EUCLIDIS

OPERA OMNIA.

EDIDERUNT

I. L. HEIBERG ET **H. MENGE.**

LIPSIAE

IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI.

MDCCCLXXXV.

5

Alexander Ziwet

EUCLIDIS

ELEMENTA.

EDIDIT ET LATINE INTERPRETATUS EST

I. L. HEIBERG,

DR. PHIL.

UOL. IV.

LIBROS XI—XIII CONTINENS.

LIPSIAE

IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI.

MDCCCLXXXV.

LIPSIAE: TYPIS B. G. TEUBNERI.

PRAEFATIO.

Prodit iam, uti dixeram in uol. II p. XXII, quartum Elementorum uolumen ante tertium, id quod hoc adtulit incommodum, quod propositiones quaedam libri X non iis numeris citandae erant, quibus in editionibus uulgatis feruntur, sed iis, quibus in hac editione cum codicibus significabuntur. sed hoc incommodum edito tertio uolumine sublatum erit, et nunc quoque propositiones illae facile reperientur addita ad numerum a me citatum unitate.

In hoc uolumine praeter codices solitos PBFV*) (u. uol. I p. VIII—IX) his subsidiis usus sum:

b — cod. Bononiensi, de quo u. uol. I p. IX; extremam partem libri XI et totum librum XII in append. II recepi, sicut in codice legitur; cfr. p. 385 not.

q — cod. Parisino 2344, de quo u. uol. II p. V. usurpatus est ab initio libri XII, quia in XII, 3 p. 154, 7 deficit F.

---

*) Hoc loco additamenta quaedam cod. B subiungam, quibus in adparatu locus non fuit. XI, 4 enim p. 14, 1 supra ἀπειλήφθωσαν add. τετμήσθωσαν m. rec. XI, 10 p. 30, 2 supra παρά add. ἤτοι παράλληλοι ταῖς δυσὶν εὐθείαις ταῖς ἁπτομέναις ἀλλήλων m. rec. XII, 12 p. 208, 9 in mg. add. pro scholio ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα αὐτῶν m. 1.

L — cod. palimpsesto Londinensi Musei Britannici Add. 17211, qui praeter partes quasdam libri X etiam XIII, 14 continet ab initio p. 296, 3 ad uocabulum ἴση p. 300, 4. de hoc codice pluribus egi et scripturam plenam edidi in Philologi uol. XLIV p. 353—366.

Praeuideram fore, ut inter hoc uolumen et prius satis magnum temporis spatium intercederet; sed maius etiam euenit, quam putaueram, quia interim nouum munus scholasticum suscepi et praeterea alio opere ad usum scholarum destinato occupatus fui. sed finito iam hoc labore et primis difficultatibus noui officii superatis spero, me breui hoc opus diuturnum ad finem perducturum esse, praesertim cum materiam reliquorum uoluminum iam omnem fere collectam habeam.

Scr. Hauniae mense Iunio MDCCCLXXXV.

I. L. Heiberg.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ.

Ὅροι.

αʹ. Στερεόν ἐστι τὸ μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος ἔχον.

βʹ. Στερεοῦ δὲ πέρας ἐπιφάνεια.

γʹ. Εὐθεῖα πρὸς ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν, ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ [ὑποκειμένῳ] ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιῇ γωνίας.

δʹ. Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστιν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσιν.

εʹ. Εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐστίν, ὅταν ἀπὸ τοῦ μετεώρου πέρατος τῆς εὐθείας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ, καὶ ἀπὸ τοῦ γενομένου σημείου ἐπὶ τὸ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ πέρας τῆς εὐθείας εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῆς ἀχθείσης καὶ τῆς ἐφεστώσης.

ϛʹ. Ἐπιπέδου πρὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὀξεῖα γωνία ὑπὸ τῶν πρὸς ὀρθὰς τῇ κοινῇ τομῇ ἀγομένων πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων.

Def. 1—2. Hero def. 13, Psellus p. 49. 3—4. Hero def. 115, 2.

Εὐκλείδου στοιχείων ια̅ PV et b, sed mg. m. 1: γρ. στερεῶν. Εὐκλείδου στερεῶν α στοιχ. ια̅ B. Εὐκλείδου στερεῶν ια̅, add. στοιχείων F. 1. ὅροι] om. codd. Numeros om. codd. 7. ὑποκειμένῳ] supra scr. m. rec. P, supra m. 1 V; αὐτῷ b, mg.

XI.

Definitiones.

1. Solidum est, quod longitudinem et latitudinem et altitudinem habet.

2. Terminus autem solidi superficies est.

3. Recta ad planum perpendicularis est, ubi ad omnes rectas eam tangentes et in plano illo ductas rectos angulos efficit.

4. Planum ad planum perpendiculare est, ubi rectae ad communem sectionem planorum perpendiculares in alterutro planorum ductae ad alterum planum perpendiculares sunt.

5. Rectae ad planum inclinatio est, ubi ab eleuato termino rectae ad planum perpendicularis ducitur, et ab puncto ita orto ad terminum rectae in plano positum recta ducitur, angulus a recta ita ducta et ab erecta comprehensus.

6. Plani ad planum inclinatio est angulus acutus comprehensus a rectis in utroque plano ad idem punctum perpendicularibus ad communem sectionem ductis.

---

m. 1: *γρ. ὑποκειμένῳ*; F mg. m. 1: *γρ. ἐν τῷ αὐτῷ. ποιεῖ* F, et P, corr. m. 2. 9. *πρός* — 10. *ἐπιπέδων*] mg. m. 1 V. 10. *τῷ*] *καὶ τῷ* V, *καί* supra scr. m. 2 F. 12. *εὐθείας*] -*ας* post ins. m. 1 P. *εὐθείας* — 17. *ἐφεστώσης*] m. 2 B, om. Fb. 15. *ἐπὶ τό*] P, *ἀπὸ τοῦ* B (sed corr.), in ras. V, m. rec. P. *πέρας*] P, *πέρατος* B (sed corr.), e corr. V, m. rec. P. 19. *ὀξεῖα*] om. V (ras. est 3 litt.). 20. Post *τομῇ* spatium 4 litt. relinquitur in F. *τῶν ἐπιπέδων*] corr. ex *τῆς ἐπιπέδου* m. 1 b.

ζ΄. Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὁμοίως κεκλίσθαι λέγεται καὶ ἕτερον πρὸς ἕτερον, ὅταν αἱ εἰρημέναι τῶν κλίσεων γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν.

η΄. Παράλληλα ἐπίπεδά ἐστι τὰ ἀσύμπτωτα.

θ΄. Ὅμοια στερεὰ σχήματά ἐστι τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα ἴσων τὸ πλῆθος.

ι΄. Ἴσα δὲ καὶ ὅμοια στερεὰ σχήματά ἐστι τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα ἴσων τῷ πλήθει καὶ τῷ μεγέθει.

ια΄. Στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ οὐσῶν πρὸς πάσαις ταῖς γραμμαῖς κλίσις. Ἄλλως· στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο γωνιῶν ἐπιπέδων περιεχομένη μὴ οὐσῶν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνισταμένων.

ιβ΄. Πυραμίς ἐστι σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον ἀπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνεστώς.

ιγ΄. Πρίσμα ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον, ὧν δύο τὰ ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστι καὶ παράλληλα, τὰ δὲ λοιπὰ παραλληλόγραμμα.

ιδ΄. Σφαῖρά ἐστιν, ὅταν ἡμικυκλίου μενούσης τῆς διαμέτρου περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα.

ιε΄. Ἄξων δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεῖα, περὶ ἣν τὸ ἡμικύκλιον στρέφεται.

ιϛ΄. Κέντρον δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶ τὸ αὐτό, ὃ καὶ τοῦ ἡμικυκλίου.

---

8. Hero def. 115, 2. 9. ib. 118, 2. 11. ib. 24. 12. ib. 100. 14. ib. 77. 11—15. Psellus p. 49—50.

---

3. ὦσι Vb. 4. παράλληλα ἐπί- in ras., -πεδα mg. m. 2 V. 5. ὑπό] corr. ex ἀπό m. 1 b. 12. πρός] B; ἡ πρός

7. Planum ad planum similiter inclinatum dicitur atque aliud planum ad aliud, ubi anguli inclinationum, quos definiuimus, aequales sunt inter se.

8. Parallela plana sunt, quae non concurrunt.

9. Similes figurae solidae sunt, quae planis similibus continentur numero aequalibus.

10. Aequales autem et similes figurae solidae sunt, quae planis similibus continentur et numero et magnitudine aequalibus.

11. Solidus angulus est amplius quam duarum rectarum inter se tangentium nec in eadem superficie positarum ad omnes rectas inclinatio.[1] Aliter. Solidus angulus est, qui amplius quam duobus angulis planis continetur non in eodem plano positis et ad unum punctum coniunctis.

12. Pyramis est figura solida planis comprehensa, quae ab uno plano ad unum punctum componitur.

13. Prisma est figura solida planis comprehensa, quorum duo opposita et aequalia et similia sunt, reliqua autem parallelogramma.

14. Sphaera est figura comprehensa, ubi manente diametro semicirculi semicirculus circumactus rursus ad eundem locum restituitur, unde ferri coeptus est.

15. Axis autem sphaerae est recta manens, circum quam semicirculus circumagitur.

16. Centrum autem sphaerae idem est ac semicirculi.

---

1) Haec definitio, quae loquendi genere ab Euclide abhorret, fortasse ex Elementis antiquioribus ab eo desumpta est.

PFV b. 13. *ἐπιπέδων'' γωνιῶν'* F, *ἐπιπέδων γωνιῶν* B. 15. Ante *ἑνί* del. *εν* F. 17. *συνεστός* Bb; in P non liquet. 18. *ἐστίν* PF. 19. *ὧν*] om. φ. 20. *ἐστιν* F. 22. *τὸ ἡμικύκλιον*] mg. m. 1 b. 26. *ἐστίν* F.

ιζ΄. Διάμετρος δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη καὶ περατουμένη ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

ιη΄. Κῶνός ἐστιν, ὅταν ὀρθογωνίου τριγώνου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιενεχθὲν τὸ τρίγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα. κἂν μὲν ἡ μένουσα εὐθεῖα ἴση ᾖ τῇ λοιπῇ [τῇ] περὶ τὴν ὀρθὴν περιφερομένῃ, ὀρθογώνιος ἔσται ὁ κῶνος, ἐὰν δὲ ἐλάττων, ἀμβλυγώνιος, ἐὰν δὲ μείζων, ὀξυγώνιος.

ιθ΄. Ἄξων δὲ τοῦ κώνου ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεῖα, περὶ ἣν τὸ τρίγωνον στρέφεται.

κ΄. Βάσις δὲ ὁ κύκλος ὁ ὑπὸ τῆς περιφερομένης εὐθείας γραφόμενος.

κα΄. Κύλινδρός ἐστιν, ὅταν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιενεχθὲν τὸ παραλληλόγραμμον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα.

κβ΄. Ἄξων δὲ τοῦ κυλίνδρου ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεῖα, περὶ ἣν τὸ παραλληλόγραμμον στρέφεται.

κγ΄. Βάσεις δὲ οἱ κύκλοι οἱ ὑπὸ τῶν ἀπεναντίον περιαγομένων δύο πλευρῶν γραφόμενοι.

κδ΄. Ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροί εἰσιν, ὧν οἵ τε ἄξονες καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων ἀνάλογόν εἰσιν.

---

18. Hero def. 84, 2. 21—23. ib. 96. 18—23. Psellus p. 50.

---

1. *σφαίρας*] σ- supra scr. m. 1 P. 3. *τά*] om. b. *μέρει φ.* 4. *τρι-* in ras. m. 1 B. 5. *πλευρᾶς μιᾶς* V. *τῶν*] corr. ex *τοῦ* m. 1 b. *ὀρθήν*] om. Vb, -*ν* euan. F. *γωνία φ.* 8. *τῇ*]

17. Diametrus autem sphaerae est recta aliqua per centrum ducta et ad utramque partem superficie sphaerae terminata.

18. Conus est figura comprehensa, ubi manente alterutro latere trianguli rectanguli eorum, quae rectum angulum comprehendunt, triangulus circumactus rursus ad eundem locum restituitur, unde ferri coeptus est. et si recta manens aequalis est reliquae ad angulum rectum positae, quae circumagitur, conus rectangulus erit, sin minor est, obtusiangulus, sin maior, acutiangulus.

19. Axis autem coni recta est manens, circum quam triangulus circumagitur.

20. Basis autem circulus est, qui a recta circumacta describitur.

21. Cylindrus est figura comprehensa, ubi alterutro laterum parallelogrammi rectanguli rectum angulum comprehendentium manente parallelogrammum circumactum rursus ad eundem locum restituitur, unde ferri coeptum est.

22. Axis autem cylindri recta est manens, circum quam parallelogrammum circumagitur.

23. Bases autem circuli sunt, qui a duobus lateribus inter se oppositis in circumagendo describuntur.

24. Similes coni et cylindri sunt, quorum axes et basium diametri proportionales sunt.

---

m. rec. P, om. Vbφ. 9. Post ὀρθήν add. γωνίαν Psellus et F, sed punctis del. 10. ἀμβυγωνιος φ. 12. δέ] supra scr. m. 1 V. εὐθεῖα] om. V. 16. δέ ἐστιν V. 18. γωνίαν] om. B. 23. βάσις Vbφ. ἀπεναντίων b. 26. ἀνάλογοι Vb. ὦσιν F, εἰσι Vb.

κε'. Κύβος ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ἓξ τετραγώνων ἴσων περιεχόμενον.

κϛ'. Ὀκτάεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ὀκτὼ τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

κζ'. Εἰκοσάεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

κη'. Δωδεκάεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ δώδεκα πενταγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον.

α'.

Εὐθείας γραμμῆς μέρος μέν τι οὐκ ἔστιν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι ἐν μετεωροτέρῳ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, εὐθείας γραμμῆς τῆς ΑΒΓ μέρος μέν τι τὸ ΑΒ ἔστω ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι τὸ ΒΓ ἐν μετεωροτέρῳ.

Ἔσται δή τις τῇ ΑΒ συνεχὴς εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ. ἔστω ἡ ΒΔ· δύο ἄρα εὐθειῶν τῶν ΑΒΓ, ΑΒΔ κοινὸν τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΒ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, ἐπειδήπερ ἐὰν κέντρῳ τῷ Β καὶ διαστήματι τῷ ΑΒ κύκλον γράψωμεν, αἱ διάμετροι ἀνίσους ἀπολήψονται τοῦ κύκλου περιφερείας.

Εὐθείας ἄρα γραμμῆς μέρος μέν τι οὐκ ἔστιν ἐν

---

25. Hero def. 104. 26. ib. 102. 27. ib. 101. 28. ib. 103. 25—28. Psellus p. 50—51.

---

2. Post ἴσων eras. καὶ ἰσοπλεύρων V. Def. 27—28 hoc ordine habent P et Psellus; permutauit Theon (BFVb). 5. σχῆμα στερεόν] τό V, et b, sed mg. m. 1: γρ. σχῆμα στερεόν. εἴκοσι] κ̄ F. 7. ἐστιν F. δώδεκα] in ras. V. 8. -γωνίων supra ras. m. 1 V. 10. θεώρημα α' V. 12. τι ἐν] τι ἐν τῷ BF. μετεώρῳ b, mg. m. 1: γρ. ἐν τῷ μετεωροτέρῳ. 16. ἐν] ἐν τῷ F. 18. ἄρα] δή B, supra scr. m. 1.

25. Cubus est figura solida sex quadratis aequalibus comprehensa.

26. Octaëdrum est figura solida octo triangulis aequalibus et aequilateris comprehensa.

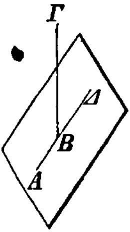
27. Icosaëdrum est figura solida uiginti triangulis aequalibus et aequilateris comprehensa.

28. Dodecaëdrum est figura solida duodecim pentagonis aequalibus et aequilateris et aequiangulis comprehensa.

I.

Fieri non potest, ut rectae lineae pars sit in plano subiacenti, pars autem in eleuatiore.

Nam si fieri potest, rectae lineae $AB\Gamma$ pars AB sit in plano subiacenti, pars autem $B\Gamma$ in eleuatiore.



erit igitur in plano subiacenti recta aliqua rectam AB in directum continuans. sit $B\Delta$. itaque duarum rectarum $AB\Gamma$, $AB\Delta$ pars communis est AB; quod fieri non potest, quia, si centro B, radio autem AB circulum descripserimus, diametri [$AB\Gamma$, $AB\Delta$] inaequales arcus circuli abscindent.[1])

Ergo fieri non potest, ut rectae lineae pars sit in

---

1) Eos scilicet, qui inter puncta A, Γ et inter A, Δ positi sunt. tum cfr. I def. 17.

---

19. *δοθεισῶν εὐθειῶν* Theon (BFVb). *AB*] *B* in ras. m. 1 B. *ἡ*] in ras. V, *τό* b. 20. *ἐστιν*] om. V. *ἐπειδήπερ* — 22. *περιφερείας*] P (*ἐάν* m. 1 ex *ἄν* corr.); *εὐθεῖα γὰρ εὐθείᾳ οὐ συμβάλλει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ καθ' ἕν· εἰ δὲ μή, ἐφαρμόσουσιν ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι* Theon? (BFVb); idem mg. m. rec. P., add. *οὕτως ἐν ἄλλοις εὕρηται, ἔπειτα τό· εὐθείας ἄρα γραμμῆς*.

τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ ἐν μετεωροτέρῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

βʹ.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον· λέγω, ὅτι αἱ ΑΒ, ΓΔ ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῶν ΕΓ, ΕΒ τυχόντα σημεῖα τὰ Ζ, Η, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΒ, ΖΗ, καὶ διήχθωσαν αἱ ΖΘ, ΗΚ· λέγω πρῶτον, ὅτι τὸ ΕΓΒ τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. εἰ γάρ ἐστι τοῦ ΕΓΒ τριγώνου μέρος ἤτοι τὸ ΖΘΓ ἢ τὸ ΗΒΚ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ [ἐπιπέδῳ], τὸ δὲ λοιπὸν ἐν ἄλλῳ, ἔσται καὶ μιᾶς τῶν ΕΓ, ΕΒ εὐθειῶν μέρος μέν τι ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ ἐν ἄλλῳ. εἰ δὲ τοῦ ΕΓΒ τριγώνου τὸ ΖΓΒΗ μέρος ᾖ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ λοιπὸν ἐν ἄλλῳ, ἔσται καὶ ἀμφοτέρων τῶν ΕΓ, ΕΒ εὐθειῶν μέρος μέν τι ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ ἐν ἄλλῳ· ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη. τὸ ἄρα ΕΓΒ τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. ἐν ᾧ δέ ἐστι τὸ ΕΓΒ τρίγωνον, ἐν τούτῳ καὶ ἑκατέρα τῶν ΕΓ, ΕΒ, ἐν ᾧ δὲ ἑκατέρα τῶν ΕΓ, ΕΒ, ἐν τούτῳ καὶ αἱ ΑΒ, ΓΔ. αἱ ΑΒ, ΓΔ ἄρα εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

---

1. *τὸ δέ*] Pb, *μέρος δέ τι* BFV. *ἐν*] *ἐν τῷ* F. 7. *αἱ*] om. F. 10. *ΕΓ, ΕΒ*] in ras. V. 11. *ΓΒ*] corr. in *ΒΓ* V. 12. *ΕΓΒ*] litt. *Β* in ras. m. 1 P; *ΕΒΓ* B. 14. *ΖΓΘ* P. *ἐν* — 15. *ἄλλῳ*] om. b, mg. m. 1 V. 15. *ἐπιπέδῳ*] om. P.

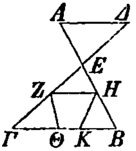
plano subiacenti, pars autem in eleuatiore; quod erat demonstrandum.

II.

Si duae rectae inter se secant, in eodem plano sunt, et omnis triangulus in eodem plano est.

Nam duae rectae AB, $\Gamma\Delta$ inter se secent in puncto E. dico, rectas AB, $\Gamma\Delta$ in eodem plano esse, et omnem triangulum in eodem plano esse.

sumantur enim in $E\Gamma$, EB quaelibet puncta Z, H, et ducantur ΓB, ZH et eas secantes $Z\Theta$, HK. dico primum, triangulum $E\Gamma B$ in eodem plano esse.



nam si pars trianguli $E\Gamma B$ uel $Z\Theta\Gamma$ uel HBK in subiacenti est, reliquum autem in alio, etiam rectarum $E\Gamma$, EB pars in plano subiacenti, pars autem in alio erit. sin trianguli $E\Gamma B$ pars, quae est $Z\Gamma BH$, in plano subiacenti est, reliquum autem in alio, etiam utriusque rectae $E\Gamma$, EB pars in subiacenti plano erit, pars autem in alio; quod demonstrauimus absurdum esse [prop. I]. ergo triangulus $E\Gamma B$ in eodem plano est. in quo autem est triangulus $E\Gamma B$, in eo est etiam utraque $E\Gamma$, EB, in quo uero utraque $E\Gamma$, EB, in eo etiam AB, $\Gamma\Delta$ sunt [prop. I]. ergo rectae AB, $\Gamma\Delta$ in eodem plano sunt, et omnis triangulus in eodem plano est; quod erat demonstrandum.

II. Galen. III. p. 830.

16. EB] ΓB φ. 18. ΓZBH V. ἢ] P, εἴη BFVb, ἔστιν bene August. 19. ἔσται] εἴη ἂν F. 20. EB, $E\Gamma$ F. 21. ααλλωι F. 22. $E\Gamma B$] litt. ΓB in ras. V, $EB''\Gamma'$ b. 23. $E\Gamma B$] litt. ΓB in ras. V, $EB''\Gamma'$ b. 24. EB, $E\Gamma$ Vb. 25. εὐθεῖα φ (non F). 27. δεῖξαι] :∼ F.

γ΄.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνῃ ἄλληλα, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ εὐθεῖά ἐστιν.

Δύο γὰρ ἐπίπεδα τὰ ΑΒ, ΒΓ τεμνέτω ἄλληλα, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ ΔΒ γραμμή· λέγω, ὅτι ἡ ΔΒ γραμμὴ εὐθεῖά ἐστιν.

Εἰ γὰρ μή, ἐπεζεύχθω ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Β ἐν μὲν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ εὐθεῖα ἡ ΔΕΒ, ἐν δὲ τῷ ΒΓ ἐπιπέδῳ εὐθεῖα ἡ ΔΖΒ. ἔσται δὴ δύο εὐθειῶν τῶν ΔΕΒ, ΔΖΒ τὰ αὐτὰ πέρατα, καὶ περιέξουσι δηλαδὴ χωρίον· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα αἱ ΔΕΒ, ΔΖΒ εὐθεῖαί εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἔσται πλὴν τῆς ΔΒ κοινῆς τομῆς τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐπιπέδων.

Ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα τέμνῃ ἄλληλα, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ εὐθεῖά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

δ΄.

Ἐὰν εὐθεῖα δύο εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, καὶ τῷ δι᾽ αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΕΖ δύο εὐθείαις ταῖς ΑΒ, ΓΔ τεμνούσαις ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον ἀπὸ τοῦ Ε πρὸς ὀρθὰς ἐφεστάτω· λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ καὶ τῷ διὰ τῶν ΑΒ, ΓΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

---

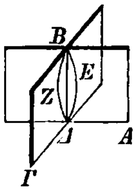
3. *ἐστι* V, comp. b. 4. *ΒΓ*] *ΓΔ* F. *τεμνέτωσαν* BFVb. 7. *τό*] *τοῦ* φ. 9. *ἔσται δή*] *ἔστω μὲν ἡ* φ. 10. *περιέξουσιν* PV, et B, sed corr.; F hic legi uix potest. 12. *δή*] *δέ* Pb. *οὐδ᾽* Vb. 13. *ἐστι* F. 16. *ἐστιν ἡ ΔΒ* F. 18. *ἐάν*

III.

Si duo plana inter se secant, communis eorum sectio recta est.

Nam duo plana AB, $B\Gamma$ inter se secent, et communis eorum sectio sit linea $\varDelta B$. dico, lineam $\varDelta B$ rectam esse.

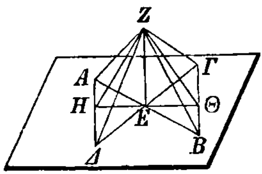
nam si minus, ab $\varDelta$ ad B in plano AB ducatur recta $\varDelta EB$, in plano autem $B\Gamma$ recta $\varDelta ZB$. itaque duarum rectarum $\varDelta EB$, $\varDelta ZB$ iidem termini erunt, et ita spatium comprehendent; quod absurdum est. quare $\varDelta EB$, $\varDelta ZB$ rectae non sunt. similiter demonstrabimus, ne aliam quidem ullam a $\varDelta$ ad B ductam rectam esse praeter $\varDelta B$ communem sectionem planorum AB, $B\Gamma$.



Ergo si duo plana inter se secant, communis eorum sectio recta est; quod erat demonstrandum.

IV.

Si recta ad duas rectas inter se secantes in communi sectione perpendicularis erecta erit, etiam ad planum earum perpendicularis erit.



Nam recta EZ ad duas rectas AB, $\Gamma\varDelta$ inter se in puncto E secantes ab E perpendicularis erecta sit. dico, EZ etiam ad planum rectarum AB, $\Gamma\varDelta$ perpendicularem esse.

— 19. ὀρθάς] in ras. V. 20. αὐτόν F, sed corr. 22. εὐθείας τάς b. 23. τεμνούσας b. 25. τῶν] τῆς b, corr. m. 1.

Ἀπειλήφθωσαν γὰρ αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΓΕ, ΕΔ ἴσαι ἀλλήλαις, καὶ διήχθω τις διὰ τοῦ Ε, ὡς ἔτυχεν, ἡ ΗΕΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΓΒ, καὶ ἔτι ἀπὸ τυχόντος τοῦ Ζ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΑ, ΖΗ, ΖΔ, ΖΓ, ΖΘ, ΖΒ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΕ, ΕΔ δυσὶ ταῖς ΓΕ, ΕΒ ἴσαι εἰσὶ καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΓΒ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΕΔ τρίγωνον τῷ ΓΕΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΒΓ ἴση [ἐστίν]. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΕΘ ἴση. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΗΕ, ΒΕΘ τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν ΑΕ τῇ ΕΒ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξουσιν. ἴση ἄρα ἡ μὲν ΗΕ τῇ ΕΘ, ἡ δὲ ΑΗ τῇ ΒΘ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΖΕ, βάσις ἄρα ἡ ΖΑ βάσει τῇ ΖΒ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΖΓ τῇ ΖΔ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΓΒ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΑ τῇ ΖΒ ἴση, δύο δὴ αἱ ΖΑ, ΑΔ δυσὶ ταῖς ΖΒ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ βάσις ἡ ΖΔ βάσει τῇ ΖΓ ἐδείχθη ἴση· καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΑΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἴση ἐστίν. καὶ ἐπεὶ πάλιν ἐδείχθη ἡ ΑΗ τῇ ΒΘ ἴση, ἀλλὰ μὴν καὶ η ΖΑ τῇ ΖΒ ἴση, δύο δὴ αἱ ΖΑ, ΑΗ δυσὶ ταῖς ΖΒ, ΒΘ ἴσαι εἰσίν. καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΖΑΗ ἐδείχθη ἴση τῇ ὑπὸ ΖΒΘ· βάσις ἄρα ἡ ΖΗ βάσει τῇ

3. *ΗΕΘ*] *ΕΘ* F, et V m. 1, corr. m. 2; *E* eras. B. *αἱ* — 4. *ἐπεζεύχθωσαν*] postea ins. m. 1 P. 5. *ΕΔ*] corr. ex *ΕΒ* m. 2 F. 6. *περιέχουσι* FVb. 7. *ΒΓ* F. *ἐστίν*] comp. Fb, *εἰσίν* V. 8. *τῷ*] corr. ex *τό* m. 1 F. *τριγώνῳ*] om. BFVb.

abscindantur enim AE, EB, ΓE, $E\Delta$ inter se aequales, et per E quaelibet recta $HE\Theta$ ducatur, et ducantur $A\Delta$, ΓB, et praeterea a quolibet puncto Z ducantur ZA, ZH, $Z\Delta$, $Z\Gamma$, $Z\Theta$, ZB. et quoniam duae rectae AE, $E\Delta$ duabus ΓE, EB aequales sunt et aequales angulos comprehendunt [I, 15], basis $A\Delta$ basi ΓB aequalis est, et triangulus $AE\Delta$ triangulo ΓEB aequalis [I, 4]. quare etiam $\angle \Delta AE = EB\Gamma$ [id.]. uerum etiam $\angle AEH = BE\Theta$ [I, 15]. itaque duo trianguli sunt AHE, $BE\Theta$ duos angulos duobus angulis alterum alteri aequalem habentes et unum latus uni lateri aequale, quod ad angulos aequales positum est, $AE = EB$. itaque etiam reliqua latera reliquis lateribus aequalia habebunt [I, 26]. quare $HE = E\Theta$, $AH = B\Theta$. et quoniam $AE = EB$, et ZE communis est et perpendicularis, erit $ZA = ZB$ [I, 4]. eadem de causa erit etiam $Z\Gamma = Z\Delta$. et quoniam $A\Delta = \Gamma B$ et $ZA = ZB$, duo latera ZA, $A\Delta$ duobus lateribus ZB, $B\Gamma$ alterum alteri aequalia sunt; et demonstratum est, esse $Z\Delta = Z\Gamma$. erit igitur etiam $\angle ZA\Delta = ZB\Gamma$ [I, 8]. et quoniam rursus demonstratum est, esse $AH = B\Theta$, et est $ZA = ZB$, duo latera ZA, AH duobus ZB, $B\Theta$ aequalia sunt; et demonstratum est, esse $\angle ZAH = ZB\Theta$. itaque $ZH = Z\Theta$ [I, 4]. et quoniam rursus demonstratum

9. ἐστίν] om. P. 11. ἐστι] εἰσι FV. 12. ἔχοντας φ. 13. τήν] τά? V. τὰς ἴσας Vb. γωνίας bφ. 14. τῇ] supra scr. m. 1 b. 17. ZA] A in ras. B. 20. ἔστιν B. $A\Delta$] A e corr. V. 23. ἡ] m. 2 F. Ante $ZA\Delta$ eras. τῶν F. ἐστίν] comp. b, ἐστί P. 25. ZA] (alt.) A e corr. m. 1 F. 26. εἰσίν] comp. F, εἰσι Vb. ZAH] corr. ex ZAB m. 1 b. 27. $ZB\Theta$] B e corr. m. 1 F. ἄρα] om. V. ZH] $H''Z'$ b.

ΖΘ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐδείχθη ἡ ΗΕ τῇ ΕΘ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΗΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΘΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις ἡ ΖΗ βάσει τῇ ΖΘ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΘΕΖ ἴση ἐστίν. ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΗΕΖ, ΘΕΖ γωνιῶν. ἡ ΖΕ ἄρα πρὸς τὴν ΗΘ τυχόντως διὰ τοῦ Ε ἀχθεῖσαν ὀρθή ἐστιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι ἡ ΖΕ καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. εὐθεῖα δὲ πρὸς ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν, ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιῇ γωνίας· ἡ ΖΕ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. τὸ δὲ ὑποκείμενον ἐπίπεδόν ἐστι τὸ διὰ τῶν ΑΒ, ΓΔ εὐθειῶν. ἡ ΖΕ ἄρα πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ διὰ τῶν ΑΒ, ΓΔ ἐπιπέδῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα δύο εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι

ε'.

Ἐὰν εὐθεῖα τρισὶν εὐθείαις ἁπτομέναις ἀλλήλων πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τρισὶν εὐθείαις ταῖς ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κατὰ τὸ Β ἁφῆς ἐφεστάτω· λέγω, ὅτι αἱ ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ.

---

3. *εἰσίν*] comp. F. 5. *ἐστιν ἴση* BFV. 6. *ἡ διά* b. 7. *ἀχθεῖσα* Fb. *δή*] om. F. 8. *αὐτῆς*] corr. ex *αὐτῇ* m. 1 B. 9. *τῷ*] *τῷ αὐτῷ* F, sed corr. 11. *πρός*] ins. m.

est, esse $HE = E\Theta$, et ZE communis est, duo latera HE, EZ duobus ΘE, EZ aequalia sunt; et $ZH = Z\Theta$. itaque $\angle HEZ = \Theta EZ$ [I, 8]. itaque uterque angulus HEZ, ΘEZ rectus est [I def. 10]. ergo ZE ad rectam $H\Theta$ fortuito per E ductam perpendicularis est. iam eodem modo demonstrabimus, ZE ad omnes rectas eam tangentes et in plano subiacenti positas rectos efficere angulos. recta autem ad planum perpendicularis est, ubi ad omnes rectas eam tangentes et in eodem plano ductas rectos angulos efficit [def. 3]. itaque ZE ad planum subiacens perpendicularis est. subiacens autem planum id est, quod per rectas AB, $\Gamma\Delta$ ductum est. itaque ZE ad planum rectarum AB, $\Gamma\Delta$ perpendicularis est.

Ergo si recta ad duas rectas inter se secantes in communi sectione perpendicularis erecta erit, etiam ad planum earum perpendicularis erit; quod erat demonstrandum.

V.

Si recta ad tres rectas inter se tangentes in communi sectione perpendicularis erecta erit, tres illae rectae in eodem plano sunt.

Nam recta AB ad tres rectas $B\Gamma$, $B\Delta$, BE in puncto sectionis B perpendicularis erecta sit. dico, rectas $B\Gamma$, $B\Delta$, BE in eodem plano esse.

---

2 F. *αὐτῆς*] corr. ex *αὐτῇ* m. 1 B. 12. *ἐν*] *ἐπί* φ. *αὐτῷ*] om. V. *ποιεῖ* P. 13. *ἐν τῷ* B. *ἐστιν*] comp. Fb, *ἐστι* P. 14. *τῶν*] bis V, sed corr. 15. *ΓΔ εὐθειῶν* Vb. 16. *ἐπιπέδων* b. 17. *εὐθεῖα δύο εὐθείαις*] *β ευ^{θθ}* F. *δύο* — 19. *δεῖξαι*] *καὶ τὰ ἑξῆς* B. 17. *τεμνούσαις* — 19. *ἔσται*] *καὶ τὰ ἑξῆς* F. 19. *ἐστιν* Vb. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*] comp. F. 25. *ἐφεστάτω*] corr. ex *ἀφεστάτω* m. rec. P.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστωσαν αἱ μὲν ΒΔ, ΒΕ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ἡ δὲ ΒΓ ἐν μετεωροτέρῳ, καὶ ἐκβεβλήσθω τὸ διὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐπίπεδον· κοινὴν δὴ τομὴν ποιήσει ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. ποιείτω τὴν ΒΖ. ἐν ἑνὶ ἄρα εἰσὶν ἐπιπέδῳ τῷ διηγμένῳ διὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ αἱ τρεῖς εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΒΖ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΔ, ΒΕ, καὶ τῷ διὰ τῶν ΒΔ, ΒΕ ἄρα ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ ΑΒ. τὸ δὲ διὰ τῶν ΒΔ, ΒΕ ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενόν ἐστιν· ἡ ΑΒ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ὥστε καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας ἡ ΑΒ. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΒΖ οὖσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΖ γωνία ὀρθή ἐστιν. ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ὀρθή· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. καί εἰσιν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ΒΓ εὐθεῖα ἐν μετεωροτέρῳ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα τρισὶν εὐθείαις ἁπτομέναις ἀλλήλων ἐπὶ τῆς ἁφῆς πρὸς ὀρθὰς ἐπισταθῇ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

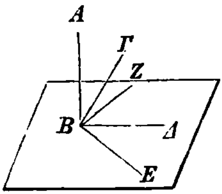
ς'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσιν, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι.

---

1. *ΒΔ*] e corr. m. 1 b. 2. *ἡ δέ* — 5. *εὐθεῖαν*] mg. m. 1 V, in textu ras. est. 2. *μετεώρῳ* V. 3. *καί*] *καί δι'* b. 4. *δή*] postea ins. F. 5. *καὶ εὐθεῖαν* b, et B, corr. m. 2; *καί* (comp.) ins. m. 1 F. *ποιήτω* φ. *εἰσὶν ἄρα* b. 7. *ἐστιν* P; *ἔσται* B,

ne sint enim, uerum, si fieri potest, $B\Delta$, BE in plano subiacenti sint, $B\Gamma$ autem in eleuatiore, et producatur planum per AB, $B\Gamma$. communem igitur sectionem in plano subiacenti rectam efficiet [prop. III]. efficiat BZ. itaque tres rectae AB, $B\Gamma$, BZ in eodem plano sunt, quod per AB, $B\Gamma$ ducitur. et quoniam AB ad utramque $B\Delta$, BE perpendicularis est, etiam ad planum rectarum $B\Delta$, BE perpendicularis est AB [prop. IV]. planum autem rectarum $B\Delta$, BE subiacens est; AB igitur ad planum subiacens perpendicularis est. quare etiam ad omnes rectas eam tangentes et in subiacenti plano positas rectos angulos efficiet AB [def. 3]. tangit autem eam BZ in subiacenti plano posita. itaque $\angle ABZ$ rectus est. supposuimus autem, etiam $\angle AB\Gamma$ rectum esse. erit igitur $\angle ABZ = AB\Gamma$. et in eodem plano sunt; quod fieri non potest. itaque recta $B\Gamma$ in plano eleuatiore posita non est; itaque tres rectae $B\Gamma$, $B\Delta$, BE in eodem plano sunt.



Ergo si recta ad tres rectas inter se tangentes in puncto tactionis perpendicularis erecta erit, tres illae rectae in eodem plano sunt; quod erat demonstrandum.

VI.

Si duae rectae ad idem planum perpendiculares sunt, rectae parallelae erunt.

corr. m. 1. 8. $B\Delta$] (alt.) B in ras. m. 1 B. 9. ἄρα] prius α in ras. m. 1 P. 10. AB] $B''A'$ F. 12. αὐτῇι b. 19. $B\Gamma$] corr. ex AB V; AB supra scr. Γ m. 1 b. 26. ὦσι PVb.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστωσαν· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

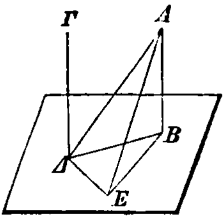
Συμβαλλέτωσαν γὰρ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ Β, Δ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ εὐθεῖα, καὶ ἤχθω τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἡ ΔΕ, καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΑΕ, ΑΔ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας [ἄρα] τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἅπτεται δὲ τῆς ΑΒ ἑκατέρα τῶν ΒΔ, ΒΕ οὖσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΒΕ γωνιῶν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΔΒ, ΓΔΕ ὀρθή ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΔ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΔ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΒ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΒΕ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΒΕ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΕ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΑ ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΑΕ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΑ ἐστιν ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΕ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΔΑ· ἡ ΕΔ ἄρα πρὸς τὴν ΔΑ ὀρθή ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΔ, ΔΓ ὀρθή. ἡ ΕΔ ἄρα τρισὶν εὐθείαις ταῖς ΒΔ, ΔΑ, ΔΓ πρὸς ὀρθὰς

---

1. *αἱ*] supra m. rec. P. 4. *συμβαλέτωσαν* P (*συμπιπτέτωσαν* supra scr. m. rec.) et supra scr. *λ* V. 5. *ΒΔ*] corr. ex *Β* m. 2 B. 6. *τῷ*] *τῷ αὐτῷ* P. 9. *ἐστίν* F. 10. *ἄρα*] om. P. 12. Ante *τῶν* ras. 2 litt. V, *τῆς τῶν* b. 13. *οὖσαι* F. 16. *τῇ* — *ΒΔ*] mg. m. 1 P. 17. *ταῖς*] miro comp. F, ut lin. 21. *εἰσί* Vb, comp. supra scr. *φ*. 18. *καί*] comp. supra scr. *φ*. *περιέχουσι* BVb *ΑΔ*] corr. ex

Nam duae rectae AB, $\Gamma\Delta$ ad planum subiacens perpendiculares sint. dico, AB rectae $\Gamma\Delta$ parallelam esse.



concurrant enim cum plano subiacenti in punctis B, Δ, et ducatur recta $B\Delta$, et ad rectam $B\Delta$ perpendicularis in plano subiacenti ducatur ΔE, et ponatur

$$AB = \Delta E,$$

et ducantur BE, AE, $A\Delta$.

et quoniam AB ad planum subiacens perpendicularis est, etiam ad omnes rectas eam tangentes et in plano subiacenti positas rectos angulos efficiet [def. 3]. uerum utraque $B\Delta$, BE in plano subiacenti positae rectam AB tangunt; itaque uterque angulus $AB\Delta$, ABE rectus est. eadem de causa etiam uterque angulus $\Gamma\Delta B$, $\Gamma\Delta E$ rectus est. et quoniam $AB = \Delta E$, et $B\Delta$ communis est, duo latera AB, $B\Delta$ duobus $E\Delta$, ΔB aequalia sunt; et aequales angulos comprehendunt. itaque $A\Delta = BE$ [I, 4]. et quoniam $AB = \Delta E$, et $A\Delta = BE$, duo latera AB, BE duobus $E\Delta$, ΔA aequalia sunt; et basis eorum communis est AE. itaque $\angle ABE = E\Delta A$ [I, 8]. uerum $\angle ABE$ rectus est; quare etiam $\angle E\Delta A$ rectus est. itaque $E\Delta$ ad ΔA perpendicularis est. sed etiam ad utramque $B\Delta$, $\Delta\Gamma$ perpendicularis est. itaque $E\Delta$ ad tres rectas $B\Delta$, ΔA, $\Delta\Gamma$ perpendicularis in puncto tactio-

---

AB m. 1 b. 19. ἴση ἐστίν V. 21. εἰσί Vb, comp. F. 23. ἴση ἐστίν Vb. ἡ] (prius) ins. m. 2 F. 24. τῶν $E\Delta A$ P. 25. ἔστι] supra scr. comp. m. 1 F. Sequentia usque ad p. 22, 5: ἐπιπέδῳ in ras. V. ὀρθή] corr. ex οϑη m. rec. P.

ἐπὶ τῆς ἀφῆς ἐφέστηκεν· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΒΔ, ΔΑ, ΔΓ ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. ἐν ᾧ δὲ αἱ ΔΒ, ΔΑ, ἐν τούτῳ καὶ ἡ ΑΒ· πᾶν γὰρ τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ· αἱ ἄρα ΑΒ, ΒΔ, ΔΓ εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. καί ἐστιν ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΒΔ, ΒΔΓ γωνιῶν· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσιν, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ζʹ.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ληφθῇ δὲ ἐφ᾽ ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ εἰλήφθω ἐφ᾽ ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα τὰ Ε, Ζ· λέγω, ὅτι ἡ ἐπὶ τὰ Ε, Ζ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις.

Μὴ γάρ, ἀλλ᾽ εἰ δυνατόν, ἔστω ἐν μετεωροτέρῳ ὡς ἡ ΕΗΖ, καὶ διήχθω διὰ τῆς ΕΗΖ ἐπίπεδον· τομὴν δὴ ποιήσει ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. ποιείτω ὡς τὴν ΕΖ· δύο ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΕΗΖ, ΕΖ χωρίον περιέξουσιν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν μετεωροτέρῳ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· ἐν τῷ διὰ τῶν ΑΒ, ΓΔ ἄρα

---

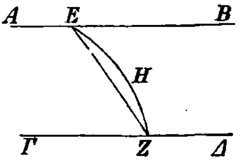
2. ἐν ᾧ — 5. ἐπιπέδῳ] om. b. 2. ΔΒ, ΔΑ] ΔΑ, ΔΒ P; ΒΔ, ΔΑ, ΔΓ F. 6. ΒΔΓ] Β in ras. V; ΓΔΒ P. ἄρα] corr. ex α m. 2 P. 8. ἐπιπέδῳ] om. V. 9. ὦσι Vb. ἀλλήλαις αἱ V. 11. ὦσιν B. 13. αὐτῷ] supra m. 2 B. 17. λέγω — Ε, Ζ] mg. m. 1 F. σημεῖα] om. V. 20. ἡ] φ, αἱ? F. διά] τὸ διά BF, τό supra scr. V. 21. ἐπιπέδῳ] mg. V.

nis erecta est; quare tres rectae $B\Delta$, ΔA, $\Delta\Gamma$ in eodem plano sunt [prop. V]. in quo autem plano sunt ΔB, ΔA, in eodem est etiam AB; omnis enim triangulus in eodem plano est [prop. II]. itaque rectae AB, $B\Delta$, $\Delta\Gamma$ in eodem plano sunt. et uterque angulus $AB\Delta$, $B\Delta\Gamma$ rectus est. itaque AB rectae $\Gamma\Delta$ parallela est [I, 28].

Ergo si duae rectae ad idem planum perpendiculares sunt, rectae parallelae erunt; quod erat demonstrandum.

VII.

Si duae rectae parallelae sunt, et in utraque quaelibet puncta sumuntur, recta puncta coniungens in eodem plano est, in quo parallelae.



Sint duae rectae parallelae AB, $\Gamma\Delta$, et in utraque quaelibet puncta sumantur E, Z. dico, rectam puncta E, Z coniungentem in eodem plano esse, in quo sint rectae parallelae.

ne sit enim, sed, si fieri potest, in eleuatiore sit ut EHZ, et per EHZ planum ducatur. itaque in plano subiacenti sectionem efficiet rectam [prop. III]. efficiat EZ. ergo duae rectae EHZ, EZ spatium comprehendent; quod fieri non potest. itaque recta E, Z coniungens in plano eleuatiore non est. ergo recta E, Z coniungens in plano parallelarum AB, $\Gamma\Delta$ est.

---

22. ὡς] supra scr. m. 1 B, om. FVb. EHZ] HZ V. 23. περιέχουσιν Vb. ἀδύνατον] mg. V. 25. ἄρα] supra scr. V.

παραλλήλων ἐστὶν ἐπιπέδῳ ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα.

Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ληφθῇ δὲ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

η'.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ ἑτέρα αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, ἡ δὲ ἑτέρα αὐτῶν ἡ ΑΒ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ ἡ λοιπὴ ἡ ΓΔ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Συμβαλλέτωσαν γὰρ αἱ ΑΒ, ΓΔ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ Β, Δ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ· αἱ ΑΒ, ΓΔ, ΒΔ ἄρα ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. ἤχθω τῇ ΒΑ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἡ ΔΕ, καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΑΕ, ΑΔ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν ἡ ΑΒ· ὀρθὴ ἄρα [ἐστὶν] ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΒΕ γωνιῶν. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΔ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΔ, ΓΔΒ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΒ· ἡ ΓΔ ἄρα πρὸς τὴν ΒΔ ὀρθή ἐστιν. καὶ

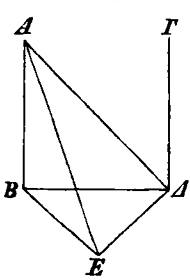
---

3. ὦσιν PB. 8. ὦσιν PB. ἡ δέ] ᾗ δὲ ἡ V. 9. ᾖ] om. V. 10. πρὸς ὀρθὰς ἔσται τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ b. 12. Ante

Ergo si duae rectae parallelae sunt, et in utraque quaelibet puncta sumuntur, recta puncta coniungens in eodem plano est, in quo parallelae; quod erat demonstrandum.

VIII.

Si duae rectae parallelae sunt, et alterutra ad planum aliquod perpendicularis est, etiam reliqua ad idem planum perpendicularis erit.



Sint duae rectae parallelae AB, $\Gamma\Delta$, et alterutra earum AB ad planum subiacens perpendicularis sit. dico, etiam reliquam $\Gamma\Delta$ ad idem planum perpendicularem fore.

concurrant enim AB, $\Gamma\Delta$ cum plano subiacenti in punctis B, Δ, et ducatur $B\Delta$. itaque AB, $\Gamma\Delta$, $B\Delta$ in eodem plano sunt [prop. VII]. ad $B\Delta$ in plano subiacenti perpendicularis ducatur ΔE, et ponatur $\Delta E = AB$, et ducantur BE, AE, $A\Delta$. et quoniam AB ad planum subiacens perpendicularis est, etiam ad omnes rectas eam tangentes et in plano subiacenti positas perpendicularis est AB [def. 3]. rectus igitur uterque angulus $AB\Delta$, ABE. et quoniam in parallelas AB, $\Gamma\Delta$ recta incidit $B\Delta$, anguli $AB\Delta$, $\Gamma\Delta B$ duobus rectis aequales sunt [I, 29]. uerum $\angle AB\Delta$ rectus est; quare etiam $\angle \Gamma\Delta B$ rectus est. quare $\Gamma\Delta$ ad $B\Delta$ perpendicularis est.

ἐπιπέδῳ m. 1 del. ἐν P. 13. καὶ ἡ] F, δή φ. 17. $\Gamma\Delta$] Δ corr. ex B m. rec. B. 20. AE] ΔE φ. ἐστιν P. 23. πρὸς ὀρθάς] ὀρθή BFV. ἐστίν] (alt.) om. P. 25. εὐθείας V. 26. γωνίαι] F, γωνία φ.

ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΔ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΔ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΒ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΒ ἴση· ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΒΕ ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΑΔ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΕ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΑ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΑΕ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΑ ἐστιν ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΕ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΔΑ· ἡ ΕΔ ἄρα πρὸς τὴν ΑΔ ὀρθή ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ πρὸς τὴν ΔΒ ὀρθή· ἡ ΕΔ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν ΒΔ, ΔΑ ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν. καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν ΒΔΑ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας ἡ ΕΔ. ἐν δὲ τῷ διὰ τῶν ΒΔΑ ἐπιπέδῳ ἐστὶν ἡ ΔΓ, ἐπειδήπερ ἐν τῷ διὰ τῶν ΒΔΑ ἐπιπέδῳ εἰσὶν αἱ ΑΒ, ΒΔ, ἐν ᾧ δὲ αἱ ΑΒ, ΒΔ, ἐν τούτῳ ἐστὶ καὶ ἡ ΔΓ. ἡ ΕΔ ἄρα τῇ ΔΓ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· ὥστε καὶ ἡ ΓΔ τῇ ΔΕ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΓΔ τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθάς. ἡ ΓΔ ἄρα δύο εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας ταῖς ΔΕ, ΔΒ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Δ τομῆς πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν· ὥστε ἡ ΓΔ καὶ τῷ διὰ τῶν ΔΕ, ΔΒ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. τὸ δὲ διὰ τῶν ΔΕ, ΔΒ ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενόν ἐστιν· ἡ ΓΔ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ μία

---

2. ΑΒ] ΒΑ b. εἰσί Vb, comp. F. 4. ἐστιν ἴση BVb. 7. ἑκατέρᾳ] supra scr. F. ἡ] supra scr. m. 1 V. 8. ΕΔΑ] ΒΔ seq. ras. 1 litt. φ. ἐστιν] supra scr. m. 1 F. 9. ὀρθή — ΑΒΕ] in ras. plurium litt. F. 10. ΑΔ] ΔΑ P. 11. ΔΒ] in ras. V. 12. ἔστι V, comp. Fb. 14. ΒΔΑ] P; ΑΔ, ΔΒ B; ΒΔ, ΑΒ b et in ras. FV. ΔΕ P. 15. ΒΔ,

et quoniam $AB = \varDelta E$, et $B\varDelta$ communis est, duo latera AB, $B\varDelta$ duobus $E\varDelta$, $\varDelta B$ aequalia sunt; et $\angle AB\varDelta = E\varDelta B$ (uterque enim rectus est); itaque $A\varDelta = BE$ [I, 4]. et quoniam $AB = \varDelta E$, et $BE = A\varDelta$, duo latera AB, BE duobus $E\varDelta$, $\varDelta A$ aequalia sunt; et basis eorum communis est AE; itaque $\angle ABE = E\varDelta A$ [I, 8]. uerum $\angle ABE$ rectus est; itaque etiam $\angle E\varDelta A$ rectus est; ergo $E\varDelta$ ad $A\varDelta$ perpendicularis est. uerum etiam ad $\varDelta B$ perpendicularis est. $E\varDelta$ igitur etiam ad planum rectarum $B\varDelta$, $\varDelta A$ perpendicularis est [prop. IV]. quare etiam ad omnes rectas eam tangentes et in plano rectarum $B\varDelta$, $\varDelta A$ positas rectos angulos efficiet $E\varDelta$. in plano autem rectarum $B\varDelta$, $\varDelta A$ posita est $\varDelta\Gamma$, quoniam AB, $B\varDelta$ in plano rectarum $B\varDelta$, $\varDelta A$ sunt [prop. II], in quo autem plano sunt AB, $B\varDelta$, in eodem etiam $\varDelta\Gamma$ posita est. itaque $E\varDelta$ ad $\varDelta\Gamma$ perpendicularis est; quare etiam $\Gamma\varDelta$ ad $\varDelta E$ perpendicularis est. uerum $\Gamma\varDelta$ etiam ad $B\varDelta$ perpendicularis est. $\Gamma\varDelta$ igitur ad duas rectas inter se secantes $\varDelta E$, $\varDelta B$ in sectione $\varDelta$ perpendicularis erecta est; quare $\Gamma\varDelta$ etiam ad planum rectarum $\varDelta E$, $\varDelta B$ perpendicularis est [prop. IV]. uerum planum rectarum $\varDelta E$, $\varDelta B$ subiacens est. itaque $\Gamma\varDelta$ ad planum subiacens perpendicularis est.

Ergo si duae rectae parallelae sunt, et alterutra ad planum aliquod perpendicularis est, etiam reliqua

---

$\varDelta A$ BFb, in ras. V. 17. $\varDelta\Gamma$] $\Gamma\varDelta$ b. 18. $\varDelta\Gamma$] in ras. m. 1 PV. 19. τῇ — $\Gamma\varDelta$] bis P, corr. m. 1. καί] om. P. τῇ] καὶ τῇ P. $B\varDelta$] $\varDelta B$ F. 20. ἀλλήλαις b, corr. m. 1. 21. $\varDelta B$] in ras. V. 22. ἡ] καὶ ἡ V. 23. $\varDelta B$] $\varDelta E$ b. 24. ὑποκείμενόν ἐστιν] in ras. V. 26. ὦσιν PB.

αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θʹ.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ μὴ οὖσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.

Ἔστω γὰρ ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ τῇ ΕΖ παράλληλος μὴ οὖσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΕΖ τυχὸν σημεῖον τὸ Η, καὶ ἀπ' αὐτοῦ τῇ ΕΖ ἐν μὲν τῷ διὰ τῶν ΕΖ, ΑΒ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΗΘ, ἐν δὲ τῷ διὰ τῶν ΖΕ, ΓΔ τῇ ΕΖ πάλιν πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΗΚ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΕΖ πρὸς ἑκατέραν τῶν ΗΘ, ΗΚ ὀρθή ἐστιν, ἡ ΕΖ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν ΗΘ, ΗΚ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. καί ἐστιν ἡ ΕΖ τῇ ΑΒ παράλληλος· καὶ ἡ ΑΒ ἄρα τῷ διὰ τῶν ΘΗΚ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓΔ τῷ διὰ τῶν ΘΗΚ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ τῷ διὰ τῶν ΘΗΚ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσιν, παράλληλοί εἰσιν αἱ εὐθεῖαι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

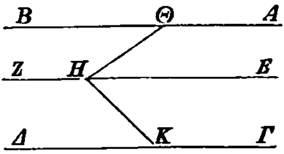
---

1. ᾖ] ἐστιν φ, supra scr. ᾖ. 2. ἔσται] ἐστιν BFV. 6. εἰσίν P. 7. γάρ] γ corr. ex π m. rec. B. παράλληλος τῇ ΕΖ V. παράλληλοι B. 9. ΔΓ V. 10. Post τυχόν ras. 2 litt. V. 12. ἡ] supra m. 1 P. 13. ΖΕ] in ras. V. ΗΚ] ΝΚ F, Η post ins. V. 14. ἡ] αἱ F. 15. ΗΘ] Θ b supra scr. m. 1; litt. Η postea ins. m. 1 BF. 16. ἐστιν] comp. Fb, ἐστι PV. καί — 18. ἐστιν] mg. m. 2 B. 17. ἄρα] om. P. 19. ἑκατέρα — 21. ἐστιν] mg. m. 1 in ras.

ad idem planum perpendicularis erit; quod erat demonstrandum.

IX.

Quae eidem rectae parallelae sunt, etiam si in eodem plano non sunt, etiam inter se parallelae sunt.



Nam utraque AB, $\Gamma\Delta$ rectae EZ parallela sit, non positae in eodem plano. dico, AB rectae $\Gamma\Delta$ parallelam esse.

sumatur enim in EZ quoduis punctum H, et ab eo ad rectam EZ perpendicularis ducatur in plano EZ, AB rectarum $H\Theta$, in plano autem ZE, $\Gamma\Delta$ rectarum ad EZ rursus perpendicularis ducatur HK. et quoniam EZ ad utramque $H\Theta$, HK perpendicularis est, EZ etiam ad planum rectarum $H\Theta$, HK perpendicularis est [prop. IV]. et EZ rectae AB parallela est. itaque etiam AB ad planum rectarum ΘH, HK perpendicularis est [prop. VIII]. eadem de causa etiam $\Gamma\Delta$ ad planum rectarum ΘH, HK perpendicularis est; quare utraque AB, $\Gamma\Delta$ ad planum rectarum ΘH, HK perpendicularis est. sin duae rectae ad idem planum perpendiculares sunt, rectae parallelae sunt [prop. VI]. ergo AB rectae $\Gamma\Delta$ parallela est; quod erat demonstrandum.

P. 19. ἄρα] supra F. 20. τῷ] corr. ex τῶν P. $H\Theta$, HK m. 2 FV. 22. ὦσι Vb. εἰσιν] ἔσονται V. 23. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. V.

ι'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων ὦσι μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας γωνίας περιέξουσιν.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ AB, $B\Gamma$ ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας τὰς ΔE, EZ ἁπτομένας ἀλλήλων ἔστωσαν μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $AB\Gamma$ γωνία τῇ ὑπὸ ΔEZ.

Ἀπειλήφθωσαν γὰρ αἱ BA, $B\Gamma$, $E\Delta$, EZ ἴσαι ἀλλήλαις, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $A\Delta$, ΓZ, BE, $A\Gamma$, ΔZ. καὶ ἐπεὶ ἡ BA τῇ $E\Delta$ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος, καὶ ἡ $A\Delta$ ἄρα τῇ BE ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓZ τῇ BE ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος· ἑκατέρα ἄρα τῶν $A\Delta$, ΓZ τῇ BE ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. αἱ δὲ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ μὴ οὖσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ $A\Delta$ τῇ ΓZ καὶ ἴση. καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ $A\Gamma$, ΔZ· καὶ ἡ $A\Gamma$ ἄρα τῇ ΔZ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ AB, $B\Gamma$ δυσὶ ταῖς ΔE, EZ ἴσαι εἰσίν, καὶ βάσις ἡ $A\Gamma$ βάσει τῇ ΔZ ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $AB\Gamma$ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔEZ ἐστιν ἴση.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων ὦσι μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας γωνίας περιέξουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

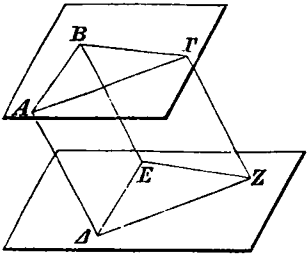
---

3. ὦσιν PB. 4. οὖσαι, ἴσας b. περιέξουσι Vb. 5. αἱ AB, $B\Gamma$] om. BFV. $B\Gamma$] postea ins. m. 1 P. 6. αἱ AB, $B\Gamma$ παρά BFV. 7. αὐτῷ] supra scr. F. 9. BA] in ras. m. 1 P. EZ] litt. Z e corr. V. 11. ἐστίν B. 12. ἐστιν ἴση BFb. 14. ἑκατέρα — 15. παράλληλος] bis F, sed corr. m. 1; mg. V. 16. καὶ μή — ἐπιπέδῳ] om. V. 17. παράλληλοι] supra scr. m. 1 F. ἄρα] supra scr. m. 2 B. 18. καί] (primum) supra m. 1 V. 19. ἐστίν PB. 20. εἰσί Vb, comp. F.

X.

Si duae rectae inter se tangentes duabus rectis inter se tangentibus non positis in eodem plano parallelae sunt, angulos aequales comprehendent.

Nam duae rectae AB, $B\Gamma$ inter se tangentes duabus rectis inter se tangentibus ΔE, EZ non positis in eodem plano parallelae sint. dico, esse $\angle\, AB\Gamma = \Delta EZ$.



ponantur enim $BA = B\Gamma = E\Delta = EZ$, et ducantur $A\Delta$, ΓZ, BE, $A\Gamma$, ΔZ. et quoniam BA rectae $E\Delta$ aequalis et parallela est, etiam $A\Delta$ rectae BE aequalis et parallela est [I, 33]. eadem de causa etiam ΓZ rectae BE aequalis et parallela est. itaque utraque $A\Delta$, ΓZ rectae BE aequalis et parallela est. quae autem eidem rectae parallelae sunt, etiam si in eodem plano non sunt, etiam inter se parallelae sunt [prop. IX]. itaque $A\Delta$ rectae ΓZ parallela est et aequalis. et eas iungunt $A\Gamma$, ΔZ; quare etiam $A\Gamma$ rectae ΔZ aequalis et parallela est [I, 33]. et quoniam duo latera AB, $B\Gamma$ duobus ΔE, EZ aequales sunt, et $A\Gamma = \Delta Z$, erit $\angle\, AB\Gamma = \Delta EZ$ [I, 8].

Ergo si duae rectae inter se tangentes duabus rectis inter se tangentibus non positis in eodem plano parallelae sunt, angulos aequales comprehendent; quod erat demonstrandum.

---

22. ὑπό] om. V. 23. ἁπτόμεναι — 25. δεῖξαι] καὶ τὰ ἑξῆς V. 24. ὦσι (ὦσιν F) παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων BFb. ὦσιν P.

ια΄.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου μετεώρου ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον μετέωρον τὸ A, τὸ δὲ δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ A σημείου ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Διήχθω γάρ τις ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖα, ὡς ἔτυχεν, ἡ $B\Gamma$, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ A σημείου ἐπὶ τὴν $B\Gamma$ κάθετος ἡ $A\Delta$. εἰ μὲν οὖν ἡ $A\Delta$ κάθετός ἐστι καὶ ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. εἰ δὲ οὔ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου τῇ $B\Gamma$ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔE, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τὴν ΔE κάθετος ἡ AZ, καὶ διὰ τοῦ Z σημείου τῇ $B\Gamma$ παράλληλος ἤχθω ἡ $H\Theta$.

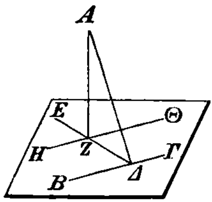
Καὶ ἐπεὶ ἡ $B\Gamma$ ἑκατέρᾳ τῶν ΔA, ΔE πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ἡ $B\Gamma$ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν $E\Delta A$ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. καί ἐστιν αὐτῇ παράλληλος ἡ $H\Theta$· ἐὰν δὲ ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ μία αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· καὶ ἡ $H\Theta$ ἄρα τῷ διὰ τῶν $E\Delta$, ΔA ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν $E\Delta$, ΔA ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ $H\Theta$. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ AZ οὖσα ἐν τῷ διὰ

2. μετέωρον φ (non F), μετεωροτέρου b. 3. δοθέν] P, ὑποκείμενον BFVb, P mg. m. 1. 9. γάρ] om. V. εὐθεῖα] postea ins. F. 10. ΓB F. 12. ἐστι καί] ἐστιν e corr. m. 2 F. ἐπί] om. b. γεγονός] eras. V. 13. τό] supra scr. F. δέ] supra scr. V. 17. ἐπί φ.

XI.

A dato puncto eleuato ad datum planum perpendicularem lineam rectam ducere.

Nam datum punctum eleuatum sit A, et datum planum sit, quod subiacet. oportet igitur a puncto A ad planum subiacens rectam lineam perpendicularem ducere.



ducatur enim in plano subiacenti recta quaelibet $B\Gamma$, et ab A puncto ad $B\Gamma$ perpendicularis ducatur $A\Delta$ [I, 12]. iam si $A\Delta$ etiam ad planum subiacens perpendicularis est, factum est, quod propositum erat. sin minus, a Δ puncto in plano subiacenti ad rectam $B\Gamma$ perpendicularis ducatur ΔE [I, 11], et ab A ad ΔE perpendicularis ducatur AZ [I, 12], et per Z punctum rectae $B\Gamma$ parallela ducatur $H\Theta$ [I, 31].

et quoniam $B\Gamma$ ad utramque ΔA, ΔE perpendicularis est, etiam ad planum rectarum $E\Delta$, ΔA perpendicularis est $B\Gamma$ [prop. IV]. et ei parallela est $H\Theta$. sin duae rectae parallelae sunt, et alterutra ad planum aliquod perpendicularis est, etiam reliqua ad idem planum perpendicularis est [prop. VIII]; itaque etiam $H\Theta$ ad planum rectarum $E\Delta$, ΔA perpendicularis est. quare etiam ad omnes rectas eam tangentes et in plano rectarum $E\Delta$, ΔA positas perpendicularis est $H\Theta$ [def. 3]. uerum AZ eam tangit in plano

21—24 nonnulla in F euan. 23. ἐστιν] comp. Fb, ἐστι P, ἔσται V. 25. ΔA] Δ, ut uidetur, e corr. F. 26. ΘH B. ἐν τῷ] sustulit reparatio in F.

τῶν ΕΔ, ΔΑ ἐπιπέδῳ· ἡ ΗΘ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὴν ΖΑ· ὥστε καὶ ἡ ΖΑ ὀρθή ἐστι πρὸς τὴν ΘΗ. ἔστι δὲ ἡ ΑΖ καὶ πρὸς τὴν ΔΕ ὀρθή· ἡ ΑΖ ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν ΗΘ, ΔΕ ὀρθή ἐστιν. ἐὰν δὲ εὐθεῖα δυσὶν εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας ἐπὶ τῆς τομῆς πρὸς ὀρθὰς ἐπισταθῇ, καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· ἡ ΖΑ ἄρα τῷ διὰ τῶν ΕΔ, ΗΘ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. τὸ δὲ διὰ τῶν ΕΔ, ΗΘ ἐπίπεδόν ἐστι τὸ ὑποκείμενον· ἡ ΑΖ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

Ἀπὸ τοῦ ἄρα δοθέντος σημείου μετεώρου τοῦ Α ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος εὐθεῖα γραμμη ἦκται ἡ ΑΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιβ'.

Τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ δοθέντος σημείου πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν γραμμὴν ἀναστῆσαι.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον, τὶ δὲ πρὸς αὐτῷ σημεῖον τὸ Α· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν γραμμὴν ἀναστῆσαι.

Νενοήσθω τι σημεῖον μετέωρον τὸ Β, καὶ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος ἤχθω ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τοῦ Α σημείου τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΔ.

---

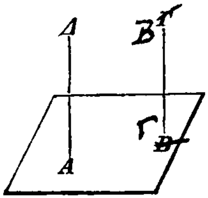
1. *ἐστιν* PV. 2. *ἐστιν* φ. *ΘΗ*] *ΘΚ* φ, *ΗΘ* B, *ΖΗ* P, et b, sed corr. m. 1. 3. *ἔστι — καί*] sustulit reparatio in F. *ἡ*] (prius) *καὶ ἡ* V. *τήν*] m. 2 F. *ΑΖ*] (alt.) e corr. m. 2 F, seq. ras. 1 litt. *ἄρα καί* F. 5. *εὐθείας*] *εὐθεῖαι* φ. *τεμνούσαις*] Pb, F mg.; *ἁπτομέναις* BFV, b mg. *ἀλλήλας*] -*ας* in ras. m. 1 b, *ἀλλήλων* BFV. 6. *δι'*] om. φ. 8. *ἐστιν*] comp.

rectarum $E\varDelta$, $\varDelta A$ posita. itaque $H\Theta$ ad ZA perpendicularis est; quare etiam ZA ad $H\Theta$ perpendicularis est. uerum AZ etiam ad $\varDelta E$ perpendicularis est. AZ igitur ad utramque $H\Theta$, $\varDelta E$ perpendicularis est. sin recta ad duas rectas inter se secantes in sectione perpendicularis erigitur, etiam ad planum earum perpendicularis erit [prop. IV]. itaque ZA ad planum rectarum $E\varDelta$, $H\Theta$ perpendicularis est. uerum planum rectarum $E\varDelta$, $H\Theta$ subiacens est. itaque AZ ad planum subiacens perpendicularis est.

Ergo a dato puncto eleuato A ad planum subiacens perpendicularis ducta est recta linea AZ; quod oportebat fieri.

XII.

Ad datum planum a puncto in eo dato rectam lineam perpendicularem erigere.



Sit datum planum, quod subiacet, et punctum in eo datum sit A. oportet igitur, ab A puncto ad planum subiacens perpendicularem rectam lineam erigere.

supponatur eleuatum aliquod punctum B, et a B ad planum subiacens perpendicularis ducatur $B\Gamma$ [prop. XI], et per A punctum rectae $B\Gamma$ parallela ducatur $A\varDelta$.

Fb, ἐστι PBV. 9. ἐπίπεδόν ἐστι τὸ ὑποκείμενον] ἐπιπέδων πρὸς ὀρθάς ἐστιν φ ZA b. 10. ἔσται V. 11. ἄρα] om. F. δοθέντος ἄρα V. 13. ἡ AZ] om. Fb; add. m. 2 B. ποιῆσαι] δεῖξαι P. 15. ἑαυτῷ P, sed corr. 16. δοθέντι σημεῖον φ (non F). Post γραμμήν del. ἀγαγεῖν m. 1 b. 19. αὐτό V, et P, sed corr. Post prius A ras. 1 litt. F. 22. μετέωρόν τι σημεῖον P. 23. κάθετος] comp. in ras. F. 24. τῇ $B\Gamma$] om. b.

Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσιν αἱ ΑΔ, ΓΒ, ἡ δὲ μία αὐτῶν ἡ ΒΓ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΔ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

Τῷ ἄρα δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου τοῦ Α πρὸς ὀρθὰς ἀνέσταται ἡ ΑΔ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιγ'.

Ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς οὐκ ἀναστήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ Α τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτωσαν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ διήχθω τὸ διὰ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐπίπεδον· τομὴν δὴ ποιήσει διὰ τοῦ Α ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. ποιείτω τὴν ΔΑΕ· αἱ ἄρα ΑΒ, ΑΓ, ΔΑΕ εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΑ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΔΑΕ οὖσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΓΑΕ γωνία ὀρθή ἐστιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΕ ὀρθή ἐστιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΑΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ. καί εἰσιν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ

---

1. εἰσιν αἱ] om. φ (non F). 3. ἐστι FV, comp. b. 4. ἐστι BV, comp. Fb. 5. ἀπό — 7. ποιῆσαι] καὶ τὰ ἑξῆς V. 5. αὐτό b. 6. τοῦ — ἀνέσταται] euan. F. 7. ποιῆσαι] δεῖξαι P. 9. ἀπό — ἐπιπέδῳ] PBFV, b mg. m. 1 (γρ.); in textu b: τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου, et idem in mg. habuit F, sed uestigia sola restant. 10. ἀνα-

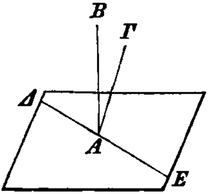
iam quoniam duae rectae parallelae sunt *ΑΔ*, *ΓΒ*, et altera earum *ΒΓ* ad planum subiacens perpendicularis est, etiam reliqua *ΑΔ* ad planum subiacens perpendicularis est [prop. VIII].

Ergo ad datum planum a puncto in eo dato *Α* perpendicularis erecta est *ΑΔ*; quod oportebat fieri.

XIII.

Ab eodem puncto ad idem planum duae rectae perpendiculares ad easdem partes erigi non possunt.

Nam si fieri potest, ab eodem puncto *Α* ad planum subiacens duae rectae *ΑΒ*, *ΑΓ* perpendiculares erigantur ad easdem partes, et ducatur per *ΒΑ*, *ΑΓ* planum. sectionem igitur in plano subiacenti rectam efficiet per *Α* punctum [prop. III]. efficiat *ΔΑΕ*. itaque *ΑΒ*, *ΑΓ*, *ΔΑΕ* rectae in eodem plano positae sunt. et quoniam *ΓΑ* ad planum subiacens perpendicularis est, etiam ad omnes rectas eam tangentes et in plano subiacenti positas rectos angulos efficiet [def. 3]. tangit autem eam *ΔΑΕ* in plano subiacenti posita. itaque ∟ *ΓΑΕ* rectus est. eadem de causa etiam ∟ *ΒΑΕ* rectus est. quare *ΓΑΕ* = *ΒΑΕ*; et in eodem plano positi sunt; quod fieri non potest.



Ergo ab eodem puncto ad idem planum perpen-

σταθήσονται b. 13. αἱ] ins. m. 1 F. 15. *ΒΑ*] *Β* e corr. V. 16. εὐθεῖαν] om. V. ποιείτω] -τω supra add. m. 2 B. 17. Supra τήν add. εὐθ. V. *ΔΑΕ*] corr. ex *ΔΑ* m. 2 V. *ΔΑΕ*] corr. ex *ΔΕ* m. 1 b. 19. ἐστι BV, comp. Fb. 23. *ΓΑΕ*] seq. ras. 1/5 lin. V. ἐστι PV, comp. Fb. 25. ἑνί] P, τῷ ἑνί BFV; τῷ αὐτῷ b, mg. γρ. ἐν ἑνὶ ἐπίπ.; αὐτῷ mg. F., in quo τῷ in ras. est. 26. τῶν αὐτῶν φ (non F).

δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀνασταθήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδ'.

Πρὸς ἃ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστιν, παράλληλα ἔσται τὰ ἐπίπεδα.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΓΔ, ΕΖ ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω, ὅτι παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα.

Εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται. συμπιπτέτωσαν· ποιήσουσι δὴ κοινὴν τομὴν εὐθεῖαν. ποιείτωσαν τὴν ΗΘ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΗΘ τυχὸν σημεῖον τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΚ, ΒΚ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ΕΖ ἐπίπεδον, καὶ πρὸς τὴν ΒΚ ἄρα εὐθεῖαν οὖσαν ἐν τῷ ΕΖ ἐκβληθέντι ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ ΑΒ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΚ γωνία ὀρθή ἐστιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΚ ὀρθή ἐστιν. τριγώνου δὴ τοῦ ΑΒΚ αἱ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΚ, ΒΑΚ δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὰ ΓΔ, ΕΖ ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται· παράλληλα ἄρα ἐστὶ τὰ ΓΔ, ΕΖ ἐπίπεδα.

Πρὸς ἃ ἐπίπεδα ἄρα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστιν, παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

---

1. *ἀναστήσονται* V. 4. *ἐστι* PBV, comp. Fb. 5. *ἔσται*] P, *ἐστι* BFVb. *ἐπίπεδα*] *αὐτὰ μέρη* φ. 6. *ΓΔ*] in ras. V. 7. *ΕΖ*] *ΖΕ* b. 12. *ΒΚ*] corr. ex *ΚΒ* m. 2 V; *ΚΒ* B; *Κ'' Β'* b. 13. *καί*] (alt.) supra scr. comp. m. 1 b. 16. *ἐστι* BV, comp. Fb; item lin. 17. 17. *ΑΒΚ*] corr. ex *ΑΒ* F. *αἱ*] om. V. 18. *εἰσιν*] supra m. 1 P. *ἴσαι εἰσίν* V. 20. *ἐστί*] comp. F.; *εἰσίν* in ras. m. 1 P. 22. *ἃ*] om. φ (non F). *ἐστι* B, et corr. in *ἐστιν* V, comp. Fb. 23. *ἐπίπεδα*] *ι* in ras. m. 1 P. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*] om. V.

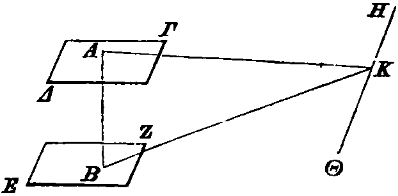
diculares duae rectae ad easdem partes erigi non possunt; quod erat demonstrandum.

XIV.

Ad quae plana eadem recta perpendicularis est, ea parallela erunt.

Recta enim AB ad utrumque planum $\Gamma\Delta$, EZ perpendicularis sit. dico, plana parallela esse.

nam si minus, producta concurrent. concurrant; communem igitur sectionem rectam facient [prop. III]. faciant $H\Theta$, et in $H\Theta$ punctum quodlibet sumatur K, et ducantur AK, BK. et quoniam AB perpendicularis est ad planum EZ, etiam ad rectam BK in plano EZ producto positam perpendicularis est AB. ergo $\angle ABK$ rectus est [def. 3]. eadem de causa etiam $\angle BAK$ rectus est. trianguli igitur ABK duo anguli $ABK + BAK$ duobus rectis aequales sunt; quod fieri non potest [I, 17]. itaque plana $\Gamma\Delta$, EZ non concurrent producta. ergo plana $\Gamma\Delta$, EZ parallela sunt [def. 8].



Ergo ad quae plana eadem recta perpendicularis est, ea parallela sunt; quod erat demonstrandum.

ιε'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων ὦσι μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, παράλληλά ἐστι τὰ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ AB, $B\Gamma$ παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς ΔE, EZ ἔστωσαν μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι· λέγω, ὅτι ἐκβαλλόμενα τὰ διὰ τῶν AB, $B\Gamma$, ΔE, EZ ἐπίπεδα οὐ συμπεσεῖται ἀλλήλοις.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ B σημείου ἐπὶ τὸ διὰ τῶν ΔE, EZ ἐπίπεδον κάθετος ἡ BH καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ H σημεῖον, καὶ διὰ τοῦ H τῇ μὲν $E\Delta$ παράλληλος ἤχθω ἡ $H\Theta$, τῇ δὲ EZ ἡ HK. καὶ ἐπεὶ ἡ BH ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ διὰ τῶν ΔE, EZ ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν ΔE, EZ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἑκατέρα τῶν $H\Theta$, HK οὖσα ἐν τῷ διὰ τῶν ΔE, EZ ἐπιπέδῳ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ $BH\Theta$, BHK γωνιῶν. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ BA τῇ $H\Theta$, αἱ ἄρα ὑπὸ HBA, $BH\Theta$ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ $BH\Theta$· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ HBA· ἡ HB ἄρα τῇ BA πρὸς ὀρθάς ἐστιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ HB καὶ τῇ $B\Gamma$ ἐστι προς ὀρθάς. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ HB δυσὶν εὐθείαις ταῖς BA, $B\Gamma$ τεμνού-

---

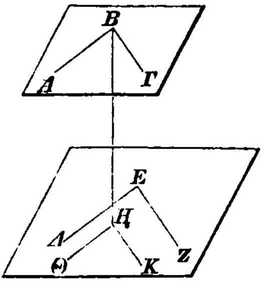
3. Ante ὦσι ras. 3 litt. V; φῶσιν B. 4. ἐστιν P. 6. $B\Gamma$] corr. ex ΓB V; ΓB B. 10. συμ- in ras. V. συμπεσοῦνται b, corr. m. 1. 11. B] e corr. m. 1 b. 13. τοῦ H] τοῦ H σημείου b, σημείου add. m. 2 F. 15. ἐστιν PV, comp. F. 16 αὐτῆς] om. φ. 17. διὰ τῶν] om. P. 19. τῶν $H\Theta$ — 20. ἑκατέρα] mg. m. 1 V. 20. ἐστίν] om. V. $BH\Theta$] Θ in ras. V.

XV.

Si duae rectae inter se tangentes duabus rectis inter se tangentibus parallelae sunt non in eodem plano positae, plana earum inter se parallela sunt.

Nam duae rectae inter se tangentes AB, $B\Gamma$ duabus rectis inter se tangentibus ΔE, EZ parallelae sint non in eodem plano positae. dico, plana rectarum AB, $B\Gamma$ et ΔE, EZ producta inter se non concurrere.

ducatur enim a B puncto ad planum rectarum ΔE, EZ perpendicularis BH [prop. XI] et cum plano in H puncto concurrat, et per H rectae $E\Delta$ parallela



ducatur $H\Theta$, rectae autem EZ parallela HK. et quoniam BH ad planum rectarum ΔE, EZ perpendicularis est, etiam ad omnes rectas eam tangentes et in plano rectarum ΔE, EZ positas rectos angulos efficiet [def. 3]. uerum utraque $H\Theta$, HK eam tangit in plano rectarum ΔE, EZ posita. itaque uterque angulus $BH\Theta$, BHK rectus est. et quoniam BA rectae $H\Theta$ parallela est [prop. IX], anguli $HBA + BH\Theta$ duobus rectis aequales sunt [I, 29]. uerum $\angle BH\Theta$ rectus est; itaque etiam $\angle HBA$ rectus. HB igitur ad BA perpendicularis est. eadem de causa HB etiam ad $B\Gamma$ perpendicularis est. iam quoniam recta HB ad duas rectas inter se secantes BA, $B\Gamma$ perpendicularis

22. HBA] H ins. V. 23. ἡ] (alt.) supra scr. V. 25. HB] in ras. V, BH Bb. καί] in ras. V. 26. HB] P, BH BFVb. εὐθείαις] ὀρθαῖς B, supra scr. εὐθείαις m. 2.

σαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν, ἡ ΗΒ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν ΒΑ, ΒΓ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. [διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ΒΗ καὶ τῷ διὰ τῶν ΗΘ, ΗΚ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. τὸ δὲ διὰ τῶν ΗΘ, ΗΚ ἐπίπεδόν ἐστι τὸ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ· ἡ ΒΗ ἄρα τῷ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἐπιπέδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. ἐδείχθη δὲ ἡ ΗΒ καὶ τῷ διὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς]. πρὸς ἃ δὲ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστιν, παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα· παράλληλον ἄρα ἐστὶ τὸ διὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐπίπεδον τῷ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων ὦσι μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, παράλληλά ἐστι τὰ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιϛʹ.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα παράλληλα ὑπὸ ἐπιπέδου τινὸς τέμνηται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσιν.

Δύο γὰρ ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΑΒ, ΓΔ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΕΖΗΘ τεμνέσθω, κοιναὶ δὲ αὐτῶν τομαὶ ἔστωσαν αἱ ΕΖ, ΗΘ· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΕΖ τῇ ΗΘ.

Εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμεναι αἱ ΕΖ, ΗΘ ἤτοι ἐπὶ

---

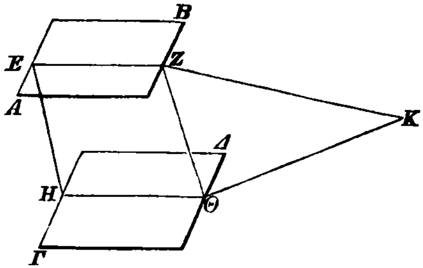
2. ἐστι BVφ, comp. b. 3. διὰ τά — 8. ὀρθάς] mg. m. 2 B, punctis del. m. 2 V. 4. ἐστι BV, comp. Fb. 5. ἐστιν P. Post EZ del. ἐπί m. 1 P. 7. ΒΓ] ΑΓ BV. Ad lin. 3—8 mg. b m. 1: γρ. ἔστι δὲ καὶ τῷ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἐπιπέδῳ ὀρθή· ἡ ΒΗ ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν διὰ τῶν ΑΒΓ, ΔΕΖ ἐπιπέδων ὀρθή ἐστι; idem in textu BV (τῷ corr. ex τό, Γ in ras. V; ἐστιν B), mg. m. 1 F. 9. ἐστι BV, comp. Fb. 12. ὦσιν B. ἐπιπέδῳ οὖσαι B. 13. ἐστι τά] τά seq. lac. φ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. V. 17. παράλληλοι] ἔστωσαν φ. 18. εἰσι

erecta est, HB etiam ad planum rectarum BA, $B\Gamma$ perpendicularis est [prop. IV].[1]) ad quae autem plana eadem recta perpendicularis est, ea parallela sunt [prop. XIV]. itaque planum rectarum AB, $B\Gamma$ parallelum est plano rectarum ΔE, EZ.

Ergo si duae rectae inter se tangentes duabus rectis inter se tangentibus parallelae sunt non in eodem plano positae, plana earum parallela sunt; quod erat demonstrandum.

XVI.

Si duo plana parallela plano aliquo secantur, communes eorum sectiones parallelae sunt.



Nam duo plana parallela AB, $\Gamma\Delta$ plano $EZH\Theta$ secentur, communes autem eorum sectiones sint EZ, $H\Theta$. dico, EZ rectae $H\Theta$ parallelam esse.

nam si minus, EZ, $H\Theta$ productae concurrent aut

1) Uerba διὰ τά lin. 3 — ὀρθάς lin. 8 ab Euclide profecta esse nequeunt, quippe quae per ambages demonstrent, BH ad planum rectarum ΔE, EZ perpendicularem esse, id quod e praeparatione patet (p. 40, 11), ad quam Euclides tacite respicit contra morem suum. inde factum est, ut uerba illa interpolarentur et id quidem iam ante Theonem. scriptura codicis B per se bona sine dubio e coniectura satis recenti orta est.

Vb, comp. F. 19. $\Gamma\Delta''$, AB' F. 20. τετμήσθω b, corr. m. 1. 23. αἱ] συμπεσοῦνται αἱ V.

τὰ Ζ, Θ μέρη ἢ ἐπὶ τὰ Ε, Η συμπεσοῦνται. ἐκβεβλήσθωσαν ὡς ἐπὶ τὰ Ζ, Θ μέρη καὶ συμπιπτέτωσαν πρότερον κατὰ τὸ Κ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΕΖΚ ἐν τῷ ΑΒ ἐστιν ἐπιπέδῳ, καὶ πάντα ἄρα τὰ ἐπὶ τῆς ΕΖΚ σημεῖα ἐν τῷ ΑΒ ἐστιν ἐπιπέδῳ. ἓν δὲ τῶν ἐπὶ τῆς ΕΖΚ εὐθείας σημείων ἐστὶ τὸ Κ· τὸ Κ ἄρα ἐν τῷ ΑΒ ἐστιν ἐπιπέδῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὸ Κ καὶ ἐν τῷ ΓΔ ἐστιν ἐπιπέδῳ· τὰ ΑΒ, ΓΔ ἄρα ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται. οὐ συμπίπτουσι δὲ διὰ τὸ παράλληλα ὑποκεῖσθαι· οὐκ ἄρα αἱ ΕΖ, ΗΘ εὐθεῖαι ἐκβαλλόμεναι ἐπὶ τὰ Ζ, Θ μέρη συμπεσοῦνται. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι αἱ ΕΖ, ΗΘ εὐθεῖαι οὐδὲ ἐπὶ τὰ Ε, Η μέρη ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. αἱ δὲ ἐπὶ μηδέτερα τὰ μέρη συμπίπτουσαι παράλληλοί εἰσιν. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΗΘ.

Ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα παράλληλα ὑπὸ ἐπιπέδου τινὸς τέμνηται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοι εἰσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιζ'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τέμνωνται, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμηθήσονται.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ΗΘ, ΚΛ, ΜΝ τεμνέσθωσαν κατὰ τὰ Α, Ε, Β, Γ, Ζ, Δ σημεῖα· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ.

---

1. τά] (alt.) supra scr. m. 2 B. συμπεσοῦνται] om. V. ἐκβεβλήσθω in ras. V. 2. ὡς] P, F m. 1; πρότερον ὡς BVb, F m. 2. 3. πρότερον] om. BFV. Post καί spatium 6 litt. reliq. φ. τῷ ΑΒ] ἐνί b, mg. γρ. ἐν τῷ ΑΒ ἐστιν. 4. ἐπιπέδῳ

ad Z, Θ partes aut ad E, H. producantur ad Z, Θ partes et prius concurrant in K. et quoniam EZK in plano AB posita est, etiam omnia rectae EZK puncta in plano AB posita sunt [prop. I]. ex punctis autem rectae EZK unum est K. itaque K in plano AB positum est. eadem de causa K etiam in plano $\Gamma\Delta$ positum est. quare plana AB, $\Gamma\Delta$ producta concurrent. uerum non concurrunt, quia parallela esse supponuntur. itaque rectae EZ, $H\Theta$ productae ad Z, Θ partes non concurrent. iam similiter demonstrabimus, rectas EZ, $H\Theta$ ne ad E, H quidem partes productas concurrere. quae autem ad neutras partes concurrunt, parallelae sunt. itaque EZ rectae $H\Theta$ parallela est.

Ergo si duo plana parallela plano aliquo secantur, communes eorum sectiones parallelae sunt; quod erat demonstrandum.

XVII.

Si duae rectae planis parallelis secantur, secundum eandem rationem secabuntur.

Nam duae rectae AB, $\Gamma\Delta$ planis parallelis $H\Theta$, $K\Lambda$, MN in punctis A, E, B et Γ, Z, Δ secentur. dico, esse $AE : EB = \Gamma Z : Z\Delta$.

ἐστίν F. *καί* — 5. *ἐπιπέδῳ*] mg. F (euan.). 5. *ἐπιπέδῳ ἐστίν* BV, F?; *ἐπιπέδῳ εἰσίν* b. *τῶν*] *τῷ* B, et V, sed corr. m. rec. 6. *σημείῳ* Bφ, et V (corr. m. rec.); *σημεῖον* b. 12. *αἱ*] *καὶ αἱ* BV. *οὐδ'* P. 13. *μέρη*] supra scr. m. 1 F. *ἐκβαλλόμεναι οὐ* b. *ἐπί*] *ἐπὶ τά* Vφ. 14. *τά*] om. BV. *εἰσι* Vb, comp. F. 15. *ἡ*] post ins. V. *τῇ*] om. b. 16. *παράλληλα* — 18. *δεῖξαι*]: ∾ V. 17. *τέτμηται* B. 21. *τέμνονται* P, corr. m. 1. 24. *τεμνέτωσαν* b. 25. A] insert. postea V. B] in ras. V. Δ, Z B. 26. $Z\Delta$] e corr. V, in ras. m. 1 P; ΔZ B.

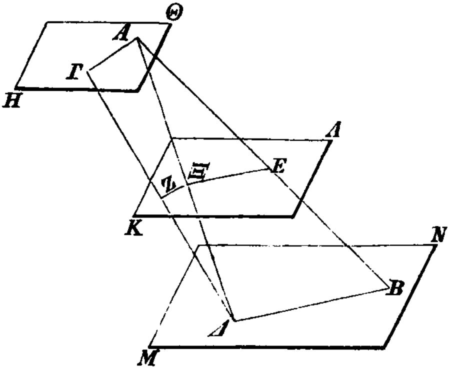
Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ, ΒΔ, ΑΔ, καὶ συμβαλλέτω ἡ ΑΔ τῷ ΚΛ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ξ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΞ, ΞΖ. καὶ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΚΛ, ΜΝ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΕΒΔΞ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ ΕΞ, ΒΔ παράλληλοί εἰσιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΗΘ, ΚΛ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΑΞΖΓ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ ΑΓ, ΞΖ παράλληλοί εἰσιν. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΒΔ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΒΔ εὐθεῖα ἦκται ἡ ΕΞ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ, οὕτως ἡ ΑΞ πρὸς ΞΔ. πάλιν ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΔΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΑΓ εὐθεῖα ἦκται ἡ ΞΖ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΑΞ πρὸς ΞΔ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς ΖΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΑΞ πρὸς ΞΔ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς ΖΔ.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τέμνωνται, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμηθήσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

---

2. τῷ] τό φ. 3. ΞΖ] Ξ″ Ζʹ b. ἐπίπεδοι φ. 4. παράλληλα] = οι φ. ΕΒΔΞ] Ξ in ras. V, corr. ex Z m. 1 F. 5. ΕΞ, ΒΔ] in ras. V, Ξ eras. B; ΕΖ, ΒΔ b. 6. εἰσι Vb, comp. F. διά — 9. εἰσιν] mg. V. 7. ἐπιπέδου τοῦ] corr. ex ἐπιπέδου P. m. 2. ΑΞΖΓ] Ξ in ras. V. 8. ΞΖ] corr. ex Z m. 2 B. 9. εἰσι b, comp. F. μία φ. 10. τήν] τῇ b. εὐθεῖαν B, sed corr. 11. ἐστίν] om. V. τὴν ΕΒ V. 12. ΑΔ″ Γʹ b. 13. τήν] τῶν φ (non F). εὐθεῖαν B, sed corr. ἐστιν] ἄρα FV. 14. τὴν ΞΔ BF. ΓΖ] Z in ras. m. rec. V. τὴν ΖΔ BFVb. ἐδείχθη — 15. ΕΒ] mg. m. 2 B. 15. τὴν ΞΔ FVb. τὴν ΕΒ V. 16. καὶ ὡς ἄρα] ἔστιν ἄρα καὶ ὡς b, ὃ in spatio plur. litt. φ. ΑΕ] Α in ras. m. 2 V. τὴν ΕΒ BFb. τὴν ΖΔ B. 17. ὑπό — 19. δεῖξαι] καὶ τὰ ἑξῆς V. 18. τέμνωνται, εἰς] στερεῶν seq. lac. φ. τμήσονται B, corr. m. 2.

ducantur enim $A\Gamma$, $B\Delta$, $A\Delta$, et $A\Delta$ cum plano $K\Lambda$ concurrat in puncto Ξ, et ducantur $E\Xi$, ΞZ. et quoniam duo plana parallela $K\Lambda$, MN plano $EB\Delta\Xi$ secantur, communes eorum sectiones $E\Xi$, $B\Delta$ parallelae sunt [prop. XVI]. eadem de causa, quoniam



duo plana parallela $H\Theta$, $K\Lambda$ plano $A\Xi Z\Gamma$ secantur, communes eorum sectiones $A\Gamma$, ΞZ parallelae sunt. et quoniam in triangulo $AB\Delta$ uni laterum $B\Delta$ parallela ducta est recta $E\Xi$, erit $AE : EB = A\Xi : \Xi\Delta$ [VI, 2]. rursus quoniam in triangulo $A\Delta\Gamma$ uni laterum $A\Gamma$ parallela ducta est recta ΞZ, erit $A\Xi : \Xi\Delta = \Gamma Z : Z\Delta$. sed demonstratum est, esse etiam $A\Xi : \Xi\Delta = AE : EB$. quare etiam $AE : EB = \Gamma Z : Z\Delta$.

Ergo si duae rectae planis parallelis secantur, secundum eandem rationem secabuntur; quod erat demonstrandum.

ιη'.

Ἐὰν εὐθεῖα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ *ΑΒ* τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ πάντα τὰ διὰ τῆς *ΑΒ* ἐπίπεδα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ διὰ τῆς *ΑΒ* ἐπίπεδον τὸ *ΔΕ*, καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ τοῦ *ΔΕ* ἐπιπέδου καὶ τοῦ ὑποκειμένου ἡ *ΓΕ*, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς *ΓΕ* τυχὸν σημεῖον τὸ *Ζ*, καὶ ἀπὸ τοῦ *Ζ* τῇ *ΓΕ* πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἐν τῷ *ΔΕ* ἐπιπέδῳ ἡ *ΖΗ*. καὶ ἐπεὶ ἡ *ΑΒ* πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ *ΑΒ*· ὥστε καὶ πρὸς τὴν *ΓΕ* ὀρθή ἐστιν· ἡ ἄρα ὑπὸ *ΑΒΖ* γωνία ὀρθή ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ *ΗΖΒ* ὀρθή· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ *ΑΒ* τῇ *ΖΗ*. ἡ δὲ *ΑΒ* τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· καὶ ἡ *ΖΗ* ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. καὶ ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστιν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσιν. καὶ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων τῇ *ΓΕ* ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ *ΔΕ* πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσα ἡ *ΖΗ* ἐδείχθη

---

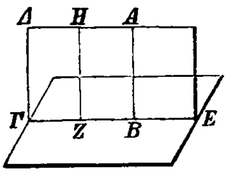
4. *ἔσται*] corr. ex *ἐστιν* V. 5. *εὐθεῖα* — 7. *ἐστιν*] mg. m. 1 V. 6. *τῆς*] om. φ (non F). 13. *ἐστι* PBFV, comp. b. 14. *οὖσα* P. 16. *ἐστι* V. *γωνίαν* φ. 17. *ΗΖΒ*] in ras. V. 18. *ἐστίν*] om. V. *τῷ*] *τῷ αὐτῷ* F. 19. *ἐστι* B. *καὶ ἡ* — 20. *ἐστιν*] om. b, mg. V. 19. *ΗΖ* P. 20. *ἐστι* PBV, comp. F. *καί*] *καὶ ἐπεί* BV. 21. *πρὸς ἐπίπεδον*] supra m. 2 V. 23. *ἐπιπέδῳ*] *τῶν ἐπιπέδων* V. *ὦσι* Vb.

XVIII.

Si recta ad planum aliquod perpendicularis est, etiam omnia plana, quae per eam ducuntur, ad idem planum perpendicularia erunt.

Nam recta AB ad planum subiacens perpendicularis sit. dico, etiam omnia plana, quae per AB ducantur, ad planum subiacens perpendicularia esse.

ducatur enim per AB planum ΔE, et communis sectio plani ΔE et subiacentis sit ΓE, et in ΓE sumatur punctum aliquod Z, et ab Z ad ΓE perpendicularis in plano ΔE ducatur ZH.



et quoniam AB ad planum subiacens perpendicularis est, etiam ad omnes rectas eam tangentes et in plano subiacenti positas perpendicularis est AB [def. 3]. quare etiam ad ΓE perpendicularis est. itaque ∟ ABZ rectus est. uerum etiam ∟ HZB rectus est. itaque AB rectae ZH parallela est [I, 28]. AB autem ad planum subiacens perpendicularis est. itaque etiam HZ ad planum subiacens perpendicularis est [prop. VIII]. et planum ad planum perpendiculare est, si rectae in altero plano ad communem planorum sectionem perpendiculares ductae ad reliquum planum perpendiculares sunt [def. 4]. et demonstratum est, ZH in altero plano ΔE ad communem planorum sectionem ΓE perpendicularem ductam ad planum subiacens perpen-

XVIII. Eutocius in Apollon. p. 23.

24. τῶν ἐπιπέδων τομῇ b. τομῇ] τομῇ ἄρα φ. τῇ] -ῃ e corr. V.

τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς· τὸ ἄρα ΔΕ ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ πάντα τὰ διὰ τῆς ΑΒ ἐπίπεδα ὀρθὰ τυγχανοντα πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ πάντα τὰ δι᾿ αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιθ΄.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Δύο γὰρ ἐπίπεδα τὰ ΑΒ, ΒΓ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ ΒΔ· λέγω, ὅτι ἡ ΒΔ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

Μὴ γάρ, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐν μὲν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ τῇ ΑΔ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΕ, ἐν δὲ τῷ ΒΓ ἐπιπέδῳ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΖ. καὶ ἐπεὶ τὸ ΑΒ ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον, καὶ τῇ κοινῇ αὐτῶν τομῇ τῇ ΑΔ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ ἦκται ἡ ΔΕ, ἡ ΔΕ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ὁμοίως δὴ

---

2. ἐστιν P. Post ὑποκείμενον add. ἐπίπεδον b et mg. m. rec. V. 5. καί — 7. δεῖξαι]: ~ V. 6. τὰ δι᾿ αὐτῆς ἐπι- euan. F. 9. τέμνοντα] στερεοντα φ (non F). ἐπιπέδῳ τινί] om. F, sed uidetur fuisse in mg. 10. τομή] in ras. m. 1 P. 12. τῷ] bis P; corr. m. 1. 15. ἐστι BV, comp. F. 16. ἀπό] ὑπό P. 17. τῇ] e corr. b. πρός] om. φ. ΔΕ] Δ e corr. V. 18. δέ] om. P. ΓΔ] ΔΓ b. ΔΖ] Ζ in ras. V. 19. ἐστι] om. φ (non F). 20. καί] ἐπίπεδον, καί b. ΑΔ] Α in ras. FV.

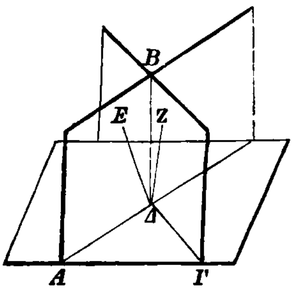
dicularem esse. ergo $\varDelta E$ planum ad subiacens perpendiculare est. iam similiter demonstrabimus, etiam omnia plana, quae per AB ducantur, ad planum subiacens perpendicularia esse.

Ergo si recta ad planum aliquod perpendicularis est, etiam omnia plana, quae per eam ducuntur, ad idem planum perpendicularia erunt; quod erat demonstrandum.

XIX.

Si duo plana inter se secantia ad planum aliquod perpendicularia sunt, etiam communis eorum sectio ad idem planum perpendicularis erit.

Nam duo plana AB, $B\Gamma$ ad planum subiacens perpendicularia sint, et communis eorum sectio sit $B\varDelta$. dico, $B\varDelta$ ad planum subiacens perpendicularem esse.



Ne sit enim, et a $\varDelta$ puncto in plano AB ad rectam $A\varDelta$ perpendicularis ducatur $\varDelta E$, in $B\Gamma$ autem plano ad $\Gamma\varDelta$ perpendicularis $\varDelta Z$.[1]) et quoniam AB planum ad subiacens perpendiculare est, et ad communem eorum sectionem $A\varDelta$ in plano AB perpendicularis ducta est $\varDelta E$, $\varDelta E$ ad planum subiacens perpendicularis est [def. 4]. similiter demonstrabimus,

1) Nam si communis planorum sectio ad planum subiacens perpendicularis non est, ad rectas $\varDelta A$, $\varDelta\Gamma$ rectos angulos non efficiet. ergo et in plano AB et in $B\Gamma$ locus est perpendiculari ad $A\varDelta$ et ad $\varDelta\Gamma$ in $\varDelta$ erectae.

δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΔΖ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἄρα σημείου τοῦ Δ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀνεσταμέναι εἰσὶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἀνασταθήσεται πρὸς ὀρθὰς πλὴν τῆς ΔΒ κοινῆς τομῆς τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐπιπέδων.

Ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κ'.

Ἐὰν στερεὰ γωνία ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχηται, δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Στερεὰ γὰρ γωνία ἡ πρὸς τῷ Α ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ περιεχέσθω· λέγω, ὅτι τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ γωνιῶν δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Εἰ μὲν οὖν αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, φανερόν, ὅτι δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν. εἰ δὲ οὔ, ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΔΑΒ γωνίᾳ ἐν τῷ

---

1. ὅτι καὶ ἡ] om. φ (non F). ΔΖ] Δ''Ζ' b. 4. ἐστίν] om. V. 6. τῆς] e corr. m. 1 b. 8. ἐπίπεδα — 10. δεῖξαι] :∾ V. 9. ᾖ, καί] euan. F. 14. μείζους Vφ. πάντῃ seq. ras. 1 litt. P. 15. τῶι corr. in τό m. 1 b. 16. περιεχέσθω — 17. γωνιῶν] mg. m. 2 V, in text. eras. γωνιῶν. 16. ΓΔΑ b. 20. ΓΑΔ] Δ e corr. V. 21. ἴσαι] εἰσι ἴσαι

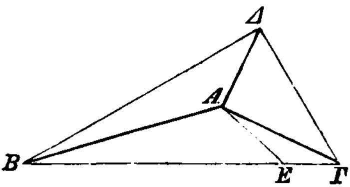
etiam ΔZ perpendicularem esse ad planum subiacens. itaque ab eodem puncto Δ ad planum subiacens duae rectae ad easdem partes perpendiculares erectae sunt; quod fieri non potest [prop. XIII]. itaque a Δ puncto nulla recta ad planum subiacens perpendicularis erigetur praeter ΔB, quae communis est sectio planorum AB, $B\Gamma$.

Ergo si duo plana inter se secantia ad planum aliquod perpendicularia sunt, etiam communis eorum sectio ad idem planum perpendicularis erit; quod erat demonstrandum.

XX.

Si angulus solidus tribus angulis planis continetur, duo quilibet reliquo maiores erunt quoquo modo coniuncti.

Nam angulus solidus, qui ad A positus est, tribus angulis planis $BA\Gamma$, $\Gamma A\Delta$, ΔAB contineatur. dico, duos quoslibet angulorum $BA\Gamma$, $\Gamma A\Delta$, ΔAB reliquo maiores esse quoquo modo coniunctos.



iam si anguli $BA\Gamma$, $\Gamma A\Delta$, ΔAB inter se aequales sunt, adparet, duos quoslibet reliquo maiores esse. si minus, maior[1]) sit $\angle BA\Gamma$, et ad rectam AB et punctum eius A in plano rectarum BA, $A\Gamma$ angulo ΔAB

1) Sc. angulo ΔAB. neque enim necesse est, omnium eum maximum esse.

V. εἰσίν] om. V. 22. εἰσι V, comp. F. 24. ΔAB] $\Delta A\Gamma$ P. ἐν] om. B, supra scr. V.

διὰ τῶν ΒΑΓ ἐπιπέδῳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΕ, καὶ κείσθω τῇ ΑΔ ἴση ἡ ΑΕ, καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου διαχθεῖσα ἡ ΒΕΓ τεμνέτω τὰς ΑΒ, ΑΓ εὐθείας κατὰ τὰ Β, Γ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΒ, ΔΓ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΒ, δύο δυσὶν ἴσαι· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΔΒ βάσει τῇ ΒΕ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΒΔ, ΔΓ τῆς ΒΓ μείζονές εἰσιν, ὧν ἡ ΔΒ τῇ ΒΕ ἐδείχθη ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΓ λοιπῆς τῆς ΕΓ μείζων ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ, καὶ βάσις ἡ ΔΓ βάσεως τῆς ΕΓ μείζων ἐστίν, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΕΑΓ μείζων ἐστίν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΑΒ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ ἴση· αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΑΒ, ΔΑΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ μείζονές εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ σύνδυο λαμβανόμεναι τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν.

Ἐὰν ἄρα στερεὰ γωνία ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχηται, δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κα'.

Ἅπασα στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων [ἢ] τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται.

Ἔστω στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ Α περιεχομένη ὑπὸ ἐπιπέδων γωνιῶν τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ· λέγω, ὅτι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν.

---

1. *ἐπιπέδῳ*] in ras. m. 1 P. *ἡ*] supra scr. V, ut lin. 2. *κείσθω τῇ*] *διὰ τοῦ Ε ση* φ (non F). Hinc plerasque ineptias manus φ omisi, maxime ubi aut certa uestigia ueri supererant, aut certe nulla erat causa de scriptura cod. F dubitandi.

aequalis construatur $\angle BAE$, et ponatur $AE = A\Delta$, et $BE\Gamma$ per punctum E ducta rectas AB, $A\Gamma$ secet in B, Γ punctis, et ducantur ΔB, $\Delta\Gamma$. et quoniam $\Delta A = AE$, et AB communis est, duo latera duobus aequalia sunt; et $\angle \Delta AB = BAE$. itaque $\Delta B = BE$ [I, 4]. et quoniam $B\Delta + \Delta\Gamma > B\Gamma$ [I, 20], et demonstratum est, esse $\Delta B = BE$, erit $\Delta\Gamma > E\Gamma$. et quoniam $\Delta A = AE$, et $A\Gamma$ communis est, et $\Delta\Gamma > E\Gamma$, erit $\angle \Delta A\Gamma > EA\Gamma$ [I, 25]. et demonstratum est, esse etiam $\angle \Delta AB = BAE$. itaque $\Delta AB + \Delta A\Gamma > BA\Gamma$. eodem modo demonstrabimus, etiam reliquos angulos duo simul coniunctos reliquo maiores esse.

Ergo si angulus solidus tribus angulis planis continetur, duo quilibet reliquo maiores sunt quoquo modo coniuncti; quod erat demonstrandum.

XXI.

Omnis angulus solidus planis angulis minoribus, quam sunt quattuor anguli recti, continentur.

Sit angulus solidus, qui ad A positus est, comprehensus planis angulis $BA\Gamma$, $\Gamma A\Delta$, ΔAB. dico, esse $BA\Gamma + \Gamma A\Delta + \Delta AB$ minores quattuor rectis.

---

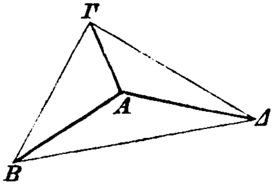
3. Γ] corr. ex E m. 1 b. 4. ΔB] $B\Delta$ F. 6. Post *ἴσαι* ras. 4 litt. hab. V. 7. *ἐστιν ἴση*] *ἴση* seq. spatio uacuo 3 litt. V. 8. $B\Delta$] $B''\Delta'$ b, ΔB BV. *τῇ* V? 10. *ἐστίν*] (prius) *ἐστί* PBV, comp. Fb. AE] in ras. V. 11. $\Delta\Gamma$] corr. ex ΔE B. 12. *ἐστί* PBV, comp. F. Dein add. *καί* V. $\Delta A\Gamma$] $\Delta B\Gamma$ φ. 14. *τῆς*] bis P, corr. m. 1; *τοῖς* F. 17. *ὑπό* — 19. *δεῖξαι*] *καὶ τὰ ἑξῆς* V. 21. *ὑπό*] corr. ex *ἀπό* P. *ἤ*] om. P. 22. *ἐπιπέδων ὀρθῶν γωνιῶν* V. 23. *τῷ*] corr. in *τό* m. 1 b. 24. *ὑπό* — 25. *αἱ*] mg. m. 2 B. 24. $\Gamma A\Delta$] $\Delta A\Gamma$ φ et in ras. V. 25. *ὑπό*] eras. B; m. 2 V. $\Gamma A\Delta$] F m. 1, $\Delta A\Gamma$ F m. 2 et V in ras. 26. *εἰσι* V.

Εἰλήφθω γὰρ ἐφ' ἑκάστης τῶν ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ τυχόντα σημεῖα τὰ Β, Γ, Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΓ, ΓΔ, ΔΒ. καὶ ἐπεὶ στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ Β ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται τῶν ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΓΒΔ, δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ τῆς ὑπὸ ΓΒΔ μείζονές εἰσιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ μὲν ὑπὸ ΒΓΑ, ΑΓΔ τῆς ὑπὸ ΒΓΔ μείζονές εἰσιν, αἱ δὲ ὑπὸ ΓΔΑ, ΑΔΒ τῆς ὑπὸ ΓΔΒ μείζονές εἰσιν· αἱ ἓξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΑΔΒ τριῶν τῶν ὑπὸ ΓΒΔ, ΒΓΔ, ΓΔΒ μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ αἱ τρεῖς αἱ ὑπὸ ΓΒΔ, ΒΔΓ, ΒΓΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἓξ ἄρα αἱ υπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΑΔΒ δύο ὀρθῶν μείζονές εἰσιν. καὶ ἐπεὶ ἑκάστου τῶν ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΒ τριγώνων αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, αἱ ἄρα τῶν τριῶν τριγώνων ἐννέα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΓΒ, ΒΑΓ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΓΑΔ, ΑΔΒ, ΔΒΑ, ΒΑΔ ἓξ ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ὧν αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΑΔΒ, ΔΒΑ ἓξ γωνίαι δύο ὀρθῶν εἰσι μείζονες· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ τρεῖς [γωνίαι] περιέχουσαι τὴν στερεὰν γωνίαν τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν.

---

2. Γ] supra scr. m. 1 V. 3. ΔΒ] ΑΒ φ. 4. Ante *τριῶν* ins. *γάρ* m. 2 V. 5. ΓΒΔ] in ras. m. 1 P. 6. *ὑπό*] (alt.) om. F. *εἰσι* BV, comp. Fb. 7. ΒΓΑ] supra Α scr. Δ m. 1 b. 8. ΒΓΔ] ΓΒΔ F, corr. m. 2 (sed euan.). *εἰσι* BVb, comp. F. *αἱ δέ*] *καὶ ἔτι αἱ* BFVb. 10. ΑΒΔ] ΒΔ in ras. B, item litt. seq. ΓΔΑ] in ras. V. 11. ΒΓΔ] ΓΔ in ras. V. ΓΔΒ] in ras. V. *ἀλλ'* b. 12. ΒΓΔ] Β et Δ in ras. V. *εἰσί* V, comp. F. 13. ΑΒΔ] m. rec. V. ΓΔΑ] in ras. V; ΑΔΓ e corr. m. 2 B. 14. *δύο*] ΑΒΔ *δύο* V. *εἰσι* BVb, comp. F. 15. *αἱ τρεῖς τριγώνων* F, corr. m. 1. *τριγώνου* P, et b, sed corr. m. 1. 17. ΓΒΑ] ΓΒΔ F, ΒΑ e corr. V. ΑΓΒ] ΑΒΓ P. 18. ΓΔΑ]

sumatur enim in singulis rectis AB, $A\Gamma$, $A\Delta$ quaelibet puncta B, Γ, Δ, et ducantur $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔB.



et quoniam angulus solidus, qui ad B positus est, tribus angulis planis continetur ΓBA, $AB\Delta$, $\Gamma B\Delta$, duo quilibet reliquo maiores sunt [prop. XX]. itaque $\Gamma BA + AB\Delta > \Gamma B\Delta$. eadem de causa erunt etiam $B\Gamma A + A\Gamma\Delta > B\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta A + A\Delta B > \Gamma\Delta B$.

itaque $\Gamma BA + AB\Delta + B\Gamma A + A\Gamma\Delta + \Gamma\Delta A + A\Delta B > \Gamma B\Delta + B\Gamma\Delta + \Gamma\Delta B$. uerum

$$\Gamma B\Delta + B\Delta\Gamma + B\Gamma\Delta$$

duobus rectis aequales sunt [I, 32]. itaque sex anguli

$$\Gamma BA + AB\Delta + B\Gamma A + A\Gamma\Delta + \Gamma\Delta A + A\Delta B$$

duobus rectis maiores sunt. et quoniam singulorum triangulorum $AB\Gamma$, $A\Gamma\Delta$, $A\Delta B$ tres anguli duobus rectis aequales sunt, nouem anguli trium triangulorum $\Gamma BA + A\Gamma B + BA\Gamma + A\Gamma\Delta + \Gamma\Delta A + \Gamma A\Delta + A\Delta B + \Delta BA + BA\Delta$ sex rectis aequales sunt, quorum

$$AB\Gamma + B\Gamma A + A\Gamma\Delta + \Gamma\Delta A + A\Delta B + \Delta BA$$

duobus rectis maiores sunt. itaque reliqui

$$BA\Gamma + \Gamma A\Delta + \Delta AB,$$

qui angulum solidum continent, quattuor rectis minores sunt.

in ras. V; $\Delta A\Gamma$ B. $\Gamma A\Delta$] $A\Delta$ in ras. V; $\Gamma\Delta A$ B. $BA\Delta$] $B\Delta A$ P. 20. μείζονές εἰσι(ν) BV. 21. γωνίαι] om. P. 22. εἰσι V, comp. F. Seq. in V πάντῃ, sed del.

Ἅπασα ἄρα στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων [ἢ] τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κβ΄.

Ἐὰν ὦσι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, περιέχωσι δὲ αὐτὰς ἴσαι εὐθεῖαι, δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς ἴσας εὐθείας τρίγωνον συστήσασθαι.

Ἔστωσαν τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ τῆς ὑπὸ ΗΘΚ, αἱ δὲ ὑπὸ ΔΕΖ, ΗΘΚ τῆς ὑπὸ ΑΒΓ, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ ΗΘΚ, ΑΒΓ τῆς ὑπὸ ΔΕΖ, καὶ ἔστωσαν ἴσαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ εὐθεῖαι, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ· λέγω, ὅτι δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι, τουτέστιν ὅτι τῶν ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν.

Εἰ μὲν οὖν αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, φανερόν, ὅτι καὶ τῶν ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ ἴσων γινομένων δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι. εἰ δὲ οὔ,

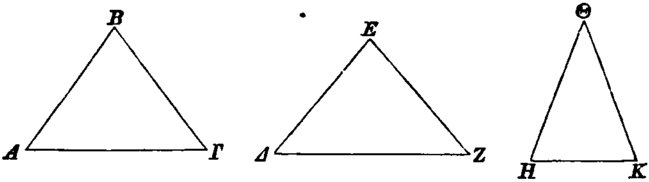
---

1. *ἄρα*] supra scr. m. 1 P. *ὑπό* — 3. *δεῖξαι*]: ∼ V. 1. *ἢ*] postea add. m. 1 P. 7. *περιέχωσιν* P, *περιέχουσι* F. 8. Supra *ἴσας* add. *γωνίας* m. 2 B, del. m. rec. *εὐθείας*] *γωνίας εὐθειῶν* V. 11. *εἰσι*] *ἔστωσαν* BFV et b (*εσ-* in ras.). 15. *εὐθεῖαι*] m. rec. V. 17. *συνστήσασθαι* P, corr. m. 2. 18. *ὅτι*] corr. ex *τό* m. 2 F. 19. *μείζους* V. *εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι* Theon (BFVb). 21. *εἰσι ἴσαι* V. *εἰσίν*] *εἰσί* PBb, comp. F.; om. V. 22. *γιγνομένων* F, *γενομένων* b.

Ergo omnis[1]) angulus solidus planis angulis minoribus, quam sunt quattuor recti, continetur; quod erat demonstrandum.

XXII.

Si tres anguli plani sunt, quorum duo reliquo maiores sunt quoquo modo coniuncti, et eos aequales



continent rectae, fieri potest, ut ex rectis aequales rectas coniungentibus triangulus construatur.

Sint tres anguli plani $AB\Gamma$, ΔEZ, $H\Theta K$, quorum duo reliquo maiores sunt quoquo modo coniuncti,

$$AB\Gamma + \Delta EZ > H\Theta K,\ \Delta EZ + H\Theta K > AB\Gamma,$$
$$H\Theta K + AB\Gamma > \Delta EZ,$$

et sit $AB = B\Gamma = \Delta E = EZ = H\Theta = \Theta K$, et ducantur $A\Gamma$, ΔZ, HK. dico, fieri posse, ut ex rectis aequalibus rectis $A\Gamma$, ΔZ, HK triangulus construatur, hoc est, rectarum $A\Gamma$, ΔZ, HK duas quaslibet reliqua maiores esse.

iam si anguli $AB\Gamma$, ΔEZ, $H\Theta K$ inter se aequales sunt, manifestum est, cum etiam $A\Gamma$, ΔZ, HK aequales sint [I, 4], fieri posse, ut ex rectis aequalibus rectis $A\Gamma$, ΔZ, HK triangulus construatur. sin minus, in-

1) Nam in angulis solidis, qui plus quam tribus planis angulis continentur, similiter ratiocinandum est.

ἔστωσαν ἄνισοι, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΘΚ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Θ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΚΘΛ· καὶ κείσθω μιᾷ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ ἴση ἡ ΘΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΛ, ΗΛ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΚΘ, ΘΛ ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Β γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΚΘΛ ἴση, βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΚΛ ἴση. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΗΘΚ τῆς ὑπὸ ΔΕΖ μείζονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΚΘΛ, ἡ ἄρα ὑπὸ ΗΘΛ τῆς ὑπὸ ΔΕΖ μείζων ἐστίν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΗΘ, ΘΛ δύο ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΘΛ γωνίας τῆς ὑπὸ ΔΕΖ μείζων, βάσις ἄρα ἡ ΗΛ βάσεως τῆς ΔΖ μείζων ἐστίν. ἀλλὰ αἱ ΗΚ, ΚΛ τῆς ΗΛ μείζονές εἰσιν. πολλῷ ἄρα αἱ ΗΚ, ΚΛ τῆς ΔΖ μείζονές εἰσιν. ἴση δὲ ἡ ΚΛ τῇ ΑΓ· αἱ ΑΓ, ΗΚ ἄρα τῆς λοιπῆς τῆς ΔΖ μείζονές εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ μὲν ΑΓ, ΔΖ τῆς ΗΚ μείζονές εἰσιν, καὶ ἔτι αἱ ΔΖ, ΗΚ τῆς ΑΓ μείζονές εἰσιν. δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

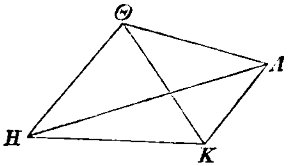
κγ'.

Ἐκ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι,

---

1. Post *ἄνισοι* add. *καὶ ἔστω μείζων ἡ πρὸς τῷ Ε* mg. m. rec. V. 2. *αὐτήν* b. 3. *ΑΒ*] *ΑΓ* φ. 4. *ἴση ἡ ΘΛ*] supra scr. m. 2 V; *Λ* in ras. B. *ἐπεζεύχθωσαν* — 5. *καί*] postea ins. m. 1 P. 5. *ΑΒ*] in ras. m. 1 P. 6. *εἰσί* BVb, comp. F. *τῷ*] mutat. in *τό* b. 7. *ΘΚΛ* F. *ἐστιν ἴση* BF. 8. *αἱ*] om. F; uidetur supra scr. fuisse, sed euan. *ΔΕΖ*] in ras. V. 10. *¨Θ˙Η¨Λ* F. *ἐστί* PBV, comp. F. 11. *δυσί* P. *εἰσί* Vb,

aequales sint, et ad rectam ΘK et punctum eius Θ angulo $AB\Gamma$ aequalis construatur $\angle\, K\Theta\Lambda$, et ponatur $\Theta\Lambda$ cuilibet rectarum AB, $B\Gamma$, ΔE, EZ, $H\Theta$, ΘK aequalis, et ducantur $K\Lambda$, $H\Lambda$. et quoniam duae AB, $B\Gamma$ duabus $K\Theta$, $\Theta\Lambda$ aequales sunt, et angulus ad B positus angulo $K\Theta\Lambda$ aequalis est, erit etiam $A\Gamma = K\Lambda$ [I, 4]. et quoniam $AB\Gamma + H\Theta K > \Delta EZ$, et $AB\Gamma = K\Theta\Lambda$, erit $\angle\, H\Theta\Lambda > \Delta EZ$. et quoniam duae $H\Theta$, $\Theta\Lambda$ duabus ΔE, EZ aequales sunt, et $\angle\, H\Theta\Lambda > \Delta EZ$, erit $H\Lambda > \Delta Z$ [I, 24]. uerum $HK + K\Lambda > H\Lambda$ [I, 20]. itaque multo magis erunt



$$HK + K\Lambda > \Delta Z.$$

sed $K\Lambda = A\Gamma$. itaque $A\Gamma + HK > \Delta Z$. iam similiter demonstrabimus, esse etiam $A\Gamma + \Delta Z > HK$, $\Delta Z + HK > A\Gamma$. itaque fieri potest, ut ex rectis aequalibus rectis $A\Gamma$, ΔZ, HK triangulus construatur; quod erat demonstrandum.

XXIII.

Ex tribus angulis planis, quorum duo reliquo maiores sunt quoquo modo coniuncti, angulum solidum

---

comp. F. 12. ὑπὸ ΔEZ] πρὸς τῷ E V, et fort. F in mg., sed euan. 13. ἐστί V, comp. F. 14. εἰσι PV, comp. F. 16. Post εἰσιν una linea eras. in V. 17. ὅτι καί] καὶ ὅτι V. 18. εἰσι P, comp. F. καὶ ἔτι αἵ] P; αἱ δέ Theon (BFVb); sed cfr. p. 64, 4. ΔZ″HK′ b, HK, ΔZ BFV. μείζονές εἰσιν] om. BFV. 19. εἰσι b. 20. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. V. Seq. demonstr. alt.; u. app. 22. αἵ] οἵ F.

στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι· δεῖ δὴ τὰς τρεῖς τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονας εἶναι.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, ἔτι δὲ αἱ τρεῖς τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες· δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι.

Ἀπειλήφθωσαν ἴσαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ· δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι. συνεστάτω τὸ ΛΜΝ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΑΓ τῇ ΛΜ, τὴν δὲ ΔΖ τῇ ΜΝ, καὶ ἔτι τὴν ΗΚ τῇ ΝΛ, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ ΛΜΝ τρίγωνον κύκλος ὁ ΛΜΝ, καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ τὸ κέντρον καὶ ἔστω τὸ Ξ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΞ, ΜΞ, ΝΞ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ μείζων ἐστὶ τῆς ΛΞ. εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΛΞ ἢ ἐλάττων. ἔστω πρότερον ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΛΞ, ἀλλὰ ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΒΓ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ΞΛ τῇ ΞΜ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δύο ταῖς ΛΞ, ΞΜ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ

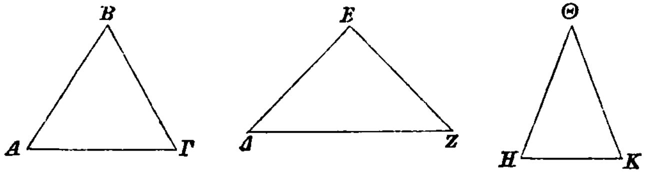
---

1. στερεὰ γωνία F, sed corr. συστήσασθαι γωνίαν V. συνστήσασθαι P, corr. m. 2. 2. ἐλάττονας P. Post εἶναι add. διὰ τὸ καὶ πᾶσαν στερεὰν γωνίαν ὑπὸ τριῶν (φ) ἢ τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν περιέχεσθαι F. 4. ὧν αἱ] γωνίαι F, ὧν αἱ add. m. 2. 6. ἐλάττονες P, ἐλάσσους FV. Dein add. ἔστωσαν F. 7. συνστήσασθαι P, corr. m. 2. 9. ΒΓ] ΒΓ, ΓΔ b. ΔΕ] corr. ex ΓΕ m. 1 b. 11. ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς] δὴ ἐκ τριῶν τῶν b; mg. γρ. ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων. 12. συνστήσασθαι P, corr. m. 2. 13. ΛΜ] ΛΒ φ. 14. τῇ] supra scr. V. ΝΛ] ΛΝ BFV. 15. Post κέντρον add. ἔσται δὴ ἤτοι ἐντὸς τοῦ ΛΜΝ τριγώνου ἢ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἢ ἐκτός. ἔστω πρότερον ἐντός BV. 17. ἐστί] ἐστίν

construere; oportet igitur[1]), tres angulos illos quattuor rectis minores esse [prop. XXI].

Sint dati tres anguli plani $AB\Gamma$, ΔEZ, $H\Theta K$, quorum duo reliquo maiores sint quoquo modo coniuncti, et praeterea tres illi quattuor rectis minores. oportet igitur ex angulis aequalibus angulis $AB\Gamma$, ΔEZ, $H\Theta K$ angulum solidum construere.

abscindantur inter se aequales AB, $B\Gamma$, ΔE, EZ, $H\Theta$, ΘK, et ducantur $A\Gamma$, ΔZ, HK. fieri igitur



potest, ut ex rectis aequalibus rectis $A\Gamma$, ΔZ, HK triangulus construatur [prop. XXII]. construatur AMN, ita ut sit $A\Gamma = AM$, $\Delta Z = MN$, $HK = NA$, et circum triangulum AMN circulus describatur AMN [IV, 5], et sumatur centrum eius et sit Ξ, et ducantur $A\Xi$, $M\Xi$, $N\Xi$. dico, esse $AB > A\Xi$; nam si minus, erit aut $AB = A\Xi$ aut $AB < A\Xi$. sit prius $AB = A\Xi$. et quoniam $AB = A\Xi$, et $AB = B\Gamma$, $\Xi A = \Xi M$, duo latera AB, $B\Gamma$ duobus lateribus $A\Xi$, ΞM alterum alteri aequalia sunt; et supposuimus,

1) Nam δή cum omnibus codicibus retinendum est. idem I, 22 p. 52, 17 pro δέ cum codicibus restituendum est. nam etiam apud Eutocium in Apollonium p. 10 in codd. δή scribi pro δέ, nunc cognoui.

P. τῆς] corr. ex τῆι B. 18. ἴση] supra scr. m. 1 V. 19. ἀλλ' BF. 20. ΞA] $A\Xi$ Bb. 21. δύο] δυσί b.

βάσις ἡ ΛΓ βάσει τῇ ΛΜ ὑπόκειται ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΛΞΜ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΔΕΖ τῇ ὑπὸ ΜΞΝ ἐστιν ἴση, καὶ ἔτι ἡ ὑπὸ ΗΘΚ τῇ ὑπὸ ΝΞΛ· αἱ ἄρα τρεῖς αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ γωνίαι τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΛΞΜ, ΜΞΝ, ΝΞΛ εἰσιν ἴσαι. ἀλλὰ αἱ τρεῖς αἱ ὑπὸ ΛΞΜ, ΜΞΝ, ΝΞΛ τέτταρσιν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι· καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ τέτταρσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὑπόκεινται δὲ καὶ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΛΞ ἴση ἐστίν. λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΛΞ. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· καὶ κείσθω τῇ μὲν ΑΒ ἴση ἡ ΞΟ, τῇ δὲ ΒΓ ἴση ἡ ΞΠ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΟΠ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΞΟ τῇ ΞΠ· ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ΛΟ τῇ ΠΜ ἐστιν ἴση. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΜ τῇ ΟΠ, καὶ ἰσογώνιον τὸ ΛΜΞ τῷ ΟΠΞ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΞΛ πρὸς ΛΜ, οὕτως ἡ ΞΟ πρὸς ΟΠ· ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΛΞ πρὸς ΞΟ, οὕτως ἡ ΛΜ πρὸς ΟΠ. μείζων δὲ ἡ ΛΞ τῆς ΞΟ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΛΜ τῆς ΟΠ. ἀλλὰ ἡ ΛΜ κεῖται τῇ ΑΓ ἴση· καὶ ἡ ΑΓ ἄρα τῆς ΟΠ μεί-

---

2. *ΛΞΜ*] supra ras. m. 2 B. 3. *ΜΞΝ*] *ΞΝ* in ras. m. 1 P V. 5. *τρισί*] *ἴσαι εἰσὶ τρισί* V. 6. *ΜΞΝ*] corr. ex *ΜΝΞ* V, *ΜΝΞ* b. *ΝΞΛ* — 7. *ΜΞΝ*] mg. m. 2 B. 6. *εἰσιν ἴσαι*] om. Vφ, *ἴσαι εἰσίν* Bb. *ἀλλ'* b. *αἱ*] (alt.) supra m. 2 F. 7. *τέτρασιν* BFVb. *ἴσαι εἰσίν* BV. 8. *καὶ αἱ* — 9. *εἰσίν*] mg. m. 2 V, euan. in F. 8. *ἄρα αἱ*] *αἱ ἄρα* P. *τέσσαρσιν* V, *τέτρασι* BFb. 9. *εἰσιν ἴσαι* Bb. 11. *ἐστιν ἴση* V. 13. *ἡ*] (prius) supra scr. V. 14. *ἐστί*] *ἐστίν* PB, *δέ* euan. V. 15. *ΟΛ* B. *λοιπῇ τῇ* Theon (BFVb). *ΠΜ*] in ras. V, *ΜΠ* F. 16. *ἐστιν*] in ras. V. *ἐστίν*] om. V. *ΛΜ*] *Λ* in ras. m. 1 B. 17. Post *ΛΜΞ* add. *τρίγωνον* comp. b. *ΞΛ*] *ΛΞ* F, corr. m. 2. 18. *τὴν ΛΜ, Μ*

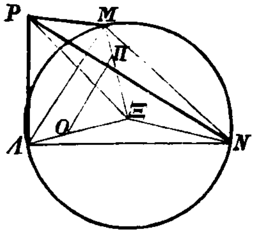
esse $\varLambda\Gamma = \varLambda M$. itaque erit $\angle AB\Gamma = \varLambda\Xi M$ [I, 8]. eadem de causa etiam

$$\angle \varDelta EZ = M\Xi N,\ \angle H\Theta K = N\Xi\varLambda.$$

ergo

$$\angle AB\Gamma + \varDelta EZ + H\Theta K = \angle \varLambda\Xi M + M\Xi N + N\Xi\varLambda.$$

sed $\angle \varLambda\Xi M + M\Xi N + N\Xi\varLambda$ quattuor rectis aequales sunt.[1]) quare etiam $\angle AB\Gamma + \varDelta EZ + H\Theta K$ quattuor



rectis aequales sunt. uerum supposuimus, eos quattuor rectis minores esse; quod absurdum est. itaque non erit $AB = \varLambda\Xi$. iam dico, ne minorem quidem esse AB quam $\varLambda\Xi$. nam si fieri potest, sit minor. et ponatur $\Xi O = AB$, $\Xi\Pi = B\Gamma$, et ducatur $O\Pi$. et quoniam $AB = B\Gamma$, erit etiam $\Xi O = \Xi\Pi$. quare etiam $\varLambda O = \Pi M$. ergo $\varLambda M$ rectae $O\Pi$ parallela est [VI, 2], et $\varLambda M\Xi$ triangulo $O\Pi\Xi$ aequiangulus est [I, 29]. itaque erit $\Xi\varLambda : \varLambda M = \Xi O : O\Pi$ [VI, 4]. permutando $\varLambda\Xi : \Xi O = \varLambda M : O\Pi$ [V, 16]. uerum $\varLambda\Xi > \Xi O$. itaque etiam $\varLambda M > O\Pi$ [V, 14]. sed posuimus $\varLambda M = \varLambda\Gamma$. itaque etiam $\varLambda\Gamma > O\Pi$. quo-

1) Hoc nusquam demonstratum est, sed facillime ex I, 13 concluditur; cfr. ad I, 15 coroll.

in ras. V. τὴν $O\Pi$ V. ὡς] ἄρα ὡς V (F?). ἡ] ins. m. 2 V. 20. καί] om. V. ἡ] ins. m. 2 F. ἀλλ' BF.

ζων ἐστίν. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΟΞ, ΞΠ ἴσαι εἰσίν, καὶ βάσις ἡ ΑΓ βάσεως τῆς ΟΠ μείζων ἐστίν, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΟΞΠ μείζων ἐστίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΔΕΖ τῆς ὑπὸ ΜΞΝ μείζων ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ ΗΘΚ τῆς ὑπὸ ΝΞΛ. αἱ ἄρα τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ τριῶν τῶν ὑπὸ ΛΞΜ, ΜΞΝ, ΝΞΛ μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες ὑπόκεινται· πολλῷ ἄρα αἱ ὑπὸ ΛΞΜ, ΜΞΝ, ΝΞΛ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. ἀλλὰ καὶ ἴσαι· ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ ΑΒ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ΛΞ. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἴση· μείζων ἄρα ἡ ΑΒ τῆς ΛΞ. ἀνεστάτω δὴ ἀπὸ τοῦ Ξ σημείου τῷ τοῦ ΛΜΝ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΞΡ, καὶ ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ, ἐκείνῳ ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς ΞΡ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΡΞ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΛΜΝ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς ἑκάστην ἄρα τῶν ΛΞ, ΜΞ, ΝΞ ὀρθή ἐστιν ἡ ΡΞ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΞ τῇ ΞΜ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΞΡ, βάσις ἄρα η ΡΛ βάσει τῇ ΡΜ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΡΝ ἑκατέρᾳ τῶν ΡΛ, ΡΜ ἐστιν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ ἐπεὶ ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ, ἐκείνῳ ἴσον ὑπόκειται τὸ ἀπὸ τῆς ΞΡ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον

---

1. Post δύο add. εὐθεῖαι FV, B supra scr. m. 2. δυσί] δύο b(F?). 2. εἰσί Vb, comp. F. 3. ἐστί BVb, comp. F. 5. ΜΞΝ] Ξ in ras. m. 1 P. 6. ὑπό] (prius) om. V, supra scr. m. 2 B. 7. ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ P. τριῶν — 9. ΗΘΚ] mg. m. 2 V. 8. ἀλλ' FVb. 9. ἐλάττονες

niam igitur duo latera AB, $B\Gamma$ duobus $O\Xi$, $\Xi\Pi$ aequalia sunt, et $A\Gamma > O\Pi$, erit $\angle AB\Gamma > O\Xi\Pi$ [I, 25]. similiter demonstrabimus, esse etiam $\angle \Delta EZ > M\Xi N$, $\angle H\Theta K > N\Xi A$. itaque $AB\Gamma + \Delta EZ + H\Theta K > A\Xi M + M\Xi N + N\Xi A$. uerum supposuimus, esse

$$AB\Gamma + \Delta EZ + H\Theta K$$

quattuor rectis minores. multo igitur magis $A\Xi M + M\Xi N + N\Xi A$ quattuor rectis minores sunt. sed iidem quattuor rectis aequales sunt; quod absurdum est. itaque AB recta $A\Xi$ minor non est. et demonstratum est, eam ne aequalem quidem esse. ergo $AB > A\Xi$. erigatur igitur in puncto Ξ ad planum circuli AMN perpendicularis ΞP [prop. XII]. et sit $\Xi P^2 = AB^2 \div A\Xi^2$, et ducantur PA, PM, PN. et quoniam $P\Xi$ ad planum circuli AMN perpendicularis est, $P\Xi$ ad singulas rectas $A\Xi$, $M\Xi$, $N\Xi$ perpendicularis est. et quoniam $A\Xi = \Xi M$, et ΞP communis est et perpendicularis, erit

$$PA = PM \text{ [I, 4]}.$$

eadem de causa erit etiam $PN = PA = PM$. itaque PA, PM, PN inter se aequales sunt. et quoniam suppositum est, esse $\Xi P^2 = AB^2 \div A\Xi^2$, erit $AB^2 = A\Xi^2 + \Xi P^2$. uerum

P. 10. $M\Xi N$] ΞN in ras. m. 1 P. 11. εἰσιν ἐλάσσονες P. ἐστίν] om. V. 12. ἐστίν P. 13. ἄρα] ἐστὶν ἄρα F. ἀνεστάτω] bis b; litt. ν in ras. m. 1 P. 14. κύκλου] om. φ. 15. ἐστιν P. 16. τό] corr. ex τῷ m. 2 F. 17. PN] supra scr. V. 18. $P\Xi$] ΞP B. ἐστιν P. ἐπίπεδον κύκλον F. 20. ΞM] $M\Xi$ corr. ex $N\Xi$ m. 1 b. 22. PN] N e corr. V. 23. ἴση ἐστὶν V. 24. εἰσί b, corr. ex εἰσίν V, comp. F. 26. τό] (prius) corr. ex τῷ F.

ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΛΞ$, $ΞΡ$. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν $ΛΞ$, $ΞΡ$ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΛΡ$· ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ $ΛΞΡ$· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΡΛ$· ἴση ἄρα ἡ $ΑΒ$ τῇ $ΡΛ$. ἀλλὰ τῇ μὲν $ΑΒ$ ἴση ἐστὶν ἑκάστη τῶν $ΒΓ$, $ΔΕ$, $ΕΖ$, $ΗΘ$, $ΘΚ$, τῇ δὲ $ΡΛ$ ἴση ἑκατέρα τῶν $ΡΜ$, $ΡΝ$· ἑκάστη ἄρα τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$, $ΔΕ$, $ΕΖ$, $ΗΘ$, $ΘΚ$ ἑκάστῃ τῶν $ΡΛ$, $ΡΜ$, $ΡΝ$ ἴση ἐστίν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ $ΛΡ$, $ΡΜ$ δυσὶ ταῖς $ΑΒ$, $ΒΓ$ ἴσαι εἰσίν, καὶ βάσις ἡ $ΛΜ$ βάσει τῇ $ΑΓ$ ὑπόκειται ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $ΛΡΜ$ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ $ΑΒΓ$ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ $ΜΡΝ$ τῇ ὑπὸ $ΔΕΖ$ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ $ΛΡΝ$ τῇ ὑπὸ $ΗΘΚ$.

Ἐκ τριῶν ἄρα γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ $ΛΡΜ$, $ΜΡΝ$, $ΛΡΝ$, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις ταῖς ὑπὸ $ΑΒΓ$, $ΔΕΖ$, $ΗΘΚ$, στερεὰ γωνία συνέσταται ἡ πρὸς τῷ $Ρ$ περιεχομένη ὑπὸ τῶν $ΛΡΜ$, $ΜΡΝ$, $ΛΡΝ$ γωνιῶν· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Λῆμμα.

Ὃν δὲ τρόπον, ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΛΞ$, ἐκείνῳ ἴσον λαβεῖν ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς $ΞΡ$, δείξομεν οὕτως. ἐκκείσθωσαν αἱ $ΑΒ$, $ΛΞ$ εὐθεῖαι,

---

1. τοῖς δέ — 2. $ΛΡ$] mg. m. 1 F. 3. $ΡΛ$] e corr. V. 4. $ΡΛ$] corr. ex $ΛΡ$ V. 5. $ΘΚ$] corr. ex $ΗΚ$ m. 1 B. Ante $ΡΛ$ del. $Λ$ m. 1 P. 6. Post $ΡΝ$ ras. 3 litt. V. 7. ἐστίν] om. V. 8 $ΛΡ$] $ΡΛ$ F. εἰσί Vb, comp. F. 9. Ante γωνία ins. καί m. 2 V. 10. γωνίᾳ] om. B; post ins. F. 11. $ΜΝΡ$ F. ἴση ἐστίν FV. 14. τρισίν B. 15. συνίσταται FVb. 16. ἡ] om. φ. τῷ] mut. in τό b, τό φ. τῶν] τῶν ὑπό b. 17. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι] om. V. ποιῆσαι] δεῖξαι Pb, γρ. ποιῆσαι mg. b. Seq. duo casus singulares cum demonstrationibus, u. app. Hoc lemma in b et in textu (b) et in mg. a m. 1 (β) reperitur, add. γρ.

$$\varLambda P^2 = \varLambda \Xi^2 + \Xi P^2 \text{ [I, 47];}$$

nam $\angle \varLambda \Xi P$ rectus est. quare $AB^2 = P\varLambda^2$. itaque $AB = P\varLambda$. sed

$$AB = B\Gamma = \varDelta E = EZ = H\Theta = \Theta K \quad \text{et}$$
$$P\varLambda = PM = PN.$$

itaque

$$AB = B\Gamma = \varDelta E = EZ = H\Theta = \Theta K = P\varLambda = PM = PN.$$

et quoniam duae rectae $\varLambda P$, PM duabus rectis AB, $B\Gamma$ aequales sunt, et suppositum est, esse $\varLambda M = A\Gamma$, erit etiam $\angle \varLambda PM = AB\Gamma$ [I, 8]. eadem de causa erit etiam $\angle MPN = \varDelta EZ$, $\angle \varLambda PN = H\Theta K$.

Ergo ex tribus angulis planis $\varLambda PM$, MPN, $\varLambda PN$, qui tribus datis angulis $AB\Gamma$, $\varDelta EZ$, $H\Theta K$ aequales sunt, solidus angulus constructus est, qui ad P positus est angulis $\varLambda PM$, MPN, $\varLambda PN$ comprehensus; quod oportebat fieri.[1])

Corollarium.

Quomodo autem fieri possit, ut sumatur $\Xi P^2 = AB^2 \div \varLambda \Xi^2$, sic demonstrabimus.

exponantur rectae AB, $\varLambda \Xi$, et maior sit AB, et

---

1) Quae in codd. sequuntur demonstrationes casuum singularium, ab Euclide profectae esse non possunt. nam praeparatio p. 62, 14 (u. adn. crit.) omnino necessaria, si tres casus separantur, manifesto interpolata est, neque post clausulam legitimam p. 68, 13—17 plura addi possunt. praeterea demonstrationes ipsae uerbosiores sunt neque apud Campanum inueniuntur, neque consuetudo fert Euclidis, ut ad omnes casus respiciatur.

οὕτως. 18. λῆμμα] om. codd. 20. τό] om. F; add. m. 2, sed euan. 21. δείξωμεν P.

καὶ ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ γεγράφθω ἐπ' αὐτῆς ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ, καὶ εἰς τὸ ΑΒΓ ἡμικύκλιον ἐνηρμόσθω τῇ ΛΞ εὐθείᾳ μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς ΑΒ διαμέτρου ἴση ἡ ΑΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΒ. ἐπεὶ οὖν ἐν ἡμικυκλίῳ τῷ ΑΓΒ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὶ ΑΓΒ, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ. ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΛΞ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ. ἐὰν οὖν τῇ ΒΓ ἴσην τὴν ΞΡ ἀπολάβωμεν, ἔσται τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς ΞΡ· ὅπερ προέκειτο ποιῆσαι.

κδʹ.

Ἐὰν στερεὸν ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιέχηται, τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμά ἐστιν.

Στερεὸν γὰρ τὸ ΓΔΘΗ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιεχέσθω τῶν ΑΓ, ΗΖ, ΑΘ, ΔΖ, ΒΖ, ΑΕ· λέγω, ὅτι τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμά ἐστιν.

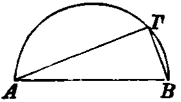
Ἐπεὶ γὰρ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΒΗ, ΓΕ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΑΓ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν το-

---

2. *ΑΓΒ* b. *εἰς — ἡμικύκλιον*] om. b. *ΑΒΓ*] *ΑΒ* P. *ἡμικύκλιον*] ⊙ β. *ἡρμόσθω* β. 3. *μὴ μείζονι — διαμέτρου*] om. Bb. *ΑΒ*] m. 2 P. 5. *τῷ*] corr. ex *τό* m. 1 F. *τῷ ΑΓΒ γωνία*] om. b. *ΑΓΒ*] *Β* ins. m. 1 P, *Β* in ras. F. *ὑπό*] om. b. *ὀρθή — 6. ΑΓΒ*] *γωνία ὀρθή ἐστιν* b. 7. *τῶν*] *τῆς* b. *ΓΒ*] supra scr. m. rec. P. *ὥστε*] om. b. *ΑΒ*] *ΑΒ ἄρα* b. 8. *μεῖζόν ἐστι*] *ὑπερέχει* P. 9. *τῇ*] postea ins. V. *τὸ ἄρα*] *ὥστε τό* P; *τό* b. *ΑΒ*] *ΑΒ ἄρα* b, *ΑΒ μεῖζόν ἐστι* P. 10. *μεῖζόν ἐστι*] om. P. *τῆς*] m. 2 F. *ἐάν — 13. ποιῆσαι*] om. b. 10. *ΒΓ*] corr. ex

in ea semicirculus describatur $AB\Gamma$, et in semicirculo $AB\Gamma$ recta $A\Gamma$ aptetur [IV, 1] rectae $A\Xi$ aequalis, quae maior non est diametro AB, et ducatur ΓB.

iam quoniam in semicirculo $AB\Gamma$ positus est $\angle A\Gamma B$, rectus erit $\angle A\Gamma B$ [III, 31]. itaque $AB^2 = A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ [I, 47]. quare erit $AB^2 \div A\Gamma^2 = \Gamma B^2$. uerum $A\Gamma = A\Xi$. itaque $\Gamma B^2 = AB^2 \div A\Xi^2$. ergo si sumpserimus $\Xi P = B\Gamma$, erit $\Xi P^2 = AB^2 \div A\Xi^2$; quod oportebat fieri.



XXIV.

Si solidum planis parallelis comprehenditur, plana eius inter se opposita aequalia sunt et parallelogramma.[1])

Nam solidum $\Gamma\Delta\Theta H$ planis parallelis comprehendatur $A\Gamma$, HZ, $A\Theta$, ΔZ, BZ, AE. dico, plana eius inter se opposita aequalia esse et parallelogramma.

nam quoniam duo plana parallela BH, ΓE plano $A\Gamma$ secantur, communes eorum sectiones inter se

1) Haec propositio parum diligenter exposita est; intelligitur enim solidum sex planis parallelis comprehensum neque pluribus, et plana, quamquam omnia parallelogramma sunt, non omnia aequalia sunt, sed opposita sola inter se aequalia.

ΓΒ V, ΓΒ BFβ. 11. τό] τῷ β. ΑΒ μεῖζον P. 12. μεῖζον] om. P. ΡΞ P. ὅπερ — 13. ποιῆσαι] om. V. 14. κδ'] corr. ex κη' F. 17. παραλληλόγραμμα] παράλληλα b, mg. m. 1 γρ. παραλληλόγραμμα (comp.). -γραμμά ἐστι φ, m. 2 add. V. ἐστι Bb. 18. ΓΔΘΗ] corr. ex ΓΔΗΘ V, ΓΔΗΘ b. 19. ΖΒ BF. 21. παράλληλά b et seq. ras. F. -γραμμά ἐστιν supra m. 2 V. 22. Post ἐπίπεδα ins. ὅμοια m. 2 F. παράλληλα] supra ras. m. 2 V. 23. τέμνονται V.

καὶ παράλληλοί εἰσιν. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῇ $\varDelta\Gamma$. πάλιν, ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ BZ, AE ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ $A\Gamma$ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσιν. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ $B\Gamma$ τῇ $A\varDelta$. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ AB τῇ $\varDelta\Gamma$ παράλληλος· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ $A\Gamma$. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν $\varDelta Z$, ZH, HB, BZ, AE παραλληλόγραμμόν ἐστιν.

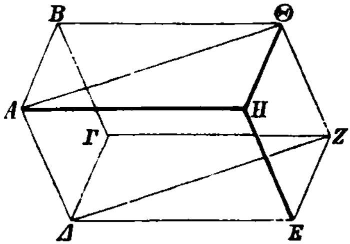
Ἐπεζεύχθωσαν αἱ $A\Theta$, $\varDelta Z$. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ μὲν AB τῇ $\varDelta\Gamma$, ἡ δὲ $B\Theta$ τῇ ΓZ, δύο δὴ αἱ AB, $B\Theta$ ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας τὰς $\varDelta\Gamma$, ΓZ ἁπτομένας ἀλλήλων εἰσὶν οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· ἴσας ἄρα γωνίας περιέξουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ $AB\Theta$ γωνία τῇ ὑπὸ $\varDelta\Gamma Z$. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ AB, $B\Theta$ δυσὶ ταῖς $\varDelta\Gamma$, ΓZ ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $AB\Theta$ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ $\varDelta\Gamma Z$ ἐστιν ἴση, βάσις ἄρα ἡ $A\Theta$ βάσει τῇ $\varDelta Z$ ἐστιν ἴση, καὶ τὸ $AB\Theta$ τρίγωνον τῷ $\varDelta\Gamma Z$ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν. καί ἐστι τοῦ μὲν $AB\Theta$ διπλάσιον τὸ BH παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ $\varDelta\Gamma Z$ διπλάσιον τὸ ΓE παραλληλόγραμμον· ἴσον ἄρα τὸ BH παραλληλόγραμμον τῷ ΓE παραλληλογράμμῳ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τὸ μὲν $A\Gamma$ τῷ HZ ἐστιν ἴσον, τὸ δὲ AE τῷ BZ.

Ἐὰν ἄρα στερεὸν ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιέχηται, τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

---

1. εἰσί Vb, comp. F. 2. $\Gamma\varDelta$ B. παράλληλα] om. V. BZ] supra scr. Γ b; corr. ex $B\Gamma$ V. 3. τέμνεται] corr. ex τέμνονται b. 4. εἰσι Vb, comp. F. $B\Gamma$] corr. ex $A\Gamma$ b; B in ras. B. 9. ἐστι παράλληλος Vb. 10. $\varDelta\Gamma$] corr. ex $\Gamma\varDelta$ V, $\Gamma\varDelta$ b. 13. περιέχουσιν BF (in F corr. m. 2). 15. εἰσί Vb,

parallelae sunt [prop. XVI]. itaque AB rectae $\Delta\Gamma$ parallela est. rursus quoniam duo plana parallela BZ, AE plano $A\Gamma$ secantur, communes eorum sectiones parallelae sunt. itaque $B\Gamma$ rectae $A\Delta$ parallela est. sed demonstratum est, esse etiam AB rectae $\Delta\Gamma$ parallelam. itaque $A\Gamma$ parallelogrammum est. similiter demonstrabimus, etiam singula ΔZ, ZH, HB, BZ, AE parallelogramma esse.



ducantur $A\Theta$, ΔZ. et quoniam AB rectae $\Delta\Gamma$, $B\Theta$ rectae ΓZ parallelae sunt, duae rectae AB, $B\Theta$ inter se tangentes duabus rectis $\Delta\Gamma$, ΓZ inter se tangentibus parallelae sunt non in eodem plano positae. aequales igitur comprehendent angulos [prop. XV]. itaque $\angle AB\Theta = \Delta\Gamma Z$. et quoniam duae rectae AB, $B\Theta$ duabus $\Delta\Gamma$, ΓZ aequales sunt [I, 34], et $\angle AB\Theta = \Delta\Gamma Z$, erit etiam $A\Theta = \Delta Z$, et $\triangle AB\Theta = \Delta\Gamma Z$ [I, 4]. et $BH = 2AB\Theta$, $\Gamma E = 2\Delta\Gamma Z$ [I, 34]. itaque $BH = \Gamma E$. similiter demonstrabimus, esse etiam $A\Gamma = HZ$, $AE = BZ$.

Ergo si solidum planis parallelis comprehenditur, plana eius inter se opposita aequalia sunt et parallelogramma; quod erat demonstrandum.

---

comp. F. 17. ἴση ἐστί BVb. 18. ἴσον ἐστίν· καί ἐστι] om. F, hab. φ. ἐστίν] ἐστί PBV, comp. b. 20. BH] φ seq. lac. 4 litt. 21. τῷ ΓE παραλληλογράμμῳ] om. F. 22. HZ] mut. in $H\Xi$ b. 24. ἐπιπέδων — 26. δεῖξαι] καὶ τὰ ἑξῆς V. 26. παραλληλόγραμμα] παράλληλα b, corr. mg. m. 1.

κε'.

Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν, οὕτως τὸ στερεὸν πρὸς τὸ στερεόν.

Στερεὸν γὰρ παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΒΓΔ ἐπιπέδῳ τῷ ΖΗ τετμήσθω παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τοῖς ΡΑ, ΔΘ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕΖΦ βάσις πρὸς τὴν ΕΘΓΖ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΒΖΥ στερεὸν πρὸς τὸ ΕΗΓΔ στερεόν.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΑΘ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, καὶ κείσθωσαν τῇ μὲν ΑΕ ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ ΑΚ, ΚΛ, τῇ δὲ ΕΘ ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ ΘΜ, ΜΝ, καὶ συμπεπληρώσθω τὰ ΛΟ, ΚΦ, ΘΧ, ΜΣ παραλληλόγραμμα καὶ τὰ ΛΠ, ΚΡ, ΔΜ, ΜΤ στερεά. καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΛΚ, ΚΑ, ΑΕ εὐθεῖαι ἀλλήλαις, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ μὲν ΛΟ, ΚΦ, ΑΖ παραλληλόγραμμα ἀλλήλοις, τὰ δὲ ΚΞ, ΚΒ, ΑΗ ἀλλήλοις καὶ ἔτι τὰ ΛΨ, ΚΠ, ΑΡ ἀλλήλοις· ἀπεναντίον γάρ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ μὲν ΕΓ, ΘΧ, ΜΣ παραλληλόγραμμα ἴσα εἰσὶν ἀλλήλοις, τὰ δὲ ΘΗ, ΘΙ, ΙΝ ἴσα εἰσὶν ἀλλήλοις, καὶ ἔτι τὰ ΔΘ, ΜΩ, ΝΤ· τρία ἄρα ἐπίπεδα τῶν ΛΠ, ΚΡ, ΑΥ στερεῶν τρισὶν ἐπιπέδοις ἐστὶν ἴσα. ἀλλὰ τὰ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἐστὶν ἴσα·

1. κε'] κθ' F. 2. παράλληλον ἐπίπεδον Fb. 4. οὕτω B. 6. παράλληλον ἐπίπεδον Fb. τῷ b. 10. ΑΒΖΥ] Ζ in ras. m. 1 B. 14. ΛΟ] in ras. F; corr. ex ΛΘ m. 1 b. 15. ΛΠ] Λ corr. ex Δ b. ΔΜ] Μ''Δ' b. ΜΤ] ΝΤ P, ΜΓ b. 19. ΑΡ] Α e corr. b. 21. τὰ δέ — ἀλλήλοις] mg. m. 2 euan. F. ΘΙ] ΘΡ e corr. b. ΙΝ] 'Ι''Ν, Ι corr. ex Ρ b. 23. ἐστίν] εἰσίν P. 24. τρισίν P. ἐστίν] mut. in εἰσίν b, εἰσίν F.

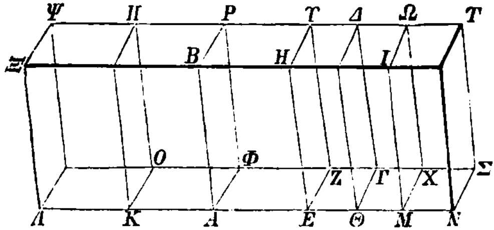
XXV.

Si solidum parallelepipedum[1]) plano secatur planis inter se oppositis parallelo, erit ut basis ad basim, ita solidum ad solidum.

Nam solidum parallelepipedum $ABΓΔ$ secetur plano ZH planis PA, $ΔΘ$ parallelo. dico, esse

$$AEZΦ : EΘΓZ = ABZΥ : EHΓΔ.$$

producatur enim $AΘ$ in utramque partem, et ponantur quotlibet rectae AK, $KΛ$ rectae AE aequales,



rectae autem $EΘ$ aequales quotlibet $ΘM$, MN, et expleantur parallelogramma $ΛO$, $KΦ$, $ΘX$, $MΣ$ et solida $ΛΠ$, KP, $ΔM$, MT. et quoniam $ΛK = KA = AE$, erit $ΛO = KΦ = AZ$, $KΞ = KB = AH$[2]) et praeterea $ΛΨ = KΠ = AP$; nam inter se opposita sunt [prop. XXIV]. eadem de causa erit etiam $EΓ = ΘX = MΣ$, $ΘH = ΘI = IN$, $ΔΘ = MΩ = NT$. itaque solidorum $ΛΠ$, KP, $AΥ$ tria plana tribus planis aequalia sunt. uerum tria illa plana tribus,

1) Sicut in primo libro (prop. 34) post propositionem praecedenti correspondentem sine definitione infertur uocabulum παραλληλόγραμμον, ita hic παραλληλεπίπεδον usurpatur, nomen per se perspicuum etiam nulla praemissa definitione.

2) Nam et angulos et latera aequalia habent. ergo etiam similia sunt.

τὰ ἄρα τρία στερεὰ τὰ ΛΠ, ΚΡ, ΛΥ ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ τρία στερεὰ τὰ ΕΔ, ΔΜ, ΜΥ ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΖ βάσις τῆς ΑΖ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΛΥ στερεὸν τοῦ ΑΥ στερεοῦ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ ΝΖ βάσις τῆς ΖΘ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΝΥ στερεὸν τοῦ ΘΥ στερεοῦ. καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΖ βάσις τῇ ΝΖ βάσει, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΛΥ στερεὸν τῷ ΝΥ στερεῷ, καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ ΛΖ βάσις τῆς ΝΖ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΥ στερεὸν τοῦ ΝΥ στερεοῦ, καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει. τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν βάσεων τῶν ΑΖ, ΖΘ, δύο δὲ στερεῶν τῶν ΑΥ, ΥΘ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τῆς μὲν ΑΖ βάσεως καὶ τοῦ ΑΥ στερεοῦ ἥ τε ΛΖ βάσις καὶ τὸ ΛΥ στερεόν, τῆς δὲ ΘΖ βάσεως καὶ τοῦ ΘΥ στερεοῦ ἥ τε ΝΖ βάσις καὶ τὸ ΝΥ στερεόν, καὶ δέδεικται, ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ ΛΖ βάσις τῆς ΖΝ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΥ στερεὸν τοῦ ΝΥ [στερεοῦ], καὶ εἰ ἴση, ἴσον, καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ βάσις πρὸς τὴν ΖΘ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΥ στερεὸν πρὸς τὸ ΥΘ στερεόν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κϛʹ.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ στερεᾷ γωνίᾳ ἴσην στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι.

---

1. *ἄρα*] *ἄ* supra m. rec. P; post ras. 2 litt. F. *τά*] e corr. V. *ΛΠ*] *ΚΗ* F; supra *Λ* scr. *Α* m. 1 b. 2. *ἐστί* BV, comp. b, *εἰσί* F. *τά*] (alt.) ins. m. 2 F. 3. *ἐστίν*] mut. in *εἰσίν* m. 1 P. 4. *ΑΖ*] *ΔΖ* supra scr. *ΑΒ* m. 1 b. *τοσαυταπλασίων* b et e corr. F. 7. *ἐστι*] supra m. 1 P.

quae iis opposita sunt, aequalia sunt [prop. XXIV]. ergo $\varDelta\Pi = KP = \varDelta\Upsilon$.[1]) eadem de causa erit $E\varDelta = \varDelta M = M\Upsilon$. itaque quoties multiplex est $\varDelta Z$ basis basis $\varDelta Z$, toties multiplex erit etiam solidum $\varDelta\Upsilon$ solidi $\varDelta\Upsilon$. eadem de causa quoties multiplex est basis NZ basis $Z\Theta$, toties multiplex erit etiam solidum $N\Upsilon$ solidi $\Theta\Upsilon$. et si $\varDelta Z = NZ$, erit etiam $\varDelta\Upsilon = N\Upsilon$, sin $\varDelta Z > NZ$, erit etiam $\varDelta\Upsilon > N\Upsilon$, sin autem $\varDelta Z < NZ$, erit $\varDelta\Upsilon < N\Upsilon$. itaque datis quattuor magnitudinibus, duabus basibus $\varDelta Z$, $Z\Theta$ et duobus solidis $\varDelta\Upsilon$, $\Upsilon\Theta$ sumpta sunt aeque multiplicia basis $\varDelta Z$ et solidi $\varDelta\Upsilon$ basis $\varDelta Z$ et solidum $\varDelta\Upsilon$, basis autem ΘZ et solidi $\Theta\Upsilon$ basis NZ et solidum $N\Upsilon$, et demonstratum est, si $\varDelta Z > ZN$, esse etiam $\varDelta\Upsilon > N\Upsilon$, sin $\varDelta Z = ZN$, esse $\varDelta\Upsilon = N\Upsilon$, sin autem $\varDelta Z < ZN$, esse $\varDelta\Upsilon < N\Upsilon$. erit igitur $\varDelta Z : Z\Theta = \varDelta\Upsilon : \Upsilon\Theta$ [V def. 5]; quod erat demonstrandum.

XXVI.

Ad datam rectam et punctum eius angulum solidum construere dato angulo solido aequalem.

---

1) Ex def. 10, quia plana ea comprehendentia etiam similia sunt bina simul coniuncta. de trinis u. pag. 75 not. 2. de ceteris ex prop. 24 sequitur, nec opus erat, ut ibi propria demonstratione ostenderetur, quia p. 72, 17 demonstratum est, triangulos congruentes esse (u. I, 4), h. e. ἴσα τε καὶ ὅμοια.

---

8. ἡ $\varDelta$Z] bis P, corr. m. 1. 9. ἐστί] supra scr. comp. m. 2 F. $\varDelta\Upsilon$] supra $\varDelta$ scr. $\varDelta$ m. 1 b. 10. NZ] Z in ras. V. 13. τῶν] supra scr. m. 2 B. δέ] corr. ex δή m. 2 V, δή b. τῶν] supra scr. m. 2 B. 15. $\varDelta$Z] corr. ex $\varDelta$Z m. 1 et m. 2 b. 16. $\Theta\Upsilon$] $E\varDelta$, E in ras. P. 18. ZN] NZ BVb. 19. στερεοῦ] om. BFVb. ἴση] ἴσον PFV et in ras. b. 20. ἡ] supra scr. m. 1 P. 25. -σην e corr. m. rec. V.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB, τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ δοθὲν σημεῖον τὸ A, ἡ δὲ δοθεῖσα στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ $\varDelta$ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ὑπὸ $E\varDelta\Gamma$, $E\varDelta Z$, $Z\varDelta\Gamma$ γωνιῶν ἐπιπέδων· δεῖ δὴ πρὸς τῇ AB εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A τῇ πρὸς τῷ $\varDelta$ στερεᾷ γωνίᾳ ἴσην στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς $\varDelta Z$ τυχὸν σημεῖον τὸ Z, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Z ἐπὶ τὸ διὰ τῶν $E\varDelta$, $\varDelta\Gamma$ ἐπίπεδον κάθετος ἡ ZH, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ H, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $\varDelta H$, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ AB εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A τῇ μὲν ὑπὸ $E\varDelta\Gamma$ γωνίᾳ ἴση η ὑπὸ $BA\varLambda$, τῇ δὲ ὑπὸ $E\varDelta H$ ἴση ἡ ὑπὸ BAK, καὶ κείσθω τῇ $\varDelta H$ ἴση ἡ AK, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ K σημείου τῷ διὰ τῶν $BA\varLambda$ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ $K\Theta$, καὶ κείσθω ἴση τῇ HZ ἡ $K\Theta$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘA· λέγω, ὅτι ἡ πρὸς τῷ A στερεὰ γωνία περιεχομένη ὑπὸ τῶν $BA\varLambda$, $BA\Theta$, $\Theta A\varLambda$ γωνιῶν ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ $\varDelta$ στερεᾷ γωνίᾳ τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τῶν $E\varDelta\Gamma$, $E\varDelta Z$, $Z\varDelta\Gamma$ γωνιῶν.

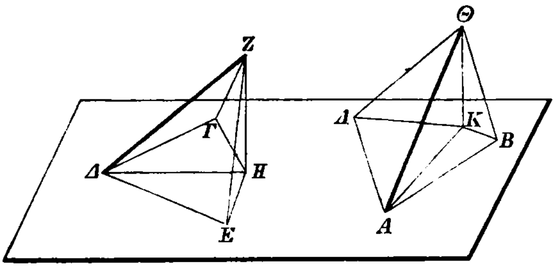
Ἀπειλήφθωσαν γὰρ ἴσαι αἱ AB, $\varDelta E$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘB, KB, ZE, HE. καὶ ἐπεὶ ἡ ZH ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας· ὀρθὴ ἄρα

---

3. τῷ] mut. in τό m. 1 b. 4. $E\varDelta Z$] Z non liquet in F. 5. τῷ $\varDelta$] τῇ $\varDelta$ P. 9. τῷ] om. P. τῷ ἐπιπέδῳ] supra scr. m. 1 F. 12. δέ] om. F. 14. AK] K e corr. m. 1 F. 16. ἡ] (tert.) supra m. 2 P. 18. ἐστίν B, corr. m. 2. Post $\varDelta$ ras. 1 lit. B. 19. τῇ] om. Vbφ. $Z\varDelta\Gamma$] supra scr. m. 2 B. 21. αἳ ἴσαι B, corr. m. 2. 22. KB, ZE, HE] ZE'' HE'' KB' Vb (in HE tertia lineola add. in b); ZE, HE F uel potius φ, in ZE uestig. 2 lineolarum.

Sit data recta AB et datum eius punctum A, datus autem angulus solidus is, qui ad Δ positus est angulis planis $E\Delta\Gamma$, $E\Delta Z$, $Z\Delta\Gamma$ comprehensus. oportet igitur ad rectam AB et punctum eius A angulum solidum construere solido angulo, qui ad Δ positus est, aequalem.

sumatur enim in ΔZ punctum aliquod Z, et a Z ad planum rectarum $E\Delta$, $\Delta\Gamma$ perpendicularis ducatur ZH [prop. XI], et cum plano concurrat in H, et du-



catur ΔH, et ad rectam AB et punctum eius A construatur $\angle BA\Delta = E\Delta\Gamma$, $\angle BAK = E\Delta H$ [I, 23], et ponatur $AK = \Delta H$, et in puncto K ad planum rectarum BA, $A\Delta$ perpendicularis erigatur $K\Theta$ [prop. XII], et ponatur $K\Theta = HZ$, et ducatur ΘA. dico, angulum solidum, qui ad A positus sit angulis $BA\Delta$, $BA\Theta$, $\Theta A\Delta$ comprehensus, aequalem esse angulo solido, qui ad Δ positus sit angulis $E\Delta\Gamma$, $E\Delta Z$, $Z\Delta\Gamma$ comprehensus.

abscindantur enim AB, ΔE inter se aequales, et ducantur ΘB, KB, ZE, HE. et quoniam ZH ad planum subiacens perpendicularis est, etiam ad omnes rectas eam tangentes et in plano subiacenti positas ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΖΗΔ, ΖΗΕ γωνιῶν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΘΚΑ, ΘΚΒ γωνιῶν ὀρθή ἐστιν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΚΑ, ΑΒ δύο ταῖς ΗΔ, ΔΕ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΚΒ βάσει τῇ ΗΕ ἴση ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΚΘ τῇ ΗΖ ἴση· καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΘΒ τῇ ΖΕ. πάλιν ἐπεὶ δύο αἱ ΑΚ, ΚΘ δυσὶ ταῖς ΔΗ, ΗΖ ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΑΘ βάσει τῇ ΖΔ ἴση ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ ἴση· δύο δὴ αἱ ΘΑ, ΑΒ δύο ταῖς ΔΖ, ΔΕ ἴσαι εἰσίν. καὶ βάσις ἡ ΘΒ βάσει τῇ ΖΕ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΘ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΘΑΛ τῇ ὑπὸ ΖΔΓ ἐστιν ἴση [ἐπειδήπερ ἐὰν ἀπολάβωμεν ἴσας τὰς ΑΛ, ΔΓ καὶ ἐπιζεύξωμεν τὰς ΚΛ, ΘΛ, ΗΓ, ΖΓ, ἐπεὶ ὅλη ἡ ὑπὸ ΒΑΛ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΕΔΓ ἐστιν ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ ΒΑΚ τῇ ὑπὸ ΕΔΗ ὑπόκειται ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΚΑΛ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΗΔΓ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΚΑ, ΑΛ δυσὶ ταῖς ΗΔ, ΔΓ ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΚΛ βάσει τῇ ΗΓ ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΚΘ τῇ ΗΖ ἴση· δύο δὴ αἱ ΛΚ, ΚΘ δυσὶ ταῖς ΓΗ, ΗΖ εἰσιν ἴσαι· καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν· βάσις ἄρα ἡ ΘΛ βάσει τῇ ΖΓ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΘΑ, ΑΛ δυσὶ ταῖς ΖΔ, ΔΓ εἰσιν ἴσαι, καὶ βάσις ἡ ΘΛ βάσει τῇ ΖΓ ἐστιν ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΘΑΛ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΔΓ ἐστιν ἴση]. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΛ τῇ ὑπὸ ΕΔΓ ἴση.

Πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ καὶ τῷ πρὸς

3. ἐστι V, comp. Fb. δύο] (alt.) δυσί Vb. 4. περιέχουσι PVb. 5. ΒΚ Β. ΗΕ] Ε΄Η΄΄ F. ἐστίν] om. Vb.

rectos angulos efficiet [def. 3]. itaque uterque angulus $ZH\Delta$, ZHE rectus est. eadem de causa etiam uterque angulus ΘKA, ΘKB rectus est. et quoniam duae rectae KA, AB duabus $H\Delta$, ΔE singulae singulis aequales sunt, et angulos aequales comprehendunt, erit $KB = HE$ [I, 4]. uerum etiam $K\Theta = HZ$; et angulos rectos comprehendunt. itaque $\Theta B = ZE$ [id.]. rursus quoniam duae rectae AK, $K\Theta$ duabus ΔH, HZ aequales sunt, et angulos rectos comprehendunt, erit $A\Theta = Z\Delta$ [id.]. uerum etiam $AB = \Delta E$. itaque duae rectae ΘA, AB duabus ΔZ, ΔE aequales sunt; et $\Theta B = ZE$. itaque $\angle BA\Theta = E\Delta Z$ [I, 8]. eadem de causa[1]) erit etiam $\angle \Theta A\Lambda = Z\Delta\Gamma$. uerum erat etiam $\angle BA\Lambda = E\Delta\Gamma$.

Ergo[2]) ad datam rectam AB et punctum eius A

---

1) Haec uerba (lin. 13 seq.) satis ostendunt, ea quae sequuntur lin. 14—27 genuina esse non posse; huc adcedit, quod totus ille locus perplexiore sententiarum nexu laborat, quam quo utitur Euclides.

2) Simsonus iure uituperauit, quod nusquam demonstratum est, angulos solidos, qui aequalibus angulis planis eodem ordine contineantur, aequales esse. nam hoc quasi axiomate nititur demonstratio Euclidis. saltim ad similitudinem def. 10 definiri debuerunt aequales anguli solidi.

---

6. ἔστιν PB, comp. b. 7. περιέχουσι Vbφ. ἴση] βάσις Vb et φ (non F). καί] om. V et φ (non F). ZE] ZE ἴση ἐστί Vb; γρ. ἴση ἄρα καὶ ἡ ΘB τῇ ZE mg. m. 1 b. 8. εἰσί Vb, comp. F. 9. περιέχουσι Vb et φ (non F). 10. $Z\Delta$] $\Xi\Delta$ F, ΔZ B. ἔστιν B. 11. ΔZ, ΔE] "ΔZ' ZE, supra alt. Z scr. Δ m. 1 b; litt. ΔZ, Z eras. V; $Z\Delta$, ΔE B. εἰσί V, comp. Fb. 14. $\Theta A\Lambda$] $\Theta\Delta A$, corr. m. 1 b. $Z\Delta\Gamma$] ‥ΔZ·Γ⋯ F. 15. $\Delta\Gamma$] $\Lambda\Gamma$, sed corr., b. 16. $K\Lambda$] ΛK F. $\Theta\Lambda$] corr. ex ΘA Fb. 20. δυσίν B. εἰσίν] comp. F, εἰσί PVb. περιέχουσιν] BF, περιέχουσι PVbφ. 22. ἔστιν FB. $K\Theta$] ΘK F. ΛK] e corr. b. 24. περιέχουσι Vb. 25. ἴσαι εἰσίν B. 26. $Z\Gamma$] ΓZ F. γωνία] καὶ γωνία BFVb. 27. $\Theta A\Lambda$] corr. ex ΘBA m. 1 b.

αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ δοθείσῃ στερεᾷ γωνίᾳ τῇ πρὸς τῷ Δ ἴση συνέσταται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

κζ'.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἀναγράψαι.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν στερεον παραλληλεπίπεδον τὸ ΓΔ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ τῷ ΓΔ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἀναγράψαι.

Συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ πρὸς τῷ Γ στερεᾷ γωνίᾳ ἴση ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΒΑΘ, ΘΑΚ, ΚΑΒ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ὑπὸ ΒΑΘ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΓΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΒΑΚ τῇ ὑπὸ ΕΓΗ, τὴν δὲ ὑπὸ ΚΑΘ τῇ ὑπὸ ΗΓΖ· καὶ γεγονέτω ὡς μὲν ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΚ, ὡς δὲ ἡ ΗΓ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως ἡ ΚΑ πρὸς τὴν ΑΘ. καὶ δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΘ. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΘΒ παραλληλόγραμμον καὶ τὸ ΑΛ στερεόν.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΚ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΓΗ, ΒΑΚ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΕ παραλληλόγραμμον τῷ ΚΒ παραλληλο-

---

2. συνίσταται, ι in ras., V; συνεστάτω φ. ποιῆσαι] δεῖξαι, mg. γρ. ποιῆσαι, m. 1 Vb. 3. κζ'] m. rec. F. 5. παραλληλωεπιπ. corr. in παραλληλοεπιπ. b, qui hanc formam lin. 6

dato angulo solido, qui ad Δ positus est, aequalis angulus constructus est; quod oportebat fieri.

XXVII.

In data recta solidum parallelepipedum construere dato solido parallelepipedo simile et similiter positum.

Sit data recta AB et datum solidum parallelepipedum $\Gamma\Delta$. oportet igitur in data recta AB solidum parallelepipedum construere dato solido parallelepipedo $\Gamma\Delta$ simile et similiter positum.

construatur enim ad rectam AB et punctum eius A solido angulo, qui ad Γ positus est, aequalis angulus angulis $BA\Theta$, ΘAK, KAB comprehensus, ita ut sit $\angle BA\Theta = E\Gamma Z$, $BAK = E\Gamma H$, $KA\Theta = H\Gamma Z$ [prop. XXVI]. et fiat

$$E\Gamma : \Gamma H = BA : AK, \quad H\Gamma : \Gamma Z = KA : A\Theta.$$

quare etiam ex aequo erit $E\Gamma : \Gamma Z = BA : A\Theta$ [V, 22]. et expleantur parallelogrammum ΘB et solidum $A\Lambda$.

et quoniam est $E\Gamma : \Gamma H = BA : AK$, et latera aequales angulos $E\Gamma H$, BAK comprehendentia proportionalia sunt[1]), erit $HE \sim KB$. eadem de causa

1) H. e. „et quoniam aequales sunt anguli, quos latera haec proportionalia comprehendunt". de eo, quod inde concluditur, esse $HE \sim KB$, cfr. uol. II p. 153 not. 2.

praebet. 8. εὐθεῖα] postea add. m. 1 P. 14. γωνίᾳ στερεᾷ Vb. 15. τῶν] τῶν ὑπό Vb. 17. τὴν δέ] καὶ ἔτι τήν Theon (BFVb). 18. $H\Gamma Z$] litt. $H\Gamma$ e corr. b. τήν] om. FVb. 19. $H\Gamma$] ΓH Vb. 21. ΓE P. $Z\Gamma$ P. 22. ΘB] Pb et corr. ex $\Theta\Gamma$ m. 1 V; $B\Theta$ B et ut uidetur F ($HE\varphi$). 23. $A\Lambda$] in ras. V, $A\Lambda$b. 24. ἡ] (prius) supra m. 1 F. τὴν ΓH] mg. m. 1 V, Γ litt. e corr. b. 26. αἱ] καί comp. b, καί corr. in αἱ V. Ante ἄρα eras. γ m. 1 P. 27. ἐστίν P. KB] litt. B e corr. b. παραλληλογράμμῳ P.

γράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν ΚΘ παραλληλόγραμμον τῷ ΗΖ παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστι καὶ ἔτι τὸ ΖΕ τῷ ΘΒ· τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ ΓΔ στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῦ ΑΛ στερεοῦ ὅμοιά ἐστιν. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τέ ἐστι καὶ ὅμοια, τὰ δὲ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τέ ἐστι καὶ ὅμοια· ὅλον ἄρα τὸ ΓΔ στερεὸν ὅλῳ τῷ ΑΛ στερεῷ ὅμοιόν ἐστιν.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς ΑΒ τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ τῷ ΓΔ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον ἀναγέγραπται τὸ ΑΛ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

κη΄.

Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων, δίχα τμηθήσεται τὸ στερεὸν ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου.

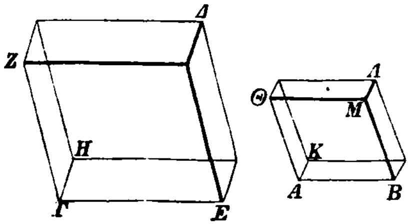
Στερεὸν γὰρ παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΒ ἐπιπέδῳ τῷ ΓΔΕΖ τετμήσθω κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων τὰς ΓΖ, ΔΕ· λέγω, ὅτι δίχα τμηθήσεται τὸ ΑΒ στερεὸν ὑπὸ τοῦ ΓΔΕΖ ἐπιπέδου.

Ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΓΗΖ τρίγωνον τῷ ΓΖΒ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΑΔΕ τῷ ΔΕΘ, ἔστι δὲ καὶ τὸ μὲν ΓΑ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΒ ἴσον· ἀπεναντίον γάρ· τὸ δὲ ΗΕ τῷ ΓΘ, καὶ τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περι-

---

1. μέν] mg. m. 1 V. 3. τοῦ] mg. m. 1 V; ante hoc uocab. rep. lin. 2. ὅμοιόν — 3. τοῦ, sed delet. m. 1 V. 4. τρισίν B. 6. τε] om. P. τὰ δέ — 7. ὅμοια] punctis del. b, del. m. 2 B, om. FV. 6. τρισίν P. 9. ἄρα δοθείσης Theon (BFVb). 12. ποιῆσαι] δεῖξαι PFVb; γρ. ποιῆσαι mg. m. 1 b. 13. λβ΄ F. 16. -μη- in ras. m. 1 P. 21. ὑπὸ τοῦ ΓΔ in ras. m. 1 B. 23. ΓΖ΄΄Β΄ Vb. ἔστιν P. καί] καὶ ὡς P. 24. ΒΕ F.

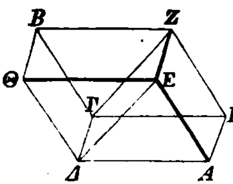
erit etiam $K\Theta \sim HZ$ et $ZE \sim \Theta B$. itaque tria parallelogramma solidi $\Gamma\varDelta$ tribus parallelogrammis solidi $A\varLambda$ similia sunt. uerum in utroque solido tria parallelogramma tribus, quae iis opposita sunt, aequalia[1]) sunt et similia. itaque $\Gamma\varDelta \sim A\varLambda$ [def. 9].



Ergo in data recta AB dato solido parallelepipedo $\Gamma\varDelta$ simile et similiter positum constructum est $A\varLambda$; quod oportebat fieri.

XXVIII.

Si solidum parallelepipedum secundum diagonales planorum inter se oppositorum plano secatur, solidum plano in duas partes aequales secabitur.



Nam solidum parallelepipedum AB plano $\Gamma\varDelta EZ$ secundum diagonales planorum ΓZ, $\varDelta E$ inter se oppositorum secetur. dico, solidum AB plano $\Gamma\varDelta EZ$ in duas partes aequales secari.

Quoniam enim $\Gamma HZ = \Gamma ZB$ et $A\varDelta E = \varDelta E\Theta$ [I, 34], et praeterea $\Gamma A = BE$ (nam inter se opposita sunt) et $HE = \Gamma\Theta$ [prop. XXIV], prisma duobus

1) Ex prop. XXIV. cur eadem similia sint, supra dictum est p. 77 not. hoc solo utitur; nam ut adhibeatur def. 9, satis est demonstrare, duo solida omnibus planis similibus contineri.

εχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΓΗΖ, ΑΔΕ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΗΕ, ΑΓ, ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΓΖΒ, ΔΕΘ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΓΘ, ΒΕ, ΓΕ· ὑπὸ γὰρ ἴσων ἐπιπέδων περιέχονται τῷ τε πλήθει καὶ τῷ μεγέθει. ὥστε ὅλον τὸ ΑΒ στερεὸν δίχα τέτμηται ὑπὸ τοῦ ΓΔΕΖ ἐπιπέδου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κθ'.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΑΒ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΓΜ, ΓΝ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ ΑΗ, ΑΖ, ΛΜ, ΛΝ, ΓΔ, ΓΕ, ΒΘ, ΒΚ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν ἔστωσαν τῶν ΖΝ, ΔΚ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΜ στερεὸν τῷ ΓΝ στερεῷ.

Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν ΓΘ, ΓΚ, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ ἑκατέρᾳ τῶν ΔΘ, ΕΚ· ὥστε καὶ ἡ ΔΘ τῇ ΕΚ ἐστιν ἴση. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΕΘ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΕ λοιπῇ τῇ ΘΚ ἐστιν ἴση. ὥστε καὶ τὸ μὲν ΔΓΕ τρίγωνον τῷ ΘΒΚ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, τὸ δὲ ΔΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΘΝ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΖΗ τρίγωνον τῷ ΜΛΝ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ

---

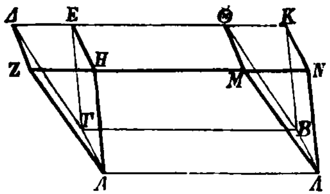
7. τέμνεται BF. 9. λγ' F. 15. ὑπό] ὑ- e corr. m. 2 b. 16. ΑΗ] e corr. b, ΑΖ BFV. ΑΖ] ΑΗ BF et e corr. V. 20. ΓΒ] ΒΓ F. 23. ΘΒΚ] ΘΒ''Κ'' F, ΘΚΒ

triangulis $\Gamma H Z$, $A \Delta E$ et tribus parallelogrammis HE, $A\Gamma$, ΓE comprehensum prismati duobus triangulis $\Gamma Z B$, $\Delta E\Theta$ et tribus parallelogrammis $\Gamma\Theta$, BE, ΓE comprehenso aequale est; nam planis et numero et magnitudine aequalibus comprehenduntur [def. 10].[1]) quare totum solidum AB plano $\Gamma\Delta EZ$ in duas partes aequales sectum est; quod erat demonstrandum.

XXIX.

Solida parallelepipeda in eadem basi collocata et eandem altitudinem habentia, quorum rectae eminentes in iisdem rectis sint, inter se aequalia sunt.

In eadem basi AB solida parallelepipeda ΓM, ΓN collocata sint eandem altitudinem habentia, quorum rectae eminentes AH, AZ, ΛM, ΛN, $\Gamma\Delta$, ΓE, $B\Theta$, BK in iisdem sint rectis ZN, ΔK. dico, esse $\Gamma M = \Gamma N$.



Nam quoniam utrumque $\Gamma\Theta$, ΓK parallelogrammum est, erit ΓB utrique $\Delta\Theta$, EK aequalis [I, 34]. quare etiam $\Delta\Theta = EK$. auferatur, quae communis est, $E\Theta$. itaque $\Delta E = \Theta K$. quare etiam

$$\Delta\Gamma E = \Theta BK \text{ [I, 4] et } \Delta H = \Theta N \text{ [I, 36].}$$

eadem de causa erit etiam $AZH = M\Lambda N$. uerum

1) Cum hic nihil ad rem pertineat, quod parallelogramma, quae solida comprehendunt, et ipsa solida eadem similia sunt, parte sola definitionis 10 usus est Euclides.

---

e corr. V. 24. ἐστί PB, comp. Fb. ἐστίν, τό] ἐστι τό, corr. ex ἔστινο V. 25. AZH] AHZ BF.

τὸ μὲν ΓΖ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΜ παραλληλογράμμῳ ἴσον, τὸ δὲ ΓΗ τῷ ΒΝ· ἀπεναντίον γάρ· καὶ τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΑΖΗ, ΔΓΕ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΑΔ, ΔΗ, ΓΗ ἴσον ἐστὶ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΜΛΝ, ΘΒΚ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΒΜ, ΘΝ, ΒΝ. κοινὸν προσκείσθω τὸ στερεόν, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΗΕΘΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΜ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ὅλῳ τῷ ΓΝ στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ἴσον ἐστίν.

Τὰ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λ΄.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΑΒ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΓΜ, ΓΝ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ ΑΖ, ΑΗ, ΛΜ, ΛΝ, ΓΔ, ΓΕ, ΒΘ, ΒΚ μὴ ἔστωσαν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΜ στερεὸν τῷ ΓΝ στερεῷ.

Ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ αἱ ΝΚ, ΔΘ καὶ συμπιπτέ-

---

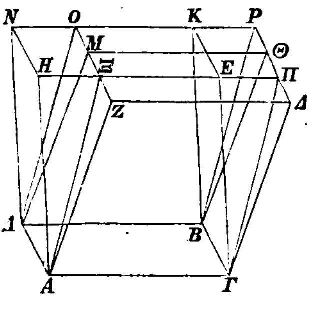
2. τό] corr. ex τῷ m. 1 F. 3. μὲν ὑπὸ δύο Vb. 4. ΔΓΕ] ΔΕΓ B. 5. ΓΗ] ΗΓ V, et supra scr. m. 1, corr. in ΓΗ m. 2 b. 6. ΜΛΝ] Ν e corr. V. 7. τῶν] sustulit macula in V, supra est ῶ add. ν m. 2. ΘΝ] ΝΘ BF et e corr. V. 9. τὸ ΗΕΘΜ] mg. (addito γρ.) b; in textu

etiam $ΓZ = BM$, $ΓH = BN$ [prop. XXIV]; nam inter se opposita sunt. itaque etiam prisma duobus triangulis $ΔZH$, $ΔΓE$ et tribus parallelogrammis $ΑΔ$, $ΔH$, $ΓH$ comprehensum prismati duobus triangulis $MΛN$, $ΘBK$ et tribus parallelogrammis BM, $ΘN$, BN comprehenso aequale est. commune adiiciatur solidum, cuius basis est $ΛB$ parallelogrammum, ei autem oppositum $HEΘM$. itaque $ΓM = ΓN$.

Ergo solida parallelepipeda in eadem basi collocata et eandem altitudinem habentia, quorum rectae eminentes in iisdem rectis sint, inter se aequalia sunt; quod erat demonstrandum.

XXX.

Solida parallelepipeda in eadem basi collocata et eandem altitudinem habentia, quorum rectae eminentes in iisdem rectis non sint, inter se aequalia sunt.



In eadem basi $ΛB$ solida sint parallelepipeda $ΓM$, $ΓN$ eandem altitudinem habentia, quorum rectae eminentes $ΛZ$, $ΛH$, $ΛM$, $ΛN$, $ΓΔ$, $ΓE$, $BΘ$, BK in iisdem rectis non sint. dico, esse $ΓM = ΓN$.

producantur enim NK, $ΔΘ$ et inter se concurrant

---

ras. est. 10. στερε- in ras. m. 1 B. 11. $ΓN$] N e corr. F. ἐστί V, comp. Fb. 16. λ'] om. φ. 21. ἔστωσαν BFV. παράλληλα ἐπίπεδα F. 22. αἱ] supra scr. m. rec. P. 26. NK] N e corr. m. 2 b.

τωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Ρ, καὶ ἔτι ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΖΜ, ΗΕ ἐπὶ τὰ Ο, Π, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΑΞ, ΔΟ, ΓΠ, ΒΡ. ἴσον δή ἐστι τὸ ΓΜ στερεόν, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΓΒΔ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΖΔΘΜ, τῷ ΓΟ στερεῷ, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΓΒΔ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΞΠΡΟ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΑΓΒΔ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ ΑΖ, ΑΞ, ΔΜ, ΔΟ, ΓΔ, ΓΠ, ΒΘ, ΒΡ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν τῶν ΖΟ, ΔΡ. ἀλλὰ τὶ ΓΟ στερεόν, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΓΒΔ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΞΠΡΟ, ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΝ στερεῷ, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΓΒΔ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΗΕΚΝ· ἐπί τε γὰρ πάλιν τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΑΓΒΔ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτο ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ ΑΗ, ΑΞ, ΓΕ; ΓΠ, ΔΝ, ΔΟ, ΒΚ, ΒΡ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν τῶν ΗΠ, ΝΡ. ὥστε καὶ τὸ ΓΜ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΝ στερεῷ.

Τὰ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

---

3. *ἔστιν* P. 5. *ΖΔΘΜ*] *Δ* e corr. b, *ΖΔΜΘ* F?, sed *ΜΘ* euan.; corr. in mg. Pro *τὸ ΖΔΘΜ* in B est *τὸ ΞΠΡΟ*, sed del. *τὸ ΖΔΘΜ* — 6. *ΞΠΡΟ*] mg. m. rec. B. 5. *ΑΓΒ* B. 6. *τε*] eras. V. 7. *ἐστι* comp. V. *ΑΓΒΔ*] *Δ* e corr., supra scr. *Α* m. 1 b. *καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος*] August; om. Pφ; *καί* BVb. 8. *ὧν*] om. φ; *αὐτῶν* B et corr. ex *αὐτῶν ὧν* m. 2 V; *αὐτῶν ὧν* b. *ΑΖ*] corr. ex *ΑΞ* m. 2 V. 9. *ΓΠ*] *ΥΠ*, sed *Υ* e corr. m. 2 b; *ΓΕ* P, sed corr. m. 2 euan. 10. *μέν*] om. B, supra add. postea m. 1 F. *ἐστι*] om. FVb. 11. *ΑΓΒΔ*] *Γ* in ras. m. 2 B. *ΞΠ″ΟΡ′* V, *ΞΠΡ′ Ο′* b. 12. *μέν*] om. P. *μὲν τὸ ΑΓΒΔ*] om. φ. 13. *ἐπί*] corr.

in P, et praeterea producantur ZM, HE ad O, Π, et ducantur $\Lambda\Xi$, ΛO, $\Gamma\Pi$, BP. itaque solidum ΓM, cuius basis est parallelogrammum $\Lambda\Gamma B\Lambda$, ei autem oppositum $Z\Delta\Theta M$, aequale est solido ΓO, cuius basis est parallelogrammum $\Lambda\Gamma B\Lambda$, ei autem oppositum $\Xi\Pi PO$; nam in eadem basi sunt $\Lambda\Gamma B\Lambda$ et sub eadem altitudine, et rectae eorum eminentes ΛZ, $\Lambda\Xi$, ΛM, ΛO, $\Gamma\Delta$, $\Gamma\Pi$, $B\Theta$, BP in iisdem rectis sunt ZO, ΔP [prop. XXIX]. sed solidum ΓO, cuius basis est parallelogrammum $\Lambda\Gamma B\Lambda$, ei autem oppositum $\Xi\Pi PO$, aequale est solido ΓN, cuius basis est parallelogrammum $\Lambda\Gamma B\Lambda$, ei autem oppositum $HEKN$; nam rursus in eadem basi sunt $\Lambda\Gamma B\Lambda$ et sub eadem altitudine, et rectae eorum eminentes ΛH, $\Lambda\Xi$, ΓE, $\Gamma\Pi$, ΛN, ΛO, BK, BP in iisdem rectis sunt $H\Pi$, NP [id.]. quare erit $\Gamma M = \Gamma N$.

Ergo solida parallelepipeda in eadem basi collocata et eandem altitudinem habentia, quorum rectae eminentes in iisdem rectis non sint, inter se aequalia sunt; quod erat demonstrandum.

---

ex *ἐπεί* V. 14. *πάλιν*] om. BF. *καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος*] August; om. PF; *καί* BVb. 15. *ὧν*] *αὐτῶν* B et corr. ex *αὐτῶν ὧν* V; *αὐτὸ ὧν* b. 16. $\Gamma\Pi$] e corr. m. 2 V, $\Gamma''\Pi'$ b. ΛN] N e corr. m. 2 V. 19. *τῆς αὐτῆς βάσεως στερεά*] P; *τ. α. β. ὄντα στερεά* in ras. V, *τῆς αὐτῆς βάσεως* b; *ἴσων βάσεων στερεά* BF et mg. Vb m. 1. 20. *αἱ*] *καί* P, supra scr. *αἱ* m. 2. 21. *αἰτῶν*] om. F. *ἐστίν*] *εἰσίν* BF.

λα'.

Τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΕ, ΓΖ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΕ στερεὸν τῷ ΓΖ στερεῷ.

Ἔστωσαν δὴ πρότερον αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ ΘΚ, ΒΕ, ΑΗ, ΛΜ, ΟΠ, ΔΖ, ΓΞ, ΡΣ πρὸς ὀρθὰς ταῖς ΑΒ, ΓΔ βάσεσιν, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῇ ΓΡ εὐθεῖα η ΡΤ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΡΤ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ρ τῇ ὑπὸ ΑΛΒ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΤΡΥ, καὶ κείσθω τῇ μὲν ΑΛ ἴση ἡ ΡΤ, τῇ δὲ ΛΒ ἴση ἡ ΡΥ, καὶ συμπεπληρώσθω ἥ τε ΡΧ βάσις καὶ τὸ ΨΥ στερεόν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΤΡ, ΡΥ δυσὶ ταῖς ΑΛ, ΛΒ ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιον τὸ ΡΧ παραλληλόγραμμον τῷ ΘΛ παραλληλογράμμῳ. καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση μὲν ἡ ΑΛ τῇ ΡΤ, ἡ δὲ ΛΜ τῇ ΡΣ, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν, ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΡΨ παραλληλόγραμμον τῷ ΑΜ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΛΕ τῷ ΣΥ ἴσον τέ ἐστι καὶ ὅμοιον· τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ ΑΕ στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῦ ΨΥ στερεοῦ ἴσα τέ ἐστι καὶ ὅμοια. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα

1. λα'] om. φ. 5. ΑΒ] Α e corr. b. 7. ΑΕ] Ε e corr. b. 9. ΡΣ] Σ e corr. B. ταῖς] e corr. m. 2 B. ΑΒ] Α e corr. b. 10. βάσεσι V b Dein add. B: ἡ δὲ ὑπὸ ΑΛΒ τῇ ὑπὸ ΓΡΔ ἄνισος. τῇ] τῆς F b. 12. ΑΛΒ] Α e corr. m. 2 b. 13. ΑΛ] corr. ex ΗΛ et m. 1 et m. 2 b. 14. ΒΛ F. 16. ΑΛ] ut lin. 13 b. εἰσί B V b, comp. F. 18. ΘΛ] Θ e corr. b; ΛΘ F, et V, corr. ex ΘΛ. 19. μὲν ἡ] ἡ μέν B.

XXXI.[1])

Solida parallelepipeda in aequalibus basibus collocata et eandem altitudinem habentia inter se aequalia sunt.

Solida parallelepipeda AE, ΓZ in aequalibus basibus AB, $\Gamma\Delta$ collocata eandem altitudinem habeant. dico, esse $AE = \Gamma Z$.

Iam prius rectae eminentes ΘK, BE, AH, ΛM, $O\Pi$, ΔZ, $\Gamma\Xi$, $P\Sigma$ ad bases AB, $\Gamma\Delta$ perpendiculares sint, et recta ΓP in directum producatur, ut fiat PT, et ad rectam PT et punctum eius P angulo ΛAB aequalis construatur $\angle\, TP\Upsilon$ [I, 23], et ponatur $PT = A\Lambda$, $P\Upsilon = AB$, et expleantur basis PX et solidum $\Psi\Upsilon$. et quoniam duae rectae TP, $P\Upsilon$ duabus $A\Lambda$, AB aequales sunt, et angulos aequales comprehendunt, parallelogrammum PX parallelogrammo $\Theta\Lambda$ et aequale et simile est [VI, 14]. et rursus quoniam $A\Lambda = PT$, $\Lambda M = P\Sigma$, et rectos angulos comprehendunt, parallelogrammum $P\Psi$ parallelogrammo ΛM aequale et simile est [id.]. eadem de causa etiam ΛE parallelogrammo $\Sigma\Upsilon$ et aequale et simile est. itaque tria parallelogramma solidi AE tribus parallelogrammis solidi $\Psi\Upsilon$ et aequalia et similia sunt. uerum in utro-

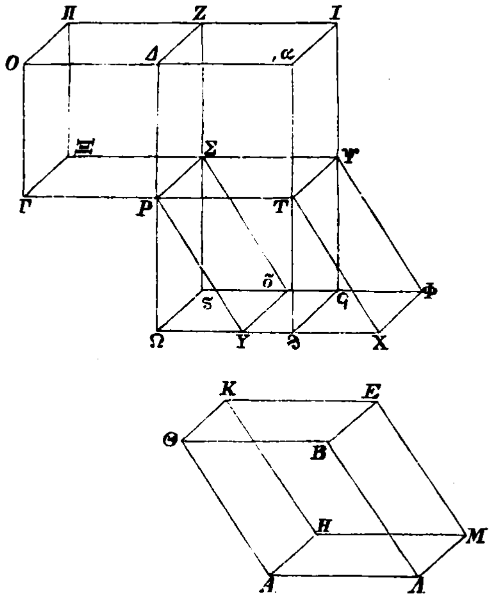
1) Prior figura huius propositionis ita prorsus descripta est, ut in cod. P inuenitur, in quo in mg. add. m. 1: γρ. ἐν ἄλλοις ,γ (id quod ad litt. siue compendium ō referendum est), nisi quod solidum AE ibi non satis adcurate descriptum hic emendatum est.

$A\Lambda$] A e corr. b. 21. ΛM] Λ e corr. b. 22. $\Sigma\Upsilon$] Υ in ras. B. 23. τὰ τρία F. 24. ἐστιν P. 25. μέν] supra scr. F et m. 2 B. ὑπεναντίον F. Ante ἴσα in b τὰ δὲ τρία τρισὶ τοῖς ὑπεναντίον (υ corr. in α m. 1) del. m. 2.

τέ ἐστι καὶ ὅμοια, τὰ δὲ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον· ὅλον ἄρα τὸ ΑΕ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ὅλῳ τῷ ΨΥ στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ἴσον ἐστίν. διήχθωσαν αἱ ΔΡ, ΧΥ καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Ω, καὶ διὰ τοῦ Τ τῇ ΔΩ παράλληλος ἤχθω ἡ ,αΤϡ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΟΔ κατὰ τὸ ,α, καὶ συμπεπληρώσθω τὰ ΩΨ, ΡΙ στερεά. ἴσον δή ἐστι τὸ ΨΩ στερεόν, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΡΨ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ Ωϙ, τῷ ΨΥ στερεῷ, οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΨ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΥΦ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΡΨ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ ΡΩ, ΡΥ, Τϡ, ΤΧ, Σϛ, Σο͂, Ψϙ, ΨΦ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν τῶν ΩΧ, ϛΦ. ἀλλὰ τὸ ΨΥ στερεὸν τῷ ΑΕ ἐστιν ἴσον·

1. τὰ δὲ τρία — ἀπεναντίον] om. BFVb. 2. στερεόν] bis P, alterum del. m. 1, sed renou. π. 3. ἐστί PBV, comp. Fb. 4. ΔΡ] e corr. V. 5. ΔΩ] Δ e corr. V. ,αΤϡ] τϡ post ras. 1 litt. FV, τϡ B, eras. ϡ, λτρ b, τϡ mg. m. 2. 6. ,α] corr. ex λ m. 2b. 9. ωϙ B, eras. ϙ; ω̅ϛ̅ b, corr. m. 2. 10. ΥΦ] e corr. m. 2 b. 11. εἰσι] comp. in ras. V, corr. ex ἐστι b; εἰσιν B. 12. ὧν] PFVb, καὶ αὐτῶν B; γρ. καὶ αὐτῶν καί (comp.) mg. b m. 1. αἱ] (alt.) om. B. Τϡ] ϡ in ras. FV, e corr. m. 2b. ΤΧ] in ras. V, ras. 4 litt. b. 13. Σϛ] in ras. V, σξ F. Σο͂] σ̅ο̅ P; σϛ F, supra scr. ση m. 1; σγ in ras. V et corr. ex εγ B; σ̅γ̅'' b (γ e corr.). Ψϙ] ϙ e corr. b. 14. τῷ] post ras. 1 litt. b; corr. ex τό m. 1 P.

que solido tria parallelogramma tribus, quae iis opposita sunt, et aequalia et similia sunt [p. 77 not. 1]. itaque totum solidum parallelepipedum AE toti solido parallelepipedo $\Psi\Upsilon$ aequale est [def. 10]. edu-



cantur $\varDelta P$, $X\Upsilon$ et inter se concurrant in Ω, et per T rectae $\varDelta\Omega$ parallela ducatur $,\alpha T ϡ$, et producatur $O\varDelta$ ad $,\alpha$, et expleantur solida $\Omega\Psi$, PI. itaque solidum $\Psi\Omega$, cuius basis est $P\Psi$ parallelogrammum, ei autem oppositum $\Omega ϙ$, solido $\Psi\Upsilon$, cuius basis est $P\Psi$ parallelogrammum, ei autem oppositum $\Upsilon\Phi$, aequale est; nam et in eadem basi sunt $P\Psi$ et sub eadem altitudine, et rectae eorum eminentes $P\Omega$, $P\Upsilon$, $Tϡ$, TX, $\Sigma ϛ$, $\Sigma \tilde{o}$, $\Psi ϙ$, $\Psi\Phi$ in iisdem rectis sunt ΩX, $ϛ\Phi$ [prop. XXIX].

καὶ τὸ ΨΩ ἄρα στερεὸν τῷ ΑΕ στερεῷ ἐστιν ἴσον. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΡΥΧΤ παραλληλόγραμμον τῷ ΩΤ παραλληλογράμμῳ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΡΤ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΡΤ, ΩΧ· ἀλλὰ τὸ ΡΥΧΤ τῷ ΓΔ ἐστιν ἴσον, ἐπεὶ καὶ τῷ ΑΒ, καὶ τὸ ΩΤ ἄρα παραλληλόγραμμον τῷ ΓΔ ἐστιν ἴσον. ἄλλο δὲ τὸ ΔΤ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΔΤ, οὕτως ἡ ΩΤ πρὸς τὴν ΔΤ. καὶ ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΓΙ ἐπιπέδῳ τῷ ΡΖ τέτμηται παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ὡς ἡ ΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΔΤ βάσιν, οὕτως τὸ ΓΖ στερεὸν πρὸς τὸ ΡΙ στερεόν. διὰ τὰ αὐτὰ δή, ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΩΙ ἐπιπέδῳ τῷ ΡΨ τέτμηται παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ὡς ἡ ΩΤ βάσις πρὸς τὴν ΤΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΩΨ στερεὸν πρὸς τὸ ΡΙ. ἀλλ' ὡς ἡ ΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΔΤ, οὕτως ἡ ΩΤ πρὸς τὴν ΔΤ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΓΖ στερεὸν πρὸς τὸ ΡΙ στερεόν, οὕτως τὸ ΩΨ στερεὸν πρὸς τὸ ΡΙ. ἑκάτερον ἄρα τῶν ΓΖ, ΩΨ στερεῶν πρὸς τὸ ΡΙ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΖ στερεὸν τῷ ΩΨ στερεῷ. ἀλλὰ τὸ ΩΨ τῷ ΑΕ ἐδείχθη ἴσον· καὶ τὸ ΑΕ ἄρα τῷ ΓΖ ἐστιν ἴσον.

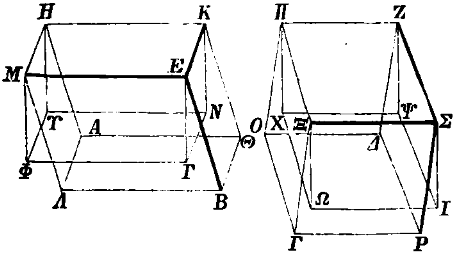
Μὴ ἔστωσαν δὴ αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ ΑΗ, ΘΚ, ΒΕ, ΛΜ, ΓΝ, ΟΠ, ΔΖ, ΡΣ πρὸς ὀρθὰς ταῖς ΑΒ, ΓΔ βάσεσιν· λέγω πάλιν, ὅτι ἴσον τὸ ΑΕ στερεὸν τῷ

2. ΡΥΧΤ] Υ e corr. b. 4. εἰσιν B. ΡΤ] (prius) ΡΓ B. 5. ἴσον ἐστίν BF. 6. ΑΒ] Α e corr. m. 1 b. ΩΤ] Τ e corr. m. 2 P. ἄρα] supra scr. m. rec. B. 7. ΓΔ] ΔΓ F; "Δ'Γ Vb. 11. οὕτω PB. 12. τό] (alt.) e corr. F. 13. ΩΙ] Ι add. m. 2 b. 15. ΤΔ] Τ e corr. m. 2 P. 16. οὕτω B. ἀλλ' ὡς — 19. ΡΙ] om. F. 17. ΩΤ βάσις P. ΔΤ] in ras. V;

uerum $\Psi\Upsilon = AE$. itaque etiam $\Psi\Omega = AE$. et quoniam $P\Upsilon XT = \Omega T$ (nam et in eadem basi sunt PT et in iisdem parallelis PT, ΩX [I, 35]), sed $P\Upsilon XT = \Gamma\Delta$, quoniam $P\Upsilon XT = AB$, erit etiam $\Omega T = \Gamma\Delta$. aliud autem quoduis est ΔT. itaque $\Gamma\Delta : \Delta T = \Omega T : \Delta T$ [V, 7]. et quoniam solidum parallelepipedum ΓI sectum est plano PZ parallelo planis oppositis, erit $\Gamma\Delta : \Delta T = \Gamma Z : PI$ [prop. XXV]. iam eadem de causa, quoniam solidum parallelepipedum ΩI sectum est plano $P\Psi$ parallelo planis oppositis, erit $\Omega T : T\Delta = \Omega\Psi : PI$ [id.]. sed $\Gamma\Delta : \Delta T = \Omega T : \Delta T$. quare etiam $\Gamma Z : PI = \Omega\Psi : PI$. itaque utrumque solidum ΓZ, $\Omega\Psi$ ad PI eandem rationem habet. quare $\Gamma Z = \Omega\Psi$ [V, 9]. uerum demonstratum est, esse $\Omega\Psi = AE$. quare etiam

$$AE = \Gamma Z.$$

iam rectae eminentes AH, ΘK, BE, ΛM, ΓN,



$O\Pi$, ΔZ, $P\Sigma$ ad bases AB, $\Gamma\Delta$ perpendiculares ne sint. rursus dico, esse $AE = \Gamma Z$. ducantur enim a

$T\Delta$ B; " $T'\Delta$ b. 19. PI] I euan. V. Dein add. στερεόν Theon (BFVb). 20. στερεόν B, corr. m. rec. λόγον ἔχει B. 21. ἐστίν P. τό] (alt.) mut. in τῷ b; τῷ BV. 22. $\Omega\Psi$] Ω e corr. b. τῷ] mut. in τό b, τό BV; οὕτως ἐν ἄλλῳ mg. m. 1 Vb. 23. ἴσον ἐστίν Vb. Dein add. ὅπερ ἔδει δεῖξαι PFVb. 25. ΓN] N in ras. V. 26. βάσεσι b et supra scr. m. 2 V. ἴσον ἐστί Theon (BFVb).

ΓΖ στερεῷ. ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Κ, Ε, Η, Μ, Π, Ζ, Ν, Σ σημείων ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετοι αἱ ΚΞ, ΕΤ, ΗΥ, ΜΦ, ΠΧ, ΖΨ, ΝΩ, ΣΙ, καὶ συμβαλλέτωσαν τῷ ἐπιπέδῳ κατα τὰ Ξ, Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω, Ι σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΞΤ, ΞΥ, ΥΦ, ΤΦ, ΧΨ, ΧΩ, ΩΙ, ΙΨ. ἴσον δή ἐστι τὸ ΚΦ στερεὸν τῷ ΠΙ στερεῷ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΚΜ, ΠΣ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι πρὸς ὀρθάς εἰσι ταῖς βάσεσιν. ἀλλὰ τὸ μὲν ΚΦ στερεὸν τῷ ΑΕ στερεῷ ἐστιν ἴσον, τὸ δὲ ΠΙ τῷ ΓΖ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὔκ εἰσιν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν. καὶ τὸ ΑΕ ἄρα στερεὸν τῷ ΓΖ στερεῷ ἐστιν ἴσον.

Τὰ ἄρα ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λβ'.

Τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστω ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος στερεὰ παραλληλεπίπεδα τα ΑΒ, ΓΔ· λέγω, ὅτι τὰ ΑΒ, ΓΔ στερεα παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις, τουτέστιν ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ βάσις πρὸς τὴν ΓΖ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΒ στερεὸν προς το ΓΔ στερεόν.

---

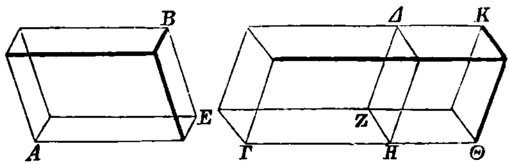
2. *Π*] e corr. b. *Ν*] in ras. V. 3. *ΚΞ*] *ΚΖ* F; *Ξ* in ras. V. *ΠΧ*] *Π* in ras. m. 1 P. *ΝΩ*] *Ν* in ras. V. 4. *ΣΥ* P. *συμβαλέτωσαν* V. *Ξ*] in ras. V. *Τ*, *Τ* b. 5. *σημείοι* B, *ω* in ras. 6. *ΞΤ*] *Ξ* in ras. V. *ΞΥ*] *Ξ* in ras. V; *ΥΦ* F. *ΤΦ*] *ΞΥ* F. *ΙΨ*] *ΩΨ* b. 7. *ΚΦ*] *Φ* e corr. V. 8. *ΠΣ*] corr. ex *ΠΕ* m. 1 b. *ὑπό*] *ἐπί* b; corr. mg. m. 1. 9. *εἴσιν* B. 11. *εἴσιν* P. 12. *ὑπό*] *ἐπί* b; corr. mg.

punctis K, E, H, M, Π, Z, N, Σ ad planum subiacens perpendiculares $K\Xi$, ET, $H\Upsilon$, $M\Phi$, ΠX, $Z\Psi$, $N\Omega$, ΣI, et cum plano in punctis Ξ, T, Υ, Φ, X, Ψ, Ω, I concurrant, et ducantur ΞT, $\Xi\Upsilon$, $\Upsilon\Phi$, $T\Phi$, $X\Psi$, $X\Omega$, ΩI, $I\Psi$. iam erit $K\Phi = \Pi I$; nam in aequalibus basibus sunt KM, $\Pi\Sigma$ et sub eadem altitudine, et rectae eorum eminentes ad bases perpendiculares sunt [per priorem partem huius prop.]. uerum $K\Phi = AE$, $\Pi I = \Gamma Z$; nam et in eadem basi sunt et sub eadem altitudine, et rectae eorum eminentes in iisdem rectis non sunt [prop. XXX]. itaque etiam $AE = \Gamma Z$.

Ergo solida parallelepipeda in aequalibus basibus collocata et eandem altitudinem habentia inter se aequalia sunt; quod erat demonstrandum.

XXXII.

Solida parallelepipeda, quae eandem habent altitudinem, inter se eandem rationem habent quam bases.



Solida parallelepipeda AB, $\Gamma\Delta$ eandem altitudinem habeant. dico, solida parallelepipeda AB, $\Gamma\Delta$ eandem inter se rationem habere quam bases, hoc est, esse $AE : \Gamma Z = AB : \Gamma\Delta$.

m. 1. 13. στερεὸν ἄρα b. 14. ἴσον ἐστίν b. 18. λβ′] om. φ. 19. παραλληλοεπίπεδα, eras. ο, V; item lin. 22. 21. παραλληλοεπίπεδα V, ut p. 100, 3, 6. 23. ἐστίν] om. φ. βάσις] om. FV. 25. στερεόν] (prius) om. V.

Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ την ΖΗ τῷ ΑΕ ἴσον τὸ ΖΘ, καὶ ἀπὸ βάσεως μὲν τῆς ΖΘ, ὕψους δὲ τοῦ αὐτοῦ τῷ ΓΔ στερεὸν παραλληλεπίπεδον συμπεπληρώσθω το ΗΚ. ἴσον δή ἐστι τὸ ΑΒ στερεον τῷ ΗΚ στερεῷ· ἐπί τε γαρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΑΕ, ΖΘ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτο ὕψος. καὶ ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΓΚ ἐπιπέδῳ τῷ ΔΗ τέτμηται παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΖ βάσις πρὸς την ΖΘ βάσιν, οὕτως το ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΔΘ στερεόν. ἴση δὲ ἡ μὲν ΖΘ βάσις τῇ ΑΕ βάσει, τὸ δὲ ΗΚ στερεὸν τῷ ΑΒ στερεῷ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ ΑΕ βάσις πρὸς τὴν ΓΖ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεόν.

Τὰ ἄρα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λγ'.

Τὰ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλα ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἔστω ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΒ, ΓΔ, ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ ΑΕ τῇ ΓΖ· λέγω, ὅτι το ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ.

Ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ ἐπ' εὐθείας ταῖς ΑΕ, ΗΕ, ΘΕ αἱ ΕΚ, ΕΛ, ΕΜ, καὶ κείσθω τῇ μὲν ΓΖ ἴση ἡ ΕΚ, τῇ δὲ ΖΝ ἴση ἡ ΕΛ, καὶ ἔτι τῇ ΖΡ ἴση ἡ ΕΜ, καὶ συμπεπληρώσθω το ΚΛ παραλληλόγραμμον καὶ το ΚΟ στερεόν.

---

3. τῷ] τό post ins., euan. F; supra scr. V. καὶ συμπ. b. 4. ἐστιν P. 5. τε] om. b. εἰσι] ἐστι B, om. FV.

nam rectae ZH parallelogrammo AE aequale adplicetur $Z\Theta$ [I, 45], et in $Z\Theta$ basi, altitudine autem eadem, qua $\Gamma\Delta$, solidum parallelepipedum expleatur HK. erit igitur $AB = HK$; nam et in aequalibus basibus sunt AE, $Z\Theta$ et sub eadem altitudine [prop. XXXI]. et quoniam solidum parallelepipedum ΓK sectum est plano ΔH parallelo planis oppositis, erit

$$\Gamma Z : Z\Theta = \Gamma\Delta : \Delta\Theta \text{ [prop. XXV].}$$

uerum $Z\Theta = AE$ et $HK = AB$. erit igitur

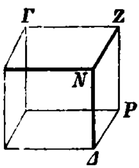
$$AE : \Gamma Z = AB : \Gamma\Delta.$$

Ergo solida parallelepipeda, quae eandem habent altitudinem, inter se eandem rationem habent quam bases; quod erat demonstrandum.

XXXIII.

Similia solida parallelepipeda triplicatam inter se rationem habent quam latera correspondentia.

Similia sint solida parallelepipeda AB, $\Gamma\Delta$, et AE lateri ΓZ correspondens. dico, esse



$$AB : \Gamma\Delta = AE^3 : \Gamma Z^3.$$

producantur enim in directum AE, HE, ΘE, ut fiant EK, $E\Lambda$, EM, et ponatur

$$EK = \Gamma Z, \quad E\Lambda = ZN, \quad EM = ZP,$$

et expleantur parallelogrammum $K\Lambda$ et solidum KO.

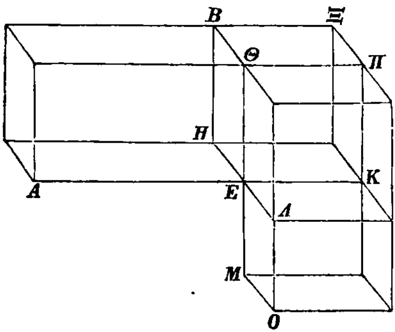
---

8. ἄρα] om. FV. ΓZ] P; "ΓZ b; ΘZ BFV. 9. $Z\Theta$] Pb; ΓZ B; $Z\Gamma$ F et in ras. V. οὕτω B. $\Gamma\Delta$] P, "$\Gamma\Delta$" b; $\Theta\Delta$ BFV. 10. $\Delta\Theta$] P, '$\Delta\Theta$ b; $\Delta\Gamma$ BFV. 12. ΓZ] Z in ras. F. 14. παραλληλοεπίπεδα V. 15. ἐστιν] εἰσιν FV. 17. λγ'] om. φ. 18. παραλληλοεπίπεδα V, ut lin. 21. 19. εἰσίν B. 22. AE] corr. ex ΛE m. 2 P. 25. ταῖς] τῆς b. 26. αἱ] supra m. 2 B; εὐθεῖαι αἱ FV. EM] M corr. ex N m. 1 F. 27. ἔτι] om. φ. 29. KO] in ras. B; O in ras. m. 1 P.

Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΚΕ, ΕΛ δυσὶ ταῖς ΓΖ, ΖΝ ἴσαι εἰσίν, ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΚΕΛ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΖΝ ἐστιν ἴση, ἐπειδήπερ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΗ τῇ ὑπὸ ΓΖΝ ἐστιν ἴση διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν, ἴσον ἄρα ἐστὶ [καὶ ὅμοιον] τὸ ΚΛ παραλληλόγραμμον τῷ ΓΝ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν ΚΜ παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ καὶ ὅμοιον τῷ ΓΡ [παραλληλογράμμῳ] καὶ ἔτι τὸ ΕΟ τῷ ΔΖ· τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ ΚΟ στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῦ ΓΔ στερεοῦ ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια, τὰ δὲ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια· ὅλον ἄρα τὸ ΚΟ στερεὸν ὅλῳ τῷ ΓΔ στερεῷ ἴσον ἐστὶ καὶ ὅμοιον. συμπεπληρώσθω τὸ ΗΚ παραλληλόγραμμον, καὶ ἀπὸ βάσεων μὲν τῶν ΗΚ, ΚΛ παραλληλογράμμων, ὕψους δὲ τοῦ αὐτοῦ τῷ ΑΒ στερεὰ συμπεπληρώσθω τὰ ΕΞ, ΛΠ. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΝ, καὶ ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΖΡ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΓΖ τῇ ΕΚ, ἡ δὲ ΖΝ τῇ ΕΛ, ἡ δὲ ΖΡ τῇ ΕΜ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΚ, οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΛ καὶ ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΜ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΚ, οὕτως τὸ ΑΗ [παραλληλόγραμμον] πρὸς τὸ ΗΚ παρ-

1. *ΚΕ*] *ΕΚ* BFV. 4. *ΓΖΝ*] *ΖΝ* in ras. B. *ἐστιν ἴση*] supra m. 2 V. *κατὰ κορυφὴν γάρ* mg. m. 1 b. 5. *καὶ ὅμοιον*] postea add. mg. m. 1 P. 7. *παραλληλόγραμμον*] om. F. 8. *παραλληλογράμμῳ*] om. P. *ΕΟ*] *Ο* in ras. B. 9. *ΖΔ* BFV. *στερεοῦ*] *εο* eras. B. 10. *ἴσα* — 11. *ἀπεναντίον*] mg. m. 2 B. 10. *ἐστί*] *εἰσίν* P. 12. *ἐστί*] *εἰσίν* P; *τέ ἐστι* FV. *τρία*] *λοιπὰ τρία* V et bis F. 13. *ἴσα*] *ἴσα τε* b; *τε* add. m. 2 B. *ἐστί*] *τε* FV. In V lin. 12 *τὰ δέ* — 13. *ὅμοια* punctis del. 13. *ΚΟ*] *Ο* in ras. V. 15. *ἀπό*] *ἐπί* b.

et quoniam duo latera KE, $E\Lambda$ duobus ΓZ, ZN aequalia sunt, uerum etiam $\angle KE\Lambda = \Gamma ZN$ (quia $\angle AEH = \Gamma ZN$ propter similitudinem solidorum AB, $\Gamma\Delta$)[1]), erit $K\Lambda = \Gamma N$.[2]) eadem de causa etiam KM parallelogrammum parallelogrammo ΓP aequale est et simile et praeterea EO parallelogrammo ΔZ. itaque tria parallelogramma solidi KO tribus parallelogrammis solidi $\Gamma\Delta$ aequalia sunt et similia. uerum in utroque solido tria parallelogramma tribus, quae iis opposita sunt, aequalia sunt et similia [prop. XXIV]. itaque totum solidum KO toti solido $\Gamma\Delta$ aequale est et simile [def. 10]. expleatur parallelogrammum HK, et in basibus parallelogrammis HK, $K\Lambda$, altitudine autem eadem, qua AB, solida expleantur $E\Xi$, $\Lambda\Pi$. et quoniam propter similitudinem solidorum AB, $\Gamma\Delta$ est $AE:\Gamma Z = EH:ZN = E\Theta:ZP$ [def. 9; VI def. 1], et $\Gamma Z = EK$, $ZN = E\Lambda$, $ZP = EM$, erit $AE:EK$



1) Def. 9; VI def. 1. et $\angle AEH = KE\Lambda$ [I, 15].
2) VI, 14. eadem similia esse ut per se intellegitur, ita addi debuit. sed cfr. p. 75 not. 2.

17. τῷ] corr. ex τοῦ m. 1 V. 20. $E\Theta$] Θ e corr. m. 1 b. ΓZ] $Z\Gamma$ V. 22. AE] EA b. ἡ HE — 24. οὕτως] om. b. 24. παραλληλόγραμμον] om. P. τό] corr. ex τήν V.

αλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΛ, οὕτως τὸ ΗΚ πρὸς τὸ ΚΛ, ὡς δὲ ἡ ΘΕ πρὸς ΕΜ, οὕτως τὸ ΠΕ πρὸς τὸ ΚΜ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΗ παραλληλόγραμμον προς τὸ ΗΚ, οὕτως τὸ ΗΚ πρὸς τὸ ΚΛ καὶ τὸ ΠΕ πρὸς τὸ ΚΜ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΗΚ, οὕτως τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΕΞ στερεόν, ὡς δὲ τὸ ΗΚ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως τὸ ΞΕ στερεὸν πρὸς τὸ ΠΛ στερεόν, ὡς δὲ τὸ ΠΕ πρὸς τὸ ΚΜ, οὕτως τὸ ΠΛ στερεὸν πρὸς τὸ ΚΟ στερεόν· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΕΞ, οὕτως τὸ ΕΞ πρὸς τὸ ΠΛ καὶ τὸ ΠΛ πρὸς τὸ ΚΟ. ἐὰν δὲ τέσσαρα μεγέθη κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον· τὸ ΑΒ ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ ΚΟ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΞ. ἀλλ' ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΞ, οὕτως τὸ ΑΗ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΗΚ καὶ ἡ ΑΕ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΕΚ· ὥστε καὶ τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΚΟ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΚ. ἴσον δὲ τὸ [μὲν] ΚΟ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ, ἡ δὲ ΕΚ εὐθεῖα τῇ ΓΖ· καὶ τὸ ΑΒ ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος αὐτοῦ πλευρὰ ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τὴν ΓΖ.

Τὰ ἄρα ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην,

1. ΗΕ] corr. ex ΝΕ m. 1 b. 2. τὴν ΕΜ BV. 3. Post ΠΕ add. παραλληλόγραμμον V et m. rec. F. 5. τὸ

$= HE : EΛ = ΘE : EM$. sed $ΛE : EK = ΛH : HK$, $HE : EΛ = HK : KΛ$, $ΘE : EM = ΠE : KM$ [VI, 1]. itaque $ΛH : HK = HK : KΛ = ΠE : KM$. uerum

$$ΛH : HK = AB : EΞ,\ HK : KΛ = ΞE : ΠΛ,$$
$$ΠE : KM = ΠΛ : KO \text{ [prop. XXXII]}.$$

quare $AB : EΞ = EΞ : ΠΛ = ΠΛ : KO$. sin quattuor magnitudines deinceps proportionales sunt, prima ad quartam triplicatam rationem habere dicitur quam ad secundam [V def. 10]. itaque $AB : KO = AB^3 : EΞ^3$. est autem $AB : EΞ = ΛH : HK = ΛE : EK$. quare $AB : KO = ΛE^3 : EK^3$. sed $KO = ΓΔ$, $EK = ΓZ$. quare etiam $AB : ΓΔ = ΛE^3 : ΓZ^3$.

Ergo similia solida parallelepipeda triplicatam rationem habent quam latera correspondentia; quod erat demonstrandum.

Corollarium.[1]

Hinc manifestum est, si quattuor rectae inter se proportionales sint, esse, ut prima ad quartam, ita

1) Num hoc corollarium genuinum sit, iure ambigi potest.

KM] KM F. 7. τὸ $KΛ$] $KΛ$ b. 11. KO] O non liquet, supra scr. $Θ$ m. 1 b. 13. ἤπερ] τὸ πρῶτον φ. 14. KO] O in ras. B. τριπλασί- in ras. m. 1 P. 16. τὸ $ΛH$] τό τε $ΛH$ F? (F hoc loco difficilis est lectu). $ΛH$] corr. ex AB m. 1 b; H e corr. B m. rec. 18. KO] O in ras. B; supra scr. $Θ$ m. 1 b. 19. μέν] om. P. KO] O in ras. B. 20. στερεῷ] om. b. 21. στερεὸν ἄρα B. 23. αὐτοῦ πλευράν b. 24. παραλληλοεπ. V. 25. ἐστίν B. 28 sq. Ex porismate nullum uestigium est in F; in b totum in mg. est m. 1, add. οὕτως ἐν ἄλλῳ. 29. Ante ἀνάλογον ras. 1 litt. P.

οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης στερεὸν παραλληλεπίπεδον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον, ἐπείπερ καὶ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν δευτέραν.

λδ'.

Τῶν ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· καὶ ὧν στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

Ἔστω ἴσα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ AB, $\Gamma\Delta$· λέγω, ὅτι τῶν AB, $\Gamma\Delta$ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καί ἐστιν ὡς ἡ $E\Theta$ βάσις πρὸς τὴν $N\Pi$ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ $\Gamma\Delta$ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ AB στερεοῦ ὕψος.

Ἔστωσαν γὰρ πρότερον αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ AH, EZ, ΛB, ΘK, ΓM, $N\Xi$, $O\Delta$, ΠP πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσιν αὐτῶν· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ $E\Theta$ βάσις πρὸς τὴν $N\Pi$ βάσιν, οὕτως ἡ ΓM πρὸς τὴν AH.

Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ $E\Theta$ βάσις τῇ $N\Pi$ βάσει, ἔστι δὲ καὶ τὸ AB στερεὸν τῷ $\Gamma\Delta$ στερεῷ ἴσον, ἔσται καὶ ἡ ΓM τῇ AH ἴση. τὰ γὰρ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βά-

---

1. οὕτως FVb. παραλληλοεπ. V. 3. ἐπειδήπερ BV. 5. λ seq. ras. 1 litt. F. 7. ὕψεσι Vb et seq. ras. 3 litt. φ. 12. ὕψεσι FVb. 16. ΛB] Λ e corr. B. ΘK] corr. ex ΘH m. 1 b. ΓM] supra scr. N m. 1 b. 17. βάσεσι b. αὐτῶν] om. b. 18. AH] inter A et H 1 litt. eras. P. 20. ἔστιν B. ἔσται] ἔστι Vbφ. 21. τὰ γάρ — 22. βάσεις] om. BV; hab. Pb et fuerunt in F, sed nihil relictum est nisi το υψος στερε, quibus add. φ: -ον τοῖς ὕψεσι omissis uerbis εἰ γάρ — ουσῶν p. 108, 1.

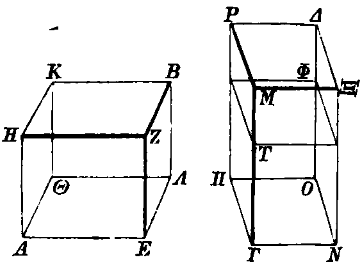
solidum parallelepipedum in prima descriptum ad solidum in secunda simile et similiter descriptum, quoniam etiam prima ad quartam triplicatam habet rationem quam ad secundam.

XXXIV.

Aequalium solidorum parallelepipedorum bases in contraria ratione sunt atque altitudines; et quorum solidorum parallelepipedorum bases in contraria ratione sunt atque altitudines, ea aequalia sunt.

Sint $AB, \Gamma\Delta$ aequalia solida parallelepipeda. dico, solidorum parallelepipedorum AB, $\Gamma\Delta$ bases in contraria ratione esse atque altitudines, et esse, ut $E\Theta$ ad $N\Pi$, ita altitudinem solidi $\Gamma\Delta$ ad altitudinem solidi AB.

Prius enim rectae eminentes AH, EZ, ΛB, ΘK, ΓM, $N\Xi$, $O\Delta$, ΠP ad bases suas perpendiculares sint. dico, esse $E\Theta : N\Pi = \Gamma M : AH$.



iam si $E\Theta = N\Pi$, et $AB = \Gamma\Delta$, erit etiam $\Gamma M = AH$; nam solida parallelepipeda, quae eandem haσεις [εἰ γὰρ τῶν ΕΘ, ΝΠ βάσεων ἴσων οὐσῶν μὴ εἴη τὰ ΑΗ, ΓΜ ὕψη ἴσα, οὐδ' ἄρα τὸ ΑΒ στερεὸν ἴσον ἔσται τῷ ΓΔ. ὑπόκειται δὲ ἴσον· οὐκ ἄρα ἄνισόν ἐστι τὸ ΓΜ ὕψος τῷ ΑΗ ὕψει· ἴσον ἄρα]. καὶ ἔσται ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ, οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΑΗ, καὶ φανερόν, ὅτι τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

Μὴ ἔστω δὴ ἴση ἡ ΕΘ βάσις τῇ ΝΠ βάσει, ἀλλ' ἔστω μείζων ἡ ΕΘ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ ἴσον· μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΓΜ τῆς ΑΗ [εἰ γὰρ μή, οὐδ' ἄρα πάλιν τὰ ΑΒ, ΓΔ στερεὰ ἴσα ἔσται· ὑπόκειται δὲ ἴσα]. κείσθω οὖν τῇ ΑΗ ἴση ἡ ΓΤ, καὶ συμπεπληρώσθω ἀπὸ βάσεως μὲν τῆς ΝΠ, ὕψους δὲ τοῦ ΓΤ, στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΦΓ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ, ἔξωθεν δὲ τὸ ΓΦ, τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν, οὕτως τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν, οὕτως ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν· ἰσοϋψῆ γὰρ τὰ ΑΒ, ΓΦ στερεά· ὡς δὲ τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν, οὕτως ἡ ΜΠ βάσις πρὸς τὴν ΤΠ βάσιν καὶ ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΓΤ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως ἡ ΜΓ πρὸς τὴν ΓΤ. ἴση δὲ ἡ ΓΤ τῇ ΑΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν

---

2. εἴη] ἔστω φ. 3. ἔσται] ἐστί b. ΓΔ στερεῷ FV. 5. ΝΠ βάσιν b. 7. ὕψεσι Vbφ. 10. ἐστί] om. V. 11. πάλιν] supra m. rec. V. 12. ἔσονται P. ὑπόκεινται BV. ΑΗ] Η in ras. m. 1 P. 14. ΓΤ] Γ in ras. B. παραλληλοεπ. V. ΦΓ] Γ in ras. B. 16. ἔξωθεν δέ] ἄλλο δέ τί ἐστι b, ἄλλο δέ τι V, ἄλλο τι supra scr. δέ m. 2 B. ΦΓ Bb, et F, sed corr. Dein add. στερεόν FV. In F uerba

bent altitudinem, inter se eandem rationem habent quam bases [prop. XXXII].[1]) et erit

$$E\Theta : N\Pi = \Gamma M : AH,$$

et adparet, solidorum AB, $\Gamma\Delta$ parallelepipedorum bases in contraria ratione esse atque altitudines.

iam ne sit $E\Theta = N\Pi$, sed $E\Theta > N\Pi$. uerum etiam $AB = \Gamma\Delta$. itaque etiam $\Gamma M > AH$.[2])

ponatur igitur $\Gamma T = AH$, et in basi $N\Pi$, altitudine autem ΓT expleatur solidum parallelepipedum $\Phi\Gamma$. et quoniam $AB = \Gamma\Delta$, extrinsecus autem adsumptum est $\Gamma\Phi$, et aequalia ad idem eandem rationem habent [V, 7], erit $AB : \Gamma\Phi = \Gamma\Delta : \Gamma\Phi$. uerum $AB : \Gamma\Phi = E\Theta : N\Pi$ [prop. XXXII]; nam solida AB, $\Gamma\Phi$ eandem habent altitudinem. et $\Gamma\Delta : \Gamma\Phi = M\Pi : T\Pi$ [prop. XXV] $= \Gamma M : \Gamma T$ [VI, 1]. quare etiam $E\Theta : N\Pi = M\Gamma : \Gamma T$. sed $\Gamma T = AH$. itaque etiam

---

1) Ita concludi uoluit Euclides: adparet, solida aequalia eandem rationem habere quam bases et ipsas aequales, nec hoc fieri potest, nisi altitudines et ipsae aequales erunt. et hanc concludendi rationem recte, sed paullo breuius indicauit citata prop. 32. hoc interpreti alicui satis antiquo ansam dedit uerbis *εἰ γάρ — ἴσον ἄρα* lin. 1—4 interpolatis mentem Euclidis uerbose explicandi. quo facto in codd. deterioribus uerba illa genuina *τὰ γάρ — βάσεις* p. 106, 21—22 deleta sunt, cum intellegeretur, duplicem causae indicationem per *γάρ* illatam ferri non posse. illo loco damnato sequitur, uerba simillima *εἰ γάρ — ἴσα* p. 108, 11—12 et ipsa esse interpolata. et per se suspectissima sunt, quippe quae causam idoneam eius rei, quam confirmare debeant, minime contineant.

2) Hoc uia indirecta ex prop. 31 demonstrari potest, cum adpareat, solida augeri et basibus et altitudinibus auctis.

ἄλλο δέ ἐστι τὸ $\Phi\Gamma$ στερεόν mg. m. 1, ut uidetur. 17. *στερεόν*] om. V. 18. *οὕτω* BV, comp. F. 22. *στερεόν*] ins. m. 2 F. $T\Pi$] mut. in ΠT V, ΠT Bb. 23. $M\Gamma$ BFV. 24. *βάσιν*] supra m. 2 F. $M\Gamma$] $N\Gamma$ B.

ΝΠ βάσιν, οὕτως ἡ ΜΓ πρὸς τὴν ΑΗ. τῶν ΑΒ, ΓΔ ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

Πάλιν δὴ τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ.

Ἔστωσαν [γὰρ] πάλιν αἱ ἐφεστηκυῖαι πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσιν. καὶ εἰ μὲν ἴση ἐστὶν ἡ ΕΘ βάσις τῇ ΝΠ βάσει, καί ἐστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος, ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος τῷ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψει. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων στερεα παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ.

Μὴ ἔστω δὴ ἡ ΕΘ βάσις τῇ ΝΠ [βάσει] ἴση, ἀλλ' ἔστω μείζων ἡ ΕΘ· μεῖζον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος τοῦ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψους, τουτέστιν ἡ ΓΜ τῆς ΑΗ. κείσθω τῇ ΑΗ ἴση πάλιν ἡ ΓΤ, καὶ συμπεπληρώσθω ὁμοίως τὸ ΓΦ στερεόν. ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως ἡ ΜΓ πρὸς τὴν ΑΗ, ἴση δὲ ἡ ΑΗ τῇ ΓΤ, ἔστιν ἄρα ὡς η ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΓΤ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΕΘ [βάσις] πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν· ἰσοϋψῆ γάρ ἐστι τὰ ΑΒ, ΓΦ στερεά· ὡς δὲ ἡ ΓΜ πρὸς τὴν

---

1. *ΓΜ* b. *ΑΒ, ΓΔ*] om. FV. 2. *ἄρα*] *δε* F. 3. *ὕψεσι* Vb. 4. *ΓΔ ἄρα* b. *παραλληλεπιπέδων*] om. V.

$E\Theta : N\Pi = M\Gamma : \varDelta H$. ergo solidorum parallelepipedorum $\varDelta B$, $\Gamma\varDelta$ bases in contraria ratione sunt atque altitudines.

Rursus solidorum parallelepipedorum $\varDelta B$, $\Gamma\varDelta$ bases in contraria ratione sint atque altitudines, et sit ut $E\Theta$ ad $N\Pi$, ita altitudo solidi $\Gamma\varDelta$ ad altitudinem solidi $\varDelta B$. dico, esse $\varDelta B = \Gamma\varDelta$.

rursus rectae eminentes ad bases perpendiculares sint. et si $E\Theta = N\Pi$, et est ut basis $E\Theta$ ad basim $N\Pi$, ita altitudo solidi $\Gamma\varDelta$ ad altitudinem solidi $\varDelta B$, erit altitudo solidi $\Gamma\varDelta$ altitudini solidi $\varDelta B$ aequalis. uerum solida parallelepipeda in aequalibus basibus collocata et eandem altitudinem habentia inter se aequalia sunt [prop. XXXI]. ergo $\varDelta B = \Gamma\varDelta$.

iam ne sit $E\Theta = N\Pi$, sed $E\Theta > N\Pi$. itaque etiam altitudo solidi $\Gamma\varDelta$ maior est altitudine solidi $\varDelta B$ [p. 109 not. 2], hoc est $\Gamma M > \varDelta H$. ponatur rursus $\Gamma T = \varDelta H$, et similiter expleatur solidum $\Gamma\Phi$. quoniam $E\Theta : N\Pi = M\Gamma : \varDelta H$, et est $\varDelta H = \Gamma T$, erit $E\Theta : N\Pi = \Gamma M : \Gamma T$. uerum $E\Theta : N\Pi = \varDelta B : \Gamma\Phi$ [prop. XXXII]; nam solida $\varDelta B$, $\Gamma\Phi$ eandem altitudi-

---

5. *ἀντιπεπόνθασι* b. *ὕψεσι* Vb. 6. *βάσιν*] om. V. $\Gamma\varDelta$] in ras. V. 7. $\varDelta B$] in ras. V. *λέγω* — 8. *ἐστί*] mg. φ. 9. *γάρ*] om. P. 10. *βάσεσι* Vbφ. *ἐστίν*] om. Vφ. *ἡ ΕΘ βάσις*] mg. φ. 12. *τό*] (prius) mg. m. 2 P. 13. *ἴσον ἄρα* — 14. *ὕψει*] om. φ. 13. *ἐστί*] om. V. *καί*] om. b. 14. *δέ*] *δ'* b. 15. *βάσεων ὄντα* Theon (BFVb). *παραλληλοεπ.* V. 16. *ἐστί*] *ἐστίν* P. 18. *βάσει*] om. BFVb. 19. *μεῖζον*] *μείζων* F. *ἐστί*] om. V. 21. *τῆς*] *τῇ* b. 22. Ante *ἐπεί* add. *καί* m. 2 V. 23. ΓM b. 25. ΓM] PB, V m. 2; $M\Gamma$ b, V m. 1, F in mg. m. 2. *πρός* — 26. *βάσιν*] om. F; in mg. quaedam euan. 26. *βάσις*] om. P. 27. *οὕτως* — *πρός*] φ.

ΓΤ, οὕτως ἥ τε ΜΠ βάσις πρὸς τὴν ΠΤ βάσιν καὶ τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν. καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν, οὕτως τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ πρὸς τὸ ΓΦ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Μὴ ἔστωσαν δὴ αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ ΖΕ, ΒΛ, ΗΑ, ΘΚ, ΞΝ, ΔΟ, ΜΓ, ΡΠ πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσιν αὐτῶν, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Ζ, Η, Β, Κ, Ξ, Μ, Δ, Ρ σημείων ἐπὶ τὰ διὰ τῶν ΕΘ, ΝΠ ἐπίπεδα κάθετοι καὶ συμβαλλέτωσαν τοῖς ἐπιπέδοις κατὰ τὰ Σ, Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω, ϛ, καὶ συμπεπληρώσθω τὰ ΖΦ, ΞΩ στερεά· λέγω, ὅτι καὶ οὕτως ἴσων ὄντων τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καί ἐστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος.

Ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ, ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΒ τῷ ΒΤ ἐστιν ἴσον· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΖΚ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος [ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν]· τὸ δὲ ΓΔ στερεὸν τῷ ΔΨ ἐστιν ἴσον· ἐπί τε γὰρ πάλιν τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΡΞ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος [ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν]· καὶ τὸ ΒΤ ἄρα στερεὸν τῷ ΔΨ στερεῷ ἴσον ἐστίν [τῶν δὲ ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων, ὧν τὰ ὕψη πρὸς ὀρθάς ἐστι ταῖς βάσεσιν αὐτῶν, ἀντι-

---

2. *στερεόν*] (alt.) om. B. 6. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*] del. August. 7. *μή*] e corr. m. 2 V. *αἱ*] (prius) om. FV. *ΒΛ*] supra scr. *Δ* m. 1 b. 8. *ΘΚ*] supra scr. *Α*? m. 1 b. 9. *Κ*] corr. ex *Γ* V. 10. *ἐπεί* F, et V, sed corr. *διά*] om. B. *ΝΠ βάσεων* B. 11. *συμβαλέτωσαν* PV. *Σ*] postea ins. B; ras. 1 litt. b. 12. *ϛ*] renou. m. 2 B. Post *ϛ* in fine lin.

nem habent. et $\Gamma M : \Gamma T = M\Pi : \Pi T$ [VI, 1] $= \Gamma\varDelta : \Gamma\Phi$ [prop. XXV]. quare etiam $AB : \Gamma\Phi = \Gamma\varDelta : \Gamma\Phi$. itaque utrumque AB, $\Gamma\varDelta$ ad $\Gamma\Phi$ eandem rationem habet. ergo $AB = \Gamma\varDelta$ [V, 9].

Iam rectae eminentes ZE, BA, HA, ΘK, ΞN, $\varDelta O$, $M\Gamma$, $P\Pi$ ad bases suas perpendiculares ne sint, et ducantur a punctis Z, H, B, K, Ξ, M, $\varDelta$, P ad plana per $E\Theta$, $N\Pi$ ducta perpendiculares, et cum planis in punctis Σ, T, Υ, Φ, X, Ψ, Ω, ϛ concurrant, et expleantur solida $Z\Phi$, $\Xi\Omega$. dico, sic quoque, si $AB = \Gamma\varDelta$, bases in contraria ratione esse atque altitudines, et esse ut $E\Theta$ ad $N\Pi$, ita altitudinem solidi $\Gamma\varDelta$ ad altitudinem solidi AB.

quoniam $AB = \Gamma\varDelta$, et $AB = BT$ [prop. XXIX—XXX] (nam in eadem basi sunt ZK et eandem habent altitudinem)[1]), et $\Gamma\varDelta = \varDelta\Psi$ [id.] (nam rursus in eadem basi sunt $P\Xi$ et eandem habent altitudinem), erit etiam $BT = \varDelta\Psi$. erit igitur[2]) ut ZK basis ad

1) Rectissime obseruauit Simsonus p. 402: „inepte excluditur alter casus". quare cum eo uerba *ὧν αἱ — εὐθειῶν* lin. 20, 23 — 24, p. 116, 7—8 pro interpolatione imperita habenda sunt.

2) Quae sequuntur uerba *τῶν δέ — ὕψεσιν* p. 112, 25 — p. 114, 1 et p. 116, 2—4 inepta sunt, quia altitudines semper ad bases perpendiculares sint necesse est, quae est iusta eiusdem Simsoni obiectio. sed *τὰ ὕψη* cum Augusto in *αἱ ἐφεστῶσαι* mutare temerarium est; quare uerba illa delenda sunt.

καί, dein mg. m. 2 add. *σημεῖα* F; ϛ *σημεῖα* V. $\Xi\Omega$] Ω in ras. V. 13. *ὅτι*] *δή* V. 14. *ὕψεσι* Vb. 15. $N\Pi$] ΠN in ras. V. 17. Post *ἐπεί* add. *γάρ* BFb, et supra scr. m. 1, sed deletum V. *τό*] corr. ex *τῷ* m. 1 V. 18. BT] T in ras. V. 19. *εἰσιν* P. *ὑπό*] *ἐπί* V. 22. *εἰσι*] *ἐστι* comp. b. $P\Xi$] ΞP Bb. *ὑπό*] *ἐπί* V. 24. Post *τό* del. *τοῦ* F. BT] B e corr. V. *ἐστιν ἴσον* V. 25. *τῶν*] corr. ex *ὧν* m. 2 F; *ὧν* V. *ὧν*] om. V. 26. *ἐστι*] *εἰσι* b.

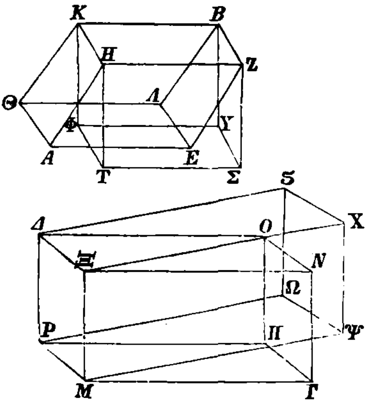
πεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν]. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΚ βάσις πρὸς τὴν ΞΡ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΔΨ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΤ στερεοῦ ὕψος. ἴση δὲ ἡ μὲν ΖΚ βάσις τῇ ΕΘ βάσει, ἡ δὲ ΞΡ βάσις τῇ ΝΠ βάσει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΔΨ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΤ στερεοῦ ὕψος. τὰ δ' αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῶν ΔΨ, ΒΤ στερεῶν καὶ τῶν ΔΓ, ΒΑ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΔΓ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος. τῶν ΑΒ, ΓΔ ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

Πάλιν δὴ τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος, ἴση δὲ ἡ μὲν ΕΘ βάσις τῇ ΖΚ βάσει, ἡ δὲ ΝΠ τῇ ΞΡ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΚ βάσις πρὸς τὴν ΞΡ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος. τὰ δ' αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν καὶ τῶν ΒΤ, ΔΨ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΚ βάσις πρὸς τὴν ΞΡ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΔΨ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΤ στερεοῦ ὕψος. τῶν ΒΤ, ΔΨ ἄρα στε-

2. τὴν ΞΡ] corr. ex τη ΝΞΡ V. 3. ΒΤ] Τ e corr. V. 4. ΕΘ] e corr. V. 5. βάσει ἐστὶν ἴση V. τῇ ΝΠ βάσει b. 7. στερεοῦ] om. B. 10. ΓΔ] in ras. P. 11. στερεῶν ἄρα B. 12. ὕψεσι Vbφ. 14. ὕψεσι FVb.

basim ΞP, ita altitudo solidi $\varDelta\Psi$ ad altitudinem solidi BT [p. 110, 1 sq.]. uerum $ZK = E\Theta$, $\Xi P = N\Pi$.



erit igitur ut $E\Theta$ basis ad basim $N\Pi$, ita altitudo solidi $\varDelta\Psi$ ad altitudinem solidi BT. sed solidorum $\varDelta\Psi$, BT et $\varDelta\Gamma$, BA eadem est altitudo. quare erit ut basis $E\Theta$ ad basim $N\Pi$, ita altitudo solidi $\varDelta\Gamma$ ad altitudinem solidi AB. ergo solidorum AB, $\Gamma\varDelta$ parallelepipedorum bases in contraria ratione sunt atque altitudines.

Iam rursus solidorum parallelepipedorum AB, $\Gamma\varDelta$ bases in contraria ratione sint atque altitudines, et sit ut $E\Theta$ basis ad basim $N\Pi$, ita altitudo solidi $\Gamma\varDelta$ ad altitudinem solidi AB. dico, esse $AB = \Gamma\varDelta$.

iisdem enim comparatis, quoniam est ut basis $E\Theta$ ad $N\Pi$ basim, ita altitudo solidi $\Gamma\varDelta$ ad altitudinem solidi AB, et $E\Theta = ZK$, $N\Pi = \Xi P$, erit ut basis ZK ad ΞP basim, ita altitudo solidi $\Gamma\varDelta$ ad altitudinem solidi AB. sed solidorum AB, $\Gamma\varDelta$ et BT, $\varDelta\Psi$ eadem est altitudo. erit igitur ut ZK basis ad basim ΞP, ita altitudo solidi $\varDelta\Psi$ ad altitudinem solidi BT. itaque solidorum parallelepipedorum BT, $\varDelta\Psi$ bases

---

17. ἴσον] om. Vφ. ἴσον τῷ Vφ. 19. $\Gamma\varDelta$] bis φ. 23. AB] BA FV. 27. BT] (alt.) T in ras. V.

ρεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν [ὧν δὲ στερεῶν παραλληλεπιπέδων τὰ ὕψη πρὸς ὀρθάς ἐστι ταῖς βάσεσιν αὐτῶν, ἀντιπεπόνθασι δὲ αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα]· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ *ΒΤ* στερεὸν τῷ *ΔΨ* στερεῷ. ἀλλὰ τὸ μὲν *ΒΤ* τῷ *ΒΑ* ἴσον ἐστίν· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως [εἰσι] τῆς *ΖΚ* καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος [ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν]. τὸ δὲ *ΔΨ* στερεὸν τῷ *ΔΓ* στερεῷ ἴσον ἐστίν [ἐπί τε γὰρ πάλιν τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς *ΞΡ* καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ οὐκ ἐν ταῖς αὐταῖς εὐθείαις]. καὶ τὸ *ΑΒ* ἄρα στερεὸν τῷ *ΓΔ* στερεῷ ἐστιν ἴσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λε'.

Ἐὰν ὦσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι ἴσαι, ἐπὶ δὲ τῶν κορυφῶν αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἐπισταθῶσιν ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἐπὶ δὲ τῶν μετεώρων ληφθῇ τυχόντα σημεῖα, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα, ἐν οἷς εἰσιν αἱ ἐξ ἀρχῆς γωνίαι, κάθετοι ἀχθῶσιν, ἀπὸ δὲ τῶν γενομένων σημείων ἐν τοῖς ἐπιπέδοις ἐπὶ τὰς ἐξ ἀρχῆς γωνίας ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἴσας γωνίας περιέξουσι μετὰ τῶν μετεώρων.

Ἔστωσαν δύο γωνίαι εὐθύγραμμοι ἴσαι αἱ ὑπὸ *ΒΑΓ*, *ΕΔΖ*, ἀπὸ δὲ τῶν *Α*, *Δ* σημείων μετέωροι εὐθεῖαι ἐφεστάτωσαν αἱ *ΑΗ*, *ΔΜ* ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ,

---

2. τὰ ὕψη] αἱ ἐφεστηκυῖαι August. 3. ἐστι] φ, comp. b, ἐστιν P, εἰσι BV. ἀντιπεπόνθασιν PV. 4. δέ] supra

in contraria ratione sunt atque altitudines. quare $BT = \Delta\Psi$ [p. 112, 5 sq.]. sed $BT = BA$ [prop. XXIX—XXX]; nam in eadem basi sunt ZK et eandem habent altitudinem; et $\Delta\Psi = \Delta\Gamma$ [id.].[1]) ergo $AB = \Gamma\Delta$; quod erat demonstrandum.

XXXV.

Si datis duobus angulis planis aequalibus in uerticibus eorum rectae sublimes eriguntur angulos singulos singulis aequales cum iis, quae a principio erant, comprehendentes, et in erectis puncta quaeuis sumuntur, et ab iis ad plana, in quibus sunt anguli illi, perpendiculares ducuntur, et a punctis, quae in planis oriuntur, ad angulos[2]) a principio datos rectae ducuntur, hae cum erectis aequales angulos comprehendent.

Duo anguli rectilinei sint $BA\Gamma$, $E\Delta Z$, et a punctis A, Δ rectae AH, ΔM sublimes erigantur angulos singulos singulis aequales cum iis, quae a principio

1) Uerba ἐπί τε — εὐθείαις lin. 9—11 subditiua existimo.
2) H. e. ad uertices eorum.

scr. m. 2 V. 6. BA] AB P. 7. εἰσι] om. P. 9. τῷ $\Delta\Gamma$ — 10. βάσεως] F, praecedentibus iisdem uerbis a manu φ. 9. $\Gamma\Delta$ b. τῆς αὐτῆς πάλιν V et φ (non F). 10. ἐστι comp. b. $P\Xi$ b. 11. ἄρα] om. V, ins. m. 2 F. 12. $\Delta\Gamma$ B. 13. λε′] non liquet in F. 14. ὦσιν PB. Post ἐπί del. πέδῳ m. 1 P. 17. ἑκατέραν] -αν in ras. B. 19. ἐπὶ τά] om. F. εἰσι b. 21. ἐν] ὑπὸ τῶν καθέτων ἐν Theon (BFVb). 23. μετεωροτέρων Vφ. 26. AH] H in ras. B. ΔH, AM F.

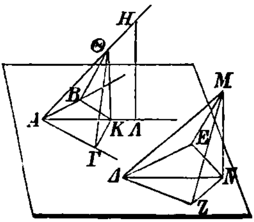
τὴν μὲν ὑπὸ $MΔE$ τῇ ὑπὸ HAB, τὴν δὲ ὑπὸ $MΔZ$ τῇ ὑπὸ $HAΓ$, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῶν AH, $ΔM$ τυχόντα σημεῖα τὰ H, M, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν H, M σημείων ἐπὶ τὰ διὰ τῶν $BAΓ$, $EΔZ$ ἐπίπεδα κάθετοι αἱ $HΛ$, MN, καὶ συμβαλλέτωσαν τοῖς ἐπιπέδοις κατὰ τὰ N, $Λ$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $ΛA$, $NΔ$· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $HAΛ$ γωνία τῇ ὑπὸ $MΔN$ γωνίᾳ.

Κείσθω τῇ $ΔM$ ἴση ἡ $AΘ$, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ $Θ$ σημείου τῇ $HΛ$ παράλληλος ἡ $ΘK$. ἡ δὲ $HΛ$ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ διὰ τῶν $BAΓ$ ἐπίπεδον· καὶ ἡ $ΘK$ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ διὰ τῶν $BAΓ$ ἐπίπεδον. ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν K, N σημείων ἐπὶ τὰς AB, $AΓ$, $ΔZ$, $ΔE$ εὐθείας κάθετοι αἱ $KΓ$, NZ, KB, NE, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $ΘΓ$, $ΓB$, MZ, ZE. ἐπεὶ το ἀπὸ τῆς $ΘA$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΘK$, KA, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς KA ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν $KΓ$, $ΓA$, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΘA$ ἄρα ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΘK$, $KΓ$, $ΓA$. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν $ΘK$, $KΓ$ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΘΓ$· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $ΘA$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΘΓ$, $ΓA$. ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΘΓA$ γωνία. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ $ΔZM$ γωνία ὀρθή ἐστιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $AΓΘ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΔZM$. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $ΘAΓ$ τῇ ὑπὸ $MΔZ$ ἴση. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ $MΔZ$, $ΘAΓ$ δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν τὴν $ΘA$ τῇ $MΔ$· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς

---

2. AH] HA V. 4. σημείων] om. V. $BAΓ$] B in ras. B. 5. συμβαλέτωσαν V et supra scr. λ m. 1 P. 6. N, $Λ$] supra $Λ$ quaedam euan. F m. 2, ras. V. καί] σημεῖα καί V. 7. ἴση ἐστίν] ins. m. 1 F, om. V. γωνία τῇ ὑπὸ $MΔN$] in mg. trans-

erant, comprehendentes, $\angle M\Delta E = HAB$, $\angle M\Delta Z = HA\Gamma$, et in AH, ΔM puncta quaeuis sumantur



H, M, et a punctis H, M ad plana per $BA\Gamma$, $E\Delta Z$ ducta perpendiculares ducantur $H\Lambda$, MN, et cum planis in N, Λ concurrant, et ducantur $A\Lambda$, $N\Delta$. dico, esse

$$\angle HA\Lambda = M\Delta N.$$

ponatur $A\Theta = \Delta M$, et per Θ punctum rectae $H\Lambda$ parallela ducatur ΘK. $H\Lambda$ autem ad planum per $BA\Gamma$ ductum perpendicularis est; itaque etiam ΘK ad planum per $BA\Gamma$ ductum perpendicularis est [prop. VIII]. a punctis K, N ad AB, $A\Gamma$, ΔZ, ΔE rectas perpendiculares ducantur $K\Gamma$, NZ, KB, NE, et ducantur $\Theta\Gamma$, ΓB, MZ, ZE. quoniam $\Theta A^2 = \Theta K^2 + KA^2$ et $KA^2 = K\Gamma^2 + \Gamma A^2$ [I, 47], erit etiam $\Theta A^2 = \Theta K^2 + K\Gamma^2 + \Gamma A^2$. uerum $\Theta\Gamma^2 = \Theta K^2 + K\Gamma^2$ [id.]. quare $\Theta A^2 = \Theta\Gamma^2 + \Gamma A^2$. itaque $\angle \Theta\Gamma A$ rectus est [I, 48]. eadem de causa etiam $\angle \Delta ZM$ rectus est. itaque $\angle A\Gamma\Theta = \Delta ZM$. sed etiam $\angle \Theta A\Gamma = M\Delta Z$. itaque duo trianguli sunt $M\Delta Z$, $\Theta A\Gamma$ duos angulos duobus angulis singulos singulis aequales habentes et unum latus uni lateri aequale, quae sub altero angulorum aequalium subtendunt, $\Theta A = M\Delta$. itaque etiam reliqua latera reliquis late-

eunt F. γωνία ἴση ἐστί V. $M\Delta N$] Δ e corr. V. γωνίᾳ] om. V. 8. καὶ κείσθω B, κείσθω γάρ FV. 12. $A\Gamma$] A e corr. V. 13. NE] E in ras. m. 1 P. 14. καὶ ἐπεί Bb. 15. KA] K corr. ex A m. 1 b. 16. τῶν] τῆς b. 20. $\Theta\Gamma A$] ΓA in ras. B. 21. ΔZM] ZM in ras. B. 22. ἔστιν PB. 23. δή] supra m. 1 V. 24. δυσὶ γωνίαις] om. P. 27. ΔM B.

πλευραῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΔΖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ ἐστιν ἴση [οὕτως· ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΘΒ, ΜΕ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΚ, ΚΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΚ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΚ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΚ, ΚΘ ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΘ. ἀλλὰ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΚ, ΚΘ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΘ· ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΘΚΒ γωνία διὰ τὸ καὶ τὴν ΘΚ κάθετον εἶναι ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΘ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΘ γωνία. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΕΜ γωνία ὀρθή ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΔΜ ἴση· ὑπόκειται γάρ· καὶ ἔστιν ἡ ΑΘ τῇ ΔΜ ἴση· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ]. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΔΖ, ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΔΕ, δύο δὴ αἱ ΓΑ, ΑΒ δυσὶ ταῖς ΖΔ, ΔΕ ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΑΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΔΕ ἐστιν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστὶ καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΕ. ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΓΚ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΔΖΝ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΚ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΕΖΝ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΚ τῇ ὑπὸ ΖΕΝ ἐστιν ἴση. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΒΓΚ, ΕΖΝ [τὰς] δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· καὶ τὰς λοιπὰς

---

1. ἴση] ἴσην P, corr. m. 1. 3. ἴση] om. B. 4. τοῖς] τό P. 7. τῆς ΑΘ V. 8. γάρ] in ras. m. 1 P. 9. εἶναι] om.

ribus aequalia habebunt singula singulis [I, 26]. itaque $A\Gamma = \Delta Z$. iam eodem modo demonstrabimus, esse $AB = \Delta E$.[1]) iam quoniam $A\Gamma = \Delta Z$, $AB = \Delta E$, duae rectae ΓA, AB duabus $Z\Delta$, ΔE aequales sunt. sed etiam $\angle \Gamma AB = Z\Delta E$. quare etiam $B\Gamma = EZ$, et triangulus triangulo aequalis et reliqui anguli reliquis angulis [I, 4]. itaque $\angle A\Gamma B = \Delta ZE$. uerum etiam $\angle A\Gamma K = \Delta ZN$, quia recti sunt. ergo etiam $\angle B\Gamma K = EZN$. eadem de causa etiam $\angle \Gamma BK = ZEN$. quare duo trianguli sunt $B\Gamma K$, EZN duos angulos duobus angulis singulos singulis aequales habentes et unum latus uni aequale, quod ad angulos aequales positum est, $B\Gamma = EZ$. itaque etiam reliqua

1) Sequentia p. 120, 3–15, quae post ὁμοίως lin. 2 prorsus inutilia sunt et inusitata, rectissime interpolatori tribuerunt Simsonus et August; om. Campanus.

φ. 10. τῆς] corr. ex τῶν m. 1 b. 11. AB] B corr. ex Θ V. Post $B\Theta$ ras. 1 litt. b. ἐστίν] corr. ex ἐστί m. 1 P. 13. ἔστιν B. $E\Delta M$] E supra scr., post Δ ras. 1 litt. V. 14. γὰρ ἴσαι FV. 15. ἐστί] om. P. 17. δυσί] δύο P. ΔZ BVbφ. ἀλλὰ] ἑκατέρα ἑκατέρᾳ Vφ. 18. $Z\Delta E$] Z et E in ras. V, $Z''\Delta'E$ b. ἐστιν] om. Vφ. 19. ἐστίν P. καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ] mg. V. 21. ἴση] ἴη b. ΔZE] corr. ex EZA m. 1 b. ἔστιν B. 22. ΔZN] N in ras. m. 1 B; pro N in b est E, supra scr. M m. 1. καί] om. Vφ. 23. EZN] ante N ras. 1 litt. V; N corr. ex H b. ἴση ἐστίν P. 25. ENZ V. 26. τάς] deleo. γωνίαις] γωνίας P. ἔχοντας PVφ; in P σ del. m. 2. 28. ἴσαις] supra scr. m. 2 B.

ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΖΝ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΔΖ ἴση· δύο δὴ αἱ ΑΓ, ΓΚ δυσὶ ταῖς ΔΖ, ΖΝ ἴσαι εἰσίν· καὶ ὀρθὰς γωνίας περιέχουσιν. βάσις ἄρα ἡ ΑΚ βάσει τῇ ΔΝ ἴση ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΘ τῇ ΔΜ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΜ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΘ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΚ, ΚΘ· ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΑΚΘ· τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΔΜ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΔΝ, ΝΜ· ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΔΝΜ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΚ, ΚΘ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΔΝ, ΝΜ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΝ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΚΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΜ· ἴση ἄρα ἡ ΘΚ τῇ ΜΝ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΘΑ, ΑΚ δυσὶ ταῖς ΜΔ, ΔΝ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΘΚ βάσει τῇ ΜΝ ἐδείχθη ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΘΑΚ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΜΔΝ ἐστιν ἴση.

Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι ἴσαι καὶ τὰ ἑξῆς τῆς προτάσεως [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι, ἐὰν ὦσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι ἴσαι, ἐπισταθῶσι δὲ ἐπ᾽ αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἴσαι ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, αἱ ἀπ᾽ αὐτῶν κάθετοι ἀγόμεναι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα, ἐν οἷς εἰσιν αἱ ἐξ ἀρχῆς γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

1. ἕξουσι V; dein 1 linea eras. 2. ΖΝ] corr. ex ΖΜ B. ἔστιν B. 3. εἰσιν ἴσαι V. 4. εἰσί P, comp. Fb. περιέχουσι Vb. 5. ἐστί V, comp. Fb. 7. ἴσα] post ι del. α m. 2 P. 8. ΑΚΘ] ΚΘ e corr. V. 9. ΔΝ] Ν corr. ex Μ Bb. 10. ΔΜ″Ν′ b. 11. ΔΜ B, sed corr.; item lin. 14. 12. τῷ

latera reliquis aequalia habebunt [I, 26]. ergo $\Gamma K = ZN$. sed etiam $A\Gamma = \Delta Z$. ergo duae rectae $A\Gamma$, ΓK duabus ΔZ, ZN aequales sunt; et rectos angulos comprehendunt. itaque $AK = \Delta N$. et quoniam $A\Theta = \Delta M$, erit etiam $A\Theta^2 = \Delta M^2$. uerum $A\Theta^2 = AK^2 + K\Theta^2$; nam $\angle AK\Theta$ rectus est [I, 47]; et $\Delta M^2 = \Delta N^2 + NM^2$; nam $\angle \Delta NM$ rectus est [id.]. itaque $AK^2 + K\Theta^2 = \Delta N^2 + NM^2$; quorum $AK^2 = \Delta N^2$. itaque $K\Theta^2 = NM^2$ et $K\Theta = NM$. et quoniam duo latera ΘA, AK duobus $M\Delta$, ΔN singula singulis aequalia sunt, et basim ΘK basi MN aequalem esse demonstrauimus, erit $\angle \Theta AK = M\Delta N$ [I, 8].

Ergo si datis duobus angulis planis aequalibus, cetera, ut in propositione.

Corollarium.

Hinc manifestum est, si datis duobus angulis planis aequalibus in iis aequales rectae sublimes eriguntur angulos singulos singulis aequales cum rectis a principio datis comprehendentes, rectae ab iis ad ea plana perpendiculares ductae, in quibus sunt anguli ab initio dati, inter se aequales sunt.[1]) — quod erat demonstrandum.

1) Nam demonstratum est (lin. 13), esse $K\Theta = NM$.

ἀπό — 13. ἐστί] mg. m. 2B. 12. τῆς] (prius) om. P. 13. τῷ] corr. ex τοῦ V. ΘΚ] e corr. V. 14. δύο] αἱ δύο b. 17. ΜΔΝ ἐστιν] in ras. m. 1 P. 18. ὦσιν F. ἴσαι ἐπίπεδοι P. 19. τῆς προτάσεως] P; om. BFVb. 20. πόρισμα] mg. m. 2 FV. 22. ἴσαι] εὐθύγραμμοι ἴσαι Theon (B FVb). ἐπισταθῶσιν PBF. αὐτάς P. 23. ἴσαι] om. b. 26. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] P; om. Theon (BFVb).

λϛ΄.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ἐκ τῶν τριῶν στερεὶν παραλληλεπίπεδον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ἰσοπλεύρῳ μέν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.

Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ A, B, Γ, ὡς ἡ A πρὸς τὴν B, οὕτως ἡ B πρὸς τὴν Γ· λέγω, ὅτι τὸ ἐκ τῶν A, B, Γ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς B στερεῷ ἰσοπλεύρῳ μέν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.

Ἐκκείσθω στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ E περιεχομένη ὑπὸ τῶν ὑπὸ ΔEH, HEZ, $ZE\Delta$, καὶ κείσθω τῇ μὲν B ἴση ἑκάστη τῶν ΔE, HE, EZ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ EK στερεὸν παραλληλεπίπεδον, τῇ δὲ A ἴση ἡ ΛM, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΛM εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Λ τῇ πρὸς τῷ E στερεᾷ γωνίᾳ ἴση στερεὰ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν $N\Lambda\Xi$, $\Xi\Lambda M$, $M\Lambda N$, καὶ κείσθω τῇ μὲν B ἴση ἡ $\Lambda\Xi$, τῇ δὲ Γ ἴση ἡ ΛN. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ A πρὸς τὴν B, οὕτως ἡ B πρὸς τὴν Γ, ἴση δὲ ἡ μὲν A τῇ ΛM, ἡ δὲ B ἑκατέρᾳ τῶν $\Lambda\Xi$, $E\Delta$, ἡ δὲ Γ τῇ ΛN, ἔστιν

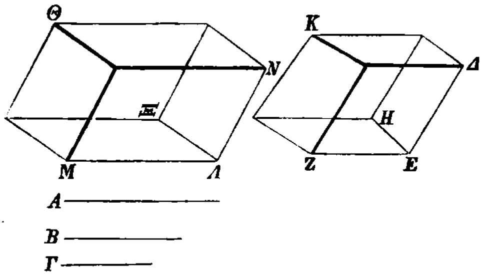
1. λϛ΄] non liquet in F. Hinc usque ad finem libri XII b tanto opere discrepat, ut scriptura eius integra in appendicem reiicienda fuerit. 2. ὦσι V. 3. στερεῶν F; -ον in ras. V. ἐστίν V, sed corr. 4. στερεῷ] om. V. 8. τό] postea ins. m. 1 P. ἐκ] ἀπό B, ὑπό FV. Post Γ supra add. περιεχόμενον F. στερεόν] -όν in ras. V. 10. τῷ] corr. ex τό V. 11. Post prius ὑπό add. τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων m. rec. FV; ὑπὸ τριῶν γ. ἐ. mg. m. 2 B; in textu ὑπό del. m. 2. ὑπό] (alt.) om. BFV. 12. HE] EH P. EZ] corr. ex ZE V. 14. ἴση κείσθω B. 16. στερεὰ γωνία] P; om. Theon (BFV). 17. $M\Lambda N$] M e corr. V. 18. Post ΛN add. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ $\Lambda\Theta$ στερεόν FV, in V punctis del.; Θ e corr. V. 20. ἑκατέρᾳ] P; ἑκάστῃ Theon (BFV). $\Lambda\Xi$] $\Lambda\Xi$, EZ, EH Theon (BFV). $E\Delta$] corr. ex EH V. Ante Γ ras. 1 litt. B.

XXXVI.

Si tres rectae proportionales sunt, solidum parallelepipedum ex tribus illis constructum aequale est solido parallelepipedo ex media constructo, quod aequilaterum est et priori aequiangulum.

Tres rectae proportionales sint A, B, Γ, ita ut sit $A : B = B : \Gamma$. dico, solidum ex A, B, Γ constructum aequale esse solido ex B constructo, quod aequilaterum est et priori aequiangulum.

ponatur angulus solidus ad E angulis $\varDelta EH$, HEZ, $ZE\varDelta$ comprehensus, et ponatur $\varDelta E = HE = EZ = B$, et expleatur solidum parallelepipedum EK, ponatur[1])



autem $\varLambda M = A$, et ad rectam $\varLambda M$ et punctum eius $\varLambda$ angulo solido, qui ad E positus est, aequalis angulus solidus construatur angulis $N\varLambda\Xi$, $\Xi\varLambda M$, $M\varLambda N$ comprehensus [prop. XXIII, cfr. prop. XXI], et ponatur $\varLambda\Xi = B$, $\varLambda N = \Gamma$. et quoniam est $A : B = B : \Gamma$ et $A = \varLambda M$, $B = \varLambda\Xi = E\varDelta$[2]), $\Gamma = \varLambda N$,

1) Intellegitur κείσθω ex lin. 11; sed fortasse uerba καί — παραλληλεπίπεδον lin. 12—13 interpolata sunt. cfr. lin. 18.
2) Propter sequentia exspectaueris $B = EZ = \varDelta E$.

ἄρα ὡς ἡ ΛΜ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΛΝ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΝΛΜ, ΔΕΖ αἱ πλευραὶ ἀντιπεπόνθασιν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΜΝ παραλληλόγραμμον τῷ ΔΖ παραλληλογράμμῳ. καὶ ἐπεὶ δύο γωνίαι ἐπίπεδοι εὐθύγραμμοι ἴσαι εἰσὶν αἱ ὑπὸ ΔΕΖ, ΝΛΜ, καὶ ἐπ' αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἐφεστᾶσιν αἱ ΛΞ, ΕΗ ἴσαι τε ἀλλήλαις καὶ ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, αἱ ἄρα ἀπὸ τῶν Η, Ξ σημείων κάθετοι ἀγόμεναι ἐπὶ τὰ διὰ τῶν ΝΛΜ, ΔΕΖ ἐπίπεδα ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὥστε τὰ ΛΘ, ΕΚ στερεὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἐστίν. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΛ στερεὸν τῷ ΕΚ στερεῷ. καί ἐστι τὸ μὲν ΛΘ τὸ ἐκ τῶν Α, Β, Γ στερεόν, τὸ δὲ ΕΚ τὸ ἀπὸ τῆς Β στερεόν· τὸ ἄρα ἐκ τῶν Α, Β, Γ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β στερεῷ ἰσοπλεύρῳ μέν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λζ'.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀνάλογον ἔσται· καὶ ἐὰν τὰ ἀπ' αὐτῶν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

---

2. ΛΝ] ΝΛ P. 6. καὶ αἱ B. εὐθεῖαι] om. FV. 8. ἑκατέραν] supra F. 10. ἴσα V, sed corr. 11. ΛΟ P. 12. ἐστί PBV, comp. F. 13. ὑπό] corr. ex ἐπί m. 2 B. ἐστίν· ἴσον ἄρα] om. φ. 14. ἐστί] ἐστίν P. ΟΛ P. 15. ΛΟ P.

erit $\varDelta M : EZ = \varDelta E : \varDelta N$. et latera aequales angulos $N\varDelta M$, $\varDelta EZ$ comprehendentia in contraria ratione sunt.[1]) itaque $MN = \varDelta Z$ [VI, 14]. et quoniam duo anguli plani rectilinei aequales sunt $\varDelta EZ$, $N\varDelta M$, et in iis sublimes erectae sunt rectae $\varDelta\Xi$, EH, quae et inter se aequales sunt et angulos singulos singulis aequales cum rectis a principio datis comprehendunt, rectae a punctis H, Ξ ad plana per $N\varDelta M$, $\varDelta EZ$ ducta perpendiculares ductae inter se aequales sunt [prop. XXXV coroll.]; quare solida $\varDelta\Theta$, EK eandem altitudinem habent. solida autem parallelepipeda, quae in aequalibus basibus sunt posita et eandem altitudinem habent, inter se aequalia sunt [prop. XXXI]. itaque $\Theta\varDelta = EK$. et $\varDelta\Theta$ solidum est ex A, B, Γ constructum, EK autem solidum ex B constructum. ergo solidum parallelepipedum ex A, B, Γ constructum aequale est solido ex B constructo, quod aequilaterum est et priori aequiangulum; quod erat demonstrandum.

XXXVII.

Si quattuor rectae proportionales sunt, etiam solida parallelepipeda in iis similia et similiter constructa proportionalia erunt; et si solida parallelepipeda in rectis similia et similiter constructa proportionalia sunt, etiam rectae ipsae proportionales erunt.

---

1) Cfr. p. 83 not. 1.

στερεόν] om. V. 17. παραλληλ' επίπεδον, ut semper fere, P; hic ' in ο mut. m. 2; item lin. 24. 20. λζ'] non liquet in F. 21. ὦσι V. 22. παράλληλα ἐπίπεδα F. 23. ἔσται] miro comp. F (corr. ex ·/.?). 24. παράλληλα ἐπίπεδα F.

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἀναγεγράφθωσαν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΚΑ, ΛΓ, ΜΕ, ΝΗ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ΚΑ πρὸς τὸ ΛΓ, οὕτως τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ.

Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΚΑ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τῷ ΛΓ, τὸ ΚΑ ἄρα πρὸς τὸ ΛΓ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ. καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΚ πρὸς τὸ ΛΓ, οὕτως τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ ΑΚ στερεὸν πρὸς τὸ ΛΓ στερεόν, οὕτως τὸ ΜΕ στερεὸν πρὸς τὸ ΝΗ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ.

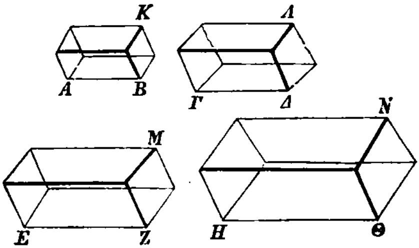
Ἐπεὶ γὰρ πάλιν τὸ ΚΑ πρὸς τὸ ΛΓ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, ἔχει δὲ καὶ τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, καί ἐστιν ὡς τὸ ΚΑ πρὸς τὸ ΛΓ, οὕτως τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι καὶ τὰ ἑξῆς τῆς προτάσεως· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

---

4. Ante *τε* m. 1 del. *στερεά* F. 5. *ΛΓ*] *ΛΓ, ΛΜ* F. 7. *ὅμοιον*] om. Theon (BFV). *ἐστιν* B. 8. *ΛΓ ὅμοιον* Theon (BFV). 12. *ἡ ΕΖ*] *ΕΖ* F. *καί*] om. B. 13. *ΝΗ*] *Η* non liquet in F. 14. *ΛΓ*] *ΓΛ* V. 15. *στερεόν*] om. V. *ΕΜ* V. *στερεόν*] om. V. *ΗΝ* V. 18. *ΚΑ*] *Α* eras. P. 19. *ἔχει*] (alt.) *ἐδείχθη* V. 20. *ΝΗ*] *ΜΕ* F. *λόγον ἔχον* V.

Sint quattuor rectae proportionales AB, $\Gamma\Delta$, EZ, $H\Theta$, ita ut sit $AB : \Gamma\Delta = EZ : H\Theta$, et in AB, $\Gamma\Delta$, EZ, $H\Theta$ similia et similiter posita construantur so-



lida parallelepipeda $K A$, $\Lambda\Gamma$, ME, NH. dico, esse $KA : \Lambda\Gamma = ME : NH$.

Nam quoniam $KA \sim \Lambda\Gamma$, erit $KA : \Lambda\Gamma = AB^3 : \Gamma\Delta^3$ [prop. XXXIII]. eadem de causa erit etiam $ME : NH = EZ^3 : H\Theta^3$. et $AB : \Gamma\Delta = EZ : H\Theta$. quare etiam $AK : \Lambda\Gamma = ME : NH$.

At uero sit $AK : \Lambda\Gamma = ME : NH$. dico, esse

$$AB : \Gamma\Delta = EZ : H\Theta.$$

nam quoniam rursus $KA : \Lambda\Gamma = AB^3 : \Gamma\Delta^3$ [prop. XXXIII], et $ME : NH = EZ^3 : H\Theta^3$, et $KA : \Lambda\Gamma = ME : NH$, erit etiam $AB : \Gamma\Delta = EZ : H\Theta$.

Ergo si quattuor rectae proportionales sunt, et quae sequuntur in propositione; quod erat demonstrandum.

---

21. $\Lambda\Gamma$] Λ e corr. m. 1 F. 24. ὥσι καὶ τά] ὦσιν F. ὦσιν B. De propositione, quae uulgo est 38, u. app.

λη'.

Ἐὰν κύβου τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων αἱ πλευραὶ δίχα τμηθῶσιν, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῇ, ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων καὶ ἡ τοῦ κύβου διάμετρος δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας.

Κύβου γὰρ τοῦ ΑΖ τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων τῶν ΓΖ, ΑΘ αἱ πλευραὶ δίχα τετμήσθωσαν κατὰ τὰ Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ, Π, Ο, Ρ σημεῖα, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω τὰ ΚΝ, ΞΡ, κοινὴ δὲ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ἔστω ἡ ΥΣ, τοῦ δὲ ΑΖ κύβου διαγώνιος ἡ ΔΗ. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΥΤ τῇ ΤΣ, ἡ δὲ ΔΤ τῇ ΤΗ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΔΥ, ΥΕ, ΒΣ, ΣΗ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΞ τῇ ΟΕ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΞΥ, ΥΟΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΞ τῇ ΟΕ, ἡ δὲ ΞΥ τῇ ΥΟ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΔΥ τῇ ΥΕ ἐστιν ἴση, καὶ τὸ ΔΞΥ τρίγωνον τῷ ΟΥΕ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΞΥΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΟΥΕ γωνίᾳ. διὰ δὴ τοῦτο εὐθεῖά ἐστιν ἡ ΔΥΕ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΣΗ εὐθεῖά ἐστιν, καὶ ἴση ἡ

1. λθ' codd. 2. κύβου] στερεοῦ παραλληλεπιπέδου Theon (BFV). ἀπεναντίον] corr. ex ἀπεναντίων m. 1 P. 3. τμηθῶσι FV. 4. ἐκβληθῇ ἡ] ἐκβληθείη F. 5. κύβου] στερεοῦ παραλληλεπιπέδου Theon (BFV). 7. κύβου γάρ] στερεοῦ γὰρ παραλληλεπιπέδου Theon (BFV). 10. ΚΝ] ras. 2 litt. V. ΞΡ] Ξ e corr. P, eras. V. τῶν ἐπιπέδων τομή BFV. 11. κύβου] στερεοῦ παραλληλεπιπέδου Theon (BFV). 12. ἡ] ἔστω ἡ FV. ὅτι] om. F; ὅτι αἱ (ἡ VF) ΥΣ, ΔΕ δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας, τουτέστιν ὅτι BV et mg. m. rec. F. ἴση ἐστίν] om. BFV. ΤΣ ἴση ἐστίν BFV. 13. ΔΤ] ΤΔ P.

XXXVIII.

Si in cubo[1]) latera planorum inter se oppositorum in duas partes aequales secantur, et per puncta sectionum plana ducuntur, communis planorum sectio et cubi diametrus inter se in duas partes aequales secabunt.

Nam in cubo AZ latera planorum inter se oppositorum ΓZ, $A\Theta$ in duas partes aequales secentur in punctis K, Λ, M, N, Ξ, Π, O, P, et per puncta sectionum plana ducantur KN, ΞP, et communis planorum sectio sit $\Upsilon\Sigma$, diametrus autem cubi AZ sit ΔH. dico, esse $\Upsilon T = T\Sigma$, $\Delta T = TH$.

ducantur enim $\Delta\Upsilon$, ΥE, $B\Sigma$, ΣH. et quoniam $\Delta\Xi$ rectae OE parallela est, anguli alterni $\Delta\Xi\Upsilon$, ΥOE inter se aequales sunt [I, 29]. et quoniam $\Delta\Xi = OE$, $\Xi\Upsilon = \Upsilon O$, et aequales angulos comprehendunt, erit $\Delta\Upsilon = \Upsilon E$ et $\Delta\Xi\Upsilon = O\Upsilon E$, et reliqui anguli reliquis aequales [I, 4]. itaque $\angle \Xi\Upsilon\Delta = O\Upsilon E$. quare recta est $\Delta\Upsilon E$ [I, 14]. eadem de causa etiam

1) In hac scriptura tuenda consentiunt Campanus, Bononiensis, Vaticanus P, quamquam in hoc legitur mg. m. 1: γρ. ἐὰν στερεοῦ παραλληλεπιπέδου. sane eadem demonstratio de quouis parallelepipedo ualet, sed cum propositio de cubo solo demonstrata propositioni 17 libri XIII, cui soli inseruit haec nostra propositio, satisfaceret, Euclides hoc casu speciali contentus fuit.

14. γάρ] om. F. $B\Sigma$] corr. ex BE m. 2 F. 15. αἱ] supra m. 1 F. 16. αἱ] om. F. εἰσί V, comp. F. 17. OE] ΘE F. 18. περιέχουσι V. τῇ] βάσει τῇ F V. 19. ἴση ἐστί V. $\ddot{\Upsilon} OE$ B; $O\Upsilon^{\cdot\cdot}E^{\cdot}$ F; $OE\Upsilon$, supra $E\Upsilon$ ras., V. 20. ἴσον ἐστίν B. 21. ἴσαι] om. BF; ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ V. 22. $O\Upsilon E$] $\ddot{\Upsilon} OE$ B; supra ΥE add. ·· et · m. 2 F. 23. ἐστι PV, comp. F. ἴση] supra scr. m. 2 B.

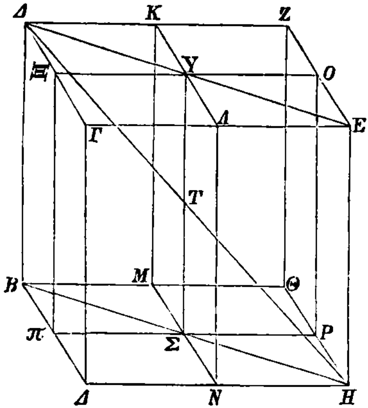
ΒΣ τῇ ΣΗ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΑ τῇ ΔΒ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος, ἀλλὰ ἡ ΓΑ καὶ τῇ ΕΗ ἴση τέ ἐστι καὶ παράλληλος, καὶ ἡ ΔΒ ἄρα τῇ ΕΗ ἴση τέ ἐστι καὶ παράλληλος. καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς εὐθεῖαι αἱ ΔΕ, ΒΗ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΒΗ. ἴση ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ ΕΔΤ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΗΤ· ἐναλλὰξ γάρ· ἡ δὲ ὑπὸ ΔΤΥ τῇ ὑπὸ ΗΤΣ. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΔΤΥ, ΗΤΣ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν τὴν ΔΥ τῇ ΗΣ· ἡμίσειαι γάρ εἰσι τῶν ΔΕ, ΒΗ· καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει. ἴση ἄρα ἡ μὲν ΔΤ τῇ ΤΗ, ἡ δὲ ΥΤ τῇ ΤΣ.

Ἐὰν ἄρα κύβου τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων αἱ πλευραὶ δίχα τμηθῶσιν, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῇ,

---

1. *ΣΗ*] in ras. V. *ἡ*] corr. ex *αἱ* V. *ἐστίν* B; item lin. 2, 3. 2. *καὶ τῇ*] *τῇ* FV. 3. *ἄρα*] om. V. *ΕΗ*] *Η* e corr. F; *ΕΗ ἄρα* V. 5. Post alt. *ΒΗ* add. Theon: *καὶ εἴληπται ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα τὰ Δ, Υ* (*Δ, ΕΥ* F), *Η, Σ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΗ, ΥΣ. ἐν ἑνὶ ἄρα εἰσὶν ἐπιπέδῳ αἱ ΔΗ, ΥΣ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΒΗ* (BFV). Dein in FV seq. *καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΔΗ.* 6. *μέν*] om. B. 7. *ἡ δέ*] *ἔστιν δὲ ἡ* B. *ΗΤΣ*] *ΤΣ* in ras. m. 1 P; *ΗΤΣ ἴση* B. 8. *ἐστιν* B. 9. *πλευράν*] om. V. 11. *εἰσιν* B. 13. *ΔΤ*] *Δ* e corr. V. 14. *κύβου*] *στερεοῦ παραλληλεπιπέδου* Theon (BFV); item p. 134 lin. 1. 15. *τμηθῶσι* V.

$B\Sigma H$ recta est, et $B\Sigma = \Sigma H$. et quoniam ΓA rectae ΔB et aequalis est et parallela, et ΓA etiam rectae EH et aequalis et parallela est, etiam ΔB rectae EH et aequalis est et parallela [prop. IX].



et eas coniungunt rectae ΔE, BH. itaque ΔE rectae BH parallela est [I, 33]. itaque[1]) $\angle E\Delta T = BHT$ (nam alterni sunt) [I, 29], et $\angle \Delta T\Upsilon = HT\Sigma$ [I, 15]. quare duo trianguli sunt $\Delta T\Upsilon$, $HT\Sigma$ duos angulos duobus angulis aequales habentes et unum latus uni lateri aequale, quod sub altero angulorum aequalium subtendit, $\Delta\Upsilon = H\Sigma$ (nam dimidiae sunt rectarum ΔE, BH), et reliqua latera reliquis lateribus aequalia habebunt [I, 26]. ergo $\Delta T = TH$, $\Upsilon T = T\Sigma$.

Ergo si in cubo latera planorum inter se oppositorum in duas partes aequales secantur, et per puncta sectionum plana ducuntur, communis planorum sectio

1) Nam ΔE, ΔH, BH in eodem plano sunt (prop. VII).

ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων καὶ ἡ τοῦ κύβου διάμετρος δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λθ΄.

Ἐὰν ᾖ δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ᾖ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἔσται τὰ πρίσματα.

Ἔστω δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ τὰ *ΑΒΓΔΕΖ*, *ΗΘΚΛΜΝ*, καὶ τὸ μὲν ἐχέτω βάσιν τὸ *ΑΖ* παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τὸ *ΗΘΚ* τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ἔστω τὸ *ΑΖ* παραλληλόγραμμον τοῦ *ΗΘΚ* τριγώνου· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ *ΑΒΓΔΕΖ* πρίσμα τῷ *ΗΘΚΛΜΝ* πρίσματι.

Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ *ΑΞ*, *ΗΟ* στερεά. ἐπεὶ διπλάσιόν ἐστι τὸ *ΑΖ* παραλληλόγραμμον τοῦ *ΗΘΚ* τριγώνου, ἔστι δὲ καὶ τὸ *ΘΚ* παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ *ΗΘΚ* τριγώνου, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ *ΑΖ* παραλληλόγραμμον τῷ *ΘΚ* παραλληλογράμμῳ. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ *ΑΞ* στερεὸν τῷ *ΗΟ* στερεῷ. καί ἐστι τοῦ μὲν *ΑΞ* στερεοῦ ἥμισυ τὸ *ΑΒΓΔΕΖ* πρίσμα, τοῦ δὲ *ΗΟ* στερεοῦ ἥμισυ τὸ *ΗΘΚΛΜΝ* πρίσμα· ἴσον

---

3. μ΄ codd. (in F seq. ras. 1 litt.). 10. δέ] δὲ λοιπόν F. τό] ο e corr. m. 2 B. διπλάσιον — 11. τριγώνου] om. F. 14. *ΗΟ*] in ras. m. 2 V; *Η* e corr. m. rec. P. Ante ἐπεί add. καί m. 1—2 V. 16. ἔστιν B. ἔστι — 17. τριγώνου] mg. m. 2 V. 18. δέ] δ' F. 20. ἴσα] om. F. ἐστίν] ἐστὶν ἴσον F, ἐστὶν ἴσα m. 2. 21. *ΗΟ*] *Ο* non liquet FV. ἐστιν B. 22. *ΑΒΓΔΖΕ* F, corr. m. 2. 23. *ΗΘ*? F.

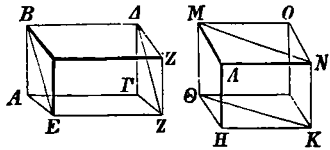
et cubi diametrus inter se in duas partes aequales secabunt; quod erat demonstrandum.

XXXIX.

Si duorum prismatum eandem altitudinem habentium alterum basim parallelogrammum, alterum triangulum habet, et parallelogrammum duplo maius est triangulo, prismata aequalia sunt.

Duo prismata sint $AB\Gamma\Delta EZ$, $H\Theta K\Lambda MN$ eandem altitudinem habentia, et alterum basim habeat AZ parallelogrammum, alterum triangulum $H\Theta K$, et sit $AZ = 2H\Theta K$. dico, esse $AB\Gamma\Delta EZ = H\Theta K\Lambda MN$.

expleantur enim solida $A\Xi$, HO. quoniam $AZ = 2H\Theta K$, et $\Theta K = 2H\Theta K$ [I, 34], erit $AZ = \Theta K$.



solida autem parallelepipeda, quae in aequalibus sunt basibus et eandem altitudinem habent, aequalia sunt [prop. XXXI]. itaque $A\Xi = HO$. et $AB\Gamma\Delta EZ = \frac{1}{2} A\Xi$, $H\Theta K\Lambda MN = \frac{1}{2} HO$ [prop. XXVIII]. itaque $AB\Gamma\Delta EZ = H\Theta K\Lambda MN$.

ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα τῷ ΗΘΚΛΜΝ πρίσματι.

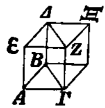
Ἐὰν ἄρα ᾖ δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ᾖ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἐστὶ τὰ πρίσματα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

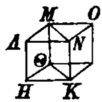
---

1. *πρίσμα*] om. BF. 3. *ἔχει* φ et P (corr. m. 2). *Εὐκλείδου στοιχείων* $\overline{\iota\alpha}$ PF; *Εὐκλείδου στερεῶν* $\overline{\iota\alpha}$ B.

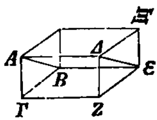
Ergo si duorum prismatum eandem altitudinem habentium alterum basim parallelogrammum, alterum triangulum habet, et parallelogrammum duplo maius est triangulo, prismata aequalia sunt; quod erat demonstrandum.[1])

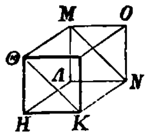
---

1) In PB figura haec est: 



Deinde haec sequitur addito σαφὴς (σαφεστέρα B) καταγραφή





In B in fig. alt. pro *E* est *B*, et *B* in *Δ* mutatum est.

ιβ'.

α'.

Τὰ ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

Ἔστωσαν κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΖΗΘ, καὶ ἐν αὐτοῖς ὅμοια πολύγωνα ἔστω τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, διάμετροι δὲ τῶν κύκλων ἔστωσαν αἱ ΒΜ, ΗΝ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΜ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΝ τετράγωνον, οὕτως τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΑΜ, ΗΛ, ΖΝ. καὶ ἐπεὶ ὅμοιον τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον τῷ ΖΗΘΚΛ πολυγώνῳ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΛ, καί ἐστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΛ. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΒΑΕ, ΗΖΛ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα τὴν ὑπὸ ΒΑΕ τῇ ὑπὸ ΗΖΛ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΕ τρί-

---

Εὐκλείδου στοιχείων ιβ P; *Εὐκλείδου στοιχείων τῆς Θέωνος ἐκδόσεως ιβ* F; *Εὐκλείδου στερεῶν β στοιχείων ιβ* BV; *Εὐκλείδου ιβ* q. 1. *α'*] om. V. 2. *πολυγώνια* B. 5. Ante *κύκλοι* eras. *ἴσοι* V. *ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ* Theon (BFVq). 6. *πολυγώνια* B. 7. *λέγω*] ω e corr. V. 8. *ΒΜ*] *Β* supra scr. V. 9. *πολυγώνιον* B, item lin. 10. 12. *ἐστι τό* BVq. 13. *ἐστὶ καί*] *ἐστίν* q; *ἐστὶν καί* B. *ὑπό*] (alt.) bis F. 14. *ΗΖΛ*]

Liber XII.

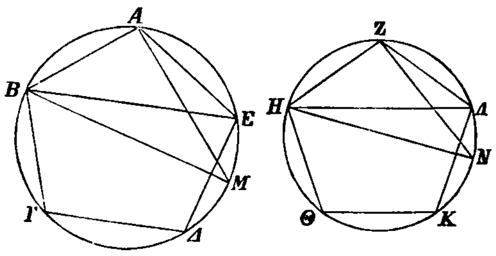
I.

Similia polygona in circulis inscripta eam inter se rationem habent quam quadrata diametrorum.

Sint circuli $AB\Gamma$, $ZH\Theta$, et in iis inscripta sint polygona $AB\Gamma\Delta E$, $ZH\Theta K\Lambda$, diametri autem circulorum sint BM, HN. dico, esse

$$BM^2 : HN^2 = AB\Gamma\Delta E : ZH\Theta K\Lambda.$$

ducantur enim BE, AM, $H\Lambda$, ZN. et quoniam $AB\Gamma\Delta E \sim ZH\Theta K\Lambda$, erit $\angle BAE = HZ\Lambda$ et $BA : AE = HZ : Z\Lambda$ [VI def. 1]. itaque duo trianguli



sunt BAE, $HZ\Lambda$ unum angulum uni angulo aequalem habentes, $\angle BAE = HZ\Lambda$, et latera aequales angulos comprehendentia proportionalia. itaque triangulus ABE

in ras. m. 1 P; HZ in ras. m. 2 B. τήν] τῇ F. 16. $HZ\Lambda$] $H\ddot{}Z\dot{}\Lambda$ F (puncta post add.); $ZH\Lambda$ V, $H\Lambda Z$ Bq. τήν] τίν V.

γωνον τῷ ΖΗΔ τριγώνῳ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΔΗ. ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ ΑΕΒ τῇ ὑπὸ ΑΜΒ ἐστιν ἴση· ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς περιφερείας βεβήκασιν· ἡ δὲ ὑπὸ ΖΔΗ τῇ ὑπὸ ΖΝΗ· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΜΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΖΝΗ ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΑΜ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΗΖΝ ἴση· καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ ἐστιν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΜ τρίγωνον τῷ ΖΗΝ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΜ πρὸς τὴν ΗΝ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΗΖ. ἀλλὰ τοῦ μὲν τῆς ΒΜ πρὸς τὴν ΗΝ λόγου διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΜ τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΝ τετράγωνον, τοῦ δὲ τῆς ΒΑ πρὸς τὴν ΗΖ διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ΑΒΓΔΕ πολυγώνου πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΜ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΝ τετράγωνον, οὕτως τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον.

Τὰ ἄρα ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

βʹ.

Οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

Ἔστωσαν κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, διάμετροι δὲ αὐτῶν [ἔστωσαν] αἱ ΒΔ, ΖΘ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως τὸ

---

1. ΖΗΔ] corr. ex ΖΔΗ V, ΖΔΗ B, ΗΖΔ φ. 2. ΖΔΗ] ΖΗ¨Δ· F. 3. Supra περιφερείας m. rec. add. τῆς ΒΑ P. 4. δέ] δ' P. 5. ὑπό] bis V. ἔστιν B. 6. ἡ] ἡ γωνία ἡ F. ΑΒΜ F. ἴση] om. B. ἡ] om. q. 7. ΑΜΒ B. 9. ΗΖ] Η in ras. m. 1 P. 10. ΜΒ V. 12. δέ] δὲ ἀπό F, et del. ἀπό V. 24. ἔστωσαν] mg. postea add. m. 1 P.

triangulo $ZH\Delta$ aequiangulus est [VI, 6]. quare $\angle AEB = Z\Delta H$. sed $\angle AEB = \Delta MB$ (nam in eodem arcu positi sunt) [III, 27], et $\angle Z\Delta H = ZNH$. quare etiam $\angle \Delta MB = ZNH$. uerum etiam

$\angle B\Delta M = HZN$; nam uterque rectus est [III, 31].

itaque etiam reliquus reliquo aequalis est. triangulus igitur ΔBM triangulo ZHN aequiangulus est. quare $BM : HN = B\Delta : HZ$ [VI, 4]. uerum $BM^2 : HN^2$ ratio duplicata est quam $BM : HN$, et

$$AB\Gamma\Delta E : ZH\Theta K\Lambda = B\Delta^2 : HZ^2 \text{ [VI, 20].}$$

itaque etiam

$$BM^2 : HN^2 = AB\Gamma\Delta E : ZH\Theta K\Lambda.$$

Ergo similia polygona in circulis inscripta eam inter se rationem habent quam quadrata diametrorum; quod erat demonstrandum.

II.

Circuli eam inter se rationem habent quam quadrata diametrorum.

Sint circuli $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$ et eorum diametri $B\Delta$, $Z\Theta$. dico, esse

$$AB\Gamma\Delta : EZH\Theta = B\Delta^2 : Z\Theta^2.$$

II. Simplicius in phys. fol. 15. Psellus p. 65.

ΔB F. λέγω — p. 142, 5. ὡς τὸ ἀπό] λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$ τετράγωνον (comp. add. m. 2 V) πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $Z\Theta$ τετράγωνον (om. V) οὕτως ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸν $EZH\Theta$ κύκλον. εἰ γὰρ μή ἐστιν (hic seq. in q: ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸν $EZH\Theta$) ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$ τετράγωνον (om. V) πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $Z\Theta$ (τετράγωνον add. Vq), οὕτως ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸν $EZH\Theta$ κύκλον (οὕτως — κύκλον om. q), ἔσται ὡς τὸ ἀπό (πρὸς τόν — ἀπό om. F) BFVq et P mg. m. 2 (γρ. καὶ οὕτως et in fine ἢ δῆτα γραφὴ καὶ κρείττων ἐστίν).

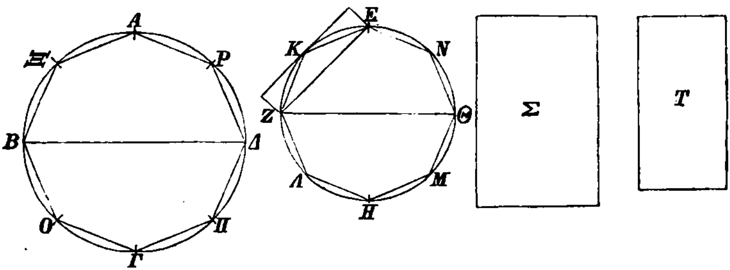
ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, ἔσται ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον ἢ πρὸς μεῖζον. ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ Σ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ· τὸ δὴ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου, ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν Ε, Ζ, Η, Θ σημείων ἐφαπτομένας [εὐθείας] τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸν κύκλον τετραγώνου ἥμισύ ἐστι τὸ ΕΖΗΘ τετράγωνον, τοῦ δὲ περιγραφέντος τετραγώνου ἐλάττων ἐστὶν ὁ κύκλος· ὥστε τὸ ΕΖΗΘ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. τετμήσθωσαν δίχα αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ περιφέρειαι κατὰ τὰ Κ, Λ, Μ, Ν σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου, ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν Κ, Λ, Μ, Ν σημείων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν καὶ ἀναπληρώσωμεν τὰ ἐπὶ τῶν ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ εὐθειῶν παραλληλόγραμμα, ἕκαστον

---

3. ὁ] supra m. 1 P. 5. τῆς ΒΔ — 6. κύκλος] om. F. 5. ΒΔ τετράγωνον V. 7. τι] om. V; supra ἔλασσον ras. est. κύκλου] supra scr. m. 1 V. 9. ΕΖΗΘ] (alt.) Ε supra m. 1 V. δή] δέ FV. 12. εὐθείας] om. BFVq. 13. διάγωμεν Bq, διαγάγωμεν B m. 2 et F (δι- euan.). 15. ἐλάσσων φ. 17. ἡμίσεος BVq. 18. ΘΕ] supra m. 2 B. 20. ΕΚΖ] Ζ e corr. m. 1 V. 21. ΗΜΘ] Η e corr. π; ΘΗΜΘ, del.

Nam si non est $AB\Gamma\Delta : EZH\Theta = B\Delta^2 : Z\Theta^2$, erit ut $B\Delta^2 : Z\Theta^2$, ita $AB\Gamma\Delta$ aut ad minus aliquod circulo $EZH\Theta$ spatium aut ad maius. sit prius ad minus, Σ. et in circulo $EZH\Theta$ inscribatur quadratum $EZH\Theta$ [IV, 6]. quadratum igitur inscriptum maius est quam dimidium circuli $EZH\Theta$, quoniam, si per puncta E, Z, H, Θ rectas circulum contingentes duxerimus, quadratum $EZH\Theta$ dimidium[1]) est quadrati circum circulum circumscripti, et circulus minor est quadrato circumscripto; quare quadratum inscriptum $EZH\Theta$ maius est quam dimidium circuli $EZH\Theta$.



iam arcus EZ, ZH, $H\Theta$, ΘE in punctis K, Λ, M, N in binas partes aequales secentur, et ducantur EK, KZ, $Z\Lambda$, ΛH, HM, $M\Theta$, ΘN, NE. itaque etiam singuli trianguli EKZ, $Z\Lambda H$, $HM\Theta$, ΘNE maiores sunt quam dimidia segmentorum circuli ad eos pertinentium, quoniam si per puncta K, Λ, M, N rectas circulum contingentes duxerimus et parallelogramma in rectis EZ, ZH, $H\Theta$, ΘE posita expleuerimus,

1) Hoc facile ex I, 47 demonstratur, coll. VI, 20 coroll.

pr. Θ et supra scr. bis M F. ΘNE] supra add. N m. 2 F. 22. ἑαυτό] corr. ex ἑαυτόν m. 2 B. 25. Post ἕκαστον add. ἄρα m. 2 F.

τῶν EKZ, $Z\Lambda H$, $HM\Theta$, ΘNE τριγώνων ἥμισυ ἔσται τοῦ καθ' ἑαυτὸ παραλληλογράμμου, ἀλλὰ το καθ' ἑαυτὸ τμῆμα ἔλαττόν ἐστι τοῦ παραλληλογράμμου· ὥστε ἕκαστον τῶν EKZ, $Z\Lambda H$, $HM\Theta$, ΘNE τριγώνων μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κύκλου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ $EZH\Theta$ κύκλος τοῦ Σ χωρίου. ἐδείχθη γὰρ ἐν τῷ πρώτῳ θεωρήματι τοῦ δεκάτου βιβλίου, ὅτι δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους. λελείφθω οὖν, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν EK, KZ, $Z\Lambda$, ΛH, HM, $M\Theta$, ΘN, NE τμήματα τοῦ $EZH\Theta$ κύκλου ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ $EZH\Theta$ κύκλος τοῦ Σ χωρίου. λοιπὸν ἄρα τὸ $EKZ\Lambda HM\Theta N$ πολύγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ Σ χωρίου. ἐγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον τῷ $EKZ\Lambda HM\Theta N$ πολυγώνῳ ὅμοιον πολύγωνον τὸ $A\Xi BO\Gamma\Pi\Delta P$· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $Z\Theta$ τετράγωνον, οὕτως τὸ $A\Xi BO\Gamma\Pi\Delta P$ πολύγωνον πρὸς τὸ $EKZ\Lambda HM\Theta N$ πολύγωνον. ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $Z\Theta$, οὕτως ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸ Σ χωρίον· καὶ ὡς ἄρα ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸ Σ χωρίον, οὕτως τὸ

1. EKZ] KZ in ras. m. 1 P; EZK q. Post ΘNE ras. 2 litt. B. τριγώνων] ι in ras. m. 2 B. ἥμισυ — 4. τριγώνων] bis B. 2. ἑαυτό] corr. ex ἑαυτόν m. 2 B (priore tantum loco).

singuli trianguli EKZ, $Z\varLambda H$, $HM\Theta$, ΘNE dimidia sunt parallelogrammorum ad eos pertinentium, et segmenta ad eos pertinentia minora sunt parallelogrammis; quare singuli trianguli EKZ, $Z\varLambda H$, $HM\Theta$, ΘNE maiores sunt quam dimidia segmentorum ad eos pertinentium. itaque relictos arcus secantes et rectas ducentes et hoc semper facientes segmenta quaedam circuli relinquemus, quae minora erunt excessu, quo circulus $EZH\Theta$ spatium Σ excedit; nam in primo theoremate decimi libri demonstratum est, si datis duabus magnitudinibus inaequalibus a maiore plus quam dimidium subtrahatur et a relicta plus quam dimidium et hoc semper fiat, magnitudinem relictum iri, quae minor sit data magnitudine minore. relinquatur igitur, et segmenta circuli $EZH\Theta$ in rectis EK, KZ, $Z\varLambda$, $\varLambda H$, HM, $M\Theta$, ΘN, NE posita minora sint excessu, quo circulus $EZH\Theta$ spatium Σ excedit. itaque $EKZ\varLambda HM\Theta N > \Sigma$. inscribatur etiam in circulo $AB\Gamma\varDelta$ polygonum $A\Xi BO\Gamma\Pi\varDelta P$ polygono $EKZ\varLambda HM\Theta N$ simile. erit igitur $B\varDelta^2 : Z\Theta^2 = A\Xi BO\Gamma\Pi\varDelta P : EKZ\varLambda HM\Theta N$ [prop. I]. uerum etiam $B\varDelta^2 : Z\Theta^2 = AB\Gamma\varDelta : \Sigma$. quare etiam $AB\Gamma\varDelta : \Sigma$

---

3. αὐτό P. ἔλασσον B (utroque loco), Vq; comp. F. 4. ὥστε καί V. 5. ἡμίσεος BFVq. 8. αἰεί F, ἀεί φ. τμήματα B. 9. ἐλάττονα BFVq. 10. Σ] corr. ex E B. 12. ἐκ- corr. ex ἐγ- in scr. F. 13. καί — 14. ἥμισυ] om. P. 14. ληφθήσεται q. 15. ἔσται] ἐστιν FV. 16. λελήφθω F et V (sed corr.); εἰλήφθω q. 17. HM] mg. m. 1 P. τμήματα — 18. κύκλου] mg. m. 1 V. 18. $EZH\Theta$] $EZ\Theta$ V, EZ q. ἐλάσσονα B. 19. $EZH\Theta$] pro E c in ras. φ. 20. $EZK\varLambda HM\Theta N$ P. πολυγώνιον q. 22. ὅμοιον] in ras. m. 2 V. O in ras. m. 1 B; Γ mg. V. 24. οὕτως — 26. $Z\Theta$] bis V, corr. m. 1.

ΑΞΒΟΓΠΔΡ πολύγωνον πρὸς τὸ *ΕΚΖΛΗΜΘΝ* πολύγωνον· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ὁ *ΑΒΓΔ* κύκλος πρὸς τὸ ἐν αὐτῷ πολύγωνον, οὕτως τὸ *Σ* χωρίον πρὸς τὸ *ΕΚΖΛΗΜΘΝ* πολύγωνον. μείζων δὲ ὁ *ΑΒΓΔ* κύκλος τοῦ ἐν αὐτῷ πολυγώνου· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ *Σ* χωρίον τοῦ *ΕΚΖΛΗΜΘΝ* πολυγώνου. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς *ΒΔ* τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΘ*, οὕτως ὁ *ΑΒΓΔ* κύκλος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ *ΕΖΗΘ* κύκλου χωρίον. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ὡς τὸ ἀπὶ *ΖΘ* πρὸς τὸ ἀπὸ *ΒΔ*, οὕτως ὁ *ΕΖΗΘ* κύκλος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ *ΑΒΓΔ* κύκλου χωρίον.

Λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς *ΒΔ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΘ*, οὕτως ὁ *ΑΒΓΔ* κύκλος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ *ΕΖΗΘ* κύκλου χωρίον.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ *Σ*. ἀνάπαλιν ἄρα [ἐστὶν] ὡς τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΘ* τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΔΒ*, οὕτως τὸ *Σ* χωρίον πρὸς τὸν *ΑΒΓΔ* κύκλον. ἀλλ' ὡς τὸ *Σ* χωρίον πρὸς τὸν *ΑΒΓΔ* κύκλον, οὕτως ὁ *ΕΖΗΘ* κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ *ΑΒΓΔ* κύκλου χωρίον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΘ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΒΔ*, οὕτως ὁ *ΕΖΗΘ* κύκλος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ *ΑΒΓΔ* κύκλου χωρίον· ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς *ΒΔ* τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΘ*, οὕτως ὁ *ΑΒΓΔ* κύκλος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ *ΕΖΗΘ* κύκλου χωρίον. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλασσον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς *ΒΔ* τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΘ*, οὕτως ὁ *ΑΒΓΔ* κύκλος πρὸς τὸν *ΕΖΗΘ* κύκλον.

---

3. ἐν αὐτῷ] *ΑΞΒΟΓΠΔΡ* V. 4. μείζων] corr. ex μεῖζον m. 1 BV. 5. καί] supra m. 2 B. 7. ἐστίν] om. V.

$= A\Xi BO\Gamma\Pi\Delta P : EKZ\Lambda HM\Theta N$. itaque permutando [V, 16]

$$AB\Gamma\Delta : A\Xi BO\Gamma\Pi\Delta P = \Sigma : EKZ\Lambda HM\Theta N.$$

sed $AB\Gamma\Delta > A\Xi BO\Gamma\Pi\Delta P$. quare etiam

$$\Sigma > EKZ\Lambda HM\Theta N.$$

uerum etiam $\Sigma < EKZ\Lambda HM\Theta N$; quod fieri non potest.' itaque non est ut $B\Delta^2$ ad $Z\Theta^2$, ita circulus $AB\Gamma\Delta$ ad spatium aliquod minus circulo $EZH\Theta$. iam similiter demonstrabimus, ne circulum $EZH\Theta$ quidem ad spatium aliquod minus circulo $AB\Gamma\Delta$ eam rationem habere quam $Z\Theta^2 : B\Delta^2$.

Iam dico, ne ad maius quidem spatium aliquod circulo $EZH\Theta$ circulum $AB\Gamma\Delta$ eam rationem habere quam $B\Delta^2 : Z\Theta^2$.

nam si fieri potest, habeat ad Σ maius circulo $EZH\Theta$. e contrario igitur [V, 7 coroll.] $Z\Theta^2 : B\Delta^2 = \Sigma : AB\Gamma\Delta$. uerum ut Σ spatium ad circulum $AB\Gamma\Delta$, ita circulus $EZH\Theta$ ad spatium minus circulo $AB\Gamma\Delta$ [u. lemma]. quare etiam ut $Z\Theta^2 : B\Delta^2$, ita circulus $EZH\Theta$ ad spatium aliquod minus circulo $AB\Gamma\Delta$; quod fieri non posse demonstratum est. itaque non est, ut $B\Delta^2 : Z\Theta^2$, ita circulus $AB\Gamma\Delta$ ad spatium aliquod maius circulo $EZH\Theta$. demonstrauimus autem, ne ad minus quidem eum illam habere rationem. est igitur $B\Delta^2 : Z\Theta^2 = AB\Gamma\Delta : EZH\Theta$.

ἐστίν — ἄρα] supra m. 2 B. 8. τῆς] om. Bq. ἀπὸ τῆς] om. V. $Z\Theta$ τετράγωνον BFVq. 9. ἔλαττον B. 10. τῆς $Z\Theta$ V. 11. τῆς $B\Delta$ V. 13. δή] δέ FV. οὐδ' F. 17. ἐστίν] om. P. 18. ΔB] $B\Delta$ τετράγωνον V. 19. ἀλλ' ὡς — 20. κύκλον] om. q. 20. κύκλον] om. V; mg. m. 1: ὡς εὐθὺς ἐρεῖ P. ἔλασσον BVq. 24. $B\Delta$] AB P. 27. πρός] om. V. 28. $B\Delta$] AB P. $Z\Theta$ τετράγωνον BV.

Οἱ ἄρα κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα.

Λέγω δή, ὅτι τοῦ Σ χωρίου μείζονος ὄντος τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου ἐστὶν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον.

Γεγονέτω γὰρ ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸ Τ χωρίον. λέγω, ὅτι ἔλαττόν ἐστι τὸ Τ χωρίον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸ Τ χωρίον, ἐναλλάξ ἐστιν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ Τ χωρίον. μεῖζον δὲ τὸ Σ χωρίον τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου· μείζων ἄρα καὶ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τοῦ Τ χωρίου. ὥστε ἐστὶν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

γ'.

Πᾶσα πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις καὶ [ὁμοίας] τῇ ὅλῃ τριγώνους ἐχούσας βάσεις καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος.

---

3. *λῆμμα*] om. codd. 6. *ἔλασσον* BVq. 7. *κύκλου*] om. V. 9. *τό*] corr. ex *τόν* m. 1 P. 10. *ἔλασσον* B, comp. F. 12. *κύκλος*] om. V. 13. *Σ*] E F. 15. *μεῖζον*] *-ον*

Ergo circuli eam inter se rationem habent quam quadrata diametrorum; quod erat demonstrandum.

Corollarium.[1])

Dico, si $EZH\Theta > \Sigma$, esse ut Σ spatium ad circulum $AB\Gamma\Delta$, ita circulus $EZH\Theta$ ad spatium aliquod minus circulo $AB\Gamma\Delta$.

fiat enim $\Sigma : AB\Gamma\Delta = EZH\Theta : T$. dico, esse $T < AB\Gamma\Delta$. nam quoniam est $\Sigma : AB\Gamma\Delta = EZH\Theta : T$, permutando erit [V, 16] $\Sigma : EZH\Theta = AB\Gamma\Delta : T$. sed $\Sigma > EZH\Theta$. quare etiam $AB\Gamma\Delta > T$ [V, 14]. est igitur, ut spatium Σ ad $AB\Gamma\Delta$ circulum, ita circulus $EZH\Theta$ ad spatium minus circulo $AB\Gamma\Delta$; quod erat demonstrandum.

III.

Omnis pyramis triangulam basim habens in duas pyramidas inter se et aequales et similes totique similes triangulas bases habentes et in duo prismata aequalia diuiditur; et duo prismata maiora sunt dimidio totius pyramidis.

---

1) Hoc lemma an genuinum non sit, dubitare licet; etiam loci quidam in ipsa demonstratione suspecti sunt. sed de hoc toto genere, scilicet interpolationibus ante Theonem ortis, post modo uidebimus.

---

e corr. V. Σ] E F. 18. ἔλασσον BFVq. κύκλου] om. V. 20. γ′] om. q; non liquet F. 21. Post τρίγωνον 4 litt. eras. P. 22. Post εἰς ins. τε m. 2 F. τε καὶ ὁμοίας] supra m. 2 B, om. FVq. 23. ἀλλήλας P, -ας e corr. Dein seq. in BFVq: τριγώνους (ου e corr. V) ἐχούσας (corr. ex ἔχουσα m. 2 F) βάσεις. ὁμοίας] om. P. τριγώνου P, corr. m. 1. τριγώνους ἐχούσας βάσεις] om. BFVq. 24. ἴσα] om. F, in ras. V. καὶ τὰ δύο πρίσματα] om. F.

Ἔστω πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος.

Τετμήσθωσαν γὰρ αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ, ΔΓ δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ, Η, Θ, Κ, Λ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΕ, ΕΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΘ, ΚΖ, ΖΗ. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΒ, ἡ δὲ ΑΘ τῇ ΔΘ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ τῇ ΔΒ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΚ τῇ ΑΒ παράλληλός ἐστιν. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΕΒΚ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ τῇ ΕΒ. ἀλλὰ ἡ ΕΒ τῇ ΕΑ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ΑΕ ἄρα τῇ ΘΚ ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΘ τῇ ΘΔ ἴση· δύο δὴ αἱ ΕΑ, ΑΘ δυσὶ ταῖς ΚΘ, ΘΔ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΑΘ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΚΘΔ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΕΘ βάσει τῇ ΚΔ ἐστιν ἴση. ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΕΘ τρίγωνον τῷ ΘΚΔ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΘΗ τρίγωνον τῷ ΘΛΔ τριγώνῳ ἴσον τέ ἐστι καὶ ὅμοιον. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ΕΘ, ΘΗ παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς ΚΔ, ΔΛ εἰσιν οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, ἴσας γωνίας περιέξουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΘΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΔΛ γωνίᾳ. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι αἱ ΕΘ, ΘΗ δυσὶ ταῖς ΚΔ, ΔΛ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκα-

---

1. τό] corr. ex ἡ m. 2 F. ΑΒΓΔ F, et B, eras. Δ. τρίγωνον] Δʹ F. 7. ΔΒ] ΔΕ F. 8. ΔΓ] Γ e corr. m. 1 F. 9. ΕΗ] ΗΕ FV. ΘΚ] supra scr. m. 2 B. 11. ΔΘ] in ras. V, ΘΔ B, ΕΔ F. ΔΒ] ΔΕ F. 12. ἐστι

Sit pyramis, cuius basis sit $AB\Gamma$ triangulus, uertex autem punctum Δ. dico, pyramidem $AB\Gamma\Delta$ in duas pyramides diuidi inter se aequales triangulas bases habentes et toti similes et in duo prismata aequalia, et duo prismata maiora esse dimidio totius pyramidis.

secentur enim AB, $B\Gamma$, ΓA, $A\Delta$, ΔB, $\Delta\Gamma$ in duas partes aequales in punctis E, Z, H, Θ, K, Λ, et ducantur ΘE, EH, $H\Theta$, ΘK, $K\Lambda$, $\Lambda\Theta$, KZ, ZH. iam quoniam $AE = EB$, $A\Theta = \Delta\Theta$, erit $E\Theta$ rectae ΔB parallela [VI, 2]. eadem de causa etiam ΘK rectae AB parallela est. itaque parallelogrammum est ΘEBK. itaque $\Theta K = EB$ [I, 34]. uerum etiam $EB = EA$. quare etiam $EA = \Theta K$. uerum etiam $A\Theta = \Theta\Delta$. itaque duae rectae EA, $A\Theta$ duabus $K\Theta$, $\Theta\Delta$ aequales sunt singulae singulis; et $\angle EA\Theta = K\Theta\Delta$ [I, 29]. itaque $E\Theta = K\Delta$ [I, 4]. quare triangulus $AE\Theta$ triangulo $\Theta K\Delta$ et aequalis est et similis [I, 4]. eadem de causa etiam triangulus $A\Theta H$ triangulo $\Theta\Lambda\Delta$ et aequalis est et similis. et quoniam duae rectae inter se tangentes $E\Theta$, ΘH duabus rectis inter se tangentibus $K\Delta$, $\Delta\Lambda$ parallelae sunt in eodem plano non positae, aequales angulos comprehendent [XI, 10]. itaque $\angle E\Theta H = K\Delta\Lambda$. et quoniam duae rectae $E\Theta$, ΘH duabus rectis $K\Delta$, $\Delta\Lambda$ aequales sunt singulae

---

q. 14. EA] in ras. V, AE BF. 15. AE] EA P. *ἔστι*] *ἔστιν* P. $A\Theta$] ΘA P. 16. $\Theta\Delta$] $\Delta\Theta$ B. EA] $E\Delta$ q, AE BV. 17. EA, $A\Theta$ PB. 18. $K\Theta$, $\Theta\Delta$ PBF. 19. *ἴση ἐστί* q. $AE\Theta\Delta$ F. 20. *τρίγωνον*] comp. F. $K\Theta\Delta$ FV. 21. ABH φ. $\Theta K\Delta$ F. Post *τριγώνῳ* rep. in F: *διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ* $A\Theta H$ *τρίγωνον τῷ* $\Theta\Lambda\Delta$ *τριγώνῳ*. *τε*] om. P. 23. *ἁπτόμεναι* q. 25. *ἔσται* q. $E\Theta$, ΘH PBF. 26. $K\Delta$, $\Delta\Lambda$ PF, et B, alt. Δ eras.

τέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΘΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΚΔΛ ἐστιν ἴση, βάσις ἄρα ἡ ΕΗ βάσει τῇ ΚΛ [ἐστιν] ἴση· ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΕΘΗ τρίγωνον τῷ ΚΔΛ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΕΗ τρίγωνον τῷ ΘΚΛ τριγώνῳ ἴσον τε καὶ ὅμοιόν ἐστιν. ἡ ἄρα πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον, ἴση καὶ ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΘΚΛ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΔΒ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΑΒ ἦκται ἡ ΘΚ, ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΔΒ τρίγωνον τῷ ΔΘΚ τριγώνῳ, καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχουσιν· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΒ τρίγωνον τῷ ΔΘΚ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν ΔΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΚΛ τριγώνῳ ὅμοιόν ἐστιν, τὸ δὲ ΑΔΓ τῷ ΔΛΘ. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ΒΑ, ΑΓ παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς ΚΘ, ΘΛ εἰσιν οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας γωνίας περιέξουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΘΛ. καί ἐστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΛ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΘΚΛ τριγώνῳ. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΘΚΛ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. ἀλλὰ πυραμίς, ἧς βάσις μέν [ἐστι] τὸ ΘΚΛ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὁμοία ἐδείχθη

---

1. *ΕΘ, ΘΗ* PF, et B, eras. alt. *Θ*. *ΚΔ, ΔΛ* PBF. 2. *ΕΗ*] *ΗΕ* F, *ὑπὸ ΕΗ* B. *ἐστιν*] om. P. 3. *ΚΛΔ* FV. 4. *ΕΑΗ* FV. 5. *τέ ἐστιν καὶ ὅμοιον* P. 7. *ἐστί*] *ἐστὶ τῇ* FVq. 8. *ΘΚΛ*] *Θ* in ras. B. 11. *ΑΒΔ* P. *τοῦ ΔΘΚ τριγώνου* F. *ΔΘΚ*] *ΘΔΚ* V; *ΔΚΘ* B. 12. *ΑΔΒ*] corr. ex *ΑΒΔ* V, *ΑΒΔ* F. 14. *ἐστι* PBVq, comp. F.

singulis[1]), et $\angle E\Theta H = K\Delta\Lambda$, erit $EH = K\Lambda$. quare triangulus $E\Theta H$ triangulo $K\Delta\Lambda$ et aequalis est et similis [I, 4]. eadem de causa etiam triangulus AEH triangulo $\Theta K\Lambda$ et aequalis est et similis. itaque pyramis, cuius basis est triangulus AEH, uertex autem punctum Θ, aequalis est et similis pyramidi, cuius basis est $\Theta K\Lambda$ triangulus, uertex autem punctum Δ [XI def. 10]. et quoniam in triangulo $A\Delta B$ uni lateri AB parallela ducta est ΘK, triangulus $A\Delta B$ triangulo $\Delta\Theta K$ aequiangulus est [I, 29], et latera proportionalia habent. itaque triangulus $A\Delta B$ triangulo $\Delta\Theta K$ similis est [VI def. 1]. eadem de causa etiam triangulus $\Delta B\Gamma$ triangulo $\Delta K\Lambda$ similis est et $A\Delta\Gamma$ triangulo $\Delta\Lambda\Theta$. et quoniam duae rectae inter se tangentes BA, $A\Gamma$ duabus rectis inter se tangentibus $K\Theta$, $\Theta\Lambda$ parallelae sunt non in eodem plano, aequales angulos comprehendent [XI, 10]. itaque $\angle BA\Gamma = K\Theta\Lambda$. et $BA : A\Gamma = K\Theta : \Theta\Lambda$.[2]) itaque triangulus $AB\Gamma$ triangulo $\Theta K\Lambda$ similis est [VI, 6]. quare etiam pyramis, cuius basis est triangulus $AB\Gamma$, uertex autem Δ punctum, similis est pyramidi, cuius basis est triangulus $\Theta K\Lambda$, uertex autem Δ punctum [XI def. 9]. sed pyramis, cuius basis est triangulus $\Theta K\Lambda$, uertex autem Δ punctum, similis est pyramidi, cuius basis

1) Nam $E\Theta = K\Delta$ et $\triangle\ A\Theta H \cong \Theta\Delta\Lambda$.
2) Nam $AB : \Theta K = A\Delta : \Theta\Delta$, quia $\triangle\ AB\Delta \sim \Theta K\Delta$; et $A\Delta : \Theta\Delta = A\Gamma : \Theta\Lambda$, quia $\triangle\ A\Gamma\Delta \sim \Delta\Theta\Lambda$. tum u. V, 16.

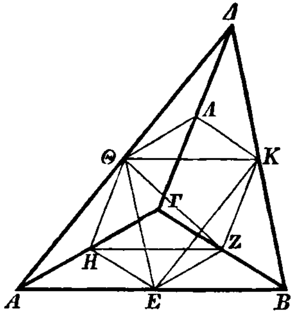
15. $AB\Gamma$ F. $\Delta\Lambda\Theta$ *τριγώνῳ* Theon (BFVq). 16. Post *ἀλλήλων* del. m. 1: *αἱ* BA, $A\Gamma$ P. 17. ΘK FV. 19. *γωνία*] om. V. *ὡς*] supra m. 1 V. *ἡ*] corr. ex A V. 22. *ἄρα*] om. FV. 23. *ἐστίν* B. 25. *ἧς βάσις*] mg. m. 1 P. *ἐστι*] om. PF. *ἐστι τό* — p. 154, 1 *μέν ἐστι*] mg. m. 2 B.

πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον [ὥστε καὶ πυραμίς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον]. ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΕΗΘ, ΘΚΛΔ πυραμίδων ὁμοία ἐστὶ τῇ ὅλῃ τῇ ΑΒΓΔ πυραμίδι. — Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΖ τῇ ΖΓ, διπλάσιόν ἐστι τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον τοῦ ΗΖΓ τριγώνου. καὶ ἐπεί, ἐὰν ᾖ δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ᾖ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἐστὶ τὰ πρίσματα, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ πρίσμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΒΚΖ, ΕΘΗ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΕΒΖΗ, ΕΒΚΘ, ΘΚΖΗ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΗΖΓ, ΘΚΛ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΚΖΓΛ, ΛΓΗΘ, ΘΚΖΗ. καὶ φανερόν, ὅτι ἑκάτερον τῶν πρισμάτων, οὗ τε βάσις τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘΚ εὐθεῖα, καὶ οὗ βάσις τὸ ΗΖΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΘΚΛ τρίγωνον, μεῖζόν ἐστιν ἑκατέρας τῶν πυραμίδων, ὧν βάσεις μὲν τὰ ΑΕΗ, ΘΚΛ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Θ, Δ σημεῖα, ἐπειδήπερ [καί] ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὰς ΕΖ, ΕΚ εὐθείας, τὸ μὲν πρίσμα, οὗ βάσις τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘΚ εὐθεῖα, μεῖζόν ἐστι τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις τὸ ΕΒΖ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Κ σημεῖον. ἀλλ'

1. ἐστι] om. Fq. τό] et in textu et mg. m. 2 B. 2. ὥστε — 5. σημεῖον] om. P. 3. μέν ἐστι V. 4. ἐστί] om. F. μέν ἐστι V. τρίγωνον] ΔΝ F. 7. πυραμίδι] in syll. πυρα des. F; reliquam partem a φ suppletam hic neglexi. 10. ἔχῃ] corr. ex ἔχει m. 2 P. 11. ᾖ] εἴη V. 14. ΚΖΒ V.

est AEH triangulus, uertex autem Θ punctum, ut demonstrauimus. itaque utraque pyramis $AEH\Theta$, $\Theta K\Lambda\Delta$ similis est toti pyramidi $AB\Gamma\Delta$.

Et quoniam $BZ = Z\Gamma$, erit $EBZH = 2HZ\Gamma$ [I, 41]. et quoniam, si datis duobus prismatis eandem altitudinem habentibus alterum basim habet parallelogrammum, alterum triangulum, et parallelogrammum duplo maius est triangulo, prismata aequalia sunt, prisma comprehensum duobus triangulis BKZ, $E\Theta H$ et tribus parallelogrammis $EBZH$, $EBK\Theta$, ΘKZH aequale est prismati comprehenso duobus triangulis $HZ\Gamma$, $\Theta K\Lambda$ et tribus parallelogrammis $KZ\Gamma\Lambda$, $\Lambda\Gamma H\Theta$, ΘKZH [XI, 39]. et adparet, utrumque prisma, et cuius basis sit $EBZH$ parallelogrammum, ei autem opposita recta ΘK, et cuius basis sit triangulus $HZ\Gamma$, ei autem oppositus triangulus $\Theta K\Lambda$, maius esse utraque pyramide, quarum bases sint trianguli AEH, $\Theta K\Lambda$, uertices autem puncta Θ, Δ, quoniam, si duxerimus rectas EZ, EK, prisma, cuius basis est parallelogrammum $EBZH$, ei autem opposita recta ΘK, maius est pyramide, cuius basis est triangulus EBZ, uertex autem



17. Post τῶν del. Z m. 1 V. $K Z\Gamma\Lambda$, $\Lambda\Gamma H\Theta$, ΘKZH] mg. m. 2 B, in textu eras. $\overline{EB}$, $\overline{ZH}$, $\overline{K\Theta}$. 18. ὅτι καί V. 19. $EBZH$] B in ras. B. 22. βάσις PVq, et B, sed corr. AEH] in ras. V. κορυφή q. 23. καί] om. BVq. 26. μεῖζον] supra scr. ω m. rec. P. τῆς] om. V. 27. τρίγωνόν ἐστι V.

ἡ πυραμίς, ἧς βάσις τὸ *EBZ* τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ *K* σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις τὸ *AEH* τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ *Θ* σημεῖον· ὑπὸ γὰρ ἴσων καὶ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχονται. ὥστε καὶ τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ *EBZH* παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ *ΘK* εὐθεῖα, μεῖζόν ἐστι πυραμίδος, ἧς βάσις μὲν τὸ *AEH* τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ *Θ* σημεῖον. ἴσον δὲ τὸ μὲν πρίσμα, οὗ βάσις τὸ *EBZH* παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ *ΘK* εὐθεῖα, τῷ πρίσματι, οὗ βάσις μὲν τὸ *HZΓ* τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ *ΘKΛ* τρίγωνον· ἡ δὲ πυραμίς, ἧς βάσις τὸ *AEH* τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ *Θ* σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις τὸ *ΘKΛ* τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ *Δ* σημεῖον. τὰ ἄρα εἰρημένα δύο πρίσματα μείζονά ἐστι τῶν εἰρημένων δύο πυραμίδων, ὧν βάσεις μὲν τὰ *AEH*, *ΘKΛ* τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ *Θ*, *Δ* σημεῖα.

Ἡ ἄρα ὅλη πυραμίς, ἧς βάσις τὸ *ABΓ* τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ *Δ* σημεῖον, διῄρηται εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις [καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ] καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

δ'.

Ἐὰν ὦσι δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος τριγώνους ἔχουσαι βάσεις, διαιρεθῇ δὲ ἑκατέρα αὐτῶν εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα

---

2. τό] (alt.) τά q. 4. τό] om. V. 15. δύο] β V (in mg. transit). πυραμίδων] in ras. m. 1 B. βάσεις] βάσις B (corr. m. 2), q, comp. V. *ΘKΛ*] *ΘK* in ras. V. 18. τε] om. V. 19. ἴσας τε καὶ ὁμοίας edd. καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ] om. P.

punctum K; pyramis autem, cuius basis est triangulus EBZ, uertex autem punctum K, aequalis est pyramidi, cuius basis est AEH triangulus, uertex autem punctum Θ; nam planis aequalibus et similibus comprehenduntur; quare etiam prisma, cuius basis est $EBZH$ parallelogrammum, ei autem opposita recta ΘK, maius est pyramide, cuius basis est triangulus AEH, uertex autem punctum Θ. prisma autem, cuius basis est parallelogrammum $EBZH$, ei autem opposita recta ΘK, aequale est prismati, cuius basis est triangulus $HZ\Gamma$, ei autem oppositus triangulus $\Theta K\Lambda$; pyramis autem, cuius basis est triangulus AEH, uertex autem Θ punctum, aequalis est pyramidi, cuius basis est triangulus $\Theta K\Lambda$, uertex autem Δ punctum. itaque duo illa prismata, quae nominauimus, maiora sunt duabus pyramidibus, quas nominauimus, quarum bases sunt trianguli $AEH, \Theta K\Lambda$, uertices autem puncta Θ, Δ.

Ergo tota pyramis, cuius basis est $AB\Gamma$ triangulus, uertex autem punctum Δ, in duas pyramides inter se aequales diuisa est et in duo prismata aequalia, et duo prismata maiora sunt dimidio totius pyramidis; quod erat demonstrandum.

IV.

Datis duabus pyramidibus sub eadem altitudine et bases triangulas habentibus si utraque in duas pyramides inter se aequales totique similes et duo prismata aequalia diuiditur, erit ut basis alterius pyra-

20. μείζονα] ζ corr. ex β V. 23. ἐάν] -αν postea add. m. 1 P. ὦσιν B.

ἴσα, ἔσται ὡς ἡ τῆς μιᾶς πυραμίδος βάσις πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας πυραμίδος βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ μιᾷ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ.

Ἔστωσαν δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος τριγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς ΑΒΓ, ΔΕΖ, κορυφὰς δὲ τὰ Η, Θ σημεῖα, καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα αὐτῶν εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα ἰσοπληθῆ.

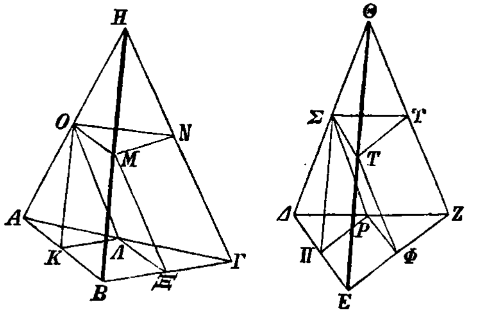
Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΞ τῇ ΞΓ, ἡ δὲ ΑΛ τῇ ΛΓ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΞ τῇ ΑΒ καὶ ὅμοιον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΛΞΓ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῷ ΡΦΖ τριγώνῳ ὅμοιόν ἐστιν. καὶ ἐπεὶ διπλασίων ἐστὶν ἡ μὲν ΒΓ τῆς ΓΞ, ἡ δὲ ΕΖ τῆς ΖΦ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΞ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΦ. καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ μὲν τῶν ΒΓ, ΓΞ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΑΒΓ, ΛΞΓ, ἀπὸ δὲ τῶν ΕΖ, ΖΦ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα [εὐθύγραμμα] τὰ ΔΕΖ,

---

1. Post *ἴσα* add. Theon: *καὶ τῶν γενομένων* (*γεναμ.* B) *πυραμίδων ἑκατέρα τὸν* (e corr. V) *αὐτὸν τρόπον, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίνηται* (*γίνεται* q) (BVq). *ἔσται — τῆς*] supra scr. m. 2 B (*ἔστιν*). 2. *ἑτέρας*] post *ρ* del. *ε* m. 1 P. *οὕτω* BV. 3. *πρίσματα* — 4. *πυραμίδι*] mg. m. 2 B. 4. *πάντα*] om. V. 8. *ὁμοίως* V. 9. Post *ἴσα* add. *καὶ τῶν γενομένων πυραμίδων ἑκατέρα τὸν αὐτὸν τρόπον νενοήσθω διῃρημένη καὶ τοῦτο ἀεὶ γινέσθω* Bq, V mg. m. 2. 10. *βάσιν*] om. V. *οὕτω* Bq. 13. *ΒΖ* q. 14. *ἐστίν*] om. V. 16. *ὅμοιόν ἐστι τῷ ΡΦΖ τριγωνῳ* BVq (*ΡΦ* in ras. V). 18. *ΓΞ*] corr. ex *ΞΓ* V. Post *δέ* ras. 1 litt. P. *ΖΦ*] corr. ex *ΦΖ* V. 22. *εὐθύγραμμα*] om. P.

midis ad basim alterius, ita omnia prismata alterius pyramidis ad omnia prismata numero aequalia[1]) alterius pyramidis.

Sint duae pyramides sub eadem altitudine triangulas bases habentes $AB\Gamma$, ΔEZ, uertices autem H,



Θ puncta, et utraque in duas pyramides inter se aequales totique similes et duo prismata aequalia diuidatur [prop. III]. dico, esse ut $AB\Gamma : \Delta EZ$, ita omnia prismata pyramidis $AB\Gamma H$ ad prismata numero aequalia pyramidis $\Delta EZ\Theta$.

Nam quoniam $B\Xi = \Xi\Gamma$, $A\Lambda = \Lambda\Gamma$ [prop. III], erit $\Lambda\Xi$ rectae AB parallela et $AB\Gamma \sim \Lambda\Xi\Gamma$ [p. 152, 9]. eadem de causa erit etiam $\Delta EZ \sim P\Phi Z$. et quoniam $B\Gamma = 2\Gamma\Xi$, $EZ = 2Z\Phi$, erit $B\Gamma : \Gamma\Xi = EZ : Z\Phi$. et in $B\Gamma$, $\Gamma\Xi$ constructae sunt figurae rectilineae similes et similiter positae $AB\Gamma$, $\Lambda\Xi\Gamma$, in EZ, $Z\Phi$

1) πάντα et ἰσοπληθῆ addidit Euclides ad finem propositionis p. 160, 26 respiciens, ubi eam quasi quodam corollario dilatauit.

ΡΦΖ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΞΓ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΔΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΡΦΖ τρίγωνον· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ [τρίγωνον], οὕτως τὸ ΛΞΓ [τρίγωνον] πρὸς τὸ ΡΦΖ τρίγωνον. ἀλλ' ὡς τὸ ΛΞΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μέν [ἐστι] τὸ ΛΞΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣΤΥ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΛΞΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣΤΥ. ὡς δὲ τὰ εἰρημένα πρίσματα πρὸς ἄλληλα, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΚΒΞΛ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΟΜ εὐθεῖα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΠΕΦΡ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΣΤ εὐθεῖα. καὶ τὰ δύο ἄρα πρίσματα, οὗ τε βάσις μὲν τὸ ΚΒΞΛ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΟΜ, καὶ οὗ βάσις μὲν τὸ ΛΞΓ, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ, πρὸς τὰ πρίσματα, οὗ τε βάσις μὲν τὸ ΠΕΦΡ, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΣΤ εὐθεῖα, καὶ οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣΤΥ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὰ εἰρημένα δύο πρίσματα πρὸς τὰ εἰρημένα δύο πρίσματα.

Καὶ ὁμοίως, ἐὰν διαιρεθῶσιν αἱ ΟΜΝΗ, ΣΤΥΘ πυραμίδες εἴς τε δύο πρίσματα καὶ δύο πυραμίδας,

1. *ΡΦΖ*] *Ρ* e corr. V, *ΕΦΖ* q. 2. *τρίγωνον*] (prius) om. V. 4. *τρίγωνον*] (prius) om. P. *τρίγωνον*] (alt.) om. P. 6. *οὕτω* B. 7. *ἔστι*] om. P. *ΟΜΝ τρίγωνον* V. 8. *μέν ἐστι* V. 11. *μέν ἐστι* V. 12. *τρίγωνον*] supra comp. B. 13. *ὡς δέ* — p. 162, 14] mutauit Theon; u. app.

autem similes et similiter positae ΔEZ, $P\Phi Z$. erit igitur [VI, 22]

$$AB\Gamma : A\Xi\Gamma = \Delta EZ : P\Phi Z.$$

itaque permutando $AB\Gamma : \Delta EZ = A\Xi\Gamma : P\Phi Z$ [V, 16]. sed ut $A\Xi\Gamma : P\Phi Z$, ita prisma, cuius basis est $A\Xi\Gamma$ triangulus, ei autem oppositus OMN, ad prisma, cuius basis est $P\Phi Z$ triangulus, ei autem oppositus $\Sigma T\Upsilon$ [u. lemma]. quare etiam ut $AB\Gamma : \Delta EZ$, ita prisma, cuius basis est $A\Xi\Gamma$ triangulus, ei autem oppositus OMN, ad prisma, cuius basis est $P\Phi Z$ triangulus, ei autem oppositus $\Sigma T\Upsilon$. uerum quam rationem habent duo prismata, quae diximus, eam habet prisma, cuius basis est parallelogrammum $KB\Xi\Lambda$, ei autem opposita recta OM, ad prisma, cuius basis est parallelogrammum $\Pi E\Phi P$, ei autem opposita recta ΣT [XI, 39; cfr. prop. III]. quare etiam duo prismata, et cuius basis est parallelogrammum $KB\Xi\Lambda$, ei autem opposita OM, et cuius basis est $A\Xi\Gamma$, ei autem oppositus OMN, ad duo prismata, et cuius basis est $\Pi E\Phi P$, ei autem opposita ΣT recta, et cuius basis est $P\Phi Z$ triangulus, ei autem oppositus $\Sigma T\Upsilon$, illam habent rationem [V, 12].[1]) quare etiam ut $AB\Gamma : \Delta EZ$, ita duo prismata, quae diximus, ad duo prismata, quae diximus.

Et similiter, si pyramides $OMNH$, $\Sigma T\Upsilon\Theta$ in duo prismata duasque pyramides diuiduntur, erunt ut

1) Sint prismata $p\ p_1\ P\ P_1$. demonstrauimus $AB\Gamma : \Delta EZ = p : p_1$; $p : p_1 = P : P_1 = p + P : p_1 + P_1$. ergo

$$AB\Gamma : \Delta EZ = p + P : p_1 + P_1.$$

14. διὰ τὰ αὐτά mg. m. 1 P, qui ad lin. 8 adscr. hab. m. 1: ὡς εὐθὺς ἐρεῖ. 18. $KB\Xi B$, sed ΞB in ras. e corr. P.

ἔσται ὡς ἡ ΟΜΝ βάσις πρὸς τὴν ΣΤΥ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΟΜΝΗ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΣΤΥΘ πυραμίδι δύο πρίσματα. ἀλλ' ὡς ἡ ΟΜΝ βάσις πρὸς τὴν ΣΤΥ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν· ἴσον γὰρ ἑκάτερον τῶν ΟΜΝ, ΣΤΥ τριγώνων ἑκατέρῳ τῶν ΛΞΓ, ΡΦΖ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὰ τέσσαρα πρίσματα πρὸς τὰ τέσσαρα πρίσματα. ὁμοίως δὲ κἂν τὰς ὑπολειπομένας πυραμίδας διέλωμεν εἴς τε δύο πυραμίδας καὶ εἰς δύο πρίσματα, ἔσται ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα.

Ὅτι δέ ἐστιν ὡς τὸ ΛΞΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις τὸ ΛΞΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΦΖ [τρίγωνον], ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣΤΥ, οὕτω δεικτέον.

Ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς νενοήσθωσαν ἀπὸ τῶν Η, Θ κάθετοι ἐπὶ τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἐπίπεδα, ἴσαι δηλαδὴ τυγχάνουσαι διὰ τὸ ἰσοϋψεῖς ὑποκεῖσθαι τὰς πυραμίδας. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἥ τε ΗΓ καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Η κάθετος ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ΑΒΓ, ΟΜΝ τέμνονται, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμηθήσονται. καὶ τέτμηται ἡ ΗΓ δίχα ὑπὸ τοῦ ΟΜΝ ἐπιπέδου κατὰ τὸ Ν· καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἄρα κάθετος ἐπὶ τὸ

---

15. λῆμμα] om. BV. 16. ΛΞΓ] Γ e corr. m. 2 V. ΖΡΦ P. 17. οὕτω B. 19. τρίγωνον om. P. ΥΣΤ τρί-

OMN : *ΣΤΥ*, ita duo prismata pyramidis *OMNH* ád duo prismata pyramidis *ΣΤΥΘ*. sed *OMN* : *ΣΤΥ* = *ΑΒΓ* : *ΔΕΖ*; nam uterque triangulus *OMN*, *ΣΤΥ* utrique triangulo *ΛΞΓ*, *ΡΦΖ* aequalis est. quare etiam ut *ΑΒΓ* : *ΔΕΖ*, ita quattuor prismata ad quattuor prismata [V, 12]. et similiter si etiam reliquas pyramides in duas pyramides duoque prismata diuiserimus, erunt ut *ΑΒΓ* : *ΔΕΖ*, ita omnia prismata pyramidis *ΑΒΓΗ* ad omnia prismata pyramidis *ΔΕΖΘ* numero aequalia; quod erat demonstrandum.

Lemma.

uerum esse, ut *ΛΞΓ* : *ΡΦΖ*, ita prisma, cuius basis sit triangulus *ΛΞΓ*, ei autem oppositus *OMN*, ad prisma, cuius basis sit *ΡΦΖ*, ei autem oppositus *ΣΤΥ*, ita demonstrandum est.

In eadem enim figura fingantur perpendiculares a punctis *H*, *Θ* ad triangulos *ΑΒΓ*, *ΔΕΖ* ductae, quae scilicet aequales sunt, quia supposuimus, pyramides aequales altitudines habere. et quoniam duae rectae *ΗΓ* et perpendicularis ab *H* ducta planis parallelis *ΑΒΓ*, *OMN* secantur, secundum eandem rationem secabuntur [XI, 17]. et *ΗΓ* plano *OMN* in duas partes aequales secta est in *N*; quare etiam perpen-

---

γωνον V. 20. *δείξομεν οὕτως* V. *οὕτω*] -ς del. m. 1 P. 21. *αἱ ἀπό* BVq. 22. *τῶν*] *τῆς* B. *τά*] *τὰ τῶν* V. *ΔΕΖ*] *ΔΕΖ τρίγωνα* Bq; *ΔΕΖ τριγώνων* V. 23. *ἰσουψεῖς*] -*ει*- e corr. V. 24. *ἡ*] in ras. V.

ΑΒΓ ἐπίπεδον δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ ΟΜΝ ἐπιπέδου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Θ κάθετος ἐπὶ τὸ ΔΕΖ ἐπίπεδον δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ ΣΤΥ ἐπιπέδου. καί εἰσιν ἴσαι αἱ ἀπὸ τῶν Η, Θ κάθετοι ἐπὶ τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἐπίπεδα· ἴσαι ἄρα καὶ αἱ ἀπὸ τῶν ΟΜΝ, ΣΤΥ τριγώνων ἐπὶ τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ κάθετοι. ἰσοϋψῆ ἄρα [ἐστὶ] τὰ πρίσματα, ὧν βάσεις μέν εἰσι τὰ ΛΞΓ, ΡΦΖ τρίγωνα, ἀπεναντίον δὲ τὰ ΟΜΝ, ΣΤΥ. ὥστε καὶ τὰ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ἀπὸ τῶν εἰρημένων πρισμάτων ἀναγραφόμενα ἰσοϋψῆ καὶ πρὸς ἄλληλά [εἰσιν] ὡς αἱ βάσεις· καὶ τὰ ἡμίση ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΛΞΓ βάσις πρὸς τὴν ΡΦΖ βάσιν, οὕτως τὰ εἰρημένα πρίσματα πρὸς ἄλληλα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ε΄.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, ὧν βάσεις μὲν τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Η, Θ σημεῖα· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα, ἔσται ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς ἤτοι πρὸς ἔλασσόν

---

1. *ἐπίπεδον ἀγομένη* V. 3. *ἐπίπεδον ἀγομένη* V. 5. *ἄρα εἰσί* V. *αἱ*] om. Pq. 7. *κάθετοι*] in ras. V, seq. ras. dimid. lin. (*ἴσαι . . . . ἀπὸ τῶν ομν*). *ἐστί*] om. P.

dicularis ab H ad planum $AB\Gamma$ ducta plano OMN in duas partes aequales secabitur. eadem de causa etiam perpendicularis a Θ ad planum ΔEZ ducta in duas partes aequales secabitur plano $\Sigma T\Upsilon$. et perpendiculares ab H, Θ ad plana $AB\Gamma$, ΔEZ ductae aequales sunt. itaque etiam perpendiculares a triangulis OMN, $\Sigma T\Upsilon$ ad $AB\Gamma$, ΔEZ ductae aequales sunt. quare prismata, quorum bases sunt trianguli $\Delta\Xi\Gamma$, $P\Phi Z$, iis autem oppositi OMN, $\Sigma T\Upsilon$, aequales altitudines habent. itaque solida parallelepipeda a prismatis, quae diximus, constructa eandem habent altitudinem et eam inter se rationem habent quam bases [XI, 32]. itaque etiam prismata, quae diximus, ut quae dimidia sint parallelepipedorum [XI, 28], eam rationem habent, quam $\Delta\Xi\Gamma : P\Phi Z$; quod erat demonstrandum.[1])

V.

Pyramides sub eadem altitudine et bases triangulas habentes eam inter se rationem habent quam bases.

Sint pyramides sub eadem altitudine, quarum bases sint trianguli $AB\Gamma$, ΔEZ, uertices autem H, Θ puncta. dico esse

$$AB\Gamma : \Delta EZ = AB\Gamma H : \Delta EZ\Theta.$$

Nam si non est $AB\Gamma : \Delta EZ = AB\Gamma H : \Delta EZ\Theta$, erit ut $AB\Gamma : \Delta EZ$, ita pyramis $AB\Gamma H$ aut ad so-

1) Hoc quoque lemma et per se et propter orationis genus suspectum est.

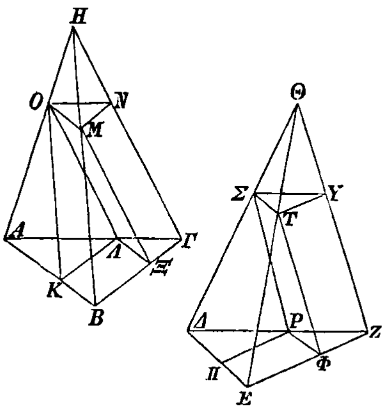
βάσις Bq, sed corr. 11. καί] (prius) τυγχάνοντα Theon (BVq). εἰσιν] om. P. 12. ἐστίν] ἔσται BVq. 13. οὕτω Bq. 17. ἀλ-ληλα P, corr. m. 2. 24. ΔEZ — 25. τήν] mg. m. 2 B. 25. ΔEZΘ πυραμίδα] et in textu et mg. m. 2 B. 27. ἤτοι] ἤ V.

τι τῆς $ΔΕΖΘ$ πυραμίδος στερεὸν ἢ πρὸς μεῖζον. ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ $Χ$, καὶ διῃρήσθω ἡ $ΔΕΖΘ$ πυραμὶς εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· τὰ δὴ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος. καὶ πάλιν αἱ ἐκ τῆς διαιρέσεως γινόμεναι πυραμίδες ὁμοίως διῃρήσθωσαν, καὶ τοῦτο ἀεὶ γινέσθω, ἕως οὗ λειφθῶσί τινες πυραμίδες ἀπὸ τῆς $ΔΕΖΘ$ πυραμίδος, αἳ εἰσιν ἐλάττονες τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ἡ $ΔΕΖΘ$ πυραμὶς τοῦ $Χ$ στερεοῦ. λελείφθωσαν καὶ ἔστωσαν λόγου ἕνεκεν αἱ $ΔΠΡΣ$, $ΣΤΥΘ$· λοιπὰ ἄρα τὰ ἐν τῇ $ΔΕΖΘ$ πυραμίδι πρίσματα μείζονά ἐστι τοῦ $Χ$ στερεοῦ. διῃρήσθω καὶ ἡ $ΑΒΓΗ$ πυραμὶς ὁμοίως καὶ ἰσοπληθῶς τῇ $ΔΕΖΘ$ πυραμίδι· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ $ΑΒΓ$ βάσις πρὸς τὴν $ΔΕΖ$ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ $ΑΒΓΗ$ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ $ΔΕΖΘ$ πυραμίδι πρίσματα. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ $ΑΒΓ$ βάσις πρὸς τὴν $ΔΕΖ$ βάσιν, οὕτως ἡ $ΑΒΓΗ$ πυραμὶς πρὸς τὸ $Χ$ στερεόν· καὶ ὡς ἄρα ἡ $ΑΒΓΗ$ πυραμὶς πρὸς τὸ $Χ$ στερεόν, οὕτως τὰ ἐν τῇ $ΑΒΓΗ$ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ $ΔΕΖΘ$ πυραμίδι πρίσματα· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ $ΑΒΓΗ$ πυραμὶς πρὸς τὰ ἐν αὐτῇ πρίσματα, οὕτως τὸ $Χ$ στερεὸν πρὸς τὰ ἐν τῇ $ΔΕΖΘ$ πυραμίδι πρίσματα. μείζων δὲ ἡ $ΑΒΓΗ$ πυραμὶς τῶν ἐν αὐτῇ πρισμάτων· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ $Χ$ στερεὸν τῶν ἐν τῇ $ΔΕΖΘ$ πυραμίδι πρισμάτων. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον· ὅπερ

---

6. γενόμεναι q. 7. γιγνέσθω BV. 8. λειφθῶσι] -ει- corr. ex η V, mut. in η m. 1 Bq; λειφθῶσιν PB. ἀπό — 9. πυραμίδος] mg. m. 2 BV, om. q. 9. ἐλάσσους BVq. 10. λελείφθωσαν] -ει- corr. ex η V, mut. in η q. 11. $ΕΤΥΘ$ B, corr. m. 2. 12. ἐστιν P. 17. ἡ] post ins. V. 19. καὶ ὡς — 20. στερεόν] om. q; suo loco m. 1, sed alio atramento

lidum minus pyramide $\Delta EZ\Theta$ aut ad maius. sit prius ad minus X, et pyramis $\Delta EZ\Theta$ in duas pyramides inter se aequales totique similes et duo prismata aequalia diuidatur. itaque duo prismata maiora sunt quam dimidia totius pyramidis [prop. III]. et rursus pyramides ex diuisione ortae similiter diuidantur, et hoc semper fiat, donec e pyramide $\Delta EZ\Theta$ relinquantur pyramides quaedam minores excessu, quo pyramis $\Delta EZ\Theta$ excedit spatium X [X, 1]. relinquantur et sint uerbi causa $\Delta\Pi P\Sigma$, $\Sigma T \Upsilon \Theta$. reliqua igitur prismata pyramidis $\Delta EZ\Theta$ maiora sunt spatio X. iam etiam pyramis $AB\Gamma H$ similiter et toties diuidatur, quoties $\Delta EZ\Theta$ pyramis. erunt igitur ut $AB\Gamma : \Delta EZ$, ita prismata pyramidis $AB\Gamma H$ ad prismata pyramidis $\Delta EZ\Theta$ [prop. IV]. uerum $AB\Gamma : \Delta EZ = AB\Gamma H : X$. quare etiam ut $AB\Gamma H : X$, ita prismata pyramidis $AB\Gamma H$ ad prismata pyramidis $\Delta EZ\Theta$.



permutando igitur [V, 16] ut pyramis $AB\Gamma H$ ad sua prismata, ita X solidum ad prismata pyramidis $\Delta EZ\Theta$. sed pyramis $AB\Gamma H$ maior est prismatis. itaque etiam X solidum maius est prismatis pyramidis $\Delta EZ\Theta$ [V, 14].

B. 19. ἄρα ἡ] corr. ex ἡ ἄρα m. 1 V, ἄρα ὡς ἡ P. 23. οὕτω B.

ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς ἔλασσόν τι τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεόν. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ὡς ἡ ΔΕΖ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓ βάσιν, οὕτως ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος στερεόν.

Λέγω δή, ὅτι οὐκ ἔστιν οὐδὲ ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς μεῖζόν τι τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεόν.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ Χ· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΕΖ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓ βάσιν, οὕτως τὸ Χ στερεὸν πρὸς τὴν ΑΒΓΗ πυραμίδα. ὡς δὲ τὸ Χ στερεὸν πρὸς τὴν ΑΒΓΗ πυραμίδα, οὕτως ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς πρὸς ἔλασσόν τι τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείχθη· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΕΖ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓ βάσιν, οὕτως ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς πρὸς ἔλασσόν τι τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος· ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς μεῖζόν τι τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεόν. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλασσον. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

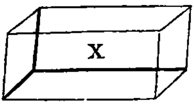
ϛ'.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες καὶ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

---

2. ἔλαττον V. 3. ΔΕΖΘ] Θ eras. P; ΔΕΖΗΘ q. δείξομεν V. 5. ἔλασσον B. 11. ἡ βάσις ἡ ΔΕΖ Vq.

uerum etiam minus est; quod fieri non potest. ergo non est ut $AB\Gamma : \Delta EZ$, ita pyramis $AB\Gamma H$ ad minus aliquod pyramide $\Delta EZ\Theta$ solidum. similiter demonstrabimus, ne $\Delta EZ\Theta$ quidem pyramidem ad minus aliquod pyramide $AB\Gamma H$ solidum eam rationem habere quam $\Delta EZ : AB\Gamma$.



Iam dico, ne ad maius quidem aliquod pyramide $\Delta EZ\Theta$ solidum pyramidem $AB\Gamma H$ eam rationem habere quam $AB\Gamma : \Delta EZ$.

Nam si fieri potest, habeat ad maius aliquod X. e contrario igitur [V, 7 coroll.]

$$\Delta EZ : AB\Gamma = X : AB\Gamma H.$$

uerum ut $X : AB\Gamma H$, ita $\Delta EZ\Theta$ pyramis ad minus aliquid pyramide $AB\Gamma H$, ut supra demonstratum est [prop. II lemma]. quare etiam ut $\Delta EZ : AB\Gamma$, ita pyramis $\Delta EZ\Theta$ ad minus aliquid pyramide $AB\Gamma H$; quod absurdum esse demonstrauimus. itaque ne ad maius quidem aliquod pyramide $\Delta EZ\Theta$ solidum pyramis $AB\Gamma H$ eam rationem habet quam $AB\Gamma : \Delta EZ$. demonstrauimus autem, eam ne ad minus quidem hanc habere rationem. erit igitur

$$AB\Gamma : \Delta EZ = AB\Gamma H : \Delta EZ\Theta;$$

quod erat demonstrandum.

VI.

Pyramides sub eadem altitudine et polygonas bases habentes eam inter se rationem habent quam bases.

---

17. πυραμίδος στερεόν q; στερεόν add. m. 2 V. 21. βάσις] supra scr. m. 1 P. 25. πυραμίδες οὖσαι B. οὖσαι] om. V.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, ὧν [αἱ] βάσεις μὲν τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ πολύγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Μ, Ν σημεῖα· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛΝ πυραμίδα.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ, ΑΔ, ΖΘ, ΖΚ. ἐπεὶ οὖν δύο πυραμίδες εἰσὶν αἱ ΑΒΓΜ, ΑΓΔΜ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις καὶ ὕψος ἴσον, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΑΓΔ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΓΔΜ πυραμίδα. καὶ συνθέντι ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΑΓΔ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΓΔΜ πυραμίδα. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΑΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΑΔΕ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΓΔΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα. δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΑΔΕ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα. καὶ συνθέντι πάλιν, ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΑΔΕ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ὡς ἡ ΖΗΘΚΛ βάσις πρὸς τὴν ΖΗΘ βάσιν, οὕτως καὶ ἡ ΖΗΘΚΛΝ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΝ πυραμίδα. καὶ ἐπεὶ δύο πυραμίδες εἰσὶν αἱ ΑΔΕΜ, ΖΗΘΝ τριγώνους ἔχουσαι

---

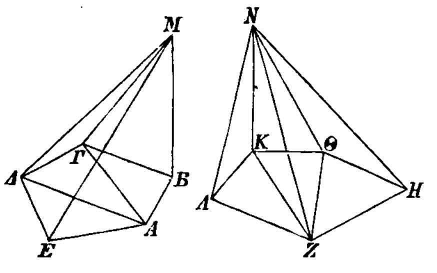
1. *αἱ*] deleo. *ὧν* — 2. *κορυφαί*] *πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, κορυφάς* Theon (BVq). 6. *ἐπεζεύχθ.* — 10. *βάσιν*] *διῃρήσθω γὰρ ἡ μὲν ΑΒΓΔΕ βάσις εἰς τὰ ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΕΔ τρίγωνα, ἡ δὲ ΖΗΘΚΛ* (*Ν* eras. V) *εἰς τὰ ΖΗΘ, ΖΘΚ, ΖΚΛ τρίγωνα, καὶ νενοήσθωσαν ἀφ' ἑκάστου τριγώνου πυραμίδες ἰσουψεῖς* (*-εις* corr. ex *-οι* m. rec. V) *ταῖς ἐξ ἀρχῆς πυραμίσι* (*πυραμίσιν* B) *καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον* Theon (BVq). 11. *συνθέντα ἄρα ὡς* V. *ἡ* — 12. *βάσιν*] mg. *γρ. τραπέζιον* et *γρ. τρίγωνον* m. 1 P; *τὸ ΑΒΓΔ τραπέζιον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον* Theon (BVq).

Sint sub eadem altitudine pyramides, quarum bases sint $AB\Gamma\Delta E$, $ZH\Theta K\Lambda$ polygona, uertices autem M, N puncta. dico, esse

$$AB\Gamma\Delta E : ZH\Theta K\Lambda = AB\Gamma\Delta EM : ZH\Theta K\Lambda N.$$

ducantur enim $A\Gamma$, $A\Delta$, $Z\Theta$, ZK. iam quoniam duae pyramides sunt $AB\Gamma M$, $A\Gamma\Delta M$ triangulas bases habentes et altitudinem aequalem, eam inter se rationem habent quam bases [prop. V]. erit igitur $AB\Gamma : A\Gamma\Delta = AB\Gamma M : A\Gamma\Delta M$. et componendo [V, 18] $AB\Gamma\Delta : A\Gamma\Delta = AB\Gamma\Delta M : A\Gamma\Delta M$. uerum etiam [prop. V] $A\Gamma\Delta : A\Delta E = A\Gamma\Delta M : A\Delta EM$. itaque ex aequo [V, 22] $AB\Gamma\Delta : A\Delta E = AB\Gamma\Delta M : A\Delta EM$. et rursus componendo [V, 18] $AB\Gamma\Delta E : A\Delta E = AB\Gamma\Delta EM : A\Delta EM$. similiter demonstrabimus, esse etiam

$$ZH\Theta K\Lambda : ZH\Theta = ZH\Theta K\Lambda N : ZH\Theta N.$$



et quoniam duae pyramides sunt $A\Delta EM$, $ZH\Theta N$ triangulas bases habentes et altitudinem aequalem,

13. $A\Gamma\Delta M$] supra Δ scr. E m. 2 B. ἡ — 14. βάσιν] τὸ $A\Gamma\Delta$ τρίγωνον πρὸς τὸ $A\Delta E$ τρίγωνον Theon (BVq). 15. ἄρα ἐστίν Theon (BVq). 17. $A\Delta EM$] M supra scr. m. rec. P. 18. βάσιν] om. Bq. 19. $AB\Gamma\Delta E$ add. M m. 2 V. 20. ὁμοίως — ὅτι] διὰ τὰ αὐτὰ δή Theon (BVq). 21. $ZH\Theta$] P; $ZK\Lambda$ Theon (Bq et Λ e corr. m. 1 V). 22. $ZK\Lambda N$ Theon (Bq et N in ras. V). 23. $ZK\Lambda N$ Theon (BVq).

βάσεις καὶ ὕψος ἴσον, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΗΘ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΝ πυραμίδα. ἀλλ' ὡς ἡ ΑΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓΔΕ βάσιν, οὕτως ἦν ἡ ΑΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΒΓΔΕΜ πυραμίδα. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΗΘ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΝ πυραμίδα. ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς ἡ ΖΗΘ βάσις πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛ βάσιν, οὕτως ἦν καὶ ἡ ΖΗΘΝ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛΝ πυραμίδα. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛΝ πυραμίδα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ζ'.

Πᾶν πρίσμα τρίγωνον ἔχον βάσιν διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας.

Ἔστω πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΔΕΖ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους ἐχούσας βάσεις.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΔ, ΕΓ, ΓΔ. ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΕΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἐστιν ἡ ΒΔ, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΕΒΔ τριγώνῳ· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΔΕΒ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον. ἀλλὰ ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι

1. καὶ ὕψος ἴσον] καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος Theon (BVq). 2. ΖΚΛ Theon (BVq), ut lin. 6, 8. 3. ΖΚΛΝ Theon (BVq), ut lin. 7, 9. ἀλλ' ὡς — 5. πυραμίδα] ἐπεὶ οὖν ἐστιν (om.

erit [prop. V] $A\Delta E : ZH\Theta = A\Delta EM : ZH\Theta N$. uerum $A\Delta E : AB\Gamma\Delta E = A\Delta EM : AB\Gamma\Delta EM$. quare etiam ex aequo [V, 22] $AB\Gamma\Delta E : ZH\Theta = AB\Gamma\Delta EM : ZH\Theta N$. uerum etiam $ZH\Theta : ZH\Theta K\Lambda = ZH\Theta N : ZH\Theta K\Lambda N$. quare etiam ex aequo [V, 22] $AB\Gamma\Delta E : ZH\Theta K\Lambda = AB\Gamma\Delta EM : ZH\Theta K\Lambda N$; quod erat demonstrandum.

VII.

Omne prisma triangulam basim habens in tres pyramides inter se aequales diuiditur triangulas bases habentes.

Sit prisma, cuius basis sit $AB\Gamma$ triangulus, ei autem oppositus ΔEZ. dico, prisma $AB\Gamma\Delta EZ$ in tres pyramides inter se aequales diuidi triangulas bases habentes.

ducantur enim $B\Delta$, $E\Gamma$, $\Gamma\Delta$. quoniam parallelogrammum est $ABE\Delta$, diametrus autem eius $B\Delta$, erit $AB\Delta = EB\Delta$ [I, 34]. quare etiam pyramis, cuius basis est triangulus $AB\Delta$, uertex autem Γ punctum, aequalis est pyramidi, cuius basis est triangulus ΔEB, uertex autem Γ punctum [prop. V]. uerum

---

VII. Hero stereom. II, 39.

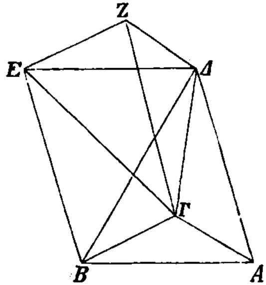
Bq) ὡς ἡ $AB\Gamma\Delta E$ βάσις πρὸς τὴν $A\Delta E$ βάσιν, οὕτως ἡ (ἣν ἡ q) $AB\Gamma\Delta EM$ πυραμὶς πρὸς τὴν $A\Delta EM$ πυραμίδα Theon (BVq); dein add. ὡς δὲ ἡ $A\Delta E$ βάσις πρὸς τὴν $ZK\Lambda$ βάσιν, οὕτως ἡ $A\Delta EM$ πυραμὶς πρὸς τὴν $ZK\Lambda N$ πυραμίδα Vq et mg. m. 2 B. 5. καί] om. Theon (BVq). 6. βάσιν] om. BVq. οὕτως] om. q. 8. $ZH\Theta K\Lambda$] $K\Lambda$ add. B m. 2. 9. ἣν] om. V. 10. ἄρα] πάλιν ἐστίν Bq; ἄρα ἐστίν V. 12. $ZH\Theta K\Lambda M$ q. 17. βάσεις q. 20. βάσεις ἐχούσας V. 21. καὶ ἐπεί Bq. 24. $E\Delta B$ B. μέν] om. V. 25. ἐστίν PB, ἐστὶ τῇ V. 26. ἔστιν B. 27. ἀλλά — p. 174, 1. σημεῖον] om. q. 27. ἀλλ' B. ἡ] om. V.

τὸ $ΔΕΒ$ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ $Γ$ σημεῖον, ἡ αὐτή ἐστι πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ $ΕΒΓ$ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ $Δ$ σημεῖον· ὑπὸ γὰρ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων περιέχεται. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ $ΑΒΔ$ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ $Γ$ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ $ΕΒΓ$ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ $Δ$ σημεῖον. πάλιν, ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ $ΖΓΒΕ$, διάμετρος δέ ἐστιν αὐτοῦ ἡ $ΓΕ$, ἴσον ἐστὶ τὸ $ΓΕΖ$ τρίγωνον τῷ $ΓΒΕ$ τριγώνῳ. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ $ΒΓΕ$ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ $Δ$ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ $ΕΓΖ$ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ $Δ$ σημεῖον. ἡ δὲ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ $ΒΓΕ$ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ $Δ$ σημεῖον, ἴση ἐδείχθη πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ $ΑΒΔ$ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ $Γ$ σημεῖον· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ $ΓΕΖ$ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ $Δ$ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν [ἐστι] τὸ $ΑΒΔ$ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ $Γ$ σημεῖον· διῄρηται ἄρα τὸ $ΑΒΓΔΕΖ$ πρίσμα εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους ἐχούσας βάσεις.

Καὶ ἐπεὶ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ $ΑΒΔ$ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ $Γ$ σημεῖον, ἡ αὐτή ἐστι πυραμίδι, ἧς βάσις τὸ $ΓΑΒ$ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ $Δ$ σημεῖον· ὑπὸ γὰρ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων περιέχονται· ἡ δὲ πυραμίς, ἧς βάσις τὸ $ΑΒΔ$ τρίγωνον, κορυφὴ

2. ἐστι] (prius) ἐστιν PB; ἐστι τῇ V. 4. καί] om. q; καὶ ἡ V. 6. ἐστί] ἐστίν PB; ἐστὶ τῇ V. 8. ἐστιν] om. BVq. αὐτοῦ ἐστίν Bq. 9. $ΕΓ$ V. 12. $ΕΓΖ$] $ΓΖ$ in ras. V. 14. $ΒΕΓ$ V. $Δ$] in ras. m. 2 B. 18. ἐστι] om. P. 21. βάσεις ἐχούσαις, eras. ι, V. 23. ἐστι τῇ V.

pyramis, cuius basis est ΔEB triangulus, uertex autem Γ punctum, eadem est ac pyramis, cuius basis est $EB\Gamma$ triangulus, uertex autem Δ punctum; nam iisdem planis continentur. quare etiam pyramis, cuius basis est



$AB\Delta$ triangulus, uertex autem Γ punctum, aequalis est pyramidi, cuius basis est $EB\Gamma$ triangulus, uertex autem Δ punctum. rursus quoniam parallelogrammum est $Z\Gamma BE$, et diametrus eius est ΓE, erit $\Gamma EZ = \Gamma BE$ [I, 34]. quare etiam pyramis, cuius basis est $B\Gamma E$ triangulus, uertex autem Δ punctum, aequalis est pyramidi, cuius basis est $E\Gamma Z$ triangulus, uertex autem Δ punctum. demonstrauimus autem, pyramidem, cuius basis sit $B\Gamma E$ triangulus, uertex autem Δ punctum, aequalem esse pyramidi, cuius basis sit $AB\Delta$ triangulus, uertex autem Γ punctum. quare etiam pyramis, cuius basis est ΓEZ triangulus, uertex autem Δ punctum, aequalis est pyramidi, cuius basis est $AB\Delta$ triangulus, uertex autem Γ punctum. ergo prisma $AB\Gamma\Delta EZ$ in tres pyramides aequales diuisum est triangulas bases habentes.

et quoniam pyramis, cuius basis est $AB\Delta$ triangulus, uertex autem Γ punctum, eadem est ac pyramis, cuius basis est ΓAB triangulus, uertex autem Δ punctum (nam iisdem planis continentur), pyramidem autem,

24. τό] (prius) μὲν τό q; μέν ἐστι τό V. ΓAB] e corr. V.
26. τό] ἐστὶ τό V.

δὲ τὸ Γ σημεῖον, τρίτον ἐδείχθη τοῦ πρίσματος, οὗ βάσις τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΔΕΖ, καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, τρίτον ἐστὶ τοῦ πρίσματος τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΔΕΖ.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῇ καὶ ὕψος ἴσον [ἐπειδήπερ κἂν ἕτερόν τι σχῆμα εὐθύγραμμον ἔχῃ ἡ βάσις τοῦ πρίσματος, τοιοῦτο καὶ τὸ ἀπεναντίον, καὶ διαιρεῖται εἰς πρίσματα τρίγωνα ἔχοντα τὰς βάσεις καὶ τὰ ἀπεναντίον, καὶ ὡς ἡ ὅλη βάσις πρὸς ἕκαστον]· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

η'.

Αἱ ὅμοιαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἔστωσαν ὅμοιαι καὶ ὁμοίως κείμεναι πυραμίδες, ὧν βάσεις μέν εἰσι τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Η, Θ σημεῖα· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

---

1. βάσις ἐστὶ τὸ V. 3. ἡ] om. V. 5. τοῦ — αὐτήν] οὗ βάσις V. 11. ἡ — πρίσματος] βάσιν τὸ πρίσμα q. τοιοῦτο] om. BVq. 12. τό] τὸ αὐτό Bq et corr. ex αὐτό τό V. καί] om. BVq. τριγώνους, -ους e corr. m. 2 V. 13. τάς] om. q. καί] om. q. τά] τάς q. καὶ ὡς — 14. δεῖξαι] om. Theon (BVq). 17. εἰσίν B. 20. βάσις B, corr. m. 2. κορυφή B, corr. m. 1. 21. δέ] δὲ αὐτῶν ἔστω V.

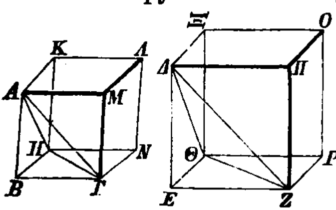
cuius basis est $AB\Delta$ triangulus, uertex autem Γ punctum, tertiam partem esse demonstrauimus prismatis, cuius basis sit $AB\Gamma$ triangulus, ei autem oppositus ΔEZ, etiam pyramis, cuius basis est $AB\Gamma$ triangulus, uertex autem Δ punctum, tertia pars est prismatis eandem basim habentis triangulum $AB\Gamma$, ei autem oppositum ΔEZ.

Corollarium.

Hinc manifestum est, omnem pyramidem tertiam partem esse prismatis, quod eandem basim habeat et altitudinem aequalem.[1]) — quod erat demonstrandum.

VIII.

Similes pyramides triangulas bases habentes triplicatam inter se rationem habent quam latera correspondentia.



Sint pyramides similes et similiter positae, quarum bases sint $AB\Gamma$, ΔEZ trianguli, uertices autem H, Θ puncta. dico, esse $AB\Gamma H : \Delta EZ\Theta = B\Gamma^3 : EZ^3$.

1) Quae sequuntur uerba lin. 10—14 sine dubio subditiua sunt. scripturam codicis P in fine lacunam habere, recte significauit August; nam uerba καὶ ὡς ἡ ὅλη βάσις πρὸς ἕκαστον principium est amplioris demonstrationis. cetera in P satis emendate leguntur, cum in codd. Theoninis omni sensu careant. sed etiamsi sana essent omnia, haec uerba tamen suspecta essent, quia, ut saepius monui, demonstrationem corollarii adferre nihil adtinet.

Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ στερεα παραλληλεπίπεδα. καὶ ἐπεὶ ὁμοία ἐστὶν ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ, ἡ δὲ ὑπὸ ΗΒΓ τῇ ὑπὸ ΘΕΖ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΗ τῇ ὑπὸ ΔΕΘ, καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, καὶ ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΕΘ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΜ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΠ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν ΒΝ τῷ ΕΡ ὅμοιόν ἐστι, τὸ δὲ ΒΚ τῷ ΕΞ· τὰ τρία ἄρα τὰ ΜΒ, ΒΚ, ΒΝ τρισὶ τοῖς ΕΠ, ΕΞ, ΕΡ ὅμοιά ἐστιν. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τὰ ΜΒ, ΒΚ, ΒΝ τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστιν, τὰ δὲ τρία τὰ ΕΠ, ΕΞ, ΕΡ τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστιν. τὰ ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ ἄρα στερεὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων ἴσων τὸ πλῆθος περιέχεται. ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΗΜΛ στερεὸν τῷ ΕΘΠΟ στερεῷ. τὰ δὲ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. τὸ ΒΗΜΛ ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ ΕΘΠΟ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τὴν ΕΖ. ὡς δὲ τὸ ΒΗΜΛ στερεὸν πρὸς τὸ ΕΘΠΟ στερεόν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα, ἐπειδήπερ ἡ πυραμὶς ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ στερεοῦ διὰ τὸ καὶ τὸ πρίσμα ἥμισυ ὂν τοῦ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου τριπλάσιον εἶναι τῆς πυραμίδος. καὶ ἡ

---

2. ἡ] bis P, corr. m. 1. 5. ΘΕΖ] e corr. V. 9. ἐστιν q. 10. παραλληλόγραμμον] (prius) om. V. 13. ἐστι V.

Expleantur enim solida parallelepipeda $BHM\Delta$, $E\Theta\Pi O$. et quoniam similis est $AB\Gamma H$ pyramis pyramidi $\Delta EZ\Theta$, erit $\angle AB\Gamma = \Delta EZ$, $\angle HB\Gamma = \Theta EZ$, $\angle ABH = \Delta E\Theta$, et est $AB : \Delta E = B\Gamma : EZ = BH : E\Theta$ [XI def. 9]. et quoniam est $AB : \Delta E = B\Gamma : EZ$, et latera angulos aequales comprehendentia proportionalia sunt, erit $BM \sim E\Pi$ [p. 83 not. 1]. eadem de causa erit etiam $BN \sim EP$, $BK \sim E\Xi$. itaque tria MB, BK, BN tribus $E\Pi$, $E\Xi$, EP similia sunt. uerum tria MB, BK, BN tribus oppositis aequalia sunt et similia, tria autem $E\Pi$, $E\Xi$, EP tribus oppositis aequalia sunt et similia [XI, 24]. itaque solida $BHM\Delta$, $E\Theta\Pi O$ planis similibus numero aequalibus continentur. ergo $BHM\Delta \sim E\Theta\Pi O$ [XI def. 9]. similia autem solida parallelepipeda triplicatam rationem habent quam latera correspondentia [XI, 33]. itaque $BHM\Delta : E\Theta\Pi O = B\Gamma^3 : EZ^3$. sed $BHM\Delta : E\Theta\Pi O = AB\Gamma H : \Delta EZ\Theta$, quoniam pyramis sexta pars est solidi, propterea quod prisma, quod dimidium est so-

---

15. *ἴσα τε καί*] om. V. *ἔστι* q, comp. V. *τά*] (alt.) om. B. 16. *τρισί — ἔστιν*] *ἴσα τε καὶ ὅμοια τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἐστί* BVq. 16. *ἔστι* P. 17. *στερεὰ παραλληλοεπίπεδα* V. 19. *στερεόν*] om. V. 20. *ἐστίν* B. 22. *τὸν τριπλασίονα* q. 26. *ἕκτον*] ϛ q. 27. *παραλληλοεπιπ.* V.

ΑΒΓΗ ἄρα πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι καὶ αἱ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. διαιρεθεισῶν γὰρ αὐτῶν εἰς τὰς ἐν αὐταῖς πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας τῷ καὶ τὰ ὅμοια πολύγωνα τῶν βάσεων εἰς ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖσθαι καὶ ἴσα τῷ πλήθει καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις ἔσται ὡς [ἡ] ἐν τῇ ἑτέρᾳ μία πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν πρὸς τὴν ἐν τῇ ἑτέρᾳ μίαν πυραμίδα τρίγωνον ἔχουσαν βάσιν, οὕτως καὶ ἅπασαι αἱ ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πυραμίδες τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς τὰς ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας, τουτέστιν αὐτὴ ἡ πολύγωνον βάσιν ἔχουσα πυραμὶς πρὸς τὴν πολύγωνον βάσιν ἔχουσαν πυραμίδα. ἡ δὲ τρίγωνον βάσιν ἔχουσα πυραμὶς πρὸς τὴν τρίγωνον βάσιν ἔχουσαν ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· καὶ ἡ πολύγωνον ἄρα βάσιν ἔχουσα πρὸς τὴν ὁμοίαν βάσιν ἔχουσαν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.

θ΄.

Τῶν ἴσων πυραμίδων καὶ τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν·

---

2. *ὅπερ*] punctis del. V. 3. *ἔδει δεῖξαι*] om. V. 4. *πόρισμα*] om. q. *πόρ.* — 23. *πλευράν*] mg. m. 1 P. 5. *αἱ*] om. q. 7. *εἰσίν* PB. 8. *ἐν*] om. V. *αὐτάς* V, *αὐτοῖς* q. 10. *καί*] *καὶ εἰς* V. 11. *ἡ*] om. P. 12. *τριγώνους* et *βάσεις* V, corr. m. 1. 13. *μίαν πυραμίδα*]

lidi parallelepipedi [XI, 28], triplo maius est pyramide [prop. VII]. ergo etiam $AB\Gamma H : \Delta EZ\Theta = B\Gamma^3 : EZ^3$; quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Hinc manifestum est, etiam pyramides similes, quae polygonas bases habeant, triplicatam rationem habere quam latera correspondentia. nam si eas in pyramides triangulas bases habentes diuiserimus, eo quod etiam similia polygona basium in similes triangulos numero aequales et totis correspondentes diuiduntur [VI, 20], erunt, ut in altera una pyramis triangulam habens basim ad unam pyramidem alterius triangulam basim habentem, ita omnes pyramides alterius pyramidis triangulas bases habentes ad omnes pyramides alterius pyramidis triangulas bases habentes [V, 12], h. e. ipsa pyramis polygonam basim habens ad pyramidem polygonam basim habentem. pyramis autem triangulam basim habens ad pyramidem triangulam basim habentem triplicatam rationem habet quam latera correspondentia [prop. VIII]. ergo etiam ea, quae polygonam habet basim ad eam, quae similem basim habet, triplicatam habet rationem quam latus ad latus.

IX.

Pyramidum aequalium et triangulas bases habentium bases in contraria ratione sunt atque altitudines;

VIII. coroll. Psellus p. 55.

πυραμίδι (ι e corr.) *μίαν* V. *βάσιν ἔχουσαν* BV. 14. *ἐν*] *ἐπί* q. 15. *βάσεις ἔχουσαι* V. 20. *ἐστί*] om. q. 22. *τριπλάσιον* V. 26. *ὕψεσι* PVq.

καὶ ὧν πυραμίδων τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσαι εἰσὶν ἐκεῖναι.

Ἔστωσαν γὰρ ἴσαι πυραμίδες τριγώνους βάσεις ἔχουσαι τὰς ΑΒΓ, ΔΕΖ, κορυφὰς δὲ τὰ Η, Θ σημεῖα· λέγω, ὅτι τῶν ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος.

Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ στερεὰ παραλληλεπίπεδα. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι, καί ἐστι τῆς μὲν ΑΒΓΗ πυραμίδος ἑξαπλάσιον τὸ ΒΗΜΛ στερεόν, τῆς δὲ ΔΕΖΘ πυραμίδος ἑξαπλάσιον τὸ ΕΘΠΟ στερεόν, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΗΜΛ στερεὸν τῷ ΕΘΠΟ στερεῷ. τῶν δὲ ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΕΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΕΘΠΟ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΗΜΛ στερεοῦ ὕψος. ἀλλ' ὡς ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΕΠ, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον. καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον, οὕτως τὸ τοῦ ΕΘΠΟ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΗΜΛ στερεοῦ ὕψος. ἀλλὰ τὸ μὲν τοῦ ΕΘΠΟ στερεοῦ ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψει, τὸ δὲ τοῦ ΒΗΜΛ στερεοῦ ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ

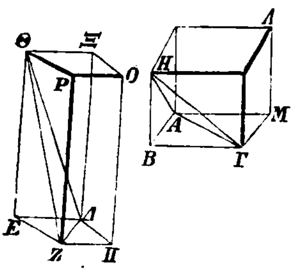
---

2. *ἴσαι εἰσίν*] mg. m. 1 postea add. P; *ἴσα* (corr. m. rec.) *ἐστίν* V. 3. *ἐκεῖνα* V, corr. m. rec. 4. *ἴσαι*] om. q.

et quarum pyramidum triangulas bases habentium bases in contraria ratione sunt atque altitudines, eae aequales sunt.

Sint enim aequales pyramides bases triangulas habentes $AB\Gamma$, ΔEZ, uertices autem H, Θ puncta. dico, pyramidum $AB\Gamma H$, $\Delta EZ\Theta$ bases in contraria ratione esse atque altitudines, et esse ut $AB\Gamma : \Delta EZ$, ita altitudinem pyramidis $\Delta EZ\Theta$ ad altitudinem pyramidis $AB\Gamma H$.

expleantur enim solida parallelepipeda $BHM\Lambda$, $E\Theta\Pi O$. et quoniam $AB\Gamma H = \Delta EZ\Theta$, et $BHM\Lambda = 6AB\Gamma H$, $E\Theta\Pi O = 6\Delta EZ\Theta$ [p. 178, 26], erit $BHM\Lambda = E\Theta\Pi O$. uerum aequalium solidorum parallelepipedorum bases in contraria ratione sunt atque altitudines [XI, 34]. erit igitur, ut $BM : E\Pi$, ita altitudo solidi $E\Theta\Pi O$ ad altitudinem solidi $BHM\Lambda$. sed $BM : E\Pi = AB\Gamma : \Delta EZ$ [I, 34]. quare etiam ut $AB\Gamma : \Delta EZ$, ita altitudo solidi $E\Theta\Pi O$ ad altitudinem solidi $BHM\Lambda$. uerum altitudo solidi $E\Theta\Pi O$ eadem est atque altitudo pyramidis $\Delta EZ\Theta$, altitudo autem solidi $BHM\Lambda$ eadem est atque altitudo pyramidis $AB\Gamma H$; itaque ut $AB\Gamma : \Delta EZ$, ita altitudo



ἔχουσαι βάσεις B. 7. ὕψεσι Vq. 15. πυραμίδος] om. V. $E\Theta O\Pi$ V. 16. ἐστί] om. V. 19. $E\Theta\Pi\Theta$ q. 21. MB Vq. $E\Pi$ βάσιν Vq. 22. $AB\Gamma$ τρίγωνον] $E\Theta\Pi O$ στερεοῦ ὕψος V, corr. mg. m. 2. τό] ins. m. 1 q. 26. ἐστιν PB. 27. ἐστιν B.

βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος. τῶν ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ ἄρα πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

Ἀλλὰ δὴ τῶν ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ πυραμίδων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος, ἀλλ' ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὸ ΒΜ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΠ παραλληλόγραμμον, καὶ ὡς ἄρα τὸ ΒΜ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΠ παραλληλόγραμμον, οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος. ἀλλὰ τὸ [μὲν] τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ τοῦ ΕΘΠΟ παραλληλεπιπέδου ὕψει, τὸ δὲ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ τοῦ ΒΗΜΑ παραλληλεπιπέδου ὕψει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΕΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΕΘΠΟ παραλληλεπιπέδου ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΗΜΑ παραλληλεπιπέδου ὕψος. ὧν δὲ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΗΜΑ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τῷ ΕΘΠΟ στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ.

---

3. ἄρα] om. V. -θασιν in ras. V. 6. ὕψεσι Vq. 15. τό] (prius) bis V. 17. παραλληλόγραμον P. 18. τῆς]

pyramidis $\Delta EZ\Theta$ ad altitudinem pyramidis $AB\Gamma H$. ergo pyramidum $AB\Gamma H$, $\Delta EZ\Theta$ bases in contraria ratione sunt atque altitudines.

Iam uero pyramidum $AB\Gamma H$, $\Delta EZ\Theta$ bases in contraria ratione sint atque altitudines, et sit ut $AB\Gamma : \Delta EZ$, ita altitudo pyramidis $\Delta EZ\Theta$ ad altitudinem pyramidis $AB\Gamma H$. dico, esse

$$AB\Gamma H = \Delta EZ\Theta.$$

nam iisdem comparatis quoniam est, ut $AB\Gamma : \Delta EZ$, ita altitudo pyramidis $\Delta EZ\Theta$ ad altitudinem pyramidis $AB\Gamma H$, et $AB\Gamma : \Delta EZ = BM : E\Pi$ [I, 34], erit etiam ut $BM : E\Pi$, ita altitudo pyramidis $\Delta EZ\Theta$ ad altitudinem pyramidis $AB\Gamma H$. uerum altitudo pyramidis $\Delta EZ\Theta$ eadem est atque altitudo parallelepipedi $E\Theta\Pi O$, altitudo autem pyramidis $AB\Gamma H$ eadem atque altitudo parallelepipedi $BHM\Lambda$. quare ut $BM : E\Pi$, ita altitudo parallelepipedi $E\Theta\Pi O$ ad altitudinem parallelepipedi $BHM\Lambda$. quorum autem solidorum parallelepipedorum bases in contraria ratione sunt atque altitudines, ea aequalia sunt. itaque $BHM\Lambda$

(prius) ins. m. 1 V. 19. μέν] om. P. 22. ἔστιν B. ἔστι τῷ] ἔστω q. 25. παραλληλεπιπέδου ὕψος] om. V. 27. ἐστί] om. V.

καί ἐστι τοῦ μὲν ΒΗΜΔ ἕκτον μέρος ἡ ΑΒΓΗ πυραμίς, τοῦ δὲ ΕΘΠΟ παραλληλεπιπέδου ἕκτον μέρος ἡ ΔΕΖΘ πυραμίς· ἴση ἄρα ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι.

Τῶν ἄρα ἴσων πυραμίδων καὶ τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· καὶ ὧν πυραμίδων τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσαι εἰσὶν ἐκεῖναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ι'.

Πᾶς κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον.

Ἐχέτω γὰρ κῶνος κυλίνδρῳ βάσιν τε τὴν αὐτὴν τὸν ΑΒΓΔ κύκλον καὶ ὕψος ἴσον· λέγω, ὅτι ὁ κῶνος τοῦ κυλίνδρου τρίτον ἐστὶ μέρος, τουτέστιν ὅτι ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου τριπλασίων ἐστίν.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου τριπλασίων, ἔσται ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ἤτοι μείζων ἢ τριπλασίων ἢ ἐλάσσων ἢ τριπλασίων. ἔστω πρότερον μείζων ἢ τριπλασίων, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· τὸ δὴ ΑΒΓΔ τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου πρίσμα ἰσοϋψὲς τῷ κυλίνδρῳ. τὸ δὴ ἀνιστάμενον πρίσμα μεῖζόν

---

1. *ἐστιν* PB. 3. *ἴση ἄρα ἡ*] *ἡ ἄρα* BVq. 4. *πυραμίδι ἴση ἐστίν* BVq. 6. *ὕψεσι* q. 7. *-μίδων τρι-* in ras. m. rec. V. 8. *ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα* P. 9. *ἔδει δεῖξαι*] in ras. m. rec. V. 14. *ΑΒΓ* P. *ὁ*] om. q. 15. *μέρος ἐστί* V. *ὁ*] om. q. 16. *τριπλάσιον* P, corr. m. 2. *ἔσται* B. 17. *εἰ* — 18. *ἔσται*] om. B, mg. add. m. 2: *εἰ γάρ — μείζων*, deletis uerbis *ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου*. 17. *μὴ γάρ* P. 19. *ἐλάττων* V. 20. *γεγράφθω* q. 21. *τὸ ΑΒΓΔ*] supra m. 2 B. 23. *καί*] om. q. 24. *ἀνεσταμένον* PBVq.

$= E\Theta\Pi O$. et $AB\Gamma H = {}^1/_6 BHM\Delta$, $\Delta EZ\Theta = {}^1/_6 E\Theta\Pi O$ [p. 178, 26]. itaque $AB\Gamma H = \Delta EZ\Theta$.

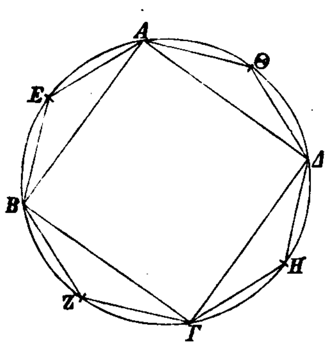
Ergo aequalium pyramidum et triangulas bases habentium bases in contraria ratione sunt atque altitudines; et quarum pyramidum triangulas bases habentium bases in contraria ratione sunt atque altitudines, eae aequales sunt; quod erat demonstrandum.

X.

Omnis conus tertia est pars cylindri, qui basim eandem habet et altitudinem aequalem.

Nam conus eandem basim habeat, quam cylindrus, circulum $AB\Gamma\Delta$, et altitudinem aequalem. dico, conum tertiam esse partem cylindri, h. e. cylindrum triplo maiorem esse cono.

nam si cylindrus cono triplo maior non est, erit cylindrus aut maior quam triplo maior cono aut minor. prius sit maior, et in circulo $AB\Gamma\Delta$ inscribatur quadratum $AB\Gamma\Delta$ [IV, 6]. itaque quadratum $AB\Gamma\Delta$ maius est quam dimidium circuli $AB\Gamma\Delta$ [p. 142, 9]. et in quadrato $AB\Gamma\Delta$ construatur prisma eandem altitudinem habens quam cylindrus. itaque prisma constructum maius est quam dimidium cylindri, quoniam



X. Hero stereom. I, 14, 3. Psellus p. 56.

ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κυλίνδρου, ἐπειδήπερ κἂν περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον περιγράψωμεν, τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον ἥμισύ ἐστι τοῦ περιγεγραμμένου· καί ἐστι τὰ ἀπ' αὐτῶν ἀνιστάμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρίσματα ἰσοϋψῆ· τὰ δὲ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις· καὶ τὸ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓΔ ἄρα τετραγώνου ἀνασταθὲν πρίσμα ἥμισύ ἐστι τοῦ ἀνασταθέντος πρίσματος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου· καί ἐστιν ὁ κύλινδρος ἐλάττων τοῦ πρίσματος τοῦ ἀνασταθέντος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου· τὸ ἄρα πρίσμα τὸ ἀνασταθὲν ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου ἰσοϋψὲς τῷ κυλίνδρῳ μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ κυλίνδρου. τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ, Η, Θ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείκνυμεν. ἀνεστάτω ἐφ' ἑκάστου τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων πρίσματα ἰσοϋψῆ τῷ κυλίνδρῳ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ἀνασταθέντων πρισμάτων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κυλίνδρου, ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν Ε, Ζ, Η, Θ σημείων παραλλήλους ταῖς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ἀγάγωμεν, καὶ συμπληρώσωμεν τὰ ἐπὶ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ παραλ-

---

1. *ἔστω* q. 4. *ἐστι*] (prius) *ἔσται* q; *ἐστιν* B. 5. *ἰσουψῆ στερεά* Theon (BVq). *πρίσματα*] om. q. *ἰσουψῆ*] om. Theon (BVq). 6. *δέ — παραλληλεπίπεδα*] *ἄρα πρίσματα* Theon

si circum circulum *ΑΒΓΔ* quadratum circumscribimus [IV, 7], quadratum in circulo *ΑΒΓΔ* inscriptum dimidium est circumscripti [p. 143 not. 1]; et solida in iis constructa parallelepipeda[1]) sunt prismata eandem altitudinem habentia. solida autem parallelepipeda eandem altitudinem habentia eam inter se rationem habent quam bases [XI, 32]. quare etiam prisma in quadrato *ΑΒΓΔ* constructum dimidium est prismatis constructi in quadrato circum *ΑΒΓΔ* circulum circumscripto; et cylindrus prismate in quadrato circum *ΑΒΓΔ* circulum circumscripto minor est; itaque prisma in quadrato *ΑΒΓΔ* constructum eandem altitudinem habens, quam cylindrus, maius est dimidio cylindri. secentur arcus *ΑΒ*, *ΒΓ*, *ΓΔ*, *ΔΑ* in punctis *Ε*, *Ζ*, *Η*, *Θ* in binas partes aequales, et ducantur *ΑΕ*, *ΕΒ*, *ΒΖ*, *ΖΓ*, *ΓΗ*, *ΗΔ*, *ΔΘ*, *ΘΑ*. itaque etiam singuli trianguli *ΑΕΒ*, *ΒΖΓ*, *ΓΗΔ*, *ΔΘΑ* maiores sunt dimidio segmentorum ad eos pertinentium circuli *ΑΒΓΔ*, ut supra demonstrabamus [p. 142, 22]. iam in singulis triangulis *ΑΕΒ*, *ΒΖΓ*, *ΓΗΔ*, *ΔΘΑ* prismata construantur eandem altitudinem habentia quam cylindrus. itaque etiam singula prismata constructa maiora sunt quam dimidia segmentorum cylindri ad ea pertinentium, quoniam si per puncta *Ε*, *Ζ*, *Η*, *Θ* rectas rectis *ΑΒ*, *ΒΓ*, *ΓΔ*, *ΔΑ* parallelas ducimus, et parallelo-

1) *παραλληλεπίπεδα* hic ut semper fere adiectiuum est, sed pertinet ad *πρίσματα*, non ad *στερεά*. exspectaueris *ἀνιστάμενα πρίσματα στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἰσουψῆ* (*ἀνιστ. πρίσματα ἰσουψῆ στερεὰ παραλλ.* coniecit August).

(BVq). 7. *εἰσιν* Bq. *ἐπί*] *ἀπό* q. 14. *ἡμίσεος* BVq. 19. *τρίγωνον* q. 21. *ἐφ'*] *ἀφ'* V. 23. *-ν ἤ*] add. m. 2 P.

ληλόγραμμα, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἀναστήσωμεν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἰσοϋψῆ τῷ κυλίνδρῳ, ἑκάστου τῶν ἀνασταθέντων ἡμίση ἐστὶ τὰ πρίσματα τὰ ἐπὶ τῶν $ΑΕΒ$, $ΒΖΓ$, $ΓΗΔ$, $ΔΘΑ$ τριγώνων· καί ἐστι τὰ τοῦ κυλίνδρου τμήματα ἐλάττονα τῶν ἀνασταθέντων στερεῶν παραλληλεπιπέδων· ὥστε καὶ τὰ ἐπὶ τῶν $ΑΕΒ$, $ΒΖΓ$, $ΓΗΔ$, $ΔΘΑ$ τριγώνων πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῶν καθ' ἑαυτὰ τοῦ κυλίνδρου τμημάτων. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πρίσματα ἰσοϋψῆ τῷ κυλίνδρῳ καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κυλίνδρου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κύλινδρος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ $ΑΕ$, $ΕΒ$, $ΒΖ$, $ΖΓ$, $ΓΗ$, $ΗΔ$, $ΔΘ$, $ΘΑ$· λοιπὸν ἄρα τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ $ΑΕΒΖΓΗΔΘ$ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μεῖζόν ἐστιν ἢ τριπλάσιον τοῦ κώνου. ἀλλὰ τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ $ΑΕΒΖΓΗΔΘ$ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, τριπλάσιόν ἐστι τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ $ΑΕΒΖΓΗΔΘ$ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν [ἐστι] τὸ $ΑΕΒΖΓΗΔΘ$ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν $ΑΒΓΔ$ κύκλον. ἀλλὰ καὶ ἐλάττων· ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ· ὅπερ

3. ἡμίσεα BVq. πρίσμα P, corr. m. rec. 5. ἀποτμήματα BVq. 8. ἢ] bis P. τῶν] τοῦ q. ἑαυτά] -τά e corr. m. rec. P; ἑτὰ q. 10. ἐφ'] ἀφ' V. 13. ἃ] supra scr. m. 2 B. ἐλάσσονα P. 14. κόνου q. 15. λελήφθω q. 17. $ΑΒΕΖΓΗΔΘΑ$ P, $ΑΕΒΖΓΗΔΘΑ$ V. 18. κόνου q. 21. ἐστι] om. V. $ΑΕΒΖΓΗΘΔ$ V.

gramma in rectis AB, $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA explemus et in iis solida parallelepipeda construimus eandem altitudinem habentia, quam cylindrus, prismata in triangulis AEB, $BZ\Gamma$, $\Gamma H\Delta$, $\Delta\Theta A$ constructa dimidia sunt singulorum parallelepipedorum[1]); et segmenta cylindri minora sunt solidis parallelepipedis, quae construximus; quare prismata in triangulis AEB, $BZ\Gamma$, $\Gamma H\Delta$, $\Delta\Theta A$ constructa maiora sunt quam dimidia segmentorum cylindri ad ea pertinentium. itaque si arcus relictos in duas partes aequales secuerimus et rectas duxerimus et in singulis triangulis prismata construxerimus eandem altitudinem habentia, quam cylindrus, et hoc semper fecerimus, frusta quaedam cylindri relinquemus, quae minora sunt excessu, quo cylindrus triplum coni excedit [X, 1]. relinquantur et sint AE, EB, BZ, $Z\Gamma$, ΓH, $H\Delta$, $\Delta\Theta$, ΘA. itaque quod relinquitur prisma, cuius basis est polygonum $AEBZ\Gamma H\Delta\Theta$, altitudo autem eadem ac cylindri, maius est quam triplo maius cono. uerum prisma, cuius basis est polygonum $AEBZ\Gamma H\Delta\Theta$, altitudo autem eadem ac cylindri, triplo maius est pyramide, cuius basis est polygonum $AEBZ\Gamma H\Delta\Theta$, uertex autem idem ac coni [prop. VII coroll.]. quare etiam pyramis, cuius basis est polygonum $AEBZ\Gamma H\Delta\Theta$, uertex autem idem ac coni, maior est cono, qui basim habet $AB\Gamma\Delta$ circulum. uerum etiam minor est (nam

1) Hoc ex XI, 28 colligitur ductis ab E, Z, H, Θ rectis ad AB, $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA perpendicularibus.

22. κόνῳ q. 23. ἐστι] om. P. 24. κόνῳ q. ἐστίν P. 25. κόνου in ras. q. 26. ὑπ'] corr. ex ἀπ' m. 2 B.

ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου μείζων ἢ τριπλάσιος.

Λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἐστὶν ἢ τριπλάσιος ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ἐλάττων ἢ τριπλάσιος ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου· ἀνάπαλιν ἄρα ὁ κῶνος τοῦ κυλίνδρου μείζων ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· τὸ ΑΒΓΔ ἄρα τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ· ἡ ἄρα ἀνασταθεῖσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ κώνου, ἐπειδήπερ, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείκνυμεν, ὅτι ἐὰν περὶ τὸν κύκλον τετράγωνον περιγράψωμεν, ἔσται τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον ἥμισυ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγεγραμμένου τετραγώνου· καὶ ἐὰν ἀπὸ τῶν τετραγώνων στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἀναστήσωμεν ἰσοϋψῆ τῷ κώνῳ, ἃ καὶ καλεῖται πρίσματα, ἔσται τὸ ἀνασταθὲν ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου ἥμισυ τοῦ ἀνασταθέντος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου· πρὸς ἄλληλα γάρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις. ὥστε καὶ τὰ τρίτα· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον, ἥμισύ ἐστι τῆς πυραμίδος τῆς ἀνασταθείσης ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου. καί ἐστι μείζων ἡ πυραμὶς ἡ ἀνασταθεῖσα ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον τετραγώνου τοῦ κώνου· ἐμπεριέχει γὰρ αὐτόν. ἡ ἄρα πυραμίς, ἧς βάσις τὸ

---

1. *ἐστίν*] om. V. *ἐστίν*] *ἔσται* B V. *κόνου* q et sic postea saepe. 3. *ἐστίν*] om. V. *τριπλάσιός ἐστιν* V. 8. *τὸ ΑΒΓΔ* — 9. *τετράγωνον*] mg. m. 1 P. 10. *τετραγώνου*] in ras. q. 13. *μέρος*] om. V. 14. *περιγράψωμεν*

ab eo comprehenditur); quod fieri non potest. itaque cylindrus maior non est quam triplo maior cono.

Iam dico, cylindrum ne minorem quidem esse quam triplo maiorem cono.

Nam si fieri potest, sit cylindrus minor quam triplo maior cono. e contrario igitur conus maior est tertia parte cylindri. iam in circulo $AB\Gamma\Delta$ quadratum inscribatur $AB\Gamma\Delta$ [IV, 6]. itaque quadratum $AB\Gamma\Delta$ maius est quam dimidium circuli $AB\Gamma\Delta$ [p. 142, 11]. et in quadrato $AB\Gamma\Delta$ pyramis construatur eundem uerticem habens, quem conus. itaque pyramis ita constructa maior est quam dimidium coni, quoniam, ut supra demonstrabamus [p. 143 not. 1], si circum circulum quadratum circumscripserimus [IV, 7], quadratum $AB\Gamma\Delta$ dimidium erit quadrati circum circulum circumscripti; et si in quadratis solida parallelepipeda eandem altitudinem habentia, quam conus, construxerimus, quae eadem prismata uocantur, solidum in quadrato $AB\Gamma\Delta$ constructum dimidium erit solidi constructi in quadrato circum circulum circumscripto (nam eam inter se rationem habent quam bases) [XI, 32]. quare etiam partes tertiae. itaque etiam pyramis, cuius basis est quadratum $AB\Gamma\Delta$, dimidium est pyramidis, quae in quadrato circum circulum circumscripto construitur [prop. VII coroll.]. et pyramis in quadrato circum circulum circumscripto constructa maior est cono (nam eum comprehendit). itaque pyramis, cuius basis est

---

τετράγωνον BVq. 15. ἥμισυ] -μι- in ras. V. 16. περιγεγραμμένου] περιγραφομένου V. τετραγώνου] om. V. 18. καλεῖ in fine lin. P. 19. τοῦ] (alt.) corr. ex τό m. 1 P. 22. τρία q, corr. m. 1. 23. ἐστιν P. 27. περιέχει q.

ΑΒΓΔ τετράγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. τετμήσθωσαν αἱ *ΑΒ*, *ΒΓ*, *ΓΔ*, *ΔΑ* περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ *Ε*, *Ζ*, *Η*, *Θ* σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ *ΑΕ*, *ΕΒ*, *ΒΖ*, *ΖΓ*, *ΓΗ*, *ΗΔ*, *ΔΘ*, *ΘΑ*· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν *ΑΕΒ*, *ΒΖΓ*, *ΓΗΔ*, *ΔΘΑ* τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ᾽ ἑαυτὸ τμήματος τοῦ *ΑΒΓΔ* κύκλου. καὶ ἀνεστάτωσαν ἐφ᾽ ἑκάστου τῶν *ΑΕΒ*, *ΒΖΓ*, *ΓΗΔ*, *ΔΘΑ* τριγώνων πυραμίδες τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσαι τῷ κώνῳ· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ᾽ ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας καὶ ἀνιστάντες ἐφ᾽ ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδα τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσαν τῷ κώνῳ καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κῶνος τοῦ τρίτου μέρους τοῦ κυλίνδρου. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν *ΑΕ*, *ΕΒ*, *ΒΖ*, *ΖΓ*, *ΓΗ*, *ΗΔ*, *ΔΘ*, *ΘΑ*· λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ *ΑΕΒΖΓΗΔΘ* πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος τοῦ κυλίνδρου. ἀλλ᾽ ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ *ΑΕΒΖΓΗΔΘ* πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, τρίτον ἐστὶ μέρος τοῦ πρίσματος, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ *ΑΕΒΖΓΗΔΘ* πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ· τὸ ἄρα πρίσμα, οὗ βάσις

---

2. τό] om. P. αἵ] bis P, sed corr. 3. τά] τό q. 5. *ΘΑ*] om. B. 8. ἐφ'] ἀφ' BVq. 10. ἔχοντες V. 12. μεῖζον P, corr. m. rec. ἑαυτό PBVq; corr. ed. Basil. 17. τμήματα BV. 19. λελήφθω q. 21. *ΑΕΒΖΓΗΔΘ*] *Θ*

quadratum ΑΒΓΔ, uertex autem idem ac coni, maior est quam dimidium coni. iam arcus ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ in punctis Ε, Ζ, Η, Θ in duas partes aequales secentur, et ducantur ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ. itaque singuli trianguli ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ maiores sunt quam dimidium segmentorum circuli ΑΒΓΔ ad eos pertinentium [p. 142, 22]. et in singulis triangulis ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ pyramides construantur eundem uerticem habentes, quem conus. itaque etiam singulae pyramides, quas construximus, eadem ratione[1]) maiores sunt quam dimidium segmentorum coni ad eas pertinentium. si igitur arcus reliquos in duas partes aequales secuerimus et rectas duxerimus et in singulis triangulis pyramides construxerimus eundem uerticem habentes, quem conus, et hoc semper fecerimus, frusta quaedam coni relinquemus, quae minora erunt excessu, quo conus tertiam partem cylindri excedit [X, 1]. relinquantur et sint ea, quae in ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ posita sunt. itaque quae relinquitur pyramis, cuius basis est polygonum ΑΕΒΖΓΗΔΘ, uertex autem idem ac coni, maior est tertia parte cylindri. uerum pyramis, cuius basis est polygonum ΑΕΒΖΓΗΔΘ, uertex autem idem ac coni, tertia pars est prismatis, cuius basis est polygonum ΑΕΒΖΓΗΔΘ, altitudo autem eadem ac cylindri.

1) Sc. ac supra p. 192, 12 sq. in pyramidibus, quae in quadratis constructae erant.

corr. ex Β uel Ζ q. 22. ἡ] om. q. 24. ΑΕΒΓΗΔΘ V. 26. ἐστιν B. ΑΕΒΖΓΗΔΘ] Ζ supra scr. m. 2 V. 27. τό] ο in ras. m. 2 B. τὸ ἄρα — p. 196, 2. κυλίνδρῳ] om. q.

μέν ἐστι τὸ *ΑΕΒΖΓΗΔΘ* πολύγωνον, ὕψος δὲ το αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μεῖζόν ἐστι τοῦ κυλίνδρου, οὗ βάσις ἐστὶν ὁ *ΑΒΓΔ* κύκλος. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον· ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ἐλάττων ἐστὶν ἢ τριπλάσιος. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ μείζων ἢ τριπλάσιος· τριπλάσιος ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου· ὥστε ὁ κῶνος τρίτον ἐστὶ μέρος τοῦ κυλίνδρου.

Πᾶς ἄρα κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ια'.

Οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν [εἰσιν] οἱ *ΑΒΓΔ*, *ΕΖΗΘ* κύκλοι, ἄξονες δὲ οἱ *ΚΛ*, *ΜΝ*, διάμετροι δὲ τῶν βάσεων αἱ *ΑΓ*, *ΕΗ*· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ *ΑΒΓΔ* κύκλος πρὸς τὸν *ΕΖΗΘ* κύκλον, οὕτως ὁ *ΑΛ* κῶνος πρὸς τὸν *ΕΝ* κῶνον.

Εἰ γὰρ μή, ἔσται ὡς ὁ *ΑΒΓΔ* κύκλος πρὸς τὸν *ΕΖΗΘ* κύκλον, οὕτως ὁ *ΑΛ* κῶνος ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ *ΕΝ* κώνου στερεὸν ἢ πρὸς μεῖζον. ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ *Ξ*, καὶ ᾧ ἔλασσόν ἐστι τὸ *Ξ* στερεὸν τοῦ *ΕΝ* κώνου, ἐκείνῳ ἴσον ἔστω τὸ *Ψ* στερεόν· ὁ *ΕΝ* κῶνος ἄρα ἴσος ἐστὶ τοῖς *Ξ*, *Ψ* στερεοῖς. ἐγγεγράφθω εἰς τὸν *ΕΖΗΘ* κύκλον τετράγωνον τὸ *ΕΖΗΘ*· τὸ ἄρα τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν

---

3. *μέν ἐστιν* Vq. *ἐστὶν ὁ*] mg. m. 1 P. *ἐλάττων* Vq. 4. *ἐστίν*] om. V. 8. *μέρος ἐστί* V. 9. *ἄρα ὁ* V.

prisma igitur, cuius basis est $AEBZ\Gamma H\Delta\Theta$ polygonum, altitudo autem eadem ac cylindri, maius est cylindro, cuius basis est circulus $AB\Gamma\Delta$. uerum etiam minus (nam ab eo comprehenditur); quod fieri non potest. itaque cylindrus minor non est quam triplo maior cono. demonstrauimus autem, eum ne maiorem quidem esse. triplo igitur maior est cylindrus cono. itaque conus tertia pars est cylindri.

Ergo omnis conus tertia pars est cylindri, qui eandem basim habet et altitudinem aequalem; quod erat demonstrandum.

XI.

Coni et cylindri, qui eandem habent altitudinem, eam inter se rationem habent quam bases.

Eandem altitudinem habeant coni et cylindri, quorum bases sunt circuli $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$, axes autem $K\Lambda$, MN, diametri autem basium $A\Gamma$, EH. dico, esse $AB\Gamma\Delta : EZH\Theta = A\Lambda : EN$.

Nam si minus, erit ut $AB\Gamma\Delta : EZH\Theta$, ita conus $A\Lambda$ aut ad minus aliquod cono EN solidum aut ad maius. prius sit ad minus Ξ, et sit $\Psi = EN \div \Xi$. itaque $EN = \Xi + \Psi$. iam in circulo $EZH\Theta$ inscribatur quadratum $EZH\Theta$ [IV, 6]. itaque quadratum maius est dimidio circuli [p. 142, 11]. in quadrato

---

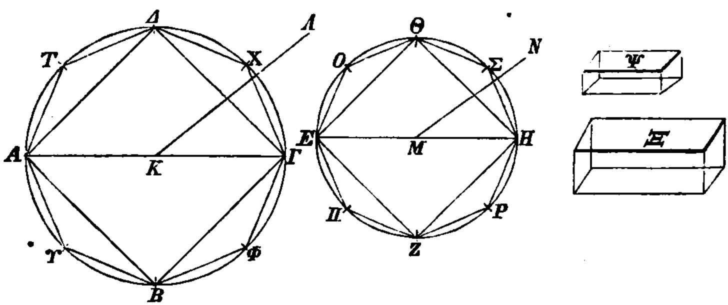
τοῦ τήν — 11. δεῖξαι] καὶ τὰ ἑξῆς V. 10. ἴσον] supra m. 2 B. 12. ια'] om. q. 15. καί] ἤ B. 16. εἰσιν] om. P. 17. διάμετροι — 18. EH] om. q; mg. m. 2 B. 19. κύκλον] supra m. 2 B. $A\Delta$ B, sed corr. πρός — 22. κῶνος] mg. m. 2 B. 20. κῶνον] om. BVq. 21. ἔστω Vq. 22. κύκλον] om. q. ἤτοι] om. q; ἤ BV. ἤτοι — 23. ἤ] et in textu et in mg. m. 2 B (ἤ pro ἤτοι). 24. πρότερον] om. q. 28. ἐστι q.

ἢ το ἥμισυ τοῦ κύκλου. ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ· ἡ ἄρα ἀνασταθεῖσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου, ἐπειδήπερ ἐὰν περιγράψωμεν περὶ τὸν κύκλον τετράγωνον, καὶ ἀπʼ αὐτοῦ ἀναστήσωμεν πυραμίδα ἰσοϋψῆ τῷ κώνῳ, ἡ ἐγγραφεῖσα πυραμὶς ἥμισύ ἐστι τῆς περιγραφείσης· πρὸς ἀλλήλας γάρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις· ἐλάττων δὲ ὁ κῶνος τῆς περιγραφείσης πυραμίδος. τετμήσθωσαν αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ο, Π, Ρ, Σ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΟ, ΟΕ, ΕΠ, ΠΖ, ΖΡ, ΡΗ, ΗΣ, ΣΘ. ἕκαστον ἄρα τῶν ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθʼ ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου. ἀνεστάτω ἐφʼ ἑκάστου τῶν ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ τριγώνων πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθʼ ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας καὶ ἀνιστάντες ἐπὶ ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας ἰσοϋψεῖς τῷ κώνῳ καὶ ἀεὶ τοῦτο ποιοῦντες καταλείψομέν τινα

---

6. *ἐστιν* P. 7. *ἄλληλα* B, corr. m. 2. 8. *ἐλάσσων* P. Post *πυραμίδος* add. *ἡ ἄρα πυραμίς, ἧς βάσις τὸ ΕΖΗΘ τετράγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου* Vq, mg. m. 2 B. 10. *τά*] *τό* q. *Ρ, Σ*] corr. ex *Π, Ρ* m. rec. P. 11. *ΟΕ*] *ΘΕ* q. 12. *ΗΕΘ* q. 13. *αὐτό* V. 14. *ἀφʼ* Bq; uerba *ἀφʼ ἑκάστου* supra m. 2 V (uidetur fuisse *ἐφʼ ἑκάστῳ*). 16. *καί*] om. V. 17. *μέρος τοῦ* V. *ἑαυτήν*] corr. in *ἑαυτό* V; *ἑαυτό* corr. ex *ἑαυτοῦ* P. 20. *ἑκάστῳ* V.

$EZH\Theta$ pyramis construatur, quae eandem altitudinem habeat, quam conus. pyramis igitur constructa maior est dimidio coni, quoniam si circum circulum quadratum circumscripserimus [IV, 7] et in eo pyramidem construxerimus eandem altitudinem habentem, quam conus, pyramis inscripta dimidia est circumscriptae; nam eam inter se rationem habent, quam bases [prop. VI]; conus autem pyramide circumscripta minor est. secentur arcus EZ, ZH, $H\Theta$, ΘE in punctis O, Π, P, Σ in duas partes aequales, et ducantur ΘO, OE, $E\Pi$,



ΠZ, ZP, PH, $H\Sigma$, $\Sigma\Theta$. singuli igitur trianguli ΘOE, $E\Pi Z$, ZPH, $H\Sigma\Theta$ maiores sunt dimidio segmentorum circuli ad eos pertinentium [p. 142, 22]. iam in singulis triangulis ΘOE, $E\Pi Z$, ZPH, $H\Sigma\Theta$ pyramis construatur eandem altitudinem habens, quam conus. itaque etiam singulae pyramides constructae maiores sunt dimidio segmentorum coni ad eas pertinentium [p. 194, 10]. quare si arcus reliquos in duas partes aequales secuerimus et rectas duxerimus et in singulis triangulis pyramides construxerimus eandem altitudinem habentes, quam conus, et hoc semper feceἀποτμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ Ψ στερεοῦ. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ· λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμίς, ἧς βάσις τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶ τοῦ Ξ στερεοῦ. ἐγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τῷ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολυγώνῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον πολύγωνον τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ, καὶ ἀνεστάτω ἐπ' αὐτοῦ πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ ΑΛ κώνῳ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ, οὕτως τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ πολύγωνον πρὸς τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ πολύγωνον πρὸς τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον. ὡς δὲ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς τὸ Ξ στερεόν, ὡς δὲ το ΔΤΑΥΒΦΓΧ πολύγωνον πρὸς τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον, οὕτως ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον. καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς τὸ Ξ στερεόν, οὕτως ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ πυραμίδα, οὕτως τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὴν ἐν τῷ ΕΝ

---

1. ἔσται] ἐστιν P. 2. ΘΟΕ] e corr. q. 3. λοιπόν P. 4. ΟΘΕΠΖΡΗΣ PB, ΟΕΠΖΡΗΣΘ V. 5. μεῖζον Vq, et B, sed corr. ἐστίν P. 6. ΟΘΕΠΖΡΗΣ PBq et e corr.

rimus, frusta quaedam coni relinquemus minora solido Ψ [X, 1]. relinquantur et sint ea, quae in $\Theta O E$, $E \Pi Z$, $Z P H$, $H \Sigma \Theta$ posita sunt. itaque quae relinquitur pyramis, cuius basis est polygonum $\Theta O E \Pi Z P H \Sigma$, altitudo autem eadem ac coni, maior est solido Ξ. etiam in circulo $A B \Gamma \Delta$ polygono $\Theta O E \Pi Z P H \Sigma$ simile et similiter positum polygonum $\Delta T A \Upsilon B \Phi \Gamma X$ inscribatur [cfr. VI, 18], et in eo pyramis construatur eandem altitudinem habens, quam conus $A\Lambda$. iam quoniam est

$$A\Gamma^2 : EH^2 = \Delta T A \Upsilon B \Phi \Gamma X : \Theta O E \Pi Z P H \Sigma \text{ [prop. I]},$$

et $A\Gamma^2 : EH^2 = A B \Gamma \Delta : E Z H \Theta$ [prop. II], erit etiam $A B \Gamma \Delta : E Z H \Theta = \Delta T A \Upsilon B \Phi \Gamma X : \Theta O E \Pi Z P H \Sigma$. uerum $A B \Gamma \Delta : E Z H \Theta = A\Lambda : \Xi$, et ut

$$\Delta T A \Upsilon B \Phi \Gamma X : \Theta O E \Pi Z P H \Sigma,$$

ita pyramis, cuius basis est polygonum $\Delta T A \Upsilon B \Phi \Gamma X$, uertex autem punctum Λ, ad pyramidem, cuius basis est polygonum $\Theta O E \Pi Z P H \Sigma$, uertex autem N punctum [prop. VI]. quare etiam ut $A\Lambda : \Xi$, ita pyramis, cuius basis est polygonum $\Delta T A \Upsilon B \Phi \Gamma X$, uertex autem punctum Λ, ad pyramidem, cuius basis est polygonum $\Theta O E \Pi Z P H \Sigma$, uertex autem punctum N. permutando igitur erit [V, 16], ut conus $A\Lambda$ ad pyramidem in eo comprehensam, ita solidum Ξ ad pyramidem in cono EN comprehensam. conus autem $A\Lambda$ maior est

---

V. 8. $\Delta T A \Upsilon B \Phi \Gamma X$] litt. Γ postea add. V. ἀπ' q. αὐτῷ B. 10. τό (alt.) — 12. οὕτως ὁ] mg. m. 1 V. 11. $O \Theta E \Pi P H \Sigma$ B, et P, corr. m. 1. 12. οὕτως ὁ] etiam in textu V. 15. $O \Theta E \Pi P H \Sigma$ P, corr. m. 1. 18. $\Delta T A \Upsilon \Phi \Gamma X$ V. 20. $\Theta O E \Pi Z P H \Sigma$ B, ἐν ἑτέρῳ τὸ $\Delta T A \Upsilon B \Phi \Gamma X$ πολύγωνον mg. m. 2. 24. $\Delta T A \Upsilon B \Phi \Gamma X$] Γ postea add. V.

κώνῳ πυραμίδα. μείζων δὲ ὁ ΑΛ κῶνος τῆς ἐν αὐτῷ πυραμίδος· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Ξ στερεὸν τῆς ἐν τῷ ΕΝ κώνῳ πυραμίδος. ἀλλὰ καὶ ἔλασσον· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΕΝ κώνου στερεόν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδέ ἐστιν ως ἱ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΝ κῶνος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΑΛ κώνου στερεόν.

Λέγω δή, ὅτι οὐδέ ἐστιν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΝ κώνου στερεόν.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ Ξ· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν ΑΛ κῶνον. ἀλλ' ὡς τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν ΑΛ κῶνον, οὕτως ὁ ΕΝ κῶνος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΑΛ κώνου στερεόν· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΝ κῶνος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΑΛ κώνου στερεόν· ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΝ κώνου στερεόν. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλασσον· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς τὸν ΕΝ κῶνον.

Ἀλλ' ὡς ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον· τριπλασίων γὰρ ἑκάτερος ἑκατέρου. καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως οἱ ἐπ' αὐτῶν ἰσοϋψεῖς [τοῖς κώνοις] κύλινδροι.

---

1. *ἑαυτῷ* P. 4. *ἐστίν*] om. V. 6. *οὐδέ ἐστιν ὡς*] *οὐδ' ὁ* V, *οὐδ' ὡς ὁ* m. 2; *οὐδὲ ὡς ἐστιν* q. 13. *κύκλον*] om. B.

pyramide in eo comprehensa. itaque etiam solidum Ξ maius est pyramide in cono EN comprehensa [V, 14]. uerum idem minus est; quod absurdum est. itaque non est ut $AB\Gamma\Delta : EZH\Theta$, ita conus $A\Lambda$ ad solidum minus cono EN. iam similiter demonstrabimus, ne EN quidem conum ad solidum minus cono $A\Lambda$ eam rationem habere quam $EZH\Theta : AB\Gamma\Delta$.

Iam dico, ne ad maius quidem cono EN solidum conum $A\Lambda$ eam rationem habere quam

$$AB\Gamma\Delta : EZH\Theta.$$

Nam si fieri potest, habeat ad maius Ξ. itaque e contrario erit $EZH\Theta : AB\Gamma\Delta = \Xi : A\Lambda$ [V, 7 coroll.]. uerum ut $\Xi : A\Lambda$, ita conus EN ad solidum minus cono $A\Lambda$ [prop. II lemma]. quare etiam ut $EZH\Theta : AB\Gamma\Delta$, ita conus EN ad solidum minus cono $A\Lambda$; quod fieri non posse demonstrauimus. itaque non est ut $AB\Gamma\Delta : EZH\Theta$, ita conus $A\Lambda$ ad solidum maius cono EN. demonstrauimus autem, eum ne ad minus quidem illam habere rationem. itaque

$$AB\Gamma\Delta : EZH\Theta = A\Lambda : EN.$$

sed ut conus ad conum, ita cylindrus ad cylindrum; nam uterque utroque triplo maior est [prop. X]. itaque etiam ut $AB\Gamma\Delta : EZH\Theta$, ita cylindri in iis constructi, qui eandem altitudinem habent.[1])

---

1) Uerba τοῖς κώνοις lin. 28 uereor ne antiqua glossa sit; neque enim hic de eo agitur, ut cylindri eandem altitudinem habeant quam coni, sed ut demonstremus, cylindros ἰσοϋψεῖς eam rationem habere quam bases.

---

14. ἀλλ' — 15. κῶνον] mg. m. 1 P. 19. ἐστίν] om. V. ὡς] om. q. 21. τι] om. q. κώνου] om. V. 25. ἀλλά P.

Οἱ ἄρα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιβ'.

Οἱ ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων.

Ἔστωσαν ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ κύκλοι, διάμετροι δὲ τῶν βάσεων αἱ ΒΔ, ΖΘ, ἄξονες δὲ τῶν κώνων καὶ κυλίνδρων οἱ ΚΛ, ΜΝ· λέγω, ὅτι ὁ κῶνος, οὗ βάσις μέν [ἐστιν] ὁ ΑΒΓΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὸν κῶνον, οὗ βάσις μέν [ἐστιν] ὁ ΕΖΗΘ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ.

Εἰ γὰρ μὴ ἔχει ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος πρὸς τὸν ΕΖΗΘΝ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ, ἕξει ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος ἢ πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΕΖΗΘΝ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἢ πρὸς μεῖζον. ἐχέτω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ Ξ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ· τὸ ἄρα ΕΖΗΘ τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. καὶ ἀνεστάτω ἐπὶ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ· ἡ ἄρα ἀνασταθεῖσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος

---

2. ὅπερ ἔδει δεῖξαι]:∼ V. 5. καί] καὶ οἱ q. 6. εἰσίν PB. βάσεσιν P. 8. βάσις q. 10. αἱ] οἱ BV. δέ] om. q. καί] ἢ BVq. 12. ἐστιν] om. BVq. 13. ἐστιν] om. BVq. 16. ἔχῃ P, ἔχοι B. 17. τριπλάσιον P, postea corr. m. 1. Post λόγον ras. 3 litt. V. 20. πρὸς ἔλασσον πρότερον BVq. 22. κύκλον — 23. ΕΖΗΘ] mg. m.

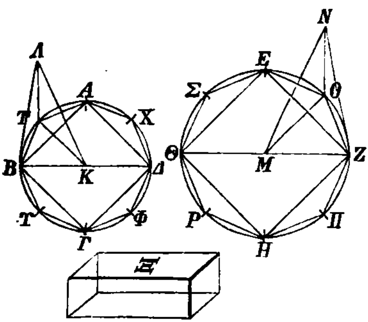
Ergo coni et cylindri, qui eandem habent altitudinem, eam inter se rationem habent quam bases; quod erat demonstrandum.

XII.

Similes coni et cylindri inter se triplicatam rationem habent quam diametri basium.

Sint similes coni et cylindri, quorum bases sint circuli $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$, diametri autem basium $B\Delta$, $Z\Theta$, axes autem conorum et cylindrorum $K\Lambda$, MN. dico, conum, cuius basis sit circulus $AB\Gamma\Delta$, uertex autem Λ punctum, ad conum, cuius basis sit circulus $EZH\Theta$, uertex autem N punctum, triplicatam rationem habere quam $B\Delta : Z\Theta$.

nam si non est $AB\Gamma\Delta\Lambda : EZH\Theta N = B\Delta^3 : Z\Theta^3$, conus $AB\Gamma\Delta\Lambda$ aut ad solidum aliquod minus cono $EZH\Theta N$ triplicatam rationem habebit aut ad maius.



prius habeat ad minus Ξ, et in circulo $EZH\Theta$ inscribatur quadratum $EZH\Theta$ [IV, 6]. itaque quadratum $EZH\Theta$ maius est dimidio circuli $EZH\Theta$ [p. 142, 11]. et in quadrato $EZH\Theta$ pyramis construatur eundem uerticem habens, quem conus. itaque pyramis constructa maior erit

XII. Psellus p. 65.

1 P. 23. ἐπί] ἀπό V. 24. τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα] ἰσουψής Theon (BVq).

τοῦ κώνου. τετμήσθωσαν δὴ αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ο, Π, Ρ, Σ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΟ, ΟΖ, ΖΠ, ΠΗ, ΗΡ, ΡΘ, ΘΣ, ΣΕ. καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ΕΟΖ, ΖΠΗ, ΗΡΘ, ΘΣΕ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. καὶ ἀνεστάτω ἐφ' ἑκάστου τῶν ΕΟΖ, ΖΠΗ, ΗΡΘ, ΘΣΕ τριγώνων πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἐχούσας τῷ κώνῳ καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ο ΕΖΗΘΝ κῶνος τοῦ Ξ στερεοῦ. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΕΟ, ΟΖ, ΖΠ, ΠΗ, ΗΡ, ΡΘ, ΘΣ, ΣΕ· λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, μείζων ἐστὶ τοῦ Ξ στερεοῦ. ἐγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τῷ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολυγώνῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον πολύγωνον τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ, καὶ ἀνεστάτω ἐπὶ τοῦ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολυγώνου πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ, καὶ τῶν μὲν περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, ἓν τρίγωνον ἔστω τὸ ΛΒΤ, τῶν δὲ περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ

---

2. τά] τό V. 4. ΗΡΘ] ΗΕΘ q. 7. ἀφ' V. ΕΟΖ] Ο in ras. m. 2 B, ΕΘΖ q. 8. ἔχουσα] χ in ras. B. 9. μεί-

dimidio coni [p. 192, 12]. iam arcus EZ, ZH, $H\Theta$, ΘE in punctis O, Π, P, Σ in duas partes aequales secentur, et ducantur EO, OZ, $Z\Pi$, ΠH, HP, $P\Theta$, $\Theta\Sigma$, ΣE. itaque etiam singuli trianguli EOZ, $Z\Pi H$, $HP\Theta$, $\Theta\Sigma E$ maiores sunt dimidio segmentorum circuli $EZH\Theta$ ad eos pertinentium [p. 142, 22]. et in singulis triangulis EOZ, $Z\Pi H$, $HP\Theta$, $\Theta\Sigma E$ pyramis construatur eundem uerticem habens, quem conus. itaque etiam singulae pyramides constructae maiores sunt dimidio segmentorum coni ad eas pertinentium [p. 194, 11]. iam si arcus reliquos in duas partes aequales secuerimus et rectas duxerimus et in singulis triangulis pyramides construxerimus eundem uerticem habentes, quem conus, et hoc semper fecerimus, frusta quaedam coni relinquemus, quae minora erunt excessu, quo conus $EZH\Theta N$ solidum Ξ excedit. relinquantur et sint ea, quae in EO, OZ, $Z\Pi$, ΠH, HP, $P\Theta$, $\Theta\Sigma$, ΣE posita sunt. itaque quae relinquitur pyramis, cuius basis est $EOZ\Pi HP\Theta\Sigma$ polygonum, uertex autem punctum N, maior est solido Ξ. iam etiam in circulum $AB\Gamma\Delta$ polygono $EOZ\Pi HP\Theta\Sigma$ simile et similiter positum polygonum $ATB\Upsilon\Gamma\Phi\Delta X$ inscribatur [VI, 18], et in polygono $ATB\Upsilon\Gamma\Phi\Delta X$ pyramis construatur eundem uerticem habens, quem conus, et ex triangulis comprehendentibus pyramidem, cuius basis est polygonum $ATB\Upsilon\Gamma\Phi\Delta X$, uertex autem Λ punctum, unus sit ΛBT, ex iis autem, qui pyramidem comprehendunt, cuius basis est polygonum

---

ζων] in ras. B. 10. μέρος] om. V. 17. εἰλήφθω q. 18. $\Theta\Sigma$] om. q. 20. μεῖζον q. 23. ἐπί — 24. πολυγώνου] ἀπ' αὐτοῦ Theon (BVq). 27. ΛTB P. 28. τήν] om. V.

ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ *Ν* σημεῖον, ἓν τρίγωνον ἔστω τὸ *ΝΖΟ*, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ *ΚΤ*, *ΜΟ*. καὶ ἐπεὶ ὅμοιός ἐστιν ὁ *ΑΒΓΔΛ* κῶνος τῷ *ΕΖΗΘΝ* κώνῳ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ *ΒΔ* πρὸς τὴν *ΖΘ*, οὕτως ἱ *ΚΛ* ἄξων πρὸς τὸν *ΜΝ* ἄξονα. ὡς δὲ ἡ *ΒΔ* πρὸς τὴν *ΖΘ*, οὕτως ἡ *ΒΚ* πρὸς τὴν *ΖΜ*· καὶ ὡς ἄρα ἡ *ΒΚ* πρὸς τὴν *ΖΜ*, οὕτως ἡ *ΚΛ* πρὸς τὴν *ΜΝ*. καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ *ΒΚ* πρὸς τὴν *ΚΛ*, οὕτως ἡ *ΖΜ* πρὸς τὴν *ΜΝ*. καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ *ΒΚΛ*, *ΖΜΝ* αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ *ΒΚΛ* τρίγωνον τῷ *ΖΜΝ* τριγώνῳ. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ *ΒΚ* πρὸς τὴν *ΚΤ*, οὕτως ἡ *ΖΜ* πρὸς τὴν *ΜΟ*, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ *ΒΚΤ*, *ΖΜΟ*, ἐπειδήπερ, ὃ μέρος ἐστὶν ἡ ὑπὸ *ΒΚΤ* γωνία τῶν πρὸς τῷ *Κ* κέντρῳ τεσσάρων ὀρθῶν, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ *ΖΜΟ* γωνία τῶν πρὸς τῷ *Μ* κέντρῳ τεσσάρων ὀρθῶν· ἐπεὶ οὖν περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ *ΒΚΤ* τρίγωνον τῷ *ΖΜΟ* τριγώνῳ. πάλιν, ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς ἡ *ΒΚ* πρὸς τὴν *ΚΛ*, οὕτως ἡ *ΖΜ* πρὸς τὴν *ΜΝ*, ἴση δὲ ἡ μὲν *ΒΚ* τῇ *ΚΤ*, ἡ δὲ *ΖΜ* τῇ *ΟΜ*, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ *ΤΚ* πρὸς τὴν *ΚΛ*, οὕτως ἡ *ΟΜ* πρὸς τὴν *ΜΝ*. καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ *ΤΚΛ*, *ΟΜΝ*· ὀρθαὶ γάρ· αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ *ΛΚΤ* τρίγωνον τῷ *ΝΜΟ* τριγώνῳ. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν *ΛΚΒ*, *ΝΜΖ* τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ *ΛΒ* πρὸς τὴν *ΒΚ*, οὕτως ἡ *ΝΖ* πρὸς τὴν *ΖΜ*, διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν *ΒΚΤ*, *ΖΜΟ* τριγώνων

---

1. *ΕΟΖΠΗΡΟΣ* q. 2. *ΝΟΖ* P. 3. *ΑΒΓΔ* B, et V, corr. m. 2. 4. *ΕΖΗΘ* B, et V, corr. m. 2 (*ΖΗ* in ras.).

$E O Z \Pi H P \Theta \Sigma$, uertex autem N punctum, unus sit NZO, et ducantur KT, MO. et quoniam conus $AB\Gamma\Delta A$ cono $EZH\Theta N$ similis est, erit $B\Delta : Z\Theta = KA : MN$ [XI def. 24]. uerum $B\Delta : Z\Theta = BK : ZM$; quare etiam $BK : ZM = KA : MN$. et permutando [V, 16] $BK : KA = ZM : MN$. et circum angulos aequales BKA, ZMN latera proportionalia sunt. itaque $BKA \sim ZMN$ [VI, 6]. rursus quoniam $BK : KT = ZM : MO$, et angulos aequales BKT, ZMO comprehendunt (quoniam quae pars est $\angle BKT$ quattuor rectorum ad centrum K positorum, eadem[1]) pars est $\angle ZMO$ quattuor rectorum ad centrum M positorum), erit $BKT \sim ZMO$. rursus quoniam demonstrauimus $BK : KA = ZM : MN$, et $BK = KT$, $ZM = OM$, erit $TK : KA = OM : MN$. et latera aequales angulos TKA, OMN (recti enim sunt) comprehendentia proportionalia sunt. itaque $AKT \sim NMO$ [VI, 6]. et quoniam propter similitudinem triangulorum AKB, NMZ est $AB : BK = NZ : ZM$, et propter similitudinem BKT, ZMO triangulorum $KB : BT = MZ$

1) Nam polygona similia sunt et latera eorum numero aequalia. Deletis uerbis ἐπειδήπερ lin. 14 — γωνίας lin. 17 molestam anacoluthiam euitabimus et solitam orationis formam efficiemus; nec sane iis opus est.

7. τὴν ZM] ZM V. 9. MN] corr. ex NM m. 1 P. 11. ἐστί] om. V. ZMN] Z corr. ex B m. rec. P. 12. τὴν KT] KT V. 13. MO] O in ras. m. 2 B. 15. τεσσάρων] corr. ex δ mg. m. 1 P. 16. ZMO] O in ras. m. 2 B. 17. ἐπεί — γωνίας] om. q; mg. m. 2 B. 18. ἐστί] om. V. 20. τὴν KA] KA B. 21. BK] K e corr. V. KT] TK P. MO B. 22. ἡ] (prius) om. P. 24. εἰσιν] om. V. ἐστί] om. V. 27. τήν] om. BV. τήν] om. BVq.

ἐστὶν ὡς ἡ KB πρὸς τὴν BT, οὕτως ἡ MZ πρὸς τὴν ZO, δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BT, οὕτως ἡ NZ πρὸς τὴν ZO. πάλιν, ἐπεὶ διὰ τὴν ομοιότητα τῶν ATK, NOM τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ AT πρὸς τὴν TK, οὕτως ἡ NO πρὸς τὴν OM, διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν TKB, OMZ τριγώνων ἐστὶν ὡς η KT πρὸς τὴν TB, οὕτως ἡ MO πρὸς τὴν OZ, δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ AT πρὸς τὴν TB, οὕτως ἡ NO πρὸς τὴν OZ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ TB πρὸς τὴν BA, οὕτως ἡ OZ πρὸς τὴν ZN. δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ TA πρὸς τὴν AB, οὕτως ἡ ON πρὸς τὴν NZ. τῶν ATB, NOZ ἄρα τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί· ἰσογώνια ἄρα ἐστὶ τὰ ATB, NOZ τρίγωνα· ὥστε καὶ ὅμοια. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν τὸ BKT τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ A σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ ZMO τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ N σημεῖον· ὑπὸ γὰρ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχονται ἴσων τὸ πλῆθος. αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. ἡ ἄρα $BKTA$ πυραμὶς πρὸς τὴν $ZMON$ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ BK πρὸς τὴν ZM. ὁμοίως δὴ ἐπιζευγνύντες ἀπὸ τῶν A, X, Δ, Φ, Γ, Υ ἐπὶ τὸ K εὐθείας καὶ ἀπὸ τῶν E, Σ, Θ, P, H, Π ἐπὶ τὸ M καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἐχούσας τοῖς κώνοις δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὁμοταγῶν πυραμίδων πρὸς ἑκάστην ὁμοταγῆ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἕξει ἤπερ η BK ὁμόλογος πλευρὰ

---

1. τήν] om. V. 2. τὴν ZO] ZO BVq. 3. MZ B, et V, sed corr. ἐπεί] om. P. 4. ATK] T supra m. 1 V.

$: ZO$ [VI def. 1], ex aequo erit $\Lambda B : BT = NZ : ZO$ [V, 22]. rursus quoniam propter similitudinem triangulorum ΛTK, NOM est $\Lambda T : TK = NO : OM$, et propter similitudinem TKB, OMZ triangulorum $KT : TB = MO : OZ$, ex aequo erit $\Lambda T : TB = NO : OZ$. demonstrauimus autem, esse etiam $TB : B\Lambda = OZ : ZN$. ex aequo igitur erit $T\Lambda : \Lambda B = ON : NZ$. itaque triangulorum ΛTB, NOZ latera proportionalia sunt. quare aequianguli sunt trianguli ΛTB, NOZ [VI, 5]. itaque iidem similes sunt [VI def. 1]. itaque etiam pyramis, cuius basis est triangulus BKT, uertex autem Λ punctum, similis est pyramidi, cuius basis est triangulus ZMO, uertex autem N punctum; nam planis similibus comprehenduntur numero aequalibus [XI def. 9]. similes autem pyramides, quae triangulas habent bases, in triplicata sunt ratione laterum correspondentium [prop. VIII]. itaque erit

$$BKT\Lambda : ZMON = BK^3 : ZM^3.$$

iam ductis rectis ab A, X, Δ, Φ, Γ, Υ ad K et ab E, Σ, Θ, P, H, Π ad M et in singulis triangulis erectis pyramidibus eosdem uertices habentibus, quos coni, similiter demonstrabimus, etiam singulas pyramides eiusdem ordinis ad singulas pyramides eiusdem ordinis eam rationem habere quam $BK^3 : ZM^3$, h. e.

---

6. OMZ] Z corr. ex N m. rec. P. 7. KT] K in ras. m. 2 B. 8. ΛT] in ras. V; Λ corr. ex A m. 2 B. 9. *τὴν* $B\Lambda$] $B\Lambda$ V. 10. *τήν*] om. Vq. 12. ΛTB] litt. Λ non liquet in P. 14. *ἄρα*] alt. *α* e corr. V. *μέν ἐστι* Bq. 19. *βάσεις ἔχουσαι* q. *εἰσίν* PB. 23. Δ] postea ins. m. 1 P. 24. *ἐφ' ἑκάστου*] *ἐπί* Theon (BVq). 25. *τὰς αὐτὰς κορυφάς* Theon (BVq). 28. *ὁμόλογον πλευράν* P, corr. m. 1.

πρὸς τὴν ΖΜ ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἥπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. καὶ ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ ΒΚΤΛ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΜΟΝ πυραμίδα, οὕτως ἡ ὅλη πυραμίς, ἧς βάσις τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν ὅλην πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον· ὥστε καὶ πυραμίς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ, κορυφὴ δὲ τὸ Λ, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις [μὲν] τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. ὑπόκειται δὲ καὶ ὁ κῶνος, οὗ βάσις [μὲν] ὁ ΑΒΓΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὸ Ξ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχων ἥπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ κῶνος, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Λ, πρὸς τὸ Ξ στερεόν, οὕτως ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ [πολύγωνον], κορυφὴ δὲ τὸ Λ, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν· ἐναλλὰξ ἄρα, ὡς ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Λ, πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ, οὕτως τὸ Ξ [στερεὸν] πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν. μείζων δὲ ὁ εἰρημένος κῶνος τῆς ἐν αὐτῷ πυραμίδος· ἐμπεριέχει γὰρ αὐτήν. μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Ξ στερεὸν τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις

2. τήν] om. Bq. καί] ἀλλ' BVq. 4. ἄρα] δέ V. 8. μέν ἐστι Bq. 10. Λ σημεῖον V. τήν] om. V. μέν]

$B\Delta^3 : Z\Theta^3$. et ut unum praecedentium ad unum sequentium, ita omnia praecedentia ad omnia sequentia [V, 12]. est igitur ut $BKT\Lambda : ZMON$, ita tota pyramis, cuius basis est polygonum $ATB\Upsilon\Gamma\Phi\Delta X$, uertex autem Λ punctum, ad totam pyramidem, cuius basis est polygonum $EOZ\Pi HP\Theta\Sigma$, uertex autem N punctum. quare etiam pyramis, cuius basis est $ATB\Upsilon\Gamma\Phi\Delta X$, uertex autem Λ, ad pyramidem, cuius basis est polygonum $EOZ\Pi HP\Theta\Sigma$, uertex autem N punctum, eam rationem habet quam $B\Delta^3 : Z\Theta^3$. supposuimus autem, etiam conum, cuius basis sit circulus $AB\Gamma\Delta$, uertex autem Λ punctum, ad Ξ solidum eam rationem habere quam $B\Delta^3 : Z\Theta^3$. itaque ut conus, cuius basis est $AB\Gamma\Delta$ circulus, uertex autem Λ, ad Ξ solidum, ita pyramis, cuius basis est $ATB\Upsilon\Gamma\Phi\Delta X$, uertex autem Λ, ad pyramidem, cuius basis est $EOZ\Pi HP\Theta\Sigma$ polygonum, uertex autem N. permutando igitur [V, 16], ut conus, cuius basis est $AB\Gamma\Delta$ circulus, uertex autem Λ, ad pyramidem suam, cuius basis est polygonum $ATB\Upsilon\Gamma\Phi\Delta X$, uertex autem Λ, ita Ξ ad pyramidem, cuius basis est polygonum $EOZ\Pi HP\Theta\Sigma$, uertex autem N. uerum conus, quem diximus, maior est pyramide sua; nam eam continet. itaque etiam Ξ solidum maius est pyramide, cuius

---

om. P. 11. Litt. ΠH e corr. V. σημεῖον — 21. τὸ N] mg. m. 2 B. 13. μέν] om. P. 14. σημεῖον] om. Bq. 15. ἔχων] ω in ras. P, ἔχον q. 16. ἐστιν] om. V. 17. Λ σημεῖον V. 19. πολύγωνον] om. P. 22. μέν ἐστιν Bq. Λ σημεῖον V. 23. πυραμίδος V. 24. στερεόν] m. rec. P. 28. Ξ] Z q?

μέν ἐστι τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ το Ν. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ κῶνος, οὗ βάσις ὁ ΑΒΓΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Λ [σημεῖον], πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ κώνου στερεόν, οὗ βάσις μὲν ὁ ΕΖΗΘ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ὁ ΕΖΗΘΝ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔΛ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ η ΖΘ πρὸς τὴν ΒΔ.

Λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΖΗΘΝ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐχέτω πρὸς μεῖζον το Ξ. ἀνάπαλιν ἄρα τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν ΑΒΓΔΛ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΒΔ. ὡς δὲ τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν ΑΒΓΔΛ κῶνον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘΝ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔΛ κώνου στερεόν. καὶ ὁ ΕΖΗΘΝ ἄρα κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔΛ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΒΔ· ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΖΗΘΝ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλαττον. ὁ ΑΒΓΔΛ ἄρα κῶνος πρὸς τὸν ΕΖΗΘΝ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ.

Ὡς δὲ ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον· τριπλάσιος γὰρ ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ὁ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῷ κώνῳ καὶ ἰσοϋψὴς

---

1. *ἐστιν* P. Z] ins. m. 1 P. 2. *ἐλάττων* B. *ὅπερ ἄτοπον* V. 3. *βάσις μέν ἐστιν ὁ* Theon (BVq). 4. *σημεῖον*]

basis est polygonum $EOZ\Pi HP\Theta\Sigma$, uertex autem N. uerum idem minus est; quod fieri non potest. itaque conus, cuius basis est circulus $AB\Gamma\Delta$, uertex autem Λ, ad solidum minus cono, cuius basis est circulus $EZH\Theta$, uertex autem N punctum, eam rationem non habet quam $B\Delta^3 : Z\Theta^3$. iam similiter demonstrabimus, ne $EZH\Theta N$ quidem conum ad solidum minus cono $AB\Gamma\Delta\Lambda$ eam rationem habere quam $Z\Theta^3 : B\Delta^3$.

iam dico, conum $AB\Gamma\Delta\Lambda$ ne ad maius quidem cono $EZH\Theta N$ solidum eam rationem habere quam $B\Delta^3 : Z\Theta^3$.

nam si fieri potest, habeat ad maius Ξ. e contrario igitur [V, 7 coroll.] $\Xi : AB\Gamma\Delta\Lambda = Z\Theta^3 : B\Delta^3$. uerum ut Ξ solidum ad conum $AB\Gamma\Delta\Lambda$, ita conus $EZH\Theta N$ ad solidum minus cono $AB\Gamma\Delta\Lambda$ [prop. II lemma]. itaque etiam conus $EZH\Theta N$ ad solidum minus cono $AB\Gamma\Delta\Lambda$ eam rationem habet quam $Z\Theta^3 : B\Delta^3$; quod fieri non posse demonstrauimus. itaque conus $AB\Gamma\Delta\Lambda$ ad solidum maius cono $EZH\Theta N$ eam rationem non habet quam $B\Delta^3 : Z\Theta^3$. demonstrauimus autem, eum ne ad minus quidem hanc rationem habere. ergo $AB\Gamma\Delta\Lambda : EZH\Theta N = B\Delta^3 : Z\Theta^3$.

sed ut conus ad conum, ita cylindrus ad cylindrum; nam cylindrus, qui in eadem basi et sub eadem altitudine est ac conus, triplo maior est cono [prop. X].

om. P. ἔλασσόν BV. 5. $EZH\Theta$] $H\Theta$ in ras. m. 2 B. 7. ὅτι οὐδέ] bis P, corr. m. 1. 8. ἔλασσόν BVq. 9. ἤ] ins. V. 10. δή] om. B. οὐδ' V. 16. $AB\Gamma\Delta$ q, et B, corr. m. 2. οὕτως καί q. οὕτως — 17. κῶνος] mg. m. 2 B. 17. ἔλασσόν BVq. $AB\Gamma\Delta$ B. 18. καὶ ὁ — 19. στερεόν] mg. m. 2 V. 18. ἔλασσόν BVq. 19. $AB\Gamma\Delta$ q. τριπλάσιον V. 22. στερεόν] supra V. 24. ἔλασσον BV. ὁ ἄρα $AB\Gamma\Delta\Lambda$ V. 27. τριπλάσιος — 216, 1. αὐτῷ] om. q, mg. m. 2 B.

αὐτῷ. καὶ ὁ κύλινδρος ἄρα πρὸς τὸν κύλινδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ.

Οἱ ἄρα ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιγ'.

Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, οὕτως ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξονα.

Κύλινδρος γὰρ ὁ ΑΔ ἐπιπέδῳ τῷ ΗΘ τετμήσθω παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τοῖς ΑΒ, ΓΔ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἄξονι τὸ ΗΘ ἐπίπεδον κατὰ τὸ Κ σημεῖον· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΒΗ κύλινδρος πρὸς τὸν ΗΔ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΕΚ ἄξων πρὸς τὸν ΚΖ ἄξονα.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ὁ ΕΖ ἄξων ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Λ, Μ σημεῖα, καὶ ἐκκείσθωσαν τῷ ΕΚ ἄξονι ἴσοι ὁσοιδηποτοῦν οἱ ΕΝ, ΝΛ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσοι ὁσοιδηποτοῦν οἱ ΖΞ, ΞΜ, καὶ νοείσθω ὁ ἐπὶ τοῦ ΛΜ ἄξονος κύλινδρος ὁ ΟΧ, οὗ βάσεις οἱ ΟΠ, ΦΧ κύκλοι. καὶ ἐκβεβλήσθω διὰ τῶν Ν, Ξ σημείων ἐπίπεδα παράλληλα τοῖς ΑΒ, ΓΔ καὶ ταῖς βάσεσι τοῦ ΟΧ κυλίνδρου καὶ ποιείτωσαν τοὺς ΡΣ, ΤΥ κύκλους περὶ τὰ Ν, Ξ κέντρα. καὶ ἐπεὶ οἱ ΛΝ, ΝΕ, ΕΚ

---

1. Post *αὐτῷ* add. Theon: *ἐδείχθη γὰρ* (supra V) *πᾶς* (haec tria uocab. et in textu et mg. m. 2 B) *κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον* (BVq). ὁ] om. P. 4. *εἰσίν* PB. *βάσεσιν* P. 5. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*] om. V. 6. *ιγ'*] om. q. 13. *συμβαλέτω* P. *τῷ*] *τῷ ΕΖ*

itaque etiam cylindrus ad cylindrum eam rationem habet quam $B\Delta^3 : Z\Theta^3$.

Ergo similes coni et cylindri triplicatam inter se rationem habent quam diametri basium; quod erat demonstrandum.

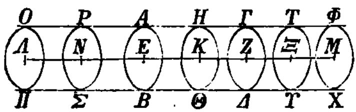
XIII.

Si cylindrus plano planis oppositis parallelo secatur, erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.

Nam cylindrus $A\Delta$ plano $H\Theta$ planis oppositis AB, $\Gamma\Delta$ parallelo secetur, et planum $H\Theta$ cum axe in puncto K concurrat. dico, esse

$$BH : H\Delta = EK : KZ.$$

producatur enim axis EZ ad utramque partem ad puncta Λ, M, et ponantur axi EK aequales quotlibet rectae EN, $N\Lambda$, axi autem ZK aequales quotlibet rectae $Z\Xi$, ΞM, et OX fingatur cylindrus in axe ΛM,



cuius bases sunt circuli $O\Pi$, ΦX. et per puncta N, Ξ plana planis AB, $\Gamma\Delta$ et basibus cylindri OX parallela ducantur et circulos $P\Sigma$, $T\Upsilon$ circum centra N, Ξ efficiant. et quoniam axes ΛN, NE, EK inter

---

Theon (BVq). τὸ $H\Theta$ ἐπίπεδον] om. Theon (BVq). 18. κείσθωσαν q. 20. καί — 21. κύκλοι] om. Theon (BVq). 22. ἐκβεβλήσθω] διήχθω Theon (BVq). N, Ξ] Λ, N, Ξ, M Theon (BVq). 23. ταῖς βάσεσι — 25. κέντρα] νενοήσθωσαν ἐν τοῖς διὰ τῶν Λ, N, Ξ, M ἐπιπέδοις περὶ κέντρα τὰ Λ, N, Ξ, M, κύκλοι οἱ $O\Pi$, $P\Sigma$, $T\Upsilon$, ΦX ἴσοι τοῖς AB, $\Gamma\Delta$. καὶ νενοήσθωσαν κύλινδροι οἱ ΠP, PB, ΔT, TX Theon (BVq).
23. βάσεσιν P. 25. οἱ ΛN] mg. m. 1 V.

ἄξονες ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις, οἱ ἄρα ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἴσαι δέ εἰσιν αἱ βάσεις· ἴσοι ἄρα καὶ οἱ ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ κύλινδροι ἀλλήλοις. ἐπεὶ οὖν οἱ ΛΝ, ΝΕ, ΕΚ ἄξονες ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ κύλινδροι ἴσοι ἀλλήλοις, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῷ πλήθει, ὁσαπλασίων ἄρα ὁ ΚΛ ἄξων τοῦ ΕΚ ἄξονος, τοσαυταπλασίων ἔσται καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΗΒ κυλίνδρου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαπλασίων ἐστὶν ὁ ΜΚ ἄξων τοῦ ΚΖ ἄξονος, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ ΧΗ κύλινδρος τοῦ ΗΔ κυλίνδρου. καὶ εἰ μὲν ἴσος ἐστὶν ὁ ΚΛ ἄξων τῷ ΚΜ ἄξονι, ἴσος ἔσται καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τῷ ΗΧ κυλίνδρῳ, εἰ δὲ μείζων ὁ ἄξων τοῦ ἄξονος, μείζων καὶ ὁ κύλινδρος τοῦ κυλίνδρου, καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων. τεσσάρων δὴ μεγεθῶν ὄντων, ἀξόνων μὲν τῶν ΕΚ, ΚΖ, κυλίνδρων δὲ τῶν ΒΗ, ΗΔ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια, τοῦ μὲν ΕΚ ἄξονος καὶ τοῦ ΒΗ κυλίνδρου ὅ τε ΛΚ ἄξων καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος, τοῦ δὲ ΚΖ ἄξονος καὶ τοῦ ΗΔ κυλίνδρου ὅ τε ΚΜ ἄξων καὶ ο ΗΧ κύλινδρος, καὶ δέδεικται, ὅτι εἰ ὑπερέχει ὁ ΚΛ ἄξων τοῦ ΚΜ ἄξονος, ὑπερέχει καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΗΧ κυλίνδρου, καὶ εἰ ἴσος, ἴσος, καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΕΚ ἄξων πρὸς τὸν ΚΖ ἄξονα, οὕτως ὁ ΒΗ κύλινδρος πρὸς τὸν ΗΔ κύλινδρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδ'.

Οἱ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη.

1. οἱ ἄρα] καὶ οἱ P. 4. ἀλλήλοις] om. V. οὖν] οὖν καί P. 5. εἰσίν] om. V. εἰσί] εἰσίν B. 6. πλῆθος τῶν

se aequales sunt, cylindri ΠP, PB, BH eam inter se rationem habent quam bases [prop. XI]. uerum bases inter se aequales sunt; quare etiam $\Pi P = PB = BH$. iam quoniam axes ΛN, NE, EK inter se aequales sunt, et etiam cylindri ΠP, PB, BH inter se aequales, et multitudo multitudini aequalis est, quoties multiplex est axis $K\Lambda$ axis EK, toties erit etiam cylindrus ΠH cylindri HB multiplex. eadem de causa quoties axis MK multiplex est axis KZ, toties etiam cylindrus XH multiplex est cylindri $H\Delta$. et si $K\Lambda = KM$, erit etiam $\Pi H = HX$, sin axis axe maior est, etiam cylindrus cylindro maior est, sin minor est, minor. iam datis quattuor magnitudinibus, axibus EK, KZ et cylindris BH, $H\Delta$, aeque multiplicia sumpta sunt, axis EK et BH cylindri axis ΛK et cylindrus ΠH, axis autem KZ et $H\Delta$ cylindri axis KM et cylindrus HX, et demonstrauimus, si $K\Lambda > KM$, esse etiam $\Pi H > HX$, sin $K\Lambda = KM$, esse $\Pi H = HX$, sin $K\Lambda < KM$, esse $\Pi H < HX$. itaque $EK : KZ = BH : H\Delta$ [V def. 5]; quod erat demonstrandum.

XIV.

Coni et cylindri, qui aequales bases habent, eam inter se rationem habent quam altitudines.

ΛN (Λ e corr. m. 2 B), NE, EK *τῷ πλήθει τῶν* ΠP, PB, BH Theon (BVq). 7. *ἄρα ἐστίν* Bq. $K\Lambda$] ΛK P. EK] KE P. 8. HB] BH Vq. 9. *ἐστίν*] *ἐστὶ καί* q. 10. *ἔσται* V. 12. *ἔσται*] *ἐστί* V. 14. $K\Lambda$ *ἄξων τοῦ* KM *ἄξονος* Theon (BVq). ΠH *κύλινδρος τοῦ* HX *κυλίνδρου* Theon (BVq). 15. Ante *δή* del. *γάρ* m. 1 P. *ὄντων μεγεθῶν* V. 17. *πολλαπλάσιος* V. 20. *ὁ* HX] *ἡ* X q. 21. ΛK P. 23. *ἴσος ἐστίν*, *ἴσος* P.

Ἔστωσαν γὰρ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΑΒ, ΓΔ κύκλων κύλινδροι οἱ ΕΒ, ΖΔ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΗΘ ἄξων πρὸς τὸν ΚΛ ἄξονα.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ὁ ΚΛ ἄξων ἐπὶ τὸ Ν σημεῖον, καὶ κείσθω τῷ ΗΘ ἄξονι ἴσος ὁ ΛΝ, καὶ περὶ ἄξονα τὸν ΛΝ κύλινδρος νενοήσθω ὁ ΓΜ. ἐπεὶ οὖν οἱ ΕΒ, ΓΜ κύλινδροι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσίν, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἴσαι δέ εἰσιν αἱ βάσεις ἀλλήλαις· ἴσοι ἄρα εἰσὶ καὶ οἱ ΕΒ, ΓΜ κύλινδροι. καὶ ἐπεὶ κύλινδρος ὁ ΖΜ ἐπιπέδῳ τέτμηται τῷ ΓΔ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓΜ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΛΝ ἄξων πρὸς τὸν ΚΛ ἄξονα. ἴσος δέ ἐστιν ὁ μὲν ΓΜ κύλινδρος τῷ ΕΒ κυλίνδρῳ, ὁ δὲ ΛΝ ἄξων τῷ ΗΘ ἄξονι· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΗΘ ἄξων πρὸς τὸν ΚΛ ἄξονα. ὡς δὲ ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΑΒΗ κῶνος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον. καὶ ὡς ἄρα ὁ ΗΘ ἄξων πρὸς τὸν ΚΛ ἄξονα, οὕτως ὁ ΑΒΗ κῶνος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον καὶ ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιε'.

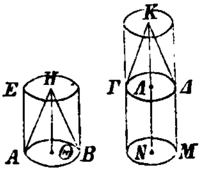
Τῶν ἴσων κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· καὶ ὧν κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι εἰσὶν ἐκεῖνοι.

---

1. κύκλων] om. Theon (BVq). 2. ΖΔ, ΕΒ BVq (Z in V supra scr. m. 1). 5. ΚΛ] Κ ins. m. 1 V. τό] corr. ex

Nam cylindri EB, $Z\varDelta$ aequales bases habeant circulos AB, $\Gamma\varDelta$. dico, esse $EB : Z\varDelta = H\Theta : K\varLambda$.

axis enim $K\varLambda$ ad N punctum producatur, et ponatur $\varLambda N = H\Theta$, et circum axem $\varLambda N$ fingatur cylindrus ΓM. iam quoniam cylindri EB, ΓM eandem altitudinem habent, eam inter se rationem habent



quam bases [prop. XI]. uerum bases inter se aequales sunt. itaque etiam $EB = \Gamma M$. et quoniam cylindrus ZM plano $\Gamma\varDelta$ planis oppositis parallelo sectus est, erit [prop. XIII] $\Gamma M : Z\varDelta = \varLambda N : K\varLambda$. sed $\Gamma M = EB$, $\varLambda N = H\Theta$. itaque $EB : Z\varDelta = H\Theta : K\varLambda$. uerum $EB : Z\varDelta = ABH : \Gamma\varDelta K$ [prop. X]. ergo erit

$$H\Theta : K\varLambda = ABH : \Gamma\varDelta K = EB : Z\varDelta;$$

quod erat demonstrandum.

XV.

Aequalium conorum et cylindrorum bases in contraria ratione sunt atque altitudines; et quorum conorum et cylindrorum bases in contraria ratione sunt atque altitudines, ii aequales sunt.

τόν P. 7. ἐννοήσθω P. 8. εἰσί codd. 10. εἰσίν PB. EB] eras. V. κύλινδροι ἀλλήλοις Bq. 11. ἐπιπέδῳ τινί V. 19. Post κῶνον add. Theon: τριπλάσιοι γάρ οἱ κύλινδροι τῶν κώνων (BVq). 25. ὕψεσι q. καί — 26. ὕψεσιν] mg. m. 1 V.

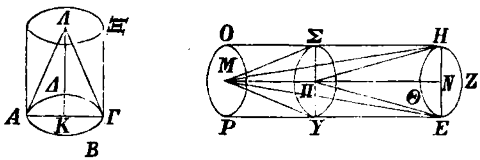
Ἔστωσαν ἴσοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ κύκλοι, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ ΑΓ, ΕΗ, ἄξονες δὲ οἱ ΚΛ, ΜΝ, οἵτινες καὶ ὕψη εἰσὶ τῶν κώνων ἢ κυλίνδρων, καὶ συμπεπληρώσθωσαν οἱ ΑΞ, ΕΟ κύλινδροι. λέγω, ὅτι τῶν ΑΞ, ΕΟ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΚΛ ὕψος.

Τὸ γὰρ ΛΚ ὕψος τῷ ΜΝ ὕψει ἤτοι ἴσον ἐστὶν ἢ οὔ. ἔστω πρότερον ἴσον. ἔστι δὲ καὶ ὁ ΑΞ κύλινδρος τῷ ΕΟ κυλίνδρῳ ἴσος. οἱ δὲ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΒΓΔ βάσις τῇ ΕΖΗΘ βάσει. ὥστε καὶ ἀντιπέπονθεν, ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΚΛ ὕψος. ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω τὸ ΛΚ ὕψος τῷ ΜΝ ἴσον, ἀλλ' ἔστω μεῖζον τὸ ΜΝ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ΜΝ ὕψους τῷ ΚΛ ἴσον τὸ ΠΝ, καὶ διὰ τοῦ Π σημείου τετμήσθω ὁ ΕΟ κύλινδρος ἐπιπέδῳ τῷ ΤΥΣ παραλλήλῳ τοῖς τῶν ΕΖΗΘ, ΡΟ κύκλων ἐπιπέδοις, καὶ ἀπὸ βάσεως μὲν τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου, ὕψους δὲ τοῦ ΝΠ κύλινδρος νενοήσθω ὁ ΕΣ. καὶ ἐπεὶ ἴσος ἐστὶν ὁ ΑΞ κύλινδρος τῷ ΕΟ κυλίνδρῳ, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΑΞ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΕΟ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον. ἀλλ' ὡς μὲν ὁ ΑΞ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον, οὕτως

1. βάσις q. 3. δέ] om. q. ὕψη] corr. ex ὕψει V. 4. καί — 5. κύλινδροι] punctis del. V. 6. ὕψεσι Vq. καί] τουτέστιν ὅτι Theon (BVq). 7. βάσις] corr. ex βάσεις m. 1 P. 8. ΔΚ Bq. 9. ΚΔ P. 10. ἔστιν P. 11. ὑπό] corr. ex ἀπό m. rec. P. 16. ΚΛ] ΛΚ B; supra eras. ʺ ˙ V. μή] supra scr. m. 1 V. ΛΚ] ΚΛ P.

Sint aequales coni et cylindri, quorum bases sint circuli $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$, diametri autem eorum $A\Gamma$, EH, axes autem $K\Lambda$, MN, qui iidem altitudines sunt conorum uel cylindrorum, et expleantur cylindri $\Lambda\Xi$, EO. dico, cylindrorum $\Lambda\Xi$, EO bases in contraria ratione esse atque altitudines, et esse $AB\Gamma\Delta : EZH\Theta = MN : K\Lambda$.

nam altitudo ΛK aut aequalis est altitudini MN aut non aequalis. prius sit aequalis. uerum etiam $\Lambda\Xi = EO$. coni autem et cylindri, qui eandem habent altitudinem, eam inter se rationem habent quam bases [prop. XI]. itaque etiam $AB\Gamma\Delta = EZH\Theta$. quare etiam in contraria ratione est $AB\Gamma\Delta : EZH\Theta = MN : K\Lambda$. iam uero ne sit $\Lambda K = MN$, sed sit $MN > \Lambda K$, et ab altitudine MN altitudini $K\Lambda$ aequalis abscindatur ΠN, et per Π punctum cylindrus EO



plano $T\Upsilon\Sigma$ planis circulorum $EZH\Theta$, PO parallelo secetur, et cylindrus fingatur $E\Sigma$ basim habens circulum $EZH\Theta$, altitudinem autem $N\Pi$. et quoniam $\Lambda\Xi = EO$, erit $\Lambda\Xi : E\Sigma = EO : E\Sigma$ [V, 7]. uerum

17. *καί* — 18. ΠN] P, B mg. m. 2, V (*τῷ* corr. ex *τό*, *τό* ex *τῷ* m. 2; ΠM pro ΠN, sed M e corr. m. 2); *καὶ κείσθω τῷ* ΛK *ὕψει ἴσον τὸ* ΠM B in textu, q (*τῷ* ΠH pro *τὸ* ΠM), V in textu post *καὶ ἀφῃρήσθω* — *τὸ* ΠM, sed punctis del.
19. EO] O in ras. m. 2 B. $T\Upsilon\Sigma$] T eras. P. 20. *παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τῶν* $EZH\Theta$, PO *κύκλων. καί* Theon (BVq). 22. ΠN P, $M\Pi$ corr. ex $N\Pi$ m. 2 V. 23. Post *κυλίνδρῳ* add. *ἄλλος δέ τις ὁ* $E\Sigma$ *κύλινδρος* Vq, B mg. m. 2.

ἡ *ΑΒΓΔ* βάσις πρὸς τὴν *ΕΖΗΘ*· ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσὶν οἱ *ΑΞ*, *ΕΣ* κύλινδροι· ὡς δὲ ὁ *ΕΟ* κύλινδρος πρὸς τὸν *ΕΣ*, οὕτως τὸ *ΜΝ* ὕψος πρὸς τὸ *ΠΝ* ὕψος· ὁ γὰρ *ΕΟ* κύλινδρος ἐπιπέδῳ τέτμηται παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ *ΑΒΓΔ* βάσις προς τὴν *ΕΖΗΘ* βάσιν, οὕτως τὸ *ΜΝ* ὕψος πρὸς τὸ *ΠΝ* ὕψος. ἴσον δὲ τὸ *ΠΝ* ὕψος τῷ *ΚΛ* ὕψει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ *ΑΒΓΔ* βάσις πρὸς τὴν *ΕΖΗΘ* βάσιν, οὕτως τὸ *ΜΝ* ὕψος πρὸς τὸ *ΚΛ* ὕψος. τῶν ἄρα *ΑΞ*, *ΕΟ* κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

Ἀλλὰ δὴ τῶν *ΑΞ*, *ΕΟ* κυλίνδρων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἔστω ὡς ἡ *ΑΒΓΔ* βάσις πρὸς τὴν *ΕΖΗΘ* βάσιν, οὕτως τὸ *ΜΝ* ὕψος πρὸς τὸ *ΚΛ* ὕψος· λέγω, ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ *ΑΞ* κύλινδρος τῷ *ΕΟ* κυλίνδρῳ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ *ΑΒΓΔ* βάσις πρὸς την *ΕΖΗΘ* βάσιν, οὕτως τὸ *ΜΝ* ὕψος πρὸς τὸ *ΚΛ* ὕψος, ἴσον δὲ τὸ *ΚΛ* ὕψος τῷ *ΠΝ* ὕψει, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ *ΑΒΓΔ* βάσις πρὸς τὴν *ΕΖΗΘ* βάσιν, οὕτως τὶ *ΜΝ* ὕψος πρὸς τὸ *ΠΝ* ὕψος. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ *ΑΒΓΔ* βάσις πρὸς τὴν *ΕΖΗΘ* βάσιν, οὕτως ὁ *ΑΞ* κύλινδρος πρὸς τὸν *ΕΣ* κύλινδρον· ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσίν· ὡς δὲ τὸ *ΜΝ* ὕψος πρὸς τὸ *ΠΝ* [ὕψος], οὕτως ὁ *ΕΟ* κύλινδρος πρὸς τὸν *ΕΣ* κύλινδρον· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ *ΑΞ* κύλιν-

1. *ΕΖΗΘ βάσιν* BV. 3. *ΕΣ κύλινδρον* V. 4. *ΠΜ* B, *ΜΠ* V. Post *ἐπιπέδῳ* add. *τῷ ΤΣ* P m. 3 e corr.; eadem uerba post *τέτμηται* hab. V et m. 2 B. 6. *καί*] om. BVq. *βάσις*] *βάσιν*, sed corr. m. 1, P. 7. *ΠΜ* BV. *τό*] supra add. *ω* V. 8. *ΠΜ* BV. 9. *βάσιν*] om. BVq. 12. *ἀλλά*

$A\Xi : E\Sigma = AB\Gamma\Delta : EZH\Theta$ (nam eandem altitudinem habent cylindri $A\Xi$, $E\Sigma$) [prop. XI], et $EO : E\Sigma = MN : \Pi N$; nam cylindrus EO plano planis oppositis parallelo sectus est [prop. XIII]. itaque $AB\Gamma\Delta : EZH\Theta = MN : \Pi N$. uerum $\Pi N = K\Lambda$. erit igitur $AB\Gamma\Delta : EZH\Theta = MN : K\Lambda$. ergo cylindrorum $A\Xi$, EO bases in contraria ratione sunt atque altitudines.

Iam uero cylindrorum $A\Xi$, EO bases in contraria ratione sint atque altitudines, et sit $AB\Gamma\Delta : EZH\Theta = MN : K\Lambda$. dico, esse $A\Xi = EO$.

nam iisdem comparatis quoniam est $AB\Gamma\Delta : EZH\Theta = MN : K\Lambda$, et $K\Lambda = \Pi N$, erit $AB\Gamma\Delta : EZH\Theta = MN : \Pi N$. uerum $AB\Gamma\Delta : EZH\Theta = A\Xi : E\Sigma$ (nam eandem habent altitudinem) [prop. XI], et $MN : \Pi N = EO : E\Sigma$ [prop. XIII]. est igitur $A\Xi$

— 13. ὕψεσιν] mg. m. 2 B. 13. ὕψεσι BVq. 20. ΠM BV. 21. ΠM corr. ex ΠN V. 25. ΠM corr. ex ΠN V. ὕψος] om. P. EO] E in ras. m. 1 P. 26. ὡς] supra m. rec. P.

δρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΕΟ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ. ἴσος ἄρα ὁ ΑΞ κύλινδρος τῷ ΕΟ κυλίνδρῳ. ὡσαύτως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν κώνων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιϛ'.

Δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων εἰς τὸν μείζονα κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ περὶ το αὐτὸ κέντρον τὸ Κ· δεῖ δὴ εἰς τὸν μείζονα κύκλον τὸν ΑΒΓΔ πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου.

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Κ κέντρου εὐθεῖα ἡ ΒΚΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Η σημείου τῇ ΒΔ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΗΑ καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Γ· ἡ ΑΓ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. τέμνοντες δὴ τὴν ΒΑΔ περιφέρειαν δίχα καὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομεν περιφέρειαν ἐλάσσονα τῆς ΑΔ. λελείφθω, καὶ ἔστω ἡ ΛΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὴν ΒΔ κάθετος ἤχθω ἡ ΛΜ καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Ν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΔ, ΔΝ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΔ τῇ ΔΝ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΛΝ τῇ ΑΓ, ἡ δὲ ΑΓ ἐφάπτεται τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου, ἡ ΛΝ ἄρα

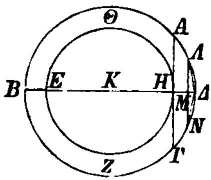
---

1. ὁ ΕΟ] δέ in ras. m. rec. V. 2. κυλίνδρῳ] -ῳ in ras. V. 3. ὡσαύτως] δει in ras. m. rec. V. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. V. 5. ιϛ'] om. q. 6. κύκλων] κυλίνδρων q. κέντρων P, sed corr. 7. πολύγωνον] om. V. 8. ψαῦσον? V, ψαύοντος q. τοῦ] om. q. 10. οἱ δοθέντες] om. V. 12. κύκλον] om. V. ΑΒΓΔ] ΒΓ eras. V. Dein add. κύκλον V. πολυγώνιον q.

$: E\Sigma = EO : E\Sigma$. ergo $A\Xi = EO$ [V, 9]. et eodem modo etiam in conis; quod erat demonstrandum.

XVI.

Datis duobus circum idem centrum circulis in maiorem circulum polygonum aequilaterum, cuius latera paria sunt numero, ita inscribere, ut minorem circulum non tangat.



Sint dati duo circuli $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$ circum idem centrum K. oportet igitur in maiorem circulum $AB\Gamma\Delta$ polygonum aequilaterum, cuius latera paria sunt numero, ita inscribere, ut circulum $EZH\Theta$ non tangat.

ducatur enim per K centrum recta $BK\Delta$, et ab H puncto ad rectam $B\Delta$ perpendicularis ducatur HA et producatur ad Γ. itaque $A\Gamma$ circulum $EZH\Theta$ contingit [III, 16 coroll.]. iam si arcum $BA\Delta$ in duas partes aequales secuerimus et partem eius dimidiam in duas partes aequales et hoc semper fecerimus, arcum arcu $\Lambda\Delta$ minorem relinquemus [X, 1]. relinquatur et sit $\Lambda\Delta$, et ab Λ ad $B\Delta$ perpendicularis ducatur ΛM et ad N producatur, et ducantur $\Lambda\Delta$, ΔN. itaque $\Lambda\Delta = \Delta N$ [III, 3. I, 4]. et quoniam ΛN rectae $A\Gamma$ parallela est [I, 28], et $A\Gamma$ circulum $EZH\Theta$ contingit,

13. μή] in ras. m. 2 V. 15. $BK\Delta$] βάσις in ras. m. rec. V. 17. HA] AH BV. καί] ἴση in ras. m. rec. V. 20. ποιοῦντες] -ες in ras. m. rec. V. 21. $\Lambda\Delta$] AB q. $\Lambda\Delta$] Λ e corr. m. 1 B. 22. ΛM] M e corr. m. 2 B. 23. ΔN] $\Delta Z\Theta$, sed $Z\Theta$ in ras. m. rec. V. ἴση] ισ- eras. V. 24. ΛN] ΛH q. 25. $A\Gamma$] A in ras. m. rec. V.

οὐκ ἐφάπτεται τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου· πολλῷ ἄρα αἱ ΛΔ, ΔΝ οὐκ ἐφάπτονται τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. ἐὰν δὴ τῇ ΛΔ εὐθείᾳ ἴσας κατὰ τὸ συνεχὲς ἐναρμόσωμεν εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, ἐγγραφήσεται εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου τοῦ ΕΖΗΘ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιζʹ.

Δύο σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Νενοήσθωσαν δύο σφαῖραι περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ Α· δεῖ δὴ εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Τετμήσθωσαν αἱ σφαῖραι ἐπιπέδῳ τινὶ διὰ τοῦ κέντρου· ἔσονται δὴ αἱ τομαὶ κύκλοι, ἐπειδήπερ μενούσης τῆς διαμέτρου καὶ περιφερομένου τοῦ ἡμικυκλίου ἐγίγνετο ἡ σφαῖρα· ὥστε καὶ καθ' οἵας ἂν θέσεως ἐπινοήσωμεν τὸ ἡμικύκλιον, τὸ δι' αὐτοῦ ἐκβαλλόμενον ἐπίπεδον ποιήσει ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας κύκλον. καὶ φανερόν, ὅτι καὶ μέγιστον, ἐπειδήπερ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας, ἥτις ἐστὶ καὶ τοῦ ἡμικυκλίου διάμετρος δηλαδὴ καὶ τοῦ κύκλου, μείζων ἐστὶ πασῶν τῶν εἰς τὸν κύκλον ἢ τὴν σφαῖραν διαγομένων [εὐθειῶν]. ἔστω οὖν ἐν μὲν τῇ μείζονι

---

1. *αἱ*] *ἡ* q. 2. *κύκλου*] *-κλου* eras. V. *δέ* BV. 5. *τε*] om. P. 6. *τοῦ*] (alt.) *τό* q. *πόρισμα. καὶ φανερόν, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Α κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΔ οὐκ ἐφάψεται τοῦ ἐντὸς κύκλου* mg. m. 1 P. 10. *ἐλάττονος* V. 11. *περιφέρειαν*

ΔN circulum $EZH\Theta$ non contingit. multo igitur magis $A\Delta$, ΔN circulum $EZH\Theta$ non contingunt. itaque si rectas rectae $A\Delta$ aequales in circulum $AB\Gamma\Delta$ continue aptauerimus [IV, 1], in circulum $AB\Gamma\Delta$ polygonum aequilaterum, cuius latera paria sunt numero, ita inscribemus, ut minorem circulum $EZH\Theta$ non tangat; quod oportebat fieri.

XVII.

Datis duabus sphaeris circum idem centrum positis in maiorem sphaeram solidum polyedrum ita inscribere, ut minorem sphaeram secundum superficiem non tangat.

Fingantur duae sphaerae circum idem centrum A.[1]) oportet igitur in maiorem sphaeram solidum polyedrum ita inscribere, ut minorem sphaeram secundum superficiem non tangat.

secentur sphaerae plano aliquo per centrum posito. sectiones igitur circuli erunt, quoniam sphaera orta est manente diametro et circumacto semicirculo [XI def. 14]; quare in quacunque positione semicirculum finxerimus, planum per eum ductum sectionem in superficie sphaerae efficiet circulum. et adparet, etiam maximum circulum id effecturum esse, quoniam diametrus sphaerae, quae eadem diametrus est semicirculi et ipsius circuli, ut adparet, maior est omnibus rectis, quae in circulo uel sphaera ducuntur

1) Figuram dedi ex P; in B recta $K\Omega$ omissa est. nouam delineauit Peyrardus.

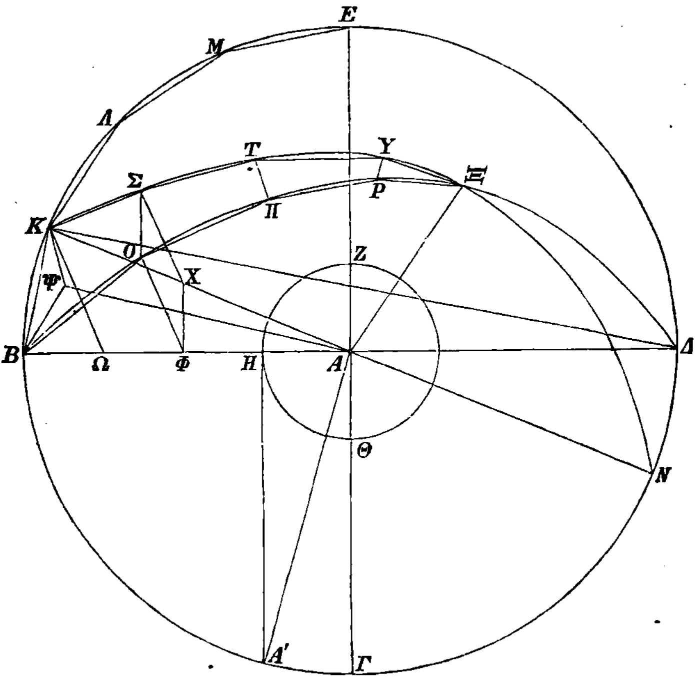
P; γρ. ἐπιφάνειαν supra m. rec. 19. ἐγένετο V (ante τ ras. 1 litt. et accentus corr.). 23. ἐστίν P. 24. καί] ins. m. 1 V. 26. εὐθειῶν] om. P.

σφαίρᾳ κύκλος ὁ ΒΓΔΕ, ἐν δὲ τῇ ἐλάσσονι σφαίρᾳ κύκλος ὁ ΖΗΘ, καὶ ἤχθωσαν αὐτῶν δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΒΔ, ΓΕ, καὶ δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων τῶν ΒΓΔΕ, ΖΗΘ εἰς τὸν μείζονα κύκλον τὸν ΒΓΔΕ πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγεγράφθω μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου τοῦ ΖΗΘ, οὗ πλευραὶ ἔστωσαν ἐν τῷ ΒΕ τεταρτημορίῳ αἱ ΒΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΚΑ διήχθω ἐπὶ τὸ Ν, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῷ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ

---

2. *κύκλος*] bis P, corr. m. 2. *δύο*] om. q. 3. *ΒΔ, ΓΕ*] *Δ* et *Γ* e corr. V; *ΒΓ, ΔΕ* B. 6. *τε καί* V. 10. *τῷ*] om. q.

[III, 15]. iam in maiore sphaera sit circulus $B\Gamma\Delta E$, in minore autem circulus $ZH\Theta$, et duae eorum diametri inter se perpendiculares ducantur $B\Delta$, ΓE, et datis duobus circulis circum idem centrum positis $B\Gamma\Delta E$, $ZH\Theta$ in maiorem circulum $B\Gamma\Delta E$ polygonum



aequilaterum, cuius latera paria sunt numero, ita inscribatur, ut minorem circulum $ZH\Theta$ non tangat [prop. XVI], et latera eius in BE quarta parte circuli sint BK, $K\Lambda$, ΛM, ME, et ducta KA producatur ad N, et ab A puncto ad planum circuli $B\Gamma\Delta E$ per-

ΑΞ καὶ συμβαλλέτω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κατὰ τὸ Ξ, καὶ διὰ τῆς ΑΞ καὶ ἑκατέρας τῶν ΒΔ, ΚΝ ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω· ποιήσουσι δὴ διὰ τὰ εἰρημένα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας μεγίστους κύκλους. ποιείτωσαν, ὧν ἡμικύκλια ἔστω ἐπὶ τῶν ΒΔ, ΚΝ διαμέτρων τὰ ΒΞΔ, ΚΞΝ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΞΑ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πάντα ἄρα τὰ διὰ τῆς ΞΑ ἐπίπεδά ἐστιν ὀρθὰ πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον· ὥστε καὶ τὰ ΒΞΔ, ΚΞΝ ἡμικύκλια ὀρθά ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον. καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶ τὰ ΒΕΔ; ΒΞΔ, ΚΞΝ ἡμικύκλια· ἐπὶ γὰρ ἴσων εἰσὶ διαμέτρων τῶν ΒΔ, ΚΝ· ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ ΒΕ, ΒΞ, ΚΞ τεταρτημόρια ἀλλήλοις. ὅσαι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ ΒΕ τεταρτημορίῳ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου, τοσαῦταί εἰσι καὶ ἐν τοῖς ΒΞ, ΚΞ τεταρτημορίοις ἴσαι ταῖς ΒΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ εὐθείαις. ἐγγεγράφθωσαν καὶ ἔστωσαν αἱ ΒΟ, ΟΠ, ΠΡ, ΡΞ, ΚΣ, ΣΤ, ΤΥ, ΥΞ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΣΟ, ΤΠ, ΥΡ, καὶ ἀπὸ τῶν Ο, Σ ἐπὶ τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον κάθετοι ἤχθωσαν· πεσοῦνται δὴ ἐπὶ τὰς κοινὰς τομὰς τῶν ἐπιπέδων τὰς ΒΔ, ΚΝ, ἐπειδήπερ καὶ τὰ τῶν ΒΞΔ, ΚΞΝ ἐπίπεδα ὀρθά ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον. πιπτέτωσαν, καὶ ἔστωσαν αἱ ΟΦ, ΣΧ, καὶ ἐπεζεύχθω η ΧΦ. καὶ ἐπεὶ ἐν ἴσοις ἡμικυκλίοις τοῖς ΒΞΔ, ΚΞΝ ἴσαι ἀπειλημμέναι εἰσὶν αἱ ΒΟ, ΚΣ, καὶ κάθετοι ἠγμέναι εἰσὶν αἱ ΟΦ, ΣΧ, ἴση [ἄρα] ἐστὶν ἡ μὲν ΟΦ τῇ ΣΧ, ἡ δὲ ΒΦ τῇ ΚΧ. ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ΒΑ ὅλῃ τῇ ΚΑ ἴση· καὶ λοιπὴ

---

3. *ποιήσουσιν* P, *ποιοῦσι* q. 5. *ἔστωσαν* BVq. 6. *τά*] corr. ex *τό* B. 7. *ἐστιν* B. 8. *ὀρθά ἐστι* BVq. 10. *ἐστιν* PB. *ΒΔΓΕ* q. 11. *ἐστίν* PB. *ΚΞΝ*] om. P.

pendicularis erigatur $A\Xi$ et cum superficie sphaerae concidat in Ξ, et per $A\Xi$ et utramque $B\Delta$, KN plana ducantur. itaque propter ea, quae supra diximus, in superficie sphaerae maximos circulos efficient. eos efficiant, quorum semicirculi in diametris $B\Delta$, KN sint, $B\Xi\Delta$, $K\Xi N$. et quoniam ΞA ad planum circuli $B\Gamma\Delta E$ perpendicularis est, etiam omnia plana, quae per ΞA ducuntur, ad planum circuli $B\Gamma\Delta E$ perpendicularia sunt [XI, 18]. quare etiam semicirculi $B\Xi\Delta$, $K\Xi N$ ad planum circuli $B\Gamma\Delta E$ perpendiculares sunt. et quoniam semicirculi $BE\Delta$, $B\Xi\Delta$, $K\Xi N$ aequales sunt (nam in aequalibus sunt diametris $B\Delta$, KN) [III def. 1], etiam quartae circulorum partes BE, $B\Xi$, $K\Xi$ inter se aequales sunt. itaque quot sunt in BE quarta parte latera polygoni, totidem etiam in $B\Xi$, $K\Xi$ quartis partibus sunt rectis BK, KA, AM, ME aequalia. inscribantur et sint BO, $O\Pi$, ΠP, $P\Xi$ et $K\Sigma$, ΣT, $T\Upsilon$, $\Upsilon\Xi$, et ducantur ΣO, $T\Pi$, ΥP, et ab O, Σ ad planum circuli $B\Gamma\Delta E$ perpendiculares ducantur. cadent igitur in communes planorum sectiones $B\Delta$, KN, quoniam etiam plana circulorum $B\Xi\Delta$, $K\Xi N$ ad planum circuli $B\Gamma\Delta E$ perpendicularia sunt [tum u. XI def. 4]. cadant et sint $O\Phi$, ΣX, et ducatur $X\Phi$. et quoniam in aequalibus semicirculis $B\Xi\Delta$, $K\Xi N$ aequales abscisae sunt BO, $K\Sigma$ [III, 28], et perpendiculares ductae sunt $O\Phi$, ΣX, erit $O\Phi = \Sigma X$, $B\Phi = KX$ [III, 27. I, 26]. uerum etiam $BA = KA$. itaque $\Phi A = XA$. quare

13. Post BE eras. Δ P. Post $B\Xi$ ras. 1 litt. P. $K\Xi$] in ras. m. 1, dein del. N, P. 15. τοσαῦτα q. εἰσιν PB. 21. καὶ ἐπειδήπερ καί q. 24. $X\Phi$] corr. ex ΦX m. 1 V, ΦX B. 27. ἄρα] m. rec. P. ΣX] Σ e corr. V. 28. ἔστιν B. KA] e corr. m. 2 V.

ἄρα ἡ ΦΑ λοιπῇ τῇ ΧΑ ἐστιν ἴση· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΦ πρὸς τὴν ΦΑ, οὕτως ἡ ΚΧ πρὸς τὴν ΧΑ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΧΦ τῇ ΚΒ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν ΟΦ, ΣΧ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΟΦ τῇ ΣΧ. ἐδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση· καὶ αἱ ΧΦ, ΣΟ ἄρα ἴσαι εἰσὶ καὶ παράλληλοι. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΧΦ τῇ ΣΟ, ἀλλὰ ἡ ΧΦ τῇ ΚΒ ἐστι παράλληλος, καὶ ἡ ΣΟ ἄρα τῇ ΚΒ ἐστι παράλληλος. καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ ΒΟ, ΚΣ· τὸ ΚΒΟΣ ἄρα τετράπλευρον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ, ἐπειδήπερ, ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, καὶ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν ληφθῇ τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάτερον τῶν ΣΟΠΤ, ΤΠΡΥ τετραπλεύρων ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΥΡΞ τρίγωνον ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ. ἐὰν δὴ νοήσωμεν ἀπὸ τῶν Ο, Σ, Π, Τ, Ρ, Υ σημείων ἐπὶ τὸ Α ἐπιζευγνυμένας εὐθείας, συσταθήσεταί τι σχῆμα στερεὸν πολύεδρον μεταξὺ τῶν ΒΞ, ΚΞ περιφερειῶν ἐκ πυραμίδων συγκείμενον, ὧν βάσεις μὲν τὰ ΚΒΟΣ, ΣΟΠΤ, ΤΠΡΥ τετράπλευρα καὶ τὸ ΥΡΞ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον. ἐὰν δὲ καὶ ἐπὶ ἑκάστης τῶν ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ πλευρῶν καθάπερ ἐπὶ τῆς ΒΚ τὰ αὐτὰ κατασκευάσωμεν καὶ ἔτι ἐπὶ τῶν λοιπῶν τριῶν τεταρτημορίων, συσταθήσεταί τι σχῆμα πολύεδρον ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν σφαῖραν πυραμίσι περιεχόμενον, ὧν βάσεις [μὲν] τὰ

1. *τῇ λοιπῇ τῇ* q. 2. *ΒΦ*] e corr. V m. 2. 4. *ἐστιν* P. 6. *καί*] (alt.) om. q. *ΣΟ*] *Ο* euan. P. *εἰσίν* PB. 7. *ἐστιν*] *-ιν* in ras. V, om. q. *ΦΧ* P. 8. *ΧΦ*] corr. in *ΦΧ* m. 1 V. 10. *ΚΒΟΣ*] *ΒΟΚΣ* V. 11. *ὦσιν* PB.

$B\Phi : \Phi A = KX : XA$. itaque $X\Phi$ rectae KB parallela est [VI, 2]. et quoniam utraque $O\Phi$, ΣX ad planum circuli $B\Gamma\Delta E$ perpendicularis est, $O\Phi$ rectae ΣX parallela est [XI, 6]. demonstrauimus autem, esse etiam $O\Phi = \Sigma X$. quare etiam rectae $X\Phi$, ΣO aequales sunt et parallelae [I, 33]. et quoniam $X\Phi$ rectae ΣO parallela est, eadem autem $X\Phi$ rectae KB parallela, etiam ΣO rectae KB parallela est [I, 30]. et eas iungunt BO, $K\Sigma$. itaque quadrilaterum $KBO\Sigma$ in uno plano positum est, quoniam, si datis duabus rectis parallelis in utraque sumuntur quaelibet puncta, recta ad puncta ducta in eodem plano est ac parallelae [XI, 7]. eadem de causa etiam utrumque quadrilaterum $\Sigma O\Pi T$, $T\Pi P\Upsilon$ in uno est plano. uerum etiam triangulus $\Upsilon P\Xi$ in uno plano est [XI, 2]. iam si a punctis O, Σ, Π, T, P, Υ ad A rectas finxerimus ductas, figura quaedam solida polyedra inter arcus $B\Xi$, $K\Xi$ construetur ex pyramidibus composita, quarum bases sunt quadrilatera $KBO\Sigma$, $\Sigma O\Pi T$, $T\Pi P\Upsilon$ et triangulus $\Upsilon P\Xi$, uertex autem A punctum. et si etiam in singulis lateribus KA, AM, ME eadem comparauerimus, quae in BK, et praeterea in reliquis tribus quartis circuli partibus eadem, figura quaedam polyedra construetur in sphaera inscripta ex pyramidibus composita, quarum bases sunt quadrilatera,

---

14. *ἐστίν* B. 15. *ἑκάτερα* BV. 16. *ἐπιπέδῳ ἐστίν* q. *ἔστιν* B. 21. *βάσις* BVq. $\Pi T P \Upsilon$ q. 22. *τὸν* q. $\Upsilon \Xi P$ P, corr. m. 1. *τριγώνου* q. 24. *κατασκευάσομεν* e corr. m. 1 q. 25. Post *τεταρτημορίων* add. Theon: *καὶ ἐπὶ τοῦ λοιποῦ ἡμισφαιρίου* (BVq). 26. *σχῆμα*] *σχῆμα στερεόν* V. *συγγεγραμμένον* P. 27. *πυραμίσιν* P, *ἐκ πυραμίδων* BVq. *συγκείμενον* BV. *μέν*] om. BVq.

εἰρημένα τετράπλευρα καὶ τὸ ΥΡΞ τρίγωνον καὶ τὰ ὁμοταγῆ αὐτοῖς, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον.

Λέγω, ὅτι τὸ εἰρημένον πολύεδρον οὐκ ἐφάψεται τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, ἐφ' ἧς ἐστιν ὁ ΖΗΘ κύκλος.

Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὸ τοῦ ΚΒΟΣ τετραπλεύρου ἐπίπεδον κάθετος ἡ ΑΨ καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ψ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΨΒ, ΨΚ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΨ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΚΒΟΣ τετραπλεύρου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ τετραπλεύρου ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν. ἡ ΑΨ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΨ, ΨΚ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΑΚ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΚ. καί ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΨ, ΨΒ· ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Ψ· τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΚ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΨ, ΨΚ. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΨ, ΨΒ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΨ, ΨΚ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΨ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΨ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΨΚ ἴσον ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ ΒΨ τῇ ΨΚ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Ψ ἐπὶ τὰ Ο, Σ ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρᾳ τῶν ΒΨ, ΨΚ. ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ψ καὶ διαστήματι ἑνὶ τῶν ΨΒ, ΨΚ γραφόμενος κύκλος ἥξει καὶ διὰ τῶν Ο, Σ, καὶ ἔσται ἐν κύκλῳ τὸ ΚΒΟΣ τετράπλευρον.

Καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ΚΒ τῆς ΧΦ, ἴση δὲ ἡ ΧΦ τῇ ΣΟ, μείζων ἄρα ἡ ΚΒ τῆς ΣΟ. ἴση δὲ ἡ

---

1. ΥΞΡ BV. 2. ὁμοιοταγῆ B. 3. λέγω δή q. 9. ΨΒ] Β e corr. P, ΒΨ BVq. ἐστιν P. 10. ΚΒΟΣ] Σ e corr. m. 1 P, mut. in ΒΚΟΣ m. 1 V, ΒΚΟΣ q. τετρα-

quae nominauimus, et triangulus $\Upsilon P \Xi$, et quae similem obtinent locum, uertex autem punctum A.

dico, polyedrum, quod significauimus, minorem sphaeram non tangere secundum superficiem, in qua est circulus $ZH\Theta$.

ducatur ab A puncto ad planum quadrilateri $KBO\Sigma$ perpendicularis $A\Psi$ et cum plano in puncto Ψ concidat, et ducantur ΨB, ΨK. et quoniam $A\Psi$ ad planum quadrilateri $KBO\Sigma$ perpendicularis est, etiam ad omnes rectas eam tangentes et in plano quadrilateri positas perpendicularis est [XI def. 3]. itaque $A\Psi$ ad utramque $B\Psi$, ΨK perpendicularis est. et quoniam $AB = AK$, erit etiam $AB^2 = AK^2$. est autem $A\Psi^2 + \Psi B^2 = AB^2$; nam angulus ad Ψ positus rectus est [I, 47]; et $A\Psi^2 + \Psi K^2 = AK^2$. quare $A\Psi^2 + \Psi B^2 = A\Psi^2 + \Psi K^2$. auferatur, quod commune est, $A\Psi^2$. itaque $B\Psi^2 = \Psi K^2$. quare $B\Psi = \Psi K$. similiter demonstrabimus, etiam rectas a Ψ ad O, Σ ductas aequales esse utrique $B\Psi$, ΨK. itaque circulus, qui centro Ψ et radio alterutra rectarum ΨB, ΨK describitur, etiam per O, Σ ueniet, et quadrilaterum $KBO\Sigma$ in circulo erit.

et quoniam $KB > X\Phi$ et $X\Phi = \Sigma O$, erit $KB > \Sigma O$. uerum $KB = K\Sigma = BO$. quare etiam $K\Sigma$

πλευρου] om. V. 12. ἐστιν] ἐστιν ἡ $A\Psi$ Theon (BVq). 13. ἐστιν P. 14. τό] corr. ex τῷ m. 1 P. 15. ἐστιν P. 18. ἐστίν P. 19. ἀπό] -πό in ras. V. 21. ἔσται q. ΨB P. 22. τὰ O, Σ] corr. m. 2 ex τὸ O B. 23. ΨK] K in ras. V. 24. τῷ] bis P, sed corr. m. 1. -στή- e corr. m. rec. P. $B\Psi$ Vq. 26. τό] corr. ex τῷ V. 27. ἐστί V. $X\Phi$] corr. ex ΦX V, ΦX B. 28. τῇ] τῆς B. τῆς] τῇ q. ἴση δέ — p. 238, 2. ἐστίν] mg. m. 2 B.

ΚΒ ἑκατέρᾳ τῶν ΚΣ, ΒΟ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΚΣ, ΒΟ τῆς ΣΟ μείζων ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ ΚΒΟΣ, καὶ ἴσαι αἱ ΚΒ, ΒΟ, ΚΣ, καὶ ἐλάττων ἡ ΟΣ, καὶ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐστὶν ἡ ΒΨ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΚΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ μεῖζόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τὴν ΒΦ κάθετος ἡ ΚΩ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΔ τῆς ΔΩ ἐλάττων ἐστὶν ἢ διπλῆ, καί ἐστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΩ, οὕτως *τὸ ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΩ πρὸς τὸ ὑπὸ [τῶν] ΔΩ, ΩΒ, ἀναγραφομένου ἀπὸ τῆς ΒΩ τετραγώνου καὶ συμπληρουμένου τοῦ ἐπὶ τῆς ΩΔ παραλληλογράμμου καὶ τὸ ὑπὸ ΔΒ, ΒΩ ἄρα τοῦ ὑπὸ ΔΩ, ΩΒ ἔλαττόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. καί ἐστι τῆς ΚΔ ἐπιζευγνυμένης τὸ μὲν ὑπὸ ΔΒ, ΒΩ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΚ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΔΩ, ΩΒ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΚΩ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΚΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΩ ἔλασσόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΚΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ μεῖζόν ἐστιν ἢ διπλάσιον· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΚΩ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΑ τῇ ΚΑ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΚ. καί ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΒΑ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΒΨ, ΨΑ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΚΑ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΚΩ, ΩΑ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΒΨ, ΨΑ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΚΩ, ΩΑ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΚΩ μεῖζον τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΩΑ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΨΑ. μείζων ἄρα ἡ ΑΨ τῆς ΑΩ· πολλῷ*

---

1. *καί*] om. q. *καί* — 2. *ΒΟ*] mg. m. rec. P. 2. *ΚΣ, ΒΟ*] corr. ex *ΚΒ, ΣΟ* P. *ἐστί* Vq. 6. *ἤχθω* — 7. *κάθετος*] bis P, sed corr. m. 1. 7. *Κ σημεῖον* B. *ΚΩ*] supra scr. ϛ, mg. ϛ m. 1 P, corr. in *ΚΦ* m. rec.; *ΚΦ* BVq, sed in V supra scr. *ω* m. 1. 8. *ΔΩ*] P m. 1, *ΔΦ* BVq, P

$> \Sigma O$, $BO > \Sigma O$. et quoniam in circulo est quadrilaterum $KBO\Sigma$, et KB, BO, $K\Sigma$ aequales, $O\Sigma$ autem minor, et radius circuli est $B\Psi$, erit[1]) $KB^2 > 2B\Psi^2$. ducatur a K ad $B\Phi$ perpendicularis $K\Omega$.[2]) et quoniam $B\Delta < 2\Delta\Omega$, et $B\Delta : \Delta\Omega = \Delta B \times B\Omega : \Delta\Omega \times \Omega B$, constructo in $B\Omega$ quadrato et parallelogrammo in $\Omega\Delta$ expleto erit etiam $\Delta B \times B\Omega < 2\Delta\Omega \times \Omega B$. et ducta $K\Delta$ erit $\Delta B \times B\Omega = BK^2$, $\Delta\Omega \times B\Omega = K\Omega^2$ [III, 31. VI, 8 coroll.]. itaque $KB^2 < 2K\Omega^2$. uerum $KB^2 > 2B\Psi^2$. itaque $K\Omega^2 > B\Psi^2$. et quoniam $BA = KA$, erit $BA^2 = AK^2$. et $BA^2 = B\Psi^2 + \Psi A^2$, $KA^2 = K\Omega^2 + \Omega A^2$ [I, 47]. itaque $B\Psi^2 + \Psi A^2 = K\Omega^2 + \Omega A^2$, quorum $K\Omega^2 > B\Psi^2$. quare $\Omega A^2 < \Psi A^2$ et $A\Psi > A\Omega$. multo igitur magis

1) Nam singula latera KB, BO, $K\Sigma$ maiora sunt latere quadrati inscripti, quod aequale est $B\Psi\sqrt{2}$.

2) Facile demonstratur, perpendicularem hanc in ipsum punctum Φ cadere, et huc spectat emendatio Theonis Φ ubique pro Ω reponentis. sed tum demonstrandum ei erat, $K\Phi$ perpendicularem esse. Euclides hoc aut non intellexit aut, quod potius crediderim, non curauit, quia ad tenorem demonstrationis nihil prorsus refert.

---

m. rec.; item lin. 9, 10, 12, 15. 9. $B\Omega$] P m. 1, $B\Phi$ BVq, P m. rec.; item lin. 10, 12, 14. 10. *τῶν*] om. P. ΩB] P m. 1, ΦB BVq, P m. rec.; item lin. 13, 15. *ἀπό*] corr. ex *αὐτοῦ* m. 2 B. 11. $\Omega\Delta$] P m. 1, $\Phi\Delta$ BVq, P m. rec.; dein add. V: ΦB *ἐν ἑτέρῳ* (in textu m. 1). 12. *ὑπό*] *ὑπὸ τῶν* Vq. *ὑπό*] *ὑπὸ τῶν* V. 13. *ἢ διπλάσιον*] *διπλασίου* P. *ἐστιν* P. 15. BK] KB q et in ras. V. BK — *τῆς*] bis q. 16. $K\Omega$] (prius et alt.) P m. 1, $K\Phi$ BVq, P m. rec. *τῆς*] (alt.) *τοῦ* V. 19. $K\Omega$] P m. 1, $K\Phi$ BVq, P m. rec.; item lin. 22, 24 bis. 20. *ἐστὶ καὶ τό* V. AK] in ras. V, KA B. 21. *ἐστιν* P. *τῷ*] corr. ex *τό* V. 22. ΩA] P m. 1, ΦA BVq, P m. rec.; item lin. 24, 25. 23. *τὰ ἄρα* — 24 ΩA] mg. m. 2 V. 25. *ἐστιν* P. 26. $A\Omega$] P m. 1, $A\Phi$ BVq, P m. rec.

ἄρα η ΑΨ μείζων ἐστὶ τῆς ΑΗ. καί ἐστιν ἡ μὲν ΑΨ ἐπὶ μίαν τοῦ πολυέδρου βάσιν, ἡ δὲ ΑΗ ἐπὶ τὴν τῆς ἐλάσσονος σφαίρας ἐπιφάνειαν· ὥστε τὸ πολύεδρον οὐ ψαύσει τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Δύο ἄρα σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον ἐγγέγραπται μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πόρισμα.

Ἐὰν δὲ καὶ εἰς ἑτέραν σφαῖραν τῷ ἐν τῇ ΒΓΔΕ σφαίρᾳ στερεῷ πολυέδρῳ ὅμοιον στερεὸν πολύεδρον ἐγγραφῇ, τὸ ἐν τῇ ΒΓΔΕ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ τῆς ΒΓΔΕ σφαίρας διάμετρος πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας σφαίρας διάμετρον. διαιρεθέντων γὰρ τῶν στερεῶν εἰς τὰς ὁμοιοπληθεῖς καὶ ὁμοιοταγεῖς πυραμίδας ἔσονται αἱ πυραμίδες ὅμοιαι. αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· ἡ ἄρα πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΚΒΟΣ τετράπλευρον, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον, πρὸς τὴν ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ ὁμοιοταγῆ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἤπερ ἡ ΑΒ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περὶ κέντρον τὸ Α πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέ-

1. ΑΨ] ΟΨ q. 4. *ψαύει* P. 5. Seq. demonstr. altera, u. app. 9. *ποιῆσαι*] *δεῖξαι* Theon (B V q). 10. *πόρισμα*] mg. m. 1 P; om. B V q. 14. *πρὸς τὸ — πολύεδρον*] mg. m. 2 B. 16. *στερεᾶς* B, *ἐλάσσονος* q. *σφαίρας*] om.

$A\Psi > AH$. et $A\Psi$ ad unam basim polyedri, AH autem ad superficiem minoris sphaerae ducta est. quare polyedrum minorem sphaeram secundum superficiem non tanget.[1])

Ergo datis duabus sphaeris circum idem centrum positis in maiorem sphaeram solidum polyedrum ita inscriptum est, ut minorem sphaeram secundum superficiem non tangat; quod oportebat fieri.

Corollarium.

Sin etiam in aliam sphaeram solido polyedro in sphaera $B\Gamma\Delta E$ inscripto simile polyedrum solidum inscripserimus, solidum polyedrum in sphaera $B\Gamma\Delta E$ inscriptum ad solidum polyedrum in altera sphaera inscriptum triplicatam rationem habebit quam diametrus sphaerae $B\Gamma\Delta E$ ad diametrum alterius sphaerae. solidis enim in pyramides numero aequales et simili loco positas diuisis pyramides similes erunt. similes autem pyramides triplicatam inter se rationem habent quam latera correspondentia [prop. VIII coroll.]. itaque pyramis, cuius basis est quadrilaterum $KBO\Sigma$, uertex autem A punctum ad pyramidem in altera sphaera simili loco positam triplicatam rationem habet quam latus correspondens ad latus correspondens, h. e quam AB radius sphaerae, cuius centrum est A, ad radium

1) Idem enim similiter fere de ceteris basibus solidi demonstrari potest.

q. 17. ὁμοπληθεῖς V. 18. ὁμοταγεῖς BV. 20. εἰσίν B. πυραμὶς ἄρα P. 21. $K\Theta\Sigma O$ V, sed corr. 23. ὁμοταγῆ V et B, sed corr. m. 1. 26. περὶ τό Bq.

ρας σφαίρας. ὁμοίως καὶ ἑκάστη πυραμὶς τῶν ἐν τῇ περὶ κέντρον τὸ *Α* σφαίρᾳ πρὸς ἑκάστην ὁμοταγῆ πυραμίδα τῶν ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ τριπλασίονα λόγον ἕξει, ἤπερ ἡ *ΑΒ* πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας. καὶ ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ὥστε ὅλον τὸ ἐν τῇ περὶ κέντρον τὸ *Α* σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον πρὸς ὅλον τὸ ἐν τῇ ἑτέρᾳ [σφαίρᾳ] στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἕξει, ἤπερ ἡ *ΑΒ* πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας, τουτέστιν ἤπερ ἡ *ΒΔ* διάμετρος πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας σφαίρας διάμετρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιη'.

Αἱ σφαῖραι πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων διαμέτρων.

Νενοήσθωσαν σφαῖραι αἱ *ΑΒΓ*, *ΔΕΖ*, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ *ΒΓ*, *ΕΖ*· λέγω, ὅτι ἡ *ΑΒΓ* σφαῖρα πρὸς τὴν *ΔΕΖ* σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ *ΒΓ* πρὸς τὴν *ΕΖ*.

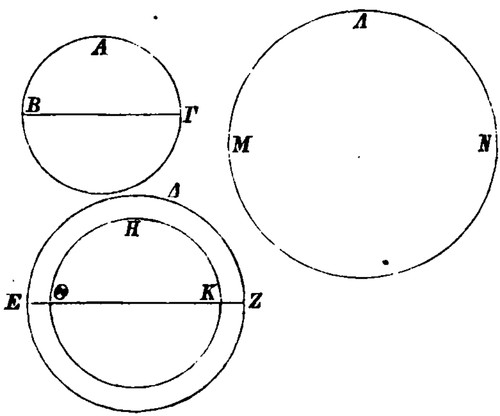
---

2. περὶ τό Bq. 4. ἑτέρας] om. P. 7. ὥστε καί P. περὶ τό B. κέντρῳ τῷ q. 8. σφαίρᾳ] om. P. 10. ἑτέρας] B supra scr. στερεᾶς m. 2. 15. εἰσίν PB. 16. ἐννοήσθωσαν P.

alterius sphaerae. similiter etiam singulae pyramides in sphaera positae, cuius centrum est A, ad singulas pyramides simili loco positas in altera sphaera triplicatam rationem habent quam AB ad radium alterius sphaerae. et ut unum praecedentium ad unum sequentium, ita omnia praecedentia ad omnia sequentia [V, 12]. quare totum solidum polyedrum in sphaera positum, cuius centrum est A, ad totum solidum polyedrum in altera sphaera positum triplicatam rationem habebit quam AB ad radium alterius sphaerae, h. e. quam diametrus $B\Delta$ ad diametrum alterius sphaerae; quod erat demonstrandum.

XVIII.

Sphaerae triplicatam inter se rationem habent quam diametri.



Fingantur sphaerae $AB\Gamma$, ΔEZ, earum autem diametri $B\Gamma$, EZ. dico, esse $AB\Gamma : \Delta EZ = B\Gamma^3 : EZ^3$.

Εἰ γὰρ μὴ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔΕΖ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, ἕξει ἄρα ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ΔΕΖ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἢ πρὸς μείζονα ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἐχέτω πρότερον πρὸς ἐλάσσονα τὴν ΗΘΚ, καὶ νενοήσθω ἡ ΔΕΖ τῇ ΗΘΚ περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν τὴν ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας τῆς ΗΘΚ κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, ἐγγεγράφθω δὲ καὶ εἰς τὴν ΑΒΓ σφαῖραν τῷ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ στερεῷ πολυέδρῳ ὅμοιον στερεὸν πολύεδρον· τὸ ἄρα ἐν τῇ ΑΒΓ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἔχει δὲ καὶ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΗΘΚ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΗΘΚ σφαῖραν, οὕτως τὸ ἐν τῇ ΑΒΓ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον· ἐναλλὰξ [ἄρα] ὡς ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν αὐτῇ πολύεδρον, οὕτως ἡ ΗΘΚ σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον. μείζων δὲ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα τοῦ ἐν αὐτῇ πολυέδρου· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΗΘΚ σφαῖρα τοῦ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ πολυέδρου. ἀλλὰ καὶ ἐλάττων· ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ. οὐκ ἄρα ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΔΕΖ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ διάμετρος πρὸς τὴν ΕΖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι

---

3. *σφαῖρα*] om. q. 6. *ΗΘ* P. *ἐννοήσθω* P. Post *ΔΕΖ* add. *σφαῖρα* Vq et B m. 2. 7. *γεγράφθως* q. 8. *ΔΕΖ*] E supra scr. m. 1 V. 9. *ΗΘ* P. 10. *ΔΕΖ*] E

nam si non est $AB\Gamma : \Delta EZ = B\Gamma^3 : EZ^3$, sphaera $AB\Gamma$ aut ad sphaeram minorem sphaera ΔEZ triplicatam rationem habebit quam $B\Gamma : EZ$, aut ad maiorem. prius habeat ad minorem $H\Theta K$, et fingantur ΔEZ, $H\Theta K$ circum idem centrum positae, et in maiorem sphaeram ΔEZ solidum polyedrum ita inscribatur, ut minorem sphaeram $H\Theta K$ secundum superficiem non tangat [prop. XVII], et etiam in sphaeram $AB\Gamma$ solido polyedro in ΔEZ sphaera inscripto simile solidum polyedrum inscribatur. itaque polyedrum solidum in $AB\Gamma$ inscriptum ad solidum polyedrum in ΔEZ inscriptum triplicatam rationem habet quam $B\Gamma : EZ$ [prop. XVII coroll.]. uerum etiam $AB\Gamma : H\Theta K = B\Gamma^3 : EZ^3$. itaque ut $AB\Gamma : H\Theta K$, ita erit solidum polyedrum in $AB\Gamma$ sphaera inscriptum ad solidum polyedrum in ΔEZ sphaera inscriptum. permutando [V, 16] ut sphaera $AB\Gamma$ ad polyedrum in ea inscriptum, ita sphaera $H\Theta K$ ad solidum polyedrum in ΔEZ sphaera inscriptum. sed sphaera $AB\Gamma$ maior est polyedro in ea inscripto. itaque etiam sphaera $H\Theta K$ maior est polyedro in sphaera ΔEZ inscripto [V, 14]. uerum eadem minor est; nam ab eo comprehenditur. itaque sphaera $AB\Gamma$ ad minorem sphaera ΔEZ triplicatam rationem non habet quam $B\Gamma$ diametrus ad EZ. similiter demonstrabimus, ne ΔEZ quidem

---

supra scr. m. 1 V. 11. σφαίρᾳ] om. V. στερεόν] om. V. 12. πρὸς τό — 13. πολύεδρον] om. q. 14. $AB\Gamma$] $A\Gamma$ P. 15. λόγον] λόγον ἔχει P. 16. AB q. 17. σφαίρᾳ] om. V. 18. πρὸς τό — 19. πολύεδρον] om. q. 18. σφαίρᾳ] om. V. 19. ἄρα] om. P. 20. σφαῖρα] om. V. 22. σφαῖρα] om. V. 25. ἐλάττονα P. 26. ΔZ V.

οὐδὲ ἡ ΔΕΖ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΑΒΓ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ.

Λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς μείζονά τινα τῆς ΔΕΖ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐχέτω πρὸς μείζονα τὴν ΛΜΝ· ἀνάπαλιν ἄρα ἡ ΛΜΝ σφαῖρα πρὸς τὴν ΑΒΓ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ διάμετρος πρὸς τὴν ΒΓ διάμετρον. ὡς δὲ ἡ ΛΜΝ σφαῖρα πρὸς τὴν ΑΒΓ σφαῖραν, οὕτως ἡ ΔΕΖ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ΑΒΓ σφαίρας, ἐπειδήπερ μείζων ἐστὶν ἡ ΛΜΝ τῆς ΔΕΖ, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείχθη. καὶ ἡ ΔΕΖ ἄρα σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ΑΒΓ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ· ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς μείζονά τινα τῆς ΔΕΖ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἐλάσσονα. ἡ ἄρα ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔΕΖ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

---

4. ἕξει V. 11. σφαίρας, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείχθη, his uerbis infra lin. 12 omissis, B V. 13. ἄρα] om. BV. τινα] om. BV. 16. τινα] om. BV. 18. ἔλασσον q. ΑΒΓ] ΒΓ q. In fine: Εὐκλείδου στοιχείων ιβ Pq, Εὐκλείδου στερεῶν β, ἔστι δὲ τῶν στοιχείων τὸ ιβ B. In q seq. τοῦτο τὸ θεώρημα τὸ ςʹ ἐστὶ τοῦ ιγʹ βιβλίου, deinde in textu XIII, 6 (in mg. θεώρημά ἐστι τοῦτο ςʹ τοῦ ιγʹ βιβλίου); u. app.

sphaeram ad minorem sphaera $AB\Gamma$ triplicatam rationem habere quam EZ ad $B\Gamma$.

iam dico, sphaeram $AB\Gamma$ ne ad maiorem quidem sphaera ΔEZ triplicatam rationem habere quam $B\Gamma$ ad EZ. nam si fieri potest, habeat ad maiorem ΛMN. itaque e contrario [V, 7 coroll.] sphaera ΛMN ad sphaeram $AB\Gamma$ triplicatam rationem habet quam diametrus EZ ad diametrum $B\Gamma$. sed ut ΛMN sphaera ad $AB\Gamma$ sphaeram, ita ΔEZ sphaera ad minorem sphaera $AB\Gamma$, quoniam $\Lambda MN > \Delta EZ$, ut antea demonstratum est [prop. II lemma]. itaque etiam ΔEZ sphaera ad minorem sphaera $AB\Gamma$ triplicatam rationem habet quam $EZ : B\Gamma$; quod fieri non posse demonstrauimus. itaque $AB\Gamma$ sphaera ad maiorem sphaera ΔEZ triplicatam rationem non habet quam $B\Gamma : EZ$. demonstrauimus autem, eam ne ad minorem quidem hanc rationem habere. ergo

$$AB\Gamma : \Delta EZ = B\Gamma^3 : EZ^3;$$

quod erat demonstrandum.

α'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ μεῖζον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου. *)

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ $A\Gamma$, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῇ ΓA εὐθεῖα ἡ $A\Delta$, καὶ κείσθω τῆς AB ἡμίσεια ἡ $A\Delta$· λέγω, ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔA.

Ἀναγεγράφθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν AB, $\Delta\Gamma$ τετράγωνα τὰ AE, ΔZ, καὶ καταγεγράφθω ἐν τῷ ΔZ τὸ σχῆμα, καὶ διήχθω ἡ $Z\Gamma$ ἐπὶ τὸ H. καὶ ἐπεὶ ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $AB\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $A\Gamma$. καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν $AB\Gamma$ τὸ ΓE, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς $A\Gamma$ τὸ $Z\Theta$· ἴσον ἄρα τὸ ΓE τῷ $Z\Theta$. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ BA τῆς $A\Delta$, ἴση δὲ ἡ μὲν BA τῇ KA, ἡ δὲ $A\Delta$ τῇ $A\Theta$, διπλῆ ἄρα καὶ ἡ KA τῆς $A\Theta$. ὡς δὲ ἡ KA πρὸς τὴν $A\Theta$, οὕτως τὸ ΓK πρὸς τὸ $\Gamma\Theta$·

Εὐκλείδου στοιχείων $\overline{\iota\gamma}$ PVb, Εὐκλείδου στερεῶν $\overline{\gamma}$ στοιχείων $\overline{\iota\gamma}$ B, Εὐκλείδου στοιχείων $\overline{\iota\gamma}$ στερεῶν γ q. 5. τετραγώνου] P, comp. supra m. 2 V; τῆς ὅλης Theon (BVbq). 8. τῇ] τῆς P et B, sed corr. εὐθεῖα] εὐθείας B, corr. m. 1. 9. καί —

*) $a(a-x)=x^2 . \supset . (x+\frac{a}{2})^2 = 5(\frac{a}{2})^2$

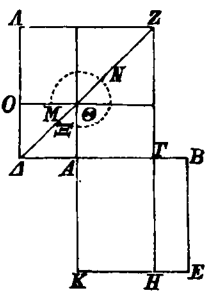
XIII.

I.

Si recta linea secundum rationem extremam ac mediam diuiditur, quadratum maioris partis adiuncta dimidia parte totius aequale est quadrato dimidiae quinquies sumpto.

Nam recta linea AB secundum rationem extremam ac mediam diuidatur in puncto Γ, et pars maior sit $A\Gamma$, et ΓA in directum producatur, ut fiat $A\Delta$, et ponatur $A\Delta = \frac{1}{2} AB$. dico, esse $\Gamma\Delta^2 = 5\Delta A^2$.

construantur enim in AB, $\Delta\Gamma$ quadrata AE, ΔZ,



et in ΔZ figura describatur [I p. 137 not. 1], et $Z\Gamma$ ad H producatur. et quoniam AB in Γ secundum rationem extremam ac mediam diuisa est, erit $AB \times B\Gamma = A\Gamma^2$ [VI def. 3. VI, 17]. et $AB \times B\Gamma = \Gamma E$, $A\Gamma^2 = Z\Theta$. itaque $\Gamma E = Z\Theta$. et quoniam $BA = 2A\Delta$, et $BA = KA$, $A\Delta = A\Theta$, erit etiam $KA = 2A\Theta$. uerum $KA : A\Theta = \Gamma K : \Gamma\Theta$ [VI, 1]. itaque $\Gamma K = 2\Gamma\Theta$.

$A\Delta$] mg. postea add. m. 1 P. 10. $A\Delta$ q et corr. ex ΔA V. 11. -σαν] eras. P. $\Delta\Gamma$] in ras. m. 1 F. τετραγώνων Vq. 12. ἐν] τὸ ἐν P. τό] om. P. 13. ἐπί] corr. ex ἐπεί m. 2 P. 15. AB, $B\Gamma$ q et m. 2 V. ἐστιν ἴσον BV. 16. AB, $B\Gamma$ m. 2 V. ἀπό] ὑπό q. 20. ΓK] $K\Gamma$ P.

διπλάσιον ἄρα τὸ ΓΚ τοῦ ΓΘ. εἰσὶ δὲ καὶ τὰ ΛΘ, ΘΓ διπλάσια τοῦ ΓΘ. ἴσον ἄρα τὸ ΚΓ τοῖς ΛΘ, ΘΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ΓΕ τῷ ΘΖ ἴσον· ὅλον ἄρα τὸ ΑΕ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΝΞ γνώμονι. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ, τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τουτέστι τὸ ΑΕ τοῦ ΔΘ. ἴσον δὲ τὸ ΑΕ τῷ ΜΝΞ γνώμονι· καὶ ὁ ΜΝΞ ἄρα γνώμων τετραπλάσιός ἐστι τοῦ ΑΟ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΖ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΟ. καί ἐστι τὸ μὲν ΔΖ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ, τὸ δὲ ΑΟ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ μεῖζον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

β′.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμήματος ἑαυτῆς πενταπλάσιον δύνηται, τῆς διπλασίας τοῦ εἰρημένου τμήματος ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ λοιπὸν μέρος ἐστὶ τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας. *)

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ ΑΒ τμήματος ἑαυτῆς τοῦ ΑΓ πενταπλάσιον δυνάσθω, τῆς δὲ ΑΓ διπλῆ ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι τῆς ΓΔ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΓΒ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀφ' ἑκατέρας τῶν ΑΒ, ΓΔ τετράγωνα τὰ ΑΖ, ΓΗ, καὶ καταγεγράφθω ἐν τῷ

---

1. *ΚΓ* P. Hic in P litt. *Κ* saepius in *Η* renouatum est manu *π*. *ΛΘ*] *Λ* e corr. m. 1 V. 2. *τοῦ ΓΘ διπλάσια* P.

*) $(x+\frac{a}{2})^2 = 5(\frac{a}{2})^2 \;.>.\; a(a-x) = x^2$

uerum etiam $\Delta\Theta + \Theta\Gamma = 2\Gamma\Theta$ [I, 43]. itaque $K\Gamma = \Delta\Theta + \Theta\Gamma$. demonstrauimus autem, esse etiam $\Gamma E = \Theta Z$. itaque $AE = MN\Xi$. et quoniam $BA = 2A\Delta$, erit $BA^2 = 4A\Delta^2$, h. e. $AE = 4\Delta\Theta$. sed $AE = MN\Xi$. itaque etiam $MN\Xi = 4AO$. quare $\Delta Z = 5AO$. et $\Delta Z = \Delta\Gamma^2$, $AO = \Delta A^2$. itaque $\Gamma\Delta^2 = 5\Delta A^2$.

Ergo si recta secundum rationem extremam ac mediam diuiditur, quadratum maioris partis adiuncta dimidia parte totius aequale est quadrato dimidiae quinquies sumpto; quod erat demonstrandum.

II.

Si quadratum lineae rectae quadrato partis eius quinquies sumpto aequale est, duplo partis illius secundum rationem extremam ac mediam diuiso maior pars reliquum est rectae ab initio sumptae.

nam sit $AB^2 = 5A\Gamma^2$ et $\Gamma\Delta = 2A\Gamma$. dico, recta $\Gamma\Delta$ secundum rationem extremam ac mediam diuisa maiorem partem esse ΓB.

construantur enim in utraque AB, $\Gamma\Delta$ quadrata AZ, ΓH, et in AZ figura describatur, et producatur

---

ΓK BVq. 3. $Z\Theta$ BV. ὅλον] om. P. 4. Post $MN\Xi$ eras. τετραγώνῳ (comp.) b. 5. AB q. ἐστιν P. 6. τουτέστιν B. 7. $\Delta\Theta$] e corr. V, $A\Theta$ P et B sed corr. 8. ἄρα] om. P. γνώμων ἄρα b. ἐστιν P. AO] corr. ex $A\Theta$ B, $\Delta\Theta$ q et in ras. V; item lin. 9, 10. 9. ἐστι] (alt.) ἐστιν PB. 10. $\Gamma\Delta$ B et V, sed corr. m. 2. 11. ἐστιν P. 13. τήν] e corr. m. 1 q. 14. δυνήσεται BVbq. 23. δυνείσθω b. 27. τὸ ἐν P.

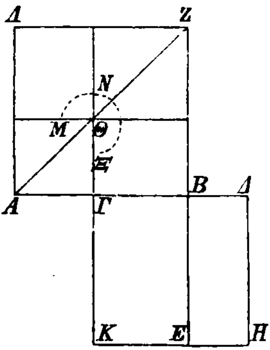
ΑΖ τὸ σχῆμα, καὶ διήχθω ἡ ΒΕ. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ, πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΖ τοῦ ΑΘ. τετραπλάσιος ἄρα ὁ ΜΝΞ γνώμων τοῦ ΑΘ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΔΓ τῆς ΓΑ, τετραπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΔΓ τοῦ ἀπὸ ΓΑ, τουτέστι τὸ ΓΗ τοῦ ΑΘ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ ΜΝΞ γνώμων τετραπλάσιος τοῦ ΑΘ· ἴσος ἄρα ὁ ΜΝΞ γνώμων τῷ ΓΗ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΔΓ τῆς ΓΑ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΔΓ τῇ ΓΚ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΓΘ [διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΚΓ τῆς ΓΘ], διπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ΚΒ τοῦ ΒΘ. εἰσὶ δὲ καὶ τὰ ΛΘ, ΘΒ τοῦ ΘΒ διπλάσια· ἴσον ἄρα τὸ ΚΒ τοῖς ΛΘ, ΘΒ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλος ὁ ΜΝΞ γνώμων ὅλῳ τῷ ΓΗ ἴσος· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΘΖ τῷ ΒΗ ἐστιν ἴσον. καί ἐστι τὸ μὲν ΒΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔΒ· ἴση γὰρ ἡ ΓΔ τῇ ΔΗ· τὸ δὲ ΘΖ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΔΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ. μείζων δὲ ἡ ΔΓ τῆς ΓΒ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΓΒ τῆς ΒΔ. τῆς ΓΔ ἄρα εὐθείας ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΓΒ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμήματος ἑαυτῆς πενταπλάσιον δύνηται, τῆς διπλασίας τοῦ εἰρημένου τμήματος ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ λοιπὸν μέρος ἐστὶ τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

---

1. *τό*] om. Pb. 5. *ἀπό*] om. b, *ἀπὸ τῆς* BVq. *ἀπό*] *ἀπὸ τῆς* BVq. 6. *τουτέστιν* P. 7. *τετραπλάσιος — γνώμων*] supra m. 2 B. 8. *ΓΑ*] corr. ex *ΔΑ* m. 2 B. 9. *διπλῆ* — 10. *ΓΘ*] mg. postea add. P m. 1. 10. *ΚΓ*] *ΓΚ* P. 11. *εἰσίν* P. *εἰσί — ΘΒ* (alt.)] et in textu m. 1 et mg.

BE. et quoniam $BA^2 = 5A\Gamma^2$, erit $AZ = 5A\Theta$. itaque $MN\Xi = 4A\Theta$. et quoniam $\Delta\Gamma = 2\Gamma A$, erit $\Delta\Gamma^2 = 4\Gamma A^2$, h. e. $\Gamma H = 4A\Theta$. demonstrauimus autem, esse etiam $MN\Xi = 4A\Theta$. itaque $MN\Xi = \Gamma H$. et quoniam $\Delta\Gamma = 2\Gamma A$, et $\Delta\Gamma = \Gamma K$, $A\Gamma = \Gamma\Theta$, erit etiam $KB = 2B\Theta$ [VI, 1]. uerum etiam $\Delta\Theta + \Theta B = 2\Theta B$ [I, 43]. itaque $KB = \Delta\Theta + \Theta B$. demonstrauimus autem, esse etiam $MN\Xi = \Gamma H$. quare $\Theta Z = BH$. et $BH = \Gamma\Delta \times \Delta B$ (nam $\Gamma\Delta = \Delta H$), $\Theta Z = \Gamma B^2$. itaque erit $\Gamma\Delta \times \Delta B = \Gamma B^2$. est igitur $\Delta\Gamma : \Gamma B = \Gamma B : B\Delta$ [VI, 17]. est autem $\Delta\Gamma > \Gamma B$ [u. lemma]. quare etiam $\Gamma B > B\Delta$ [V, 14]. itaque recta $\Gamma\Delta$ secundum rationem extremam ac mediam diuisa maior pars est ΓB.



Ergo si quadratum lineae rectae quadrato partis eius quinquies sumpto aequale est, duplo partis illius secundum rationem extremam ac mediam diuiso maior pars reliquum est rectae ab initio sumptae; quod erat demonstrandum.

---

m. 2 B. *διπλάσια τοῦ* $B\Theta$ BV. ΘB] (alt.) $B\Theta$ b. *διπλάσιον* q. 12. *ἴσον* — ΘB] mg. m. 2 B. *τοῖς*] *τοῦ* b. *ὅλος*] corr. ex *ὅλον* m. 1 P. 14. *ἐστιν* P. 15. $\Gamma\Delta$, ΔB q. ΔH] BH b. *τό*] (alt.) mutat. in *τῶ* m. 1 q. 16. *ἐστίν* P. *τῷ*] corr. ex *τό* m. 1 P. 19. $\Gamma\Delta$] ante Γ del. Δ m. 1 b. 25. *ἐστίν* P. 26. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*] o): - b, om. BVq.

Λῆμμα.

Ὅτι δὲ ἡ διπλῆ τῆς ΑΓ μείζων ἐστὶ τῆς ΒΓ, οὕτως δεικτέον.

Εἰ γὰρ μή, ἔστω, εἰ δυνατόν, ἡ ΒΓ διπλῆ τῆς ΓΑ. τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ· πενταπλάσια ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ΒΓ, ΓΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ. ὑπόκειται δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πενταπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΓ, ΓΑ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ΓΒ διπλασία ἐστὶ τῆς ΑΓ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἡ ἐλάττων τῆς ΓΒ διπλασίων ἐστὶ τῆς ΓΑ· πολλῷ γὰρ [μεῖζον] τὸ ἄτοπον.

Ἡ ἄρα τῆς ΑΓ διπλῆ μείζων ἐστὶ τῆς ΓΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

γ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ ἔλασσον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τοῦ μείζονος τμήματος πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τοῦ μείζονος τμήματος τετραγώνου. *)

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ ΑΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Δ· λέγω, ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΕ, καὶ καταγεγράφθω διπλοῦν τὸ σχῆμα. ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΓ τῆς ΔΓ, τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς

1. *λῆμμα*] om. codd. 2. *ἐστίν* P. *οὕτω* B. 10. *ΒΓ* P. *διπλασίων* P. *ἐστίν* B. 11. *ἡ*] om. B, ins. m. 1 b,

*) $a(a-x)=x^2 . \supset .(a-x+\frac{x}{2})^2 = 5(\frac{x}{2})^2$

Lemma.[1])

Esse autem $2 \varDelta\Gamma > B\Gamma$, sic demonstrandum.

Nam si minus, sit, si fieri potest, $B\Gamma = 2\Gamma\varDelta$. ergo $B\Gamma^2 = 4\Gamma\varDelta^2$. itaque $B\Gamma^2 + \Gamma\varDelta^2 = 5\Gamma\varDelta^2$. uerum supposuimus, esse etiam $B\varDelta^2 = 5\Gamma\varDelta^2$. itaque $B\varDelta^2 = B\Gamma^2 + \Gamma\varDelta^2$; quod fieri non potest [II, 4]. itaque non est $\Gamma B = 2\varDelta\Gamma$. similiter demonstrabimus, ne minorem quidem recta ΓB duplo maiorem esse recta $\Gamma\varDelta$; multo enim magis absurdum est. ergo $2\varDelta\Gamma > \Gamma B$; quod erat demonstrandum.

III.

Si linea recta secundum rationem extremam ac mediam diuiditur, quadratum minoris partis adiuncta dimidia maioris parte aequale est quadrato dimidiae maioris partis quinquies sumpto.

Nam recta AB secundum rationem extremam ac mediam diuidatur in puncto Γ, et maior pars sit $A\Gamma$, et $A\Gamma$ in $\varDelta$ in duas partes aequales diuidatur. dico, esse $B\varDelta^2 = 5\varDelta\Gamma^2$.

construatur enim in AB quadratum AE, et figura duplex describatur. iam quoniam $A\Gamma = 2\varDelta\Gamma$, erit

1) Dubito, an hoc lemma genuinum non sit. neque enim opus est, et dicendi genus lin. 11 paullo insolentius est.

supra m. 2 V. ΓB] $B\Gamma$ BVq. διπλασίων] in ras. V. Dein add. ἄρα B. ἐστίν PB. 12. μεῖζον] om. P. 13. ἐστίν B. 18. τμήματος] om. q. 21. τις ή] corr. ex τῆς m. 2 P. 23. τό] (prius) ή Vq. 24. τοῦ] τοῖς q. 26. διπλοῦν] om. BVbq. σχῆμα διπλοῦν bq. καὶ ἐπεί BVbq. 27. τετραπλάσιον — p. 256, 1. $\varDelta\Gamma$] om. b.

ΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ, τουτέστι τὸ ΡΣ τοῦ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ, καί ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ τὸ ΓΕ, τὸ ἄρα ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ΡΣ. τετραπλάσιον δὲ τὸ ΡΣ τοῦ ΖΗ· τετραπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ΓΕ τοῦ ΖΗ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΘΚ τῇ ΚΖ. ὥστε καὶ τὸ ΗΖ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΘΛ τετραγώνῳ. ἴση ἄρα ἡ ΗΚ τῇ ΚΛ, τουτέστιν ἡ ΜΝ τῇ ΝΕ· ὥστε καὶ τὸ ΜΖ τῷ ΖΕ ἐστιν ἴσον. ἀλλὰ τὸ ΜΖ τῷ ΓΗ ἐστιν ἴσον· καὶ τὸ ΓΗ ἄρα τῷ ΖΕ ἐστιν ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΝ· ὁ ἄρα ΞΟΠ γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ ΓΕ. ἀλλὰ τὸ ΓΕ τετραπλάσιον ἐδείχθη τοῦ ΗΖ· καὶ ὁ ΞΟΠ ἄρα γνώμων τετραπλάσιός ἐστι τοῦ ΖΗ τετραγώνου. ἱ ΞΟΠ ἄρα γνώμων καὶ τὸ ΖΗ τετράγωνον πενταπλάσιός ἐστι τοῦ ΖΗ. ἀλλὰ ὁ ΞΟΠ γνώμων καὶ τὸ ΖΗ τετράγωνόν ἐστι τὸ ΔΝ. καί ἐστι τὸ μὲν ΔΝ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ, τὸ δὲ ΗΖ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΒ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

δ΄.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος τετραγώνου. *)

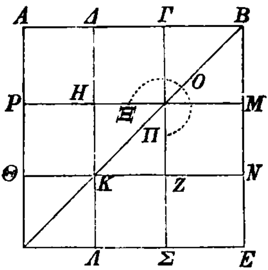
Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ ΑΓ·

---

1. ΓΔ V. 3. τῶν] τῷ b. Post prius ΓΕ add. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΓ τὸ (τῷ V) ΡΣ Vbq, B m. 2. τὸ ἄρα — 4. ΡΣ]

*) $a(a-x)=x^2 \supset. \; a^2+(a-x)^2=3x^2$

$A\Gamma^2 = 4\Delta\Gamma^2$, h. e. $P\Sigma = 4ZH$. et quoniam $AB \times B\Gamma = A\Gamma^2$ [VI def. 3. VI, 17] et $AB \times B\Gamma = \Gamma E$, erit $\Gamma E = P\Sigma$. sed $P\Sigma = 4ZH$. quare etiam $\Gamma E = 4ZH$. rursus quoniam $A\Delta = \Delta\Gamma$, erit etiam $\Theta K = KZ$.



quare etiam $HZ = \Theta\Lambda$. est igitur $HK = K\Lambda$, h. e. $MN = NE$. quare etiam $MZ = ZE$. sed $MZ = \Gamma H$. quare etiam $\Gamma H = ZE$. commune adiiciatur ΓN. itaque $\Xi O\Pi = \Gamma E$. demonstrauimus autem, esse $\Gamma E = 4HZ$. itaque etiam $\Xi O\Pi = 4ZH$. quare $\Xi O\Pi + ZH = 5ZH$. sed $\Xi O\Pi + ZH = \Delta N$. et $\Delta N = \Delta B^2$, $HZ = \Delta\Gamma^2$. ergo $\Delta B^2 = 5\Delta\Gamma^2$; quod erat demonstrandum.

IV.

Si recta linea secundum rationem extremam ac mediam secatur, quadratum totius et quadratum partis minoris coniuncta triplo maiora sunt quadrato partis maioris.

Sit recta AB et secundum rationem extremam ac

(prius) om. V. 6. ἐστίν P. 8. τῇ] (alt.) τῆι, ι in ras. m. 1 P. 9. ἀλλά — 10. ἴσον (prius)] postea ins. m. 1 P. 11. ΓN] ΓH? q. ἔσται b. 12. HZ] corr. ex ZH q. 13. ἄρα] om. P. ἐστιν B. HZ BVbq. 14. τετραγώνου] om. Bbq, supra m. 1 V. ὁ — ZH] τὸ ἄρα ΔN Theon (BVbq; N e corr. V, ΔH q). 15. πενταπλάσιος] -ς e corr. m. 1 P; -σιον BVbq. ZH τετραγώνου BVbq. ἀλλά — 16. ΔN] om. Theon (BVbq). 16. ἐστιν P. 17. ἐστιν B. ΔH q, corr. m. 1. 19. $\Gamma\Delta$ P. 22. ἐλάττονος P. 26. ἔστω — καί (prius)] εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ AB V.

λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒΓ τὸ ΑΚ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΓ τὸ ΘΗ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ τῷ ΘΗ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΖ τῷ ΖΕ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΚ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΚ ὅλῳ τῷ ΓΕ ἐστιν ἴσον· τὰ ἄρα ΑΚ, ΓΕ τοῦ ΑΚ ἐστι διπλάσια. ἀλλὰ τὰ ΑΚ, ΓΕ ὁ ΛΜΝ γνώμων ἐστὶ καὶ τὸ ΓΚ τετράγωνον· ὁ ἄρα ΛΜΝ γνώμων καὶ τὸ ΓΚ τετράγωνον διπλάσιά ἐστι τοῦ ΑΚ. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ ΑΚ τῷ ΘΗ ἐδείχθη ἴσον· ὁ ἄρα ΛΜΝ γνώμων καὶ [τὸ ΓΚ τετράγωνον διπλάσιά ἐστι τοῦ ΘΗ· ὥστε ὁ ΛΜΝ γνώμων καὶ] τὰ ΓΚ, ΘΗ τετράγωνα τριπλάσιά ἐστι τοῦ ΘΗ τετραγώνου. καί ἐστιν ὁ [μὲν] ΛΜΝ γνώμων καὶ τὰ ΓΚ, ΘΗ τετράγωνα ὅλον τὸ ΑΕ καὶ τὸ ΓΚ, ἅπερ ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα, τὸ δὲ ΗΘ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

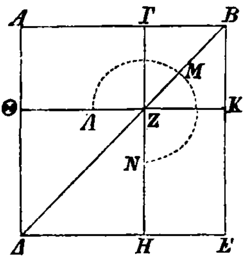
ε'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, καὶ προστεθῇ αὐτῇ ἴση τῷ μείζονι τμήματι, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέ-

1. *τριπλασίονά* q. 3. Ante *ἀναγ.* del. *καί* m. 1 b. 5. *Γ σημεῖον* V. 7. *ἐστί*] (prius) *ἐστίν* P. 8. *ΑΚ*] *Κ* corr. m. 1 ex *Β* P. *ΑΓ*] *ΑΚ* b. 9. *ΘΗ*] *Θ* e corr. m.

mediam secetur in Γ, et maior pars sit $A\Gamma$. dico, esse $AB^2 + B\Gamma^2 = 3\Gamma A^2$.

construatur enim in AB quadratum $A\Delta EB$, et describatur figura. iam quoniam AB in Γ secundum rationem extremam ac mediam secta est, et maior pars est $A\Gamma$, erit $AB \times B\Gamma = A\Gamma^2$ [VI def. 3. VI, 17]. et $AB \times B\Gamma = AK$, $A\Gamma^2 = \Theta H$. itaque $AK = \Theta H$. et quoniam $AZ = ZE$ [I, 43], commune adiiciatur ΓK. itaque $AK = \Gamma E$. ergo $AK + \Gamma E = 2AK$. sed $AK + \Gamma E = \Lambda MN + \Gamma K$. itaque $\Lambda MN + \Gamma K = 2AK$. demonstrauimus autem, esse etiam $AK = \Theta H$. itaque $\Lambda MN + \Gamma K + \Theta H = 3\Theta H$. uerum $\Lambda MN + \Gamma K + \Theta H = AE + \Gamma K = AB^2 + B\Gamma^2$, et $H\Theta = A\Gamma^2$. ergo $AB^2 + B\Gamma^2 = 3A\Gamma^2$; quod erat demonstrandum.



V.

Si recta linea secundum rationem extremam ac mediam secatur, et ei adiicitur recta parti maiori aequalis, tota recta secundum rationem extremam ac

---

1 b. *ἐστίν* P. 10. *προσκείσθω κοινόν* BV. 11. ΓE] Γ b. *ἴσον ἐστί* V. 12. *γνώμων* — 13. ΛMN] bis b. 14. *ἐστιν* P. 15. *μὴν καί*] om. q. 16. *τὸ* ΓK — 17. *καί*] om. P. 16. *διπλάσιον* V. 17. ΘH — ΛMN] in ras. m. 1 q. 18. *διπλάσια* b. *τριπλάσια* — 19. *τετράγωνα*] bis P, corr. m. 1. 19. *μέν*] om. P (etiam in repet.). 20. *ὅπερ* P. *ἐστίν* PB. *τά*] om. b. 22. *διπλάσια* b. *ἐστιν* P. 26. *προτεθῇ* q. *τῷ* — 27. *εὐθεῖα*] mg. m. 1 b, in textu: *τῷ ὅλῳ τμήματι ἴση εὐθεῖα ὅλη*. 27. *ὅλη ἡ* BV.

τμηται, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα. *)

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ, καὶ τῇ ΑΓ ἴση [κείσθω] ἡ ΑΔ. λέγω, ὅτι ἡ ΔΒ εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα ἡ ΑΒ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΕ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΓ. καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τὸ ΓΕ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΓ τὸ ΓΘ· ἴσον ἄρα τὸ ΓΕ τῷ ΘΓ. ἀλλὰ τῷ μὲν ΓΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ΘΕ, τῷ δὲ ΘΓ ἴσον τὸ ΔΘ· καὶ τὸ ΔΘ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΘΕ [κοινὸν προσκείσθω τὸ ΘΒ]. ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ ὅλῳ τῷ ΑΕ ἐστιν ἴσον. καί ἐστι τὸ μὲν ΔΚ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΑ· ἴση γὰρ ἡ ΑΔ τῇ ΔΛ· τὸ δὲ ΑΕ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΔΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ. μείζων δὲ ἡ ΔΒ τῆς ΒΑ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ.

Ἡ ἄρα ΔΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

---

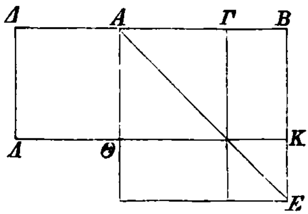
3. ἡ] ἡ τό b. 5. κείσθω] om. P. 6. ΔΒ] ΑΔ b. 7. ἡ] om. q. ἡ — εὐθεῖα] om. V. 8. ΑΒ] supra scr. Δ m. 1 b. 9. ἀναγεγεγρ. P, corr. m. 1. 10. ἐπεὶ γάρ BV. 12. τῶν ΑΒΓ V. ἀπό] corr. ex ὑπό m. 1 P. τῆς ΑΓ V. ἐστιν P. 13. τῶν ΑΒΓ V. ΓΘ] ΘΓ P. 14. ΘΓ] corr. ex ΓΘ m. 2 V. 15. ΘΓ] Θ e corr. V. 16. κοινόν — ΘΒ] postea add. m. 1 P. ΘΒ] Θ e corr. b.

*) $a(a-x)=x^2. \supset. (a+x)x = a^2$

mediam secta est, et maior pars est recta ab initio sumpta.

Nam recta linea AB secundum rationem extremam ac mediam in puncto Γ secetur, et maior pars sit $A\Gamma$ et $A\Delta = A\Gamma$. dico, rectam ΔB secundum rationem extremam ac mediam in A sectam esse, et partem maiorem esse rectam ab initio sumptam AB.

construatur enim in AB quadratum AE, et describatur figura. quoniam AB in Γ secundum rationem extremam ac mediam secta est, erit $AB \times B\Gamma = A\Gamma^2$ [VI def. 3. VI, 17]. et $AB \times B\Gamma = \Gamma E$, $A\Gamma^2 = \Gamma\Theta$. itaque $\Gamma E = \Theta\Gamma$. uerum $\Theta E = \Gamma E$ [I, 43], $\Delta\Theta = \Theta\Gamma$. quare etiam $\Delta\Theta = \Theta E$. itaque



$\Delta K = AE$. et $\Delta K = B\Delta \times \Delta A$ (nam $A\Delta = \Delta\Lambda$), $AE = AB^2$. erit igitur $B\Delta \times \Delta A = AB^2$. itaque $\Delta B : BA = BA : A\Delta$ [VI, 17]. sed $\Delta B > BA$. itaque etiam $BA > A\Delta$ [V, 14].

Ergo ΔB in A secundum rationem extremam ac mediam diuisa est, et maior pars est AB; quod erat demonstrandum.

---

18. ΔA] $\Delta\Lambda$ q. $\Delta\Lambda$] corr. ex ΛA m. 1 b. 19. τὸ ἄρα — 20. AB] om. q. 20. ΔB] Δ corr. ex A m. 1 b.
22. BA] (alt.) AB V, ΔB B, $B\Delta$ bq. 23. $B\Delta$ BV.
25. Seq. alia demonstratio et analysis propp. I—V in bq; u. app.

ϛʹ.

Ἐὰν εὐθεῖα ῥητὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἔστω εὐθεῖα ῥητὴ ἡ *ΑΒ* καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ *Γ*, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ *ΑΓ*· λέγω, ὅτι ἑκατέρα τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ *ΒΑ*, καὶ κείσθω τῆς *ΒΑ* ἡμίσεια ἡ *ΑΔ*. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ *ΑΒ* τέτμηται ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ *Γ*, καὶ τῷ μείζονι τμήματι τῷ *ΑΓ* πρόσκειται ἡ *ΑΔ* ἡμίσεια οὖσα τῆς *ΑΒ*, τὸ ἄρα ἀπὸ *ΓΔ* τοῦ ἀπὸ *ΔΑ* πενταπλάσιόν ἐστιν. τὸ ἄρα ἀπὸ *ΓΔ* προς τὸ ἀπὸ *ΔΑ* λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ *ΓΔ* τῷ ἀπὸ *ΔΑ*. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ *ΔΑ*· ῥητὴ γάρ [ἐστιν] ἡ *ΔΑ* ἡμίσεια οὖσα τῆς *ΑΒ* ῥητῆς οὔσης· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ *ΓΔ*· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ *ΓΔ*. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ *ΓΔ* πρὸς τὸ ἀπὸ *ΔΑ* λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀσύμμετρος ἄρα μήκει ἡ *ΓΔ* τῇ *ΔΑ*· αἱ *ΓΔ*, *ΔΑ* ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ *ΑΓ*. πάλιν, ἐπεὶ ἡ *ΑΒ* ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται,

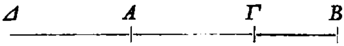
---

Hanc prop. om. bq. 3. *ἐστιν*] mg. m. 1 V. 4. *ἀποτομή*] *ῥητή* B, corr. m. 2. 7. *ΑΓ*] *Γ* in ras. m. 1 P. *ΑΒ*, *ΒΓ* B, corr. m. 2. 9. *ἐκβεβλήσθω*] *κ* corr. ex *μ* m. 2 B. *τῆς*] *τῇ* B, corr. m. 2. 10. *τέτμηται*] om. V. 11. *λόγον τέτμηται* V. 13. *τῆς ΓΔ* V. *τῆς ΔΑ* V. *ἐστι* BV. 14. *τῆς ΓΔ* V. *πρός*] supra m. 1 P. *τό*] in ras. plurium litt. m. 1 P. *τῆς ΔΑ* V. 16. *ΑΔ* bis P. *ῥητή* V. *δέ*] in ras. V. *τό — γάρ*] om. V. *ἐστιν*] om. P. 18. *ἐστίν* B. 21. *εἰσιν* PB.

VI.[1])

Si recta rationalis secundum rationem extremam ac mediam diuiditur, utraque pars irrationalis est apotome quae uocatur.

Sit recta rationalis AB et secundum rationem extremam ac mediam in Γ diuidatur, et maior pars sit $A\Gamma$. dico, utramque $A\Gamma$, ΓB irrationalem esse apotomen quae uocatur.



producatur enim BA et ponatur $A\Delta = \frac{1}{2} BA$. iam quoniam recta AB in Γ secundum rationem extremam ac mediam diuisa est, et parti maiori $A\Gamma$ adiecta est $A\Delta$ dimidia rectae AB, erit $\Gamma\Delta^2 = 5\Delta A^2$ [prop. I]. itaque $\Gamma\Delta^2$ ad ΔA^2 rationem habet quam numerus ad numerum. itaque $\Gamma\Delta^2$ et ΔA^2 commensurabilia sunt [X, 6]. sed ΔA^2 rationale est; nam ΔA, quae dimidia est rectae rationalis AB, rationalis est. itaque etiam $\Gamma\Delta^2$ rationale est [X def. 9]. quare $\Gamma\Delta$ et ipsa rationalis est. et quoniam $\Gamma\Delta^2$ ad ΔA^2 rationem non habet quam numerus quadratus ad numerum quadratum, $\Gamma\Delta$ et ΔA longitudine incommensurabiles sunt [X, 9]. itaque $\Gamma\Delta$, ΔA rationales sunt potentia solum commensurabiles. itaque apotome est $A\Gamma$ [X, 73]. rursus quoniam AB secundum rationem extremam ac mediam diuisa est, et maior pars est

1) In P in mg. add. m. 1: τοῦτο τὸ θεώρημα ἐν τοῖς πλείστοις τῆς νέας ἐκδόσεως οὐ φέρεται, ἐν δὲ τοῖς τῆς παλαιᾶς εὑρίσκεται. de q u. app.

καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν η ΑΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ τῷ ἀπὸ ΑΓ ἴσον ἐστίν. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀποτομῆς παρὰ τὴν ΑΒ ῥητὴν παραβληθὲν πλάτος ποιεῖ τὴν ΒΓ. τὸ δὲ ἀπὶ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην· ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἐστὶν ἡ ΓΒ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΓΑ ἀποτομή.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ῥητὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ζ'.

Ἐὰν πενταγώνου ἰσοπλεύρου αἱ τρεῖς γωνίαι ἤτοι αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς ἢ αἱ μὴ κατὰ τὸ ἑξῆς ἴσαι ὦσιν, ἰσογώνιον ἔσται τὸ πεντάγωνον.

Πενταγώνου γὰρ ἰσοπλεύρου τοῦ ΑΒΓΔΕ αἱ τρεῖς γωνίαι πρότερον αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς αἱ πρὸς τοῖς Α, Β, Γ ἴσαι ἀλλήλαις ἔστωσαν· λέγω, ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον.

Ἐπεζεύχθωσάν γὰρ αἱ ΑΓ, ΒΕ, ΖΔ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΓΒ, ΒΑ δυσὶ ταῖς ΒΑ, ΑΕ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΒΑ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ ἐστιν ἴση, βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΒΕ ἐστιν ἴση, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΕ τριγώνῳ ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΒΕΑ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΕ τῇ ὑπὸ ΓΑΒ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΑΖ πλευρᾷ τῇ ΒΖ ἐστιν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλη ἡ ΑΓ ὅλῃ τῇ ΒΕ ἴση· καὶ λοιπὴ

---

1. Ante *καί* add. *κατὰ τὸ Γ* V. *ΑΒΓ* V. 2. *ἐστί* BV. 4. *ἀποτομῆς*] *ἀπο-* supra scr. m. 2 B. 6. *ΓΑ*] *ΑΓ* BV. 7. *ῥητή* — 9. *δεῖξαι*]: ∼ BV. 8. *ἄλογον* P. Seq. in

$A\Gamma$, erit $AB \times B\Gamma = A\Gamma^2$ [VI def. 3. VI, 17]. itaque quadratum apotomes $A\Gamma$ ad AB rationalem adplicatum latitudinem efficit $B\Gamma$. quadratum autem apotomes ad rationalem adplicatum latitudinem efficit apotomen primam [X, 97]. itaque ΓB apotome est prima. demonstrauimus autem, etiam ΓA apotomen esse.

Ergo si recta rationalis secundum rationem extremam ac mediam diuiditur, utraque pars irrationalis est apotome quae uocatur; quod erat demonstrandum.

VII.

Si pentagoni aequilateri tres anguli, siue deinceps positi sunt siue non deinceps, inter se aequales sunt, pentagonum aequiangulum erit.

Nam pentagoni aequilateri $AB\Gamma\Delta E$ prius, qui deinceps positi sunt, tres anguli A, B, Γ inter se aequales sint. dico, pentagonum $AB\Gamma\Delta E$ aequiangulum esse.

ducantur enim $A\Gamma$, BE, $Z\Delta$. et quoniam duo latera ΓB, BA duobus lateribus BA, AE singula singulis aequalia sunt, et $\angle \Gamma BA = BAE$, erit $A\Gamma = BE$ et $\triangle AB\Gamma = ABE$, et reliqui anguli reliquis angulis aequales erunt, sub quibus aequalia latera subtendunt [I, 4], $\angle B\Gamma A = BEA$, $\angle ABE = \Gamma AB$. quare etiam $AZ = BZ$ [I, 6]. demonstrauimus autem, esse etiam $A\Gamma = BE$. itaque etiam $Z\Gamma = ZE$.

P altera demonstr. prop. V et analysis prop. I—V, in BV analysis prop. I—V; u. app. 10. ζ′] om. b, qui hinc numeros propp. om. 12. ἤτοι] ἢ V. ἢ αἱ — ἑξῆς] om. q. ἢ αἱ] in ras. m. 1 B. 16. ἐστιν P. 18. -χθωσαν — 19. AE] mg. m. 2 B, sed etiam m. 1 in textu, om. BE — ΓB. 19. δύο] αἱ δύο P. 22. ἴσον ἐστί q. 25. $B\Gamma A$] ΓA in ras. V, $BA\Gamma$ B.

ἄρα ἡ ΖΓ λοιπῇ τῇ ΖΕ ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΓΔ τῇ ΔΕ ἴση. δύο δὴ αἱ ΖΓ, ΓΔ δυσὶ ταῖς ΖΕ, ΕΔ ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΖΔ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΓΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΕΔ ἐστιν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ τῇ ὑπὸ ΑΕΒ ἴση· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΕΔ ἴση. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ὑπόκειται ταῖς πρὸς τοῖς Α, Β γωνίαις· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΔ ἄρα ταῖς πρὸς τοῖς Α, Β γωνίαις ἴση ἐστίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ γωνία ἴση ἐστὶ ταῖς πρὸς τοῖς Α, Β, Γ γωνίαις· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον.

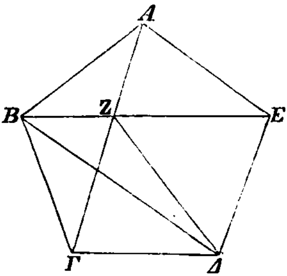
Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστωσαν ἴσαι αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς γωνίαι, ἀλλ' ἔστωσαν ἴσαι αἱ πρὸς τοῖς Α, Γ, Δ σημείοις· λέγω, ὅτι καὶ οὕτως ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΒΔ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΒΑ, ΑΕ δυσὶ ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσὶ καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΒΕ βάσει τῇ ΒΔ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΒΓΔ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΒ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΕΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΔΕ ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΒΕ πλευρᾷ τῇ ΒΔ ἐστιν ἴση. καὶ ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΔ γωνία ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ ἐστιν ἴση. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ ταῖς πρὸς τοῖς Α, Γ γωνίαις ὑπόκειται ἴση·

---

1. *ἐστιν ἴση* — 3. *ΕΔ*] bis b. 1. *ἔστιν* B. 3. *εἰσί* Vb. 5. *καί*] om. BV. 6. *ἐστιν ἴση* BV. *ἀλλά* BVq. 7. *ΒΓΔ*] sic, sed mg. m. 1 *ΓΔΕ* b. *γωνίαις*] om. BVb. 8. *τοῖς*] *τούς* q. Post *B* add. *Γ* q et supra m. 1 V. 10. *Γ*] om. B, supra m. 1 V. 11. *ἐστίν* B, om. V.

uerum etiam $\Gamma\Delta = \Delta E$. itaque duo latera $Z\Gamma$, $\Gamma\Delta$ duobus lateribus ZE, $E\Delta$ aequalia sunt; et basis eorum communis est $Z\Delta$. itaque $\angle Z\Gamma\Delta = ZE\Delta$ [I, 8]. demonstrauimus autem, esse etiam $\angle B\Gamma A = AEB$. quare etiam $\angle B\Gamma\Delta = AE\Delta$. supposuimus autem, angulum $B\Gamma\Delta$ angulis ad A, B positis aequalem esse. itaque etiam $\angle AE\Delta$ angulis ad A, B positis aequalis est. iam similiter demonstrabimus, etiam angulum $\Gamma\Delta E$ angulis ad A, B, Γ positis aequalem esse. ergo pentagonum $AB\Gamma\Delta E$ aequiangulum est.



iam uero anguli deinceps positi aequales ne sint, sed aequales sint anguli ad puncta A, Γ, Δ positi. dico, sic quoque pentagonum aequiangulum esse.

ducatur enim $B\Delta$. et quoniam duo latera BA, AE duobus lateribus $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ aequalia sunt et aequales angulos comprehendunt, erit $BE = B\Delta$ et $\triangle ABE = B\Gamma\Delta$, et reliqui anguli reliquis angulis aequales erunt, sub quibus aequalia latera subtendunt [I, 4]. itaque $\angle AEB = \Gamma\Delta B$. uerum etiam $\angle BE\Delta = B\Delta E$, quoniam etiam $BE = B\Delta$ [I, 6]. itaque $\angle AE\Delta = \Gamma\Delta E$. supposuimus autem, angulum $\Gamma\Delta E$ angulis ad A, Γ positis aequalem esse. ergo etiam $\angle AE\Delta$ angulis ad

14. *ἔστιν* B. 16. *ἐπεζεύχθωσαν* B. *ἡ*] *αἱ* B. 17. *εἰσίν* PB. *περιέχουσι* PVbq. 18. *ἐστί* Vq, comp. b. 19. *ABE ἄρα* bq. *ἐστί* PVq, comp. b. 21. *ἐστίν*] om. V. 22. *AEB — ΓΔB*] *ABΓ* P. *ἔστιν* B. 24. *καί*] om. BV.

καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΔ ἄρα γωνία ταῖς πρὸς τοῖς Α, Γ ἴση ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἴση ἐστὶ ταῖς πρὸς τοῖς Α, Γ, Δ γωνίαις. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

η'.

Ἐὰν πενταγώνου ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου τὰς κατὰ τὸ ἑξῆς δύο γωνίας ὑποτείνωσιν εὐθεῖαι, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνουσιν ἀλλήλας, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα ἴσα ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ.

Πενταγώνου γὰρ ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου τοῦ ΑΒΓΔΕ δύο γωνίας τὰς κατὰ τὸ ἑξῆς τὰς πρὸς τοῖς Α, Β ὑποτεινέτωσαν εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΕ τέμνουσαι ἀλλήλας κατὰ τὸ Θ σημεῖον· λέγω, ὅτι ἑκατέρα αὐτῶν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Θ σημεῖον, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα ἴσα ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ.

Περιγεγράφθω γὰρ περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι αἱ ΕΑ, ΑΒ δυσὶ ταῖς ΑΒ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶ καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΒΕ βάσει τῇ ΑΓ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΕ· διπλῆ

---

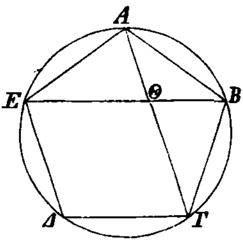
1. *γωνία ἄρα* bq. *τοῖς*] *ταῖς* b. 2. *ἐστίν*] *ἐστί* Vbq. *ἐστί*] *ἐστίν* B. 3. *τοῖς*] *τοι* P. *ἐστί*] om. V. 4. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*] om. Bbq. 7. *ὑποτείνουσιν* Pq. 9. *ἔσται* q. 16. *εἰσίν* B, *εἰσί* V. 20. *εἰσίν* PB. *περιέχουσι* Vbq. 21. *ἐστί* PVq, comp. b. 22. *ἐστί* PVbq. 23. *ἔσονται*] *εἰσίν* q. 25. *ἴση* — p. 270, 1 *ΒΑΘ*] sic b, sed mg. m. 1:

Α, *Γ* positis aequalis est. eadem de causa etiam ∠ *ΑΒΓ* angulis ad *Α*, *Γ*, *Δ* positis aequalis est. ergo pentagonum *ΑΒΓΔΕ* aequiangulum est; quod erat demonstrandum.

VIII.

Si in pentagono aequilatero et aequiangulo sub duobus angulis deinceps positis rectae subtendunt, inter se secundum rationem extremam ac mediam secant, et partes earum maiores aequales sunt lateri pentagoni.

Nam in pentagono aequilatero et aequiangulo *ΑΒΓΔΕ* sub duobus angulis ad *Α*, *Β* deinceps positis rectae *ΑΓ*, *ΒΕ* subtendant inter se secantes in puncto *Θ*. dico, utramque secundum rationem extremam ac mediam sectam esse in puncto *Θ*, et partes earum maiores aequales esse lateri pentagoni.



circumscribatur enim circum *ΑΒΓΔΕ* pentagonum circulus *ΑΒΓΔΕ* [IV, 14]. et quoniam duo latera *ΕΑ*, *ΑΒ* duobus *ΑΒ*, *ΒΓ* aequalia sunt et aequales angulos comprehendunt, erit *ΒΕ* = *ΑΓ*, et △ *ΑΒΕ* = *ΑΒΓ*, et reliqui anguli reliquis aequales erunt singuli singulis, sub quibus aequalia latera subtendunt [I, 4]. itaque ∠ *ΒΑΓ* = *ΑΒΕ*. quare ∠ *ΑΘΕ*

γρ. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΕ καὶ ἡ ΑΘΕ ἄρα διπλῆ ἐστι τῆς ΒΑΘ γωνίας. ἐκτὸς γάρ ἐστι τοῦ ΑΒΘ τριγώνου. 25. ἐστίν] om. Vq. γωνία] om. q. διπλῆ ἄρα] om. q.

ἄρα ἡ ὑπὸ $AΘE$ τῆς ὑπὸ $BAΘ$. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $EAΓ$ τῆς ὑπὸ $BAΓ$ διπλῆ, ἐπειδήπερ καὶ περιφέρεια ἡ $EΔΓ$ περιφερείας τῆς $ΓB$ ἐστι διπλῆ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ $ΘAE$ γωνία τῇ ὑπὸ $AΘE$· ὥστε καὶ ἡ $ΘE$ εὐθεῖα τῇ EA, τουτέστι τῇ AB ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ BA εὐθεῖα τῇ AE, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ABE τῇ ὑπὸ AEB. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ABE τῇ ὑπὸ $BAΘ$ ἐδείχθη ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ BEA ἄρα τῇ ὑπὸ $BAΘ$ ἐστιν ἴση. καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε ABE καὶ τοῦ $ABΘ$ ἐστιν ἡ ὑπὸ ABE· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ BAE γωνία λοιπῇ τῇ ὑπὸ $AΘB$ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ABE τρίγωνον τῷ $ABΘ$ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ EB πρὸς τὴν BA, οὕτως ἡ AB πρὸς τὴν $BΘ$. ἴση δὲ ἡ BA τῇ $EΘ$· ὡς ἄρα ἡ BE πρὸς τὴν $EΘ$, οὕτως ἡ $EΘ$ πρὸς τὴν $ΘB$. μείζων δὲ ἡ BE τῆς $EΘ$· μείζων ἄρα καὶ ἡ $EΘ$ τῆς $ΘB$. ἡ BE ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ $Θ$, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ $ΘE$ ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ $AΓ$ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ $Θ$, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα ἡ $ΓΘ$ ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θʹ.

Ἐὰν ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ καὶ ἡ τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων συντεθῶσιν, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄκρον

---

1. Post $AΘE$ add. ἄρα διπλῆ ἐστι q. Post $BAΘ$ add. γωνίας· ἐκτὸς γάρ ἐστι τοῦ $ABΘ$ τριγώνου Vq, B m. 2. ἔστιν PB. 2. ἐπειδή BV. καί] supra m. 2 B. 3. $EΔΓ$] $EΔΓ$ τῆς q. ἐστιν B. 4. $ΘAE$] $AΘE$ q, $ΘAE''$ b.

$= 2BA\Theta$ [I, 32]. uerum etiam $\angle EA\Gamma = 2BA\Gamma$, quoniam arcus $E\Delta\Gamma$ duplo maior est arcu ΓB [III, 28. VI, 33]. itaque $\angle \Theta AE = A\Theta E$. quare etiam $\Theta E = EA = AB$ [I, 6]. et quoniam $BA = AE$, erit etiam $\angle ABE = AEB$ [I, 5]. demonstrauimus autem, esse $\angle ABE = BA\Theta$. quare etiam $\angle BEA = BA\Theta$. et duorum triangulorum ABE, $AB\Theta$ communis est $\angle ABE$. itaque $\angle BAE = A\Theta B$ [I, 32]. quare trianguli ABE, $AB\Theta$ aequianguli sunt. erit igitur [VI, 4] $EB : BA = AB : B\Theta$. sed $BA = E\Theta$. itaque $BE : E\Theta = E\Theta : \Theta B$. uerum $BE > E\Theta$. itaque etiam $E\Theta > \Theta B$ [V, 14]. ergo BE in Θ secundum rationem extremam ac mediam diuisa est, et maior pars ΘE lateri pentagoni aequalis est. similiter demonstrabimus, etiam $A\Gamma$ in Θ secundum rationem extremam ac mediam diuisam esse, et maiorem eius partem $\Gamma\Theta$ lateri pentagoni aequalem esse; quod erat demonstrandum.

IX.

Lateribus hexagoni et decagoni in eundem circulum inscriptorum coniunctis tota recta secundum rationem

IX. Theon in Ptolem. p. 181.

$A\Theta E$] $EA\Theta$ q, $A\Theta E'$ b. 5. τουτέστιν B. 6. BA] AB bq. ἐστί] om. q, ἐστίν B. 7. τῇ ὑπὸ AEB] mg. m. 2 B. ἀλλ' bq. $BA\Theta$] $AB\Theta$ B, corr. m. 2. 8. ἄρα] om. P, ἄρα γωνία V. ἐστιν] om. V. 9. ἴση] in ras. m. 1 b. 10. BAE] e corr. V. 11. $AB\Theta$ b. ἐστί] om. V. 12. $AB\Theta$] $B\Theta$ in ras. V. 16. ἄρα] ἐστί comp. V. $E\Theta$] corr. in EB b et B m. 2. 18 ἐστίν PB. 19. ΓA q. 21. ἐστίν B. 25. τῶν] corr. ex τόν m. 2 P. τόν] corr. ex τῶν m. 2 P. αὐτόν] om. b.

καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρά.

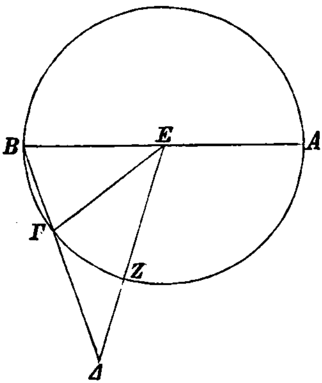
Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ τῶν εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον ἐγγραφομένων σχημάτων, δεκαγώνου μὲν ἔστω πλευρὰ ἡ ΒΓ, ἑξαγώνου δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἔστωσαν ἐπ' εὐθείας· λέγω, ὅτι ἡ ὅλη εὐθεῖα ἡ ΒΔ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΓΔ.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ, καὶ διήχθω ἡ ΒΕ ἐπὶ τὸ Α. ἐπεὶ δεκαγώνου ἰσοπλεύρου πλευρά ἐστιν ἡ ΒΓ, πενταπλασίων ἄρα ἡ ΑΓΒ περιφέρεια τῆς ΒΓ περιφερείας· τετραπλασίων ἄρα ἡ ΑΓ περιφέρεια τῆς ΓΒ. ὡς δὲ ἡ ΑΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ὑπὸ ΑΕΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΓΕΒ· τετραπλασίων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῆς ὑπὸ ΓΕΒ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΓΒ, ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΕΓ γωνία διπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΕΓΒ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ εὐθεῖα τῇ ΓΔ· ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ ἑξαγώνου πλευρᾷ τοῦ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον [ἐγγραφομένου]· ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΕΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΕ γωνίᾳ· διπλασία ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΓΒ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΓ. ἀλλὰ τῆς ὑπὸ ΕΓΒ διπλασία ἐδείχθη ἡ ὑπὸ ΑΕΓ· τετραπλασία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῆς ὑπὸ ΕΔΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ τῆς ὑπὸ ΒΕΓ τετραπλασία ἡ ὑπὸ ΑΕΓ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΔΓ

1. καί] (prius) corr. ex κατά m. rec. P. 7. Post τέτμηται add. κατὰ τὸ Γ V, B m. 2. 11. ΕΒ b. Ante ἐπεί add. καί BVq, P m. 2. τοῦ δεκαγ. q. 12. ΑΓΒ] in ras. m. 2 V, Β add. m. rec. b. 13. ΒΓ — 14. τῆς] om. b. 15. ΑΕΓ] Γ corr. ex Β m. rec. b. 16. ἄρα ἐστίν P. 17. ἴση ἐστίν P. 18. ΑΕΓ] ΕΑΓ B, corr. m. 2. διπλασίων V.

extremam ac mediam diuisa est, et maior eius pars latus est hexagoni.

Sit circulus $AB\Gamma$, et figurarum in circulo $AB\Gamma$ inscriptarum decagoni latus sit $B\Gamma$, hexagoni autem $\Gamma\Delta$, et in eadem recta positae sint. dico, totam rectam $B\Delta$ secundum rationem extremam ac mediam diuisam esse, et maiorem partem esse $\Gamma\Delta$.



sumatur enim centrum circuli E punctum [III, 1], et ducantur EB, $E\Gamma$, $E\Delta$, et BE ad A producatur. quoniam $B\Gamma$ latus est decagoni aequilateri, arcus $A\Gamma B$ quintuplo maior est arcu $B\Gamma$. itaque arcus $A\Gamma$ quadruplo maior est arcu ΓB. sed ut arcus $A\Gamma$ ad arcum ΓB, ita angulus $AE\Gamma$ ad angulum ΓEB [VI, 33]. itaque $\angle AE\Gamma = 4\Gamma EB$. et quoniam $\angle EB\Gamma = E\Gamma B$ [I, 5], erit $\angle AE\Gamma = 2E\Gamma B$ [I, 32]. et quoniam $E\Gamma = \Gamma\Delta$ [IV, 15 coroll.] (nam utraque lateri hexagoni in circulo $AB\Gamma$ inscripti aequalis est), erit etiam $\angle \Gamma E\Delta = \Gamma\Delta E$ [I,5]. itaque $\angle E\Gamma B = 2E\Delta\Gamma$ [I, 32]. demonstrauimus autem, esse etiam $\angle AE\Gamma = 2E\Gamma B$. itaque $\angle AE\Gamma = 4E\Delta\Gamma$. demonstrauimus

ἐστίν B. 19. $E\Gamma$] corr. ex $B\Gamma$ m. 2 B. τῇ] τῆς b. 20. ἐστίν B. 21. ἐγγραφομένου] om. P. ἐστίν B. ἡ γωνία ἡ V. 22. γωνίᾳ] om. V. διπλῆ b. 23. $E\Delta\Gamma$ γωνίας b. $E\Gamma B$] B in ras. V; supra scr. $E\Delta\Gamma$ m. 2 B. 24. $AE\Gamma$] A corr. ex Δ b. 25. $AE\Gamma$] A corr. ex Δ m. 2 P.

τῇ ὑπὸ *ΒΕΓ*. κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων, τοῦ τε *ΒΕΓ* καὶ τοῦ *ΒΕΔ*, ἡ ὑπὸ *ΕΒΔ* γωνία· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ *ΒΕΔ* τῇ ὑπὸ *ΕΓΒ* ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ *ΕΒΔ* τρίγωνον τῷ *ΕΒΓ* τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ *ΔΒ* πρὸς τὴν *ΒΕ*, οὕτως ἡ *ΕΒ* πρὸς τὴν *ΒΓ*. ἴση δὲ ἡ *ΕΒ* τῇ *ΓΔ*. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ *ΒΔ* πρὸς τὴν *ΔΓ*, οὕτως ἡ *ΔΓ* πρὸς τὴν *ΓΒ*. μείζων δὲ ἡ *ΒΔ* τῆς *ΔΓ*· μείζων ἄρα καὶ ἡ *ΔΓ* τῆς *ΓΒ*. ἡ *ΒΔ* ἄρα εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται [κατὰ τὸ *Γ*], καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα αὐτῆς ἐστιν ἡ *ΔΓ*· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ι'.

Ἐαν εἰς κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.

Ἔστω κύκλος ὁ *ΑΒΓΔΕ*, καὶ εἰς τὸν *ΑΒΓΔΕ* κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθω τὸ *ΑΒΓΔΕ*. λέγω, ὅτι ἡ τοῦ *ΑΒΓΔΕ* πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου πλευρὰν τῶν εἰς τὸν *ΑΒΓΔΕ* κύκλον ἐγγραφομένων.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ *Ζ* σημεῖον, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ *ΑΖ* διήχθω ἐπὶ τὸ *Η* σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ *ΖΒ*, καὶ ἀπὸ τοῦ *Ζ* ἐπὶ τὴν *ΑΒ* κάθετος ἤχθω ἡ *ΖΘ*, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ *Κ*, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ *ΑΚ*, *ΚΒ*, καὶ πάλιν ἀπὸ τοῦ *Ζ* ἐπὶ τὴν *ΑΚ* κάθετος ἤχθω ἡ *ΖΛ*, καὶ διήχθω ἐπὶ το

---

2. *ΒΕΓ*] *ΒΕΔ* P. *ΒΕΔ*] *ΒΕΓ* P. 4. ἐστί] om. V. 5. *ΔΒ*] *ΒΔ* B. 6. *ΓΔ*] *Γ* supra scr. m. 1 V, *ΔΓ* P. 7. τὴν *ΓΒ*] *ΓΒ* Bq. 8. *ΔΓ*] (prius) *ΑΓ* b, *ΓΔ* B. 9. ἄρα εὐθεῖα]

autem, esse etiam $A E \Gamma = 4 B E \Gamma$. ergo $\angle E \Delta \Gamma = B E \Gamma$. duorum autem triangulorum $B E \Gamma$ et $B E \Delta$ communis est angulus $E B \Delta$. itaque etiam $\angle B E \Delta = E \Gamma B$ [I, 32]. itaque trianguli $E B \Delta$, $E B \Gamma$ aequianguli sunt. quare erit [VI, 4] $\Delta B : B E = E B : B \Gamma$. uerum $E B = \Gamma \Delta$. itaque $B \Delta : \Delta \Gamma = \Delta \Gamma : \Gamma B$. uerum $B \Delta > \Delta \Gamma$. itaque etiam $\Delta \Gamma > \Gamma B$ [V, 14]. ergo recta $B \Delta$ secundum rationem extremam ac mediam diuisa est, et maior pars eius est $\Delta \Gamma$; quod erat demonstrandum.

X.

Si in circulum pentagonum aequilaterum inscribitur, quadratum lateris pentagoni aequale est quadratis laterum hexagoni et decagoni in eodem circulo inscriptorum.

Sit circulus $A B \Gamma \Delta E$, et in circulum $A B \Gamma \Delta E$ pentagonum aequilaterum inscribatur $A B \Gamma \Delta E$. dico, quadratum lateris pentagoni $A B \Gamma \Delta E$ aequale esse quadratis laterum hexagoni et decagoni in circulo $A B \Gamma \Delta E$ inscriptorum.

sumatur enim centrum circuli Z punctum [III, 1], et ducta $A Z$ ad H punctum producatur, et ducatur $Z B$, et a Z ad $A B$ perpendicularis ducatur $Z \Theta$, et ad K producatur, et ducantur $A K$, $K B$, et rursus a Z ad $A K$ perpendicularis ducatur $Z \Lambda$, et ad M pro-

X. Pappus V p. 440, 13. Theon in Ptolem. p. 181.

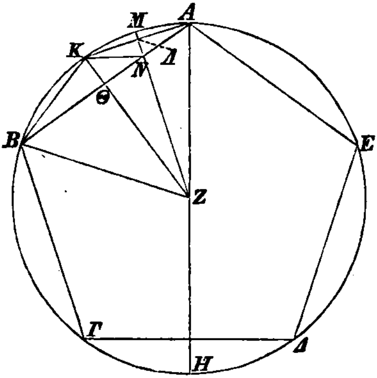
mg. m. 1 V. 10. *κατὰ τὸ Γ*] om. P. *αὐτῆς τμῆμα* P. *αὕτη* q. 11. $\Delta \Gamma$] Δ corr. ex Γ m. 1 b. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*] om. q, o)— b; *ὅπερ ἔδει:* ∼ B. 15. *τῶν*] om. V. 17. *εἰς — κύκλον*] om. q, *εἰς αὐτόν* V, *κύκλον* om. Bb. 24. *καί — Z*] bis b.

Μ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΝ. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒΓΗ περιφέρεια τῇ ΑΕΔΗ περιφερείᾳ, ὧν ἡ ΑΒΓ τῇ ΑΕΔ ἐστιν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΓΗ περιφέρεια λοιπῇ τῇ ΗΔ ἐστιν ἴση. πενταγώνου δὲ ἡ ΓΔ· δεκαγώνου ἄρα ἡ ΓΗ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΑ τῇ ΖΒ, καὶ κάθετος ἡ ΖΘ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΖΚ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΖΒ. ὥστε καὶ περιφέρεια ἡ ΑΚ τῇ ΚΒ ἐστιν ἴση· διπλῆ ἄρα ἡ ΑΒ περιφέρεια τῆς ΒΚ περιφερείας· δεκαγώνου ἄρα πλευρά ἐστιν ἡ ΑΚ εὐθεῖα. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΑΚ τῆς ΚΜ ἐστι διπλῆ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΒ περιφέρεια τῆς ΒΚ περιφερείας, ἴση δὲ ἡ ΓΔ περιφέρεια τῇ ΑΒ περιφερείᾳ, διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΓΔ περιφέρεια τῆς ΒΚ περιφερείας. ἔστι δὲ ἡ ΓΔ περιφέρεια καὶ τῆς ΓΗ διπλῆ· ἴση ἄρα ἡ ΓΗ περιφέρεια τῇ ΒΚ περιφερείᾳ. ἀλλὰ ἡ ΒΚ τῆς ΚΜ ἐστι διπλῆ, ἐπεὶ καὶ ἡ ΚΑ· καὶ ἡ ΓΗ ἄρα τῆς ΚΜ ἐστι διπλῆ. ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ΓΒ περιφέρεια τῆς ΒΚ περιφερείας ἐστὶ διπλῆ· ἴση γὰρ ἡ ΓΒ περιφέρεια τῇ ΒΑ. καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΗΒ περιφέρεια τῆς ΒΜ ἐστι διπλῆ· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΖΒ γωνίας τῆς ὑπὸ ΒΖΜ [ἐστι] διπλῆ. ἔστι δὲ ἡ ὑπὸ ΗΖΒ καὶ τῆς ὑπὸ ΖΑΒ διπλῆ· ἴση γὰρ ἡ ὑπὸ ΖΑΒ τῇ ὑπὸ ΑΒΖ. καὶ ἡ ὑπὸ ΒΖΝ ἄρα τῇ ὑπὸ ΖΑΒ ἐστιν ἴση. κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων, τοῦ τε ΑΒΖ καὶ τοῦ ΒΖΝ, ἡ

---

1. καὶ ἐπεὶ BV. 4. ΔΗ V. δε-] supra m. 1 b. 5. ἄρα] ἔτι V. 6. ΑΖΚ] Κ supra m. 1 V. 7. ΚΖΒ γωνίᾳ q. 9. ΑΚ] Α corr. ex Β V, ΒΚ P. δεκαγώνου — 11. περιφερείας] bis V (in rep. ΑΚ). 9. διά] τῆς ΒΚ. διά q. 11. ΚΒ B. 12. ΓΔ] corr. ex ΓΒ m. 2 B. 13. ἔστιν B. 16. ἔστιν B. ἄρα] om. b. 17. ἐστιν B. 18. ἐστίν B. 19. τῇ] corr. ex τῆς B. ΒΑ περιφερείᾳ V. 20. ΗΞΒ q. 21. Β''Ζ'Μ b. ἐστι] om. P; ἐστιν B. ἔστιν B. 22. ΑΒΖ]

ducatur, et ducatur KN. quoniam arcus $AB\Gamma H$ arcui $AE\Delta H$ aequalis est, quorum $AB\Gamma = AE\Delta$, erit $\Gamma H = H\Delta$. $\Gamma\Delta$ autem pentagoni est; itaque ΓH est decagoni. et quoniam $ZA = ZB$, et $Z\Theta$ perpendicularis est, erit etiam $\angle\, AZK = KZB$ [I, 5. I, 26]. quare etiam arcus AK arcui KB aequalis est [III, 26]. itaque arcus AB duplo maior est arcu BK. quare recta AK latus decagoni est. eadem de causa etiam AK duplo maior est arcu KM. et quoniam arcus AB duplo maior est arcu BK, et arcus $\Gamma\Delta$ arcui AB aequalis, etiam arcus $\Gamma\Delta$ arcu BK duplo maior erit. uerum arcus $\Gamma\Delta$ etiam arcu ΓH duplo maior est. itaque arcus ΓH arcui BK aequalis est. sed arcus BK arcu KM duplo maior est, quoniam arcus KA eo duplo est maior. itaque etiam ΓH arcu KM duplo maior est. uerum etiam arcus ΓB arcu BK duplo maior est; nam arcus ΓB arcui BA aequalis est. quare totus arcus HB arcu BM duplo maior est. itaque etiam $\angle\, HZB = 2\, BZM$ [VI, 33]. uerum etiam $\angle\, HZB = 2\, ZAB$; nam $ZAB = ABZ$. itaque $\angle\, BZN = ZAB$. duorum autem triangulorum ABZ, BZN communis



---

corr. ex AZB m. rec. b. 23. BZN] N corr. ex H m. 2 B; ZBN b, corr. m. rec. 24. BZN] N corr. ex H m. 2 B.

ὑπὸ ABZ γωνία· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ AZB λοιπῇ τῇ ὑπὸ BNZ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ABZ τρίγωνον τῷ BZN τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ AB εὐθεῖα πρὸς τὴν BZ, οὕτως ἡ ZB πρὸς τὴν BN· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ABN ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ BZ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $AΛ$ τῇ $ΛK$, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ $ΛN$, βάσις ἄρα ἡ KN βάσει τῇ AN ἐστιν ἴση· καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $ΛKN$ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ $ΛAN$ ἐστιν ἴση. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ $ΛAN$ τῇ ὑπὸ KBN ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ $ΛKN$ ἄρα τῇ ὑπὸ KBN ἐστιν ἴση. καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε AKB καὶ τοῦ AKN ἡ πρὸς τῷ A. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ AKB λοιπῇ τῇ ὑπὸ KNA ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ KBA τρίγωνον τῷ KNA τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ BA εὐθεῖα πρὸς τὴν AK, οὕτως ἡ KA πρὸς τὴν AN· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν BAN ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AK. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ABN ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς BZ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ABN μετὰ τοῦ ὑπὸ BAN, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς BA, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς BZ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AK. καί ἐστιν ἡ μὲν BA πενταγώνου πλευρά, ἡ δὲ BZ ἑξαγώνου, ἡ δὲ AK δεκαγώνου.

Ἡ ἄρα τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ια'.

Ἐὰν εἰς κύκλον ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ

---

2. BZN P, et B, sed corr. m. rec. 4. ZB] BZ P. 5. AB, BN Vq, b e corr. m. rec. ἐστίν P. τῆς BZ

est $\angle ABZ$. itaque erit $\angle AZB = BNZ$ [I, 32]. itaque trianguli ABZ, BZN aequianguli sunt. erit igitur [VI, 4] $AB : BZ = ZB : BN$. quare $AB \times BN = BZ^2$ [VI, 17]. rursus quoniam $A\Lambda = \Lambda K$, et ΛN communis est et perpendicularis, erit $KN = AN$ et $\angle \Lambda KN = \Lambda AN$ [I, 4]. sed $\angle \Lambda AN = KBN$ [III, 29. I, 5]. quare etiam $\angle \Lambda KN = KBN$. et duorum triangulorum AKB, AKN communis est angulus ad A positus. erit igitur $\angle AKB = KNA$ [I, 32]. quare trianguli KBA, KNA aequianguli sunt. erit igitur [VI, 4] $BA : AK = KA : AN$. itaque $BA \times AN = AK^2$ [VI, 17]. demonstrauimus autem, esse etiam $AB \times BN = BZ^2$. ergo $AB \times BN + BA \times AN = BZ^2 + AK^2 = BA^2$ [II, 2]. et BA latus est pentagoni, BZ hexagoni [IV, 15 coroll.], AK decagoni.

Ergo quadratum lateris pentagoni aequale est quadratis laterum hexagoni et decagoni in eodem circulo inscriptorum; quod erat demonstrandum.

XI.

Si in circulum, cuius diametrus rationalis est, pentagonum aequilaterum inscribitur, latus pentagoni recta est irrationalis minor quae uocatur.

Vq. 7. *ἄρα καί* P. AN] A corr. ex Λ m. 2 B. 10. *καὶ ἡ — ἐστιν ἴση*] bis P, corr. m. 1; supra m. 1 V. *ἐστιν ἴση*] *ἄρα ἴση ἐστί* V. 11. *τε*] om. P. AKB] ABK P. 12. *ἡ πρὸς τῷ* A] om. V; *ἡ ὑπὸ* NAK Theon (Bbq). 13. *ἐστίν* B. KBA'' b. 14. KNA' b. 15. *εὐθεῖα*] om. q. 16. BA, AN q et e corr. m. rec. b. 17. AK] corr. ex ANK m. rec. b. AB, BN Vq et e corr. m. rec. b; item lin. 18. 18. BA, AN Vq et corr. ex ABN m. rec. b. 19. *ὅπερ ἐστίν* P. BZ] corr. ex ZB V. 21. AK] supra scr. Δ m. 1 b. 25. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*] om. bq.

πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Εἰς γὰρ κύκλον τὸν ΑΒΓΔΕ ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθω τὸ ΑΒΓΔΕ· λέγω, ὅτι ἡ τοῦ [ΑΒΓΔΕ] πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ζ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΖΒ καὶ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Η, Θ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ, καὶ κείσθω τῆς ΑΖ τέταρτον μέρος ἡ ΖΚ. ῥητὴ δὲ ἡ ΑΖ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΖΚ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΖ ῥητή· ὅλη ἄρα ἡ ΒΚ ῥητή ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓΗ περιφέρεια τῇ ΑΔΗ περιφερείᾳ, ὧν ἡ ΑΒΓ τῇ ΑΕΔ ἐστιν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΓΗ λοιπῇ τῇ ΗΔ ἐστιν ἴση. καὶ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΑΔ, συνάγονται ὀρθαὶ αἱ πρὸς τῷ Λ γωνίαι, καὶ διπλῆ ἡ ΓΔ τῆς ΓΛ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς τῷ Μ ὀρθαί εἰσιν, καὶ διπλῆ ἡ ΑΓ τῆς ΓΜ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΛΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΜΖ, κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε ΑΓΛ καὶ τοῦ ΑΜΖ ἡ ὑπὸ ΛΑΓ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΛ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΜΖΑ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓΛ τρίγωνον τῷ ΑΜΖ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΛΓ πρὸς ΓΑ, οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς ΖΑ· καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ διπλάσια· ὡς ἄρα ἡ τῆς ΛΓ διπλῆ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ τῆς ΜΖ διπλῆ πρὸς τὴν

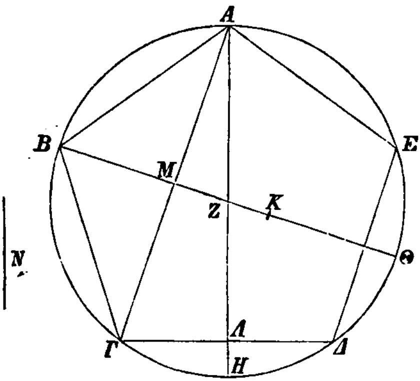
---

1. ἄλογος] corr. ex ἀνάλογον m. rec. P. 5. ΑΒΓΔΕ] (alt.) om. P. 6. Ante ἄλογος eras. ἀν- P. 7. τό] (alt.) corr. ex τοῦ P. 11. ἔστιν B. 12. ἐστι Vq, comp. b. ΑΒΓΗ bq. 13. ΑΔΗ] ΑΕΔΗ bq. ΑΕΔ] ΕΔ in ras. m. 2 V. ἴση ἐστίν P. 14. ἄρα] om. q. 15. τῷ] τό bq. 16. ΔΓ P. 17. τῷ] τό q, τῷ supra scr. ο m. 1 b. Post Μ add. γωνίαι m. rec. P. εἰσι Vbq. διπλῆ ἄρα ἡ P.

Nam in circulum $AB\Gamma\Delta E$, cuius diametrus rationalis sit, pentagonum aequilaterum inscribatur $AB\Gamma\Delta E$. dico, latus pentagoni rectam esse irrationalem minorem quae uocetur.

sumatur enim centrum circuli Z punctum [III, 1], et ducantur AZ, ZB et producantur ad puncta H, Θ, et ducatur $A\Gamma$, et ponatur $ZK = \frac{1}{4} AZ$. AZ autem rationalis est; itaque etiam ZK rationalis est. uerum etiam BZ rationalis est. itaque tota BK rationalis est. et quoniam arcus $A\Gamma H$ arcui $A\Delta H$ aequalis est, quorum $AB\Gamma = AE\Delta$, erit $\Gamma H = H\Delta$. et ducta $A\Delta$ concludimus, angulos ad A positos rectos esse, et $\Gamma\Delta = 2\Gamma\Lambda$ [I, 4]. eadem de causa etiam anguli ad M positi recti sunt, et

$$A\Gamma = 2\Gamma M.$$



iam quoniam $\angle \Lambda A\Gamma = AMZ$, et duorum triangulorum $A\Gamma\Lambda$, AMZ communis est $\angle \Lambda A\Gamma$, erit $\angle A\Gamma\Lambda = MZA$ [I, 32]. itaque trianguli $A\Gamma\Lambda$, AMZ aequianguli sunt. erit igitur [VI, 4] $\Lambda\Gamma : \Gamma A = MZ : ZA$. et sumpto duplo praecedentium erit $2\Lambda\Gamma : \Gamma A = 2MZ : ZA$. sed $2MZ$

$A\Gamma$] supra scr. Δ m. 1 b. 19. τῶν] corr. ex ἡ m. 1 b. $A\Gamma\Lambda$] $\Lambda A\Gamma$ BV. 20. $\Lambda A\Gamma$] ΛA e corr. V. $A\Gamma\Lambda$] corr. ex $\Lambda A\Gamma$ m. rec. B. 23. $\Lambda\Gamma$] $\Gamma\Lambda$ Vq. τὴν ΓΛ V. τὴν ZΛ V.

ΖΑ. ὡς δὲ ἡ τῆς ΜΖ διπλῆ πρὸς τὴν ΖΑ, οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ΖΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ τῆς ΑΓ διπλῆ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ΖΑ. καὶ τῶν ἑπομένων τὰ ἡμίσεα· ὡς ἄρα ἡ τῆς ΑΓ διπλῆ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ΓΑ, οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὸ τέταρτον τῆς ΖΑ. καί ἐστι τῆς μὲν ΑΓ διπλῆ ἡ ΔΓ, τῆς δὲ ΓΑ ἡμίσεια ἡ ΓΜ, τῆς δὲ ΖΑ τέταρτον μέρος ἡ ΖΚ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΜ, οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ΖΚ. συνθέντι καὶ ὡς συναμφότερος ἡ ΔΓΜ πρὸς τὴν ΓΜ, οὕτως ἡ ΜΚ πρὸς ΚΖ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΓΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΜ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ. καὶ ἐπεὶ τῆς ὑπὸ δύο πλευρας τοῦ πενταγώνου ὑποτεινούσης, οἷον τῆς ΑΓ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμα ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ, τουτέστι τῇ ΔΓ, τὸ δὲ μεῖζον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ὅλης, καί ἐστιν ὅλης τῆς ΑΓ ἡμίσεια ἡ ΓΜ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΓΜ ὡς μιᾶς πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΜ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓΜ ὡς μιᾶς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΜ, οὕτως ἐδείχθη τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ· πενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΖ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ· ῥητὴ γὰρ ἡ διάμετρος· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΚ [δυνάμει μόνον]. καὶ ἐπεὶ τετραπλασία ἐστὶν ἡ ΒΖ τῆς ΖΚ, πενταπλασία ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΚ τῆς ΚΖ· εἰκοσιπενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ τοῦ

1. ὡς δέ] ἀλλ' ὡς BVb. 2. τῆς ΑΓ] τοῦ ΑΓ V; supra scr. Α m. 1 b. 4. ἡμίσεια P et b, corr. in ἡμίση m. 1; ἡμίση

$: ZA = MZ : \frac{1}{2}ZA$. est igitur $2\varDelta\Gamma : \Gamma A = MZ : \frac{1}{2}ZA$. et sumpto dimidio sequentium erit $2\varDelta\Gamma : \frac{1}{2}\Gamma A = MZ : \frac{1}{4}ZA$. et $2\varDelta\Gamma = \varDelta\Gamma$, $\frac{1}{2}\Gamma A = \Gamma M$, $\frac{1}{4}ZA = ZK$. itaque $\varDelta\Gamma : \Gamma M = MZ : ZK$. et componendo [V, 18] $\varDelta\Gamma + \Gamma M : \Gamma M = MK : KZ$. quare erit $(\varDelta\Gamma + \Gamma M)^2 : \Gamma M^2 = MK^2 : KZ^2$. et quoniam recta sub duobus lateribus pentagoni subtendenti uelut $A\Gamma$ secundum rationem extremam ac mediam diuisa maior pars lateri pentagoni aequalis est [prop. VIII], h. e. $\varDelta\Gamma$, et quadratum maioris partis adiuncta dimidia parte totius aequale est quadrato dimidiae totius quinquies sumpto [prop. I], et $\Gamma M = \frac{1}{2}A\Gamma$, erit $(\varDelta\Gamma + \Gamma M)^2 = 5\Gamma M^2$. demonstrauimus autem, esse $(\varDelta\Gamma + \Gamma M)^2 : \Gamma M^2 = MK^2 : KZ^2$. itaque $MK^2 = 5KZ^2$. uerum KZ^2 rationale est; nam diametrus rationalis est. itaque etiam MK^2 rationale est. MK igitur rationalis[1]) est. et quoniam est $BZ = 4ZK$, erit $BK = 5KZ$. itaque $BK^2 = 25KZ^2$. uerum $MK^2 = 5KZ^2$. itaque BK^2

---

1) Uerba *δυνάμει μόνον* lin. 26, quae huc nihil pertinent, glossema sapiunt.

BV. 5. Supra $A\Gamma$ scr. A m. 1 b. 7. $A\Gamma$ P. *ἡμισείας* B, corr. m. 2. 10. $\varDelta\Gamma M$] M supra scr. m. 2 B. 11. *τὴν* KZ bq, ZK B, *τὴν* ZK V. 12. $\varDelta\Gamma M$] M supra scr. m. 2 B. *τῆς* ΓM V. 13. *τῆς* KZ V. 15. *τετμημένης* Theon (BVbq). 16. *τουτέστιν* PB. 17. *προσ-* in ras. m. 1 b. 19. *ἐστιν*] *ἐστι τῆς* q. 20. *τῆς*] om. q. $\varDelta\Gamma$ supra scr. M m. 2 B; item lin. 21. *ὡς ἀπό* q. *ἐστιν* P. 25. *ἄρα ἐστι* P. *ῥητή* — 26. *μόνον*] *πρὸς τὸ ἀπὸ* KZ q. 26. *ἐστίν*] *ἐστὶ καί* V. *δυνάμει μόνον*] *λόγον γὰρ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν τὸ ἀπὸ τῆς* MK *πρὸς τὸ ἀπὸ* (*τῆς* add. V) KZ Theon (BVq). 27. *ἐστίν*] (alt.) om. V. 28. Post KZ in P del. m. 1: *εἰκοσιπενταπλά* (*-σιον* postea add.) *ἄρα ἐστὶν ἡ* BK *τῆς* BZ.

ἀπὸ τῆς KZ. πενταπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς MK τοῦ ἀπὸ τῆς KZ· πενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς BK τοῦ ἀπὸ τῆς KM· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς BK πρὸς τὸ ἀπὸ KM λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ BK τῇ KM μήκει. καί ἐστι ῥητὴ ἑκατέρα αὐτῶν. αἱ BK, KM ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἐὰν δὲ ἀπὸ ῥητῆς ῥητὴ ἀφαιρεθῇ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν ἀποτομή· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ MB, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ MK. λέγω δή, ὅτι καὶ τετάρτη. ᾧ δὴ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς BK τοῦ ἀπο τῆς KM, ἐκείνῳ ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς N· ἡ BK ἄρα τῆς KM μεῖζον δύναται τῇ N. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ KZ τῇ ZB, καὶ συνθέντι σύμμετρός ἐστιν ἡ KB τῇ ZB. ἀλλὰ ἡ BZ τῇ $B\Theta$ σύμμετρός ἐστιν· καὶ ἡ BK ἄρα τῇ $B\Theta$ σύμμετρός ἐστιν. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς BK τοῦ ἀπο τῆς KM, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς BK πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς KM λόγον ἔχει, ὃν $\bar{\varepsilon}$ πρὸς ἕν. ἀναστρέψαντι ἄρα το ἀπὸ τῆς BK πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς N λόγον ἔχει, ὃν $\bar{\varepsilon}$ πρὸς $\bar{\delta}$, οὐχ ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ BK τῇ N· ἡ BK ἄρα τῆς KM μεῖζον δύναται τῷ ἀπο ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ BK τῆς προσαρμοζούσης τῆς KM μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ὅλη ἡ BK σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ $B\Theta$, ἀποτομὴ ἄρα τετάρτη ἐστὶν ἡ MB. τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστιν, καὶ ἡ δυνα-

2. BK] B corr. ex Γ m. 1 b. 3. KM] (alt.) MK b; τῆς MK Bq, τῆς KM V. 5. ἐστίν] om. V. KB P. 6. ἐστιν PB.

$= 5KM^2$. itaque BK^2 ad KM^2 rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque BK, KM longitudine incommensurabiles sunt. et utraque earum rationalis est. itaque BK, KM rationales sunt potentia solum commensurabiles. sin a recta rationali rationalis aufertur toti potentia solum commensurabilis, quae relinquitur, irrationalis est, scilicet apotome. itaque MB apotome est et ei congruens MK [X, 73]. iam dico, eandem quartam esse. sit enim $N^2 = BK^2 \div KM^2$. itaque $BK^2 = KM^2 + N^2$. et quoniam KZ, ZB commensurabiles sunt, etiam componendo KB, ZB commensurabiles sunt. uerum BZ, $B\Theta$ commensurabiles sunt. itaque etiam BK, $B\Theta$ commensurabiles. et quoniam $BK^2 = 5KM^2$, erit $BK^2 : KM^2 = 5 : 1$. conuertendo igitur [V, 19 coroll.] $BK^2 : N^2 = 5 : 4$, quae non est ratio quadrati ad quadratum. itaque BK, N incommensurabiles sunt [X, 9]. quadratum igitur rectae BK quadratum rectae KM excedit quadrato rectae ei incommensurabilis. iam quoniam quadratum totius BK quadratum rectae congruentis KM excedit quadrato rectae ei incommensurabilis, et tota BK et $B\Theta$ commensurabiles sunt, MB quarta apotome erit [X deff. tert. 4].

KM] *K* corr. ex *M* m. 1 V. 7. *εἰσιν* B. 9. *ἔστι καλεῖται δέ* bq. *ἀποτομή*] om. BV. 10. *ἐστίν*] om. V. 11. *δή*] *δέ* B. *δή*] *γάρ* BV. *ἔστιν* P. *τῆς*] om. q. 14. *ZB*] Z in ras. m. 1 P. 15. *ZB*] *BZ* Bq et supra scr. Δ b. 16. *ἔστι* PBVq, comp. b. Dein add. *μήκει* BV. *καί — ἔστιν*] mg. m. 2 ins. ante *μήκει* B. *ἔστι* Vq, comp. Bb. 18. *τό*] (alt.) *τόν* V. 19. *ε̄*] *πέντε* q. *ἕν*] *ᾱ* BV, *τὸν ᾱ* b. 20. *τό*] *τόν* V. 21. *ὅν*] *ὁ* b. 23. *συμμέτρου* q et P, sed corr. m. rec. 25. Ante *BK* eras. *K* P. *ἀσύμμετρος* B. 27. *BM* P. 28. *ἔστι* Vq, comp. b.

μένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν, καλεῖται δὲ ἐλάττων. δύναται δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΘΒΜ ἡ ΑΒ διὰ τὸ ἐπιζευγνυμένης τῆς ΑΘ ἰσογώνιον γίνεσθαι τὸ ΑΒΘ τρίγωνον τῷ ΑΒΜ τριγώνῳ καὶ εἶναι ὡς τὴν ΘΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΜ.

Ἡ ἄρα ΑΒ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιβ΄.

Ἐὰν εἰς κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ τριγώνου πλευρὰ δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ εἰς αὐτὸν τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθω τὸ ΑΒΓ· λέγω, ὅτι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου μία πλευρὰ δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΔ διήχθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΕ. καὶ ἐπεὶ ἰσόπλευρόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἡ ΒΕΓ ἄρα περιφέρεια τρίτον μέρος ἐστὶ τῆς τοῦ ΑΒΓ κύκλου περιφερείας. ἡ ἄρα ΒΕ περιφέρεια ἕκτον ἐστὶ μέρος τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας· ἑξαγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΕ εὐθεῖα· ἴση ἄρα ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῇ ΔΕ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΕ τῆς ΔΕ, τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τοῦ ἀπὸ

---

1. *ἐστι* BVq, comp. b. 2. *τό*] om. B, add. mg. m. 2. *ΘΒ, ΒΜ* Vq. 3. *γίγνεσθαι* V. *ΑΘΒ* q. 4. *τριγώνῳ*] om. b. *ΒΘ* q. 5. *τήν*] (prius) corr. ex *ἡ* m. 1 P. 6. *ἐστιν*] om. P. 7. *πλευρὰ ἐλάττων* b. 11. *ἐστίν* P. 13. *ἐγεγράφθω* (sic) *ἰσόπλευρον* b, supra scr. *β — α*. *ἡ τοῦ* BV. 15. *ΑΒΓ*] om. V. 16. *ΑΒΓ*] om. BV. 20. *κύκλου*] om. q. 22. *ἑξάγωνος* B. Post prius *ἄρα* add. *πλευρά* V. *ἐστίν* PB.

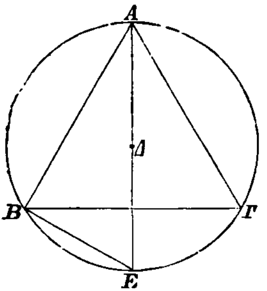
rectangulum autem rationali et quarta apotome comprehensum irrationale est, et recta, cuius quadratum ei aequale est, irrationalis est uocaturque minor [X, 94]. uerum $AB^2 = \Theta B \times BM$, quia ducta $A\Theta$ trianguli $AB\Theta$, ABM aequianguli fiunt [VI, 8], et est $\Theta B : BA = AB : BM$ [VI, 4].

Ergo AB latus pentagoni irrationalis est minor quae uocatur; quod erat demonstrandum.

XII.

Si in circulum triangulus aequiangulus inscribitur, latus trianguli potentia triplo maius est radio circuli.

Sit circulus $AB\Gamma$, et in eum triangulus aequiangulus $AB\Gamma$ inscribatur [IV, 2]. dico, latus quoduis trianguli $AB\Gamma$ potentia triplo maius esse radio circuli $AB\Gamma$.



sumatur enim Δ centrum circuli $AB\Gamma$ [III, 1], et ducta $A\Delta$ ad E producatur, et ducatur BE. et quoniam triangulus $AB\Gamma$ aequiangulus est, arcus $BE\Gamma$ tertia pars est ambitus circuli $AB\Gamma$. itaque arcus BE sexta pars est ambitus circuli.[1]) itaque hexagoni est recta BE. quare $BE = \Delta E$ [IV, 15 coroll.]. et quoniam $AE = 2\Delta E$, erit $AE^2 = 4\Delta E^2 = 4BE^2$.

XII. Theon. in Ptolem. p. 183.

1) Nam $A\Gamma E = ABE$ et arc. $A\Gamma = AB$.

τῆς ΕΔ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΕ. ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΕ. διελόντι ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΒΕ. ἴση δὲ ἡ ΒΕ τῇ ΔΕ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ.

Ἡ ἄρα τοῦ τριγώνου πλευρὰ δυνάμει τριπλασία ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου [τοῦ κύκλου]· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιγ'.

Πυραμίδα συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, ὥστε διπλασίαν εἶναι τὴν ΑΓ τῆς ΓΒ· καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΑ· καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ ΕΖΗ ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ ΔΓ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗ κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΕΖΗ· καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Θ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΘ, ΘΖ, ΘΗ· καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Θ σημείου τῷ τοῦ ΕΖΗ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΘΚ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς ΘΚ τῇ ΑΓ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΘΚ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ. καὶ ἐπεὶ

4. διπλάσιόν b. ἐστιν P. ἀπὸ τῆς V. 5. διπλάσιόν b. 7. διπλασία b, τριπλασίων V. 8. ἐστίν P. τοῦ κύκλου] om. P. 10. Ante καί ins. ἐκ τεσσάρων τριγώνων ἰσοπλεύρων mg. m. 1 pro scholio P. σφαῖραν b. 12. ἐστίν P. 14. ἐκκείσθω] prius κ supra scr. m. rec. P. 15. Ante

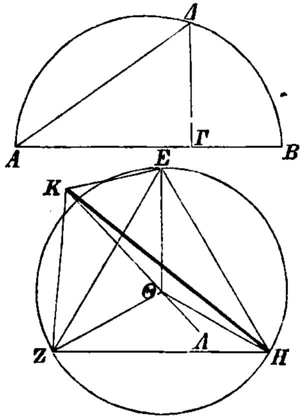
uerum $AE^2 = AB^2 + BE^2$ [III, 31. I, 47]. itaque $AB^2 + BE^2 = 4BE^2$. subtrahendo igitur $AB^2 = 3BE^2$. sed $BE = \Delta E$. itaque $AB^2 = 3\Delta E^2$.

Ergo latus trianguli potentia triplo maius est radio; quod erat demonstrandum.

XIII.

Pyramidem construere et data sphaera comprehendere et demonstrare, diametrum sphaerae potentia sesquialteram esse lateris pyramidis.

Ponatur AB diametrus datae sphaerae et in Γ puncto ita secetur, ut sit $A\Gamma = 2\Gamma B$ [VI, 10]. et in



AB semicirculus describatur $A\Delta B$, et a Γ puncto perpendicularis ducatur $\Gamma\Delta$, et ducatur ΔA. et ponatur circulus EZH radium aequalem habens rectae $\Delta\Gamma$, et in circulum EZH triangulus aequilaterus inscribatur EZH [IV, 2]. et sumatur centrum circuli punctum Θ [III, 1], et ducantur $E\Theta$, ΘZ, ΘH. et in Θ puncto ad planum circuli EZH perpendicularis erigatur ΘK, et a ΘK rectae $A\Gamma$ aequalis abscindatur ΘK et ducantur KE, KZ, KH. et quoniam $K\Theta$ ad

XIII—XVII. Hero def. 101, 2.

κατά del. δίχα m. 1 (et m. rec.) P. 16. τῆς ΓB] mg. postea add. m. 1 P, τῆς $B\Gamma$ V. καταγεγράφθω. P. 17. ση-] supra m. 1 b. 19. EHZ V. ἔχον q. 20. ἐκ] supra m. 1 P. 22. κέντρον b. 25. ἀφαιρήσθω P.

ἡ ΚΘ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΕΖΗ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ ΕΖΗ κύκλου ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἑκάστη τῶν ΘΕ, ΘΖ, ΘΗ· ἡ ΘΚ ἄρα πρὸς ἑκάστην τῶν ΘΕ, ΘΖ, ΘΗ ὀρθή ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΘΚ, ἡ δὲ ΓΔ τῇ ΘΕ, καὶ ὀρθὰς γωνίας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΔΑ βάσει τῇ ΚΕ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ΚΖ, ΚΗ τῇ ΔΑ ἐστιν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΓ τῆς ΓΒ, τριπλῆ ἄρα ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ. ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ, ὡς ἑξῆς δειχθήσεται. τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΘ τριπλάσιον, καί ἐστιν ἴση ἡ ΔΓ τῇ ΕΘ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΔΑ τῇ ΕΖ. ἀλλὰ ἡ ΔΑ ἑκάστῃ τῶν ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ ἐδείχθη ἴση· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ΕΖ, ΖΗ, ΗΕ ἑκάστῃ τῶν ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ ἐστιν ἴση· ἰσόπλευρα ἄρα ἐστὶ τὰ τέσσαρα τρίγωνα τὰ ΕΖΗ, ΚΕΖ, ΚΖΗ, ΚΕΗ. πυραμὶς ἄρα συνέσταται ἐκ τεσσάρων τριγώνων ἰσοπλεύρων, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΖΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Κ σημεῖον.

Δεῖ δὴ αὐτὴν καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἡμιολία ἐστὶ δυνάμει τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

---

1. ἐστιν P. 2. ἄρα] ἔτι V. αὐτῆς] corr. ex αὐτῆι m. 2 B. 3. ΕΖΗΘ Bb. 5. ἡ ΘΚ — 6. ΘΗ] mg. m. 2 B. 5. ΘΚ] Θ e corr. m. 1 b. 6. ἐστι Vq, comp. b. 7. περιέχουσι Vbq. 8. ΔΑ] Α e corr. m. 2 P. 9. ἴση· καὶ αἱ q. 10. ἀλλήλοις V. εἰσί q, comp. b. 11. τριπλῆ] διπλῆ b. 13. Post ΔΓ add. P: ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΑΓ

planum circuli EZH perpendicularis est, etiam ad omnes rectas eam tangentes et in plano circuli EZH positas rectos angulos efficiet [XI def. 3]. tangunt autem ΘE, ΘZ, ΘH. ΘK igitur ad singulas ΘE, ΘZ, ΘH perpendicularis est. et quoniam $A\Gamma = \Theta K$, $\Gamma\Delta = \Theta E$, et rectos angulos comprehendunt, erit $\Delta A = KE$ [I, 4]. eadem de causa etiam $KZ = \Delta A$ et $KH = \Delta A$. itaque $KE = KZ = KH$. et quoniam $A\Gamma = 2\Gamma B$, erit $AB = 3B\Gamma$. sed $AB : B\Gamma = A\Delta^2 : \Delta\Gamma^2$, ut postea demonstrabitur [u. lemma]. itaque $A\Delta^2 = 3\Delta\Gamma^2$. uerum etiam $ZE^2 = 3E\Theta^2$ [prop. XII]. et $\Delta\Gamma = E\Theta$. itaque etiam $\Delta A = EZ$. demonstrauimus autem, esse $\Delta A = KE = KZ = KH$. itaque singulae EZ, ZH, HE singulis KE, KZ, KH aequales sunt. quare quattuor trianguli EZH, KEZ, KZH, KEH aequilateri sunt. ergo ex quattuor triangulis aequilateris pyramis constructa est, cuius basis est triangulus EZH, uertex autem K punctum.

oportet igitur eam etiam data sphaera comprehendere et demonstrare, diametrum sphaerae potentia sesquialteram esse lateris pyramidis.

οὕτως (corr. ex *οὗτος* m. 2) *τὸ ἀπὸ* ΔA *πρὸς τὸ ἀπὸ* $A\Gamma$, *ἀναστρέψαντι ὡς ἡ* AB *πρὸς* $B\Gamma$, *οὕτως τὸ ἀπὸ* $A\Delta$ *πρὸς τὸ ἀπὸ* $\Delta\Gamma$; idem mg. m. 2 B (BA pro priore AB, $A\Gamma$ pro $\Delta\Gamma$), add. in fine *ὡς ἑξῆς δειχθήσεται*, sed ins. post *δειχθήσεται* lin. 13; eodem loco haec uerba *ἐπεὶ γάρ — δειχθήσεται* in textu hab. V (BA, *τὴν* $A\Gamma$, *τῆς* ΔA, *τῆς* $A\Gamma$), sed *περιττόν* add. m. 2. 15. *ἔστιν* PB. 17. ΔA] $A\Delta$ P. *τῇ*] *τῆς* P. 18. HE] corr. ex $H\Theta$ m. 2 V, $H\Theta$ q. 19. KE] EK q. *ἴση ἴσα καί* q. 20. *ἐστίν* B. *τέσσερα* B. KZH] KEH q et V (E e corr.). 21. KEH] KZH q et V (ZH e corr.), $KH\Theta$ B. *συνίσταται* BVb. Post *τριγώνων* add. *ἴσων καί* Vq, m. rec. B. 22. *ἡ* q. 25. *δυνάμει ἡμιολία ἐστί* V. *ἐστίν* P.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας τῇ ΚΘ εὐθεῖα ἡ ΘΛ, καὶ κείσθω τῇ ΓΒ ἴση ἡ ΘΛ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΓΒ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΚΘ, ἡ δὲ ΓΔ τῇ ΘΕ, ἡ δὲ ΓΒ τῇ ΘΛ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ, οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΛ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΚΘ, ΘΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ. καί ἐστιν ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΚΘΕ, ΕΘΛ γωνιῶν· τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΚΛ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Ε [ἐπειδήπερ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΕΛ, ὀρθὴ γίνεται ἡ ὑπὸ ΛΕΚ γωνία διὰ τὸ ἰσογώνιον γίνεσθαι τὸ ΕΛΚ τρίγωνον ἑκατέρῳ τῶν ΕΛΘ, ΕΘΚ τριγώνων]. ἐὰν δὴ μενούσης τῆς ΚΛ περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἥξει καὶ διὰ τῶν Ζ, Η σημείων ἐπιζευγνυμένων τῶν ΖΛ, ΛΗ καὶ ὀρθῶν ὁμοίως γινομένων τῶν πρὸς τοῖς Ζ, Η γωνιῶν· καὶ ἔσται ἡ πυραμὶς σφαίρᾳ περιειλημμένη τῇ δοθείσῃ. ἡ γὰρ ΚΛ τῆς σφαίρας διάμετρος ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ τῇ ΑΒ, ἐπειδήπερ τῇ μὲν ΑΓ ἴση κεῖται ἡ ΚΘ, τῇ δὲ ΓΒ ἡ ΘΛ.

Λέγω δή, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἡμιολία ἐστὶ δυνάμει τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

Ἐπεὶ γὰρ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΓ τῆς ΓΒ, τριπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ· ἀναστρέψαντι ἡμιολία ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΑ τῆς ΑΓ. ὡς δὲ ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ [ἐπειδήπερ ἐπιζευγνυμένης τῆς ΔΒ ἐστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΓ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν

1. τῇ] scripsi; τῆς PBVbq. 2. ΘΛ] supra scr. A m. 1 b. ἐκκείσθω q. 5. ἄρα] e corr. V. 6. Ante ΕΘ del.

producatur enim recta $K\Theta$ in directum et fiat $\Theta\Lambda$, et ponatur $\Theta\Lambda = \Gamma B$. et quoniam est $A\Gamma : \Gamma\Delta = \Gamma\Delta : \Gamma B$ [VI, 8 coroll.], et $A\Gamma = K\Theta$, $\Gamma\Delta = \Theta E$, $\Gamma B = \Theta\Lambda$, erit $K\Theta : \Theta E = E\Theta : \Theta\Lambda$. itaque $K\Theta \times \Theta\Lambda = E\Theta^2$ [VI, 17]. et uterque angulus $K\Theta E$, $E\Theta\Lambda$ rectus est. itaque semicirculus in $K\Lambda$ descriptus etiam per E ueniet.[1]) itaque si manente recta $K\Lambda$ semicirculus circumuolutus rursus ad idem punctum refertur, unde circumuolui coeptus est, etiam per puncta Z, H ueniet ductis rectis $Z\Lambda$, ΛH, quo facto anguli ad Z, H positi et ipsi recti fiunt. et pyramis data sphaera erit comprehensa; nam $K\Lambda$ diametro sphaerae AB aequalis est, quoniam posuimus

$$K\Theta = A\Gamma,\ \Theta\Lambda = \Gamma B.$$

iam dico, diametrum sphaerae potentia sesquialteram esse lateris pyramidis.

nam quoniam $A\Gamma = 2\Gamma B$, erit $AB = 3B\Gamma$. itaque conuertendo $BA = {}^3\!/_2 A\Gamma$. uerum $BA : A\Gamma = BA^2$

1) Hoc ex VI, 8 concluserat Euclides; nam quae sequuntur lin. 9—12 male cohaerent et subditiua uidentur, sicut etiam lin. 27 — pag. 294, 8. ibi Euclides tacite usus erat VI, 4 et V def. 9. quae leguntur, et re (cfr. lemma) et uerbis (εἶναι pag. 294 lin. 1) offendunt.

Θ m. 1 P. 7. ἐστί] ἐστίν P. 8. $K\Theta E$] $K\Theta$ B; corr. ex $K\Theta$, ΘE m. 1 P. $E\Theta\Lambda$] corr. ex $E\Theta$, $\Theta\Lambda$ m. 1 P. 10. γίγνεται P. 11. ΛEK] $E\Lambda K$ B, corr. m. 2. γίγνεσθαι Vb. 12. $EK\Theta$ P. 16. $Z\Lambda$] Z corr. ex Λ m. 1 V. γιγνομένων Pb. 17. ἐστιν P. 19. ἐστίν P. 23. ἐστίν PB. 24. τῆς] τῇ b. διπλῇ b. ἄρα ἐστίν] ἄρα V, ἐστιν ἄρα B. 26. BA] (prius) AB V. πρὸς τήν] bis P. 28. ΔB] in ras. V, AB b et B, sed corr. BA] corr. in $B\Delta$ Bb.

ΔAB, $\Delta A\Gamma$ τριγώνων, καὶ εἶναι ὡς τὴν πρώτην πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας]. ἡμιόλιον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς BA τοῦ ἀπὸ τῆς $A\Delta$. καί ἐστιν ἡ μὲν BA ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος, ἡ δὲ $A\Delta$ ἴση τῇ πλευρᾷ τῆς πυραμίδος.

Ἡ ἄρα τῆς σφαίρας διάμετρος ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα.

Δεικτέον, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $B\Gamma$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς $A\Delta$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $\Delta\Gamma$.

Ἐκκείσθω γὰρ ἡ τοῦ ἡμικυκλίου καταγραφή, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔB, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς $A\Gamma$ τετράγωνον τὸ $E\Gamma$, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ZB παραλληλόγραμμον. ἐπεὶ οὖν διὰ τὸ ἰσογώνιον εἶναι τὸ ΔAB τρίγωνον τῷ $\Delta A\Gamma$ τριγώνῳ ἐστὶν ὡς ἡ BA πρὸς τὴν $A\Delta$, οὕτως ἡ ΔA πρὸς τὴν $A\Gamma$, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν BA, $A\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $A\Delta$. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $B\Gamma$, οὕτως τὸ EB πρὸς τὸ BZ, καί ἐστι τὸ μὲν EB τὸ ὑπὸ τῶν BA, $A\Gamma$· ἴση γὰρ ἡ EA τῇ $A\Gamma$· τὸ δὲ BZ τὸ ὑπὸ τῶν $A\Gamma$, ΓB, ὡς ἄρα ἡ AB πρὸς τὴν $B\Gamma$, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν BA, $A\Gamma$ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν $A\Gamma$, ΓB. καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν BA, $A\Gamma$ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς $A\Delta$, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν $A\Gamma B$ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς $\Delta\Gamma$· ἡ γὰρ $\Delta\Gamma$ κάθετος τῶν τῆς βάσεως τμημάτων τῶν $A\Gamma$, ΓB μέση ἀνάλογόν ἐστι διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι τὴν ὑπὸ $A\Delta B$. ὡς

4. ἡ] (alt.) om. q. 5. $A\Delta$] om. b. 7. δυνάμει ἡμιολία Gregorius. 9. λῆμμα] om. codd. 13. ΔB] supra scr. A

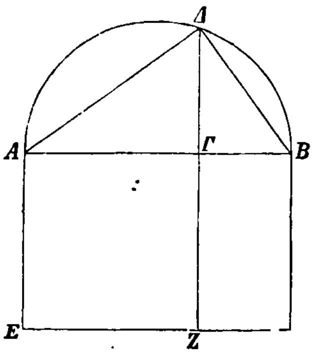
: $A\Delta^2$. itaque $BA^2 = {}^3/_2 A\Delta^2$. et BA datae sphaerae diametrus est, $A\Delta$ autem lateri pyramidis aequalis.

Ergo diametrus sphaerae potentia[1]) sesquialtera est lateris pyramidis; quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Demonstrandum, esse $AB : B\Gamma = A\Delta^2 : \Delta\Gamma^2$.

exponatur enim figura semicirculi, et ducatur ΔB, et in $A\Gamma$ quadratum $E\Gamma$ describatur, et expleatur parallelogrammum ZB.



iam quoniam est $BA : A\Delta = \Delta A : A\Gamma$, quia $\Delta AB \sim \Delta A\Gamma$ [VI, 8. VI, 4], erit $BA \times A\Gamma = A\Delta^2$ [VI, 17]. et quoniam est $AB : B\Gamma = EB : BZ$ [VI, 1], et $EB = BA \times A\Gamma$ (nam $EA = A\Gamma$), $BZ = A\Gamma \times \Gamma B$, erit $AB : B\Gamma = BA \times A\Gamma : A\Gamma \times \Gamma B$. et $BA \times A\Gamma = A\Delta^2$, $A\Gamma \times \Gamma B = \Delta\Gamma^2$. nam perpendicularis $\Delta\Gamma$ media est proportionalis partium basis $A\Gamma$, ΓB [VI, 8 coroll.], quia rectus est

1) Uocabulo δυνάμει aegre quidem caremus, sed fortasse tamen audiri potest.

m. 1 b. 14. $E\Gamma$] corr. ex $B\Gamma$ m. 1 B. 20. ἐστιν B. 21. γάρ ἐστιν V. 23. ἐστιν B. 24. τό] τῷ V. τῷ] τό V. $A\Delta$] sic, sed mg. m. 1 ΔB b. 25. $A\Gamma$, ΓB BV.

ἄρα ἡ AB πρὸς τὴν $B\Gamma$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς $A\Delta$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $\Delta\Gamma$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδ'.

Ὀκτάεδρον συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ᾗ καὶ τὰ πρότερα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ AB, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ $A\Delta B$, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἡ $\Gamma\Delta$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔB, καὶ ἐκκείσθω τετράγωνον τὸ $EZH\Theta$ ἴσην ἔχον ἑκάστην τῶν πλευρῶν τῇ ΔB, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘZ, EH, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ K σημείου τῷ τοῦ $EZH\Theta$ τετραγώνου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα ἡ $K\Lambda$ καὶ διήχθω ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τοῦ ἐπιπέδου ὡς ἡ KM, καὶ ἀφῃρήσθω ἀφ' ἑκατέρας τῶν $K\Lambda$, KM μιᾷ τῶν EK, ZK, HK, ΘK ἴση ἑκατέρα τῶν $K\Lambda$, KM, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛE, ΛZ, ΛH, $\Lambda\Theta$, ME, MZ, MH, $M\Theta$. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ KE τῇ $K\Theta$, καί ἐστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ $EK\Theta$ γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΘE διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς EK. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΛK τῇ KE, καί ἐστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΛKE γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $E\Lambda$ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ EK. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘE διπλάσιον τοῦ ἀπὸ

---

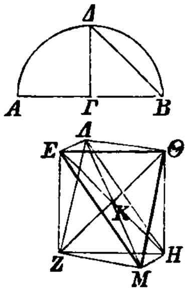
2. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. V. Figura lemmatis fuit in L. 3. ιδ'] ιθ L. 4. συνστήσασθαι P, corr. m. 2. 5. τὰ πρότερα] τὴν πυραμίδα Theon (LBVbq), γρ. ᾗ καὶ τὴν πυραμίδα mg. m. 1 pro schol. P. 6. τῆς] om. b. ἐστίν PLB. 8. δοθείσης] om. q. σφαίρας] σφαίρας ἡ AB L.

$\angle A\Delta B$ [III, 31]. ergo $AB : B\Gamma = A\Delta^2 : \Delta\Gamma^2$; quod erat demonstrandum.

XIV.

Octaedrum construere et sphaera comprehendere sicut priora et demonstrare, diametrum sphaerae potentia duplo maiorem esse latere octaedri.

ponatur datae sphaerae diametrus AB, et in Γ in duas partes aequales diuidatur, et in AB semicirculus describatur $A\Delta B$, et a Γ ad AB perpendicularis ducatur $\Gamma\Delta$, et ducatur ΔB, et exponatur quadratum $EZH\Theta$ singula latera rectae ΔB aequalia habens, et ducantur ΘZ, EH, et in K puncto ad planum quadrati $EZH\Theta$ perpendicularis ducatur recta $K\Lambda$, et ad alteram partem plani producatur ut KM, et ab utraque $K\Lambda$, KM uni rectarum EK, ZK, HK, ΘK aequales abscindantur $K\Lambda$, KM, et ducantur ΛE, ΛZ, ΛH, $\Lambda\Theta$, ME, MZ, MH, $M\Theta$. et quoniam $KE = K\Theta$, et $\angle EK\Theta$ rectus est, erit [I, 47] $\Theta E^2 = 2EK^2$. rursus quoniam $\Lambda K = KE$, et $\angle \Lambda KE$ rectus est, erit $E\Lambda^2 = 2EK^2$ [id.]. demonstrauimus



XIV. Pappus V p. 414, 7.

11. $\Gamma\Delta$] Δ e corr. V. ἐπεζευ q. 12. ἐκείσθω supra scr. κ m. 1 P. 13. ΔB] in ras. V, $B\Delta$ B. ΘZ] $Z\Theta$ LBb. 16. μέρη] om. V. 17. καί] om. L? μιᾷ — 18. KM] om. L. 18. EK] KE supra m. 2 B, KE V. ZK] KZ BVq. KH, $K\Theta$ BV. 22. ἐστιν L. 23. $K\Lambda E$ b. 24. Post $E\Lambda$ ras. 1 litt. P. ἐστιν L. τῆς EK LBV.

τῆς *ΕΚ*· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς *ΛΕ* ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς *ΕΘ*· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ *ΛΕ* τῇ *ΕΘ*. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ *ΛΘ* τῇ *ΘΕ* ἐστιν ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ *ΛΕΘ* τρίγωνον. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μέν εἰσιν αἱ τοῦ *ΕΖΗΘ* τετραγώνου πλευραί, κορυφαὶ δὲ τὰ *Λ*, *Μ* σημεῖα, ἰσόπλευρόν ἐστιν· ὀκτάεδρον ἄρα συνέσταται ὑπὸ ὀκτὼ τριγώνων ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

Δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ τρεῖς αἱ *ΛΚ*, *ΚΜ*, *ΚΕ* ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς *ΛΜ* γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ *Ε*. καὶ διὰ τὰ αὐτά, ἐὰν μενούσης τῆς *ΛΜ* περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἥξει καὶ διὰ τῶν *Ζ*, *Η*, *Θ* σημείων, καὶ ἔσται σφαίρᾳ περιειλημμένον τὸ ὀκτάεδρον. λέγω δή, ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ *ΛΚ* τῇ *ΚΜ*, κοινὴ δὲ ἡ *ΚΕ*, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ *ΛΕ* βάσει τῇ *ΕΜ* ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ *ΛΕΜ* γωνία· ἐν ἡμικυκλίῳ γάρ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς *ΛΜ* διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς *ΛΕ*. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ *ΑΓ* τῇ *ΓΒ*, διπλασία ἐστὶν ἡ *ΑΒ* τῆς *ΒΓ*. ὡς δὲ ἡ *ΑΒ* πρὸς τὴν *ΒΓ*, οὕτως τὶ ἀπὸ τῆς *ΑΒ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΒΔ*· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς *ΑΒ* τοῦ ἀπὸ τῆς *ΒΔ*. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς *ΛΜ* διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς *ΛΕ*. καί ἐστιν ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς

1. *ἐστίν* L. 2. *ἐστίν*] om. V. 3. *ἐστίν* L. 5. Post *ὧν* add. *αἱ* b. *βάσις* L et B, sed corr. m. 2. *ἔστιν* L.

autem, esse etiam $\Theta E^2 = 2EK^2$. itaque $\varLambda E^2 = E\Theta^2$. quare $\varLambda E = E\Theta$. eadem de causa igitur etiam $\varLambda\Theta = \Theta E$. quare triangulus $\varLambda E\Theta$ aequilaterus est. similiter demonstrabimus, etiam reliquos triangulos, quorum bases sint latera quadrati $EZH\Theta$, uertices autem puncta $\varLambda$, M, singulos aequilateros esse. ergo octaedrum constructum est octo triangulis aequilateris comprehensum.

Oportet igitur data sphaera idem comprehendere et demonstrare, diametrum sphaerae potentia duplo maiorem esse latere octaedri.

nam quoniam tres rectae $\varLambda K$, KM, KE inter se aequales sunt, semicirculus in $\varLambda M$ descriptus etiam per E ueniet. et eadem de causa si manente $\varLambda M$ semicirculus circumuolutus ad idem punctum refertur, unde circumuolui coeptus est, etiam per puncta Z, H, Θ ueniet, et octaedrum sphaera comprehensum erit. iam dico, etiam data id sphaera comprehensum esse. nam quoniam $\varLambda K = KM$, et KE communis est, et rectos angulos comprehendunt, erit $\varLambda E = EM$ [I, 4]. et quoniam $\angle\, \varLambda EM$ rectus est (nam in semicirculo est) [III, 31], erit $\varLambda M^2 = 2\varLambda E^2$ [I, 47]. rursus quoniam $A\Gamma = \Gamma B$, erit $AB = 2B\Gamma$. uerum $AB : B\Gamma = AB^2 : B\varDelta^2$ [VI, 8. V def. 9]. itaque $AB^2 = 2B\varDelta^2$. demonstrauimus autem, esse etiam $\varLambda M^2 = 2\varLambda E^2$. et

---

6. κορυφή Pq. 7. ἰσόπλευρά bq. 8. περιεχομένων P, corr. m. 1. 11. ἐστίν L. 12. Post γάρ del. ἐστιν m. 1 P. αἱ] (alt.) α (ἄ?) L. $\varLambda K$] $K\varLambda$ b. 13. εἰσί Vq, comp. b. 17. Z] E, Z P. 20. περιέχουσι Vbq. 21. ἡ] om. q. 23. ἐστι] om. V, ἐστιν L. 24. τῆς] ς in ras. 2 litt. m. 1 P, τῇ q. 26. $B\varDelta$] $\varDelta$ in ras. V. διπλάσιον — 27. $B\varDelta$] om. L, mg. m. 2 B.

ΔΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΕ· ἴση γὰρ κεῖται ἡ ΕΘ τῇ ΔΒ. ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΜ· ἴση ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΑΜ. καί ἐστιν ἡ ΑΒ ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· ἡ ΑΜ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ.

Περιείληπται ἄρα τὸ ὀκτάεδρον τῇ δοθείσῃ σφαίρᾳ. καὶ συναποδέδεικται, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιε'.

Κύβον συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ᾗ καὶ τὴν πυραμίδα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ ὥστε διπλῆν εἶναι τὴν ΑΓ τῆς ΓΒ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ ἐκκείσθω τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ ἴσην ἔχον τὴν πλευρὰν τῇ ΔΒ, καὶ ἀπὸ τῶν Ε, Ζ, Η, Θ τῷ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ΕΚ, ΖΛ, ΗΜ, ΘΝ, καὶ

---

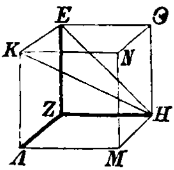
1. ΑΕ] supra scr. Δ m. 1 b. ΔΒ] supra scr. Α m. 1 b. 2. *ἐστιν ἄρα* P. 3. *ἡ*] (tert.) om. b. 4. *ἐστίν* P. 7. *ὅτι ἡ*] corr. ex *ὅτι* b m. 1. 8. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*] om. V, *ὅπερ ἐδ/* B. 11. *κύκλον* q. *συνστήσασθαι* P. 12. *ᾗ*] om. b. *τὴν πυραμίδα*] *τὰ πρότερον* Theon (BVbq). 13. *τριπλῆ* Bqb, comp. V. *ἐστίν* PB. 15. *ἡ*] (prius) postea add. m. 1 P. 19. ΔΒ] ΑΒ b. 20. *ἔχων* P, corr. m. 2. *τήν*] *ἑκάστην* Vq. 21. *τῷ τοῦ* ΕΖΗΘ] supra m. 2 P. *ἐπιπέδων* B, corr. m. 2. 22. *καί*] seq. ras. 8 litt. V.

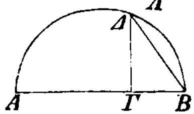
$\Delta B^2 = AE^2$; supposuimus enim esse $E\Theta = \Delta B$. itaque etiam $AB^2 = AM^2$. quare $AB = AM$. et AB diametrus est datae sphaerae. ergo AM diametro datae sphaerae aequalis est.

Ergo octaedrum data sphaera comprehensum est; et simul demonstrauimus, diametrum sphaerae potentia duplo maiorem esse latere octaedri; quod erat demonstrandum.

XV.[1])

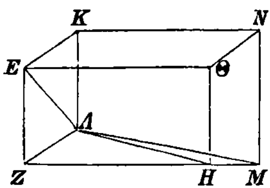
Cubum construere et sphaera comprehendere, sicut pyramidem, et demonstrare, diametrum sphaerae potentia triplo maiorem esse latere cubi.





Exponatur diametrus datae sphaerae AB et in Γ ita diuidatur, ut sit $A\Gamma = 2\Gamma B$ [VI, 10], et in AB semicirculus describatur $A\Delta B$, et a Γ ad AB perpendicularis ducatur $\Gamma\Delta$, et ducatur ΔB, et exponatur quadratum $EZH\Theta$ latus rectae ΔB aequale habens, et in E, Z, H, Θ ad planum quadrati $EZH\Theta$ perpendiculares erigantur EK, $Z\Lambda$, HM, ΘN, et a singulis

1) In B figura textus eadem est ac nostra, sed in mg. m. 1 haec figura descripta est additis uerbis: ἐν ἄλλῳ ὁ κύβος οὕτως.



ἀφῃρήσθω ἀπὸ ἑκάστης τῶν ΕΚ, ΖΛ, ΗΜ, ΘΝ μιᾷ τῶν ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ ἴση ἑκάστη τῶν ΕΚ, ΖΛ, ΗΜ, ΘΝ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΛ, ΛΜ, ΜΝ, ΝΚ· κύβος ἄρα συνέσταται ὁ ΖΝ ὑπὸ ἓξ τετραγώνων ἴσων περιεχόμενος. δεῖ δὴ αὐτὸν καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΚΗ, ΕΗ. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΚΕΗ γωνία διὰ τὸ καὶ τὴν ΚΕ ὀρθὴν εἶναι πρὸς τὸ ΕΗ ἐπίπεδον δηλαδὴ καὶ πρὸς τὴν ΕΗ εὐθεῖαν, τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΚΗ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ΗΖ ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν ΖΛ, ΖΕ, καὶ πρὸς τὸ ΖΚ ἄρα ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν ἡ ΗΖ· ὥστε καὶ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΖΚ, ἡ ΗΖ ὀρθὴ ἔσται καὶ πρὸς τὴν ΖΚ· καὶ διὰ τοῦτο πάλιν τὸ ἐπὶ τῆς ΗΚ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Ζ. ὁμοίως καὶ διὰ τῶν λοιπῶν τοῦ κύβου σημείων ἥξει. ἐὰν δὴ μενούσης τῆς ΚΗ περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἔσται σφαίρᾳ περιειλημμένος ὁ κύβος. λέγω δή, ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΖ τῇ ΖΕ, καί ἐστιν ὀρθὴ ἡ πρὸς τῷ Ζ γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΗ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ. ἴση δὲ ἡ ΕΖ τῇ ΕΚ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΗ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΚ· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΗΕ, ΕΚ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΗΚ, τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΚ. καὶ ἐπεὶ τριπλασίων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ, ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν

---

1. ἀφῃρήσθωσαν BVbq. 4. συνίσταται V? ΖΝ] Ν in ras. m. 1 P. 7. τριπλασίων P. 8. ΚΗ] corr. ex ΚΝ m. 1 B, ΚΝ q. 9. τήν] corr. ex τό m. 1 q. 12. ΗΖ] in

EK, $Z\varDelta$, HM, ΘN uni rectarum EZ, ZH, $H\Theta$, ΘE aequales abscindantur singulae EK, $Z\varDelta$, HM, ΘN, et ducantur $K\varDelta$, $\varDelta M$, MN, NK. itaque cubus constructus est sex quadratis aequalibus comprehensus. oportet igitur eundem data sphaera comprehendere et demonstrare, diametrum sphaerae potentia triplo maiorem esse latere cubi.

ducantur enim KH, EH. et quoniam $\angle KEH$ rectus est, quia KE ad planum EH perpendicularis est et manifesto etiam ad rectam EH [XI def. 3], semicirculus in KH descriptus etiam per E punctum ueniet. rursus quoniam HZ ad utramque $Z\varDelta$, ZE perpendicularis est, HZ etiam ad planum ZK perpendicularis est [XI, 4]. quare ducta ZK recta HZ etiam ad ZK perpendicularis erit. qua de causa rursus semicirculus in HK descriptus etiam per Z ueniet. similiter etiam per reliqua puncta cubi ueniet. iam si manente KH semicirculus circumuolutus ad idem punctum refertur, unde circumuolui coeptus est, cubus sphaera comprehensus erit. iam dico, etiam data sphaera eum comprehensum esse. nam quoniam $HZ = ZE$, et angulus ad Z positus rectus est, erit $EH^2 = 2EZ^2$ [I, 47]. uerum $EZ = EK$. erit igitur $EH^2 = 2EK^2$. quare $HE^2 + EK^2 = 3EK^2 = HK^2$. et quoniam $\varDelta B = 3B\Gamma$, et $\varDelta B : B\Gamma = \varDelta B^2 : B\varDelta^2$ [VI, 8. V def. 9],

---

ras. V. 13. ἐστιν P. $Z\varDelta''$, ZE' b, ZE, $Z\varDelta$ q et V (E et $\varDelta$ in ras.) καί] supra m. 1 b. KZ q et in ras. V. 14. HZ] in ras. V. καὶ ἄν q, κἄν B V b. 15. HZ] in ras. V. 16. καί] om. q. 17. ὁμοίως δὲ καί V. 20. ἔσται ἄρα bq. 23. τῷ] τό Vq. 26. τά] καὶ τά V, τά postea add. P. HE] EH q. EK] supra scr. N m. 1 b. τῆς] τοῦ q. HK] H corr. ex E m. rec. B. 28. $B\Gamma$] corr. ex BK m. 1 B.

ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ, τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΕ τριπλάσιον. καὶ κεῖται ἴση ἡ ΚΕ τῇ ΔΒ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΚΗ τῇ ΑΒ. καί ἐστιν ἡ ΑΒ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· καὶ ἡ ΚΗ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ.

Τῇ δοθείσῃ ἄρα σφαίρᾳ περιείληπται ὁ κύβος· καὶ συναποδέδεικται, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιϛ΄.

Εἰκοσάεδρον συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ᾗ καὶ τὰ προειρημένα σχήματα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ ὥστε τετραπλῆν εἶναι τὴν ΑΓ τῆς ΓΒ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ ΕΖΗΘΚ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἔστω τῇ ΔΒ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘΚ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ ΕΖΗΘΚ, καὶ τετμήσθωσαν αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΕ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Λ, Μ, Ν, Ξ, Ο σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΜ, ΜΝ, ΝΞ, ΞΟ, ΟΛ, ΕΟ. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΛΜΝΞΟ

1. ΒΓ] corr. ex ΒΚ m. 1 B. 2. τριπλασίων P, corr. m. 1. 4. ΔΒ] ΑΒ corr. in ΒΔ B, ΑΒ supra scr. Δ m. 1 b,

erit $AB^2 = 3B\Delta^2$. demonstrauimus autem, esse etiam $HK^2 = 3KE^2$. et posuimus $KE = \Delta B$. itaque etiam $KH = AB$. et AB diametrus est datae sphaerae. itaque etiam KH diametro datae sphaerae aequalis est.

Ergo cubus data sphaera comprehensus est; et simul demonstrauimus, diametrum sphaerae potentia triplo maiorem esse latere cubi; quod erat demonstrandum.

XVI.

Icosaedrum construere et sphaera comprehendere, sicut figuras supra nominatas, et demonstrare, latus icosaedri irrationalem esse minorem quae uocatur.

Exponatur diametrus datae sphaerae AB et in Γ ita secetur, ut sit $A\Gamma = 4\Gamma B$ [VI, 10], et in AB semicirculus describatur $A\Delta B$, et a Γ ad AB perpendicularis ducatur recta $\Gamma\Delta$, et ducatur ΔB, et exponatur circulus $EZH\Theta K$, cuius radius aequalis sit rectae ΔB, et in circulum $EZH\Theta K$ pentagonum aequilaterum et aequiangulum inscribatur $EZH\Theta K$ [IV, 11], et arcus EZ, ZH, $H\Theta$, ΘK, KE in punctis Λ, M, N, Ξ, O in binas partes aequales diuidantur, et ducantur ΛM, MN, $N\Xi$, ΞO, $O\Lambda$, EO. itaque pentagonum $\Lambda MN\Xi O$

XVI. Pappus V p. 440, 19.

$B\Delta$ Vq. 5. τῆς] ἡ τῆς q. 6. καί] om. q. ἐστίν B. τῇ] supra scr. m. 1 P. 8. δοθείσῃ] om. P. 10. ἐστίν P. 12. συνστήσασθαι P, corr. m. rec. 16. σφαίρας] bis P, corr. m. 1. 17. ὥστε] ὡς b. 19. $AB\Delta$ b. τῇ AB] om. b. 21. $B\Delta$ e corr. b. ἐκκείσθω] alt. κ postea add. m. 1 P. ἡ ἐκ τοῦ] bis P, corr. m. 1. 25. KE αἱ q. 26. O] postea ins. B. 27. EO] om. q, supra scr. B uel Θ b.

πεντάγωνον, καὶ δεκαγώνου ἡ ΕΟ εὐθεῖα. καὶ ἀνεστάτωσαν ἀπὸ τῶν Ε, Ζ, Η, Θ, Κ σημείων τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαι αἱ ΕΠ, ΖΡ, ΗΣ, ΘΤ, ΚΥ ἴσαι οὖσαι τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ, ΥΠ, ΠΛ, ΛΡ, ΡΜ, ΜΣ, ΣΝ, ΝΤ, ΤΞ, ΞΥ, ΥΟ, ΟΠ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν ΕΠ, ΚΥ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΠ τῇ ΚΥ. ἔστι δὲ αὐτῇ καὶ ἴση· αἱ δὲ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπιζευγνύουσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη εὐθεῖαι ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. ἡ ΠΥ ἄρα τῇ ΕΚ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν. πενταγώνου δὲ ἰσοπλεύρου ἡ ΕΚ· πενταγώνου ἄρα ἰσοπλεύρου καὶ ἡ ΠΥ τοῦ εἰς τὸν ΕΖΗΘΚ κύκλον ἐγγραφομένου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ πενταγώνου ἐστὶν ἰσοπλεύρου τοῦ εἰς τὸν ΕΖΗΘΚ κύκλον ἐγγραφομένου· ἰσόπλευρον ἄρα τὸ ΠΡΣΤΥ πεντάγωνον. καὶ ἐπεὶ ἑξαγώνου μέν ἐστιν ἡ ΠΕ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΕΟ, καί ἐστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΠΕΟ, πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΠΟ· ἡ γὰρ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΟΥ πενταγώνου ἐστὶ πλευρά. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΠΥ πενταγώνου· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΠΟΥ τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν ΠΛΡ, ΡΜΣ, ΣΝΤ, ΤΞΥ ἰσόπλευρόν ἐστιν. καὶ ἐπεὶ πενταγώνου ἐδείχθη ἑκατέρα τῶν ΠΛ, ΠΟ, ἔστι

1. *δεκαγώνου*, mut. in *δεκάγωνον* ● *ΟΕ* P. *ἀνεστάτω* q. 4. *οὖσαι*] om. b. 7. *ΕΠ*] *ΘΠ*? B, sed corr. 8. *ἐστι* BVq, comp. b. 9. *ἔστιν* PB. 10. *ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι* V. 11. *τε*] om. q. 12. *τέ ἐστι* V.

aequilaterum est, et decagoni latus est recta EO. et in punctis E, Z, H, Θ, K ad planum circuli perpendiculares erigantur rectae $E\Pi$, ZP, $H\Sigma$, ΘT, $K\Upsilon$ radio circuli $EZH\Theta K$ aequales, et ducantur ΠP, $P\Sigma$, ΣT, $T\Upsilon$, $\Upsilon\Pi$, $\Pi\Lambda$, ΛP, PM, $M\Sigma$, ΣN, NT, $T\Xi$, $\Xi\Upsilon$, ΥO, $O\Pi$. et quoniam utraque $E\Pi$, $K\Upsilon$ ad idem planum perpendicularis est, $E\Pi$ rectae $K\Upsilon$ parallela erit [XI, 6]. uerum etiam $E\Pi = K\Upsilon$. quae autem rectas aequales et parallelas ad easdem partes coniungunt rectae, inter se aequales et parallelae sunt [I, 33]. itaque $\Pi\Upsilon$ rectae EK aequalis et parallela est. uerum EK latus pentagoni aequilateri est. quare etiam $\Pi\Upsilon$ latus est pentagoni aequilateri in $EZH\Theta K$ circulo inscripti. eadem de causa etiam singulae ΠP, $P\Sigma$, ΣT, $T\Upsilon$ latera sunt pentagoni aequilateri in $EZH\Theta K$ circulo inscripti. itaque pentagonum $\Pi P\Sigma T\Upsilon$ aequilaterum est. et quoniam hexagoni latus est ΠE, decagoni autem EO, et $\angle\, \Pi EO$ rectus est, ΠO latus est pentagoni; nam quadratum lateris pentagoni quadratis laterum hexagoni et decagoni in eodem circulo inscriptorum aequale est [prop. X]. eadem de causa etiam $O\Upsilon$ latus est pentagoni. uerum etiam $\Pi\Upsilon$ pentagoni est. triangulus igitur $\Pi O\Upsilon$ aequilaterus est. eadem de causa etiam singuli trianguli $\Pi\Lambda P$, $PM\Sigma$, ΣNT, $T\Xi\Upsilon$ aequilateri sunt. et quoniam demonstrauimus, utramque $\Pi\Lambda$, ΠO latus pentagoni

ἐστιν] om. V, ἐστι q, comp. b. 13. -πλεύρου — ἰσο-] mg. m. 2 B. 15. δή] om. q. 16. ἐστί, supra add. πλευρα, V. $EZH\Theta$ V. 17. ἄρα ἐστίν P. 19. EO] $E\Theta$ b, OE q. 21. τε] om. q. 22. τῶν] om. q. 23. ΥO q. 24. ἔστιν B. 26. PME b. $T\Xi\Upsilon$ τριγώνων V. ἐστι PVq, comp. b. 27. ἔστιν B.

δὲ καὶ ἡ ΛΟ πενταγώνου, ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΠΛΟ τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν ΛΡΜ, ΜΣΝ, ΝΤΞ, ΞΥΟ τριγώνων ἰσόπλευρόν ἐστιν. εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου τὸ Φ σημεῖον· καὶ ἀπὸ τοῦ Φ τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτω ἡ ΦΩ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ὡς ἡ ΦΨ, καὶ ἀφῃρήσθω ἑξαγώνου μὲν ἡ ΦΧ, δεκαγώνου δὲ ἑκατέρα τῶν ΦΨ, ΧΩ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΠΩ, ΠΧ, ΥΩ, ΕΦ, ΛΦ, ΛΨ, ΨΜ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν ΦΧ, ΠΕ τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΦΧ τῇ ΠΕ. εἰσὶ δὲ καὶ ἴσαι· καὶ αἱ ΕΦ, ΠΧ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. ἑξαγώνου δὲ ἡ ΕΦ· ἑξαγώνου ἄρα καὶ ἡ ΠΧ. καὶ ἐπεὶ ἑξαγώνου μέν ἐστιν ἡ ΠΧ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΧΩ, καὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΠΧΩ γωνία, πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΠΩ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΥΩ πενταγώνου ἐστίν, ἐπειδήπερ, ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὰς ΦΚ, ΧΥ, ἴσαι καὶ ἀπεναντίον ἔσονται, καί ἐστιν ἡ ΦΚ ἐκ τοῦ κέντρου οὖσα ἑξαγώνου· ἑξαγώνου ἄρα καὶ ἡ ΧΥ. δεκαγώνου δὲ ἡ ΧΩ, καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΥΧΩ· πενταγώνου ἄρα ἡ ΥΩ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΠΥ πενταγώνου· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΠΥΩ τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μέν εἰσιν αἱ ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ εὐθεῖαι, κορυφὴ δὲ τὸ Ω σημεῖον, ἰσόπλευρόν ἐστιν. πάλιν, ἐπεὶ ἑξαγώνου μὲν ἡ ΦΛ, δεκαγώνου

---

2. *ΠΛΘ* q. 3. *τρίγωνον* comp. b. 4. *τοῦ κύκλου τοῦ* *ΕΖΗΘΚ* V. 6. *ἐκβεβλη* q. 7. *ΨΦ* b. 8. *ΦΨ*] *Ψ* in ras. m. 1 P. 9. *ΛΦ*] *ΛΨ* P, *ΦΛ* q. *ΛΨ*] *ΛΦ* P. 10. *ΨΜ*] in ras., dein add. *ΜΦ* V; *ΜΨ*, del. m. 1 et m. rec. P. 11. *ἐστιν*] comp. b, *ἐστι* PBVq. 12. Ante *ΦΧ* del.

esse, et $\varDelta O$ et ipsa pentagoni est, triangulus $\Pi\varDelta O$ aequilaterus est. eadem de causa etiam singuli trianguli $\varDelta PM$, $M\Sigma N$, $NT\Xi$, $\Xi\Upsilon O$ aequilateri sunt. iam sumatur centrum circuli $EZH\Theta K$ [III, 1] et sit punctum Φ. et in puncto Φ ad planum circuli perpendicularis erigatur $\Phi\Omega$ et ad alteram partem producatur ut $\Phi\Psi$, et abscindatur latus hexagoni ΦX, decagoni autem utraque $\Phi\Psi$, $X\Omega$, et ducantur $\Pi\Omega$, ΠX, $\Upsilon\Omega$, $E\Phi$, $\varDelta\Phi$, $\varDelta\Psi$, ΨM. et quoniam utraque ΦX, ΠE ad planum circuli perpendicularis est, ΦX rectae ΠE parallela est [XI, 6]. uerum etiam aequales sunt. quare etiam $E\Phi$, ΠX aequales et parallelae sunt [I, 33]. sed $E\Phi$ latus est hexagoni. quare etiam ΠX hexagoni est. et quoniam ΠX latus est hexagoni, $X\Omega$ autem decagoni, et $\angle\, \Pi X\Omega$ rectus est [XI def. 3. I, 29], $\Pi\Omega$ latus est pentagoni [prop. X]. eadem de causa etiam $\Upsilon\Omega$ pentagoni est, quoniam, si duxerimus ΦK, $X\Upsilon$, aequales erunt et inter se oppositae, et ΦK radius aequalis est lateri hexagoni; quare etiam $X\Upsilon$ hexagoni est. decagoni autem $X\Omega$, et $\angle\, \Upsilon X\Omega$ rectus est; quare $\Upsilon\Omega$ pentagoni est. uerum etiam $\Pi\Upsilon$ pentagoni est. itaque triangulus $\Pi\Upsilon\Omega$ aequilaterus est. eadem de causa igitur etiam reliqui trianguli, quorum bases sunt rectae ΠP, $P\Sigma$, ΣT, $T\Upsilon$, uertex autem punctum Ω, singuli aequilateri sunt. rursus quoniam hexagoni est $\Phi\varDelta$, decagoni

---

1 litt. P. εἰσίν PB. $X\Pi$ P. 15. ἐστιν] (prius) ἐστι P, εἰσιν q. 19. ΦX B. 21. $\Upsilon\Omega$] $\Omega\Upsilon$ P. 22. ἔστιν B. ἐστί] om. V, ἐστίν P. 23. καί] om. bq, supra m. 2 B. 24. ὤν] supra m. 2 B. 26. ἐστι Pq, comp. b. μέν] ἐστίν q, μέν ἐστιν b. $\varDelta\Phi$ q.

δὲ ἡ ΦΨ, καὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΛΦΨ γωνία, πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΨ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΜΦ οὖσαν ἑξαγώνου, συνάγεται καὶ ἡ ΜΨ πενταγώνου. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΛΜ πενταγώνου· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΜΨ τρίγωνον. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μέν εἰσιν αἱ ΜΝ, ΝΞ, ΞΟ, ΟΛ, κορυφὴ δὲ τὸ Ψ σημεῖον, ἰσόπλευρόν ἐστιν. συνέσταται ἄρα εἰκοσάεδρον ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

Δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Ἐπεὶ γὰρ ἑξαγώνου ἐστὶν ἡ ΦΧ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΧΩ, ἡ ΦΩ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Χ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΦΧ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΩΦ πρὸς τὴν ΦΧ, οὕτως ἡ ΦΧ προς τὴν ΧΩ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΦΧ τῇ ΦΕ, ἡ δὲ ΧΩ τῇ ΦΨ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΩΦ πρὸς τὴν ΦΕ, οὕτως ἡ ΕΦ πρὸς τὴν ΦΨ. καί εἰσιν ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ ΩΦΕ, ΕΦΨ γωνίαι· ἐὰν ἄρα ἐπιζεύξωμεν τὴν ΕΩ εὐθεῖαν, ὀρθὴ ἔσται ἡ ὑπὸ ΨΕΩ γωνία διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΨΕΩ, ΦΕΩ τριγώνων. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΩΦ πρὸς τὴν ΦΧ, οὕτως ἡ ΦΧ πρὸς τὴν ΧΩ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΩΦ τῇ ΨΧ, ἡ δὲ ΦΧ τῇ ΧΠ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΨΧ πρὸς τὴν ΧΠ, οὕτως ἡ ΠΧ πρὸς τὴν ΧΩ. καὶ διὰ τοῦτο πάλιν ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΠΨ, ὀρθὴ ἔσται ἡ πρὸς τῷ Π γωνία·

3. ΦΜ P. 4. ΨΜ P. ἔστιν PB. ἡ] supra scr. m. 1 b. 5. ἐστί] om. V, ἐστίν P. ΨΛΜ P. δή] om. V.

autem $\Phi\Psi$, et $\angle\, \Lambda\Phi\Psi$ rectus est, $\Lambda\Psi$ pentagoni est [prop. X]. eadem de causa ducta $M\Phi$, quae latus est hexagoni, concludimus, etiam $M\Psi$ pentagoni esse. uerum etiam ΛM pentagoni est. itaque triangulus $\Lambda M\Psi$ aequilaterus est. similiter demonstrabimus, etiam reliquos triangulos, quorum bases sint MN, $N\Xi$, ΞO, $O\Lambda$, uertex autem punctum Ψ, singulos aequilateros esse. ergo icosaedrum constructum est uiginti triangulis aequilateris comprehensum.

oportet igitur etiam data id sphaera comprehendere et demonstrare, latus icosaedri irrationalem esse minorem quae uocatur.

nam quoniam hexagoni est ΦX, decagoni autem $X\Omega$, recta $\Phi\Omega$ in X secundum rationem extremam ac mediam diuisa est, et maior pars eius est ΦX [prop. IX]. itaque $\Omega\Phi : \Phi X = \Phi X : X\Omega$. uerum $\Phi X = \Phi E$, $X\Omega = \Phi\Psi$. quare $\Omega\Phi : \Phi E = E\Phi : \Phi\Psi$. et anguli $\Omega\Phi E$, $E\Phi\Psi$ recti sunt. ergo ducta $E\Omega$ $\angle\, \Psi E\Omega$ rectus erit, quia $\triangle\, \Psi E\Omega \sim \Phi E\Omega$ [VI, 8]. eadem de causa quoniam est $\Omega\Phi : \Phi X = \Phi X : X\Omega$, et $\Omega\Phi = \Psi X$, $\Phi X = X\Pi$, erit $\Psi X : X\Pi = \Pi X : X\Omega$. quare rursus ducta $\Pi\Psi$ angulus ad Π positus rectus

---

6. λοιπῶν] ι supra scr. m. 1 P. 7. ὧν] mg. m. 2 B. μέν] om. B. 8. ἐστι Pq, comp. b. 14. ἐστιν] μέν V. 18. ΦE] $\Phi\Lambda$ Theon (BVbq), item lin. 19. 20. $E\Phi$] $\Lambda\Phi$ BVbq (Λ e corr. m. 2 B). $\Omega\Phi\Lambda$ Vbq, Λ e corr. m. 2 B. 21. $\Lambda\Phi\Psi$ BVbq. $\Lambda\Omega$ BVbq. 22. $\Psi\Lambda\Omega$ BVbq. 23. $\Psi\Lambda\Omega$ BVbq. $\Phi\Lambda\Omega$ BVbq. Post τριγώνων add. τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς $\Psi\Omega$ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Λ Vbq, mg. m. 2 B (καί om. q). 24. ἡ] (prius) in ras. m. 1 P. 25. ΨX] $X\Psi$ q. 27. τοῦτο] τὰ αὐτά q; γρ. διὰ τὰ αὐτά mg. m. 1 b. εἰ ἐπιζεύξομεν q. 28. τῷ] τό q.

τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΨΩ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Π. καὶ ἐὰν μενούσης τῆς ΨΩ περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἥξει καὶ διὰ τοῦ Π καὶ τῶν λοιπῶν σημείων τοῦ εἰκοσαέδρου, καὶ ἔσται σφαίρᾳ περιειλημμένον τὸ εἰκοσάεδρον. λέγω δή, ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ. τετμήσθω γὰρ ἡ ΦΧ δίχα κατὰ τὸ Α'. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΦΩ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Χ, καὶ τὸ ἔλασσον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΩΧ, ἡ ἄρα ΩΧ προσλαβοῦσα τὴν ἡμίσειαν τοῦ μείζονος τμήματος τὴν ΧΑ' πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τοῦ μείζονος τμήματος· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΩΑ' τοῦ ἀπὸ τῆς Α'Χ. καί ἐστι τῆς μὲν ΩΑ' διπλῆ ἡ ΩΨ, τῆς δὲ Α'Χ διπλῆ ἡ ΦΧ· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΩΨ τοῦ ἀπὸ τῆς ΧΦ. καὶ ἐπεὶ τετραπλῆ ἐστιν ἡ ΑΓ τῆς ΓΒ, πενταπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ. ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΩΨ πενταπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΦΧ. καί ἐστιν ἴση ἡ ΔΒ τῇ ΦΧ· ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΨΩ. καί ἐστιν ἡ ΑΒ ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· καὶ ἡ ΨΩ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ. τῇ ἄρα δοθείσῃ σφαίρᾳ περιείληπται τὸ εἰκοσάεδρον.

Λέγω δή, ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων. ἐπεὶ γὰρ ῥητή ἐστιν ἡ

2. Π] supra scr. Ψ b. 3. ὅθεν καί q. 7. Α'] $\overline{,α'}$ P, $\overline{,αχ}$ q, α mut. in ᾳ V, α Bb (in fig. ,ας B). 9. ἔλαττον V. αὐτῆς] ἐστι b, αὐτῆς ἐστι Bq. ἐστιν] om. Bbq.

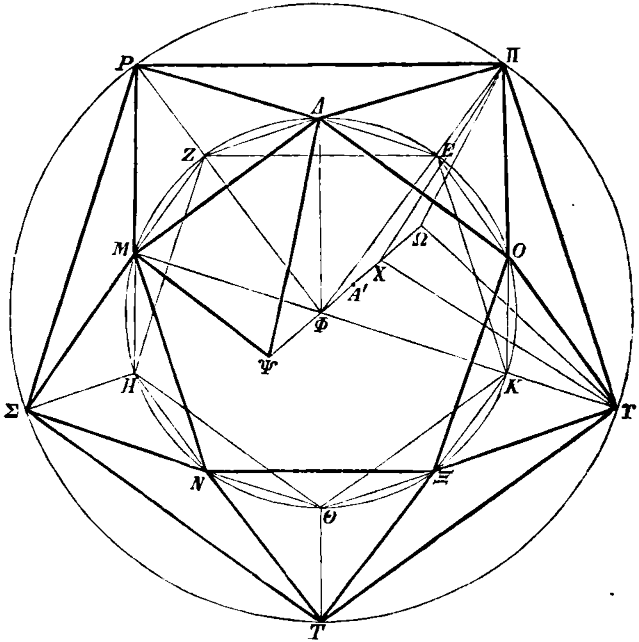
erit [VI, 8]. itaque semicirculus in $\Psi\Omega$ descriptus etiam per Π ueniet [I, 31]. et si manente $\Psi\Omega$ semicirculus circumuolutus rursus ad idem punctum refertur, unde circumuolui coeptus est, et per Π et per reliqua puncta icosaedri ueniet, et icosaedrum sphaera comprehensum erit. iam dico, data id sphaera comprehensum esse. nam ΦX in A' in duas partes aequales diuidatur. et quoniam recta $\Phi\Omega$ secundum rationem extremam ac mediam in X diuisa est, et minor eius pars est ΩX, erit $A'\Omega^2 = 5A'X^2$ [prop. III]. est autem $\Omega\Psi = 2\Omega A'$, $\Phi X = 2A'X$. itaque $\Omega\Psi^2 = 5X\Phi^2$. et quoniam $A\Gamma = 4\Gamma B$, erit $AB = 5B\Gamma$. uerum $AB : B\Gamma = AB^2 : B\Delta^2$ [VI, 8. V def. 9]. itaque $AB^2 = 5B\Delta^2$. demonstrauimus autem, esse etiam $\Omega\Psi^2 = 5\Phi X^2$. et $\Delta B = \Phi X$; nam utraque earum radio circuli $EZH\Theta K$ aequalis est. itaque etiam $AB = \Psi\Omega$. et AB diametrus est datae sphaerae. quare etiam $\Psi\Omega$ diametro datae sphaerae aequalis est. ergo icosaedrum data sphaera comprehensum est.

iam dico, latus icosaedri irrationalem esse minorem quae uocatur. nam quoniam diametrus sphaerae

---

ἡ] τό bq. 10. ἡ ἄρα ΩX] om. V, ἡ ΩX ἄρα q. „ A' et A non discernunt Bbq, in V α in α̣ corr. 13. $\overline{\omega\alpha}$ b, $\overline{\omega\alpha\varsigma}$ (ϛ eras.) B. $A'X$] $\overline{\varsigma\alpha\chi}$ (ϛ eras.) B, χα̣ V, χα q, ἅχ́ b. καί — 14. $\Omega A'$] om. q. 13. ἐστιν PB. 14. $\Omega A'$] in ras. V, $\overline{\alpha\omega\varsigma}$ (ϛ eras.) B. διπλῆ δὲ τῆς ΩA ἡ $\Omega\Psi$ q et b mg. m. 1 (γρ.). $X\Phi$ V. 16. $X\Phi$] e corr. V. τετραπλασίων BVbq. ἐστιν] om. q. πενταπλασίων V et, supra scr. η m. 1, b. 17. ἐστίν] om. V. $B\Gamma$] in ras., dein add. ἐστιν V, ΓB B. AB — 18. τῆς (prius)] bis P, corr. m. 1. 19. ἐστίν B. 20. δέ] om. b. 21. ἴση] om. V. ΔB ἴση V. 22. ἐστιν PB. τοῦ κύκλου τοῦ $EZH\Theta K$ V. 23. $EZH\Theta$ q. καί] om. q. τῆς $\Omega\Psi$ b. 25. ἐστίν PB. 28. ἐλάσσων BVq.

τῆς σφαίρας διάμετρος, καί ἐστι δυνάμει πενταπλασίων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ $EZH\Theta K$ κύκλου, ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ $EZH\Theta K$ κύκλου· ὥστε καὶ ἡ διάμετρος αὐτοῦ ῥητή ἐστιν. ἐὰν δὲ εἰς κύκλον ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον

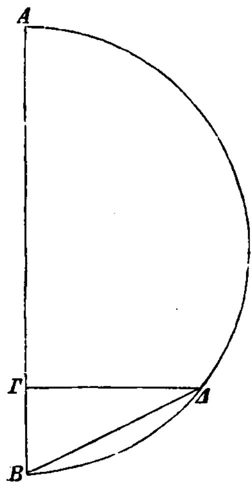


ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων. ἡ δὲ τοῦ $EZH\Theta K$ πενταγώνου πλευρὰ ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐστίν. ἡ ἄρα τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων.

---

1. ἐστιν B. τετραπλασίων b. 2. $EZH\Theta$ q. 3. ἐστίν PB. 7. ἐλάσσων V. ἡ δὲ ἡ b. 8. ἡ ἄρα ἡ b. 9. ἐλάσσων P.

rationalis est et potentia quintuplo maior est radio circuli $EZH\Theta K$, etiam radius circuli $EZH\Theta K$ rationalis est. quare etiam diametrus eius rationalis est. sin in circulum rationalem diametrum habentem pentagonum aequilaterum inscribitur, latus pentagoni irra-



tionalis est minor quae uocatur [prop. XI]. uerum latus pentagoni $EZH\Theta K$ latus est icosaedri. ergo latus icosaedri irrationalis est minor quae uocatur.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται, καὶ ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος σύγκειται ἔκ τε τῆς τοῦ ἑξαγώνου καὶ δύο τῶν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιζ'.

Δωδεκάεδρον συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ᾗ καὶ τὰ προειρημένα σχήματα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐκκείσθωσαν τοῦ προειρημένου κύβου δύο ἐπίπεδα πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλοις τὰ $ΑΒΓΔ$, $ΓΒΕΖ$, καὶ τετμήσθω ἑκάστη τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$, $ΓΔ$, $ΔΑ$, $ΕΖ$, $ΕΒ$, $ΖΓ$ πλευρῶν δίχα κατὰ τὰ $Η$, $Θ$, $Κ$, $Λ$, $Μ$, $Ν$, $Ξ$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $ΗΚ$, $ΘΛ$, $ΜΘ$, $ΝΞ$, καὶ τετμήσθω ἑκάστη τῶν $ΝΟ$, $ΟΞ$, $ΘΠ$ ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὰ $Ρ$, $Σ$, $Τ$ σημεῖα, καὶ ἔστω αὐτῶν μείζονα τμήματα τὰ $ΡΟ$, $ΟΣ$, $ΤΠ$, καὶ ἀνεστάτωσαν ἀπὸ τῶν $Ρ$, $Σ$, $Τ$ σημείων τοῖς τοῦ κύβου ἐπιπέδοις πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὰ ἐκτὸς μέρη τοῦ κύβου αἱ $ΡΥ$, $ΣΦ$, $ΤΧ$, καὶ κείσθωσαν ἴσαι ταῖς $ΡΟ$, $ΟΣ$, $ΤΠ$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $ΥΒ$, $ΒΧ$, $ΧΓ$, $ΓΦ$, $ΦΥ$. λέγω, ὅτι τὸ $ΥΒΧΓΦ$ πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ καὶ ἔτι

---

1. *πόρισμα*] om. bq. 3. *ἐστίν* B. 5. *τοῦ*] om. BV. 6. *τῶν δύο* V. 7. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*] om. BV. 8. *ιζ'*] om. q. 9. *συνστήσασθαι* P, corr. m. rec. 10. *προειρημένα*] *πρότερον* q; mg. m. 1: *γρ. τὰ πρότερον* b. 13. *κύβου*] *κύκλου* comp. b. 16. *Ξ σημεῖα* V. 17. *τετμή-*

Corollarium.

Hinc manifestum est, diametrum sphaerae potentia quintuplam esse radii circuli, in quo icosaedrum descriptum est, et diametrum sphaerae ex latere hexagoni et duobus lateribus decagoni in eodem circulo inscriptorum compositam esse. — quod erat demonstrandum.

XVII.

Dodecaedrum construere et sphaera comprehendere, sicut figuras, quas supra nominauimus, et demonstrare, latus dodecagoni irrationalem esse apotomen quae uocatur.

exponantur duo plana cubi, quem nominauimus [prop. XV] inter se perpendicularia $AB\Gamma\Delta$, ΓBEZ, et singula latera AB, $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA, EZ, EB, $Z\Gamma$ in binas partes aequales diuidantur in punctis H, Θ, K, Λ, M, N, Ξ, et ducantur HK, $\Theta\Lambda$, $M\Theta$, $N\Xi$, et singulae NO, $O\Xi$, $\Theta\Pi$ secundum rationem extremam ac mediam in punctis P, Σ, T secentur, et maiores earum partes sint PO, $O\Sigma$, $T\Pi$, et in punctis P, Σ, T ad plana cubi perpendiculares in partes exteriores cubi erigantur $P\Upsilon$, $\Sigma\Phi$, TX, et ponatur $P\Upsilon = PO$, $\Sigma\Phi = O\Sigma$, $TX = T\Pi$, et ducantur ΥB, BX, $X\Gamma$, $\Gamma\Phi$, $\Phi\Upsilon$. dico, pentagonum $\Upsilon BX\Gamma\Phi$ et aequilaterum esse et in uno plano positum et praeterea aequiangulum.

σθωσαν αἱ NO V. 18. $\Theta\Pi$] Π e corr. m. rec. P; $\Theta\Pi$ εὐθεῖαι V. 21. κύβου] κύκλου comp. b. 22. κύβου] in ras. V. $P\Upsilon$] P eras. V. 23. ἐκκείσθωσαν P. 24. BX, $X\Gamma$] X, $X\Gamma$ in ras. m. 2 V. $\Gamma\Phi$] mg. m. 2 V, ΓX B. $\Upsilon BX\Gamma\Phi$] pro $X\Gamma$ in q X corr. ex Γ m. 1. 25. ἐπιπέδῳ] in ras. m. 2 V.

ἰσογώνιόν ἐστιν. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΡΒ, ΣΒ, ΦΒ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΝΟ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ρ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΡΟ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΟΝ, ΝΡ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΡΟ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΟΝ τῇ ΝΒ, ἡ δὲ ΟΡ τῇ ΡΥ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΒΝ, ΝΡ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΡΥ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΒΝ, ΝΡ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΡ ἐστιν ἴσον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΡ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΡΥ· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΒΡ, ΡΥ τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΡΥ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΒΡ, ΡΥ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΥ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΥ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΥΡ· διπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΥ τῆς ΡΥ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΦΥ τῆς ΥΡ διπλῆ, ἐπειδήπερ καὶ ἡ ΣΡ τῆς ΟΡ, τουτέστι τῆς ΡΥ, ἐστι διπλῆ· ἴση ἄρα ἡ ΒΥ τῇ ΥΦ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΒΧ, ΧΓ, ΓΦ ἑκατέρᾳ τῶν ΒΥ, ΥΦ ἐστιν ἴση. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΥΦΓΧ πεντάγωνον. λέγω δή, ὅτι καὶ ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Ο ἑκατέρᾳ τῶν ΡΥ, ΣΦ παράλληλος ἐπὶ τὰ ἐκτὸς τοῦ κύβου μέρη ἡ ΟΨ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΨΘ, ΘΧ· λέγω, ὅτι ἡ ΨΘΧ εὐθεῖά ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΘΠ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Τ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΠΤ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΘΠ πρὸς τὴν ΠΤ, οὕτως ἡ ΠΤ πρὸς τὴν ΤΘ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΘΠ τῇ ΘΟ, ἡ δὲ ΠΤ ἑκατέρᾳ τῶν ΤΧ, ΟΨ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΘΟ πρὸς τὴν ΟΨ, οὕτως ἡ ΧΤ πρὸς τὴν ΤΘ. καί ἐστι παράλληλος ἡ μὲν ΘΟ τῇ ΤΧ· ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν τῷ ΒΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· ἡ δὲ ΤΘ τῇ ΟΨ· ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν τῷ ΒΖ ἐπιπέδῳ πρὸς

---

3. *μεῖζον αὐτῆς* V. *ΡΟ*] in ras. V. *τά*] *τό* q.. 4. *ΝΡ*] *ΗΡ* B. *τριπλάσια*] mut. in *τριπλάσιον* m. 1 q.

ducantur enim PB, ΣB, ΦB. et quoniam recta NO secundum rationem extremam ac mediam diuisa est in P, et maior pars eius est PO, erunt $ON^2 + NP^2 = 3PO^2$ [prop. IV]. uerum $ON = NB$, $OP = P\Upsilon$. itaque $BN^2 + NP^2 = 3P\Upsilon^2$. est autem $BP^2 = BN^2 + NP^2$ [I, 47]. itaque $BP^2 = 3P\Upsilon^2$. quare $BP^2 + P\Upsilon^2 = 4P\Upsilon^2$. uerum $B\Upsilon^2 = BP^2 + P\Upsilon^2$ [I, 47]. itaque $B\Upsilon^2 = 4P\Upsilon^2$. quare $B\Upsilon = 2P\Upsilon$. est autem etiam $\Phi\Upsilon = 2\Upsilon P$, quoniam etiam $\Sigma P = 2OP = 2P\Upsilon$. itaque $B\Upsilon = \Upsilon\Phi$. similiter demonstrabimus, esse etiam singulas BX, $X\Gamma$, $\Gamma\Phi$ utrique $B\Upsilon$, $\Upsilon\Phi$ aequales. ergo pentagonum $B\Upsilon\Phi\Gamma X$ aequilaterum est. iam dico, idem in uno plano positum esse. ab O enim utrique $P\Upsilon$, $\Sigma\Phi$ parallela in partes exteriores cubi ducatur $O\Psi$, et ducantur $\Psi\Theta$, ΘX. dico, $\Psi\Theta X$ rectam esse. nam quoniam $\Theta\Pi$ in T secundum rationem extremam ac mediam diuisa est, et maior pars eius est ΠT, erit $\Theta\Pi : \Pi T = \Pi T : T\Theta$. uerum $\Theta\Pi = \Theta O$, $\Pi T = TX = O\Psi$. itaque $\Theta O : O\Psi = XT : T\Theta$. et ΘO rectae TX parallela est (nam utraque earum ad planum $B\Delta$ perpendicularis est) [XI, 6] et $T\Theta$ rectae $O\Psi$ (nam utraque earum ad planum BZ perpendicu-

---

ἐστιν P. 5. $P\Upsilon$] $P\Gamma$ q. 6. NP] P e corr. V. 9. ἐστιν P. 10. $P\Upsilon$] (alt.) $P\Gamma$ q. 11. ἄρα] bis P, postea corr. m. 1. 12. ἐστίν] om. V. ἔστιν B. 13. ΥP διπλῆ] in ras. V. ΣP] supra ras. m. 2 q. 14. $P\Upsilon$] corr. ex $P\Gamma$ m. 1 q. ἐστιν B. 15. καί] om. q. BX] ΦX q. 18. ἐστιν] ἐ ins. m. 1 q. ἤχϑω] ἤ e corr. m. 1 b. 20. μέρη τοῦ κύβου V. $\Psi\Theta$] Θ e corr. m. 1 b. 22. λόγον] om. b. 23. τὴν ΠT] ΠT in ras. V, ΠT Bb. 24. $\Theta\Pi$] $\Pi\Theta$ P.

ὀρθάς ἐστιν. ἐὰν δὲ δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν, ὡς τὰ ΨΟΘ, ΘΤΧ, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶν ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι, αἱ λοιπαὶ εὐθεῖαι ἐπ' εὐθείας ἔσονται· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΨΘ τῇ ΘΧ. πᾶσα δὲ εὐθεῖα ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ· ἐν ἑνὶ ἄρα ἐπιπέδῳ ἐστὶ τὸ ΥΒΧΓΦ πεντάγωνον.

Λέγω δή, ὅτι καὶ ἰσογώνιόν ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΝΟ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ρ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΟΡ [ἔστιν ἄρα ὡς συναμφότερος ἡ ΝΟ, ΟΡ πρὸς τὴν ΟΝ, οὕτως ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΡ], ἴση δὲ ἡ ΟΡ τῇ ΟΣ [ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΣΝ πρὸς τὴν ΝΟ, οὕτως ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΣ], ἡ ΝΣ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ο, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΝΟ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΝΣ, ΣΟ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΟ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΝΟ τῇ ΝΒ, ἡ δὲ ΟΣ τῇ ΣΦ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΝΣ, ΣΦ τετράγωνα τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΒ· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΦΣ, ΣΝ, ΝΒ τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΒ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΣΝ, ΝΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΣΒ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΒΣ, ΣΦ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΦ (ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΦΣΒ γωνία), τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΒ· διπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΦΒ τῆς ΒΝ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΒΝ διπλῆ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΦ τῇ ΒΓ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΒΥ, ΥΦ δυσὶ ταῖς ΒΧ, ΧΓ ἴσαι εἰσίν, καὶ βάσις ἡ ΒΦ βάσει τῇ ΒΓ ἴση,

---

2. *ΘΤΧ*] *ΟΤΧ* B, et b supra scr. *Θ* m. 1. 3. *δυσὶ* (*δύο* q) *πλευραῖς* Theon (BVbq). *πλευρὰς αὐτῶν* q. 4. *πλευράς*] om. V. *καί*] om. P. 5. *ΟΧ* b. 6. *ἄρα*] *γάρ ἐστιν* q. *ἐπιπέδῳ ἄρα* B. 7. *ἐστί*] om. q; *ἐστίν* P. *ΥΒΧΓΦ*]

laris est). sin duo trianguli in uno angulo coniunguntur ut $\Psi O\Theta$, ΘTX duo latera duobus lateribus proportionalia habentes, ita ut latera correspondentia etiam parallela sint, reliqua latera in eadem recta erunt posita [VI, 32]. itaque $\Psi\Theta$, ΘX in eadem recta positae erunt. omnis autem recta in uno plano posita est [XI, 1]. ergo pentagonum $\Upsilon BX\Gamma\Phi$ in uno plano positum est.

iam dico, idem aequiangulum esse.

nam quoniam recta NO in P secundum rationem extremam ac mediam diuisa est, et maior pars eius est OP, et $OP = O\Sigma$, recta $N\Sigma$ in O secundum rationem extremam ac mediam diuisa est, et maior pars est NO [prop. V].[1]) itaque $N\Sigma^2 + \Sigma O^2 = 3NO^2$ [prop. IV]. uerum $NO = NB$, $O\Sigma = \Sigma\Phi$. itaque $N\Sigma^2 + \Sigma\Phi^2 = 3NB^2$. quare $\Phi\Sigma^2 + \Sigma N^2 + NB^2 = 4NB^2$. sed $\Sigma B^2 = \Sigma N^2 + NB^2$ [I, 47]. itaque $B\Sigma^2 + \Sigma\Phi^2 = 4NB^2 = B\Phi^2$ (nam $\angle \Phi\Sigma B$ rectus est) [XI def. 3]. itaque $\Phi B = 2BN$. uerum etiam $B\Gamma = 2BN$. quare $B\Phi = B\Gamma$. et quoniam duae rectae $B\Upsilon$, $\Upsilon\Phi$ duabus BX, $X\Gamma$ aequales sunt, et

1) Forma prop. V, ad quam apertissime hic respicit Euclides, docet, uerba ἔστιν ἄρα — OP lin. 11—12 et ἔστιν ἄρα — $O\Sigma$ lin. 13—14 superuacua et subditiua esse. nec satis est cum ed. Basil. et Gregorio pro OP lin. 12 $O\Sigma$ scribere.

Υ eras. V, post Φ ras.; $BX\Gamma\Phi\Upsilon$ τὸ $B\Gamma X\Phi\Upsilon$ q. 9. εὐθεῖ, postea add. α m. 1 P. 13. τῇ] τῆς b. 17. ON bis V. 18. τῇ] corr. ex τῆς m. 1 P. 19. ὥστε] corr. ex ὡσα m. 1 b; ὥστε καί V. τά] om. q. 20. ἔστιν P. 21. ΣN] N in ras. m. 1 b. ΣB] $B\Sigma$ in ras. m. 1 P, $\ddot{B}\Sigma B$ V. 22. $B\Sigma$] ΣB b. τουτέστιν P. ΦB V. 24. ἐστίν] om. V. 25. ἔστιν PB. ἐστίν] om. Vq. 26. $B\Phi$] corr. ex ΦB V. 27. εἰσί Vbq. ΦB Vq.

γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΥΦ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΧΓ ἐστιν ἴση. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΥΦΓ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΒΧΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΧΓ, ΒΥΦ, ΥΦΓ τρεῖς γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἐὰν δὲ πενταγώνου ἰσοπλεύρου αἱ τρεῖς γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, ἰσογώνιον ἔσται τὸ πεντάγωνον· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΥΦΓΧ πεντάγωνον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τὸ ἄρα ΒΥΦΓΧ πεντάγωνον ἰσόπλευρόν ἐστι καὶ ἰσογώνιον, καί ἐστιν ἐπὶ μιᾶς τοῦ κύβου πλευρᾶς τῆς ΒΓ. ἐὰν ἄρα ἐφ' ἑκάστης τῶν τοῦ κύβου δώδεκα πλευρῶν τὰ αὐτὰ κατασκευάσωμεν, συσταθήσεταί τι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ δώδεκα πενταγώνων ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον, ὃ καλεῖται δωδεκάεδρον.

Δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΨΟ, καὶ ἔστω ἡ ΨΩ· συμβάλλει ἄρα ἡ ΟΩ τῇ τοῦ κύβου διαμέτρῳ, καὶ δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας· τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ παρατελεύτῳ θεωρήματι τοῦ ἑνδεκάτου βιβλίου. τεμνέτωσαν κατὰ τὸ Ω· τὸ Ω ἄρα κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον, καὶ ἡ ΩΟ ἡμίσεια τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου. ἐπεξεύχθω δὴ ἡ ΥΩ. καὶ ἐπεὶ

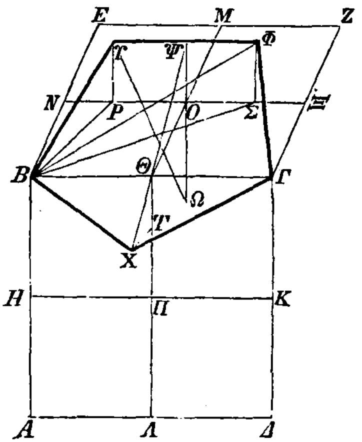
---

2. *δειχθήξομεν*, sed *χθη* del., b. 3. *ἐστίν* PB. *ΒΧΓ*] (prius) *X* in ras. m. 1 P. 5. *ἰσόπλευρον* q. *ὦσιν*] corr. ex *εἰσίν* m. 1 P. 6. *ἔσται*] *ἐστι* BV. 7. *ΒΥΦΧΓ* q. *δέ*] om. q. 8. *τέ ἐστιν* P. 9. *κύβου*] *κύκλου* b. 13. *τε*] om. P. *ὃ καλεῖται δωδεκάεδρον*] om. Theon (BVbq). 17. *ΨΩ*] *ΨΟ* q. *συμβαλεῖ* P. 18. *ΟΩ*] *ΘΩ* B, *ΨΩ* Vb, *ΨΟ* q. *κύβου*] *κύκλου* comp. b, corr. in ⊡. 19. *τεμουσιν*, corr. m. 1, P. *παρατελευταίῳ* q. 21. *τό*] (alt.) *καὶ τό* q. 22. *ΟΩ* V, *ΩΘ* B. Ante *τῆς* del. *ἔστι* m. 1 P. 23. *ΓΩ* q.

basis $B\Phi$ basi $B\Gamma$ aequalis, erit [I, 8] $\angle B\Upsilon\Phi = BX\Gamma$. similiter demonstrabimus, esse etiam

$$\angle \Upsilon\Phi\Gamma = BX\Gamma.$$

itaque tres anguli $BX\Gamma$, $B\Upsilon\Phi$, $\Upsilon\Phi\Gamma$ inter se aequales sunt. sin pentagoni aequilateri tres anguli inter se aequales sunt, pentagonum aequiangulum erit [prop. VII]. ergo pentagonum $B\Upsilon\Phi\Gamma X$ aequiangulum est. demonstrauimus autem, idem aequilaterum esse. ergo pentagonum



$$B\Upsilon\Phi\Gamma X$$

aequilaterum est et aequiangulum, et in uno latere cubi $B\Gamma$ constructum est. itaque si in singulis duodecim lateribus cubi eadem comparauerimus, figura quaedam solida construetur duodecim pentagonis aequilateris et aequiangulis comprehensa, quae uocatur dodecaedrum.

oportet igitur idem data sphaera comprehendere et demonstrare, latus dodecaedri irrationalem esse apotomen quae uocatur.

producatur enim ΨO, et fiat $\Psi\Omega$. itaque $O\Omega$ cum diametro cubi concurrit, et inter se in binas partes aequales secant; hoc enim in paenultimo theoremate undecimi libri demonstratum est [XI, 38]. secent in Ω. Ω igitur centrum est sphaerae cubum comprehendentis, et ΩO dimidia lateris cubi. ducatur $\Upsilon\Omega$. et εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΝΣ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ο, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΝΟ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΝΣ, ΣΟ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΟ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΝΣ τῇ ΨΩ, ἐπειδήπερ καὶ ἡ μὲν ΝΟ τῇ ΟΩ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ΨΟ τῇ ΟΣ. ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ΟΣ τῇ ΨΥ, ἐπεὶ καὶ τῇ ΡΟ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΩΨ, ΨΥ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΟ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΩΨ, ΨΥ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΥΩ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΥΩ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΟ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον δυνάμει τριπλασίων τῆς ἡμισείας τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς· προδέδεικται γὰρ κύβον συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου. εἰ δὲ ὅλη τῆς ὅλης, καὶ [ἡ] ἡμίσεια τῆς ἡμισείας· καί ἐστιν ἡ ΝΟ ἡμίσεια τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς· ἡ ἄρα ΥΩ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον. καί ἐστι τὸ Ω κέντρον τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον· τὸ Υ ἄρα σημεῖον πρὸς τῇ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τῆς σφαίρας. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν λοιπῶν γωνιῶν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τῇ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τῆς σφαίρας· περιείληπται ἄρα τὸ δωδεκάεδρον τῇ δοθείσῃ σφαίρᾳ.

---

1. *ΝΕ* B, corr. m. 1. 3. *ἐστιν* P. 4. *ΝΟ*] *ΝΕ* B. 9. *ἄρα*] om. q. *τοῦ*] *τό* q. 10. *ἔστιν* PB. *τῆς*] (alt.) bis b. 12. *τῆς*] ins. m. 1 V. *δέδεικται* q. 14. *δυνάμει*] om. P. *διπλασίων* B, corr. m. rec. *ἐστίν* PB. 15. *εἰ*] *ἡ* V. *ἡ ὅλη* Bq. *ἡ*] postea ins. m. 1 P, *εἰ* q. 16. *ἡμίσεια* — *ΝΟ*] bis P, postea corr. m. 1. 17. *ἐστίν* P. 19. *ἔστιν* B. 20. *σημεῖον ἄρα* q. 22. *τὴν ἐπιφάνειαν* q, *ν* bis supra scr. m. 1 b. 23. *ἐστίν* P.

quoniam recta $N\Sigma$ in O secundum rationem extremam ac mediam diuisa est, et maior pars eius est NO, erunt

$$N\Sigma^2 + \Sigma O^2 = 3NO^2 \text{ [prop. IV]}.$$

sed $N\Sigma = \Psi\Omega$, quoniam

$$NO = O\Omega,\ \Psi O = O\Sigma.$$

et praeterea

$$O\Sigma = \Psi\Upsilon,$$

quoniam $O\Sigma = PO$. itaque

$$\Omega\Psi^2 + \Psi\Upsilon^2 = 3NO^2.$$

uerum

$$\Upsilon\Omega^2 = \Omega\Psi^2 + \Psi\Upsilon^2 \text{ [I, 47]}.$$

itaque

$$\Upsilon\Omega^2 = 3NO^2.$$

sed radius sphaerae cubum comprehendentis et ipse potentia triplo maior est dimidio latere cubi; nam antea explicauimus, quomodo cubus construendus sit et sphaera comprehendendus, et quo modo demonstrandum sit, diametrum sphaerae potentia triplo maiorem esse latere cubi [prop. XV]. sin tota triplo maior est tota, etiam dimidia triplo maior est dimidia; et NO dimidia est lateris cubi. itaque $\Upsilon\Omega$ radio sphaerae cubum comprehendentis aequalis est. et Ω centrum est sphaerae cubum comprehendentis. quare punctum Υ ad superficiem sphaerae positum est. iam similiter demonstrabimus, etiam reliquos angulos dodecaedri singulos ad superficiem sphaerae positos esse. ergo dodecaedrum data sphaera comprehensum est.

Λέγω δή, ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐπεὶ γὰρ τῆς ΝΟ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΡΟ, τῆς δὲ ΟΞ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΟΣ, ὅλης ἄρα τῆς ΝΞ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΡΣ. οἷον ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΡ, ἡ ΟΡ πρὸς τὴν ΡΝ, καὶ τὰ διπλάσια· τὰ γὰρ μέρη τοῖς ἰσάκις πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ὡς ἄρα ἡ ΝΞ πρὸς τὴν ΡΣ, οὕτως ἡ ΡΣ πρὸς συναμφότερον τὴν ΝΡ, ΣΞ. μείζων δὲ ἡ ΝΞ τῆς ΡΣ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΡΣ συναμφοτέρου τῆς ΝΡ, ΣΞ· ἡ ΝΞ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΡΣ. ἴση δὲ ἡ ΡΣ τῇ ΥΦ· τῆς ἄρα ΝΞ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΥΦ. καὶ ἐπεὶ ῥητή ἐστιν ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος καί ἐστι δυνάμει τριπλασίων τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς, ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΝΞ πλευρὰ οὖσα τοῦ κύβου. ἐὰν δὲ ῥητὴ γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων ἄλογός ἐστιν ἀποτομή.

Ἡ ΥΦ ἄρα πλευρὰ οὖσα τοῦ δωδεκαέδρου ἄλογός ἐστιν ἀποτομή.

---

1. ἡ] om. q. 3. Post τῆς ins. μέν m. rec. P. τεμνομένης P; item lin. 5. 6. τετμημένης bq. 8. ΝΟ] ΟΝ B. ΟΡ] (prius) e corr. V; dein del. καὶ τὰ διπλάσια. 9. ἰσάκις] ὡσαύτως B. 10. ὡς] καὶ ὡς b. 15. ΝΞ ἄρα q. 16. τετμημένης bq. ΦΥ P. 17. ἐστιν PB. De scholio quodam in P hic adscripto u. app. 20. γραμμή] γ̄ μή b, corr. m. 1; εὐθεῖα γραμμή q. τέτμηται q. ἑκατέρα q. 21. ἐστιν ἡ καλουμένη Vbq, e corr. m. 2 B. 23. ἐστιν ἡ καλουμένη Vbq.

iam dico, latus dodecaedri irrationalem esse apotomen quae uocatur. nam quoniam PO maior pars est rectae NO secundum rationem extremam ac mediam diuisae, et $O\Sigma$ maior pars est rectae $O\Xi$ secundum rationem extremam ac mediam diuisae, $P\Sigma$ maior pars est totius rectae $N\Xi$ secundum rationem extremam ac mediam diuisae. quoniam enim[1]) $NO : OP = OP : PN$, etiam dupla eandem rationem habebunt; nam partes eandem rationem habent quam aeque multiplicia [V, 15]. itaque $N\Xi : P\Sigma = P\Sigma : NP + \Sigma\Xi$. sed $N\Xi > P\Sigma$. itaque etiam $P\Sigma > NP + \Sigma\Xi$ [V, 14]. ergo $N\Xi$ secundum rationem extremam ac mediam diuisa est, et maior pars eius est $P\Sigma$. sed $P\Sigma = \Upsilon\Phi$. itaque $\Upsilon\Phi$ maior pars est rectae $N\Xi$ secundum rationem extremam ac mediam diuisae. et quoniam diametrus sphaerae rationalis est et latere cubi triplo maior est potentia, etiam $N\Xi$, quae latus est cubi, rationalis est. sin recta rationalis secundum rationem extremam ac mediam diuiditur, utraque pars irrationalis est apotome [prop. VI]. ergo $\Upsilon\Phi$, quae latus est dodecaedri, irrationalis est apotome.

---

1) Uocabulo οἷον lin. 7 uidetur significari, rectam $N\Xi$ non proprie secundum rationem extremam ac mediam diuisam esse, quia pars minor ex NP, $\Sigma\Xi$ diiunctis composita est. quod hic parum refert, quia maiore parte sola utimur. sed fortasse totus locus οἷον lin. 7 — ἐστιν ἡ $P\Sigma$ lin. 14 subditiuus est.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρά. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιη'.

Τὰς πλευρὰς τῶν πέντε σχημάτων ἐκθέσθαι καὶ συγκρῖναι πρὸς ἀλλήλας.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ ὥστε ἴσην εἶναι τὴν ΑΓ τῇ ΓΒ, κατὰ δὲ τὸ Δ ὥστε διπλασίονα εἶναι τὴν ΑΔ τῆς ΔΒ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΕΒ, καὶ ἀπὸ τῶν Γ, Δ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ΓΕ, ΔΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΖΒ, ΕΒ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΔ τῆς ΔΒ, τριπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΔ. ἀναστρέψαντι ἡμιολία ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ. ὡς δὲ ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ· ἰσογώνιον γάρ ἐστι τὸ ΑΖΒ τρίγωνον τῷ ΑΖΔ τριγώνῳ· ἡμιόλιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΖ. ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος. καί ἐστιν ἡ ΑΒ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος· ἡ ΑΖ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ πλευρᾷ τῆς πυραμίδος.

Πάλιν, ἐπεὶ διπλασίων ἐστὶν ἡ ΑΔ τῆς ΔΒ, τριπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΔ. ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ· τριπλά-

---

1. *πόρισμα*] comp. mg. m 1 PBVq, om. b. 3. *τετμημένης* bq. 4. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*] om. Vq, ο)— b. 5. *ιη'*] om. Bbq. 9. *κατὰ μέν* BV. 10. *τῇ*] corr. ex *τῆς* B.

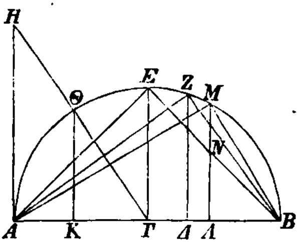
Corollarium.

Hinc manifestum est, latus dodecaedri maiorem esse partem lateris cubi secundum rationem extremam ac mediam diuisi. — quod erat demonstrandum.

XVIII.

Latera quinque figurarum exponere et inter se comparare.

Exponatur diametrus datae sphaerae AB et in Γ ita secetur, ut sit $A\Gamma = \Gamma B$, in Δ autem ita, ut sit $A\Delta = 2\Delta B$, et in AB semicirculus describatur AEB,



et in Γ, Δ ad AB perpendiculares ducantur ΓE, ΔZ, et ducantur AZ, ZB, EB. et quoniam est $A\Delta = 2\Delta B$, erit $AB = 3B\Delta$. itaque conuertendo $BA = {}^3/_2 A\Delta$. sed $BA : A\Delta = BA^2 : AZ^2$ [V def. 9]; nam $AZB \sim AZ\Delta$ [VI, 8]. itaque $BA^2 = {}^3/_2 AZ^2$. uerum etiam diametrus sphaerae potentia lateris pyramidis sesquialtera est [prop. XIII]. et AB diametrus sphaerae est. ergo AZ lateri pyramidis aequalis est.

rursus quoniam $A\Delta = 2\Delta B$, erit $AB = 3B\Delta$. sed $AB : B\Delta = AB^2 : BZ^2$ [VI, 8. V def. 9]. itaque

---

ΓB] Γ corr. ex Δ V. διπλασιον P, α supra scr. m. 1. 12. Δ] e corr. m. 1 b. 14. Ante AZ del. ΓE, ΔZ m. 1 P. AZ, ZE, EB B; ZB, EB, AZ q. 15. τριπλασία q, mg. m. 1 τριπλασία γρ. b. $B\Delta$] ΔB B. 18. ABZ b. 20. ἔστιν PB. 22. ἐστίν P. 23. τῆς] om. Vq. 24. τριπλῆ] τριπλασίων P. 26. ZB Bbq.

σιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΖ. ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς. καί ἐστιν ἡ ΑΒ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος· ἡ ΒΖ ἄρα τοῦ κύβου ἐστὶ πλευρά.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, διπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ. ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΕ. ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίων τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς. καί ἐστιν ἡ ΑΒ ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· ἡ ΒΕ ἄρα τοῦ ὀκταέδρου ἐστὶ πλευρά.

Ἤχθω δὴ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῇ ΑΒ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΗ, καὶ κείσθω ἡ ΑΗ ἴση τῇ ΑΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος ἤχθω ἡ ΘΚ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΗΑ τῆς ΑΓ· ἴση γὰρ ἡ ΗΑ τῇ ΑΒ· ὡς δὲ ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΓ, διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΘΚ τῆς ΚΓ. τετραπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΘΚ, ΚΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΓ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΓ. ἴση δὲ ἡ ΘΓ τῇ ΓΒ· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΚ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΒ τῆς ΓΒ, ὧν ἡ ΑΔ τῆς ΔΒ ἐστι διπλῆ, λοιπὴ ἄρα η ΒΔ λοιπῆς τῆς ΔΓ ἐστι διπλῆ. τριπλῆ ἄρα ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ· ἐνναπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. πενταπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΚ· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ.

---

1. *ἐστίν* P. ΖΒ B. *ἔστιν* PB. 3. *κύκλου* P, corr. m. rec. 8. *ἐστί*] *ἐστίν* P, om. V. *τοῦ*] *πρὸς τό* q.

$AB^2 = 3BZ^2$. uerum etiam diametrus sphaerae latere cubi potentia triplo maior est [prop. XV]. et AB diametrus sphaerae est. ergo BZ latus cubi est.

et quoniam $A\Gamma = \Gamma B$, erit $AB = 2B\Gamma$. sed $AB : B\Gamma = AB^2 : BE^2$ [VI, 8. V def. 9]. itaque $AB^2 = 2BE^2$. uerum etiam diametrus sphaerae latere octaedri potentia duplo maior est [prop. XIV]. et AB diametrus est datae sphaerae. ergo BE latus octaedri est.

iam ab A puncto ad rectam AB perpendicularis ducatur AH, et ponatur $AH = AB$, et ducatur $H\Gamma$, et a Θ ad AB perpendicularis ducatur ΘK. et quoniam $HA = 2A\Gamma$ (nam $HA = AB$), et $HA : A\Gamma = \Theta K : K\Gamma$ [VI, 4], erit etiam $\Theta K = 2K\Gamma$. itaque $\Theta K^2 = 4K\Gamma^2$. quare $\Theta K^2 + K\Gamma^2 = 5K\Gamma^2 = \Theta\Gamma^2$ [I, 47]. uerum $\Theta\Gamma = \Gamma B$. itaque $B\Gamma^2 = 5\Gamma K^2$. et quoniam $AB = 2\Gamma B$, quarum $A\Delta = 2\Delta B$, erit $B\Delta = 2\Delta\Gamma$. itaque $B\Gamma = 3\Gamma\Delta$. quare $B\Gamma^2 = 9\Gamma\Delta^2$. sed $B\Gamma^2 = 5\Gamma K^2$. itaque $\Gamma K^2 > \Gamma\Delta^2$. quare etiam

---

ἔστιν PB. 9. τριπλασίων b. 11. BE] E corr. ex Θ m. rec. P. πλευρά ἐστι q. 14. τῇ AB ἴση ἡ AH V. 16. AH V. 17. HA] AH q. τῇ] τῆς P. 18. καί] om. q. 19. ἐστίν P. 20. ἐστίν P. 21. ἐστιν PB. 24. ΓB] $B\Gamma$ V. ἐστιν PB. $B\Delta$] supra scr. A b. 25. $\Delta\Gamma$] $\Gamma\Delta$ P. 26. $\Gamma\Delta$] in hoc uocab. des. b, λείπει φύλλα $\overline{\iota\varsigma}$ mg.

μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῆς ΓΔ. κείσθω τῇ ΓΚ ἴση ἡ ΓΛ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΛΜ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΜΒ. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΚ, καί ἐστι τῆς μὲν ΒΓ διπλῆ ἡ ΑΒ, τῆς δὲ ΓΚ διπλῆ ἡ ΚΛ, πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΛ. ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλασίων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται. καί ἐστιν ἡ ΑΒ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος· ἡ ΚΛ ἄρα ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶ τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται· ἡ ΚΛ ἄρα ἑξαγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ εἰρημένου κύκλου. καὶ ἐπεὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος σύγκειται ἔκ τε τῆς τοῦ ἑξαγώνου καὶ δύο τῶν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν εἰρημένον κύκλον ἐγγραφομένων, καί ἐστιν ἡ μὲν ΑΒ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, ἡ δὲ ΚΛ ἑξαγώνου πλευρά, καὶ ἴση ἡ ΑΚ τῇ ΛΒ, ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΚ, ΛΒ δεκαγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ ἐγγραφομένου εἰς τὸν κύκλον, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται. καὶ ἐπεὶ δεκαγώνου μὲν ἡ ΛΒ, ἑξαγώνου δὲ ἡ ΜΛ· ἴση γάρ ἐστι τῇ ΚΛ, ἐπεὶ καὶ τῇ ΘΚ· ἴσον γὰρ ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου· καί ἐστιν ἑκατέρα τῶν ΘΚ, ΚΛ διπλασίων τῆς ΚΓ· πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΒ. ἡ δὲ τοῦ πενταγώνου ἐστὶν ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου· εἰκοσαέδρου ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΒ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΒ κύβου ἐστὶ πλευρά, τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Ν, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ ΝΒ· ἡ ΝΒ ἄρα δωδεκαέδρου ἐστὶ πλευρά.

---

1. *μεῖζον* V. *ἐστὶν ἄρα* q. *ΓΚ*] *ΚΓ* V. *ΓΚ*] corr. ex *ΚΓ* V. 4. *ἐστιν* P. *ΚΓ* V. *ἐστιν* P. 7. *ἔστιν*

$\Gamma K > \Gamma \Delta$. ponatur $\Gamma \Lambda = \Gamma K$, et ab Λ ad AB perpendicularis ducatur ΛM, et ducatur MB. et quoniam $B\Gamma^2 = 5\Gamma K^2$, et $AB = 2B\Gamma$, $K\Lambda = 2\Gamma K$, erit $AB^2 = 5K\Lambda^2$. uerum etiam diametrus sphaerae potentia quintuplo maior est radio circuli, in quo icosaedrum constructum est [prop. XVI coroll.]. et AB diametrus sphaerae est. ergo $K\Lambda$ radius est circuli, in quo icosaedrum constructum est. $K\Lambda$ igitur latus est hexagoni in circulo illo inscripti [IV, 15 coroll.]. et quoniam diametrus sphaerae ex latere hexagoni et duobus lateribus decagoni in circulo illo inscriptorum composita est [prop. XVI coroll.], et AB diametrus est sphaerae, $K\Lambda$ autem latus hexagoni, et $AK = \Lambda B$, utraque AK, ΛB latus est decagoni in circulo inscripti, in quo icosaedrum constructum est. et quoniam ΛB latus est decagoni, hexagoni autem $M\Lambda$ (nam $M\Lambda = K\Lambda$, quia $M\Lambda = \Theta K$; aequali enim spatio a centro distant; et $\Theta K = K\Lambda = 2K\Gamma$), pentagoni est MB [prop. X. I, 47]. uerum latus pentagoni est icosaedri [prop. XVI]. ergo MB latus est icosaedri.

et quoniam ZB latus cubi est, secundum rationem extremam ac mediam diuidatur in N, et maior pars sit NB. ergo NB latus est dodecaedri [prop. XVII coroll.].

PB. 9. AB ἤ] AB P. 10. ἐκ] ἡ ἐκ q. ἐστίν P. 12. εἰρημένου κύκλου] ἐν τῷ εἰρημένῳ κύκλῳ m. 2 V. 13. τῆς σφαίρας ἡ V. 15. ἀναγραφομένων q. 21. ἐστιν P. ΘK] $K\Theta$ q. 23. ἐστίν] om. V. 24. ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου] mg. m. 2 B, in text. del. ἡ τοῦ. 26. BZ q. ἐστίν P.

Καὶ ἐπεὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἐδείχθη τῆς μὲν ΑΖ πλευρᾶς τῆς πυραμίδος δυνάμει ἡμιολία, τῆς δὲ τοῦ ὀκταέδρου τῆς ΒΕ δυνάμει διπλασίων, τῆς δὲ τοῦ κύβου τῆς ΖΒ δυνάμει τριπλασίων, οἵων ἄρα ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἕξ, τοιούτων ἡ μὲν τῆς πυραμίδος τεσσάρων, ἡ δὲ τοῦ ὀκταέδρου τριῶν, ἡ δὲ τοῦ κύβου δύο. ἡ μὲν ἄρα τῆς πυραμίδος πλευρὰ τῆς μὲν τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς δυνάμει ἐστὶν ἐπίτριτος, τῆς δὲ τοῦ κύβου δυνάμει διπλῆ, ἡ δὲ τοῦ ὀκταέδρου τῆς τοῦ κύβου δυνάμει ἡμιολία. αἱ μὲν οὖν εἰρημέναι τῶν τριῶν σχημάτων πλευραί, λέγω δὴ πυραμίδος καὶ ὀκταέδρου καὶ κύβου, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ἐν λόγοις ῥητοῖς. αἱ δὲ λοιπαὶ δύο, λέγω δὴ ἥ τε τοῦ εἰκοσαέδρου καὶ ἡ τοῦ δωδεκαέδρου, οὔτε πρὸς ἀλλήλας οὔτε πρὸς τὰς προειρημένας εἰσὶν ἐν λόγοις ῥητοῖς· ἄλογοι γάρ εἰσιν, ἡ μὲν ἐλάττων, ἡ δὲ ἀποτομή.

Ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἡ ΜΒ τῆς τοῦ δωδεκαέδρου τῆς ΝΒ, δείξομεν οὕτως.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΖΔΒ τρίγωνον τῷ ΖΑΒ τριγώνῳ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΖ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΒΑ. καὶ ἐπεὶ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ· ἀνάπαλιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ πρὸς τὸ ἀπὸ

---

1. Ante *ἐδείχθη* del. *ε* P. 4. *ἡ*] om. P. 6. *τεσσάρων τῶν* q. 7. *μέν*] corr. ex *με* m. 1 P. 9. *τῆς*] *τῇ* q. 10. *τῆς*] om. q. 11. *πλευραί*] om. q. 13. *τε*] om. P. 14. *ἡ*] om. q. 15. *τὰς προ-*] om. q. 16. *ἄλογοι γάρ εἰσιν*] om. V. 17. *ὅτι δέ* BV. *ΜΒ*] *Μ* e corr. V. 18. *ΝΒ*]

et quoniam demonstrauimus, diametrum sphaerae AZ lateris pyramidis potentia sesquialteram esse, BE autem latere octaedri potentia duplo maiorem, ZB autem latere cubi potentia triplo maiorem, quarum magnitudinum sex aequalis est potentia diametrus sphaerae, earum quattuor aequale est latus pyramidis, tribus octaedri, duabus cubi. itaque latus pyramidis potentia supersesquitertium est lateris octaedri, latere autem cubi potentia duplo maius, latus autem octaedri lateris cubi potentia sesquialterum est. ergo latera, quae nominauimus, trium illarum figurarum, scilicet pyramidis, octaedri, cubi, inter se rationes habent rationales. reliqua uero duo, scilicet icosaedri et dodecaedri, neque inter se neque ad ea, quae supra nominauimus, rationes rationales habent; nam irrationales sunt, alterum minor [prop. XVI], alterum apotome [prop. XVII].

Latus icosaedri MB maius esse latere dodecaedri NB, sic demonstrabimus.

quoniam enim trianguli $Z\Delta B$ et ZAB aequianguli sunt [VI, 8], erit $\Delta B : BZ = BZ : BA$ [VI, 4]. et quoniam tres rectae proportionales sunt, erit ut prima ad tertiam, ita quadratum primae ad quadratum tertiae [V def. 9].[1]) itaque $\Delta B : BA = \Delta B^2 : BZ^2$. e con-

1) Miramur, cur haec definitio hoc loco omnibus uerbis citetur, praesertim forma parum Euclidea, cum tamen antea in hac ipsa propositione toties tacite sit usurpata. itaque puto, uerba καὶ ἐπεί lin. 21 — δευτέρας lin. 23 subditiua esse.

N e corr. V. 19. ἐπεί] in ras. m. 1 P. ἐστιν P. ΔZB B, $ZB\Delta$ q. 21. BZ] (prius) supra scr. BA m. 1 B. BZ] ZB P. 26. ZB] BZ q.

τῆς ΒΔ. τριπλῆ δὲ ἡ ΑΒ τῆς ΒΔ· τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΒ τετραπλάσιον· διπλῆ γὰρ ἡ ΑΔ τῆς ΔΒ· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΒ· μείζων ἄρα ἡ ΑΔ τῆς ΖΒ· πολλῷ ἄρα ἡ ΑΛ τῆς ΖΒ μείζων ἐστίν. καὶ τῆς μὲν ΑΛ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΚΛ, ἐπειδήπερ ἡ μὲν ΛΚ ἑξαγώνου ἐστίν, ἡ δὲ ΚΑ δεκαγώνου· τῆς δὲ ΖΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν η ΝΒ· μείζων ἄρα ἡ ΚΛ τῆς ΝΒ. ἴση δὲ ἡ ΚΛ τῇ ΛΜ· μείζων ἄρα ἡ ΛΜ τῆς ΝΒ [τῆς δὲ ΛΜ μείζων ἐστὶν ἡ ΜΒ]. πολλῷ ἄρα ἡ ΜΒ πλευρὰ οὖσα τοῦ εἰκοσαέδρου μείζων ἐστὶ τῆς ΝΒ πλευρᾶς οὔσης τοῦ δωδεκαέδρου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λέγω δή, ὅτι παρὰ τὰ εἰρημένα πέντε σχήματα οὐ συσταθήσεται ἕτερον σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων ἴσων ἀλλήλοις.

Ὑπὸ μὲν γὰρ δύο τριγώνων ἢ ὅλως ἐπιπέδων στερεὰ γωνία οὐ συνίσταται. ὑπὸ δὲ τριῶν τριγώνων ἡ τῆς πυραμίδος, ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἡ τοῦ ὀκταέδρου, ὑπὸ δὲ πέντε ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου· ὑπὸ δὲ ἓξ τριγώνων ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνισταμένων οὐκ ἔσται στερεὰ γωνία· οὔσης γὰρ τῆς τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου γωνίας διμοίρου ὀρθῆς ἔσονται αἱ ἓξ τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι· ὅπερ ἀδύνατον·

---

2. ἔστιν PB. 5. καὶ μείζων B. ἄρα καί V. τῆς ΖΒ] (alt.) om. P. 6. ἐστί Vq. 7. τετμημένης V. 11. ΛΜ τῆς ΝΒ] in ras. m. 1 P. 12. τῆς δέ — ΜΒ] postea add. in mg. m. 1 P. 13. μείζω, ν add. m. 2 V. 14. Se-

trario igitur $AB : B\Delta = ZB^2 : B\Delta^2$. uerum $AB = 3B\Delta$. itaque etiam $ZB^2 = 3B\Delta^2$. uerum etiam $A\Delta^2 = 4\Delta B^2$; nam $A\Delta = 2\Delta B$. itaque $A\Delta^2 > ZB^2$. quare $A\Delta > ZB$. itaque multo magis $AA > ZB$. et rectae AA secundum rationem extremam ac mediam diuisae maior pars est KA, quoniam AK hexagoni est, KA autem decagoni [prop. IX]; rectae autem ZB secundum rationem extremam ac mediam diuisae maior pars est NB. itaque $KA > NB$. est autem $KA = AM$. quare $AM > NB$. ergo multo magis MB latus icosaedri NB latere dodecaedri maius est; quod erat demonstrandum.

Iam dico, praeter quinque figuras, quas nominauimus, nullam aliam construi posse polygonis et aequilateris et aequiangulis inter se aequalibus comprehensam.

Nam ex duobus triangulis aut omnino figuris planis angulus solidus construi nequit [XI def. 11]. ex tribus uero triangulis angulus pyramidis construitur, ex quattuor octaedri, ex quinque icosaedri. ex sex autem triangulis aequilateris et aequiangulis ad idem punctum coniunctis angulus solidus non orietur; nam cum angulus trianguli aequilateri duae partes sint recti, sex anguli quattuor rectis aequales erunt; quod fieri non

Cum epimetro lin. 15 sq. cfr. Psellus p. 51 sq.

quitur alia demonstratio extremae partis, u. app. 16. *συνσταθήσεται* P. 19. *ἢ ὅλως*] scripsi; ras. 2 uel 3 litt. P, supra scr. *ἀλλ' οὐδὲ ὑπὸ δύο* m. rec.; *ἀλλ' οὐδὲ ἄλλων δύο* Theon (BVq). 20. *οὐ*] om. Pq. 26. *αἱ*] om. q.

ἅπασα γὰρ στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων ἢ τεσσάρων ὀρθῶν περιέχεται. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ οὐδὲ ὑπὸ πλειόνων ἢ ἓξ γωνιῶν ἐπιπέδων στερεὰ γωνία συνίσταται. ὑπὸ δὲ τετραγώνων τριῶν ἡ τοῦ κύβου γωνία περιέχεται· ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἀδύνατον· ἔσονται γὰρ πάλιν τέσσαρες ὀρθαί. ὑπὸ δὲ πενταγώνων ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων, ὑπὸ μὲν τριῶν ἡ τοῦ δωδεκαέδρου· ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἀδύνατον· οὔσης γὰρ τῆς τοῦ πενταγώνου ἰσοπλεύρου γωνίας ὀρθῆς καὶ πέμπτου, ἔσονται αἱ τέσσαρες γωνίαι τεσσάρων ὀρθῶν μείζους· ὅπερ ἀδύνατον. οὐδὲ μὴν ὑπὸ πολυγώνων ἑτέρων σχημάτων περισχεθήσεται στερεὰ γωνία διὰ τὸ αὐτὸ ἄτοπον.

Οὐκ ἄρα παρὰ τὰ εἰρημένα πέντε σχήματα ἕτερον σχῆμα στερεὸν συσταθήσεται ὑπὸ ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα.

Ὅτι δὲ ἡ τοῦ ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου πενταγώνου γωνία ὀρθή ἐστι καὶ πέμπτου, οὕτω δεικτέον.

Ἔστω γὰρ πεντάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον τὸ ΑΒΓΔΕ, καὶ περιγεγράφθω περὶ αὐτὸ κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ, καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ τὸ κέντρον τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ. δίχα ἄρα τέμνουσι τὰς πρὸς τοῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε τοῦ πεντα-

---

2. ὀρθῶν γωνιῶν q. οὐδέ] om. q, οὐδ' P. 3. ἤ] om. P, supra scr. m. 1 B. γωνιῶν] τριγώνων q. 5. τέσσαρεις P. 8. δέ] om. q. ἰσοπλεύρου πενταγώνου V. 9. αἱ] supra m. rec. P. 10. τέσσαρες] -ες in ras. m. 1 P. In mg. m. 1 pro scholio: ὡς δείξει ὑποκάτω P. 11. πολυγωνίων π (non P). ἑτέρων] στερεῶν q. 12. αὐτό] om. BV.

potest; nam omnis angulus solidus minus quattuor rectis comprehenditur [XI, 21]. eadem de causa ne ex pluribus quidem quam sex angulis planis solidus angulus construitur. tribus autem quadratis angulus cubi comprehenditur. quattuor autem nullus; nam rursus quattuor recti erunt. pentagonis autem aequilateris et aequiangulis tribus angulus dodecaedri comprehenditur, quattuor autem nullus; nam cum angulus pentagoni aequilateri aequalis sit recto angulo cum quinta parte recti, quattuor anguli quattuor rectis maiores erunt; quod fieri non potest. eadem de causa ne aliis quidem figuris polygonis angulus solidus comprehendetur.

ergo praeter quinque figuras, quas nominauimus, nulla alia figura solida construetur figuris aequilateris et aequiangulis comprehensa; quod erat demonstrandum.

Lemma.

Angulum autem pentagoni aequilateri et aequianguli aequalem esse angulo recto et quintae parti recti, sic demonstrandum.

sit enim pentagonum aequilaterum et aequiangulum $AB\Gamma\Delta E$, et circum id circulus circumscribatur $AB\Gamma\Delta E$ [IV, 14], et sumatur centrum eius Z [III, 1], et ducantur ZA, ZB, $Z\Gamma$, $Z\Delta$, ZE. itaque angulos pentagoni ad A, B, Γ, Δ, E positos in binas partes aequales secant [I, 4]. et quoniam quinque anguli ad

---

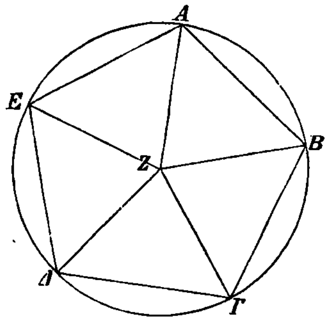
14. συνσταθήσεται P, corr. m. rec. 16. λῆμμα] om. codd. 17. ὅτε q. τε καί V. Post ἰσογωνίου add. καί q. 18. ἐστιν PB. πέμπτον q. 20. τε καί V. 22. τό] (prius) om. q. 24. τέμνουσιν PB.

γώνου γωνίας. καὶ ἐπεὶ αἱ πρὸς τῷ Z πέντε γωνίαι τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ καί εἰσιν ἴσαι, μία ἄρα αὐτῶν, ὡς ἡ ὑπὸ AZB, μιᾶς ὀρθῆς ἐστι παρὰ πέμπτον· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ZAB, ABZ μιᾶς εἰσιν ὀρθῆς καὶ πέμπτου. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ZAB τῇ ὑπὸ $ZB\Gamma$· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ $AB\Gamma$ τοῦ πενταγώνου γωνία μιᾶς ἐστιν ὀρθῆς καὶ πέμπτου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

---

2. εἰσί] εἰσίν PBV. 5. ZBA q. 7. ὀρθῆς ἐστι V. πέμπτον q. In fine: Εὐκλείδου στοιχείων ιγ̅ P, Εὐκλείδου στοιχείων τῆς Θέωνος ἐκδόσεως ιγ̅ Bq.

Z positi quattuor rectis aequales sunt et inter se aequales, unus eorum, uelut AZB, recto angulo aequalis est deficiente quinta parte. itaque $ZAB + ABZ$



recto et quintae parti recti aequales sunt [I, 32]. et $ZAB = ZB\Gamma$. quare $AB\Gamma$ totus angulus pentagoni recto et quintae parti recti aequalis est; quod erat demonstrandum.

APPENDIX I.

Demonstrationes alterae.

1.

Ad libr. XI prop. 22.

Ἄλλως.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, περιεχέτωσαν δὲ αὐτὰς ἴσαι εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ. λέγω, ὅτι δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι, τουτέστι πάλιν ὅτι αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

εἰ μὲν οὖν πάλιν αἱ πρὸς τοῖς Β, Ε, Θ σημείοις γωνίαι ἴσαι εἰσίν, ἴσαι ἔσονται καὶ αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ, καὶ ἔσονται αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες. εἰ δὲ οὔ, ἔστωσαν ἄνισοι αἱ πρὸς τοῖς Β, Ε, Θ σημείοις γωνίαι, καὶ μείζων ἡ πρὸς τῷ Β ἑκατέρας τῶν πρὸς τοῖς Ε, Θ· μείζων ἄρα ἔσται καὶ ἡ ΑΓ εὐθεῖα ἑκατέρας τῶν ΔΖ, ΗΚ. καὶ φανερόν, ὅτι ἡ ΑΓ μετὰ ἑκατέρας

XI, 22 post δεῖξαι p. 60, 18 add. PBFVb.

---

3. ὑπό] om. F, supra m. 2 B. 5. ΒΓ] ΒΓ, ΓΔ b. 6. ΔΖ] Δ corr. ex Γ m. 1 F. 8. τουτέστιν B. 11. ἴσαι εἰσίν] εἰσιν ἴσαι BV. ἴσαι] om. BV. ΗΚ] ΗΚ ἴσαι BV.

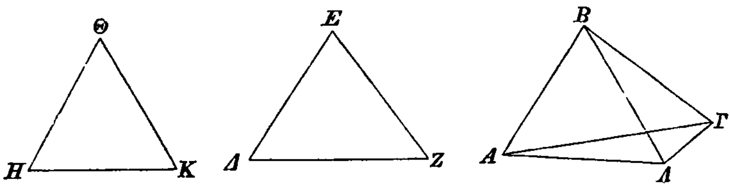
1.

Ad libr. XI prop. 22.

Aliter.

Sint dati tres anguli plani $AB\Gamma$, ΔEZ, $H\Theta K$, quorum duo rèliquo maiores sint quolibet modo coniuncti, et eos comprehendant rectae aequales AB, $B\Gamma$, ΔE, EZ, $H\Theta$, ΘK, et ducantur $A\Gamma$, ΔZ, HK. dico, fieri posse, ut ex rectis aequalibus rectis $A\Gamma$, ΔZ, HK triangulus construatur, hoc est rursus duas reliqua maiores esse quolibet modo coniunctas.

iam si rursus anguli ad puncta B, E, Θ positi aequales sunt, etiam $A\Gamma$, ΔZ, HK aequales erunt,



et duae reliqua maiores. sin minus, anguli ad puncta B, E, Θ positi inaequales sint, et angulus ad B positus utroque angulorum ad E, Θ positorum maior sit. itaque etiam $A\Gamma > \Delta Z$, $A\Gamma > HK$ [I, 24]. et

13. ἄνισοι] corr. ex ἴσοι m. rec. P. 14. Ante καί ras. 1 litt. F. 15. ἐστί BFb. ἡ $A\Gamma$] in ras. V. εὐθεῖα] om. V.

τῶν ΔZ, HK τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι. λέγω, ὅτι καὶ αἱ ΔZ, HK τῆς $A\Gamma$ μείζονές εἰσι. συνεστάτω πρὸς τῇ AB εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ B τῇ ὑπὸ $H\Theta K$ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ $AB\Lambda$, καὶ κείσθω μιᾷ τῶν AB, $B\Gamma$, ΔE, EZ, $H\Theta$, ΘK ἴση ἡ $B\Lambda$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $A\Lambda$, $\Lambda\Gamma$. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ AB, $B\Lambda$ δυσὶ ταῖς $H\Theta$, ΘK ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ $A\Lambda$ βάσει τῇ HK ἴση ἐστίν. καὶ ἐπεὶ αἱ πρὸς τοῖς E, Θ σημείοις γωνίαι τῆς ὑπὸ $AB\Gamma$ μείζονές εἰσιν, ὧν ἡ ὑπὸ $H\Theta K$ τῇ ὑπὸ $AB\Lambda$ ἐστιν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ E γωνία τῆς ὑπὸ $\Lambda B\Gamma$ μείζων ἐστίν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΛB, $B\Gamma$ δυσὶ ταῖς ΔE, EZ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔEZ γωνίας τῆς ὑπὸ $\Lambda B\Gamma$ μείζων, βάσις ἄρα ἡ ΔZ βάσεως τῆς $\Lambda\Gamma$ μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἐδείχθη ἡ HK τῇ $A\Lambda$· αἱ ἄρα ΔZ, HK τῶν $A\Lambda$, $\Lambda\Gamma$ μείζονές εἰσιν· ἀλλὰ αἱ $A\Lambda$, $\Lambda\Gamma$ τῆς $A\Gamma$ μείζονές εἰσι· πολλῷ ἄρα αἱ ΔZ, HK τῆς $A\Gamma$ μείζονές εἰσιν. τῶν $A\Gamma$, ΔZ, HK ἄρα εὐθειῶν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι· δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς $A\Gamma$, ΔZ, HK τρίγωνον συστήσασθαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

---

1. μείζονές εἰσι] Pb, γρ. μείζων ἐστί mg. b; μείζων ἐστί BFV. 2. ΔZ] corr. ex AZ m. 2 P. 3. B] e corr. F. 4. $AB\Lambda$] $BH\Delta$ b, corr. mg. m. 1. 5. $B\Lambda$] corr. ex $\Delta\Lambda$ m. 1 F. 8. περιέχουσι PBVb. $A\Lambda$] A in ras. V. βάσει] supra m. 2 B. 9. ἐστιν ἴση V. ἐστί B, comp. Fb. 10. τῆς] τοῖς F. εἰσι V. 12. $AB\Gamma$ bφ (non F). ἐστί PV, comp. b. δύο αἱ] αἱ δύο F. 13. ΛB] F, AB bφ. 14. -τέρᾳ καὶ γω- in mg. trans. m. 1 F. ἡ ὑπό] om. b. 15. $A\Gamma$ b. 16. ἐστίν] om. P. $A\Lambda$] corr. ex $A\Delta$ B. 17. ἀλλ' Fb. 18. πολλῷ — 19. εἰσιν] postea add. m. 1 P. 19. εἰσι BVb, comp. F. 21. ἐστίν] om. V. ΔZ] AZ F. 22. συνστήσασθαι P, corr. m. 2.

adparet, esse $A\Gamma + \Delta Z > HK$, $A\Gamma + HK > \Delta Z$. dico, esse etiam $\Delta Z + HK > A\Gamma$. nam ad rectam AB et punctum eius B construatur $\angle AB\Lambda = H\Theta K$ [I, 23], et ponatur $B\Lambda = AB = B\Gamma = \Delta E = EZ = H\Theta = \Theta K$, et ducantur $A\Lambda$, $\Lambda\Gamma$. et quoniam duae AB, $B\Lambda$ duabus $H\Theta$, ΘK singulae singulis aequales sunt et angulos aequales comprehendunt, erit $A\Lambda = HK$ [I, 4]. et quoniam anguli ad puncta E, Θ positi angulo $AB\Gamma$ maiores sunt, quorum $\angle H\Theta K = AB\Lambda$, angulus ad E positus angulo $AB\Gamma$ maior erit. et quoniam duae ΛB, $B\Gamma$ duabus ΔE, EZ aequales sunt, et $\angle \Delta EZ > \Lambda B\Gamma$, erit etiam $\Delta Z > \Lambda\Gamma$ [I, 24]. demonstrauimus autem, esse $HK = A\Lambda$. itaque erit

$$\Delta Z + HK > A\Lambda + \Lambda\Gamma.$$

uerum $A\Lambda + \Lambda\Gamma > A\Gamma$. multo igitur magis erit

$$\Delta Z + HK > A\Gamma.$$

ergo rectarum $A\Gamma$, ΔZ, HK duae reliqua maiores sunt quolibet modo coniunctae. fieri igitur potest, ut ex rectis aequalibus rectis $A\Gamma$, ΔZ, HK triangulus construatur; quod erat demonstrandum.

2.

Ad libr. XI prop. 23.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου τῆς ΜΝ, καὶ ἔστω τὸ Ξ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΞΛ. λέγω πάλιν, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΛΞ. εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΛΞ ἢ ἐλάττων. ἔστω πρότερον ἴση. δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ, τουτέστιν αἱ ΔΕ, ΕΖ, δύο ταῖς ΜΞ, ΞΛ, τουτέστι τῇ ΜΝ, ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ ἡ ΜΝ τῇ ΔΖ κεῖται ἴση. καὶ αἱ ΔΕ, ΕΖ ἄρα τῇ ΔΖ ἴσαι εἰσίν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ΑΒ ἴση ἐστὶ τῇ ΛΞ. ὁμοίως δὴ οὐδὲ ἐλάττων· πολλῷ γὰρ τὸ ἀδύνατον μεῖζον. ἡ ἄρα ΑΒ μείζων ἐστὶ τῆς ΛΞ. καὶ ἐὰν ὁμοίως, ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ, ἐκείνῳ ἴσον πρὸς ὀρθὰς τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ ἀναστήσωμεν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΞΡ, συσταθήσεται τὸ πρόβλημα.

ἀλλὰ δὴ ἔστω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐκτὸς τοῦ ΛΜΝ τριγώνου καὶ ἔστω τὸ Ξ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΞ, ΜΞ. λέγω δὴ καὶ οὕτως, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΛΞ. εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἢ ἐλάττων. ἔστω πρότερον ἴση. δύο οὖν αἱ ΑΒ, ΒΓ δύο ταῖς

XI, 23 in textu post *ποιῆσαι* p. 68, 17 add. PBFVb.

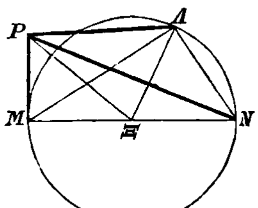
---

1. *τό*] om. P. 2. *τῆς ΜΝ*] ras. 3 litt. V, *γωνίας τῆς ΜΝ* φ. *ἔστω τὸ Ξ*] in ras. m. 1 b. 3. *ὅτι πάλιν* b. *μεῖζον* φ. 4. *ἡ*] corr. ex *αἱ* V. *εἰ γάρ* — 11. *τῆς ΛΞ*] mg. m. 1, add. *γρ.* b, in textu: *ἐπεὶ γὰρ αἱ ΔΕ, ΕΖ τῆς ΔΖ, τουτέστι τῆς ΜΝ, μείζους εἰσί, καὶ ἡμίσειαι· ἡ ΕΔ ἄρα τουτ-*
Γ Α Β Δ
έστιν τῆς ΜΞ ἡ ΑΒ τῆς ΛΞ μείζων ἐστίν. 6. *αἱ*] in ras. m. 2 P. *ΔΕ, ΕΖ δυσί* in spatio uacuo tertiae partis lineae m. 2 P. *δυσί* b. *τουτέστιν* B. 7. *ἀλλὰ ἡ ΜΝ*]

2.

Ad libr. XI prop. 23.[1])

Uerum centrum circuli in aliquo latere trianguli sit, uelut MN, et sit Ξ, et ducatur $\Xi\Lambda$. dico rursus, esse $AB > \Lambda\Xi$. nam si minus, erit aut $AB = \Lambda\Xi$ aut $AB < \Lambda\Xi$. prius sit $AB = \Lambda\Xi$. itaque duae rectae AB, $B\Gamma$, hoc est ΔE, EZ, duabus rectis $M\Xi$, $\Xi\Lambda$, hoc est MN, aequales sunt. supposuimus autem, esse $MN = \Delta Z$. quare $\Delta E + EZ = \Delta Z$. quod fieri non potest. itaque non est $AB = \Lambda\Xi$. iam similiter demonstrabimus, ne minorem quidem esse AB recta $\Lambda\Xi$; nam hoc multo minus fieri potest. ergo $AB > \Lambda\Xi$. et si similiter ΞP ad planum circuli perpendicularem erexerimus, ita ut sit $\Xi P^2 = AB^2 \div \Lambda\Xi^2$ problema componetur.



Uerum centrum circuli extra triangulum ΛMN positum sit et sit Ξ, et ducantur $\Lambda\Xi$, $M\Xi$. dico sic quoque, esse $AB > \Lambda\Xi$. nam si minus, erit aut $AB = \Lambda\Xi$ aut $AB < \Lambda\Xi$. prius sit

1) De figuris cfr. p. 62.

m. 2 P. *κεῖται*] *ἐστίν* supra scr. *κεῖται* m. 2 B. 8. *καί* — *ἄρα*] om. F; uidentur fuisse in mg. a m. 2. *ἴσαι εἰσίν*] m. 2 P. 9. *ἐστίν*] om. B V, supra m. 1 F. *ἐστί*] om. V, *ἄρα* φ (non F). *τῇ*] bis φ. 13. *ἐκείνῳ* — 14. *ΞP*] mg. m. 1 b, add. *γρ.*, in textu: *ἐκείνῳθι ἴσην πρὸς τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ ἀναστήσομεν τὴν ΞP* (in ras.). 13. *ἐκεῖνο* b. 14. *ἀναστήσομεν* b. 16. *ἐντός* V, sed corr. 18. *ΛΞ*, *MΞ*] *αἱ ΛΞ* φ, *ΞΛ*, *ZM*, *ΞN* b, *ΛΞ*, *MΞ*, *NΞ* V et B (*NΞ* m. 2). *καί*] om. V, *ὅτι καί* b. *ὅτι*] om. b. 20. *οὖν*] *δή* V, *δεῖ* φ. *δύο*] *δυσί* b.

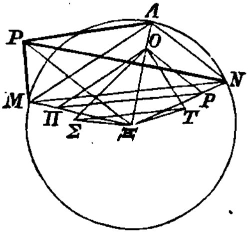
ΜΞ, ΞΛ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΛΓ βάσει τῇ ΜΛ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΜΞΛ ἴση ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΗΘΚ τῇ ὑπὸ ΛΞΝ ἐστιν ἴση. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΜΞΝ δύο ταῖς ΑΒΓ, ΗΘΚ ἐστιν ἴση. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΗΘΚ τῆς ὑπὸ ΔΕΖ μείζονές εἰσιν. καὶ ἡ ὑπὸ ΜΞΝ ἄρα τῆς ὑπὸ ΔΕΖ μείζων ἐστίν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΔΕ, ΕΖ δύο ταῖς ΜΞ, ΞΝ ἴσαι εἰσίν, καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΜΝ ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΜΞΝ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστιν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ μείζων· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΛΞ. ἑξῆς δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων. μείζων ἄρα. καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πάλιν ἀναστήσωμεν τὴν ΞΡ καὶ ἴσην αὐτὴν ἀποθώμεθα, ᾧ μεῖζον δύναται τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ, συσταθήσεται τὸ πρόβλημα.

λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΛΞ. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω. καὶ κείσθω τῇ μὲν ΑΒ ἴση ἡ ΞΟ, τῇ δὲ ΒΓ ἴση ἡ ΞΠ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΟΠ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΞΟ τῇ ΞΠ. ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ΟΛ λοιπῇ τῇ ΠΜ ἐστιν ἴση. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΜ τῇ ΠΟ, καὶ ἰσογώνιον τὸ ΛΜΞ τρίγωνον τῷ ΠΞΟ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΞΛ πρὸς τὴν ΛΜ, ἡ ΞΟ πρὸς τὴν ΟΠ, καὶ ἐναλ-

---

1. ἑκατέρα] ἑκατέρας P, ς del. m. 1. 2. ΜΛ] Μ in ras. V. ἐστιν ἴση F. 3. ἴση ἐστίν] ἐστιν ἴση b, ἴση ἐστί V. 4. καὶ ὅλη b. 5. δύο] PBV, F m. 1, δυσί b, F m. 2. ταῖς] ταῖς ὑπό Fb; ὑπὸ supra scr. m. 2 BV. ἀλλ' P. αἱ] ἡ b. 6. εἰσι BV, comp. Fb ΜΞΝ] corr. ex ΞΜΝ m. 2 P, ΜΞ in ras. m. 2 B. 7. ἐστί PBV, comp. Fb. 8. δύο] δυσί b et m. 2 F. εἰσί PBV, comp. Fb. 9. γωνίᾳ] om. b. 10. ἴση ἐστίν b. 11. ἐστίν] om. V. ἑξῆς δέ] ὁμοίως δὴ τοῖς ἔμπροσθεν Fb, mg. m. 1: γρ. ἑξῆς δέ b.

$AB = \Lambda\Xi$. ergo duae rectae AB, $B\Gamma$ duabus $M\Xi$, $\Xi\Lambda$ singulae singulis aequales sunt, et $A\Gamma = M\Lambda$; itaque erit $\angle AB\Gamma = M\Xi\Lambda$ [I, 8]. eadem de causa etiam $\angle H\Theta K = \Lambda\Xi N$. itaque $\angle M\Xi N = AB\Gamma + H\Theta K$. sed $AB\Gamma + H\Theta K > \Delta EZ$. quare etiam $\angle M\Xi N > \Delta EZ$. et quoniam duae rectae ΔE, EZ duabus $M\Xi$, ΞN aequales sunt, et $\Delta Z = MN$, erit $\angle M\Xi N = \Delta EZ$ [I, 8]. demonstrauimus autem, esse etiam $\angle M\Xi N > \Delta EZ$. quod absurdum est. itaque non est $AB = \Lambda\Xi$. deinceps autem demonstrabimus, ne minorem quidem eam esse. ergo maior est. et si rursus ad planum circuli perpendicularem erexerimus ΞP et sumpserimus $\Xi P^2 = AB^2 \div \Lambda\Xi^2$, problema componetur.



iam dico, ne minorem quidem esse AB recta $\Lambda\Xi$. nam si fieri potest, sit $AB < \Lambda\Xi$. et ponatur $\Xi O = AB$, $\Xi\Pi = B\Gamma$, et ducatur $O\Pi$. et quoniam $AB = B\Gamma$, erit $\Xi O = \Xi\Pi$. quare etiam $O\Lambda = \Pi M$. itaque ΛM rectae ΠO parallela est [VI, 2], et triangulus $\Lambda M\Xi$ triangulo $\Pi\Xi O$ aequiangulus [I, 29]. itaque $\Xi\Lambda : \Lambda M = \Xi O : O\Pi$ [VI, 4], et permutando [V, 16]

---

13. ἀναστήσομεν P, sed corr. 14. τήν] τό F. ΞP] P eras. V, ΞO b. ὑποθώμεθα FV. ᾧ] corr. ex ὅ P m. 2. 15. τὸ ἀπό — τῆς] in spatio uacuo et mg. m. rec. P. τὸ ἀπὸ τῆς] ἡ b. τοῦ ἀπό] om. b. $\Lambda\Xi$] $\Lambda\Xi$ οὐ b; mg. m. 1: γρ. τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς $\Lambda\Xi$· γρ. καὶ οὕτως. λέγω — p. 352, 29: ἀδύνατον] mg. m. 1 b, adiecta figura, cui adscribitur: τοῦτο τὸ σχῆμα οὐκ ἔστι τοῦ κειμένου. 20. ἐστίν P. καί] om. F, supra m. 2: καὶ ἡ; καὶ ἡ b. 21. $O\Lambda$] O in ras. F. $M\Pi$ F. 23. $\Lambda M\Xi$] $\Lambda\Xi M$ Fb, $M\Xi\Lambda$ in ras. V. 24. ἡ ΞO] οὕτως ἡ ΞO Fb.

λὰξ ὡς ἡ ΑΞ πρὸς τὴν ΞΟ, οὕτως ἡ ΑΜ πρὸς την ΟΠ. μείζων δὲ ἡ ΑΞ τῆς ΞΟ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΑΜ τῆς ΟΠ. ἀλλὰ ἡ ΑΜ τῇ ΑΓ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ΑΓ ἄρα τῆς ΟΠ ἐστι μείζων. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΑΒ, ΒΓ δύο ταῖς ΟΞ, ΞΠ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΑΓ βάσεως τῆς ΟΠ μείζων ἐστίν, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΟΞΠ μείζων ἐστίν. ὁμοίως δὴ κἂν τὴν ΞΡ ἴσην ἑκατέρᾳ τῶν ΞΟ, ΞΠ ἀπολάβωμεν καὶ ἐπιζεύξωμεν τὴν ΟΡ, δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΗΘΚ γωνία τῆς ὑπὸ ΟΞΡ μείζων ἐστίν. συνεστάτω δὴ πρὸς τῇ ΑΞ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ξ τῇ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΞΣ, τῇ δὲ ὑπὸ ΗΘΚ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΞΤ, καὶ κείσθω ἑκατέρα τῶν ΞΣ, ΞΤ τῇ ΟΞ ἴση, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΟΣ, ΟΤ, ΣΤ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ, ΒΓ δύο ταῖς ΟΞ, ΞΣ ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΟΞΣ ἴση, βάσις ἄρα ἡ ΑΓ, τουτέστιν ἡ ΑΜ, βάσει τῇ ΟΣ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΑΝ τῇ ΟΤ ἴση ἐστίν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΜΑ, ΑΝ δύο ταῖς ΣΟ, ΟΤ ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΜΑΝ γωνίας τῆς ὑπὸ ΣΟΤ μείζων ἐστίν, βάσις ἄρα ἡ ΜΝ βάσεως τῆς ΣΤ μείζων ἐστίν. ἀλλὰ ἡ ΜΝ τῇ ΔΖ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ΔΖ ἄρα τῆς ΣΤ μείζων ἐστίν. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΔΕ, ΕΖ δύο ταῖς ΣΞ, ΞΤ ἴσαι εἰσίν, καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσεως τῆς ΣΤ μείζων, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίας τῆς ὑπὸ ΣΞΤ μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΣΞΤ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΗΘΚ. ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΕΖ τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΗΘΚ μείζων ἐστίν. ἀλλὰ καὶ ἐλάττων· ὅπερ ἀδύνατον.

1. τὴν ΞΟ] ΞΟ V. 3. τῇ ΑΓ] om. φ. 4. ΑΓ] ΓΑ P. μείζων ἐστί, sed ἐστί supra scr., F. 6. μείζων]

erit $\Lambda\Xi : \Xi O = \Lambda M : O\Pi$. uerum $\Lambda\Xi > \Xi O$. itaque etiam $\Lambda M > O\Pi$ [V, 14]. sed $\Lambda M = A\Gamma$. itaque etiam $A\Gamma > O\Pi$. iam quoniam duae rectae AB, $B\Gamma$ duabus rectis $O\Xi$, $\Xi\Pi$ singulae singulis aequales sunt, et $A\Gamma > O\Pi$, erit $\angle AB\Gamma > O\Xi\Pi$ [I, 25]. similiter si posuerimus $\Xi P = \Xi O = \Xi\Pi$ et duxerimus OP, demonstrabimus, esse etiam $\angle H\Theta K > O\Xi P$. iam ad rectam $\Lambda\Xi$ et punctum eius Ξ angulo $AB\Gamma$ aequalis construatur $\angle \Lambda\Xi\Sigma$ [I, 23], et ponatur $\Xi\Sigma = \Xi T = O\Xi$, et ducantur $O\Sigma$, OT, ΣT. et quoniam duae rectae AB, $B\Gamma$ duabus $O\Xi$, $\Xi\Sigma$ aequales sunt, et $\angle AB\Gamma = O\Xi\Sigma$, erit $A\Gamma = O\Sigma$ [I, 4], h. e. $\Lambda M = O\Sigma$. eadem de causa etiam $\Lambda N = OT$. et quoniam duae rectae $M\Lambda$, ΛN duabus ΣO, OT aequales sunt, et $\angle M\Lambda N > \Sigma OT$, erit $MN > \Sigma T$ [I, 24]. sed $MN = \Delta Z$. itaque etiam $\Delta Z > \Sigma T$. iam quoniam duae rectae ΔE, EZ duabus $\Sigma\Xi$, ΞT aequales sunt, et $\Delta Z > \Sigma T$, erit $\angle \Delta EZ > \Sigma\Xi T$ [I, 25]. est autem $\angle \Sigma\Xi T = AB\Gamma + H\Theta K$. ergo $\angle \Delta EZ > AB\Gamma + H\Theta K$. uerum idem minor est. quod fieri non potest.

---

comp. F, ἄρα comp. φ. ἐστί PBV, comp. Fb. 7. ἄρα] comp. supra scr. m. 2 F. 8. κἄν] P, καί π. 10. $O\Xi P$ γωνίας F. ἐστί P, comp. b. 11. τὴν $\Lambda\Xi$ εὐθεῖαν π, et B, sed corr. Post $\Lambda\Xi$ ras. 1 litt. V. 12. ἴσην P, sed corr. ἡ] postea ins. m. 1 P. 13. ΘHK B. $\Lambda\Xi T$] T e corr. m. 2 P. 14. ἐπεζεύχθω V, σαν add. m. rec. 15. αἱ AB, $B\Gamma$ δύο] mg. V. 16. εἰσί PV, comp. Fb. 17. τῇ] ἡ F, corr. m. 2. 18. βάσει] ει eras. V. 19. ἐστιν ἴση Vb. ΛN] Λ ins. m. 1 V. 20. ΣO] corr. ex $O\Sigma$ V, $O\Sigma$ B. εἰσί PV, comp. Fb. 21. ΣT F. ἐστί PV, comp. Fb. 22. ἀλλ' Fb. 23. ἐστί V. 24. οὖν] om. B. $\Sigma\Xi$] corr. ex EZ m. 2 P. εἰσί PV, comp. Fb. 25. μείζων ἐστί FV; seq. ras. tertiae partis lineae F. 27. ἡ] (prius) καὶ ἡ b. 29. ἀδύνατον] ἄτοπον F, corr. mg. m. 2.

3.

Uulgo XI prop. 38.

Ἐὰν ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθὸν ᾖ, καὶ ἀπό τινος σημείου τῶν ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων ἐπὶ τὸ ἕτερον ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς πεσεῖται τῶν ἐπιπέδων ἡ ἀγομένη κάθετος.

ἐπίπεδον γὰρ τὸ ΓΔ ἐπιπέδῳ τῷ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἔστω, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ ΔΑ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τοῦ ΓΔ ἐπιπέδου τυχὸν σημεῖον τὸ Ε· λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ ΑΒ ἐπίπεδον κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τῆς ΔΑ πεσεῖται.

μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πιπτέτω ἐκτὸς ὡς ἡ ΕΖ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ζ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΔΑ ἐν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ κάθετος ἔστω ἡ ΖΗ, ἥτις καὶ τῷ ΓΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΗ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΖΗ τῷ ΓΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΕΗ οὖσα ἐν τῷ ΓΔ ἐπιπέδῳ, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΗΕ γωνία. ἀλλὰ καὶ ἡ ΕΖ τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· ἡ ἄρα ὑπὸ ΕΖΗ ὀρθή ἐστιν. τριγώνου δὴ τοῦ ΕΖΗ αἱ δύο γωνίαι ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ ΑΒ ἐπίπεδον κάθετος ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τῆς ΔΑ. ἐπὶ τὴν ΔΑ ἄρα πεσεῖται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XI, 38 post XI, 37 habent PBFV, om. b; *ἔν τισι τῶν ἀντιγράφων οὐ φέρεται τὸ λη̄* P mg. m. 1.

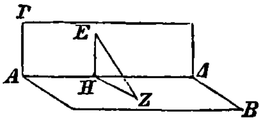
λη' PBV, in ras. m. 2 F. 2. *τῶν*] (alt.) m. 2 F. *ἕτερον*] post *ρ* del. *ε* P. 3. *ἀχθεῖ* P, corr. m. 2. 5. *ΓΔ*] *Γ* eras. V. 6. *ΔΑ*] corr. ex *ΑΔ* V, *ΑΔ* F. 9. *ΔΑ*] *ΑΔ* FV. 11. *συμβαλέτω* PV. 13. *ἔστω*] *ἤχθω* BFV. 14. *ἐστι* BV,

3.

Uulgo XI prop. 38.

Si planum ad planum perpendiculare est, et a puncto aliquo alterius plani ad alterum planum perpendicularis ducitur, perpendicularis ducta in communem planorum sectionem cadet.

Nam planum $\Gamma\Delta$ ad planum AB perpendiculare sit, et communis eorum sectio sit ΔA, et in $\Gamma\Delta$ plano punctum aliquod sumatur E. dico, perpendicularem ab E ad planum AB ductam in ΔA cadere.



ne cadat enim, sed si fieri potest, extra cadat ut EZ et cum plano AB concurrat in puncto Z, et a Z ad ΔA in plano AB perpendicularis sit ZH, quae eadem ad planum $\Gamma\Delta$ perpendicularis est [XI def. 4], et ducatur EH. iam quoniam ZH ad planum $\Gamma\Delta$ perpendicularis est, et eam tangit EH in plano $\Gamma\Delta$ posita, $\angle ZHE$ rectus erit [XI def. 3]. uerum etiam EZ ad planum AB perpendicularis est. itaque $\angle EZH$ rectus est. ergo trianguli EZH duo anguli rectis aequales sunt; quod fieri non potest [I, 17]. itaque perpendicularis ab E ad planum AB ducta extra ΔA non cadet. ergo cadet in ΔA; quod erat demonstrandum.

---

comp. F. EH] H eras. V. 18. *ἐστιν*] (alt.) *ἐστι* BV, comp. F. 19. *ὀρϑαὶς*] *δύο ὀρϑαῖς* FV, *δύο* add. m. 2 B. *εἰσίν*] om. FV. 22. *τήν*] corr. ex *τῆς* m. 2 V. $A\Delta$ FV. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*] om. FV.

4.

Ad libr. XII prop. 4.

Καὶ ἐπεὶ τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι δύο πρίσματα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις, ἀλλὰ μὴν καὶ τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι δύο πρίσματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις τὸ ΒΚΛΞ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΜΟ εὐθεῖα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΛΞΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις τὸ ΠΕΡΦ, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΣΤ, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣΤΥ. συνθέντι ἐστὶν ἄρα ὡς τὰ ΚΒΞΛΜΟ, ΛΞΓΜΝΟ πρίσματα πρὸς τὸ ΛΞΓΜΝΟ πρίσμα, οὕτως τὰ ΠΕΦΡΣΤ, ΡΦΖΣΤΥ πρίσματα πρὸς τὸ ΡΦΖΣΤΥ πρίσμα. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὰ ΚΒΞΛΜΟ, ΛΞΓΜΝΟ πρὸς τὰ ΠΕΦΡΣΤ, ΡΦΖΣΤΥ πρίσματα, οὕτως τὸ ΛΞΓΜΝΟ πρίσμα πρὸς τὸ ΡΦΖΣΤΥ πρίσμα. ὡς δὲ τὸ ΛΞΓΜΝΟ πρίσμα πρὸς τὸ ΡΦΖΣΤΥ πρίσμα, οὕτως ἐδείχθη ἡ ΛΞΓ βάσις πρὸς τὴν ΡΦΖ, καὶ ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν. καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι δύο πρίσματα. ὁμοίως δὲ κἂν τὰς ὑπολειπομένας πυραμίδας διέλωμεν τὸν αὐτὸν τρόπον οἷον ὡς τὰς ΜΝΟΗ, ΣΤΥΘ, ἔσται ὡς ἡ ΜΝΟ

XII, 4. Pro uerbis *ὡς δέ* p. 160, 13 — *δεῖξαι* p. 162, 14 Theon (BVq). de figura u. p. 159.

---

2. *ἐστιν ἴσα* B. 4. *ΒΚΛΞ*] in ras. V. 5. *ΜΟ*] *Μ* e corr. V. 6. *μέν*] om. V. 7. *οὕτω* B. 9. *καὶ συνθέντι*

4.

Ad libr. XII prop. 4.

Et quoniam duo prismata pyramidis $AB\Gamma H$ inter se aequalia sunt, uerum etiam duo prismata pyramidis $\Delta EZ\Theta$ inter se aequalia sunt, erit ut prisma, cuius basis est parallelogrammum $BK\Lambda\Xi$, ei autem opposita recta MO, ad prisma, cuius basis est triangulus $\Lambda\Xi\Gamma$, ei autem oppositus OMN, ita prisma, cuius basis est $\Pi EP\Phi$, ei autem opposita ΣT, ad prisma, cuius basis est triangulus $P\Phi Z$, ei autem oppositus $\Sigma T\Upsilon$. componendo igitur est $KB\Xi\Lambda MO + \Lambda\Xi\Gamma MNO : \Lambda\Xi\Gamma MNO = \Pi E\Phi P\Sigma T + P\Phi Z\Sigma T\Upsilon : P\Phi Z\Sigma T\Upsilon$. itaque permutando erit

$$KB\Xi\Lambda MO + \Lambda\Xi\Gamma MNO : \Pi E\Phi P\Sigma T + P\Phi Z\Sigma T\Upsilon = \Lambda\Xi\Gamma MNO : P\Phi Z\Sigma T\Upsilon.$$

demonstrauimus autem, esse $\Lambda\Xi\Gamma MNO : P\Phi Z\Sigma T\Upsilon = \Lambda\Xi\Gamma : P\Phi Z = AB\Gamma : \Delta EZ$. itaque etiam ut $AB\Gamma : \Delta EZ$, ita duo prismata pyramidis $AB\Gamma H$ ad duo prismata pyramidis $\Delta EZ\Theta$. similiter si reliquas pyramides, uelut $MNOH$, $\Sigma T\Upsilon\Theta$, eadem ratione diui-

---

q. 10. *ἄρα ἐστίν* V. 11. *οὕτω* B. $\Pi PE\Phi\Sigma T$, post Φ ras., V. 12. $P\Phi Z\Sigma T\Upsilon$] P inter duas ras. V. $E\Phi Z\Sigma T\Upsilon$ V. *πρίσματα* q. 13. $KB\Lambda\Xi MO$ B. $\Xi\Lambda\Gamma MNO$ B, $\Lambda\Xi\Gamma MON$ q et ON in ras. V; seq. *πρίσματα* V. 14. $\Pi E\Phi P\Sigma T$] ΦP in ras. V. *οὕτω* B. 15. *ὡς δέ* — 16. $P\Phi Z\Sigma T\Upsilon$ *πρίσμα*] om. q. 18. *βάσιν*] om. V. 19. *οὕτω* q. 22. *ὑπολειπομένας*] mg. m. 2 B, in textu *γενομένας*. 23. *ὡς*] (prius) bis V.

βάσις πρὸς τὴν ΣΤΥ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΜΝΟΗ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΣΤΥΘ πυραμίδι δύο πρίσματα. ἀλλ' ὡς ἡ ΜΝΟ βάσις πρὸς τὴν ΣΤΥ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως καὶ τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι δύο πρίσματα, καὶ τὰ ἐν τῇ ΜΝΟΗ δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΣΤΥΘ πυραμίδι δύο πρίσματα, καὶ τὰ τέσσαρα πρὸς τὰ τέσσαρα. τὰ αὐτὰ δὲ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ τῶν γενομένων πρισμάτων ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν ΑΚΛΟ καὶ ΔΠΡΣ πυραμίδων καὶ πάντων ἁπλῶς τῶν ἰσοπληθῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5.

Ad libr. XII prop. 17.

Δεικτέον δὴ καὶ ἑτέρως προχειρότερον, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΑΨ τῆς ΑΗ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Η τῇ ΑΗ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΗΑ', καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΑ'. τέμνοντες δὴ τὴν ΕΒ περιφέρειαν δίχα καὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομέν τινα περιφέρειαν, ἥ ἐστιν ἐλάσσων τῆς ὑποτεινομένης τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου περιφερείας ὑπὸ τῆς ἴσης τῇ ΗΑ'. λελείφθω καὶ ἔστω ἡ ΚΒ περιφέρεια. ἐλάσσων ἄρα καὶ ἡ ΚΒ εὐθεῖα τῆς ΗΑ'. καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ ἐστὶ

XII, 17 inter ἐπιφάνειαν et δύο p. 240, 5—6 PBVq. De figura u. p. 231. pro Α' in P scribitur α; litteram hanc in fig. om. B.

---

6. οὕτω Bq. δύο] om. V. 7. πρὸς τά — πρίσματα] om. q. πυραμίδι δύο πρίσματα] om. V. 8. καί] καὶ ἔτι

serimus, erunt ut $MNO : \Sigma T \Upsilon$, ita duo prismata pyramidis $MNOH$ ad duo prismata pyramidis $\Sigma T \Upsilon \Theta$. uerum $MNO : \Sigma T \Upsilon = AB\Gamma : \Delta EZ$. quare etiam ut $AB\Gamma : \Delta EZ$, ita duo prismata pyramidis $AB\Gamma H$ ad duo prismata pyramidis $\Delta EZ\Theta$ et duo prismata pyramidis $MNOH$ ad duo prismata pyramidis $\Sigma T\Upsilon\Theta$, et quattuor ad quattuor. eadem autem etiam in prismatis ex diuisione pyramidum $AK\Lambda O$, $\Delta \Pi P \Sigma$ ortis demonstrabuntur, et omnino in omnibus prismatis numero aequalibus; quod erat demonstrandum.

5.

Ad libr. XII prop. 17.

Iam aliter quoque promptius demonstrandum est, esse $A\Psi > AH$. ducatur ab H ad AH perpendicularis HA', et ducatur AA'. iam arcum EB in duas partes aequales secantes et dimidiam partem eius in duas partes aequales et hoc semper facientes arcum quendam relinquemus minorem arcu circuli $B\Gamma\Delta E$, sub quo recta aequalis rectae HA' subtendit. relinquatur et sit arcus KB. itaque erit $KB < HA'$. et

V. δύο] e corr. V. 9. τά] om. B. τέσσερα B, corr. m. 2. 10. τά] om. q. τέσσερα B, corr. m. 2. γινομένων q. 11. τῶν] corr. ex τῶ m. 2 B. $A\Lambda KO$ V. 12. ἰσοπληθῶν] εἰς τὸ πλῆθος q. 13. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. BVφ; in V del. τι δέ ἐστιν ὡς τὸ Λ. 15. AH] (prius) H e corr. V, AK q. 16. HA'] $H\Lambda$ Vq, H B. AA'] $A\Lambda$ Vq, A B; mg. ἡ $H\Lambda$ καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $A\Lambda$ m. 2 B. 18. τοῦτο] τὸ αὐτό q. 19. ἐστιν] ἔσται q. 20. τῇ] τῆς B. HA'] $H\Lambda$ V (Λ e corr.) et B (supra scr. A m. 2), HA q. 21. εἰλήφθω q. 22. HA'] $H\Lambda$ V, HA q, H B (supra scr. HA m. 2). ἐστιν P.

τὸ $BK\Sigma O$ τετράπλευρον, καί εἰσιν ἴσαι αἱ OB, BK, $K\Sigma$, καὶ ἐλάττων ἡ $O\Sigma$, ἀμβλεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $B\Psi K$ γωνία. μείζων ἄρα ἡ KB τῆς $B\Psi$. ἀλλὰ τῆς KB μείζων ἐστὶν ἡ HA'· πολλῷ ἄρα ἡ HA' μείζων ἐστὶ τῆς $B\Psi$· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς HA' τοῦ ἀπὸ τῆς $B\Psi$. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AA' τῇ AB, ἴσον καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AA' τῷ ἀπὸ τῆς AB. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AA' ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν AH, HA', τῷ δὲ ἀπὸ τῆς AB ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν $B\Psi$, ΨA· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AH, HA' ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν $B\Psi$, ΨA, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς $B\Psi$ ἔλαττόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς HA'· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΨA μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ AH· μείζων ἄρα ἡ $A\Psi$ τῆς AH.

6.

Ad libr. XIII prop. 6.

Ἐὰν ῥητὴ εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων ἀποτομή ἐστι. ῥητὴ γὰρ ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον. σύμμετρον τμῆμά ἐστι τὸ $A\Gamma$. λέγω, ὅτι ἑκατέρα τῶν $A\Gamma$, ΓB ἀποτομή ἐστι. κείσθω τῆς AB ἡμίσεια ἡ $A\Delta$. ῥητὴ δὲ ἡ AB· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ $A\Delta$. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔA, ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῶν ΔA, ῥητὸν ἄρα καὶ

---

6. Haec propositio inter libb. XII et XIII legitur in solo q (cfr. p. 246 adn. crit.). in re parum differt a XIII, 6, qualem recepimus; sed uerba magis abhorrent, quam ut scriptura codicis q inter discrepantias meras recipi possit. est detruncatio prop. 6 genuinae. cum praeterea scriptura erroribus scribarum plurimis laboret, interpretationem Latinam non dedi.

---

1. αἱ] om. q. 2. ὑπό] ὑπὸ τό B. 3. ἀλλά] ἀλλὰ καί q. 4. HA'] HA V, AH q, H B (supra scr. HA m. 2).

quoniam in circulo est $B K \Sigma O$ quadrilaterum, et $OB = BK = K\Sigma$, minor autem $O\Sigma$, obtusus est $\angle B\Psi K$. itaque $KB > B\Psi$. uerum $HA' > KB$. itaque multo magis $HA' > B\Psi$. quare etiam $A'H^2 > B\Psi^2$. et quoniam $AA' = AB$, erit etiam $A'A^2 = AB^2$. uerum $AH^2 + A'H^2 = A'A^2$, $B\Psi^2 + \Psi A^2 = AB^2$. ergo $AH^2 + A'H^2 = B\Psi^2 + \Psi A^2$, quorum $B\Psi^2 < A'H^2$. itaque $\Psi A^2 > AH^2$. ergo $A\Psi > AH$.

HA'] $H\Lambda$ V (Λ in ras.) et q, HA e corr. B. 5. μεῖζον] μείζων P. HA'] $H\Lambda$ V (Λ in ras.), HA q et B (A postea ins.). 6. τῆς] om. P. AA'] $A\Lambda$ V q, A B (supra scr. m. 2 $A\Delta$). τῇ] corr. ex τῆς P. 7. AA'] $A\Lambda$ V q, $A\Delta$ postea ins. B. τῷ] corr. ex τοῦ m. rec. P. τῷ] corr. ex τό m. 1 q. 8. AA'] $A\Lambda$ V q; AH B, $A\Lambda$ m. 2. AH] $\overline{\alpha\ \eta}$ B. HA'] $H\Lambda$ V q, HA B. 10. AH] ins. m. 2 in spatio uacuo B. HA'] $H\Lambda$ V q; HA B, corr. in $H\Lambda$. ἴσα ἐστί V. 11. ἐστι] om V; ἐστιν P. τῆς] om. P. HA'] ras. V, HA q (H e corr. m. 1), $\overline{\eta\alpha}$ς B; seq. καί comp. V. 12. τῆς ΨA V q. τῆς AH V q; A mutat. in Λ B.

τὸ ἀπὸ τῶν *ΔΓ*. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς *ΔΓ* τοῦ ἀπὸ τῆς *ΔΑ*, τὸ ἄρα ἀπὸ τῶν *ΔΓ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῶν *ΔΑ* λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀλλ' ὃν μὲν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ *ΔΓ* τῇ *ΔΑ* μήκει. καί ἐστι ῥητὴ ἑκατέρα· αἱ *ΓΔ*, *ΔΑ* ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ *ΑΓ*. ῥητὴ δὲ ἡ *ΑΒ*, καὶ τῷ ἀπὸ τῶν *ΑΓ* ἴσον παρὰ τὴν *ΑΒ* παραβέβληται τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΒ*, *ΒΓ*. τὸ δὲ ᾱ ἀποτομὴν παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην. ἀποτομὴ ἄρα καὶ ἡ *ΓΒ*. ἑκατέρα ὁ ἄρα τὸν *ΑΓ*, *ΓΒ* ἀποτομή ἐστιν. ἐὰν ἄρα ῥητὴ εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων ἀποτομή ἐστιν.

7.

Ad libr. XIII prop. 5.

Ἄλλως.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἔσται ὡς συναμφότερος ἡ ὅλη καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὴν ὅλην, οὕτως ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ *ΑΒ* ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ *Γ*, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ *ΑΓ*· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς συναμφότερος ἡ *ΒΑΓ* πρὸς *ΑΒ*, οὕτως ἡ *ΒΑ* πρὸς *ΑΓ*.

Κείσθω γὰρ τῇ *ΑΓ* ἴση ἡ *ΑΔ*· λέγω, ὅτι ἐστὶν

---

7. Hoc ἄλλως habet P post XIII, 6, q in textu pro XIII, 6, b mg. m. 1 post XIII, 5.

---

15. ἄλλως] om. q, in quo numerus prop. erasus est. 16. μέσο q. 20. ἔστω] ἔσται b. 21. *ΑΒ*] *ΒΑ* P.

7.

Ad libr. XIII prop. 5.

Aliter.

Si recta linea secundum rationem extremam ac mediam secatur, erit ut tota cum parte maiore ad totam, ita tota ad partem maiorem.

nam recta AB in Γ secundum rationem extremam ac mediam secta sit, et maior pars sit $A\Gamma$. dico, esse $BA + A\Gamma : AB = BA : A\Gamma$. ponatur enim $A\Delta = A\Gamma$. dico, esse $B\Delta : BA = BA : A\Gamma$. nam quo-ὡς ἡ *ΒΔ* πρὸς τὴν *ΒΑ*, οὕτως ἡ *ΒΑ* πρὸς τὴν *ΑΓ*. ἐπεὶ γὰρ ἡ *ΑΒ* ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ *Γ*, καὶ μεῖζον τμῆμά ἐστι τὸ *ΑΓ*, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ *ΒΑ* πρὸς τὴν *ΑΓ*, οὕτως ἡ *ΑΓ* πρὸς τὴν *ΓΒ*. ἴση δὲ ἡ *ΑΓ* τῇ *ΔΑ*· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ *ΒΑ* πρὸς *ΑΔ*, οὕτως ἡ *ΑΓ* πρὸς *ΓΒ*· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ *ΔΑ* πρὸς τὴν *ΑΒ*, οὕτως ἡ *ΒΓ* πρὸς τὴν *ΓΑ*· συνθέντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ *ΔΒ* πρὸς τὴν *ΒΑ*, οὕτως ἡ *ΒΑ* πρὸς *ΑΓ*. ἴση δέ ἐστιν ἡ *ΔΑ* τῇ *ΑΓ*· ἔστιν ἄρα ὡς συναμφότερος ἡ *ΒΑΓ* πρὸς τὴν *ΑΒ*, οὕτως ἡ *ΒΑ* πρὸς *ΑΓ*. καὶ ἐπεὶ δέδεικται ὡς ἡ *ΔΒ* πρὸς *ΒΑ*, οὕτως η *ΒΑ* πρὸς *ΑΓ*, ἴση δὲ ἡ *ΓΑ* τῇ *ΔΑ*, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ *ΔΒ* πρὸς τὴν *ΒΑ*, οὕτως ἡ *ΒΑ* πρὸς τὴν *ΑΔ*. καὶ ἡ *ΔΒ* ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ *Α*, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα ἡ *ΑΒ*· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

8.

Ad libr. XIII prop. 1—5.

Τί ἐστιν ἀνάλυσις καὶ τί ἐστι σύνθεσις.

Ἀνάλυσις μὲν οὖν ἐστι λῆψις τοῦ ζητουμένου ὡς ὁμολογουμένου διὰ τῶν ἀκολούθων ἐπί τι ἀληθὲς ὁμολογούμενον.

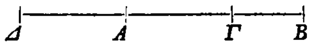
---

8. Hae analyses in meis codicibus coniunctae sunt. leguntur in P (in quo demonstr. alt. prop. 5 sextam sequitur) post demonstrationem alteram prop. 5 (supra nr. 7 signatam), in B post prop. 6, in b post prop. 5 (prop. 6 deest), in q post propositionem in eo sextam, quam supra nr. 7 signauimus; in V analyses prop. 1—3 in textu sunt post prop. 6, prop. 4—5 eodem loco mg. inf. m. 2.

---

2. *ΑΒ*] *ΒΑ* P. 4. *ΒΑ*] *ΑΒ* q. 5. δέ] δ' P. *ΔΑ*] *ΑΔ* P. τὴν *ΑΔ* P. 7. *ΔΑ*] *ΔΒ* b. τήν] (prius) om. b.

niam AB in Γ secundum rationem extremam ac mediam secta est, et maior pars est $A\Gamma$, erit $BA : A\Gamma = A\Gamma : \Gamma B$. uerum $A\Gamma = \Delta A$. itaque $BA : A\Delta = A\Gamma : \Gamma B$. e contrario igitur $\Delta A : AB = B\Gamma : \Gamma A$. componendo igitur $\Delta B : BA = BA : A\Gamma$. uerum $\Delta A = A\Gamma$. itaque $BA + A\Gamma : AB = BA : A\Gamma$.[1]) et quoniam demonstrauimus, esse $\Delta B : BA = BA : A\Gamma$, et $\Gamma A = \Delta A$, erit $\Delta B : BA = BA : A\Delta$. ergo etiam ΔB in A secundum rationem extremam ac mediam secta est, et maior pars est recta ab initio sumpta AB; quod erat demonstrandum.



8.

Ad libr. XIII prop. 1—5.

Quid sit analysis, quid synthesis.

Analysis est adsertio eius, quod quaeritur, ut concessi, qua per consequentias ad aliquid peruenitur, quod uerum esse conceditur.

1) Hic perfecta est demonstratio propositionis, qualis in nostro ἄλλως exposita est. reliqua addita sunt, ut intellegeretur, sub hac forma idem demonstrari ac in ipsa propositione 5, qualis in textu exposita est.

9. πρός] πρὸς τήν P. δέ] δ' P. ΔA] $A\Delta$ P. 10. AB] BA P 11. τὴν $A\Gamma$ P. 12. ΓA] $A\Gamma$ P. ΔA] $A\Delta$ P. 14. καί] (prius) om. P. 15. καί] om. b. 17. τί — σύνθεσις] om. V. 18. μὲν οὖν] om. BVbq. ἐστιν P.

Σύνθεσις δὲ λῆψις τοῦ ὁμολογουμένου διὰ τῶν ἀκολούθων ἐπί τι ἀληθὲς ὁμολογούμενον.

Τοῦ ᾱ θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ σύνθεσις ἄνευ καταγραφῆς.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ, καὶ τῇ ἡμισείᾳ τῆς ΑΒ ἴση κείσθω ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ.

Ἐπεὶ γὰρ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΔ ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ πενταπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ ΑΔ· διελόντι ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ ΑΔ. ἀλλὰ τῷ μὲν δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ ἴσον ἐστὶ τὸ υπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ· διπλῆ γὰρ ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ· τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἡ γὰρ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἐστιν. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΑΔ. ἔστι δέ· διπλῆ γάρ ἐστιν ἡ ΑΒ τῆς ΑΔ.

---

2. *τι ἀληθὲς ὁμολογούμενον*] P, *τὴν τοῦ ζητουμένου κατάληξιν ἤτοι κατάληψιν* BVbq. 10. *τό*] *τοῦ* b. *ἔστιν* B. 12. *ΑΔ*] (alt.) corr. ex *ΑΓ* m. 1 b. 13. *ἔστιν* P. *τῆς ΑΔ* V. 14. *τετραπλάσιόν* Vq. 15. *τῶν*] om. bq. 16. *τό*] *τοῦ* b. *τῶν*] om. q. *γάρ ἐστιν* bq. 17. *τῷ*] corr. ex *τῶν* m. 2 P. *ΑΓ*] *ΓΑ* q. 19. *ΑΒ*] *τῶν ΑΒ* P. 20. *τῆς*] om. V. *τό*] *τῷ* q. 22. *ἀπό*] bis q. *τῆς*]

synthesis est adsertio concessi, qua per consequentias ad aliquid peruenitur, quod uerum esse conceditur.

Analysis et synthesis prop. I sine figura.

recta enim AB secundum rationem extremam ac mediam secetur in Γ, et maior pars eius sit $A\Gamma$, et ponatur $A\Delta = \frac{1}{2} AB$. dico, esse $\Gamma\Delta^2 = 5A\Delta^2$.

nam quoniam $\Gamma\Delta^2 = 5\Delta A^2$, et

$$\Gamma\Delta^2 = \Gamma A^2 + A\Delta^2 + 2\Gamma A \times A\Delta \text{ [II, 4]},$$

erit $\Gamma A^2 + A\Delta^2 + 2\Gamma A \times A\Delta = 5A\Delta^2$. itaque subtrahendo $\Gamma A^2 + 2\Gamma A \times A\Delta = 4A\Delta^2$. uerum

$BA \times A\Gamma = 2\Gamma A \times A\Delta$ (nam $BA = 2A\Delta$), et $A\Gamma^2 = AB \times B\Gamma$ (nam AB secundum rationem extremam ac mediam secta est). itaque $BA \times A\Gamma + AB \times B\Gamma = 4A\Delta^2$. uerum $BA \times A\Gamma + AB \times B\Gamma = AB^2$ [II, 2]. ergo $AB^2 = 4A\Delta^2$. et est; nam $AB = 2A\Delta$.

---

om. P. ἔστι V, ἴσον ἐστί bq. ἀπό] ὑπό b. 23. ἀπὸ] ἀπὸ τῆς V, ὑπό b.

Σύνθεσις.

Ἐπεὶ οὖν τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ ΒΑ τὸ ὑπὸ ΒΑ, ΑΓ ἐστι μετὰ τοῦ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΑΔ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ· ὥστε τὰ ἀπὶ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ πενταπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ. τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ τὶ ἀπὸ τῆς ΓΔ ἐστιν. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τοῦ β̄ θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ σύνθεσις ἄνευ καταγραφῆς.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΓΔ τμήματος ἑαυτῆς τοῦ ΔΑ πενταπλάσιον δυνάσθω, τῆς δὲ ΔΑ διπλῆ κείσθω ἡ ΑΒ· λέγω, ὅτι η ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΓ, ἥτις ἐστὶ τὸ λοιπὸν μέρος τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας.

Ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ ἴσον· διπλῆ γάρ ἐστιν ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῖ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, ὅπερ ἐστὶ τὶ ἀπὸ τῆς

---

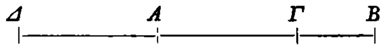
2. ΒΑ BV, Β″Α′ b. 3. ἐστιν B. 11. πενταπλάσιόν Vq. 13. ἐστιν] ἐστι Vq, comp. b. 14. ὅπερ ἔδει δεῖξαι]

synthesis.

Iam quoniam $AB^2 = 4A\Delta^2$, et $BA^2 = BA \times A\Gamma + AB \times B\Gamma$ [II, 2], erunt $BA \times A\Gamma + AB \times B\Gamma = 4A\Delta^2$. uerum $BA \times A\Gamma = 2\Delta A \times A\Gamma$, $AB \times B\Gamma = A\Gamma^2$. itaque $A\Gamma^2 + 2\Delta A \times A\Gamma = 4\Delta A^2$. quare $\Delta A^2 + A\Gamma^2 + 2\Delta A \times A\Gamma = 5\Delta A^2$. uerum $\Delta A^2 + A\Gamma^2 + 2\Delta A \times A\Gamma = \Gamma\Delta^2$ [II, 4]. ergo $\Gamma\Delta^2 = 5\Delta A^2$; quod erat demonstrandum.

Analysis et synthesis prop. II sine figura.

quadratum enim rectae $\Gamma\Delta$ quintuplum sit quadrati partis eius ΔA, et ponatur $AB = 2\Delta A$. dico,



rectam AB secundum rationem extremam ac mediam in puncto Γ sectam esse, et maiorem partem esse $A\Gamma$, quae reliqua pars est rectae ab initio sumptae.

quoniam AB in Γ secundum rationem extremam ac mediam secta est, et maior pars est $A\Gamma$, erit $AB \times B\Gamma = A\Gamma^2$. uerum etiam $BA \times A\Gamma = 2\Delta A \times A\Gamma$; nam $BA = 2A\Delta$. itaque erit $AB \times B\Gamma + BA \times A\Gamma$

om. q, o)— b. 15. ἡ] (alt.) om. P. 19. λόγον] om. b. 20. σημεῖον] om. V. τό] om. bq. 21. ἐστίν P. 22. ἐπεὶ γάρ BV. 25. BA, $A\Gamma$ b. 26. BA] AB q. 27. τοῦ] om. q. τῶν] om. Bbq. ἐστίν P.

ΑΒ, ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ. τετραπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ· τετραπλάσιον ἄρα καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ τοῦ ἀπὸ ΑΔ· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ. ἔστι δέ.

Σύνθεσις.

Ἐπεὶ οὖν πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΔ τὰ ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ ἐστι μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ πενταπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ ΔΑ. διελόντι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ· ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραπλάσιον τοῦ ἀπὸ ΑΔ· τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἅπαξ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τὸ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ ἐστι μετὰ τοῦ ὑπὸ ΒΑ, ΑΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ· καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ὑπὸ ΒΑ, ΑΓ, λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. μείζων δὲ ἡ ΒΑ τῆς ΑΓ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΑΓ τῆς ΓΒ· ἡ ΑΒ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

---

4. ἀπὸ τῆς ΑΓ V. τῆς ΑΔ V. τά] τό q. 5. μετά — ΑΓ] supra m. 2 B. ὑπό] ἀπό q. 6. ἐστίν PB.

$=2\varDelta A \times A\Gamma + A\Gamma^2 = AB^2$ [II, 2]. sed $AB^2 = 4\varDelta A^2$. itaque etiam $2\varDelta A \times A\Gamma + A\Gamma^2 = 4\varDelta A^2$. quare $\varDelta A^2 + A\Gamma^2 + 2\varDelta A \times A\Gamma = 5\varDelta A^2 = \Gamma\varDelta^2$ [II, 4]. et est.

synthesis.

iam quoniam $\Gamma\varDelta^2 = 5\varDelta A^2$, et $\Gamma\varDelta^2 = \varDelta A^2 + A\Gamma^2 + 2\varDelta A \times A\Gamma$ [II, 4], erit $\varDelta A^2 + A\Gamma^2 + 2\varDelta A \times A\Gamma = 5\varDelta A^2$. subtrahendo erit $2\varDelta A \times A\Gamma + A\Gamma^2 = 4A\varDelta^2$. uerum etiam $AB^2 = 4A\varDelta^2$. itaque $2\varDelta A \times A\Gamma + A\Gamma^2 = AB^2 = BA \times A\Gamma + A\Gamma^2$. uerum $AB^2 = AB \times B\Gamma + BA \times A\Gamma$ [II, 2]. itaque $BA \times A\Gamma + AB \times B\Gamma = BA \times A\Gamma + A\Gamma^2$. et ablato, quod commune est, $BA \times A\Gamma$ erit $AB \times B\Gamma = A\Gamma^2$. itaque $BA : A\Gamma = A\Gamma : \Gamma B$. et $BA > A\Gamma$. itaque etiam $A\Gamma > \Gamma B$. ergo AB secundum rationem extremam ac mediam in Γ secta est, et maior pars est $A\Gamma$; quod erat demonstrandum.

τό] om. B. πενταπλάσια B, comp. V. 7. τῆς] om. P. ἔστιν Bb, om. q. δέ] om. q, $\overline{\varDelta E}$ b; dein add. διὰ τὴν ὑπόθεσιν BVq, mg. m. 1 b. 10. τά] τό BV. 11. ἔστιν B. ἀπό] corr. ex ὑπό V. 13. ἔστι] om. V. $A\varDelta$ q, τῆς $\varDelta A$ V. 15. τῆς] om. P. ἔστιν B. ἀπό] corr. ex ἀ m. 1 P. 16. τῆς $A\varDelta$ V. τῶν] om. P. 17. ἐστίν B. 18. ἀλλά — τῆς AB] postea add. m. 1 mg. P. 19. ὑπὸ τῶν V. ἔστιν B. 20. ὑπό] (alt.) ἀπό q. ἴσον — 21. BA, $A\Gamma$] postea add. m. 1 mg. P. 21. τῷ] corr. ex τό m. 2 P. 23. AB, $B\Gamma$] corr. ex $AB\Gamma$ V; AB b, $AB\Gamma$ B. 25. $A\Gamma$] (prius) ΓA q. ἄρα AB V. 27. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. Vq, o)— b.

Τοῦ $\bar{\gamma}$ θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ σύνθεσις.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ $A\Gamma$, καὶ τῆς $A\Gamma$ ἡμίσεια ἡ $\Gamma\Delta$· λέγω, ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$ τοῦ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$.

Ἐπεὶ γὰρ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$ τοῦ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΔB τὸ ὑπὸ τῶν AB, $B\Gamma$ ἐστι μετὰ τοῦ ἀπὸ $\Delta\Gamma$, τὸ ἄρα ὑπὸ AB, $B\Gamma$ μετὰ τοῦ ἀπὸ $\Delta\Gamma$ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ $\Delta\Gamma$· διελόντι τὸ ἄρα ὑπὸ AB, $B\Gamma$ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ $\Delta\Gamma$. τῷ δὲ ὑπὸ AB, $B\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $A\Gamma$· ἡ γὰρ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $A\Gamma$ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ $\Delta\Gamma$. ἔστι δέ· διπλῆ γὰρ ἡ $A\Gamma$ τῆς $\Delta\Gamma$.

Ἡ σύνθεσις.

Ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ $A\Gamma$ τῆς $\Delta\Gamma$, τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ $A\Gamma$ τοῦ ἀπὸ $\Delta\Gamma$. ἀλλὰ τῷ ἀπὸ $A\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ AB, $B\Gamma$· τὸ ἄρα ὑπὸ AB, $B\Gamma$ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ $\Delta\Gamma$. συνθέντι τὸ ἄρα ὑπὸ AB, $B\Gamma$ μετὰ τοῦ ἀπὸ $\Delta\Gamma$, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΔB, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ $\Delta\Gamma$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τοῦ $\bar{\delta}$ θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ σύνθεσις.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ $A\Gamma$·

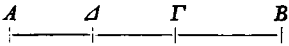
---

1. ἡ] (alt.) om. q. 3. γάρ] om. bq. λόγον] om. P. 8. ΔB] e corr. V, $B\Delta$ q. 9. $B\Gamma$] corr. ex $A\Gamma$ m. 2 B.

Analysis et synthesis prop. III.

recta enim AB in Γ puncto secundum rationem extremam ac mediam secetur, et maior pars sit $A\Gamma$ et $\Gamma\Delta = \frac{1}{2} A\Gamma$. dico, esse $B\Delta^2 = 5\,\Gamma\Delta^2$.

nam quoniam $B\Delta^2 = 5\,\Gamma\Delta^2$, et $\Delta B^2 = AB \times B\Gamma + \Delta\Gamma^2$ [II, 6], erit $AB \times B\Gamma + \Delta\Gamma^2 = 5\,\Delta\Gamma^2$. subtrahendo erit $AB \times B\Gamma = 4\,\Delta\Gamma^2$. uerum $A\Gamma^2 = AB$



$\times B\Gamma$; nam AB in Γ secundum rationem extremam ac mediam secta est. ergo $A\Gamma^2 = 4\,\Delta\Gamma^2$. et est; nam $A\Gamma = 2\,\Delta\Gamma$.

synthesis.

quoniam $A\Gamma = 2\,\Delta\Gamma$, erit $A\Gamma^2 = 4\,\Delta\Gamma^2$. uerum $AB \times B\Gamma = A\Gamma^2$. itaque $AB \times B\Gamma = 4\,\Delta\Gamma^2$. addendo erit $AB \times B\Gamma + \Delta\Gamma^2 = 5\,\Delta\Gamma^2 = \Delta B^2$ [II, 6]; quod erat demonstrandum.

Analysis et synthesis prop. IV.

recta enim AB in Γ secundum rationem extremam ac mediam secetur, et maior pars sit $A\Gamma$. dico, esse $AB^2 + B\Gamma^2 = 3\,A\Gamma^2$.

τῆς ΔΓ V, ΓΔ P. 11. ἄρα τό BV. 15. τῆς ΔΓ V. ἐστιν B. 16. ἡ] om. Bq. 17. ΓΔ P. 18. τῷ] corr. ex τό m. 1 b. ἀπό] om. b. 20. ἀπό] (prius) om. P. 22. ἐστιν P. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. q, o)— b. 23. ἡ] (alt.) om. q. 25. γάρ] om. bq.

λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν AB, $B\Gamma$ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ $A\Gamma$.

Ἐπεὶ γὰρ τὰ ἀπὸ τῶν AB, $B\Gamma$ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ $A\Gamma$, ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν AB, $B\Gamma$ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν AB, $B\Gamma$ ἐστι μετὰ τοῦ ἀπὸ $A\Gamma$, τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν AB, $B\Gamma$ μετὰ τοῦ ἀπὸ $A\Gamma$ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ $A\Gamma$· διελόντι τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ AB, $B\Gamma$ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ $A\Gamma$· ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν AB, $B\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $A\Gamma$. ἔστι δέ· ἡ γὰρ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ.

Ἡ σύνθεσις.

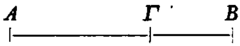
Ἐπεὶ ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καί ἐστι μεῖζον τμῆμα ἡ $A\Gamma$, τὸ ἄρα ὑπὸ AB, $B\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ $A\Gamma$· τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ AB, $B\Gamma$ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ $A\Gamma$· συνθέντι τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν AB, $B\Gamma$ μετὰ τοῦ ἀπὸ $A\Gamma$ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ $A\Gamma$. ἀλλὰ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν AB, $B\Gamma$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $A\Gamma$ τὰ ἀπὸ τῶν AB, $B\Gamma$ ἐστι τετράγωνα· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AB, $B\Gamma$ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ $A\Gamma$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τοῦ $\overline{\varepsilon}$ θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ σύνθεσις.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ $A\Gamma$, καὶ τῇ $A\Gamma$ ἴση κείσθω ἡ $A\Delta$· λέγω, ὅτι ἡ ΔB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ A, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ AB.

5. τοῦ] om. V. 6. ἐστιν P. 7. τῶν AB V. διπλάσιον — 8. $B\Gamma$] om. q. 8. τό] om. b. ὑπό] ἀπό V,

nam quoniam $AB^2 + B\Gamma^2 = 3A\Gamma^2$, sed $AB^2 + B\Gamma^2 = 2AB \times B\Gamma + A\Gamma^2$ [II, 7], erit $2AB \times B\Gamma + A\Gamma^2 = 3A\Gamma^2$. subtrahendo erit $2AB \times B\Gamma = 2A\Gamma^2$.



quare $AB \times B\Gamma = A\Gamma^2$. et est; nam AB secundum rationem extremam ac mediam in Γ secta est.

synthesis.

quoniam AB secundum rationem extremam ac mediam in Γ secta est, et maior pars est $A\Gamma$, erit $AB \times B\Gamma = A\Gamma^2$. itaque $2AB \times B\Gamma = 2A\Gamma^2$. addendo erit $2AB \times B\Gamma + A\Gamma^2 = 3A\Gamma^2$. uerum $2AB \times B\Gamma + A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2$ [II, 7]. ergo $AB^2 + B\Gamma^2 = 3A\Gamma^2$; quod erat demonstrandum.

Analysis et synthesis prop. V.

recta enim AB in Γ secundum rationem extremam ac mediam secetur, et maior pars sit $A\Gamma$, et ponatur $A\Delta = A\Gamma$. dico, ΔB in A secundum rationem extremam ac mediam sectam esse, et partem maiorem esse AB.

ἅπαξ ὑπό Bb. 9. τῷ] supra scr. ο m. 1 b. τῆς] om. B. ἐστιν B. 10. Γ ὅπερ ἔδει δεῖξαι B. 11. ἡ] om. Bb. 13. καί — ΑΓ] postea add. m. 1 P, mg. m. 1 V (ΑΓ e corr.) 14. ἴσον — ΒΓ] mg. m. 2 B. τῷ] τό q. ἀπό] om. B. ὑπὸ τῶν B. 15. διπλάσιον — ΑΓ] etiam in mg. a m. 2 B (τῆς ΑΓ). 18. τῆς] om. q. ἐστιν P. 19. ΒΓ τετράγωνα Bbq. 20. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. q, o)— b. 21. ἡ] (alt.) om. V.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΔΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΒ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ προς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ. ἴση δὲ ἡ ΑΔ τῇ ΑΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ· διελόντι ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. ἴση δὲ ἡ ΑΔ τῇ ΑΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. ἔστι δέ· ἡ γὰρ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ.

Ἡ σύνθεσις.

Ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λίγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΑΔ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ· συνθέντι ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ· ἀναστρέψαντι ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ. ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΑΔ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς ΑΔ. ἡ ἄρα ΔΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

9.

Ad libr. XIII prop. 17.

Ῥητὴ γὰρ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τὸ ΑΓ. προσκείσθω δὲ

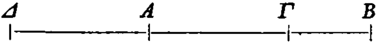
---

9. Ad uocabulum κύβον p. 326, 19 signo ♂ relatum in mg. inf. hab. P m. 1 (pro scholio).

---

1. ἐπεί — 2. ΑΒ] mg. V. 1. γάρ] οὖν V. 2. κατὰ τὸ Α] om. V. 6. ΒΔ] corr. ex ΒΑ m. 2 B. 8. ἴση — 9.

nam quoniam ΔB in A secundum rationem extremam ac mediam secta est, et maior pars est AB, erit $\Delta B : BA = BA : A\Delta$. sed $A\Delta = A\Gamma$. itaque $\Delta B : BA = BA : A\Gamma$. itaque conuertendo erit $B\Delta$



$: \Delta A = AB : B\Gamma$ [V, 19 coroll.]. dirimendo igitur $BA : A\Delta = A\Gamma : \Gamma B$ [V, 17]. sed $A\Delta = A\Gamma$. itaque $BA : A\Gamma = A\Gamma : \Gamma B$. et est; nam AB secundum rationem extremam ac mediam in Γ secta est.

synthesis.

quoniam AB in Γ secundum rationem extremam ac mediam secta est, erit $BA : A\Gamma = A\Gamma : \Gamma B$. sed $A\Gamma = A\Delta$. itaque $BA : A\Delta = A\Gamma : \Gamma B$. componendo igitur $B\Delta : \Delta A = AB : B\Gamma$ [V, 18]. itaque conuertendo $\Delta B : BA = BA : A\Gamma$ [V, 19 coroll.]. sed $A\Gamma = A\Delta$. erit igitur $\Delta B : BA = BA : A\Delta$. ergo ΔB in A secundum rationem extremam ac mediam secta est, et maior pars est AB; quod erat demonstrandum.

9.

Ad libr. XIII prop. 17.[1])

recta enim rationalis AB in Γ secundum rationem extremam ac mediam secetur, et maior sit $A\Gamma$. ad-

1) Hoc scholio idem demonstratur, quod in prop. VI, quam omittunt codices nonnulli; inter eos tamen P non est.

ΓB] mg. m. 2 B. 12. ἡ] om. Bq. 17. τήν] om. q. 19. τῇ ΑΔ] in ras. m. 1 P. 20. πρὸς τὴν ΒΑ V. τὴν ΑΔ Vb. 21. κατὰ τὸ Α] postea add. m. 1 P. 22. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. q, o)— b. δεῖξαι] :∼ V.

ἡ $A\Delta$ ἡμίσεια τῆς AB. ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ $A\Delta$. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιον τὸ ἀπὸ $\Gamma\Delta$ τοῦ ἀπὸ ΔA, αἱ $\Gamma\Delta$, ΔA ἄρα ῥηταί εἰσιν δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἀποτομὴ ἄρα ἡ $A\Gamma$. ῥητὴ δὲ ἡ AB. τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομήν· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $B\Gamma$. ἑκάτερον ἄρα τῶν $A\Gamma$, ΓB ἀποτομή ἐστιν ὅ· προσαρμόζουσα δὲ τῆς μὲν $A\Gamma$ ἡ $A\Delta$, τῆς δὲ ΓB ἡ $\Gamma\Delta$.

10.

Ad libr. XIII prop. 18.

Ἄλλως ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ MB τῆς NB.

Ἐπεὶ γὰρ διπλῆ ἐστιν ἡ $A\Delta$ τῆς ΔB, τριπλῆ ἄρα ἡ AB τῆς $B\Delta$. ὡς δὲ ἡ AB πρὸς τὴν $B\Delta$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BZ διὰ τὸ ἰσογώνιον εἶναι τὸ ZAB τρίγωνον τῷ $Z\Delta B$ τριγώνῳ. τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς BZ. ἐδείχθη δὲ τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς $K\Lambda$ πενταπλάσιον. πέντε ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς $K\Lambda$ τρισὶ τοῖς ἀπὸ τῆς ZB ἴσα ἐστίν. ἀλλὰ τρία τὰ ἀπὸ τῆς ZB ἓξ τῶν ἀπὸ τῆς NB μείζονά ἐστιν. καὶ πέντε ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς $K\Lambda$ ἓξ τῶν ἀπὸ τῆς NB μείζονά ἐστιν. ὥστε καὶ ἓν τὸ ἀπὸ τῆς $K\Lambda$ ἑνὸς τοῦ ἀπὸ τῆς NB μεῖζόν ἐστιν. μείζων ἄρα ἡ $K\Lambda$ τῆς NB. ἴση δὲ ἡ $K\Lambda$ τῇ ΛM. μείζων ἄρα ἡ ΛM τῆς NB. πολλῷ ἄρα ἡ MB τῆς BN μείζων ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ὅτι δὲ τρία τὰ ἀπὸ τῆς ZB ἓξ τῶν ἀπὸ τῆς BN μείζονά ἐστιν, δεί-

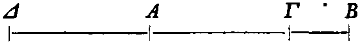
---

10. Post δεῖξαι p. 336, 14 hab. PBVq.

---

7. ὅ] h. e. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. 9. Post NB add. V: ἄλλως δεικτέον, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ τῆς

iiciatur autem $A\Delta = \frac{1}{2} AB$. itaque etiam $A\Delta$ rationalis est. et quoniam est $\Gamma\Delta^2 = 5\Delta A^2$ [XIII, 1], rectae $\Gamma\Delta$, ΔA rationales sunt potentia solum commensurabiles. itaque $A\Gamma$ apotome est. sed AB ra-



tionalis est. quadratum autem apotomes ad rationalem adplicatum latitudinem efficit apotomen [X, 97]. itaque $B\Gamma$ apotome est; ergo utraque $A\Gamma$, ΓB apotome est; quod erat demonstrandum. congruens autem est $A\Gamma$ rectae $A\Delta$, et $\Gamma\Delta$ rectae ΓB.

10.

Ad libr. XIII prop. 18.

Aliter demonstratur, esse $MB > NB$.

Quoniam enim $A\Delta = 2\Delta B$, erit $AB = 3B\Delta$. sed $AB : B\Delta = AB^2 : BZ^2$, quia $ZAB \sim Z\Delta B$. itaque $AB^2 = 3BZ^2$. demonstrauimus autem, esse $AB^2 = 5K\Lambda^2$. itaque $5K\Lambda^2 = 3ZB^2$. uerum $3ZB^2 > 6\,NB^2$. itaque etiam $5K\Lambda^2 > 6NB^2$. quare etiam $K\Lambda^2 > NB^2$. itaque $K\Lambda > NB$. uerum $K\Lambda = \Lambda M$. itaque $\Lambda M > NB$. ergo multo magis $MB > BN$; quod erat demonstrandum. — esse autem $3ZB^2 > 6BN^2$, ita demonstrabimus. quoniam enim $BN > NZ$, erit

---

τοῦ δωδεκαέδρου. 11. $B\Delta$] ΔB BV. $B\Delta$] ΔB V. 13. εἶναι] om. V. 14. BZ] ZB V. 18. ἐστι q. 20. ἐστι BVq. 23. BN] NB B, $\ddot{N}BN$ V. μείζων ἐστίν] om. BV. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. q. 24. τῆς] (prius) τῶν Vq. ἐστι BVq.

ξομεν οὕτως· ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ BN τῆς NZ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ZBN μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ BZN. τὸ ἄρα ὑπὸ ZBN μετὰ τοῦ ὑπὸ BZN μεῖζόν ἐστιν ἢ διπλάσιον τοῦ ὑπὸ BZN. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ZBN μετὰ τοῦ ὑπὸ BZN τὸ ἀπὸ τῆς ZB ἐστιν, τὸ δὲ ὑπὸ BZN τὸ ἀπὸ τῆς NB ἐστιν. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ZB τοῦ ἀπὸ τῆς BN μεῖζόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. ἓν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ZB δύο τῶν ἀπὸ BN μεῖζόν ἐστιν. ὥστε καὶ τρία τὰ ἀπὸ τῆς ZB ἓξ τῶν ἀπὸ BN μείζονά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

---

1. *ἐστίν*] om. q. *BN*] *NB* q, *B̈NB* V. 2. *τοῦ ὑπό*] *τοῦ ὑπὸ τῆς* V, *τοῦ ὑπὸ τῶν* q, *τοῦ ἀπὸ τῆς* B. 3. *τό*] corr. ex *τά* m. 2 V, mut. in *τά* B. *τῶν ZBN* q. Post *τοῦ* del. *α* P. 4. *BZN*] corr. ex *ZBN* m. 2 B. 5. *ZB*] *BZ*

$ZB \times BN > BZ \times ZN$. itaque $ZB \times BN + BZ \times ZN > 2BZ \times ZN$. uerum $ZB \times BN + BZ \times ZN = ZB^2$ [II, 2], et $BZ \times ZN = NB^2$. itaque $ZB^2 > 2BN^2$. ergo etiam $3ZB^2 > 6BN^2$; quod erat demonstrandum.

B. ἐστι q, comp. V. ὑπὸ τῶν V. 6. BZN] e corr. V. τό] τό, supra scr. ἴσον m. 2 B, ἴσον τῷ P. NB] $\ddot{B}NB$ V. ἐστιν] om. P. Dein add. ἄκρον γὰρ (supra V) καὶ μέσον λόγον τέτμηται ἡ BZ κατὰ τὸ N, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης V, et mg. m. 2 B. 7. ἐν] corr. ex ἐάν m. 1 q. 8. τῶν] τῆς P. ἀπὸ τῶν V. 10. ἐστιν] om. q. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. V.

APPENDIX II.

XI.

λϛʹ. 36

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τριῶν στερεὸν ἴσον ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς μέσης στερεῷ ἰσοπλεύρῳ μέν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ·

ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ. λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β, Γ περιεχόμενον στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β στερεῷ ἰσοπλεύρῳ τε καὶ ἰσογωνίῳ. κείσθω τῇ Α ἴση ἡ ΔΕ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΕΔ εὐθείᾳ καὶ τῷ σημείῳ τῷ Δ τυχούσῃ στερεᾷ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ ἴση στερεὰ γωνία εὐθύγραμμος ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΖΔ, ΔΗ, ΗΔ, ΔΕ, ΖΔ, ΔΘ, καὶ κείσθω τῇ μὲν Β ἴση ἡ ΗΔ, τῇ δὲ Γ ἴση ἡ ΘΔ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΔΚ στερεόν, καὶ κείσθω τῇ Β ἴση ἡ ΛΜ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΜΛ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Λ τῇ στερεᾷ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τῶν ΘΔ, ΔΕ, ΕΔ, ΔΗ, ΗΔ, ΔΘ ἴση στερεὰ γωνία εὐθύγραμμος ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΜΛ, ΛΝ, ΝΛ, ΛΞ, ΞΛ, ΛΜ, ὥστε

Hic appendix scripturam cod. b inde a XI, 36 ad finem libri XII continet nulla littera mutata. quamquam sine dubio plurimi insunt meri errores scribendi, tamen dubitari nequit, quin cod. b quasi recensionem quandam propriam praebeat. cfr. Zeitschr. f. Math. u. Phys., hist.-litt. Abth. XXIX p. 1—22.

ἴσην εἶναι τὴν μὲν ὑπὸ τῶν ΘΔ, ΔΕ τῇ ὑπὸ τῶν ΝΛ, ΛΜ, τὴν δὲ ὑπὸ τῶν ΘΔ, ΔΗ τῇ ὑπὸ τῶν ΝΛ, ΛΞ, τὴν δὲ ὑπὸ τῶν ΗΔ, ΔΕ τῇ ὑπὸ τῶν ΞΛ, ΛΜ, καὶ κείσθω τῇ Β ἴση ἑκατέρα τῶν ΞΛ, ΛΟ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΛΠ στερεόν. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ, ἴση δὲ ἡ μὲν Α τῇ ΔΕ, ἡ δὲ Β ἑκατέρᾳ τῶν ΞΛ, ΛΟ, ἡ δὲ Γ τῇ ΔΘ, ὡς ἄρα ἡ ΔΕ πρὸς ΜΛ, οὕτως ἡ ΟΛ πρὸς τὴν ΔΘ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν ΘΔ, ΔΕ, ΟΛ, ΛΜ αἱ πλευραὶ ἀντιπεπόνθασιν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΘ, ΘΡ παραλληλόγραμμον τῷ ΟΛΜΣ. καὶ ἐπεὶ ἴσαι γωνίαι ἐπίπεδοί εἰσιν αἱ ὑπὸ τῶν ΘΔ, ΔΕ, ΟΛ, ΛΜ, ἐπὶ δὲ τῶν κορυφῶν αὐτῶν μετέωροι γραμμαὶ ἐφεστᾶσιν αἱ ΗΔ, ΞΛ, ἴσας γωνίας περιέχουσι τὴν μὲν ὑπὸ τῶν ΘΔ, ΔΗ τῇ ὑπὸ τῶν ΟΛ, ΛΞ, τὴν δὲ ὑπὸ τῶν ΗΔ, ΔΕ τῇ ὑπὸ τῶν ΞΛ, ΛΜ, καὶ ἀφῃρημέναι εἰσὶν ἴσαι εὐθεῖαι αἱ ΗΔ, ΞΛ, αἱ ἄρα ἀπὸ τῶν Η, Ξ ἐπὶ τὰ διὰ τῶν ΘΔ, ΔΕ, ΟΛ, ΛΜ ἐπίπεδα κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ἔσονται. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα, ὧν τὰ ὕψη ἴσα ἐστί, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΚ τῷ ΛΠ. καί ἐστι τὸ μὲν ΔΚ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β, Γ, τὸ δὲ ΛΠ τὸ ἀπὸ τῆς Β. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Β, Γ περιεχόμενον στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β στερεῷ ἰσοπλεύρῳ μέν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

37 *λζ΄.*

Ἐὰν ὦσιν ὁσαιδηποτοῦν εὐθεῖαι ἀνάλογον, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἀνάλογον ἔσται. καὶ ἐὰν τὰ ἀπ' αὐτῶν *ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὗται ἀνάλογον ἔσονται.*

ἔστωσαν ὁσαιδηποτοῦν εὐθεῖαι ἀνάλογον ἡ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΗΘ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀφ' ἑκάστης τῶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΚ, ΓΛ, ΕΜ, ΗΝ. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ΑΚ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΛ στερεόν, οὕτως τὸ ΕΜ στερεὸν πρὸς τὸ ΗΝ στερεόν. πεποιήσθω γὰρ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἥ τε ΓΔ πρὸς τὴν Ξ καὶ ἡ Ξ πρὸς τὴν Ο. ὡς ἄρα ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, τουτέστιν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν Ο, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης, τουτέστι τὸ ΑΚ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τουτέστι τὸ ΓΛ· ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, οὕτως ἥ τε ΗΘ πρὸς τὴν Π καὶ ἡ Π πρὸς τὴν Ρ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΖ πρὸς τὴν Ρ, οὕτως τὸ ΕΜ πρὸς τὴν ΗΝ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἥ τε ΓΔ πρὸς τὴν Ξ καὶ ἡ Ξ πρὸς τὴν Ο, ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, οὕτως ἥ τε ΗΘ πρὸς τὴν Π καὶ ἡ Π πρὸς τὴν Ρ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν Ο, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν Ρ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν Ο, οὕτως τὸ ΑΚ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΛ στερεόν, ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν Ρ, οὕτως τὸ ΕΜ στερεὸν πρὸς τὸ ΗΝ στερεόν. ὡς ἄρα τὸ ΑΚ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΛ στερεόν, οὕτως τὸ ΕΜ στερεὸν πρὸς τὸ ΗΝ στερεόν.

ἔστω δὴ πάλιν ὡς τὸ ΑΚ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΛ στερεόν, οὕτως τὸ ΕΜ στερεὸν πρὸς τὸ ΗΝ στερεόν. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ. πεποιήσθω γὰρ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς *τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΣΤ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΣΤ τῷ ΗΝ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΣΤ. ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΣΤ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΚ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΛ στερεόν, οὕτως τὸ ΕΜ στερεὸν πρὸς τὸ ΣΥ στερεόν. τὸ ΕΜ ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν ΗΝ, ΣΥ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΝ τῷ ΣΥ, καὶ ὁμόλογός ἐστιν ἡ ΗΘ τῇ ΣΤ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΣΤ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΣΤ, ἴση δὲ ἡ ΣΤ τῇ ΗΘ, ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

38 *λη΄.*

Ἐὰν κύβου τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων αἱ πλευραὶ δίχα τμηθῶσι, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῇ, ἡ τῶν ἐπιπέδων κοινὴ τομὴ δίχα τεμεῖ τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον, καὶ αὐτὴ δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου.

κύβου γὰρ τοῦ ΑΒ τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων τῶν ΓΔ, ΑΕ, ΒΖ, ΗΘ αἱ πλευραὶ δίχα τετμήσθωσαν αἱ ΓΔ, ΔΑ, ΑΕ, ΕΓ, ΒΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΒ κατὰ τὰ Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ, Ο, Π, Ρ, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω τὰ ΚΜ, ΠΞ, ΝΛ, ΟΡ, καὶ ἔστω τῶν ἐπιπέδων κοινὴ τομὴ ἡ ΣΤ, διάμετρος δὲ τοῦ κύβου ἔστω ἡ ΒΑ. λέγω, ὅτι ἡ ΣΤ δίχα τέμνει τὴν τοῦ κύβου διάμετρον, καὶ αὕτη δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῶν[1]) τοῦ κύβου διαμέτρων[1]).

ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΓΣ, ΣΑ, ΒΤ, ΤΗ. ἐπεὶ

---

1) corr. in *τῆς — διαμέτρου* m. 1.

ἴση ἐστὶν ἡ ΓΕ τῇ ΔΑ, καί ἐστι τῆς μὲν ΓΕ ἡμίσεια ἡ ΓΝ, τῆς δὲ ΔΑ ἡμίσεια ἡ ΛΑ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΝ τῇ ΛΑ· ἔστι δὲ καὶ ἡ ΣΝ τῇ ΣΛ ἴση. δύο δὴ αἱ ΓΝ, ΝΣ δυσὶ ταῖς ΛΑ, ΛΣ ἴσαι εἰσί· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΝΣ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΣΛΑ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΓΣ βάσει τῇ ΣΑ ἴση, καὶ τὸ ΓΝΣ τρίγωνον τῷ ΑΛΣ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΓΣ, ΣΝ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΛΣ, ΣΑ. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ τῶν ΝΣ, ΣΑ· αἱ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΣ, ΣΝ, ΝΣ, ΣΑ ταῖς ὑπὸ τῶν ΛΣ, ΣΑ, ΑΣ, ΣΝ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ τῶν ΛΣ, ΣΑ, ΑΣ, ΣΝ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί· πρὸς δή τινι εὐθείᾳ τῇ ΝΣ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Σ δύο εὐθεῖαι αἱ ΣΓ, ΣΑ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσι τὰς ὑπὸ τῶν ΓΣΝ, ΝΣΑ. ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΣ τῇ ΣΑ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΤ τῇ ΤΗ ἐπ' εὐθείας ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΓΒ, ΑΗ τῇ ΕΘ, ἀλλὰ καὶ παράλληλοι, αἱ δὲ παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι παράλληλοι εἰσίν, αἱ ΓΒ, ΑΗ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι. καὶ ἐπεζευγμέναι εἰσὶν αἱ ΓΑ, ΒΗ, καί ἐστι τῆς μὲν ΓΑ ἡμίσεια ἡ ΣΑ, τῆς δὲ ΒΗ ἡμίσεια ἡ ΒΤ. αἱ ΣΑ, ΒΤ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι· καὶ ἐπεζευγμέναι εἰσὶν αἱ ΣΤ, ΑΒ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΣΥ τῇ ΥΤ, ἡ δὲ ΑΥ τῇ ΥΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λθ'. 39

Ἐὰν ᾖ δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχει βάσιν τρίγωνον, τὸ δὲ παραλληλόγραμμον, διπλάσιον δὲ ᾖ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἔσται τὰ πρίσματα.

Ἔστω δύο πρίσματα ἰσουψῆ τὰ $ΑΒΓΔΕΖ$, $ΗΘΚΛΜΝ$, καὶ τὸ μὲν ἐχέτω τρίγωνον βάσιν τὸ $ΚΛΝ$, τὸ δὲ παραλληλόγραμμον τὸ $ΒΓΔΕ$, καὶ ἔστω τὸ $ΒΓΔΕ$ τοῦ $ΝΚΛ$ τριγώνου διπλάσιον. λέγω, ὅτι ἴσα ἐστὶ τὰ πρίσματα. πεπληρώσθω γὰρ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα τὰ $ΑΔ$, $ΗΛ$. ἐπεὶ οὖν τὸ $ΒΔ$ παραλληλόγραμμον τοῦ $ΝΚΛ$ τριγώνου ἐστὶ διπλάσιον, ἔστι δὲ τοῦ $ΝΚΛ$ τριγώνου διπλάσιον τὸ $ΝΛ$ παραλληλόγραμμον, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΒΔ$ τῷ $ΝΛ$. ἐπὶ ἴσων οὖν βάσεων τῶν $ΒΔ$, $ΝΛ$ ἰσοϋψῆ ἐστι στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ $ΑΔ$, $ΗΛ$. ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις. ἀλλὰ τοῦ μὲν $ΑΔ$ ἥμισύ ἐστι τὸ $ΑΒΓΔΕΖ$ πρίσμα, τοῦ δὲ $ΗΛ$ ἥμισυ τὸ $ΗΘΚΛΜ$ πρίσμα. καὶ τὸ $ΑΒΓΔΕΖ$ ἄρα πρίσμα τῷ $ΗΘΚΛΜΝ$ πρίσματι ἴσον ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Εὐκλείδου στοιχείων στερεῶν $\overline{ια}$.

XII Εὐκλείδου στοιχείων $\overline{ιβ}$.

1 Τὰ ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

ἔστωσαν κύκλοι οἱ $ΑΒΓΔ$, $ΗΘΚΛ$, καὶ ἐν τοῖς $ΑΒΓΔ$, $ΗΘΚΛ$ ὅμοια πολύγωνα ἔστω τὰ $ΑΒΓΔΕ$, $ΗΘΚΛΜ$, διάμετροι δὲ τῶν κύκλων ἔστωσαν αἱ $ΒΖ$, $ΘΝ$. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $ΒΖ$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $ΘΝ$ τετράγωνον, οὕτως τὸ $ΑΒΓΔΕ$ πολύγωνον πρὸς τὸ $ΗΘΚΛΜ$ πολύγωνον. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ $ΒΕ$, $ΑΖ$, $ΘΜ$, $ΗΝ$. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ $ΒΑ$ πρὸς $ΑΕ$, οὕτως ἡ $ΘΗ$ πρὸς τὴν $ΗΜ$, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν $ΒΑΕ$, $ΘΗΜ$ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΒΕ$ τρίγωνον τῷ ΗΘΜ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΗΘΜ. ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ ΑΕΒ τῇ ὑπὸ ΑΖΒ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΗΜΘ τῇ ὑπὸ ΗΝΘ ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ ὀρθὴ ὑπὸ τῶν ΒΑΖ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΘΗΝ ἴση. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΖΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΗΘΝ ἐστιν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΖ τρίγωνον τῷ ΗΘΝ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΘΝ πρὸς ΘΗ. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΘΝ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΘΗ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΝ τετράγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΘΝ, ἔχει δὲ καὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΗΘΚΛΜ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΗΘ, καί ἐστιν ὡς ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΘΝ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΝ τετράγωνον, οὕτως τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΗΘΚΛΜ πολύγωνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. 2

ἔστωσαν κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ ΒΔ, ΖΘ. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΘ τετράγωνον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον. εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον ἢ πρὸς τὸ μεῖζον. ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ Φ, καὶ τῷ ΕΖΗΘ κύκλῳ ἴσα ἔστω τὰ ΦΧ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον τετρά-

γωνον τὸ ΕΖΗΘ. τὸ ΕΖΗΘ ἄρα τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. τετμήσθωσαν αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Κ, Λ, Μ, Ν σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ. ἕκαστον ἄρα τῶν ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ τρίγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου. ἕκαστον ἄρα τῶν ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ τῶν τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἤτοι ἥμισυ τοῦ καθ' αὑτὸ τμήματος τοῦ κύκλου. τοιαύτης δὴ γινομένης τῆς διαιρέσεως ληφθήσεται τοιαῦτα τμήματα ἀπὸ τοῦ ὅλου κύκλου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ Χ χωρίου. λελήφθω καὶ ἔστω τὰ ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ. δύο οὖν μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων τοῦ τε ΕΖΘ κύκλου καὶ τοῦ Χ χωρίου ἀφήρηται ἀπὸ τοῦ μείζονος μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ μέρος καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ μέρος, καὶ τοῦτο ἀεὶ γεγένηται, καὶ καταλέλειπται χωρίον, ὃ ἔλασσον ἔσται τοῦ Χ. λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ Φ χωρίου. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τῷ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολυγώνῳ ὅμοιον πολύγωνον τὸ ΑΞΒΟΓΠΔΡ. ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ Φ χωρίον, ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως τὸ ΑΞΒΟΓΠΔΡ πολύγωνον πρὸς τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ, ὡς ἄρα ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ Φ χωρίον, οὕτως τὸ ΑΞΒΟΓΠΔΡ πολύγωνον πρὸς τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστίν, ὡς ὁ ΑΒΓΔ πρὸς τὸ ἐν αὐτῷ πολύγωνον, οὕτως τὸ Χ χωρίον πρὸς τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον. μείζων δὲ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος *τοῦ ἐν αὐτῷ πολυγώνου· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Φ χωρίον τοῦ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολυγώνου. ἀλλὰ μὴν καὶ ἔλασσον τὸ Φ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον.*

λέγω δή, ὅτι οὐδὲ πρὸς μεῖζον. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς τὸ Φ. ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ τετράγωνον, οὕτως τὸ Φ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον. ὡς δὲ τὸ Φ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ τετράγωνον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον· ὅπερ ἀδύνατον δέδεικται. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλασσον. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον.

Πᾶσα πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν διαιρεῖται 3
εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τὰ δύο πρίσματα τῆς ὅλης πυραμίδος μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ.

ἔστω πυραμίς, ἧς βάσις μὲν ἔστω τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. λέγω, ὅτι ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς διαιρεῖται εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα.

τετμήσθωσαν αἱ πλευραὶ τῆς πυραμίδος δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ, Η, Θ, Κ, Λ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΕΗ, ΗΛ, ΖΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΘ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΖ τῇ ΖΔ, ἡ δὲ ΒΘ τῇ ΘΔ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΖΘ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΒ, ἡ δὲ ΑΖ τῇ ΖΔ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΔ τῇ ΕΖ. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΒΖΘ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΕΒ τῇ ΖΘ, ἡ δὲ ΕΖ τῇ ΒΘ. ἀλλ' ἡ μὲν ΒΕ τῇ ΕΑ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ΒΘ τῇ ΘΛ. καὶ ἡ μὲν ΑΕ ἄρα τῇ ΖΘ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ΕΖ τῇ ΘΔ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΖ τῇ ΖΔ ἴση. ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΕΖ τρίγωνον τῷ ΖΘΔ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΖΘ τρίγωνον τῷ ΖΔΚ τριγώνῳ ἴσον τε καὶ ὅμοιόν ἐστιν. τὸ δὲ ΑΕΗ τρίγωνον τῷ ΖΘΚ τριγώνῳ ἴσον τε καὶ ὅμοιόν ἐστιν. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ΕΖ, ΖΗ παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς ΘΔ, ΔΚ κεῖνται μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, ἴσας γωνίας περιέξουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΖΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΔΚ γωνίᾳ. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΕΖ, ΖΗ δυσὶ ταῖς ΘΔ, ΔΚ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΖΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΘΔΚ ἴση ἐστίν, βάσις ἄρα ἡ ΕΗ βάσει τῇ ΘΚ ἐστιν ἴση. ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΕΖΗ τρίγωνον τῷ ΘΔΚ τριγώνῳ. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς μέν ἐστι τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ζ σημεῖον, ἴση τε καὶ ὁμοία ἐστὶ τῇ πυραμίδι τῇ βάσιν μὲν ἐχούσῃ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Δ σημεῖον. καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ζ σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ τῇ πυραμίδι τῇ βάσιν μὲν ἐχούσῃ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Δ σημεῖον. διή-

ρηται ἄρα ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς εἰς δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ.

λέγω δή, ὅτι καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΛ τῇ ΛΓ, διπλάσιόν ἐστι τὸ ΕΗΛΒ παραλληλόγραμμον τοῦ ΗΛΓ τριγώνου. καὶ ἐπεὶ δέδεικται, ὅτι, ἐὰν δύο πρίσματα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ τὸ μὲν ἔχει βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, ᾖ δὲ διπλάσιον τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἔσται τὰ πρίσματα, τὸ ἄρα πρίσμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΘΒΛ, ΕΖΗ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τοῦ ΕΒΖΘ καὶ τοῦ ΕΒΛΗ καὶ ἔτι τοῦ ΖΘΛΗ ἴσον ἐστὶ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΗΓΛ, ΖΘΚ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΚΖΗΓ, ΛΓΘΚ, ΖΗΛΘ. διῄρηται ἄρα ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ φανερόν, ὅτι τὰ δύο πρίσματα ἴσα ἐστὶν ᾗ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος :—

Ἐὰν ὦσι δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι 4
καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις, διαιρεθῇ δὲ ἑκατέρα αὐτῶν εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, ἔσται ὡς ἡ τῆς μιᾶς πυραμίδος βάσις πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας πυραμίδος βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ μιᾷ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ.

ἔστωσαν δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς ΑΒΓ, ΜΝΞ, κορυφὰς δὲ τὰ Δ, Ο σημεῖα, καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα αὐτῶν εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας *τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΜΝΞ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΔ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ.*

ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΛΗ, ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΛΗΓ τριγώνῳ. τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΗΓ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΝΞ πρὸς τὴν ΞΦ. καί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΛ, οὕτως ἡ ΝΞ πρὸς τὴν ΞΦ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΗΓ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΜΝΞ τρίγωνον πρὸς τὸ ΣΦΞ τρίγωνον. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΜΝΞ, οὕτως τὸ ΗΛΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΣΦΞ τρίγωνον, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ ἀπεναντίον ἐστὶ τὰ ΛΗΓ, ΖΘΚ ἐπίπεδα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ ἀπεναντίον ἐστὶ τὰ ΣΦΞ, ΡΤΝ ἐπίπεδα. ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΜΝΞ βάσιν, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ ἀπεναντίον ἐστὶ τὰ ΛΗΓ, ΖΘΚ ἐπίπεδα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ ἀπεναντίον ἐστὶ τὰ ΣΦΞ, ΡΤΥ ἐπίπεδα. ἀλλὰ τὰ μὲν ἐν τῇ ΑΒΓΔ πυραμίδι πρίσματα διπλάσιά ἐστι τοῦ πρίσματος, οὗ ἀπεναντίον ἐστὶ τὰ ΛΗΓ, ΖΘΚ ἐπίπεδα. τὰ δ' ἐν τῇ ΜΝΞΟ πυραμίδι πρίσματα διπλάσιά ἐστι τοῦ πρίσματος, οὗ ἀπεναντίον ἐστὶ τὰ ΣΦΞ, ΡΤΥ ἐπίπεδα. ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΜΝΞ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΔ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΜΝΞΟ πυραμίδι πρίσματα. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ ΑΕΗ βάσις πρὸς τὴν ΜΠΣ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΕΗΖ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΜΠΣΡ πυραμίδι πρίσματα. ὡς δὲ ἡ ΖΘΚ βάσις πρὸς τὴν ΤΡΥ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΖΘΚΔ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΡΤΥΟ *πυραμίδι πρίσματα. ἔσται ἄρα ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΜΝΞ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΔ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΜΝΞΟ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ.*

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες τριγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς ΑΒΓ, ΜΝΞ αἱ ΑΒΓΔ, ΜΝΞΟ, κορυφὰς δὲ τὰ Δ, Ο σημεῖα. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΜΝΞ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς πρὸς τὴν ΜΝΞΟ πυραμίδα.

εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΜΝΞ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς πρὸς τὴν ΜΝΞΟ πυραμίδα, ἔσται ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΜΝΞ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς ἤτοι πρὸς ἔλαττόν τι τῆς ΜΝΞΟ πυραμίδος στερεὸν ἢ πρὸς μεῖζον. ἔστω πρὸς ἔλαττον τὸ Ω, καὶ τῇ ΜΝΞΟ πυραμίδι ἴσα ἔστω τὰ Ω, Χ χωρία, καὶ διῃρήσθω ἡ ΜΝΞΟ πυραμὶς εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα. μείζονα ἄρα ἐστὶ τὰ πρίσματα τῆς ὅλης πυραμίδος ἢ τὸ ἥμισυ. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας πυραμίδας εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα λήψομέν τινας πυραμίδας ἀπὸ τῆς ὅλης πυραμίδος, αἳ ἔσονται ἐλάσσονες τοῦ Χ στερεοῦ. λελήφθωσαν καὶ ἔστωσαν αἱ ΜΠΣΡ, ΤΥΟ. ἐπεὶ οὖν ἡ πυραμὶς ἴση ἐστὶ τοῖς στερεοῖς εἰς τὰ καταλελημμένα ἀποτμήματα ἐλάσσονά εἰσι τοῦ Χ. λοιπὰ ἄρα τὰ ἐν τῇ ΜΝΞΟ πυραμίδι πρίσματα μείζονά ἐστι τοῦ Ω στερεοῦ. διῃρήσθω ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς ὁμοίως τῇ ΜΝΞΟ πυραμίδι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΜΝΞ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ πυραμίδι τῇ ΑΒΓΔ πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΜΝΞΟ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ, ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς πρὸς τὸ Ω στερεόν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΔ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΜΝΞΟ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς πρὸς τὰ ἐν αὐτῇ πρίσματα πάντα, οὕτως τὸ Ω στερεὸν πρὸς τὰ ἐν τῇ ΜΝΞΟ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ. μείζων δὲ ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς τῶν ἐν αὐτῇ πρισμάτων πάντων. μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Ω στερεὸν τῶν ἐν τῇ ΜΝΞΟ πυραμίδι πρισμάτων πάντων. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΜΝΞ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς ΜΝΞΟ πυραμίδος στερεόν.

λέγω δή, ὅτι οὐδὲ πρὸς μεῖζον. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς τὸ Ω. ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΜΝΞ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓ βάσιν, οὕτως τὸ Ω στερεὸν πρὸς τὴν ΑΒΓΔ πυραμίδα. ὡς δὲ τὸ Ω στερεὸν πρὸς τὴν ΑΒΓΔ πυραμίδα, οὕτως ἡ ΜΝΞΟ πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς ΑΒΓΔ πυραμίδος στερεόν. ὡς ἄρα ἡ ΜΝΞ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓ βάσιν, οὕτως ἡ ΜΝΞΟ πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς ΑΒΓΔ πυραμίδος στερεόν· ὅπερ ἀδύνατον δέδεικται. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΜΝΞ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς πρὸς μεῖζόν τι τῆς ΜΝΞΟ πυραμίδος στερεόν. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλαττον. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΜΝΞ βάσιν, οὕτως η

ΑΒΓΔ πυραμὶς πρὸς τὴν ΜΝΞΟ πυραμίδα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πᾶν πρίσμα τρίγωνον ἔχον βάσιν διαιρεῖται εἰς τρεῖς 6
πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας.

ἔστω πρίσμα τὸ ΑΒΓΔΕΖ τρίγωνον ἔχον βάσιν τὴν ΓΖΔ. λέγω, ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΔ, ΒΖ, ΖΕ. ἡ ἄρα πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΓΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ζ σημεῖον, ἴση ἐστὶ τῇ πυραμίδι τῇ βάσιν μὲν ἐχούσῃ τὸ ΒΔΕ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ζ σημεῖον, ἴση ἐστὶ τῇ πυραμίδι τῇ βάσιν μὲν ἐχούσῃ τὸ ΑΕΖ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ζ σημεῖον. καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΒΓΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ζ σημεῖον, ἴση ἐστὶ τῇ πυραμίδι τῇ βάσιν μὲν ἐχούσῃ τὸ ΑΕΖ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Β σημεῖον. διῄρηται ἄρα τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, ὧν βάσεις μέν εἰσιν ΑΒΓΔ, ΕΑΕΖ, κορυφὴ δὲ τὰ Β, Ζ σημεῖα.

Τῶν ἴσων πυραμίδων καὶ τριγώνους βάσεις ἐχου- 7
σῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. καὶ ὧν πυραμίδων τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσαι εἰσὶν ἐκεῖναι.

ἔστωσαν ἴσαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς ΑΒΓ, ΕΖΗ αἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, κορυφὰς δὲ τὰ Δ, Θ σημεῖα. λέγω, ὅτι τῶν ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ πυραμίδων τριγώνων βάσιν ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ ΒΔΜΛ, ΖΘΡΘ στερεά. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς τῇ ΕΖΗΘ πυραμίδι, καί ἐστι τῆς μὲν ΑΒΓΔ πυραμίδος ἑξαπλάσιον τὸ ΒΔΜΛ στερεόν, τῆς δὲ ΕΖΗΘ ἑξαπλάσιον τὸ ΖΘΡΟ στερεόν, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΔΜΛ στερεὸν τῷ ΖΘΡΟ στερεῷ. τῶν δὲ ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΖΡ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΟΡΘΖ στερεοῦ ὕψος. ὡς δὲ ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΖΡ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗ βάσιν. ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΟΡΘΖ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΛΜΔΒ στερεοῦ ὕψος. τὰ δ' αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῶν τε ΒΔΜΛ, ΖΘΡΟ στερεῶν καὶ τῶν ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ πυραμίδων. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ πρὸς τὴν ΕΖΗ βάσιν, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖΗΘ πυραμίδος ὕψος τῶν ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΔ πυραμίδος ὕψος. τῶν ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ ἄρα πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ⌶

ἀντιπεπονθέτωσαν δὴ πάλιν τῶν ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ πυραμίδων αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΕΖΗΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΔ πυραμίδος ὕψος. λέγω, ὅτι ἐστὶν ἴση ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς τῇ ΕΖΗΘ πυραμίδι· τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΕΖΗΘ ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΔ πυραμίδος ὕψος, ὡς δὲ ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗ βάσιν, οὕτως ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΖΡ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΕΖΗΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΔ πυραμίδος ὕψος. τὰ δ' αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῶν τε ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ πυραμίδων καὶ τῶν ΒΔΜΛ, ΖΘΡΟ στερεῶν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΖΡ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΖΘΡΟ στερεοῦ ὕψος. ὧν δὲ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΔΜΛ στερεὸν τῷ ΖΘΡΟ στερεῷ. καί ἐστι τοῦ μὲν ΒΔΜΛ στερεοῦ ἕκτον μέρος ἡ ΕΖΗΘ, ΑΒΓΔ πυραμίς, τοῦ δὲ ΖΘΡΟ στερεοῦ ἕκτον μέρος ἡ ΕΖΗΘ πυραμίς. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς τῇ ΕΖΗΘ πυραμίδι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Αἱ ὅμοιαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις 8
πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

ἔστωσαν ὅμοιαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς ΑΒΓ, ΕΖΗ αἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, κορυφὰς δὲ τὰ Δ, Θ σημεῖα, καὶ ἔστω ἴση ἡ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΕΖ, ΖΗ γωνίᾳ, ἡ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ τῇ ὑπὸ τῶν ΕΖ, ΖΘ. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῇ ὑπὸ τῶν ΘΖ, ΖΗ, ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ ΒΓ τῇ ΖΗ. λέγω, ὅτι ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς πρὸς τὴν ΕΖΗΘ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΖΗ.

συμπεπληρώσθωσαν γὰρ τὰ ΒΔΜΛ, ΖΘΡΟ στερεά. ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς τὴν ΖΕ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΕΖ, ΖΗ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΜ παραλληλόγραμμον τῷ ΖΡ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν ΑΔ τῷ ΕΘ ὅμοιόν ἐστι, τὸ δὲ ΝΒ τῷ ΖΠ. ἀλλὰ τὰ μὲν ΒΝ, ΑΔ, ΒΜ τὰ τρία τοῖς ἀπεναντίον αὐτῶν τοῖς ΛΔ, ΜΝ, ΑΛ ἴσα ἐστί, τὰ δὲ ΖΡ, ΕΘ, ΠΖ τὰ τρία τοῖς ἀπεναντίον αὐτῶν τοῖς ΘΟ, ΕΟ, ΡΠ ἴσα ἐστίν. ὅλον ἄρα το

ΒΔΜΛ στερεὸν ὅλῳ τῷ ΖΘΡΟ στερεῷ ὅμοιόν ἐστι. τὰ δὲ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλα ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. τὸ ΒΔΜΛ ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ ΖΘΡΟ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΖΗ. καί ἐστι τοῦ μὲν ΒΔΜΛ στερεοῦ ἕκτον μέρος ἡ ΑΒΓ πυραμὶς τοῦ ΖΘΡΟ στερεοῦ ἕκτον μέρος ἡ ΕΖΗΘ πυραμίς· καὶ ἡ ΑΒΓΔ ἄρα πυραμὶς πρὸς τὴν ΕΖΗΘ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΖΗ.

---

9 *Πᾶς κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος καὶ ὕψος ἴσον.*

ἐχέτω γὰρ κῶνος κυλίνδρῳ βάσιν τὴν αὐτὴν τὸν ΑΒΓΔ κύκλον καὶ ὕψος ἴσον. λέγω, ὅτι τριπλάσιός ἐστιν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου.

εἰ γὰρ μή ἐστιν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου τριπλάσιος, ἔσται ἄρα ἤτοι μείζων ἢ τριπλάσιος ἢ ἐλάσσων ἢ τριπλάσιος. ἔστω πρότερον ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου μείζων ἢ τριπλάσιος τῷ ΡΣ στερεῷ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου πρίσμα ἰσουψὲς τῷ κυλίνδρῳ. τὸ ἄρα ἀνεσταμένον πρίσμα μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κυλίνδρου. τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ, Η, Θ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΑ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ, καὶ ἀνεστάτω ἀφ' ἑκάστου τῶν ΔΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων πρίσματα ἰσουψὲς τῷ κυλίνδρῳ. ἕκαστον ἀνασταμένων πρισμάτων μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' αὐτὸ τμήματος καὶ κυλίνδρου. τοιαύτης δὴ γινομένης ἀεὶ ἐπισκέψεως ληφθήσεταί τινα τμήματα ἀπὸ τοῦ ὅλου κυλίνδρου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τοῦ Ρ στερεοῦ. λελήφθω καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ. λοιπὸν ἄρα τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μεῖζόν ἐστιν ἢ τριπλάσιον τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. ἀλλὰ τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, τριπλάσιόν ἐστι τῆς πυραμίδος τῆς βάσιν μὲν ἐχούσης τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μεῖζόν ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. ἀλλὰ καὶ ἐμπεριέχεται ἐν αὐτῷ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου μείζων ἐστὶν ἢ τριπλάσιος.

λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων ἢ τριπλάσιος.

εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω. ἀνάπαλιν ἄρα ὁ κῶνος τοῦ κυλίνδρου μείζων ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος τῷ Ρ στερεῷ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου πυραμὶς ἰσουψὴς τῷ κώνῳ. ἡ ἄρα ἀνεσταμένη πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὸ ΕΖΗΘ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ, καὶ ἀνεστάτω ἀφ' ἑκάστου τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων πυραμὶς ἰσουψὴς τῷ κώνῳ. ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνεσταμένων πυραμίδων μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τῶν καθ' αὐτὸ τμήματος τοῦ κώνου. τοιαύτης δὴ γινομένης ἀεὶ ἐπισκέψεως ληφθήσεταί τινα τμήματα ἀπὸ τοῦ ὅλου κώνου, ἃ ἔσται ἔλαττον αὐτοῦ στερεοῦ. λελήφθω καὶ ἀνεστάτω ἐπὶ τῶν AEB, $BZ\Gamma$, $\Gamma H\Delta$, $\Delta\Theta A$. λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ $AEBZ\Gamma H\Delta\Theta$ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ, μεῖζόν ἐστιν ἢ τρίτον μέρος τοῦ κυλίνδρου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ. ἀλλ' ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστιν ἡ $AEBZ\Gamma H\Delta\Theta$ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ, τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸ $AEBZ\Gamma H\Delta\Theta$ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ. καὶ τὸ πρίσμα ἄρα, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ $AEBZ\Gamma H\Delta\Theta$ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ, μεῖζόν ἐστι τοῦ κυλίνδρου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ, μεῖζόν ἐστι τοῦ κυλίνδρου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ. ἀλλὰ καὶ ἐμπεριέχεται ἐν αὐτῷ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ἐλάττων ἐστὶν ἢ τριπλάσιος. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ μείζων ἢ τριπλάσιος. τριπλάσιος ἄρα ἐστίν.

---

10 *Οἱ ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων.*

ἔστωσαν ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν ἔστωσαν οἱ $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$ κύκλοι, ἄξονες δὲ οἱ $K\Lambda$, MN, διάμετροι δὲ ἔστωσαν αἱ $B\Gamma$, $Z\Theta$. λέγω, ὅτι ὁ $AB\Gamma\Delta K\Lambda$ κῶνος πρὸς τὸν $EZH\Theta MN$ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ $B\Delta$ πρὸς $Z\Theta$.

εἰ γὰρ μὴ ὁ $AB\Gamma\Delta K\Lambda$ κῶνος πρὸς τὸν $EZH\Theta MN$ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ $B\Delta$ πρὸς τὴν $Z\Theta$, ἕξει ἄρα ὁ $AB\Gamma\Delta K\Lambda$ κῶνος ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ $EZH\Theta MN$ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ $B\Delta$ πρὸς τὴν $Z\Theta$ ἢ πρὸς τὸ μεῖζον. ἐχέτω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὶ A, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν $EZH\Theta$ κύκλον τετράγωνον τὸ $EZH\Theta$, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ $EZH\Theta$ τετραγώνου πυραμὶς ἰσουψὴς τῷ κώνῳ. ἡ ἄρα ἀνεσταμένη πυραμὶς μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. τετμήσθωσαν αἱ EZ, ZH, $H\Theta$, ΘE περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ξ, O, Π, P σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $E\Xi$, ΞZ, ZO, OH, $H\Pi$, $\Pi\Theta$, ΘP, PE, καὶ ἀνεστάτω ἀφ' ἑκάστου τῶν $E\Xi$, ΞZ, ZO, OH, $H\Pi$, $\Pi\Theta$, ΘP, PE τριγώνων πυραμὶς ἰσουψὴς τῷ κώνῳ. ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνεσταμένων πυραμίδων μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' αὐτὴν τμήματος τοῦ κώνου. τοιαύτης δὴ γινομένης ἀεὶ ἐπισκέψεως ληφθήσεταί τινα τμήματα ἀπὸ τοῦ ὅλου κώνου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ A στερεοῦ. λελήφθω καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν $E\Xi Z$, ZOH, $H\Pi\Theta$, ΘPE. λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ $E\Xi ZZOHH\Pi\Theta PE$ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ N σημεῖον, μεῖζόν ἐστι τοῦ A στερεοῦ. ἐγγεγράφθω εἰς τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον τῷ $E\Xi ZOH\Pi\Theta PE$ πολυγώνῳ ὅμοιόν τε πολύγωνον τὸ $AEBT\Gamma\Upsilon\Delta\Phi A$, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ $A\Sigma BT\Gamma\Upsilon\Delta\Phi$ πολυγώνου πρίσμα ἰσουψὲς τῷ κώνῳ, καὶ τῶν μὲν περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ $AEBT\Gamma\Upsilon\Delta\Phi$ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ το Λ σημεῖον, τρίγωνον ἐφεστάτω τὸ $\Lambda\Sigma B$, τῶν δὲ περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ $E\Xi OH\Pi\Theta P$ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ N σημεῖον ἐφεστάτω τὸ $NZ\Xi$ τρίγωνον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΣK, $M\Xi$. ἐπεὶ ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροί εἰσιν, ὧν ἀνάλογόν εἰσιν οἵ τε ἄξονες καὶ οἱ διάμετροι τῶν βάσεων, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ $K\Lambda$ προς τὴν MN, οὕτως ο $B\Delta$ πρὸς τὴν $Z\Theta$. ὡς δὲ ἡ $B\Delta$ πρὸς τὴν $Z\Theta$, οὕτως ἡ BK πρὸς τὴν MZ. ὡς ἄρα ἡ $K\Lambda$ πρὸς τὴν KB, *οὕτως ἡ ΜΝ πρὸς τὴν ΜΖ· καὶ περὶ ὀρθὰς γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΒ, ΜΝ, ΜΖ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν. ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΒΛ τρίγωνον τῷ ΜΝΖ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΛΒ, οὕτως ἡ ΜΝ πρὸς τὴν ΖΝ. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΜΝ, οὕτως ἡ ΛΖ πρὸς τὴν ΝΖ. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΣΚ πρὸς τὴν ΚΛ, οὕτως ἡ ΜΞ πρὸς τὴν ΜΝ, καὶ περὶ ὀρθὰς γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν ΣΚΛ, ΞΜΝ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΣΚΛ τρίγωνον τῷ ΞΜΝ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστίν, ὡς ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΜΝ, οὕτως ἡ ΛΣ πρὸς τὴν ΝΞ, ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΛΚ πρὸς τὴν ΜΝ, οὕτως ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΝΖ· ὡς ἄρα ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΝΖ, οὕτως ἡ ΛΣ πρὸς τὴν ΝΞ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΓ, οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΜΞ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν ΒΚΣ, ΖΜΞ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΚΣ τρίγωνον τῷ ΖΜΞ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΣΚ πρὸς ΣΒ, οὕτως ἡ ΞΜ πρὸς ΞΖ. ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς ἡ ΣΚ πρὸς τὴν ΣΛ, οὕτως ἡ ΜΞ πρὸς τὴν ΞΝ. δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΣ πρὸς ΣΒ, οὕτως ἡ ΝΞ πρὸς τὴν ΞΖ. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστίν, ὡς ἡ ΛΣ πρὸς τὴν ΝΞ, οὕτως ἡ ΣΒ πρὸς τὴν ΞΖ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΛΣ πρὸς τὴν ΝΞ, οὕτως ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΝΖ. ὡς ἄρα ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΝΖ, οὕτως ἡ ΛΣ πρὸς τὴν ΝΞ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΣΒ τρίγωνον τῷ ΝΞΖ τριγώνῳ. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΚΒΣ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ τῇ πυραμίδι τῇ βάσιν μὲν ἐχούσῃ τὸ ΜΞΖ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον. αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες καὶ τριγώνους βάσεις ἔχουσαι πρὸς ἀλλήλας ἐν τρι-*

πλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. ἡ ἄρα πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΒΚΣ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσαν τὸ ΜΖΞ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜΘ. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΚΒΣ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσαν τὸ ΜΞΖ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ το Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΘΖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν λοιπῶν πυραμίδων, ὧν βάσεις μέν εἰσι τὰ ΣΚ, ΜΚ, ΦΚΑ, ΚΔΥ, ΥΚΓ, ΚΓΤ, ΚΤΒ τὰ τρίγωνα, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς ἑκάστην τῶν πυραμίδων, ὧν βάσεις μέν εἰσι τὰ ΞΜΕ, ΕΜΡ, ΜΘΡ, ΜΘΠ, ΜΠΝ, ΗΜΘ, ΜΟΖ τὰ τρίγωνα, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΣΒΤΓΜΟΦΑ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσαν τὸ ΕΞΞΟΗΠΘΡ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος πρὸς τὸ Α στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ, ἔχει δὲ καὶ ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΓΒΠΥΦΔ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσαν τὸ ΕΞΞΘΗΠΘΡ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ, ἔστιν ἄρα, ὡς ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος πρὸς τὸ Α στερεόν, οὕτως ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΣΒΤΓΥΔΦ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσαν τὸ ΕΞΖΟΗΠΘΡ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστίν, ὡς ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσαν τὸ ΑΣΒΓΠΥΔΦ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, οὕτως τὸ Α στερεὸν πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσαν τὸ ΕΞΖΟΗΠΘΡ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον. μείζων δὴ ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος τῆς πυραμίδος τῆς βάσιν μὲν ἐχούσης τὸ ΑΣΒΠΥΦΔ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Λ σημεῖον. μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Α στερεὸν τῆς πυραμίδος τῆς βάσιν μὲν ἐχούσης τὸ ΕΞΖΟΗΠΘΡ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον. ἀλλὰ καὶ ἐλάττων· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΕΖΗΘΜΝ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. λέγω δή, ὅτι οὐδὲ πρὸς μεῖζον. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς τὸ Α. ἀνάπαλιν ἄρα τὸ Α στερεὸν πρὸς τὸν ΑΒΓΔΚΛ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΔΒ. ὡς δὲ τὸ Α στερεὸν πρὸς τὸν ΑΒΓΔΚΛ κῶνον, οὕτως ὁ ΕΖΗΜΜΝ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔΚΛ κώνου στερεόν. ὁ ΕΖΗΘΜΝ ἄρα κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔΚΛ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΒΔ· ὅπερ ἀδύνατον δέδεικται. οὐκ ἄρα ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΖΗΘΜΝ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλαττόν τι. ὁ ΑΒΓΔΚΛ ἄρα κῶνος πρὸς τον ΕΖΗΘΜΝ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ.

---

11 Οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡν αἱ βάσεις.

ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν αἱ βάσεις ἔστωσαν οἱ $ΑΒΓΔ$, $ΕΖΗΘ$ κύκλοι, ἄξονες δὲ οἱ $ΚΛ$, $ΜΝ$, διάμετροι δὲ τῶν βάσεων ἔστωσαν αἱ $ΖΔ$, $ΖΘ$. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς ὁ $ΑΒΓΔ$ κύκλος πρὸς τὸν $ΕΖΗΘ$ κύκλον, οὕτως ὁ $ΑΒΓΔΛ$[1]) κῶνος πρὸς τὸν $ΕΖΗΘΝ$ κῶνον. εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς ὁ $ΑΒΓΔ$ κύκλος πρὸς τὸν $ΕΖΗΘ$ κύκλον, οὕτως ὁ $ΑΒΓΔ$ κῶνος πρὸς τὸν $ΕΖΗΘ$, ἔσται ὁ $ΑΒΓΔΚΛ$ κῶνος ἤτοι πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ $ΕΖΗΘ$ κώνου στερεὸν ἢ πρὸς μεῖζον. ἔστω πρότερον πρὸς ἔλαττον τὸ $Α$ στερεόν, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν $ΕΖΗΘ$ κύκλον τετράγωνον τὸ $ΕΖΗΘ$, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ $ΕΖΗΘ$ τετραγώνου πυραμὶς ἰσουψὴς τῷ κώνῳ. ἡ ἄρα ἀνεσταμένη πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. τετμήσθωσαν αἱ $ΕΖ$, $ΖΗ$, $ΗΘ$ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ $Ξ$, $Ο$, $Π$, $Ρ$ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $ΕΞ$, $ΞΖ$, $ΖΘ$, $ΘΗ$, $ΗΠ$, $ΠΘ$, $ΘΡ$, $ΡΣ$, καὶ ἀνεστάτω ἀφ' ἑκάστου τῶν $ΕΞ$, $ΞΖ$, $ΖΘ$, $ΘΗ$, $ΗΠ$, $ΠΘ$, $ΘΡ$, $ΡΣ$ τριγώνων πυραμὶς ἰσουψὴς τῷ κώνῳ. ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνεσταμένων πυραμίδων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' αὐτὴν τμήματος τοῦ κώνου. τοιαύτης δὴ γινομένης ἀεὶ ἐπισκέψεως ληφθήσεταί τινα τμήματα ἀπὸ τοῦ ὅλου κώνου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ἧς ὑπερέχει ὁ $ΖΘΜΝ$ κύκλος τοῦ $Α$ στερεοῦ. λελήφθω καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν $ΕΞΖ$, $ΘΗΠ$, $ΘΡΕ$. λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μὲν τὸ $ΕΞΖΟΗΠΘΡ$ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ $Ν$ σημεῖον, μεῖζόν ἐστι τοῦ $Α$ στερεοῦ. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸν $ΑΒΓΔ$ κύκλον τῷ $ΕΞΖΟΗΠΘΡ$ πολυγώνῳ ὅμοιον

1) $Λ$ supra scr. m. 1.

πολύγωνον τὸ ΑΓΒΤΓΥΔΦ πυραμὶς ἰσουψὴς τῷ κώνῳ. ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον, οὕτως τὸ ΑΣΒΠΥΔΦ πολύγωνον πρὸς τὸ ΕΞΖΟΗΠΘΡ πολύγωνον, ὡς ἄρα ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως τὸ ΑΣΒΤΓΥΔΦ πολύγωνον πρὸς τὸ ΕΞΖΟΗΠΘΡ πολύγωνον. ἀλλ' ὡς μὲν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος πρὸς τὸ Α στερεόν, ὡς δὲ τὸ ΑΣΒΤΓΥΔΦ πολύγωνον πρὸς τὸ ΕΞΖΟΗΠΘΡ πολύγωνον, οὕτως ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΣΒΤΓΥΔΦ πολύγωνον, οὕτως ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΣΒΤΓΥΔΦ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσαν τὸ ΕΞΖΟΗΠΘΡ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον. ὡς ἄρα ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος πρὸς τὸ Α στερεόν, οὕτως ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΣΒΤΓΥΔΦ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσαν τὸ ΕΞΖΟΗΠΘΡ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσαν τὸ ΑΣΒΤΓΥΔΦ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Λ σημεῖον, οὕτως τὸ Α στερεὸν πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσαν τὸ ΕΞΖΟΗΠΘΡ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον. μείζων δὲ ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος τῆς πυραμίδος τῆς βάσιν μὲν ἐχούσης τὸ ΑΣΒΤΓΥΔΦ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Λ σημεῖον. μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Α στερεὸν τῆς πυραμίδος τῆς βάσιν μὲν ἐχούσης τὸ ΕΞΖΟΗΠΘΡ πολύγωνον, κορυφὴν *δὲ τὸ Ν σημεῖον. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΕΖΘΝ κώνου στερεόν.*

λέγω δὴ οὐδὲ πρὸς μεῖζον. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ Α. ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως τὸ Α στερεὸν πρὸς τὸν ΑΒΓΔΛ κῶνον. ὡς δὲ τὸ Α στερεὸν πρὸς τὸν ΑΒΓΔΛ κῶνον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘΝ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔΛ κώνου στερεόν. ὡς ἄρα ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘΝ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ κώνου τοῦ ΑΒΓΔΛ[1]*) στερεοῦ· ὅπερ ἀδύνατον δέδεικται. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΖΗΘΝ κώνου στερεόν. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλαττον. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος πρὸς τὸν ΕΖΗΘΝ κῶνον. καί ἐστι μὲν κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ, τριπλάσιος τοῦ ΑΒΓΔΛ κώνου, τοῦ δὲ ΕΖΗΘΝ κώνου τριπλάσιος ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔΛ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΖΗΘΝ κύλινδρον.*

Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς 12
ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, οὕτως ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξονα.

---

1) *Λ* supra scr. m. 1.

κύλινδρος γὰρ ὁ $A\varDelta$ ἐπιπέδῳ τῷ $H\Theta$ τετμήσθω παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τοῖς AB, $\Gamma\varDelta$, καὶ συμβαλλέτω τῷ τοῦ κυλίνδρου ἄξονι τὸ $H\Theta$ ἐπίπεδον κατὰ τὸ K σημεῖον. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ $H\Theta$ κύλινδρος πρὸς τὸν $H\varDelta$ κύλινδρον, οὕτως ὁ EK ἄξων. ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ $\varLambda$, M σημεῖα, καὶ κείσθωσαν τῷ μὲν EK ἄξονι ἴσοι ὁσοιδήποτε ὁ $Z\Xi$, ZM, καὶ ἐκβεβλήσθω διὰ τῶν $\varLambda$, N, Ξ, M[1]) σημείων ἐπίπεδα παράλληλα τοῖς AB, $\Gamma\varDelta$, καὶ νενοήσθωσαν ἐν τοῖς διὰ τῶν $\varLambda$, N, Ξ, M σημείων ἐπιπέδοις περὶ κέντρα τὰ $\varLambda$, N, Ξ, M κύκλοι οἱ $O\Pi P\Sigma$, $T\Upsilon\Phi X$ ἴσοι ὄντες τοῖς $AB\Gamma\varDelta$, καὶ νενοήσθωσαν κύλινδροι οἱ ΠP, PB, $\varDelta T$, TX. καὶ ἐπεὶ οἱ $\varLambda N$, NE, EK ἄξονες ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις, οἱ ἄρα ΠP, HP, BH κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἴσαι δὲ ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ βάσεις. ἴσοι ἄρα εἰσὶ καὶ οἱ ΠP, PB, BH κύλινδροι ἀλλήλοις. καὶ ἐπεὶ οἱ $\varLambda N$, NE, EK ἄξονες ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΠP, PB, BH κύλινδροι ἴσοι ἀλλήλοις, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῷ πλήθει, ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ὁ $\varLambda K$ ἄξων τοῦ EK ἄξονος, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ ΠH κύλινδρος τοῦ BH κυλίνδρου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαπλασίων ἐστὶν ὁ MK ἄξων τοῦ KZ ἄξονος, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ XH κύλινδρος τοῦ $H\varDelta$ κυλίνδρου. εἰ μὲν οὖν ἴσος ἐστὶν ὁ $\varLambda K$ ἄξων τῷ KM ἄξονι, ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ ΠH κύλινδρος τῷ HX κυλίνδρῳ, εἰ δὲ μείζων ἐστὶν ὁ $K\varLambda$ ἄξων τοῦ KM ἄξονος, μείζων ἐστὶ καὶ ὁ ΠH κύλινδρος τοῦ HX κυλίνδρου, εἰ δὲ ἐλάσσων ἐστὶν ὁ $\varLambda K$ ἄξων τοῦ

1) $\varLambda$ in ras.; supra N scr. M m. 1.

ΚΜ ἄξονος, ἐλάσσων ἐστὶ καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΗΧ κυλίνδρου. τεσσάρων δὴ μεγεθῶν ὄντων, ἀξόνων μὲν τῶν ΕΚ, ΚΖ, κυλίνδρων τῶν ΒΗ, ΗΔ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ μὲν ΕΚ ἄξονος καὶ ΒΗ κυλίνδρου ὅ τε ΚΛ ἄξων καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος, τοῦ δὲ ΚΖ ἄξονος καὶ τοῦ ΗΔ κυλίνδρου ὅ τε ΚΜ ἄξων καὶ ὁ Η κύλινδρος, καὶ δέδεικται, ὅτι, εἰ ὑπερέχει ὁ ΛΚ ἄξων τοῦ ΚΜ ἄξονος, ὑπερέχει καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΗΧ κυλίνδρου, καὶ εἰ ἴσος ἐστὶν ὁ ΚΛ ἄξων τῷ ΚΜ ἄξονι, ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τῷ ΗΧ κυλίνδρῳ, καὶ εἰ ἐλάσσων ἐστὶν ὁ ΛΚ ἄξων τοῦ ΚΜ ἄξονος, ἐλάσσων ἐστὶ καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΗΧ κυλίνδρου, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΕΚ ἄξων πρὸς τὸν ΚΖ ἄξονα, οὕτως ὁ ΒΗ κύλινδρος πρὸς τὸν ΗΔ κύλινδρον.

Οἱ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι 13
πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη.

ἔστωσαν γὰρ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΑΒ, ΓΔ κύλινδροι οἱ ΕΒ, ΖΔ. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΗΒ ἄξων πρὸς τὸν ΚΛ ἄξονα, οὕτως ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον.

ἐκβεβλήσθω γὰρ ο ΚΛ ἄξων ἐπὶ τὸ Ν σημεῖον, καὶ κείσθω τῷ ΗΘ ἄξονι ἴσος ο ΛΝ, καὶ περὶ ἄξονα τὸν ΛΝ κύλινδρος νοείσθω ὁ ΓΜ. ἐπεὶ οὖν οἱ ΕΒ, ΓΜ κύλινδροι ὑπὸ τὸ αὐτό εἰσιν ὕψος, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἴσαι δέ εἰσιν αἱ βάσεις. ἴσος ἄρα καὶ ὁ ΒΕ κύλινδρος τῷ ΓΜ κυλίνδρῳ. καὶ ἐπεὶ κύλινδρος ὁ ΖΜ ἐπιπέδῳ τῷ ΓΔ τέτμηται παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓΜ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΛΝ πρὸς *τὸν ΚΛ ἄξονα. ἴσος δέ ἐστιν ὁ μὲν ΓΜ κύλινδρος τῷ ΕΒ κυλίνδρῳ, ὁ δὲ ΛΜ ἄξων τῷ ΗΘ ἄξονί ἐστιν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΗΘ ἄξων πρὸς τὸν ΚΛ ἄξονα. ὡς δὲ ὁ ΒΕ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΑΒΗ κῶνος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον. καὶ ὡς ἄρα ὁ ΗΘ ἄξων πρὸς τὸν ΚΛ ἄξονα, οὕτως ὅ τε ΑΒΗ κῶνος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον καὶ ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον.*

---

14 *Τῶν ἴσων κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ὧν κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἐκεῖνοι ἴσοι εἰσίν.*

ἔστωσαν ἴσοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν οἱ ΑΒΓΔ κύκλοι, ἄξονες δὲ οἱ ΕΖ, ΗΘ. λέγω, ὅτι τῶν ΑΒΖ, ΓΔΘ κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, τουτέστιν ὡς ἡ ΑΒ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΗΘ ὕψος πρὸς τὸ ΕΖ ὕψος.

τὸ γὰρ ΕΖ ὕψος τῷ ΗΘ ὕψει ἤτοι ἴσον ἐστὶν ἢ οὔ. ἔστω πρότερον ἴσον. οἱ δὲ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΑΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν ΓΔΘ κῶνον ἢ κύλινδρον, οὕτως ἡ ΑΒ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν. ἴσος δέ ἐστιν ὁ ΑΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος τῷ ΚΔΘ κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ. ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΒ βάσις τῇ ΓΔ βάσει. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΕΖ ὕψος τῷ ΗΘ ὕψει ἴσον. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΕ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΗΘ ὕψος πρὸς τὸ ΕΖ ὕψος. μὴ ἔστω δὴ ἴσον τὸ ΗΘ ὕψος τῷ ΕΖ ὕψει, ἀλλ' ἔστω μεῖζον τὸ ΗΘ, καὶ κείσθω τὸ ΕΖ ἴσον τῷ ΗΚ, καὶ ἀπὸ βάσεως τῆς ΓΔ, ὕψους δὲ τοῦ ΗΚ νενοήσθω κῶνος ἢ κύλινδρος ὁ ΓΔΚ. ἐπεὶ οὖν ὁ ΑΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος τῷ ΓΔ κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως ὁ ΑΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς ΓΔΚ κῶνον ἢ κύλινδρον. ἴσος δὲ ὁ ΑΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος τῷ ΓΔΘ κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως ὁ ΓΔΘ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον ἢ κύλινδρον. ὡς δὲ ὁ ΓΔΘ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον ἢ κύλινδρον, οὕτως τὸ ΗΘ ὕψος πρὸς τὸ ΗΚ ὕψος. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΗΘ ὕψος πρὸς τὸ ΗΚ ὕψος. ἴσον δὲ τὸ ΗΚ ὕψος τῷ ΕΖ ὕψει. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΗΘ ὕψος πρὸς τὸ ΕΖ ὕψος. τῶν ΑΒΖ, ΓΔΘ ἄρα κώνων ἢ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

ἀλλὰ δὴ ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΑΒ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΗΘ ὕψος πρὸς τὸ ΕΖ ὕψος. λέγω, ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ ΑΒΞ κῶνος ἢ κύλινδρος τῷ ΓΘΔ κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ. πάλιν γὰρ τὸ ΕΖ ὕψος τῷ ΗΘ ὕψει ἤτοι ἴσον ἐστὶν ἢ οὔ. ἔστω πρότερον ἴσον. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως ὁ ΑΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν ΓΔΘ κῶνον ἢ κύλινδρον. ὡς δὲ ἡ ΑΒ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΗΘ ὕψος πρὸς τὸ ΕΖ ὕψος. καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν ΓΔΘ κῶνον ἢ κύλινδρον, οὕτως τὸ ΗΘ ὕψος πρὸς τὸ ΕΖ ὕψος. ἴσον δὲ τὸ ΗΘ ὕψος τῷ ΕΖ ὕψει. ἴσος ἄρα καὶ ὁ ΑΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος τῷ ΓΔΘ κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ. μὴ ἔστω δὴ ἴσον *τὸ ΕΖ ὕψος τῷ ΗΘ ὕψει, καὶ ἔστω μεῖζον τὸ ΗΘ τῷ ΕΖ, καὶ κείσθω τὸ ΕΖ ἴσον τῷ ΗΚ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως ὁ ΑΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον ἢ κύλινδρον. ὡς δὲ ὁ ΑΒ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΗΘ ὕψος πρὸς τὸ ΕΖ ὕψος, τουτέστι πρὸς τὸ ΗΚ. καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΖΒ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον ἢ κύλινδρον, οὕτως τὸ ΗΘ ὕψος πρὸς τὸ ΗΚ ὕψος, ὡς δὲ τὸ ΗΘ ὕψος πρὸς τὸ ΗΚ ὕψος, οὕτως ὁ ΓΔΘΔΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν ΓΔ κῶνον ἢ κύλινδρον. καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον ἢ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΓΔΘ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον ἢ κύλινδρον. τὰ δὲ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον ἴσα ἐστίν. ἴσος ἄρα ὁ ΑΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος τῷ ΓΔΘ κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

---

15 *Δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων εἰς τὸν μείζονα κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου.*

ἔστωσαν δύο κύκλοι περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ. δεῖ δὴ εἰς τὸν μείζονα κύκλον τὸν ΑΒΓΔ πολύγωνον ἰσόπλευρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάττονος κύκλου τοῦ ΕΖ.

ἤχθωσαν τῶν ΑΒΓ, ΔΕΖ κύκλων δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΑΓ, ΔΒ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ζ τῇ ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΖΗ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ΖΘ. ἐφάπτεται ἄρα τοῦ ΕΖ κύκλου. τέμνοντες δὴ τὴν ΓΔ περιφέρειαν δίχα καὶ τὴν ἡμίσειαν τῆς ΓΔ δίχα καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλήψομέν τινα περιφέρειαν, ἥτις ἔσται ἐλάσσων τῆς ΗΓ. λελήφθω καὶ ἔστω ἡ $K\Gamma$, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ K σημείου ἐπὶ τὴν $A\Gamma$ κάθετος ἡ $K\Lambda$ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ M, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $K\Gamma$, ΓM. ἑκατέρα ἄρα τῶν $K\Gamma$, ΓM πολυγώνου ἰσοπλεύρου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν $AB\Gamma\Delta$ ἐγγραφομένου. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ $H\Theta$ τῇ KM, ἡ δὲ $H\Theta$ ἐφάπτεται τοῦ EZ κύκλου, ἡ KM ἄρα οὐκ ἐφάπτεται τοῦ EZ κύκλου. πολλῷ ἄρα οὐδετέρα τῶν $K\Gamma$, ΓM ἐφάπτεται τοῦ EZ κύκλου. ἐὰν ἄρα τῇ $K\Gamma$ περιφερείᾳ ἴσας περιφερείας ἀφαιρῶμεν κατὰ τὸ ἑξῆς καὶ ἐπιζευγνύομεν εὐθείας, ἔσται εἰς τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγραμμένον μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου τοῦ EZ, καὶ φανερόν, ὅτι τὸ ἐγγραφόμενον πολύγωνον ἀρτιόπλευρόν ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Δύο σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον ἢ καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν. 16

ἐννοείσθωσαν δύο σφαῖραι περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὖσαι τὸ A. δεῖ δὴ εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. τετμήσθωσαν αἱ σφαῖραι ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου. ποιήσει δὴ τομὰς μεγίστους κύκλους. ποιείτω τοὺς $AB\Gamma\Delta$, EZH, καὶ ἔστω ὁ μὲν $B\Gamma\Delta$ κύκλος ἐν τῇ μείζονι σφαίρᾳ, ὁ δὲ EZH ἐν τῇ ἐλάσσονι. καὶ ἤχθωσαν τοῦ $B\Gamma\Delta$ κύκλου δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ BE, $\Gamma\Delta$. καὶ δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων $B\Gamma\Delta$, EZH εἰς τὸν μείζονα κύκλον τὸν $B\Gamma\Delta$ πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγεγράφθω μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος *κύκλου τοῦ ΕΖΗ, καὶ ἔστωσαν πλευραὶ τοῦ πολυγώνου αἱ ΒΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΓ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΜΛ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ξ, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Λ σημείου τῷ τοῦ ΒΓΔ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΛΝ καὶ συμβαλλέτω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς μείζονος σφαίρας κατὰ τὸ Ν σημεῖον, καὶ δι' ἑκατέρας τῶν ΓΔ, ΜΞ καὶ τῆς ΛΝ ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω. ποιήσει δὴ τομὰς κύκλους. ποιείτω, ὧν ἡμικύκλια ἔστω τὰ ΓΝΔ, ΜΝΞ. καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ ΒΓΔ, ΓΝΔ, ΜΝΞ κύκλοι ἀλλήλοις, ὅσαι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ ΒΓ τεταρτημορίῳ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου, τοσαῦταί εἰσι καὶ ἐν ἑκατέρῳ τῷ ΓΝ, ΜΝ τῇ ΜΓ ἴσαι. ἐνηρμόσθωσαν καὶ ἔστωσαν αἱ ΓΟ, ΟΠ, ΠΡ, ΡΝ, ΝΣ, ΣΤ, ΤΥ, ΥΜ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΥΟ, ΤΠ, ΕΡ, καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ Ο ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος ἤχθω ἡ ΟΦ, ἀπὸ δὲ τοῦ Υ ἐπὶ τὴν ΜΞ ἡ ΥΧ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΦΧ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΝΛ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ΒΓ ἐπίπεδον, καὶ πάντα ἄρα τὰ διὰ τῆς ΝΛ ἐπίπεδα ὀρθά ἐστι πρὸς τὸ ΒΓ ἐπίπεδον. ἓν δέ τι τῶν διὰ τῆς ΝΛ ἐπιπέδων ἐστὶν ὁ ΓΝΔ κύκλος. ὁ ΓΝΔ ἄρα κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ΒΓΔ κύκλον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ΜΝΞ κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ΒΓΔ κύκλον. καὶ ἐπεὶ τὸ ΓΝΔ ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ΒΓΔ, καὶ τῇ κοινῇ τομῇ αὐτῶν τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἐν τῷ ΓΝΔ ἐπιπέδῳ ἡ ΟΦ, ἡ ΟΦ ἄρα καὶ τῷ ΒΓΔ ἐπιπέδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΥΧ τῷ ΒΓΔ ἐπιπέδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΟΦ τῇ ΥΧ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΥΜ τῇ ΟΓ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΥΜ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΟΓ τετραγώνῳ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΟΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΓΦ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΥΜ ἴσον ἐστὶ* τὸ ἀπὸ τῆς[1]) ΞΜΧ. καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΓΦ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΞΜΧ καὶ ΔΓΦ[2]) τῷ ὑπὸ τῶν ΞΜΧ. καί ἐστιν ἴση ἡ ΔΓ τῇ ΞΜ. ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΓΦ τῇ ΜΧ. ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ΓΑ ὅλῃ τῇ ΑΜ ἴση. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΦΧ τῇ ΜΓ. πάλιν ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓΘ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΥ τετραγώνῳ, ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΓΟ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΓΦ, ΦΟ· ἴση γὰρ ἡ ὑπὸ ΓΦΟ γωνία· τῷ δ' ἀπὸ τῆς ΜΥ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΜΧ, ΧΥ· ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΜΧΟ γωνία· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΓΦ, ΦΟ ἄρα ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΜΧ, ΧΥ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΓΦ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΧ. λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΦΟ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΧΥ ἐστιν ἴσον. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΦΟ τῇ ΥΧ. ἔστι δὲ αὕτη καὶ παράλληλος. καὶ αἱ ΦΧ, ΟΥ ἄρα ἴσαι τέ εἰσι καὶ παράλληλοι. ἡ ἄρα ΦΧ τῇ ΓΜ ἐστι παράλληλος. καὶ ἡ ΓΜ ἄρα τῇ ΟΥ ἐστι παράλληλος. καὶ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν εἴληπται τυχόντα σημεῖα τὰ Ν, Μ, Ο, Γ, καὶ ἐπεζευγμέναι εἰσὶν αἱ ΜΥ, ΓΟ. αἱ ἄρα ΥΜ, ΜΓ, ΓΟ, ΟΥ ἐν τούτῳ ἐστὶ καὶ τὸ ΥΜΓΟ τετράπλευρον. τὸ ἄρα ΥΜΓΟ τετράπλευρον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάτερον τῶν ΥΟΠΤ, ΡΣ τετραπλεύρων ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΣΡΝ τρίγωνον ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΜΥ τῇ ΓΟ, καὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΜΓ τῇ ΥΟ, ἐν κύκλῳ ἄρα ἐστὶ τὰ Μ, Γ, Υ, Ο σημεῖα. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὸ τοῦ ΜΓΥΟ τετραπλεύρου ἐπίπεδον κάθετος ἡ ΑΨ καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ψ. τὸ Ψ ἄρα σημεῖον κέν-

1) ἀπὸ τῆς corr. in ὑπὸ τῶν m. 1.
2) Φ corr. ex Χ m. 1.

τρον ἐστὶ τοῦ περὶ τὰ Μ, Γ, Ο, Υ σημεῖα κύκλου. ἐπεζεύχθω ἡ ΨΓ. καὶ ἐπεὶ τετράπλευρον ἐν κύκλῳ ἐστὶ τὸ ΜΓΟΥ, καὶ τρεῖς αἱ ΥΜ, ΜΓ, ΓΟ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ μείζων ἐστὶν ἡ ΜΓ τῆς ΥΟ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΜΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΦ μεῖζόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. ἤχθω ἀπὸ τοῦ ΜΕ ἐπὶ τὴν ΓΦ κάθετος ἡ ΜΩ. καὶ ἐπεὶ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΓΩ τῆς ΩΔ, ὡς δὲ ἡ ΓΩ πρὸς τὴν ΩΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΩ τοῦ ἀπὸ τῆς ΩΜ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΩ, ΩΜ ἐλάσσονά ἐστι τοῦ δὶς ἀπὸ τῶν ΜΩ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῶν ΓΩ, ΩΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΓ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΜΓ ἔλασσόν ἐστι τοῦ δὶς ἀπὸ τῶν ΜΩ. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΜΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΨ μεῖζόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΜΩ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΨ μεῖζόν ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΑΜ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΘ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΜ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΓΑ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΓΨ, ΨΑ. ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἡ πρὸς τῷ Ψ γωνία. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΜΑ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΜΩ, ΩΑ. ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΜΩΑ γωνία. τὰ ἀπὸ τῶν ΓΨ, ΨΑ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΜΩ, ΩΑ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΜΩ μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΨ. λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΨΑ μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΩ. μείζων αρα ἡ ΨΑ τῆς ΑΩ· ἡ δὲ ΑΩ μείζων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. πολλῷ ἄρα ἡ ΨΑ μείζων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. καὶ ἡ ΑΨ κάθετος ἐπὶ τὸ ΜΓΟΥ ἐπίπεδόν ἐστιν. τὸ ἄρα ΜΓΟΥ ἐπίπεδον οὐ ψαύει τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάτερον τῶν ΥΟΠΤ, ΤΠΡΣ τετραπλεύρων οὐ ψαύει τῆς ἐλάσσονος σφαίρας, οὐδὲ τὸ ΝΣΡ τρίγωνον ψαύει τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. ἐὰν δὴ ἐν ἑκάστῃ τῶν λοιπῶν *τεταρτημορίων τὰ αὐτὰ κατασκευάσωμεν, ἕξομεν εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγεγραμμένον μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας.*

Ἐὰν δὴ εἰς ἑτέραν σφαῖραν τῷ ἐν τῇ ΒΓΔ σφαίρᾳ στερεῷ πολυέδρῳ ὅμοιον στερεὸν πολύεδρον ἐγγράψωμεν, ἔσται ἑκάστη τῶν πυραμίδων τῶν βάσιν μὲν ἐχουσῶν τὰ ΜΓΟΥ, ΥΟΠΤ, ΤΠΡΣ καὶ τὸ ΝΟΡ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Α σημεῖον, ὁμοία τῇ ὁμοταγεῖ πυραμίδι. αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας τριπλασίονα λόγον ἔχουσιν ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν. ἑκάστη ἄρα τῶν πυραμίδων τῶν βάσιν τῶν βάσιν μὲν ἐχουσῶν τὰ ΜΓΟΥ, ΥΟΠΤ, ΤΠΡΣ τετράπλευρα καὶ τὸ ΝΣΡ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Α σημεῖον, πρὸς ἑκάστην τῶν ὁμοταγῶν πυραμίδων τριπλασίονα[1]*) λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας. καὶ ὅλον ἄρα τὸ πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας. ὡς δὲ ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν διάμετρον τῆς ἑτέρας σφαίρας. καὶ ὅλον ἄρα τὸ πολύεδρον πρὸς ὅλον τὸ πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας:* ~

Αἱ σφαῖραι πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ 17
εἰσὶ τῶν διαμέτρων.

ἔστωσαν σφαῖραι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, διάμετροι δὲ τῶν ΑΒΓ, ΔΕΖ σφαιρῶν ἔστωσαν αἱ ΒΓ, ΕΖ. λέγω, ὅτι ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔΕΖ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ η ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

---

1) Corr. ex *τριπλάσια* m. 1.

εἰ γὰρ μὴ ἔχει ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔΕΖ τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, ἕξει ἄρα ἡ ΑΒΓ σφαῖρα ἤτοι πρὸς ἐλάσσονά τινα σφαῖραν τῆς ΔΕΖ ἢ πρὸς μείζονα τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἐχέτω πρότερον πρὸς ἐλάσσονα τὴν ΗΘΚ, καὶ νενοήσθω ἡ ΔΕΖ τῇ ΗΘΚ περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον, καὶ δύο σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν τῶν ΔΕΖ, ΗΘΚ εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν τὴν ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον ἐγγεγράφθω μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας τῆς ΗΘΚ κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὴν ΑΒΓ σφαῖραν τῷ ἐν τῷ ΔΕΖ στερεῷ πολυέδρῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν πολύεδρον. τὸ ἄρα ἐν τῇ ΑΒΓ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἔχει δὲ καὶ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΗΘΚ τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΗΘΚ σφαῖραν, οὕτως τὸ ἐν τῇ ΑΒΓ στερεὸν πολύεδρον. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν αὐτῇ πολύεδρον, οὕτως ἡ ΗΘΚ σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον. μείζων δὲ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα τοῦ ἐν αὐτῇ πολυέδρου. μείζων ἄρα καὶ ἡ ΗΘΚ σφαῖρα τοῦ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ στερεοῦ πολυέδρου. ἀλλὰ καὶ ἐλάσσων· ἐμπεριέχεται γάρ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ΒΓ σφαῖρα πρὸς ἔλασσόν τινα τῆς ΔΕΖ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἡ ΔΕΖ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ΑΒΓ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ.

λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς μεῖζόν *τινα τῆς ΔΕΖ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.*

εἰ γὰρ δυνατόν, ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς μείζονα λόγον ἐχέτω τῆς ΔΕΖ σφαίρας πρὸς τὴν Λ ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἀνάπαλιν ἄρα ἡ Λ σφαῖρα πρὸς τὴν ΑΒΓ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ. ὡς δὲ ἡ Λ σφαῖρα πρὸς τὴ ΑΒΓ σφαῖραν, οὕτως ἡ ΔΕΖ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ΑΒΓ σφαίρας. καὶ ἡ ΔΕΖ ἄρα σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ΑΒΓ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς μείζονά τινα τῆς ΔΕΖ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἐλάσσονα. ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔΕΖ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

Εὐκλείδου στοιχείων[1]) $\overline{\iota\beta}$.

---

1) Infra add. *στερεῶν*.