LES NEVF PREMIERS LIVRES DES ELEMENS D'EVCLIDE : TRADVITS & commentez

PAR

I. ERRARD *de Bar-le-duc, Ingenieur du Tres-chrestien* ROY *de France & de Nauarre.*

Dediez à sa MAIESTE'.

Reueus & corrigez par l'Autheur.

A PARIS,

Chez GVILLAVME AVVRAY, au haut de la ruë sainct Iean de Beauuais, au Bellérophon couronné.

CIↃ. IↃCV.

Auec Priuilege du Roy.

AV ROY.

SIRE,

Le fauorable accueil qu'il a pleu à vostre Maiesté faire à mes premieres œuures Mathematiques, m'oblige & asseure tout ensemble de luy presenter ce recent labeur, qui apportera peut estre quelque clarté à ces sciences, & quelque desir à vostre Noblesse d'aimer & honorer ce qu'elle void fauorisé & chery de son souuerain Prince. Et si au gouuernement du monde Dieu vse tousiours de quelque trait de Geometrie (comme disoit le diuin Platon:) C'est bien raison, que celuy auquel par vne certaine communication de sa puissance en terre, il a commis l'administration du plus beau Royaume qui y soit, se monstre amateur d'vne science dont l'vsage se remarque au Ciel, & que le Createur mesme de l'Vniuers n'a point desdaignée, puis que (comme dit le Sage) il a creé toutes choses par poids, nombre & mesure. Et certes s'il est plus difficile de *mesurer, comme il appartient les choses grandes, la science qui l'apprend est tres-necessaire à ceux que Dieu a esleuez au supreme degré de grandeur. Ie le prie, SIRE, de vouloir de plus en plus agrandir & affermir vostre throne, & de vous combler de toutes ses benedictions.*

A PARIS *au mois d'Aoust* 1598.

De vostre MAIESTE',

Tres-humble, tres-obeïssant, & tres-fidele seruiteur, I. ERRARD. de Bar-le-duc.

ADVERTISSEMENT.

D*Autant que les Elemens se doiuent lire de suite, & que la demonstration d'vne proposition depend des choses precedentes, i'ay euité tant qu'il m'a esté possible les vaines redites d'icelles, craignant que le trop grād amas de telles repetitions n'empeschast la lumiere que ie tasche y apporter. Quand donc le Lecteur trouuera que ie dy quelque chose estre ainsi ou ainsi, sans autre preuue, qu'il sçache que cela aura esté demonstré & repeté plusieurs fois. Ie le prie donc de prendre ceste brieſueté en bonne part, comme aussi certains mots (qui sont plus Latins que François) desquels i'ay esté contraint vser, n'en trouuant point de plus briefs, ne plus significatifs.*

DEMONSTRATIONS DES ELEMENS D'EVCLIDE.

LIVRE I.

DEFFINITION PREMIERE.

1. Le poinct est ce qui n'a aucunes parties.
2. La ligne est seulement vne longueur, sans largeur.
3. Les extremitez des lignes sont poincts.
4. Ligne droicte, est celle qui est egalement comprise entre ses poincts.
5. Superficie, est qui a longueur & largeur tant seulement.
6. Les fins des superficies sont ligne ou lignes.
7. Superficie plane est qui demeure egalement entre ses lignes.
8. Angle plan est le concours de deux lignes qui s'entretouchent en vn point, & lesquelles continuées se couppent au mesme poinct.
9. Angle rectiligne, est celuy qui est faict de deux lignes droictes.
10. Quand vne ligne droicte, tombant sur vne ligne droicte, faict les angles d'vne part & d'autre

egaux enſemble : l'vn & l'autre des angles egaux ſe nomme droict : & la ligne droicte tombant ſe nomme perpendiculaire, ſur la ligne ſur laquelle elle tombe.

11. Et l'angle plus grand qu'vn droict, ſe nomme Obtus.

12. Et l'angle plus petit qu'vn droict ſe nomme aigu.

13. Terme eſt la fin de quelque choſe.

14. Figure eſt, qui eſt contenuë de terme ou termes.

15. Cercle, eſt vne figure pleine contenuë d'vne ligne qui ſe nomme circonference : en icelle y a vn poinct, duquel toutes les lignes droictes menées à la circonference ſont egales entr'elles.

16. Et ce poinct là, s'appelle centre de cercle.

17. Diametre du cercle, eſt la ligne droicte paſſant par le centre, finie d'vne part & d'autre à la circonference, laquelle diuiſe le cercle en deux egalement.

18. Moictié de cercle eſt vne figure contenuë du diametre & de la circonference compriſe par iceluy diametre.

19. Section de cercle eſt vne figure contenuë d'vne ligne droicte, & d'vne partie de la circonference.

20. Les figures plaines rectilignes ſont celles contenuës de lignes droictes.

21. Les figures de trois coſtez ſont celles contenuës de trois lignes droictes.

22. Les figures de quatre coſtez ſont celles compriſes de quatre lignes droictes.

23. Les figures de pluſieurs coſtez ſont celles compriſes de plus de quatre lignes droictes.

24. Des figures de trois coſtez, celle ſe nomme

triangle equilateral qui eſt contenuë de trois coſtez egaux.

25. Iſoſcele, qui eſt contenuë de deux coſtez egaux ſeulement.

26. Scalene, qui eſt contenuë de trois coſtez inegaux.

27. Encor des figures de trois coſtez, celle ſe nomme triangle rectangle, qui a vn angle droict.

28. Ambligone, qui a vn angle obtus.

29. Oxigone, qui a trois angles aigus,

30. Mais des figures de quatre coſtez, celle qui a les coſtez egaux & les angles droicts, ſe nomme quarré.

31. Celle qui a les angles droicts, mais les coſtez inegaux, ſe nomme quarré long.

32. Celle qui a les coſtez egaux, mais non les angles droicts, ſe nomme Rhombe.

33. Mais celle qui a les coſtez oppoſez & les angles oppoſez egaux, mais n'a pas coſtez egaux enſemble ny les angles droicts, ſe nomme Rhomboïde.

34. Excepté celle-cy, les figures de quatre coſtez ſe nomment tablettes ou trapeſes.

35. Lignes droictes paralleles ſont celles, leſquelles eſtans en vn meſme plan & menees de part & d'autre ne concourrent point enſemble.

36. Parallelogramme, eſt vne figure plane contenuë de quatre lignes droictes, deſquelles les oppoſees ſont paralleles entr'elles.

S'ENSVIVENT LES DEMANDES,

ou poſitions ſimples.

Demande I.

D'Vn poinct à vn autre poinct mener vne ligne droicte.

2. Continuer vne ligne droicte finie tant qu'il en sera besoin.

3. D'escrire vn cercle à l'entour d'vn poinct, & d'vne telle distance qu'on voudra.

COMMVNES SENTENCES.

Premiere.

LEs choses egales à vne, sont egales entr'elles.

2. Et si à choses egales s'adioustent choses egales, les toutes seront egales.

3. Et si de choses egales, se leuent choses egales, les restes seront egales.

4. Et si à choses inegales s'adioustent choses egales, les toutes seront inegales.

5. Et si des choses inegales, se leuent choses egales, les restes seront inegales.

6. Les choses qui sont doubles à vn mesme, sont egales entr'elles.

7. Et les choses qui sont moictié d'vne mesme, sont egales entr'elles.

8. Et les choses qui conuiennent ensemble & entre elles, sont egales entr'elles.

9. Le tout est plusgrand que sa partie.

10. Tous angles droicts sont egaux entr'eux.

11. Si dessus deux lignes droictes tombe vne ligne droicte, faisant les angles dedãs d'vne mesme part, plus petis que deux droicts, icelles estans prolongees infiniment se rencontreront de la part en laquelle les angles sont plus petis que deux droicts.

12. Deux lignes droictes ne comprennent pas vn espace.

LE PREMIER LIVRE DES ELEMENS D'EVCLIDE.

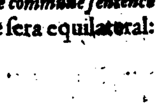
PROPOSITION PREMIIERE.

Dessus vne ligne droicte donnée & finie descrire vn triangle equilateral.

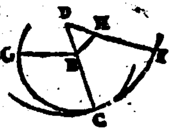
SOIT la ligne droicte finie & donnée H B, & du point H à la distance H B soit descrit vn cercle: *par la trosiéme demande*, & de l'autre point B à la mesme distance soit descrit vn autre cercle, iceux cercles seront egaux: & soient tirées les lignes H C & B C à la section des deux cercles C *par la premiere demande*: d'autant que H C est egale à H B & B C à la mesme H B par la definition du cercle: il s'ensuiura, *par la premiere commune sentence* que H C & C B seront egales, & que le triangle sera equilateral: ce qu'il falloit demonstrer.

PROPOSITION II.

D'vn point donné mener vne ligne droite egale à vne ligne droite donnée.



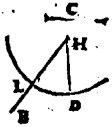
Soit la ligne proposée G B, le point donné H, soit tirée B H, & sur icelle soit fait le triangle equilateral BHD, *par la premiere proposition*. Soit prolõgie DB vers C *par la seconde demande*, & soit fait le cercle du centre B à la distance B G, *par la trosiéme demande*, icelles B G, & B C serõt ega-



ses. Apres soit prolongée D H vers I, & fait le cercle du centre D à la distance D C, les deux lignes D C & D I seront egales : desquelles faut oster D B, D H egales : resteront B C, H I egales, *par la troisiéme commune sentence*. Or G B est aussi egale à B C, icelles GB & HI seront donc egales, *par la premiere commune sentence*.

PROPOSITION III.

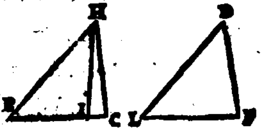
De deux lignes droites inegales données, oster de la plus grande vne ligne droite egale à la plus petite.



SOit la plus grande H B & la plus petite C, soit *par la precedente* du point H tirée vne ligne egale à C comme H D, & fait le cercle du centre H à la distance H D : Il sera euident que H L estant egale à H D sera aussi egale à C.

PROPOSITION IIII.

Si de deux triangles, les deux costez de l'vn sont egaux aux deux costez de l'autre vn chacun au sien, & l'angle de l'vn contenu des deux costez egaux, est egal à l'angle de l'autre. Ils auront la base egale à la base, & le triangle sera egal au triangle, & les autres angles aux autres angles, vn chacun au sien, ceux qui sont opposez aux costez egaux.



DEs deux triangles B H C, & D L F soient les deux costez H B, H C egaux aux deux costez D L, D F & les angles qu'ils comprennent egaux: si la base B C est plus grande que la base L F, soit de B C couppée B I egale à L F *par la troisiéme de ce liure*: & soit tirée H I. Maintenant si les deux costez H B & H I sont estimez egaux aux deux costez D L, D F & la base egale à la base : il est euident que l'angle B H I ne sera plus egal à l'angle L D F, lequel BHI est moindre que le posé B H C de la quantité de l'angle I H C:

ce qui est absurde. Semblablement se demonstrera L F n'estre point plus grande que B C. *Si donc de deux triangles, &c.*

PROPOSITION V.

En tout triangle Isoscele, les angles qui sont en la base sont egaux entr'eux : & ayant mené les lignes droictes egales, les angles qui sont soubs la base, seront egaux entr'eux.

DV triangle Isoscele B H C soient les deux costez H B & H C prolongez en sorte que H F, H G soient egaux, & tirées les lignes F C, B G. D'autant que F H, H C sont egaux aux deux costez G H, H B, & que l'angle H est commun, la base F C sera egale à la base G B *par la precedente* l'angle F à l'angle G: l'angle F C H à l'angle G B H, & l'angle F C B à l'angle G B C: ces deux costez de F C H & G B H, resteront H B C & H C B sur la base egaux : & puis que B F, F C sont deux costez egaux aux deux costez C G, G B, & que l'angle F est egal à l'angle G, la base sera egale à la base, & les autres angles aux autres angles. Dont s'ensuiura que les angles soubs la base F B C & G C B seront aussi egaux.

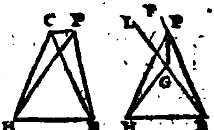
PROPOSITION VI.

Si deux angles d'vn triangle sont egaux entr'eux, aussi les costez opposez aux angles egaux sont egaux entr'eux.

SI du triangle H B C les deux angles H B C & H C B sont egaux, il faudra que H B & H C soiét aussi egaux. Autrement soit H B plus grand que H C, & soit couppé B P egal à H C. d'autant que H C & C B sont egaux à B P, B C, & que les angles qu'ils comprennent sont egaux, la base H C sera egale à la base P B, & le triangle H B C au triangle P C B, & les autres angles aux autres angles, *par la quatriéme* : ce qui est faux, estant l'vn des triangles contenu en l'autre, & par consequent plus petit, & l'angle P C B moindre que l'angle H C B. *Si donc deux angles d'vn triangle, &c.*

PROPOSITION VII.

Si des extremitez de quelque ligne droicte deux autres lignes droictes concourrent en vn poinct: deux autres lignes droictes egales à celles-cy l'vne à l'autre, sçauoir celles possedans mesmes termes & d'vne mesme part, ne se pourront tirer sur vn plan à vn autre poinct.

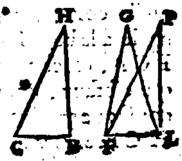


SOient de la ligne H B, & des extremitez H, B les deux lignes tirées au point C, HC, BC, & soient encor en vn autre point P, tirées H P & BP egales (s'il est possible) sçauoir H P à H C, & BP à B C possedãs mesmes termes, d'autant que *par la 5. proposition* les angles H C P & H P C sont egaux, comme aussi B P C & B C P, il s'ensuiura que la partie sera egale à quelque chose plus grande que le tout, comme l'angle B C P (partie de H C P) seroit plus grande non seulement que C P H (comme il a esté posé) mais aussi que C P B, ce qui ne peut estre: tellement que *Si des extremitez, &c.*

Que si le point tombe dans le triangle comme G & les deux lignes B G, B P sont estimées egales, comme aussi H G, HP, il s'ensuiura que les angles soubs la base seront egaux *par la 5.* sçauoir F P G & L G P, ce qui est faux: car H G, H P sont aussi posées egales, & font les angles H G P & H P G egaux, tellement qu'il faudroit que l'angle H G P fust plus grand que FPG, mais il est egal seulement à H P G. Il est donc manifeste que la proposition est veritable.

PROPOSITION VIII.

Si deux triangles ont deux costez egaux aux deux costez l'vn à l'autre, & la base egale à la base, ils auront aussi l'angle egal à l'angle, sçauoir celuy contenu de lignes droictes egales.

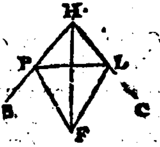


SIl est autrement, soient des deux triangles H B C & P L F ayans les deux costez egaux aux deux costez, & la base egale à la base, l'angle H inegal à l'angle P: & soit sur la base L F constitué vn autre triangle ayant L G & G F egaux aux deux costez B H &

H C, & l'angle G egal à l'angle H, il s'ensuiura que la ligne L G sera egale à L P & F G à F P *contre la precedente*, & les autres angles egaux aux autres angles *par la quatriéme*, ce qui est faux, n'estant l'angle G L F que partie de P L F. Tellement que *Si deux triangles, &c.*

PROPOSITION IX.

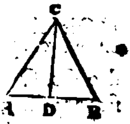
Coupper vn angle rectiligne en deux egalement.



SOit l'angle donné B H C, & soient H P & H L faictes egales & tirée P L, sur laquelle soit faicte le triangle equilateral P L F, & tirée H F. D'autant que les deux costez L H, H F: sont egaux aux deux costez P H, H F, & la base L F egale à la base P F, il s'ensuiura *par la precedente* que l'angle L H F, sera egal à l'angle P H F: par ainsi l'angle donné B H C sera couppée en deux egalement.

PROPOSITION X.

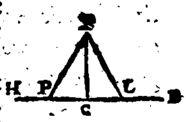
Coupper en deux egalement vne ligne droicte donnée terminée.



SOit la ligne droicte finie H B, sur laquelle soit fait le triangle equilateral H B C, & soit couppé l'angle H C B en deux egalement de la ligne C D *par la precedente*. D'autant que C H, C D sont egaux à C B, C D & les angles qu'ils comprennent egaux, la base H D sera egale à la base D B: *par la quatriéme*. Tellement que H B est couppée en deux egalement.

PROPOSITION XI.

Sur vne ligne droicte, & d'vn poinct donné en icelle esleuer vne autre ligne droicte en angles droicts.



EN la ligne proposée H B soit le poinct donné C, & faictes C P, C L egales: & sur P L soit descrit le triãgle equilateral P F L, & menée la ligne F C. D'autant que les deux triangles sont compris de lignes egales, ils se-sont equiangles, tant *par la 4. que 8. propos.* L'angle F C L sera donc egal à l'angle F C P, & tous deux seront angles droicts, & la ligne F C perpendiculaire *par la definition.*

PROPOSITION XII.

Sur vne ligne droicte infinie donnée, & d'vn point donné qui n'est pas en icelle mener vne ligne droicte perpendiculaire.

SOit la ligne proposée H B & le point donné hors icelle C, duquel soit tiré vn cercle en sorte qu'il couppe la proposée, comme en G L, soient menées C G, C L egales & couppé l'angle G C L en deux egalement par C I: d'autãt que les deux triangles sont equiangles, l'angle C I L sera egal à C I G, & iceux seront droits, & C I perpendiculaire *par la definition.*

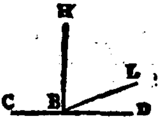
PROPOSITION XIII.

Si vne ligne droicte tombante sur vne autre ligne droicte, faict deux angles, iceux seront droicts, ou egaux à deux droicts.

SOit la ligne droicte L B tombante sur la ligne P C, elle fera deux angles droicts ou egaux à deux droicts. Que s'ils sont droicts nous auons ce que desirons: s'ils ne sont droicts, soit esleuée la perpendiculaire B H du point B. D'autant que les trois angles H B P, & H B L & L B C valent deux droicts, il s'ensuiura que le composé P B L, & le simple L B C vaudront aussi deux droicts: car l'excez de l'vn est la diminution de l'autre.

PROPOSITION XIIII.

Si en vn point qui est en vne ligne droicte deux autres lignes droictes cõcourent de costé & d'autre en vn plan, & font deux angles droicts non d'vne mesme part, icelles deux lignes seront directement ensemble.



AV point donné B de la ligne droicte H B soient concurrentes deux lignes droictes C B, & D B faisans les deux angles H B D & H B C egaux à deux droicts, il faudra qu'icelles deux lignes soient posées directement comme vne seule ligne. Sinon, soit posée L B directement auec B C: il s'ensuiura, *par la precedente* que H B C, & H B L seront egaux à deux droicts: mais ils sont plus petits de la quantité de l'angle L B D: la proposition demeurera donc veritable.

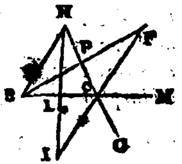
PROPOSITION XV.

Si deux lignes droictes se couppent l'vne l'autre, elles feront les angles opposez l'vn contre l'autre au sommet egaux.

SOient deux lignes droictes HB, CO se coupans l'vne l'autre, d'autant que les angles H L C & HLO sont egaux à deux droicts *par la* 13. HLO & OLB aussi egaux à deux droicts, le cōmun HLO estant osté, resteront HLC & OLB egaux. Semblablement se demonstrera H L O estre egal à C LB.

PROPOSITION XVI.

De tout triangle ayant prolōgé l'vn des costez, l'angle exterieur sera plus grand que l'vn & l'autre des interieurs opposez.

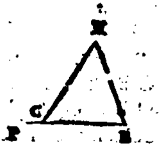


DV triangle BHC soit le costé BC prolōgé vers N, & couppé HC en deux egalement en P, & tirée BP vers F, en sorte que BP, PF soient egales, soit aussi tirée C F. d'autant que FP, PC sont egaux aux deux costez B P, PH, & les angles qu'ils comprennent opposez au sommet P egaux *par la precedente*, les deux triangles seront equiangles, tellement que P C F sera egal à l'angle P H B. A plus forte raison P C N sera plus grand que PHB. Semblablement se demonstrera l'autre angle HBL moindre que l'exterieur H C N.

PROPOSITION XVII.

De tout triangle les deux angles pris en quelque sorte que ce soit sont plus petits que deux droicts.

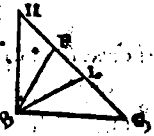
DV triangle BHC soit prolongé BC vers P. d'autant que les angles HCP, & HCB sont egaux à deux droicts, & que l'angle exterieur C, est plus grand que l'angle H ou l'angle B: il s'ensuiura que l'angle HBC & l'angle HCB ensemble ne vaudront pas deux droicts, non plus l'angle CHB, auec l'angle HCB.



PROPOSITION XVIII.

En tout triangle le plus grand costé soustiét le plus grãd angle.

SOit du triangle HBC le plus grãd costé HC. Si l'angle HBC n'est le plus grand angle du triangle, soit couppée HL egale à HB: les angles sur la base seront egaux, sçauoir HLB & HBL: Mais HLB est plus grand que LCB interieur & opposé: à plus forte raison HBC qui est plus grand que HLB sera aussi plus grand que LCB. Semblablement se demonstrera l'autre angle. *De cecy on pourra recueillir que le plus petit costé soustiendra le plus petit angle.*



PROPOSITION XIX.

En tout triangle le plus grand angle est soustenu du plus grand costé.

SOit du triangle HBC le plus grand angle B, si le plus grand costé n'est HC soit vn autre, comme HB, il s'ensuiura *par la precedente*, que l'angle C sera le plus grand contre l'hypothese. Semblablement se demonstrera de l'autre costé BC. *De cecy resulte que le plus petit angle est soustenu du plus petit costé.*

PROPOSITION XX.

En tout triangle les deux costez pris en quelque sorte que ce soit, sont plus grands que l'autre.

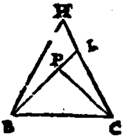
SOit le triangle HBC, & prologé le costé BH vers P, en sorte que HP soit egal à HC & ioints PC: les angles HPC & HCP serõt egaux *par la cinquième.* Mais l'angle PCB, est plus grand que l'angle HCP, & par consequent plus que l'angle P. Il s'ensuiura donc que la ligne BP egale à BH, HC sera plus

grande

grande que C B, *comme on peut recueillir des precedentes.* Semblablement se demonstrera le surplus de la proposition.

PROPOSITION XXI.

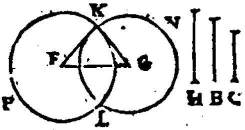
Si des extremitez de l'vn des costez d'vn triangle on mene deux lignes droictes dedans iceluy; elles seront bien plus petites que les deux autres costez du triangle: mais elles contiendront vn plus grand angle.



SOient du triangle HBC & des extremitez B,C, tirees BP, CP dans le triangle H BC:& soit prolongée BP en L: d'autant que BH, HL sont plus grandes que BL *par la precedente*, soit adioustée la commune LC. Il sera euident que HB,HL,LC seront plus grandes que BL,LC. Semblablemēt L P, LC sont plus grandes que PC:soit adiousté la commune PB: lors CL,LP,PB seront plus grādes que BP & PC. A plus forte raison donc BH, HC seront plus grandes que BP,PC. Pour la seconde partie, l'angle CPB est plus grand que PLC, & PLC plus grand que LHB. A plus forte raison CPB est plus grand que LHB.

PROPOSITION XXII.

Descrire vn triangle de trois lignes droictes egales à trois lignes droictes données, & desquelles les deux prises en quelque sorte que ce soit soient plus grandes que l'autre.

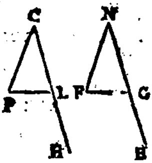


SOiēt les trois lignes droites C,B,H, & soit faicte FG egale à H. au point G soit tirée vne ligne egale à C, *par la deuxiéme*, & du point G soit descrit vn cercle à egale distance de C cōmme K N L: apres du point F soit menée vne ligne droicte egale à B, & du mesme point & à egale distance de B soit descrit vn autre cercle comme K P L, & soient menées à l'intersection des deux cercles K, F,K, GK, egales à B & C, il sera manifeste que le triangle sera fait de trois lignes egales aux proposées.

PROPOSITION XXIII.

Mettre au costé d'vne ligne droicte donnée à vn point donné en icelle, vn angle rectiligne egal à vn angle rectiligne donné.

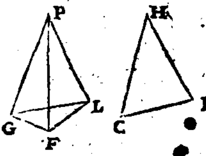
SOit la ligne donnée N B, & l'angle proposé P C H : soit faicte C L egale à C P & iointe P L. apres soit N G faicte egale à C L, & sur N G comme sur la base soit constitué vn triangle par le moyen de deux lignes egales à L P, P C *par la precedente*, & soit iceluy triangle G F N. Il s'ensuiura que les deux triangles seront egaux & equiangles *par les 4. & 8. propos.* & par consequent l'angle au point donné N, egal à l'angle C proposé.



PROPOSITION XXIIII.

Si deux triangles ont les deux costez egaux aux deux costez, l'vn à l'autre, mais l'angle plus grand que l'angle, sçauoir celuy compris de lignes droictes egales : ils auront aussi la base plus grande que la base.

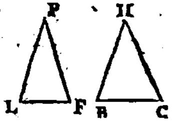
DEs deux triangles H B C, P L F les deux costez HC, HB soient egaux aux deux costez P F, & P L, & soit l'angle CHB plus grand que FPL, il faut que la base BC soit plus grande que LF. Autrement soit *par la precedente*, fait l'angle GPL egal à CHB, & le costé GP egal au costé FP & ioinctes L G, F G. les deux angles P G F & P F G seront egaux : l'angle donc LFG sera plus grand que l'angle P G F, & par consequent que la partie, sçauoir L G F: dont s'ensuiura *par la* 19. que LG (c'est à dire CB) sera plus grande que LF subtendente l'angle LGF.



PROPOSITION XXV.

Si deux triangles ont les deux costez egaux aux deux costez l'vn à l'autre, & la base plus grande que la base, ils auront aussi l'angle contenu d'iceux costez plus grand que l'angle.

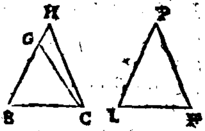
SOient des deux triangles H B C, P L F, les deux costez HB, HC egaux aux deux costez P L, P F. & la base BC plus grand que la base L F. Si l'angle B H C n'est plus grand que l'angle L P F, posons iceux estre egaux. Il s'ensuiura que la base sera egale à la base *par la* 4. contre la position. Si l'angle BHC est plus petit que LPF la base BC sera plus



petite que la base LF *par la precedente* (ce qui est aussi contre la position) dont s'ensuit que l'angle BHC n'estant point egal à LPF ny plus petit, il sera par necessité plus grand.

PROPOSITION XXVI.

Si deux triangles ont deux angles egaux aux deux angles vn chacun au sien, & le costé egal au costé, ou bien celuy au long duquel sont les angles egaux, ou celuy qui soustient l'vn des angles egaux : ils auront aussi les autres costez egaux aux autres costez vn chacun au sien, & l'autre angle egal à l'autre angle.



SOient des deux triangles HBC, PLF les deux angles HBC & HCB egaux aux deux angles PLF & PFL l'vn à l'autre, & le costé BC egal au costé LF. Si premierement BH est plus grand que LP, soit d'iceluy couppée BG egale à LP, & soit tirée GC. D'autant que GB, BC sont egales à PL, LF & comprennent angles egaux, il s'ensuiura *par la* 4. que la base sera egale à la base, & les autres angles egaux aux autres angles, c'est à sçauoir BCG à LFP (c'est a dire BCH) & par consequent la partie egale au tout, ce qui est absurde & faux. Semblablement se fera la demonstration des autres costez & angles.

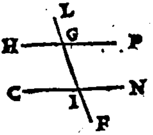
PROPOSITION XXVII.

Si vne ligne droicte trauersant deux lignes droictes, faict les angles alternes egaux l'vn à l'autre, icelles lignes droictes seront paralleles entre elles.

SOit la ligne droite LF trauersant les deux lignes HE, CP, & faisant les angles alternes HLF, & LFP egaux : Si les deux lignes ne sont paralleles, elles se pourront ioindre, & posons que ce soit en G pour faire le triangle LFG. Mais l'angle exterieur HLF est plus grand que l'interieur opposé LFG *par la* 16 contre la position : icelles deux lignes ne se r'encontreront point donc de ce costé. Semblablement se demonstrera ne se pouuoir r'encontrer de l'autre. Tellement qu'elles seront donc paralleles.

PROPOSITION XXVIII.

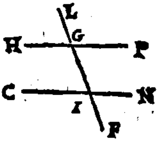
Si vne ligne droicte trauersant deux lignes droictes faict l'angle exterieur egal à l'angle interieur opposé d'vne mesme part: ou bien les angles interieurs d'vne mesme part egaux à deux droits: icelles deux lignes droictes seront paralleles entre elles.



SOit LF la ligne droicte trauersant les deux lignes droictes HP, CN, & soient les angles LGP & GIN egaux. HGI sera egal à LGP *par la* 15. c'est à dire, à GIN. Tellement que *par la precedente* HP, & CN seront paralleles. Pour le second, soient PGI & GIN egaux à deux droits: la ligne FG tombante sur HP fait deux angles egaux à deux droits HGI, & PGI: si le commun PGI est osté, resteront HGI, GIN (alternes) egaux. Les lignes donc HP, CN seront paralleles *par la precedente.*

PROPOSITION XXIX.

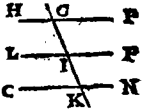
Si deux lignes droictes paralleles sont trauersees d'vne ligne droicte, icelle fera les angles alternes egaux entre eux, & l'exterieur à l'interieur opposé d'vne mesme part, & les interieurs d'vne mesme part egaux à deux droits.



SOient les deux lignes droictes HP, CN trauersées par la droicte LF; si les angles alternes HGI, GIN ne sont egaux, soit GIN plus petit, la ligne F G sur H P fait deux angles egaux à deux droits: tellement que PGI & GIN sont moindres que deux droits: dont s'ensuiura *par la* 11. *commune sentence* que les deux HP, & CN se joindront du mesme costé où les deux angles sont moindres que deux droits: & ne seron paralleles (contre la supposition) ce qui est absurde. Par semblable demonstration se trouuera HGI n'estre plus petit que GIN, dont s'ensuiura qu'ils seront egaux. En apres d'autant que LGP est egal à HGI, il sera aussi egal à GIN *par la premiere commune sentence.* Finalement, d'autant que GIN a esté monstré egal à HGI, & que HGI, & PGI sont egaux à deux droits, il s'ensuiura (le commun HGI estant osté) que PGI, & GIN seront egaux à deux droits.

PROPOSITION XXX.

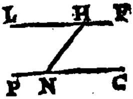
Les lignes qui sont paralleles à vne mesme sont paralleles entre elles, ou posees directement.



Soient les lignes HP, & CN paralleles à LF, & non situées directement. D'autant que l'angle HGI, est egal à GIF & cestuy à IKN interieur opposé & d'vne mesme part *par la precedente*, il s'ensuiura que HGI, & IKN alternes seront egaux *par la 1. commune sentence.* tellement que les lignes HP, CN seront paralleles. Pour le second, posons les deux lignes CK, KN paralleles à LF & non l'vne à l'autre, il faudra qu'icelles deux lignes se rencontrent, comme pour exemple au point K. D'autant que les angles KIF, IKN vallent deux droits *par la precedente*, comme aussi KIL, IKC, & que les angles alternes LIK, IKN sont egaux, il s'ensuiura que IKN & IKC vaudront aussi deux droits, & que CK, KN seront posées directement *par la quatorziéme proposition.*

PROPOSITION XXXI.

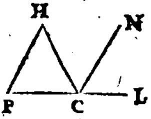
D'vn point donné mener vne ligne droicte parallele à vne ligne droicte donnée.



Soit la ligne donnée PC & le point hors icelle H, duquel soit tirée vne ligne droicte sur PC, comme HN, & soit aussi au point H, & sur la mesme NH fait l'angle LHN egal à l'angle HNC *par la 23.* D'autant que les angles alternes LHN & HNC sont egaux, les lignes LH, PC seront paralleles *par la 27. proposition.*

PROPOSITION XXXII.

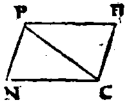
De tout triangle ayant prolongé l'vn des costez, l'angle de dehors est egal aux deux angles de dedans qui luy sont opposez. Et les trois angles interieurs du triangle sont egaux à deux droits.



SOit du triangle HPC prolongé le costé PC en L, & au point C faicte CN parallele, à HP, D'autāt que HC tombe sur deux paralleles, elle fera les angles alternes PHC, HCN egaux *par la* 29. comme aussi PC tombante sur les mesmes, fera l'angle exterieur NCL egal à l'interieur opposé HPC. Dont est euident que l'exterieur HCL est egal aux deux interieurs opposez du triangle HPC. Et pource que HCL, & HCP sont egaux à deux droits *par la* 13. Il s'ensuiura que les trois angles du triangle seront egaux à deux droits.

PROPOSITION XXXIII.

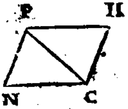
Les lignes droictes qui ioignent deux lignes droictes paralleles egales, sont aussi egales & paralleles.



SOient les deux lignes droictes paralleles egales HP, CN, conioinctes par les deux lignes droictes, sçauoir HC de mesme part, & PN de l'autre, & soit tirée la droicte PC, laquelle tombera sur les deux paralleles, & fera les angles alternes HPC, & PCN egaux *par la* 29. tellement que les deux triangles HPC, & PCN auront deux costez egaux aux deux costez, & les angles compris d'iceux costez egaux, & par consequent la base CH à la base PN, & les autres angles aux autres angles, sçauoir NPC à l'angle PCH alternement. Dont s'ensuiura aussi qu'icelles HC, PN seront paralleles.

PROPOSITION XXXIIII.

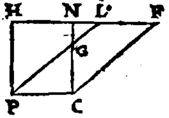
De tous espaces parallelogrammes les costez & les angles opposez sont egaux entr'eux, & le diametient les couppe en deux egalement.



SOit au parallelogramme NPHC tirée la ligne droicte P C qui fait les angles alternes egaux, HPC à PCN, & CPN à PCH. il est euident que tout l'angle HCN est egal au tout HPN. Apres, pour ce que les deux triangles ont deux angles egaux aux deux angles, & le costé PC commun, les autres angles seront egaux l'vn à l'autre, & les costez aux costez *par la* 26. Dõt s'ensuiura que la ligne HP sera egale à CN, HC à PN. & l'angle PHC à l'angle PNC, & que les deux triangles estans egaux *par la mesme* la diagonale PC couppera le parallelogramme en deux egalement.

PROPOSITION XXXV.

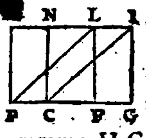
Les parallelogrammes estans sur vne mesme base, & entre mesmes paralleles sont egaux entr'eux.



SVR la base PC soient les deux parallelogrammes HPCN, & LPCF. Puis que les lignes HP & NC sont egales, comme aussi LP, FC, & semblablement HN, PC, & PC, LF, *par la precedente*, les deux triangles HPL, & NCF seront equiangles & egaux, desquels soit osté le triangle commun NLG, resteront les trapeses egaux HNGP & FLGC. Ausquels si on adiouste le triangle commun PGC, il sera euident que le parallelogramme PF sera egal à l'autre HC, estans les deux constituez sur vne mesme base PC.

PROPOSITION XXXVI.

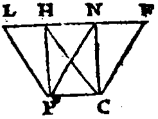
Les parallelogrammes estans sur bases egales & entre mesmes paralleles sont egaux entr'eux.



SOient deux paralleles HI, PG, & deux parallelogrammes HC, LG sur bases egales, soient tirées les lignes droictes PL, CI qui seront paralleles *par la* 33. & feront le parallelogramme IP egal au parallelogramme HC *par la precedente*, & à l'autre IF: Dont est euident que le parallelogramme HC est egal au parallelogramme LG *par la premiere commune sentence*.

PROPOSITION XXXVII.

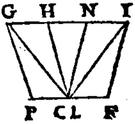
Les triangles estans sur vne mesme base & entre mesmes paralleles, sont egaux entr'eux.



SVR la base P C soient deux triangles H P C, & N P C entre deux paralleles, sçauoir P C & LF. Soit du point P tirée la ligne droicte PL parallele à C H & CF parallele à P N. Il'est euident *par la* 35. que le parallelogramme L C est egal au parallelogramme F P, mais le triangle H P C est la moitié de l'vn, comme N P C la moitié de l'autre. Il s'ensuiura donc que les deux triangles seront egaux *par la* 7. C. S.

PROPOSITION XXXVIII.

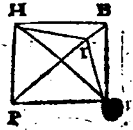
Les triangles estans sur bases egales & entre mesmes paralleles, sont egaux entr'eux.



SOient les deux triangles GPC, ILF sur bases egales & entre mesmes paralleles, sçauoir sur PF, GI, & soit faicte la ligne CH parallele à PG, comme aussi L N à F I. D'autant que les parallelogrammes H P & N F sont egaux *par la* 30. les triangles qui sont moitiez seront egaux.

PROPOSITION XXXIX.

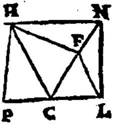
Les triangles egaux constituez sur vne mesme base & d'vne mesme part, sont entre mesmes paralleles.



SI les deux triangles sur la base PC (sçauoir HPC & BPC) sont egaux, & que la ligne droicte HB ne soit parallele à P C. posons vne parallele HI, & soit tiree I C. Les deux triangles H P C, I P C seront egaux *par la* 37. & s'ensuiura que la partie sera egale au tout (sçauoir IPC à BPC) ce qui ne peut estre, ayant B P C esté posé egal à H P C.

PROPOSITION XL.

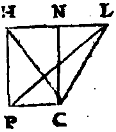
Les triangles egaux qui sont sur bases egales & d'vne mesme part, sont entre mesmes paralleles.



Soient deux triangles HPC & NCL egaux, constituez sur bases egales P C, C L. Si H N n'est parallele à P L, soit H F parallele à la mesme, & tirée la ligne L F. Lors les deux triangles HPC & FCL seront egaux *par la* 38. dont s'ensuiura que la partie F C L sera egale au tout N C L, ce qui ne peut estre, ayant NCL esté posé egal à HPC.

PROPOSITION XLI.

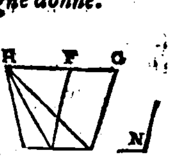
Si vn parallelogramme & vn triangle ont vne mesme base & sont entre mesmes paralleles, le parallelogramme sera double au triangle.



Soit le parallelogramme H P C N & le triangle LPC sur vne mesme base PC, & entre mesmes paralleles PC, HL, & soit tirée le dimetient H C, les deux triangles HPC & LPC seront egaux *par la* 37. mais le triangle HPC est la moitié du parallelogramme HPCN: le triangle L P C sera donc la moitié du parallelogramme.

PROPOSITION XLII.

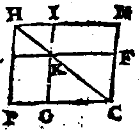
Faire vn parallelogramme egal à vn triangle donné, & ayant vn angle egal à vn angle rectiligne donné.



Soit le triangle donné H P C, & l'angle donné N, auquel angle & au point donné C soit fait son egal PCG: & soit couppée la ligne P C en deux egalement au point L, duquel soit tirée LF parallele à C G, & du point H soit tirée H G parallele à P C. D'autant que les deux triangles H P L, H L C sont egaux *par la* 38. & que le triangle H L C est la moitié du parallelogramme G L *par la precedente*: Il s'ensuiura que ce mesme parallelogramme sera egal aux deux triangles, (c'est à dire) au tout proposé H P C.

PROPOSITION XLIII.

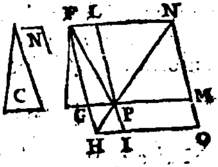
En tout parallelogramme les suppléments des parallelogrammes qui sont sur le diametre sont egaux entr'eux.



SOit le parallelogramme HPCN, sa diagonale ou dimetient HC qui couppe le parallelogramme en deux egalement, à l'entour de laquelle diagonale soient les autres parallelogrammes LI, GF, & les supplements, PK, KN. d'autant que le triangle HLK est egal au triangle HIK, comme aussi KGC à KFC, si d'vn costé on oste les deux triangles HLK, KGC, restera le supplément LG. Et si de l'autre costé on oste HIK & KFC, restera le supplément IF qui sera egal à l'autre LG *par la 3. commune sentence.*

PROPOSITION XLIIII.

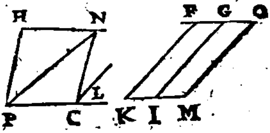
Sur vne ligne droicte donnée descrire vn parallelogramme egal à vne figure rectiligne donnée, ayant vn angle egal à vn angle rectiligne donné.



SOIT la figure rectiligne donnée C. L'angle proposé N, la ligne donnée IP, soit prolongée IP vers L, & sur icelle au point P soit fait vn angle egal à N (comme IPG) dans lequel *par la* 42. soit constitué vn parallelogramme egal à C comme LFGP: & soit acheué le parallelogramme PGHI, & tirée la diagonale HP vers N, & soit prolongée FL pour se joindre en N: soit aussi menée HIO, & GPM, & NMO: icelles lignes FLN, GPM & HIO seront paralleles *par la* 40. comme aussi HGF, IPL & OMN. Tellement que HFNO sera vn parallelogramme, comme aussi IG, & ML: les suppléments donc OP, LG seront egaux *par la precedente.* Mais LG a esté fait egal à C. Il s'ensuiura donc que PO parallelogrãme sur la ligne donnée IP sera egal à la figure rectiligne dõnée, qu'est le triangle C, & aura l'angle dõné, estant l'angle IPG egal à l'angle OMP *par la* 29. & cestuy egal à N par la construction.

PROPOSITION XLV.

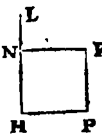
Descrire vn parallelogramme egal à vne figure rectiligne donnee, ayant vn angle egal à vn angle rectiligne donné.



SOit la figure rectiligne donnée H P C N reduicte en triangles H P N, N P C (comme toutes autres figures rectilignes de plusieurs costez peuuent estre reduites. Soit l'angle donné L, & la ligne proposee K F, sur laquelle & au point K soit faict vn angle egal à L, & sur la mesme soit appliqué *par la precedente* vn parallelogramme egal au triangle H P N comme K F G I, & semblablement soit sur I G (egale à K F) aplicqué vn autre parallelogramme egal au triangle P C N, comme I G O M. D'autant que K F est parallele & egale à I G, & celle-cy à MO, Il s'ensuyura que K M & FO serõt egales & paralleles: *par la* 33. & que la figure entiere F M sera vn parallelogramme ayant l'angle donné & la ligne donnee egale à la figure rectiligne proposee H P C N.

PROPOSITION XLVI.

D'vne ligne droicte donnée descrire vn quarré.

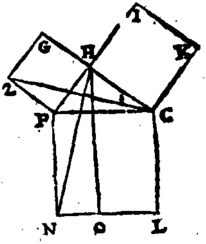


SVR la ligne donnée HP soit esleuée la perpendiculaire du point H comme H L, *par la* 11. & soit faicte HN egale à HP. Apres soit du point N tirée NF parallele à H P, & du point P soit tirée P F parallele à H N. Il est euident que la figure est equilaterale & parallelogramme, & que l'angle H est egal à l'opposé F. *par la* 34. Mais les deux angles H & P valent deux droits *par la* 29. Il s'ensuit donc que P est droit, comme aussi l'opposé N. tellement que H P F N est vn quarré.

PROPOSITION XLVII.

Aux triangles rectangles le quarré qui est fait du costé qui soustient l'angle droict est egal aux quarrez qui sont faits des costez qui comprennent l'angle droit.

SOit le triangle rectangle HPC ayant l'angle H droit: soient aussi les trois quarrez d'escrits sur ses costez PCLN, HIKC, & HGZP. Pour monstrer que le quarré CN (opposé à l'angle droit H) est egal aux deux autres, soit tirée sur NL la perpendiculaire HO (qui sera parallele à PN *par la* 28. Soit aussi tirée HN & CZ. d'autant que PO est vn parallelogramme, le triangle HPN, qui est sur mesme base PN & entre mesmes paralleles PN, HO sera la moitié d'iceluy. Maintenant le triangle ZPC a les deux costez ZP, PC egaux aux deux costez HP, PN (comme il ne se peut faire autrement par la construction) & l'angle ZPC est composé de l'angle droit ZPH

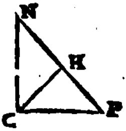


& de l'angle HPC: comme en semblable l'angle NPH est composé de l'angle droit NPC, & du mesme HPC, qui est commun. Il s'ensuit donc que l'angle ZPC est egal à l'angle NPH, & par consequent la base ZC egale à la base HN, & les autres angles aux autres angles: & le triangle egal au triangle *par la* 4. Mais le quarré HGZP & le triangle ZPC sont sur mesme base ZP & en mesmes paralleles ZP, GC. Il s'ensuit donc que le triangle ZPC est la moitié du quarré HGZP *par la* 41. & que ce quarré est egal au parallelogramme PO *par la 6. commune sent.* Semblablement se monstrera l'autre quarré KH estre egal au rectangle CO.

PROPOSITION XLVIII.

Si le quarré qui est descrit de l'vn des costez d'vn triangle est egal aux quarrez des autres costez du triangle; L'angle contenu des autres deux costez du triangle sera droict.

SOIT le triangle HPC duquel le costé PC fait vn quarré egal aux quarrez de HC & HP. Soit en apres sur la ligne CH au poinct H esleuée vne perpendiculaire HN egale à HP, & soit tirée NC. D'autant que les quarrez de NH, HC, (c'est à dire de HP, HC) sont egaux au quarré de CN *par la precedente.* Il s'ensuiura que le quarré de CN sera egal au quarré de CP, & par consequent la ligne NC egale à la ligne CP, & le triangle NHC egal & equiangle au triangle CHP, & particulierement l'angle CHP egal à l'angle NHC, c'est à dire droict: ce qu'il falloit demonstrer.



FIN DV PREMIER LIVRE.

LE SECOND LIVRE DES ELEMENTS D'EVCLIDE.

DEFFINITION PREMIERE.

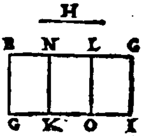
TOVT parallelogramme rectangle eſt dit eſtre contenu de deux lignes droictes qui comprennent l'angle droict.

2. En tout eſpace patallelogramme, vn chacun d'iceux parallelogrammes qui ſont ſur le diametre ayant vn angle commun, auec les deux ſupplements ſe nomme gnomon.

PROPOSITION I.

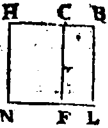
S'il y a deux lignes droictes, dont l'vne ſoit couppée en autant de parties qu'on voudra, le rectangle contenu des deux lignes droictes eſt egal aux rectangles contenus de la non-couppée, & d'vne chacune piece de la couppée.

SOient les deux lignes droictes H & GI, deſquelles GI ſoit couppée en K, O, ſoit au point G eſleuée la perpendiculaire GB & faicte egale à H. Soit en apres tirée BC. parallele à IG, & CI à BG, icelles ſeront egales aux oppoſées, & feront vn rectangle BI: ſoient auſſi tirées KN & OL paralleles à BG, & par conſequent egales: Il eſt euident que les trois parallelogrammes BK, NO, LI ſeront rectangles *par la 29.* & compris de la ligne non couppée BG (c'eſt à dire H) & de chacune piece de la couppée GK, KO, OI: & pource qu'ils compoſent le tout BI, ils luy ſont donc egaux.



PROPOSITION II.

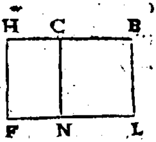
SI vne ligne droicte eſt couppée comme on voudra, les rectangles contenus de toute la ligne, & d'vne chacune piece, ſont egaux au quarré de toute la ligne.



SOit la ligne droicte NL couppée en F, & soit fait le quarré NHBL & tirée en angles droits la ligne droicte F C pour estre egale & parallele à NH, & faire les deux rectangles, HF, CL, qui composent le tout H L, & sont compris de la toute N H ou F C, & de chacune des parties comme NF, FL. Il est euident qu'iceux rectangles sont egaux à leur tout.

PROPOSITION III.

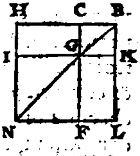
Si vne ligne droicte est couppée comme on voudra: le rectangle contenu de la toute & de l'vne des pieces est egal au rectangle contenu des pieces, & au quarré de ladicte piece.



SOit la ligne droicte F L couppée en N, & soit la ligne droicte F H perpendiculaire & egale à NL, & soit fait le rectangle HL, & esleuée la ligne NC pour estre parallele & egale à F H. Il est euident que C L sera vn quarré, & HN vn rectangle long fait de la ligne HF. (c'est à dire NL l'vne des pieces) & de l'autre piece FN. Et pource que ces deux figures composent le tout HL, elles luy sont egales.

PROPOSITION IIII.

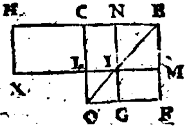
Si vne ligne droicte est couppée comme on voudra, le quarré de la toute est egal, & aux quarrez des pieces, & au rectangle deux fois contenu des pieces.



SOit la ligne droicte NL couppée en F, & soit sur icelle NL fait le quarré NHBL: & soit esleuée en angles droits F C pour estre parallele & egale à NH. Soit aussi tirée la diagonale BN, & par la section G soit menée IK parallele & egale à NL. Il est euident que le quarré sur la partie NF (c'est à sçauoir IF) & l'autre quarré sur la partie FL (c'est à sçauoir C K) auec le rectangle deux fois de N F, F L, (c'est à dire, HG, & GL) font tout le quarré HL, & par consequent luy sont egaux.

PROPOSITION V.

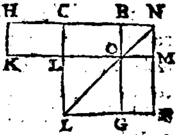
Si vne ligne droicte eſt diuiſee en deux pieces egales, & en deux inegales, le rectangle contenu des pieces inegales de la toute, auec le quarré de la ſection entre moyenne, eſt egal au quarré de la moitié.



SOit la ligne droicte H B couppée egalement en C, & inegalement en N. ſoit fait le rectangle des pieces inegales H N, N B: (c'eſt à dire, le rectangle H I.) Soit auſſi fait le quarré de la moitié C B.(c'eſt à dire, le quarré G F) & ſoient tirées NIG, & LIM D'autant que BM eſt egale à NI, & MF egale à C N (c'eſt à dire, à LI ou IG) il ſ'enſuit que LG eſt vn quarré, lequel joint au rectangle H I, ſont enſemble egaux au quarré C F, parce que le rectangle N F eſt egal au rectangle H L, eſtant compris de lignes egales par la conſtruction.

PROPOSITION VI.

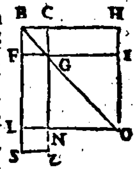
Si vne ligne droicte eſt couppée en deux pieces egales, & on luy adiouſte directement quelque ligne droicte: le rectangle contenu de la toute auec l'adiouſtée; & de l'adiouſtée, auec le quarré de la moitié eſt egal au quarré qui eſt faict de la moitié & de l'adiouſtée comme d'vne.



SOit la ligne droicte H B couppée en deux egalement en C, à laquelle ſoit appoſée directemẽt BN. Soit fait le rectangle de la toute & de l'appoſée, c'eſt à ſçauoir H N, & de l'appoſée B N (c'eſt à dire N M.) Et ſoit ce rectangle H M: puis ſoit de C N fait le quarré C F, & ſoit tirée B G parallele & egale à N F. D'autant que *par la conſtruction* C B eſt egale à M F (c'eſt à dire à O G ou L I) il s'enſuit que L G eſt vn quarré, lequel auec le rectangle H M eſt egal au quarré CF, parce que le rectangle G M eſt egal au rectangle C O (c'eſt à dire C K) *par la conſtruction.*

PROPOSITION VII.

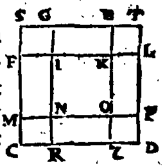
Si vne ligne droicte est couppé comme on voudra, le quarré de la toute, & le quarré de l'vne des pieces, iceux deux quarrez ensemble sont egaux, au rectangle contenu deux fois de la toute & de ladicte piece, & au quarre de l'autre piece.



Soit la ligne droicte B H couppée comme on voudra en C: & sur B H soit fait le quarré BHOL: soit la ligne BF faicte egale à BC, & soit tirée CN parallele & egale à BL, & FI à BH. Soit encor fait le quarré N S de la ligne B C ou L N. D'autant que les deux rectangles FH, & FZ qui sont compris de la toute B H (ou F S) & de la piece BC (ou BF, ou FG) ensemble le quarré IN fait de l'autre piece C H, composent & le quarré de la toute (c'est à sçauoir HL) & le quarré de ladicte piece B C (c'est à sçauoir N S) il est certain qu'ils sont egaux ausdits quarrez HL & N S, comme toutes les parties au tout.

PROPOSITION VIII.

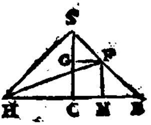
Si vne ligne droicte est couppée comme on voudra, le rectangle contenu quatre fois de la toute, & d'vne des pieces, auec le quarré de l'autre piece, est egal au quarré de la toute, & de ladicte piece.



Soit la ligne droicte SB couppée en G, & soit apposée la ligne BT egale à SG. Soit sur la composée S T fait le quarré STDC, & tirez GR, BZ paralleles & egales à S C. Soient aussi TL, DP egales à BT (c'est à dire SG) & tirees L F, P M paralleles & egales à S T. Il est euident que les quatre rectangles SK, BP, DN, & RF sont faits de la toute SB & de la piece SG, & que le quarré IKON est fait de l'autre piece G B, & composent le quarré fait de la toute & de l'apposée B T, laquelle B T est egale à l'vne des pieces sçauoir S.G. Il est donc euident que le quarré S D fait sur la composée S T est egal à iceux quatre rectangles, & au quarré I O fait de l'autre piece G B.

PROPOSITION IX.

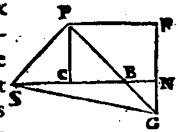
Si vne ligne droicte est couppée en deux pieces egales, & en deux pieces inegales : les quarrez des pieces inegales de la toute seront doubles aux quarrez de la moitié, & de la section entre-moyenne.



Soit la ligne droicte HB couppée en deux egalement au point C, & inegalement au point N. soit esleuée en angles droicts la ligne droicte CS, & faicte egale à CH, & soient menées HS & BS. D'autant que les deux triangles HCS & BCS sont isosceles, ils ont les angles sur la base egaux. Or HCS est droict, comme aussi BCS, donc *par la 32. du 1.* l'angle CHS vaut vn demy droict, comme aussi HSC, SBC, & BSC. Celuy-cy joint à HSC fera vn angle droit HSB. Soit aussi esleuée en angles droits NF, & du point F soit tirée FG parallele & egale à NC. Il est euident que NF est egale à NB (l'angle FNB estant droit, & NBF demy droit, comme aussi NFB) *par la 6. du premier.* Semblablement FG est egale à GS. Soit tirée HF. D'autant que *par la 47. du premier,* les quarrez de HN & NB (ou NF) sont egaux au quarré HF, & que cestuy-cy est egal aux quarrez de FS & SH, & que le quarré de SH est double au quarré de HC, & le quarré de SF double au quarré de GF (ou CN:) il s'ensuit que les quarrez des deux pieces inegales HN & NB sont doubles aux quarrez de la moitié HC, & de la ligne entre les deux sections CN.

PROPOSITION X.

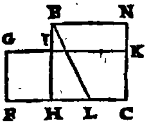
Si vne ligne droicte est couppée en deux pieces egales, & on luy adiouste directement quelque ligne droicte : le quarré de la toute auec l'adioustée & le quarré de l'adioustée, sont doubles aux quarrez de la moitié, & de celle qui est faicte de la moitié & de l'adioustée, comme d'vne.



SOit la ligne droicte S B couppée en deux egalement au point C, à laquelle soit directement apposée BN. Soit du point C esleuée en angles droits C P qui soit egale à CS. Soit aussi fait le rectangle C P F N, soient menées S P, P B. Il est euident que l'angle S P B sera droit (estant composé de deux demy droits) comme en la precedente. Soit prolongée F N vers G,& PB vers G. Le triangle BNG est rectangle & isoscele, d'autant que l'angle PBC est demy droit *par la construction*, & egal à l'angle du sommet N B G, comme par consequent l'angle N G B est aussi demy droit (l'angle B N G estant egal à BNF, & par consequent droit) *par la* 13. *du premier*. Dont appert que F G est egale à F P. Soit finalement menée S G. D'autant que *par la* 47. *du premier*, le quarré de S G est egal aux quarrez de S N & N G, (ou N B) & que ce mesme quarré SG est egal aux quarrez de S P, & PG : & que le quarré de SP est double au quarré de la moitié S C,& le quarré de PG double au quarré de P F (c'est à dire C N, qui est la moitié auec l'apposée) il s'ensuit que le quarré de la toute & de l'apposée SN, auec le quarré de l'apposée B N (ou N G) est double aux quarrez de la moitié SC,& de l'autre moitié auec l'apposée C N.

PROPOSITION XI.

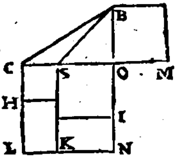
Coupper vne ligne droicte donnée, tellement que le rectangle contenu de la toute & de l'vne des pieces, soit egal au quarré fait de l'autre piece.



SOit la ligne droicte proposée H B, sur laquelle soit descrit vn quarré H B N C, soit couppé en deux egalement HC en L. soit menée L B,& prolongée CH vers F, en sorte que L F soit egale à L B. Sur la ligne HF soit descrit le quarré H F G I, & soit menez G I K. D'autant que le rectangle compris de la toute & de l'apposée comme d'vne ligne (c'est à sçauoir CF) & de l'apposée F H, ou F G (c'est à dire le rectangle F K) auec le quarré de la moitié H L, est egal au quarré de L F *par la 6. de ce liure*, c'est à dire de L B son egale, & que le quarré de L B est egal aux quarrez de H B, H L: il s'ensuit (le commun H L estant osté) que le quarré de H B eſt egal au rectangle FK, & deſquels finalement, ſi le rectangle commun HK eſt oſté, le rectangle IN demeurera egal au quarré FI. La ligne HB eſt donc couppée, ſuiuãt la propoſition.

PROPOSITION XII.

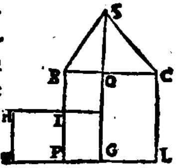
Aux triangles ambligones, le quarré qui eſt fait du coſté qui ſouſtient l'angle obtus, eſt plus grand que les quarrez qui ſont faits des coſtez qui contiennent l'angle obtus, de la quantité du rectangle contenu deux fois de l'vn des coſtez, qui ſont à l'entour de l'angle obtus, deſſus lequel eſtant mené, tombe la perpendiculaire, & de la ligne priſe dehors entre la perpendiculaire, & l'angle obtus.



SOit le triangle ambligone BCS, ayant l'angle S obtus. ſoit prolongé le coſté CS vers O, & faicte la perpendiculaire BO. D'autant que le quarré de BC eſt egal aux quarrez BM & OL, & le quarré de BS egal aux quarrez BM & SI, *par la 47. du premier*. Il eſt euident que le quarré de BC n'excede le quarré de BS, (c'eſt à dire les quarrez BM & SI) ny le quarré de CS (qui eſt SH) que des deux rectangles IK, & KH. Or ſoit fait le quarré CONL, & tirée la perpendiculaire SK, & faits les quarrez SH & SI. Il eſt manifeſte que IN eſt egale à CS, & HL à SO. Tellement que le rectangle IK eſt compris de lignes egales à CS, SO, comme auſſi l'autre rectangle HK. Donc *aux triangles ambligones, &c.*

PROPOSITION XIII.

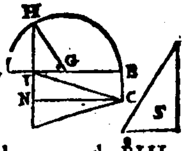
Aux triangles oxigones, le quarré du coſté qui ſouſtient l'angle pointu, eſt plus petit que les quarrez qui ſe font des coſtez qui contiennent l'angle pointu de la quantité du rectangle contenu deux fois de l'vn des coſtez, qui ſont à l'entour de l'angle pointu, auquel tombe la perpendiculaire, & de la ligne priſe dedans entre la perpendiculaire & l'angle pointu.



SOit le triangle oxygone S B C, S B subtendent l'angle aigu C. Soit tirée la perpendiculaire S O sur le costé au long de l'angle aigu B C. Soit fait le quarré BCLF. Soit prolongée SO vers G, & fait le quarré O I. Il est euident *par la* 47. *du* 1. que le quarré de SB ne vaut que les quarrez de SO, & OB. Or le quarré de BC (c'est à dire BL) est plus grand que lo quarré de B O (c'est Q I) du gnomon C G I. Et le quarré de S C est plus grand que le quarré de SO, du quarré de OC (c'est à dire FNHI. que nous posons estre descrit sur I F egale à OC.) Mais le rectangle OL est compris de CL (ou BC) & de CO, qui est entre l'angle aigu C & la perpendiculaire. Et l'autre rectangle HG est de mesme, estant GF egale à BO, & F N à FI: & FI à O C *par la construction.* Tellement que G N est egale à B C, & HN à OC. Le quarré donc de S B est plus petit que les quartez de B C & de SC, des deux rectangles OL & GH.

PROPOSITION XIIII.

Faire vn quarré egal à vn rectiligne donné.



SOIT la figure rectiligne donnée S, à laquelle soit fait dans vn angle droit donné vn parallelogramme rectangle egal *par la* 45. *du premier*, & soit iceluy rectangle B I N C. Soit prolongée B I vers L, en sorte que I L soit egale à I N. soit couppée B L en deux egalement, cõme en G, & fait du centre G le demy cercle BHL, & prolongée N I iusques à la circonference, comme en H, & menée G H. D'autant que B L est couppée en deux egalement en G, & inegalement en I, le rectangle compris soubs BI, I L auec le quarré de G I est egal au quarré de G L (ou de G H son egale) *par la* 5. *de ce liure.* Mais le quarré de GH est egal aux quarrez de GI, & I H (l'angle G I H estant droit d'vn costé de la perpendiculaire H I, *par la construction.*) Il s'ensuit donc que le rectangle de B I, I L (c'est à dire B N) auec le quarré de G I est egal aux quarrez de H I, & I G Mais le quarré commun de I G estant osté, le rectangle B N & le quarré de I H demeureront egaux.

LE TROISIESME LIVRE DES ELEMENS D'EVCLIDE.

DEFINITION PREMIERE.

LEs cercles egaux ſont ceux deſquels les diametres ſont egaux; ou deſquels les lignes menées du centre ſont egales.

2. Vne ligne droicte eſt dicte toucher vn cercle, laquelle touchant le cercle, ſi elle eſt prolongée, ne coupe point le cercle.

3. Les cercles ſont dits ſe toucher enſemble, quand ſe touchans l'vn l'autre ils ne ſe coupent point enſemble.

4. Les lignes droictes en vn cercle ſont dictes eſtre egalement diſtantes du centre, quand les perpendiculaires tirées du centre ſur icelles ſont egales. Mais celle ſe dit plus diſtante ſur laquelle tombe la plus grande perpendiculaire.

5. Section de cercle eſt vne figure compriſe d'vne ligne droicte & de la circonference du cercle.

6. Mais l'angle de la ſection eſt celuy qui eſt compris d'vne ligne droicte & de la circonference du cercle.

7. Mais vn angle ſe dit eſtre en la ſection, celuy compris de deux lignes droictes menées des extremitez de la ligne droicte coupante, & leſquelles concourrent en vn poinct qui eſt en la circonference.

8. Mais quand les lignes droictes comprenant l'angle, prennent quelque circonference, en icelle eſt la grandeur de l'angle, qui ſe dit eſtre appuyé ſur icelle.

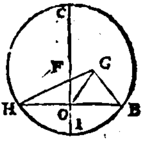
9. Secteur de cercle eſt vne figure contenuë de deux

demy diametres faisans angle au centre, & d'vne partie de circonference prise par iceux.

10. Semblables sections de cercle sont celles qui reçoiuent les angles egaux, ou bien esquelles les angles sont egaux entr'eux.

PROPOSITION I.

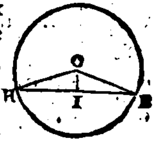
Trouuer le centre d'vn cercle donné.



SOIT dans le cercle CHIB tirée vne ligne contingente HB laquelle soit diuisée en deux egalement en O, duquel point soit tirée la perpendiculaire de costé & d'autre iusques à la circonference comme CI, & icelle soit diuisée en deux egalement comme en F. Si le point F n'est le centre du cercle, soit supposé vn autre point G, & soient menées GH, GB, GO. Lors GB sera egale à GH, & l'angle H sera egal à l'angle B, & les deux triangles compris de lignes egales seront egaux & equiangles. L'angle donc GOB sera egal à l'angle GOH, & par consequent tous deux droits: il faudra donc que l'angle droit GOB soit moindre que l'angle droit FOB, & l'angle droit GOH plus grãd que le droit FOH. *contre la* 10. *commune sentence*: ce qui est absurde. Parquoy le centre ne sera point hors la ligne CI. que si en icelle on suppose vn autre point, les lignes tirées d'iceluy à C & I seront ingales contre la 15. definition.

PROPOSITION II.

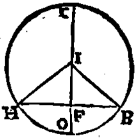
Si en la circonference d'vn cercle, l'on prend deux tels points qu'on voudra, la ligne droicte menée de point à autre, tombera dedans le cercle.



SOient en vne circonference de cercle deux points comme HB, & soit menée la ligne HB, & icelle couppée en deux egalement en I, & menée la perpendiculaire IO, & soit le point O le centre du cercle *par la precedente*. Soient aussi menées HO, OB qui seront egales. D'autant que l'angle O I C est droit, il s'ensuit qu'il est plus grand que O B I, ou I O B, & que par consequent la ligne O B est plus grande que O I. Dont est manifeste que la ligne H B est dans le cercle : car si elle estoit hors iceluy, O I seroit plus grand que O B, & si elle estoit en la mesme circonference, le mesme O B seroit egal à O I *par la definition du cercle.*

PROPOSITION III.

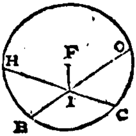
Si au cercle quelque ligne droicte passant par le centre, couppe quelque ligne droicte ne passant pas par le centre, en deux egalement: elle la couppera aussi à droits angles; & si elle la couppe à droits angles, elle la couppera aussi en deux egalement.



AV cercle CHOB soit la ligne C O estenduë par le centre I couppant en deux egalement H B, qui ne passe point par le centre, soient menées I H, I B. D'autant que les deux triangles sont equiangles, il s'ensuiura que les angles I F B, & I F H seront egaux, & par consequent droicts. Pour le second, soit H B couppée par C O en angles droicts. D'autant que les angles sur la base H & B sont egaux, & I F B, I F H aussi egaux *par l'hypothese*, & les costez HI, IB egaux, l'autre angle sera egal à l'autre angle, & les autres costez aux autres costez *par la 26. du premier*. Dont s'ensuit que H F est egal à F B.

PROPOSITION IIII.

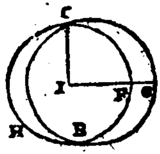
Si au cercle deux lignes droictes se couppent ensemble n'estans pas menées par le centre : elles ne se coupperont point ensemble en deux parties egales.



SOient deux lignes HC, BO au cercle HBCO, se couppant en I, & soit du centre F tirée F I. Si elles se couppent en deux egalement l'angle F I O sera droit *par la precedente*, & par consequent egal à F I B, & s'ensuiuroit aussi que l'angle droit FIB seroit egal à l'angle droit FIH. Ce qui ne peut estre, n'estant F I H que partie de F I B. Et quand mesme vne de ces lignes seroit couppée en deux egalement, il se demonstrera par mesmes raisons l'autre estre couppée inegalement. Tellement donc, *si au cercle, &c.*

PROPOSITION V.

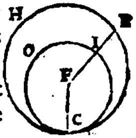
Si deux circonferences se couppent ensemble, elles n'auront pas vn mesme centre.



SOient deux circonferences se couppant en C & B. Si I est le centre des deux, soient menées I C, I F & I G: il s'ensuiura *par la definition du cercle*, que les trois lignes I G, I F, I C seront egales (c'est à sçauoir la plus grande à la plus petite) ce qui ne peut estre contre la premiere commune sentence. *Si donc deux circonferences, &c.*

PROPOSITION VI.

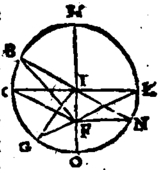
Si deux circonferences se touchent dedans, elles n'auront pas vn mesme centre.



SOient deux circonferences H B C, O I C se touchans au point C, si F est le centre des deux, soient menées F C, F I, & F B. Il s'ensuiura que les trois lignes F C, F I & F B seront egales, c'est à sçauoir la partie F I au tout F B: ce qui ne peut estre. *Si donc deux circonferences, &c.*

PROPOSITION VII.

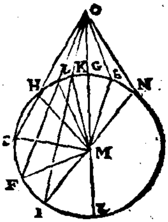
Si au diametre de cercle se prend quelque point qui ne soit pas le centre du cercle, & d'iceluy point tombent quelques lignes droictes en la circonference: la plus grande sera celle en laquelle est le centre, & la plus petite celle qui reste: Mais des autres tousiours la plus prochaine de celle qui est menée par le centre est plus grande que la plus loing. Et deux lignes droictes egales tant seulement tombent d'iceluy point au cercle, des deux parts de la plus petite.



SOit le diametre H O, le centre I, & quelque point au diametre qui ne soit point le centre du cercle comme F. Duquel point F soient tirées plusieurs lignes à la circonference, comme F B, F C, F G, F O. Soient en apres tirez les demy diametres I B, I C, I G. d'autant que les deux costez B I & I F sont plus grands que F B *par la* 20. *du* 1. & que H F leur est egale, H F sera donc plus grande que B F, & semblablement plus grande que C F, G F, & O F, & à toutes autres lignes qui pourront estre tirées de F, car elle sera tousiours egale aux deux costez du triangle. Et d'autant que B I, I F sont egaux à C I, I F, & que l'angle B I F est plus grand que l'angle C I F, la base B F sera plus grande que la base C F. Semblablement des autres. Et pource que le costé G I est moindre que les deux costez G F, F I, & que O I est egale à G I, icelle O I sera donc moindre que les deux G F, F I. La commune F I estant ostée, s'ensuiura F O estre plus petite que quelconque autre ligne tirée de F à la circonference. La ligne donc qui passe par le centre est la plus grande, sçauoir F H, & l'autre restée plus petite, sçauoir F O. Des autres, celles qui sont plus proches du cẽtre sont plus grandes que les plus esloignées. Pour le dernier, soit sur la ligne F I fait vn angle en I egal à G I F, & soit F I N, soit menée F N qui sera egale à F G. Il est euident qu'on ne pourra tirer du point F vne autre ligne à la circonference de ceste mesme part qui ne s'approche du centre, & qui ne soit par consequẽt plus grande, ou qui ne s'en esloigne, & soit plus petite que F N *par la demonstration de la premiere & seconde partie de ceste proposition.*

PROPOSITION VIII.

Si dehors le cercle se prend quelque point, & d'iceluy point en la circonference se menent quelques lignes droictes, desquelles l'vne passe par le centre, & les autres où l'on voudra: des lignes droictes menées en la circonference caue, la plus grãde est celle qui passe par le centre: Et des autres tousiours la plus pres de celle qui passe par le centre, est plus grande que la plus loin. Mais des lignes droictes tombant en la circonference conuexe, celle est la plus petite qui est interposée entre le point & le diametre: & des autres celle qui *est plus pres de la plus petite, est tousiours plus petite que celle qui en est plus loin. Et deux lignes droictes egales tant seulement tombent du mesme point à iceluy cercle des deux parts de la plus petite.*



SOit le point O donné hors le cercle, duquel soit tirée vne ligne par le centre iusques à la circonference caue O G M Z, soient aussi plusieurs autres lignes tirées du mesme point à la mesme circonference caue, comme O I, O F, O C, & autres lignes tirées du mesme point à la circonference conuexe, comme O H, O L, O K, O G. Soient menées M I, M F, M C, M H, M L, M K. D'autant que O Z est egale aux deux O M, M I, elle sera donc plus grande que O I *par la 20. du premier.*

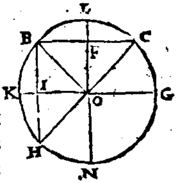
Dauantage, pource que O M, M I sont egales à O M, M F, & que l'angle O M I est plus grand que l'angle O M F, il s'ensuiura que la base O I sera plus grande que la base O F, ainsi des autres, la plus proche du centre sera plus grande que la plus esloignée.

Au surplus, d'autant que O K, K M, sont plus grandes que O M, soient ostées les egales M K, M G, il s'ensuiura que la partie exterieure de la ligne qui passe par le centre (sçauoir G O) sera plus courte que O K.

Semblablement elle se demonstrera moindre que O L, O H. Et pource qu'au triangle O L M deux lignes droictes prouiennent des extremitez de l'vn des costez O M, & se ioignent en vn point dans le triangle, icelles seront moindres que les autres *par la 21. du premier.* Or M K est egale à M L. La ligne donc O K sera moindre que O L : c'est à sçauoir, tousiours la plus proche de O G sera plus courte que la plus esloignée. Pour le dernier, soit sur O M & au point M fait vn angle egal à O M K : c'est à sçauoir O M B, soit iointe O B. Les deux costez O M, M B sont egaux aux deux costez O M, M K, & l'angle egal à l'angle, la base donc O B sera egale à O K de chacun costé de Z O : & ne se pourra donner aucune autre egale : car la plus esloignée sera plus grande, & la plus proche plus courte, comme il a esté demonstré.

PROPOSITION IX.

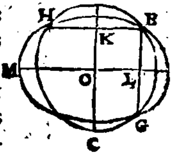
Si on prend quelque point au cercle, & d'iceluy point en la circonference tombent plus de deux lignes droictes egales, le point pris est le centre d'iceluy cercle.



Soit pris vn point O dans le cercle N K L G duquel trois lignes O H, O B, O C, tirées à la circonference soient egales. Soit menée B C, & couppée en F en deux egalement, & soit aussi menée F O N. D'autant que les deux triangles O F B, & O F C sont equiangles & rectangles, la ligne N F est en angles droits sur B C : en icelle N F sera donc le centre du cercle *par la 3. de ce liure.* Semblablement B H couppée en deux egalement en I, & tirée I O G, se demonstrera en celle-cy estre le centre du cercle, puis donc que la section O est commune à F N, & I G, il s'ensuiura que O sera le centre du cercle.

PROPOSITION X.

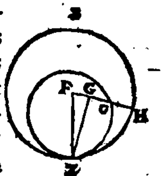
Vne circonference ne couppe point vne autre circonference en plus de deux point.



SI deux circonferences se couppent en trois points, comme en H, B, G, soient menées les lignes droictes H B, B G, & icelles couppées en deux egalement en K & L : soient de K & L menées en angles droits deux lignes droites K C, L M. Il est euident que la commune section O sera le centre des deux circonferences: *ce qui ne peut estre contre la 5. proposition de ce liure. Si donc vne circonference, &c.*

PROPOSITION XI.

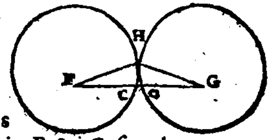
Si deux circonferences se touchent l'vne l'autre dedans, & l'on prend les centres d'icelles : ayant mené vne ligne droicte à iceux centres & produite, elle passera par l'attouchement des circonferences.



SOient deux circonferences se touchans interieurement au point Z; soit le centre de la plus grande F, & menée Z F. Si le centre de la plus petite est hors Z F, posons estre en G, & soit menée FGOH, lors G O, & G Z seront egales: Z G & G F seront donc egales à O G & G F. Mais ZG, G F sont plus grands que Z F, la ligne O F sera donc plus plus grande que F Z. Ce qui est faux, n'estant FO que partie de F H, laquelle F H est egale à F Z procedant d'vn mesme centre F, & tombant sur vne mesme circonference Z H B, *par la construction. Si donc deux circonferences, &c.*

PROPOSITION XII.

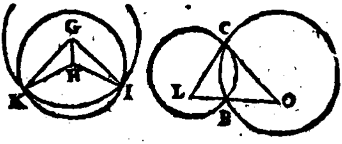
Si deux circonferences se touchent l'vne l'autre dehors, en menant vne ligne droicte depuis les centres d'iceux, elle passera par iceluy attouchement.



SOient deux circonferences se touchant exterieurement en H; si la ligne droicte qui conjoint leurs centres ne passe par H, soit icelle FCOG, & menées F H, & G H: ces deux sont plus grandes que FG. Mais F & G sont les centres, F H & F C seront donc egales, comme aussi G H, GO. Il s'ensuiura donc que F C & G O seront plus grande que la toute F G. Ce qui est notoirement faux (icelles estant moindres du residu CO.) *Si donc deux circonferences, &c.*

PROPOSITION XIII.

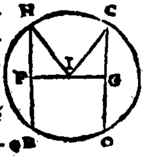
Vne circonference ne touche point vne circonference en plus de points qu'vn, soit qu'elle la touche dehors ou dedans,



SOient deux circonferences se touchans au dehors en deux points C, B (s'il est possible) si leurs centres sont L, O, la ligne droicte L O passera par l'attouchement C, elle passera aussi par B, *par la precedente* : tellement que L C O ne sera qu'vne ligne droicte egale à L O contre la 20. du 1. & par ainsi de point à autre sur vn plan seroient menées deux lignes droictes (*ce qui ne se peut faire contre la quatriesme definition, & contre la description de la ligne droicte qui est la plus courte, tirée de poinct à autre.*) Si les deux circonferences se touchent par dedans en deux points K, I. Icelles n'auront point vn mesme centre *par la cinquiesme de ce liure*. Soient donc les centres G, H, & menée G H, laquelle prolongée tombera au point de l'attouchement K *par la* 11. *de ce liure*. Soit aussi tirée G I, laquelle sera egale à G K, & H I sera egale à H K, procedant d'vn mesme centre. Or G H, H K sont egales à G H, H I. Il s'ensuiura donc que celles-cy seront egales à G I, *contre la 20. proposition du premier.* Tellement donc *qu'vne circonference ne touche point vne circonference, &c.*

PROPOSITION XIIII.

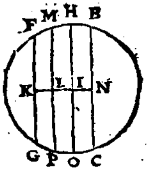
En vne circonference les lignes droictes egales, sont egalement distantes du centre, & celles qui sont egalement distantes du centre sont egales entr'elles.



Soient en la circonference B H C O deux lignes egales H B, C O, & le centre de la circonference I, auquel soient tirées les perpendiculaires I G, I F sur chacune : icelles H B, C O seront couppées en deux egalement, *comme il a esté monstré*. Soient aussi menées I H, I C qui serōt egales. *Or par la* 47. *du premier* les quarrez de I C, I H sont egaux aux quarrez de H F, F I, & de C G, G I. Les deux egaux C G, & H F estans ostez resteront les quarrez de I G, & I F egaux, & par consequent auront leurs costez I F, I G egaux. Il s'ensuit donc *par la* 4. *definition de ce liure*, que H B, C O sont egalement distantes du centre.

PROPOSITION XV.

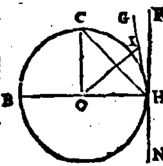
Au cercle la plus grande ligne est le diametre : mais des autres tousiours la plus pres du centre, est plus grande que la plus esloignée.



SOit le diametre du cercle H O, & le centre I, duquel la ligne B C soit plus proche que F G. Soient tirées les perpendiculaires IN, IK. Et d'autant que la ligne I K est plus grande que I N *par la 4. definition de ce liure.* Soit de celle-là ostée vne ligne egale à celle-cy comme I L, & au point L soit faicte la perpendiculaire MLP, soient conjointes IM, IF, IP, IG. D'autant que IN, IL sont egales, MP, & BC seront egales *par la precedente.* Et pource que les deux costez MI, IP sont plus grands que MP, il s'ensuiura que le diametre HO (egal aux deux costez) sera plus grand que quelcõque autre ligne donnée dans le cercle. Et veu que les triangles MIP & FIG ont deux costez MI, I P egaux aux deux costez F I, I G, & l'angle MIP plus grand que FIG, la base MP sera plus grande que FG. Or M P a esté monstrée egale à B C : Icelle donc BC plus proche du centre sera plus grande que la plus esloignée F G.

PROPOSITION XVI.

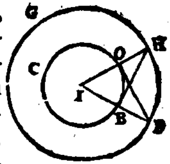
La ligne droicte menée à droits angles à l'extremité du diametre de quelque cercle, tombera dehors icelay cercle, & au lieu contenu entre icelle ligne droicte ; & la circonference ne tombera pas vne autre ligne droicte, & l'angle du demy cercle est plus grand que tout angle rectiligne aigu, & celuy qui reste plus petit.



SOit le demy diametre du cercle OH, & du point H soit esleuée en angles droits NHF. Si la ligne F H tombe dans le cercle comme la ligne droicte CH. Soit du centre O menée la ligne droicte OC, le triangle C O H sera isoscele, & aura les angles sur la base egaux. Mais l'angle OHF est posé droict, il s'ensuiura donc que l'angle HCO sera droict *contre la 17. du premier.* FH ne tombera donc point dans le cercle. Pour le second, si entre la ligne, F H & la circonference pouuoit tomber vne ligne droicte comme GH, soit sur icelle du centre O tirée vne perpendiculaire OI, l'angle OIH sera droict, & par consequent la ligne OH plus grande que O I, *par la 19. du premier.* Mais O I penetre la circonference, & O H la touche seulement : O I sera donc plus grande que OH. Or elle a esté dicte plus grande. (ce qui ne peut estre.) Il ne tombera donc aucune ligne droicte entre FH & la circonference. De là s'ensuiura que l'angle (si ainsi se doit appeller) compris par la circonference, & par le diametre sera plus grand ou plus ouuert qu'aucun angle rectiligne aigu : & que l'autre entre la circonference & la ligne de l'attouchement FH sera moindre. On peut de cecy recueillir que la ligne droicte FHN touche le cercle en vn seul point.

PROPOSITION XVII.

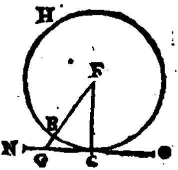
Du point donné mener vne ligne droicte, qui touche le cercle donné.



SOit le point donné H, le cercle donné BOC, du centre I soit tirée IH couppant la circonference en O. soit descrit vn cercle du centre I, & de l'interualle IH comme HGF : & du point O soit menée en angles droits OF iusques à la circonference, & soit jointe IF, BH. D'autant que les deux costez HI, IB sont egaux aux deux costez FI, IO, & l'angle I commun, la base HB sera egale à la base FO *par la 4. du premier*, & les autres angles aux autres angles, sçauoir IOF à IBH. Mais IOF est droit, & la ligne OF touche le cercle donné au point O *par ce qui resulte de la precedente.* Dont s'ensuit que l'angle HBI sera droit, & la ligne droicte HB touchera le cercle donné suiuant la proposition.

PROPOSITION XVIII.

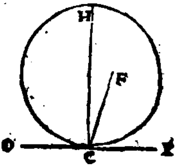
Vne ligne droicte touche vn cercle, & du centre à l'attouchement est menée vne ligne droicte, la menée sera perpendiculaire à l'attouchante.



SOit la ligne droicte NO touchant le cercle au point C du cētre F soit tirée FC, si FCN n'est angle droit, soit tirée vne autre ligne en angles droits sur NO comme FG. D'autant que FGC est droit, il s'ensuiura que la ligne FC subtendente sera plus grande que FG *par la 19. du premier*, mais elle est plus petite du resi du B G (estant seulement egale à F B) il ne se pourra donc tirer du centre aucune autre ligne en angles droits sur N O que F C, sur le point de l'attouchement C.

PROPOSITION XIX.

Si vne ligne droicte touche vn cercle, & on mene de l'attouchement vne ligne droicte à droits angles sur la touchante, le centre du cercle sera en la menée.



Soit la ligne droicte O I, touchant le cercle en C, & du point C soit esleuée en angles droits C H. Si le centre du cercle n'est en la ligne C H, soit s'il est possible en F, & soit tirée F C, celle-cy sera en angles droits sur O I *par la precedente*: FCI sera donc droit. Mais il est moindre que l'angle H C I qui a esté fait droit (ce qui est impossible) le centre du cercle ne sera donc point hors la ligne H C.

PROPOSITION XX.

Au cercle l'angle du centre est double à l'angle qui est en la circonference, quant iceux angles ont pour base vne mesme circonference.

Soit sur la base circulaire B C l'angle au centre B I C, & l'angle en la circōference BHC, & soit menée H F: le triangle H I B sera isoscele, & l'angle exterieur B I F est egal aux angles H B I & B H I, *par la 32. du premier*: l'angle B I F sera donc double à B H I. Semblablement se demonstrera de l'angle FIC. Mais si le centre est hors des lignes, comme pour exemple de l'angle B O C, soit tirée O I N. L'angle exterieur N I C est egal aux interieurs I O C, & ICO, & par consequent double à IOC. Comme aussi N I B est egal à N O B & I B O, & par consequent double à I O B. Si donc le double N I B est osté du double N I C, & le simple I O B du simple I O C, le restant B I C sera double au restant B O C. *De cecy resulte que si la base subtendente*

les angles

les angles, excede la moitié de la circonference, elle se pourra diuiser en plusieurs pieces pour faire plusieurs angles au centre qui se demonstreront doubles à ceux de la circonference.

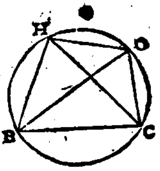
PROPOSITION XXI.

Au cercle les angles qui sont en vne mesme section, sont egaux entr'eux.

SOit la section du cercle B C O fermée de la ligne droicte B O, & les angles sur icello B H O & B I O. Soit le centre du cercle F, & menee F B, F O. D'autant que *par la precedente* l'angle B H O est la moitié de l'angle B F O, comme aussi B I O est la moitié du mesme B F O, il s'ensuiura *par la 7. commune sentence*, qu'iceux angles BHO & BIO seront egaux.

PROPOSITION XXII.

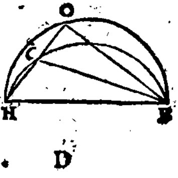
Les angles opposez des figures de quatre costez descrites aux cercles, sont egaux à deux droits.



SOit au cercle le quadrilatere H B C O, & menées les lignes HC, OB les angles HBO & HCO sont egaux, & O B C & O H C estans sur mesmes sections *par la precedente*: tout l'angle donc H B C sera egal aux deux angles C H O & O C H. Tellement que tout l'angle H O C, & l'angle H B C ensemble seront egaux à deux droits *par la 32. du 1.* Semblablement se demonstreront les angles B H O & B C O egaux à deux droits.

PROPOSITION XXIII.

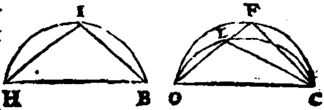
Dessus vne mesme ligne droicte, deux sections de cercles semblales & inegales ne se mettront pas d'vne mesme part.



SOit la ligne droicte H B sur laquelle s'il est possible soient d'vne mesme part menées deux sections de cercles semblables & inegales comme H C B & H O B. Soit tirée la ligne droicte H C iusques à O, & les lignes droictes B C, B O. D'autant que les sections sont semblables & inegales, l'angle H C B sera egal à l'angle HOB *par la 10. definition de ce liure* (c'est à dire l'exterieur à l'interieur *contre la 16. du premier*) *sur vne mesme ligne, donc, &c.*

PROPOSITION XXIIII.

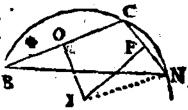
Les semblables sections de cercles dessus lignes droictes egales, sont egales entr'elles.



SOient sur deux lignes droictes egales HB, OC deux sections de cercles egales, sçauoir HIB & OFC, les angles H I B & O F C seront egaux *par la 21. de ce liure.* Et soit, si faire se peut, vne autre section sur OC comme O L C semblable, mais inegale à B I H. Soit menée C L au point L où la circonference est couppée par le ligne droicte O F. D'autant que les sections sont semblables, l'angle O L C sera egal à l'angle H I B, & par consequent à O F C son egal, c'est à dire l'exterieur à l'interieur opposé *contre la 16. du premier. Les sections donc sur lignes egales, &c.*

PROPOSITION XXV.

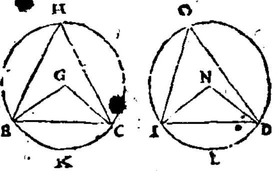
Ayant donné la section du cercle, descrire le cercle duquel elle est la section.



SOit la section de cercle donnée B C N, en laquelle soient menées cõme on voudra deux lignes droictes non paralleles comme BC, C N, lesquelles soient couppées en deux egalement comme en O, F, & soient tirées les perpendiculaires O I, F I, il s'ensuiura (comme on peut recueillir de la premiere de ce liure) que le centre du cercle sera és deux perpendiculaires, c'est à sçauoir au point commun I. Tellement donc que du centre I, & de l'interualle I N on pourra parfaire le cercle duquel B C N est la section donnée.

PROPOSITION XXVI.

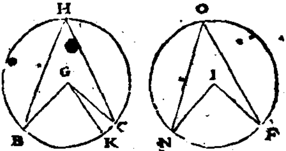
Aux cercles egaux, les angles egaux s'appuyent dessus les circonferences egales, soit qu'ils s'appuyent estans constituez aux centres, ou aux circonferences.



Soient deux cercles egaux HBC, OID, & les angles du centre BGC, IND egaux, comme aussi ceux de la circonference BHC, IOD, les lignes BG, GC sont egales aux lignes IN, ND qui comprennent angles egaux: la ligne droicte donc BC sera egale à la ligne droicte ID, c'est à dire la base à la base *par la 4. du 1.* Or d'autant que les angles H & O sont egaux estans moitiez des angles du centre G, N, *par la 20. de ce liure.* les sections des cercles seront semblables *par la 10. definition de ce liure*, c'est à sçauoir BHC, & DOI. Mais les sections BHC, & DOI, sur les lignes droictes egales BC, ID, seront egales *par la 24 de ce liure.* Les sections donc restées comme aussi les circonferences BKC, & DLI seront egales

PROPOSITION XXVII.

Aux cercles egaux, les angles qui s'appuyent dessus les circonferences egales, sont egaux entr'eux, soit qu'ils s'appuyent estans constituez aux centres, ou aux circonferences.

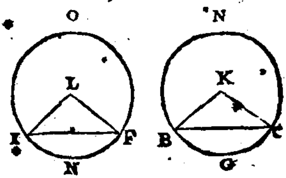


Soit aux deux cercles egaux HBC, FON & sur deux circonferences egales BC, NF les angles de la circonference H & O. Premierement si l'angle I n'est egal à l'angle BGC, qu'il soit estimé moindre, & sur la ligne BG, & au point G soit descrit vn angle egal à I, comme BGK *par la 23. du 1.* La circonference donc BK sera egale à la circonference NF *par la precedente.* Mais par l'hypothese BC est aussi egale à NF. La plus courte donc BK sera egale à la plus grande BC: ce qui est absurde & faux. Les angles donc du centre BGC, NIF ne sont point inegaux. Et partant les angles H, & O qui sont moitiez des angles du centre seront aussi egaux *par la 7. commune sentence.*

PROPOSITION XXVIII.

Aux cercles egaux, les lignes droictes egales, prennent les circonferences egales, la plus grande à la plus grande, & la plus petite à la plus petite.

SOient en cercles egaux deux lignes droictes egales I F, B C: ſoient les centres d'iceux L, K & ſmenées IL, LF, BK, KC: les deux triangles ILF, BKC ſeront egaux & equiangles *par la 8. du 1.* L'angle L ſera donc egal à l'angle K, &

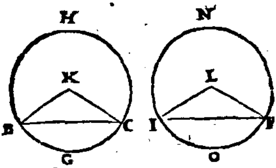


conſiſteront iceux en circonferences egales *par la 26. de ce liure*, c'eſt à ſçauoir en IOF, & BHC plus grandes: par ainſi les reſtes, c'eſt à ſçauoir I N F, & B G C plus petites ſeront egales *par la 3. commune ſentence*, eſtans les deux cercles egaux par l'hypotheſe.

PROPOSITION XXIX.

Aux cercles egaux, les circonferences egales ſont priſes de lignes droictes egales.

SOient en cercles egaux & en circonferences egales deux lignes droictes ſubtéduës, comme BC, IF. Soient les centres des cercles K & L, & menées BK, KC, IL, LF. D'autant que les circonferences BHC & FNI ſont



poſées egales, les reſtes BGC, & FOI ſeront auſſi egales: les angles K & L ſeront donc egaux *par la 27. de ce liure*. Et *par la 4. du premier*, la baſe ſera egale à la baſe (c'eſt à ſçauoir la ligne droicte B C à la ligne droicte I F.)

PROPOSITION XXX.

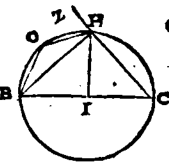
Coupper vne circonference en deux egalement.

SOit la circonference donnée H O B. & ſoit menée la ſubtendente HB, ſur laquelle eſtant couppée en deux egalement au point C, & ſur le meſme point C ſoit eſleuée C O en angles droits & jointes les lignes droictes HO, OB. D'autant que les

coſtez HC, CO ſont egaux aux deux coſtez BC, CO, & comprennent angles egaux, la baſe HO ſera egale à la baſe BO, leſquelles baſes comprendront circonferences egales, c'eſt à ſçauoir l'arc HO, & l'arc OB le plus petit au plus petit *par la 28. de ce liure*.

PROPOSITION XXXI.

Au cercle, l'angle qui est au demy cercle est droit: & celuy qui est en la plus grande section est plus petit qu'vn droit: mais celuy qui est en la plus petite section, est plus grand qu'vn droit. Et d'auantage l'angle de la plus grande section, est bien plus grand qu'vn droit: mais l'angle de la plus petite section est plus petit qu'vn droit.

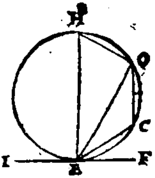


AV cercle HOBC duquel le centre I soit l'angle CHB dans le demy cercle. Soit mené le diametre BIC. & en la plus grande section soit l'angle HCB, & en la moindre soit l'angle HOB. L'angle mixte de la plus grande section soit compris de la ligne droicte BH & de l'arc HC, & l'angle mixte de la moindre soit compris de la mesme BH & de l'arc HO. Soit prolongée la ligne droicte CH en Z & menée IH. D'autant que les angles ICH, IHC sont egaux, comme aussi IBH, BHI, tout l'angle BHC sera egal aux angles HBI, HCI: & à ces deux-cy est egal l'angle exterieur ZHB *par la* 32. *du* 1. Il s'ensuiura donc que les angles ZHB, & BHC seront egaux, & par consequent droits *par la* 10. *definition du* 1. *& par la* 13. *proposition.* L'angle donc qui est au demy cercle est droit.

Pour le second l'angle de la plus grande section, sçauoir HCB a esté moindre qu'vn droit: mais aux figures quadrilateres descrites en vn cercle, les angles opposez sont egaux à deux droits *par la* 22. *de ce liure.*. L'angle BOH sera donc plus grand qu'vn droit. Pour le dernier, l'angle mixte BHC comprenant l'angle droit sera plus grand que le droit: & l'angle mixte de la plus petite section BHO moindre que ZHB qui a esté monstré droit.

PROPOSITION XXXII.

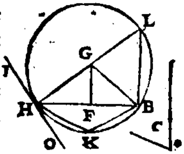
Si quelque ligne droicte touche le cercle, & de l'attouchemẽt on meine quelque ligne droicte couppant le cercle: les angles qu'elle fait à la touchante, sont egaux à ceux qui consistent aux sections alternes du cercle.



SOit la ligne droicte I F touchant le cercle au point B, duquel point soit tirée la ligne droicte BO couppant le cercle. Soit aussi esleuée en angles droits B H & menée H Q. D'autant que l'angle HOB est droit estant au demy cercle les angles O H B & O B H seront egaux à vn droit (c'est à dire à FBH:) soit osté le commun OBH, il s'ensuiura que OHB (qui est en la plus grande section) & OBF seront egaux. Maintenant soient menées O C, C B. D'autant qu'aux quadrilateres inscripts au cercle les angles opposez sont egaux à deux droits *par la 22. de ce liure*, les angles OHB, & OCB opposez, & qui consistent és sections alternes seront egaux aux angles O B I, & O B F qui valent deux droits. Mais O B F a esté monstré egal à O H B. Il s'ensuiura donc que O C B qui est en la plus petite section sera egal à O B I.

PROPOSITION XXXIII.

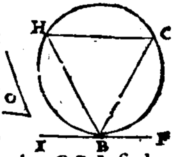
Dessus vne ligne droicte donnée descrire la section d'vn cercle, prenant vn angle egal à vn angle rectiligne donné.



SOit la ligne droicte donnée B H, & l'angle donné C. Sur B H au point H soit descrit vn angle egal à C comme O H B. Soit prolongée OH vers I. Du point H soit menée en angles droits sur OI la ligne droicte HGL. Soit H B couppee en deux egalement en F. Du point F soit menée en angles droits FG, & tirée G B. D'autant que les deux triangles HFG, & BFG ont deux costez egaux aux deux costez, & l'angle à l'angle, la base H G sera egale à la base GB. Soit maintenant sur le centre G à la distance GB descrit le cercle HBL & menée BL. Il sera euident que HL sera le diametre, lequel estant en angles droits sur O I, la ligne O I touchera seulement le cercle au point H. Or par la precedente l'angle O H B est egal à l'angle H L B : la plus grande section donc HLB comprendra l'angle L egal à l'angle donné C. Que si l'angle estoit obtus comme B H I, li seroit demonstré egal à l'angle de l'autre section H K B. S'il estoit droit, faudroit seulement descrire vn demy cercle sur la ligne donnée H B. Lequel comprendroit l'angle droit, comme il a esté monstré.

PROPOSITION XXXIIII.

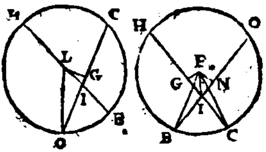
Coupper la section du cercle donné, prenant vn angle egal à vn angle rectiligne donné.



SOit le cercle donné HBC, & l'angle donné O, & la ligne touchant le cercle I F au point B *par la 17. de ce liure.* sur la ligne I B au point B soit descrit l'angle HBI egal à O: iceluy mesme sera egal à l'angle de la section plus grande HCB, c'est à sçauoir à l'angle rectiligne C *par la 32. de ce liure.* De mesme si l'angle donné est egal a C B I se demonstrera l'angle de la section C B luy estre egal.

PROPOSITION XXXV.

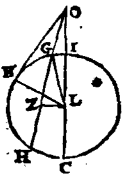
Si au cercle deux lignes droictes se couppent l'vne l'autre, le rectangle contenu des deux pieces de l'vne, est egal au rectangle contenu des deux pieces de l'autre.



SOient deux lignes droictes en vn cercle HC, OB se couppant en I. Soit du centre F tirées les perpendiculaires FG, FN, & menées les lignes droictes FB, FC, FI. D'autant que les lignes FG, & FN couppent les lignes H C & O B egalement *par la 3. de ce liure*, & F I les couppent inegalement, le rectangle compris de H I, I C auec le quarré de I G sera egal au quarré de G C. Or pource que *par la 47. du premier*, les quarrez de C G & G F sont egaux au quarré de F C, il s'ensuiura que le rectangle soubs H I, I C ensemble les quarrez de G I G F (c'est à dire le quarré de F I) seront egaux au quarré de F C. Ainsi se demonstrera que le rectangle soubs O I, I B auec le quarré de F I sera egal au quarré de F B. Si donc le commun F I est osté, il s'ensuiura le rectangle des pieces de l'vne estre egal au rectangle des lignes de l'autre. Secondement si l'vne des pieces seulement est couppée inegalement en angles droits, icelle sera le diametre du cercle. *Et comme on peut recueillir par la derniere du second*, le rectangle compris des pieces inegales sera egal au quarré de la moitié de l'autre qui est couppée egalement. Et si le diametre & l'autre ligne se couppent inegalement comme H B, CO au point I, le rectãgle de H I, I B auec le quarré de IL sera egal au quarré de L B ou L O. Et le rectangle de C I, I O auec le quarré de I G sera egal au quarré de G O. Mais les quarrez de L G, G I sont egaux au quarré de L I. Il s'ensuiura donc que le rectangle de C I, I O auec le quarré de L I sera egal aux quarrez de G O, G L, c'est à dire au quarré de la ligne L O egale à L B. Si donc le quarré commun de L I est osté, les deux rectangles de H I, I B, & de C I, I O demeureront egaux.

PROPOSITION XXXVI.

Si dehors le cercle l'on prent quelque point, & d'iceluy au cercle tombent deux lignes droictes, l'vne desquelles couppe le cercle, & l'autre le touche: Le rectangle contenu de toute la couppante & de sa partie dehors prise entre le point & la circonference conuexe, est egal au quarré qui est descrit de la touchante.



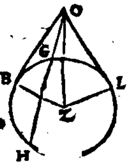
SOit pris hors le cercle vn point comme O duquel procedent deux lignes droictes, l'vne qui touche le cercle O B, & l'autre qui le couppe premieremẽt par le centre comme O L C. D'autant que *par la 6. du 2.* le rectangle compris de la toute auec l'apposée, sçauoir OC & de l'apposée O I, auec le quarré de la moitié L I (ou L B son egale) est egal au quarré de la moitié & de l'apposée cõme d'vne, sçauoir L O, & que les quarrez de O B & de B L sont egaux au quarré de la mesme O L: il s'ensuiura le commun B L ou L I estant osté que le quarré de B O sera egal au rectangle de C O, O I.

Pour le second, si la ligne ne couppe le cercle par le centre cõme O G H, à laquelle soit du centre tirée vne perpendiculaire L Z. Il est euident que H G sera couppée egalement, & soit menée L G. D'autant que *par la 6. du 2.* le rectangle soubs HO, OG auec le quarré de G Z est egal au quarré de O Z, leur soit adiousté vn quarré commun Z L. Lors le contenu soubs HO, OG auec les quarrez de G Z, Z L (c'est à dire le quarré de G L) sera egal aux quarrez de OZ & de ZL (c'est à dire au quarré de O L.) Mais les quarrez de OB & de B L sont egaux au mesme quarré de O L. Il s'ensuiura donc que les quarrez de OB, & de

BL seront egaux au rectangle de HO, OG & au quarré de GL, ou BL. Le commun donc estant osté resteront le quarré de OB, & le rectangle de HO, OG egaux.

PROPOSITION XXXVII.

Si dehors le cercle l'on prend quelque point, & d'iceluy point tombët deux lignes droites au cercle, desquelles l'vne couppe le cercle, & l'autre se repose: & soit le rectangle contenu de toute la couppante, & de la piece prise entre le point & la circonference conuexe egal au quarré descrit de celle qui se repose, celle qui se repose touchera le cercle.



SOit O le point hors le cercle, duquel point procedent deux lignes droictes, dont l'vne le couppe comme OGH, & l'autre tombe seulement sus iceluy comme OB. Soit pris le centre Z, & menées les lignes droictes ZB, ZO, & du point O soit menée la ligne droicte OL qui touche seulement le cercle *par la 17. de ce livre*, & soit menée la droicte ZL. D'autant que *par l'hypothese* le rectangle compris soubs HO, OG est egal au quarré de OB, & que *par la precedente* le mesme rectangle est egal au quarré de OL, icelles OB, OL seront egales. Et pour ce que les deux costez OB, BZ sont egaux aux deux costez OL, LZ & que la base est commune, l'angle OBZ sera egal à l'angle droict OLZ *par la 8. du 1. li.* & sera par consequent droit, & pourtant la ligne droicte OB tombera en angles droicts sur l'extremité du diametre, & touchera seulement le cercle *comme on peut recueillir par la 16. de ce livre.*

FIN DV TROISIESME LIVRE.

LE QVATRIESME LIVRE DES ELEMENS D'EVCLIDE.

DEFINITION PREMIERE.

VNE figure rectiligne se dit estre inscripte en vne figure rectiligne, quand vn chacun des angles de la figure inscripte touche vn chacun costé de la figure en laquelle elle est inscripte.

2. Semblablement aussi la figure se dit estre circonscripte à la figure, quand vn chacun costé de la circonscripte touche vn chacun angle de l'inscripte.

3. La figure rectiligne se dit estre inscripte au cercle, quand vn chacun angle de la figure inscripte touche la circonference du cercle.

4. Mais la figure rectiligne se dit estre circonscripte au cercle, quand vn chacun des costez de la figure circonscripte touche la circonference du cercle.

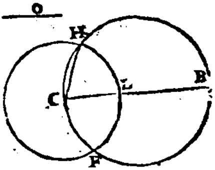
5. Semblablement aussi le cercle se dit estre inscript en vne figure rectiligne, quand la circonference du cercle touche vn chacun costé de la figure en laquelle il est inscript.

6. Mais le cercle se dit estre circonscript à vne figure, quand la circonference du cercle touche vn chacun des angles de la figure à l'entour de laquelle il est descript.

7. Vne ligne droicte se dit estre accommodée ou enfermée au cercle, quand les extremitez d'icelle sont en la circonference du cercle.

PROPOSITION I.

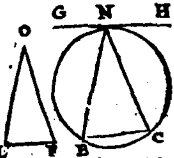
Au cercle donné, accommoder vne ligne droicte egale à vne ligne droicte donnée, qui ne soit pas plus grande que le diametre du cercle.



SOit le cercle donné CHBF & la ligne droicte donnée O moindre que le diametre du cercle C B. de la ligne C B soit ostée vne ligne egale à O *par la 3. du 1. liure*, & soit C L. du centre C à la distance C L soit d'escript vn cercle qui couppera le cercle donné côme au point H: soit menée la ligne droicte C H. d'autant que celle-cy est egale à C L, & C L egale à la mesme O *par l'hypothese*. Il s'ensuiura que O sera egale à C H, laquelle C H est par ce moyen accommodée au cercle donné. Que si la ligne donnée est egale au diametre du cercle donné, nous auons ce qui est requis.

PROPOSITION II.

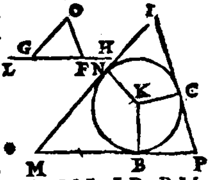
Dans vn cercle donné, descrire vn triangle equiangle au triangle donné.



SOit le cercle donné N B C & le triangle donné O L F. soit menée la ligne droicte G N H, en sorte qu'elle touche seulement le cercle, comme au point N: duquel & sur la ligne G N soit descrit vn angle egal à L, comme G N B. Soit aussi fait l'angle HNC egal à l'angle F, & soit menée directement B C. d'autant que les trois angles d'vn triangle sont egaux à deux droits, l'angle B N C sera egal à l'angle O. mais l'angle C en la plus grande section, est egal à l'angle G N B *par la 32. du 3. liure*: il s'ensuiura donc que l'angle B sera egal à H N C (c'est à dire à F son egal) ainsi donc le triangle N B C dans le cercle donné, est equiangle au triangle donné.

PROPOSITION III.

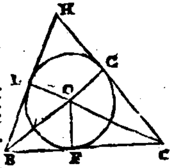
A l'entour d'vn cercle donné descrire vn triangle equiangle au triangle donné.



Soit le triangle donné O G F, pour en descrire vn equiangle à l'entour du cercle donné, duquel le centre soit K: auquel K, soit fait vn angle comme N K B, egal à l'angle exterieur L G O, & l'angle B K C egal à l'autre angle exterieur du triangle H F O. Soient aux trois extremitez N, B, C, tirées trois lignes touchantes seulement le cercle M I, I P, P M. d'autant que le quadrilatere M N K B peut estre inscript en vn cercle ayant deux angles N & B, droits (*comme on peut recueillir de la 22. du 3. liure*) les angles opposez seront egaux à deux droits. mais N K B a esté fait egal à L G O : il s'ensuit donc que l'angle M est egal à l'angle F G O estant cestuy auec l'exterieur egal à deux droits, *par la 13. du 1. liure*. Par semblable argument nous demonstrerons les autres angles egaux aux autres angles : tellement que le triangle I P M est equiangle à O G F, & est circonscrit au cercle donné.

PROPOSITION IIII.

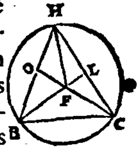
Dans vn triangle donné descrire vn cercle.



Soit le triangle donné H B C duquel les deux angles B & C sont couppez en deux egalement par deux lignes qui se r'encontreront comme en O, duquel point O soient tirées les perpendiculaires sur chacun costé comme O F, O G, O L, icelles seront egales *par la 4. du 1. liure*, estant les bases des quatre triangles egaux & equiangles. Si donc du centre O à la distance O F on tire vn cercle, il touchera seulement les trois costez du triangle, *comme on peut recueillir de la 16. du 3. liure*.

PROPOSITION V.

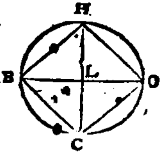
A l'entour d'vn triangle donné descrire vn cercle.



Soit premierement le triangle oxygone donné H B C, duquel les deux costez (qui ne comprennent point l'angle plus aigu) soient couppez en deux egalement comme en O, L : & d'iceux points soient tirées les perpendiculaires O F, L F & menées F B, F C. il est euident que les deux triangles rectangles HLF, CLF sont egaux & equiangles *par la 4. du premier liure.* La ligne H F sera donc egale à F C, mais H F est aussi commune au triangle H O F, & ce triangle est egal & equiangle au triangle B O F. il s'ensuit donc que la ligne B F est egale à F H, & par consequent à F C. si donc du centre F, à la distance F H on descrit vn cercle, la circōference passera par les points H B C à l'entour du triangle. Par semblables arguments se demonstreront les cercles pouuoir estre circonscrits à l'entour des triangles, soit rectangles, ambligones ou oxygones.

PROPOSITION VI.

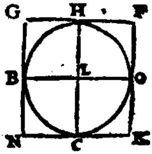
Dans vn cercle donné descrire vn quarré.



SOient tirez les deux diametres du cercle proposé HC, BO se couppans en angles droits au centre L, & soient menées les lignes droictes H B, B C, C O, O H. les quatre triangles sont rectangles isosceles egaux & equiangles, & ont leurs bases egales *par la 4. du 1. liure.* la figure dōc H B, C O sera equilatere. mais chacun angle sur la base vaut vn demy droit comme B C L *par la construction*, comme aussi O C L: il s'ensuiura donc que tout l'angle B C O sera droit. Semblable demonstration se fera des autres angles: dont s'ensuiura que H B C O sera vn quarré inscrit au cercle donné.

PROPOSITION VII.

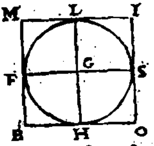
A l'entour d'vn cercle donné descrire vn quarré.



SOient du cercle dōné les deux diametres HC B D se couppans en angles droits au centre L, du point B soit menée en angles droits sur O B, la ligne G B N (c'est à dire parallele à C H) soit aussi du point O menee l'autre pararelle F O K: & des points H & C les autres GHF & NCK pararelles à BO. d'autāt que les angles qui sont en L sont droits, comme aussi ceux qui sont en H, B, C, O, il s'ensuiura que les quatre angles G, N, K, F, seront aussi droits *par la 34. du 1.* Or est la figure equilatere ayant vn chacun costé egal au diametre, elle sera donc quarrée descrite à l'entour du cercle.

PROPOSITION VIII.

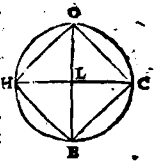
Dans vn quarré donné descrire vn cercle.



SI le quarré donné a les quatre costez couppez egalement, & menées les deux lignes droictes L H, F S, elles se coupperont en G en angles droits & egalement: car L H est parallele & egale à I O, ou M B, & F S parallele & egale à M I, ou B O *par la 34. du 1. liure*, les angles rectilignes dõc qui sont en L, F, H, S, sont droits : tellement que si on descrit sur le centre G vn cercle à l'interualle G L, il touchera seulement les quatre costez du quarré és points L, F, H, S. *comme on peut entendre par la 16. du 3 liure*, ainsi sera le cercle inscript au quarré donné.

PROPOSITION IX.

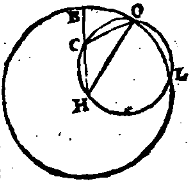
A l'entour d'vn quarré donné descrire vn cercle.



SOient du cercle proposé tirez les deux diametres ou diagonales H C, O E, d'autant que les deux triangles O H E, & O C E sont isosceles, egaux & equiangles *par la 4. du 1. liure*, chacun des angles rectilignes qui sont sur les bases vaudra vn demy droit, & les angles du centre seront droits *par la 32. du 1. liure*, & les lignes L O, L H, L E, L C egales. Si donc du centre L à l'interualle L O on descrit vn cercle, il passera par les points O, H, E, C, & sera circonscrit au quarré donné.

PROPOSITION X.

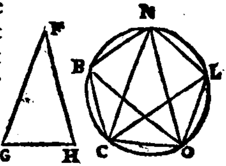
Faire vn triangle isoscele, ayant vn chacun des angles qui sont en la base double à l'autre.



SOit proposée vne ligne droite B H, laquelle *par la 11. du 2. liure* soit tellement couppée en C, que le rectãgle fait de la toute H B, & de l'vne des parties B C soit egal au quarré de l'autre piece H C. & du centre H, à l'interuale H B soit descrit vn cercle B O L, auquel *par la 1. de ce liure* soit appliquée vne ligne droicte egale à C H, comme B O, & soit menées C O, HO. du triangle H C O soit descrit le cercle H C O L *par la 5. de ce liure.* Puis que du point B hors se cercle, la ligne droicte BH le couppe & B O tombe sur iceluy, & que le rectangle de H B, B C est egal au quarré de CH (ou B O son egale) il s'ensuiura que la ligne droicte B O touchera seulement le cercle H C O L *par la 37. du 3. liure*, l'angle donc C O B sur la ligne touchante le cercle, sera egal à l'angle OHC, qui est en la sectiõ alterne *par la 32. du 3. liure*, soit maintenant adiousté le cõmun C O H: les deux BOC & C O H seront egaux aux deux C H O, & COH. mais l'angle exterieur O C B est egal aux interieurs C H O & C O H *par la 32. du 1. liure*, il sera donc aussi egal au tout B O H, & par consequent à l'angle HBO qui luy est egal, estant le triangle HBO isoscele, & les lignes C O, O B seront egales comme subtendentes angles egaux, mais B O a esté posée egale à C H: C O sera donc aussi egale à la mesme, & le triangle H C O sera isoscele: tellement que l'angle sur la base, sçauoir B O H sera double à l'angle B H O, comme aussi sera l'autre angle O B H.

PROPOSITION XI.

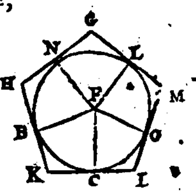
Dans vn cercle donné, descrire vn pentagone equilateral & equiangle.



SOit inscrit au cercle donné vn triangle isoscele N C O, comme il a esté descrit en la precedẽte, & soient les angles egaux de la base couppez en deux egalement par lignes finissans en la circonference comme C L, O B, & menées N B, B C, C O, O L, L N, il est euident que les angles O C L, L C N, N O B, B O C, C N O estans egaux consisteront sur sections de circonferences egales, *comme on peut recueillir tant de la 21. que 26. du 3. liure.* Or ces cinq angles sont sur sections qui comprennent toute la circonference, le pentagone donc N B C O L sera equilateral & equiangle.

PROPOSITION XII.

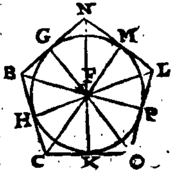
A l'entour d'vn cercle donné descrire vn pentagone equilateral & equiangle.



SOient au cercle donné pris cinq points designans les angles du pentagone inſcrit au cercle *par la precedente*, & du centre ſoient tirez les demy diametres à chacun point comme F N, F B, F C, F O, F L. ſoient à chacun d'iceux points, tirées en angles droits, & touchans le cercle ſur les demy diametres les lignes droictes comme H B K, K C I, I O M, M L G, G N H, & menées auſſi F K, F I. D'autant que le coſté F B eſt egal au coſté F C, & que l'angle F B K eſt egal à F C K (*c'eſt à dire droit par la conſtruction*) le quarré de F K eſt egal au quarré de F B & B K, comme auſſi aux quarrez de F C, C K: *par la* 47. *du* 1. *li.* Or l'angle B F C eſt egal à C F O (car il comprend circonference egale par la conſtruction) le quadrilatere donc B F C K ſera equiangle & egal au quadrilatere C F O I, & la moitié à la moitié, & les lignes au lignes. ſ'enſuiura que K C ſera egale à C I & C I à I O, & ainſi ſemblablement des autres, tellement que le pantagone ainſi circonſcrit ſera equilateral & equiangle.

PROPOSITION XIII.

Dans vn pentagone equilateral & equiangle donné, deſcrire vn cercle.

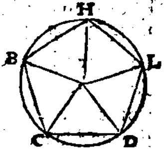


SOit le pentagone donné N B C O L deſcrit comme en la *vnzieſme de ce liure.* & ſoient diuiſez les angles en deux egalement par lignes qui ſe rencontreront au centre F, duquel ſoient tirées les perpendiculaires ſur chacun coſté qui ſeront egales comme il a eſté monſtré. Il ſera euident que le cercle deſcrit ſur ce centre, à la diſtance de F G paſſera par les extremitez des perpendiculaires, & touchera ſeulement les coſtez du pentagone donné, *comme on peut recueillir de la* 16. *du* 3. *liure.*

PROPOSITION XIIII.

A l'entour d'vn pentagone equilateral & equiangle donné, deſcrire vn cercle

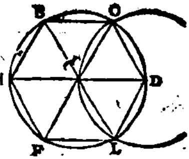
Soit



SOit donné le pentagone H B C D L equilatere & equiangle, duquel soit trouué le centre comme a esté dit en la precedente, & d'iceluy tirées les lignes droictes sur chacun angle qui seront egales, *côme il a esté monstré en la 12. de ce liure.* (car tous pentagones equilateres & equiãgles sont semblables & equiangles entr'eux) & soit du centre à l'interualle de l'vne des lignes qui couppent les angles, tiré vn cercle: il est euident qu'il passera par les extremitez d'icelles lignes, & par consequent par l'extremité des angles du pentagone, & ainsi il sera circonscrit à iceluy pentagone.

PROPOSITION XV.

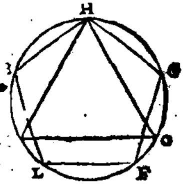
Dans vn cercle donné, descrire vn hexagone equilaterale & equiangle.



SOit le cercle donné B O D L H, duquel le centre soit G. soit mené le diametre H G D. du point D à l'interualle D G soit descrit vn cercle (qui sera egal à l'autre estant sur mesme interualle) soient menées les lignes droictes O G iusques à la circonference F, & L G iusques à la circonference B, & menées aussi les lignes droictes H B, B O, O D, D L, L F, F H. Or *par la 1. du premier liure* les deux triangles G O D, G D L sont egaux, equiangles & equilateraux, & tous les six triangles sont isosceles, ayans leurs costez egaux ensemble *par la definition du cercle*, & les trois angles de chacun triangle sont egaux à deux droits. Mais la ligne L G tombe sur la ligne F O, & fait les angles L G O, F G L egaux à deux droits, & l'angle L G O vaut les deux angles du triangle L G D. il s'ensuiura donc que F G L sera egal au troisiesme. Et le triangle F G L ayant les deux costez egaux aux deux costez, & l'angle compris d'iceux egal à l'angle de l'autre, aura la base egale à la base *par la 4. du 1. liure.* Semblablement se demonstreront les autres costez estre egaux ensemble.

PROPOSITION XVI.

Dans vn cercle donné descrire vn quindecagone equilateral & equiangle.



SOit au cercle donné inscrit vn pentagone H B L F G *par la 11. de ce liure*, & vn triangle equilateral H C O *par la 2. du mesme liure*. Ayans tous deux leur angle en vn mesme point H. D'autant que la ligne droicte H C subtend la troisiesme partie de toute la circōference (c'est à dire les cinq quinziesmes) & les deux costez H B, B L du pentagone en subtendent six quinziesmes: il est euident que l'arc C L, entre l'angle du triangle & l'angle du pentagone sera vne des quinziesmes parties de toute la circonference. Soit donc tirée la ligne droicte C L, & adaptées *par la 1. de ce liure*, au cercle autres quatorze lignes droictes, dont chacune soit egale à C L: puis que les lignes droictes egales subtendent circonferences egales *par la 28 du 3. liure*. Il s'ensuiura que la figure du quinzangle equilatere & equiangle sera inscrite au cercle donné.

FIN DV QVATRIESME LIVRE.

LE CINQVIESME LIVRE DES ELEMENTS D'EVCLIDE.

DEFINITION PREMIERE.

PArtie est vne grandeur moindre qui est prise de la plus grande.

2. Multiplice est vne grandeur plus grande que la moindre quand elle est mesurée de la plus petite.

3. Raison est vne habitude de deux grãdeurs de mesme gẽre l'vne à l'autre selon la quãtité.

4. Les grandeurs sont dictes auoir raison l'vne à l'autre quand multipliées elles se peuuent exceder l'vne l'autre.

5. Les grandeurs sont dictes estre en mesme raison quand la premiere à la seconde est comme la troisiesme à la quatriesme, & quand les equemultiplices de la premiere & troisiesme excedent, sont egaux, ou deffaillent aux equemultiplices de la seconde & quatriesme en quelque multiplication que ce soit prise l'vne apres l'autre.

6. Proportion est vne similitude de raisons.

7. Les grandeurs qui ont mesme raison sont proportionnelles.

8. Quand des equemultiplices, celuy du premier excede celuy du second, & que le multiplice du troisiesme (quelque multiplication que puisse estre) n'excede le multiplice du quatriesme, lors le premier au second est est dit auoir plus grande raison que le tiers au quart.

9. Proportion est constituée en trois quantitez pour le moins.

10. Quand trois grandeurs sont proportionnelles, la premiere est dite auoir à la troisiesme la raison doublée de celle de la seconde. Quand il y en a quatre, la premiere à la quatriesme est dite auoir la raison triplée de celle de la seconde. Et tousiours d'vn mesme ordre vne plus iusques à ce que le nombre des choses proportionnées soit acheué.

11. Les grãdeurs de semblable raison sont dites quãd les antecedens sont aux antecedens, comme les consequents aux consequents.

12. Raison changée est l'acception de l'antecedent à l'antecedent, comme du consequent au consequent.

13. Raison conuertie est l'acception du consequent, cõme de l'antecedent à l'antecedent, cõme consequent.

14. Raison composée est l'acception de l'antecedent auec le consequent, comme vne mesme chose au mesme consequent.

15 Diuision de raison est l'acception de l'excez (duquel l'antecedent excede le consequent) au mesme cõsequent.

16. Conuersion de raison est l'acception de l'antecedét, à l'excez duquel l'antecedent excede le consequent.

17. Raison egale, est plusieurs grandeurs estans d'vn costé & autant de l'autre en multitude, prises de deux en deux en mesme raison, quant aux premieres grandeurs la premiere grandeur est à la derniere, comme aux secondes grandeurs la premiere grandeur est à la derniere : ou autrement c'est l'acception des extremes par subtraction des moyennes.

18. Proportion ordonnée ou selon ordre, est quand l'antecedent est au consequent d'vn costé comme l'an-

tecedent est au consequent de l'autre, & que l'vn des consequents est à quelque autre chose, comme l'autre consequent à quelque autre chose.

19. Proportion meslée ou sans ordre est quand trois grandeurs sont d'vn costé, & autant d'autres grandeurs en nombre, de l'autre, & qu'aux premieres l'antecedent est au consequent, comme aux secondes l'antecedent est au consequent : & qu'aux premieres le consequent est à quelque autre chose, ainsi aux secondes vne autre chose soit de mesme à l'antecedent.

Dautant que les douze propositions suyuantes sont assez cogneües d'elles-mesmes, & qu'elles sont plustost principes & communes sentences que theoremes, i'ay pensé suffire de les interpreter, & non demonstrer, craignant que trop long discours n'y apportast de l'obscurité plustost que de la facilité.

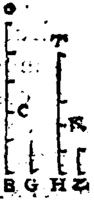
PROPOSITION I.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra qui soient equemultiplice d'autant de grandeurs vne chacune à vne chacune, comme l'vne sera multiplice de l'vne, ainsi les toutes seront multiplices des toutes.

Soient les grandeurs proposées B, C, O & G, & que la premiere contienne en elle trois fois la troisiesme, & la seconde contienne trois fois la quatriesme. Les deux premieres iointes contiendront autant de fois les troisiesme & quatriesme iointes, & seront comme trois à vne.

PROPOSITION II.

Si la premiere est equemultiplice de la seconde comme la troisiesme de la quatriesme, & que la cinquiesme soit de mesme equemultiplice de la seconde comme la sixiesme de *la quatriesme, la composée de la premiere & cinquiesme sera equemultiplice de la seconde, comme la troisiesme auec la sixiesme de la quatriesme.*



SOit la premiere B C contenant la seconde G autant de fois comme la troisiesme H K contient de fois la quatriesme Z. Et que la cinquiesme C O contienne autant de fois la seconde G comme la sixiesme K T contient de fois la quatriesme Z. La composé B O de la premiere & cinquiesme contiendra autant de fois la seconde G, comme la composée H T de la troisiesme & sixiesme contiendra de fois la quatriesme Z.

PROPOSITION III.

Si le premier est equemultiplice du second comme le troisiesme du quatriesme, & soient pris des equemultiplices du premier & du troisiesme: de ceux-là ainsi pris, l'vn sera equemultiplice à l'autre, c'est à sçauoir l'vn au second & l'autre au quatriesme.

SI la premiere grandeur G contient autant de fois la seconde B, que la troisiesme O contient de fois la quatriesme H: & que CZ contienne autant de fois la premiere G comme PT contient de fois la troisiesme O, CZ contiendra aussi autant de fois la seconde B, comme PT contiendra de fois la quatriesme H.

PROPOSITION IIII.

Si le premier à mesme raison au second que le troisiesme au quatriesme, les equemultiplices du premier & troisiesme aux equemultiplices du second & quatriesme (quelque multiplication que puisse estre) auront vne mesme raison l'vn à l'autre.

SI la premiere grandeur C est à la seconde B, comme la 3. G à la 4. O, & que H contienne autant de fois C, comme T contient de fois G, & que P contienne autant de fois B comme Z contient de fois O : H sera à P comme T à Z.

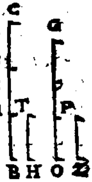
PROPOSITION V.

SI vne grandeur est equemultiplice d'vne autre grandeur comme la retranchée de la retranchée, la restée sera equemultiplice à la restée, comme la toute à la toute.

SI C B contient autant de fois G O, comme l'ostée C H contient de fois l'ostée G Z : La restee H B cõtiendra autant de fois l'autre restee Z O, comme la toute contenoit la toute.

PROPOSITION VI.

Si deux grandeurs sont equemultiplices de deux grandeurs, & quelques retranchées equemultiplices des mesmes: les restes aussi ou seront egales aux mesmes, ou seront equemultiplices des mesmes.



SI C B contient autant de fois H comme G O contient de fois Z, & l'ostée C T contient autant de fois H comme l'autre ostée G P coutient de fois Z: Les restes T B & P O, ou seront egales à H & Z, ou les contiendront plusieurs fois egalement.

PROPOSITION VII.

Les grandeurs egales ont vne mesme raison à vne, & vne à vne mesme raison à deux egales grandeurs.

SI O est egale à B, O aura mesme raison à C, comme B à la mesme C. Et aussi C aura mesme raison à O qu'a B.

PROPOSITION VIII.

De deux grandeurs inegales, la plus grande a plus grande raiſon à vne meſme que la plus petite : & vne meſme à plus grande raiſon à la plus petite que la plus grande.

DE deux grandeurs inegales C & G, ſoit C la plus grande, & ſoit vne tierce comme O. C aura plus de raiſon à O que G à la meſme O. C'eſt à dire, que C ſera plus grande au regard de O que G au regard de la meſme O.

PROPOSITION IX.

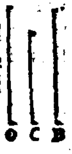
Les grandeurs qui ont vne meſme raiſon à vne meſme grandeur, ſont egales entr'elles : & les grandeurs auſquelles vne meſme à meſme raiſon, ſont egales.

SI O eſt à C comme B à la meſme C, O & B ſeront egales. Et ſi C eſt à O comme la meſme C eſt à B, icelles O & B ſeront egales.

PROPOSITION X.

Des grandeurs qui ont raiſon à vne meſme grandeur, celle qui a plus grande raiſon eſt la plus grande. Et la grandeur à laquelle la meſme aura plus grande raiſon ſera la plus petite.

SI O eſt plus grande au regard de C que B au regard de la meſme C, O ſera plus grande que B. Et ſi la meſme C eſt plus grande au regard de B qu'au regard de O, B ſera plus petite que O.



PROPOSITION XI.

Les raiſons qui ſont de meſme à vne, ſont de meſme entr'elles.

SI la raiſon de H à B eſt comme celle de C à Z, & ſi celle de G à O eſt comme la meſme de C à Z : Les raiſons de H à B, & de G à O ſeront de meſme.

PROPOSITION XII.

Si tant de grandeurs qu'on voudra ont proportion, comme l'vne des antecedentes sera à l'vne des consequentes, ainsi serōt toutes les antecedentes à toutes les consequentes.

SI la raison de B à F est comme de C à G, & O à H, les trois antecedentes conioinctement B C O seront aux consequentes conioinctement comme B à F.

PROPOSITION XIII.

Si la premiere à la seconde a mesme raison que la troisiesme à la quatriesme, & la troisiesme a plus grande raison à la quatriesme, que la cinquiesme à la sixiesme: la premiere aussi aura plus grande raison à la seconde que la cinquiesme à la sixiesme.

SOit G premiere à la secōde B cōme la troisiesme C à la quatriesme D, & que la raison de C à D soit plus grande que celle de la cinquiesme H à la sixiesmē F. D'autāt q̃ les raisons de GB, & CD sont de mesme, & que la raison de C à D est plus grande que celle de H à F, il s'ensuiura que la raison de G à B sera aussi plus grāde que la mesme de H à F *par la 11. de ce liure.*

PROPOSITION XIIII.

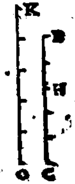
Si la premiere a mesme raison à la seconde que la troisiesme à la quatriesme, & que la premiere soit plus grande que la troisiesme, la seconde aussi sera plus grande que la quatriesme: & si egale, egale; & si plus petite, plus petite.

SOit G à B comme C à D. Si G est plus grande que C, B sera plus grande que D: Car puis que G est plus grande que C elle aura donc plus grande raison à B que la mesme C *par la 8. de ce liure.* Mais comme G à B, ainsi C à D: C aura donc plus grande raison à D qu'à B. Dont s'ensuiura que B sera plus grande que

D, *par la 2. partie de la* 10. *de ce liure.* Et si la premiere est plus petite, la quatriesme sera aussi plus petite, & si egale, egale par les mesmes raisons.

PROPOSITION XV.

Les grandeurs qui sont mesmes parties des leurs equemultiplices, ont vne mesme raison prises comme elles se respondent mutuellement.



SOit K L partie de K O & B H partie de B C & que O K contienne autant de fois K L, comme C B contient de fois B H. D'autant qu'il se peut dire ainsi, comme K L, l'vne des antecedentes est à B H l'vne des consequentes: ainsi sont toutes les antecedétes, sçauoir O K à toutes les consequentes C B, *par la* 12. *de cestuy* Il s'ensuiura que comme O K à C B, ainsi L K à H B.

PROPOSITION XVI.

Si quatre grandeurs sont propositionnelles, elles le seront aussi entr'elles l'vne apres l'autre.

SOit O à B comme G à C. D'autant que *par la* 12. *de ce liure* toutes les antecedentes sont à toutes les consequentes comme l'vne des antecedentes à l'vne des consequentes: soit changé l'ordre en ceste sorte: comme O premiere est à B 3. ainsi G 2. est à C 4 Lors O & G seront antecedentes, & B C consequentes. Les antecedentes ensemble O G seront aux consequentes ensemble B C comme O est à B ou G à C. O sera donc à G comme B à C. Et par consequent seront (par raison changée) proportionnelles en ceste sorte, comme O est à B, ainsi G à C, & comme O est à G ainsi B à C.

PROPOSITION XVII.

Si les grandeurs composées sont proportionnelles, icelles diuisees seront aussi proportionnelles.

SOient les grandeurs cõposees sçauoir H B composee de H K, K B, & C O composee de C Z, Z O, & soit comme la toute H B à sa partie B K, ainsi la toute C O a sa partie O Z. Ie dy que

HK est à KB comme CZ à ZO. Car si la ligne CO n'est coupée au point Z en mesme proportion que HB, soit en vn autre, s'il est possible comme en G: lors les deux antecedentes conjointement (c'est à dire HB) auront telle raison aux consequentes conjointement (CO) comme BK à OG. Mais la toute HB est posee à BK comme la toute CO à OZ: & par la precedente, comme HB à OC, ainsi BK à OZ: dont s'ensuiura que OZ sera egale à OG (c'est à dire la partie au tout) ce qui est absurde. *Si donc les grandeurs composees, &c.*

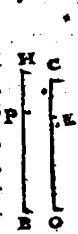
PROPOSITION XVIII.

Si les grandeurs diuisees sont proportionnelles, icelles composees seront aussi proportionnelles.

SOient quelques grandeurs diuisées & proportionnelles comme HB, & CO diuisees en P, K: & soit comme HP à PB, ainsi CK à KO. Ie dy qu'icelles composees sont comme HB à HP, ainsi CO à CK. S'il n'est ainsi, soit s'il est possible HB à HP comme CO à vne plus grande que CK, c'est à sçauoir CG. D'autant que les grandeurs composees HB à HP sont comme CO à CG: icelles *par la precedente* estant diuisees HB à HP seront comme CO à CG. Mais comme HB à HP, ainsi a esté supposee CO à CK: il s'ensuiuroit donc que comme CO à CK ainsi CO à CG, & que la partie CK seroit egale au tout CG: ce qui est absurde. *Si donc, &c.*

PROPOSITION XIX.

Si le tout est au tout comme le retranché au retranché, le reste sera aussi au reste comme le tout au tout.



SOient deux grandeurs HB, CO. & comme HB est à CO, ainsi soit la retranchee HP à la retranchee CK. Ie dy que la restée PB est à la restée KO comme HB à CO. D'autant que les quatre lignes HB, CO, HP, CK, sont proportionnelles, il sera comme HB à HP, ainsi CO à CK *par la 16, de ce liure.* Par la 17. de ce mesme ces mesmes grandeurs ainsi composees & proportionnelles, seront de mesme estant diuisees. Comme le tout HB est au tout CO, ainsi donc sera l'ostée à l'ostée, & la restée à la restée.

PROPOSITION XX.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra, & autres grandeurs en mesme nombre, les deux prises en mesme raison: & qu'en raison egale aux premieres la premiere soit plus grande que la derniere: aux secondes grandeurs, aussi la premiere sera plus grande que la derniere; & si egale, egale; & si moindre, moindre.

SOient trois grandeurs H B C, & autres trois grandeurs G O F ayans raison l'vne à l'autre de deux en deux, sçauoir comme H est à B, ainsi G à O, & comme B à C ainsi O à F. D'autant que par la 8. de ce liure H a plus grande raison à B que C à la mesme B (H estant supposee plus grande que C) & que par la raison conuertie comme C est à B, ainsi F à O, & comme B à H, ainsi O à G: il s'ensuiura que G sera plus grande que F. Et si H est egale à C, G sera egale à F, & si plus petite, plus petite.

PROPOSITION XXI.

S'il y a trois grandeurs, & autant d'autres prises de deux en deux en mesme raison, & que leur proportion soit sans ordre, & qu'en raison egale la premiere soit plus grande que la troisiesme, la quatriesme aussi sera plus grande que la sixiesme: & si egale, egale; si moindre, moindre.

SOient trois grandeurs H B G, & autres trois grandeurs C F Z, & soit comme H à B, ainsi F à Z, & comme B à G, ainsi C à F prises de deux en deux. Si la premiere H est plus grande que la troisiesme G, la quatriesme C sera aussi plus grande que la sixiesme Z. D'autant que G est plus p[illegible]te que H, elle aura moindre raison à B que [illegible] la mesme B. Or par la raison conuertie, comme G à B, ainsi F à C. La raison donc de F à C sera moindre que de F à Z (estant celle-cy de mesme à la raison de H à B.) Dont s'ensuiura que la 4. C sera plus grande que la 6. Z. Par mesmes raisons on demõstrera si la premiere est egale ou plus petite, l'autre estre de mesme.

PROPOSITION XXII.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra, & autant d'autres, prises de deux en deux en mesme raison, & que la proportion d'icelles soit selon ordre, icelles en raison egale seront proportionnelles.

SOient quelques grandeurs H B G, & autant d'autres grandeurs O F Z proportionnelles de deux en deux, comme H à B, ainsi O à F, comme B à G ainsi F à Z. Si H n'est à G comme O à Z : soit aux antecedentes adjoustée vne quatriesme I, & soit comme H à B, ainsi G à I: Lors les quatre seront proportionnelles, & mesme en raison changée *par la 16. de ce liure* H sera donc à G comme B à I. Soit maintenant aux consequentes adjoustee L, & soit comme O à F, ainsi Z à L par la mesme 16. O sera à Z comme F à L: or les quatre antecedentes sont en mesme ordre & proportion que les consequentes par l'hypothese: H sera donc à G comme O à Z.

PROPOSITION XXIII.

S'il y a trois grandeurs & autant d'autres grandeurs prises de deux en deux en mesme raison, & que la proportion d'icelles soit sans ordre, icelles en raison egale seront proportionnelles.

SOient trois grandeurs O P F & trois autres grandeurs K H B, & soit leur proportion perturbée ou meslée, sçauoir, comme O à P ainsi H à B, & comme P à F, ainsi K à H. Si K n'est à B comme O à F, soit posee la grandeur C, & soit comme P à F, ainsi B à C. K sera donc à H comme B à C, & ces quatre seront proportionnelles, & par consequent comme K à B, ainsi H à C *par la 16. de ce liure.* Or H est à C comme O à F *par la construction.* K sera donc à B comme O à F.

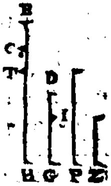
Proposition XXIIII.

Si le premier au ſecond a meſme raiſon que le troiſieſme au quatrieſme, & que le cinquieſme ait meſme raiſon au ſecond, que le ſixieſme au quatrieſme, auſsi le premier & cinquieſme enſemble auront meſme raiſon au ſecond, que le troiſieſme & ſixieſme enſemble au quatrieſme.

Soit la premiere grandeur C O à la ſeconde B, comme la troiſieſme L N à la quatrieſme S, & la cinquieſme O F à la meſme B, comme la ſixieſme N P à la quatrieſme S: Ie dy que la composée de la 1. & 5. ſçauoir C F eſt à la 2. B comme la 3. & 6. ſçauoir L P à la 4. S. Ce qui ſe cognoiſtra en adjouſtant aux antecedentes la grandeur G egale à O F, & aux conſequentes H egale à N P. Car comme C O à B, ainſi L N à S, & comme B à G (par conuerſion de raiſon) ainſi S à H. Maintenant C O à G ſera comme L N à H *par la 22. de ce liure.* Mais *par la* 18. eſtans compoſées elles ſeront comme F C à C O, ainſi P L à L N. Soit derechef adjouſtée I (egale à C O) entre la premiere & ſeconde, & entre la 3. & 4. K egale à L N. Lors comme F C à I, ainſi P L à K, & comme I à B, ainſi K à S. Et *par la* 22. la composee F C ſera à B comme la composee P L à S.

Proposition XXV.

Si quatre grandeurs ſont proportionnelles, la plus grande & la plus petite ſont plus grandes que les deux autres.



Soient quatre grandeurs proportionnelles comme H B à G D ainſi P à Z. Soit H B la plus grande, de laquelle ſoit oſtée H T egale à P, & de G D ſoit oſté G I egale à Z. Il ſera comme H B à H T, ainſi G D à G I: & *par la 19. de ce liure* la reſtée T B à I D ſera de meſme. T B ſera donc plus grande que I D. Soit de T B couppée T C egale à I D. Maintenant H C contient P & I D: les grandeurs donc H C & Z ſont egales à P & G D. Que ſi C B eſt adjouſtée, la grandeur H B & Z ſeront plus grandes que G D & P.

Fin du Cinquieſme Livre.

LE SIXIESME LIVRE DES ELEMENS D'EVCLIDE.

DEFINITION PREMIERE.

LEs figures rectilignes semblables sont celles qui ont les angles egaux aux angles vn chacun au sien, & les costez au long des angles egaux proportionnaux.

2. Les figures reciproques sont celles quand en l'vne & en l'autre les antecedents & consequents sont en certaine raison.

3. Vne ligne droicte est diuisee entre les deux extremes, c'est à dire par la moyenne & extreme raison, quãd la toute est au plus grand segment, comme le plus grand segment au moindre.

4. La hauteur d'vne chacune figure, est la perpendiculaire procedant du sommet de la figure sur la base.

5. La raison des raisons se dit estre, quand les quantitez des raisons multipliées entre elles produisent quelque raison.

6. Vn parallelogramme est dit deffaillir & manquer d'espece à vn parallelogramme semblable dõné quand il est appliqué à quelque ligne droicte qu'il ne la peut occuper entierement, & s'y trouue de defaut vn parallelogramme semblable à vn parallelogramme donné. Et exceder d'espece est quand il excede la ligne d'vn parallelogramme semblable à celuy donné.

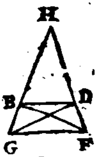
PROPOSITION I.

Les triangles & parallelogrammes qui sont sous vne mesme hauteur, sont l'vn à l'autre comme leurs bases.

SOient premierement les triangles C G D & D G H sur les bases C D, D H & en mesme hauteur D G. Ie dy que l'vn des triangles HGD est à l'autre CGD comme la base H D à la base C D: Car soient les deux bases couppées egalement en K I, & tirées G K, G I. comme la base D I est à la base D H (sçauoir la moitié au tout) ainsi DK est à DC, *par la* 18. 5. Or comme D I à IH & DK à KC, ainsi le triangle IGD à IGH, & KGD à KGC *par la* 38. 1. & cõposez, comme le triangle HGD au triangle IGD, ainsi le triangle CGD au triangle KGD *par la* 18. 5. qu'est la mesme raison de la base HD à la base DI, ou CD à DK. tellement donc que *par la* 12. & 16. 5. comme le premier triangle ou grandeur H G D à l'autre triangle ou grandeur C G D, ainsi le triangle I G D à K G D, qu'est la mesme raison des bases HD à CD, cõme il a esté monstré: il sera de mesme des parallelogrãmes LGDH, & BGDC doubles aux triangles. *Resulte que les triangles & parallelogrammes sur bases egales sont l'vn à l'autre comme leur hauteur.*

PROPOSITION II.

Si en vn triangle on fait vne ligne droicte parallele à l'vn des costez, elle couppera les costez du triangle proportionnellement. Et si les costez d'vn triangle sont couppez proportionnellement, la ligne droicte menée par les sections sera parallele à l'autre costé du triangle.



SOit au triangle HGF tirée la ligne B D parallele à G F, & soient jointes D G, B F: les deux triangles B D G & D B F seront egaux estans sur mesme base B D, & entre mesmes paralleles *par la* 37 *du* 1. comme donc le triangle H D B au triangle D F B, ainsi la base H D, à la base D F (car ils sont en mesme hauteur.) & comme le triangle HBD au triangle B G D, ainsi HB à B G *par la precedente*. Il s'ensuiura donc *par la* 7. *du* 5. que H D sera à D F comme H B à B G.

Pour la seconde partie, soient supposez les costez H F, H G couppez en B & D proportionnellement. d'autant que le triangle H B D a mesme raison au triangle B D G qu'au triangle D B F (laquelle est comme H B à B G, ou H D à D F) il s'ensuiura *par la* 9. *du* 5. que les triangles B D G & D B F seront egaux. Et pource qu'ils sont sur vne mesme base, ils serõt aussi entre mesmes paralleles *par la* 39. *du* 1. BD sera donc parallele à G F.

PROPO-

PROPOSITION III.

Si l'angle d'vn triangle est couppé en deux egalement par vne ligne droicte, laquelle couppe aussi la base: les segments de la base auront raison l'vn à l'autre comme les deux autres costez du triangle: & si les pieces de la base ont telle raison l'vne à l'autre comme les costez, la ligne droicte qui tombe du sommet à la section de la base couppe l'angle en deux egalement.

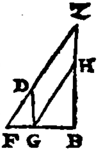
SOit le triangle H B G duquel l'angle H soit couppé en deux egalement *par la 9. du 1.* par la ligne droicte H D, laquelle couppe la base en D. Ie dy que B D a telle raison à D G que le costé B H au costé H G. Soit menée du point G la ligne G F parallele à D H, & jointe H F. d'autant que la ligne droicte B F tombe sur deux paralleles, elle fera l'angle B H D egal à l'angle B F G. Comme aussi la ligne H G tombant sur les mesmes fera les angles alternes H G F, & D H G egaux *par la 29. du premier.* Les deux donc H F G & F G H seront egaux aux deux B H D & D H G, & par consequent l'vn à l'autre (car B H D & D H G sont egaux par l'hypothese) le triangle H F G sera donc isoscele *par la 6. du 1.* dont s'ensuiura par la precedente (d'autant qu'au triangle F B G la ligne H D est parallele à F G) comme sera la ligne B H à H F (ou H G son egale) ainsi sera la partie de la base B D à l'autre partie D G.

Pour la seconde partie de ceste proposition: Si B D est à D G comme BH à HG, soient disposées BF & F G, comme il a esté dit. D'autant que comme BD à DG, ainsi BH à HF *par la precedente*, & BH à HG *par l'hypothese.* Il s'ensuiura que H F & H G seront egales *par la 7. du 5.* & que les angles H F G, & H G F seront egaux *par la 5. du 1. liure.* Mais *par la 29. du 1.* les angles B H D & D H G sont egaux aux deux H F G, H G F vn chacun au sien, ceux là donc seront egaux ensemble: & par ainsi l'angle H du triangle B H G sera couppé en deux egalement.

PROPOSITION IIII.

Des triangles equiangles les costez qui sont au long des angles egaux sont proportionnaux, & ceux qui sont subtendus aux angles egaux sont en mesme raison.

F



SOient les ttiangles equiangles H B G & D G F ayans les angles egaux, sçauoir HBG à DGF, BHG à G D F, & H G B à D F G. Ie dy que leurs costez sont proportionnaux, sçauoir comme H B à D G ainsi B G à G F, & comme H G à D F, qui sont subtendus aux angles egaux. Soit du triangle D F G (ou d'vn semblablement descrit) mis le costé F G directement au bout de la ligne B G. D'autant que les angles D G F, HBG sont egaux, les lignes D G, H B seront paralleles *par la 28. du 1.* comme aussi seront FD, GH (estans les angles DFG, HGB egaux.) Soit parfait le parallelogramme H G D Z, les lignes F D, D Z seront jointes directement *par la 30. du 1.* comme seront aussi B H, H Z. Or d'autant qu'au triangle F Z B la ligne D G est parallele à Z B : il s'ensuiura *par la 2. de ce liure*, que comme F D à D Z (ou à G H son egale) ainsi F G à G B. Semblablement pource que GH est parallele à F Z : B G sera à G F comme B H à H Z (ou D G son egale) & comme B G à G F, ainsi Z D (ou H G son egale) à D F.

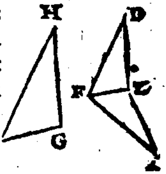
PROPOSITION V.

Si deux triangles ont les costez proportionnaux ils seront equiangles, & auront les angles egaux sous lesquels les costez de mesme raison seront subtendus.

SOient deux triangles H B G, D F Z ayans les costez proportionnaux, sçauoir comme H B à B G, ainsi D F à F Z, & cõme H G à G B, ainsi D Z à Z F, & cõme HB à HG, ainsi DF à DZ. S'ils ne sont equiangles soit sur la ligne Z F au point F descrit vn angle egal à B, & au point Z descrit vn angle egal à G : il est euident que le troisiesme angle I sera egal à H, *comme on peut recueillir de la 32. du 1.* Les triangles donc H B G & I F Z sont equiangles, & *par la precedente* les costez au long des angles egaux H & I seront proportionnaux H B à HG, comme IF à IZ, & HB à BG, comme IF à FZ, & HG à GB, comme IZ à ZF. Mais les costez du triangle DFZ sont posez de mesme : DF sera donc egale à F I *par la 9. du 5.* & DZ à ZI. Et s'ensuiura *par la 8. du 1.* que les deux triangles D F Z & I F Z seront egaux & equiangles, & par consequent D F Z equiangle à HBC *par la 1. C S. Si donc deux triangles, &c.*

PROPOSITION VI.

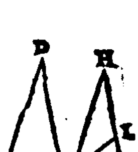
Si deux triangles ont vn angle egal à l'angle, & les costez au long des angles egaux proportionnaux, iceux triangles seront equiangles, & auront les angles egaux sous lesquels les costez de mesme raison sont subtendus.



SOient deux triangles H B G, D F Z ayans les angles H & D egaux, & les costez H B à H G comme D F à D Z. Ie dy que l'angle B est egal à F, & G à Z. Car soit sur la ligne F Z au point F descrit vn angle egal à B, & au point Z vn angle egal à G, il est euident que l'autre angle I sera egal à H, *comme on peut recueillir de la 23. du 1.* & que le triangle F Z I sera equiangle au triangle H B G, & auront les costez proportionnaux *par la 4. de ce liure.* comme H B à B G, ainsi I F à F Z, & cõme H G à G B, ainsi I Z à Z F. Mais le triangle D F Z a les deux costez posez de mesme, scauoir comme D F à D Z, ainsi H B à H G (ou F I à I Z) il s'ensuiura dõc *par la 7. du 5.* que D F, D Z seront egales à I F & I Z: & la base F Z estant cõmune, les triangles seront equiangles *par la 8. du 1.*

PROPOSITION VII.

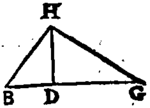
Si deux triangles ont vn angle egal à l'angle; & les costez au long des autres angles proportionnaux: & l'vn de ces autres angles moindre ou non moindre qu'vn droit: iceux triãgles seront equiangles, & auront les angles egaux, au long desquels les costez seront proportionnaux.



SOient deux triangles HBG & DFZ ayans l'angle H egal à l'angle D, & les costez proportionnaux qui sont au long des autres angles B & F, c'est à sçauoir HB à BG, comme D F à FZ. Et des autres angles G & Z soit l'vn ou l'autre premierement moindre qu'vn droict. Si les deux triangles ne sont equiangles & n'ont les angles (au long des costez proportionnaux) egaux, soit fait au point B sur la ligne H B (au cas que B soit supposé plus grand que F) vn angle egal à F comme H B I. D'autant que l'angle H est egal à l'angle D, & l'angle HBI à F, il s'ensuiura que le troisiesme HIB sera egal à Z, *comme on peut recueillir de la 32. du 1.* comme donc DF à FZ, ainsi sera HB à BI *par la 4. de ce liure.* Mais comme DF à FZ, ainsi a esté HB à BG: & apres comme HB à BI, ainsi a esté HB à BG. Les lignes donc BI, BG sont egales *par la 9. du 5.* & auront les angles sur la base egaux *par la 5. du 1.* & moindres que deux droicts *par la 17. du 1.* & BIG estant moindre qu'vn droict, l'autre angle HIB sera plus grand qu'vn droict *par la 13. du 1.* Mais il a esté monstré egal à Z posé moindre qu'vn droict, ce qui ne se peut faire: HBG ne sera donc ny plus grand ny plus petit que DFZ, & seront par consequent egaux. Secondemēt soit posé l'vn ou l'autre de G & Z n'estre moindre qu'vn droict, si l'angle HBG n'est egal à F soit supposé B plus grand, & comme deuant soit HBI egal à F. L'autre angle BIH sera egal à Z. Et finalement les angles BIG & BGI seront egaux: mais BGI n'est point moindre qu'vn droict par la supposition: Les deux angles donc du triangle ne seront moindres que deux droicts, contre ce qui a esté monstré en la 17. du 1. ce qui est absurde. En quelque façon que ce soit donc les angles B & F (au long desquels sont les costez proportionnaux) sont egaux: & par consequent les triangles equiangles.

PROPOSITION VIII.

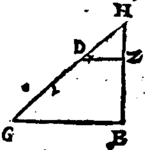
Si de l'angle droict d'vn triangle rectangle on tire vne perpendiculaire sur la base, les triangles au long de la perpendiculaire sont semblables au tout, & entr'eux.



Soit le triangle rectangle HBG ayant l'angle H droict, duquel soit tirée la perpendiculaire HD sur la base BG. D'autant que du triangle HBD, les deux angles HBD & HDB sont egaux aux deux angles HBG & BHG du grād triangle proposé, il s'ensuiura que le troisiesme angle BHD sera equiangle & semblable au tout BHG. Semblablement se demonstrera le mesme de l'autre triangle HDG. *Si donc de l'angle, &c.*

PROPOSITION IX.

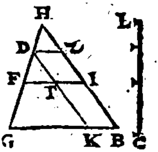
D'vne ligne droicte proposee coupper vne certaine partie ordonnée.



Soit la ligne droicte proposée H B, de laquelle il faut coupper vne certaine partie, comme pour exéple vne troisiesme partie, soit iointe vne autre ligne droicte au point. H cõme HG, sur laquelle soient marquées autant de parties qu'on desire, sçauoir trois: l'vne desquelles parties soit H D, au point D soit menée D Z parallele à G B. icelle D Z couppera les costez proportionnellement *par la 2. de ce liure.* tellement que comme G D à D H, ainsi B Z à Z H, & composées comme GH à HD, ainsi B H à H Z *par la 18. du 5.* il s'ensuiura donc que HZ sera la troisiesme partie de la ligne HB.

PROPOSITION X.

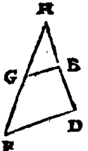
Coupper semblablement vne ligne droicte non couppée comme vne ligne droicte couppée proposee.



Soit la ligne droicte non couppée H B, & la ligne couppée proposée L C. & soit H D egale à la premiere piece, D F à la seconde, F G à la troisiesme. Soient tirées G B, & F I, D Z paralleles à G B. soit encor menée D K parallele à H B qui fermera les parallelogrammes D I, T B. Or cõme G F à F D, ainsi K T à T D *par la 2 de ce liure* (c'est à dire B I à I Z leurs egales *par la 34. du 1.*) Et puis que D Z est parallele à G B comme est G D à D H, ainsi B Z à Z H. par ainsi la ligne H B est couppée en mesme raison que H G, ou L C proposée.

PROPOSITION XI.

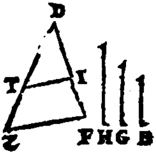
A deux lignes droictes données trouuer la troisiesme proportionnelle.



Soient les deux lignes droictes données H B, H G disposées en l'angle H. soit tirée G B, & prolongée H B en D, en sorte que BD soit egale à HG. Au point D soit menée D F parallele à B G, & faicte la ligne H G F. Il est euident *par la 2. de ce liure* que comme H B à B D, ainsi H G à G F. Mais H G & B D sont egales: il sera donc comme H B à H G, ainsi H G à G F 3. ligne proportionnelle.

PROPOSITION XII.

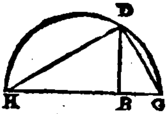
A trois lignes droictes données trouuer la quatriesme proportionnelle.



SOient les trois lignes droictes données H G B. Soient deux lignes droictes D F, & D Z faisans vn angle en D, & soit la ligne droicte D T egale à H, T Z egale à B, & D I egale à G. soit tirée T I & menée la parallele Z F *par la 2. de ce liure.*, comme D T (c'est à dire H) à T Z (c'est à dire B) ainsi D I (ou G son egale) à I F, laquelle sera par ce moyen la quatriesme ligne proportionnelle.

PROPOSITION XIII.

A deux lignes droictes données trouuer la moyenne proportionnelle.

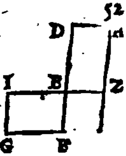


SOient les deux lignes droictes proposées H B, B G mises directement, & sur la toute H G soit descrit vn demy cercle H D G, & au point B soit faicte la perpendiculaire B D, & ioinctes H D, D G. Le triangle H D G sera rectangle *par la 31. du 3.* Et puis que de l'angle droict D tombe sur la base la perpẽdiculaire D B, icelle fait deux triangles equiangles *par la 8. de ce liure.* Et par consequent proportionnaux *par la 4. du mesme.* Tellement donc que comme H B à B D, ainsi la mesme BD (qui est cõmune aux deux triangles) à B G. dont s'ensuiura que DB sera moyenne proportionnelle entre HB & BG.

PROPOSITION XIIII.

Des parallelogrammes egaux qui ont vn angle egal à l'angle: Les costez au long des angles egaux sont reciproques. Et les parallelogrammes qui ont vn angle egal à l'angle, & les costez au long des angles egaux reciproques, sont aussi egaux.

SOient les parallelogrammes egaux H F, B G ayans l'angle egal à l'angle, sçauoir D B Z à I B F: ie dy que le costé D B au costé B F est reciproquement comme I B à BZ. Soit mis I B directemẽt auec B Z: l'autre D B sera aussi directement auec B F (car les angles sont au sommet.) soit fait le parallelogramme Z F comme le parallelogramme H B au parallelogramme Z F, ainsi l'autre B G au mesme Z F *par la 7. du 5.* Mais cõme H B à Z F, ainsi la ligne droicte D B à B F *par la 1. du 6.* Et cõme B G à Z F *par la mesme*: car ils sont l'vn à l'autre comme leurs bases. Donc *par la 11. du 5.* comme les costez D B à B F, ainsi reciproquemẽt I B à B Z: tellement que *suiuant la 2. definition du 6.* les parallelogrammes sont reciproques, & leurs costez.

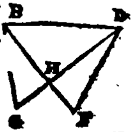


Semblablement se demonstrera la seconde partie, c'est à sçauoir, si les costez D B à B F sont reciproquement comme I B à B Z, les parallelogramm[illegible] H B, B G seront egaux. D'autant que (par l'hypothese) c'est vn[illegible] mesme raison D B à B F, que B I à B Z, elle sera de mesme des parallelogrammes H B à Z F, que B G au mesme Z F *par la 1. du 6.* Iceux donc H B & B G seront egaux *par la 9. du 5.*

PROPOSITION XV.

Des triangles egaux ayans vn angle egal à l'angle, les costez au long des angles egaux sont reciproques. Et les triangles ayans vn angle egal à l'angle, & les costez au long des angles egaux reciproques, sont aussi egaux.

Soient deux triangles egaux H B G & H D F ayans les angles B H G & D H F egaux au sommet H. Ie dy que leurs costez au long des angles egaux sont reciproques comme G H à H D, ainsi F H à H B. Puis que les angles sont disposez au sommet. B H, H F seront directement ensemble, comme aussi G H D: les triangles donc G B H, & D B H estans en vne mesme hauteur seront l'vn à l'autre comme leurs bases G H à H D. Semblablement les triangles F D H, & le mesme D B H estans en mesme hauteur seront l'vn à l'autre comme leurs bases F H à H B *par la 1. du 6.* Mais *par l'hypothese* HGB & HFD sont egaux, & ont vne mesme raison à vn mesme B D H *par la 7. du 5.* les lignes droictes donc G H à H D, & F H à H B ayans vne mesme raison que les triangles, auront aussi la mesme entr'elles *par la*

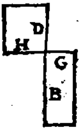


11. *du* 5. Alternement donc les lignes seront proportionnelles G H à H D, comme F H à H B *par la* 2. *definition de ce liure*.

Pour la seconde partie soient les triangles predits ayans l'angle egal à l'angle, & les costez reciproques, ie dy iceux triangles estre egaux. D'autant que c'est vne mesme raison G H à H D que F H à H B, & comme G H à H D, ainsi le triangle H B G au triangle H B D, & comme F H à H B, ainsi semblablement le triangle H D F au mesme triangle H D B, ce sera vne mesme raison du triangle H B G au triangle H D B, que du mesme H D F au mesme H D B. Les triangles donc ainsi proposez seront egaux *par la* 9. *du* 5.

PROPOSITION XVI.

Si quatre lignes sont proportionnelles, le rectangle compris des deux extremes est egal à celuy compris des moyennes. Et si le rectangle compris des deux extremes est egal à celuy compris des moyennes, les quatre lignes seront proportionnelles.



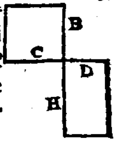
SOient quatre lignes proportionnelles H à G, comme B à D. Ie dy que le rectangle compris sous les plus grandes & plus petites qui sont les extremes B & G, est egal au rectangle compris des moyennes H & D. Soit fait de B & G vn rectangle, & de H & D vn autre rectangle. D'autant que de ces deux parallelogrammes les costez sont reciproques, sçauoir le plus grand de l'vn au plus grand de l'autre, & le plus petit de l'vn au plus petit de l'autre, comme H à G ainsi B à D. iceux sont egaux *par la* 14. *du* 6.

Pour la seconde partie, si les parallelogrammes sont egaux ils auront les costez reciproques, & seront comme H à C, ainsi B à D, *par la mesme* 14. *du* 6. *liure*.

PROPOSITION XVII.

Si trois lignes sont proportionnelles, le rectangle compris des extremes est egal au quarré fait de la moyenne. Et si le rectangle compris des extremes est egal au quarré de la moyenne, icelles trois lignes seront proportionnelles.

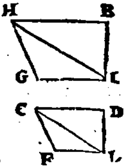
SOIENT trois lignes proportionnelles proposees H, B, D, sçauoir comme H à B, ainsi B à D: & de H & D soit fait vn rectangle, & de B vn quarré. Ie dy que le rectangle est egal au quarre. Car puis que C est egal à B, il sera comme H à B, ainsi C à D: les quatre seront donc proportionnelles H, B, C, D : mais le rectangle des extremes est egal au rectangle des moyennes, *par la precedente*, qui est le quarré de B moyenne.



Et si le rectangle H D estegal au quarré de la moyenne B, les lignes H, B, C, D, seront proportionnelles *par la precedente*. Mais d'autant que B & C sont egales, H sera à B comme à B à D.

PROPOSITION XVIII.

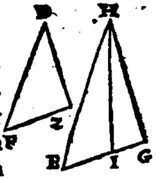
Sur vne ligne droicte donnée descrire vne figure rectiligne semblablement posee à vne autre figure rectiligne donnée.



SOit la ligne droicte donnée H B, sur laquelle il faut semblablement descrire vne figure rectiligne semblablement descrire posée à la donnée C D L F. Soient premierement subtendus tous les angles par quelques lignes droictes, sçauoir en resoluant la figure en triangles, comme C D L, C L F. Au point H sur la ligne H B soit fait vn angle egal à D C L, comme B H I *par la 23. du 1.* & au point B vn angle egal à D comme B. Le troisiesme H I B sera egal au troisiesme C L D, comme on peut recueillir de la 32. du 1. Le triangle donc H B I sera equiangle au triangle C D L, & semblablemēt descrit: & comme C L à H I, ainsi C D à H B *par la 4. du 6*. Maintenant sur la ligne droicte H I soit semblablement descrit le triangle H G I equiangle à C F L: d'autant que les deux angles B H I & I H G sont egaux aux deux angles D C L & I C F, le tout sera egal au tout sçauoir B H G à l'angle D C F: semblablement l'angle B I G à D L F, comme aussi l'angle G à l'angle F, la ligne droicte donc CL sera à la ligne droicte HI comme D L à B I: mais C L à H I est comme D C à B H. D C à B H sera donc comme D L à B I au long des angles egaux. Semblablement se demonstreront les autres costez estre de mesme l'vn à l'autre. Par ainsi toute la figure rectiligne H B I G sera semblable à C D L F, & semblablement descrite sur la ligne donnée.

PROPOSITION XIX.

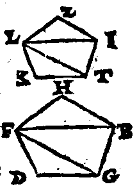
Les triangles semblables sont l'vn à l'autre en raison double de leurs costez de semblable raison.



SOient les deux triangles equiangles H B G plus grand, & D F Z plus petit, ayans les costez proportionnaux *par la 4. du 6.* sçauoir comme H B à D F, ainsi B G à F Z. soit aussi comme B G à F Z, ainsi F Z à B I *par la 11. du 6.* par ainsi ces trois lignes seront proportionnelles, & la premiere B G à la troisiesme B I aura la raison double de F Z *par la 10. definition du 5.* La raison donc de H B à D F sera de mesme reciproquement *par la 2. definition du 6. liure.* Parquoy les triangles H B I & D F Z seront egaux (*par la seconde partie de la 15. de ce liure*) les angles F & B ayans esté posez egaux. Mais B G est à la base B I, comme le triangle H B G au triangle H B I *par la 1. du 6.* La base donc B G sera à B I comme le triangle H B G au triangle D F Z (qui est egal à H B I) mais B G à B I à la raison doublée du costé B G au costé F Z. Il s'ensuiura donc que le triangle H B G aura au triangle D F Z la raison double du costé B G à B I, ou des autres costez de semblable raison. *Les triangles donc, &c.*

PROPOSITION XX.

Les polygones semblables, se peuuent diuiser en triangles semblables, egaux en nombre, & proportionnaux à leur tout. Mais le polygone a au polygone la raison double du costé de semblable raison au costé de semblable raison.

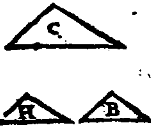


SOient les polygones semblables Z L K T I, & H F D G B: d'autant que par l'hypothese l'angle B H F est egal à l'angle I Z L, & les costez au long des angles egaux proportionnaux, sçauoir cõme B H à H F, ainsi I Z à Z L. Soient menées les lignes droictes B F, I L, les triangles H F B, & Z L I seront equiangles *par la 6. de ce liure*, & l'angle H B F sera egal à l'angle Z I L. Mais par la construction tout l'angle H B G est egal à tout l'angle Z I T: ostant donc H B F & Z I L, l'autre angle restant F B G sera egal à l'autre L I T *par la 19. du 5.* Ioinctes maintenant F G & L T: F B sera à H B comme L I à Z I au long des angles egaux. Et comme H B à B G, ainsi Z I à I T en raison egale *par la 22. du 5.* il sera comme F B à B G, ainsi L I à I T. Mais d'autant que l'angle F B G a esté monstré egal à L I T, les triangles F B G &

L I T seront semblables & equiangles *par la 6. de ce liure.* Et pource que tout l'angle B G D est posé egal à l'angle I T K, par semblables argumens se demonstrera l'angle F G D estre egal à l'angle L T K, & les autres angles aux autres angles : & par ainsi *par la 6. de ce liure* le triangle F G D se trouuera equiangle au triangle L T K. Voila donc les polygones diuisez en triangles semblables, & egaux en nombre. Outre plus, d'autant que chaque triangle est semblable à son triangle, & ont vne mesme raison l'vn à l'autre, & que les parties sont egales à leur tout, le polygone H B G D F au polygone Z I T K L sera en raison double de H B à Z I *par la precedente.*

PROPOSITION XXI.

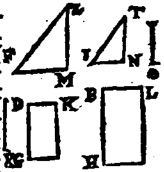
Les figures semblabes à vne figure rectiligne, sont semblables entr'elles.



Soient les figures rectilignes H & B semblables à C. D'autant qu'elles ont leurs angles egaux aux angles de C *par la 1. definition du 6.* Ils auront aussi leurs angles egaux entr'eux *par la 1. commune sentence*, & auront les costez de mesme raison proportionnaux au long des triangles egaux: dont s'ensuiura que H & B seront semblables & equiangles.

PROPOSITION XXII.

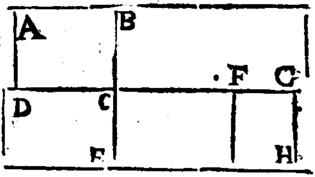
Si quatre lignes droictes sont proportionnelles, les figures rectilignes semblables, & semblablement descrites sur icelles seront proportionnelles. Et si les figures rectilignes semblables & semblablement descrites sur quatre lignes droictes sont proportionnelles, icelles lignes seront proportionnelles.



Soient quatre lignes droictes proportionnelles H B à G D cōme F Z à I T. Soient faictes les figures H L, G K semblables, & semblablement descrites: soient aussi les deux autres F Z M & I T N semblables & semblablement descrites. Soit aussi aux lignes H B & G D trouuée la troisiesme proportionnelle X *par la 11. du 6.* & aux lignes F Z & I T la troisiesme proportionnelle O. Comme la ligne H B est à X, ainsi est la figure HL à la figure G K (c'est à dire en raison double) & comme F Z à O, ainsi la figure F Z M à I T N *par la 19. du 6*. Mais comme H *B* à G D, ainsi F Z à I T, & comme G D à X, ainsi I T à O. Donc *par la 22. du 5.* en raison egale, comme la ligne H *B* à la ligne X, ainsi F Z à O. Par ainsi comme la figure H L est à la figure *G* K, ainsi F Z M à I T N, *par la 11. du 5.* & sont proportionnelles. Pour la secõde partie soiét les mesmes figures proportionnelles semblables & semblablement descrites. Ie dy que les quatre lignes sur lesquelles elles sont descrites sont proportionnelles : car *comme on peut recueillir de la 19. & 20. de ce liure*, la raison de l'vne à l'autre sera comme celle de leurs costez doublée. La raison donc de leurs costez sera vne mesme *par la 7. commune sentence*, sçauoir comme H *B* à D *G*, ainsi F Z à I T : iceux costez, seront donc proportionnaux.

PROPOSITION XXIII.

Les parallelogrammes equiangles ont raison l'vn à l'autre composee de leurs costez.

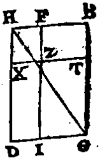


LAISSANT à part les diuerses opiniõs de plusieurs qui ont glosé sur ceste proposition, & aussi que la raison composée ne se peut icy entendre comme elle est diffinie *en la 14. du 5.* Ie diray seulement que la raison des parallelogrammes equiangles de l'vn à l'autre depend de la raison des costez d'iceux : Mais voicy ce qui se peut plus facilement demonstrer, qui me semble plus approcher de l'intention de l'Autheur.

Soient les deux parallelogrammes A *B* C D & C *G* H E equiangles, si le plus long costé de l'vn C G est au plus grand coste de l'autre C D, comme B C au plus petit C E, les parallelogrammes seront egaux *par la 16. de ce liure*. Mais si C *G* a plus grande raison à D C que *B* C à C E de la quantité de F *G*. Aussi le parallelogramme C H excedera l'autre A C en mesme proportion que la raison du costé G C à D C, excede la raison de *B* C à C E : c'est à sçauoir du parallelogramme F H, lequel F H a mesme raison au parallelogramme E F, comme la ligne C F à la ligne F *G par la 1. du 6.* Voila donc comment la raison des parallelogrammes equiangles de l'vn à l'autre depend de la raison de leurs costez.

PROPOSITION XXIIII.

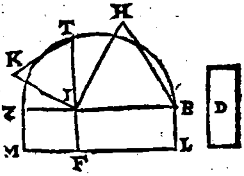
De tout parallelogramme les parallelogrammes qui sont au long du diametre ayans vn angle commun auec le mesme, sont semblables au tout, & l'vn & l'autre.



SOit le parallelogramme H *B* *G* D & son diametre H *G*, au long duquel soient les parallelogrammes F X, T I ayans chacun vn angle commun auec le tout sçauoir H & *G*. D'autant que X Z T est parallele à H *B*, & F Z I à H D, & que la ligne H *G* les trauerse au point cõmun Z, il s'ensuiura que les angles F H Z, H Z X, & T Z *G*, Z *G* I seront egaux, comme aussi X H Z, H Z F, I Z G, Z G T seront egaux *par la* 29. *du* 1. & que les quatre triangles seront equiangles, & par consequent auront leurs costez proportionnaux *par la* 4. *du* 6. comme donc sera H F à F Z, ainsi Z T à T G, & comme H *X* à X Z, ainsi Z à G, ainsi les parallelogrammes proposez sont equiangles, semblables & semblablement descrits entr'eux & au tout.

PROPOSITION XXV.

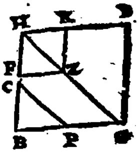
Descrire vne figure rectiligne semblable à vne figure rectiligne donnée & egale à vne autre rectiligne proposee.



SOIT la figure rectiligne proposée H *B* I, à laquelle il conuienne faire vne semblable figure & egale à D. Sur la ligne droicte *B* I soit fait vn rectangle *par la* 45. *du* 1. qui soit egal à H I *B* comme *B* F. soit prolongée *B* I vers Z, & sur la ligne I F à l'angle Z I F, soit descrit vn rectangle Z F egal à D. Et soit *par* [illegible] *de ce liure* trouuée la moyenne proportionnelle entre *B* I & I Z, laquelle soit I T. Sur icelle soit semblablement descrite vne figure semblable à HI*B* *par la* 18. *du* 6. comme I T K. Maintenant comme *B* I à I T, ainsi I T à I Z, & comme la figure H I *B* à la figure I T K, ainsi la ligne *B* I à I Z en raison double *par la* 19. & 20. *de ce liure*. Mais comme la ligne *B* I à I Z, ainsi le rectangle *B* F (ou HIB son egal) au rectangle IM *par la 1. de ce liure : car ils sont en mesme hauteur.* Il s'ensuiura donc que la figure ITK sera egale au rectangle IM *par la 14. du 5.*

PROPOSITION XXVI.

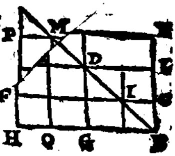
Si d'vn parallelogramme on oste vn parallelogramme semblable au tout & semblablement posé, ayant vn angle commun auec le tout : le soubstrait sera auec le tout sur vn mesme diametre.



SOIT d'vn parallelogramme HDGB osté le parallelogramme HKZF semblable au tout & semblablement posé, ayant l'angle commun H. Ie dy que le diamettre HZG de l'vn & de l'autre, est vne mesme ligne droicte. Car soit diuisé le costé BG en deux egalement en P, comme aussi HB en C & tirée CP, ceste ligne sera parallele à HZG (car le triangle CPB a les costez proportionnaux aux costez du triangle HGB, & par consequent est equiangle *par la 5. de cestuy*) dont s'ensuiura que l'angle CPB estant egal à l'angle HGB & PCB à ZHF, la ligne HZG ne sera qu'vne parallele à CP *par la 28. & 30. du 1.* dont est euident que le parallelogramme soustrait est sur vn mesme diametre auec le tout.

PROPOSITION XXVII.

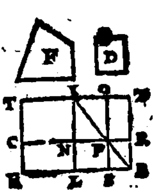
De tous parallelogrammes qu'on peut appliquer sur vne ligne droicte, deffaillant de la ligne droicte de la quantité des parallelogrammes semblables à celuy descrit sur la moitié & semblablemēt posez, le plus grand est celuy qui est appliqué sur la moitié de la ligne, & qui est semblable à celuy par lequel il est deffaillant.



SOit la ligne droicte HB couppée au point G en deux egalement. & sur GB soit descrit vn parallelogramme GL duquel le dimetient soit DB : d'autant que le parallelogramme de la quantité duquel vn autre parallelogramme appliqué doit manquer de la ligne, est semblable & semblablement posé à GL qui est fait de la moitié, le mesme parallelogramme sera sur le dimetient *par la precedente*, & auront l'angle *B* commun. Parquoy afin que l'appliqué sur la ligne H*B* deffaille d'icelle par vn parallelogramme semblable à GL : il faudra qu'il soit descrit du point H iusques au dimetient. Soit donc appliqué HI deffaillant de la ligne, de la quantité de I*B* semblable à GL. Ie dy que de tous les parallelogrammes ainsi appliquez sur H*B* entre H & le dimetient, le plus grand est celuy qui est appliqué sur la moitié de la ligne, c'est à sçauoir HD ou GL son egal. Premierement HI sera demonstré moindre, dautant que les supplements GI & IL sont egaux *par la 43. du* 1. comme aussi FD & DC *par la 36. du* 1. & que FD est plus grand que IL (ou IG son egal) de la quantité DI, le commun FG estant adjousté, HD (ou GL son egal) sera plus grand que HI de la quantité du parallelogramme DI. Que si le parallelogramme est mis comme HM surpassant D, il sera deffaillant de la quantité ON semblable à GL. Or les supplements DN, DO sont egaux, comme aussi PD & DN : & PS est moindre que DN de la quantité de MD : si donc on adjouste le commun HS, le tout HD (ou GL son egal) sera plus grand que HM de la quantité de MD. *De tous parallelogrammes donc, &c. Cecy veut dire qu'en vn triangle ne se peut inscrire aucun parallelogramme plus grand que celuy qui couppe les trois costez en deux egalement, & qui a l'angle commun auec le triangle.*

PROPOSITION XXVIII.

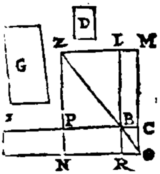
Sur vne ligne droicte donnee appliquer vn parallelogramme defaillant en espece de la quantité du parallelogramme semblable donné, & qu'iceluy appliqué soit egal à vne figure rectiligne donnee non plus grande que le parallelogramme appliqué sur la moitié de la ligne semblable à celuy duquel il doit estre defaillant.



Soit la ligne droicte donnée *H B* sur laquelle il faut appliquer vn parallelogramme egal à F & defaillant d'vn parallelogramme semblable à D. Soit donc sur la moitié L*B* descrit vn semblable à D *par la* 18. *de ce liure* comme LZ, & soit acheué T*B* & tirée la ligne I*B*. Si F est egale à HI (ou à IZ son egal) nous auons la chose desirée : si elle est moindre, posons que ce soit de certain espace que nous reduisons en semblable figure comme D *par la 25. de cestuy.* Lequel espace soit O N, qui sera sur le dimetient *par la 26. du 6.* D'autant qu'en la precedente il a esté monstré que HP est moindre que HI du parallelogramme N O, & que F est moindre que H I *par la position* du mesme N O : il s'ensuiura que H P sera egal à F *par la 7. & 11. du 6.* & sera defaillant de la ligne H B, de l'espace S R semblable à L Z ou à D.

PROPOSITION XXIX.

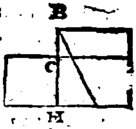
Sur vne ligne droicte donnée comparer vn parallelogramme egal à vne figure rectiligne donnée, & excedant en espece d'vn parallelogramme semblable à vn autre proposé.



SOit la ligne droicte donnée *H* B couppée en P en deux egalement, la figure rectiligne à laquelle se fera la comparaison soit G, & le parallelogramme semblable à l'exces soit D. Maintenant soit fait P L semblable à D, & dans l'angle *Z* soit descrit vn parallelogramme egal à P L & à G, & semblable à P L (ou à D) *par la 25. du 6. liure,* & soit NM. il est euident que le commun P L estant osté le gnomon L O P sera egal à G. Si donc le parallelogramme N H est fait de l'autre moitié H P, le parallelogramme H O sera egal au gnomon L O P, & par consequent à G, & excedera la ligne H B du parallelogramme R C qui est semblable à P L ou à D. *Si donc sur vne ligne droicte, &c.*

PROPOSITION XXX.

Coupper vne ligne droicte terminée donnée entre les deux extremes.

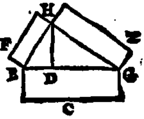


SOit la ligne droicte HB couppée en C *par la 11. du 2.* Le rectangle compris sous H B, B C sera egal au quarré de H C. Voicy donc trois lignes proportionnelles *par la 17. du 6.* comme la toute H B à la plus grande partie H C, ainsi celle-cy a la plus petite C B. dont s'ensuit que H B est couppée en C entre les deux extremes *par la 3. definition de ce liure.*

PROPO-

PROPOSITION XXXI.

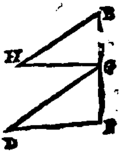
Aux triangles rectangles la figure de quelconque espece que ce soit qui est descrite sur le costé qui soustient l'angle droict, est egale aux figures de mesme espece qui sont semblables & semblablement descrites sur les costez qui comprennent l'angle droit.



Soit le triangle rectangle H B G duquel l'angle droict soit H. Ie dy que toutes figures semblables & semblablement descrites des costez qui comprennent l'angle droict cōme F H B & Z H G sont egales à la figure semblable & semblablement descrite sur B G, c'est à sçauoir B G C. D'autant que ces polygones sont semblables & equiangles, ils auront l'vn à l'autre la raison double de leurs costez, comme auront aussi les quarrez descrits sur les mesmes costez, *par la* 19. *&* 20. *de ce liure.* Il s'ensuiura donc que comme les deux quarrez sont egaux au troisiesme *par la* 47. *du* 1. ainsi les deux polygones seront egaux au troisiesme, puis qu'ils ont vne mesme raison entr'eux.

PROPOSITION XXXII.

Si entre deux triangles le costé de l'vn & le coste' de l'autre composent vn angle, & que ces deux costez soient reciproques à deux autres, & paralleles: les autres deux costez d'iceux triangles seront en vne seule ligne droicte.

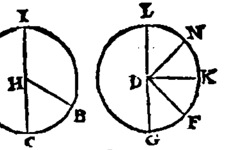


Soient les deux triangles ioints en sorte que les costez H G & D G facent vn angle entre les deux triangles, c'est à sçauoir H G D. & soient iceux paralleles & reciproques aux deux autres costez, comme H G à D F, & D G à H B. D'autant que H B & D G sont paralleles, & que H G tombe sur icelles, l'angle B H G sera egal à l'angle H G D: & puisque H G & D F sont paralleles, & que D G tombe sur icelles, l'angle H G D sera egal à G D F *par la* 29. *du* 1. Les angles donc H & D seront egaux & les triangles equiangles *par la* 6. *de cestuy*, & l'angle H G F egal aux deux H & B *par la*

32. *du* 1. Et par ainsi les deux angles H G F, & H G B egaux à deux droicts. Puis donc qu'à la ligne H G deux autres lignes concourent, sçauoir B G & F G, & qu'elles font deux angles egaux à deux droits, icelles sont posees directement *par la* 14. *du* 1.

PROPOSITION XXXIII.

Aux cercles egaux les angles ont mesme raison que les circonferences sur lesquelles ils sont, soit que les angles soient en la circonference, ou au centre: & les secteurs ont aussi mesme raison.

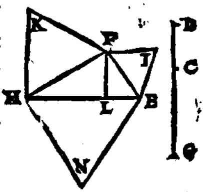


IL a esté monstré *par la* 27. *du* 3. que aux cercles egaux les angles qui sont sur circonferences egales sont egaux: maintenant si en cercles egaux les angles inegaux n'ont vne mesme raison que leurs circonferences sur lesquelles ils sont descrits comme sur leurs bases: Soient proposez deux angles inegaux C H B plus grand & G D F plus petit, & que l'angle G D F soit vn demy droict, & que l'arc C B ait plus de raison à l'arc G F que l'angle C H B à l'angle G D F. Par mesme raison ou supposition l'arc plus grand I B aura plus de raison à B C plus petit que l'angle I H B à B H C: & conjoinctement les deux arcs (c'est à dire la moitié de la circonference) auront plus de raison à l'arc G F que les deux angles I H B & B H C (c'est à dire deux droicts) à l'angle G D F. Maintenant soit faict l'angle K D F egal à G D F, & K D N & N D L de mesme: il est euident *par la* 26. *du* 3. que les arcs F K, K N, & N L seront egaux & les quatre angles vaudront deux droicts: dont s'ensuiura que la moitié de la circonference I B C aura plus de raison à la moitié de la circonference L N K F G que deux angles droits à deux angles droits, ce qui est faux & contre la position qui met les cercles egaux. Semblablement se monstrera l'arc C B n'auoir moindre raison à l'arc G F que l'angle C H B à l'angle G D F. Tellement donc que *aux cercles egaux, &c.* Pour le regard des angles en la circonference qui sont moitié de ceux qui sont au centre, puis que c'est vne mesme raison des moities aux moities que du tout au tout, il n'y aura aucune difficulté.

Et quant aux secteurs s'ils sont egaux, ils auront les angles du centre egaux & leur base droicte egale à la base droicte *par la* 4. *du* 1. Et *par la* 28. *du* 3. les lignes droictes egales leuent circonferences egales,les secteurs egaux auront donc mesme raison l'vn à l'autre que l'arc à l'arc. Que s'ils sont inegaux, posons s'il est possible, que le plus grand secteur C H B a moindre raison au plus petit G D F que l'arc C B à l'arc G F. Il s'ensuiura de ceste position que le secteur I H B aura moins de raison au plus petit secteur C H B du mesme cercle, que l'arc I B à l'arc C B, & par consequent que tous les deux secteurs (c'est à dire la moitié du cercle) auront moins de raison au secteur G D F que l'arc I B C à l'arc G F. Or les quatre angles qui sont en D sont egaux, & leurs arcs egaux par l'hypothese : les deux secteurs donc I H B & B H C (c'est le demy cercle) auront moins de raison aux quatre secteurs de l'autre cercle D (qu'est le demy cercle) que la moitié de la circonference a la moitié de la circonference des mesmes cercles : ce qui est faux,estans les cercles posez egaux. Semblablement se pourra demonstrer que le plus grand secteur n'aura pas plus grande raison au plus petit que l'arc à l'arc : dont s'ensuiura qu'ils auront mesme raison l'vn à l'autre que l'arc à l'arc.

PROPOSITION XXXIIII.

Descrire deux figures rectilignes qui ayent l'vne à l'autre la raison donnée, & qui soient egales, semblables & semblablement descrites à vne autre figure rectiligne donnée.

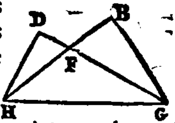


SOit la figure rectiligne donnée H B N & la raison donnée soit G C à C D. Soit H B couppée en mesme raison en L *par la* 10. *du* 6. & fait vn demy cercle sur H B, & esleuée la perpendiculaire L F iusques à la circonference,& soient menées H F & F B qui comprendront vn angle droict *par la* 31. *du* 3. La ligne L F sera moyenne proportionnelle entre H L & L B *par la* 13. *du* 6. & les deux triangles H F L & F B L sont equiangles & semblables l'vn à l'autre & au tout H F B *par la* 8. *du* 6. Ainsi donc comme H F est à F B, ainsi H L à L F, & F L à L B. Or les figures semblablement descrites sur H F & F B sont l'vne à l'autre comme H L à

L B, c'est à dire en raison double *par la 20. du 6.* Il s'ensuiura donc, icelles figures estans semblablement descrites comme H B N, estre l'vne à l'autre selon la raison de H L à L B, c'est à dire G C à C D. Mais *par la 31. du 6. liure.* les deux figures H K F, F I B sont egales à H N B : il s'ensuit donc qu'elles sont suiuant la proposition, c'est à sçauoir egales & semblables à la proposée, & ayans l'vne à l'autre la raison donnée.

PROPOSITION XXXV.

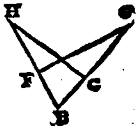
Si deux lignes droictes se couppent en angle obtus, & des extremitez d'icelles on tire sur vne chacune vne perpendiculaire, les lignes entre les extremitez & les perpendiculaires se couppent l'vne l'autre reciproquement.



SOient deux lignes H B, G D se couppans en angles obtus en F, & soient tirées les perpendiculaires H D, G B. d'autant que les angles D & B sont droicts, & D F H, B F G egaux *par la 15. du 1.* Il s'ensuiura que l'angle D H F sera egal à B G F, *comme on peut recueillir de la 32. du premier*, & par consequent les triangles H D F & G B F equiangles qui auront leurs costez proportionnaux *par la 4. du 6.* la ligne H F sera donc à F D comme G F à F B, suiuant la proposition.

PROPOSITION XXXVI.

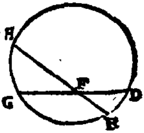
Si deux lignes droictes comprennent vn angle aigu, & des extremitez d'icelles on tire sur icelles-mesmes des perpendiculaires qui se couppent, icelles deux lignes seront reciproquement proportionnelles comme les segments qui sont au long de l'angle.



SOient deux lignes H B & G B faisans l'angle aigu B, & soient tirées les perpendiculaires H C, G F. D'autant que l'angle H C B est droict, & egal à l'angle G F B, & que l'angle B est commun, les deux angles H & G seront egaux *par la 32. du 1.* Et les triangles H C B & G F B seront equiangles, & par conſequent proportionnaux. HB ſera donc à BC comme GB à BF, & de meſme ſuitte comme HB à BG, ainſi FB à BC *par la 16. du 5.*

PROPOSITION XXXVII.

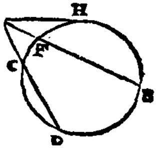
Si deux lignes droictes ſe couppent l'vne l'autre en vn cercle, les ſections de l'vne aux ſections de l'autre ſeront reciproquement proportionnelles.



SOient HB & GD deux lignes droictes au cercle ſe couppans l'vne l'autre en F. D'autant que *par la 35. du 3.* le rectangle compris de HF, FB eſt egal au rectangle de GF, FD, & que les coſtez des parallelogrammes ſont proportionnaux, ſçauoir ceux au long des angles egaux *par la 14. du 6.* Il s'enſuiura que comme HF à FD, ainſi GF à FB reciproquement *par la 2. definition du 6. liure.*

PROPOSITION XXXVIII.

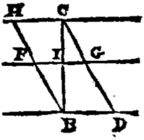
Si d'vn poinct donné hors le cercle deux lignes droictes tombent dans la circonference caue, icelles ſeront reciproquement proportionnelles à leurs parties qui ſont hors le cercle: & entre la toute & le ſegment hors du cercle, la moyenne proportionnelle eſt celle qui eſt menée du meſme poinct, & touche ſeulement le cercle.



SOit le poinct donné hors le cercle G, duquel ſoient menées deux lignes droictes à la circonference caue GB, GD, & du meſme ſoit menée GH qui touche ſeulement le cercle en H. D'autãt que le rectangle compris de GB, GF eſt egal au rectangle de GD, GC *comme on peut recueillir de la 36. du 3.* Il s'enſuiura que les coſtez d'iceux rectangles ſeront proportionnaux *par la 14. du 6.* il ſera donc GB à GD reciproquement comme leurs parties hors du cercle GC à GF. Dauantage, d'autant que *par la meſme 36.* le quarré de GH eſt egal au rectangle de GB, GF, ou de GD, GC, Il s'ensuiura *par la seconde partie de la* 17 *du* 6. que la ligne GH sera moyenne proportionnelle entre GB & GF, ou entre GD & GC.

PROPOSITION XXXIX.

Si deux lignes droictes sont couppées par deux paralleles droictes, elles sont couppées des mesmes en mesmes raisons.



SOient les deux lignes droictes HB, CD couppées par deux paralleles HC, FG. soit menée CB couppant en I la ligne FG. Or *par la* 2. *du* 6. comme HF à FB, ainsi CI à IB, & comme CI à IB, ainsi CG à GD. Voila donc comme HF est à FB, ainsi CG à GD *par la* 11. *du* 5. *liure*.

FIN DV SIXIESME LIVRE.

LE SEPTIESME LIVRE DES ELEMENS D'EVCLIDE.

DEFFINITIONS.

1. L'Vnité eſt ſelon laquelle vne chacune des choſes qui ſont ſe nomme vne.

2. Mais le nombre eſt la multitude compoſee de pluſieurs vnitez.

3. Partie eſt vn nombre moindre qu'vn plus grand, quand il meſure le plus grand.

4. Et parties ſont vn nombre moindre qu'vn plus grand, quand il ne meſure pas le plus grand.

5. Mais le multiplice eſt vn nombre plus grand que le plus petit, quand celuy-cy meſure l'autre.

6. Nombre pair eſt celuy qui ſe peut diuiſer en deux parties egales.

7. Mais impair eſt celuy qui ne ſe peut diuiſer en deux parties egales: ou bien celuy qui eſt different du nombre pair de l'vnité.

8. Nombre pairement pair, eſt celuy qui eſt meſuré d'vn nombre pair ſeulement.

9. Nombre pairement impair eſt celuy qui eſt meſuré d'vn nombre pair par vn nombre impair.

10. Mais nombre pairement pair & impair eſt celuy qui eſt meſuré d'vn nombre pair & d'vn nombre impair.

11. Et Nombre impairement pair eſt celuy qui eſt meſuré de l'vnité ſeulement.

12. Nombre premier eſt celuy qui eſt meſuré de l'vnité ſeulement.

13. Nombres premiers entre eux ſont ceux qui ſont meſurez par l'vnité ſeulement, pour meſure commune.

14. Nombre composé eſt celuy qui eſt meſuré de quelque nombre.

15. Nombres compoſez entre eux ſont ceux qui ſont meſurez de quelque nombre pour meſure commune.

16. Vn nombre ſe dict multiplier vn autre, quand autant d'vnitez qu'il y a en luy, autant de fois ſe compoſe le multiplié & en naiſt vn autre.

17. Nombre plan eſt celuy qui eſt produict de deux nombres ſe multiplians l'vn l'autre, & les coſtez d'iceluy ſont les nombres ſe multiplians l'vn l'autre.

18. Nombre ſolide eſt celuy qui eſt produict de trois nombres ſe multiplians enſemble l'vn l'autre: Et les trois coſtez d'iceluy ſont les nõbres ſe multiplians enſemble.

19. Nombre quarré eſt qui eſt egalement egal, ou bien celuy qui eſt contenu de deux nombres egaux.

20. Nombre cube eſt qui eſt egalement egal egalement: ou bien celuy qui eſt contenu de trois nombres egaux.

21. Nombres proportionnaux ſont ceux deſquels le premier eſt l'egalmultiplice, ou bien la meſme partie ou parties du ſecond, comme eſt le troiſieme du quatrieme.

22. Nombres plans ou ſuperficiels ſemblables, & nombres ſolides ſemblables ſont ceux qui ont les coſtez porportionnaux.

23. Le Nombre qui donne nom à la partie eſt celuy par lequel la partie repetee conſtitüe & faict le tout.

24. Nombre parfaict eſt celuy qui eſt egal à toutes & chacunes ſes parties.

Definition du nombre milieu proportionnel.

Nombre milieu proportionnel entre deux nombres est celuy auquel le plus grand a mesme raison comme luy mesme au plus petit.

COMMVNES SENTENCES.

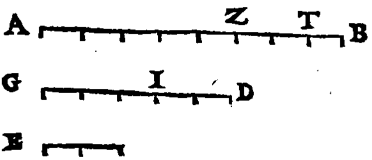
1. Si vn Nombre mesure vne partie, il mesurera aussi le tout.

2. Si vn nombre mesure le tout & le soustraict, il mesurera aussi le reste.

PROPOSITION PREMIERE.

Deux nombres inegaux estans proposez, si en leuant tousiours alternement le plus petit du plus grand, le restant ne mesure iamais le precedent iusques à ce qu'il reste l'vnité; les nõbres proposez du cõmencement seront premiers entr'eux.

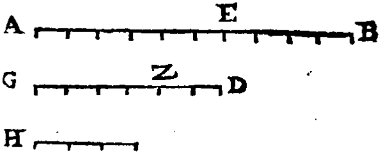
Soient donc proposez deux nõbres, sçauoir A B plus grand & G D. & de A B soit leué G D restant Z B. Et de G D soit osté Z B restant I D. de Z B aussi soit



osté I D, & ainsi tousiours iusques à ce qu'il reste seulement l'vnité T B. Ie dis qu'il n'y a aucũ nombre qui mesure A B & G D. Que si quelque nombre les mesure, soit iceluy E : Et parce que E mesure le tout A B & le soustraict GD, il mesurera aussi le reste Z B *par la 2. com. sent. de ce liure.* Sẽblablemẽt pource que le mesme E mesure le tout GD & le soustraict Z B, il mesurera aussi le reste I D *par la mesme.* Et finalement mesurant le tout Z B & le soustraict I D, il mesurera aussi le reste, c'est à sçauoir l'vnité T B. Ce qui est absurde, estant le nombre E plus grand que l'vnité. *Si donc deux nombres inegaux &c.*

PROPOSITION II.

De deux nombres non premiers entre eux trouuer la plus grande commune mesure d'iceux.

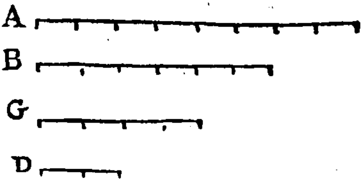


Soiét proposez deux nombres non premiers entre eux A B, G D, desquels soit tousiours osté le plus petit du plus grand iusques à ce que le nõbre restant mesure le precedent; ce que necessairement aduiendra: autrement ne restant que l'vnité, ils seroient premiers *par la precedente*, qui seroit contre l'hypothese.

Ie dy donc que leuant G D de A B restera E B, cestuycy leué de G D restera le nombre Z D, & que nul autre nombre plus grand ne mesurera point les proposez. Si quelque plus grand comme H les peut mesurer, d'autant qu'il mesure le tout A B & le soustrrict G D, il mesurera aussi le reste E B: & pource aussi qu'il mesure le tout G D & le soustraict E B, il mesurera aussi le reste Z D *par la 2. com. sent. de ce liure*: Le nombre H plus grand mesurera donc le plus petit Z D. Ce qui ne se peut faire. Dont est euident qu'vn plus grand nombre que Z D ne mesurera point les uombres proposez. *Resulte que si vn nombre mesure deux autres nombres, il mesurera aussi leur commune plus grande mesure.*

PROPOSITION III.

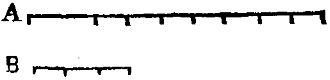
De trois nombres non premiers entre eux, trouuer la plus grande commune mesure d'iceux.



Soient les trois nombres non premiers entre eux proposez A, B, G, Soit des deux A & B, trouuee la plus grande mesure (*par la precedente*) laquelle soit D, qui mesurera le reste G, ou ne la mesurera pas. Que si elle le mesure, elle sera la plus grande mesure des trois, & aurons ce qui est requis. Si elle ne le mesure point, il faudra que G & D soient premiers entre eux, contre ce qui resulte de la precedente, & par consequent aussi G & B premiers: Ce qui est contre l'hypothese; Le nombre D sera donc la plus grande commune mesure des proposez. *Et resulte que si vn nombre mesure plusieurs autres nombres, il mesurera* *außi leur plus grande commune mesure.*

PROPOSITION IIII.

Tout nombre moindre est partie ou parties de tout nombre plus grand.



SOit le plus grand exposé A. Si le moindre B mesure A il sera la partie precise d'iceluy *par la 3. definition de ce liure.* S'il ne le mesure pas, il en sera les parties *par la 4. definition de ce liure.*

ADVERTISSEMENT.

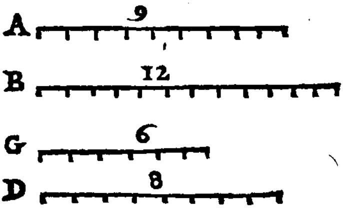
Toute raison d'vne partie au nombre, eschet en la mesme raison que l'vnité au nombre. Et la raison des parties au nombre eschet tousiours és mesmes raisons que du nombre au nombre, mais non de l'vnité au nombre.

Entre tous nombres donc ne tombe pas la vraye & simple raison des nombres (c'est à dire des quantitez discretes,) mais seulement entre ceux desquels le moindre est les parties du plus grand: par ainsi de 4. à 12. la raison ne sera pas simplement des nombres, d'autant qu'elle est reduicte à la raison de l'vnité à 3, & est de mesme: mais la raison de 4. à 14. & les autres des parties au tout, sont seulement entre les nombres.

PROPOSITION V.

Si vn nombre est partie d'vn nombre, & vn autre nombre est la mesme partie d'vn autre nombre, außi tous deux ensemble seront la mesme partie de tous deux ensemble, qu'est l'vn de l'autre.

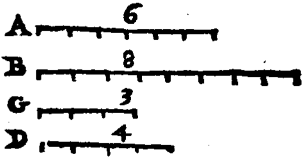
CEste mesme chose est declaree en la 1. proposition du 5. és quantitez continues, comme elle est en celle cy és quantitez discretes (c'est à dire és nombres.) Et pourtant, comme i'ay dict là, ie ny aporteray (non plus qu'en quelques suiuantes) aucune demonstration, ains seulement interpretation, craignant d'obscurcir ce qui est assez clair par le texte : Car ces propositions sont plustost principes & communes sentences que theoremes.



Si donc A est la mesme partie de B comme G est de D ; A & G ensemble seront la mesme partie de B D ensemble.

PROPOSITION VI.

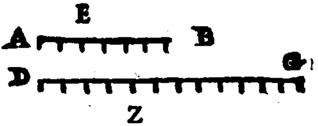
Si vn nombre est parties d'vn nombre, & vn autre nombre est les mesmes parties d'vn autre : aussi tous deux ensemble seront les mesmes parties de tous deux ensemble, comme l'vn de l'vn.



SI le nombre A est les mesmes parties de B comme G est de D ; les deux ensemble A & G seront les mesmes parties de B & D ensemble, comme est A de B ou G de D.

PROPOSITION VII.

Si vn Nombre est la mesme partie d'vn nombre, comme est le soustraict du soustraict ; aussi le resté sera la mesme partie du resté, comme est le tout du tout.

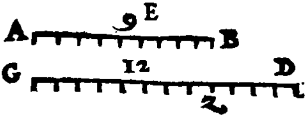


SOit le nombre A B la mesme partie du nombre D G, comme le soustraict B E du soustraict G Z, le resté A E sera aussi la mesme partie du resté D Z, comme estoit le tout A B au tout D G. *Cecy se rapporte à la 5. prop.* du 5.

PROPOSITION VIII.

Si vn nombre est les mesmes parties d'vn nombre, comme est le soustraict du soustraict; aussi le reste sera du reste les mesmes parties comme le tout du tout.

Soit le nombre A B les mesmes parties de G D comme le soustraict A E est du soustraict G Z; le reste E B sera aussi les mesmes parties du soustraict Z D.

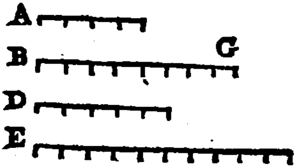


PROPOSITION IX.

Si vn nombre est partie d'vn nombre, & vn autre est la mesme partie d'vn autre, aussi alternement, telle partie, ou telles parties comme est le premier du troisiesme, aussi le second sera la mesme partie ou mesmes parties du quatrieme.

D'Autant que toutes sortes de raisons des quantitez discretes peuuent escheoir entre quelques raisons des quantitez continues (comme nous auons aduerty cy deuant) ceste proposition & la suiuante sera facile a entendre par la 16. du 5.

Soit le nõbre A la mesme partie du nombre B G, comme D est de E, telle partie ou parties qu'est le premier A au troisieme D, aussi telle partie ou parties sera le second B au quatrieme E.



PROPOSITION X.

Si vn nombre est les parties d'vn nombre, & vn autre est les mesmes parties d'vn autre; aussi alternement telles parties, ou partie comme est le premier du troisiesme, le second sera les mesmes parties ou partie du quatrieme.

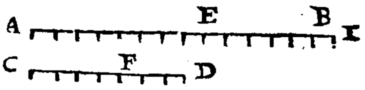
Ceste proposition se peut facilement comprendre par la precedente & par la 16. du 5. Et faut notter qu'il est entendu tant des parties surabondantes le tout cõme de celles au dessouz du tout.

PROPOSITION XI.

Si comme le tout est au tout, ainsi est le soustraict au soustraict, aussi le resté au resté sera comme le tout au tout.

CEste proposition se peut entendre par la 19. du 5. Mais Euclide expose icy & és trois propositions suiuantes que la raison des nombres l'vn à l'autre naist de la similitude des parties.

Soit donc tout le nombre A B à tout le nombre C D comme le soustraict E B au soustraict F D; aussi le reste A E sera de mesme au soustraict C F.

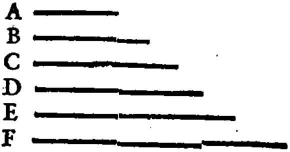


PROPOSITION XII.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra proportionnaux, comme l'vn des antecedens est à l'vn des suiuans, tout ainsi tous les antecedens sont à tous les suiuans.

CElle cy & la suiuante sont demonstrees en la 16. du 5.

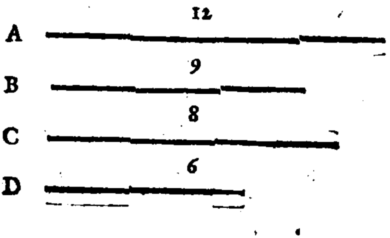
Soit donc A à B comme C à D & comme E à F, aussi A, C, E antecedẽs seront de mesme aux consequens & suiuans B, D, F, comme A à B. ou C à D. ou E à F.



PROPOSITION XIII.

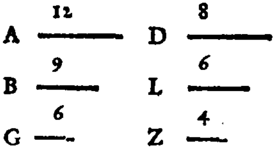
Si quatre nombres sont proporrionnaux, aussi alternement ils seront proportionnaux.

SOit le nombre A à B comme C à D. aussi A sera à C comme B à D.



PROPOSITION XIIII.

S'il y a tant de nõbres qu'on voudra d'vne part, & autãt d'autres de l'autre, & qui ſe prennent deux à deux en meſme raiſon, auſsi en egalle raiſon ils ſeront proportionnaux.

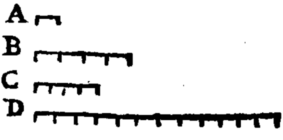


SOient les nombres A B G d'vne part, & autant d'autres D L Z de l'autre, qui ſoiét deux enſemble de meſme raiſon à deux enſemble; C'eſt à ſçauoir comme A à B ainſi D à L, & comme B à G ainſi L à Z. Auſſi (oſtant les moyens B & L) iceux ſeront en raiſon egale proportionnaux: c'eſt à dire comme A ſera à G, ainſi D à Z.

Ceſte propoſition ſe peut demonſtrer, Premierement quant à l'egalité ou inegalité par la 20. & 21. du 5. Secondement quant à la raiſon des proportions, par la 22. & 23. du meſme liure.

PROPOSITION XV.

Si l'vnité meſure quelque nombre, & vn autre nombre en meſure pareillement quelque autre; auſsi alternement l'vnité meſurera le troiſieme nombre egalement, comme le ſecond meſure le quatrieme.

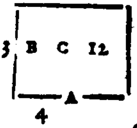


SOit donc l'vnité A meſurant le nombre B, cõme le nombre C meſure le nombre D. Ie dy que l'vnité A meſurera le troiſieme nombre C, comme le ſecond B meſurera le nombre quatrieſme D. Car *par la* 12. *du* 5. les antecedens A & C ſeront proportionnaux comme les conſequents B D. Ainſi donc A eſtant l'vnité & compriſe quatre fois en B, ainſi C ſera comme l'vnité & compriſe quatre fois en D: Et comme l'vnité A eſt compriſe trois fois en C, ainſi le nombre B ſera (comme l'vnité) compris trois fois en D.

PROPOSITION XVI.

Si deux nombres ſe multiplians l'vn l'autre, en font quelques autres, les engendrez d'iceux ſont egaux l'vn à l'autre.

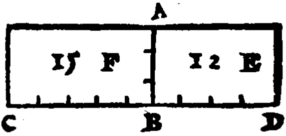
CEcy ſe peut bien entendre par la premiere deffinition du 2: Car ſi le nombre A 4 multiplie le nombre B 3 & il en preuient C 12; Il prouiendra le meſme nombre en multipliant B par A: & ce d'autant que A repetant par ſes vnitez le nombre B faict autant que le nombre B repetant par ſes vnitez le nombre A.



PROPOSITION XVII.

Si vn nombre multipliant deux nombres en faict quelques autres, les engendrez d'iceux auront la meſme raiſon qu'ont les multipliez.

SOit le nombre A B multipliant le nombre B D & le nombre C B, & le prouenu du premier ſoit E 12, & le prouenu de l'autre ſoit F 15. Ie dy que le produit E 12. a meſme raiſon à F 15 que le nombre B D 4 au nombre C B 5: Car comme on peut recueillir de *la* 15. *du* 5. les grandeurs qui ſont meſmes parties de leurs egalmultiplices (cecy s'entend auſſi des nõbres) ont vne meſme raiſon comme elles ſe reſpondent mutuellement: Or B D eſt multiplié par A B 3; B D ſera donc la troiſieme partie du produict E: Et B C eſt multiplié par le meſme A B: B C ſera donc auſſi la troiſieme partie du produict F: Et ſera la raiſon de 12 à 15 comme de 4. à 5.



PROPOSITION XVIII.

Si deux nombres multiplians quelque nombre, en font quelques autres; les engendrez d'iceux auront la meſme raiſon qu'ont les multiplians.

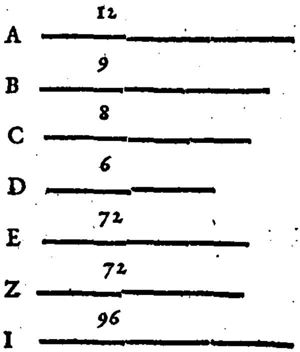
CEſte cy eſt la conuerſe de la precedente, car E eſt vne meſme choſe que B D multiplie A B, comme A B multiplie B D

& en

& en viendra vn mesme produict. Semblablement si C B multiplie le mesme A B est vne mesme chose comme si AB multiplioit C B & en sortira vn mesme produict. Cecy se peut facilement entendre tant par la precedente que par la 16. de ce liure.

PROPOSITION XIX.

Si quatre nombres sont proportionnaux, le nombre qui est faict du premier & du quatrieme sera egal à celuy qui sera faict du second & du troisieme. Et si le nombre faict du premier & du quatrieme est egal à celuy du second & du troisiesme; iceux quatre nombres seront proportionnaux.



Soient quatre nombres proportionnaux A à B comme C à D. Le produict du premier A par le quatrieme D soit E. Le produit du second B par le 3. C soit Z, Ie dy E & Z estre egaux. Soit dõc multiplié C par A dont soit le produict I. Et pour ce que le mesme A multipliant D a faict E; Il sera *par la* 17. *de cestuy* comme C à D ainsi I à E: Mais A à B a esté cõme C à D par l'hypothese; A à B sera dõc comme I à E. Derechef A ayãt multiplié C a faict I: mais B multipliant le mesme C, a produict Z: Il s'ensuiura *par la* 18. *de cestuy* que A à B sera comme I à Z. Mais A à B a esté comme I à E. Ainsi donc comme I à Z, ainsi sera I à E. Iceux donc E & Z qui sont les produicts du premier par le quatrieme, & du second par le troisieme seront egaux *par la* 9. *du* 5.

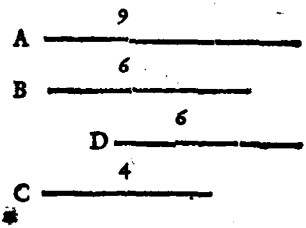
Pour la seconde partie. Supposons E & Z egaux. Ie dy que les quatre nombres A B C D sont proportionnaux: sçauoir cõme A à B ainsi C à D: D'autant que A multipliant C & D faict I & E: Il sera *par la* 17. *de ce liure* comme C à D ainsi I à E. Et pource que Z & E sont posez egaux; Il sera *par la* 7. *du* 5. comme C à D ainsi I à Z: Mais A & B ayans multiplié C ont faict I & Z; Il sera *par la* 18. *de ce liure* comme A à B ainsi I à Z: mais C à D a esté comme I à Z: Il s'ensuiura donc comme A à B ainsi C à D, &

seront les quatre nombres proportionnaux. *Si donc quatres nombres sont proportionnaux, &c.*

PROPOSITION XX.

Si trois nombres sont proportionnaux, ce qui est faict des extremes, est egal à ce qui est produict du milieu. Et si le nombre qui est faict des extremes est egal à celuy qui est faict du milieu, iceux trois nombres seront proportionnaux.

Soient trois nombres proportionnaux A à B comme B à C, & soit faict D egal à B. il est euident *par la precedente* que le produict de A par C, sera egal au produict de B par D c'est à dire au produict de B par soymesme, d'autant que B & D sont posez egaux.

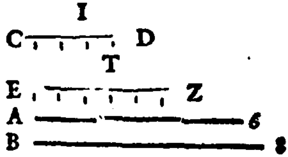


Pour la seconde partie, la mesme demonstration se fera qu'en la seconde partie de la precedente.

PROPOSITION XXI.

Les nombres plus petits de tous ceux qui ont la mesme raison auec iceux, mesurent egalement les nombres qui ont la mesme raison, c'est à sçauoir l'antecedent l'antecedent & le consequent le consequent.

Soient les nombres plus petits C D & E Z en la raison dõnee des nombres A à B. Ie dy que C D mesure le nombre A egalemẽt comme E Z le nombre B. D'autãt que par l'hypothese ces nombres sont proportionnaux, sçauoir C D à E Z comme A à B, &



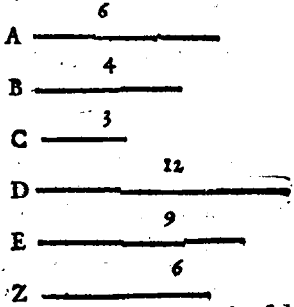
entre eux aussi comme C D à A, ainsi E Z à B. Iceux C D & E Z plus petits, sont la partie ou parties des plus grands A & B *par la 4. de ce liure*: mais ils sont la mesme partie *par la 21. definition de cestuy*, & non les mesmes parties: car si C D & E Z estoient couppez en mesmes parties, c'est à sçauoir CD en CI, ID, & E Z en ET, TZ, leurs parties derechef C I & E T auroient l'vn à l'autre la mesme raison que C D à E Z. *par la 15. du 5.* Et par ainsi ne seroient pas les minimes, c'est à dire plus petits de ceste raison C D à E Z, Par ainsi donc C D & E Z sont partie d'iceux A & B *par la 4. de ce liure*: Et par consequent *par la troisieme definit. de ce mesme* ils mesureront les nombres A & B: Et egalement C D antecedent mesurera le mesme antecedent, comme E Z consequent mesurera B consequent *par la 21. definition de cestuy*, c'st à dire le plus petit des deux premierement proposez mesurera le plus petit des deux autres & le plus grand d'iceux deux premiers, mesurera le plus grand des derniers.

Faut notter que ce theoreme ne se peut demonstrer par nombres en raison multiplice, d'autant qu'elle produit tousiours l'vnité auec vn nombre en ses minimes parties: Ainsi donc 2 & 6 combien qu'ils soient minimes de 1 & 15 de mesme raison ils ne les mesureront pas pourtant: parquoy ne faut point estimer qu'en la raison multiplice les minimes soient pris pour nombres: mais tant seullement en raison de nombres, icelle n'estant pas simplement des nombres d'Arithmetique: mais elle eschet entres les quantitez continues & discretes, comme aussi sa conuerse.

Cecy soit aussi noté en la suiuante & en quelques autres qui traicteront de telles raisons.

PROPOSITIOM XXII.

S'il sont trois nombres, & autant d'autres, les deux pris en mesme raison: & que leur proportion soit perturbee, ou meslee: aussi en raison egalle ils seront proportionnaux.

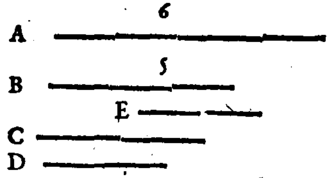


SOient trois nombres A B C & autres trois D E Z, les deux pris en mesme raison mais d'vn ordre meslé, sçauoir comme A à B ainsi B à Z, & comme B consequent à quelque autre chose C ainsi soit quelque autre chose D à E antecedent. Ie dy qu'en raison egale A est à C comme D à Z.

Cecy se rappporte à la 23. du cinquieme, & partant ie n'en feray autre demonstration.

PROPOSITION XXIII.

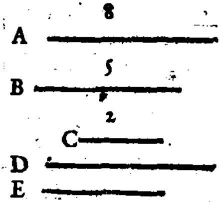
Les nombres premiers entre eux sont les plus petits de tous ceux qui ont la mesme raison auec iceux.



SOient les nombres premiers A & B. Ie dy qu'ils sont minimes en leur raison. Que s'ils ne sont, soient (s'il est possible) donnez des plus petits en mesme raison sçauoir C D. D'autant que C & D sont minimes iceux mesureront A & B qui ont egalement vne mesme raison; c'est à sçauoir C antecedent mesurera A, & D consequent mesurera B *par la 21. de ce liure.* Dont s'ensuyura que C mesurera A par autant d'vnitez que D mesurera B. Soient icelles vnitez E: Puis que C & D mesurent A & B par les vnitez E: Le mesme E mesurera iceux A & B par les vnitez d'iceux C & D *par la 16. de ce liure.* Car E par C produict autant que C par E: Iceux donc A & B ne seront pas premiers puis qu'ils sont mesurez du nombre E *contre l'hypothese* ce qui ne se peut faire: A iceux donc A & B premiers entre eux ne se peuuent donner nombre plus petits ayans la mesme raison auec iceux.

PROPOSITION XXIIII.

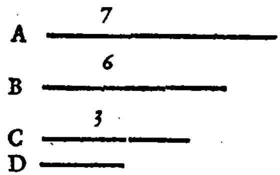
Les nombres plus petits de tous ceux qui ont la mesme raison auec iceux, sont premiers entre eux.



SOient les nombres plus petits de la raison donnee A & B. Ie dy iceux estre premiers en eux. Que s'il ne le sont, soit donné le nombre C qui les mesure, s'il est possible. Autant de fois donc que C mesurera A soiẽt estimees autant d'vnitez en D, & autant de fois que le mesme C mesurera B autant soient estimees d'vnitez en E: doncques C multipliant D fera A; & multipliant E fera B. Si donc C multipliant D faict A & B; A à B sera comme D à E *par la 17. de ce liure*, lesquels sont moindres que A & B (veu qu'ils sont multipliez) & en la mesme raison (contre l'hypothese) Ce qui ne peut estre. Parquoy il ne se pourra donner aucun nombre qui mesure iceux A & B, & pourtant ils seront premiers entre eux.

PROPOSITION XXV.

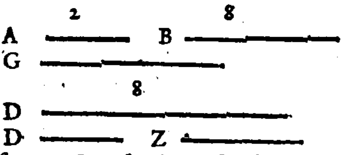
Si deux nombres sont premiers entre eux, celuy nombre qui mesure l'vn ou l'autre d'iceux, sera premier auec l'autre laissé.



SOient les deux nombres premiers entre eux A & B desquels l'vn sçauoir B soit mesuré de C. Ie dy que le mesme C au resté A sera premier : Que s'ils ne sont premiers entre eux soit vn autre nõbre D qui les mesure. D'autant que par l'hypothese D mesure C, & C mesure B, Il s'ensuiura *par la premiere commune sentence de ce liure* que D mesurera B: Or le mesme D mesure aussi le nombre A, le nombre D le nombre D mesurera donc l'vn & l'autre sçauoir A & B : A & B ne se trouueront donc pas estre premiers comme il a esté posé ; ce qui ne se peut faire. Par ainsi le nombre C mesurant l'vn des deux A ou B sera premier à l'autre laissé.

PROPOSITION XXVI.

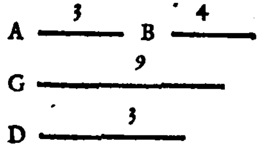
Si deux nombres sont premiers à quelque autre nombre, celuy qui sera engendré d'iceux sera aussi premier au mesme.



SOient deux nombres A & B vn chacun premiers à quelque autre nõbre G, & de la multiplication de l'vn par l'autre soit produict D : Ie dy que le mesme D sera premier au mesme G. Que si cela n'est, soit quelque nombre E qui mesure, s'il est possible, iceux D & G. Parce aussi que E mesure G l'vn des premiers A & G, iceluy E sera premier au demeurant A *par la precedente*. Et soient autant d'vnitez en Z que E mesure de fois D, par ainsi E multipliant Z produict le mesme D : mais par la construction A & B font D. Si donc ce qui est faict du premier A & du quatrieme B est egal à ce qui est faict du second & troisieme E & Z ; Il sera *par la 19. de cestuy* A à E comme Z à B. Plus veu que E & A ont esté demonstrez estre premiers; Ils seront aussi les plus petits nombres de la raison donnee *par la 23. de ce liure*. Le nombre A mesurera donc Z ainsi que E mesurera B *par la 21. de ce liure*. Mais le mesme E mesure le mesme G qui a esté posé premier à B : Il s'ensuiuroit donc que E mesureroit les deux G & B qui ont esté posé premiers, ce qui ne se peut faire. Il n'y a donc point de nombre qui mesure G & D, parquoy ils sont premiers.

PROPOSITION XXVII.

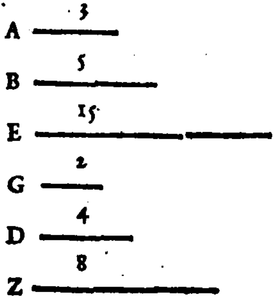
Si deux nombres sont premiers entreux, celuy qui est engendré de l'vn d'iceux sera premier à l'autre.



SOient deux nombres premiers l'vn à l'autre A & B, l'vn d'iceux sçauoir de A soit faict G : Ie dy que G est premiers à l'autre B. Soit posé D egal à A. D'antant que A est premier à B semblablement D (egal à A) sera premier au mesme B. Deux nombres donc sçauoir A & D (qui sont premiers à quelque autre D) font G. Donc *par la 26. de ce liure* l'engédré d'iceux soit G, sera premier au mesme B: Car G est faict de la multiplication de A par D egaux, qui est le mesme produict que celuy qui est faict de l'vn d'iceux, sçauoir de A multiplié par soymesme. *Si donc deux nombres, &c.*

PROPOSITION XXVIII.

Si deux nombres a deux nombres sont premiers tous deux ensemble à l'vn & à l'autre : aussi les engendrez d'iceux seront premiers entre eux.



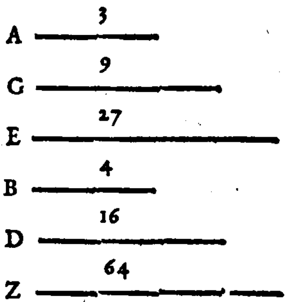
SOient les deux nombres A & B à G & D, sçauoir A & B à G, & A & B à D premiers entr'eux : Ie dy E & Z estre premiers entr'eux. D'autant que les deux A & B sont premiers à quelque autre G, celuy qui sera engendré d'ceux, sçauoir E sera premier au mesme G *par la 26. de ce liure*. Semblablement pource que A & B sont premiers à D, aussi E sera premier à D *par la mesme pro-*

position. Les deux donc G & D estans premiers à quelque autre E font vn cópofé d'iceux, c'est à sçauoir Z qui est premier au mesme E *par la mesme 26. de ce liure. S donc deux nombres a deux nombres &c.*

PROPOSITION XXIX.

Si deux nombres sont premiers entre eux, & multipliant vn chacun soymesme en engendre quelqu'vn, ceux qui seront produicts d'iceux seront premiers entre eux. Que si les nombres proposez au commencement multiplians ceux qui sont produicts en font d'autres, iceux aussi seront premiers entre eux. Et tousiours enuiron les extremes aduiendra la mesme chose.

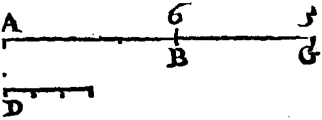
SOient deux nombres A & B premiers lesquels se multiplians l'vn l'autre facent G & D: multiplians derechef les produicts facent E & Z. Ie dy G & D estre premiers, comme aussi E & Z. D'autant que le nombre G est faict de l'vn des premiers A & B, iceluy sera premier à l'autre B *par la 27 de ce liure.* Et semblablement parce que le nombre D est faict de B iceluy



sera premier à A *par la mesme prop.* Les deux donc A G seront premiers aux deux B & D sçauoir l'vn & l'autre à l'vn & à l'autre. Le nombre donc qui est faict des premiers A G sçauoir E, sera premier à Z qui est faict des derniers, *par la precedente.* Et tousiours si A & B multiplians iceux E & Z produisent quelques nombres, iceux produicts seront trouuez premiers *selon la demonstration de la precedente. Si donc deux nombres &c.*

PROPOSITION XXX.

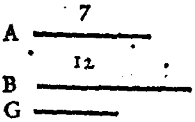
Si deux nombres sont premiers entre eux, aussi tous deux ensemblement seront premiers auec vn chacun d'iceux. Et si tous deux ensemblement a quelqu'vn d'iceux sont premiers entre eux, aussi les nombres qui sont posez au commencement, sont premiers entre eux.



SOient A B & B G premiers entre eux. Ie dy que le tout A G est premier à l'vn des deux, comme à A B. Que s'il ne l'est: Soit quelque autre nombre D qui les mesure: D'autant que D mesure le tout A G & le soûstraict A B il mesurera aussi le reste B G *par la 2. commune sentence.* Tellement que A B & B G ne seront premiers (contre l'hypothese) ce qui ne se peut faire. Pour le second posons le tout A G estre premier à A B: Ie dy A B à B G estre premiers, s'ils ne le sont, soit D qui les mesure; Si donc D mesure les deux A B & B G, mesurera aussi le tout A G: mais il mesure aussi A B: Donc A B & A G ne sont premiers (contre ce qui est posé) car D les mesure; ce qui est absurde. Parquoy il ny aura aucun nombre qui mesure A G & A B, il seront donc premiers.

PROPOSITION XXXI.

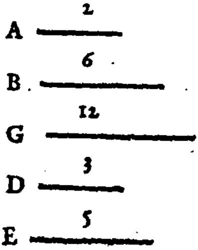
Tout nõbre premier est premier à tout nõbre qu'il ne mesure pas.



SI le nombre A est premier & ne mesure B, Ie dy que A à B sont premiers. S'ils ne le sont quelque nõbre G les mesurera. Premierement donc G mesurera A; ce qui ne se peut faire, *par la 12. definition de cestuy.* Car si G est egal à A, il ne mesurera pas B que A ne mesure pas *par l'hypothese*: Il ny aura donc aucun nombre qui les mesure, Et par ainsi A à B seront premiers.

PROPOSITION XXXII.

Si deux nombres se multiplians l'vn l'autre, en font vn autre Et quelque nombre premier mesure le produict d'iceux, iceluy mesurera außi l'vn ou l'autre d'iceux qui ont esté posez au commencement.



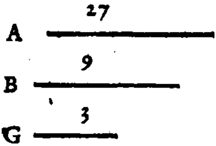
SOient deux nombres A & B de la multiplication desquels soit produict G lequel soit mesuré par vn nombre premier D. Ie dy que D mesurera l'vn d'iceux A ou B. S'il ne mesure A, D & A seront premiers *par la precedente.* Autant de fois que D mesurera G, autant soient d'vnitez en E: Doncques D multipliant E faict G, comme

A multipliant B faict le mesme G *par l'hypothese:* Les nombres donc sont proportiõnaux sçauoir A à D comme E à B *par la* 19. *de ce liure*: Car ce qui est faict du premier A & quatrieme B est egal à celuy qui est faict du second D & troisiesme E : mais veu que A & ont esté monstrez premiers, iceux seront minimes de leur raison *par la* 23 *de cestuy*. Et partant mesureront iceux B E egalement *par la* 21. *de cestuy*, c'est à sçauoir l'antecedent A mesurera l'antecedent E, & le consequent D mesurera le consequent B, lequel B est l'vn des deux A & B qui est mesuré par D.

PROPOSITION XXXIII.

Tout nombre composé sera mesuré de quelque nõbre premire.

SI le nombre A est composé, il sera mesuré de quelque nombre *par la* 14. *definition*, Et soit de B, lequel ne soit premier, il est certain que quelque autre nombre (comme G) mesurera B: Iceluy G sera dõc premier ou quelqu'vn le mesurera, lequel finalement sera mesuré seulement par l'vnité, & cestuy cy sera premier : car les nombres entant que nombres ne se diuisent pas infiniement. Donc *par la premiere commune sentence de ce liure*, ce nombre premier mesurera A. *Tout nombre composé donc.*



PROPOSITION XXXIIII.

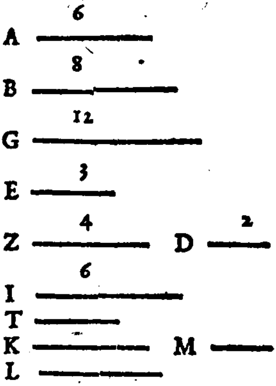
Tout nombre ou est premier, ou quelque nombre premier le mesure.

D'Autant que tout nombre ou est premier ou est composé: mais le composé est mesuré par quelque nombre *par la precedente*. Tout nombre donc ou est premier ou quelque nombre premier le mesure.

PROPOSITION XXXV.

Estans donnez autant de nõbres qu'on voudra trouuer les plus petits nombres de tous ceux qui auront la mesme raison auec iceux.

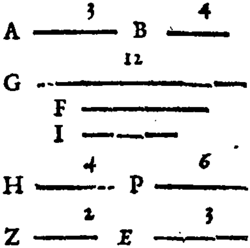
SOient proposez trois nombres A B G desquels il faut trouuer les minimes en leurs mesmes raisons. S'ils sont premiers, nous auons ce qui est requis *par la 21. de ci liure.* S'ils ne sont premiers soit leur plus grãde mesure D: En apres autant de fois que D mesurera iceux A B G, autant soient d'vnitez aux nombres E, Z, I, l'ordre estant gardé. D'autant que D mesure vn chacun A, B, G, par les vnitez d'vn chacun E, Z, I, il s'ensuiura *par la 18. de ce liure* que les engendrez A, B, G, auront la mesme raison que les multiplians E Z I: Ie dy outre plus que ceux cy sont les minimes de la raison des nombres A B G. Que si on pouuoit donner des nombres plus petits de mesme raison, soient iceux T K L, lesquels par ce moyen mesureront egallement iceux ABG *par la 21. de ce liure.* Qu'ils les mesurent donc par les vnitez de M; conuersement aussi M mesurera iceux A B G par les vnitez de T K L *par la 16. de cestuy.* Mais veu que T multipliant M faict A, & semblablement E multipliant D faict le mesme A, il s'ensuiura *par la 19. de ce liure* que ce qui est faict du premier E & quatrieme D sera egal à ce qui est faict du second T & troisieme M: Et pourtant iceux nombres seront proportionnaux, sçauoit E à T comme M à D: Mais E est posé plus grand que T, le nombre M sera donc plus grand que D: Et pourtant M sera la commune mesure d'iceux A B G laquelle est plus grande que D qui auoit esté posé plus grand, ce qui est absurde. Il ne se peut donc point trouuer de nombres plus petits que E Z I en la raison des proposez A BG: lesquels EZI pour ceste cause seront minimes de la mesme raisõ.



PROPOSITION XXXVI.

Deux nombres estans donnez, trouuer le plus petit nombre qu'iceux mesurent.

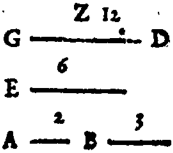
IL est certain que quand de deux nombres inegaux le plus petit mesure le plus grãd, cestuy cy sera le plus petit nombre mesuré d'iceux: Car s'il y en auoit vn plus petit le plus grand nombre mesureroit le plus petit : Ce qui est impossible.



Mais si les deux nombres A B proposez sont premiers entre-eux, ils seront les plus petit en leur raison *par la 23. 7* Et par ainsi celuy qui sera faict de l'vn par l'autre G sera mesuré de l'vn & de l'autre, & sera le plus petit mesuré desdicts deux nombres : Car s'il y en auoit vn plus petit comme F, iceluy estant party par les deux nombres proposez A & B donneroit deux autres nombres plus petits que A & B & qui auroient la raison d'iceux proposez *par la 19. de ce liure.* Et par ainsi les mesmes proposez n'estant pas les plus petits en leur raison, ne seroient point premiers entre eux : ce qui est contre la position. Que si les proposez sont composez comme H P, soient par les plus petits nombres en leur raison comme Z E *par la precedente.* Le produict du premier H multiplié par le quatrieme E sera egal au produict du second P par le trosieme Z *par la 19. de ce liure.* Et sera ce produict sçauoir I mesuré des deux nombres proposez & trouué minime. Car s'il y en auoit vn plus petit, iceluy estant party par H & par E, ou par P & par Z dõneroit des nõbres plus petits qu'iceux quatre nombres. Tellement que Z E ne seroient pas les plus petits en la mesme raison de H P : Ce qui est contre la position. Si donc deux nombres sont premiers entre eux, le produict de l'vn par l'autre sera le nombre mesuré des deux S'ils sont composez, le produict d'iceux par leurs minimes, en mesme raison, sera le nombre cherché, qui sera mesuré des deux composez : Ce produict s'entend de la multiplication du premier proposé auec le second minime, & du second proposé auec le premier minime, selon l'ordre de quatre nombres proportionnaux.

PROPOSITION XXXVII.

Si deux nombres mesurent quelque nombre, aussi le plus petit qu'iceux mesureront, mesurera le mesme.

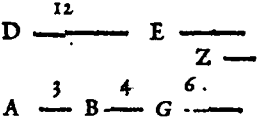


SOient deux nombres A & B qui mesurent quelque nombre G D, & qui mesurent aussi E minime produict deux mesmes. Ie dy que E mesurera aussi G D. Que s'il ne le mesure il en sera partie ou parties *par la 4. du 7.*

Soit donc poſé qu'il meſure de *G* D, le plus grand nombre Z D delaiſſant *G* Z moindre que ſoymeſme E. D'autant que les deux A & B meſurent E, ils meſureront auſſi Z D qui eſt meſuré par E *par la premiere commune ſentence.* Mais ils meſurent auſſi le tout *G* D, par l'hypotheſe ils meſureront donc le reſte ou ſouſtraict *G* Z *par la 2. commune ſentence* qui eſt moindre que le meſme E, lequel E auoit eſté pris pour minime : Ce qui ne ſe peut faire. Par ainſi donc E meſurera *G* D. *Si donc deux nombres, &c.*

PROPOSITION XXXVIII.

Pluſieurs nombres eſtans donnez trouuer le plus petit nombre lequel iceux meſurent.



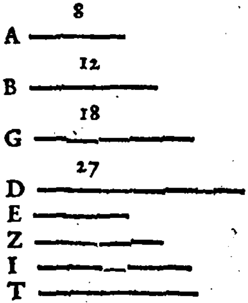
SOient trois nombres propoſez A B *G*, prenons *par la 36. de ce liu.* vn nombre minime que A & B meſurent, & ſoit D. Si le troiſieme *G* meſure auſſi D, nous auons ce qui eſt requis, & dy que D eſt le minime. Que s'il ne l'eſt, en ſoit donné quelque autre plus petit comme E lequel tous les trois *A B G* meſurent : D'autant que *A* & *B* meſurent E, & que les meſures *A* & *B* meſurent auſſi D, ceſtuy cy eſtant plus grand que E ne peut donc eſtre minime, ce qui eſt contre la poſition. Le nombre E n'eſt donc point plus petit que D. Mais ſi le troiſieſme *G* ne meſure point le meſme D, ſoit pris vn nombre minime que *G* & D meſurent qui ſoit E. D'autant que *A* & *B* meſurent D ils meſurerōt auſſi E (que D meſure) *par la premiere commune ſentence.* Les trois donc *A B G* meſurent E, lequel par ce moyen Ie dy eſtre minime. Que s'il ne l'eſt, en ſoit pris vn autre Z moindre que E. D'autant que A B & *G* meſurent Z les deux A B meſureront le meſme Z. Et pourtant *par la 37. de ce liure* le minime D (que A B meſurent) meſurera auſſi le meſme Z : D'autant auſſi que *G* & D meſurent le meſme, & *par la meſme 37.* le minime meſuré d'iceux *G* D, qui eſt E meſure auſſi Z & que E eſt plus grand que Z, il s'enſuiuroit que le plus petit ſeroit meſuré du plus grand, ce qui ne ſe peut faire. Le minime donc meſuré des trois A B *G* ſera E. Par ſemblable progreſſion ſe fera la demonſtration de tous autres nombres propoſez. Que s'il y a encor vn quatrieme nōbre qui ne meſure E : Il faudra trouuer *par la 37. de ce liure* vn minime qui ſoit meſuré de E & du quatrieme nombre, & celuy là ſera le nombre deſiré. Et ainſi de tous autres nombres ſuiuans.

FIN DV SEPTIESME LIVRE.

LE HVICTIESME LIVRE DES ELEMENS D'EVCLIDE.

PROPOSITION I.

Si tant de nombres qu'on voudra ſont continuellement proportionnaux, & deſquels les extremes ſoient premiers enſemble, ils ſont les plus petits de tous ceux qui ont la meſme raiſon auec iceux.



SOient quatre nombres A B G D continuellement proportionnaux, deſquels les extremes A & D ſoient premiers enſemble. Iceux quatre nõbres ſont les minimes de la raiſon dõnee. S'ils ne le ſont, ſoient donnez de plus petits E Z I T, leſquels veu qu'ils ſont ſuppoſez eſtre en la meſme raiſon que A B G D, ils ſeront egalemẽt *par la* 14. *du* 7. comme A à D ainſi E à T. Mais A à D ſont premiers par l'hypotheſe, & minimes *par la* 23. *du* 7. Ceux cy donc meſureront E T qui ont la meſme raiſon egallement, *par la* 21. *du* 7. Il s'enſuiuroit donc que les plus grands meſureroient les plus petits, ce qui ne ſe peut faire. A B G D ſont donc minimes de leur raiſon en ceſte multitude qu'ils ſont.

PROPOSITION. II.

Trouuer autant de nombres qu'on voudra continuellemẽt proportionnaux minimes en la raiſon donnee.

SOit en nombres minimes la raison donnee A à B *par la 35. du 7.* Et A se multipliant soy-mesme face G, & B se multipliant soy-mesme face E. Aussi A & B se multiplians l'vn l'autre facent D. Ie dy que G D E sont les minimes de la raison donnee. Que si nous en desirons quatre,

		27
	9 Z	
3 G		36
A	12 I	
4 D		48
B	16 T	
E		64
		K

A multiplians G D E face Z I T, & B multipliant E face le quatriesme K. Iceux aussi Z I T K seront quatre minimes en la raison de A à B. Mais d'autant que A multipliant deux nombres A & B a faict G & D, il sera *par la 17. du 7.* comme A & B ainsi G à D: Et d'autant que les deux nombres A à B multiplians B font D & E, il sera comme A à B ainsi D à E *par la 18. du 7.* GDE sont donc proportionnaux. Ie dy aussi qu'il sont minimes : veu que A & B sont minimes, ils sont aussi premiers *par la 24. du 7.* Pource aussi que se multiplians eux mesmes ils font G & E, ceuxcy seront premiers *par la 29. du 7.* Et estans les extremes de G D E, les trois G D E seront minimes des nombres ayans la mesme raison auec iceux *par la precedente*

Secondement, d'autant que A multipliant G D E faict Z I T, il sera *par la 17. du 7.* comme Z à I & I à T comme G à D & D à E. Outreplus d'autant que A & B multiplians E font T & K, il sera *par la 18 du 7.* A à B comme T à K : mais Z à I & I à T ont esté monstrez cõme A à B. Z I T K seront donc proportiõnaux: ils seront aussi minimes en la mesme raison. D'autant que A & B sont premiers, iceux multiplians les produicts G E ont faict quelques autres nombres sçauoir Z & K: Ceux-là aussi serõt premiers *par la seconde partie de la 29. du 7.* comme aussi les extremes des quatre ZITK : Ceux-cy donc seront tous minimes ayans la mesme raison que A à B *par la premiere de ce liure.*

Mais d'autant que *par la 29. du 7.* cela aduient tousiours enuiron les extremes, A & B multiplians les produicts Z K en feront d'autres premiers, qui seront extremes de cinq nombres proportionnaux : Et partant *par la premiere de ce liure* tous les cinq seront minimes en la mesme raison. Et ainsi infiniement.

Il resulte que s'il y a trois nombres continuellement proportionnaux minimes d'vne mesme raison les extremes seront quarrez : Car les extremes de trois se font de la multiplication d'iceux A & B par eux mesmes.

PROPOSITION III.

Si tant de nombres qu'on voudra sont continuellement proportionnaux, & les plus petits de tous ceux qui ont la mesme raison auec iceux; les extremes d'iceux sont premiers entre eux.

SOient autant de nombres qu'on voudra *A* B G D continuellemét proportionnaux & minimes en leur raison. Ie dy que leurs extremes *A* & D sont premiers entr'eux. Soient pris deux minimes de ceste mesme raison E & F *par la 35. du 7.* Iceux seront premiers *par la 24. du 7.* Puis apres de ceuxcy *par la precedente* soient produicts en la mesme raison K L M N : D'autant que E & F se multipliaus font C & I, & multiplians ces produicts ils font K & N, iceux donc K & N sont premiers *par la 29. du 7* : Et pource que K & N (extremes) sont premiers, tous les quatre K L M N sont minimes de ceste raison *par la premiere de ce liure*: mais *A* B G D sont aussi proposez (par l'hypothese) minimes de ceste mesme raison *A* B G D; Ceuxcy donc sont egaux à KLMN, autrement ils ne seroient point minimes. Les nombres donc *A* D (egaux aux extremes K N) seront premiers comme K & N. *Si donc tant de nombres qu'on voudra, &c.*

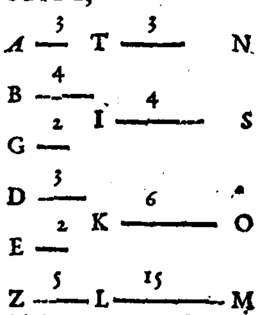
		8
	4	K
2	C	12
E	6	L
3	H	18
F	9	M
	I	27
		N

A B G D.

Resulte que s'il y a quatre nombres continuellement proportionnaux minimes d'vne mesme raison, les extremes seront cubes. Car les extremes se font de la multiplication des racines E F par les quarrez C I pour estre faicts cubes comme K N.

PROPOSITION IIII.

Estans donnees tant de raisons qu'on voudra aux plus petits nombres, trouuer autant de plus petits nombres ayans les raisons donnees, & qu'ils soient continuellement proportionnaux.



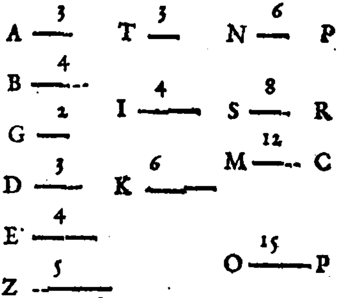
SOient en nombres minimes proposees les raisons *A* à B : G à D & E à Z. Soit pris vn nombre minime I qui soit mesuré de B & G *par la 36. du* 7. Et autant de fois que B mesure I, autant de fois aussi *A* puisse mesurer T: Et autant de fois que G mesure I autant de fois D puisse mesurer K : Mais E mesure K ou non: Et soit qu'il le mesure, & que autant de fois que Z puisse mesurer L. Mais pourautant que *A* & B egallement multipliez ont faict T & I, & G D multipliez par vn mesme ont faict I & K : Et derechef E & Z multipliez par vn mesme ont faict K & L ; Il sera *par la* 17. *du* 7. *A* à B comme T à I, & G à D comme I à K & aussi *E* à Z comme K à L. Les quatre donc T I K L sont aux raisons donnees & continuellement proportionnelles. Ie dy encor qu'ils sont minimes d'autãt d'autres nombres ayans ces mesmes raisons. S'ils ne le sont, soient trouuez, s'il est possible quelques autres plus petits comme N S O M respondant vn chacun à vn chacun de T I K L. Puis que A à B est cõme N à S, le nombre B (qui a esté posé minime) mesurera S *par la* 21. *du* 7. Semblablement veu que G à D est comme S à O, le nombre G mesurera S. Donc B & G mesurent S qui est plus petit que I (qui a esté posé minime) mesuré de B & G. Ce qui est absurde. On ne peut donc point donner de nombre plus petits que T I K L en la raison d'iceux A à B, G à D, & E à Z.

Pour le second, posons que E ne mesure point K. Soit *par la* 36. *du* 7. pris vn nombre M mesuré de E & K. Mais tel qu'est K à M, telle partie soit I du nombre S & T de N. Or autant de fois que E mesure M, autant de fois Z puisse mesurer O. D'autant que K I T mesurent egallement M S N, il sera *par la* 18. *du* 7. T à I comme N à S: & I à K comme S à M. Mais comme T à I & I à K, ainsi a esté mis A à B & G à D. Doncques A à B & G à D seront comme N à S & S à M. Et *par la mesme proposition* comme E à Z ainsi M à O; (car E & Z mesurent egallement M & O *par l'hypothese*) Les quatre donc N S M O sont continuellement proportionnaux ayans mesmes raisons que A à B, G à D & E à Z. Ie dy aussi qu'ils sont nombres minimes en ces mesmes raisons.

Que s'ils ne le sont, soient s'il est possible trouuez autres nombres plus petits, & soient P R C F. Or puis que ceux-cy sont ez

mes-

mesmes raisons que A B, G D & E Z, & ceux-cy mesme *par l'hypothese* sont minimes; Il s'ensuiura que B mesurera R comme A mesure P, & G mesurera R comme D mesure C *par la 21. du 7.* Par ainsi B & G mesureront R. Parquoy le nombre minime I mesuré de B & G mesurera le mesme R *par la 37. du 7.*



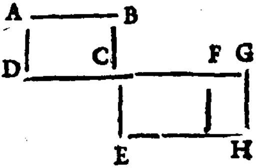
Et d'autant que I est à K cõme R à C, c'est à sçauoir comme G à D, Aussi par vicissitude I à R sera comme K à C *par la 13. du 7.* Or I mesure R aussi K mesurera C. Outre plus E mesure le mesme C : car E & Z sont minimes de la raison d'iceux C à F *par la 21. du 7.* Les nombres donc K & E mesureront le mesme C. Et pourtant le nombre M minime mesuré de K & E mesurera le mesme C *par la 37. du 7* : C'est à sçauoir que le plus grand mesurera le plus petit, veu que P R C F sont supposez plus petits qu'iceux N S M O. Ce qui ne peut estre. Tellement donc que les quatre nombres N S M O continuellement proportionnaux sont minimes ayans les mesmes raisons donne es de A B, G D & E Z.

ADVERTISSEMENT.

I'ay changé les caracteres de ceste seconde demonstration, d'autant qu'en la premiere E *estoit posé mesurer* K, *&* *en celle-cy non.*

PROPOSITION V.

Les nombres plans ont entre eux la raison composee de leurs costez.

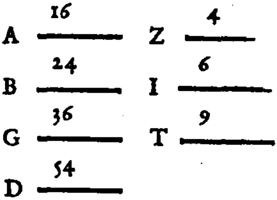


SOient les deux parallellogrammes A B C D & C G H E equiangles: Si le plus long costé de l'vn C G est au plus long costé de l'autre C D cõme B C au plus petit C E les parallelogrãmes seront egaux *par la 16. de ce liure,* Mais si C G a plus grande raison à D C que B C à C E de la quantité de F G aussi le parallellogrãme

CH excedera l'autre A C en mesme proportion que la raison du costé G C à D excede la raison de B C à C E : c'est à sçauoir du parallellogramme F H, lequel F H a mesme raison au parallellogramme E F comme la ligne C F à la ligne F G *par la 1. du 6.* Voylà donc comment la raison des parallellogramme equiangles de l'vn à l'autre depend de la raison de leurs costez.

PROPOSITION VI.

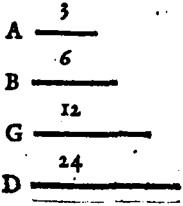
Si tant de nombres qu'on voudra sont continuellement proportionnaux, mais le premier ne mesure pas le second: ny aussi aucun des autres ne mesurera pas aucun autre.



SOient A B G D continuellement proportionnaux : Si A ne mesure B, aussi B ne mesurera pas G, ny G D : Car les raisons de l'vn à l'autre sont de mesme. Mais si on disoit que en laissant quelqu'vn les extremitez se pourroient mesurer, comme A & G: Soient donnees en nombres les raisons minimes les raisons de A B G *par la 35. du 7.* lesquelles soient Z I T : les extremes Z & T *par la 3. de ce liure* seront premiers : Le nombre Z ne mesurera donc point T. Maiss pource que A B G sont autant de nombres que Z I T & que tous deux deux sont posez en mesme raison : il sera *par la 14. du 7.* A à G comme Z à T. Or Z ne mesure point T, il s'ensuiura donc que A ne mesurera point G.

PROPOSITION VII.

Si tant de nombres qu'on voudra sont continuellement proportionnaux: mais le premier mesure le dernier, il mesurera aussi le second.



SOient les nombres continuellement proportionnaux A B G D, desquels le plus petit A mesure l'extreme D, & s'il ne mesure point son prochain B, il ne mesurera pas aussi l'extreme ny aucun des autres *par la precedente.* Ce qui est contre la positiõ. *Si donc tant de nombres, &c.*

PROPOSITION VIII.

Si entre deux nombres tombent des nombres continuellement proportionnaux, autant qu'il y en aura entre les deux, autant en tomberont continuellement proportionnaux entre d'autres ayans la mesme raison auec iceux.

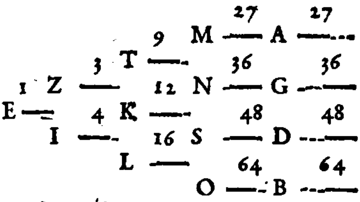
SOient entre deux nombres A B autres nombres G D continuellement proportionnaux. Soit aussi E à Z comme A à B. Ie dy qu'entre E & Z peuuent tomber autant de nombres continuellement proportionnaux qu'entre A & B. Soient donc *par la 2. de cestuy* posez autant de minimes que A G D B ayans la mesme raison auec iceux, & soient I T K L. I à L sera donc comme A à B en raison egale *par la 14. du 7.* : Or pource que E à Z est comme A à B : E à Z sera comme I à L *par la 11. du 5.* Iceux donc I & L mesureront E & Z (ayans mesme raison) egallement *par la 21. du 7.* Or autant de fois que I mesure E, que T puisse mesurer autant de fois M & K, N : & les autres de mesme si plus y en auoit. D'autant que I T K L mesurent egallement E M N Z ; par vicissitude I mesurera T comme E mesurera M (ou il sera les mesmes parties) & T mesurera K comme M mesurera N, & K le nombre L comme N, Z *par la 9. du 7.* EMNZ sont donc proportionnaux *par la 21. definition du 7.* & autant en nombre comme I T K L. Et pourtant sont de mesme à AGDB ausquels les nõbres ITKL ont esté posez egaux en nombre & en mesme raison. Autant donc qu'il y en aura de continuellement proportionnaux entre A & B autant en tombera entre E & Z suiuant la proposition.

A	3	I	1	E	2
G	9	T	3	M	6
D	27	K	9	N	18
B	81	L	27	Z	54

PROPOSITION IX.

Si deux nombres sont premiers entre eux, & entre iceux tombent des nombres continuellement proportionnaux ; autant qui tombent entre iceux, autant encor tomberont de continuellement proportionnaux entre l'vn & l'autre d'iceux & l'vnité.

SOient A & B premiers, entre lesquels tombent des continuellemet proportionnaux G & D. Ie dy que entre iceux A & B & l'vnité tomberont autant de continuellement proportionnaux. Soit l'vnité

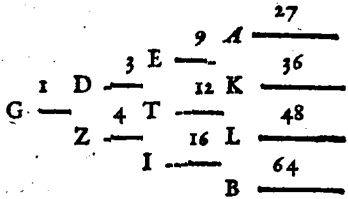


E & soient les minimes de la raison A à G les deux Z I *par la 2. de cestuy-cy*. Apres soient de mesme les trois T K L, puis les quatre M N, S O. D'autant que ceux-cy sont autant que A G D B & minimes en la mesme raison *par l'hypothese*: Et ceux-cy minimes *par 1. de cestuy*: Vn chacun donc sera egal à vn chacun. Or pour ce que Z mesure T par ses vnitez & T, M par les mesmes *selon les demonstrations de la 2. de ce liure*. Et aussi l'vnité E mesure Z par les mesmes, il s'ensuiura que E Z T M sont continuellement proportionnaux: comme semblablement E I L O. Et puis que A est egal à M & B à O, il s'ensuiura que entre A l'vnité E tomberõt L Z, & entre B & la mesme vnité tomberont L I. Mais pource que entre E & A G D B (ou M N S O) les degrez de proportiõ sont egaux en nombre (sçauoir G & D en vne sorte & Z T ou I L en l'autre) Il s'ensuiura que entre l'vn & l'autre *A* ou B, & l'vnité pourront tomber autaut de continuellement proportionnaux, comme il s'en trouue entre *A* & B.

PROPOSITION X.

Si entre deux nombres & l'vnité tombent des nombres continuellement proportionnaux, autant en tomberont de continuellement proportionnaux entre iceux deux nombres.

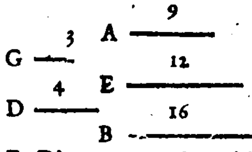
SI entre *A* & B, & l'vnité G tombent deux nombres continuellement proportiõnaux, Ie dy qu'entre les deux *A* & B en tomberont autant. Par les vnitez donc que G mesure D, par les mesmes D mesurera E,



& E mesurera *A*. Ainsi sera de Z & I. Doncques le nombre D ſe multipliant ſoy-meſme faict E & D multipliant E faict *A*. *A*inſi ſera de Z & I. Or D multipliant Z faict T. Les deux D & Z multiplians T font les deux K L. D'autant que D multipliant D & Z en a faict deux autres ſçauoir E & T. Il ſera *par la* 17. *du* 7. E à T comme D à Z. Mais pource que les deux D Z multiplians vn meſme T font K & L, le nombre K à L ſera comme D à Z *par la* 18. *du* 7. Mais D multipliant les deux E & T a faict *A* K : Il ſera donc *A* à K comme E à T & pourtant comme D à Z. Or K à L a eſté comme D à Z. Il ſera donc *A* à K comme K à L *par la* 11. *du* 5. Semblablement puis que Z multipliant Z & D faict I & T, T à I ſera comme D à Z. Mais le meſme Z multipliant T & I faict L & B. L à B ſera donc comme T à I *par la* 17. *du* 7. & pourtant comme D à Z. Mais *A* à K & K à L ont eſté comme D à Z, & pourtant *A* à K, K à L, L à B ſeront comme D à Z proportionnaux : Entre *A* & B donc ſont autant de proportionnaux comme entre les meſmes *A* B & l'vnité *par la* 2. *de ceſtuy*.

PROPOSITION XI.

Entre deux nombres quarrez eſt vn nombre milieu proportionnel. Et le quarré au quarré a la raiſon double qu'a le coſté au coſté.

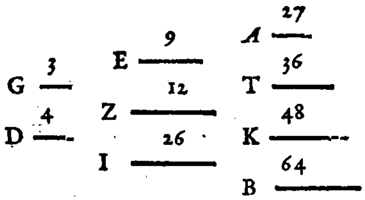


SOient deux nombres quarrez *A* & B & leurs coſtez G & D. D'autant que G eſt le coſté de quarré *A*, lequel G ſe multipliant ſoy-meſme faict *A* *par la* 19. *definitiõ du* 7. Semblablement le coſté D faict B : Poſons G multipliant D face E. D'autant que G multipliant G & D faict *A* & E. *A* à E ſera *par la* 17. *du* 7. comme G à D. Semblablement D multipliant les deux D & G faict les deux E & B. E à B ſera *par la meſme propoſition* comme G à D. Mais *A* à E a eſté comme G à D. Doncques *par la* 11. *du* 5. *A* à E & E à B ſeront cõme G à D : Entre *A* & B tõbera donc le moyen proportionnel E. Et pource que *A* à E eſt comme G à D & que la raiſõ du premier *A* au troiſieme B eſt double de la raiſon de *A* à E *par la* 10. *definition du* 5. le quarré donc *A* aura au quarré B la raiſon double du coſté G au coſté D.

PROPOSITION XII.

Entre deux nombres cubes sont deux nombres milieux proportionnaux. Et le cube au cube à la raison triplee du costé au costé.

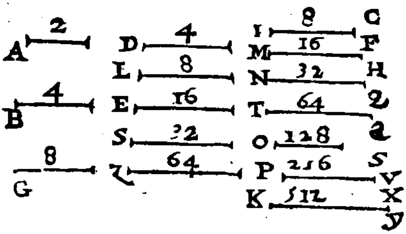
SOient deux cubes *A* & B & leurs costez G & D. G se multipliant faict E & multipliant D faict Z. Et D se multipliãt faict I : mais G & D multipliãs Z facent T & K. T à K sera donc comme G à D



par la 18. *du* 7. Et d'autant que G multipliant G & D faict E & Z: E & Z sera donc comme G à D *par la* 17. *du* 7. Et veu que G multipliant E & Z *par la* 20. *definition du* 7. & *par la construction* faict *A* & T ; *A* & T sera comme E à Z *par la* 17. *du* 7. & par consequẽt comme G à D. Or T à K a esté comme G à D; donc *A* à T & T à K seront comme G à D. Et d'autant aussi que D multipliant G D faict Z I : Z sera à I comme G à D. Semblablement D multipliant I faict B *par la* 20. *definition du* 7. mais multipliant Z faict K *par la construction*, K à B sera comme Z à I *par la* 17. *du* 7. & par consequent comme G à D : Mais *A* à T & T à K ont esté cõme G à D : Iceux donc *A* à T, T à K, & K à B seront proportionnaux comme G à D. Entre les deux cubes donc *A* & B tombent deux milieux proportionnaux en la raison de G à D : Et d'autant que *A* à B quatrieme à la raison triplee de *A* à T second *par la* 10. *definition du* 5. Le mesme cube *A* aura donc au cube B la raison triple du costé G au costé D.

PROPOSITION XIII.

Si tant de nombres qu'on voudra sont continuellement proportionnaux, & multipliant vn chacun soy-mesme, en font quelques autres; Ceux qui sont produicts d'iceux seront proportionnaux Et si les nombres premierement posez multiplians apres les engendrez en font quelques autres; iceux aussi seront proportionnaux. Et cecy aduiendra tousiours enuiron les extremes.

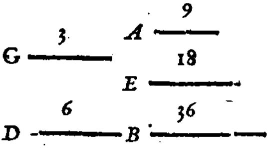


SOient les nombres proportiõnaux *A* B G qui se multiplians eux-mesmes produisent D E Z ; ceux cy serõt quarrez. Puis *A* B G multiplians D E Z produiront I T K qui seront cubes *par leur definition*. Puis que les quarrez D EZ ont l'vn à l'autre la raison double de leurs costez *A* B G ils seront proportionnaux: Et d'autant aussi que les cubes I T K ont l'vn à l'autre la raison triple de leurs costez *A* B G *par la precedente*, ils seront aussi proportionnaux. Outreplus *A* B G multiplians I T K chacun le sien, ceux qui en prouiendront seront aussi proportionnaux. Et ainsi infiniement.

Ceste derniere particule me semble conuenir au sens de la proposition.

PROPOSITION XIIII.

Si vn nombre quarré mesure vn nombre quarré, aussi le costé de l'vn mesurera le costé de l'autre. Et si le costé de l'vn mesure le costé de l'autre, aussi le quarré mesurera le quarré.



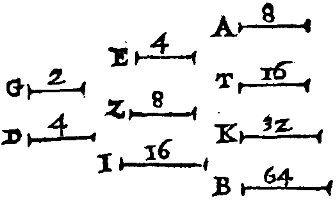
QVE le quarré *A* mesure le quarré *B*, & le costé de *A* soit G, & le costé de *B* soit D: G multipliant *D* faict *E*, & se multipliant soymesme faict *A par l'hypothese*. Donc *par la 17. du 7.* *A* à E sera comme G à *D*. Mais *A* mesure *B* extreme, il mesurera donc *E* son prochain *par la 7. de cestuy*, & pourtant *G* mesurera *D* : car *A* à *D* a esté comme *G* à *D*.

Pour le second, Que *G* mesure *D* (les choses ainsi construictes) Ie dy que *A* mesure *B*. D'autant que *G* & *D* comme *A* à *E*, & *E* à *B par la 17. du 7.* Et que *G* mesure *D*. Doncques *A* mesurera le mesme *E*, & par consequent le quarré B, lequel quarré est mesuré de *E par la 1. com. sent. du 7.*

PROPOSITION XV.

Si vn nombre cube mesure vn nombre cube, außi le costé de l'vn mesurera le costé de l'autre. Et si le costé de l'vn mesure le costé de l'autre, außi le cube mesurera le cube.

QVE le nombre cube *A* mesure le nombre cube *B*. *G* & *D* soient les costez lesquels se multiplians eux mesmes facent les quarrez E & I *par la 19. definition du 7.* entre lesquels soit le moyen Z *par la 11. de cestuy.* Iceux aussi *G* & *D* multiplians Z



facent les deux T & K moyens entre les deux cubes *A* & *B* *par la 12. de ce liure* en la raison de G & D. D'autant que A mesure l'extreme B, il mesurera son prochain T *par la 7. de cestuy.* Mais A à T a esté comme G à D. Donc G mesurera D,

Maintenant si nous posons G mesurer D (les choses ainsi disposees) d'autant que A est à T comme G à D & que G mesure D, il s'ensuiura que A mesurera T & T mesurera K & K mesurera B : Parquoy A *selon la 1. com. sent. du 7.* mesurera le mesme B. *Si donc vn cube, &c.*

PROPOSITION XVI.

Si vn nombre quarré ne mesure pas vn nombre quarré, außi le costé ne mesurera pas le costé. Et si le costé ne mesure pas le costé, außi le quarré ne mesurera pas le quarré.

CAr si le costé mesuroit le costé, le quarré aussi mesureroit le quarré *par la seconde partie de la 14. de ce liure* Et pour le regard de la seconde partie de ceste proposition, *S*i le quarré mesuroit le quarré, aussi le costé mesureroit le costé *par la 1. partie de la mesme 14. de ce liure.*

PROPOSITION XVII.

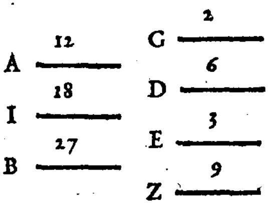
Si vn nombre cube ne mesure pas vn nombre cube, außi le costé *de l'vn ne mesurera pas le costé de l'autre.* **Et** *si le costé ne mesure pas le costé, aussi le cube ne mesurera pas le cube.*

CAr si le costé mesuroit le costé, aussi le cube mesureroit le cube, *par la 2. partie de la 15. de ce liure.* Et pour le second, Si le cube mesuroit le cube, aussi le costé mesureroit le costé *par la 1. partie de la mesme proposition 15.*

PROPOSITION XVIII.

Entre *deux nombres plans semblables est vn nombre milieu proportionnel, & le plan au plan à la raison doublee du costé de semblable raison au costé de semblable raison.*

SOient A & B semblables nombres plans les costez de A soient G D & de B soient E Z. G multipliant D faict A, & E multipliant Z faict B *par la 17. du 7.* G sera donc à E côme D à Z *par la 22. defin. du 7.* En apres D multipliant E face I:



D'autant donc que D multipliant les deux G & E en faict deux sçauoir A & I; A à I sera *par la 17. du 7.* comme G à E. & pour ceste mesme cause d'autant que E multipliant D & Z faict I & B; I sera à B comme D à Z. A donc sera à I comme I à B. Le nombre dôc I sera moyen proportionnel entre les nombres plans A & B. Et d'autant que A à B a la raison double de la raison qu'il a à I *par la 10. defin. du 5.* Il s'ensuiura que le mesme A aura à B la raison double de G à E laquelle a esté monstree egalle à la raison de A à I.

PROPOSITION XIX.

Entre *deux nombres solides semblables tombent deux nombres milieux proportionnaux:* **Et** *le solide au solide semblable à la raison triplee du costé de semblable raison au costé de semblable raison.*

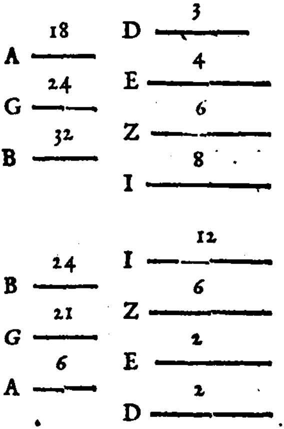
G 2 —	K 6 ——	A 24 ——
D 3 —	M 12 ——	N 48 ——
E 4 —		
Z 4 ——	L 24 ——	S 96 ——
I 6 ——		
T 8 ——		B 192 ——

SOient deux solides semblables A, B les costez de A soient G D E, de B soient Z I T. G multipliant D face K : Z multipliant I face L : d'autant que G D E & Z I T sont costez de semblable raison *par la 21. defin. du* 7. Les nombres plans K & L seront semblables : entre lesquels tombera par la precedente vn milieu M, faict de D par Z : Mais E & T qui sont semblables costez multiplians M font N & S, veu que G à D & D à E est comme Z à I & I à T par viciscitude *selon la 13. du* 7. G à Z sera comme D à I & E à T. Et veu aussi que D multipliant G & Z faict K & M ; K sera à M cõme G à Z *par la 17. du* 7. Semblablement pource que Z multipliant D & I faict M & L ; M sera *par la mesme proposition* à L comme D à I : Mais G à Z a esté comme D à I. Doncques K à M sera comme M à L proportionnaux en la raison des costez G à Z. Outre plus, d'autant que E multipliant K (qui est produict des deux costez D & G) faict A *par la 18. defin. du* 7. & E multipliãt M a faict N : A à N sera *par la 17. du* 7. comme K à M. Semblablement veu que T multipliaut L (qui est produict des deux autres costez Z I) faict B , & multipliant M à faict S, celuy cy sera à B *par la 17. du* 7. comme M à L , & par consequent A à N & S à B comme K à M & M à L en la raison des costez G à Z. Et pource que les deux autres costez E & T multiplians M font N & S ; N sera à S comme le costé E au costé T : Entre A & B donc sont deux moyens N & S en la mesme raison des costez G à Z : c'est à sçauoir A à N, N à S comme S à B. Et d'autant que A premier à E quattieme à la raison triplee de A à N second *par la 10. defin. du 5.* Iceluy A solide à B sẽblable solide aura la raison triplee du costé G au costé Z ou de D à I ou bien de E à T costez de sẽblable raison.

PROPOSITION XX.

Si entre deux nombres tombe vn nombre milieu proportionnel, iceux nombres seront plans semblables.

SOit entre deux nombres A & B vn milieu proportionnel G. Ie dy que A & B ſont nombres plans ſemblables: Ce que nous demonſtrerons premiemierement en raiſon pure & ſimple des nombres, c'eſt à dire non multiplice.



SOient donnez *par la* 35. *du* 7. deux minimes D E en la raiſõ d'iceux A G B. Ceux-là meſureront A & G egallement, & G & B auſſi egallement *par la* 21. *du* 7. Autant de fois que D E meſureront A G autant ſoient d'vnitez en Z, & autant de fois qu'ils meſureront G & B, autant ſoient d'vnitez en I. Pource que D multipliant Z faict A: & E multipliant I faict B les nombres A & B ſont plans, & leurs coſtez D Z, E I. Mais puis que du premier D & quatrieme I eſt produict *G*, & du ſecõd E & troiſieme Z eſt produict le meſme *G*: D à E ſera *par la* 2. *partie de la* 19. *du* 7. comme Z à I: Et *par la* 13. *du* 7. en viciſcitude D à Z comme E à I, c'eſt à dire proportionnaux. Les coſtez donc *D Z* & E I ſont des nombres plans A & B ſemblables *par la* 22. *definition du* 7,

Secondement en raiſon multiplice (qui eſt du continu au diſcret) Soit entre deux nombres B & A vn milieu proportionnel G. Pource que la raiſon eſt multiplice le plus petit A meſure B extreme, parquoy *par la* 7. *de ce liure* il meſurera auſſi ſon prochain *G*, & & *G* ſemblablement meſurera B, car ils ſont proportionnaux. Autant de fois que le moindre A meſure *G*, autant de fois l'vnité *D* puiſſe meſurer le nombre E : Et autant de fois donc que *D* meſure E, autant de fois *G* meſurera B : par ainſi & en viciſcitude *D* meſurera A comme E meſure *G*; & encor *D* meſurera *G* cõme E meſure B *par la* 15. *du* 7. Autant de fois que *D E* meſurent *A G*, autant ſoient d'vnitez en Z. Semblablement autant de fois que les meſmes *D E* meſurent *GD* autant ſoient d'vnitez en I. Pource que ſoubz *D* & Z eſt compris A & ſoubs *E* & I eſt contenu B, iceux A & B ſont nombres plans, deſquels les coſtez ſont *D Z* & E I. Et pource que des extremes B & I eſt faict *G* & de E & Z eſt faict le mesme *G*, les quatre grandeurs *D* à *E* comme Z à I sont proportionnelles *par la* 19. *du* 7. Par viciscitude donc *selon la* 15. *du* 7. les costez seront proportionnaux, sçauoir comme *D* à *Z* ainsi E à I. Iceux donc *A* & *B* seront nombres plans semblables. *par la* 22. *definition du* 7.

PROPOSITION XXI.

Si entre deux nombres tombent deux nombres milieux proportionnaux, les deux nombres seront solides semblables.

SOient A & B deux nombres G & D milieux continuellement proportionnaux. Ie dy que A & B sont solides semblables. Soient *par la* 2. *de ce liure* pris trois minimes E Z I en la raison de A G D B. Les extremes donc d'iceux E & I sont plans semblables *par la precedente*. Soient maintenant les costez de E les deux T & K : & de I les deux L & M. Et veu que par l'hypothese E Z I sont en la raison de A G D, par raison egalle E à I sera comme A à D *par la* 14. *du* 7. D'auantage veu que E Z I sont minimes, ils mesureront A G D egallement *par la* 21. *du* 7. Mais autant de fois que E I mesureront A & D, autant soient d'vnitez en N. Et autant de fois qu'iceux E I mesureront les autres G & B (qui ont mesme raisõ) autant soient d'vnitez en S. Car veu que T & K sont les costez de E lequel pris par les vnitez du nombre N faict A; Il s'ensuiura que T K N seront les costez du solide A *par la* 18 *definition du* 7. Semblablement L & M sont I, lequel pris par les vnitez de S faict B, parquoy L M S seront les cõstez du solide B *par la mesme*. A & B seront dõc solides. Et pour monstrer qu'ils sont semblables d'autãt que E multipliant N & S a faict A & G : N à S sera *par la* 17. *du* 7. comme A à G. Mais

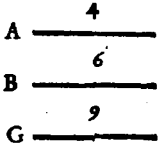
		N	3		
T	3	E	9	A	27
K	3	Z	12	G	36
L	4	I	16	D	48
M	4	S	4	B	64

comme A à G ainsi *par l'hypothese* E à Z & Z à I. Mais pource que E à I à la raison double de E à Z *por la* 10. *deff. du* 5. Et double de celle de T à L ou K à M qui sont les costez *par la* 18. *de ce liure*; T à L & K à M auront donc la mesme raison que E à Z ou Z I ; & partant la mesme de A à G ou N à S, qui ont esté monstrees estre les mesmes : Ainsi donc comme A à G ainsi ont esté N à S & T à L & K à M qui ſont coſtez proportionnaux du ſolide A aux coſtez du ſolide B, leſquels ſolides *par la 22. deff. du* 7. ſeront sēblables. Ce qu'il falloit demonſtrer.

Ceſte propoſition pour euiter prolixité n'eſt point demonſtree en la raiſon multiplice d'autant que par la precedēte & quelques autres la demonſtration s'en pourra aiſément faire.

PROPOSITION XXII.

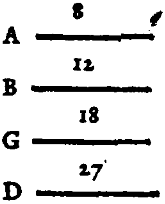
Si trois nombres ſont continuellement proportionnaux, dont le premier eſt quarré, auſsi le troiſieſme ſera quarré.



SOient trois nombres continuellement proportionnaux A B G, d'autant qu'entre les extremes y a vn moyen, iceux extremes ſerōt nombres plans ſemblables *par la* 20. *de ce liure.* Parquoy ſi le premier eſt quarré, le troiſieme auſſi pour eſtre ſon ſemblable ſera ſon quarré.

PROPOSITION XXIII.

Si quatre nombres ſont continuellement proportionnaux, dont le premier ſoit cube, auſsi le quatrieſme ſera cube.



CEcy ſe demonſtre *par la* 21. *de ce liure.* Car ſi entre A & B ſont conſtituez deux milieux proportionnaux, il s'enſuiura que A & D ſeront ſemblables ſolides. Si donc A eſt cube, le quatrieſme auſſi pour eſtre ſon ſemblable ſera cube.

PROPOSITION XXIIII.

Si deux nombres ont la raiſon entr'eux qu'a vn nombre quarré à vn nombre quarré, & le premier eſt quarré, auſsi le ſecon ſera quarré.

QVe les deux nombres A & B ayent la meſme raiſon que les quarré G & D. D'autant qu'entre les deux G & D eſt vn milieu proportionnel *par la* 11. *de ce liure*. Il y aura auſſi vn milieu proportionnel entre A & B *par la* 8. *de ce leure*: car ils ont vne meſme raiſon. Des trois donc le premier A eſt quarré, auſſi le troiſieſme B ſera quarré *par la* 22. *de ce liure*.

A	4	G	16
	6		24
B	9	D	36

PROPOSITION XXV.

Si deux nombres ont la raiſon entr'eux qu'à vn nombre cube à vn nombre cube, & le premier eſt cube, außi le ſecond ſera cube.

QVe deux nombres A & B ayent la raiſõ que le cube G au cube D, & que *A* ſoit cube, Ie dy que B eſt auſſi cube. Pour ce que entre les deux G & D qui ſont cubes tõbent deux milieux proportionnaux *par la* 12. *de ceſtuy* autant en tomberont entre *A* & B (qui ont la meſme raiſon) *par la* 8. *de ceſtuy*. Mais des quatre continuellement, proportionnaux le premier eſt cube, auſſi le quatrieme B ſera cube *par la* 23. *de ce liure*.

A	8	G	64
	12		96
	18		144
B	27	D	216

PROPOSITION XXVI.

Les nombres plans ſemblables ont la raiſon entr'eux, qu'à vn nombre quarré à vn nombre quarré.

SOient les nombres plans ſemblables *A* & B. Puis qu'ils ſont ſemblables plans entre iceux tõbera vn milieu comme G *par la* 18. *de ceſtuy*. En apres ſoient mis trois minimes D E Z en la raiſon de *A* G B, les extremes D & Z ſeront quarrez comme il reſulte *de la* 2. *de ceſtuy*. Et pource que *par la* 14. *du* 7. *A* eſt à B en raiſon

A	18	D	9
G	24	E	12
B	32	Z	16

egale comme D à Z, & que ceux-cy ſont quarrez; Il s'enſuiura que *A* à B aura telle raiſon que le nombre quarré D au quarré Z.

PROPOSITION XXVII.

Les nombes ſolides ſemblables ont la raiſon entr'eux qu'à vn nombre cube à vn nombre cube.

A	16	*G*	8
E	24	I	12
Z	36	T	18
B	54	D	27

SOient *A* & B ſolides ſemblables; entre iceux donc tomberont deux milieux proportionnaux E & Z *par la* 19. *de ce liure.* Soient donnez autãt de minimes *G I T D* en la raiſon de *A E Z B par la* 2. *de ce liure*: Les extremes *G* & *D* ſeront cubes *comme il reſulte de la meſme* 2. Et puis qu'ils ſont tous proportionnaux, par raiſon egalle *A* à B ſera comme *G* à D. *par la* 14. *de ceſtuy.* Doncques *A* & B auront la raiſon entr'eux qu'à le cube *G* au cube D. *Les nombres ſolides donc, &c.*

Reſulte ſi deux nõbres ont entr'eux la raiſon d'vn quarré à vn quarré, ils ſeront nombres plans ſemblables. Et s'ils ont la raiſon d'vn nombre cube à vn nombre cube, il ſeront ſolides ſemblables.

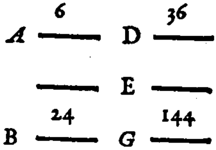
Reſulte auſſi, ſi quelque nombre multipliant vn quarré ne faict vn quarré, iceluy ne ſera quarré.

FIN DV HVICTIESME LIVRE.

LE NEVFIESME LIVRE DES ELEMENS D'EVCLIDE.

PROPOSITION PREMIERE.

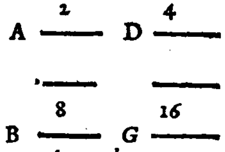
Si deux nombres plans semblables se multiplians l'vn l'autre en engendrent quelqu'vn, iceluy produict sera quarré.



SOient deux nõbres plans semblables *A* & B. Le nombre *A* multipliant *B* face *G*. Ie dy que *G* est quarré. Le nõbre *A* se multipliãt soy-mesme face D quarré *par la* 19.*deff.du* 7. Et pource que *A* multipliant les deux *A* & B, en faict deux *D G*; *D* à *G* sera cõme A à B *par la* 17. *du* 7. Pource aussi qu'entre deux plans semblables A & B y a vn moyen proportionnel *par la* 18. *du* 8. & entre D & G ayans la mesme raison y aura aussi vn milieu *par la mesme pro.* & soit iceluy E : mais le premier D (des trois proportionnaux D E G) est quarré, aussi le troisieme G sera quarré *par la* 22.*du* 8.

PROPOSITION II.

Si deux nombres se multiplians l'vn l'autre font vn quarré, iceux sont plans semblables.



SOient deux nombres A & B: se multiplians l'vn l'autre facent le quarré *G*. Le nõbre A se multipliant face le quarré D: d'autant que A multipliant les deux A & B en faict deux D & *G*: *D* à *G* sera comme A à B *par la* 16. *du* 7. Et pource qu'entre les deux quarrez *D G* y a vn moyen *par la* 11. *du* 8. & entre A & B ayans la mesme raison y aura aussi vn moyen *par la* 8. *du* 8. Mais si entre les deux A & B y a vn moyen, iceux A & B seront nombres plans semblables *par la* 20. *du* 8.

PROPOSITION III.

Si vn nombre cube se multipliant soy-mesme en engendre quelqu'vn, l'engendré sera cube.

Le nombre

LE nombre cube A se multipliãt soy-mesme face B ; Ie dy que B est cube. Soit du cube A le costé G, lequel multiplié par soymesme face D. Le mesme costé donc G multiplié par D fera A *par la* 20. *deff. du* 7. Donc G mesurera D par les vnitez du mesme G, & par les mesmes D mesurera le cube A, & aussi l'vnité mesurera G par les mesmes vnitez de G. Les quatre donc A D G & l'vnité sont proportionnaux, car ils sont equemultiplices. Semblablement veu que A mesure B par ses vnitez, & l'vnité mesure A par les mesmes, l'vnité sera à A comme A à B. Mais entre l'vnité & A sont deux milieux, comme aussi entre les equemultiplices qui ont mesme raison. Entre A donc & B se trouueront deux milieux *par la* 8. *du* 8. Le premier donc A des quatre proportionnaux est cube *par l'hypothese*, aussi le quatrieme B sera cube *par la* 23. *du* 8.

B	64
	32
	16
A	8
D	4
G	2
	vnité

PROPOSITION IIII.

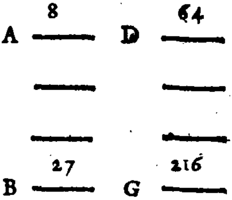
Si vn nombre cube multipliant vn nombre cube en engendre quelqu'vn, l'engendré sera cube.

LE cube A multipliant le cube B face G, se multipliant soy-mesme face D. Ie dy que G est cube. D'autant que A multipliant les deux A & B a faict D & G. D sera à G comme A à B *par la* 17. *du* 7. Mais pource qu'entre les deux cubes A & B sont deux milieux *par la* 12. *du* 8. aussi entre les nombres D & G ayans la mesme raison seront deux milieux *par la* 8. *du* 8. Mais D est cube *par la precedente*, car il est faict du cube A. Si donc des quatre proportionnaux le premier D est cube, aussi le quatrieme G sera cube *par la* 23. *du* 8.

A	8	D	64
	12		96
	18		144
B	27	G	216

PROPOSITION V.

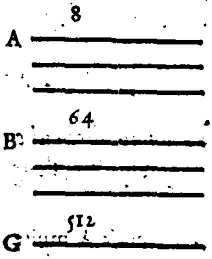
Si vn nombre cube multipliant quelque nombre, faict vn cube, aussi le multiplié sera cube.



SI le nombre cube A multipliant quelque nombre B faict G ; Ie dy que B sera cube. A se multipliant soy-me face D : pource que A multipliant A & B faict D & G ; D à G sera cõme A à B *par la 17. du 7*. Et puis que D est cube *par la 3. de ce liure* (car il est faict du cube A) G aussi est cube *par l'hypothese*, entre G & D tomberont deux milieux *par la 12. de ce liure*. Donc entre A & B qui ont la mesme raison tõberont autant de milieux *par la 8. du 8*. Mais des quatre proportionnaux le premier A est cube *par l'hypothese*, aussi le quatrieme B sera cube *par la 33. du 8*.

PROPOSITION VI.

Si vn nombre se multipliant soymesme faict vn cube, iceluy sera cube.



LE nombre A se multipliant soy-mesme face le cube B, & multipliant le cube B face G : Iceluy G sera cube *par la 20. deff. du 7*. estant faict des deux multiplications d'iceluy A. D'autant que A multipliant les deux B & A a faict les deux B & G : G à B sera comme B à A *par la 17. du 7*. Mais si les deux B à A ont la raison du cube G au cube B & que le premier B soit cube, aussi le second A sera cube *par la 25. du 8*.

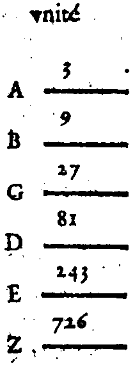
PROPOSITION VII.

Si vn nombre composé multipliant quelque nombre produict quelque nombre, le produict sera solide.

SOit le nombre composé A lequel multipliant B face G: Ie dy que G est solide: car A estãt composé, quelque autre le mesurera *par la 14. deff. du 7*. Et soit cest autre D qui mesure le mesme A par les vnitez du nombre E. D'autant que deux nombres D & E se multiplians eux-mesmes font A lequel derechef multipliãt B a faict l'autre G : Iceluy donc G prouenant de trois D E B se multiplians eux-mesmes sera nombre solide *par la 18. deff. du 7*. Et les costez d'iceluy seront D E B.

PROPOSITION VIII.

Si depuis l'vnité ſont tant de nombres qu'on voudra cõtinuellement proportionnaux, le troiſieme depuis l'vnité ſera quarré, & tous les autres qui en entrelaiſſeront vn : & le quatrieme ſera cube & tous les autres qui en entrelaiſſeront deux : mais le ſeptieme ſera cube & quarré enſemble, & tous les autres qui en entrelaiſſeront cinq.



SOient depuis l'vnité continuellement proportionnaux A B G D E Z : Ie dy que le troiſieme B apres l'vnité & les autres D & Z (en entrelaiſſant vn) ſeront quarrez : Et le quatrieme G & les autres Z &c. (en entrelaiſſant touſiours deux) ſeront cubes : Et le ſeptieme Z & autant qu'il s'en trouuera (en entrelaiſſant touſiours cinq) ſeront cubes & quarrez enſemble. D'autant que l'vnité meſure A par ſes vnitez, elle meſurera tout autre nombre ſuiuant par les meſmes vnitez de A, veu qu'ils ſont continuellemẽt proportionnaux. Donc A ſe multipliant ſoymeſme faict le quarré B. Mais pource que des trois B G D le premier B eſt quarré le troiſieme D ſera auſſi quarré *par la 22. du 8.* Semblablement ſe demonſtrera de D E Z & tous autres ſuiuans que D eſtant quarré le 3. Z ſera auſſi quarré. D'auãtage veu que A ſe multipliant faict B & multipliant B faict G celuycy ſera cube *par la 20. deff. du 7.* Et ſi des quatre proportionnaux le premier G eſt cube auſſi le quatrieme Z ſera cube *par la 23. du 8.* Et ainſi infiniement ſera demonſtré en tous autres nõbres ſuiuans continuellement proportionnaux. Mais le meſme Z a eſté demonſtré quarré & tous autres en meſme ordre veu que le ſeptieme eſt touſiours remis par le troiſieme & quatrieme. *Si donc depuis l'vnité, &c.*

PROPOSITION IX.

Si depuis l'vnité ſont tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, ſi celuy qui ſuit l'vnité eſt quarré, auſſi tous les autres ſeront quarrez. Que ſi celuy qui ſuit l'vnité eſt cube, auſſi tous les autres ſeront cubes.

SOient depuis l'vnité les nombres A B G D E Z continuellement proportionnaux. Soit le premier à pres l'vnité A quarré, tous les autres aussi seront quarrez ; & s'il est cube, tous les autres seront cubes. Premierement puis que l'vnité multiplie A par ses vnitez, & A par les mesmes vnitez multiplie B ; celuy cy sera quarré *par la 19. deff. du 7.* & A est aussi quarré *par l'hypothese.* Mais comme A à B, ainsi A à G & G à D &c. Si donc les deux B & G ont la raison des quarrez A à B, & que le premier B soit quarré, aussi le second G sera quarré *par la 24. du 8.* & ainsi G D & les suiuans. Mais si A est cube, d'autant que semblablement l'vnité mesure A, & A mesure B & B le suiuant G & ainsi consequemment & que A est cube *par l'hypothese* se multipliant soymesme faict B : Il s'ensuiura *par la 3. de ce liure* que B sera cube. Mais comme l'vnité à A, ainsi A à B, & B à G & des suiuans de mesme qui seront en la raison des cubes A à B. Si le premier B est cube, le second G sera aussi cube *par la 25. du 8.* & si G l'est, D aussi le sera & les autres suiuans.

vnité
A
B
G
D
E
Z

PROPOSITION X.

Si depuis l'vnité y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & celuy qui est apres l'vnité ne soit pas quarré; ny aussi aucun des autres ne sera pas quarré, exceptez le troisieme depuis l'vnité, & tous ceux qui en entrelaissent vn. Que si celuy qui est apres l'vnité n'est pas cube, ny aussi aucun des autres ne sera cube, exceptez le quatrieme apres l'vnité & tous ceux qui en entrelaissent deux.

SOient apres l'vnité les continuellemét proportionnaux *A B G D E Z*, & que le quatrieme à pre l'vnité sçauoir A ne soit point quarré. Ie dy que nul des autres n'est quarré sinon le troisieme apres l'vnité & les suyuans qui en entrelaissent vn, sçauoir B D Z &c. Et si A n'est point cube aussi nul des autres ne sera cube sinon le quatrieme *G* & les autres qui en entrelaisseront deux, sçauoir Z, &c. Pource que tous sont proportionaux B D Z &c. seront quarrez *par la 8. de ce liure.* Car si quelque autre pouuoit estre quarré soit G. Cestuy-cy sera à B comme B à A & A l'vnité *comme il resulte de la 4. du 5.*

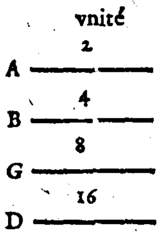
vnité
3
A
9
B
27
G
81
D
245
E
729
Z

Donc A à B aura la raison de G à B. Si donc le premier B est quarré, le second A sera quarré *par la 14. du 8.* ce qui sera contre l'hypothese, & qui ne se peut faire.

Pour le second, si A n'est point cube, soit donné, s'il est possible, quelque autre cube d'entre iceux hors mis G quatrieme Z &c. & soit D. D'autant que D à G est comme G à B & B à A, si le premier D est cube, le quatrieme A sera aussi cube *par la 23. du 8.* contre ce qui est supposé, ce qui ne peut estre. Semblablement *par la 25. du 8.* cecy sera euident comme du quarré.

PROPOSITION XI.

Si depuis l'vnité sont tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, le plus petit mesure le plus grand par quelqu'vn de ceux qui sont aux nõbres proportionnaux.



Soient apres l'vnité continuellement proportionnaux *A B G D*, Ie dy que le plus petit sçauoir A mesure le plus grand sçauoir B ou G ou D, par quelqu'vn d'iceux A, B ou G. D'autant qu'ils sont proportionnaux, autant de fois que l'vnité mesure A, autant de fois *A* mesure B & B aussi G &c. E par viscitude *par la 15. du 7.* autant de fois que l'vnité mesure B, autant de fois A mesure G: mais l'vnité mesure B par les vnitez d'iceluy B, par ainsi donc A mesure G par les vnitez du mesme B. Outre plus par raison egale la mesme vnité sera à G comme A à D *par la 14. du 7.* Mais l'vnité mesure G par G mesme: Le nombre donc A mesurera D par le mesme G. Et semblablement en autant de nombre qu'on voudra cela sera manifesté *par la mesme 14. proposition du 7.*

PROPOSITION XII.

Si depuis l'vnité y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, autant de nombres premiers que mesurent le dernier, autant aussi mesureront celuy qui est li plus pres de l'vnité.

SOient apres l'vnité continuellement proportionnaux les nombres *A B G D*: & que le nõbre premier comme E mesure le dernier D. Ie dy que le mesme E mesure *A* plus proche de l'vnité. Que si E ne le mesure pas, ils seront premiers l'vn à l'autre *par la 31. du* 7. Et d'autant que *A B G D* sont apres l'vnité continuellement proportionnaux A se multipliant soy-mesme faict B, par ainsi B à E sera premier *par la 27. du* 7. Mais pource que A multipliant B a faict G, aussi G sera premier au mesme E *par la 26. du mesme.* Semblablement infiniement A multipliant G faict D: parquoy aussi D à E sera premier *par la mesme proposition.* Doncques E ne mesure pas D comme il a esté posé, ce qui est absurde. Le nombre donc E mesure le mesme A plus prochain de l'vnité.

	vnité	
A	4	3
B	16	9
G	64	27
D	256	81
E	2	2

PROPOSITION XIII.

Si depuis l'vnité sont tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & celuy qui est apres l'vnité est nombre premier; aucun autre ne mesurera point le plus grand, exceptez ceux qui sont aux nõbres proportionnaux.

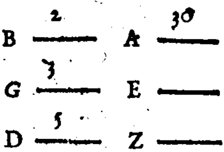
SOient depuis l'vnité autant de nombres qu'on voudra contiuuellement proportionnaux *A B G D*: Et le plus proche de l'vnité A soit nõbre premier: Ie dy que nul autre nombre ne mesurera le plus grãd D excepté ceux mesme qui sont proposez proportionnaux: Car s'il estoit possible que quelque autre puisse mesurer D, posons estre E, qui sera premier ou composé: S'il est premier il mesurera aussi A (plus proche de l'vnité) *par la 12. de ce liure.* Ce qui ne se peut faire. S'il est composé quelque nombre premier le mesurera *par la 33. du* 7. qui ne peut point estre autre que A: Car veu que E mesure D, tout autre nombre premier mesurant E, mesurera aussi D *par la prem. com. sent. du* 7. Et mesurant le plus grand D, il mesureroit aussi A plus proche de l'vnité *par la 12. de cestuy* qui est nombre premier. Ce qui ne se peut faire. Donc des nombres premiers, A seul me-

	vnité		
A	3	T	
B	9	I	
G	27	Z	
D	81	E	

surera E qui mesure le plus grand D. Que si cela pouuoit estre, Soit E mesuré de A par les vnitez du nombre Z. Donc A multipliant les deux, sçauoir Z *par l'hypothese* & G (qui sont proportionnaux depuis l'vnité) faict les deux E & D : E sera donc à D cõme Z à *G par la 17. du 7.* Et pource que E mesure D, aussi Z mesurera *G*. Semblablement comme nous auons demonstré en E ainsi demonstrerons nous Z & les autres n'estre point premiers. Car si Z estoit premier, mesurant *G*, il mesureroit aussi A : ce qui ne se peut faire. Que s'il est composé, celuy nombre premier qui le mesurera sera A, ou si c'est vn autre, cest autre mesurera aussi *G* & celuy qui mesure *G* c'est à sçauoir A *par la 1. sent. du 7.* Ce qui ne se peut faire. Donc le nombre premiers *A* seul mesure Z, & posons que ce soit par les vnitez de I : Doncques *A* multipliant I & B faict Z & *G*. Par ainsi Z à *G par la 17. du 7.* sera comme I à B : mais Z mesure *G*, doncques I mesurera B. Que si derechef I est premier il mesurera B & *A*, ce qui est absurde : S'il est composé, *A* seul le mesurera (comme nous auons monstré en E & en Z.) Que A mesure donc I par T, il s'ensuiura que A multipliant T & soymesme produira I & B. Parquoy I à A sera comme B à T *par la 17. du 7.* mais I mesure B : T mesurera donc A nõbre premier, auquel A sera donc egal T. Or A est moyen proportionnel entre T & I *par la 20. du 7.* veu que B (produict des extremes I T) est egal à ce qui est faict du milieu *A*, & que *A* produict B : cela est outre la puissance des nombres. Nul autre donc ne mesurera le plus grand D, exceptez les nombres mesmes de la proportion proposee *A* B *G* D, desquels tousiours le moindre mesure le plus grand *par la 11. de cestuy* : car ils sont depuis l'vnité en raison multiplice proportionnaux.

PROPOSITION XIIII.

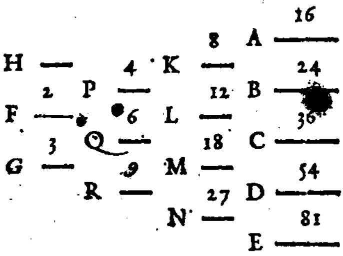
Si vn plus petit nombre est mesuré de quelques nombres premiers, aucun autre nombre premier ne mesurera point iceluy, exceptez ceux qui le mesurent au commencement.



Soit le nombre plus petit *A* mesuré de quelques premiers *B G D*. Ie dy que nul autre premier ne peut mesurer A exceptez iceux *B G D*. Que si quelque autre premier comme E le pouuoit mesurer, posons estre par Z. Pource que deux nombres E & Z font *A* lequel est mesuré de quelques premiers *B G D*, il s'ensuiura *par la 33. du* 7. qu'iceux *B G D* mesureront l'vn d'iceux sçauoir E ou Z : mais ils ne mesurent pas E d'auant qu'il est premier *par l'hypothese*: Ils mesureront donc Z plus petit que A mesuré de Z par *E*. A donc posé au commencement, ne sera le plus petit mesuré de *B G D* (contre l'hypothese:) Ce qui seroit absurde. Nul autre donc exceptez *BGD* ne mesurera le nombre A.

PROPOSITION XV.

Si autant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux sont les plus petits de ceux qui ont auec iceux la mesme raison, le nombre mesurant aucun d'iceux ne sera pas premier à l'vn des deux autres minimes de ceste mesme raison.



Soient tant de nombres qu'on voudra ABCDE continuellement proportionnaux & minimes de ceux qui ont la mesme raison auec iceux desquels l'vn (qui soit C) soit mesuré de quelque nombre H. Soiét aussi F & G deux minimes de la mesme raison. Ie dy que H n'est point premier à F ou à G. Soient *par la 2. du* 8. dōnez trois nombres minimes P Q R de la mesme raison de A à B. Et apres soient encor donnez *par la mesme* quatre autres K L M N & tousiours de mesme iusqu'à la multitude des proposez ABCDE. Il est euident *par la 2. du* 8. que F multiplié par P Q & R faict K L M, & que le mesme F par K L M faict A B C D: Car veu que H mesure C, iceluy H ne sera à l'vn d'iceux F ou M premier *comme il resulte de la 32. du* 7. Que si c'est F, nous auons ce qui est requis : Mais si c'est M auquel H ne soit point premier, il ne le sera pas aussi à l'vn d'iceux F ou R, *par la mesme 32. du* 7. Que si derechef se trouue estre F, cestuy sera l'vn d'iceux F ou G comme il est desiré : Et si ce n'est il point, & que ce soit R auquel H ne soit premier, aussi ne sera il à G (qui faict le mesme R *par la 2. du* 8) premier, *parce qui resulte de la mesme.* Mais G est l'vn d'iceux F ou G qui ont esté posez au commencement minimes de ceste mesme raison: *Si donc autant de nombre, &c.*

Le lecteur sera aduersy qu'en l'exemplaire Grec ne se trouue ceste proposition : Toutesfois suiuant l'opinion de monsieur de Candalle apres celle de Campanus qui la tiennent estre d'Euclide ie l'ay voulu mettre en ce lieu, joint qu'elle sert à la preuue de la suiuante & de quelques autres.

PROPOSITION XVI.

Si trois nombres proportionnaux, sont les plus petits de ceux qui ont auec iceux la mesme raison; les deux tels qu'on voudra composez ensemble seront premiers à l'autre.

SOient A B C trois nombres proportionnaux minimes en leur raison. Ie dy que l'vn d'iceux tel qu'on voudra (comme pour exemple C) est premier au nombre composé des deux autres A B. Que s'il ne l'est, soit quelque nombre E qui mesure C & le composé de A B. Soient aussi donnez deux nombres minimes (comme F & G) de la mesme raison de A à B *par la 33. du* 7. Mais pource que E mesure l'vn d'iceux A B C, le mesme E sera à l'vn d'iceux F ou G non premier *par la 15. de cestuy*. Quelque autre nombre donc (comme H) mesurera le mesme E & l'vn d'iceux F ou G. Pource que H mesure E, il mesurera aussi C qui est mesuré de E *par la 1. sent. du* 7. Outre plus puis que par l'hypothese H mesure l'vn d'iceux F ou G, il mesurera aussi le moyen entre A & C *par la mesme*: Car l'vn & l'autre F ou G produict ce moyen par les milieux prochains d'iceux comme L & I *par la 2. du* 8. Derechef veu que H mesure E qui mesure le tout A B, il mesurera aussi le tout A B C : mais il mesure le soustraict B (moyen) il mesurera donc aussi le reste A *par la 2. sent. du* 7. Par ainsi s'ensuiura que le mesme H mesurera les extremes C & A qui sont premiers *par la 3. du* 8 Ce qui est absurde. Parquoy C sera premier au composé de A B. Semblablement peut estre demonstré le mesme de chacun des autres.

				8
	2		4	A
F		L		12
	3		6	B
G		I		18
				C

PROPOSITION XVII.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, il ne sera pas comme le premier au second, ainsi le second a quelque autre.

SOient deux nombres *A* B premiers l'vn à l'autre. Ie dy qu'à iceux ne se peut donner vn tiers proportionnel. Car s'il se pouuoit faire, soit *A* à B comme B à G: veu que *A* à B sont premiers, iceux seront *par la 23. du* 7. les minmes de la mesme raison: Cela estant vn chacun *A* & B mesureront vn chacun B & G (ayans la mesme raison) egalement *par la 21. du* 7. Donc l'antecedent *A* mesure l'antecedent B, mais le mesme *A* se mesure soy-mesme: *A* B ne sont donc pas premiers, puis que quelque nombre *A* les mesure (contre la supposition) ce qui ne se peut faire. Aux nõbres donc *A* & B premiers ne se peut donner vn troisieme proportionnel. *Si deux nombres donc sont premiers &c.*

	12
A	———
	13
B	———
G	———

PROPOSITION XVIII.

Si tant de nombres qu'on voudra sont continuellement proportionnaux, desquels les extremes soient premiers entr'eux; il ne sera pas comme le premier au second, ainsi le dernier a quelque autre.

SOient A B G continuellemet proportionnaux desquels les extremes A & G soient premiers l'vn à l'autre. Ie dy qu'il n'est pas comme A à G, ainsi G à quelque autre. S'il est autrement, soit A à B comme G à D; Il sera aussi comme A à G ainsi B à D *par la 33. du* 7. Mais A & G extremes sont *par l'hypothese* premiers; Si premiers ils sont minimes *par la 23. du* 7: Si minimes, vn chacun *A* & G mesurera vn chacun B D (ayãs la mesme raison) *par la 21. du* 7. Doncques *A* antecedẽt mesure B antecedent. Or veu que *A* à B est comme B à G; celuy B mesurera G: parquoy aussi *A* mesurera G *par la 1. sent. du* 7. Ainsi *A* se mesure soy-mesme & mesure aussi G qui sont premiers, ce qui ne se peut faire. Il ne sera donc pas comme *A* à B ainsi le dernier G a quelque autre.

	4
A	———
	6
B	———
	9
G	———
D	———

PROPOSITION XIX.

Deux nombres estans donnez considerer si l'on peut trouuer vn troisieme proportionnel à iceux.

SOient deux nombres proposez A & B : il faut veoir, s'il est possible de trouuer vn 3. proportionnel à iceux. Ie dy, si le premier peut mesurer le quarré du second que cela se pourra faire: Et s'il ne le peut mesurer, aussi ne se pouuoir trouuer vn troisiesme proportionnel. Premierement B se multipliant soy-mesme face le quarré G qui soit mesuré de A par D. D'autant donc que A multipliant D extreme produict G egal à celuy qui est faict du milieu B (c'est à dire au mesme G) iceux trois A B D sont proportionnaux *par la* 20. *du* 7. sçauoir cóme A à B, ainsi B à D : Le troisiesme D est donc trouué.

A	4	A	6
B	6	B	4
D	9	D	0
G	36	G	16

Pour le second, si A ne mesure pas le quarré du second, il ne se pourra trouuer vn troisieme proportionnel à A B : Car s'il se pouuoit faire, soit D ce troisiesme. D'autant que A B D sont proportionnaux, ce qui est faict des extremes A & D est egal à ce qui est faict du milieu B : & soit ce produit G. Donc A mesurera G par les vnitez de D (car multipliant D il a faict G) mais par l'hypothese il ne le mesure point: Ce troisiesme ne se peut donc trouuer.

PROPOSITION XX.

Trois nombres estans donnez considerer si l'on peut trouuer vn quatriesme proportionnel à iceux.

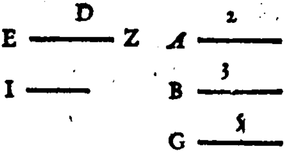
AVx trois nombres A B G soit cerché s'il est possible vn quatriesme proportionnel: Ie dy que si le premier mesure le produict du secōd & troisiesme que le quatriesme se trouuera: & s'il ne le mesure point, aussi ne se pourra donner le 4. Pour le premier : Que A mesure le produict D qui est faict de B & G : Mais autant de fois que A mesure D, autant soient d'vnitez en E : Donc A multipliant E faict D. Mais B multipliant G faict le mesme D. Donc *par la* 2. *partie de la* 19. *du* 7. A à B sera comme G à E : Le quatriesme donc E est proportionnel des trois *A B G.* Mais si *A* ne mesure point D : E ne sera pas proportionnel ; Que s'il est au-

A	8	A	5	48
B	12	B	7	12
G	18	G	8	3
E	27	E	0	0
D	16	D	56	36

trement, soit E ce quatriesme proportionnel. D'autant que B multipliant G faict D, il s'ensuiura *par la* 19. *du* 7. que *A* multipliant E produira le mesme D. *A* mesure donc D par les vnitez de E; mais par l'hypothese il ne le mesure pas: ce qui est absurde: Et par ainsi E ne sera pas le quatriesme proportionnel aux trois A B G.

PROPOSITION XXI.

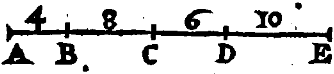
Les nombres premiers sont plus que quelque multitude proposee des nombres premiers.



Soit proposee telle telle multitude qu'on voudra de nõbres premiers *A* B G. Ie dy que d'autres se peuuent donner pardessus ceste multitude proposee. Soit pris vn nombre minime lequel soit mesuré de A B G *par la* 38. *du* 7. qui soit E D, auquel soit adioustee l'vuité D Z: Or le tout E Z est premier (ainsi nous auons ce qui est requis) ou est composé: Si composé, quelque premier le mesurera *par la* 33. *du* 7. & soit ce premier I: Ie dy que I est vn autre nombre premier pardessus *A* B G. Que s'il ne l'est & soit le mesme qu'vn des trois *A B C*: Le mesme I mesurera E D, qui est mesuré des trois: mais par l'hypothese le mesme I mesure le tout E Z; il mesurera donc *par la 2. sent. du* 7. le reste D Z, c'est à sçauoir l'vnité: ce qui est absurde. Donc I sera nombre premier adiousté à la multitude proposee.

PROPOSITION XXII.

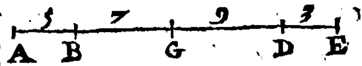
Si tant de nombres pairs qu'on voudra sont composez, le tout est pair.



Soiét proposez les nombres AB, BC, CD & DE mis & assemblez en vn cõme *A E*. Ie dy que *A E* est pair, d'autant qu'vn chacun a deux parties egales: Si done aux choses egales on adiouste choses egales toutes les moictiez seront egales aux moictiez: Et pourtant le tout *A E* sera pair *par la definition du nombre pair*.

PROPOSITION XXIII.

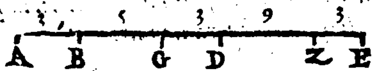
Si tant de nombres impairs qu'on voudra sont composez, & soit la multitude d'iceux pair, le tout sera pair.



SOient les nombres impair composez AB, BG, GD & DE desquels la multitude soit nombre pair. Ie dy que le tout *AE* sera pair. Car puis que *par la 7. deff. du 7.* tout impair differe du pair seullement de l'vnité, icelle vnité ostee d'vn chacun les restes seront pair; Et *par la precedente* estant en multitude pair feront le tout (composé d'iceux) pair. Si donc les vnitez soustraictes (qui sont vn nombre pair) sont adioustees à vn pair, le tout sera pair *par la mesme.*

PROPOSITION XXIIII.

Si tant de nombres impair qu'on voudra sont composez, & que la multitude d'iceux soit impair; le tout sera impair.



SOient les nombres impairs AB, BG, GD, DZ & ZE composez, dont la multitude soit impair. Ie dy que le tout *A* est impair. Soit le nombre ZE soustraict du tout, le reste *A*Z sera pair *par la precedente.* Et du mesme ZE soit soustraicte l'vnité, le reste semblablement sera pair *par la 7. deff. du 7.* lequel ioint à *A*Z sera vn nombre pair *par la 22. de ce liure.* Puis à ce nombre pair soit remise l'vnité, elle fera le tout *AE* impair: Car le nombre impair differe du pair de l'vnité seullement.

PROPOSITION XXV.

Si d'vn nombre pair on soustraict vn nombre pair, le reste sera pair.

CEste proposition ensemble les trois suiuantes n'ont point besoin de demonstration: car elles semblent plustost principes que theoremes.

PROPOSITION XXVI.

Si d'vn nombre pair en soustraict vn nombre impair, le reste sera impair.

PROPOSITION XXVII.

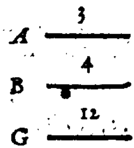
Si d'vn nombre impair on soustraict vn nombre impair, le reste sera pair.

PROPSITION XXVIII.

Si d'vn nombre impair on soustraict vn nombre pair, le reste sera impair.

PROPOSITION XXIX.

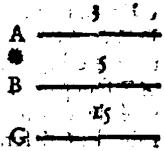
Si vn nombre impair multipliant vn nombre pair en engendre quelqu'vn, l'engendré sera pair.



LE nombre impair *A* multipliant le pair *B*, face G, Ie dy que cestuy est pair. D'autant que le nombre pair B est pris par la multitude des vnitez de *A* impair, il sera le tout G pair *par la 22. de ce liu.*

PROPOSITION XXX.

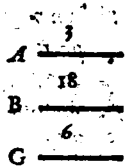
Si vn nombre impair multipliãt vn impair, produict quelqu'vn le produict sera impair.



LE nombre impair *A* multipliant l'impair B face & produise G. Pource que *A* par la multitude impair des vnitez de B produict G: Le tout G produict sera impair *par la 24. de ce liure.*

PROPOSITION XXXI.

Si vn nombre impair mesure vn nombre pair, il mesurera aussi la moictié d'iceluy pair.



SOit le nombre impair A mesurant le pair B. Ie dy que A mesurera la moictié du nombre pair B. Que le nombre A mesure le pair B par G, Ie dy aussi que G est pair. Car si cetuy estoit impair, il s'ensuiuroit que l'impair A par l'impair G produiroit l'impair B *par la precedente*. Mais B est supposé pair. Ce qui est absurde. Le nombre G est donc pair. Si donc A par toutes les vnitez de G, produict le tout B, il s'ensuiura que le mesme A par la moictié de la multitude des vnitez du nombre pair G, fera & produira la moictié de B. Doncques A mesurera la moictié de B, par la moictié des vnitez du nombre pair G. *Si donc vn nombre impair, &c.*

PROPOSITION XXXII.

Si vn nombre impair est premier à quelque nombre, il sera aussi premier au double d'iceluy.

SOit le nombre impair A premier à quelque nombre B, & le double d'iceluy B soit G. Ie dy que A est premier à G. Que s'il ne l'est, Que quelque autre D mesure iceux A & G : lequel D sera impair : Car s'il estoit pair mesurant A il produiroit vn nombre pair, *par 22. de cestuy* qui est contre l'hypothese par laquelle A est mis pour impair. Donc aussi D sera impair qui mesurant le nombre pair G (double de B) mesurera aussi la moictié d'iceluy B, *par la precedente*, il mesurera aussi A par consequent mesure deux premiers A & B, ce qui ne peut estre. Il ny aura donc point de nombre qui mesure iceux A & G qui sont par ce moyen premiers.

A	7
B	8
G	16
D	

PROPOSITION XXXIII.

Vn chacun des nombres qui sont doublez depuis le binaire, est tant seullement pairement pair.

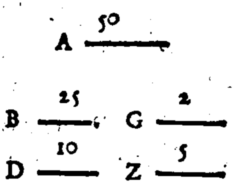
SOient depuis deux autant de nombres qu'on voudra doublez *A B G D*. Ie dy qu'vn chacun d'iceux est pairement pair, & ceux-là seulement. Car veu qu'ils sont faicts par la repetition du nōbre binaire, ils seront pairs *par la 22. de ce liure.* Estans tels ils seront proportionnaux depuis l'vnité (estant le binaire double de l'vnité.) Le nombre donc moindre mesurera le plus grand par quelque nompre des nombres de la mesme proportion qui seront deuant *par la 11. de ce liure* lesquels serōt pairs: Les produicts donc seront tous pairs, & de plus, pairement pairs *par la 8. deff. du 7.* Car nul autre nōbre ne les peut mesurer excepté quelqu'vn des nombres qui sont deuant en la mesme proportion *par la 13. de ce liure*, qui sont tous pais comme il a esté dict. Or qu'il ny en ait aucun autre (hors ceux là) qui soit pairement pair, il est manifeste, Car s'il est autrement

vnité	
A	2
B	4
G	8
D	16
E	48

soit cest autre E, qui sera tousiours couppé en deux egalement iusques à ce qu'il estoit reduict à l'vnité ou à quelque nombre impair; Et faut par necessité que ce soit vn autre que l'vn d'iceux. S'il est reduict au nombre impair, celuy cy mesurera E pour estre doublé plusieurs fois : Il ne sera donc pas pairement pair *par la 8. deff. du 7.* Et s'il vient à l'vnité, cestuy mesme sera le binaire ou double depuis le binaire : Et puis qu'estant couppé en deux continuellement ; estant double continuellement il suiura la mesme raison: Car le double est la conuerse du demy. Il n'y aura donc point de nombre pairement pair qui se puisse prendre hors d'iceux proposez. *Si donc vn chacun des nombres &c.*

PROPOSITION XXXIIII.

Si vn nombre a sa moictié impair, iceluy sera seulement pairement impair.



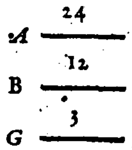
Soit vn nombre A ayant sa moictié B impair, Ie dy que A & ceux de la mesme sorte sont seulement pairement pairs. Soit G le nombre binaire par lequel B puisse mesurer le double A. Soit aussi quelque nõbre pair D mesurant le mesme A par Z, ce qui se peut faire estant A pair. Pour ce que ce qui est faict de G B est egal à ce qui est produict de Z D : G à D sera *par la 19. du 7.* comme Z à B : Mais le binaire G mesure le pair D, donc Z mesurera la moictié B : Z est donc impair: Car s'il estoit pair il feroit B (lequel il mesure) pair, *par la 21. de ce liure*, ce qui seroit contre l'hypothese: Cest autre nombre donc quel qu'il soit sçauoir Z sera impair, par lequel le pair D mesure A, qui pour ceste cause est pairement impair. Outre plus il n'y a point d'autre nombre pairement impair que celuy qui a sa moictié impair : Car s'il y en auoit vn autre ayant sa moictié pair, le binaire (qui est pair) mesureroit icelle moictié par la moictié : Cest autre donc n'est point pairement impair *par la 9. deff. du 7.* Ce qui est contre l'hypothese. Il n'y a donc point autre nombre pairement impair; que ceux qui ont la moictié impair.

PROPOSITION XXXV.

Si vn nombre pair n'est pas double depuis deux, & n'a pas la moictie impair, il est pairement pair & pairement impair.

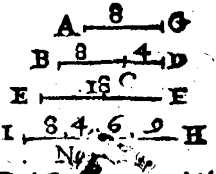
Soit

Soit quelque nombre pair *A* qui depuis deux ne soit point double, mais qu'il ait sa moictié B pair. Ie dy que *A* est vn nombre pairement pair & impair. D'autant que *A* n'est point double depuis deux, iceluy continuellemẽt couppé en deux egalemẽt sera vn nombre impair: car s'il faisoit deux, ou l'vnité, il seroit double depuis le binaire: Qu'il face donc l'impair *G*; Il est euident que l'impair *G* mesure *A* par vn nõbre pair: Car s'il le mesuroit par vn impair, il seroit le mesme *A* impair *par la 24. de cestuy*: Donc l'impair *G* mesure *A* par vn pair. Et pource que *A* a sa moictié pair, le binaire (pair) le mesurera par la moictié (qui est nõbre pair.) Il s'ensuiura donc que le nõbre *A* (lequel est mesuré d'vn pair par vn pair, & quelque fois d'vn autre pair par vn impair) sera pairement pair & impair *par la 10. deff. du 7.* Et si derechef B a sa moictié pair, encor vn autre pair le mesurera par vn nombre pair ou impair: & ainsi infiniement iusques à ce qu'on paruienne à l'impair.



PROPOSITION XXXVI.

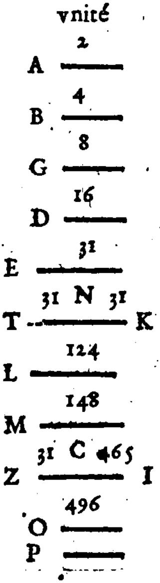
Si tant de nombres qu'on voudra sont continuellement proportionnaux, & du second & dernier se leuent des nombres egaux au premier, tout ainsi que l'excez du second sera au premier, tout ainsi sera l'excez du dernier à tous ceux qui precedent le dernier.



Soient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux A G, B D, E F, & I H. Et soit osté du second BD, le nombre B C egal au premier A G. Et du plus grand & dernier soit aussi osté vn mesme nombre I N. Ie dy que cõme l'excez C D à A G premier, ainsi N H (excez du dernier) a tous les autres E F, B D, A G qui precedẽt. D'autant que I H est le plus grand (car par l'hypothese le second est plus grand que le premier) soit I L posé egal à EF & IK à BD; mais à AG est egal à IN; Ce sera donc comme I H à E F & E F à BD, & BD à AG, ainsi de mesme I H à IL & IL à I K & IK à IN, car ils sont egaux: Parquoy aussi NK sera egal à CD *par la 3. com. sen.* Mais veu que cõme le tout I H au tout I L, ainsi le soustraict I L au soustraict IK, le reste LH *par la 11. du 7.* sera au reste KL comme le tout IH au tout IL. Pource que semblablement IL est à IK cõme IK à IN; le nombre KL à NK sera *par la mesme* comme le tout IL au tout IK. Mais comme IH à IL & IL à IK aussi IK à IN; Ainsi ont esté IH à EF, & EF à BD & BD à AG. Donc comme LH à KL & KL à NK, ainsi sera EF à BD & BD à AG. Et par vicissitude *selon la 13. du 7.* comme LH à EF ainsi KL à BD, & comme KL à BD ainsi NK à AG, & comme l'vn des antecedens NK à vn des consequens AG, ainsi seront *par la 12. du 7.* tous les antecedẽs NK, KL, LH à tous les consequens AG, BD, EF. Mais CD a esté demonstré egal à NK: doncques cõme CD (excez du second BD) au premier AG, ainsi sera le tout NKLH (excez du dernier) à AG BD, EF qui tous le precedent. *Si donc tant de nombres, &c.*

PROPOSITION XXXVII.

Si depuis l'vnité sont exposez des nombres continuellement en proportion double iusques à ce que tout le composé soit faict premier, & iceluy tout multiplié par le dernier en engendre quelque autre, l'engendré sera parfaict.



SOient adioustez à l'vnité autant de nõbres qu'on voudra ABGD continuellement doubles, iusques à ce que le tout assemblé auec l'vnité soit nombre premier, comme pour exẽple E: & que E multiplié par le dernier D face ZI. Ie dy que ZI est parfaict. Soient pris autãt de nombres ETLM qui apres l'vnité soient doubles; A à D sera par raison egale *selon la 14. du 7.* comme E à M. Ce qui est donc faict de A & M sera egal à ce qui est faict de D & E *par la 19. du 7*: Semblablemẽt ce qui est faict de BL à celuy de GT: mais de D & E est faict ZI *par l'hypothese*: Donc de A & M se fera le mesme ZI: Donc ZI sera double à M (A estant de Z *par l'hypothese*:) Mais MLTE ont esté doubles; ETLMZI seront donc continuellement doubles proportionnaux. Or soient soustraicts du second T & du dernier ZI, des nombres egaux au premier E, qui soient TN & ZC; cõme NK à E, ainsi l'excez CI à tous MLT & E qui le precedent *par la prop. mesme*: Mais NK est egal à E estant moictié du double TK: Dõc

C I sera egal à iceux M L T & E: mais 7.C sera aussi egal à l'vnité & à ABGD (estant E cõposé ou N T son egal:) Doncques le tout ZI sera egal à iceux MLTE, & à DGBA & à l'vnité. Outre plus Ie dy que tous mesurent le mesme ZI : car veu que ZI se faict de D par E, l'vn & l'autre le mesure, & veu aussi que tous les doubles depuis l'vnité mesurent le mesme D, c'est à sçauoir ABG *par la 13. de cestuy,* iceux aussi mesureront ZI lequel est mesuré de D *par la 1. sent.* Par semblable argument estans E T L M à ZI, comme l'vnité & ABGD au mesme D (c'est à sçauoir en raison demie) & que l'vnité & A B G mesurent iceluy D ; pareillement aussi E T L M mesureront Z I. Outreplus il ne s'en trouuera (hors ceux-là) qui mesurent ZI : Que si il y en auoit quelqu'vn; soit O lequel par les vnitez de P mesure ZI: mais D mesure par E le mesme ZI : E à P sera donc comme O à D. *par la 19. du 7.* Mais pource que O n'est point mis pour aucun d'iceux, iceluy ne mesure point D, qui est seulement mesuré par les precedens de la proportiõ, sçauoir ABG *par la 13. de cestuy,* aussi E ne mesurera point P: D'auantage pource que E à P est comme O à D, & que E est premier *par l'hypothese,* il sera aussi *par la 31. du 7.* premier à P, lequel il ne mesure point.

Or pource que E à P sont premiers, ils seront *par la 23. du 7.* minimes, *& par la 21. du mesme* ils mesureront iceux O & D qui ont la mesme raison. E mesurera donc O, & P mesurera D. Mais puis que nul ne mesure D excepté ceux qui le precedét en la proportion ABG & l'vnité *par la 13. de ce liure* il s'ensuiura que P sera l'vn d'iceux A B G. Et puis que A B C D mesurent Z I, par iceux MLTE (comme il a esté dict) & P mesure ZI par O ; Il s'ensuiura que O est vn d'iceux MLTE ; mais il est autre *par l'hypothese,* ce qui ne peut estre. Il n'y aura donc point autre nombre hors ceux-cy MLTE, DGBA & l'vnité, qui mesure ZI: mais cestuy cy a esté *par la 39. du 7.* monstré egal à iceux M LT E, D G B A & à l'vnité (qui chacun sont ses parties;) iceluy Z.I donc sera nombre parfaict *par la 24. deff. du 7. Si donc depuis l'vnité &c.*

FIN DV NEVFIESME LIVRE.