantes AG, & MC sont les mêmes.

Préparation.

1. PRolongez NF, & faites FQ = AH. Dem. 1. L. 1. Prop. 3. L. 1.
2. Au point F sur FQ, faites ∠ plan QFR = ∠ plan HAK. Prop. 23. L. 1.
3. Faites FR = AK.
4. Achevez le Pgr. FQSR. Prop. 31. L. 1.
5. Achevez de même avec les lignes FQ & FD, Item FR & FD, les Pgr. QTDF & DFR. Prop. 31. L. 1.
6. Achevez le ▱ DS.
7. Prolongez les droites Fq & RS, jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en V. Dem. 2. L. 1.
8. Par le point Q, tirez XQY, Plle à Vq. Prop. 31. L. 1.
9. Prolongez Cq, jusqu'à ce qu'elle rencontre XY, au point Y.
10. Achevez les ▱. ZQ, & VDTX.

PUisque les lignes FQ & FR sont = à AH & AK. (*Prép.* 1 & 3.)
Et que l'∠ QFR, est = à ∠ HAK. (*Prép.* 2.).

1. Le Pgr. FS est = & ∽ au Pgr. KH. Prop. 36. L. 1. Def. 1. L. 6.
2. De la même manière on demontrera que les Pgr. FT & DR sont égaux & ∽ aux Pgr. AI, & AL.

Puis

Puis donc que les trois Pgr. FS, FT, & DR, du ▱ D S font = & ∽
aux trois Pgr. AE, AI, & AL, du ▱ KI. (*Arg.* 1 & 2.)
Et que les Pgr. restans du ▱ DS, de même ceux du ▱ KI font,
égaux, & ∽ aux précédents; chacun à chacun. Prop.24.L.11.
3. Le ▱ DS, sera égal & ∽ au ▱ KI. Def. 10. L. 11.
Les ▱s DX & DS, ont la même baze DQ, & leurs lignes insistantes
FV & FR, &c. sont dans les mêmes directions Plle VS, &c.
4. Partant ▱ DS est = au ▱ DX. Prop 29. L. 11.
Or le ▱ DS est = au ▱ KI. (*Arg.* 3.).
5. Donc le ▱ DX est aussi = au ▱ KI. Ax. 1. L. 1.
Le ▱ MQ * est coupé par le Plan FZ, Plle au Plan MN.
6. Partant baze Nq : baze qQ = ▱ MF : ▱ ZQ. Prop.25.L.11.
Le ▱ ZX est coupé par le Plan DQ, Plle au Plan ZY.
7. Partant baze FX : baze qQ = ▱ DX : ▱ ZQ. Prop. 25.L.11.
Or le Pgr. FX est = au Pgr. FS. Prop. 35. L. 1.
Et Pgr. FS est = au Pgr. HK. (*Arg.* 1.).
8. Partant le Pgr. FX est = au Pgr. HK. Ax. 1. L. 1.
Or la baze HK est = à la baze qN. (*Hyp.* 1.).
9. Donc baze qN = à la baze FX.
Mais baze qN : baze qQ = ▱ MF : ▱ ZQ. (*Arg.* 6.)
Et baze qQ : baze FX = ▱ ZQ : ▱ DX. (*Conv. Arg.* 7.).
10. Part. baze qN : baze FX = ▱ MF : ▱ DX. Prop. 22. L. 5.
Or baze qN est = à la baze FX. (*Arg.* 9.).
11. Partant le ▱ MF est = au ▱ DX. Prop. 14. L. 5.
Mais les ▱s DX & KI sont égaux. (*Arg.* 5.).
12. Donc le ▱ MF est = au ▱ KI. Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.

CAS II.

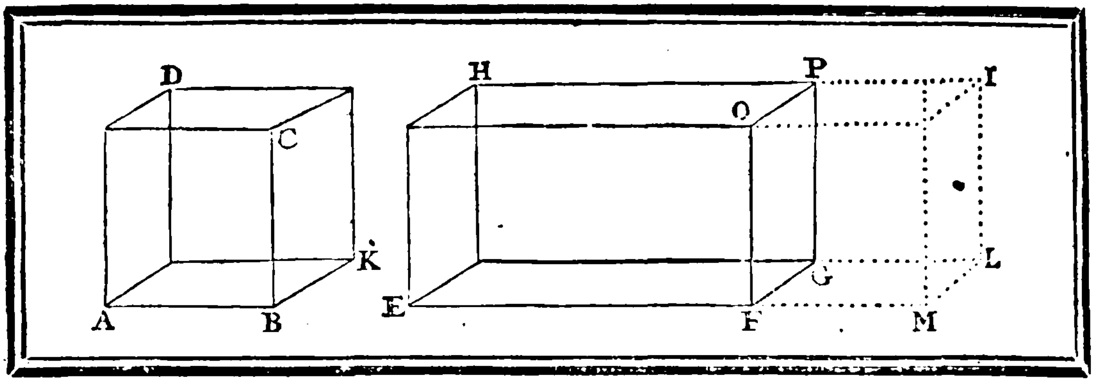
SI les angles d'inclinaison des lignes insistantes AG, &c. du ▱ KI ne sont pas égaux aux angles d'inclinaison des insistantes CM, &c. du ▱ MF.

SUr la baze KI, faites un ▱, ayant les lignes insistantes, ou ⊥ : ou également inclinés que les insistantes du ▱ MF, & dans la même direction que celles de KI.
Et par consequent qui lui sera égal, (*par la Prop.* 30. *L.* 11.).
Le reste de la construction & de la demonstration sont les mêmes que dans le Cas precedent.

COROLLAIRE.

LEs paralelipipédes égaux qui ont même hauteur; ont des bazes égales.

* *Il est aisé à demontrer que MQ, est un ▱, par la Prop.* 7. 8. 9 & 10.



PROPOSITION XXXII. *THEOREME XXVII.*

LEs paralelipipédes (BD & EP) dont les hauteurs (BC & FO) font égales: font entr'eux comme leurs bazes (AK & EG).

HYPOTHESE.	THESE.
Les hauteurs BC & FO, des ▭ BD & EP, font égales.	*▭ BD : ▭ EP = baze AK : baze EG.*

Préparation.

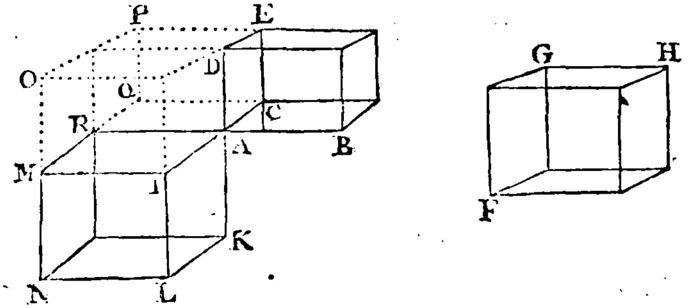
1. PRolongez EF en M. — Dem. 2. L. 1.
2. Faites fur FG avec FM, le Pgr. FL = Pgr. KA, qui fera dans la même direction avec le Pgr. EG de forte que les Pgr. EG, & FL, faffent enfemble le Pgr. EL. — Prop. 44. L. 1.
3. Achevez le ▭ FI.

DEMONSTRATION.

PUifque la baze FL du ▭ FI, eft = à la baze AK du ▭ BD (*Prép.* 2.)

1. Le ▭ FI eft = au ▭ BD. — Prop. 31. L. 11.
2. Partant ▭ FI : ▭ EP = ▭ BD : ▭ EP. — Prop. 7. L. 5.
   Mais ▭ FI : ▭ EP = baze FL : baze EG. — Prop. 25. L. 11.
   Et baze FL eft = à la baze AK. (*Prép.* 2.)
3. Donc ▭ BD : ▭ EP = baze AK : baze EG. — Prop. 11 & 7. L. 5.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXXIII. *THEOREME XXVIII.*

LEs paralelipipédes femblables (EB & FH) : font entr'eux en raifon triplée de leurs cotés homologues (AB & GH).

Hypothese.	These.
Les ▭s EB & FH font ∽,	*Le ▭ EB eft au ▭ FH en raifon triplée de AB*
& les cotés AB & GH font homologues.	*à GH, ou comme $\overline{AB}^3 : \overline{GH}^3$.*

Préparation.

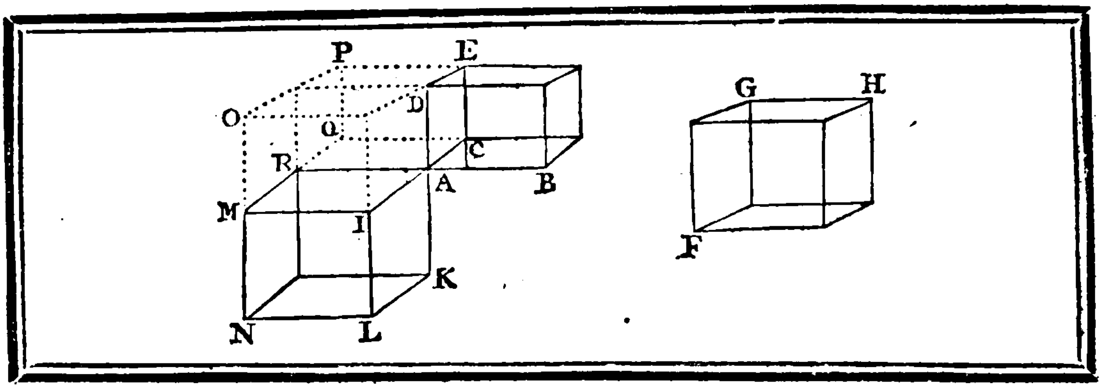
1. PRolongez AB & faites AR = GH. — Dem. 2. L. 1. Prop. 3. L. 1.
2. Sur AR conftruifez le ▭ RL égal & ∽ au ▭ FH, de façon que les lignes AC & AI, Item DA & AK fe rencontrent directement. — Prop. 27. L. 11.
3. Achevez le ▭ AO, de façon qu'il faffe un même ▭ OK avec le ▭ RL.
4. Achevez de même le ▭ AP, qu'il faffe avec OA, le ▭ OC, & avec EB le ▭ PB.

Demonstration.

PUifque les ▭s EB & RL, font ∽. (*Prép.* 2.)

1. Le Pgr. AM eft ∽ au Pgr. CB. — Def. 9. L. 11.
2. Partant AB : AC = AR : AI. — Def. 1. L. 6.
3. Et alternant AB : AR = AC : AI. — Prop. 16. L. 5.
4. De même AB : AD = AR : AK. — Def. 1. L. 6.
5. Et alternant AB : AR = AD : AK. — Prop. 16. L. 5.
   Et comme AR eft = à GH. (*Prép.* 1.).
6. Les trois raifons AB à AR, AC à AI. & AD à AK, font égales entr'elles, & égales à la raifon de AB à GH.
   Or le ▭ PB eft coupé par le Plan Plle AE. (*Prép.* 4.).
7. Partant la baze CB : baze QA = ▭ BE : ▭ AP. — Prop. 25. L. 11.
   Et baze CB : baze QA = AB : AR. — Prop. 1. L. 6.
8. Donc AB : AR = ▭ BE : ▭ AP. — Prop. 11. L. 5.

Le ▭



Le ▭ OC eſt coupé par le Plan Plle RD. (*Prép.* 4.).

9. Partant baze RC : baze AM = ▭ AP : ▭ OA. Prop. 25. L. 11.

Et baze RC : baze AM = AC : AI. Prop. 1. L. 6.

10. Donc AC : AI = ▭ AP : ▭ OA. Prop. 11. L. 5.

Enfin le ▭ OK étant coupé par le Plan Plle AM. (*Prép.* 4.)

11. On demontrera de même que AD : AK = ▭ AO : ▭ AN.

Or les trois raiſons, de AB à AR, AC à AI, & AD à AK ſont égales à la raiſon de AB à GH. (*Arg.* 6.).

12. Partant les quatres ▭ˢ BE, AP, AO, & AN, forment une ſuite de grandeurs entre leſquels regne une même raiſon (*de AB : GH*). Prop. 11. L. 5.

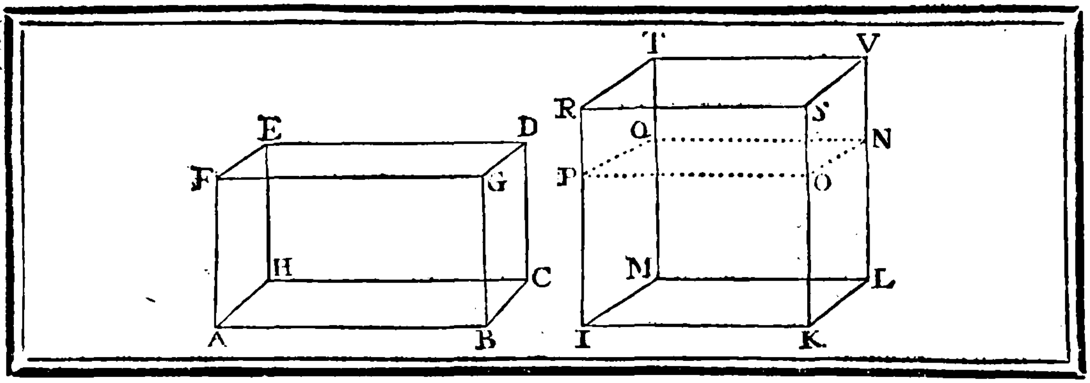
13. Donc ils ſont proportionels. Def. 6. L. 5.

14. Partant le ▭ BE eſt au ▭ AN, en raiſon triplée de AB à GH. Def. 11. L. 5.

Or le ▭ AN eſt = & ∽ au ▭ FH. (*Prép.* 2.).

15. Donc le ▭ BE eſt au ▭ FH, en raiſon triplée de AB à GH. (ou comme $AB^3 : GH^3$ *Ap. Prop.* 7.).

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXXIV. *THEOREME XXIX.*

LEs parallelipipédes égaux (AD & IV) ont leurs bazes (Pgr. AC & Pgr. IL) & leurs hauteurs (GB & IR) reciproquement proportionelles. Et les paralelipipédes (AD & IV) dont les bazes (Pgr. AC & Pgr. IL) & les hauteurs (GB & IR) sont reciproquement proportionelles: sont égaux.

HYPOTHESE.	THESE.
▱ *AD est* = ▱ *IV.*	*Baze AC* : *Baze IL* = *hauteur IR* : *hauteur GB.*

I. DEMONSTRATION.

LEs paralelipipédes donnés peuvent être.

I. De même hauteur
II. De differente hauteur } & également incliné sur leur bazes.
III. Ayant des inclinaisons differentes: comme si l'un étoit ⊥ sur sa baze, & l'autre oblique.

CAS I.

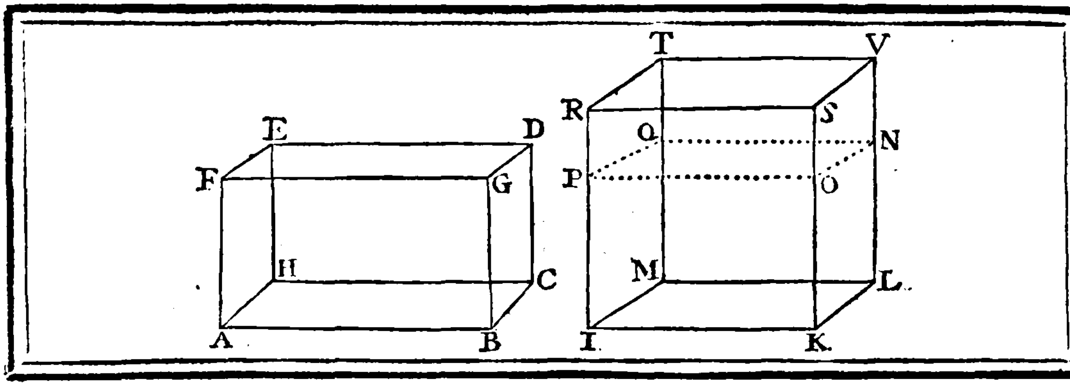
Lorsque les ▱ : ont la même hauteur; *c. a. d.* IR = GB.

PUisque les ▱ : donnés sont égaux & qu'ils ont la même hauteur.
1. Leurs bazes sont égales. (*Corollaire de la Prop.* 31. *L.* 11.).
2. Donc baze AC : baze IL = hauteur IR : hauteur GB. Def. 6. L. 5.

C. Q. F. D. I.

CAS II.

Lorsque IR est > GB.



I. Préparation.

1. COupez de la hauteur RI la partie PI = à la hauteur BG.
2. Par le point P, faites passer le Plan PONQ, Plle à la baze IL.

PUisque les paralelipipédes AD & IN ont la même hauteur. (1. *Prép.* 1.).
1. Le ▭ AD : ▭ IN = baze AC : baze IL. Prop.32.L.11.
Or ▭ AD est = au ▭ IV. (*Hyp.*).
2. Donc ▭ AD : ▭ IN = ▭ IV : ▭ IN. Prop. 7. L. 5.
3. Partant ▭ IV : ▭ IN = baze AC : baze IL. Prop. 11. L. 5.
Le ▭ IV est coupé par le Plan PONQ. (1. *Prép.* 2.).
4. Donc ▭ PV : ▭ IN = baze PS : baze KP. Prop.25.L.11.
5. Donc en composant ▭ IV : ▭ IN = baze KR : baze KP. Prop. 18. L. 5.
Mais baze KR : baze KP = RI : PI. Prop. 1. L. 6.
6. C'est pourquoi ▭ IV : ▭ IN = RI : PI. Prop. 11. L. 5.
Or ▭ IV : ▭ IN = baze AC : baze IL. (*Arg.* 3.)
Et PI = GB. (1. *Prép.* 1.).
7. Partant baze AC : baze IL = IR : BG. Prop. 11. L. 5.

C. Q. F. D. II.

CAS III.

Lorsque le ▭ IV à un inclinaison differente que le ▭ AD.

II. Préparation.

COnstruisez un ▭ de même hauteur que le ▭ IV, ayant la même inclinaison que le ▭ AD.

PUisque le ▭ construit à la même baze & la même hauteur que l'oblique (II *Prép.*)
1. Ce ▭ sera égal au ▭ donné IV. Prop.31.L.11.
Or ce ▭ construit est en raison reciproque de sa baze & de sa hauteur avec le ▭ AD. (*Cas II.*).
2. Donc le ▭ IV sera aussi en raison reciproque avec le ▭ AD. Prop. 7. L. 5.

C. Q. F. D. III.

HYPO-

Hypothese.
Baze IL : *baze AC* = *hauteur GB* : *hauteur IR.*

These.
▱ *AD est* = ▱ *IV.*

II. Demonstration.

La Préparation est la même que pour le Cas II, precedent.

Puisque les ▱. IN & AD ont la même hauteur (1. *Prép.* 1.).
1. Le ▱ IN : ▱ AD = baze IL : baze AC. Prop.32.L.11.
Or baze IL : baze AC = hauteur GB : hauteur IR (*Hyp.*).
2. Donc ▱ IN : ▱ AD = hauteur GB : hauteur IR. Prop.11.L.5.
Et comme PI est = BG (1. *Prép.* 1.).
3. Le ▱ IN : ▱ AD = hauteur PI : hauteur IR. Prop. 7. L. 5.
Mais PI : IR = Pgr. PK : Pgr. KR. Prop. 1. L. 6.
Et Pgr. KP : Pgr. KR = ▱ IN : ▱ IV. Prop.32. L.11.
4. Donc le ▱ IN : ▱ AD = ▱ IN : ▱ IV. Prop.11. L. 5.
Or le ▱ IN est égal à lui même & il est le premier & troisieme terme de la proportion.
5. Partant le ▱ AD est = au ▱ IV. Prop. 14. L.5.

C. Q. F. D. 1.

Les Demonstrations pour le premier & le troisieme Cas dans cette Hypothese, sont les mêmes, c'est pourquoi nous les obmettons.

REMARQUE I.

Ce qui vient d'être Demontré dans les Propositions 25, 29, 30, 31, 32, 33 & 34. *au sujet des paralelipipédes; est aussi vrai, par rapport aux prismes triangulaires; puisque un tel prisme est la moitié de son paralelipipéde:* par la Proposition 28. de ce Livre, *d'où l'on peut conclure.*

I. Si un prisme triangulaire est coupé par un Plan Plle aux plans opposés: les deux prismes provenants, seront entr'eux comme les parties du Pgr. qui sert pour baze à tout le prisme.

II. Les prismes triangulaires qui ont même baze, ou bazes égales & dont les hauteurs sont égales: sont égaux.

III. Les prismes triangulaires qui ont même hauteur: sont entr'eux comme leurs bazes.

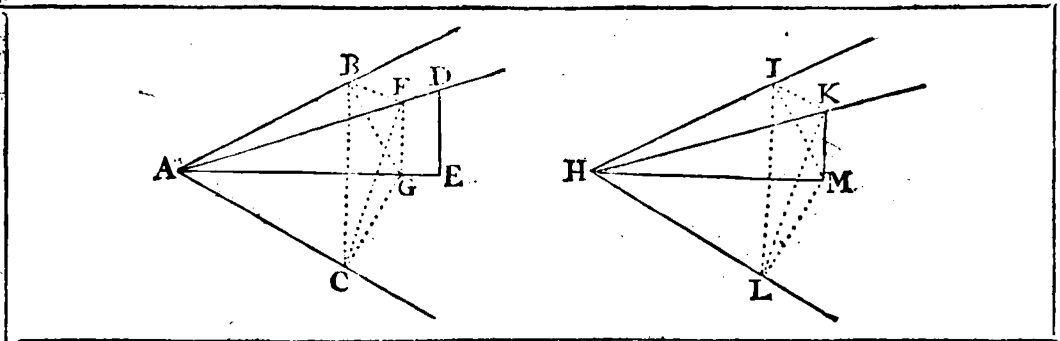
IV. Les prismes triangulaires semblables: sont entr'eux en raison triplée de leurs cotés homologues.

V. Les prismes triangulaires égaux: ont leurs bazes, & hauteurs reciproquement proportionelles. & les prismes triangulaires dont les bazes & les hauteurs, sont reciproquement proportionelles: sont égaux.

REMARQUE II.

LEs mêmes propriétés conviennent aux prismes dont les Plans opposés Plle sont des polygones quelconques. Puisqu'il a été démontré (*Proposition* 20. *Livre* 6.) qu'on peut diviser ces polygones opposés semblables, dans un pareil nombre de triangles semblables; si donc on fait passer des Plans par les diagonales homologues qui forment ces triangles & qui sont Plle chacun à chacun; ces Plans diviseront les prismes polygones, en autant de prismes triangulaires, qu'il y a de triangles dans leurs Plans opposés Plle.

Or ces prismes triangulaires partielles étant dans le Cas des précedents de la premiere Remarque. On peut conclure par la (*Proposition* 12. *Livre* 5.) *que les mêmes propriétés conviennent aux prismes-polygones.*



PROPOSITION XXXV. *THEOREME XXX.*

SI deux angles plan (BAC & IHL) font égaux, & que de leurs fommets (A & H) on ait élevé hors de leurs Plans des lignes (AD & HK) qui faffent avec leurs cotés refpectifs (favoir AD avec AB & AC; HK avec IH & HL) des angles égaux (∀ BAD = ∀ IHK & ∀ DAC = ∀ KHL), que de deux points (D & K) pris à volonté dans ces lignes élevées (AD & HK) on abaiffe des perpendiculaires (DE & KM) fur les Plans des angles donnés (BAC & IHL), & enfin que des points (E & M) ou les perpendiculaires touchent ces Plans, on tire des droites (AE & HM) aux fommets (A & H) de ces angles donnés: ces droites (AE & HM) feront avec les lignes élevées (AD & HK) des angles (DAE & KHM) qui feront égaux.

Hypothese.

I. Au deffus les Plans des ∀ égaux BAC & IHL, & aux fommets A & H, on a élevés des droites AD & HK faifant les ∀ BAD & DAC égaux aux ∀ IHK & KHL, chacun à chacun.

II. De deux points D & K, pris dans ces droites AD & HM, on a abaiffés des ⊥ DE & KM, fur les Plans BAC & IHL.

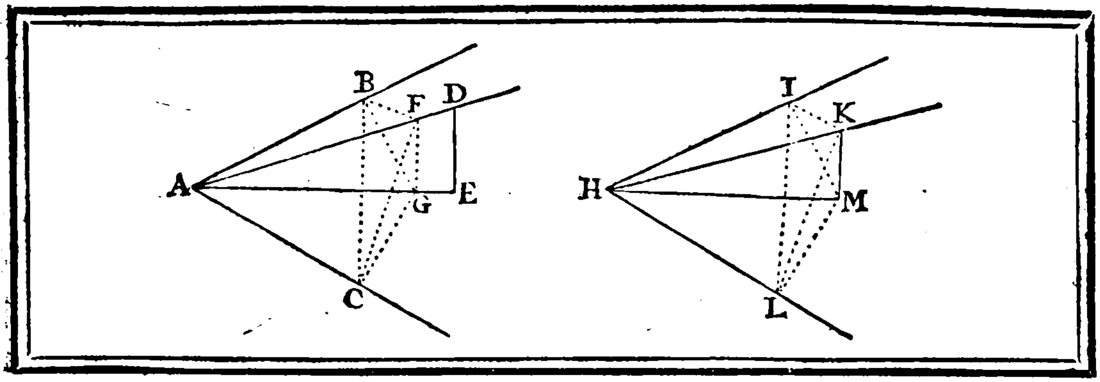
III. Des points E & M ou les ⊥ touchent ces Plans, on a tirés des droites AE & MH aux fommets A & H.

These.

∀ DAE eft = ∀ KHM.

Préparation.

1. FAites AF = HK.	Prop. 3. L. 1.
2. Tirez FG, Plle à DE, jufqu'à la rencontre du Plan BAC, & G.	Prop. 31. L. 1.
3. Du point G, dans le Plan BAC, tirez CG, ⊥ fur AC; & GB, ⊥ fur AB.	Prop. 12. L. 1.
4. Du point K dans le Plan IHL, tirez IM, ⊥ fur HI; & ML ⊥ fur HL.	Prop. 12. L. 1.
5. Tirez BF, BC & FC; Item IK, IL & LK.	Dem. 1. L. 1.



Demonstration.

Puiſque FG eſt Plle à DE qui eſt ⊥. ſur le Plan BAC, (*Hyp.* III.)

1. La ligne GF eſt ⊥ ſur le même Plan BAC. — Prop. 8. L. 11.
   Et les ∀ FGB, FGA, & FGC ſont ∟. — Def. 3. L. 11.
2. Partant le □ ſur AF eſt = aux □ ſur FG + □ ſur GA. — Prop. 47. L. 1.
   Mais le □ ſur AG eſt = □ AB + □ BG. (*Prép.* 3.) & — Prop. 47. L. 1.
3. Donc le □ ſur AF eſt = □ FG + □ AB + □ BG. — Ax. 1. L. 1.
   Or le □ GB + □ FG ſont = au □ BF. (*Prép.* 3.) — Prop. 47. L. 1.
4. Partant le □ ſur AF eſt auſſi = □ BF + □ AB.
5. Donc ∀ ABF, eſt ∟ — Prop. 48. L. 1.
6. De la même manière on demontrera que ∀ FCA, eſt ∟.
7. Item que les ∀ KIH & KLH, ſont ∟.
   Dans les △ FCA & KLH; la ligne HK eſt = AF, (*Prép.* 1.) les ∀ ACF & KLH, ſont ∟, (*Arg.* 6. & 7.) & les ∀ FAC & KHL, égaux (*par Hyp.* 1.).
8. Donc les cotés AC & CF ſont égaux aux cotés HL & LK, chacun à chacun. — Prop. 26. L. 1.
9. De la même façon AB eſt = à HI, & BF = IK.
10. Partant dans les △ BAC & IHL; les bazes BC & IL ſont égales, & les ∀ ACB & ABC = aux ∀ HLI & HIL, chacun à chacun. — Prop. 4. L. 1.
    Si donc on retranche ces ∀ égaux, des quatres angles droits ACG, ABG, HLM & HIM.
11. Les angles reſtants ſeront égaux, ſavoir ∀ BCG = ∀ ILM & ∀ CBG = ∀ LIM. — Ax. 5. L. 1.
    Puis donc que les △ GBC & IML ont les bazes BC & IL égales, (*Arg.* 10.).
    Et que les ∀ ſur ces bazes ſont égaux, chacun à chacun, (*Arg.* 11.).
12. Les cotés BG & CG ſeront égaux aux cotés IM & ML. — Prop. 26. L. 1.
    Dans les △ BAG & HIM, le coté AB eſt = à HI, (*Arg.* 9.) BG = IM, (*Arg.* 12.) & les ∀ compris ABG & HIM des ∟. (*Prép.* 3 & 4.).
13. Partant AG = HM. — Prop. 4. L. 1.
    Or le □ ſur AF (= □ AG + □ GF *Arg.* 2.) eſt = au □ ſur HK (= □ HM + □ KM *Hyp.* 1. & *Prop.* 47. *L.* 1.). parce que AF eſt = HK. (*Prép.* 1.).
    Si donc on retranche du □ AF le □ GA, & du □ HK le □ HM qui ſont égaux. (*Arg.* 13. & *Prop.* 46. *L.* 1. *Corol.* 3.).

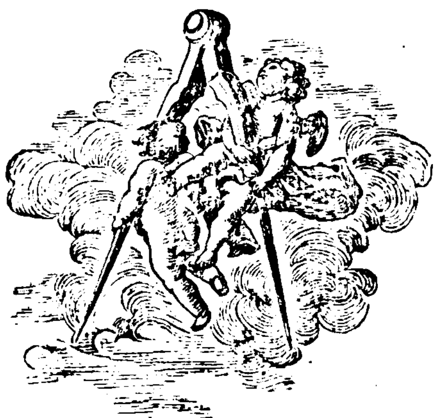
14. Le

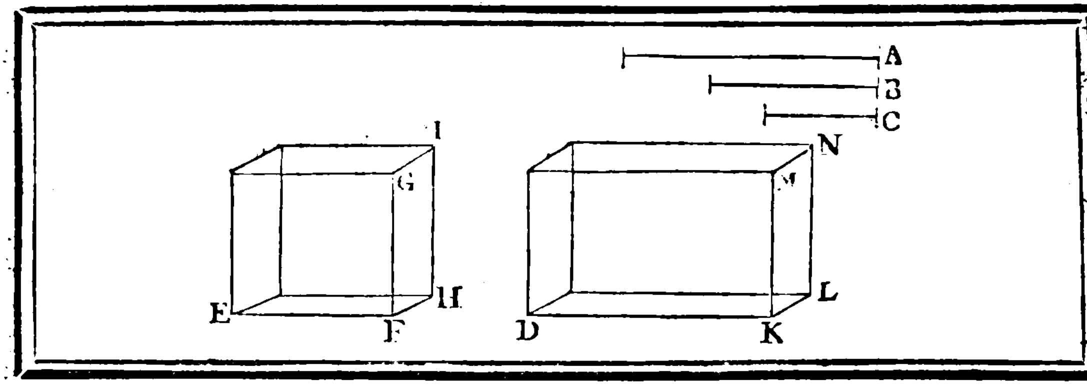
14. Le reste savoir le □ sur GF, sera = au □ sur KM. Ax. 3. L. 1.
15. Partant GF = KM. (*Corol.* 3. *de la Prop.* 46. *L.* 1.).
Enfin puisque dans les deux △ AGF & HKM les trois cotés AF, AG & FG sont = aux cotés HK, HM, & KM, chacun à chacun. (*Prép.* 1. & *Arg.* 13 & 15.).
16. l'Angle FAG ou DAE est = à l'angle KHM. Prop. 8. L. 1.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

SI aux sommets **A** & **H** de deux angles-plan égaux **BAC** & **IHL**, on a élevé des droites égales **AF** & **HK**; faisant avec les cotés respectifs des angles **BAF** & **FAC** égaux aux ∨ IHK & KHL, chacun à chacun, & qu'on abaisse de ces points F & K (de ces lignes élevées) des perpendiculaires FG & **KM** sur les Plans **BAC** & **IHL**: ces ⊥ˢ, FG & KM seront égales. (*Arg.* 15.).





PROPOSITION XXXVI. *THEOREME XXXI.*

SI trois lignes droites (A, B & C) ſont en proportion: le paralelipipéde (DN) conſtruit de ces trois lignes, ſera égal au paralelipipéde équiangle (EI) conſtruit avec la moyenne (B).

Hypothese.

I. Les trois droites A, B & C ſont en proportion c: a: d: A : B = B : C.

II. Le ▱ D N, eſt conſtruit de ces trois lignes c: a: d: DK = A, MK = B, & KL = C.

III. Le ▱ équiangle E I, eſt conſtruit de la moyenne B, c: a: d: EF = FG = FH = B.

These.

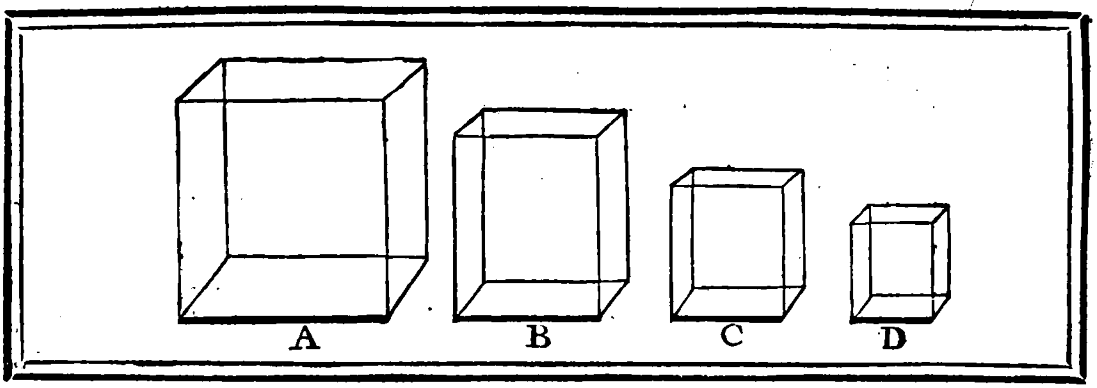
Le ▱ E I eſt = au ▱ D N.

Demonstration.

PUiſque DK : EF = EF ou FH : KL. (*Hyp.* 2.)
Et que ∀ plan EFH eſt = ∀ plan DKL. (*Hyp.* 3.).

1. Le Pgr. DL, baze du ▱ DN eſt = au Pgr. EH, baze du ▱ EI. Prop. 14. L. 5.
De plus les ∀ plan GFE & GFH, compris de l'élevée FG, & des cotés EF & FH, étant égaux aux ∀ plan MKD & MKL, compris de l'élevée KM & de DK & KL, chacun à chacun. (*Hyp.* 3.) & que FG eſt = KM. (*Hyp.* 2 & 3.).
2. La perpendiculaire abaiſſée du point G, ſur la baze EH, ſera égal à la perpendiculaire abaiſſée du point M, ſur la baze DL. (*Cor. de la Prop.* 35. *L.* 11.)
3. Partant le ▱ EI aura la même hauteur que le ▱ DN. Def. 4. L. 6.
Or la baze EH du ▱ EI eſt = à la baze DL du ▱ DN (*Arg.* 1.).
4. Donc le ▱ EI eſt = au ▱ DN. Prop. 31. L. 11.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXXVII. *THEOREME XXXII.*

SI quatres lignes droites (A, B, C & D) ſont proportionelles (c. a. d. que A : B = C : D) : Les paralelipipédes ſemblables & ſemblablement conſtruits ſur les deux premieres (A & B), ſeront proportionels aux paralelipipédes ſemblables & ſemblablement conſtruits ſur les deux dernières (C & D). Et ſi deux paralelipipédes ſemblables & ſemblablement poſés ſur deux lignes (A & B); ſont proportionels à deux autres paralelipipédes, auſſi ſemblables & ſemblablement poſés ſur deux autres droites (C & D) : les cotés homologues (A & B) des premiers; ſeront proportionels aux cotés homologues (C & D) des derniers.

HYPOTHESE.	THESE.
I. A : B = C : D.	▭ *A* : ▭ *B* = ▭ *C* : ▭ *D.*
II. Sur A & B on a conſtruits des ▭ ∽.	
III. Item ſur C & D.	

DEMONSTRATION.

PUiſque le ▭ A eſt ∽ ▭ B. (*Hyp.* 2.).

1\. Le ▭ ſur A : ▭ ſur B = $A^3 : B^3$ *. Prop. 33. L. 11.

2\. De même le ▭ ſur C : ▭ ſur D = $C^3 : D^3$.

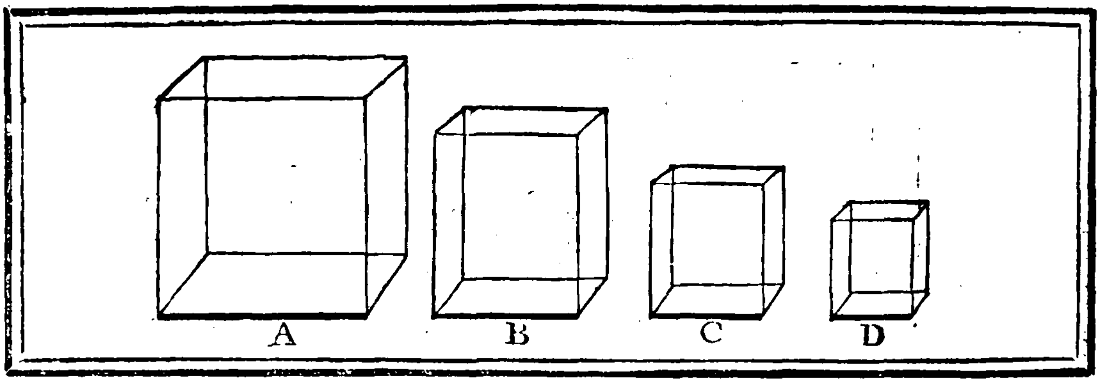
Mais la raiſon de A à B étant égale à la raiſon de C à D. (*Hyp.* 1.).

3\. Il s'enſuit que trois fois la raiſon de A à B eſt égale à trois fois la raiſon de C à D. *c. a. d.* que $A^3 : B^3 = C^3 : D^3$. Ax. *6.* L. 1.

4\. Partant le ▭ ſur A : ▭ ſur B = ▭ ſur C : ▭ ſur D. Prop. 11. L. 5.

C. Q. F. D.

* *Voyez Append.* Prop. 7. & Hyp. 1. Cor. 2.



HYPOTHESE.	THESE.
I. Le ▭ ſur A eſt ∽ au ▭ ſur B.	*A : B = C : D.*
II. Item le ▭ ſur C eſt ∽ au ▭ ſur D.	
III. Le ▭ ſur A : ▭ ſur B = ▭ ſur C : ▭ ſur D.	

II. DEMONSTRATION.

PUiſque le ▭ ſur A eſt ∽ au ▭ ſur B (*Hyp.* 1.)

1. Le ▭ ſur A : ▭ ſur B = A^3 : B^3. — Prop. 33. L. 11.

   De même le ▭ ſur C eſt ∽ au ▭ ſur D. (*Hyp.* 2.).

2. Le ▭ ſur C : ▭ D = C^3 : D^3. — Prop. 33. L. 11.

   Or le ▭ ſur A : ▭ ſur B = ▭ C : ▭ D. (*Hyp.* 3.).

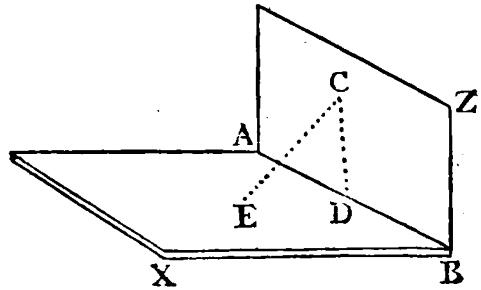
3. Donc A^3 : B^3 = C^3 : D^3. — Prop. 11. L. 5.
4. Partant A : B = C : D. — Ax. 7. L. 1.

C. Q. F. D. II.

REMARQUE.

I. *PUiſque le priſme triangulaire eſt la moitié de ſon paralelipipéde* (par la Propoſition 28. de ce Livre.) *Il s'enſuit* (par Ax. 7. L. 1.) *que la même vérité à lieu pour les priſmes triangulaires ſemblables.*

II. *On peut auſſi l'appliquer aux priſmes-polygones ſemblables; puiſqu'ils peuvent être diviſés par des Plans en priſmes triangulaire partielles*, (par la Remarque 2. de la Propoſition 34. de ce Livre).



PROPOSITION XXXVIII. *THEOREME XXXIII.*

Si deux Plans (AZ & AX) font perpendiculaires l'un à l'autre: toute ligne perpendicu'aire (CD) tirée d'un point (C) quelconque de l'un de ces Plans (AZ) à l'autre (AX) paſſera par leur commune ſection (AB).

HYPOTHESE.	THESE.
Le Plan AZ eſt ⊥ à l'autre Plan AX.	*La ligne CD abaiſſée d'un point C, ſitué dans le Plan AZ ⊥ ſur le Plan AX, paſſe par la commune ſection AB.*

DEMONSTRATION.

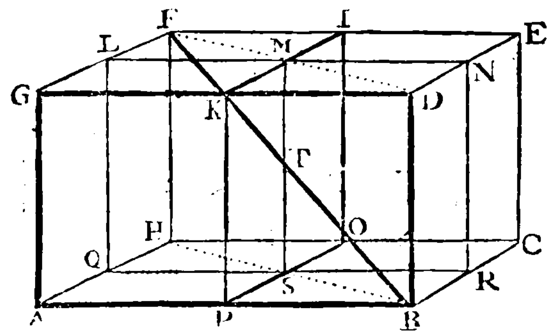
Si non.
On peut mener une ⊥ comme CE, qui ne paſſe point par la commune ſection AB.

Préparation.

Du point C, abaiſſez dans le Plan AZ ſur la ligne AB, une ⊥ CD. Prop. 12. L. 1.

Puiſque CD eſt ⊥ ſur la commune ſection AB. (*Prép.*).
1. CD ſera ⊥ ſur le Plan AX. Def. 4. L. 11.
Mais EC eſt ⊥ ſur le même Plan. (*par la Sup.*).
2. Donc on a mené d'un même point C deux perpendiculaires EC & CD au Plan AX.
3. Ce qui eſt impoſſible. Prop. 13. L. 11.
4. Partant EC n'eſt point ⊥ ſur AX.
5. Par conſequent la perpendiculaire CD abaiſſée d'un point C, quelconque du Plan AZ ſur le Plan AX (qui y eſt perpendiculaire) paſſe par leur commune ſection AB.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXXIX. *THEOREME XXXIV.*

SI dans un paralelipipéde (AE) on diviſe en deux également les cotés (GD, AB; GF, AH; FE, HC; ED & BC) des Plans oppoſés, (FA & EB, Item FC & GB) & que par les points de ſection (K, P, O, I, &, L, Q, R, N) l'on fait paſſer des Plans (IP & LR): la ligne de commune ſection (MS) de ces Plans, & le diametre (FB) du paralelipipéde (AE) ſe diviſeront mutuellement en deux au point T.

Hypotheſe.

I. Dans le ▱ AE, dont le diametre eſt FB; les cotés DG, AB, &c. ſont coupés en deux également aux points K, P, &c.

II. On a fait paſſer les Plans KO & LR par les points, K, P, O, I, & L, Q, R, N.

Theſe.

La ligne de commune ſection de ces Plans qui eſt MS, & le diametre FB, ſe diviſent mutuellement en deux au point T.

Préparation.

TIrez SB, SH, FM & MD.	Dem. 1. L. 1.

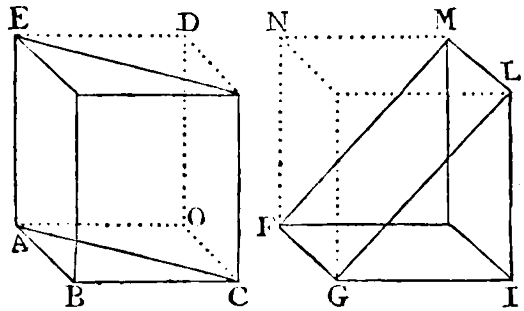
DEMONSTRATION.

LEs cotés HQ & SQ étant égaux aux cotés BR & SR. (*Hyp.* 1.) &	Prop. 34. L. 1.
Et ∀ HQS = ∀ SRB.	Prop. 29. L. 1.
1. La baze HS du △ HSQ ſera = à la baze SB du △ BSR, & ∀ HSQ = ∀ RSB.	Prop. 4. L. 1.
Or les ∀ RSH & HSQ ſont enſemble = 2 L.	Prop. 13. L. 1.
2. Partant ∀ RSH + ∀ RSB = 2 L.	Ax. 1. L. 1.
3. D'où il ſuit que HSB eſt une droite.	Prop. 14. L. 1.
4. On prouvera de même que FD eſt une droite.	
De plus BD étant = & Plle à AG, & AG = & Plle à FH,	Prop. 34. L. 1.
5. La ligne BD ſera = & Plle à FH. - - -	Prop. 9. L. 11. Ax. 1. L. 1.

6. Et

6. Et par consequent F D est = & Plle à H B. Prop. 33. L. 1.
7. D'où il suit que F B & M S, sont dans le même Plan F D B H. Prop. 7. L. 11.
Or dans les △ F M T, & T S B; les cotés F M & S B, sont égaux. (parce que le △ F M I est = & ∽ △ H S O, & que H S est = S B, par *Arg.* 1.) de plus ∠ S T B = ∠ F T M & ∠ F M T = ∠ T S B. {Prop. 15. L. 1. Prop. 29. L. 1.
8. Donc M T = T S & F T = T B (*Prop*, 26. *L.* 1.), c. a. d. que la ligne de commune section des Plans K O & L R qui est M S, & le diametre du paralelipipéde qui est F B, se coupent mutuellement en deux au point T.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XL. *THEOREME XXXV.*

SI deux prismes (FL & EC) ont la même hauteur (LI & AE), mais que la baze de l'un (comme de FL) est un paralelogramme (FI), qui est le double de la baze triangulaire (ABC) de l'autre (EC): le premier prisme (LF) sera égal au second (EC).

HYPOTHESE.

I. Dans les prismes FL *& EC; la hauteur* LI *est = à la hauteur AE.*
II. La baze du prisme LF *est un Pgr. FI, & la baze du prisme EC un △ ABC.*
III. Le Pgr. FI est le double du △ ABC.

THÈSE.

Le prisme FL *est = au prisme EC.*

Préparation.

AChevez les ▭: NI & BD.

DEMONSTRATION.

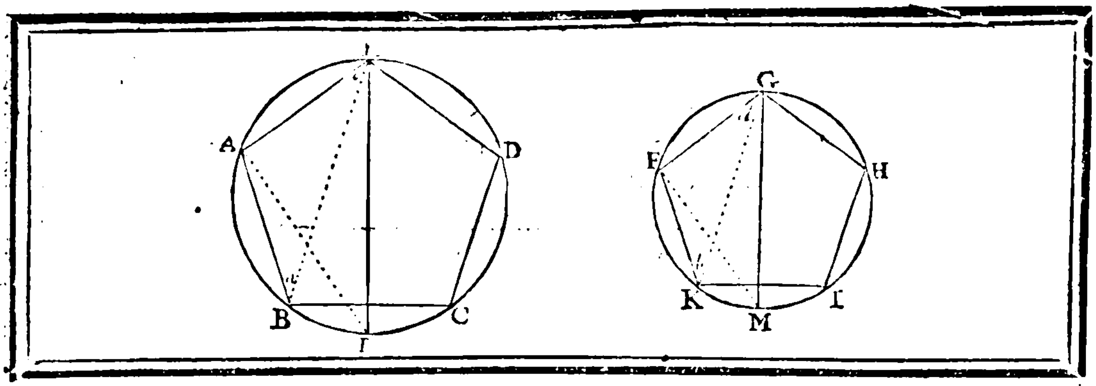
PUisque le Pgr. FI, baze du prisme FL, est le double du △ ABC; baze du prisme EC. (*Hyp.* 2 *&* 3.).
Et que le Pgr. BO est aussi le double du △ ABC. — Prop. 41. L. 1.
1. Le Pgr. FI est = au Pgr. BO.
De plus la hauteur LI étant = à la hauteur AE (*Hyp.* 1.).
2. Le ▭ BD est = au ▭ NI. — Prop. 31. L. 11.
Le prisme donné LF est la moitié du ▭ ND.
Et le prisme EC, est la moitié du ▭ BD. } - - - Prop. 28. L. 11.
3. Partant le prisme FL est = au prisme EC. — Ax. 7. L. 1.

C. Q. F. D.

LES

ELEMENS D'EUCLIDE,

LIVRE DOUZIEME.



PROPOSITION. I. THEOREME I.

Les polygones semblables (ABCDE & FGHIK) inscrits dans des cercles: sont entr'eux comme les quarrez décrits sur les diamétres (EL & GM) de ces mémes cercles.

HYPOTHESE.	THESE.
I. *Les polygones ABCDE & FGHIK sont* ∽.	*polygone ACE : polygone FIH = le* □ *sur le diamétre EL est au* □ *sur le diamétre GM ou comme diamétre* $\overline{EL}^2$ *: diamétre* $\overline{GM}^2$.*
II. *Ils sont inscrits dans des cercles.*	

Préparation.

1. Dans le ⊙ ACD, tirez AL & BE. Item le diam. EL
2. Dans le ⊙ FMH tirez les lignes homologues FM & GK. Item le diamétre GM. } Dem. 1. L. 1.

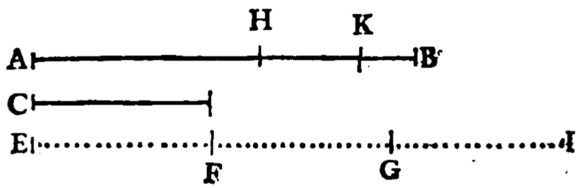
DEMONSTRATION.

Puisque les polygones ABCDE & GFKIH sont ∽ (*Hyp.* 1.) que l'angle A ou EAB est = à ∀ GFK & que AE : AB = FG : FK (*Def.* 1. *L.* 6.).

1. Le △ ABE est équiangle au △ FGK. Prop. 6. L. 6.
2. C'est pourquoi △ ABE est ∽ △ GFK, & ∀ *a* = ∀ *b*, item ∀ *c* = ∀ *d*.
   Mais ∀ ELA est = à ∀ EBA ou *a*, & ∀ GMF = ∀ GKF ou *b*. Prop. 21. L. 3.
3. Partant ∀ ELA est = à ∀ GMF. Ax. 1. L. 1.
4. De même ∀ EAL = ∀ GFM. Prop. 31. L. 3.
   Et puisque dans les deux △ ALE & GFM, les deux ∀ ELA & EAL du premier sont égaux aux deux ∀ GMF & GFM du second (*Arg.* 3. & 4.)
5. Le troisieme ∀ AEL du △ EAL sera = au troisieme ∀ FGM du △ FMG. Prop. 32. L. 1.
6. Donc EL : AE = GM : GF. Prop. 4. L. 6.
7. Et alternant EL : GM = AE : GF. Prop. 16. L. 5.
   Or AE & GF sont des cotés homologues des polygones ADB & FHK. De plus EL & GM sont les diametres des cercles ou ces polygones sont inscrits.
8. C'est pourquoi polygone ABCDE : polygone FKIHG = $\overline{EL}^2 : \overline{GM}^2$*. Prop. 22. L. 6.

C. Q. F. D.

* *Voyez Ap. Prop.* 7.



LEMME.

SI deux grandeurs (AB & C) sont inégales, & qu'on retranche de la plus grande (AB) plus que la moitié (savoir AH), & du reste (HB) encore plus que la moitié (savoir HK), & qu'on continue ainsi de suite: on parviendra à avoir un reste (KB), qui sera plus petit que la moindre grandeur C.

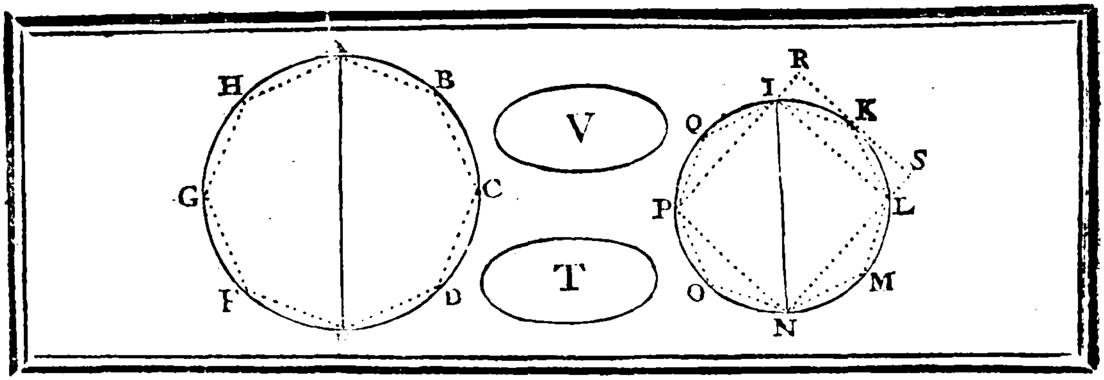
Préparation.

1. PRenez un multiple EI de la moindre C. qui surpasse AB, & qui soit > 2 C. Dem. 1. L. 5.
2. Retranchez de AB, la partie HA > ½ AB. Dem. 2. L. 5.
3. Du reste HB, retranchez HK > ½ HB.
4. Continuez à retrancher plus de la moitié de ces restes consecutifs, jusqu'à ce que le nombre de fois soit égal au nombre de fois que C est contenu dans son multiple EI. Dem. 2. L. 5.

DEMONSTRATION.

LA grandeur EI est un multiple plus grand que deux fois la moindre grandeur C. (*Prép.* 1.).
Si donc on en retranche une grandeur GI = C.
1. Le reste savoir EG sera > que la moitié de EI.
Or EI est > AB. (*Prép.* 1.).
2. Partant la moitié de EI est > que la moitié de AB. Prop. 19. L. 5.
3. Donc GE sera beaucoup > que la moitié de AB.
Cependant HB est < que la moitié de AB. (*Prép.* 2.).
4. Donc GE est à plus forte raison encore > HB.
5. C'est pourquoi EF, moitié de EG, est > que la moitié de HB.
Et KB est < ½ HB. (*Prép.* 3.).
6. Partant EF est encore beaucoup > KB.
Et comme on peut continuer ce même raisonnement jusqu'à ce qu'on parvienne à une partie (EF) du multiple de la grandeur C, qui soit égale à C. (*Prép.* 4.).
7. Il s'enfuit que la grandeur C sera > que la partie restante (KB) de la plus grande AB.

C. Q. F. D.



PROPOSITION II. *THEOREME II.*

LEs cercles (AFD & ILP), font entr'eux comme les quarrez décrits ſur leurs diamétres (AE & IN).

Hypothese.

Dans les cercles AFD & ILP on a tiré les diamétres AE & IN.

These.

$\odot AFD : \odot ILP = \overline{AE}^2 : \overline{IN}^2$.

Demonstration.

SI non.

$\overline{AE}^2$ eſt à $\overline{IN}^2$ comme le $\odot$ AFD eſt à une grandeur T (qui eſt $<$ ou $>$ que le $\odot$ ILP.)

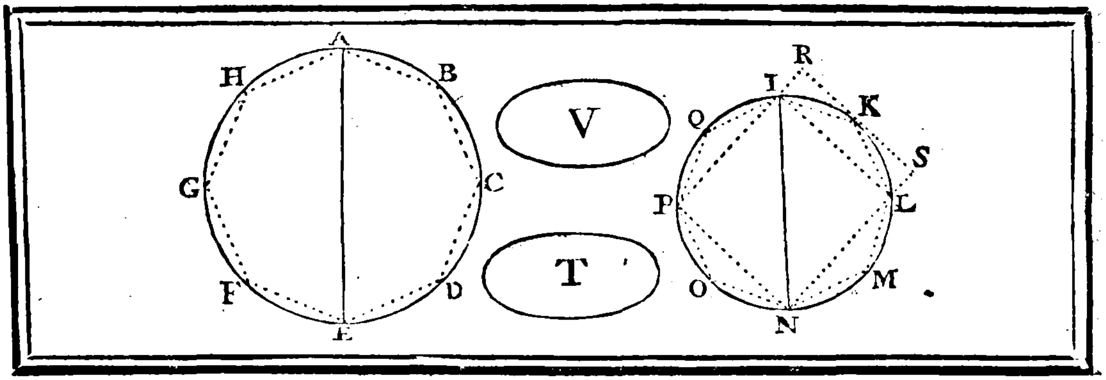
I. Suppoſition.

Soit T $<$ $\odot$ ILP de la grandeur V. *c. a. d.* T $+$ V $=$ $\odot$ ILP.

I. Préparation.

1. DAns le $\odot$ LIP décrivez le $\square$ ILNP. — Prop. 6. L. 4.
2. Diviſez les arcs IL, LN, NP, & PI en deux, aux points K, M, O & Q. — Prop. 30. L. 3.
3. Tirez les lignes IK, KL, LM, MN, NO, OP, PQ & QI. — Dem. 1. L. 1.
4. Par le point K, tirez SR Plle à LI. — Prop. 31. L. 1.
5. Prolongez NL & PI, juſqu'en R & S, qui formeront le Rgle SRIL.
6. Inſcrivez dans le $\odot$ ADF un polygone $\backsim$ au polygone du $\odot$ ILP.

 Puiſque



PUisque le quarré circonscrit au cercle ILP est plus grand que ce cercle même. Ax. 8. L. 1.

1. La moitié de ce quarré sera $>$ que la moitié du ⊙ ILP. Prop. 19. L. 5.
Mais le quarré inscrit ILNP est $=$ à la moitié du quarré circonscrit *.
2. Donc le □ LIPN est $>$ que la moitié du ⊙ ILP. Ax. 1. L. 1.
Le Rgle SI est $>$ que le segment LKI. (*Prép.* 5. & *Ax.* 8. *L.* 1.).
3. Partant la moitié du Rgle SI est $>$ la moitié du segment LKI. Prop. 19 L. 5.
Le △ LKI est $=$ à la moitié du Rgle S I. Prop. 41. L. 1.
4. Donc le △ LKI est $>$ que la moitié du segment LKI. Prop. 19. L. 5.
5. On prouvera de même que tous les △ LMN, NOP, &c. sont chacun plus grand que la moitié du segment dans lesquels ils sont placés.
6. C'est pourquoi la somme de tous ces triangles sera plus grand que la somme de la moitié de tous les segments.
Si on continuoit à diviser les segments KI, IL &c. de même que les segments provenants de ces divisions.
On prouveroit de même.
7. Que les triangles provenants des droites qu'on tireroit dans ces segments, sont ensemble plus grands, que la moitié des segments dans lesquels ces triangles insistent.
Si donc on retranche du cercle ILP, plus que la moitié à savoir le □ ILNP, & que des segmens restant (LKI, IQP, &c.), on retranche encore plus que la moitié, & ainsi de suite.
8. On parviendra à avoir pour reste des segmens dont la somme sera moindre que V. { Lemme de
Or le ⊙ ILP est $=$ T $+$ V. (*par la* 1. *Sup.*). Prop. 2. L. 12. }
Retranchant donc du ⊙ ILP ces segments LKI, &c.
Et de T $+$ V la grandeur V, (qui est plus grand que ces segments).
9. Le reste savoir le polygone IKLMNOPQ sera $>$ T. Ax. 5. L. 1.
Or le polygone ADFK : polygone ILOQ $=$ □ sur AE : □ sur IN. Prop. 1. L. 12.

Et

* *Ce qui est évident puisque le coté de quarré circonscrit est égal au diamétre, & que le quarré du diamétre est* $=$ □ *LI* $+$ □ *LN* (*Prop.* 47. *L.* 1.) *mais IL est* $=$ *à LN.* (*Def.* 30. *L.* 1.) *partant le* □ *circonscrit est* $=$ □ *LI* $+$ □ *LI* $=$ 2 □ *LI.*

Et le □ fur AE : □ fur IN = ⊙ ACEG : T. (*Sup.*).
10. Donc le polygone ADFH : polygone ILOQ = ⊙ ACEG : T. Prop. 11. L. 5.
Mais le polygone ADFH eft < ⊙ ACEG. Ax. 8. L. 1.
11. Partant le polygone ILOQ eft < T. Prop. 14. L. 5.
Or le polygone ILOQ eft > que T. (*Arg.* 9.).
12. Donc T feroit > & < que le polygone ILOQ. (*Arg.* 9 & 11.)
13. Ce qui eft impoffible.
14. Donc T n'eft pas < que le cercle ILP.
15. D'où il fuit qu'il n'eft pas poffible que le quarré du diamètre (AE) d'un cercle (ACEG), foit au quarré du diamètre (IN) d'un autre cercle (ILP), comme le premier cercle (ACEG) à une grandeur moindre que le fecond cercle (ILP.) *

II. Suppofition.

Soit l'efpace ou grandeur T > que le cercle ILP.

II. Préparation.

PRenez une grandeur ou efpace V, de manière que
T : ⊙ ACEG = ⊙ ILP : V.

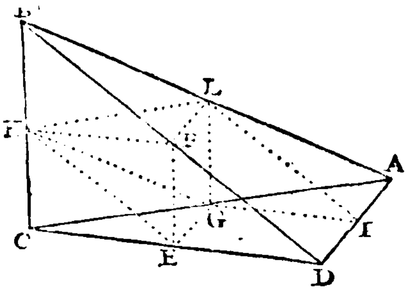
PUifque le □ fur AE : □ fur IN = ⊙ ACEG : T.
16. On aura *invert.* T : ⊙ ACEG = □ fur IN : □ fur AE. { Prop. 4. L. 5. Corol.
Or T : ⊙ ACEG = ⊙ ILP : V. (*II. Prép.*).
De plus T eft > ⊙ ILP. (*II. Sup.*).
17. Partant le ⊙ ACEG eft auffi > V. Prop. 14. L. 5.
De plus T : ⊙ ACEG = □ fur IN : □ fur AE (*Arg.* 16.).
Et T : ⊙ ACEG = ⊙ ILP : V. (*II. Prép.*).
18. Donc le □ fur IN : □ fur AE = ⊙ ILP : V. Prop. 11. L. 5.
Mais V < ⊙ ACEG. (*Arg.* 17.).
Et il eft demontré (*Arg.* 15.) qu'il n'eft pas poffible que le quarré du diamètre (IN) d'un cercle (ILP,) foit au quarré du diamètre d'un autre cercle (ACEG); comme ce premier cercle (ILP) à une grandeur moindre que le fecond (ACEG).
19. Partant V n'eft pas < que le cercle ILP.
20. Donc T n'eft pas > que le ⊙ ILP.
l'Efpace ou grandeur T n'étant donc ni < ni > que le cercle ILP. (*Arg.* 14 & 19.).
21. T fera égal à ce cercle ILP.
22. Par confequent le ⊙ ACEG : ⊙ ILP = □ fur AE : □ fur IN Prop. 7. L. 5.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

LEs cercles font entr'eux comme les polygones femblables qui y font décrits. (*Prop.* 1. *L.* 12. & *Prop.* 11. *L.* 5.)

* *Il eft aifé à remarquer que la même conclufion à lieu, lorfqu'on fuppoferoit que le ⊙ ILP eft le premier, de même que fon diamètre IN; & le ⊙ ACEG avec fon diamètre AE le fecond.*



PROPOSITION III. *THEOREME III.*

Toute pyramide (ABCD) ayant pour baze un triangle (ACD): peut être divisée * en deux prismes égaux & semblables, (IDEFLG & GLFHCE) & en deux pyramides (LGIA & LFHB) semblables & égales entr'elles, & semblables à la grande pyramide; de plus les deux prismes pris ensemble seront plus grands que la moitié de toute la pyramide (ABCD).

Hypothese.

ABCD est une pyramide dont la baze ADC est un △.

These.

I. La partie du corps IDEFLG est un prisme = & ∽ à la partie GLFECH.

II. La partie ALGI est une pyramide = & ∽ à la partie BLFH.

III. Ces pyramides ALGI & BLFH sont ∽ à la pyramide ABCD.

IV. Les prismes IDEFLG & GLFCH sont ensemble > que la moitié de la pyramide ABCD.

I. Préparation.

1. Coupez tous les cotés de la pyramide ABCD en deux également aux points L, F, H, E, G & I. — Prop. 10. L. 1.
2. Tirez les lignes LF, FH, FE, GE, GI, & IL, item LG & LH. — Dem. 1. L. 1.

Demonstration.

Puisque dans le △ BCD les cotés BD & BC sont divisés en deux aux points F & H. (*Prép.* 1.)

1. BH : HC = BF : DF. — Prop. 19. L. 5.
2. Partant FH est Plle à DC. — Prop. 2. L. 6.
3. De même FE est Plle à BC.
4. Donc FECH est un Pgr. — Def. 35. L. 1.

5. On

* *En coupant le Corps par des Plans.*

5. On prouvera de même que LFEG & LGCH font des Pgr.
Et comme FH & HL font Plles à EC & GC. (*Arg.* 2 & 5).
6. Les Plans passant par LFH & ECG feront Plle. Prop. 15. L. 11.
7. Donc LGECHF sera un prisme. } Def. 13. L. 11.
8. Pareillement LFEDIG sera aussi un prisme.
Or ces deux prismes ont la même hauteur LG & le Pgr. GIDE qui est la baze du prisme LD est le double du △ CEG, baze du prisme LC. Prop. 41. L. 1.
9. Donc le prisme LD est égal au prisme LC. Prop. 40. L. 11.

C. Q. F. D. I.

Puisque le coté BD est coupé en deux en F, que FE & DE sont Plles BC & FH. (*Prép.* 1. & *Arg.* 2 & 3.).
10. Le △ FDE est = & ∽ △ BFH. { Prop. 26. L. 1. Prop. 7. L. 6.
11. Les △ FED & ILG sont aussi égaux. Def. 13. L. 11.
12. Donc △ BFH = △ LIG. Ax. 1. L. 1.
Et comme les autres cotés de la pyramide ABCD sont divisés en deux. Il est aisé de prouver que
13. △ BLF est = à △ LAI, △ BLH = △ AGL & △ LFH = △ AGI.
14. D'où il suit que ces parties BLHF & ALGI sont des pyramides, qui sont ∽ & égaux. Def. 10. L. 11.

C. Q. F. D. II.

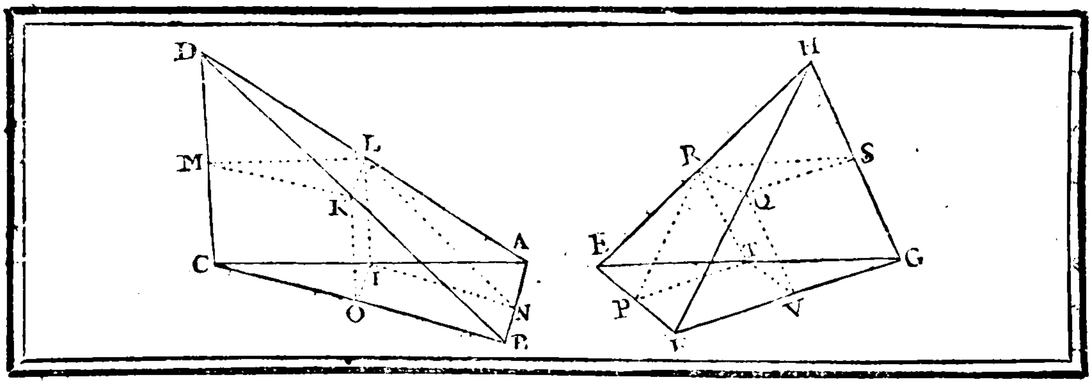
La ligne FH, est Plle à DC. (*Arg.* 2.).
15. Donc △ BFH est ∽ △ BDC. Prop. 2. L. 6.
De même tous les triangles qui forment les pyramides BLHF & ALGI sont ∽ à tous les triangles de la grande ABCD.
16. Donc les pyramides BLHF & ALGI sont ∽ à la pyramide ABCD.

C. Q. F. D. III.

II. Préparation.

Tirez GH & EH.
La ligne BH étant = à HC (*I. Prép.* 1.). FH = EC (*Arg.* 4.) & ∀ ECH = ∀ FHB (*Prop.* 29. *L.* 1.)
17. Partant le △ ECH est = au △ BFH. Prop. 4. L. 1.
18. Item les △ HGC & GEC sont égaux & ∽ aux △ BLH & LHF, { Prop. 4. L. 1. Def. 13. L. 11.
19. Donc la pyramide LFHB est = à la pyramide HGEC. Def. 10. L. 11.
Or la pyramide ECHG n'est qu'une partie du prisme ECHFLG.
20. Donc le prisme ECHFLG est > que la pyramide ECHG. Ax. 8. L. 1.
21. Partant ce prisme ECHFLG est aussi > que la pyramide LFHB. Prop. 7. L. 5.
Le prisme LGECHF est = au prisme EFLGID, & la pyramide LFHB = à la pyramide AIGL. (*Arg.* 9 & 14.).
22. Donc le prisme EFLGID est aussi > pyramide AIGL.
23. Les deux prismes ECHFLG & EFLGID pris ensemble seront donc > que les deux pyramides BLFH & LAIG prises ensemble. Ax. 4. L. 1.
24. D'où il suit que les deux prismes ECHFLG & EFLGID pris ensemble sont donc > que la moitié de la pyramide donnée ABCD.

C. Q. F. D. IV.



PROPOSITION IV. *THEOREME IV.*

S'Il y a deux pyramides (ABCD & EFGH) de même hauteur ayant des bazes (ABC & EFG) triangulaires; & que chacune d'elles soit divisée en deux pyramides égales & semblables entr'elles, & semblables à leur tout, (savoir les pyramides DLKM & ANIL, pour la pyramide ABCD; & HRQP, & REPT pour la pyramide EFGH), & en deux prismes égaux (savoir LB & LC pour ABCD; & RF & RG pour EFGH) & que semblablement les quatres pyramides (LDKM, LINA, RQSH, & RTPE) provenues de cette premiere division soyent de rechef divisées; & qu'on continue cette division ainsi de suite: la baze (ABC) de l'une des pyramides données (ABCD) sera à la baze (EFG) de l'autre pyramide (EFGH) comme la somme de tous les prismes qui sont contenus dans la premiere pyramide (ABCD) est à la somme de tous les prismes qui sont contenus dans la seconde (EFGH) étant égaux en multitude.

Hypothese.

I. Les pyramides triangulaires ABCD & EFGH, ont des hauteurs égales.

II. Elles sont coupées chacune en deux prismes égaux LB *&* LC; *item RF & RG; & en deux pyramides égales & semblables entr'elles & semblable aux grandes pyramides dont elles font partie.*

III. Ces pyramides provenues LD *MK, LNIA, RTPE & RQSH, sont supposées être divisées de même que les grandes; & ainsi de suite.*

These.

La somme de tous les prismes contenus dans la pyramide ABCD est à la somme de ceux qui sont dans la pyramide EFGH etant égaux en multitude; comme la baze ABC de la pyramide ABCD est à la baze EFG, de la pyramide EFGH.

Demonstration.

Puisque les pyramides ABCD & EFGH ont des hauteurs égales & que les prismes LB, LC, RF & RG ont chacun la moitié de cette hauteur. (*Hyp.* 1. & *Prop.* 3. *L.* 12.).

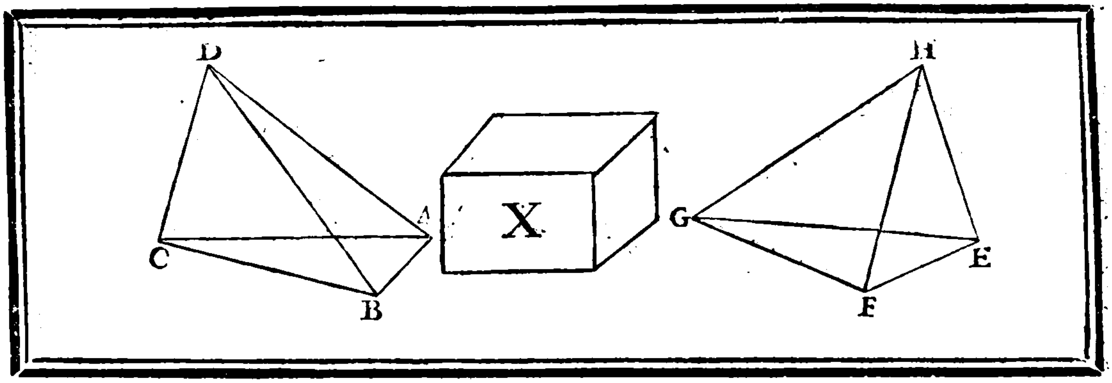
1. Ces prismes LB, LC, RF & RG ont la même hauteur. Ax. 7. L. 11.

Les lignes BC & FG sont coupées en deux aux points O, & V. Prop. 3. L. 12.

2. Donc

2. Donc CB : CO = GF : GV. Prop. 19. L. 5. Prop. 16. L. 5.
3. Partant △ ABC : △ IOC = △ EFG : △ TVG. Prop. 22. L. 6.
4. Et Alt. △ ABC : △ EFG = △ IOC : △ TVG. Prop. 16. L. 5.
5. De plus baze IOC : baze TVG = prisme LKMCOI : pr. RQSGVT. Co. III Rem. de Prop. 34. L. 11.
6. Et prisme LKOBNI : prisme LKMCOI = prisme RQVFPT : prisme RQSGVT, (car ils ont la même hauteur, (*Arg.* 1.) & ils sont égaux deux à deux (*Hyp.* II.). Prop. 7. L. 5.
7. Partant prisme LB + prisme LC : prisme LC = prisme RF + prisme RG : prisme RG. Prop. 18. L. 5.
8. Et Alt. prisme LB + prisme LC : prisme RF + prisme RG = prisme LC : prisme RG. Prop. 16. L. 5.
   Mais prisme LC : prisme RG = baze IOC : baze TVG. (*Arg.* 5.)
   Et baze IOC : baze TVG = baze ABC : baze EFG (*Arg.* 4.).
9. Donc le prisme LB + pr. LC : pr. RF + pr. RG = baze ABC : baze EFG. Prop. 11. L. 5.
   Si les pyramides restans LKMD & LINA, item RQSH & EPTR sont divisées de la même manière que les pyramides ABCD & EFGH, on prouvera de même que
10. Les quatres prismès provenant des premieres pyramides LKMD & ANIL auront la même raison aux quatres prismes provenant des dernières RQSH & EPTR, que les bazes LKM & ANI ont aux bazes RQS & EPT. (*par Hyp. III. & Arg.* 9.).
   Et dans la précedente il est demontré que les bazes LKM & ANI, sont chacun = IOC, item RQS & EPT chacun = TVG.
   De plus △ ABC : △ EFG = △ IOC : △ TVG, (*Arg.* 4.).
11. C'est pourquoi la somme de tous les prismes contenus dans la pyramide de ABC est à la somme de tous les prismes contenus dans la pyramide EFGH comme la baze ABC est à la baze EFG. Prop. 12. L. 5.

C. Q. F. D.



PROPOSITION V. THEOREME V.

LEs pyramides (ABCD & EFGH) dont les bazes (ABC & EFG) sont des triangles, & qui ont la même hauteur: sont entr'eux comme leurs bazes (ABC & EFG).

HYPOTHESE.

I. Les pyramides ABCD & EFGH ont pour bazes les △ ABC & EFG.

II. Ils ont même hauteur.

THESE.

Pyramide ABCD : pyramide EFGH = baze ABC : baze EFG.

DEMONSTRATION.

SI non.

Pyramide ABCD : pyramide EFGH > baze ABC : baze EFG.

Préparation.

1. PRenez un solide X qui soit < que la pyramide ABCD, de façon que X : pyramide EFGH = baze ABC : baze EFG.
2. Divisez les pyramides ABCD & EFGH, selon la Prop. 3. L. 12.

PUisque les deux prismes provenus de la premiere division sont > que la moitié de la pyramide ABCD; & que les quatres suivants provenus de la seconde division sont encore > que les moitiés des pyramides de la première division, & qu'on peut le continuer ainsi de suite (*par la Prop.* 3. *L.* 11.).

1. Il est évident que la somme de tous les prismes contenus dans la pyramide ABCD sera plus grand que le solide X qui a été pris moindre que la pyramide ABCD. {Lemme. de Prop. 2. L. 12.

Or

Or tous les prismes contenus dans la pyramide ABCD, sont à tous les prismes contenus dans la pyramide EFGH, comme la baze ABC est à la baze EFG. Prop. 4. L. 12.
Et le solide X : pyramide EFGH = baze ABC : baze EFG. (*Prép.* 1.)
2. Partant tous les prismes contenus dans la pyramide ABCD sont à tous les prismes contenus dans la pyramide EFGH, comme le solide X est à la pyramide EFGH. Prop. 11. L. 5.
Or tous les prismes contenus dans la pyramide ABCD sont plus grand que le solide X. (*Arg.* 1.).
3. Donc tous les prismes contenus dans la pyramide EFGH sont plus grand que la pyramide EFGH même. Prop. 14. L. 5.
4. Ce qui est impossible. Ax. 8. L. 1.
5. Partant aucun solide (comme X) qui est moindre que la pyramide ABCD, ne peut avoir la même raison à la pyramide EFGH, qu'a la baze ABC à la baze EFG.
Et comme la même Demonstration a lieu pour tout autre solide plus grand que la pyramide ABCD.
6. Il s'ensuit que la pyramide ABCD : pyramide EFGH = baze ABC : baze EFG.

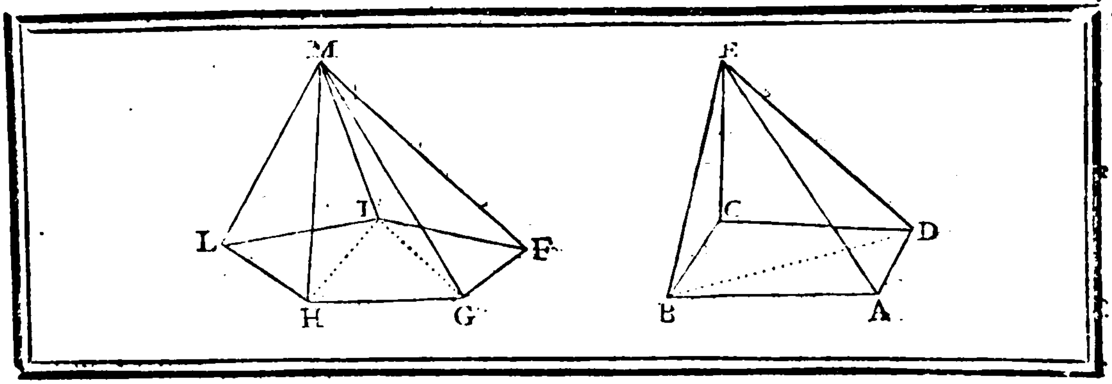
C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

LEs pyramides qui ont même hauteur, & pour bazes des triangles égaux : sont égales (*Prop.* 14 & 16. *L.* 5.).

COROLLAIRE II.

LEs pyramides égales qui ont des bazes triangulaires égales : ont la même hauteur.



PROPOSITION VI. *THEOREME VI.*

LEs pyramides (FGLIM & ABCDE) dont les bazes (FGHLI & ABCD) font des polygones & qui ont méme hauteur: font entr'eux comme leurs bazes.

HYPOTHESE.

I. Les pyramides FGHLI & ABCD, ont pour bazes des polygones.

II. Ils ont méme hauteur.

THESE.

Pyramide MFGHLI : pyramide ABCDE = baze FILHG : baze ABCD.

Préparation:

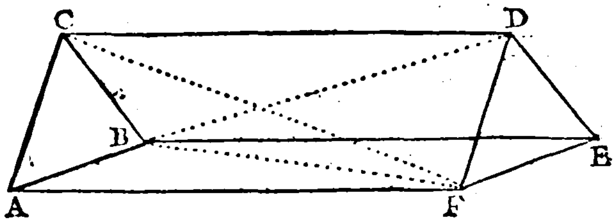
1. Divisez les bazes FILHG & ABCD en triangles par les lignes GI & IH, item DB.
2. Supposé qu'il passe des Plans par ces lignes, & par les sommets des pyramides ou ces lignes de division se trouvent, qui diviseront chacune de ces pyramides en autant de pyramides partielles que chaque baze contient de triangles.

DEMONSTRATION.

PUisque les pyramides triangulaires ILHM & ABDE ont même hauteur, (*Hyp. II. & Prép. 2.*).

1. La pyramide IHLM : pyramide ABDE = baze HIL : baze ABD. } Prop. 5. L. 12.
2. De même pyr. GIHM : pyramide ABDE = baze HIG : baze ABD. }
3. Partant pyramide IHLM + pyramide GIHM : pyramide ABDE = baze HIL + baze HIG : baze ABD. Prop. 24. L. 5.
4. De plus pyramide FIGM : pyramide ABDE = baze FIG : baze ABD. Prop. 5. L. 12.
5. Donc pyramide IHLM + pyram. GIHM + pyram. FIGM : pyram. ABDE = baze HIL + baze HIG + baze FIG : baze ABD. Prop. 24. L. 5.
   Mais pyramide IHLM + pyramide GIHM + pyramide FIGM font = à la pyramide MFGHLI, & baze HIL + baze HIG + baze FIG = baze FILHG. } Ax. 1. L. 2.
6. Partant pyramide MFGHIL : pyramide ABDE = baze FILHG : baze ABD. Prop. 7. L. 5.
   On prouvera de même que
7. Pyramide MFGHLI : pyramide BDCE = baze FILHG : baze BDC.
8. Donc pyramide MFGHLI : pyramide ABCDE = baze FILHG : baze ADCB. Prop. 24. L..

C. Q. F. D.



PROPOSITION VII. *THEOREME VII.*

Tout prisme triangulaire (ADE): peut être divisé (par des Plans passant par les △ BCF & BDF) en trois pyramides égales (ACBF, BDEF & DCBF) ayant des bazes triangulaires.

Hypothese.	These.
Le prisme donné AE est triangulaire.	*Le prisme ADE peut être divisé en trois pyramides triangulaires égales ACBF, BDEF & DCBF.*

Préparation.

1. Tirez dans le Pgr DA une diagonale CF à volonté.
2. Du point F & dans le Pgr. AE tirez la diagonale BF.
3. Du point B & dans le Pgr. CE tirez la diagonale BD. } Dem. 1. L. 1.
4. Par CF & BF faites passer un Plan, item par BF & BD.

Demonstration.

Puisque AD est un Pgr coupé par la diagonale CF. (*Prép.* 1.).

1. Le △ ACF baze de la pyramide ABCF est = au △ CFD baze de la pyramide BCFD. — Prop. 34. L. 1.

Or ces pyramides ABCF & BCFD, ont leurs sommets au point B.

2. Donc la pyramide ABCF est = à la pyramide BCFD. — Prop. 5. L. 12. Corol. 1.

De même le Pgr EC est coupé par sa diagonale BD. (*Prép.* 3.).

3. Donc le △ CBD baze de la pyramide BCFD est = au △ BDE, baze de la pyramide DEFB. — Prop. 34. L. 1.

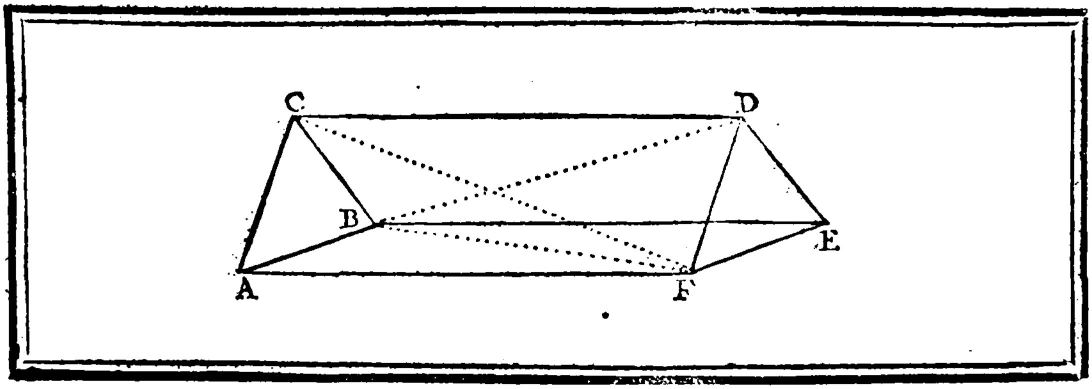
Et ces pyramide BCFB, ont leurs sommets au point F.

4. Partant la pyramide BCDF est = à la pyramide BDEF. — Prop. 5. L. 12. Corol. 1.

Or la pyramide ABCF est aussi = à la pyramide BCDF (*Arg.* 2).

5. Donc les pyramides ABCF, BCDF & BDEF sont égaux. — Ax. 1. L. 1.

6. Partant



6. Partant le prisme triangulaire (A D E) peut être divisé en trois pyramides triangulaires égaux.

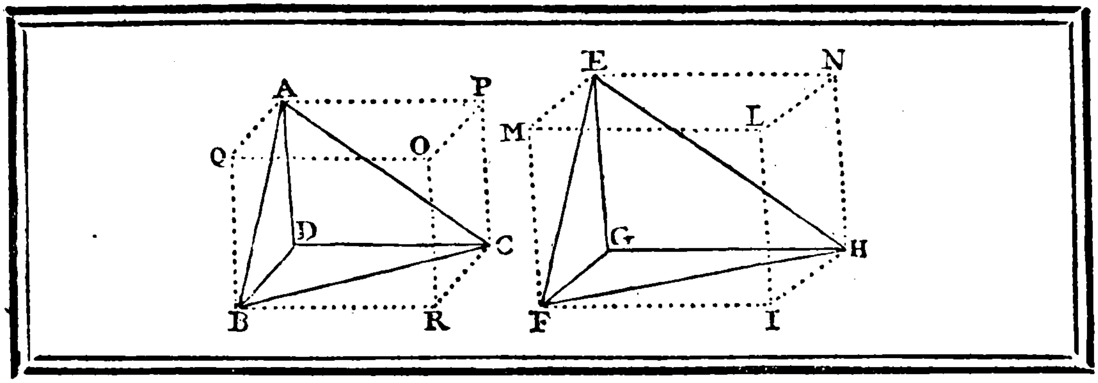
C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

LE prisme triangulaire est le triple d'une pyramide qui a la même baze & la même hauteur.

COROLLAIRE II.

LA pyramide dont la baze est un polygone est le tiers d'un prisme qui a la même baze & la même hauteur. (Puisqu'elle peut être divisée en autant de pyramides partielles que le polygone contient de triangles.).



PROPOSITION VIII. *THEOREME VIII.*

LEs pyramides femblables (ABCD & EFGH) ayant des bazes triangulaires (BDC & FGH): font entr'elles en raifon triplée de leurs cotés homologues:

HYPOTHESE.
Les pyramides ∽ ABCD & EFGH, ont des bazes triangulaires DBC & GFH, dont les cotés homologues font BD & FG, &c.

THESE.
La pyramide ABCD eft à la pyramide EFGH, en raifon triplée de BD à FG, c. a. d. comme $\overline{DB}^3 : \overline{FG}^3$.

Préparation.

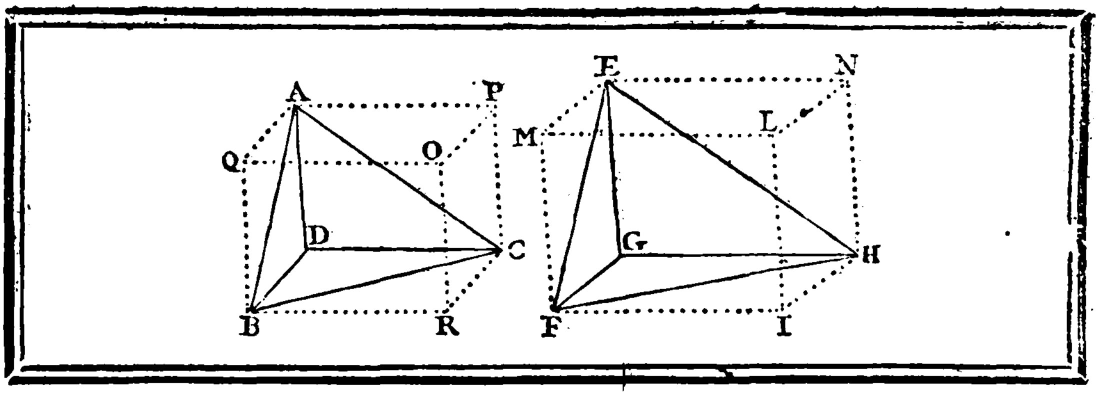
1. PRolongez les Plans des △ BDC, ABD & ADC; & achevez les Pgr. DR, DQ & DP. Prop. 31. L. 1.
2. Tirez PO & OQ Plle à AQ & AP, & prolongez les jufqu'en O. Prop. 31. L. 1.
3. Joignez les points O & R; & QC fera un ⊟ qui aura la même hauteur que la pyramide ABCD.
4. Conftuifez de la même manière le ⊟ MH.
5. Enfin joignez les points Q & P, item M & N, homologues aux points B & C; item F & H.

DEMONSTRATION.

PUifque les pyramides ABCD & EFGH font ∽. (*Hyp.*)

1. Tous les Plans triangulaire qui forment la pyramide ABCD font ∽ à tous les Plans triangulaire qui forment la pyramide EFGH, chacun à chacun. Def. 9. L. 11.
2. Partant AD : BD = EG : GF, &c. Def. 1. L. 6.
3. Et ∀ plan ADB eft = à ∀ plan EGF. Prop. 5. L 6.
4. Donc le Pgr. DQ eft ∽ au Pgr. MG. - - - Def. 1. L. 6.
5. De la même manière les Pgr. DR, & GI item DP, & GN font ∽; de même que leurs oppofés AO, EL & QR, MI. Prop. 24. L. 11.

6. Par-

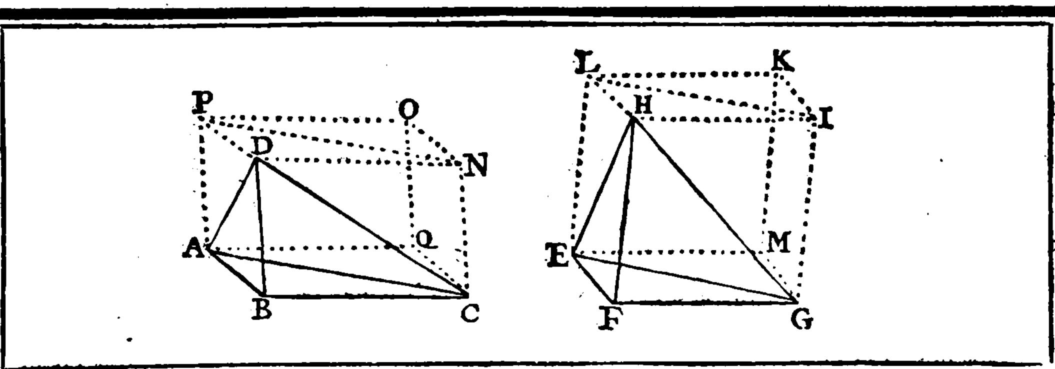


6. Partant AR & EI font des ▭ ∽. Def. 9. L. 11.
7. Donc ▭ AR : ▭ EI = $\overline{DB}^3 : \overline{FG}^3$. Prop. 33. L. 11.
Et puiſque les lignes QP & BC, item MN & FH font des diagonales ſemblablement tirés dans les Pgr. égaux & Plle OA & RD; item EL & IG, (*Prép.* 5.).
8. Les parties BQAPCD & FMENHG feront des priſmes ∽ : & chacun égal à la moitié de ſon ▭. { Def. 9. L. 11. Prop. 28. L. 11.
9. Partant le priſme BPQC : priſme FNMH = $\overline{BD}^3 : \overline{FG}^3$. { Prop. 15. L. 5. Prop. 34. L. 11. Rem. 1.
Or la pyramide ABDC eſt le tiers du priſme BQPC, & la pyramide EFGH, le tiers du priſme FMNH. { Prop. 7. L. 12. Cor. 1.
10. Donc la pyramide ABCD : pyramide EFGH = $\overline{BD}^3 : \overline{FG}^3$. Prop. 15. L. 5.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE

LEs pyramides ſemblables dont les bazes ſont des polygones ſont entr'elles en raiſon triplée de leurs cotés homologues, (parce qu'elles peuvent être diviſées en des pyramides partielles, triangulaires, & ſemblables deux à deux).



PROPOSITION IX. *THEOREME IX.*

DAns les pyramides triangulaires égales (ABCD & EFGH): les bazes (ABC & EFG) & les hauteurs (BD & FH) font reciproquement proportionelles, (*c. a. d.* baze ABC : baze EFG = hauteur FH : hauteur BD.). Et les pyramides triangulaires (ABCD & EFGH) dont les bazes (ABC & EFG) & les hauteurs (BD & FH) font reciproquement proportionelles: font égales.

HYPOTHESE.	THESE.
I. Les pyramides ABCD & EFGH font triangulaires.	*Baze ABC : baze EFG = hauteur FH : hauteur BD.*
II. La pyramide ABCD est = à la pyramide EFGH.	

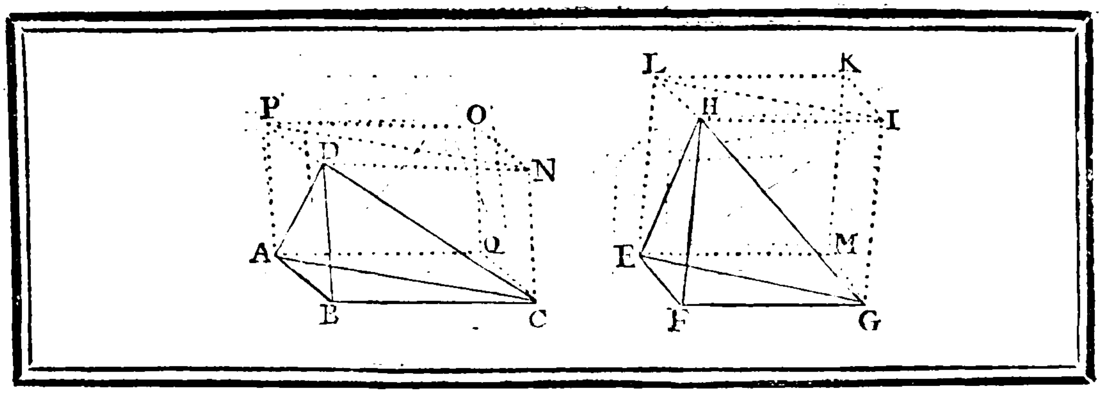
Préparation.

AChevez les ▱s BO & FK ayant même hauteur avec les pyramides ABCD & EFGH; de même que dans la préparation de la précedente, comme aussi les prismes BAPNC & FELIG.

I. DEMONSTRATION.

PUisque les prismes PNB & LIF, ont la même baze & la même hauteur que les pyramides données ABCD & EFGH. (*Prép.*).

1. Chaque prisme fera le triple de sa pyramide (*c. a. d.* le prisme PNB le triple de la pyramide ABCD, & le prisme LIF le triple de la pyramide EFGH). { Prop. 7. L. 12. Cor. 1.
2. Partant le prisme PNB est = au prisme LIF. Ax. 6. L. 1.
Or le ▱ BO est le double du prisme PNB, & le ▱ FK le double prisme LIF. Prop. 28. L 11.
3. Donc le ▱ BO est = au ▱ FK. Ax. 6. L 1.
Mais les ▱s égaux (BO & FK) ont leurs bazes & leurs hauteurs reciproquement proportionnelles (*c. a. d.* baze BQ : baze FM = hauteur FH : hauteur BD.) Prop. 34. L. 11.
Et ces ▱s font chacun le sextuple de leurs pyramides (*c. a. d.* que le ▱ BO est = six pyramides ABCD, & le ▱ K = six pyramides EFGH, *Arg.* 1 & 3.).



De plus la baze de la pyramide ABCD est la moitié de la baze du ▱ BO. } Prop. 41. L. 1.
Et la baze de la pyramide EFGH est la moitié de la baze du ▱ FK. }

4. Partant baze ABC : baze EFG = hauteur FH : hauteur BD. { Prop. 15. L. 5. Prop. 11. L. 5.

C. Q. F. D.

Hypothese.

I. Les pyramides ABCD & EFGH sont triangulaires.
II. Baze ABC : baze EFG = hauteur FH : hauteur BD.

These.

La pyramide triangulaire ABCD est = à la pyramide triangulaire EFGH.

II. Demonstration.

Puisque le △ ABC : △ EFG = FH : BD. (*Hyp.* 2.).
Et que Pgr. BQ est le double du △ ABC, item le Pgr. FM le double du △ EFG. Prop. 41. L. 1.

1. Il s'ensuit que Pgr. BQ : Pgr. FM = FH : BD. Prop. 15. L. 5.

Or le ▱ BO a pour baze le Pgr. BQ, & pour hauteur BD } (*Prép.*)
Et le ▱ FK a pour baze le Pgr. FM, & pour hauteur FH }

2. Partant le ▱ BO est = au ▱ FK. Prop. 34. L. 11.

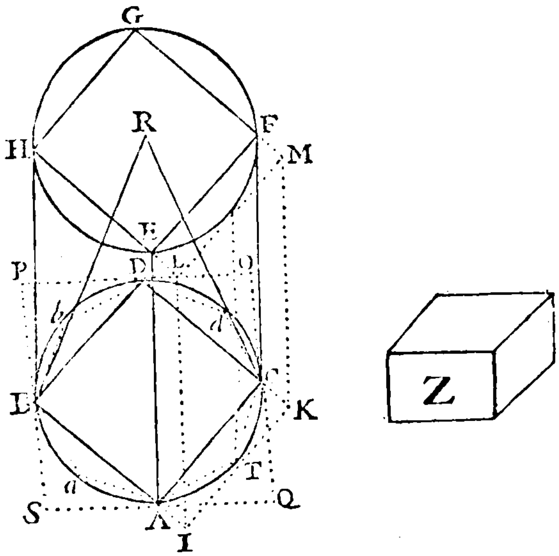
Mais les ▱s. BO & FK font chacun le double des prismes PNB, & LIF. Prop. 28. L. 11.
Et ces prismes PNB & LIF font chacun le triple de leurs pyramides ABCD, & EFGH. { Prop. 7. L. 12. Corol. 1.

3. Donc la pyramide triangulaire ABCD est = à la pyramide triangulaire EFGH. Ax. 7. L. 1.

C. Q. F. D. II.

COROLLAIRE.

Les pyramides-polygones égales : ont leurs bazes & hauteurs reciproquement proportionelles. Et les pyramides-polygones, dont les bazes & les hauteurs sont reciproquement proportionelles : sont égales.



PROPOSITION X. THEOREME X.

LE Cone (BRC) eſt le tiers du Cylindre (HGFEABDC) qui a la même baze (BDCA) & la même hauteur (BH).

Hypothese.

Le cone BRC & le cylindre HFADC, ont la même baze BDCA, & la même hauteur BH.

These.

Le Cone BRC eſt égal au tiers du cylindre HFCABD.

Demonstration.

SI non.

Le Cone ſera < ou > que le tiers du Cylindre d'une partie = Z.

I. Suppoſition.

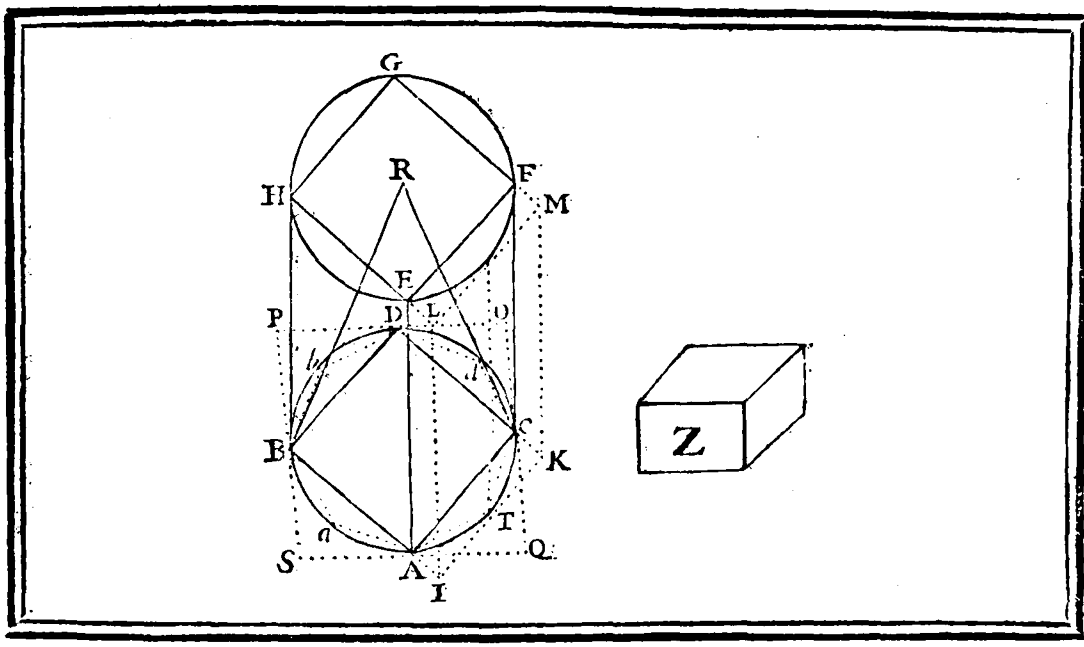
SOit un tiers du cylindre HC = cone BRC + Z.

I. Préparation.

1. DAns la baze ABDC du cone & du cylindre, inſcrivez le □ ABDC. Prop. 6. L. 4.
2. Autour de la même baze faites le □ POQS. Prop. 7. L. 4.
3. Elevez ſur ces quarrés deux ▭s (dont le premier eſt le ▭ FHBC qui eſt conſtruit ſur le □ inſcrit, & le ſecond, conſtruit ſur le □ circonſcrit, touchera la baze ſuperieure avec ces Plans Plles, dans les points H, G, F, & E,) * ayant la même hauteur que le cylindre & le cone,

 4. Divi-

* *Nous ſupprimons une partie de la Préparation dans la Figure pour éviter la confuſion.*



4. Divisez les arcs ATC, CdD, DbB & BaA, en deux, dans les points T, d, b, & a. Prop. 30. L. 3.
5. Tirez AT, & TC &c. Dem. 1. L. 1.
6. Par le point T, tirez la tangente ITK. (*par la Prop. 17. L. 3.*) qui coupera BA & DC prolongées, dans les points I & K, & qui achevera le Pgr. AK.
7. Sur le Pgr. AK, faites le ▭ ALFK, & sur les △ AIT, TAC & TCK les prismes ETI, ETF & TFK, ayant tous la même hauteur que le cylindre & le cone.
8. Faites de même pour les autres segments AaB, BbD &c.

Puisque le quarré POQS est circonscrit au ⊙, & que le quarré BDCA y est inscrit (*Prép.* 1 & 2.).

1. Le □ POQS est le double du □ BDCA.*
   Mais les ▭ construits sur ces quarrés, ont la même hauteur (*Prép.* 3.).
2. Donc le ▭ sur POQS est le double du ▭ sur BDCA. Prop. 32. L. 11.
   Or le ▭ sur POQS est > que le cylindre donné. Ax. 8. L. 1.
3. Donc le ▭ sur BDCA est > que la moitié du même cylindre. Prop. 19. L. 5.
   Et comme le △ TAC est la moitié du Pgr. AK. Prop. 41. L. 1.
4. Le prisme ETF, construit sur ce △ TAC, sera la moitié du ▭ sur le Pgr. AK. Prop. 28. L. 11. Prop. 34. L. 11.
   Le ▭ construit sur le Pgr. AK est > que l'élement du cylindre qui a pour baze le segment ATC. Rem. 1. Cor. 3. Ax. 8. L. 1.
5. Partant le prisme ETF construit sur le △ TAC est > que la moitié de l'élement du cylindre qui a pour baze le segment ATC. Prop. 19. L. 5.

6. De

* *Voyez la Note sous la Demonstration de la seconde Prop. L. 12.*

6. De même tous les autres prismes construits de la même manière, seront $>$ que la moitié des parties ou élemens de cylindre qui leurs correspondent.
On peut donc retrancher de tout le cylindre, plus que la moitié (savoir le sur le $\square$ BDCA,) & de ces élemens restans (savoir CFEAT. &c.) encore plus que la moitié; (qui sont les prismes ETF &c.) & ainsi de suite.

7. Jusqu'à ce qu'il reste enfin plusieurs élemens du cylindre qui seront ensemble plus petit que Z. {Lem. de Prop. 2. L. 12.
Mais le cylindre est égal à trois fois le cone BRC + Z. (*Sup.*).
Si donc on retranche du cylindre entier ces élemens trouvés (*Arg.* 7.); & de trois fois le cone BRC + Z, la grandeur Z.

8. Le prisme restant (savoir celui qui a pour baze le polygone AaBbDdCT) sera $>$ que le triple du cone. Ax. 4. L. 1.
Cependant ce prisme est le triple de la pyramide qui a la même baze & la même hauteur (& qui est la pyramide TAaBbDdCTR). {Prop. 7. L. 12. Corol. 2.

9. Partant la pyramide ABDCR est $>$ que le cone donné. Ax. 7. L. 1.
Or la baze du cone est le $\odot$ dans lequel ce polygone ABDC est inscrit, (& qui par consequent est $>$ que ce polygone) & ce cone à la même hauteur que la pyramide.

10. Donc la partie est $>$ que son tout.

11. Ce qui est impossible. Ax. 8. L. 1.

12. Partant le cone donné n'est pas $<$ que le tiers du cylindre.

II. Supposition.

Soit le cone donné $>$ que le tiers du cylindre de la grandeur Z. *c. a. d.* que le cone est = au tiers du cylindre + Z.

II. Préparation.

Divisez le cone donné en pyramides partielles, *comme on a divisé le cylindre en prismes dans la première Supposition.*

Si l'on retranche du cone donné la pyramide qui a pour baze le $\square$ ABDC, (qui est plus grand que la moitié de toute la baze du cone donné puisqu'il est la moitié du quarré circonscrit *par l'Arg.* 1. & que ce dernier $\square$ est $>$ que la baze du cone *par l'Ax.* 8. *L.* 1.) & des segmens restans, les pyramides correspondans à ces segmens, (*ainsi qu'on l'a fait pour le cylindre dans l'Arg.* 7.).

13. Il restera plusieurs élemens de cone dont la somme sera $<$ Z. {Lemme de Prop. 2. L. 12.
Si donc on retranche du cone ces élemens qui sont $<$ Z, & du cylindre + Z, la grandeur Z.

14. Le reste savoir la pyramide AaBbDdCTR sera égal au tiers du cylindre. Ax. 5. L. 1.
Mais la pyramide AaBbDdCTR est égal au tiers du prisme qui a pour baze le même polygone AaBbDdCT, & la même hauteur. {Prop. 7. L. 12. Cor. 2.

15. Donc le cylindre donné, est égal & ce prisme. Ax. 6. L. 1.
Or la baze du cylindre donné est $>$ que la baze du prisme puisque cette seconde est inscrite dans la premiere (*I. Prép.* 4 & 5.).

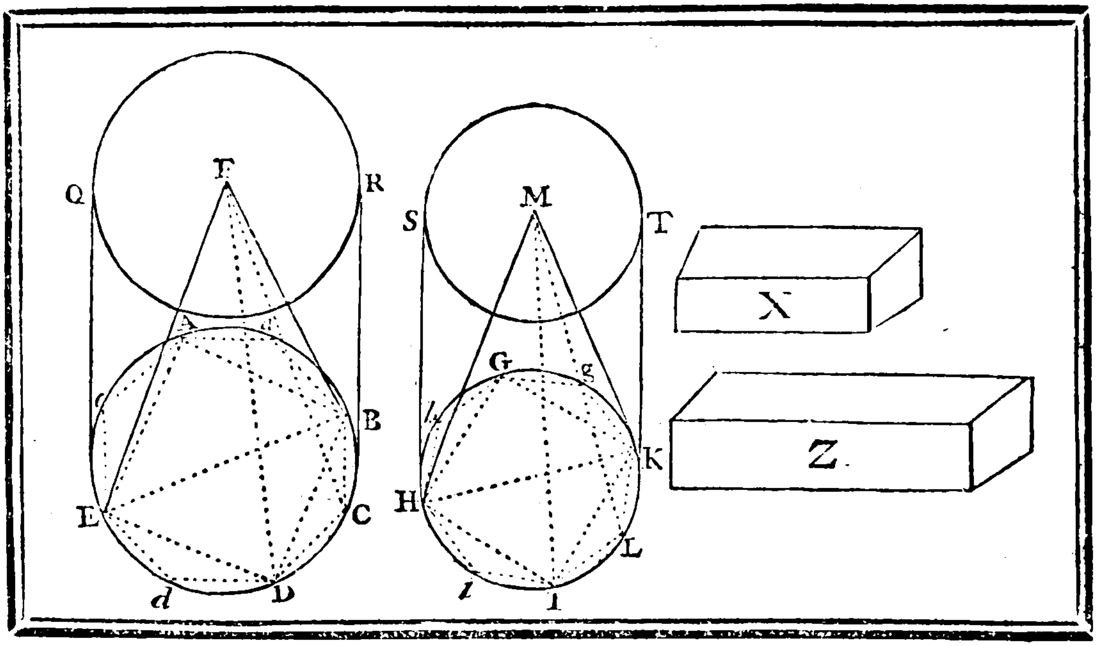
16. Donc la partie égal au tout.

17. Ce qui est impossible. Ax. 8. L. 1.

18. Donc le tiers du cylindre n'est pas $<$ que le cone.
Et on a demontré (*Arg.* 12.) que le tiers du cylindre n'est pas $>$ que le cone.

19. Partant le cone est le tiers du cylindre qui a la même baze & la même hauteur.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XI. *THEOREME XI.*

LEs cones (EABDF & HGKIM) & les cylindres (QRBE & STKH) qui ont la même hauteur ſont entr'eux comme leurs bazes.

HYPOTHESE.

Les cones EABDF & HGKIM, de même que les cylindres QRBE & STKH ont la même hauteur.

THESE.

I. Cone EFB : cone HMK = baze EABD : baze HGKI.

II. Cylindre QRBE : cylindre STKH = baze EABD : baze HGKI.

DEMONSTRATION.

SI non.

Le cone EFB : Z (qui eſt $<$ ou $>$ que le cone HMK) = baze EABD : baze HGKI.

I. Suppoſition.

SOit Z $<$ que le cone HMK d'une grandeur = X, *c. a. d.* que le cone HMK eſt = Z + X.

I. Préparation.

1. DAns le ⊙ GHIK qui eſt la baze du cone HMK; inſcrivez le □ GHIK. Prop. 6. L. 4.
2. Diviſez le cone en pyamides partielles, (*comme dans la Prép. de la II. Suppoſition de la précedente.*).
3. Tirez dans les bazes des deux cones EFB & HMK, les diamêtres EB & HK.
4. Dans le ⊙ EABD baze du cone EFB, inſcrivez un polygone ∽ au polygone H*h* G*g* KLI*i* H, & diviſez le comme le cone HMK.

PUis qu'on a diviſé le cone HMK en pyramide partielles (*Prép.* 2.). Si on retranchoit de ce cone ces pyramides partielles (ainſi qu'on a fait dans *Arg.* 13. de la précedente).

1. On parviendroit à avoir des élemens dont la ſomme feroit $<$ X. { Lem. de Prop. 2. L. 12.

Si donc on retranche ces élemens du cone HMK, & des grandeurs Z + X, la grandeur X.

2. La

2. La pyramide restante $Hb\,Gg\,KLIiM$ sera $>$ Z.
Or les polygones inscrits dans les ⊙ˢ. EABD & HGKI sont ∽ (*Prép.* 4.)
3. Donc ⊙ AEDB : ⊙ GHIK = polygone $Cdea$: polygone ibgL. { Prop. 2. L. 12. Corol.
Mais ⊙ AEDB : ⊙ GHIK = cone EFB : Z. (*Sup.*).
Et pyramide $Dd\,Ec\,Aa$ BCF : pyramide $Hb\,Gg\,KLIiM$ = polygone $C\,dea$: polygone ibgL. Prop. 6. L. 11.
4. Partant pyramide $Dd\,Ee\,Aa$ BCF : pyramide $Hb\,Gg\,KLIiM$ = cone EFB : Z. Prop. 11. L. 5.
Or la pyramide $Dd\,Ec\,Aa$ BCF est $<$ cone EFB. Ax. 8 L 1.
5. Donc la pyramide $Hb\,Gg\,KLIiM$ est $<$ Z. Prop. 14. L. 5.
6. Mais ce pyramide est $>$ que Z. (*Arg.* 2.).
7. Donc elle seroit $>$ & $<$ que Z. (*Arg.* 2 & 6.).
8. Ce qui est impossible.
9. Donc la Supposition que Z est $<$ que le cone HMK est fausse.
10. Partant il est impossible que la baze du cone EFB est à la baze du cone EFB (les cones ayant même hauteur,) comme le cone EFB à une grandeur Z $<$ que le cone HMK.

II. Suppofition.

SI Z est $>$ que le cone HMK.

II. Préparation.

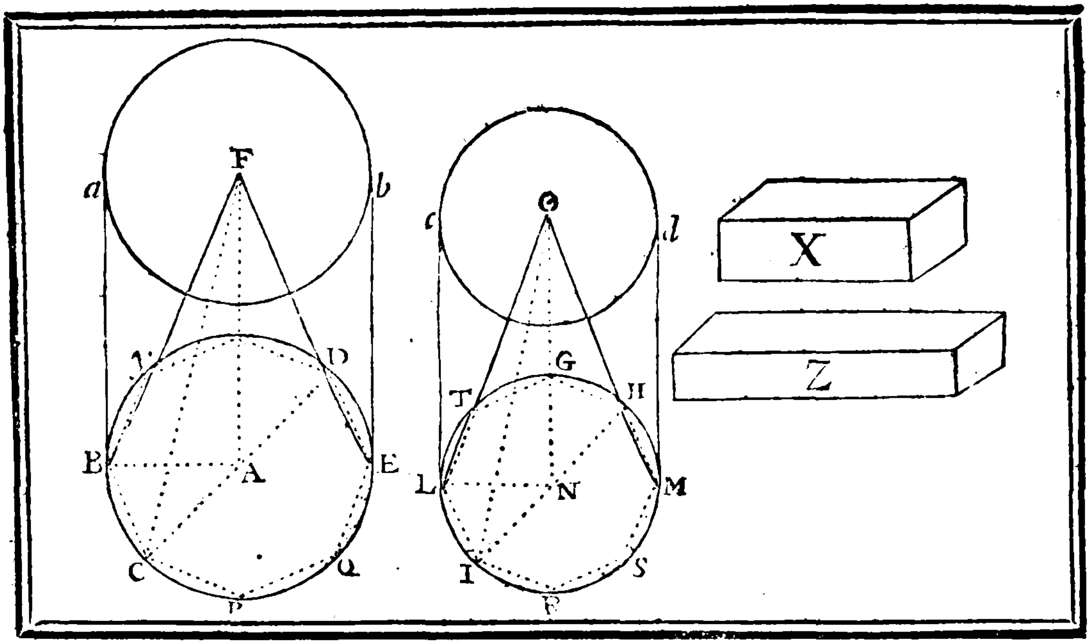
PRenez une grandeur X de façon que Z : cone EFB = cone HMK : X.

PUis donc que Z est $>$ que le cone HMK. (*I. Sup.*).
11. Le cone EFB est $>$ X. Prop. 14. L. 5.
Or cone EFB : Z = baze EABD : baze HGKI. (*Sup.*).
12. Donc baze HGKI : baze EABD = Z : cone EFB. { Prop. 4. L. 5. Corol.
Mais Z : cone EFB = cone HMK : X. (*II. Prép.*).
13. Partant baze GHIK : baze AEBD = cone HMK : X. Prop. 11. L. 5.
Or il est démontré (*Arg.* 10.) qu'il est impossible que la baze d'un cone soit à la baze d'un autre cone, ayant même hauteur comme le premier cone est à une grandeur $<$ que le second.
14. Donc X n'est pas $<$ que le cone EFB
Mais X est $<$ que le cone EFB (*Arg.* 10.).
15. Partant X seroit $<$ que ce cone & ne le seroit pas. (*Arg.* 11. & 14).
16. Ce qui est impossible.
17. D'où il suit que la supposition que Z est $>$ que le cone HMK est fausse.
La grandeur Z ne pouvant donc être ni $<$ ni $>$ que le cone HMK. (*Arg* 9 & 17.).
18. Il sera égal au cone HMK.
19. Donc le cone EFB : cone HMK = baze EABD : baze HGKI. Prop. 7. L. 5.

C. Q. F. D. I.

PUisque le cone EFB est le tiers du cylindre QRBE.
Et que le cone HMK est le tiers du cylindre HSTK. } Prop. 10. L. 12.
20. Le cyl. QRBE : cyl. HSTK = baze EABD : baze HGKI. Prop. 15. L. 5.

C. Q. F. D. II.



PROPOSITION XII. *THEOREME XII.*

LEs cones (BFE & LOM) de même que les cylindres (B*ab*E & L*cd*M) semblables: sont entr'eux en raison triplée des diamétres (CD & IH) de leurs bazes (B*y*DEP & LTHMR).

Hypothese.
Les cones BFE & LOM, de même que les cylindres BabE & LcdM, sont ∽.

Thèse.
I. Le cone BFE est au cone LOM en raison triplée de CD à IH; où comme $\overline{CD}^3 : \overline{IH}^3$.
II. Le cylindre BabE est au cylindre LcdM, en raison triplée de CD à IH; ou comme $\overline{CD}^3 : \overline{IH}^3$. *

Demonstration.

SI non,
Le cone BFE est à une grandeur Z (qui est < ou > que le cone LOM) comme $\overline{CD}^3 : \overline{IH}^3$.

I. Supposition.

SOit Z < que le cone LOM de la grandeur X, *c. a. d.* le cone LOM = Z + X.

I. Prep.

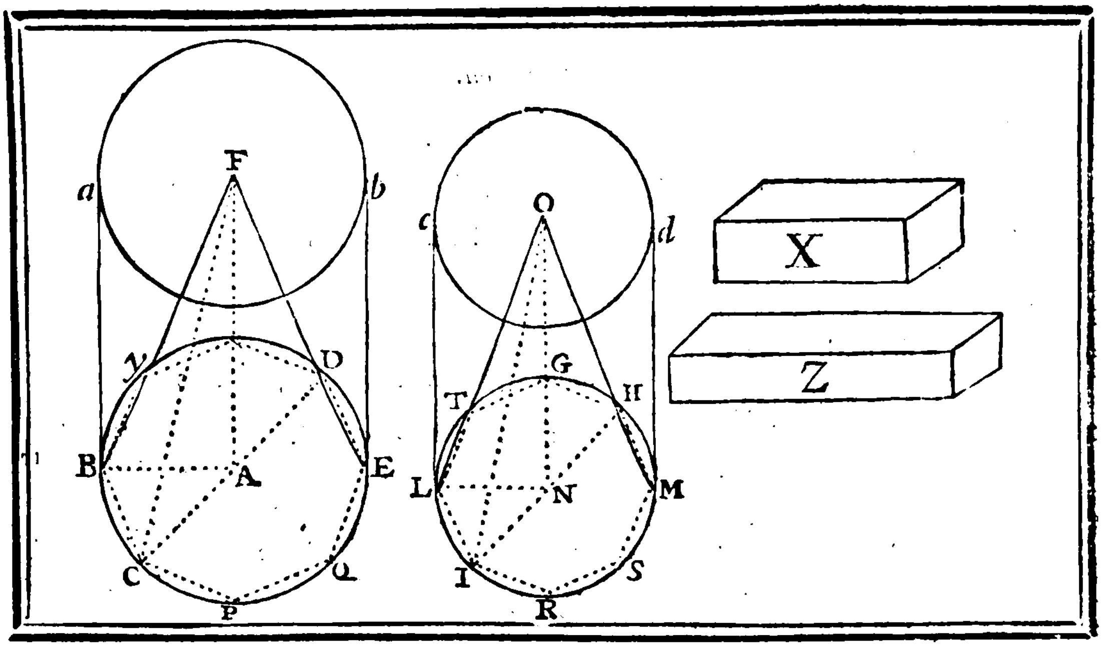
* *Voyez Appendice*, Prop. VII.

I. Préparation.

1. Divisez le cone LOM en pyramides partielles, ainsi que dans la Prop. precedente.
2. Inscrivez dans la baze du cone BFE un pol. ∽ au pol. de la baze du cone LOM.
3. Dans les deux cones tirez les diamètres homologues IH & CD, item les rayons LN & BA.

Puisqu'on a divisé le cone LOM en pyramides partielles.
Si on retranchoit de ce cone ces pyramides partielles (ainsi que dans l'*Arg.* 1. de la precedente).
1. On parviendroit a des élemens dont la somme seroit < que X. { Lemme de Prop. 2. L. 12.
Si donc on retranche du cone LOM, ses élémens, & de la grandeur Z + X, la partie X.
2 Le reste savoir la pyramide LTGHMSRIO sera > Z. Ax. 4. L. 1.
Mais les cones ∽ ont leurs axes & les diamètres de leurs bazes proportionels. Def. 24. L. 11.
Et les cones BFE & LOM sont ∽. (*Hyp.*).
3. Partant CD : HI = FA : ON.
Or CD : HI = CA : IN. Prop. 15. L. 5.
4. Donc CA : IN = FA : ON. Prop. 11. L. 5.
5. Et Alt: CA : FA = IN : ON. Prop. 16. L. 5.
Les △ FAC & ION, ont ∀ CAF = à ∀ INO. (*Prép.* 3.) & les cotés CA, AF, item IN & ON, à l'entour de ces angles égaux proportionels. (*Arg.* 5.).
6. Partant le △ FAC est ∽ △ ION. Def. 1. L. 6.
7. Et par consequent CF : CA = IO : IN. Prop. 4. L. 6.
8. De même le △ BCA est ∽ au △ LIN (car ∀ BAC est = ∀ LNI. (*Prép.* 3.)
9. Donc CA : BC = IN : IL. Prop. 4. L. 6.
Or CF : CA = IO : IN. (*Arg.* 7.)
10. Partant CF : BC = IO : IL. Prop 22. L. 5.
Dans les △ CAF & BAF, le coté CA est = à BA (*Def.* 15. *L.* 1.) AF est commun & ∀ CAF = ∀ BAF. (*Prép.* 3.).
11. Donc la baze BF est = à baze CF. Prop. 4. L. 1.
12. De la même manière LO est = à OI.
Or CF : BC = OI : IL. (*Arg.* 10.).
13. Donc BF : BC = LO : IL. Prop. 7. L. 5.
14. Et invert. BC : BF = IL : OL. { Prop. 4. L. 5. Cor.
15. Partant les trois cotés du △ BFC sont proportionels aux trois cotés du △ LOI.
16. D'où il suit que ces △ BFC & IOL sont ∽. Prop. 5. L. 6.
17. De la même manière on demontrera que tous les triangles qui forment la pyramide BDQF sont ∽ à tous les triangles qui forment la pyramide LHSO, chacun à chacun.

Et



Et comme les bazes de ces pyramides font des polygones ∽. (*Prép.* 2.).

18. La pyramide BDQF eft ∽ à la pyramide LHSO. — Def. 9. L. 11.

Mais ces pyramides étant ∽.

19. La pyramide BDQF : pyramide LHSO $= \overline{CB}^3 : \overline{IL}^3$. — Prop. 8. L. 12. Corol.

Or. CA : BC = IN : IL. (*Arg.* 9.).

20. Donc invert. BC : CA = IL : IN. — Prop. 4. L. 5. Corol.

21. Et alternant BC : LI = CA : IN. — Prop. 16. L. 5.

22. Partant BC : LI = CD : IH. — Prop. 15. L. 5. Prop. 11. L. 5.

23. Donc trois fois la raifon de BC à LI eft égal à trois fois la raifon de CD à IH. (*c. l. a. d.*) $\overline{BC}^3 : \overline{LI}^3 = \overline{CD}^3 \overline{IH}^3$ *

Mais $CB^3 : \overline{IL}^3$ = pyramide BDQF : pyramide LHSO. (*Arg.* 19.)

24. Partant pyramide BDQF : pyramide LHSO $= CD^3 : IH^3$. — Prop. 11. L. 5.

Or le cone BFE : Z $= \overline{CD}^3 : \overline{IH}^3$. (*Sup.*).

25. Donc la pyr. BDQF : pyr. LHSO = cone BFE : Z. — Prop. 11. L. 5.

Mais la pyr. BDQF étant < cone BFE. — Ax. 8. L. 1.

26. La pyr. LHSO fera auffi < Z. — Prop. 14. L. 5.

Or la pyr. LHS eft > Z. (*Arg.* 2.).

27. Partant la pyr. LHSO feroit < & > Z. (*Arg.* 2 & 26.).

28. Ce qui eft impoffible.

29. Donc la fuppofition que Z eft < que le cone LOM ou LTGHMSRIO, eft fauffe.

30. D'où

* *Voyez Append.* Prop. VII.

30. D'où il suit qu'il est impossible qu'un cone BFE est à une grandeur moindre que le cone LOM, en raison triplée du diamètre CD au diamètre IH.

II. Supposition.

Soit Z > que le cone LOM.

II. Préparation.

Prenez une grandeur X, de façon que Z : cone BFE = cone LOM : X.

Puisque Z est > que le cone LOM. (II. *Supp.*).

31. Le cone BFE sera > X. Prop. 14. L. 5.

Mais $\overline{CD}^3 : \overline{IH}^3 =$ cone BFE ; Z (*par la Sup.*).

32. Donc invert. $\overline{IH}^3 : \overline{CD}^3 = Z$: cone BFE. Prop. 4. L. 5. Corol.

Or Z : cone BFE = cone LOM : X. (II. *Prép.*).

33. Partant $\overline{IH}^3 : \overline{CD}^3 =$ cone LOM : X. Prop. 11. L. 5.

Et il est demontré (*Arg.* 30.) qu'il est impossible qu'un cone est à une grandeur moindre qu'un autre cone en raison triplée des diamétres de leur bazes.

34. Donc X n'est pas < que le cone BFE.

Cependant X est < que le même cone (*Arg.* 31.),

35. D'où il suit que X seroit < que le cone & ne le seroit point en même tems.

36. Ce qui est impossible.

37. Donc la supposition que Z est > que le cone LOM, est fausse.

La grandeur Z n'étant donc ni < ni > que le cone LOM. (*Arg.* 29 & 37.).

38. Il lui sera égal.

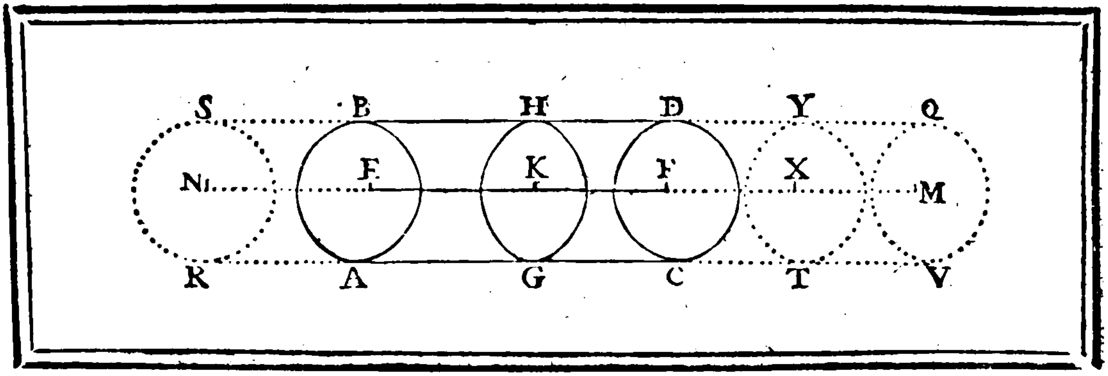
39. Partant le cone BFE ; cone LOM $= \overline{CD}^3 : \overline{IH}^3$. Prop. 7. L. 5.

C. Q. F. D. I.

Le cylindre B*ab*E, étant le triple de cone BFE.
Et le cylindre L*cd*M le triple du cone LOM. Prop. 10. L. 12.

40. Le cylindre B*ab*E : cylindre L*cd*M $= \overline{CD}^3 : \overline{IH}^3$. Prop. 15. L. 5.

C. Q. F. D. II.



PROPOSITION XIII. *THEOREME XIII.*

SI un cylindre (ABDC) eſt coupé par un Plan (HG) parallele aux Plans oppoſés (BA & DC): les cylindres provenants (ABHG & GHDC) feront entr'eux comme leurs axes (EK & KF). (c. a. d. que le cylindre ABHG : cylindre GHDC = axe EK : axe KF.)

HYPOTHESE.	THESE.
Le cylindre AD eſt coupé par un Plan HG Plle aux Plans oppoſés AB & DC.	*Cylindre AH : cylindre HC = axe EK : axe FK.*

Préparation.

1. PRolongez l'axe EF du cylindre ABDC de part & d'autre vers N & M. Dem. 2. L. 1.
2. Sur l'axe prolongé NM, prenez pluſieurs parties égales à EK & FK; comme EN = EK, & FX &c. chacune = FK. Prop. 3. L. 1.
3. Par ces points N, X & M, faites paſſer des Plans SR, TY & VQ Plle aux Plans oppoſés BA & DC.
4. Sur ces Plans Plle décrivez des points N, X & M, des ⊙ˢ SR, TY & VQ chacun égal aux ⊙ˢ oppoſés BA & DC. Dem. 3. L. 1.
5. Achevez les cylindres SA, CY, & TQ.

DEMONSTRATION.

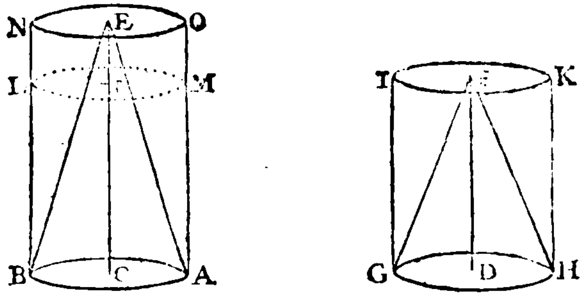
PUiſque les axes FX, & XM des cylindres DT & TQ ſont égaux à l'axe FK, du cylindre GD. (*Prép.* 2.).

1. Ces cylindres DT, TQ & GD, feront entr'eux comme leurs bazes. Prop. 11. L. 12.
Mais ces bazes ſont égaux. (*Prép.* 4.).
2. Donc ces cylindres TD, TQ & GD ſont auſſi égaux. Prop. 14. L. 5.
Or il y a autant de cylindres CY, TQ &c. qui ſont égaux, (& qui forment enſemble la toute GQ) qu'il y a de parties FX, XM &c. égaux à l'axe KF (& ils forment enſemble la toute MK).

3. Par-

3. Partant le cylindre GQ ou GHQV eſt autant multiple du cylindre GHDC, que l'axe, KM l'eſt de l'axe KF.
4. De la même manière, on demontrera que le cylindre RSHG eſt autant multiple du cylindre ABHG, que l'axe NK, l'eſt de l'axe EK.
5. Donc ſelon que le cylindre GHQV eſt $>$ $=$ ou $<$ que le cylindre GHDC, l'axe KM ſera $>$ $=$ ou $<$ que l'axe FK.
Et ſelon que le cylindre RSHG eſt $>$ $=$ ou $<$ que le cylindre ABHG l'axe NK ſera $>$ $=$ ou $<$ que l'axe EK.
6. Partant le cylindre ABHG : cylindre GHDC $=$ axe EK : axe FK. Def. 5. L. 5.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XIV. *THEOREME XIV.*

LEs cylindres (NO AB & IKHG), & les cones (BEA & GFH) qui ont des bazes égales (BA & GH): font entr'eux comme leurs hauteurs (CE & DF).

HYPOTHESE.

Les cylindres NOAB & GIKH, item les cones BEA & GFH, ont des bazes égales.

THESE.

I. Cylindre NOAB : cylindre IKHG = hauteur CE : hauteur. DF.
II Cone BEA : cone GFH = hauteur CE: hauteur DF.

Préparation.

1. SUr l'axe du plus grand cylindre AONB, prenez la partie PC d'égale hauteur qu'est le cylindre GIKH.
2. Par le point P : faites passer un Plan LM, Plle à la baze BA, qui coupera le cylindre AONB en deux cylindres, qui sont BAML & LMON.

DEMONSTRATION.

PUisque le cylindre BNOA est coupé par un Plan Plle à sa baze (*Prép.* 2.)

1. Le cylindre NOML : cylindre LMAB = PE : PC. Prop. 13. L. 12.
2. Partant le cylindre NOML + LMAB : cylindre LMAB = PE + PC : PC. Prop. 18. L. 5.

   Mais le cylindre NOML + LMAB est = au cylindre BNOA, & PE + PC = EC. Ax. 1. L. 1.

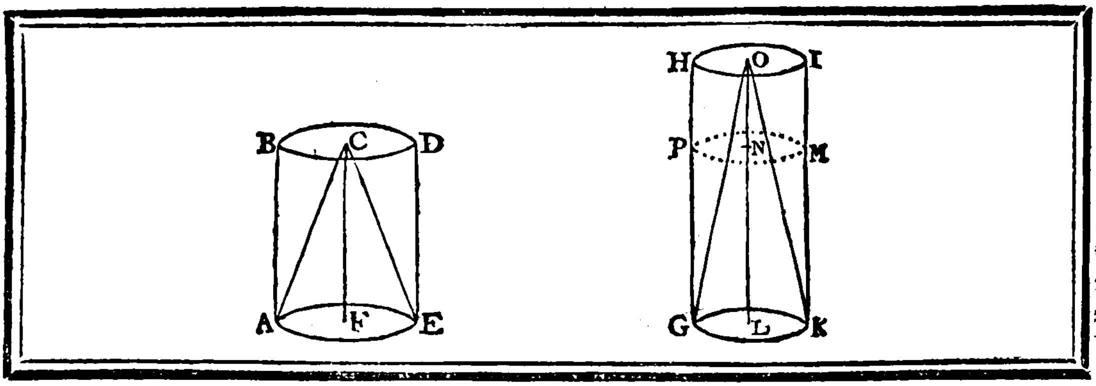
   De plus le cylindre LMAB est = au cylindre IGHK,* & PC = DF. (*Prép.* 1.).
3. Donc le cylindre BNOA : cylindre IGHK = hauteur EC : hauteur DF. Prop. 7. L. 5.

   C. Q. F. D. I.

   Le cone BEA est le tiers du cylindre BNOA.
   Et le cone GFH le tiers du cylindre GIKH. } Prop. 10. L. 12.
4. Partant le cone BEA : cone GFH = hauteur EC: hauteur DF. Prop. 15. L. 5.

   C. Q. F. D. II.

* *Les cylindres LMAB & IGHK sont égaux, par l'*Hyp. & Prép. 1. & 2.



PROPOSITION XV. *THEOREME XV.*

LEs bazes (AE & GK) & les hauteurs (CF & OL) des cylindres (ABDE & GHIK) & des cones (ACE & GOK) égaux : font reciproquement proportionels (c. a. d. que le baze AE : baze GK = haut. LO : haut. CF.). Et les cylindres & cones dont les bazes & les hauteurs font reciproquement proportionels: font égaux.

HYPOTHESE.

I. Les cylindres ABDE & GHIK font égaux.
II. Les cones AEC & GOK font égaux.

THESE.

Baze AE : baze GK = hauteur LO : hauteur CF.

Préparation.

1. DU plus grand LO, coupez la hauteur LN = à la hauteur CF. Prop. 3. L. 1.
2. Par le point N, faites passer un Plan PM Plle aux Plan opposés du cylindre HIKG.

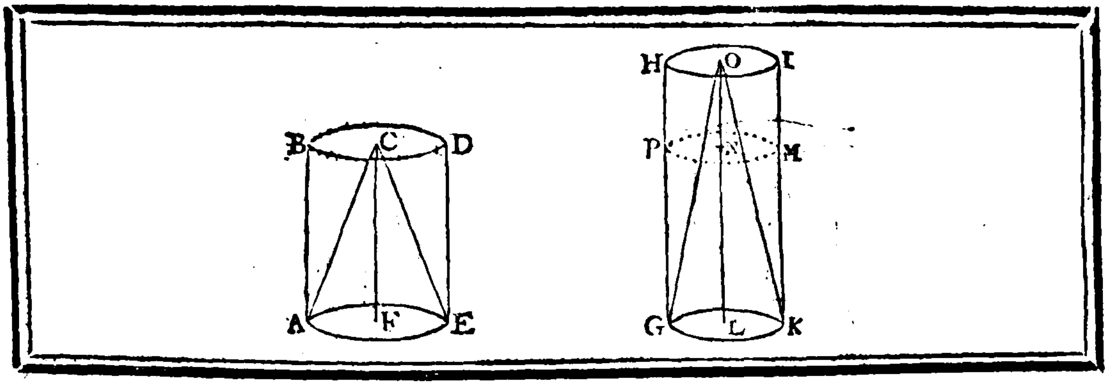
I. DEMONSTRATION.

PUisque les cylindres GHIK & PMKG ont la même baze.

1. Le cylindre GHIK : cylindre PMKG = hauteur LO : hauteur LN. Prop. 14. L. 12.
Mais les cylindres ABDE & GHIK font égaux. (*Hyp.* 1.).
2. Partant le cylindre ABDE : cylindre PMKG = hauteur LO hauteur LN. Prop. 7. L. 5.
De plus les cylindres ABDE & PMKG ont la même hauteur (*Prép.* 1.).
3. Donc le cylindre ABDE : cylindre PMKG = baze AE : baze GK. Prop. 11. L. 12.
Or le cylindre ABDE : cylindre PMKG = hauteur LO : hauteur LN. (*Arg.* 2.).
Et la hauteur LN est = à la hauteur CF. (*Prép.* 1.)
4. D'où il fuit que la baze AE : baze GK = hauteur LO : hauteur CF. {Prop. 11. L. 5. / Prop. 7. L. 5.}

C. Q. F. D.

HYPO-



Hypothese.

Baze GK : baze AE = hauteur CF : hauteur LO.

These.

I. Le cylindre ABDE est = au cylindre GHIK.
II. Le cone ACE est = au cone GOK.

II. Demonstration.

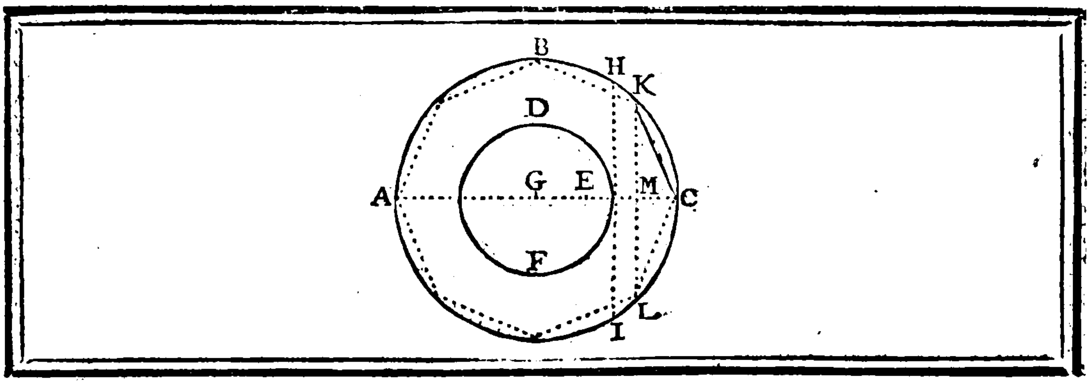
Puisque les cylindres GPMK & ABDE, ont la même hauteur (*Prép.* 2.)

1. Le cylindre GPMK : cylindre ABDE = baze GK : baze AE. Prop. 11. L. 12.
Or la baze GK : baze AE = hauteur CF : hauteur LO (*Hyp.*).
2. Partant le cylindre GPMK : cylindre ABDE = hauteur CF : haut. LO. Prop. 11. L. 5.
De plus les cylindres GPMK & HIKG, ont la même baze.
3. Donc le cylindre GPMK : cylindre HIKG = hauteur LN : haut. LO. Prop. 14. L. 12.
Mais la hauteur LN est = à la hauteur CF. (*Prép.* 1.).
4. D'où il fuit que le cylindre GPMK : cylindre GHIK = hauteur CF : hauteur LO. Prop. 7. L. 5.
Cependant le cylindre GPMK : cylindre ABDE = hauteur CF : hauteur LO. (*Arg.* 2.).
5. Donc le cylindre GPMK : cylindre ABDE = cylindre GPMK : cylindre GHIK. Prop. 11. L. 5.
6. Et par consequent le cylindre ABDE est = au cylindre GHIK. Prop. 14. L. 5.

C. Q. F. D. I.

Les cones ACE & GOK étant chacun le tiers des cylindres ABDE & GHIK. Prop. 10. L. 12.
Et ces cylindres étant égaux (*Arg.* 6.).
1. Le cone ACE est = au cone GOK. Ax. 7. L. 1.

C. Q. F. D. II.



PROPOSITION XVI. *PROBLEME I.*

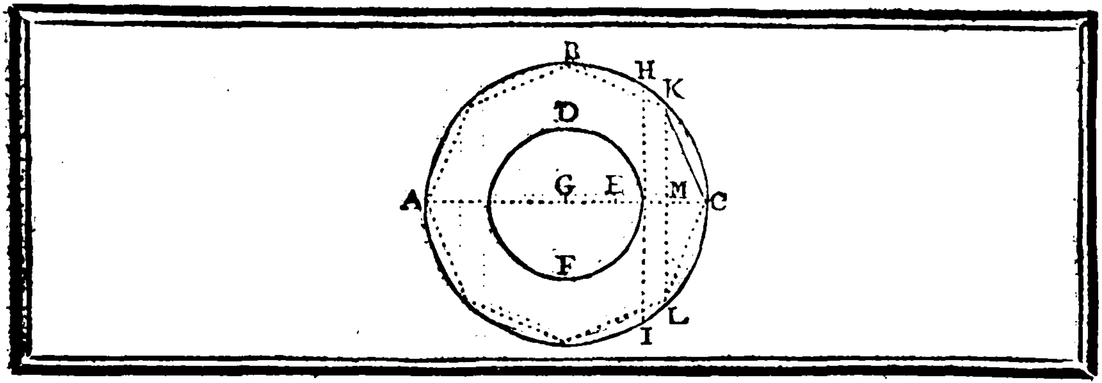
DEux cercles inégaux (ABCI & DEF) étant donnés ayant un même centre (G): inſcrire au plus grand (ABCI) un polygone regulier dont les cotés ſoyent un nombre pair, & ne touchent point le plus petit cercle (DEF).

DONNEES
Deux ⊙ ABI & DEF inégaux; ayant le même centre G.

CHERCHEE.
Inſcrire dans le plus grand ⊙ ABI, un polygone regulier, d'un nombre pair de cotés; leſquels ne touchent point le plus petit ⊙ DEF.

Reſolution.

1. TIrez le diamètre AC dans le plus grand ⊙ ABI, qui coupera la ○ du ⊙ DF au point E.
2. Par le point E, tirez la tangente HEI au ⊙ DEF, & prolongez la juſqu'à ce qu'elle rencontre la ○ concave du ⊙ ABI aux points H & I. { Prop. 16. L. 3. Dem. 2. L. 1.
3. Coupez la demi ○ ABC en deux au point B. Prop. 30. L. 3.
4. Diviſez encore le demi arc BC en deux également; & continuez cette diviſion des moitiez juſqu'à ce que l'arc KC ſoit plus petit que l'arc HC (*par le Lem. de la ſeconde Propoſition de ce Livre.*).
5. Tirez la corde KC, & appliquez-le autant de fois qu'il eſt poſſible dans la ○ du ⊙ ABCI. { Prop. 1. L. 4. Dem. 1. L. 1.



Préparation.

Du point K, abaissez la ⊥ KM sur le diamètre AC, & prolongez-là jusqu'à la rencontre de la ○ en L. { Prop. 11. L. 1. Dem. 1 L. 1.

DEMONSTRATION.

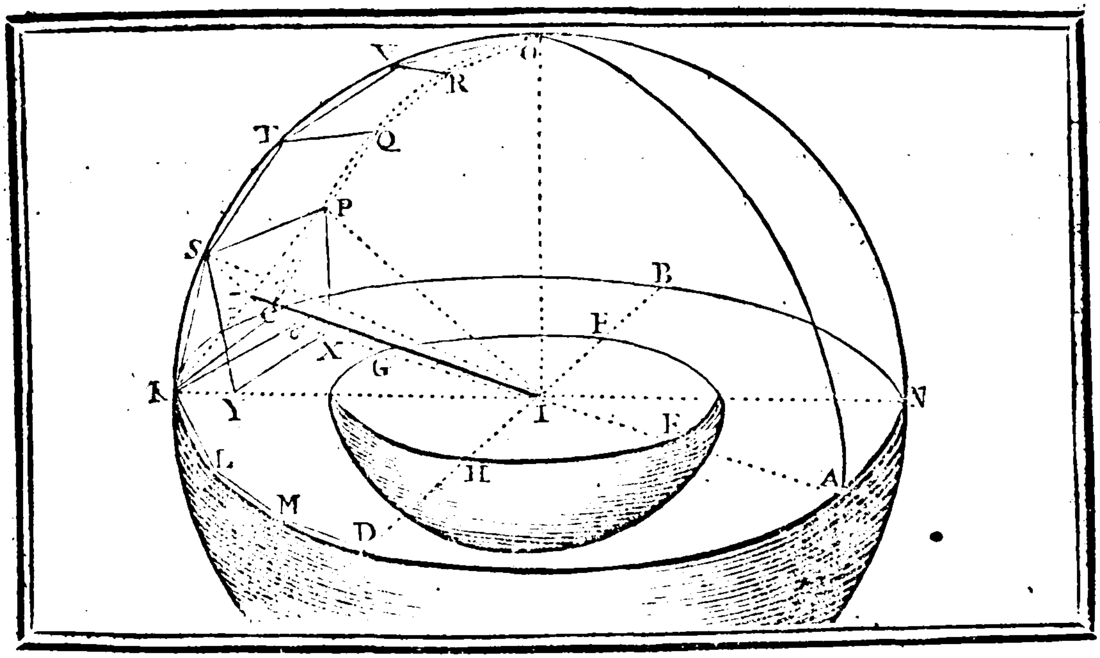
Puisque la demi ○ ABC, est divisé en deux au point B. (*Ref.* 3.).
Et qu'on a continué à prendre la moitiez des moitiez jusqu'à l'arc KC. (*Ref.* 4.).
1. Il s'ensuit que cet arc KC mesurera la ○, un nombre pair de fois sans reste (puisqu'il mesure la demi ○ *Ref.* 3 & 4.).
2. Partant la ligne KC (corde de l'arc KC) sera le coté d'un polygone regulier inscrit au ⊙, ayant le nombre de ses cotés pair.
De plus les deux ∀ HEM & KME, étant deux ∟. (*Ref.* 2. & *Prép.*).
3. La ligne KM ou KL est Plle à HE ou HI. Prop. 28. L. 1.
Or la ligne HI est tangente du ⊙ DEF en E (*Ref.* 2.).
4. Partant KL ne touche point le ⊙ DEF. Def. 35. L. 1.
Mais KC est < KL, (*Prop.* 15. *L.* 3.) puisque KC est plus éloigné du centre que KL (*Prép.*).
5. Donc a plus forte raison KC ne pourra toucher le ⊙ DEF. Prop. 15. L. 1.
Et comme les autres cotés du polygone inscrit dans le ⊙ ABCI sont chacun = à KC. (*Ref.* 5.).
6. On demontrera de même qu'ils ne touchent point le ⊙ DEF.
7. Partant on a inscrit au ⊙ ABCI, un polygone, ayant le nombre de cotés pair, lesquels ne touchent point le ⊙ DEF.

C. Q. F. F.

Corol-

COROLLAIRE.

LA ligne KL, qui est $\perp$ fur le diamétre AC & joint les deux cotés KC & LC, du polygone qui aboutiffent à ce même diamétre: ne touche point le plus petit cercle DEF (*Arg.* 4.).



PROPOSITION XVII. *PROBLEME II.*

ETant donnés deux ſphères (KON & GFEH), ayant un même centre (I): inſcrire dans le plus grand (KON) un polyèdre (KCSPTQVRO &c.) dont les Plans ne touchent point la petite ſphère (GFEH).

DONNEES.
Deux ſphères concentriques KON & GFEH.

CHERCHEES.
I. Inſcrire dans la plus grande ſphère KON un polyèdre KPTRVO &c.
II. Les Plans de ce polyèdre inſcrit ne doivent point toucher la petite ſphère GFEH.

Reſolution.

1. COupez les deux ſphères par un Plan KBND paſſant par leur centre commun.
2. Tirez dans le ⊙ ABCD, les diamètres AC & BD, ſe coupant en angle droit. { Dem. 1. L. 1. Prop. 12 L. 1.
3. Dans ce plus grand ⊙ ABCD, inſcrivez le polygone CKLMD &c. de façon, qu'il ne touche point le petit ⊙ GFEH. Prop. 16. L. 12.
4. Tirez le diamètre KIN.
5. Du centre I ſur le Plan du ⊙ ABCD, élevez la ⊥ IO, & prolongez la juſqu'à la ſuperficie concave de la grande ſphère en O. { Prop. 12 L. 12. Dem. 2. L. 1.
6. Par IO & les diamètres AC, BD & KN, faites paſſer les Plans AOC, BOD & KON. *

7. Divi-

* *On a ſupprimé une partie de la Reſolution &c. dans la fig. pour éviter la confuſion.*

7. Divisez les arcs AOC & KON, en un nombre égal de parties dans les points P, Q, R, S, T, & V, &c. de façon que chacune de ces parties soit égale à CK.
8. Tirez les droites SP, TQ, VR.

I. Préparation. *

1. DEs points P & S, abaissez les ⊥ PX & SY, sur le Plan du ⊙ ABCD. Prop. 12. L. 12.
2. Tirez YX.

DEMONSTRATION.

PUisque les Plans KON & COA passent par la ligne IO, (*Ref.* 6.).
Et que IO est ⊥ sur le Plan du ⊙ ABCD. (*Ref.* 5.).
1. Ces Plans KON & COA, sont ⊥ sur le Plan de ce ⊙. Prop. 18. L. 11.
Or les points P & S sont dans ces Plans COA & KON.
Et on a abaissé de ces points les ⊥ PX & SY (1. *Prép.* 1.).
2. Partant les points Y & X sont dans les lignes KN & CA. Prop. 38. L. 11.
Dans les △ CXP & KYS; ∀ PXC est = ∀ SYK (1. *Prép.* 1.) de plus ∀ PCX = SKY, (*Prop.* 27. *L.* 3.) & CP = KS (*Ref.* 7.).
3. Donc les cotés PX & XC, sont égaux aux cotés SY & YK. Prop 26. L. 1.
Or les rayons KI & CI sont égaux. Def. 15. L. 1.
Si donc on en retranche les égales XC & YK.
4. Les restes, savoir IX & YI seront égaux. Ax. 3. L. 1.
5. Partant IX : XC = IY : YK. Prop. 7. L. 5.
6. D'où il suit que XY est Plle à KC. Prop. 2. L. 6.
Mais PX qui est = à SY (*Arg.* 3.) est aussi ⊥ sur le même Plan avec SY (1. *Prép.* 1.).
7. Donc PX est aussi Plle à YS. Prop. 6. L. 11.
8. De la même manière SP est = & Plle à XY. Prop. 33. L. 1.
Mais XY est Plle à KC (*Arg.* 6.).
9. Donc SP est aussi Plle à KC. Prop. 9. L. 11.
10. Partant les cotés du quadrilatère KSPC sont dans le même Plan. Prop. 7. L. 11.
11. De la même manière on demontrera que les cotés des quadritères TQPS, VRQF, & du △ ROV, sont chacun dans le même Plan.
12. Et comme on peut demontrer de cette façon que toute la sphère est entourrée de pareils quadrilatères & triangles.
13. On a par consequent inscrit dans le plus grande sphère un polyëdre RPCKTVO, &c.

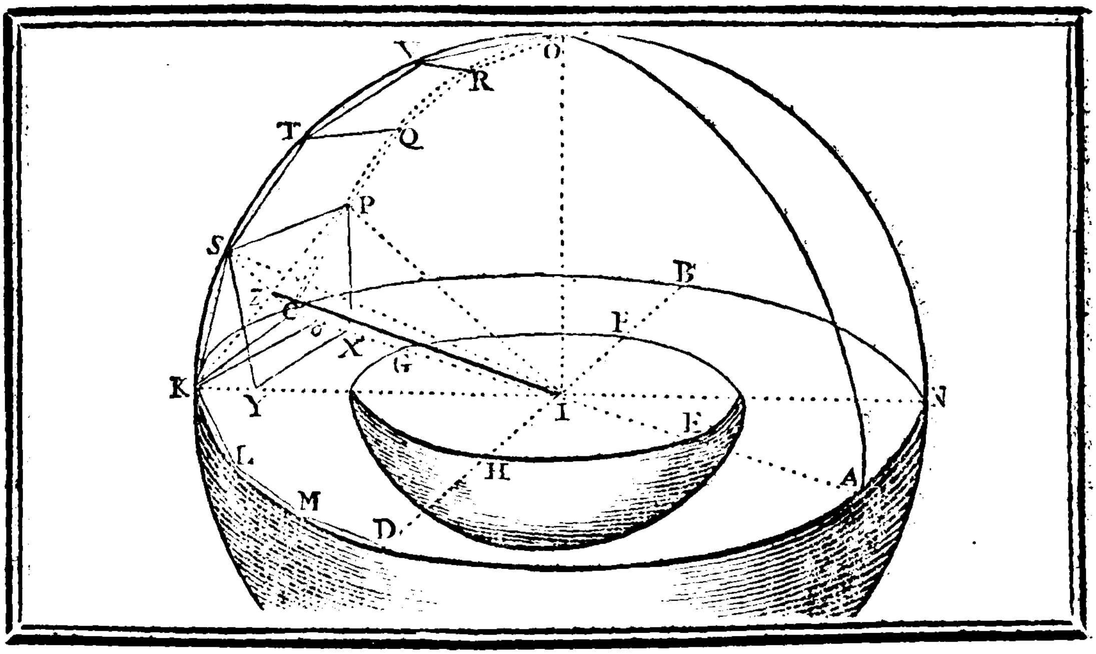
C. Q. F. F. 1.

II. Préparation.

1. DU centre I, abaissez sur le Plan KSPC, la ⊥ IZ. Prop. 11. L. 11.
2. Joignez les points ZP, ZC, ZS & ZK, item SI & PI. Dem. 1. L. 1.
3. Du point K & dans le Plan ABCD, abaissez la ⊥ Ko sur le diamètre CA. Prop. 12. L. 1.

Puis-

* *On a partagé la Préparation ainsi que la Demonstration, en deux parties.*



Puisque dans le △ KCI, la ligne YX est Plle à KC. (*Arg.* 6.).
14. IC : CK = IX : XY. Prop. 2. L. 6.
Mais IC est > IX. Ax. 8. L. 1.
15. Donc CK > XY. Prop. 14. L. 5.
Or PS est = à XY (*Arg.* 8.).
16. D'où il suit que CK est aussi > PS. Prop. 7. L. 5.
17. De la même manière on demontrera que SP est > TQ, & TQ > VR.
Les ∀ IZP, IZC, IZK & IZS sont des ∀ ∟. (11. *Prép.* 1. & *Def.* 3. *L.* 11.)
Et IC est = IP = IS = IK. { Def. 16. L. 11. Def. 15. L. 1.
De plus IZ est commun aux quatres △ IZP, IZC, IZK & IZS.
18. Donc ZP = ZC = ZK = ZS. - - - - { Prop. 47. L. 1. Prop. 46. L. 1. Cor. 3.
19. Partant le ⊙ décrit du centre Z, avec le rayon ZP, passera par les points K, S, & C, & le quadrilatère KSPC sera inscrit dans un ⊙. Def. 3. L. 4.
Mais si les quatres cotés du quadrilatère étoit égaux; les arcs, qui les soustendent le seroit aussi, & seroit chacun le quart de la ○. (*Prop.* 28. *L.* 3.).
Or KS, CK & CP, sont égaux (*Ref.* 7.) & CK est > SP (*Arg.* 16.)
20. D'où il est évident que les trois cotés KS, CK & CP sous tendent plus que les trois quarts de la ○; & CK (qui est = à KS & CP) en soustent, par consequent plus que le quart. Prop. 33. L. 6.
21. Partant l'∀ du centre qui est ∀ CZK est > ∟.
22. D'où il suit que le □ sur KC est > que □ sur ZC + le □ sur ZK. Prop. 12. *L.* 2.
Mais le □ sur ZC est = au □ sur ZK (*Prop.* 46. *L.* 1. *Cor.* 3.).
puisque ZC est = à ZK (*Arg.* 18.).
23. Donc le □ sur KC est > que le double du □ sur ZC.
l'Angle AIK est > ∟ (puisqu'il est = ∀ AID + ∀ DIK & que l'∀ DIA est ∟ *Ref.* 2.).

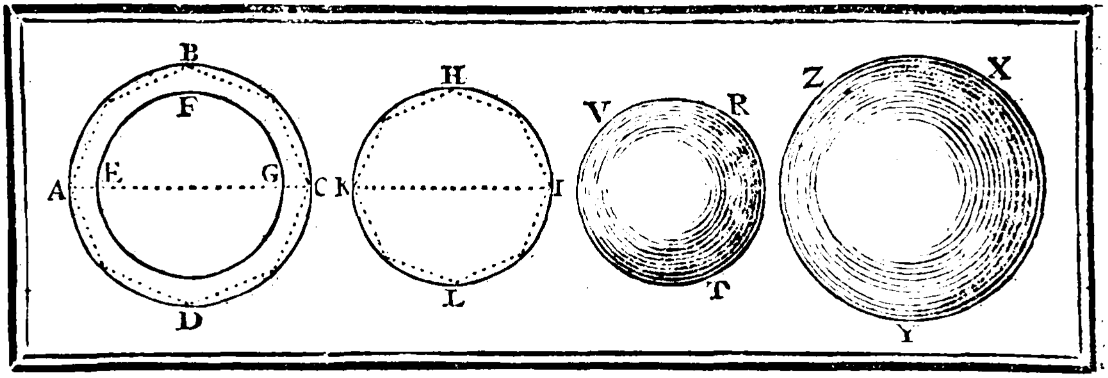
De

De plus l'∀ AIK est = à ∀ ICK + ∀ IKC. Prop. 32. L. 1.
24. Partant l'∀ ICK + ∀ IKC font > qu'un angle ∟.
Or l'∀ ICK est = à l'∀ CKI (*Prop.* 5. *L.* 1.) car KI est = à CI (*Def.* 15. *L.* 1.)
25. Donc 2 ∀ ICK font > qu'un angle ∟, & ∀ ICK > ½ angle ∟. Ax. 7. L. 1.
26. C'est pourquoi dans le △ C*o*K, l'∀ CK*o* est < ½ ∟.
Mais l'∀ ICK est > ½ ∟. (*Arg.* 25.). Prop. 18. L. 1.
27. D'où il suit que dans le △ C*o*K, le coté K*o*, opposé à l'∀ KC*o* ou KCI, est > que le coté C*o*, opposé à ∀ CK*o*.
28. Partant il est évident que le □ sur KC (qui est = au □ sur K*o* + au □ sur C*o* *par la Prop.* 47. *L.* 1.) est < que deux fois le □ sur K*o*.
Et il est demontré (*Arg.* 23.) que le □ sur KC est > que le double du □ sur ZC.
29. C'est pourquoi le double du □ sur K*o* sera > que le double du □ sur ZC.
30. Partant le □ sur K*o* est > que le □ sur ZC.
Mais le □ sur IC est = au □ sur IZ + le □ sur ZC.
Et le □ sur IK (= au □ sur IC. *Def.* 15. *L.* 1. & *Prop.* 46. *L.* 1. *Corol.* 3.) est égal au □ sur I*o* + au □ sur K*o*. } Prop. 47. L. 1.
31. Donc le □ sur IZ + le □ sur ZC font = au □ sur I*o* + le □ sur K*o*. Ax. 1. L. 1.
Si donc on retranche d'un coté le □ sur ZC & de l'autre le □ sur K*o*. (qui font inégaux *par l'Arg.* 30.).
32. Le reste savoir le □ sur IZ sera > que le □ sur I*o*. Ax. 5. L. 1.
33. Partant IZ est > I*o*.
Or la ligne K*o* (qui est ⊥ sur le diamètre AC, 11. *Prép.* 3.) est au-delà de la sphère EFGH, & ne peut la toucher (*Prop.* 16. *L.* 12. *Corol.*) *c. a. d.* que I*o* est > IG.
Et I*o* est < IZ. (*Arg.* 33.).
34. Donc a plus forte raison IZ (qui est beaucoup > IG,) ne touche point la superficie de la sphère EFGH.
35. C'est pourquoi le Plan KSPC, dans lequel Z est le point le plus proche du centre I, ne peut non plus toucher cette sphère EFGH.
36. De la même manière on demontrera, que tous les autres Plans qui forment le polyëdre ne touchent point non plus la sphère EFGH.
37. Partant on a décrit dans la plus grande sphère KON, un polyëdre KPTRVO &c. dont les Plans ne touchent point la petite sphère EFGH.

C. Q. F. F. 11.

COROLLAIRE.

SI dans deux sphères on décrit deux polyëdres semblables: ces polyëdres seront entr'eux en raison triplée des diamètres des sphères dans lesquels ils se trouvent, *car ses polyëdres étant* ∽, *sont terminés par un pareil nombre de Plans* ∽ *chacun à chacun* (Def. 9. L. 11.). *Partant chaque polyëdre peut se diviser en des pyramides ayant tous leurs sommets au centre de la sphère & pour bases les Plans du polyëdre; de plus tous les pyramides du premier polyëdre sont* ∽ *à tous les pyramides contenues dans le second polyëdre chacun à chacun; elles sont donc l'une à l'autre (savoir les pyramides du premier polyëdre aux pyramides du second) en raison triplée de leurs cotés homologues à savoir des demi diamètres de leurs sphères*, (par le Corol. de la Prop. 8. L. 12.), *d'où il suit* (par la douzieme du cinquieme Livre) *que toutes les pyramides composant le premier polyëdre sont à toutes les pyramides composant le second polyëdre en raison triplée des demi diamètres de leurs sphères*, & (par les Prop. 11 & 15. L. 5.) *que le premier polyëdre est au second en raison triplée des diamètres de leurs sphères.*



PROPOSITION XVIII. *THEOREME XVI.*

LEs ſphères (ABCD & HILK): ſont entr'eux en raiſon triplée de leurs diamêtres (AC & KI).

Hypothese.
AC eſt le diamêtre de la ſphère ABCD;
& KI, le diamêtre de la ſphère HILK.

These.
Sphère ABCD : ſphère HILK = $\overline{AC}^3 : \overline{KI}^3$. *

Demonstration.

SI non.
Une ſphère < ou > que la ſphère ABCD ſera à la ſphère HILK $= \overline{AC}^3 : \overline{KI}^3$.

I. Suppoſition.

SOit la ſphère VRT < que la ſphère ABCD, de façon que la ſphère VRT : ſphère HILK $= \overline{AC}^3 : \overline{KI}^3$.

Préparation.

1. PLacez la ſphère VRT autour du centre de la ſphère ABCD, comme eſt EFG, (qui eſt = à la ſphère VRT).
2. Dans la grande ABCD. inſcrivez un polyëdre, de façon qu'il ne touche point la ſphère EFG. Prop. 17. L. 12.
3. Dans la ſphère HILK inſcrivez un polyëdre ∽ au précedent.

PUiſque les polyëdres ABCD & KHIL ſont ∽ (1. *Prép.* 1 & 2.).
1. Le polyëdre ABCD : polyëdre KHIL $= \overline{AC}^3 : \overline{KI}^3$. Prop. 17. L. 12. Et Corol.

* *Voyez Append. Prop. VII.*

Et comme la fphère VRT : fphère HIKL = $\overline{AC}^3$: $\overline{KI}^3$. (1. *Sup.*).
De plus que la fphère VRT eft = à la fphère EFG (*Prép.*). Prop. 4. L. 5.
2. On peut conclure (invertendo) que la fphère HILK : fphère EFG = $\overline{KI}^3$: $\overline{AC}^3$. Corol. Prop. 7. L. 5.
3. D'où il fuit que la fphère HILK : fphère EFG = pol. KHIL : pol. ABCD. Prop. 11. L. 5.
Or la fphère HILK eft > que le polyëdre KHIL. Ax. 8. L. 1.
4. Donc la fphère EFG (ou fon égale VRT) eft auffi > que le polyëdre ABCD. Prop. 14. L. 5.
Mais la fphère EFG eft contenue dans le polyëdre ABCD (*Prép.* 2.).
5. Partant la partie feroit > que fon tout.
6. Ce qui eft impoffible.
7. D'où il fuit qu'il n'eft pas poffible que le cube du diamètre (AC ; ou $\overline{AC}^3$) d'une fphère (ABCD) eft au cube du diamètre (KI ; ou $\overline{KI}^3$) d'une autre fphère (HILK,) comme une fphère VRT (qui eft moindre que la première fphère ABCD *Sup.*), eft à cette feconde HILK.

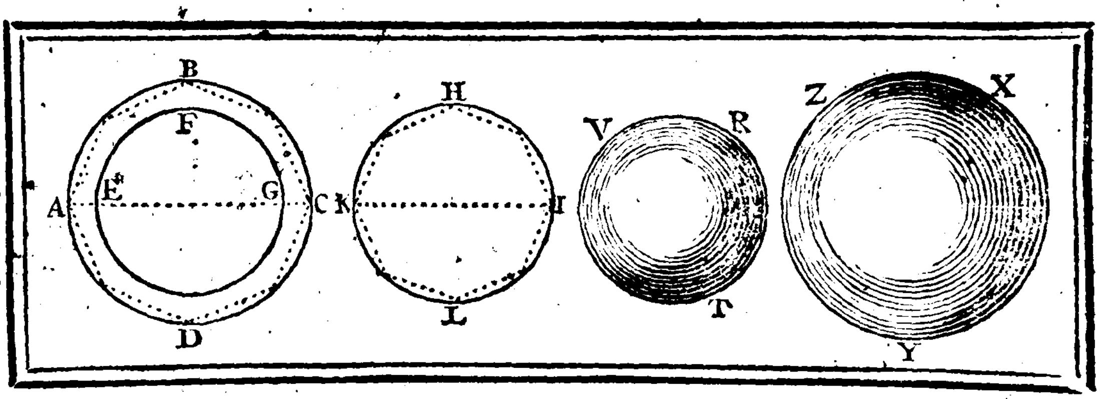
II. Suppofition.

Soit la fphère ZXY > que la fphère ABCD, de façon que la fphère ZXY : fphère HILK = $\overline{AC}^3$: $\overline{KI}^3$.

II. Préparation.

Prenez une fphère VRT, de manière que la fphère ABCD : fphère VRT = $\overline{AC}^3$: $\overline{KI}^3$.

Puifque la fphère XZY : fphère HILK = $\overline{AC}^3$: $\overline{KI}^3$ (11. *Supp.*).
Et que la fphère ABCD : fphère VRT = $\overline{AC}^3$: $\overline{KI}^3$ (11. *Prép.*).
8. La fphère XZY : fphère HILK = fphère ABCD : fphère VRT. Prop. 11. L. 5.
Or la fphère XZY eft > que la fphère ABCD. (11. *Sup.*).
9. Partant la fphère HILK eft auffi > que la fphère VRT. Prop. 14. L. 5.
Mais il eft démontré (*Arg.* 7.) qu'il eft impoffible que le cube du diamètre (AC ; ou $\overline{AC}^3$) d'une fphère (ABCD) eft au cube du diamètre (KI ; ou $\overline{KI}^3$) d'une autre fphère (HILK;) comme une fphère ABCD eft à une fphère moindre que HILK.
10. Donc la fphère VRT n'eft pas < que la fphère HILK, (comme on l'avoit prouvé *Arg.* 9.).
11. Partant la fphère XZY n'eft pas > que la fphère ABCD (ainfi qu'on l'avoit fuppofée).



La ſphère ſuppoſée ne pouvant donc être ni $<$ ni $>$ que la ſphère ABCD.

12. Elle la ſera égale.

13. D'où il ſuit que la ſphère ABCD : ſphère HILK $= \overline{AC}^3 : \overline{KI}^3$ Prop. 7. L. 5.

COROLLAIRE.

LEs ſphères ſont entr'eux comme les polyëdres ſemblables qui y ſont inſcrit, (*Cor. de la Prop.* 17. *L.* 12. & *Prop.* 11. *L.* 5.).

FIN.