

# Notes du mont Royal

[www.notesdumontroyal.com](http://www.notesdumontroyal.com)

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES

Google Livres

LES NEUF  
PREMIERS  
LIVRES DES ELEMENTS  
D'EUCLIDE: TRADVITS  
& commentez

530. l.

2

PAR

I. BERARD de Bar-le-duc, Ingenieur du Tres-  
chretien ROY de France & de Navarre.

Dediez à sa MAIESTE'.

Reueus & corrigez par l'Auteur.



A PARIS,

Chez G VILLAVME AVVRAY, au haut  
de la rue saint Iean de Beauuais, au  
Bellerophon couronné.

MD. LXXV.

Avec Privilège du Roy.

2000 A

1000 B

1000 C



# A V R O Y,

I R E,

*Le favorable accueil qu'il a pleu à vostre Maieſté faire à mes premières œuvres Mathematiques, m'oblige & assure tout ensemble de luy presenter ce recent labour, qui apportera peut estre quelque clarté*



*à ces sciences, & quelque desir à vostre Noblesse d'aimer & honorer ce qu'elle void favorisé & chery de son souverain Prince. Et si au gouvernement du monde Dieu use tousiours de quelque trait de Geometrie (comme disoit le divin Platon:) C'est bien raison, que ce luy auquel par vne certaine communication de sa puissance en terre, il a commis l'administration du plus beau Royaume qui y soit, se monstre amateur d'vne science dont l'vsage se remarque au Ciel, & que le Createur mesme de l'Vniuers n'a point desdaignée, puis que (comme dit le Sage) il a créé toutes choses par poids, nombre & mesure. Et certes s'il est plus difficile de*

mesurer, comme il appartient les choses grandes, la science qui l'apprend est tres-necessaire à ceux que Dieu a esleuez au supreme degré de grandeur. Je le prie,

SIRE, de vouloir de plus en plus agrandir & affermir vostre throne, & de vous combler de toutes ses benedictions.

A PARIS au mois d'Aoust 1598.

De vostre MAIESTE,

Tres-humble, tres-obeïssant, & tres-fidele seruiteur, I. ERRARD.  
de Bar-le-duc.

---

ADVERTISSEMENT.

**D**Autant que les Elemens se doivent lire de suite, & que la demonstration d'une proposition depend des choses precedentes, i'ay euité tant qu'il m'a esté possible les vaines redites d'icelles, craignant que le trop grand amas de telles repetitions n'empeschast la lumiere que ie rasche y apporter. Quand donc le Lecteur trouuera que ie dy quelque chose estre ainsi ou ainsi, sans autre preuue, qu'il sçache que cela aura esté demonstré & repeté plusieurs fois. Je le prie donc de prendre ceste briefueie en bonne part, comme aussi certains mots (qui sont plus Latins que François) desquels i'ay esté contraint user, n'en trouuant point de plus brieufs, ne plus significatifs.



DEMONSTRATIONS  
 DES ELEMENS  
 D'EVCLIDE,  
 LIVRE I.

DEFFINITION PREMIERE.

1.  E point est ce qui n'a aucunes parties.
2. La ligne est seulement vne longueur, sans largeur.
3. Les extremittez des lignes sont poincts.
4. Ligne droite, est celle qui est egaleme[n]t comprise entre ses poincts.
5. Superficie, est qui a longueur, & largeur tant seulement.
6. Les bords des superficies sont ligne ou lignes.
7. Superficie plane est qui demeure egaleme[n]t entre ses lignes.
8. Angle plan est le concours de deux lignes qui s'entretouchent en vn point, & lesquelles continuees se couppent au mesme point.
9. Angle rectiligne, est coluy qui est fait de deux lignes droictes.
10. Quand vne ligne droite, tombant sur vne ligne droite, fait les angles d'vne part & d'autre

égaux ensemble : l'un & l'autre des angles égaux se nomme droit : & la ligne droite tombant se nomme perpendiculaire , sur la ligne sur laquelle elle tombe.

11. Et l'angle plus grand qu'un droit , se nomme Obtus.
12. Et l'angle plus petit qu'un droit se nomme aigu.
13. Terme est la fin de quelque chose.
14. Figure est , qui est contenuë de terme ou termes.
15. Cercle , est vne figure pleine contenuë d'une ligne qui se nomme circonference : en icelle y a un point , duquel toutes les lignes droictes menées à la circonference sont égales entr'elles.
16. Et ce point là , s'appelle centre de cercle.
17. Diametre du cercle , est la ligne droite passant par le centre , finie d'une part & d'autre à la circonference , laquelle diuise le cercle en deux également.
18. Moitié de cercle est vne figure contenuë du diametre & de la circonference comprise par iceluy diametre.
19. Section de cercle est vne figure contenuë d'une ligne droite , & d'une partie de la circonference.
20. Les figures plaines rectilignes sont celles contenuës de lignes droictes.
21. Les figures de trois costez sont celles contenuës de trois lignes droictes.
22. Les figures de quatre costez sont celles comprises de quatre lignes droictes.
23. Les figures de plusieurs costez sont celles comprises de plus de quatre lignes droictes.
24. Des figures de trois costez , celle se nomme

- triangle equilateral qui est contenuë de trois costez egaux .
- 25. Ifoſcele, qui est contenuë de deux costez egaux seulement.
- 26. Scalene, qui est contenuë de trois costez inégaux.
- 27. Encor des figures de trois costez , celle se nomme triangle rectangle, qui a vn angle droit.
- 28. Ambligone, qui a vn angle obtus.
- 29. Oxigone, qui a trois angles aigus,
- 30. Mais des figures de quatre costez , celle qui a les costez egaux & les angles droicts, se nomme quarré .
- 31. Celle qui a les angles droicts, mais les costez inegaux, se nomme quarré long.
- 32. Celle qui a les costez egaux, mais non les angles droicts, se nomme Rhombe.
- 33. Mais celle qui a les costez opposez & les angles opposez egaux, mais n'a pas costez egaux ensemble ny les angles droicts, se nomme Rhomboïde.
- 34. Excepté celle-cy, les figures de quatre costez se nomment tablettes ou trapeses.
- 35. Lignes droictes paralleles sont celles, lesquelles estans en vn mesme plan & menees de part & d'autre ne concourent point ensemble.
- 36. Parallelogramme, est vne figure plane contenuë de quatre lignes droictes, desquelles les opposees sont paralleles entr'elles.

**S'ENSVIVENT LES DEMANDES,**  
*ou positions simples.*

**Demando I.**

A iij

**D**'Un point à un autre point mener vne ligne droite.

2. Continuer vne ligne droite finie tant qu'il en sera besoin.
3. Descrire vn cercle à l'entour d'un point, & d'une telle distance qu'on voudra.

## COMMUNES SENTENCES.

### Premiere.

**L**es choses egales à vne, sont egales entr'elles.

1. Et si à choses egales s'adioustent choses egales, les toutes seront egales.
2. Et si de choses egales, se leuent choses egales, les restes seront egales.
3. Et si à choses inegales s'adioustent choses egales, les toutes seront inegales.
4. Et si des choses inegales, se leuent choses egales, les restes seront inegales.
5. Les choses qui sont doubles à vn mesme, sont egales entr'elles.
6. Et les choses qui sont moitié d'une mesme, sont egales entr'elles.
7. Et les choses qui conuenient ensemble & entre elles, sont egales entr'elles.
8. Le tout est plus grand que sa partie.
9. Tous angles droits sont egaux entr'eux.
10. Si dessus deux lignes droictes tombe vne ligne droite, faisant les angles dedàs d'une mesme part, plus petis que deux droicts, icelles ostans prolongees infiniment se rencontreront de la part en laquelle les angles sont plus petis que deux droicts.
11. Deux lignes droictes ne comprennent pas vn espace.



# LE PREMIER LIVRE DES ELEMENS D'EVCLIDE.

## PROPOSITION PREMIERE.

*Deſſus vne ligne droiſte donnée & finie deſcrire vn triangle equilateral.*



Soit la ligne droiſte finie & donnée  $HB$ , & du point  $H$  à la diſtance  $HB$  ſoit deſcrit vn cercle: par la troiſieme demande, & de l'autre point  $B$  à la meſme diſtance ſoit deſcrit vn

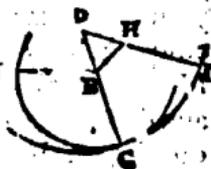


autre cercle, iceux cercles ſeront egaux: & ſoient tirées les lignes  $HC$  &  $BC$  à la ſection des deux cercles  $C$  par la premiere demande: d'autant que  $HC$  eſt egale à  $HB$  &  $BC$  à la meſme  $HB$  par la definition du cercle: il ſ'enſuiura, par la premiere commune ſentence que  $HC$  &  $CB$  ſeront egaux, & que le triangle ſera equilateral; ce qu'il falloir demonſtrer.

## PROPOSITION II.

*D'un point donné mener vne ligne droite egale à vne ligne droite donnée.*

Soit la ligne propoſée  $GB$ , le point donné  $H$ , ſoit tirée  $BH$ , & ſur icelle ſoit fait le triangle equilateral  $BHD$ , par la premiere propoſition. Soit prolongé  $DB$  vers  $C$  par la ſeconde demande, & ſoit fait le cercle du centre  $B$  à la diſtance  $BG$ , par la troiſieme demande, icelles  $BG$ , &  $BC$  ſeront ega-



ELEMENS D'EVCLIDE,  
 les. Apres soit prolongée  $DH$  vers  $I$ , & fait  
 le cercle du centre  $D$  à la distance  $DC$ , les deux  
 lignes  $DC$  &  $DI$  seront egales : desquelles  
 faut oster  $DB, DH$  egales : resteront  $BC, HI$   
 egales, par la troisieme commune sentence. Or  $GB$   
 est aussi egale à  $BC$ , icelles  $GB$  &  $HI$  seront  
 donc egales, par la premiere commune sentence.



### PROPOSITION III.

*De deux lignes droites inegales donnees, oster de la plus  
 grande vne ligne droite egale à la plus petite.*

SOit la plus grande  $HB$  & la plus petite  $C$ , soit par  
 la precedente du point  $H$  tirée vne ligne egale à  $C$   
 comme  $HD$ , & fait le cercle du centre  $H$  à la dis-  
 tance  $HD$ : Il sera evident que  $HL$  estant egale  
 à  $HD$  sera aussi egale à  $C$ .



### PROPOSITION IIII.

*Si de deux triangles, les deux costez de l'un sont egaux aux  
 deux costez de l'autre vn chacun au sien, & l'angle de l'un  
 contenu des deux costez egaux, est egal à l'angle de l'autre.  
 Ils auront la base egale à la base, & le triangle sera egal au  
 triangle, & les autres angles aux autres angles, vn chacun  
 au sien, ceux qui sont opposez aux costez egaux.*

DES deux triangles  $BHC$ , &  
 $LDL$  soient les deux costez  
 $HB, HC$  egaux aux deux costez  
 $DL, DF$  & les angles qu'ils com-  
 prennent egaux: si la base  $BC$  est plus  
 grande que la base  $LF$ , soit de  $BC$



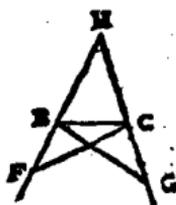
couppée  $BI$  egale à  $LF$  par la troisieme de ce livre. & soit tirée  $HI$ .  
 Maintenant si les deux costez  $HB$  &  $HI$  sont estimez egaux  
 aux deux costez  $DL, DF$  & la base egale à la base: il est evident  
 que l'angle  $BHI$  ne sera plus egal à l'angle  $LDL$ , lequel  $BHI$   
 est moindre que le posé  $BHC$  de la quantité de l'angle  $IHC$

ce qui est absurde. Semblablement se démontrera LF n'estre point plus grande que BC. Si donc de deux triangles, &c.

## PROPOSITION V.

*En tout triangle isoscele, les angles qui sont en la base sont egaux entr'eux: & ayant mené les lignes droictes egales, les angles qui sont sous la base, seront egaux entr'eux.*

**D**V triangle Isoscele  $HBC$  soient les deux costez  $HB$  &  $HC$  prolongez en sorte que  $HF, HG$  soient egaux, & tirez les lignes  $FC, BG$ . D'autant que  $FH, HC$  sont egaux aux deux costez  $GH, HB$ , & que l'angle  $H$  est commun, la base  $FC$  sera egale à la base  $GB$  par la precedente l'angle  $F$  à l'angle  $G$ : l'angle  $FCH$  à l'angle  $GBH$ , & l'angle  $FCB$  à l'angle  $GB C$ : ces deux costez de  $FCH$  &  $GBH$ , resteront  $HBC$  &  $HCB$  sur la base egaux: & puis que  $BF, FC$  sont deux costez egaux aux deux costez  $CG, GB$ , & que l'angle  $F$  est egal à l'angle  $G$ , la base sera egale à la base, & les autres angles aux autres angles. Dont s'ensuivra que les angles sous la base  $FB C$  &  $GC B$  seront aussi egaux.



## PROPOSITION VI.

*Si deux angles d'un triangle sont egaux entr'eux, aussi les costez opposez aux angles egaux sont egaux entr'eux.*

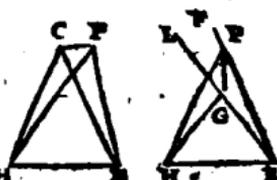
**S**I du triangle  $HBC$  les deux angles  $HBC$  &  $HCB$  sont egaux, il faudra que  $HB$  &  $HC$  soient aussi egaux. Autrement soit  $HB$  plus grand que  $HC$ , & soit couppe  $BP$  egal à  $HC$ . d'autant que  $HC$  &  $CB$  sont egaux à  $BP, BC$ , & que les angles qu'ils comprennent sont egaux, la base  $HC$  sera egale à la base  $PB$ , & le triangle  $HBC$  au triangle  $PCB$ , & les autres angles aux autres angles, par la quatrieme: ce qui est faux, estant l'un des triangles contenu en l'autre, & par consequent plus petit, & l'angle  $PCB$  moindre que l'angle  $HCB$ . Si donc deux angles d'un triangle, &c.



ELEMENS D'EVCLIDE,  
PROPOSITION VII.

Si des extremités de quelque ligne droicte deux autres lignes droictes concourent en vn poinct: deux autres lignes droictes egales à celles-cy l'une à l'autre, sçauoir celles possédans mesmes termes & d'une mesme part, ne se pourront tirer sur vn plan à vn autre poinct.

Soient de la ligne HB, & des extremités SH, B les deux lignes tirées au point C, HC, BC, & soient encor en vn autre point P, tirées HP & BP egales (s'il est possible) sçauoir HP à HC, & BP à BC possédans mesmes termes, d'autant que par la 5. proposition les angles HCP & HPC sont egaux, comme aussi BPC & BCP, il s'ensuiura que la partie sera egale à quelque chose plus grande que le tout, comme l'angle BCP (partie de HCP) seroit plus grande non seulement que CPH (comme il a esté posé) mais aussi que CPB, ce qui ne peut estre: tellement que Si des extremités, &c.



Que si le point tombe dans le triangle comme G & les deux lignes BG, BP sont estimées egales, comme aussi HG, HP, il s'ensuiura que les angles sous la base seront egaux par la 5. sçauoir FPG & LGP, ce qui est faux: car HG, HP sont aussi posées egales, & font les angles HGP & HPG egaux, tellement qu'il faudroit que l'angle HGP fust plus grand que FPG, mais il est egal seulement à HPG. Il est donc manifeste que la proposition est veritable,

PROPOSITION VIII.

Si deux triangles ont deux costez egaux aux deux costez l'un à l'autre, & la base egale à la base, ils auront aussi l'angle egal à l'angle, sçauoir celuy contenu de lignes droictes egales.

S'il est autrement, soient des deux triangles SHBC & PLF ayans les deux costez egaux aux deux costez, & la base egale à la base, l'angle H inegal à l'angle P: & soit sur la base LF constitué vn autre triangle ayant LG & GF egaux aux deux costez BH &

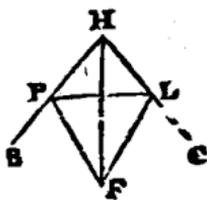


H C, & l'angle G egal à l'angle H, il s'ensuivra que la ligne L G sera egale à LP & FG à FP contre la precedente, & les autres angles egaux aux autres angles par la quatrième, ce qui est faux, n'estant l'angle G L F que partie de P L F. Tellement que Si deux triangles, &c.

PROPOSITION IX.

Couper un angle rectiligne en deux egalement.

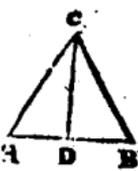
SOIT l'angle donné B H C, & soient H P & S H L faictes egales & tirée P L, sur laquelle soit faicte le triangle equilateral P L F, & tirée H F. D'autant que les deux costez L H, H F: sont egaux aux deux costez P H, H F, & la base L F egale à la base P F, il s'ensuivra par la precedente que l'angle L H F, sera egal à l'angle P H F: par ainsi l'angle donné B H C sera couppee en deux egalement.



PROPOSITION X.

Couper en deux egalement vne ligne droicte donnée terminée.

SOIT la ligne droicte finie H B, sur laquelle soit fait le triangle equilateral H B C, & soit couppee l'angle H C B en deux egalement de la ligne C D par la precedente. D'autant que C H, C D sont egaux à C B, C D & les angles qu'ils comprennent egaux, la base H D sera egale à la base D B: par la quatrième. Tellement que H B est couppee en deux egalement.



PROPOSITION XI.

sur vne ligne droicte, & d'un point donné en icelle eslever vne autre ligne droicte en angles droicts.

EN la ligne proposée H B soit le point donné C, & faictes C P, C L egales: & sur P L soit descript le triagle equilateral P F L, & menée la ligne F C. D'autant que les deux triangles sont compris de lignes egales, ils se-



ELEMENTS D'EVCLIDE,

ront equiangles, tant par la 4. que 8. propos. L'angle FCL sera donc egal à l'angle FCP, & tous deux seront angles droicts, & la ligne FC perpendiculaire par la definition.

PROPOSITION XII.

*Sur vne ligne droicte infinie donnée, & d'un point donné qui n'est pas en icelle mener vne ligne droicte perpendiculaire.*

SOit la ligne proposée HB & le point donné hors icelle C, duquel soit tiré vn cercle en sorte qu'il coupe la proposée, comme en GL, H soient menées CG, CL egales & couppe l'angle GCL en deux egalement par CI: d'autât que les deux triangles sont equiangles, l'angle CIL sera egal à CIG, & iceux seront droicts, & CI perpendiculaire par la definition.



PROPOSITION XIII.

*Si vne ligne droicte tombante sur vne autre ligne droicte, fait deux angles, iceux seront droicts, ou egaux à deux droicts.*

SOit la ligne droicte LB tombante sur la ligne PC, elle fera deux angles droicts ou egaux à deux droicts. Que s'ils sont droicts nous auons ce que desirons: s'ils ne sont droicts, soit esleuée la perpendiculaire BH du point B. D'autant que les trois angles HBP, & HBL & LBC valent deux droicts, il s'ensuira que le composé PBL, & le simple LBC vaudront aussi deux droicts: car l'excez de l'un est la diminution de l'autre.



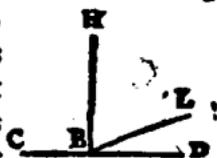
PROPOSITION XIII.

*Si en vn point qui est en vne ligne droicte deux autres lignes droictes cōcourent de costé & d'autre en vn plan, & font deux angles droicts non d'une mesme part, icelles deux lignes seront directement ensemble.*

LIVRE PREMIER.

8

**A**V point donné B de la ligne droicte HB soient concurrentes deux lignes droictes CB & DB faisans les deux angles HBD & HBC egaux à deux droicts, il faudra qu'icelles deux lignes soient posées directement comme vne seule ligne. Sinon, soit posée LB directement avec BC: il s'enfuiura, par la precedente que HBC, & HBL seront egaux à deux droicts: mais ils sont plus petits de la quantité de l'angle LBD: la proposition demeurera donc veritable.



PROPOSITION XV.

*si deux lignes droictes se coupent l'une l'autre, elles feront les angles opposez l'un contre l'autre au sommet egaux.*

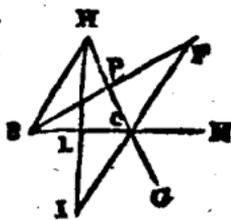
**S**Oient deux lignes droictes HB, CO se coupans l'une l'autre, d'autant que les angles HLC & HLO sont egaux à deux droicts par la 13. HLO & OLB aussi egaux à deux droicts, le cōmun HLO estant osté, resteront HLC & OLB egaux. Semblablement se demonstrera HLO estre egal à CLB.



PROPOSITION XVI.

*De tout triangle ayant prolōgé l'un des costez, l'angle exterior sera plus grand que l'un & l'autre des interieurs opposez.*

**D**V triangle BHC soit le costé BC prolōgé vers N, & couppe HC en deux egalemment en P, & tirée BP vers F, en sorte que BP, PF soient egales, soit aussi tirée CF, d'autant que FP, PC sont egaux aux deux costez BP, PH, & les angles qu'ils comprennent opposez au sommet P egaux par la precedente, les deux triangles seront equiangles, tellement que PCF sera egal à l'angle PHB. A plus forte raison PCN sera plus grand que PHB. Semblablement se demonstrera l'autre angle HBL moindre que l'exterieur HCN.



PROPOSITION XVII.

*De tout triangle les deux angles pris en quelque sorte que ce soit sont plus petites que deux droicts.*

ELEMENS D'EUCLIDE,

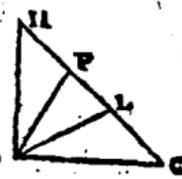
**D**V triangle BHC soit prolongé BC vers P. d'autant que les angles HCP, & HCB sont egaux à deux droicts, & que l'angle extérieur C, est plus grand que l'angle H ou l'angle B: il s'ensuivra que l'angle HBC & l'angle HCB ensemble ne vaudront pas deux droicts, non plus l'angle CHB, avec l'angle HCB.



PROPOSITION XVIII.

*En tout triangle le plus grand costé soustient le plus grand angle.*

**S**Oit du triangle HBC le plus grand costé HC. Si l'angle HBC n'est le plus grand angle du triangle, soit coupée HL egale à HB: les angles sur la base seront egaux, sçavoir HLB & HBL: Mais HLB est plus grand que LCB intérieur & opposé: à plus forte raison HBC qui est plus grand que HLB sera aussi plus grand que LCB. Semblablement se démontrera l'autre angle. De cecy on pourra recueillir que le plus petit costé soustendra le plus petit angle.



PROPOSITION XIX.

*En tout triangle le plus grand angle est soustenu du plus grand costé.*

**S**Oit du triangle HBC le plus grand angle B, si le plus grand costé n'est HC soit vn autre, comme HB, il s'ensuivra par la precedente, que l'angle C sera le plus grand contre l'hypothese. Semblablement se démontrera de l'autre costé BC. De cecy resulte que le plus petit angle est soustenu du plus petit costé.



PROPOSITION XX.

*En tout triangle les deux costez pris en quelque sorte que ce soit, sont plus grands que l'autre.*

**S**Oit le triangle HBC, & prolongé le costé BH vers P, en sorte que HP soit egal à HC & joints PC: les angles HPC & HCP seront egaux par la cinquieme. Mais l'angle PCB est plus grand que l'angle HCP, & par consequent plus que l'angle P. Il s'ensuivra donc que la ligne BP egale à BH, & C sera plus



grande

grande que CB, comme on peut recueillir des precedentes. Semblablement se demonstrera le surplus de la proposition.

PROPOSITION XXI.

Si des extremitéZ de l'un des costez d'un triangle on mene deux lignes droictes dedans iceluy; elles seront bien plus petites que les deux autres costez du triangle: mais elles contiendront un plus grand angle.

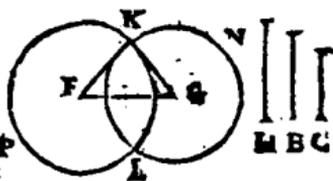
Soient du triangle HBC & des extremitéZ B, C, tirees BP, CP dans le triangle HBC: & soit prolongée BP en L: d'autant que BH, HL sont plus grandes que BL par la precedente, soit adioustée la commune LC. Il sera euident que HB, HL, LC seront plus grandes que BL, LC. Semblablement LP, LC sont plus grandes que PC: soit adioustée la commune PB: lors CL, LP, PB seront plus grādes que BP & PC. A plus forte raison donc BH, HC seront plus grandes que BP, PC. Pour la seconde partie, l'angle CPB est plus grand que PLC, & PLC plus grand que LHB. A plus forte raison CPB est plus grand que LHB.



PROPOSITION XXII.

Descrivre un triangle de trois lignes droictes egales à trois lignes droictes données, & desquelles les deux prises en quelque sorte que ce soit soient plus grandes que l'autre.

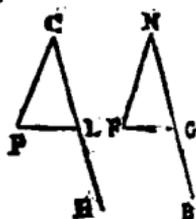
Soiet les trois lignes droites C, B, H, & soit faicte FG egale à H. au point G soit tirée vne ligne egale à C, par la deuxième, & du point G soit descrit un cercle à egale distance de C comme P KNL: apres du point F soit menée vne ligne droicte egale à B, & du mesme point & à egale distance de B soit descrit un autre cercle comme KPL, & soient menées à l'interfection des deux cercles K, F, K, GK, egales à B & C, il sera manifeste que le triangle sera fait de trois lignes egales aux proposées.



PROPOSITION XXIII.

Mettre au costé d'une ligne droicte donnée à un point donné en icelle, un angle rectiligne egal à un angle rectiligne donné.

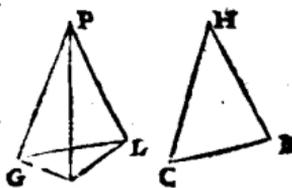
Soit la ligne donnée NB, & l'angle proposé PCH: soit faicte CL egale à CP & iointe PL. apres soit NG faicte egale à CL, & sur NG comme sur la base soit constitué vn triangle par le moyen de deux lignes egales à LP, PC par la precedente, & soit iceluy triangle GFN. Il s'enfuiura que les deux triangles seront egaux & equiangles par les 4 & 8. propos. & par conséquent l'angle au point donné N, egal à l'angle C proposé.



PROPOSITION XXIII.

Si deux triangles ont les deux costez egaux aux deux costez, l'un à l'autre, mais l'angle plus grand que l'angle, sçauoir ce luy compris de lignes droictes egales: ils auront aussi la base plus grande que la base.

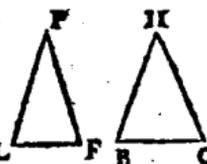
Des deux triangles HBC, PLF le<sup>s</sup> deux costez HC, HB soient egaux aux deux costez PF, & PL, & soit l'angle CHB plus grand que FPL, il faut que la base BC soit plus grande que LF. Autrement soit par la precedente, fait l'angle GPL egal à CHB, & le costé GP egal au costé FP & ioinctes LG, FG. les deux angles PGF & PFG seront egaux: l'angle donc LFG sera plus grand que l'angle PGF, & par conséquent que la partie, sçauoir LGF: dont s'enfuiura par la 19. que LG (c'est à dire CB) sera plus grande que LF subtendente l'angle LGF.



PROPOSITION XXV.

Si deux triangles ont les deux costez egaux aux deux costez l'un à l'autre, & la base plus grande que la base, ils auront aussi l'angle contenu d'iceux costez plus grand que l'angle.

Soient des deux triangles HBC, PLF, les deux costez HB, HC egaux aux deux costez PL, PF. & la base BC plus grand que la base LF. Si l'angle BHC n'est plus grand que l'angle LPF, posons iceux estre egaux. Il s'enfuiura que la base sera egale à la base par la 4. contre la position. Si l'angle BHC est plus petit que LPF la base BC sera plus

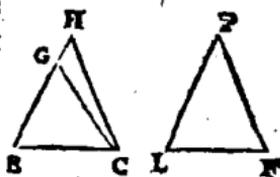


petite que la base LF par la precedente (ce qui est aussi contre la position) dont s'ensuit que l'angle BHC n'estant point egal à LPF ny plus petit, il sera par necessité plus grand.

## PROPOSITION XXVI.

Si deux triangles ont deux angles egaux aux deux angles vn chacun au sien, & le costé egal au costé, ou bien celuy au long duquel sont les angles egaux, ou celuy qui soustient l'un des angles egaux: ils auront aussi les autres costez egaux aux autres costez vn chacun au sien, & l'autre angle egal à l'autre angle.

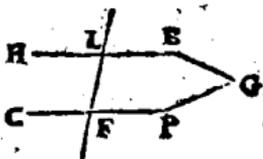
Soient des deux triangles HBC, PLF les deux angles HBC & HCB egaux aux deux angles PLF & PFL l'un à l'autre, & le costé BC egal au costé LF. Si premierement BH est plus grand que LP, soit d'iceluy couppee BG egale à LP, & soit tirée GC. D'autant que GB, BC sont egales à PL, LF & comprennent angles egaux, il s'ensuivra par la 4. que la base sera egale à la base, & les autres angles egaux aux autres angles, c'est à sçavoir BCG à LFP (c'est à dire BCH) & par consequent la partie egale au tout, ce qui est absurde & faux. Semblablement se fera la demonstration des autres costez & angles.



## PROPOSITION XXVII.

Si vne ligne droicte trauesant deux lignes droictes, fait les angles alternes egaux l'un à l'autre, icelles lignes droictes seront paralleles entre elles.

Soit la ligne droite LF trauesant les deux lignes HE, CP, & faisant les angles alternes HLF, & LFP egaux: Si les deux lignes ne sont paralleles, elles se pourront ioindre, & posons que ce soit en G pour faire le triangle LFG. Mais l'angle exterior HLF est plus grand que l'interieur opposé LFG par la 16. contre la position: icelles deux lignes ne se renconteront point donc de ce costé. Semblable-

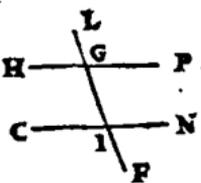


ELEMENS D'EVCLIDE,  
 ment se demonstrent ne se pouvoit r'encontrer de l'autre. Telle-  
 ment qu'elles seront donc paralleles.

PROPOSITION XXVIII.

Si vne ligne droicte trauersant deux lignes droictes faict l'an-  
 gle exterior eg l à l'angle interieur opposé d'vne mesme  
 part: ou bien les angles interieurs d'vne mesme part egaux  
 à deux droits: icelles deux lignes droictes seront paralleles  
 entre elles.

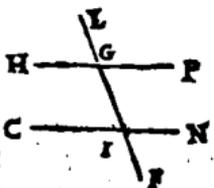
Soit LF la ligne droicte trauersant les deux li-  
 gnes droictes HP, CN, & soient les angles  
 LGP & GIN egaux. HGI sera egal à LGP par  
 la 15. c'est à dire, à GIN. Tellement que par la  
 precedente HP, & CN seront paralleles. Pour le  
 second, soient PCI & GIN egaux à deux droits:  
 la ligne FG tombante sur HP fait deux angles egaux à deux  
 droits HGI, & PGI: si le commun PCI est osté, resteront HGI,  
 GIN (alternes) egaux. Les lignes donc HP, CN seront paral-  
 leles par la precedente.



PROPOSITION XXIX.

si deux lignes droictes paralleles sont traueuses d'vne ligne  
 droicte, icelle fera les angles alternes egaux entre eux, &  
 l'exterieur à l'interieur opposé d'vne mesme part. & les in-  
 terieurs d'vne mesme part egaux à deux droits.

Soient les deux lignes droictes HP, CN tra-  
 uersées par la droicte LF; si les angles alternes  
 HGI, GIN ne sont egaux, soit GIN plus petit,  
 la ligne FG sur HP fait deux angles egaux à  
 deux droits: tellement que PCI & GIN sont  
 moindres que deux droits: dont s'ensuiura par la  
 11. commune sentence que les deux HP, & CN se joindront du  
 mesme costé où les deux angles sont moindres que deux droits:  
 & ne seront paralleles (contre la supposition) ce qui est absurde.  
 Par semblable demonstration se trouuera HGI n'estre plus petit

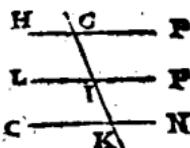


que GIN, dont s'ensuiura qu'ils seront egaux. En apres d'autant que LGP est egal à HGI, il sera aussi egal à GIN par la premiere commune sentence. Finalement, d'autant que CIN a esté monstré egal à HGI, & que HGI, & PGI sont egaux à deux droits, il s'ensuiura (le commun HGI estant osté) que PGI, & GIN seront egaux à deux droits.

## PROPOSITION XXX.

*Les lignes qui sont paralleles à vne mesme sont paralleles entre elles, ou posées directement.*

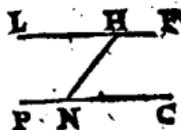
Soient les lignes HP, & CN paralleles à LF, & non situées directement. D'autant que l'angle HGI, est egal à GIF & cestuy à IKN interieur opposé & d'une mesme part par la precedente, il s'ensuiura que HGI, & IKN alternes seront egaux par la 1. commune sentence. tellement que les lignes HP, CN seront paralleles. Pour le second, posons les deux lignes CK, KN paralleles à LF & non l'une à l'autre, il faudra qu'icelles deux lignes se rencontrent, comme pour exemple au point K. D'autant que les angles KIF, IKN vallent deux droits par la precedente, comme aussi KIL, IKC, & que les angles alternes LIK, IKN sont egaux, il s'ensuiura que IKN & IKC vaudront aussi deux droits, & que CK, KN seront posées directement par la quatorzieme proposition.



## PROPOSITION XXXI.

*D'un point donné mener vne ligne droite parallele à vne ligne droite donnée.*

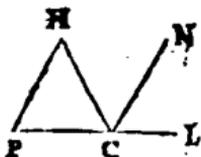
Soit la ligne donnée PC & le point hors icelle LH, duquel soit tirée vne ligne droite sur PC, comme HN, & soit aussi au point H, & sur la mesme NH fait l'angle LHN. egal à l'angle HNC par la 23. D'autant que les angles alternes LHN & HNC sont egaux, les lignes LH, PC seront paralleles par la 27. proposition.



ELEMENS D'EVCLIDE,  
PROPOSITION XXXII.

De tout triangle ayant prolongé l'un des costez, l'angle de dehors est egal aux deux angles de dedans qui luy sont opposez. Et les trois angles interieurs du triangle sont egaux à deux droits.

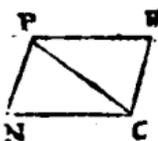
Soit du triangle HPC prolongé le costé PC en L, & au point C faicte CN parallele, à HP, D'autât que HC tombe sur deux paralleles, elle fera les angles alternes PHC, HCN egaux par la 29. comme aussi PC tombante sur les mesmes, fera l'angle exterior NCL egal à l'interieur opposé HPC. Dont est evident que l'exterior HCL est egal aux deux interieurs opposez du triangle HPC. Et pource que HCL, & HCP sont egaux à deux droits par la 13. Il s'ensuivra que les trois angles du triangle seront egaux à deux droits.



PROPOSITION XXXIII.

Les lignes droictes qui ioignent deux lignes droictes paralleles egales, sont aussi egales & paralleles.

Soient les deux lignes droictes paralleles egales SHP, CN, conjointes par les deux lignes droictes, sçavoir HC de mesme part, & PN de l'autre, & soit tirée la droicte PC, laquelle tombera sur les deux paralleles, & fera les angles alternes HPC, & PCN egaux par la 29. tellement que les deux triangles HPC, & PCN auront deux costez egaux aux deux costez, & les angles compris d'iceux costez egaux, & par consequent la base CH à la base PN, & les autres angles aux autres angles, sçavoir NPC à l'angle PCH alternativement. Dont s'ensuivra aussi qu'icelles HC, PN seront paralleles.



PROPOSITION XXXIII.

De tous espaces parallelogrammes les costez & les angles opposez sont egaux entr'eux, & le diametrent les coupe en deux egalement.

SOit au parallelogramme NPHC tirée la ligne droite PC qui fait les angles alternes egaux, HPC à PCN, & CPN à PCH. il est evident que tout l'angle HCN est egal au tout HPN.

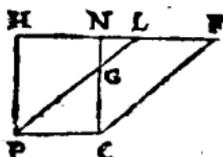


Après, pour ce que les deux triangles ont deux angles egaux aux deux angles; & le costé PC commun, les autres angles seront egaux l'un à l'autre, & les costez aux costez par la 26. D'oit s'ensuiura que la ligne HP sera egale à CN, HC à PN. & l'angle PHC à l'angle PNC, & que les deux triangles estans egaux par la mesme la diagonale PC coupera le parallelogramme en deux egalement.

PROPOSITION XXXV.

*Les parallelogrammes estans sur vne mesme base, & entre mesmes paralleles sont egaux entr'eux:*

SVR la base PC soient les deux parallelogrammes HPCN, & LPCF. Puis que les lignes HP & NC sont egales, comme aussi LP, FC, & semblablement HN, PC, & PC, LF, par la precedente, les deux triangles HPL, & NCF

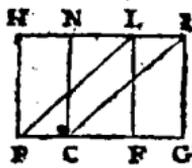


seront equiangles & egaux, desquels soit osté le triangle commun NLG, resteront les trapezes egaux HNGP & FLGC. Aufquels si on adiouste le triangle commun PGC, il sera evident que le parallelogramme PF sera egal à l'autre HC, estans les deux constituez sur vne mesme base PC.

PROPOSITION XXXVI.

*Les parallelogrammes estans sur bases egales & entre mesmes paralleles sont egaux entr'eux.*

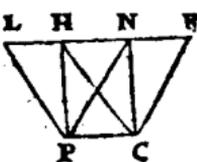
SOient deux paralleles HI, PG, & deux parallelogrammes HC, LG sur bases egales, soient tirées les lignes droictes PL, CI qui seront paralleles par la 33. & feront le parallelogramme IP egal au parallelogramme HC par la precedente, & à l'autre IF: Dont est evident que le parallelogramme HC est egal au parallelogramme LG par la premiere commune sentence.



ELEMENS D'EVCLIDE,  
PROPOSITION XXXVII.

*Les triangles estans sur vne mesme base & entre mesmes  
paralleles, sont egaux entr'eux.*

Sur la base PC soient deux triangles HPC, & NPC entre deux paralleles, sçauoir PC & LF. Soit du point P tirée la ligne droicte PL parallele à CH & CF parallele à PN. Il est euident par la 35. que le parallelogramme LC est egal au parallelogramme FP: mais le triangle HPC est la moitié de l'un, comme NPC la moitié de l'autre. Il s'ensuiura donc que les deux triangles seront egaux par la 7. C. S.



PROPOSITION XXXVIII.

*Les triangles estans sur bases egales & entre mesmes  
paralleles, sont egaux entr'eux.*

Soient les deux triangles GPC, ILF sur bases GPF, GI, & soit faicte la ligne CH parallele à PG, comme aussi LN à FI. D'autant que les parallelogrammes HP & NF sont egaux par la 30. les triangles qui sont moitez seront egaux.



PROPOSITION XXXIX.

*Les triangles egaux constituez sur vne mesme base & d'une  
mesme part, sont entre mesmes paralleles.*

Si les deux triangles sur la base PC (sçauoir HPC & BPC) sont egaux, & que la ligne droicte HB ne soit parallele à PC. posons vne parallele HI, & soit tirée IC. Les deux triangles HPC, IPC seront egaux par la 37. & s'ensuiura que la partie sera egale au tout (sçauoir IPC à BPC) ce qui ne peut estre, ayant BPC esté posé egal à HPG.



## PROPOSITION XL.

Les triangles egaux qui sont sur bases egales & d'une mesme part, sont entre mesmes paralleles.

Soient deux triangles HPC & NCL egaux, constituez sur bases egales PC, CL. Si HN n'est parallele à PL, soit HF parallele à la mesme, & tirée la ligne LF. Lors les deux triangles HPC & FCL seront egaux par la 38. dont s'ensuivra que la partie FCL sera egale au tout NCL, ce qui ne peut estre, ayant NCL esté posé egal à HPC.



## PROPOSITION XLI.

Si un parallelogramme & un triangle ont vne mesme base & sont entre mesmes paralleles, le parallelogramme sera double au triangle.

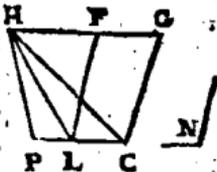
Soit le parallelogramme HPCN & le triangle LPC sur vne mesme base PC, & entre mesmes paralleles PC, HL, & soit tirée le dimetient HC, les deux triangles HPC & LPC seront egaux par la 37. mais le triangle HPC est la moitié du parallelogramme HPCN: le triangle LPC sera donc la moitié du parallelogramme.



## PROPOSITION XLII.

Faire un parallelogramme egal à un triangle donné, & ayant un angle egal à un angle rectiligne donné.

Soit le triangle donné HPC, & l'angle donné N, auquel angle & au point donné C soit fait son egal PCG: & soit coupée la ligne PC en deux egalement au point L, duquel soit tirée LF parallele à CG, & du point H soit tirée HG parallele à PC. D'autant que les deux triangles HPL, HLC sont egaux par la 38. & que le triangle HLC est la moitié du parallelogramme. GL par la precedente. Il s'ensuivra que ce mesme parallelogramme sera egal aux deux triangles, (c'est à dire) au tout proposé HPC.



ELEMENS D'EUCLIDE,  
PROPOSITION XLIII.

*En tout parallelogramme les suppléments des parallelogrammes qui sont sur le diametre sont egaux entr'eux.*

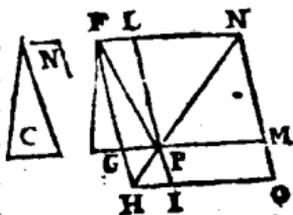
SOIT le parallelogramme HPCN, la diagonale ou dimetient HC qui coupe le parallelogramme en deux egalement, à l'entour de laquelle diagonale soient les autres parallelogrammes LI, GF, & les suppléments, PK, KN. d'autant que le triangle HLK est egal au triangle HIK, comme aussi KGC à KFC, si d'un costé on oste les deux triangles HLK, KGC, restera le supplément LG. Et si de l'autre costé on oste HIK & KFC, restera le supplément IF qui sera egal à l'autre LG *par la 3. commune sentence.*



PROPOSITION XLIIII.

*Sur vne ligne droite donnée descrire vn parallelogramme egal à vne figure rectiligne donnée, ayant vn angle egal à vn angle rectiligne donné.*

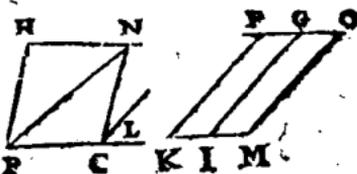
SOIT la figure rectiligne donnée C. L'angle proposé N, la ligne donnée IP, soit prolongée IP vers L, & sur icelle au point P soit fait vn angle egal à N (comme IPG) dans lequel *par la 42.* soit constitué vn parallelogramme egal à C comme LFGP: & soit acheué le parallelogramme PGHI, & tirée la diagonale HP vers N, & soit prolongée FL pour se joindre en N: soit aussi menée HIO, & GPM, & NMO: icelles lignes FLN, GPM & HIO seront paralleles *par la 40.* comme aussi HGF, IPL & OMN. Tellement que HFNO sera vn parallelogramme, comme aussi IG, & ML: les suppléments donc OP, LG seront egaux *par la precedente.* Mais LG a esté fait egal à C. Il s'ensuiura donc que PO parallelogramme sur la ligne donnée IP sera egal à la figure rectiligne donnée, qu'est le triangle C, & aura l'angle donné, estant l'angle IPG egal à l'angle OMP *par la 29.* & cestuy egal à N *par la construction.*



PROPOSITION XLV.

Descrire vn parallelogramme egal à vne figure rectiligne donnée, ayant vn angle egal à vn angle rectiligne donné.

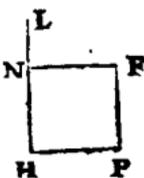
Soit la figure rectiligne donnée  $HPCN$  reduite en triangles  $HPN$ ,  $NPC$  (comme toutes autres figures rectilignes de plusieurs costez peuuent estre reduites. Soit l'angle donné  $L$ , & la ligne proposee  $KF$ , sur laquelle & au point  $K$  soit fait vn angle egal à  $L$ , & sur la mesme soit appliqué par la precedente vn parallelogramme egal au triangle  $HPN$  comme  $KFGI$ , & semblablement soit sur  $IG$  (egale à  $KF$ ) aplicqué vn autre parallelogramme egal au triangle  $PCN$ , comme  $IGOM$ . D'autant que  $KF$  est parallele & egale à  $IG$ , & celle-cy à  $MO$ , Il s'ensuyura que  $KM$  &  $FO$  seroient egales & paralleles: par la 33. & que la figure entiere  $FM$  sera vn parallelogramme ayant l'angle donné & la ligne donnee egale à la figure rectiligne proposee  $HPCN$ .



## PROPOSITION XLVI.

D'une ligne droite donnée descrire vn quarré.

Sur la ligne donnée  $HP$  soit esleuee la perpendiculaire du point  $H$  comme  $HL$ , par la 11. & soit faite  $HN$  egale à  $HP$ . Apres soit du point  $N$  tirée  $NF$  parallele à  $HP$ , & du point  $P$  soit tirée  $PF$  parallele à  $HN$ . Il est euident que la figure est equilaterale & parallelogramme, & que l'angle  $H$  est egal à l'opposé  $F$ . par la 34. Mais les deux angles  $H$  &  $P$  valent deux droits par la 29. Il s'ensuit donc que  $P$  est droit, comme aussi l'opposé  $N$ . tellement que  $HPFN$  est vn quarré.

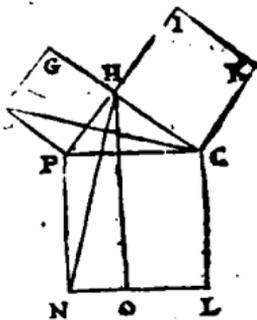


## PROPOSITION XLVII.

Aux triangles rectangles le quarré qui est fait du costé qui sont l'angle droit, est egal aux quarréz qui sont faits des costéz qui comprennent l'angle droit.

Soit le triangle rectangle  $HPC$  ayant l'angle  $H$  droit: soient aussi les trois quarréz d'escrits sur ses costez  $PCLN$ ,  $HIKC$ , &  $HGZP$ . Pour monstrier que le quarré  $CN$  (opposé à l'angle droit  $H$ ) est egal aux deux autres, soit tirée sur  $NL$  la perpendi-

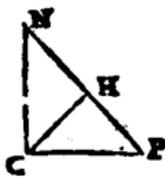
culaire HO (qui sera parallele à PN par la 28. Soit aussi tirée HN & CZ. d'autant que PO est un parallelogramme ; le triangle HPN, qui est sur mesme base PN & entre mesmes paralleles PN, HO sera la moitié d'iceluy. Maintenant le triangle ZPC a les deux costez ZP, PC egaux aux deux costez HP, PN (comme il ne se peut faire autrement par la construction) & l'angle ZPC est composé de l'angle droit ZPH & de l'angle HPC : comme en semblable l'angle NPH est composé de l'angle droit NPC, & du mesme HPC, qui est commun. Il s'ensuit donc que l'angle ZPC est egal à l'angle NPH, & par consequent la base ZC egale à la base HN, & les autres angles aux autres angles : & le triangle egal au triangle par la 4. Mais le quarré HGZP & le triangle ZPC sont sur mesme base ZP & en mesmes paralleles ZP, GC. Il s'ensuit donc que le triangle ZPC est la moitié du quarré HGZP par la 41. & que ce quarré est egal au parallelogramme PO par la 6. commune sent. Semblablement se monstrera l'autre quarré KH estre egal au rectangle CO.



PROPOSITION XLVIII.

*Si le quarré qui est descript de l'un des costez d'un triangle est egal aux quarréz des autres costez du triangle : L'angle contenu des autres deux costez du triangle sera droit.*

SOIT le triangle HPC duquel le costé PC fait un quarré egal aux quarréz de HC & HP. Soit en apres sur la ligne CH au point H esleuée vne perpendiculaire HN egale à HP, & soit tirée NC. D'autant que les quarréz de NH, HC, (c'est à dire de HP, HC) sont egaux au quarré de CN par la precedente. Il s'ensuivra que le quarré de CN sera egal au quarré de CP, & par consequent la ligne NC egale à la ligne CP, & le triangle NHC egal & equiangle au triangle CHP, & particulièrement l'angle CHP egal à l'angle NHC, c'est à dire droit : ce qu'il falloit demonstret.



# LE SECOND LIVRE DES ELEMENTS D'EVCLIDE.

## DEFINITION PREMIERE.

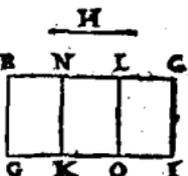
**T**OUT parallelogramme rectangle est dit estre contenu de deux lignes droictes qui comprennent l'angle droit.

2. En tout espace parallelogramme, vn chacun d'iceux parallelogrammes qui sont sur le diametre ayant vn angle commun, avec les deux suppléments se nomme gnomon.

## PROPOSITION I.

*S'il y a deux lignes droictes, dont l'une soit couppee en autant de parties qu'on voudra, le rectangle contenu des deux lignes droictes est egal aux rectangles contenus de la non-couppee, & d'une chacune piece de la couppee.*

**S**OIENT les deux lignes droictes H & GI, desquelles GI soit couppee en K, O, soit au point G esleuee la perpendiculaire GB & faicte egale à H. Soit en apres tirée BC. parallele à IG, & CI à BG, icelles seront egales aux opposées, & feront vn rectangle BI: soient aussi tirées KN & OL paralleles à BG, & par conséquent egales: Il est evident que les trois parallelogrammes BK, NO, LI seront rectangles par la 29, & compris de la ligne non couppee BG (c'est à dire H) & de chacune piece de la couppee GK, KO, OI: & pource qu'ils composent le tout BI, ils luy sont donc egaux.

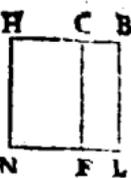


## PROPOSITION II.

*Si vne ligne droicte est couppee comme on voudra, les rectangles contenu de toute la ligne, & d'une chacune piece, sont egaux au carré de toute la ligne.*

ELEMENS D'EUCLIDE,

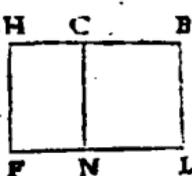
Soit la ligne droite NL coupée en F, & soit fait le carré NHBL & tirée en angles droits la ligne droite FC pour estre égale & parallèle à NH, & faire les deux rectangles, HF, CL, qui composent le tout HL, & sont compris de la toute NH ou FC, & de chacune des parties comme NF, FL. Il est évident qu'iceux rectangles sont égaux à leur tout.



PROPOSITION III.

*Si vne ligne droite est coupée comme on voudra: le rectangle contenu de la toute & de l'une des pieces est égal au rectangle contenu des pieces, & au carré de ladicte piece.*

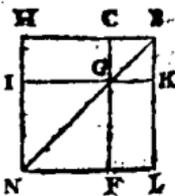
Soit la ligne droite FL coupée en N, & soit la ligne droite FH perpendiculaire & égale à NL, & soit fait le rectangle HL, & eslevée la ligne NC pour estre parallèle & égale à FH. Il est évident que CL sera vn carré, & HN vn rectangle long fait de la ligne HF. (c'est à dire NL l'une des pieces) & de l'autre piece FN. Et pource que ces deux figures composent le tout HL, elles luy sont égales.



PROPOSITION IIII.

*Si vne ligne droite est coupée comme on voudra, le carré de la toute est égal, & aux carrés des pieces, & au rectangle deux fois contenu des pieces.*

Soit la ligne droite NL coupée en F, & soit sur icelle NL fait le carré NHBL: & soit eslevée en angles droits FC pour estre parallèle & égale à NH. Soit aussi tirée la diagonale BN, & par la section G soit menée IK parallèle & égale à NL. Il est évident que le carré sur la partie NF (c'est à sçavoir IF) & l'autre carré sur la partie FL (c'est à sçavoir CK) avec le rectangle deux fois de NF, FL, (c'est à dire, HG, & GL) font tout le carré HL, & par consequent luy sont égaux.



## PROPOSITION V.

Si vne ligne droite est diuisee en deux pieces egales, & en deux inegales, le rectangle contenu des pieces inegales de la toute, avec le quarré de la section entre moyenne, est egal au quarré de la moitié.

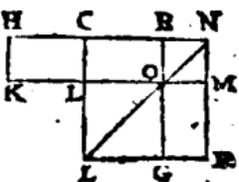
Soit la ligne droite HB couppee egale-ment en C, & inegalement en N. soit fait le rectangle des pieces inegales HN, NB: (c'est à dire, le rectangle HI.) Soit aussi fait le quarré de la moitié CB (c'est à dire, le quarré GF) & soient tirées NIG, & LIM D'autant que BM est egale à NI, & MF egale à CN (c'est à dire, à LI ou IG) il s'en suit que LG est vn quarré, lequel joint au rectangle HI, font ensemble egaux au quarré CF, parce que le rectangle NF est egal au rectangle HL, estant compris de lignes egales par la construction.



## PROPOSITION VI.

Si vne ligne droite est couppee en deux pieces egales, & on luy adionste directement quelque ligne droite: le rectangle contenu de la toute avec l'adionstée; & de l'adionstée, avec le quarré de la moitié est egal au quarré qui est fait de la moitié & de l'adionstée comme d'une.

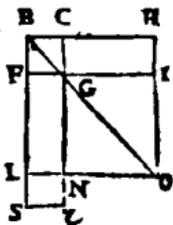
Soit la ligne droite HB couppee en deux egale-ment en C, à laquelle soit apposée directement BN. Soit fait le rectangle de la toute & de l'adionstée, c'est à sçauoir HN, & de l'adionstée BN (c'est à dire NM.) Et soit ce rectangle HM: puis soit de CN fait le quarré CF, & soit tirée BG parallele & egale à NF. D'autant que par la construction CB est egale à MF (c'est à dire à OG ou LI) il s'en suit que LG est vn quarré, lequel avec le rectangle HM est egal au quarré CF, parce que le rectangle GM est egal au rectangle CO (c'est à dire CK) par la construction.



ELEMENS D'EVCLIDE.  
PROPOSITION VII.

Si vne ligne droicte est couppee comme on voudra, le quarré de la toute, & le quarré de l'une des pieces, iceux deux quarréz ensemble sont egaux, au rectangle contenu deux fois de la toute & de ladicte piece, & au quarré de l'autre piece.

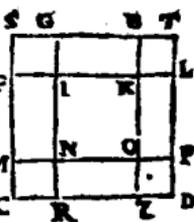
Soit la ligne droicte BH couppee comme on voudra en C : & sur BH soit fait le quarré BHOL : soit la ligne BF faite egale à BC, & soit tirée CN parallele & egale à BL, & FI à BH. Soit encor fait le quarré NS de la ligne BC ou LN. D'autant que les deux rectangles FH, & FZ qui sont compris de la toute BH (ou FS) & de la piece BC (ou BF, ou FG) ensemble le quarré IN fait de l'autre piece CH, composent & le quarré de la toute (c'est à sçauoir HL) & le quarré de ladicte piece BC (c'est à sçauoir NS) il est certain qu'ils sont egaux ausdits quarréz HL & NS, comme toutes les parties au tout.



PROPOSITION VIII.

Si vne ligne droicte est couppee comme on voudra, le rectangle contenu quatre fois de la toute, & d'une des pieces, avec le quarré de l'autre piece, est egal au quarré de la toute, & de ladicte piece.

Soit la ligne droicte SB couppee en G, & soit apposée la ligne BT egale à SG. Soit sur la composée ST fait le quarré STDC, & tirez GR, BZ paralleles & egales à SC. Soient aussi TL, DP egales à BT (c'est à dire SG) & tirees LF, PM paralleles & egales à ST. Il est evident que les quatre rectangles SK, BP, DN, & RF sont faits de la toute SB & de la piece SG, & que le quarré IKON est fait de l'autre piece GB, & composent le quarré fait de la toute & de l'apposée BT, laquelle BT est egale à l'une des pieces sçauoir SG. Il est donc evident que le quarré SD fait sur la composée ST est egal à iceux quatre rectangles, & au quarré IO fait de l'autre piece GB.

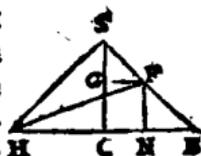


PROPO.

## PROPOSITION IX.

Si une ligne droite est coupée en deux pieces egales, & en deux pieces inegales: les quarréz des pieces inegales de la toute seront doubles aux quarréz de la moitié, & de la section entre-moyenne.

Soit la ligne droite  $HB$  coupée en deux également au point  $C$ , & inegalement au point  $N$ . soit esleuée en angles droicts la ligne droite  $CS$ , & faicte egale à  $CH$ , & soient menées  $HS$  &  $BS$ . D'autant que les deux triangles  $HCS$  &  $BCS$  sont isosceles, ils ont les angles sur la base egaux. Or  $HCS$  est droit, comme aussi  $BCS$ , donc par la 32. du 1. l'angle  $CHS$  vaut vn demy droit, comme aussi  $HSC$ ,  $SBC$ , &  $BSC$ . Celuy-cy joint à  $HSC$  fera vn angle droit  $HSB$ . Soit aussi esleuée en angles droicts  $NF$ , & du point  $F$  soit tirée  $FG$  parallele & egale à  $NC$ . Il est euident que  $NF$  est egale à  $NB$  (l'angle  $FNB$  estant droit, &  $NBF$  demy droit, comme aussi  $NFB$ ) par la 6. du premier. Semblablement  $FG$  est egale à  $GS$ . Soit tirée  $HF$ . D'autant que par la 47. du premier, les quarréz de  $HN$  &  $NB$  (ou  $NF$ ) sont egaux au quarré  $HF$ , & que cestuy-cy est egal aux quarréz de  $FS$  &  $SH$ , & que le quarré de  $SH$  est double au quarré de  $HC$ , & le quarré de  $SF$  double au quarré de  $GF$  (ou  $CN$ ;) il s'ensuit que les quarréz des deux pieces inegales  $HN$  &  $NB$  sont doubles aux quarréz de la moitié  $HC$ , & de la ligne entre les deux sections  $CN$ .

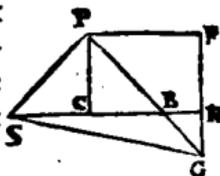


## PROPOSITION X.

si une ligne droite est coupée en deux pieces egales, & on luy adiouste directement quelque ligne droite: le quarré de la toute avec l'adioustée & le quarré de l'adioustée, sont doubles aux quarréz de la moitié, & de celle qui est faicte de la moitié & de l'adioustée, comme d'une.

ELEMENS D'EVCLIDE,

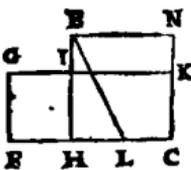
Soit la ligne droite SB couppee en deux également au point C, à laquelle soit directement apposee BN. Soit du point C esleuee en angles droits CP qui soit egale à CS. Soit aussi fait le rectangle CPFN, soient menés SP, PB. Il est euident que l'angle SPB sera droit (estant composé de deux demy droits) comme en la precedente. Soit prolongée FN vers G, & PB vers G. Le triangle BNG est rectangle & isoscele, d'autant que l'angle PBC est demy droit *par la construction*, & egal à l'angle du sommet NBG, comme par consequent l'angle NGB est aussi demy droit (l'angle BNG estant egal à BNF, & par consequent droit) *par la 13. du premier*. Dont appert que FG est egale à FP. Soit finalement menée SG. D'autant que *par la 47. du premier*, le quarré de SG est egal aux quarréz de SN & NG, (ou NB) & que ce mesme quarré SG est egal aux quarréz de SP, & PG: & que le quarré de SP est double au quarré de la moitié SC, & le quarré de PG double au quarré de PF (c'est à dire CN, qui est la moitié avec l'apposée) il s'ensuit que le quarré de la toute & de l'apposée SN, avec le quarré de l'apposée BN (ou NG) est double aux quarréz de la moitié SC, & de l'autre moitié avec l'apposée CN.



PROPOSITION XI.

*Couper vne ligne droite donnée, tellement que le rectangle contenu de la toute & de l'vne des pieces, soit egal au quarré fait de l'autre piece.*

Soit la ligne droite proposée HB, sur laquelle soit décrit vn quarré HBNK, soit couppe en deux également HC en L. soit menée LB, & prolongée CH vers F, en sorte que LF soit egale à LB. Sur la ligne HF soit décrit le quarré HFGI, & soit menez GIK. D'autant que le rectangle compris de la toute & de l'apposée comme d'une ligne (c'est à sçauoir CF) & de l'apposée FH, ou FG (c'est à dire le rectangle FK) avec le quarré de la moitié HL, est egal au quarré de LF *par la 6. de ce liure*, c'est à dire de LB son egale, & que le quarré de LB est egal aux quarréz de HB, HL: il s'ensuit (le commun HL estant osté) que le quarré de HB

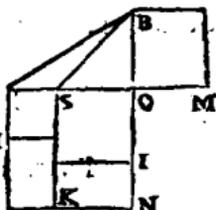


est égal au rectangle  $FK$ , & desquels finalement, si le rectangle commun  $HK$  est osté, le rectangle  $IN$  demeurera égal au carré  $FI$ . La ligne  $HB$  est donc coupée, suiuit la proposition.

## PROPOSITION XII.

Aux triangles ambliques, le carré qui est fait du costé qui soustient l'angle obtus, est plus grand que les carrés qui sont faits des costés qui contiennent l'angle obtus, de la quantité du rectangle contenu deux fois de l'un des costés, qui sont à l'entour de l'angle obtus, dessus lequel estant mené, tombe la perpendiculaire, & de la ligne prise dehors entre la perpendiculaire, & l'angle obtus.

Soit le triangle amblique  $BCS$ , ayant l'angle  $S$  obtus. soit prolongé le costé  $CS$  vers  $O$ , & faite la perpendiculaire  $BO$ . D'autant que le carré de  $BC$  est égal aux carrés  $BM$  &  $OL$ , & le carré de  $BS$  égal aux carrés  $BM$  &  $SI$ , par la 47. du premier. Il est évident que le carré de  $BC$  n'excede le carré de  $BS$ , (c'est à dire les carrés  $BM$  &  $SI$ ) ny le carré de  $CS$  (qui est  $SH$ ) que des deux rectangles  $IK$ , &  $KH$ . Or soit fait le carré  $CONL$ , & tirée la perpendiculaire  $SK$ , & faits les carrés  $SH$  &  $SI$ . Il est manifeste que  $IN$  est égale à  $CS$ , &  $HL$  à  $SO$ . Tellement que le rectangle  $IK$  est compris de lignes égales à  $CS$ ,  $SO$ , comme aussi l'autre rectangle  $HK$ . Donc aux triangles ambliques, &c.

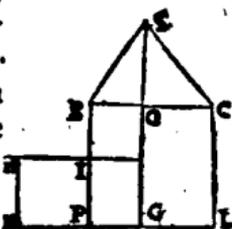


## PROPOSITION XIII.

Aux triangles oxigones, le carré du costé qui soustient l'angle pointu, est plus petit que les carrés qui se font des costés qui contiennent l'angle pointu de la quantité du rectangle contenu deux fois de l'un des costés, qui sont à l'entour de l'angle pointu, auquel tombe la perpendiculaire, & de la ligne prise dedans entre la perpendiculaire & l'angle pointu.

ELIENS D'EVCLIDE,

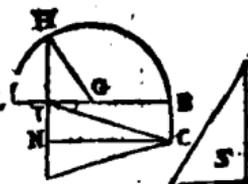
Soit le triangle oxygone  $SBC$ ,  $SB$  subten-  
dent l'angle aigu  $C$ . Soit tirée la perpendicu-  
laire  $SO$  sur le costé au long de l'angle aigu  
 $BC$ . Soit fait le quarré  $BCLF$ . Soit prolongée  
 $SO$  vers  $G$ , & fait le quarré  $OL$ . Il est evident  
*par la 47. du 1.* que le quarré de  $SB$  ne vaut que  
les quarrés de  $SO$ , &  $OB$ . Or le quarré de  $BC$   
(c'est à dire  $BL$ ) est plus grand que le quarré de  $BQ$  (c'est  $OI$ )  
du gnomon  $CGI$ . Et le quarré de  $SC$  est plus grand que le  
quarré de  $SO$ , du quarré de  $OC$  (c'est à dire  $FNHI$ . que nous  
posons estre descrit sur  $IF$  egale à  $OC$ .) Mais le rectangle  $OL$   
est compris de  $CL$  (ou  $BC$ ) & de  $CO$ , qui est entre l'angle ar-  
gu  $C$  & la perpendiculaire. Et l'autre rectangle  $HG$  est de mes-  
me, estant  $GF$  egale à  $BO$ , &  $FN$  à  $FI$ : &  $FI$  à  $OC$  *par la*  
*construction*. Tellement que  $GN$  est egale à  $BC$ , &  $HN$  à  $OC$ .  
Le quarré donc de  $SB$  est plus petit que les quarrés de  $BC$  &  
de  $SC$ , des deux rectangles  $OL$  &  $HG$ .



PROPOSITION XIII.

Faire vn quarré egal à vn rectiligne donné.

SOIT la figure rectiligne donnée  $S$ , à la-  
quelle soit fait dans vn angle droit donné  
vn parallelogramme rectangle egal *par la 45.*  
*du premier*, & soit iceluy rectangle  $BINC$ .  
Soit prolongée  $BI$  vers  $L$ , en sorte que  $IL$   
soit egale à  $IN$ . soit coupée  $BL$  en deux  
egalement, côme en  $G$ , & fait du centre  $G$  le demy cescle  $BHL$ ,  
& prolongée  $NI$  iusques à la circonference, comme en  $H$ , &  
menée  $GH$ . D'autant que  $BL$  est coupée en deux egale-  
ment en  $G$ , & inegalement en  $I$ , le rectangle compris sous  $BI$ ,  $IL$   
auec le quarré de  $GI$  est egal au quarré de  $GL$  (ou de  $GH$   
son egale) *par la 5. de ce livre*. Mais le quarré de  $GH$  est egal aux  
quarrés de  $GI$ , &  $IH$  (l'angle  $GIH$  estant droit d'un costé de  
la perpendiculaire  $HI$ , *par la construction*.) Il fonsuit donc que le  
rectangle de  $BI$ ,  $IL$  (c'est à dire  $BN$ ) auec le quarré de  $GI$   
est egal aux quarrés de  $HI$ , &  $IG$ . Mais le quarré commun de  
 $IG$  estant osté, le rectangle  $BN$  & le quarré de  $IH$  demeure-  
ront egaux.





# LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'ÉVCLIDE.

## DEFINITION PREMIÈRE.

**E**s cercles égaux sont ceux desquels les diamètres sont égaux : ou desquels les lignes menées du centre sont égales.

2. Vne ligne droite est dite toucher vn cercle, laquelle touchant le cercle, si elle est prolongée, ne coupe point le cercle.

3. Les cercles sont dits se toucher ensemble, quand se touchans l'un l'autre ils ne se coupent point ensemble.

4. Les lignes droites en vn cercle sont dites estre également distantes du centre, quand les perpendiculaires tirées du centre sur icelles sont égales. Mais celle se dit plus distante sur laquelle tombe la plus grande perpendiculaire.

5. Section de cercle est vne figure comprise d'une ligne droite & de la circonférence du cercle.

6. Mais l'angle de la section est celui qui est compris d'une ligne droite & de la circonférence du cercle.

7. Mais vn angle se dit estre en la section, celui compris de deux lignes droites menées des extremités de la ligne droite coupante, & lesquelles concourent en vn point qui est en la circonférence.

8. Mais quand les lignes droites comprenant l'angle, prennent quelque circonférence, en icelle est la grandeur de l'angle, qui se dit estre appuyé sur icelle.

9. Secteur de cercle est vne figure contenue de deux

ELEMENS D'EVCLIDE,  
 demy diametres faisans angle au centre, & d'une partie  
 de circonference prise par iceux.

10. Semblables sections de cercle sont celles qui reçoivent les angles égaux, ou bien esquelles les angles sont égaux entr'eux.

PROPOSITION I.

Trouver le centre d'un cercle donné.

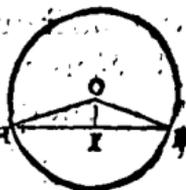
Soit dans le cercle CHIB tirée vne ligne contingente HB laquelle soit diuisée en deux également en O, duquel point soit tirée la perpendiculaire de costé & d'autre iusques à la circonference comme CI, & icelle soit diuisée en deux également comme en F. Si le point F n'est le centre du cercle, soit supposé vn autre point G, & soient menées GH, GB, GO. Lors GB sera égale à GH, & l'angle H sera égal à l'angle B, & les deux triangles compris de lignes égales seront égaux & equiangles. L'angle donc GOB sera égal à l'angle GOH, & par consequent tous deux droits: il faudra donc que l'angle droit GOB soit moindre que l'angle droit FOB, & l'angle droit GOH plus grand que le droit FOH: contre la 10. commune sentence: ce qui est absurde. Parquoy le centre ne sera point hors la ligne CI. que si en icelle on suppose vn autre point, les lignes tirées d'iceluy à C & I seront inégales contre la 15. definition.



PROPOSITION II.

Si en la circonference d'un cercle, l'on prend deux tels points qu'on voudra, la ligne droite menée de point à autre, tombera dedans le cercle.

Soient en vne circonference de cercle deux points comme HB, & soit menée la ligne HB, & icelle coupée en deux également en I, & menée la perpendiculaire IO, & soit le point O le centre du cercle par la precedente. Soient aussi menées HO, OB qui seront égales. D'aytant



que l'angle  $OIC$  est droit, il s'ensuit qu'il est plus grand que  $OBI$ , ou  $IOB$ , & que par conséquent la ligne  $OB$  est plus grande que  $OI$ . Dont est manifeste que la ligne  $HB$  est dans le cercle: car si elle estoit hors iceluy,  $OI$  seroit plus grand que  $OB$ , & si elle estoit en la mesme circonférence, le mesme  $OB$  seroit egal à  $OI$  par la définition du cercle.

## PROPOSITION III.

*Si au cercle quelque ligne droite passant par le centre, coupe quelque ligne droite ne passant pas par le centre, en deux également: elle la coupera aussi à droits angles; & si elle la coupe à droits angles, elle la coupera aussi en deux également.*

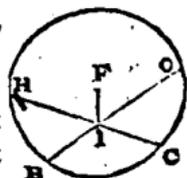
**A**V cercle  $CHOB$  soit la ligne  $CO$  estendue par le centre  $I$  coupant en deux également  $HB$ , qui ne passe point par le centre, soient menées  $IH$ ,  $IB$ . D'autant que les deux triangles sont equiangles, il s'ensuivra que les angles  $IFB$ , &  $IFH$  seront egaux, & par conséquent droicts. Pour le second, soit  $HB$  coupée par  $CO$  en angles droicts. D'autant que les angles sur la base  $H$  &  $B$  sont egaux, &  $IFB$ ,  $IFH$  aussi egaux par l'hypothese, & les costez  $HI$ ,  $IB$  egaux, l'autre angle sera egal à l'autre angle, & les autres costez aux autres costez par la 26. du premier. Dont s'ensuit que  $HF$  est egal à  $FB$ .



## PROPOSITION IIII.

*Si au cercle deux lignes droictes se coupent ensemble n'estans pas menées par le centre: elles ne se couperont point ensemble en deux parties egales.*

**S**Oient deux lignes  $HC$ ,  $BO$  au cercle  $HBCO$ , se coupant en  $I$ , & soit du centre  $F$  tirée  $FI$ . Si elles se coupent en deux également l'angle  $FIO$  sera droit par la precedente, & par conséquent egal à  $FIB$ , & s'ensuivroit aussi que l'angle droit  $FIB$  seroit egal à l'angle droit  $FIH$ . Ce qui ne peut



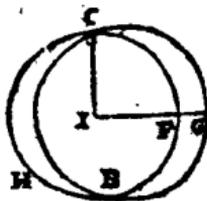
ELEMENS D'EVCLIDE,

estre, n'estant  $FIH$  que partie de  $FI B$ . Et quand mesme vne de ces lignes seroit couppee en deux egalement, il se demonstrera par mesmes raisons l'autre estre couppee inegalement. Tellement donc, si au cercle, &c.

PROPOSITION V.

si deux circonferences se couppent ensemble, elles n'auront pas vn mesme centre.

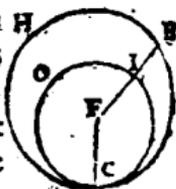
Soient deux circonferences se couppant en  $C$  &  $B$ . Si  $I$  est le centre des deux, soient menées  $IC$ ,  $IF$  &  $IG$ : il s'ensuivra par la definition du cercle, que les trois lignes  $IG$ ,  $IF$ ,  $IC$  seront egales (c'est à sçavoir la plus grande à la plus petite) ce qui ne peut estre contre la premiere commune sentence. Si donc deux circonferences, &c.



PROPOSITION VI.

si deux circonferences se touchent dedans, elles n'auront pas vn mesme centre.

Soient deux circonferences  $HBC$ ,  $OIC$  se touchans au point  $C$ , si  $F$  est le centre des deux, soient menées  $FC$ ,  $FI$ , &  $FB$ . Il s'ensuivra que les trois lignes  $FC$ ,  $FI$  &  $FB$  seront egales, c'est à sçavoir la partie  $FI$  au tout  $FB$ : ce qui ne peut estre. Si donc deux circonferences, &c.



PROPOSITION VII.

Si au diametre de cercle se prend quelque point qui ne soit pas le centre du cercle, & d'iceluy point tombent quelques lignes droictes en la circonference: la plus grande sera celle en laquelle est le centre, & la plus petite celle qui reste: Mais des autres tousiours la plus prochaine de celle qui est menée par le centre est plus grande que la plus loing. Et deux lignes droictes egales tant seulement tombent d'iceluy point au cercle, des deux parts de la plus petite.

Soit le diamètre  $HO$ , le centre  $I$ , & quelque point au diamètre qui ne soit point le centre du cercle comme  $F$ . Duquel point  $F$  soient tirées plusieurs lignes à la circonférence, comme  $FB, FC, FG, FO$ . Soient en apres tirez les demy diametres  $IB, IC, IG$ . d'autant que les deux costez  $BI$  &  $IF$  sont plus grands que  $FB$  par la 20. du 1. & que  $HF$  leur est egale,  $HF$  sera donc plus grande que  $BF$ , & semblablement plus grande que  $CF, GF, & OF$ , & à toutes autres lignes qui pourront estre tirées de  $F$ , car elle sera toujours egale aux deux costez du triangle. Et d'autant que  $BI, IF$  sont egaux à  $CI, IF$ , & que l'angle  $BIF$  est plus grand que l'angle  $CIF$ , la base  $BF$  sera plus grande que la base  $CF$ . Semblablement des autres. Et pource que le costé  $GI$  est moindre que les deux costez  $GF, FI$ , & que  $OI$  est egale à  $GI$ , icelle  $OI$  sera donc moindre que les deux  $GF, FI$ . La commune  $FI$  estant ostée, s'ensuiura  $FO$  estre plus petite que quelconque autre ligne tirée de  $F$  à la circonférence. La ligne donc qui passe par le centre est la plus grande, sçavoir  $FH$ , & l'autre restée plus petite, sçavoir  $FO$ . Des autres, celles qui sont plus proches du centre sont plus grandes que les plus estoignées. Pour le dernier, soit sur la ligne  $FI$  fait vn angle en  $I$  egal à  $GIF$ , & soit  $FIN$ , soit menée  $FN$  qui sera egale à  $FG$ . Il est euident qu'on ne pourra tirer du point  $F$  vne autre ligne à la circonférence de ceste mesme part qui ne s'approche du centre, & qui ne soit par consequent plus grande, ou qui ne s'en estoigne, & soit plus petite que  $FN$  par la demonstration de la premiere & seconde partie de ceste proposition.



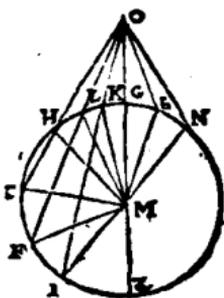
## PROPOSITION VIII.

Si dehors le cercle se prend quelque point, & d'iceluy point en la circonférence se menent quelques lignes droictes, desquelles l'une passe par le centre, & les autres où l'on vandra: des lignes droictes menées en la circonférence eue, la plus grande est celle qui passe par le centre: Et des autres toujours la plus pres de celle qui passe par le centre, est plus grande que la plus loin. Mais des lignes droictes tombant en la circonférence conuexe, celle est la plus petite qui est interposée entre le point & le diamètre: & des autres celle qui

ELEMENS D'EVCLIDE,

*est plus pres de la plus petite, est tousiours plus petite que celle qui en est plus loin. Et deux lignes droictes egales tant seulement tombent du mesme point à iceluy cercle des deux parts de la plus petite.*

Soit le point  $O$  donné hors le cercle, duquel soit tirée vne ligne par le centre iusques à la circonference caue  $OGMZ$ , soient aussi plusieurs autres lignes tirées du mesme point à la mesme circonference caue, comme  $OI, OF, OC,$  & autres lignes tirées du mesme point à la circonference conuexe, comme  $OH, OL, OK, OG.$  Soient menées  $MI, MF, MC, MH, ML, MK.$  D'autant que  $OZ$  est egale aux deux  $OM, MI,$  elle sera donc plus grande que  $OI$  par la 20. du premier.



Dauantage, pource que  $OM, MI$  sont egales à  $OM, MF,$  & que l'angle  $OMI$  est plus grand que l'angle  $OMF,$  il s'ensuiura que la base  $OI$  sera plus grande que la base  $OF,$  ainsi des autres, la plus proche du centre sera plus grande que la plus estoignée.

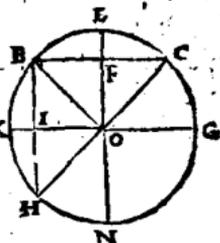
Au surplus, d'autant que  $OK, KM,$  sont plus grandes que  $OM,$  soient ostées les egales  $MK, MG,$  il s'ensuiura que la partie exterieure de la ligne qui passe par le centre (sçauoir  $GO$ ) sera plus courte que  $OK.$

Semblablement elle se demonstrera moindre que  $OL, OH.$  Et pource qu'au triangle  $OLM$  deux lignes droictes prouiennent des extremitéz de l'un des costez  $OM,$  & se joignent en vn point dans le triangle, icelles seront moindres que les autres par la 21. du premier. Or  $MK$  est egale à  $ML.$  La ligne donc  $OK$  sera moindre que  $OL:$  c'est à sçauoir, tousiours la plus proche de  $OG$  sera plus courte que la plus estoignée. Pour le dernier, soit sur  $OM$  & au point  $M$  fait vn angle egal à  $OMK:$  c'est à sçauoir  $OMB,$  soit jointe  $OB.$  Les deux costez  $OM, MB$  sont egaux aux deux costez  $OM, MK,$  & l'angle egal à l'angle, la base donc  $OB$  sera egale à  $OK$  de chacun costé de  $ZO:$  & ne se pourra donner aucune autre egale: car la plus estoignée sera plus grande, & la plus proche plus courte, comme il a esté demonstré.

## PROPOSITION IX.

Si on prend quelque point au cercle, & d'iceluy point en la circonférence tombent plus de deux lignes droictes égales, le point pris est le centre d'iceluy cercle.

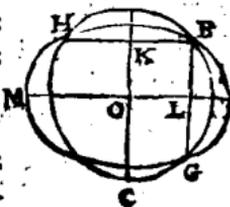
Soit pris vn point O dans le cercle NKL G duquel trois lignes OH, OB, OC, tirées à la circonférence soient égales. Soit menée BC, & coupée en F en deux également, & soit aussi menée FON. D'autant que les deux triangles OFB, & OFC sont equianglés & rectangles, la ligne NF est en angles droits sur BC: en icelle NF sera donc le centre du cercle par la 3. de ce livre. Semblablement BH coupée en deux également en I, & tirée IOG, se démontrera en celle-cy estre le centre du cercle, puis donc que la section O est commune à FN, & IG, il s'en suivra que O sera le centre du cercle.



## PROPOSITION X.

Vne circonférence ne coupe point vne autre circonférence en plus de deux points.

Si deux circonférences se coupent en trois points, comme en H, B, G, soient menées les lignes droictes HB, BG, & icelles coupées en deux également en K & L: soient de K & L menées en angles droits deux lignes droites KC, LM. Il est évident que la commune section O sera le centre des deux circonférences: ce qui ne peut estre contre la 5. proposition de ce livre. Si donc vne circonférence, &c.

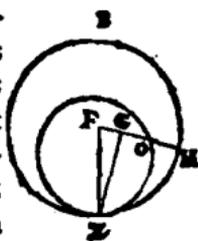


## PROPOSITION XI.

Si deux circonférences se touchent l'une l'autre dedans, & l'on prend les centres d'icelles: ayant mené vne ligne droicte à ceux centres & produicte, elle passera par l'atouchement des circonférences.

ELEMENS D'EVCLIDE,

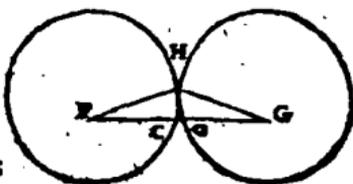
SOient deux circonferences se touchans intérieurement au point Z; soit le centre de la plus grande F, & menée ZF. Si le centre de la plus petite est hors ZF, posons estre en G, & soit menée FGOH, lors GO, & GZ seront égales: ZG & GF seront donc égales à OG & GF. Mais ZG, GF sont plus grands que ZF, la ligne OF sera donc plus grande que FZ. Ce qui est faux, n'estant FO que partie de FH, laquelle FH est égale à FZ procedant d'un mesme centre F, & tombant sur vne mesme circonférence ZHB, par la construction. Si donc deux circonferences, &c.



PROPOSITION XII.

Si deux circonferences se touchent l'une l'autre dehors, en menant vne ligne droite depuis les centres d'iceux, elle passera par iceluy attouchement.

SOient deux circonferences se touchant extérieurement en H; si la ligne droite qui conjoint leurs centres ne passe par H, soit icelle FCOG, & menées FH, & GH: ces deux sont plus grandes que FG. Mais F & G sont les centres, FH & FC seront donc égales, comme aussi GH, GO. Il s'en suivra donc que FC & GO seront plus grande que la toute FG. Ce qui est notoirement faux ( icelles estant moindres du residu CO. ) Si donc deux circonferences, &c.



PROPOSITION XIII.

Vne circonférence ne touche point vne circonférence en plus de points qu'un, soit qu'elle la touche dehors ou dedans.

SOient deux circonferences se touchans au dehors en deux points C, B ( si est possible ) si leurs centres sont L, O, la ligne droite LO passera par l'attouchement C,



elle passera aussi par B, par la précédente : tellement que LCO ne sera qu'une ligne droite égale à LO contre la 20. du 1. & par ainsi de point à autre sur un plan seroient menées deux lignes droites (ce qui ne se peut faire contre la quatrième définition, & contre la description de la ligne droite qui est la plus courte, tirée de point à autre.) Si les deux circonferences se touchent par dedans en deux points K, I. Icelles n'auront point un mesme centre par la cinquième de ce livre. Soient donc les centres G, H, & menée GH, laquelle prolongée tombera au point de l'attouchement K par la 11. de ce livre. Soit aussi tirée GI, laquelle sera égale à GK, & HI sera égale à HK, procédant d'un mesme centre. Or GH, HK sont égales à GH, HI. Il s'ensuivra donc que celles-cy seront égales à GI, contre la 20. proposition du premier. Tellement donc qu'une circonference ne touche point une circonference, &c.

## PROPOSITION XIII.

En une circonference les lignes droites égales, sont également distantes du centre, & celles qui sont également distantes du centre sont égales entr'elles.

Soient en la circonference BHC O deux lignes égales HB, CO, & le centre de la circonference I, auquel soient tirées les perpendiculaires IG, IF sur chacune : icelles HB, CO seront coupées en deux également, comme il a été montré. Soient aussi menées IH, IC qui seront égales. Or par la 47. du premier les quarteux de IG, IH sont égaux aux quarteux de HF, FI, & de CG, GI. Les deux égaux CG, & HF estans ostez resteront les quarteux de IG, & IF égaux, & par conséquent auront leurs costez IF, IG égaux. Il s'ensuit donc par la 4. définition de ce livre, que HB, CO sont également distantes du centre.



## PROPOSITION XV.

Au cercle la plus grande ligne est le diamètre : mais des autres toujours la plus pres du centre, est plus grande que la plus esloignée.

ELEMENS D'EVELIDÉ,

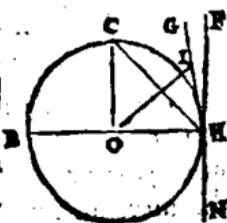
Soit le diametre du cercle  $HO$ , & le centre  $I$ , duquel la ligne  $BC$  soit plus proche que  $FG$ . Soient tirées les perpendiculaires  $IN, IK$ . Et d'autant que la ligne  $IK$  est plus grande que  $IN$  par la 4. definition de ce leure. Soit de celle-là ostée vne ligne egale à celle-cy comme  $IL$ , & au point  $L$  soit faicte la perpendiculaire  $MPL$ , soient conjointes  $IM, IF, IP, IG$ . D'autant que  $IN, IL$  sont egales,  $MP$ , &  $BC$  seront egales par la precelente. Et pource que les deux costez  $MI, IP$  sont plus grands que  $MP$ , il s'ensuira que le diametre  $HO$  (egal aux deux costez) sera plus grand que quelcōque autre ligne donnée dans le cercle. Et veu que les triangles  $MIP$  &  $FIG$  ont deux costez  $MI, IP$  egaux aux deux costez  $FI, IG$ , & l'angle  $MIP$  plus grand que  $FIG$ , la base  $MP$  sera plus grande que  $FG$ . Or  $MP$  a esté monstrée egale à  $BC$ : Icelle donc  $BC$  plus proche du centre sera plus grande que la plus esloignée  $FG$ .



PROPOSITION XVI.

La ligne droicte menée à droits angles à l'extremité du diametre de quelque cercle, tombera dehors iceluy cercle, & au lieu contenu entre icelle ligne droicte, & la circonference ne tombera pas vne autre ligne droicte, & l'angle du demy cercle est plus grand que tout angle rectiligne aigu, & celuy qui reste plus petit.

Soit le demy diametre du cercle  $OH$ , & du point  $H$  soit esleuée en angles droits  $NHF$ . Si la ligne  $FH$  tombe dans le cercle comme la ligne droicte  $CH$ . Soit du centre  $O$  menée la ligne droicte  $OC$ , le triangle  $COH$  sera isoscele, & aura les angles sur la base egaux. Mais l'angle  $OHF$  est posé droict, il s'ensuira donc que l'angle  $HCO$  sera droict contre la 17. du premier.  $FH$  ne tombera donc point dans le cercle. Pour le second, si entre la ligne,  $FH$  & la circonference pouuoit tomber vne ligne droicte comme  $GH$ , soit sur icelle du centre  $O$  tirée vne perpendiculaire  $OI$ , l'angle  $OIH$  sera droict, & par consequent la ligne  $OH$  plus grande que  $OI$ , par la 19. du premier. Mais  $OI$  pētre la circonference, &  $OH$  la touche seulement:  $OI$  sera donc plus

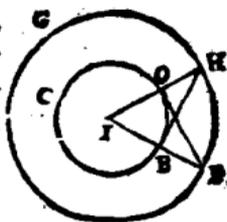


grande que OH. Or elle a esté dicté plus grande ( ce qui ne peut estre. ) Il ne tombera donc aucune ligne droicte entre FH & la circonference. De là s'ensuiura que l'angle ( si ainsi se doit appeller ) compris par la circonference, & par le diametre sera plus grand ou plus ouuert qu'aucun angle rectiligne aigu : & que l'autre entre la circonference & la ligne de l'attouchement FH sera moindre. On peut de cecy recueillir que la ligne droicte FHN touche le cercle en vn seul point.

## PROPOSITION XVII.

*Du point donné mener vne ligne droicte, qui touche le cercle donné.*

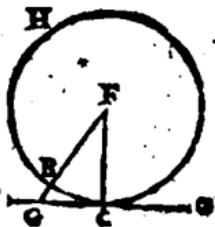
SOit le point donné H, le cercle donné BOC, du centre I soit tirée IH coupant la circonference en O. soit décrit vn cercle du centre I, & de l'interualle IH comme HGF : & du point O soit menée en angles droitz OF iusques à la circonference, & soit jointe IF, BH. D'autant que les deux costez HI, IB sont egaux aux deux costez FI, IO, & l'angle I commun, la base HB sera egale à la base FO par la 4. du premier, & les autres angles aux autres angles, sçauoir IOF à IBH. Mais IOF est droit, & la ligne OF touche le cercle donné au point O par ce qui resulte de la precedente. Dont s'ensuit que l'angle HBI sera droit, & la ligne droicte HB touchera le cercle donné suiuant la proposition.



## PROPOSITION XVIII.

*Vne ligne droicte touche vn cercle, & du centre à l'attouchement est menée vne ligne droicte, la menée sera perpendiculaire à l'attouchante.*

SOit la ligne droicte NO touchant le cercle au point C du centre F soit tirée FC, si FCN n'est angle droit, soit tirée vne autre ligne en angles droitz sur NO comme FG. D'autant que FGC est droit, il s'ensuiura que la ligne FC subtendante sera plus grande que FG par la 19. du premier, mais elle est plus petite du re-



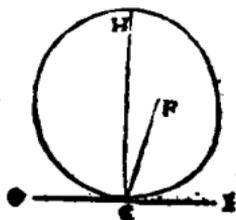
ELEMENTS D'EUCLIDE,

sidu BG (estant seulement egale à FB) il ne se pourra donc tirer du centre aucune autre ligne en angles droits sur NO que FC, sur le point de l'attouchement C.

PROPOSITION XIX.

Si vne ligne droicte touche vn cercle, & on mene de l'attouchement vne ligne droicte à droits angles sur la touchante, le centre du cercle sera en la menée.

Soit la ligne droicte OI, touchant le cercle en C, & du point C soit esleuée en angles droits CH. Si le centre du cercle n'est en la ligne CH, soit s'il est possible en F, & soit tirée FC, celle-cy sera en angles droits sur OI par la precedente: FCI sera donc droit. Mais il est moindre que l'angle HCI qui a esté fait droit (ce qui est impossible) le centre du cercle ne sera donc point hors la ligne HC.



PROPOSITION XX.

Au cercle l'angle du centre est double à l'angle qui est en la circonférence, quant iceux angles ont pour base vne mesme circonférence.

Soit sur la base circulaire BC l'angle au centre BIC, & l'angle en la circonférence BHC, & soit menée HF: le triangle HIB sera isocèle, & l'angle extérieur BIF est égal aux angles HBI & BHI, par la 32. du premier: l'angle BIF sera donc double à BHI. Semblablement se démontrera de l'angle FIC. Mais si le centre est hors des lignes, comme pour exemple de l'angle BOC, soit tirée OIN. L'angle extérieur NIC est égal aux intérieurs IOC, & ICO, & par conséquent double à IOC. Comme aussi NIB est égal à NOB & IBO, & par conséquent double à IOB. Si donc le double NIB est osté du double NIC, & le simple IOB du simple IOC, le restant BIC sera double au restant BOC. De cory résulte que si la base subcendse les angles



les angles, excède la moitié de la circonférence, elle se pourra diuifer en plusieurs piéces pour faire plusieurs angles au centre qui se démonstrent doubles à ceux de la circonférence.

PROPOSITION XXI.

*Au cercle les angles qui sont en vne mesme section, sont egaux entr'eux.*

Soit la section du cercle BCO fermée de la ligne droicte BO, & les angles sur icelle BHO & BIO. Soit le centre du cercle F, & menée FB, FO. D'autant que par la precedente l'angle BHO est la moitié de l'angle BFO, corame aussi BIO est la moitié du meisme BFO, il s'ensuiura par la 7. commune sentence, qu'iceux angles BHO & BIO seront egaux.



PROPOSITION XXII.

*Les angles opposés des figures de quatre costez descrites aux cercles, sont egaux à deux droits.*

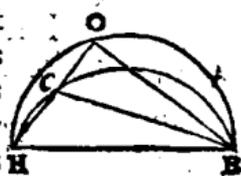
Soit au cercle le quadrilatere HBCO, & menées les lignes HC, OB les angles HBO & HCO sont egaux, & OBC & OHC estans sur mesmes sections par la precedente: tout l'angle donc HBC sera egal aux deux angles CHO & OCH. Tellement que tout l'angle HOC, & l'angle HBC ensemble seront egaux à deux droits par la 32. du 1. Semblablement se démonstrent les angles BHO & BCO, egaux à deux droits.



PROPOSITION XXIII.

*Dessus vne mesme ligne droicte, deux sections de cercles semblables & inegales ne se mettront pas d'vne mesme part.*

Soit la ligne droicte HB sur laquelle s'il est possible soient d'vne mesme part menées deux sections de cercles semblables & inegales comme HCB & HOB. Soit tirée la ligne droicte HC iusques à O, & les lignes droictes BC, BO. D'autant que les sections sont sem-

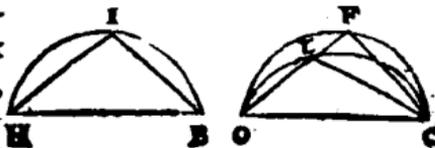


ELEMENS D'EVCLIDE,  
 blables & inegales, l'angle H C B sera egal à l'angle H O B par la  
 10. definition de ce livre ( c'est à dire l'exterieur à l'interieur contre la  
 16. du premier ) sur vne mesme ligne, donc, &c.

PROPOSITION XXIII.

*Les semblables sections de cercles dessus lignes droictes  
 egales, sont egales entr'elles.*

**S**Oient sur deux lignes droi-  
 ctes egales HB, OC deux  
 sections de cercles egales,  
 sçauoir HIB & OFC, les an-  
 gles HIB & OFC seront

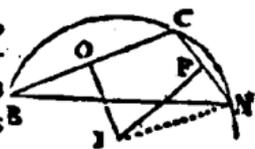


egaux par la 21. de ce liure. Et soit, si faire se peut, vne autre section  
 sur OC comme OLC semblable, mais inegale à B I H. Soit  
 menée CL au point L où la circonference est couppée par le li-  
 gne droicte OF. D'autant que les sections sont semblables, l'an-  
 gle OLC sera egal à l'angle HIB, & par consequent à OFC  
 son egal, c'est à dire l'exterieur à l'interieur opposé contre la 16. du  
 premier. Les sections donc sur lignes egales, &c.

PROPOSITION XXV.

*Ayant donné la section du cercle, descrire le cercle  
 duquel elle est la section.*

**S**Oit la section de cercle donnée BCN,  
 en laquelle soient menées cōme on vou-  
 dra deux lignes droictes non paralleles  
 comme BC, CN, lesquelles soient couppées  
 en deux egalement comme en O, F, & soient



tirées les perpendiculaires OI, FI, il s'ensuiura ( comme on peut  
 recueillir de la premiere de ce liure ) que le centre du cercle sera  
 és deux perpendiculaires, c'est à sçauoir au point commun I. Tel-  
 lement donc que du centre I, & de l'interualle IN on pourra  
 parfaire le cercle duquel BCN est la section donnée.

PROPOSITION XXVI.

*Aux cercles egaux, les angles egaux s'appuyent dessus les cir-  
 conferences egales, soit qu'ils s'appuyens estans constitués  
 aux centres, ou aux circonférences.*

Soient deux cercles égaux HBC, OI D, & les angles du centre BGC, IND égaux, comme aussi ceux de la circonférence BHC, IO D, les lignes BG, GC sont égales aux lignes IN, ND qui comprennent angles égaux: la ligne droite donc BC sera égale à la ligne droite ID, c'est à dire la base à la base par la 4. du 1. Or d'autant que les angles H & O sont égaux estans moitié des angles du centre G, N, par la 20. de ce livre. les sections des cercles seront semblables par la 10. définition de ce livre, c'est à sçavoir BHC, & DOI. Mais les sections BHC, & DOI, sur les lignes droites égales BC, ID, seront égales par la 24. de ce livre. Les sections donc restées comme aussi les circonférences BKC, & DLI seront égales.



**PROPOSITION XXVII.**  
Aux cercles égaux, les angles qui s'appuyent dessus les circonférences égales, sont égaux entr'eux, soit qu'ils s'appuyent estans constitués aux centres, ou aux circonférences.

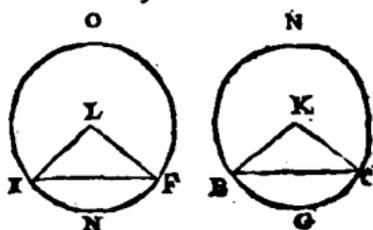
Soit aux deux cercles égaux SHBC, FON & sur deux circonférences égales BC, NF les angles de la circonférence H & O. Premièrement si l'angle I n'est égal à l'angle BGC, qu'il soit estimé moindre, & sur la ligne BG, & au point G soit décrit un angle égal à I, comme B GK par la 23. du 1. La circonférence donc BK sera égale à la circonférence NE par la précédente. Mais par l'hypothèse BC est aussi égale à NF. La plus courte donc BK sera égale à la plus grande BC: ce qui est absurde & faux. Les angles donc du centre BGC, NIF ne sont point inégaux. Et partant les angles H, & O qui sont moitié des angles du centre seront aussi égaux par la 7. commune sentence.



**PROPOSITION XXVIII.**  
Aux cercles égaux, les lignes droites égales, prennent les circonférences égales, la plus grande à la plus grande, & la plus petite à la plus petite.

ELEMENTS D'EUCLIDE,

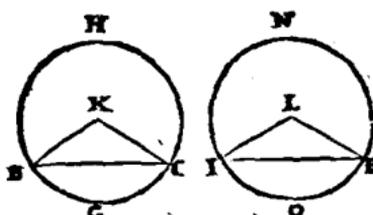
Soient en cercles egaux deux lignes droictes egales  $IF, BC$ : soient les centres d'iceux  $L, K$  & menées  $IL, LF, BK, KC$ : les deux triangles  $ILF, BKC$  seront egaux & equiangles par la 8. du 1. L'angle  $L$  sera donc egal à l'angle  $K$ , & consisteront iceux en circonferences egales par la 26. de ce livre, c'est à sçauoir en  $IOF$ , &  $BHC$  plus grandes: par ainsi les restes, c'est à sçauoir  $INF$ , &  $BGC$  plus petites seront egales par la 3. commune sentence, estans les deux cercles egaux par l'hypotheze.



PROPOSITION XXIX.

Aux cercles egaux, les circonferences egales sont prises de lignes droictes egales.

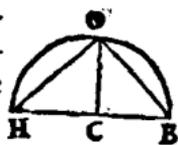
Soient en cercles egaux & en circonferences egales deux lignes droictes subtendues, comme  $BC, IF$ . Soient les centres des cercles  $K$  &  $L$ , & menées  $BK, KC, IL, LF$ . D'autant que les circonferences  $BHC$  &  $FNI$  sont posées egales, les restes  $BGC$ , &  $FOI$  seront aussi egales: les angles  $K$  &  $L$  seront donc egaux par la 27. de ce livre. Et par la 4. du premier, la base sera egale à la base (c'est à sçauoir la ligne droicte  $BC$  à la ligne droicte  $IF$ .)



PROPOSITION XXX.

Couper vne circonferance en deux egalement.

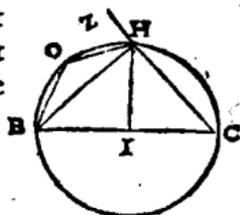
Soit la circonferance donnée  $HOB$ . & soit menée la subtendante  $HB$ , sur laquelle estant coupée en deux egalement au point  $C$ , & sur le mesme point  $C$  soit esleuée  $CO$  en angles droits & jointes les lignes droictes  $HO, OB$ . D'autant que les costez  $HC, CO$  sont egaux aux deux costez  $BC, CO$ , & comprennent angles egaux, la base  $HO$  sera egale à la base  $BO$ , lesquelles bases comprendront circonferences egales, c'est à sçauoir l'arc  $HO$ , & l'arc  $OB$  le plus petit au plus petit par la 28. de ce livre.



## PROPOSITION XXXI.

Au cercle, l'angle qui est au demy cercle est droit : & celuy qui est en la plus grande section est plus petit qu'un droit : mais celuy qui est en la plus petite section, est plus grand qu'un droit. Et d'avantage l'angle de la plus grande section, est bien plus grand qu'un droit : mais l'angle de la plus petite section est plus petit qu'un droit.

AV cercle HOBC duquelle centre I soit l'angle CHB dans le demy cercle. Soit mené le diametre BIC. & en la plus grande section soit l'angle HCB, & en la moindre soit l'angle HOB. L'angle mixte de la plus grande section soit compris de la ligne droite BH & de l'arc HC, & l'angle mixte de la moindre soit compris de la mesme BH & de l'arc HO. Soit prolongée la ligne droite CH en Z & menée IH. D'autant que les angles ICH, IHC sont egaux, comme aussi IBH, BHI, tout l'angle BHC sera egal aux angles HBI, HCI : & à ces deux-cy est egal l'angle extérieur ZHB par la 32. du 1. Il s'ensuivra donc que les angles ZHB, & BHC seront egaux, & par consequent droits par la 10. definition du 1. & par la 13. proposition. L'angle donc qui est au demy cercle est droit.



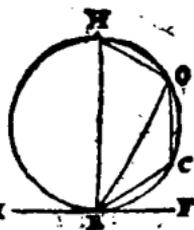
Pour le second l'angle de la plus grande section, sçavoir HCB a esté moindre qu'un droit : mais aux figures quadrilateres descrites en un cercle, les angles opposez sont egaux à deux droits par la 22. de ce livre.. L'angle BOH sera donc plus grand qu'un droit. Pour le dernier, l'angle mixte BHC comprenant l'angle droit sera plus grand que le droit : & l'angle mixte de la plus petite section BHO moindre que ZHB qui a esté monstré droit.

## PROPOSITION XXXII.

Si quelque ligne droite touche le cercle, & de l'attouchemen on meine quelque ligne droite couppant le cercle: les angles qu'elle fait à la touchante, sont egaux à ceux qui consistent aux sections alternes du cercle.

ELEMENS D'EVCLIDE,

Soit la ligne droicte IF touchant le cercle au point B, duquel point soit tirée la ligne droicte BO coupant le cercle. Soit aussi esleuée en angles droits BH & menée HO. D'autant que l'angle HOB est droit estant au demy cercle les angles OHB & OBH seront egaux à vn droit (c'est à dire à FBH:) soit osté le commun OBH, il s'ensuivra que OHB ( qui est en la plus grande section) & OBF seront egaux. Maintenant soient menées OC, CB. D'autant qu'aux quadrilateres inscrits au cercle les angles opposez sont egaux à deux droits par la 22. de ce livre, les angles OHB, & OCB opposez, & qui consistent es sections alternes seront egaux aux angles OBI, & OBF qui valent deux droits. Mais OBF a esté monstré egal à OHB. Il s'ensuivra donc que OCB qui est en la plus petite section sera egal à OBI.



PROPOSITION XXXIII.

Deffus vne ligne droicte donnée descrive la section d'un cercle, prenant vn angle egal à vn angle rectiligne donné.

Soit la ligne droicte donnée BH, & l'angle donné C. Sur BH au point H soit descrit vn angle egal à C comme OHB. Soit prolongée OH vers I. Du point H soit menée en angles droits sur OI la ligne droicte HGL. Soit HB couppee en deux egalement en F. Du point F soit menée en angles droits FG, & tirée GB. D'autant que les deux triangles HFG, & BFG ont deux costez egaux aux deux costez, & l'angle à l'angle, la base HG sera egalé à la base GB. Soit maintenant sur le centre G à la distance GB descrit le cercle HBL & menée BL. Il sera evident que HL sera le diametre, lequel estant en angles droits sur OI, la ligne OI touchera seulement le cercle au point H. Or par la precedente l'angle OHB est egal à l'angle HLB: la plus grande section donc HLB comprendra l'angle L egal à l'angle donné C. Que si l'angle estoit obtus comme BHI, li seroit demonsté egal à l'angle de l'autre section HKB. S'il estoit droit, faudroit seulement descriver vn demy cercle sur la ligne donnée HB. Lequel comprendroit l'angle droit, comme il a esté monstré.



## PROPOSITION XXXIII.

*Couper la section du cercle donné, prenant un angle égal à un angle rectiligne donné.*

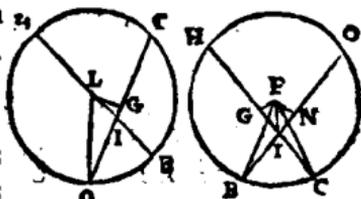
Soit le cercle donné HBC, & l'angle donné O, & la ligne touchant le cercle IF au point B par la 17. de ce livre. sur la ligne IB au point B soit décrit l'angle HBI égal à O: iceluy mesme sera égal à l'angle de la section plus grande HCB, c'est à sçavoir à l'angle rectiligne C par la 32. de ce livre. De mesme si l'angle donné est égal à CBI se démontrera l'angle de la section CB luy estre égal.



## PROPOSITION XXXV.

*Si au cercle deux lignes droictes se coupent l'une l'autre, le rectangle contenu des deux pieces de l'une, est égal au rectangle contenu des deux pieces de l'autre.*

Soient deux lignes droictes en un cercle HC, OB se coupant en I. Soit du centre F tirées les perpendiculaires FG, FN, & menées les lignes droictes FB, FC, FI. D'autant que les lignes FG, & FN coupent les lignes HC & OB également par la 3. de ce livre, & FI les coupent inégalement, le rectangle compris de HI, IC avec le carré de IG sera égal au carré de GC. Or pource que par la 47. du premier, les quarez de CG & GF sont égaux au carré de FC, il s'ensuivra que le rectangle sous HI, IC ensemble les quarez de GIGF (c'est à dire le carré de FI) seront égaux au carré de FC. Ainsi se démontrera que le rectangle sous OI, IB avec le carré de FI sera égal au carré de FB. Si donc le commun FI est osté, il s'ensuivra le rectangle des pieces de l'une estre égal au rectangle des lignes de l'autre. Secondement si l'une des pieces seulement est coupée inégalement en angles droits, icelle sera le diamètre du cercle. Et comme on peut recueillir par la dernière du second, le rectangle compris des pieces inégales sera égal au carré de la moitié de l'autre qui est coupée également.



ELEMENS D'EVCLIDE,

diametre & l'autre ligne se couppent inegalement comme HB, CO au point I, le rectángie de HI, IB avec le quarré de IL sera egal au quarré de LB ou LO. Et le rectangle de CI, IO avec le quarré de IG sera egal au quarré de GO. Mais les quarez de LG, GI sont egaux au quarré de LI. Ils'ensuiura donc que le rectangle de CI, IO avec le quarré de LI sera egal aux quarez de GO, GL, c'est à dire au quarré de la ligne LO egale à LB. Si donc le quarré commun de EI est osté, les deux rectangles de HI, IB, & de CI, IO demeureront egaux.

PROPOSITION XXXVI.

si dehors le cercle l'on prend quelque point, & d'iceluy au cercle tombent deux lignes droictes, l'une desquelles coupe le cercle, & l'autre le touche: Le rectangle contenu de toute la coupante & de sa partie dehors prise entre le point & la circonference convexe, est egal au quarré qui est descript de la touchante.

SOit pris hors le cercle vn point comme O duquel procedent deux lignes droictes, l'une qui touche le cercle OB, & l'autre qui le coupe premieremēt par le centre comme OLC. D'autant que *par la 6. du 2.* le rectangle compris de la toute avec l'apposée, sçauoir OC & de l'apposée OI, avec le quarré de la moitié EI (ou LB son egale) est egal au quarré de la moitié & de l'apposée cōme d'une, sçauoir LO, & que les quarez de OB & de BL sont egaux au quarré de la mesme OL: il s'ensuiura le commun BL ou LI estant osté que le quarré de BO sera egal au rectangle de CO, OI.



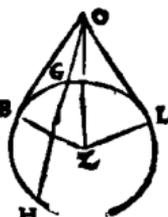
Pour le second, si la ligne ne coupe le cercle par le centre cōme OGH, à laquelle soit du centre tirée vne perpendiculaire LZ. Il est euident que HG sera couppée egalement, & soit menée LG. D'autant que *par la 6. du 2.* le rectangle sous HO, OG avec le quarré de GZ est egal au quarré de OZ, leur soit adiousté vn quarré commun ZL. Lors le contenu sous HO, OG avec les quarez de GZ, ZL (c'est à dire le quarré de GL) sera egal aux quarez de OZ & de ZL (c'est à dire au quarré de OL.) Mais les quarez de OB & de BL sont egaux au mesme quarré de OL. Il s'ensuiura donc que les quarez de OB, & de

BL seront egaux au rectangle de HO, OG & au carré de GL, ou BL. Le commun donc estant osté resteront le carré de OB, & le rectangle de HO, OG egaux.

## PROPOSITION XXXVII.

Si dehors le cercle l'on prend quelque point, & d'iceluy point tombent deux lignes droites au cercle, desquelles l'une coupe le cercle, & l'autre se repose: & soit le rectangle contenu de toute la coupante, & de la piece prise entre le point & la circonference convexe egal au carré décrit de celle qui se repose, celle qui se repose touchera le cercle.

Soit O le point hors le cercle, duquel point procedent deux lignes droites, dont l'une le coupe comme OGH, & l'autre tombe seulement sus iceluy comme OB. Soit pris le centre Z, & menées les lignes droites ZB, ZO, & du point O soit menée la ligne droite OL qui touche seulement le cercle par la 7. de ce livre, & soit menée la droite ZL. D'autant que par l'hypothese le rectangle compris sous HO, OG est egal au carré de OB, & que par la precedente le mesme rectangle est egal au carré de OL, icelles OB, OL seront egales. Et pour ce que les deux costez OB, BZ sont egaux aux deux costez OL, LZ & que la base est commune, l'angle OBZ sera egal à l'angle droit OLZ par la 8. du 1. li. & sera par consequent droit, & pourtant la ligne droite OB tombera en angles droicts sur l'extremité du diametre, & touchera seulement le cercle comme on peut recueillir par la 16. de ce livre.



FIN DV TROISIÈSME LIVRE.



## LE QUATRIESME LIVRE DES ELEMENS D'EVCLIDE.

### DEFINITION PREMIERE.

**V**NE figure rectiligne se dit estre inscrite en vne figure rectiligne, quand vn chacun des angles de la figure inscrite touche vn chacun costé de la figure en laquelle elle est inscrite.

2. Semblablement aussi la figure se dit estre circonscripte à la figure, quand vn chacun costé de la circonscripte touche vn chacun angle de l'inscrite.

3. La figure rectiligne se dit estre inscrite au cercle, quand vn chacun angle de la figure inscrite touche la circonference du cercle.

4. Mais la figure rectiligne se dit estre circonscripte au cercle, quand vn chacun des costez de la figure circonscripte touche la circonference du cercle.

5. Semblablement aussi le cercle se dit estre inscrit en vne figure rectiligne, quand la circonference du cercle touche vn chacun costé de la figure en laquelle il est inscrit.

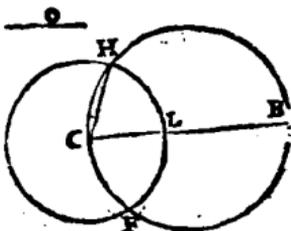
6. Mais le cercle se dit estre circonscript à vne figure, quand la circonference du cercle touche vn chacun des angles de la figure à l'entour de laquelle il est descript.

7. Vne ligne droicte se dit estre accommodés ou enfermée au cercle, quand les extremités d'icelle sont en la circonference du cercle.

## PROPOSITION I.

Au cercle donné, accommoder vne ligne droicte egale à vne ligne droicte donnée, qui ne soit pas plus grande que le diametre du cercle.

Soit le cercle donné  $CHBF$  & la ligne droicte donnée  $O$  moindre que le diametre du cercle  $CB$  de la ligne  $CB$  soit ostée vne ligne egale à  $O$  par la 3. du 1. liure, & soit  $CL$  du centre  $C$  à la distance  $CL$  soit d'escript vn cercle qui coupera le cercle donné cōme au point  $H$ : soit menée la ligne droicte  $CH$ , d'autant que celle-cy est egale à  $CL$ , &  $CL$  egale à la mesme  $O$  par l'hypothese. Il s'ensuiura que  $O$  sera egale à  $CH$ , laquelle  $CH$  est par ce moyen accommodée au cercle donné. Que si la ligne donnée est egale au diametre du cercle donné, nous auons ce qui est requis.



## PROPOSITION II.

Dans vn cercle donné, descrire vn triangle equiangle au triangle donné.

Soit le cercle donné  $NBC$  & le triangle donné  $OLF$ . soit menée la ligne droicte  $GNH$ , en sorte qu'elle touche seulement le cercle, comme au point  $N$ : duquel & sur la ligne  $GN$  soit descript vn angle egal à  $L$ , comme  $GNB$ . Soit aussi fait l'angle  $HNC$  egal à l'angle  $F$ , & soit menée directement  $BC$ . d'autant que les trois angles d'un triangle sont egaux à deux droits, l'angle  $BNC$  fera egal à l'angle  $O$ . mais l'angle  $C$  en la plus grande section, est egal à l'angle  $GNB$  par la 32. du 3. liure: il s'ensuiura donc que l'angle  $B$  sera egal à  $HNC$  (c'est à dire à  $F$  son egal) ainsi donc le triangle  $NBC$  dans le cercle donné, est equiangle au triangle donné.

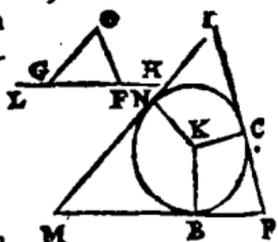


## PROPOSITION III.

A l'entour d'un cercle donné descrire vn triangle equiangle au triangle donné.

ELEMENS D'EVCLIDE,

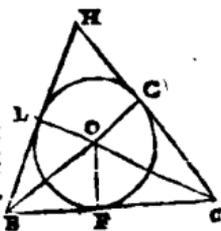
Soit le triangle donné  $OGF$ , pour en descrire vn equiangle à l'entour du cercle donné, duquelle centre soit  $K$ : auquel  $K$ , soit fait vn angle comme  $NKB$ , egal à l'angle extérieur  $LGO$ , & l'angle  $BKC$  egal à l'autre angle extérieur du triangle  $HFO$ . Soient aux trois extremitez  $N, B, C$ , tirées trois lignes touchantes seulement le cercle  $MI, IP, PM$ . d'autant que le quadrilatere  $MNKB$  peut estre inscrit en vn cercle ayant deux angles  $N$  &  $B$ , droits (comme on peut recueillir de la 22. du 3. liure) les angles opposez seront egaux à deux droits. mais  $NKB$  a esté fait egal à  $LGO$ : il s'ensuit donc que l'angle  $M$  est egal à l'angle  $FGO$  estant cestuy avec l'extérieur egal à deux droits, par la 13. du 1. liure. Par semblable argument nous demonstrerons les autres angles egaux aux autres angles: tellement que le triangle  $IPM$  est equiangle à  $OGF$ , & est circonscrit au cercle donné.



PROPOSITION III.

Dans vn triangle donné descrire vn cercle.

Soit le triangle donné  $HBC$  duquel les deux angles  $B$  &  $C$  sont coupeez en deux également par deux lignes qui se r'entrecroiseront comme en  $O$ , duquel point  $O$  soient tirées les perpendiculaires sur chacun costé comme  $OF, OG, OL$ , icelles seront egales par la 4. du 1. liure, estant les bases des quatre triangles egaux & equiangles. Si donc du centre  $O$  à la distance  $OF$  on tire vn cercle, il touchera seulement les trois costez du triangle, comme on peut recueillir de la 16. du 3. liure.



PROPOSITION V.

A l'entour d'un triangle donné descrire vn cercle.

Soit premierement le triangle oxygone donné  $SHBC$ , duquel les deux costez (qui ne comprennent point l'angle plus aigu) soient coupeez en deux également comme en  $O, L$ : & d'iceux points soient tirées les perpendiculaires  $OF, LF$  & menées  $FB, FC$ . il est euident que les deux triangles  $B$



rectangles HLF, CLF sont égaux & equiangles *par la 4. du premier livre.* La ligne HF fera donc égale à FC, mais HF est aussi commune au triangle HOF, & ce triangle est égal & equiangle au triangle BOF. il s'ensuit donc que la ligne BF est égale à FH, & par conséquent à FC. si donc du centre F, à la distance FH on décrit un cercle, la circonférence passera par les points HBC à l'entour du triangle. Par semblables arguments se démonstreront les cercles pouvoir estre circonscrits à l'entour des triangles, soit rectangles, ambligones ou oxygones.

## PROPOSITION VI.

*Dans un cercle donné describe un carré.*

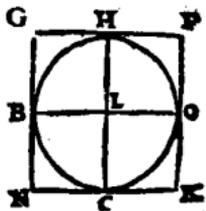
Soient tirez les deux diamètres du cercle proposé HC, BO se couppans en angles droits au centre L, & soient menées les lignes droictes HB, BC, CO, OH. les quatre triangles sont rectangles isosceles égaux & equiangles, & ont leurs bases égales *par la 4. du 1. livre.* la figure d'oc HB, CO sera equilater. mais chacun angle sur la base vaut un demy droit comme BCL *par la construction*, comme aussi OCL: il s'ensuura donc que tout l'angle BCO sera droit. Semblable demonstration se fera des autres angles: dont s'ensuura que HB CO sera un carré inscrit au cercle donné.



## PROPOSITION VII.

*A l'entour d'un cercle donné describe un carré.*

Soient du cercle donné les deux diamètres HC, BD se couppans en angles droits au centre L, du point B soit menée en angles droits sur OB, la ligne GN (c'est à dire parallele à CH) soit aussi du point O menée l'autre parallele FO K: & des points H & C les autres GHF & NCK paralleles à BO. d'autant que les angles qui sont en L sont droits, comme aussi ceux qui sont en H, B, C, O, il s'ensuura que les quatre angles G, N, K, F, seront aussi droits *par la 34. du 1.* Or est la figure equilater. ayant un chacun costé égal au diamètre, elle sera donc carrée describe à l'entour du cercle.



ELEMENS D'EVCLIDI,  
PROPOSITION VIII.

Dans vn quarré donné descrire vn cercle.

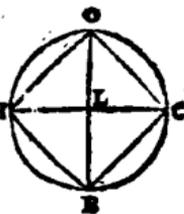
Si le quarré donné a les quatre costez coupez également, & menées les deux lignes droictes L H, F S, elles se couperont en G en augles droits & également: car L H est parallele & egale à I O, ou M B, & F S parallele & egale à M I, ou B O par la 34. du 1. liure, les angles rectilignes d'ic qui sont en L, F, H, S, sont droits: tellement que si on descrit sur le centre G vn cercle à l'intervalle G L, il touchera seulement les quatre costez du quarré es points L, F, H, S. comme on peut enuoir par la 16. du 3. liure, ainsi sera le cercle inscrit au quarré donné.



PROPOSITION IX.

A l'entour d'un quarré donné descrire vn cercle.

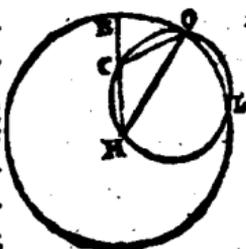
Soient du cercle proposé tirez les deux diametres ou diagonales H C, O E, d'autant que les deux triangles O H E, & O C E sont isosceles, egaux & equiangles par la 4. du 1. liure, chacun des angles rectilignes qui sont sur les bases vaudra vn demy droit, & les angles du centre seront droits par la 32. du 1. liure, & les lignes L O, L H, L E, L C egales. Si donc du centre L à l'intervalle L O on descrit vn cercle, il passera par les points O, H, E, C, & sera circonscrit au quarré donné.



PROPOSITION X.

Faire vn triangle isoscele, ayant vn chacun des angles qui sont en la base double à l'autre.

Soit proposée vne ligne droite B H, laquelle par la 11. du 2. liure soit tellement coupée en C, que le rectagle fait de la toute H B, & de l'une des parties B C soit egal au quarré de l'autre piece H C. & du centre H, à l'intervalle H B soit descrit vn cercle B O L, auquel par la 1. de ce liure soit appliquée vne ligne

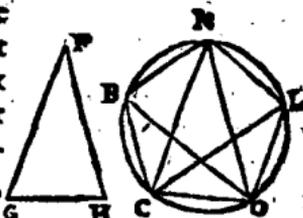


droicte egale à  $CH$ , comme  $BO$ , & soit menées  $CO$ ,  $HO$ . du triangle  $HCO$  soit décrit le cercle  $HCOL$  par la 5. de ce livre. Puis que du point  $B$  hors le cercle, la ligne droicte  $BH$  le coupe &  $BO$  tombe sur iceluy, & que le rectangle de  $HB, BC$  est egal au carré de  $CH$  (ou  $BO$  son egale) il sensuivra que la ligne droicte  $BQ$  touchera seulement le cercle  $HCOL$  par la 37. du 3. livre, l'angle donc  $COB$  sur la ligne touchante le cercle, sera egal à l'angle  $OHC$ , qui est en la section alterne par la 32. du 3. livre, soit maintenant adiousté le cōmun  $COH$ : les deux  $BOC$  &  $COH$  seront egaux aux deux  $CHO$ , &  $COH$ . mais l'angle exterior  $OCB$  est egal aux intérieurs  $CHO$  &  $COH$  par la 32. du 1. livre, il sera donc aussi egal au tout  $BOH$ , & par consequent à l'angle  $HBO$  qui luy est egal, estant le triangle  $HBO$  isoscele: & les lignes  $CO$ ,  $OB$  seront egales comme subtendentes angles egaux, mais  $BO$  a esté posée egale à  $CH$ :  $CO$  sera donc aussi egale à la mesme, & le triangle  $HCO$  sera isoscele: tellement que l'angle sur la base, sçavoir  $BOH$  sera double à l'angle  $BHO$ , comme aussi sera l'autre angle  $OHB$ .

## PROPOSITION XI.

Dans un cercle donné, descrire un pentagone  
equilateral & equiangle.

Soit inscrit au cercle donné un triangle isoscele  $NCO$ , comme il a esté décrit en la precedete, & soient les angles egaux de la base coupez en deux egalement par lignes finissans en la circonference comme  $CL$ ,  $OB$ , & menées  $NB$ ,  $BC$ ,  $CO$ ,  $OL$ ,  $LN$ , il est evident que les angles  $OCL$ ,  $LCN$ ,  $NOB$ ,  $BOC$ ,  $CNO$  estans egaux consistont sur sections de circonferences egales, comme on peut recueillir tant de la 21. que 26. du 3. livre. Or ces cinq angles sont sur sections qui comprennent toute la circonference, le pentagone donc  $NBCOL$  sera equilateral & equiangle.

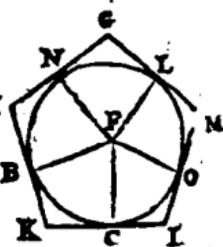


## PROPOSITION XII.

A l'entour d'un cercle donné descrire un pentagone  
equilateral & equiangle.

ELEMENS D'EVCLIDE,

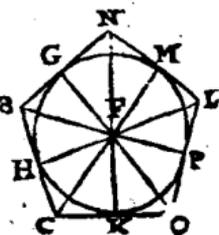
Soient au cercle donné pris cinq points designans les angles du pentagone inscrit au cercle par la precedente, & du centre soient tirez les demy diametres à chacun point commé FN, FB, FC, FO, FL. soient à chacun d'iceux points tirées en angles droits, & touchans le cercle sur les demy diametres les lignes droictes comme HBK, KCI, IOM, MLG, GNH, & menées aussi FK, FI. D'autant que le costé FB est egal au costé FC, & que l'angle FBK est egal à FCK (c'est à dire droit par la construction) le quarré de FK est egal au quarré de FB & BK, comme aussi aux quarréz de FC, CK: par la 47. du 1. li. Or l'angle BFC est egal à CFO (car il comprend circonference egale par la construction) le quadrilatere donc BFCCK sera equiangle & egal au quadrilatere CFOI, & la moitié à la moitié, & les lignes au lignes. l'ensuiura que KC sera egale à CI & CI à IO, & ainsi semblablement des autres, tellement que le pantagone ainsi circonscrit sera equilateral & equiangle.



PROPOSITION XIII.

Dans vn pentagone equilateral & equiangle donné, descrire vn cercle.

Soit le pentagone donné NBCOL descrit comme en la vnziesme de ce liure. & soient diuisez les angles en deux egalement par lignes qui se rencontreront au centre F, duquel soient tirées les perpendiculaires sur chacun costé qui seront egales comme il a esté monstré. Il sera euident que le cercle descrit sur ce centre, à la distance de FG passera par les extremitéz des perpendiculaires, & touchera seulement les costez du pentagone donné, comme on peut recueillir de la 16. du 3. liure.



PROPOSITION XLIII.

A l'entour d'un pentagone equilateral & equiangle donné, descrire vn cercle

Soit

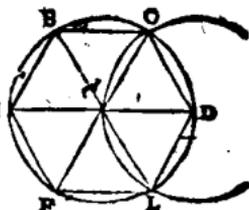
Soit donné le pentagone  $HBCDL$  equilatre & equiangle, duquel soit trouué le centre comme a esté dit en la precedente, & d'iceluy tirées les lignes droictes sur chacun angle qui seront égales, *come il a esté monstré en la 12. de ce liure.* (car tous pentagones equilateres & equiangles sont semblables & equiangles entr'eux) & soit du centre à l'interualle de l'une des lignes qui couppent les angles, tiré vn cercle: il est euident qu'il passera par les extremitez d'icelles lignes, & par consequent par l'extremité des angles du pentagone, & ainsi il sera circonscrit à iceluy pentagone.



## PROPOSITION XV.

Dans vn cercle donné, descrire vn hexagone equilaterale & equiangle.

Soit le cercle donné  $BODLH$ , duquel le centre soit  $G$ . soit mené le diametre  $HGD$ . du point  $D$  à l'interualle  $DG$  soit décrit vn cercle ( qui sera egal à l'autre estant sur mesme interualle ) soient menées les lignes droictes  $OG$  iusques à la circonference  $F$ , &  $LG$  iusques à la circonference  $B$ , & menées aussi les lignes droictes  $HB$ ,  $BO$ ,  $OD$ ,  $DL$ ,  $LF$ ,  $FH$ . Or par la 1. du premier liure les deux triangles  $GOD$ ,  $GDL$  sont egaux, equiangles & equilateraux, & tous les six triangles sont isosceles, ayans leurs costez egaux ensemble *par la definition du cercle*, & les trois angles de chacun triangle sont egaux à deux droits. Mais la ligne  $LG$  tombe sur la ligne  $FO$ , & fait les angles  $LGO$ ,  $FGL$  egaux à deux droits, & l'angle  $LGO$  vaut les deux angles du triangle  $LGD$ . il s'ensuiura donc que  $FGL$  sera egal au troisieme. Et le triangle  $FGL$  ayant les deux costez egaux aux deux costez, & l'angle compris d'iceux egal à l'angle de l'autre, aura la base egale à la base *par la 4. du 1. liure.* Semblablement se demonstrent les autres costez estre egaux ensemble.

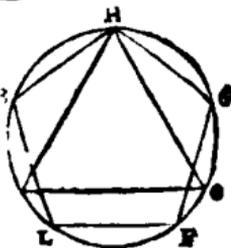


## PROPOSITION XVI.

Dans vn cercle donné descrire vn quindecagone equilateral & equiangle.

ELEMENS D'EVCLIDE, LIVRE QUATRIESME.

SOIT au cercle donné inscrit vn pentagone  
 SHBLFG par la 11. de ce liure, & vn triangle  
 equilateral HCO par la 2. du mesme liure.  
 Ayans tous deux leur angle en vn mesme  
 point H. D'autant que la ligne droicte HC  
 subtend la troisieme partie de toute la circô-  
 ference (c'est à dire les cinq quinziemes) &  
 les deux costez HB. BL du pentagone en  
 subtendent six quinziemes: il est euident que l'arc CL, entre  
 l'angle du triangle & l'angle du pentagone sera vne des quinziemes  
 parties de toute la circonference. Soit donc tirée la ligne  
 droicte CL, & adaptées par la 1. de ce liure, au cercle autres qua-  
 torze lignes droictes, dont chacune soit egale à CL: puis que  
 les lignes droictes egales subtendent circonfereces egales par  
 la 28. du 1. liure. Il s'enfuira que la figure du quinzangle equila-  
 tere & equiangle sera inscrite au cercle donné.



FIN DV QUATRIESME LIVRE.





# LE CINQUIESME LIVRE DES ELEMENTS D'EVCLIDE.

## DEFINITION PREMIERE.



**P**artie est vne grandeur moindre qui est prise de la plus grande.

2. Multipliee est vne grandeur plus grande que la moindre quand elle est mesurée de la plus petite.

3. Raison est vne habitude de deux grâdeurs de mesme gêre, l'vne à l'autre selon la quâtité.

4. Les grandeurs sont dictes auoir raison l'vne à l'autre quand multipliées elles se peuuent excéder l'vne l'autre.

5. Les grandeurs sont dictes estre en mesme raison quand la premiere à la seconde est comme la troisieme à la quatriesme, & quand les equemultiplices de la premiere & troisieme excèdent, sont egaux, ou deffailent aux equemultiplices de la seconde & quatriesme en quelque multiplication que ce soit prise l'vne apres l'autre.

6. Proportion est vne similitude de raisons.

7. Les grandeurs qui ont mesme raison sont proportionnelles.

8. Quand des equemultiplices, celui du premier excède celui du second, & que le multipliee du troisieme (quelque multiplication que puisse estre) n'excede le multipliee du quatriesme, lors le premier au second est dit auoir plus grande raison que le tiers au quart.

9. Proportion est constituée en trois quantitez pour le moins.

10. Quand trois grandeurs sont proportionnelles, la premiere est dite avoir à la troisieme la raison doublée de celle de la seconde: Quand il y en a quatre, la premiere à la quatrieme est dite avoir la raison triplée de celle de la seconde. Et tousiours d'un mesme ordre vne plus iusques à ce que le nombre des choses proportionnées soit acheué.

11. Les grãdeurs de semblable raison sont dites quãd les antecedens sont aux antecedens, comme les consequents aux consequents.

12. Raison changée est l'acception de l'antecedent à l'antecedent, comme du consequent au consequent.

13. Raison conuertie est l'acception du consequent, cõme de l'antecedent à l'antecedent, cõme consequent.

14. Raison composée est l'acception de l'antecedent avec le consequent, comme vne mesme chose au mesme consequent.

15. Diuision de raison est l'acception de l'excez (duquel l'antecedent excede le consequent) au mesme cõsequent.

16. Conuersion de raison est l'acception de l'antecedent, à l'excez duquel l'antecedent excede le consequent.

17. Raison egale, est plusieurs grandeurs estans d'un costé & autant de l'autre en multitude, prises de deux en deux en mesme raison, quant aux premieres grandeurs la premiere grandeur est à la derniere, comme aux secondes grandeurs la premiere grandeur est à la derniere: ou autrement l'est l'acception des extremes par subtraction des moyennes.

18. Proportion ordonnée ou selon ordre, est quand l'antecedent est au consequent d'un costé comme l'an-

cedent est au consequent de l'autre, & que l'un des consequents est à quelque autre chose, comme l'autre consequent à quelque autre chose.

19. Proportion meslée ou sans ordre est quand trois grandeurs sont d'un costé, & autant d'autres grandeurs en nombre, de l'autre, & qu'aux premieres l'antecedent est au consequent, comme aux secondes l'antecedent est au consequent: & qu'aux premieres le consequent est à quelque autre chose, ainsi aux secondes vne autre chose soit de mesme à l'antecedent.

*D'autant que les douze propositions suyvantes sont assez cogneues d'elles-mesmes, & qu'elles sont pluslost principes & communes sentences que theoremes, j'ay pensé suffire de les interpreter, & non demonstrier, craignant que trop long discours n'y apportast de l'obscurité pluslost que de la facilité.*

## PROPOSITION I.

*S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra qui soient equemultiplie d'autant de grandeurs vne chacune à vne chacune, comme l'une sera multiplie de l'une, ainsi les toutes seront multiplies des toutes.*

Soient les grandeurs proposées B, C, O & G, & que la premiere contienne elle trois fois la troisieme, & la seconde contienne trois fois la quatrieme. Les deux premieres jointes contiendront autant de fois les troisieme & quatrieme jointes, & seront comme trois à vne.

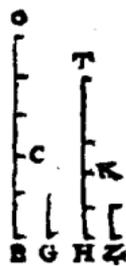


## PROPOSITION II.

*Si la premiere est equemultiplie de la seconde comme la troisieme de la quatrieme, & que la cinquieme soit de mesme equemultiplie de la seconde comme la sixieme de*

la quatriesme, la composée de la premiere & cinquiesme sera equemultiplice de la seconde, comme la troisieme avec la sixiesme de la quatriesme.

Soit la premiere BC contenant la seconde G autant de fois comme la troisieme HK contient de fois la quatriesme Z. Et que la cinquiesme CO contienne autant de fois la seconde G comme la sixiesme KT contient de fois la quatriesme Z. La composé BO de la premiere & cinquiesme contiendra autant de fois la seconde G, comme la composée HT de la troisieme & sixiesme contiendra de fois la quatriesme Z.



PROPOSITION III.

Si le premier est equemultiplice du second comme le troisieme du quatriesme, & soient pris des equemultiplices du premier & du troisieme: de ceux-là ainsi pris, l'un sera equemultiplice à l'autre, c'est à sçavoir l'un au second & l'autre au quatriesme.

Si la premiere grandeur G contient autant de fois la seconde B, que la troisieme O contient de fois la quatriesme H: & que CZ contienne autant de fois la premiere G comme PT contient de fois la troisieme O, CZ contiendra aussi autant de fois la seconde B, comme PT contiendra de fois la quatriesme H.



PROPOSITION IIII.

Si le premier à mesme raison au second que le troisieme au quatriesme, les equemultiplices du premier & troisieme aux equemultiplices du second & quatriesme (quelque multiplication que puisse estre) auront une mesme raison l'un à l'autre.

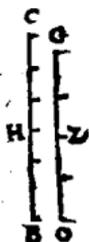
SI la premiere grandeur C est à la seconde B, comme la 3. G à la 4. O, & que H contienne autant de fois C, comme T contient de fois G, & que P contienne autant de fois B, comme Z contient de fois O : H sera à P comme T à Z.



PROPOSITION V.

Si vne grandeur est equemultiplice d'une autre grandeur comme la retranchée de la retranchée, la restée sera equemultiplice à la restée, comme la toute à la toute,

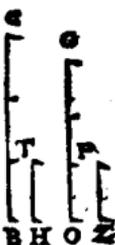
SI CB contient autant de fois GO, comme l'ostée SCH contient de fois l'ostée GZ : La restée HB contiendra autant de fois l'autre restée ZO, comme la toute contenoit la toute.



PROPOSITION VI.

si deux grandeurs sont equemultiplices de deux grandeurs, & quelques retranchées equemultiplices des mesmes: les restes aussi ou seront egales aux mesmes, ou seront equemultiplices des mesmes.

SI CB contient autant de fois H comme GO contient de fois Z, & l'ostée CT contient autant de fois H comme l'autre ostée GP contient de fois Z: Les restes TB & PO, ou seront egales à H & Z, ou les contiendront plusieurs fois également.



PROPOSITION VII.

Les grandeurs egales ont vne mesme raison à vne, & vne à vne mesme raison à deux egales grandeurs.

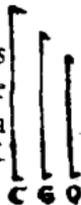
SI O est egale à B, O aura mesme raison à C, comme B à la mesme C. Et aussi C aura mesme raison à O qu'à B.



ELEMENS D'EVCLIDE,  
PROPOSITION VIII.

De deux grandeurs inegales, la plus grande a plus grande raison à vne mesme que la plus petite : & vne mesme à plus grande raison à la plus petite que la plus grande.

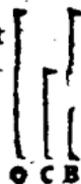
DE deux grandeurs inegales C & G, soit C la plus grande, & soit vne tierce comme O. C aura plus de raison à O que G à la mesme O. C'est à dire, que C sera plus grande au regard de O, que G au regard de la mesme O.



PROPOSITION IX.

Les grandeurs qui ont vne mesme raison à vne mesme grandeur, sont egales entr'elles : & les grandeurs auxquelles vne mesme à mesme raison, sont egales.

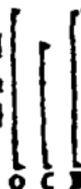
SI O est à C comme B à la mesme C, O & B seront egales. Et si C est à O comme la mesme C est à B, icelles O & B seront egales.



PROPOSITION X.

Des grandeurs qui ont raison à vne mesme grandeur, celle qui a plus grande raison est la plus grande. Et la grandeur à laquelle la mesme aura plus grande raison sera la plus petite.

SI O est plus grande au regard de C que B au regard de la mesme C, O sera plus grande que B. Et si la mesme C est plus grande au regard de B qu'au regard de O, B sera plus petite que O.



PROPOSITION XI.

Les raisons qui sont de mesme à vne, sont de mesme entr'elles.

SI la raison de H à B est comme celle de C à Z, & si celle de G à O est comme la mesme de C à Z : Les raisons de H à B, & de G à O seront de mesme,



## PROPOSITION XII.

*Si tant de grandeurs qu'on voudra ont proportion, comme l'une des antecedentes sera à l'une des consequentes, ainsi serōt toutes les antecedentes à toutes les consequentes.*

Si la raison de B à F est comme de C à G, & O à H; les trois antecedentes conjointement BCO feront aux consequentes conjointement



## PROPOSITION XIII.

*Si la premiere à la seconde a mesme raison que la troisieme à la quatriesme, & la troisieme a plus grande raison à la quatriesme, que la cinquieme à la sixiesme: la premiere aussi aura plus grande raison à la seconde que la cinquieme à la sixiesme.*

Soit G premiere à la seconde B come la troisieme C à la quatriesme D, & que la raison de C à D

soit plus grande que celle de la cinquieme H à la sixiesme F. D'autāt q̄ les raisons de GB, & CD sont de mesme, & que la raison de C à D est plus grande que celle de H à F, il s'ensuura que la raison de G à B sera aussi plus grāde que la mesme de H à F par la 11. de ce livre.



## PROPOSITION XIII.

*Si la premiere a mesme raison à la seconde que la troisieme à la quatriesme, & que la premiere soit plus grande que la troisieme, la seconde aussi sera plus grande que la quatriesme: & si egale, egale; & si plus petite, plus petite.*

Soit G à B comme C à D. Si G est plus grande que C, B sera plus grande que D: Car puis que G est plus grande que C elle aura donc plus grande raison à B que la mesme C par la 8. de ce livre. Mais comme G à B, ainsi C à D: C aura donc plus grande raison à D qu'à B. Dont s'ensuura que B sera plus grande que



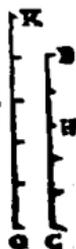
ELEMENS D'EVCLIDE,

D, par la 2. partie de la 10. de ce livre. Et si la premiere est plus petite, la quatriesme sera aussi plus petite, & si egale, egale par les memes raisons.

PROPOSITION XV.

*Les grandeurs qui sont mesmes parties des leurs equemultipliees, ont vne mesme raison prises comme elles se respondent mutuellement.*

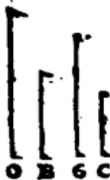
SOit KL partie de KO & BH partie de BC & que OK contienne autant de fois KL, comme CB contient de fois BH. D'autant qu'il se peut dire ainsi, comme KL, l'une des antecedentes est à BH l'une des consequentes: ainsi sont toutes les antecedetes, sçavoir OK à toutes les consequentes CB, par la 12. de cestuy Il s'en suivra que comme OK à CB, ainsi LK à HB.



PROPOSITION XVI.

*Si quatre grandeurs sont propositionnelles, elles le seront aussi entr'elles l'une apres l'autre.*

SOit O à B comme G à C. D'autant que par la 12. de ce livre toutes les antecedentes sont à toutes les consequentes comme l'une des antecedentes à l'une des consequentes: soit changé l'ordre en ceste sorte: comme O premiere est à B 3. ainsi G 2. est à C 4. Lors O & G seront antecedentes, & BC consequentes. Les antecedentes ensemble OG seront aux consequentes ensemble BC comme O est à B ou G à C. O fera donc à G comme B à C. Et par consequent seront (par raison changée) proportionnelles en ceste sorte, comme O est à B, ainsi G à C, & comme O est à G ainsi B à C.

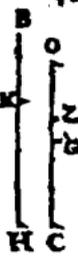


PROPOSITION XVII.

*Si les grandeurs composees sont proportionnelles, icelles diuisees seront aussi proportionnelles.*

SOient les grandeurs cõposees sçavoir HB composee de HK, KB, & CO composee de CZ, ZO, & soit comme la toute HB à sa partie BK, ainsi la toute CO à sa partie OZ. Je dy que

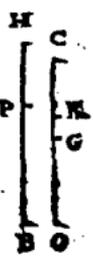
HK est à KB comme CZ à ZO. Car si la ligne CO n'est coupée au point Z en mesme proportion que HB, soit en vn autre, s'il est possible comme en G: lors les deux antecedentes conjointement (c'est à dire HB) auront telle raison aux consequentes conjointement (CO) comme BK à OG. Mais la toute HB est posée à BK comme la toute CO à OZ: & par la precedente, comme HB à OC, ainsi BK à OZ: dont s'enlaira que OZ sera egale à OG (c'est à dire la partie au tout) ce qui est absurde. Si donc les grandeurs composees, &c.



PROPOSITION XVIII.

*Si les grandeurs diuisees sont proportionnelles, icelles composees seront aussi proportionnelles.*

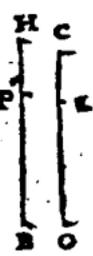
Soient quelques grandeurs diuisees & proportionnelles comme HB, & CO diuisees en P, K: & soit comme HP à PB, ainsi CK à KO. Je dy qu'icelles composees sont comme HB à HP, ainsi CO à CK. S'il n'est ainsi, soit s'il est possible HB à HP comme CO à vne plus grande que CK, c'est à sçauoir CG. D'autant que les grandeurs composees HB à HP sont comme CO à CG: icelles par la precedente estant diuisees HB à HP seront comme CO à CG. Mais comme HB à HP, ainsi a esté supposee CO à CK: il s'enlairoit donc que comme CO à CK ainsi CO à CG, & que la partie CK seroit egale au tout CG: ce qui est absurde. Si donc, &c.



PROPOSITION XIX.

*Si le tout est au tout comme le retranché au retranché, le reste sera aussi au reste comme le tout au tout.*

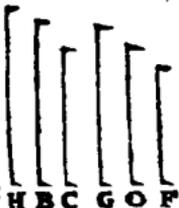
Soient deux grandeurs HB, CO. & comme HB est à CO, ainsi soit la retranchée HP à la retranchée CK. Je dy que la restée PB est à la restée KO comme HB à CO. D'autant que les quatre lignes HB, CO, HP, CK, sont proportionnelles, il sera comme HB à HP, ainsi CO à CK par la 16. de ce liure. Par la 17. de ce mesme ces mesmes grandeurs ainsi composees & proportionnelles, seront de mesme estant diuisees. Comme le tout HB est au tout CO, ainsi donc sera l'ostée à l'ostée, & la restée à la restée.



PROPOSITION XX.

*S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra, & autres grandeurs en mesme nombre, les deux prises en mesme raison: & qu'en raison egale aux premieres la premiere soit plus grande que la derniere: aux secondes grandeurs, aussi la premiere sera plus grande que la derniere; & si egale, egale; & si moindre, moindre.*

**S**Oient trois grandeurs  $HBC$ , & autres trois grandeurs  $GOF$  ayans raison l'une à l'autre de deux en deux, sçavoir comme  $H$  est à  $B$ , ainsi  $G$  à  $O$ , & comme  $B$  à  $C$  ainsi  $O$  à  $F$ . D'autant que par la 8. de ce Livre  $H$  a plus grande raison à  $B$  que  $C$  à la mesme  $B$  ( $H$  estant supposée plus grande que  $C$ ) & que par la raison conuertie comme  $C$  est à  $B$ , ainsi  $F$  à  $O$ , & comme  $B$  à  $H$ , ainsi  $O$  à  $G$ : il s'ensuiura que  $G$  sera plus grande que  $F$ . Et si  $H$  est egale à  $C$ ,  $G$  sera egale à  $F$ , & si plus petite, plus petite.



PROPOSITION XXI.

*S'il y a trois grandeurs, & autant d'autres prises de deux en deux en mesme raison, & que leur proportion soit sans ordre, & qu'en raison egale la premiere soit plus grande que la troisieme, la quatrieme aussi sera plus grande que la sixieme: & si egale, egale; si moindre, moindre.*

**S**Oient trois grandeurs  $HBG$ , & autres trois grandeurs  $CFZ$ , & soit comme  $H$  à  $B$ , ainsi  $F$  à  $Z$ , & comme  $B$  à  $G$ , ainsi  $C$  à  $F$  prises de deux en deux. Si la premiere  $H$  est plus grande que la troisieme  $G$ , la quatrieme  $C$  sera aussi plus grande que la sixieme  $Z$ . D'autant que  $G$  est plus petite que  $H$ , elle aura moindre raison à  $B$  que  $H$  à la mesme  $B$ . Or par la raison conuertie, comme  $G$  à  $B$ , ainsi  $F$  à  $C$ . La raison donc de  $F$  à  $C$  sera moindre que de  $F$  à  $Z$  (estant celle-cy de mesme à la raison de  $H$  à  $B$ .) Dont s'ensuiura que la 4.  $C$  sera plus grande que la 6.  $Z$ . Par mesmes raisons on demostre-  
ra si la premiere est egale ou plus petite, l'autre estre de mesme.



## PROPOSITION XXII.

*S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra, & autant d'autres, prises de deux en deux en mesme raison, & que la proportion d'icelles soit selon ordre, icelles en raison egale seront proportionnelles.*

Soient quelques grandeurs H B G, & autant d'autres grandeurs O F Z proportionnelles de deux en deux, comme H à B, ainsi O à F, comme B à G ainsi F à Z. Si H n'est à G comme O à Z: soit aux antecedentes adjoustée vne quatriesme I, & soit comme H à B, ainsi G à I: H B G I O F Z L. Lors les quatre seront proportionnelles, & mesme en raison changée par la 16. de ce livre H sera donc à G comme B à I. Soit maintenant aux consequentes adjoustee L, & soit comme O à F, ainsi Z à L par la mesme 16. O sera à Z comme F à L: or les quatre antecedentes sont en mesme ordre & proportion que les consequentes par l'hypothese: H sera donc à G comme O à Z.

## PROPOSITION XXIII.

*S'il y a trois grandeurs & autant d'autres grandeurs prises de deux en deux en mesme raison, & que la proportion d'icelles soit sans ordre, icelles en raison egale seront proportionnelles.*

Soient trois grandeurs O P F & trois autres grandeurs K H B, & soit leur proportion perturbée ou meslée, sçavoir, comme O à P ainsi H à B, & comme P à F, ainsi K à H. Si K n'est à B comme O à F, soit posée la grandeur C, & soit comme P à F, ainsi B à C. K sera donc à H comme B à C, & ces quatre seront proportionnelles, & par consequent comme K à B, ainsi H à C par la 16. de ce livre. Or H est à C comme O à F par la construction. K sera donc à B comme O à F.

ÉLÉMENTS D'EUCLIDE,  
PROPOSITION XXIII.

*Si le premier au second à mesme raison que le troisieme au quatrieme, & que le cinquieme ait mesme raison au second, que le sixieme au quatrieme, aussi le premier & cinquieme ensemble auront mesme raison au second, que le troisieme & sixieme ensemble au quatrieme.*

Soit la premiere grandeur CO à la seconde B, comme la troisieme LN à la quatrieme S, & la cinquieme OF à la mesme B, comme la sixieme NP à la quatrieme S: Je dy que la composée de la 1. & 5. sçavoir CF est à la 2. B comme la 3. & 6. sçavoir LP à la 4. S. Ce qui se cognoistra en adjoustant aux antecedentes la grandeur G egale à OF, & aux consequentes H egale à NP. Car comme CO à B, ainsi LN à S, & comme B à G (par conuersion de raison) ainsi S à H. Maintenant CO à G sera comme LN à H *par la 22. de ce liure.* Mais *par la 18.* estans composées elles seront comme FC à CO, ainsi PL à LN. Soit derechef adjoustée I (egale à CO) entre la premiere & seconde, & entre la 3. & 4. K egale à LN. Lors comme FC à I, ainsi PL à K, & comme I à B, ainsi K à S. Et *par la 22.* la composée FC sera à B comme la composée PL à S.



PROPOSITION XXV.

*Si quatre grandeurs sont proportionnelles, la plus grande & la plus petite sont plus grandes que les deux autres.*

Soient quatre grandeurs proportionnelles comme HB à GD ainsi P à Z. Soit HB la plus grande, de laquelle soit ostée HT egale à P, & de GD soit osté GI egale à Z. Il iera comme HB à HT, ainsi GD à GI: & *par la 19. de ce liure* la restée TB à ID sera de mesme. TB sera donc plus grande que ID. Soit de TB couppée TC egale à ID. Maintenant HC contient P & ID: les grandeurs donc HC & Z sont egales à P & GD. Que si CB est adjoustée, la grandeur HB & Z seront plus grandes que GD & P.



FIN DU CINQUIÈME LIVRE.



# LE SIXIESME LIVRE DES ELEMENS D'EVCLIDE.

## DEFINITION PREMIERE.

**E**s figures rectilignes semblables sont celles qui ont les angles egaux aux angles vn chacun au sien, & les costez au long des angles egaux proportionnaux.

2. Les figures reciproques sont celles quand en l'une & en l'autre les antecedents & consequents sont en certaine raison.

3. Vne ligne droite est diuisee entre les deux extremes, c'est à dire par la moyenne & extreme raison, quand la toute est au plus grand segment, comme le plus grand segment au moindre.

4. La hauteur d'une chacune figure, est la perpendiculaire procedant du sommet de la figure sur la base.

5. La raison des raisons se dit estre, quand les quantitez des raisons multipliees entre elles produisent quelque raison.

6. Vn parallelogramme est dit deffaillir & manquer d'espece à vn parallelogramme semblable donné quand il est appliqué à quelque ligne droite qu'il ne la peut occuper entierement, & s'y trouue de defaut vn parallelogramme semblable à vn parallelogramme donné. Et exceder d'espece est quand il excede la ligne d'un parallelogramme semblable à celuy donné.

## PROPOSITION I.

*Les triangles & parallelogrammes qui sont sous vne mesme hauteur, sont l'un à l'autre comme leurs bases.*

Soient premierement les triangles CGD & SDGH sur les bases CD, DH & en mesme hauteur DG, le dy que l'un des triangles HGD est à l'autre CGD. comme la base HD à la base CD: Car soient les deux bases couppees egalemment en KI, & tirées GK, GI. comme la base DI est à la base DH (sçavoir la moitié au tout) ainsi DK est à DC, par la 18. 5. Or comme DI à



IH & DK à KC, ainsi le triangle IGD à IGH, & KGD à KGC par la 38. 1. & cõposez, comme le triangle HGD au triangle IGD, ainsi le triangle CGD au triangle KGD par la 18. 5. qu'est la mesme raison de la base HD à la base DI, ou CD à DK. tellement donc que par la 12. & 16. 5. comme le premier triangle ou grandeur HGD à l'autre triangle ou grandeur CGD, ainsi le triangle IGD à KGD, qu'est la mesme raison des bases HD à CD, cõme il a esté montré: il sera de mesme des parallelogrãmes LGDH, & BGDC doubles aux triangles. Resulte que les triangles & parallelogrammes sur bases egales sont l'un à l'autre comme leur hauteur.

PROPOSITION II.

Si en vn triangle on fait vne ligne droicte parallele à l'un des costez, elle coupera les costez du triangle proportionnellement. Et si les costez d'un triangle sont coupezz proportionnellement, la ligne droicte menée par les sections sera parallele à l'autre costé du triangle.

Soit au triangle HGF tirée la ligne BD parallele à GF, & soient jointes DG, BF: les deux triangles BDG & DBF seront egaux estans sur mesme base BD, & entre mesmes paralleles par la 37. du 1. comme donc le triangle HDB au triangle DFB, ainsi la base HD, à la base DF (car ils sont en mesme hauteur.) & comme le triangle HBD au triangle BGD, ainsi HB à BG par la precedente. Il s'ensuura donc par la 7. du 5. que HD sera à DF comme HB à BG.



Pour la seconde partie, soient supposez les costez HF, HG coupezz en B & D proportionnellement. d'autant que le triangle HBD a mesme raison au triangle BDG qu'au triangle DBF (laquelle est comme HB à BG, ou HD à DF) il s'ensuura par la 9. du 5. que les triangles BDG & DBF seront egaux. Et pource qu'ils sont sur vne mesme base, ils serõraussi entre mesmes paralleles par la 39. du 1. BD sera donc parallele à GF.

PROPO-

## PROPOSITION III.

Si l'angle d'un triangle est couppe en deux également par vne ligne droite, laquelle coupe aussi la base: les segments de la base auront raison l'un à l'autre comme les deux autres costez du triangle: & si les pieces de la base ont telle raison l'une à l'autre comme les costez, la ligne droite qui tombe du sommet à la section de la base coupe l'angle en deux également.

Soit le triangle HBG duquel l'angle H soit couppe en deux également par la 9. du 1. par la ligne droite HD, laquelle coupe la base en D. Je dy que BD a telle raison à DG que le costé BH au costé HG. Soit menée du point G la ligne GF parallele à DH, & jointe HF. d'autant que la ligne droite BF tombe sur deux paralleles, elle fera l'angle BHD égal à l'angle BFG. Comme aussi la ligne HG tombant sur les mesmes fera les angles alternes HGF, & DHG egaux par la 29. du premier. Les deux donc HFG & FGH seront egaux aux deux BHD & DHG, & par consequent l'un à l'autre (car BHD & DHG sont egaux par l'hypothese) le triangle HFG sera donc isoscele par la 6. du 1. dont s'ensuiura par la precedente (d'autant qu'au triangle FBG la ligne HD est parallele à FG) comme sera la ligne BH à HF (ou HG son egale) ainsi sera la partie de la base BD à l'autre partie DG.



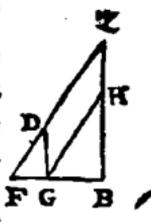
Pour la seconde partie de ceste proposition: Si BD est à DG comme BH à HG, soient disposées BF & FG, comme il a esté dit. D'autant que comme BD à DG, ainsi BH à HF par la precedente, & BH à HG par l'hypothese. Il s'ensuiura que HF & HG seront egales par la 7. du 5. & que les angles HFG, & HGF seront egaux par la 5. du 1. livre. Mais par la 29. du 1. les angles BHD & DHG sont egaux aux deux HFG, HGF vn chacun au sien, ceux-là donc seront egaux ensemble: & par ainsi l'angle H du triangle BHG sera couppe en deux également.

## PROPOSITION IIII.

Des triangles equiangles les costez qui sont au long des angles egaux sont proportionnaux, & ceux qui sont subrendus aux angles egaux sont en mesme raison.

ELEMENS D'EVCLIDE,

Soient les triangles equiangles HBG & DGF  
 Sayans les angles egaux, sçavoir HBG à DGF, BHG  
 à GDF, & HGB à DFG. Je dy que leurs costez  
 sont proportionnaux, sçavoir comme HB à DG  
 ainsi BG à GF, & comme HG à DF, qui sont sub-  
 tendus aux angles egaux. Soit du triangle DFG (ou  
 d'un semblablement descript) mis le costé FG directement au  
 bout de la ligne BG. D'autant que les angles DGF, HBG sont  
 egaux, les lignes DG, HB seront paralleles *par la 28. du 1.* com-  
 me aussi seront FD, GH (estans les angles DFG, HGB egaux.)  
 Soit parfait le parallelogramme HG DZ, les lignes FD, DZ  
 seront jointes directement *par la 30. du 1.* comme seront aussi  
 BH, HZ. Or d'autant qu'au triangle FZB la ligne DG est  
 parallele à ZB: il s'ensuivra *par la 2. de ce livre,* que comme FD  
 à DZ (ou à GH son egale) ainsi FG à GB. Semblablement  
 pource que GH est parallele à FZ: BG sera à GF comme  
 BH à HZ (ou DG son egale) & comme BG à GF, ainsi  
 ZD (ou HG son egale) à DF.



PROPOSITION V.

si deux triangles ont les costez proportionnaux ils seront  
 equiangles, & auront les angles egaux sous lesquels les co-  
 stez de mesme raison seront subtendus.

Soient deux triangles HBG, DFZ ayans les  
 costez proportionnaux, sçavoir comme HB à  
 BG, ainsi DF à FZ, & come HG à GB, ainsi  
 DZ à ZF, & come HB à HG, ainsi DF à DZ.  
 S'ils ne sont equiangles soit sur la ligne ZF au  
 point F descript vn angle egal à B, & au point Z  
 descript vn angle egal à G: il est evident que le troisieme angle I  
 sera egal à H, *comme on peut recueillir de la 32. du 1.* Les triangles donc  
 HBG & IFZ sont equiangles, & *par la precedente* les costez au  
 long des angles egaux H & I seront proportionnaux HB à  
 HG, comme IF à IZ, & HB à BG, comme IF à FZ, & HG à  
 GB, comme IZ à ZF. Mais les costez du triangle DFZ sont po-  
 sez de mesme: DF sera donc egale à FI *par la 9. du 5.* & DZ à  
 ZI. Et s'ensuivra *par la 8. du 1.* que les deux triangles DFZ &  
 IFZ seront egaux & equiangles, & par consequent DFZ e-  
 quiangle à HBC *par la 1. C S.* Si donc deux triangles, &c.



## PROPOSITION VI.

Si deux triangles ont vn angle egal à l'angle, & les costez au long des angles egaux proportionnaux, iceux triangles seront equiangles, & auront les angles egaux sous lesquels les costez de mesme raison sont subtendus.

Soient deux triangles HBG, DFZ ayans les angles H & D egaux, & les costez HB à HG comme DF à DZ. Je dy que l'angle B est egal à F, & G à Z. Car soit sur la ligne FZ au point F décrit vn angle egal à B, & au point Z vn angle egal à G, il est euident que l'autre angle I sera egal à H, comme on peut recueillir de la 23. du 1. & que le triangle FZI sera equiangle au triangle HBG, & auront les costez proportionnaux par la 4. de ce liure. comme HB à BG, ainsi IF à FZ, & cōme HG à GB, ainsi IZ à ZF. Mais le triangle DFZ a les deux costez posez de mesme, scauoir comme DF à DZ, ainsi HB à HG (ou FI à IZ) ils s'enfuiura dōc par la 7. du 5. que DF, DZ seront egaux à IF & IZ: & la base FZ estant cōmune, les triangles seront equiangles par la 8. du 1.



## PROPOSITION VII.

Si deux triangles ont vn angle egal à l'angle; & les costez au long des autres angles proportionnaux: & l'vn de ces autres angles moindre ou non moindre qu'un droit: iceux triangles seront equiangles, & auront les angles egaux, au long desquels les costez seront proportionnaux.

Soient deux triangles HBG & DFZ ayans l'angle H egal à l'angle D, & les costez proportionnaux qui sont au long des autres angles B & F, c'est à scauoir HB à BG, comme DF à FZ. Et des autres angles G & Z soit l'vn ou l'autre premierement moindre qu'un droit. Si les deux triangles ne sont equiangles & n'ont les angles (au long des costez proportionnaux) egaux, soit fait au point B sur la ligne HB (au cas que B soit supposé plus grand que F) vn angle egal à F comme HBI. D'autant que l'angle H est egal à



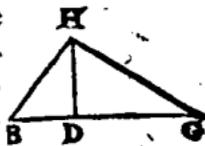
ELEMENS D'EVCLIDE,

l'angle D, & l'angle HBI à F, il s'ensuivra que le troisieme HIB sera egal à Z, *comme on peut recueillir de la 32. du 1. comme donc DF à FZ, ainsi sera HB à BI par la 4. de ce livre. Mais comme DF à FZ, ainsi a esté HB à BG: & apres comme HB à BI, ainsi a esté HB à BG. Les lignes donc BI, BG sont egales par la 9. du 5. & auront les angles sur la base egaux par la 5. du 1. & moindres que deux droicts par la 17. du 1. & BIG estant moindre qu'un droict, l'autre angle HIB sera plus grand qu'un droict par la 13. du 1. Mais il a esté monstré egal à Z posé moindre qu'un droict, ce qui ne se peut faire: HBG ne sera donc ny plus grand ny plus petit que DFZ, & seront par consequent egaux. Secondemét soit posé l'un ou l'autre de G & Z n'estre moindre qu'un droict, si l'angle HBG n'est egal à F soit supposé B plus grand, & comme devant soit HBI egal à F. L'autre angle BIH sera egal à Z. Et finalement les angles BIG & BGI seront egaux: mais BGI n'est point moindre qu'un droict par la supposition: Les deux angles donc du triangle ne seront moindres que deux droicts, contre ce qui a esté monstré en la 17. du 1. ce qui est absurde. En quelque façon que ce soit donc les angles B & F (au long desquels sont les costez proportionaux) sont egaux: & par consequent les triangles equiangles.*

PROPOSITION VIII.

*Si de l'angle droict d'un triangle rectangle on tire vne perpendiculaire sur la base, les triangles au long de la perpendiculaire sont semblables au tout, & entr'eux.*

Soit le triangle rectangle HBG ayant l'angle H droit, duquel soit tirée la perpendiculaire HD sur la base BG. D'autant que du triangle HBD, les deux angles HBD & HDB sont egaux aux deux angles HBG & BHG du grand triangle proposé, il s'ensuivra que le troisieme angle BHD sera equiangle & semblable au tout BHG. Semblablement se demonstrera le mesme de l'autre triangle HDG. *Si donc de l'angle, &c.*

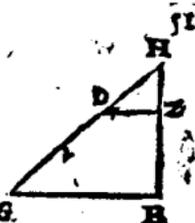


PROPOSITION IX.

*D'une ligne droite proposée couper vne certaine partie ordonnée.*

LIVRE SIXIESME.

Soit la ligne droite proposée  $HB$ , de laquelle il faut couper vne certaine partie, comme pour exéple vne troisiésme partie, soit iointe vne autre ligne droite au point  $H$  côme  $HG$ , sur laquelle soient marquées autant de parties qu'on desire, sçavoir trois: l'vne desquelles par-

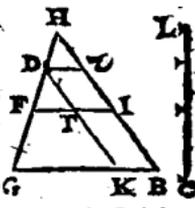


ties soit  $HD$ , au point  $D$  soit menée  $DZ$  parallele à  $GB$ . icelle  $DZ$  coupera les costez proportionnellement par la 2. de ce livre. tellement que comme  $GD$  à  $DH$ , ainsi  $BZ$  à  $ZH$ , & composées comme  $GH$  à  $HD$ , ainsi  $BH$  à  $HZ$  par la 18. du 5. il s'ensuiura donc que  $HZ$  sera la troisiésme partie de la ligne  $HB$ .

PROPOSITION X.

Couper semblablement vne ligne droite non coupée comme vne ligne droite coupée proposée.

Soit la ligne droite non coupée  $HB$ , & la ligne coupée proposée  $LC$ . & soit  $HD$  égale à la premiere piece,  $DF$  à la seconde,  $FG$  à la troisiésme. Soient tirées  $GB$ , &  $FI$ ,  $DZ$  paralleles à  $GB$ . soit encor menée  $DK$  parallele à  $HB$  qui fermera les parallelogrammes  $DI$ ,  $TB$ . Or



côme  $GF$  à  $FD$ , ainsi  $KT$  à  $TD$  par la 2. de ce livre (c'est à dire  $BI$  à  $IZ$  leurs égales par la 34. du 1.) Et puis que  $DZ$  est parallele à  $GB$  comme est  $GD$  à  $DH$ , ainsi  $BZ$  à  $ZH$ . par ainsi la ligne  $HB$  est coupée en mesme raison que  $HG$ , ou  $LC$  proposée.

PROPOSITION XI.

A deux lignes droictes données trouuer la troisiésme proportionnelle.

Soient les deux lignes droictes données  $HB$ ,  $HG$  disposées en l'angle  $H$ . soit tirée  $GB$ , & prolongée  $HB$  en  $D$ , en forte que  $BD$  soit égale à  $HG$ . Au point  $D$  soit menée  $DF$  parallele à  $BG$ , & faicte la ligne  $HGF$ . Il est euident par la 2. de ce livre que comme  $HB$  à  $BD$ , ainsi  $HG$  à  $GF$ . Mais  $HG$  &  $BD$  sont égales: il sera donc comme  $HB$  à  $HG$ , ainsi  $HG$  à  $GF$  3. ligne proportionnelle.

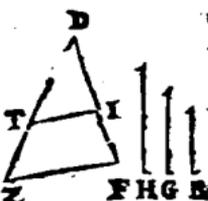


ELEMENS D'EVCLIDE,  
PROPOSITION XII.

*A trois lignes droictes données trouver la quatriefme proportionnelle.*

Soient les trois lignes droictes données HGB.

Soient deux lignes droictes DF, & DZ faisans vn angle en D, & soit la ligne droicte DT egale à H, TZ egale à B, & DI egale à G. soit tirée TI & menée la parallele ZF par la 2. de ce liure., comme DT (c'est à dire H) à TZ (c'est à dire B) ainsi DI (ou G son egale) à IF, laquelle sera par cè moyen la quatriefme ligne proportionnelle.

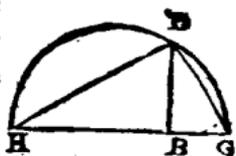


PROPOSITION XIII.

*A deux lignes droictes données trouver la moyenne proportionnelle.*

Soient les deux lignes droictes proposées

HB, BG mises directement, & sur la toute HG soit décrit vn demy cercle HDG, & au point B soit faicte la perpendiculaire BD, & ioinctes HD, DG. Le triangle HDG sera rectangle par la 31. du 3. Et puis que de l'angle droict D tombe sur la base la perpendiculaire DB, icelle fait deux triangles equiangles par la 8. de ce liure. Et par consequent proportionnaux par la 4. du mesme. Tellement donc que comme HB à BD, ainsi la mesme BD (qui est cõmune aux deux triangles) à BG. dont s'enfuiura que DB sera moyenne proportionnelle entre HB & BG.

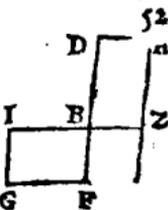


PROPOSITION XIIIII.

*Des parallelogrammes egaux qui ont vn angle egal à l'angle: Les costez au long des angles egaux sont reciproques. Et les parallelogrammes qui ont vn angle egal à l'angle, & les costez au long des angles egaux reciproques, sont aussi egaux.*

Soient les parallelogrammes egaux HF, BG ayans l'angle egal à l'angle, scauoir DBZ à IBF: ie dy que le costé DB

au costé B F est reciproquement comme I B à B Z.  
 Soit mis I B directement avec B Z: l'autre D B sera  
 aussi directement avec B F (car les angles sont au  
 sommet.) soit fait le parallelogramme Z F comme  
 le parallelogramme H B au parallelogramme Z F,  
 ainsi l'autre B G au mesme Z F par la 7. du 5. Mais  
 cōme H B à Z F, ainsi la ligne droicte D B à B F par la 1. du 6.  
 Et cōme B G à Z F par la mesme: car ils sont l'un à l'autre comme  
 leurs bases. Donc par la 11. du 5. comme les costez D B à B F,  
 ainsi reciproquemēt I B à B Z: tellement que suivant la 2. defini-  
 tion du 6. les parallelogrammes sont reciproques, & leurs costez.

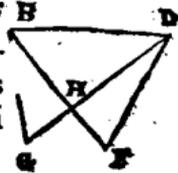


Semblablement se demonstrera la seconde partie, c'est à sçavoir, si les costez D B à B F sont reciproquement comme I B à B Z, les parallelogrammes H B, B G seront egaux. D'autant que (par l'hypothese) c'est vne mesme raison D B à B F, que B I à B Z, elle fera de mesme des parallelogrammes H B, à Z F, que B G au mesme Z F par la 1. du 6. Iceux donc H B & B G seront egaux par la 9. du 5.

PROPOSITION XV.

Des triangles egaux ayans vn angle egal à l'angle, les costez au long des angles egaux sont reciproques. Et les triangles ayans vn angle egal à l'angle, & les costez au long des angles egaux reciproques, sont aussi egaux.

Soient deux triangles egaux H B G & H D F  
 ayans les angles B H G & D H F egaux au sommet H. Je dy que leurs costez au long des angles egaux sont reciproques comme G H à H D, ainsi F H à H B. Puis que les angles sont disposez au sommet. B H, H F seront directement ensemble, comme aussi G H D: les triangles donc G B H, & D B H estans en vne mesme hauteur seront l'un à l'autre comme leurs bases G H à H D. Semblablement les triangles F D H, & le mesme D B H estans en mesme hauteur seront l'un à l'autre comme leurs bases F H à H B par la 1. du 6. Mais par l'hypothese H G B & H F D sont egaux, & ont vne mesme raison à vn mesme B D H par la 7. du 5. les lignes droictes donc G H à H D, & F H à H B ayans vne mesme raison que les triangles, auront aussi la mesme entr'elles par la



ELEMENS D'EVCLIDE,

II. du 5. Alternement donc les lignes seront proportionnelles GH à HD, comme FH à HB par la 2. definition de celuvre.

Pour la seconde partie soient les triangles predits ayans l'angle egal à l'angle, & les costez reciproques, ie dy iceux triangles estre egaux. D'autant que c'est vne mesme raison GH à HD que FH à HB, & comme GH à HD, ainsi le triangle HBG au triangle HBD, & comme FH à HB, ainsi semblablement le triangle HDF au mesme triangle HDB, ce sera vne mesme raison du triangle HBG au triangle HDB, que du mesme HDF au mesme HDB. Les triangles donc ainsi proposez seront egaux par la 9. du 5.

PROPOSITION XVI.

*Si quatre lignes sont proportionnelles, le rectangle compris des deux extremes est egal à celuy compris des moyennes. Et si le rectangle compris des deux extremes est egal à celuy compris des moyennes, les quatre lignes seront proportionnelles.*

SOIENT quatre lignes proportionnelles H à G, comme B à D. Je dy que le rectangle compris sous les plus grandes & plus petites qui sont les extremes B & G, est egal au rectangle compris des moyennes H & D. Soit fait de B & G vn rectangle, & de H & D vn autre rectangle. D'autant que de ces deux parallelogrammes les costez sont reciproques, sçauoir le plus grand de l'vn au plus grand de l'autre, & le plus petit de l'vn au plus petit de l'autre, comme H à G ainsi B à D. iceux sont egaux par la 14. du 6.



Pour la seconde partie, si les parallelogrammes sont egaux ils auront les costez reciproques, & seront comme H à C, ainsi B à D, par la mesme 14. du 6. liure.

PROPOSITION XVII.

*Si trois lignes sont proportionnelles, le rectangle compris des extremes est egal au quarré fait de la moyenne. Et si le rectangle compris des extremes est egal au quarré de la moyenne, icelles trois lignes seront proportionnelles.*

SOIENT trois lignes proportionnelles proposees H, B, D, sçauoir comme H à B, ainsi B à D: & de H & D soit fait

vn rectangle, & de B vn quarré. Je dy que le rectangle est egal au quarré. Car puis que C est egal à B, il sera comme H à B, ainsi C à D : les quatre seront donc proportionnelles H, B, C, D : mais le rectangle des extremes est egal au rectangle des moyennes, par la precedente, qui est le quarré de B moyenne.

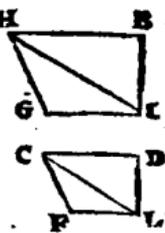


Et si le rectangle HD est egal au quarré de la moyenne B, les lignes H, B, C, D, seront proportionnelles par la precedente. Mais d'autant que B & C sont égales, H sera à B comme à B à D.

## PROPOSITION XVIII.

Sur vne ligne droicte donnée descrire vne figure rectiligne semblablement posée à vne autre figure rectiligne donnée.

Soit la ligne droicte donnée HB, sur laquelle il faut semblablement descrire vne figure rectiligne semblablement posée à la donnée C D L F. Soient premierement subtendus tous les angles par quelques lignes droictes, sçauoir en resoluant la figure en triangles, comme C D L, C L F.



Au point H sur la ligne HB soit fait vn angle egal à D C L, comme B H I par la 23. du 1. & au point B vn angle egal à D comme B. Le troisieme H I B sera egal au troisieme C L D, comme on peut recueillir de la 32. du 1. Le triangle donc H B I sera equiangle au triangle C D L, & semblablement descript : & comme C L à H I, ainsi C D à H B par la 4. du 6. Maintenant sur la ligne droicte HI soit semblablement descript le triangle H G I equiangle à C F L : d'autant que les deux angles B H I & I H G sont egaux aux deux angles D C L & I C F, le tout sera egal au tout sçauoir B H G à l'angle D C F : semblablement l'angle B I G à D L F, comme aussi l'angle G à l'angle F, la ligne droicte donc CL sera à la ligne droicte HI comme DL à B I : mais CL à HI est comme DC à BH. DC à BH sera donc comme DL à B I au long des angles egaux. Semblablement se demonstreront les autres costez estre de mesme l'un à l'autre. Par ainsi toute la figure rectiligne H B I G sera semblable à C D L F, & semblablement descripte sur la ligne donnée.

## PROPOSITION XIX.

Les triangles semblables sont l'un à l'autre en raison double de leurs costez de semblable raison.

ELEMENTS D'EVCLIDE,

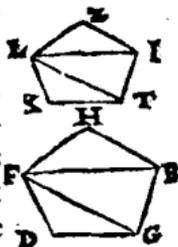
Soient les deux triangles equiangles HBG plus grand, & DFZ plus petit, ayans les costez proportionnaux par la 4. du 6. sçavoir comme HB à DF, ainsi BG à FZ. soit aussi comme BG à FZ, ainsi FZ à BI par la 11. du 6. par ainsi ces trois lignes seront proportionnelles, & la premiere BG à la troisieme BI aura la raison double de FZ par la 10. definition du 5. La raison donc de HB à DF sera de mesme reciproquement par la 2. definition du 6. livre. Parquoy les triangles HBI & DFZ seront egaux (par la seconde partie de la 15. de ce livre) les angles F & B ayans esté posez egaux. Mais BG est à la base BI, comme le triangle HBG au triangle HBI par la 1. du 6. La base donc BG sera à BI comme le triangle HBG au triangle DFZ (qui est egal à HBI) mais BG à BI à la raison doublée du costé BG au costé FZ. Il s'enfuira donc que le triangle HBG aura au triangle DFZ la raison double du costé BG à BI, ou des autres costez de semblable raison. Les triangles donc, &c.



PROPOSITION XX.

Les polygones semblables, se peuvent diuiser en triangles semblables, egaux en nombre, & proportionnaux à leur tout. Mais le polygone a au polygone la raison double du costé de semblable raison au costé de semblable raison.

Soient les polygones semblables ZLKT I, & SHFDGB: d'autant que par l'hypothese l'angle BHF est egal à l'angle IZL, & les costez au long des angles egaux proportionnaux, sçavoir comme BH à HF, ainsi IZ à ZL. Soient menées les lignes droictes BF, IL, les triangles HFB, & ZLI seront equiangles par la 6. de ce livre, & l'angle HBF sera egal à l'angle ZIL. Mais par la construction tout l'angle HBG est egal à tout l'angle ZIT: ostant donc HBF & ZIL, l'autre angle restant FBG sera egal à l'autre LIT. par la 19. du 5. Ioinctes maintenant FG & LT: FB sera à HB comme LI à ZI au long des angles egaux. Et comme HB à BG, ainsi ZI à IT en raison egale par la 22. du 5. il sera comme FB à BG, ainsi LI à IT. Mais d'autant que l'angle FBG a esté monstré egal à LIT, les triangles FBG &



LIT seront semblables & equiangles par la 6. de ce livre. Et pour ce que tout l'angle BGD est posé egal à l'angle ITK, par semblables argumens se demonstrera l'angle FGD estre egal à l'angle LTK, & les autres angles aux autres angles: & par ainsi par la 6. de ce livre le triangle FGD se trouuera equiangle au triangle LTK. Voila donc les polygones diuisez en triangles semblables, & egaux en nombre. Outre plus, d'autant que chaque triangle est semblable à son triangle, & ont vne mesme raison l'un à l'autre, & que les parties sont egales à leur tout, le polygone HBGDF au polygone ZITKL sera en raison double de HB à ZI par la precedente.

## PROPOSITION XXI.

*Les figures semblables à vne figure rectiligne, sont semblables entr'elles.*

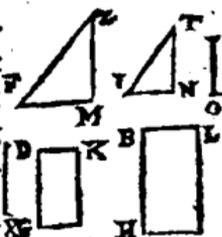
Soient les figures rectilignes H & B semblables à C. D'autant qu'elles ont leurs angles egaux aux angles de C par la 1. definition du 6. Ils auront aussi leurs angles egaux entr'eux par la 1. commune sentence, & auront les costez de mesme raison proportionnaux au long des triangles egaux: dont s'ensuiura que H & B seront semblables & equiangles.



## PROPOSITION XXII.

*Si quatre lignes droictes sont proportionnelles, les figures rectilignes semblables, & semblablement descrites sur icelles seront proportionnelles. Et si les figures rectilignes semblables & semblablement descrites sur quatre lignes droictes sont proportionnelles, icelles lignes seront proportionnelles.*

Soient quatre lignes droictes proportionnelles HB à GD cōme FZ à IT. Soient faictes les figures HL, GK semblables, & semblablement descrites: soient aussi les deux autres FZM & ITN semblables & semblablement descrites. Soit aussi aux lignes HB & GD trouuée la troisieme proportionnelle X par la 11. de 6. & aux lignes FZ & IT la troisieme propor-

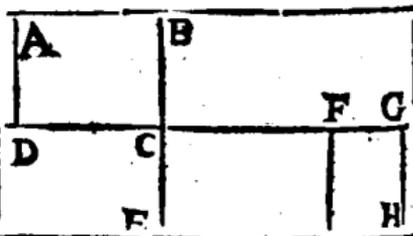


tionnelle O. Comme la ligne HB est à X, ainsi est la figure HL à la figure GK (c'est à dire en raison double) & comme FZ à O, ainsi la figure FZM à ITN par la 19. du 6. Mais comme HB à GD, ainsi FZ à IT, & comme GD à X, ainsi IT à O. Donc par la 22. du 5. en raison egale, commela ligne HB à la ligne X, ainsi FZ à O. Par ainsi commela figure HL est à la figure GK, ainsi FZM à ITN, par la 11. du 5. & sont proportionnelles. Pour la secôde partie soiet les mesmés figures proportionnelles semblables & semblablement descrites. Je dy queles quatre lignes sur lesquelles elles sont descrites sont proportionnelles: car comme on peut recueillir de la 19. & 20. de ce liure, la raison de l'une à l'autre sera comme celle de leurs costez doublée. La raison donc de leurs costez sera vne mesme par la 7. commune sensence, sçavoir comme HB à DG, ainsi FZ à IT: iccux costez seront donc ptoportionnaux.

PROPOSITION XXIII.

*Les parallelogrammes equiangles ont raison l'un à l'autre composee de leurs costez.*

**L**AISSANT à part les diuerfes opinions de plusieurs qui ont glôse sur ceste proposition, & aussi que la raison composée ne se peut icy entendre comme elle est diffinie en la 14. du 5. Je diray seulement que la raison des parallelogrammes equiangles de l'un à l'autre depend de la raison des costez d'iceux: Mais voicy ce qui se peut plus facilement demonstrier, qui me semble plus approcher de l'intention de l'Autheur.



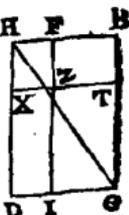
Soient les deux parallelogrammes ABCD & CGHE equiangles, si le plus long costé de l'un CG est au plus grand costé de l'autre CD, comme BC au plus petit CE, les parallelogrammes seront egaux par la 16. de ce liure. Mais si CG a plus grande raison à DC que BC à CE de la quantité de FG. Aussi le parallelogramme CH excedera l'autre AC en mesme proportion que la raison du costé GC à DC, excede la raison de BC à CE: c'est à sçavoir du parallelogramme FH, lequel FH a mesme raison au parallelogramme EF, comme la ligne CF à la ligne FG par la 1. du 6. Voila donc comment la raison

des parallelogrammes equiangles de l'un à l'autre depend de la raison de leurs costez.

PROPOSITION XXIII.

De tout parallelogramme les parallelogrammes qui sont au long du diametre ayans vn angle commun avec le mesme, sont semblables au tout, & l'un & l'autre.

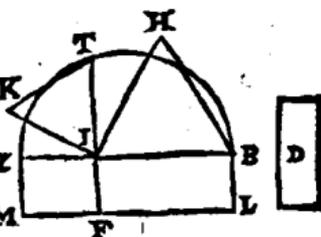
SOIT le parallelogramme HBGD & son diametre HG, au long duquel soient les parallelogrammes FX, TI ayans chacun vn angle commun avec le tout sçavoir H & G. D'autant que XZT est parallele à HB, & FZI à HD, & que la ligne HG les trauerse au point cõmun Z, il s'enfuiura que les angles FHZ, HZX, & TZG, ZGI seront egaux, comme aussi XHZ, HZF, IZG, ZGT seront egaux par la 29. du 1. & que les quatre triangles seront equiangles, & par consequent auront leurs costez proportionnaux par la 4. du 6. comme donc sera HF à FZ, ainsi ZT à TG, & comme HX à XZ, ainsi Z à G, ainsi les parallelogrammes proposez sont equiangles, semblables & semblablement descrits entr'eux & au tout.



PROPOSITION XXV.

Descrive vne figure rectiligne semblable à vne figure rectiligne donnée & egale à vne autre rectiligne proposee.

SOIT la figure rectiligne proposee HBI, à laquelle il conuienne faire vne semblable figure & egale à D. Sur la ligne droicte BI soit fait vn rectangle par la 45. du 1. qui soit egal à ZHIB comme BF. soit prolongee BI vers Z, & sur la ligne IF à l'angle ZIF, soit descrit vn rectangle ZF egal à D. Et soit par la 13. de ce liure trounee la moyenne proportionnelle entre BI & IZ, laquelle soit FT. Sur icelle soit semblablement descrite vne figure semblable à HIB par la 18. du 6. comme ITK. Maintenant comme BI à IT, ainsi IT à IZ, & comme la figure HIB à la figure ITK, ainsi la ligne BI à IZ en raison double par la 19. & 20. de ce liure. Mais comme la ligne BI à IZ, ainsi le rectangle BF



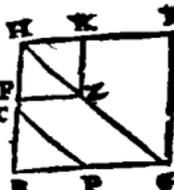
ELEMENS D'EVCLIDE,

(ou  $HIB$  son egal) au rectangle  $IM$  par la 1. de celuyre : car ils sont en mesme hauteur. Ils s'ensuiura donc que la figure  $ITK$  sera egale au rectangle  $IM$  par la 14. du 5.

PROPOSITION XXVI.

Si d'un parallelogramme on oste vn parallelogramme semblable au tout & semblablement pose, ayant vn angle commun avec le tout : le soustrait sera avec le tout sur vn mesme diametre.

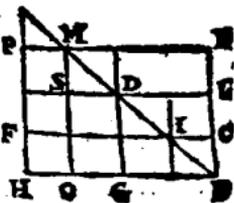
SOIT d'un parallelogramme  $HDGB$  osté le parallelogramme  $HKZF$  semblable au tout & semblablement pose, ayant l'angle commun  $H$ . Le dy que le diametre  $HZG$  de l'un & de l'autre est vne mesme ligne droicte. Car soit diuisé le costé  $BG$  en deux egalement en  $P$ , comme aussi  $HB$  en  $C$  & tirée  $CP$ , ceste ligne sera parallele à  $HZG$  (car le triangle  $CPB$  a les costez proportionnaux aux costez du triangle  $HGB$ , & par consequent est equiangle par la 5. de cestuy) dont s'ensuiura que l'angle  $CPB$  estant egal à l'angle  $HGB$  &  $PCB$  à  $ZHF$ , la ligne  $HZG$  ne sera qu'une parallele à  $CP$  par la 28. & 30. du 1. dont est euident que le parallelogramme soustrait est sur vn mesme diametre avec le tout.



PROPOSITION XXVII.

De tous parallelogrammes qu'on peut appliquer sur vne ligne droicte, deffailant de la ligne droicte de la quantité des parallelogrammes semblables à celuy descrit sur la moitié & semblablement posez, le plus grand est celuy qui est appliqué sur la moitié de la ligne, & qui est semblable à celuy par lequel il est deffailant.

SOIT la ligne droicte  $HB$  coupée au point  $G$  en deux egalement, & sur  $GB$  soit descrit vn parallelogramme  $GL$  duquel le dimencient soit  $DB$  : d'autant que le parallelogramme de la quantité duquel vn autre parallelogramme appliqué doit maquer de la ligne, est

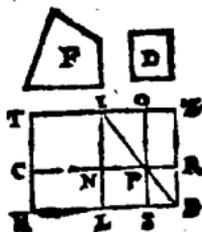


semblable & semblablement posé à GL qui est fait de la moitié, le mesme parallelogramme sera sur le dimetient *par la precedente*, & auront l'angle B commun. Parquoy afin que l'appliqué sur la ligne HB defaille d'icelle par vn parallelogramme semblable à GL : il faudra qu'il soit décrit du point H iusques au dimetient. Soit donc appliqué HI defaillant de la ligne, de la quantité de IB semblable à GL. Je dy que de tous les parallelogrammes ainsi appliquez sur HB entre H & le dimetient, le plus grand est celuy qui est appliqué sur la moitié de la ligne, c'est à sçauoir HD ou GL son egal. Premièrement HI sera démontré moindre, d'autant que les suppléments GI & IL sont egaux *par la 43. du 1.* comme aussi FD & DC *par la 36. du 1.* & que FD est plus grand que IL (ou IG son egal) de la quantité DI, le commun FG estant adjouste, HD (ou GL son egal) sera plus grand que HI de la quantité du parallelogramme DI. Que si le parallelogramme est mis comme HM surpassant D, il sera defaillant de la quantité ON semblable à GL. Or les suppléments DN, DO sont egaux, comme aussi PD & DN : & PS est moindre que DN de la quantité de MD : si donc on adjouste le commun HS, le tout HD (ou GL son egal) sera plus grand que HM de la quantité de MD. *De tous parallelogrammes donc, &c. Cecy veut dire qu'en un triangle ne se peut inscrire aucun parallelogramme plus grand que celuy qui coupe les trois costez en deux également, & qui a l'angle commun avec le triangle.*

PROPOSITION XXVIII.

sur vne ligne droicte donnee appliquer vn parallelogramme defaillant en espee de la quantité du parallelogramme semblable donné, & qu'iceluy appliqué soit egal à vne figure rectiligne donnee non plus grande que le parallelogramme appliqué sur la moitié de la ligne semblable à celuy duquel il doit estre defaillant.

SOit la ligne droicte donnée HB sur laquelle il faut appliquer vn parallelogramme egal à F & defaillant d'vn parallelogramme semblable à D. Soit donc sur la moitié LB décrit vn semblable à D *par la 18. de celiure* comme LZ, & soit acheué TB & tirée la ligne IB. Si F est egale à HI (ou à IZ son egal) nous auons la chose



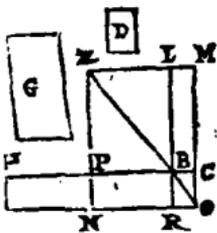
ELEMENS D'EVCLIDE;

desirée : si elle est moindre, posons que ce soit de certain espace que nous reduisons en semblable figure comme D par la 25. de ce-  
*stuy.* Lequel espace soit ON, qui sera sur le dimetient par la 26. du  
 6. D'autant qu'en la precedente il a esté monstré que HP est  
 moindre que HI du parallelogramme NO, & que F est moins  
 que HI par la position du mesme NO : il s'ensuivra que HP  
 sera egal à F par la 7. & 11. du 6. & sera defaillant de la ligne HB,  
 de l'espace SR semblable à LZ ou à D.

PROPOSITION XXIX.

*Sur vne ligne droicte donnée comparer vn parallelogramme  
 egal à vne figure rectiligne donnée, & excedant en espee  
 d'vn parallelogramme semblable à vn autre proposé.*

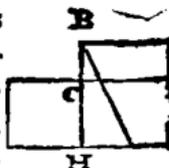
Soit la ligne droicte donnée HB couppee en  
 SP en deux également, la figure rectiligne à  
 laquelle se fera la comparaison soit G, & le pa-  
 rallelogramme semblable à l'exces soit D. Main-  
 tenant soit fait PL semblable à D, & dans l'angle  
 Z soit décrit vn parallelogramme egal à  
 PL & à G, & semblable à PL (ou à D) par la  
 25. du 6. liere, & soit NM. il est evident que le commun PL estant  
 osté le gnomon LOP sera egal à G. Si donc le parallelogram-  
 me NH est fait de l'autre moitié HP, le parallelogramme HO  
 sera egal au gnomon LOP, & par consequent à G, & excedera  
 la ligne HB du parallelogramme RC qui est semblable à PL  
 ou à D. Si donc sur vne ligne droicte, &c.



PROPOSITION XXX.

*Couper vne ligne droicte terminée donnée  
 entre les deux extremes.*

Soit la ligne droicte HB couppee en C par la  
 11. du 2. Le rectangle compris sous HB, BC se-  
 ra egal au quarré de HC. Voicy donc trois li-  
 gnes proportionnelles par la 17. du 6. comme la  
 toute HB à la plus grande partie HC, ainsi celle-  
 cy à la plus petite CB. dont s'ensuit que HB est couppee en C  
 entre les deux extremes par la 3. definition de ce liere.

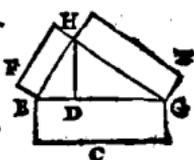


PROPO.

## PROPOSITION XXXI.

**Aux triangles rectangles la figure de quelconque espece que ce soit qui est descrite sur le costé qui soustient l'angle droit, est egale aux figures de mesme espece qui sont semblables & semblablement descrites sur les costez qui comprennent l'angle droit.**

**S**Oit le triangle rectangle H B G duquel l'angle droit soit H. Je dy que toutes figures semblables & semblablement descrites des costez qui comprennent l'angle droit cōme F H B & Z H G sont egales à la figure semblable & semblablement descrite sur B G, c'est à sçavoir B G C. D'autant que ces polygones sont semblables & equiangles, ils auront l'un à l'autre la raison double de leurs costez, comme auront aussi les quarez descrits sur les mesmes costez, par la 19. & 10. de ce livre. Il s'ensuiura donc que comme les deux quarez sont egaux au troisieme par la 47. du 1. ainsi les deux polygones seront egaux au troisieme, puis qu'ils ont vne mesme raison entr'eux.



## PROPOSITION XXXII.

**Si entre deux triangles le costé de l'un & le costé de l'autre composent vn angle, & que ces deux costez soient reciproques à deux autres, & paralleles: les autres deux costez d'iceux triangles seront en vne seule ligne droicte.**

**S**Oient les deux triangles joints en sorte que les costez H G & D G fassent vn angle entre les deux triangles, c'est à sçavoir H G D. & soient iceux paralleles & reciproques aux deux autres costez, comme H G à D F, & D G à H B. D'autant que H B & D G sont paralleles, & que H G tombe sur icelles, l'angle B H G sera egal à l'angle H G D: & puisque H G & D F sont paralleles, & que D G tombe sur icelles, l'angle H G D sera egal à G D F par la 20. du 1. Les angles donc H & D seront egaux & les triangles equiangles par la 6. de cestuy, & l'angle H G F egal aux deux H & B par la

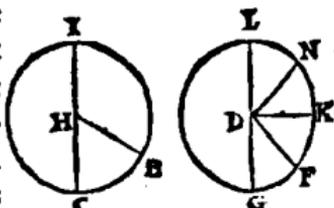


32. du 1. Et par ainsi les deux angles HGF, & HGB égaux à deux droicts. Puis donc qu'à la ligne HG deux autres lignes concourent, sçavoir BG & FG, & qu'elles font deux angles égaux à deux droicts, icelles sont posées directement par la 14. du 1.

## PROPOSITION XXXIII.

*Aux cercles égaux les angles ont mesme raison que les circonferences sur lesquelles ils sont, soit que les angles soient en la circonference, ou au centre: & les secteurs ont aussi mesme raison.*

Il a esté montré par la 27. du 3. que aux cercles égaux les angles qui sont sur circonferences égales sont égaux: maintenant si en cercles égaux les angles inégaux n'ont vne mesme raison que leurs circonferences sur lesquelles



ils sont décrits comme sur leurs bases: Soient proposez deux angles inégaux CHB plus grand & GDF plus petit, & que l'angle GDF soit vn demy droict, & que l'arc CB ait plus de raison à l'arc GF que l'angle CHB à l'angle GDF. Par mesme raison ou supposition l'arc plus grand IB aura plus de raison à BC plus petit que l'angle IHB à BHC: & conjointement les deux arcs (c'est à dire la moitié de la circonference) auront plus de raison à l'arc GF que les deux angles IHB & BHC (c'est à dire deux droicts) à l'angle GDF. Maintenant soit fait l'angle KDF égal à GDF, & KDN & NDL de mesme: il est euident par la 26. du 3. que les arcs FK, KN, & NL seront égaux & les quatre angles vaudront deux droicts: dont s'ensuivra que la moitié de la circonference IBC aura plus de raison à la moitié de la circonference LNKFG que deux angles droits à deux angles droits, ce qui est faux & contre la position qui met les cercles égaux. Semblablement se monstrera l'arc CB n'auoir moindre raison à l'arc GF que l'angle CHB à l'angle GDF. Tellement donc que aux cercles égaux, &c. Pour le regard des angles en la circonference qui sont moitié de ceux qui sont au centre, puis que c'est vne mesme raison des moities aux moities que du tout au tout, il n'y aura aucune difficulté.

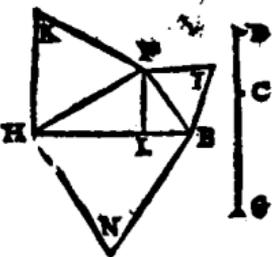
Et quant aux secteurs s'ils sont égaux, ils auront les angles du

centre egaux & leur base droicte egale à la base droicte *par la 4. du 1.* Et *par la 28. du 3.* les lignes droictes egales leuent circonferences egales, les secteurs egaux auront donc mesme raison l'un à l'autre que l'arc à l'arc. Que s'ils sont inegaux, posons s'il est possible, que le plus grand secteur  $CHB$  a moindre raison au plus petit  $GDF$  que l'arc  $CB$  à l'arc  $GF$ . Ils'ensuiura de ceste position que le secteur  $IHB$  aura moins de raison au plus petit secteur  $CHB$  du mesme cercle, que l'arc  $IB$  à l'arc  $CB$ , & par consequent que tous les deux secteurs (c'est à dire la moitié du cercle) auront moins de raison au secteur  $GDF$  que l'arc  $IBC$  à l'arc  $GF$ . Or les quatre angles qui sont en  $D$  sont egaux, & leurs arcs egaux par l'hypothese: les deux secteurs donc  $IHB$  &  $BHC$  (c'est le demy cercle) auront moins de raison aux quatre secteurs de l'autre cercle  $D$  (qu'est le demy cercle) que la moitié de la circonference a la moitié de la circonference des mesmes cercles: ce qui est faux, estans les cercles posez egaux. Semblablement se pourra demonstrier que le plus grand secteur n'aura pas plus grande raison au plus petit que l'arc à l'arc: dont s'ensuiura qu'ils auront mesme raison l'un à l'autre que l'arc à l'arc.

## PROPOSITION XXXIIII.

*Descrivre deux figures rectilignes qui ayent l'une à l'autre la raison donnée, & qui soient egales, semblables & semblablement descrites à vne autre figure rectiligne donnée.*

Soit la figure rectiligne donnée  $HBN$  & la raison donnée soit  $GC$  à  $CD$ . Soit  $HB$  couppee en mesme raison en  $L$  *par la 10. du 6.* & fait vn demy cercle sur  $HB$ , & esleuee la perp endiculaire  $LF$  iusques à la circonference, & soient menées  $HF$  &  $FB$  qui comprendront vn angle droict *par la 31. du 3.* La ligne  $LF$  sera moyenne proportionnelle entre  $HL$  &  $LB$  *par la 13. du 6.* & les deux triangles  $HFL$  &  $FB L$  sont equiangles & semblables l'un à l'autre & au tout  $HFB$  *par la 8. du 6.* Ainsi donc comme  $HF$  est à  $FB$ , ainsi  $HL$  à  $LF$ , &  $FL$  à  $LB$ . Or les figures semblablement descrites sur  $HF$  &  $FB$  sont l'une à l'autre comme  $HL$  à



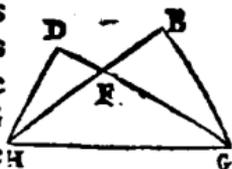
ELEMENS D'EVCLIDE,

LB, c'est à dire en raison double par la 20. du 6. Il s'ensuiura donc, icelles figures estans semblablement descrites comme HBN, estre l'une à l'autre selon la raison de HL à LB, c'est à dire GC à CD. Mais par la 31. du 6. liure. les deux figures HKF, FIB sont egales à HNB : il s'ensuit donc qu'elles sont suiuant la proposition, c'est à sçauoir egales & semblables à la proposée, & ayans l'une à l'autre la raison donnée.

PROPOSITION XXXV.

*Si deux lignes droictes se couppent en angle obtus, & des extremitéZ d'icelles on tire sur vne chacune vne perpendiculaire, les lignes entre les extremitéZ & les perpendiculaires se couppent l'une l'autre reciproquement.*

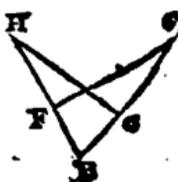
Soient deux lignes HB, GD se couppans en angles obtus en F, & soient tirées les perpendiculaires HD, GB. d'autant que les angles D & B sont droicts, & DFH, BFG egaux par la 15. du 1. Il s'ensuiura que l'angle DHF sera egal à BGF, comme on peut recueillir de la 32. du premier, & par consequent les triangles HDF & GBF equiangles qui auront leurs costez proportionnaux par la 4. du 6. la ligne HF sera donc à FD comme GF à FB, suiuant la proposition.



PROPOSITION XXXVI.

*Si deux lignes droictes comprennent vn angle aigu, & des extremitéZ d'icelles on tire sur icelles-mesmes des perpendiculaires qui se couppent, icelles deux lignes seront reciproquement proportionnelles comme les segments qui sont au long de l'angle.*

Soient deux lignes HB & GB faisans l'angle aigu B, & soient tirées les perpendiculaires HC, GF. D'autant que l'angle HCB est droict, & egal à l'angle GFB, & que l'angle B est commun, les deux angles H & G seront egaux par la 32. du 1. Et les triangles HCB & GFB se-

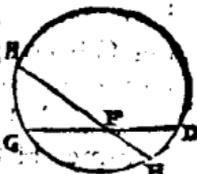


ront equiangles, & par consequent proportionnaux. HB sera donc à BC comme GB à BF, & de mesme suite comme HB à BG, ainsi FB à BC par la 16. du 5.

## PROPOSITION XXXVII.

*Si deux lignes droictes se couppent l'une l'autre en vn cercle, les sections de l'une aux sections de l'autre seront reciproquement proportionnelles.*

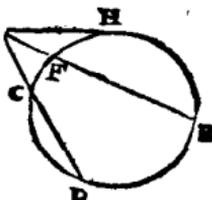
Soient HB & GD deux lignes droictes au cercle se couppans l'une l'autre en F. D'autant que par la 35. du 3. le rectangle compris de HF, FB est egal au rectangle de GF, FD, & que les costez des parallelogrammes sont proportionnaux, sçavoir ceux au long des angles egaux par la 14. du 6. Il s'ensuiura que comme HF à FD, ainsi GF à FB reciproquement par la 2. definition du 6. livre.



## PROPOSITION XXXVIII.

*Si d'un point donné hors le cercle deux lignes droictes tombent dans la circonference caue, icelles seront reciproquement proportionnelles à leurs parties qui sont hors le cercle: & entre la toute & le segment hors du cercle, la moyenne proportionnelle est celle qui est menée du mesme point, & touche seulement le cercle.*

Soit le point donné hors le cercle G, duquel soient menées deux lignes droictes à la circonference caue GB, GD, & du mesme soit menée GH qui touche seulement le cercle en H. D'autant que le rectangle compris de GB, GF est egal au rectangle de GD, GC comme on peut recueillir de la 36. du 3. Il s'ensuiura que les costez d'iceux rectangles seront proportionnaux par la 14. du 6. il sera donc GB à GD reciproquement comme leurs parties hors du cercle GC à GF. Dauantage, d'autant que par la mesme 36. le quarre de GH est egal au rectangle de GB, GF, ou de GD, GC,



ELEMENS D'EVCLIDE, LIVRE SIXIESME.  
 Il s'enfuira par la seconde partie de la 17. du 6. que la ligne GH sera moyenne proportionnelle entre GB & GF, ou entre GD & GC.

PROPOSITION XXXIX.

*Si deux lignes droictes sont couppees par deux paralleles droictes, elles sont couppees des mesmes en mesmes raisons.*

Soient les deux lignes droictes HB, CD couppees par deux paralleles HC, FG. soit mennee CB coupant en I la ligne FG. Or par la 2. du 6. comme HF à FB, ainsi CI à IB, & comme CI à IB, ainsi CG à GD. Voila donc comme HF est à FB, ainsi CG à GD par la 11. du 5. livre.



FIN DV SIXIESME LIVRE.



# LE SEPTIESME LIVRE DES ELEMENS D'EVCLIDE.

## DEFINITIONS.

1. **L'** Vnité est selon laquelle vne chacune des choses qui sont se nomme vne.
2. Mais le nombre est la multitude composee de plusieurs vnitez.
3. Partie est vn nombre moindre qu'un plus grand, quand il mesure le plus grand.
4. Et parties sont vn nombre moindre qu'un plus grand, quand il ne mesure pas le plus grand.
5. Mais le multiplie est vn nombre plus grand que le plus petit, quand celuy-cy mesure l'autre.
6. Nombre pair est celuy qui se peut diuiser en deux parties egales.
7. Mais impair est celuy qui ne se peut diuiser en deux parties egales: ou bien celuy qui est different du nombre pair de l'vnité.
8. Nombre parement pair, est celuy qui est mesuré d'un nombre pair seulement.
9. Nombre parement impair est celuy qui est mesuré d'un nombre pair par vn nombre impair.
10. Mais nombre parement pair & impair est celuy qui est mesuré d'un nombre pair & d'un nombre impair.
11. Et Nombre impairement pair est celuy qui est mesuré de l'vnité seulement.
12. Nombre premier est celuy qui est mesuré de l'vnité seulement.

ELEMENS D'EVCLIDE,

13. Nombres premiers entre eux sont ceux qui sont mesurez par l'vnité seulement, pour mesure commune.

14. Nombre composé est celuy qui est mesuré de quelque nombre.

15. Nombres composez entre eux sont ceux qui sont mesurez de quelque nombre pour mesure commune.

16. Vn nombre se dict multiplier vn autre, quand autant d'vnitez qu'il y a en luy, autant de fois se compose le multiplié & en naist vn autre.

17. Nombre plan est celuy qui est produict de deux nombres se multiplians l'vn l'autre, & les costez d'iceluy sont les nombres se multiplians l'vn l'autre.

18. Nombre solide est celuy qui est produict de trois nombres se multiplians ensemble l'vn l'autre: Et les trois costez d'iceluy sont les nōbres se multiplians ensemble.

19. Nombre quarré est qui est également egal, ou bien celuy qui est contenu de deux nombres egaux.

20. Nombre cube est qui est également egal également: ou bien celuy qui est contenu de trois nombres egaux.

21. Nombres proportionnaux sont ceux desquels le premier est l'egal multiple, ou bien la mesme partie ou parties du second, comme est le troisieme du quatrieme.

22. Nombres plans ou superficiels semblables, & nombres solides semblables sont ceux qui ont les costez porportionnaux.

23. Le Nombre qui donne nom à la partie est celuy par lequel la partie reperee constituë & fait le tout.

24. Nombre parfait est celuy qui est egal à toutes & thacunes les parties.

*Definition du nombre milieu proportionnel.*

Nombre milieu proportionnel entre deux nombres

est celuy auquel le plus grand a mesme raison comme luy mesme au plus petit.

## COMMUNES SENTENCES.

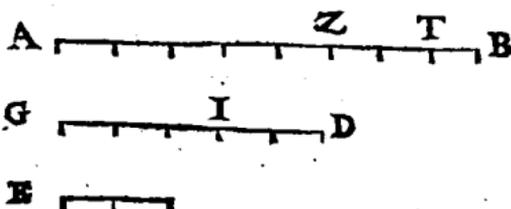
1. Si vn Nombre mesure vne partie, il mesurera aussi le tout.

2. Si vn nombre mesure le tout & le soustraiçt, il mesurera aussi le reste.

## PROPOSITION PREMIERE.

Deux nombres inegaux estans proposez, si en leuant tousiours alternement le plus petit du plus grand, le restant ne mesure iamais le precedent iusques à ce qu'il reste l'vnité; les nōbres proposez du cōmencement seront premiers entr'eux.

Soient donc proposez deux nōbres, sçauoir  $AB$  plus grand &  $GD$ . & de  $AB$  soit leué  $GD$  restant  $ZB$ . Et de  $GD$



soit osté  $ZB$  restant  $ID$ . de  $ZB$  aussi soit

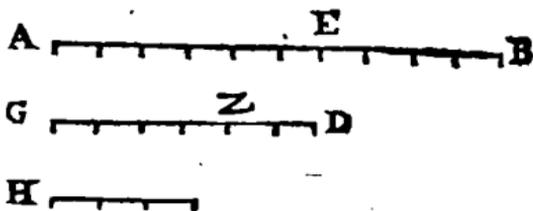
osté  $ID$ , & ainsi tousiours iusques à ce qu'il reste seulement l'vnité  $TB$ . Je dis qu'il n'y a aucū nombre qui mesure  $AB$  &  $GD$ .

Que si quelque nombre les mesure, soit iceluy  $E$ : Et parce que  $E$  mesure le tout  $AB$  & le soustraiçt  $GD$ , il mesurera aussi le reste  $ZB$  par la 2. com. sent. de ce liure. Séblablement pource que le mesme  $E$  mesure le tout  $GD$  & le soustraiçt  $ZB$ , il mesurera aussi le reste  $ID$  par la mesme. Et finalement mesurant le tout  $ZB$  & le soustraiçt  $ID$ , il mesurera aussi le reste, c'est à sçauoir l'vnité  $TB$ . Ce qui est absurde, estant le nombre  $E$  plus grand que l'vnité. Si donc deux nombres inegaux &c.

## PROPOSITION II.

De deux nombres non premiers entre eux trouuer la plus grande commune mesure d'iceux.

Soiét proposez deux nombres non premiers entre eux A B, G D, desquels soit toujours osté le plus petit du plus grand iufques à ce que le nôbre



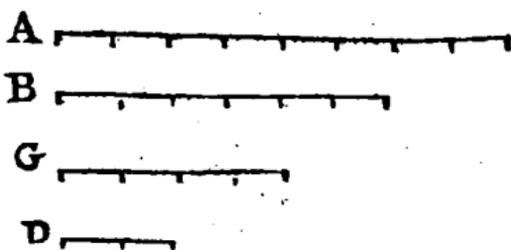
restant mesure le precedent; ce que necessairement aduendra: autrement ne restant que l'vnité, ils seroient premiers par la precedente, qui seroit contre l'hypothese.

Le dy donc que leuant G D de A B restera E B, cestuy cy leué de G D restera le nombre Z D, & que nul autre nombre plus grand ne mesurera point les proposez. Si quelque plus grand comme H les peut mesurer, d'autant qu'il mesure le tout A B & le soustricte G D, il mesurera aussi le reste E B: & pource aussi qu'il mesure le tout G D & le soustricte E B, il mesurera aussi le reste Z D par la 2. com. sent. de ce liure: Le nombre H plus grand mesurera donc le plus petit Z D. Ce qui ne se peut faire. Dont est euident qu'un plus grand nombre que Z D ne mesurera point les uombres proposez. Resulte que si vn nombre mesure deux autres nombres, il mesurera aussi leur commune plus grande mesure.

PROPOSITION III.

De trois nombres non premiers entre eux, trouuez la plus grande commune mesure d'iceux.

Soient les trois nombres non premiers entre eux proposez A, B, G, Soit des deux A & B, trouuee la plus grande mesure (par la precedente) laquelle soit D, qui mesu-



ra le reste G, ou ne la mesurera pas. Que si elle le mesure, elle sera la plus grande mesure des trois, & aurons ce qui est requis. Si elle ne le mesure point, il faudra que G & D soient premiers entre eux, contre ce qui resulte de la precedente, & par consequent aussi G & B premiers: Ce qui est contre l'hypothese; Le nombre D sera donc la plus grande commune mesure des proposez. Et resulte que si vn nombre mesure plusieurs autres nombres, il mesurera

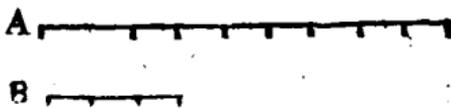
*aussi leur plus grande commune mesure.*

## PROPOSITION III.

*Tout nombre moindre est partie ou parties de tout nombre plus grand.*

**S**Oit le plus grand exposé

A. S'il le moindre B mesure A il sera la partie précise d'iceluy par la 3. définition de celiure, S'il ne le mesure pas, il en sera les parties par la 4. définition de ce livre.



## ADVERTISEMENT.

*Toute raison d'une partie au nombre, eschet en la mesme raison que l'unité au nombre. Et la raison des parties au nombre eschet tousiours és mesmes raisons que du nombre au nombre, mais non de l'unité au nombre.*

*Entre tous nombres donc ne tombe pas la vraye & simple raison des nombres (c'est à dire des quantitez discrettes,) mais seulement entre ceux desquels le moindre est les parties du plus grand: par ainsi de 4. à 12. la raison ne sera pas simplement des nombres, d'autant qu'elle est reduicte à la raison de l'unité à 3, & est de mesme: mais la raison de 4. à 14. & les autres des parties au tout, sont seulement entre les nombres.*

## PROPOSITION V.

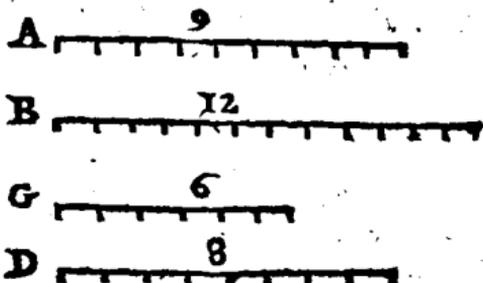
*Si vn nombre est partie d'un nombre, & vn autre nombre est la mesme partie d'un autre nombre, aussi tous deux ensemble seront la mesme partie de tous deux ensemble, qu'est l'un de l'autre.*

**C**este mesme chose est declaree en la 1. proposition du 5. és quantitez continues, comme elle est en celle cy és quantitez discrettes (c'est à dire és nombres.) Et pourtant, comme i'ay dict là, ie ny apporteray (non plus qu'en quelques suivantes) aucune

ELEMENS D'EVCLIDE,

demonstration, ains seulement interpretation, craignant d'obscurcir ce qui est assez clair par le texte: Car ces propositions sont plustost principes & communes sentences que theoremes.

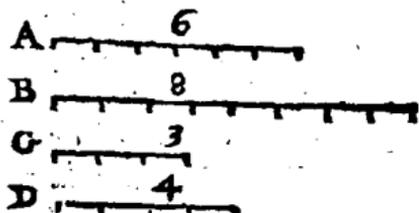
Si donc A est la mesme partie de B comme G est de D; A & G ensemble feront la mesme partie de B D ensemble.



PROPOSITION VI.

Si vn nombre est parties d'un nombre, & vn autre nombre est les mesmes parties d'un autre: aussi tous deux ensemble seront les mesmes parties de tous deux ensemble, comme l'un de l'un.

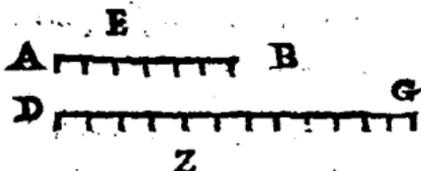
Si le nombre A est les mesmes parties de B comme G est de D; les deux ensemble A & G feront les mesmes parties de B & D ensemble, comme est A de B ou G de D.



PROPOSITION VII.

Si vn Nombre est la mesme partie d'un nombre, comme est le soustraiect du soustraiect; aussi le resté sera la mesme partie du resté, comme est le tout du tout.

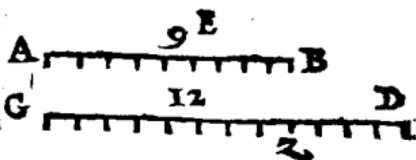
Soit le nombre AB la mesme partie du nombre DG, comme le soustraiect BE du soustraiect GZ, le resté AE sera aussi la mesme partie du resté DZ, comme estoit le tout AB au tout DG. Cccy se rapporte à la 5. prop. du 5.



## PROPOSITION VIII.

*Si vn nombre est les mesmes parties d'un nombre, comme est le soustrait du soustrait; aussi le reste sera du reste les mesmes parties comme le tout du tout.*

Soit le nombre A B les mesmes parties de G D comme le soustrait A E est du soustrait G Z; le reste E B sera aussi les mesmes parties du soustrait Z D.

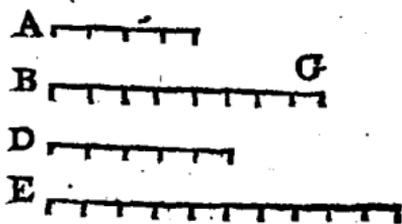


## PROPOSITION IX.

*Si vn nombre est partie d'un nombre, & vn autre est la mesme partie d'un autre, aussi alternement, telle partie, ou telles parties comme est le premier du troisieme, aussi le second sera la mesme partie ou mesmes parties du quatrieme.*

D'Autant que toutes sortes de raisons des quantitez discrettes peuuent escheoir entre quelques raisons des quantitez continues (comme nous auons aduertcy deuant) ceste proposition & la suiuite sera facile a entendre par la 16. du 5.

Soit le nombre A la mesme partie du nombre B G, comme D est de E, telle partie ou parties qu'est le premier A au troisieme D, aussi telle partie ou parties sera le second B au quatrieme E.



## PROPOSITION X.

*Si vn nombre est les parties d'un nombre, & vn autre est les mesmes parties d'un autre; aussi alternement telles parties, ou partie comme est le premier du troisieme, le second sera les mesmes parties ou partie du quatrieme.*

Ceste proposition se peut facilement comprendre par la pre-

ELEMENS D'EVCLIDE,

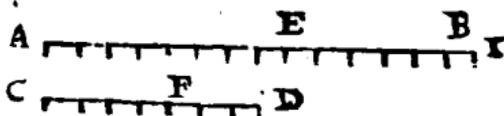
cedente & par la 16. du 5. Et faut noter qu'il est entendu tant des parties surabondantes le tout cōme de celles au dessous du tout.

PROPOSITION XI.

*Si comme le tout est au tout, ainsi est le soustraiçt au soustraiçt, aussi le resté au resté sera comme le tout au tout.*

Ceste proposition se peut entendre par la 19. du 5 Mais Euclide expose icy & es trois propositions suiivantes que la raison des nombres l'un à l'autre naist de la similitude des parties.

Soit donc tout le nombre AB à tout le nombre CD comme le soustraiçt EB au soustraiçt FD; aussi le reste AE sera de mesme au soustraiçt CF.

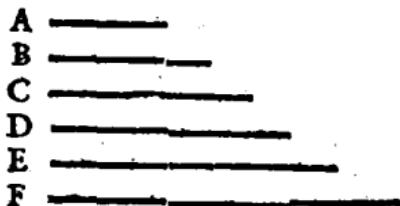


PROPOSITION XII.

*S'il y a tant de nombres qu'on voudra proportionnaux, comme l'un des antecedens est à l'un des suiivans, tout ainsi tous les antecedens sont à tous les suiivans.*

Celle cy & la suiivante sont demonstrees en la 16. du 5.

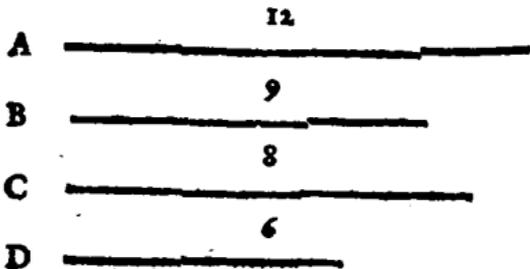
Soit donc A à B comme C à D & comme E à F, aussi A, C, E antecedés seront de mesme aux consequens & suiivans B, D, F, comme A à B. ou C à D. ou E à F.



PROPOSITION XIII.

*Si quatre nombres sont proportionnaux, aussi alternement ils seront proportionnaux.*

Soit le nombre A à B comme C à D. aussi A sera à C comme B à D.



## PROPOSITION XIII.

*s'il y a tant de nōbres qu'on voudra d'une part, & autāt d'autres de l'autre, & qui se prennent deux à deux en mesme raison, aussi en egalle raison ils seront proportionnaux.*

Soient les nombres A B G  
 d'une part, & autant d'autres D L Z de l'autre, qui soient deux ensemble de mesme raison à deux ensemble; C'est à sçavoir comme A à B ainsi D à L, & comme B à G ainsi L à Z. Aussi (ostant les moyens B & L) iceux seront en raison egalle proportionnaux: c'est à dire comme A sera à G, ainsi D à Z.

	12		8
A		D	
	9		6
B		L	
	6		4
G		Z	

Ceste proposition se peut demonstrier, Premièrement quant à l'egalité ou inegalité par la 20. & 21. du 5. Secondement quant à la raison des proportions, par la 22. & 23. du mesme liure.

## PROPOSITION XV.

*si l'vnité mesure quelque nombre, & vn autre nombre en mesure partiellement quelque autre; aussi alternement l'vnité mesurera le troisieme nombre egalement, comme le second mesure le quatrieme.*

Soit donc l'vnité A mesurant le nombre B, cōme le nombre C mesure le nombre D. Je dy que l'vnité A mesurera le troisieme nombre C, comme le second B mesurera le nombre quatriesmē D. Car par la 12. du 5. les antecedens A & C seront proportionnaux comme les consequents B D. Ainsi donc A estant l'vnité & comprise quatre fois en B, ainsi C sera comme l'vnité & comprise quatre fois en D: Et comme l'vnité A est comprise trois fois en C, ainsi le nombre B sera (comme l'vnité) compris trois fois en D.

A	
B	
C	
D	

PROPOSITION XVI.

*Si deux nombres se multiplians l'un l'autre, en font quelques autres, les engendrez d'iceux sont egaux l'un à l'autre.*

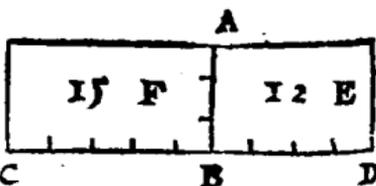
Cecy se peut bien entendre par la premiere deffinition du 2 : Car si le nombre A 4 multiplie le nombre B 3 & il en prouient C 12 ; Il prouindra le mesme nombre en multipliant B par A : & ce d'autant que A repetant par ses vnitez le nombre B faict autant que le nombre B repetant par ses vnitez le nombre A.



PROPOSITION XVII.

*Si vn nombre multiplians deux nombres en faict quelques autres, les engendrez d'iceux auront la mesme raison qu'ont les multipliez.*

Soit le nombre A B multipliant le nombre B D & le nombre C B, & le prouenu du premier soit E 12, & le prouenu de l'autre soit F 15. Le dy que le produit E 12.



mesme raison à F 15 que le nombre B D 4 au nombre C B 5 : Car comme on peut recueillir de la 15. du 5. les grandeurs qui sont mesmes parties de leurs egal multiples ( cecy s'entend aussi des nombres ) ont vne mesme raison comme elles se respondent mutuellement : Or B D est multiplié par A B 3 ; B D sera donc la troisieme partie du produit E : Et B C est multiplié par le mesme A B : BC sera donc aussi la troisieme partie du produit F : Et sera la raison de 12 à 15 comme de 4. à 5.

PROPOSITION XVIII.

*Si deux nombres multiplians quelque nombre, en font quelques autres; les engendrez d'iceux auront la mesme raison qu'ont les multiplians.*

Ceste cy est la conuerse de la precedente, car E est vne mesme chose que B D multiplie A B, comme A B multiplie B D & c.

& en viendra vn mesme produict. Semblablement si C B multiplie le mesme A B est vne mesme chose comme si AB multiplioit C. B & en sortira vn mesme produict. Cecy se peut facilement entendre tant par la precedente que par la 16. de ce liure.

## PROPOSITION XIX.

*Si quatre nombres sont proportionaux, le nombre qui est fait du premier & du quatrieme sera egal à celuy qui sera fait du second & du troisieme. Et si le nombre fait du premier & du quatrieme est egal à celuy du second & du troisieme; iceux quatre nombres seront proportionaux.*

Soient quatre nombres proportionaux A à B comme C à D. Le produict du premier A par le quatrieme D soit E. Le produit du second B par le 3. C soit Z, le dy E & Z estre egaux. Soit d'oc multiplié C par A dont soit le produict I. Et pour ce que le mesme A multipliant D a fait E; Il sera par la 17. de cestuy comme C à D ainsi I à E. Mais A à B a esté cōme C à D par l'hypothese; A à B sera d'oc comme I à E. Derechef A ayāt

A	12
B	9
C	8
D	6
E	72
Z	72
I	96

multiplié C a fait I: mais B multipliant le mesme C, a produict Z: Ils'ensuiura par la 18. de cestuy que A à B sera comme I à Z. Mais A à B a esté comme I à E. Ainsi donc comme I à Z, ainsi sera I à E. Iceux donc E & Z qui sont les produits du premier par le quatrieme, & du second par le troisieme seront egaux par la 9. du 5.

Pour la seconde partie. Supposons E & Z egaux. le dy que les quatre nombres A B C D sont proportionaux: sçauoir cōme A à B ainsi C à D: D'autant que A multipliant C & D fait I & E: Il sera par la 17. de ce liure comme C à D ainsi I à E. Et pource que Z & E sont posez egaux; Il sera par la 7. du 5. comme C à D ainsi I à Z: Mais A & B ayans multiplié C ont fait I & Z; Il sera par la 18. de ce liure comme A à B ainsi I à Z: mais C à D a esté comme I à Z: Ils'ensuiura donc comme A à B ainsi C à D, &

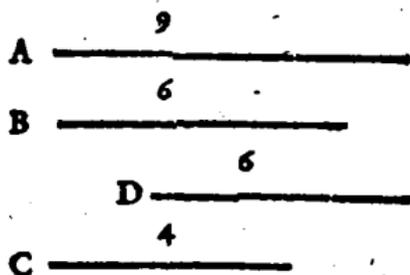
ELEMENS D'EVCLIDE,

seront les quatre nombres proportionaux. Si donc quatre nombres sont proportionaux, &c.

PROPOSITION XX.

Si trois nombres sont proportionaux, ce qui est fait des extremes, est egal à ce qu'est produit du milieu. Et si le nombre qui est fait des extremes est egal à celuy qui est fait du milieu, iceux trois nombres seront proportionaux.

Soient trois nombres proportionaux A à B comme B à C, & soit fait D egal à B. il est evident par la precedente que le produit de A par C, sera egal au produit de B par D c'est à dire au produit de B par soy mesme, d'autant que B & D sont posez egaux.

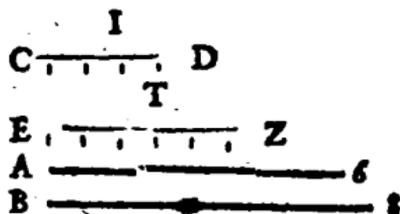


Pour la seconde partie, la mesme demonstration se fera qu'en la seconde partie de la precedente.

PROPOSITION XXI.

Les nombres plus petits de tous ceux qui ont la mesme raison avec iceux, mesurent egalemeent les nombres qui ont la mesme raison, cest à sçavoir l'antecedent l'antecedent & le consequent le consequent.

Soient les nombres plus petits CD & EZ en la raison donnée des nombres A à B. Je dy que C D mesure le nombre A egalemeent comme E Z le nombre B. D'autant que par l'hypothese ces nombres sont proportionaux, sçavoir CD à EZ comme A à B, & entre eux aussi comme CD à A, ainsi EZ à B. Iceux CD & EZ plus petits, sont la partie ou parties des plus grands A & B par la 4. de ce livre: mais ils sont la mesme partie par la 21. definition de cestuy, & non les mesmes parties: car si CD & EZ estoient coupeez en mesmes parties, c'est à sçavoir CD en CI, ID, & EZ en ET, TZ;



leurs parties derechef CI & ET auroient l'un à l'autre la mesme raison que CD à EZ. *par la 15. du 5.* Et par ainsi ne seroient pas les minimas, c'est à dire plus petits de ceste raison CD à EZ, Par ainsi donc CD & EZ sont partie d'iceux A & B *par la 4. de ce liure* Et par conséquent *par la troisieme definit. de ce mesme* ils mesureront les nombres A & B: Et egalement CD antecedent mesurera le mesme antecedent, comme EZ consequent mesurera B consequent *par la 21. definition de cestuy*, c'est à dire le plus petit des deux premierement proposez mesurera le plus petit des deux autres & le plus grand d'iceux deux premiers, mesurera le plus grand des derniers.

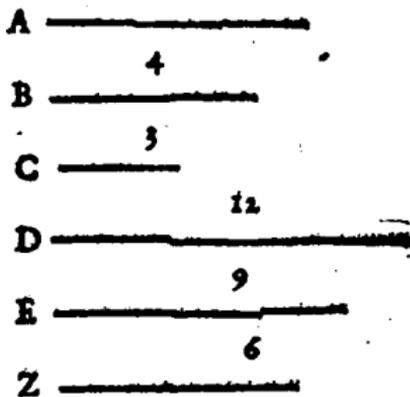
Faut noter que ce theoreme ne se peut demonstrier par nombres en raison multipliee, d'autant qu'elle produit tousiours l'unitè avec vn nombre en ses minimas parties: Ainsi donc 2 & 6 combien qu'ils soient minimas de 1 & 15 de mesme raison ils ne les mesureront pas pourtant: parquoy ne faut point estimer qu'en la raison multipliee les minimas soient pris pour nombres: mais tant seulement en raison de nombres, icelle n'estant pas simplement des nombres d'Arithmetique: mais elle eschet entres les quantitez continues & discretas, comme aussi sa conuerse.

Cecy soit aussi noté en la suiuate & en quelques autres qui traicteront de telles raisons.

PROPOSITION XXII.

*S'il sont trois nombres, & autant d'autres, les deux pris en mesme raison: & que leur proportion soit pertarbee, ou meslee: aussi en raison egalle ils seront proportionnaux.*

6



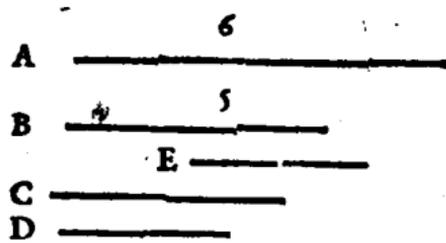
**S**Oient trois nombres ABC & autres trois DEZ, les deux pris en mesme raison mais d'un ordre meslé, sçauoir comme A à B ainsi B à Z, & comme B consequent à quelque autre chose C ainsi soit quelque autre chose D à E antecedent. Je dy qu'en raison egale A est à C comme D à Z.

Cecy se rapporte à la 23. du cinquieme, & partant ie n'en ferois autre demonstration.

PROPOSITION XXIII.

*Les nombres premiers entre eux sont les plus petits de tous ceux qui ont la mesme raison avec iceux.*

Soient les nombres premiers A & B. It dy qu'ils sont minimis en leur raison. Que s'ils ne sont, soient (s'il est possible) donnez des plus petits en mesme raison sçavoir C D. D'autant que C &

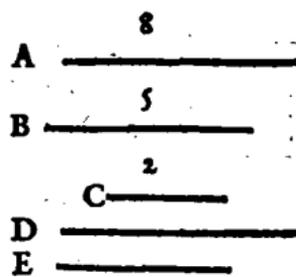


D sont minimis iceux mesureront A & B qui ont egalement vne mesme raison; c'est à sçavoir C antecedent mesurera A, & D consequent mesurera B par la 21. de ce liure. Dont s'ensuyura que C mesurera A par autant d'vnitez que D mesurera B. Soient icelles vnitez E: Puis que C & D mesurent A & B par les vnitez E: Le mesme E mesurera iceux A & B par les vnitez d'iceux C & D par la 16. de ce liure. Car E par C produict autant que C par E: Iceux donc A & B ne seront pas premiers puis qu'ils sont mesurez du nombre E contre l'hypothese ce qui ne se peut faire: A iceux donc A & B premiers entre eux ne se peuuent donner nombre plus petits ayans la mesme raison avec iceux.

PROPOSITION XXIIII.

*Les nombres plus petits de tous ceux qui ont la mesme raison avec iceux, sont premiers entre eux.*

Soient les nombres plus petits de la raison donnee A & B. It dy iceux estre premiers en eux. Que s'il ne le sont, soit donné le nombre C qui les mesure, s'il est possible. Autant de fois donc que C mesurera A soient estimees autant d'vnitez en D, & autant de fois que le mesme C mesurera B autant soient estimees



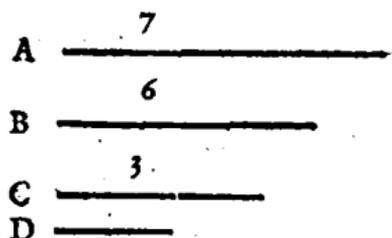
d'vnitez en E: doncques C multipliant D fera A, & multipliant E fera B. Si donc C multipliant D fait A & B; A à B sera comme D à E par la 17. de ce liure, lesquels sont moindres que A & B (veu qu'ils sont multipliez) & en la mesme rai-

son (contrel'hypothese) Ce quine peut estre. Parquoy il ne se pourra donner aucun nombre qui mesure iceux A & B, & pourtant ils seront premiers entre eux.

## PROPOSITION XXV.

*si deux nombres sont premiers entre eux, celuy nombre qui mesure l'un ou l'autre d'iceux, sera premier avec l'autre laissé.*

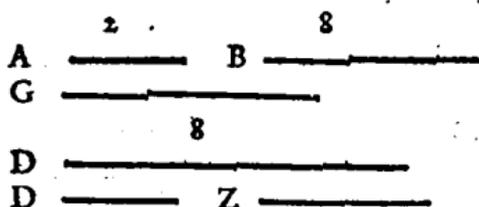
Soient les deux nombres premiers entre eux A & B desquels l'un sçavoir B soit mesuré de C. Je dy que le mesme C au resté A sera premier : Que s'ils ne sont premiers entre eux soit vn autre nombre D qui les mesure. D'autant que par l'hypothese D mesure C, & C mesure B, Il s'ensuiura par la premiere commune sentence de ce liure que D mesurera B: Or le mesme D mesure aussi le nombre A, le nombre D le nombre D mesurera donc l'un & l'autre sçavoir A & B : A & B ne se trouveront donc pas estre premiers comme il a esté posé ; ce qui ne se peut faire. Par ainsi le nombre C mesurant l'un des deux A ou B sera premier à l'autre laissé.



## PROPOSITION XXVI.

*si deux nombres sont premiers à quelque autre nombre, celuy qui sera engendré d'iceux sera aussi premier au mesme.*

Soient deux nombres A & B vn chacun premiers à quelque autre nombre G, & de la multiplication de l'un par l'autre soit produit D : Je dy que le mesme D sera premier au mesme G. Que si cela n'est, soit quelque nombre E qui mesure, s'il est possible, iceux D & G. Parce aussi que E mesure G l'un des premiers A & B, iceluy E sera premier au demeurant A par la precedente. Et soient autant d'vnitez en Z que E mesure de fois D, par ainsi E multipliant Z produit le mesme D : mais par la construction A & B font D. Si donc ce qui est fait du premier A & du quatrieme B est egal à ce qui est fait du second & troisieme E & Z ; Il sera par la 19. de cestuy A à E



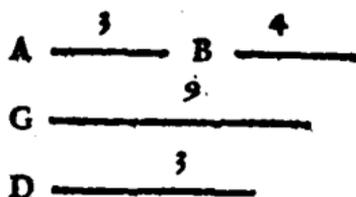
ELEMENS D'EVCLIDE,

comme Z à B. Plus veu que E & A ont esté demonstrez estre premiers; Ils seront aussi les plus petits nombres de la raison donnée par la 23. de ce liure. Le nombre A mesurera donc Z ainsi que E mesurera B par la 21. de ce liure. Mais le mesme E mesure le mesme G qui a esté posé premier à B : Il s'ensuiuroit donc que E mesureroit les deux G & B qui ont esté posé premiers, ce qui ne se peut faire. Il n'y a donc point de nombre qui mesure G & D, parquoy ils sont premiers.

PROPOSITION XXVII.

si deux nombres sont premiers entr'eux, celui qui est engendré de l'un d'iceux sera premier à l'autre.

Soient deux nombres premiers l'un à l'autre A & B, l'un d'iceux sçavoir de A soit fait G : Je dy que G est premier à l'autre B. Soit posé D égal à A. D'autant que A est premier à B semblablement D (égal à A)

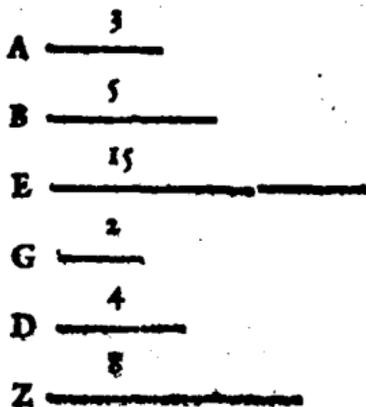


sera premier au mesme B. Deux nombres donc sçavoir A & D (qui sont premiers à quelque autre D) font G. Donc par la 26. de ce liure l'engendré d'iceux soit G, sera premier au mesme B : Car G est fait de la multiplication de A par D egaux, qui est le mesme produit que celui qui est fait de l'un d'iceux, sçavoir de A multiplié par soy mesme. Si donc deux nombres, &c.

PROPOSITION XXVIII.

si deux nombres a deux nombres sont premiers tous deux ensemble à l'un & à l'autre : aussi les engendrez d'iceux seront premiers entre eux.

Soient les deux nombres A & B à G & D, sçavoir A & B à G, & A & B à D premiers entr'eux : Je dy E & Z estre premiers entr'eux. D'autant que les deux A & B sont premiers à quelque autre G, celui qui sera engendré d'eux, sçavoir E sera premier au mesme G par la 26. de ce liure. Semblablement pource que A & B sont premiers à D, aussi E sera premier à D par la mesme pre-



*position.* Les deux donc G & D estans premiers à quelque autre E font vn cōposé d'iceux, c'est à sçavoir Z qui est premier au mesme E *par la mesme 26. de ce livre. Si donc deux nombres a deux nombres &c.*

## PROPOSITION XXIX.

*Si deux nombres sont premiers entre eux, & multipliant vn chacun soy mesme en engendre quelqu'un, ceux qui seront produicts d'iceux seront premiers entre eux. Que si les nombres proposez au commencement multiplians ceuy qui sont produicts en font d'autres, iceux aussi seront premiers entre eux. Et tousiours environ les extremes aduendra la mesme chose.*

Soient deux nombres A & B premiers lesquels se multiplians l'un l'autre facent G & D: multiplians derechef les produicts facent E & Z. Je dy G & D estre premiers, comme aussi E & Z. D'autant que le nombre G est fait de l'un des premiers A & B, iceluy sera premier à l'autre B *par la 27 de ce livre.* Et semblablement parce que le nombre D est fait de B iceluy

A	3
G	9
E	27
B	4
D	16
Z	64

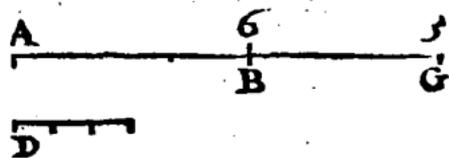
sera premier à A *par la mesme prop.* Les deux donc A G seront premiers aux deux B & D sçavoir l'un & l'autre à l'un & à l'autre. Le nombre donc qui est fait des premiers A G sçavoir E, sera premier à Z qui est fait des derniers, *par la precedente.* Et tousiours si A & B multiplians iceux E & Z produisent quelques nombres, iceux produicts seront trouvez premiers *selon la demonstration de la precedente. Si donc deux nombres &c.*

## PROPOSITION XXX.

*Si deux nombres sont premiers entre eux, aussi tous deux ensemblement seront premiers avec vn chacun d'iceux. Et si tous deux ensemblement a quelqu'un d'iceux sont premiers entre eux, aussi les nombres qui sont posez au commencement, sont premiers entre eux.*

ELEMENS D'EVCLIDE,

Soient A B & B G premiers entre eux. Ie dy que le tout A G est premier à l'un des deux, comme à A B. Que s'il ne l'est: Soit quelque au-

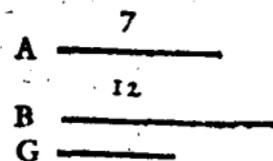


tre nombre D qui les mesure: D'autant que D mesure le tout A G & le soustraiet A B il mesurera aussi le reste B G par la 2. commune sentence. Tellement que A B & B G ne seront premiers (contre l'hypothese) ce qui ne se peut faire. Pour le second posons le tout A G estre premier à A B: Ie dy A B à B G estre premiers, s'ils ne le sont, soit D qui les mesure; Si donc D mesure les deux A B & B G, mesurera aussi le tout A G: mais il mesure aussi A B: Donc A B & A G ne sont premiers (contre ce qui est posé) car D les mesure; ce qui est absurde. Parquoy il ny aura aucun nombre qui mesure A G & A B, il seront donc premiers.

PROPOSITION XXXI.

*Tout nōbre premier est premier à tout nōbre qu'il ne mesure pas.*

Si le nombre A est premier & ne mesure B, Ie dy que A à B sont premiers. S'ils ne le sont quelque nōbre G les mesurera. Premièrement donc G mesurera A; ce qui ne se peut faire, par la 12. definition de cestuy.

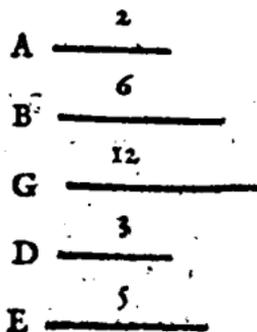


Car si G est egal à A, il ne mesurera pas B que A ne mesure pas par l'hypothese: Il ny aura donc aucun nombre qui les mesure, Et par ainsi A à B seront premiers.

PROPOSITION XXXII.

*Si deux nombres se multiplians l'un l'autre, en font vn autre Et quelque nombre premier mesure le produict d'iceux, iceluy mesurera aussi l'un ou l'autre d'iceux qui ont esté poséz au commencement.*

Soient deux nombres A & B de la multiplication desquels soit produict G lequel soit mesuré par vn nombre premier D. Ie dy que D mesurera l'un d'iceux A ou B. S'il ne mesure A, D & A seront premiers par la precedente. Autant de fois que D mesurera G, autant soient d'vnitez en E: Doncques D multipliant E fait G, comme



A multipliant B fait le mesme G *par l'hypothese*: Les nombres donc sont p<sup>ro</sup>portionaux sçavoir A à D comme E à B *par la 19. de ce livre*: Car ce qui est fait du premier A & quatrieme B est egal à celuy qui est fait du second D & troisieme E: mais ven que A & ont esté monstrez premiers, iceux seront minimes de leur raison *par la 23 de cestuy*. Et partant mesureront iceux B E également *par la 21. de cestuy*, c'est à sçavoir l'antecedent A mesurera l'antecedent E, & le consequent D mesurera le consequent B, lequel B est l'un des deux A & B qui est mesuré par D.

## PROPOSITION XXXIII.

*Tout nombre composé sera mesuré de quelque n<sup>o</sup>bre premiere.*

SI le nombre A est composé, il sera mesuré de quelque nombre *par la 14. definition*, Et soit de B, lequel ne soit premier, il est certain que quelque autre nombre (comme G) mesurera B: Iceluy G sera d<sup>o</sup>c premier ou quelqu'un le mesurera, lequel finalement sera mesuré seulement par l'unité, & cestuy cy sera premier: car les nombres entant que nombres ne se diuisent pas infiniement. Donc *par la premiere commune sentence de ce livre*, ce nombre premier mesurera A. *Tout nombre composé donc.*

A	27	
B	9	
G	3	

## PROPOSITION XXXIII.

*Tout nombre ou est premier, ou quelque nombre premier le mesure.*

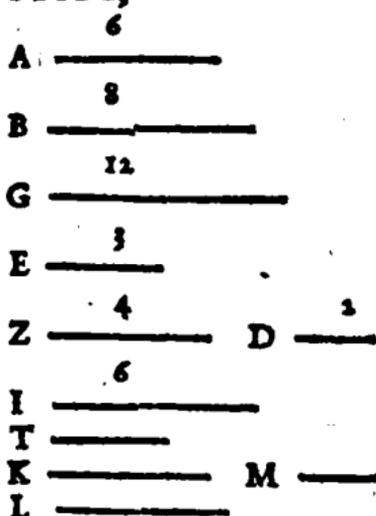
D'Autant que tout nombre ou est premier ou est composé: mais le composé est mesuré par quelque nombre *par la precedente*. Tout nombre donc ou est premier ou quelque nombre premier le mesure.

## PROPOSITION XXXV.

*Estans donnez autant de n<sup>o</sup>bres qu'on voudra trouver les plus petits nombres de tous ceux qui auront la mesme raison avec iceux.*

ELEMENS D'EVCLIDE,

Soient proposez trois nombres A B G desquels il faut trouver les minimes en leurs mesmes raisons. S'ils sont premiers, nous avons ce qui est requis par la 21. de ce livre. S'ils ne sont premiers soit leur plus grande mesure D: En apres autant de fois que D mesurera iceux A B G, autant soient d'vnitez aux nombres E, Z, I, l'ordre estant gardé. D'autant que D mesure vn chacun A, B, G, par les vnitez d'vn chacun E, Z, I, il s'ensuivra par la 18. de ce livre que les engendrez A, B, G. auront la mesme raison que les multiplians E Z I:



le dy outre plus que ceux cy sont les minimes de la raison des nombres A B G. Que si on pouvoit donner des nombres plus petits de mesme raison, soient iceux T K L, lesquels par ce moyen mesureront egallement iceux A B G par la 21. de ce livre. Qu'ils les mesurent donc par les vnitez de M; conuersément aussi M mesurera iceux A B G par les vnitez de T K L par la 16. de cestuy. Mais veu que T multipliant M fait A, & semblablement E multipliant D fait le mesme A, il s'ensuivra par la 19. de ce livre que ce qui est fait du premier E & quatrieme D sera egal à ce qui est fait du second T & troisieme M: Et pourtant iceux nombres seront proportionnaux, scauoit E à T comme M à D: Mais E est posé plus grand que T, le nombre M sera donc plus grand que D: Et pourtant M sera la commune mesure d'iceux A B G laquelle est plus grande que D qui auoit esté posé plus grand, ce qui est absurde. Il ne se peut donc point trouver de nombres plus petits que E Z I en la raison des proposez A B G: lesquels E Z I pour ceste cause seront minimes de la mesme raiso.

PROPOSITION XXXVI.

Deux nombres estans donnez, trouver le plus petit nombre qu'iceux mesurent.

Il est certain que quand de deux nombres inegaux le plus petit mesure le plus grand, cestuy cy sera le plus petit nombre mesuré d'iceux: Car s'il y en auoit vn plus petit le plus grand nombre

mesurerait le plus petit: Ce qui est impossible.

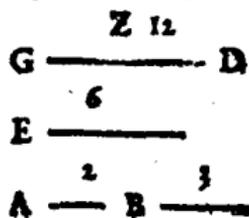
Mais si les deux nombres AB proposez sont premiers entre eux, ils seront les plus petit en leur raison par la 23. 7 Et par ainsi celuy qui sera fait de l'un par l'autre G sera mesuré de l'un & de l'autre, & sera le plus petit mesuré desdicts deux nombres: Car s'il y en auoit vn plus petit comme F, iceluy estant party par les deux nombres proposez A & B, donneroit deux autres nombres plus petits que A & B & qui auroient la raison d'iceux proposez par la 19. de ce liure. Et par ainsi les mesmes proposez n'estant pas les plus petits en leur raison, ne seroient point premiers entre eux: ce qui est contre la position. Que si les proposez sont composez comme H P, soient par les plus petits nombres en leur raison comme Z E par la precedente. Le produit du premier H multiplié par le quatrieme E sera egal au produit du second P par le troisieme Z par la 19. de ce liure. Et sera ce produit scauoir I mesuré des deux nombres proposez & trouué minime. Car s'il y en auoit vn plus petit, iceluy estant party par H & par E, ou par P & par Z donneroit des nombres plus petits qu'iceux quatre nombres. Tellement que Z E ne seroient pas les plus petits en la mesme raison de H P: Ce qui est contre la position. Si donc deux nombres sont premiers entre eux, le produit de l'un par l'autre sera le nombre mesuré des deux. S'ils sont composez, le produit d'iceux par leurs minimes, en mesme raison, sera le nombre cherché, qui sera mesuré des deux composez: Ce produit s'entend de la multiplication du premier proposé avec le second minime, & du second proposé avec le premier minime, selon l'ordre de quatre nombres proportionaux.



## PROPOSITION XXXVII.

Si deux nombres mesurent quelque nombre, aussi le plus petit qu'iceux mesureront, mesurera le mesme.

Soient deux nombres A & B qui mesurent quelque nombre G D, & qui mesurent aussi E minime produit deux mesmes. Je dy que E mesurera aussi G D. Que s'il ne le mesure il en sera party ou party par la 4. de 7.



ELEMENS D'EVCLIDE,

Soit donc posé qu'il mesure de GD, le plus grand nombre Z D delaisant GZ moindre que soy mesme E. D'autant que les deux A & B mesurent E, ils mesureront aussi Z D qui est mesuré par E par la premiere commune sentence. Mais ils mesurent aussi le tout GD, par l'hypothese ils mesureront donc le reste ou soustraiet GZ par la 2. commune sentence qui est moindre que le mesme E, lequel E auoit esté pris pour minime : Ce qui ne se peut faire. Par ainsi donc E mesurera GD. Si donc deux nombres, &c.

PROPOSITION XXXVIII.

Plusieurs nombres estans donnez trouuer le plus petit nombre lequel iceux mesurent.

Soient trois nombres proposez  
 S A B G, prenons par la 36. de ce liu. vn nombre minime que A & B mesurent, & soit D. Si le troisieme G mesure aussi D, nous auons ce qui est requis, & dy que D est le minime. Que s'il ne l'est, en soit donné quelque autre plus petit comme E lequel tous les trois A B G mesurent : D'autant que A & B mesurent E, & que les mesures A & B mesurent aussi D, cestuy cy estant plus grand que E ne peut donc estre minime, ce qui est contre la position. Le nombre E n'est donc point plus petit que D. Mais si le troisieme G ne mesure point le mesme D, soit pris vn nombre minime que G & D mesurent qui soit E. D'autant que A & B mesurent D ils mesureront aussi E (que D mesure) par la premiere commune sentence. Les trois donc A B G mesurent E, lequel par ce moyen le dy estre minime. Que s'il ne l'est, en soit pris vn autre Z moindre que E. D'autant que A B & G mesurent Z les deux A B mesureront le mesme Z. Et pourtant par la 37. de ce liure le minime D (que A B mesurent) mesurera aussi le mesme Z : D'autant aussi que G & D mesurent le mesme, & par la mesme 37. le minime mesuré d'iceux GD, qui est E mesure aussi Z & que E est plus grand que Z, il s'ensuiuroit que le plus petit seroit mesuré du plus grand, ce qui ne se peut faire. Le minime donc mesuré des trois A B G sera E. Par semblable progression se fera la demonstration de tous autres nombres proposez. Que s'il y a encor vn quatrieme nombre qui ne mesure E : Il faudra trouuer par la 37. de ce liure vn minime qui soit mesuré de E & du quatrieme nombre, & celuy là sera le nombre desiré. Et ainsi de tous autres nombres suiuan.

FIN DV SEPTIESME LIVRE.

# LE HVICTIESME LIVRE DES ELEMENS D'EVCLIDE.

## PROPOSITION I.

*Si tant de nombres qu'on voudra sont continuellement proportionnaux, & desquels les extremes soient premiers ensemble, ils sont les plus petits de tous ceux qui ont la mesme raison avec iceux.*

Soient quatre nombres A B G D continuellement proportionnaux, desquels les extremes A & D soient premiers ensemble. Iceux quatre nombres sont les minimes de la raison donnée. S'ils ne le sont, soient donnez de plus petits E Z I T, lesquels veu qu'ils sont supposez estre en la mesme raison que A B G D, ils seront egalemét par la 14. du 7. comme A à D ainsi E à T. Mais A à D sont premiers par l'hypothese, & minimes par la 23. du 7. Ceux cy donc mesureront E T qui ont la mesme raison également, par la 21. du 7. Il s'ensuiuroit donc que les plus grands mesureroient les plus petits, ce qui ne se peut faire. A B G D sont donc minimes de leur raison en ceste multitude qu'ils sont.

A	8
B	12
G	18
D	27
E	
Z	
I	
T	

## PROPOSITION II.

*Trouver autant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux minimes en la raison donnée.*

Soit en nombres minimes la raison donnée A à B par la 35. du 7. Et A se multipliant soy-mesme face G, & B se multipliant soy-mesme face E. Aussi A & B se multiplians l'un l'autre font D. Je dy que G D E sont les minimes de la raison donnée. Que si nous en desirons quatre,

		9	Z	27
				36
A	3	G	12	I
				48
B	4	D	16	T
				64
		E		K

A multiplians G D E face Z I T, & B multipliant E face le quatriesme K. I ceux aussi Z I T K seront quatre minimes en la raison de A à B. Mais d'autant que A multipliant deux nombres A & B a fait G & D, il sera par la 17. du 7. comme A & B ainsi G à D: Et d'autant que les deux nombres A à B multiplians B font D & E, il sera comme A à B ainsi D à E par la 18. du 7. G D E sont donc proportionnaux. Je dy aussi qu'il sont minimes: veu que A & B sont minimes, ils sont aussi premiers par la 24. du 7. Pource aussi que se multiplians eux mesmes ils font G & E, ceux cy seront premiers par la 29. du 7. Et estans les extremes de G D E, les trois G D E seront minimes des nombres ayans la mesme raison avec iceux par la precedente

Secondement, d'autant que A multipliant G D E fait Z I T, il sera par la 17. du 7. comme Z à I & I à T comme G à D & D à E. Outreplus d'autant que A & B multiplians E font T & K, il sera par la 18. du 7. A à B comme T à K: mais Z à I & I à T ont esté monstrez cōme A à B Z I T K seront donc proportionnaux: ils seront aussi minimes en la mesme raison. D'autant que A & B sont premiers, iceux multiplians les produits G E ont fait quelques autres nombres sçavoir Z & K: Ceux-là aussi serōt premiers par la seconde partie de la 29. du 7. comme aussi les extremes des quatre Z I T K: Ceux cy donc seront tous minimes ayans la mesme raison que A à B par la premiere de ce livre.

Mais d'autant que par la 29. du 7. cela aduient tousiours environ les extremes, A & B multiplians les produits Z K en seront d'autres premiers, qui seront extremes de cinq nombres proportionnaux: Et partant par la premiere de ce livre tous les cinq seront minimes en la mesme raison. Et ainsi infiniment.

Il resulte que s'il y a trois nombres continuellement proportionnaux minimes d'une mesme raison les extremes seront quatre: Car les extremes de trois se font de la multiplication d'iceux A & B par eux mesmes.

PROPOSITION III.

*Si tant de nombres qu'on voudra sont continuellement proportionnaux, & les plus petits de tous ceux qui ont la mesme raison avec iceux; les extremes d'iceux sont premiers entre eux.*

Soient autant de nombres qu'on voudra  $A B G D$  continuellement proportionnaux & minimales en leur raison. Je dy que leurs extremes  $A$  &  $D$  sont premiers entr'eux. Soient pris deux minimales de ceste mesme raison  $E$  &  $F$  par la 24. du 7. Iceux seront premiers par la 24. du 7.

		4	K	—	8
2	C	—			12
E			6	L	—
3	H	—			18
F			9	M	—
	I	—			27
				N	—

Puis apres de ceuxcy par la precedente  $A B G D$ . soient produits en la mesme raison  $K L M N$  : D'autant que  $E$  &  $F$  se multiplias font  $C$  &  $I$ , & multiplians ces produits ils font  $K$  &  $N$ , iceux donc  $K$  &  $N$  sont premiers par la 29. du 7 : Et pource que  $K$  &  $N$  ( extremes ) sont premiers, tous les quatre  $K L M N$  sont minimales de ceste raison par la premiere de ces liures; mais  $A B G D$  sont aussi proposez ( par l'hypothese ) minimales de ceste mesme raison  $A B G D$ ; Ceuxcy donc sont egaux à  $K L M N$ , autrement ils ne seroient point minimales. Les nombres donc  $A D$  ( egaux aux extremes  $K N$  ) seront premiers comme  $K$  &  $N$ . Si donc tant de nombres qu'on voudra, &c.

Resulte que s'il y a quatre nombres continuellement proportionnaux minimales d'une mesme raison, les extremes seront cubes. Car les extremes se font de la multiplication des racines  $E F$  par les quarez  $C I$  pour estre faitz cubes comme  $K N$ .

PROPOSITION IIII.

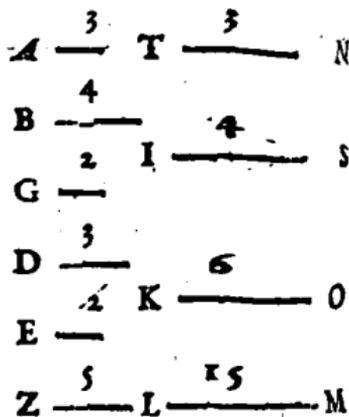
*Etans donnees tant de raisons qu'on voudra aux plus petits nombres, trouver autant de plus petits nombres ayans les raisons donnees, & qu'ils soient continuellement proportionnaux.*

ELEMENS D'EVCLIDE,

Soient en nombres minimas proposées les raisons  $A$  à  $B$  :  $G$  à  $D$  &  $E$  à  $Z$ . Soit pris vn nombre minime  $I$  qui soit mesuré de  $B$  &  $G$  par la 36. du 7. Et autant de fois que  $B$  mesure  $I$ , autant de fois aussi  $A$  puisse mesurer  $T$  : Et autant de fois que  $G$  mesure  $I$  autant de fois  $D$  puisse mesurer  $K$  : Mais  $E$  mesure  $K$  ou non : Et soit qu'il le mesure, & que autant de fois que  $Z$  puisse mesurer  $L$ . Mais pourautant que  $A$  &  $B$  également multipliez ont fait  $T$  &  $I$ , &  $G$  &  $D$  multipliez par vn mesme ont fait  $I$  &  $K$  : Et derchief  $E$  &  $Z$  multipliez par vn mesme ont fait  $K$  &  $L$  ; Il sera par la 17. du 7.  $A$  à  $B$  comme  $T$  à  $I$ , &  $G$  à  $D$  comme  $I$  à  $K$  & aussi  $E$  à  $Z$  comme  $K$  à  $L$ . Les quatre donc  $T$   $I$   $K$   $L$  sont aux raisons donnees & continuellement proportionnelles. Je dy encor qu'ils sont minimas d'autant d'autres nombres ayans ces mesmes raisons. S'ils ne le sont, soient trouvez, s'il est possible quelques autres plus petits comme  $N$   $S$   $O$   $M$  respondant vn chacun à vn chacun de  $T$   $I$   $K$   $L$ . Puis que  $A$  à  $B$  est come  $N$  à  $S$ , le nombre  $B$  (qui a esté posé minime) mesurera  $S$  par la 21. du 7. Semblablement veu que  $G$  à  $D$  est comme  $S$  à  $O$ , le nombre  $G$  mesurera  $S$ . Donc  $B$  &  $G$  mesurent  $S$  qui est plus petit que  $I$  (qui a esté posé minime) mesuré de  $B$  &  $G$ . Ce qui est absurde. On ne peut donc point donner de nombre plus petits que  $T$   $I$   $K$   $L$  en la raison d'iceux  $A$  à  $B$ ,  $G$  à  $D$ , &  $E$  à  $Z$ .

Pour le second, posons que  $E$  ne mesure point  $K$ . Soit par la 36. du 7. pris vn nombre  $M$  mesuré de  $E$  &  $K$ . Mais tel que est  $K$  à  $M$ , telle partie soit  $I$  du nombre  $S$  &  $T$  de  $N$ . Or autant de fois que  $E$  mesure  $M$ , autant de fois  $Z$  puisse mesurer  $O$ . D'autant que  $K$   $I$   $T$  mesurent également  $M$   $S$   $N$ , il sera par la 18. du 7.  $T$  à  $I$  comme  $N$  à  $S$  : &  $I$  à  $K$  comme  $S$  à  $M$ . Mais comme  $T$  à  $I$  &  $I$  à  $K$ , ainsi a esté mis  $A$  à  $B$  &  $G$  à  $D$ . Doncques  $A$  à  $B$  &  $G$  à  $D$  seront comme  $N$  à  $S$  &  $S$  à  $M$ . Et par la mesme proposition comme  $E$  à  $Z$  ainsi  $M$  à  $O$  ; (car  $E$  &  $Z$  mesurent également  $M$  &  $O$  par l'hypothese) Les quatre donc  $N$   $S$   $M$   $O$  sont continuellement proportionnaux ayans mesmes raisons que  $A$  à  $B$ ,  $G$  à  $D$  &  $E$  à  $Z$ . Je dy aussi qu'ils sont nombres minimas en ces mesmes raisons.

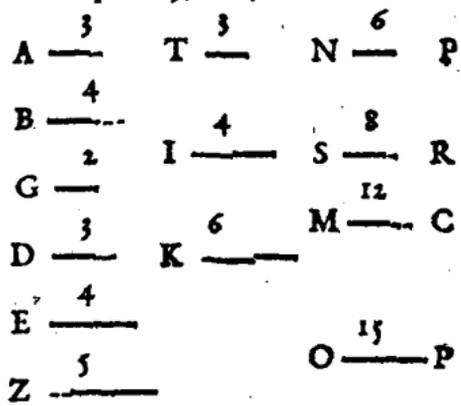
Que s'ils ne le sont, soient s'il est possible trouvez autres nombres plus petits, & soient  $P$   $R$   $C$   $F$ . Or puis que ceux cy sont ez mes-



mesmes raisons que A B, G D & E Z, & ceux-cy mesme par l'hypothese sont minimales; Il s'ensuivra que B mesurera R comme A mesure P, & G mesurera R comme D mesure C par la 21. du 7. Par ainsi B & G mesureront R. Parquoy le nombre minime I mesuré de B & G mesurera le mesme R par la 37. du 7.

Et d'autant que I est à K cōme R à C, c'est à sçavoir comme G à D, Aussi par vicissitude I à R sera comme K à C par la 13. du 7.

Or I mesure R aussi K mesurera C. Outre plus E mesure le mesme C: car E & Z sont minimales de la raison d'iceux C à F par la 21. du 7. Les nombres donc K & E mesureront le mesme



C. Et pourtant le nombre M minime mesuré de K & E mesurera le mesme C par la 37. du 7: C'est à sçavoir que le plus grand mesurera le plus petit, veu que P R C F sont supposez plus petits qu'iceux N S M O. Ce qui ne peut estre. Tellement donc que les quatre nombres N S M O continuellement proportionnaux sont minimales ayans les mesmes raisons donnees de A B, G D & E Z.

ADVERTISEMENT.

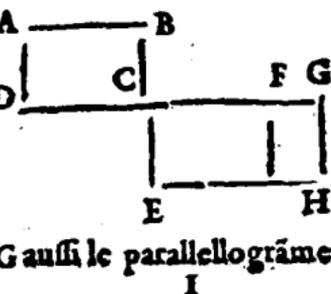
J'ay changé les caracteres de ceste seconde demonstration, d'autant qu'en la premiere E estoit posé mesurer K, & en celle-cy non.

PROPOSITION V.

Les nombres plans ont entre eux la raison composee de leurs costez.

Soient les deux parallelogrammes A B C D & C G H E equiangles: Si le plus long costé de l'un C G est au plus long costé de l'autre C D cōme B C au plus petit C E les parallelogrammes seront egaux par la 16. de ce livre.

Mais si C G a plus grande raison à D C que B C à C E de la quantité de F G aussi le parallelograme



ELEMENS D'EVCLIDE,

CH excedera l'autre AC en mesme proportion que la raison du costé GC à D excede la raison de BC à CE: c'est à sçavoir du parallelogramme FH, lequel FH a mesme raison au parallelogramme EF comme la ligne CF à la ligne FG par la 1. du 6. Voylà donc comment la raison des parallelogramme equiangles de l'un à l'autre depend de la raison de leurs costez.

PROPOSITION VI.

*Si tant de nombres qu'on voudra sont continuellement proportionaux, mais le premier ne mesure pas le second: ny aussi aucun des autres ne mesurera pas aucun autre.*

Soient ABGD continuellement proportionaux: Si A ne mesure B, aussi B ne mesurera pas G, ny GD: Car les raisons de l'un à l'autre sont de mesme. Mais si on disoit que en laissant quelqu'un les extremes se pourroient mesurer,

A	16 —————	Z	4 —————
	24 —————		6 —————
B	36 —————	I	9 —————
G	54 —————	T	—————
D	—————		

comme A & G: Soient donnees en nombres les raisons minimales les raisons de ABG par la 35. du 7. lesquelles soient ZIT: les extremes Z & T par la 3. de ce livre seront premiers: Le nombre Z ne mesurera donc point T. Mais pource que ABG sont autant de nombres que ZIT & que tous deux deux sont posez en mesme raison: il fera par la 14. du 7. A à G comme Z à T. Or Z ne mesure point T, il s'ensuivra donc que A ne mesurera point G.

PROPOSITION VII.

*Si tant de nombres qu'on voudra sont continuellement proportionaux: mais le premier mesure le dernier, il mesurera aussi le second.*

Soient les nombres continuellement proportionaux ABGD, desquels le plus petit A mesure l'extreme D, & s'il ne mesure point son prochain B, il ne mesurera pas aussi l'extreme ny aucun des autres par la precedente. Ce qui est contre la positio. Si deux sans de nombres, &c.

A	3 —————
	6 —————
B	—————
	12 —————
G	—————
	24 —————
D	—————

## PROPOSITION VIII.

*Si entre deux nombres tombent des nombres continuellement proportionnaux, autant qu'il y en aura entre les deux, autant en tomberont continuellement proportionnaux entre d'autres ayans la mesme raison avec iceux.*

Soient entre deux nombres A B autres nombres G D continuellement proportionnaux. Soit aussi E à Z comme A à B. Le dy qu'entre E & Z peuvent tomber autant de nombres continuellement proportionnaux qu'entre A & B. Soient donc *par la 2. de cestuy* posez autant de minimes que A G D B ayans la mesme raison avec iceux, & soient I T K L. I à L sera donc comme A à B en raison egale *par la 14. du 7.* : Or pource que E à Z est comme A à B : E à Z sera comme I à L *par la 11. du 5.* Iceux donc I & L mesureront E & Z. (ayans mesme raison) egallement *par la 21. du 7.* Or autant de fois

que I mesure E, que T	3	I	1	E	2
puisse mesurer autant	A	I	I	E	E
de fois M & K, N : &	9	G	3	T	6
les autres de mesme si	G	G	T	M	M
plus y en auoit. D'aut-	27	D	9	K	18
tant que I T K L	D	D	K	N	N
mesurent egallement	81	B	27	L	54
E M N Z ; par vicissitude	B	B	L	Z	Z

I mesurera T comme E mesurera M (ou il sera les mesmes parties) & T mesurera K comme M mesurera N, & K le nombre L comme N, Z *par la 9. du 7.* EMNZ sont donc proportionnaux *par la 21. definition du 7.* & autant en nombre comme I T K L. Et pourtant sont de mesme à AGDB auxquels les nōbres I T K L ont esté posez egaux en nombre & en mesme raison. Autant donc qu'il y en aura de continuellement proportionnaux entre A & B autant en tombera entre E & Z suivant la proposition.

## PROPOSITION IX.

*Si deux nombres sont premiers entre eux, & entre iceux tombent des nombres continuellement proportionnaux; autant qui tombent entre iceux, autant encor tomberont de continuellement proportionnaux entre l'un & l'autre d'iceux & l'unité.*

ELEMENS D'EVCLIDE,

Soient A & B premiers, entre lesquels tombent des continuellement proportionaux G & D. Le dy que entre iceux A & B & l'vnité tomberont autant de continuellement proportionaux. Soit l'vnité

			9	M	— <sup>27</sup>	A	— <sup>27</sup>
		3	T	—	36	—	36
1	Z	—	12	N	—	G	—
E	—	4	K	—	48	—	48
	I	—	16	S	—	D	—
			L	—	64	—	64
				O	—	B	—

E & soient les minimas de la raison A à G les deux Z I *par la 2. de cestuy-cy.* Apres soient de mesme les trois T K L, puis les quatre M N S O. D'autant que ceux-cy sont autant que A G D B & minimas en la mesme raison *par l'hypothese*: Et ceux-cy minimas *par 1. de cestuy*: Vn chacun donc sera egal à vn chacun. Or pour ce que Z mesure T par ses vnitez & T, M par les mesmes *selon les demonstrations de la 2. de ce liure.* Et aussi l'vnité E mesure Z par les mesmes, il s'ensuira que E Z T M sont continuellement proportionaux: comme semblablement E I L O. Et puis que A est egal à M & B à O, il s'ensuira que entre A l'vnité E tomberont L Z, & entre B & la mesme vnité tomberont L I. Mais pource que entre E & A G D B (ou M N S O) les degrez de proportio sont egaux en nombre (sçauoir G & D en vne sorte & Z T ou I L en l'autre) Il s'ensuira que entre l'vn & l'autre A ou B, & l'vnité pourront tomber autaut de continuellement proportionaux, comme il s'en trouue entre A & B.

PROPOSITION X.

*Si entre deux nombres & l'vnité tombent des nombres continuellement proportionaux, autant en tomberont de continuellement proportionaux entre iceux deux nombres.*

Si entre A & B, & l'vnité G tombent deux nombres continuellement proportionaux, Le dy qu'entre les deux A & B en tomberont autant. Par les vnitez donc que G mesure D, par les mesmes D mesurera E, & E mesurera A. Ainsi sera de Z & I. Doncques le nombre D

			9	A	— <sup>27</sup>
		3	E	—	36
1	D	—	12	K	—
G	—	4	T	—	48
	Z	—	16	L	—
			I	—	64
				B	—

se multipliant soy-mesme fait E & D multipliant E fait A. Ainsi sera de Z & I. Or D multipliant Z fait T. Les deux D & Z multiplians T font les deux K L. D'autant que D multipliant D & Z en a fait deux autres sçavoir E & T. Il sera par la 17. du 7. E à T comme D à Z. Mais pource que les deux D Z multiplians vn mesme T font K & L, le nombre K à L sera comme D à Z par la 18. du 7. Mais D multipliant les deux E & T a fait A K : Il sera donc A à K comme E à T & pourtant comme D à Z. Or K à L a esté comme D à Z. Il sera donc A à K comme K à L par la 11. du 5. Semblablement puis que Z multipliant Z & D fait I & T, T à I sera comme D à Z. Mais le mesme Z multipliant T & I fait L & B. L à B sera donc comme T à I par la 17. du 7. & pourtant comme D à Z. Mais A à K & K à L ont esté comme D à Z, & pourtant A à K, K à L, L à B seront comme D à Z proportionaux : Entre A & B donc sont autant de proportionaux comme entre les mesmes A B & l'vnité par la 2. de cestuy.

## PROPOSITION XI.

Entre deux nombres quarrez est vn nombre milieu proportionnel. Et le carré au carré a la raison double qu'a le costé au costé.

Soient deux nombres quarrez A

& B & leurs costez G & D.

D'autant que G est le costé de

quarré A, lequel G se multipliant

soy-mesme fait A par la 19. definitio

du 7. Semblablement le costé D

fait B : Posons G multipliant D face E. D'autant que G multi-

pliant G & D fait A & E. A à E sera par la 17. du 7. comme G

à D. Semblablement D multipliant les deux D & G fait les deux

E & B. E à B sera par la mesme proposition comme G à D. Mais A

à E a esté comme G à D. Doncques par la 11. du 5. A à E & E à B

seront come G à D : Entre A & B tóbera donc le moyen propor-

tionnel E. Et pource que A à E est comme G à D & que la raisó

du premier A au troisieme B est double de la raison de A à E par

la 10. definition du 5. le carré donc A aura au carré B la raison

double du costé G au costé D.

	3	A	9
G			12
	4	E	16
D			16
		B	16

PROPOSITION XII.

Entre deux nombres cubes sont deux nombres milieux proportionnaux. Et le cube au cube à la raison triplee du costé au costé.

Soient deux cubes *A* & *B* & leurs costez *G* & *D*. *G* se multipliant fait *E* & multipliant *D* fait *Z*. Et *D* se multipliant fait *I* : mais *G* & *D* multipliés *Z* facent *T* & *K*. *T* à *K* sera donc comme *G* à *D*

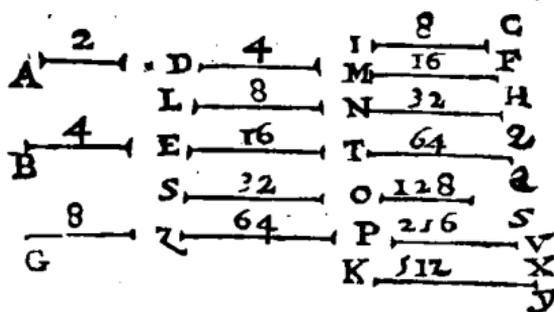
		9	<i>A</i> <u>        </u>
	3	<i>E</i> <u>        </u>	27
<i>G</i> <u>        </u>		12	<i>T</i> <u>        </u>
	4	<i>Z</i> <u>        </u>	48
<i>D</i> <u>        </u>		26	<i>K</i> <u>        </u>
		<i>I</i> <u>        </u>	64
			<i>B</i> <u>        </u>

par la 18. du 7. Et d'autant que *G* multipliant *G* & *D* fait *E* & *Z* : *E* & *Z* sera donc comme *G* à *D* par la 17. du 7. Et veu que *G* multipliant *E* & *Z* par la 20. definition du 7. & par la construction fait *A* & *T* ; *A* & *T* sera comme *E* à *Z* par la 17. du 7. & par consequent comme *G* à *D*. Or *T* à *K* a esté comme *G* à *D* ; donc *A* à *T* & *T* à *K* seront comme *G* à *D*. Et d'autant aussi que *D* multipliant *G* *D* fait *Z* *I* : *Z* sera à *I* comme *G* à *D*. Semblablement *D* multipliant *I* fait *B* par la 20. definition du 7. mais multipliant *Z* fait *K* par la construction, *K* à *B* sera comme *Z* à *I* par la 17. du 7. & par consequent comme *G* à *D* : Mais *A* à *T* & *T* à *K* ont esté come *G* à *D* : Iceux donc *A* à *T*, *T* à *K*, & *K* à *B* seront proportionnaux comme *G* à *D*. Entre les deux cubes donc *A* & *B* tombent deux milieux proportionnaux en la raison de *G* à *D* : Et d'autant que *A* à *B* quatrieme à la raison triplee de *A* à *T* second par la 10. definition du 5. Le mesme cube *A* aura donc au cube *B* la raison triple du costé *G* au costé *D*.

PROPOSITION XIII.

Si tant de nombres qu'on voudra sont continuellement proportionnaux, & multipliant vn chacun soy-mesme, en font quelques autres ; Ceux qui sont produits d'iceux seront proportionnaux Et si les nombres premierement posez multiplians apres les engendrez en font quelques autres, iceux aussi seront proportionnaux. Et cecy aduendra tousiours environ les extremes.

Soient les nombres proportionnaux  $ABG$  qui se multiplians eux-mesmes produisent  $DEZ$ ; ceux cy serot quarrez. Puis  $ABG$  multiplians  $DEZ$  produiront  $ITK$  qui seront



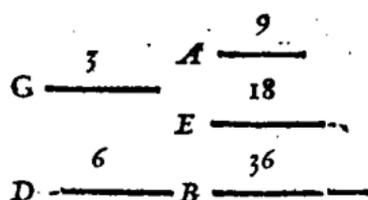
cubes par leur definition. Puis que les quarrez  $DEZ$  ont l'un à l'autre la raison double de leurs costez  $ABG$  ils seront proportionnaux: Et d'autant aussi que les cubes  $ITK$  ont l'un à l'autre la raison triple de leurs costez  $ABG$  par la precedente, ils seront aussi proportionnaux. Outreplus  $ABG$  multiplians  $ITK$  chacun le sien, ceux qui en prouieront seront aussi proportionnaux. Et ainsi infiniement.

*Ceste derniere particule me semble conuenir au sens de la proposition.*

PROPOSITION XIII.

Si vn nombre quarré mesure vn nombre quarré, aussi le costé de l'un mesurera le costé de l'autre. Et si le costé de l'un mesure le costé de l'autre, aussi le quarré mesurera le quarré.

Que le quarré  $A$  mesure le quarré  $B$ , & le costé de  $A$  soit  $G$ , & le costé de  $B$  soit  $D$ :  $G$  multipliant  $D$  faict  $E$ , & se multipliant soy mesme faict  $A$  par l'hypothese. Donc par la 17. du 7.  $A$  à  $E$  sera comme  $G$  à  $D$ . Mais  $A$  mesure  $B$  extreme, il mesurera donc  $E$  son prochain par la 7. de cestuy, & pourtant  $G$  mesurera  $D$ : car  $A$  à  $D$  a esté comme  $G$  à  $D$ .



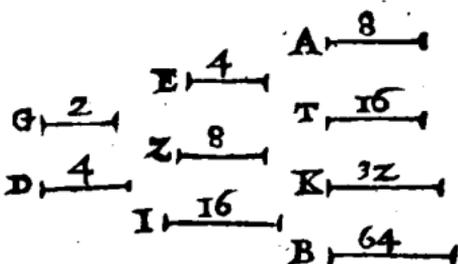
Pour le second, Que  $G$  mesure  $D$  (les choses ainsi construites) le dy que  $A$  mesure  $B$ . D'autant que  $G$  &  $D$  comme  $A$  à  $E$ , &  $E$  à  $B$  par la 17. du 7. Et que  $G$  mesure  $D$ . Doncques  $A$  mesurera le mesme  $E$ , & par consequent le quarré  $B$ , lequel quarré est mesuré de  $E$  par la 1. com. sens. du 7.

ELEMENTS D'EVGLIDE,

PROPOSITION XV.

Si un nombre cube mesure un nombre cube, aussi le costé de l'un mesurera le costé de l'autre. Et si le costé de l'un mesure le costé de l'autre, aussi le cube mesurera le cube.

QUE le nombre cube *A* mesure le nombre cube *B*. *G* & *D* soient les costez lesquels se multiplians eux mesmes facent les quarez *E* & *I* par la 19. definition du 7. entre lesquels soit le moyen *Z* par la 11. de cestuy. Iceux aussi *G* & *D* multiplians *Z*



facent les deux *T* & *K* moyens entre les deux cubes *A* & *B*. par la 12. de ce livre en la raison de *G* & *D*. D'autant que *A* mesure l'extreme *B*, il mesurera son prochain *T* par la 7. de cestuy. Mais *A* à *T* a esté comme *G* à *D*. Donc *G* mesurera *D*,

Maintenant si nous posons *G* mesurer *D* (les choses ainsi disposées) d'autant que *A* est à *T* comme *G* à *D* & que *G* mesure *D*, il s'ensuivra que *A* mesurera *T* & *T* mesurera *K* & *K* mesurera *B*: Parquoy *A* selon la 1. com. sent. du 7. mesurera le mesme *B*. Si donc un cube, &c.

PROPOSITION XVI.

Si un nombre quarré ne mesure pas un nombre quarré, aussi le costé ne mesurera pas le costé. Et si le costé ne mesure pas le costé, aussi le quarré ne mesurera pas le quarré.

CAR si le costé mesuroit le costé, le quarré aussi mesureroit le quarré par la seconde partie de la 14. de ce livre. Et pour le regard de la seconde partie de ceste proposition, Si le quarré mesuroit le quarré, aussi le costé mesureroit le costé par la 1. partie de la mesme 14. de ce livre.

PROPOSITION XVII.

Si un nombre cube ne mesure pas un nombre cube, aussi le costé

de l'un ne mesurera pas le costé de l'autre. Et si le costé ne mesure pas le costé, aussi le cube ne mesurera pas le cube.

Car si le costé mesuroit le costé, aussi le cube mesureroit le cube, par la 2. partie de la 15. de ce livre. Et pour le second, Si le cube mesuroit le cube, aussi le costé mesureroit le costé par la 1. partie de la mesme proposition 15.

## PROPOSITION XVIII.

Entre deux nombres plans semblables est vn nombre milieu proportionnel, & le plan au plan à la raison doublee du costé de semblable raison au costé de semblable raison.

Soient A & B semblables nombres plans les costez de A soient G D & de B soient E Z. G multipliant D fait A, & E multipliant Z fait B par la 17. du 7. G sera donc à E côme D à Z par la 22. defin. du 7. En apres D multipliant E face I :

		G	$\frac{2}{\quad}$
A	$\frac{12}{\quad}$	D	$\frac{6}{\quad}$
I	$\frac{18}{\quad}$	E	$\frac{3}{\quad}$
B	$\frac{27}{\quad}$	Z	$\frac{9}{\quad}$

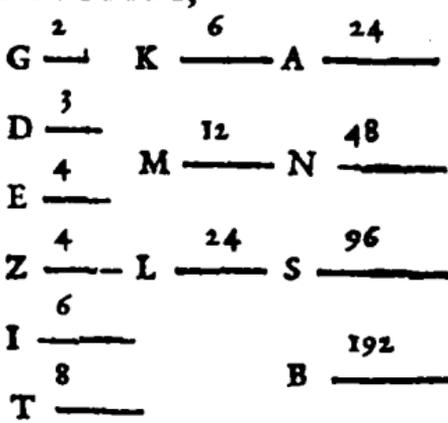
D'autant donc que D multipliant les deux G & E en fait deux scauoir A & I; A à I sera par la 17. du 7. comme G à E. & pour ceste mesme cause d'autant que E multipliant D & Z fait I & B; I sera à B comme D à Z. A donc sera à I comme I à B. Le nombre d'oc I sera moyen proportionnel entre les nombres plans A & B. Et d'autant que A à B a la raison double de la raison qu'il a à I par la 10. defin. du 5. Il s'ensuiura que le mesme A aura à B la raison double de G à E laquelle a esté monstree egalle à la raison de A à I.

## PROPOSITION XIX.

Entre deux nombres solides semblables tombent deux nombres milieux proportionaux : Et le solide au solide semblable à la raison triplee du costé de semblable raison au costé de semblable raison.

ELEMENS D'EVCLIDE,

Soient deux solides semblables A, B les costez de A soient G D E, de B soient Z I T, G multipliant D face K : Z multipliant I face L : d'autant que G D E & Z I T sont costez de semblable raison par la 22. defin. du 7. Les nombres plans K & L seront semblables : entre lesquels tombera par la precedente vn milieu M, faict de D par



Z : Mais E & T qui sont semblables costez multiplians M font N & S, veu que G à D & D à E est comme Z à I & I à T par viciscitude selon la 13. du 7. G à Z sera comme D à I & E à T. Et veu aussi que D multipliant G & Z faict K & M; K sera à M come G à Z par la 17. du 7. Semblablement pource que Z multipliant D & I faict M & L; M fera par la mesme proposition à L comme D à I: Mais G à Z a esté comme D à I. Doncques K à M sera comme M à L proportionnaux en la raison des costez G à Z. Outre plus, d'autant que E multipliant K ( qui est produict des deux costez D & G ) faict A par la 18. defin. du 7. & E multipliant M a faict N: A à N sera par la 17. du 7. comme K à M. Semblablement veu que T multipliant L ( qui est produict des deux autres costez Z I ) faict B, & multipliant M a faict S, celuy cy sera à B par la 17. du 7. comme M à L, & par consequent A à N & S à B comme K à M & M à L en la raison des costez G à Z. Et pource que les deux autres costez E & T multiplians M font N & S, N feta à S comme le costé E au costé T: Entre A & B donc sont deux moyens N & S en la mesme raison des costez G à Z: c'est à sçauoir A à N, N à S comme S à B. Et d'autant que A premier à E quatrieme à la raison triplee de A à N second par la 10. defin. du 5. Iceluy A solide à B sèblable solide aura la raison triplee du costé G au costé Z ou de D à I ou bien de E à T costez de sèblable raison.

PROPOSITION XX.

Si entre deux nombres tombe vn nombre milieu proportionnel, iceux nombres seront plans semblables.

Soit entre deux nombres A & B vn milieu proportionnel G. Sie dy que A & B sont nombres plans semblables: Ce que nous demonstrerons premierement en raison pure & simple des nombres, c'est à dire non multipliee.

Soient donnez par la 35. du 7. deux minimes D E en la raisõ d'iceux A G B. Ceux-là mesureront A & G egallement, & G & B aussi egallement par la 21. du 7. Autant de fois que D E mesureront A G'autant soient d'vnitez en Z, & autant de fois qu'ils mesureront G & B, autant soient d'vnitez en I. Pource que D multipliant Z faict A: & E multipliant I faict B les nombres A & B sont plans, & leurs costez D Z, E I. Mais puis que du premier D & quatrieme I est produit G, & du secõd E & troisieme Z est produit le mesme G: D à E fera par la 2. partie de la 19. du 7. comme Z à I: Et par la 13. du 7. en viciscitude D à Z comme E à I, c'est à dire proportionnaux.

Les costez donc D Z & E I sont des nombres plans A & B semblables par la 22. definition du 7,

Secondement en raison multipliee ( qui est du continu au discret) Soit entre deux nombres B & A vn milieu proportionnel G. Pource que la raison est multipliee le plus petit A mesure B extreme, parquoy par la 7. de celivre il mesurera aussi son prochain G, & & G semblablement mesurera B, car ils sont proportionnaux. Autant de fois que le moindre A mesure G, autant de fois l'vnité D puisse mesurer le nombre E: Et autant de fois donc que D mesure E, autant de fois G mesurera B: par ainsi & en viciscitude D mesurera A comme E mesure G; & encor D mesurera G cõme E mesure B par la 15. du 7. Autant de fois que D E mesurent A G, autant soient d'vnitez en Z. Semblablement autant de fois que les mesmes D E mesurent GD autant soient d'vnitez en I. Pource que soubz D & Z est compris A & soubz E & I est contenu B, iceux A & B sont nombres plans, desquels les costez sont D Z & E I. Et pource que des extremes B & I est faict G & de E & Z est

	18	D	3
A	_____		4
	24	E	_____
G	_____		6
	32	Z	_____
B	_____		8
		I	_____
			12
	24	I	_____
B	_____		6
	21	Z	_____
G	_____		2
	6	E	_____
A	_____		2
		D	_____

ELEMENS D'EVCLIDE,

faict le mesme G, les quatre grandeurs D à E comme Z à I sont proportionnelles *par la 19. du 7.* Par viciscitude donc selon la 15. du 7. les costez seront proportionnaux, sçavoir comme D à Z ainsi E à I. Iceux donc A & B seront nombres plans semblables. *par la 22. definition du 7.*

PROPOSITION XXI.

*Si entre deux nombres tombent deux nombres milieux proportionnaux, les deux nombres seront solides semblables.*

Soient A & B deux nombres G & D milieux continuellement proportionnaux. Je dy que A & B sont solides semblables. Soient *par la 2. de ce livre* pris trois minimes E Z I en la raison de A G D B. Les extremes donc d'iceux E & I sont plans semblables *par la precedence.* Soient maintenant les costez de E les deux T & K : & de I les deux L & M. Et veu que par l'hypothese EZI sont en la raison de A G D, par raison egalle E à I sera comme A à D *par la 14. du 7.* D'auantage veu que E Z I sont minimes, ils mesureront A G D egallement *par la 21. du 7.* Mais autant de fois que E I mesureront A & D, autant soient d'vnitez en N. Et autant de fois qu'iceux E I mesureront les autres G & B (qui ont mesme raisõ) autant soient d'vnitez en S. Car veu que T & K sont les costez de E lequel pris par les vnitez du nombre N faict A, il s'ensuiura que T K N seront les costez du solide A *par la 18. definition du 7.*

Semblablement L & M font I, lequel pris par les vnitez de S faict B, parquoy L M S seront les costez du solide B *par la mesme.* A & B seront donc solides. Et pour monstrier qu'ils sont semblables d'autant que E multipliant N & S a faict A & G : N à S sera *par la 17. du 7.* comme A à G. Mais

		3		
		N		27
T	3		9	A
	3			36
K	3		12	G
	4			48
L	4		16	D
	4			64
M	4		4	B
			S	

comme A à G ainsi *par l'hypothese* E à Z & Z à I. Mais pource que E à I à la raison double de E à Z *par la 10. deff. du 5.* Et double de celle de T à L ou K à M qui sont les costez *par la 18. de ce livre;* T à L & K à M auront donc la mesme raison que E à Z ou Z I ; & partant la mesme de A à G ou N à S, qui ont esté monstrees estre les mesmes : Ainsi donc comme A à G ainsi ont, esté N à S & T

à L & K à M qui sont costez proportionnaux du solide A aux costez du solide B, lesquels solides par la 22. deff. du 7. seront sēblables. Ce qu'il falloit demonst<sup>r</sup>er.

Ceste proposition pour euter prolixité n'est point demonstree en la raison multipliee d'autant que par la precedēte & quelques autres la demonstration s'en pourra aisément faire.

## PROPOSITION XXII.

Si trois nombres sont continuellement proportionnaux, dont le premier est quarré, aussi le troisieme sera quarré.

Soient trois nombres continuellement proportionnaux A B G, d'autant qu'entre les extremes y a vn moyen, iceux extremes serōt nombres plains semblables par la 20. de ce liure. Parquoy si le premier est quarré, le troisieme aussi pour estre son semblable sera son quarré.

A	<u>4</u>
B	<u>6</u>
G	<u>9</u>

## PROPOSITION XXIII.

Si quatre nombres sont continuellement proportionnaux, dont le premier soit cube, aussi le quatrieme sera cube.

Cecy se demonstre par la 21. de ce liure. Car si entre A & B sont constituez deux milieux proportionnaux, il s'ensuiura que A & D seront semblables solides. Si donc A est cube, le quatrieme aussi pour estre son semblable sera cube.

A	<u>8</u>
B	<u>12</u>
G	<u>18</u>
D	<u>27</u>

## PROPOSITION XXIII.

Si deux nombres ont la raison entr'eux qu'à vn nombre quarré à vn nombre quarré, & le premier est quarré, aussi le second sera quarré.

ELEMENS D'EVCLIDE,

**Q**ue les deux nombres A & B ayent la mesme raison que les quarré G & D. D'autant qu'entre les deux G & D est vn milieu proportionnel par la 11. de ce livre. Il y aura aussi vn milieu proportionnel entre A & B par la 8. de ce livre: car ils ont vne mesme raison. Des trois donc le premier A est quarré, aussi le troisiésme B sera quarré par la 22. de ce livre.

PROPOSITION XXV.

*si deux nombres ont la raison entr'eux qu'à vn nombre cube à vn nombre cube, & le premier est cube, aussi le second sera cube.*

**Q**ue deux nombres A & B ayent la raisõ que le cube A soit cube, le dy que B est aussi cube. Pour ce que entre les deux G & D qui sont cubes tõbent deux milieux proportionnaux par la 12. de cestuy autant en tomberont entre A & B (qui ont la mesme raison) par la 8. de cestuy. Mais des quatre continuellement, proportionnaux le premier est cube, aussi le quatriésme B sera cube par la 23. de ce livre.

	8		64
A	—————	G	—————
	12		96
	—————		—————
	18		144
	—————		—————
	27		216
B	—————	D	—————

PROPOSITION XXVI.

*Les nombres plans semblables ont la raison entr'eux, qu'à vn nombre quarré à vn nombre quarré.*

**S**oient les nombres plans semblables A & B. Puis qu'ils sont semblables plans entre iceux tõbera vn milieu comme G par la 18. de cestuy. En apres soient mis trois minimis DEZ en la raison de A GB, les extrêmes D & Z seront quarez comme il resulte de la 2. de cestuy. Et pource que par la 14. de 7. A est à B en raison

	18		9
A	—————	D	—————
	24		12
G	—————	E	—————
	32		16
B	—————	Z	—————

egale comme D à Z, & que ceux-cy sont quarréz; Il s'ensuiura que A à B aura telle raison que le nombre quarré D au quarré Z.

## PROPOSITION XXVII.

*Les nombres solides semblables ont la raison entr'eux qu'à vn nombre cube à vn nombre cube.*

Soient A & B solides semblables; entre iceux donc tomberont deux milieux proportionnaux E & Z par la 19. de ce liure. Soient donnez autât de minimes GITD en la raison de AEZB par la 2. de ce liure: Les extremes G & D seront cubes comme il resulte de la mesme 2. Et puis qu'ils sont tous proportionnaux, par raison egalle A à B sera comme G à D. par la 14. de cestuy. Doncques A & B auront la raison entr'eux qu'à le cube G au cube D. Les nombres solides donc, &c.

	16		8
A	—————	G	—————
	24		12
E	—————	I	—————
	36		18
Z	—————	T	—————
	54		27
B	—————	D	—————

Resulte si deux nōbres ont entr'eux la raison d'un quarré à vn quarré, ils seront nombres plans semblables. Et s'ils ont la raison d'un nombre cube à vn nombre cube, il seront solides semblables.

Resulte aussi, si quelque nombre multipliant vn quarré ne fait vn quarré, iceluy ne sera quarré.

FIN DV HVICTIESME LIVRE.



# LE NEVFIESME LIVRE DES ELEMENS D'EVCLIDE.

## PROPOSITION PREMIERE.

*Si deux nombres plans semblables se multiplians l'un l'autre en engendrent quelqu'un, iceluy produict sera quarré.*

Soient deux nōbres plans semblables  
 $A$  &  $B$ . Le nombre  $A$  multipliant  $B$  face  $G$ . Le dy que  $G$  est quarré. Le nōbre  $A$  se multipliant soy-mesme face  $D$  quarré  
*par la 19. deff. du 7.* Et pource que  $A$  multipliant les deux  $A$  &  $B$ , en fait deux  $D$  &  $G$ ;  $D$  à  $G$  sera cōme  $A$  à  $B$  *par la 17. du 7.* Pource aussi qu'entre deux plans semblables  $A$  &  $B$  y a vn moyen proportionnel *par la 18. du 8.* & entre  $D$  &  $G$  ayans la mesme raison y aura aussi vn milieu *par la mesme pro.* & soit iceluy  $E$ : mais le premier  $D$  (des trois proportionnaux  $D E G$ ) est quarré, aussi le troisieme  $G$  sera quarré *par la 22. du 8.*

$A$	6	—	$D$	36
		—		
		—	$E$	—
	24	—	$G$	144

## PROPOSITION II.

*Si deux nombres se multiplians l'un l'autre font vn quarré, iceux sont plans semblables.*

Soient deux nombres  $A$  &  $B$ : se multiplians l'un l'autre facent le quarré  $G$ . Le nōbre  $A$  se multipliant face le quarré  $D$ : d'autant que  $A$  multipliant les deux  $A$  &  $B$  en fait deux  $D$  &  $G$ :  $D$  à  $G$  sera comme  $A$  à  $B$  *par la 16. du 7.* Et pource qu'entre les deux quarez  $D$  &  $G$  y a vn moyen *par la 11. du 8.* & entre  $A$  &  $B$  ayans la mesme raison y aura aussi vn moyen *par la 8. du 8.* Mais si entre les deux  $A$  &  $B$  y a vn moyen, iceux  $A$  &  $B$  seront nombres plans semblables *par la 20. du 8.*

$A$	2	—	$D$	4
		—		
		—	$G$	16
	8	—		

## PROPOSITION III.

*Si vn nombre cube se multipliant soy-mesme en engendre quelqu'un, l'engendré sera cube.*

Le nombre

**L**E nombre cube A se multipliât soy-mesme face B, Je dy que B est cube. Soit du cube A le costé G, lequel multiplié par soy-mesme face D. Le mesme costé donc G multiplié par D fera A *par la 20. deff. du 7.* Donc G mesurera D par les vnitez du mesme G, & par les mesmes D mesurera le cube A, & aussi l'vnité mesurera G par les mesmes vnitez de G. Les quatre donc A D G & l'vnité sont proportionnaux, car ils sont equemultiplices. Semblablement veu que A mesure B par les vnitez, & l'vnité mesure A par les mesmes, l'vnité sera à A comme A à B. Mais entre l'vnité & A sont deux milieux, comme aussi entre les equemultiplices qui ont mesme raison. Entre A donc & B se trouueront deux milieux *par la 8. du 8.* Le premier donc A des quatre proportionnaux est cube *par l'hypothese*, aussi le quatrieme B sera cube *par la 23. du 8.*

	64
B	_____
	32
	_____
	16
	_____
	8
A	_____
	4
D	_____
	2
G	_____
	vnité

PROPOSITION IIII.

*Si vn nombre cube multipliant vn nombre cube en engendre quelqu'vn, l'engendré sera cube.*

**L**E cube A multipliant le cube B face G, se multipliant soy-mesme face D. Je dy que G est cube. D'autant que A multipliant les deux A & B a fait D & G. D sera à G comme A à B *par la 17. du 7.* Mais pource qu'entre les deux cubes A & B sont deux milieux *par la 12. du 8* aussi entre les nombres D & G ayans la mesme raison seront deux milieux *par la 8. du 8.* Mais D est cube *par la precedente*, car il est fait du cube A. Si donc des quatre proportionnaux le premier D est cube, aussi le quatrieme G sera cube *par la 23. du 8.*

	8		64
A	_____	D	_____
	12		96
	_____		_____
	18		144
	_____		_____
	27		216
B	_____	G	_____

PROPOSITION V.

*Si vn nombre cube multipliant quelque nombre, fait vn cube, aussi le multiplié sera cube.*

ELEMENS D'EVCLIDE,

SI le nombre cube A multipliant  
quelque nombre B fait G ; le dy  
que B sera cube. A se multipliant soy-  
me face D : pource que A multipliant  
A & B fait D & G ; D à G sera cōme  
A à B par la 17. du 7. Et puis que D est  
cube par la 3. de ce livre (car il est fait du  
cube A) G aussi est cube par l'hypothese,  
entre G & D tomberont deux milieux par la 12. de ce livre. Donc  
entre A & B qui ont la mesme raison tōberont autant de milieux  
par la 8. du 8. Mais des quatre proportionnaux le premier A est  
cube par l'hypothese, aussi le quatrieme B sera cube par la 33. du 8.

8	A		D	64
27	B		G	216

PROPOSITION VI.

Si un nombre se multipliant soy-mesme fait un cube, iceluy sera cube.

LE nombre A se multipliant soy-mesme  
face le cube B, & multipliant le cube B  
face G : Iceluy G sera cube par la 20. deff. du  
7. estant fait des deux multiplications d'i-  
celuy A. D'autant que A multipliant les  
deux B & A a fait les deux B & G : G à B  
sera comme B à A par la 17. du 7. Mais si les  
deux B à A ont la raison du cube G au cube  
B & que le premier B soit cube, aussi le se-  
cōnd A sera cube par la 25. du 8.

8	A	
64	B	
512	G	

PROPOSITION VII.

Si un nombre composé multipliant quelque nombre produit  
quelque nombre, le produit sera solide.

SOIT le nombre composé A  
lequel multipliant B face G :  
le dy que G est solide : car A est  
composé, quelque autre le me-  
surera par la 14. deff. du 7. Et soit cest autre D qui mesure le mesme  
A par les vnitez du nombre E. D'autant que deux nombres D  
& E se multiplians eux-mesmes font A lequel derechef multipliāt  
B a fait l'autre G : Iceluy donc G prouenant de trois D E B se  
multiplians eux-mesmes sera nombre solide par la 18. deff. du 7. Et  
les costez d'iceluy seront D E B.

3	D		6	A		48
2	E		8	B		

## PROPOSITION VIII.

Si depuis l'unité sont tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, le troisieme depuis l'unité sera quarré, & tous les autres qui en entrelaisseront un: & le quatrieme sera cube & tous les autres qui en entrelaisseront deux: mais le septieme sera cube & quarré ensemble, & tous les autres qui en entrelaisseront cinq.

Soient depuis l'unité continuellement proportionnaux A B G D E Z: Je dy que le troisieme B apres l'unité & les autres D & Z (en entrelaisant un) seront quarrés: Et le quatrieme G & les autres Z &c. (en entrelaisant toujours deux) seront cubes: Et le septieme Z & autant qu'il s'en trouuera (en entrelaisant toujours cinq) seront cubes & quarrés ensemble. D'autant que l'unité mesure A par ses unités, elle mesurera tout autre nombre suivant par les mesmes unités de A, veu qu'ils sont continuellement proportionnaux. Donc A se multipliant soy mesme fait le quarré B. Mais pource que des trois B G D le premier B est quarré le troisieme D sera aussi quarré par la 22. du 8. Semblablement se demonstrera de D E Z & tous autres suivans que D estant quarré le 3. Z sera aussi quarré. D'auantage veu que A se multipliant fait B & multipliant B fait G celuy cy sera cube par la 20. deff. du 7. Et si des quatre proportionnaux le premier G est cube aussi le quatrieme Z sera cube par la 23. du 8. Et ainsi infiniment sera démontré en tous autres nombres suivans continuellement proportionnaux. Mais le mesme Z a esté démontré quarré & tous autres en mesme ordre veu que le septieme est toujours remis par le troisieme & quatrieme. Si donc depuis l'unité, &c.

unité

A	3
B	9
G	27
D	81
E	243
Z	726

## PROPOSITION IX.

Si depuis l'unité sont tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, si celuy qui suit l'unité est quarré, aussi tous les autres seront quarrés. Que si celuy qui suit l'unité est cube, aussi tous les autres seront cubes.

ELEMENS D'EVCLIDE;

Soient depuis l'vnité les nombres A B G D E Z  
 Continuellement proportionnnaux. Soit le pre-  
 mier à pres l'vnité A quarré, tous les autres aussi  
 seront quarez; & s'il est cube, tous les autres  
 seront cubes. Premièrement puis que l'vnité mul-  
 tiplie A par ses vnitez, & A par les mesmes vnitez  
 multiplie B; celuy cy sera quarré *par la 19. deff. du 7.*  
 & A est aussi quarré *par l'hypothese.* Mais comme A à B, ainsi A à  
 G & G à D &c. Si donc les deux B & G ont la raison des quarez  
 A à B, & que le premier B soit quarré, aussi le second G sera  
 quarré *par la 24. du 8.* & ainsi G D & les suiuaus. Mais si A est  
 cube, d'autant que semblablement l'vnité mesure A, & A me-  
 sure B & B le suiuant G & ainsi consequemment & que A est cube  
*par l'hypothese* se multipliant soymesme fait B: Il s'ensuiura *par la*  
*3. de ce liure* que B sera cube. Mais comme l'vnité à A, ainsi A à B,  
 & B à G & des suiuaus de mesme qui seront en la raison des cubes  
 A à B. Si le premier B est cube, le second G sera aussi cube *par la*  
*25. du 8.* & si G l'est, D aussi le sera & les autres suiuaus.

vnité	_____
A	_____
B	_____
G	_____
D	_____
E	_____
Z	_____

PROPOSITION X.

Si depuis l'vnité y a tant de nombres qu'on voudra continuel-  
 lement proportionnaux, & celuy qui est apres l'vnité ne  
 soit pas quarré; ny aussi aucun des autres ne sera pas quarré,  
 exceptez le troisieme depeu l'vnité, & tous ceux qui en en-  
 trelaissent vn. Que si celuy qui est apres l'vnité n'est pas cu-  
 be, ny aussi aucun des autres ne sera cube, exceptez le qua-  
 trieme apres l'vnité & tous ceux qui en entrelaissent deux.

Soient apres l'vnité les continuellemét propor-  
 tionnaux A B G D E Z, & que le quatrieme à  
 pre l'vnité sçauoir A ne soit point quarré. Ie dy  
 que nul des autres n'est quarré sinon le troisieme  
 apres l'vnité & les suyuaus qui en entrelaissent vn,  
 sçauoir B D Z &c. Et si A n'est point cube aussi nul  
 des autres ne sera cube sinon le quatrieme G & les  
 autres qui en entrelaissent deux, sçauoir Z, &c.  
 Pource que tous sont proportionaux BDZ &c. se-  
 ront quarez *par la 8. de ce liure.* Car si quelque au-  
 tre pouuoit estre quarré soit G Cestuy cy sera à B  
 comme B à A & A l'vnité comme il resulte de la 4. du 5.

vnité	3	_____
A	9	_____
B	27	_____
G	81	_____
D	243	_____
E	729	_____
Z	_____	_____

Donc A à B aura la raison de G à B. Si donc le premier B est carré le second A sera carré *par la 14. du 8.* ce qui sera contre l'hypothese, & qui ne se peut faire.

Pour le second, si A n'est point cube, soit donné, s'il est possible, quelque autre cube d'entre iceux hors mis G quatrième Z &c. & soit D. D'autant que D à G est comme G à B & B à A, si le premier D est cube, le quatrième A sera aussi cube *par la 23. du 8.* contre ce qui est supposé, ce qui ne peut estre. Semblablement *par la 25. du 8.* cecy sera evident comme du carré.

## PROPOSITION XI.

*si depuis l'unité sont tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, le plus petit mesure le plus grand par quelqu'un de ceux qui sont aux nombres proportionnaux.*

Soient apres l'unité continuellement proportionnaux *ABGD*, Je dy que le plus petit sçavoir A mesure le plus grand sçavoir B ou G ou D, par quelqu'un d'iceux A, B ou G. D'autant qu'ils sont proportionnaux, autant de fois que l'unité mesure A, autant de fois A mesure B & B aussi G &c. E par viscite *par la 15. du 7.* autant de fois que l'unité mesure B, autant de fois A mesure G: mais l'unité mesure B par les unités d'iceluy B, par ainsi donc A mesure G par les unités du mesme B. Outre plus par raison egale la mesme unité sera à G comme A à D *par la 14. du 7.* Mais l'unité mesure G par G mesme: Le nombre donc A mesurera D par le mesme G. Et semblablement en autant de nombre qu'on voudra cela sera manifesté *par la mesme 14. proposition du 7.*

	unité
A	2
B	4
G	8
D	16

## PROPOSITION XII.

*si depuis l'unité y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, autant de nombres premiers que mesurent le dernier, autant aussi mesureront celui qui est le plus pres de l'unité.*

ELE' MENS D'EVCLIDE;

SOIENT apres l'vnité continuellement proportionnaux les nombres *ABGD*: & que le nōbre premier comme *E* mesure le dernier *D*. Je dy que le mesme *E* mesure *A* plus proche de l'vnité. Que si *E* ne le mesure pas, ils seront premiers l'un à l'autre par la 31. du 7. Et d'autant que *ABGD* sont apres l'vnité continuellement proportionnaux *A* se multipliant soy-mesme faict *B*, par ainsi *B* à *E* sera premier par la 27. du 7. Mais pource que *A* multipliant *B* a faict *G*, aussi *G* sera premier au mesme *E* par la 26. du mesme. Semblablement infiniement *A* multipliant *G* faict *D*: parquoy aussi *D* à *E* sera premier par la mesme proposition. Doncques *E* ne mesure pas *D* comme il a esté posé, ce qui est absurde. Le nombre donc *E* mesure le mesme *A* plus prochain de l'vnité.

	vnité	
A	4	3
B	16	9
G	64	27
D	256	81
E	2	2

PROPOSITION XIII.

Si depuis l'vnité sont tant de nombres qu'on vouldra continuellement proportionnaux, & celui qui est apres l'vnité est nombre premier; aucun autre ne mesurera point le plus grand, exceptez ceux qui sont aux nōbres proportionnaux.

SOIENT depuis l'vnité autant de nombres qu'on vouldra contiuellement proportionnaux *ABGD*. Et le plus proche de l'vnité *A* soit nōbre premier: Je dy que nul autre nombre ne mesurera le plus grand *D* excepté ceux mesme qui sont proposez proportionnaux: Car s'il estoit possible que quelque autre puisse mesurer *D*, posons estre *E*, qui sera premier ou composé: S'il est premier il mesurera aussi *A* (plus proche de l'vnité) par la 12. de ce liure. Ce qui ne se peut faire. S'il est composé quelque nombre premier le mesurera par la 33. du 7. qui ne peut point estre autre que *A*: Car veu que *E* mesure *D*, rōut autre nombre premier mesurant *E*, mesurera aussi *D* par la prem. com. sent. du 7. Et mesurant le plus grand *D*, il mesurerait aussi *A* plus proche de l'vnité par la 12. de cestuy qui est nombre premier. Ce qui ne se peut faire. Donc des nombres premiers, *A* seul me-

	vnité	
A	3	T
B	9	I
G	27	Z
D	81	E

furera E qui mesure le plus grand D. Que si cela pouvoit estre, Soit E mesuré de A par les vnitez du nombre Z. Donc A multipliant les deux, sçavoir Z par l'hypothese & G (qui sont proportionnaux depuis l'vnité) faict les deux E & D : E sera donc à D cōme Z à G par la 17. du 7. Et pource que E mesure D, aussi Z mesurera G. Semblablement comme nous auons demonstré en E ainsi demonstrerons nous Z & les autres n'estre point premiers. Car si Z estoit premier, mesurant G, il mesureroit aussi A : ce qui ne se peut faire. Que s'il est composé, celuy nombre premier qui le mesurera sera A, ou si c'est vn autre, cest autre mesurera aussi G & celuy qui mesure G c'est à sçavoir A par la 1. sent. du 7. Ce qui ne se peut faire. Donc le nombre premiers A seul mesure Z, & posons que ce soit par les vnitez de I : Doncques A multipliant I & B faict Z & G. Par ainsi Z à G par la 17. du 7. sera comme I à B : mais Z mesure G, doncques I mesurera B. Que si derechef I est premier il mesurera B & A, ce qui est absurde : S'il est composé, A seul le mesurera (comme nous auons monstré en E & en Z.) Que A mesure donc I par T, ils'ensuiura que A multipliant T & soy mesme produira I & B. Parquoy I à A sera comme B à T par la 17. du 7. mais I mesure B : T mesurera donc A nōbre premier, auquel A sera donc egal T. Or A est moyen proportionnel entre T & I par la 20. du 7. veu que B (produict des extremes I T) est egal à ce qui est faict du milieu A, & que A produict B : cela est outre la puissance des nombres. Nul autre donc ne mesurera le plus grand D, exceptez les nombres mesmes de la proportion proposee A B G D, desquels tousiours le moindre mesure le plus grand par la 11. de cestuy : car ils sont depuis l'vnité en raison multiple proportionnaux.

## PROPOSITION XIII.

si vn plus petit nombre est mesuré de quelques nombres premiers, aucun autre nombre premier ne mesurera point iceluy, exceptez ceux qui le mesurent au commencement.

SOIT le nombre plus petit A mesuré de quelques premiers B G D. Je dy que nul autre premier ne peut mesurer A exceptez iceux B G D. Que si quelque autre premier comme E le pouuoit mesurer, posons estre par Z. Pource que deux nombres E & Z font A lequel est mesuré de quelques

B	2	A	36
	—		—
	3		
G	—	E	—
	5		
D	—	Z	—

ELEMENS D'EVCLIDE,

premiers BGD, il s'ensuivra par la 33. du 7. qu'iceux BGD mesureront l'un d'iceux sçavoir E ou Z : mais ils ne mesurent pas E d'avant qu'il est premier par l'hypothese: Ils mesureront donc Z plus petit que A mesuré de Z par E. A donc posé au commencement. ne sera le plus petit mesuré de BGD (contre l'hypothese:) Ce qui seroit absurde. Nul autre donc exceptez BGD ne mesurera le nombre A.

PROPOSITION XV.

*Si autant de nombres qu'on voudra continuellement proportionaux sont les plus petits de ceux qui ont avec iceux la mesme raison, le nombre mesurant aucun d'iceux ne sera pas premier à l'un des deux autres minimas de ceste mesme raison.*

Soient tant de nombres qu'on voudra ABCDE continuellement proportionaux & minimas de ceux qui ont la mesme raison avec iceux desquels l'un (qui soit C) soit mesuré de quelque nombre H. Soient aussi F & G deux minimas de la mesme raison. Le dy

			8	A	<u>16</u>
H	—	4	K	—	<u>24</u>
	2	P	—	12	B
F	—	6	L	—	<u>36</u>
	3	Q	—	18	C
G	—	9	M	—	<u>54</u>
		R	—	27	D
			N	—	<u>81</u>
				E	<u>—</u>

que H n'est point premier à F ou à G. Soient par la 2. du 8. donnez trois nombres minimas PQR de la mesme raison de A à B. Et apres soient encor donnez par la mesme quatre autres KLMN & toujours de mesme jusqu'à la multitude des proposez ABCDE. Il est evident par la 2. du 8. que F multiplié par PQ & R fait KLM, & que le mesme F par KLM fait ABCD: Car veu que H mesure C, iceluy H ne sera à l'un d'iceux F ou M premier comme il resulte de la 32. du 7. Que si c'est F, nous avons ce qui est requis: Mais si c'est M auquel H ne soit point premier, il ne le sera pas aussi à l'un d'iceux F ou R, par la mesme 32. du 7. Que si derechef se trouve estre F, cestuy sera l'un d'iceux F ou G comme il est désiré: Et si ce n'est il point, & que ce soit R auquel H ne soit premier, aussi ne sera il à G (qui fait le mesme R par la 2. du 8) premier, par ce qui resulte de la mesme. Mais G est l'un d'iceux F ou G qui ont esté posez au commencement minimas de ceste mesme raison: Si donc autant de nombre, &c.

Le lecteur sera aduersy qu'en l'exemplaire Grec ne se trouue ceste proposition: Toutesfois suiuant l'opinion de monsieur de Candalle apres celle de Campanus qui la tiennent estre d'Euclide ie l'ay voulu mettre en ce lieu, ioint qu'elle sert à la preuue de la suiuaute & de quelques autres.

## PROPOSITION XVI.

*Si trois nombres proportionnaux, sont les plus petits de ceux qui ont avec iceux la m<sup>e</sup>me raison; les deux tels qu'on voudra composer ensemble seront premiers à l'autre.*

Soient A B C trois nombres proportionnaux minimas en leur raison. Ie dy que l'un d'iceux tel qu'on voudra (comme pour exemple C) est premier au nombre composé des deux autres A B. Que s'il ne l'est, soit quelque nombre E qui mesure C & le composé de A B. Soient aussi donnez deux nombres minimas (comme F & G) de la mesme raison de A a B par la 33. du 7. Mais pource que E mesure l'un d'iceux A B C, le mesme E sera à l'un d'iceux F ou G non premier par la 15. de cestuy. Quelque autre nombre donc (comme H) mesurera le mesme E & l'un d'iceux F ou G. Pource que H mesure E, il mesurera aussi C qui est mesuré de E par la 1. sent. du 7. Outre plus puis que par l'hypothese H mesure l'un d'iceux F ou G, il mesurera aussi le moyen entre F & C par la mesme: Car l'un & l'autre F ou G produict ce moyen par les milieux prochains d'iceux comme L & I par la 2. du 8. Derechef veu que H mesure E qui mesure le tout A B, il mesurera aussi le tout A B C: mais il mesure le soustraiçt B (moyen) il mesurera donc aussi le reste A par la 2. sent. du 7. Par ainsi s'ensuiura que le mesme H mesurera les extremes C & A qui sont premiers par la 3. du 8 Ce qui est absurde. Parquoy C sera premier au composé de A B. Semblablement peut estre demonst<sup>r</sup>é le mesme de chacun des autres.

## PROPOSITION XVII.

*Si deux nombres sont premiers entr'eux, il ne sera pas comme le premier au second, ainsi le second a quelque autre.*

ELEMENS D'EVCLIDE,

Soient deux nombres  $A$   $B$  premiers l'un à l'autre. Je dy qu'à iceux ne se peut donner vn tiers proportionnel. Car s'il se pouuoit faire, soit  $A$  à  $B$  comme  $B$  à  $G$ : veu que  $A$  à  $B$  sont premiers, iceux seront par la 23. du 7. les minmes de la mesme raison: Cela estant vn chacun  $A$  &  $B$  mesureront vn chacun  $B$  &  $G$  (ayans la mesme raison) egalelement par la 21. du 7. Donc l'antecedent  $A$  mesure l'antecedent  $B$ , mais le mesme  $A$  se mesure soy-mesme:  $A$   $B$  ne sont donc pas premiers, puis que quelque nombre  $A$  les mesure ( contre la supposition ) ce qui ne se peut faire. Aux nōbres donc  $A$  &  $B$  premiers ne se peut donner vn troisieme proportionnel. Si deux nombres donc sont premiers &c.

$A$	12	
$B$	13	
$G$		

PROPOSITION XVIII.

Si tant de nombres qu'on voudra sont continuellement proportionaux, desquels les extremes soient premiers entr'eux; il ne sera pas comme le premier au second, ainsi le dernier a quelque autre.

Soient  $A$   $B$   $G$  continuellement proportionaux desquels les extremes  $A$  &  $G$  soient premiers l'un à l'autre. Je dy qu'il n'est pas comme  $A$  à  $G$ , ainsi  $G$  à quelque autre. S'il est autrement, soit  $A$  à  $B$  comme  $G$  à  $D$ ; Il fera aussi comme  $A$  à  $G$  ainsi  $B$  à  $D$  par la 33. du 7. Mais  $A$  &  $G$  extremes sont par l'hypothese premiers; Si premiers ils sont minimes par la 23. du 7: Si minimes, vn chacun  $A$  &  $G$  mesurera vn chacun  $B$   $D$  (ayās la mesme raison) par la 21. du 7. Doncques  $A$  antecedēt mesure  $B$  antecedent. Or veu que  $A$  à  $B$  est comme  $B$  à  $G$ ; celuy  $B$  mesurera  $G$ : parquoy aussi  $A$  mesurera  $G$  par la 1. sent. du 7. Ainsi  $A$  se mesure soy-mesme & mesure aussi  $G$  qui sont premiers, ce qui ne se peut faire. Il ne sera donc pas comme  $A$  à  $B$  ainsi le dernier  $G$  a quelque autre.

$A$	4	
$B$	6	
$G$	9	
$D$		

PROPOSITION XIX.

Deux nombres estans donnez, considerer si l'on peut trouuer vn troisieme proportionnel à iceux.

**S**oient deux nombres proposez A & B: il faut veoir, s'il est possible de trouver vn 3. proportionnel à iceux. Le dy, si le premier peut mesurer le quarré du second que cela se pourra faire: Et s'il ne le peut mesurer, aussi ne se pourra trouver vn troisieme proportionnel. Premièrement B se multipliant soy-mesme face le quarré G qui soit mesuré de A par D. D'autant donc que A multipliant D extreme produict G. G egal à celuy qui est fait du milieu B (c'est à dire au mesme G) iceux trois A B D sont proportionnaux par la 20. du 7. sçavoir comme A à B, ainsi B à D: Le troisieme D est donc trouué.

	4	6
A	—	A —
	6	4
B	—	B —
	9	0
D	—	D —
	36	16
G	—	G —

Pour le second, si A ne mesure pas le quarré du second, il ne se pourra trouver vn troisieme proportionnel à A B: Car s'il se pouvoit faire, soit D ce troisieme. D'autant que A B D sont proportionnaux, ce qui est fait des extremes A & D est egal à ce qui est fait du milieu B: & soit ce produit G. Donc A mesurera G par les vnitez de D (car multipliant D il a fait G) mais par l'hypothese il ne le mesure point: Ce troisieme ne se peut donc trouver.

PROPOSITION XX.

Trois nombres estans donnez considerer si l'on peut trouver vn quatriesme proportionnel à iceux.

**A**Vx trois nombres A B G soit cherché s'il est possible vn quatriesme proportionnel: Le dy que si le premier mesure le produit du secod & troisieme que le quatriesme se trouvera: & s'il ne le mesure point, aussi ne se pourra donner le 4. Pour le premier: Que A mesure le produit D qui est fait de B & G: Mais autant

	8	5	48
A	—	A —	—
	12	7	12
B	—	B —	—
	18	8	3
G	—	G —	—
	27	0	0
E	—	E —	—
	16	56	36
D	—	D —	—

de fois que A mesure D, autant soient d'vnitez en E: Donc A multipliant E fait D. Mais B multipliant G fait le mesme D. Donc par la 2. partie de la 19. du 7. A à B sera comme G à E: Le quatriesme donc E est proportionnel des trois A B G. Mais si A ne mesure point D: E ne sera pas proportionnel: Que s'il est au-

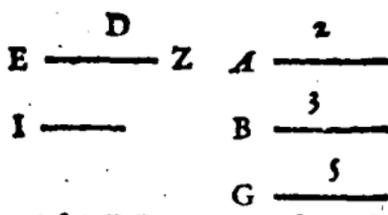
ELEMENS D'EVCLIDE,

rement, soit E ce quatriesme proportionnel. D'autant que B multipliant G fait D, il s'ensuivra par la 19. du 7. que A multipliant E produira le mesme D. A mesure donc D par les vnitez de E; mais par l'hypothese il ne le mesure pas: ce qui est absurde: Et par ainsi E ne sera pas le quatriesme proportionnel aux trois A B G.

PROPOSITION XXI.

*Les nombres premiers sont plus que quelque multitude proposee des nombres premiers.*

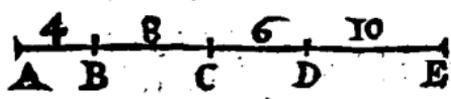
Soit proposee telle multitude qu'on voudra de nombres premiers A B G. Je dy que d'autres se peuvent donner par dessus ceste multitude proposee. Soit pris vn nombre minime lequel soit mesuré de A B G par la 38. du 7. qui soit E D, auquel soit adiouste l'vunité D Z: Or le tout E Z est premier (ainsi nous auons ce qui est requis) ou est composé: Si composé, quelque premier le mesurera par la 33. du 7. & soit ce premier I: Je dy que I est vn autre nombre premier par dessus A B G. Qu'es'il ne l'est & soit le mesme qu'un des trois A B C: Le mesme I mesurera E D, qui est mesuré des trois: mais par l'hypothese le mesme I mesure le tout E Z; il mesurera donc par la 2. sent. du 7. le reste D Z, c'est-à-sçavoir l'vunité: ce qui est absurde. Donc I sera nombre premier adiouste à la multitude proposee.



PROPOSITION XXII.

*Si tant de nombres pairs qu'on voudra sont composez, le tout est pair.*

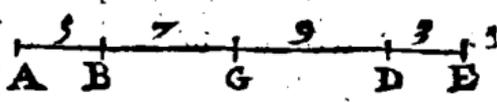
Soient proposez les nombres AB, BC, CD & DE mis & assemblez en vn come A E. Je dy que A E est pair, d'autant qu'un chacun a deux parties egales: Si done aux choses egales on adiouste choses egales toutes les moictiez seront egales aux moictiez: Et pourtant le tout A E sera pair par la definition du nombre pair.



## PROPOSITION XXIII.

*Si tant de nombres impairs qu'on voudra sont composez, & soit la multitude d'iceux pair, le tout sera pair.*

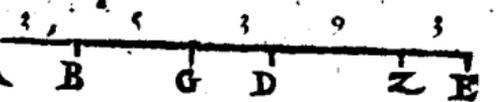
Soient les nombres impairs composez AB, BG, GD & DE desquels la multitude soit nombre pair. Le dy que le tout AE sera pair. Car puis que par la 7. deff. du 7. tout impair differe du pair seulement de l'unité, icelle unité ostee d'un chacun les restes seront pair, Et par la precedente estant en multitude pair feront le tout (compose d'iceux) pair. Si donc les unités soustraictes (qui font un nombre pair) sont adioustees à un pair, le tout sera pair par la mesme.



## PROPOSITION XXIIII.

*Si tant de nombres impair qu'on voudra sont composez, & que la multitude d'iceux soit impair; le tout sera impair.*

Soient les nombres impairs AB, BG, GD, DZ & ZE composez, dont la multitude soit impair. Le dy que le tout A est impair. Soit le nombre ZE soustraict du tout, le reste AZ sera pair par la precedente. Et du mesme ZE soit soustraict l'unité, le reste semblablement sera pair par la 7. deff. du 7. lequel joint à AZ fera un nombre pair par la 22. de ce livre. Puis à ce nombre pair soit remise l'unité, elle fera le tout AE impair: Car le nombre impair differe du pair de l'unité seulement.



## PROPOSITION XXV.

*Si d'un nombre pair on soustraict un nombre pair, le reste sera pair.*

Cette proposition ensemble les trois suivantes n'ont point besoin de demonstration: car elles semblent plustost principes que theoremes.

## PROPOSITION XXVI.

*Si d'un nombre pair en soustraict un nombre impair, le reste sera impair.*

ELEMENS D'EVCLIDE,

PROPOSITION XXVII.

Si d'un nombre impair on soustrait un nombre impair, le reste sera pair.

PROPOSITION XXVIII.

Si d'un nombre impair on soustrait un nombre pair, le reste sera impair.

PROPOSITION XXIX.

Si un nombre impair multipliant un nombre pair en engendre quelque un, l'engendré sera pair.

LE nombre impair *A* multipliant le pair *B*, face *A*  $\frac{3}{\quad}$   
*G*, le dy que cestuy est pair. D'autant que le  $\frac{4}{\quad}$   
 nombre pair *B* est pris par la multitude des vntez *B*  $\frac{\quad}{12}$   
 de *A* impair, il fera le tout *G* pair par la 22. de cel liu. *G*  $\frac{\quad}{\quad}$

PROPOSITION XXX.

Si un nombre impair multipliant un impair produit quelque un le produit sera impair.

LE nombre impair *A* multipliant l'impair *A*  $\frac{3}{\quad}$   
*B* face & produit *G*. Pource que *A* par la  $\frac{5}{\quad}$   
 multitude impair des vntez de *B* produit *G*: *B*  $\frac{\quad}{15}$   
 Le tout *G* produit sera impair par la 24. de ce *G*  $\frac{\quad}{\quad}$   
 liure.

PROPOSITION XXXI.

Si un nombre impair mesure un nombre pair, il mesurera aussi la moitié d'iceluy pair.

SOIT le nombre impair *A* mesurant le pair *B*. Le  $\frac{3}{\quad}$   
 dy que *A* mesurera la moitié du nombre pair *A*  $\frac{\quad}{18}$   
*B*. Que le nombre *A* mesure le pair *B* par *G*, le dy  $\frac{6}{\quad}$   
 aussi que *G* est pair. Car si cetuy estoit impair, il *B*  $\frac{\quad}{\quad}$   
 s'ensuiuroit que l'impair *A* par l'impair *G* produi-  $\frac{6}{\quad}$   
 roit l'impair *B* par la precedente. Mais *B* est supposé *G*  $\frac{\quad}{\quad}$   
 pair. Ce qui est absurde. Le nombre *G* est donc pair. Si donc *A*  
 par toutes les vntez de *G*, produit le tout *B*, il s'ensuivra que le  
 mesme *A* par la moitié de la multitude des vntez du nombre

pair G, fera & produira la moitié de B. Doncques A mesurera la moitié de B, par la moitié des unités du nombre pair G. Si donc un nombre impair, &c.

## PROPOSITION XXXII.

Si un nombre impair est premier à quelque nombre, il sera aussi premier au double d'iceluy.

Soit le nombre impair A premier à quelque nombre B, & le double d'iceluy B soit G. Je dy que A est premier à G. Que s'il ne l'est, Que quelque autre D mesure iceux A & G : lequel D sera impair : Car s'il estoit pair mesurant A il produiroit un nombre pair, par 22. de cestuy qui est contre l'hypothese par laquelle A est mis pour impair. Donc aussi D sera impair qui mesurant le nombre pair G (double de B) mesurera aussi la moitié d'iceluy B, par la precedente, il mesurera aussi A par consequent mesure deux premiers A & B, ce qui ne peut estre. Il ny aura donc point de nombre qui mesure iceux A & G qui sont par ce moyen premiers.

A	$\frac{7}{\text{————}}$
B	$\frac{8}{\text{————}}$
G	$\frac{16}{\text{————}}$
D	$\frac{\text{————}}{\text{————}}$

## PROPOSITION XXXIII.

Un chacun des nombres qui sont doubles depuis le binaire, est tant seulement parement pair.

Soient depuis deux autant de nombres qu'on voudra doublez A B G D. Je dy qu'un chacun d'iceux est parement pair, & ceux-là seulement. Car veu qu'ils sont faits par la repetition du nombre binaire, ils seront pairs par la 22. de ce livre. Estans tels ils seront proportionnaux depuis l'unité (estant le binaire double de l'unité.) Le nombre donc moindre mesurera le plus grand par quelque nombre des nombres de la mesme proportion qui seront devant par la 11. de ce livre lesquels seront pairs: Les produits donc seront tous pairs, & de plus, parement pairs par la 8. deff. du 7. Car nul autre nombre ne les peut mesurer excepté quelque un des nombres qui sont devant en la mesme proportion par la 13. de ce livre, qui sont tous pairs comme il a esté dict. Or qu'il ny en ait aucun autre (hors ceux-là) qui soit parement pair, il est manifeste, Car s'il est autrement

	unité
A	$\frac{2}{\text{————}}$
B	$\frac{4}{\text{————}}$
G	$\frac{8}{\text{————}}$
D	$\frac{16}{\text{————}}$
E	$\frac{48}{\text{————}}$

ELEMENS D'EVCLIDE,

Soit cest autre E, qui sera tousiours couppé en deux également insques à ce qu'il estoit reduict à l'vnité ou à quelque nombre impair; Et faut par necessité que ce soit vn autre que l'vn d'iceux. S'il est reduict au nombre impair, celuy cy mesurera E pour estre doublé plusieurs fois: Il ne sera donc pas parement pair *par la 8. deff. du 7.* Et s'il vient à l'vnité, cestuy mesme sera le binaire ou double depuis le binaire: Et puis qu'estant couppé en deux continuellement; estant double continuellement il suiura la mesme raison: Car le double est la conuerse du demy. Il ny aura donc point de nombre parement pair qui se puisse prendre hors d'iceux proposez. *Si donc vn chacun des nombres &c.*

PROPOSITION XXXIII.

*Si vn nombre a sa moictié impair, iceluy sera seulement parement impair.*

SOIT vn nombre A ayant sa moictié B impair, le dy que A & ceux de la mesme sorte sont seulement parement pairs.

Soit G le nombre binaire par lequel B puisse mesurer le double A. Soit aussi quelque nōbre pair D mesurant le mesme A par Z, ce qui se peut faire estant A pair. Pour ce que ce qui est fait de G B

est egal à ce qui est produit de Z D: G à D sera *par la 19. du 7.* comme Z à B: Mais le binaire G mesure le pair D, donc Z mesurera la moictié B: Z est donc impair: Car s'il estoit pair il feroit B (lequel il mesure) pair, *par la 22. de ce liure*, ce qui seroit contre l'hypothese: Cest autre nombre donc quel qu'il soit sçauoir Z sera impair, par lequel le pair D mesure A, qui pour ceste cause est parement impair. Outre plus il n'y a point d'autre nombre parement impair que celuy qui a sa moictié impair: Car s'il y en auoit vn autre ayant sa moictié pair, le binaire (qui est pair) mesurerait icelle moictié par la moictié: Cest autre donc n'est point parement impair *par la 9. deff. du 7.* Ce qui est contre l'hypothese. Il n'y a donc point autre nombre parement impair; que ceux qui ont la moictié impair.

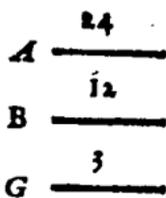
A	50		
B	25	G	2
D	10	Z	5

PROPOSITION XXXV.

*Si vn nombre pair n'est pas double depuis deux, & n'a pas la moictié impair, il est parement pair & parement impair.*

Soit

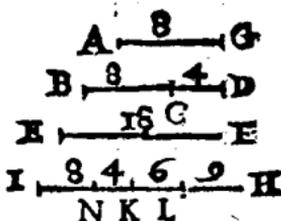
Soit quelque nombre pair  $A$  qui depuis deux ne soit point double, mais qu'il ait sa moitié  $B$  pair. Le dy que  $A$  est vn nombre parement pair & impair. D'autant que  $A$  n'est point double depuis deux, iceluy continuellement couppé en deux egalemét fera vn nombre impair: car s'il faisoit deux, ou l'vnité, il seroit double depuis le binaire: Qu'il face donc l'impair  $G$ ; Il est euident que l'impair  $G$  mesure  $A$  par vn nōbre pair: Car s'il le mesuroit par vn impair, il seroit le mesme.  $A$  impair par la 24. de cestuy: Donc l'impair  $G$  mesure  $A$  par vn pair. Et pource que  $A$  a sa moitié pair, le binaire (pair) le mesurera par la moitié (qui est nōbre pair.) Il s'ensuiura donc que le nōbre  $A$  (lequel est mesuré d'un pair par un pair, & quelque fois d'un autre pair par un impair) sera parement pair & impair par la 10. deff. du 7.. Et si derechef  $B$  a sa moitié pair, encor vn autre pair le mesurera par vn nombre pair ou impair: & ainsi infiniement iusques à ce qu'on paruienne à l'impair.



## PROPOSITION XXXVI.

Sitant de nombres qu'on voudra sont continuellement proportionaux, & du second & dernier se leuent des nombres egaux au premier, tout ainsi que l'excez du second sera au premier, tout ainsi sera l'excez du dernier à tous ceux qui precedent le dernier.

Soient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionaux  $AG$ ,  $BD$ ,  $EF$ , &  $I H$ . Et soit osté du second  $BD$ , le nombre  $BC$  egal au premier  $AG$ . Et du plus grand & dernier soit aussi osté vn mesme nombre  $IN$ . Le dy que cōme l'excez  $CD$  à  $AG$  premier, ainsi  $NH$  (excez du dernier) a tous les autres  $EF$ ,  $BD$ ,  $AG$  qui le precedēt. D'autant que  $I H$  est le plus grand (car par l'hypothese le second est plus grand que le premier) soit  $I L$  poité egal à  $EF$  &  $I K$  à  $BD$ ; mais à  $AG$  est egal à  $IN$ ; Ce sera donc comme  $I H$  à  $EF$  &  $EF$  à  $BD$ , &  $BD$  à  $AG$ , ainsi de mesme  $I H$  à  $IL$  &  $IL$  à  $IK$  &  $IK$  à  $IN$ , car ils sont egaux: Parquoy aussi  $NK$  sera egal à  $CD$  par la 3. com. sen. Mais veu que cōme le tout  $I H$  au tout  $I L$ , ainsi le soustrai &  $I L$  au soustrai &  $IK$ , le reste  $LH$  par la 11. du 7. sera au reste  $KL$  comme le



ELEMENS D'EVCLIDE,

tout IH au tout IL. Pource que semblablement IL est à IK cōme IK à IN; le nombre KL à NK sera par la mesme comme le tout IL au tout IK. Mais comme IH à IL & IL à IK aussi IK à IN; Ainsy ont esté IH à EF, & EF à BD & BD à AG. Donc comme LH à KL & KL à NK, ainsi sera EF à BD & BD à AG. Et par vicissitude selon la 13. du 7. comme LH à EF ainsi KL à BD, & comme KL à BD ainsi NK à AG, & commel'vn des antecedens NK à vn des consequens AG, ainsi seront par la 12. du 7. tous les antecedens NK, KL, LH à tous les consequens AG, BD, EF. Mais CD a esté démontré egal à NK: doncques cōme CD (excez du second BD) au premier AG, ainsi sera le tout NKLH (excez du dernier, à AG BD, EF qui tous le precedent. Si donc tant de nombres, &c.

PROPOSITION XXXVII.

Si depuis l'vnité sont exposez des nombres continuellement en proportion double iusques à ce que tout le composé soit fait premier, & iceluy tout multiplié par le dernier en engendre quelque autre, l'engendré sera parfait.

Soient adionsteez à l'vnité autant de nōbres qu'on voudra A B G D continuellement doubles, iusques à ce que le tout assemblé avec l'vnité soit nombre premier, comme pour exemple E: & que E multiplié par le dernier D face ZI. Je dy que ZI est parfait. Soient pris autāt de nombres E T L M qui apres l'vnité soient doubles; A à D sera par raison egale selon la 14. du 7. comme E à M. Ce qui est donc fait de A & M sera egal à ce qui est fait de D & E par la 19. du 7: Semblablement ce qui est fait de BL à celuy de GT: mais de D & E est fait ZI par l'hypothese: Donc de A & M se fera le mesme ZI: Donc ZI sera double à M (A estant de Z par l'hypothese: ) Mais MLT ont esté doubles; E T L M ZI seront donc continuellement doubles proportionnaux. Or soient soustraiçts du second T & du dernier ZI, des nombres egaux au premier E, qui soient TN & ZC; cōme NK à E, ainsi l'excez CI à tous MLT & E qui le precedent par la prop. mesme: Mais NK est egal à E estant moictié du double TK: Dōc

	vnité
	2
A	—
	4
B	—
	8
G	—
	16
D	—
	31
E	—
	31 N 31
T	—
	124
L	—
	148
M	—
	31 C 465
Z	—
	496
O	—
P	—

Ci sera égal à iceux M L T & E: mais 7. C sera aussi égal à l'unité & à ABGD (estant E composé ou NT son égal:) Doncques le tout ZI sera égal à iceux MLTE, & à DGBA & à l'unité. Outre plus Je dy que tous mesurent le mesme ZI: car veu que ZI se faict de D par E, l'un & l'autre le mesure, & veu aussi que tous les doubles depuis l'unité mesurent le mesme D, c'est à sçavoir ABG *par la 13. de cestuy*, iceux aussi mesureront ZI lequel est mesuré de D *par la 1. sent.* Par semblable argument estans ETLM à ZI, commel'unité & ABGD au mesme D (c'est à sçavoir en raison demie) & que l'unité & ABG mesurent iceluy D; pareillement aussi ETLM mesureront ZI. Outreplus il ne s'en trouuera (hors ceux-là) qui mesurent ZI: Que si il y en auoit quelqu'un; soit O lequel par les vnitez de P mesure ZI: mais D mesure par E le mesme ZI: E à P sera donc comme O à D. *par la 19. du 7.* Mais pource que O n'est point mis pour aucun d'iceux, iceluy ne mesure point D, qui est seulement mesuré par les precedens de la proportiō, sçavoir ABG *par la 13. de cestuy*, aussi E ne mesurera point P: D'avantage pource que E à P est comme O à D, & que E est premier *par l'hypothese*, il sera aussi *par la 31. du 7.* premier à P, lequel il ne mesure point.

Or pource que E à P sont premiers, ils seront *par la 23. du 7.* minimes, & *par la 21. du mesme* ils mesureront iceux O & D qui ont la mesme raison. E mesurera donc O, & P mesurera D. Mais puis que nul ne mesure D excepté ceux qui le precedēt en la proportion ABG & l'unité *par la 13. de ce livre* il s'ensuivra que P sera l'un d'iceux ABG. Et puis que ABCD mesurent ZI, par iceux MLTE (comme il a esté dict) & P mesure ZI par O; Il s'ensuivra que O est un d'iceux MLTE; mais il est autre *par l'hypothese*, & qui ne peut estre. Il n'y aura donc point autre nombre hors eux-cy MLTE, DGBA & l'unité, qui mesure ZI: mais cestuy cy esté *par la 39. du 7.* monstré égal à iceux MLTE, DGBA & à l'unité (qui chacun sont ses parties;) iceluy ZI donc sera nombre parfait *par la 24. deff. du 7.* Si donc depuis l'unité &c.

FIN DV NEUVIÈME LIVRE,