EVCLIDIS

SEX PRIMI

ELEMENTORUM GEOMETRICORUM LIBRI CUM PARTE UNDECIMI

Ex majoribus Clavij commentarijs in commodiorem formam contracti

Per P. CHRISTOPHORUM GRIENBERGERUM è SOCIETATE JESU.

Accessit, item ferme ex Clavio

BREVIS TRIGONOMETRIA planorum, cum Tabulis Sinuum, Tangentium, & Secantium, ad partes Radij 100000 per sex prima scrupula graduum

Per P. JACOBUM HONORATUM DURANDUM EIUSDEM SOCIETATIS.

GRÆCII,

Apud Hæredes ERNESTI WIDMANSTADII.

ANNO M. DC. XXXVI.

Ad Lectorem.

Hic liber eſt parvus, ſpectatâ mole, ſed uſum
Si ſpectes, Lector, maximus hic liber eſt.

Inſtructio pro Bibliopego

Pagellæ figurarum eo loco ſunt inſerendæ, ubi primo incipit eſſe illarum uſus, prout ex cujusq; ſuperſcriptione cognoſcitur: ad dextram autem ſingularum, adhæret folium vacans, ut illud libello ita inſuatur, ut quando debet eſſe uſus figurarum, illæ extra libellum protendantur, & ad ſiniſtram totæ pateant, ſintq; ſemper oculis expoſitæ quacunq; libelli pagina legatur.

IMPRIMATUR

Alphonſus Seidetti Societatis JESU, Univerſitatis Cancellarius.

REVERENDISSIMIS, ET JLLUSTRISSIMIS

PRINCIPIBUS EPISCOPIS,

AMPLISSIMIS, ET REVERENDISSIMIS

PRÆLATIS,

Excellentißimis

Jllustrissimis, & Generosissimis, Jllustribus, Generosis, ac strenuis,

PRINCIPIBUS,

COMITIBUS, BARONIBUS, ATQ; EQUITIBUS,

Magnificis, & nobilibus Viris, Civitatibus, atq; Oppidis,

INCLYTI STYRIÆ DUCATUS

Dominis meis gratiosißimis & Observandißimis.

QVEMADMODVM sublimiora ædificia, ita scientiæ sine solidis fundamentis assurgere non possunt. Postquam in hac Gracensi Vniversitate Philosophiam docui; quinquennio jam integro, cum alijs occupationibus Mathematicam sum professus: quo tempore, non sine dolore animadverti, Mathematicæ facultati de solidis fundamentis parum esse prospectum; defuit scilicet copia librorum, quibus continentur Geometrica elementa, sine quibus tamen vanum omnino est, in Mathemathica solidos sperare progressus. Prospexere sibi jam multæ Vniversitates de hujusmodi elementis & fundamentis; quare mearum quoq; partium esse putavi

 effice-

efficere, ut huic etiam Vniversitati provideretur: quod dum animo voluo, commodum accidit, ut ad manus meas deveniret Euclides in compendium contractus, quem P. CHRISTOPHORVS GRIENBERGERVS Mathematicus emeritus, ut simili Romanæ indigentiæ provideret, nuper edide- rat; Opusculum quidem mole parvum, utilitate maximum, & in quo vere ex ungue Leonem agnoscas, in quo brevitas, quam maxime sectatus est, claritati, quantum quidem in rebus abstrusioribus retineri potest, non obfuit; nec sinceritati Geometricarum demonstrationum (in quo alia multa compendia deficiunt) quidquam detraxit. Hoc ergo compendium, adeo numeris omnibus absolutum, ut etiam hac Vniver-

sitas

ſitas illo gauderet, hic imprimendum judicavi. Adjeci Brevem Inſtructionem de reſolutione triangulorum ſaltem rectilineorum, quia ea notitia neceſſaria eſt ad Aſtronomiam, Geometriam practicam, Gnomonicam, Architectonicam maxime militarem &c. Cum vero ad reſolutionem triangulorum, neceſſarium ſit uſum noſſe tabularum ſinuum, tangentium & ſecantium, breves etiam hujuſmodi tabulas adjeci, ut quæcunque pro fundamentis ſufficiunt ſimul haberentur: quæ qui Magiſtro dirigente, & explicante, probe perdidicerit, ſatis erit inſtructus, ut ſine ulteriori duce, Auctores alios per ſe legat, & intelligat, & magnos faciat in mathematicis progreſſus. Cum porro hoc Opuſculum ſolum ideo emit-

tatur

tatur in lucem ut publico hujus Patriæ bono deserviat: non potuit apud alios sibi quærere auxilium & patrocinium, quam apud eos quos Patria PATRIÆ PATRES *agnoscit, & veneratur, & quorum publico testimonio omnia eo collimant studia & labores, ut Patriæ bene sit. Non aspernabuntur spero aut muneris tenuitatem, aut denegabunt Opusculo patrocinium, quibus omne id, & gratum est, & magnum habetur, quod confert ad publicam utilitatem.*

INCLYTI STYRIÆ DUCATUS

Servus in Christo

Iacobus Honoratus Durandus.

EVCLIDIS ELEMENTUM PRIMUM

DEFINITIONES.

Quibus vocabula Artis, & Termini in Elementis usurpati explicantur.

DEFINITIO I. Punctum est, cujus pars nulla est.

2. Linea, unius tantum dimensionis secundum longitudinem capax.

3. Lineæ termini sunt puncta.

4. Linea recta est, quæ ex æquo sua interjacet puncta.

Secundum Archimedem est minima earum quæ terminos habent eosdem, *hoc est*, brevissima extensio inter duo puncta.

5. Superficies est duarum dimensionum secundum longitudinem & latitudinem capax.

6. Superficiei autem extrema sunt lineæ.

7. Plana ſuperficies eſt quæ ex æquo ſuas interjacet lineas.

Secundum Heronem cui omni ex parte congruit linea recta.

8. Planus angulus eſt duarum linearum in plano concurrentium, &non in directum jacentium (*ita ut una verſus concurſum & ſecundum naturam ſuam protracta non continuetur cum altera*) alterius ad alteram inclinatio.

9. Rectilineus angulus eſt, quem conſtituunt lineæ rectæ.

10. Angulus rectilineus rectus eſt quando linea alteri lineæ inſiſtens, ad utramque partem æquales angulos facit. Et tales lineæ dicuntur ſibi mutuo perpendiculares.

11. Obtuſus angulus eſt qui recto major eſt.

12. Acutus qui minor recto.

13. Terminus eſt, id quod alicujus extremum eſt.

14. Figura eſt, quæ ſub uno vel pluribus terminis continetur.

15. Circulus eſt figura plana, unica linea comprehenſa quæ peripheria appellatur, [illegible]am omnes rectæ, ex quodam punc[illegible] educ[illegible]nt æqual[illegible]

16. H[illegible] punctum cētrum circuli vocatur.

17. Diameter eſt, quæ producta per centrum

trum dividit circulum bifariam.

18. Unde semicirculus, est figura contenta diametro, & semiperipheria.

19. Rectilineæ figuræ sunt, quæ rectis lineis continentur.

20. Trilateræ. quæ sub tribus.

21. Quadrilateræ, quæ sub quatuor.

22. Reliquæ vocantur multilateræ.

23. Æquilaterum triangulum est, quod tria habet latera æqualia.

24. Isosceles quod duo.

25. Scalenum quod omnia tria habet inæqualia.

26. Rectangulum triangulum est, quod habet angulum rectum.

27. Amblygonium quod habet obtusum.

28. Oxygonium quod omnes acutos.

29. Quadratum est quod æquilaterum, & rectangulum est.

30. Altera parte longior figura est rectangula non æquilatera.

Potest uno nomine vocari Oblonga, *vel* Oblongum.

31. Rhombus æquilatera est, non rectangula.

32. Rhomboides habet latera, & angulos oppositos æquales, & neque æquilatera est. neque rectangula.

33. Reliquæ figuræ quadrilateræ vocantur Trapezia.

34. Parallelæ rectæ lineæ sunt, quæ cum in eodem sint plano quantumcunq; protractæ non possunt concurrere.

35. Parallelogrammum est figura quadrilatera habens latera opposita parallela.

36. In parallelogrammo propositionis 43. duo parallelogramma A H G E, GFDI. dicuntur circa diametrum A D existere, & reliqua duo H C F G, GEBI, vocantur complementa.

PETITIONES seu POSTVLATA.

Sunt propositiones practicæ, & supponuntur ut per se nota.

1. A Puncto ad punctum liceat lineam rectam ducere, id quod fit per conceptionem brevissimæ extensionis.
2. Et lineam rectam quantumlibet producere.
3. Item quovis centro, & intervallo eidem centro applicato, circulum describere.

AXIOMATA seu PRONVNCIATA.

Sunt Propositiones speculativæ, quæ non indigent demonstratione.

1. Quæ eidem æqualia, inter se sunt æqualia.

2. Si

2. Si æqualibus adijciantur æqualia, fiunt æqualia.
3. Si ab æqualibus abijciantur æqualia, remanent æqualia.
4, Inæqualia cum æqualibus, faciunt inæqualia.
5. Æqualia ablata ex inæqualibus, relinquunt inæqualia.
6.7. Dupla vel dimidia ejusdem, sunt æqualia.
8. Quæ sibi mutuo congruunt sunt æqualia. *Debet aut talis congruentia constare intellectui*, & quæ sunt æqualia, sibi mutuo congruunt.
9. Totum sua parte majus est.
10.11. Duę rectę concurrentes, & se mutuo secantes, non habent aliquam partem communem.
12. Omnes recti anguli sunt æquales.
13. Et Euclidis 11. ponitur ad propositionem 28. sine qua non potest sufficienter concipi.
14. Duę lineæ rectæ possunt quidem constituere angulum, sed non claudere spatium, aut constituere figuram.
15.16.17.18. Non sunt usui in Elementis.
19. Omne totum est æquale suis partibus simul sumptis.
20. Si totum totius est duplum, & ablatum ablati, etiam reliquum est duplum reli-

 qui.

qui. *Sed hoc axioma non est necessarium, potest enim ejus loco citari* 19. *quinti cujus demonstrationes non dependent ab aliis libris pracedentibus.*

DE PROPOSITIONIBUS *in genere.*

PRopositiones, vel sunt Theoremata, vel Problemata. illa versantur circa quantitatem abstractam speculativè: ista practicè, quia habent pro fine aliquod opus intellectuale, circa eandem quantitatem abstractam. Et ita sumptæ propositiones sunt propriè mathematicæ, & pure Geometricæ. Ad Theoremata revocantur Pronunciata; ad Problemata Postulata, de quibus superius.

De Problematibus breviter advertendum. aliud esse tractare problemata per se, & gratia sui; aliud ea tractare solum quatenus usum habent in elementis, quando enim tractantur per se tunc Geometra non debet esse contentus monstrasse unam viã eamq; qualemcunque, sed nisi velit plures constructiones præscribere, ex omnibus eam seligere debet, quæ planior & compendiosior est ad solutionem problematis: ubi vero Problemata solum tractantur, quatenus ea necessaria sunt in elementis, sufficit si ita demonstrentur, ut omnia illa quæ ad demon-

demonſtrationem Theorematum aſſumuntur, certa eſſe conſtet, hoc eſt ſint vel ex principijs, vel ex alijs propoſitionibus præmonſtratis deducta.

Problemata quæ fiunt per inſtrumenta non ſunt pure Geometrica; poſſunt tamen aliquo modo dici mathematica ſaltem illa, quæ utuntur ſola Regula & Circino. Hæc enim duo inſtrumenta fundantur immediate in poſtulatis, hoc eſt in linea recta, & circulari.

Eodem poſſunt reduci etiam illa inſtrumenta quæ fiunt per Regulam & Circinum. Reliqua vero referantur ad Mechanicam. ex quibus aliqua ſunt quidē vera, ſed nondum Geometrice demonſtrata, alia falſa, vel ſaltem dubia, quæ tamen ſubinde admittuntur, quia videntur ſatisfacere ſenſui.

Deniq; tam Problemata, quàm Theoremata proponuntur aliquādo nomine Lemmatum, quæ præmittuntur vel ſubijciuntur propoſitionibus principalibus, quando ſunt neceſſaria, neq; poſſunt commode cicari.

PROPOSITIO I. PROBLEMA I.

Super data linea A B, triangulum Æquilaterum deſcribere.

CEntro A, intervallo A B, deſcribatur *per 3. poſtul.* circulus C B D; & centro B eodem intervallo B A, alter C A D, ſecans

cans priorem v. g. in C; & ex C, ad A, B ducantur C A, C B, *per postul.* 1. Dico triangulum AB C esse æquilaterum. Est enim A C, æqualis A B, & B C, æqualis eidem *per def. circuli*; ergo æquales inter se, *per* 1. *pron.* atque adeo triangulum A B C, est æquilaterum *per def.* 23.

PROPOS. 2. PROBL. 2.

Ad datum punctum A, datæ B C ponere lineam æqualem.

PROPOS. 3. PROBL. 3.

Ex majori A H, minori B C æqualem abscindere.

PEr *Primam* describatur supra A C, triangulum æquilaterum A C D, & centro C, intervallo C B, *per postul.* 3. circulus B E secans protractam D C, in E. & rursus centro D, intervallo D E alius E G secans protractam D A in G, & tertius G I, descriptus ex A, intervallo A G, abscindat ex A H, rectam A I. Dico A I, æqualem esse datæ B C. Rectæ enim A I, est æqualis A G *per def. circuli*, A G æqualis C E, quia D E, D G sunt æquales *per eandem def. circuli*, & ablatæ D A, D C sunt æquales, *per def. trianguli æquilateri*: ergo *per* 3. *pron.* A G, est æqualis C E. Est autem eidem C E, *per def.* 15. æqualis B C, ergo tam A I, quam A G, sunt æquales ipsi B C.

PRO-

PROPOS. 4. THEOREMA 1.

Angulus A, sit æqualis Angulo D, & latus AB, æquale lateri D E, & A C, ipsi D F: Dico & basim B C, æqualem esse basi E F; & triangulum G, æquale triangulo H, & angulum B, angulo E, quibus opponuntur æqualia latera A C, D F; & angulum C, angulo F, quibus opponuntur reliqua duo latera æqualia A B, D E.

FActa enim superpositione lateris A B, super latere D E; A B, congruit D E, *per ax.* 8. & angulus A, angulo D; & consequenter latus A C, lateri D F, propterea quod omnia ista sunt æqualia *ex hypothesi.* Ergo & basis B C congruit basi E F; triangulum G triangulo H; angulus B, angulo E, & C ipsi F, & ideo omnia ista sunt inter se æqualia *per 8. pron.*

PROPOS. 5. THEOREMA 2.

Latus A B, sit æquale lateri A C, sintque producta ad D, E utcunque: Dico tam angulos A B C, A C B, quam D B C, E C B, esse æquales.

P*Er tertiam* fiat A E æqualis A D; nectanturque *per postul.* 1. C D, B E. Eruntque *per 3. pron.* etiam B D, C E æquales; & in triangulis A B E, A C D erunt circa communem angulum A, latera lateribus æqualia, A B ipsi A C, & A E, ipsi A D. Ergo *per 4.* basis B E, est æqualis C D; angulus A B E,

 angulo

angulo ACD, & AEB, angulo ADC. Rursus in triangulis BCE, CBD. circa æquales angulos E & D. Latus B E est æquale lateri CD, & CE ipsi BD, Ergo *per eandem* 4. angulus B C E, est æqualis C B D; & hi sunt duo anguli infra basim B C: & angulus C B E, æqualis B C D, & hi sublati ex æqualibus A C D, A B E relinquunt supra eandem basim æquales A C B, A B C.

Coroll. Hinc patet triangulum æquilaterum esse æquiangulum.

PROPOS. 6. THEOR. 3.

Angulus A B C, sit æqualis A C B: Dico latera A C, AB, esse æqualia.

SI enim essent inæqualia, posset semper ex majori v. g. *A B* abscindi BD æqualis minori A C; atq: ita fieret triangulum B C D, æquale triangulo A B C, *per* 4. quia circa æquales angulos D B C, A C B, sunt latera lateribus æqualia.

Coroll. Ergo triangulum æquiangulum, erit quoque æquilaterum.

PROPOS. 7. THEOR. 4.

AD sit æqualis A C, & BD, æqualis sibi conterminæ B C; & A C, BC, conveniant ad C. Dico reliquas A D. B D ad partes C, non convenire ad aliud punctum.

Aliter.

Triangulis A C B, A D B sit communis basis A B; & A D, æqualis A C, & BD, ipsi B C.

BC. Dico ABD, translatum in alteram partem, coincidere prorsus cum triangulo ABC.

Eulides præmittit hanc propositionem octavæ, quam Proclus ita demonstrat, ut potius octava præluceat septimæ.

PROPOS. 8. THEOR. 5.

Latus A B, sit æquale D B, & A C, ipsi D C, nec non basis B C, basi B C, Dico angulum, A æqualem esse angulo D.

INtelligantur conjuncta ad communem basim BC ita ut latera æqualia sint etiam contermina, sed ad partes diversas, nectaturque AD, quæ vel transit per C, ut in primo casu; vel cadit inter B, C ut in secundo; vel extra ut in tertio. In primo propter æqualitatem laterum BD, BA, anguli A, D sunt æquales *per* 5. In 2. & 3. propter æqualitatẽ laterum A*B*, *B*D, sunt ęquales anguli *BAD*, *BDA*; & propter ęqualitatem laterũ *CD*, *CA*, sunt quoq; æquales anguli CD A, CAD. Ergo in secundo casu totus angulus BAC erit æqualis toti B D C; & in tertio reliquus angulus B A C reliquo B D C.

Coroll. Et quia circa angulos æquales B D C, B A C sunt latera lateribus æqualia *erunt per* 4. triangula æqualia; & reliqui anguli reliquis angulis, sub quibus æqualia latera subtenduntur.

AD 7. PROPOSIT.

IN septima ponuntur eadem quæ in octava. Ergo in triangulis A B D, A B C erunt anguli DAB, DBA, æquales angulis CAB, CBA. Et ideo in superpositione sibi mutuo congruent, & latus A D, coincidet cum A C, & B D, cum B C, atque adeo punctum D, cum puncto C.

PROPOS. 9. PROBL. 4.

Datum angulum rectilineum B A C, bifariam secare.

ABscindantur *per* 3. æquales A D, A E, & supra D E fiat *per* 1. triangulum æquilaterum DEF. Dico AF satisfacere proposito. Angulus enim F A D, est æqualis angulo F A E, *per* 8. quia duo latera F A, AD, sunt æqualia duobus F A, A E, & basis F D, basi F E.

PROPOS. 10. PROBL. 5.

Datam rectam A B bifariam secare.

DEscribatur *per* 1. triangulum æquilaterum A B C, & recta C D secet *per* 9. angulum C, bifariam. Dico eandem C D, secare quoque bifariam A B. Est enim AD æqualis D B, *per* 4. quia circa æquales angulos ad C, sunt latera lateribus æqualia.

PROPOS. 11. PROBL. 6.

Ex puncto C, recta A B, erigere perpendicularem.

ACcipiantur *per* 3. æquales C D, CE, & D E F, sit *per* 1. æquilaterum. Dico F C, esse perpendicularem, hoc est angulos ad C.

ad C, esse æquales, ideoque *per definit.* 10. rectos. Sunt enim duo latera C F, C D, æqualia duobus C F, C E, & basis F D, æqualis F E, ergo *per* 8. F C D, æqualis angulo F C E.

PROPOS. 12. PROBL. 7.

Ex puncto C, in datam A B, perpendicularem demittere.

CEntro C, describatur *per* 3. *post.* circulus secans AB utcunque in D E, & DE secetur *per* 10. bifariam in F. Dico CF, esse perpendicularem. quia F C, F D, sunt iterum æqualia lateribus F C, F E, & basis C D æqualis C E *per def. circuli.* ergo.

PROPOS. 13. THEOR. 6.

Recta rectæ insistens, vel facit duos rectos, vel duobus rectis æquales.

QUando E B insistens, est perpendicularis; certum est angulos EBC, EBD, esse rectos. At A B magis inclinata in unã partem quâm in aliam, constituit saltem duos angulos A B C, A B D, æquales duobus E B C, E B D: quia tam isti, quàm illi sunt æquales tribus E B C, E B A, ABD.

PROPOS. 14. THEOR. 7.

C D, C E sunt una linea continuata, quando alia A C, facit angulos A C D, A C E, æquales duobus rectis.

SI enim C F, pars protractæ D C, caderet

ret supra, vel infra C E; essent nihilominus *per* 13. anguli A C D, A C F, æquales duobus rectis, & æquales duobus A C D, ACE quod est absurdum.

PROPOS. 15. THEOR. 8.

A B, C D, secent se mutuo ad verticem E, Dico angulum A E C, æqualem esse D E B, & A E D, ipsi B E C.

NAm & A E, cum CD, & C E cum A B facit *per* 13. angulos duobus rectis æquales. & ideo A E D, AEC, æquales sunt duobus C E A, CEB; demptoque communi A E C, remanet A E D, æqualis C E B. Similis est ratiocinatio de angulis A E C, B E D.

Coroll. 1. Hinc patet omnes quatuor angulos ad punctum E esse æquales quatuor rectis.

Coroll. 2. Immo quotcunque fuerint anguli ad E, omnes simul erunt quatuor rectis æquales.

PROPOS. 16. THEOR. 9.

Dico angulum externum C A D, trianguli A B C, majorem esse utrolibet interno, & opposito, tam A C B, quam ABC.

SEcto latere A C, bifariam in E, & ex B protracta B E, sumptâ E F, æquali ipsi B E, & juncta F A: erunt *per* 15. æquales anguli B E C, F E A, & duo latera EB, EC, æqualia duobus EF, EA; & ideo *per* 4. angulus

gulus E A F, æqualis E C B. eſt autem externus C A D, major quàm E A F. ergo idem externus eſt quoque major B C E.

Protracto autẽ latere C A ad G, fit externus B A G, æqualis priori C A D *per* 15. & secto bifariam latere AB in H; factâq;. HI, æquali H C, demonſtratur ut prius, angulum B A G, majorem eſſe A B C, ergo & C A D, erit major eodem,

Ex Proclo. *

Si A B, AC, ſunt æquales, quævis alia AD, non erit eiſdem æqualis.

SI enim AD eſſet æqualis, eſſet *per* 5. angulus C, æqualis B, & eidem B, eſſet æqualis ADB. ideoque æqualis ACD, quod eſt abſurdum, quia A D *B* eſt externus, ideoq; major interno & oppoſito C.

PROPOS. 17. THEOR. 10.

Duo quilibet anguli trianguli, ſunt minores duobus rectis.

PRoductis B C, B A, in D. E, efficitur *per* 16. externus A C D major B, & ideo A C D, ACB majores duobus A B C, ACB. Sunt autem illi æquales duobus rectis *per* 13. ergo iſti ſunt minores duobus rectis. Eadem eſt ratio de duobus angulis BAC, BCA. Pro duobus autem C A B, C B A aſſumendus eſt externus CAE.

Ex Proclo. *

EX eodem puncto A, in C D, una tantum cadit perpendicularis A C, Si enim præter A C, esset alia A B: essent duo anguli A C B, A B C, æquales duobus rectis, quod est absurdum.

Coroll. 1. Propter eandem causam, in triangulo non potest esse nisi unus tam rectus, quàm obtusus.

Coroll. 2. Existente angulo A B C, acuto, perpendicularis A C, cadit ex parte anguli acuti. si enim caderet ex parte obtusi, qualis est A D; ABD, AD *B*, essent duobus rectis majores.

Coroll. 3. Duo anguli ad basim isoscelij; & omnes tres trianguli æquilateri, sunt acuti.

PROPOS. 18. THEOR. 11.

Majus latus A C, subtendit majorem angulum A B C, & AB, minus minorē A C B.

SI enim A D, fiat æqualis A B, erunt *per* 5. anguli ad basim B D, æquales, est autem *per* 16. ADB, major C: ergo & ABD, & multo magis ABC, erit major C.

Coroll. Hinc patet in Scaleno tres angulos esse inæquales.

PROPOS. 19. THEOR. 12.

Majori angulo A B C opponitur majus latus AC, & minori C, minus latus A B.

Si

SI enim latus AB in superiori figura foret æquale *AC*, essent prędicti anguli ęquales, & si A B, esset majus; esset *per praced.* cõtra hypoth. ãgulus C, major angulo ABC.

Coroll. Omnium rectarum AC, AC, AC, perpendicularis A B, est omnium brevissima; quia AB opponitur acutis, & A C, opponuntur recto.

PROPOS. 20. THEOR. 13.

Duo qualibet latera trianguli, sunt reliquo majora.

LAteribus C A, A B, fit æqualis C A D, hoc est A D, æqualis A B. Ergo ad basim B D, sunt *per* 5. anguli æquales. Estque ABD, minor DBC: ergo & AD*B*, seu C D B, est minor eodem, & *per* 19. B C. minor CD, hoc est minor duabus C A, A B, & ita de reliquis.

PROPOS. 21. THEOR. 14.

Dua recta B D, C D, intra triangulum A B C, sunt minores lateribus conterminis A B, AC, & angulus BDC, major A.

PRoductá enim BD, in E; erunt *per* 20. B A, AE, majora reliquo latere BE, adjectaque E C, duæ rectæ A B, AEC, majores duabus BE, E C. Sunt autem & C E, E D, majores CD, & additá DB, duæ C E, E DB, sunt majores duabus C D, D B. ergo AB, AC, sunt multo majores duabus B D, DC. Porro angulus *B*DC, major est DEC.

per 16.

per 16. & hic major angulo E A *B* : ergo *B* DC, est multo major EA*B*, seu *B* A C.

PROPOS. 22. PROBL. 8.

Ex tribus rectis A, B, C, quarum unaquaq; sit minor aggregato reliquarum; triangulum construere.

IN recta DG, sumantur DE, E F, F G, æquales tribus datis A, *B*, C, & centris E, F, intervallis E D, F G, describantur duo circuli se mutuo secantes in H. eruntque *per def.* 15. E H. F H æquales ipsis E D, F G, hoc est ipsis, A, C, estque E F, æqualis ipsi *B*. ergo.

PROPOS. 23. PROBL. 9.

Ad punctum C, recta A B, constituendus sit angulus G C H, æqualis dato D E F.

DUcatur utcunque D F, & fiat *per* 22. triangulum G C H habens latus C G, æquale lateri E D; C H æquale E F, & G H, æquale D F: sic enim necesse est angulum G C H *per* 8. æqualem esse, angulo D E F.

PROPOS. 24. THEOR. 15.

Latus A B, sit æquale lateri D E. & A C, ipsi D F; basis autem B C, major sit basi E F: Dico angulum A, esse majorem angulo E D F.

ANgulo A, fiat æqualis EDG, & DG, æqualis A C, nectaturque E G, quæ in primo casu continuatur cum E F, in 2. cadit

dit supra, & in 3. infra. In omnibus vero casibus recta E G, est *per* 4. æqualis basi *B* C. & in primo quidem casu manifestum est F G, ideoque & *B* C, majorem esse E F. In secundo vero in triangulo isoscelio DFG, anguli ad basim F G. sunt *per* 5. æquales, estque DGF, major sua parte E G F. ergo & D F G, multoque magis totus EFG, major est eodem E G F. Ideoque *per* 19. EG, hoc est *B* C, major base E F. Denique in tertio in quo æquales D F, D G, sunt protractæ ad H, I, anguli infra basim F G sunt *per* 5. æquales; estque I G F, major sua parte E G F. ergo & H F G, & multo magis E F G, major est eodem E G F. & idcirco E G, seu *B* C, major quàm E F ut prius.

PROPOS. 25. THEOR. 16.

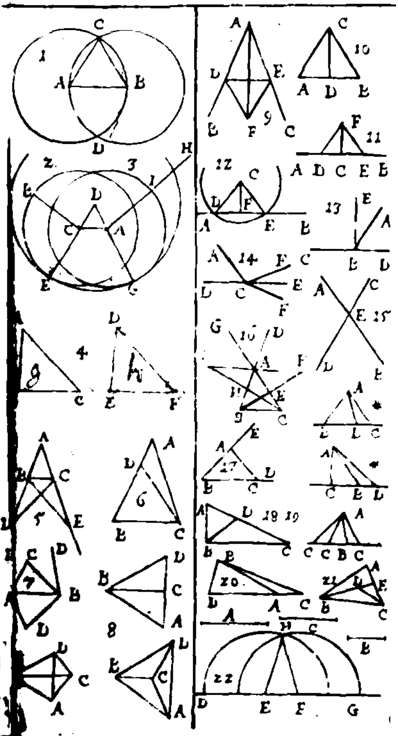
Vice versa angulus A, major est angulo D, quando basis B C major est base E F, & reliqua latera reliquis æqualia, ut in præcedenti.

ESset enim *per* 4. basis *B* C, æqualis E F, si angulus A, posset esse æqualis angulo D, & *B* C. *per* 24. minor esset quàm E F, si A esset minor D.

PROPOS. 26. THEOR. 17.

Anguli B, C, sint æquales angulis E, F, & latus B C, ipsi E F, nimirum adjacens adjacenti; vel certe A B ipsi D E. quæ æqualibus

A pagina 7? ad ...am 1



qualibus angulis opponuntur: Dico & reliqua reliquis esse aequalia.

SIt primo *B* C æqualis E F, & D F si fieri potest sit major AC. Sumptâ igitur FG, æquali ipsi AC; erunt circa æquales angulos C, F, latera A C, C *B*, æqualia lateribus GF, FE; ideoque *per* 4. angulus A*B*C, seu D E F, æqualis angulo G E F, quod est absurdum.

Secundo sit A *B* æqualis D E, & si fieri potest E F, sit major *B* C. Sumptâ igitur E G, æquali ipsi *B C*; erit ut prius angulus *B C A*, hoc est EFD, æqualis EGD, internus externo *contra* 16.

Sunt igitur omnia latera omnibus æqualia, ideoque *per* 8. etiam reliqua æqualia.

PROPOS. 27. THEOR. 18.

Recta E F secet duas A B, C D, faciatque angulum A G H aequalem alterno DHG: Dico A B, C D, esse parallelas.

SI minus concurrant in I. Cum igitur trianguli G H I, latus I G, sit protractum; erit *per* 16. angulus externus A G F, major interno & opposito I H G quod est absurdum. Idem sequitur si concurrerent ad K.

PROPOS. 28. THEOR. 19.

Eaedem A B, C D, erunt quoque parallelae, si constet externum A G E aequalem esse inter-

interno C H G: *vel duos internos* A G H, C H G, *æquales duobus rectis.*

EX utroque enim sequitur alternum B G H, æqualem esse alterno C H G. Externo enim A G E æqualis est *per* 15. B G H, ad verticem G. & duo A G H, C H G sunt *per* 13. æquales duobus H G A, H G B, estque H G A, communis. ergo reliquus H G B, æqualis est reliquo C H G, alternus alterno. ergo *per* 27. A B, C D, sunt parallelæ.

Ex hac posteriore parte constat sufficienter veritas 13. pronunciati.

AXIOMA 13.

SI in duas rectas incidat recta O I, faciatque duos angulos O, I, minores duobus rectis: duę rectæ *AB. CD*, concurrent ad partes angulorum O, I.

PROPOS. 29. THEOR. 20.

Duas parallelas A B, C D *secet* E F, *in* G, H. *Dico alternum alterno; externum interno; & duos angulos internos esse duobus rectis æquales, convertendo duas præcedentes.*

NAm primo si alternus A G H esset major alterno D H G, addito communi B G H essent duo D H G, B G H, minores duobus A G H, B G H, hoc est minores duobus rectis, & ideo *per* 13. *axioma* A B, C D, concurrerent ad partes B, D, *quod est*

est contra hypothesim. Ergo alterni sunt æquales, hoc est, *B* G H, ipsi *C* H G. Est autem *per* 15. *B* G H, æqualis *A* G E, ergo etiam externus *A* G E, erit æqualis interno *C* H G, & quia *B* G H, cum *A* G H, æquipollet *per* 13. duobus rectis, eruntque duo interni *A* G H, *C* H G æquales duobus rectis.

PROPOS. 30. THEOR. 21.

A B, C D, sint parallelæ eidem I K: Dico etiam ipsas esse parallelas inter se.

Ducta enim E F erit *per* 29. *B* G L, æqualis alterno I L G & *C* H L, æqualis K L H: sed I L G, K L H, sunt *per* 15. æquales. ergo & alterni *B* G L, *C* H L sunt æquales, & *per* 27. *A B, C* D parallelæ.

PROPOS. 31. PROBL. 10.

Per A, ducere parallelam datæ B C.

Ducta A D utcunque, & facto *per* 23. angulo D A E, æquali alterno *A D C,* erit *per* 27. E A F, ipsi *BC,* parallela.

PROPOS. 32. THEOR, 22.

Externus angulus A C D, est æqualis duobus internis, & oppositis A, B: & omnes tres anguli cujuscunque trianguli sunt æquales duobus rectis.

Ducatur *per* 30. *C*E paralella *AB*; eritq; *per* 29. E*CA*, æqualis alterno *A*, & externus E *CD*, æqualis interno *B*, & totus externus *ACD*, æqualis duobus internis *A, B*, Ad-

B. Adjectoq; communi *ACB*, erunt omnes tres interni *A*, *B*, *C*, æquales duobus *ACD*, *ACB* hi autem sunt *per* 13. æquales duobus rectis. ergo & illi.

Coroll. 1. Ergo omnes tres anguli unius trianguli sunt æquales tribus cujuscunque alterius trianguli simul sumptis: & quando duo sunt æquales duobus, erit & reliquus reliquo æqualis.

Coroll. 2. In triangulo isosceli rectangulo; anguli ad basim sunt semirecti.

Coroll. 3. Angulus trianguli æquilateri est una tertia duorum rectorum, vel duæ tertiæ unius recti.

Ex Scholio. *

OMnis figura rectilinea distribuitur in tot triangula, quod ipsa continet latera demptis duobus; ita ut anguli triangulorum constituant angulos figuræ.

Cumque anguli cujuscunque trianguli sint æquales duobus rectis, erunt omnes anguli figuræ rectilineæ, æquales bis tot rectis, quot ipsa habet latera, demptis duobus.

Quot autem habet latera, tot habet angulos internos & externos. Ergo interni simul cum externis sunt ęquales bis tot rectis quot sunt latera; quia quilibet externus cum suo interno ęquivalet duobus rectis

ctis *per* 13. Interni autem soli, sunt ęquales bis tot rectis quot sunt latera demptis duobus, quibus respondent quatuor recti; demptis igitur omnibus internis, remanebunt externi quatuor rectis ęquales, & ideo omnium figurarum anguli externi simul sumpti, sunt ęquales simul sumptis.

PROPOS. 33. THEOR. 23.

Sint A B, C D, aequales & parallelae. Dico etiam A C, B D, esse aequales, & parallelas.

Ductâ enim *B C*, erunt *per* 29. alterni *A B C, D C B* æquales, & duo latera *A B, B C*, duobus *B C, C D* ęqualia. ergo *per* 4. etiam basis *B D*, ęqualis basi *A C*, & angulus *A C B*, ęqualis alterno *CBD*, ideoque *per* 27. *B D*, parallela *A C*.

PROPOS. 34. THEOR. 24.

In parallelogrammo latera & anguli oppositi sunt aequales; & diameter secat ipsum bifariam.

Cum enim *per def.* 35. latera *A B, DC*, nec non *A D*, *B C* sint parallela; erit *per* 29. angulus *B A C* ęqualis *D C A*; & *A C B*, ipsi *C A D*. estque latus *A C*, ipsis adjacens commune, ergo *per* 26. *A B*, erit ęquale *CD*, & *A D*, ipsi *B C*, & angulus *B*, angulo D, & triangulum *A B C*, triangulo *A D C*. Deniq; reliqui anguli *A* & *C*, sunt ęquales quia constant ex ęqualibus.

Ex

Ex Scholio. †

Omne quadrilaterum habens latera opposita, vel angulos oppositos aequales, est parallelogrammum.

SInt primo A B, C D, & A D, B C, æquales. Ducta igitur A C, erunt duo latera A B, B C, æqualia duobus C D, D A, & A C, basis erit communis. Unde *per* 8. non solum angulus B, angulo D, sed & angulus B A C, angulo D C A, & A C B, æqualis erit C A D, nimirum alterni alternis, atq; adeo *per* 27. A B, erit parallela C D, & A D, ipsi B C.

Secundo. Angulus A, sit æqualis C, & B, ipsi D; eruntque duo A, B, æquales duobus C, D, & duo A, D, æquales duobus C B. Sunt autem omnes quatuor æquales quatuor rectis *per Scholium* 32. ergo tam A, B, quàm A, D, erunt duobus rectis æquales, & ideo *per* 28. AB, CD. & AD, *B* C, erunt parallelæ.

Ex priore parte hujus demonstrationis constat Quadratum, Rhombum, & Rhomboidem esse parallelogramma.

Ex posteriore constat idem de Quadrato, figura altera parte longiore, & Rhomboide.

Item. *

In omni parallelogrammo diametri se mu-

enò secant bifariam : & in Quadrato & Rhombo secant angulos bifariam; in figura altera parte longiore siue oblonga; & Rhomboide non bifariam : eademq́ in quadrato, & oblonga sunt æquales, in Rhombo & Rhomboide inæquales.

Dico primo A C, B D, secari bifariam in E. Anguli enim E A D, E D A, sunt æquales angulis E C B, E B C, *per* 29. & latera adjacentia A D, B C, sunt æqualia *per* 34. ergo *per* 26. E A, est æqualis E C, & E B, æqualis E D.

Dico secundo in quadrato, & Rhombo angulos A, C secari bifariam à diametro A C. latera enim C A, A D, æqualia sunt lateribus A C, A B, & basis C D, basi C B. ergo *per* 8. angulus C A D. angulo C A B.

Dico tertio in oblongo, & Rhomboide angulos A, C, secari à diametro A C non bifariam. Est enim angulus B A C, minor angulo BCA, *per* 18. & *per* 29. B C A, est æqualis alterno C A D. ergo B A C, minor est C A D.

Dico quarto in quadrato, & oblongo diametros A C, B D, esse æquales *per* 4. quia circa æquales angulos nempe rectos latera D A, D C, sunt æqualia lateribus B C, C D.

Dico 5. in Rhombo & Rhomboide diametrum A C, quæ subtendit minorem an-

gulum

gulum D, minorem esse diametro BD, quæ subtendit majorem C. Sunt autem D & C, inæquales, quia simul sunt æquales duobus rectis *per* 29. & *per def.* neuter est rectus. Cum enim latera D A, D C, sint æqualia lateribus C B, C D, & angulus D minor angulo C, *ex hypothesi*; erit basis A C, minor base B D, *per* 24.

PROPOS. 35. THEOR. 25.

Parallelogramma A C D E, F C D B, super eadem basi C D, & inter easdem parallelas A B, C D, sunt æqualia.

IN primo casu coincidit punctum F cum puncto E; in secundo existit inter puncta A, E; in tertio inter puncta E, B. In omnibus autem tribus casibus angulus C A F æqualis est *per* 29. D E B, & *per* 34. A C æqualis D E, & A E, F B æquales eidem C D, ideoque æquales inter se. & in secundo casu auferendo intermediam F E relinquuntur æquales A F, E B. & in tertio fit idem addendo communem E F. Atque ita circa æquales angulos C A F, D E B, erunt duo latera C A, A F, æqualia duobus lateribus D E, E B, & idcirco *per* 4. triangulum C A F, erit æquale triangulo D E B. & in primo casu addito triangulo C E D. in secundo Trapezio C F E D. & in tertio abjecto primo triangulo G E F & postea adjecto trianguloCDG, fit parallelogrammumAC DE,æquale paralelogrammo FCDB.

PROPOS. 36. THEOR 26.

Similiter parallelogramma A C D E, F G H B, super æqualibus basibus C D, G H. & inter easdem parallelas A B, C H, sunt æqualia.

CUm enim C D, sit æqualis G H, & eidem G H, æqualis *per* 24. F B, erunt C D, F B, æquales inter se, & parallelæ. ergo *per* 33. & C F, D B, sunt parallelæ, & C D B F, parallelogrammum, cui *per præcedentem* sunt æqualia A C D E, F G H B; quia illa sunt super eadem basi C D. hæc super basi F B. ergo & A C D E æquale est parallelogrammo F G H *B*.

PROPOS. 37. THEOR. 27.

Triangula A C D, F C D, super eadem basi C D, & inter easdem paralellas AB, CD, sunt æqualia.

REctæ enim DE, D B, parallelæ ipsis A C, F C constituunt *per* 35. duo parallelogramma A C DE, F C D B æqualia, eademque *per* 34. dupla triangulorum A C D, F C D. ergo etiam triangula A C D, F C D, sunt æqualia.

PROPOS. 38. THEOR. 28.

Idem constat de triangulis ACD, F G H super æqualibus basibus C D, G H.

Quia

QUia sunt semisses æqualium parallelogrammorum A C D E, F G H B.

Ex Scholio.†

Recta igitur F H, secans basim G I, bifariam in H; secat etiam bifariam triangulum F G I.

PROPOS. 39. THEOR. 29.

Triangula A B C, B C D. sint super communi basi B C, æqualia. Dico A D, esse parallelam B C.

SI minus, sit A E parallela, & secet C D, in E; eritque *per* 37. triangulum B C E æquale eidem A B C: & ideo B C E, B C D, æqualia; quod est absurdum.

PROPOS. 40. THEOR. 30.

Idem dico quando triangula A B C, D E F sunt æqualia, & super æqualibus basibus B C, E F.

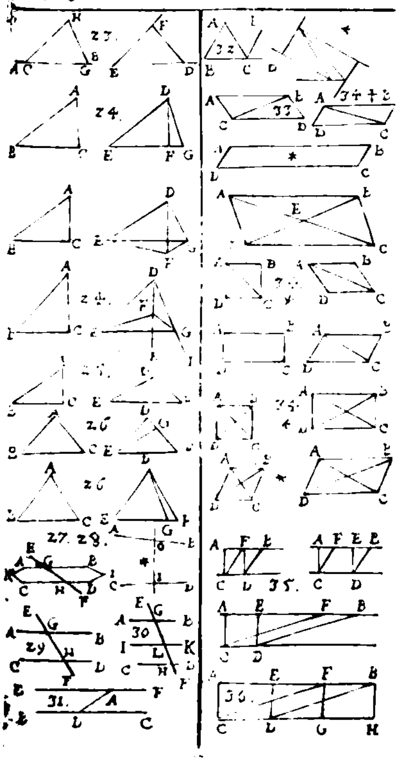
SI enim alia A G, esset parallela; triangula A B C, G E F, essent æqualia *per* 38, nec non G E F, D E F.

PROPOS. 41. THEOR. 31.

Parallelogrammum A B C D, & triangulum E B C, sint inter parallelas A E, B C: Dico parallelogrammum duplũ esse trianguli.

QUia parallelogrammum ABCD est *per* 34. duplum trianguli AB C; & hoc est æquale triangulo EBC *per* 37. Ergo.

A pagina 28 ad 38.



PROPOS. 42. PROBL. 11.

Triangulo ABC, constituere parallelogrammum æquale, cum angulo D.

BAsis B C, secetur bifariam in E: *per* 10. eritque *per* 38. triangulum A B C, duplum trianguli A E C: & facto angulo C E F, æquali D, ductâque A F G, parallela B C, & C G, parallela E F; factum erit parallelogrammum E G, duplum ejusdem trianguli A E C, *per* 41. & idcirco æquale triangulo A B C.

PROPOS. 43. THEOR. 32.

Complementa G B, G C, de quibus defin. 36. sunt æqualia.

TRiangulum enim ACD æquale est triangulo A D B, *per* 34. A G H, ipsi A G E; & G D F, ipsi G D I: Et ablatis A G H, G D F ex A C D, remanet complementum G C, & ablatis AGE, G D I ex A D B, remanet complementum G B. ergo.

PROPOS. 44. PROBL. 12.

Ad datam A. dato triangulo B; æquale parallelogrammum applicare, cum dato angulo C.

PEr 42. fiat parallelogrammum G E, æquale triangulo B, cum angulo F, æquali C; & ex D E protracta, sumatur E I, æqualis A, & I F, secet D G, in K, perficianturque reliqua parallelogramma: ex quibus complementum FL, est *per* 43. æquale comple-

complemento G E, hoc est triangulo B, & habet latus FH, æquale ipsi E I, hoc est, ipsi A; & angulum M F H æqualem angulo F, *per* 15. hoc est angulo C.

PROPOS. 45. PROBL. 13.

Dato rectilineo, A, B, C: æquale parallelogrammum constituere, cum angulo D.

DIstribuatur rectilineum in sua triangula A, B, C, ipsique A, fiat *per* 42. æquale parallelogrammum F H cum angulo F. æquali D: & aliud GI æquale ipsi B applicetur ad G H, cum angulo G, æquali eidem D: denique ad K I applicetur K M ęquale ipsi C, & I K L; sit rursus æqualis angulo D: erunt FH, GI, KM simul æqualia rectilineo A, B, C. Quod autem F M, sit parallelogrammum probatur hoc modo. Angulus F est ęqualis HGK, & duo HGK, HGF. sunt æquales duobus HGF, GFE, & hi duo sunt ęquales duobus rectis *per* 29. ergo & illi, & ideo *per* 14. G F, G K, sunt una linea: & eadem est ratio de K G, K L. immo eadem quoque de tribus E H, H I, I M; quia angulis F, G, K, sunt *per* 34. æquales, oppositi H, I, M. Cumque G H, sit æqualis & parallela E F, & K I, æqualis, & parallela G H, & L M, æqualis, & parallela ipsi K I: erunt etiam E F, L M, æquales & parallelæ, & *per* 33. FL, E M, erunt similiter æquales & parallelæ.

PROPOS. 46. PROBL. 14.

Super datam A B, quadratum describere.

ERigantur duæ perpendiculares A D, B C, æquales ipsi A B: eritque *per* 33. etiam DC æqualis & parallela ipsi AB, & angulis rectis *A, B*, erunt *per* 34. æquales oppositi *C, D*. Hoc est figura *A C*, erit æquilatera, & rectangula.

PROPOS. 47. THEOR. 33.

In triangulo A B C, habente rectum ad A: Quadratum lateris B C, æquale est quadratis duorum laterum A B, A C.

DEscribantur *per* 46. quadrata *B D, B G, C I*: eritque *per* 14. tam *B A I*, quàm *C A G* una linea recta, quia anguli ad *A*, sunt recti. Et quia *A B F, C B E* sunt æquales; addito communi *A B C*, fit totus *F B C*, æqualis toti *A B E*; & ductis rectis *F C, A E*, & *A L K*, parallela ipsi *B E*; erunt circa æquales angulos *F B C, A B E* duo latera *F B, B C*, æqualia duobus *A B, B E*. Quare triangulum *F B C*, æquale erit triangulo *A B E, per* 4. Trianguli autem *F B C*. duplum est quadratum *B G, per* 41. quia sunt super eadem basi *B F*, & inter easdem parallelas *B F, C G*: & trianguli *A B E* duplum est parallelogrammum *B L K E*; quia sunt super eadem basi *B E*, & inter parallelas *BE, AK*. Ergo parallelogrammum *B L K E* æquale est quadrato *B G*. Eodemq; modo demonstratur

ſtratur alterum parallelogrammum *L C D K*, æquale eſſe quadrato *C I*. Totum igitur quadratum *B D*, erit æquale duobus quadratis *B G*, *C I*.

Ex Scholio. *

INventio hujus Theorematis tribuitur Pythagoræ; qui cum advertiſſet in quibuſdam numeris, quales ſunt 3. 4. 5. duorum 3. & 4. quadratos 9. & 16. facere 25. quadratum tertij; voluit idem experiri in lineis, & invenit ex tribus lineis ab hujuſmodi numeris numeratis conſtitui ſemper triangulum rectangulum.

Inventio autem hujuſmodi numerorum ita ſe habet. Pro minimo ſumatur quicunque numerus impar, v. g. 5. & ex ejus quadrato 25. abijciatur 1. Reliqui enim numeri 24. medietas 12. erit ſecundus, & tertius erit 13. unitate major. Vel ſic, pro minimo ſumatur par v.g. 6. & ex quadrato 9. hoc eſt ex quadrato numeri 3. qui eſt medietas numeri 6. abijciatur 1, eidemque addatur 1, eritque ſecundus numerus 8. & tertius 10.

PROPOS. 48. THEOR. 34.

Vice verſa angulus A, eſt rectus, quando quadrata A B, A C ſunt æqualia quadrato B C.

Erigatur ex puncto *A* super *BA*, perpendicularis *A D*, & æqualis *A C*; eritque *per* 47. quadratum *B D*, æquale quadratis *A B*, *A* D; hoc est, quadratis *A B*, *AC*: atq; adeo quadrato *B C*; & ideo *B D*, erit æqualis *B C*. Et quia præterea duo latera *A B*, *A D*, sunt æqualia duobus *A B*, *AC*; erit angulus *B A* D æqualis *B A* C, sed ille est rectus; ergo & iste.

EUCLIDIS ELEMENTUM SECUNDUM.

DEFINITIONES.

1\. Parallelogrammum rectangulum dicitur contineri sub duabus lineis rectis, quæ comprehendunt angulum rectum.

Ex Scholio. *

Ratio est, quia in duabus illis lineis, & angulo recto, assignantur omnia illa, quibus datis datur ipsum rectangulum; nimirum longitudo, & latitudo, & angulus rectus,

rectus, qui est solus ex omnibus angulis invariabilis.

Alia ratio est, quia ex ductu hujusmodi linearum unius in alteram, formatur optime conceptus ipsius rectanguli. Nam si duę rectæ *A B*, *AC* contineant angulum rectum *A*, & *A C* intelligatur moveri per rectam *A B*. ex *A* usque ad *B*, ita ut semper ipsi *A B*, existat perpendicularis; describet punctum *C* tertium latus *CD*, & si eadem recta *A C* intelligatur aliquid post se relinquere, id erit superficies plana, inter *A B*, *AC*, *CD*, *DB*, comprehensa.

Habet etiam hæc comprehensio rectanguli sub duabus rectis, nec non hic ductus unius lineæ in alteram, magnam affinitatem cum multiplicatione, vel ductu unius numeri in alium. Sicut enim ex multiplicatione v.g. 3. in 4. producitur numerus 12. cujus unitates possunt disponi in forma rectanguli, diciturque idem numerus 12. contineri sub duobus numeris 3. & 4. eo quod fiat ex ductu 3. in 4. ita quoq; si *A C*, trium partium, ducatur in *A B*, 4. partium; producunrur 12. quadratula unius partis, quæ constituunt totum rectangulum contentum sub ijsdem duabus rectis *A C*, *A B*.

Secunda definitio. In parallelogrammo *C B* diviso in alia quatuor; duo complementa

menta *G C*, *G B*, una cum H E; conſtituunt Gnomonem F H E I, & cum parallelogrammo F I, conſtituunt Gnomonem H F I E.

PROPOS. 1. THEOR. 1.

Rectangulum contentum ſub A, & B C. quale eſt B C F G: æquale eſt iis, quæ continentur ſub eadem A, ſeu B G, & ſingulis partibus recta B C.

ACtis enim per D, E ipſi B G parallelis D H, E I; diſtribuitur rectangulum BF in rectangula B H, D I, E F, quæ continentur ſub BG, DH, EI, hoc eſt ſub A, & ſub partibus B D, D E, E C. Eſt autem *per 19. pronunc.* omne totum æquale ſuis partibus; ergo.

Applicatio ad numeros.

SIt B C, 10. ſegmenta B D, D E, E C. ſint 5. 1, 4. & recta A vel B G, ſit 6. Eritque rectangulum B F, ſeu numerus productus ex B G, 6. in B C, 10. numerus 60: & B G, 6. in B D, 5. erit 30: & D H 6. in DE, 1. erit 6: & E I, 6. in E C, 4. erit 24. Et hæc omnia tria rectangula numerica collecta in unam ſummam, faciunt eundem numerum 60. quem facit A, 6. in B C 10. Et hoc modo applicari poſſunt numeris fere omnes propoſitiones ſequentes.

PROPOS. 2. THEOR. 2.

B C, ſecta ſit utcunque in D: Dico quadratum

B:m B C æquale esse rectangulis contentis sub B C, B D, & sub B C, D C.

HÆc non differt à præcedenti si B G, intelligatur æqualis ipsi B C. Rectangulum enim B E, hoc est quadratum ipsius B C, erit æquale rectangulo B F, contento sub B G, BD, hoc est B C, B D; & rectangulo D E, contento sub D F, DC, hoc est sub B C, D C.

PROPOS. 3. THEOR. 3.

B C, sit secta utcunque in D: Dico rectangulum contentum sub B C, & sub uno segmentorum v. g. sub B D, æquale esse quadrato B D, & rectangulo sub segmentis B D, D C.

HÆc quoque continetur in prima, estq; manifesta si B G, ponatur æqualis BD. Sic enim B F, est quadratum ipsius B D; & D E, rectangulum sub D F, seu B D, & D C.

PROPOS. 4. THEOR. 4.

A B, secta sit utcunque in C: Dico quadratum totius A B, æquale esse duobus quadratis A C, C B, & duobus rectangulis sub segmentis A C, C B.

QUadratum totius A B, sit AD, diameter BE, CGF, parallela AE; & HGI parallela ipsius AB. Dico primo HF, CI, esse quadrata segmentorum, AC, C B. Nam latera AB, AE, circa rectum A, sunt æqualia; ergo *per 2.* *B 7.* *Coroll.*

Coroll. 32. anguli A E B, ABE ſunt ſemirecti: ſed iſtis ſunt æquales C G B, H G E, *per* 29. ergo omnes quatuor ſunt æquales, & *per 6. primi* H G, H E: & C B, C G, æquales inter ſe, atque adeo HF, quadratum rectæ HG, quæ *per* 34. eſt æqualis AC, & CI, quadratum ſegmenti C B. Dico ſecundo rectangula A G, G D contineri ſub ijſdem ſegmentis A C, C B. illud enim continetur ſub A C, C G, & C G, eſt æqualis C B; & G D, continetur ſub G F, G I, & G F, eſt æqualis G H, hoc eſt, A C, & G I, ſegmento C B. Quibus ita demonſtratis manifeſta eſt propoſitio.

Coroll. Hinc patet parallelogramma H F C I circa diametrum quadrati, eſſe quadrata.

PROPOS. 5. THEOR. 5.

A B ſecta ſit bifariam in C, & non biſariam in D: Dico quadratum C B, æquale eſſe rectangulo A D B, una cum quadrato C D.

FActo quadrato C F, & ductis reliquis parallelis; erit *per coroll. quarta* K G quadratum ſectionis intermediæ C D, & D I quadratum ſegmenti D B; & rectangulum A H, erit illud quod continetur ſub inæqualibus ſegmentis A D, D B, eo quod D H, ſit æqualis D B. Dico hoc rectangulum A H, una cum quadrato K G æquale eſſe quadra-

quadrato C F. Complementum enim HC, est *per* 43. *pr.* æquale complemento H F; adjectoque D I; rectangulum G B, æquale rectangulo B K. Sed B K, est æquale K A *per.*35.*pr.* ergo K A. G B, sunt æqualia, & una cum C H, erit A H æquale Gnomoni G L K; & rursus addito quadrato K G; erit A H, una cum quadrato G K, æquale toti quadrato C F, quod componitur ex Gnomone, & quadrato K G.

PROPOS. 6. THEOR. 6.

Recta A B, secta bifariam in C, adjecta sit B D: Dico rectangulum A D B, una cum quadrato C B, æquale esse quadrato ipsius C D.

Constructio similis est præcedenti. Dico rectangulum A I, quod continetur sub A D, D I, hoc est sub A D, D B, una cum quadrato KG quod est quadratum rectæ C B, æquale esse quadrato C F. Nam C L, C H sunt æqualia *per* 35. *pr.* & C H, H F æqualia *per* 43. ergo C L, æquale est H F; adjectoque communi C I; totum A I, æquale Gnomoni G I B K. Sed hic, una cum quadrato KG, æquivalet quadrato C F: ergo & A I, K G, æquivalent eidem.

PROPOS. 7. THEOR. 7.

A B, secta sit utcunque in C: Dico quadratum totius A B, nimirum A D, una cum

cum quadrato segmenti v. g. A C, hoc est una cum quadrato H F, æquale esse rectangulo B A C, bis, hoc est duobus rectangulis A F, H D, una cum quadrato C I, reliqui segmenti C B.

DUo enim rectangula A F, H D sunt æqualia Gnomoni C H F I, & quadrato H F: addito ergo quadrato C I, erunt duo rectangula A F, H D, & quadratum C I, æqualia Gnomoni, & duobus quadratis H F, C I. Gnomon autem & quadratum C I, faciunt quadratum A D. Ergo quadrata A D, H F, sunt æqualia duobus rectangulis A F, H D, & quadrato C I.

PROPOS. 8. THEOR. 8.

Recta A B, secta utcunque in C adÿciatur B D, æqualis v. g. segmento B C. Dico quadratum totius A D, æquale esse quatuor rectangulis A B C, seu A B D, & quadrato reliqui segmenti A C.

COnstructio est similis superioribus, & A E est quadratum totius A D: O I, quadratum segmenti A C; N Q, B M, sunt quadrata æqualia B C, B D, qualia sunt etiam quadrata C H, H P. Unde constat unum ex quatuor rectangulis esse A H, quia continetur sub A B, B H quæ est æqualis B C. Secundum est L Q: quia continetur sub L H, H Q, quæ sunt iterum æquales ipsis A B, B C: Tertium est H E, contentum

tum ſub H G, H M, quæ etiam ſunt æquales eiſdem A B, B C. Quartum denique conſtituunt K G, B M, quia KG, eſt æquale Q E *per 36. pr.* & quadratum B M, eſt æquale quadrato H P. Cum igitur hæc quatuor rectangula conſtituant Gnomonem qui cum quadrato O I, facit totum quadratum A E; manifeſtum eſt totum quadratum A E, æquale eſſe quatuor rectangulis A B C, & quadrato ſegmenti A C.

PROPOS. 9. THEOR. 9.

Recta A B ſecta ſit bifariam in C, & non bifariam in D: Dico quadrata inæqualium ſegmentorum A D, D B, dupla eſſe quadratorum ex A C, C D.

PErpendicularis *C E* ſit æqualis *C A*, vel *C B*: eruntque *A C E*, *E C B*. Iſoſcelia rectangula, & quatuor anguli ad baſes *A E*, *E B* erunt *per 2. coroll. 32.* ſemirecti, & totus A *E B*, rectus. Rurſus perpendicularis *D F*, ſecet *E B*, in *F*, & *F G*, ſit parallela *C D*: eruntque etiam *F D B*, *F G E*, rectangula; & quia anguli *D B F*, *G E F*, ſunt ſemirecti, erunt & reliqui *D F B*, *G F E* ſemirecti, & *per 6. pr.* D *F*, æqualis *D B*, & *E G* æqualis *G F*, vel *C D*. Unde *per 47. pr.* quadratum rectæ *A E*, æquale eſt quadratis *C A*, *C E*, & duplum quadrati *A C*. Et quadratum E F duplum quadrati G F, vel C D, & duo quadrata A E, E F, hoc eſt

qua-

quadratum A F, vel loco istius, duo quadrata AD, D F. vel duo A D, D *B*, dupla quadratorum A C, C D.

PROPOS. 10. THEOR. 10.

A B secta bifariam in C, adjciatur quacunque B D. Dico duo quadrata A D, D B dupla esse duorum A C, C D.

CОnstructio est eadem cum præcedente, & angulus A E G, rectus, & ACE, E G F, *B* G D triangula rectangula Isoscelia, & ideo quadrata A E, E G, dupla quadratorum A C, E F, hoc est, quadratorum A C, C D. duobus autem quadratis A E, E G, est *per* 47. *pr.* æquale quadratum A G; & quadrato A G; sunt æqualia A D, D G, hoc est A D, D *B*. Ergo etiam duo quadrata A D, D *B* sunt dupla quadratorum A C. C D.

PROPOS. 11. PROBL. 1.

Rectam A B ita secare in C. ut rectangulum A B C, sit æquale quadrato segmenti A C.

QUadratum ipsius *A B*, sit *A D*; & latus *A E*, bifariam sectum in *F*, & recta *FG*, æqualis ipsi *F B*, & *A C* æqualis *A G*; perficiaturque quadratum *A H*; & *H C*, sit protracta in *I*: eritque *E H*, rectangulum contentum sub *E G*, *G H* hoc est, sub *E G*, *G A*. Hoc autem rectangulum una cum quadrato *A F*, æqualia sunt *per* 6. quadrato *F G*,

hoc

hoc eſt, quadrato *F B*: & *per* 47. *pr.* quadratis *A B*, *A F*, ergo rectangulum *E H*, cum quadrato *A F*, æquale eſt quadratis *A B*, *A F*, hoc eſt, quadrato *A D*, & quadrato rectæ *A F*, dempto igitur quadrato communi A F remanebit quadratum *A H*, hoc eſt, quadratum ſegmenti *A C*, æquale rectangulo *C D*, hoc eſt, rectangulo contento ſub tota *AB*, & reliquo ſegmento *CB*.

PROPOS. 12. THEOR. 11.

In triangulo A B C, ſit angulus B, obtuſus; ita ut perpendicularis A D per ſchol. 17. primi cadat extra triangulũ: Dico quadratum lateris A C; excedere quadrata laterum A B, B C, gemino rectangulo C B D.

QUadratum enim *C D*, eſt *per* 4. æquale quadratis *B C*, *B D*. & gemino rectangulo *C B D*. addito ergo quadrato *A D*; erunt duo *C D*, *D A*, hoc eſt, *per* 47. *pr.* quadratum *A C*, æquale geminato rectangulo *C B D*, & tribus quadratis *C B*, *B D*, *D A*, Quadratis autem *B D*, *D A*, æquale eſt quadratum *A B*. ergo quadratum *A C*, æquale eſt duobus quadratis *A B*, *B C*, una cum geminato rectangulo *C B D*.

PROPOS. 13. THEOR, 12.

In triangulo A B C, ſit angulus C, acutus; eritq; ſaltem alter reliquorum acutus v. g. B; & ideo perpendicularis A D, cadet intra

intra triangulum. Dico quadratum lateris A B, minus esse quadratis A C, BC, geminato rectangulo B C D.

QUadrata enim *B C, C D,* sunt *per* 7. æqualia gemino rectangulo *B C D*, & insuper quadrato *B D*. Ergo addito quadrato *A D*. Erunt tria quadrata *B C, C D, A D*, vel duo *B C, A C*, æqualia rectangulo gemino *B C D*, & duobus quadratis *B D, D A*, quibus est æquale quadratum *A B*. Ergo solum quadratum *A B*, minus est duobus quadratis *B C, A C* prædicto gemino rectangulo *B C D*.

PROPOS. 14. PROBL. 2.

Dato rectilineo A, æquale quadratum exhibere.

PEr 42. vel 45. *primi* fiat rectilineo *A* æquale rectangulum *B D*, ipsique *C B* sumatur æqualis *C F*; & centro *G*, circa totam *D F*, describatur semicirculus, eumq; secet *B C* in *H*. Dico quadratum *C H*, æquale esse rectangulo *D B*, hoc est, rectilineo *A*. Rectangulum enim *D C F*, hoc est *D B*, una cum quadrato *G C*, æquale est, *per* 5. quadrato *G F*, hoc est, quadrato *G H*. Sed huic sunt *per* 47. *pr.* æqualia quadrata *C H, C G*. Ergo hæc duo quadrata, sunt æqualia dicto rectangulo *D B*, & quadrato *G C*; deptoq; communi quadrato *G C*, remanebit quadratum *C H* æquale rectangulo *D G*, hoc est, rectilineo *A*.

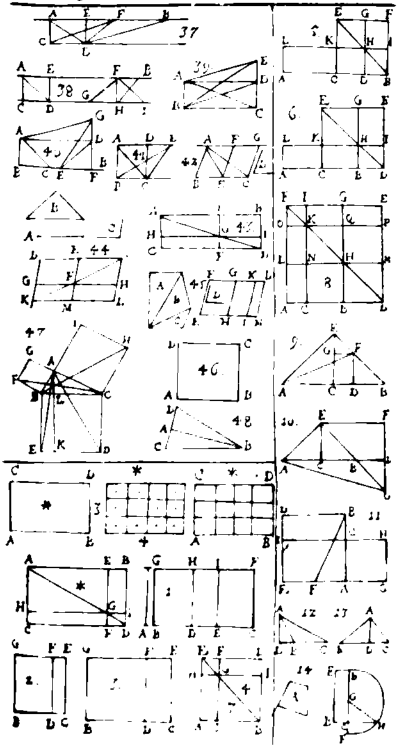
EU-

EVCLIDIS ELEMENTUM TERTIUM.

DEFINITIONES.

1. ÆQuales circuli ſunt, quorum diametri, vel ſemidiametri ſunt æquales.
2. Linea recta tangit circulum, quem tangendo non ſecat.
3. Circulus circulum tangit, quem tangendo non ſecat.
4. *AB*, *CD* dicuntur æqualiter diſtare à centro *G*, cum perpendiculares *GH*, *GI*, ſunt æquales. Cum vero v. g. perpendicularis *GK*, major eſt quàm *GH*; dicitur *EF*, magis diſtare à centro, quàm *AB*.
5. Segmentum circuli, eſt figura quæ ſub recta linea, & peripheria circuli comprehenditur.
6. Segmenti autem angulus eſt, qui fit à recta, & peripheria; qualis eſt angulus quem facit peripheria *ADB*, cum recta *AB*, ad punctum *A*, vel *B*.

7. An-



7. Angulus in segmento v. g. in segmento A C *B* A, est angulus rectilineus A C *B*, cum angulus C est ad peripheriam, & latera C A, C *B*. pertingunt ad terminos basis A *B*.

8. Tam angulus rectilineus A C *B* ad peripheriam, quàm A D *B* ad centrum, dicitur insistere peripheriæ A *B*, quam intercipiunt lineæ rectæ continentes angulos C, D.

9. Figura autem mixta A *B* D, & contenta peripheria A *B*, & duabus rectis A D, *B*D coeuntibus in centro D, appellatur Sector.

10. Similia circuli segmenta sunt, in quibus anguli juxta defin. 7. sunt æquales. & satis est si vel unus A *B* C, sit æqualis uni D E F, quia *per* 21. *hujus* etiam reliqui sunt æquales, quia omnes in eodem segmento sunt æquales.

PROPOSITIO I. PROBLEMA I.

Dati circuli centrum reperire.

RECta B D, secans aliam A C bifariam, & ad angulos rectos in E, secetur bifariam in F. Dico F, esse centrum. Si enim F non est centrum, sit aliud G, extra ipsam B D. recta enim B D, semel tantum secatur bifariam in puncto F. Nectantur G A

GC

G C, G E, eruntque duo latera G E, E A, æqualia duobus G E, E C, & *per 15. def. pr.* basis G A, basi G C. ergo *per 8. pr.* G E C, G E A, sunt æquales, & recti, & rectus G E C, æqualis recto D E C; quod est absurdum.

Coroll. Ergo in quavis recta, quæ aliam secat bifariam, & ad angulos rectos, est centrum circuli; atq; adeo in communi earundem concursu.

PROPOS. 2. THEOR. 1.

Recta A B, nectens duo puncta peripheriæ A, B, cadit intra circulum.

Ex centro C, ad A B ducantur semidiametri C A. C B; & ad quodvis aliud punctum D, recta C D. Erunt igitur *per 5. pr.* C A B, C B A æquales. Est autem *per 16. pr.* C D A major C B A, ergo etiã major quàm C A D; ideoq; *per 19. pr.* *C D* minor semidiametro *C A.*

Coroll. Ergo linea tangens, tangit circulum in unico puncto.

PROPOS. 3. THEOR. 2.

Diameter C A E secans aliam B D, non per centrum ductam bifariam, secat ad angulos rectos: & vice versa. secans ad angulos rectos; secat bifariam.

In prima enim hypothesi duo latera *A F, F B* sunt æqualia duobus *A F, F D,* & basis

sis *A B*, basi *A D*. ergo *per* 8. *pr.* angulus *A F B* æqualis est angulo *A F D*.

In secunda, præter angulos rectos ad *F*, erunt *per* 5. *pr.* æquales *A B D*, *A D B*, & latus *A F*, istis oppositum commune. ergo *per* 26. *pr.* latus *F B* erit æquale lateri *F D*.

Coroll. Eodem modo in omni triangulo isosceli *A B D*; recta *A F* secans bifariam basim *B D*, secat ipsam ad angulos rectos; & secans ad angulos rectos, secat bifariam.

PROPOS. 4. THEOR. 3.

Extra centrum, nullæ lineæ se mutuo secant bifariam.

SI enim *A B*, *C D* sectæ essent bifariam in *E*; recta *F E*, ducta ex centro *F*, esset *per* 3. perpendicularis ad utramque, & anguli *F E A*, *F E C*, essent æquales, quod est absurdum.

PROPOS. 5. THEOR. 4.

Circuli se mutuo secantes non habent idem centrum.

SI fieri potest commune centrum sit *C*. Ergo *CB*, erit semidiameter communis, eique erunt æquales aliæ *C A*, *C E*; ideoq; æquales inter se, quod est absurdum.

PROPOS. 6. THEOR. 5.

Etiam se mutuo tangentium, non est idem centrum.

PRopter eandem causam, quia *D B*, esset commu-

communis, & D A, D C, æquales essent eidem D B, & æquales inter se.

PROPOS. 7. THEOR. 6.

Si ex puncto excentrico I, educantur A F, I B, per centrum F, & alia I C, I D, I E, utcunque: erit I F A omnium maxima, I B, minima; I C major I D, & eidem v. g. I E una tantum poterit esse æqualis ex altera parte maxima, vel minima.

PRimo, F I, F C sunt *per* 20. *pr.* majores I C, sed F I, F C; sunt æquales F I, F A. ergo I A, major est I C, &c.

Secundo I F, F C, sunt æquales I F, FD; & angulus I F C, major I F D. ergo *per* 24. *pr.* I C major quàm I D, &c.

Tertio I F, IE, sunt majores FE, hoc est, F B, dempta igitur communi I F, remanet I E major I B.

Quarto si angulo B F E, fiat æqualis B F G: erunt circa ipsos latera I F, F E; æqualia lateribus I F, F G. ergo *per* 4. *pr.* & basis I E, basi I G, & nulla alia; reliquæ enim omnes sunt majores vel minores ex præmissis.

PROPOS. 8. THEOR. 7.

Ex puncto A extra circulum posito, ducantur quotcunque rectæ A B, F E per centrū F, A D I, A G H utcunque, tam ad concavam peripheriam quam ad convexam:

C Dico

Dico A E esse maximam eductarum ad concavam; A B, minimam eductarum ad convexam; A I, majorem esse A H; & A G majorem A D: ipsique v. g. A D; unam tantum aliam posse esse aqualem.

PRimo, A F, F I, sunt *per* 20. *pr.* majores A I. Ergo & A F E, quæ est æqualis ipsis A F, F I, &c.

Secundo. A D, D F sunt majores A F. ergo demptis æqualibus F D, F B; remanebit A D, major quàm A B &c.

Tertio A F, F I sunt æquales A F, F H; sed angulus A F I, est major quam A F H, ergo *per* 24. *pr.* A I, major quàm A H &c.

Quarto. duæ A D, D F, sunt *per* 21. *pr.* minores duabus A G, G F; & G F, D F, sunt æquales. ergo A D, minor quàm A G, &c.

Quinto. angulus A F C, sit æqualis A F D. ergo *per* 4. *pr.* A D, erit æqualis A C, quia circa æquales angulos latera A F, F D, sunt æqualia lateribus A F, F C.

PROPOS. 9. THEOR. 8.

Tres rectæ A B, A C, A D, sint aquales: Dico A esse centrum.

REctæ C B, C D, secentur bifariam in E, F, & ducantur A E, A F; eruntque duo latera A E, E B, æqualia duobus A E, E C, & basis A B, æqualis A C. ergo *per* 8. *pr.* anguli

anguli A E B, A E C, sunt æquales, & recti: & *per coroll. prima hujus*, in E A, erit centrum circuli; sed propter eandem causam debet esse in F A. ergo centrum est A.

PROPOS. 10. THEOR. 9.

Circulus circulum secat duntaxat in duobus punctis,

SI enim fieri potest sint tria puncta B, A, C; & centrum unius sit D. Cum ergo tria puncta B, A, C, sint communia; erunt etiam ad alterius circuli peripheriam tres rectæ D B, D A, D C, æquales; ideoq; D centrum erit utriusque, quod est contra 5. hujus.

PROPOS. 11. THEOR. 10.

Recta conjungens centra duorum circulorũ se mutuo tangentium interius, transit per contactum.

PUnctum contactus sit A, centrum interioris circuli G, exterioris F; & recta F G, si fieri potest non transeat per A, sed interiorem secet in B, exteriorem in E. Eruntque G A, G B, æquales, adjectâque F G, erunt A G, G F æquales F B; sed A G, G F sunt majores A F, *per* 20. *pr.* ergo etiam F B, major est quàm A F, hoc est, major quàm F E. quod est absurdum. idem sequeretur ex altera parte, si F, poneretur esse centrum interioris, & G exterioris, etiamsi puncta C, D, vel B, E, ponerentur coincidere in unum.

PROPOS. 12. THEOR. 11.

Recta conjungens centra duorum circulorũ se mutuo tangentium exterius; transit per contactum.

SI enim F G, conjungens centra F, G, non transit per contactum B, sed secet circulos in C, E. erunt duo latera FB, GB, vel æqualia, vel minora tertio F C E G, quod est contra 20. primi.

PROPOS. 13. THEOR. 12.

Contactus circulorum, est unicum punctum.

SI duo essent puncta contactus v. g. A, B; recta C D, conjungens centra C, D, *per* 11. *hujus* transiret per utrumque, essetque A C D B, communis diameter, eademque secta bifariam in duobus punctis C, D, quod est absurdum.

Si autem duo circuli se mutuo tangerent in duobus punctis B, F, exterius, una, eademque D E, transiret per utrumque, *per* 12. vel certe F D, F E, essent æquales ipsi D E, vel B D, BE æquales ipsi D F E, quæ omnia sunt absurda.

PROPOS. 14. THEOR. 13.

Ad æquales A B, C D, cadunt æquales perpendiculares E F, E G: & A B, CD, sunt æquales;

æquales; quando perpendiculares E F, E G *sunt æquales.*

PErpendiculares enim E F, E G, secant A B, C D, bifariam *per* 3. &, ideo A F, D G, semisses æqualium, sunt æquales. & quia æqualibus quadratis semidiametrorum E A, E D, æqualia sunt *per* 47. *pr.* quadrata A F, F E, & quadrata D G, G E: necesse est hæc duo, illis duobus esse æqualia, & demptis æqualibus A F, D G, remanere æqualia quadrata E F, E G, & rectas E F, E G æquales.

Vice versa si ex duobus quadratis E F, F A, quæ sunt æqualia duobus E G, G D, quia sunt æqualia quadratis E A, E D; tollantur æqualia E F, E G, remanent æqualia quadrata F A, G D, ipsæque A F, D G æquales. Est autem *per* 3. A F medietas totius A B, & D G medietas totius D C. ergo A B, D C sunt æquales.

PROPOS. 15. THEOR. 14.

Applicatarum in circulo maxima est diameter, v.g. A G F; *&* H I *centro propinquior, major est remotiore* C D.

DUcantur perpendiculares G K, G L, quarum illa erit *per def.* 4. *hujus* minor ista, & ideo ex G L poterit abscindi G M, æqualis G K; & B E, æquidistans ipsi C D, erit *per* 14. æqualis I H. Nectantur prætere a G B, G C, G D, G E; eruntque *per*

20. *pr.* duo latera G B, G E, majora, reliquo B E, sed G B, *G E* sunt æquales diametro *A F.* ergo.

Quod autem H I, sit major C D; patet *per* 24. *pr.* quia latera *G B, G E,* sunt æqualia *G C, G D,* & angulus *B G E,* major *C G D.*

PROPOS. 16. THEOR. 15.

Recta F A E diametro A D C perpendicularis in A, tota cadit extra circulum: & angulus contingentiæ E A B, non potest dividi per lineam rectam: Angulus etiam semicirculi C A B major est, & reliquus contingentiæ minor omni angulo rectilineo acuto.

PRimo. Ad quodlibet punctum *G*, rectæ *E F*, ducatur ex centro *D*, recta *D G* Quoniam igitur rectus *A*, major est acuto *D G A*; erit *per* 19. *pr.* *D G*, major semidiametro *D A*; & *G*, extra circulum &c.

Secundo. Dico rectam *A H*, eductam ex *A*, utcunque infra *A E*, secare circulum. Angulo enim *E A H*, fieri potest æqualis *A D I*, ad centrum *D*, *per* 23. *pr.* & *D I*, concurrit necessario cum *A H*, v. g. in *I*, quia duo *I A D*, *I D A*, sunt minores duobus rectis, quia sunt æquales recto *D A E*, & ideo necesse est *D I A*, esse rectum & *per* 19. *pr.* *D I*, minorem esse semidiametro *D A*, atque adeo punctum *I*, nec non totam *A I*, esse

esse intra circulum; & rectam *A H* nequaquam cadere inter rectam *A E.* & peripheriam *A B.*

Tertio. Dico angulum semicirculi CAB, majorem esse acuto *C A H.* quia præter acutum, continet angulum, segmenti quod abscindit eadem *A H.*

Quarto. Dico angulum contingentiæ contentum recta *A E,* & peripheria *A B,* minorem esse quolibet acuto *E A H.* Hic enim continet angulum contingentiæ, & simul angulum segmenti abscissi à recta *A H.*

Coroll. Hinc patet rectam *E F,* si cum diametro *C A,* ad punctum A, constituat rectos *C A E, C A F;* tangere circulum in puncto *A.*

PROPOS. 17. PROBL. 2.

Ex A, ducere rectam. quæ tangat circulum B C.

CEntro *D* intervallo *D A,* describatur alius circulus, vel arcus *A E,* eumque secet perpendicularis *B E,* in *E;* & *D E,* secet circulum in *C:* dico *A C,* tangere circulum in *C.* Est enim *per 4. pr.* angulus *D C A,* æqualis recto *D B E,* quia circa angulum *D* duo latera *D C, D A,* sunt æqualia duobus *D B, D E.*

PROPOS. 18. THEOR. 16.

A B tangat circulum in C: Dico semidiametrum E C, esse perpendicularem ad A B.

NAm si alia E D, esset perpendicularis; esset E D C, rectus, & E C D, acutus, & *per* 19. *pr.* E D minor semidiametro E C; punctumque D, intra circulum, quod est contra hypothesim.

*PROPOS. 19. THEOR. 17.

Recta C E constituat cum tangente A B, angulum rectum A C E. Dico C E transire per centrum.

SI enim E, non est centrum sit F. Ergo *per antecedentem* rectus F C A, æqualis erit recto E C A. quod est absurdum.

PROPOS. 20. THEOR. 18.

Angulus B D C, ad centrum D; duplus est B A C, anguli ad peripheriam; cum fuerit eadem peripheria basis angulorum.

IN primo casu anguli E D C, E D B, sunt dupli angulorum D A C, D A B: quia triangula D A C, D A B, sunt Isoscelia; & E D C, E D B, sunt *per* 32. *pr.* æquales duobus internis, & oppositis.

In 2. propter eandem causam BDC, duplus est anguli B A C.

In 3. totus E D C, duplus est totius E A C; & ablatus E D B, ablati E A B; ergo reliquus B D C, duplus reliqui B A C.

PRO-

PROPOS. 21. THEOR. 19.

Qui in eodem segmento sunt anguli, quales sunt A D B, A C B, A E B, sunt inter se æquales.

RAtio est, quia unus & idem angulus A F B, ad centrum, est duplus angulorum, A D B, A C B, A E B.

Unde sapienter Euclides definit ultima definitione similitudinem segmentorum, per æqualitatem hujusmodi angulorum.

Ex Scholio. *

REcta A B, subtendat ad easdem partes duos angulos æquales A D B, A E B: Dico puncta A, B, E, D esse ad peripheriam ejusdem circuli. Si enim peripheria A B E, non transit per D, secet rectam B D, ultra vel citra punctum D, in *F* ductâ igitur A *F*, erunt *per demonstrata* anguli A *F* B, A E B, in eodem segmento A B *F* A, æquales. & consequenter etiam A *F* B, A D B æquales. quod est absurdum, unus enim est altero major *per 16. pr.* quia unus est externus, & alter internus & oppositus.

PROPOS. 22. THEOR. 20.

Quadrilateri A B C D inscripti circulo, anguli oppositi sunt æquales duobus rectis.

ANguli enim *A C B*, *A D B*, sunt æquales *per 21.* & similiter *A B D*, *A C D*, & id-

& idcirco *A B D, A D B* simul æquales toti *B C D*: adjectoque *B A D*; duo *B C D, B A D*, sunt æquales tribus angulis trianguli *A B D*; quos constat esse duobus rectis æquales *per* 32. *pr.* &c. Simili enim modo ostenditur idem de duobus angulis *A B C, A D C.*

Ex Scholio.†

In quadrilatero A B C D, duo anguli A, C, vel duo B, D, sint æquales duobus rectis, Dico quatuor puncta A, B, C, D esse ad peripheriam circuli.

SI enim circulus *A B D*, non transit per *C*, transeat ultra vel citra, & in eo sumatur aliquod punctum *E*, quod non sit in rectis *B C, D C*. Erunt igitur *per* 22. etiam duo anguli *A, E*, æquales duobus rectis, & æquales duobus *A, C*; & dempto communi *A*, remanebunt æquales *E* & *C*, *quod est contra* 21. *pr.* ductâ enim *B D*, erit angulus *B E D*, vel intra vel extra triangulum *B C D*, ideoque vel major, vel minor angulo *C*.

PROPOS. 23. THEOR. 21.

Segmenta similia, & super eadem basi constituta sunt æqualia.

SI enim in superpositione non sibi penitus congruunt; aliqua recta *A C D*, secabit unius peripheriam in *C*, alterius in *D*; fietficteque angulus externus *A C B,* major interno *C D B,* quod est contra hypothesin, anguli enim similium segmentorum debent esse æquales.

PROPOS. 24. THEOR 22.

Idem verum est quando bases sunt æquales.

PROPOS. 25. PROBL. 3.

Dati segmenti A B C, centrum reperire.

Duæ rectæ *A B, A C,* quæ non sint parallelæ secentur bifariam in *D, E;* & ex *D, E* erigantur perpendiculares *D F, E F,* in quibus necessario existit centrum circuli *per coroll. prima hujus,* nimirum in communi concursu *F.*

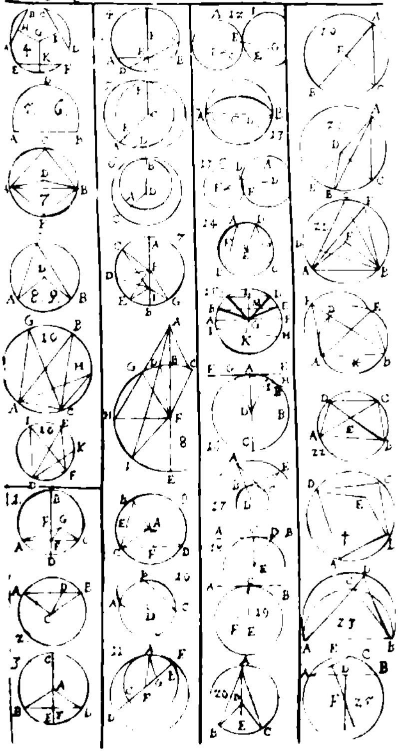
Eodem modo describitur circulus per quælibet alia tria puncta *A, B, C,* vel etiam circa triangulum: dummodo puncta non existant in una linea recta.

Quod autem prædictæ perpendiculares *E F, D F,* concurrant probatur in sequenti lemmate.

Lemma.

Perpendiculares secantes latera trianguli bifariam, concurrunt ad unum punctum.

IN primo triangulo *A B C,* angulus *A* est rectus; in secundo obtusus; & in tertio sunt omnes acuti. in omnibus autem, sectum est latus *A D,* bifariam in *D,* & *D G*



parallela lateris *A C*, occurrit basi *B C*, in *G*; & *G E* est parallela *A B*; & ex his procreatur parallelogrammum *A D G E*, in quo latera opposita *D G*, *A E*, & *A D*, *GE*, & *D B*, sunt æqualia *per* 34. *pr.* & *per* 29. angulus *E G C*, æqualis interno *B*, & *G E C*, *G D B*, æquales inter se, quia sunt æquales eidem *A*. Et quia angulis *E G C*, *G E C* adjacet latus *G E*, & *B D*, ipsi *G E* æquale, adjacet duobus *G B D*, *G D B*; erit *per* 26, *pr.* *G C*, æqualis *G B*, & *G D*, æqualis *E C*; atque adeo *E C*, æqualis ipsi *A E*. Atq; hæc sunt communia.

Jam vero in prima figura perpendiculares *D F*, *E F*, coincidunt cum parallelis *D G*, *G E*, eo quod etiam anguli *G D B*, *G E C* sint æquales recto *A*. Unde constat etiam perpendiculares *D F*, *E F* concurrere, & concursum *F* esse punctum *G*, in quo basis *B C*, secta est bifariam: ita ut in hoc casu non sit opus ducere tertiam perpendicularem quæ deberet erigi ex puncto *G*, super *B C*.

In secundo vero casu perpendiculares *D F*, *E F*, concurrunt infra *B C*. Cum enim angulus *G D B*, æqualis sit obtuso *A*; & *B D F* sit rectus, recta *D F*, cadit necessario inter *D G*, & *D B*, & similiter *E F* cadit inter *E C*, *E G*. unde concursus non potest non esse infra *B C*: concursum autem probat recta ĉta *D E*, quæ ex duobus rectis ad *D*, *E* demit duos *A D E*, *A E D*. & ideo reliqui *F D E*, *F E D*, ſunt duobus rectis minores; ex quo ſequitur concurſus *per* 13. *Axioma*.

In tertio caſu perpendiculares *D F*, *E F*, cadunt inter D A, D G, & inter A E, E G, quia anguli B D F, C E F ſunt majores angulis G D B, G E C, qui ſunt æquales acuto A, & ideo concurſus F eſt intra triangulum A B C.

Denique in utroque caſu tertia perpendicularis coincidit cum rectaFG. Nam primo F B, eſt æqualis F A, *per* 4. *pr.* quia circa rectos F D A, F D B ſunt duo latera F D D A, æqualia duobus F D, D B. ſecundo F C. æqualis eſt eidem F A, eandem ob cauſam, aſſumendo triangula F E A, F E C. ergo etiam F C, eſt æqualis F B. ſunt autem etiam duo latera F G, G B, æqualia duobus F G, G C. ergo *per* 8. *pr.* anguli FGB, F G C erunt æquales & recti. atque adeo omnes tres perpendiculares concurrent ad commune punctum F. quod erat demonſtrandum.

Pro figuris regularibus plurium laterum ponitur aliud Lemma huic ſimile ad octavam propoſitionem quarti.

Cæterum in propoſitione 25. non eſt neceſſe ut rectæ A C, A B, habeant punctum A commune, dummodo non ſint parallelæ. Et licet hic concurſus perpendicularium demonſtratus ſit duntaxat in triangulis; idem tamen ſequitur ſi duæ lineæ ducantur utcunque dummodo non ſint parallelæ quales ſunt A H, C I. Nam productæ conſtituunt cum A C, triangulum A C B, & perpendiculares D G, F G concurrunt in G. ergo etiam perpendiculares K M, L M, quæ ſecant A H, C I, bifariam concurrunt alicubi in M, cum ſint parallelæ ipſis D G, F G, &c.

PROPOS. 26. THEOR. 23.

In eodem, vel in æqualibus circulis anguli æquales inſiſtunt æqualibus peripheriis, ſive ſint conſtituti ad centrum, ſive ad peripheriam.

SInt primo æquales anguli ad centra G H. Cum igitur circa eoſdem ſint quatuor ſemidiametri æquales, erit *per* 4. *pr.* baſis A C, æqualis baſi D F. & quia ijdem anguli G, H, ſunt *per* 20. dupli A B C, D E F: ideoque ſuper æqualibus baſibus ſegmenta A B C, D E F, ſimilia, erunt *per* 24. eadem ſegmenta æqualia, & peripheria A B C, D E F, nec non reliquæ A C, D F æquales.

Deinde ſi anguli B, E ponantur æquales; neceſſe eſt etiam G, H eſſe æquales. ergo &c.

PRO-

PROPOS. 27. THEOR. 24.

Quando arcus D F, A C sunt æquales, sunt quoque tam anguli ad centra G, H, quàm anguli B, E. ad peripheriam æquales.

SI enim angulus A G C, esset major D H F, ipsique D H F, fieret æqualis A G I, arcus A I, esset æqualis D F, *per* 26. hoc est, ipsi A C, quod est absurdum. Similis est ratio de angulis B, E.

PROPOS. 28. THEOR. 25.

In eodem, vel æqualibus circulis, æquales rectæ subtendunt æquales peripherias.

ERunt enim *per* 8. *pr.* anguli G, H, æquales, quia circa ipsos sunt quatuor semidiametri æquales; & insuper basis A C, ponitur æqualis basi D F. ergo *per* 26. arcus A C, est æqualis D F, & reliquus ABC, reliquo D E F.

PROPOS. 29. THEOR. 26.

Peripherias æquales subtendunt rectæ æquales.

QUia *per* 27. erit etiam angulus G, æqualis H, si peripheria A C, sit æqualis D F. & *per* 4. *pr.* basis A C, æqualis basi D F, propter quatuor semidiametros æquales.

PROPOS. 30. PROBL. 4.

Datam peripheriam ABC, bifariam secare.

HOc præstat recta B D E, quæ subtensam A C, secat bifariam, & ad angulos rectos

rectos in D. quia circa rectos ſunt latera B D, D A, æqualia lateribus B D, D C. Et idcirco *per* 4. *pr.* baſis A B, æqualis B C; & *per* 28. arcus B A, æqualis B C.

PROPOS. 31. THEOR. 27.

Angulus in ſemicirculo rectus eſt; in majore ſegmento minor; in minore, major recto. Angulus quoq; ſegmenti majoris major eſt recto, & minoris minor.

DIco primo angulum A B C in ſemicirculo A B C, eſſe rectum. Angulus enim A D B, duplus eſt D B C, & C D B, duplus D B A, eo quod triangula A B D, D B C, ſint Iſoſcelia. ſed illi dupli ſunt æquales duobus rectis, ergo D B A, D B C, conſtituent rectum A B C.

Dico 2. in majori ſegmento C A B, angulos eſſe acutos. In eodem enim ſegmento eſt quoque angulus B A C, qui eſt acutus, quia A B C, eſt rectus. huic autem B A C, ſunt omnes reliqui in eodem ſegmento æquales *per* 21. Ergo.

Dico 3. angulum B E C, in minori ſegmento B E C. eſſe obtuſum. In quadrilatero enim A B E C, oppoſiti E, A, ſunt æquales duobus rectis *per* 22. & A eſt acutus. ergo E obtuſus.

Denique reliquæ duæ partes ſunt manifeſtæ; quia angulus ſegmenti majoris nempe angulus mixtus C B A, componitur ex

recto

recto A B C, & angulo ſegmenti quod abſcindit recta A B. Et protractâ A B, in F, fit angulus rectus C B F, major angulo ſegmenti minoris nempe mixto C B E.

Ex Scholio. *

Vice verſa, dico angulum rectum, v. g. A C B, eſſe ad ſemicirculum, hoc eſt, ſi recta A B, dacta utcunque ſecetur bifariam in D, & centro D, circa A B deſcribatur ſemicirculus, ipſum tranſire per C.

SI enim punctum C eſſet in alio ſegmento, angulus A C B, non eſſet rectus; ſed obtuſus, vel acutus, ut demonſtratum eſt.

PROPOS. 32. THEOR, 28.

Recta A B, tangat circulum in C, & C D, ſecet eundem in C, D: Dico angulo A C D, æquales eſſe angulos in alterno ſegmento D E C; & angulo D C B, angulos in alterno ſegmento C F D.

SI C D, non tranſit per centrum H, tranſeat C H E: eruntque *per* 18. E C A, E C B, recti, & ipſis erunt æquales C G E, C D E, in alternis ſegmentis, hoc eſt, in ſemicirculis quos abſcindit diameter C E.

Deinde quoniam CDE, rectus eſt: erunt D E C, D C E, uni recto, nempe toti ECA æquales, *per* 32. *pr.* demptoque communi D C E reliquus D E C, in alterno ſegmento, æto, æqualis erit reliquo ACD, ad punctum contactus C.

Denique in quadrilatero E D F C, anguli oppositi D F C, C E D, sunt *per* 22. æquales duobus rectis, hoc est, duobus D C A, D C B. Sed D C A, æqualis est D E C ergo reliquus D F C, in alterno segmento, est æqualis reliquo D C B, ad contactum C.

PROPOS. 33. PROBL. 5.

Super data recta A B, describere segmentum circuli, capiens angulum dato æqualem.

PRimo, quando angulus datus est rectus, certum est segmentum esse semicirculum.

Secundo, quando angulus datus est acutus v. g. C, tunc constituatur ipsi æqualis *B A D*, & ex *A*, super *A D* erigatur perpendicularis *A E*, & in puncto *B* fiat angulus *A B F*, æqualis *B A E*: eruntque *F A*, *F B* æquales, & *F*, centrum circuli *A G B K*; & angulus *A G B*, in segmento *A B G A*, erit æqualis angulo *B A D*, ad punctum contactus *A*. Nam propter rectum *D A E*, recta *D A*, tangit circulum *per* 16. Est autem *B A D*, æqualis *C*. ergo etiam *A G B*, est æqualis *C*.

Tertio, quando angulus datus v.g. *H*. est obtusus, accipiatur ejus loco acutus *C*. Descripto

ſcripto enim ſegmento *A G B*; habebitur reliquum *A K B*, & angulus *K*, erit æqualis *H*, quia *per* 22. *G*, & *H*, æquivalent duobus rectis, hoc eſt, duobus *C*, *H*. *C* autem eſt æqualis *G*, ergo *K*, æqualis *H*.

PROPOS. 34. PROBL. 6.

A dato circulo abſcindere ſegmentum, quod capiat angulum æqualem dato v.g. D.

DUcatur tangens *E A F*, & angulus *E A C*, fiat æqualis *D*, angulus enim *A B C*, in alterno ſegmento *C B A*, erit *per* 32. æqualis angulo *E A C*, hoc eſt, angulo *D*.

PROPOS. 35. THEOR. 29.

Si in circulo duæ rectæ ſe mutuo ſecent: rectangula ſub ſegmentis erunt æqualia.

PRimò quando interſectio fit in centro, omnia ſegmenta ſunt ſemidiametri, & rectangula ſub ſegmentis ſunt quadrata æqualia.

Secundo, quando *C D*, tranſit per centrum *F*, & ſecat *A B*, bifariam, atque adeo ad angulos rectos in *E*, *per* 3. Tunc recta *C D*, erit ſecta bifariam in *F*, & non bifariam in *E*; & *per* 5. *ſecundi*, rectangulum *C E D*, una cum quadrato *E F*, erit æquale quadrato *F D*, hoc eſt quadrato *F B*, & *per Pythagoricam*, quadratis *B E*, *E F*: ablatoque communi *E F*, remanebit quadratum *B E* æquale rectangulo *CED*. Quadratum

tum autem *B E*, est idem cum rectangulo *A E B*. ergo rectangulum sub segmentis *A E, E B*, est æquale rectangulo contento sub segmentis *C E, E D*.

Tertio. Quando *CD*, transiens per centrum *F* non secat bifariam *A B*, in *E*, secabitur bifariam in alio puncto *G*, & *F G*, erit ad *A B*, perpendicularis; & *per* 5. *secundi* rectangulum *A E B*, una cum quadrato *E G*, erit æquale quadrato *G B*; adjectoque quadrato G F, erit idem rectangulum *A E B*, cum quadratis *E G, G F*, hoc est, cum quadrato *E F*, æquale quadratis *G B, G F*, hoc est, quadrato *F B*. Huic autem quadrato *FB*, seu *F D*, ostendimus æquale esse rectangulum *C E D*, una cum eodem quadrato *E F*, ablato igitur quadrato *E F*; remanebunt rectangula *C E D, A E B*, æqualia.

Quarto, & ultimo, neutra transeat per centrum: dico nihilominus rectangula *A E B, C E D*, esse æqualia, quia utrumque debet esse æquale rectangulo *G E H*, per casus antecedentes, ducendo *G E H*, per centrum *F*.

PROPOS. 36. THEOR. 30.

Si ex puncto D, recta D B, tangat circulum; & alia D C A, secet: Rectangulum A D C, erit æquale quadrato D B.

TRanseat primo recta *D C A*, per centrum *F*. Quoniam igitur *A C*, secta est bifa-

bifariam in *F*, ipsique addita *C D*: ergo *per* 6. *sec.* rectangulum *A D C*, cum quadrato *F C*, æquale est quadrato *F D*, hoc est, *per* 47. *pr.* quadratis *D B*, *B F*. Sunt autem *F C*, *F B*, æqualia. ergo & reliqua, nimirum rectangulum *A D C*, & quadratum *D B*. sunt æqualia,

Secundò, recta *D C A*, non transeat per centrum *F*, sed recta *F E*, sit ad ipsam perpendicularis, atque adeo *per* 3. secet ejus segmentum *C D*, bifariam in *E*. Quare iterum *per* 5. *sec.* rectangulum *A D C*, cum quadrato *E C*, erit æquale quadrato *E D*: adjectoque quadrato *E F*; erit idem rectangulum *A D C*, cum duobus quadratis *E C*, *E F*, hoc est, cum quadrato *F C*, æquale quadratis *E D*, *E F*, hoc est, quadrato *F D*. Quadrato autem *F D*, sunt æqualia quadrata *D B*, *B F*, & *B F*, est æquale *F C*. ergo etiam reliqua erunt æqualia: nempe rectangulum *A D C*, & quadratum *D B*.

Coroll. 1. Hinc manifestum est, si à puncto D, ducantur plurimæ rectæ circulum secantes; rectangula sub totis, & sub segmentis inter punctum, & convexam peripheriam interceptis, esse æqualia: quia omnia sunt eidem quadrato tangentis æqualia.

Coroll.

Coroll. 2. Constat etiam duas tangentes ex eodem puncto ductas, esse æquales.

Coroll. 3. Ex eodem puncto solum duci duas tangentes.

Coroll. 4. Si duæ rectæ æquales circulo incidant, & una tangat, etiam aliam tangere.

PROPOS. 37. THEOR. 31.

Quod si constet rectangulum A D C, æquale esse quadrato D B: recta D B, incidens circulo erit tangens.

Ducatur tangens *D F*, & nectatur *E F*; quæ ad *D F*, erit *per* 18. perpendicularis, & quia eidem rectangulo *A D C*, æqualia sunt quadrata *D F*, *D B*, erunt etiam ipsa æqualia, & rectæ *D F*, *D B*, æquales. Cumque duo latera *E F*, *F D*, sint æqualia duobus *E B*, *B D*, & *E D*, sit basis communis: erit *per* 8. *pr.* angulus *E B D*, æqualis recto *F*. & ideo *per* 16. *hujus* *D B*, tanget circulum, quod erat demonstrandum.

E U-

EVCLIDIS ELEMENTUM QUARTUM.

DEFINITIONES.

1. Figura rectilinea v. g. D E F dicitur inscribi figuræ A B C: cum anguli D, E, F, attingunt latera figuræ A B C.
2. A B C, dicitur circumscribi figuræ D E F: cum latera figuræ A B C, attingunt angulos figuræ D E F.
3. Ut rectilineum D E F, dicatur inscriptum circulo, debent anguli D, E, F, esse ad peripheriam G H I.
4. Ut autem rectilineum A B C, dicatur circulo circumscriptum; debent latera rectilinei, tangere circulum.
5. Item circulus erit figuræ A B C, inscriptus; cum figuræ latera contigerint circulum.
6. Denique circulus erit figuræ DEF, circumscriptus; cum peripheria transierit per angulos D, E. F.
7. Recta linea dicitur coaptari circulo; cum

cum ejus termini fuerint ad circuli peripheriam.

PROPOS. I. PROBL. I.

In dato circulo, data recta D, (quando id fieri poterit juxta 15. *tertij) coaptare æqualem.*

EX diametro B C abſcindatur B E, æqualis D, *per* 3. *pr.* & centro B, intervallo B E, deſcribatur arcus ſecans datum circulum in A. Recta enim B A, erit æqualis B E, *per defin. circuli,* & æqualis ipſi D, *per primum pronunc.*

PROPOS. 2. PROBL. 2.

In dato circulo inſcribere triangulum, dato triangulo D E F æquiangulum.

AD punctum contactus A, cum tangente G H, fiat angulus G A B. æqualis F; & H A C, æqualis E. Dico triangulum A B C, ipſi D E F, eſſe æquiangulum. Angulus enim C, eſt *per* 32. *tertij,* æqualis G A B, ſeu F; & angulus B, æqualis H A C, hoc eſt E. ergo *per* 32. *pr.* etiam reliquus reliquo.

Nota. Si hoc modo inſcribatur æquilaterum, circulum dividi in tres partes æquales.

PROPOS. 3. PROBL. 3.

Circulo circumſcribere triangulum, cuicunq; D E F æquiangulum.

EXternis G, H, fiant in centro I, æquales

les A I B, B I C: eritque reliquus A I C, æqualis reliquo K, quia *per* 15. *pr.* omnes anguli ad I, & *per* 32. *ejusdem* omnes externi G, H, K, sunt æquales quatuor rectis. Demum ducantur per A, B, C, tres tangentes quæ concurrent ad tria puncta L, M, N. Cum enim I A L. I B L, sint recti; erunt B A L, A B L, minores duobus rectis; & ideo *per* 13. *Axioma.* A L, B L, concurrent versus L: & ita de reliquis. Dico angulum L, æqualem esse E. Omnes enim anguli quadrilateri A I B L, sunt *per* 32. *pr.* æquales quatuor rectis, cum igitur duo ad A, B, sint recti: reliqui I, & L, erunt æquales duobus rectis, hoc est duobus G E. sed A I B, & G, sunt æquales, ergo etiam L & E, &c. eadem enim est ratio de reliquis.

Nota in triangulo æquilatero, & similiter in omnibus alijs figuris regularibus, omnes externos esse inter se æquales. Atque ita etiam anguli ad centrum I, erunt æquales, & per ipsos secabitur circulus in partes æquales,

PROPOS. 4. PROBL. 4.

Intra triangulum A B C, circulum describere.

DUo anguli B, C secentur bifariam, & B D, C D, concurrant ad D: Dico tres perpendiculares D E, D F, D G, esse æquales &c. Anguli enim D E B, D B E, sunt æquales D F B; D B F; & D B rectis E, F oppositum, est commune. ergo *per 26. pr.* perpendicularis D E, æqualis est D F. Est autem eidem etiam æqualis D G: eo quod C, sectus sit bifariam, & F, G, sint recti, & C D, communis. ergo omnes tres sunt æquales, & circulus descriptus per E, F, G; tanget latera *per 16. tertij.*

PROPOS. 5. PROBL. 5.

Triangulo A B C, circulum circumscribere.

HOc problema re ipsa non differt à prop. 25. tertij, ubi docuimus per tria puncta data, qualia hic sunt A. B, C. describere circulum. perpendiculares enim D F, E F, quæ secant quælibet duo latera A B, A C, bifariam; necessario concurrunt in quæsito centro F.

PROPOS. 6. PROBL. 6.

Dato circulo quadratum inscribere.

DUæ diametri A C, B D, sint invicem perpendiculares in centro E: Dico quadrilaterum A B C D, esse quadratum. Quatuor enim angulis rectis ad centrum respondent *per 26. ter.* quatuor arcus æquales; & quatuor arcus æquales subtendunt quatuor lineæ æquales A B, BC, CD, DA *per 29. ter.* Denique quatuor anguli ad A, B, C, D, *per 31. ter.* sunt æquales; quia sunt in quatuor semicirculis.

PRO-

PROPOS. 10. PROBL. 10.
Estque Lemma ad sequentem.

Triangulum Isosceles constituere, cujus uterq; aequalium angulorum sit duplus reliqui.

PEr 11. *sec.* secetur quævis A B, ita, ut rectangulum A B C, æquale sit quadrato A C; & centro A, intervallo AB describatur circulus, vel arcus, eique applicetur *per* 1. B D, æqualis A C, & *per* 5. describatur circulus circa triangulum A D C, quem recta B D, tanget in D, *per* 37. *ter.* quia rectangulum A B C, æquale est quadrato B D, eo quod B D æqualis sit A C, & *per* 32. *ter.* angulo B D C, ad contactum D, æqualis erit in alterno segmento angulus C A D; adjectoque communi C D A, erunt duo C A D, C D A, æquales toti A D B; & quia duobus C A D, C D A, æqualis est *per* 32. *pr.* externus D C B; huic erit æqualis A D B, seu A B D. & in triangulo D C B, erunt *per* 6. *pr.* D B, D C, æquales. estque D B, æqualis C A; ergo C A, æqualis C D, & *per* 5. *pr.* anguli C A D, CDA, æquales; & D C B, nec non A D B, vel A B D, duplus ipsius B A D. ergo &c.

PROPOSITIO 11. PROBL. 11.

Circulo Pentagonum Regulare inscribere.

PEr *secundam hujus* inscribatur circulo
D ... triang-

triangulum E F G, æquiangulum triangulo A B D, pr opositionis antecedentis, & G H, F I, secent angulos E F G, E G F, bifariam. Hac enim ratione erunt omnes quinq; anguli F E G, I F E, I F G, H G E, H G F, æquales; quia E F G, E G F, sunt dupli F E G: & ideo *per 26. ter.* quinque arcus F G, E I, I G, E H, H F, sunt æquales; & quinque rectæ ipsos subtendentes æquales *per 29. ter.* & omnes quinque anguli æquales *per 27. ter.* quia sicut H E I, insistit tribus arcubus æqualibus H F G I. ita quoque reliqui insistunt totidem æqualibus.

PROPOS. 15. PROBL. 15.

Circulo Hexagonum regulare inscribere.

SEmidiametro A G, applicentur æquales A B, A C, eruntque A G C, A B G, triangula æquilatera; & tam angulus A G C, quam A G B, erit *per 32, pr.* una tertia duorum rectorum. Productâ autem CG, in E, fiunt omnes tres A G C, A G B, B G E æquales duobus rectis. ergo B G E, erit reliqua pars tertia, & omnes tres erunt æquales: & totidem alij erunt eisdem æquales ad verticem G. Et ideo insistent sex arcubus æqualibus, & arcus subtendent sex rectæ æquales; & omnes sex anguli erunt æquales; quia sicut E D F, insistit quatuor arcubus æqualibus E B A C F, ita reliqui.

PROPOS. 16. PROBL. 16.

Circulo inscribere Quintidecagonum regulare.

INscribatur triangulum æquilaterum A B C, *per* 2. & *per* 11. pentagonum A D E F G. Qualium igitur partium 15. est tota circumferentia, talium 5. erit AB; & talium trium A G, & A G F, 6. atque adeo talium partium erit una, arcus B F, hoc est una decimaquinta.

PROPOS. & PROBL. 7. & 12.

Circulo Quadratum, & Pentagonum regulare circumscribere.

UT praxis sit omnibus figuris ipsique etiam triangulo communis, Angulus quadrati, vel pentagoni internus sit A. externus B; quibus in figuris regularibus constat reliquos esse æquales; & externo B, fiant ad centrum D, æquales quatuor pro quadrato, & quinque pro pentagono, id quod potest fieri, quia omnes anguli externi cujuscunque figuræ æquivalent quatuor rectis *per* 32. *pr.* & hoc ipso divisus erit circulus in quatuor, vel quinque partes æquales, & lineæ subtendentes arcus æquales, constituent quadratum E F G H, vel pentagonum E F G H I, regulare, & circulo inscriptum, *ut patet ex demonstrationibus 6. & undecima.* Inventis autem punctis E F G &c. circumscribitur circulo quadratum, vel pentagonum per tangentes, ſicut in tertia circumſcriptum eſt triangulum, & ſicut ibi ita etiam hic demonſtratur omnes angulos K L M &c. eſſe æquales internis A, quia v.g. in quadrilatero E D F K, propter duos rectos E, F, reliqui duo D & K ſunt æquales duobus rectis, hoc eſt duobus A, B, & quia D, factus eſt æqualis B, ſequitur K, æqualem eſſe A. Latera vero K L, L M, &c. eſſe æqualia probatur hoc modo. Tangentes K E, K F, & ſimiliter L F, L G, &c, ſunt æquales *per 2. coroll. 36. tertij.* ergo omnia triangula E K F, F L G, &c. ſunt iſoſcelia, & ad æquales baſes E F, F G, &c. ſunt anguli angulis æquales; eo quod etiã K, L, &c. ſint æquales. & ideo *per 26. pr.* erunt etiam omnia latera E K, K F, FL, &c. æqualia, nec non duo K F, F L, duobus LG, G M, &c. æqualia.

PROPOS. & PROBL. 8. & 13.

In Quadrato, & Pentagono. circulum inſcribere.

TRiangulo inſcriptus eſt circulus prop. 4. dividendo duos angulos bifariam, id quod etiam habet locum in omnibus figuris regularibus. Rectæ enim B F, C F, dividentes bifariam angulos v. g. B, C, concurrunt neceſſario intra figuram alicubi in F, per lemma quod ſequitur; & perpendiculares F G, F H, F I, &c. ductæ ex puncto

F, in

F, in singula latera sunt æquales: idque demonstratur eodem modo, quo in quarta quod attinet tres perpendiculares F G, F H, F I. pro reliquis vero præmonstrandum est, etiam reliquas F D, F E, F A, secare reliquos angulos D, E, A bifariam.

Dico igitur angulum F D C æqualem esse F B C. Nam circa æquales F C B, F C D, duo C F, C B, sunt æqualia duobus lateribus C F, C D. ergo *per 4. pr.* angulus C D F, æqualis est C B F. hic autem est medietas totius B, ipsique B æqualis est totus D: ergo etiam FD, secat bifariam angulum D. & ita de reliquis, eodem enim modo, & ordine proceditur ad reliquos, & tandem *per 26. pr.* demonstratur reliquas perpendiculares F K, F L, &c. æquales esse tribus F G, F H, F I. quia v. g. in triangulis F D I, *F* D K, præter rectos ad I, K; anguli ad D, sunt æquales, & latus *F D*, rectis oppositum est commune. quare circulus descriptus centro *F* intervallo *F G*, transit per reliqua puncta H, I, K, L, & in ijsdem tangit latera figuræ datæ.

Lemma.

In figura regulari, & primo in figura laterum numero parium v. g. in octogono: Dico primo rectam A E, ductam ad angulos oppositos A, F, utrumq; angulum secare bifariam.

EX eodem enim puncto A, ducantur reliquæ rectæ ad reliquos angulos, ita ut fiant ad utramque partem rectæ A E, tria triangula. Erunt primo duo triangula A G H, A C B, penitus æqualia *per* 4. *pr.* quia circa æquales angulos H, B, latera lateribus sunt æqualia; hoc est basis A G, erit æqualis A C, & angulus H A G, angulo B A C; & H G A, angulo BCA: & isti duo dempti ex totis G B, qui etiam sunt æquales, relinquunt alios duos A G F, ACD, æquales: Et circa istos erunt iterum duo latera duobus æqualia, ideoque *per* 4. *pr.* & basis A F, æqualis basi A D, & angulus *F* A G, æqualis D A C, & G *F* A æqualis CDA. Deniq; eodem modo demonstratur angulum A E *F*, æqualem esse angulo A E D, & E A *F*, ipsi E A D. Patet igitur rectam A E, secare angulum E bifariam; imo & angulum B A H; quia ad utramq; partem rectæ E A, sunt tres anguli tribus æquales.

Dico 2. *rectam E I transire per A, si bifariam secet angulum E.* Debet enim coincidere cum recta AE, quam ostendimus eundem angulum E secare bifariam.

Dico 3. *si duæ rectæ E I, D I, bifariam secent duos angulos E, D, ipsas concurrere intra figuram.* Anguli enim figurarum regularium sunt minores duobus rectis. ergo & semisses I E D, I D E; & ideo *per* 13.

Axioma

Axioma E I, D I, concurrent: & quia transeunt per angulos oppositos, concurrunt intra figuram.

Dico 4. etiam duas perpendiculares L I, K I, quæ bifariam secant latera E F, E D, concurrere in I. Nectantur enim L I, K I. Cum igitur in triangulo I E D, anguli sint æquales; erunt I E, I D, æquales. sunt autem etiam I K, K E æqualia duobus lateribus I K, KD. ergo *per* 8. *pr.* anguli ad K, sunt recti. Rursus duo latera I E, EL, sunt æqualia duobus I E, E K, & anguli contenti æquales; ergo *per* 4. *pr.* angulus L, est æqualis recto K. Quoniam igitur perpendiculares prædictæ necessario coincidunt cum istis L I, K I concurrunt etiam ipsæ in I.

In figura autem laterum imparium V. g. in Heptagono: Dico primo rectam A K, quæ secat angulum A, bifariam, secare etiam bifariam latus oppositum E D.

Ducantur A *F*, A C, A E, A D: & secta E D, bifariam in K, nectatur A K. demonstrabitur, ut prius, A E, AD esse æquales. Sunt autem & A K, K E æqualia lateribus A K, K D, ergo *per* 8. *pr.* anguli ad K, sunt recti, & K A E. K A D. æquales. sunt autem *juxta demonstrationem præcedentem*, etiam reliqui duo E A *F*, *F* A G, æquales duobus D A C, C A B. ergo & totus K A G, toti K A B, & ideo recta secans angulum A bifariam, coincidit cum A K, secatq; similiter latus E D bifariam, & ad angulos rectos in puncto K,

Dico 2. Vice versa perpendicularem K I, secare bifariam angulum A. Coincidit enim necessario cum illa quam ostendimus secare bifariam angulum A.

Dico 3. Duas A I, B I, secantes bifariam angulos A, B, concurrere intra figuram v. g. in I. ratio est, quia debent secare latera oposita bifariam.

Dico 4. Ad idem punctum I coire perpendiculares L I, K I, si bifariam secent latera E F, E D. Utraque enim coincidit necessario cum illis quæ secant bifariam angulos A, B.

PROPOS. & PROBL. 9. & 14.

Quadrato, & Pentagono regulari circulum circumscribere.

SEcentur duo latera A B, B C bifariam in G, H, sintq; G *F*, H *F*, perpendiculares, hoc est, idem fiat hic quod in propositione 5. factum est, in descriptione circuli circa triangulum: concurrent dictæ perpendiculares intra figuram ad *F, per lemma præmissum.* & tres lineæ *F A, F B, F C*, ostendentur esse æquales sicut in 5. Nam circa æquales angulos ad G, sunt latera lateribus æqualia, & similiter circa rectos ad H. Er-

H. Ergo *per* 4. *pr.* *FA*, *FC*, sunt æquales eidem *FB*, atque adeò omnes tres æquales inter se; & triangula *ABF*, *BCF*, isoscelia habentia æquales angulos ad bases *AB*, *BC*. Dico easdem *FA*, *FB*, *FC*, imo & reliquas *FD*, *FE*, secare bifariam angulos *A*, *B*, *C*, *D*, *E*. Sunt enim *FB*, *BC* æqualia lateribus *FB*, *BA*, & basis *FC*, æqualis *FA*. ergo *per* 8. *pr.* angulus *FBC*, æqualis est *FBA*. hoc est uterque erit semissis totius *B*. Sunt autem ijsdem æquales *FAB*, *FCB*. ergo etiam isti sunt semisses angulorum *A*, *C*. & quia rursus circa æquales *FCB*, *FCD*, latera *FC*, *CB*, æqualia sunt lateribus *FC*, *CD*: erit *per* 4. *pr.* etiam *FD*, æqualis *FB*, & angulus *FDC*, æqualis *FBC*, hoc est, etiam *FDC*, erit semissis totius *D*. eodemque modo demonstrabitur *FE*, esse æqualem *FC*; & angulum *FED*, esse semissem totius E, &c. Cum igitur omnes rectæ *FA*, *FB*, *FC*, *FD*, *FE*. &c. sint æquales, si centro *F*, intervallo *FA* describatur circulus, transibit per reliqua puncta *B*, *C*, *D*, *E*, &c.

Scholium.

EX his patet inscriptionem quidem figurarum intra circulum esse plerisq; figuris regularibus peculiarem, reliquas vero inſcriptiones &circumſcriptiones eſſe universales.

Peculiares ſunt omnes illæ quas tradit Euclides nimirum inſcriptio triãguli, quadrati, pentagoni, hexagoni & quintidecagoni intra circulum, hoc eſt diviſio circuli in 3. 4. 5; 6. & 15. partes æquales: poſſunt tamen aliquæ eſſe univerſales. Nam ex prædicta diviſione poſſunt fieri infinitæ aliæ, praxi omnibus communi. nimirum per continuam biſectionem arcuum bifariam. Beneficio enim quadrati inſcribitur octogonum: figura 16. laterum, 32. laterum, 64. 128. &c. & ſimiliter beneficio Pentagoni figura 10. laterum 20. 40. 80. &c & ita de reliquis.

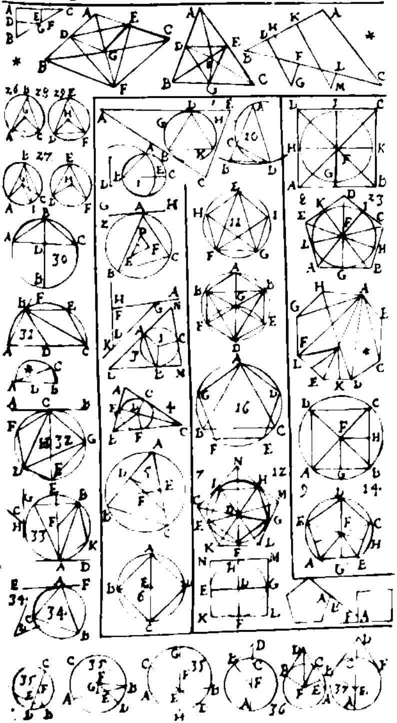
Inſcriptio vero Heptagoni, Nonagoni, 11. laterum 13. &c. adhuc deſideratur; quia nondum eſt repertum problema, & conſtructio trianguli iſoſcelij cujus uterlibet angulorum æqualium ſit triplus quadruplus &c. reliqui anguli, quorum beneficio inſcriberentur circulo heptagonum nonagonum &c. eo modo quo deſcriptum eſt pentagonum. Et beneficio heptagoni & nonagoni inſcriberetur figura 63. laterum, ſicut inſcriptum fuit ab Euclide quintidecagonum.

EVCLIDIS ELEMENTUM QUINTUM.

DEFINITIONES.

1. PArs, *scilicet aliquota* est, quæ metitur suum totum præcise.
2. Ipsum vero totum vocatur multiplex suæ partis aliquotæ. *V. g,* 3. *est pars aliquota numeri* 12, *&* 12. *multiplex numeri* 3.
3. Ratio est duarum magnitudinum, ejusdem generis, mutua quædam secundum quantitatem habitudo.
4. Rationũ autẽ similitudo, est Proportio, vel potius proportionalitas. *Exempli gratia relatio* 2. *ad* 1. *Vel* 4. *ad* 2. *Vocatur ratio, & quia eadem est relatio* 2 *ad* 1. *&* 4. *ad* 2. *idcirco inter* 2, *&* 1. *& inter* 4. *&* 2 *dicitur esse proportio.*
5. Ejusdem generis magnitudines sunt illæ, quæ multiplicatæ se mutuo possunt superare. *tales non sunt linea, & superficies; superficies, & corpus. angulus contingen-*

A pagina 59 ad 85 am 5



singentia, & angulus rectilineus. Quid autē sentiendum sit de angulis segmentorum consule Clavium. Neque verum est quod aliqui dicunt recti ad curuum non esse proportionem. Sunt enim quadrata nonnulla lunula, & ab Archimede quadrata est Parabola, figura mixta ex curuo & recto.

6. Ut eadem sit ratio A ad B, & C, ad D, debent æquemultiplices antecedentium A, C, v.g. E, F, quæcunque illæ sint, duplæ, triplæ, quadruplæ, &c. respectu quarumcunque æquemultiplicium cousequentium B, & D, hoc est respectu G, H; quæ etiam possunt esse duplæ, triplæ, &c. habere hanc conditionem, ut E, F una sint æquales ipsis G, H, vel una excedant, vel una deficiant, hoc est quando E est æqualis ipsi G, etiam F sit æqualis H, quando E, est major, quàm G, etiam F sit major quam H, & quando E, est minor quàm G, etiam F sit minor quàm H.

E	A	B	G
	3	6	
F	C	D	H
	4	8	

7. Eandem proportionem habentes magnitudines vocantur proportionales.

8. Quod si in exemplo defin. 6. deprehenderetur aliquam multiplicem E, majorem quidem esse multiplici G, at æquimultiplicem F, non esse majorem H, tunc

tunc A ad B, dicetur habere majorem rationem quàm C ad D.

9. Termini proportionales ut minimum sunt tres, poteſt enim conſequens terminus prioris rationis, eſſe antecedens ſequentis, ut contingit in proportione continua. In diſcreta vero requiruntur ut minimum quatuor termini.

10. Non habet uſum in hoc libro, & reſpondet quintæ definitioni libri ſexti.

11. Homologæ magnitudines ſunt antecedentes, antecedentibus; & conſequentes conſequentibus.

Sequuntur ſex modi argumentandi in Proportionibus, qui inferius ſuis locis demonſtrantur.

12. *Primus modus.* Alterna ſeu permutata ratio, eſt ſumptio antecedentis ad antecedentem, & conſequentis ad conſequẽtem. *Vt quando ex eo quod ut A ad B; ita eſt C ad D, infertur, ergo permutando, ut A ad C* antecedens *ad* antecedentem, *ita eſt B ad D* conſequens *ad* conſequentem. *Demonſtratur propoſitione* 16.

A 9 -- *B* 3
C 6 -- *D* 2

14. *Secundus modus.* Inverſa ſeu converſa ratio, eſt ſumptio conſequentis inſtar ante-

antecedentis, ad antecedentem, velut ad consequentem. *Vt quando ex eo quod ut A ad B ita est C ad D. infertur, ergo convertendo, vel invertendo ut B, ad A, ita est D ad C. Demonstratur in coroll. prop. 4.*

A 9	--	*B* 3	
C 6	--	*D* 2	

14. *Tertius modus.* Compositio rationis, est sumptio antecedentis cum consequente instar unius, ad ipsam consequẽtem. *Vt quando ex eo quod ut A ad B, ita est C ad D; infertur. Ergo componendo ut A B simul, ad eandem B, ita & C D simul, ad eandem D.*

A 9	--	*B* 3
C 6	--	*D* 2
A B 12	-	*B* 3
C D 8	--	*D* 2

Demonstratur prop. 18.

15. *Quartus modus.* Divisio rationis, est sumptio excessus, quo antecedens superat consequentem, ad ipsam consequentem. *Vt quando ex eo quod ut A B simul ad partem B; ita sunt C D simul ad partẽ D; infertur. Ergo dividendo ut pars A, ad eandem partem B, ita reliqua pars C, ad eandem D. Demonstratur prop.* 17.

A B 9	*B* 3
C D 6	*D* 2
A 6	*B* 3
C 4	*D* 2

17. *Quintus modus.* Conversio rationis, est sumptio antecedentis ad excessum, quo

quo antecedens superat consequentem. *Vt quando ex eo quod ut A B, simul ad partem B, ita sunt C D, ad partem D; infertur. Ergo per conversionem rationis ut A B simul, ad reliquam partem A, ita C D simul, ad reliquam partem C.* Demonstratur prop. 19.

A B 9	B 3		
C D 6	D 2		
A B 9	A 6		
C D 6	C 4		

Quinque hi modi argumentandi in Proportionibus, exhibentur hoc schemate.

Quia est ut	9. *ad* 3. *ita*	6. *ad* 2.
Erit permutando ut	9. -- 6.	3. -- 2.
Convertendo	3. -- 9.	2. -- 6.
Componendo	12. -- 3.	8. -- 2.
Dividendo	6. -- 3.	4. -- 2.
Per convers. rationis	9. -- 6.	6. -- 4.

17. *Sextus modus.* Ratio ex æqualitate sive exæquo est, si sint plures magnitudines quam duæ, & aliæ his multitudine pares quæ binę sumuntur & in eadem ratione; & infertur ut in primis magnitudinibus se habet prima ad ultimã, ita in secundis magnitudinibus se habet prima ad ultimã. *Est autẽ Ratio ex æqualitate duplex.*

18. Ordinata est, cum fuerit quemadmodum antecedens ad consequentem, ita antecedens ad consequentem: fuerit etiam ut consequens ad aliud quidpiam, ita consequens ad aliud quidpiam.

Quando v.g. ut A ad B, ita fuerit D ad E; & ut B ad C, ita E ad F; & hinc infertur. Ergo ex aequalitate ordinata ut A ad C, ita D ad F. demonstratur prop. 22.

18.	12.	2.	9.	6.	1.
A.	B.	C.	D.	E.	F.
A		C	D		F.
18.		2.	9.		1.

19. Perturbata est cum v.g. ternae & ternae magnitudines sumptę fuerint, fueritq; ut in prioribus prima ad secundã, ita in posterioribus secunda ad tertiam; ut autem in prioribus secunda ad tertiam, ita in posterioribus prima ad secundam, *ut si sit ut A ad B, ita E ad F, & ut B ad C, ita D ad E; erit ex aequalitate perturbata ut A ad C ita D ad F. Demonstratur propos. 23. Porro tam perturbata ratio, quam ordinata, semper infert eandem rationem extremorum, etiamsi plures magnitudines ponantur quam tres, ut ex prop. 22. & 23. perspicuum fiet.*

A.	B.	C.	D.	E.	F.
18.	9.	3.	12.	4.	2.

PROPOS. 1. THEOR. 1.

Sint quotcunque magnitudines v.g. A, B, totidem magnitudinum C, D, aequemultiplices: Dico A, B, simul tam esse multiplices ipsarum C, D simul; quàm est A, ipsius C, SI enim in A sunt v. g. tres magnitudines E, F, G, æquales ipsi C; erunt etiã in B, totidem magnitudines H, I, K, æquales ipsi D: & E, H simul æquales erunt ipsi C, D, semel; & F, I, secundo; & G, H, tertio. atque adeo quoties A, continet C, toties E, F, G, H, I, K, hoc est, A & B simul, continebunt C, D simul.

PROPOS. 2. THEOR. 2.

Sint A & C, æquemultiplices ipsarum B & D; & alia E; F sint earundem B, D, æquemultiplices; Dico A, E simul, & C, F simul, esse earundem B, & D, æquemultiplices.

SI enim æqualibus multitudinibus A, C, addantur æquales multitudines E. F; fiunt A, E, simul, & C, F simul, æquales multitudines earundem B, D.

PROPOS. 3. THEOR. 3.

A, B sint æquemultiplices magnitudinum C, D; & E, F æquemultiplices æquimultiplicium A, B: Dico E, F earundem C, D, esse æquemultiplices.

SI enim in E, sunt v.g. tres partes G, H, I, æquales ipsi A, erunt totidem K, L, M in F, æquales ipsi B. Cumque G, K, sint æquales ipsi A, B, erunt G, K ipsarum C, D, æquemultiplices. sunt autem & H, L, eandem ob causam, earundem æquemultiplices. ergo *per præcedentem* G, H simul, &

K, L

K, L ſimul, ſunt earundem C, D æquemultiplices; & quia etiam I, M, ſunt earundem æquemultiplices; erūt *per eandem* omnes G, H, I, & omnes K, L, M, hoc eſt, E & F, æquemultiplices ipſarum C, D.

PROPOS. 4. THEOR. 4.

Vt A ad B, ita ſit C, ad D, & E, F ſint æquemultiplices antecedentium A, C; & G, H utcunque æquemultiplices conſequentium B, D: Dico eſſe ut E ad G, ita F ad H.

IPſarum enim E, F, ſumantur quæcunque æquemultiplices I, K, & aliæ quæcunq; æquemultiplices L, M, ipſarum G, H. Ergo *per præced.* I, K, erūt æquemultiplices ipſarum A, C; & L, *M*, æquimultiplices ipſarū B, D, atq; adeo *per defin.* 6. I, K, erunt vel una æquales ipſis L, M, vel una excedent, vel una deficient. Sunt autem I, K æquemultiplices ipſarum E, F, & L, M, æquemultiplices ipſarum G, H. Ergo *per eandem 6. defin.* erit quoque ut E ad G, ita F ad H.

Demonſtratio rationis Converſæ. †

Coroll. Ex eadem definitione probatur eadem facilitate ratio Converſa. Nam ſi ut A ad B, ita fuerit C ad D; & ipſarum A, C, ſumantur æquemultiplices E, F, & aliæ G, H, æquemultiplices quæcunque ipſarum B, D, erunt *per defin. 6.* E, F vel una æquales

quales ipsis G, H, vel una excedent, vel una deficient; imo & vice versa G & H, vel una erunt æquales, vel una excedent, vel una deficient ab E, F. Unde sequitur *per eandem defin.* ut B ad A, ita esse D ad C.

PROPOS. 5. THEOR. 5.

Quam est multiplex magnitudo A B, magnitudinis C D, tam sit ablata A, multiplex ablatæ C: Dico etiam reliquam B, tam esse multiplicem reliquæ D, quàm est tota totius, vel ablata ablatæ.

Quam est multiplex tota totius, vel ablata A, ablatæ C, tam sit B, multiplex alicujus magnitudinis E. Ergo *per* 1. A, B, simul, tam erunt multiplices ipsarum C, E simul, quàm est A ipsius C, vel quàm est A B simul, ipsarum C D. Atque ita A B, simul, sunt æquemultiplices tam ipsarum C E, quam ipsarum C, D. & ideo C, E, sunt æquales C, D; & ablata communi C, remanebit D, æqualis E; sed B, ita est multiplex ipsius E ut ablata A, ablatæ C. ergo etiam B, ita erit multiplex ipsius D, ut A ipsius C, vel A B, ipsarum C D.

PROPOS. 6. THEOR. 6.

A B, C D, sint æquemultiplices magnitudinum E & F; & A, C ablata, sint earundem E, F, æquemultiplices; Dico reliquas B, D, vel esse æquales ipsis E, F; vel earundem æquemultiplices,

His

His enim positis erunt in A B, C D, partes ipsis E, F, magnitudine & numero æquales: & similiter tot erunt in A, quot in C, ablato ergo numero partium A, C, remanebit æqualis numerus partium in B, D, æqualium eisdem E, F.

PROPOS. 7. THEOR 7.

Æquales A, B, ad eandem C, habent eandem rationem: & C eandem ad æquales A, B.

Nam æquemultiplices antecedentium A, B, v. g. D, E, sunt æquales ipsi F, multiplici ipsius C, vel una deficiunt, vel una excedunt. Ergo *per defin. 6.* ut A ad C, ita est B ad C. Et vice versa multiplex F, vel una erit æqualis æquemultiplicibus D, E, vel una excedet, vel una deficiet; eritque *per eandem defin. 6.* ut C ad A, ita C ad B.

PROPOS. 8. THEOR. 8.

Sint duæ magnitudines A B major & A minor (potest enim minor concipi ut pars majoris) & tertia sit quæcunque C. Dico majorem A B, ad C, habere majorem rationem, quàm minor A, ad eandem C.

Sumantur ipsarum B, & A, æquemultiplices D, E, hac lege, ut D, major sit quàm C, & E, non minor. Quoniam igitur D, E sunt æquemultiplices duarum B, A; erunt *per primam* D. E, simul, ita multiplices totius A B, ut est E, multiplex minoris A. Capiatur quoque F G multiplex ipsius C. proxime major E. dempta igitur G, quæ intelligitur æqualis C, reliqua F, non erit major quàm E. est autem & D major quàm C, hoc est quám G, ergo tota D E major est tota F G. Quare cum D E, &E, sint æquemultiplices ipsarum A B majoris, & A minoris, & F G, ipsius C, quæ est instar duarum consequentium, sitq; E D multiplex primæ AB, major quidem multiplice secundæ C, hoc est major quàm F G, sed multiplex tertiæ A, hoc est E, non major F G, multiplice quartæ C: Erit *per* 8. *defin.* major ratio A B, ad C, quàm A ad eandem C.

Et vice versa C ad A B, habebit minorem quàm ad A, quia vicissim, est quidem F G major quàm E; sed non est major quàm D E.

PROPOS. 9. THEOR. 9.

Sive A, & B, eandem habeant rationem ad C: sive C eandem ad A & B; semper A & B, erunt æquales.

SI enim A, major foret quàm B, non haberent rationem eandem ad C, *per præcedentem*, quod est contra hypothesim. Neque C haberet eandem ad A, & ad B.

PRO-

PROPOS. 10. THEOR. 10.

Si A ad C majorem rationem habeat, quàm B, ad eandem C. Erit A, major quam B, Et vice versa si C ad A habet majorem quam ad B; erit B, major quàm A.

SI enim A esset æqualis B, non haberet proportionem majorem ad C, & si esset minor haberet minorem *per antecedentes*. Et è contrario C, ad A, & B haberet eandem, si A & B, essent æquales, & si A, esset major quàm B; haberet C ad A, minorem, quod est absurdum.

PROPOS. 11. THEOR. 11.

Si A ad B, & C ad D, eadem sit ratio, quæ E ad F: erunt etiam ipsæ eadem inter se.

SInt G, I, H æquemultiplices A, E, C, & K, M, L æquemultiplices ipsarum B, F, D. Quoniam igitur ut E ad F, ita est tam A ad B, quàm C ad D. ergo *per def 6.* quando I, est æqualis, major; vel minor quàm M, erunt quoque G & H æquales ipsis K & L, vel una deficient, vel una excedent; & ideo *per eandem 6. defin.* A, B: C, D. sunt proportionales, hoc est, ut A ad B, ita est C ad D.

PROPOS. 12. THEOR. 12.

Si fuerit ut A ad B, ita C ad D, & ita E ad F, &c. erunt omnes antecedentes ad omnes consequentes, ut una ad unam v. g. ut A ad B,

Suman-

SUmantur G, H, I, æquemultiplices antecedentium, &K,L,M,utcunque æquemultiplices consequentium: ita ut *per* 1. tam sint multiplices, G,H,I,ipsarũ A, C, E simul, quã est G ipsius A:&K,L,M, ipsarũB, D,F,ita multiplices, ut K ipsius B. Deinde quoniam rationes A ad B, C ad D, E ad F, sunt eædem, ergo quando G, est æqualis, major, vel minor quàm K, erit etiam H, & I æqualis, major, vel minor, quàm L & M: Atque adeo quando G major est, minor, vel æqualis ipsi K; erunt omnes G, H, I, majores, minores, vel æquales omnibus K, L, M. Sunt autem G, & G, H,I, æquemultiplices A, & A, C, E; & K,& K, L, M æquemultiplices B; & B, D, F. ergo *per defin.* 6. ut A,ad B,ita sunt omnes,A, C,E, ad omnes B, D, F.

PROPOS. 13. THEOR. 13.

Si A ad B eandem rationem habuerit quàm C ad D; at C ad D, majorem quàm E ad F: etiam A ad B, habebit majorem, quàm E ad F.

SUmptis enim æquemultiplicibus, ut in præcedenti; erit *per def,* 6. G, semper major quàm K, quando H, major est quàm L: at *per* 8.*defin.* quando H,major est quàm L, non semper I est major quàm M. Ergo etiam I, potest esse non major quàm M, quãdo G major est quàm K, & ideo *per eandem* *defin.* 8. major erit ratio A ad B, quàm E ad F.

PROPOS. 14. THEOR. 14.

Ut A ad B, ita sit C ad D: Dico A & B, vel una esse aquales ipsis C, D; vel una excedere, vel una deficere.

EXistente enim A, v. g. majore ipsâ C; ratio A ad B major est, quàm C ad B, *per* 8. Sed ut A ad B, ita est C ad D: Ergo major est ratio C ad D, quàm C ad B; ideoq; *per* 10. major erit B, quàm D. simillima est ratiocinatio in reliquis.

PROPOS. 15. THEOR. 15.

Partes A, B, cum aquemultiplicibus C, D; sunt in eadem ratione.

SInt enim exempli gratia in C, tres partes æquales ipsi A, nimirum E, F, G. Erunt ergo totidem in D, nempe H, I, K, æquales ipsi B, utque A ad B, ita erit E ad H; F ad I, & G ad K; & *per* 12. ut E ad H, hoc est ut A ad B, itâ erunt omnes E, F, G, ad omnes H, I, K, hoc est, ita erit C, ad D.

PROPOS. 16. THEOR. 16.

Ratio Alterna.

Ut A, ad B, ita sit C ad D: Dico permutando ut A ad C, ita esse B ad D: & hoc quando omnes quatuor magnitudines sunt ejusdem generis.

SInt E, F, æquemultiplices ipsarum A, B; & G, H, utcunque æquemultiplices ipsarum C, D. Ergo ut A ad B, ita erit, *per antecedi* *secund.* E ad F; & ut C ad D, ita G ad H; & *per* 11. ut E ad F, ita G ad H; & *per* 14. E & F, erunt vel una æquales ipsis G, H, vel una excedent, vel una deficient, *per q; def.* 6. ut A ad C, ita erit B ad D, sunt enim E, F, æquemultiplices antecedentium; & G, H, æquemultiplices consequentium.

PROPOS. 17. THEOR. 17.

Divisio Rationis.

Ut A B, ad B, ita sit C D, ad D: Dico dividendo esse ut A, ad B, ita C ad D.

Sumantur E, F; G, H, omnes æquemultiplices ipsarum A, B, C, D. eritque *per* 1. aggregatum E F, tam multiplex totius A B, quàm est E ipsius A, & G H, tam multiplex totius C D, quàm G, ipsius C: Sed E & G, sunt æquemultiplices ipsarum A, C; ergo etiam E F, & G H, sunt æquemultiplices totarum A B, CD. Sint quoque aliæ I, K. earundem B, D, æquemultiplices. ergo *per secundam*, etiam F, I, & H, K, erunt earumdem B, D, æquemultiplices cum igitur EF, GH, sint æquemultiplices antecedentium A B, CD; & FI, HK consequentium B D. ergo *per def.* 6. E F, & GH, vel una erunt æquales, vel una deficient, vel una excedent multiplices F I, H K: quando autem E F, & G H, sunt majores quàm F I, H K; tunc demptis communibus F, H, remanent E, G, majores quàm I & K, & quando

E 2 sunt

sunt minores, vel æquales, remanent majores, vel æquales; suntque E, G, æquemultiplices ipsarũ A, C; & I, K, ipsarũ B, D; ergo *per eandem def. 6.* erit ut A ad B, ita C ad D.

PROPOS. 18. THEOR. 18.

Compositio rationis.

Vt A B, ad B C, ita sit D E, ad E F, Dico componendo, ut A C, ad B C, ita esse D F, ad E F.

SI in minus, sit ut A C, ad B C, ita D F, ad F G, minorem E F. Ergo *dividendo* ut A B, ad B C. ita erit D G, ad G F, Sed ita ponebatur etiam D E, ad E F. ergo ut D E, ad E F, ita erit D G. a d G F. Sed prima D E, minor est quàm D G. ergo tunc *per* 14. etiam E F, minor est quàm G F, quod est absurdum. Quod si ut A C, ad B C, ita esset D F, ad F G, majorem ipsâ E F, sequeretur E F, esse majorem G F, quæ ponebatur major.

PROPOS. 19. THEOR. 19.

Vt tota A B, ad totam C D, ita sit ablata A, ad ablatam C: Dico ita quoq; esse reliquam B, ad reliquam D.

ERit enim *per* 16. *permutando* ut A B, ad A; ita C D, ad C; & *dividendo* ut B, ad A; ita D ad C; & *iterum permutando* ut B ad D; ita A ad C, vel A B ad C D.

Conuersio rationis. *

Coroll. Vt A B ad B; ita sit C D ad D: ergo go *dividendo* ut A ad B; ita erit C ad D; &, *convertendo* ut B ad A; ita D ad C; & *componendo* ut B A ad A; ita D C ad C. *& hoc est argumentari per conversionem rationis.*

PROPOS. 20. THEOR. 20.

Ut A ad B; ita sit D ad E; & ut B ad C, ita E ad F. Dico primas A, D, vel esse una æquales extremis C, F; vel majores, vel minores.

QUando enim A, C, sunt æquales, tunc A & C habent eandem proportionem ad B: Sed ut A ad B, ita est D ad E; & ut C ad B, ita est *convertendo* F ad E: ergo etiã ut D ad E, ita est F ad E; & idcirco *per* 9. D, & F, sunt æquales. similis est ratio in reliquis casibus.

PROPOS. 21. THEOR. 21.

Ut A ad B, ita sit E ad F; & ut B ad C, ita D ad E: Dico iterum A & D, vel una esse æquales extremis C, F; vel una majores, vel una minores.

QUando A major est quàm C, tunc A, ad B, habet majorem proportionem quã C ad B; sed ut A, ad B, ita est E ad F; & ut C ad B, ita est *convertendo* E ad D: ergo E ad F, habet majorem rationem quàm E ad D; & ideo *per* 10. D, major est quàm I. & ita de reliquis casibus.

PROPOS. 22. THEOR. 22.

Æqualitas ordinata.

Sit rursus, ut in 20. *ut A ad B, ita D ad E, & ut B ad C, ita E ad F, ita ut proportio sit ordinata etiam in pluribus terminis. Dico ex æqualitate ordinata, ut A ad C, ita esse D ad F.*

IPsarum A, D, sint æquemultiplices G, H; ipsarum B, E æquemultiplices I,K; & L,M, æquemultiplices ipsarum G F. Ergo *per* 4. ut G ad I, ita est H ad K; & ut I ad L, ita K ad M; & *per* 20. primæ G, H, erunt una æquales, vel majores, vel minores extremis L, M: & ideo *per* 6. *defin.* ut A ad C; ita erit D ad F.

Quod si præterea, ut C ad N, ita fuerit F ad O; sequeretur primo *per demonstrationem præmissam* ut A ad C, ita esse D ad F; & quia ut A ad C, ita est D ad F; & ut C ad N, ita F ad O. ergo *per eandem* erit iterum, ut A ad N, ita D ad O, &c.

PROPOS. 23. THEOR. 23.

Æqualitas perturbata.

Vt A ad B, ita sit E ad F; & ut B ad C, ita sit perturbatè D ad E: Dico ex æqualitate perturbatâ, ut A ad C, ita esse D ad F.

SInt G, H, I, æquemultiplices trium A, B, D; & K, L, M, æquemultiplices reliquarum. Ergo *per* 15. ut A ad B, ita est G ad H; & ut E ad F, ita L ad M, sed ut A, ad B,

ita

ita est E ad F: ergo ut G ad H, ita est L ad M. Item *per* 4. ut H ad K, ita est I ad L. Cum ergo ut G ad H, ita sit L ad M; & ut H ad K, ita I ad L: ergo *per* 21. G & I, vel una erunt æquales ipsis K, M, vel majores, vel minores; & *per def.* 6. ut A ad C, ita erit D ad F: & si ut C ad N, ita foret alia O ad D, &c. sequeretur eodem modo, ut A ad N, ita esse O ad F.

PROPOS. 24. THEOR. 24.

Ut A ad B, ita sit C ad D: & ut E ad B, ita F ad D: Dico ut A E simul, ad B, ita esse C F simul ad D.

NAm *convertendo*, erit quoque ut B ad E, ita D ad F; & sic A, B, E, & totidem C, D, F, erunt ordinatè proportionales. Quare ut A ad E, ita erit *per* 22. C ad F, & *Componendo* ut A E ad E, ita C F ad F: & sic erunt iterum tres A E, E, & B, & tres C F, F, & D; ordinatè proportionales: iterumque *per* 22. ut A E ad B, ita erit C F ad D.

PROPOS. 25. THEOR. 25.

Si quatuor magnitudines A B, C D, A, C, proportionales fuerint & A B maxima, ideoq; C minima: maxima, & minima simul, erunt reliquis majores.

COncipiantur tertia A, & quarta C, ut partes primæ A B, & secundæ C D. Cum igitur sit ut A B ad C D, ita ablata A, ad ablatam C; erit *per* 19. reliqua B, ad reliquam

liquam D, ut tota A B, ad totam C D. sed AB, ponitur major C D: ergo *per* 14. B erit major quam D. Additis ergo A, C; erunt A, B, C, majores quàm A, C, D.

Propositiones ab alijs additæ.

PROPOS. 26. THEOR. 26.

Ratio A ad B, sit major ratione C ad D: Dico convertendo *B ad A, minorem esse D ad C.*

NAm ut C ad D, ita sit E ad B: eritque etiam ratio A ad B, major ratione E ad B, ideoque *per* 10. A major quàm E; & *per* 8. ratio *B* ad A, minor quàm *B*, ad E, hoc est, quàm D ad C.

PROPOS. 27. THEOR. 27.

Ratio A ad B, sit major ratione C ad D: Dico permutando *A ad C, majorem esse B ad D.*

SIt iterum ut C ad D, ita E ad B: eritque *ut in præcedente* A, major quàm E. Quare major erit ratio A ad C, quàm E ad C. sed ut E ad C, ita est *permutando* B ad D. ergo major est A ad C, quàm *B* ad D.

PROPOS. 28. THEOR. 28.

Ratio A ad B, major sit ratione C ad D: Dico componendo *A B, ad B, majorem esse C D, ad D.*

UT *C* ad *D*, ita sit *E* ad *B*; eritque iterum *A*, major quàm E; & *A B*, major

quàm

quàm *E B*; & *per* 8. ratio *A B*, ad *B*, major ratione *E B*, ad *B*, hoc est, ratione *C D*, ad *D*; quia *componendo* ut *E B* ad *B*, ita est *CD*, ad *D*.

PROPOS. 29. THEOR. 29.

Ratio A B ad B, sit major ratione C D ad D: Dico dividendo *A ad E, majorem esse C ad D.*

UT *C D* ad *D*, ita sit *E B* ad *B*: eritque *A B*, major quàm *EB*; & dempta communi *B* erit *A*, major quàm E. & *per* 8. ratio A ad B major ratione *E* ad *B*, hoc est *C* ad *D*; quia *dividendo* ut *C* ad *D*, ita est *E* ad *B*.

PROPOS. 30. THEOR. 30.

Ratio A B ad B, sit major ratione C D, ad D: Dico per conversionem rationis, *A B ad A, minorem esse C D, ad C.*

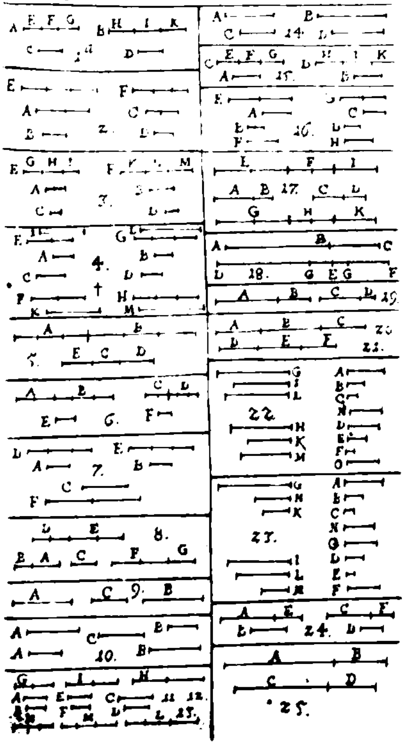
NAm *dividendo per* 29. erit quoque *A* ad *B* major, quàm *C* ad *D*; & *convertendo per* 26. *B* ad *A*, minor quàm *D*, ad *C*; & *componendo per* 28. *A B*, ad *A*, minor *C D*, ad *C*.

PROPOS. 31. THEOR. 31.

Ratio A ad B, sit major D ad E; & B ad C, major E ad F: Dico ex æqualitate ordinata, *A ad C, majorem esse, D, ad F.*

UT E ad F, ita sit G ad *C*; & ut *D* ad *E*, ita *H*, ad *G*. Quoniam igitur *B*, ad *C*. major est quàm *E*, ad *F*, seu G, ad *C*; erit *B*, major *G*; & ratio *A*, ad *G*, major ratione *A*, ad

A pagina 90.a ad 104.am 6



ad *B*: eſt autem *A*, ad *B* major ratione *D*, ad *E*; hoc eſt *H*, ad *G*. ergo *A*, ad *G*, major eſt ratione *H*, ad *G*; & *A*, major quàm H. Quare ratio *A*, ad *C*, major eſt ratione H, ad C; ut autem H, ad C, ita eſt *ex æqualitate ordinata* D ad F. ergo etiam A, ad C, major eſt ratione D, ad *F*.

Idem verum eſt in pluribus terminis; poſſunt enim reduci ad 3. ſicut factum eſt in 22.

PROPOS. 32. THEOR. 32.

Major ſit ratio A ad B, quàm E ad F; & B ad C; major quàm D ad E: Dico ex æqualitate perturbata, *A ad C, majorem eſſe ratione D ad F.*

UT *D*, ad *E*, ita ſit *G*. ad *C*; & *H*, ad *G*; ut *E*, ad *F*: eritque ratio *B*, ad *C*, major ratione *D*, ad *E*: hoc eſt, *G*, ad *C*; ideoque *B*, major quàm *G*; & ratio *A*, ad *G*, major quã *A*, ad *B*. *per* 8. Sed hæc major eſt quàm *E*, ad *F*, ſeu *H*, ad *G*: ergo *A*, ad *G*: multo eſt major ratione *H*, ad *G*. & *A*, major quàm *H*: & ideo ratio *A*, ad *C*, major ratione *H*, ad *C*. Sed ut *H*, ad *C*; ita eſt *ex æqualitate D*, ad *F*: ergo *A*, ad *C*, major eſt ratione *D*, ad *F*.

PROPOS. 33. THEOR. 33.

Ratio totius AB ad totam CD, major ſit ratione ablatæ A, ad ablatam C: Dico rationem reliquæ B, ad reliquam D; majorem eſſe totius ad totam.

Nam

NAm *permutando per* 27. erit major ratio *AB*, ad *A*, quàm *CD*, ad *C*; & *per conversionẽ rationis, hoc est per* 30. ratio *AB*, ad *B*, minor ratione *CD*, ad *D*; iterumq; *permutando A B*, ad *C D*, minor ratione *B*, ad *D*.

PROROS. 34. THEOR. 34.

Si sint quotcunq; magnitudines A, B, C, & aliæ D, E, F, ipsis numero æquales, sitq; major ratio A, ad D, quàm B, ad E; item B, ad E, major quàm C, ad F: Dico rationem A B C ad omnes D E F, majorem esse ratione B C, ad E F; minorem quàm A, ad D; & majorem quàm C, ad F.

CUm enim major sit *A*, ad *D*, quàm *B*, ad *E*; erit *per* 27. *permutando* major *A*, ad *B*, quàm *D*, ad *E*; & *componendo per* 28. *AB*, ad *B*, major quã *DE*, ad *E*, & *iterũ permutãdo*, major *AB*, ad *DE*, quàm ablatæ *B*, ad ablatam *E*. Quare *per* 33. reliquæ *A*, ad reliquam *D*, major erit quàm *A B*, ad *D E*. Eademque ratione, erit *B*, ad *E*, major quàm totius *BC*, ad totam *EF*. multo igitur major erit *A*, ad *D*, quàm *BC* totius, ad totam *EF*; & *permutando A*, ad *B C*, major quàm *D*, ad *E F*; & *componendo A B C*, ad *B C*, major quâm *D E F*, ad *EF*. & rursus *permutando* omniũ *A B C*, ad omnes *DEF*, major quàm *B C*, ad *E F*, quod est primum.

Cumque *ABC*, ad *DEF*, sit major quâm *B C*, ad *EF*; erit *per* 33. reliqua *A*, ad reliquam

D, major quàm totius *A B C*, ad totum *D E F*, quod eſt ſecundum.

Rurſus ex eo quod ratio *B*, ad *E*, major eſt quàm *C*, ad *F*, ſequitur *permutando B*, ad *C*, eſſe majorem *E*, ad *F*; & *componendo* totius *B C*, ad *C*, majorem totius *E F*, ad *F*. & rurſus *permutando B C*, ad *E F*, majorem *C*, ad *F*. eſt autem ratio *ABC*, ad *DEF*, major quàm *B C*, ad *EF*, ut oſtendimus; multo ergo major erit *A B C*, ad *D E F*, quèm *C* ad *F* quod eſt tertium.

Jam vero ſit quoque *C*, ad *F*, major quàm *G*, ad *H*. Eritque *per demonſtrata* major ratio *B*, ad *E*, quâm *B C G*, ad *E FH*; multo igitur major *A*, ad *D*, quàm *BCG*, ad *E F H*; & *permutando A*, ad *B C G*, major quàm *D*, ad *E F H*, & *componendo* major *A B C G*, ad *B C G*, quàm *D E F H*, ad *E F H*; & *permutando A B C G*, ad *D E F H*, major quàm *BCG*, ad *E F H*, quod eſt primum.

Cumque ſit major ratio totius *ABCG* ad totam *DEFH*, quam ablatæ *B C G*, ad ablatam *E F H*; erit & reliquæ *A*, ad reliquam *D*, major totius *A B C G*, ad totam *DEFH*, quod eſt ſecundum.

Quoniam vero ut in tribus demonſtratũ eſt, major eſt *B C G*, ad *E F H*, quàm *G*, ad *H*, & major *A B C G*, ad *D E F H*, quàm *BCG*, ad *E F H*; multo major erit *A B C G*, ad *D E F H*, quàm ultimæ *G*, ad ultimam H, & ita de pluribus.

EVCLIDIS ELEMENTUM SEXTUM.

DEFINITIONES.

1. SImiles figuræ rectilineæ ſunt, quæ angulos angulis habent æquales, & circa ipſos, latera lateribus proportionalia.

2. Reciprocæ ſunt, cum in utraque antecedentes, & conſequentes rationum termini fuerint.

3. Linea v. g. A B, ſecta erit media & extrema ratione; cum tota A B cum partibus A C, C B, fuerint continuè proportionales.

A C B

4. Altitudo figuræ, eſt linea perpendicularis, à vertice in baſim ducta.

5. Ratio duarum magnitudinum, dicitur compoſita ex tot rationibus, quot inter eaſdem continuantur.

A B C D hoc eſt, ſi inter A, C, intercedat B; proportio A, ad C, dicitur compoſita, ex ratione A, ad B; & B ad C; sive hujusmodi rationes interjectæ sint eædem, sive non. Item ratio A, ad D, componi dicitur, ex rationibus, A, ad B; B, ad C; & C, ad D. propterea quod dictæ rationes inter terminos A, D, continuentur, per interjectos terminos B, C.

Defin. 10. Libri 5.

A B C D Quando omnes proportiones interjectæ sunt eædem; tunc ratio A, ad C, dicitur per compendium esse duplicata proportionis A, ad B: eo quod eadem ratio, sit bis continuata per communem terminum B; & A, ad D, dicitur triplicata ejusdem, quia ter continuatur per terminos B, C. &c.

Scholium.

IN duabus istis definitionibus explicandis multus quidem fuit Clavius, non tamen superfluus. Quinta enim quæ definit compositionem rationum, suæ debuit restitui integritati, & quorundam expositiones falsæ fuêre detegendæ, & reijciendæ. Nam quod in vulgari definitione habetur, denominatorem rationis compositæ, fieri ex multiplicatione denominatorum rationũ componentium, non est Definitio, sed Theorema, neque eo in sensu usurpatur ab Euclide, elide, alijſque Geometris, ut videre eſt ad propoſitionem 23. in qua oſtenditur, rationem parallelogrammorum, componi ex rationibus laterum, quæ ſunt circa angulos ęquales, continuando dictas rationes componentes in tribus terminis, & demonſtrãdo rationem primi ad tertium, quam Euclides *per definitionem* 5. vult eſſe compoſitam ex intermedijs, eandem eſſe cum ratione, quam habet parallelogrammum, ad parallelogrammum. Unde manifeſtè colligitur, definitionem compoſitionis vulgarem, non eſſe ex ſentẽtia Euclidis poſitam, ſed ab alio aliquo immutatam. Ex ſenſu enim compoſitionis vero, non poteſt aliud inferri niſi quod rationes componentes, poſitæ inter duos terminos habentes dictã rationem compoſitam, poſſint continuari, ſaltem eo ordine quo pronũciantur. Quod autem interponi poſſint ad libitum, videtur potius petendum à Theoremate peculiari, quàm à definitione generali. Atque hoc eſt quod hic peculiari lemmate demonſtrandum ſuſcepi.

Lemma.

SI ratio v. g. A ad B dicatur compoſita, v. g. ex rationibus a. e. i: Dico eandem componi, ex eiſdem quocunq; ordine poſitis,

tis. Hoc eſt, inter duos terminos A B, licitum eſſe continuare dictas rationes toties, quoties poſſunt inter ſe mutare locum. juxta Regulam ad initium Spheræ poſitam, ubi Clavius diſputat de numero, & ordine Elementorum, eſtque ſequens.

Regula mutationum.

SUmantur tot numeri in ſerie naturali, quot ſunt res propoſitæ: multiplicati enim invicem, producunt ſummam mutationũ: quæ pro duabus rebus eſt 2. pro tribus 6. pro quatuor 24. pro quinq, 120. &c. ut videre eſt in calculo hic adjecto; & manifeſtius in quatuor exemplis, ad ſingulas mutationes extenſis, quorum conſideratio, & comparatio plurimum facit ad abbreviandam demonſtrationem.

	Mutat.	Ser. nat.	Res
		1	A
pro duabus.	2	2	B
pro tribus.	6	3	C
pro quatuor.	24	4	D
pro quinque.	120	5	E
	&c.	&c.	&c.

Pri-

Primum exemplum duarum rerum.

a		e	
1	a e	2	e a

Secundum exemplum trium rerum.

a		e		i	
1	a e i	3	e a i	5	i a e
2	a i e	4	e i a	6	i e a

Tertium exemplum quatuor rerum.

a		e		i		o	
1	a e i o	7	e a i o	13	i a e o	19	o a e i
2	a e o i	8	e a o i	14	i a o e	20	o a i e
3	a i e o	9	e i a o	15	i e a o	21	o e a i
4	a i o e	10	e i o a	16	i e o a	22	o e i a
5	a o e i	11	e o a i	17	i o a e	23	o i a e
6	a o i e	12	e o i a	18	i o e a	24	o i e a

Quar-

Quartum exemplum quinque rerum.

	a		e		i		o		u
1	a e i o u	25	e a i o u	49	i a e o u	73	o a e i u	97	u a e i o
2	a e i u o	26	e a i u o	50	i a e u o	74	o a e u i	98	u a e o i
3	a e o i u	27	e a o i u	51	i a o e u	75	o a i e u	99	u a i e o
4	a e o u i	28	e a o u i	52	i a o u e	76	o a i u e	100	u a i o e
5	a e u i o	29	e a u i o	53	i a u e o	77	o a u e i	101	u a o e i
6	a e u o i	30	e a u o i	54	i a u o e	78	o a u i e	102	u a o i e
7	a i e o u	31	e i a o u	55	i e a o u	79	o e a i u	103	u e a i o
8	a i e u o	32	e i a u o	56	i e a u o	80	o e a u i	104	u e a o i
9	a i o e u	33	e i o a u	57	i e o a u	81	o e i a u	105	u e i a o
10	a i o u e	34	e i o u a	58	i e o u a	82	o e i u a	106	u e i o a
11	a i u o e	35	e i u a o	59	i e u a o	83	o e u a i	107	u e o a i
12	a i u e o	36	e i u o a	60	i e u o a	84	o e u i a	108	u e o i a

13	a o e i u	37	e o a i u	61	i o a e u	85	o i a e u	109	u i a e o
14	a o e u i	38	e o a u i	62	i o a u e	86	o i a u e	110	u i a o e
15	a o i e u	39	e o i a u	63	i o e a u	87	o i e a u	111	u i e a o
16	a o i u e	40	e o i u a	64	i o e u a	88	o i e u a	112	u i e o a
17	a o u e i	41	e o u a i	65	i o u a e	89	o i u a e	113	u i o a e
18	a o u i e	42	e o u i a	66	i o u e a	90	o i u e a	114	u i o e a
19	a u e i o	43	e u a i o	67	i u a e o	91	o u a e i	115	u o a e i
20	a u e o i	44	e u a o i	68	i u a o e	92	o u a i e	116	u o a i e
21	a u i e o	45	e u i a o	69	i u e a o	93	o u e a i	117	u o e a i
22	a u i o e	46	e u i o a	70	i u e o a	94	o u e i a	118	u o e i a
23	a u o e i	47	e u o a i	71	i u o a e	95	o u i a e	119	u o i a e
24	a u o i e	48	e u o i a	72	i u o e a	96	o u i e a	120	u o i e a

In

In primo exemplo, videre est duas series in transversum, notatas literis a, e & sub singulis mutationes singulas. & duas in universum, quia singulę literæ non possunt occupare primum locum sæpius, quàm semel.

In secundo exemplo, sunt tres series, in transversum, denominatæ à tribus literis a, e, i, & sub singulis sunt duæ mutationes. quia singulæ literæ possunt occupare primum locum bis, hoc est toties, quot in primo exemplo erant mutationes in universum. unde in secundo exemplo sunt mutationes *6*.

In 3. exemplo sunt quatuor series transversæ, denominatæ à quatuor literis a, e, i, o, & infra singulas sunt *6*. mutationes, & in universum 24.

In 4. exemplo sunt quinque transversæ series, denominatæ à quinque literis a, e, i, o, u, & sub singulis, mutationes 24. quę multiplicatæ per quinque faciunt 120. &c.

Altera consideratio est, quod in secundo exemplo, primæ duæ literæ seriorum, a, e, In tertio, primæ tres serierum a, e, i, & in quarto, primæ quatuor serierum a, e, i, o. sint eædem, licet non eodem ordine positæ. & idem verum est de posterioribus literis ultimarum serierum, quæ in 2. exemplo sunt iterum duæ a, e, in 3. tres a, e, i, in 4. quatuor a, e, i, o.

Postre-

Postremo. in omnibus seriebus præter literas quæ primum locum occupant, reliquæ sunt eædem, cum ijs quæ ponuntur in capite.

Ex his generalibus cōsiderationibus, formatur lemmatis demonstratio, eademq; quo ad præcipuas partes communis, hoc modo.

Pro omnibus exemplis termini rationis compositæ erunt AB, & componentes erūt vel duæ a, e, vel tres a, e, i, vel quatuor, a, e, i, o, vel quinq; a, e, i, o, u, &c. ita ut per *def.* 5. inter A, B, possint continuari, vel duæ rationes a, e, per unum terminū intermedium C, vel tres a, e, i, per duos C, D, vel quatuor a, e, i, o, per tres C, D, E, vel quinque a, e, i, o, u, per quatuor C, D, E, F.

a e
A C B

a e i
A C D B

a e i o
A C D E B

a e i o u
A C D E F B

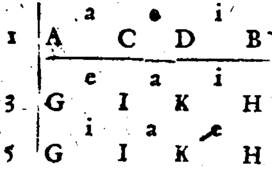
Demonstratio primi exempli.

		a		e	
1	A		C		B
		e		à	
2	G		I		H

Deinde pro primo exemplo præter terminos A C B, quibus continuantur duæ rationes a, e; continuentur in alijs tribus terminis

nis G, I, H, eædem proportiones ordine mutato, ita ut ratio G ad I, sit e, & ratio I ad H, sit a. Dico rationes A ad B, & G ad H. esse easdem. Cum enim ut A ad C; ita sit I ad H; & sicut C ad B, ita G ad I. ergo per æqualitatem ordinatam, erit quoque ut A ad B, ita G ad H; sed G ad H, componitur *per defin.* 5. ex rationibus e, a. ergo etiam A ad B, componitur ex eisdem. hoc est ratio A ad B, componitur, tam ex rationibus a, e, quàm ex rationibus e, a.

Demonstratio 2. exempli.



IN secundo exemplo præter terminos A C, D, B, quibus cõtinuantur rationes a, e, i. primi casus secundi exempli superius positi, continuentur in alijs quatuor terminis G, I, K, H, rationes e, a, i, ut habentur in tertio casu, & rationes i, a, e, ut habentur in quinto.

Quoniam igitur in primo & tertio casu; inter A D, & G K, continuantur duæ rationes, a, e, utcunque; ergo per demonstrationem primi exempli, ut A ad D, ita erit G ad K, ut autem D ad B, ita est K ad H; ergo per æqualitatem ut A ad B, ita erit G ad H.

In

In quinto vero casu quoniam rationes a, e, sunt continuatæ inter posteriores tres terminos I, K, H, ideo ut A ad D, ita erit I ad H, & quia præterea ut D ad B, ita est G ad I, erit rursus per æqualitatem ut A ad B, ita G ad H. Cum igitur G ad H, in tertio casu componatur ex rationibus e, a, i; & in quinto ex rationibus i, a, e, manifestum est esse eandem rationem A ad B, non solum componi ex a, e, i; sed etiam ex e, a, i; & i, a, e.

Reliqui casus 2. 4. & 6. reducuntur ad tres priores 1. 3. & 5. mediante tertia consideratione, ex qua constat in singulis seriebus, primas literas esse easdem, & reliquas quotcunque sint non differre nisi positione. tales sunt in serie a, literæ e, i in serie e, literæ a, i, & in serie i, literæ a, e. Quæ sicut in præcedenti demonstratione, ex eo quod in 1. & 3. casu componentes a e, e a, sunt similes, & reliqua utrobique est eadem litera i, ostensum est, ut A ad B, ita esse G ad H. ita etiam hic, quoniam in 1. & 2. casu, e i; i e, sunt similes, & reliqua a, eadem, valet eadem consequentia, hoc est, ut A ad B, ita esse G ad H; si inter A, B, per C, D, continuentur rationes a, e, i, primi casus; & inter G, H, per I & K, rationes a, e, i, secundi casus.

Similiter si per G, I, K, H, continuentur ratio-

	a	e	i	
1	A	B	C	D
	e	a	i	
3	G	I	K	H
	e	i	a	
4	G	I	K	H

rationes e, a, i, e, i, a, tertij & quarti casus; ut G ad H, in 3. casu, ita erit G ad H, in 4. Vt antem G ad H, in 3. casu, ita ostendimus esse A ad B, in primo casu. Ergo etiam ut A ad B, ita erit G ad H, in 4. casu.

Denique in 5. & 6. casu omnia sunt similia, & consequenter manet etiam demonstratum totum secundum exemplum. hoc est rationem A ad B, componi ex rationibus a, e, i, quocunque ordine positis.

Demonstratio reliquorum exemplorum.

In reliquis exemplis non est alia differentia, quàm quod in ipsis rationes componentes sint plures tribus. Methodus autem demonstrandi est eadem. Rationes enim componentes quæ habentur in capite singularum serierum, reducuntur ad rationes primo loco propositas, & ad has reliquas, quæ sub ijsdem capitalibus, subijciuntur, non aliter quàm factum est in præcedenti exemplo,

Corollarium.

Huic licentiæ permutandi rationes cōponentes, puto corollariorum titulo annecti

annecti posse non inutiliter nonnulla eodem spectantia.

Primum est. Compositionis campum patere latissime, ut appareant rari, qui ipsum pervagentur. Omnis enim ratio proposita, quamvis non componatur ex quibuslibet, componitur tamen ex quotlibet; imo unam tantum si demas, componitur ex quotlibet & quibuslibet. Sint duæ magnitudines A, B, habentes quamcunque rationem, inter quas statuantur quotcunque, & aliæ quæcunque magnitudines ejusdem generis C, D, E. eritque ex vi defin. 5. ratio A ad B composita ex rationibus A ad C, C ad D, D ad E, & E ad B. Neque dubium est, si priores tres fuissent v.g. rationes datæ a, e, i, easdem continuari posse à magnitudine A, per aliquos terminos C, D, E, usque ad E, atque ita solum manere postremam rationem o, inter E & B, quæ sola non potest assignari ad arbitrium, sed determinatur eo ipso quod reliquæ sint continuatæ per terminos C, D, E.

a		e		i		o	
A		C		D		E	B

2. *Coroll.* Certum est easdem rationes componere easdem, & easdem componi ex eisdem. hoc enim sequitur ex definitione immediate. Quare si ratio A ad B, & F ad G, est eadem, & prior A ad B. sit

F compo-

a	e	i	o	
A	C	D	E	B
u	a			
ALC				
i	e	a	o	
F	H	I	K	G

composita ex a, e, i, o, erit etiam F ad G, ex ijsdem composita. & vice versa, nulla habita ratione ordinis, quod attinet rationes componentes.

3. *Coroll.* Et hinc deducitur hæc alia consequentia. Si rationes a, e, i, o, per terminos C, D, E, sint continuatæ inter A, B; & inter F, G, per terminos H, I, K, fuerint cõtinuatæ eædem; & hoc modo permutatæ i, e, a, o: ita & constet sicut A ad C, ita esse I ad K, ut C ad D, ita H ad I, ut D ad E, ita F ad H; sequitur etiam reliquas, E ad B, & K ad G, esse easdem.

4. *Coroll.* Si a, e, i, o, componant rationes A ad B, & F ad G, ut in præcedenti exemplo, abijciaturque utrinque ratio a, reliquæ non component quidem rationem A ad B, vel F ad G; component tamen aliquam aliam eandem.

5. *Coroll.* In eodem exemplo si ratio v. g. A ad C, hoc est ratio a, dicatur composita ex alijs v.g. ex rationibus u, a, ita ut ratio A ad L, sit ratio u, & L ad C, sit a. sequitur non solum rationem A ad B, componi ex rationibus u, a, e, i, o, sed etiam rationem F ad G. Item si dematur utrinque ratio a,

etiam

etiam compoſitas ex reliquis u,e,i, o, eſſe eaſdem. quamvis ita compoſita non ſit eadem cum ratione A ad B, vel F ad G. Hujuſmodi argumentationem licet videre apud Pappum *lib. 7. propoſit.* 142.

6, Parallelogrammum AD, cum non occupat totam lineam AB, ſicut occupat parallelogrammum A F; dicitur deficere, vel deficiens. Parallelogrammũ vero AF, quod occupat A B, majorem A C; dicitur excedere, vel excedens, parallelogrammo C F.

E D F

A C B

PROPOS. 1. THEOR. 1.

Triangula A B C, DEF; item parallelogramma C G, E H, inter eaſdem parallelas, ejuſdemq; altitudinis; ſunt inter ſe, ut baſis B C, ad baſim E F.

SInt B I, I K, KL, æquales B C, & F M, M N, æquales E F; hoc eſt B L, FN ſint baſium multiplices; nectanturque A I, A K, A L, D M, D N; Eruntque triangula A B I, A I K, A K L *per* 38. *pr.* æqualia, ipſi A B C, & ſimul tam multiplicia ejuſdem, quàm eſt B L multiplex baſis B C, ſimiliter, triangula D F M, D M N, tam erunt multiplicia trianguli D E F, quàm eſt baſis F N, baſis E F.

Quando autem *B* L, æqualis est F N; semper triangulum A *B* L, est æquale triangulo D F N; & quando *B* L, major est quàm F N, etiam triangulum est majus triangulo; & quando minus, minus. Quare *per 6. def.* ut *B* C, ad E F, ita est triangulum A *B* C, ad triangulum D E F.

Parallelogramma autem C G, E H sunt dupla triangulorum A *B* C, D E F *per* 41. *pr.* ergo *per* 15. *quinti*, ut triangulum ad triangulum, hoc est, ut basis *B* C, ad basim E F, ita est parallelogrammum ad parallelogrammum.

PROPOS. 2. THEOR. 2.

In triangulo A B C, D E, sit parallela B C: Dico latera A B, A C, secta esse proportionaliter in D, & E: & quando secta sunt proportionaliter, rectam D E, esse parallelam B C.

Ductæ enim *B* E, CD, faciunt *per* 37. *pr.* æqualia triangula D E *B*, E D C; & ideo *per* 7. *quinti* habent eandem rationem ad triangulum A D E. Sed ratio D E *B*, ad A D E, est ut basis *B* D, ad basim DA: quia triangula E *B* D, E D A, sunt ejusdem altitudinis: & ratio E D C, ad A D E, est ut basis C E, ad A E, *ut demonstratum est in præcedenti.* Ergo *per* 11. *quinti*, ut D *B*, ad D A, ita est C E ad E A.

Vice versa, si ut A D, ad D *B*, ita sit A E, ad ad E C; habebit triangulum A D E, ad triangula D E *B*, E D C, rationem eandem. & idcirco eadē triangula D E *B*, EDC, erunt æqualia. & D E, *B C* parallelæ *per 39. pr.*

PROPOS. 3. THEOR. 3.

Recta A D, secet angulum B A C, bifariam: Dico ut A B, ad A C, ita esse segmentum B D, ad D C. Et vice versa, si ut A B ad A C, ita sit B D, ad D C: Dico A D secare angulum B A C, bifariam.

SIt *B E* parallela *A D*, & occurrat *C A* in E. Ergo *per 29. pr.* anguli *A E B*, *A B E* sunt æquales æqualibus *D A C*, *D A B*: & ideo *per 6. pr.* *A B*, *A E*, sunt æquales. Ut autem *A E*, ad *A C*, ita est *per 2.* *B D*, ad *D C*. ergo etiam ut *A B*, ad *A C*, ita est *B D* ad *D C*.

Deinde supposita eadem constructione, si sit ut *B D*, ad *D C*, ita *A B* ad *A C*; cum *per 2.* etiam *A E*, ad *A C*, sit ut *B D*, ad *DC*; erit quoque ut *A B*, ad *A C*, ita *A E* ad eandem *AC*; & idcirco *AB*, *AE* sunt æquales, & anguli ad basim *B E*, æquales. Est autem propter parallelas *A D*, *E B*, *D A C*, æqualis ipsi *A E B*; & *D A B*, ipsi *A B E*. ergo etiam isti sunt æquales.

PROPOS. 4. THEOR. 4.

Triangula A B C, D C E, sint æquiangula: Dico circa æquales angulos A, D, latera A B, A C, esse proportionalia lateribus D C, *D E &c. & Homologa, subtendere angulos aequales.*

Latera *B C*, *C E* adjacentia æqualibus angulis, continuentur in eadem recta *B C E*; ita ut *A B C*, sit æqualis *D C E*, & *A C B*, ipsi *D E C*, sic enim erunt *A B*, *D C*, & *A C*, *D E* parallelæ; & *E D*, *B A* protractæ constituent parallelogrammum *C F*; eritq; *A C* æqualis *F D*, & *A F*, ipsi *C D*, *per 34. pr.* & *per 2. hujus* erit, vt *A B*, ad *A F*, hoc est ad *C D*: ita *B C*, ad *C E*. & *permutando* ut *A B*, ad *B C*, ita *C D*, ad *C E*. item ut *B C*, ad *C E*, ita est *F D*, seu *C A*, ad *E D*; & iterum *permutando* ut *B C*, ad *C A*, ita *C E* ad *E D*. Denique ex eo quod ut *A B* ad *B C*, ita est *C D*, ad *C E*; & ut *B C*, ad *C A*, ita *C E* ad *E D*; sequitur *ex aequalitate ordinata*, ut *A B*, ad *A C*, ita esse *C D*, ad *D E*. Atque ex hac ipsa demonstratione est manifestum, tam antecedentes terminos, quàm consequentes, hoc est homologos, opponi angulis æqualibus.

Coroll. Constat etiam parallelam *C D*. vel *A C*, abscindere ex toto triangulo *F B E*, triangulum simile.

PROPOS. 5. THEOR. 5.

Triangula A B C, D E F, habeant latera lateribus proportionalia: Dico latera homologa opponi angulis aequalibus.

Angulis *B*, *C*, fiant æquales *G E F*, *G F E*: erit-

eritque *per* 32.*pr.* reliquus *G*, æqualis reliquo *A*, & *per* 4. *hujus* erunt circa æquales angulos latera lateribus proportionalia, hoc eſt, ut *A B*, ad *B C*, ita erit *G E*, ad *E F*. Ut autem *A B*, ad *B C*; ita ponitur eſſe *DE*, ad EF. ergo etiam ut GE ad EF; ita erit DE ad eandem *E F*. & ideo *per* 9. *quinti G E*, *D E*, erunt æquales. neque aliter demonſtrabitur *G F*, æqualis *D F*, atque ita erunt duo latera *G E*, *G F*, æqualia duobus lateribus *D E*, *D* F. eſtque baſis E F communis: ergo *per* 8. *pr.* non ſolum angulus D, erit æqualis angulo G, ſed etiam reliqui reliquis: & quidem illi erunt æquales, quibus homologa latera opponuntur: & quia G E F, eſt æquiangulum *A B C*, erunt etiam *A B C*, *D E F*, dicto modo æquiangula.

PROPOS. 6. THEOR. 6.

Circa æquales angulos B, & D E F, ſint latera proportionalia: Dico triangula eſſe æquiangula, & angulis æqualibus ſubtendi latera homologa.

Fiat iterum triangulum G E F, æquiangulum triangulo *A BC*, ut in præcedenti; eritqua iterum G E, æqualis *D E*, & quia circa æquales angulos *D E F*, *G E F*, latera *D E*, *E F*, ſunt æqualia lateribus *G E*, *E F*. erunt triangula *D E F*. *G E F*, penitus æqualia. Sed *G E F*, eſt ipſi *A B C*, æquiangulum; ergo & *D E F*. & ideo *per* 4. habebunt etiam reliqua latera circa reliquos angulos proportionalia &c.

PROPOS. 7. THEOR 7.

In triangulis A B C, D E F, sint æquales anguli A, D; & latera A C, C B, proportionalia lateribus D F, F E, & reliqui anguli B, E, sint minores, vel non minores recto: Dico triangula esse æquiangula.

Sint primo anguli F, B minores recto, & si fieri potest angulus A C B, sit major angulo F. Facto igitur angulo A C G, æquali ipsi F; erunt duo triangula A C G, D F E, æquiangula, & *per* 4. erit ut D F, ad F E, ita A C, ad C G; sed ut D F, ad F E, ita ponitur A C, ad C B: ergo ut A C, ad C G, ita est eadem A C, ad C B. & propterea C G, C B, erunt *per* 9. *quinti* æquales, & anguli C B G, C G B, æquales *per* 5. *pr.* Est autem B acutus, sicut est E; ergo etiam C G B. reliquus vero C G A, quem ostendimus æqualem acuto E, erit obtusus. quod est absurdum.

Si autem anguli B, E, ponerentur esse non minores recto; essent in triangulo isoscelio C B G, ad basim duo anguli obtusi, quod est similiter absurdum. Quare necesse est angulum A C B, æqualem esse angulo F: & *per præcedentem*, triangula esse æquiangula, & similia.

PRO-

PROPOS. 8. THEOR. 8.

In triangulo A B C, sit angulus A rectus, & A D, ad basim perpendicularis: Dico triangula A D B, A D C, esse similia toti.

EST enim rectus A D B, æqualis recto B A C; & B est communis: ergo reliquus æqualis est reliquo. similiter A D C, æqualis est B A C; & C communis. ergo.

Coroll. Hinc sequitur *per quartam hujus*, *BD*, *DA*, *DC*, esse continue proportionales, & A B, esse mediam proportionalem inter C B, B D; & AC, mediam inter B C, CD.

PROPOS. 9. PROBL. 1.

A data recta A B, partem imperatam auferre. v.g. duas tertias.

SUmantur in alia A C, tres partes æquales A D, D E, E F; & duæ partes tertiæ sint A D E. Ductâ igitur F B, & E G, ipsi F B parallela; erit etiam A G duæ rertiæ totius A B, *per* 2. quia ut A F, ad A E, ita est A B, ad A G.

PROPOS. 10. PROBL. 2.

Secta A B, utcunque in C, D: aliam E F, similiter secare.

REctæ E H, H I, I G, sumantur æquales partibus A C, CD, D B; & per H, I, ducantur parallelæ ipsi G F: eritque *per* 2. ut E H, ad H I: ita EM ad M L: & ductâ aliâ H O N, parallela ipsi E F, ut H I ad I G, ita erit H O, ad O N, hoc eſt M L, ad L F, quia *per* 34. *pr.* H O, O N ſunt æquales M L, L F.

PROPOS. 11. PROBL. 3.

Datam rationem A B, ad A C; continuare.

IPſi A C, ſumatur æqualis B D, ipſique B C, agatur parallela D E: eritque C E, tertia proportionalis, quia ut A B, ad BD, hoc eſt, ad A C, ita eſt *per* 2. A C, ad C E.

PROPOS. 12. PROBL. 4.

Tribus datis A B, B C, A D, quartam proportionalem adjungere.

IPſi B D; agatur parallela C E; eritque ut A B, ad B C, ita AD, ad DE.

PROPOS. 13. PROBL. 5.

Inter datas A B, B C, mediam proportionalem invenire.

CIrca A C, compoſitam ex A B, B C, deſcribatur centro E, ſemicirculus: Perpendicularis. enim B D; erit *per corollarium octave,* media proportionalis inter AB, B C.

PRO-

PROPOS. 14. THEOR. 9.

Parallelogramma B D, B F, *sint æqualia, & anguli ad* B, *sint æquales: Dico latera esse reciprocè proportionalia, ut* A B *ad* B G, *ita esse* B E *ad* B C. *& si latera circa æquales angulos dicto modo sint proportionalia: parallelogramma æqualia esse.*

COnjungantur parallelogramma ad angulum B, ita ut A B, B G, sint una linea continuata, hac enim ratione, erunt etiam B E, B C, una linea continuata *per* 14. *pr.* Ex concursu autem D C, F G, in H, fit tertium parallelogrammum B H, ejusdem altitudinis cum parallelogrammis BD, BF: Et idcirco *per* 1. ut B D, ad B H, ita erit A B, ad B G: utque B F, ad B H. ita B E ad B C. Sed B D, & B F, ad B H, est una eademque proportio *per* 7. *quinti*, ergo etiam ut AB; ad *B* G; ita erit *B* E, ad *B*C.

Vice versa, si fuerit ut A *B*, ad *B* G, ita *B* E ad *B* C; habebunt B D, B F eandem proportionem ad B H; ideoque B F, BD, erunt æqualia *per* 9. *quinti*.

PROPOS. 15. THEOR. 10.

Eadem est ratio de triangulis A B C, B G E, *si sint æqualia, habeantque æquales angulos ad* B.

POssunt enim copulari ad angulum B, ut parallelogramma, & referri ad tertium triangulum B G C, vt videre est tam in superiori figura, quàm in ista.

PROPOS. 16. THEOR. 11.

Si quatuor lineæ proportionales fuerint; æqualia erunt parallelogramma rectangula quæ fiunt ab intermedijs, & extremis. Et si hæc sint æqualia, quatuor lineæ erunt proportionales.

HÆc propositio nullo negotio reducitur ad decimamquartam. Si enim A B *B* G, *B* E, *B* C, sint proportionales; jam est demonstratum *B* D, *B* F, esse æqualia: & si *B* D, *B* F, sint æqualia, quatuor rectas A *B*, *B* G, *B* E, *B* C; esse proportionales.

PROPOS. 17. THEOR. 12.

Si fuerint tres proportionales; rectangulum sub extremis, erit æquale quadrato intermediæ. & si hoc illi fuerit æquale, latus quadrati erit medium proportionale, inter latera rectanguli.

HÆc non differt à præcedenti, si in præcedenti duæ intermediæ intelligantur es-

esse æquales: ita ut quatuor proportionales sint A *B*, *B* G, *B* E, *B* C; & *B* G, *B* E, sint æquales.

PROPOS. 18. PROBL. 6.

Super datam A B, rectilineo C D G F E, simile rectilineum describere.

DIstribuatur rectilineum datum in sua triangula, & super A B, fiat primo triangulum A B I, æquiangulum triangulo C D F: tum super A I, & *B* I, fiant alia A I H, *B* I K, æquiangula triangulis C F E, D F G &c. ita ut sicut F C D, F C E, constituunt totum angulum C, ita I A B, I A H, constituant totum A, & ita de reliquis: Dico etiam circa eosdem angulos, latera esse proportionalia. *Per* 4. enim ut E C, ad C F, ita est H A, ad A I; & ut C F, ad C D, ita IA, ad *A B*, ergo *ex æqualitate ordinata*, ut H A, ad A *B*, ita & E C, ad C D &c.

PROPOS. 19. THEOR. 13.

Similia triangula sunt in duplicata ratione laterum homologorum.

SIt *A B C*, simile triangulo D E F, & latera homologa sint *B C*, *E F*; sitque tertia proportionalis *BG*: ita ut *juxta defin.* 10.

quinti. proportio *B C*, ad *B G*, ſit duplicata proportionis *B C*, ad *E F*: Dico rationem trianguli *A B C*, ad *D E F*, eſſe ut recta *B C*, ad *B G*.

Quando triangula ſunt æqualia, hoc eſt, quando *B C*, *E F*, nec non tertia proportionalis *B G*, ſunt æquales, res eſt manifeſta.

Quando vero latera *B C*, *E F*, ſunt inæqualia, demonſtratur hoc modo. Jungatur A G. Quoniam igitur angulus *B*, eſt æqualis E; & propter ſimilitudinem triangulorum, ut *AB*, ad *BC*, ita eſt DE, ad EF; & *permutando* ut *A B*, ad *D E*, ita *B C* ad *E F*; hoc eſt E F, ad *B G*: erunt circa angulos æquales, *B E*, latera reciproce proportionalia. Quare *per* 15. triangula A B G, D E F erunt æqualia; & *per* 7. *quinti*, ut triangulum A B C, ad A B G, ita erit idem triangulum A B C, ad D E F. ut autem A B C, ad A B G, ita eſt *per* 1. BC, ad BG. ergo A B C, ad D E F erit ut B C ad B G.

Corollarium * Hinc ſequitur ſi tres lineæ, A, B, C fuerint proportionales; ut prima ad tertiam, ita eſſe triangulum A, ſuper primam, ad ſimile triangulum B, ſupra ſecundam.

PROPOS. 20. THEOR. 14.

Similia Polygona A B C D E, F G H I K, in ſimilia triangula reſolvuntur, & nume-

ro æ-

ro æqualia, & homologa totis, & polygona habent rationem duplicatam laterum homologorum.

NAm eo ipso quo Polygona ponuntur esse similia, necesse est & angulos esse æquales, & latera circa æquales angulos proportionalia. Quare ut D E ad E A, sic erit I K ad K F; ideoque *per 6.* triangula A D E, F I K similia, & anguli E D A, E A D, æquales angulis K I F, K F I. est autem totus A, æqualis toti F; ergo & reliquus D A B, æqualis reliquo I F G. Jam sic, ut A D, ad A E, ita est I F, ad F K; & ut A E, ad A B, ita F K, ad F G. ergo *ex æqualitate*, erit quoque ut A D, ad A B, ita I F ad F G. ideoque rursus *per 6.* triangula D A B, I F G, similia. Atque in hunc modum proceditur ad reliqua.

Demum quoniam omnium istorum triangulorum latera homologa sunt proportionalia, hoc est ut A E ad F K, ita A B ad F G; & B C ad G H, &c. ipsaque triangula similia habeant *per* 19. rationem duplicatam laterum homologorum, manifestum est, etiam ipsa triangula esse proportionalia, hoc est, ut A D E, ad F I K. ita A B D, ad F G I, &c. Quare *per* 12. *quinti.* ut unum triangulum v.g. A D E, ad F I K, ita erunt omnia simul ad omnia. & ideo triangulum v.g. A D E, erit homologum Polygono A C E, & tri-

& triangulum F I K, homologum polygono F H K.

Tertia deniq; propositionis pars sequitur ex dictis. Polygonum enim ad polygonum est, ut triangulum A B D, ad F G I: ratio autem trianguli ad triangulum, est duplicata laterum homologorum A B, F G *per* 19. ergo & polygonorum.

Coroll. Ut ergo prima trium proportionalium ad tertiam, ita est polygonum supra primam ad polygonum simile supra secundam.

PROPOS. 21. THEOR. 15.

Eidem rectilineo similia; sunt inter se similia.

NAm similia eidem, sunt eidem æquiangula. *per* 1. *def.* Ergo A, B æquiangula ipsi C, sunt æquiangula inter se; ideoque *per* 4. similia.

PROPOS. 22. THEOR. 16.

Ut A B ad C D, ita sit E F, ad G H; sintque I, K, rectilinea similia: & L, M, similia ut libet: Dico I, K; L, M, esse proportionalia. & vice versa.

PRoportio enim I, ad K, est duplicata proportionis A B, ad C D, vel E F, ad G H, *per* 19. *vel* 20. Est autem & ratio L, ad M, ad M, duplicata ejusdem rationis E F, ad G H. ergo ut I ad K ita est L ad M;

Vice versa si ut I ad K, ita est L ad M erit quoq; ut A B, ad C D, ita E F, ad G H: quia rationes I ad K, & L ad M, quæ sunt eædem, sunt duplicatæ rationis A B ad C D, & E F ad G H, quæ proinde debent esse quoque eædem.

PROPOS. 23. THEOR. 17.

Parallelogramma æquiangula v.g. C A, C F: *habent rationem compositam ex ratione lateris* C B, *ad* C G; *& ratione lateris* C D, *ad* C E.

PArallelogramma C A, CF, componantur ad angulum C *ut in* 16. Utque B C, ad C G, ita sit quædam I, ad K; & ut CD, ad C E, ita K ad L; hoc est rationes laterum sint continuatæ in tribus terminis I, K, L. Ergo *per def.* 5. ratio composita ex ratione laterum erit ratio I, ad L. Dico ut I, ad L, ita esse C A, ad C F. Nam ut C B, ad C G; hoc est ut I, ad K; ita est *per* 1. C A, ad C H; & ut C D, ad C E, hoc est ut K, ad L; ita C H ad C F: ergo *ex æqualitate*, ut I, ad L, ita est C A, ad C F.

PROPOS. 24. THEOR. 18.

Parallelogramma F G, H E, *existentia circa dia-*

ca diametrum D B; *sunt similia toti* A C.

SUnt enim æquiangula, quia habent communes angulos ad B, & D. *Vide Schol.* 34. *primi*. Deinde *per* 4. *hujus* ut B A ad A D, ita est B G, ad G I. item ut B A, ad B D, ita B G ad B I; ut autem *B* D, ad *B C*; ita est *B I*, ad *B F*, ergo *ex æquo*, ut *B A*, ad *B C*, ita est *B G*, ad *B F*. Eodemque modo demonstrantur reliqua latera circa reliquos angulos esse proportionalia.

PROPOS. 25. THEOR. 19.

Parallelogramma similia A C, E G; *existant ad communem angulum* B: *Dico eadem existere circa communem diametrum* B I D.

SI enim diameter se[c]aret E I, in alio puncto O; Esset etiam parallelogrammum L E, simile ipsi A C, *per præcedentem*, utque *B A*, a d A D, hoc est, ut B E, ad *EI*; ita esset B E, ad E O. & ideo *per* 9. *quinti* B I, E O, essent æquales.

PROPOS. 26. PROBL. 7.

Dato rectilineo A; construere aliud simile, & alteri B, *æquale.*

PEr *ultimam secundi* ipsis *A*, *B*, fiant æqualia quadrata, quorum latera sint *E*, *F*;

& ut

& ut E, ad F, sic fiat C D, ad G H: *per* 12. & super G H fiat *per* 18. figura similis A, dico ipsam æqualem esse figuræ B. Nam *per* 22. ut quadratum E, ad quadratum F, hoc est, ut A, ad B, ita est idem A, ad simile rectilineum ipsius G H. Ergo *per* 9. *quinti* G H, & B. sunt æqualia.

PROPOS. 27. THEOR. 20.

Super A C semissem totius A B, applicatum sit parallelogrammum A D, ita ut à toto A E, deficiat parallelogrammo C E, quod semper est æquale, & simile ipsi A D. Deinde ad quodvis aliud segmentum A K sit applicatum aliud parallelogrammum A G, ita deficiens, ut defectus sit parallelogrammum K I, simile ipsi C E, hoc est circa communem diametrum B G D: Dico A G minus esse parallelogrammo A D.

Quando punctum K, est inter C, B; tunc parallelogrammum L H, quod *per* 36. *pr.* est æquale LE, majus est quam G C: quia L E majus est quàm GE, & GE, G C, sunt complementa æqualia *per* 43. *pr.* Addito ergo L A, erit A D, majus A G.

Quando vero punctum K, est inter A, C; tunc D F, D I, sunt æqualia, quia sunt super æqualibus basibus, & D I, D K, æqualia,

lia, quia sunt complementa. ergo & D F, D K, sunt æqualia, & G H, minus quam D K; adjectoque communi K H; totum A G, minus toto A D.

PROPOS. 28. PROBL. 8.

Ad datam A B applicare parallelogrammum A I deficiens, & æquale rectilineo C; ita ut defectus P N, sit similis parallelogrammo D. debet autem C, non esse majus parallelogrammo A E; applicato ad A E, semissem totius A B., & defectum E G, habente similem defectui P N, vel D juxta præcedentem.

DIfferentia inter A F, vel E G, & C sit O, ipsique O, sit æquale L K, & simile ipsi D, vel E G; sintque L K, E G, circa communem angulum E F G. ideoque *per* 26. circa communem diametrum B I F. Dico A I, cujus defectus est P N, similis D, esse æquale ipsi C.

Quoniam enim C & O, hoc est, C & L K, æquantur ipsi E G, necesse est gnomonem K N P L, æquari ipsi C. Sed gnomoni æquale est A I; ut patet, si æqualibus A L, E N, addantur æqualia complementa E I, I G. ergo A I, est æquale ipsi C.

PROPOS. 29. PROBL. 9.

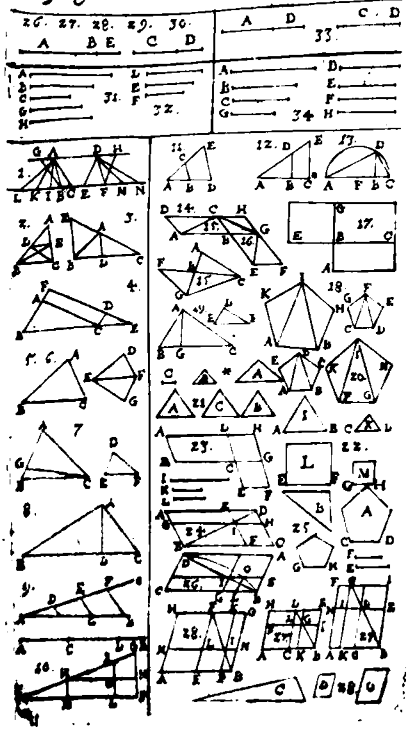
Ad datam rectam A B, dato rectilineo C, applicare parallelogrammum æquale, cum excessu simili ipsi D.

Secta A B, bifariam in E, fiant circa communem angulum F, EG, O H, similia ipsi D & E G, sit applicatum ad E B, & O H, sit æquale ipsi E G, & C, simul, hac enim ratione gnomon E R Q G, erit æqualis eidem C. Sed gnomoni æquale est S Q: ut patet si æqualibus A O, O B, seu æqualibus A O, B H, addatur commune O Q. Ergo S Q. excedens parallelogrammo R Q, simili D, est æquale rectilineo C.

PROPOS. 30. PROBL. 10.

Rectam A B. secare ratione media & extrema.

Ad A D, latus quadrati A B C D, applicetur *per* 29. eidem quadrato æquale rectangulum D G, ita ut excessus sit quadratum A G. Ablato enim communi A E, remanebit F C, æquale quadrato A G, &



G, & *per* 14. erit ut B C, seu A B, ad A H, ita A H, hoc est A F, ad F B.

PROPOS. 31. THEOR. 21.

In triangulo A B C sit rectus A; & E, F, G, sint rectilinea similia: Dico E, F, simul, æqualia esse ipsi G.

DEmissâ enim perpendiculari A D, fiunt B C, C A, C D; nec non B C, B A, B D continuè proportionales *per coroll. octava* & *per coroll.* 19. & *vigesima* ut C D ad B C, ita erit F ad G. item ut B D, ad eandem B C ita E, ad idem rectilineum G. Ergo *per* 24. *quinti*, ut C D, B D simul, ad B C, ita erunt F, E simul, ad G. sed C D, B D, æquantur ipsi B C. ergo etiam F, E, adæquant G.

PROPOS. 32. THEOR. 22.

Vt A B, ad A C, ita sit D C, ad D E; & A B, D C, sint parallela, & similiter A C, D E; & C punctum sit commune: Dico B C, C D. esse in directum.

QUoniam enim circa angulos A, D, qui sunt æquales eidem A C D, *per* 29. *pr.* latera sunt proportionalia, sequitur *per* 6.

angu-

angulum B, æqualem esse D C E. Additis ergo A, & A C D, erit A C E, æqualis duobus A B. Sicut ergo A, *B* cum *A C B*, sunt æquales duobus rectis *per* 32. *pr.* ita erunt etiam duo *A C E. A C B*, & ideo *B C, C D*, erunt una recta *per* 14. *ejusdem.*

PROPOS. 33. THEOR. 23.

In æqualibus circulis, tam anguli B A C, F E G, ad peripheriam, quàm B D C, F H G, ad centra: necnon sectores B D C, F H G eandem habent rationem quam peripheria B C, F G.

ARcus *B* C I, sit utcunque multiplex ipsius *B* C, & F G K L multiplex ipsius *F* G: Cum igitur anguli insistentes æqualibus peripherijs sint æquales; tam erunt multiplices anguli *B* D C, C D I ipsius *B* D C quam est arcus *B* C I, multiplex peripheriæ *B*C: & similiter anguli *F* H G, G H K, K H L, & arcus *F* G K L, erunt æquemultiplices anguli *F* H G, & arcus *F* G. Et quando arcus *B* C I, est æqualis, major, vel minor arcu *F* G K L; erunt etiam anguli *B* D C, C D I, æquales, majores, vel minores angulis *F* H G, G H K, K H L. & ideo *per 6. defin. quinti*, erit ut arcus *B* C, ad *F* G, ita angulus *B* D C, ad *F H G*: imo &

angu-

angulus *B A C*, ad angulum *F E G*; eo quod ſint ſemiſſes angulorum *B D C, F H G, per* 20. *tertij.*

Pro ſectoribus fiant anguli *B M C, CNI*: qui ſunt æquales, quia inſiſtunt æqualibus peripherijs, quas abſcindunt æquales, arcus *B C. C I*, Unde, *per* 24. *tertij* ſegmenta *B M C, C N I*, ſunt æqualia. ſunt autem & triangula *B D C, C D I*, æqualia, propter æqualitatem laterum. Ergo & ſectores *B D C M, C D I N*. Eruntque prædicti ſectores, & arcus *B C I*, æquemultiplices ſectoris *B D C M*, & arcus *B C*. Et eodem modo erunt ſectores *F H G, G H K, K H L*, & arcus *F G K L*, æquemultiplices ſectoris *F H G*, & peripheriæ *F G*: Et idcirco rurſus *per* 6. *defin. quinti*, ut *B C*, ad *F G*, ita erit ſector *B D C*, ad ſectorem *F H G*.

Coroll. 1. Hinc manifeſtum eſt, ſic eſſe ſectorem ad ſectorem, ut eſt angulus ad angulum.

Coroll. 2. Item ut eſt angulus ad centrum circuli ad quatuor rectos, ita peripheria anguli, ad totam circumferentiam.

teribus æqualia utrumque utrique, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

27. Si in duas rectas lineas, recta incidens linea, alternatim angulos æquales inter se fecerit: Parallelæ erunt inter se illæ rectæ lineæ,

28. Si in duas rectas lineas, recta incidens linea, externum angulum interno, & opposito, & ad easdem partes, æqualem fecerit, aut internos, & ad easdem partes duobus rectis æquales: Parallelæ erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.

29. In parallelas rectas lineas, recta incidens linea: Et alternatim angulos inter se æquales efficit; & externum interno, & opposito, & ad easdem partes, æqualem; & internos, & ad easdem partes, duobus rectis æquales facit.

30. Quæ eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ.

31. A dato puncto, datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

32. Cujuscunque trianguli uno latere producto, externus angulus duobus internis, & oppositis est æqualis: Et trianguli tres interni anguli, duobus sunt rectis æquales.

33. Rectę lineæ quę ęquales, & parallelas lineas ad partes easdem conjungunt: Et

ipsę ęquales, & parallelę sunt.

34. Parallelogrammorum spatiorum ęqualia sunt inter se, quę ex adverso & latera, & anguli: Atque illa bifariam secat diameter.

35. Parallelogramma super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.

36. Parallelogramma super ęqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt ęqualia.

37. Triangula super eadem basi constituta, & in eisdem parallelis inter se sunt æqualia.

38. Triangula super ęqualibus basibus constituta, & in eisdem parallelis, inter se sunt ęqualia.

39. Triangula æqualia super eadem basi, & ad easdem partes constituta, in eisdem sunt parallelis.

40. Triangula æqualia super ęqualibus basibus, & ad easdem partes constituta: in eisdem sunt parallelis.

41. Si parallelogrammum cum triangulo eandem basim habuerit, in eisdemq; fuerit parallelis: Duplum erit parallelogrammum ipsius trianguli.

42. Dato triangulo ęquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

43. In

43. In omni parallelogrammo, complementa eorum, quę circa diametrum sunt parallelogrammorum, inter se sunt ęqualia.

44. Ad datam rectam lineam, dato triangulo, ęquale parallelogrammum applicare, in dato angulo rectilineo.

45. Ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum constituere, in dato angulo rectilineo.

46. A data recta linea, quadratum describere.

47. In triangulis rectangulis, quadratum, quod à latere rectum angulum subtendente describitur, æquale est eis, quę à lateribus rectum angulum continentibus describuntur quadratis.

48. Si quadratum, quod ab uno laterum trianguli describitur, ęquale sit eis, quę à reliquis trianguli lateribus describuntur, quadratis: Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est.

PROPOSITIONES
Libri Secundi.

1. Si fuerint duę rectę lineę, seceturque ipsarum altera in quotcunq; segmen-

ta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quę sub insecta, & quolibet segmentorũ comprehenduntur, rectangulis.

2. Si recta linea secta sit utcunq; : Rectangula, quæ sub tota, & quolibet segmentorum comprehenduntur, æqualia sunt ei, quod à tota fit, quadrato.

3. Si recta linea secta sit utcunq;: Rectangulum sub tota, & uno segmentorum comprehensum, æquale est & illi, quod sub segmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à prędicto segmento describitur, quadrato.

4. Si recta linea secta fit utcunque: Quadratum, quod à tota describitur, æquale est & illis, quę à segmentis describuntur, quadratis, & ei, quod bis sub segmentis comprehenditur, rectangulo.

5. Si recta linea secetur in ęqualia, & non æqualia: Rectangulum sub inæqualibus segmentis totius comprehensum, una cum quadrato, quod ab intermedia sectionum, æquale est ei, quod à dimidia describitur, quadrato.

6. Si recta linea bifariam secetur, & illi recta quædam linea in rectum adijciatur: Rectangulum comprehensum sub tota cum adjecta, & adjecta, una cum quadrato à dimidia, æquale est quadrato à linea

quæ

quę tum ex dimidia, tum ex adjecta cō-
ponitur, tanquam ab una, descripto.

7. Si recta linea secetur utcunque; Quod à tota, quodq; ab uno segmentorū, utraque simul quadrata, ęqualia sunt & illi, quod bis sub tota, & dicto segmento comprehenditur rectangulo, & illi, quod à reliquó segmento fit quadrato.

8. Si recta linea secetur utcunque: Rectangulum quater comprehensum sub tota, & uno segmentorum, cum eo, quod à reliquo segmento fit quadrato, ęquale est ei, quod à tota, & dicto segmento, tanquā ab una linea describitur quadrato.

9. Si recta linea secetur in ęqualia, & non æqualia: Quadrata, quæ ab inæqualibus totius segmentis fiunt, simul duplicia sunt & ejus, quod à dimidia, & ejus quod ab intermedia sectionum fit, quadrati.

10. Si recta linea secetur bifariam, adijciatur autem ei in rectum quæpiam recta linea: Quod à tota cum adjuncta, & quod ab adjuncta, utraque simul quadrata, duplicia sunt & ejus, quod à dimidia, & ejus, quod à composita ex dimidia & adjuncta, tanquam àb una, descriptum sit, quadrati.

11. Datam rectam lineam secare, ut comprehensum sub tota, & altero segmentorum rectangulum, æquale sit ei, quod à re-

à reliquo segmento fit, quadrato.

12. In amblygonijs triangulis, quadratum, quod fit à latere angulum obtusum subtendente, majus est quadratis, quæ fiunt à lateribus, obtusum angulum comprehendẽtibus, rectangulo bis cõprehenso, & ab uno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod, cùm protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab assumpta exterius linea sub perpendiculari prope angulum obtusum.

13. In oxygonijs triangulis, quadratum à latere angulum acutum subtendente, minus est quadratis, quæ fiunt à lateribus acutum angulum comprehentibus, rectangulo bis comprehenso & ab uno laterum, quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & ab assumpta interius linea sub perpendiculari prope acutum angulum.

14. Dato rectilineo æquale quadratum constituere.

PROPOSITIONES Libri Tertij.

1. DAti circuli centrum reperire.
2. Si in circuli peripheria duo quælibet puncta accepta fuerint: Recta linea, quæ

quæ ad ipſa puncta adjungitur, intra circulum cadit.

3. Si in circulo recta quædam linea per centrum extenſa, quandam non per cẽtrum extenſam bifariam ſecet; Et ad angulos rectos ipſam ſecabit. Et ſi ad angulos rectos eam ſecet, bifariam quoque eam ſecabit.

4. Si in circulo duę rectę lineæ, ſeſe mutuo ſecent non per centrum extenſę: Seſe mutuo bifariam non ſecabunt.

5. Si duo circuli ſeſe mutuo ſecent, non erit illorum idem centrum.

6. Si duo circuli ſeſe mutuo interius tangant, eorum non erit idem centrum.

7. Si in diametro circuli quodpiam ſumatur punctum, quod circuli centrum non ſit, ab eoq; puncto in circulum quædam rectę lineæ cadant: Maxima quidem erit ea, in qua cẽtrum; minima vero reliqua; aliarum vero propinquior illi, quæ per centrũ ducitur, remotiore ſemper major eſt: Duæ autem ſolum rectæ lineæ ęquales ab eodem puncto in circulũ cadunt, ad utraſq; partes minimæ, vel maximæ.

8. Si extra circulum ſumatur punctum quodpiam, ab eoq; puncto ad circulum deducantur rectę quędam lineę, quarum una quidem per centrum protendatur, reliquæ vero ut libet: In cavam peri-

pheriam cadentium rectarum linearum maxima quidem est illa, quæ per centrũ ducitur; aliarum autem propinquior ei, quę per centrũ transit, remotiore semper major est: In convexam vero peripheriam cadentium rectarum linearum minima quidem est illa, quæ inter punctum, & diametrum interponitur; aliarum autem ea, quæ propinquior est minimæ, remotiore semper minor est: Duę autem tantum rectæ lineæ æquales, ab eo puncto in ipsum circulum cadunt, ad utrasque partes minimæ, vel maximæ.

9. Si in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & ab eo puncto, ad circulum cadant plures quam duæ rectę lineæ ęquales: Acceptum punctum centrum est ipsius circuli.

10. Circulus circulum in pluribus, quam duobus punctis non secat.

11. Si duo circuli sese intus contingant, atq; accepta fuerint eorum centra: Ad eorũ centra adjuncta recta linea, & producta, in contactum circulorum cadet.

12. Si duo circuli sese exterius cõtingant, linea recta, quæ ad centra eorum adjungitur per contactum transibit.

13. Circulus circulum non tangit in pluribus punctis quam uno, sive intus, sive extra tangat.

14. In circulo ęquales rectæ lineæ æqualiter distant à centro: & quę æqualiter distant à centro, æquales sunt inter se.

15. In circulo maxima quidem linea est diameter; aliarum autem propinquior centro, remotiore semper major.

16. Quæ ab extremitate diametri cujusq; circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipsum circulum cadet; & in locum inter ipsam rectam lineam, & peripheriam comprehensum, altera recta linea non cadet: Et semicirculi quidem angulus, quovis angulo acuto rectilineo major est; reliquus autem minor.

17. A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum tangat circulum.

18. Si circulũ tangat recta quępiam linea, à centro autẽ ad contactum, adjungatur recta quædã linea: quę adjuncta fuerit ad ipsam contingentẽ perpendicularis erit.

19. Si circulum tetigerit recta quæpiam linea, à contactu autem recta linea ad angulos rectos ipsi tangenti excitetur: In excitata erit centrum circuli.

20. In circulo, angulus ad centrum duplex est anguli, ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria basis angulorum.

21. In circulo, qui in eodẽ segmento sunt, anguli sunt inter se ęquales.

22. Quadrilaterorũ in circulis descripto-

rum anguli, qui ex adverso, duobus rectis sunt æquales.

23. Super eadem recta linea, duo segmenta circulorum similia, & inæqualia, non constituentur ad easdem partes.

24. Super æqualibus rectis lineis, similia circulorũ segméta sunt inter se ęqualia.

25. Circuli segmento dato, describere circulum, cujus est segmentum.

26. In æqualibus circulis, æquales anguli ęqualibus peripherijs insistũt, sive ad cẽtra, sive ad peripherias cõstituti insistãt.

27. In æqualibus circulis, anguli, qui ęqualibus peripherijs insistunt, sunt inter se æquales, sive ad centra, sive ad peripherias constituti insistant.

28. In æqualibus circulis, ęquales rectę lineæ, ęquales peripherias auferunt, majorem quidem majori, minorem autem minori.

29. In æqualibus circulis, ęquales peripherias, æquales rectæ lineæ subtendunt.

30. Datam peripheriam bifariam secare.

31. In circulo angulus, qui in semicirculo, rectus est: qui autem in majore segmento, minor recto: qui vero in minore segmento, major est recto. Et insuper angulus majoris segmenti, recto quidem major est: minoris autem segmenti angulus, minor est recto.

32. Si

32. Si circulum tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem producatur quædam recta linea circulum secans: Anguli, quos ad contingentem facit, æquales sunt ijs, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis.

33. Super data recta linea describere segmentum circuli, quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.

34. A dato circulo segmentum abscindere, capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

35. Si in circulo duæ rectę lineę sese mutuo secuerint, rectangulum comprehensum sub segmentis unius, æqualis erit ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo.

36. Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoq; in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarũ altera quidem circulum secet, altera vero tangat: Quod sub tota secante, & exterius inter punctum & convexam peripheriam assumpta cõprehenditur rectangulum, ęquale erit ei, quod à tangente describitur, quadrato.

37. Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoq; puncto in circulum cadant duæ rectę lineæ, quarum altera circulum secet, altera in eum incidat, sit autem, quod sub tota secante; & exterius

inter punctum & convexam peripheriã assumpta, comprehenditur rectangulũ, æquale ei, quod ab incidente describitur quadrata; Incidens ipsa circulum tanget.

PROPOSITIONES Libri Quarti.

1. In dato circulo, rectam lineam accommodare, ęqualem datę rectę lineæ, quę circuli diametro non sit major.
2. In dato circulo triangulum describere dato triangulo æquiangulum.
3. Circa datum circulum, triangulum describere dato triangulo æquiangulum.
4. In dato triangulo circulum inscribere.
5. Circa datum triangulum circulum describere.
6. In dato circulo quadratum describere.
7. Circa datum circulum quadratum describere.
8. In dato quadrato circulum describere.
9. Circa datũ quadratũ circulũ describere.
10. Isoceles triangulum constituere, quod habeat utrumque eorum, qui ad basim sunt angulorum, duplum reliqui.
11. In dato circulo pentagonum æquilaterum & æquiangulum describere.
12. Circa datum circulum pentagonum ęquilaterum, & æquiangulum describere.
13. In dato pentagono æquilatero, & æquiangulo circulum inscribere. 14. Cir-

14. Circa datum pentagonum ęquilaterũ, & ęquiangulum circulum describere.
15. In dato circulo hexagonum, & æquilaterum, & æquiangulum inscribere.
16. In dato circulo quintidecagonum, & ęquilaterum, & æquiangulum describere.

PROPOSITIONES Libri Quinti.

1. SI sint quotcunq; magnitudines quotcunq; magnitudinum æqualium numero, singulę singularum, ęquemultiplices quam multiplex est unius una magnitudo, tam multiplices erunt, & omnes omnium.
2. Si prima secundę æque fuerit multiplex, atque tertia quartæ; fuerit autem & quinta secundę ęquemultiplex, atq; sexta quartæ: Erit & composita prima cum quinta, secundæ æquemultiplex, atque tertia cum sexta, quartæ.
3. Si sit prima secundę æquemultiplex, atque tertia quartæ; sumantur autem æquemultiplices primæ, & tertiæ: Erit & ex æquo sumptarum utraq; utriusque æquemultiplex, altera quidem secundę, altera autem quartæ.
4. Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: Etiam æ-

quemultiplices primę&tertię,ad æquemultiplices secundæ & quartæ, juxta quamvis multiplicationem, eandem habebunt rationē, si prout inter se respondent,ita sumptæ fuerint.

5. Si magnitudo magnitudinis æque fuerit multiplex,atq; ablata ablatæ:Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, ut tota totius.

6. Si duę magnitudines duarum magnitudinum sint æquemultiplices, & detractæ quædam sint earundē æquemultiplices. Et reliquæ eisdem aut æquales sunt, aut æque ipsarum multiplices.

7. Æquales ad eandem , eandem habent rationem: Et eadem ad ęquales.

8. Inæqualium magnitudinum major ad eandem, majorem rationem habet, quā minor: Et eadem ad minorem,majorem rationem habet, quàm ad majorem.

9. Quę ad eandem,eandem habent rationem,æquales sunt inter se:Et ad quas eadem eandem habet rationem, eæ quoque sunt inter se æquales.

10. Ad eandem magnitudinem rationem habentium, quę majorem rationem habet, illa major est;Ad quam autem eadē majorem rationem habet,illa minor est.

11. Quę eidem sunt eædem rationes , & inter se sunt eædem.

12. Si sint magnitudines quotcunq; proportionales: quemadmodum se habuerit una antecedentium ad unam consequẽtium, ita se habebunt omnes antecedentes ad omnes consequentes.

13. Si prima ad secundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia vero ad quartam, majorem rationem habuerit, quàm quinta ad sextam. Prima quoq; ad secundam majorem rationẽ habebit, quàm quinta ad sextam.

14. Si prima ad secundam eandem habuerit rationem quàm tertia ad quartam; prima vero, quàm tertia, major fuerit; Erit & secunda major, quàm quarta. Quod si prima fuerit ęqualis tertiæ, erit & secunda æqualis quartæ: Si vero minor, & minor erit.

15. Partes cum pariter multiplicibus in eadem sunt ratione, si prout sibi mutuo respondent, ita sumantur.

16. Si quatuor magnitudines proportionales fuerint; Et vicissim proportionales erunt.

17. Si compositę magnitudines proportionales fuerint; hæ quoq; divisæ proportionales erunt.

18. Si divisæ magnitudines sint proportionales; hæ quoque compositæ proportionales erunt.

19. Si quemadmodum totum ad totum, ita ablatũ se habuerit ad ablatũ: Et reliquũ ad reliquũ, ut totum ad totũ, se habebit

20. Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur; ex æquo autem prima quam tertia, major fuerit; Erit & quarta quam sexta, major. Quod si prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta ęqualis sextę: Sin illa minor, hęc quoq; minor erit.

21. Si sint tres magnitudines, & alię ipsis ęquales numero, quæ binę, & in eadem ratione sumantur. fueritq; perturbata earum proportio, ex ęquo autem prima, quam tertia major fuerit; Erit & quarta, quam sexta major. Quod si prima tertię fuerit æqualis, erit & quarta ęqualis sextę: sin illa minor, hæc quoq; minor erit.

22. Si sint quotcunq; magnitudines, & alię ipsis ęquales numero, quę binæ in eadẽ ratione sumantur: Et ex ęqualitate in eadem ratione erunt.

23. Si sint tres magnitudines, alięque ipsis ęquales numero, quę binę in eadem ratione sumantur, fuerit autem perturbata earum proportio: Etiam ex ęqualitate in eadem ratione erunt.

24. Si prima ad secundam, eandem habuerit rationem, quàm tertia ad quartam; habuerit autem & quinta ad secundam,

ean-

eandem rationem, quàm sexta ad quartam: Etiam composita prima cum quinta, ad secundam eandem habebit rationem, quam tertia cum sexta, ad quartã.

25. Si quatuor magnitudines proportionales fuerint; Maxima & minima reliquis duabus majores erunt.

26. Si prima ad secundam habuerit majorem proportionem, quã tertia ad quartam: habebit convertendo secunda ad primam minorem proportionem, quàm quarta ad tertiam.

27. Si prima ad secundam habuerit majorem proportioné, quâm tertia ad quartam: Habebit quoque vicissim prima ad tertiam majorem proportionem, quàm secunda ad quartam.

28. Si prima ad secundam habuerit majorem proportionem, quã tertia ad quartam. Habebit quoque composita prima cum secunda, ad secundam, majorem proportionem, quàm composita tertia cum quarta, ad quartam.

29. Si composita prima cum secunda ad secundam majorem habuerit proportionem, quã composita tertia cum quarta, ad quartam: Habebit quoq; dividendo prima ad secundam, majorem proportionem, quàm tertia ad quartam.

30. Si composita prima cum secunda, ad secun-

secundam habuerit majorem proportionem, quàm composita tertia cum quarta, ad quartam: Habebit per conversionem rationis, prima cum secunda, ad primam, minorem proportionem, quàm tertia cum quarta, ad tertiam.

31. Si sint tres magnitudines, & aliȩ ipsis æquales numero, sitq; major proportio primæ priorum, ad secundam; quàm primæ posteriorum, ad secundam: Item secundæ priorum, ad tertiam major, quàm secundæ posteriorum, ad tertiam: Erit quoque ex æqualitate, major proportio primæ priorum, ad tertiam, quàm primæ posteriorum ad tertiam.

32. Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitq; major proportio primæ priorum ad secundam, quàm secundȩ posteriorum ad tertiam: Item secundæ priorum ad tertiam major, quàm primæ posteriorum ad secundam: Erit quoque ex æqualitate, major proportio primæ priorum ad tertiam, quàm primæ posteriorum ad tertiam.

33. Si fuerit major proportio totius ad totum, quàm ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum major proportio, quã totius ad totum.

34. Si sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque major propor-

proportio primæ priorum, ad primam posteriorum, quàm secundæ ad secundã; & hæc major, quàm tertiæ ad tertiam, & sic deinceps: Habebunt omnes priores simul, ad omnes posteriores simul, majorem proportionem, quàm omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores, relicta quoque prima; minorem autem, quàm prima priorum ad primam posteriorum, majorem deniq; etiam, quàm ultima priorum ad ultimã posteriorum.

PROPOSITIONES Libri Sexti.

1. TRiangula & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita se habent inter se, ut bases.
2. Si ad unum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam linea: hęc proportionaliter secabit ipsius trianguli latera, Et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint; quæ ad sectiones adjuncta fuerit recta linea, erit ad reliquũ ipsius trianguli latus parallela.
3. Si trianguli angulus bifariam sectus sit, secans autem angulum recta linea secuerit & basin: Basis segmenta eandem habebunt rationem quàm reliqua ipsius trian-

trianguli latera. Et si basis segmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera: Recta linea, quę à vertice ad sectionem producitur, bifariam secat trianguli ipsius angulum.

4. Æquiangulorum triangulorum proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur.

5. Si duo triangula latera proportionalia habeant: æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, sub quibus homologa latera subtenduntur.

6. Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triangula, æqualesque habebunt angulos, sub quibus homologa latera subtenduntur.

7. Si duo triangula unum angulum uni angulo ęqualem, circum autem alios angulos latera proportionalia habeant; reliquorum vero simul utrumq; aut minorem, aut non minorem recto: Æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, circum quos proportionalia sunt latera.

8. Si in triangulo rectangulo ab angulo recto in basim perpendicularis ducta sit: Quę ad perpendicularem triangula, tum toti

toti triangulo, tum ipsa inter se similia sunt.

9. A data recta linea imperatam partem auferre.

10. Datam rectam lineam insectam similiter secare, ut data altera recta secta fuerit.

11. Duabus datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinvenire.

12. Tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem invenire.

13. Duabus datis rectis lineis, mediam proportionalem adinvenire.

14. Æqualium, & unum uni æqualem habentium angulum, parallelogrammorũ, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum unum angulũ uni angulo æqualem habentium, reciproca sunt latera, quæ circum ęquales angulos, illa sunt æqualia.

15. Æqualium, & unum uni æqualem habentium angulum, triãgulorum, reciproca sunt latera, quę circum æquales angulos. Et quorum triangulorum unum angulum, uni angulo ęqualem habentium, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos, illa sunt æqualia.

16. Si quatuor rectę lineæ proportionales fuerint; quod sub extremis comprehenditur

ditur rectangulum, æquale est ei, quod sub medijs comprehenditur, rectangulo. Et si sub extremis comprehensum rectãgulum, ęquale fuerit ei, quod sub medijs continetur rectangulo: illæ quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

17. Si tres rectę lineę, sint proportionales: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod à media describitur, quadrato. Et si sub extremis comprehensum rectangulum ęquale sit ei, quod à media describitur, quadrato: illę tres rectę lineę proportionales erũt.

18. A data recta linea dato rectilineo, simile similiterque positum rectilineum describere.

19. Similia triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum.

20. Similia polygona in similia triangula dividuntur, & numero æqualia, & homologa totis: Et polygona duplicatam habent eam inter se rationem, quam latus homologum, ad homologum latus.

21. Quæ eidem rectilineo sunt similia; & inter se sunt similia.

22. Si quatuor rectæ lineę proportionales fuerint; Et ab eis rectilinea similia similiterq; descripta, proportionalia erunt. Et si à rectis lineis similia similiterque descripta rectilinea, proportionalia fuerint;

rint; ipsæ etiam rectę lineæ proportionales erant.

23. Æquiangula parallelogramma inter se rationem habent eam, quæ ex lateribus componitur.

24. In omni parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt, parallelogramma & toti, & inter se sunt similia.

25. Dato rectilineo simile similiterq; positum, & alteri dato æquale idem constituere.

26. Si à parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit, & simile toti, & similiter positum, communem cum eo habens angulum: hoc circum eandem cum toto diametrum consistit.

27. Omnium parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorũ, deficientiumq; figuris parallelogrammis similibus, similiterq; positis ei, quod à dimidia describitur: maximum id est, quod ad dimidiam applicatur, parallelogrammum simile existens defectui.

28. Ad datam lineam rectam dato rectilineo ęquale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogrãma, quæ similis sit alteri parallelogrammo dato. Oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non majus esse eo, quod ad dimidiam applicatur, cum simile

similes fuerint defectus, & ejus, quod ad dimidiam applicatur, & ejus, cui simile deesse debet.

29. Ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogrāma, quæ similis sit parallelogrammo alteri dato.

30. Propositam rectam lineam terminatam, extrema ac media ratione secare.

31. In rectangulis triangulis, figura quævis à latere rectum angulum subtendente descripta, æqualis est figuris, quæ priori illi similes, & similiter positæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

32. Si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, secundum unum angulum composita fuerint, ita ut homologa eorum latera sint etiam parallela: tum reliqua illorum triangulorum latera, in rectam lineam collocata reperientur.

33. In æqualibus circulis, anguli eandem habent rationem cum peripherijs, quibus insistunt, sive ad centra, sive ad peripherias constituti insistant: Insuper vero & sectores, quippe qui ad centra consistunt.

(o)

DE RELIQUIS LIBRIS.

IN prioribus sex libris versata est Euclidis opera circa lineas, angulos, & figuras planas. Aggressurus autem figuras solidas, cum videret earum tractationem indigere lineis commensurabilibus, & incommensurabilibus, & hæ supponerent cognitionem numerorum: idcirco libro 7. 8. & 9. præmittit nonnullas affectiones numerorum, & in 10. agit de lineis commensurabilibus, & incommensurabilibus. & tandem in 11. aggreditur solida. & in 12. & 13. prosequitur quinque corpora regularia diligentius, & in particulari. De quibus etiam agunt 14. & 15. qui attribuuntur Hypsicli Alexandrino, & 16. quem addidit Franciscus Flussata.

Ego hic consulto ommitto corpora regularia, & ea solum ex 11. attingo quæ propriè sunt Elementa Solidorum.

EX LIBRO UNDECIMO.

DEFINITIONES.

1. SOlidum est quod trinam dimensionem habet, secundum longitudinem, latitudinem, & profunditatem.

2. Solidi extremum est superficies.

3. Linea recta A B, recta est, seu perpendicularis ad planum C D, cum ad omnes rectas B C, B D; B E concurrentes in eodem plano ad B, recta est, & perpendicularis.

4. Planum A B, rectum est ad planum CD; cum omnes O H, I K, quæ in plano AB, perpendiculares ad communem sectionem B E, rectæ sunt ad planum C D.

5. Angulus inclinationis, quo recta AB, inclinatur ad planum C D, est angulus B A E, quem B A, facit cum A E, ducta per punctum E, in quod cadit perpendicularis B E.

6. Plani A B, inclinati ad planum C D; inclinationis angulus est F G H, cum G F, G H, sunt perpendiculares ad communem intersectionem E B.

7. Pla-

7. Planum ad planum dicitur inclinatum similiter, cum dicti inclinationum anguli fuerint æquales.

8. Parallela plana sunt quæ non possunt concurrere.

9. Similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus, & multitudine æqualibus planis continentur.

10. Similes & æquales sunt, quæ planis similibus, & multitudine, magnitudineq; æqualibus continentur.

11. Solidus angulus est inclinatio plurium linearum non existentium in eodem plano, ad idem punctum concurrentium; & ideo continetur pluribus angulis planis, quàm duobus. Qualem constituunt tres lineæ A B, A C, A D ad concursum A, & tres anguli plani B A D, D A C, C A B.

12. Pyramis est figura solida, v. g. ABCD E, quæ continetur planis A B C D; DA E, A E B, B E C, C E D, ab uno plano A B C D, constituta ad unum punctum E.

13. Prisma est figura solida planis contenta; quorum duo adversa A B C, D E F, sunt æqualia, similia, & parallela: reliqua vero B E F C; F C A D: A D E B; parallelogramma.

14. Sphæra est tale solidum, quale intelli-

gitur formari à semicirculo circa diametrum fixam, integrè revoluto.

15. Axis est illa diameter fixa.

16. Centrum sphæræ, est idem quod semicirculi circumducti.

17. Diameter sphæræ, est quævis linea per centrum acta, atque ad sphæræ superficiem terminata.

18. Conus est figura solida, qualem format triangulum rectangulum A *B* C, quando circa latus A *B* manens, integrè circumvoluitur. estque orthogonius quando latera *A B*, *B C*, sunt æqualia, amblygonius, quando *B C*, majus est, quàm *A B*. & oxygonius, quando minus.

Ab Appollonio in Conicis traditur alia Coni definitio universalior.

19. *Basis* coni, est circulus quem in revolutione describit *B C*. Superficies coni, quam describit *A C*; & A, est vertex coni.

21. Cylindrus est figura solida formata à parallelogrammo rectangulo v. g. *A B C D*, circa *A B*, integrè revoluto.

22. Axis, est ipsa *A B*, manens.

23., *Bases* sunt circuli descripti à lateribus *A D*, *B C*. reliquum autem *C D*, describit superficiem cylindricam.

24. Similes coni, & cylindri, sunt quorum axes, & diametri basium, sunt proportionales.

25. Cu-

25. Cubus est figura solida sub sex quadratis æqualibus contenta.
26. Tetraedrum, quæ sub quatuor triangulis æquilateris, & æqualibus continetur.
27. Octaedrum, quæ sub octo triangulis æqualibus, & æquilateris.
28. Dodecaedrum, quæ sub 12. pentagonis æqualibus, & æquilateris.
29. Icosaedrum, quæ sub 20. triangulis æqualibus, & æquilateris.
30. Parallelepipedum, est figura solida sex figuris quadrilateris contenta, ita ut adversæ sint parallelæ.

PROPOS. 1. THEOR. 1.

Si lineæ rectæ pars v. g. A C existat in plano D F, reliqua C B, non existit in sublimi.

SI enim C B esset in sublimi, tota recta A C B non attingeret superficiem D F; ergo non esset plana. *Juxta defin. 7. primi secundum Heronem.*

PROPOS. 2. THEOR. 2.

Rectæ A B, C D, se mutuo secantes in E, & similiter omne triangulum; existunt in uno plano.

DUcatur *BD*, & circa *D C*, intelligatur circumduci planum; quo transeunte per *B*, erunt *D B*, *E B*, in eodem plano cum *C D*. ergo &c.

PROPOS. 3. THEOR. 3.

Duorum planorum A B, C D, communis sectio E F: est linea recta.

PUncta enim E, F, sunt communia, ergo & recta E F. debet enim E F, *per defin. 7. primi* extendi tam per planum *A B*, quàm C D.

PROPOS. 4. THEOR. 4.

Si recta A B, duabus C D, E F, perpendiculariter insistat ad concursum B: erit A B ad planum C E D F, recta.

FIat *B* C, æqualis *B* D, & *B* F, æqualis *B* E; nectanturque F C, E D; & ductâ G *B* H, utcunque per *B*, nectantur AF, AG, AC, A E, AH, A D. Eritque primo FC, æqualis E D, & angulus *B* F C, angulo *B* E D *per 4. primi*: quia circa æquales angulos ad verticem *B*, latera *B* C, *B*F sunt æqualia lateribus *B* D, *B* E.

2. Latera *B* G, G F, sunt æqualia lateribus *B* H, H E, *per 26. primi*, quia *B* F, *B* E, sunt æquales, & adjacent angulis æqualibus.

3. A C, A D, sunt æquales, *per 4. pr.* quia circa rectos ad *B*, A *B*, *B* C, sunt æquales A *B*, *B* D. & simili argumento sunt æquales A F, A E.

4. An-

4. Angulus A F C, est æqualis A E D, *per* 8. *primi*; quia A F, F C sunt æquales A E, E D, & basis A C, basi A D.

5. A G, A H, sunt æquales *per* 4. *pr.* quia circa æquales angulos A F G, A E H, sunt latera lateribus æqualia.

6. *Per* 8. *pr.* anguli A *B* G, A *B* H sunt æquales & recti, quia A *B*, *B* G sunt æquales A *B*, *B* H, & basis A G, basi A H.

Eodemque modo demonstratur eandem *A B* perpendicularem esse ad quascunque alias *G B H*.

PROPOS. 5. THEOR. 5.

Recta A B, insistat tribus B C, B D, B E, ad angulos rectos: Dico omnes tres in uno plano esse.

SI enim B E, non est in plano D E, in quo sunt BD, BC, erit saltem in eodem cum recta A B, nempe in A G, quod cum F D, intelligatur facere communem sectionem B G. Quoniam igitur A B, recta est ad planum F D, *per* 4. *hujus*; erit eadem A B, etiam perpendicularis ad B G, *per defin* 3, atque ita anguli A B G, A B E, recti erunt & æquales quod est absurdum.

PROPOS. 6. THEOR. 6.

Recta A B, C D, sint recta ad planum E F: Dico ipsas esse parallelas.

JUngantur A D, B D, & in plano E F, recta D G, sit perpendicularis ad B D, & æqualis A B; nectanturque B G, A G, Eritque primo B G, æqualis A D, *per 4. primi*; quia circa rectos B, D, sunt B D, B A, æquales B D, D G. secundo B G, B A sunt æquales A D, D G, & basis A G est communis; ergo angulus A D G, est æqualis A B G. Sed hic est rectus *per defin.* 3. ergo & ille, & quia *per eandem defin.* 3. eadem G D est quoque recta ad CD. Erit igitur eadem D G, recta ad tres B D, A D, D C. & ideo *per præcedentem* eædem tres sunt in uno plano. Sed & A *B*, est in eodem cum *B D*, D A plano, ergo etiam A *B* C D, sunt in uno plano, & propter rectos A *B* D, C D *B*, sunt *per* 29. *pri.* parallelæ.

PROPOS. 7. THEOR. 7.

Parallelas A B, CD, nectat utcunque E F: Dico omnes tres esse in uno plano.

NAm A *B*, CD, sunt in eodem plano *per defin.* 34. *primi.* & E F, in eodem *per* 7. *defin. secundum Heronem.*

PROPOS. 8. THEOR. 8.

Recta A B, C D, sint parallela, & C D sit recta ad planum E F: Dico etiam A B rectam esse ad planum E F.

COnstructio est similis sextæ. hoc est *E* G sit perpendicularis ad *B* D, & æqualis

lis C D, &c. Quoniam igitur circa rectos C D *B*, G *B* D, *B* D, D C, sunt æquales D *B*, *B* G; erit basis *B* C, æqualis G D, *per* 4. *pr.* & quia rursus D C, D G, sunt æquales C *B*, *B* G, & C G, communis; erit *per* 8. *primi* C *B* G, æqualis recto C D G. Atque ita G *B*, erit perpendicularis ad duas *B* D, *B* C; ideoque *per* 4. recta ad planum C *B* D & quia in eodem existit A *B*, erit recta A *B*, perpendicularis ad *B* G, *per defin.* 3. Est autem eadem A B, etiam recta ad *B D*; ergo *per* 4. recta est ad planum G B D. hoc est ad planum E F.

PROPOS. 9. THEOR. 9.

Quæ eidem sunt parallelæ etiam si sint in diversis planis; sunt nihilominus parallelæ inter se.

QUando AB, C D, sunt parallelæ eidem E F, & omnes in eodem plano, jam propositio est demonstrata *ad* 30. *primi.* Hic ergo A B, E F, sint in uno, & CD, E F, in alio plano: & G H, G I, sint perpendiculares ad E F. eritque *per* 4. E F recta ad planum H G I, & quia A B, C D, sunt eidem E F, parallelæ; erunt etiam AB, C D, ad idem planum rectæ, *per* 8. & *per* 6. parallelæ inter se.

PROPOS. 10. THEOR. 10.

Recta A B, A C, concurrentes in A, sint parallelæ rectis D E, D F, concurrentibus in D: Dico angulos B A C, E D F, esse æquales, vel æquivalere duobus rectis.

IN priori figura A B, A C, & D E, EF sunt parallelæ, & similiter positæ: item A H, A G, sunt parallelæ eisdem D E, E F; sed non similiter positæ, quia A H, A G, sunt sursum, & D E, D F deorsum: Dico in utroque casu angulos B A C, H A G æquales esse angulo E D F. Quando A H, A G non sunt similiter positæ, erunt saltem protractæ similiter positæ, quales sunt AB, AC, quarum illa fiat æqualis D E, & hæc æqualis D F; nectanturque reliquę lineæ: ex quibus B E, C F, erunt eidem A D parallelæ, & æquales *per* 33. *pr.* & ideo æquales & parallelæ inter se: & quia easdem conjungunt rectæ B C, EF erunt etiam *per eandem* 33. B C, E F æquales, & parallelæ. Et quia in triangulis B A C, E D F, præter bases B C, E F æqualia sunt latera A B, A C, lateribus D E, D F, erit *per* 8. *pr.* angulus B A C, nec non H A G, æqualis angulo E D F.

In posteriore figura rectæ A B, AH, sunt iterum parallelæ rectæ D E; & A C, A G; parallelæ rectæ D F, & quidem A B, D E positæ sunt similiter; at A C, D F dissimiliter;

ter; est enim D F, deorsum, at A C sursum; item A G, D E sunt positæ similiter, sed A H est ad dexteram puncti A, & D E, ad sinistram puncti D: Dico in hoc casu tam angulum B A C, quàm H A G, constituere angulos duobus rectis æquales cum E D F. Productâ enim C A, quæ non est similiter posita cum DF, sit etiam AG, similiter posita: & ideo *per demonstrata in prioribus casibus* angulus B A G, est æqualis angulo E D F; adjectoque communi B A C, fiunt duo B A C, B A G æquales duobus B A C, E D F, illi autem duo sunt æquales duobus rectis, *per* 13. *primi*: ergo etiam isti duo sunt æquales duobus rectis. idemque demonstratur eodem modo de duobus angulis E D F. H A G.

PROPOS. 11. PROBL. 1.

A puncto A, in sublimi, ad planum B C, perpendicularem ducere.

IN plano B C, ducatur quævis D E, in quam ex A, demittatur perpendicularis A F, *per* 12. *primi*; & G F H sit perpendicularis ad eandem D E in plano B C, & in hanc cadat alia perpendicularis ex A, nempe A I: dico ipsam esse rectam ad planum B C. Sit enim K I L parallela DE, sicut ergo D F, recta est ad planum A F I, *per* 4. ita erit quoque K I L. *per* 8. hoc est angulus A I L, erit rectus. Est autem & A I H, rectus.

ergo *per* 4. A I, est recta ad planum B C, in quo existunt G H, K I.

PROPOS. 12. PROBL. 2.

Ad datum planum B C, *à puncto* A, *perpendicularem excitare.*

EX alio puncto D, demittatur perpendicularis *per præcedentem* nempe D E; & per E, A, ducatur HA; & in plano DEA, *per* 31. *pr.* ducatur per A, ipsi D E, parallela A F: eritque A F, recta ad B C, *per* 8.

PROPOS. 13. THEOR. 11.

Ex puncto C, *una tantum linea est perpendicularis ad planum* A B.

SI enim essent duæ C D, C E, essent parallelæ *per* 6. quod est absurdum, quia concurrunt in C.

PROPOS. 14. THEOR. 12.

Eadem A B *sit recta ad duo plana* C D, C E: *Dico eadem plana esse parallela.*

NAm si concurrunt, & in communi sectione F C, sumatur quodvis punctum L, nectanturque A L, B L: erunt in triangulo A B L, duo anguli L A B, L B A, *per defin.* 3. recti, *contra* 17. *primi.*

PROPOS. 15. THEOR. 13.

In plano B C, *recta* A B, A C, *sint parallelæ rectis*

rectis D E, D F, *in alio plano* F E : *Dico ipsa plana esse parallela.*

Ex A. ducatur in planum E F, perpendicularis A G, *per* 11. & per G ducantur G H, G I, parallelæ D E, D F, quæ *per* 9, erunt quoque parallelæ A B, A C: & ideo *per* 29. *primi*, anguli G A B, A G H erunt duobus rectis æquales : & quia A G H rectus est, erit & G A B, rectus. immo & G A C, A G I, erunt similiter recti, ideoque eadem A G erit ad utrumque planum recta, & *per præcedentem* B A C, E D F, erunt plana parallela.

PROPOS. 16. THEOR. 14.

Si duo plana parallela A B, C D, secentur plano E F : *communes sectiones* E H, G F, *erunt parallela.*

SI enim concurrerent v. g. in I; concurrerent etiam ipsa plana, *quod est contra hypothesim.*

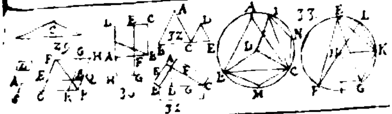
PROPOS. 17. THEOR. 15.

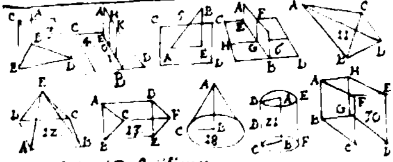
Si duæ lineæ A B, C D, secentur planis parallelis E F, G H, I K, *in* L, M, N, & O, P, Q ; *secabuntur similiter.*

IUngatur L Q, occurrens plano G H in R, à quo ad M, & P, ducantur R M, R P; eritque *per præcedentem* R M, parallela N Q, & R P parallela L O; & ideo *per* 2. *sexti* ut L R, ad R Q, ita erit tam L M, ad M N, quàm O P, ad P Q. &c.

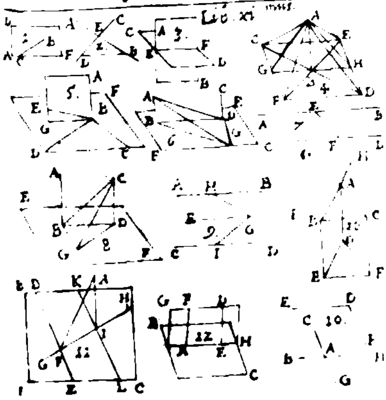
G 7 PRO-

A pagina 141 ad 157am 8.





Libri xi Definitiones



PROPOS. 18. THEOR. 16.

Sit A B, recta ad planum C D: Dico omnia plana per A B, ducta esse recta ad planum C D.

PEr A B, sit ductum planum E F, faciens cum C D, communem sectionem G B F, & H I, sit parallela *A B*, in plano *A B F*; quæ *per* 8. erit quoque recta ad planum C D; & ita de omnibus alijs rectis H I. ergo *per defin.* 4. planum E F. rectum est ad C D.

PROPOS. 19. THEOR. 17.

Si plana A B, C D, sint recta ad planum G H: erit quoque eorundem communis sectio E F, ad idem planum recta.

QUæ enim educitur in plano *A B*, perpendicularis ad D F, ea est recta ad planum G H *per defin.* 4. & similiter ea, quæ educitur ex eodem puncto F, perpendiculariter super B F, in plano C D, est recta ad idem planum G H. Ergo *per* 11. FE, FE sunt una linea, hoc est, communis sectio F E, erit ad G H, recta.

PROPOS. 20. THEOR. 18.

Angulus solidus A, contineatur tribus angulis planis B A C, C A D, D A B: Dico quoslibet duos esse reliquo majores.

QUando omnes tres sunt æquales, manifesta est propositio, quando duo sunt æqua-

æquales, & tertius minor; similiter. quando vero *B A C* est maximus probatur reliquos *B A D*, *C A D* esse ipso majores hoc modo. Fiat *B A E* æqualis *B A D*, & *A E* æqualis *A D*; Et ducta utcunque *B E C* jungantur *B D*, *C D*. Eruntque *B E*, *E D*, æquales *per* 4. *pr.* Duo autem latera *D B*, *D C*, sunt *per* 20. *pr.* majora reliquo *B C*; demptis ergo æqualibus *B D*, *B E*, remanebit *C D*, major *C E*, & angulus *D A C*, erit major *C A E*, *per* 24. *pr.* quia *C A*, *A D*, sunt æquales *C A*, *A E*, & basis *C D*, major basi *C E*. Quare *D A C*, *D A B*, simul sunt majores *C A E*, *E A B*; hoc est, toto *B A C*.

PROPOS. 21. THEOR. 19.

Omnes anguli plani continentes angulum solidum, simul sumpti: sunt minores quatuor rectis.

SOlidus A, contineatur primo tribus planis angulis B A C, C A D, D A B. Ductis ergo B C, C D, D B; erunt tres anguli solidi ad puncta B, C, D; & duo plani anguli A B C, A B D, erunt *per præcedentem* majores tertio C B D; & ita de reliquis: ita ut sex anguli A B C, ABD, ACB, A C D, A D B, ADC, sint majores tribus C B D, B D C, D C B, hoc est, majores duobus rectis. Dicti autem sex anguli una cum tribus ad A, sunt æquales 6. rectis, *per* 32. *pr.* demptis ergo 6. illis qui sunt majores tes duobus rectis, remanebunt isti tres ad verticem A, minores quatuor rectis.

Secundo contineatur solidus A quinque angulis planis; eruntque omnes quinque in pentagono B C D E F *per 32. pr.* sex rectis æquales, & 10. anguli A B C, A B F, A C B, A C D, A D C, A D E, &c. erunt sex rectis majores, *sicut in praecedenti demonstratione*. Omnes autem 10. una cum 5. angulis ad *A*, sunt 10. rectis æquales. sublatis ergo 10. illis, qui sunt majores sex rectis, remanebant 5. ad *A*, minores quatuor rectis. & ita de alijs.

PROPOS. 38. THEOR. 33.

Planum A B, sit rectum ad planum A C, & ex puncto E plani A B, in planum A C, cadat perpendicularis E G: Dico E, esse ad communem sectionem A D.

Si minus, sit alia perpendicularis E I, & I G, sit perpendicularis ad A D, ideoque *per 4. defin.* recta ad planum *A B*, & perpendicularis ad E G, in triangulo igitur E G I erunt duo recti E G I, E I G: *quod est contra 17. primi.*

(o)

PROPOSITIONES ALIÆ ex ijsdem Elementis deprompta, quarum demonstrationes, hoc compendium Clavio relinquit.

EX X.

PRopof. 117. In quadratis diameter & latus sunt lineæ incommensurabiles. Hoc est proportio diametri *AC*, ad latus *AB*, nulla ratione potest exhiberi numeris; Nulla enim datur earundem rectarum *AC*, *AB*, mensura communis.

EX XI.

PRopof. 29. 30. & 31. Solida parallelepipeda super eadem, vel super æqualibus basibus constituta, & in eadem altitudine; sunt æqualia.

Talia sunt parallelepipeda *AB*, *CD* habentia communem basim *AC*, & æquales altitudines *AE*, *AF*.

Item parallelepipeda *AB*, *HI*, habentia æquales bases *AC*, *GH*, & æquales altitudines *AE*, *GI*.

Propof. 32. Solida parallelepipeda *AB*, *CD*, sub eadem vel æquali altitudine *BE*, *CF*, in-

CF, inter se sunt ut basis *AE*, ad basim *DF*.

Propos. 33. Similia solida parallelepipeda, v. g. *ABC*, *DEF*, in quibus tria plana *AB*, *BC*, *CA*, circa angulum solidum I, sunt similia tribus planis *DE*, *EF*, *F* D, circa angulum solidum H, æqualem ipsi I, sunt in triplicata ratione laterum homologorum qualia sunt *CI*, *FH*. Hoc est si ratio *CI*, ad *FH*, continuetur usque ad quartum terminum, ut *primus ad quartum* ita erit parallelepipedum *ABC*, ad parallelepipedum *DEF*.

Propos. 34. Æqualium parallepipedorum *ABC*, *DEF*, bases & altitudines reciprocantur. Hoc est ut basis *AB*, ad basim *DE*, ita est altitudo *EF*, ad altitudinem *BC*. Et vice versa si ut *AB*, ad *DE*, ita est *EF*, ad *BC*, parallelepipeda sunt æqualia.

Propos. 36. Si in parallelepipedo *BE*, circa angulum solidum *A*, tria latera *AB*, *AC*, *AD*, sint continuè proportionalia: & in parallelepipedo *GK*, circa angulum *F* æqualem ipsi *A*, omnia tria latera *FG*, *IH*, *FI*, sint æqualia mediæ proportionali *AC*, erunt parallelepipeda *BE*, *GK*, æqualia.

Propos. 37. Si fuerit ut recta *A* ad *B*, ita *C* ad *D*. fuerintque parallelepipeda *A*, *B* inter se similia, & parallelepipeda *C*, *D* inter

ter se similia, erit quoque ut parallelepipedum *A* ad *B*, ita *C* ad *D*; & vice versa.

EX XII.

PRopos. 1. Quæ in circulis polygona similia, inter se sunt vt à diametris quadrata.

Propos. 2. Circuli inter se sunt ut à diametris quadrata.

Propos. 5. & 6. Ejusdem altitudinis Pyramides tam Triangulares, quàm Polygonæ: inter se sunt, ut bases.

Propos. 8. Similes pyramides sunt in triplicata ratione laterum homologorum, *ut dictum est Prop.* 33. *undecimi de parallelepipedis.*

Propos. 9. Æqualium pyramidum reciprocantur bases & latera.

Propos. 10. Conus tertia pars est Cylindri ejusdem basis, & altitudinis.

Propos. 11. Tam Coni, quàm Cylindri ejusdem altitudinis, inter se sunt ut bases.

Propos. 12. Tam Coni, quàm Cylindri similes, sunt in triplicata ratione diametrorum.

Propos. 15. Tam Conorum quàm Cylindrorum æqualium, reciprocantur altitudines & bases.

Propos. 16. Sphæræ sunt in triplicata ratione diametrorum.

Ex Pappo lib. 5. prop. 11.

CIrculorum circumferentiæ inter se sunt ut Diametri.

Ex Archimede de dimensione circuli prop. 1.

OMnis circulus æqualis est triangulo rectangulo, cujus radius est æqualis uni lateri eorum quæ sunt circa rectum angulum; circumferentia vero est æqualis alteri lateri circa rectum angulum existenti.

Ex eodem de Sphæra & Cylindro. lib. 1. prop. 30.

CUjuscunque Sphæræ superficies quadrupla est maximi circuli eorum qui sunt in ipsa.

Ex Clavio Geom: practica lib. 5 prop. 7.

SPhæræ soliditas producitur ex ductu semidiametri, in tertiam partem superficiei.

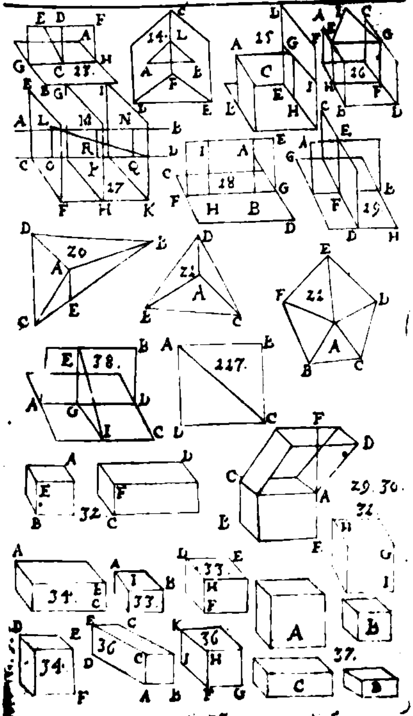
ELENCHUS PROPOSITIONUM SEX LIBRORUM EUCLIDIS.

Sicut habentur apud Clavium.

PROPOSITIONES Libri Primi.

1. SUper data recta linea terminata, triangulum æquilaterum constituere.
2. Ad datum punctum datæ rectæ lineæ, æqualem rectam lineam ponere.
3. Duabus datis rectis lineis inæqualibus, de majore æqualem minori rectam lineam detrahere.
4. Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, utrumq; utrique, habeant vero & angulum angulo æqualem sub æqualibus rectis lineis contentum: Et basim basi æqualem habebunt;

A pagina 155. ad 163. 9.



bunt, eritq; triangulum triangulo æquale, ac reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, uterq; utrique, sub quibus æqualia latera subtendunt.

5. Isoscelium triangulorum, qui ad basim sunt, anguli inter se sunt æquales: Et productis æqualibus rectis lineis, qui sub basi sunt anguli, inter se æquales erunt.

6. Si trianguli duo anguli æquales inter se fuerint: Et sub æqualibus angulis subtensa latera æqualia inter se erunt.

7. Super eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis, aliæ duæ rectæ lineæ æquales, utraq; utrique, non constituentur, ad aliud atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdemq; terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes. 1

8. Si duo triangula, duo latera habuerint duobus lateribus, utrumque utrique æqualia; habuerint vero & basim basi æqualem: Angulum quoque sub æqualibus rectis lineis contentum, angulo æqualem habebunt.

9. Datum angulum rectilineum bifariam secare.

10. Datam rectam lineam finitam bifariam secare.

11. Data recta linea, à puncto in ea dato, rectam lineam ad angulos rectos excitare.

12. Super datam rectam lineam infinitam, à dato puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam deducere.

13. Cum recta linea super rectam consistens lineam, angulos facit; Aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.

14. Si ad aliquam rectam lineam, atque ad ejus punctum, duæ rectæ lineæ, non ad easdem partes ductæ, eos qui sunt deinceps, angulos, duobus rectis æquales fecerint; in directum erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.

15. Si duæ rectæ lineę se mutuo secuerint, angulos ad verticem ęquales inter se efficient.

16. Cujuscunque trianguli uno latere producto, externus angulus utrolibet interno, & opposito major est.

17. Cujuscunq; trianguli duo anguli duobus rectis sunt minores, omnifariam sumpti.

18. Omnis trianguli majus latus, majorem angulum subtendit.

19. Omnis trianguli major angulus, majori lateri subtenditur.

20. Omnis trianguli duo latera reliquo sunt majora, quomodocunq; assumpta.

21. Si super trianguli uno latere, ab extremitatibus duę rectę lineæ interius constitutę fuerint; hę constitutę reliquis trian-

trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, majorem vero angulum continebunt.

22. Ex tribus rectis lineis, quæ sint tribus datis rectis lineis æquales, triangulum constituere. Oportet autem duas reliqua esse majores omnifariam sumptas: quoniam uniuscujuscunq; trianguli duo latera omnifariam sumpta, reliquo sunt majora.

23. Ad datam rectam lineam, datumque in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere.

24. Si duo triangula, duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, utrumque utrique; angulum vero angulo majorem sub æqualibus rectis lineis contentum: Et basim basi majorem habebunt.

25. Si duo triangula, duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, utrumque utrique; basim vero basi majorem: Et angulum sub æqualibus rectis lineis contentum, angulo majorem habebunt.

26. Si duo triangula, duos angulos duobus angulis, æquales habuerint, utrumque utrique, unumque latus uni lateri æquale, sive quod æqualibus adjacet angulis, seu quod uni æqualium angulorum subtenditur; Et reliqua latera reliquis lateribus

BREVIS TRIGONOMETRIA PLANORUM.

PROPOS. 1.

Angulus rectus B A C ad centrum circuli A constitutus; abscindit arcum B C, quartam partem totius peripheriæ. Producta enim B A, in D, & C A, in E, est CAD, etiam rectus *per defin.* 10 *primi.* & eodem modo D A E, & E A B, sunt etiam recti, ergo *per axioma* 12. æquales: unde *per 26. tertij* arcus B C, C D, D E, E B, invicem sunt æquales, est ergo B C, quarta pars totius.

PROPOS. 2.

Datus sit angulus quicunq; B A C; & centro A descriptus circulus B C D, & eodem centro A descriptus quivis alius cirlus E F G; Dico esse Arcum B C, ad totam peripheriam circuli B C D, ut est arcus E F, ad totam peripheriam circuli E F G.

Ducatur enim AD, faciens cum AC angulum rectum; eritq; *per præcedentem* tam arcus CD, quam arcus F G, quarta pars totius Peripheriæ; sed *per* 33. *sexti* tam arcus B C, eſt ad arcum C D, quam arcus E F, ad F G, ut angulus B A C, ad angulum C A D: eſt ergo ut B C, ad C D, ita E F, ad F G. ergo *per 22. quinti* erit ex æqualitate, ut B C ad totam circumferentiam, ita EF, ad totam circumferentiam.

Quoniam ergo *ex prop. 33. lib. 6.* in æqualibus circulis, anguli ad invicem eandem habent rationem, quam habent peripheriæ ſeu arcus, deſcripti tanquam centro, ex ipſo concurſu linearum angulum conſtituentium; ideo Mathematici pro menſura angulorum, aſſumunt ipſos arcus, qui deſcripti ſunt tanquam centro, ex concurſu linearum ipſum angulum conſtituentium; & quot partium eſt hujuſmodi cus, totidem partium dicitur eſſe angulus, quem idem ille arcus ſubtendit. quia autem *ex 2. propoſ. hujus* conſtat omnes arcus quibus æquales anguli inſiſtunt, eandem habere rationem ad totam circumferentiam ideo perinde refert ad quantam diſtantiam deſcribatur ille arcus qui angulũ ſubtendit, &penes quẽ anguli menſura deſumitur. Sic in ſuperiori figura arcus E F, totidem eſt partium, ſive graduum, quot partium eſt arcus B C: & idem eſt, de quocunque arcu, deſcripto ex centro A, & intercepto lateribus AB, AC, quantumlibet

libet vel productis, vel resciſſis. Dividitur porro omnis circulus apud Mathematicos in 360 partes æquales, quas partes gradus vocant, ſinguli gradus dividuntur in 60. partes æquales, quæ minuta vocantur, ſive ſcrupula prima: ſingula minuta, iterum dividuntur in 60 partes æquales, quæ vocantur ſcrupula 2. Scrupula 2. iterum dividuntur in 60 ſcrupula 3. & ſic conſequenter, ſexagenaria diviſione pergunt, quoad placuerit. Cur autem Mathematici, hunc diviſionis modum præ alijs diviſionibus elegerint, hic nihil attinet dicere, ſufficiat quod in hac diviſione, pro operationibus præſertim aſtronomicis perficiendis, multa commoda inſint, quibus aliæ diviſiones carent. Operationes pleręq; Mathematicæ, ut ſunt inveſtigare cæleſtes motus, menſurare diſtantiam, ſive aſtrorum à terra, ſive in ipſa terra, loci alicujus, vel à nobis, vel ab alio diſtantis; Horologia, vel munitiones deſignare, &c. perficiuntur per triangula: ideo Mathematici quaſdam lineas ingenioſiſſime excogitaverunt, per quas & latera triangulorum, & anguli, imo & ipſæ areæ, prout opus fuerit, ex quibuſdam datis ſive cognitis, inveſtigantur. Has ergo lineas cum eæ ad triangulorum reſolutionem ſint neceſſariæ, breviter explicare nos oportet.

DEFINITIONES. †

1. SInus alicujus arcus, eſt linea perpendicularis, cadens ab uno extremo arcus cujus dicitur ſinus, in diametrum circuli, ab altero extremo ejuſdem arcus ductam.

Coroll. 1. Duo quilibet arcus ſemicirculum conſtituentes habent unum eundemq; ſinum.

2. *Coroll.* 2. *Definit.* 2. Sinus quadrantis circuli, ſive ſinus 90 graduum, eſt circuli ejuſdem ſemidiameter: & vocatur Sinus totus ſive Radius.

3. Complementum arcus, eſt differentia qua differt idem arcus à quadrante. *Apud Autores tamen etiam ſæpe complementum arcus quadrante majoris accipitur pro reſiduo quod deeſt ad duos rectos, ſive ad* 180. *gradus.*

4. Tangens alicujus arcus, eſt recta linea diametri extremo perpendiculariter inſiſtens, altera vero ſui extremitate terminata, lineâ è centro circuli, per extremitatem arcus cujus eſt tangens, productâ.

5. Secans, eſt recta linea è centro circuli per extremitatem arcus cujus eſt ſecans produ-

producta, donec cum tangente ejusdem arcus concurrat.

6. Sinus, tangens, secans, alicujus anguli, est eadem, quæ est sinus tangens secans, arcus illius qui propositum angulum subtendit & mensurat.

7. Sinus versus alicujus arcus (*alij sagittam vocant*) est pars diametri circuli, inter extremum dati arcus, & sinum ejusdem arcus intercepta.

8. Chorda est recta linea arcum quemcumq; circularem subtendens.

Pro Harum definitionum pleniori explicatione sit Quadrans circuli A B C qui intelligatur divisus in 90. gradus, & singuli gradus intelligantur divisi in 60 scrupula 1. & sic consequenter. In hoc quadrante linea A B, quæ est latus quadrantis, sive semidiameter circuli vocatur Radius sive Sinus totus. Hæc supponatur divisa in partes aliquot, vel 100. vel 1000. vel 100000. vel plures; deinde ex puncto B, intelligatur ducta B T. perpendicularis ad lineam A B. Intelligaturque B T producta in infinitum, vel ut alij loquuntur quantum sufficit: item ex A puncto ex quo tanquam circuli centro propositus quadrans descriptus est, per singulos gradus, & per singula minuta 1. 2. &c. intelligantur aliæ lineæ ductæ, quæ producantur donec concurrant cum linea B T; quales in proposita figura sunt lineæ A E, A F, A G, dicenturque eædem lineæ, secantes eorundem graduum per quos transeunt. Sic linea A E, quę quadrantem secat in gradu 70 vocatur secans 70. graduum, linea A F, quia quadrantem secat in gradu 60. vocatur secans 60. graduum, & sic de reliquis. Tangentes autem accipiuntur in linea B T, incipiendo à puncto B, & reliquam lineam accipiendo usquè ad occursum alicujus secantis, vocaturq; tangens totidem graduum, quot graduũ dicitur illa secans, cui tangens occurrit. Sic linea B E. vocatur tangens 70. graduum, linea B F est secans 60 graduum, quia hæc occurrit secanti 60 graduum, illa secanti graduum 70, & sic de reliquis. Iterum in eodem quadrante A B C. ex singulis gradibus & scrupulis peripheriæ quadrantis, intelligantur demissæ perpendiculares ad sinum totum, sive ad radium A B, quales in hac figura sunt lineæ I L, M N, K P, vocantur hujusmodi perpendiculares sinus primi, sive sinus recti, sive simpliciter Sinus totidem graduum, quot graduum est ille arcus, ex cujus extremo illæ perpendiculariter dimittuntur; sic linea I L, dicitur sinus 30. grad. quia dimittitur ex extremo arcus 30. graduum, sic linea MN. est sinus 45. graduum, & linea K P. est sinus

nus 60. grad. & sic de reliquis. Iterum in eodem quadrante A B C, ex singulis gradibus, & minutis, intelligantur ductæ rectæ lineæ ad angulos rectos, ad sinus rectos eorundem graduum & minutorum, quales sunt rectæ KD, M R, I H, Vocantur hujusmodi lineæ sinus cõplementi eorundẽ graduum sic linea K D est sinus cõplementi 60 graduũ, & linea MK est sinus complementi gradium 45. linea I H est sinus complementi 30. graduum & sic de reliquis: Quod si vero numerationem graduum in eodem quadrante inchoamus, non in puncto B sed in puncto C. tunc gradus qui facto numerationis initio in B fuit 70, erit 20, facto numerationis initio in C; & secundum hunc modum numerandi, linea K D, erit sinus 30. graduum, linea vero K P, erit sinus complementi graduum 30. unde patet quod est idem esse sinum 30. graduũ sive esse sinum complementi gradnum 60. numeri scilicet qui deest ad quadrantem, sive ad gradus 90. Est enim complementum cujusvis arcus, sive anguli, differentia, qua arcus semicirculo minor differt à quadrante, *ut habet definitio* 3. sic arcus 80 graduum complementum, est arcus graduum 10, quia 80, distat gradibus 10, à 90. Item arcus 100 graduum complementum etiam est 10. quia centum superat 90 gradus, gradibus 10. & sic de reliquis: rarius autem est usus complementorum superantium quadrantem, sæpissime vero est usus complementi, quod deest ad complendum quadrantem, sive 90 gradus. Valde autem notandum est, duos quosvis arcus, qui simul sumpti, complent medium circulum, sive 180. gradus, habere eundem sinum, *ut dicitur in Coroll. 1. definitionis primæ.* sic sinus 30, graduum, est etiam sinus graduum 150, quia 150, cum 30 gradibus, faciunt 180, sive medium circulum. una ergo eademq; linea subit tria munia, & tres denominationes, sic linea L I, est sinus 30 graduũ, eadem est sinus graduum 150, eadẽ est sinus cõplementi 60 graduum. His prænotatis pro intellectione definitionũ, sequitur Tabularũ explicatio.

Tabulæ sinuum, tangentium, & secantium, nihil aliud sunt quam tabulæ exhibentes in numeris, proportiones omnium prædictarum linearum ad invicem, sunt enim hoc modo computatæ. Radius sive sinus totus, sive circuli cujuscunque semidiameter, ponitur divisa in partes æquales tot, quot placuerit, & quæritur quot tales partes, æquales partibus radij, contineat quævis sinus, aut secans, aut tangens. Propter facilitatem autem majorem, tam in computu tabularum, quam in usu illarum, radius semper ponitur divisus in partes quæ exprimuntur unitate cum aliquot cifris, ut in 100. in 1000. 10000. 100000. &c.

Tabulæ quas adjungimus computatæ sunt ratione radij divisi in 100000 partes. In superiori ergo figura linea AB. divisa intelligatur in 100000 partes, si quæram quanta sit linea BF, tangens scilicet gradum 60. inveniam eam continere partes 173205. linea vero AF, secans eorundem 60 graduum, continet partes 200000, tales scilicet, quales AB continet 100000: est ergo linea AF, dupla ipsius AB, linea vero KP, sinus 60 graduum, continet 86603. Continet porro unaquæque pagina tabularum quatuor columnas, in prima columna continentur gradus & minuta, quæ per sena progrediuntur, & in pagina quidem sinistra deorsum, in dextra vero pagina sursum crescunt, qua dispositione habetur, ut pagina altera, semper alterius complementum exhibeat, aliæ tres columnæ continent sinus, tangentes, & secantes, gradibus & minutis primæ columnæ competentes. Quod si operatio sit hujusmodi, ut non requirat tam magnos numeros, quanti sunt illi qui in tabulis exhibentur; possumus, servata nihilominus inter eos proportione, eos minuere, quantum placuerit, reijciendo ſcilicet aliquot notas poſteriores verſus dexteram, hoc modo *Exempli gratia* vellem habere ſinum, tangentem, & ſecantem 25 gr. reſpectu radij ſolum 1000 partium, quia ergo ex radio 100000 poſito in tabulis, reijcio duas notas, ſcilicet 00. ut remaneat ſolum 1000, debeo ſimiliter ex ſinu, tangente, & ſecante repertis in tabulis; abijcere duas ultimas notas verſus dextram, tunc reſiduus numerus, dabit ſinum, tangentem, & ſecantem, quas quærebam, reſpectu radij ſolum 1000 partium. *In exemplo poſito,* ſinus 25gr. in tabulis ponitur 42262, reijcio duas poſtremas notas ſcilicet 62, & remanent 422, ſinus quæſitus reſpectu radij mille partium, ſic abjectis 31 duabus poſtremis notis, è tangente, remanet tangens 466 partium; ex ſecante abjectis 38, remanet ſecans 1103 partium. Quod ſi ex radio ſolum unicam ultimam notam abjeciſſem, etiam unica ultima nota ex alijs lineis foret reijcienda, ſi ex radio tres notas abijcerem, etiam ex alijs lineis tres notæ eſſent abijciendæ, & ſic conſequenter. Hoc quidem modo operandi exhibentur ſinus, tangentes, & ſecantes ſemper juſto minores, propter hanc tamen notarum abjectionem, nunquam plus unitate differunt à veris: minus autem different à

ve-

veris, hoc modo, si prima nota versus sinistram ex rejectis, major fuerit quam 5, tunc ad numerum relictum addatur unitas; si vero fuerit vel quinque vel minus quam 5, nihil addatur. Sic in exemplo posito, ex sinu rejecimus 62, cujus prima nota est major quam 5, ideo ad numerum relictum 422, addo unitatem, ut sinus fiat 423, quæ quidem erit major verâ, sed ne quidem media unitate. in tangente vero & secante, nihil addendum, quia utrobiq; prima nota abjectarum minor est quam quinque; & sunt quidem tangens & secans, minores veris; à veris tamen non differunt media unitate. est ergo horum numerorum 1000, 423, 466. 1103, eadem proportio, quæ est istorum 100000. 42262, 46631, 110338, quantum ea in numeris integris haberi potest. Et eadem est ratio de usu aliarum tabularum, quæ pro multo adhuc majori radio computatæ sunt.

Pro usu porro tabularum, & triangulorum resolutione quædam adhuc propositiones sunt præmittendæ.

PROPOSITIO 3.

Datis cujuscunque Trianguli duobus angulis habetur tertius, & dato uno angu-

lo, habetur aggregatum duorum reliquorum.

DAtum esse angulum hic intelligimus, quando habetur quot graduum vel minutorum sit angulus propositus. In triangulo ergo A B C, dati sint, angulus A 35°. 40', & angulus B 30°, 15': addantur simul duo dati anguli, proveniunt 65°, 55'. quoniam autem *per* 32. *primi* cujuscunq; trianguli, omnes tres anguli simul sumpti æquivalēt duobus rectis, hoc est simul sumpti tres arcus, subtendētes angulos tres cujuscunq; trianguli, cōficiunt mediū circulū, hoc est 180 grad. si subtrahantur duo anguli dati ex 180, residuum dabit angulum tertium quæsitum, in hoc ergo casu subtractis 65°. 55', ex 180, sive ex 179°, 60', remanent 114°, 5', quantitas anguli tertij. Ob eandem causam, si unus angulus subtrahatur ex 180, residuum erit aggregatum duorum reliquorum.

Si sciatur quod triangulus propositus est rectangulus, sufficit nosse quemcunq; acutorum, hoc ipso enim noscuntur duo, rectus scilicet, cujus arcus est quadrans, hoc est 90 grad. & alter acutus qui datur.

Loco medio scribendi 30°: 40'. *positum est* *apud*

apud Astronomos, numerus autem ille cui o superponitur vel cui nulla nota superponitur significat gradus, cui vero superperponitur | significat minuta sive scrupula prima, cui || denotat scrupula 2. & sic consequenter. Sic hic numerus $20 : 25' . 30'' . 40'''$ *. significat* 20. *gradus,* 25. *scrupula prima,* 30. *scrupula secunda,* 40. *scrupula tertia.*

PROPOSITIO. 4.

In omni triangulo rectilineo latera quævis duo, se habent ad invicem ut sinus angulorum ipsis oppositorum.

PRimo Datum sit triangulum A B C, rectangulum ad A si radius sit C D, quæ est æqualis CB, erit B A sinus arcus B D, sive anguli C *per* 1. *&* 6. *def.* posita vero B E pro radio, quæ etiam est æqualis BC, erit C A sinus arcus C E, sive anguli CBE. ergo.

Secundò Datum sit triangulum non rectangulum D E F, & centro F intervallo F E, descriptus arcus E G, & ex puncto E demissa perpendicularis E H, erit E H sinus arcus E G, *per def.* 1. hoc est anguli F *per def.* 6. sit deinde producta D E in I, ut D I, sit æqualis F G, & centro D, intervallo D I, descriptus arcus I K, & ex puncto I demissa perpendicularis I L, erit I L sinus anguli D, respectu radij D K, qui est æqualis radio FG, sed est ut DE ad DI, ita EH ad IL *per 4. sexti*: DI autem *per constructionem* est æqualis FG, sive FE, ergo ut DE latus subtendens angulum F, ad EF latus subtendens angulum D; ita EH sinus anguli F, ad IL sinum anguli D.

Quod si loco anguli acuti D, demonstrandum sit de angulo obtuso EMF, tunc producatur FM & centro E, apertura EM; describatur arcus MD secans productam FM in D, ducaturq; ED eritq; ED æqualis lineæ EM, erit igitur angulus D, æqualis angulo EMD, *per 5. pri.* ac proinde IL quæ est sinus anguli D, erit etiam sinus anguli EMD, respectu scilicet ejusdem radij FE supra positi: sed anguli EMD, EMF, habent eundem sinum *per coroll. 1. def. prima*, ergo erit iterum ut IL sinus anguli EMF, ad EH sinum anguli F, ita EF latus oppositum angulo EMF, ad EM latus oppositũ angulo F ergo universim, &c.

Ex his propositionibus deducuntur praxes resolutionis triangulorum rectilineorum.

Doceamus itaque aliquot exemplis ex adjunctis tabulis ipsas lineas aut arcus quorum fuerit usus, invenire.

1.

Dati arcus quadrante minoris, sinum invenire.

Arcus

ARcus omnes usq; ad arcum medij quadrantis sive 45. graduum notati habentur in prima columna sinistræ pagellæ cum minutis adjectis, in proxima columna habetur sinus cuiq; gradui & minuto primæ columnæ correspondens sic folio 233. invenio sinum 23, 18′. 39555. Reliqui gradus à 45. ad 90. à fine versus initium redeundo inveniuntur, in prima colũna dextræ pagellæ. Adjectà minuta supra gradũ datũ accipi debent: & sic etiam in proxima columna, adjacet sinus ipsis cõpetens, sic in prima facie folij 234 invenio sinum correspondentem *66*, 42′. esse *9*1845 sunt autem *66*, 42′ complementum 23 & 18′ qui in opposita pàgella è regione reperiuntur gradus enim unius pagellæ, semper sunt complementum graduum in altera pagella sibi opositorum.

2.

Sinum complementi arcus quadrante minoris reperire.

CUm complementum ut dictum est *defin.* 3. sit differentia qua arcus aliquis differt à quadrante; inveniantur gradus quibus datus arcus differt à quadrante, sinus ipsis competens, erit sinus quæsitus.

3.

Sinus arcus quadrante majoris reperire.

CUm *per Coroll.* 1. *definitionis* 1. duo quilibet arcus semicirculum constituentes habeant unum eundemque sinum, quærantur gradus quibus arcus propositus differt à semicirculo, & sinus ipsis competens, erit sinus quæsitus.

4.

Sinum versum arcus invenire.

SI arcus est quadrante minor, detrahe ejus sinum complementi à sinu toto, residuum erit sinus versus, si verò arcus est quadrante major, sed tamen semicirculo minor adde ejus sinum complementi sinui toti, conflatum ex utroque, erit sinus versus quæsitus. 5.

Ex sinu cognito arcum correspondentem cognoscere.

QUia idem sinus competit duobus arcubus, ut ex ipso sinu cognito, determinetur arcus, oportet præterquam datus sit sinus, etiam datam esse saltem speciem arcus quæsiti, hoc est, an sit quadrante major, vel minor, si itaque arcus fuerit quadrante minor, quære sinum datum in tabulis & in columna gradduum adjacente, indicabitur quantitas arcus quæsiti. Si verò arcus fuerit quadrante major, gradus jam dicto modo reperti, detrahantur ex semicirculo, residuum erit quantitas arcus quæsiti.

Quod si sinus datus præcise non inveniatur inter sinus tabulæ, signum est neque

arcus

arcum præcise quæsitum in ipsa tabula reperiri; sumendus itaq; sinus proximè major, vel *minor numero dato, & sic etiam* arcus correspondens, erit arcus proximè major vel minor arcu quæsito. Si tamen cupis arcum præcisiorem, cape differentiam inter sinum proximè majorem, & proximè minorem, item differentiam inter sinum propositum, & illum in tabula repertum à quo minus differt, & dic si differentia inter duos sinus in tabula repertos, dat 6 minuta addenda arcui sinus proximè minoris, *ut habeatur arcus* sinus proxime majoris; vel subtrahenda ab arcu sinus proximè majoris, ut habeatur arcus sinus proximè minoris? quot minuta postulat differentia inter sinum propositum, & sinum proximè minorem, vel majorem, addenda arcui sinus proximè minoris, vel auferenda ab arcu sinus proxime majoris, ut habeatur arcus sinus propositi. Nam hæc minuta juventa, addita arcui sinus proximè *minoris* (si propositus sinus paucioribus unitatibus ab hoc differt) vel ablata ab arcu sinus proximè majoris, (si ab hoc minus distat sinus propositus) dabunt arcum sinus propositi magis præcisum. Hac methodo, habitis tabulis plenioribus, in quibus habentur omnia minuta, si quis solis minutis contentus esse nolit,

lit, sed etiam ipsa secunda habere desideret, poterit, juxta præscriptum modum operando, etiam ipsa secunda invenire, & ea est causa cùr eam hic judicaverim explicandam.

6.

Ex sinu complementi dato, arcum colligere.

OPortet insuper scire, an arcus quæsitus sit quadrante major, vel minor, propter rationem datam in praxi præcedenti. Si itaque arcus quæsitus fuerit quadrante minor, inveniatur in tabula sinus datus, & gradus in opposita pagella, dicto sinui correspondentes, erunt quantitas arcus quæsiti. Si vero arcus quæsitus fuerit quadrante major: juvento sinu proposito in tabella, gradus in eâdem pagellâ ipsi correspondentes, detrahantur ex semicirculo, residuum erit arcus quæsitus.

7.

Ex sinu verso cognito, arcum cognoscere.

SI datus sinus versus minor est Radio, detrahe eum ex Radio, residuum erit sinus complementi ipsius arcus quæsiti, quem propterea invenies *per praxim præcedentem.* Si vero sinus versus datus fuerit major Radio, detrahe Radium ex sinu verso dato, remanebit sinus arcus qui quadranti adjectus, arcum quæsitum conficiet.

8. Chor-

8.

Chordam cujuscumq; arcus, & contra arcum chordæ cujuscumq; reperire.

SI dimidij arcus propositi sinus accipiatur, & duplicetur, habebitur chorda dati arcus. Item si datæ chordæ accipiatur dimidium, & per columnam sinuum quæratur arcus tali sinui competens, dabit hic arcus duplicatus, arcum datæ chordæ respondentem.

Ex his facile est colligere modum, ex tabulis Tangentium & secantium, vel Tangentes vel secantes, vel arcus ipsis competentes prout opus fuerit quærendi, & inveniendi.

Sequentes praxes docent ipsam triangulorum resolutionem & primo de Rectangulis.

Nota primo per Basim semper hic intelligi latus angulo majori oppositum.

Nota secundo. Ipsam operationem, ut peragi debet secundum regulam proportionis Arithmeticam, diverso charactere impressam esse, ut omissa demonstratione, statim pateat quomodo ipsa operatio sit peragenda, in qua membrum quarto loco positum semper est ipsum quæsitum.

9.

Habentur proportiones laterum; Ex datis omnibus angulis cujusvis trianguli.

Singulis enim lateribus adscribantur sinus angulorum oppositorum, latera enim easdem habent proportiones quam dicti sinus *per* 4.

10.

Invenitur latus quodlibet, ex data base & alterutro angulorum acutorum in triangulo rectangulo A B C.

Data enim sit basis A C, cum angulo A, habebitur ergo etiam angulus *C per* 3. & quia est *per* 4. Vt radius, ad sinum anguli appositi lateri quæsito; ita basis A C, ad latus quæsitum, erit *permutando.*

V: radius --	--	*ad Basem AC.*
Ita sinus alterutrius anguli.	--	*ad latus eidem angulo oppositum.*

11.

Invenitur latus ex data base, & altero latere.

Sit in eodem triangulo A B C, data basis A C, & latus A B, quia est ut A C ad A B; ita radius ad sinum anguli C *per* 4. erit *permutando*

Vt A C basis data -- *ad Radium*

ita

ita A B latus datum	*ad sinum anguli C.*

Invento ergo in numeris sinu anguli C, quæratur inter sinus dictus numerus, & habebitur quantitas anguli C, & simul angulus A *per* 3. unde reliqua invenientur *per præcedentem.*

12.

Ex uno latere dato, & uno angulo acuto, ac proinde etiam altero, invenitur alterum latus.

IN eodem enim triangulo A B C, posito quocunque latere pro radio, alterum latus est tangens anguli sibi oppositi *per* 4. *def.* latus ergo quæsitum sit A B quia est ut Radius, ad tangentem anguli C, ita C B latus datum, ad A B latus quæsitum; erit *permutando*

Vt radius -- --	*ad C B latus datum*
ita tangens anguli C. --	*ad A B latus quæsitum.*

13.

EX iisdem datis invenitur basis, quia posito C B pro radio, basis A C est secans anguli C; posito vero A B pro radio, eadem A C est secans anguli A *per* 5. *definit.* erit ergo *permutando* ut supra

Vt

Vt Radius	-- --	*ad C B latus datum*
ita secans anguli C.	-- --	*ad A C basim quæsitam.*

14.

E*X dato utroq; latere, inveniuntur anguli acuti, & deinde per præcedentem invenitur basis*, Erit enim ut supra *permutando*

Vt latus A B	-- --	*ad radium*
ita latus B C	-- --	*ad tangentem anguli A*

Quæratur ergo tangens sic inventa inter tangentes, & correspondebit ipsi in gradibus quantitas anguli A, cujus complementum est Angulus C, habitis ergo angulis, quæratur basis A C *per præcedentem*.

15.

E*X data Base & uno latere inveniuntur anguli, & alterum latus*, erit enim ut supra *permutando*

Vt Basis	-- --	*ad Radium*
Ita latus datum	-- --	*ad sinum anguli dato lateri oppositi*

Invento itaque dicto sinu, ex tabulis invenietur

venietur angulus ipsi competens, & complementum erit angulus alter: quibus habitis *per* 12. *praxim* invenitur alterum latus.

De Triangulis Rectilineis non rectangulis.

16.

Sit triangulum L O P, nullum habens angulum rectum, datum sit unum latus, & duo anguli, & notum sit cui angulo latus datum opponatur. tertius angulus innotescit per 3 hujus, *reliqua duo latera sic habentur*, latus datum sit L P quia est *per* 4. *hujus*, ut sinus anguli O, ad sinum anguli P; ita latus L P, ad latus L O, *permutando* fiat.

Ut sinus anguli O -- ad latus L P
ita sinus anguli P -- ad latus L O quaesitum

Eodem modo invenietur latus OP.

17.

Ex duobus lateribus & angulo uni eorum opposito; si constet species anguli, alteri dato lateri oppositi, invenientur reliqui duo anguli, & tertium latus.

Datum

Datum sit latus L P, & latus L O; & angulus O oppositus sit lateri L P, erit iterum *permutando*

Vt Latus L P --	*ad sinum anguli O*
ita Latus L O --	*ad sinum anguli P*

Invento igitur sinu anguli P ex tabulis, habebitur ipse angulus P, & reliqua *per praxim 16.*

18.

Ex datis tribus lateribus inveniuntur segmenta à perpendiculari facta.

TRianguli A B C data sint tria latera, inquirendum sit in quod punctum lateris B C, cadat A D perpendicularis ex Angulo A demissa, quæ aliquando cadit intra triangulum, ut in prima figura, aliquando extra ut in 2. fiat

Vt latus B C In quod cadit perpendicularis	*ad summam duorum aliorum laterum*
Ita differentia eorundem duorum laterum.	*ad quartum aliquem numerum*

Si quartus numerus inventus minor est latere in quod cadit perpendicularis, signum est perpendicularem cadere intra ipsum triangulum : auferendus ergo erit dictus quartus numerus inventus ex dicto latere;

latere, semissis enim reliqui numeri, dabit segmentum minus: quod ex toto latere subductum, relinquet segmentum majus. Si verò quartus numerus inventus, major est látere in quod cadit perpendicularis, signum est perpendicularem cadere extra triangulum: auferendum ergo erit illud latus, ex quarto numero invento: semissis enim reliqui numeri, dabit segmentum exterius interjectum inter ipsam perpendicularem, & ipsum triangulum.

Pro Demonstratione, Ex A ad intervallum minoris lateris A B, descriptus sit circulus, secans majus latus A C in F, idemque productum in G: & latus B C, si perpendicularis intra triangulum cadit, vel certe si extra cadit, ipsum productum in E, sectaq; erit recta BE, bifariam in D *per 3 tertij.* quia verò rectangulum sub B C, C E, æquale est rectangulo sub G C, C F, *per coroll.* 1. *propositionis 36 tertij*, erit ut B C latus in quod perpendicularis cadit, ad G C summam aliorum laterum, ita C F differentia eorundem laterum, ad C E: quare quando C E est minor quam B E latus in quod perpendicularis cadit, *ut est in prima figura*, ablata C E ex B C, residuum est B E, cujus dimidium D B, est segmentum minus &c:

K *ut di-*

ut dictum est in praxi. Quando vero C E, est major quam latus C B, *ut est in 2 figura*, ablato latere B C, ex C E, residuum est B E, cujus dimidium est D B, segmentum exterius interjectum inter ipsam perpendicularem, & ipsum triangulum, *quod etiam in praxi dictum fuit & erat demonstrandum.*

19.

Ex datis tribus lateribus inveniuntur tres anguli.

INtelligatur ducta perpendicularis ex angulo, maximo lateri opposito, ut scilicet perpendicularis semper cadat intra triangulum *ut fit in primâ figura praxis praecedentis*, & inveniantur segmenta duo maximi lateris *per eandem praxim praecedentem*, hoc est C D, & B D, quare *per praxim* 15 invenietur & angulus C trianguli A D C, & angulus B trianguli A D B; addantur ergo simul anguli B & C, & residuum ad duos rectos dabit angulum B A C *per* 3.

20.

Ex tribus datis lateribus invenitur perpendicularis.

Per

P*Er praxim enim* 18. invenitur C D, & AC est latus datum, unde *per praxim* 11 invenitur A D tertium latus trianguli A D C, quod idem est cum perpendiculari quæsita.

21.

Ex datis duobus lateribus, & angulo ab ipsis comprehenso, tertium latus invenitur.

SI data duo latera sint invicem æqualia, res est facilis, subtracto enim angulo dato ex 180, residuum dabit summam reliquorum duorum angulorum *per* 3 *hujus* sunt autem dicti duo reliqui anguli invicem æquales *per* 5 *primi*, dimidium ergo dictæ summæ dabit unumquemque illorum; quare omnes tres anguli erunt noti; quare *per praxim* 16 invenietur latus ignotum. Quod si datus angulus sit rectus erit casus positus *in praxi* 14. Si verò latera sint inæqualia & angulus non rectus fiat.

Vt semissis aggregati duorum laterum datorum	*ad tangentem semissis aggregati duorum angulorum ignotorum,*

ita differentia inter semissem aggregati duorum laterum datorũ, & utrumlibet laterum	*ad tangentem differentiæ inter semissem aggregati duorum angulorum ignotorum, & alterutrum illorum.*

Unde arcus qui ex tabulis tangentium, invenietur correſpondere huic tangenti; hoc modo inventæ, additus ad ſemiſſem aggregati duorum angulorum ignotorum. dabit angulum majorem, vel ſubtractus ex eadem ſemiſſe dabit angulum minorem, invento ergo hoc modo alterutro angulorum ignotorum, tertius etiam habetur *per* 3 *hujus*, quibus habitis latus quod quærebatur invenietur *per prax.* 16.

Lemma ſubſerviens demonſtrationi hujus praxis.

SI *Diameter A C chordam quamlibet BD ſecuerit in E quomodocunq;, ejusq; arcum B A D, in A, vel B C D, in C, Dico ſegmentum chordæ B E eſſe ad ſegmentum E D, ut ſinus arcus B C* (qui idem eſt cum ſinu arcus B A *per coroll.* 1. *prima def.*) *ad ſinum arcus A D.* Ex B enim & D, demittantur B F, D G perpendiculares ad diametrum

metrum A C; eritq; B F sinus arcus B C & D G sinus arcus D A *per* 1. *def.* & propter similitudinem triangulorum B E F, DEG: erit ut B E ad ED ita B F, ad D G *per* 4. *sexti*.

Demonstratio praxis præcedentis.

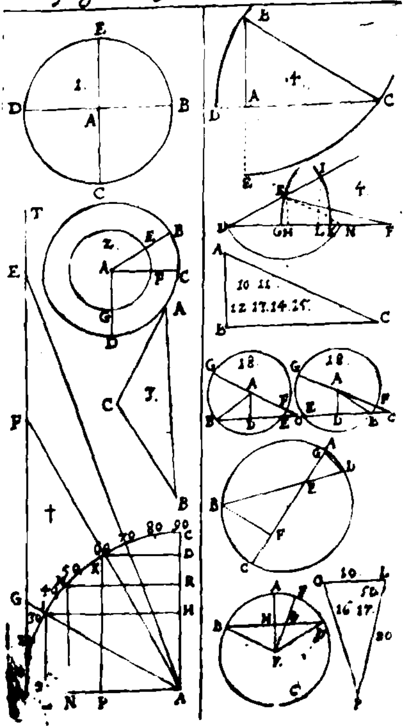
IN triangulo L O P, data sint latera, L O partium 10, & L P partium 20, & angulus L graduum 50. aggregatum ergo duorum angulorum O, P, simul, erit 130 *per* 3 *hujus*. In circulo A B C D cujus centrum sit E, angulus B E D sit 130 graduum, hoc est quantum est aggregatum angulorum P & O simul, ductâ chordâ B D, dividatur B D in G, ut sit, ut latus L P, ad latus L O, ita B G ad G D, *per* 10 *sexti* & ex centro E, educta E G, producta sit in F; Dico angulum B E F æqualem esse angulo O trianguli propositi, & angulum F E D, æqualem esse angulo P ejusdem trianguli. Est enim *per lemma præcedens* ut B G ad G D, ita sinus anguli B E F, ad sinum anguli F E D, sed ut B G ad G D, ita latus L P, ad latus L O *per constructionem*; ergo ut latus L P ad latus L O ita sinus anguli B E F ad sinum anguli F E D; ergo *per* 4 *hujus* sinus angulorum B E F, & F E D sunt etiam sinus angulorum O & P, ac proinde anguli B E F, & F E D, sunt æquales angulis O & P: quare inventis angulis B E F, F E D, etiam inventi erunt anguli O & P; illos autem sic inveniemus, Quoniam data est proportio lateris L P, ad latus L O, ut 20 ad 10, erit etiam proportio B G ad G D ut 20 ad 10, posita ergo B G 20, G D erit 10, & tota B D erit 30, divisa deinde tota B D bifariam in H, productaque E H in A, erit totus arcus B A D, divisus bifariam in A, *ut patet ex demonstratione* 30 *tertij*, eritque utraque B H, H D 15, & differentia inter semissem totius B D, & utrumlibet segmentum, scilicet, linea H G erit 5; quia autem totus arcus B A D, ponitur 130 erit utraq; semissis B A, B D, *65*, ac proinde etiam uterq; angulus B E A, A E D erit quoq; graduum *65* *per dicta ad propositionem* 2, & quoniam, posito E H pro radio, H B est tangens anguli B E H, & H G tangens anguli H E G *per def.* 4. dabitur ex tabulis tangentium ad gradum *65*, ipsa BH partium 214451 quare ut tangentem anguli H E G inveniamus, scilicet H G, in partibus homologis cum partibus tangentis B A, fiat.

Vt

Vt BH 15. semissis totius BD, hoc est aggregati terminorum proportionis datæ. --	*ad BH 214452 tangentem semissis aggregati angulorum BEF, FED.*
Ita HG 5 differentia inter semissem aggregati terminorum proportionis datæ, & utrumlibet eorundem terminorum. --	-- *ad HG 71484 tangentem anguli AEF qui est differentia inter angulos BEF, FED.*

Ex tabula ergo, tangentium elicietur angulus AEF 35 gr. 34 min. ferè, qui additus ad 65, semissem scilicet aggregati angulorum BEF, FED dabit angulum majorem BEF, qui ostensus est æqualis angulo O. & reliqua *ut in praxi dictum est, & erat demonstrandum.*

A pagina 193.a ad 224 am 10.



TABU-

TABULÆ
SINUUM
TANGENTIUM
ET
SECANTIUM

Ad partes radij 100000.
per Sex prima ſcrupula
graduum.

	Sinus	Tangens	Secans
0	0	0	100000
6	175	175	100000
12	349	349	100001
18	524	524	100001
24	698	698	100002
30	873	873	100004
36	1047	1047	100005
42	1222	1222	100007
48	1396	1396	100010
54	1571	1571	100012
	*	*	*
1	1745	1745	100015
6	1920	1920	100018
12	2094	2095	100022
18	2269	2269	100026
24	2443	2444	100030
30	2618	2619	100034
36	2792	2793	100039
42	2967	2968	100044
48	3141	3143	100049
54	3316	3317	100055
	*	*	*
2	3490	3492	100061
6	3664	3667	100067
12	3839	3842	100074
18	4013	4016	100081
24	4188	4191	100088
30	4362	4366	100095
36	4536	4541	100103
42	4711	4716	100111
48	4885	4891	100120
54	5059	5066	100128

	Sinus	*Tangens*	*Secans*
90	0	0	0
54	99999	57295720	57295809
48	99999	28647774	28647948
42	99999	19098419	19098681
36	99998	14323712	14324061
30	99996	11458865	11459301
24	99995	9548948	9549471
18	99993	8184704	8185315
12	99990	7161507	7162205
6	99988	6365674	6366460
	*	*	*
89	99985	5728996	5729869
54	99982	5208067	5209027
48	99978	4773950	4774997
42	99974	4406611	4407746
36	99970	4091741	4092963
30	99966	3818846	3820155
24	99961	3580055	3581452
18	99956	3369351	3370835
12	99951	3182052	3183623
6	99945	3014462	3016120
	*	*	*
88	99939	2863625	2865371
54	99933	2727149	2728981
48	99926	2603074	2604994
42	99919	2489783	2491790
36	99912	2385928	2388022
30	99905	2290377	2292559
24	99897	2202171	2244440
18	99889	2120495	2122852
12	99881	2044649	2047093
6	99872	1974029	1976560

	Sinus	Tangens	Secans
3	5234	5241	100137
6	5408	5416	100147
12	5582	5591	100156
18	5756	5766	100166
24	5931	5941	100176
30	6105	6116	100187
36	6279	6291	100198
42	6453	6467	100209
48	6627	6642	100220
52	6802	6817	100232
	*	*	*
4	6976	6993	100244
6	7150	7168	100257
12	7324	7344	100269
18	7498	7519	100282
24	7672	7695	100296
30	7846	7870	100309
36	8020	8046	100323
42	8194	8221	100337
48	8368	8397	100352
54	8542	8573	100367
	*	*	*
5	8716	8749	100382
6	8889	8925	100397
12	9063	9101	100413
18	9237	9277	100429
24	9411	9453	100446
30	9585	9629	100463
36	9758	9805	100480
42	9932	9981	100497
48	10106	10158	100515
54	10279	10334	100533

	Sinus	Tangens	Secans
87	99863	1908114	1910732
54	99854	1846447	1849153
48	99844	1788631	1791424
42	99834	1734315	1737196
36	99824	1683191	1686159
30	99813	1634986	1638041
24	99803	1589454	1592597
18	99792	1546381	1549611
12	99780	1505572	1508890
6	99768	1466853	1470258
	*	*	*
86	99756	1430067	1433559
54	99744	1395072	1398650
48	99731	1361741	1365408
42	99719	1329957	1333712
36	99705	1299616	1303458
30	99692	1270620	1274549
24	99678	1242883	1246900
18	99664	1216324	1220427
12	99649	1190868	1195060
6	99635	1166450	1170728
	*	*	*
85	99619	1143005	1147371
54	99604	1120478	1124932
48	99588	1098815	1103356
42	99572	1077967	1082596
36	99556	1057890	1062605
30	99540	1038540	1043343
24	99523	1019879	1024770
18	99506	1001871	1006849
12	99488	984482	989547
6	99470	967680	972833

	Sinus	Tangens	Secans
6	10453	10510	100551
6	10626	10687	100569
12	10800	10863	100588
18	10973	11040	100608
24	11147	11217	100627
30	11320	11394	100647
36	11494	11570	100667
42	11667	11747	100688
48	11840	11924	100708
54	12014	12101	100730
	*	*	*
7	12187	12278	100751
6	12360	12456	100773
12	12533	12633	100795
18	12706	12810	100817
24	12880	12988	100840
30	13053	13165	100863
36	13226	13343	100886
42	13399	13521	100910
48	13572	13698	100934
54	13744	13876	100958
	*	*	*
8	13917	14054	100983
6	14090	14232	101008
12	14263	14410	101033
18	14436	14588	101059
24	14608	14767	101084
30	14781	14945	101111
36	14954	15124	101137
42	15126	15302	101164
48	15299	15481	101191
54	15471	15660	101219

	Sinus	Tangens	Secans
84	99452	951436	956677
54	99434	935724	941052
48	99415	920516	925931
42	99396	905789	911292
36	99377	991520	897111
30	99357	877689	883367
24	99337	864275	870041
18	99317	851259	857113
12	99297	838625	844566
6	99276	826355	832384
	*	*	*
83	99255	814435	820551
54	99233	802848	809052
48	99211	791582	797873
42	99189	780622	789001
36	99167	769957	775424
30	99144	759576	766130
24	99122	749465	756107
18	99098	739616	746346
12	99075	730018	736835
6	99051	720661	727566
	*	*	*
82	99027	711537	718539
54	99002	702637	709717
48	98978	693952	701120
42	98953	685475	692731
36	98927	677199	684542
30	98902	669116	676547
24	98876	661219	668738
18	98849	553503	661110
12	98823	645960	653655
6	98796	638587	646369

	Sinus	Tangens	Secans
9	15643	15838	101247
6	15816	16017	101275
12	15988	16196	101303
18	16160	16376	101332
24	16333	16555	101361
30	16505	16734	101391
36	16677	16914	101420
42	16849	17093	101450
48	17021	17273	101481
54	17193	17453	101512
	*	*	*
10	17365	17633	101543
6	17537	17813	101574
12	17708	17993	101606
18	17880	18173	101638
24	18052	18353	101670
30	18224	18534	101703
36	18395	18714	101736
42	18567	18895	101769
48	18738	19076	101803
54	18910	19257	101837
	*	*	*
11	19081	19438	101872
6	19252	19619	101906
12	19423	19801	101941
18	19595	19982	101977
24	19766	20164	102013
30	19937	20345	102049
36	20108	20527	102085
42	20279	20709	102122
48	20450	20891	102159
54	20620	21072	102196

	Sinus	Tangens	Secans
81	98769	631375	639245
54	98741	624321	632279
48	98714	617419	625464
42	98686	610664	618797
36	98657	604051	612273
30	98629	597576	605886
24	98600	591236	599633
18	98570	585024	593509
12	98541	578938	587511
6	98511	572974	581635
	*	*	*
80	98481	567129	575877
54	98450	561397	570234
48	98420	555776	564701
42	98388	550264	559277
36	98357	544857	553958
30	98325	539552	548741
24	98294	534345	543622
18	98261	529235	538600
12	98229	524219	533671
6	98196	519293	528834
	*	*	*
79	98163	514455	524084
54	98129	509704	519421
48	98096	505037	514842
42	98061	500451	510344
36	98027	495945	505926
30	97992	491516	501585
24	97958	487162	497320
18	97922	482882	493128
12	97887	478673	489007
6	97851	474[illegible]	[illegible]

230	*Sinus*	*Tangens*	*Secans*
12	20791	21256	102234
6	20962	21438	102272
12	21132	21621	102311
18	21303	21804	102349
24	21474	21986	102388
30	21644	22169	102428
36	21814	22353	102468
42	21985	22536	102508
48	22154	22719	102548
54	22325	22903	102589
	*	*	*
13	22495	23087	102630
6	22665	23271	102672
12	22835	23455	102714
18	23005	23639	102756
24	23174	23823	102799
30	23345	24008	102842
36	23514	24193	102885
42	23684	24377	102928
48	23853	24562	102972
54	24023	24747	103017
	*	*	*
14	24192	24933	103061
6	24361	25118	103106
12	24531	25304	103152
18	24700	25490	103197
24	24869	25676	103244
30	25038	25862	103290
36	25207	26048	103337
42	25376	26235	103384
[illegible]	25545	26421	103432
[illegible]	25713	26608	103479

	Sinus	Tangens	Secans
78	97815	470463	480973
54	97778	466458	477057
48	97742	462518	473205
42	97705	458641	469417
36	97667	454826	465690
30	97630	451071	462023
24	97592	447374	458414
18	97553	443735	454863
12	97515	440152	451368
6	97476	436623	447928
	*	*	*
77	97437	433148	444541
54	97398	429724	441206
48	97358	426352	437923
42	97318	423030	434689
36	97278	419756	431503
30	97237	416530	428366
24	97196	413350	425275
18	97155	410216	422229
12	97113	407127	419228
6	97072	404081	416271
	*	*	*
76	97030	401078	413357
54	96987	398117	410484
48	96945	395196	407652
42	96902	392316	404860
36	96858	389474	402107
30	96815	386671	399393
24	96771	383906	396716
18	96727	381177	394076
12	96682	378485	391473
6	96638	375828	388904

	Sinus	*Tangens*	*Secans*
15	25882	26795	103528
6	26050	26982	103576
12	26219	27169	103625
18	26387	27357	103674
24	26556	27545	103724
30	26724	27732	103774
36	26892	27920	103825
42	27060	28109	103875
48	27228	28297	103927
54	27396	28486	103978
	*	*	*
16	27564	28675	104030
6	27731	28863	104082
12	27899	29653	104135
18	28067	29242	104188
24	28234	29432	104241
30	28401	29621	104295
36	28569	29811	104349
42	28736	30001	104403
48	28903	30192	104458
54	29070	30382	104514
	*	*	*
17	29237	30573	104569
6	29404	30764	104625
12	29571	30955	104682
18	29737	31147	104738
24	29904	31338	104795
30	30071	31530	104853
36	30237	31722	104911
42	30403	31914	104969
48	30570	32106	105028
54	30736	32299	105087

	Sinus	*Tangens*	*Secans*
75	96593	373205	386370
54	96547	370616	383871
48	96502	368061	381404
42	96456	365538	378970
36	96510	363048	376568
30	96463	360588	374198
24	96316	358160	371858
18	96269	355761	369548
12	96222	353393	367269
6	96174	351053	365018
	*	*	*
74	96126	348742	362796
54	96078	346458	360601
48	96029	344202	358435
42	95981	341973	356295
36	95931	339771	354181
30	95882	337594	352094
24	95832	335443	350032
18	95782	333317	347995
12	95732	331216	345983
6	95681	329139	343995
	*	*	*
73	95630	327085	342030
54	95579	325055	340089
48	95528	323048	338171
42	95476	321063	336276
36	95424	319100	334402
30	95372	317159	332551
24	95319	315240	330721
18	95266	313341	328912
12	95213	311464	327123
6	95159	309606	325355

	Sinus	Tangens	Secans
18	30902	32492	105146
6	31068	32685	105206
12	31233	32878	105266
18	31399	33072	105327
24	31565	33266	105388
30	31730	33460	105449
36	31896	33654	105511
42	32061	33848	105573
48	32227	34043	105636
54	32392	34238	105699
	*	*	*
19	32557	34433	105762
6	32722	34628	105826
12	32887	34824	105890
18	33051	35019	105955
24	33216	35216	106019
30	33381	35412	106085
36	33545	35608	106151
42	33710	35805	106217
48	33874	36002	106287
54	34038	36199	106350
	*	*	*
20	34202	36397	106418
6	34366	36595	106486
12	34530	36793	106554
18	34694	36991	106622
24	34857	37190	106691
30	35021	37388	106761
36	35184	37588	106831
42	35347	37786	106901
48	35511	37986	106972
54	35674	38186	107043

	Sinus	Tangens	Secans
72	95106	307768	323667
54	95052	305950	321878
48	94997	304152	320169
42	94943	302372	318479
36	94888	300611	316808
30	94832	298868	315154
24	94777	297144	313519
18	94721	295437	311902
12	94665	293748	310303
6	94609	292076	308721
	*	*	*
71	94552	200421	307155
54	94495	288783	305607
48	94438	287161	304075
42	94380	285555	20[illegible]
36	94322	283965	301959
30	94264	282391	299574
24	94206	280833	298106
18	94147	279289	296652
12	94088	277761	295213
6	94029	276247	293790
	*	*	*
70	93969	274748	292380
54	93909	273263	290985
48	93849	271792	289605
42	93789	270335	288238
36	93728	268892	286885
30	93667	267462	285545
24	93606	266046	284219
18	93544	264642	282906
12	93483	263252	281605
6	93420	261874	280318

253	Sinus	Tangens	Secans	
21	35837	38386	107114	
6	36000	38587	107186	
12	36162	38787	107259	
18	36325	38988	107332	
24	36488	39190	107405	
30	36650	39391	107479	
36	36812	39593	107553	
42	36975	39795	107627	
48	37137	39997	107702	
54	37299	40200	107778	
	*	*	*	
22	37461	40403	107853	
6	37622	40606	107930	5
12	37784	40809	108006	4
18	37946	41013	108084	4
24	38107	41217	108161	3
30	[illegible]	[illegible]	108239	3
36	38430	41626	108318	24
42	38591	41831	108397	18
48	38752	42036	108476	12
54	38912	42242	108556	6
	*	*	*	
23	39073	42447	108636	67
6	39234	42654	108717	54
12	39394	42860	108798	48
18	39555	43067	108880	42
24	39715	43274	108962	36
30	39875	43481	109044	30
36	40035	43689	109127	24
42	40195	43897	109211	18
48	40355	44105	109294	12
54	40514	44314	109379	6

	Sinus	Tangens	Secans
69	93358	260509	279043
54	93295	259156	177780
48	93232	257815	276530
42	93169	256487	275298
36	93106	255170	274065
30	93042	253865	272850
24	92978	252571	271647
18	92913	251282	270455
12	92849	250018	269275
6	92784	248758	268105
	*	*	*
68	92718	247509	266947
54	92653	246270	265799
48	92587	245043	264662
42	92521	243825	263535
36	92455	242618	262419
30	92388	241421	261313
24	92321	240235	260217
18	92254	239058	259130
12	92186	237891	258054
6	92119	236733	256988
	*	*	*
67	92050	235585	255921
54	91982	234447	254883
48	91914	233317	253844
42	91845	232197	252815
36	91775	231086	251795
30	91706	229984	250784
24	91636	228891	249782
18	91566	227806	248789
12	91496	226730	247804
6	91425	225663	246827

[illegible]	Sinus	Tangens	Secans	[illegible]
24	40674	44523	109464	
6	40833	44732	109549	
12	40992	44942	109635	
18	41151	45152	109721	
24	41310	45362	109808	
30	41469	45573	109895	
36	41628	45784	109982	
42	41787	45995	110071	
48	41945	46207	110159	
54	42104	46418	110248	
	*	*	*	
25	42262	46631	110338	
6	42420	46843	110428	
12	42578	47056	110518	5
18	42736	47270	110609	4
24	42894	47484	110701	4
30	43051	47698	110793	3
36	43209	47912	110885	3
42	43366	48127	110978	24
48	43523	48342	111072	18
54	43680	48557	111166	12
	*	*	*	6
26	43837	48773	111260	64
6	43994	48989	111355	54
12	44151	49206	111451	48
18	44307	49423	111547	42
24	44464	49640	111643	36
30	44620	49858	111740	30
36	44776	50076	111838	24
42	44932	50295	111936	18
48	45088	50514	112034	12
54	45243	50733	112133	6

	Sinus	Tangens	Secans
66	91355	224604	245859
54	91283	223553	244900
48	91212	222510	243948
42	91140	221475	243005
36	91068	220449	242070
30	90996	219430	241142
24	90924	218419	240222
18	90851	217416	239311
12	90778	216420	238406
6	90704	215432	237509
	*	*	*
65	90631	214451	236621
54	90557	213477	235738
48	90483	212511	234863
42	90408	211552	233996
36	90334	210599	233135
30	90259	209654	232282
24	90183	208716	231436
18	90108	207785	330596
12	90032	206860	229763
6	89956	205942	228937
	*	*	*
64	89879	205030	228115
54	89803	204125	227304
48	89726	203227	226498
42	89649	202335	225697
36	89571	201449	224903
30	89493	200569	224116
24	89415	199695	223334
18	89337	198828	222559
12	89259	197966	221790
6	89180	197111	221026

235	Sinus	Tangens	Secans
27	45399	50953	112233
6	45554	51173	112333
12	45710	51393	112433
18	45865	51614	112534
24	46020	51835	112636
30	46175	52057	112738
36	46330	52279	112841
42	46484	52501	112944
48	46639	52724	113048
54	46793	52947	113152
	*	*	*
28	46947	53171	113257
6	47101	53395	113362
12	47255	53620	113468
18	47409	53844	113575
24	47562	54070	113682
30	47716	54296	113789
36	47869	54522	113897
42	48022	54748	114006
48	48175	54975	114115
54	48328	55203	114225
	*	*	*
29	48481	55431	114335
6	48634	55659	114446
12	48786	55888	114558
18	48938	56117	114670
24	49090	56347	114782
30	49242	56577	114896
36	49394	56808	115009
42	49546	57039	115124
48	49697	57271	115238
54	49849	57503	115354

	Sinus	Tangens	Secans
63	89101	196261	220269
54	89021	195417	219517
48	88942	194579	218771
42	88862	193746	218031
36	88782	192920	217297
30	88701	192098	216568
24	88620	191282	215845
18	88539	190472	215127
12	88458	189667	214414
6	88377	188867	213707
62	88295	188073	213005
54	88213	187283	212309
48	88130	186499	211617
42	88048	185720	210931
36	87965	184946	210250
30	87882	184177	209574
24	87798	183413	208903
18	87715	182654	208236
12	87631	181899	207575
6	87546	181150	206918
61	87462	180405	206267
54	87377	179665	205619
48	87292	178929	204977
42	87207	178198	204339
36	87121	177471	203706
30	87036	176749	203077
24	86949	176032	202453
18	86863	175319	201833
12	86777	174610	201218
6	86690	173905	200607

	Sinus	Tangens	Secans
30	50000	57735	115470
6	50151	57968	115587
12	50302	58201	115704
18	50453	58435	115822
24	50603	58670	115940
30	50754	58905	116059
36	50904	59140	116179
42	51055	59376	116299
48	51204	59612	116419
54	51354	59849	116541
	*	*	*
21	51504	60086	116663
6	51653	60324	116786
12	51803	60562	116909
18	51952	60801	117033
24	52101	61040	117158
30	52250	61280	117283
36	52399	61520	117409
42	52547	61761	117535
48	52696	62003	117662
54	52844	62245	117790
	*	*	*
22	52992	62487	117918
6	53140	62730	118047
12	53288	62973	118176
18	53435	63217	118307
24	53583	63462	118437
30	53730	63707	118569
36	53877	63953	118701
42	54024	64199	118834
48	54171	64446	118967
54	54317	64693	119102

Secans		Sinus	Tangens	Secans
115470	60	86603	173205	200000
115587	54	86515	172509	199397
115704	48	86427	171817	198799
115822	42	86340	171130	198205
115940	36	86251	170446	197615
116059	30	86163	169766	197029
116179	24	86074	169091	196448
116299	18	85985	168419	195870
116419	12	85896	167752	195296
116541	6	85806	167088	194725
+		*	*	*
116663	59	85717	166428	194160
116786	54	85627	165772	193598
116909	48	85536	165120	193040
117033	42	85446	164471	192486
117158	36	85355	163826	191935
117283	30	85264	163185	191388
117409	24	85173	162548	190845
117535	18	85081	161914	190305
117662	12	84989	161284	189769
117790	6	84897	160657	189237
+		*	*	*
117918	58	84805	160033	188708
118047	54	84712	159414	188183
118176	48	84619	158797	187661
118307	42	84526	158184	187142
118437	36	84433	157575	186627
118569	30	84339	156969	186116
118701	24	84245	156366	185608
118834	18	84151	155766	185103
118967	12	84057	155170	184601
119102	6	83962	154576	184103

	Sinus	Tangens	Secans
33	54464	64941	119236
6	54610	65189	119372
12	54756	65438	119508
18	54902	65688	119645
24	55048	65938	119782
30	55194	66189	119920
36	55339	66440	120059
42	55484	66692	120199
48	55630	66944	120339
54	55775	67197	220480
	*	*	*
34	55919	67451	120622
6	56064	67705	120764
12	56208	67960	120907
18	56353	68215	121051
24	56497	68471	121195
30	56641	68728	121341
36	56784	68985	121487
42	56928	69243	121633
48	57071	69502	121781
54	57215	69761	121929
	*	*	*
35	57358	70021	122077
6	57501	70281	122227
12	57643	70542	122377
18	57786	70804	122528
24	57928	71066	122680
30	58070	71329	122833
36	58212	71593	122986
42	58354	71857	123140
48	58406	72122	123295
54	58637	72388	123450

Secans		Sinus	Tangens	Secans
119236	57	83867	153987	183608
119372	54	83772	153400	183116
119508	48	83676	152816	182627
119645	42	83581	152235	182142
119782	36	83485	151658	181659
119920	30	83389	151084	181180
120059	24	83292	150512	180704
120199	18	83195	149944	180231
120339	12	83098	149378	179761
120480	6	83001	148816	179293
*		*	*	*
120622	56	82904	148256	178829
120764	54	82806	147699	178368
120907	48	82708	147146	177910
121051	42	82610	146594	177454
121195	36	82511	146046	177002
121341	30	82413	145501	176552
121487	24	82314	144958	176105
121633	18	82214	144418	175661
121781	12	82115	143881	175219
121929	6	82015	143347	174781
*		*	*	*
122077	55	81915	142815	174345
122227	54	81815	142286	173911
122377	48	81714	141759	173481
122528	42	81614	141235	173053
122680	36	81513	140714	172628
122833	30	81412	140195	172205
122986	24	81310	139679	171785
123140	18	81208	139165	171367
123295	12	81106	138653	170952
123450	6	81004	138145	170540

Bgr	*Sinus*	*Tangens*	*Secans*
36	58779	72654	123607
6	58920	72921	123764
12	59061	73189	123922
18	59201	73457	124081
24	59342	73726	124240
30	59482	73996	124400
36	59623	74267	124561
42	59763	74538	124723
48	59902	74810	124886
54	60042	75082	125049
	*	*	*
37	60181	75355	125214
6	60321	75629	125379
12	60460	75904	125545
18	60599	76180	125711
24	60738	76456	125879
30	60876	76733	126047
36	61015	77010	126216
42	61153	77289	126387
48	61291	77568	126557
54	61429	77848	126729
	*	*	*
38	61566	78129	126902
6	61703	78410	127075
12	61841	78692	127250
18	61978	78975	127425
24	62115	79259	127601
30	62251	79544	127778
36	62388	79829	127956
42	62524	80115	128134
48	62660	80402	128314
54	62796	80690	128495

	Sinus	Tangens	Secans
54	80902	137638	170130
54	80799	137134	169723
48	80696	136633	169318
42	80593	136133	168915
36	80489	135637	168515
30	80386	135142	168117
24	80282	134650	167722
18	80178	134160	167329
12	80073	133673	166938
6	79968	133187	166550
	*	*	*
53	79864	132704	166164
54	79758	132224	165780
48	79653	131745	165399
42	79547	131269	165020
36	79441	130795	164643
30	79335	130323	164268
24	79229	129853	163895
18	79122	129385	163525
12	79015	128919	163157
6	78908	128456	162791
	*	*	*
52	78801	127994	162427
54	78693	127535	162065
48	78586	127077	161705
42	78478	126622	161348
36	78369	126169	160992
30	78261	125717	160639
24	78152	125268	160287
18	78043	124820	159938
12	77934	124375	159590
6	77824	122391	159245

	Sinus	Tangens	Secans
39	62932	80978	128676
6	63068	81268	128858
12	63203	81558	129042
18	63338	81849	129226
24	63473	82141	129411
30	63608	82434	129597
36	63742	82727	129784
42	63877	83022	129972
48	64011	83317	130160
54	94145	83613	130350
	*	*	*
40	64279	83910	130541
6	64412	84208	130732
12	64546	84507	130925
18	64679	84806	131119
24	64812	85107	131313
30	64945	85408	131509
36	65077	85710	131705
42	65210	86014	131903
48	65342	76318	132101
54	65474	86623	132301
	*	*	*
41	65606	86929	132501
6	65738	87236	132703
12	65869	87543	132905
18	66000	87852	133109
24	66131	88162	133314
30	66262	88473	133519
36	66393	88784	133726
42	66523	89097	133534
48	66653	89410	134142
54	66783	89725	134352

	Sinus	Tangens	Secans
51	77715	123490	158902
54	77605	123050	158560
48	77494	122612	158221
42	77384	122176	157883
36	77273	121742	157547
30	77162	121310	157213
24	77051	120879	156881
18	76940	120451	156551
12	76828	120024	156223
6	76717	119599	155897
50	* 76604	* 119175	* 155572
54	76492	118754	155250
48	76380	118334	154929
42	76267	117916	154610
36	76154	117500	154292
30	76041	117085	153977
24	75927	116672	153663
18	75813	116261	153351
12	75700	115851	153041
6	75585	115443	152732
49	* 75471	* 115037	* 152425
54	75356	114632	152120
48	75241	114229	151817
42	75126	113828	151515
36	75011	113428	151215
30	74896	113029	150916
24	74780	112633	150619
18	74664	112238	150324
12	74548	111844	150030
6	74431	111452	149738

Secans
128676
128858
129042
129226
129411
129597
129784
129972
130160
130350
* 130541
130732
130925
131119
131313
131509
131705
131903
132101
132301
* 132501
132703
132905
133109
133314
133519
133726
133934
134142
134352

	Sinus	Tangens	Secans
42	66913	90040	134563
6	67043	90357	134775
12	67172	90674	134988
18	67301	90993	135203
24	67430	91313	135418
30	67559	91633	135634
36	67688	91955	135852
42	67816	92277	136070
48	67944	92601	136290
54	68072	92926	136511
43	*68200	*93252	*136733
6	68327	93578	136956
12	68455	93906	137180
18	68582	94235	137406
24	68709	94565	137632
30	68835	94896	137860
36	68962	95229	138089
42	69088	95562	138319
48	69214	95897	138550
54	69340	96232	138783
44	*69466	*96569	*139016
6	69591	96907	139251
12	69717	97246	139487
18	69842	97586	139725
24	69966	97927	139963
30	70091	98270	140203
36	70215	98613	140444
42	70339	98958	140687
48	70463	99304	140930
54	70587	99652	141175
45	70711	100000	141421

	Sinus	Tangens	Secans
48	74314	111061	149448
54	74198	110672	149159
48	74081	110285	148871
42	73963	109899	148586
36	73846	109514	148301
30	73728	109131	148019
24	73610	108749	147738
18	73491	108369	147458
12	73373	107990	147180
6	73254	107613	146903
47	73135	107237	146628
54	73016	106862	146354
48	72897	106489	146082
42	72777	106117	145811
36	72657	105747	145542
30	72537	105378	145274
24	72417	105010	145007
18	72297	104644	144742
12	72176	104279	144479
6	72055	103915	144216
46	71934	103553	143956
54	71813	103192	143696
48	71691	102832	143438
42	71569	102474	143181
36	71447	102117	142926
30	71325	101761	142672
24	71203	101406	142419
18	71080	101053	142168
12	70957	100701	141918
6	70834	100350	141669
45	70711	100000	141421