

Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES
Google Livres

72. 7. 36*

EVCLIDIS

Megarensis, Philosophi & Mathe

MATICI EXCELLENTISSIMI, SEX LIBRI PRIORES, DE
Geometricis principijs, Græci & Latini, unâ cum demonstrationibus
propositionum, absq; literarum notis, ueris ac proprijs, & alijs quibus-
dam, usum earum concernentibus, non citra maximum
huius artis studiosorum emolumen-
tum adiectis.

ALGEBRAE PORRO REGVLAE, PROPTER NVME-
rorum exempla, passim propositionibus adiecta, his libris præmissæ
sunt, eademq; demonstratæ,

AVTHORE IOANNE SCHEVBELIO, IN
inclyta Academia Tubingensi Euclidis
professore ordinario.



Cum gratia & priuilegio Cæsario,
ad quinquennium.

BASILEAE, PER IOAN-
nem Heruagium.

M. GARBICIVS ILLYRICVS
ad Lectorem.

Εὐκλείδης σοφίᾳ πολλοὶ καὶ ἴσους ἀνδρες
ἱμμάτως μέμασαν πολλὰς ἐκπονήσας,
πρὸς τὴν εὐφραδίᾳς πλυσθῆναι νοοῖο
ἐκτίλισαν μὲν ἀπὸ πρόδ' ἔμνησι πλῆθ'·
ἀλλ' ἐπεὶ κείνους σοφίᾳ πλεονεξοῦσι πρὸς ἡμῶν
ἐξαλειψὺς ἀπλῶς διουσι τὰ ληπτή· ἴφ'·
πρὸς οὐρανὸν πάντας ὡς μὲν δόσις ἔσχατα πρὸς,
ἡδὲ διαφθέρωσι πύλας ἐπ' αὐτῶν.
τῷ δ' οὐρανῷ τοῖς πρόδ' ἔμνησι πλῆθ'·
πολλὰ τ' ἀνασθῶντες θῆκ' ὡς τῶν αὐτῶν.
πάντα δ' ἀπὸ τῶν ἐν ἀφῶν πρὸς εἴγ'·
ὥς ἔμνησι τῶν δυνάστον ἔδ'·
τοῖς δ' ἀφῶ πρὸς τῶν μετὰ τῶν πλῆθ'·
ἐν ἡμῶν ὥς τὸ πρὸς κείν' ἀνίχ'·

IOAN. SAMBVCVS PANNO-
nius Tirnauiensis.

*Haecenus Algebrae latuit quia regula multos,
Et summis tantum est illa adamata utris:
Explicat hanc noster tanta Scheubeltus arte,
Quilibet ut paucis perdidicisse queat.
Sex quoque demonstrat libros Megarensis abunde:
Ingentum quare, Lector amice, probes.*

NOBILIBVS, ERVDITIONE AC VIRTUTE

VIRIS ORNATISSIMIS, FVGGERIS, ANTONIO NATV SENIORI, ac fratris sui P. M. Reimundi filijs, Ioanni Iacobo, Georgio, Christophoro, Vdalrico, & Reimundo, fratribus, Kirchpergæ & Vveiffenhorni dominis, Mœcenatibus suis perpetuò colendissimis,
IOANNES SCHEVBELIVS S.



VM inter liberalia studia, quæ à liberis & ingenuis hominibus disci debent, Geometria etiam numerari meruerit, Euclidis uerò, *μαθηματικὴ ἡγεμονία καὶ κορυφαία*, geometria in omnibus fere publicis scholis proponi cōsueuerit; quo illam laudatissimam consuetudinem meo etiam conatu iuuarem, cum omnes ipsius libros uno tempore tradere, propter multa impedimenta, difficile sit, priores sex, tanquam potiores, unā cum Algebræ regulis, ad hos summè necessarijs, demonstrandos & declarandos suscepimus. At quoniam hic noster tradendi modus ab aliorum traditionibus non nihil uariat, huius diuersitatis causā, post expositam à nobis geometriæ originē & usum, declarabimus. Cum Nilus Ægypti fluuius, ut author est Strabo, longe lateq; augescēs, se diffunderet, atq; sua exundatione deinde agrorum limites in illa uicinia ita turbaret, ut decrecente, & in suum se alueum recolligente aqua, limites & termini diluuiō confusi submouerentur prioribus finibus, quibus designandis significandisq; erant constituti, eueniebat sanè ut nullus sui fundi, nec locum nec quantitatem certò assignare posset. Quamobrem ne contentiones inter uicinos orirentur, sed potius ut uera & iusta distributione suum quisq; fundum integrum reciperet, ab Ægyptijs, propter summam necessitatem & commoditatem, quam experiebantur metiendis agris, Geometria inuenta est: quemadmodum Phœnices, propter negociationem, Numerorum scientiam primi reperisse dicuntur. Hanc ab Ægyptijs acceptam Græci postea omni studio & diligentia excoluerunt. Non ideo tantum, ut hac in ædificando aut reliquis artibus mechanicis, magno suo cōmodo uterentur: sed multo magis, ut liberos suos ad philosophiam, omnesq; uitæ partes præparent, ad quas res mensurarum cognitio non leuiter conducere. Nam primum quid quæso, in ulla parte philosophiæ sine demonstrandi scientiæ rectè cognosci potest, aut percipi? At demonstrationum doctrinæ, incredibile est, quantum lucis afferant exempla geometrica, quæ sine controuersia sunt omnium maximè & ad docendum, & ad intelligendum illustria & expedita. In oculos namq; incurrunt, & ad manifestas menti nostræ rationes referuntur. Deinde constat ex hac ipsa mensurarum noticiā, non demonstrationes tantum longè plurimas, ad doctrinam de natura rerum illustrandam passim accommodatas, sed huius ipsius etiam

prima initia ex illa sumpta esse. Ex illa enim non plures mundos, non hunc ipsum in quo uiuimus, aut ullum omnino aliud corpus, infinitum esse ostenditur. Quæ sanè physicæ uera sunt & propria exordia putanda. Quòd hæc ipsa mensurarum ratio & terræ amplitudinem metitur, & cœli ipsius spacia describit: & disciplinæ suæ regulis quasi quibusdam, in cœlum subuectis mentibus hominum, omnes illos orbium & corporum cœlestium ortus, obitus, motusq; demonstrat. Atq; hæc tam multa & minimè contemnenda commoda ipsi præcipuè affert, qui in umbra & ocio uiuentes, ueritatem exquirunt. Cum interim neq; pauciora, neq; leuiora ipsi etià præstet, qui ex umbra in solem progrediuntur, & in communi hominū consuetudine uersantes, priuatam aut publicā rem gerūt. Galenus scribit, sæpe se in incertarum rationum æstu ualde anxium & dubium laborantem, Geometricarum demonstrationum beneficio subleuatum esse, quæ modum & uiam præclarè operandi sibi monstra- uerint. Etenim cum animaduerneret rotunda & circularia ulcera tardius quàm longa curari, censuit eius curationis uiam sibi ex Geometria petendam esse. Proinde in lectionem de Isoperimetris incidens, inuenit, quòd circulus quidem omnium Isoperimetrarum figurarum esset capacissimus: nimirum quòd extrema eius undiq; plus à se mutuo, quàm in alijs Isoperimetris figuris, distarent. Hac ratione fretus, in Methodo curandi, ad finem libri tertij scribens, sic inquit:

*τὰ μὲν γὰρ ἰγέρσια δὲ τὰ χεῖλη αὐτῶν μᾶλλον δεσπαίνει τε καὶ ἀφει-
σπάζει. ὅτι συναγωγῆς ἀκριβοῦς δέσται, ὥς τε καὶ εἰσφοράς καὶ ἀγυτῆσι
ὑπὸ τούτων χεῖσι.*

Vnde Hippocrates etiam filium suū Thessalum, in quadam ad ipsum epistola, hortatur, ne uel Geometriam, uel Arithmeticam negligat, inter alia scribens his uerbis:

Ἰσορίας δὲ μελίτω δίδω πᾶν, γεωμετρικῆς καὶ ἀριθμητικῆς.

Et grauis author Quintilianus, eandem etiam Geometriam oratori suo, Rempub. domi & in pace gubernaturo, necessariam esse, multis & grauibus de causis ostendit. Acres ipsa clamat, foris & in bello usum huius non uulgarem existere, cum castris scilicet locus est capiendus, magnæ moles loco mouendæ, machinæ bellicæ & tormenta fabricanda, aut tranſcienda flumina pontibus, obsidēda hostium mœnia, & huius generis sexcenta alia facienda sunt. Celebratur Archimedis industria, quæ sola & acerrimos summi Imperatoris Marcelli impetus leui sepe momēto frustrata est, & obsidionem Syracusarū in longius traxit. Inter ciues autē & milites magna uis est ordinis, magna cōcordiæ, magna amoris mutui: quas res in primis efficit & conseruat in hominū societatibus proportio Geometrica. Quare Plato hanc, ut salutarē, præcipuè asciscendā esse duxit ciuitatibus, quæ rerum suarum statum optimū esse uellent, & quā firmissimum. Vbi enim pro meritis & dignitate, magistratus & imperia

optimis

optimis & prudentissimis mandantur, ubi ordines & discrimina personarum seruantur, ubi melior imperat, parat & obtemperat imprudentior, ibi suas quemque partes, suum munus, suum officium & intelligere & facere, & ueram ac durabilem æqualitatem esse. Et ex hac deinde mutuam inter ciues concordiam & beneuolentiam gigni, necesse est. Quia *ἡ ἀρχὴ τοῦ κόσμου* est, id quod equidem in Repub. maximè efficit proportio Geometrica: & ob hanc causam maximi facienda est Geometria etiam ad Reipub. gubernacula accessuris. Vnde non sine magnis & grauibus causis existimandum est, Platonem fecisse, ut à sua schola rudes & imperitos huius artis omnes, ipsa etiam inscriptione, arcēdos duxerit. Notus est enim uersiculus, quem scholæ suæ uestibulo inscriptum proposuit:

ΑΓΕΩΜΕΤΡΗΤΟΣ ΟΥΔΕΙΣ ΕΙΣΙΤΩ.

Cum enim se non eos tantum, qui remoti ab administratione Reip. rationem doctrinæ & ueritatis in umbra & ocio exquirerent, sed illos etiam qui quæsitæ, & inuentas sapientiæ rationes in lucem ac solem proferrent, & rebus humanis agendo consulerent, institutione sua formare intelligeret, uidit nimirum uir diuinus, ad neutram institutionem idoneos, qui non Geometriæ disciplina exculti accederent. Quare huiusmodi barbara & monstrosa ingenia, quæ ab hac, maximè propria naturæ hominum, disciplina abhorrent, tanquam inepta percipiendæ doctrinæ suæ, meritò à se repulit. Quod ipsius prudens & necessarium consilium, utinam etiamnum in scholis publicis sequeremur: non minor modo studiorum perturbatio esset, sed ex his ipsis etiam longè maiores fructus Respub. caperet, ad cuius administrationem multo melius instructi homines uenirent. Porro constat, inter omnia scripta eorum, qui quidem in hoc genere artium elaborauerunt, præcipuo semper loco fuisse Euclidea: è quibus tanquam inexhausto fonte, ferè omnia mathemata profluxere. Itaque & nos huic authori pro uirili nostra illustrando, operæ aliquid attribuendum duximus: qua in re ab usitata hæctenus in scholis uia, non sine grauibus causis (ut nos quidem opinamur) discessimus. Multos fuisse demonstratores geometriæ Euclidis Megarensis, philosophi ac mathematici, certū est: inter omnes tamen, Græcorū quidē Theonis & Hypsiclis Alexandrinorū philosophorū, Latinorū uerò, Campani Galli & Zamberti Veneti, explicationes in geometriam Euclidis, ut omnium perfectissimæ celebrantur. Quæ sanè tales sunt, ut nihil ferè in illis ad plenam huius authoris intelligentiam desiderari possit. Ita enim singularum propositionum cōclusiones ex suis hypothesibus colligunt, ut animum suum ad utramque rem diligenter aduertenti, nihil prorsus dubitationis relinquatur. Sed cum literarum figuras in designandis demonstrationum momentis usurpant, id mihi & facere præter ipsius Euclidis institutum uidentur, qui suas in his elementis geometriæ propositiones nudè, & absque illis literarum figuris scriptas reliquit: & præterea fieri ui-

datur, ut quod doctissimorum hominum pace dixerunt, non solum quod
quid docent & labor & molestia augeatur, sed etiam impediatur intelli-
gentia discipulorum. Idcirco ipse non solum docendis his elementis quotidie
experior, sed etiam de eorum querelis non semel cognoui, qui in cognos-
cendis his ipsis Euclidis nostri elementis, tyrocinium quoddam posuer-
unt. Nam & hi se tam longa sæpe & multiplici literarum ingulatio-
ne, ueluti remoris quibusdam intelligentiæ suæ turbati & impediti con-
fessi sunt: & ego ipse sentio quàm molestum sit, & omnino plenum fasti-
dij, ad eum modum subinde literas, aut in sermone repetere, aut adscribe-
re ad figuras. His igitur de causis, usurpatam ab alijs rationem demon-
strandi per literas omittendam, & aliam quandam uiam, magis, non mo-
dò huius nostri authoris tractationi cōsentaneam, sed ad intelligendum
etiam tyronibus planam & expeditam, ingrediendū mihi, in his quidem
prioribus sex libris explicandis duxi. In qua & illas literarum ambages
remoueo, & quæ sunt demonstrationibus ostendenda, suis quæque pro-
prijs appellationibus, ut ipse etiam Euclides solet, designo. In quibus eo non
compendium modò me consequi, sed etiam magis uitare obcuritatis
difficultatisque incōmodum arbitror: id quod de subiunctis exemplis qui-
uis facile intelliget. Nam angulus rectus uel maior in operatione seu figu-
ra oblatas, nulla certè appellatione cōuenientiori exprimi poterit, quàm
ut rectus, ut maior, non autem angulus a b c, uel γ δ ε uocetur. In his
namque proluxa literarum inter se collatione res demonstranda opus ha-
bet cum priore illa nostra uia & ratione rem non modo breuius, sed, ut
ego quidem existimo, clarius, per suam ipsius appellationem designare
possim, quæ significatam rei notionem, absque ulla longiore collationis
mora, animo auditoris statim cum ipsa proprii nominis uoce affert. An
non etiam apertius absque notis literarum sic aliquis loquatur, Angulus
igitur angustior ad æqualitatem amplioris, per propositionem 23, augea-
tur: uel, describatur à data recta quadratum, ducatur etiam in eo diame-
ter, & eius generis infinita alia: quàm si eadem literis appositis reddat ma-
gis implicata & obscura, sic pronūciando, Angulus igitur a b c ad æqua-
litatem anguli d e f, per propositionem 23, augeatur. Vel, ἀναγκαστικὸν
ἐκ τῆς α β τετραγώνου ὅτι α β γ δ, καὶ ἐπεὶ ζ δ ἴσθαι ὅτι β δ, ἔτι τὰς ἀνωτά-
τες. Quid obsecro his ambagibus literarum à solida & erudita demonstra-
tionis explicatione magis est alienum? Nam hic primū discipuli recur-
rendum ad figuram est, & in illa multiplici ac inter se implicata literarum
uarietate diu quærendum, ubi sint illæ ipsæ literarum notæ a b c, d e f,
& ubi his ipsis designati anguli. Nec minore cura id quoque quæren-
dum, ubi in quadrato β δ literæ, & ab his ipsis ducenda linea cuiusmo-
di futura sit. His & consimilibus ambagibus in illa nostra ratione nihil
opus est, cū scilicet singula suis proprijs nominibus enuncientur. Quod
quidem ut in explicando Euclide facerem, non meo tantum iudicio, sed
eorum

N V N C V P A T O R I A.

eorum quoque hortatu adductus sum, quos in hac demandata mihi ab amplissimo scholæ Tubingensis senatu functione docēdos susceperam. Hi enim hunc modum docendi & sibi pergratum, & mihi minus molestum fore confirmabant. Quibus equidem gratificandum hac in parte fuit, partim ut huius nostræ rationis aliquod periculum in docendis geometricis faceremus: partim uero, ne opinione difficultatis eius quam esse in illa altera ratione quærentur auditores nostri, prorsus auocarentur à studio Geometriæ, quam alioquin hoc nostro tam iniquo literis seculo nimium à plerisque negligi sentiebam. Atque id nostrum consilium discen-
tibus in hac nostra schola non parum profuisse animaduerti. Nec defuerunt boni & docti uiri, qui me ad consilium editionis operæ nostræ in hac parte nauatæ hortarentur: quibus ipsis acquiescendū duxi, nec ideo quidem, ut me propter hanc ipsam ambitiose apud eruditos ostētare: sed ut rem literariā, & in primis huius honestissimæ disciplinæ studium, pro mea quoque uirili iuuarem. Hos igitur labores qualescunque, nobilissimi uiri, domini & Mœcenates mei omnibus modis colendi, in communem omnium studiosorum utilitatē iam olim susceptos, atque nunc etiam Dei auxilio perfectos, in lucem editurus, clarissimo nominis & auctoritatis uestre patrocinio commendatos & defensos, exire uolui. Nam cum multa sint, & non uulgaria liberalitatis in me uestre beneficia, hoc etiam laboris & operæ nostræ patrocinium non grauati suscepturos speraui. Quod quidem ut pro uestra uirtute, sapientia, & in omnes studiosos literarum amore, ac studio singulari mihi in hac parte tribuatis, atque me clarissimæ dignitati uestre commendatum habeatis, etiam

atque etiam rogo. Valete. Datæ Calend. April.

Anno post Christum natum

M. D. L.

DE EVCLIDE, EX PROCLO.

πραγμάτῳ ἀνέλεγκτον ἔχει, ἐπὶ πλείων ὑφήγησιμ. Hæc de
Euclide & libris eius, ex Proclo.

BREVIS



BREVIS REGVLARVM ALGEBRAE DESCRIPTIO, VNA CVM DEMONSTRATIONIBVS GEOMETRICIS,

AVTORE IOANNE SCHEVBELIO.



VVM, ut in absolutis numeris naturali quodam ordine maior sequitur minorem, ita quoq; in denominatis proportionem aliqua (quorum computationem hoc libro explicare institui) fieri consentaneum sit: primum ostendam quæ uocabula & signa, & qui ordo talium numerorum, deinde quæ & cuiusmodi sint regulæ Algebrae, rationum ualde artificiosarum, planum facere, ac quoad eius fieri potest, breuissimè & perspicuè docere aggrediar. Porro harum regularum inuentionem ascribunt Diophanto Græco scriptori, qui, ut autor est Reiomontanus in præfatione Alphragani, libris tredecim eas descripsit, atq; ut Latini REI ET CENSVS sit Arabes regulas illas uocabulo suo appellare solent ALGEBRAS, id quod obiter indicandum erat.

NUMERATIO. CAPVT I.



Characteres uocabulorum seu appellationum, quibus in his regulis numeri naturali quodam ordine proportionis denominantur, sunt, 9, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 400, 401, 402, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 418, 419, 420, 421, 422, 423, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446, 447, 448, 449, 450, 451, 452, 453, 454, 455, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 500, 501, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 510, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 519, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 535, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549, 550, 551, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588, 589, 590, 591, 592, 593, 594, 595, 596, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616, 617, 618, 619, 620, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 628, 629, 630, 631, 632, 633, 634, 635, 636, 637, 638, 639, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658, 659, 660, 661, 662, 663, 664, 665, 666, 667, 668, 669, 670, 671, 672, 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679, 680, 681, 682, 683, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 699, 700, 701, 702, 703, 704, 705, 706, 707, 708, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 715, 716, 717, 718, 719, 720, 721, 722, 723, 724, 725, 726, 727, 728, 729, 730, 731, 732, 733, 734, 735, 736, 737, 738, 739, 740, 741, 742, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 749, 750, 751, 752, 753, 754, 755, 756, 757, 758, 759, 760, 761, 762, 763, 764, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 771, 772, 773, 774, 775, 776, 777, 778, 779, 780, 781, 782, 783, 784, 785, 786, 787, 788, 789, 790, 791, 792, 793, 794, 795, 796, 797, 798, 799, 800, 801, 802, 803, 804, 805, 806, 807, 808, 809, 810, 811, 812, 813, 814, 815, 816, 817, 818, 819, 820, 821, 822, 823, 824, 825, 826, 827, 828, 829, 830, 831, 832, 833, 834, 835, 836, 837, 838, 839, 840, 841, 842, 843, 844, 845, 846, 847, 848, 849, 850, 851, 852, 853, 854, 855, 856, 857, 858, 859, 860, 861, 862, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 869, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 877, 878, 879, 880, 881, 882, 883, 884, 885, 886, 887, 888, 889, 890, 891, 892, 893, 894, 895, 896, 897, 898, 899, 900, 901, 902, 903, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 918, 919, 920, 921, 922, 923, 924, 925, 926, 927, 928, 929, 930, 931, 932, 933, 934, 935, 936, 937, 938, 939, 940, 941, 942, 943, 944, 945, 946, 947, 948, 949, 950, 951, 952, 953, 954, 955, 956, 957, 958, 959, 960, 961, 962, 963, 964, 965, 966, 967, 968, 969, 970, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 977, 978, 979, 980, 981, 982, 983, 984, 985, 986, 987, 988, 989, 990, 991, 992, 993, 994, 995, 996, 997, 998, 999, 1000.

Signa præterea, + & —

CHARACTERVM EXPLICATIO.

9. Primus character, habet appellationem numeri, sic, ut cuicumq; numero appositus sit, pro simplici is habeatur. Vt 4, appposito characterē 9, sic, 49, effertur quatuor numeri, hoc est, quatuor unitates simplices. Ac præterea 139, 499, 4869, tredecim, quadraginta nouem, quadringenta & octoginta sex, item ceteri numeri, unitates simplices significabunt.

2. Secundus ordine character, appellationem habet Radicis uel Rei, sic, ut cui numero appositus sit, hac ille appellatione exprimitur. Vt 42, denotant quatuor radices uel res. Sic 32, sunt & exprimuntur octo radices.

3. Tertius character, appellationem obtinet Censūs uel Quadrati, sic, ut numerus cui sit ascriptus talis character, hac appellatione appelletur. Vt 43, exprimuntur quatuor census uel quadrati. Sic 373, sunt octoginta septē census uel quadrati.

4. Quartus character, repræsentat nobis numerū cubicum, sic, ut numerus hac nota insignitus, cubi appellationem habeat. Vt 44, exprimiuntur quatuor cubi. Sic 494, sunt quadraginta nouem cubi. Haud longè secus exprimendos reliquos characteres, si quibus erunt adiuncti numeris, censendum. Quare eorum tantum appellationibus, quid nimirum singuli significant, figura quadam repræsentatis, ut deinde aut significatione signorum + & — expressa, quorum nimirum illud, Plus & additionem: hoc uerò, Minus & diminutionem significet, quod ad numerationis descriptionem attinet, per hæc quæ hoc loco proponuntur, nunc satis manifestum erit.

A Significat

SIGNIFICANT AVTEM CHARACTERES.

9 quidem,	Numerum	2e, uerò	Radice.
8,	Quadratum	e,	Cubum.
88,	Quadratum de quadrato.	f8,	Sur-solidum.
8e,	Quadratum de cubo, uel contrà,		Cubum de quadrato
bf8,	Bis-sur-solidum significat.		
888,	Quadratum de quadrati quadrato, uel contrà,		Quadratum quadrati de quadrato
		ce,	Cubum de cubo
8f8,	Quadratum de sur-solido, uel contrà,		Sur-solidum de quadrato.
		tf8,	Ter-sur-solidum
88e,	Quadratum quadrati de cubo, uel contrà,		Cubum quadrati de quadrato.

Quia uerò hæ numero rum appellationes in infinitum sese extendunt, cum ex multiplicatione (ut quæ semper cōtinuari possit) ipsæ proueniant, ne imponendis nominibus tandē infinitio nobis faciat negociū, per numeros naturali ordine positos, cum & ipsi in infinitum crescant, singulas appellationes nominabimus, sic, ut primus character. 9: Numeri, Secundus uerò, 2e: Radicis nomē habeat. Tertius de de, 8. qui cū ex multiplicatione radice in se producat, & primo quidem: Prima quantitas, & Pri etiam syllaba notata, appelletur. Quartus uerò e quia ex multiplicatione eiusdem radice cum quadrato, hoc est, cum prima quantitate, secundo producit: Se syllaba notata, Secunda quantitas dicitur. Sic character quintus, 88, quia ex multiplicatione radice cum secunda quantitate tertio nascitur: Ter syllaba notata, Tertia etiam quantitas dicitur. Sextus eadem ratione, syllaba quar: Quarta. Deniq; reliqui omnes, quo ordine singuli nascuntur, eo etiam suæ initialis syllabæ numero appellantur.

TYPVS QVO HAEC QV AE IAM DICTA SVNT,

suīs figuris ordine depinguntur.

Numerus	Radix	Census uel Quadratus	Cubus	Quadratus de quadrato	Sur-solidus	Quadratus de cubo, uel contrà.	Bis-sur-solidus.	Quadratus de quadrati quadrato.
9	2e	8	e	88	f8	8e	bf8	888
N	Ra.	Pri.	Se.	Ter.	Quar.	Quin.	Sex.	Sep.
Numerus	Radix	Prima	Secunda	Tertia	Quarta	Quinta	Sexta	Septima
								quantitas.

EXEMPLA NVMERATIONVM PROPO-
nuntur sic.

$$44 \left\{ \begin{array}{l} f8 \\ \text{quar.} \end{array} \right. + 11 \left\{ \begin{array}{l} 8 \\ \text{pri.} \end{array} \right. + 31 \left\{ \begin{array}{l} 9 \\ \text{N.} \end{array} \right. - 53 \left\{ \begin{array}{l} 2e \\ \text{ra.} \end{array} \right.$$

Exprimitur, uel 44 sur-solidi, plus (id est 88) 11 quadrati, plus 31 numeri, minus 53 radices, Vel 44 quartæ, plus 11 primæ plus 31 numeri, minus 53 radices. Similiter

$$25 \left\{ \begin{array}{l} bf8 \\ \text{sex} \end{array} \right. + 13 \left\{ \begin{array}{l} f8 \\ \text{quar.} \end{array} \right. + 9 \left\{ \begin{array}{l} e \\ \text{se.} \end{array} \right. - 48 \left\{ \begin{array}{l} 8 \\ \text{pri.} \end{array} \right. - 11 \left\{ \begin{array}{l} 2e \\ \text{ra.} \end{array} \right.$$

Exprimi

11 radices. Vel 25 sextæ, plus 13 quartæ, plus 9 secundæ, minus 49 primæ, minus 11 radices.

Præinde harum regularum exempla, cum eodem modo, quo in communi negotiatione aliàs monetarum, mensurarum & ponderum, atq; etiam quarumlibet aliarum rerum numeri, enunciantur, his duobus exemplis positis, puto iam facile omne propositum exemplum exprimi posse, quare de enunciatione iam satis.

ADDITIO. CAPVT II.



IN additione scribantur numeri cum suis characteribus & signis, non aliter atq; in communi numerorum uel physicalium minutiarum tractatione fieri consuevit, linea deinde sub ordinibus ducta, omnes unus characteris, seu appellationis numeri in unum colligantur. Quod si horum summæ tandem, unâ cum characterē & signo cuiusq; sub linea, eo quo maximè collectæ sint loco, scriptæ fuerint, additio peracta erit,

EXEMPLA.

Ter.	ra.	N	Quar.	N	Pri
7	+ 8	— 5	7	+ 8	— 5
3	+ 9	— 8.	4	+ 11	— 9
10	+ 17	— 13	11	+ 19	— 8

Quod si in uno ordine numerus fuerit, cuius characteri uel appellationi similis in reliquis ordinibus non reperitur, ille cum suo characterē & signo summæ sub linea ascribendus erit. ut,

7	quar.	+	8	ra.	—	5	N		Item	9	ter.
4	quar.	+	9	ter.	+	6	ra.			8	ra.
11	quar.	+	9	ter.	+	14	ra — 5 N			9	ter. + 8 ra.
			Item	4	primis	+	9	N			
			addendæ sunt	3	primæ	—	4	ra.			
			ueniunt	7	pri.	+	9 N — 4	ra.			

Quòd si in signis fuerit aliqua diversitas, sic quòd numerorum unius appellatio
nis alter +, alter uero signū — habuerit: maioris super minorem numerū excessu
per subtractionem cognito, is cum maioris numeri signo & caractere sub linea,
quemadmodum alia, scribatur. ut,

Pri.	ra.	Item	Pri.	ra.
6 —	8		6 +	8
4 +	12		4 —	4
10 +	4		10 +	4

PROBATION EXAMEN.

$$\begin{array}{r} - \quad 3 \\ + \quad 4\frac{4}{9} \\ \hline + \quad 2\frac{1}{9} \end{array} \qquad \begin{array}{r} + \quad 40 \\ + \quad 48 \\ + \quad 8 \\ \hline + \quad 48 \end{array}$$

COMPROBATIO VEL EXAMEN OPERATIONIS.

Ut nunc comprobetur rectè ne an secus in additione operatum sit, necesse erit ut primò præparetur tabula huic negotio deferuiens, hoc modo. Accipiat ad placitum numerus, integer uel fractus, eo deinde radicis loco posito, eius, prout quidem exemplorum quæ comprobari debeant characteres requirunt, singulæ quantitates ordine designentur, atq; notatis tandem his, unâ cum radice posita, tabula, ut sequitur parata erit.

A 2 TAB V.

B R E V I S R E G V L A R V M
T A B V L A C O M P R O B A T I O N I S.

Radix posita.	Prima,	Secun.	Tertia,	Quarta,	Quinta,	Sexta,	Septi.	Octava quantitas.
2	4	8	16	32	64	128	256	512
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$
$3\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{4}$	$42\frac{7}{8}$	$150\frac{1}{16}$	$525\frac{7}{32}$	$1839\frac{17}{64}$	$6433\frac{11}{128}$	$22513\frac{193}{512}$	$78815\frac{327}{1024}$
7	49	343	2401	1637	117649	823543	5764801	40153607

Et quia tabula iam est confecta, exemplorum examen, recte ne an secus computatio sit facta, hoc modo cognoscetur. Resolvantur numeri denominati in singulis ordinibus, secundum unius numeri ex radicibus positae (eius nimirum per quem probatio instituitur) quantitates, in numeros absolutos, sumptis interim & ipsi in singulis ordinibus, qui proprie numeri, nempe simplices, appellantur. Proinde qui ex additis proveniunt simplices numeri, in unum tamen prius collecti, si id collectum, siue totus is numerus, ei qui ex inferiori, hoc est ex summa colligitur, equalis fuerit: recte te operatum scias, at contra si inequalis: reiterandam esse nimirum operationem ipso errore admoneberis. Atque in hunc modum, ultimum quidem per radicem positam 2. quod uero exemplum ipsum praecedat, per $\frac{1}{2}$ comprobatum esse scias.

S E Q V I T V R E X E M P L V M A L I V D.

$$\begin{array}{rclclclcl}
 7 & \text{quint.} & + & 8 & \text{ter.} & - & 4 & \text{ra.} & + & 8 & \text{N} \\
 7 & \text{quint.} & + & 5 & \text{quar.} & - & 11 & \text{ter.} & - & 11 & \text{se.} \\
 \hline
 14 & \text{quint.} & + & 5 & \text{quar.} & - & 3 & \text{ter.} & - & 11 & \text{se.} & 4 & \text{ra.} & + & 8 & \text{N}
 \end{array}$$

Probatur hoc exemplum per 2.

Numeri ordinis

Primi 576 Secundi 344.

Summa 920. Atque tot etiam unitates simplices, uel tantus numerus ueniet, ubi summa sub linea posita simili modo resoluta fuerit.

Idem exemplum probatum per

$$\begin{array}{rcl}
 + 6\frac{565}{729} & \frac{1}{3} & \\
 - 3\frac{74}{729} & & \\
 \hline
 & + 6\frac{591}{729} & \\
 \hline
 & + 6\frac{591}{729} &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 14062\frac{23}{64} & 3\frac{1}{2} & \\
 13368\frac{57}{64} & & \\
 \hline
 27431\frac{1}{4} & &
 \end{array}$$

S U B T R A C T I O C A P. III.



N subtractione id quod subtrahitur, sub eo a quo subtractio fieri debet, ordine scribatur, subducta deinde linea, singularum in subtrahendo appellationum numeri a numeris appellationum similium, eius a quo subtractio fieri debeat, auferatur. Quod si tandem residui, una cum cuiusque caractere & signo, sub linea suo loco positi fuerint, subtractio peracta erit. Hic tamen maxime respectus habeatur signorum + & —. nam per illa quid subtrahendum sit, & quid non, quantum deinde illud sit, de quo subtractio fieri debeat, quantum fuerit initio, & quantum subtractione nunc ei desit, cognoscitur. quæ certe omnia nisi animaduertantur: difficilis erit omnis subtractio, contra uero: nulla non facilis, si obseruentur.

E X E M P L A.

Pri.		ra.		N		Ter.		ra.
7	+	8	+	14		8	+	7
3	+	5	+	7		5	—	4
4	+	3	+	7		3	+	11

Primum

Primum exemplum est facile, secundum autem, quia in eo non 5 tertiae totae & integre, sed hæ, quatuor radicibus minus subtrahendæ sunt. postquam igitur, 5 tertiae integræ à superioribus subtractæ fuerint, 4 radices residuo reddendæ erunt. Quo fit, ut 14, & non 3 radices, ultra 3 tertias in residuo. conspiciuntur. ut

Ter.		pri	pri		N
14	+	9	19	—	5
9	+	12	14	+	14
5	—	3	5	—	19

In his duobus exemplis superiorum memori nulla difficultas occurret. Nam cum aliquid totum & integre subtrahi non possit, nihilominus id quod maxime potest, de summa est detrahendum. quod reliquum deinde est, per diminutionum signum, —, ut communi apprehenditur notione, in debitum ponendum est, quod ipsum in priori exemplo cognosci potest. In posteriori, cum 14 exponi debeant, prius uero 8 eiusdem appellationis, de summa exposita sint, 22 iam per signum — notanda erunt.

Pri.		N	Pri.		N
12	—	9	12	—	4
8	—	4	8	—	9
4	—	5	4	+	5

In his duobus exemplis, cum in utroque non 8 quantitates primæ, sed hæ in uno quidem minus 4, in altero uero, minus 9, numeris subtrahendæ sint, 8 primis integre subtractis, residuis tandem id quod plus æquo subtractum est, iure accedere debet. Quare in priori quidem exemplo, loco — 9, cum 4 accedant, tantum — 5, in posteriori uero loco — 4, cum 9 accedant, + 5 N positum est.

ALIVD EXEMPLVM.

A	1056	primis	—	696	secund.
subtra.	4032	primæ	—	1008	secund.
manent	312	secundæ	—	2976	pri.

Proba, sumpto radicis ualore

— 1344	2	— 1344	— 9288	3	— 9288
+ 8064		— 1344	+ 9072		— 9288
— 9408			— 18360		

Vel facta subtractione

— 1344	— 9408	— 9288	— 18360
+ 8064	— 9408	+ 9072	— 18360
— 9408		— 18360	

Hactenus quæ in signis animaduertenda, ostendimus.

Quod si in uno ordine, uel in eo qui subtrahitur, uel in eo à quo subtrahitur, numerus fuerit, cuius characteri in altero similis non reperitur, in subtrahendo quidem numerus ille cum suo character, signo tamen opposito, in altero uero ordine; omnia, hoc est, numerus, character & signum, sub linea scribantur,

EXEMPLVM.

A	4	quar.	—	5	radi.
subtrahantur	2	quar.	+	9	N
manent	2	quar,	—	9	N — 5 ra,

A 3 Alia

BREVIS REGVLARVM

ALIA DVO.

3 pri.	4 quar.	+ 8	ra.
4 ter.	3 quar.	— 8	N
8 pri. — 4 ter.	1 quar + 8 ra.	+ 8	N

ALIVD EXEMPLVM.

Sep.	sex.	quin.	Ter	se.	primę quan.
8	+ 9	+ 11	+ 14 quar.	— 4	— 8 — 4
5	+ 12	— 9	+ 10 ra.	+ 8	— 4 — 2 — 6 N
3 sep. — 3 sex. + 20 gn. + 14 quar. — 10 ra.	— 12	— 4	+ 5	+ 6	N

PROBAE NVMERVS, AC RADICIS VALOR,

esto 2

$$\begin{array}{r}
 + 4208 \\
 + 2324 \\
 \hline
 1894
 \end{array}$$

COMPROBATIO, VEL EXAMEN OPERATIONIS.

In examine subtractionis utere tabula in additione à nobis proposita, contrario tamen usu, nam quod illic additur, hic subtrahitur. Necesse igitur, ut quantum fuerit numerorum subtrahendi, secundum suorum characterum appellationem resolutione facta, tantundem de alterius ordinis numeris, eodem modo resolutis, subtrahatur. Quod si tandem quod relinquitur residui numeri sub linea solutioni responderit, ut in hoc ultimo præmissio exemplo apparet, non est quod te hallucinatum fuisse subtractione existimes.

Idem ultimum exemplum examinatum, radice valore

existente $3\frac{1}{2}$

Singulorum characterum numeri, pro valore radice positę soluti, sunt, in ordi-

quidem à quo subtrahitur,	+	$\frac{512}{6561}$	—	$\frac{64}{81}$
ne & subtrahendo uerò	+	$\frac{32876}{6561}$	—	$7\frac{17}{81}$
residuo deinde	+	$\frac{64206}{6561}$	—	$3\frac{460}{729}$

hoc est,

$$\begin{array}{r}
 - \frac{4672}{6561} \\
 - 3\frac{4738}{6561} \\
 + 3\frac{66}{6561} \\
 \hline
 + \frac{4672}{6561} \\
 + 3\frac{66}{6561} \\
 - \frac{4672}{6561}
 \end{array}$$

Potest proba subtiliori etiam modo institui, ijs nimirum, qui post illud, quo dicitur, Hoc est, ponuntur, numeris neglectis. Sed per hanc iam satis.

MVLTIPPLICATIO. CAP. III.

IN multiplicatione, scriptis ordinibus, linea item sub ijs ducta, ut solet, multiplicentur numeri singulorum characterum superioris, cum singulis characterum numeris ordinis inferioris, atq; productis posthac singulis legitime in unum collectis, si cuiq; producto tandem suus proprius character & signum, quæ sic multiplicando sortiuntur numeri, adscripta sint, multiplicatio perfecta erit. In hac autem numerorum collectione animaduertendum est, qualem characterem, quale item signum, quilibet productus numerus sortiatur. Quantum igitur ad characterem pertinet, hoc est, ut sciat, qui character sit ascribendus procreato ex multiplicatione numero, ex hac subiecta tabula intelligi poterit.

TABV-

TABVLA MVLTIPPLICATIONIS, QVANTVM
ad characteres.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
N	Ra.	Pri.	Secun.	Ter.	Quar.	Quin.	Sex.	Sep.	Octa.	No.	De.

cima & cæ. quanti.

COMPOSITIO TABVLAE.

Scribantur characteres singuli ordine quo ipsi proueniunt & numerantur, sic, ut character N. primus, locum primū: Radix uerò character secundus, secundum: reliqui deinde omnes naturali ordine sua loca occupent. Super primo deinde characterē, N scilicet, figura nihili o posita, reliquis omnibus naturali numerorum ordine, ab unitate incipiendo, signatis, tabula confecta erit, cuius usus talis est,

VSVS TABVLAE.

In multiplicatione, duobus duorum characterum numeris inter se multiplicatur, qui super horum numerorum characteribus in prescripta tabula reperiuntur numeri, hi simul aggregati, summa sua characterem producti in tabula ostendent.

Porro quod ad signa + & — attinet, quale scilicet unicuique producti sit adnotandum, communis notitia atque intelligentia, ex sequentium exemplorum descriptione, expeditam nobis & promptam rationem suppeditabit.

SEQUVNTVR EXEMPLA.

8 pri.	8 N	9 se.	29 quar.
4 N	8 N	8 ra.	9 quar.
32 pri.	64 N	72 ter.	261 No.

*Initium ordinis numerorum semper representare
plus admonendus est lector.*

ALIA EXEMPLA.

8 pri. + 9 N	8 pri. + 9 N
7 pri. + 4 N	8 pri. + 9 N
32 pri. + 36 N	72 pri. + 81 N
56 ter. + 63 pri.	64 ter. + 72 pri.
56 ter. + 95 pri. + 36 N	64 ter. + 144 pri. + 81 N

In his duobus exemplis nulla est difficultas, in utroque enim omnes superioris cum omnibus numeris ordinis inferioris multiplicandi sunt. Quare sicut signum + ad omnes, tam multiplicandi quam etiam multiplicantis ordinis, numeros est positum, ita etiam singuli ex multiplicatione producti numeri ex eoque eodem signo + notentur. Hinc regulam colligunt in Algebraicis exercitiis. Quod + cum + multiplicatum, + producat, quæ est notanda.

ADHVC ALIA EXEMPLA.

7 pri.	+	4 ra.
		9 ra.
63 se.	+	36 pri.

ALIA EXEMPLA.

3 pri.	—	4 ra.	9 ra.
		9 ra.	
63 se.	—	36 pri.	7 pri. — 4 ra.
			63 se. — 36 pri.

Primū exemplum est facile, cū in eo tam 7 primæ quantitates quam 4 radices, cum 9 radicibus multiplicari debeant. Secundū autē, & tertij exemplorū ratio, cū sit paulò inuolutior, explicanda communi quadam (quæ uersatur in huiusmodi rebus) notitia esse uidetur. In secundo, 7 primæ solidæ ac integræ cum 9 radicibus, in tertio,

tertio, 9 radices cum 7 itidem integris primis multiplicentur: hæ tamen integræ cū non sint, sed quandam decessionem perpeſſe ſint priuatiuo ſigno —, neceſſe eſt, ut in multiplicatione tantum decedat, quantum non legitime acceſſit, priori ſummæ procreatæ ex multiplicatione: atq; hic quidem, quantum 9 radices cum 4 radicibus: illic uerò, 4 radices cum 9 radicibus multiplicatę producunt, id quod per ſignū diminutionis — fieri debet, ſic, — 36 pri. — 36 pri. Ex quo ratio intelligi poteſt, propter quam, ſi multiplicetur + cum —, uel contrā — cum +: non plus, ſed minus producat. quod & ipſum regula quadam propoſuerunt in Algebricis exercitati, quæ eſt notanda.

ALIVD EXEMPLVM.

$\begin{array}{r} 3 \text{ pri.} - 9 \text{ N} \\ 8 \text{ pri.} - 9 \text{ N} \\ \hline 64 \text{ ter.} - 72 \text{ pri.} \\ \hline \phantom{64 \text{ ter.}} - 72 \text{ pri.} + 81 \text{ N} \\ \hline 64 \text{ ter.} - 144 \text{ pri.} + 81 \text{ N} \end{array}$	$\begin{array}{r} \\ 3 3 \text{ produ.} \\ \hline 1 6 8 \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$

Quomodo 3 primæ cum 8 pri. ut totum cum toto multiplicari debet, item quomodo 3 primæ — 9 N. cum 8 primis, Poſtremò 3 primæ etiam cum 8 primis — 9 N. ſuprà oſtendimus. At uerò cum in hoc exem lo multiplicandi ratio minus ſit perſpicua, eam explanare obiter hoc loco uolui, ut intelligatur ſcilicet cauſſa etiam, propter quam, ſigno — notatis numeris, non minus, ſed plus procreetur, hoc quod diuerſum quid, quàm in ſuperioribus hætenus eſt habitum, eſſe ſolet. Multiplicentur igitur 3 primæ — 9 N. ut dictum eſt, cum 8 primis, & producentur 64 ter. — 72 pri. Sed quia non cum 8 primis integris, uerum cū ijs, detractiōe, 9 N. imminutis, multiplicatio inſtitui debet, plus quàm par erat, priore multiplicatione eſt procreatum, quare ut conueniens producat. numerus, ratione defectus in multiplicante, 3 primæ nouies ex hoc producto ſubtrahendæ erunt. Atqui ruruſum, cum non 3 primæ, ſed hæ minus 9 N. multiplicari debeant, 9 N. ruruſus nouies addendæ ſunt. quod tum fit, quando minus multiplicatur per minus (id quod tertio ratione ſignorum, + & — in multiplicatione obſeruari debet) Quod demum reddito, uerus productus numerus apparebit.

Tribus igitur regulis his ſuprà propoſitis, omnis multiplicatio, ratione quidem ſignorum + & — abſoluitur: quæ tamen, quia prima & ultima coincidunt, ad duas regulas reduci poſſunt.

Prima.

Si fuerint eadem ſigna multiplicantis & multiplicandæ quantitatis, procreatus ex multiplicatione numerus notatur ſigno affirmatiuo +.

Secunda.

Si fuerint ſigna diuerſa: notatur productus ex multiplicatione numerus ſigno priuatiuo uel negatiuo —.

POTEST ETIAM ALITER HVIVS EXEMPLI PRAECEDENTIS multiplicatio inſtitui.

Multiplicentur primò 3 pri. — 9 N. cum 3 primis una, poſtea etiam cum 9 N. altera quantitate. Subtrahatur deinde, per caput præcedens. poſterius productum à priori, & relinquatur uerus ex multiplicatione productus numerus, ut ſequitur.

3 pri.

ALGEBRAE DESCRIPTIO.

$$\begin{array}{r}
 8 \text{ pri.} - 9 \text{ N} \\
 \text{cum } 8 \text{ pri.} \\
 \hline
 64 \text{ ter.} - 72 \text{ pri.}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 8 \text{ pri.} - 9 \text{ N} \\
 \text{cum } 9 \text{ N} \\
 \hline
 72 \text{ pri.} - 81 \text{ N}
 \end{array}$$

Productorum subtractio.

$$\begin{array}{r}
 64 \text{ ter.} - 72 \text{ pri.} \\
 72 \text{ pri.} - 81 \text{ N} \\
 \hline
 64 \text{ ter.} - 144 \text{ pri.} + 81 \text{ N}
 \end{array}$$

SEQUITVR HVIVS REI EXEMPLVM IN NVMERIS rationalibus.

$$\begin{array}{r}
 17 - 6, \\
 \text{cum } 9 - 4 \\
 \hline
 153 - 54 \\
 \quad - 68 + 24 \\
 \hline
 155 - 122 + 24 \\
 \text{hoc est, } 57. \text{ Et tantum etiam sunt } 11. \text{ quinquies, uel undecies quinq, ut quidem multiplicatione patet, quoderat ostendendum.}
 \end{array}$$

ALIVD MVLTIPPLICATIONIS EXEMPLVM.

$$\begin{array}{r}
 9 \text{ pri.} + 8 \text{ N} - 3 \text{ ra.} \\
 7 \text{ se.} - 4 \text{ ter.} - 8 \text{ pri.} \\
 \hline
 63 \text{ quar.} + 56 \text{ se.} - 21 \text{ ter.} \\
 \quad - 36 \text{ qn.} - 32 \text{ ter.} + 12 \text{ quar.} \\
 \quad \quad - 72 \text{ ter.} - 64 \text{ pri.} + 24 \text{ se.} \\
 \hline
 75 \text{ quar.} + 80 \text{ se.} - 36 \text{ qui.} - 125 \text{ ter.} - 64 \text{ pri.}
 \end{array}$$

PROBAE NVMERVS AC RADICIS VALOR.

$$\begin{array}{r}
 \text{sit } \frac{1}{3} \\
 + \quad 8 \\
 \quad \quad - \quad 5 \frac{25}{81} \\
 \hline
 \quad \quad - \quad \frac{56}{81} \\
 \hline
 \quad \quad \quad 5 \frac{25}{81}
 \end{array}$$

Potest etiam, cum iam sciatur, quale signum cuius productio sit ascribendum, multiplicatio ad vulgarem modum sic institui.

$$\begin{array}{r}
 9 \text{ pri.} + 8 \text{ N} - 3 \text{ ra.} \\
 7 \text{ se.} - 4 \text{ ter.} - 8 \text{ pri.} \\
 \hline
 \quad - 72 \text{ ter.} - 64 \text{ pri.} + 24 \text{ se.} \\
 \quad - 36 \text{ quin.} - 32 \text{ ter.} + 12 \text{ quar.} \\
 63 \text{ quar.} + 56 \text{ se.} - 21 \text{ ter.} \\
 \hline
 75 \text{ quar.} + 80 \text{ se.} - 36 \text{ quin.} - 125 \text{ ter.} - 64 \text{ pri.}
 \end{array}$$

PROBAE NVMERVS AC RADICIS VALOR.

$$\begin{array}{r}
 \text{sit } 2 \\
 + \quad 38 \\
 \quad \quad - \quad 1520 \\
 \hline
 \quad \quad - \quad 40 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 1520
 \end{array}$$

COMPROBATIO VEL EXAMEN OPERATIONIS.

Proba hic non aliter instituitur atq; in superioribus, nempe per resolutionem denominatorum numerorum. Nec à superiori differt, nisi quòd hic numerus absolutus unus cum altero multiplicetur, cū illic simul additi, usl unus ab altero subtractus sit. Tabula igitur, quam in additione præscripsimus, huc etiam assumenda erit, & ad multiplicationis resolutionem adhibenda.

B

Divisio

BREVIS REGVLARVM
DIVISIO. CAP. V.



In numeri diuidenti character semper maior esset characterē sui diuisoris, uno item characterē diuisor ipse signaretur, simplicissima & facillima esset omnis diuisio. Etenim numero uel numeris diuidenti singulis in numerum diuisoris diuisis, characteris deinde diuisoris numero (quo scilicet in multiplicationis tabula signatur) à numero, uel numeris characterū diuidenti singulis subtracto, diuisio utiq; perfecta esset. Diuisio enim sic per exeuntes: ipsos numeros, subtractio uero numerorū, quibus signantur in tabula characteres, ubi residuus, uel residui numeri singuli in tabulam multiplicationis missi fuerint: horum numerorū denominationes seu characteres offeret.

In signis porro nulla fit planè mutatio. Quæ enim signa habet ipse diuidentus, illa eadem etiam in exeunte ponuntur.

EXEMPLA SVNT.

Diuidantur 9 ra. (exe. 3 ra. Item 10 se. (exe. $3\frac{1}{2}$ N
in 3 N in 3 se.

ALIA EXEMPLA.

8 ra. in 9 ra. Item 10 se. in 3 ra.
exeunt $\frac{8}{9}$ N exeunt $3\frac{1}{3}$ pri.

ADHVC ALIA.

9 pri. + 4 ra. in 3 ra. Item 18 ter — 12 pri in 4 ra.
exeunt 3 ra + $1\frac{1}{2}$ N exeunt $4\frac{1}{2}$ se. — 3 ra.

Sed quia non rarò contingit, quòd diuisoris character maior quàm diuidenti character sit, pluribus etiam characteribus quàm uno, signetur. Alia ratione igitur numerus qui proponitur, diuidentus erit. Nam tum diuisor numerus diuidento subscribi, ac uirgula interponi atq; interducì oportet.

Vt diuidere uolens, 8 quar. in 2 pri. — 4 N
Item 8 pri. — 9 ra. in 4 ra. + 3 N.

Diuisores suis diuidentis tantum, ut præcipitur, subscribat: ac uirgulis deinde interiectis, diuisionem absolutam esse sciat.

EXEMPLA.

Diui- den. 8 quar. in 2 pri. — 4 N Exiens 8 quar 2 pri. — 4 N	Diuisor Item 8 pri. — 9 ra. in 4 ra + 3 N Exiens 8 pri. — 9 ra. 4 ra. + 3 N

ALIA EXEMPLA.

9 N in 3 ra. 8 ra. in 4 pri.
exeunt $\frac{3}{1}$ N exeunt $\frac{8}{4}$ ra. uel $\frac{2}{1}$ N

Afferri autem huc necesse est tabulam, in multiplicatione, pro characteribus productorum habendis, expositam. Nam quemadmodum in multiplicatione, numeri characterum eorum qui inter se multiplicantur, pro characteribus productorum habendis, addendi: sic in diuisione iam, ut habeatur character exeuntis unius, diuisoris scilicet character de numero characteris ipsius diuidenti subtrahì debet. Per residuum enim numerum statim, in tabula illa, exeuntis character manifestabitur: cum is nimirum sit, cui est numerus residuus suprà positus. Et hæc de integris hæcenus pro instituto nostro satis nos dixisse opinor.

Sequuntur

SEQVVTVR REGVLAE QVAS OBSERVARI IN FRACTIONIBVS oportet.

ENUNCIATIO. CAP. I.

Quantum ad enunciationem fractionum seu minutiarum, nulla est hic difficultas, cum hæ non aliter atq; in communi minutiarum tractatione enuncientur, nisi quòd etiam uocabula seu characteres suis appellationibus efferantur, & horum quidem primus, si duo fuerint, numeratorem: alter deinde, ipsum denominatorem sequatur. Quod si unus tantum fuerit minutiae character, ad minutiae numeratorem illum pertinere scias. Vt minutia $\frac{3}{8}$ N. enunciat, tres numeri diuisi in octo radices. Item $\frac{7}{9}$ pri. sunt septem primæ diuisæ in 9. Simili modo alias minutas omnes efferri oportet.

ADDITION ET SUBTRACTIO.

Caput II.

Pro additione, addantur fractiones, prout communis earum tractatio requirit. Qui deinde characteres numeratoris & denominatoris collectæ minutiae sint, ostendet tabula in multiplicatione de integris exposita. Idem usuuenit etiam in subtractione, in qua itidem una minutia de alia subtracta, characteres residuæ minutiae tabula integrorum supra proposita offeret.

EXEMPLA ADDITIONIS.

$$\begin{array}{r} 31 \text{ pri.} \\ 15 \text{ pri.} \\ 3 \text{ N.} \text{ ad } 16 \text{ pri.} \\ 4 \text{ ra.} \text{ ad } 4 \text{ ra.} \\ 5 \text{ pri.} \\ 20 \text{ se.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \text{ pri.} + 14 \text{ ra.} \\ 15 \text{ pri.} \text{ ad } 14 \text{ ra.} \\ \frac{7}{8} \text{ pri.} \text{ ad } \frac{2}{8} \text{ ra.} \\ 18 \text{ N} \end{array}$$

ALIUD EXEMPLVM.

$$\begin{array}{r} 48 \text{ N.} \text{ ad } 48 \text{ N.} \text{ uen } 192 \text{ pri.} + 576 \text{ ra.} \\ 7 \text{ pri.} \text{ ad } 12 \text{ ra.} - 3 \text{ pri.} \text{ ad } 84 \text{ se.} - 21 \text{ ter.} \end{array}$$

ADHVC ALIUD.

$$\begin{array}{r} \frac{4}{9} \text{ N.} \text{ ad } \frac{1}{9} \text{ pri.} \text{ ue. } 1 \text{ pri.} + 4 \text{ N.} \\ 9 \end{array}$$

ALIUD.

$$\begin{array}{r} 9 \text{ ra.} + 2 \text{ pri.} \text{ ad } 21 \text{ ter.} - 3 \text{ pri.} \text{ ue. } 21 \text{ ter.} + 9 \text{ ra.} - 6 \text{ pri.} \\ 36 \text{ se.} \text{ ad } 36 \text{ se.} \text{ ad } 36 \text{ se.} \end{array}$$

Vel in minimis, quantum ad numeros & characteres, ueniunt.

$$\begin{array}{r} 7 \text{ se.} + 3 \text{ N.} - 2 \text{ ra.} \\ 12 \text{ pri.} \end{array}$$

B 2

Exempla

BREVIS REGVLARVM
EXEMPLA SVBTRACTIONIS.

$$\begin{array}{r} 15 \text{ quar.} \\ 16 \text{ quar.} \\ \underline{4 \text{ ra.}} \\ 5 \text{ pri.} \end{array} \quad \text{de} \quad \begin{array}{r} 31 \text{ quar.} \\ 31 \text{ le.} \\ \underline{20 \text{ ter.}} \end{array} \quad \text{Item} \quad \begin{array}{r} 15 \text{ pri.} \\ 5 \text{ pri.} \\ \underline{6} \end{array} \quad \text{de} \quad \begin{array}{r} 14 \text{ ra.} \\ 15 \text{ pri.} + 14 \text{ ra.} \\ \underline{15 \text{ pri.} + 14 \text{ ra.}} \\ 18 \text{ N} \end{array}$$

20 quin.

Vel in minimis, &cæ.

$$\begin{array}{r} 3 \text{ N} \\ \underline{4 \text{ ra.}} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 \text{ ra.} \\ \underline{9} \end{array}$$

ALIVD EXEMPLVM.

$$\begin{array}{r} 48 \text{ N} \\ 12 \text{ ra.} - 3 \text{ pri.} \end{array} \quad \text{de} \quad \begin{array}{r} 232 \text{ ra.} + 576 \text{ N} \\ 84 \text{ pri.} - 21 \text{ le.} \end{array} \quad \text{uel de} \quad \begin{array}{r} 48 \text{ N} \\ 7 \text{ pri.} \end{array}$$

Sunt duæ subtractiones, manent autem, ratione quidem prioris

$$\begin{array}{r} 6912 \text{ ra.} + 312 \text{ fe.} - 2976 \text{ pri.} \\ 63 \text{ qr.} + 1008 \text{ le.} - 504 \text{ ter.} \end{array} \quad \text{poste.} \quad \begin{array}{r} 576 \text{ ra.} - 480 \text{ pri.} \\ 84 \text{ fe.} - 21 \text{ ter.} \end{array}$$

Vel manet ratione prioris

$$\begin{array}{r} 576 \text{ N} - 104 \text{ ra.} \\ 84 \text{ pri.} - 21 \text{ fe.} \end{array} \quad \text{quod probari potest.}$$

OPERATIO SVBTRACTIONIS PRIORIS.

$$\begin{array}{r} 6912 \text{ ra.} + 312 \text{ fe.} - 2976 \text{ pri.} \\ 4032 \text{ pri.} - 1008 \text{ le.} \end{array} \quad \begin{array}{r} 1056 \text{ pri.} + 6912 \text{ ra.} - 696 \text{ fe.} \\ 48 \text{ N} \end{array} \quad \text{de} \quad \begin{array}{r} 232 \text{ ra.} + 576 \text{ N} \\ 84 \text{ pri.} - 21 \text{ le.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \text{ ra.} - 3 \text{ pri.} \\ 63 \text{ quar.} + 1008 \text{ fe.} - 504 \text{ ter.} \end{array}$$

Posterioris subtractionis calculus quia est facilis, ideo etiam relinquitur.

ALIVD EXEMPLVM.

$$\begin{array}{r} 8 \text{ pri.} + 4 \text{ ra.} \\ 9 \text{ le.} \end{array} \quad \text{de} \quad \begin{array}{r} 9 \text{ fe.} \\ 8 \text{ pri.} - 4 \text{ ra.} \end{array} \quad \text{ma.} \quad \begin{array}{r} 81 \text{ quin.} - 64 \text{ ter.} + 16 \text{ pri.} \\ 72 \text{ quar.} - 36 \text{ ter.} \end{array}$$

ADHVC ALIVD.

$$\begin{array}{r} 9 \text{ pri.} + 8 \text{ ra.} \\ 2 \text{ le.} - 6 \text{ N.} \end{array} \quad \text{de} \quad \begin{array}{r} 11 \text{ fe.} + 16 \text{ pri.} + 8 \text{ ra.} \\ 2 \text{ le.} - 6 \text{ N} \end{array} \quad \text{ma.} \quad \begin{array}{r} 11 \text{ fe.} + 7 \text{ pri.} \\ 2 \text{ le.} - 6 \text{ N} \end{array}$$

MULTIPLICATIO ET DIVISIO.

Caput III.



Pro multiplicatione, multiplicentur numeri, numeratores scilicet & denominatores, prout in communi tractatione id fieri solet, inter se: productorum deinde characteres, quem quisque sortiatur, dabit tabula superius pro hac re exposita. Idem fit etiam in divisione, ubi itidem una minutia in aliam primo, ut moris est, diuisa, numerorum excurrentium characteres ex superioribus petendi erunt.

EXEMPLA MULTIPLICATIONIS

$$\begin{array}{r} 2 \text{ ra.} \\ 5 \text{ pri.} \end{array} \quad \text{cum} \quad \begin{array}{r} 8 \text{ N} \\ 9 \end{array} \quad \text{Item} \quad \begin{array}{r} 6 \text{ pri.} + 8 \text{ N} \\ 9 \text{ ra.} \end{array} \quad \text{cum} \quad \begin{array}{r} 15 \text{ ra.} \\ 8 \text{ N} \end{array}$$

$$\text{produ.} \quad \begin{array}{r} 16 \text{ ra.} \\ 45 \text{ pri.} \end{array} \quad \text{pro.} \quad \begin{array}{r} 15 \text{ pri.} + 20 \text{ N} \\ 12 \text{ N} \end{array}$$

ALIVD EXEMPLVM.

$$\begin{array}{r} 7 \text{ fe.} - 8 \text{ pri.} \\ 3 \text{ ra.} + 4 \text{ N.} \end{array} \quad \text{cum} \quad \begin{array}{r} 4 \text{ ter.} + 5 \text{ ra.} \\ 7 \text{ fe.} - 8 \text{ pri.} \end{array}$$

produ

$$\begin{array}{r} \text{producuntur } \frac{4 \text{ ter.} + 5 \text{ ra.}}{3 \text{ ra.} + 4 \text{ N.}} \\ \text{ADHVC ALIVD.} \\ \frac{28 \text{ sex.} + 35 \text{ ter.} - 32 \text{ quin.} - 40 \text{ se.}}{7 \text{ se.} - 8 \text{ pri.} \quad \text{de } \frac{4 \text{ ter.} + 5 \text{ ra.}}{5 \text{ se.} - 8 \text{ pri.}} \\ \frac{3 \text{ ra.} + 4 \text{ N.}}{15 \text{ ter.} \quad 4 \text{ se.} - 32 \text{ pri.}} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{ALIVD.} \\ \frac{7 \text{ ter.} + 12 \text{ N.}}{8 \text{ pri.}} \quad \text{cum } \frac{7 \text{ ter.} - 12 \text{ N.}}{8 \text{ pri.}} \\ \text{produ. } \frac{49 \text{ sep.} - 144 \text{ N.}}{64 \text{ ter.}} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{ADHVC ALIA.} \\ \frac{7 \text{ pri.}}{8 \text{ ter.}} \text{ cū } 4 \text{ ra.} - 8 \text{ N. Item } \frac{7 \text{ pri.} + 8 \text{ ra.}}{5 \text{ se.} - 12 \text{ N.}} \text{ cum } \frac{4 \text{ ra.}}{5 \text{ pri.}} - 8 \text{ N.} \\ \text{produ. } \frac{7 \text{ se.} - 14 \text{ pri.}}{2 \text{ ter.}} \quad \text{pro. } \frac{32 \text{ pri.} - 280 \text{ ter.} - 292 \text{ se.}}{25 \text{ quar.} - 60 \text{ pri.}} \end{array}$$

Est huius secundæ multiplicationis duplex operatio. Vna quidem, ut ante multiplicationem, -8 N in multiplicante, ad eandem cum 4 radicibus reducantur de nominationē. Eritq; tum multiplicationis huius modus, qui est superiorum exemplorū. Altera uerò, ut sicut duę sunt in multiplicante diuersæ inter se quantitates, sic etiam duę instituantur multiplicationes. Vna quidem cum $\frac{4 \text{ ra.}}{5 \text{ pri.}}$, altera deinde cū -8 N , & quod secūdp̄ produceretur, id à priori subtrahatur, & residuum productæ ex multiplicatione minutiam manifestabit: id quod quiuis ex communi notitia deprehendere potest.

EXEMPLA DIVISIONIS.

$$\begin{array}{l} \text{Diuidan. } \frac{2 \text{ N.}}{3 \text{ ra.}} \text{ in } \frac{8 \text{ ra.}}{9 \text{ pri.}} \text{ uel cont. } \frac{8 \text{ ra.}}{9 \text{ pri.}} \text{ in } \frac{2 \text{ N.}}{3 \text{ ra.}} \\ \text{exeunt in minimis } \frac{2}{3} \text{ N.,} \quad \text{exit } 1\frac{1}{3} \text{ N.} \end{array}$$

ALIVD EXEMPLVM.

$$\begin{array}{r} \frac{15 \text{ se.} + 20 \text{ ra.}}{12 \text{ ra.}} \quad \text{diuidantur in } \frac{5 \text{ pri.} + 8 \text{ N.}}{9 \text{ ra.}} \\ \text{exeunt } \frac{45 \text{ se.} + 60 \text{ ra.}}{24 \text{ pri.} + 32 \text{ N.}} \end{array}$$

ALIVD EXEMPLVM.

$$\frac{7 \text{ se.} \quad 14 \text{ pri.}}{2 \text{ ter.}} \text{ in } \frac{7 \text{ pri.}}{8 \text{ ter.}} \quad \text{exe. } 4 \text{ ra.} - 8 \text{ N}$$

$$\begin{array}{l} \text{Sic } \frac{7 \text{ se.} - 14 \text{ pri.}}{2 \text{ ter.}} \text{ in } 4 \text{ ra.} - 8 \text{ N} \\ \text{exe. } \frac{7 \text{ se.} - 14 \text{ pri.}}{8 \text{ ter.} - 16 \text{ ter.}} \text{ hoc est } \frac{7 \text{ se.}}{8 \text{ ter.}} \text{ uel in minimis } \frac{7 \text{ N.}}{8 \text{ pri.}} \end{array}$$

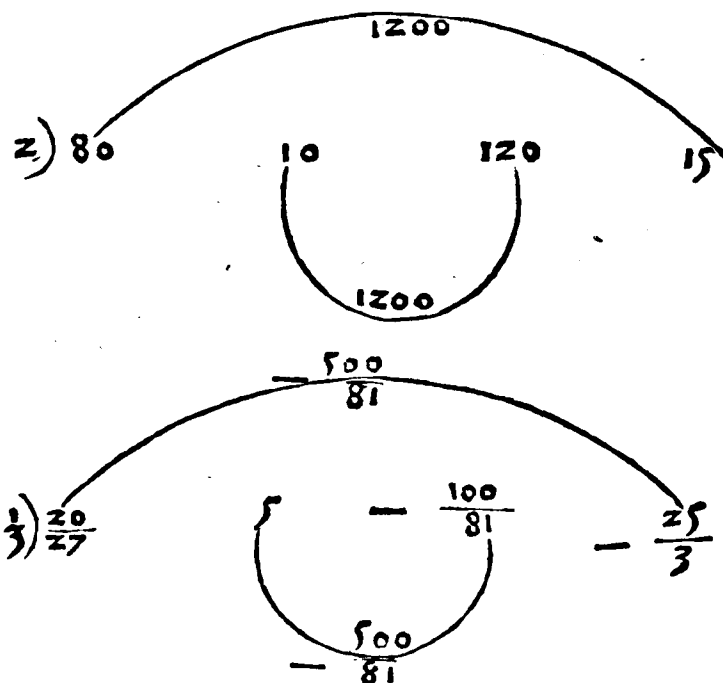
REGVLA PROPORATIONVM.

Regulam de proportionibus, quæ nunc recto ordine sequi deberet, cum quibus partim ex communi ipsius descriptione, partim ex ijs quæ hæcenus sunt commemorata, quomodo hæc in integris atq; etiã in fractionib. tractari debeat, facile cognoscat: Lectori satis me facturū uno duntaxat atq; altero exemplo sum opinatus.

Quantitates proportionales, quantum ad partem posteriorem.

Prima, secunda, tertia, quarta,
 $8 \text{ se.} + 4 \text{ pri.}, \quad 3 \text{ ra.} + 4 \text{ N}, \quad 8 \text{ ter.} - 4 \text{ ra.}, \quad \frac{6 \text{ ter.} + 8 \text{ se.} \& \text{ca.}}{2 \text{ pri.}}$

RESOLVTAE SECUNDVM VALORES QVANTITATVM.



PROBATIO SEV EXAMEN.

Probantur huius regule exempla per numerū loco radicis pro arbitrio sumptū. si per eius quantitates, singulae propositi exempli quantitates solutae fuerint. Hoc autem apparet in exemplo praemisso ultimo, cuius quidem numeros characterum singulos, primò per numerum binarium, secundò deinde per tertiam unitatis partem solutos fuisse uides.

SIMILI MODO ET IN FRACTIONIBVS EXEMPLA proponi possunt.

$\frac{1}{4} \text{ ra. ualent } \frac{4}{3}, \quad \text{quanti } \frac{1}{3} \text{ se.} \quad \text{Facit } \frac{16 \text{ N}}{45 \text{ pri.}}$

$\frac{2}{3} \text{ ra. ualent } \frac{4}{9} \frac{\text{pri.}}{\text{N}} \quad \text{quan. } \frac{9}{13} \frac{\text{N}}{\text{le.}} \quad \text{Facit } \frac{6 \text{ N}}{11 \text{ pri.}}$

NUNC DE AEQVATIONIBVS,

QVAE IN SOLVENDIS EXEMPLIS, MULTIFARIAM sese offerunt, dicendum erit.



Aequatio, ut hoc loco sumitur, prout etiam ipsius uocabuli *ἰσότης* indicat, est, ubi duae res uel quantitates inter se aequales esse proferuntur. Et quoniam per has Algebrae regulas obscura numerorum explicantur aenigmata, quae quidem ubi secundum conditiones suas ita hypothèses, per has regulas examinata fuerint, accidit tandem, ut aliquot quantitates, una cū suis numeris, inter se aequentur. Quae quantitatū collatio

collatio, cum prima fronte obscura & minus perspicua appareat, ut planius, & clarioribus uerbis, tanquam ob oculos, ponatur, necesse erit.

Proinde multæ licet sint æquationes ac infinitæ quodammodo, cum diuersæ propositorum ænigmatum supputationes subinde aliam atq; aliam postulent, tres nihilominus tamen ex his, priores atq; etiam præcipuas (cum quod nostra tractatio non plures requirat, tum etiam quod tribus ijs perceptis ac cognitis, facile reliquas etiam constituere, & ijs cōmodè uti quispiam possit) in præsentia ordine describemus. EST ITAQVE PRIMA AEQVATIO in qua unius quantitatis uel characteris numerus unius characteris numero æquatur. SECUNDA VERO ET TERTIA AEQVATIONES sunt, ubi tribus characteribus consignatis numeris, illic quidē naturali eorū ordine, hic uerò iam uno, iam duobus uel pluribus, obseruato ordine interrupto, omisissis characteribus, numeri duorum unius, uel contrà, unius characteris numerus duobus æquatur. Et de his tribus nunc deinceps ordine dicemus, & primò quidem de processu æquationis primæ.

AEQVATIO PRIMA.



Prima æquatio est, ubi duæ quantitates uel duo numeri, diuersis characteribus signati, inter se æquales esse proferuntur. Diuiditur in hac, ut regula de proportiōibus præcipit, minoris uel debilioris characteris numerus, in numerū characteris maioris seu potentioris. Quia autē numerus exiens modò ipsius radices, modò quantitatis cuiusdā ualorem exprimit, ubi radices ualorē expresserit, quæstioni tū statim satisfactū erit, atq; omnia peracta. Quod si fuerit ualor cuiusdā quātitatis, numeri exeuntis radix inuestiganda, atq; per inuestigatam illam tandem quæstioni respondendum erit. Huius autem æquationis demonstratio & fundamentum est ipsa de Proportionibus regula, Radicum deinde inuentionis tractatio, ut quæ ambo in communi numerorum supputatione plerumq; demonstrari solent.

SEQUENTIA RE EXEMPLA.

8 radices	16 N.		2
9 primæ	18 ra.	quot unitatibus æquatur	2
6 secundæ	24 pri.	una radix. Facit	4
4 quintæ	12 quar.		3
quantitates.			

Hæc nunc per resolutionem examinari poterunt.

ALIA EXEMPLA.

8 primæ	32 N		2
9 se. æquantur	36 ra.	Facit una radix	2
6 ter.	384 ra.		4
4 sex.	108 ter.		3

ADHVC ALIA.

8 $\frac{1}{2}$ pri.	34 N		2
9 $\frac{1}{2}$ se. æquantur	38 ra.	Facit una radix	2
6 $\frac{3}{4}$ ter.	432 ra.		4
4 $\frac{2}{3}$ sextæ.	126 ter		3

Sic alia huius æquationis exempla præscribi possunt atq; solui etiam, ut præcipitur.

Sequuntur

ALGEBRAE DESCRIPTIO.

17

SEQUENTUR NVNC QVAEDAM
 AENIGMATA SEV QVAESTIONES, QVORVM
 solutiones tandem hanc primam æquationem requirunt.

Primum. Inueniendus est numerus, à quo primò eius $\frac{1}{4}$, de resi-
 duo deinde $\frac{2}{3}$ subtractis, 13 tandem, uel 27 maneant.

Facit $28\frac{8}{9}$ uel 60

PRO HVIVS ATQVE ETIAM OMNIVM SEQVEN-
 tium, ac aliorum quæ fortè proponi possunt, exemplorum
 tractatione, sequitur Canon quidam generalis.

In omnibus exemplis quæ per has Algebrae regulas solui debent, *ὡς καὶ ἀλλοι*
 loco eius qui quæstioni satisfacere debeat numeri, Radix seu una res, tanquam ali-
 quid id esse de quo quæritur significans, ponenda est: ea deinde, ac si uerus solutio-
 nis numerus esset, secundum exempli hypotheses examinata, in fine tandem id
 quod uenire debeat, numerus scilicet quæstionis uerus, sese offeret, quare duo
 æqualia inter se. Sed quia hoc quod ultimò uenit, cum propter inusitados huius
 regulæ characteres quibus exprimitur, non tam perspicuum sit, ut promptè intel-
 ligi possit, ulteriori operatione opus erit, quæ nimirum per diuersos operationum
 canones absoluitur. Cuius rei exemplum esto tale.

Quis est numerus, cuius una tertia quater sumpta, 11 faciat?

Hoc exemplum talem habet supputationem. Loco numeri, ut dictum est, cui-
 us una tertia, & reliqua, ponatur 1 radix. Et quia exemplum habet, cuius una ter-
 tia quater sumpta, 11 faciat, de radice posita una tertia accipienda, atq; accepta, mox
 ea quater sumenda erit. Veniunt autem sic $\frac{4}{3}$ ra. quæ cum ex hypothesi 11 esse de-
 beant, erit unum alteri æquale, ex quo dicta est æquatio. Cadit autem in æquatio-
 nem illam quæ iam descripta à nobis est. Numerus igitur characteris debilioris in
 numerum significantioris diuidendus, ac per exeuntem tandem quæstioni respon-
 dendum erit. Veniunt autem $8\frac{1}{4}$, numerus de quo quærebatur. Quod nunc exami-
 nari potest in hunc modum.

EXEMPLI EXAMEN.

Numerus ille de quo quæstio erat, sunt $8\frac{1}{4}$. Et quia eius una tertia, $2\frac{1}{4}$ scilicet
 quater sumpta, 11 faciunt, operatio bona est, uerus etiam numerus inuentus.

PROCESSV IGITVR NVNC, QVI GENERALITER
 in omnibus exemplis seruari debet, præmissò, primò positi exempli
 operatio sic se habebit.

Ponatur numerum illum de quo quæritur, esse nimirum manent $\frac{2}{3}$ eius, quæ sunt manent 13 uel 27 N	1. ra. cuius nunc $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$. ra. subtracta $\frac{3}{4}$. ra. atq; de his tandem $\frac{3}{10}$ ra. subtractis $\frac{9}{20}$ ra. æquales.

Facta igitur diuisione, ut præceptum est, debilioris characteris numeri in nu-
 merum characteris significantioris, ueniunt radicum ualores ut positi sunt, $28\frac{8}{9}$
 scilicet respectu 13, 60 deinde respectu numeri 27. Quod nunc quidem de utroq;
 probari seu examinari poterit,

C Exemplum

BREVIS REGVLARVM
EXEMPLVM SECVNDVM.

Diuidantur 40 in tres partes secundum rationem Subsuperbipartientem tertias continuatas.

Facit $7\frac{17}{49}$ $12\frac{13}{49}$ $20\frac{20}{49}$.

O P E R A T I O.

Esto 1 ra. prima

quare $1\frac{1}{2}$ ra. secunda

ac $2\frac{7}{9}$ ra. deinde, tertia pars erunt.

Summa igitur $5\frac{4}{9}$ ra. æquales 40. N

POTEST OPERATIO ETIAM INSTITVI, INCIPiendo A NVME-
ro seu parte proportionali media, uel ultima etiam, si placeat,
ut sequitur.

Prima $\frac{2}{3}$ ra.

$\frac{9}{27}$ ra.

Secunda 1 ra.

$\frac{2}{3}$ ra.

Tertia pars $1\frac{1}{2}$ ra.

1 ra.

Summa $3\frac{4}{3}$ ra.

uel $1\frac{2}{3}$ ra.

æqua,

40 N

Tertium, Diuidantur 40 in tres partes,

Vt cum has, primam quidem in 4, secundam uerò in 5, ac tertiam de-
inde in 6 diuisero, exeuntes numeri in Subsuperbipartiente tertias ratio-
ne continuentur.

Facit partes quidem $5\frac{1}{29}$ $11\frac{43}{87}$ $22\frac{86}{87}$
numeri uerò rationis $1\frac{1}{29}$ $2\frac{26}{87}$ $3\frac{217}{101}$

Vel, ut cum has, primam quidem per 4, secundam uero per 5, ac ter-
tiam deinde per 6 multiplicauero, producti numeri in Subsuperbipar-
tiente tertias, seu si mauelis, in Dupla ratione continuentur.

Facit quantum ad ratio-

nem {	{	3 partes quidem	$9\frac{63}{113}$	$12\frac{84}{113}$	$17\frac{79}{113}$
		5 numeri uerò ra.	$38\frac{26}{113}$	$63\frac{81}{113}$	$106\frac{22}{113}$
		2 partes quidem	$25\frac{25}{47}$	$40\frac{10}{47}$	$44\frac{13}{47}$
		1 numeri uero ra.	$102\frac{6}{47}$	$51\frac{3}{47}$	$25\frac{25}{47}$

OPERATIO EXEMPLI QVANTVM AD DIVISIONEM.

	Diuisionis	Rationis	Diuisionis	Rationis partes,
Prima	1 ra.	$\frac{1}{4}$ ra.	$\frac{6}{27}$ ra.	$\frac{3}{9}$ ra.
Secunda	$2\frac{1}{12}$ ra.	$\frac{5}{12}$ ra.	uel $\frac{1}{2}$ ra.	$\frac{1}{6}$ ra.
Ter. pars.	$4\frac{1}{6}$ ra.	$\frac{25}{36}$ ra.	1 ra.	$\frac{1}{6}$ ra.
	$7\frac{1}{4}$ ra.	uel	$1\frac{1}{2}$ ra.	Æquales 40 N. & cæ.

OPERATIO EXEMPLI QVANTVM AD MVLTIPPLICATIONEM,
Ratio

Ratio $\frac{3}{5}$ Ratio $\frac{2}{3}$

Prima	1	4	1	4
Secun.	$1\frac{1}{3}$ ra.	$6\frac{2}{3}$ ra.	$\frac{2}{3}$ ra.	2 ra.
Ter. pars	$1\frac{2}{3}$	$11\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

Et ueniunt

 $4\frac{5}{27}$ ra. æqua. 40 N. uel $1\frac{17}{27}$ ra. æqua. 40 N.

4. Grossus ualet 10 nummulis, 24 uerò grossi florinum constituunt. Aliquis nunc florinum permutans, tot pro eo grossos, quot nummulos cupiens, quæritur quantum utriusq; recipiat.

Facit, utriusq; recipiet & habebit $21\frac{2}{11}$

OPERATIO.

Vna radix gross. & 1 ra. num. & cæ.

Veniunt, facta operatione, $1\frac{1}{11}$ ra. æqua. 24 N.

5. Est area quædam quadrangularis, continens in superficie 588 areolas, inter se & toti similes. Quia autem huius areæ longitudo ad latitudinem est, ut 4 ad 3: quanta ipsius longitudo, latitudo item sit, quæritur.

Facit longitudo quidem 23, latitudo uerò 21.

OPERATIO.

Longitudo	1 ra.	uel	$1\frac{1}{3}$ ra.
Latitudo	$\frac{3}{4}$ ra.		1 ra. & cæ.

 ueniunt $\frac{3}{4}$ pri. uel $1\frac{1}{3}$ pri. æqua. 588 N.

6. Dux in castris suo sub imperio habet aliquot mille milites. Quoniam autem exercitum quadrata figura tantę amplitudinis, quanta fieri possit, instruere conatur, primaq; instructione specie quadrata perfecta, residui manent 284 milites: quòd si in singulos ordines unum duntaxat militem adiecisset, tum ei 25 ad absoluendam quadratam aciem defuissent. Quæritur igitur, quot sub se dux ille milites habuerit.

Facit 24 mille milites.

OPERATIO.

$$\begin{array}{rcl}
 & 1 \text{ ra.} & 1 \text{ ra.} + 1 \text{ N} \\
 & 1 \text{ pri.} & 1 \text{ pri.} + 2 \text{ ra.} + 1 \text{ N} \\
 + 284 \text{ N} & & - 25 \\
 \hline
 1 \text{ pri.} + 284 \text{ N} & \text{æquales} & 1 \text{ pri.} + 2 \text{ ra.} - 24 \text{ N.}
 \end{array}$$

ADMONITIO.

Hic, licet duorum characterum numeri, tribus trium characterum numeris æquantur, sed quia characteres in diuersis ordinibus unius sunt appellationis, per illas duas communes notitias, quarum una quidem est: Si æqualibus æqualia adijciantur, quòd & tota æqualia sint. altera uerò: Si ab æqualibus æqualia auferantur, quòd & reliqua sint æqualia: per additionem & ablationem huic succurritur. Erit itaq; hoc factò, huius æquationis exemplum, ut sequitur.

 $308 \text{ N} \quad \text{æquales} \quad 2 \text{ ra.}$

Vna igitur radix, numerus scilicet militum unius ordinis in prima acie, 154 quare uniuersus militum numerus 24000, qui erat inueniendus.

C 2

Potest

Potest huius exempli operatio, si placet, etiam
sic institui.

$$\begin{array}{rcl}
 1 \text{ ra. in fe.} & & 1 \text{ ra.} - 1 \text{ N in fe.} \\
 1 \text{ pri.} & & 1 \text{ pri.} + 1 \text{ N} - 2 \text{ ra.} \\
 \hline
 \text{quare } 1 \text{ pri.} - 25 \text{ N} & \text{æqua.} & \text{1 pri.} + 285 \text{ N} - 2 \text{ ra.}
 \end{array}$$

7. Est numerus unus ad alterum sesquiquartus. Quoniam autem de
maiori 8 ablatis, minori uerò numero 8 uel 4 additis, collectum ad re-
siduum $2\frac{1}{2}$ rationem constituit, quoniam sint illi duo numeri, quaeritur.

Facit, ubi quidem addun-

$$\text{tur } \begin{cases} 8, & 16\frac{8}{17} \text{ maior,} & 13\frac{2}{17} \text{ uerò minor} \\ 4 \text{ uerò,} & 14\frac{2}{17} & 11\frac{5}{17} \end{cases}$$

OPERATIO.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Numeri rationis} & \text{residuum} & \text{colle.} \\
 1 \text{ ra.} & \frac{4}{7} \text{ ra.} & 1 \text{ ra.} - 8 \text{ N.} & \frac{4}{7} \text{ ra.} + \begin{cases} 8 \\ 4 \end{cases} \text{ N}
 \end{array}$$

Quantitates proportionales,

$$\frac{4}{7} \text{ ra.} + \begin{cases} 8 \\ 4 \end{cases} \text{ N,} \quad 1 \text{ ra.} - 8 \text{ N ut } 5, \quad \text{a. Quare}$$

$$1\frac{3}{7} \text{ ra.} + \begin{cases} 16 \\ 8 \end{cases} \text{ N æqual. } 5 \text{ ra.} - 40 \text{ N}$$

8. Numerus in tres partes diuisus est. Quoniam autem prima pars re-
spectu diuisi, subsequialteram: secunda uero, subduplam: ac tertia dein-
de, & ipsa respectu diuisi, postquam tamen 4 aliunde acceperit, subse-
quitertiam rationem constituit, quantus sit ipse totus numerus, quantæ
etiam singulæ partes, quaeritur.

Facit, Impossibile, cum tertia pars nihil sit, propterea quòd duabus
prioribus totum & plus etiam conueniat.

Vel facit

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Totus quidem numerus} & & 4\frac{4}{11} \\
 \text{Partes uerò} & \text{prima} & \text{secun.} & \text{tertia} \\
 & 2\frac{10}{11} & 2\frac{2}{11} & - \frac{8}{11}
 \end{array}$$

Id quod examinari potest in hunc modum:

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Totus di-} & & \text{Partes uerò} & \\
 \text{uisus} & \text{prima} & \text{secunda} & \text{tertia} \\
 \hline
 4\frac{4}{11} & 2\frac{10}{11} & 2\frac{2}{11} & - \frac{8}{11} \\
 \hline
 \text{Pars prima} & \text{totus diui.} & \text{pars secun.} & \\
 2\frac{10}{11} & 4\frac{4}{11} & 2\frac{2}{11} & \\
 \hline
 \text{cum } 3 & \text{cum } 2 & \text{bis} & \\
 \hline
 8\frac{8}{11} & 8\frac{8}{11} & 4\frac{4}{11} &
 \end{array}$$

Æquales numeri, bene igitur.

Totus diuisus, bene igitur.

— $\frac{8}{11}$ Tertia pars.		
+ 4		
sunt 3 $3\frac{2}{11}$	4 $4\frac{4}{11}$	Totus diuisus,
cum 4	cum 3	
produ. $13\frac{1}{11}$	produ. $13\frac{1}{11}$	Aequales numeri.

Igitur bene operatum.

Quod si loco rationis quam habet secunda pars ad totum, Subduplae scilicet, Subquadrupla posita fuerit.

Veniet facta operatione,

Totus quidem numerus	6	
Prima	secun.	tertia,
Partes uero 4	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

OPERATIO PARTIS PRIORIS.

Totus diuisus.	Prima	secunda	tertia pars.
1 ra.	$\frac{2}{3}$ ra.	$\frac{1}{2}$ ra.	$\frac{2}{4}$ ra. — 4 N
Quare	$1\frac{1}{12}$ ra. — 4 N	æquales	1 radici.
Vel additis & subtractis, ueniunt $\frac{11}{12}$ ra. æqua. 4 N, & cæ.			
Poteſt etiam operatio aliter institui, si radix una loco alicuius partis ponatur, sic.			

Partes		Partes	
1 ra.		$1\frac{1}{3}$	
	Totus		Totus
$\frac{2}{4}$ ra.	$1\frac{1}{2}$ ra.	1 ra.	2 ra.
$1\frac{1}{8}$ ra. — 4 N		$1\frac{1}{2}$ ra. — 4 N	

Aequatio.

$1\frac{2}{8}$ ra. æqua. 4 N. Item $1\frac{5}{8}$ ra. æqua. 4 N.

OPERATIO PARTIS POSTERIORIS.

Totus diuisus	$\frac{2}{3}$ ra.	1 ra.	Totus diuis.
1 ra.	$\frac{1}{4}$ ra.	Vel	$\frac{2}{8}$ ra.
$\frac{3}{4}$ ra — 4 N			$1\frac{1}{2}$ ra.
			$1\frac{1}{8}$ ra. — 4 N.

9. Sunt tres numeri, quorum primus & tertius noti, 48 & 11, medius ignotus, Quia uero, quam rationem habent primus & tertius inter se, illa eadem est & excessus primi super medium, ad excessum mediæ super numerum tertium, quantus ergo medius numerus sit, quæritur.

Facit $17\frac{2}{3}$ quod probari potest.

OPERATIO.

Primus	medius	tertius.
48	1 ra.	11
$48 N - 1$ ra.	1 ra. — 11 N.	

Considerato iam, quæ sint quantitates proportionales, quæ deinde proportionalium quantitatum proprietas, ueniunt ultimò.

59 ra. æqua. $1056 N$, & cæ.

C ; Sic

$$\text{Sic inter } \left\{ \begin{array}{l} 42 \\ 8\frac{2}{3} \\ \frac{8}{9} \\ 21 \end{array} \right. \quad \& \quad \left\{ \begin{array}{l} 30 \\ 6 \\ \frac{2}{3} \\ 14, \end{array} \right. \quad \text{medius est} \quad \left\{ \begin{array}{l} 35 \\ 7 \\ \frac{16}{3} \\ 16\frac{2}{3} \end{array} \right.$$

Sunt autem numeri medietatis Harmonicæ.

10. Sunt tres numeri, quorum primus & tertius noti, 48 & 12, uel 24 & 12, medius ignotus. Quia uerò, quam rationem habent primus & tertius inter se, illa eadem est differentię medij & tertij ad differentiam primi & medij, quantus ergo medius numerus sit, quæritur.

Facit $41\frac{6}{9}$ uel 20. quod probari potest.

11. Diuidantur 61 in 9 uel 6 partes Arithmeticæ progressiōis, & esto quòd prima pars, uel primus ac minimus numerus sint 6, qui sunt octo, uel quinq; reliqui.

Facit respectu quidem diuisionis

$$\text{in } \left\{ \begin{array}{l} \text{nouem } 6\frac{7}{36} \quad 6\frac{7}{18} \quad 6\frac{7}{12} \quad 6\frac{7}{9} \quad 6\frac{11}{36} \quad 7\frac{1}{6} \quad 7\frac{1}{3} \quad 7\frac{2}{3} \\ \text{sex uerò } 7\frac{2}{3} \quad 9\frac{1}{3} \quad 11 \quad 12\frac{2}{3} \quad 14\frac{1}{3} \end{array} \right.$$

OPERATIO.

$$\begin{array}{llll} 6 \text{ N} & \text{minimus nu.} & & 6 \text{ N} \quad \text{minimus} \\ 1 \text{ ra.} & \text{excessus communis} & \text{uel} & 1 \text{ ra.} \quad \text{max. nu.} \\ 6 \text{ N} + 8 \text{ ra.} & \text{numerus ul.} & & 1 \text{ ra.} + 6 \text{ N} \quad \text{aggrega-} \\ & \& \text{cæ.} & \text{ti dimidium.} \end{array}$$

Sic numerus 49 diuisus, facta operatione ueniunt, respectu quidem diuisionis eius in partes.

$$\begin{array}{l} \text{nouem} \quad \text{Impossibile} \\ \text{in sex uerò} \quad 6\frac{1}{3} \quad 7\frac{1}{3} \quad 8\frac{1}{3} \quad 9\frac{2}{3} \quad 10\frac{1}{3} \end{array}$$

12. Est quidam rex, sunt & principes, comites & milites, quot autem rex sub potestate sua habet principes, in duplo plures sub se comites habent singuli principes: in quadruplo uerò plures sub se habent milites singuli comites. Quia uerò militibus numeratis, inuenitur, quòd ducentesima eorum pars nouencuplam rationem ad numerum principum constituat: quot igitur nunc principes fuerint, quot item comites ac milites deinde, in dubium uocatur.

$$\begin{array}{lll} \text{Principes} & \text{Comites} & \text{Milites.} \\ \text{Facit} & 15 & 450 \quad 27000 \end{array}$$

Quod secundum ænigmatiſ hypotheses examinari poterit.

OPERATIO.

$$\begin{array}{lll} \text{Principum} & \text{Comi.} & \text{Mili.} \\ \text{Ponatur } 1 \text{ ra.} & \& \text{erunt } 2 \text{ pri.} & 8 \text{ uerò secunda} \\ & \text{atq; tandem} & \\ & \frac{1}{37} \text{ se.} & \text{æqualis} \quad 9 \text{ ra.} \end{array}$$

13. Est ædificium quoddam $\pi\alpha\rho\alpha\lambda\lambda\acute{\iota}\lambda\omega\varsigma$ secundum quatuor eius latera extructum,

ra extructum, cuius altitudo cum ad suam longitudinem Superbipartientem tertias, ad latitudinem uero, Duplam sesquialteram constituat rationem, altitudine deinde cum longitudine, ac producto tandem cum latitudine multiplicato, numerus 39930. ulnarum prouducatur, quantæ huius ædificij singulæ dimensiones fuerint, queritur,

Facit 55 Altitudo, 33 Longi. & 22 Latitudo.

OPERATIO.

Altitudo	1 ra.		$1\frac{1}{2}$		$2\frac{1}{2}$
Longi.	$\frac{2}{3}$	uel	1 ra.		$1\frac{1}{2}$
Latitu.	$\frac{2}{3}$		$\frac{2}{3}$	Vel	1 ra.

Facta multiplicatione ut præcipitur, ueniunt

$\frac{6}{27}$ se. uel $\frac{1}{3}$ se. uel $\frac{4}{3}$ se. æquales 39930 N.

14. Murus, cuius longitudo quidem in $3\frac{1}{2}$ ad latitudinem, altitudo uero in quincupla ratione ad longitudinem cõstructus est, ab Artifice tandẽ 980 coronatis redimitur. Quoniã autẽ, cũ pro singulis uirgis, ut dicitur, extruẽdis, tot coronati, quot ipse murus in latitudine uirgas habet, expositi sint, quẽ nã huius muri altitudo sit, lōgitudo itẽ, ac latitudo etiã, queritur.

Facit 35 Altitudo, 7 Longi. & 2 Latitudo.

OPERATIO.

Altitudo	5	uel	1 ra.		$17\frac{1}{2}$
Longi.	1 ra.		$\frac{1}{2}$		$3\frac{1}{2}$
Latitudo	$\frac{2}{7}$		$\frac{2}{35}$	uel	1 ra.
	$\frac{1}{7}$ se.		$\frac{2}{175}$		$\frac{245}{4}$

Nunc quantum ad solutionem, dicendum est

Corona.

Vlna $\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{7} \\ \frac{2}{35} \text{ ra.} \\ 1 \end{array} \right.$ quanti $\left\{ \begin{array}{l} \frac{10}{7} \\ \frac{2}{175} \text{ se.} \\ \frac{245}{4} \end{array} \right.$ Facit $\left\{ \begin{array}{l} \frac{20}{49} \\ \frac{4}{6125} \text{ ter.} \\ \frac{245}{4} \end{array} \right.$ æ. 980 N

15. Diuidantur 72 in quatuor partes, quarum prima sit una septima secundæ & tertiæ, secunda uero $\frac{1}{3}$ tertiæ & quartæ, tertia autem $\frac{1}{2}$ quartæ & primæ, queritur de partibus.

Facit.
 Prima secunda tertia quarta pars,
 $4\frac{1}{2}$ $11\frac{1}{4}$ $20\frac{1}{4}$ 36

OPERATIO.

Ponatur primam partem esse 1 radicem, erunt ergo secunda & tertia partes simul 7 radices, ac quarta deinde id quod est reliquum, nimirum 72 N — 8 ra. sic.

Prima secunda & tertia quarta.
 1 ra. 7 ra. 72 N 8 ra.

Et quoniam ex hypothesi, secunda pars est tertiæ & quartæ partium una quinta: partes coniungendo, erit hæc eadem secunda omnium trium, hoc est secundæ tertiæ & quartæ partium, una sexta. Ex harum igitur aggregato, quod est 72 N — 1 ra, una sexta sumpta, per eam quanta secunda pars sola sit, manifestabitur. Quæ

Quæ quidem cum sit iam nota, & tertia per subtractionem nota erit. Partes igitur singulæ, ut sequitur.

Prima	secunda	tertia	quarta.
1 ra.	12 N — $\frac{1}{2}$ ra.	7 $\frac{1}{2}$ ra. — 12 N	72 N — 8 ra.

Rursus quoniam etiam, & id ex hypothesi, tertia pars ipsarum quartæ & primæ partium dimidium est: sequitur hanc eandem tertiam bis sumptam, quartæ & primæ partibus simul sumptis, uel si mauis, hanc tertiam solum, eius quod ex quarta & prima colligitur dimidio, æqualem esse. Aequatio igitur, ut sequitur.

14 $\frac{1}{2}$ ra. — 24 N	æqual.	72 N. — 7 ra.
in minimis 21 $\frac{1}{2}$ ra.	æqual.	96 N.
uel 7 $\frac{1}{2}$ ra. — 12 N	æqual.	36 N — 3 $\frac{1}{2}$ ra.
in minimis 10 $\frac{1}{2}$ ra.	æqual.	48 N.

Sic 90, unitas, ac quilibet numeri alij, Fractiones etiam, eadem ratione diuidi possunt.

Sunt autem partes, respectu quidem

	Prima	secunda	tertia	quarta.
90	5 $\frac{5}{8}$	14 $\frac{1}{16}$	25 $\frac{5}{16}$	8 & 45
Vnitatis uero, $\frac{1}{16}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{2}{32}$	8 & $\frac{1}{2}$

16. Tres negotiatores societate ineuntes, contulerunt 170 aureos. Primus itaq; cum sua pecunia collata huic contractui interesse uult 3 mensibus, secundus 6, tertius 8. Nunc si hac communi pecunia, tantum hoc temporis spacio lucrifecerint, ut fors cum lucro perficiat summam 375 aureorum, atque primo 75, secundo uero 200 aurei, & tertio deinde quod reliquum est tribuatur, quæritur quantâ nam uniuscuiusq; fors, siue à singulis collata pecunia fuerit.

Facit

Primi 60. secundi 80. tertij 30. aurei.

OPERATIO.

	Tempus	accepta	collata pecunia.
Primi	3.	75	1 ra.
Secundi	6.	200	1 $\frac{1}{2}$ ra.
Tertij	8.	100	$\frac{1}{2}$ ra. atq;
		tandem 2 $\frac{5}{8}$ ra.	æquales 170 N.

17. Propositum est diuidere 91, 27 uel 118 in quatuor partes.

Primò, secundum rationes 1 $\frac{1}{2}$, duplam & subsestiquitertiam, quæritur quæ nam sint partes futuræ.

OPERATIO

	91	27	118
1 ra.	37 $\frac{5}{11}$	11 $\frac{1}{11}$	48 $\frac{2}{11}$
$\frac{2}{3}$	24 $\frac{2}{11}$	7 $\frac{4}{11}$	32 $\frac{2}{11}$
$\frac{1}{3}$	12 $\frac{2}{11}$	3 $\frac{5}{11}$	16 $\frac{5}{11}$
$\frac{4}{9}$	16 $\frac{6}{11}$	4 $\frac{10}{11}$	21 $\frac{5}{11}$
2 $\frac{4}{9}$ ra.	æqua,	91, 27	uel 118 N.

Vd

Vel secundo, secundum rationem $1\frac{1}{2}$ seu $2\frac{1}{2}$ continuatam,

	91	27	118
	$37\frac{4}{7}$	$11\frac{14}{63}$	$49\frac{8}{63}$
Facit secundum ratio- nem,	$25\frac{1}{7}$	$7\frac{31}{63}$	$32\frac{44}{63}$
	$16\frac{4}{7}$	$4\frac{64}{63}$	$21\frac{51}{63}$
	$11\frac{1}{7}$	$3\frac{21}{63}$	$14\frac{34}{63}$
	$58\frac{18}{803}$	$17\frac{172}{803}$	$75\frac{191}{803}$
	$21\frac{609}{803}$	$6\frac{266}{803}$	$28\frac{172}{803}$
	$8\frac{128}{803}$	$2\frac{238}{803}$	$10\frac{466}{803}$
	$3\frac{48}{810}$	$0\frac{719}{803}$	$3\frac{777}{803}$

OPERATIO

1 ra.

 $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{3}$

AEQVATIO

91

 $\frac{4}{9}$ ra. $\frac{5}{24}$ ra. $2\frac{11}{27}$ ra.uel $1\frac{201}{12}$ ra.

aqua.

27 N.

 $\frac{8}{27}$ $\frac{27}{112}$

118

Vel tertio, ut primæ parti 4, secundæ deinde 3 additis, à tertiâ uero parte, 2, ac quarta deinde, unitate subtracta, aggregati tandem & residui numeri subduplam rationem continuatam, uel subduplam, subquadruplam, & $1\frac{1}{2}$ rationes habeant. Queritur & cæ. Facit

quantum ad rationem subduplam continuatam,

Respectu quidem	91	27 uerò,	ac 118 deinde
Prima pars	$2\frac{1}{3}$	— $1\frac{14}{17}$	$4\frac{2}{17}$
Secunda	$9\frac{2}{3}$	Impossibi-	$13\frac{4}{17}$
Tertia	$27\frac{1}{3}$	le, uel	$34\frac{8}{17}$
Quarta deinde	$51\frac{2}{3}$	$17\frac{8}{17}$	$66\frac{1}{17}$

Quantum ad rationes subduplam, subquadruplam, & $1\frac{1}{2}$

Respectu quidem	91	27	118
Prima pars	$1\frac{10}{17}$	— $2\frac{2}{17}$	$3\frac{2}{17}$
Secunda	$8\frac{2}{17}$	Impossibile	$11\frac{6}{17}$
Tertia	$46\frac{12}{17}$	uel	$59\frac{7}{17}$
Quar. deinde	$34\frac{9}{17}$	$+ 11\frac{16}{17}$	$44\frac{1}{17}$

OPERATIO.

Sit prima pars 1 ra.

Vel

1 ra.

secunda igitur 2 ra. + 5 N

2 ra. + 5 N

tertia uerò 4 ra. + 18 N

8 ra. + 34 N

ac quarta deinde 8 ra. + 33 N.

6 ra. + 25 N

Aequatio igitur quantum ad

primum 15 ra. + 56 N

aqual. 91. 27. 118 N.

secun. 17 ra. + 64 N

D

Aequatio

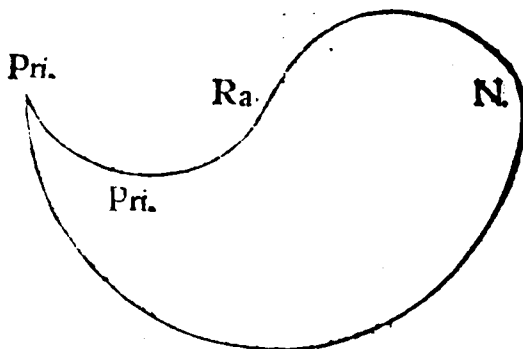
ÆQVATIO SECVNDA.



Secunda æquatio est, ubi tres numeri tribus diuersis, continuatis tamen, characteribus signati, duo uni, uel unus item duobus æqualis esse profertur. Hæc æquatio quia tripliciter uariari potest, cum aut duo maiores minimo, aut duo minores maximo, aut uerò maximus & minimus, medio characteri, ut præsens figura habet, æquentur.

FIGVRA ÆQVATIONVM.

Secunda



Tertia æquatio.

Ideone in generali huius descriptione confundi lectorem contingat, pro eo ut tripliciter uariatur, ita etiam triplici eam regula uel canone ordine describemus.

CANON HVIVS ÆQVATIONIS PRIMVS.

Vbi nimirum maiores duo, minimo characteri æquentur, utpote prima quantitas & radix, numero, sic.

$$\text{Pri.} + \text{ra.} \quad \text{æquales} \quad \text{N.}$$

Huiusmodi exēplo proposito, erit maxime quātītātis numerus, aut unitas, aut nō. Quod si unitas fuerit, tū ad quadratū dimidiū numeri characteris mediū, numerus characteris minimi addi, à radice deinde huius collecti quadrata, dimidiū characteris mediū subtrahi debet. quo facto, quæsi numeri cōpos aliquis erit, cū uide licet per id quod relinquitur, radicis ualor exprimatur. Quod si uerò nō sit unitas maximi characteris numerus in exēplo aliquo proposito, quia nō pluriū, sed unius tātum radicis ualor desideratur, in maximi characteris numerum, aut fractionem, uel quicquid tandem fuerit, singuli singulorum trium characterum numeri diuidendi, & diuisorum loco exeuntes, ut eorum submultiplices, sumendi & ponendi sunt. Erit autē sic exemplū æquationis aliud, quod licet dissimile uideatur priori posito, nihilominus tamen, cum multiplicium & submultiplicium una & eadem sit ratio, non ab eo diuersum erit. Reductione igitur hac ad unitatem maximi characteris numeri, procedendum deinde, prout suprà canone est traditum.

CANON HVIVS ÆQVATIONIS SECVNDVS.

Vbi nimirum duo minores, radix scilicet & numerus, æquentur primæ characteri maximo, sic.

$$\text{Ra.} + \text{N.} \quad \text{æquales} \quad \text{pri.}$$

Et in huiusmodi exemplis maximi characteris numerus, aut unitas erit, aut non. Quod si fuerit unitas, tum ad quadratum dimidiū numeri characteris mediū, ut in præcedenti canone factum, numerus characteris minimi addi: ad radicem deinde huius collecti quadratam, dimidiū characteris mediū summi debet, & perfecta erit æquatio. Quod si uerò non sit unitas maximi characteris

acteris numerus in exemplo aliquo proposito, huic tum (quemadmodum in præcedenti traditum) diuisione, ut ad unitatem redigatur, succurrendum erit.

CANON HUIUS AEQVATIONIS TERTIVS.

Vbi nimirum maximus & minimus, ut est prima quantitas & numerus, medio characteri, radici scilicet, æquantur, sic.

$$\text{Pri.} + N \text{ Aequales ra.}$$

In huiusmodi exemplis, ubi maximi characteris numerus unitas fuerit, statim à quadrato dimidij numeri characteris medij, contra ut iam in præcedentibus est factum, numerus characteris minimi subtrahi: radix deinde huius residui quadrata, ut libuerit, ac prout rationi magis consentaneum fuerit, uel à dimidio numeri characteris medij subtrahi, uel eidem addi oportebit. atq; utrum horū factum fuerit, cū tam per id quod hic colligetur, quàm etiam quod illic relictum fuerit, radicis ualor indicetur, exemplo satisfactum erit.

SEQVUNTUR NVNC HUIUS SECVNDAE AEQVATIONIS secundum præscriptos tres canones exempla.

CANONIS PRIMUS.

$$\begin{array}{rcl} 1 \text{ pri.} + 8 \text{ ra.} & 65 \text{ N.} & \\ 4 \text{ in se.} & 16 + 65 & \\ \text{ueniunt si. Huius radix,} & & \\ \text{sunt 9, minus 4,} & & \\ \text{manent 5.} & & \end{array}$$

SECVNDUS.

$$\begin{array}{rcl} 13 \text{ ra.} + 1\frac{3}{4} \text{ N} & 1 \text{ pri.} & \\ \frac{3}{2} \text{ in se.} & \frac{9}{4} + 1\frac{3}{4} & \\ \text{ueniunt 4. Huius radix,} & & \\ \text{sunt 2 plus } 1\frac{1}{2} & & \\ \text{ueniunt } 3\frac{1}{2} & & \end{array}$$

Atq; tantus est radicis ualor: quod quidem resolutione facta nunc probari potest.

EXEMPLVM CANONIS TERTII.

$$\begin{array}{rcl} 1 \text{ pri.} + 12 \text{ N} & \text{æquales} & 8 \text{ ra.} \\ 4 \text{ in se.} & 16 & \text{minus } 12 \\ \text{manent 4.} & & \text{Huius radix quadrata} \\ \text{sunt 2 } \left\{ \begin{array}{l} \text{de} \\ \text{ad} \end{array} \right. & 4, & \text{\& manent 2, uel proueniunt 6.} \\ \text{Vterq; radicis ualor, ac probationi conueniens numerus.} & & \end{array}$$

SEQVUNTUR EXAMINA.

Primum autem numerorum canonis primi, radicis ualore existente 5.

$$\begin{array}{rcl} 1 \text{ pri.} + 8 \text{ ra.} & \text{æquales} & 65 \text{ N} \\ 5 \text{ in se, cum } 5 & & \\ 25 & 40 & \\ \hline & 65 & \end{array} \quad \text{Atq; tot sunt etiam numeri, ut apparet: bene igitur.}$$

Examen numerorum canonis secundi, radicis ualore existente $3\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{rcl} 3 \text{ ra.} + 1\frac{3}{4} \text{ N} & \text{æquales} & 1 \text{ pri.} \\ \text{cum } 3\frac{1}{2} & & 3\frac{1}{2} \\ 10\frac{1}{2} & + & 1\frac{3}{4} \\ \hline & 12\frac{1}{4} & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{æquales} \\ D \text{ 2} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{in se.} \\ 12\frac{1}{2} \text{ bene igitur.} \\ \text{Examen} \end{array}$$

Examen numerorum canonis tertij, radicis ualore existente 2,

1 pri	+	12 N	æquales	8 ra.
2 in se.				bis
4	+	12		
		16	æquales numeri	16: bene igitur,

Eodem modo instituaturnunc examinis operatio, radicis ualore existente 6

1 pri	+	12 N	æquales	8 ra.
6 in se				sexies
36	+	12		
		48	æquales numeri	48 & cæ.

ALIVD EXEMPLVM.

PRIMI CANONIS.				SECUNDI CANONIS.		
Pri.	ra.	N		ra.	N	pri.
4	+	3 æquales	217	3	+	175 æqu.

Hic, quia maximis characteris numerus non est unitas, diuisione, ut dictum est, ei succurri debet. Veniunt autem facta diuisione,

pri.	ra.	N		ra.	N	pri.	
1	+	$\frac{2}{4}$ æqu.	$\frac{217}{4}$	$\frac{3}{4}$	+	$\frac{175}{4}$ æqu.	
$\frac{2}{8}$ in se.	$\frac{2}{64}$	+	$\frac{217}{4}$	$\frac{3}{8}$ in se.	$\frac{2}{64}$	+	$\frac{175}{4}$
ueni.	$\frac{3481}{64}$	Huius ra.		ueni.	$\frac{2809}{64}$	Huius ra.	
sunt $7\frac{2}{8}$ minus $\frac{2}{8}$				sunt $6\frac{2}{8}$ plus $\frac{2}{8}$			
manent 7				ueniunt 7			
radicis ualor.				radicis ualor.			

ALIVD TERTII CANONIS EXEMPLVM.

3 pri.	+	217 N	æquales	52 ra.

Ethic, quia maximis characteris numerus non est unitas, diuisione ei succurrendum erit. Veniunt autem hoc facto,

1 pri.	+	$\frac{217}{3}$ N	æquales	$\frac{52}{3}$ N
$\frac{26}{3}$ in se.	$\frac{676}{9}$	minus	$\frac{217}{3}$	manet $\frac{25}{9}$
Huius ra. qua. est $1\frac{2}{3}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{de} \\ 6\frac{2}{3}, \end{array} \right.$ & manent 7, uel proue-				
niunt $10\frac{1}{3}$, Vterq; radicis ualor, quod examinari potest.				

Porro ne quis opinetur huius equationis tractationem rationibus ac demonstrationibus carere, is sciat: Primi quidem canonis operationē ex propositione 4 libri Euclidis secundī, Secundī uero ex sexta, ac tertij deinde canonis ex quinta propositione eiusdem secundī libri desumptam esse. Eò itaq; cum peruentum fuerit, horum demonstrationes ac similitudines quas cum rationibus illarum propositionum habent, indicabimus.

SEQUVNTVR NVNC QVÆDAM

ÆNIGMATA, SEV QVÆSTIONES, QVORVM
solutiones tandem hanc æquationem requirunt.

Primum. Quærantur duo numeri in ratione $3\frac{1}{2}$, ut si unus cum altero

altero multiplicatus, producto deinde ambo numeri additi fuerint, $142\frac{1}{2}$ colligantur.

$$\text{Facit} \quad 19\frac{1}{2} \quad \& \quad 6$$

HUIUS EXEMPLI OPERATIO HAEC EST.

Esto primus numerus, & maior quidem, 1 radix, Et quia ratio, ex hypothesi, constituta est Tripla sesquiquarta, hoc observato, Regula Proportionū (dicendo 13 dant 1 ra. quid 4) erit numerus secundus $\frac{4}{13}$ ra. Quia uero multiplicatio huiusmodi numerorum, unius cum altero, unā cum his ipsis numeris simul additis, $142\frac{1}{2}$ constituere debet, & id ex hypothesi: 1 radix igitur cum $\frac{4}{13}$ ra. multiplicari, producto deinde ambo numeri, 1 radix scilicet $\&\frac{4}{13}$ ra. addi debent, & colliguntur tandem

$$\frac{4}{13} \text{ pri.} \quad + \quad 1\frac{4}{13} \text{ ra.} \quad \text{æquales} \quad 142\frac{1}{2} \text{ N}$$

Quoniam autem est huius secundæ æquationis exemplum primum, hæc uero ipsa æquatio cum proxim habeat aliquanto quā præcedens prima difficiliorem, ne alicui fortè hac descriptione nō satis me fecisse uidear, quod descriptione regulæ proposuimus, illius eiusdem etiam iam calculum subiungere uisum fuit. Esto itaq;

$$\text{numerus Maior } 1 \text{ ra. Minor } \frac{4}{13} \text{ ra. Produ. } \frac{4}{13} \text{ pri.}$$

Numerorum additione facta,

$$\text{ueniunt } \frac{4}{13} \text{ pri.} \quad + \quad 1\frac{4}{13} \text{ ra.} \quad \text{æquales} \quad 142\frac{1}{2} \text{ N.}$$

uel diuisione, secundum superiorem regulam, maximī characteris numero ad unitatem reducto,

$$\text{ueniunt } 1 \text{ pri.} \quad + \quad 4\frac{1}{4} \text{ ra.} \quad \text{æquales} \quad 463\frac{1}{8} \text{ N.}$$

Est autem exemplum canonis primi. Facta igitur nunc operatione, ut præcipitur, ueniunt numeri $19\frac{1}{2}$ & 6, ut supra indicatum.

ALIA HUIUS EXEMPLI OPERATIO.

Vt in præmissa operatione radix posita numerum rationis maiorem significabat, ita nunc, initio sumpto à minore, esto quod radix posita significet numerum rationis minorem, cum sic regula proportionum (dicendo 4 dant 1 ra. quid 13) maior numerus sit $3\frac{1}{4}$ ra. multiplicatione & additione peractis, ueniunt

$$3\frac{1}{4} \text{ pri.} \quad + \quad 4\frac{1}{4} \text{ ra.} \quad \text{æquales} \quad 142\frac{1}{2} \text{ N.}$$

Vel, reductione facta, &cæ.

$$1 \text{ pri} \quad + \quad \frac{17}{13} \text{ ra.} \quad \text{æquales} \quad \frac{70}{13} \text{ N.}$$

Secundum: Proficiscitur aliquis peregrè, uadit autem primo die $1\frac{1}{2}$ miliarē, secundi deinde diei atq; deinceps sequentium ordine omnium itinera, arithmetica medietate absoluit, iter cuiusq; sequentis super præcedentis diei iter in miliaris una sexta augens. Nunc uero cum ille secundum hanc medietatem iter quoddam 1370 uel 2955 miliariorum absoluerit, & perambulandum sibi instituerit, in quanto tempore id facere possit, quæstio erit.

Facit quantum ad

primum quidem, in 17 septimanis, & 1 die.

secundum uerò, in semestri, minus 2 diebus.

OPERATIO.

Ponatur 1 radix dierum, quo illud iter absoluat, et erit 1 ra. — 1 N, excessuū numerus. Et quia $\frac{1}{2}$ miliaris, excessus communis, erit 1 ra. — 1 N, excessuū summa. Et quia etiam $1\frac{1}{2}$ miliaris, primus numerus,

$$D^{\circ} 3 \quad 1 \text{ ra.}$$

$$\frac{1 \text{ ra.} + 8 \text{ N}}{6} \text{ igitur, ultimus numerus erit}$$

Atq; sic $\frac{1 \text{ ra.} + 17 \text{ N}}{6}$, exprimo & ultimo aggregatū, & tandem multiplicatione facta,

$$\frac{1 \text{ pri.} + 17 \text{ ra.}}{12 \text{ N}} \text{ æquales } 1370 \text{ uel } 2955 \text{ N, \&cæ.}$$

3 Numerus in duo diuifus est, in 4 fcilicet, partem notā, & alium deinde numerū, partē fcilicet ignotā. Quoniā autem parte ignota multiplicata primò in fe, deinde cum parte etiam illa nota, 117 colliguntur, quantus fuerit totus numerus? Facit 13
 quanta item ignota pars? 9

OPERATIO.

Ponatur 1 ra. numerus diuifus. Et quia 4, una & nota pars, atq; sic 1 ra. — 4 N, pars ignota, ultimò tandem, multiplicatione fcilicet facta,

$$4 \text{ ra.} + 117 \text{ N} \text{ uni primæ æquales erunt.}$$

Est autem exemplum canonis fecundi, &cæ.

ALIA OPERATIO.

4 pars data ex hypothefi,
 1 radix, non data, quare tandem
 1 pri. + 4 ra. æqual. 117 N. Exemplum canonis primi.

4. Sunt tres numeri continuè proportionales, unus autem extremorum cum fint $20\frac{1}{4}$, alter uerò & duplum medij, 22 faciant, quantus uterq; fit, medius fcilicet & alter extremorum, quæritur.

Facit medius quidem 9
 alter uero extre. 4

OPERATIO.

$$\begin{array}{ccc} 20\frac{1}{4} & & 20\frac{1}{4} \\ 1 \text{ ra.} & \text{uel} & 11 \text{ N} - \frac{1}{2} \text{ ra.} \\ 22 \text{ N} - 2 \text{ ra.} & & 1 \text{ ra.} \end{array}$$

Facta multiplicatione, ueniunt ultimò

N		pri	ra.		ra.		pri.	N
445 $\frac{1}{2}$	æquales	1	+ 40 $\frac{1}{2}$		125	æqua.	1	+ 484

Exemplum canonis primi

Canonis tertij.

5. Propositum est diuidere numerum 8 in duas partes, quarum secundæ quantitates, unā cum primis, & his ipsis numeris, 199 faciant, quæritur, &cæ.

Facit 5 & 3.

OPERATIO.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 \text{ ra.} & & 1 \text{ pri.} & & 1 \text{ se.} & & \\ 8 \text{ N} - 1 \text{ ra.} & 64 \text{ N} - 16 \text{ ra.} + 1 \text{ pri.} & 512 \text{ N} - 192 \text{ ra.} + 24 \text{ pri.} - 1 \text{ se.} & & & & \\ 584 \text{ N} - 208 \text{ ra.} + 26 \text{ pri.} & \text{æquales} & 194 \text{ N} & & & & \\ \text{Vel additis \& subtractis æqualibus,} & & & & & & \\ \text{ueniunt } 26 \text{ pri.} + 390 \text{ N} & \text{æquales} & 208 \text{ ra.} & & & & \end{array}$$

Est

Est autem exemplum canonis tertij, atq; radicis ualor 3 uel 5, ut lubet, prior pars. Quare posterior 3 minus, &cæ.

6. Duo habent mercis cuiusdam libras uel ulnas 11. Quoniam autem, cum quot ulnas primus habet, tot secundus uno coronato uendere soleat, primus deinde, quia uno coronato tantum exponit, quanta est $\frac{1}{2}$ earum ulnarum quas secundus habet, atq; cum sic ambo 6 coronatos, uno sextante minus, acceperint, quot ulnas seorsim uterq; habuerit, quot deinde ulnas uno coronato uendiderit, quæritur.

$$\text{Facit} \begin{cases} \text{primus} & 2 \text{ ul.} \\ \text{secund.} & 9 \text{ ul.} \end{cases} \quad \text{Vendit autem uno corona.} \begin{cases} 1 \frac{1}{2} \text{ ul.} \\ 2 \text{ ul.} \end{cases}$$

OPERATIO.

$$\begin{array}{rcl} \text{Primus} & 1 \text{ ra.} & \text{Accipiunt} \quad \frac{6 \text{ ra.}}{11 \text{ N} - 1 \text{ ra.}} \\ \text{secundus} & 11 \text{ N} - 1 \text{ ra.} & \text{autem} \quad \frac{11 \text{ N} - 1 \text{ ra.}}{1 \text{ ra.}} \\ \\ \text{Quare} & \frac{11 \text{ N} + 7 \text{ pri.} - 22 \text{ ra.}}{11 \text{ ra.} - 1 \text{ pri.}} & \text{æqua.} \quad 5 \frac{1}{5} \text{ N} \\ & \text{In integris deinde \& ultimo} & \\ \cdot \text{ ueniunt} & 77 \text{ pri.} + 726 \text{ N} & \text{æqual.} \quad 517 \text{ ra.} \end{array}$$

Est autem exemplum canonis tertij, atq; facta operatione, radicis ualor 2 pro negociatore primo. Quantum nunc secundus habuerit, quot deinde uterq; ulnas uno coronato uendiderit, facili calculo hæc ex ipsa positionis solutione, seu exempli huius hypothesibus haberi possunt.

Esto nunc quod ambo acceperint 7 coronatos, ulnæ uero $24\frac{1}{2}$ fuerint, cæteris manentibus.

Operatione igitur instituta, ueniunt quod primus habuerit $3\frac{1}{2}$ ulnas. Quare sic secundus reliquas 21. & quod uterque uno coronato ulnas $3\frac{1}{2}$ exposuerit.

7. Habent duo sericum, unus quidem 40, alter uero 90 ulnas. Quoniam autē, cum primus in triente ulnæ plus, uno coronato det quàm ipse secundus, atq; deinde in medium collatis pecunijs, 42 coronatos numerent, quot uterq; ulnas uno coronato exposuerit, quæ-

$$\text{ritur. Facit} \begin{cases} \text{primus} & 3\frac{1}{2} \\ \text{secundus} & 3 \end{cases}$$

OPERATIO.

$$\begin{array}{rcl} \text{in triente} & +. & 40 \text{ Pri. } 1 \text{ ra.} + \frac{1}{3} \text{ N} \\ 42 \text{ coro.} & & \\ \&cæ. & & \\ & & 90 \text{ se.} \quad 1 \text{ ra.} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Accepta pec.} \\ \frac{120 \text{ N}}{3 \text{ ra.} + 1 \text{ N}} \\ \frac{90 \text{ N}}{1 \text{ ra.}} \end{array}$$

Ad regulam proportionum quantitates positæ.

$$\begin{array}{rcl} \text{ulnæ} & \text{coro.} & \text{ulnæ.} \\ \frac{3 \text{ ra.} + 1 \text{ N}}{3} & \text{uno} & 40 \\ & \text{uno} & 90 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Facit \&cæ.} \\ \text{Facta} \end{array}$$

Facta additione, ueniunt

$$\begin{array}{r} 390 \text{ ra.} + 90 \text{ N} \\ 3 \text{ pri.} + 1 \text{ ra.} \end{array} \quad \text{æquales} \quad 42 \text{ N}$$

Sub una denominatione deinde atq; ultimò, in minimis item

$$58 \text{ ra.} + 15 \text{ N} \quad \text{æquales} \quad 21 \text{ pri.}$$

Est autem exemplum canonis secundi, atq; operatio sic instituenda,

$$\frac{58}{21} \text{ ra.} + \frac{15}{21} \text{ N} \quad \text{æquales} \quad 1 \text{ pri.}$$

$$\frac{29}{21} \text{ in se, } \frac{841}{441} + \frac{15}{21}, \text{ ueniunt } \frac{1156}{441}$$

- cuius radix qua. $\frac{34}{21}$ & $\frac{29}{21}$ (quæ simul, 3 constituunt) numerus est ulnarum, quot secundus pro uno coronato exposuit.

$$\text{Primi igitur } 3\frac{1}{2}$$

ALIA HVIVS EXEMPLI OPERATIO.

Esto quòd uno coronato uendat

uln.	uln.	coro.
40.	Primus quidem 1 ra.	$\frac{40 \text{ N}}{1 \text{ ra.}}$
90.	quare secun. 1 ra. — $\frac{1}{2} \text{ N}$	$\frac{270 \text{ N}}{3 \text{ ra.} - \text{N}}$

Facta additione acceptorum, ueniunt

$$\begin{array}{r} 390 \text{ ra.} - 40 \text{ N} \\ 3 \text{ pri.} - 1 \text{ ra.} \end{array} \quad \text{æquales} \quad 42 \text{ N}$$

In integris ueniunt

$$390 \text{ ra.} - 40 \text{ N} \quad \text{æquales} \quad 126 \text{ pri.} - 42 \text{ ra.}$$

Ultimo uerò & in minimis.

$$216 \text{ ra.} \quad \text{æquales} \quad 63 \text{ pri.} + 20 \text{ N}$$

Est autem exemplum canonis tertij, unde operatio sic instituenda.

$$\frac{216}{63} \text{ ra. uel } \frac{24}{7} \text{ ra.} \quad \text{æqua.} \quad 1 \text{ pri.} + \frac{20}{63} \text{ N}$$

$$\frac{24}{7}, \quad \frac{12}{7} \text{ in se, } \frac{144}{49}, \text{ minus } \frac{20}{63} \left\{ \begin{array}{l} \text{de} \\ \text{ad} \end{array} \right. \frac{12}{7} \text{ uel } \frac{36}{21}$$

manent $\frac{2}{21}$, non uerus : uel ueniunt $3\frac{1}{2}$, uerus numerus. Id quod nunc examinari potest.

ÆQVATIO TERTIA.



Tertia æquatio est ferè eadem cum secunda: nam & hæc tres numeros tribus diuersis characteribus signatos requirit. Sunt tamen in hac numerorum characteres non continui, uerùm semper inter quosq; duos sibi proximos, iam unus, iam uerò duo uel plures omissi: ac duo tandem uni, uel unus character cum suo numero duobus æqualis esse profertur. Quapropter ut secundæ, ita & huius tertiæ æquationis est operatio, nisi quod postquam ad finem operationis peruentum fuerit, ubi iam radicis ualor expectandus esset, cum non radicis, uerùm alterius cuiusdam characteris ualor sese offerat, illius characteris secundum sui exigentiam (prout quidem unus uel plures characteres sint omissi) radix, ut in prima æquatione factum quærenda, atq; per eam

eam tandem inuentam, radicis ualor exprimendus erit. Hæc nullam requirit demonstrationem, cum ex præcedentibus duabus (quarum demonstrationes unde peti debeant, indicauimus) composita sit.

SEQVUNTUR EXEMPLA.

$$\text{Primum. } 9 \text{ Ter.} + 5 \text{ pri. } \underline{\text{æquales } 294 \text{ N}}$$

$\frac{7}{18}$ in se, $\frac{27}{324}$, plus $\frac{294}{9}$, ueniunt $\frac{10609}{324}$. Huius radix $\frac{103}{18}$ minus $\frac{7}{18}$ manent $\frac{96}{18}$ uel $\frac{49}{9}$. Atq; is esset numerus solutionis. sed quia utrinq; unus character negligitur, huius igitur numeri, ut primæ quantitatis, radix, $2\frac{1}{2}$ scilicet, numerus solutionis erit.

$$\text{Secundum. } 14\frac{7}{8} \text{ sec.} + 1200\frac{1}{2} \text{ N } \underline{\text{æqua. } 1 \text{ Quin.}}$$

$7\frac{7}{16}$ in se, $\frac{14161}{256}$ plus $1200\frac{1}{2}$, ueniunt $\frac{321489}{256}$. Huius ra. $\frac{576}{16}$, plus $7\frac{7}{16}$, ueniunt $\frac{686}{16}$ uel $\frac{343}{8}$. Atq; is esset numerus solutionis. sed quia utrinq; duo characteres negliguntur, huius igitur numeri secundæ quantitatis radix, $3\frac{1}{2}$ scilicet, numerus solutionis erit.

$$\text{Tertium. } 1 \text{ sep.} + 2401 \text{ N } \underline{\text{æquantur } 2402 \text{ ter.}}$$

1201 in se, 1442401, minus 2401, manent

1440000. Huius radix quadrata,

sunt 1200, $\left\{ \begin{array}{l} \text{de} \\ \text{ad} \end{array} \right.$ 1201, & colliguntur hic quidem 2401, illic uero

1 manet, uterq; solutionis numerus. Sed quia utrinq; omittuntur tres characteres, non ij igitur numeri, sed horum numerorū, ut tertiarum quantitatum, radices, quæ sunt 1 & 7, solutionis numeri erunt.

His certe tribus exemplis uidere Lector poterit, quàm planè idem sit huius ac præcedentis secundæ æquationis processus. nisi quod in hac ultimò, prout quidem characteres plures uel pauciores intermissi fuerint, radix quærenda sit. Vno igitur atq; altero pro hac æquatione exemplo posito, ad alias huius regulæ præceptiones pergendum erit.

SEQVUNTUR NUNC QVAEDAM

ÆNIGMATA, SEU QVÆSTIONES, QVORUM solutiones tandem hanc æquationem requirunt.

Primum. Propositum est inuenire duos numeros, quorum multiplicatio quidem unius cum altero 24, secundæ uero illorum quantitates simul iunctæ 280, uel 539 constituent: queritur, qui nam sint illi duo numeri.

Facit 4 & 6, uel 3 & 8.

OPERATIO.

Nume- ri	Secundæ quantitates, primi secundi numeri.
1 ra	1 se.
$\frac{24 \text{ N}}{1 \text{ ra.}}$	$\frac{13824 \text{ N.}}{1 \text{ se.}}$
	E
	Quan-

Quantitatibus secundis simul iunctis, ueniunt

$$1 \text{ quin.} - 13824 \text{ N} \quad \text{æquales} \quad 280 \quad \text{uel} \quad 539 \text{ N.}$$

1 le.

In integris quantum ad numerum 280.

$$1 \text{ Quin.} + 13824 \text{ N} \quad \text{æquales} \quad 280 \text{ se.}$$

140 in se, 19600, minus 13824, manent 5776. Huius radix quadrata

76 {
de
ad

140. mediet. medijs, manent 64, uel proueniunt 216, ra-

dicis quidem ualores ac quæstionis numeri, si characteres continui essent. ~~24~~
quia utrinq; duo characteres neglecti sunt, non igitur hi, sed horum numerorum,
ut secundarum quantitatuum radices, 4 scilicet & 6, quæstionis numeri erunt. Id
quod nunc probari potest, ut sequitur.

Quantum ad numerum

priorem		280		posteriozem	539
Numeri		Secun.		Numeri	Secundæ
propositi		quanti.		propos.	quantitates
4	16	64		3	9
6	36	216		8	64
24		280		24	539

Secundum. Propositum est inuenire numerum, cuius quadratum post
quam primò acceperit 8, secundo uerò 3 amiserit, ut multiplicatio tandē
collecti cum residuo 6942 producat.

Facit 9

O P E R A T I O.

$$1 \text{ ra.} \quad 1 \text{ pri.} + 8 \text{ N}$$

$$1 \text{ pri.} \quad 1 \text{ pri.} - 3 \text{ N}$$

$$1 \text{ ter.} + 5 \text{ pri.} - 24 \text{ N} \quad \text{æquales} \quad 6942 \text{ N.}$$

Vel additis quæ sunt addenda, nimirum — 24 N, parti utriq; ueniunt

$$1 \text{ ter.} + 5 \text{ pri.} \quad \text{æqua.} \quad 6966 \text{ N.}$$

Est autem in secunda æquatione exemplum canonis primi, quare secundum
illius præceptionem operatio instituenda est. Veniunt autem operatione
absoluta 81, tanquam radices ualor. Sed quia unus character utrinq; inter duos
proximos est neglectus, non igitur ipse numerus, sed eius radix quadrata, 9 scilicet,
radices ualor & numerus quæsitus erit, id quod nunc examinari poterit.

Tertium. Propositum est inuenire numerum, cuius quadratum,
postquam primò acceperit 8, numerus uerò ipse 3 amiserit,
ut multiplicatio tandem collecti cum residuo

534 producat.

Facit 9

Sequuntur

SEQVNTVR NVNC ALIAE HVIVS REGVLAE PRAECEPTIO-

NES, ALGORITHMI NIMIRVM, VT VOCANT, DE
SVRDIS QVADRATORVM, CVBICORVM,

& id genus, Binomiorum item & Residuorum, per
singulas species tractatio.



NVMERI igitur surdi sunt, quorum radices desideratae, numero certo expressae, inueniri nequeunt. Vt numerus 3, quia non 3, sed ex ipso quantitatis cuiusdam radix expetitur, licet per se rationalis sit numerus, tamen ratione illius defectus, iam irrationalis & surdus appellatur. Eadem ratione 17. 13. 21. 346, multi item numeri alij, pro surdis haberi solent. Notantur autem, ut in sequentibus apparet, huiusmodi surdi, prout radix alia atq; alia desideratur, suis proprijs notis. Quod ipsum ideo fit, ut nimirum eorum à rationalibus numeris discrepantia (qui absq; signo & absolute proferuntur) cognosci possit. Quia autem uarie sunt numerorum secundum quantitates appellationes, cū alij primae quantitatis, alij uero secundae, tertiae, quartae, uel decimae, ac deinceps quarumuis aliarum quantitatum appellationem habeant, uarios etiam horum surdorum numerorum Algorithmos, seu tractationes esse, necessario sequitur. Atq; de his nunc ordine dicendum erit. & primò quidem:

DE SVRDIS NVMERORVM PRIMAE QVANTITATIS, SEV, VT VOCANT, Quadratorum.

NVMERATIO VEL ENVNCIATIO.

Caput I.



ENunciatio est facilis. Primò enim character, uel syllaba, quae numero praescripta est, per quam etiam numerum propositum, Surdum esse significamus, mox deinde numerus ipse exprimitur. Vt exempli gratia. ra. 29 exprimitur, Radix uiginti nouem: uel, ut sit enunciatio planior, Radix numeri uiginti nouem. Intelligitur autem radix quadrata, cum in praesentia sit quadratorum tractatio. In cubicis uero, de quibus erit tractatio sequens, cubica uel secundae quantitatis radix consideratur. Atq; in genere, cuiuscunq; sanè quantitatis tractatio fuerit, eius conditio per notam radicis, Ra. significatur, ac deinde etiam exprimitur. Solent tamen multi, & bene etiam, has desideratas radices, suis punctis cum linea quadam à dextro latere ascendente, notare, atq; sic pro radice quidem quadrata, ubi haec in aliquo numero desideratur, notam $\sqrt{\quad}$: pro cubica uero, $\sqrt[3]{\quad}$: ac radicis radice deinde, $\sqrt{\sqrt{\quad}}$ praepouunt: de quo obiter admonere Lectorem uolui.

MVLTIPPLICATIO. CAP. II.



Multiplicatio surdorum in genere, est radicis unius surdi numeri toties, quot sunt unitates in radice surdi alterius, coaceruatio. Haec autem perficitur, multiplicatione unius numeri rationalis (neglecto character) cum numero rationali altero. Nam statim tandem radix producti, id quod ex multiplicatione radicis unius cum radice surdi alterius prouenerit, indicabit.

$\frac{\text{ra. } 7 \text{ cum ra. } 8}{\text{produ. ra. } 56}$	Item	$\frac{\text{ra. } 24 \text{ cum ra. } 54}{\text{produ. } 36}$

Quod autem in his duobus exemplis, multiplicatio in uno quidem, Surdum; in altero uerò, rationalem numerū produxerit, mirandū non est. posse enim id fieri in multiplicatione surdorum, docetur propositionibus 19 & 21 decimi libri Euclidis.

SEQVVTVR EXEMPLA ALIA.

$\frac{\text{ra. } 6 \text{ cum ra. } 24}{\text{produ. } 12}$	Item	$\frac{\text{ra. } 12\frac{1}{2} \text{ cum ra. } 4\frac{1}{2}}{\text{produ. } 7\frac{1}{2}}$

ADHVC ALIA.

$\frac{3 \text{ cum } \sqrt{9}}{\text{produ. } \sqrt{72}}$	Item	$\frac{4\frac{1}{2} \text{ cum } \sqrt{14}}{\text{produ. } \sqrt{283\frac{1}{2}}}$

In his duobus exemplis, cum unus numerus surdus, alter uerò rationalis sit, numerus rationalis, ad similem ipsius surdi quantitatis appellationem, multiplicatione reducendus erit. Nam semper unius appellationis esse numeros in surdorum tractatione, cum hac in regula, tum in sequentibus necesse est. Ex quo nunc sequitur, cum una surdorum debeat esse quantitatis appellatio: quod duplare quidem hoc loco, per 4, hoc est, per binarij quadratum: triplare uerò & quadruplare, ac præterea si quæ sint multiplicationes aliæ, per illorum numerorum quadrata, 9 scilicet & 16, atque ordine deinceps, perficiendæ sint, ac fieri debeant.

SEQVVTVR EXEMPLA.

$\frac{\text{ra. } 8 \text{ bis}}{\text{produ. ra. } 32}$	$\frac{\text{ra. } 8 \text{ ter.}}{\text{produ. ra. } 72}$	$\frac{\text{ra. } 8 \text{ quater.}}{\text{produ. ra. } 128}$

Est autem huius tractationis tanquam examen, ipsa diuisio, quæ iam sequitur.

DIVISIO. CAP. III.



Diuisio surdorum in genere, est inuentio numeri, cuius radix tot habeat unitates, quoties radix diuidēs continetur, in ipsa radice diuidenda. Hæc autē perficitur, diuisione unius numeri rationalis (neglecto caractere) in numerum rationalem alterum. Nam statim tandem exeuntis radix id, quod ex diuisione radicis unius in radicem surdi alterius exiuerit, indicabit.

EXEMPLA SVNT.

$\frac{\text{ra. } 56 \text{ in ra. } 8}{\text{exit ra. } 7}$	Item	$\frac{\text{ra. } 72 \text{ in ra. } 8}{\text{exeunt } 3}$

ALIVD EXEMPLVM.

$\text{ra. } 457\frac{1}{3} \text{ in ra. } 21, \text{ exit ra. } 21\frac{2}{3}.$

ALIA.

$\frac{\sqrt{12} \text{ in } \frac{2}{3}}{\text{exit } \sqrt{16\frac{2}{3}}}$	Item	$\frac{\frac{2}{3} \text{ in } \sqrt{\frac{3}{4}}}{\text{exit } \sqrt{\frac{16}{27}}}$

Diuidatur radix numeri 9 in

2, exit $\sqrt{2}$ in 3, exit $\sqrt{\frac{8}{9}}$ in 4, exit $\sqrt{\frac{1}{2}}$

Id quod ex præmissis patet.

Huius tractationis tanquam examen, est ipsa multiplicatio, quæ paulo antè descripta est.

Additio

ADDITIO. CAP. IIII.



Additio surdorum in genere, est radicum propositorum surdorum in unam summam collectio. Hæc autem ex 4 propositione secundi Euclidis perficitur hoc modo. Sumantur surdorum, tanquam partium alicuius totius (lineæ, seu numeri) in partes diuisi, quadrata: una deinde parte uel numero, cum altero multiplicato, is qui producitur numerus, quum allegata propositio dicat bis, duplicetur: hoc est, per 4, ut in multiplicatione dictum est, multiplicetur. Quia uero hæc omnia, partium uidelicet totius, hoc est, numerorum surdorum, quadrata, & quod producunt illi surdi inter se multiplicati bis, ex allegata propositione, totius numeri quadrato equalia sunt: his igitur omnibus in unum collectis, radice deinde quadrata collecti quæsitæ, per eam tandem radicum summa datorum surdorum indicabitur.

EXEMPLA SVNT.

ra. 12	ad	ra. 20	Item	ra. 15	ad	ra. 17
12		20		15		17
		ra. 240				ra. 255
		bis per 4				bis per 4.
		ra. 960				ra. 1020.

Facta additione, ueniunt

$$32 + \text{ra. } 960 \quad \text{quadratum totius.} \quad 32 + \text{ra. } 1020$$

Radix igitur huius collecti, uel totius, quadrata, quæ est

$$\text{Radix collecti } 32 + \sqrt{960} \quad \text{ra. col. } 32 + \sqrt{1020}$$

surdorum propositorum summa radicum erit.

Adduntur huiusmodi numerorum surdorum radices commodius per particulam illam Plus, uel per eius signum +, quod idem est, sic

$$\text{ra. } 20 \text{ plus ra. } 12 \quad \text{Item} \quad \text{ra. } 17 + \text{ra. } 15$$

Quod si uno surdo cum altero multiplicato, producti radix assignari queat, tum loco illius producti radix assumenda, ac binario deinde ea duplenda est. Quo facto, & breuior & expeditior erit operatio.

EXEMPLA SVNT.

ra. 27	ad	ra. 12	Item	ra. 18	ad	ra. 32
27		12		18		32
		ra. 324				ra. 576
		18				24
		bis				bis
		36				48
		75				98
		ra. 75				ra. 98

Omnium productorum summa

Radicum summa.

Atq; is est generalis additionis surdorum canon. Sed quia numerorum surdorum, alij compositi, seu, ut uocant, commensurabiles inter se sunt, alij deinde incompositi & incommensurabiles: Ac commensurabiles quidem sunt, qui alicuius communis numeri diuisione, ad quadratos reduci possunt, ut sunt ra. 6 & ra. 54, item ra. 27 & ra. 12: Incommensurabiles uero, qui nullo communi numero, diuidendo, ad quadratos reduci possunt, ut sunt ra. 7 & ra. 13, itē ra. 12 & ra. 20: Qui commensurabiles inter se sunt surdi, alia & breuiori uia, quàm in generali regula traditum est, addi possunt, in hunc modum,

E; Reducan.

Reducantur primò surdi hi commensurabiles ad numeros quadratos, quadratorum deinde radices simul addantur, & quod colligitur, huius quadratum cum communi surdorum commensurabilium numero multiplicetur. quo facto, producti radix propositorum surdorum radicum summam indicabit, quod per duo exempla præmissa sequenti calculo cernere licebit.

$$\begin{array}{r} \text{ra. } 27 \quad \text{ad} \quad \text{ra. } 12 \\ \hline \text{com.} \quad 9 \text{ quadrata} \quad 4 \\ \text{nu. } 3 \quad 3 \text{ radices} \quad 2 \\ \quad \quad \quad 5 \text{ in se,} \\ \quad \quad \quad 25 \\ \hline \text{com. numerus } 3 \\ \hline 75 \end{array}$$

Summa radicū $\sqrt{75}$

$$\begin{array}{r} \text{Item} \quad \text{ra. } 18 \quad \text{ad} \quad \text{ra. } 32 \\ \hline \text{com.} \quad 9 \quad \text{quadra.} \quad 16 \\ \text{nu. } 2 \quad 3 \quad \text{ra.} \quad 4 \\ \quad \quad \quad 7 \text{ in se} \\ \quad \quad \quad 49 \\ \hline \text{com. numerus } 2 \\ \hline 98 \end{array}$$

Summa radicum $\sqrt{98}$

Simili modo cum alijs exemplis omnibus, hæc, siue per numeros integros, siue per fractiones, seu per integros & fractiones expolita fuerint, procedendum erit.

EXEMPLA.

$$\begin{array}{r} \text{ra. } 5\frac{1}{2} \quad \text{ad} \quad \text{ra. } 6\frac{1}{4} \\ \hline \text{Facit ra. } 24\frac{1}{12} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Item ra. } 26\frac{2}{3} \quad \text{ad} \quad \text{ra. } 33\frac{2}{3} \\ \hline \text{Facit ra. } 120\frac{5}{12} \end{array}$$

ALIUD EXEMPLVM.

3 ad ra. 8. Facit radix collecti $17 + \sqrt{288}$. Vel $3 + \sqrt{8}$.
Est autem huius tractationis tanquam examen ipsa subtractio, quæ iam sequitur.

SVBTRACTIO. CAP. V.



Vbtractio surdorum in genere, est radices unius propositi surdi de radice alterius subtractio. Hæc autem ex propositione 7. secundi Eucledis, perficitur hoc modo. Sumantur quadrata amborum, hoc est, eius à quo debet fieri subtractio, ut totius: atq; etiam radices subtrahendæ, ut unius partis lineæ, uel numeri diuisi. Et quia hæc simul collecta, ex allegata propositione, equalia sunt numero, quem producit totum cum dicta parte, hoc est, una radix cū altera multiplicata bis, & quadrato alterius partis, hoc est, quadrato radices residuæ. Ab illo igitur quadratorum collecto, numerus quem producant radices inter se multiplicatæ bis, subtrahendus, residui deinde radix querenda: qua inuenta, subtractio absoluta erit, cum per hanc ipsam remanentis seu residui radix indicabitur.

EXEMPLA SVNT.

$$\begin{array}{r} \text{ra. } 12. \quad \text{de} \quad \text{ra. } 20 \\ \hline 12 \quad \quad \quad 20 \\ \text{ra. } 240 \\ \text{bis per 4} \\ \hline \text{ra. } 960 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Item ra. } 15 \quad \text{de} \quad \text{ra. } 17 \\ \hline 15 \quad \quad \quad 17 \\ \text{ra. } 255 \\ \text{bis per 4} \\ \hline \text{ra. } 1020 \end{array}$$

Facta subtractione manent

$$32 - \text{ra. } 960$$

$$32 - \text{ra. } 1020$$

remanentis uel residuæ radices quadratum.

Radix igitur huius residui quadrata, quæ est

$$\text{radix residui } 32 - \sqrt{960}$$

$$\text{radix residui } 32 - \sqrt{1020}$$

remanentis surdi radix quadrata erit,

Subtra-

Subtrahuntur huiusmodi numerorum surdorum radices commodius per particulam illam Minus, uel per eius signum —, quod idem est, sic,

ra. 20 minus ra. 12

Item

ra. 17 — ra. 15.

ALIA EXEMPLA.

ra. 27 de ra. 75.

Item

ra. 32 de ra. 98

27

75

32

98

102

2025

45

bis

90

12

ra. 12

igitur

quadratum residui

radix residui.

130

3136

56

bis

112

18

ra. 18

igitur

Quia uerò & in hac specie, quemadmodum in præcedenti, aliàs commensurabilem, aliàs incommensurabilem surdorum fit subtractio: ubi commensurabiles fuerint propositi, hi eodem, quod in additione traditum est, compendio, unus ab altero subtrahi poterit: nisi quod hic radix à radice subtrahenda, cum illic una alteri addenda sit. Residuæ deinde radices quadrato, ut in additione aggregati ex radicibus quadrato, cum numero, quo scilicet propositi surdi ad quadratos reducti sunt, multiplicato, ex producto tandem radice quæsitâ, subtractio peracta erit, Quod per duo exempla præmissa sequenti calculo cernere licebit.

ra. 27 de ra. 75

Item

ra. 32 de ra. 98

com. nu.

com. nu.

3 9 quadra. 25

3 16 quadra. 49

3 radices 5

4 ra. 7

2 in se

3 in se

4

9

communis nume. 3

com. numerus 2

12

18

Radix residua $\sqrt{12}$

Radix residua $\sqrt{18}$

Simili modo cum alijs exemplis omnibus, hæc siue per numeros integros, siue per fractiones, seu per integros & fractiones, exposita fuerit, procedendum erit,

EXEMPLA.

ra. $6\frac{2}{3}$ de ra. $8\frac{1}{3}$

Item

ra. $\frac{2}{3}$ de ra. $\frac{2}{3}$

manet ra. $\frac{1}{12}$

ma. ra. $\frac{1}{24}$

ALIUD EXEMPLUM.

ra. $26\frac{2}{3}$ de ra. $33\frac{2}{3}$ ma. ra. $\frac{5}{12}$.

ADHVC ALIUD.

ra. $6\frac{2}{3}$ de ra. $12\frac{1}{12}$, manet radix residui $18\frac{5}{6} - \sqrt{326\frac{1}{4}}$.

Hæc autem est, ut quidem suo loco cognoscetur, $\sqrt{12\frac{1}{12}} - \sqrt{6\frac{2}{3}}$ id quod examinari potest.

Huius tractationis tanquam examen, est ipsa additio, quæ paulo ante descripta est.

Sequitur

SEQVITVR ALGORITHMVS DE SVR- DIS NVMERORVM SECVNDÆ QVANTITATIS, seu, ut uocant, de surdis Cubicorum.

NVMERATIO, VEL ENVNCIATIO.

Caput I.



Nunciatio est, sicut in iam absoluta de surdis quadratorum tractatione exposita est. Vt ra. 29, hæc quantitas, quia uersamur in tractatione cubica: ideo etiam non radix quadrata, sed radix cubica, uel secundæ quantitatæ radix, numeri 29 exprimitur. Sic in cæteris exemplis agendum. Solet tamen plerumq; syllabæ, Ra. propter confusio- nem uitandam, addi syllaba, cu. præsertim quidem, ubi extra tractationem alibi scriptæ fuerint ac inueniantur, sic:

Ra. cu. 11. Item radix se. 11, 24, uel alterius numeri.

MVLTIPPLICATIO ET DIVISIO.

Caput II.



Multiplicatio & Diuisio eodem modo hic, quo superius in tractatione surdorum quadratorum, perficiuntur: nisi quòd ultimò, loco radicis quadratæ, quæ ex multiplicationis producto & diuisionis exeunte illic eliciebatur, in præsentia nunc, cum sit tractatio cubica, ex iisdem radix cubica querenda sit,

SEQVNTVR EXEMPLA, ET PRIMODE
multiplicatione.

Ra. cu. 7 cum ra. cu. 11 Item ra. $7\frac{2}{3}$ cum ra. $2\frac{2}{3}$
produ. ra. cu. 77. produ. ra. $5\frac{1}{4}$.

ALIA.

ra. $\frac{9}{16}$ cum ra. $\frac{16}{17}$ Item $\sqrt{\frac{2}{3}}$ cum $\sqrt{\frac{4}{9}}$
produ. $\sqrt{\frac{1}{3}}$ producuntur $\frac{2}{3}$.

ALIUD.

ra. cu. $3\frac{1}{2}$ cum 6, producuntur 9.

ALIA.

ra. cu. 9 bis $\sqrt{9}$ ter. ra. cu. 9 quater,
pro. ra. cu. 72. pro. $\sqrt{243}$ pro. ra. 576.

Hæc tria aut quatuor exempla, licet in se habeant aliquid obscuritatis, tamen qui priorum memor fuerit, nullam horum planè requireret explicationē ulteriorem,

SEQVNTVR EXEMPLA DIVISIONIS.

Diuidatur ra. cu. 16 in ra. cubicum 4, exit radix cu. numeri 4.

Item $\sqrt{24}$ in $\sqrt{3}$, exeunt 2. Similiter ra. 20 in ra. 6. exit ra. $3\frac{1}{3}$

Item diuidatur $\sqrt{240}$ in 6, uel contrà 6 in $\sqrt{240}$, exeunt, hic quidem ra. cu. $\frac{2}{15}$, illic uerò ra. cu. $1\frac{1}{5}$

Medietas radicis cubicæ numeri 48, est radix cubica numeri 6.

Sic tertia pars eiusdem, numeri 48, est radix cubica numeri $1\frac{2}{3}$

ccmpro.

Comprobantur autem hæc duæ species, multiplicatio scilicet & diuisio, alternis, ut aliàs fieri consuevit.

ADDITION ET SUBTRACTION.

Caput III.



Vnt & hic considerandi duplices surdi, cum, quemadmodum in superiori tractatione, alij commensurabiles inter se sint, alij incommensurabiles. Ac commensurabiles quidem, ut ra. cu. 4, & ra. cu. 32, radices item cubicæ numerorū 24 & 81. Incommensurabiles uerò, ut ra. cu. 24 & ra. cu. 54, radices itē cubicæ numerorū 20 & 12, uel 21 & 13, atq; id genus. Qui igitur commensurabiles inter se sunt surdi, illorū radices non aliter adduntur, uel una ab altera subtrahitur, atq; in surdorum quadratorum tum additione, tum subtractione suprà traditum est, nisi quod illic quadratè, hic uerò cubicè omnia agantur. Quare uno atq; altero exemplo posito, res satis dilucida erit. Qui uerò incommensurabiles, & planè surdi sunt, illorum additio & subtractio percommodè signo affirmatiuo, +, & negatiuo, —, absoluuntur.

EXEMPLA PARTIS PRIORIS.

Additio			Subtractio.		
Ra. cu. 24	ad	ra. cu. 81	Item	ra. 24	de ra. 81
3	8	27	3	8	27
	2	3		2	3
	5			1	
	125			1	
com. numerus 3			com. numerus 3		
	375			3	
ra. cu. 375, radicem summa.			ra. cu. 3, radix residua.		

ALIA EXEMPLA

$\sqrt[3]{10\frac{2}{3}}$	ad	$\sqrt[3]{4\frac{1}{2}}$	Item	$\sqrt[3]{4\frac{1}{2}}$	de	$\sqrt[3]{10\frac{2}{3}}$
In integris & sub una denominatione, sexta scilicet						
$\sqrt[3]{64}$	ad	$\sqrt[3]{27}$	Item	$\sqrt[3]{27}$	de	$\sqrt[3]{64}$
4		3		3		4
	7			1		
343	in 6 diuisa,			1	in 8 ca.	
exiunt $57\frac{1}{6}$.	Quare			exit $\frac{1}{6}$.	Quare	
$\sqrt[3]{57\frac{1}{6}}$	radicem sum.			$\sqrt[3]{\frac{1}{6}}$	ra. ra.	

EXEMPLA PARTIS POSTERIORIS.

Additio			Subtractio.		
$\sqrt[3]{24}$	ad	$\sqrt[3]{32}$	Item	$\sqrt[3]{24}$	de $\sqrt[3]{32}$
uenit $\sqrt[3]{32} + \sqrt[3]{24}$			ma. $\sqrt[3]{32} - \sqrt[3]{24}$		
ALIA.					
$\sqrt[3]{9}$	ad	$\sqrt[3]{27}$	Item	$\sqrt[3]{9}$	de $\sqrt[3]{27}$
uenit $\sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{9}$			ma. $\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{9}$		

SIMILITER ALIA.

$\sqrt[3]{8\frac{1}{2}}$	ad	$\sqrt[3]{9\frac{1}{2}}$	Item	$\sqrt[3]{8\frac{1}{2}}$	de	$\sqrt[3]{9\frac{1}{2}}$
uenit $\sqrt[3]{9\frac{1}{2}} + \sqrt[3]{8\frac{1}{2}}$			ma. $\sqrt[3]{9\frac{1}{2}} - \sqrt[3]{8\frac{1}{2}}$			

Est & alia addendi & subtrahendi ratio, quæ quidem, ubi surdi commensurabiles fuerint, locum habet.

Surdis commensurabilibus propositis, hi primùm communi eorum mensura uel numero, quem habent, ad cubos rationales reducendi, deinde tam cuborum radices, quàm etiam radicum quadrati, ponendi sunt. Hoc factò, utriusq; radix cum triplo quadrati radice alterius multiplicari: hæc duo producta deinde unà cū duobus cubis, si quidem additio instituitur, coniungi: uel pro subtractione absol- uenda, maioris radice productum maiori, minoris uerò productum minori cu- bo addi, atq; ab illo deinde hoc collectum subtrahi debet. quo factò, tam quòd illic colligitur, quàm hic relinquitur, utrunq; cum communi commensurabilium surdo- rum numero multiplicatum, per radicem producti tandē cubicam cū additioni, tum subtractioni etiam satisfactum erit.

Ra. cu. 40	ad	ra. cu. 135	Item	$\sqrt{40}$	de	$\sqrt{135}$
5	8	27	5	8	27	
	2	3		2	3	
	4	9		4	9	
	12	27		12	27	
	54	36		54	36	
	Summa omnium			Id quod relinquitur.		
		125				1
com. numerus	5		com. numerus	5		
	625	quare		5	quare	
ra. cu. 625	ra.		$\sqrt{5}$	ra.		
dicum summa			dix residua.			

SEQVITVR ALGORITHMVS DE SVR-

DIS NVMERORVM TERTIAE QVANTITATIS,
seu, ut uocant, de surdis quadratorum de quadratis.

NVMERATIO, VEL ENVNCIATIO.

Caput I.



Nunciatio eadem est quæ in præcedentibus, nisi quòd character, qui numero ascribitur, pro suo ualore & natura exprimatur. Vt ra. ra. 29 Radicis radix, uel radix tertie quantitat, numeri 29, exprimitur. Sic reliqua huius generis exēpla omnia exprimi debēt. Præponitur autē huiusmodi surdis duplex ra. eo quòd bis ex eis radix quadrata elici- enda sit, semel quidem ex ijs ipsis surdis, secundo uerò ex eorum radicibus in- uentis, quod obiter annotare libuit. Breuitatis uerò, atq; compendij gratia, (ut supra etiam indicauimus) solent huiusmodi numeri notari & repræsentari du- plici puncto & cæ. sic $\sqrt{29}$, ut $\sqrt{29}$, quod & ipsum notandum est.

MVLTIPPLICATIO ET DIVISIO.

Caput II.



Erficiuntur hæc duæ species, multiplicatio & diuisio, eodem modo quo in superioribus traditum est: nisi quòd ultimò, ratione appellationis, tam de multiplicationis productò, quàm etiam diuisionis exeunte, ra- dix tertie quantitat, hoc est radix quadrata de radice quadrata elici- debeat.

EXEMPLA MVLTIPPLICATIONIS SVNT.

ra. ra. 21 cum ra. ra. 12 Item $\sqrt{27}$ cum $\sqrt{12}$
produ. ra. ra. 252. produ. $\sqrt{18}$.

ALIA EXEMPLA.

$$\sqrt{162} \text{ cum } \sqrt{32} \quad \text{Item} \quad \text{ra. ra. } 7\frac{1}{2} \text{ cum ra. ra. } \frac{4}{3}$$

$$\text{produ. } \sqrt{72} \quad \text{produ. ra. } 2\frac{1}{2}$$

ADHVC ALIA,

$$\sqrt{24} \text{ cum } 6 \text{ uel contra.} \quad \text{Item} \quad \sqrt{45} \text{ cum } 4\frac{1}{2}$$

$$\text{produ. } \sqrt{3104} \quad \text{produ. } \sqrt{15867\frac{1}{2}}$$

EXEMPLA DIVISIONIS,

$$\sqrt{24} \text{ in } \sqrt{7} \quad \text{Item} \quad \text{ra. ra. } 48 \text{ in ra. ra. } 12$$

$$\text{exit } \sqrt{12} \quad \text{exit ra. } 2$$

ALIA EXEMPLA.

$$\sqrt{873} \text{ in } \sqrt{97} \quad \text{Item} \quad \sqrt{66} \text{ in } \sqrt{8}$$

$$\text{exit } \sqrt{3} \quad \text{exit } \sqrt{8\frac{1}{2}}$$

ALIA EXEMPLA.

$$\sqrt{5\frac{1}{2}} \text{ in } \sqrt{3\frac{1}{2}} \quad \sqrt{12\frac{1}{2}} \text{ in } \sqrt{4\frac{1}{2}} \quad \sqrt{12} \text{ in } \sqrt{8\frac{1}{2}}$$

$$\text{exit } \sqrt{2\frac{8}{9}} \quad \text{exit } \sqrt{1\frac{1}{2}} \quad \text{exit } \sqrt{1\frac{1}{2}}$$

APPENDIX AD EA QVAE HACTENVS, CVM IN HOC, tum etiam in praemissis algorithmis, de multiplicationibus & diuisionibus surdorum commemorata sunt, cognitu necessarius.

Cum hactenus tantum, quomodo similium appellationum surdi inter se, surdus item cum rationali numero, uel contra, per has duas species tractari debet, traditum sit, haud raro autem accidere solet, quod etiam diuersarum appellationum surdi inter se his regulis tractandi occurrant, & illorum tractatio nunc, ne quid in praemissa de surdis descriptione desiderari possit, paucis praescribetur.

Si duos igitur diuersarum appellationum surdos inter se multiplicare, aut unum in alterum diuidere propositum sit, utriusque appellationis numerus secundum appellationem numeri alterius multiplicandus est. quo facto, producuntur duo numeri alij, alia etiam, & una quidem, horum productorum appellatio: quibus postea, uel uno cum altero multiplicato, uel uno in alterum diuiso, res confecta erit. Quam uero hi producti numeri sortiuntur appellatione, in additis & diminutis, circa multiplicationem dudum iam traditum est.

EXEMPLA HVIVS SVNT.

$$\begin{array}{lll} \text{ra. } 24 & & \text{ra. cu. } 16 \\ \text{ra. } 72 & \text{cum, uel in} & \text{ra. ra. } 32 \\ \text{ra. cu. } 32 & & \text{ra. ra. } 8 \end{array}$$

Producuntur, ratione quidem multiplicationis,

Primò, Radix quintae quantitatatis, hoc est, radix quadraticubica, numeri 3538944,

Secundò, Radix tertiae quantitatatis, hoc est, radice radix, numeri 165888.

Tertiò, Radix undecimae quantitatatis, hoc est, radix cubica de quadrati quadrato, uel contra, numeri 536870912.

Ratione uero diuisionis, exeunt iisdem quantitatibus denominati numeri,

Primò quidem 54, secundò uero 162, ac tertiò deinde 2048. &c.

F 2

Alia

ALIA EXEMPLA IN RATIONALIBVS.

$\sqrt{4}$	4		$\sqrt{8}$	4	1
$\sqrt{9}$	9	cum uel in	$\sqrt{16}$	pro. 6 uel ex.	$1\frac{1}{2}$
$\sqrt{27}$	27		$\sqrt{81}$	9	1

APPENDICIS COMPENDIUM.

Habet hæc operatio suum quoq; compendium, in exemplis nimirum, ubi aliqua est in appellationibus numerorum conuenientia & similitudo. Vt si, exempli gratia, hi duo surdi, ra. 6 & ra. ra. 12, unus cum altero multiplicari, uel in alterū diuidi debeat, numerus 6 quadratē tantum multiplicari, 12 uerò prout sunt, ita absq; immutatione relinqui debent. Producitur autem multiplicatione quidē, ra. ra. 432, diuisione uerò exit ra. ra. 3. Sic radice quadrata de radice cubica, uel contra radice cubica de radice quadrata aliquis numerus notatus, si cum numeri alterius radice cubica, uel radice quadrata multiplicari, seu in eam diuidi debeat, numerus multiplicans seu diuidens, ratione quidem cubi, in se tantum quadratē, ratione uerò quadrati, in se tantum cubicē multiplicandus erit.

ADDITION ET SUBTRACTIO. CAP. III.



Vinetiā hac tractatione surdi aliās cōmensurabiles sunt, aliās uerò in cōmensurabiles. Qui igitur cōmensurabiles inter se sunt surdi, ad suæ appellationis rationales, hoc est, ad tertie quantitatatis numeros reducendi sunt, ac si quidem additio instituitur, radices horum addi: quod si uerò subtractio, una radix ab altera subtrahi debet. Quo facto, utriusq; hoc est, tam eius quod ex additione colligitur, quam etiam eius quod per subtractionem relinquitur, tertia quantitas, cum communi numero multiplicetur, & erit eius quod producitur, Radicis radix, seu tertie quantitatatis radix: hic quidem radicis radix residua, illic uerò harum summa. Quod si incommensurabiles & planē surdi sunt, tū illorū additio & subtractio per cōmodē signo affirmatiuo, +, & negatiuo, —, absoluuntur.

EXEMPLA PARTIS PRIORIS.

Additio			Subtractio.		
ra. ra. 32	ad	$\sqrt{162}$	Item	ra. ra. 32	de $\sqrt{162}$
2	16	81		2	16
	2	3		2	3
	5			1	
	625			1	
	2			2	
	1250			2	
ra. ra. 1250,	radicum summa			ra. ra. 2,	radix residua,

ALIA EXEMPLA.

$\sqrt{5\frac{1}{18}}$ ad $\sqrt{39\frac{1}{18}}$ Item $\sqrt{5\frac{1}{18}}$ de $\sqrt{39\frac{1}{18}}$

In integris sub una denominatione, sedecima nimirum.

$\sqrt{81}$ ad $\sqrt{625}$ Item $\sqrt{81}$ de $\sqrt{625}$

3 5
8 in se, & cæ.

4096

3
283

4496

Facit $\sqrt{256}$ id est 4

16

3 5
2 in se

16,
diuisa in

16.

exit seu

manet 1

Est autem hoc exemplum in numeris rationalibus expositum.

Sequitur

Sequitur iam simile in irrationalibus.

 $\sqrt{266\frac{2}{3}}$ ad $\sqrt{1350\frac{2}{15}}$ Item $\sqrt{266\frac{2}{3}}$ de $\sqrt{1350\frac{2}{15}}$

In integris sub una denominatione, 144

 $\sqrt{38416}$ ad $\sqrt{194481}$ Item $\sqrt{38416}$ de $\sqrt{194481}$

$$\begin{array}{r} 16 \qquad 81 \\ 2 \qquad \qquad 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \qquad 81 \\ 2 \qquad \qquad 3 \end{array}$$

in se, &c.

in se

625

1

cum 2401

cum 2401

pro. 1500625 in 144 diuisa

pro. 2401 in 144 diuisa,

exeunt $\sqrt{1500625}$ exeunt $\sqrt{2401}$

144

144

Radicum igitur summa,
radix quadrata numeri 102 $\frac{1}{12}$ Radix igitur residua,
ra. quadrata numeri 4 $\frac{1}{12}$

EXEMPLA PARTIS POSTERIORIS.

 $\sqrt{18}$ ad $\sqrt{24}$ Item $\sqrt{18}$ de $\sqrt{24}$
ueniunt $\sqrt{24} + \sqrt{18}$ ma. $\sqrt{24} - \sqrt{18}$

ALIA.

 $\sqrt{7\frac{1}{2}}$ ad $\sqrt{12\frac{1}{2}}$ Item $\sqrt{7\frac{1}{2}}$ de $\sqrt{12\frac{1}{2}}$
ueniunt $\sqrt{12\frac{1}{2}} + \sqrt{7\frac{1}{2}}$ ma. $\sqrt{12\frac{1}{2}} - \sqrt{7\frac{1}{2}}$

SEQUITVR ALGORITHMVS DE BINOMIIS ET RESIDVIS.

Est autem Binomium seu ex binis nominibus linea, ut eā Euclides, per 36 decimi libri propositionem, definit, linea irrationalis, quā duæ rationales, potentia tantum cōmensurabiles, in directum sumptæ, constituunt. ut $4 + \sqrt{7}$, $\sqrt{12} + 3$, $\sqrt{27} + \sqrt{15}$, $4 + \sqrt{8}$, $\sqrt{12} + 2$, $\sqrt{27} + \sqrt{18}$. & si quæ sunt alia. Residuum uero seu Apotome, ut idē Euclides id per 73 decimi propositionē definit, linea irrationalis, quā duæ rationales, potentia tantum cōmensurabiles, quarum una ab altera si ab lata fuerit, tandem relinquunt. ut $4 - \sqrt{7}$, $\sqrt{12} - 3$, $\sqrt{27} - \sqrt{15}$, $4 - \sqrt{8}$, $\sqrt{12} - 2$, $\sqrt{27} - \sqrt{18}$, & id genus alia multa.

ENUNCIATIO. CAP. I.



Abet hæc Binomiorum & residuorum tractatio, nihil ferē difficultatis, cum illorum operationes omnes suis regulis superius descriptæ sint. Et quia Enunciatio est facilis, cum ex præcedentibus constet & intelligatur: Sequitur igitur

ADDITIO. CAP. II.



N additione binomiorum & residuorum, qui unus sunt appellationis numeri, addantur simul, absoluti scilicet absolutis, & denominati denominatis, ut superius traditum est, ratione interim signorum + & - habita.

SEQUVNTVR EXEMPLA, ET PRIMO DE BINOMIIS.

4. + ra. 7

ra. 27 + ra. 15

4 + ra. 8

ra. 27 + ra. 18

8 plus radix binomij

ra. 108 plus radix binomij

15 + $\sqrt{224}$ 33 + $\sqrt{1080}$ Vel 8 plus $\sqrt{7} + \sqrt{8}$ Vel $\sqrt{108}$ plus $\sqrt{15} + \sqrt{18}$

F 3

Alia

BREVIS REGVLARVM
ALIA EXEMPLA.

$$\begin{array}{r} \text{ra. } 12 + 3 \\ \text{ra. } 12 + 2 \\ \hline \text{ra. } 43 + 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 + \text{ra. } 28 \\ 4 + \text{ra. } 7 \\ \hline 12 + \text{ra. } 63 \end{array}$$

SEQVITVR SECUNDO EXEMPLVM DE RESIDVIS.

$$\begin{array}{r} 4 \quad - \quad \text{ra. } 7 \\ 4 \quad - \quad \text{ra. } 8 \\ \hline \end{array}$$

s, minus radix binomij. 15 + ra. 224
Vel s, minus radix 7, minus item ra. 8

ALIA EXEMPLA.

$$\begin{array}{r} \text{ra. } 48 - 6 \\ \text{ra. } 3 - 1 \\ \hline \text{ra. } 75 - 7 \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{ra. } 3 - \text{ra. } 2 \\ 3 - \text{ra. } 5 \\ \hline 3 + \text{ra. } 3 - \text{ra. } 2 - \text{ra. } 3 \end{array}$$

ALIVD EXEMPLVM.

$$\begin{array}{r} \text{ra. } 1620 - 18 \\ 54 - \text{ra. } 1620 \\ \hline \text{Summa } 36. \end{array}$$

SEQVNTVR TERTIO EXEMPLA DE BINO,
mijis & residuis,

$$\begin{array}{r} 4 + \text{ra. } 7 \\ 4 - \text{ra. } 8 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 + \text{ra. } 8 \\ 4 - \text{ra. } 7 \\ \hline \end{array}$$

s, minus radix residui 15 — ra. 224
Vel ma. 8 + $\sqrt{7} - \sqrt{8}$

s, plus radix residui 15 — ra. 224
Vel ma. 8 + $\sqrt{8} - \sqrt{7}$

ALIA DVO EXEMPLA.

$$\begin{array}{r} \text{ra. } 12 + 3 \\ \text{ra. } 12 - 3 \\ \hline \text{ra. } 48 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 - \text{ra. } 7 \\ 3 + \text{ra. } 28 \\ \hline 7 + \text{ra. } 7 \end{array}$$

SVBTRACTIO. CAP. III.



Vemadmodum in additione, unus appellationis numeri addendit ita nunc, ut subtractio perficiatur, unus ab altero, absolutus scilicet numerus ab absoluto, & denominatus à denominato subtrahendus est, Quòd si interea, quid cum signis + & — fieri debeat, non oscitanter observes, nihil est quod ultra desiderare possis.

SEQVNTVR EXEMPLA, ET PRIMODE
Binomijis.

$$\begin{array}{r} \text{ra. } 12 + 3 \\ \text{ra. } 12 + 2 \\ \hline \text{manet } 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 + \text{ra. } 63 \\ 8 + \text{ra. } 28 \\ \hline 4 + \text{ra. } 7 \end{array}$$

ALIVD EXEMPLVM.

$$\begin{array}{r} 4 + \text{ra. } 8 \\ 4 + \text{ra. } 7 \\ \hline \text{manet radix residui } 15 - \sqrt{224}, \text{ uel ma. } \sqrt{8} - \sqrt{7}. \end{array}$$

Exempla

ALGEBRAE DESCRIPTIO.
EXEMPLA SECUNDO DE RESIDUIS.

47

$$\begin{array}{r} 4 - \text{ra. } 7 \\ 4 - \text{ra. } 8 \\ \hline \text{manet} \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 - \text{ra. } 8 \\ 4 - \text{ra. } 7 \\ \hline \text{Impossibile, uel ma.} \end{array}$$

ra. residui 15 — $\sqrt{224}$ minus radix resi. 15 — $\sqrt{224}$

ALIA DVO EXEMPLA.

$$\begin{array}{r} \text{ra. } 60 - \text{ra. } 20 \\ \text{ra. } 20 - \text{ra. } 15 \\ \hline \text{ma. ra. } 135 - \text{ra. } 80 \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{ra. } 12 - 6 \\ 6 - \text{ra. } 12 \\ \hline \text{ma. ra. } 48 - 12 \end{array}$$

ALIA EXEMPLA.

$$\begin{array}{r} 6 - \text{ra. } 24 \\ 3 - \text{ra. } 6 \\ 3 - \text{ra. } 6 \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{ra. } 108 - 9 \\ \text{ra. } 48 - 4 \\ \text{ra. } 12 - 5 \end{array}$$

SEQUUNTUR TERTIO EXEMPLADE BINOMIIS ET RESI.

$$\begin{array}{r} 4 + \text{ra. } 7 \\ 4 - \text{ra. } 7 \\ \hline \text{ma. ra. } 28 \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{ra. } 27 - 8 \\ \text{ra. } 3 + 4 \\ \hline \text{ma. ra. } 12 - 12 \end{array}$$

ALIVD EXEMPLVM.

$$\begin{array}{r} 24 + \text{ra. } 24 \\ 16 - \text{ra. } 12 \\ \hline \text{manent utrobique, 8 plus radix bino. } 36 + \sqrt{1152} \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{Vel.} \\ 24 + \text{ra. } 12 \\ 16 - \text{ra. } 24 \\ \hline \end{array}$$

ADHVC ALIVD EXEMPLVM.

$$\begin{array}{r} 24 - \text{ra. } 24 \\ 24 + \text{ra. } 12 \\ \hline \text{manent utrobique, 8 minus radix bino. } 36 + \sqrt{1152} \end{array} \quad \begin{array}{r} 24 - \text{ra. } 12 \\ 24 + \text{ra. } 24 \\ \hline \end{array}$$

MULTIPlicATIO. CAP. IIII.



Vltiplicetur singularū appellationū numeri multiplicātis. cū singula-
rū appellationū numeris ipsius multiplicādi, pductis deinde singulis
cū suis signis debito modo additis, multiplicatio absoluta erit. Hoc ra-
mē curabitur seper, ut singuli duo numeri, qui inter se multiplicari de-
bēt, unius sint denominationis. quòd si sic, facilis erit omnis multiplica-
tio. Sin minus, multiplicatione, ut una & eadē sit eorū denominatio, efficiendū est.

SEQUITVR EXEMPLVM.

$$\begin{array}{r} 4 + \text{ra. } 7 \\ 4 + \text{ra. } 8 \\ \hline \text{pro. } 15 + \text{ra. } 128 + \text{ra. } 112 + \text{ra. } 56. \end{array}$$

ALIA DVO EXEMPLA.

$$\begin{array}{r} 12 + \text{ra. } 20 \\ 12 + \text{ra. } 20 \\ \hline 164 + \text{ra. } 11520 \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{ra. } 12 + 3 \\ \text{ra. } 12 + 2 \\ \hline 28 + \text{ra. } 300 \end{array}$$

ALIVD EXEMPLVM.

$$\begin{array}{r} 6 - \text{ra. } 5 \\ 6 - \text{ra. } 5 \\ \hline - \text{ra. } 180 + 5 \\ + 36 - \text{ra. } 180 \\ \hline \text{produ } 41 - \text{ra. } 720 \end{array}$$

ALIA DVO EXEMPLA.

$$\begin{array}{r} \text{ra. } 12 + 6 \\ 6 + \text{ra. } 12 \\ \hline \text{ra. } 1728 + 48 \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{ra. } 12 - 6 \\ 6 - \text{ra. } 12 \\ \hline \text{ra. } 1728 - 48 \end{array}$$

Adhuc

$$4 + \text{ra. } 7$$

$$\text{ra. } 12 + 6$$

$$4 - \text{ra. } 7$$

$$6 - \text{ra. } 12$$

$$\text{produ. } 9$$

$$\text{produ. } 24.$$

DIVISIO. CAP. V.



IN diuisione binomiorum & residuorum, cum diuisor aut numerus absolutus, aut denominatus, aut binomium seu residuum esse possit, ad diuisionem commodius absoluendam, distinctione quadam opus erit. Diuisor itaq; si numerus absolutus uel denominatus fuerit, in eum singuli ipsius diuidendi numeri, ut dictum est, diuidantur. etenim exeuntibus deinde cum suis signis simul collectis, diuisio perfecta erit. Quod si fuerit binomium, seu residuum: tunc tam diuisor, quam etiam diuidendus, per diuisoris contrariū nomen, hoc est per residuum, si binomium ipse fuerit: uel per binomium, si residuum fuerit, multiplicari debet: nam productis deinde (cum hac ex 17 propositione Euclidis lib. septimi, eandē quam ipsi multiplicati, hoc est, diuidendus & diuisor propositi, rationem custodiant) illo scilicet quem diuidendus dederit in alterum, diuisis, diuisio perfecta erit.

EXEMPLA PARTIS PRIORIS.

$$\begin{array}{r} 8 + \text{ra. } 20 \text{ in } 2 \\ \hline \text{exeunt } 4 + \text{ra. } 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Item } \text{ra. } 24 - 8 \text{ in } 3 \\ \hline \text{exit ra. } 2\frac{2}{3} - 2\frac{2}{3} \end{array}$$

ALIA PRIORIS PARTIS EXEMPLA.

$$\begin{array}{r} 8 + \text{ra. } 20 \text{ in ra. } 5 \\ \hline \text{exit ra. } 12\frac{4}{5} + 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Item } \text{ra. } 24 - 8 \text{ in } 6 \\ \hline \text{exeunt } 2 - \text{ra. } 10\frac{2}{3} \end{array}$$

EXEMPLVM PARTIS POSTERIORIS.

$$\text{Diuidatur ra. } 72 + \text{ra. } 32 \text{ in } 10 + 8$$

Multiplicetur igitur uterq; numerus per $10 - 8$, diuisoris residuū, contrariū, um scilicet nomen, & producuntur $\text{ra. } 2000 - 40$, diuidendus. 2 uerò, numerus diuisor, diuisione deinde facta, erit exiens $\text{ra. } 500 - 20$, quod quidem multiplicatione eius cum diuisore primò posito, ut sequitur, probari poterit.

$$\text{ra. } 500 - 20$$

$$\text{ra. } 10 + \text{ra. } 8$$

$$+ \text{ra. } 4000 - \text{ra. } 3200$$

$$\text{ra. } 5000 - \text{ra. } 4000$$

produ. $\text{ra. } 5000 - \text{ra. } 3200$, atq; tantus est etiam diuidendus primò positus, $\text{ra. } 72 + \text{ra. } 32$, id quod subtractione tandem & additione patebit.

SECVVNTVR ALIA EXEMPLA.

Diuidantur 9 in residuum $4 - \text{ra. } 7$, uel in binomium $4 + \text{ra. } 7$

Exeunt hic quidem $4 - \text{ra. } 7$, illic uerò $4 + \text{ra. } 7$.

Diuidatur binomium $23 + \text{ra. } 448$ in $4 + \text{ra. } 7$

Exeunt $4 + \text{ra. } 7$.

Quaritur

Quæritur autem huius diuisionis diuidentus numerus sic,

Multiplicentur	Subtrahatur
$23 + \sqrt{448}$	$\sqrt{1703} \text{ de } \sqrt{7168}$
cum $4 - \sqrt{7}$	$7 \quad \underline{529} \quad 1024$
$\underline{92 - \sqrt{3136}}$	$23 \quad \quad 32$
$- \sqrt{3703}$	$\quad \quad 9 \text{ in se}$
$+ \sqrt{7168}$	$\quad \quad \underline{81}$
$\hline \text{produ. } 36 + \sqrt{567}$	$\quad \quad 7$
diuidentus	$\sqrt{567}. \text{ Cætera}$
	nunc sunt facilia

Diuidantur $48 + \text{ra. } 432 + \text{ra. } 384 + \text{ra. } 72$, in binomium $8 + \text{ra. } 12$
 exeunt $6 + \text{ra. } 6$, id quod multiplicatione diuiso-
 ris cum exeunte probari potest.

Diuidatur $\text{ra. } 448 + \text{ra. } 336$ in $\text{ra. } \text{ra. } 252 + \text{ra. } \text{ra. } 28$.
 Exit $\text{ra. } \text{ra. } 252 + \text{ra. } \text{ra. } 28$.

DE EO QUOMODO DISCREPANTIA

BINOMIORVM ET RESIDVORVM COGNO-
 scatur, quomodo deinde ex eis radices quadratæ elici
 debeant. Caput 6.

Quid sit Binomium in genere, quid item Residuum, ab initio huius Algo-
 rithmi dictum est. Et quia sex sunt tantum binomiorum varie-
 tates seu species, quæ sit cuiusque propria definitio, nunc
 subiungere uisum est.

G

Est

EST IGITUR BINOMIUM, SEV EX BINIS NOMINIBVS

Prima, secunda, tertia, quarta, quinta vel sexta, irrationalis quaedam, ex duabus rationalibus, potentia tantum commensurabilibus composita, recta linea, quarum longior brevior maius potest in quadrato linea, longior longitu.

dine	commensurabili, cuius item	longior	portio propolite rationali longi- tudine commensurabilis existit, si- cut est ex binis nominibus	Prima, secunda, tertia,	ut	6 + 1 20
	incommensura- bilis, cuius item	longior breuior neutra	portio propolite rationali longi- tudine commensurabilis existit, si- cut est ex binis nominibus	Prima, secunda, tertia,	ut	1 18 + 4 1 24 + 1 18

Et tantum quidem de binomiorum definitionibus. Residua porò per apherein eodem modo se habent, quare

RESIDVVM SEV APOTOME

Prima, secunda, tertia, quarta, quinta vel sexta, est irrationalis quaedam, ex duabus rationalibus, potentia tantum commensurabilibus, ubi quidem una ab altera ab- lata fuerit tandem relicta, cuius tota ablata maius potest in quadrato linea, ipsi tot longitu.

dine	commensurabili, cuius item	Tota ablata neutra	expolite rationali longitudine commensurabilis existit, sicut est apotome	Prima, secunda, tertia,	ut	6 — 1 20 1 18 — 4 1 24 — 1 18
	incommensura- bilis, cuius item	Tota ablata neutra	expolite rationali longitudine commensurabilis existit, sicut est apotome	Quar. quinta, sexta,	ut	6 — 1 20 1 18 — 4 1 24 — 1 18

Ex his nunc patet, tam binomia quàm etiam residua, licet aliquid commune habeant, nimirum quòd omnia in genere irrationales sint lineæ, duas item rationales, potentia tantum commensurabiles, rectas lineas ad earum constitutionem requirant, in triplici esse differentia, quarum prima quidem est. Quòd licet in omnibus binomijs, longioris portionis quadratum, quadrato brevioris portionis maius sit, tamen in prioribus tribus, primo scilicet secundo & tertio, binomijs, quadratum longioris brevioris portionis quadrato maius est, in quadrato lineæ, longiori longitudine commensurabili: in posterioribus uerò, maius est in quadrato lineæ, longiori longitudine incommensurabili. ut, $12 + \text{ra. } 23$, $\text{ra. } 45 + 5$ & $\text{ra. } 20 + \text{ra. } 15$. Item $12 + \text{ra. } 24$, $\text{ra. } 45 + 6$ & $\text{ra. } 20 + \text{ra. } 14$.

Secunda uerò, quòd binomium primum & quartum, longiorem portionem rationalem, breviorem uerò irrationalem: & contra, binomium secundum & quintum, breviorem rationalem, longiorem uerò irrationalem habeant. ut, $18 + \text{ra. } 35$, est binomium primum, $18 + \text{ra. } 38$, quartum. Sic $\text{ra. } 48 + 6$, secundum, sed $\text{ra. } 48 + 5$, quintum. Ad tertia deinde, quòd binomium tertium & sextum, neutram portionem rationalem; sed utramque irrationalem habeant. ut $\text{ra. } 60 + \text{ra. } 45$, quod est tertium, at, $\text{ra. } 60 + \text{ra. } 35$, sextum binomium est. Atque secundum has differentias nunc facile erit cuius, quaecunque binomium propositum fuerit, cuiusnam ordinis binomium sit, indicare.

ET QVIA IAM VNVMQVODQVE BI-

NOMIVM, PER CONSEQUENS ETIAM VNVMQVOD.

què residuum, cuiusnam ordinis binomium uel residuum sit, intel-

ligi potest, ad alterum huius capituli punctum, quomodo

scilicet ex eis radices quadratæ elici debeant, accedendum erit.



Vòd omne binomium possit esse radix quadrata alterius cuiusdam binomij, ex eo perspicui potest, quòd aliàs in absolutis numeris accidere consuevit, multiplicatione scilicet sui in se. Quòd item contra, omne binomium sit quadratum, seu radicem quadratam habeat, cum Euclides in senario decimi libri quarto, cuius initium est propositio 54: finis uerò 59, singulorum binomiorum radicibus propria nomina imponat, nisi hæ inueniri possent, ineptè fecisset, si rebus, quæ non sunt, nomina & appellationes imposuisset. Ex hoc igitur quarto decimi Euclidis senario, commodè & uerè inferitur, omnia binomia quadrata esse, atque sic etiam radices quadratas habere, licet de numero absoluto illud idem non concedatur. Dicit autem Euclides in prima huius senarij propositione, quod Areolam, hoc est, spaciū sub rationali, atque ex binis nominibus prima comprehensum, potens, Irrationale sit, Ex binis item nominibus linea una uocetur. Vnde nunc, cum rationale id Vnitas etiam esse possit, unitas insuper in quemcunque numerum, uel quantitatem ducta, eandem producat: rectam lineam, ex binis nominibus primam potentem, hoc est, primi binomij tetragonum latus, binomium esse, facile colligitur. Eodem modo ex sequentibus huius senarij propositionibus ordine habetur. Secundi binomij radicem quadratam, esse lineam irrationalem, atque Ex binis medijs primā, Tertij: lineam irrationalem, atque Ex binis medijs secundam, Quarti: lineam irrationalem, atque Maiorem. Quinti uerò: lineam irrationalem, atque Rationale & medium potentem. Sexti deinde: lineam irrationalem, atque Duo media potentem. Hæc ille. Et quia iam satis constat, singula binomia radices quadratas habere, hæ quomodo nunc ex singulis elici debeant, per canonem quandam generalem tradetur.

PRO ELICIENDIS BINOMIORVM RADICI

bus quadratis, canon quidam generalis.

Binomio proposito, subtrahatur minoris quadratum de quadrato nominis maioris, atq; in residui quarta parte, ubi radix quadrata quæsitæ ac inuēta fuerit, ea medietati maioris nominis adijciatur: & erit eius quod inde colligetur radix quadrata, una inueniendæ radicis portio. Porro si collectū hoc, de toto maiori nomine subtrahatur, tū radix residui quadrata, alterā portionē ostēdet. Vtriusq; igitur portionibus per signū + copulatis, tota binomij propositi radix quadrata, sese exhibebit,

SEQVVTVR NVNC PRO SINGVLIS BINOMIIS singula exempla.

23 + ra. 448 binomium primum,
 529 maioris nominis quadratum,
 448 minoris nominis quadratum,
 81 residuum, $\frac{81}{4}$ residui quarta pars
 $4\frac{1}{2}$ quartæ partis radix, ad $11\frac{1}{2}$ medietatem maioris,
 ueniunt 16, collectū: 4 deinde collecti radix, & una inueniendæ radicis portio,
 23 totum maius nomen,
 16 collectum,
 7 residuum: ra. 7 deinde,
 residui radix, & altera inueniendæ radicis portio.
 Tota igitur binomij propositi radix quadrata,
 4 + ra. 7, quæ erat inuenienda.

Est autem, ut habet propositio huius iam commemorati senarij prima, linea irrationalis, & Ex binis nominibus una. Quod porro sit uera binomij radix, id multiplicatione sui in se probari potest.

ALIA DVO EXEMPLA, D' E BINOMIO secundo, tertio,

$\begin{array}{r} \text{ra. } 448 + 14 \\ \hline 448 \\ 196 \\ \hline 252 \\ 63 \\ \hline \end{array}$ ra. 63 ad ra. 112, ueniunt ra. 343, de ra. 448, ma. ra. 7 ergo $\sqrt{343} + \sqrt{7}$	$\begin{array}{r} \text{ra. } 448 + \text{ra. } 336 \\ \hline 448 \\ 336 \\ \hline 112 \\ 28 \\ \hline \end{array}$ ra. 28 ad ra. 112, ueniunt ra. 252 de ra. 448, ma. ra. 28 ergo $\sqrt{252} + \sqrt{28}$

radix quadrata est binomij propositi.

Linea itē irrationalis, & respectu quidē binomij secundi, Ex binis medijs prima, ut habet propositio secunda. Consideratione uerò binomij tertij, linea irrationalis, & Ex binis medijs secunda, ut habet propositio tertia. Quod porro uerè binomiorū radices quadratę inuentę sint, id multiplicatione, ut sequitur, examinari potest.

EXAMEN

binomij secundi, $\begin{array}{r} \text{ra. ra. } 343 + \text{ra. ra. } 7 \\ \hline \text{ra. ra. } 343 + \text{ra. ra. } 7 \\ \hline \text{ra. } 343 + \text{ra. } 7 \\ \hline \text{ra. ra. } 2401 \text{ uel } 7 \\ \text{ra. ra. } 2401 \text{ uel } 7 \\ \hline \end{array}$ Summa productorum. $\begin{array}{r} \text{ra. } 448 + 14 \\ \hline \end{array}$ binomia	binomij tertij, $\begin{array}{r} \sqrt{252} + \sqrt{28} \\ \hline \sqrt{252} + \sqrt{28} \\ \hline \sqrt{252} + \sqrt{28} \\ \hline \sqrt{7056} \\ \sqrt{7056} \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} \sqrt{448} + \sqrt{336} \\ \hline \end{array}$ proposita

Aliud

ALGEBRAE DESCRIPTIO.
ALIVD EXEMPLVM DE BINOMIO QVARTO.

$$\begin{array}{r} 24 \quad + \quad \text{ra.} \quad 448 \\ \hline 576 \text{ maioris nominis quadratum,} \\ 448 \text{ minoris nominis quadratum,} \\ 12 \text{ Residuum,} \\ 32, \text{ residui quarta pars,} \\ \text{ra. } 32, \text{ quartæ partis radix, ad } 12, \text{ medietatem maioris, colliguntur} \\ 12 + \text{ ra. } 32, \text{ cuius radix quadrata, Radix binomij } 12 + \text{ ra. } 32, \text{ una \&cæ. portio.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24, \text{ Totum maius nomen,} \\ 12 + \text{ ra. } 32, \text{ id quod collectum est,} \\ \hline \text{manet } 12 - \text{ ra. } 32, \text{ cuius radix quadrata, quæ est, Radix} \\ \text{residui } 12 - \sqrt{32}, \text{ portio altera.} \end{array}$$

Tota igitur binomij propositi radix quadrata est, Radix utriusq;
tam scilicet binomij $12 + \sqrt{32}$, quàm etiam residui $12 - \sqrt{32}$

Est autem linea irrationalis, & Maior uocatur, ut dicit propositio huius senarij
quarta. Quòd porro sit uera propositi binomij radix, multiplicatione, ut sequi-
tur, probari potest.

$$\begin{array}{r} \text{Radix binomij } 12 + \sqrt{32}, \text{ et radix resi. } 12 - \sqrt{32} \\ \text{Radix binomij } 12 + \sqrt{32}, \text{ et radix resi. } 12 - \sqrt{32} \\ \hline 12 + \sqrt{32}, \quad + \quad 12 - \sqrt{32} \\ \hline \text{ra. } 112 \\ \text{ra. } 112 \end{array}$$

Summa productorū $24 + \text{ra. } 448$, binomium scilicet propositum, bene igitur.

ALIA DVO EXEMPLA DE BINOMIO

quinto,

$$\begin{array}{r} \text{ra. } 448 + 12 \\ \hline 448 \text{ ma. nominis qua.} \\ 144 \text{ mi. nominis qua.} \\ \hline 304 \\ 76 \end{array}$$

ra. 76 ad ra. 112,
colligitur ra. 112 + ra. 76.

Huius nunc radix quadrata, nimirum radix bino-
mij ra. 112 + ra. 76,
una portio.

$$\begin{array}{r} \text{ra. } 448 \text{ Totum ma. no.} \\ \text{ra. } 112 + \text{ ra. } 76. \text{ Id quod col.} \\ \hline \text{ma. ra. } 112 - \text{ ra. } 76. \end{array}$$

Huius nunc radix quadrata, nimirum Radix re-
sidui ra. 112 — ra. 76.
pars altera.

Binomij igitur propositi radix est

$$\begin{array}{r} \text{Radix utriusq;} \\ \text{binomij scilicet } \sqrt{112} + \sqrt{76} \\ \& \text{ residui } \sqrt{112} - \sqrt{76} \end{array}$$

sexto,

$$\begin{array}{r} \text{ra. } 448 + \text{ ra. } 352 \\ \hline 448 \text{ ma. no. quadratum} \\ 352 \text{ mi. no. quadratum} \\ \hline 96 \\ 24 \end{array}$$

ra. 24 ad ra. 112,
colligitur ra. 112 + ra. 24.

mij ra. 112 + ra. 24
una portio

$$\begin{array}{r} \text{ra. } 448 \text{ Totum \&cæ.} \\ \text{ra. } 112 + \text{ ra. } 24 \text{ Id} \\ \hline \text{ma. ra. } 112 - \text{ ra. } 24 \end{array}$$

Huius nunc radix quadrata, nimirum Radix re-
sidui ra. 112 — ra. 24
pars altera.

$$\begin{array}{r} \text{Radix utriusq;} \\ \text{bino. scilicet } \sqrt{112} + \sqrt{24} \\ \& \text{ residui } \sqrt{112} - \sqrt{24} \end{array}$$

Est autem linea irrationalis, & uocatur
Rationale mediumq; potens, Duo mediâ potens,
ut quidem dicit propositio huius senarij
quinta sexta

G 3 Proba

PROBA BINOMII QVINTI.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Radix binomij} & \sqrt{112} + \sqrt{76} & \text{et ra. residui } \sqrt{112} - \sqrt{76} \\
 \text{Radix binomij} & \sqrt{112} + \sqrt{76} & \text{et ra. residui } \sqrt{112} - \sqrt{76} \\
 \hline
 & \sqrt{112} + \sqrt{76} & \& \sqrt{112} - \sqrt{76} \\
 & + 6 & \\
 & + 6 &
 \end{array}$$

Summa productorum ra. 448 + 12, & bene.

PROBA BINOMII SEXTI.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Radix binomij} & \sqrt{112} + \sqrt{24} & \text{et ra. residui } \sqrt{112} - \sqrt{24} \\
 \text{Radix binomij} & \sqrt{112} + \sqrt{24} & \text{et ra. residui } \sqrt{112} - \sqrt{24} \\
 \hline
 & \sqrt{112} & \sqrt{24} \quad \& \quad \sqrt{112} - \sqrt{24} \\
 & \text{ra. 18} & \\
 & \text{ra. 88} &
 \end{array}$$

Summa productorum ra. 448 + ra. 352&, bene.

Ethec quidem de binomiorum radicibus inueniendis dicta sufficient. Simili modo iam agendum est cum Residuis, cum & ipsa quadrata esse, atq; ita radices quadratas habere, ex propositione 91, & ordine sequentibus quinque eiusdem decimi Euclidis manifeste pateat. Quare pro ijs eodem modo operatione instituta.

Primi residui, quod est 23 — ra. 448, radix quadrata inuenitur esse, 4 — ra. 7. Est autem & ipsa Residuum, & irrationalis linea, ut habet propositio huius senarij prima. Secundi uero, quod est ra. 448 — 14, radix quadrata inuenitur, ra. 2. 343 — ra. 7. Quæ est linea irrationalis, & Mediæ residua prima, ex propositione 92. Tertijs autem, quod est ra. 448 — ra. 336, radix quadrata inuenitur, ra. 252 — ra. 28, quæ est linea irrationalis & Mediæ residua secunda, ex propositione 93. Quarti deinde, quod est 24 — ra. 448 radix quadrata inuenitur, Radix binomij 12 + ra. 32, minus, radix residui 12 — ra. 32, quæ est linea irrationalis, & Minor uocata, ex propositione 94. Quinti itē, quod est ra. 448 — 12, radix quadrata inuenitur, Radix binomij ra. 112 + ra. 76, minus radix residui ra. 112 — ra. 76, quæ est linea irrationalis, & Cum rationali medium totum conficiens linea, ex propositione 95. Sexti tandem, quod est ra. 448 — ra. 352, radix quadrata inuenitur, Radix binomij ra. 112 + ra. 24 minus radix residui ra. 112 — ra. 24 quæ est linea irrationalis, & Cum medio medijs totum conficiens linea, ex propositione huius senarij ultima 96.

Et licet satis iam superque, quomodo ex binomijs, residuis item, radices quadratæ inueniri debeant, traditum sit, ne quid tamen huius artis studiosi habeant, quod conquerantur unius atq; alterius exempli praxim, pro utroq; subiungere placuit. Sit itaq; propositum inuenire radicem quadratam,

$$\begin{array}{r}
 \text{ex binomio} \\
 72 - \sqrt{2880} \\
 \hline
 5185 \\
 2880 \\
 \hline
 2304 \\
 576 \\
 \hline
 24 \quad \text{ad } 36 \\
 \hline
 \text{ueniunt } 60 \text{ de } 72 \\
 \text{manent } 12
 \end{array}$$

ergo $\sqrt{60} +$ (quia bino.)
 $\sqrt{12}$, propositi binomij

radix quadrata erit,

$$\begin{array}{r}
 \text{ex residuo} \\
 72 + \sqrt{2880} \\
 \hline
 5185 \\
 2880 \\
 \hline
 2304 \\
 576 \\
 \hline
 24 \quad \text{ad } 36 \\
 \hline
 \text{ueniunt } 60 \text{ de } 72 \\
 \text{manent } 12
 \end{array}$$

ergo $\sqrt{60} -$ (quia resi.)
 $\sqrt{12}$, propositi residui

Sic

SIT NUNC PROPOSITVM HARVM INVENTARUM RADICUM, ut quæ sunt binomium & residuum sextum, radices quadratas inuenire.

ra. 60 + ra. 12		ra. 60 — ra. 12	
60		60	
12		12	
48		48	
12		12	
J 12 ad J 15		J 12 ad J 15	
ueniunt J 15 + J 12		ueniunt J 15 + J 12	
de ra. 60		de ra. 60	
ma. J 15 — J 12.		ma. J 15 — J 12.	
Propositū igitur binomij		Propositū igitur residui	
radix quadrata est			
Radix utriusq;		Radix bino-	
binomij scilicet J 15 + J 12		mij J 15 + J 12, minus	
& residui J 15 — J 12.		radix re. J 15 — J 12.	

SEQUITVR PROBA, INSTITVTA PRO residuo.

radix bi. J 15 + J 12 minus ra. re. J 15 — J 12	
radix bi. J 15 + J 12 minus ra. re. J 15 — J 12	
J 15 + J 12 plus J 15 — J 12	
minus J 3	
minus J 3	
Summa pro. J 60 — J 12 Residuum	
propositum, bene igitur operatum.	

EST PORRO QUIDAM CANON GENERALIS ALIVS, per quem iuxta Algebrae regulas binomiorum & residuorum radices inueniuntur, qui sic se habet.

Binomio uel Residuo aliquo proposito, recipiatur dimidium portionis, uel nominis minoris, maiore deinde portione iuxta Algebrae regulas in duas partes sic diuisa, ut harum multiplicatio, unius scilicet cum altera tantum, quantum nimirum quadratum medietatis minoris fuerit, producat, res perfecta erit, cum tandem binomij uel residui propositi radix, per harum partium radices simul collectas, ratione binomij: uel una ab altera subtracta, si residuum propositum fuerit, significetur. Hunc autem canonem infra, ubi res & similitudo postulauerint, tractabimus.

Haecenus de radicibus, binomiorum & residuorum inueniendis. Ne quis autem terreatur, quod in hac tractatione decimi libri Euclidis subinde mentionem facimus, cum uidelicet illa sine decimi libri cognitione intelligi nequeant, ac prius cognosci librum hunc oporteat, quam harum explicatio regularum suscipiatur. Quod ipsum sane uerum esset, si perfectam & integram horum quis cognitionem requireret, sed tantum de eis intelligere, ut quæ iam sequuntur, planiora sint, etiam si nullas plane adduxissemus propositiones, res satis descripta esset. Quare eas hanc ob causam solum propositas à nobis esse existimet quispiam, ut nimirum earum operationes certis rationibus fundari persuasum sibi haberet: ansam deinde etiam, his nunc perceptis, arriperet, subtilius ista exquirendi, cum iam sint aliquo modo descripta, & quodammodo primis lineamentis adumbrata.

Sequuntur

SECVVNTVR NVNC AD AEQVA

TIONES SVpra TRADITAS, AD EA ETIAM

quæ hæcenus de furdīs expofita funt, commodius exercenda,
exempla alia.

Primum. Efto triangulum rectangulum, atq; cathetus eius 8 — $\sqrt{32}$,
bafis uerò & hypotenufa fimul, 16 — $\sqrt{128}$, quanta erit utraq; bafis fcili-
cet & hypotenufa, linea feorfim, quæritur. Facit

Bafis quidem 6 — $\sqrt{18}$

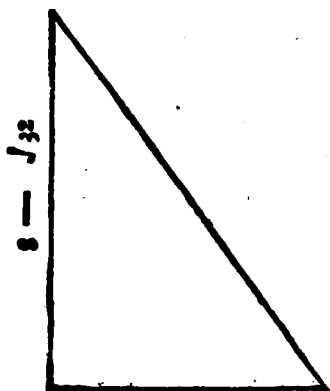
Hypotenufa uerò 10 — $\sqrt{50}$

OPERATIO.

Cathetus ex hypotefi, funt 8 — $\sqrt{32}$

Sit autem nunc bafis 1 ra.

Hypotenufa igitur, erunt 16 — $\sqrt{128}$ N minus 1 ra.



Et quia quadratum hypotenufæ in triangulo rectan-
gulo, ex propofitione 47 primi, quadratis catheti & ba-
fis linearum æquale eft. Singularum igitur linearum qua-
dratis acceptis, de eo etiam quod ab hypotenufa descri-
bitur, catheti uel bafis, utro uoles, quadrato, fubtracto, id
quod relinquitur, ex communi illa notitia, Si ab æquali-
bus æqualia fubtrahantur, &cæ. alterius, bafis quidem,
ubi catheti, catheti uerò, ubi bafis quadratum fubtra-
ctum fuerit, quadrato æquale erit.

SECVITVR NVNC DICTORVM calculus.

8 — $\sqrt{32}$ N Cathetus

1 radix Bafis

8 — $\sqrt{32}$

1 ra.

96 — $\sqrt{8192}$ quadratum

1 pri. quadratum

16 — $\sqrt{128}$ N minus 1 ra. Hypotenufa,

16 — $\sqrt{128}$ N minus 1 ra.

256 + 128 N plus 1 pri.

— $\sqrt{32768}$ N bis

minus 16 — $\sqrt{128}$ radi. bis

384 — $\sqrt{131072}$ N, plus 1 pri. minus 32 — $\sqrt{512}$ ra.

quadratum hypotenufæ. A quo primò quadratum catheti, deinde etiam qua-
dratum bafis fubtrahendum eft, & relinquantur tandem,
ratione quidem fubtractionis prioris,

288 — $\sqrt{73728}$ N plus 1 pri. minus 32 — $\sqrt{512}$ ra.

æquales uni primæ,

ratione uerò fubtractionis pofterioris,

384 — $\sqrt{131072}$ N minus 32 — $\sqrt{512}$ ra.

æquales 96 — $\sqrt{8192}$ N

Et

Et ultimò, iuxta illam communem notitiam, Si æqualibus æqualia adſciantur, &cæ. Si item ab æqualibus æqualia subtrahantur &cæ. ueniunt.

$$288 - \sqrt{73728} \text{ N } \text{æqua.} \quad 52 - \sqrt{512} \text{ ra.}$$

Est prima æquatio. Diuisione igitur numeri quantitatis debilioris in numerum quantitatis potentioris, radice ualor cognoscendus: per eum deinde, Basis quantitas exprimenda est.

Quoniam autem huius diuisionis diuidens quantitas est residuum, per suum igitur binomium, quod est $32 + \sqrt{512}$, alia diuidenda, alia item quantitas diuidens, multiplicatione, inuenienda est, ut sequitur.

$$\begin{array}{r} 288 - \sqrt{73728} \\ \text{cum } 32 + \sqrt{512} \\ \hline 9216 - \sqrt{6144} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - \sqrt{73728} \\ + \sqrt{41472} \\ \hline 3072 - \sqrt{4608} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{millies} \\ \text{uicies} \\ \text{quater} \end{array} \right.$$

Quantitas diuidenda

$$\begin{array}{r} 32 - \sqrt{512} \\ \text{cum } 32 + \sqrt{512} \\ \hline 1024 - 512 \end{array}$$

hoc est,
512
diuidens

INSTITVATVR NVNC DIVISIO.

$$\begin{array}{r} \text{Diuidantur} \quad 3072 - \sqrt{4608} \quad \text{millies uicies \&cæ.} \\ \hline \text{exeunt} \quad 6 \quad + \sqrt{18}, \quad \& \text{ tanta est basis quantitas.} \\ \text{in} \quad 512 \quad 522, \text{ quinquagies decies bis.} \\ \quad 256 \end{array}$$

Et quia iam basis quantitas nota est, quanta hypotenusa sola fuerit, cum hæ duæ quantitates simul, ex hypothesi, $16 - \sqrt{128}$ sint, subtractione manifestabitur

ALIUD EXEMPLVM
simile.

Triangulũ esto rectangulum, atq; cathetus eius $8 + \sqrt{128}$, basis uerò & hypotenusa simul, $16 + \sqrt{512}$, quanta erit utraq; basis scilicet & hypotenusa, linea seorsim, queritur. Facit

$$\begin{array}{r} \text{Basis quidem} \quad 6 + \sqrt{72} \\ \text{Hypote. uerò} \quad 10 + \sqrt{200} \end{array}$$

OPERATIO.

Cathetus, ex hypothesi sunt

$$8 + \sqrt{128}$$

Sit autem nunc basis

1 radix

Hypotenusa igitur erunt

$$16 + \sqrt{512} \text{ minus } 1 \text{ ra.}$$

Multiplicatione querantur quadrata laterum, & erunt

Catheti quidem

$$192 + \sqrt{32768}$$

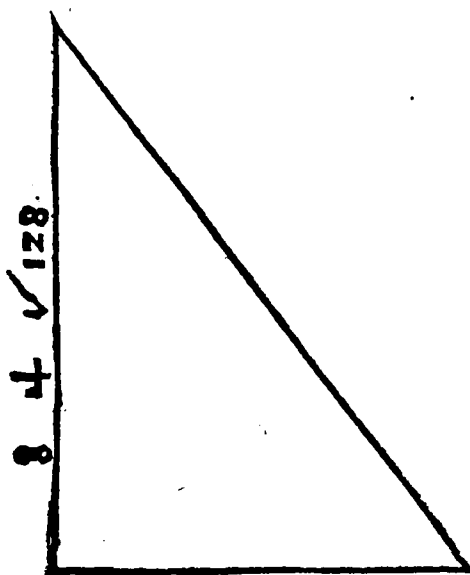
Basis uerò

1 pri.

ac hypotenusa deinde,

$$768 + \sqrt{514288} \text{ N, plus } 1 \text{ pri. minus } 32 - \sqrt{2048} \text{ H}$$

Quare



Huius igitur radice ut sequitur quæsitæ,

	<u>2448</u>	—	<u>√ 5971968.</u>
	5992704	maioris quadratum,	
	<u>5971968</u>	minoris quadratum,	
	20736	residuum,	
	5184	residui quarta pars,	
	72	quartæ partis radix, ad 1224,	
ueniunt	1296,	unius portionis quadratum, de 2448	
manent	1152,	alterius portionis quadratum,	

Radix igitur, ac per consequens trianguli propositi
area, 36 — √ 1152

OPERATIO TRIANGULI ALTERIVS.

Lateræ	Excessus
10 + √ 200	2 + √ 8
8 + √ 128	4 + √ 32
6 + √ 72	6 + √ 72
<u>24 + √ 1152</u>	<u>Medietas 12 + √ 288</u>

24 + √ 512 primum 216 + √ 41472 secundum

Porrò 9792 + √ 95551488, tertium productum. Atq; area deinde trian-
guli 72 + √ 4608, id quod sequenti calcu-
lo manifestabitur.

<u>9792</u>	+	<u>√ 95551488</u>
95883264	maioris	95551488 minoris quadratum,
<u>331776</u>	residuum,	82944 residui quarta pars,
288	quartæ partis radix,	ad 4896,
ueniunt 5184	unius portionis, &cæ.	de 9792,
manent 4608,	alterius portionis quadratum,	quare
72 + √ 4608	radix binomij, &cæ.	

EXEMPLVM SECVNDVM.

Sunt 12 diuisa in duas partes. Quoniam autem partium multiplicatio,
unius quidem cum altera, 20 uel 28 producit, quanta erit utraq; pars?

		minor	maior
		2	10
Facit quantum ad.	$\begin{cases} 20 \\ 28 \end{cases}$	sunt	
		6 — ra. 8,	6 + ra. 8

Tertium. Sunt 12 diuisa in partes duas. Quoniam autem partium qua-
drata simul 90 uel 100 faciunt, partes igitur quantæ sunt?

Respondetur respectu

		minor	maior
quidem	90	3	9
		sunt	
uerò	100	6 — √ 14,	6 + √ 14.
		H 2	Sequitur

BREVIS REGVLARVM
SEQVITVR OPERATIONIS EXAMEN.

Sumantur numeri secundò inuenti,

$$\begin{array}{rcl}
 6 - \sqrt{14} & \text{minor} & 6 + \sqrt{14} \text{ maior} \\
 \hline
 6 - \sqrt{14} & & 6 + \sqrt{14} \\
 \hline
 36 + 14 & & 36 + 14 \\
 \hline
 100. & \& \text{ bene.} &
 \end{array}$$

Quartum. Numerus in duo diuisus est, quoniam autem partium differentia sunt 6, qui uerò ex multiplicatione unius cum altera producitur numerus, 27 uel 36, quantus sit ipse diuisus, quantè deinde etiam partes, quaeritur. Facit

diuisus quidem 12 uel ra. 180

Partes deinde, respectu

	minor	maior
quidem 27	3	9
uerò 36	ra. 45 — 3	ra. 45 + 3

Vel, qui uerò ex partium quadratis colligitur numerus, 50 sunt, uel 72, quantus &c.

Facit diuisus quidem 8 uel ra. 108

Partes uerò, respectu

	minor	maior
quidem 50	1	7
uerò 72	ra. 27 — 3	ra. 27 + 3

OPERATIO PARTIS PRIORIS, QVANTVM
ad multiplicationem partium,

ponatur	1	ra.	totus diuisus.
Et quia	6	N,	partium differentia, ex hypothesi,
erit	$\frac{1}{2}$ ra. — 3	N	minor,
&	$\frac{1}{2}$ ra. + 3	N	maior pars.

Quare quantum ad multiplicationem, uenit

$$\frac{1}{4} \text{ pri.} - 9 \text{ N} \quad \text{æqual.} \quad 27 \text{ uel } 36 \text{ N.}$$

Quantum uerò ad partium quadrata, uenit

$$\frac{1}{2} \text{ pri.} + 18 \text{ N} \quad \text{æqual} \quad 50 \text{ uel } 72 \text{ N.}$$

ALITER INSTITVTA HVIVS EXEM-
pli operatio.

Quærantur primò partes, deinde etiam ipse totus numerus.

Sit itaque

1 ra. maior,	uel	1 ra. minor,
1 ra. — 6 N pars minor,		1 ra. + 6 N maior.

uenit

uenit, multiplicatione facta,

ratione quidem	{	productorum,	1 pri. — 6 ra.	æqual. 27, uel 36 N.
			1 pri. + 6 ra.	
		quadratorum uerò,	1 pri. æqua. 6 ra. + 7 N, uel + 18 N.	æqual. 7, uel 18 N.
			1 pri. + 6 ra.	

EXEMPLVM QVINTVM.

Sunt 12, uel 19 diuisa in duas partes.

Quoniam autem una parte cum altera multiplicata, producto deinde in partium differentiam diuiso: $17\frac{1}{2}$ exeunt, quantę partes sint, queritur.

	maior	minor pars.
Facit	7	5
	ra. $396\frac{1}{2}$ — 8	27 — ra. $396\frac{1}{2}$

Vel, Quoniam autem partium quadrata simul iuncta, atq; id quod colligitur, in partium differentiam diuisum: 37 exeunt, quantę partes sint queritur.

	maior	minor pars
Facit	7	5
	28 — ra. 252,	ra. 252 — 9

OPERATIO PARTIS PRIORIS.

1 ra.	Maior,	uel	1 ra.	Minor,
12 N — 1 ra.	minor.		12 N — 1 ra.	maior.
12 ra. — 1 pri.	produ.		12 ra. — 1 pri.	productum,
2 ra. — 12 N	differentia		12 N — 2 ra.	differentia.

AEQVATIO IGITVR

$\frac{12 \text{ ra.} - 1 \text{ pri.}}{2 \text{ ra.} - 12 \text{ N}}$	æqua.	$17\frac{1}{2} \text{ N}$	$\frac{12 \text{ ra.} - 1 \text{ pri.}}{12 \text{ N} - 2 \text{ ra.}}$	æqua.	$17\frac{1}{2} \text{ N}$

SIC ETIAM INSTITVATVR OPERATIO
cum numero 19, & uenit

1 pri. + 16 ra.	1 pri. + $332\frac{1}{2} \text{ N}$
æquales $332\frac{1}{2} \text{ N}$	æquales 54 ra.

Posterioris partis operatio ex priore nunc est facilis.

EXEMPLVM SEXTVM.

Sunt tres numeri, quorum primus cum aliquo alio, quarto scilicet, ad reliquos duos simul sumptos, sit $\frac{1}{2}$. Secundus uerò cum eodem quarto, ad reliquos, sit in ratione $\frac{2}{3}$. Ac tertius deinde, & ipse cum eodem quarto numero, reliquis duobus æqualis sit. cum sic ille quartus numerus, ex hypothese, 8 esse ponatur, quanti nunchi tres numeri esse debeant, queritur.

	Primus,	secundus,	tertius numerus.
Facit	24	40	56
		&	
		H 3	

Operatio

OPERATIO.

Primus secundus & tertius. Quartus alius,
Ponatur 1 radix, & erunt 3 ra. + 24 N, atq; 8.

Et quoniam secundus cum dato, tertij & primi numerorum tres quintæ sunt: tota igitur omnium summa ad eosdem, tertium & primum, numeros, in ratione, ut 8 ad 5, uel octo quintæ erunt. Per regulam ergo proportionum, dicendo 8 dant 5, quid 4 ra. + 32 N: primi & tertij numerorum summa manifestabitur. Quoniam autem primus numerus notus est, cum is sit 1 radix posita, eodem primo de hac summa subtracto: tertius, hoc tertio deinde de tertij & secundi numerorum summa subtracto: secundus etiam numerus manifestabitur. Ponuntur itaq; numeri singuli seorsim sic.

Primus	secundus	tertius	quartus.
1 ra.	$1\frac{1}{2}$ ra. + 4 N	$1\frac{1}{2}$ ra. + 20 N	8

Et quoniam etiam tertius cum quarto numeris primo & secundo æqualis est, tertius igitur quarto, secundus uero numero primo additus, quæ colliguntur,

$1\frac{1}{2}$ ra. + 23 N & $2\frac{1}{2}$ ra. + 4 N
inter se æquales erunt. Radix igitur, hoc est, primus numerus 24, secundus 44, & tertius 56 uenient, quod probari potest.

Septimum. Sunt tres numeri, quorum primus cum aliquo alio, quarto scilicet, ad reliquos duos simul sumptos: sesquialteram, secundus uero cum eodem quarto ad reliquos: ut 3 ad 5. ac tertius deinde, & ipse cum eodem quarto numero: equalitatis rationem constituit, cum ille quartus numerus iuxta propositum 9 uel 24 aut unitas esse ponatur, quanti hi tres numeri esse debeant, queritur.

Facit, quantum ad nume-

	Primus	secundus	tertius
rum { 9 . . .	$13\frac{14}{19}$	$5\frac{4}{19}$	$9\frac{18}{19}$
24 . . .	$36\frac{13}{19}$	$13\frac{17}{19}$	$26\frac{10}{19}$
unitatē .	$1\frac{10}{19}$	$0\frac{11}{19}$	$1\frac{2}{19}$

Octauum. Diuidantur 132 in tres partes sic, ut prima multiplicata per 3, producat tres quartas minus 3, secundæ partis diuisæ in 2, Et iterum prima multiplicata per 4, producat tres quintas minus 1, tertię partis diuisæ in 7, queritur, &cq.

	prima	secunda	tertia pars
Facit	2	24	105

OPERATIO.

Esto prima pars 1 radix, hæc multiplicata per 3, producuntur 3 ra. Et quoniam hæ ex hypothesi, in ternario minus sunt, quàm tres quartæ partis secundæ, diuisæ in duo, hoc est, quàm tres quartæ dimidiij secundæ partis, ad 3 ra. igitur 3 N addendi, eius deinde quod colligitur, (cum illud tres quartæ tantū sint) integrum regula proportionum, dicendo $\frac{3}{4}$ sunt 3 ra. + 3 N, quid unum, quærendum est. Veniunt autem sic 4 ra. + 4 N, ipsum integrū, ac per consequens, secunda pars in duo diuisa, eodē igitur integro bis sumpto, secunda pars, 8 ra. + 8 N erunt. Non

Non aliter iuxta exempli hypotheses, & tertia pars quaerenda erit. Quo facto, partes erunt.

Prima 1 ra. secunda 8 ra. + 8 N

Tertia $46\frac{2}{3}$ ra. + $11\frac{2}{3}$ N, Atq;

ultimò tandem $55\frac{2}{3}$ ra. æqua. $111\frac{1}{3}$ N.

Nonum. Diuidantur 36 in tres partes sic, ut prima multiplicata per 6, producat sesquialterum plus 9, secundæ partis diuisæ in 5: et secunda diuisa in 8, statuatur sesquiquartum minus 4, tertiæ partis multiplicatæ per 3, queritur &c.

Facit $3\frac{14}{27}$ $30\frac{56}{81}$ $2\frac{31}{27}$

PONITVR AD OPERATIONEM SIC.

Prima 1 ra.

secunda 20 ra. — 30 N

tertia 10 ra. + 1 N

Summa partium $21\frac{2}{3}$ ra — $29\frac{14}{27}$ N 15 æqua. 36 N.

Eodem modo 45 in tres partes diuisa,

	Prima	secunda	tertia
exeunt partes	$3\frac{149}{27}$	$39\frac{11}{81}$	$2\frac{211}{27}$

Id quod probari potest, ut sequitur.

Prima		secunda pars	
	$3\frac{149}{27}$		$39\frac{11}{81}$
cum 6		in 8	
	$20\frac{244}{27}$		$4\frac{233}{260}$
minus 9		plus 4	
	$11\frac{244}{27}$ Dic		$8\frac{233}{260}$ Dic
3 dant $11\frac{244}{27}$, quid 2,		5 dant $8\frac{233}{260}$, quid 4	
Facit $25\frac{46}{27}$		Facit $2\frac{211}{27}$	
cum 5		in 3	
produ. $39\frac{11}{81}$, le-		exeunt $2\frac{211}{27}$, tertia	
cunda		pars. bene igitur.	

Decimum. Propositum est, numerum 6, 12, 8 uel 21, seu quemcunque alium numerum, diuidere in duas portiones, quarum maioris quadratum tantum faciat, quantum numerus ipse, cum sua portione minore multiplicatus, producit.

Facit ratione numeri

	Maior	minor portio
6,	ra. 45 — 3	9 — ra. 45
12	ra. 180 — 6	18 — ra. 180
8	ra. 80 — 4	12 — ra. 80
21	ra. $551\frac{1}{4}$ — $10\frac{1}{2}$	$31\frac{1}{2}$ — ra. $551\frac{1}{4}$

Similem

Similem diuisionem lineæ alicuius datæ proponit Euclides in secundo, per undecimam: in sexto deinde, per propositionem 30, quod obiter indicare libuit,

OPERATIO NUMERI VNIVS, 6 SCILICET,
 sit instar omnium. Esto itaq;
 1 ra. maior, uel 1 ra. minor,
 erunt 6 N — 1 ra. minor. 6 N — 1 ra. maior.
 Quadrata deinde portionum maiorum,
 1 pri. 36 N — 12 ra. + 1 pri.
 Producta uerò, &cæ.
 36 N — 6 ra. 6 ra.
 Atq; tandem æquatio ultima,
 1 pri. + 6 ra. æqua. 36 N, uel 1 pri + 36 N æqua. 18 ra.
 Procedatur nunc secundum canones secundæ æquationis primum
 & tertium, & ueniet ut positum

SEQUITVR PROBA INSTITVTA PRO
 numero primo 6.

54 — $\sqrt{1620}$

Totus	Maior portio	minor
6	ra. 45 — 3	9 — ra. 45
	E	
	$\sqrt{}$	
	54 — $\sqrt{1620}$	

PROPONVNTVR HVIVS MODI EXEMPLA
 etiam sic.

Diuidantur 24 in duas portiones inæquales, ut, cum maiorem in seipsam, totum uerò numerum 24 cum minore portione multiplicauero, æquales numeri producantur, Facit

Maior		Minor portio
ra. 720 — 12	&	36 — ra. 720

In hunc modum radice numeri 48 diuisa,
 exeunt partes, Maior quidem ra. 60 — ra. 12, minor uerò
 ra. 108 — ra. 60, quod probari potest.

Vndecimū. Et quia numero in duas portiones diuiso, quarū maioris quadratū tantū faciat, quantū totus diuisus numerus cū minori sua portione multiplicatus producit, quantus fuerit ipse totus numerus, minor item portio, cum maior portio ex hypothesi sit ra. 80 — 4, uel ra. 45 — 3

quæritur. Facit	8 } 6 }	totus	12 — ra. 80 9 — ra. 45	} minor portio,

OPERATIO.

Totus	Maior	Minor portio,
	$\sqrt{80 - 4}$	$\sqrt{80 - 4}$
1 ra.		
	$\sqrt{45 - 3}$	$\sqrt{45 - 3}$
	quare 1 radix, minus	

Atq;

Atq; facta multiplicatione, ueniunt

$$\begin{array}{rcl} 96 - \sqrt{5120} & N, & \text{æqua.} \quad 1 \text{ pri. minus} \quad \sqrt{80} \quad 4 \text{ ra.} \\ 54 - \sqrt{1620} & & \sqrt{45} - 3 \end{array}$$

Vel ex communi quadam notitia,

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{80} - 4 & 96 - \sqrt{5120} & N, \text{ æqua.} \quad 1 \text{ pri.} \\ \text{ra.} + & & \\ \sqrt{45} - 3 & 54 - \sqrt{1620} & \end{array}$$

Est autem exemplum canonis æquationis secundæ secundi, atq; eius solutio talis.

Quantitates æquationis quantum ad primum, sunt

Media	minima	maxima quantitas
$\sqrt{80} - 4 \text{ ra.} + 96 - \sqrt{5120}$	N	$\text{æqua.} \quad 1 \text{ pri.}$
$\sqrt{20} - 2, \text{ in se, } 24 - \sqrt{320}, \text{ plus } 96 - \sqrt{5120}$		
ueniunt $120 - \sqrt{8000}$. Huius radix		
sunt $10 - \sqrt{20}$		
plus $\sqrt{20} - \sqrt{2} \&cæ.$		

Cum quantitatibus æquationis secundi, eodem modo operatione instituta, æquæ etiam feliciter succedet.

EXEMPLVM DVODECIMVM.

Duobus numeris inequalibus, 34 & 30 datis, propositū est, maiorem in duas portiones ita diuidere, ut inter eas medietas minoris sit medio loco proportionalis. uel, quod idē est, ut qui sub portionibus, una cum altera multiplicata, continetur numerus, æqualis sit quartæ parti quadrati, numeri minoris,

Facit $25.$ & $9.$

OPERATIO.

Maior	Minor	Medietas minoris
34	30	15
Quantitates ex hypothese proportionales		
1 ra.	15	34 N — 1 ra.
quare 34 ra. — 1 pri.	æqua.	225 N &cæ.

ALIA HUIVS DIVISIONIS EXEMPLA.

Numeri propositi maior,	minor	Medietas minoris	Partes diui- sionis	
117	108	54	81	36
65	56	28	49	16
49	27	$13\frac{1}{2}$	$24\frac{1}{2} + \sqrt{418}$	$24\frac{1}{2} - \sqrt{418}$
30	18	9	27	3
25	24	12	16	9
13	12	6	9	4
5	4	2	4	1
$8\frac{1}{2}$	8	4	$5\frac{1}{2}$	3
$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8} + \sqrt{\frac{17}{376}}$	$\frac{3}{8} - \sqrt{\frac{17}{376}}$

Posuimus huius diuisionis exempla plura, cum eorum usus in decimo
Euclidis libro requiratur.

NVNC PRO RADICIBVS BINOMIO-

RVM ET RESIDVORVM INVENIENDIS, CVM
eadem sit illas eliciendi, quæ est propositæ diuisionis, operatio, unum
atq; alterum exemplum subiiciemus.

Sit binomium ra. $448 + 14$, uel residuum ra. $448 - 14$, atq;
propositum, radicem eius quadratam elicere.

OPERATIO.

Duæ huius binomiij uel residui portiones, seu nomina inæqualia,

	maius		minus		medietas, mī.
sunt ra.	448	&	14,	atq;	7.

Quantitates proportionales,

1 radix 7 $\sqrt{448} N - 1$ ra.

Facta multiplicatione, uenit

$\sqrt{448}$ radicem $- 1$ pri. æqua. 49 N

Vel, ex communi illa notitia, Si æqualibus æqualia addantur,

$\sqrt{448}$ radi. æqua. 1 pri. + 49 N.

Est autem exemplum canonis tertij æquationis secundæ, atq; eius
solutio, ut sequitur.

Numerus characteris mediij $\sqrt{448}$, huius dimidium $\sqrt{112}$, dimidij uerò huius
quadrati 112, minus 49, manent 63, cuius radix quadrata, $\sqrt{63}$, de medietate ra-
dicū, $\sqrt{112}$, subtrahita, uel ei addita, colligitur hic quidē $\sqrt{343}$, una desideratæ radi-
cis portio, manet uerò illic $\sqrt{7}$, portio altera. Et quia est binomiū propositū: per
radices portionum aggregatas, ut $\sqrt{343} + \sqrt{7}$, Binomiij, uel, quia est residuum
propositum: per id quod relinquitur, postquam minoris radix de radice portionis
maioris subtrahita est, nimirum $\sqrt{343} - \sqrt{7}$, residui propositi radix indicabi-
tur, id quod examinari poterit.

SEQUVNTVR HVIVS REI DVO EXEMPLA

alia, unum quidem pro binomio tertio, alterum uerò pro
sexto residuo expositum.

Binomium tertium $\sqrt{448} + \sqrt{336}$

Maius	minus nomen	Minoris me.
$\sqrt{448}$	$\sqrt{336}$	$\sqrt{84}$

Quantitates proportionales

1 radix $\sqrt{84}$ $\sqrt{448} N - 1$ radice.

Facta multiplicatione, uenit ultimò

$\sqrt{448}$ radicem æqua. 84 N + 1 pri.

$\sqrt{112}$ in se, 112, minus 84, manent 28. Huius radix qua-
drata, $\sqrt{28}$, de $\sqrt{112}$ subtrahita, uel ad $\sqrt{112}$ addita, manet $\sqrt{28}$, uel uenit $\sqrt{252}$.
Harum partium radices simul iunctæ, ut $\sqrt{252} + \sqrt{28}$. Binomiij, radice uerò
unius de alterius portionis radice subtrahita: per id quod relinquitur, nimirum
 $\sqrt{252} - \sqrt{28}$, Residui propositi radix indicabitur.

Residuum

Residuum sextum $\sqrt{448} - \sqrt{352}$
 Maius minus nomen $\sqrt{352}$ Minoris medietas $\sqrt{88}$
 $\sqrt{448}$
 Quantitates proportionales,
 1 radix $\sqrt{88}$ $\sqrt{448} N - 1 \text{ ra.}$
 Facta multiplicatione, uenit ultimò
 $\sqrt{448}$ radicum æqua. $88 N + 1 \text{ pri.}$
 atq; partes deinde,
 maior quidem $\sqrt{112} + \sqrt{24}$ minor uerò $\sqrt{112} - \sqrt{24}$
 Totius tandem residui radix,
 Radix binomij $\sqrt{112} + \sqrt{24}$ minus ra. residui $\sqrt{112} - \sqrt{24}$
 Nominis uerò contrarij, Binomij scilicet, radix est
 Radix utriusq; hoc est,
 & binomij $\sqrt{112} + \sqrt{24}$, atq; etiam residui $\sqrt{112} - \sqrt{24}$.

EXEMPLVM DECIMVM TERTIVM.

Diuidantur 10 in duas portiones, quarum una cum altera multiplicata, 15, 20, 24, 1 uel $\frac{3}{4}$, &cæ. producantur.

Facit ratione nume

	maior	minor portio
15,	$5 + \sqrt{10}$	$5 - \sqrt{10}$
20,	$5 + \sqrt{5}$	$5 - \sqrt{5}$
24,	6	4
1,	$5 + \sqrt{24}$	$5 - \sqrt{24}$
$\frac{3}{4}$	$5 + \sqrt{24\frac{1}{4}}$	$5 - \sqrt{24\frac{1}{4}}$

OPERATIO.

Sit 1 radix, una, & $10 N - 1 \text{ ra.}$ altera portio.
 Et ueniunt facta multiplicatione,
 $10 \text{ ra.} - 1 \text{ pri.}$ æqua. $15, 20, 24, \&cæ. N.$

Decimum quartum. Sint tres numeri, & esto quòd primus cum 6, secundi $\frac{3}{4}$; secundus uerò cum 4, ipsum tertium bis, & eius $\frac{1}{4}$; ac tertius deinde minus 9, primi numeri tres quartas contineat, queritur de numeris.

	Primus	secundus	tertius
Facit	$48\frac{1}{2}$	$81\frac{1}{2}$	38

OPERATIO.

1 ra. Pri. $3 \text{ ra.} + 91 N$ secun. $6 \text{ ra.} + 52 N$ Ter.
 $\frac{2}{9}$
 quare $6 \text{ ra.} - 29 N$ æqua. $\frac{3}{7} \text{ ra.}$

Decimum quintum. Detur numerus quadratus, cuius radicis quadruplo 21 additis, quod inde colligitur, ad ipsum quadratum se habeat in ratione $3\frac{2}{3}$ uel $2\frac{1}{2}$, uel equalitatis, &cæ. queritur.

Facit 9, uel $10\frac{24}{81} + \sqrt{31\frac{6129}{8101}}$, uel 49.

OPERATIO.

1 radix 1 pri. $4 \text{ ra.} + 21 N.$ I 2 Propor-

Proportionalitates.

$$4 \text{ ra.} + 21 \text{ N} \quad \text{ad} \quad 1 \text{ pri.} \quad \text{ut} \quad \left\{ \begin{array}{l} 11 \\ 9 \\ 1 \end{array} \right. \quad \text{ad} \quad \left\{ \begin{array}{l} 3 \\ 4 \\ 1. \end{array} \right.$$

Multiplicatione facta, ueniunt

$$\begin{array}{l} 12 \text{ ra.} + 63 \text{ N} \\ 16 \text{ ra.} + 84 \text{ N} \\ 4 \text{ ra.} + 21 \text{ N} \end{array} \quad \text{æquales} \quad \left\{ \begin{array}{l} 11 \text{ pri.} \\ 9 \text{ pri.} \quad \&\text{cæ.} \\ 1 \text{ pri.} \end{array} \right.$$

SEQVITVR HVIVS EXEMPLI EXAMEN.

Sumatur ad examinandum numerus secundus.

$$10 \frac{74}{81} \quad + \quad \sqrt{31 \frac{6529}{6561}}$$

Huius radix quadrata, $\sqrt{10 \frac{74}{81} + \frac{8}{9}}$, quater sumpta, uenit $\sqrt{16 \frac{72}{81} + 5 \frac{5}{9}}$

Additis 21, colliguntur $\sqrt{16 \frac{72}{81} + 24 \frac{5}{9}}$. Et quoniam hæc summa ad ipsum quadratum, $10 \frac{74}{81} + \sqrt{31 \frac{6529}{6561}}$, se, ut positum est, habere debet, sicut 9 ad 4. Facta igitur multiplicatione primæ cum quarta, secundæ deinde cum quantitate uel numero tertio, cum idē numerus, nimirum, $\sqrt{259 \frac{49}{81} + 98 \frac{5}{9}}$, utrinque producat: quod hoc inuento numero, exemplo satisfactum sit, ex posteriori parte propositionis decimæ sextæ sexti Euclidis tandem infertur. Vel, facta igitur diuisione utriusque antecedentis in suum consequens, cum æquales inter se sint numeri exeuntes: similes etiam rationis numeros, summam scilicet, quadratum, 9 & 4, esse constabit. Est autem communis exiens $2 \frac{1}{4}$.

Decimum sextum. Sunt tres numeri, primus quidem ad ipsum tertium, triplus; secundus uerò ad eundem tertium, ut 3 ad 4. Quoniam autem 6 de primo subtractis, tribus uerò secundo numero additis, ac residuo deinde cum collecto multiplicato: nouencuplus, uel quadruplus sesquitercius, ad tertium numerum producit. Quanti igitur illi tres numeri singuli seorsim sint, in dubium uenit.

Facit, quantum ad rationem

	Primus	secundus	tertius,
nouen.	12	3	4
$4 \frac{1}{3}$ uerò,	$\sqrt{1 \frac{833}{81}} - \frac{1}{9}$	$\sqrt{1 \frac{833}{1296}} - \frac{1}{36}$	$\sqrt{1 \frac{833}{729}} - \frac{1}{27}$

OPERATIO.

Primus	1 ra.	1 ra. — 6 N	residuum
secun.	$\frac{1}{4}$ ra.	$\frac{1}{4}$ ra. + 3 N	collectum
tertius	$\frac{1}{3}$ ra.	Facta multiplicatione,	
producit $\frac{1}{4}$ pri. + $1 \frac{1}{2}$ ra. — 18 N æqua. 3 uel $1 \frac{4}{9}$ ra.			

Et ultimò tandem in integris

$$1 \text{ pri.} \quad \text{æquales} \quad 6 \text{ ra.} + 72 \text{ N.}$$

$$9 \text{ pri.} + 2 \text{ ra.} \quad \text{æquales} \quad 648 \text{ N.}$$

Quare radice ualor, & primus numerus 12. uel $\sqrt{72 \frac{81}{81}} - \frac{1}{9}$, ut dictum est. Secundum porro & tertium dat ipsa positionis solutio.

SEQVITVR ALIA HVIVS EXEMPLI POSITIO.

Primus	4	4 ra. — 6 N	residuum
secundus	1 ra.	1 ra. + 3 N	collectum
tertius	$1 \frac{1}{3}$ ra.		

Facta multiplicatione, ueniunt ultimò

$$4 \text{ pri.} \quad \text{æquales} \quad 6 \text{ ra.} + 18 \text{ N}$$

$$4 \text{ pri.} + \frac{2}{3} \text{ ra.} \quad \text{æquales} \quad 18 \text{ N}$$

Adhuc

$$\sqrt{\frac{5833}{81}} = \frac{1}{9}, \quad \sqrt{\frac{5833}{1296}} = \frac{1}{36}, \quad \sqrt{\frac{5833}{729}} = \frac{1}{27}$$

DECIMVM SEPTIMVM.

Facit 9, uelra. cubica 2025.

1 ra. 1 pri. $\frac{2}{3}$ pri. in se, producuntur $\frac{4}{5}$ tertiæ quantitatis
aqua. 12 uel 20 radicibus.

Facit	numerus	12 uel	4032
	quadra.	144	16257024

Numerus uel quadrati radix est $\sqrt{4032}$
 quadratum uerò ipsum $\sqrt{16257024}$
 Porro huius quadrati $\frac{1}{24}$ pars $\sqrt{1176}$
 in se multiplicata, producuntur $\sqrt{1332976}$.

Decimum nonum. Sunt duo numeri. Quoniam autem quadratum prioris ad posteriorem, $1\frac{1}{2}$; posterioris contra ad numerum priorem; $4\frac{1}{2}$ rationem constituit, qui nam illi duo numeri sint, quæritur.

V I C E S I M V M.

Quoniam autem ex multiplicatione totius cum differentia, & minoris quadrato: 64 colliguntur, Vel,

Quoniam autem ex multiplicatione totius cum differentia, & maioris quadrato; 112 colliguntur, Vel,

I 3 Quont.

Quoniam autem quadrata partium, & quod ex multiplicatione totius cum differentia colligitur: 128 constituunt, Vel

Quoniam autem hæc duo simul, quod scilicet ex multiplicatione totius cum differentia, quodq; ex una parte cum altera multiplicata producitur: 80 constituunt, &c.

Partes diuisionis quantæ erunt: Facit 8 & 4

OPERATIO.

Totus numerus 12

1 ra. maior	uel	1 ra. minor
12 N — 1 ra. mí.		12 N — 1 ra. ma.
2 ra. — 12 N differentia.		12 N — 2 ra. diffe.

Productum ex toto cum diff.	24 ra. —	144 N.	144 N — 24 ra.
Minoris quadratum	144 N + 1 pri. —	24 ra.	1 pri.
Maioris quadratum	1 pri.	144 N + 1 pri. —	24 ra.
Productum ex una parte, cum altera multiplicata,		12 ra. —	1 pri.

Aequationes,

Prima	uel
1 pri. æqua. 64 N	1 pri. + 80 N æqua. 24 ra.
Secunda	uel
1 pri. + 24 ra. æ. 256 N.	1 pri. + 176 N æqua. 48 ra.
Tertia	uel
1 pri. æqua. 64 N	1 pri. + 80 N æqua. 24 ra.
Quarta	uel
1 pri. + 24 N æqua. 36 N	1 pri. + 12 ra. æqua. 64 N

ARITHMETICA PROBLEMA

TA EX I. LIB. GRAECORVM EPIGRAM.

Πρῶτον.

Παλλὰς ἐγὼ τέλειθω σφυσήλαρος, αὐτὰρ ὁ χρυσὸς
 Αἰκῶν πῆλετ' ἐδωρόν μοι δοπόλων.
 ἤμισυ μὲν χρυσοῖο χαρίσιθ', ὀγδοάκτιν δὲ
 Θέσπις, ἑξήκτιν μοῖρα μῆνι Σόλων.
 Αὐτὰρ ἐφ' ἡμισυ Θεμισῶν, τὰ δὲ λοιπὰ τάλαντα
 Εὐνία, καὶ τέχνη, δωδρόν Ἀριστοδίκου.

DE PALLADIS STATVA, QVOTNAM ILLA AV.
 ri talenta appendit.

Pallas ego sum, malico hunc in modum fabrefacta : sed aurum munus est iuuenum, qui in studio uersantur poetices. dimidiā quidem auri partem: contulit Charisius, octauam uerò: Thespis, decimam dehinc: Solon, & uigesimam: Themison. Reliqua autem nouem & mercedem item quæ artificii debebatur pro opera, contulit Aristodicus.

Quæstio hinc oritur de toto ipsius statuæ pondere.

Facit 40 talen.

Quantum etiam auri ad hanc fabricandam singuli tribuerint.

Facit Charisius	20,	Thespis	5
Solon	4	Themison	2 talenta.

Præterea 9 talenta reliqua, ut ponitur, munus est Aristodici.

Operatio

ALGEBRAE DESCRIPTIO.

OPERATIO.

Ponatur pondus auri,

fuisse,		1 radix talentorum
cuius	Charisius	$\frac{1}{2}$ ra.
	Thespis	$\frac{1}{8}$ ra.
	Solon	$\frac{1}{10}$ ra. dedit
	Themison	$\frac{1}{10}$ ra.
	Aristodicus	9 talenta.

Summa partium & 9 talentorum,

sunt $\frac{31}{10}$ ra. + 9 N, æquales radici positæ,

Est prima æquatio, hinc radicis ualor, pondus scilicet auri, 40 talentorum. Porro quantum singuli, ad hanc statutam extruendam, contulerint, ex ipsa positionis solutione, iuxta radicis ualorem, facile cognoscitur.

Δύτερον.

Αυγείην ἐρεῖνε μέγα δῖνος Αἰεΐδαιο.
Πληθὺν βουκολίῳ δὴ γένῳ, ὅς δ' ἀπάμειπτο,
Ἀμφὶ μὲν Αλφειοῖο ῥοᾶς φίλῳ ἤμισυ τῆς,
Μοῖσιν δ' οὐδὲν ἄλλ' ὄχθον κρόνου ἀμφυμένοντα.
Δωδεκάτη δ' ἀπάνδυνθε Ταραξίπποιο παρ' ὄρεον,
Ἀμφὶ δ' ἄρ' Ἠλιδ' αἰετῶν ἐφορῆνε μένοντα.
Αὐτὰρ ἐν Ἀργαδίῃ ξίησιν πολέλοιπα,
Λοιπὰς δ' αὖτε Λεύσας ἀγέλας τόδε πεντήκοντα.

DE ANGEAE ARMENTIS, QUOT NAM
boves fuerint.

Augeam interrogavit generosus Hercules, de multitudine armentorum. cui ille respondit: Media horum pars, amice, circa fluuium Alpheum pascitur: octaua autem, circa Saturni collem: Ceterum duodecima, procul hinc iuxta loca Taraxippi extrema: at uigesima eorum pars, circa Elidem pascitur: trigessimam uero in Arcadia ego reliqui: reliqua autem, quinquaginta numero armenta, uideas ipse. Quæritur:

Facit 240.

OPERATIO.

Ponatur boues fuisse		1 radix
circa	Alpheum igitur fluuium sunt	$\frac{1}{2}$
circa	collem Saturni	$\frac{1}{8}$
iuxta	Taraxippi extremum	$\frac{1}{12}$
circa	Elidem montem	$\frac{1}{10}$
in	Arcadia	$\frac{1}{10}$

Summa partium una cum 50 bobus

sunt $\frac{13}{14}$ ra. + 50 N æqua. radici positæ.

Est prima æquatio, atq; radicis ualor, armentorum scilicet numerus, 240.

Porro quot nunc in singulis locis uagentur boues, quiuis ex positionis solutione facile cognoscet,

Τρίτορ.

Χάλκεός εἰμι λίωρ, κροννοὶ δὲ μοι ὀμματα διὰ
 Καὶ σῶμα (ὡὶ δὲ θῆναρ δεξιτὸρ οἶο ποδός.
 Πλήθ' ἢ κρατῆρα δ' ὅ' ἡμασι δεξιὸρ ὄμμα,
 Καὶ λαιὸρ τριασὸις, ἐ' πισύρεσι θῆναρ.
 Αρχιὸρ ἐξ ὥραις πλῆσαι σῶμα. ἐν δ' ἅμα πάντα,
 Καὶ σῶμα, καὶ γλῆναι, καὶ θῆναρ, ἐπὶ πόδ' ὀρ.

LEONIS CANALES.

Æneus ego sum Leo, canales uerò mihi sunt oculi duo, & os cū palma dextri pedis. Implent autem craterem eundem: dexter quidem oculus, duobus; sinister uerò, tribus diebus: & quatuor, palma. Porro sex horis, os implere eum potest. Hæc igitur simul omnia, & os & oculi & palma, dic quanto tempore eundem craterem impleant.

Facit $\frac{11}{81}$ diei, uel 4 horis $\frac{44}{81}$ & cæ.

OPERATIO.

	dies	uel	horæ
Oculus {	dexter 2	uel	48
	sinister 3		72
	Palma 4		96
	Os $\frac{1}{4}$		6

Ponatur tempus, intra quod omnes canales simul aqua fluentes craterem impleant, quòd sit una radix, uel diei, uel horarum, atq; dicatur

dies	horæ		die.	horarum
2 uel	48		$\frac{1}{2}$ ra. uel	$\frac{1}{48}$
3	72	dant : impletionem,	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{72}$
4	96	quid : ra. Facit	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{96}$
$\frac{1}{4}$	6		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$
		Summa partium	$\frac{1}{12}$ uel	$\frac{61}{288}$

Quare $\frac{1}{12}$ ra. dierum uel $\frac{61}{288}$ ra. horarum radici positæ hoc est, 1 N, æqualis.

Est prima æquatio, atque radicis ualor ut suprâ positum, quod probari potest,

Τέταρτορ.

Ἀμφω μὲν ἡμεῖς ἕκαστοι μὲν ἄς ἔλκομεν,
 Ζῆθος τε χ' ὠξύναιμος, ἔν δ' ἐμὸν λάβῃ
 Τρίτην, ἣ τετρατόρ τε τοῦδ' Ἀμφιόνος
 Ἐξ πάντ' ἀνευρώρ, μητρὸς ἐνρήσεις σταθμόρ.

DE STATVIS ZETHI, AMPHIONIS AC MATRIS IPSORUM ANTIOPES.

Ambo quidem nos uiginti minas appendimus, Zethus pariter & meus consanguineus. At si de mea, tertiam: Amphionis uerò, quartam, partem

partem sumptseris: sex in summa inuentis, matris pondus inuenies.

Quanti igitur nunc ponderis & Zethi & Amphionis statua fuerit, quaeritur.

Facit Zethi quidem 12 Amphionis uerò 8 minarum. Antiope autem mater, ut habet hypothesis, pondus obtinet 6 minarum.

OPERATIO.

$$\begin{array}{lcl} \text{Zethus} & \} & 1 \text{ ra.} \quad \text{uel} \quad 20 \text{ N} - 1 \text{ ra.} \\ \text{Amphion} & \} & 20 \text{ ml.,} \quad 20 \text{ N} - 1 \text{ ra.} \quad 1 \text{ ra.} \end{array}$$

Collectis nunc partibus ueniunt

$$\text{uel } 5 \text{ N} + \frac{1}{12} \text{ ra.} \quad \text{uel} \quad 6 \frac{2}{3} \text{ N} - \frac{1}{12} \text{ ra.} \quad \text{æquales} \quad 6 \text{ N} \text{ \&caz.}$$

Ultimò tandem per communes noticias, Si ab æqualibus æqualia &caz.

Si item æqualibus æqualia,

$$\frac{1}{12} \text{ ra.} \quad \text{æquales} \quad 1 \text{ N} \quad \text{uel} \quad \frac{2}{3} \text{ N} \quad \text{æquales} \quad \frac{1}{12} \text{ ra.}$$

Εὐκλείδου Γεωμετρικῶν.

Ἡμίονος καὶ οὐνοῦ φορέουσιν δῖνον ἔβαινον,
 Αὐτὰρ οὐνοῦ σενάχιζεν ἐπ' ἄχθιν φόρτον ἰοῖο.
 Τὴν ἥ βαρυσινάχουσαν ἰδὼν ἱερίην ἐκείνη.
 Μῆτόρ τι κλαῖοντο δλοφύρεαι ἤντε κόνεον,
 Εἰ μέτρον ἐν μοῖδ' ὀδῖναι: δαπλάσιορ σέθεν ἦρα.
 Εἰ δὲ ἐν ἀντιλάβοις, πάντως ἰσότητα φυλάξαις.
 Εἰπὼν γὰρ μέτρον ἄριστ' ἔγωγε τρέφεις ἐπίσσορ.

EVCLIDIS GEOMETRICVM.

Ibant mulus & asina uinum portantes, asina autem ex dolore ponderis sui ingemiscebat. Qua re uisa, mulus grauiter ingemiscentem asinam sic interrogauit: Mater, cur ita lamentaris, cur puellæ instar lachrymas fundis? Mensuram mihi unam si dederis, duplo quàm tu plus sustulero: si uerò tu à me unam acceperis, idē planē quod ego pondus feres. Mensuram itaque peritissime Geometer dicas uolo.

Facit Mulipondus, 7: Asinæ uerò tantum 5 mensurarum.

OPERATIO.

$$\begin{array}{lcl} \text{Mulus} & 1 \text{ ra.} & \text{Mulus } 1 \text{ ra.} + 2 \text{ N} \\ \text{Asina} & 1 \text{ ra.} + 3 \text{ N} & \text{Asina } 1 \text{ ra.} \end{array} \quad \text{uel}$$

Et ueniunt tandem

$$\frac{1 \text{ ra.} + 5 \text{ N}}{2} \text{ æqua. } \frac{1 \text{ ra.} - 1 \text{ N}}{2} \quad \text{Vel} \quad \frac{1 \text{ ra.} + 3 \text{ N}}{2} \text{ æqua. } \frac{2 \text{ ra.} - 2 \text{ N}}{2}$$

Haftenus ex Græcis epigrammatibus.

SEQUITVR EXEMPLVM IN ORDINE

uicesimum primum.

Est qui peregrinationē instituit hoc modo, ut uidelicet plures abesse dies nolit, quàm aureos secū domo efferat: eo nimirū consilio, ut si fortē minus prosperè cedat, in singulos dies singuli suppetant ipsi aurei. Et quoniam

niam Mercurio duce, singulis diebus tot aurei accedunt illi, quot eo mane cum domo egrederetur, habuerat, tandem reuersus domum ac numerans pecuniam, 52 aureos $\& \frac{1}{2}$, uel 63 inuenit. Queritur ergo, quot initio profectionis aureos habuerit.

$$\text{Facit } \left\{ \begin{array}{l} 3 \ \& \ \text{dodrantem} \\ 3 \ \& \ \sqrt{8\frac{7}{8}} - 2 \end{array} \right.$$

EXPLICATIO.

Si commune $\&$ uulgi quispiam in huius exempli computatione iudicium sequi uoluerit, inueniet certe, quarto die hominem illū reuertentem domū, non integros quatuor aureos habuisse antequam iter ingrederetur: $\&$ tertio die idem si reuerti dicatur, tres aureos in ea summa quam primo die secum tulerat desiderari. Et quia plus tribus, minus autem quam quatuor aureos secum primo die habuit, ponendum igitur, quod ultra 3 aureos adhuc 1 radicem, hoc est, in summa, 3 N + 1 ra. aureorum habuerit. Et quoniam, iuxta exempli hypothesim, tot dierum iter confecit, atq; singulis diebus, $\&$ id ex hypothesi, illam quam tunc secum habet pecuniam, duplicauit: tertio tandem finito die domum rediens, 24 N + 8 ra. aureorum habet, quod est notandum.

Rursum quandoquidem quantum quoq; diem non integrum, sed eius partem tantum aliquam, nimirum 1 radicem positam, perambulat: non igitur 24 N + 8 ra. aureorum, sed huius summæ partem proportionalem illa radice dierum acquirat. quare dicendum,

dies	integer acquirit	aureorum	diei
1		24 N + 8 ra.	quid 1 ra.
Facit	24 ra. + 8 pri.	Quæ nunc, si pecuniæ tertiæ diei addita fuerint, ueniunt	

$$8 \text{ primæ} + 32 \text{ ra.} + 24 \text{ N, æqua. } \left\{ \begin{array}{l} 52\frac{1}{2} \\ 63 \end{array} \right. \text{ N. } \& \text{cæ.}$$

Radicis igitur ualor, facta operatione æquationi conueniens: dodrans, uel $\sqrt{8\frac{7}{8}} - 2$ aurei erunt. Tres igitur aureos $\&$ dodrantem, uel 3 aureos $\&$ $\sqrt{8\frac{7}{8}} - 2$ aure. initio profectionis habuit. Atq; tot etiam dierum iter confecit, quod, nunc probari potest.

Instituatur probari seu examinari numerus irrationalis

$$\text{Numerus aureorum quos primò ille habuit, sunt } 3 \text{ plus } \sqrt{8\frac{7}{8}} - 2$$

Atq; tot etiam diebus peregrè profectus fuit

$$3 \text{ plus } \sqrt{8\frac{7}{8}} - 2 \text{ Initio profectionis,}$$

6 plus $\sqrt{35\frac{1}{2}} - 4$	primi	} diei aurei.
12 plus $\sqrt{142} - 8$	secundi	
24 plus $\sqrt{568} - 16$	tertij	
Iam dicendum		

die inte.	aurei	die.
1 acquiruntur 24	plus $\sqrt{568} - 16$,	quid $\sqrt{8\frac{7}{8}} - 2$,

Facit, ut quidem sequenti multiplicatione

$$\text{ostendetur } 55 - \sqrt{568}.$$

Quibus summa, uel aurei, quos tertio die noctu secum tulerat, ut sequitur, additi, 63 aurei colliguntur, quod erat ostendendum.

Sequitur

ALGEBRAE DESCRIPTIO.
SEQVITVR MVLTIPlicATIO.

77

$$\begin{array}{r}
 24 \text{ plus } \sqrt{568} - 16 \\
 \sqrt{8\frac{7}{8}} - 2 \\
 \hline
 48 \quad + 71 + 32 \\
 + \sqrt{5112} \quad - \sqrt{2272} \\
 \hline
 \quad - \sqrt{2272} \\
 55 - \sqrt{568}
 \end{array}$$

SEQVITVR ADDITIO.

$$\begin{array}{r}
 24 \text{ plus } \sqrt{568} - 16 \\
 55 - \sqrt{568} \\
 \hline
 \text{Summa } 63 \text{ aurei, ut suprà.}
 \end{array}$$

Alia additio, quæ in hoc exemplo locum habet.

	+	ra. 5112	ad	-	ra. 9088
4		1278			2272
2		639			1136
71		9			16
	+	3			- 4

$$\begin{array}{r}
 - 1 \text{ quater} \\
 - 4 \text{ bis} \\
 - 8 \text{ septuagies semel} \\
 - 567
 \end{array}$$

$$\text{Summaradicum } - \sqrt{567} \quad \&c\&.$$

EXEMPLVM VIGESIMVM SECVNDVM.

Quidã certa aureorũ summa negociatus, huius trientẽ, uno aureo & $\frac{1}{2}$ minus, lucratus est. quare deinde cũ forte & lucro negocians, huius alterã partem, plus 8 aureis lucratur. Id nunc tertio faciens, similem, aut meliorem fortẽ, fortunam speraturus, eius quod habet iacturam facit in quadrante. Vel si placet, eius quod habet quadrantẽ lucrifacit. Quia autem nunc retentã cũ numeret pecuniã, uel aureos, inuenit, hic quidẽ 232 plus $\frac{3}{16}$, illic uerò $100 - \frac{1}{16}$, queritur quòtã aureos ipse primò habuerit.

Facit, quantum ad $\left\{ \begin{array}{l} \text{lacturam quidẽ } 63 \text{ aure. \& dodrantem} \\ \text{Lucrum uerò } 90 \text{ aureos.} \end{array} \right.$

OPERATIO.

Ponatur	1 radix, quam primò habuit,	
quare $\frac{1}{2}$ ra.	$- 1\frac{1}{2}$ N.	Id quod lucratur primò
atq; sic $1\frac{1}{2}$ ra.	$- 1\frac{1}{2}$ N.	Sors & lucrum simul
Huius $\frac{1}{2}$,	$\frac{2}{3}$ ra. $- \frac{2}{4}$ N.	Lucrum
	+ 8	Lucrum & id
	$\frac{2}{3}$ ra. + $7\frac{1}{4}$ N.	quod lucratur secundo
	2 ra. + $5\frac{3}{4}$ N.	Sors & lucrum simul
Huius $\frac{1}{4}$,	$\frac{1}{2}$ ra. + $1\frac{7}{16}$ N.	lactura uel lucrum
manent	$1\frac{1}{2}$ ra. + $4\frac{5}{16}$ N.	aqua. $100 - \frac{1}{16}$ N
uel uen.	$2\frac{1}{2}$ ra. + $7\frac{3}{16}$ N.	aqua. $232 + \frac{3}{16}$ N &c\&.

23. Sit unus numerus notus, nimirũ 28, 63 uel 42, quatuor deinde alij ignoti; & esto quod ignotorum primus cũ reliquorũ trium altera parte, secundus uerò cum reliquorum tertia parte, tertius autem cum reliquorum quarta, ac quartus deinde cum reliquorum parte quinta, ipsum notum positum æquent: Queritur de numeris ignotis.

K 2

Facit

Facit ratione nume-

	Primus	secundus	tertius	quartus numerus.
ri { 29	$\frac{28}{37}$	$14\frac{14}{37}$	$18\frac{24}{37}$	$21\frac{7}{37}$
63	$1\frac{26}{37}$	$32\frac{13}{37}$	$42\frac{21}{37}$	$47\frac{25}{37}$
42	$1\frac{5}{37}$	$21\frac{11}{37}$	$28\frac{14}{37}$	$31\frac{29}{37}$

SEQUITVR HVIVS EXEMPLI EXAMEN.

Sumantur ad examinandum numeri primi,

qui sunt $\frac{28}{37}$, $14\frac{14}{37}$, $18\frac{24}{37}$, $21\frac{7}{37}$ & 28

	Numerus	Partes requisitæ				Summa singulorum cum suis partibus,	æquales
primus	$\frac{28}{37}$	$7\frac{7}{37}$	$9\frac{17}{37}$	$10\frac{22}{37}$			
secun.	$14\frac{14}{37}$	$6\frac{34}{111}$	$7\frac{7}{111}$	$\frac{28}{111}$			
tertius	$18\frac{24}{37}$	$5\frac{11}{37}$	$\frac{7}{37}$	$3\frac{22}{37}$			
quar.	$21\frac{7}{37}$	$\frac{28}{185}$	$2\frac{162}{185}$	$3\frac{29}{37}$			

EXEMPLVM VLTIMVM, ET SIMILE
præcedenti.

Fundus quidam inscribitur 375 coronatis, quod ubi unus resciscit, ipsius autem fortune multo minores quàm ut eum emere possit, re igitur infecta, discedit. Hoc idem & alij cuidam, ac deinde etiam tertio accidit. Veruntamen si is qui primo loco fundū est licitatus, dimidiā pecuniæ partem à reliquis: is uerò qui secundo, dodrantē à reliquis: is autē qui tertio, bessem à reliquis acciperet, singulorum tandem pecunię eo modo auctę, sufficerent ad emendum fundum. Quare nunc quęstio oritur, quot coronatos seorsim quisq; habuerit.

Facit

Primus	Secundus	Tertius.
$267\frac{6}{7}$	$53\frac{4}{7}$	$160\frac{5}{7}$

Quod examinari poterit.

Et hæc quidem sunt optime Lector, quæ paucis tibi pro regularum Algebræ declaratione communicare uoluimus. Cæterum qui plura requirit, his nunc instructus, ab alijs harum regularum scriptoribus petat. Nunc uerò ad Euclidem ipsum.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙ- ΧΕΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

EVLIDIS ELEMENTORVM GEO- metricorum liber primus.



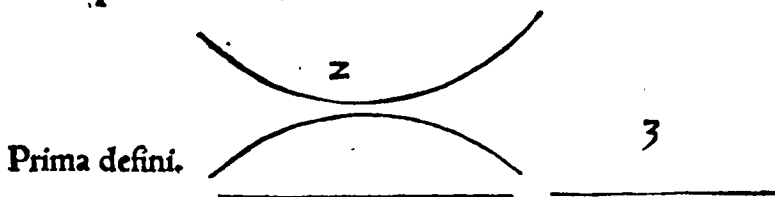
St hic liber primus totus ferè elementarius, non tantum ad reliquos sequentes huius Operis libros, sed etiam ad aliorum Geometrarum scripta intelligenda necessarius. Nam in hoc libro communium vocabulorum, quæ subinde in geometria uersanti occurrunt, definitiones continentur. Præceptiones deinde ducendi perpendiculari, quomodo item Trilateræ figuræ, secundum latera uel angulos diuersæ, & Quadrilateræ, formari debeant. Figura item aliqua proposita, quomodo illa in alterius formæ figuram permutanda sit, præceptiones, ut diximus, traduntur. Cum igitur talia doceantur, & plura etiam alia, quàm hoc loco commemorare uoluimus, facile erit cuiuis, non solum quàm sit necessarius, sed etiam ad reliqua perdiscenda liber iste quàm utilis, perspicere.

ΟΡΟΙ.

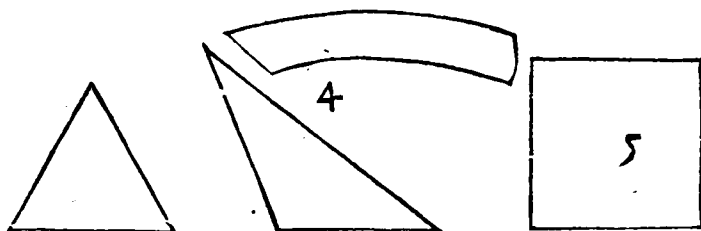
Σημεῖον ἴσιν, οὗ μέρϑ οὐθεν. Γραμμὴ δέ, μῆκος ἀπλαῖς. Γραμμῆς δὲ πῖρατα, σημεῖα. Εὐθεῖα γραμμὴ ἴσιν, ἥτις ἐξίῃ τοῖς ἐφ' ἑαυτῇ σημεῖοις κείτῃ.

DEFINITIONES.

Punctum est, cuius pars nulla. 2. Linea uerò, longitudo latitudinis expers. Lineæ autem termini puncta. 3. Recta linea est, quæ equaliter inter sua puncta iacet.

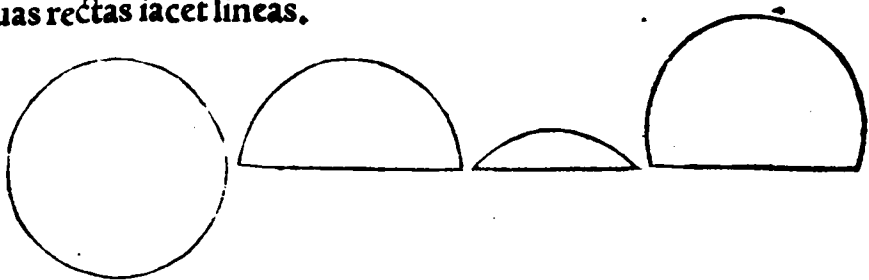


Επιφανεία ἴσιν, ὁ μῆκος καὶ πλαῖτος μόνον ἔχῃ. Επιφανείας δὲ πῖρατα, γραμμαί. Εὔπεδος ἐπιφανεία ἴσιν, ἥτις ἐξίῃ ταῖς ἐφ' ἑαυτῇ εὐθείαις κείται.



4. Superficies est, quæ longitudinem & latitudinem tantum habet.
K 3 Super-

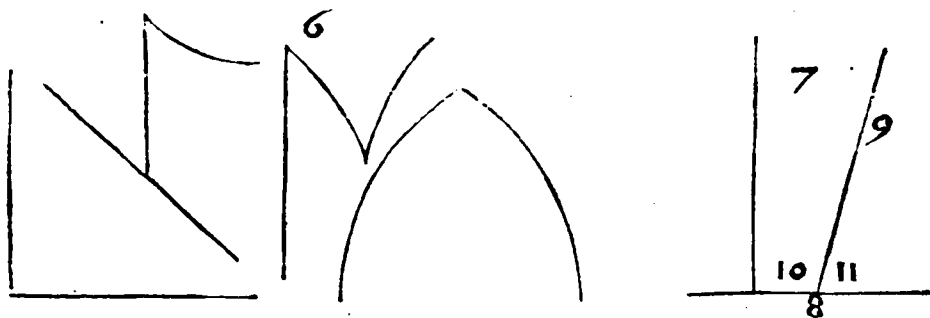
Superficieῖ uerō termini, lineæ. 5. Plana superficies est, quæ equabiliter inter suas rectas iacet lineas.



Επίπεδος γωνία ὀξείη, ἢ ὅταν πῶς δύο γραμμῶν ἀπὸ μὲν ἑκαστοῦ ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐπ' ἐνθεῖας κειμένων, πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις. Οταν δὲ αἱ ποδὲς τῆς γωνίας γραμμαὶ ἐνθεῖαι ὦσι, Εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία. Οταν δὲ ἐνθεῖα ἐπ' ἐνθεῖαν σταθεῖσα, τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθή ὀξείη ἢ ἑστέρα τῶν ἴσων γωνιῶν. Καὶ ἡ ἐφεσκηυία ἐνθεῖα, Κάθετος καλεῖται, ἐφ' ᾧ ἐφίσκηκε. Αμβλεία γωνία ὀξείη, ἢ μείζων ὀρθῆς.

Οξεία δὲ, ἢ ἐλάσσων ὀρθῆς.

6. Planus angulus, est in plano duarum linearum se mutuo tangentium, & non in directum iacentium, mutua inclinatio. 7. Quando uerō compræhendentes angulum lineæ, rectæ fuerint, Rectilineus uocatur ille angulus. 8. Quando autem recta super rectam consistens lineam, deinceps se habentes angulos æquales inter se fecerit, Rectus est uterque æqualium angulorum. 9. Et insistens recta linea, Perpendicularum: hoc est, Perpendicularis linea uocatur, illius super quam steterit. 10. Obusus angulus est, qui maior recto. 11. Acutus uerō, qui minor est recto.



Ὀρθή ὀξείη, ὅταν πῶς δύο γραμμῶν ἀπὸ μὲν ἑκαστοῦ ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐπ' ἐνθεῖας κειμένων, πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις. Οταν δὲ αἱ ποδὲς τῆς γωνίας γραμμαὶ ἐνθεῖαι ὦσι, Εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία. Οταν δὲ ἐνθεῖα ἐπ' ἐνθεῖαν σταθεῖσα, τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθή ὀξείη ἢ ἑστέρα τῶν ἴσων γωνιῶν. Καὶ ἡ ἐφεσκηυία ἐνθεῖα, Κάθετος καλεῖται, ἐφ' ᾧ ἐφίσκηκε. Αμβλεία γωνία ὀξείη, ἢ μείζων ὀρθῆς.

12. Terminus est, quod cuiusque extremum est.

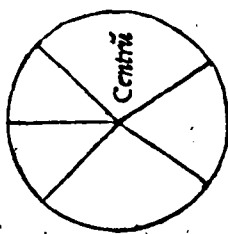
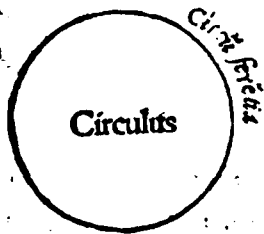
Vt, Lineæ termini sunt, puncta: Superficieῖ, lineæ: Corporum uerō, superficies, quemadmodum supra indicatum est.

13. Figura est, quæ sub aliquo aut aliquibus terminis comprehenditur.

Vt sunt omnia, quæ uel sub lineis, uel sub superficiebus compræhendantur, spacia.

Κύκλος, ὅστις σχῆμα ἐπὶ πεδίῳ, ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς ποδὲς ἔχον, ἢ καλεῖται Περιφέρεια, πρὸς ᾧ ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ὑπὸ τοῦ σχήματος κειμένων, πᾶσαι

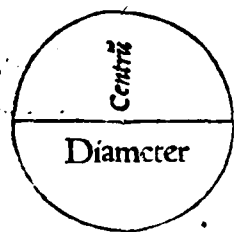
πᾶσαι αὖ περὶ ἑαυτῆς ἐνθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Κέντρον δὲ τῷ κύκλῳ, ὃ σημεῖον καλεῖται.



14. Circulus, est figura plana, una linea compræhensa, quæ Circumferentia appellatur, ad quā ab uno quodā puncto eorum, quæ intra figurā sunt posita, omnes cadentes rectæ li-

neæ inter se sunt æquales. 15. Punctum uerò hoc, Centrum circuli appellatur.

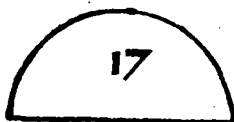
Διαμέτρος τῷ κύκλῳ, ἐστὶ ἐνθεῖα περὶ ὅλην τὴν κέντρον ἡγμένη, καὶ περὶ αὐτὴν μὲν ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῷ τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥ τις καὶ δίχα τέμνῃ τὸν κύκλον.



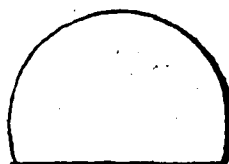
16 Diameter circuli, est recta quedam linea per centrum ducta, & ex utraque parte in circuli circumferentiam terminata, & quæ circumulum bifariam secat.

Ημικύκλιόν ἐστι, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τῇ ὁλῇ μίτρῳ, καὶ τῇ ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τῇ τοῦ κύκλου περιφερείας. Τμήμα δὲ κύκλου, ἐστὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῇ ἐνθεῖας, καὶ κύκλου περιφερείας.

17. Semicirculus, est figura, quæ sub diametro, atque de circuli circumferentia ablata portione comprehenditur. 18. Sectio uerò circuli, est figura quæ sub recta linea, et circuli circumferentia comprehenditur.



18



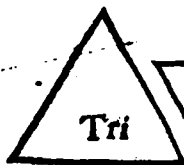
Εὐθύγραμμα σχήματα ἐστὶ, τὰ ὑπὸ ἐνθεῶν περιεχόμενα.

Τρίγωνον μὲν, τὰ ὑπὸ τριῶν. Τετράγωνον δὲ, τὰ ὑπὸ τεσσάρων.

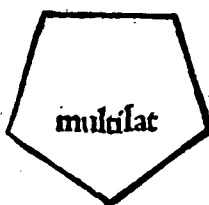
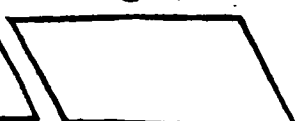
Πολύγωνον δὲ, τὰ ὑπὸ πλὸν ὅντων ἢ τεσσάρων ἐνθεῶν περιεχόμενα.

19. Rectilinéæ figuræ sunt, quæ sub rectis lineis comprehenduntur.

20. Trilateræ quidem, quæ sub tribus. 21. Quadrilateræ uerò, quæ sub quatuor. 22. Multilateræ autem, quæ sub pluribus quàm quatuor rectis lineis comprehenduntur.



Quadril.



Τῶν δὲ τριπλῶν σχημάτων,
 Ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνον ὄντι, ᾗ τρεῖς ἴσας ἔχῃ πλευράς. Ἰσοσκελὲς δὲ, ᾗ
 τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχῃ πλευράς. Σκελιῶν δὲ, ᾗ τὰς τρεῖς ἀνίσας ἔχῃ
 πλευράς.

Trilaterarum porro figurarum,

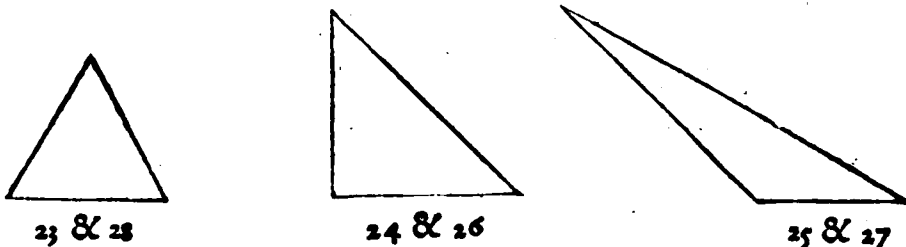
23. Aequilaterum quidē triangulum est, quod tria latera habet æqua-
 lia. 24. Isosceles uerò, quod duo tantum latera habet æqualia. 25. Sca-
 lenum autem, quod tria inæqualia habet latera.

Εἰ τι τῶν τριπλῶν σχημάτων,

Ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνον ὄντι, ᾗ ἔχῃ ὀρθὴν γωνίαν. Ἀμβλυγώνιον ᾗ, ᾗ ἔχῃ
 ἀμβλείαν γωνίαν. Ὄξυγώνιον δὲ, ᾗ ἔχῃ ὀξείαν γωνίαν.

Amplius trilaterarum figurarum,

26. Rectangulum quidem triangulum est, quod habet rectū angulum.
 27. Obtusiangulum uerò, quod habet obtusum angulum. 28. Acu-
 tiangulum autem, quod tres acutos angulos habet.

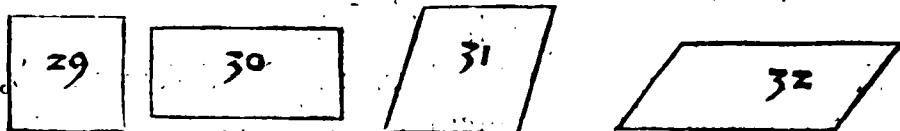


Τῶν δὲ τετραπλῶν σχημάτων.

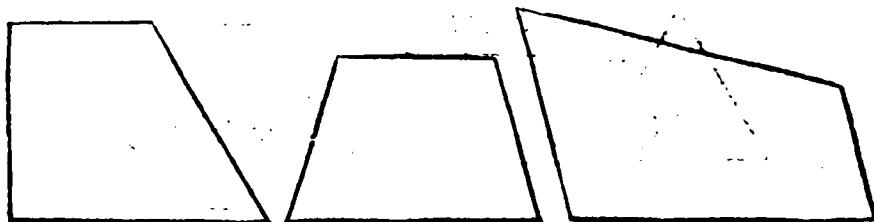
Τετράγωνον μὲν ὄντι, ὃ ἰσόπλευρόν τε ἐστὶ, ὃ ὀρθογώνιον. Ἐτερόμηνες ᾗ,
 ὃ ὀρθογώνιον μὲν, οὐκ ἰσόπλευρον δὲ. Ρόμβος ᾗ, ὃ ἰσόπλευρον μὲν, οὐκ ὀρθογώ-
 νιον δὲ. Ρομβοειδὲς ᾗ, ᾗ τὰς ἀπεναντίων πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις
 ἔχῃ, ὃ ὄντι ἰσόπλευρόν τε ὄντι, ὃ ὀρθογώνιον.

Figurarum autem quadrilaterarum,

29. Quadratum quidem est, quod & æquilaterum est, & rectangulum.
 30. Altera parte longius uerò, quod rectangulū quidem, at æquilate-
 rum non est. 31. Rhombus autem, qui æquilaterus, sed rectangulus
 non est. 32. Rhomboides deinde, quod ex opposito & latera & an-
 gulos æquales inter se habens, necq; æquilaterum est, necq; rectangulum.



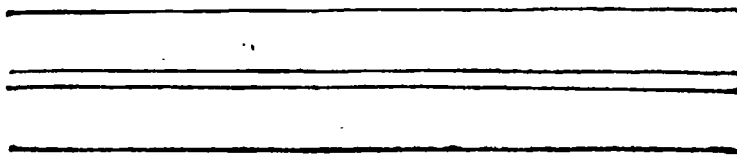
Τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα, Τραπεζίαι καλεῖσθαι.



33. Præter has uerò, quæ reliquæ sunt figuræ quadrilateræ, Mensulæ appellantur.

Παράλληλοι εἰσὶν ὑβῆαι, αἵ πινεσ ὃν τῷ αὐτῷ ἐπιγώδιῳ ὄνται, ἢ ἐκβαλλόμεναι ἐπ' ἀπειρομὶν ἐκάτερα τὰ μέρη, ὡδὶ μηδετέρῃ συμπίπτουσιν ἀλλήλους.

34. Parallelæ, sunt rectæ lineæ, quæ in eodem plano existentes, & ex utraq; parte in infinitū eiectæ, in neutram inter se mutuo coincidunt.

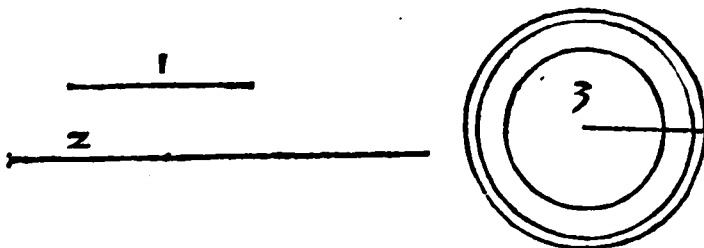


ΑΙΤΗΜΑΤΑ.

Ἡτήδω, Ἀπὸ παντὸς σημείου ὡδὶ πᾶν σημείον, ὑβῆαι γραμμὴν ἀγαγέιν. Καὶ πεπρασμένην ὑβῆαι, καὶ ὅσων ἄν τις ἐπ' ὑβῆας ἐκβάλειν. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι, κύκλον γράφεσθαι.

Postulata.

Petatur, & primò quidem, Ab omni puncto ad omne punctum, rectam lineam ducere posse. Secundò uerò, Terminatam rectam lineam, secundum continuationem, in rectum eijcere. Tertiò tandem, Omni centro & interuallo, circulum describere.



ΚΟΙΝΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ.

Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ὅστις ἴσα.

COMMUNES NOTITIAE.

1 Quæ eidem æqualia: & inter se sunt æqualia.

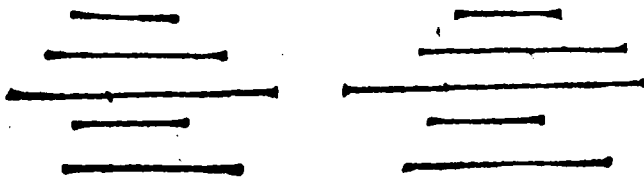
13 13 13 13

13

Ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ὅστις ἴσα. Καὶ ἰὰ ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ ὑπολοίπων ὅστις ἴσα.

2 Si æqualibus æqualia adiſciantur: tota sunt æqualia. 3 Et si ab æqualibus æqualia auferantur: quæ relinquuntur sunt æqualia

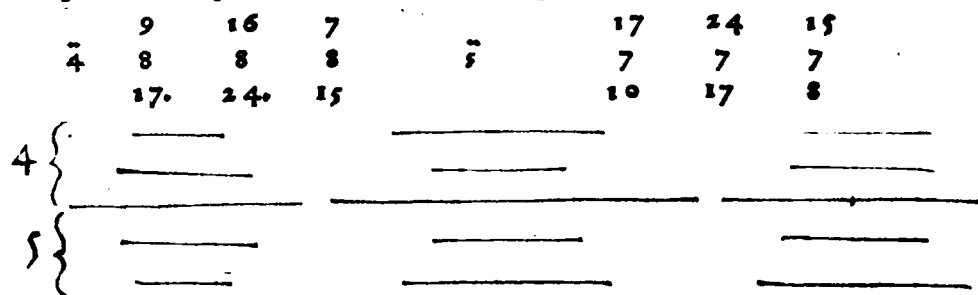
2 { 9 9 9
3 3 3
12 12 12
3 { 7 7 7
5 5 5



L Ear

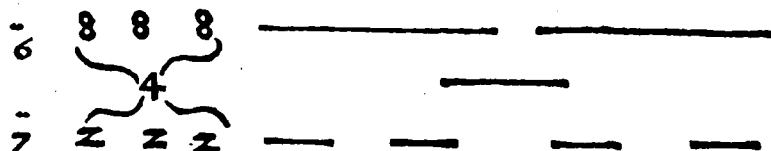
Εὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ὅστις ἀνίστα. Καὶ ἰὰρ ἀπὸ ἀνίσωρ ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ λοιπὰ ὅστις ἀνίστα.

4 Si inæqualibus equalia adijciuntur : tota sunt inæqualia. 5. Et si ab inæqualibus equalia auferantur : reliqua sunt inæqualia.



Τὰ γὰρ αὐτὰ διπλάσια, ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ. Καὶ τὰ γὰρ αὐτὰ ἡμίση, ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ.

6 Quæ eiusdem duplicia : equalia inter se sunt. 7 Et quæ eiusdem dimidia : equalia inter se sunt.



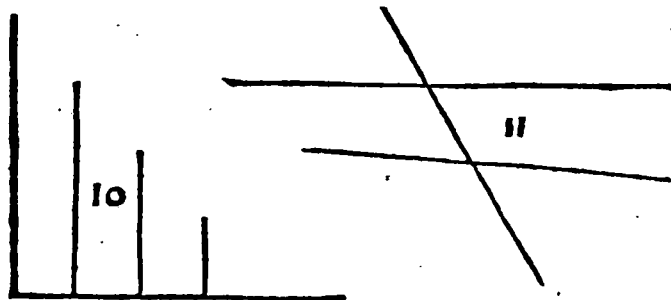
Τὰ ἑκατέρωθεν ἴσα ἐπὶ ἄλληλα, ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ. Καὶ ὅλον γὰρ μέρος μέρους ἐστὶ.

8 Quæ congruunt inter se : equalia inter se sunt.

9 Et totum parte sua maius est.

Πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Καὶ ἰὰρ εἰς δύο ὑπεῖας ὑπεῖα ἐμπίπτουσα, τὰς ὑπὸ καὶ ὑπὸ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας, δύο ὀρθῶν ἰσάσθων ποιῇ, ἐκ βαλλόμενα αἱ δύο αὐτὰ ὑπεῖαι ἐπὶ ἄπειρον συμπεσούσιν ἀλλήλαις, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶ καὶ τῶν δύο ὀρθῶν ἰσάσθων γωνία.

10 Omnes recti anguli : æquales inter se sunt. 11 Et si in duas rectas recta linea incidens, & in eadem parte angulos, duobus rectis minores fecerit : illas ambas productas infinite, necesse est coincidere, ea in parte, qua duo isti anguli fuerint duobus rectis minores.



Καὶ δύο ὑπεῖαι, χωρὶς ὅν ποδὲ ἔχουσιν.

12 Et duæ rectæ lineæ : spacium non comprehendunt.

ΠΡΟΤΑ

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

ΠΡΩΤΗ.

A.

Επὶ τῇ δοθείσῃ ὑπερίκῃ πεπρασμένης, τρίγωνον ἰσοπλευρον συστήσασθαι.

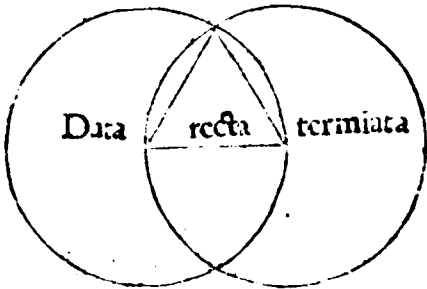
PROPOSITIONES.

PRIMA.

I.

Super data recta linea terminata, triangulū æquilaterum constituere.

Terminata recta linea data, propositum est, super ea triangulum æquilaterum constituere. Officio igitur circini, secundum intervallum rectæ datæ, ex utraq; illi-



us extremitate, per tertium postulatū, circulus describatur: atq; ubi alter alterum supra lineam secat, inde ad utraq; extremitatem datæ rectæ quædam linea demittatur, & propositioni satisfactum erit, cum hæc duæ demissæ & recta terminata data, triangulum quale petitur comprehendant: id quod facile ex structura & circuli definitione, bis usurpata, atq; illa communi noticia, Quæ

uni sunt æqualia, & inter se sunt æqualia, demonstrari poterit. Super data igitur recta terminata linea, triangulum æquilaterum constitutū est, quod fecisse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

B.

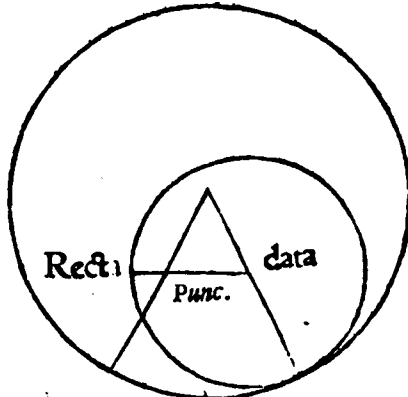
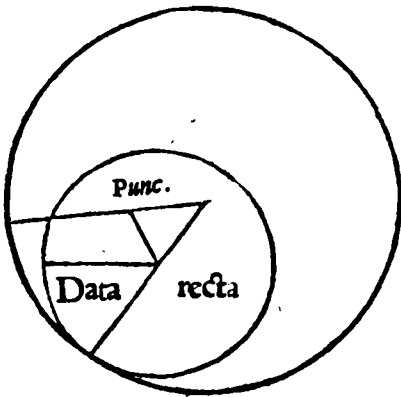
Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ, τῇ δοθείσῃ ὑπερίκῃ ἰσὺν ὑπερίκῃ θεῖσθαι.

PROPOSITIO

II.

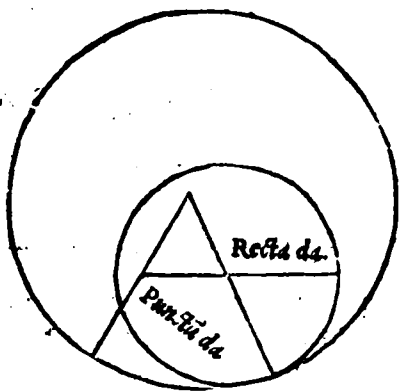
Ad datum punctū, datæ rectæ lineæ, æqualem rectam lineā ponere.

Puncto & recta linea data, describatur primò circulus, cuius semidiameter sit recta data: altera ipsius extremitate, utra fuerit, centri loco sumpta. Quo facto, à centro circuli iam descripti, ad punctum datum, linea quadam recta, per primum po-



stulatum ducta, super ea, per propositionem præcedentem, triangulum æquilaterum constituatur: atq; id latus, quod ad centrum tendit, ad circumferentiam usq; producat. Postea uerò secundum hanc ipsam continuatā, ex illa quoq; extremitate, quam cum latere trianguli altero communem habet, circulus describatur, & ubi tandem latus trianguli alterum usq; ad circumferentiam continuatum fuerit, confectum erit negotium. A' dato enim puncto linea, datæ æqualis, educta est: id quod adiectæ figuræ indicant. atque in hunc modum demonstrari potest. Cum enim in maiori circulo, quæ ex ipsius centro egrediuntur rectæ lineæ, ex definitione, inter se æquales sint cumq; etiam super recta, quam centrum circuli minoris et

L a punctum



quod fecisse oportuit.

punctum datum terminant, triangulum æquilaterum constitutum sit, huius uerò trianguli duo latera duarum maioris circuli semidiametrorum partes sint, partibus illis æqualibus ab æqualibus semidiametris subtractis, & quæ relinquuntur rectæ lineæ, ex communi quadam noticia inter se æquales erunt. Sed quia una harum, ex definitione circuli, datæ rectæ est æqualis: & altera, quæ nimirum ex dato puncto egreditur, ex communi quadam noticia, eidem rectæ datæ æqualis erit. Ad datum igitur punctum, datæ rectæ lineæ æqualis recta posita est,

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

Γ.

Δύο δοθεισῶν ἐνθεκῶν αἰσῶν, ἀπὸ τῆς μείζονος, τῇ ἑλάσσονι ἴσῳ ἐνθεκῶν ἀφελῆν.

PROPOSITIO

III.

Duabus datis rectis lineis inequalibus, à longiori, breuiori equalem rectam lineam abscindere.

Est huius propositionis triplex operatio, seu fabrica. Prima, ut officio circini quantitas breuioris accipiatur: ea deinde in longiore, ab extremitate una incipiendo, puncto aliquo signetur: & factum erit negotiū, id quod per cōmunem illam noticia, Quæ

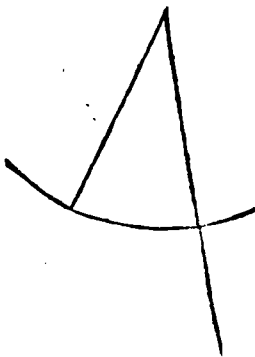
Linea longior.

Breuior.

uni sunt æqualia, et inter se sunt æqualia, demonstrari poterit.

monstrari poterit.

Secunda est, ut lineæ propositæ duabus suis extremitatibus utcumq; coniungantur, secundum quantitatem deinde, uel intervallū breuioris, ex coniunctionis puncto,

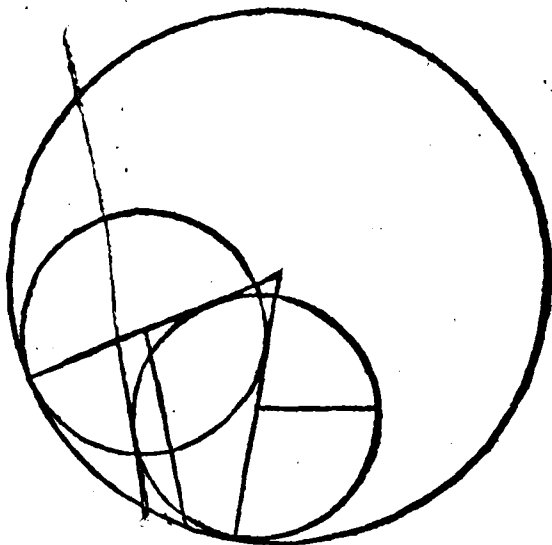


circulo, per tertium postulatum, circulus, uel arcus tantum circuli loco, qui tamen longiorem rectā secat, describatur: & idem effectum erit. Huius autem demonstratio est ipsa circuli definitio supra tradita, cum lineæ à centro in circumferentiam cadentes, per eandem, inter se sint æquales.

Tertia huius operatio est, ut, per præcedentem propositionem secundam, primò ab extremitate longioris alterutra, tanquam à puncto aliquo dato, linea breuiori æqualis educatur: atq; huic deinde à longiore, prout secunda huius propositionis operatio exigat, æqualis abscindatur. & tertio, quod uolebat propositio, factum erit.

FIGVRA

FIGVRA OPERATIONIS TERTIAE.

Línea longior.Breuior.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

Α.

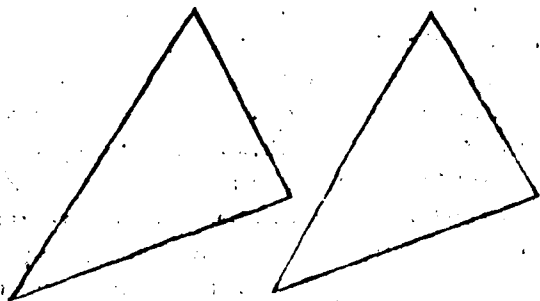
Εὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς τὰς διὰ τὴν πλὴν τῶν ἰσῶν ἴσας ἔχῃ, ἡ γὰρ ἑτέρα πλευρὰ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἰσῶν ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῇ ἰσῶν ὑπερώϊον πόδι-
χομένην· καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἰσῶν ἔχῃ, καὶ τὸ τρίγωνον ὅλον τρίγωνον ἴσον ἴσῃ,
ἢ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τὰς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἴσονται, ἡ γὰρ ἑτέρα ἡ γὰρ ἑτέρα, ὅφ' αἱ
αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑπολείπονται.

PROPOSITIO

IIII.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus equalia habuerint, utrun-
que utrique, habuerint uerò & angulum angulo equalem, eum qui sub e-
qualibus rectis lineis comprehenditur: & basim basi equalem habebunt,
& triangulum triangulo equale erit, ac reliqui anguli reliquis angulis e-
quales erunt, uterque utrique, sub quibus equalia latera subtenduntur.

Sumit hæc quarta propositio suâ demonstrationē ab impossibili. Duplex enim
est, ut norunt dialectici, demonstrationis genus. Vnum, quod ex ueris & conces-
sis procedit, & directum dicitur. Alterum uerò, quod cum directe non possit obti-
neri, ab impossibili aliquo & absurda cōclusionē suam demonstrationē cōfirmat,
quod paucis tantum hic monere uoluimus. Nunc quantum ad propositionē. Pre-
scribantur huiusmodi duo triangula, qualia hæc propositio requirit, quorum nimirum

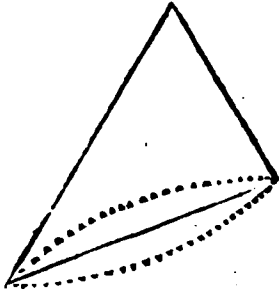


unius duo latera, duobus lateri-
bus alterius æqualia sint: atque angu-
lus deinde sub equalibus lateribus u-
nius, angulo sub equalibus trianguli
alterius comprehenso equalis: dico
quod & horum triangulorum bases,
ipsa quoque triagula tota, atque reliqui
anguli reliquis angulis utrinque in-
ter se equales sint. Huius rei nunc ac-
cedere deberet ocularis quedam de-

monstratio: sed quia ad sensum quasi ita sese habere res apparet, & euidentis est, tan-

L ; quam

quam uera atq; omnibus nota relinquitur, cum statim, hoc si quis negare uelit, oppositum eius, ad extremum, Quod duę rectę spacium comprehendant, ut sequitur, fateri cogatur, reductione ad absurdum. Superponatur triangulum unum alteri, sic ut anguli eorum æquales, unus super altero iaceat, unum etiam æqualium laterum unius, super suo equali alterius triaguli latere ponatur.



Et quia hæc duo, & reliqua etiam duo ex altera parte latera, ex hypothesi inter se æqualia sunt, ab æqualibus etiam angulis descendunt: horum applicatorum laterum extremitates, reliqua etiam ex altera parte latera omnino conuenire atq; coincidere oportet. Quia uerò iam basiū extremitates (ut quæ eadem sunt quæ descendentiū laterū,) conueniunt: basis igitur basi aut congruet, aut duę rectę linę cōprehendent superficiē. Posterius nō

conceditur, cum nimirum id, ex communi quadam noticia, pro absurdo habeatur. Congruēt ergo bases: æquales igitur inter se, ex cōmuni illa noticia, Quæ congruunt inter se, æqualia inter se sunt. Congruet sic & triaguliū triangulo: quare & ipsa æqualia inter se, per eandē. Deniq; quia etiam reliqui duo anguli reliquis duobus angulis congruunt, uterq; utriq; & illi tandem eo modo quo conueniunt, inter se æquales erunt. Cum igitur duo triagula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, utrumq; utriq;, habuerint uerò & angulū angulo æqualem, cum qui sub æqualibus rectis comprahenditur: & basim basi æqualem habebunt, & triagulum triangulo æquale, ac reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, uterq; utriq;, sub quibus æqualia latera subtenduntur, quod demonstrari oportuit.

AD MONITIO.

Per puncta in figuris, representatur ratio ducens ad absurdū, ut qui facilis nō esset in concedendo id quod uerum est, tandem cōuincatur reductione quadam ad impossibile, ut hac offensione absurditatis quodammodo refiliat ad confessionem uerū. Quod ut hoc loco, ita etiam alijs locis à me factum reperient Lectores, designatione punctorum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

E.

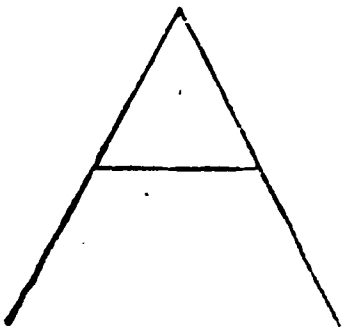
Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων, αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσι. Καὶ πρὸς ἐκβληθεῶν τῶν ἴσων ἰσῶν, αἱ ὑπὸ τῶν βάσει γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

PROPOSITIO

V.

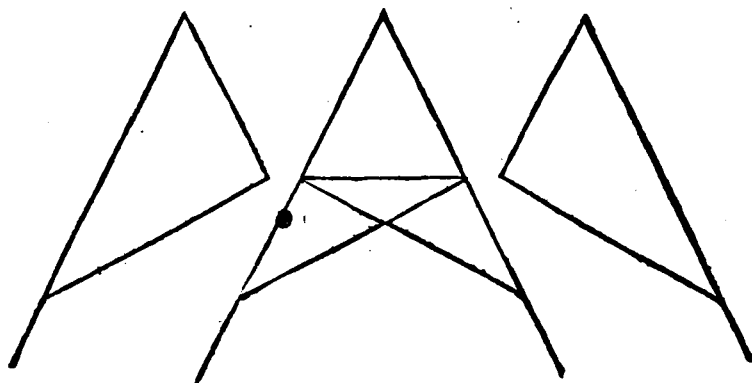
Isocehium triangulorum: qui ad basim anguli, æquales inter se sunt. Et æqualibus rectis ulterius productis: qui sub basi anguli, æquales inter se erunt.

Sunt huius propositionis duę partes, quarum prior quidem est, quòd in triagulis duū æqualium laterum, anguli ad basim, hoc est ad reliquum latus tertium,

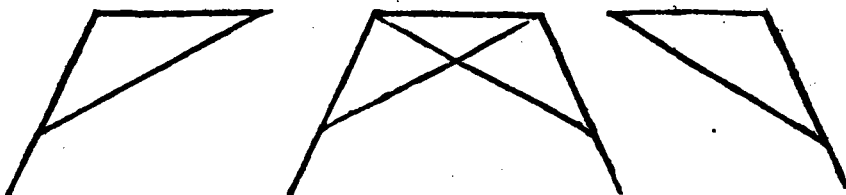


sint inter se æquales. Posterior uerò, si in huiusmodi triagulis æqualia duo latera ultra triangulum producantur: quod & sub basi, qui sic fiunt anguli, inter se æquales sint. Fiant latera ultra triangulum producta, per 3, inter se æqualia, horum deinde æqualium extremitates cū basis extremitatibus, duabus rectis, quæ sese mutuo secant iunctis, demonstratio ex 4 precedenti, bis usurpata, & communi tandem illa noticia, Si ab æqualibus æqualia auferantur, & quæ relinquantur, &c., sic colligetur. Quoniam enim inferius ad

ritus ad Iſoſcelis baſim poſita triangula (ſumpto tamē ad utrūq; Iſoſceli deſcripto)
duo latera ex hypotheſi & ſtructurā, duobus lateribus æqualia, angulum prætereā

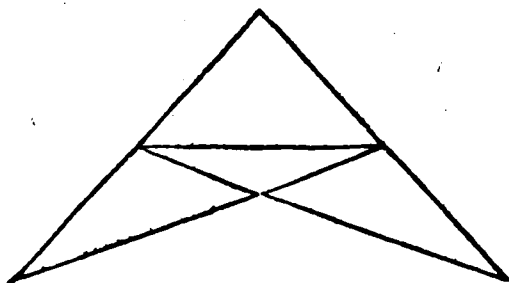


inter æqualia latera, angulo equalē habent: per præcedentem quartā, & baſim baſi, hoc eſt, ſecantes ſeſe mutuo ſub Iſoſcelis baſi lineas, ac reliquos duos angulos reliquis duobus angulis equales habebunt: quod eſt notandum. Rurſus quoniam eadem duo inferius ad Iſoſcelis baſim poſita triangula, propter ſtructurā quidem, & ea inſuper, quæ iam demonſtrata ſunt, ex propoſitione 4 huius, inter ſe æqualia ſunt, angulos etiam equales habent: iam ſtatim poſterior huius propoſitionis pars, quod ſcilicet ſub baſi anguli inter ſe æquales ſint, manifeſta erit. Quòd deinde quātum ad partem priorē, ad baſim etiam poſiti anguli inter ſe equales ſint, ex cōmuni



illa noticiā, Si ab æqualibus æqualia auferantur, &cæ. & id tandē manifeſtabitur. Conſtat itaque ſic tota propoſitio. Iſoſcelium igitur triangulorum: qui ad baſim ſunt anguli, inter ſe equales erunt. Productis item æqualibus lateribus: & qui ſub baſi anguli, inter ſe æquales erunt, quod demonſtrari oportuit.

SEQVITVR FIGVRA ALIA,



ΠΡΟΤΑΣΙΣ

6.

Εὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσῃ ἀλλήλαις ὣσι, καὶ αἱ ἐπὶ τὰς ἴσας γωνίας ἐποτεινόμεναι πλευραὶ, ἴσῃ ἀλλήλαις ἵσονται.

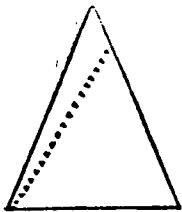
PROPOSITIO

VI.

Si trianguli duo anguli equales inter ſe fuerint: & ſub æqualibus angulis ſubtenſa latera, equalia inter ſe erunt.

Eſto

Esto triangulum, cuius duo anguli sint inter se æquales: dico & latera illis equalibus angulis subtensa, inter se æqualia esse. Si enim non sunt equalia: erit alterum eorum longius. ab eo ergo quod est longius, breviori æquale auferatur, iuxta illum angulum, qui est alteri æqualis, incipiendo, & claudatur triangulum. Et quoniam



Vel



duo triacula, quæ nimirum latus, quod equis angulis interiaret, cōmune habent, huiusmodi sunt, quæ lia propositio præcedens quarta requirit, cum per hanc quartam, et basi, totum deinde triagulum toti triagulo, ac reliqui anguli reli-

quis angulis equalis sint: parziale triangulum suo totali æquale erit, pars toti, quod est impossibile: partialis etiam angulus, ex communi illa noticiã. Quæ unũ sunt æqualia, & cæt. suo totali æqualis, quod & ipsum impossibile. Latus igitur unum alteri, propter hæc inconuenientia, non inæquale, sed æquale erit. Si igitur trianguli alicuius duo anguli equalis inter se fuerint, & horum equaliũ angulorum subtensa latera inter se æqualia erunt. quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

Z.

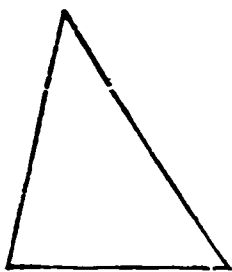
Ἐπὶ τῇ αὐτῇ ὑπερίαι, δυοὶ ταύς αὐταύς ὑπερίαις ἄλλαι δύο ὑπερίαι ἴσαι, ἡκατόρῃ ἡκατόρῃ, ὅν σὺν αὐθίσονται, πρὸς ἄλλῃ καὶ ἄλλῃ σημεῖῳ, ὡδὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχοντα ταύς ἐξ ἀρχῆς ὑπερίαις.

PROPOSITIO.

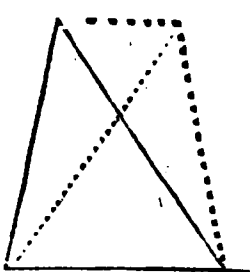
VII.

Super eadem recta, duabus eisdem rectis lineis alię duæ rectę equalis, utraq; utriq; nō constituentur, ad aliud atq; aliud punctum, ad eadē partes, eisdemq; terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes.

Sentētia est propositionis: Si super alicuius rectæ lineæ extremitatibus, à pūcto uno, extra lineā sumpto, duæ rectæ demissæ fuerint, quod tū à puncto quodā alio, in eadē qua prius parte constituto, ad extremitates datæ, alię duę rectæ, quę essent priorib. ductis equalis, utraq; suę cōterminali, demitti possint, hoc impossibile est. Si enim possibile, detur recta, à pūcto etiā extra datā sumpto, ad utranq; extremitatē recta linea ducat. Sumat deinde, ut ita aduersario, uel minus credēti, mos generetur, in eadem qua prius parte, punctum aliud, à quo & ipso duæ ad extremitates



Recta data.

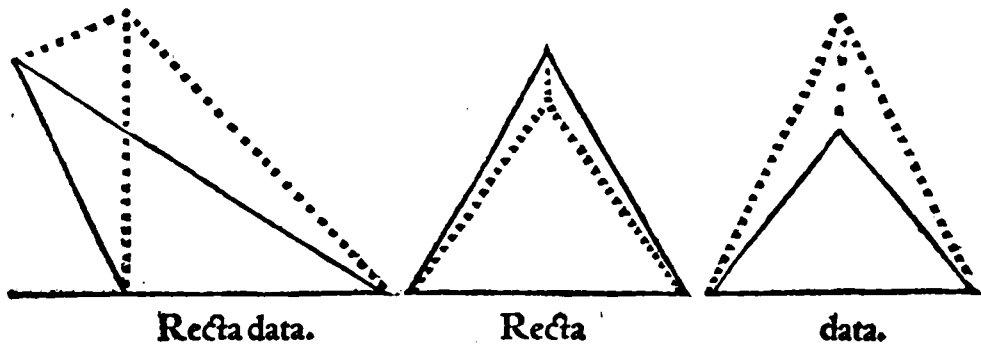


Recta data.

datę rectæ tandem demittentur lineę. Et quia in hūc modum descripta figura, ex posterioribus una priorum unā secet aut non secet, utrum nunc contigerit, pūcta semper, per primū postulatū, recta quadā linea coniūgēda sunt. Quod si una unā secet, cū hīc appareāt duo triacula, quorū utrūq; lso sceles, qui in lso sceliũ triagulorū uno,

per priorē partem quintę, anguli sunt inter se equalis, mox unũ equaliũ unus angulus, quē nimirum habet à latere, additus, de altero uerò unus ablati: qui sic ueniūt anguli inæquales, per eandem priorē quintę partem, ratione alterius lso scelis, inter se equalis erunt. quod est impossibile. Esto autem nunc, quod non secet una unam, tum post punctorum coniunctionem, unius lso scelis trianguli equalia latera ultra basim producantur. Et quoniā qui, ex posteriore parte quintę, anguli sunt inter se equalis, si unũ unus additus, de altero uerò unus ablati fuerit, ex priore parte eiusdem quintę idem quod

quod prius inferri potest. Sequitur ergo nunc, quomodocumq; hoc tentabitur, incassum laborari, cum nec intra nec extra demissas rectas punctū aliud sumi pos-



Recta data.

Recta

data.

fit. Super eadē igitur recta, duabus eisdē rectis, & reli. quod demonstrasse oportuit,

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

H.

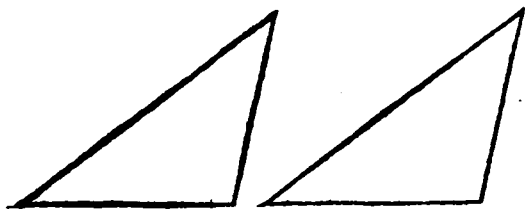
Εὰν δύο τρίγωνα πᾶς δύο πλευρὰς τοῖς δύο ἰσότητος ἔχῃ, ἡ αὐτὴν ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔσθι, τὴν ὑποθῆσιν ἐνθεῖναι ποιεῖσθαι.

PROPOSITIO

VIII.

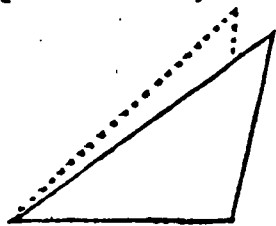
Si duo triangula duo latera duobus lateribus equalia habuerint, utrūque utriq; habuerint uero & basim basi equalem: & angulum angulo æqualem habebunt, eum qui sub equalibus lateribus comprehenditur.

Describantur huiusmodi duo triangula, qualia hæc propositio requirit: dico & angulos, qui sub æqualibus amborum triangulorum lateribus comprehenduntur, inter se æquales esse. Colligit suam demonstrationem hæc propositio ex septima, ut



precedens sexta ex quinta, ab impossibili hoc modo. Superponat triangulum unum alteri, sic ut basis basim, latera etiam latera, unumquodq; suum equalē, respiciant: ac posita basi super basi, una item extremitate unius in uno, super una basis extremitate in tri-

angulo altero, cum ipsæ bases inter se sint, ex hypothesi, æquales: duæ harum extremitates reliquæ coincident, atq; sic etiam ipsæ bases, cum alias, ubi uidelicet una basis extra uel intra triangulū caderet, duæ rectæ lineæ superficiē clauderent, id quod per communem quandam notitiam fieri posse negatum est: cōgruunt igitur bases. Et quia bases congruunt: latera sic lateribus aut congruent, aut non. Si prius: & angulus angulo congruet, & ei equalis erit, quod erat demonstrandum. Est uero quod non congruant latera basibus congruentibus, sed differant, hoc est, in diuersa puncta cadant, cum super unius rectæ extremitatibus duæ rectæ, ab uno pun-



cto deductæ, prius constitutæ sint, iam uero aliæ duæ, super eisdem rectæ extremitatibus positæ, uersus eandem partem tendentes, in aliud punctum concurrant, contra propositionem præmissam septimam id agi manifestum est. id quod fieri non solet cum uidelicet Geometre indecorum nimis atq; turpe esset, si demonstratæ antea propositionis ueritatem & constantiam eandem non tueretur.

Propter illud igitur inconueniens, congruentibus basibus: et reliqua latera, cū sint, ex hypothesi, inter se æqualia, congruere: atq; sic angulos, quos dicta latera com-

M

prehendunt,

prehendunt, inter se æquales esse, necesse erit. Si igitur duo triacula, duo latera duobus &cæ. quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

Θ.

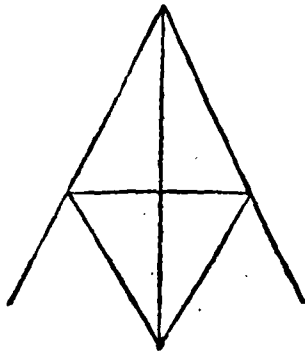
Τὴν διθῆσαν γωνίαν ἐν θύγραμμον διχα τέμνειν.

PROPOSITIO

IX.

Datum angulum rectilineum: bifariam secare.

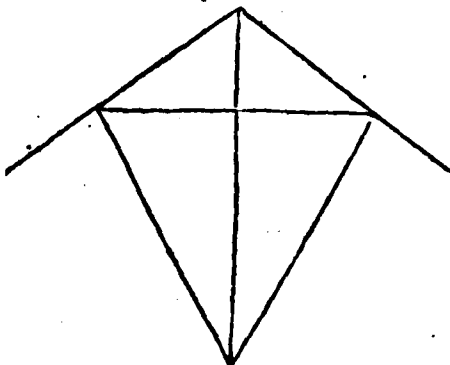
Angulus rectilineus datus,



Sit angulus rectilineus datus, atq; propositū, eum bifariam secare. Officio igitur circini, ex rectis datum angulum continentibus, ab earū contactu incipiēdo, portiones sumantur æquales: quarum fines deinde linea quadam recta, ut isosceles triangulū fiat, iuncti, super illa, ex altera parte, triangulum æquilaterum constituat. Quod si tandem linea quadam recta alia angulus datus cum sibi opposito copuletur, propositioni iam satisfactum erit: id quod propositionis κατὰ ἀνάγκη & propositio octava manifestabunt.

ALIA DEMONSTRATIO HUIVS.

Sit angulus rectilineus datus, atq; propositum, eum bifariam secare. Signetur igitur in uno anguli latere pūctū aliquod,



huic deinde portioni, quæ inter pūctū hoc et angulū iacet, æqualis ab altero anguli latere, ab ipso angulo incipiēdo, per propositionem tertiam auferatur, et connectantur harum portionum fines tertiam quadam recta linea. Porro super hac tertia, ex altera parte, per primam propositionem huius, triangulo æquilatero cōstituto, angulis in super, quos hæc recta in diuersis triangulis subtendit, recta quadam linea alia iun-

ctis, confectum erit negocium, cum hæc ipsa recta angulum propositum bifariam secet: id quod, ut prius, ostendi poterit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

Ι.

Τὴν διθῆσαν ἐν θύγραμ πεπερασμένον διχα τέμνειν.

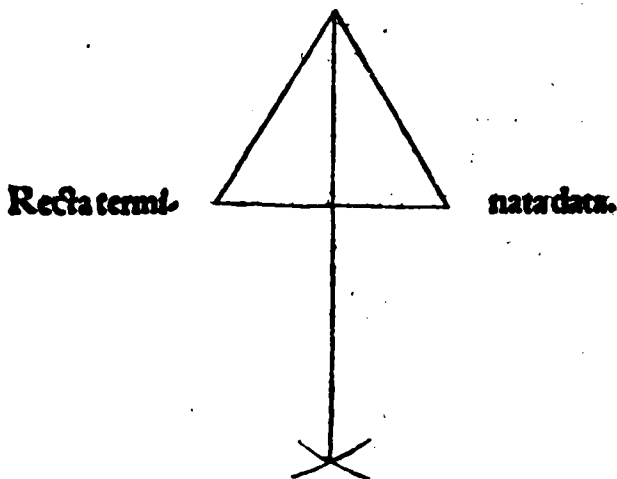
PROPOSITIO

X.

Datam rectam lineam terminatam: bifariam secare.

Sit recta linea terminata data, atq; propositum, eam bifariam secare. Super illa igitur triangulum æquilaterum constituatur: angulo deinde, quem hæc recta terminata subtendit, linea quadam recta alia, per propositionem nonam præcedentē, bifariam diuiso, factum erit negocium. Nam quæ angulum, ea ipsa, continuata tamen, & terminatam rectam lineam datam bifariam secet: cuius quidem rei demonstratio, ipsa structura & propositio quarta erunt. Data igitur recta terminata linea, bifariam secata est: quod fieri oportuit.

SEQUITVR



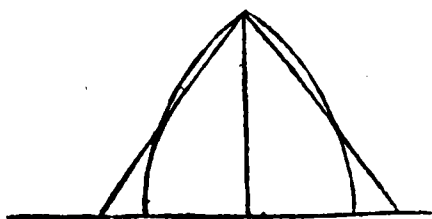
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ.

Τῇ ὁμοιότητι, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ ὁμοίως σημείου, πρὸς ὁσὰς γωνίας ἐν
ἐκείνῃ γραμμῇ ἀγαγέτω.

PROPOSITIO XI.

Data recta linea, à puncto in ea dato, ad angulos rectos lineam rectam
excitare.

Sit recta linea data, in ea etiam punctū datum, atq; propositum, ex puncto hoc,
ipsius rectæ lineæ data, lineam rectam ad rectos angulos educere. Signentur ex u-

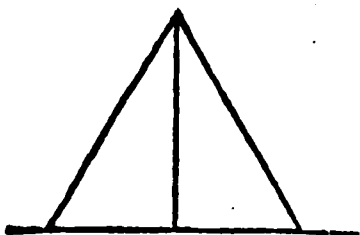


Recta data.

traque parte puncti in linea, circini officio, æquales portiones. ex harum finibus dein-
de, circino prius ulterius expanso, duo circuli,
uel arcus tantum, circulorum loco, sese mutuo
secantes describantur. A' mutua tandem duo-
rum arcuum intersectione linea recta ad pun-
ctum in linea datum si demissa fuerit: illam de-
missam à puncto in linea ad rectos angulos e-
ductā esse, sic obtinebitur. Ducatur à commu-
ni arcuum intersectione ad utraq; illorum cū
recta data intersectionē, quædam recta linea.

Et quoniā hīc sunt duo triāgula, qualia propositio octaua præcedens requirit, cū
illī angulī, quos recta data, & quæ ab arcuum intersectione demissa est linea, ipsæ
constituunt, per eandem octauam, æquales inter se sint, atq; ob id deinde recti, ex
definitione: hæc demissa ad angulos rectoseducta erit, id quod fieri oportuit.

ALIA DEMONSTRATIO HVIVS.



Recta data.

Sit recta linea data, & quæ sequuntur. Signentur
ex utraque parte puncti in linea æquales portiones,
una quidem ad placitum, altera uero per propositio-
nem tertiam præmissam. Super his deinde duabus
portionibus, tanquam una linea, triangulo æquila-
tero per propositionē primam constituto, ad angulū
quem hæc tota subtendit, à puncto in linea sumpto,
recta quædam linea ducatur. Erit autem hæc recta, ea
quæ petebatur, ad rectos scilicet angulos à puncto in

linea datoeducta: id quod, ut modo, mediante structura, ex propositione octaua,
& definitione angulī recti, facile demonstrari poterit.

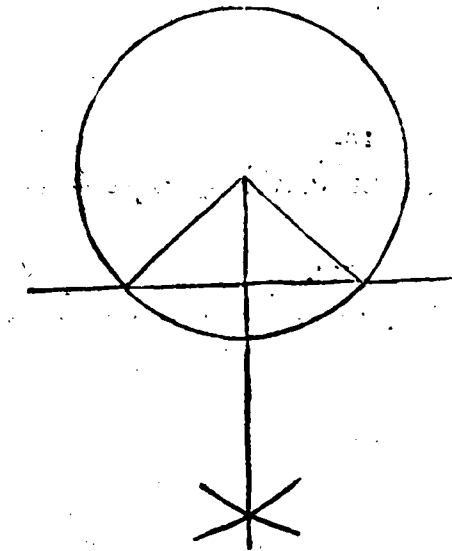
Επὶ τῷ δὲ δέξαι ἑαυτὴν ἀπειρομ, ἀπὸ τοῦ δὲ δέξαι τὸ σημεῖον, ὃ μὴ ἔστιν ἐπὶ αὐτῇ, καὶ ἑαυτὴν ἑαυτὴν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

PROPOSITIO

XII.

Super datam rectam lineam infinitam: à dato puncto quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam ducere.

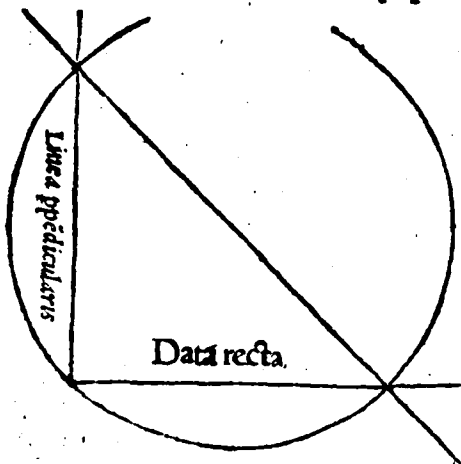
Sit recta linea satis longa data, extra eam etiam punctum datum, atq; propositum, à puncto super rectam, perpendicularem rectam lineam demittere. Suscipiatur ex alterutra parte rectæ, per punctum diuisæ, punctum aliud, utcumq; ac centro quidem, puncto dato: intervallo uerò eo, quod à duobus punctis intercipitur, circulus, per 3 postulatam describatur. Vel, Ex puncto dato describatur primò circulus tātus, ut rectam datam in duobus locis interfecet, à quo eodem puncto deinde ad intersectionū loca duabus rectis lineis ductis, secetur uel angulus ad centrum, quem hæ duæ rectæ includunt: per nonam, uel latus eundem angulum subtendens, si magis placet; per propositionē 10, bifariam. Dico ergo quod hæc, uel angulū uel latus: secans linea, ea sit quæ peritur. Quoniam enim ad rectam hanc, quæ data rectæ insistit, angulos æquales esse ipsa rectæ, et propositio 4, si angulus: uel & propositio 8, si linea data, seu latus bifariam diuisum fuerit, demonstrabūt. Et quoniam sunt anguli deinceps se habentes, Quando autem recta rectæ insistent, deinceps se habentes angulos



æquales inter se fecerit: uterq; æqualium angulorum ex definitione, rectus est, ac insistent, Perpendicularis uocatur, cum hæc recta ex puncto etiam dato procedat, propositioni iam satisfactū erit. Super datā igitur rectam lineā satis longā, à dato puncto quod in ea non erat, Perpendicularis educta est, quod fieri oportuit.

ALIUS MODVS DVCENDI

perpendicularem lineam.

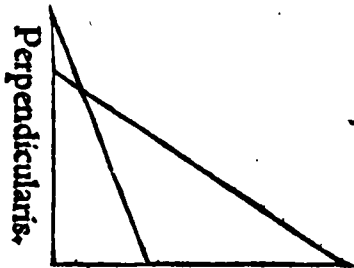
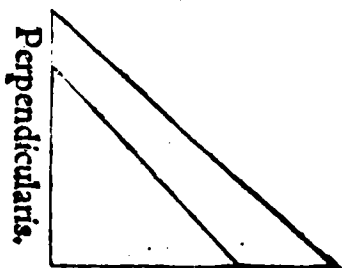


Est & tertius modus ducendī perpendicularē lineam, ex prima parte propositionis 31, tertij libri sequentis desumptus, eo spectans, si quando fortē ab alicuius rectæ extremitate ea ducenda esset. Huius itaque delineationem huc ponere libuit, maxime ob id, quod præter hos modos, non puto præterea alium esse modum erigendī perpendicularē lineam.

APPENDIX.

Ex præmissis duabus propositionibus discetur, quomodo triangulum orthogonium formari debeat, Posteaquam enim perpendicularis ad rectam ducta est, si deinde

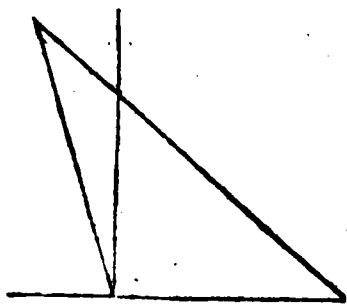
deinde huius extremitas, uel punctum aliquod in ea, cum data recta, uel similiter eius puncto aliquo, coniungatur: triangulum rectangulum descriptum erit, sic



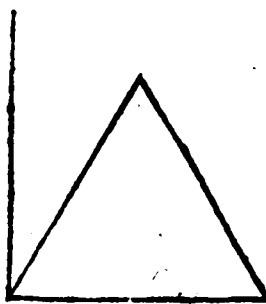
De Obtusiangulo autem & Acutiangulo, quomodo formentur, si illorum angulos, à quibus denominata sunt, quis animaduernerit, non erit laboriosum facere, cum nullam singularem industriam hæc delineationes requirant, id quod ex sequenti cuiusque descriptione apparet.

Triangulum

Amblygonium



Oxygonium



ΠΡΟΤΑΣΙΣ

II.

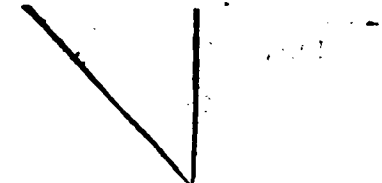
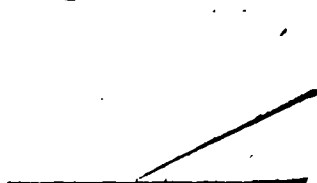
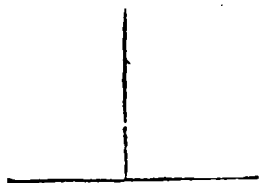
Ὡς ἂν ἐν θείᾳ ἐπὶ ἐν θείᾳ σταθεῖσα, γωνίας ποιῇ, ἥτερι δύο ὀρθὰς, ἢ διανοίῃ ὀρθῶς ἰσὺς ποιήσῃ.

PROPOSITIO

XIII.

Cū recta linea super rectam consistens lineā, angulos fecerit: aut duos rectos, aut duobus rectis æquales faciet.

Consistat recta super rectam lineam, angulos faciens: dico illos esse, aut utrumque rectum, aut ambos simul duobus rectis æquales. Nam linea insistens rectæ aliā, faciet deinceps se habentes angulos aut inter se æquales, aut uerò inæquales. Quod

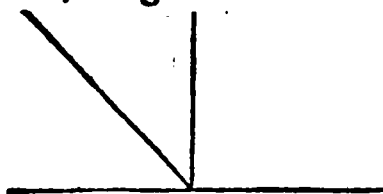


si æquales: uterque ex definitione, rectus erit, id quod uult propositio. Sin uerò inæquales, quia tamen unus tanto intervallo rectum excedit, quanto alter recto minor est (id quod linea à puncto in recta sumpto, πρὸς ὀρθῶςeducta demonstrabit) propter excessus & defectus æqualitatem, iam hi duo anguli, licet non recti per se, tamen duobus rectis æquales sunt, id quod & ipsum habet propositio. Vnde sic patet ipsa tota. Si recta igitur linea super rectam consistens lineam angulos fecerit, aut duos rectos, aut duobus rectis angulis æquales faciet: quod demonstrasse oportuit.

ALIA EIVS QVO IN PROPOSITIONE

dicitur, Aut duobus rectis æquales, demonstratio.

Quòd si recta insistentes rectæ aliæ, angulos deinceps se habētes inæquales fecerit, tñ ex cōmuni linearum contactu, tanquā ex puncto in linea dato, per propositionē 11 huius, ad angulos rectos linea excitetur. Et quoniam ex utraq; parte semper unus



angulus, hic quidem per lineam πρὸς ὀρθὰς ductam: illic uero, per alteram insistentem, in duos angulos diuisus est: singuli duo partiales suo totali angulo æquales erunt. atq; his deinde illis æqualibus additis, sicut duo uni, & unus duobus angulis accedat: tres anguli tribus æquales erunt, uno tandem

communi angulo, qui nimirum sub perpendiculari & alia insistente comprehenditur, hic & illic ablato: duo anguli duobus æquales erunt. Quia autem duo ex una parte recti sunt: ex altera parte duo, quos nimirum recta, non ad rectos angulos ducta, & ea cui insistit, comprehendunt, duobus rectis angulis æquales erunt. Si recta igitur linea super rectā cōsistens angulos fecerit, &c. quod demonstrari oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

ΙΑ.

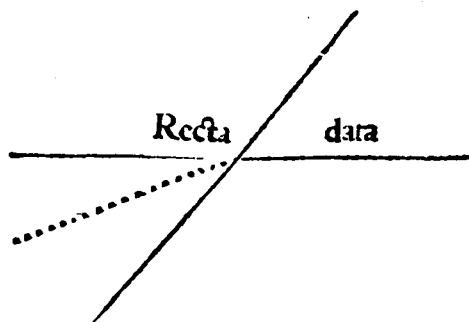
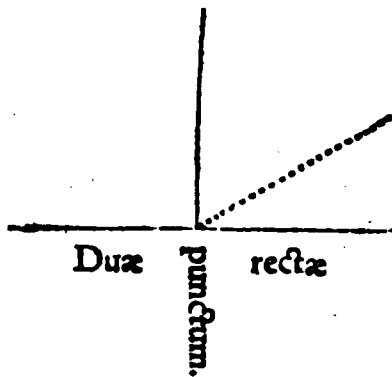
Ἐὰν πρὸς πνιὺν θείῃ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο ὑπεῖαι μὴ πρὸς τὰ αὐτὰ μίση κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας διχοτμήσας ὀρθὰς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' ὑπεῖας ἴσων τῶ ἀλλήλοις αἱ ὑπεῖαι.

PROPOSITIO

XIIII.

Si ad aliquam rectam lineam, atq; ad eius punctum duæ rectæ lineæ, nō ad easdem partes ductæ, deinceps se habentes angulos duobus rectis æquales fecerint: in directum erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.

Sit quædam recta linea, ad eius etiam unum aliquod punctum, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes ductæ, sic tamen, ut cum priorī rectā, angulos duobus rectis æquales faciant: dico quòd, quæ ad punctū sunt ductæ rectæ lineæ, ad amulsim una alteri iuncta sit. Colligit suam demonstrationem hæc propositio ex propositione



ne 13 præcedēti ab impossibili, sic. Nisi enim hæ duæ rectæ, ad punctum prioris rectæ sic ductæ, una linea sint, si fortè ab aliquo minus credente, atq; subtili nimis homine, una ductarū suo modo secundum continuationem in rectum eiecta fuerit, per præcedētem 13, & illam deinde communem noticiam, Si ab æqualibus æqualia, uel aliquod commune (quod idem est) subtrahatur, &c. inferri posset, partialē æqualem esse angulo suo totali. Sed quia hoc est contra rationem & noticiam quædam communem, quæ sonat. Totum esse qualibet sua parte maius. Non igitur continuari potest iuxta hoc punctū in directū aliter, neq; illa, cum qua iam hoc tēta tū est, neq; etiā ducta recta altera: quare hæ duæ in directū iunctæ sunt. Si ad aliquā igitur

igitur rectam lineam, atq; ad eius punctum, duæ rectę lineę, non ad easdem partes ductę, deinceps se habentes &c. quod demonstrari oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

ΙΕ.

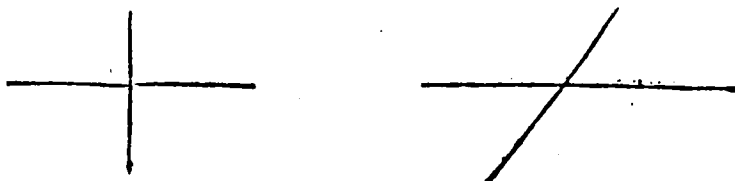
Εὰν δύο ἑνθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας· τὰς ἐκ τῆ κορυφῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιήσουσι.

PROPOSITIO

XV.

Si duę rectę lineę sese mutuo secuerint: ad uerticem angulos æquales inter se faciunt.

Sint duę rectę lineę sese mutuo secantes: dico, quod anguli ad uerticem sint inter se æquales. Est huius propositionis demonstratio, propositio 13 præcedens, cū per eam recta rectę lineę insistens, semper duos angulos aut rectos, aut duobus re-



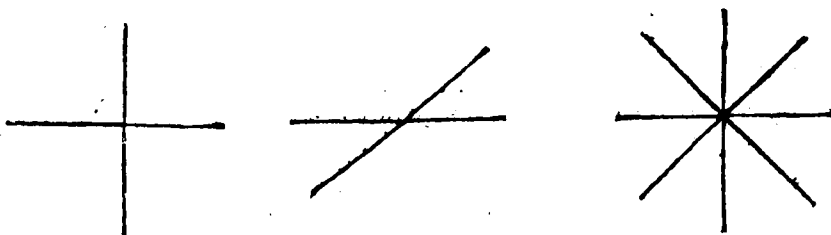
ctis æquales faciat. Quare hac propositione bis usurpata, Cum quę uni equalia: illa & inter se equalia sint, communi angulo ab his equalibus ablato: anguli tandem ἐκ κορυφῆς æquales manebūt. Si duę igitur rectę lineę sese mutuo secuerint: ad uerticem angulos æquales inter se faciunt, quod demonstrasse oportuit.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Εκ δὴ τούτου φανερὸν· Ὅτι καὶ δύο δύνανται οὐκ ἑνθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας· τὰς πρὸς τῇ γωνίᾳ τετρασμὸν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσουσι.

COROLLARIUM.

Hinc manifestum est, Quotquot rectas lineas, in eodē plano sese mutuo interfecantes: angulos efficere quatuor rectis æquales.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ

ΙΣ.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν ἐκτελειθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατοῦρας τῶν ἑνὸς, καὶ ἀπεναντίου, μείζων ἐστίν.

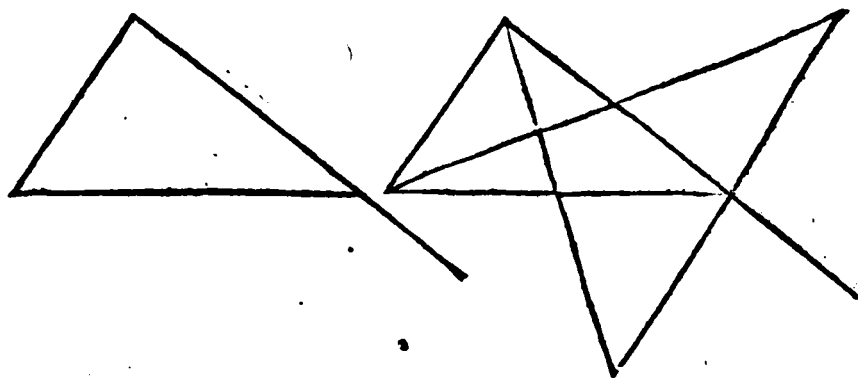
PROPOSITIO

XVI.

Omnis trianguli uno latere producto: externus angulus utroq; interno, & opposito, maior est.

Sit triagulum, productum etiam ulterius unum eius latus: dico, qui sic fit externus angulus, eum utroq; interno, & ex opposito constituto, maiorem esse. Secentur duo latera trianguli, quę sunt ad angulū externū, bifariam, deinde per diuisionū puncta, ab angulis, quos hæc eadem latera subtendunt, lineę rectę ultra triangulū ducantur,

ducantur, sic, ut utriusq; externa, suæ sit internæ portioni æqualis. Extremitatibus



tandem harum rectarum cum puncto, quod est duarum diuisarum communis terminus, duabus rectis lineis cōnexis, demonstrationis figura parata erit. Qua nunc diligenter perspecta, propositionum decimæ quintæ & quartæ memor, rem ita sese habere facile perspiciet.

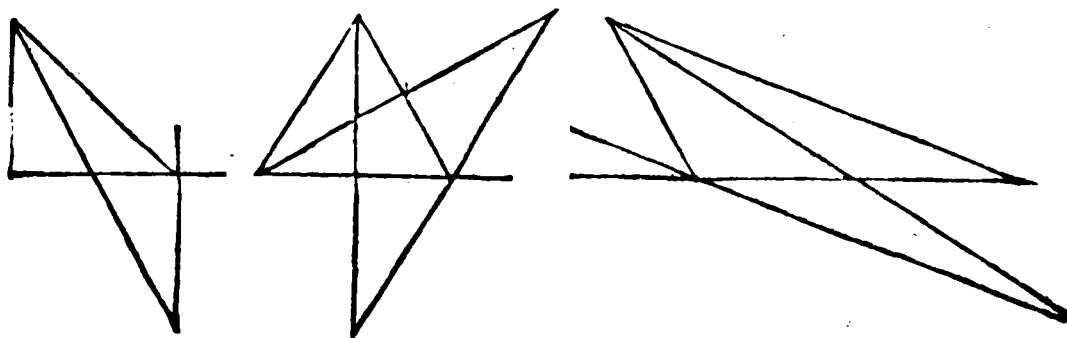
ADMONITIO.

Oportet autem, ut pro utroq; interno & opposito angulo, quo nimirum externus maior esse demonstrari debeat, duo partialia triângula sumantur, quorum alterum quidem angulum illum, de quo agitur, integrum habet: alterum deinde, quod huic ad uerticem iunctum est, tum demum propositionibus allegatis res successe habebit, quod indicare necesse erat.

SEQVITVR GEOMETRICA FIGVRA

alia, pro triângulo

orthogonio & isos. oxygonio & æquilat. amblygonio & scaleno.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ

12.

Πάντες τριγώνου, αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἑλαττοτέραι εἰσι, πάντῃ μεταλαμβάνόμεναι.

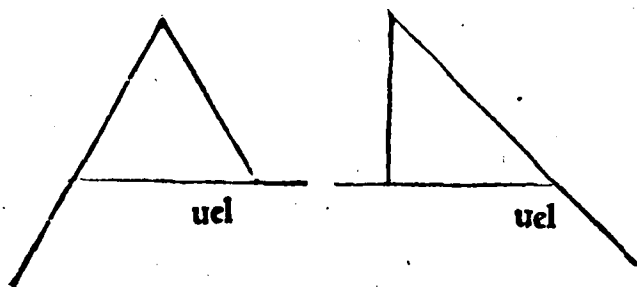
PROPOSITIO

XVII.

Omnis triânguli, duo anguli duobus rectis minores sunt, omnifariam sumpti.

Proposito triângulo qualicūq; dico, quoslibet eius duos angulos, duobus rectis minores esse. Producat quoduis eius unū latus ulterius. Et quoniā ex iam præmissa 16 propositione, angulus externus utroq; interno & opposito maior est, & rursus quoniam ex communi quadam notitiā, Si inæqualibus æqualia, uel aliquod commune adiectū fuerit, ipsa tota inæqualia sunt: priorū inæqualiū utriusq; angulus, qui est externo

est externo $\hat{\alpha}\phi\epsilon\hat{\iota}\sigma\hat{\iota}\varsigma$ adiectus, & tota tandem inter se inæqualia esse conueniet: atque illud quidem maius, ubi scilicet est externus angulus: alterum uerò, duo nimi-



rum interni anguli, minus. Maius autem, cum ex propositione 13, duobus rectis angulis æquale sit: alterum nūc, ut qui sunt duo interni anguli, propter angustiam, duobus rectis angulis minus erit. Et quoniam hoc nūc de duobus ad placitū sumptis angulis, quod ipsi duobus rectis minores sint, demonstratum est: de singulis duobus amplius nullum dubium erit, quin & ipsi duobus rectis minores sint, subinde tamen alio atq; alio latere ulterius producto. Omnis igitur trianguli duo anguli, & quæ sequuntur, quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

IH.

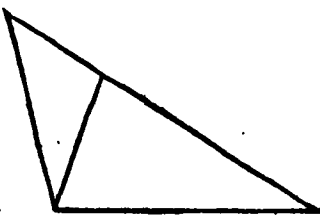
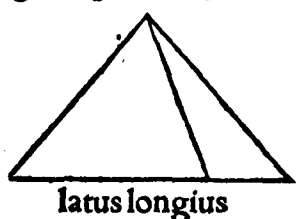
Πάντος τριγώνου, ἡ μείζων πλευρὰ τῶν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.

PROPOSITIO

XVIII.

Omnis trianguli, longius latus ampliorem angulum subtendit.

Sententia est propositionis. Quod latus alicuius trianguli est longius: illius etiā angulum quem subtendit, breuioris subtendentis angulo ampliorem esse. Describatur igitur triangulum, duum æqualiū, uel trium inæqualium laterum: dico quòd, cuius anguli est latus longius, illum etiā ampliorem esse. Duorum angulorū latera, ergo amplior angulus.



cum ex hypothesi, unum eorum longius, alterū uero breuius sit, abscindatur de longiori, per propositionē 3 huius, portio breuiori æqualis, ac tri angulo formato, demonstratio ex propositionibus 5 et 16 præmissis sic colligetur. Quo

niam formatū triangulū cum sit ex structura Isosceles: erunt ipsius ad basim anguli inter se æquales. sed quia unus horū æqualiū, est alterius cuiusdā triaguli externus, unde sic utroq; interno eiusdē triaguli & opposito, maior: & alter æqualium eodē interno angulo maior erit. Alter autem cum sit eius, quem longius latus subtendit anguli pars, internus uerò is qui à breuiori latere subtenditur, argumento à maiori uel fortiori sumpto, si pars maior illo est: multo fortius igitur ipsum totum. Omnis igitur trianguli, longius latus ampliorem angulum subtendit: quod demonstrari oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

IO.

Πάντος τριγώνου, ὑπὸ τῶν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.

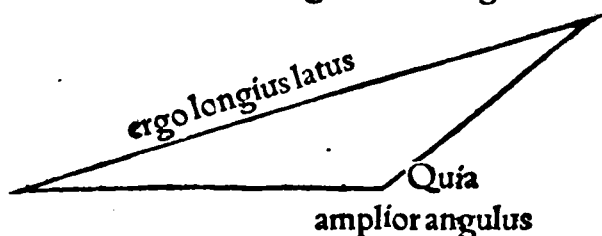
PROPOSITIO

XIX.

Omnis trianguli, amplior angulus sub longiori latere subtenditur.

N Sententia

Sententia est propositionis. Qui angulus alicuius trianguli est amplior: illius etiam subtensum latus angustiores angulum subtendente latere longius esse. Nam



si non fuerit longius illud, de quo dicim, latus, erit id reliquorum uni aut equale, aut uno brevius. Quod si uni equale fuerit: angulus quem subtendit, atque amplior est, ex hypothese, ex priore parte propositionis, et

bi alium æqualem angulum habebit: non ergo amplior. Quod si uero uno brevius, cum latus longius, ex precedente, ampliorem angulum subtendat: angulus qui positus est amplior, iam uno eorum, illo scilicet cuius longius est subtensum latus, angustior erit. Sed quia non est: neque etiam eius latus alio brevius erit: longius ergo. In omni igitur triangulo amplior angulus longius latus requirit, seu sub longiori latere subtenditur, quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

Κ.

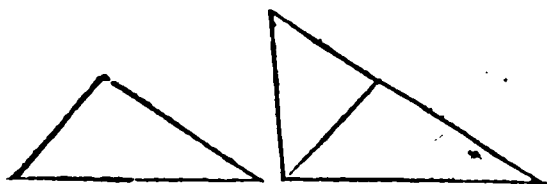
Πάντες τριγώνου · αἱ δύο πλευραὶ τῇ λοιπῇ μεγίσταις εἰσι, πάντα μεταλαμβανόμεναι.

PROPOSITIO

XX.

Omnis trianguli, duo latera reliquo longiora sunt, omnifariam sumpta.

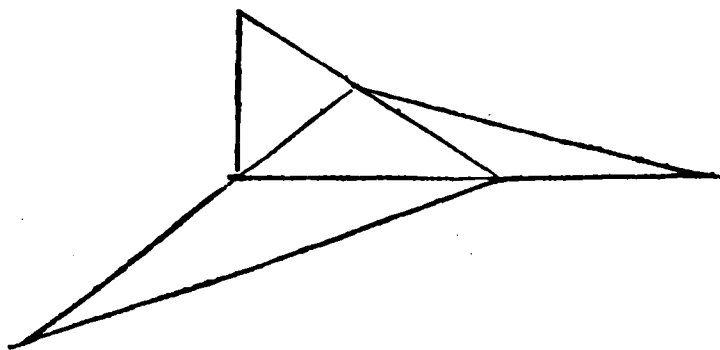
Esto triangulum quaecumque: dico, quod eius qualitercumque sumpta duo latera simul, tertio reliquo longiora sint. Horum duorum laterum, quæ demonstrari debeant, quod tertio reliquo longiora sint, unum ad longitudinem lateris alterius, ex il-



la parte ubi est communis eorum copula, ultra triangulum continuatur, quæ deinde hæc duo æqualia, uel hæc duæ æquales rectæ lineæ comprehendunt angulum, is tertia quadam lineæ recta, ut triangulum fiat, claudatur. Et

quoniam illi duo anguli, qui ratione trianguli isoscelis, ex priore parte quintæ, inter se æquales sunt, mox ubi uni eorum, partiali nimirum, altera pars accessit: totus nunc altero æquali maior erit. Sed quoniam qui maior & amplior est in triangulo angulus, longior ex propositione 19, subtensam requirit: illa etiam quæ ex duobus dati trianguli lateribus continuata est, ea lineæ, id est, tertio reliquo latere longior erit. Omnis igitur trianguli duo latera reliquo longiora sunt, omnifariam sumpta, quod demonstrasse oportuit.

SEQVITVR FIGVRA GENERALIS PRO
singulis binis lateribus exposita.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ

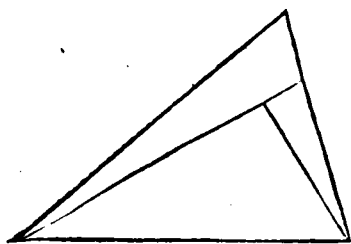
Εὰν τριγώνου ἑνὶ μὲν τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν πόσων δύο ἑνὲς ἐν ἑσὶ συσταθῇ· αἱ συσταθείσαι τῶν λοιπῶν τῷ τριγώνου δύο πλευρῶν ἑλαττονες μὲν ἴσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσιν.

PROPOSITIO

XXI.

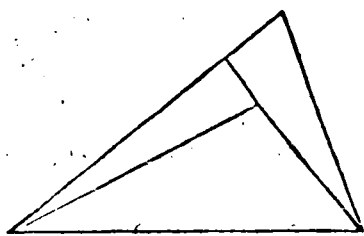
Si super trianguli uno latere ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interioris constitutæ fuerint : hæ constitutæ reliquis trianguli duobus lateribus breuiiores quidem erunt, ampliorem autem angulum comprehendunt.

Esto triangulum, duæ etiam rectæ lineæ, in ipso concurrentes, super unius lateris extremitatibus constitutæ: dico, quod constitutæ hæ reliquis duobus trianguli la-



teribus breuiiores sint, ampliorem autem angulū comprehendunt. Sunt huius propositionis duæ partes. Prior, quod interiores duæ rectæ exterioribus breuiiores sint, id quod patet ex præcedenti bis usurpata, cum per eam, duo quælibet latera uniuscuiusque trianguli, tertio longiora sint, & communi tandem illa notitia, Si ab æqualibus æqualia, uel aliquod commune, subtrahatur &cæ.

Oportet tamen, ut prius ex interioribus lineis alterutra in continuum et rectum, ad latus usque exterius producat, utq; triangula illa duo partialia, quorum unius quidem unum latus, linea exterior: alterius uero trianguli unum, alterius exterioris lineæ pars, latus unum fuerit, sumantur, & succedet demonstratio. Posterior nunc, quod angulus sub interioribus eo, quem exteriores rectæ lineæ comprehendunt, maior sit, ex propositione 16, & illa bis usurpata, uera esse cōuincitur. Super uno igitur alicuius trianguli latere ad extremitates eius duæ rectæ interioris cōstitutæ: reliquis duobus trianguli lateribus breuiiores quidem sunt, ampli-



orem autem angulum comprehendunt, quod demonstrasse oportuit.

ALIA PRIORIS PARTIS DEMONSTRATIO.

Vsurpatis triangulis partialibus, quæ prius. Et quoniam, ex præcedenti 20, duo quælibet latera omnis trianguli, tertio latere longiora sunt, & quoniam etiam, In æqualibus æqualia si adiſciantur: tota, ex communi quadā notitia, inæqualia sunt, utroq; bis (uno tamen post alterum) usurpato, per id demū quod dicitur, Longo breuius, longiore multo fortius breuius esse, argumento nimirum à maiori sumpto, concluditur tandē propositum, Interiores scilicet duas exterioribus duabus, siquidem secundum propositionis hypotheses constitutæ sint, breuiiores esse, quod demonstrari oportuit.

Εκ τριῶν ἐνθεῶν, αἱ εἰσι μῖσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις ἐνθείαις, τριγώνον συστήσασθαι. Δεῖ δὲ τὰς δύο τῶν λοιπῶν μείζονας εἶναι, πάντῃ μεταλαμβανομένας, ὅτε καὶ παντὸς τριγώνου τὰς δύο πλευρὰς, τῶν λοιπῶν μείζονας εἶναι, πάντῃ μεταλαμβανομένας.

PROPOSITIO

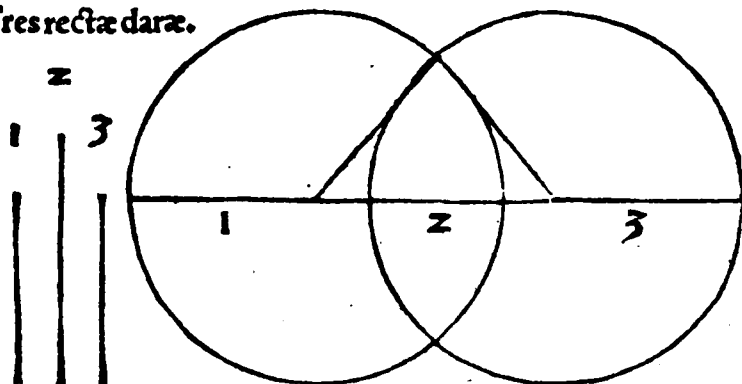
XXII.

Ex tribus rectis lineis, quæ sunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum constituere,

Oportet autem duas reliqua longiores esse, omnifariam sumptas, propterea quòd uniuscuiusq; triāguli duo latera, reliquo longiora esse oporteat, omnifariam sumpta.

Datis tribus rectis lineis, quarum quæq; duæ reliqua tertia longiores sint, propositum est, ex alijs tribus rectis, quæ sunt datis tribus æquales, triāgulum constituere. Ducatur igitur linea recta satis longa, ut quæ propositas rectas, adamussim cō-

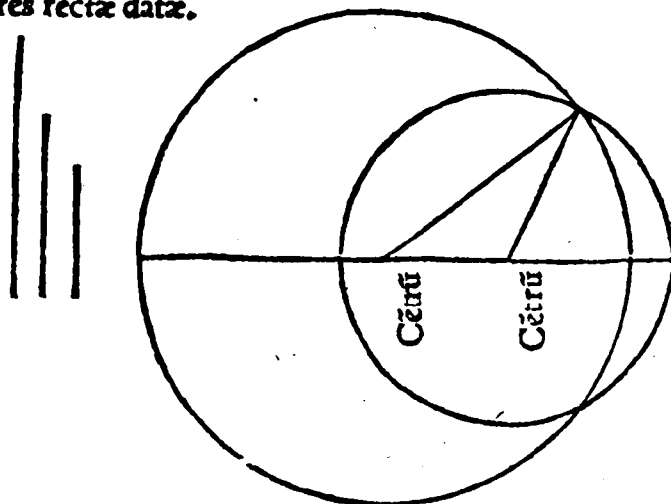
Tres rectæ datæ.



tinuatas, longitudine excedat. Hoc facto, portiones in ea, tribus datis rectis, singula singulis, æquales, ordine quo maximè placuerit, per 3 propositionem huius, separatim punctis signentur, ex pñctis deinde duobus intermedijs, tanquam ex duobus centris, secundum extremarum portionum quantitates seu intervalla, duo circuli describantur, atq; à puncto tandem intersectionis ad dicta centra duabus rectis lineis ductis, propositioni satisfactum erit, ut quidem hoc ex definitione circuli & illa communi notitiā, Eidem æqualia, & inter se sunt æqualia, facile colligetur. Ex tribus igitur rectis lineis, quæ sunt tribus datis rectis lineis æquales, triāgulum constitutum est, quod fecisse oportuit.

ALIA GEOMETRICA FIGVRA, PRO
triangulo scaleno constituendo.

Tres rectæ datæ.



APPENDIX.

Ex hac propositione addiscuntur trium triāgulorū, Aequilateri scilicet, Isoscelis & Scaleni, delineationes: cum prima unius tantum, Aequilateri scilicet, formati onem nobis proposuerit. Habentur ergo sic omnium triāgulorum delineationes, hic quidem

hic quidem, eorum qui secundum diuersitatem laterum nomina sua sortiantur: illi uero, nimirum circa 11 & 12 propositiones, ubi de Perpendiculari ducenda sermo erat, prout considerantur hæc, & nomina sua habent ab angulis, quod obiter dicere uolui.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

ΚΓ.

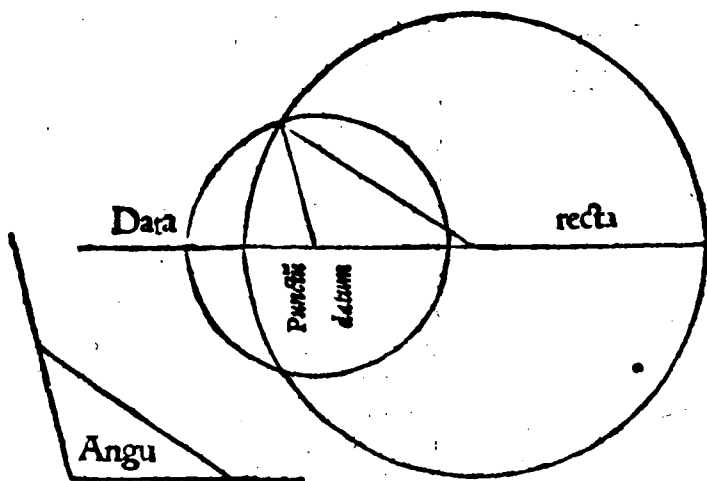
Πρὸς τῇ δοθείσῃ ἑνθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ ἐνὸν γράμ-
μα, ἴσῳ γωνίᾳ ἐνὸν γράμμα μου σήσασθαι.

PROPOSITIO

XXIII.

Ad datam rectam lineam, datumque in ea punctum, dato angulo recti-
lineo, æqualem angulum rectilineum constituere.

Sit recta linea data, punctum etiam in ea datum: sitque deinde & angulus quidam
rectilineus datus, atque propositum, ad id punctum ad hanc item rectam lineam, da-
to rectilineo æqualem rectilineum angulum constituere. Subtendatur primò dato
angulo recta quædam linea, quomodocunque hoc fiat, ut appareat triangulum, ad



lus rectilineus datus

datam rectam deinde, secundum quantitatem trium rectarum, quæ sunt tribus
formati iam trianguli lateribus æquales, triangulum, per propositionem 22 præmis-
sam, constituatur, sic tamen, ut quæ datum angulum comprehendunt latera, eorum
portiones uel lineæ æquales, in data recta iuxta punctum signentur, et factum erit.
Colligitur autem huius rei demonstratio ex structura, communi illa noticia, Eidem
æqualia, & inter se sunt æqualia, propositione tandem octaua huius, quod indican-
dum erat. Ad datam igitur rectam lineam, datumque in ea punctum dato angulo re-
ctilineo, æqualis angulus rectilineus constitutus est. quod fieri oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

ΚΔ.

Εὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυοὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἡ κατ' ὅρα μ
ἡ κατ' ὅρα, τὴν δὲ γωνίαν γ' ἡ γωνίαν μείζονα ἔχῃ, τὴν ἀπὸ τῆς ἴσας ἐνθεωρ
πλευρῶν καὶ τὴν βάσιν γ' ἡ βάσιν μείζονα ἔξει.

PROPOSITIO

XXIIII.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, utrū-
que utriusque, habuerint uerò angulum angulo ampliorem, eum qui sub æ-
qualibus rectis comprehenditur: & basim basi longiorem habebunt.

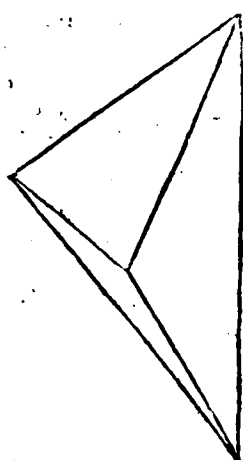
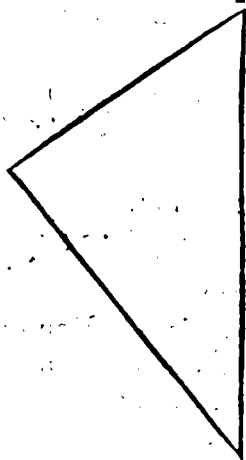
Sint huiusmodi qualia hæc propositio requirit, duo triāgula: dico basim illius tri-
anguli, quod sub æqualibus rectis ampliorem cōprehendit angulum, alterius trian-
guli basi longiorem esse. Cum enim, ex hypothesi, angulus inter æqualia latera in

N 3 uno

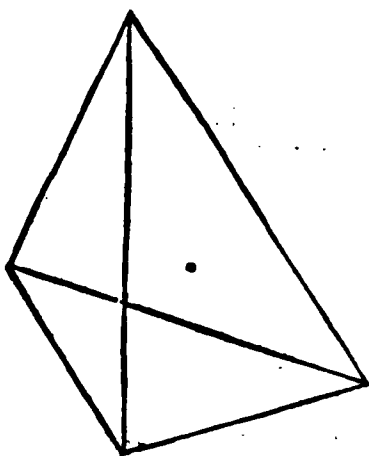
uno amplior sit angulo, sitidem inter æqualia latera, in triangulo altero, ille qui mi-

amplior

angustior



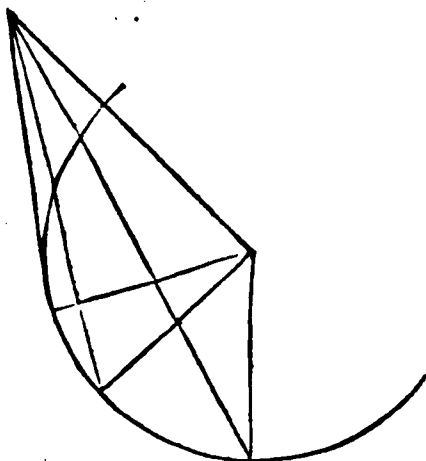
nor est, per propositionem 23 præcedentē, ut sit ampliori angulo æqualis, augeatur, ab angulo lineam, proximæ rectæ æqualem, educendo. Huic deinde angulo



totali iam facto, recta linea subtenfa: erit triangulum hoc, per propositionem 4, alijs posito æquale. Formetur nunc triangulum aliud, duas æquales rectas suis extremitatibus recta quadam linea coniungendo. Et quia triangulum, ex structura, est Iſosceles: erunt anguli ad basim, ex priori parte propositionis quintæ, inter se æquales. Per additionem nunc & subtractionē angulorum qui his æqualibus angulis adhærent, cum ex decima nona ampliori angulo longius latus subtendatur, propositum tandem, ubi æqualis pro equali linea sumitur, inferri poterit: Amplioris scilicet anguli in uno, basim longior

angustioris, quod demonstrasse oportuit.

SEQUITVR FIGVRA PRO TRIANGVLIS TRIBUS exposita, necnon ex tertio Euclidis libro desumpta,



APPENDIX.

Potuisse etiam e contrario, maior angulus, in structura, & id per propositionem uigesimam

trigesimam tertiam præcedentem, ad æqualitatem minoris formari, & idem fuisset.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

ΚΕ.

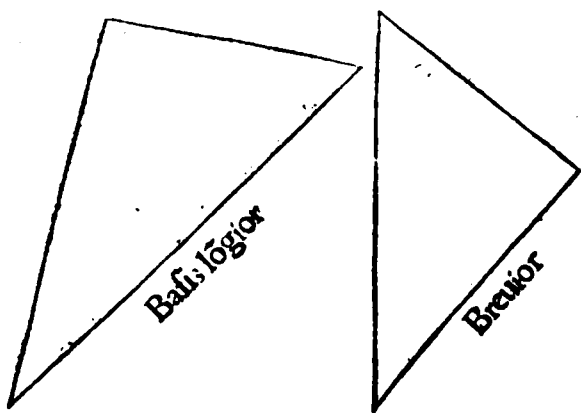
Εὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυοὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἡγετόρα μὲν ἡγετόρα, τὴν βάσιν δὲ ᾗ βάσεως μείζονα ἔχῃ· ἢ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔξῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων ὑποθέτων περιεχμένῃ.

PROPOSITIO

XXV.

Si duo triangu-
la duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, utrū-
que utrique, habuerint uerò basim basi longiorem: & angulum angulo
ampliorem habebunt, eum quem æquales rectæ lineæ comprehendunt.

Sint huiusmodi, qualia hæc propositio requirit, duo triangu-
la: dico, cuius trian-



guli basis est longior, illius etiam
angulum, quem æquales rectæ
comprehendunt, ampliorem es-
se. Nam æquales ne sint anguli,
uetat hoc propositio 4, cum sic
& bases, per eam, contra hypo-
thesim, inter se æquales esse de-
berent. Ampliorem deinde positū
angustiore minorem, uel contrā,
Angustiore positum ampliorem
esse maiorem, per propositionē
præcedentē nō admittitur. Qua-
re ampliorem positum in uno, pro-

pter longiorē basim, illō in triangulo altero, cuius est basis breuior, ampliorem esse
necesse est, quod demonstrari oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

κε.

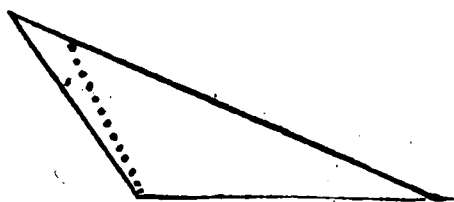
Εὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας ταῖς δυοὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ, ἡγετόρα μὲν ἡγετόρα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσῃ, ἢ τὴν πρὸς ταῖς ἴσας γωνί-
αις, ἢ τὴν ὑποτεινόμεν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς πλευ-
ρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξῃ, ἡγετόρα μὲν ἡγετόρα, ἢ τὴν λοιπὴν γωνί-
αν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ,

PROPOSITIO

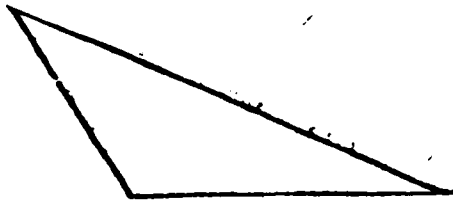
XXVI.

Si duo triangu-
la duos angulos duobus angulis æquales habuerint, u-
truncq; utriq;, unūq; latus uni lateri æquale, siue id quod est inter æquales
illos angulos, seu quod uni equalium angulorum subtenditur: & reliqua
latera reliquis lateribus æqualia, utrunq; utriq;, & reliquum angulum re-
liquo angulo æqualem habebunt.

Sint huiusmodi, qualia hæc propositio requirit, duo triangu-
la, ubi scilicet duo



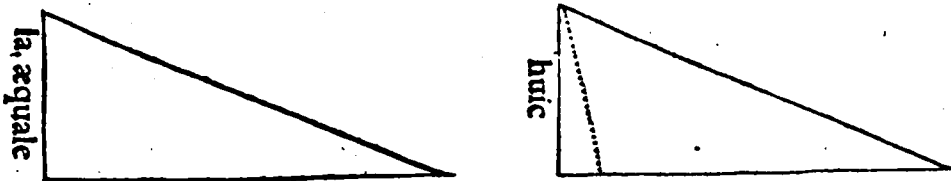
latus æquale



huic

anguli unius, duobus angulis alterius sint æquales, latus item unius unī, lateri unī
alterius

alterius trianguli, siue id quod equalibus angulis interijcitur, siue reliquorum alterum fuerit, æquale: dico quod & reliqua latera reliquis lateribus, utrunq; utriq; atque etiā reliquus angulus reliquo angulo æqualis sit. Quantū ad primum, ubi scilicet equalis latus equalibus angulis interiectum est, si alterutrum ex reliquis non concedatur suo correspondenti lateri in altero triangulo esse equalis, ut ei inæquale sit, certe concedendum erit. à longiori igitur (ut quidem suo modo fieri poterit) ex parte reliqui tertij anguli, per propositionem tertiam, portio, breuiori lateri equalis, abscindatur: & à puncto tādē sectionis ad angulum cui hoc latus subtensum est, linea recta ducatur. Describitur autem sic triangulum quoddam parziale aliud, quod, quia suo totali triangulo superponitur, per propositionē deinde quartā, alijs posito triangulo equalis est, infertur tandem per illam communem noticiam, Quæ unū equalia &c. partialē angulum suo totali, uel contrā, totalē suo partiali angulo esse equalē, quod est impossibile. Alterum igitur reliquum latus in uno, alteri reliquo lateri in triangulo altero æquale est. Quoniam autem iam duo sunt quartæ propositionis triangula, cum tertium latus, per hanc quartam, tertio equalis sit: reliqua duo latera reliquis duobus lateribus, utrunq; utriq; ut infertur, equalia erunt. Quantum ad secundum, ubi equalis latus unū equalium angulorum subtenditur: & hic reliqua duo latera & angulus in uno, reliquis duobus lateribus & angulo in triangulo altero equalia esse colligetur. Quod si concedatur, non erit opus ullam demonstrationem adducere. Sin minus, erit alterutrū ē duobus in uno, suo correspondenti latere in altero triangulo longius: quod & ipsum, sicut in priori parte huius factū, ad equalitatem alterius si ponatur, atq; deinde triangulū formetur, contra propositionem decimam sextam, quarta tamen prius usurpata, angulū externum suo



interno opposito æqualē esse, ei qui hoc contradicit, obijciat. Quare qua sanē ratione, quantū ad latera, contrariū quis inferre tentauerit, irridendū se exponet. Quod præterea & angulus reliquus reliquo angulo sit equalis, id ex propositione 4 uel 8 habetur. Si igitur duo triangula duos angulos duobus angulis equalēs habuerint, utrunq; utriq; unumq; latus, uni lateri, & reliqua, quod demonstrasse oportuit.

ADMONITIO.

Necesse autem uidetur, ut primò quidem ea, quæ inter æquales angulos posita sunt, latera, equalia inter se esse, atq; tum demum reliquorum duorum laterum, angulos nimirum equalēs subtendentium, æqualitas demonstretur. Nam aliàs, si forte hæc quæ equalēs angulos subtendunt latera, primò æqualia inter se esse demonstrare quis conaretur, res fortè tardius successura esset: id quod obiter duxi indicandum. Idem ferè usuuenit in propositione septima libri sexti, ubi non duorum reliquorum, hoc est tertiorum in triangulis angulorum, uerum eorum qui inter proportionalia latera positi sunt, angulorum æqualitas, primò demonstranda est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

ΚΖ.

Ἐὰν εἰς δύο ὑπεῖας ὑπεῖα ἐμπέσῃ, τὰς ἐναντίας γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ· πρὸς ἀλλήλοισι ἴσονται ἀλλήλαις αἱ ὑπεῖαι.

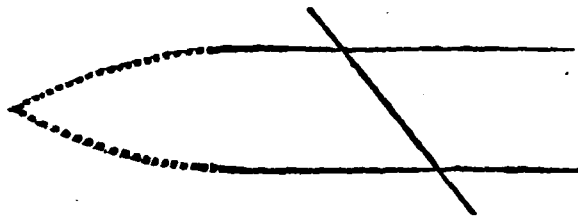
PROPOSITIO

XXVII.

Si in duas rectas recta linea incidens, alternatim angulos æquales inter se fecerit: parallelæ erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.

Cadat

Cadat in duas rectas recta linea alia, esto etiam quod anguli qui sic fiunt alternatim, sint inter se æquales: dico has duas rectas inter se parallelas esse: Nam si non:



productæ hæc et continuatæ, in aliqua parte concurrent, unde sic angulus externus formati trianguli, per propositionē 16, interno opposito æqualis. Hoc autem quia est cōtra propositionis hypothesim, non concurrūt ergo. Quæ autem

tem in eodem plano existentes rectæ lineæ, in neutra parte concurrunt, si eiectæ & continuatæ fuerint, cum, ex definitione, parallelæ sint: parallelæ sunt & istæ ductæ. Si in duas igitur rectas recta linea incidens alternatim angulos æquales inter se fecerit: parallelæ erunt inter se ipsæ rectæ lineæ: quod demonstrasse oportuit.

DEFINITIO ANGLORVM ΕΝΑΛΛΑΞ.

Porro anguli *εναλλαξ* positi, quos Alternatim uertimus, sunt, quos incidens recta cum rectis datis interius, in diuersis partibus, atq; ex opposito constituit & cōprehendit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

ΚΗ.

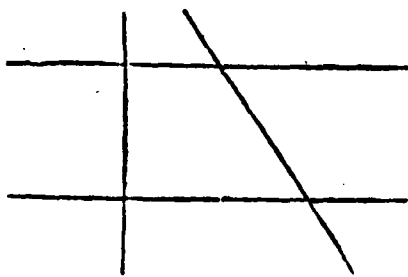
Εὰν εἰς δύο ὑπεῖας ὑβέαι ἐμπίπτουσι, τῶν ἐκτὸς γωνίαμ τῇ ἐντὸς ἐναντίωσιν, καὶ αὐτὰ τὰ αὐτὰ μέρη ἰσῶσιν ποιῇ, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ αὐτὰ τὰ αὐτὰ μέρη δι' σὺν ὁρθαῖς ἴσας ποιῇ· παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ ὑβέαι.

PROPOSITIO

XXVIII.

Si in duas rectas recta linea incidens, externum angulū interno & opposito, & ad easdem partes æqualem fecerit, aut internos & ad easdem partes duobus rectis æquales: parallelæ erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.

Habet hæc propositio duas partes, quarum utraq; ex sua propria hypothesi, duas illas lineas, in quas nimirum tertia cadit, parallelas esse infert. Prior autem patet ex præcedenti, angulis, qui per propositionem 15, inter se sunt æquales, inter se mutatis. Posterioris nunc demonstratio sic habetur. Quoniā enim recta recte insistens alij, et angulos faciens, ex propositione 13 aut duos rectos, aut duobus rectis æqua-



les angulos facit, & quoniam etiam, ex præsentī hypothesi, interni illi qui ad easdem partes sunt anguli, duobus rectis æquales sunt, cū iā illi duo, quos nimirum incidens cum alterutra rectarū facit, quā etiam hi, qui interius ex una & eadē parte appareāt anguli, duobus rectis, tanquā uni eisdem æquales sint: ex cōmuni quadā noticia, & illi duo his duobus angulis æquales erūt: atq; de utroque deinde, eo angulo, quem hæc duo equalia cō-

munem habent, subtracto: & qui relinquuntur anguli, ex cōmuni quadā noticia, inter se æquales erunt. Quia autem reliqui hi aut *εναλλαξ* anguli sunt, aut uerò ad easdem partes unus externus & alter internus oppositus, si *εναλλαξ* fuerint: ex præcedenti 27: si uerò unus externus, alter internus, ex priore parte propositionis huius, tandem concluditur propositum, has scilicet rectas, in quas alia eo modo, ut dictum est, cadit, parallelas esse. Si igitur in duas rectas recta linea incidens, externum angulum interno, & opposito, & ad easdem partes æqualem fecerit: aut internos & ad easdem partes, duobus rectis æquales: parallelæ erunt inter se hæc duæ rectæ lineæ, quod demonstrasse oportuit.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ

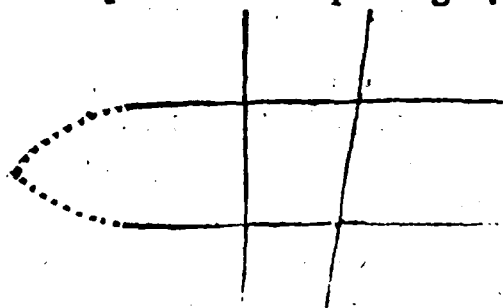
Ἡ εἰς τὰς παραλλήλους ἐνθείας ἐνθεία ἐμπιπθούσα· τήσδε ἐναλλάξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ· καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὶ καὶ ἀπεναντίον, καὶ ὑπὸ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσων· καὶ τὰς ἐντὶ καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, δύο σὺν ὀρθαῖς ἴσας.

PROPOSITIO

XXIX.

In parallelas rectas recta linea incidens: et alternatim angulos inter se æquales efficit: & externum interno & opposito, & ad easdem partes æqualem: & internos, & ad easdem partes, duobus rectis æquales facit.

Sunt huius propositionis partes tres, quarum singulæ parallelas rectas lineas, & rectam deinde aliam, quæ in illas parallelas utcunq; cadat, requirunt. Hinc itaq; prima quidam pars, angulos alternatim positos æquales: secunda uerò, externum interno, & opposito atq; ad easdem partes, æqualem: tertia autem, ipsos internos ad easdem partes, duobus rectis angulis æquales esse asserit. Prima pars ab impossibili sic patet. Eſto enim quòd anguli ἐναλλάξ sint inter se inæquales. Et quoniā in-



æquales sunt anguli ἐναλλάξ, alter nimisrum altero amplior, angulo igit eo qui ampliori est ἐφεξῆς, ex æquo inæqualibus illis angulis addito: & ipsa tota, ex cōmuni quadam noticia, inter se æqualia erunt. Quia autem unū eorum, maius scilicet, per propositionem 13, duobus rectis est æqualis, alterum quod minus est, duobus rectis angulis minus erit: ex illa igitur parte ubi mi-

nores duobus rectis sunt anguli, hæ duæ rectæ, ex cōmuni quadam noticia concurrent. Non concurrunt autem, cum sint ex hypothesi, rectæ parallelæ: neq; anguli etiam illi ἐναλλάξ inæquales inter se erunt: æquales igitur eos esse, ut prima pars asserit, concedendum est. Quo nunc concessō, cum per propositionem 15 ad uerticem anguli sint inter se æquales, equali nunc pro equali angulo sumpto, uel illa cōmuni noticia, Quæ eidem æqualia, & inter se equalia sunt: etiam angulus externus interno opposito, atq; in eadem parte sumpto, equalis erit, quod est secundū. Non aliter per propositionem 13, & hic equali pro equali angulo sumpto, tertie propositionis parti satisfieri poterit. In parallelas igitur rectas recta linea incidens, & quæ sequuntur, quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

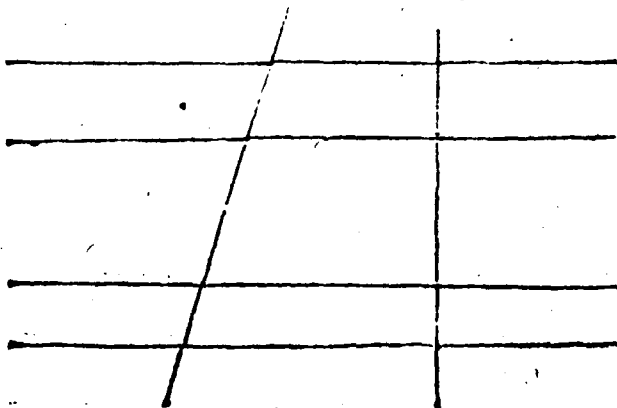
Α.

Αἱ τῇ αὐτῇ ἐνθείᾳ παράλληλοι· ἑαλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.

PROPOSITIO

XXX.

Quæ eidem rectæ lineæ parallelæ: & inter se sunt parallelæ.



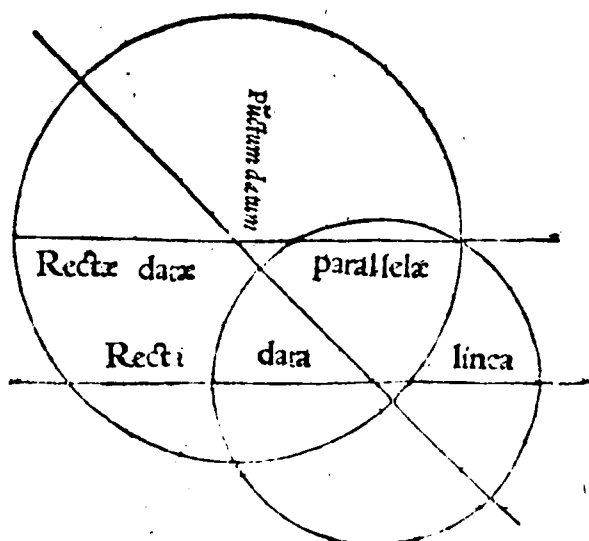
Sint duæ uel plures rectæ unī alicui rectæ lineæ parallelæ: dico, illas & inter se parallelas esse. Quod quidem facile, ex propositionibus 29 & 27, uel 29 & 28, si recta prius alia in propositas rectas lineas utcunq; inciderit, demonstrari potest.

Απὸ τοῦ δοθέντος σημείου, τῇ δοθείσῃ ἐνθείᾳ παράλληλον ἐνθείαν γραμμὴν ἀγαγέμ.

PROPOSITIO XXXI.

A' dato puncto, datæ rectæ lineæ : parallelam rectam lineam ducere.

Sit punctum datum, recta etiam linea data, atq; propositum, à dato puncto educere rectam lineam, datæ rectæ parallelam. Signetur igitur in recta data punctum ubicunq; à quo deinde ad punctum datum, recta quadam linea ducta, ad hanc lineam atq; ad punctum datum, angulorum modo descriptorum uni, uter is fuerit & eligatur. per propositionem 23, angulus æqualis constituatur. Quòd si tandem hæc ultimò ducta recta linea, uersus alteram partem in rectum, prout quidem hoc propositio 14 requirit, continuata fuerit: propositioni satisfactū erit, cum hæc quæ iam ducta est linea, ipsa sit quæ quærebatur.



Demonstratio sumitur ex ipsa figuræ structura, si anguli, inter se æquales facti, ὡς καὶ ἐποσῆται ἐπὶ τοῖς ἀνωτέρω, id quod admōnuisse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΑΒ.

Πάντες τριγώνου μιᾶς τῶν πλὴν πρὸς ἐκβληθείσης, ἢ ἐκτὸς γωνία δυνὶ τοῦς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίας ἴση εἶναι. Καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι, δυνὶ αὐτῶν ὁρθαῖς ἴσαι εἶναι.

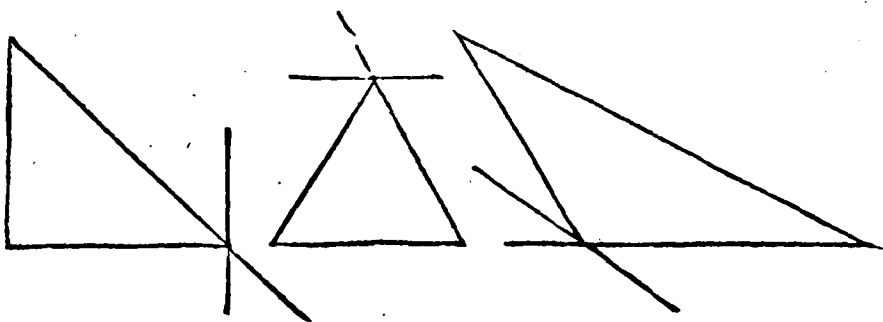
PROPOSITIO XXXII.

Omnis trianguli uno latere producto : externus angulus duobus internis & oppositis æqualis est. Et trianguli tres interni anguli, duobus sunt rectis æquales.

Sit triangulum, productum etiam ulterius unum eius latus: dico, quòd angulus qui sic fit externus, duobus internis & oppositis angulis æqualis sit. Et quod etiam ratione corollarij, ex hac ipsa & tredecima propositione desumpti, Trianguli tres anguli interni, duobus rectis æquales sint. Ducatur per angulum externum linea, trianguli tertio lateri parallela. Et quoniā in parallelas rectas lineas recta incidens, tam alternatim positos angulos, ex prima parte propositionis 29, inter se æquales, quàm etiam externum interno opposito; atq; in eadem parte constituto æqualem

Ο 2 facit,

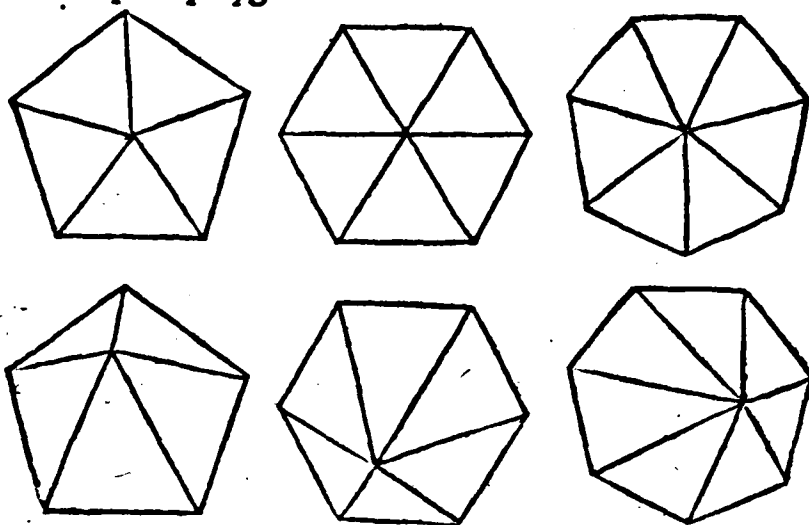
facit, ex secunda parte propositionis eiusdem, cum æqualia æqualibus additis, tota etiam, ex communi quadam noticia, inter se æqualia sint: ipsi propositio-



ni iam satisfactum erit. Corollarij uerò demonstratio, ex hac ipsa, & propositione præcedenti 13, unde nimirum illud desumptū est, intelligi potest, si interim ad horum duorum equalium utrunq, tertium angulum interiore relinquitur, qui nimirum est externo *oppositus*, aliquis assumpserit. Omnis igitur trianguli uno latere producto: externus angulus duobus internis & oppositis equalis est. Et trianguli tres interni anguli, duobus sunt rectis equals: quod demonstrasse oportuit.

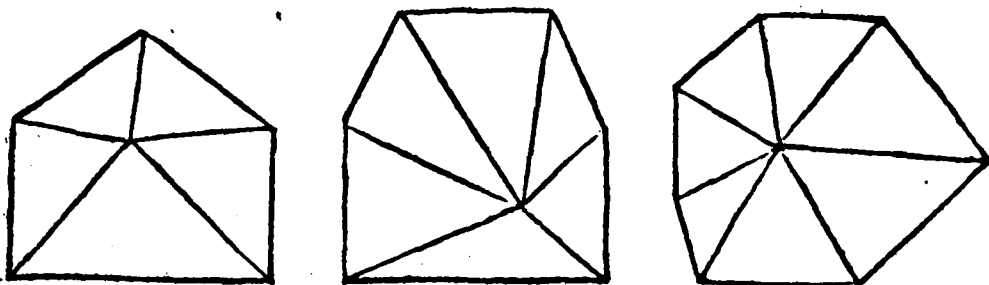
APPENDIX.

Et quia, ut corollarium habet, tres anguli interni omnis trianguli, duobus rectis angulis sunt equals, & quia etiam, ut quidem ex corollario propositionis 15, uel ipsa propositione 13 colligi potest, circa omne punctum, unde nimirum rectæ aliquot lineæ egrediuntur, qui apparent anguli, uniuersi simul, quatuor rectis sunt equals, cum unumquodq, Polygonum, ubi ad punctū aliquod, in ea ubiuis sumptum, ab angulis ipsius singulis rectæ lineæ ductæ fuerint, in tot triacula quot nimirum ipsum polygonum in suo ambitu latera habuerit, subdividi possit, sequitur,



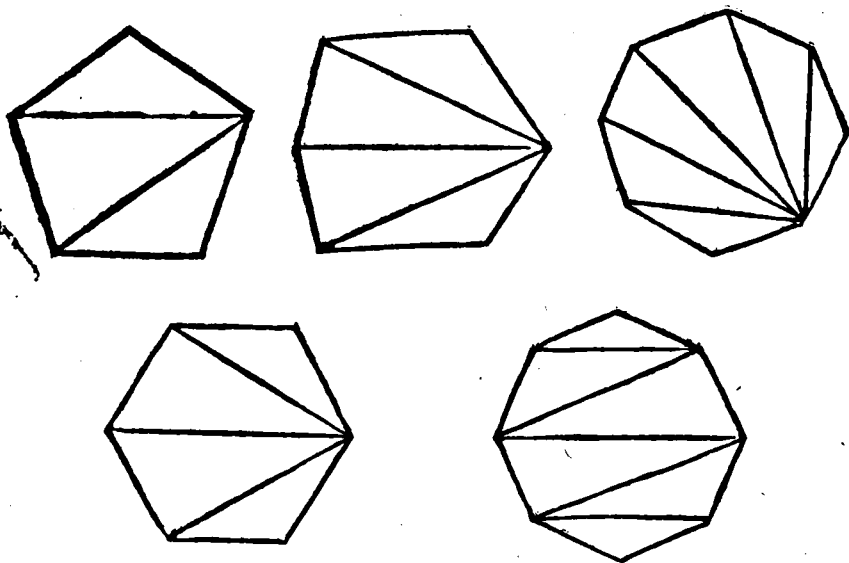
quod omnes anguli uniuscuiusq, Polygoni simul, tot rectis angulis sint equals, quot unitates habuerit numerus, quæ quidē duplum laterū eorū, demptis inde quatuor, indicat. Hoc aut ex sequentibus figuris et cernere & intelligere licebit.

Idem in polygonis irregularibus intelligendum.



Subdiuiduntur

Subdiuiduntur etiam polygona in sua triangula, ubi ab uno propofiti polygōni angulo ad omnes reliquos, præter eos quos à latere habet, angulos rectæ lineæ ductæ fuerint. Vel alio quodam modo, pro alicuius industria, in sua triangula subdiuidi polygona possunt. Primus tamen modus, cum ex demonstratione procedat, reliquis preferendus erit.



Atque hæc, de Polygonorum in sua triangula diuisione dicta, sufficiant.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

ΑΓ.

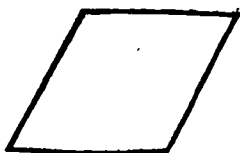
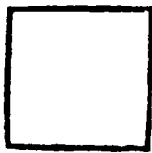
Αἱ πᾶς ἴσας τὶς ἑ παραλλήλους ὑπὸ τὰ αὐτὰ μέρη ὑπὸ γωνιούναι ὑπεῖαι· καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παραλλήλοι εἰσίν.

ΠΡΟΠΟΣΙΤΙΟ

XXXIII.

Aequales & parallelas ad easdem partes rectæ lineæ coniungentes: & ipsæ æquales & parallelæ sunt.

Sint æquales & parallelæ rectæ duæ lineæ, suis etiam extremitatibus utrinq; duabus rectis lineis alijs coniunctæ: dico, quòd et ipsæ rectæ lineæ aliæ, æquales inter se et parallelæ sint. Ducta enim in figura diametro, cum ex prima parte propositionis 29, anguli alternatim positi sint inter se æquales: quòd & coniungentes rectæ inter se æquales sint, ex propositione 4 intelligi poterit. Quòd



uerò eædem rectæ sint etiā parallelæ, cum ex allegata propositione 4, anguli qui alternatim ponuntur, inter se æquales sint: et id tandē, ex propositione 27, manifestabitur. Aequales igitur & parallelas ad easdem partes rectæ lineæ coniungentes, & ipsæ æquales & parallelæ sunt: quod demonstrari oportuit.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ

ΑΔ.

Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων· καὶ ἀπεναντίων πλευραὶ τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλους εἰσίν. Καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ διῆχα τέμνει.

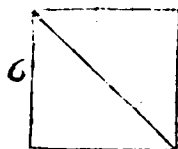
O

3

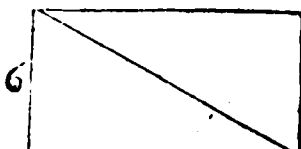
PROPOSITIO

Parallelogrammorum locorum. & latera & anguli opposita, æqualia inter se sunt. Et diameter ea bifariam secat.

Parallelogrammum, ut uocabuli *ῥυμου* indicat, est figura, sub parallelis rectis lineis comprehensa. Fit autem seu describitur parallelogrammum, per ductam rectam lineam, punctumq; extra eā sumptum, si ex hoc puncto, per propositionem 31 & 3, rectę ductę parallela æqualis ducatur, utriusq; rectę deinde extremitates,

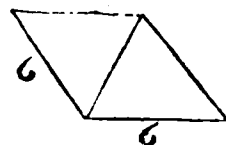


ε

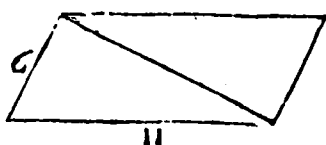


II

lineę sint. Talium igitur parallelogrammorum locorum, seu talium figurarum, & latera & anguli opposita, æqualia inter se sunt. Ducatur in figura diameter. Et quoniam anguli alternatim positi, ex prima parte propositionis 29, inter se æquales sunt,



ε



II

unde sic duo triangula, qualia propositio 26 requirit, apparent, quod latera opposita inter se æqualia sint, angulus item unus suo opposito equalis, per hanc 26 propositionem inferri potest. Et rursus quoniam, Si equalibus æqualia adijciatur, ex comunt quada notaicia, ipsa tota æqualia sunt: huius sententię memor, alterum etiam suo opposito angulo equallem esse, facile concedet. Patet itaq; prior propositionis pars. Posterior nunc, quod scilicet diameter ipsum parallelogrammum bifariam secet, si quis suspicetur id nondum esse demonstratum, per propositionē quartam id deprehendet. Parallelogrammorum igitur locorum & latera & anguli opposita, æqualia inter se sunt. Et diameter ea bifariam secat, quod demonstrari oportuit.

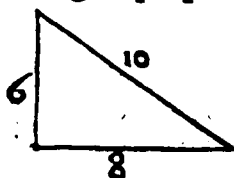
APPENDIX.

Quoniam autem hæc propositio 34, & multe etiam sequentes, in numeris, quantitate nimirum discreta, non minus atq; in quantitate continua, ueræ esse reperiuntur, quo id ostendamus commodius, canonem quendam generalem, per quē omnis generis triangulorum (modo latera eorum nota fuerint) areę inueniri possent, subiicere necesse fuit, his uerbis.

Trianguli, cuius aream propositum est inuenire, latera primò in unum colligantur, à medietate deinde huius collecti singula trianguli latera subtrahantur. Relinquantur autem tres numeri, qui unà cum medietate collecti ex lateribus, tanquam numero quarto, si inter se multiplicati fuerint, primus scilicet cum secundo, productum hoc cum tertio, quodq; iam producet cum numero quarto (nec refert quo ordine numeri sumantur, qui ue pro primo, secundo, tertio uel quarto reputetur) tñ huius ultimi producti radice quadrata, quanta propositi trianguli area fuerit, manifestabitur.

SEQUUNTUR HVIVS CANONIS EXEMPLA,

Triangulū propo.

Latera
trianguli

10

8

6

24

12

Excessus uniuscuiusque lateris respec-
tu medietatis, aggregati ex lateribus.

2

4

6

laterum summa,
laterum mediet.

Quatuor numeri

2

4

6

12

Instituantur

Instituantur nunc multiplicationes.

prima	secunda	tertia
12	6	24
2	4	24
24 primum	24 secundum	576 ultimum productum

Quadra. $\begin{smallmatrix} + + \\ + + + \\ + \end{smallmatrix}$ Radix 24. Tanta igitur est trianguli, cuius latera sunt 10 8 6, area.

EXEMPLVM IN IRRATIONALIBVS.

Latera	Excessus
$\sqrt{180}$	9 — $\sqrt{45}$
12	$\sqrt{45}$ — 3
6	$\sqrt{45}$ + 3
Sum. 18 + $\sqrt{180}$	Medietas 9 + $\sqrt{45}$

Quatuor numeri.

9 — $\sqrt{45}$	$\sqrt{45}$ — 3	$\sqrt{45}$ + 3	9 + $\sqrt{45}$
36 primum		36 secundum productum	

Tertio multiplicentur	36
cum	36
producentur	1296, cuius radix
quadrata	36. area est trianguli.

ABBREVIATIO CANONIS PER COMPENDIVM.

Cum tertiae multiplicationis numeri, qui nimirum ex prima & secunda multiplicatione proveniunt, inter se fuerint aequales, id quod saepe contingit, in his item duobus exemplis evidens est, eadem tertia multiplicatio negligitur, nec etiam extractione radicis quadratae tum opus erit. Verum statim per alterutrum productorum, primum vel secundum, trianguli area indicabitur.

EXEMPLVM CANONIS ALIVD.

Est autem in hac 34 propositione triangulum figurae primae.

Latera	Excessus
$\sqrt{72}$	6 — $\sqrt{18}$
6	$\sqrt{18}$
6	$\sqrt{18}$
Sum. 12 + $\sqrt{72}$	Medietas 6 + $\sqrt{18}$

Primum productum sunt 18, secundum tantundem, tertium deinde 324. huius postea radix 18, area est trianguli, atque medietas etiam parallelogrammi vel figure primae, quod hoc canone ostendere oportuit.

Potuiſſet ex compendio iam praescripto, tertia multiplicatio negligi, ac statim per 18 vel 18, primum scilicet vel secundum productum, quaestioni responderi, quod idem fuisset.

SEQVITVR TRIANGVLVM FIGVRAE SECVNDAE.

Latera	Excessus
$\sqrt{157}$	$\frac{12}{2}$ — $\sqrt{\frac{157}{4}}$
11	$\sqrt{\frac{157}{4}}$ — $\frac{5}{2}$
6	$\sqrt{\frac{157}{4}}$ + $\frac{5}{2}$
Sum. 17 + $\sqrt{157}$	Medietas $\frac{12}{2}$ + $\sqrt{\frac{157}{4}}$

Quatuor

Quatuor numeri.

33 primum

$$\frac{17}{2} - \sqrt{\frac{157}{4}} \quad \sqrt{\frac{157}{4}} - \frac{3}{2} \quad \sqrt{\frac{157}{4}} + \frac{3}{2} \quad \frac{17}{2} + \sqrt{\frac{157}{4}}$$

33 secundum productum

Et quia tertiae multiplicationis numeri inter se aequales sunt, ideo ea omittitur, nec etiam, extractione radicis quadratae, ut superius dictum est, opus erit. Trianguli igitur propositi, hoc est parallelogrammi medietas, area, sunt 33, quae erat inveniēda.

SEQVITVR TRIANGVLVM FIGVRAE TERTIAE.

Latera	Excessus
6	$\sqrt{15} - \sqrt{3}$
6	$\sqrt{15} - \sqrt{3}$
$\sqrt{60} - \sqrt{12}$	6 minus $\sqrt{15} - \sqrt{3}$
Sum. 12 plus $\sqrt{60} - \sqrt{12}$	Medietas 6 plus $\sqrt{15} - \sqrt{3}$

Quatuor numeri.

$$\sqrt{15} - \sqrt{3} \quad \sqrt{15} - 3 \quad 6 \text{ minus } \sqrt{15} - \sqrt{3} \quad 6 \text{ plus } \sqrt{15} - \sqrt{3}$$

$$\text{Primum } 18 - \sqrt{180} \quad \text{secundum } 36 \text{ minus } 18 - \sqrt{180}$$

Tertium productum 144. Atque huius nunc radix quadrata, nimirum 12, area est trianguli.

SEQVITVR TRIANGVLVM FIGVRAE QVARTAE.

Latera	Excessus
radix qua. residui $157 - \sqrt{9680}$	$8\frac{1}{2}$ minus ra. qua. re. $39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$
11	ra. qua. re. $39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$ minus $2\frac{1}{2}$
6	ra. qua. re. $39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$ plus $2\frac{1}{2}$
17 plus ra. qua. re. $157 - \sqrt{9680}$	Me. $8\frac{1}{2}$ plus ra. qua. re. $39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$

Instituantur nunc multiplicationes.

Prima.

$$\begin{array}{r} \text{Radix qua. residui } 39\frac{1}{4} \quad \sqrt{605} \text{ plus } 2\frac{1}{2} \\ \text{Radix qua. residui } 39\frac{1}{4} - \sqrt{605} \text{ minus } 2\frac{1}{2} \\ \hline \text{producuntur } 39\frac{1}{4} - \sqrt{605} \text{ minus } 6\frac{1}{4} \end{array}$$

Secunda.

$$\begin{array}{r} 8\frac{1}{2} \text{ plus radix qua. residui } 39\frac{1}{4} - \sqrt{605} \\ 8\frac{1}{2} \text{ minus radix qua. residui } 39\frac{1}{4} - \sqrt{605} \\ \hline \text{producuntur } 72\frac{1}{4} \text{ minus } 39\frac{1}{4} - \sqrt{605} \end{array}$$

Tertia.

$$\begin{array}{r} 39\frac{1}{4} - \sqrt{605} \quad \text{minus } 6\frac{1}{4} \\ 72\frac{1}{4} \quad \text{minus } 39\frac{1}{4} - \sqrt{605} \\ \hline 2835\frac{13}{16} - \sqrt{\frac{50550205}{16}} \quad \text{item } 245\frac{7}{16} - \sqrt{\frac{378125}{16}} \\ \text{minus } 2145\frac{9}{16} - \sqrt{\frac{52650589}{16}} \\ \text{minus } 451\frac{9}{16} \end{array}$$

Summa productorum.

$$\begin{array}{r} \text{plus } 3081\frac{1}{8} - \sqrt{\frac{52650589}{16}} \\ \text{minus } 2597\frac{1}{8} - \sqrt{\frac{50550205}{16}} \end{array}$$

Facta subtractione, manent 484, cuius radix, 22, area est trianguli.

Vel,

Vel, quasitis productis, primo scilicet & secundo, calculo exquisitiore, ueniūt

$$33 - \sqrt{605} \text{ primum}$$

$$\sqrt{605} - 33 \text{ secundum.}$$

Quibus nunc inter se multiplicatis, producuntur 484, ut prius:
cuius etiam radix, ut prius, 22, trianguli aream representabit.

SIMILE EXEMPLVM PER RATIONALES, PER-
inde ac si irrationales essent numeri, exposuim.

Latera,

6

Radix qua. lineæ ex binis nominib. $40 + \sqrt{576}$, hoc est, 8,

10

Excessus.

Radix quadrata binomij $10 + \sqrt{36}$ plus, hoc est 6
8, minus radix, qua. binomij $10 + \sqrt{36}$ hoc est, 4.

Radix quadrata binomij $10 + \sqrt{36}$ minus, hoc est 2.

Med. 8, plus radix qua. binomij $10 + \sqrt{36}$ hoc est, 12.

Instituantur multiplicationes.

Prima.

Radix qua. binomij $10 + \sqrt{36}$, plus 2, hoc est 6

Radix qua. binomij $10 + \sqrt{36}$, minus 2, hoc est 2

producuntur $10 + \sqrt{36}$ minus 4, hoc est 12.

Secunda.

8, minus radix qua. binomij $10 + \sqrt{36}$. hoc est, 4.

8, plus radix qua. binomij $10 + \sqrt{36}$. hoc est, 12.

64 minus

$10 + \sqrt{36}$, hoc est 48.

Cruciformes multiplicationes, cum æquales sint numeri, negliguntur.
Productorum igitur summa in utraque multiplicatione, ut apparet.

Tertia multiplicatio.

$10 + \sqrt{36}$ minus 4 hoc est, 12.

64 minus $10 + \sqrt{36}$ hoc est, 48.

$640 + \sqrt{147456}$ item $40 + \sqrt{576}$

minus 136 $+ \sqrt{14400}$

minus 256

pro. 680 $+ \sqrt{166464}$, minus 392 $+ \sqrt{14400}$

Hoc est,

288 $+ \sqrt{82944}$, uel 576 ultimum productum.

Huius itaq; radix quadrata, nimirū 24, area est trianguli.

EST ET ALIUD TERTIAE FIGURAE TRIANGV-
lum, ratione diametri longioris consideratum, atq; huius quidem

latera sunt 6, 6, $\sqrt{60} + \sqrt{12}$

P

Laterum

ELEMENTORVM EVCLIDIS

Laterum summa 12, plus $\sqrt{60} - \sqrt{12}$

Excessus igitur, atq; deinceps quatuor numeri,

 $\sqrt{15} + \sqrt{3}$ $\sqrt{15} + \sqrt{3}$ 6 minus $\sqrt{15} + \sqrt{3}$ 6 plus $\sqrt{15} + \sqrt{3}$

Primum

secundum productum

18 + $\sqrt{180}$ 36 minus 18 + $\sqrt{180}$.

Tertium productum.

648 + $\sqrt{233280}$ minus 504 + $\sqrt{233280}$

hoc est, 144. Area igitur trianguli 12, ut prius.

ALIUD ITEM TRIANGVLVM FIGVRAB
quartæ, cuius quidem

Latera sunt

Excessus igitur

Ra. qua. bi. 157 + $\sqrt{9680}$ $8\frac{1}{2}$ minus ra. qua. bi. $39\frac{1}{4}$ + $\sqrt{605}$

11

ra. qua. bi. $39\frac{1}{4}$ + $\sqrt{605}$ minus $2\frac{1}{2}$

6

ra. qua. bi. $39\frac{1}{4}$ + $\sqrt{605}$ plus $2\frac{1}{2}$ 17 plus ra. qua. bi. 157 + $\sqrt{9680}$ $8\frac{1}{2}$ plus ra. qua. bi. $39\frac{1}{4}$ + $\sqrt{605}$

Producta,

primum

secundum

 $72\frac{1}{4}$ minus $39\frac{1}{4}$ + $\sqrt{605}$ $39\frac{1}{4}$ + $\sqrt{605}$ minus $6\frac{1}{2}$

Inuentio producti tertij.

 $72\frac{1}{4}$

minus

 $39\frac{1}{4}$ + $\sqrt{605}$ $39\frac{1}{4}$ + $\sqrt{605}$

minus

 $6\frac{1}{2}$ $2835\frac{13}{16}$ + $\sqrt{\frac{50530205}{16}}$ item $245\frac{5}{16}$ + $\sqrt{\frac{378125}{16}}$ minus $451\frac{0}{16}$ minus $2145\frac{0}{16}$ + $\sqrt{\frac{59650580}{16}}$

Summa productorum.

plus $3081\frac{1}{8}$ + $\sqrt{\frac{59650580}{16}}$ minus $2597\frac{1}{8}$ + $\sqrt{\frac{59650580}{16}}$.

Hoc est, facta subtractione, 484.

Huius nunc tertij producti radix quadrata, nimirum 22, area est trianguli.

Atq; hactenus dicta de triangulorum areis inuestigandis sufficiant. Sequitur

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

ΛΕ.

Τὰ παραλληλόγραμμα πὲρ ὑπὸ τῇ αὐτῇ βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις εἰσιν.

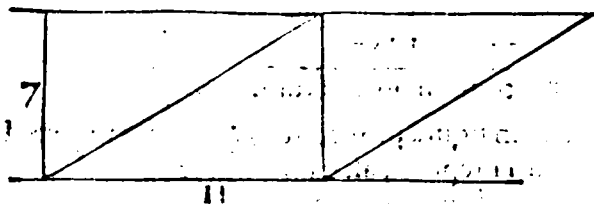
PROPOSITIO

XXXV.

Parallelogramma super eadem basi constituta, atq; in eisdem parallelis: æqualia inter se sunt.

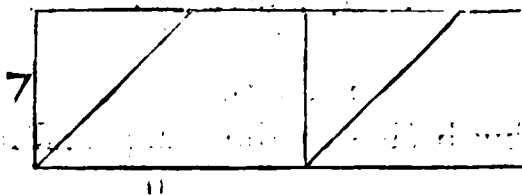
Potest huius propositionis figura geometrica tripliciter variari. Aut enim parallelogrammis super una & eadem basi, inter easdem item parallelas positis, alterum unius latus est diameter alterius, aut ea brevius, aut longius. Si primum, cum ex corollario propositionis præcedentis, Omne parallelogrammū a sua ipsius diametro bifariam

bifariam secetur, cumq; etiam ex cōmuni quadam noticia, Eiusdem duplicia, inter se æqualia sint, hoc quod propositio concludit, iam manifestum erit. Quod si fuerit



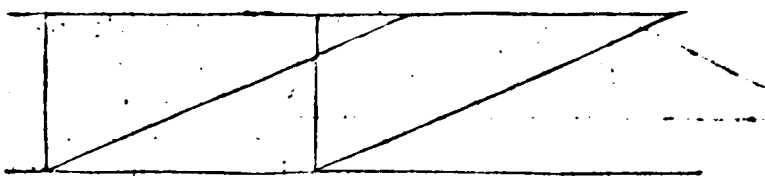
ea breuius, cum parallelogrammorum locorum latera opposita inter se æqualia sint, hoc ipso usurpato bis: duō duorū parallelogrammorum latera, ex cōmuni quadam noticia, inter se æqualia existant: deinde uerò cōmuni por-

tionē ab illis æqualibus lateribus subtracta, & residuæ lineæ inter se æquales erūt. Sed quia illæ, ut quidem secunda pars propositionis 29, & ipsa propositio quarta



demonstrant, equalium triangulorum latera sunt, his equalibus triangulis cōmune trapezium si addatur: & producta, parallelogramma scilicet proposita, inter parallelas & super una eadēq; basi constituta, per cōmuniem quā-

dam noticia, inter se æqualia erunt, quod demonstrasse oportuit. Si uerò alterum unius latus fuerit diametro alterius parallelogrammi longius, oportet ut mediā inter æquales lineas portio, ex æquo illis æqualibus lineis addatur, quæ productæ, cū



et ipsæ equalium triangulorum sint latera, illis equalibus triangulis, primò id quod commune habent, subtrahi, residuis deinde trapezijs commune quoddam triangulum aliud addi oportet: & tum etiam secundum tertiæ figure descriptionem, propositioni satisfactum erit. Quacumq; igitur ratione parallelogramma illa, (seruatis tamen hypothesis) descripta fuerint, propositio uera esse cognoscetur. quod demonstrari oportuit.

PER NUMEROS HÆC NVNC, VT PRAECE-
dens, tractari potest: id quod uno tantum exemplo indicabimus.

Latera

$$\sqrt{533}$$

$$\sqrt{170}$$

11

Excessus

$$5\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{170}{4}} - \sqrt{\frac{533}{4}}$$

$$5\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{170}{4}} + \sqrt{\frac{533}{4}}$$

$$\sqrt{\frac{533}{4}} + \sqrt{\frac{170}{4}} - 5\frac{1}{2}$$

$$\sqrt{533} + \sqrt{170} + 11 \quad \text{Me.} \quad \sqrt{\frac{533}{4}} + \sqrt{\frac{170}{4}} + 5\frac{1}{2}$$

Instituantur multiplicationes.

prima

$$5\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{170}{4}} - \sqrt{\frac{533}{4}}$$

$$5\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{170}{4}} + \sqrt{\frac{533}{4}}$$

$$30\frac{1}{4} - 42\frac{1}{2} - 133\frac{1}{4}$$

$$+ \sqrt{\frac{20610}{4}}$$

$$\sqrt{\frac{20610}{4}} - 145\frac{1}{2}$$

secunda

$$\sqrt{\frac{533}{4}} + \sqrt{\frac{170}{4}} - 5\frac{1}{2}$$

$$\sqrt{\frac{533}{4}} + \sqrt{\frac{170}{4}} + 5\frac{1}{2}$$

$$133\frac{1}{4} + 42\frac{1}{2} - 30\frac{1}{4}$$

$$+ \sqrt{\frac{20610}{4}}$$

$$\sqrt{\frac{20610}{4}} + 145\frac{1}{2}$$

P₂

Tertia

Tertia multiplicatio.

$$\sqrt[4]{\frac{20610}{4}} + 145\frac{1}{2}$$

$$\sqrt[4]{\frac{90610}{4}} - 145\frac{1}{2}$$

producuntur $\frac{1012}{4}$, tertium productum.

Area igitur trianguli, ratione Trapezij in figura prima, est $38\frac{1}{2}$. Quare trapezium integrum 77. Et quia tantum etiam faciunt 11 septies, alterum scilicet parallelogrammum: & in numeris iam propositioni satisfactum erit, quod quidem fieri oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

λς.

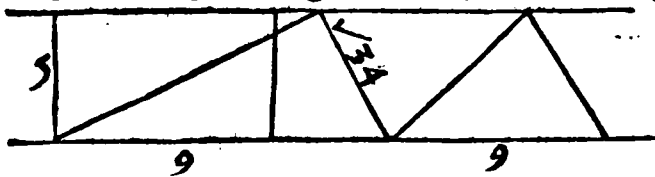
Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ὑπὸ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα, ἔν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.

PROPOSITIO

XXXVI.

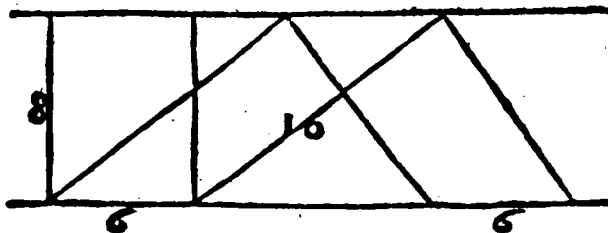
Parallelogramma super æqualibus basibus constituta, atq; in eisdem parallelis: æqualia inter se sunt.

Hæc propositio licet per se iam satis constare deberet, cum idem sit æqualium atq; earundem linearum intellectus, quo tamen dilucidius hæc appareat, postquam descripta fuerint parallelogramma, ut præcipitur, anguli superiores duo unius, cum



duobus inferioribus alterius parallelogrammi angulis, duabus rectis lineis, sic ut altera alteram non secet, copulentur. Describitur aut sic, ut ex pro-

positione 33 colligitur, parallelogrammum aliud, quod nunc, quia cum utroque posito, & inter lineas parallelas, & super una atq; eadem basi constitutum est: utrumq; posito huic descripto parallelogrammo alij, per propositionem præmissam, atq; illa tandem etiam inter se, per hanc communem noticiam, Quæ eidem æqualia, & inter se æqualia sunt, æqualia esse ostenduntur. Parallelogramma igitur super æqualibus basibus & in eisdem parallelis constituta: inter se sunt æqualia, quod demonstrasse oportuit.



NUNC QVANTVM AD PRAXIM NVMERORVM.

Latera

13

9

$$\begin{array}{r} \sqrt{34} \\ 22 + \sqrt{34} \end{array}$$

primum

 $4\frac{1}{2}$

secun.

 $112\frac{1}{2}$

ter. pro.

 $\sqrt{1224}$

Excessus

$$\sqrt{12} - 2$$

$$\sqrt{12} + 2$$

$$\begin{array}{r} 11 - \sqrt{12} \\ 11 + \sqrt{12} \end{array}$$

Area trian.

 $22\frac{1}{2}$

ALIVD

ALIVD TRIANGVLVM EX SECVNDA FIGVRA.

Latera	Excessus
$\sqrt{208}$	$8 - \sqrt{52}$
10	$\sqrt{52} - 2$
6	$\sqrt{52} + 2$
16 + $\sqrt{208}$	8 + $\sqrt{52}$
Tertium pro. 576	Area trianguli 24.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

ΛΖ.

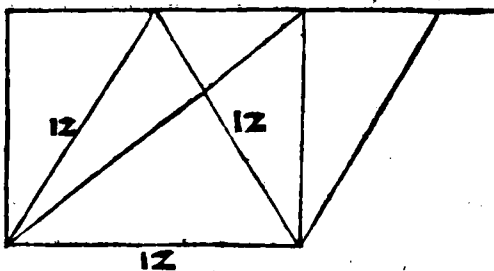
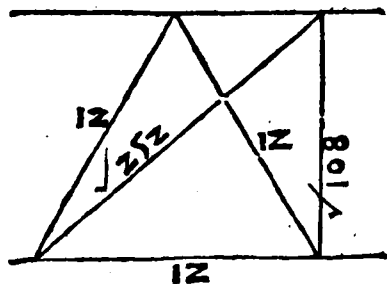
Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῇ αὐτῇ βάσει ὄντα, καὶ ἐν τοῖς αὐτοῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις εἶναι.

PROPOSITIO

XXXVII.

Triangula super eadem basi cōstituta, atq; in eisdem parallelis: equalia inter se sunt.

Sint inter lineas parallelas, super una & eadem basi constituta duo uel plura triangula: dico, illa inter se esse æqualia. Continuetur ea, quæ triangulorum uertices coniungit recta linea in utranq; partem, quantum satis fuerit, fiant etiam ex propositis triangulis parallelogramma, ducendo in unoquoq; triangulo, ab eius uno angulo, eorum qui ad basim sunt, lineam, lateri quod hunc eundem angulum sub-



tendit, per propositionem 31, parallelam. Et quoniam descripta parallelogramma, cum super eadem basi, atq; in eisdem parallelis constituta sint, inter se æqualia esse, ex propositione 35 notum est. Et rursus quoniam, quæ eiusdem dimidia, ex communi quadam noticia æqualia inter se sunt: descriptorum parallelogrammorum medietates, triangula scilicet posita, inter se equalia erunt. Triangula igitur super eadem basi constituta, atq; in eisdem parallelis: æqualia inter se sunt, quod demonstrari oportuit.

NUNC QVANTVM AD NVMERORVM PRAXIM.

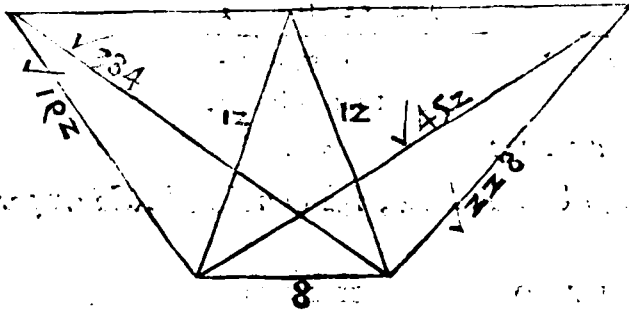
Latera	Excessus
12	
12	
12	
Summa 36	Medietas 18
Tertium productum 3888.	Area $\sqrt{3888}$ uel $62\frac{4}{12}$ ferè.

ALTERVM TRIANGVLVM HABET

Latera	Exces.
$\sqrt{252}$	$\sqrt{27} + 6 - \sqrt{63}$
12	$\sqrt{27} - 6 + \sqrt{63}$
$\sqrt{108}$	$\sqrt{63} + 6 - \sqrt{27}$
	Summa

Summalat. $\sqrt{252} + 12 + \sqrt{108}$ Med. $\sqrt{63} + 6 + \sqrt{27}$
 Primum secundum ter. productum
 $\sqrt{9072} - 72$ $\sqrt{9072} + 72$ 3888 &c.

ALIA FIGVRA.



Habet hæc figura tria trian-
 gula, quæ, ut geometricè, ita
 et per numeros sequenti calcu-
 lo inter se equalia esse
 ostenduntur.

Communis basis.

Quantum igitur ad triangulum primum, cuius quidem

Latera sunt

$\sqrt{384}$

$\sqrt{192}$

8

$\sqrt{384} + \sqrt{192} + 8$

Ultimum pro.

2048

Excessus igitur

$4 + \sqrt{48} - \sqrt{96}$

$4 - \sqrt{48} + \sqrt{96}$

$\sqrt{96} + \sqrt{48} - 4$

$\sqrt{96} + \sqrt{48} + 4$

Area trianguli

$\sqrt{2048}$ uel $45\frac{23}{61}$ ferè.

Porro triangulum secundum habet

Latera 12 12 8.

Excessus 4 4 8.

Summalat. 32. Medietas 16. Primum productum 16.

secun. 128, tertium pro. 2048. Area trian. $\sqrt{2048}$.

Sequitur triangulum tertium, cuius quidem

Latera sunt

$\sqrt{452}$

$\sqrt{228}$

8

$\sqrt{452} + \sqrt{228} + 8$

Ultimū pro. 2048.

Excessus igitur

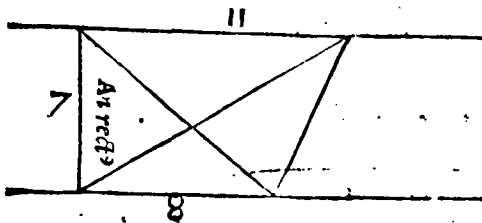
$4 + \sqrt{57} - \sqrt{113}$

$4 - \sqrt{57} + \sqrt{113}$

$\sqrt{113} + \sqrt{57} - 4$

$\sqrt{113} + \sqrt{57} + 4$

Area trianguli ut supra.



Area utriusque trianguli, sunt 28. equa-
 les igitur inter se.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

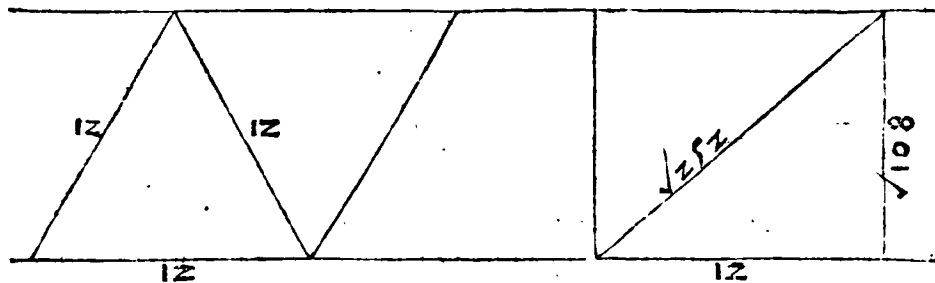
ΑΗ.

Τὰ τρίγωνα τὰ ὑπὸ τῇ ἴσῳ βάσει ὄντα, ἢ ἐν τοῖς αὐτοῖς παραλλή-
 λοις ἴσα ἀλλήλοις εἰσιν.

PROPOSITIO

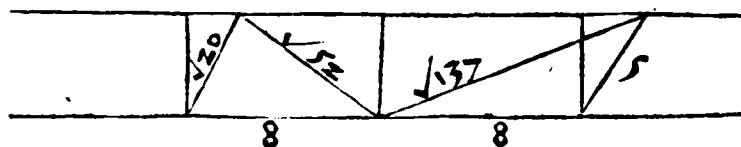
Triangula super æqualibus basibus constituta, atq; in eisdem parallelis: æqualia inter se sunt.

Propositis triangulis, ut præcipitur, eadem huius quæ præcedentis *παριστοιχίζονται*



atq; demonstratio erit, si loco propositionis tricesimæ quintæ illic sumptæ, hic tricesima sexta sumatur.

ALIUD HVIVS PROPOSITIONIS EXEMPLVM.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ

ΛΘ.

Τὰ ἴσα τρίγωνα, τὰ ὑπὸ τῇ αὐτῇ βάσει ὄντα, καὶ ὑπὸ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις εἶναι.

PROPOSITIO

XXXIX.

Æqualia triangula, super eadem basi, atque ad easdem partes constituta: & in eisdem sunt parallelis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

Μ.

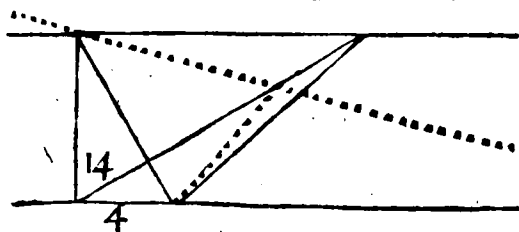
Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ὑπὸ τῇ ἴσῃ βάσει ὄντα, καὶ ὑπὸ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις εἶναι.

PROPOSITIO

XL.

Æqualia triangula, super æqualibus basibus, atq; ad easdem partes constituta: & in eisdem sunt parallelis.

Requirunt hæ duæ propositiones æqualia, eisdem uel æqualium basium trian-

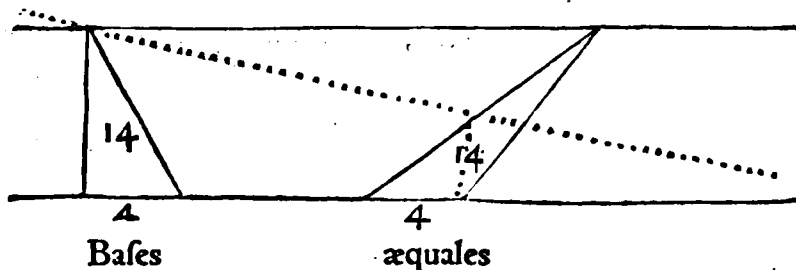


Basis eadem

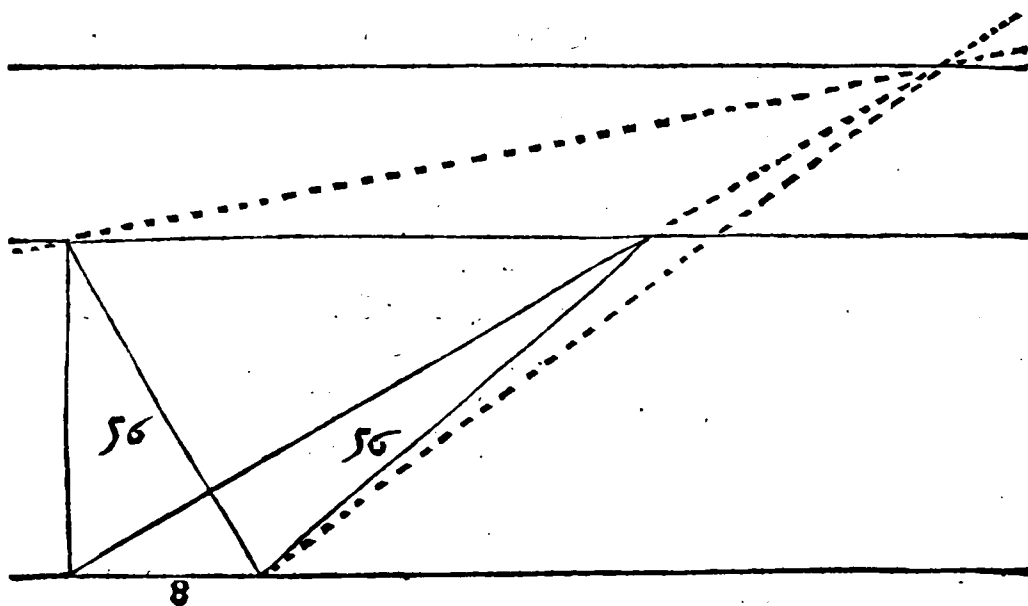
gula, & inde tandem inter lineas parallelas (si modo ad easdem partes fuerint cōstituta) ea posita esse inferunt. Triangulis itaq; huiusmodi descriptis, propositionum demonstrationes ab impossibili illo, Partem suo toti æqualem esse, colliguntur. Nam recta quadā linea triangulorum uerticibus copulatis, si quis præter hanc aliam ab unius trianguli uertice, tanquam à puncto signato, basi parallelam statuere uelit, faciat sanè hoc, si poterit. Et quoniam fit, quod hæc ducta parallela alter-

utrius

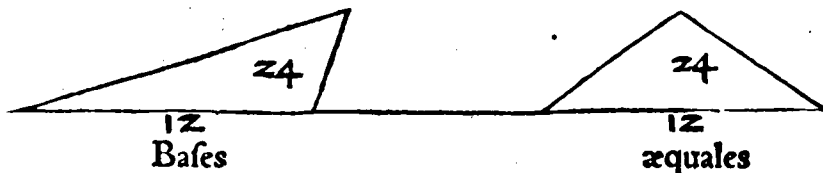
utrius trianguli, latera secet, aut non secet. Si primum, coniungatur punctum sectionis in uno latere, recta quadam linea, cum sibi opposita basis extremitate. Et quoniam duo triangula apparent, quorum unum quidem cum secundum aduersarij



structuram, ex propositione 35, uni: alterum uero, ex hypothese, eidem triangulo æquale sit: mox illi, aut per propositionem 37, si unam & eandem basim habuerint: aut uerò per propositionem 38, si separatæ, æquales tamen inter se, bases illorum fuerint, inter se æqualia erunt, partiale totali, quod est impossibile. Esto igitur iam



quòd non secet parallela hæc alterius trianguli latera, tum huius trianguli unum latus ultra uerticem usq; ad parallelam continuari, punctum deinde contactus cum opposita basis extremitate, ut modò, coniungi debet: & idẽ quod prius, partiale scilicet triangulum suo totali æquale esse, per allegatas propositiones inferetur. Hoc



autem, quia ex communi illa noticia, Totum parte sua maius est, impossibile existit, propositionibus consentiendum erit. Aequalia igitur triangula, siue super eadẽ seu æqualibus basibus, atque ad easdem partes constituta: & in eisdem parallelis erunt, quod demonstrasse oportuit.

SEQUITVR NVMERORVM PRAXIS.

Prioris trianguli figuræ ultimæ

Latera sunt

√ 212,

12,

√ 20

Laterum

Laterum summa $\sqrt{212} + 12 + \sqrt{20}$ Medietas $\sqrt{53} + 6 + \sqrt{5}$

Excessus igitur, ac per consequens quatuor numeri.

$\sqrt{5} + 6 + \sqrt{53}$ $5 - 6 + \sqrt{53}$ $\sqrt{53} + 6 - \sqrt{5}$ $\sqrt{53} + 6 + \sqrt{5}$

Instituantur multiplicationes.

Prima

$$\begin{array}{r} \sqrt{5} + 6 - \sqrt{53} \\ \sqrt{5} - 6 + \sqrt{53} \\ \hline \text{pro. } \sqrt{7632} - 84 \end{array}$$

Secunda

$$\begin{array}{r} \sqrt{53} + 6 + \sqrt{5} \\ \sqrt{53} + 6 - \sqrt{5} \\ \hline \text{pro. } \sqrt{7632} + 84 \end{array}$$

Tertia multiplicatio.

$$\begin{array}{r} \sqrt{7632} + 84 \\ \sqrt{7632} - 84 \\ \hline \end{array}$$

producuntur $7632 - 7056$, hoc est 576
tertium productum. Area igitur trianguli 24.

Triangulum posterius habet

Latera

12

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{52} \\ \sqrt{52} \end{array} \right\}$$

$$\sqrt{208} + 12$$

Excessus igitur

$$\sqrt{52} - 6$$

$$\sqrt{52} + 6. \text{ Area } 24.$$

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

ΜΑ.

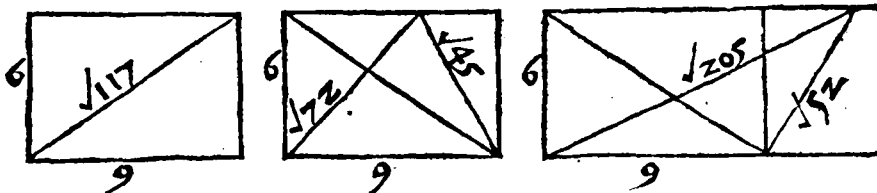
Εὰν παραλληλόγραμμοι περιγώνω βάσιν τι ἔχη τῶν αὐτῶν, καὶ ἐν τοῖς αὐτοῖς παραλλήλοις ἢ ἀπλάσιον ἔσται ὁ παραλληλόγραμμος τοῦ περιγώνου.

PROPOSITIO

XLII.

Si parallelogrammum cum triangulo basim habuerit eandem, atq; in eisdem parallelis fuerit: duplum erit parallelogrammum ipsius trianguli.

Statuantur parallelogrammum & triangulum super eadem basi, esto etiā quod sint inter lineas parallelas: dico quod parallelogrammum ad triangulum, duplū sit. Hoc quod ducta in parallelogrammo diametro, ex 37 & secunda parte proposi-



tionis 34, cum per hanc quidem triangulorum unumquodq; sui parallelogrammi dimidium esse, per illam uero, triangula quorū eadem est basis et eadem altitudo, æqualia esse demonstratum sit, facile colligetur.

NUMERORVM PRACTIS.

Et primo quidem trianguli, cuius latera sunt 9 $\sqrt{72}$ $\sqrt{45}$

Laterum summa $9 + \sqrt{72} + \sqrt{45}$ Medietas $4\frac{1}{2} + \sqrt{18} + \sqrt{11\frac{1}{4}}$

Excessus, ac per consequens quatuor numeri.

Primus $\sqrt{11\frac{1}{4}} + \sqrt{18} - 4\frac{1}{2}$ secundus $\sqrt{11\frac{1}{4}} - \sqrt{18} + 4\frac{1}{2}$ tertius

tertius $4\frac{1}{2}$ $\sqrt{18}$ $\sqrt{11\frac{1}{4}}$ quartus $4\frac{1}{2} + \sqrt{18} + \sqrt{11\frac{1}{4}}$
 Primum secundum tertium pro.

$$\sqrt{1458} - 27 \quad \sqrt{1458} + 27 \quad 729.$$

Area trianguli 27. Et tanta etiā est medietas parallelogrammi,
 cum 6 nouies, uel contrā 9 sexies, 54 constituent.

Aliud triangulum.

Latera	Excessus
$\sqrt{117}$	$7\frac{1}{2} - \sqrt{29\frac{1}{4}}$
9	$\sqrt{29\frac{1}{4}} - 1\frac{1}{2}$
6	$\sqrt{29\frac{1}{4}} + 1\frac{1}{2}$
15 + $\sqrt{117}$	$7\frac{1}{2} + \sqrt{29\frac{1}{4}}$

Productum primum 27, secundum 27, Area trianguli 27.

Tertium triangulum.

Latera	Excessus
$\sqrt{205}$	$\sqrt{13} + 4\frac{1}{2} - \sqrt{20\frac{5}{4}}$
9	$\sqrt{13} - 4\frac{1}{2} + \sqrt{20\frac{5}{4}}$
$\sqrt{52}$	$\sqrt{20\frac{5}{4}} + 4\frac{1}{2} - \sqrt{13}$
$\sqrt{205} + 9 + \sqrt{52}$	$\sqrt{20\frac{5}{4}} + 4\frac{1}{2} + \sqrt{13}$

Instituuntur multiplicationes.

Prima	secunda
$\sqrt{13} + 4\frac{1}{2} - \sqrt{20\frac{5}{4}}$	$\sqrt{20\frac{5}{4}} + 4\frac{1}{2} - \sqrt{13}$
$\sqrt{13} - 4\frac{1}{2} + \sqrt{20\frac{5}{4}}$	$\sqrt{20\frac{5}{4}} + 4\frac{1}{2} + \sqrt{13}$
$13 - 20\frac{1}{4} - 51\frac{1}{4}$	$51 + 20\frac{1}{4} - 13$
$+ \sqrt{4151\frac{1}{4}}$	$+ \sqrt{4151\frac{1}{4}}$
producuntur $\sqrt{4151\frac{1}{4}} - 58\frac{1}{2}$	prod. $\sqrt{4151\frac{1}{4}} + 58\frac{1}{2}$

Tertia multiplicatio.

$$\begin{array}{r} \sqrt{4151\frac{1}{4}} + 58\frac{1}{2} \\ \sqrt{4151\frac{1}{4}} - 58\frac{1}{2} \\ \hline \text{producuntur } 729. \text{ Quare Area trianguli } 27 \end{array}$$

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

MB.

Τὸ δοθὲν τριγώνον, ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν τῇ δτεθείσῃ
 ὑπογράμμῳ γωνίᾳ.

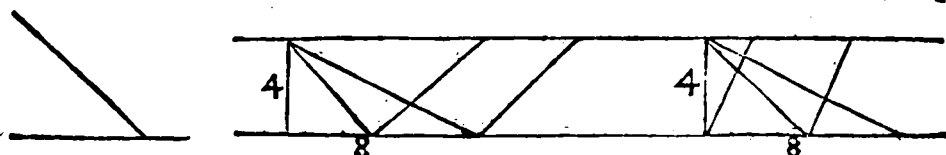
PROPOSITIO

XLII.

Dato triangulo : æquale parallelogrammum constituere, in dato an-
 gulo rectilineo.

Petit hæc propositio triangulū, atq; huic deinde æquale iubet formari seu descri-
 bi parallelogrammum, cuius quidem unus angulus, aliq; cuidam rectilineo angulo
 dato, æqualis sit, quod sic fiet. Continuetur trianguli basis in utramlibet partem,
 huic deinde basi per trianguli uerticem, prout habet propositio 31, recta parallela
 ducatur. Hoc facto, diuidatur basis, per 10 propositionem, bifariam, & ad punctū
 illud

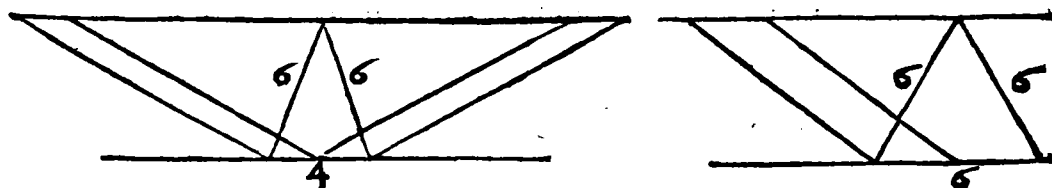
illud diuisionis, atq; ipsam basim, angulus dato æqualis, ex propositione 23 constituitur, cuius deinde latus alterum, si usq; ad lineam, quæ per uerticem trianguli ducta est, continuatum, ei etiam ab alterutra basis extremitate, tanquam à puncto aliquo dato, per propositionem 31, recta parallela ducta fuerit, ubi tandem hæc usque ad lineam, per uerticem transeuntem continuabitur, res confecta erit, id quod



sic demonstrabitur. De parallelogrammo, quin dato unū angulum æqualem habeat, nullum est dubium, cum id in structura ex propositione 23 præuisum sit. Quod uerò idem parallelogrammum dato triangulo æquale sit, postquam à trianguli uertice ad punctum basis medium linea recta ducta fuerit: & id ex propositionibus 38 & 41, atq; communi tandem illa noticia, Quæ eiusdem duplicia, &cæ. facile perspicietur. Dato igitur triangulo, æquale parallelogrammum, in dato rectilineo angulo constitutum est, quod fecisse oportuit.

ADMONITIO.

Quòd si angulus datus fuisset acutior, obtusior, uel omnino rectus, tūc linea hæc, ut latus futuri parallelogrammi, à puncto diuisionis in basi, secūdm huius anguli quantitatem ducenda fuisset. Hæc enim 23, de angulo formando, propositio, in genere proposita est, sic ut nihil referat, quocunq; modo rectilineus angulus fuerit propositus.



Area trianguli figuræ ultimæ, ut sequens calculus indicat, est $\sqrt{243}$. Atq; tanta est etiam parallelogrammi constituti area. Bene igitur.

Latera	Excessus	
6	3	
6	3	
6	3	
Sum. 18	Med. 9	
		Ultimum productum 243
		Area igitur trianguli $\sqrt{243}$

ALIUD AEQVILATERVM TRIANGVLVM,
laterum irrationalium.

Latera	Excessus	
$\sqrt{48}$		
$\sqrt{48}$		
$\sqrt{48}$		
$\sqrt{432}$		
	$\sqrt{108}$	
		pro. { primum 12
		secundū 36
		tertium 432
		Area trianguli $\sqrt{432}$

ALIUD EXEMPLVM.

Latera trianguli sunt

6	6
8 — $\sqrt{4}$	hoc est 6
Radix binomij 20 + $\sqrt{256}$	6
	Q. Summa

Summalaterum 14 $\sqrt{4}$ plus radix binomij 20 + $\sqrt{256}$ hoc est 18

Huius medietas 7 — $\sqrt{1}$ plus radix binomij 5 + $\sqrt{16}$ 9

Excessus, ac per consequens quatuor numeri

Radix binomij 5 + $\sqrt{16}$ plus 1 — $\sqrt{1}$	hoc est $\left\{ \begin{array}{l} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 9 \end{array} \right.$
Radix binomij 5 + $\sqrt{16}$ minus $\sqrt{1}$ — 1	
7 — $\sqrt{1}$ minus radix binomij 5 + $\sqrt{16}$	
7 — $\sqrt{1}$ plus radix binomij 5 + $\sqrt{16}$	

Instituantur multiplicationes.

Prima.

Radix binomij 5 + $\sqrt{16}$ plus 1 — $\sqrt{1}$
Radix binomij 5 + $\sqrt{16}$ minus $\sqrt{1}$ — 1
<u>producuntur 5 + $\sqrt{10}$ minus $\sqrt{4}$ — 2</u>
hoc est 9

Secunda.

7 — $\sqrt{1}$ minus radix binomij 5 + $\sqrt{16}$
7 — $\sqrt{1}$ plus radix binomij 5 + $\sqrt{16}$
<u>pro. 50 — $\sqrt{196}$ minus 5 + $\sqrt{16}$</u>
hoc est 27

Tertia multiplicatio est 27 secundi
cum numero 9 producto primo.
& producuntur 243, ultimo.
Area igitur trianguli $\sqrt{243}$.

VEL ALITER.

Summalaterum 6 plus 3 — $\sqrt{4}$, plus radix bin. 20 + $\sqrt{256}$. hoc est 18

Huius medietas 3 plus 4 — $\sqrt{1}$ plus radix bin. 5 + $\sqrt{16}$ 9

Excessus, & per consequens quatuor numeri.

Radix binomij 5 + $\sqrt{16}$ minus 3 plus 4 — $\sqrt{1}$
Radix binomij 5 + $\sqrt{16}$ plus 3 minus 4 — $\sqrt{1}$
3 plus 4 — $\sqrt{1}$ minus radix binomij 5 + $\sqrt{16}$
3 plus 4 — $\sqrt{1}$ plus radix binomij 5 + $\sqrt{16}$

Instituantur multiplicationes.

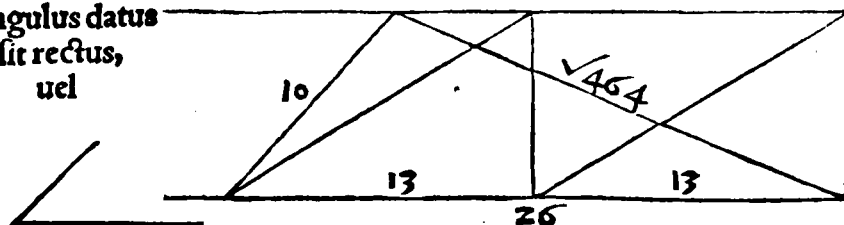
Prima. Radix binomij 5 + $\sqrt{16}$ minus 3 plus 4 — $\sqrt{1}$
Radix binomij 5 + $\sqrt{16}$ plus $\sqrt{3}$ minus 4 — $\sqrt{1}$
<u>producuntur 5 + $\sqrt{16}$ minus 9 minus 17 — $\sqrt{64}$</u>
hoc est 9.

Secunda. 3 plus 4 — $\sqrt{1}$ minus radix binomij 5 + $\sqrt{16}$

3 plus 4 — $\sqrt{1}$ plus radix binomij 5 + $\sqrt{16}$
<u>9 plus 17 — $\sqrt{64}$ minus 5 + $\sqrt{16}$</u>
plus 12 — $\sqrt{9}$, bis
<u>Summa productorum, sunt 27. &c.</u>

ALIA

Angulus datus
sit rectus,
uel



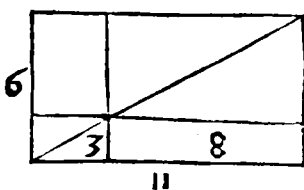
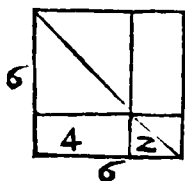
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΓ.

Παντὸς παραλληλογράμμου, τῷ πρὸς τῶν διαμέτρων παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα, ἴσα ἀλλήλοις εἶναι.

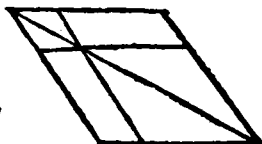
PROPOSITIO. XLIII.

Omnis parallelogrammi, eorum quæ circa diametrum sunt parallelogrammorum supplementa, inter se sunt æqualia.

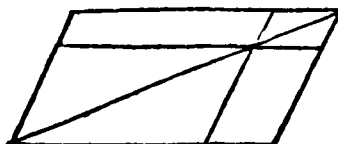
Sit parallelogrammum, ducta etiam in eo diameter, puncto deinde in uno aliquo parallelogrammi latere ubiuis sumpto, ex hoc ad oppositū usq; latus reliquis



duobus parallela ducta, ubi hæc diametrum secuerit, per hoc sectionis punctum prioribus lateribus similiter parallela ducenda est, & figura parata erit: dico igitur nunc, quòd ipsius parallelogrammi supplementa, hoc est, ea per quæ diameter non transit, parallelogramma, inter se æqualia sint. Nam cum diameter parallelogrammum, ut auditum est, bifariam secet, subtractis ab æqualibus triangulis, medietatibus scilicet parallelogrammi, æqualibus triangulis bis, quæ tandem relinquuntur, ex communi quadam notitia, æqualia erunt. Quia autem reliqua hæc ea sunt, quæ circa diametrum consistunt parallelogrammorum supplementa: ergo. Omnis igitur parallelogrammi, eorum quæ circa diametrum sunt parallelogrammorum supplementa, inter se sunt æqualia. quod demonstrasse oportuit.



Diameter $\sqrt{108}$.



Diameter $\sqrt{223}$.

SEQVITVR TRIANGVLORVM CALCVLVS.

primi

Latera	excessus
$\sqrt{108}$	$6 - \sqrt{27}$
6	$\sqrt{27}$
6	$\sqrt{27}$
$12 + \sqrt{108}$	$6 + \sqrt{27}$

Primum productum 9. secun. 27

tertium 243. Area $\sqrt{243}$

secundi

Latera	excessus
$\sqrt{223}$	$8\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{223}{4}}$
11	$\sqrt{\frac{223}{4}} - 2\frac{1}{2}$
6	$\sqrt{\frac{223}{4}} + 2\frac{1}{2}$
$17 + \sqrt{223}$	$8\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{223}{4}}$

Pri. pro. $16\frac{1}{2}$

secun. $49\frac{1}{2}$

ter. $\frac{3267}{4}$

Area $\sqrt{816\frac{3}{4}}$

Q 3

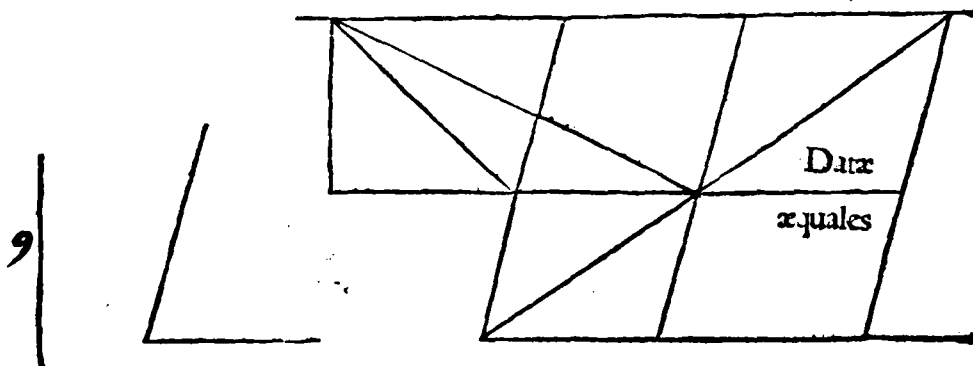
ΠΡΟΤΑΣΙΣ

Παρά τῷ δ' ὁθεῖσαι ἐνθεῖαν, τοῦ δ' ὁθεντὶ τριγώνου ἴσου παραλληλογράμμου
παραβαλεῖν, ὃν τῷ δ' ὁθείσῃ γωνία ἐνθυγράμμου.

PROPOSITIO XLIII.

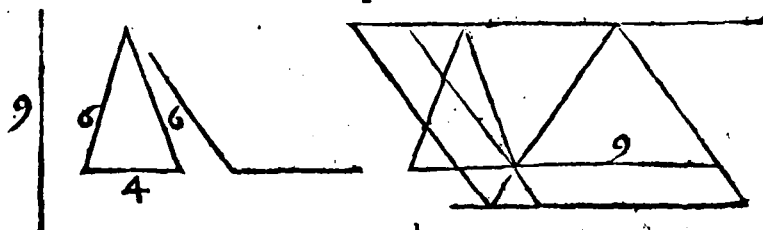
Ad datam rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum
ponere, in dato angulo rectilineo.

Requirat hæc propositio rectam lineam datam, triangulum datum, atq; etiam
angulum rectilineum datū. Proponit autem, quomodo ad datam rectam lineam,
parallelogrammum, quod & triangulo dato æquale sit, angulum etiam dato angu-
lo æqualem habeat, constituendum sit. Est huius propositionis structura facilis,
propter hypothesen, quas cum propositione præcedente 42. communes habet. Pri-
mo enim parallelogrammum, quod dato triangulo æquale sit, angulum insuper
angulo æqualem habeat, per eandem 42. constituendum est. Et quoniam dicit pro-
positio, ad datam rectam lineam, altero igitur iam descripti parallelogrammi late-
re, eorum quæ angulum, dato æqualem comprehendūt, ultra parallelogrammum
ad longitudinem rectæ datæ, per secundū postulatū, prolongato, secundū pro-



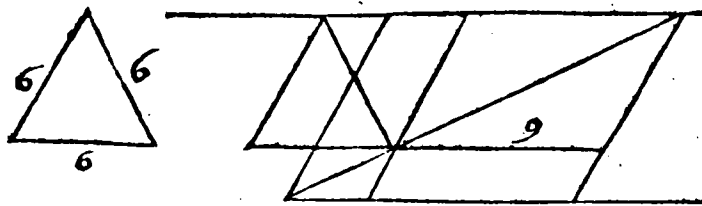
longatam illam portionem & parallelogrammi latus, quod cū portione prolongata
angulum facit, aliud cum sua diametro parallelogrammū describatur. Et quoniam
hæc diameter, ex una eius parte continuata, & latus parallelogrammi alterum, simi-
liter continuatum, propter incidentem lineam, quæ (ut facile ex tertia parte pro-
positionis 29 colligitur) in una & eadem parte, duos interiores angulos duobus re-
ctis minores facit, ex communi quadam notitia concurrunt, continuetur utrunq;
horum, diameter scilicet & latus illud alterum, donec concurrant, atq; ex triangu-
lo formato, cuius quidem latus unum est hæc tota diameter, compleatur parallelo-
grammum. Quòd si tandem partialis iuxta diametrum, linea, usq; ad oppositum
in parallelogrammo latus continuatū fuerit, cum supplementorum utrunq; dato
triangulo æquale sit, ex his uerò alterum super datam rectam constitutum: propo-
sitioni satisfactum erit, id quod ex structura facile demonstrari potest. Ad datam igitur
rectam lineam, in dato angulo rectilineo parallelogrammum dato triangulo
æquale positum est, quod fieri oportuit.

SEQUUNTUR NVNC HVIVS PROPOSITIONIS
exempla alia.

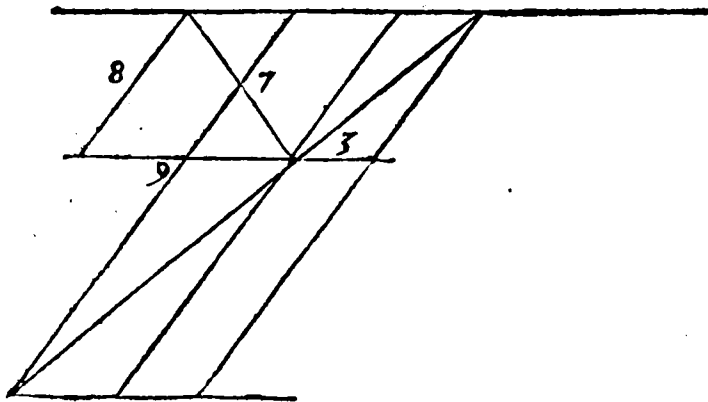


Idem.

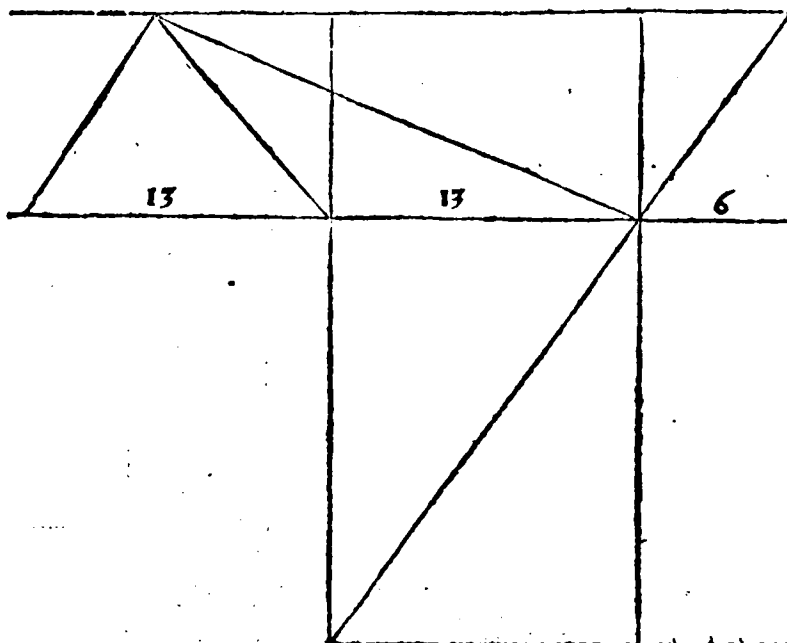
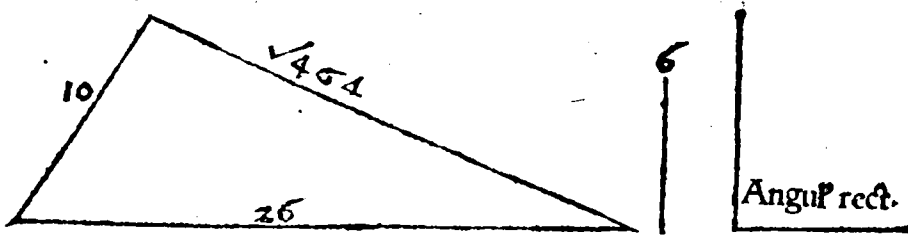
Idem exemplum, mutato tamen Ifofccli in triangulum æquilaterum.



Adhuc aliter, triangulum autem esto Scalenum, linea uerò data 3 punctorum.



ALIUD EXEMPLVM.



PROTASIZ

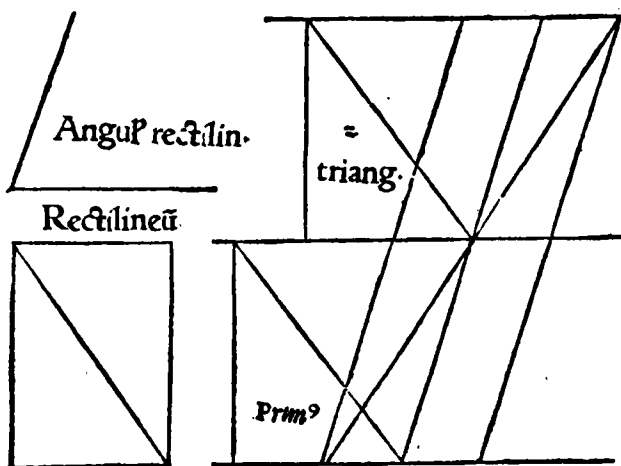
Τῷ δοθέντι ἑνὸς γράμματος ἴσου πᾶσι τοῖς ἑτεροῖς ὅμοιου ὁμοῖον, ὅτι τῇ δοθείσῃ ἑνὸς γράμματος γωνίᾳ.

PROPOSITIO

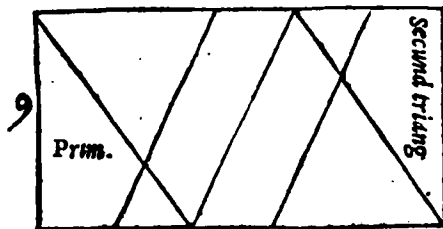
XLV.

Dato rectilineo, æquale parallelogrammum constituere, in dato angulo rectilineo.

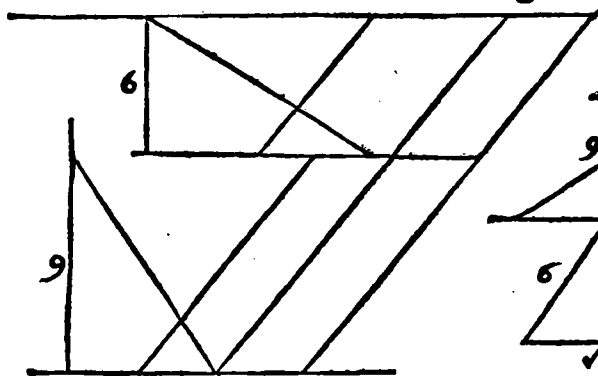
Quod præcedens 42 de triangulo tantū proposuit, petit uel iubet hæc fieri cum omni rectilineo. Estq; hæc præsens quàm superior magis generalis, & latius patet. Sit itaq; datum rectilineum quaecumque, gratia tamen exempli, & propter faciliorem operationem, Quadrilaterum altera parte longius. Illud primò in duo trian- gula, per diametrum ductam, soluendum: parallelogrammum deinde, quod angu- lum dato æqualem habeat, tri- angulo uni æquale, per propo- sitionem 42, constituendum est. Quòd si iam ad unum huius parallelogrammi latus, tanquam ad rectam lineam datā, per pro- positionem 44 præcedentem, alteri triangulo æquale paral- lelogrammum, quod & ipsum angulum dato æqualem ha- buerit, constituatur, satisfactum propositioni erit.



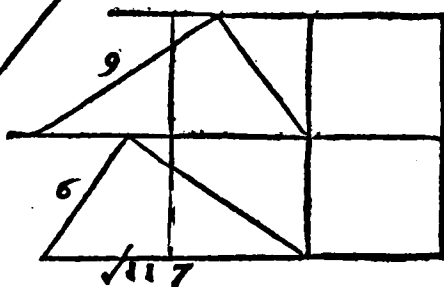
ALIA FIGURAE DISPOSITIO.



Aliter manente eodem rectilineo & angulo.



Præterea aliter, manente rectilineo, sed mutato an- gulo in rectum.

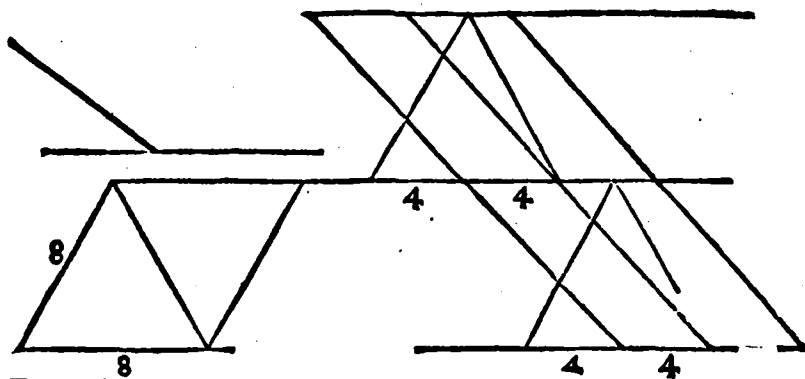


Non aliter cum quadratis agendum erit.

Demonstratio huius cum sit facilis, præter operationem amplius quicquam ad- dere

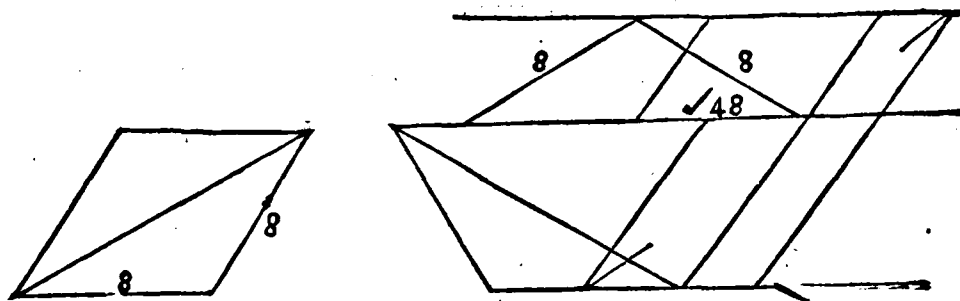
dere nolui, copiosum tantum, propter difficilem huius praxim, in exemplis me uarijs ostendens.

DE RHOMBO.

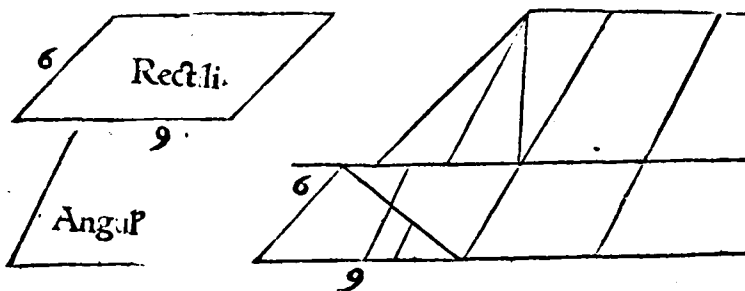


Rhombus datus.

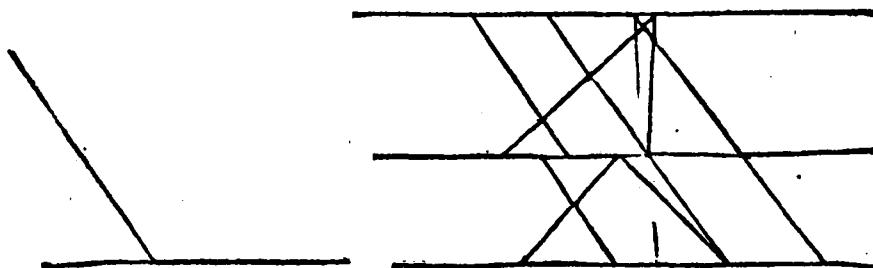
De eodem Rhombo, aliter tamen in triacula soluto.



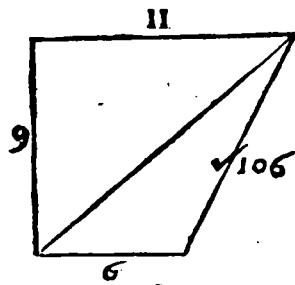
SIC ETIAM QVADRILATERVM, QVOD RHOM. boïdes appellatur, uariari poterit, ut sequitur.



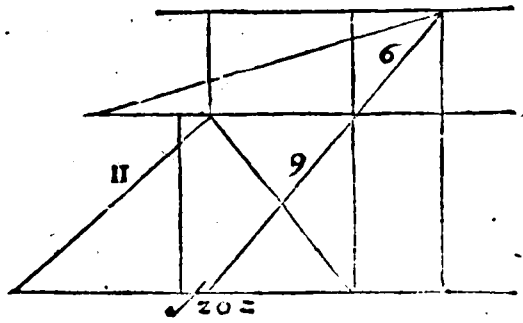
Idem aliter, mutato acuto in angulum obtusum.



ELEMENTORVM EVCLIDIS
EXEMPLVM DE QVADRILATERO IRREGVLARI.

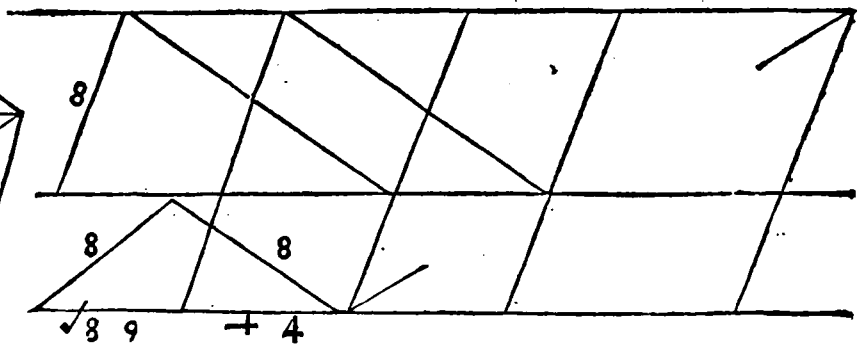
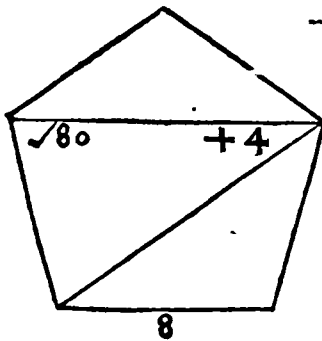


Angulus autem sit rectus

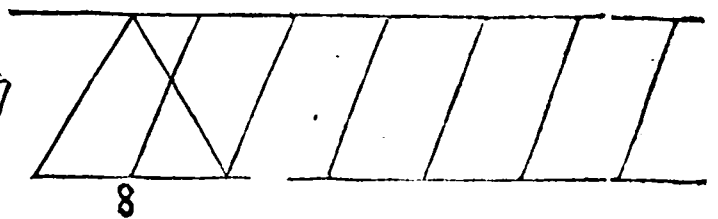
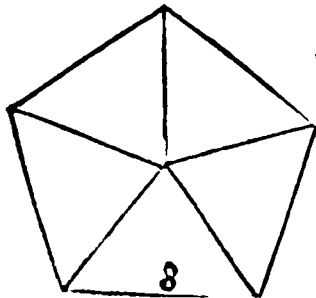


Proinde quemadmodum hactenus in quadrilateris, secundo triangulo æquale parallelogrammum, per propositionem 44. ad rectam datam constitutum est, ita eodem modo nunc, ubi quidem rectilineū propositum pentagonū fuerit, eo in sua triangula soluto: & triangulo tertio per eandem propositionem æquale parallelogrammū addi poterit, atq; sic deinde etiam absolui triangulū quartum in Hexagonis, & quintū in Heptagonis, ac ordine deinceps. Quomodo autem unumquodq; propositum polygonum, uel rectilineum in sua triangula solui debeat, id per appendicem quandam propositionis 32, iam traditum atq; ostensum est.

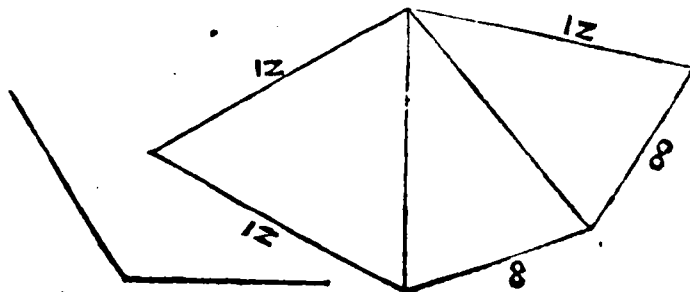
SEQVITVR EXEMPLVM DE PENTAGONO REGVLARI.



Aliud de Pentagono exemplum.

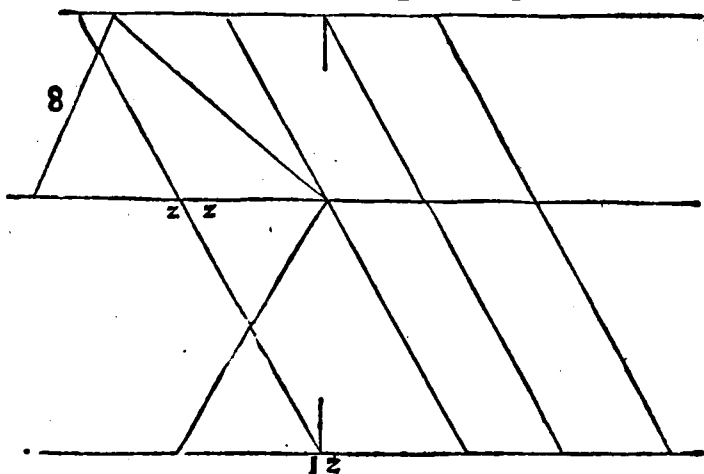


Exemplum, de Pentagono irregulari.

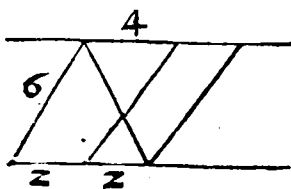
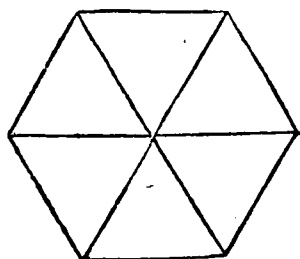


Constitutio

Constitutio huius pentagoni irregularis.

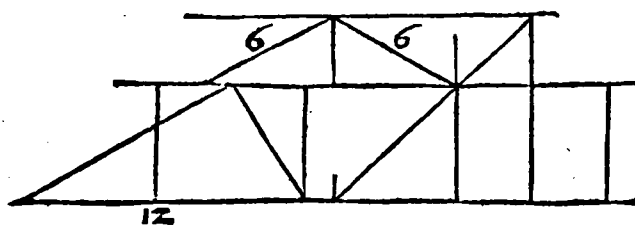
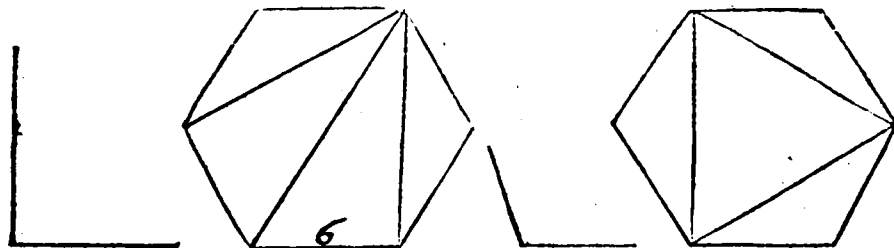


EXEMPLVM HEXAGONI REGVLARIS.



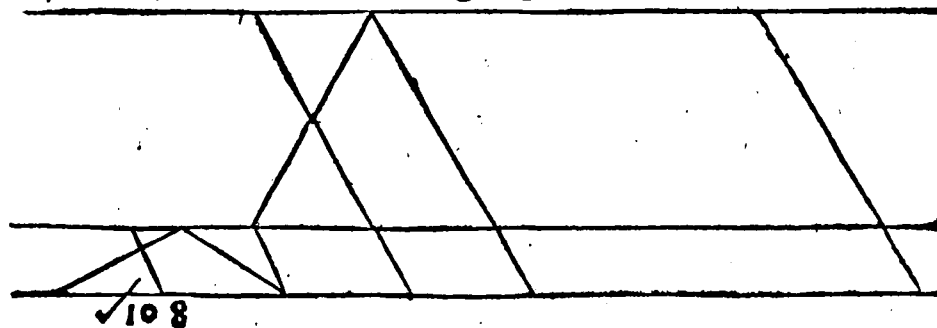
Hoc nūc sexies (cum sex sint triangula inter se æqualia) hexagono parallelogramū æquale, in dato angulo rectilineo cōstitutum erit.

Vel fit illa hexagoni in triangula diuisio.



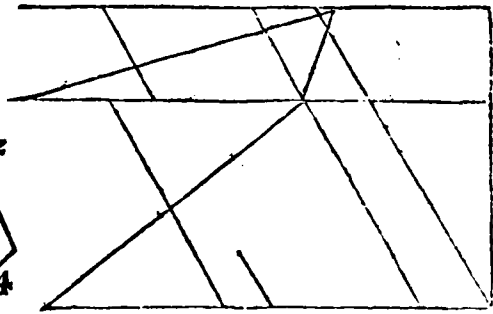
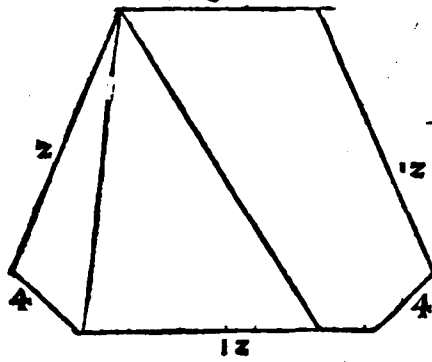
Constitutio hexagoni prioris in parallelogramū, quod dato rectilineo angulo æqualem angulum habeat.

Constitutio hexagoni posterioris, &c.



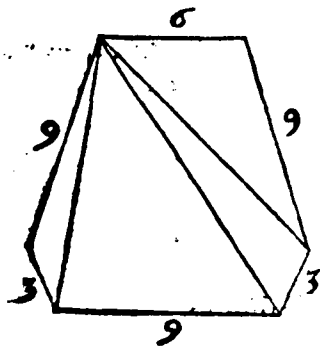
ELEMENTORVM EVCLIDIS
EXEMPLVM HEXAGONI IRREGVLARIS.

8

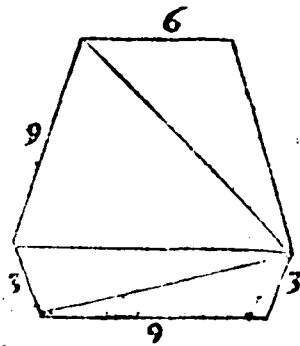


Hoc nunc totum bis, ratione alterius parallelogrammi: exoritur totum parallelogrammum, toti rectilineo æquale. quod erat faciendum.

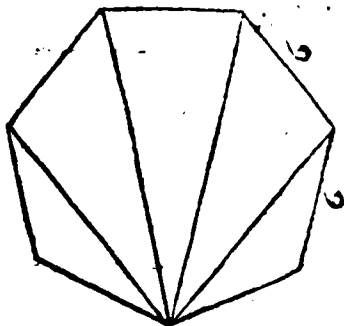
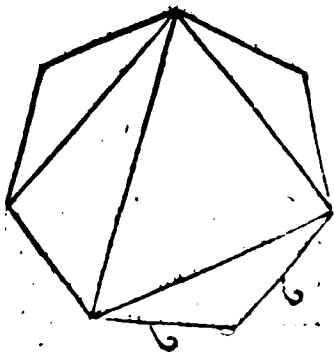
Aliter, similis formæ hexagonum irregulare, in sua triangula solutum.



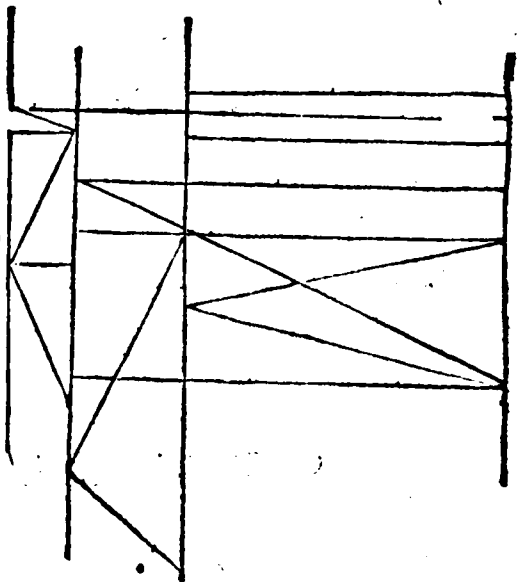
v'p' lic



EXEMPLVM DE HEPTAGONO REGVLARI.



Operatio figuræ primæ.



Secunda figuræ eadem erit operatio.

Quod

Quòd si à puncto heptagoni medio, hoc est à centro, septem ad ipsius angulos rectæ ductæ fuissent lineæ, cum sic heptagonum in septem inter se æqualia triangu-
la resolutum sit, uni eorum æquali parallelogrammo constituto, eo deinde septies sumpto, res confecta erit. Sic cum irregulari heptagono & reliquis multorum late-
rum figuris omnibus, postquam hæ in triangu- la resolutæ fuerint, agendum erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

MS.

Από τῆς δοθείσης εὐθείας, τετράγωνον ἀναγράφαι.

PROPOSITIO.

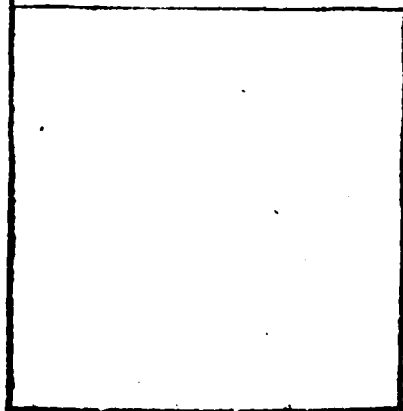
XLVI.

A' data recta linea, quadratum describere.

Sit data recta linea, atq; propositum, ab ea, hoc est secundum eius quantitatem, quadratum describere. Ab una igitur rectæ extremitate, tanquam à puncto in linea

✱ Data equalis & parallela.

Ad angulos rectos &
æqualis datæ.



Recta data.

sumpto, per propositionem 11. ad angulos rectos linea excitetur: atque hac, per propositionem 3. ad æqualitatem datæ posita, ab eius extremitate altera, & libera adhuc, tanquam à puncto dato, datæ rectæ equalis & parallela ducatur. Quòd si tandem altera ductæ parallelæ extremitas, cum altera datæ extremitate, recta linea cōiungatur, propositioni satisfactum erit. Demonstrationem huius, qui eorum quæ in structura facta sunt, eorum item quæ hæcenus tradita recordabitur, ex definitione tandē quadrati facile colligere poterit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

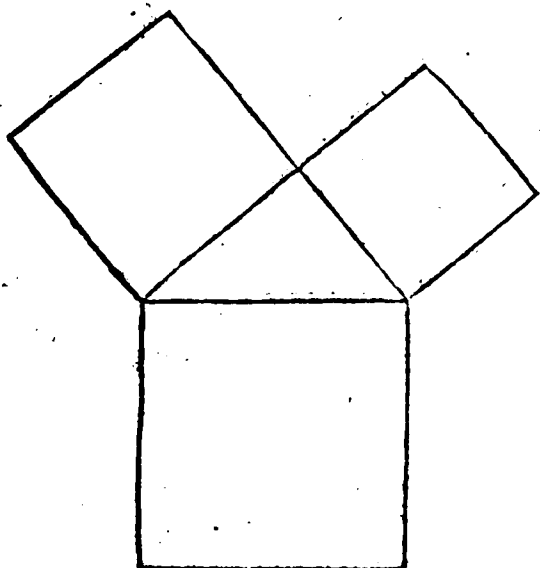
MZ.

Εν τῇς ὀρθογωνίαις τετράγωνοις· ὃ ὑπὸ τῇ τῶν ὀρθῶν γωνίᾳ ὑποτεταγῆς πλευρᾷς τετράγωνον, ἴσον ἔστι τοῖς ἀπὸ τῆς τῶν ὀρθῶν γωνίᾳ πρὸς ἑαυτῶν πλευρῶν τετράγωνοις.

PROPOSITIO

XLVII.

In rectangulis triangulis: quadratum quod à latere rectum angulum subtendente describitur, æquale est eis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur quadratis.



Sit triangulum rectangulum, quadrata etiam à singulis lateribus, per propositionem præcedentem, descripta: dico, quadratum lateris subtendentis angulum rectum, tantum esse, quanta sunt quadrata, quæ à reliquis duobus lateribus, angulum rectum comprehendentibus, describuntur. Demittatur ab angulo trianguli recto, tanquam à puncto dato, super suam subtenfam, per propositionem 12, linea perpendicularis, atque

R 3

hæc

hæc ad latus usq; oppositum per quadratum cōtinuetur, & erit quadratum lateris, angulum rectum subtendentis, in duo parallelogramma diuisum, quorum unum quidem uni, alterum uerò alteri reliquorum laterum quadrato æquale esse, sic demonstrabitur. Quoniam enim triangulum ex hypothesi rectangulum est, singuli etiam quadratorum anguli, ex definitione, recti sunt: angulus in orthogonio rectus cum utroq; eorum qui sunt ei $\phi\epsilon\psi\kappa$, duobus rectis angulis æquales erunt. Illud igitur utriusq; quadrati latus, quod quidem extra triangulum est positum, illi trianguli lateri, cui applicatum est, ex propositione 14, ad amissum iunctum, & cum eo una linea erit, quod est notandum. Præterea, quoniam anguli recti, ex communi quadam noticia, inter se sunt æquales, & quoniam etiam, si æqualibus æqualia, uel aliquod commune adijciatur, quæ inde colliguntur æqualia sunt: per hæc duo, bis usurpata, erunt ex utraque parte rectanguli, circa acutos angulos, duo duobus angulis æquales, quod & ipsum notandum. His igitur nunc demonstratis, propositionis ueritas tali, ut sequitur, linearum ductu haberi potest. Demittantur ab angulo triaguli recto, ad remotiores ab eo duos quadrati iam diuisi angulos, duo rectæ lineæ. Et quoniam his duabus rectis duo triangula descripta sunt, cum hæc eadem triangula, atq; ipsorum parallelogramma, unam & eandem basim habeant, in eisdem etiam parallelis constituta sint: triangula parallelogrammorum dimidia, uel contrà, hæc ad illa duplicia esse, per propositionem 41. iam dudum conclusum est. Ducantur ultimò, etiam ab acutis rectanguli trianguli angulis duæ rectæ lineæ, quarum utraq; per latus eundem angulum subtendens, usq; ad angulum quadrati illum, cui idem acutus hæctenus non est cōiunctus, continuetur. Describuntur autem sic duo triangula alia, quæ similiter suorum parallelogrammorum, hoc est, quadratorum à lateribus duobus descriptorū, dimidia sunt, cum sic æqualia etiam sint ex propositione 4, bis usurpata, triangulis prioribus descriptis, utrumq; suo: ad illa priora triangula, eadem quadrata duplicia erunt. Sed quia ad illa priora duplicia etiam sunt, ut quidem demonstratū est, duo partialia diuisi quadrati parallelogramma: per cōmunem igitur noticiam, Quæ eiusdem duplicia, æqualia inter se sunt, parallelogramma partialia, quadratum nimirum lateris, angulum rectum subtendentis, reliquorum duorum laterum quadratis æquale erit. In rectangulis igitur triangulis, quadratum quod à latere rectum angulum subtendente describitur, æquale est eis, quæ à lateribus rectum angulū continentibus describuntur quadratis, quod demonstrari oportuit.

APPENDIX.

Porro ex Apollodoro refert Laertius, hanc olim propositionem à Pythagora, Italice philosophiæ principe, inuentam fuisse, sic inquiēs. $\phi\iota\sigma\iota\ \delta\ \alpha\pi\alpha\lambda\lambda\omicron\delta\omicron\varsigma\ \theta\ \delta\ \lambda\omicron\gamma\iota\sigma\iota\kappa\omicron\varsigma,\ \epsilon\kappa\alpha\tau\omicron\mu\epsilon\lambda\omega\ \delta\psi\sigma\omicron\iota\ \kappa\alpha\iota\tau\ ,\ \epsilon\upsilon\phi\omicron\upsilon\tau\alpha\ \delta\pi\ \tau\hat{\iota}\ \delta\epsilon\ \delta\epsilon\lambda\tau\eta\iota\varsigma\ \tau\epsilon\lambda\epsilon\gamma\eta\iota\varsigma\ \epsilon\ \epsilon\psi\omega\tau\epsilon\iota\sigma\alpha\ \pi\omega\lambda\epsilon\upsilon\alpha\iota\sigma\omicron\iota\ \delta\iota\omega\alpha\tau\eta\ \tau\alpha\iota\varsigma\ \pi\omicron\delta\iota\epsilon\chi\epsilon\sigma\omicron\iota\varsigma.$ $\text{Καὶ ἐστὶν ἐπὶ χεῖρα μαθητῶν ἔχον.}$

$\text{Ἦνικε Πυθαγόρης τὸ περιελθεῖς ἑνὲς ὀρθογώνου.}$

$\text{Κῆν' ἐφ' ὅτῳ κλεινὸν ἦγαγε μὲθυσίῳ.}$

Hæc in Latinum sermonem è Græco uersa, sic sonant.

Refert autem Apollodorus supputator, hecatomben illum immolasse, cum inuenisset, quòd trianguli rectanguli hypotenusæ tantum posset, quantum ea quæ rectum angulum continerent latera. Et est epigramma sic se habens,

Postquam à Pythagora est præclara reperta figura,

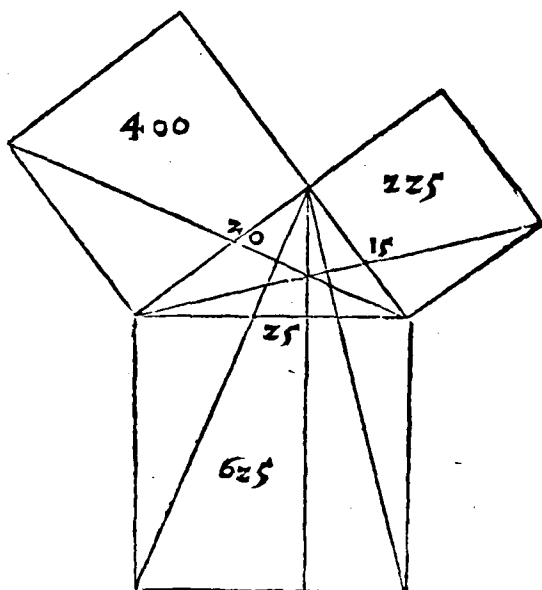
Tunc centum ille boum sacra peregit ouans.

Hoc idem attribuit Pythagoræ etiam L. Vitruuius Pollio, libro nono, capite quarto suæ architecturæ: atque hunc locum uidere Lector poterit.

Citauimus autem hæc libenter, cum propter uetustatem, tum etiam propter honorificam

norificam & Pythagoræ & propositionis huius mentionem, cum illius in omnibus ferè rationibus nō sit mediocris usus. Hinc eo maiori studio & diligentia perdiscenda, memoriæq; commendanda est.

SEQUITVR HVIVS PROPOSITIONIS FIGVRA GEO-
metrica aliā, unā cum numeris explicata.



OPERATIO TRIANGVLORVM QVANTVM AD
areas inueniendas.

Triangulum unum, cuius

Latera quidem sunt

$$\begin{array}{r} \sqrt{1450} \\ 25 \\ 15 \end{array}$$

$$\text{Summa } 40 + \sqrt{1450}$$

Excessus uerò

$$\begin{array}{r} 20 - \sqrt{\frac{1450}{4}} \\ \sqrt{\frac{1450}{4}} - 5 \\ \sqrt{\frac{1450}{4}} + 5 \end{array}$$

$$\text{Medietas } 20 + \sqrt{\frac{1450}{4}}$$

Quatuor numeri.

$$20 - \sqrt{\frac{1450}{4}} \cdot \sqrt{\frac{1450}{4}} - 5 \cdot \sqrt{\frac{1450}{4}} + 5 \cdot 20 + \sqrt{\frac{1450}{4}}$$

Productum pri. $37\frac{1}{2}$, secundum $337\frac{1}{2}$, tertium $\frac{10625}{4}$,
atq; area tandem trianguli $112\frac{1}{2}$. Et tanta est etiam medietas parallelogrammi
partialis, uel quadrati, quod est à parte dextra.

Triangulum alterum, quod habet

Latera

$$\begin{array}{r} \sqrt{1625} \\ 25 \\ 20 \end{array}$$

$$45 + \sqrt{1625}$$

Excessus itaq;

$$\begin{array}{r} \frac{45}{2} - \sqrt{\frac{1625}{4}} \\ \sqrt{\frac{1625}{4}} - 2\frac{1}{2} \\ \sqrt{\frac{1625}{4}} + 2\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\frac{45}{2} + \sqrt{\frac{1625}{4}}$$

Productum primum 100, secundum 400, tertium 40000, atq; tandem trian-
guli area, 200. medietas scilicet alterius partialis parallelogrammi, uel quadrati par-
tis sinistrae. Quare, &c.

PROTASIS

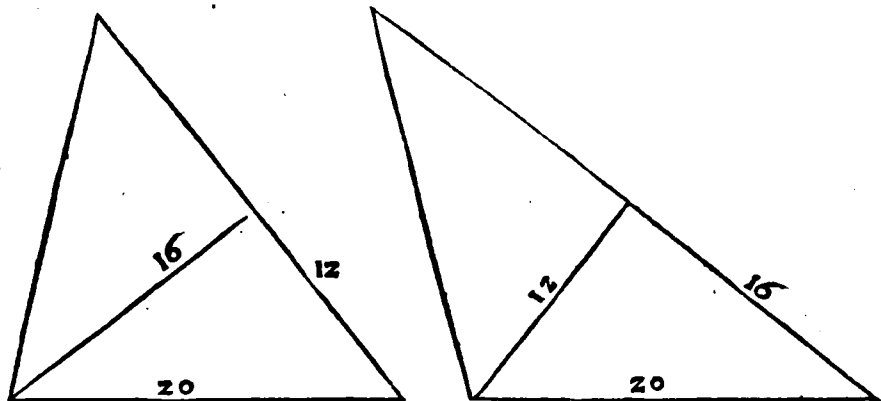
Εὰν τριγώνῳ ῥ' ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον, ἴσον ἢ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις ἢ περιεχομένη γωνία ᾗ τὸ τῶν λοιπῶν τῶν τριγώνου δύο πλευρῶν, ὀρθή ἐστι.

PROPOSITIO

XLVIII.

Si quod ab uno laterum trianguli describitur quadratum, æquale fuerit eis quæ à reliquis trianguli duobus lateribus describuntur quadratis: angulus cōprehensus sub reliquis trianguli duobus lateribus, rectus est.

Sit triangulum, cuius quadratum, quod ab uno latere describitur, reliquorum duorum laterum quadratis æquale sit: dico, angulum quem illud latus subtendit, rectum esse. id quod sic demonstratur. Ab angulo illo, qui, quòd rectus sit, demonstrari debet, atq; à latere huius recti uno, tanquam à puncto in recta dato, linea, per propositionem 11, πρὸς ὀρθῶν, ducatur, ea deinde, per propositionem 3, lateri circa hunc rectum alteri, æquali posita, per id quod petitione quadam permissum est, nimirum quòd ab omni puncto ad omne punctum linea recta duci possit, claudatur tandem triangulum. Et quoniam duæ lineæ, latus scilicet trianguli unum, & extra triangulum πρὸς ὀρθῶν ducta, sunt, ex structura, inter se æquales: quod quadra-



ta, ab his æqualibus descripta, inter se æqualia sint, manifestum est. Hinc æqualibus his quodam communi, quadrato scilicet lateris alterius, ad quod nimirum extra triangulum linea πρὸς ὀρθῶν ducta est, addito: & producta iam, uel collecta, inter se æqualia erunt. Quoniam autem utrunq; horum, unum quidem ex hypothesi, alterum uerò ex propositione præcedenti, unius lateris quadrato æquale est: & horum duorum quadratorum latera inter se æqualia erunt. Igitur, cū iam duo, qualia ipsa s. propositio requirit, triangula appareāt: angulus ille quem propositi trianguli latus, quod in reliqua duo potest, subtendit, per eandem octauam, rectus erit.

Si igitur ab uno alicuius trianguli latere quadratum descriptum, à reliquorum duorum laterum descriptis quadratis æquale fuerit: angulus ille, quem hoc latus subtendit, rectus erit, quod demonstrasse oportuit.

FINIS LIBRI PRIMI.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

EYKLEIDOU ΣΤΟΙ ΧΕΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

237

EVCLIDIS ELEMENTORVM GEO- metricorum liber secundus.



Sunt ex hoc libro secundo Arithmeticus pulchra sui calculi compendia, multæ item regularum Algebrae æquationes, & nonnulla etiam harum regularum fundamenta, per huius secundi libri propositiones demonstrare solet. Habet præterea is liber propositiones duas, unam quidem pro Amblygonio, alteram deinde pro Oxygonio triangulo. illæ uero quantum utilitatis, si in re astronomica ad penultimam propositionem primi, de Orthogonio triangulo expositam, referantur, afferre soleant, norunt qui in hac disciplina aliquandiu versati sunt. Quare si nullum alium præterea usum haberet, ob has duas saltem propositiones præsens hic liber maximopere amplectendus & perdiscendus esset.

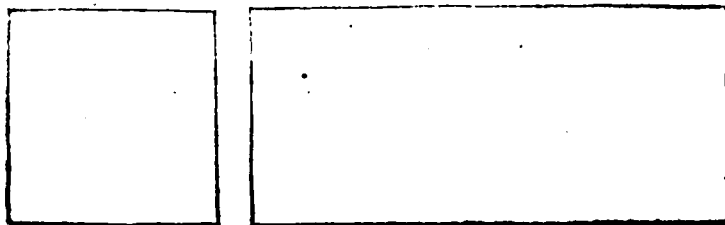
ΟΡΟΙ.

Πᾶρ ἡ ἀλλήλογραμμοὶ ὀρθογώνιοι περιέχονται λέγεται, ἐπὶ δύο, τῶν τῶν ὀρθῶν γωνιῶν ποιεῖσθαι ἐνθεῶν

DEFINITIONES.

Prima. Parallelogrammum rectangulum quid.

Omne parallelogrammum rectangulum sub duabus, rectum angulum comprehendentibus, rectis lineis dicitur contineri.

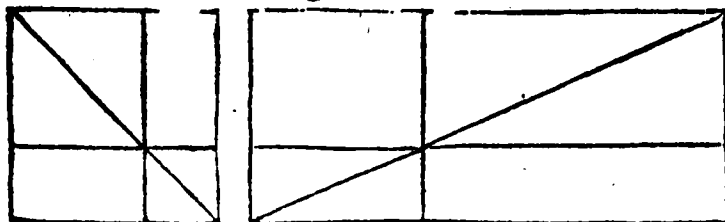


Γὰρ ὅτι ἡ ἀλλήλογραμμοὶ χωρὶς, τῶν ποδῶν τῶν διαμέτρων αὐτῶν ἐν ἡ ἀλλήλογραμμοὶ ὅποιοι ἂν, (ὡς τῶν δύο) ἡ ἀπληρώμασι, Γνώμων καλεῖται.

Secunda.

Gnomon quid.

Omnis parallelogrammi spacij, eorum quæ circa diametrum illius

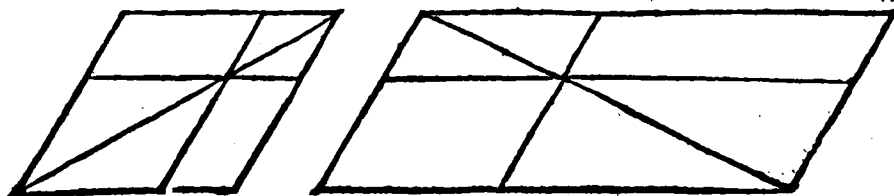


sunt parallelogrammorum unumquodque, cum duobus supplementis, Gnomon vocetur.

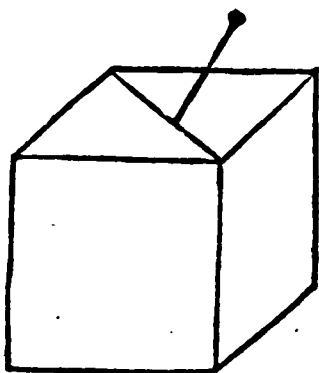
S

Sententia

Sententia definitionis est, Omnis parallelogrammi, quod quidem per ductam ipsius diametrum, ac duas deinde in eo rectas, quæ sese mutuo in communi quodam diametri puncto secant, lineas ductas, in quatuor partialia parallelogramma alia diuisum est, utrunq; eorum, per quæ diameter transit, cum reliquis duobus parallelogrammis, quæ extra diametrum sunt posita, atq; supplementa uocata, Gnomonem nominari.



Est hæc Gnomonis definitio generalior, quàm quæ à Vitruuio est posita, cum hæc rectum tantum angulum, illa uerò cuiuscunq; generis angulos, modo parallelogrammum fuerit spaciū, consideret. Definit autem ferè his uerbis Gnomonem Vitruuius, lib. 9. cap. 7. Architecturæ, eum esse ac formari, quando ex medio planicie linea $\pi\epsilon\omicron\varsigma$ $\delta\epsilon\theta\lambda\alpha\varsigma$ erigitur.



ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

ΠΡΩΤΗ.

A.

Ἐὰν ὡς δύο ὑβέαι, τμηθῇ δι' ἡτέρας αὐτῶν εἰς ὅσα δυητὸν τμήματα ἢ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο ὑβέων, ἴσον δὲ, τῆς ὑπὸ τῇ τρίτῃ τῶν καὶ ἐκείνῃ τῶν τμημάτων περιεχομένου ὀρθογωνίου.

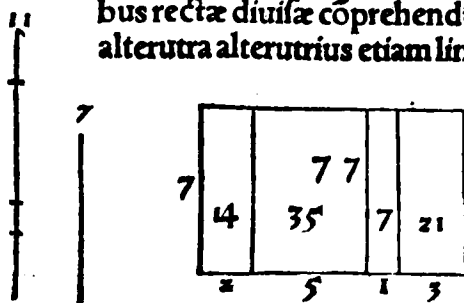
PROPOSITIONES.

PRIMA

L

Si fuerint duæ rectæ lineæ, seceturq; altera ipsarum in quotcunq; segmenta: rectangulum comprehensum sub duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ ab infecta & quolibet segmentorum rectangulis comprehenduntur.

Sint duæ rectæ lineæ, harum etiam altera in partes quotcunq; diuisa: dico, rectangulum sub duabus datis rectis cōprehensum, eis, quæ sub indiuisa & singulis partibus rectæ diuisæ cōprehenduntur rectangulis, æquale esse. Excitetur ex alterutra alterutrius etiam lineæ extremitate, per propositionem II. primi, ad angulos rectos lineæ, eaq; per tertiam eiusdem, ad æqualitatem alterius posita, ex eius altera extremitate, lineæ, ad quam $\pi\epsilon\omicron\varsigma$ $\delta\epsilon\theta\lambda\alpha\varsigma$ linea posita est, parallela, eiq; æqualis, recta linea ducatur, & claudatur superficies, Quod si

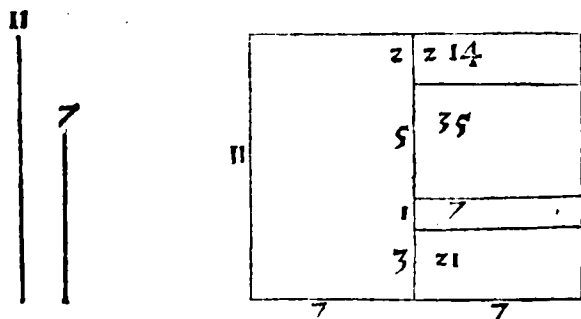


iam

iam ex singulis diuisæ lineæ punctis, lineæ rectæ, eis quæ ab extremitatibus eiusdem diuisæ modò eductæ sunt, per 31 primi, parallelæ, ad latus usq; oppositum tendentes, ductæ fuerint, hac structura tandem propositio sic retinebitur. Quoniam enim totale ipsis partialibus parallelogrammis, ut apparet, æquale est, totale autem cum sub duabus rectis datis, æquali pro æquali linea sumpta, partialia item singula sub indiuisa & singulis partibus diuise, & hic æquali subinde pro æquali linea sumpta, contineantur: sub duabus igitur datis comprehensum rectangulū eis quæ sub indiuisa & singulis partibus diuisæ continetur rectangulis, æquale erit. Si fuerint igitur duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem in segmenta quotcunq; secetur: rectangulum sub duabus rectis lineis comprehensum, æqua-

le est eis, quæ ab insecta & quolibet segmentorum rectangulis comprehenduntur. quod demonstrari oportuit.

POTEST FIGVRA ETIAM SIC INSTITVI.



Quia uerò omnes huius secundi libri propositiones generaliter & de lineis & de numeris intelligi, atq; per ea declarari possunt, ideo etiam, ut quæq; propositio suos proprios numeros, suas etiam conuenientes & debitas lineas haberet, diligenter curauimus. id quod boni consulere Lector uelit.

APPENDIX.

Solent Arithmetici nō raro in multiplicatione, numerum unum eorum, qui inter se multiplicari debent, in partes aliquot distribuere: alterum deinde, cum partibus distributi singulis multiplicare, ac multiplicationis tandem productum, per horum partialium productorum summam representare: atq; id certe compendio quodam, quod ex hac propositione desumptum est, facere eos, studiosi sciant.

EXEMPLVM SIT.

Indiuisus	diuisus in par.	Alias multipli- catione sic,
74	37	74
1480	20	37
740	10	518
370	5	222
148	2	2738
2738	īdem numeri	

Huius compendij frequens usus est circa multiplicationem in regula Proportionum.

Quòd si uerò numeri illi propositi æquales inter se fuerint, utuntur pro hac prima, sequenti propositione secunda, ut quæ idem sub una recta linea, uel numero, bis tamen eo repetito, proponit, atq; in hoc prima à secunda propositione differt.

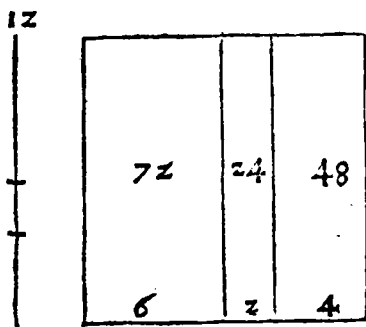
Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχῃ· τὰ ὑπὸ τῇ ὅλῃ καὶ ἑκατέρῃ τῶν τμημάτων περιεχόμενα ὀρθογώνια, ἴσα ὄντι, τῷ ὑπὸ τῇ ὅλῃ τετραγώνῳ.

PROPOSITIO

II.

Si recta linea secetur utcunq; quæ sub tota & utroq; segmentorum rectangula comprehenduntur, æqualia sunt ei quod à tota fit quadrato.

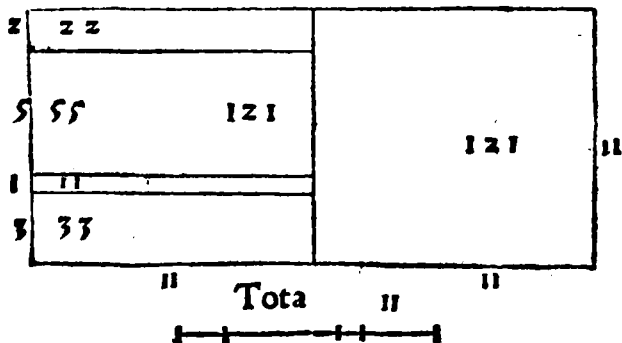
Sit recta linea in partes utcunq; diuisa: dico, quæ sub tota & utroq; segmentorum rectangula comprehenduntur, æqualia esse ei quadrato, quod à tota describitur. Describatur à recta data quadratū, ex puncto deinde uel punctis diuisionum



singulis (nam & plurium segmentorum lineam hæc propositio ferre potest) ad angulos rectos lineæ, uel si magis placet, utriq; eorum, quæ diuisæ datæ ad rectos insistant, laterum parallelæ, usque ad oppositum latus ducantur. Et quoniam partia lia per ductas parallelas descripta parallelogramma, ei quod à recta diuisa descriptum est, quadrato, per propositionem præcedentem æqualia sunt, interiores etiam à punctis ductæ rectæ lineæ, & quadrati latera singula, uel hoc solum, cui interio

res ductæ insistant, omnes sunt lineæ inter se æquales, æquali subinde pro æquali linea sumpta: hæc ut præcedens tandem manifesta erit. Si recta igitur linea secetur utcunq; quæ sub tota & utroq; uel quolibet segmentorum rectangula comprehenduntur, æqualia sunt ei quod à tota fit quadrato, quod demonstrari oportuit.

POTEST FIGURA ETIAM SIC INSTITUI.



Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχῃ· τὸ ὑπὸ τῇ ὅλῃ καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ὄντι τῷ τε ὑπὸ τῇ τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ, καὶ τῷ ὑπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ.

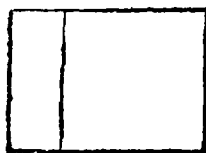
PROPOSITIO

III.

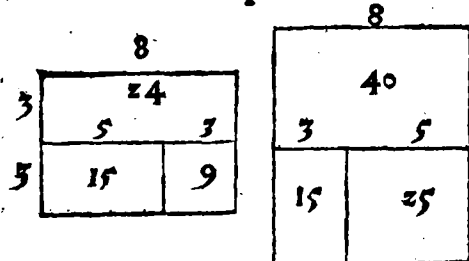
Si recta linea secetur utcunq; rectangulum sub tota & uno segmentorum comprehensum, æquale est ei quod sub segmentis comprehenditur rectangulo, atq; ei quod à prædicto segmento describitur quadrato.

Sit recta linea seceta utcunq; dico, rectangulum quod sub tota & uno eius segmentorum comprehenditur, id æquale esse rectangulo sub segmentis comprehenso, cum

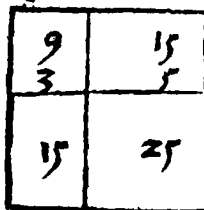
cum quadrato prædicti segmenti. Descripta figura ut requiritur, demonstratio ex propositione prima sumi poterit, segmento illo in quod tota diuisa ducta est, pro altera linea sumpto. Erunt enim sic duæ rectæ, una diuisa, ipsa scilicet exposita, & altera indiuisa, dictum nimirum segmentum. de quo unumquemque admonitum esse uolui.



Alia dispositio.



Sunt hic compendio quodam, duo exempla simul iuncta.



ALIA HVIVS REI DEMONSTRATIO.

Describatur ab uno segmentorum, utrum hoc fuerit, quadratum: latere deinde quadrati eo, quod diuisæ rectæ opponitur, ad quantitatem segmenti alterius secundum continuationem in rectum eiecto, à termino illo, tanquam à puncto dato, reliquis duobus quadrati lateribus, per propositionem 31. primi, parallela ducatur. Et quoniam, quod sic descriptum est totum, duobus, quadrato scilicet descripto, & rectangulo cuidam, æquale est, totum autem cum sub tota recta & linea quadam unum segmentorum æquali comprehendatur, alia uerò duo, unum quidem sub segmentis diuisæ comprehensum, alterum uerò ex priori segmento quadratum descriptum esse appareat, id quod uolebat propositio, iam sic se habere manifestè patet. Si recta igitur linea secetur utcumque: rectangulū sub tota & uno segmentorum comprehensum, æquale est ei, quod sub segmentis comprehenditur rectangulo, atque ei, quod à prædicto segmento describitur quadrato. quod demonstrasse oportuit.

Est autem huius textus figura geometrica ea, quæ ex superioribus est in ordine prima.

HAEC PROPOSITIO IN NVMERIS SIC SE HABET.

partes				partes			
Totus	8			Totus	12		
14	{	8	8	29	{	17	12
14		6	8	29		12	12
8		48	64	12		204	144
112 æquales		112		348 æquales		348	

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

Δ.

Ἐὰν ὑβὲια γραμμὴ τμηθῇ, ὥς ἔτυχεν· ἢ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνου, ἰσορῖσαι τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις, ἢ τοῖς δις ὑπὸ τῶν τμημάτων πρὸς ἑαυτὰς ὀρθογώνιοις.

PROPOSITIO

IIII.

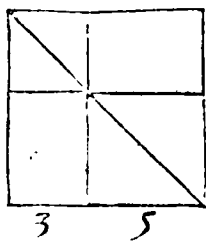
Si recta linea secetur utcumque: quadratū quod à tota describitur, æquale est quadratis, quæ fiunt à segmentis, & ei quod bis sub segmentis comprehenditur rectangulo.

Sit recta quædam linea data, in duo etiam segmenta utcumque diuisa: dico, quòd

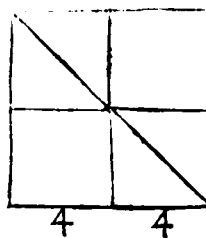
S 3

quadratum

quadratum à tota descriptū, æquale sit quadratis quæ à segmentis fiunt, & ei quod sub segmentis comprehenditur bis. Est hæc quarta nihil aliud quàm tertia propositio repetita bis, id quod cuilibet manifestabitur, qui quadratum totius (mutato nomine) duo rectangula esse, quæ sub tota & duobus segmentis comprehenduntur, perceperit. Quare cum iam tertia demonstrata sit, hanc quartam demonstrare non erit necesse. Quia uerò non mediocris est, in Arithmeticis præsertim, huius propositionis usus, propriam eius demonstrationem adducere libuit in hunc modum. Describatur à recta data quadratum, ducatur etiam in eo diameter à puncto deinde, uel

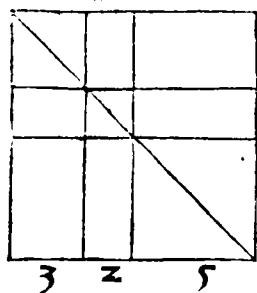


punctis (nam ut præcedens, ita & hæc de pluribus segmentis intelligi potest) diuisionum singulis, lineis, quæ à latere sunt, parallelæ ad oppositum usq; latus ducantur, ubi tandem hæc diametrum secant, per puncta illa, reliquis lateribus parallelis ductis, figura parata erit: dico ergo ut supra.



Quantum ad demonstrationem, primò demonstrandū erit, parallelogramma illa, per quæ nimirum diameter transit, quadrata esse, & hoc quidem tali modo. Ex data recta descriptum est quadratum, cuius latera cum, ex definitione, inter se sint æqualia: qui in utraq; parte ad diametrum ponuntur anguli partiales, ex priore parte propositionis 5. primi, inter se æquales erunt.

Et quia cuilibet partiali, ut interno est æqualis, ex secunda parte propositionis 29. primi alius exterior, æqualibus pro æqualibus angulis sumptis, singuli duo in quolibet per quod diameter transit parallelogrammo, anguli inter se æquales erunt: quare & latera cuiusq; trianguli, quæ illos æquales angulos subtendunt, ex propositione 6. primi æqualia: atq; tandem æqualium laterum, ex 34. & communi illa noticia, Quæ eidem sunt æqualia, & inter se sunt æqualia, hæc ipsa parallelogramma, quod est notandum. Ad hæc, quia etiam ex parte tertia propositionis 29. primi, atq; ipsa 34. eiusdem, facile rectangula esse ostenduntur, cum per illam quidem, anguli



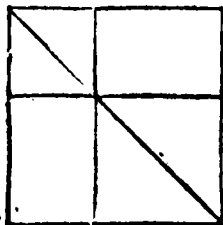
horum parallelogrammorū interiores, ex eadem parte sumpti, duobus rectis æquales sint, per hanc uerò, angulos oppositos æquales inter se habeant: quadrata igitur ex definitione rectangula illa, atq; segmentorum etiam, rectæ diuisæ, quadrata erunt, quod primò demonstrandum erat. Nunc uerò, quoniam horum quadratorum, hoc est parallelogrammorum supplementa, ex propositione 43. primi, inter se æqualia sunt, atq; unum quidem eorum, propter linearum æqualitatem, id quod sub segmentis diuisæ comprehenditur: & alterum quoq; simili se modo habebit. Ambo igitur simul ei, quod sub segmentis comprehenditur bis, æqualia erunt. Hinc quatuor illa, duo nimirum quadrata, & duo supplementa, duorum segmentorum quadratis, atq; ei quod sub segmentis comprehenditur bis, æqualia erunt. Sed quia quatuor priora, totius rectæ diuisæ quadrato, ut apparet, atq; etiam ex tertia præcedenti usurpata bis, manifestum est, æqualia sunt: & posteriora tandem, ex communi quadā noticia, eidem quadrato æqualia erunt. Si recta igitur linea secetur utcunq;: quadratum quod à tota describitur, æquale est quadratis quæ fiunt à segmentis, & ei quod bis sub segmentis comprehenditur rectangulo. quod demonstrasse oportuit.

Εἰς τὴν δὲ ἑξῆς.

Aliter idem ostendere.

Maneat prior dispositio. Et quoniam quadratorū latera, ex definitione, inter se æqualia sunt: anguli ad diametrum partiales, ex utraq; parte, per priorem partē propositionis quintæ primi, inter se æquales erunt. Et rursus quoniam quadratorum anguli

anguli sunt recti, & id ex definitione: uterq; æqualium angulorum in utroq; triangulo, ex corollario propositionis 32. primi medietas recti erit. Hinc sicut partialium triangulorum unumquodq; ex secunda parte propositionis 29. primi, angulum rectum habet, ita etiam uniuscuiusq; tertium angulum medietatem recti esse, manifestum erit. Singula igitur triangula, ex propositione 6. primi, Isoscelia, Quadrilatera insuper, ex propositione 34. & illa communi noticia, Quæ eidem æqualia, & c. æquilatera erunt. Et quia unumquodq; etiam rectum angulum unum, cum totius rectæ diuise quadrato communem habet, unum deinde ex secunda parte propositionis 29. primi: & reliqui, illis scilicet rectis oppositi, singuli recti erunt: quadrata igitur sunt ea, per quæ diameter transit, quadrilatera: atq; illis etiam, quæ à segmentis diuise sunt, æqualia. Reliqua nunc, ut in priori, demonstrantur.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Εκ δὲ τῶν φανερόν ἐστιν, Ὅτι ἐν τῇ τετραγώνῳ χωρίῳ, τὰ πρὸς τῇ διαμέτρῳ παραλληλόγραμμα, τετραγώναι ἐστίν.

COROLLARIUM.

Ex hoc sane manifestum est, Quod in quadratis spacijs circa diametrum parallelogramma, quadrata sint.

APPENDIX.

Hac propositione non raro utuntur Logistici in regulis Algebræ, per eas enim numerorum irrationalium additionem, Aequationem deinde, in qua, tribus quantitatibus, naturalis ordinis uel æqualibus medijs, propositis, duæ maioris appellationis, tertiæ, cui minor est appellatio, adæquantur, & alia quædam demonstrare solent.

PRIMO QVANTVM AD ADDITIONEM.

Addituri $\sqrt{18}$ ad $\sqrt{32}$ uel id genus, irrationalium numerorum, addunt primò illorum irrationalium quadratos, uno deinde cum irrationali altero multiplicato, numerum qui producitur, propter duo supplementa, bis sumunt. Postremò huius quartæ propositionis memores, quæ dicit, Quadratum lineæ, uel numeri, si sit $\sqrt{a}$ diuisi, tantum esse, quantum ex quadratis partium illius, cum eo quod ex una parte cum altera multiplicata bis sumpto, efficitur: omnia hæc, tam quadrata partium, quàm etiam duo supplementa, quæ nimirum ex multiplicatione unius partis diuisi numeri cum altera, bis repetita nascuntur, simul iungunt, idq; propterea quidē, ut totius compositi seu in partes diuisi numeri quadratum habeant, per huius tandem quadrati radicem, quantum sit ipsum latus uel totus numerus, enuncient.

SEQUITVR CALCVLVS.

$$\begin{array}{r} 50 \\ \sqrt{18} \text{ ad } \sqrt{32} \\ \hline \sqrt{576} \text{ bis} \\ \sqrt{2304} \\ \hline \text{hoc est } 48. \text{ duo} \\ \text{supplementa} \end{array}$$

Addantur nunc 50, partium quadratis
48, duo supplementa
ueniunt 98, quadratum totius
quare $\sqrt{98}$ ipsum latus,
hoc est partium seu surdorum
propositorum summa,

ALIVD EXEMPLVM.

Addantur $\sqrt{13}$ ad $\sqrt{21}$

$$\begin{array}{r} \sqrt{273} \text{ bis} \\ \hline \sqrt{1092} \text{ duo supplementa} \\ 34, \text{ quadrata partium,} \\ \hline \text{quare } 34 + \sqrt{1092}, \text{ quadratum totius compositæ lineæ uel} \\ \text{numeri,} \end{array}$$

numeri. Huius igitur radix quadrata, quæ est

Radix collecti $34 + \sqrt{1092}$, uel $\sqrt{21} + \sqrt{13}$, numerus ipse.

Quomodo autem uera radix posita, utpote $\sqrt{21} + \sqrt{13}$, ex hoc collecto, quod Ex binis nominibus prima dicitur, inueniri debeat, id iam dudum traditum est.

SEQUITVR QVAESTIO.

Est numerus quidam diuisus in duas partes, partes autem cum sint 13 & 21, quantus ipse totus numerus sit, quæritur. Facit 34.

Id quod per additionem partium ad se, facileprehenditur.

Quòd si quis exercendi ingenij gratia altius hoc quærere uelit, ad quartā huius secundi libri propositionem confugiat necesse est, atq; sic operetur.

Partes propositæ sunt 13 & 21, Partium quadrata 169 & 441, Quod sit, una parte cum altera multiplicata,

	273
	bis
duo supplementa	546
Partium quadrata	610
quadratum igitur totius	1156, atq; tandem
ipse totus numerus,	34, qui quærebatur.

ALIA QVAESTIO.

Partes alicuius numeri sunt 49 & 36, quantus est ipse totus.

Facit 85.

Nam quadrata partium sunt 2401, & 1296. multiplicatio uerò unius partis cum altera bis, producit 3528. Omnia hæc simul iuncta, ueniunt 7225, quare huius radix quadrata, 85, ipse totus numerus, qui ex additione datorum constituitur. Atq; hæc de additione dicta sufficiant. Sequitur

AEQVATIO.

Tradidimus in regularum Algebræ descriptione tres æquationes, tanquam potiores, quibus subinde, per has regulas ænigmata soluere cupientes opus habent. Quoniam uerò secundam æquationem per tres canones descripsimus, primus autem eorum ex hac quarta propositione est desumptus, atq; nihil aliud ferè esse uidetur, cum id ipsum sic sese habere manifestauerimus, propositio etiā paulo ante demonstrata sit, & hunc canonē tandē demonstratū & fundatum esse, nemo dubitet.

Porro canonis huius tractatio, est de tribus naturalis ordinis quantitibus, quando uidelicet maiores duæ, id est harum numeri, minimæ quantitatis seu characteris numero æquantur. ut est

Prima + radix

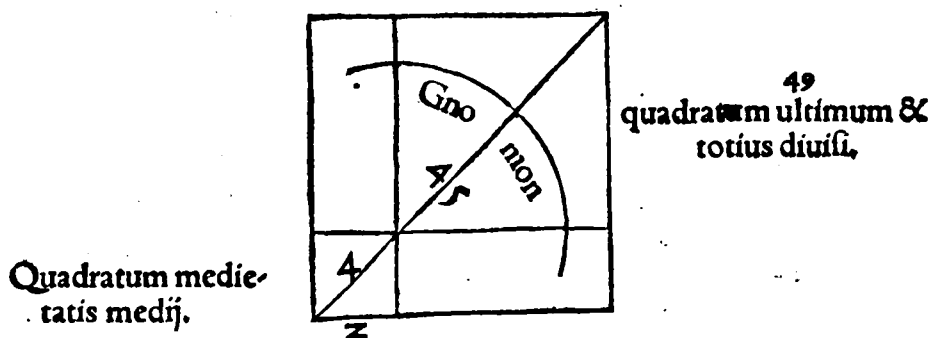
Numero.

Tum ad quadratum (ut paucis repetantur priora) dimidij numeri characteris medij, numerus characteris minimi addi, à radice deinde huius collecti quadrata, dimidium characteris medij subtrahi debet: quo facto, quæsitum numeri compes aliquis erit, cū uidelicet per id quod relinquitur, radicis ualor exprimat. ut Esto quòd per alicuius exempli operationem eò peruentum sit, ut 1 prima + 4 radix æquales sint 45 N. huius geometrica solutio uel demonstratio talis erit.

Quoniam enim, ut canon habet, ad quadratum dimidij numeri characteris medij, numerus characteris minimi addi, à radice deinde huius collecti quadrata dimidium numeri characteris medij subtrahi debet, hoc certe si quis propositionem hanc quartam, ac canonem etiā altius perpenderit, unam rem esse, alijs tamen atque alijs expressam uerbis, asseret. Nam ultimum quadratum, pro quadrato alicuius totius, puta numeri in partes diuisi habebit: dimidium uerò radicis characteris medij, alteram huius diuisi partem: numeros deinde additos, cum ipsorum additio

ditio quadratum efficiat, Gnomonem, ut quem, ex definitione, utrunq; circa diametrum parallelogrammum, & duo supplementa cōstituunt, exponet. Hac expositione tandem, huius quartæ propositionis memor, ex toto quadrato radicem eliciet. Et quia hæc ex partialium quadratorum radicibus composita est, cum unius partialis quadrati radix, dimidium scilicet numeri characteris mediæ, nota sit: & altera tandem, radix nimirum propositi in exemplo quadrati, subtractione nota erit, id quod pro declaratione huius canonis dicendum erat.

SEQVITVR HVIVS REI FIGVRA GEOMETRICA.



Est demonstratio uel expositio geometrica, puerilis quidem illa, sed quæ rem fidelissimè explicat.

SEQVITVR QVÆSTIO CVM CANONI, TVM
etiã propositioni accommoda.

Diuidatur numerus in partes duas, quarum quadrata simul, unà cum numero, quem produciunt partes inter se multiplicatæ bis 1764 constituent. Vna autem pars cum sit 13 (atq; tantam esse medietatem quantitatis mediæ intelligendum est) quanta fuerit altera quæritur.

Facit 29.

ACCEDIT ET TERTIVS HVIVS QVARTAE PRO-
positionis, quem habet in Numeris, usus.

In radicibus eliciendis cum semper inuenti numeri quadratum inuestigandum sit, ille uerò numerus subinde, quàm diu sanè durat huiusmodi operatio, una figura crescat, ne totus inuentus semper in se multiplicandus sit, ubi propositionem hanc quartam intellexerint Arithmetici, compendiosius inuentorum quadrata assequuntur, per hunc modum. Habito de numero iam inuento, tanquam de una parte totius, quadrato, recipiatur etiã quadratum de numero uel parte altera: una deinde parte cū altera multiplicata, is qui produciatur numerus bis sumatur. Quòd si tandem hoc duplum prioribus duobus partium quadratis cōiungatur, per id collectum tandem commodè, iuxta hanc quartam propositionem, quadratum totius inuenti numeri exprimi poterit.

Huius rei tale sumatur exemplum.

Inuenta est radix ex aliquo numero 6. cuius quadratum quidē 36. accedit autem huic radici seu inuento numero, cum nondum ad finem hæc radicis extractio perducta sit, figura alia, nimirum 4, atq; sic aucta est prior inuēta radix: creuit enim à 6 in 64, atq; huius totius iam desideratur quadratū, uel quadratus numerus. Prioris igitur figuræ uel inuenti numeri, tanquam unius partis radicis diuise, quadrato habito, accipiatur & quadratum alterius, secundò scilicet inuenti numeri, 4, quod erit 16. Et quia numerus primò inuentus, 6. secundum iam locum occupat, unde ratione loci sic, non sex amplius, sed sexaginta significat, ipsius igitur quadrato, 36

T

scilicet,

scilicet duæ figuræ nihili proponendæ sunt. Postremò una cum altera parte multiplicata bis, producuntur 480. Hæc omnia si in unam summam colligantur, quantum sit quadratum de 64, apparebit.

SEQUITVR PRAEIXIS.

	Partes	partium quadra.	Aliàs multiplicatio- ne sic
Tota radix uel numerus	60	3600	
64	4	16	64
Quod producitur, una parte cum altera mul- tiplicata bis		480	cum 64 256
Summa productorum		4096	384 4096

Quòd si uerò adhuc una figura accesserit, & scilicet, operatio sic instituatur.

	Partes	partium quadrata	Multiplicatio- ne sic
Totus numerus 648	640	409600	648
8		64	cum 648 8c.
Ex partium multiplicatione repetitum bis		10240	
Summa omnium, & quadratum totius		419904	

Atq; hæcenus de propositione quarta. sequitur

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

E.

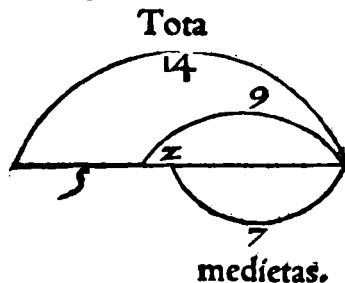
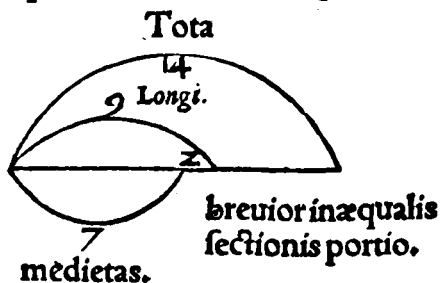
Εὰν εὐθεία γραμμὴ τμηθῇ ἐς ἴσα καὶ ἀνίστα· ἢ ὑπὸ τῶν ἀνίσωμεν τῶν ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῶν μετὰ τῶν τμητῶν τετραγώνου, ἴσον ὅστι τῷ ἀπὸ τῶν ἡμισείας τετραγώνου.

PROPOSITIO

V.

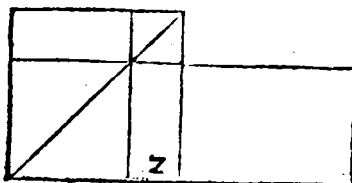
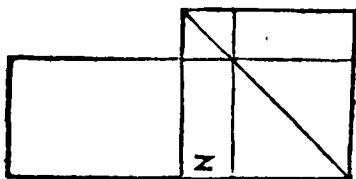
Si recta linea secetur in æqualia & non æqualia: rectangulum, quod sub inæqualibus segmentis totius comprehenditur, unà cum quadrato eo quod à medio sectionis fit, æquale est ei quod à dimidio fit quadrato.

Si recta quædam linea proposita, atq; hæc primū in duo æqualia, deinde etiam in duo inæqualia diuidatur: dico, rectangulum sub portionibus inæqualis diuisionis comprehensum, unà cum quadrato excessus longioris portionis inæqualium



super medietatem lineæ, æqualia esse quadrato medietatis. Describatur à dimidia illa, in qua est punctum inæqualis diuisionis, quadratum, cuius diameter cum una datæ extremitate copuletur, atq; ab inæqualis diuisionis puncto, per diametrum ad latus usq; oppositum, reliquis duobus quadrati lateribus parallela ducatur. Et quia hæc diametrum secat, ubi ex puncto intersectionis, utrisq; hoc est, & rectæ datæ, & lateri ei opposito, altera parallela, datæ æqualis, ducta, ea deinde per tertiam parallelam, cum extremitate datæ, quæ adhuc libera est, copulata fuerit, figura parata

parata erit. Dico ergo nunc, ut suprà. Quoniam enim supplementa omnis parallelogrammi inter se æqualia sunt, his nunc æqualibus quadrato breuioris portionis, tanquam communi addito: & quæ colliguntur, ex cōmuni quadam noticia, æqua-



lia erunt. Sed quia unum ex his alij cuidam, cum quo nimirum æqualem basim habet, atq; in eisdem est parallelis, ex propositione 36. primi, est æquale: & alterum, ex communi quadam noticia, eidem æquale erit. His igitur æqualibus nunc, ut tandem concludatur, si utriq; id quod alterum æquale ad complendum medietatis quadratum requirit, addatur: & producta, hoc est rectangulum sub portionibus inæqualibus comprehensum, cum quadrato quod ab intermedia portione describitur, & quadratum medietatis, inter se æqualia erunt. Si igitur recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: rectangulū quod sub inæqualibus segmentis totius comprehenditur, unā cum quadrato eo quod à medio sectionum fit, æquale est ei quod à dimidio fit quadrato. quod demonstrasse oportuit.

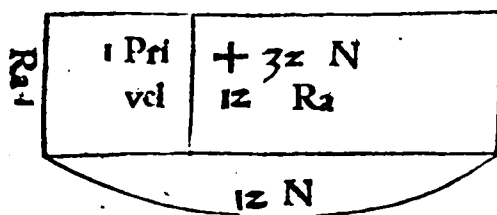
APPENDIX.

Habet & hæc propositio suum in Numeris locum, cum per eam tertius secundæ æquationis canon, (quo nimirum maximī & minimī characterum numeri, medij characteris numero æquales esse proferuntur) demonstrari soleat in hunc modū.

Esto exempli gratia, quod

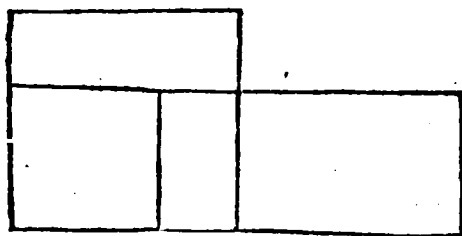
1 prima + 32 N æquales sint 12 rad.

Describatur igitur primò quadratum, propositæ æquationis unam primam representans, huic deinde quadrato, ex una eius parte, eiusdem altitudinis rectangulum, numeros in æquatione uni primæ



adhærentes significans applicetur. Et quoniam hoc totum rectangulum, ex hypothesi, 12 radicibus æquale est, cum breuius eius latus ratione quadrati, sit una radix: eius latus longius, 12 unitates erunt. Eo igitur longiori latere, ut

canon præcipit, bifariam diuiso, erit hoc idem longius latus, linea, qualem propositio hæc quinta requirit, æ: scilicet $12 \sqrt{12}$ diuisa, quod est notandum. Describatur nunc ab una medietate diuisæ quadratum, compleaturq; figura. Et quoniam medietatis quadrato, rectangulum numerorum cum quadrato lineæ,



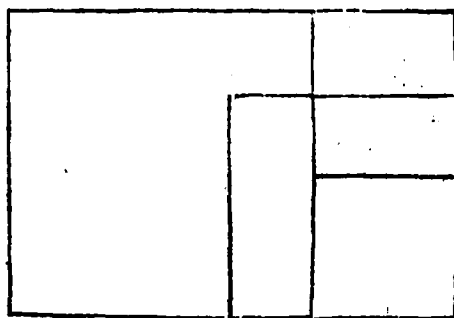
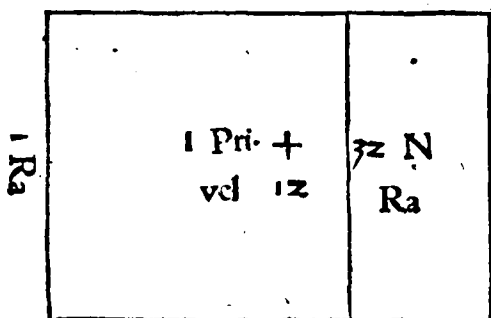
quæ à dimidio characteris medij subtrahi debet.

qua rectanguli longius latus medietatem diuisæ excedit, ex hac quinta, æquale est, ubi horum æqualium uni rectangulum numerorum: alteri uerò id, quod rectangulo numerorum, ex propositionibus quadragesima tertia & tricesima sexta primi, ac communi illa noticia, Si æqualibus æqualia adiçantur, etc. æquale est, ablatum fuerit: & quæ relinquuntur tandem, ex communi quadam

T 1

noticia,

noticia, inter se æqualia erunt. Quia autem ex utraq; parte unum & idem parallelogrammum, quadratum scilicet circa diametrum alterum, relinquitur, quadratum uerò illud notum est, cum uidelicet totum, hoc est quadratum medietatis, & subtractum deinde, hoc est, parallelogrammum uel rectangulum numerorum, nota sint: & eius radix nota erit. Ea igitur (ut quidem habet descriptio figurarum prima) à radice totius quadrati, quod uidelicet à medietate numeri characteris medij descriptum est, subtracta: Vel ea, (ut habet descriptio figurarum secunda) radici eiusdem



Portio

totius quadrati, addita: alterius quadrati, quod in æquatione propositum est, radicem notam relinqui necesse erit: id quod pro huius canonis demonstratione, uel

pro eius ad hanc propositionem applicatione, dicendum erat.

quæ dimidio characteris medij addi debet.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

5.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δι' ἵσα, προσεθῇ δ' ἑπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ἐπ' εὐθείας ἡ ὑπὸ τῇ ὅλῃς (ὡς τῇ προσκειμένη καὶ τῇ προσκειμένης πορίζομενον ὀρθογώνιον, μετὰ τὸ ἀπὸ τῇ ἡμισείας τετραγώνον, ἴσον δὲ τῷ ὑπὸ τῇ συγκειμένης καὶ τῇ ἡμισείας καὶ τῇ προσκειμένης, ὡς ἀπὸ μιᾶς, ἀναγρᾶ φησὶ τετραγώνον.

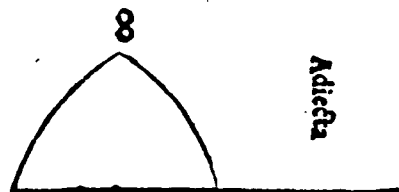
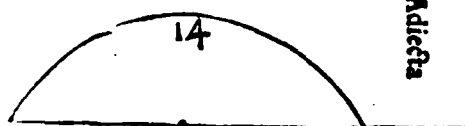
PROPOSITIO

VI.

Si recta linea bifariam secetur, adijciaturq; aliqua ei in rectū recta linea: rectangulum comprehensum sub tota cū apposita & apposita, unā cum quadrato dimidiæ lineæ, æquale est ei quod à coniuncta ex dimidia & apposita, tanquam ab una, describitur quadrato.

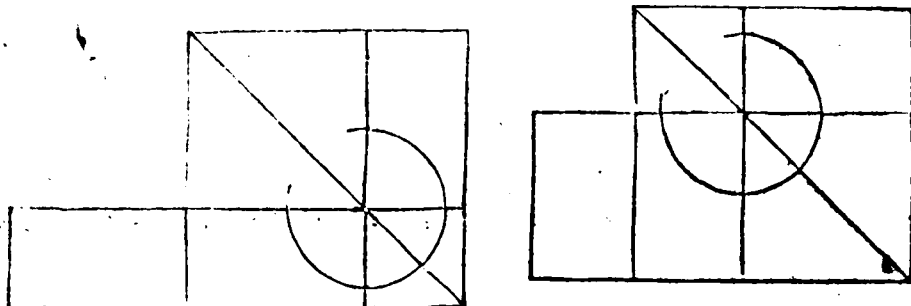
Sit recta linea proposita, qua bifariam diuisa, alia ei in rectum linea iungatur, rectangulo deinde & quadratis secundum suas lineas descriptis: dico, rectangulum sub tota, ex recta data scilicet & adiecta composita, & adiecta comprehensum, unā cum quadrato quod à medietate diuisæ describitur, quadrato à medietate diuisæ

bifariam diuisa



& adiecta, tanquam ab una linea, descripto æquale esse. Ducatur in quadrato eo, quod à medietate diuisæ cum adiecta descriptū est, diameter, sic ut per quadratum etiam, à medietate diuisæ descriptum, tanquam diameter transeat, deinde latus quadrati eius, quod à medietate descriptum est alterum, usq; ad oppositum rectanguli latus continuetur. Et quoniam super æqualibus basibus, atq; in eisdem parallelis constituta

constituta parallelogramma, ex propositione 36. primi inter se æqualia sunt. Et rursus, quoniam etiam parallelogrammorum supplementa omnis parallelogrammi spaciij, ex propositione 43 eiusdem primi, æqualia, cum duo uni æqualia esse appareant, illa deinde inter se, ex cōmuni quadā noticia æqualia sint, horum æqualium utriq; parallelogrammo eo quod ad rectam, ex dimidia & apposita cōpositam, ponitur addito: & quæ fiunt rectangulū scilicet sub tota & adiecta comprehensum, &



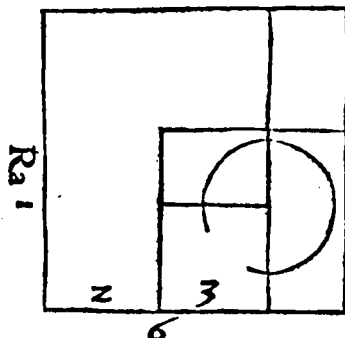
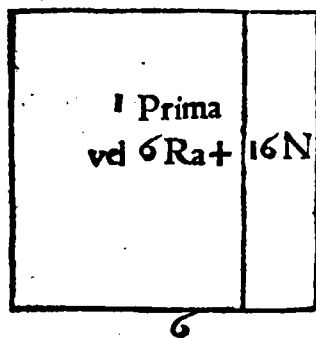
Gnomon, qui quadrato medietatis circumscribitur, inter se æqualia erunt. Ipsum igitur medietatis quadratum, ubi his æqualibus adiectum fuerit, iuxta propositionis tandem conclusionem, id quod sub tota, ex data scilicet & adiecta composita, & adiecta comprehenditur rectangulum, unā cum quadrato medietatis diuisæ, ei quod à linea ex medietate & adiecta, constituta descriptum est, quadrato, æquale erit. Si recta igitur linea bifariā secetur, adiiciaturq; aliqua ei in rectum rectæ lineæ: rectangulum comprehensum sub tota cum apposita & apposita, unā cum quadrato dimidiæ lineæ, æquale est ei quod à coniuncta ex dimidia & apposita, tanquam ab una describitur quadrato. quod demonstrasse oportuit.

APPENDIX.

Vtuntur hac propositione Logistici in regulis Algebrae, pro demonstratione canonis secundi in æquatione secunda.

Conferuntur in hoc canone duo minorum characterum numeri, cum numero characteris maximi, dicendo, 6 radices + 16 numeris, sunt æquales uni primæ, ubi tum geometrice sic agendum erit.

Describatur primò quadratum, quod propositæ æquationis primam representet. Et quoniam id ex hypothesi, 6 radicibus & 16 N. æquale est, pro rectangulo numerorum parte aliqua ab eodē resecta, quod relinquitur tandem rectangulum, radicibus solum æquale erit. Describantur nunc duo quadrata, quorum quidem



unius lateris sit propositarum radicum medietas, alterius uerò, hæc eadem radicum medietas, unā cum rectanguli numerorum latere ei in rectū iuncto. Et quoniam rectangulum numerorū, tanquā id quod sub tota composita et

adiecta seu apposita comprehenditur, unā cum quadrato dimidiæ lineæ, per hanc sextam propositionem, ei quod à recta ex dimidia & adiecta composita, tanquam ab una linea describitur, quadrato æquale est, unum autem horum, rectangulum scilicet numerorum cum quadrata dimidiæ, notum cum sit & alterum, quadratum

T 3

scilicet

scilicet lineæ, à dimidia & adiecta compositæ, iam notum erit: quare & ipsius latus notum. Id autem cum à latere quadrati primò descripti, in dimidia diuisæ lineæ altera deficiat, per additionem igitur huius ad latus notum: & ipsius tandem primò descripti quadrati latus, hoc est radicis ualor notus erit: id quod paucis, quomodo ex hac propositione geometricè is canon declarari ac retineri possit, indicare uoluimus. Atq; hæc quidem, pro demonstratione canonû secundæ æquationis, in regulis Algebra dicta, sufficiant. Quas uerò subtiliores illi demonstrationes habent, eas suo tempore peculiari quodam libello Lectori communicabimus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

Ζ.

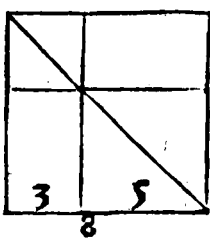
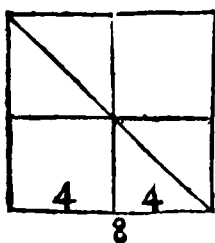
Εὰν εὐθεία γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχῃ ἡ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ ἡ ἀφ' ἑνὸς τῶν τμημάτων, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, ἴσα ὄντι τῷ τε δίσκῳ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τῷ ἐκ τῆς ἐκείνης τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετράγωνῳ.

PROPOSITIO

VII.

Si recta linea secetur utcumq; : quod à tota, quodq; ab uno segmentorum, utraq; simul quadrata, æqualia sunt ei, quod bis sub tota & dicto segmento comprehenditur rectangulo, & ei quod à reliquo segmento fit quadrato.

Sit recta linea secuta utcumq;, hoc est, in equalia uel non æqualia: dico, quod quadratum totius & quadratum alterutrius segmenti æqualia sint rectangulo sub tota



& sumpto segmento comprehenso bis, cum alterius segmenti quadrato. Formetur ex recta data figura, prout ipsa propositio exigit, & prout habet propositio huius quarta: & ducatur diameter. per singula quadrata transiens. Et quoniam ex propositioe quarta huius, quadratū totius

quadratis partium, & ei quod comprehenditur sub partibus bis, æquale est, æqualibus nunc æquali, quadrato scilicet unius segmenti, ex æquo addito: mutatis deinde appellationibus, propositioni satisfactum erit.

ALIA HUIUS, ET CLARIOR DEMONSTRATIO.

Ex linea, ut quidem propositio requirit, figura formata, cum πᾶσι πλάσμασι omnis parallelogrammi spacij inter se sint æqualia, cumq; etiam æqualia, uel aliquod commune, ut hoc loco est dicti segmenti quadratum, æqualibus additum, quæ inde colliguntur æqualia sint: hæc duo æqualia simul sumpta, ad utrunq; æqualium dupla erunt. Sed quia ad utrunq; eorū duplum etiā est, quod sub tota & dicto segmento comprehenditur bis, cum ex communi quadam noticia, Eiusdem duplicia, inter se æqualia sint: & hæc duo, hoc est, Gnomon cum quadrato dicti segmenti, & quod sub tota ac dicto segmento comprehenditur bis, inter se æqualia erunt. atque hæc tandem, si alterius segmenti quadratum ex æquo acceperint: cum sic & collecta æqualia sint, constat tandem propositum. Si recta linea igitur secetur utcumque, quod à tota, quodque ab uno segmentorum, utraq; simul quadrata, æqualia sunt ei, quod bis sub tota & dicto segmento comprehenditur rectangulo, & ei quod à reliquo segmento fit quadrato, quod demonstrari oportuit.

APPENDIX

APPENDIX.

Habet & hæc propositio suum in Arithmetici usum, cum per eam modus subtrahendi radices quadratorum irrationales retineatur.

Quo ingenio Arithmetici radices quadratorum irrationales, unam ab altera solent subtrahere, ex hac propositione didicerunt. Postquam enim per eam quadratum alicuius rectæ diuisæ, cum quadrato alterutrius segmenti, ei quod sub tota & dicto segmento continetur bis, cum eo quod à reliquo segmento describitur quadrato, æquale esse cognouerunt, facilis illis fuit omnis subtractio. Nam mutatis numerorum appellationibus, numerum scilicet à quo subtrahitur, totum: subtrahendum deinde, unum segmentum: residuum porro, alterum diuisæ rectæ segmentum esse considerantes, statim hac propositione freti, quadrata numerorum, eius scilicet à quo subtrahitur, atq; etiam subtrahendi, in unum colligunt. Et quia collectum id ex hac propositione, tanto maius est quadrato residui, quantum sub his duobus numeris, toto scilicet & uno segmento, continetur bis, ut de quadrato residui, deq; ipso residuo illis constaret, mox illud comprehensum bis de quadratorum collecto subtrahunt, quod quidem obitet circa hanc propositionem indicandum erat.

SEQVITVR HVIVS REI EXEMPLVM.

A $\sqrt{75}$ debet subtrahi $\sqrt{27}$, instituitur ergo operatio sic,
 Numerus subtrahendus, hoc numero à quo subtrahitur,
 est, unum segmentum, hoc est, à toto,
 $\sqrt{27}$ à $\sqrt{75}$

102 Totius & subtrahendi quadratum
 90 Quod sub toto & subtrahendo bis
 12 Quadratum residui numeri

Quare $\sqrt{12}$, ipse residuus numerus.

SEQVITVR QVÆSTIO.

De numero 34 subtracta sunt 13, quæritur de residuo. Facit 21.

Id quod per subtractionem 13, à toto numero,
 facile deprehenditur.

Quòd si quis, exercendi ingenij gratia, hoc altius quærere uelit, ad septimam huius secundi libri propositionem confugiat necesse est, atque sic operationem suam instituat.

Vnum segmentum	toto
Subtrahantur 13	numero 34
quadrata 169	1156
Quadratorum summa 1325	
minus 884,	hoc est, eo quod sub toto, & dicto segmen-
manent 441,	quadratum residui (to continetur bis,
Quare 21,	numerus residuus.

ALIA QVÆSTIO.

Sunt duo numeri. Quoniam autem unius numeri quadrato 49. continentur, compositus uerò ex illis cum quadratum habeat 121, quantus sit numerus alter, quæritur. Facit 4.

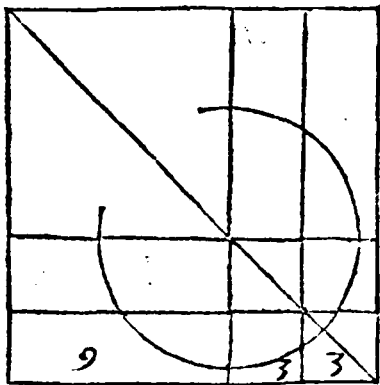
121	49
	170
minus 154	
manent 16	
Quare 4	&c.

Εὰν ἐνθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχ' ἡ τε βραχὺς ἀπὸ τοῦ ὅλης καὶ ἐνὸς τῶν
τμημάτων πεισυχόμηνον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τε-
τραγώνου, ἴσον ὅστι, τοῦ τε ἀπὸ τοῦ ὅλης καὶ τῆ εἰρημένης τμήματος, ὡς ἀπὸ μιᾶς
ἀναγραφῆς τετραγώνου.

PROPOSITIO VIII.

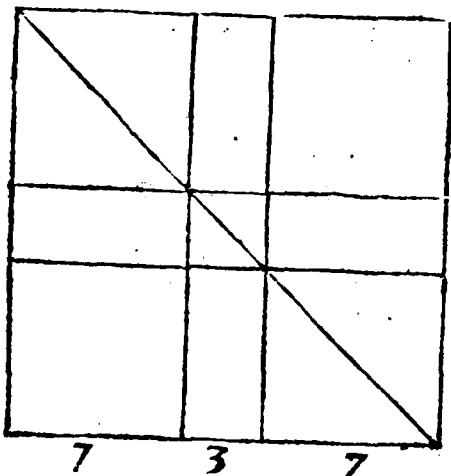
Si recta linea secetur utcumq; rectangulum quod sub tota & uno seg-
mentorum comprehenditur quater, cum eo quadrato quod à reliquo
segmento describitur, æquale est ei quod à tota & dicto segmento, tan-
quam ab una linea describitur quadrato.

Sit recta linea secunda: utcumq; dico, quòd rectangulum, sub tota & uno segmen-
torum comprehensum, quater, unà cum quadrato alterius segmenti, æquale sit qua-
drato, quod à tota & dicto priori segmento, tanquam ab una recta, describitur. De-
scribatur primò quadratum, cuius latus sit ipsa recta data, cum alterutra eius por-
tione sibi ad amullim iuncta: à punctis deinde, coniunctionis scilicet uno, & diui-
sionis altero, duæ per quadratum hoc tendentes ad angulos rectos lineæ exciten-
tur, quadrati tandem diametro ducta, ubi hæc duas ad rectos ductas lineas secue-



Divisa	Vnum seg- mentorum.
12	3
9	3
12	12
3	8
36	15
quater	cum 15
144	75
81	15
225	225

rit, per ea puncta, tanquā à pūctis datis, reliquis duobus quadrati lateribus, per pro-
positionem 31 primi, parallelæ ducantur, & erit huius propositionis figura parata.
quam quidem si quis diligenter inspexerit, atq; τῶν καὶ παλαιῶν, necnon eorum etiam
quæ in propositionibus 36 & 43 primi tradita sunt, memor fuerit, facili opera pro-
positioni, ex quarta huius, satisfacere poterit.



Divisa	Vnum seg- mentorum.
10	7
in 7	10
8	8
3	7
10	17
7	17
70	cum 17
quater	119
280	17
9	289
289	289

numeri æquales.

ALIA HVIVS ET CLARIOR DEMONSTRATIO.

Sit recta data, ea etiam utcumq; diuisa: dico &c. Quoniam recta in duo diuisa est, segmento ei quod in collatione cum tota diuisa sumitur, ad partem etiam ubi ponitur, æqualis recta alia adamussim iungatur, quadrato deinde ab hac tota composita per 46 primi descripto, dupla figura describatur. Et quoniam rectæ diuisæ alia recta, uni segmentorū æqualis, adamussim iuncta est, cum parallelogrammorum latera opposita, ut in primo libro demonstratum est, inter se æqualia sint: illæ etiam quas hæc duæ rectæ, hoc est segmentum id, & recta ei æqualis, lineas sibi æquales habent, inter se æquales erunt, super ijs deinde parallelogrammā posita, cum hæc etiam æquealta sint, ex propositione 36 primi inter se æqualia. Sed quoniam supplementa omnis parallelogrammi, ut iam sepe dictum, inter se æqualia sunt: & hæc quatuor parallelogramma, quæ super illo segmento & sua æquali, atq; alijs duabus, his æqualibus, rectis constituta sunt, ex communi quadam noticia, inter se æqualia erunt, atq; deinde horum quatuor aggregatū, ad id quod super idem segmentum est positum parallelogrammum, quadruplum. Pars ratione & reliqua quatuor, circa uel extra diametrum posita parallelogramma, inter se æqualia, ac totum deinde ad id quod supra alterum diuisæ segmentum est positum, quadruplū. Illud igitur prius cum hoc aggregato, quæ ambo simul Gnomonis figuram referunt, ad rectangulum, sub tota & uno segmentorum comprehensum, quadruplum erit. Quare alterius segmenti quadrato ex quo illis apposito: gnomon cum illo alterius segmenti quadrato, hoc est, totius compositæ, ut unius lineæ, quadratum, ei quod sub tota & dicto segmento comprehenditur quater, cum eodem alterius segmenti quadrato, æquale erit. Si recta igitur linea secetur utcumq; rectangulū, quod sub tota & uno segmentorum comprehenditur quater, cum eo quadrato quod à reliquo segmento describitur, æquale est ei quod à tota & dicto segmentō, tanquam ab una linea describitur quadrato. quod demonstrari oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

Θ.

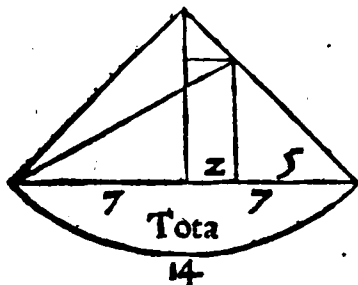
Ἐὰν ὑπερία γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἀνίσω· τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων ᾗ ὅλης τμηματῶν τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι τὸ τε ἀπὸ ᾗ ἡμισείας, καὶ τὸ ἀπὸ τῆ μεταξὺ τῶν τμητῶν τετραγώνου.

PROPOSITIO

IX.

Si recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: quæ ab inæqualibus segmentis totius fiunt quadrata, dupla sunt eius quod à dimidia, & eius quod à medio sectionum fit quadratorum.

Sit recta linea, in duo æqualia, in duo etiam inæqualia diuisa: dico, quadrata inæqualium segmentorum simul sumpta, dupla esse quadratorū, quorum unum quidem à medietate lineæ, alterum uerò ab ea quæ diuisionum punctis interiecta est



linea, describitur. Excitetur ex puncto æqualis diuisionis in linea, per propositionem 11. primi, ad angulos rectos linea, eaq; per 3 eiusdem, ad æqualitatem medietatis diuisæ posita, ab eius altera extremitate duæ ad rectæ diuisæ extremitates lineæ demittantur. Describuntur autem sic duo triangula, rectangula, & isoscelia, ut patet ex structura. Excitetur rursus ex puncto inæqualis diuisionis, alia ad angulos rectos linea, uel si mauis, priori ad rectos ductæ linea parallela, eaq; ad latus usq; op-

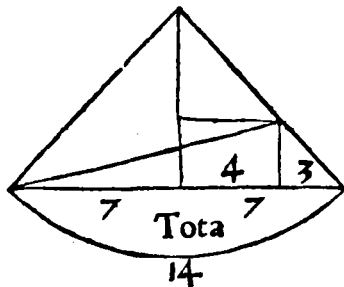
positum continuata, ab huius & lateris oppositi contactu, ad priorem in triangulo

posterioris ductam linea diuisæ parallela ducatur. Et describuntur alia duo triangula,

V

quæ

quæ & ipsa, ut patebit, rectangula sunt, & isoscelia. Quod si tandem à communi horum duorum triangulorum copula, ad illam rectæ diuisæ extremitatem, quæ huic quodammodo è regione posita est, linea recta ducatur, huius propositionis figura constituta erit, cuius quidem explicatio & demonstratio talis. Quoniam ad punctum æqualis diuisionis constitutorum triangulorum utrunq; isosceles est, ex structura, & orthogonium, cum anguli eorum ad basim, per priorem partem propositionis quintæ primi, inter se æquales sint, uterq; in utroq; triangulo angulus, primò, ex corollario propositionis 32 primi, medietas recti: angulus deinde integer, quem recta diuisa subtendit: rectus erit. Ad hæc, cum linea ex communi partialium triangulorum copula ueniens, ut habet propositionis structura, diuisa rectæ sit parallela, deinde uerò alia quædam recta, quæ uidelicet ex puncto æqualis diuisionis in recta data $\pi\epsilon\sigma\iota\varsigma$ excitata est, in illas parallelas incidat: angulus ex-



ternus, ex secunda parte propositionis 29 primi, suo interno & opposito æqualis est. Quia uerò rectus est ipse internus, ex structura: & externus sic rectus erit. rectangulū igitur est illud parziale triangulum, atq; deinde per corollarium propositionis 32 primi, & sextam propositionem eiusdem, idem etiam isosceles. In hunc modum, & alterum parziale triangulum, ut rectangulum & isosceles sit, demonstrabitur. Nunc autem cum trianguli rectanguli & isoscelis, eius quidem, cuius latera sunt, sub-

tenfa indiuisa, medietas rectæ indiuisa, & perpendicularis, medietati diuisæ equalis, quadratū lateris rectum angulum subtendentis, reliquis duorum laterum, quadratis, per propositionem 47 primi, æquale sit: erit propter æqualitatem laterum, illud ad utrunq; eorum duplum. Est itaq; quadratum hypotenusæ huius rectanguli, quadrato medietatis rectæ diuisæ duplū, quod est notandum. Pari ratione etiam in triangulo rectangulo & Isoceli partiali superiori, cuius nimirum alterū circa rectū angulū latus, pars est perpendicularis, ex æqualis diuisionis puncto excitata, quadratum subtensæ angulo recto, ad quadratum lineæ, quæ ex communi partialium triangulorum copula, medietati rectæ diuisæ est ad æquedistantiā ducta, duplum erit: quare etiam ad quadratum suæ equalis, lineæ scilicet, quæ inter diuisionis puncta iacet, duplum. Cum aut iam duæ lineæ sint, quarum utriusq; quadratū, ad alterius lineæ quadratum duplum est, & illarum quadrata simul sumpta, ad harū simul sumpta quadrata dupla erunt. Sed illarum linearum quadrata, quæ sunt ad alia dupla, æqualia sunt, quadrato lineæ, ex communi partialium triangulorum copula ad angulum oppositum ductæ, cuius quadrato etiam (cum hæc linea duorum orthogoniorum triangulorum rectos subtendat) si æqualis pro æquali linea sumatur, segmentorum in æqualis diuisionis quadrata æqualia sint, per communem tandem illam noticiam: Quæ eidem equalia, & inter se sunt æqualia, propositum inferri poterit, nimirum. Si igitur recta linea secetur in æqualia & non æqualia: quæ ab inæqualibus segmentis totius fiunt quadrata, dupla sunt eius quod à dimidia, & eius quod à medio sectionum sit quadratorum, quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

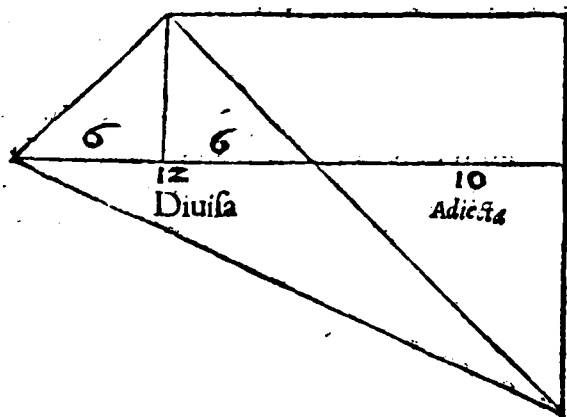
I.

Εὰν ἐνθὲα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προσέβῃ δ' ἐπὶ τῇ ἐνθὲα ἐπ' ἐνθὲας ἢ ἀπὸ τ' ὅλης (ὡς τῇ προσκειμένη, καὶ ἢ ἀπὸ τ' προσκειμένης τὰ συναμφότερα τετράγωνα, διπλασιά δ' εἰ τοῦτε ἀπὸ τ' ἡμισείας, καὶ τὸ ἀπὸ τ' συγκεκλιμένης ἢ τε τ' ἡμισείας καὶ τ' προσκειμένης, ὥς ἀπὸ μίτης ἀναγραφῆς τὰ τετράγωνα.

PROPOSITIO

Si recta linea secetur bifariam, adijciaturq; aliqua ei adamussim recta linea: quod à tota cum apposita, & quod ab apposita, utraq; simul quadrata, dupla sunt eius quod à dimidia, & eius quod ab adiacente ex dimidia & adiecta, tanquam ab una, descriptorum quadratorum.

Sic recta linea proposita, ea etiam bifariam diuisa, atq; alia deinde ei adamussim adiecta: dico, duo quadrata, composita scilicet lineæ & adiectæ, dupla esse ad quadrata linearum, unius quidem, quæ est medietas rectæ datæ, alterius uerò, quæ ex medietate altera atq; ei adiecta est composita. Erigatur ex puncto æqualis diuisionis ad angulos rectos linea, atq; ea ad æqualitatem medietatis rectæ diuise posita, altera eius extremitas duabus rectis, cum duabus extremitatibus rectæ diuise coniungantur, rectam illam, quæ per coniunctionis punctum transierit, ulterius continuando. Fiant autem duo triangula, rectangula atq; isoscelia, in quorum utroque uterq; angulorum ad basim, ex structura & propositione 32 primi, medietas recti est, quod est notandum. Porro secundum quantitatem ad rectos ductæ, atq; eius quæ ex medietate rectæ diuise & adiecta composita est, lineæ, parallelogrammum rectangulum describatur, latus illud eius, quod ad rectos ductæ lineæ oppositum



est & parallelum, ultra adiectam rectam continuando. Et quia hanc continuatam, cum illa, quæ per coniunctionis punctum transit, propterea quod in eas alia recta cadens, ex illa parte duos angulos duobus rectis minores facit, ex cõmuni quadam noticia in libro primo expõsita, concurrere necesse est, continentur igitur ambæ ut triangulum fiat: & erunt quæ sic apparêt duo triangula, tam totale quàm partiale, ex structura & secunda parte propositionis 29

primi, rectangula & isoscelia, quod & ipsum notandum. Vltimò ducatur & alia recta, cuius termini sint reliquæ extremitates datæ & continuatæ linearum, & erit figura, unde nunc huius propositionis demonstratio elici poterit, hoc modo parata. Et quoniam quadratum lineæ ultimò ductæ, per propositionem 47 primi, quadratis linearum, compositæ nimirum ex data & adiecta, & ipsius adiectæ, æquale est, idem etiam quadratum, cum ipsius latus duorum orthogoniorum triangulorum rectos subtendat, æquale, per eandem 47, quadratis duarum linearum, quæ ab extremitate ad rectos ductæ altera, per extremitates rectæ diuise descendunt: per hanc cõmuniem noticiam, Quæ eidem æqualia, &cæ. quadrata priora, compositæ scilicet & additæ lineæ, descendentiũ linearum quadratis æqualia erunt. Sed quia descendentiũ quadrata, ratione suorum triangulorum, quæ & rectangula & isoscelia sunt, ad quadrata, medietatis diuise & compositæ deinde ex altera medietate & adiecta, dupla sunt: propter æqualitatem quadratorum, descendentiũ scilicet lineatum, compositæ deinde & adiectæ, constabit propositum. Compositæ scilicet & adiectæ linearum quadrata, dupla esse quadratorum, medietatis lineæ diuise, & eius quæ ex medietate & adiecta composita est. Si recta igitur linea secetur bifariam, adijciaturq; aliqua ei adamussim recta linea: quod à tota cū apposita, & quod ab apposita, utraq; simul quadrata, dupla sunt eius quod à dimidia, & eius quod ab adiacente ex dimidia & adiecta, tanquam ab una, descriptorũ quadratorum. quod demonstrari oportuit,

ELEMENTORVM EVCLIDIS
SEQUITVR EXEMPLVM IN NVMERIS.

Totus 14		Adiectus 9	
7 7			
Operatio.			
Totus & adie.	Adiectus	Dimidius	Dimidius & adie.
$\frac{23}{529}$	$\frac{9}{81}$	$\frac{7}{49}$	$\frac{16}{256}$
610		305	
duplus			

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

IA.

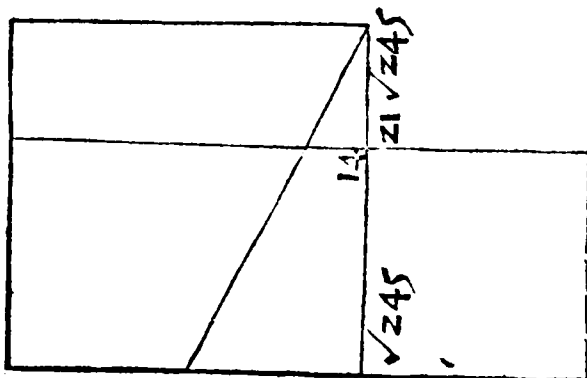
Τὴν διθεῖσθαι εὐθείαν τεμῆν, ὥς τε ῥ' ἄνω τ' ὅλης καὶ τοῖ ἐτέρῃ τῇ τμημάτων πόδι χόμνον ὀρθογώνιον, ἴσον εἶν τῷ ἀπὸ τοῖ λοιπὸν τμήματ' τετραγώνῳ.

PROPOSITIO

XI.

Datam rectam lineam secare, ut quod sub tota & altero segmento comprehenditur rectangulum, æquum sit ei, quod fit à reliquo segmento quadrato.

Sit recta linea data, atq; propositum eam in duo secare sic, ut quod sub tota & uno segmento, breviori scilicet, comprehenditur rectangulum, æquale sit ei, quod ab altero, hoc est longiori segmento describitur quadrato. Describatur à recta data quadratum, sicuti docet propositio in primo 46, illorum deinde laterum, quæ re-



ctæ datæ insistant, altero bifariam diuiso, à diuisionis puncto linea quadam recta usq; ad alteram datæ extremitatem ducatur, & describitur triangulum rectangulum. Porro medietas lateris diuisi, quæ à puncto diuisionis & angulo huius trianguli recto intercipitur, eousq; prolongetur, donec lateri, in triangulo rectum angulum subtendenti, æqualis fiat. & ubi deinde secundum quantitatem partis prolongatæ exterioris, quadratum ad ipsam descriptum, latus item huius quadrati, quod exteriori parti oppositum est, per quadratum primò descriptum continuatum fuerit, propositioni tandem satisfactum erit. Id quod, cum tam quadratorum, ex definitione, quàm etiam parallelogrammorum opposita latera, ex propositione 34 primi, inter se equalia sint, sexta propositio huius & penultima primi, equalibus sub, inde pro æqualibus sumptis, ab æqualibus item eodem communi subtracto, clarè manifestabunt.

SEQUITVR

SECVITVR EXAMEN HVIVS DIVISIO-
nis in numeris.

Totus	Longius segmen.	Breuius
14	$\sqrt{245} \text{ — } 7$	21 — $\sqrt{245}$
in se cum		
21 — $\sqrt{245}$		$\sqrt{245} \text{ — } 7$
cum 14		$\sqrt{245} \text{ — } 7$
Producuntur		
294 — $\sqrt{48020}$		294 — $\sqrt{48020}$
Id quod continetur sub toto & breuiori.		Quadratum segmenti longioris.
Numeri, uel producta æqualia.		

APPENDIX.

Hanc lineæ diuisionem requirit propositio nona libri quarti, quæ nimirum proponit, quomodo Isosceles triangulum, cuius uterq; angulorum ad basim ad tertium reliquum duplus sit, formari debeat, id quod absq; huius diuisionis cognitione aliàs absolui nequit. Quas deinde proprietates habet hæc eadem sic diuisa linea, quid item conducat, aliquo modo ostendit liber Euclidis tredecimus, cuius obiter Lectorem admonendum esse duximus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

18.

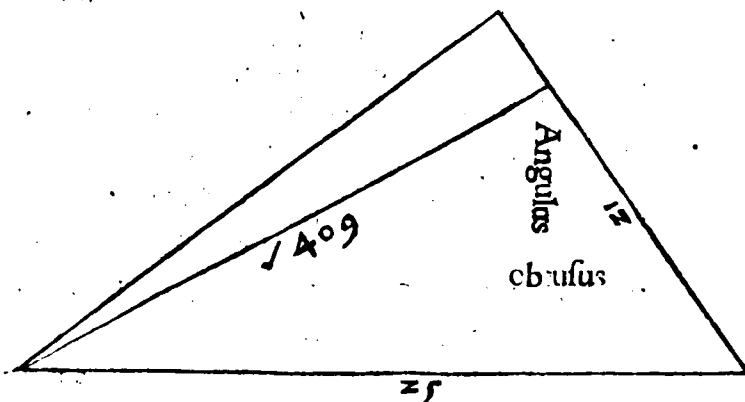
Εν τῇ ἀμβλυγωνίῳ τριγώνῳ· ὃ ἀπὸ τῆς τῶν ἀμβλείων γωνιᾶν ἑποίει-
νός τῃς πλοῦρᾶς τετραγώνου, μείζον ὅστις τῆς ἀπὸ τῆς τῶν ἀμβλείων πλοῦρᾶς
σὺν πλοῦρᾶς τετραγώνου, τὸ πρὸς τοῦ μὲν ὅστις, ἑποίει μίαν τὴν πρὸς τῶν ἀμ-
βλείων γωνιᾶν· ἢ ἢ ἐκβληθῆσα ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπὸ τῆς ἀπλοῦς
ἐκ τῆς ἀπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ.

PROPOSITIO

XII.

In obtusiangulis triangulis: quod ab obtusum angulum subtendente latere fit quadratum, maius est quadratis, quæ fiunt à lateribus obtusum angulum comprehendentibus, comprehenso bis sub uno eorum quæ sunt circa obtusum angulum, in quod, cum protractum fuerit, perpendicularis cadit, atq; assumpta extra sub perpendiculari ad obtusum angulū.

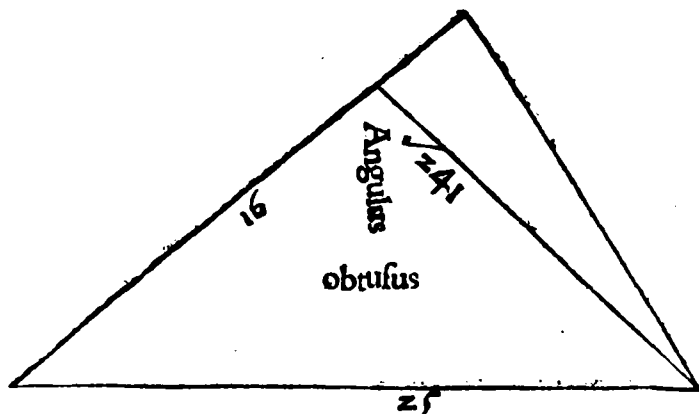
Obtusiangulo triangulo exposito, uno etiam eorum quæ circa obtusum sunt angulum latere, ex parte illius anguli, adeò ultra triangulum continuato, ut in id ab



V 3

angulo

angulo trianguli acuto, opposito quodammodo, perpendicularis commodè cadere possit, atq; hæc postea ducta, figura descripta erit: dico ergo, quadratum, quod à latere obtusum angulū subtendente describitur, maius esse, quàm sunt quadrata, quæ ab ijs quæ circa obtusum angulum sunt, lateribus describuntur, eo quantum est id, quod bis cōprehenditur sub uno latere eorum, quæ circa obtusum angulum sunt, atq; eo, quod à dicto latere, si illud ultra obtusum angulum prius protractum fuerit, & demissa ab angulo, quem hoc latus subtendit, perpendiculari intercipitur. Demonstratio huius, quia est facilis, cum ex propositione penultima primi, usurpa-



ta bis, quarta tamen huius, propter sumptionem æqualium pro æqualibus interposita, procedat, Lectori eam ut inde colligat commendabimus. In obtusiangulis igitur triangulis: quadratum lateris subtendentis angulū obtusum, tanto maius est reliquorū duorū laterum quadratis, quantum est id, quod bis comprehenditur sub alterutro reliquorum, & portione eidem alteri extra triangulum in directū adiecta, quæ à perpendiculari ab angulo huic lateri opposito demissa, & angulo obtuso intercipitur, quod demonstrasse oportuit.

APPENDIX.

Quomodo uero, amblygoniō triangulo, cuius tria latera nota sint, exposito, portionis exterioris quantitas, quanta deinde sit perpendicularis, in numeris inueniri debeat, sequenti calculo manifestabitur.

Quantum ad figuram priorem.

Trianguli latera	25	√ 409	12
Laterum quadrata	625	409	144

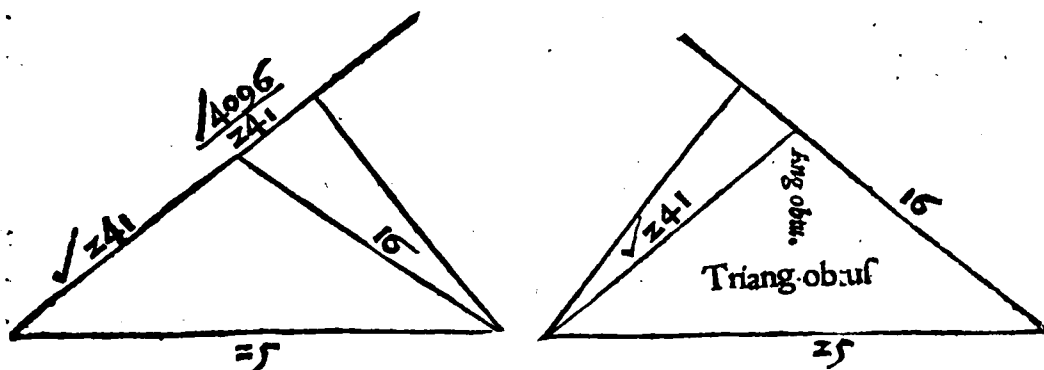
Et tantum est quod sub latere ultra triangulum continuato, & portione exteriori comprehenditur bis. Huius igitur dimidio 36 in latus notum 12 diuiso: & portio illa exterior nota fiet. Porro perpendicularis nunc quanta sit, penultima propositio primi sequenti calculo manifestabit,

3	√ 409	Latera
9	409	Quadrata
400		Quadratum perpendicularis.

Perpendicularem igitur ipsam, huius quadrati radix, quæ est 20, manifestabit.

SEQUENTIA

LIBER SECVNDVS.
SEQVVTVR HVIVS PROPOSITIONIS DVAB
figurae aliae.

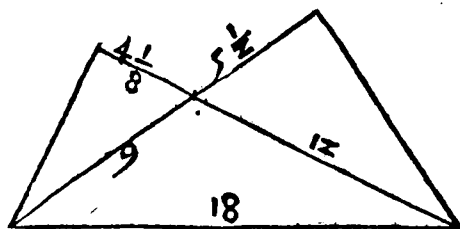


Calculus figurae posterioris.

Trianguli latera	25	16	$\sqrt{241}$
Laterum quadrata	625	256	241

Facta subtractione, manent 128, id quod sub latere ultra triangulum continua-
to, & portione exteriori comprehenditur bis, cuius dimidio 64 in latus notum 16
diviso, exeunt 4, portio exterior. Perpendicularis igitur 15, quod examinari potest.

ALIA FIGVRA, IN QVA DVO EXEMPLA
simul exposita sunt.



Examen illius in numeris.

Latera

Subtendens angulum obtusum	Includentia an- gulum obtusum
Qua $\frac{18}{324}$	dra $\frac{9}{81}$ ta $\frac{12}{144}$
$\frac{225}{99}$	$\frac{125}{225}$

duplum rectanguli, quare $49\frac{1}{2}$, rectangulum ipsum,
quod nimirum sub alterutro circa obtusum angulum latere, 9 aut 12, & sua exte-
riori prolongata portione, ab eodē angulo & ipsa perpendiculari intercepta com-
prehenditur, id quod sequens calculus clare manifestabit.

Latus alterum 9	Latus alterum 12
Intercepta portio $5\frac{1}{2}$	Intercepta portio $4\frac{1}{8}$
$\frac{45}{4\frac{1}{2}}$	$\frac{48}{4\frac{1}{8}}$
$49\frac{1}{2}$ re	uel $49\frac{1}{2}$ re

angulum comprehensum sub alterutro latere & intercepta portione, ut supra
ostensum est. Quare &c.

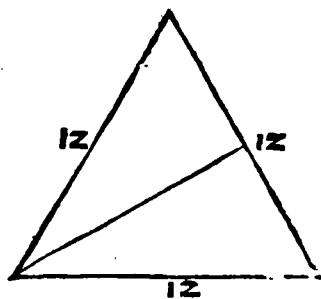
PROTAXIS

Εν τῷ ὀξυγωνίῳ περιγώνῳ ἡ ἀπὸ τῆς τῶν ὀξείας γωνίας ὑποτεινόντος πλάτης τετραγώνου, ἢ ἀπὸ τῆς τῶν ὀξείας γωνίας περιεχούσης πλάτης τετραγώνου, ἢ ἀπὸ τῆς μετὰ τὴν ὑποτεινόμενῃ γωνίᾳ, ἢ ἀπὸ τῆς καθέτης πίπτει, καὶ τῆς ἀπὸ τῆς καθέτης πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ.

PROPOSITIO XIII.

In acutiangulis triangulis: quod ab acutum angulum subtendente latere describitur quadratum, minus est eis quæ ab acutum angulū comprehendentibus lateribus fiunt, quadratis, comprehenso bis sub uno eorum, quæ sunt circa acutum angulum in quod perpendicularis cadit, atq; assumpta interius sub perpendiculari ad acutum angulum.

Sit triangulum acutiangulum, atq; in eo acutus angulus sumptus, ab utrovis deinde ex reliquis angulo ad suum subtensum latus, per propositionem 12 primi, recta perpendiculari ducta: dico, quadratum quod à latere rectum angulum subtendente describitur, minus esse quam sunt quadrata, quæ à lateribus circa acutum

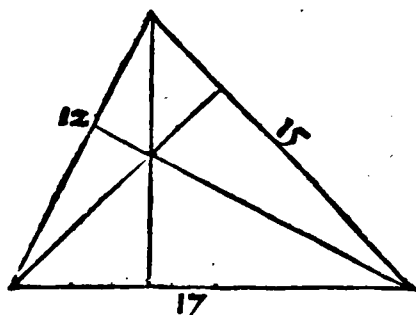


angulum describuntur, eo quantum est id quod sub uno latere eorum quæ circa acutum angulum sunt, in quod scilicet perpendicularis cadit, atq; sub intercepta, a perpendiculari & acuto angulo, portione comprehenditur bis. Cum enim unum circa acutum angulum latus per demissam perpendicularem utcumq; divisum fuerint quadrata, quæ à diviso illo latere & intercepta à perpendiculari angulo & acuto, portione describuntur, ei quod sub tota & dicta portione comprehenditur bis cum quadrato alterius portionis, per 7 huius

æqualia: atq; his æqualibus communi quodam, quadrato scilicet perpendicularis, addito: illa tria quadrata his tribus, rectangulo nimirū bis sumpto & duobus quadratis æqualia erunt. Sed quia utrobique duobus quadratis, ratione anguli recti, ex penultima primi unius linearum quadratum æquale est, mutatione æqualium facta, loco scilicet duorum quadratorum laterum circa rectos angulos, ex utraque parte, rectos angulos subtendentiū, quæ scilicet non divisa sunt, quadratis sumptis: & quadrata laterum quæ sunt circa acutum angulum, ei quod sub diviso latere & intercepta portione comprehenditur bis, atq; quadrato lateris, angulum acutum subtendentis, æqualia erunt: quadratum igitur lateris, acutum angulum subtendentis, solum quadratis eorum, quæ circa acutum angulum sunt, laterū minus erit in rectangulo, quod sub diviso latere, atq; intercepta a perpendiculari & acuto angulo portione, comprehenditur his. In oxygonijs igitur triangulis, quadratum lateris subtendentis angulum acutum tanto minus est reliquorum laterum quadratis, quantum est id quod bis comprehenditur sub altero illorum, in quod nimirum perpendicularis cadit, & portione a perpendiculari angulo & acuto intercepta. quod demonstrasse oportuit.

APPENDIX.

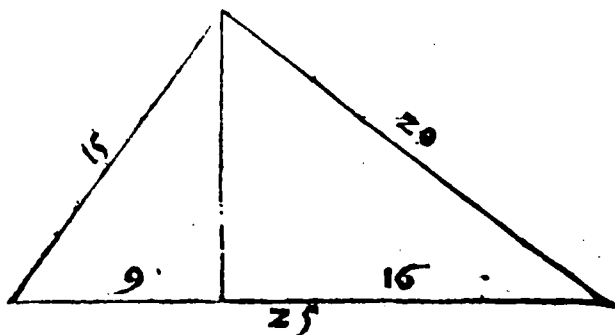
Quam uim habeant hæ duæ propositiones, 12 scilicet de Amblygonio, & 13 de Oxygonio, unā cum penultima primi de triangulo Orthogonio, experietur is, qui aliquando in triangulorum tractationem, in qua semper ex tribus notis ad reliquorum trium noticiam, mediante arcuum & chordarū tabula, pervenitur, incidit.



ADMONITIO.

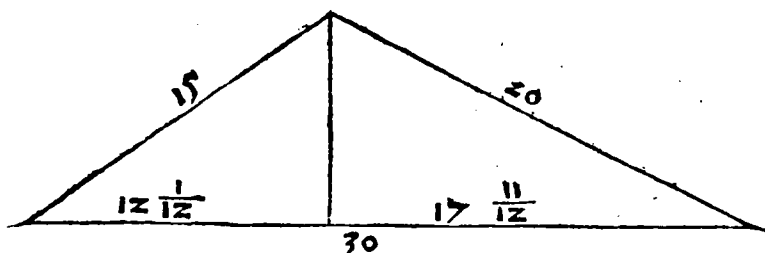
Non autem est necesse, ut omnes trianguli propositi anguli acuti sint, ut quidem id Acutianguli trianguli definitio requirit. Sed generaliter (cum nullum triangulum sit, quod non acutum angulum habeat) de omnibus, cuiuscunque generis fuerint, triangulis, hæc propositio intelligi, per ea insuper declarari potest, id quod per sequentia duo exempla manifestabitur.

PRO TRIANGVLO RECTANGVLO.



In hoc triangulo rectangulo, quindecies 15, ratione unius acuti anguli, tanto minus sunt quam uicies quinquies 25, & uicies 20, quantum est quod sub 20 & 20, uel quod sub 25 & 16 continetur bis. Sic ratione alterius acuti, cuius subtensum latus sunt 20, ubi uicies 20, tanto minus sunt quam uicie quinquies 25, & quindecies 15, quantum est quod sub 15 & 15, uel quod sub 25 & 9 continetur bis, id quod multiplicatione cernere licet.

PRO TRIANGVLO OBTVSIANGVLO.



Similiter etiam in triangulo obtusiangulo, quindecies 15, ratione unius acuti anguli, minus sunt quam tricies 30 & uicies 20, quantum est quod sub 30 & 17 11/12 continetur bis. Sic ratione alterius acuti anguli, cuius subtensum latus sunt 20, ubi uicies 20 tanto minus sunt quam tricies 30 & quindecies 15, quantum est quod sub 30 & 12 1/12 continetur bis, id quod examinari potest.

X

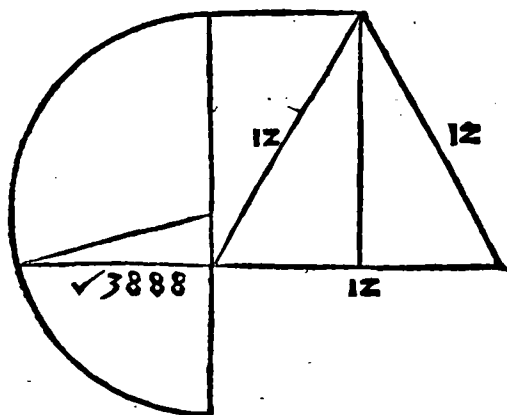
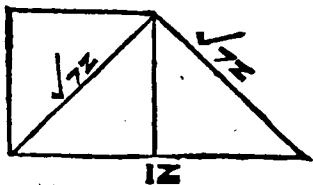
PROTAXIZ

Τὸ δοθέν ἑὺθυγρᾶμμου, ἴσον τετραγώνου συνίστασθαι.

PROPOSITIO XIII.

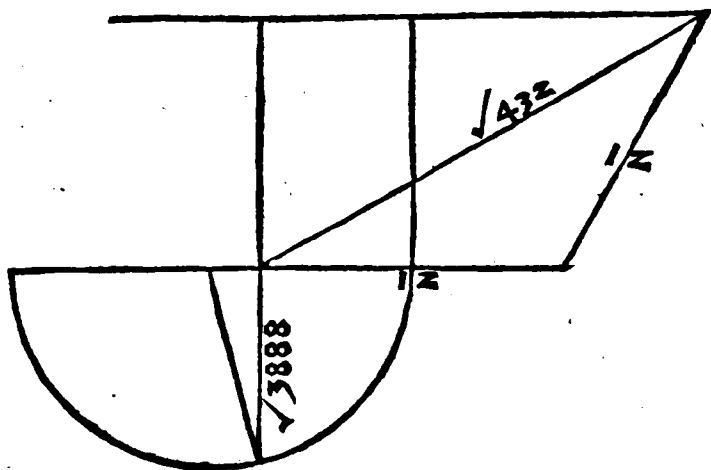
Dato rectilineo, æquale quadratum constituere.

- Sit rectilineum datum quaecumq; atq; propositum, quadratum ei æquale constituere. Quia verò rectilineum datum, uel triangulum, uel plurium laterum rectilineum esse potest. Igitur si triangulum fuerit, ei ex propositione 42 primi: si uerò plurium laterum rectilineum, ex 45 eiusdem primi æquale parallelogrammum constituendum est. Quòd si quadratum fuerit hoc constitutum parallelogrammum, factum erit propositum. Sin minus, ex duobus huius parallelogrammi lateribus, ijs quidem quæ sunt



iuxta unum & eundem angulum, alterum alteri adamussim adijciatur, utrius scilicet huius anguli latere, secundum quantitatem alterius, longiore facto. Deinde secundum hanc totam, ex duobus lateribus compositam lineam, tanquam diametrum, ex eius medio, quod quidem per propositionem 10 primi haberi potest, semicirculus describatur. Quòd si tandem per punctum coniunctionis laterum ea, quæ ad idem punctum terminatur, linea usque ad circumferentiam continuata fuerit: propositioni satisfactum erit. Nam hæc continuata portio ea linea est, cuius uidelicet quadratum rectilineum referre debet, id quod per lineam, a centro ad intersectionem circumferentiæ cū iam inuenta, rectam du-

cumferentiam continuata fuerit: propositioni satisfactum erit. Nam hæc continuata portio ea linea est, cuius uidelicet quadratum rectilineum referre debet, id quod per lineam, a centro ad intersectionem circumferentiæ cū iam inuenta, rectam du-

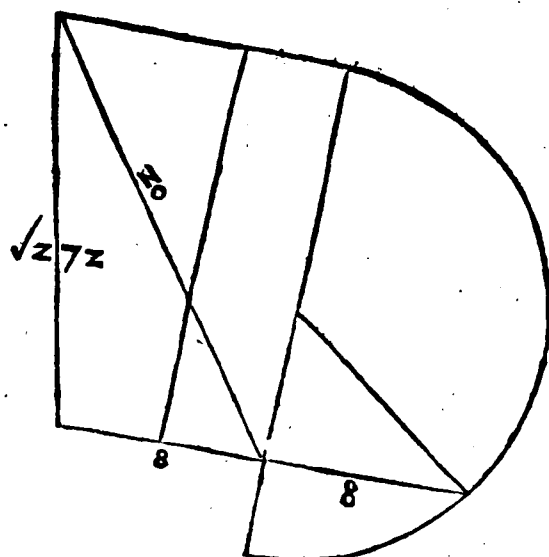


ctam, ex quinta huius & penultima primi, æquali interim pro æquali linea sumpta, ab æqualibus etiam deinde æquali, uel eodem communi ablato, facile demonstrabitur. Dato igitur rectilineo, æquale quadratum constitutum est, quod fieri oportuit.

SEQUITUR

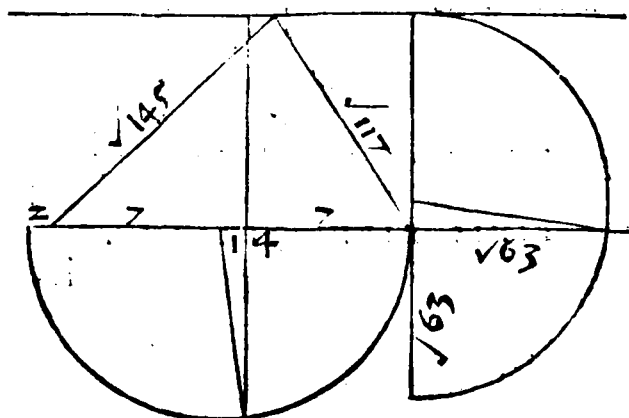
LIBER SECVNDVS
SEQVITVR HVIVS PROPOSITIONIS GEO-
metrica figura alia,

163



PORRO CALCVLVS TRIANGVLI DATI IN
hac figura, sic se habet.

Latera	Excessus	Productum	Primum
20	$\sqrt{68} - 6$	{	32
$\sqrt{272}$	$14 - \sqrt{68}$		128
8	$\sqrt{68} + 6$		4496
$28 + \sqrt{272}$	$14 + \sqrt{68}$	atq; huius radix quadrata 64, Trian- guli, Parallelogrammi & Quadrati area. Quoniam autem unum parallelogrammi latus est notum, 4 scilicet, area etiam nota, nimirum 64: & alterum latus, diuisio- ne, notum erit. Est autem illud 16.	

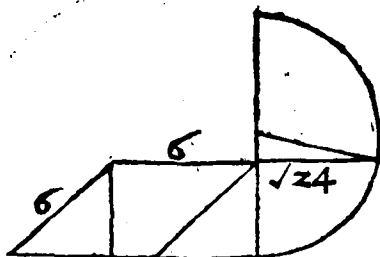


Inuentio areæ trianguli, cuius

Latera sunt	Excessus uerò	
14	$\sqrt{\frac{117}{4}} + \sqrt{\frac{145}{4}} - 7$	
$\sqrt{145}$	$\sqrt{\frac{117}{4}} - \sqrt{\frac{145}{4}} + 7$	
$\sqrt{117}$	$7 + \sqrt{\frac{145}{4}} - \sqrt{\frac{117}{4}}$	
$14 + \sqrt{145} + \sqrt{117}$	$7 + \sqrt{\frac{145}{4}} + \sqrt{\frac{117}{4}}$	
	X	Primum

Primum $\sqrt{424\frac{1}{4}} + 16\frac{1}{2}$ secundum productum $\sqrt{424\frac{1}{4}} - 16\frac{1}{2}$
 Tertium prod. 3969 Area trianguli 63

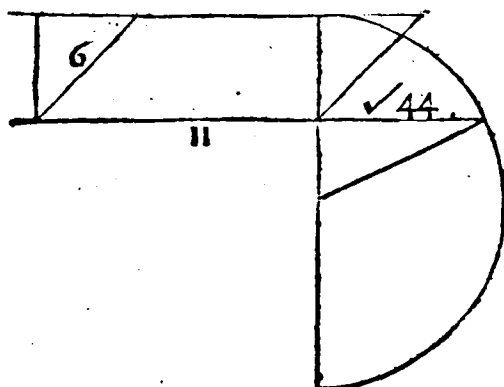
ALIUD EXEMPLVM DE RHOMBO.



Declaratio propositionis quintæ, hoc loco allegatæ,
 per numeros.

Totus numerus est 10, diuisus in partes, æquales quidem 5 & 5. in inæquales uerò 6 & 4. Medium itaq; sectionum, hoc est excessus longioris portionis respectu medietatis lineę uel numeri diuisi i. Rectangulum porro sub partibus inæqualibus comprehensum, sunt 24, cum quadrato unitatis, ueniunt 25. & tantum est etiam quadratum numeri 5, hoc est medietatis diuisi. quod ostendere libuit.

ALIA ET VLTIMA HUIVS PROPOSITIONIS GEOMETRICA FIGURATIO DE RHOMBOIDE.



Atq; hæc pro declaratione huius propositionis dicta sufficiant.

FINIS LIBRI SECUNDI.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙ ΧΕΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

EVCLIDIS ELEMENTORVM GEO- metricorum liber tertius.



Actenus Euclides profecutus demonstrationum euidentissimis rationibus, proprietates simplicissimas rectilinearum figurarum, superioribus duobus libris: nunc in tertio, quæ circuli sunt propria *πᾶν* (quod ad doctrinam elementorum pertinet, quæ planè Geometrica & abstracta est) explanare aggreditur. Non enim quæ cœlestium, aut quæ aliorum proprietas sit circulorum consideratur hoc loco, nam subiectis cum rebus nihil commune habet geometria sincerior, quippe cōcretionem atq; adiunctionem certorum subiectorum, mox in aliarum scientiarum titulos cum degeneret, ut Astronomiæ, Architectonicæ, Opticæ, & similium, quarum ipsa sibi scientiam non arrogat quidem, uerùm illas tamen absq; geometria intelligi non posse aut addisci, nemo mediocriter etiam eruditus ignorat. Liber præsens uel hoc nomine præstat præcedentibus, quòd nimirum hic de proprietatibus tractat perfectissimæ figuræ, nempe de Circulo, siquidem pro natura subiectarum rerum scientiæ aliæ alijs sunt preponendæ. Vtilis porrò est ad cognitionem Chordarum, & arcuū præcisionem in circulis, quippe cum quæ est angulorum, eadem sit quoq; arcuum & chordarum inter se ratio. Præterea de circulis cōtingentibus & sese mutuo secantibus, quòd illud quidem uno, hoc uerò duobus tantum punctis fiat. Quinetiam ostendit, Contingentiæ angulum, omniū acutorum rectilineorum angulorum esse minimū; Diametrum item, omnium rectarum linearum in circulo longissimam, & id genus multa complectitur hic liber tertius. Docet præterea, tribus punctis signatis (modo non fuerint in una recta linea) circulus per illa transiens, quo pacto describatur. Quomodo deinde in corpore aliquo solido, sphericum seu parallelepipedum illud fuerit, duo puncta opposita, ut quæ in sphericis Poli nomen habeant, inueniantur. Quæ ambo in instrumentorum compositionibus quàm summè sint necessaria, nullis non qui hoc in genere scientiæ uersati sunt, & se in eo aliquantum exercuerunt, manifestum est.

ΟΡΟΙ.

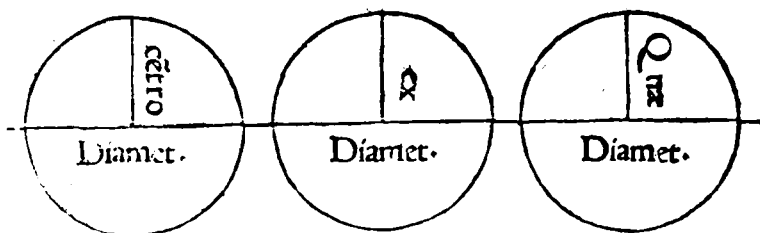
Ἰσοὶ κύκλοι εἰσὶν, ὧν αἱ διάμετροι εἰσὶν ἴσαι.
ἢ ὧν αἱ ἐκ τῆς κέντρου ἴσαι εἰσὶν.

DEFINITIONES.

X 3

Aequales

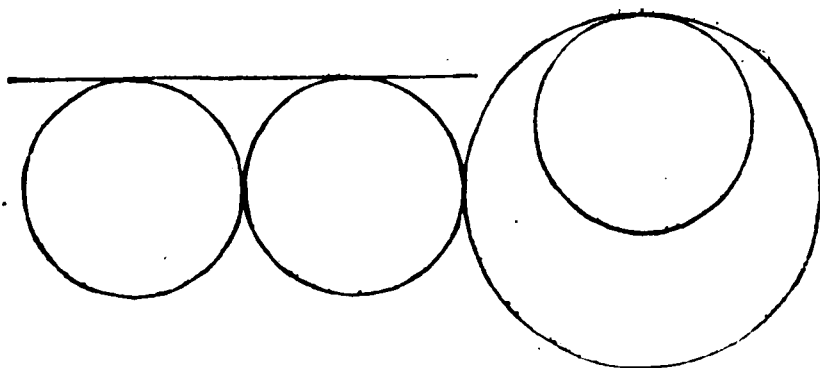
1 Aequales circuli sunt, quorum diametri sunt æquales. Aut, quorum quæ ex centris, æquales sunt,



Εὐθεῖα κύκλῳ ἐφάπτεσθαι λέγεται, ἢ τις ἀπὸ μέρους τοῦ κύκλου, καὶ ἐμβαλλομένη, ὅτε τέμνει τὸν κύκλον. Κύκλοι ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται, οἱ τινες ἀπὸ μέρους ἀλλήλων, ὅτε τέμνουσιν ἀλλήλων.

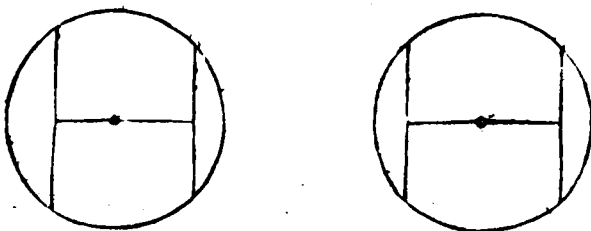
2 Recta linea circulum tangere dicitur, quæ tangens circulum, & eiccta, circulum non secat.

3 Circuli tangere sese mutuo dicuntur, qui sese mutuo tangentes, sese mutuo non secant.



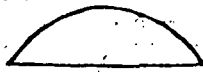
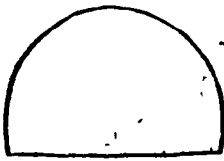
Εν κύκλῳ ἴσῳ ἀπὸ τοῦ κέντρου εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ αὐτὰς καθέτι ἀγόμεναι, ἴσαι ὦσι. Μείζων δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου λέγεται, ἐφ' ἣν ἢ μείζων καθέτις πίπτει.

4 In circulo æqualiter distare à centro rectæ lineæ dicuntur, cum à centro in eas perpendiculares ductæ, æquales fuerint. Plus uerò distare dicitur, in quam longior perpendicularis cadit.



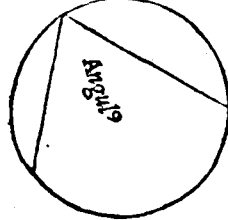
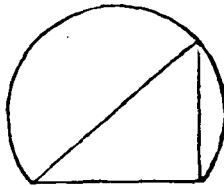
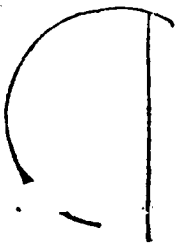
Τμήμα κύκλου, ὅστις τὸ περιχόμενον ὀχῆμα, ὑπὸ τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφέρειας.

5 Sectio circuli, est figura comprehensa sub recta linea, & circuli circūferentia.



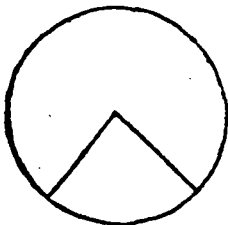
Τμήματες γωνία, ὅστις ἡ περιεχόμενη ὑπὸ τε εὐθείας & κύκλου περιφερείας. Ἐν τμήματι δὲ γωνία ὅστις, ὅταν ὑπὸ τῇ περιφερείᾳ τοῦ τμήματος ληφθῇ π σημείον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ὑπὸ τὰ πόρτα τῇ εὐθείᾳ, ἣτις ὅστις βάσις τῇ τμήματι, ἐπερδύχθωσι εὐθείαι, ἡ περιεχόμενη γωνία ὑπὸ τῇ ὑπὲρδύχθωσι εὐθείᾳ. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν εὐθείαι ἀρλαμβάνωσι πινὰ περιφερείαν, ἐπ' ἐκείνης λέγεται βεβηκέναι ἡ γωνία.

6 Sectionis angulus est, qui sub recta linea, & circuli circūferentia comprehenditur. 7 In sectione uerò angulus est, cū in sectionis circūferentia punctum aliquod sumptum, atq; de illo ad rectę lineę fines, quę est sectionis basis, rectę lineę ductę fuerint, comprehensus sub coniunctis rectis angulus. 8 Quando autem comprehendentes angulum rectę lineę aliquam suscipiunt circūferentiam, in illa dicitur esse angulus.



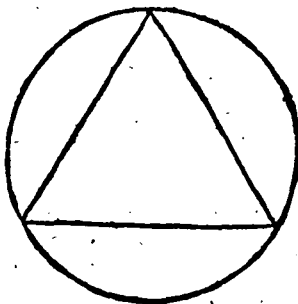
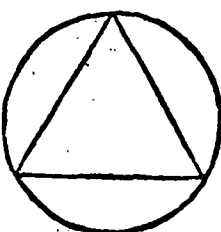
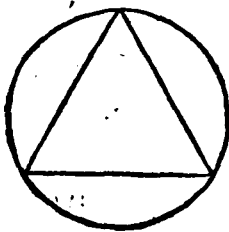
in uel super circūferentia.

Τομεὺς κύκλου ἐστίν, ὅταν πρὸς τῷ κέντρῳ αὐτοῦ τοῦ κύκλου σταθῇ ἡ γωνία, ἥ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τε τῇ τὴν γωνίαν περιέχουσῃ εὐθείᾳ, καὶ τῇ ἀρλαμβανομένης ὑπὸ αὐτῇ περιφερείας.



9 Sector circuli est, cum ad centrum circuli steterit angulus, comprehensa figura sub angulum comprehendentibus rectis lineis, & assumpta sub eis circūferentia.

Ομοία τμήματα κύκλου, ὅστις τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας. ἢ, ἐν οἷς αἱ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἐσίν.



Similes

10 Similes sectiones circuli sunt, quæ angulos æquales suscipiunt, Aut, in quibus anguli inter se æquales sunt.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

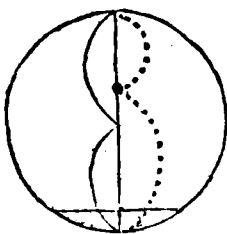
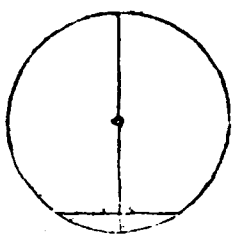
ΠΡΩΤΗ. Α.

Τὸ δὲ θύνητ ὁ κύκλος, ὃ κέντρον εὐρεῖν.

PRIMA. I.

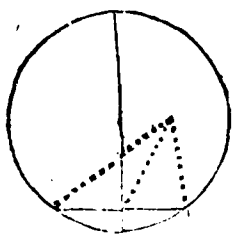
Dati circuli, centrum inuenire.

Sit circulus datus, atque propositum, illius centrum inuenire. Ducatur in circulo recta quædam linea utcunq, ita tamen, ut utraq, eius extremitas in circuli sit circum



ferentia, hac deinde recta, per propositionem 10 primi bifariam diuisa, à puncto diuisionis huius ad angulos rectos linea, quæ similiter utraq, extremitatē in circumferentia habeat, per 11 eiusdem, excutetur. Quod si tandem hæc ad rectos ducta bifariam diuisa fuerit: punctum huius diuisionis centrum cir

culi erit. Id quod ab impossibili, ubi aliud quoddam, præter hoc, centrum signatum fuerit, demonstrari poterit, hoc modo. In hac ipsa per mediæ diuisionis punctum transcurrente linea, centrum aliud nullum statui potest: alioqui sequeretur statim, ex structura, & circuli definitione, æquali pro æquali linea sumpta, Partialem sua totali lineæ esse longiorem: uel contrā, Totalem suā partiali breuiorem, quod est impossibile. Statuatur ergo nunc extra πρὸς ὁρθὰς ductam punctum loco centri aliud,



à quo etiam tres lineæ rectæ, una quidem ad communem duarum linearum intersectionem, reliquæ deinde duæ ad duas primò ductæ extremitates, ducantur. Et quia triangula quæ sic fiunt, huiusmodi sunt, qualia propositio in primo octaua requirit: anguli qui à duabus semidiametris subtenduntur, per eandem, inter se æquales erunt: ex definitione igitur uterq, rectus. Quia autem, ut habet cōmunis quædam noticia. Omnes recti anguli inter se sunt æquales, ea mediante, & quia prius etiā ex hoc

communi duorum rectorum angulorum puncto πρὸς ὁρθὰς lineaeducta est, inferatur tandem, ampliorem angulum angustiori: uel contrā, angustio rem angulo ampliori esse æqualem, quod cum & ipsum absurdum sit: operationem constare punctum deinde in linea πρὸς ὁρθὰς ducta, medium, centriū circuli esse, nemini dubium erit. Ομοίως δὲ δεῖξομεν: Simili modo demonstrabitur, quod nullum punctum aliud, præter hoc quod in medio huius ductæ signatum est, centrum circuli esse possit. Dati igitur circuli centrum inuentum est, quod fieri oportuit.

ΓΟΡΙΣΜΑ.

Εκ δὲ τούτου φανερὸν, Ὅτι αὐτὸν κύκλον τὴν ἐνθεῖα ἐνθεῖαν πινὰ δὶ χὰ, καὶ πρὸς ὁρθὰς τέμνει· ὡς γὰρ τε μνῶσης ὅστις κέντρον τοῦ κύκλου.

COROLLARIUM.

Ex hoc sanè manifestum est, Quod, si in circulo recta quædam linea rectam quandam lineam bifariam, & ad angulos rectos secet: in secante sit centrum circuli.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

B.

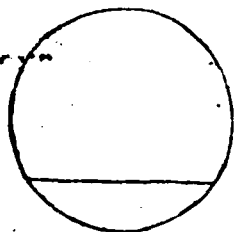
Εὰν κύκλῳ ὡς γ' ποδὶ φοδρείας ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα· ἢ ὡς τὰ αὐτὰ σημεῖα ὡς διζούγνη μὲν εὐθεία, ἢ ὡς πδβῆται τοῦ κύκλου.

PROPOSITIO

II.

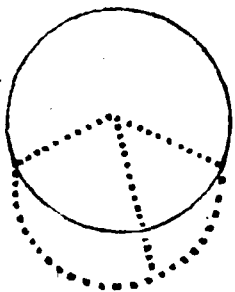
Si in circuli circumferentia duo puncta utcumq; accepta fuerint: ad ipsa puncta ducta recta linea, intra ipsum circulum cadet.

Sit circulus, duo etiam puncta in ipsius circumferentia utcumq; signata: dico, si



hæc puncta linea quadam recta coniungentur, hanc rectam intra circulum cadere oportere. Colligitur huius propositionis demonstratio ab impossibili. Nisi enim intra circulum cadat recta hæc, statim contrā illam communem noticiam, quæ dicit, Totum parte sua maius esse, inferri potest, quod pars suo toto maior sit, hoc nimirum modo. Linea illa recta, qua cum puncta, in circumferentia accepta, copulantur, si intra circulum non cadat, extra circulum, aut in ipsam circuli circumferentiam, cadere eam oportet. Cadat ergo primò

extra, si fieri potest, & quærat per propositionem præmissam, circuli centrum, à quo etiam duæ rectæ ad duo in circumferentia accepta puncta ducantur. Et quoniam hæ duæ rectæ, ex definitione circuli, sunt inter se æquales: triangulū igitur quod sic descriptum est, ἰσοκυλῖς erit, habens ad basim politos angulos, ex priore parte propositionis quintæ primī, inter se æquales. Ducatur præterea & alia recta quædam linea, à centro circuli utcumq;, per circumferentiam usq; ad basim trianguli isoscelis, eam continuando. Et quia per hanc rectam isosceles triangulum in duo partialia triangula diuiditur, quorum cum utriusq; unū latus ulterius



productum sit: erit ex propositione 16 primī, utriusq; externus angulus suo interno & opposito, uno scilicet æqualium, maior: quare & altero æqualium maior erit. Cum autem iam, ut tandem concludatur, triangulum appareat, unum habens angulum reliquorum altero maiorem, maior uero angulus, ut testatur propositio in primō 19, longius latus requirat, hac ipsa propositione hic usurpata, æquali deinde linea pro æquali sumpta, infertur tandem, partialem suā totali linea esse longiorem, quod est impossibile. Non ergo extra circulum cadit puncta copulans recta linea. Similiter etiam, quod non in ipsam circumferentiam cadat, demonstrabitur: cadet itaq; intra ipsum circulum. In circuli igitur circumferentia, ad duo puncta, utcumq; accepta, linea recta ducta, in circulum eam cadere necesse est, quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

Γ.

Εὰν γὰρ κύκλῳ εὐθεία τις δῖξαι τοῦ κέντρου εὐθείαν πινὰ μὴ δῖξαι τοῦ κέντρου διχα τέμνῃ· καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ τέμνῃ. Καὶ ἰσὺν πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ τέμνῃ· καὶ διχα αὐτῇ τέμνῃ.

PROPOSITIO

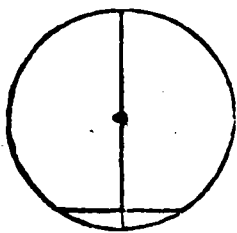
III.

Si in circulo recta quædam linea per centrum extensa, quandam non per centrum ductam rectam lineam bifariam secet: & ad angulos rectos eam secabit. Et si ad angulos rectos eam secet: & bifariam quoq; eam secabit.

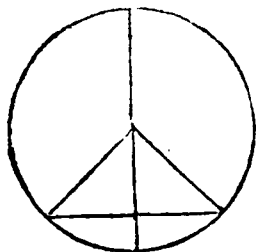
Υ

Præparetur

Præparetur figura, qualem scilicet requirit hæc propositio, hoc est, describatur circulus, in quo etiam duæ rectæ, una quidem per centrum transiens, altera uerò præter illud, à priori tamen, uel bifariam, uel ad angulos rectos secata, ducatur: dico, si bifariam: & ad angulos rectos, si uerò ad angulos rectos: & bifariam etiam per centrum ductam alteram secare oportere. Quantum ad partem priorem, coniungantur extremitates eius quæ non per centrum transit rectæ lineæ, cum centro circuli duabus rectis. Et quoniam hæc duæ rectæ, ut duorum triangulorum latera, ex definitione circuli, inter se æquales sunt,



cum quoque reliqua duo unius ex structura, reliquis duobus alterius trianguli lateribus equalia sint: anguli etiam, quos rectæ, à centro circuli ad extremitates ductæ, subtendunt, per propositionem 8 primi, inter se æquales erunt. Quoniã uerò recta linea rectæ insistentis lineæ, quando deinceps se habentes angulos æquales inter se facit, uterque ex definitione quadam in primo exposita, rectus est: anguli etiam illi duo, quos scilicet propositio 8 demonstrauit esse inter se æquales, recti erunt. Præter centrum igitur ducta ab illa altera per centrum transeunte recta linea, cū ex



hypothesi bifariam ab ea secata sit, ad angulos etiam rectos secabitur, atque hæc pro parte propositionis priore. Posterioris uerò partis demonstratio, eadem structura manente, ex 26 primi sic colligi poterit. Cum enim duo partialia triangula, ex structura, rectangula sint, ipsum uerò totum, ex definitione circuli, isosceles: habebunt hæc partialia triangula duos angulos duobus angulis, utrumque utriusque æquales. Et quia etiam latus unum lateri uni, uel descendentes à centro rectas lineas, uel perpendicularis portionem ambobus communem, æquale habent: & reliqua, per allegatam ex primo propositionem, reliquis æqualia habebunt. Quare recta non per centrum transiens linea, ab altera quæ per centrum in eam ad angulos rectos cadit, bifariam diuisa est. Si in circulo igitur, recta quædam linea per centrum extensa, quandam non per centrum ductam rectam lineam bifariam secet: & ad angulos rectos eam secabit. Et si ad angulos rectos eam secet: & bifariam quoque eam secabit, quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

Α.

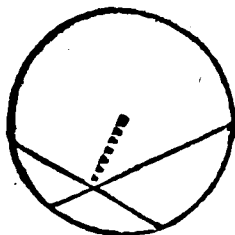
Εὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, μὴ διὰ τὸ κέντρον οὐ τέμνωσιν ἀλλήλας δίχα.

ΠΡΟΠΟΣΙΤΙΟ

ΙΙΙΙ.

Si in circulo duæ rectæ lineæ, non per centrum extensæ, sese mutuo secuerint: sese mutuo bifariam non secabunt.

Describatur circulus, ducantur etiam in eo duæ rectæ lineæ, quorum neutra per centrum transeat, altera tamen alteram secet: dico rectas has bifariam sese mutuo non secare. Sumit hæc propositio suam ab impossibili demonstrationem per præcedentis tertiæ partem priorem, his quidem, cum duæ sint rectæ lineæ, usurpatam, & communem illam noticiam, quæ dicit, Omnes rectos angulos inter se esse æquales, cum per hæc, si mutuo una alteram bifariam secaret, statim ubi linea à centro ad communem ductarum intersectionem ducta esset, minorem angulum maiori æqualem esse inferretur,



ferretur. Hoc autem quia nemini intelligenti persuaderi potest: per inæqualia igitur, & non æqualia, sese huiusmodi lineæ, ut uult propositio, secabunt. Si in circulo igitur duæ rectæ lineæ, non per centrum extensæ, sese mutuo secuerint: sese mutuo bifariam non secabunt, quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

E.

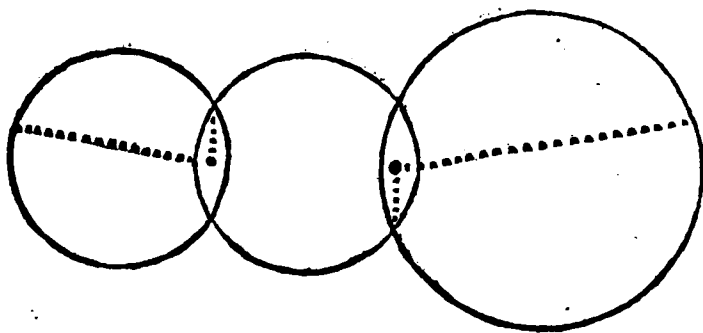
Εὰν δύο κύκλοι τίμνωσι ἀλλήλους· οὐκ ἴσαι αὐτῶν ἡ αὐτὴ κέντρον.

PROPOSITIO

V.

Si duo circuli sese mutuo secant: non erit eorum idem centrum.

Sint duo circuli sese mutuo secantes, dico quod eorum non sit idem centrum. Et huius propositionis, ut præcedentis, demonstratio ab impossibili sumitur. Si enim centrum unum & idem habuerint illi sese mutuo secantes circuli, cum centrum non extra, sed in circulo sedem suam habeat, in nullo loco alio, quam in portione, utriusque circulo communi, id esse poterit. eo igitur in loco illo constituto, inde ad communem circulorum intersectionem linea recta ducatur, & erit hæc utriusque circuli semidiameter. Ducatur & alia recta ab eodem centro posito, per communem portionem usque ad circumferentiam utriuslibet circuli continuata. Et quoniam hæc tota,



unius: pars uero eius, alterius circuli est semidiameter: erit utraque, pars uidelicet & ipsa tota, primò ductæ rectæ, quæ & ipsa utriusque circuli semidiameter est, æqualis, unde sic etiam, per communem quandam noticiam, ipsæ inter se æquales, pars uidelicet totæ, quod est impossibile. Punctum ergo id quod sumptum est, aut si aliud quoddam sumeretur, centrum circulorum esse, haudquaquam potest. Duorum igitur sese mutuo secantium circulorum, unum & idem centrum non erit, quod demonstrari oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

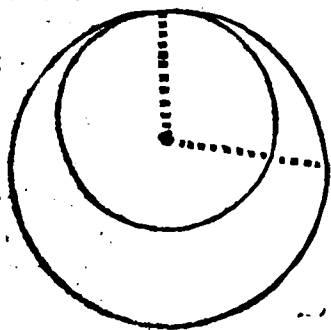
F.

Εὰν δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἑνὶ ἑνὶ σημείῳ· οὐκ ἴσαι αὐτῶν ἡ αὐτὴ κέντρον.

PROPOSITIO

VI.

Si duo circuli sese mutuo interius tetigerint: non erit eorum idem centrum.



Sint duo circuli, qui sese interius mutuo tangant: dico, eorum non idem esse centrum. Sed esto sane idem, si fieri potest, & connectatur id cum circulo- rum contactu, atque postea ab eodem communi centro posito ad exterioris circuli circumferentiam, ubicumque hoc fuerit, alia recta linea ducta, quod neque hoc, neque aliud ullum punctum, horum tangentium circulorum centrum esse possit, ab impossibili, ut in præcedenti, demonstrabitur. Si duo cir-

Y 2

culi

culi igitur, sese mutuo interius tetigerint: non erit eorum idem centrum. quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

Ζ.

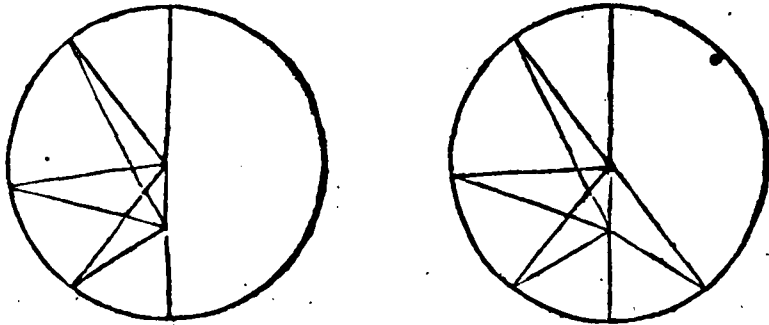
Εὰν κύκλος ὑπὸ τῇ διαμέτρῳ ληφθῇ τίσημείον, ὃ μὴ ἐστὶ κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου προσηλωσὶν εὐθεῖαι πρὸς τὸν κύκλον· μεγίστη μὲν ἴσται, ἐφ' ἧς τὸ κέντρον ἔλαχιστη δὲ, ἡ λογαρή. Τῶν δὲ ἄλλων, αἱ ἡ γῆμιον, τῇ διατὸ κέντρον, τῇ ἀπὸ τῶν ἄλλων μείζων ὅστι. Δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι, ἴσαι, ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου προσηδύοντι, πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἧς ἡ ἀπὸ τῶν ἄλλων ἔλαχιστη.

PROPOSITIO

VII.

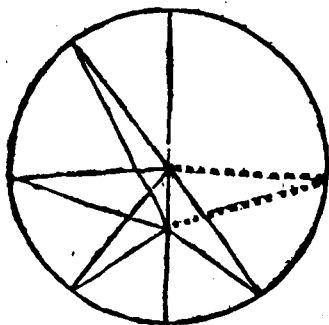
Si in diametro circuli aliquod sumatur punctum, quod non sit centrum circuli, ab eo quod puncto rectæ quædam lineæ in circulum cadant: longissima quidem erit, in qua centrum: breuissima uerò, reliqua. Aliarum uerò, semper propinquior ei quæ per centrum protenditur, remotiore longior est. Duæ autem solùm rectæ lineæ æquales, ab eodem puncto in circulum cadunt, ad utraq; partes breuissimæ.

Sit circulus, in eo etiam ducta diameter, in qua præter centrum aliud sumatur punctum: dico primò, quotquot ab hoc puncto usq; ad circumferentiam rectæ lineæ ductæ fuerint, illarum omnium eam quæ per centrum transierit, longissimam, diametrum uerò perficiens, omnium breuissimam esse. Ex alijs autem, semper propinquior ei quæ per centrum transit, remotiore longior extabit. Postremò, quòd duæ tantùm inter se æquales rectæ lineæ, ab hoc puncto, ex utraq; parte breuissimæ, in circuli circumferentiam cadere possint. Habet hæc propositio quatuor partes, quæ in hunc modum ordine demonstrari poterunt. Connectantur in circulo ductarum extremitates, quas habent in circumferentia, singulæ, cum centro circuli,



singulis rectis lineis. Et quoniam duo quælibet latera omnis trianguli, ex propositione 20 primi, reliquo tertio longiora sunt, tertio porro longiora duo latera, in præsentia, ex definitione circuli & illa communi noticia, Si æqualibus æqualia addantur, &c. uni rectæ alij æqualia sunt, cum hæc alia centrum circuli contineat: quod in propositione primò proponitur, iam manifestum erit. Rursus quoniam ex eadē propositione 20 primi, quælibet duo trianguli latera reliquo tertio longiora sunt, tertium porro latus ex definitione circuli, uni rectæ alij æquale est: & tertio longiora duo latera eadem rectæ alia longiora erunt. Cum autem hæc alia per punctum, præter centrum in diametro acceptum, transeat, communi ex æquo de illis inæqualibus portione ablata: & quod in propositione secundò proponitur manifestum erit. Tertium nūc patet ex propositione 24 primi. Porro ut quartum etiam retineatur, ducenda est, per propositionem 23 primi, ex centro recta linea, quæ

cum semidiametro per punctum transeunte, angulum faciat, illi angulo, qui ex altera parte sub eadem semidiametro, atque ex centro ductarum linearum una continetur, æqualem, eaque ad circumferentiam usque continuata, ab ipsius in circumferentia extremitate ad punctum recta linea ducatur. Et quoniam duo triangu-



la, qualia propositio in primo 4 requirit, apparent: bases igitur illorum, hoc est, lineæ illæ, quæ ad utraque partes brevissimæ sunt positæ, à puncto item in diametro præter centrum accepto egrediuntur, per hanc 4, inter se æquales erunt. Nec alia etiam, in illa eadem parte, ab hoc puncto ei quæ in altera parte est posita, æqualis educi potest. Nam si forte ab aliquo minus credenti hoc tentaretur, qui rectam aliam

alteri æqualem duceret, dum cui hæc sic ducta ex communi illa noticia, Quæ uni sunt æqualia &c. æqualis esse deberet, mox per 3 partem propositionis huius, eadem longior esse ostendi potest: id quod fieri nequit. Potest etiam aliter hæc quarta pars demonstrari in hunc modum. Ducatur alia, si ita possibile uideretur, recta linea, ei quæ ex altera parte brevissimæ posita est, rectæ æqualis, cuius in circumferentia extremitas cum recta quadam linea iuncta, demonstratio sic colligetur. Quoniam anguli ex utraque parte ad centrū positi, ex propositione 8 primi, inter se æquales sunt, unus uero partialis angulus alterius trianguli totali, ut iam ex 4 primi demonstratum, æqualis: ille partialis tandem angulus, ex communi illa noticia, Quæ uni sunt æqualia &c. suo totali angulo æqualis erit, quod est impossibile. Duæ igitur solum rectæ lineæ æquales, ab eodem puncto in circulum cadunt ad utraque brevissimæ lineæ partes. Si in circuli igitur diametro punctum aliquod sumatur, quod non sit centrum circuli, ab eoque puncto rectæ quedam lineæ in circulum cadant: longissima quidem erit, in qua centrum: brevissima uero, reliqua. Aliarum uero, semper propinquior ei quæ per centrum protenditur, remotiore longior est. Duæ autem solum rectæ lineæ, æquales, ab eodem puncto in circulum cadunt, ad utraque partes brevissime, quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

Ἐὰν κύκλου ληθῇ τί σημεῖον ἐκτός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον ὁμαχθῶσιν εὐθεῖαι πλεον, ὥς μία μὲν ὁμαχθῇ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοιπαὶ ὡς ἔτυχον· τῶν μὲν πρὸς τῶν κυρίων περιφύρειαν προσηπτήσων εὐθειῶν, μεγίστη μὲν, ἡ ὁμαχθῇ τοῦ κέντρου· τῶν δὲ ἄλλων, αἱ ἢ ἕγγιον εἴ ὁμαχθῇ τοῦ κέντρου τὸ ἀπὸ τοῦ κέντρου μείζων ἴσται. τῶν δὲ πρὸς τῶν κυρίων περιφύρειαν προσηπτήσων εὐθειῶν, ἐλαχίστη μὲν ὅστις, ἡ μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς διαμέτρου. τῶν δὲ ἄλλων, αἱ ἢ ἕγγιον εἴ ἔλαχίστη εἴ ἂν ἀπὸ τοῦ κέντρου ὅστις ἔλαττω. Δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι ἴσαι προσηπθῶνται ἀπὸ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον ἐφ' ἑκάτερον εἴ ἔλαχίστη.

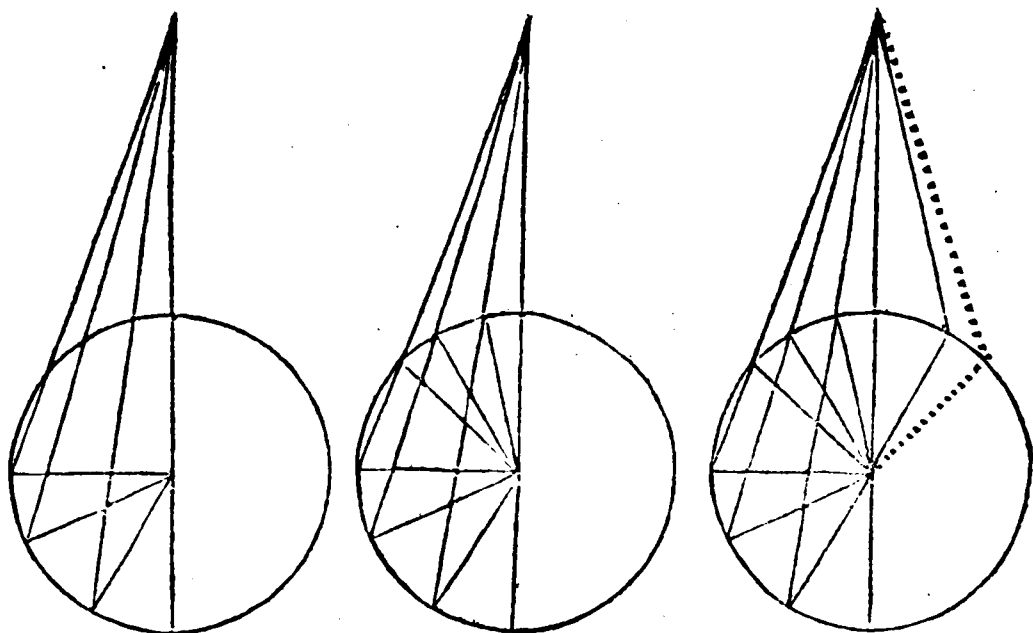
PROPOSITIO VIII.

Si extra circulum aliquod sumatur punctum, ab hoc uero puncto ad circulum percurrant rectæ quedam lineæ, quarum una quidem per centrum, reliquæ uero ut accidit: in concavam circumferentiam cadentium linearum, longissima quidem est quæ per centrum currit. Aliarum autem, semper propinquior ei quæ per centrum, remotiore longior erit. In conuexam uero circumferentiam cadentium linearum, brevissima qui-

dem est,

dem est, quæ inter punctū & diametrum, aliarum aut, semper breuissimæ propinquior, remotiore breuior est. Duæ autem solū rectæ lineæ, æquales, cadunt ab hoc puncto in circulum ad utraq; partes breuissimæ.

Sit circulus, extra illum etiam punctum acceptum, à quo aliquot rectæ lineæ, per circulum currentes, usq; ad concavam circumferentiam ducantur. Esto autem quod ductarum una per centrum, aliæ uerò utcunq; transeant. Dico itaq; in concavam circumferentiam cadentium linearum longissimā esse, quæ per centrum transit. Ex alijs autem, semper propinquiorem ei, quæ per centrum transit, remotiore longiorem. Linearum uerò partialium, extra in conuexam circumferentiam circuli cadentium, quæ puncto & diametro interiacet, illam omnium breuissimam. Ex alijs autem, semper breuissimæ propinquiorem, remotiore breuiorem esse. Ad hæc dico etiam, duas tantum ab hoc puncto rectas lineas, quæ ex utraq; parte breuissimæ, in circulum cadunt, æquales educi posse. Habet hæc propositio quinque partes, quarum prima & secunda, ubi prius à contactibus, præter centrum ductarum & circumferentiæ, ad centrum rectæ lineæ ductæ fuerint, illa quidem ex propositione 20 primi, per quam duo quælibet latera in triangulo, tertio longiora sunt, recta una pro duabus sibi equalibus sumpta, hæc uerò ex 24 eiusdem primi retineri poterunt. Quod si & ab intersectionibus iam, præter centrum ductarum cum circumferentia, rectæ lineæ ad centrum ductæ fuerint: tertiæ quoque &



quartæ partibus per easdem primi propositiones, ab inæqualibus tamen interim æqualibus subtractis, satisfieri poterit. Superest igitur nunc ut quintæ parti, quæ uidelicet duas solū rectas lineas, ab hoc puncto æquales, ex utraq; parte breuissimæ, in circulum cadere asserit, satisfaciamus: quod quidem ab impossibili hoc modo fieri debet. Ducatur per 23 primi, ex centro recta linea, quæ cum semidiametro per circumferentiam ad punctum continuata, angulū faciat, illi angulo, qui ex altera parte sub eadem semidiametro atq; ex centro ductarum linearum una continetur, æqualē, & connectatur huius ductæ extremitas quam habet in circumferentia, per primum postulatum in primo, cum puncto extrā sumpto, recta quadam linea, quod nunc hæc recta ei, quæ ex altera parte diametri ad punctum continuata est, equalis sit, & sola etiam, sic ut nulla æqualis alia ex hoc puncto egrediatur, utrunq;

non

non aliter, quàm in præcedenti quarta pars, retinebitur. Si extra circulum igitur ali quod sumatur punctum, ab hoc uerò puncto ad circulum percurrant rectæ quæ- dam lineæ, quarum una quidem per centrum, &c. quod demonstrari oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

Θ.

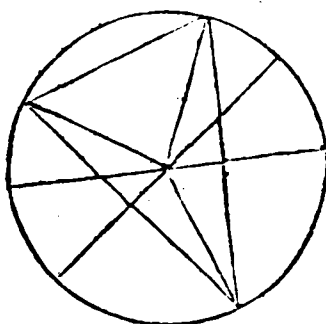
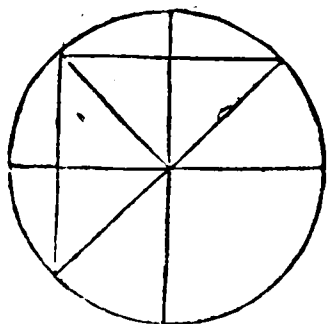
Εὰν κύκλος ληφθῇ τίς σημεῖον ὧν ῥς, ἀπὸ δὲ τῶν σημείων πρὸς τὸν κύκλον πρὸς πῖπῳσι πλείους ἢ δύο ἐνθῆαι ἴσαι ᾗ ληφθῇ σημεῖον κέντρον ὅστις τὸ κύκλος.

PROPOSITIO

IX.

Si in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, ab hoc uerò puncto ad circulum cadant plures quàm duæ rectæ lineæ æquales: acceptum punctum centrum est ipsius circuli.

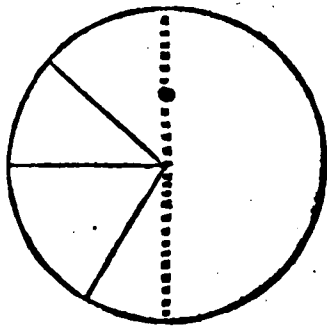
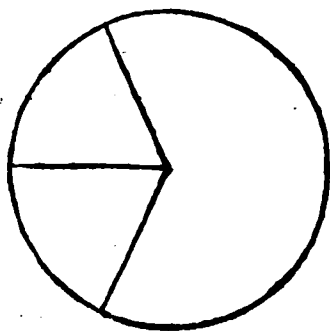
Sit circulus, in eo etiam punctum signatum sic, ut plures quàm duæ rectæ lineæ inde usq; ad circumferentiā ductæ inter se æquales sint: dico, signatum punctum centrum circuli esse. Coniungantur ductarum extremitates, quas habet in circumferentiā singulæ, singulis rectis quibusdam lineis, coniungentium deinde duabus, uel omnibus si placet, bifariam diuisis, à punctis harum diuisionum rectæ lineæ ad signatum in circulo punctum ducantur, continuenturq; ex utraq; parte usq; in cir-



cumferentiā. Et quoniam circa quamlibet ultimò iam ductarum linearum duo triangula sunt, quorum anguli ad illam, κατὰ τὴν κατασκευὴν & propositionem 8 pri mi, inter se æquales sunt, & quia deinde ex definitione 8 eiusdem, etiam recti: erit in harum ductarum qualibet, ex corollario primæ huius, centrum circuli. Hoc au- tem cū ita sese habeat, nullibi potius fuerit, quàm in puncto uel intersectione om- nium communi, quod scilicet est punctum signatum.

ALITER HOC IDEM AB ABSVRDO OSTENDI POTEST.

Estto circulus, in eo etiam punctum acceptum, sic ut, si fortè inde plures quàm duæ rectæ lineæ usq; ad circumferentiā ductæ fuerint, illæ inter se æquales sint: di- co acceptum punctum centrum circuli esse. Sed negetur sanè, non esse centrum cir- culi punctum id, & si placet, sumatur aliud, atq; per illud acceptumq; prius pun-



ctum recta linea ducta ea ex utraq; parte in cir- cūferentiā continue- tur. Et quoniam in cir- culi diametro præter cē- trum acceptum est pun- ctum aliud, unde etiam plures rectæ ad circum- ferentiā ductæ sunt, cum illa in qua est cen- trum circuli, ex prima-
parte

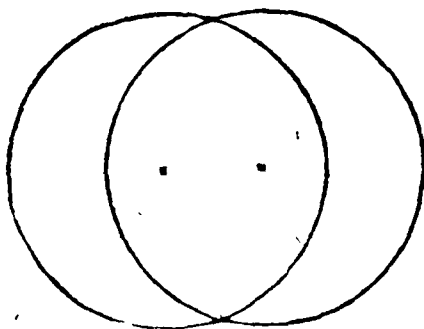
parte propositionis septimæ huius, omnium sit longissima, ex reliquis uerò, centro propinquior, ex 3 parte eiusdem, remotiore longior existat, contra hypothesein hoc inducitur, cum per eam, ex puncto ductæ rectæ inter se positæ sint æquales. Ομοίως δὲ δειξόμεν, & reli. Similiter etiam ostendemus, quòd nullum aliud præter id quod acceptum fuerit, punctum, centrum circuli esse possit. Punctum igitur in circulo acceptum, unde plures quàm duæ inter se æquales rectæ lineæ ad circumferentiam ductæ sunt, centrum circuli erit, quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ L

Κύκλος οὐ τέμνει κύκλον ἢ πλείονα σημεῖα, ἢ δύο.

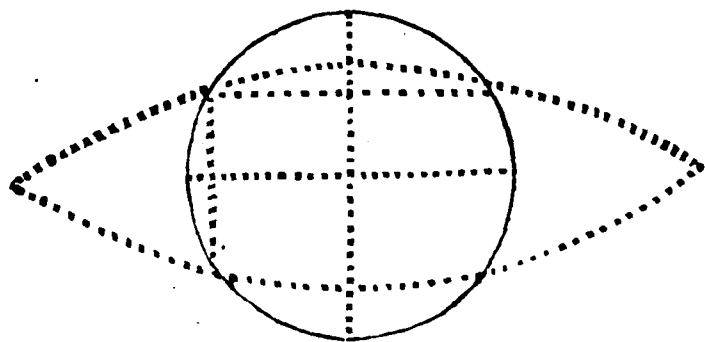
PROPOSITIO X.

Circulus non secat circulum in pluribus punctis, quàm duobus.



Sit circulus unus, alius deinde priorem secans: dico, quòd hæc sectio duobus tantum punctis contingat. Quòd si negetur hoc, atque affirmaret aliquis, pluribus duobus punctis, quatuor scilicet, circulum secare circulum, describatur sanè si fieri potest, in hunc modum figura: una deinde harum intersectionum puncto, cū duobus collateralibus duobus rectis lineis iuncto, his postea re-

ctis bifariam diuisis, ex punctis diuisionum lineæ ad angulos rectos ducantur. Et quoniam unum & idem punctum, cōmunis nimirum ad rectos ductarum sectio,

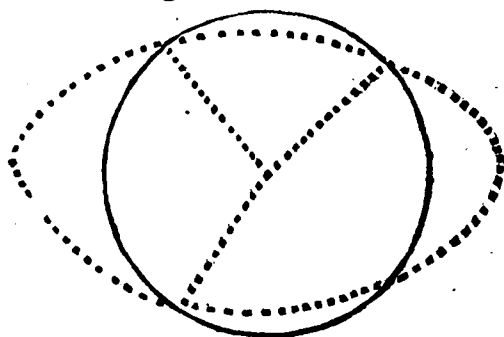


ex corollario propositionis primæ huius, bis usurpato, utriusque circuli centrum esse demonstratur, cum id propositioni quintæ præmissæ maxime aduersetur, inferitur tandem ueram esse propositionem, nimirum. Si circulus circulum secet, non in pluribus duobus locis id fieri, quod demonstrasse oportuit.

ALIA HUIVS REI DEMONSTRATIO.

Secat nactus circulus circulum in pluribus punctis quàm duobus, &c. Quæ- ratur, per propositionem primam huius, prioris descripti circuli centrum, cum eo deinde tribus rectis lineis tria intersectionum puncta copulentur. Et quoniam intra circulum, posteriorem scilicet, acceptum est punctum quoddam, à quo cum plures duabus ad illius circumferentiam rectæ egrediantur æquales: erit illud punctum, per præcedentem propositionem huius, eiusdem posterioris circuli centrum, atque sic centrum duorum, mutuo sese secantium circulorum, id quod per propositionem quintam est impossibile. Non igitur circulus circulum in pluribus punctis quàm duobus secat, quod demonstrari oportuit.

HUIVS



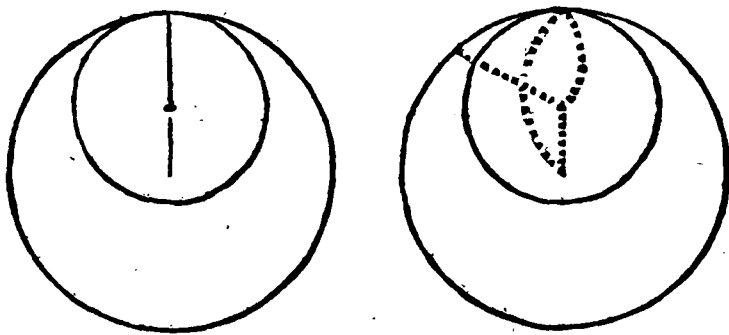
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ.

Εὰν δύο κύκλοι ἐφαπθῶνται ἀλλήλων ἑνὶ ῥῆσι, καὶ ληφθῇ αὐτῶν τὰ κέντρα· ἢ
ὑπὸ τὰ κέντρα αὐτῶν ὑπὸ ὀρθογώνιῃ εὐθείᾳ ἢ ἐμβαλλομένῃ, ὑπὸ τῷ συναφῶς
πρόκειται τῶν κύκλων.

PROPOSITIO XI.

Si duo circuli sese mutuo intus tetigerint, atq; accepta fuerint eorum
centra: ad eorum centra ducta recta linea & eiecta, in contactum cir-
culorum cadit.

Sint duo circuli, quorum unus alterum intus tangat, & quærantur centra am-
borum: dico, si per hæc centra ducta fuerit recta quædam linea, atq; cōtinuata ulte-
rius, hæc in contactū circulum cadere, id quod facile ab absurdo, ut sequitur, de-
monstrari potest. Recta à centro ad centrum circuli ducta, quia hæc per centrū ma-
ioris circuli continuata, subinde contra cōclusionem, magis ac magis à circulum
contactu recedit, cum ab autore non sit determinatum, ex qua parte recta conti-
nuari debeat, illa parte, tanquam frustra inde producturus lineam, posthabita, con-
tinuationem rectæ per minoris circuli centrum instituenda est. Instituatur ergo sic.
Quòd si ita factum, non contingat in contactum cadere hanc rectam, in alium cer-
tè circumferentiæ locum eam cadere necesse erit. Sit sanè, & ducatur ab utriusq; cir-
culi centro ad eorum contactum recta linea. Et quoniam ex tribus rectis lineis, una



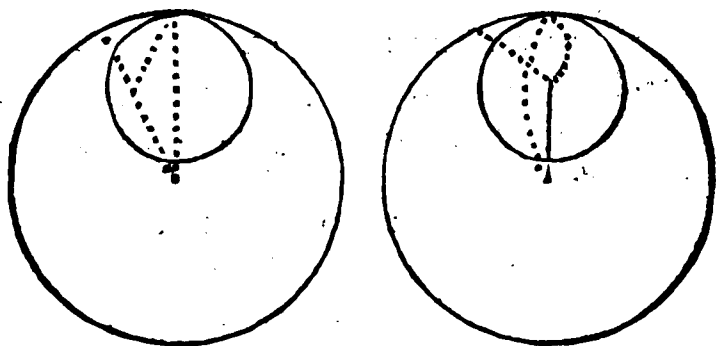
quidem, quæ à centris circulum intercepta est, duabus uerò quæ à centris ad con-
tactum circulorum rectæ ductæ sunt, triangulum constitutū est, cum omnis trianguli
duo quælibet latera, ut iam sæpe demonstratum est, tertio latere longiora sint: & in
proposito triangulo intercepta à centris linea, & ea quæ à centro interioris ad con-
tactum ducta est, ut duo trianguli latera, reliquo tertio, ea nimirum linea, quæ à
centro exterioris egreditur atq; ad contactum ducta est, longiora erunt. Quare lon-
giora

Z

giora etiam ea quæ huic tertio lateri, ex definitione circuli, est linea æqualis. Atque communi ab inæqualibus ablato, intercepta scilicet à centrīs linea: remanentiū partium una, à centro scilicet interioris ad contactum ducta, reliqua, altera scilicet, quæ à centrīs per circumulum continuata est, longior. Sed quia illa, ex definitione circuli, huius parti æqualis est: & partialis tandem sua totali linea longior erit, quod fieri nullo modo potest. Si igitur per centra duorum circulorum, quæ sese mutuo intus tangunt, recta quædam linea ducta, atque eiecta fuerit, in circulorum contactum ea cadet. quod demonstrari oportuit.

Ομοίως καὶ ἐκτὸς ἢ τοῦ μικροῦ καὶ τρον τοῦ μεγάλου κύκλου, δέξομεν αὐτὸ ἀπορν.

Similiter etiam, Si extra paruum circumulum centrum maioris circuli fuerit, absurditatem ostendemus.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ

IB.

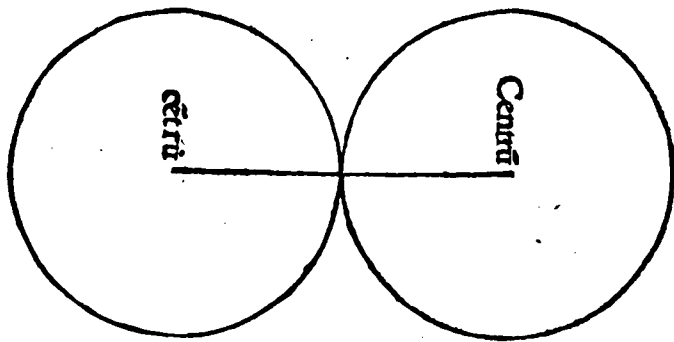
Ἐὰν δύο κύκλοι ἀπὸ τῶν ἀλλήλων ἐκτὸς ἢ ὑπὸ τὰ κέντρα αὐτῶν ὡς ἔδωκεν μένη, οἷα τῇ ἐπαφῇς ἐλεύσεται.

PROPOSITIO

XII.

Si duo circuli sese mutuo exterius tetigerint: ad centra eorum applicata recta linea, per contactum transibit.

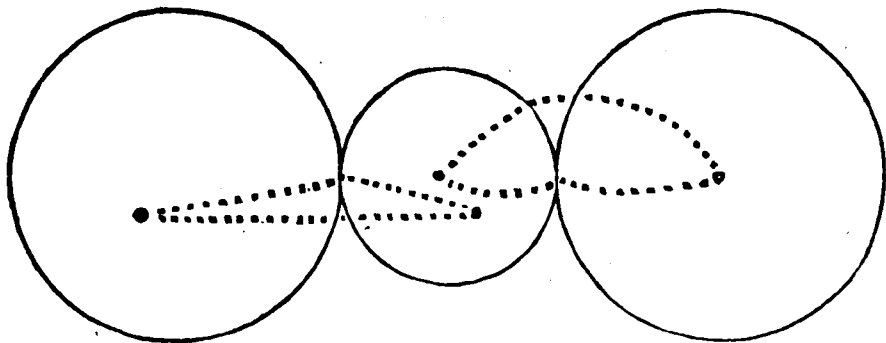
Sint duo circuli, quorum unus alterum extra tangat, & querantur centra amborum: dico, si per hæc centra ducta fuerit recta quædam linea, eam per circulorum



contactum transire. Quod si hoc fortè negetur, aliò eam certè inclinare concedendum erit. Sit sanè, & ducatur ab utriusque circuli centro ad eorum contactum recta linea. Et quoniam quæ ex centro ad circumferentiam ducuntur rectæ lineæ, sunt, ex definitione circuli, inter se æquales, eadem definitione bis usurpata, æqualibus item lineis æqualibus additis: duæ à centrīs ad contactum ductæ rectæ lineæ, reliquis duabus, quæ & ipsæ à centrīs ad suas circumferentias ductæ sunt, rectis lineis æquales erunt. Ipsa igitur totali, quæ à centro ad centrum ducta est, ut tertio trian-

guli

guli latere, breviores, quod est contra propositionem quandā in primo expositam, qua dicitur, quod Omnis trianguli duo quælibet latera admutuū sumpta, reli-



quo tertio longiora sint. Si duo igitur circuli extra sese mutuo tetigerint: ad centra eorum applicata recta linea, per contactum transibit. quod demonstrasse oportuit.

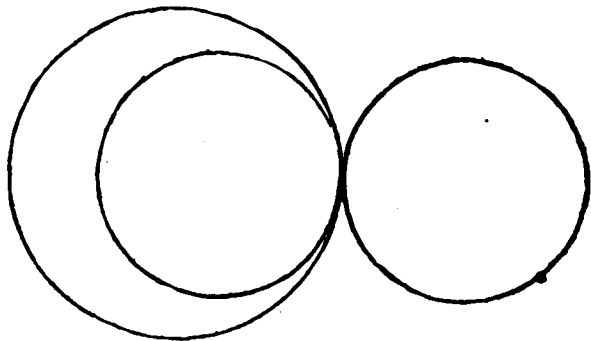
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ.

Κύκλος κύκλῳ οὐκ ἐφάπτεται πλείονα σημεία ἢ ἑαβ' ἐν, ἰαύτε ἐνὸς, ἰαύτε ἐκτὸς ἐφάπτεται.

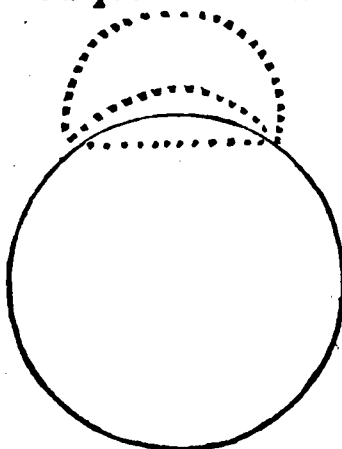
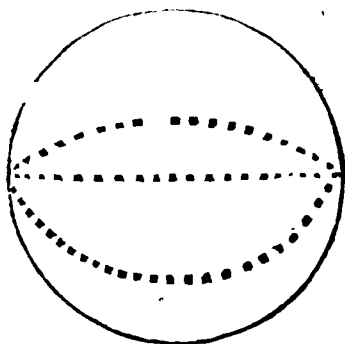
PROPOSITIO XIII.

Circulus circulum non tangit in pluribus punctis uno, siue intus siue extra tangat.

Describatur circulus, dico impossibile esse alium describi posse circulum, qui descriptum priorem uel intus, uel extra etiam, in pluribus punctis quàm in uno



tangat. Quod si uideatur possibile, sit sanè: tangat autem hunc primò intus in duobus locis, & ducatur per centra circulorum recta quædam linea: hæc autem in utranq; partem continuata, cum ex propositione II huius, in circulorum cōtactum cadat, quæ ex definitione circuli, lineæ sunt in-

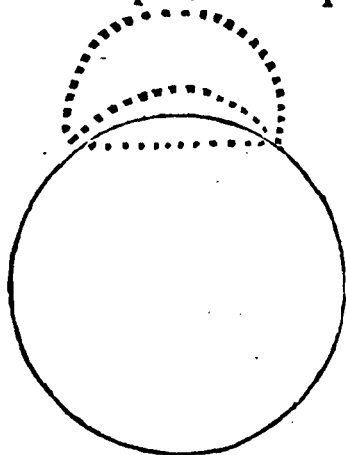


ter se æquales, mox intercepta à centris portione, uni earum addita, ab altera uerò

Z

hac

hac eadem ablata, quæ sic fiunt lineæ inæquales, ex eadem circuli definitione, secundò usurpata, inter se æquales erunt id quod rationi minime est consentaneum.



Circulus igitur circulum intus tangens, uno tantum puncto hoc faciat necesse est. Quantum ad secundum. Estò quòd extrà, circulus circulum in duobus locis tangat, atq; ducta à contactu in contactum recta quadam linea, cum hæc, ex propositione 2 huius, intra utrunq; circulum cadat, atq; id fieri hic nullo modo possit, propterea quod nullius circuli aliqua pars in altero sit: exterius circulus circulum in pluribus punctis uno non tanget. Et quia neq; etiam interius, ut auditum est. Circulus igitur circulum tangens, in uno tantum puncto hoc fiat necesse erit, & non in pluribus, interius siue exterius

hoc accidat, quod demonstrari oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

ΙΑ.

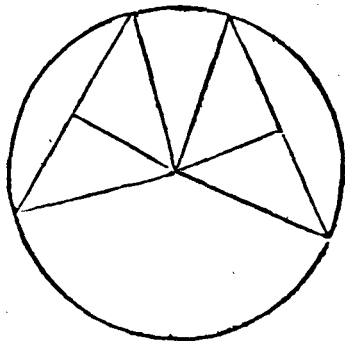
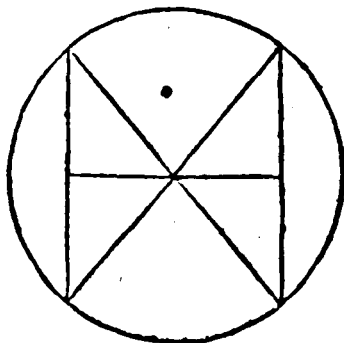
Ἐν κύκλῳ αἱ ἰσὶ εὐθεῖαι ἴσων ἀπὸ τοῦ κέντρου. Καὶ αἱ ἴσων ἀπὸ τοῦ κέντρου ἴσαι ἀλλήλαις εἰσιν.

PROPOSITIO

XIIII.

In circulo æquales rectæ lineæ: æqualiter distant à centro. Et æqualiter distantes à centro: æquales inter se sunt.

Describatur circulus, in eo etiam rectæ quædam lineæ æquales ducantur. Es quia æquales: pro priore propositionis parte dico, eas etiam æqualiter à centro distare. Quòd si rectæ in circulo ductæ in æquali à centro distantia fuerint: & lineas has, ratione partis posterioris, inter se æquales esse conueniet. Quæ quidem ambæ propositionis partes sic retineri poterunt. Coniungantur extremitates ductarum

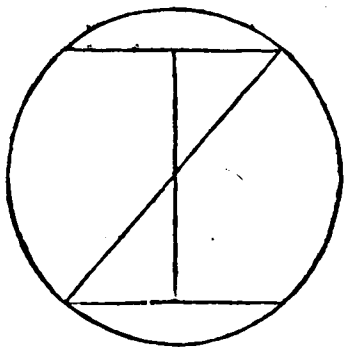


cum circuli centro quatuor rectis lineis. Et quoniam duo triangula descripta sunt, quorum anguli, quos ex una & eadem parte in circumferentia habent, quia per propositionem 8 primi, sunt inter se æquales, postquam super æquales in circulo ductas lineas, à centro, per propositionem 12 primi, perpendiculares ductæ fuerint, cum illæ per has, ex posteriore parte propositionis 3 huius, æqualiter secantur: & ipse perpendiculares tandem, ex 4 eiusdem primi, inter se æquales erunt: in quas deinde hæ cadunt rectæ lineæ, ex 4 definitione huius, æqualiter à centro distabunt: quod est primum, uel prior propositionis pars.

ALIA HVIVS PRIORIS PARTIS DEMONSTRATIO.

Maneat eiusdem dispositionis figura, nisi quod duæ, ex una parte ab extremitatibus ad centrum ductæ, rectæ lineæ possint omitti, prioris partis demonstratio etiam

etiam sic colligi poterit. Quoniam enim recta linea in circulo per centrum extensa, rectam lineam in circulo ductam aliam, quæ non per centrum transit, ad angulos rectos secans, ipsam, ex posteriore parte propositionis tertie huius, bifariam secat, hac eadem parte bis usurpata, & quia etiam rectæ in circulo ductæ, ex hypothesi sunt inter se æquales: quæ de his in circulo ductis æqualibus lineis per perpendicularares absconduntur lineæ, inter se æquales erunt. Sed sunt etiam æquales inter se, ex definitione circuli à centro ductæ lineæ, quæ cum harum æqualium extremitatibus coniunctæ sunt: per penultimam igitur propositionem primi, atq; illis duabus communibus notitijs, Quæ uni sunt æqualia, &c. & item, Si ab æqualibus æqualia subtrahantur, & reliqua, res tandem cõcluditur. Lineas scilicet ad illas à centro perpendiculares, eo quod quadrata, inter se æqualia habeant, æquales esse, id quod nunc est æqualis ipsarum à centro distantia argumentũ. Sed esto iam, quantum ad par-



tem posteriorem, quod rectæ ductæ æqualiter à centro distent: dico ipsas ductas inter se æquales esse, & hac quidem demonstratione. Cadant ad æqualiter ductas à centro perpendiculares, coniungatur etiam alterutra utriusq; æqualiter distantium extremitas cum centro circuli. Et quoniam perpendiculares ductæ, ex definitione Linearũ æqualiter à centro distantium, inter se sunt æquales, cum ab æqualibus rectis non possint describi diversa quadrata: & harum æqualium rectarum quadrata æqualia erunt. Iis igitur perpendicularium quadratis à subtendentium rectos, quæ & ipsæ, ex de-

finitione, inter se æquales sunt, quadratis subtractis: & residua quadrata, per 47 primi, inter se æqualia erunt: atq; tandem sic etiam æqualium quadratorũ latera æqualia. Sed quia utrunq; ex 2 parte propositionis 3 huius, rectæ ductæ est medietas: & ipsæ ductæ inter se æquales erunt, quod est secundum. In circulo igitur æquales rectæ lineæ, æqualiter, & re. quod demonstrasse oportuit.

ALIA EIVS QVOD IN HAC PROPOSITIONE SECUNDÒ proponitur, demonstratio.

Cadant ad æqualiter ductas à centro perpendiculares, coniungatur etiam alterutra utriusq; æqualiter distantium extremitas cum centro circuli. Et quoniam quæ ex centro ad circumferentiam ducuntur rectæ lineæ, inter se æquales sunt: quadratum igitur unius quadrato alterius ex centro ductæ lineæ, æquale erit. Rursus quoniam utriusq; ex centro ductæ quadrato, duarum linearum quadrata, ex 47 primi æqualia sunt: etiam quæ ab illis duabus describuntur quadrata, harum duarum linearum quadratis, ex cõmuni illa noticia, Eidem æqualia &c. bis usurpata æqualia erunt. Porro ab utroque æqualium illo quadrato quod à perpendiculari utrobique describitur, subtracto, cū ipsæ perpendiculares (ut ex hypothesi & definitione quadam colligere licet) una alteri æqualis sit, & residua quadrata, ex cõmuni quadam noticia, inter se æqualia erunt. Quare & horum æqualium quadratorum latera, æqualia. At uerò horum æqualium laterum, duplices sunt, ex posteriore parte propositionis tertie huius, rectæ in circulo ductæ: & ipsæ ductæ tandem ex illa cõmuni noticia. Eiusdem duplicia &c. inter se æquales erunt. In circulo igitur æquales rectæ lineæ, æqualiter distantes à centro. Et æqualiter distantes à centro, æquales inter se sunt, quod demonstrari oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

ΙΕ.

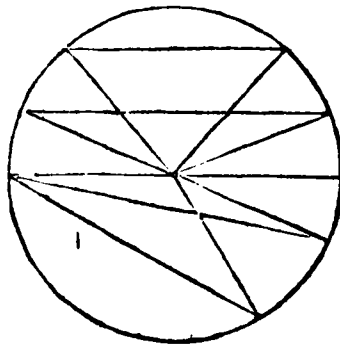
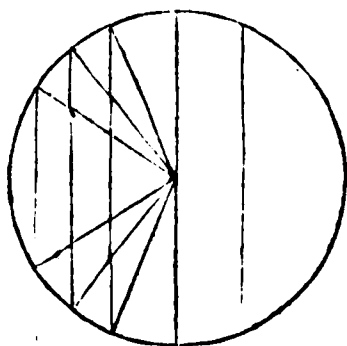
Εἰ κίκλω, μεγίστη μὴ ὅστις ἡ διάμετρος. τῶν δὲ ἄλλων, καὶ ἡ ἕγχιον τοῦ κέντρου, τὸ ἀπὸ τοῦ κέντρου μείζον ἐστίν.

Z

PROPOSITIO

In circulo, longissima quidem est diameter. Aliarum uerò, semper propinquior centro, remotiore longior est.

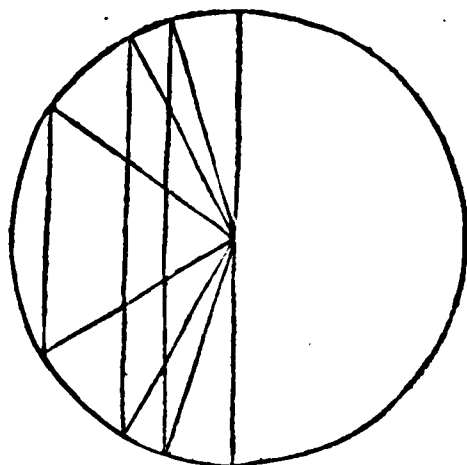
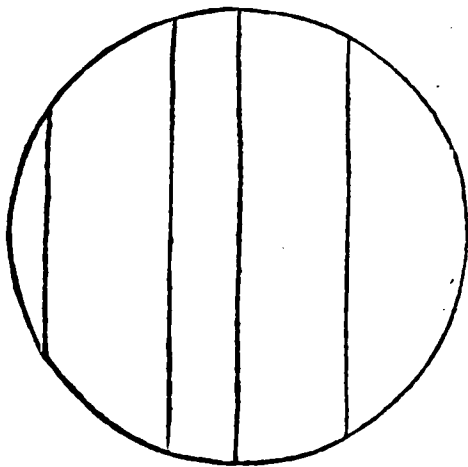
Sit circulus, in eo etiam aliquot rectę lineę ductę. Esto autem quòd una harum per circuli centrum, reliquę uerò utcunq; transeant: dico, per centrum transeuntem ex ductis omnium longissimam, aliarum uerò quamlibet centro propinquiorem, remotiore longiorem esse. Vtriusq; enim omnium præter centrum ductarum extre-



mitatibus, rectis lineis cum centro copulatis, prior propositionis pars ex propositione 20 primi, una tamen recta subinde pro duabus alijs sibi æqualibus sumpta, demonstrabitur. Posterior deinde ex 24 eiusdē retineri potest. quod indicasse oportuit.

APPENDIX.

Oportet autem, ut omnes rectę ductę ex una diametri parte appareant, & quidem idco ut cognoscatur, quę linea ex reliquis diametro uel centro propinquior, quę item ab eo remotior sit. Quare si una, uel plures etiam ex altera diametri parte



conspiciantur rectę lineę, in qua parte pauciores fuerint, eius lineę ad alteram partem traducendę sunt hoc modo. Continuentur in rectum singularum ductarum, quibus in altera parte æquales ducendę sunt, perpendiculares ad suarum ipsarum longitudinem ultra centrum: deinde ab extremitatibus harum, tanquam rectarum datarum. per 11 primi, ad angulos rectos lineę, ex utraq; parte usq; ad circūferentiam continuatę excitentur. Et quoniam hæ singulę, rectis in priori parte ductis, ex definitione Rectarum in circulo æqualiter à centro distantium. æquales sunt, quęq; suę, æquali nunc uel æqualibus pro æqualibus usurpatis, demonstratio ut præmissa est absoluat.

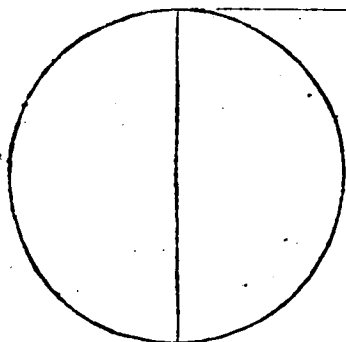
Ἡ τῇ ἀκμὶν τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπὸ ἀκρας ἀγομένη, ἐκτὸς περὶ τὴν κύκλῳ. Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν τὸ πορὶ τῆς ἐνθείας ἐστὶ τοῦ περιφθρείας, ἐπὶ τῇ ἐνθείᾳ οὐ περιμετρεῖται. Καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία, ἀπωλεῖς ὀθείας γωνίας ἐνθυγράμμου μείζων ὅστις ἡ δὲ λοιπὴ, ἐλάττω.

PROPOSITIO

XVI.

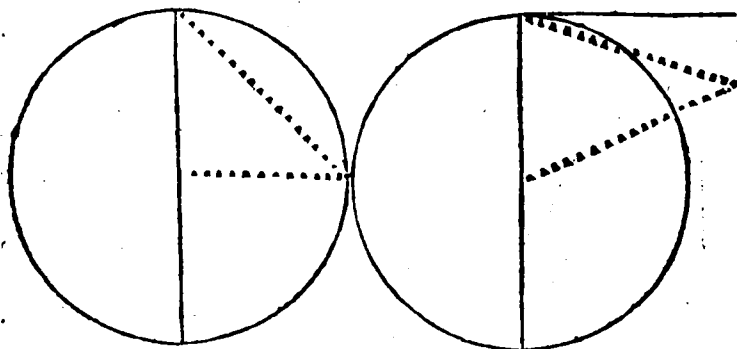
Quæ à diametri circuli extremitate ad angulos rectos ducitur, extra ipsum circulum cadet. Et in locum, inter ipsam rectam lineam & circumferentiam, altera recta non cadet. Et semicirculi quidem angulus, omni acuto rectilineo angulo amplior est. Reliquus autem, angustior.

Describatur circulus, ducatur in eo etiam diameter, dico primum, si quæ linea ab alterutra diametri extremitate ad rectos. excitetur angulos: extra circulum eam cadere oportere, neque ex angulo, sub ipsa & circumferentia comprehenso, aliam rectam educi posse.



Angulum præterea semicirculi, qui sub diametro & circumferentia continetur, omnium acutorum rectilineorum maximū: qui uerò sub circumferentia & ad rectos excitata, omnium acutorum minimum esse. Habet hæc propositio quatuor partes, quæ ordine sic demonstrari possunt. In ipsam circumferentiam, cum sit latitudinis expers omnis linea, ad rectos excitata cadere non potest, cadet ergo intra uel extra ipsam circumferentiam. Quod si intra cadere sumptū fuerit, mox, si possibile sit, ea ducta, & ad circumferentiam usque continuata, clauso item trian-

gulo, extremitate huius ad rectos ductæ altera, recta quadam linea cum centrō copulata. Et quoniam triangulum quod sic describitur ex definitione circuli, isoscelis est: duo igitur ipsius anguli quos ad basim habet, inter se æquales erunt. Quia uerò unus eorū est rectus, ratione ductæ ad rectos angulos lineæ: & alter sic rectus erit, quod est contra propositionē in primo 17, quæ dicit, Omnis trianguli duos angulos, quomocumque sumptos, duobus rectis minores esse. Vel contra corollarium propositionis in primo 32, quod quidem dicit, Omnis trianguli non duos tantum, sed tres eius internos angulos, duobus rectis æquales esse. Ab extremitate igitur



diametri ad angulos rectos ducta linea, intra circulum non cadet. Et quia neque in ipsam etiā circumferentiam, ut dictum est: extra circulum ergo, ut uult propositio, ea cadet, id quod primò erat demonstrandum. Quòd uerò inter ductam & circumferen-

tiam cadere nulla alia possit, impediunt propositio in primo 19, atque deinde circuli definitio. Alia enim quadam interposita, si ad ipsam deinde à centrō, per 12 primi, perpendicularis ducatur, cum rectus in triangulo angulus utroque reliquo amplior sit, ex propositione etiam 19 primi, ampliori angulo longius latus subtendatur: statim ex definitione circuli, æquali tamen pro æquali linea sumpta, partialem suam tali linea longiorem esse, inferri potest: quod est impossibile. Patet itaque id quod secundo

cundò demonstrandum erat. Et quia hoc nunc constat: angulum igitur illū, quem diameter & circumferentia continent, omnium acutorum rectilineorum maximū: reliquum deinde, sub circumferentia & ad rectos angulos excitata comprehensum minimum esse, sequi necesse est, cum aliās si statueretur unus angulus illo maior, alius deinde hoc reliquo minor: ex loco inter circumferentiam atq; ad rectos angulos ductam, cōtra secundam partem huius, alia recta educi posset. Hoc autem cum demonstratum sit esse impossibile: quod igitur tertio & quarto propositū est, iam demonstratum erit. Constat itaq; tota propositio, quod erat demonstrandum.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Εκ δὴ τούτων φανερὸν. Ὅτι ἡ τῆς ἀγμέτρως τῆς κύκλου πρὸς ὁρθὰς ἀπὸ ἀκέρως ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου. Καὶ ὅτι εὐθεῖα κύκλου ἔχου ἐν μόνον ἐφάπτεται σημείον.

COROLLARIUM.

Ex hoc sanè manifestum est, Quòd à diametri circuli extremitate ad rectos angulos ducta: ipsum circulum tangat. Et quòd recta linea circulum in uno tantum puncto tangat.

Ἐπὶ δὲ τούτῳ. Quoniam rectam lineam, duobus in circuli circumferentia punctis comprehensam, intra ipsum cadere, ex 2 propositione huius ostensum est, quod admonuisse oportuit.

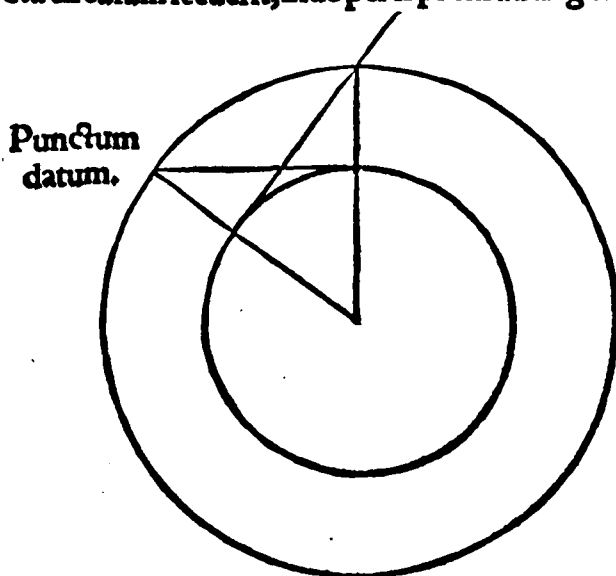
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, τοῦ δοθέντος κύκλου, ἐφαπτομένην εὐθεῖαν χαρμύλιν ἀγαγεῖν.

PROPOSITIO XVII.

A dato puncto, dato circulo, contingentem rectam lineam ducere.

Sit punctum datum, circulus item datus, atq; propositū, à puncto ad circulum contingentem rectam lineam ducere. Ipsum igitur punctum cum centro circuli, (quod quidem semper, ubi ignotum id fuerit, ex propositione prima huius inueniri licet) per postulatū primum, recta quadam linea coniungatur, atq; ubi hæc recta circulum secuerit, inde per u primi ad angulos rectos linea excitetur. Porro hac



eadem recta, qua cum punctum datum & centrū circuli iuncta sunt, loco semidiametri sumpta ex dati circuli cētro alius describatur circulus, atq; ubi is ad rectos angulos ductam secat, ex hoc puncto alia ad centrum recta linea ducatur, à cuius intersectione tandem cum circulo dato, postquam linea recta ad datum punctum ducta fuerit, cum hæc recta ea sit quæ maxime petitur propositioni satisfactum erit, id quod hoc modo demonstrabitur. Quoniā enim hac præparatione duo triangula descripta sunt, quorum duo

latera unius duobus lateribus trianguli alterius, ex definitione circuli, bis usurpata, æqualia

æqualia sunt, angulum etiam inter æqualia latera, angulo æqualem habent, cum videlicet ille sit, qui ad centrum ponitur, bis sumptus: ex propositione igitur 4 primi, & reliquum tertium latus reliquo tertio lateri: anguli insuper reliqui angulis reliquis: ac totum triangulum toti triangulo æquale erit. Quia autem unus angulus ex reliquis in triangulo uno, is nimirum quem ad rectos ducta, & una dati circuli semidiameter comprehendunt, est rectus: & in altero qui huic, propter æqualitatē subtensarum, est æqualis, linea item ad rectos ductam secante, & altera dati circuli semidiametro includitur, rectus angulus erit. Hoc igitur cum ita sit: secans hæc, ut diximus, ex priore parte corollarij propositionis 16 huius, circulum datum tangere dicitur. Et quia hæc secans à puncto dato etiam egreditur: factum igitur quod maxime uolebat propositio. A dato scilicet puncto, dato circulo contingens recta linea ducta est, quod fieri oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ.

Εὰν κύκλος ἐφαπτήται πρὸς ὑπὲρθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς κέντρου ὑπὸ τῶν ἀφ' αὐτῆς ὑπὸ τῶν ἀφ' αὐτῆς πρὸς ὑπὲρθεῖα· ἢ ὑπὸ τῶν ἀφ' αὐτῆς πρὸς ὑπὲρθεῖα, ἢ ὑπὸ τῶν ἀφ' αὐτῆς πρὸς ὑπὲρθεῖα, ἢ ὑπὸ τῶν ἀφ' αὐτῆς πρὸς ὑπὲρθεῖα.

PROPOSITIO XVIII.

Si circulum tetigerit recta quædam linea, à centro uerò in contactum ducta fuerit recta quædam linea alia: ducta, in contingente perpendicularis erit.

Describatur circulus, eum etiam tangens recta linea ducatur: dico igitur, si à centro ad punctum contactus recta quædam linea ducta fuerit, quod hæc recta ad contingentem sit perpendicularis. Si uerò non, ducatur per propositionem 12 primi, à centro ad ipsam contingentem recta perpendicularis alia. Et quoniam perpendicularis hæc, propter æqualem & erectum situm, angulos cum contingente ἰσῶς, æquales inter se facit, unde sic uterque eorum, ex quadam definitione, rectus est: ratione recti huius, qui nimirum est in triangulo, uterque ex reliquis eiusdem trianguli angulis, recto angulo minor erit. Quia uerò ampliori angulo omnis trianguli, ex propositione 19 primi, longius latus subtenditur: ex definitione igitur circuli, æquali tamen pro æquali linea sumpta, partialis linea sua totali longior erit, cum tamen contrà Totalis, ex cōmuni quadam

noticia, linea sua partiali longior esse debeat. Quare præter contactum à centro in contingentem ducta, ad ipsam perpendicularis non erit. Ομοίως δὲ δέξομεν ὅτι καὶ ἄλλης πρὸς τὴν καὶ ἄλλης πρὸς τὴν & reliqua. Simili quoque ratione ostenditur, quod nulla etiam alia, præter eam, quæ à centro ad contactum tendit, ad contingentem perpendicularis esse possit. Quare hæc ipsa quæ à centro ad contactum ducitur recta linea, in contingentem perpendicularis erit. Si igitur circulum tetigerit recta quædam linea, à centro uerò in contactum ducta fuerit recta quædam linea alia: ducta, in contingente perpendicularis erit, quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ.

Εὰν κύκλος ἐφαπτήται πρὸς ὑπὲρθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς κέντρου ὑπὸ τῶν ἀφ' αὐτῆς πρὸς ὑπὲρθεῖα, ἢ ὑπὸ τῶν ἀφ' αὐτῆς πρὸς ὑπὲρθεῖα, ἢ ὑπὸ τῶν ἀφ' αὐτῆς πρὸς ὑπὲρθεῖα, ἢ ὑπὸ τῶν ἀφ' αὐτῆς πρὸς ὑπὲρθεῖα.

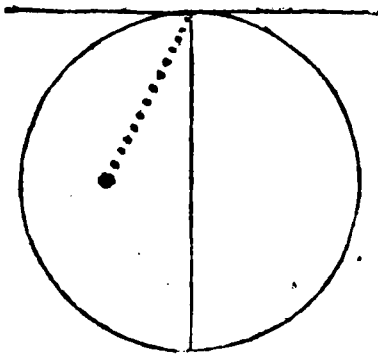
PROPOSITIO XIX.

Si circulum tetigerit recta quædam linea, à contactu uerò ipsi tangenti ad angulos rectos recta linea ducta fuerit: erit in ducta centrum circuli.

Aa

Describatur

Describatur circulus, eum etiam tangens linea recta ducatur: dico, si à contactu, tanquam à puncto in contingente dato, per 11 primi, ad rectos angulos linea per circulum ducta fuerit, in ea centrum circuli esse.



Quod si non, erit id necessariò extra eam alibi. Eo igitur alibi constituto atq; signato, inde etiam recta quadam linea ad punctum contactus ducta, cum hæc, per præmissam 18, ad contingentem perpendicularis existat: angulus minor maiori, uel partialis suo totali, ex definitione, qua omnes rectos æquales inter se esse intelligitur, æqualis erit: quod est impossibile. Punctum igitur extra perpendicularem alibi constitutum, centrum circuli non erit: in ipsa ergo contingente per circulum ducta perpendiculari id

esse necesse est. Si circulum igitur recta quædam linea tetigerit, à contactu uerò &c, quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

K.

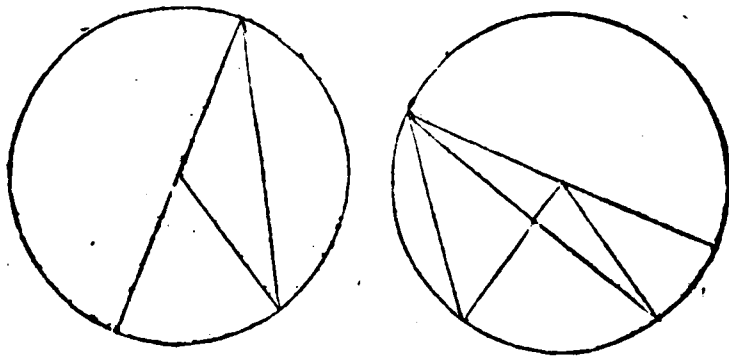
Εν κύκλῳ, ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία, διπλασίωμ' ὅστις ἡ πρὸς τῇ περιφέρειᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν αἱ γωνίαι.

PROPOSITIO

XX.

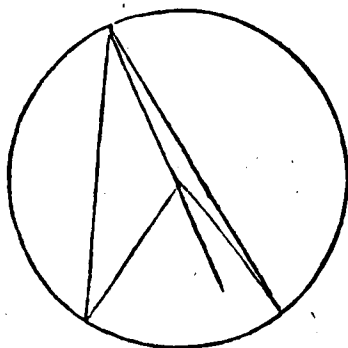
In circulo, qui ad centrum angulus, duplus est eius qui ad circumferentiam, quando eandem circumferentiam basim habuerint ipsi anguli.

Describatur circulus, in eo etiam duo ponantur anguli, unus quidem ad centrum, alter uerò ad circumferentiam, sic ut ambos unus & idem circumferentiæ arcus subtendat: dico, ad centrum positum angulum, duplum esse eius, qui ad circumferentiam ponitur. Huius propositionis figuratio quia tripliciter uariari potest, triplici etiam demonstratione hic opus erit. Aut enim ad centrū anguli alterū latus anguli in circūferentia alteri lateri coniungetur, aut non. Si primum, cum ex



definitione circuli à centro ad circumferentiam exeuntes lineæ, inter se æquales sint, unde sic triangulum isosceles appareat. qui anguli, ex priorē parte propositionis 5 primi, sunt inter se æquales, hi simul sumpti, ad utrumq; æqualium dupli erunt. Sed quia his simul, ut duobus internis & oppositis trianguli angulis, æqualis est, ex propositione 32 primi, angulus ad centrum positus, ut eiusdem trianguli angulus externus: & ad utrumq; æqualium idem externus, ad centrum positus angulus duplus erit, quod ostendisse oportuit. Sed esto iam quòd nō coniungantur latera: quia uerò tum accidit, quòd unum latus unius, latus unū alterius anguli secet, aut non secet. Si secet, diametro ab angulo qui est ad circumferentiam per centrum ducta, cum

cta, cum tam totalis quàm etiam partialis ad centrum externus trianguli angulus, per easdē propositiones primi bis usurpatas, suo interno opposito angulo duplus sit, partialibus ab ipsis totalibus subtractis, cum hi & illi eodem modo sese habeant:



& residui anguli, unus ad alterum, circa centrum quidem ad eum qui est ad circumferentiam duplus erit. Quòd si unū unius, unum latus alterius anguli non fecerit, ducatur ab angulo qui est ad circumferentiam, per angulum ad centrum recta quædam linea, & demonstratio (partialibus tamen utriusq; anguli simul sumptis) ut modò succedet, angulum scilicet ad centrum eius, qui est ad circumferentiam; duplum esse. Angulus igitur qui ad centrum in circulo ponitur, duplus est eius qui ad circumferentiam, qualitercumque sanè hi, modo una & eadem circumferentia sub-

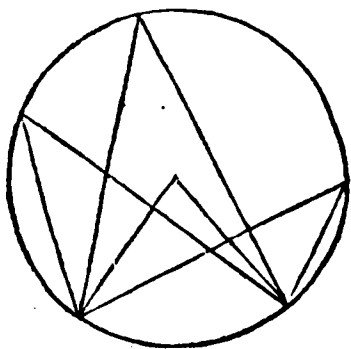
tenduntur, descripti fuerint. quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑ.

Εγκύκλιον, αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

PROPOSITIO XXII.

In circulo, qui in eodem segmento sunt anguli, æquales inter se sunt.



Describatur circulus, in eo etiam aliquot super uno & eodem segmento anguli: dico, illos angulos inter se æquales esse. Quod quidem, ductis a segmenti terminis ad centrum duabus rectis lineis, per præcedentem 20 & communem illam noticiam, Quæ eiusdem dimidia, æqualia inter se sunt, manifestum fiet.

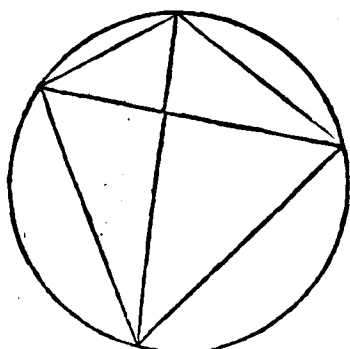
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒ.

Τῶν ἐν τῇ κύκλῳ τετραπλεύρῳ, αἱ ἀπεναντίας γωνίαι, διωσίμῳ ὀρθῶς ἴσαι εἰσίν.

PROPOSITIO XXIII.

Quadrilaterorum in circulis anguli, qui ex opposito, duobus rectis sunt æquales.

Describatur circulus, in eo etiam quadrilaterum quaecumq; æqualium uel in-



equalium laterum: dico, angulos quosq; oppositos duobus rectis æquales esse. Ducantur in quadrilatero due diametri. Et quoniam omnis trianguli tres anguli interiores, ex corollario propositionis 32 primi, duobus rectis æquales sunt. Et rursus, quoniam etiam æquales inter se sunt, ex præmissa 21, qui in eodem segmento sunt anguli, eo quod prius dicitur, semel: altero uerò, bis usurpato, bis insuper angulo pro equali alio sumpto: quantum ad duos oppositos in quadrilatero angulos ratione oppositionis unius,

propositioni satisfactum erit. Porro eodē ordine, demonstratione pro alijs duobus

Aa 2

oppositis

oppositis in quadrilatero angulis instituta, quòd & illi duobus rectis angulis æquales sint, manifestè patebit. Quadrilaterorum igitur in circulis anguli, qui ex opposito, duobus rectis sunt æquales. quod demonstrasse oportuit.

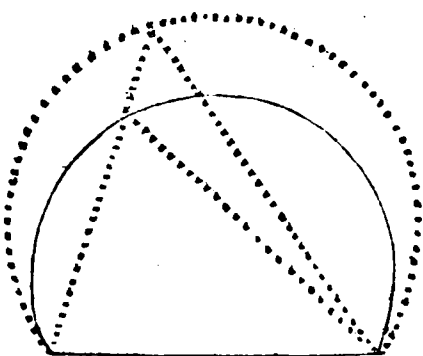
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ.

Επὶ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ, δύο τμήματα κύκλων ὁμοία καὶ ἀνισα, οὐ συντιθέσθονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

PROPOSITIO XXIII.

Super eadem recta linea, duæ sectiones circularum similes & inæquales, non constituentur ad easdem partes.

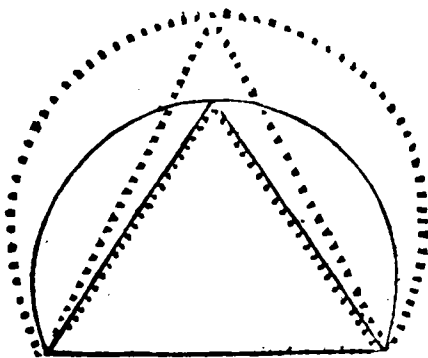
Describatur circuli sectio: dico, quòd super eius recta impossibile sit, aliam, descriptæ similem & inæqualem, ad eandem etiam partem, posse cōstitui sectionem. Quòd si uideatur hoc posse fieri, constituatur sanè super hac recta linea sectio alia,



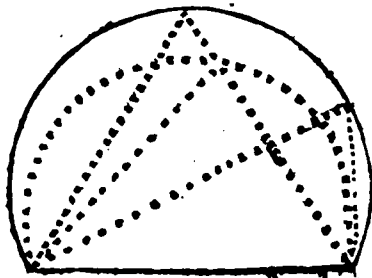
ut quæ positæ similis sit & inæqualis, ad illam eandem etiam partem, & extendatur, per primum postulatum primi, recta quædam linea, ab una rectæ extremitate per arcus utriusq; sectionis transiens, atq; ubi hæc sectionum arcus secuerit, inde etiam, per postulatum eiusdem primi secundum, rectæ lineæ ad alteram rectæ extremitatem ducantur. Et quoniam sectiones sunt, ex hypothesi aduersarij, inæquales, atq; etiam similes, cum similitudo sectionū circuli ab æqualitate angulorum,

quos illæ sectiones suscipiunt, definiatur: anguli illi quos secundò ductæ cum prima in sectione comprehendunt, externus & internus oppositus unius trianguli, inter se æquales erunt. Sed quia non sunt, ut quidem hoc propositio in primo 16 testatur, neq; sectiones etiam, ut ponitur, inter se inæquales & similes erunt. Super eadem igitur recta linea, duæ sectiones circularum similes & inæquales, non constituentur ad easdem partes, quod demonstrasse oportuit.

APPENDIX.



Potest etiã figura huius propositionis describi, ut super sectionibus constitutorum angulorum uterq; sua propria latera habeat, utq; latera unius ab alterius sectionis laterib. includantur. Quòd si ad hunc modũ figura descripta fuerit, tum quia angulus interioris angulo sectionis exterioris, per propositionem 21 primi, maior est, descripti igitur arcus similes non erunt, id quod est contra propositionis hypothesim.



Item licet uterq; angulorum sua propria latera habeat, accidit tamen aliquando, ut unum latus unius, unum alterius sectionis latus secet. Quòd si sic, tum propter demonstrationem faciliorem, ab interfectione arcus interioris, & lateris unius anguli sectionis exterioris alia ad extremitatem rectæ lineæ recta ducenda est. Et quoniam in eodem segmento anguli, ex propositione 21 huius, inter se sunt

Se sunt æquales, cum unus eorum alio quodam alterius segmenti angulo, ut externus suo interno, ex propositione 16 primi, maior sit: & alter, propter æqualitatem, eodem maior erit: non æquales igitur anguli, neq; etiā similes sectiones, quod est contra hypothesim. Super eadem igitur recta linea, duæ sectiones circulorum similes & inæquales, nō constituētur, ad easdē partes. quod demonstrari oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΔ.

Τὰ ἐπὶ ἴσων ἐνθεωρῶμοια τμήματα κύκλων, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.

PROPOSITIO XXIII.

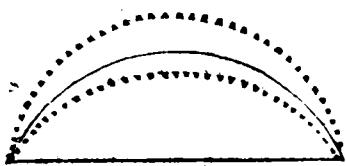
Super æqualibus rectis lineis similes circulorum sectiones, æquales inter se sunt.

Sint duæ uel plures rectæ lineæ æquales, super ijs etiam similes circulorum se-



ctiones constitutæ: dico, illas sectiones inter se æquales esse. Est huius propositionis demon-

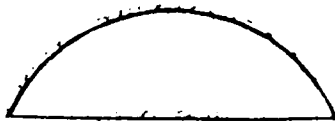
stratio præcedens 23. Nam congruente uel superposita una sectione alteri, cum earum rectæ, ex hypothesi, sint inter se æquales, una extremitate unius super una sectionis alterius posita, & in alteram huius altera extremitas illius coincidet, quare sic & arcus sectionum coincidere oportet. aliàs sequeretur, Similes & inæ-



quales circulorum sectiones super una & eadem recta describi posse, quod est contra propositionem præcedentem. Coincidunt ergo, ac propterea æquales etiam inter se, ex communi quadam noticia, quæ in primo his uerbis exposita est, Quæ congruunt, & reliquæ.

DEMONSTRATIO ALIA.

Superponatur una sectio alteri, ita ut unius extremitas una super alterius sectio,



nis unam extremitatem ac recta super rectam collocetur. Et quoniam æquales sunt ipsæ rectæ: altera extremitas unius cum altera alterius sectionis extremitate coinci-



det: atq; hinc linea lineæ congruit. Quod si sectio sectioni cōgruat: eas inter se æquales esse, ut uult propositio, ex noticia quadam communi concluditur, Si igitur &cæ. Esto autem quod non congruant sectiones basibus congruentibus, sed dif-

ferant, atq; in diuersa loca cadant. Quoniam enim circulus, ut uult propositio 16 huius, in pluribus punctis quàm duobus circulum alium non secatur, cum hic in tribus punctis fiat circulorum sectio, propositioni citatæ contrarium fieri apparet, quod non conceditur. Quare congruente linea lineæ, nō potest non sectioni quoque sectio congruere. Super æqualibus igitur rectis similes circulorum sectiones constitutæ: & ipsæ sectiones inter se æquales erunt. quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΕ.

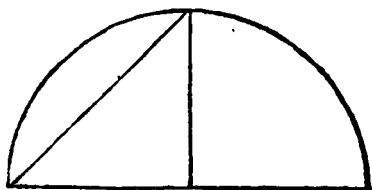
Κύκλος τμήματι τοῦ ἐνθεωρῶς, προσαναγραφῆται ἢ κύκλος οὗ πορὶ τμήμα.

Αα 3

PROPOSITIO

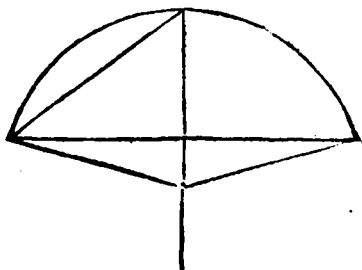
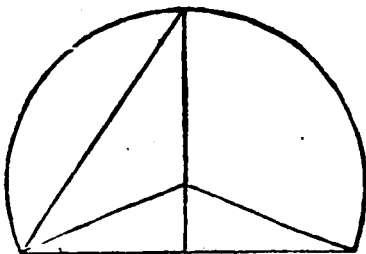
Circuli sectione data, describere circulum cuius est sectio.

Sit sectio circuli data, atq; propositum, circulum eius describere, hoc est, sectionem hanc, ut circulus tandē sit, perficere & complere. Diuidatur igitur recta, super quam est constituta sectio, per propositionem 10 primi, bifariam, atq; à puncto di-



uisionis huius ad angulos rectos linea excite-
tur, ad arcum usque, & ultra etiam lineam re-
ctam, quantum nimirum necessarium fuerit,
eam prolongando. Erit autem in ea ad rectos
ducta linea, ut testatur corollarium propo-
sitionis primæ huius, centrum circuli. Ducta igitur
ab huius $\pi\epsilon\delta\varsigma$ $\delta\epsilon\delta\alpha\varsigma$ ductæ & arcus intersec-
tione ad angulum sectionis alterutrum recta qua-
dam linea, si ad hanc anguli inter se æquales

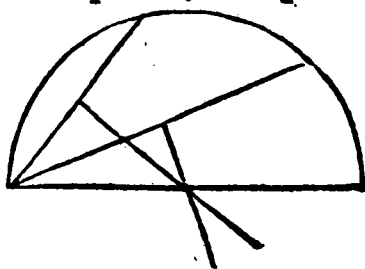
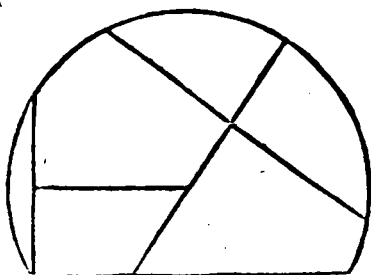
sint, ubi hæc eadem $\pi\epsilon\delta\varsigma$ $\delta\epsilon\delta\alpha\varsigma$ ducta rectam arcus secat, ibi centrum circuli: ipsam
uero sectionem, Semicirculum esse pronuncies. Eo igitur ex hoc puncto circini of-
ficio completo, nona propositione huius adiuuante, propositioni satisfactum erit.
Quòd si dicti anguli fuerint inter se inæquales, angulo ei qui sub recta hac, atq; ea
super qua est constituta sectio, cōprehenditur, per 23 primi, ut alteri angulo æqua-



lis fiat, rectæ cuiusdam lineæ ductu succurrendum erit. Quo facto, ubi hæc ad re-
ctos ductam tetigerit, centrum circuli ibi esse pronūciabis. id quod sic demonstra-
ri potest. Ducatur ex hoc puncto ad alterā arcus extremitatē recta quedam lineæ.
Et quoniam hæc, & aliæ duæ, quæ ex hoc eodem puncto ad circumferentiam con-
currunt rectæ lineæ, ex propositionibus 6 & 4 primi æquales inter se sunt: quòd
tandem id punctum, de quo iam agitur, eius, cuius est data sectio, circuli centrum
sit, ex propositione 9 huius manifestum erit. Eo igitur nunc secundum unius æqua-
lium linearum interuallum, per 3 postulatū primi, inde descripto, cum per reli-
quarum etiam æqualium extremitates transeat, proposito satisfactum erit. Circu-
li igitur sectioni datæ, circulus ipse descriptus atq; cōpletus est: quod fieri oportuit.

EST ET ALIA HVIVS PROPOSITIONIS DEMONSTRATIO.

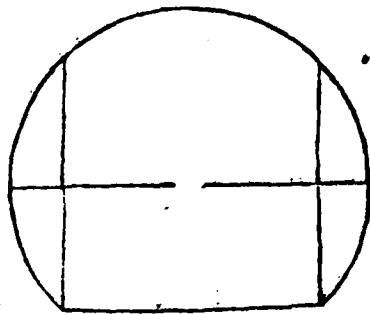
In data sectione, cuius circulus compleri debet, ducantur duæ rectæ lineæ. Vel,
ut sit operatio certior. Sumantur tria in sectione puncta, utcunq; hæc duabus re-



ctis lineis copulentur, & erunt, ut supra, duæ in sectione rectæ lineæ ductæ. Harum
nunc

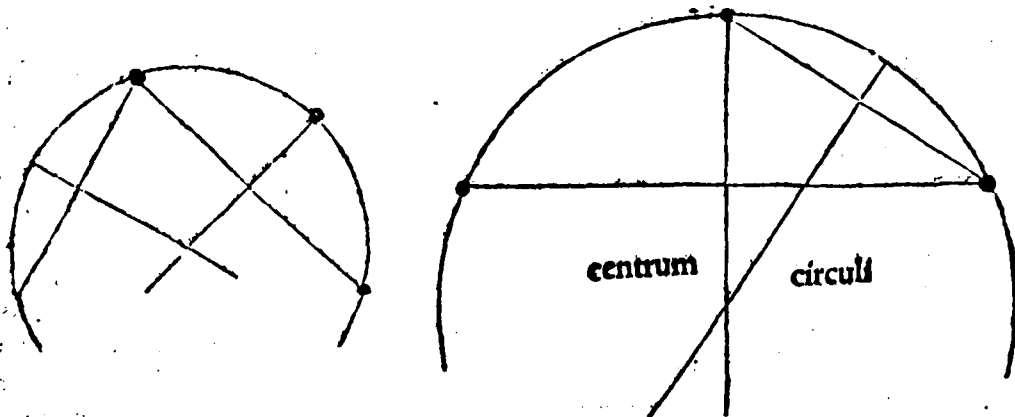
nunc utraq; bifariam diuifa, à puncto diuifionis utriufq; ad angulos rectos linea, per propolitionem 11 primí excitetur, ubi tandem hæ duæ ad rectos ductæ feſe mutuo ſecant, ibi per corollarium primæ huius, bis uſurpatum, circuli, qui ſectionē datam ſua deſcriptione comprehendit, centrum eſſe pronuntiabitur.

Quod ſi ad rectos ductæ ſeſe mutuo non ſecuerint, id quòd aliquando, ubi in circulo ductæ rectæ lineæ parallelæ ſunt, accidere poterit, quia tum ad rectos ductæ coincidunt, atq; ſimul una recta linea ſunt, ea bifariam diuidenda, per punctum deinde hoc, centrum quæſiti circuli exprimendum erit.



APPENDIX.

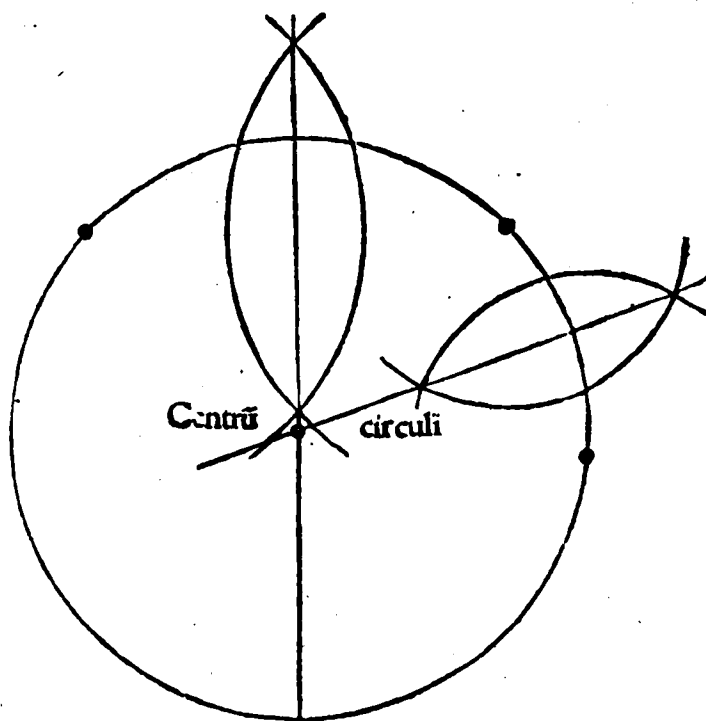
Vtuntur hac propolitione, qui centrū trium punctorum, cum opus ſit, quærere, hoc eſt circulum, per data tria puncta tranſeuntem, deſcribere ſolent. Nam cum circulus per data puncta tranſire debeat, ſectionem quandam circuli per puncta data occultè ductam ſibi imaginantur. Quòd deinde ex tribus illis punctis (uno ta-



men bis repétito) tanquam ex tribus centris, officio circini, ultra medietatem ſpaciij, per quod arcus deſcribi debet, ſemper extenſi, quatuor circulorum arcus deſcribant, ita ut ſemper biní & biní ſeſe mutuo ſecent, per puncta tandem inter ſectionum duas rectas uerſus unam & eandem partem ducāt, nihil certè aliud eſt, quàm dicta puncta duabus rectis coniungere, à medià deinde harum, ad angulos rectos lineas excitare. Id quod cuilibet, propolitionē 11 primí altius intuenti, perſpicuum erit. Atq; huius hoc loco Lectorem admonere uoluimus.

SEQVITVR HVIVS TRACTATIONIS PRO CENTRO trium punctorum inueniendo figura geometrica alia,

PROTASIS



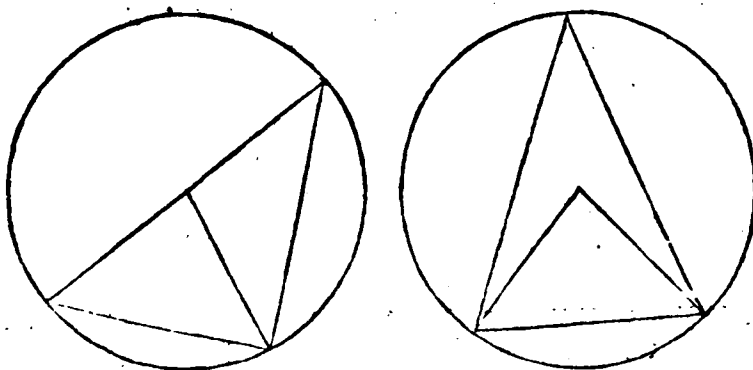
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κθ.

Εν ἴσῃς κύκλοις, αἱ ἴσαι γωνίαι ὑπὸ ἴσων περὶ φθόγων βεβήκησιν, αὐτὴ πρὸς τοῖς κέντροις, αὐτὴ πρὸς τοῖς περὶ φθόγαις ὡς βεβήκησιν.

PROPOSITIO XXVI.

In æqualibus circulis, æquales anguli in æqualibus circūferentijs subtenduntur, siue ad centra. seu ad circumferentias deducti fuerint.

Describantur æquales circuli, quod nimirum una circini expansione fieri debet, in ijs etiam, tam ad centra quàm ad ipsas circumferentias, æquales anguli, in uno quidem primò ad placitū illis descriptis, in altero uerò uel alijs, si plures quàm duo circuli fuerint, uno cuiusq; anguli latere ducto, per propositionem in primo 23 describendi sunt: dico igitur, quod illi anguli, tam ad centra quàm ad circumferentias positi, subtensos arcus æquales habeant. Quoniā enim angulus ad centrum unius est æqualis, ex hypothesi, angulo, similiter ad centrum posito, circuli alterius, & rursus quoniam à centris ad circumferentias lineæ rectæ ductæ, propter æquales ex



hypothesi circulos, inter se æquales sunt, in singulis tertio latere ducto: & hæc tertia latera

et latera per propositionem 4 primi, circumferentię deinde uel circulorum sectiones, propterea quod angulos, ex hypothesi, inter se æquales suscipiant, per definitionem similium sectionum, & propositionem 24 huius, inter se æquales erunt. Subtractis igitur nunc æqualibus arcibus ab æqualibus circulis, cum & residui arcus, à quibus scilicet æquales in æqualibus circulis anguli subtenduntur, ex communi quadam noticia inter se æquales sint, propositioni satisfactum erit. Aequales igitur anguli in æqualibus circulis, ab æqualibus circumferentijs subtenduntur, siue ad centra, seu ad circumferentias deducti fuerint. quod demonstrasse oportuit.

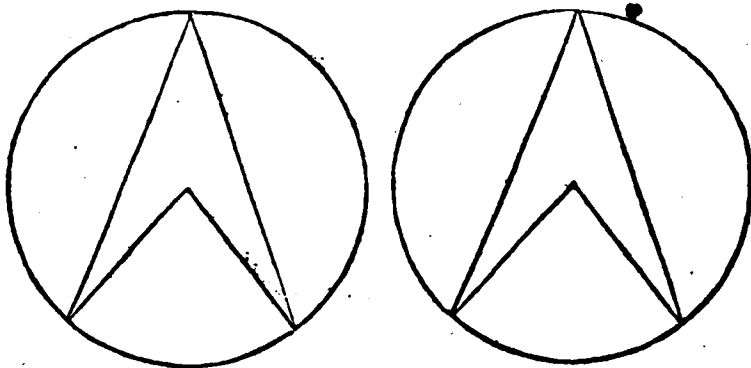
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΖ.

Εν τοῖς ἴσοις κύκλοις, αἱ ὑπὸ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι, ἢ αἱ ἀλλήλων εἰσὶν, ἢ αὐτὲ πρὸς τοῖς κέντροις, ἢ αὐτὲ πρὸς τοῖς περιφερείαις ὡς βεβηκυῖαι.

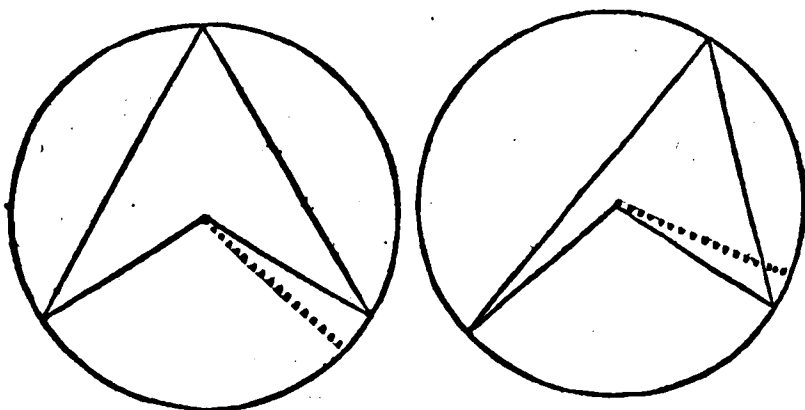
PROPOSITIO XXVII.

In æqualibus circulis, qui super æquales circumferentias deducuntur anguli, æquales inter se sunt, siue ad centra, seu ad circumferentias deducti fuerint.

Describantur æquales circuli, ponantur etiam in ijs super æquales circumferentias anguli: dico igitur, quod illi anguli, tam ad centra quàm ad circumferentias positi, inter se æquales sint. Quoniam enim qui ad centra ponuntur anguli, sunt aut



inter se æquales, aut non. Si æquales: & qui ad circumferentias ponuntur anguli, cum hi, ex propositione 20 huius, sint ad centrum positis dimidia, inter se æquales erunt, quod est propositum. Quod si fuerint inæquales, succurratur uni ex his, per 23 primi, siue maiori siue minori angulo, ut alteri æqualis fiat, quo facto, & illorum æqualium angulorum circumferentię uel arcus subtendentes, per præmissam, in-



ter se æquales erunt. Sed quia uni illorum æqualis etiam est, ex hypothesi, mutandi
Bb anguli

anguli subtendens. per hanc igitur communem noticiam, Quæ eidem sunt æqualia & reli. infertur tandem, partialem totali subtendenti circumferentiæ æqualem esse, quod est impossibile. Inæquales igitur non sunt ad centrum positi anguli, sed æquales. Et quia æquales: etiam ad circumferentias positi cum sint horum dimidiij, ut dictum est, inter se æquales erunt. Aequales igitur circumferentiæ uel arcus, in æqualibus circulis, æquales angulos subtendunt, siue ad centrum, siue ad circumferentias positi fuerint, quod demonstrasse oportuit.

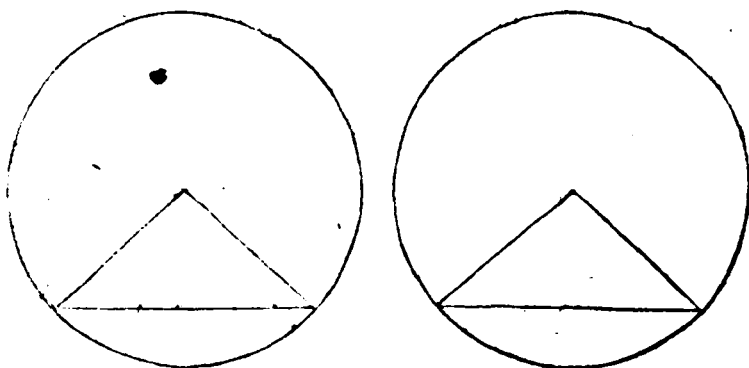
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΗ.

Εν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι ἐνθῆναι ἴσας πρὸς φέρειας ἀφαιρῶσι, τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι, τὴν δὲ ἐλάττωνα τῇ ἐλάττωι.

PROPOSITIO XXVIII.

In æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ, æquales circumferentias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem uerò minori.

Describantur æquales circuli, in ijs etiam æquales rectæ ducantur: dico igitur, per illas rectas æquales etiam in circulis auferri circumferentias, maiorem scilicet maiori, & minorem circumferentiæ minori. Nam ductis ab extremitatibus rectarum ad centra rectis lineis, cū circuli ex hypothese sint inter se æquales, & hæ rectæ



ductæ ex definitione æqualium circulorum, inter se æquales erunt. Quare & anguli ad centrum positi per propositionem 3 primi, æquales, atq; insuper arcus uel circumferentiæ, quæ hos æquales angulos subtendunt, per 26 huius, æquales, quod est unum. Porro quia circuli ex hypothese sunt æquales, ab his igitur si æquales circumferentiæ ablatae fuerint, & quæ relinquuntur circumferentiæ, ex communi quadam noticia, inter se æquales erunt. In circulis igitur æqualibus, æquales rectæ lineæ æquales circumferentias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem uerò minori, quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΘ.

Εν τοῖς ἴσοις κύκλοις, ὑπὸ τὰς ἴσας πρὸς φέρειας ἴσαι ἐνθῆναι ὑποτίνουσιν.

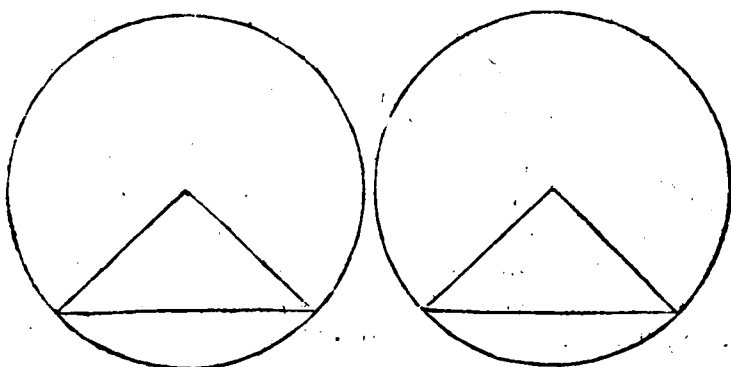
PROPOSITIO XXIX.

In æqualibus circulis, sub æqualibus circumferentijs æquales rectæ lineæ subtenduntur.

Vt præcedens 28, per æquales rectas in æqualibus circulis ductas, æquales circumferentias auferri asserit: sic quoq; hæc uicesima nona, ubi in æqualibus circulis per lineas quasdam rectas, æquales circumferentiæ ablatae fuerint, illas rectas æquales esse infert. Describantur igitur æquales circuli, in ijs etiam æquales sumantur circumferentiæ: dico igitur, & illarum æqualium circumferentiarum rectæ sub-

tenentur

tenſæ inter ſe æquales ſint. Ducantur ab extremitatibus ſubtenſarum ad centra rectæ lineæ. Et quoniam hæ rectæ ductæ, propter æqualitatem circulorum ex hy-



potheſi, ex definitione prima huius, inter ſe æquales ſunt, anguli inſuper ad centra, ſub illis æqualibus ductis comprehenſi ex 27 huius, æquales: & lineæ hiſ æqualibus angulis ſubtenſæ, quæ etiam ſub circumferentijs æqualibus ſubtenduntur, per propoſitionem 4 primi, inter ſe æquales erunt. In circulis igitur æqualibus, ſub æqualibus circumferentijs æquales rectæ lineæ ſubtenduntur, quod demonſtraſſe oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ.

Λ.

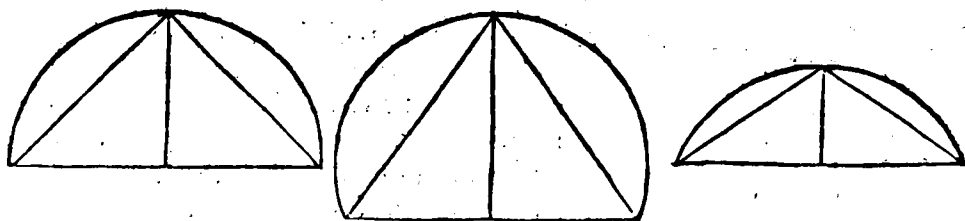
Τὴν διττῆς περιφέρειαν, δίχα τέμνειν.

PROPOSITIO

XXX.

Datam circumferentiam, bifariam ſecare.

Sit circumferentia data, atq; propoſitum eam bifariam ſecare. Data igitur circumferentiæ extremitates recta quadam linea coniungantur, hac deinde recta bifariam diuiſa, à puncto diuiſionis ad rectos angulos linea uerſus circumferentiam excitetur: & erit hæc, ipſa quæ circumferentiam bifariam ſecabit, quod ſic demon-



ſtratur. Ducantur à ſectionis puncto in circumferentia ad eius extremitates duæ rectæ lineæ. Et quoniã hæ duæ rectæ, ex propoſitione 4 primi, inter ſe æquales ſunt, & rursus quoniam in circulis æqualibus æquales rectæ lineæ, per propoſitionem 28 huius, circumferentias æquales auferunt, maiorem maiori, & minorem minori: cum quod de circulis æqualibus, illud ipſum etiam de uno & eodem dici poſſe & uerum eſſe cõſtet, demonſtratio absoluta erit. Data igitur circumferentia bifariam diuiſa eſt, quod feciſſe oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

ΛΑ.

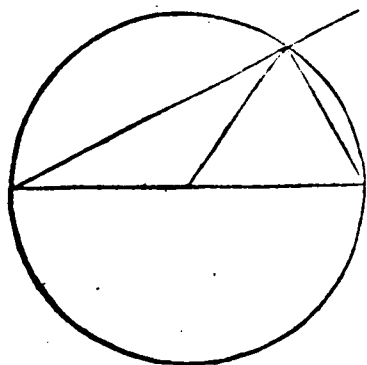
Εγκύκλιον, ἢ μὲν ἐν τῷ ὀρθῷ ἢ μικκυλίου γωνία· ὀρθὴ δὲ τὴν, ἢ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι· ἐλάττω δὲ ὀρθῆς. ἢ δὲ ἐν τῷ ἐλάττω μείζωνι ὀρθῆς. Καὶ ἐπὶ, ἢ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία, μείζων δὲ τὴν ὀρθῆς, ἢ δὲ τοῦ ἐλάττου τμήματος γωνία, ἐλάττω δὲ τὴν ὀρθῆς.

Bb

PROPOSITIO

In circulo, angulus qui in semicirculo est: rectus est, qui uerò in maiori segmento: minor recto, qui autem in minori segmento: maior est recto. Et insuper, angulus maioris segmenti: recto quidem maior, minoris uerò segmenti angulus: minor est recto.

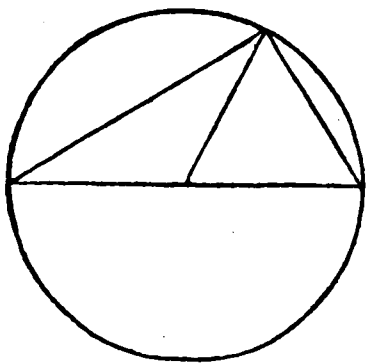
Habet hæc propositio quinque partes, puta quòd in semicirculo angulus: rectus sit, in maiori segmento quàm est semicirculus: minor recto, in minori autem: maior recto. Præterea segmentorum angulos, semicirculo quidem maioris: recto minorem, quod uerò est segmentum semicirculo minus: eius angulum recto maiorem esse oporteat. Hæc nunc singula ordine sic demonstrari possunt. Describatur circulus cum sua diametro, ducatur etiam à diametri extremitatibus ad punctum aliquod,



in circumferentiâ ubiuis sumptum, duæ rectæ lineæ: dico, has duas rectas angulum rectum continere. quod quidem, si altera ductarum ultra circumferentiâ secundum continuationem in rectum eiecta, ex hoc ipso angulo deinde recta quædam linea ad centrum ducta fuerit, sic demonstrari poterit. Quoniam enim totalis in circulo trianguli unum latus ulterius productum est: externus qui sic describitur angulus, duob. internis oppositis, ex propositione 32 primi equalis erit. Sed quia his internis, ex definitione circuli & priore parte propositionis quintæ primi, bis usurpatis, æqualis etiam est angulus, quem duæ in semicirculo rectæ lineæ includunt: eidem igitur in semicirculo angulo dictus externus æqualis erit. quare, ex definitione 10 primi, uterque rectus. In semicirculo igitur angulus, rectus est. quod demonstrasse oportuit.

POTEST HOC IDEM ETIAM ALITER DEMONSTRARI in hunc modum.

Ducta ab angulo in semicirculo ad centrum recta linea, cum partialium angulorum uterque, unum totalis trianguli angulo,



ex definitione circuli & priore parte propositionis quintæ primi, sit æqualis, atque hac ratione & communi illa noticia, Si æqualibus æqualia adijciantur, &c. idem totalis duobus in triangulo reliquis æqualis: utrumque æqualium, respectu totalis trianguli, ex corollario propositionis 32 primi, duorum rectorum medietas, atque tandem utrumque per se uni recto æqualis erit. id quod demonstrasse oportuit.

Ἀλλ' ἀπόδειξις τοῦ ὁρθοῦ ἐστὶν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία.

Alia demonstratio istius quod in propositione dicitur, Angulum in semicirculo rectum esse.

Cum ex propositione 32 primi, Omnis trianguli uno latere ulterius productio, externus angulus duobus internis oppositis æqualis sit, cumque etiā ex priore parte propositionis

propositionis 5 primi, isosceliū triangulorū qui ad basim sunt anguli inter se æquales sint, hac & illa bis usurpata: qui ad centrū sunt anguli, uterq; ad alterius trianguli angul, ū in circumferentia existentem, duplus erit. Sed quia ad centrum positi anguli, ex propositione 13 primi, duobus rectis sunt æquales: eorum medietas igitur, ut est in semicirculo angulus, duorum rectorum medietati, hoc est uni recto, æqualis erit. Hinc colligitur

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Εκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι καὶ τριγώνων ἡ μία γωνία δις ὁμῶς ἴση ἢ ὀρθή ἐστίν. Διὰ τὴν αἰτίας τῆς ἐκείνης ἐφεξῆς τοῖς αὐτοῖς ἴσως εἶναι. Σταμ δε δι ἐφεξῆς γωνίας ἴσαι ὡσπερ ὀρθαί εἰσι.

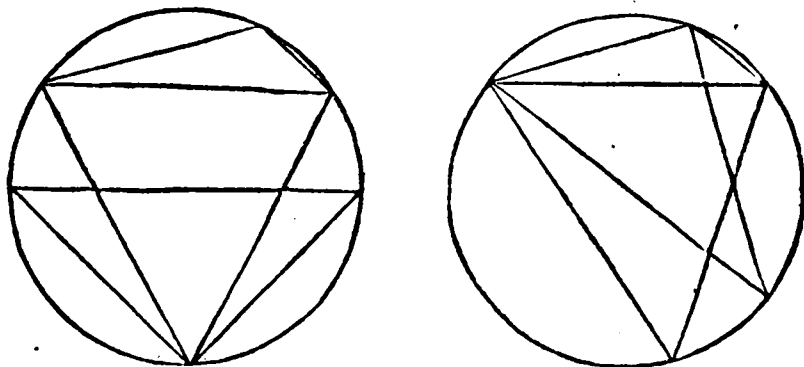
COROLLARIUM.

Ex hoc sanè manifestum. Quando trianguli unus angulus duobus, reliquis scilicet, æqualis fuerit: illum rectum esse.

Propterea quod ille deinceps se habens, eisdem duobus reliquis æqualis sit, Quando autem deinceps se habentes, anguli æquales fuerint: recti erunt ambo.

Nunc quantum ad secundam ac tertiam propositionis partem.

Describatur circulus, ducatur in eo etiam recta quædam linea, non per centrum transiens, puncto deinde in utriusque segmenti circumferentia sumpto, ad utrumq; eorum duæ ab extremitatibus ductæ rectæ ducantur lineæ: dico igitur, eum angulum qui est in maiori segmento, recto minorem: illum uerò qui est in segmento minori, recto maiorem esse. Ducatur in circulo diameter, quomodocunq; ad huius



extremitates deinde ab angulo, qui quòd talis sit qualis proponitur, demonstrari debet, duæ rectæ lineæ, uel una tantum si suffecerit. Et quoniam angulus in semicirculo, per primam partem propositionis huius, rectus est, cum angulus qui est in maiori segmento, sit recti anguli pars, contra uerò, anguli illius qui est in minori segmento, ipse angulus rectus pars: qui igitur in maiori segmēto fuerit angulus, ut pars, recto minor, in minori uerò, ut totum, recto angulo maior erit. Vel, probato uno, quòd aut in segmento maiori angulus, recto minor sit: aut alter, recto maior, cū Omnis quadrilateri, in circulo descripti, anguli ex opposito, per propositionem 22 huius, duobus sint rectis æquales: statim tandem & alterum inferri potest. Quare tò igitur iam, quòd in propositione dicitur, angulum maioris segmenti, recto maiorem: ac ultimò tandem, minoris segmenti, recto minorem esse, sic demonstretur. Descripto circulo, in eo etiam præter centrum recta quædam linea ducta: dico, &c. Ducatur in circulo diameter sic, ut eius una extremitas uni ductæ extremitati copuletur, altera deinde ductæ cum altera extremitate diametri recta quædam alia iun-

cta, ubi hæc eadem recta ultra circumferentiam cōtinuata fuerit, demonstrationis

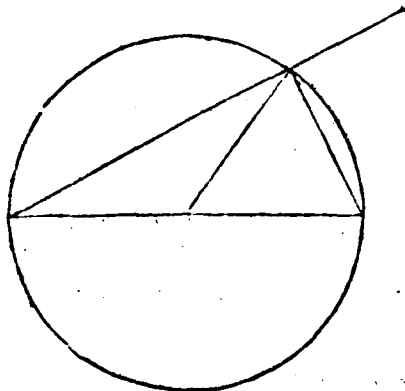


figura parata erit. Et quoniam maioris segmenti angulus, ut apparet, eo angulo qui ex prima parte propositionis huius, rectus est, maior existit, angulorum porro in hac figura deinceps se habentiū uterq̃, ex corollario præmissō rectus est: qui igitur maioris segmenti est angulus, ut totum, recto maior: contrā, qui minoris, ut pars, angulo recto minor erit. In circulo igitur qui quidem, & reliqua; quod demonstrasse oportuit.

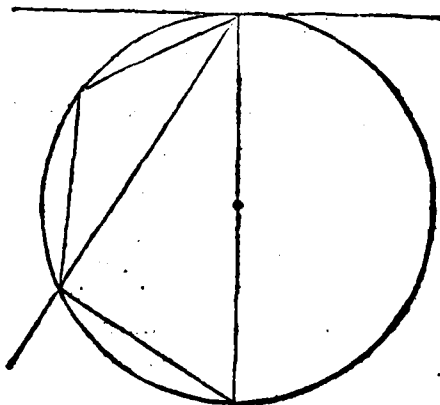
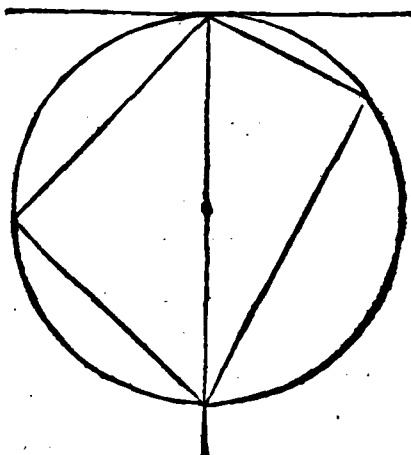
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΒ.

Εὰν κύκλος ἐφάπῃται τῆς εὐθείας, ἀπὸ δὲ τῆς ἀφ᾽ ἧς ἐπὶ τὸν κύκλον ἀεὶ χθῆ τῆς εὐθείας τέμνεται τὸν κύκλον· ὅς ποιῇ γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ, ἵσαι ἴσονται τοῖς ἐν τῇς ἐναλλάξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίαις.

PROPOSITIO XXXII.

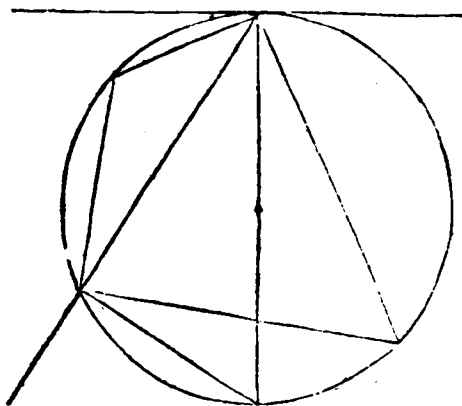
Si circulum tetigerit recta quædam linea, à contactu uerò extendatur quædam recta linea circulum secans: anguli quos facit ad contingentem, æquales erunt ijs, qui alternatim in circuli segmentis consistunt, angulis.

Describatur circulus, ducantur etiam duæ rectæ lineæ, quarum una circulum tangat, altera uerò à puncto contactus, per circulum transiens, eum secet: & erit circulus per secantem quidem in duo segmenta diuisus. Statuatur nunc in utroq̃ segmento angulus, per binas & binas rectas lineas ductas. His itaque descriptis: dico, quòd à secante & contingente circulum uterq̃ comprehensus angulus, ei, qui ex altera parte in segmento ponitur, æqualis sit. Potest in descriptione figure, uel quæ per circulum extenditur, uel illa quæ in uno segmento angulum constituit recta linea, uel neutra harum per centrum circuli transire. Quantum ad primum, Cum in segmentis angulorum uterq̃, ex prima parte propositionis 31, rectus sit, cumq̃



etiam ipsa secans ad tangentem, ex 18, sit perpendicularis, atque ita uterq̃ angulorum qui sic fiunt, rectus: illis mediantibus, per communem illam noticiam, qua omnes recti anguli æquales inter se sunt, propositioni tandem satisfactum erit. Quantum

tum ad secundum. Cum triangulum appareat, cuius in semicirculo angulus ex prima parte propositionis 31 huius, rectus est, cumq; etiam Omnis trianguli tres anguli interiores, ex corollario propositionis 32 primi, duobus rectis æquales sint: reliqui duo eiusdem trianguli anguli, uni recto æquales erunt. Sed quia unus, rectus etiam est ex 18 huius, angulus quem nimirum ex eadem parte contingens ac per centrum transiens recta linea comprehendunt: per hanc communem noticiam, Quæ uni sunt æqualia, &c. illi duo uni huic angulo æquales erunt: communi igitur illo angulo quem habent, ablato, quantum ad unum angulum iam propositio constabit. De reliquo tandem, cum tam quadrilaterorum in circulis anguli, qui ex opposito sunt, ex 22 huius, quàm etiam qui à contingente & per centrum transeunte recta linea cõprehenduntur, ex propositione 13 primi, duobus rectis æquales sint: ex communi quadam noticia, duo priores posterioribus duobus angulis æquales erunt. ab æqualibus igitur his, angulis qui iam dudum æquales inter se esse demonstrati sunt, subtractis: & de altero iam angulo, quod ille ex altera parte in segmento posito angulo æqualis sit, dubium amplius non erit. Quantum ad tertium, ubi scilicet neutra rectarum, neque circumulum secans, neq; etiam illa quæ in segmento angulum constituit, per centrum circuli transeat. Quòd si hoc modo figura descripta fuerit, tum à puncto contactus, per 11 primi, ipsi tangenti ad rectos angulos linea excitanda est. Erit autem hæc, cum ex propositione 19 huius, centrum circuli contineat, diametrum circuli. Coniungatur porro diametri altera extremitas cū extremitate secantis. Et quia angulus qui sic describitur, eo quòd in semicirculo existat, rectus est: reliqui duo in hoc triangulo anguli, uni recto æquales erunt.



Sed quia angulus etiam ad contactum totalis ex illa parte, ratione ad rectos angulos excitatæ lineæ, est rectus: idem totalis prioribus duobus æqualis erit. Subtracto igitur ab illis æqualibus angulo quodam illis communi, cum in omni circulo qui in eodem segmento sunt anguli, inter se æquales sint, de eo qui nimirum in illa parte sub tangente & secante comprehenditur angulo, quòd ille ex altera parte in segmento angulo æqualis sit, tandem constabit. De altero nunc angulo nullum erit dubium, quin & ipse in altero segmento angulo æqualis sit. Nam cum quadrilaterum in circulo descriptum, duos angulos oppositos duobus rectis æquales habeat, cumq; insuper illi, qui à tangente & secante circumulum comprehenduntur anguli, duobus rectis æquales sint, per cõmunem illam noticiam, Eidem æqualia &c. illis duobus in quadrilatero angulis, quos secans cum contingente facit, duo anguli æquales erunt. Quia autem unus, ut iam ostensum, est uni æqualis: & alter tandem, per subtractionem æqualium ab æqualibus, alteri angulo æqualis erit. Si circumulum igitur tetigerit recta quædam linea, à contactu, &c. quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΑΓ.

Επὶ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ γράψαι τμήμα κύκλου, δεξιὺν γωνίαν ἴσων τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

PROPOSITIO XXXIII.

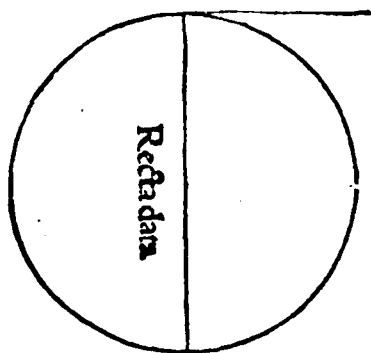
Super data recta linea describere sectionem circuli, capientem angulum æqualem dato angulo rectilineo.

Requirit

Requirít hæc propositio rectam lineam datam, angulum item rectilineum datum, proponit autē, quomodo super data recta sectio, quæ dato rectilineo angulo æqualem angulum capiat, describatur. Angulus datus potest esse rectus, aut non rectus. Si rectus, data recta bifariam diuidenda, super ea deinde ex puncto diuisionis semicirculus describendus est, & factum erit propositum: id quod ex prima parte propositionis 31 huius demonstrari poterit.

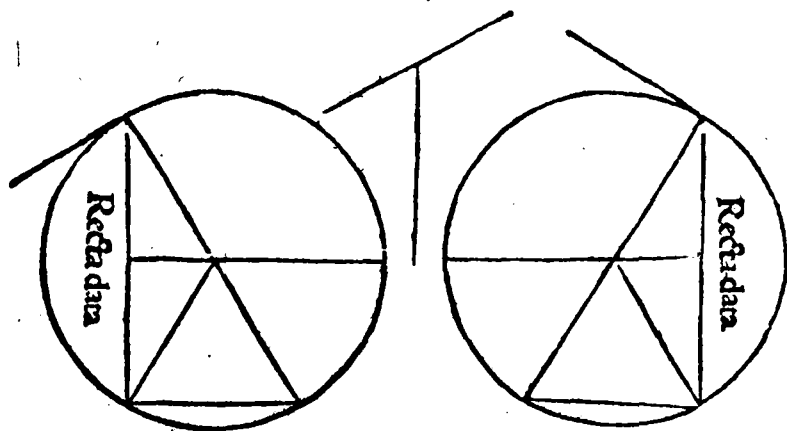
ALITER. Si rectus fuerit angulus propositus, constituatur ad alterutram rectæ datæ extremitatem, atq; ad ipsam rectam lineam, per 23 primi, angulus, dato angulo æqualis, recta deinde bifariam diuisa, ex puncto hoc, secundum alteram eius medietatem describatur circulus. Et

Angulus datus, rectus.



quoniam angulus quem applicata ad rectam datam constituit, ex structura, rectus est: rectæ datæ applicata circulum illum, ex corollario propositionis 16 huius, tanget. Et quoniam etiam, ut habet propositio præcedens, angulus quem hæc duæ rectæ comprehendunt, in segmento angulo ex aduersa parte est æqualis, illo igitur descripto, cū ex cōmuni quadā noticiā, Eidem æqualia, illa & inter se æqualia sint: de recto iam angulo constat propositū. Quod si angulus datus nō fuerit rectus, erit is maior illo, aut minor. utrum horum fuerit, ad rectam datam & ad alteram eius extremitatem, angulus dato æqua-

lis, per 23 primi, rectæ cuiusdam lineæ ductu constituatur. Recta deinde data bifariam diuisa, tam ex hoc diuisionis puncto ipsi datæ, quàm etiam ex modò usurpata datæ extremitate ipsi ductæ, ad angulos rectos linea excitetur: & erit communis



harum ad rectos ductarum sectio, centrum futuri circuli. quod in hunc modum demonstrabitur. Ducatur ab hoc centro ad alteram datæ extremitatem recta quædam linea. Et quoniam hæc, ex structura & propositione 4 primi, lineæ ei, quæ ipsi ductæ ad rectos angulos insistit, æqualis est: circulus igitur ex cetro posito, ad unius æqualium interuallum, per 3 postulatū primi, descriptus, per terminum etiam alterius æqualis transibit. Describatur ergo is, altera etiam semidiametre, illa nimirum, quæ ab angulo, dato æquali, ducta est, in diametrum continuata, eius in circumferentia extremitas cum altera datæ extremitate iungatur. Et quoniam hæc recta, quæ cum data angulum dato æqualem comprehendit, propterea quod ab extremitate diametri ad rectos angulos egrediatur, ex priore parte corollarij propositionis 16 huius, ipsum descriptum circulum tangit, cum angulus segmenti, quod ex altera parte super data recta descriptum est, angulo, ad contingentem, dato æquali

το αquali descripto, ex 32 huius αqualis sit: super data igitur recta sectio, angulo dato αqualem capiens angulum, descripta est. quod fieri oportuit.

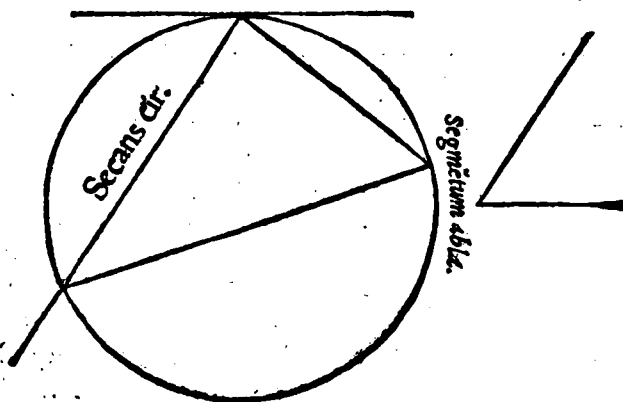
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΔ.

Από το δοθέντος κύκλου τμήμα ἀφελείν, διχομήνου γωνία ἰσών τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμου.

PROPOSITIO XXXIII.

A' dato circulo segmentum abscindere, capiens angulum αqualem dato angulo rectilineo.

Sit circulus datus, angulus item rectilineus datus, atq; propositum, à circulo portionem, quæ capiat angulum dato αqualem, abscindere. Ducatur primò per 17. huius, recta quædam linea circulum tangens, à puncto deinde contactus, per 23



primi, alia recta circulum secans, quæ cum tangente angulum dato αqualem faciat, ducatur, & propositioni satisfactum erit, cum per hanc ipsam secantem huiusmodi sectio de circulo nunc sit abscissa. Puncto igitur in circumferentia, huic angulo opposita, ubiuis sumpto, si ab eo duæ rectæ lineæ ad extremitates circuli secantis ductæ fuerint, quem hæc rectæ angulum incluserint, dato rectilineo angulo αqualem esse, propositio huius 32, & communis illa noticia, Quæ eidem sunt αqualia & reliqua, commonstrabunt. A' dato igitur circulo segmentum, quod angulum dato rectilineo angulo αqualem capiat, abscissum est, quod fieri oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΕ.

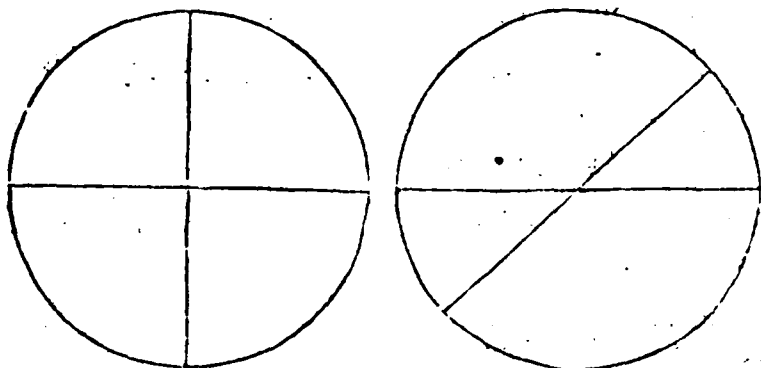
Εὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας· ὃ ὑπὸ τῶν τῶν μίας τμημάτων παρεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ὂσιν τῶν ὑπὸ τῶν τῶν ἑτέρας τμημάτων παρεχόμενον ὀρθογώνιον.

PROPOSITIO XXXV.

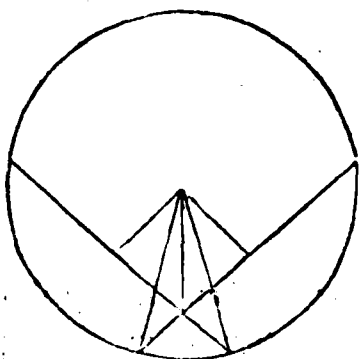
Si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secuerint: quod sub sectionibus unius comprehenditur rectangulum, αquum est ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur rectangulo.

Describatur circulus, in quo etiam duæ rectæ lineæ, sese mutuo secantes, ducantur: dico, rectangulum comprehensum sub partibus unius, αquale esse ei, quod sub alterius rectæ partibus continetur, rectangulo. Rectarum in circulo ductarum

rum sectio fit, aut in ipso circuli centro, aut extra. Fiat igitur primò in circuli cen-
tro, Et quoniam quæ ex centro ad circumferentiam egrediuntur rectæ lineæ, ex de-



initione circuli, inter se æquales sunt, cum sub æqualibus lineis, æqualia rectangu-
la contineri manifestum sit: & quæ sub sectionibus in circulo secantium linearum
rectangula comprehenduntur, inter se æqualia erunt. Quòd si extra centrum, in
circulo ductæ sese mutuo secent, tum ad utramque secantem ab ipso circuli centro,
tanquam à puncto in linea minime existente, per propositionem 12 primi, per-



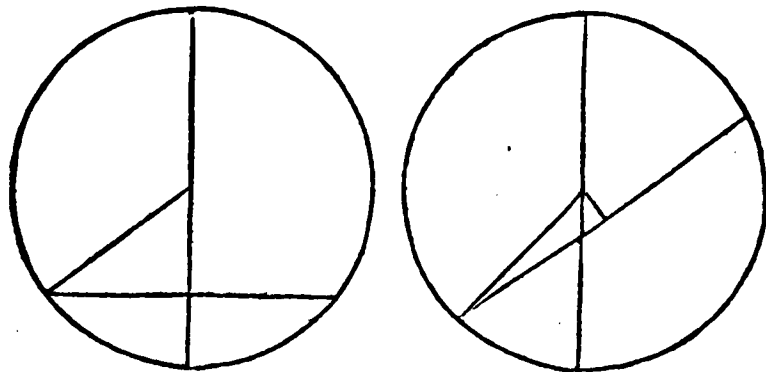
pendicularis linea ducenda, centrum deinde
cum intersectione secantium communi, atq;
alterutra utriusq; secantis extremitate, tribus
rectis lineis coniungendum erit, & demon-
stratio sic colligenda. Quoniam utraq; secan-
tium per suam perpendicularem lineam, iam
quidem bifariam seu æqualiter, ex secunda
parte propositionis tertiæ huius, diuisa est,
cum prius per punctum intersectionis com-
munis inæqualiter etiam diuisæ sint, rectan-
gulorum sub inæqualis sectionis portioni-
bus comprehensorum utrunq;, unà cū qua-

drato portionis interceptæ, per propositionem quintam secundi bis usurpata (sunt
enim duæ secantes) quadrato medietatis æquale erit, atq; communi deinde, quod
scilicet à perpendiculari secantis utriusq; describitur, quadrato adiecto: rectangulo-
rum utrunq; cum duobus quadratis, interceptæ scilicet portionis uno, & perpendi-
cularis suæ altero, duobus quadratis, quæ nimirum à dimidio lineæ & perpendicu-
lari describuntur, æquale erit. Quia uero in triangulis rectangulis id quod à latere
rectum angulum subtendente describitur quadratum, reliquorum duorum late-
rum quadratis per penultimam propositionem primi, æquale est, hac ipsa proposi-
tione bis usurpata: utrunq; rectangulum cum quadrato lineæ, à centro ad interse-
ctionem secantium ductæ, quadrato semidiametri æquale erit. Semidiametri au-
tem unius circuli, cum sint inter se æquales, atque hinc etiam earundem quadrata
æqualia: ipsa insuper rectangula cum suis quadratis, uel cum quadrato eo quod
commune habent, inter se æqualia erunt. Illo igitur communi iam ablato: & ipsa re-
ctangula sola, quæ sub secantium segmentis comprehenduntur, inter se æqualia
erunt. Si in circulo igitur duæ rectæ lineæ sese mutuo secuerint: quod sub sectioni-
bus unius comprehenditur rectangulum, æquum est ei, quod sub segmentis alte-
rius comprehenditur rectangulo, quod demonstrasse oportuit.

APPENDIX.

Facta autem est mentio duarum perpendicularitū, trium deinde linearum aliarū,
quæ pro huius propositionis structura ducendæ sunt. Quòd si uerò, ratione quidem
ductarum

ductarum in circulo, una uel plures duci non possint, reliquis tamē ductis, demonstratio ut prius, non tamen tam sæpe singula repetendo succedet, Huius autem rei exempla sunt, ut sequitur.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ

ΛΣ.

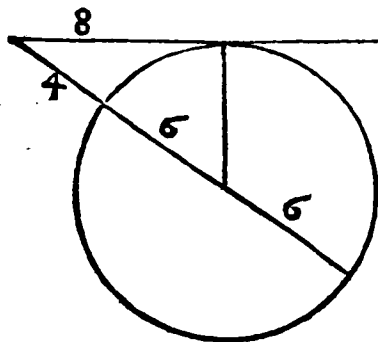
Εὰν κύκλος ληφθῇ πημείον ἐκὺς, ὃ ἀπὸ αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον περισσέτωσι δύο εὐθείαι, καὶ ἡ μὲν αὐτὴ τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφαπτήται· ἴσαι ἂν ᾖ τὸ ὅλης τῆς τεμνύσης καὶ τῆς ἐκὺς ἀρραμβανομένης, μὲν τὸ τε σημεῖον καὶ τῆς κυρτῆς ποδὶ φορέας, ποδὶ ἐχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνου.

PROPOSITIO

XXXVI.

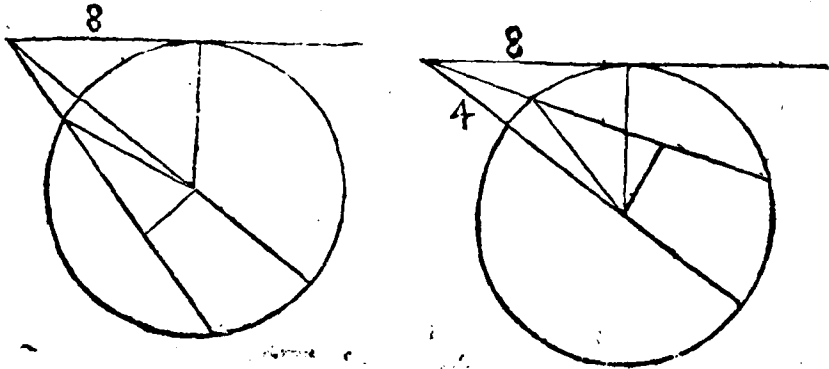
Si extra circulum sumatur aliquod punctum, ab eoq; in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum una quidem circulum secet, altera uerò tangat: erit quod sub tota secante, & exterius, inter punctum & conuexam circumferentiam, sumpta comprehenditur, ei quod à tangente describitur quadrato, æquale.

Describatur circulus, ducantur etiam à puncto, extra circulum sumpto, duæ rectæ lineæ, una quidem circulum secans, altera uerò per propositionem 17 huius, eum tangens: dico, rectangulum sub tota secante & eius externa portione comprehensum, æquale esse quadrato contingentis, quod in hunc modum demonstrabitur. Aut enim circulum secans per centrum transierit, aut non. Si transierit, ducatur à contactu ad centrum recta quædam linea. Et quoniam linea, ut est diameter circuli uel secantis rectæ interna portio, bifariam diuisa est, eiq; alia quædam recta linea, externa nimirum eiusdem secantis portio, in rectum adiecta est: comprehensum sub tota secante & externa portione rectangulum cum quadrato medietatis diuisæ, quadrato eius, quæ ex dimidia atq; adiecta constituitur, lineæ, per propositionem 6 secundi, æquale est. Et quoniam etiam quæ ex dimidia & adiecta constituitur linea, et in triangulo angulo, qui ex 13 huius rectus est, subtrahitur, atq; hinc ab ea descriptum quadratum, eis quæ à reliquis duobus trianguli lateribus describuntur quadratis, ex propositione penultima primi æquale: æqualium iam mutatione facta, loco unius scilicet lateris quadrati, duorum, contingentis scilicet, & eius quæ à contactu ad centrum ducta est, quadratis sumptis: & rectangulum cum dicto quadrato, eis quæ à reli-



quis

quis duobus lateribus describuntur, æquale erit: æqualibus igitur quadratis, quæ nimirum à lineis, ex definitione circuli, æqualibus descripta sunt, ab his æqualibus subtractis, relinquitur tandem, sub tota secante & externa portione comprehensum rectangulum, ei quod à contingente describitur quadrato æquale esse, quod erat obtinendum. Quod si circulum secans per centrum non transierit, tum ab eodem extra circulum sumpto puncto, recta linea circulum secans alia, quæ per centrum transeat, ducenda est. Et quia de hac nullum est amplius dubium, quin sub tota illa



& parte sua exteriori comprehensum rectangulum, lineæ contingentis quadrato æquale sit, duabus à centro rectis lineis ductis, una quidem quæ priori secanti perpendicularis sit, à tera uerò ad eiusdem prioris secantis cum circulo intersectionem tendens: & de illa, quæ per centrum non transierit secante linea, cum per suam ad rectos ductam lineam, ex secunda parte propositionis 3 huius, bifariam diuisa sit, ex propositionibus sexta secundi & penultima primi, interim tamen communis quodam, ad rectos scilicet ductæ quadrato, addito, æqualibus item ab æqualibus subtractis, nemo dubitabit. Si extra circulum igitur sumatur aliquod punctum, ab eoq; in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum una quidem circulum secet, & reliquæ, quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

ΛΖ.

Εὰν κύκλῳ ληφθῇ τὶ σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλῳ πρῶται πῖπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἢ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλῳ, ἢ δὲ πρῶται πῖπῃ, ἢ δὲ ὥστε ὅλην τεμνέσῃ, καὶ ὅτι ἐκτὸς ἀπλάμβανόμενης, μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ ὅτι κυρτῇ περὶ φθέρειας, ὅρῳ τῷ ἀπὸ ὅτι πρῶται πῖπῃ, ἢ πρῶται πῖπῃ, ἐφάπτεται τοῦ κύκλου.

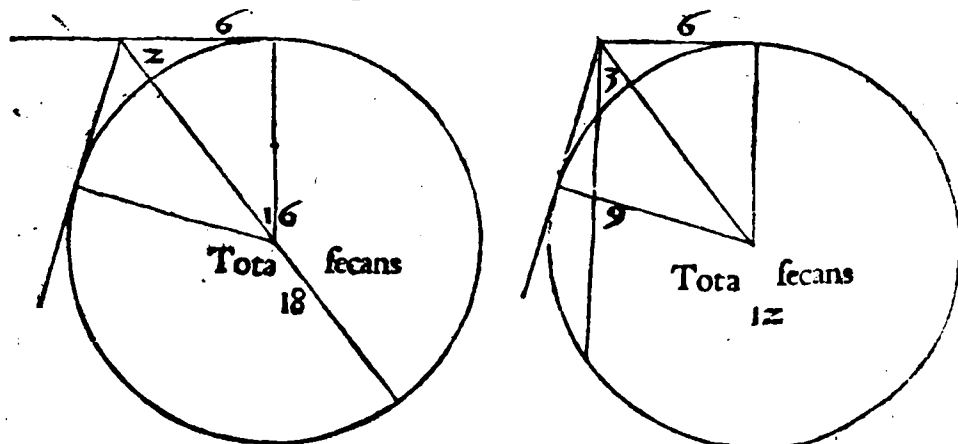
PROPOSITIO

XXXVII.

Si extra circulum sumatur aliquod punctum, à puncto uerò in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum una quidem circulum secet, altera uerò incidat, quod item sub tota secante, & exterius inter punctum & conuexam circumferentiam sumpta, comprehenditur, æquale sit ei, quod à cadente describitur: cadens ipsa circulum tanget.

Describatur circulus, ducantur etiam à puncto extra circulum sumpto, in ipsum circulum, duæ rectæ lineæ, una quidem circulum secans, altera uerò quæ in ipsum tantum cadat. Est autem quod rectangulum, sub tota secante & eius externa portione comprehensum, æquale sit quadrato in circulum cadentis lineæ: dico igitur, ipsam cadentem rectam circulum tangere. Ducatur à puncto extra circulum sumpto, per 17 huius, linea circulum contingens, à centro deinde circuli ad tria puncta, quæ

quæ sunt punctum contactus, id quod extra circulum sumptum est, & tertium deinde, ea cadentis extremitas qua cum in circulum cadit, tres rectæ lineæ ducantur. Et quoniam circulum tangentis quadratum, rectangulo, sub tota secante & eius



externa portione comprehenso, ex propositione præcedenti æquale est, cum eidem rectangulo, ex proposito, æquale etiam sit quadratum lineæ in circulum cadentis: cadens in circulum lineæ, & eum tangens, cum æqualia quadrata ab eis describantur, lineæ inter se æquales erunt. Præterea, quoniam etiam in circulo ex centro usque ad ipsam circumferentiam continuatæ rectæ lineæ, inter se sunt æquales, cum iam duo appareant triangula, quorum duo latera unius duobus lateribus alterius æqualia sint, bases etiam eorum, cum sit una & eadem lineæ illis communis, æquales: & angulus inter æqualia latera in uno, angulo, inter æqualia latera in altero triangulo, per propositionem 8 primi, æqualis erit. Sed quia unus eorum, ex 18 huius, est rectus: & alter sic, propter æqualitatem, rectus erit. In circulum igitur cadens, hypotesibus illis mediantibus, eum etiam tangere, ex prioris parte corollarij propositionis 16 huius concluditur. Si extra circulum igitur punctum aliquod sumatur, à puncto etiam in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum una quidem circulum secet, altera uerò eum tangat, quod item sub tota secante, & exterius inter punctum & convexum circumferentiæ sumpta portione comprehenditur, æquale sit ei, quod à tangente describitur, quadrato: cadens recta lineæ circulum tanget, quod demonstrasse oportuit.

FINIS LIBRI TERTII.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙ ΧΕΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

EVCLIDIS ELEMENTORVM GEO- metricorum liber quartus.

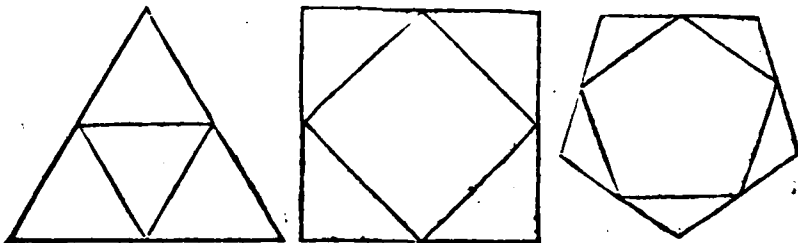


St huius libri quarti tractatio de inscriptionibus & circumscriptionibus figurarum rectilinearum, uel planorum. Docet enim, quomodo una figura alicui inscribi, uel ab alia circumscribi debeat. Quia uero alia est huius quam præcedentium librorum tractatio, alijs etiam in eo uocabulis utitur: atq; ea, ut sequentia deinde planius intelligi possint, singula ordinè definit.

ΟΡΟΙ.

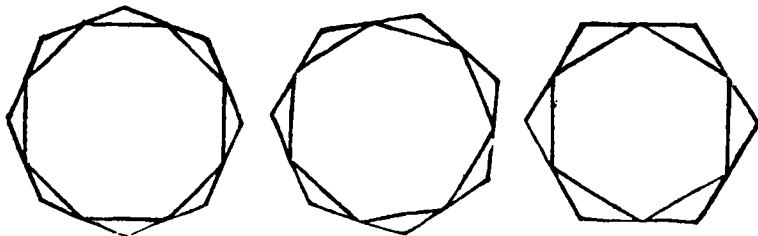
Σχήμα ἐνθύγραμμον εἰς σχῆμα ἐνθύγραμμον ἐγγράφεται λέγεται, ἔταν ἡ ἀ' σὴ τῶν τοῦ ἐγγραφομένου σχήματ' ὁ γωνιῶν ἰσότης πρὸς αὐτῆς τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται ἀπῆται.

Σχήμα δὲ ὁμοίως πρὸς σχῆμα περιγράφεται λέγεται, ἔταν ἡ ἀ' σὴ πρὸς αὐτῆς τοῦ περιγραφομένου ἰσότης γωνίας, τοῦ πρὸς ὃ περιγράφεται ἀπῆται.



DEFINITIONES.

- 1 Figura rectilinea in figura rectilinea describi dicitur, quando unusquisque inscriptæ figuræ angulus, unumquodque, latus eius in qua describitur, tangit.
- 2 Figura autem similiter circa figuram describi dicitur, quando unumquodque latus circumscriptæ, unumquemque angulum eius circa quam describitur, tangit.



Ex his duabus definitionibus colligitur, Inter illas tantum figuras, posse unam alteri

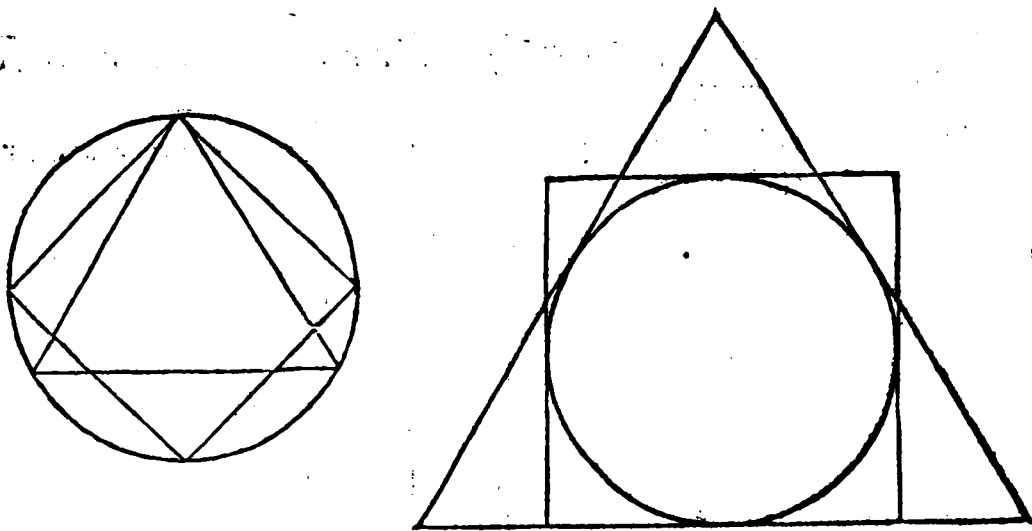
alteri inscribi uel circumscribi, quæ lineas numero equales habent. Nunquã enim triangulum quadrato, pentagono uel hexagono, inscribitur aut circũscribitur, cum illius pauciores sint anguli, quàm horum latera. Et e contrario. Sed triangulum triangulo, quadratum quadrato, & quælibet suæ speciei figuræ, & inscribi & circumscribi potest.

Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς κύκλον ἐγγράφεται λέγεται, ὅταν ἑκάστη γωνία τῆς ἑγγεγραμμένης ἀπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφέρειας.

Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον πρὸς κύκλον περιγράφεται λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τῆς τοῦ κύκλου περιφέρειας τὸ περιγεγραμμένον ἐφάπτεται.

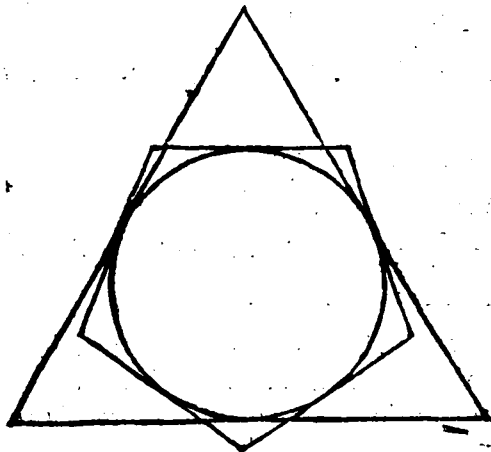
3 Figura rectilinea in circulo describi dicitur, quando unusquisque angulus inscriptæ circuli circumferentiam tangit.

4 Figura uerò rectilinea circa circumscripta dicitur, quando unumquodque latus circumscriptæ, circuli circumferentiam tangit.



Requirat utraq; definitio circum, cui deinde figura rectilinea per priorẽ quidem inscribitur, per posteriorem uerò ei circumscribitur.

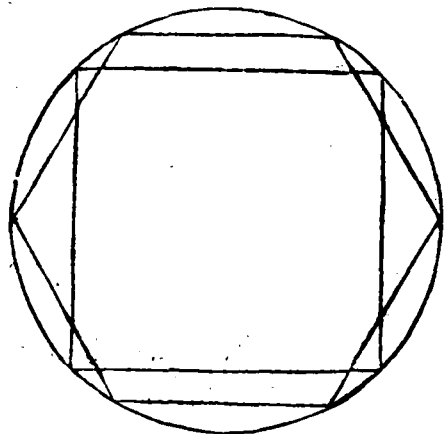
Κύκλος ὁμοίως εἰς σχῆμα ἐγγράφεται λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια, ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ εἰς δὲ ἑγγράφεται ἀπὸ τῆς.



5 Circulus similiter in figura describi dicitur, quando circuli circumferentia, unumquodque latus eius in qua describitur, tangit.

Κύκλος

Κύκλος δὲ περί σχῆμα περιγράφεται λέγεται, ὅταν ἢ ὁ κύκλος περιφύσῃ
ἐκείνης γωνίας τῇ περιῇ ὃ περιγράφεται ἀπ᾽ αὐτῆς.

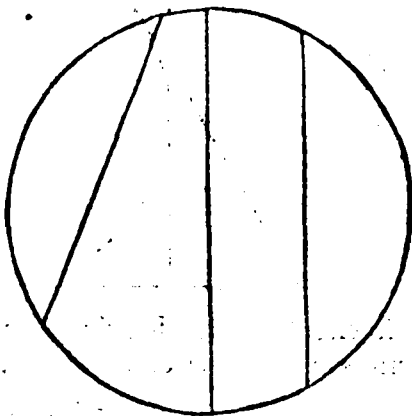


6 Circulus uerò circa figuram describi dicitur, quādo circuli circumferentia unumquemque eius circa quam describitur, angulum tangit.

Requirunt hæ duæ definitiones figuram rectilineam, cui deinde circulus per quintam inscribitur, per sextam uerò circulus circumscribitur.

Εὐθεία εἰς κύκλον συναρμόζεσθαι λέγεται, ὅταν τὰ πέρατα αὐτῆς ᾤῃ τῇ περιφύσει ἢ τῷ κύκλῳ.

7 Recta linea in circulum coaptari dicitur, quando eius extrema in circuli circumferentia fuerint.



ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

ΠΡΩΤΗ.

Α.

Εἰς τὸ δοθέντα κύκλον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, μὴ μείζονι ὅση τῇ τῷ κύκλῳ ὁῤαμῇ, ἴσων εὐθείᾳ συναρμόσαι.

PROPOSITIONES.

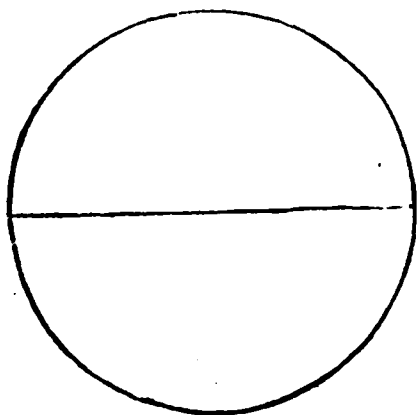
PRIMA

I.

In dato circulo datæ rectæ lineæ, quæ minime longior ipsa circuli diametro existat, æqualem rectam lineam coaptare.

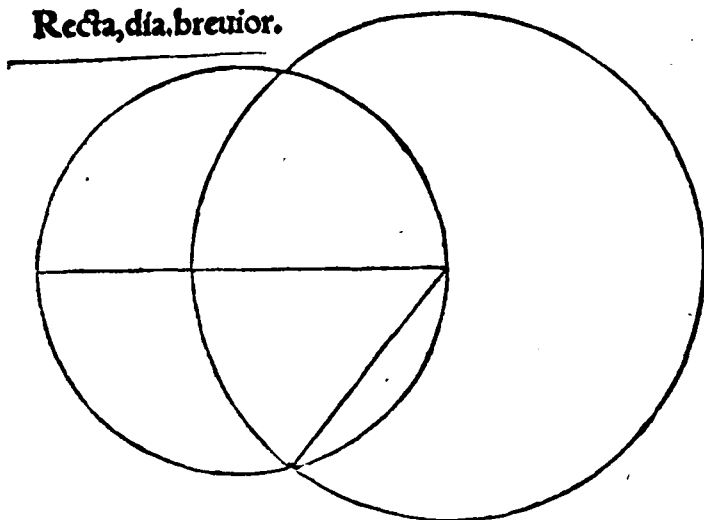
Requirat hæc propositio circulum, rectam insuper lineam datam. Monet autem expresse, ne hæc recta circuli diametro longior sit. Nam si data fuerit diametro longior, cum hæc inter ductas in circulo rectas lineas, ex præcedentis tertij propositione 15, sit omnium longissima: nunquam in circulo data illa coaptari posset, sed ipsum potius

potius suis extremitatibus excederet & secaret. Quare necesse est, ut sit diametro
 Recta, diametro æqualis.



breuior, aut ei æqualis. Sit ergo primò
 ei æqualis: erit diameter ipsa linea, id
 quod ex sua ipsius definitione satis
 manifestum est. Quòd si uerò recta
 data fuerit diametro breuior, cū iam
 duæ inæquales sint rectæ lineæ, à lon-
 giore, per 3 primi, portio breuiori æ-
 qualis abscindatur, secundum quam
 deinde ex altera sua, quam habet in
 circumferentiā, extremitate circulo
 descripto, centroq; huius cum com-
 muni circulorum intersectione recta
 linea iuncto: per hanc eandem re-
 ctam tandem propositioni satisfa-

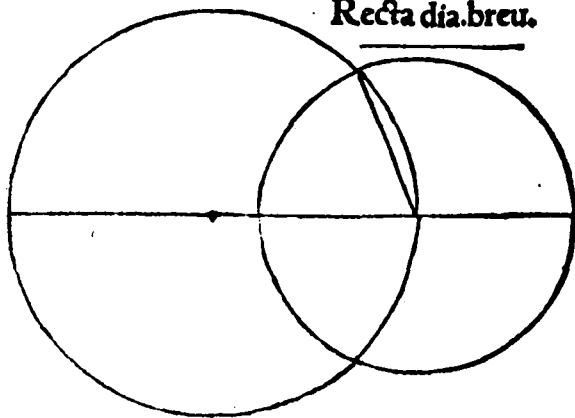
Recta, dia. breuior.



ctum erit, quod & ipsum ex definitione circuli, communi deinde illa noticia, Quæ
 eidem sunt æqualia &c. facile demonstrari poterit. In dato igitur circulo, datæ rectæ
 lineæ, quæ minime longior ipsa circuli diametro existat, æqualis recta linea coapta-
 ta est, quod fecisse oportuit.

ALIA ALTERIVS HVIIVS PARTIS DEMONSTRATIO,
 in qua scilicet, recta, cui æqualis in circulo coaptanda
 est, breuior diametro esse debet.

Recta dia. breu.



Huic rectæ datæ ad alteru-
 tram ipsius diametri extrema-
 tem, per propositionem 12 pri-
 mi, æqualis ponatur: secundum
 quam positam, ex sumpta dia-
 metri extremitate, circulo de-
 scripto, recta deinde alia ex
 hoc centro ad punctum in-
 tersectionis huius & primò de-
 scripti circuli ducta, cum hæc
 tandem illa sit quæ petebatur

D d

recta

recta linea, res confecta erit, id quod ex structura & definitione, ut modò factum est, demonstrari potest.

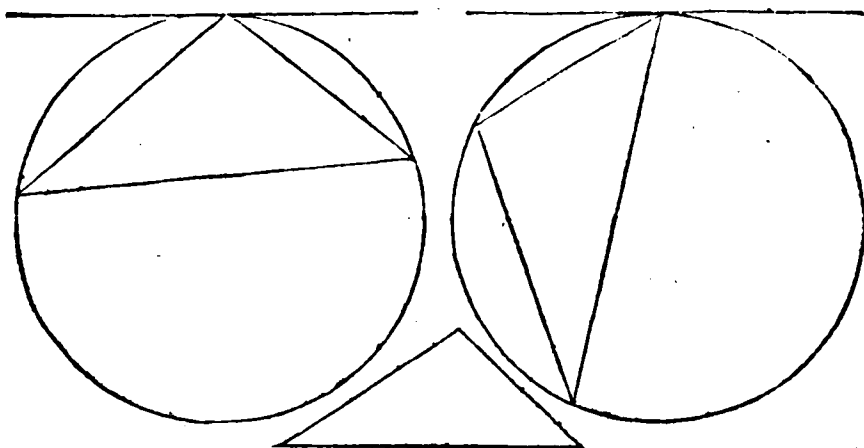
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β.

Εἰς τὸ δοθέντα κύκλον, τὸ δὲ δοθέν τι τρίγωνον, ἰσογώνιον ἔργον ἵσταναι.

PROPOSITIO II.

In dato circulo, dato triangulo, æquiangulum triangulum describere.

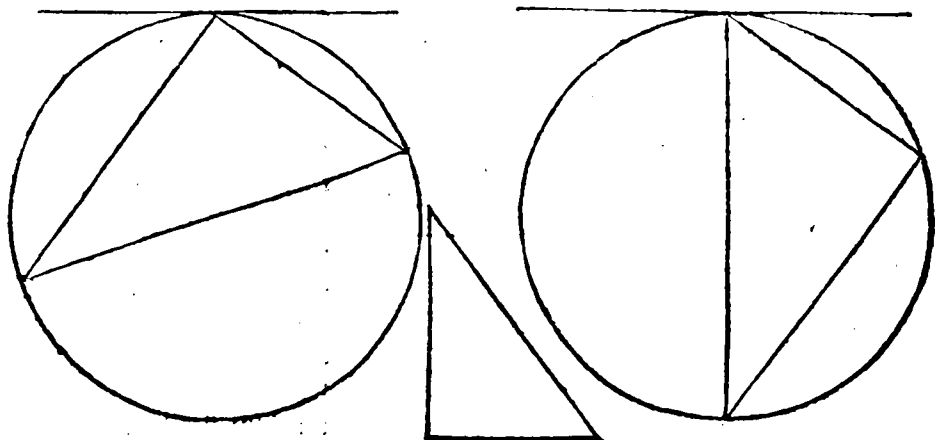
Estο circulus datus, triangulum etiam datum, atq; propositum, in circulo triangulum dato æquiangulum describere. Circulo igitur & triângulo datis, ducatur per propositionem 17 tertij, linea circulum contingens atq; à puncto contactus due recte, per circulum transeuntes, quarum anguli, quos cum contingente ex utraq; parte faciunt (uel quarum anguli, quos hæ ductæ, una quidem cum cōtingente, altera uerò cum priore ducta faciunt) duobus in triangulo angulis uterq; utriq; æquales sint, per propositionem 23 primi demittantur, his tandem rectis, suis quas habent in circumferentia, extremitatibus, tertia quadam recta linea copulatis: propositio- ni satisfactum erit. Cum enim duo anguli, qui à secantibus & contingente linea



continentur, duobus quidem in triangulo angulis, ex structura, duobus uerò in alternis sectionibus, ex propositione 32 tertij, sint æquales: duo in triangulo, duobus in sectionibus circuli angulis, ex communi quadam noticia, æquales erunt: quare & tertius angulo tertio æqualis.

VEL QUANTVM AD ALTERAM CONSTRUCTIONEM

Cum duo anguli, quorum unus quidē à contingente & una ductarū, alter uerò ab ipsis ductis continetur, duobus in triangulo dato angulis, ex structura, duobus



item

item in triangulo, circulo nunc inscripto, unus quidē, ut apparet, alter uerò, ex propositione 32 tertij, æquales sunt. Cumq; etiam ex corollario propositionis 32 primi, omnis trianguli tres interni anguli duobus sint rectis æquales: & tertius sic angulo tertio, in his duobus triangulis, æqualis erit. Aliàs enim, ubi inæquales essent, tres anguli in uno duobus rectis non æquivalerent, quod non conceditur: æqualis igitur tertius angulo tertio. In circulo igitur descriptum triangulū, cum dato æqui-angulum erit. Quare in dato triangulo, & reli. quod fieri oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ.

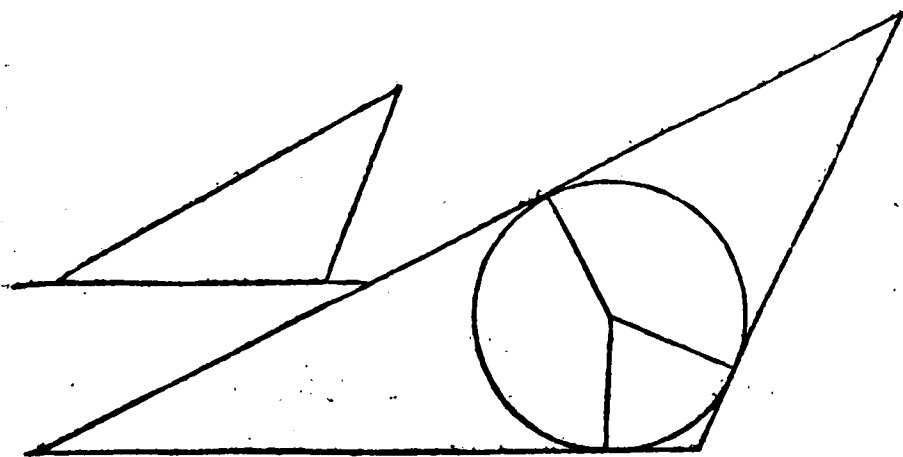
Ⓢ

Γεῶντι δὲ δοθέντι κύκλῳ, ἴσθι δὲ δοθέντι τρίγωνῳ, ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.

PROPOSITIO III.

Circa datum circulum, dato triangulo, æquiangulum triangulum describere.

Sit datus circulus, datum etiam triangulum, producat autem ipsius trianguli unum latus ulterius ex utraq; parte: & erunt qui fiunt anguli externi, suis internis oppositis, per propositionem in primo 32, æquales, Ducatur insuper à centro cir-

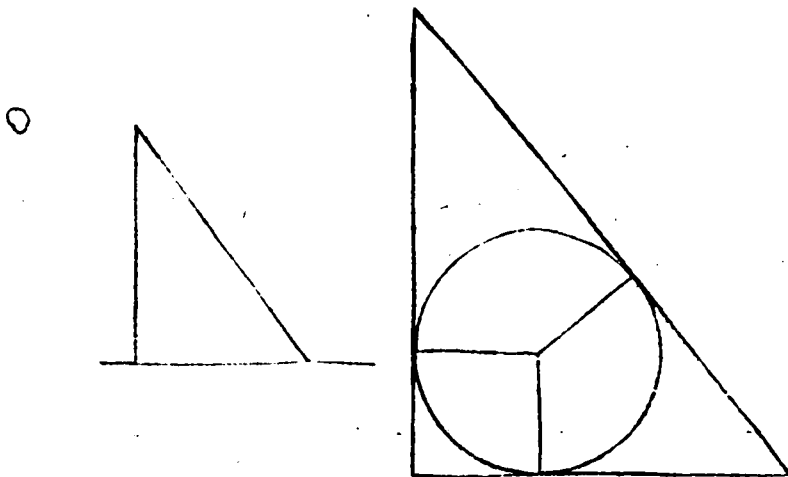


culi, quod quidem per primam tertij, si ignotum id fuerit, acquiritur, recta linea usq; ad circumferentiam utcunq; atq; ad huius alteram extremitatem, quod centrum circuli est, tanquam ad punctum datum, per 23 primi bis usurpatam, duo anguli, ex utraq; parte unus, duobus externis trianguli angulis æquales, uterq; utriq; constituentur. Vltimò, per puncta contactus, trium à centro exeuntium linearum cum circulo, tres rectæ circulum contingentes, ex utraq; parte eousq; prolongatæ, donec una cum altera concurrat, ducantur: & propositioni satisfactum erit, cum hæ tandem rectæ triangulum, quale petebat propositio, constituent. Sed ne quis forte dubitare posset, de contingentium continuatarum inter se concursu: igitur priusquam propositionis demonstrationem aggrediamur, quòd harum cōtingentium singulæ duæ lineæ cōcurrant, paucis demonstrabimus. Imaginetur ab uno puncto contactus ad alterum recta quædam linea. Et quoniā hæc imaginaria recta in alias duas, contingentes scilicet continuatas rectas, incidens, internos & in eadem parte positos angulos, duobus rectis minores facit: has cōtingētes ea in parte, qua duos angulos incidens duobus rectis minores efficit, ex communi quadam noticia, in primo exposita, concurrere necesse erit, quod erat demonstrandum. Nunc ad triangulum propositionis, circa datum circulum descriptum, quòd nimirum illud dato triangulo æquiangulum sit, hoc sic colligetur. Quoniā enim anguli, à contingentibus & ab earum contactuum punctis ad centrum deductis rectis lineis comprehensi, singuli, per propositionem libri præcedentis decimam octauam, recti sunt.

D d

Ei

Et rursus, quoniam omnis quadrilateri quatuor anguli, quatuor rectis angulis sunt æquales, propterea quòd per ductam ab uno ipsius angulo in oppositum, rectam lineam, in duo triangula diuidatur: duobus in quolibet quadrilatero rectis



angulis, quos habet, subtractis, duo qui relinquuntur in quolibet quadrilatero anguli, duobus rectis æquales erunt. Sed quia in triangulo, cuius unum latus ulterius productum fuerit, angulus externus cum suo deinceps se habente interno, per propositionem 13 primi, similiter duobus rectis æqualis est: illi igitur duo priores, ex communi quadam noticia, his duobus æquales erunt. Quare iam subtractis æqualibus ab angulis æqualibus, propositum tandem inferri potest. Circa datum igitur circulum, dato triangulo, æquiangulum triangulum descriptum est. quod fecisse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

Δ.

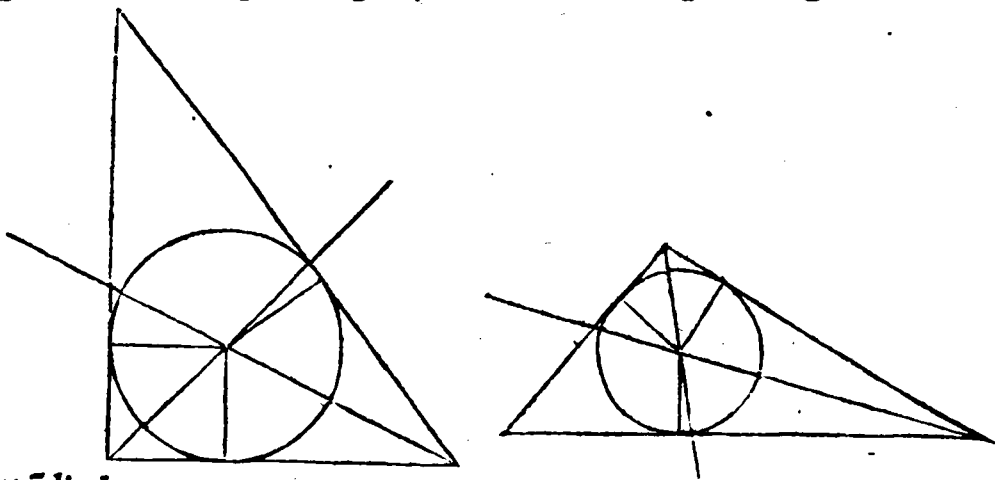
Εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον, κύκλον ἑγγραφῆσαι.

PROPOSITIO

IIII.

In dato triangulo, circulum describere.

Sit datum triangulum, atq; propositum, circulū in eo describere. Duo igitur in triangulo anguli, quomodocunq; sumpti, ex prop. 9 primi, per duas rectas lineas bifariā secantur. Et quoniam hæ duæ rectæ, ex propositione 17 primi, & cōmuni illa noticia, Si in duas rectas recta linea incidens, internos, & in eadem, &c. in triangulo concurrent: à puncto igitur illo concursus ad singula trianguli latera lineæ



perpēdiculares, per 12 primi ducantur. Et quoniam hæ, ex propositione 16 primi, bis

bis usurpata, & illa cōmuni noticia, Quæ eidem æqualia, &c. inter se æquales sunt, ubi ex hoc puncto concursus, tanquam ex centro posito, secundum unius harum æqualium linearum intervallum, circulus describatur, propositioni tandem satisfactum erit: id quod prior pars corollarij propositionis decimę sextę tertij, & definitio huius libri quinta sic demonstrant. Quoniam enim, ut quidem demonstratum est, ductæ ad latera perpendiculares inter se æquales sunt, ex uno insuper puncto eductę: ex eodem igitur puncto circulus, secundum unius æqualium intervallum descriptus, per omnium aliarum extremitates transire necesse erit: unde sic etiam singulæ descripti circuli semidiametri existent, & tanget singula trianguli latera circulus descriptus ex priore parte corollarij propositionis 16 tertij: quare eidem etiam triangulo, ex definitione, circulus inscriptus est. In dato igitur triangulo, circulus descriptus est. quod fecisse oportuit.

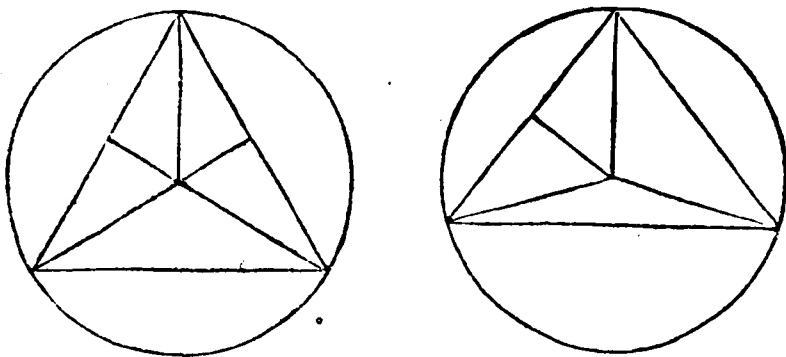
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε.

πῶς ὁ δὲ ἐν τρίγωνον, κύκλος περιγράψαι.

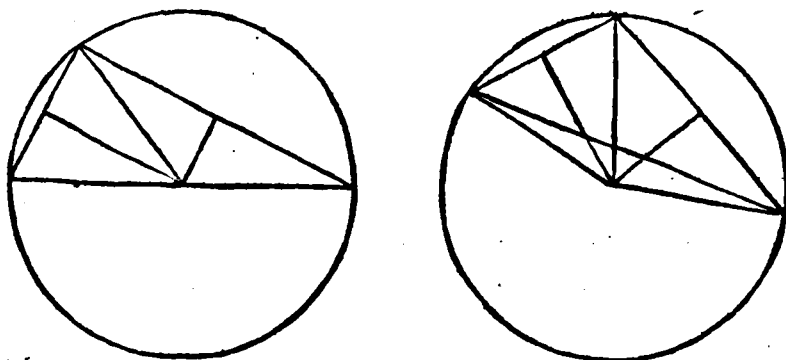
PROPOSITIO V.

Circa datum triangulum, circulum describere.

Quemadmodum præcedentis propositionis operatio duorū angulorum æquales requirebat diuisiones, ita in hac, ut trianguli dati, duo latera, quomodocunque sumpta, sicuti docet propositio in primo 10 bifariam diuidantur, necesse erit. Hoc autem factō, à punctis mediarum diuisionum ad angulos rectos lineæ, uersus eam partem, ubi maximè uidetur esse centrum describendī circuli, educantur. Et quo,



niam hæ continuatæ, ex propositione 17 primi, & cōmuni illa noticia, Si in duas rectas recta linea incidens, internos, & in eadem parte angulos, &c. concurrunt, ubi ex hoc puncto, tanquam ex centro posito, secundum intervallum spacij, inter hoc punctum & angulorum quemuis intercepti, circulus describatur, res confecta erit. Nam is erit circulus, propositi trianguli circumscriptioni cōueniens, quod



certè tribus rectis lineis ex hoc puncto, quod centrum esse ponitur, ad tres angulos

gulos ductis, cum hæ ex propositione 4 primi, bis usurpata, & communi illa notitia, Eidem æqualia, &c. æquales inter se esse demonstrentur, per 9. propositionem tertij facile conceditur. Circa datum igitur triangulū circulus descriptus est, quod fieri oportuit.

APPENDIX.

Est autem hic modus generalis, ad omnia triangula, quomocunque sanè illa, secundum latera uel angulos considerata, nominabuntur. Quare quòd nonnulli ad pleniorē huius propositionis declarationem, pro triangulorum, quantum ad angulos, uaria distinctione, uarios canones tradiderunt, cum is unus omnis generis triangulis satisfaciāt, illorum traditiones hoc loco consulto prætermisimus.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ φανερὸν, ὅτι ὅτε μὲν ἑνὲς τοῦ τριγώνου πίπτει τὸ κέντρον τοῦ κύκλου· ἢ ὑπὸ β α γ γωνία, ἢ μείζονι τμήματι τοῦ ἡμικυκλίου τυγχάνουσα, ἢ ὑπὸ β γ γωνία, ἢ μείζονι τμήματι τοῦ ἡμικυκλίου τυγχάνουσα, ὁρθὴ ἔσται. Ὅταν δὲ ἐκτὸς τοῦ β γ εὐθείας τὸ κέντρον πίπτῃ· ἢ ὑπὸ β α γ ἢ ὑπὸ β γ γωνία, ἢ μείζονι τμήματι τοῦ ἡμικυκλίου τυγχάνουσα, μείζονι τμήματι τοῦ ἡμικυκλίου τυγχάνουσα, ὁρθὴ ἔσται. Ὅταν δὲ ἡ δίδρυμένη γωνία· ἑνὲς τοῦ τριγώνου συμπεσοῖντι, αἱ δ' β, ε' γ. Ὅταν δὲ ὁρθὴ αὐτὴ τοῦ β γ. Ὅταν δὲ μείζονι τμήματι τοῦ ἡμικυκλίου τυγχάνουσα, ὁρθὴ ἔσται. Ὅταν δὲ ἐκτὸς τοῦ β γ, ὅπῃ ἴδωι δέξασθαι.

COROLLARIUM.

Et manifestum est, quòd quando intra triangulum cadit centrum circuli: angulus in maiori quàm est semicirculus segmēto existens, recto minor sit. Quando uerò in rectam lineam, hoc est in latus, cadit, cū sic angulus in semicirculo existat: ille rectus erit. Cum uerò extra rectam lineam, hoc est extra triangulum, centrum circuli ceciderit, quia tum in maiori quàm est semicirculus segmēto angulus existit: maior recto erit. Et e contrario, cum minorem recto contingat esse angulum: ad rectos ductæ intra ipsum triangulum concurrent. Quando uerò rectum: in aliquod trianguli latus. Si uerò maiorem recto: extra ipsam rectam lineam, hoc est, extra ipsum triangulum concurrent. quòd admonuisse oportuit.

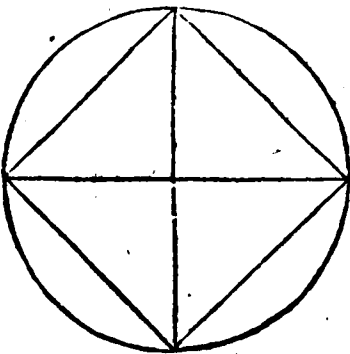
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5.

Εἰς τὸν δὲ δοθέντα κύκλον, τετράγωνον ἐγγράψαι.

PROPOSITIO VI.

In circulo dato, quadratum describere.

Sit circulus datus, atque propositum, quadratum in eo describere. Ducantur igitur



tur in circulo duæ diametri, ad angulos rectos sese mutuo secantes, quarum extremitates tandē si quatuor rectis lineis copulentur, per eas propositioni satisfactum erit, quòd sic patet. Primò, quòd hæc quatuor linearum figura sit circulo inscripta, declarat ipsius rei definitio. Secundo, quòd sit quadratum, hoc est, æqualium laterū & rectorum angulorum, quantum ad rectos angulos, cū omnes eius anguli sint in semicirculo: ex prima parte propositionis 31 tertij hoc cōstabit. Quantū uerò ad latera, potissimū hoc ex propositione 4 primi, quoties opus fuerit ea, usurpata, & com-

& communi illa notitia, Quæ uni sunt æqualia, &c. colligetur. Rectangulū igitur & æquilaterum: quare & quadratū ex definitione, & describitur in circulo. In circulo igitur dato quadratum descriptum est, quod fecisse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

Ζ.

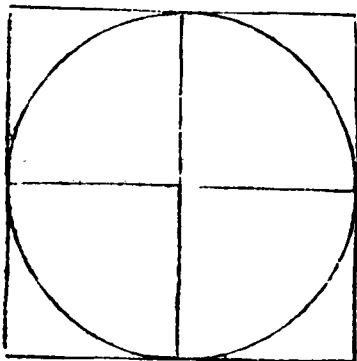
Προτι ὅτι δοθέντα κύκλον, τετράγωνον περιγρῶται.

PROPOSITIO

VII.

Circa datum circulum, quadratum describere.

Sit circulus datus, atque propositum, quadratum circa ipsum describere. Quem admodum præcedens, ductis in circulo duabus diametris, harum extremitates ut quatuor rectis coniungerentur lineis requisivit, ita hæc, postquā circulus datus, in eo etiam duæ ad rectos angulos diametri ductæ fuerint, ut per harum extremitates singulas, ex 17 propositione libri præcedentis, quatuor lineæ circulū contingentes ducantur, necesse erit. Et quoniam hæc si in utramq; partē continuatæ fuerint, semper duæ & duæ, ex propositione 18 tertij, & cōmuni quadam notitia, concurrunt, continentur itaq; omnes, in utramq; etiā partem, donec una cū altera concurrat, & propositioni satisfactum erit, cū uidelicet sub illis ipsis lineis huiusmodi quadratum cōtineatur, quod sic patet. Primò quòd circūscriptio debita facta sit, ex definitione ha-



betur. Quòd insuper sit quadratū, id sic colligitur. Quoniam enim contingentium quælibet duæ oppositæ, suæ diametro, ex secunda parte propositionis 18 primi, ipsæ deinde inter se ex propositione 30 eiusdem, æquedistantes sunt: quod sub his contingentibus, quæq; etiam sub contingentium unaquaq; & diametro sua parallela cōprehenduntur, rectilinea, singula, ex definitione, parallelogramma erit. Hæc autem quoniam ex propositione 34 primi, latera opposita æqualia habent: contingentes oppositæ primò, ex communi illa notitia, Quæ uni æqualia &c. omnes

deinde inter se, propter diametrorum æqualitatē, æquales erunt. Æquilaterum igitur est circa circulum descriptum parallelogramum. Quòd uerò sit etiam rectorum angulorum, cum qui ad centrum ponuntur anguli, singuli, ex structura, recti sint, cumq; etiam, Omnis parallelogrammi latera & anguli oppositi, ut sæpe dictum, æquales sint, patet etiam illud. Factū est ergo quod fieri oportuit, descriptum nimirum circa datum circulum quadratum, quod erat propositum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

Η.

Εἰς ὃ δοθέν τετράγωνον, κύκλον ἐγγράψαι.

PROPOSITIO

VIII.

In dato quadrato, circulum describere.

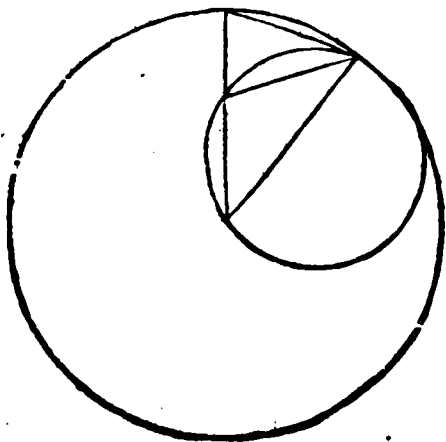
Sit datum quadratum, atq; propositum, circulū in eo describere. Duo igitur circa unum in quadrato angulum latera, per propositionē 10 primi, bifariam diuidantur, à punctis deinde illis medijs, perpendiculares, ad latera usq; opposita peruenientes, lineæ educantur: & erit punctum illud, quod est communis harum duarum perpendicularium sectio, centrum futuri circuli. Nam cum hæc ductæ ex suis punctis perpendiculariter egrediantur: utraq; ex posteriore parte propositionis 28 primi, suis collateralibus quadrati lateribus æquedistans erit. Omnes igitur figuræ rectilineæ, quocumq; in hac dispositione colligi possunt, parallelogramma, horum

Ἰσοσκελὲς τρίγωνον συστήσασθαι, ὅχον ἡμετέρων τῶ πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῇ λοιπῇ.

PROPOSITIO X.

Duum equalium laterum triangulum constituere, habens utrunq; eorum, qui ad basim sunt, angulorum, duplum reliqui.

Sententia est propositionis, triangulū isosceles, cuius uterq; angulorū qui ab æqualibus lateribus subtenduntur, ad tertium reliquum duplus sit, describere. Ducta igitur linea recta, longa uel brevis, ad placitum. hac recta deinde, ut quidem habet propositio secundi undecima, in duas portiones diuisa, ex puncto hoc, quod est communis terminus diuisæ & portiones longioris, secundum intervallum rectæ datæ circulus describatur. Hoc facto, longiori portioni, quæ nimirum est diametro circuli breuior, æqualis recta in circulo, per propositionem primam huius, coaptetur. Quod si tandem extremitas huius, longiori portioni æqualis, altera cum centro & diuisionis puncto duabus rectis lineis copuletur: propositioni satisfactum erit. Nam id demū triangulum, cuius duo latera à centro usq; ad circumferentiam continuata sunt, erit quod quærebatur, cuius quidem demonstratio ut sequitur. Circa triangulū partiale, cuius unus angulus ad cētrum ponitur, per propositionē huius, circulus describatur. Et quoniā tam quadrato longioris portiones ex structura, uel propositione 11 secundi, quā quadrato rectæ in circulo coaptatæ, huic longiori portioni equali, rectangulum sub prioris circuli semidiametro & breuiori eius portione compræhensum, æquale est: longiori æqualis posita recta linea, per propositionem 37 tertiū, minorem circulum contingens erit. Et rursus quoniā hæc recta circulum minorem contingit, à puncto item contactus alia quædā, eundem circulum secās, ducta est, illa nimirum quæ in diametro ad punctū diuisionis terminatur: angulus igitur, quē hæc duæ rectæ continent, partialis, angulo alterni segmenti, qui ad centrum ponitur, ex propositione 32 tertiū equalis erit. unde totalis postea, si partialis alter ex æquo his æqualibus adiciatur, duobus æqualis. Sed quia duobus his, ut trianguli huius partialis internis, angulus ille, qui in alio partiali ad diuisionis punctum ponitur, externus, ex propositione 31 primi, est æqualis: & eidē externo ille totalis, ex communi quadam notitia, æqualis erit. Et quia etiam totalis, illi qui sub diametro atq; circulum minorem tangente re-



ta linea continetur, ex definitione circuli & priori parte propositionis quintæ primi, æqualis est: & qui sub istis lineis continetur angulus, dicto externo æqualis erit. Tres igitur anguli inter se æquales, unum etiam triangulum partiale, cum duo ex æqualibus angulis in eo sint positi, ex propositione 6 primi, isosceles, hoc est duum æqualium laterum erit. Sed quia uni eorum, coaptatæ scilicet in circulo lineæ, æqualis est, ex structura, longior diuisæ semidiametri portio, & alteri lateri hæc eadem longior portio æqualis erit: quare isosceles, triangulum etiam partiale alterum. Hoc autem quia, ex propositione 5 primi, duos ad basim angulos inter se æquales habet, & quia etiam illis æqualibus, angulus huius isoscelis externus æqualis est, unde sic ad utrunq; ac per consequens, ad eum qui ad centrum ponitur duplus: & illorum qui huic externo æquales sunt, uterq;

Et

ad eundem

ad eundem ad centrum positum angulum, duplus erit, et sunt etiam in hoc ipso, in quo ille scilicet, totali triangulo. Triangulum igitur Iſosceles, cuius uterq, eorum qui basim sunt angulorum, ad reliquum tertium duplus sit, constitutum est, quod quidem fecisse oportuit.

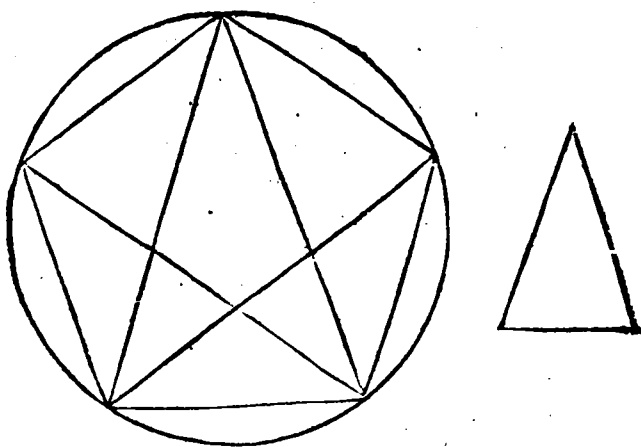
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ.

Εἰς ἑνὶ δὲ κύκλῳ, πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσόγωνιον περιγράψαι.

PROPOSITIO XI.

In dato circulo, pentagonū & æquilaterū & æquiangulū describere.

Sit datus circulus, atque propositum, pentagonum in eo æquilaterum & æquiangulum describere. Circulo igitur dato, primò Iſosceles triangulum, cuius uterq, æqualium angulorum ad tertium duplus sit, per propositionem præcedentem 16 formari, huic deinde æquiangulum triāgulum in dato circulo, per propositionem 2 huius describi, debet. Postea utroq, eorum, qui ad tertium dupli sunt, angulorum, recta quadam linea, per prop. 9 primi, bifariam diuiso, quinq, iam anguli inter se



æquales erunt. Quod si tandem rectæ hæ, per quas ad tertium dupli anguli bifariam diuisi sunt, ad circumferentiam usq, continuatæ fuerint, cum hi quinq, in una sint circūferentia anguli, atq, æquales etiam inter se: & eorū arcus a quibus subtenduntur, per prop. 26 tertij: horū deinde arcuum rectæ lineæ, per 29 eiusdem, æquales erunt, quare pentagonū æquilaterū. Quod uerò sit etiam æquiangulum, id sic patet. Quoniam enim singuli huius pentagoni arcus, ut quidē demonstratū est, inter se sunt æquales, sumptis duob, quibus uidelicet nullus est cōmunis terminus, si utri que eorū duo hi, quos interceptos habent, arcus additi fuerint: & collecti sic arcus, ex communi quadam notitia, inter se æquales erunt. Quare etiam æquales, ex propositione 27 tertij, qui ab his æqualibus arcubus subtenduntur, anguli. Constat igitur sic æqualitas de angulis duobus. Quia autem sicut de duobus, ita etiam de omnibus, hoc nimirum processu toties, quot fuerint anguli, minus uno, usurpato, constare manifestum est: pentagonum igitur hoc æquiangulum esse concluditur, & quia etiam æquilaterum. In dato igitur circulo æquilaterum & æquiangulum pentagonum descriptum est, quod fecisse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ.

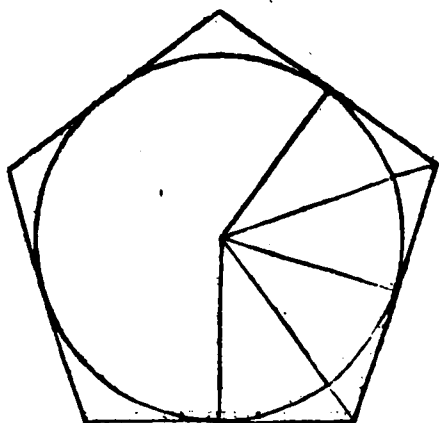
Περί τ' ἐν δὲ κύκλῳ, πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσόγωνιον περιγράψαι.

PROPOSITIO XII.

Circa datum circulum, pentagonum æquilaterum & æquiangulum describere.

Sit

Sit datus circulus, atq; propositum, pentagonum circa eum æquilaterum & æquiangulum describere. Diuidatur igitur circuli dati circumferentia, per præcedentem, in quinque partes æquales, à punctis deinde diuisionum sigulis per propositionem 17 tertij lineæ, ipsum circulum contingentes ducantur, hæ tandem, si in utranq; partem, donec altera alteri occurrat, continuatæ fuerint: propositioni satisfactum erit. Nam illæ ipsæ circulum contingentes rectæ lineæ pentagonum, quale propositio hæc requirit, comprehendunt, quod sic demonstrari potest. Primò à tribus quibuscumque, proximis tamen inter se, contactuum punctis demittantur ad circuli centrum tres rectæ lineæ. Et quoniam hæ singulæ ex propositione 13 tertij, ad suas contingentes perpendiculares sunt: omnes igitur illi qui sic fiunt anguli, recti erunt: quod est obseruandū. Ducantur porro à duobus pentagoni angulis ijs, qui ab his tribus lineis continentur, aliæ duæ ad centrum rectæ lineæ. Describuntur autem sic quatuor triacula, quorum quæq; duo extrema, per penultimam primi, laterum æqualium: per propositionem deinde 3 & 4 eiusdem, æqualium angulorum esse demonstrantur. Et quia sic est: tam illi igitur, qui ad cẽtrum sub perpendicularib. continentur anguli, ad suos partiales, quàm etiã ipsius pentagoni anguli ad suos, dupli erunt. Et rursus quoniam ad cẽtrum anguli super æquales, circumferentias deducuntur, cum iisdem anguli, ex propositione 27 tertij, inter se æquales sint: & illorum dimidiũ omnes, quemadmodum & ipsi toti inter se æquales erunt. Et quia iam sunt duo triacula, quorũ nimirum latus quod habent commune, perpendicularis linea est, quæ cũ duos angulos duobus angulis æquales habeat, utrunq; utriq;, unum item latus uni lateri æquale: & reliqua latera reliquis lateribus, atque etiã reliquum angulũ reliquo angulo, per propositionem 26 primi æqualia habebunt. Circulum igitur contingentium linearum unaquæq; per suam perpendicularem bifariam diuisa est, quare & ipsæ ad utranq; partem, tanquam ad suas medietates, duplæ. Partes uero cum sint inter se æquales, ut iam dudum demonstratum est: & ipsas rotas contingentes rectas lineas inter se æquales esse conueniet. Pentagonum igitur æquilaterum. Quod uerò sit etiam æquiangulum, cum ipsius pentagoni anguli æqualium sint angulorum dupli: patet & illud. Circa datum igitur circulum, æquilaterum & æquiangulum pentagonum descriptum est, quod fecisse oportuit.



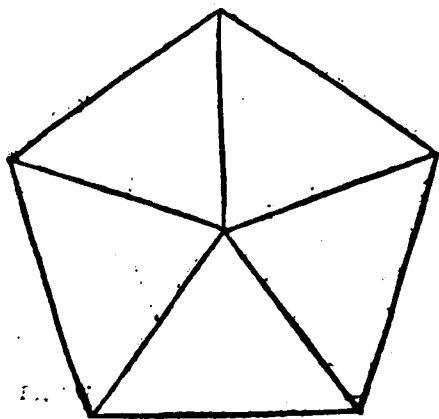
ferentias deducuntur, cum iisdem anguli, ex propositione 27 tertij, inter se æquales sint: & illorum dimidiũ omnes, quemadmodum & ipsi toti inter se æquales erunt. Et quia iam sunt duo triacula, quorũ nimirum latus quod habent commune, perpendicularis linea est, quæ cũ duos angulos duobus angulis æquales habeat, utrunq; utriq;, unum item latus uni lateri æquale: & reliqua latera reliquis lateribus, atque etiã reliquum angulũ reliquo angulo, per propositionem 26 primi æqualia habebunt. Circulum igitur contingentium linearum unaquæq; per suam perpendicularem bifariam diuisa est, quare & ipsæ ad utranq; partem, tanquam ad suas medietates, duplæ. Partes uero cum sint inter se æquales, ut iam dudum demonstratum est: & ipsas rotas contingentes rectas lineas inter se æquales esse conueniet. Pentagonum igitur æquilaterum. Quod uerò sit etiam æquiangulum, cum ipsius pentagoni anguli æqualium sint angulorum dupli: patet & illud. Circa datum igitur circulum, æquilaterum & æquiangulum pentagonum descriptum est, quod fecisse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

ΙΓ.

Εἰς τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσοπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον ἐγγράψαι.

PROPOSITIO XIII.

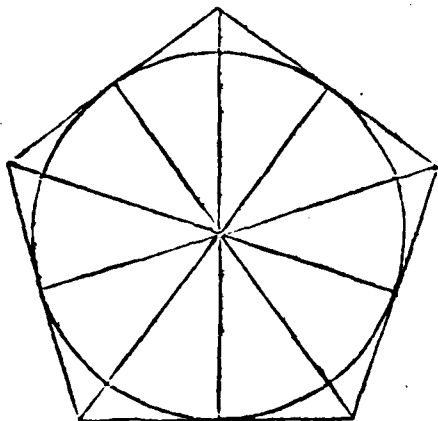


In dato pentagono, quod est æquilaterum & æquiangulum, circulum describere.

Sit datum pentagonum, æquilaterum existens & æquiangulum, atq; propositum, circulum in eo describere. Pentagoni igitur dati duo quilibet proximi anguli, duabus rectis, per propositionem 9 primi, bifariam diuidantur: & erit punctum concursus harum rectarum

Et a in pene

in pentagono: centrum circuli qui petitur, cuius hæc sit demonstratio. Ducantur à tribus indiuisis pentagoni angulis, ad punctum illud concursus, tres rectæ lineæ. Et quoniam duo ipsius pentagoni anguli, suis rectis ductis bifariam diuisi sunt: quæq; duo circa illos diuisos posita triangula, inter se æqualia esse, per 4 primi, demonstrantur. Quia uero ad unum angulum in utroq; triangulo, angulus suus totalis duplus est: propter æqualitatem, totalium quidem ex hypothesi, ac partialium deinde, ut modo ostensum est, inter se: & in utroq; triangulo angulus totalis ad suum partialem: singuli item totales, hac operationem, ad singulos suos partiales angulos, Dupli erunt. Quare unumquemq; sic bifariam diuisum esse, manifestum erit.



Porrò pro ulteriori demonstratione, demittantur à puncto concursus ad singula pentagoni latera perpendiculares. Hæ autem quoniam facili opera per propositionem 26 primi, æquales inter se esse demonstrantur: punctum igitur illud concursus, ut dictum est, ex propositione 9 tertij, centrum circuli erit. Eo igitur nunc secundum unius, harum æqualium perpendicularem interuallum, descripto, cum is, propter æqualitatem, per singularum extrema puncta transeat unumquodq; insuper pentagoni latus, ex priore parte

corollarij prop. 16 tertij, circulum tangat (alias enim si scilicet unum ex his secaretur, circulum contingens in ipsum cadere contra allegatam propositionem conuinceretur) propositioni ut oportuit satisfactum erit. In pentagono nimirum æquilatere & æquiangolo circulus descriptus est. quod fieri oportuit.

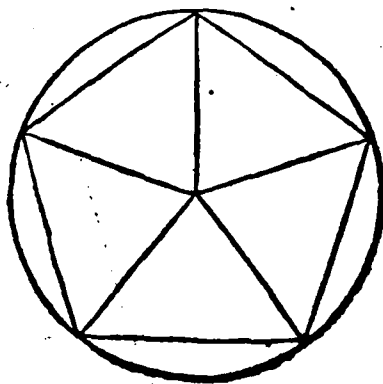
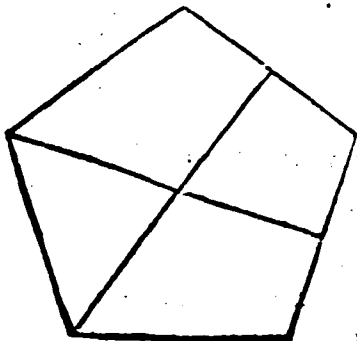
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ.

Ποδὲν ὁ δὲ πέντε γωνίον, ὃ ἐστὶν ἰσοπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον ποδὲν γράσει.

PROPOSITIO XIII.

Circa datum pentagonum, quod est æquilaterum & æquiangulum, circulum describere.

Sit datum pentagonum quale requiritur, atq; propositum, circulum circa ipsum describere. Diuidantur, ut in præcedenti factum est, duo inter se proximi in pentagono anguli, per propositionem 9 primi, duabus rectis bifariam: & erit punctum concursus harum rectarum, centrum futuri circuli qui hoc datum pentagonum circumscribet, id quod ex propositione 4, toties quoties opus fuerit eam repetendo, atq; ex nona deinde tertij, hoc modo demonstrabitur. Ducantur à tribus indiuisis pentagoni angulis, ad punctum illud concursus tres rectæ lineæ. Et quoniam in



penta-

pentagono duo anguli, ex structura, bifariam diuisi sunt, cum pentagonum sit ex hypothesi æquiangulum, ubi bis aut ter duo triacula, quorum unum quidem unam, alterū uerò alteram bifariam diuisi anguli medietatem sibi uendicat, sumpta fuerint, & reliqui tres pentagoni anguli ex propositione 4 primi, bifariam diuisi erunt. Quare, ut ipsi totales, ex hypothesi, ita nunc ex demonstratione, per allegatam quartam sumpta, partiales anguli omnes, ductæ insuper à centro hoc ad angulos pentagoni rectæ lineæ, inter se æquales erunt. Quoniam autem hæ rectæ plures quàm duæ sunt, circuli igitur per harum æqualium extremitates, ut quæ sunt in pentagoni angulis, transeuntis centrum, per propositionem 9 tertij, hoc punctum erit. Eo igitur inde descripto, propositioni tandem satisfactum erit, circa pentagonum uidelicet, æquilaterum & æquiangulum, circulus descriptus. quod fecisse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ.

ΙΕ.

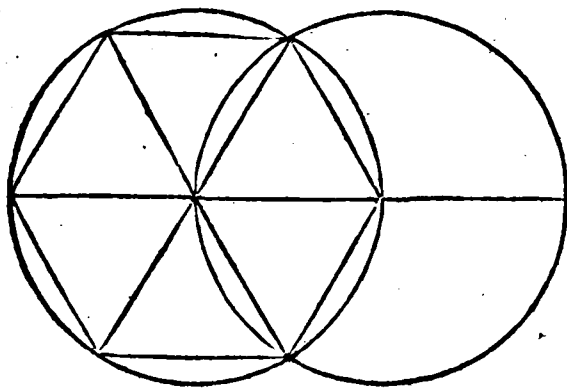
Εἰς τὸ διδόντα κύκλον, ἐξ ἁγώνου ἰσοπλευροῦ τε καὶ ἰσογώνου ἑγγραῖται.

PROPOSITIO

XV.

Indato circulo, hexagonum æquilaterum & equiangulum describere.

Sit datus circulus, atq; propositum, hexagonum in eo æquilaterum & æquiangulum describere. Circulo igitur dato, diametro etiam in eo ducta, alterutra eius extremitate loco centri sumpta, alius ad prioris dati quantitatem circulus describatur, atq; ubi hi duo circuli sese mutuo secant, ab illis sectionum punctis per centrum circuli prioris, usq; ad eius circumferentiam, aliæ duæ rectæ extendantur. Erunt autem sic in circulo dato puncta



sex, quæ tandem sex etiam rectis lineis continuata suis quodque punctis proximis, confectum erit negotium. Quoniam enim cum à centris circulorum, tanquam à medijs punctis, ad circumferentias deductæ rectæ lineæ, ex definitione, inter se sunt æquales: utrunq; eorum, quæ in portione circuli communi descripta sunt, triangulorum, ex hac circuli de-

finitione bis usurpata, illa deinde communī noticiā, Eidem æqualia, &c. æquilaterum, atq; mox deinde etiam, per priorē partem propositionis quintæ primi, æquiangulum erit. Quoniam autem interni tres anguli omnis trianguli, ex corollario propositionis 32 primi, duobus rectis sunt æquales: unusquisq; horum duorum triangulorum angulus unum duorum rectorum tertium erit, duo igitur ad centrum prioris uel dati circuli positi anguli, duobus duorum rectorum tertijs sunt æquales. Quia uerò illi duo cum eo quem ex utraq; parte habent ἴσῳ , per propositionem 33 primi, duobus rectis angulis sunt æquales: & hunc ἴσῳ angulum, cum tres tertie unum integrum faciant, unum duorū rectorum tertium esse necesse est, hi tres igitur anguli inter se æquales erunt. Sed quia his æquales etiam sunt, ex propositione 15 primi, anguli quos singuli ad uerticem habent: sex igitur ad centrum deducti anguli inter se æquales erunt. quare & illorum arcus à quibus subtenduntur ex propositione 26 tertij, & arcum deinde rectæ lineæ, ex 29 eiusdem, æquales erunt. Hexagonum igitur æquilaterum. Quod uerò sit etiam æquiangulum, id sic patet. Quoniam enim singulæ huius hexagoni laterum circumferentiæ uel arcus, ut quidem demonstratum est, inter se sunt æquales, sumptis duobus quibus uidelicet nul-

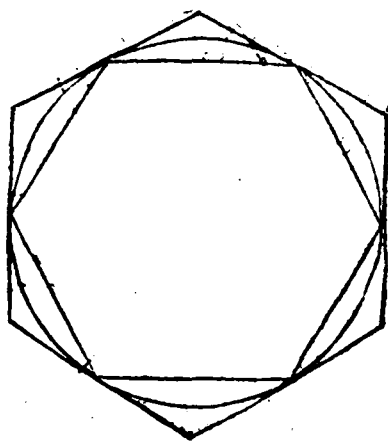
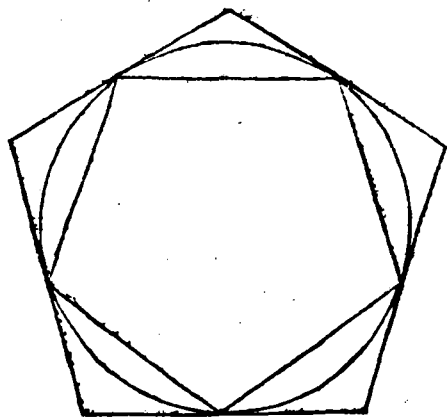
lus est communis terminus, si utriusque eorum tres illi qui ab his duobus intercipiuntur, additi fuerint: & collecti sic arcus, ex communi quadam noticia, inter se æquales erunt: quare etiam æquales, ex propositione 27 tertiæ, qui ab his æqualibus arcibus subtenduntur anguli. Constat igitur sic æqualitas de duobus. Quia autem sicut de duobus, ita etiam de omnibus, hoc nimirum processu toties quot fuerint anguli minus uno, usurpato, constare manifestum est: hexagonum igitur hoc æquiangulum esse concluditur, & quia etiam æquilaterum. In dato igitur circulo, æquilaterum & æquiangulum hexagonum descriptum est. quod fecisse oportuit.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Εκ δὲ τούτου φανερὸν, ὅτι ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ, ἴση ἔστι τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου. Καὶ ἂν εἰς τὸν α β γ δ ε ζ σημείων ἑξαπλομερίας τοῦ κύκλου ἀγέτομεν· περιγράψομεν τὸν κύκλον ἑξαγώνου ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, ἀκολουθῶν τῶν πρὸς τοῖς πέντε γωνίαις ἐρημνοῖς. Καὶ ἔτι εἰς τὸν ὁμοίῳ τοῖς πρὸς τοῖς πέντε γωνίαις ἐρημνοῖς, εἰς τὸ δὲ διὰ τὸν ἑξαγώνου κύκλον ἐγγράτομεν. ὅπως ἴδειται ποιῆσαι.

COROLLARIUM.

Ex hoc quidem manifestum est. Quòd uidelicet hexagoni latus, æquale sit ei, quæ ex centro circuli producit, rectæ lineæ. Et si per sex angularia hexagoni puncta contingentes circulum deduxerimus, quod tum circa circulum, æquiangulum & æquilaterum hexagonum descriptum sit, perinde atque pentagonum quoque, ut antè dictum est. Insuper in dato hexagono, uel circa datum hexagonum, per ea quæ similiter de pentagono dicta sunt, circulum describemus. quod admonuisse oportuit.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ

15.

Εἰς τὸν δὲ διὰ τὸν ἑξαγώνου κύκλον, πεντεκαίδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

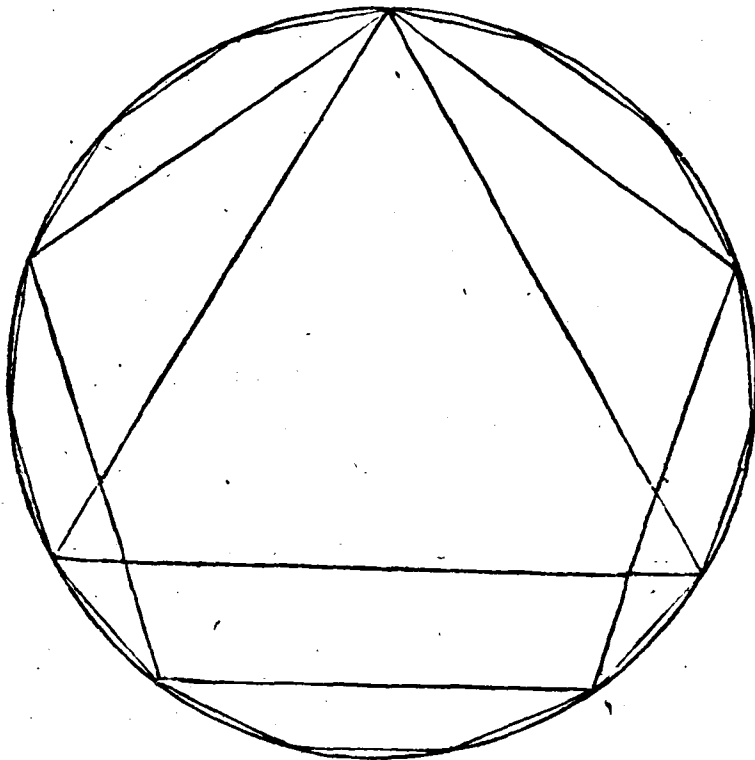
PROPOSITIO

XVI.

In dato circulo, quindecagonum æquilaterum & æquiangulum describere.

Sit datus circulus, atque propositum, quindecagonum in eo, æquilaterum & æquiangulum describere. Circulo igitur dato, primum in eo triangulum æquilaterum, & deinde æquilaterum pentagonum, illud quidem ex propositione 2, hoc uero ex 1 huius.

huius describatur. Curetur tamen, ut unus trianguli & unus pentagoni angulus, unum in circumferentia punctum commune fortiantur. Et quoniam, quindecagonum æquilaterum & æquiangulum in circulo dato describere propositum est, cum circumferentia ideo in quindecim partes æquales diuidenda sit, infertur, ut qualium tota circumferentia fuerit æqualium partium quindecim: talium tertiam eius partem, quæ à trianguli latere subtenditur, quinque: quintam uerò, quam pentagoni la-



tus subtendit, tres esse debere. Excessus igitur arcus illius super hunc talium duarum, qualium tota circumferentia est quindecim, partium erit. Quare eo, per propositionem 30. tertij, bifariam diuiso, quantum dati circuli quindecagoni latus fuerit, alterutra ipsius excessus medietas indicabit. Quo habito, si id quindecies circulo ordine, per primam propositionem huius, coaptatum fuerit, propositioni tandem satisfactum erit. In circulo nimirum, quindecagonum æquilaterum & æquiangulum descriptum. quod fecisse oportuit. Demonstratio neglecta est, cum ex structura hæc clara sit.

APPENDIX.

Porro circulo dato, quomodo circa ipsum quindecagonum æquilaterum & æquiangulum: Insuper, quomodo circa quindecagonum datum, circulus describendus sit, licet illa ab Euclide non tradantur, nemini tamen difficile erit, si modò eorum quæ in hoc libro ad 12 & 13 propositiones de pentagono dicta sunt, meminerit. Atque hæcenus de inscriptionibus & circumscriptionibus figurarum inter se, cuius quidem tractatio in hoc quarto libro erat proposita.

FINIS LIBRI QVARTI.

ΣΧΟΛΙΟΝ

BREVIS INTERPRETATIO

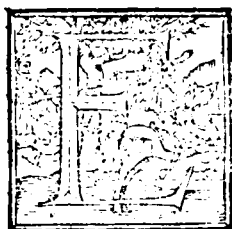
HVIVS QVINTI LIBRI, INCERTI AVTORIS.

Scopus huius quinti libri est is, ut tractetur de proportionib. Pertinet enim liber iste & ad geometriā, ac arithmetica & musicā, omnesq; alias quæ simpliciter mathematicæ disciplinæ uocantur. Etenim quæ in ipso traduntur, non geometricis solum contemplationibus cōueniūt, illisq; propria existūt, sed & omnib. quæ sub mathematica ipsa cōprehenduntur, & ut prius dixi, disciplinis. Sit igitur hic libri scopus. Cæterum librū ipsum cuiusdā Eudoxi inuentū esse asserunt, discipuli Platonis. Cū igitur sit scopus de proportionib. proportio aut sit rationū quarundā habitudo: quæ sint illæ rationes, prius cognoscendum erit necessariō. Oportet enim simpliciu cognitionē præcedere, q̃ de cōpositis dicatur aliquid. Itaq; si quædam inter se cōparentur (sumamus aut duas magnitudines) illæ quidem Termini appellabūtur, transmutatio aut siue trāsitus ab uno in alterū, Interuallum dicitur. Cōparatio uerō alterius ad alterū, Habitudo uocatur, quam ueteres Rationē nominauerūt. Collationem uerō huiuscemodi rationis ad aliā rationē, quæ sit similitudine quadā, aut eiuscemodi habitudinem, appellarūt Proportionē, nō perinde quasi magnitudo illa cōparet, sed ut illa ratio ad illā rationē: quæ deinde collatio, Rationis ratio dicitur. ut si duæ fuerint rectæ lineæ, quarū una alterius respectu duplam habeat rationem: quadratum quod ab ea linea est descriptum, quæ duplam rationem habet, quadruplā quoq; rationē habebit, respectu uidelicet eius quadrati, quod ab altera est descriptū, siquidē collatio habeat longioris lineæ ad breuiorē rectā. Quæ enim lōgitudine dupla sunt: ea potētia quadruplā existūt. Ratio igitur quadratorū quadrupla existens, duplæ rationis existentiu rectarū dupla est. Talis aut uocat Rationis ratio. Sed fuerit illa in quātitate, duplex enim est ratio, una in dignitate, altera uerō quantitatē, ac dignioris quidē nulla species uidetur esse ad præsentiū usum accommodata: huius uerō rationis, quæ secundū quantitātē dicitur, species sunt quinque. Alia enim ratio Multiplex appellatur: cuiusmodi est 6 ad 3: alia Superparticularis, ut 4 ad 3: alia uerō Superpartiens, ut 5 ad 3. atq; hæc quidē sunt Simples, quarū tamen omnium rationū magis simplex est Multiplex. Reliquæ uerō duę species ex harū nascūtur cōpositione, Multiplex superparticularis scilicet, ut 7 ad 3: & Multiplex superpartiens, ut 8 ad 3.

Sub rationes aut uocantur, cum minores maiorib. cōferuntur: Submultiplices, Subsuperparticulares, Subsuperpartientes, & sic deinceps. Sciendum aut, diuidi hunc librū in duas partes, et initiō quidē simpliciu cōtinet doctrinā, hoc est, eam quæ de multiplicib. tractat, deinde uniuersaliora de omnib. rationib. tradūtur. Oportet enim, ut iā ostēsū est, in omni re simpliciu doctrinā præcedere. Si quis aut cōsideret modū diuisionis, terminorum etiā diuisio facta erit. Nā priores quidē, scilicet termini, Multiplices: qui autem deinceps sequuntur uniuersaliores, de omnibus rationibus.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙ ΧΕΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

EVCLIDIS ELEMENTORVM GEO- metricorum liber quintus.



St hic quintus liber Euclidis ποὺ τὸ λόγος καὶ τῇ ἀναλο-
γίας, hoc est, de ratione & proportione. Quæ igitur ad
hanc tractationem requiruntur uocabula, primò, ut in
præcedentibus etiam factum est, ordine definit.

ΟΡΟΙ.

Μίρον ὅστις μίγνθς, ἢ ἔλασσον τὸ μείζον, ὅταν κατὰ μέτρον
ᾖ μείζον.

DEFINITIONES.

1 Pars est quantitas quantitatis, minor maioris, quando minor meti-
tur maiorem.

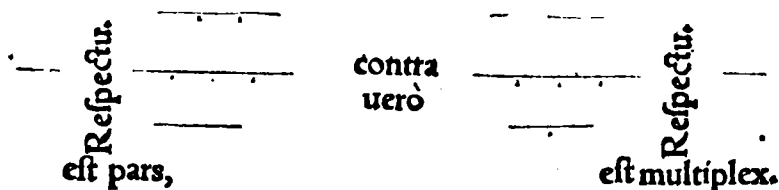
μίγνθς) Licet hac uoce continua tantum quantitas, sub qua nimirum lineæ,
superficies & corpora comprehensa sunt, intelligatur, unde sic quidem magnitudi-
nis significationem habet; tamen quia omnia, quæ in hoc libro, tam per definitio-
nes quàm etiam propositiones, ab authore nobis præscribuntur, per numeros æque
ut per lineas ostendi possunt: non magnitudinis, sed quantitatis uoce, sub qua, tan-
quam uocabulo generali, numeri etiam cōprehenduntur, in uersione usi sumus, id
quod Lector æquo animo ferat, præsertim cū in hoc auctori nihil detrahatur, cumq̃
etiam singula numeris declarauerimus.

κατὰ μέτρον) autem est metiri, atq̃ hoc loco diuidere aliquid integrè, & quasi ad
libellam, ut dicitur, sic quòd nō maneat, ultima subtractione facta, aliquid minore
minus, sed nihil omnino, ad mensurandum amplius relinquatur.

Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μείζον τὸ ἔλασσον, ὅταν κατὰ μέτρον ᾖ ὑπὸ τοῦ
ἐλάττονος.

2 Multiplex est, quantitas quantitatis, maior minoris, quando maior
mensuratur à minore.

Harum definitionum de parte & multiplici exempla sunt.



Exempla per numeros expolita.

$$3 \text{ respectu scilicet } \begin{cases} 6 \\ 9 \\ 12 \\ 15 \\ 21 \end{cases} \text{ est pars, Contra uero } \begin{cases} 6 \\ 9 \\ 12 \\ 15 \\ 21 \end{cases} \text{ respectu 3, multiplex}$$

Λόγος

Λόγος ὅστι δύο μεγέθῳ ὁμογενῶν, ἡ κατὰ πληρότητα πρὸς ἀλλήλας πρὸς ἀξίους.

3 Ratio, est duarum quantitatum eiusdem generis, aliquatenus inter se quædam habitudo.

Duæ requiruntur, ut ex definitione colligitur, ad rationem cōstituendam, quantitates, atq; ea deinde inter illas habitudo, quanta nimirū una respectu alterius fuerit. hoc inquam, uel illa consideratio, siue respectus, ratio dicitur. Exempla sunt,

_____ ad _____
 _____ ad _____
 uel _____ ad _____

Exempla per numeros exposita.

25 ad $\begin{cases} 25 \\ 5 \\ 24 \\ 17 \\ 3 \\ 7 \end{cases}$ uel contra $\begin{cases} 25 \\ 5 \\ 24 \\ 17 \\ 3 \\ 7 \end{cases}$ ad 25, est ratio,

hoc est, quidam respectus, ut ratione primi exempli in utroq; ordine, numeri sese mutuo æqualiter respiciunt. Ratione secundi, in priori quidem, est prior quantitas numerus posterioris quincuplus, in posteriori uerò subquincuplus, & sic ordine deinceps. Illa autem consideratio quantitatum inter se, unius ad alteram, dicitur ratio. Et sicut lineæ ac numeri, ita quoq; superficies, corpora, ac quæq; res aliæ inter se conferri possunt.

Λόγον ἔχειμ πρὸς ἀλλήλας μεγέθη λέγεται, ἃ διώκται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑποδίχαιμ.

4 Rationem habere inter se quantitates dicuntur, quæ possunt multiplicatæ inuicem excedere.

Exempla sunt.

27	18	12	12	18	27
9	6	4	4	6	9
36	36	36	27	30	22
9	9	9	9	5	11

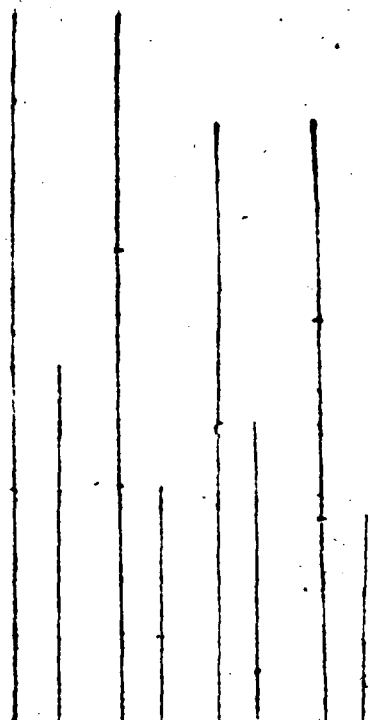
Sic per lineas exempla præscribi possunt.

Εἰ τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι, πρῶτον πρὸς δεύτερον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῖς πρῶτον καὶ τρίτον ἰσάκως πολλαπλασιασθῶν τῷ τῷ δὲ δεύτερῳ καὶ τέταρτῳ ἰσάκως πολλαπλασιασθῶν καὶ ὅποιον ἂν πολλαπλασιασθῶν ἐκείνῳ καὶ τῷ τῷ αὐτῷ, ἢ ἅμα ἐλθέτω, ἢ ἅμα ἴσῃ, ἢ ἅμα ὑποδίχῃ, λεγόμενα κατὰ ἀλλήλας.

5. In eadem ratione quantitates dicuntur esse, prima ad secundam, & tertia ad quartam, quando primæ & tertiæ æquæ multiplicia à secundæ & quartæ æquæ multiplicibus, iuxta quamuis multiplicationem utrun-

Ff 2 que

que ab utroq; uel unâ deficiunt, uel unâ æqualia sunt, uel unâ excedunt, sumpta inter se.



prima se- ter- quarta
ma cun. tia quantitas.

Exempla in numeris sunt.

Multi.	24	18	12	9	excessus
	24	24	12	12	æqualitas
	16	18	8	9	defectus.
Quantita. 8	6	4	3		
	prima	secun.	tertia	quar.	

Τὰ δὲ ἑκάστην αὐτῶν ἔχοντα μέγεθος λόγον, ἀνάλογον καλεῖσθαι.

6 Eandem autem habentes rationem quantitates, proportionales uocentur.

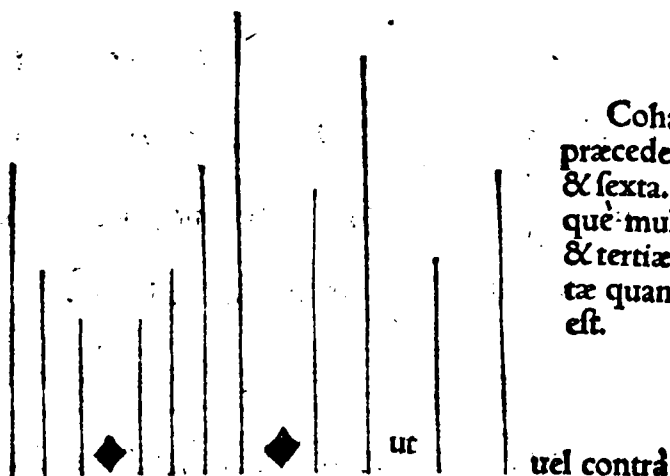
Huius definitionis exempla sunt, quæ ex definitionibus præcedentibus, quarta & quinta, colliguntur.

Ὅταν δὲ τὴν ἰσάνεις πολλαπλασίωσι, ὃ μὲν τῇ πρῶτῃ πολλαπλασίωσι ὑπερέχῃ, καὶ τῇ δευτέρῃ πολλαπλασίωσι, ὃ δὲ τῇ τρίτῃ πολλαπλασίωσι μὴ ὑπερέχῃ, καὶ τῇ τετάρτῃ πολλαπλασίωσι· τότε ὃ πρῶτον πρὸς τὸ δευτέριον μείζονα λόγον ἔχει, καὶ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τεταρτον.

7 Quando uerò æquè multiplicium, multiplex primæ excefferit multiplex secundæ, ipsum uerò multiplex tertiæ non excefferit multiplex quartæ: tunc prima ad secundam maiorem quàm tertia ad quantitatem quartam rationem habere dicitur.

Cohæret

Cohæret hæc definitio cum præcedentibus duabus, quinta & sexta. Quando uerò dicitur, quæ multiplicum, tum primæ & tertiæ, secundæ item & quartæ quantitatium, intelligendum est.



Exempla in numeris sunt.

16	8	18	18	24	20	27	45
8	4	9	9	8	4	9	9

Aliud exemplum.

16	20	18	45
8	4	9	9

Sunt hic tria exempla, quorum primum & secundum patent. In tertio autem, licet multiplex primæ in nullo multiplex secundæ excedat, cum tamen id minus à multiplici secundæ, quam tertiæ multiplex à multiplice quantitatis quartæ deficiat: erit adhuc primæ ad secundā maior, quam tertiæ ad quartam quantitātē ratio.

Alia exempla.

22	12	14	18	21	18	15	24
11 ad 2	&	7 ad 3	Item 7 ad 3	&	5 ad 4		

APPENDIX.

Cum quis uelit inter duas rationes iudicare, utra maior sit, commodissimè per hanc definitionem id expedire poterit.

Αναλογία δὲ ἔστιν ἡ τῶν λόγων ὁμοιότης.

8 Proportio uerò est, rationum similitudo.

ADMONITIO.

Similes siue eædem, & dissimiles sunt rationes, quantitates uerò æquales & inæquales inter se, quod hic annotare libuit.

Αναλογία δὲ ἐν τρισὶν ὁροις ἡ ἀρχὴ ἔστιν ἔστιν.

9 Proportio autem in tribus terminis minima est.

Hoc est, ad constituendam proportionem requiruntur ad minus tres quantitates. Cum enim proportio sit rationum similitudo, & non rationis: singulæ uerò rationes duabus quantitatibus, antecedente scilicet & consequente, consent: sequitur proportionem, duabus rationibus præscriptam, quatuor terminos requirere. Sed quia non rarò solet contingere, ut unius rationis unus terminus bis repetatur, semel quidem ut sit consequens prioris, postea uerò ut sit posterioris rationis antecedens, constat, tres terminos, ut proportio constitutur, aliquando sufficere, pauciores uerò nunquam.

Ff 3

Exempla

Exempla sunt.

9 6 4 16 12 9 16 20 25

Alia.

9 ad 4 ut 27 ad 12 32 ad 24 ut 12 ad 9

Similiter alia.

27 18 ut 12 8 64 80 ut 100 125

Adhuc aliud.

12 ad 15 ut 8 ad 10, atq; ut 4 ad 5

Ceterum, maximam proportionem quot termini constituent, hoc non definit Autor, cum ea semper quoad quis uoluerit, ut habet propositio in octauo secunda, per unum terminum augeri possit.

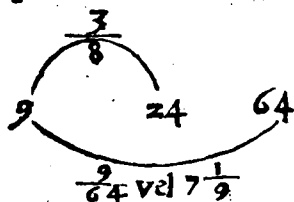
Οταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾗ· ὁ πρῶτον πρὸς ὁ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἢ πρὸς ὁ δεύτερον.

10 Quando uerò tres quantitates proportionales fuerint: prima ad tertiam duplicatam rationem habere dicitur, quàm ad secundam.

Ανάλογον ᾗ, hoc est, continuè unam & eandem rationem habuerint.

Exempla sunt.

Denominatio uel ratio
primæ ad secundam.



Denominatio uel ratio
primæ ad tertiam.

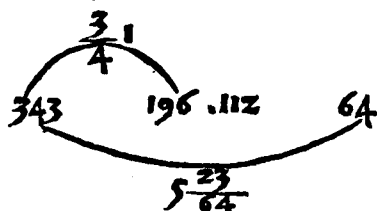
Est autem respectu prioris duplicata, hoc est bis sumpta.

Exempla huius definitionis alia, sunt numeri uel quantitates, quas examinat definitio præcedens quarta.

Οταν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾗ· ὁ πρῶτον πρὸς ὁ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἢ πρὸς τὸ δεύτερον. Καὶ αἰεὶ ἐξ ἑὺς ἐνὶ πλείονι, ἕως αὖ ἡ ἀναλογία ὑπερβαίνει.

11 Quando autem quatuor quantitates proportionales fuerint: prima ad quartam triplicatam rationem habere dicitur, quàm ad secundam. Et semper ordinatim una plus, prout quidem proportio extensa fuerit.

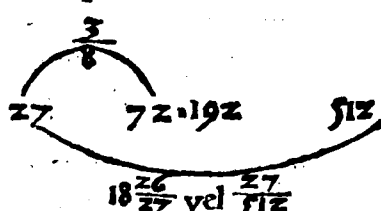
Ratio primæ ad secundam.



Ratio primæ ad quartam.

Est autem respectu primæ collationis triplicata, hoc est, ter sumpta.

Ratio primæ ad secundam.



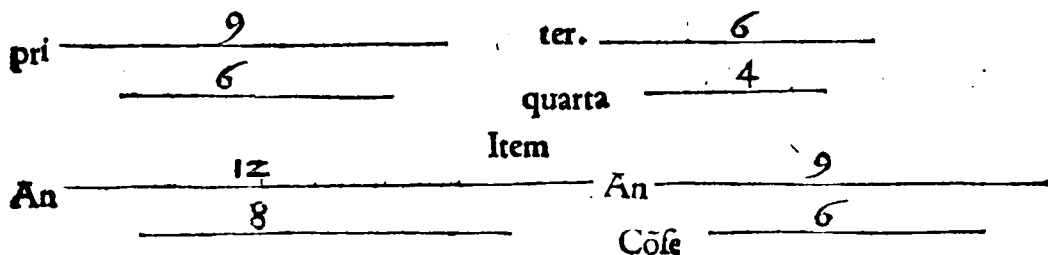
Ratio primæ ad quartam.

Ομολογία

Ομόλογα μέγθη λέγεται εἶναι, τὰ μὲν ἡγόμενα τοῖς ἡγούμενοις, τὰ δὲ ἐπόμενα τοῖς ἐπόμενοις.

12 Similis rationis quantitates dicuntur esse, antecedentes quidem antecedentibus, & consequentes consequentibus.

Est hæc definitio modus quidam & canon, per quem, sicuti ex præcedenti quinta, quæ quantitates proportionales sint, cognoscitur, atq; huius sensus talis. Quatuor aut pluribus quantibus, pari numero propositis, quarum semper duæ & duæ inter se conferuntur, si quidem antecedentes illam inter se, quam ipsæ consequentes, eodem ordine sumptæ, rationem habuerint: similis rationis hæ quantitates esse dicuntur.

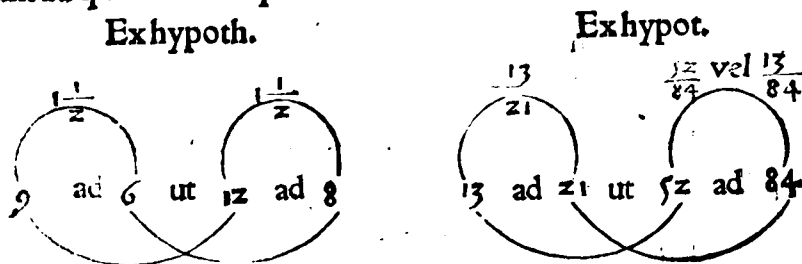


Quia prima & tertia, hoc est antecedentes, illam quam consequentes, quæ sunt secunda & quarta quantitates, inter se habent rationes: similis igitur rationis prima, secunda, tertia & quarta quantitates erunt. Sic de pluribus idem intelligitur.

Εναλλάξ λόγος ὅστις λήψις τὸ ἡγούμενον πρὸς τὸ ἡγόμενον, καὶ τὸ ἐπόμενον πρὸς τὸ ἐπόμενον

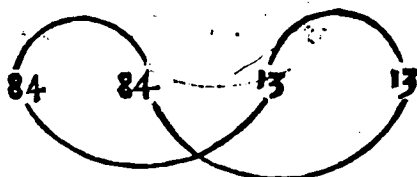
13 Permutata ratio, est acceptio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.

Similis rationis quantitatibus positis: erit, ex permutata ratione, antecedens ad antecedentem, hoc est prima ad tertiam, sicut consequens ad consequentem, secunda nimirum ad quantitatem quartam.



Ergo ex permutata ratione,

Aliud exemplum in ratione æqualitatis.



ἐκ τοῦ ἐναλλάξ λόγου,

APPENDIX.

Est huius, & proximè sequentium quatuor definitionum, generalis hypothe-
sis, ut uidelicet quantitates similis rationis habeant.

Ανάπαλιμ λόγῳ, ὅτι λήψις τοῖ πομνῶν ὡς ἡ γαμνῶν, πρὸς τὸ ἡ γδμνομ ὡς
ἡ γρμνομ.

14 Conuerfa ratio, est acceptio consequentis tanquam antecedentis, ad
antecedentem tanquam ad consequentem.

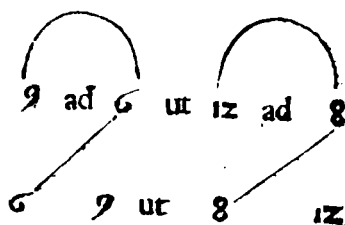
Vt si fuerit proportionalium quantitatū prima ad secundam, ex hypothesi,
ut tertia ad quartam: erit contrā ex conuerfa ratione, secunda ad primam, nimirum
consequens ad antecedentem, sicut quarta ad tertiam, similiter consequens ad an-
tecedentem.

Exemplum est,

geometricum quidem



in numeris uerò



Σύνθεσις λόγου, ὅτι λήψις τοῖ γαμνῶν μὲν τοῖ πομνῶν, ὡς ἐνός, πρὸς αὐτὸ
τὸ ἡ γρμνομ.

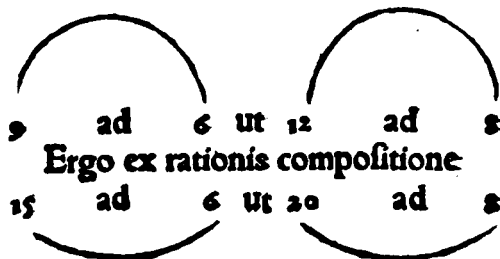
15 Compositio rationis, est acceptio antecedentis cum consequente,
sicut unius, ad eandem consequentem.

Exemplum est,

geometricum quidem



in numeris uerò,
Ex hypothesi



Διαίρεσις

Διαιρέσεις δὲ λόγου, ἐστὶ λήψις τῆ ὑποδοχῆς, ἢ ὑπορίχθαι, τὸ ἐγόμενον τὴν ἱπομένην, πρὸς αὐτὸ τὸ ἐγόμενον.

16 Diuifio rationis, est acceptio excessus, quo excedit antecedens ipsam consequentem, ad eandem consequentem quantitatem.

Exemplum est.

Quia 9 ad 6 ut 12 ad 8 ex hypo.
quare 3 ad 6 ut 4 ad 8 ex diuifio ra.

Ἀναστροφὴ λόγου, ἐστὶ λήψις τοῦ ἐγόμενου πρὸς τὴν ὑποδοχὴν, ἢ ὑπορίχθαι τὸ ἐγόμενον τοῦ ἱπομένην.

17 Conuerfio rationis, est acceptio antecedentis ad excessum, quo excedit antecedens ipsam consequentem quantitatem.

Exemplum est.

Cum ex hypothesi fuerint 9 ad 6 ut 12 ad 8: erunt ex conuerfionis ratione 9 ad 3 ut 12 ad 4

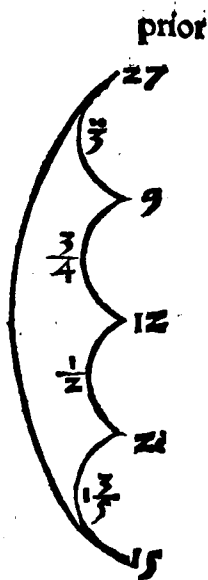
SEQVITVR EXEMPLVM GENERALE, QVINQVE
præmissas proportionis proprietates declarans.

Quia 15 sunt ad 8 ut 45 ad 24 ex hypothesi,

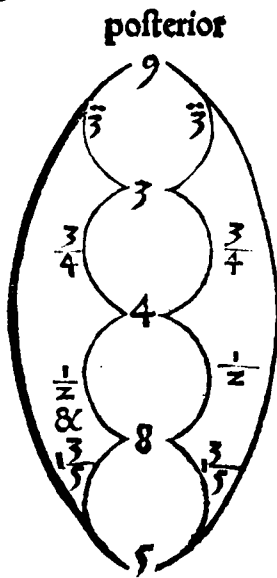
igitur $\begin{cases} 15 \\ 8 \\ 23 \\ 7 \\ 15 \end{cases}$ erunt ad $\begin{cases} 45 \\ 15 \\ 8 \\ 8 \\ 7 \end{cases}$ ut $\begin{cases} 8 \\ 24 \\ 69 \\ 21 \\ 45 \end{cases}$ ad $\begin{cases} 24, \text{ ex permutata ratione} \\ 45, \text{ ex conuerfa ratione} \\ 24, \text{ compositione} \\ 24, \text{ ex rationis diuifione} \\ 21, \text{ conuerfione.} \end{cases}$

Διίβου λόγου ἐστὶ, πλεόνων ὄντων μεγέθων, καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων ἢ πληθύνων δὲ δύο λαμβανομένων, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὅτι καὶ ἢ, ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσι, ἢ πρώτων πρὸς ἢ ἰσχυρῶν, οὕτως ἐν τοῖς δεύτεροις μεγέθεσι, τὸ πρῶτον πρὸς ἢ ἰσχυρῶν. Ἡ ἄλλως· Λήψις τῆ ἀκέρων, καὶ ὑπερίχθαι τὴν μείωσιν.

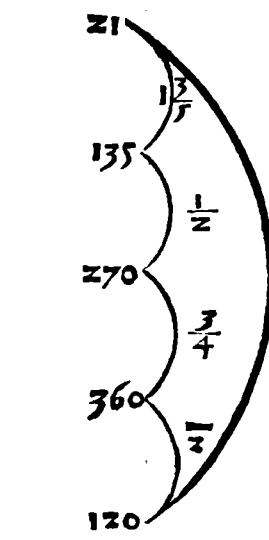
Ordo



uel



ordo prior



ordo posterior.

Gg

Æqua

18. Æqua ratio est, pluribus existentib. quantitibus, & alijs eis æqualibus multitudine, cū duabus sumptis, & in eadem ratione, quando fuerit, sicut in prioribus quantitibus, prima ad ultimam: sic in posterioribus quantitibus, prima ad ultimam. Vel aliter, Æqua ratio, est acceptio extremarum, per subtractionem mediarum.

Τετραγμένη ἀναλογία ἐστίν, ὅταν ἢ, ὡς ἡ γ' μὲν πρὸς ἐπὶ μὲν, οὕτως ἡ γ' μὲν πρὸς γ' ἡ δ' μὲν, ἢ δὲ καὶ ὡς ἐπὶ μὲν πρὸς ἄλλο π, οὕτως ἐπὶ μὲν πρὸς ἄλλο π.

19. Ordinata proportio est, quando fuerit, sicut antecedens ad consequentem sic antecedens ad consequentem, sicutq; consequens ad aliud quiddam sic consequens ad aliud.

Vult definitio. Ordinatis tribus quantitibus, & alijs deinde totidem, quando fuerit prima priorum ad suam secundam, sicut prima posteriorum ad secundam, illarum deinde secundam ad tertiam, ut secunda harū ad tertiam, atq; sic ordine deinceps, si plures quàm tres, ex utraq; parte, quantitates fuerint: infertur ut in præcedenti, quòd scilicet tandem extremorum utrinq; sit æqua ratio,

Exemplum est,

$$4\frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \text{Antecedens} \\ \text{Consequens} \\ \text{Aliud} \end{array} \right. \begin{array}{l} 1\frac{4}{7} \left\{ \begin{array}{l} 9 \\ 5 \\ 2 \end{array} \right. \\ 2\frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} 18 \\ 10 \\ 4 \end{array} \right. \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{Antecedens} \\ \text{Consequens} \\ \text{Aliud} \end{array} \right\} 4\frac{1}{2}$$

Potest hæc definitio, atq; etiam proximè sequens se extendere, & intelligi de pluribus quantitibus, quemadmodum ipsa præcedens, ut patet,

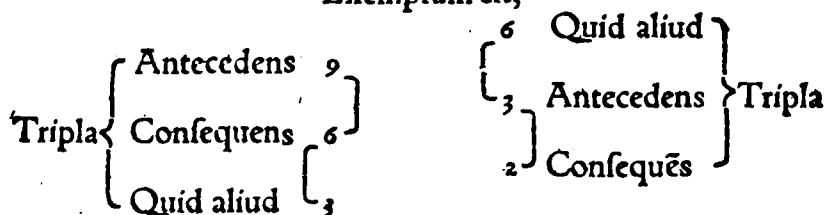
Ordo		Ordo	
prior	poste.	prior	poste.
27	9	16	64
9	3	8	32
12	4	5	20
24	8	9	36
15	5	3	12

Τετραγμένη δὲ ἀναλογία ἐστίν, ὅταν τριῶν ὄντων μεγέθων, καὶ ἄλλων ἴσων αὐτοῖς τὸ πλῆθος, γίνετ', ὡς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσι, ἡ γ' μὲν πρὸς ἐπὶ μὲν, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσι, ἡ γ' μὲν πρὸς ἐπὶ μὲν. ὡς δὲ ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσι, ἐπὶ μὲν πρὸς ἄλλο π, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσι, ἄλλο π πρὸς ἡ γ' μὲν.

20. Perturbata uerò proportio est, quando tribus existentibus quantitibus, & alijs eis æqualibus multitudine, fit, sicut quidem in prioribus quantitibus antecedens ad consequentem, sic in posterioribus quantitibus antecedens ad consequentem: sicut autem in prioribus quantitibus, consequens ad aliud quiddam, sic in posterioribus quantitibus, id aliud ad antecedentem.

Exemplum

Exemplum est,



Alia duo exempla

Anteced.	9	9	Quid aliud	Antec.	7	8	Quid aliud
Conseq.	3	24	Antecedens	Conseq.	4	14	Antecedens
Quid aliud	8	8	Consequens	Quidal.	7	8	Consequens

Exemplum pro quinq; quantitibus in utroq; ordine.

Ordo

prior		posterior		
Tripla	{	$2\frac{1}{4}$	9	Tripla
		$\frac{4}{5}$	4	
		$2\frac{1}{2}$	5	
		$\frac{2}{3}$	2	
			3	
		60	$\frac{2}{3}$	Tripla
		90	$2\frac{1}{2}$	
		36	$\frac{4}{5}$	
		45	$\frac{1}{4}$	
		20		

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

ΠΡΩΤΗ.

Α.

Εὰν ἢ ὅποσα ἄρ μέγλη, ὅποσων ἄρ μεγλῶν ἴσων τὸ πλῆθος, ἢ ἡμεσὶν ἰσάκεις πλάσιον· ὁ ἅπλᾶσιόν ἐστιν ἐν τῇ μεγλῶν ἑνὸς, τοῦ αὐτοῦ πλάσια ἴσαι καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων.

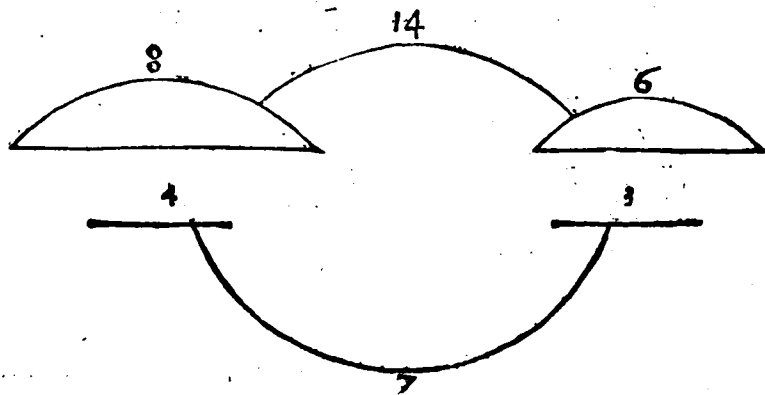
PROPOSITIONES.

PRIMA.

I.

Si fuerint quotcunc; quantitates, quotcunc; quantitatum æqualium numero, singulæ singularum æquè multiplices: quàm multiplex est una quantitas unius, tam multiplices erunt omnes omnium.

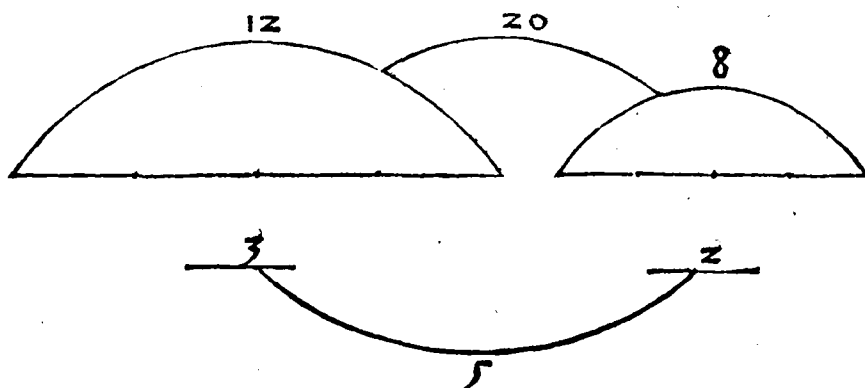
Sint quotcunc; quantitates, siue duæ, tres, quatuor aut plures, aliarum totidem æque multiplices, quæ recto ordine suæ, dico, quàm multiplex est una multiplicium respectu suæ inferioris, tam multiplices esse multiplices omnes, simul sumptas, omnium inferiorum simul sumptarum. Est huius propositionis demonstratio



G

potiss.

potissimum illa communis noticia, Si æqualibus equalia addantur, &c. Cum enim inferiores æqualiter, ex hypothesi, in suis multiplicibus contineantur: sequitur, ut quot portiones una inferiorum in sua multiplici æquales habuerit, totidem etiam & reliquarum quæq; habeat. Diuisis ergo multiplicibus, unaquaq; scilicet in suas portiones, quot in una earum portiones sunt suæ inferiori uel parti æquales, tot & in unaquaq; alia erunt: atq; insuper quemadmodum primæ portiones multiplicium suis inferiorib. sunt æquales, ita ordine quæq; aliæ. Aequalibus igitur æqualibus additis, erunt multiplicium portiones eiusdem ordinis, primi scilicet secundi uel tertij & reliqui, si tot fuerint, simul sumptæ, ipsis inferiorib. simul sumptis æquales. Quare si primis secundæ multiplicium portiones additæ fuerint, aggregata ad partes



duplicita erunt. Quod si tertiæ his adiectæ fuerint: triplicita. Quia autem, ut ex hypothesi habetur, in una multiplici non plures portiones sunt suæ inferiori æquales, quàm in alia: quoties igitur multiplex una suâ inferiorem uel submultiplicem continet, toties & multiplicium aggregatum, id quod ex inferioribus, hoc est multiplicibus, colligitur, continere necesse est, Si fuerint igitur quocumq; quantitates, quocumq; quantitatum, &c. quod demonstrasse oportuit.

Sequitur exemplum pro quatuor.

99

Multipli.	24	18	21	36	superiores
	8 8 8.	6 6 6.	7 7 7.	12 12 12	
Submulti.	8	6	7	12	inferiores

33

Potest & huiusmodi exemplum proponi.

	14		28	
Superiores	7	7	9	19
			9	9
Inferiores	7	7	9	18
	14		28	31

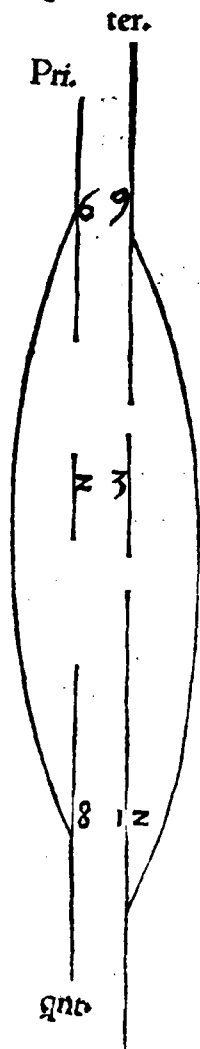
In his duobus exemplis, quemadmodum nec prima, secunda, neq; etiam tertia ex superioribus suæ inferioris est multiplex, sed ei æqualis: ita etiam superiorum aggregatum, eius quod ex inferioribus colligitur, non multiplex, sed æquale est. Sed ad propositum nihil, uel parum, cum de æque multiplicibus, & non æqualibus quantitatibus hæc intelligenda sit,

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

Εὰν πρῶτον δυντόν ισάκεις ἢ πλλαπλάσιον, καὶ τρίτον τετάρτον, ἢ δὲ καὶ πέμπτον δυντόν ισάκεις πλλαπλάσιον, καὶ ἔκτον τετάρτον καὶ σὺντεθιρ πρῶτον καὶ πέμπτον, δυντόν ισάκεις ἔσαι πλλαπλάσιον, καὶ τρίτον καὶ ἔκτον τετάρτον.

PROPOSITIO II.

Si prima secundæ æquè fuerit multiplex, & tertia quartæ, fuerit autem & quinta secundæ æquè multiplex, & sexta quartæ: & composita, prima scilicet & quinta, secundæ æquè erit multiplex, & tertia & sexta quartæ.



Sint sex quantitates, & esto quòd prima secundæ, ut tertia quartæ, sit multiplex: atq; etiam quinta eidem secundæ, ut sexta quartæ: dico ergo, & compositam ex prima & quinta ipsi secundæ, ut est composita ex tertia & sexta ipsi quartæ, multiplicem esse. Quoniam enim prima secundæ & tertia quartæ, ex hypothesi æquè multiplex est: quot igitur portiones sibi æquales habet secunda in prima, tot haber & quarta in ipsa tertia: atq; eadē ratione, quot in quinta secunda, tot etiā in sexta portiones sibi æquales habet ipsa quarta. Quare quoties secunda in ipsa prima & quinta reperitur, toties etiā quarta in quantitatib. tertia & sexta. Quàm multiplex igitur est cōposita ex prima & quinta secundæ, tam multiplex est & cōposita ex tertia et sexta ipsius quartæ. Aequè igitur multiplices sunt, composita ex prima & quinta secundæ, & composita deinde ex tertia & sexta ipsius quartæ. Quare si prima secundæ æquè fuerit, &c. quod demonstrasse oportuit.

ALIA HVIVS REI DEMONSTRATIO.

Sint quantitates, quot & quales propositio requirit, &cæ. Quoniam enim secunda in prima & quinta, ex hypothesi, to

quinqües		quinqües	
Ter	bis	ter	bis
12	8	9	6
	4		3

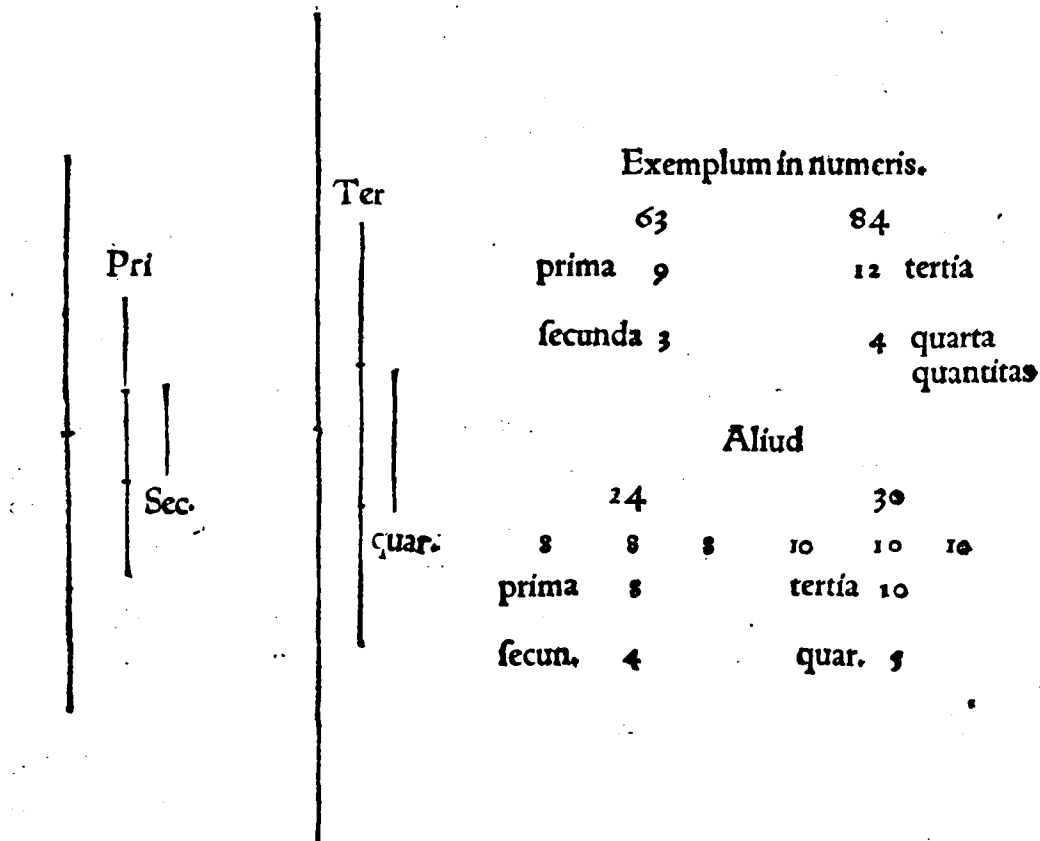
sexta ties continetur, quoties quarta in quantitatibus tertia & sexta, si iam ad æquales, priorum multiplicium portiones denominantes numeros, posteriorum multiplicium portiones denominantes æquales numeri addantur: ipsi toti, denominantes multiplicium portiones numeri, ex communi illa noticia, Si æqualibus æqualia addantur, &c. inter se æquales erunt. atq; unus quidem, qui quoties secunda in composita ex prima & quinta, alter uerò quoties quarta in tertia & sexta simul sumpta continetur, ostendit. Quare sic composita ex prima & quinta, multiplex est secundæ: ita & quæ ex tertia & sexta constituitur quantitas, ad ipsam quartā multiplex erit. Si prima igitur secundæ æquè fuerit multiplex, & tertia quartæ, fuerit autem & quinta secundæ æquè multiplex, & sexta quartæ: & composita, prima scilicet & quinta, secundæ æquè erit multiplex, & tertia & sexta quartæ. quod demonstrasse oportuit,

Εὰν πρῶτον διδυτὸς ἰσάνῃς ἢ πολλαπλάσιον, καὶ τρίτη τετάρτη, λεγθῇ δὲ ἰσάνῃς πολλαπλάσια τοῦ πρώτου καὶ τρίτου· καὶ διίβου τῶν λεγθέντων ἑκάστου ἐκδυτὸς ἰσάνῃς ἔσαι πολλαπλάσιον, ὅ μὲν τῷ διδυτῷ, ὃ δὲ τοῦ τετάρτου.

PROPOSITIO III.

Si prima secundæ æquæ fuerit multiplex, & tertia quartæ, sumantur autem æquæ multiplices primæ & tertiæ: & æqualiter sumptarum utraq; utriusque æquæ multiplex erit, illud quidem secundæ, hoc uerò ipsius quartæ.

Sint quatuor quantitates, & esto quòd prima secundæ & tertia quartæ sint æquæ multiplices. Sint etiam duæ quantitates aliæ, quæ & ipsæ, una quidem primæ, altera uerò tertiæ, sint æquæ multiplices: dico igitur, quòd etiam multiplex primæ ipsi secundæ, tertiæ deinde multiplex ipsi quantitati quartæ æquæ multiplices sint. Est huius propositionis demonstratio secunda præmissa, si toties ea, quoties prima in quinta continetur, minus uno, repetatur. Hoc autem apparet, si quinta quanti-



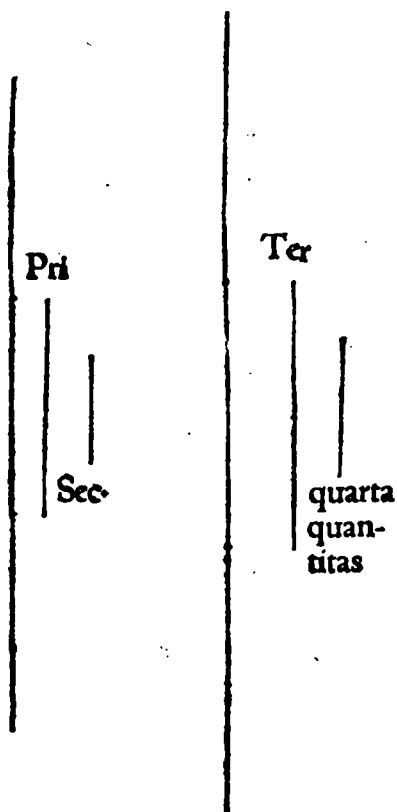
tas & sexta in portiones, primæ & tertiæ quantitatibus æquales, distribuuntur, loco primæ deinde & tertiæ quantitatum, æquales ex quinta & sexta portiones sumantur, quod indicasse oportuit.

ALIA ET PLANIOR HVIVS PROPOSITIONIS demonstratio.

Sint quatuor quantitates, &c. Quoniam enim primæ & tertiæ æquæ sunt, ex hypothesis, assignatæ multiplices: quot igitur portiones sibi æquales in sua habet ipsa prima, tot & tertiam in sua habere necesse erit. quare utraq; multiplici in portiones suæ inferiori æquales distributa: erit utiq; æqualis multitudo portionum unius, si-

cut

cut & multiplicis alterius. Quia uero æquè multiplex est prima quantitas secundæ, & tertia quartæ, loco primæ & tertiæ quantitatibus, portionibus, quas in ipsarum multiplicibus æquales habent, singulis ordine sumptis: & ipsæ portiones quantitatibus secundæ & quartæ æquè multiplices erunt. Ordinatis ergo iam sex quantitatibus, quarum prima quidem & quinta sint priores duæ, quas habet prima in sua multiplici æquales, portiones, secunda deinde sit ipsa secunda, ac quarta ipsa quarta. Tertia uero & sexta quantitates sint duæ portiones in multiplici quantitatibus tertiæ, & ipsæ priores. Et quoniam hæc sex quantitates huiusmodi sunt, quales propositio præcedens secunda requirit, erit per hanc, ex prima & quinta composita ita multi-



plex secundæ, ut ex tertia & sexta composita multiplex est ipsius quartæ. Igitur, si in multiplicibus non plures quàm duæ, primæ & tertiæ quantitatibus æquales portiones fuerint: iam statim constat ipsa propositio. Quod si plures fuerint, maneat secunda & quarta quantitates, prima uero & tertia esto priorum duarum in multiplicibus portionum aggregata, quinta deinde & sexta sint tertiæ in multiplicibus portiones. Et quoniam etiam iam quales propositio præcedens secunda requirit, sex quantitates apparent: idem etiam quod prius per eam inferri potest. Constat itaque propositio, ubi quidem tres fuerint in multiplicibus portiones, suis inferioribus æquales. Non aliter procedendum erit, ubi portiones quatuor, quinque aut plures etiam fuerint, id quod pro pleniori huius propositionis declaratione dicere libuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

Α.

Εὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸ αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον καὶ τὰ ἰσάκεις πολλαπλασιασάτωτε πρῶτον καὶ τρίτον πρὸς τὰ ἰσάκεις πολλαπλασιασάτω δὲ δεύτερον καὶ τέταρτον, καὶ ὅποιον πολλαπλασιασμὸν, τὸ αὐτὸν ἔξῃ λόγον, ληφθέντε καὶ τέλεια.

PROPOSITIO

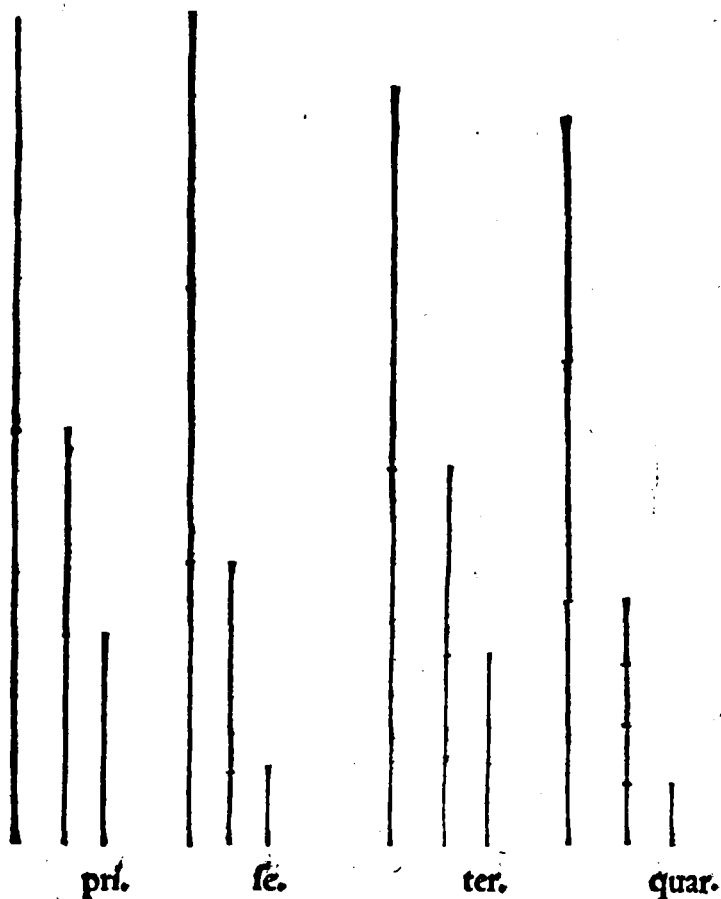
IIII.

Si prima ad secundam, tandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: & primæ & tertiæ æquè multiplices, ad æquè multiplices quantitatibus secundæ & quartæ, iuxta quamvis multiplicationem, eandem habebunt rationem, ad se sumptæ.

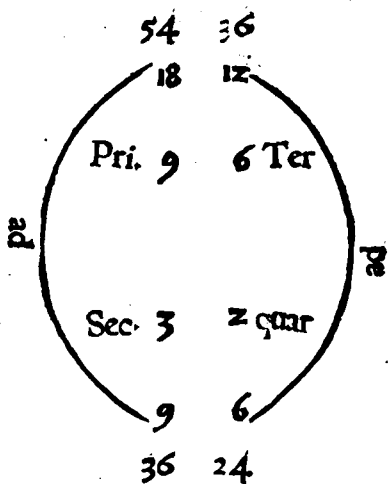
Sint quatuor quantitates, & esto quod prima ad secundam eam habeat rationem, quam tertia ad quartam. Sint etiam æquè multiplices primæ & tertiæ, æquè insuper multiplices, iuxta quamvis multiplicationem, quantitatibus secundæ & quartæ: dico igitur, & ipsas primæ & tertiæ æquè multiplices, ad æquè multipli-

ces

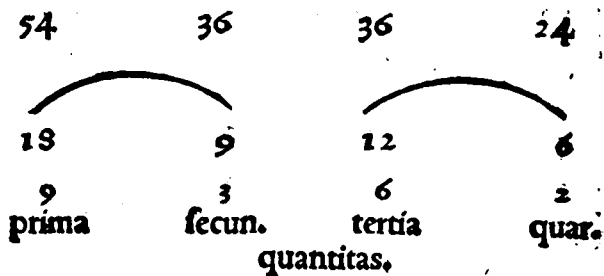
ces quantitatum secundæ & quartæ, eandem habere rationem, id quod sic colligitur, Quoniam ex hypothesi, primæ & tertiæ æquæ sunt multiplices assignatæ, qui-



bus si aliæ æquæ assignentur multiplices: erunt illæ ultimò assignatæ, per propositionem præmissam tertiam, etiam ipsarum primæ & tertiæ æquæ multiplices. Per eandem insuper, cum secunda & quarta suas æquæ multiplices, ex hypothesi, habeant, si ipsis aliæ æquæ multiplices assignentur: & illæ aliæ, secundæ & quartæ quantitatum æquæ multiplices erunt. Quoniam autem quantitates, prima, secunda, tertia & quarta, ex hypothesi, sunt proportionales: multiplices igitur, de quibus



Possunt numeri etiam sic ordinari,



iam sermo fit, ex conversione definitionis quintæ huius, in defectu, æqualitate, & excessu æqualiter sese habebunt, atq; deinde, cum hæ eadem multiplices, aliarum etiam

&c. quod demonstraſſe oportuit.

ΔΗΜΜΑ.

καὶ ὡς γὰρ ἡ πρὸς γ' ε, οὕτως γὰρ θ πρὸς γ' ζ.

LEMMA, VEL ASSVPTVM.

triplicem quantitatis tertiæ sese habebit.

ΓΟΡΙΣΜΑ.

...

COROLLARIUM.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε

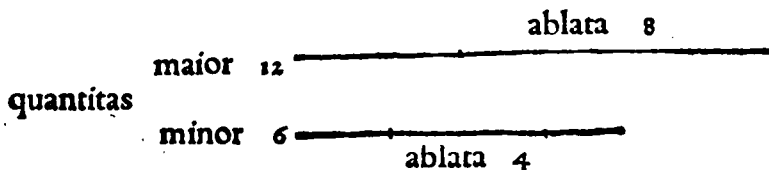
ἅλας τῷ ὅλῳ.

PROPOSITIO V.

Sint duæ quantitates, quarum una sit alterius multiplex

Hh 84

& minor quantitas. Demp̄to igitur eo quod est eis commune, ablato scilicet minoris, ex utraq; parte: & reliqua, quarta scilicet quantitas, atq; residuum minoris, ex



communi quadam noticia, inter se æqualia erunt. Quare quemadmodum, ex structura, æquẽ est multiplex ablatum maioris ipsius minoris quantitatis ablati, & residuum maioris ipsius quartæ quantitatis: ita nunc propter æqualitatem, loco scilicet quartæ quantitatis residuo minoris sumpto, & residua, quemadmodum ablata, inter se multiplicia erunt. Sed quia ut ablatum ablati, sic ex hypothesi, & maior quantitas ipsius minoris: quare & ablatum ablati, ut ipsæ quantitates, unum alterius multiplex erit. Si quantitas igitur quãtitatis multiplex fuerit, quemadmodum ablatum ablati: & reliquum reliqui, ut totum totius multiplex erit. quod demonstrasse oportuit.

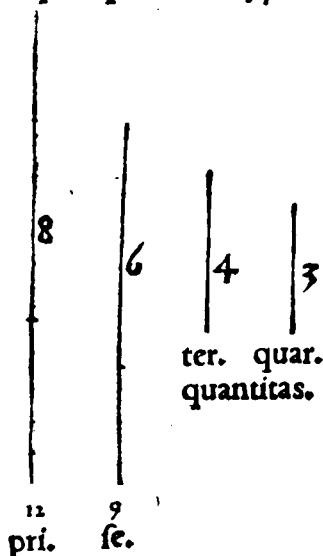
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5.

Εὰν δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάκως ἢ πηλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθῇ τινὰ τῶν αὐτῶν ἰσάκως ἢ πηλαπλάσια· καὶ τὰ λοιπὰ εἰς αὐτοῖς, ἢ ἰσάκως ἢ ἰσάκως αὐτῶν πηλαπλάσια.

PROPOSITIO VI.

Si duæ quantitates duarum quantitatum æquẽ fuerint multiplices: & ablatae quædam earundem æquẽ fuerint multiplices: reliquæ eisdem aut æquales sunt, aut æquẽ ipsarum multiplices.

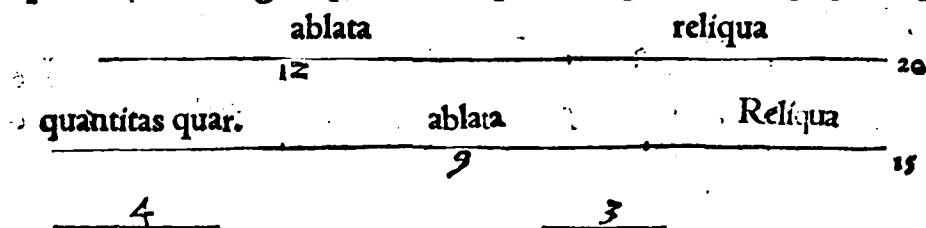
Sint duarum quantitatum æquẽ multiplices, sint etiam portiones quædam, de multiplicibus ablatae, ad easdem duas æquẽ multiplices: dico, multiplicium reliquas quantitates, iisdem duabus aut æquales, utranq; utriq; aut uerò earũ æquẽ



multiplices esse. Minores non possunt esse reliquæ ipsis quantitibus positis, propterea quòd multiplices eis æqualiter assignatæ sint. Esto igitur primò quòd prioris multiplicis reliqua suæ quantitati æqualis sit: dico sanè, & posterioris multiplicis reliquam suæ quantitati æqualem esse, id quod hoc modo demonstrabitur. Sumatur ipsi posteriori æqualis quantitas alia. Et quoniam portiones ablatae, ex hypothesi, ipsarum quantitatum, primæ scilicet & secundæ, sunt æquẽ multiplices, cum quantitati priori, suæ multiplicis reliqua, ex hypothesi, posteriori uerò alia quædam quantitas, ex structura, æqualis sit, si reliqua multiplicis suæ prioris ablata, sumpta deinde quantitas posterioris multiplicis ablatae accesserint: & hæ compositæ earundem quantitatum æquẽ multiplices erunt.

Sed quia etiam una compositarum, quæ est prior multiplex, ipsius prioris, quemadmodum posterior posterioris, est multiplex, cum duæ quantitates uni sint æquẽ multiplices: illas ex communi quadam noticia inter se æquales esse, concluditur. Communi igitur portione, quæ est ablata multiplicis posterioris quantitas, ab illis seiuncta, & quæ relinquuntur, ex communi quadam noticia: atq; deinde, cum una reliqua posteriore quantitatẽ æqualem habeat, & illa eadem

eadem posterior quantitas & reliqua ipsius, & id ex communi quadam noticia, inter se æquales erūt. Sicut igitur prioris multiplicis reliqua quantitas ipsi priori quan-



titati, ex hypothesi, æqualis est: ita & posterioris reliquam ipsi posteriori quantitati æqualem esse necessario sequitur. Ομοίως δὲ δέξομεν, Similiter ostēdemus, si prioris multiplicis reliqua suæ quantitatis multiplex sit, quod & posterior ad suam tam multiplex esse debeat. Si duæ igitur quantitates duarum quantitatum æquæ fuerint multiplices, & ablata quædam earūdem æquæ fuerint multiplices: reliquæ eisdem aut æquales sunt, aut æquæ ipsarum multiplices, quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

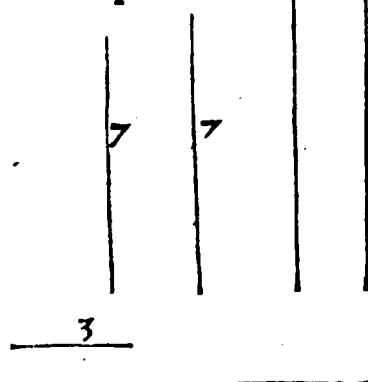
Τὰ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ, ὅτε αὐτὸ ἔχει λόγον· Καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.

PROPOSITIO VII.

Æqualia ad idem, eandem habent rationem. Et idem, ad æqualia.

Sint duæ quantitates æquales, ad aliam tertiā, quantamcunq; relatæ: dico, neutram æqualium diuersam ab alia cum tertia illa constituere rationem. Colligit hæc propositio suam demonstrationem ex definitione; huius, in hunc modū. Sumantur æqualium quantitatum æquæ multiplices, & erunt hæ, ex communi quadam noticia, inter se æquales. Sumatur & ipsius quantitatis tertiæ aliqua utcunq; multiplex, & ordinentur quantitates, ut scilicet æqualium una, prima: alia, tertia: alia deinde, ubi plures essent, quinta: ac cæteræ deinceps prout naturalis imparium numerorum ordo requirit, uocentur. Illa tertia uerò, ut quæ æqualium omnium est com-

Quantitates
æquales.



munis consequens, à paribus numeris, secundæ, quartæ & sextæ, &cæ. nomen habeat. Et quoniam, quantum ad priorem partem, primæ & tertiæ, ac cæterarum, quarum impar est appellatio, quantitatum, æquæ assignatæ multiplices, secundæ & quartæ, ac reliquarum deinde, ut quæ à pari numero nominantur, quantitatum æquæ multiplices equaliter excedunt, uel eis omnino æquales, uel minores ipsæ sunt: inferitur, ex definitione; huius, ipsas quantitates, primam nimirum ad secundā, & tertiam ad quartam, ac reliquas deinde omnes, quamlibet ad suam, in eadem esse ratione: quare sic patet pars prior. Posterior uerò. Manentibus hisdem quantitativibus, alio tamen ordine dispositis, ita nimirum, ut quæ in priori secundæ & quartæ quantitatis nomen habuit, iam primæ & tertiæ appellationem sortiatur. Prima uerò quæ prius, secunda nunc: & secunda deinde, quarta iam uocetur. Sicq; per eandem defini-

tionem quintam: & posterior huius propositionis pars obtinebitur, primam scilicet, hoc est illam, quæ iam est communis æqualium omnium antecedens, ad secundam,

dam, unam ex æqualibus, esse, ut eadem prima ad æquales omnes. Æquales igitur ad eandem, eandem habent rationem, &c. quod demonstrari oportuit.

Multiplices

30 12 6
30 . 12 . 6
30 12 6

quant.
æquales.

Multiplices

15 30 uel contrà 5 ad $\left\{ \begin{array}{l} 6 \\ 6 \\ 6 \end{array} \right.$

quant.
æquales.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

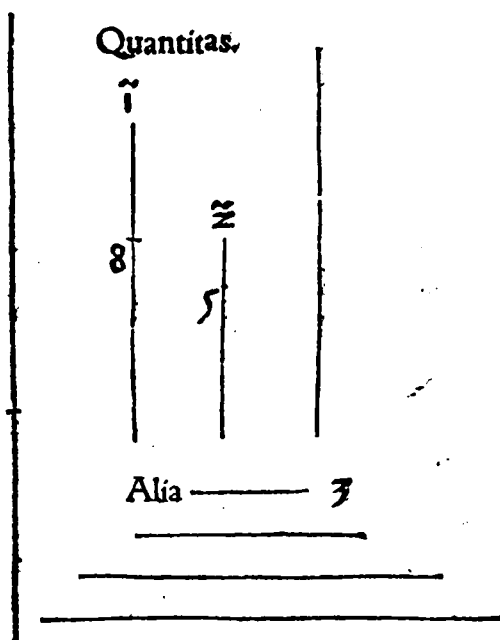
Τῶν ἀνίσων μεγθῶν, ὃ μείζον πρὸς τὸ αὐτὸ, μείζονα λόγον ἔχει, ἢ πρὸς τὸ ἥλατον. Καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἥλατον, μείζονα λόγον ἔχει, ἢ πρὸς τὸ μείζον.

PROPOSITIO VIII.

Inæqualium quantitatum, maior ad eandem, maiorem rationem habet, quàm minor. Et eadem ad minorem, maiorem habet rationem, quàm ad maiorem.

Sint quantitates quocumq; in præsentia autem, pro faciliori exemplo, duæ sufficiant, & esto quòd ex æquo ad unam & eandem quantitatem conferantur: dico igitur, quòd maior inæqualiū: maiorem, minor uerò ad eandem: minorem, & contra, hæc eadem ad minorem inæqualium, maiorem, quàm ad maiorem, habeat rationem. Sumatur ex inæqualium maiori portio, quæ sit minori æqualis: & erit altera quæ relinquitur portio, breuiori signatæ aut æqualis, aut inæqualis. Si inæqualis, utra breuior fuerit, illius multiplex, quæ communi omnium consequente maior sit, accipiat, quàm multiplex deinde hæc eadem sumpta quantitas suæ inferioris fuerit, tam multiplex esto etiam quantitas alia portio in maiori maioris, alia in-

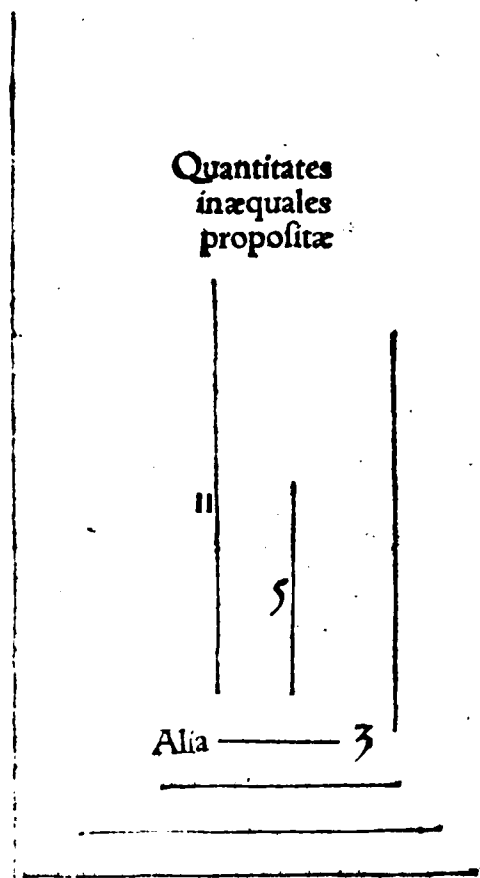
super ipsius minoris quantitatis. His multiplicib; tali ordine sumptis, ipsius tandem omnium consequentis dupla, tripla, atq; deinde quadrupla quantitas accipienda est, ac deinceps iusta serie ad multiplices quātitates alias tamdiu progrediendum, donec ipsa, quæ minoris quantitatis multiplice maior sit, occurrat. Sit autem, pro operatione faciliori, consequentis quadrupla, primò ipsa minoris quantitatis multiplice maior: quæ igitur dictæ consequentis tripla quantitas fuerit, hæc eadem minoris multiplice primò minor erit: quare contrà, minoris multiplex eadem consequentis tripla quantitate maior. Et quoniam quantitatum, reliquæ scilicet in maiori, & minori in ea æquali positæ, æquæ sunt assignatæ multiplices, cum quàm multiplex sit una unius, tam multiplices etiam, ex



propositione prima huius, omnes omnium sint: maioris quantitatis & breuioris in ea portiois æquæ multiplices erunt. Sed cum ut breuioris portiois ita etiam, ex structura minoris quantitatis multiplex sumpta sit: minoris & maioris quantita-

tum

tum æque multiplices erunt, quod est obseruandū. Rursus quoniam quantitatū, posita scilicet in maiori minori æqualis, & ipsius minoris, æque sunt, ex structura assignatae multiplices: sequitur, ut quemadmodū quantitates, ita & ipsarū æque



multiplices inter se æquales sint: atq; insuper, sicut una, multiplex scilicet minoris, quā consequentis tripla quantitas, ex structura, maior est, ita & altera, multiplex scilicet posita in maiori quantitati minori æqualis, propter æqualitatem, eadem consequentis tripla maior erit. Maior autem est, similiter ex structura, breuioris in maiori quantitate portionis multiplex ipsa consequente: tota igitur totius maioris quantitatē multiplex, simul utrisq; consequente scilicet & tripla eius, maior erit: quare etiam & eadem totius maioris multiplex, propter æqualitatem, consequentis quadrupla maior erit: unde sic ipsum etiam excedit. Sed quoniam multiplex minoris consequentis quadruplam non excedit, ut patet ex structura: maior igitur maiorem ad communem omnium consequentē, quā ipsa minor quantitas ad eandē, ex definitione 7 huius, ratione habebit. Atq; hæc est prior huius propositionis pars. Porro mox deinde, cōsequentibus loco antecedentiū, & antecedentibus loco consequentiū sum

ptis, per eandem allegatam 7 definitionem, consequentis ad minorem, rationem maiorem, quā ad maiorem quantitatem habebit. Esto uerò nunc altera, quæ relinquitur, portio, breuiori signata æqualis, quia quantitates uel portiones in maiori æquales sunt, tum utriusuis portionis multiplex, quæ communi omnium consequente maior sit, quantitas sumenda est. nam structura deinde & demonstratione ipsa, ut in priori, instituta, res successum habebit. Si igitur inæqualium quantitatū ad unam & eandem collatio facta fuerit: maior maioris, quā minoris quantitatē ad eam ratio erit. Contra uerò, eiusdē ad minorem maior, quā ad maiorem quantitatem ratio, quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

Θ.

Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ ἢ αὐτὸ ἔχοντα λόγον· ἴσα ἀλλήλοις ὄντι. Καὶ πρὸς ἂν τὸ αὐτὸ ἢ αὐτὸν ἔχῃ λόγον· καὶ ἐνα ἴσα ἀλλήλοις ὄντι.

PROPOSITIO

IX.

Quæ ad idem eandem habent rationem: æqualia inter se sunt. Et ad quæ idem eandem rationem habet: & illa æqualia inter se sunt.

Habeant quotcunq; quantitates ad unā eandemq; eandem rationem. Aut contra, esto quod unius eiusdemq; ad quotcunq; sit una & eadem ratio: dico, utrum positum fuerit, illas quantitates inter se æquales esse. Hoc autem demonstratione ad incommodum ducente, ex propositione octaua præcedenti, sic patet. Nisi enim

Hh 3

essent

essent æquales quantitates illæ: sequeretur, per partem præcedentis priorem, illas ad unam & eandem: hæc deinde eadem, per partem eiusdem propositionis poste-

vel

riorem, ad illas, diuersas constituere rationes. Hoc autem cum sit contra propositionis nostræ hypothesim, illas quantitates æquales esse inter se, tam ad priorem quam etiam ad posteriorem partem, ex hac prop. 8 obtinebitur. Quæ igitur ad eandem, eandem habent rationem quantitates, &c. quod demonstrasse oportuit.

7	7	7	Item	9	9	9	9	9
	$\frac{7}{2}$					$\frac{9}{2}$		
uel con.	$\frac{5}{2}$			uel contra	$\frac{11}{2}$			
7	7	7		9	9	9	9	9

ΠΡΟΤΑΣΙΣ I

Τῶν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἔχοντων, τὸ ἢ μείζονα λόγον ἔχον· ἐκείνο μείζον ὄντι. Πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει· ἐκείνο ἑλάττω ὄντι.

PROPOSITIO X.

Ad eandem rationem habentium, maiorem rationem habens: illa maior est. Ad quam autem eadem maiorem rationem habet: illa minor est.

Conferantur quotcumq; quantitates ad unam eandemq; dico, quòd illa, quæ ex his maiorem ad communem earum consequentem habuerit rationem, maior sit: dico etiam, ad quam ipsa consequens quantitas maiorem rationem habuerit,

vel

eam contra minorem esse. Nam si maiorem habens rationem, ad aliam non reputetur esse maior, erit illa alij aut æqualis, aut alia minor. Si æqualis, cum æqualium ad idem, ex priore parte propositionis septimæ huius, eadem sit ratio, harum uerò quantitarum, ex hypothesi, ratio diuersa, contra nostram illam hypothesim agetur, quod non permittitur. Est autem nunc, quòd maiorem rationem habens ad aliam, minor sit, &c. Et quoniam, per priorem partem propositionis 8 huius, Inæqualium quantitarum maior ad eandem, maiorem rationem habet, quàm minor, erit id contra propositionis hypothesim. Constat itaq; propositionis prior pars. Posterior eodem modo, ex posterioribus allegatarum propositionum partibus, retinebitur. Ad eandem igitur, &c. quod demonstrasse oportuit.

Exemplum in numeris.

Antecedentes	7	6	4	9
Consequens	5	uel	9	
una & eadem quantitas.				

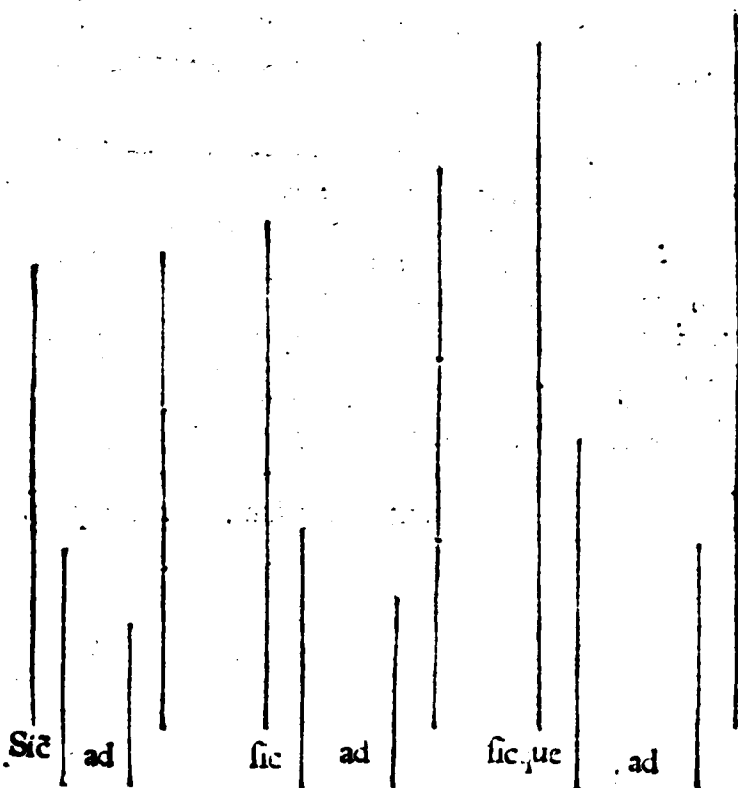
ΠΡΟΤΑΣΙΣ

Οἱ τοὺς αὐτοῦ λόγοι οἱ αὐτοὶ ἑαυτοῖς εἰσὶν οἱ αὐτοὶ.

PROPOSITIO XI.

Quæ eidem sunt eadem rationes: & inter se sunt eadem.

Quæ in primo libro, inter communes notitias, autor de quantitibus in genere his uerbis, Quæ uni sunt æqualia, &c. proposuit, in eodem etiam libro idem, per propositionem 30, in lineis æquedistantibus, uerum esse demonstrauit, id quoque iam in ipsis rationibus similiter sese habere, proponit, & hoc quidem per definitionis quintæ huius conuersionem atque ipsam quintam, hac structura. Sint rationes, exempli gratia, duæ qualescunque, alij tertiæ cuidam similes & eadem: dico, eas & inter se similes easdemque esse. Sumantur antecedentium quantitatum æquæ multiplices, similiter & consequentium, Et quoniam utraque duarum rationum, quæ sunt ter-



tiæ similes, antecedens quantitas, est ad suam consequentem, ex hypothesi, ut antecedens tertiæ rationis ad suam consequentem, & rursus, quoniam tam antecedentium quam etiam consequentium, ex structura, æquæ sunt assignatæ multiplices: sequitur per conuersionem definitionis quintæ huius, bis repetitam (sunt enim duæ rationi uni similes positæ) multiplices antecedentium, hoc est primæ & tertiæ quantitatum, in addendo, minuendo, uel æqualitate, respectu suarum consequentium æqualiter sese habere. Quemadmodum igitur se habet multiplex antecedentis in tertiâ ratione, ad multiplicem suæ consequentis: ita etiam sese habebunt multiplices antecedentium reliquarum duarum rationum, ad suarum consequentium multiplices. Cum res igitur ita sese habeat: per hanc ipsam quintam definitionem huius concluditur propositum, illas scilicet duas rationes inter se similes esse & easdem. Quæ igitur eidem sunt eadem rationes, & inter se sunt eadem, quod demonstrasse oportuit.

Exemplum

Exemplum in numeris.

	6		12	18	24
Sin rationi	$\left\{ \begin{array}{l} 3 \\ 2 \end{array} \right.$	eadem, rationes	$\frac{6}{2}$	$\frac{9}{2}$ & $\frac{12}{2}$	
	4		8	12	16
	6		12	18	24
	8		16	24	32

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

IB.

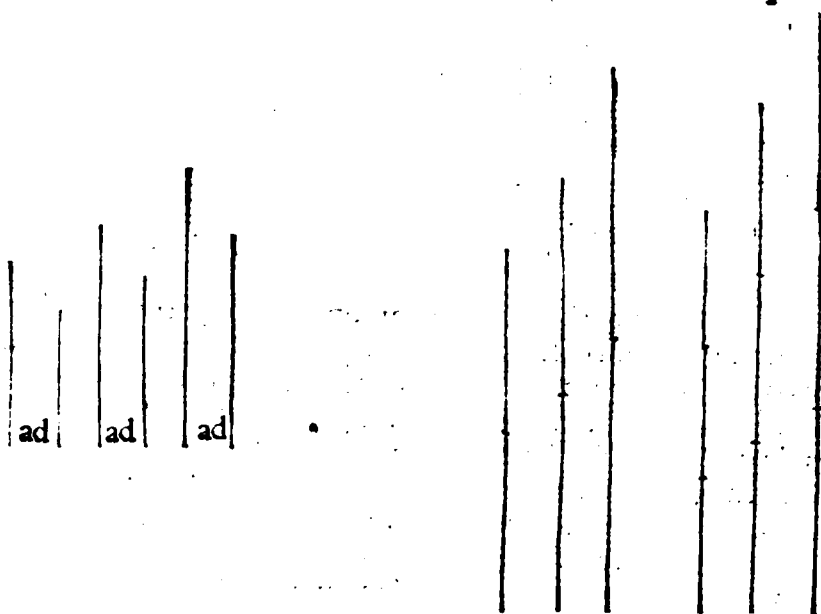
Εάν ἡ ὁποσαῦτ μεγαλή ἀνάλογον ἴσαι ὡς ἐν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἐν τῶν ἡπομμένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἡπίμνα.

PROPOSITIO XII

Si fuerint quocunque quantitates proportionales: erit, sicut una antecedentium ad unam consequentium, sic omnes antecedentes ad omnes consequentes.

Simile autor proposuit in propositione libri huius prima, de multiplicibus. Itaque, quanto ipsa multiplice ratio est generalior, tanto etiam hac praesens propositio, quam ipsa praecedens prima, latius sese extendit. Sint igitur quantitates quocunque, continue vel non continue proportionales: dico, quam rationem habet una antecedens ad suam consequentem quantitatem, eandem & aggregatum antecedentium ad aggregatum ex consequentibus habere. Sumptis enim aequè multiplicibus ad antecedentes, aequè item utcumque multiplicibus ad consequentes quantitates, cum sit, ex hypothesi, ut antecedens una ad suam consequentem, sic singulae ad singulas: sequitur ex conversione definitionis; huius, toties quoties opus fue-

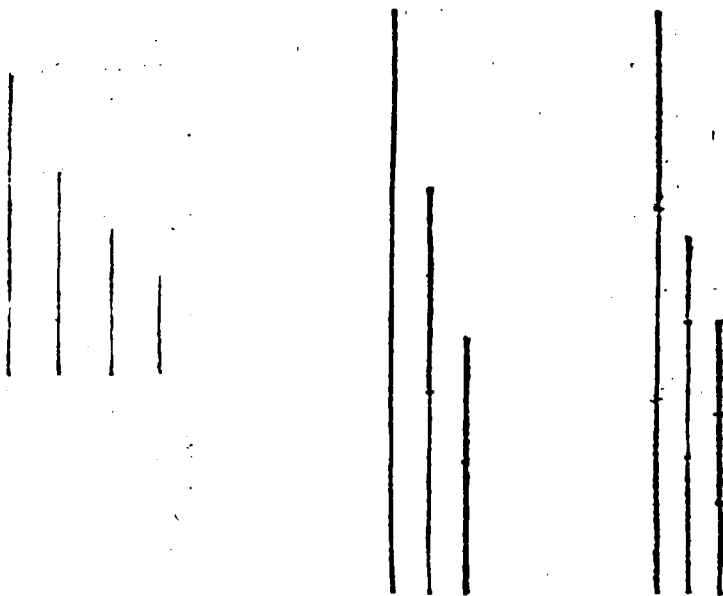
Multiplices
antecedentium. consequen.



rit eam repetendo, ut sicut unius antecedentis multiplex a suae consequentis multiplice defecerit, vel ei aequalis sit: siue uerò eandem excesserit, sic & singulae antecedentium ad consequentium singulas multiplices sese habere. Igitur si primae quantitatatis

titatis multiplex à suæ consequentis multiplice defecerit, aut ei æqualis sit, uel eandem exceſſerit: ſequitur, ut antecedentium multiplices ſingulæ, eodem modo ſuarum conſequentium multiplices reſpiciant. Quare, ſicut una ſuæ inferioris eſt multiplex, ita omnes omnium. Per primam igitur propoſitionem huius, bis repetitam, quàm multiplex eſt una unius, tam multiplex etiã aggregatum antecedentium, ad cõſequentium aggregatum erit. Ordinentur ergo iam quantitates, ſic, ut unius rationis antecedens ſit prima: ſua deinde conſequens, ſecunda: aggregatum uerò antecedentium, tertia, & conſequentium poſtea aggregatum, quantitas quarta. Et quia quantitatũ, primæ & tertiæ, æquæ ſunt aſſignatæ multiplices, ſecundæ inſuper & quartæ ſimiliter: inferitur, ex definitione quinta, tandem id quod maximè uolebat propoſitio. Si fuerint igitur quotcunq; quantitates proportionales: erit ſicut una antecedentium ad unam conſequentium, ſic omnes antecedentes ad omnes conſequentes. quod demonſtraſſe oportuit.

Exemplum rationis ſesquialteræ, continuæ,
in quantitatibus quatuor



ΠΡΟΤΑΣΙΣ

ΙΓ.

Εὰν πρῶτον πρὸς δυνάτορον ᾗ αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς πέμπτον πρὸς ἑκτον· Ὁ πρῶτον πρὸς δυνάτορον μείζονα λόγον ἔξει ἢ πρὸς πέμπτον πρὸς ἑκτον.

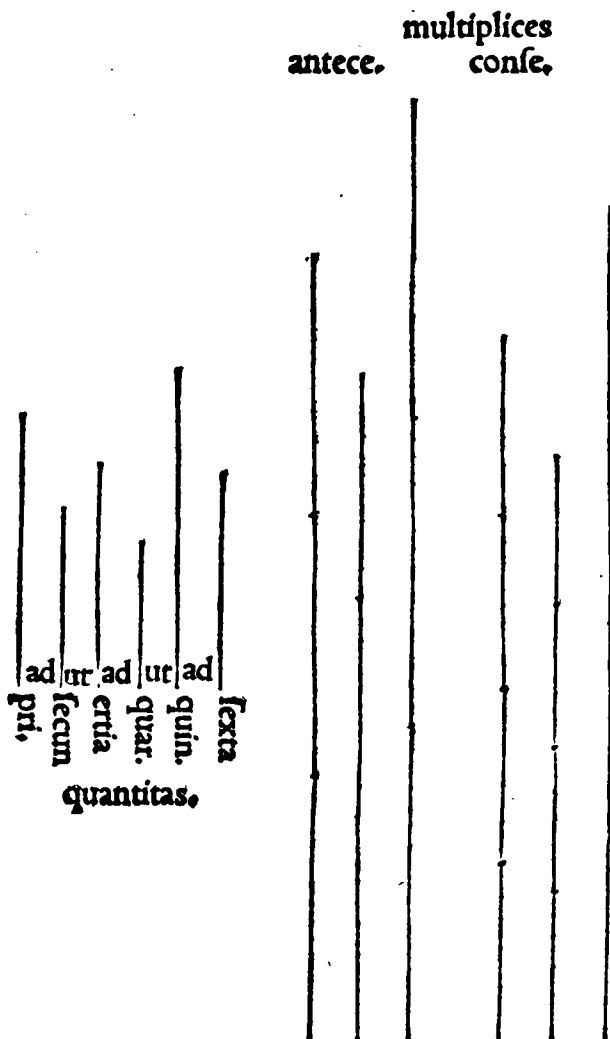
PROPOSITIO

XIII.

Si prima ad secundam eam habuerit rationem quam tertia ad quantitatem quartam, tertia uerò ad quartam maiorem rationem habuerit quàm quinta ad sextam: & prima ad secundam maiorem rationem habebit quàm quinta ad sextam.

Sint sex quantitates, & esto quòd primæ ad secundam & tertiæ ad quartam sit una & eadem ratio, quam uerò tertia ad quartam habet rationem, ea sit ratione quintæ ad sextam maior: dico igitur, quod & primæ ad secundam maior quàm quintæ ad sextam sit ratio. Quoniam enim tertiæ ad quartam maior est ratio, ex hypothesi, quàm quintæ ad sextam, ſumantur ipſarum tertiæ & quintæ æquæ multiplices, quartæ deinde & sextæ ſimiliter, ſic tamen, quòd multiplex tertiæ excedat multipli-

cem quartæ, non autem excedat multiplex quintæ ipsius sextæ quantitatis multiplicem. Sumantur etiã ipsarum primæ & secundæ secundum multiplicatam tertie & quartæ æquæ multiplices. Et quoniam prima quantitas est ad secundam, sicut



tertia ad quartam, primæ uerò & tertiæ, ut antedētibz, secundæ insuper & quartæ, ut consequentibz. æquæ sunt ex structura, assignatæ multiplices: primæ igitur & tertiæ multiplices, ad multiplices secundæ & quartæ quantitatum, ex conuersione definitionis; huius, in minuendo, æqualitate, & addendo æqualiter sese habebunt. Cū igitur, & id ex structura, multiplex tertiæ excedat multiplicem quartæ, multiplex uerò quintæ non excedit multiplicem sextæ quantitatis: propter similitudinem rationum, & primæ quantitatis multiplex, ad secundæ quantitatis multiplicem cōferendo, id faciet: maior igitur est ex definitione huius, ad secundam, quàm quintæ quantitatis ad sextam ratio. Si prima igitur ad secundam eam habuerit rationē quam tertia ad quantitatem quartam, tertia uerò ad quartam maiorem rationem habuerit quàm quinta ad sextam: & prima ad secundam ma-

io rem rationem habebit quàm quinta ad sextam. quod demonstrasse oportuit.

Exemplum in numeris sic ponitur.

18	16	9	8	12	12
6	4	3	2	4	3
ad	ut	ad		ad	
pri.	secun.	ter.	quar.	quin.	sex. numerus

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 1Α.

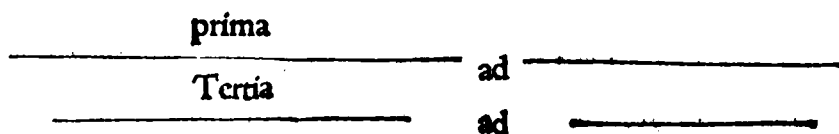
Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸ αὐτὸ ἔχη λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὃ δὲ πρῶτον τὸ τρίτον μείζον ἢ· καὶ ὃ δεύτερον τὸ τέταρτον μείζον ἴσαι, καὶ ἴσον· ἴσον, καὶ ἴλαστον· ἴλαστον.

PROPOSITIO XIII.

Si prima ad secundam eam habuerit rationem, quam tertia ad quartam, prima uerò ipsa tertia maior fuerit: & secunda quarta maior erit, quòd si æqualis: æqualis, si uerò minor: minor.

Sint

Sint quatuor quantitates, prima ad secundam ut tertia ad quartam: dico, quemadmodum prima maior est quam tertia, uel ei æqualis, siue minor ea, ita & secunda erit respectu quantitatæ quartæ. Cum enim, ex hypothesi, prima maior sit quam tertia: sequitur ex priore parte propositionis octauæ huius, quod prima maiorem quam tertia ad secundam quantitatem, habeat rationem. Quoniam autem, quem-



admodum prima est ad secundam, ita est & tertia, ex hypothesi, ad quartam: propter illam rationum similitudinem, & tertiæ ad quartam maior quam eiusdem tertiæ ad secundam ratio erit. Ad quam autem una & eadem quantitas maiorem habet rationem, illa, ut posterior pars propositionis 10 huius testatur, minor esse censetur: minor igitur est quarta ipsa secunda, quare contrā secunda quam quarta maior, quod demonstrasse oportuit. *Ομοίως δὲ δεύομεν.* Similiter etiam ostendemus, quod secunda quartæ æqualis, uel ea minor sit, prout quidem prima respectu tertiæ posita fuerit. Si prima igitur ad secundam eam habuerit rationem quam tertia ad quartam, prima uerò ipsa tertia maior fuerit: & secunda quarta maior erit, quod si æqualis, æqualis, si uerò minor: minor, quod demonstrasse oportuit.

Exemplum in numeris sic se habet.

	15	ad	9	ut	5	ad	3
Vel	27		18		12		8

Quantitas		ratio		ratio		quan.
prima 27	}	ad secun. 18	{	maior	mutatis nunc terminis uel	12 ad 8 ma.
tertia 12				minor	quantitat.	12 ad 18 mi.
						quare maior.

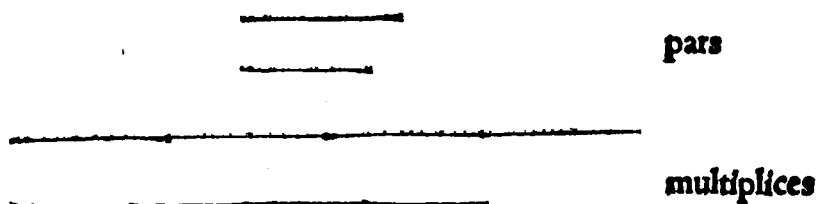
ΠΡΟΤΑΣΙΣ. IΕ.

Τὰ μέρη τῶν ὡσαύτως πολλαπλασίοις, ἢ αὐτὸν ἕχον λόγον, ληφθέντες κατὰ μίλην.

PROPOSITIO XV.

Partes eodem modo multiplicium, eandem habent rationem, ad se sumptæ.

Sint duæ uel plures quantitates, quarum unaquæque sit alterius cuiusdam quantitatis, tanquam suæ multiplicis, pars: esto tamen, ut quota pars est una unius, tota sint etiam singulæ singularum: dico ergo, quod quam ipsæ partes, illam eandem & multiplices inter se rationem habeant. Distribuantur multiplicium una-



pars

multiplices

quæque in portiones suæ inferiori uel parti æquales, Et quoniam æquæ sunt parti-

li 2

bis,

bus, ex hypothesi, assignatæ multiplicēs: erunt in una tot portiones suæ parti æquales, quot & in altera. Rursus quoniam portiones cuiusque multiplicis inter se sunt æquales: erit singularum portionum ad portiones singulas, una & eadem ratio, & illa quidem, quæ est partis ad partem. Quare, sicut est una unius multiplicis portio, uel æqualibus pro æqualibus sumptis, sicut est una pars ad portionem alterius, uel partem, sic, ex propositione 12 huius, aggregatum illorum, hoc est antecedentium, ad consequentium aggregatum. Quam igitur æquæ multiplicium partes, illam eandem & ipsæ multiplicēs inter se habent rationem. quod demonstrari oportuit.

28	12	28
7 7 7 7	3 3 3 3	7 7 7 7
7	3	3 3 3 3
	12	

quare sicut 7 ad 3, sic 28 ad 12

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

19.

Εάν τεσσαρά μέγη ἀνάλογον ἢ καὶ ἑναλλάξ ἀνάλογον εἶσαι.

PROPOSITIO XVI.

Si quatuor quantitates proportionales fuerint: & permutatim hæ proportionales erunt.

Sint quatuor quantitates in ratione una: dico, quòd & permutatim, uel permu-
rata ratione, hoc est, prima ad tertiam & secunda ad quartam, in una ratione sint.

Sumantur primæ & secundæ quantitatium æquæ multiplicēs, atq; insuper tertiæ & quartæ: & erunt hæ, ex præmissa, bis usurpata, in ea quæ sunt ipsæ partes ratione: atque deinde, ex propositione 11 huius simili ratione bis pro simili sumpta, in una etiam & eadem ratione, prima scilicet multiplex ad secundam, & tertia ad multiplicem quartam. Sed cum fuerint quatuor quantitates proportionales, prima ad secundam ut tertia ad quartam, prima uerò ipsa tertia maior, uel ei æqualis, uel minor ea sit, & secunda

quartam, ex propositione 14 huius, sic respiciet. Quatuor igitur iam quantitatibus ordinatis, prima scilicet & quarta, ut prius, secunda uerò in tertium, ac tertia deinde in secundum locum positis, cum huius ordinationis primæ & tertiæ quantitatium æquæ multiplicēs æqualiter se habeant, in addendo, minuendo uel æqualitate, ad secundæ & quartæ quantitatium æquæ assignatas multiplicēs, ex definitione eadem huius quinta concluditur propositum: primæ scilicet ad tertiam eam esse, quæ est secundæ ad quartam quantitatem ratio. Si igitur quatuor quantitates proportionales fuerint: & permutatim hæ proportionales erunt. quod demonstrasse oportuit.

Exemplum

Exemplum in numeris.

21	9	56	24		21	9
7	ad	3	ut	28	ad	12
				pri.	7	ter.
				se.	28	quar.
					56	24

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ.

Ἐὰν συγκείμενα μέγθῃ ἀνάλογον ᾖ· Ἐὰν διαμεθύντῃ ἀνάλογον ᾖ· ἴσαι.

PROPOSITIO XVII.

Si compositæ quantitates proportionales fuerint: & diuisæ hæ proportionales erunt.

Sint quatuor quantitates, atq; esto, quòd hæ, compositæ, hoc est prima cum secunda ad secundam, & tertia cum quarta ad quartam, in una & eadem ratione sint: dico igitur, & diuisim, uel diuisionis ratione, quod idem est, illas quantitates in una & eadem ratione esse. Colligitur huius rei demonstratio potissimum ex pro-

Prim.	Secun.
Ter.	quar.

positionibus prima & secunda huius. Sumptis enim quatuor quantitatibus, primæ scilicet, secundæ, tertiæ & quartæ æquè multiplicibus: erit, ratione primæ & secundæ quantitatibus, ut quàm multiplex est una unius, tam multiplices etiam sint, per propositionem primam huius, omnes omnium, atq; deinde hoc idem, per eandem etiam propositionem, ratione quantitatibus tertiæ & quartæ locum habet, ac tandem, cum ex hypothesi, æquè sint quatuor quantitatibus assignatæ multiplices, commutatione facta primæ & secundæ, ut unius, tertiæ item & quartæ, & harum ut unius quantitatis æquè multiplices erunt, quod est notandum. Sumantur rursus secundæ & quartæ, utcunque aliæ æquè multiplices, cum prius etiam ipsarum secundæ & quartæ quantitatibus æquè multiplices assignatæ sint, modò

Prima

sumptæ ipsis prioribus multiplicibus iunctæ, earundem secundæ & quartæ quantitatibus, ex propositione 2 huius, æquè multiplices erunt. Quoniam autem quantitates, prima cum secunda, secunda, tertia cum quarta, & ipsa quarta, ex hypothesi proportionales sunt, primæ uerò & tertiæ, atq; secundæ & quartæ quantitatibus æquè multiplices assignatæ: primæ & tertiæ quantitatibus multiplices, ipsas secundæ & quartæ quantitatibus multiplices; ex conuersione definitionis quintæ huius in minuendo, æqualitate uel addendo æqualiter respiciunt. Quare si multiplex primæ, hoc est ex prima & secunda compositæ, à multiplice secundæ quantitatis defecerit, ei æqualis fuerit, uel hanc eandem excesserit: & multiplex tertiæ, quæ scilicet ex tertia & quarta composita est, ad multiplicem quartæ conferendo, sic se habebit; ac portionibus deinde illis, quas ex utraq; parte communes habent, ablatis atq; neglectis, cum de residuis multiplicibus, ex communi quadam noticia, quòd hæ

etiam ad suas inferiores sic sese habeant, nullum dubium fit: ex definitione tandem
 huius, id quod maximè uolebamus concluditur, primæ scilicet ad secundam esse,
 ut est tertiæ ad quartam quantitas ratio. Si compositæ igitur quantitates pro-
 portionales fuerint: & diuisæ hæ proportionales erunt, quod demonstrasse oportuit.

Exemplum in numeris.

	30		40		
18	12	24	16		
9	6	12	8		
	15		20		
	30		30		
18	40	12	12	6	18
9	20	6	16	8	24
	15		40		
30	30	40	40		
<u>12</u>	<u>12</u>	<u>16</u>	<u>16</u>		
18	18	24	24		
9	6	12	8		

Idem exemplum, alijs multiplicibus expositum.

	45		60			
27		18		36		24
9		6		12		8
		12				16
	15				20	
	45				30	
27	60	18		18	6	12
9	20	6		24	8	16
	15				40	
45		30		60		40
<u>18</u>		<u>18</u>		<u>24</u>		<u>24</u>
27		12		36		16
9		6		12		8

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ.

Εὰν διαιρεμένα μέγιστα ἀνάλογον ᾖ· καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἴσται.

PROPOSITIO XVIII.

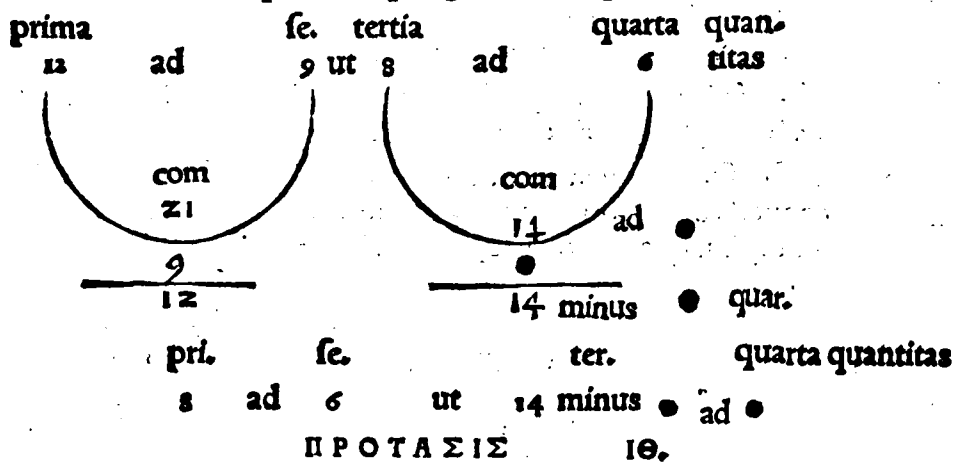
Si diuisæ quantitates proportionales fuerint: & compositæ hæ pro-
 portionales erunt.

Σιν

Sint quatuor quantitates disiunctæ proportionales, prima ad secundam, & tertia ad quartam: dico igitur, & compositionis ratione eas proportionales esse. Nam si non, sumatur loco quartæ quantitas alia, ad quam nimirum se habeat tertia cum quarta, sicut prima cum secunda ad secundam. Et quoniam hæc sumpta, quantitati quartæ minime æqualis esse potest (nam si æqualis esset, retineretur illa: atq; statim pateret propositū) erit aut minor illa, aut maior. Vtrum nunc horum ponitur, con-

trarium semper infertur, sumptam scilicet, maiorem esse ipsa quarta, ubi posita fuerit minor, uel contrā, eandem sumptam, ipsa quarta maiorem positam, hac eadem minorem esse, hoc modo. Quoniam enim composita ex prima & secunda ad secundam, in ea est ratione, ex structura, in qua est altera ex tertia & quarta composita quantitas, ad ipsam sumptam, cum sit *συνθεσις λόγων*, ipsæ eadem, si separatæ à se fuerint, per præmissam 17 proportionales erunt, prima scilicet ad secundam, ut tertia cum defectu uel excessu quantitatis sumptæ respectu quartæ, ad quantitatem sumptam. Sed quia sic etiam est ex hypothesi, tertia ad quantitatem quartam, cum quæ eidem sunt eadem rationes, per 11 huius, inter se etiam eadem sint: per primam tandem partem propositionis 14 huius quantitatem sumptam ipsa quarta maiorem esse infertur, cum tamen sit minor ea posita. Vel, per tertiam partem eiusdem 14, minor, cum sit posita maior. Quorum sanè utrunq; cum nullo modo esse possit, quod nimirum una & eadem quantitas iam sit alia quadam minor, atq; mox deinde etiam maior, uel contrā, concluditur uerum esse propositum. Si diuisæ igitur quantitates proportionales fuerint: & compositæ hæc proportionales erunt, quod demonstrasse oportuit.

Sint pro exemplo quatuor hæc quantitates.



Εὰν ἢ ὡς ὅλον πρὸς, ὅλον οὕτως ἀφαιρεθῇ πρὸς ἀφαιρεθῇ. Ἐὰν ἢ ὡς ὅλον πρὸς τὸ ἁρπῶν ἔσαι, ὡς ὅλον πρὸς ὅλον.

PROPOSITIO XIX.

Si fuerit sicut totum ad totum, sic ablatum ad ablatum: & reliquum ad reliquum, ut totum ad totum erit.

Sint

Sint duæ quantitates, portio etiam aliqua ab utraq[ue] quantitate ablata sic, ut ablatæ portiones eam inter se quam ipsæ totæ habeant rationem: dico, quod & reliquæ eandem cum totis rationem habeant. Cum enim, ex hypothesi, tota sit ad quantitatem totam, ut portio ablata ad ablatam: ex permutata ratione, tota ad ablatam, ut

To. _____

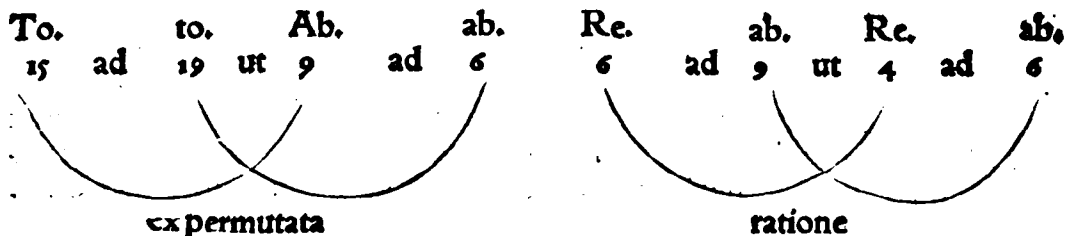
Ablata _____

Reliqua _____

tota ad ablatam erit. Quoniam autem est cõpositio rationis, quantitates uerò compositæ proportionales, cum hæ, ex propositione 17 præcedenti, diuisæ etiam proportionales sint, hoc considerato: reliqua ad ablatam in ratione reliquæ ad ablatam erit: atq[ue] reliqua deinde ad reliquam, ex permutata ratione, ut ablata ad ablatam erit. Quia uerò ut ablata ad quantitatem ablatam, ita etiam est, ex hypothesi, tota quantitas ad totam: reliqua igitur quantitas ad reliquam, ex propositione 11 huius ut tota ad totam erit. Si fuerit igitur sicut totum ad totum sic ablatum ad ablatum; & reliquum ad reliquum, ut totum ad totum erit. quod demonstrasse oportuit,

Exemplum huius in numeris.

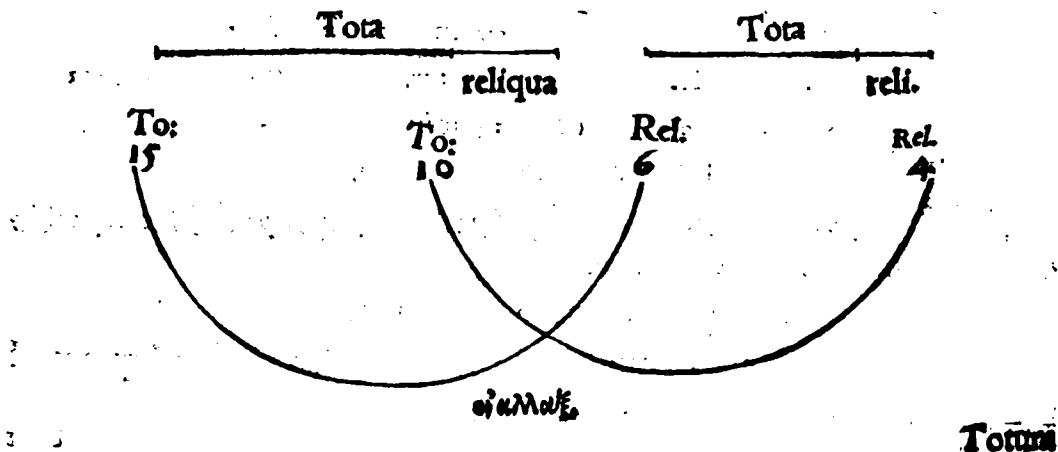
Totum 15 totum 10 est ex hypothesi
ut ablatum 9 ad abla. 6, Igitur
& reliqua 6 reli. 4 ut
totum ad totum erit.



Ergo per 11 propositionem huius, cum duæ rationes, totorum scilicet & reliquorum, uni, ablatorum nimirum, sint eadem: erunt illæ & inter se eadem. Reliquum igitur ad reliquum ut totum ad totum erit. quod demonstrasse oportuit.

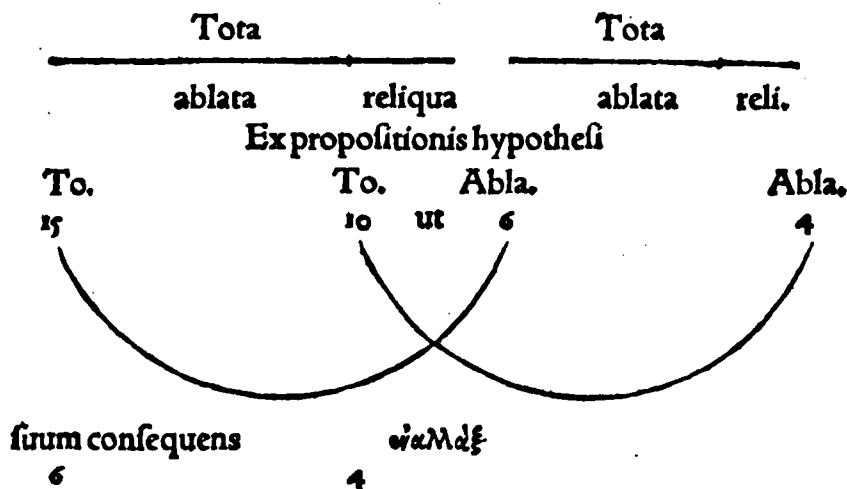
Καὶ ἐπεὶ δὴ ἰδεῖσθαι, ὡς δ' α β πρὸς δ' γ δ, ἔστω τὸ ε β πρὸς τὸ ζ δ. καὶ εἰ αλλαξ, ὡς τὸ α β πρὸς τὸ β ε, ἔστω τὸ γ δ πρὸς δ' ζ δ' συγμέμνητα αζ α μεγάθη ἀκέραιον ἔστιν.

Et quoniam ostensum est, quemadmodum totum ad totum, ita etiam reliquum ad reliquum: conuersa uerò ratione, cum sit totum ad reliquum, ut totum ad reliquum; compositæ igitur quantitates proportionales erunt.



[illegible]

Demonstratum est autem, nimirum ex propositionis huius hypothefi & permutata ratione, ficuti totum ad ablatum, sic totum ad ablatum, cum fit ut antecedens ad id quo ipsum excedit fuum confequens, ad reliquum fcilicet: & rationis conuerfione quantitates proportionales erunt.



ΓΟΡΙΣΜΑ

Εκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν συγκρίμῃται μέγιστη ἀνάλογον ἢ καὶ ἀναστρέψαντι ἀνάλογον ἵσαι, ὅπως ἴδῃται δῆξαι.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est, Si compositæ quantitates proportionales fuerint: & conuersione rationis eas proportionales esse. quod demonstrasse oportuit.

Γεγόνασιν οί λόγοι, και ὑπὶ τῇ ἰσχύει κλλαπλάσιον, καὶ ὑπὶ τῇ ἀναλογίᾳ. Επειδὴ πρὸ ἐὰν
πρῶτον διδυτέρῃ ἰσχύει ἢ κλλαπλάσιον και τρίτον τεταρτὸν εἶσαι, και ὡς ὁ πρῶτον πρὸς διδυ-
τέρῃ, ὅπως τὸ τρίτον πρὸς ὁ τέταρτον. ἔκ' ἐπὶ α, και αὐτοσφει. Εὰν δ' ὡς τὸ πρῶτον πρὸς διδυ-
τέρῃ, ὅπως τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅ καὶ ὡς εἶσαι, @ ε' μιλι πρῶτον τὸ διδυτέρῃ ἰσχύει κλλαπλά-
σιον, δι' αὐτὸν ε' τεταρτὸν, καὶ διὰ πρὸς τὸ ἡμιολίον ἢ ὑπὲρ τριῶν λόγων ἢ τὸ πρὸς τῇ, ὁ πρὸς ἐφ' ἐφ' α.

Locum quoq; habent rationes in æqualiter multiplicibus. Quando enim ut primum secundum, sic tertium quarti fuerit multiplex: erit etiam, sicut primum ad secundum, sic tertium ad quartum, non autem conuertendo. Si enim fuerit sicut primum ad secundum, sic tertium ad quartum: non omnino erit, neq; primum secundum: neque uerò tertium quarti æquè multiplex, quemadmodum hoc in sequialteris, sesquiterijs, atque huius generis superparticularibus alijs manifestum est. quod demonstrasse oportuit.

**Exemplum prioris partis, ubi quantitates sunt multiplices,
atq; sic etiam proportionales.**

Vt	9	3	6	2
item	36	9	12	3
uel	16	4	8	2, &c.

Kk

Exemplum

Exemplum partis posterioris, ubi, licet quantitates sint proportionales, tamen non contrā omnino æquæ multiplicēs.

Vt	6	4	3	2
	4	3	12	9
	5	3	15	9

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

K.

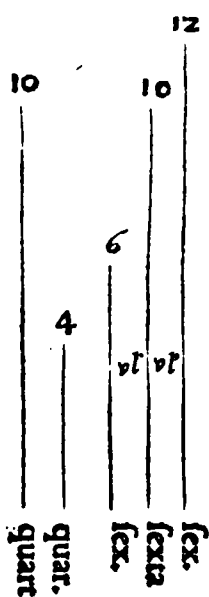
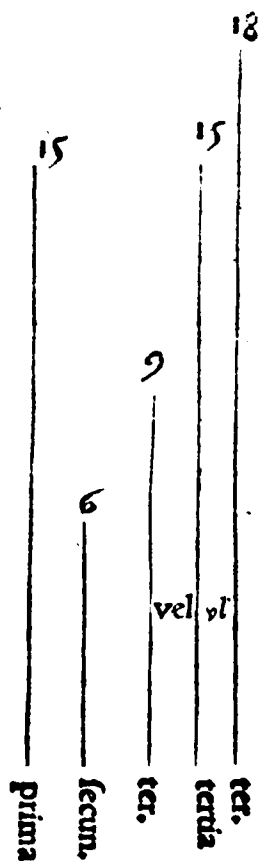
Εὰν ἡ τρίτη μέγλη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα ᾗ πλὴθος συνδυο λαμβανόμενα, καὶ ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγῳ, δι' ἴσου δὲ ᾗ πρῶτη τοῦ τρίτου μείζον ἢ καὶ ᾗ τέταρτον τοῦ ἑκτοῦ μείζον ἴσαι καὶ ἴσων ἴσων καὶ ἴλαστον ἴλαστον.

PROPOSITIO

XX.

Si fuerint tres quantitates, & alia eisdem æquales multitudine, in eadem cum duabus sumptis ratione, ex æquali autē prima tertia maior fuerit: & quarta sexta maior erit, & si æqualis: æqualis si uerò minor: minor.

Sint tres quantitates, totidem insuper alia, quæ eas quas priores, eo etiam ordine, inter se habeant rationes: dico, si prima priorum maior fuerit ipsa sua tertia, uel



ei æqualis, siue ea minor: & primam posteriorū ipsa sua tertia maiorem, ei æqualem, uel minorem ea esse. Quoniam enim prioris ordinis prima, ex hypothesi, maior ponitur, quam ipsa tertia: erit illius ad mediā, ex priore parte propositionis octauæ, maior quam huius ad eandem mediā ratio. Sed quia rationes in utroque ordine sunt inter se similes & eadem, prior scilicet priori, posterior uerò ratio posteriori: & posterioris ordinis prima ad mediā, maiorem quam ipsa tertia rationem habebit: quare etiā, per priorem partem decimæ, prima posterioris, hoc est quarta, eadem sua tertia, hoc est sexta quantitate maior erit. Eodem modo, si prima quam tertia minor fuerit, per easdē propositionum partes propo-

tum inferri poterit. Quod si prima & tertia prioris ordinis quantitates æquales inter se fuerint, cū, per priorem partem septimæ, una & eadem sit harum ad mediā quantitate ratio, propter rationum similitudinē, quæ in utroque ordine esse præsupponitur: & in posteriori ordine prima ipsa tertiæ ex priori parte proportioni non æqualis erit, quod demonstrasse oportuit.

APPENDIX.

APPENDIX.

Eadem ratio & in hac, & proximè sequenti propositione concludi potest, si quatuor aut plures etiã in uno ordine, totidem quoq; similium rationum in altero quantitates positæ fuerint, si prima prioris maior sit sua ultima, ei æqualis uel minor ea: quod & tum prima posterioris ordinis, respectu suæ ultimæ, similiter sese habeat.

Exemplum in numeris, ubi prima est

	maior ultri.		ultimæ æqualis		minor ultimæ	
Prima	9	6	9	6	9	12
	6	4	6	4	6	8
	15	10	15	10	15	20
ultima	3	2	9	6	12	16
quant. prior	poster.		prior post.		prior posterior	
					ordo	

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

ΚΑ.

Εὰν ᾖ τρία μέγθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα ᾖ πλήθος, συνιδὺ νο λαμβανόμενα, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἢ δὲ τετραγμνή αὐτῶν ἡ ἀναλογία, δὴ ἴσου δὲ ᾖ πρῶτον τὸ τρίτον μείζον ἢ καὶ ᾖ τετάρτον τὸ ἕκτον μείζον ἴσαι καὶ ἴσων ἴσων, καὶ ἴλαστον ἴλαστον.

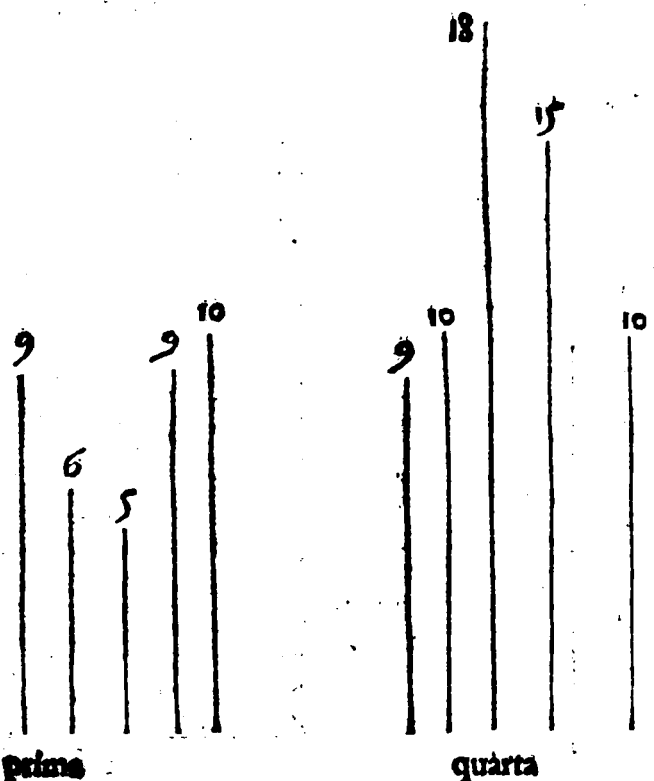
PROPOSITIO

XXI.

Si fuerint tres quantitates, & aliæ eisdem æquales multitudine, in eadem cum duabus sumptis ratione fuerit autem perturbata earum proportio, ex æquali autem prima ipsa tertia maior fuerit: & quarta sexta maior erit, & si æqualis: æqualis, si uerò minor: minor.

Sint tres quantitates, totidem insuper aliæ, quæ eas quas priores inter se habeant

rationes, sic tamen perturbata earum proportio: dico, si prima prioris maior fuerit ipsa sua tertia, uel eia æqualis, siue ea minor: & primam posteriorum ipsa sua tertia maiorem, ei æqualem, uel minorem ea esse. Quoniam enim prioris ordinis prima, ex hypothesi, maior ponitur quàm ipsa tertia: maiorem etiã ad secundā prima quàm ipsa tertia, ex priore parte propositionis: huius, habebit rationē. Quoniam autem quæ primæ ad secundā in priori, ea etiã est, ex hypothesi, ratio secundæ ad tertiā in ordine posteriori: secundæ igitur



Kk 2 ad

ad tertiam in ordine posteriori: secundæ igitur ad tertiam ordinis posterioris, maior quam tertiæ ad secundam in ordine prioris ratio erit, unde sic maior etiâ quam in eodem posteriori secundæ ad primam, eo quod eiusdē secundæ ad primā, ex nostra hypothesis & conuerfa ratione, sit ut in priori tertiæ ad secundam ratio. Quare ex posteriore parte propositionis decimæ huius, concluditur propositū, primam scilicet in ordine posteriori ipsa sua tertia, hoc est, quartam sexta quantitate maiorem esse. Simili modo, æqualitatem: & quod etiam quantitas quarta quam sexta minor sit, si prima tertiæ æqualis uel minor ea ponatur, inferemus. Si fuerint igitur tres quantitates, & aliæ eisdem æquales multitudine, in eadem cum duabus sumptis ratione, fuerit autem perturbata earum proportio, ex æquali autem prima ipsa tertia maior fuerit: & quarta sexta maior erit, & si æqualis: æqualis, si uerò minor: minor, quod demonstrasse oportuit.

Exemplum in numeris, ubi prima.

	tertia maior		tertiæ æqualis		minor tertia	
prima	9	24	9	16	6	16
	8	18	8	18	8	18
tertia	6	16	9	16	9	24

Aliud exemplum.

	9		16	24	12
	8			18	
9	6	12		16	

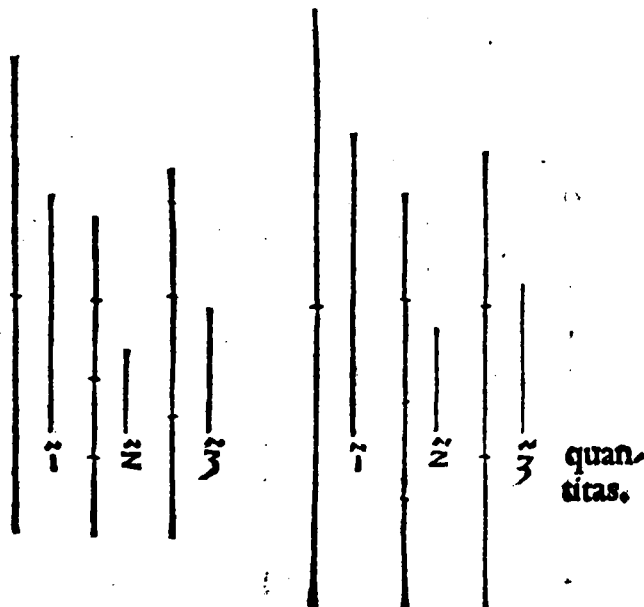
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒ.

Ἐὰν ἡ τρία μεγάλα, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα ᾗ πληθύνῃ, σὺν δὲ λαμβανόμενα ᾗ τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ δὲ ἴσον ᾗ τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσαι.

PROPOSITIO XXII.

Si fuerint tres quantitates, & aliæ eisdem æquales multitudine, in eadem cum duabus sumptis ratione: & ex æquali in eadem ratione erunt.

Sint tres quantitates, totidem insuper aliæ, quæ eas quas priores, eo etiam ordi-



ne, inter se habeant rationes: dico, quod & ex æquali primæ ad tertiam prioris ea sit, quæ primæ ad tertiam ordinis posterioris, ratio. Sumptis enim primarum, hoc est, primæ prioris & primæ posterioris ordinis, quantitatū æquæ multiplicibus, secundarum item hisdem, seu utcumq; alijs æquæ multiplicibus positis, etiâ tertiā deinde quantitatū æquæ assignentur multiplies. Et quoniā semper quatuor proportionaliū, primæ & tertiæ, secundæ item & quartæ, æquæ reperiuntur

reperiantur esse assignatę multiplices: erunt igitur ex propositione 4 huius, toties eam, quot in utroq; ordine quantitates reperiuntur, minus tamen uno, repetendo, & ipsę multiplices, eodem ordine sumptę, inter se proportionales. Quoniam autem tres sunt quantitates, prioris scilicet ordinis multiplices, alię deinde ipsis equales numero, multiplices scilicet quantitatum ordinis posterioris, cum duabus sumptis, & in eadem ratione, cum sicut prima prioris sua ultima uel maior, ei æqualis, uel minor ea fuerit, sic & primā posterioris suam ultimā ex propositione 20 huius respicere oporteat: per, definitionem huius tandem concluditur propositum, primam scilicet prioris ordinis ad suam ultimam sese habere, ut se habeat prima posterioris ad suam ultimam. Si fuerint igitur tres quantitates, & alię eisdē æquales multitudinem, in eadem cū duabus sumptis ratione: & ex æquali in eadem ratione erunt, quod demonstrasse oportuit.

APPENDIX.

Hęc propositio cum proximē sequenti, quemadmodum præmissę duę, non de tribus tantum, uerumetiam de pluribus quantitatibus intelligi potest, si modò in uno tot, quot & in altero ordine, quantitates constituentur.

Exemplum in numeris sit.

27	9	27	81
26	13	39	78
35	7	21	105
32	8	24	96
27	32	81	96
9	8	ut	27
			24

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ.

Εὰν ἡ τρία μέλη, καὶ ἄλλα αὐτῆς ἴσα ᾗ πληθύνῃ, συνδυο λαμβανόμενα εἴη τῶ αὐτῶ λόγῳ, ἡ δὲ τετραγμνή αὐτῶν ἡ ἀναλογία καὶ δι' ἴσου εἴη τῶ αὐτῶ λόγῳ ἴσαι.

PROPOSITIO XXIII.

Si fuerint tres quantitates, & alię eisdem æquales multitudinem, in eadem cum duabus sumptis ratione, fuerit autem perturbata earum proportio: & ex æquali in eadem ratione erunt.

Sint tres quantitates, atque totidem etiam alię, quę eas quas priores, perturbato tamen ordine, inter se habent rationes: dico, quod & ex æquali primę ad tertiam prioris, ea sit, quę primę ad tertiam ordinis posterioris, ratio. Sumptis enim primę & secundę in priori, & primę in posteriori ordine quantitatis æquę multiplicibus, etiam reliquarum trium, tertię scilicet in priori, & secundę ac tertię in posteriori ordine æquę multiplices assignentur. Et quoniam, quę ipsarum partium seu submultiplicium, illa eadem est, ex 15 huius, etiam multiplicium ratio, & quoniam etiam, quę eidem sunt eadem rationes, ipsę inter se sunt eadem, utraq; propositione bis usurpata, semel quidem ratione multiplicium primę & secundę prioris, ac deinde etiam ratione multiplicium secundę quantitatis & tertię ordinis posterioris: quam priores inter se habent rationem, illam eandem & posteriores multiplices habebunt. Simili modo, cum secunda prioris ad suam tertiam, ex hypothesi, sit, ut prima ad secundam in ordine posteriori ac deinde, ex permutata ratione

hæ nominatæ quantitates proportionales sint: & secunda prioris ad primam posterioris ut tertia illius, ad secundam huius, & multiplices quantitarum, secundæ scilicet prioris & primæ posterioris ordinis, per easdem decimam quintam & undecimam propositiones huius eā, quam multiplices tertiæ prioris, & secundæ quantitatibus ordinis posterioris, habebunt rationem: atq; ex permutata deinde ratione, multiplices secundæ & tertiæ prioris, ut multiplices primæ & secundæ quantitarum ordinis posterioris erunt. Ostensum autem est prius, quod & multiplices quantitarum prioris ordinis, primæ & secundæ, in eadem sint ratione, in qua sunt multiplices secundæ & tertiæ quantitarum ordinis posterioris.

Quoniam autem tres sunt quantitates, atq; totidem etiā aliæ, in eadem cum duabus sumptis ratione, estq; earum perturbata ratio: quemadmodum igitur prima maior tertia, uel ei æqualis siue minor ea fuerit, ita ex propositione 21 huius, & quarta respectu ipsius sextæ erit. Quare per definitionem 5, huius concluditur tandem, ut quam in priori ordine prima ad tertiam habet rationem, illam eandem in posteriori ordine prima ad tertiam habeat. Si fuerint igitur tres quantitates, & aliæ eisdem æquales multitudine, in eadem cum duabus sumptis ratione, fuerit autem perturbata earum proportio: & ex æquali in eadem ratione erunt, quod demonstrasse oportuit.

Exemplum in numeris sit.

Ordo

prior

posterior

15

5

5

15

6

2

10

20

8

4

4

8

15

6

ut

20

8

6

15

ut

8

20

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

ΚΔ.

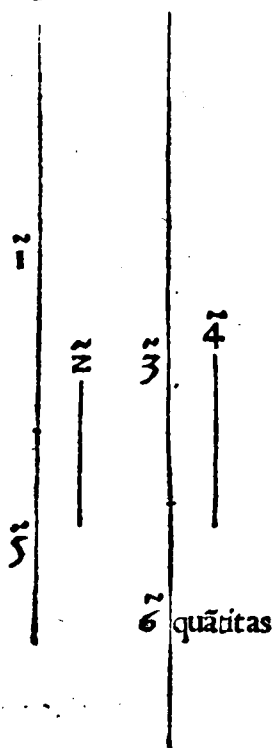
Εὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον ᾗ αὐτὸ ἔχει λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχει δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον ᾗ αὐτὸ λόγον, καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον. Ὁ δὲ σωτικθὲν, πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸ αὐτὸν ἔξει λόγον, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον.

PROPOSITIO

PROPOSITIO XXIIII.

Si prima ad secundam eam habuerit rationem quam tertia ad quartam habuerit autem & quinta ad secundam eam rationem quam sexta ad quartam: & composita, prima & quinta, ad secundam eam habebit rationem, quam tertia & sexta ad quartam.

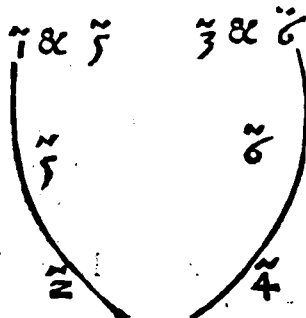
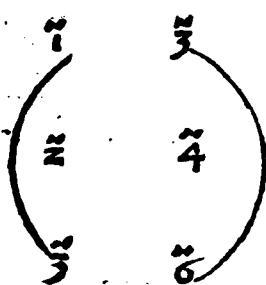
Sint sex quantitates, & esto quod prima ad secundam sit ut tertia ad quartam, similiter quinta ad eandem secundam, ut sexta ad quartam: dico ergo, & compositam



ex prima & quinta, ad secundam, eam quæ est composita ex tertia & sexta ad quartam, rationem habere. Quoniam enim prima ad secundam, ex hypothesi, est, ut tertia ad quartam, & rursus, quoniam quinta ad secundam, similiter ex hypothesi, est ut sexta ad quartam, ex conuersa ratione uerò, secunda ad quintam ut quarta ad quantitatem sextam: & prima ad quintam, iuxta ordinatam proportionem, ex æquali, per propositionem 22 huius, ut tertia ad sextam erit. Est autem diuisio rationis, unde ex rationis compositione, ut testatur propositio 18 huius, hæ quantitates proportionales erunt: prima igitur & quinta ad quintam, sicut tertia & sexta ad quantitatem sextam. Quoniam autem quinta ad secundam, ex hypothesi, est ut sexta ad quartam: quare rursus per eandem ordinatam rationem, cū duo iam quantitatum ordines appareant, cuiusmodi scilicet hæc proportio requirit, inferitur tandem propositū, primam scilicet & quintam coniunctim ad secundam se habere, ut se habent tertia & sexta, & ipsæ coniunctæ ad quantitatem quartam. Si prima igitur ad secundam eam habuerit rationem quam tertia ad quartam, habuerit autem & quinta ad secundam, &c. quod demonstrasse oportuit.

Exemplum huius in numeris sic.

prima		secunda		tertia		quarta
7	ad	9	ut	21	ad	27
quinta 6				sexta 18		
13				39		



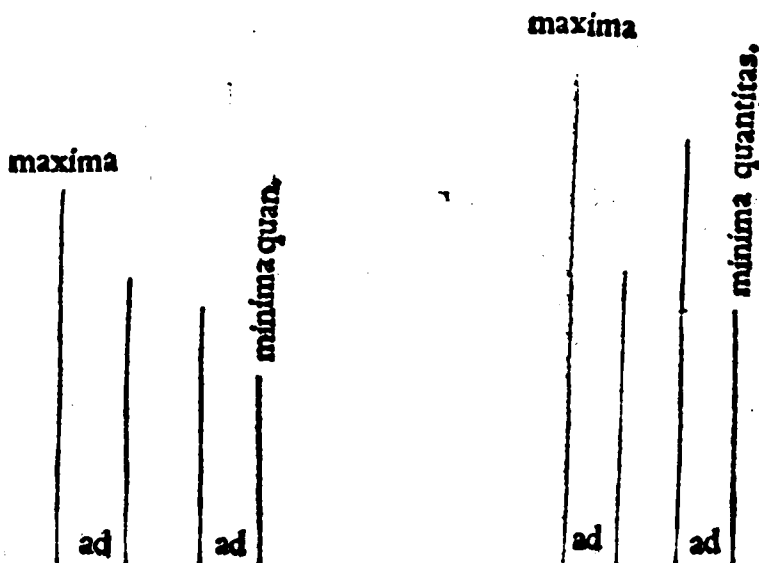
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΕ.

Ἐὰν τρία ἢ περισσότερα μεγέθη ἀνάλογα ᾖ· τὸ μέγιστον καὶ τὸ ἐλάχιστον, δύο τῶν λοιπῶν μέγεθων ὄντι.

PROPOSITIO

Si quatuor quantitates proportionales fuerint, maxima & minima duabus reliquis maiores sunt.

Sint quatuor eiusdem generis quantitates proportionales, qualitercunq; modo non sint in ratione æqualitatis, ut dicitur. nam hic nulla apparet quantitas maxima uel minima, quod nunc est contra propositionis hypothesim: dico, maximam cum minima reliquis duabus quantitatibus maiorem esse. Ponantur in maioribus quantitatibus portiones, ex propositione 3 primi, suis minoribus æquales. Et quoniam quantitates maiores, aut ex hypothesi statim, aut permutata ratione etiam usurpa-



ta, primò illam, quam ipsæ minores, secundò deinde, ubi quidem loco minorum, portiones, quas ipsæ minores in maioribus signatæ æquales habent, sumptæ fuerint, quam ipsæ portiones inter se habent rationem, cum iam totum sit ad totum, sicut ablatum ad ablatum: & reliquum ad reliquum, ex propositione 19 huius, ut totum ad totum erit. Quia autem ex maioribus una, necessario altera maior esse debet: & reliqua illius ex prima parte propositionis 14 sola, uel eadem ipsa parte, premissa tamen permutata ratione, huius reliqua maior erit. Et quia etiam utraq; minor suæ ablatae est æqualis, si æqualibus æqualia addantur: & quæ proveniunt quantitates, utraq; uidelicet minor cum alterius ablata, inter se æquales erunt. Quod si in eisdem æqualibus inæqualia, reliqua scilicet, addita fuerint, utrunque suo, ac debito ordine: & producta iam, ex communi quadam noticia, inter se inæqualia erunt. Illud quidem maius, quod plus acceperit, alterum deinde minus. Cum igitur id quod maius est, ex maxima & minima, quod uerò minus, ex duabus quantitatibus reliquis compositum sit, propositio tandem constabit. Si quatuor igitur quantitates proportionales fuerint, maxima & minima duabus reliquis maiores sunt. quod demonstrasse oportuit.

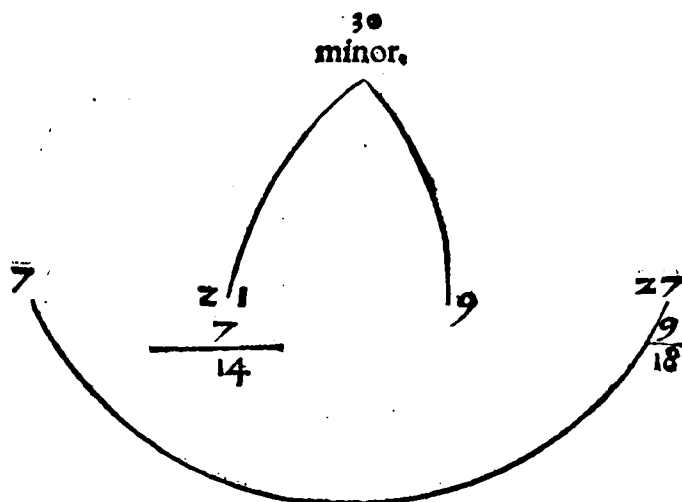
Exemplum in numeris sit.

Maximus		Minimus numerus
27	ut 9	7
9	portiones minoribus æquales, & ablatae ex totis.	7
18	Reliqui numeri.	14

Reliqui

Reliqua	Tota
18	27
Minor 9	Minor 7
ablata alte. 7	ablata alterius 9
<u>16</u>	<u>16</u>
14	18
30 minus,	34 productum
quia minus accepit	maius: quia maius acce,

Sequitur hoc idem exemplum,
numeris tamen aliter positis,



maior 34 numerus

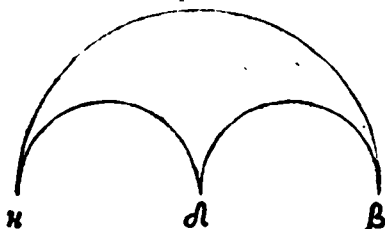
Minores	Ablatz por.
27	14
7	7
<u>9</u>	<u>9</u>
16	16
<u>14</u>	<u>18</u>
30	34 &c.

FINIS LIBRI QVINTI.

LI ΣΧΟΛΙΟΝ

ELEMENTORVM EVCLIDIS
ΣΧΟΛΙΟΝ ΕΙΣ ΤΟ Σ,
ΑΔΗΛΟΥ.

Λόγος ἐκ λόγων συγκείσθαι λέγεται, ὅταν πηλικότητος πινὼν λόγων
πολλαπλασιαζόμενοι πρῶσι λόγον. Ἐκένος ὁ λόγος συγκείσθαι ἐκ τῶν λό-
γων ἐκείνων λέγεται, ὡς αἱ πηλικότητος ποιούσιν αὐτῶν. Πηλικότητος δὲ λέ-
γεται, ἂν ὡς ὀνομάζονται· ὡς ἀπὸ τοῦ δύο ὁ διπλάσιος. Ἐσὼ λόγος τοῦ κ πρὸς

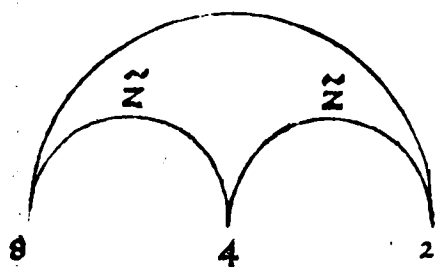


τῶν δ' διπλασίων, καὶ αὐτὸς δι πρὸς τὸν
β διπλασίον, καὶ αὐτὸς ὁ τετραπλά-
σιος ἐκ λόγου τοῦ κ πρὸς τὸ β συγκεί-
σθαι λέγεται ἐκ τῶν δύο λόγων, τοῦ
κ πρὸς τὸ δι, καὶ τοῦ δι πρὸς τὸν β, ὅ-
τι αἱ πηλικότητος αὐτῶν ποιούσιν αὐ-
τὸν οὕτως. Ἐπεὶ, ὡς εἴρηται, πηλικότη-
τος οἱ ἀριθμοὶ λέγονται, ἂν ὡς αἱ σχέσεις ὀνομάζονται· οἷον ἀπὸ τοῦ δύο καὶ

τρία καὶ τέσσαρα, ὁ διπλάσιος, καὶ τριπλάσιος, καὶ τετραπλάσιος λόγος.
ὀνομάζεται δὲ καὶ τὸ ἥμισυ ἀπὸ τοῦ ἑνὸς. ἔστι δὲ ὁ δύο τοῦ τέσσαρα ἥμισυς.
λαμβάνω τὸ ἥμισυ τῷ μονάδι, ἂν ἥς ὁ δύο τῶν τεσσάρων ἥμισυς λέγε-
ται, ὡς λεγόμενον πρῶτον λ λαμβάνω, καὶ ἑτέρον ἥμισυ μονάδι, ἂν ἥς πᾶ-
λιν ὁ δι ἥμισυς λέγεται τῷ κ, καὶ πολλαπλασιάζω τὰ λ πρῶτα λεπτὰ ὑπὲρ τὰ λ
πρῶτα, ἐὰν αὐτὰ λείπῃ, καὶ γίνονται διδυτὸς λεπτὰ, συνακρόσια. ταῦτα ἀναβιβάζω
ἥτοι μοιράζω, γίνονται δέκα καὶ πέντε πρῶτα λεπτὰ, ἃ πῦα δεκαπέντε πρῶ-
τα λεπτὰ τέταρτον εἰσὶ μονάδι. τετράκις γὰρ κ ξ. Ἀλλὰ διὸ ἔστω ὁ μίσιος
τοῦ β, καὶ κ, ὁ μ. καὶ ἔπειτα τὰ δύο τοῦ μ, εἰκοσὶν ὄξιν, λαμβάνω τὸν εἰκοσὶν τῷ
μονάδι ὅν λεπτῶν τριῶν. Ἐπειτάλιν ὁ μ, πέντε τετραπλάσιος ὅστις τοῦ κ μὲν
τοῦ μ ὁ κ λέγεται, πολλαπλασιάζω τὸν τρία τὸν εἰκοσὶν τοῦ ξ, πῶς τὸ ε, ἂν πέντε
πῶν μὲν ὁ κ τοῦ μ λέγεται, καὶ γίνονται ι ε λεπτὰ, ἀπὸ δὲ τέταρτον μονά-
δι. καὶ οὕτως πάλιν ὁ β τῷ κ, τέταρτος ὅστις. Ἐσὼ πάλιν μετὰ τῶν δι δ' ἐκ β,
ὁ κ. ἔπειτα ὁ δι ἥμισυς ὅστις τοῦ κ, ὁ δὲ κ ὑφημιόλιος τῷ ι β. λαμβάνω τὰ λείπῃ
λ τὸ ἥμισυ τῷ μονάδι, καὶ ποιῶ τὰ μ λεπτὰ τῷ ὑφημιόλιον τῷ μονάδι,
καὶ ποιῶ τὰ λ πῶς τὰ μ, καὶ γίνονται χίλια διδυτὸς, διδυτὸς λεπτὰ, ἀναβι-
βάζω ταῦτα, γίνονται πρῶτα λεπτὰ κ. τὰ κ τρίτον εἰσὶ μονάδος, ἐκ δὲ δι τῶν τρί-
τον ὅστις τῷ β. Ἐσὼ μετὰ τῶν β ἐκ τοῦ ι β ὁ δι. καὶ ἔπειτα ὁ δύο τῷ δι ἥμισυ
ὅστις, ὁ δὲ δι τοῦ ι β ὑποτριπλάσιος, λαμβάνω τὰ λ λεπτὰ, τὸ τῷ μονάδι
ἥμισυ· ἐκ τὰ κ, τὸ τρίτον αὐτῷ. ἀπὸ γὰρ τῷ τρία ὁ τριπλάσιος πῶς ὀνομάσαι
καὶ ποιῶ τὰ λ ὑπὲρ τὰ κ, γίνονται ἑξακρόσια διδυτὸς λεπτὰ. ταῦτα ἀναβιβάζω,
καὶ γίνονται δέκα πρῶτα, τὰ δέκα, ἑκτὸν μονάδι, καὶ ὁ β ἑκτὸν τοῦ ι β.
Πάλιν ἔστω μετὰ τῶν δι καὶ ε, ὁ κ. καὶ ἔπειτα ὁ δι ὑποπενταπλάσιος ὅστις τοῦ
κ, ὁ δὲ κ τετραπλάσιος τῷ ε, λαμβάνω τὸν τῷ μονάδι πέντε πῶν, τὰ ι β, καὶ
τὸ δι, ἐφ' ὃ ὁ ε τετραπλάσιος λέγεται τῷ κ, καὶ ποιῶ τὸν τέταρτον πῶν τὸν διδυτὸν
κατὸν, γίνονται μ η ὑποὐπενταπλάσιος τῷ μονάδι. καὶ ὁ δι τοῦ ε, ὑποὐπεν-
ταπλάσιος ὅστις. Ἐσὼ πάλιν μετὰ τῶν β, καὶ δι ὁ γ. καὶ ἔπειτα ὁ δι τοῦ γ ὑπὲρ
τριπλάσιος, ἔπειτα ἔχῃ αὐτὸ καὶ τὸ τρίτον αὐτῷ ὅστις μονάδος. λαμβάνω τὴν μονάδα,

Ratio ex rationibus cōponi dicitur, quādo rationum quantitates, hoc est denominationes, multiplicatæ, rationē cōstituunt. Ratio ex rationib. cōposita dicit, quā uidelicet rationum denominationes cōponunt. Quantitates uerò, hoc est denominationes rationū, dicunt, à quib. rationes denominantur, ut à duob. dicitur dupla. Sit ratio octonarij ad quaternarium dupla, atq; etiā ipsius quaternarij ad binariū dupla & ipsa: quadrupla igitur ratio, octonarij ad binarium, cōponi dicit ex duab. rationib. octonarij scilicet ad quaternariū, & quaternarij ad binariū. ambarū etenim rationū denominationib. cōposita hęc denominatio cōstituit. Quoniā ergo, ut dictū modò est, quātitates, seu denominatiōes rationū numeri dicuntur, à quib. habitudines nominantur, describuntur ac referunt inter se, ueluti à binario ternario ac quaternario: dupla, tripla ac quadrupla ratio. Nominat

quadrupla



uerò & dimidiū ab uno, sunt aut duo ipsius quaternarij dimidiū. Capiō igitur dimidiū unius (integri scilicet, ut numeri 60 cū is cōmodissimē distribui in minutias possit) à q̄ duo ipsius quaternarij dimidium dicit, quarū acceptarū partiū, 30 accipio: & alterū dimidiū illius unius, à q̄ iterū quaternarius octonarij medietas dicitur. & multiplico 30

prima minu. ad, hoc est cū 30 min. & fiūt secūda min. 900, hęc in 60 scilicet traduco seu diuido, fiūt 15, prima min. q̄ sanē 15 prima mi. quarta pars sunt unius, seu integri. quater .n. 15, sexaginta scilicet cōtinent. Proinde esto binarij & octonarij medius 40. Et quoniā 2 ipsius 40 uigincuplū sunt, accipio uigincuplum, unius seu integri, nēpe tria minu. At uerò rursus 40 quincuplū sunt octonarij: pars ipsius 40 octonarij dicit, multiplico 3 uigincuplā partē ipsius 60, cū 5 denominante octonariū in 40, & fiunt 15 min. quarta pars integri, 60, s. q̄ denominatio q̄q; est inter 2 et 8, positos num. Esto rursus inter ipsos 4 & 12 octon. quoniā 4. dimidiū sunt octonarij, 8 uerò ipsius duodenarij subsequalter: accipio mi. 30, dimidiū integri, & facio 40 min. subsequalter integri, & facio 30 ad 40, & fiunt 1200 secun. mi. quib. diuisis, fiunt prima mi, 20 & uiginti tertiū sunt integri: et quatuor igit tertiū sunt duodenarij. Esto inter binariū & 12 quaternarius, & quoniā binarius quaternarij dimidiū est, quaternar. q̄ duodenarij subtripplus, accipio 30 min. unitatis seu integri dimidiū: 20 deinde, tertiū ipsius. à ternario enim tripla denominat, & facio 30 cū 20, fiunt 60 secun. min. quib. in integrz diuisis, fiunt 10 prima, q̄ 10 sexta pars sunt integri: & 2 sexta pars est duodenarij. Rursus, sit inter 4 & 5 num. 20. & quoniā quaternar. subquincuplus est ipsius 20, numerus q̄ 20 ad 5 quadruplus, accipio integri 5 partē, nimirz 12, & quaterna. à q̄ quinaris quadruplus dicit ipsius 20, & facio quadruplū, ad 12, fiunt 48, subsequalquartū integri: & 4 ipsorū subsequalquartū est. Esto rursus inter 2 & 4 ternarius. Et quoniā 4 ad ternarium est sesquitercius, cū ipsum & tertium ipsius, quæ est unitas, habeat, accipio integrz,

ἥ τις ὅστις λεπτή ξ. ἀφ' ἧς, μονάδ' ὅ τριῶν ἔσσης τοῖς τρία, ὁ δὲ ἐπὶ τριῶν αὐτὸ
 λέγεται. λαμβανώμεν καὶ τὸν λ, ὃς ὅτι μονάδ' ὅ ἡμισυ, ὅστις τὸ τρία ἡμιόλιον εἶναι τοῖς
 β. ὀνομάζεται δὲ ὃς ἡμιόλιον ἀπὸ τοῦ ἡμισίως. καὶ ποιῶ τὸ λ πρὸς τὴν μονάδα, ἥ ῥα
 ξ λεπτή, καὶ γίνονται χίλια ὀκτακῆσια, διδυτῶρα λεπτά. ταῦτα ἀναβιβάζω, καὶ
 γίνονται λ πρῶτα λεπτά, ταῦτα ἡμισυ μονάδ' ὅ. καὶ ὁ β τοῦ δὲ ἡμισύς ὅστις.

Λόγ' ὅτι ἐκ δύο λόγων ἢ καὶ πλείονων συγκείσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων
 πληκρότητες, πελυπασιασθῶσι, ποιῶσι τινα πληκρότητα λόγου. ἔχεται γὰρ
 ὃς α β, πρὸς ὃς γ δ λόγον διδύμου, οἷον διπλάσιον ἢ τριπλάσιον, ἢ τινα ἄλλο.
 καὶ ὃς γ δ πρὸς ὃς ε ζ καὶ αὐτὸς διδύμου. λέγω ὅτι ὁ τοῦ α β, πρὸς ὃς ε ζ λόγ' ὅ
 σύγκειται ἐκ τῶν α β πρὸς ὃς γ δ, καὶ τῶν γ δ πρὸς ὃς ε ζ. ἥ ῥα ὅτι ἰάν ἡ τοῦ α β, πρὸς ὃς
 γ δ λόγ' ὅ πληκρότης πελυπασιασθῶσιν αὐτῶν τῶν γ δ πρὸς ὃς ε ζ λόγ' ὅ πληκ-
 ρότης, πρὸς τῶν τοῦ α β πρὸς ε ζ. Ἐστω γὰρ πρῶτος ὁ μὲν α β τοῦ γ δ μείζων,

καὶ ὃς γ δ τοῦ ε ζ. Ἐἴσω ὃς μὲν α β τοῦ γ δ διπλάσιον, ὃς δὲ γ δ τοῦ
 ε ζ τριπλάσιον. Ἐπειδὴ ὃς μὲν γ δ τὸ ε ζ τριπλάσιον ὅστις, τοῦ δὲ γ
 δ διπλάσιον ὃς α β, ὃς ἄρα α β τοῦ ε ζ, ὅστις ἑξαπλάσιον. ἔπειδ' ἡ ἰάν
 ὃς τριπλάσιον τινὸς διπλάσιον ὡς μὲν, γίνεται αὐτὸ ἑξαπλάσιον.
 ἔστω γὰρ ὅστις κρείως συνθέσις. ἢ οὕτως, ἔπειδ' α β τοῦ γ δ ὅστις δι-
 πλάσιον, διηγήσασθαι α β εἰς τὰ τῶν γ δ ἴσα, καὶ ἔσω ταῦτα, τὰ α κ
 κ β. καὶ ἔπειδ' ὃς γ δ τοῦ ε ζ ὅστις τριπλάσιον, ἴσως δὲ ὃς α κ τοῦ γ δ, καὶ
 ὃς α κ ἄρα, τὸ ε ζ ὅστις τριπλάσιον. ὅλον ἄρα ὃς α β τοῦ ε ζ ὅστις ἑξαπλά-
 σιον. ὁ ἄρα τοῦ α β πρὸς ὃς ε ζ λόγος, συνήκται ὅστις τὸ γ δ μίση ὅσον,
 συγκείμεν ὅτι α β πρὸς γ δ, καὶ τοῦ γ δ πρὸς ε ζ λόγος.
 Ομοίως δὲ καὶ ἑλάττω ἢ τὸ γ δ ἑξατῶρα, τῶν α β ε ζ, συναχθή-
 σεται. Ἐστω γὰρ πάλιν τὸ μὲν α β, τοῦ γ δ τριπλάσιον, ὃς δὲ γ δ
 ἡμισυ τοῦ ε ζ. Καὶ ἔπειδ' ὁ γ δ ἡμισυ ὅστις τὸ ε ζ, τὸ δὲ γ δ τριπλά-
 σιον τοῦ α β, τὸ α β ἄρα ἡμιόλιον ὅστις τὸ ε ζ. ἰάν γὰρ τὸ ἡμισυ τινὸς
 τριπλάσιον ὡς μὲν, εἴη αὐτὸ ἄπαξ καὶ ἡμισύκις. Καὶ ἔπειδ' ὁ μὲν α β τὸ γ δ ἰσὶ
 τριπλάσιον, τὸ δὲ γ δ τοῦ ε ζ ἰσὶ ἡμισυ, οἷον ἰσὶ τὸ
 α β ἴσως τῶν γ δ τριῶν, ποιῶμεν ἰσὶ τὸ ε ζ δύο, ὡς
 τε ἡμιόλιον ἰσὶ τὸ α β τὸ ε ζ. ὁ ἄρα τοῦ α β πρὸς τὸ
 ε ζ λόγος, συνήκται ὅστις τὸ γ δ μίση ὅσον, συγκεί-
 μεν ὅτι α β πρὸς γ δ, καὶ τὸ γ δ πρὸς ε ζ
 λόγος. Ἀλλὰ διὰ πάλιν ἔσω ὃς γ δ ἑξατῶρα τῶν α β
 ε ζ μείζων. καὶ ἔσω τὸ μὲν α β τὸ γ δ ἡμισυ μέρ' ὅ,
 τὸ δὲ γ δ τὸ ε ζ ἐπὶ τριῶν. Ἐπειδ' ὃς, οἷον ἰσὶ τὸ α β
 δύο, ποιῶμεν ἰσὶ τὸ γ δ τεσσάρων. οἷον δὲ τὸ γ δ

τεσσάρων, ποιῶμεν τὸ ε ζ καὶ γ δ πέντε. καὶ οἷον ἄρα τὸ α β δύο, ποιῶμεν ε ζ
 τεσσάρων. συνήκται ἄρα πάλιν ὁ τὸ α β πρὸς ε ζ λόγος, ὅστις τὸ γ δ μίση ὅσον, ὃ τῶν
 δύο πρὸς τὰ τρία. Ομοίως δὲ καὶ ὑπὲρ πλείονων, καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν πλε-
 οντων. καὶ διὸ ὅτι ἰάν ἀπὸ τῶν συγκειμένων λόγων εἰς ὁ ποιοσύν τῶν συνθεθέν-
 των ἀφαιρεθῇ, ἕως τῶν ἀπλῶν ἀφανισθῇ, αἱ λοιπὴν τῶν συνθεθέντων κα-
 ταλειφθήσονται.

quod est 60 min. à q̄ integro tertiū existente ternarij, quaternarius sesq̄tertium ipsius dicit̄. accipio & 30, integri dimidiū, per quæ 3 ad 2 sesquialterz erit. nominat̄ uerò sesquialterz à dimidio, & facio 30 ad integrum, utpote 60 min. & fiunt 1800, secunda min. his diuisis, & fiunt 30 prima min. hæc dimidium sunt integri; quare & binarius ipsius quaternarij dimidiū est.

Ratio ex duab. siue ex plurib. rationib. cōponi dicitur, quando rationū quātitates, hoc est denominationes, multiplicatę, aliquā rationis quātitatē cōstituunt. Habeat igit̄ primū ad secundū, rationē datā, ueluti duplā, aut triplā, siue aliquā aliā, habeat & secundū ad tertiū, rationē, & ipsam datā: dico q̄ primi ad tertiū ratio, ex primi ad secundū, & secūdi ad tertiū rationibus, cōposita sit. Aut, quando primi ad secundū rationis quantitas cum secūdi ad tertium rationis quātitate multiplicata fuerit, quātitatē primū ad tertiū cōstituit. Sit igit̄, et primò quidē, primū maius secundo, secundū

itē maius tertio, esto etiā, q̄d primū quidē ad secundum duplā, secundū x̄ò ad ipsum tertiū triplā rationē habeat. Quoniā em̄ secundū triplū est ipsius tertij, ipsius uerò secūdi duplū ipsum primū: primū igit̄ ipsi⁹ tertij sexcuplū erit. qm̄. n. si triplū alicui⁹ duplicauerimus, ipsius sexcuplū pducitur: hoc enim est ppriē cōpositio. Aut sic, qm̄ primū secūdi duplū est, subdiuidat̄ primū in partes ipsi secūdo æquales: uocētur aut̄ hæ prior & posterior. Et qm̄ secundū ipsius tertij triplū est, æqualis uerò est prior primi pars ipsi secūdo: & hæc eadē pars, ut ipsum secundū, tertij tripla erit. primū igit̄ ipsius secūdi est sexcuplū, q̄ igit̄ tur primi ad tertiū ratio (cōiuncta p̄ secundū, mediū terminū) ex primi ad secundū & secūdi ad tertiū ratione, cōposita est:

12 6 2 Similiter x̄ò & si minus fuerit secundū utrisq̄ ipsorū, primo scilicet & tertio, cōtrahētur illa. Esto em̄ iterz primū quidē secūdi triplum,

secundū x̄ò tertij dimidiū. Et qm̄ secundū est tertij dimidiū, secūdi x̄ò triplū est ipsum primū: primū igit̄ ipsius secūdi sesquialterz erit. qm̄. n. si dimidiū alicuius triplicauerimus, habet̄ ipsum semel & dimidiū. Et qm̄ primū secūdi triplū, secundū x̄ò ipsius tertij dimidiū est: qualiū primū est trium secūdo æqualiū, taliū est & tertiū duorū, quā ppter sesquialterz est primū ipsius tertij. primi igit̄ ad tertiū ratio (ut q̄ per secundū, mediū eius terminum cōiuncta est) ex primi ad secundum et secūdi ad tertium ratione cōposita est. Sed rursus, sit secundū utrisq̄ illorū, primo & tertio, maius,

& sit quidē primū secūdi dimidia pars, secundū x̄ò tertij sesq̄tertium. Quoniā igit̄ quantū est primi dimidiū, tāta est secūdi quarta: quāta x̄ò est secūdi q̄rta pars, tāta est primi cū tertio una quinta: dimidia igit̄ primi, tertia deinde tertij, inter se æqualia erunt. Primi igitur ad tertium, nimirz 2 ad 3, ratio, p̄ secundum, mediū eius terminum, cōiuncta est. Similiter etiā & in plurib. in reliqs

etiā casib. Et manifestum est, q̄ si à cōposita ratiōe una qualiscunq̄ cōpositarū auferat̄, una simplicū sublata, reliq̄ ratiōes cōpositarū cōprehēdant̄.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙ ΧΕΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

EVCLIDIS ELEMENTORVM GEO- metricorum liber sextus.

ΟΡΟΙ.

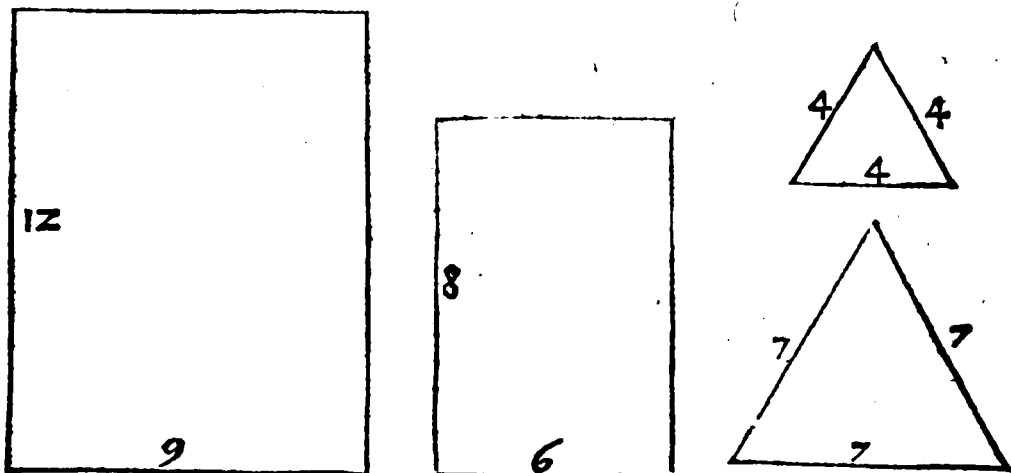
Ομοία σχήματα εὐθύγραμμά εἰσι, ὅσα τὰς τε γωνίας ἴσας ἔχουσιν, καὶ τὰς πρὸς τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον.

Ἀντιπεριθότα δὲ σχήματά εἰσι, ὅταν ἡ ἐκ τούτων σχημάτων ἡ γὰρ μὲν ὀρθή καὶ ἐπὶ μὲν τοῖς λόγοι ὡσιν.

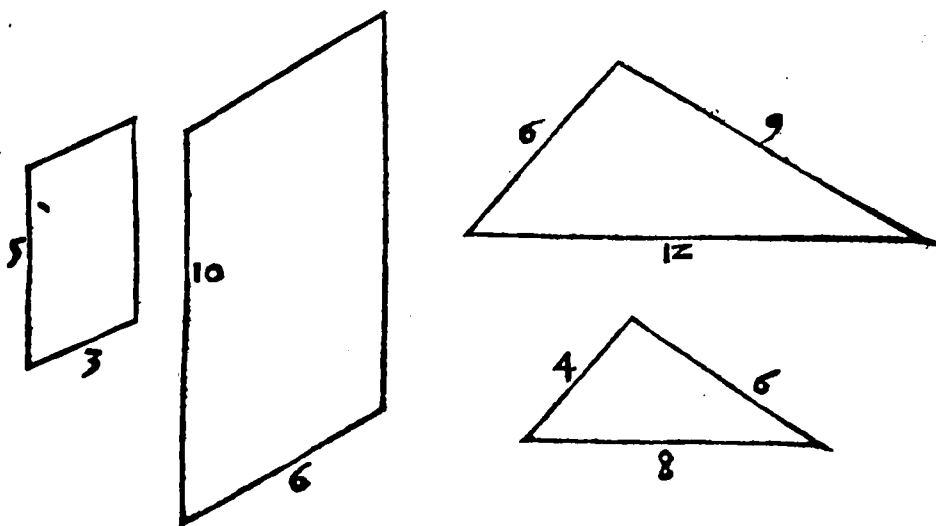
DEFINITIONES.

- 1 Similes figuræ rectilineæ sunt, quæ & angulos æquales habent ad unum, & quæ circa angulos æquales latera, proportionalia.
- 2 Reciprocarum autem figuræ sunt, quando in utraq; figura antecedentes & consequentes termini rationales fuerint.

Exempla definitionis primæ.



Exempla definitionis secundæ.



Ἀκρον

Αὐτὸν καὶ μίσην λόγον διυθεῖα τετμήσθαι λέγεται, ὅτε μὴ ἢ ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μείζον τεμήμα, οὕτως τὸ μείζον πρὸς τὸ ἥλαστον.

3 Secundum extremam & mediam rationem recta linea diuidi dicitur, quando fuerit, sicut tota ad maius segmentum, sic maius ad segmentum minus.

$$\begin{array}{c} \text{Tota} \\ 12 \\ \hline \sqrt{120} \text{ — } 6 \\ \text{maius segmentum} \end{array} \quad \begin{array}{c} 12 \text{ — } \sqrt{120} \\ \text{minus} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{Tota} \\ 8 \\ \hline \sqrt{80} \text{ — } 4 \\ \text{maius} \end{array} \quad \begin{array}{c} 12 \text{ — } \sqrt{80} \\ \text{minus} \end{array}$$

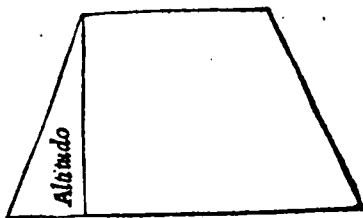
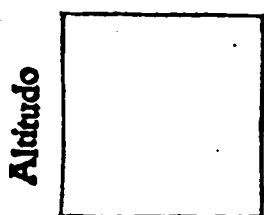
$$12 \text{ ad } \sqrt{120} \text{ — } 6 \text{ ut } \sqrt{120} \text{ — } 6 \text{ ad } 12 \text{ — } \sqrt{120}$$

$$\text{Similiter } 8 \text{ — } \sqrt{80} \text{ — } 4 \quad \sqrt{80} \text{ — } 4 \text{ — } 12 \text{ — } \sqrt{80}$$

Υποδεικνύει παντὸς σχήματος, ἢ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ὑπὸ τῶν βολῶν κείνῃ ἀγομένη.

4 Altitudo uniuscuiusque figuræ est, à uertice ad basim ducta perpendicularis.

Sunt autem huius definitionis exempla hæc.

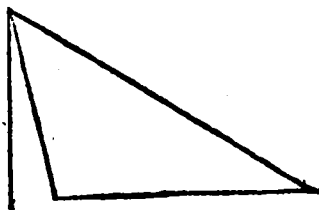
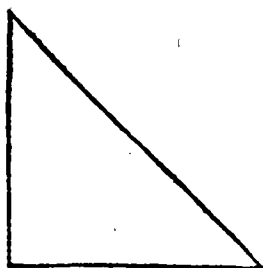
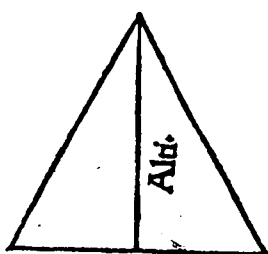


Alia exempla.

Vertex

Vertex

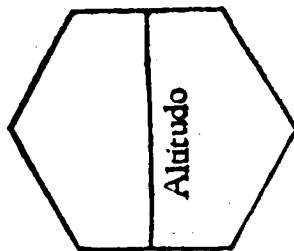
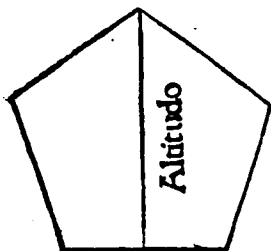
Vertex



Similiter alia.

Vertex

Vertex



Λόγος

Λόγος ἐκ λόγων συγκείμεθα λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πληυότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι, πρῶσί τινα λόγον.

5 Ratio ex rationibus componi dicitur, quando rationum quantitates multiplicatæ inter se, aliquam effecerint rationem.

Ut rationē duplam, cuius quantitas est 2, componunt & constituunt rationum sequialterā & sesquitertia, quantitates, $1\frac{1}{2}$ & $1\frac{1}{3}$, multiplicatæ inter se, ut sequitur,

Componentes		Composita ratio	
$\frac{3}{1\frac{1}{2}}$	$\frac{4}{1\frac{1}{3}}$	12 uel 6	2 1
Sesquialtera	Sesquitertia	Dupla	

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

ΠΡΩΤΗ.

Α.

Τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ τῷ αὐτῷ ὑψίσθι ὄντα· πρὸς ἀλλήλων ἴσιμ ὡς αἱ βάσεις.

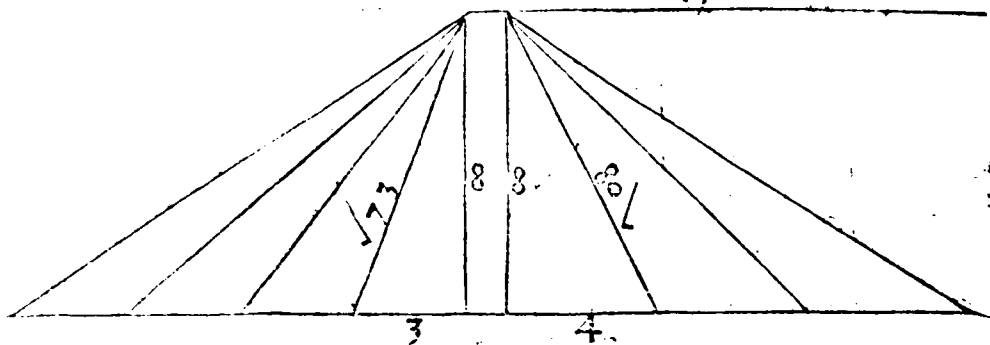
PROPOSITIONES.

PRIMA.

I.

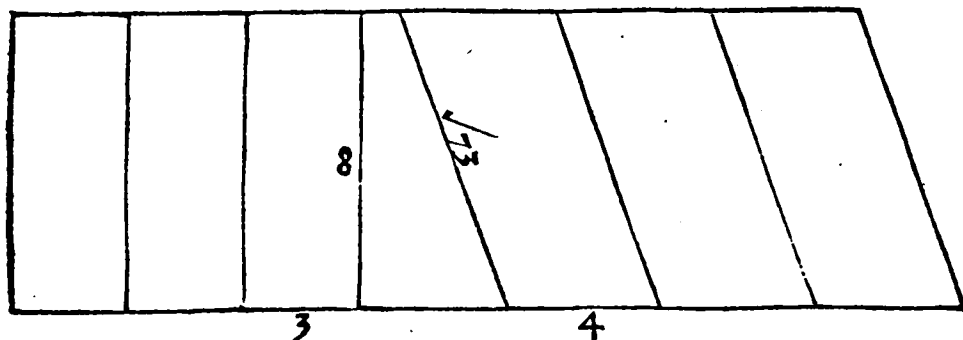
Triangula & parallelogramma, quæ sub eodem sunt uertice: ad se sunt ut bases.

Describantur sub una altitudine aliquot triangula, uel parallelogramma: dico, utra descripta fuerint, illorum eam inter se esse rationem, quæ est basium. Prolongentur in utranq; partem ultra figuram bases, unicuiq; deinde basi in sua continuata portione, aliquot portiones (siue uni basi tot quot alijs, siue pauciores) sibi sumantur æquales, atq; tandem, si quidē triangula proposita fuerint, extremitatibus por-



tionum singulis cū uertice illius trianguli, cuius basi hæc portiones sunt æquales, rectis lineis iunctis: Vel, si parallelogramma fuerint, tot, quot portiones sunt, parallelogrammis, secundum portionum atq; descriptorum parallelogrammorum laterum quantitatem descriptis, figura demonstrationis perfecta erit. Quare nunc ad demonstrationem ipsam. Triangula siue parallelogramma cū, ex hypothesi, sint æqualia, utrinq; etiam æquales bases habeant: erunt tam hæc, ex 36, quàm illa, ex propositione 38 primi, inter se æqualia, Quàm multiplex igitur est utriusque basis basiū aggregatum, tam multiplex etiam erit utriusq; trianguli uel parallelogrammi, id quod ex triāgulis uel parallelogrammis colligitur. Quod si fortē iam basium aggregatum in una, ex structura, æquale fuerit basium aggregato in collatione altera:

tera & ipsa tota triangula, ex 38, seu parallelogramma, ex propositione 36 primi, ex utraq; parte inter se æqualia erunt. Quòd si uerò unum alterum excefferit, uel ab

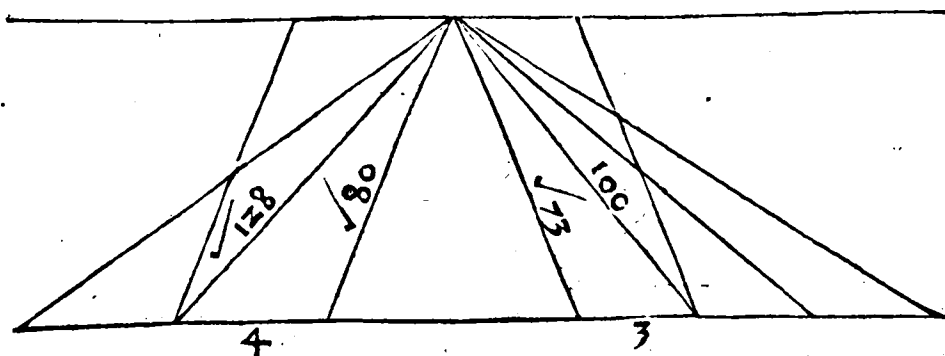


eo defecerit: & triangula seu parallelograma tum eodẽ modo sese habebunt. Quatuor igitur nunc quantitatis. toties quidẽ prout multa uel pauca triangula seu parallelogramma proposita fuerint, ordinatis, quarum prima & secunda sint bases triangulorum seu parallelogrammorum positorum, tertia uerò quantitas & quarta basibus his superposita triangula seu parallelogramma, cum iam primæ & tertiæ, secundæ item & quartæ æquæ sint assignatæ multiplices: infertur tandem, per definitionem 5 quinti, id quod uolebat propositio: Triangula scilicet & parallelogramma, si sub uno & eodẽ uertice fuerint, in suarum basium ratione esse, quod demonstrari oportuit.

8	9	32	36	12	9	72	96
4	3	16	12	4	3	24	32
Triangulorum bases		Ipsa trian- gula		Parallelogram- morum bases		Ipsa parallelo- gramma.	

APPENDIX.

Potest hæc res de triangulis tantũ demonstrari, ut scilicet sit (cũ de uno dicatur) in demonstrando facilior progressus. Quo facto, cum parallelogrammum & triangulum, ubi eandẽ basim habuerint, atq; etiã inter líneas æquedistantes fuerint, per propositionem 41 primi, illud ad hoc duplum sit, cumq; etiã partes eodem modo multiplicium, per propositionem 15 quinti, eandem habeant rationem: & alterum, de parallelogrammis, tandem sic se habere infertur, quod admonuisse oportuit.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β.

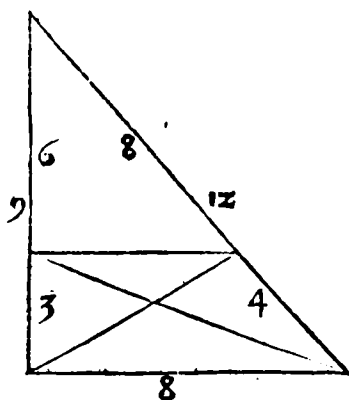
Εὰν τριγῶνς πρὸς μίαν τὴν πλευρῶν ἀχθῇ πρὸς εὐθεῖαν παράλληλον· ἀνάλογον
 γίμει τὰς τὰς τριγῶνς πλευράς. Καὶ ἰὰμ αἱ τὰς τριγῶνς πλευραὶ ἀνάλογον
 τμήνωσιν.

τμηθῶσι· ἢ ὡς τὰς γὰρ ἀσὺν γινώσκουσιν ἐν βῆμα πρὸς τὸν λόγον ἵσαι τὸ πρὸς γωνίας πλὴν ἂν πρὸς ἀλλήλῃ.

PROPOSITIO II.

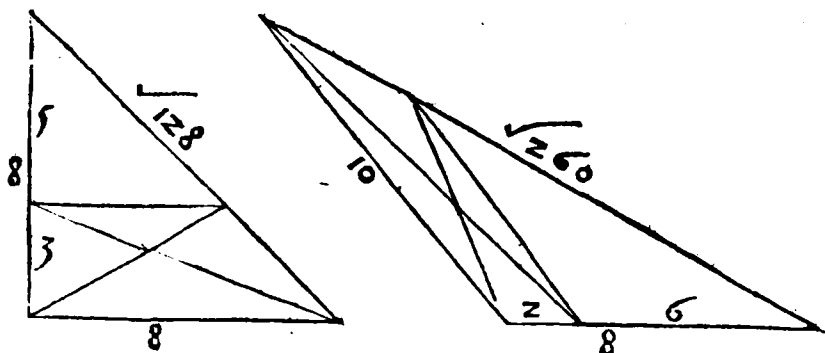
Si ad unum trianguli latus ducta fuerit recta quædam linea parallela: proportionaliter hæc secat trianguli latera. Et si trianguli latera proportionaliter secata fuerint: quæ ad sectiones iungitur recta linea, ad reliquum tertium latus parallela erit.

Describatur triangulum, ducatur in eo etiam, ab uno latere ad reliquorū utrumlibet, recta quædam linea, reliquo tertio trianguli lateri parallela: dico, quantum ad partem priorem, latera illa per ductam parallelam *ἀναλογικῶς*, hoc est proportionaliter, secata esse, sic scilicet, quemadmodum se habet superior unius secati lateris pars ad suam inferiorem, uel contrā, inferior ad superiorem, ita in altero superior uel infērior pars ad reliquam se habeat. Porro si recta in



triangulo ducta linea, duo eius latera proportionaliter secet: hæc ducta, quantum ad partem posteriorem, lateri tertio parallela erit. Quantum igitur ad partem priorem. Cum triangulum per ductam parallelam, ut apparet, in quadrilaterum & triangulū diuisum sit, ductis in quadrilatero duabus diametris: erunt quæ sic fiunt triangula, propterea quòd unam & eandē lineam, ductam scilicet perpendicularē, pro basi habeant, in eisdem item parallelis sint, ex propositione 37 primi, inter se æqualia: eorum igitur, ad reliquum ultra quadrilaterum triangulum, per priorem partem pro-

positionis 7 quinti, una & eadem ratio. Cumq; etiam horum duorum æqualium triangulorum utrumq;, cum tertio reliquo æquealtum sit, atq; sic, ex præmissa prima bis usurpata, eam, quā bases, inter se habeant rationē, cum quæ eidē sint eadem rationes, ex propositione 11 quinti, hæc inter se etiā eadem sint, hæc propositione bis usurpata, prior pars tandē manifestabitur. Sequitur posterior. Maneat eadem figuræ dispositio. Et quoniam latera, per ductam in triangulo lineam, *ἀναλογικῶς* ex hypothesi secata sunt, & quoniam etiam triangula, ad has portiones uel laterum



partes constituta, eam quam bases, inter se habent rationem: & triangulorum inter tertium latus & ductam in triangulo lineam comprehensorum, ad tertium reliquū, per propositionem 11 quinti, una & eadem ratio erit: unde sic etiam, per priorem partem nonæ eiusdem quinti, eadem triangula inter se æqualia: atq; tandem, per propositionem 39 primi, inter lineas æquedistantes. Ducta ergo in triangulo hæc recta

recta linea, tertio lateri æquedistans erit. In triangulo igitur si ad unum eius, &cæ, quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ.

Γ.

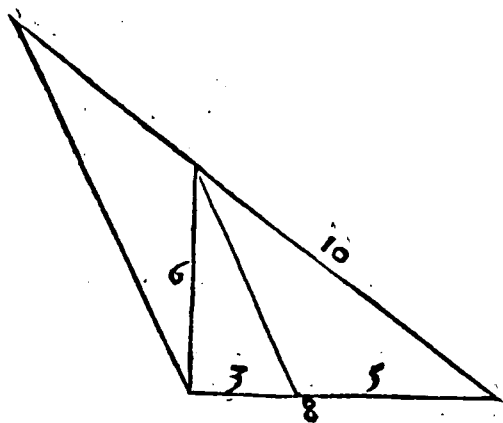
Εάν τριγώνου γωνία δίχα τμηθῇ, ἢ δὲ τέμνηται τῶν γωνιῶν ὀρθὴν τέμνῃ καὶ τῶν βάσεων· τὰ τῇ βάσεως τμήματα ἔσονται λόγον τοῖς λοιποῖς τῇ τριγώνου πλευραῖς. Καὶ ἰὰν τὰ τῇ βάσεως τμήματα ἔσονται λόγον τοῖς λοιποῖς τῇ τριγώνου πλευραῖς· ἢ ἀπὸ τῇ κορυφῆς πρὸς τὴν τομὴν ὡς ὀρθογώνιον ὀρθὴν, δίχα τέμνῃ τὴν τῇ τριγώνου γωνίαν.

PROPOSITIO

III.

Si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta linea secet & ipsam basim: basis segmenta eandem habebunt rationem reliquis ipsius trianguli lateribus. Et si basis segmenta eandem habuerint rationem reliquis ipsius trianguli lateribus: à uertice ad sectionem ducta recta linea, bifariam secat ipsius trianguli angulum.

Describatur triangulum qualitercunq; ducatur etiam ab uno eius angulo ad latus suum subtendens recta linea, quæ, per propositionem 9 primi, ipsum angulum bifariam, latus uerò eius utcunq; secet: dico, quantum ad partem priorem, secti lateris segmenta eam, quam duo reliqua latera, inter se habere rationem. Excitetur ex alterutra secti lateris extremitate linea per propositionē 31 primi, rectæ latus unum secanti, parallela, hæc deinde, latus insuper illud: quod ab altera secti lateris extremitate egreditur, usq; dum concurrant, prolongentur. Et quoniam in has duas parallelas recta quædam linea, unum scilicet trianguli latus incidit: erit angulus, me-



dietas scilicet una diuisi, per primam partem propositionis 29 primi, suo coalterno angulo æqualis, atq; mox deinde & altera, per illam communem noticiã, Quæ uni sunt æqualia, &c. eidẽ coalterno æqualis erit. Sed quia hæc altera diuisi medietas, ut angulus externus, per secundam partem eiusdem 29, suo interno, qui scilicet sub πρῶτος ducta, ac producti lateris portione exteriori continetur, est æqualis: & illi duo anguli, ad πρῶτος ducti positi, per eandem

communem noticiã, inter se æquales erunt: triangulum igitur, per propositionem 6 primi, isosceles. Quòd si quis propositionis 2 huius sententiæ recordabitur, æquali pro æquali linea sumpta: quod prius sumptum erat, tandem inferri poterit. Posterior nunc, quod scilicet, si ab aliquo trianguli angulo recta linea ad suam subtensam demissa fuerit, sic ut huius subtensæ uel basis segmenta eam quam reliqua latera, inter se habeant rationem, angulus ille bifariam diuisus sit, hoc sic patet. Maneat eadem figuræ dispositio. Et quoniam duo reliqua latera, ex hypothesi, illud deinde quod ulterius protractum est latus, & exterior portio, per propositionem 2 huius, eam, quam ipsæ diuisi lateris partes, inter se habent rationem, quia duæ rationes unæ sunt eadem: illæ ex 11 quinti, & inter se eadem erunt. Hæc duæ igitur lineæ, portio scilicet exterior, & alterum trianguli latus, per secundam partem propositionis nonæ quinti, inter se æquales erunt. sicq; triangulum isosceles, cuius anguli ad basim, lineam scilicet πρῶτος ductam, per priorem partem quintæ primi, inter se sunt

M m 2 æquales;

æquales. Quia uerò unus, ex prima parte propositionis 29 primi, uni: alter uerò, ex secunda parte eiusdem, alteri diuisi anguli parti est æqualis: ut ipsi isoscelis ad basim anguli, ex priore parte quintæ primi: sic propter æqualitatem iam, & diuisi anguli partes inter se æquales erunt, quare bifariam diuisus. Si igitur trianguli angulus bifariam secetur, &c. quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ.

Τὸν ἰσὺν γωνίῳ τε γωνίῳ ἀνάλογον εἰσὶν αἱ πλευραὶ αἱ πρὸς τὰς ἴσας γωνίας καὶ ὁ μὲν λόγος αἱ πρὸς τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνεσθαι πλευραί.

PROPOSITIO IIII.

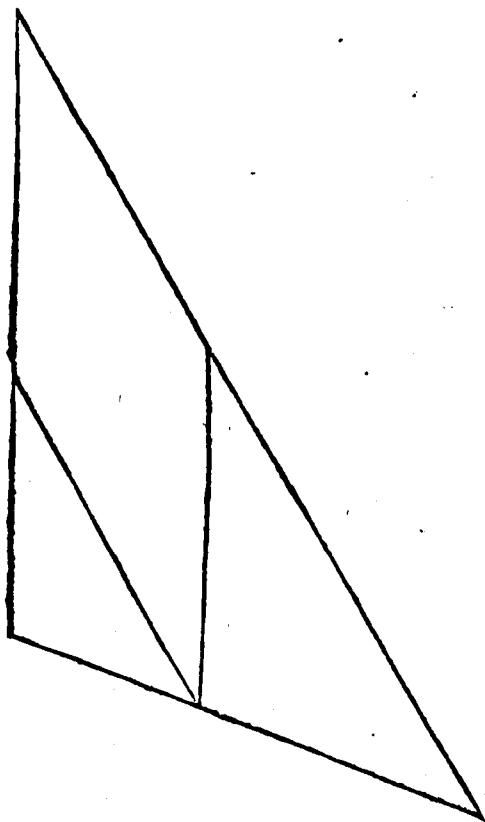
Æquiangulorum triangulorum: proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos: & similis rationis latera, quæ subter æquales illos angulos subtenduntur.

Fiant duo triangula, qualia propositio hæc quarta requirit, hoc modo. describatur primò unum qualitercunq;, ducta deinde recta linea ad eius unam extremitatem per propositionem 23 primi, unus angulus uni, ad alteram deinde, uersus illam & eandem partem, alius alij trianguli angulo equalis constituatur, ac continuatis duab.

illis rectis donec concurrant, triangulū hoc, ei quod prius descriptū est, æquiangulum erit. Dico ergo nunc, cum sint triangula æquiāgula, quod & illorū quæ sunt circa æquales angulos, latera, proportionalia sint: eiusdemq; & similis rationis latera, quæ sub æqualibus angulis subtenduntur. Solent huius propositionis conclusionem alij aliter interpretari. Sunt enim, qui prioris rationis terminos, antecedentē puta & consequentem, in uno, posterioris uerò, in altero triangulo accipiunt, in hæc uerba. In qua ratione sunt quælibet duo latera circa unum angulum in uno: in eadem sunt etiam duo,

circa angulum sumpto æqualem, latera, in triangulo altero. Præterea sunt, qui antecedentes in uno, in altero uerò triangulo consequentes rationum terminos accipiunt, hoc modo. In qua ratione sunt quælibet duo latera, duos in duobus triangulis æquales inter se angulos subtendentia: in eadem sunt etiam singula reliqua ad sua singula. Cuius sanè conclusionis duplex interpretatio, cū in scholis recepta sit, utriusq; etiam demonstrationem adducendam duximus. Prioris igitur talis esto. Coniungentur triangula sic, ut unum unius & alterum latus trianguli alterius sit linea una: utq; anguli etiam, ad hæc latera exteriores, ipsis medijs, uterq; suo remotiori, sint æquales. Et quoniam in duas rectas, quæ sunt extrema horum triangulorum latera, ex duobus lateribus composita recta linea incidit, cum qui sic describuntur anguli, ex structura & propositione 17 primi (æquali tamē pro æquali angulo sumpto) duobus rectis angulis minores sint: in eadem parte hæc duo latera, uel has duas rectas continuatas cōcurrere, ex quadam communi noticia, necesse est. Continuentur ergo ut cōcurrant. Et quoniam id quod sic describitur, ex prima parte propositionis

positionis 28 primi, bis usurpata, parallelogrammū esse cōstat, parallelogrammi insuper latera opposita, ex propositione 34 primi, inter se equalia sunt: per propositionem 2 huius & permutatam rationem utroque bis usurpato, æquali subinde pro æquali linea sumpta, ex æqua ratione, quantum ad priorem conclusionis interpretationem, propositioni satisfactum erit. Vel, per propositionem secundam huius, bis usurpatam, cum duæ rationes uni eadem sint, atq; illæ sic, ex propositione 11 quinti, inter se eadem: & posterior conclusionis interpretatio manifesta erit. Aequiangulorum igitur triangulorum, proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos: & similis rationis latera, quæ subter æquales illos angulos subtenduntur, quod demonstrasse oportuit.



APPENDIX.

Et licet utraq; cōclusionis interpretatio, ut diximus, in scholis recepta sit, tamen cum non conueniat ex unius propositionis hypothesibus duplicem conclusionis colligere interpretationem, quòd ex nostra sententia, prior posteriori interpretationi præferenda sit, lectorem scire uolumus. Habet tamen & posterior suam defensionem, cum sit, ut conijcere licet, ex propositione 14 huius petita.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε.

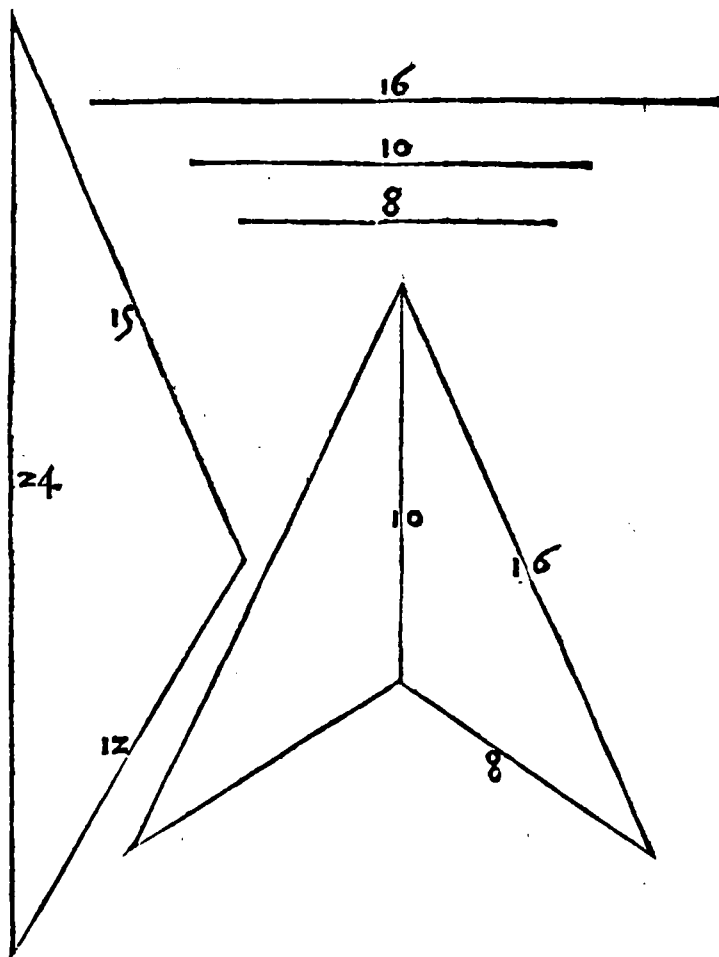
Εὰν δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ· ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα· καὶ ἴσας ἔξῃ τὰς γωνίας, ὑφ' αἷς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ἐποτρύνονται.

PROPOSITIO V.

Si duo triangula latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triangula: & æquales habebunt angulos, sub quibus similis rationis latera subtenduntur.

Describatur primò triangulum qualitercunq; ex tribus deinde rectis lineis alijs quæ eas inter se quas descripti trianguli latera, rationes habent, aliud triangulum, per propositionem 22 primi, constituatur. Erunt autem descripta duo triangula, qualia propositio hæc quinta requirit: quare dico, quòd ea etiam æquiangula sint, angulos item qui sub similis rationis lateribus subtenduntur, æquales habeant. Constituantur ad unum utriusvis trianguli latus, atq; ad eiusdem lateris extremitates, ex illa parte quæ est extra triangulū, per propositionem 23 primi, duo anguli, ad utraq; nimirum extremitatem unus, duobus in altero triangulo angulis æquales. Et quoniam per continuationem linearum, illo triangulo clauso, tertius angulus

huius, tertio alterius triāguli angulo, ex corollario propositionis 31 primi, est æqua-
lis: hæc duo triāgula primò æquiangula, atq; inde, ex propositione 4 huius, late-



rum etiam proportionalium erunt. Duo igitur simul composita triāgula, per pro-
positionem 11 quinti, & nonam eiusdem, utroq; bis sumpto, æquilatera, per octa-
uam deinde & 4 primi, uel octauam solū, ter repetitam, etiam æquiangula erunt.
Quare per communem illam notitiam, Quæ uni sunt æqualia, &c. quantum satis
fuerit ea repetita, infertur tandem conclusio, triāgula scilicet talia proposita, inter
se etiam æquiangula esse: atq; insuper, quod anguli in utroq;, sub quibus similis ra-
tionis latera subtenduntur, æquales sint. Si duo igitur triāgula latera proportio-
nalia habuerint: æquiangula erunt triāgula: & æquales habebūt angulos, sub qui-
bus similis rationis latera subtenduntur. quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

5.

Εὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μὴ γωνία ἴσην ἔχῃ, πότε δὲ τὰς ἱσας γωνίας
τὰς πλοῦς ἀνάλογον· ἴση γωνία ἔσαι τὰ τρίγωνα· καὶ ἴσας εἶναι τὰς γωνίας,
ὅφ' ἂς αἱ ὁμόλογοι πλοῦσαι ὑποτείνουσιν.

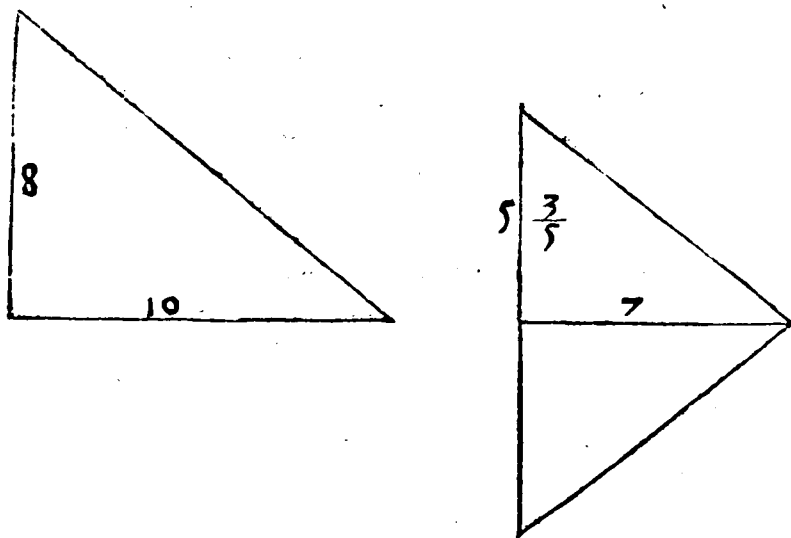
PROPOSITIO

VI.

Si duo triāgula unum angulum uni angulo æqualē, circa item æqua-
les angulos latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triāgu-
la: & æquales habebunt angulos, sub quibus similis rationalis latera
subtenduntur.

Describatur

Describatur primò triangulum, ducatur etiã recta quædam linea, ad cuius extremitatem deinde alteram, per propositionem 23 primí, angulo, qui sit uni ex triangulo æqualis, constituto, fiat ut hæ rectæ eam, quam in triangulo, circa sumptum angulum latera, inter se habeant rationem, & coniunctis extremitatibus tertiã quædam linea, quod sic describitur triangulum, & prius descriptum, huiusmodi qualia hæc propositio requirit, triângula erunt: dico ergo nunc, quòd & æquiangula sint hæc eadem triângula: angulos item, qui sub similis rationis lateribus subtenduntur, æquales habeant. Constituantur ad unum utriusvis triânguli latus, atq; ad eiusdem lateris extremitates, ex illa parte quæ est extra triângulum, per 23 primí, duo anguli, duobus in triângulo altero angulis æquales, Et quoniam per continuatio,



nem linearum illo triângulo clauso, tertius angulus huius, tertio alterius triânguli angulo, ex corollario propositionis 32 primí, est æqualis: hæc duo triângula primò æquiangula, atq; deinde ex propositione 4 huius, laterum etiã proportionalium erunt. Sed quia rationũ quantitatis inter se collatis, inde, atq; etiã ex propositionis hypothese, duæ rationes eidem eadem sunt, cum hæ duæ, ex propositione undecima quinti, etiã inter se eadem sint, unam deinde uel antecedentem uel consequentem (pro ut quidem instituta collatio fuerit) quantitatem habeant: duo illa simul composita triângula, per propositionem 9 quinti, quartam deinde primí, & æquilatera & equiangula erunt. Quia uerò unum ex his uni ex datis, per structuram est æquiangulum, & alteri datorum idem æquiangulum erit: quare sic & ipsa inter se, per communem quandam noticiã: proportionalium igitur laterum, ex propositione 4. Si igitur, &c. quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

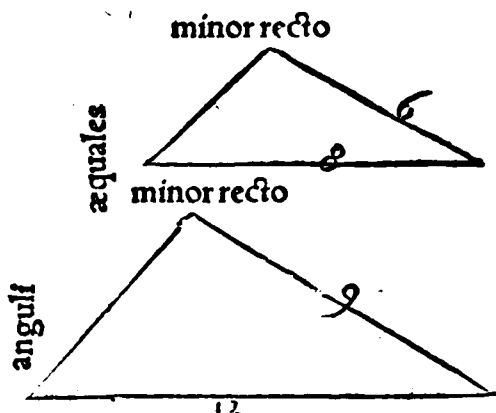
Εὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μὴ γωνία ἴσω ἔχῃ, πρὸς δὲ τὰς ἄλλας γωνίας τὰς πλεονεξίας ἀνάλογον, τὴν δὲ λοιπὴν ἰσότητα ἔχῃ, ἢ ὅτι ἐλάσσονα, ἢ μὴ ἐλάσσονα δευτέρως ἴσῳ γωνία ἴσῃ τὰ τρίγωνα, ἢ ἴσως ἢ τὰς γωνίας πρὸς αὐτὰ λόγῳ ἔσιν αἱ πλεονεξίαι.

PROPOSITIO VII.

Si duo triângula unum angulum uni angulo æqualem, circa autẽ alios angulos latera proportionalia habuerint, reliquorum uerò utrunque simul aut minorem, aut non minorem recto: æquiangula erunt triângula, &c.

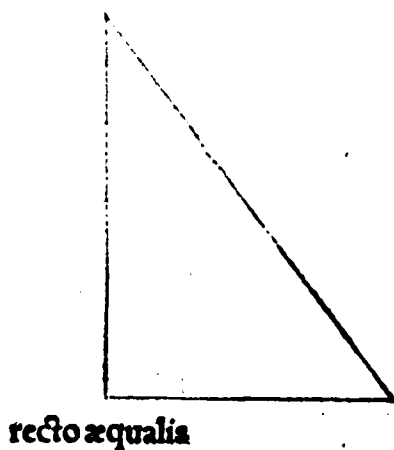
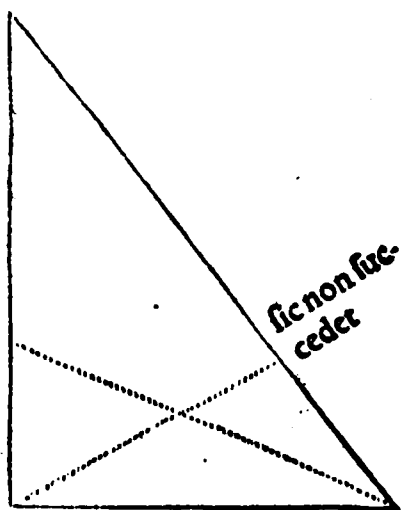
& æquales habebunt angulos, circa quos proportionalia sunt latera.

Describatur triangulum, ducatur etiam recta quædam linea, ad cuius alteram extremitatem angulus, uni ex triangulo æqualis, per 23 primi constituatur. Ex duobus deinde trianguli lateribus, quæ sunt circa alium, quam cui æqualem posuimus angulum, proportionales partes desumptæ, una in alterutra linea, ab angulo iam



formato incipiendo, signetur: altera uerò pars, ex hoc puncto, angulo formato subtendatur: quæ ubi alteram lineam attigerit, quanta ipsa, ut tertium trianguli latus, esse debeat, apparebit. Danda autem est opera in hac alterius proportionalis partis applicatione, ut quemadmodum tertius in triangulo, primò descripto, angulus minor uel non minor recto est, ita & in altero, quod iam formatur, triangulo, tertius angulus existat. Erunt autem iam descripta duo triangula, qualia propositio hæc septima requirit: dico igitur, siue uterq; ex

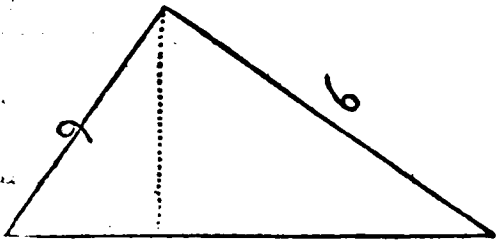
reliquis horum duorum triangulorum angulis, minor recto, æqualis, seu maior recto, fuerit: æquiangularia esse huiusmodi triangula, atq; eos qui sub similis rationis lateribus subtenduntur, angulos æquales habere. Primò igitur, aut enim illi duo, inter proportionalia latera anguli, sunt inter se æquales, aut inæquales. Si æquales fuerint, cum proposita duo triangula duos etiam angulos, ex hypothesi, inter se æquales habeant, tertius item tertio, ex corollario propositionis 32 primi, æqualis sit: huiusmodi triangula iam æquiangularia esse cõcluditur. Quod si idem inter proportionalia latera anguli, inæquales inter se fuerint, tum, siue reliquorum uterq; simul, aut minor, aut non minor recto fuerit, maiori angulo, ut minori æqualis fiat, per re-



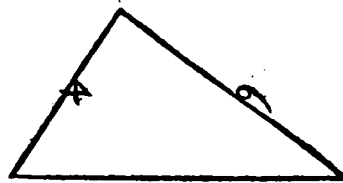
recto æqualis

etiam quandam lineam, quemadmodum docet propositio in primo 23, succurrendum est. Et quoniam duo triangula sunt, partiale unum, & alterum positum, quorum duo anguli unius, duobus alterius trianguli angulis æquales sunt, unus quidem uni, ex hypothesi, alter uerò alteri, ex structura per propositiorem 23 primi, cum & tertius nunc tertio angulo, ex corollario propositionis 32 primi, æqualis sit: triangula hæc, partiale scilicet & alterum positum, æquiangularia, hinc etiam ex propo-

propositione 4 huius, laterum proportionalium erunt. Quoniam autem rationum quantitibus inter se collatis, inde, atq; etiam ex propositionis hypothefi, duæ rationes eidem eadem sunt, cum hæ duæ ex prop. 11 quinti, etiā inter se eadem sint, unam insuper quantitatem communem habeant: quæ reliquæ duæ harū similium rationum quantitates sunt, alterius nimirum partialis trianguli duo latera, ex propositione nona quinti inter se æquales erunt. Triangulum igitur isosceles, habens angulos, qui ad basim sunt, ex priorē parte propositionis quintæ primi, inter se æquales, id quod in genere obseruandum est. Quod si iam ex proposito receptum sit, utrumq; reliquorum non minorem recto esse, cum sic propter æqualitatem, & alter huius isoscelis angulus, non minor, hoc est rectus uel maior recto existat: duo in triangulo anguli, non minores duobus rectis existentes, collocentur. Id autem, cum obstat, æ propositione in primo 17, per quam omnis trianguli duo quilibet anguli, duobus rectis minores sunt, nullo modo esse possit: neq; etiam inæquales, sed æquales inter se inter proportionalia latera anguli erunt. Quare, &c. Sed esto iam ex proposito utrumq; reliquorum minorem recto esse: cum sic alter, huius iso-



recto minor



recto minor

scelis, ad basim positus angulus, recto minor sit, ac per consequens huius isoscelis angulus exterior, per prop. 13 primi, recto maior: & ille qui in triangulo altero, ex corollario allegato, eidem exteriori est æqualis, similiter recto angulo maior erit, cum tamen sit positus recto minor, quod nunc est impossibile, unum & eundem angulum, iam minorem, atq; deinceps angulo recto maiorem esse. Illos igitur sub proportionalibus lateribus comprehensos angulos, non inæquales, sed æquales inter se esse oportet: quare reliquus angulus reliquo, ex corollario, æqualis erit. Aequiangula igitur triangula huiusmodi proposita. Si duo igitur triangula unum angulum uni angulo æqualem, circa autem alios, &c. quod demonstrasse oportuit.

APPENDIX.

Præcepimus autem in structura, maiori angulo, ut minori æqualis fieret, succurrendum esse, & rectè quidem. Quod si contrā aliquis, minorem ad æqualitatem maioris, per eandem propositionem 23 primi, augere uellet, tam facili opera propositionis demonstrationem inde colligere posset.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

Εὰν γὰρ ὁρθογωνία τρίγωνον ἀπὸ τοῦ ὁρθῆς γωνίας πρὸς τὴν βάσιν καθεύτῃ ἀχθῇ· τὰ πρὸς τῇ καθεύτῃ τρίγωνα, ὁμοίω δὲ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

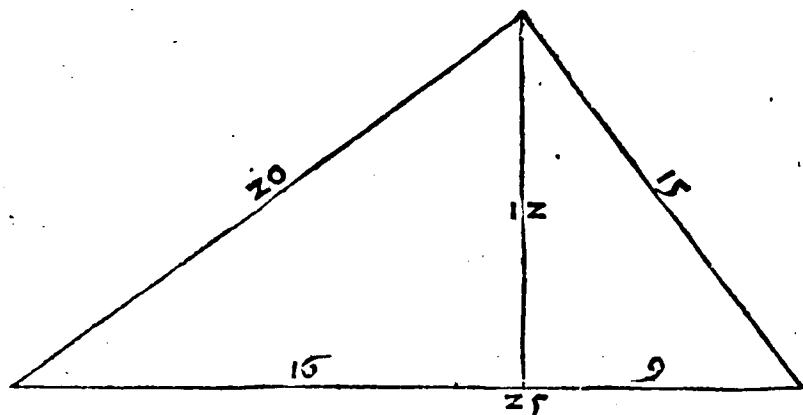
PROPOSITIO VIII.

Si in rectangulo triangulo ab angulo recto in basim perpendicularis ducta fuerit: quæ ad perpendicularē triangula, cum toti triangulo, tum ipsa inter se similia sunt.

Describatur triangulum rectangulum, demittatur etiam ab eius angulo recto, per propositionem 12 primi, ad suam subtenfam lineam perpendicularis: dico quod partialia illa triangula, totali, atq; etiam sibiipsis, similia sint. Cum enim, ex qua-

Nn dant

dam communē noticiā, omnes recti anguli inter se æquales sint, partialium insuper



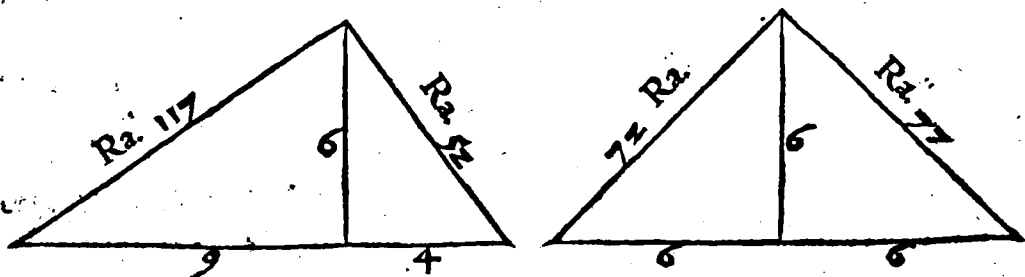
triangulorum utrunq; ut apparet, unum angulum cum totali triangulo communem habeat: hæc tria trianguła, totale & duo partialia, primò ex corollario propositionis 32 primi, æquiangula: statim deinde, ex propositione 4 huius, laterum proportionalium: atq; tandem, ex similium figurarum definitione, etiam similia erunt. Si in rectangulo igitur triangulo, ab angulo recto in basim perpendicularis ducta fuerit: quæ ad perpendicularē trianguła, cū toti triangulo, tum ipsa inter se similia sunt, quod demonstrasse oportuit.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Εκ δὲ τούτου φανερὸν ὅτι, ἰὰ μὲν ὀρθογωνίᾳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ὑπὸ τῶν βάσεων κάθετῶν ἀχθῆ· ἢ ἀχθῆσαι τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μίση ἀνάλογόν ἐστι. Καὶ ἐπὶ τῆς βάσεως καὶ ἐνὸς ὁρθογώνῳ τῶν τμημάτων, ἢ πρὸς τῶν τμημάτων πλοῦρά, μίση ἀνάλογόν ἐστι. ὅπως ἰδεῖ δέξαι.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est, si in rectangulo triangulo ab angulo recto in basim perpendicularis ducta fuerit: hanc ductam inter basis segmenta mediam proportionalē esse. Et insuper, inter ipsam basim, & utrunq; segmentum, latus, quod ad idē segmentum ponitur, mediū proportionale.



Numeri uel quantitates proportionales.

9	6	4	6	6	6
13	√ 117	9	12	√ 72	6
13	√ 52	4	12	√ 72	6

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ.

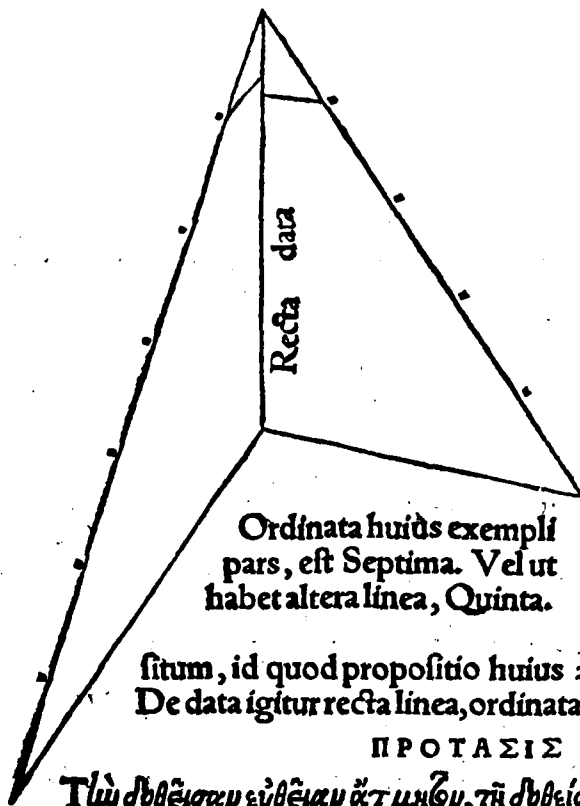
Τῆς δοθείσης ὑπερίκτου, ἢ πρὸς αὐτὴν μὲν ἀφελῆν.

PROPOSITIO

PROPOSITIO IX.

De data recta linea, ordinatam partem abscindere.

Sit data recta linea, atq; propositum, ordinatam ab ea partem, utpote septimam,



situm, id quod propositio huius 2 & composita ratio demonstrabunt. De data igitur recta linea, ordinata pars abscissa est, quod fieri oportuit.

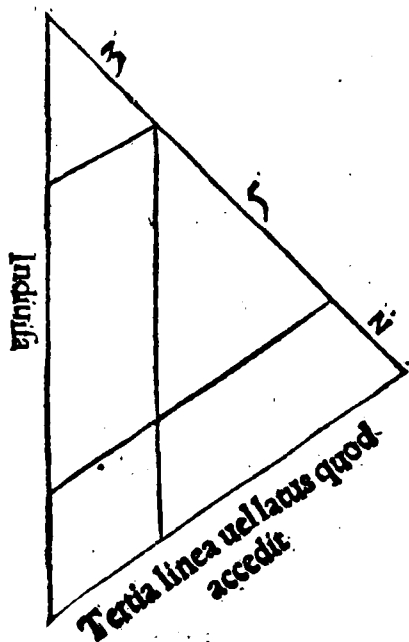
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

Τὴν διδόμεναι εὐθείαν ἢ τμήμα, τῇ διδόμενῃ εὐθείᾳ τε ἢ μὲν ὁμοίως τε μὲν.

PROPOSITIO X.



Datam rectam lineam non sectam, datę rectę lineę sectę similiter secare.



Sint duę rectę lineę datę, una quidem indivisa, altera uerò in partes, quot & qualitercunq; diuisa, atq; propositum, indiuisam in partes secundum rationes partium diuisę diuidere. Applicentur lineę angulariter, accedat etiã tertiã lineã, qua liberę datarum extremitates, ut triangulum fiat, iungantur, à punctis tandem diuisionũ singulis, tertiã lineã parallelę ductę, atq; ad indiuisam lineam usq; continuatę: propositioni satisfactũ erit, atq; demonstratio talis. Ducantur à punctis diuisionum singulis, illo tantũ, quod est tertiã lineã proximũ, sempto, indiuisę lineę parallelę,

Nn 2

atq;

atque hæ ad tertiam usque lineam, ut parallelogramma fiant, continentur. Et quoniam parallelogrammorum locorum latera opposita, per propositionem 34 primi, inter se æqualia sunt: triangula etiam hic appareant, quorum duò latera, per lineam tertio lateri parallelam, diuisa sunt: per propositionem 2 huius, toties, quoties secta diuisa fuerit, uno minus, eam repetendo, æqualibus subinde pro æqualibus lineis sumptis, constabit propositum. Linea enim indiuisa ad rationē diuise diuisa est. quod fieri oportuit,

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ.

Δύο δὲθεισῶν ἐνθειῶν, τρίτῳ ἀνελρογομ πρὸ σδρεῖμ.

PROPOSITIO XI.

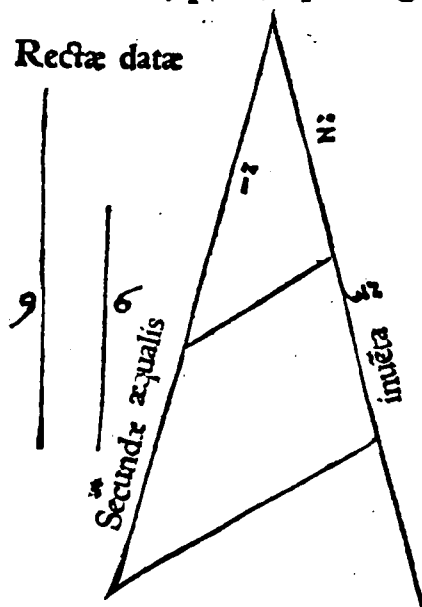
Duabus datis rectis lineis, tertiam proportionalem inuenire.

Sint duæ rectæ datæ, atq; propositum, tertiam proportionalem, ad quam scilicet se habeat secūda, sicut ad hanc secundam linea prima, inuenire. Connectantur rectæ datæ, ut angulum qualemcunq; comprehendant, & claudatur triangulum recta quadam linea alia. Productis deinde uel continuatis rectis datis, ex parte tertij lateris, quæ est linea modò ducta, ultra triangulum, uni earum, in continuata parte lineæ alterius, per

propositionem 3 primi, æqualis signetur, ab huius fine postea, ubi per propositionem

31 primi, tertio trianguli lateri parallela ducta fuerit, cū hæc eadem in altera prolongata per suam intersectionē tertie proportionalis quantitatem ostendat, propositioni satisfactum erit. Quoniam enim ad unum totalis trianguli latus recta parallela ducta est, cum hæc parallela reliqua nominati trianguli duo latera, per propositionem 2 huius, proportionaliter secet: æquali pro æquali linea sumpta, statim concluditur propositum: Duabus scilicet datis rectis lineis, tertiam proportionalem inueniam esse. id quod fieri oportuit.

Rectæ datæ



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ.

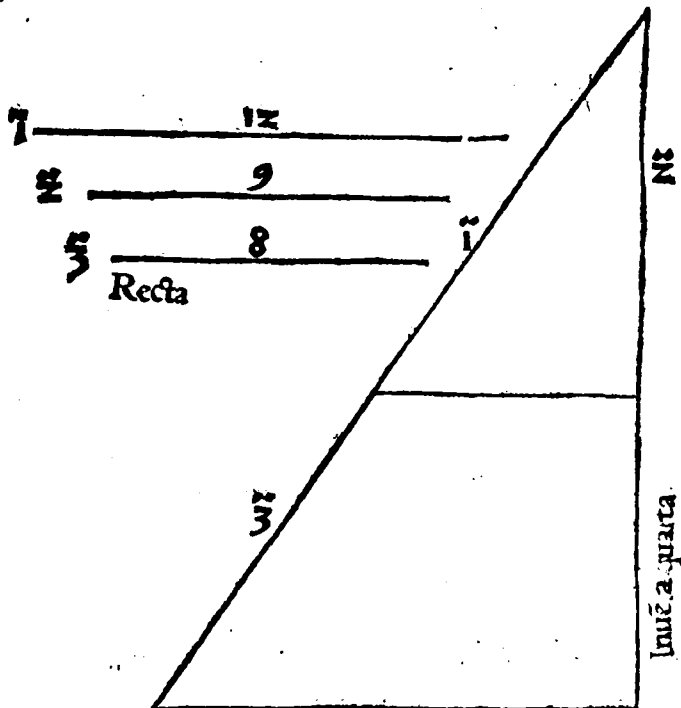
Τετρω δὲθεισῶν ἐνθειῶν, τετάρτῳ ἀνελρογομ πρὸ σδρεῖμ.

PROPOSITIO XII.

Tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenire.

Sint tres rectæ datæ, atq; propositum, quartam proportionalem inuenire. Iungantur prima recta & tertia, ut angulum qualemcunq; faciant, & claudatur triangulum,

gulum. Secunda deinde, uel alia, secunda æqualis, primæ ad amissam iuncta, tertia uerò ultra triangulum continuata, è fine huius secundæ, ad continuatam usq, ter-



tio trianguli lateri, per propositionem 31 primi, parallela ducatur: & erit portio, rectæ tertiæ & huic sectioni interiaccens, linea illa quæ quæritur. Hoc autem patet ex 2. propositione huius, æquali pro æquali linea sumpta. Tribus igitur datis rectis lineis, quarta proportionalis inuenta est. quod fecisse oportuit.

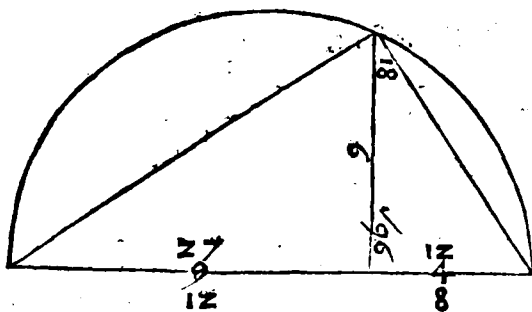
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ.

Δύο δοθέντων εὐθέων, μέσω ἀνάλογον προσευρεῖν.

PROPOSITIO XIII.

Duabus datis rectis lineis, mediam proportionalem inuenire.

Sint duæ rectæ datæ, atq; propositum, mediam ipsarum proportionalem, ad quam scilicet se habeat una ex datis, sicut hæc ipsa media ad alteram, inuenire. Con-



iungatur ad amissam duæ rectæ datæ: ex his deinde cōposita bifariā diuisa, ex puncto diuisionis super ipsam totam, ad interuallum alterutrius medietatis, semicirculus describatur.

Quòd si tandem à puncto coniunctionis datarum, tanquam à puncto in hac recta dato, ad angulos rectos linea ad circumferentiam usque ducta fuerit: quòd hæc ducta, media datarum proportionalis sit, sic demonstra-

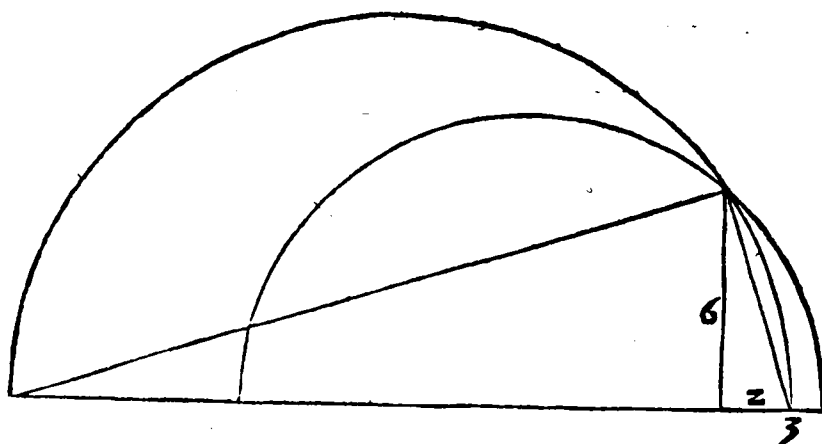
bitur. Iungantur extremitates rectæ, ex duabus cōpositæ, cum intersectione ad rectos ductæ & semicirculæ, duabus rectis lineis. Et quoniā angulus in semicirculo, ex prima parte propositionis 31 tertij, rectus est, cum ab eo ad basim perpendicularis

Nn 3

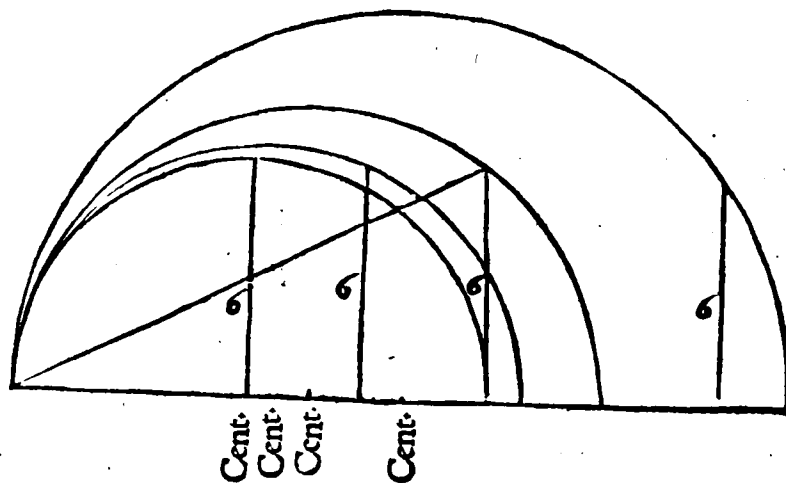
pendicularis

pendicularis recta demissa sit: ex priore parte corollarij propositionis 8 huius, res tandem demonstrata erit, lineam scilicet illam, quam diximus, mediam inter datas proportionalem esse. Duabus igitur datis rectis lineis, media proportionalis inuenta est, quod fieri oportuit.

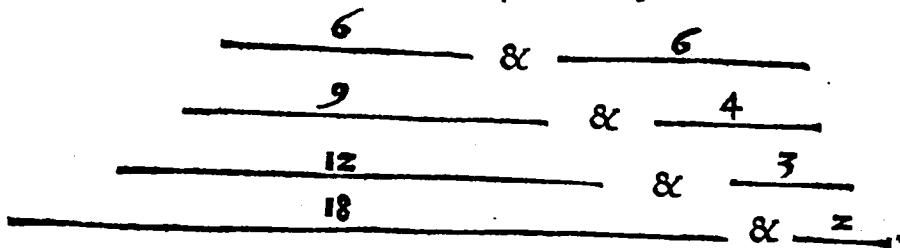
Alia huius tredecimæ propositionis figuratio,
Sunt autem exempla duo,



Similiter alia, quatuor exemplis ornata,



Datæ autem rectæ lineæ sunt,



ΠΡΟΤΑΣΙΣ

ΙΑ.

Τῶν ἴσων τῶν καὶ μίαν μὲν ἴσῳ ἔχοντων γωνίαν παραλληλογράμμων· αὐ-
παι πόνθασιν αἱ πλοθεαί, αἱ ποὺ τὰς ἴσας γωνίας. Καὶ ὡς παραλληλογράμμων,
μία

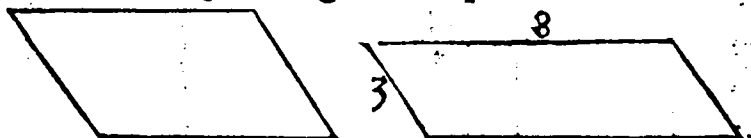
μία μὲν ἴσῳ ἔχοντων γωνία, ἀντιπεπόμεναι αἱ πλευραὶ, αἱ ποδὲ τὰς ἴσας γωνίας· ἢ αὖ ὅτι ἐκείνα.

PROPOSITIO XIII.

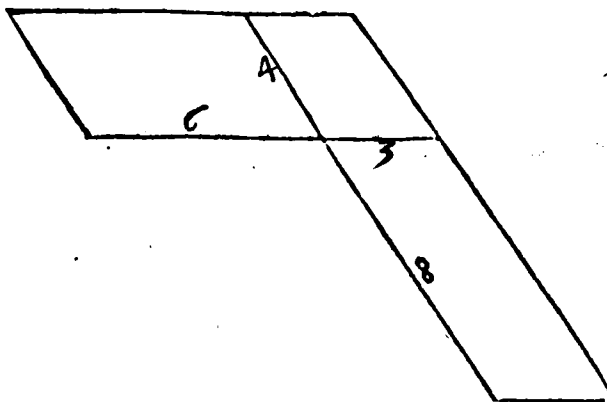
Æqualium, & unum uni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum: reciproca sunt latera, quæ sunt circa æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum unum angulum uni æqualem habentium, reciproca sunt latera, quæ sunt circa æquales angulos: æqualia sunt & illa.

Sint duo parallelogramma æqualia: & esto, quod unus angulus unus, sit uni alterius parallelogrammi angulo equalis: dico, horum parallelogrammorum latera, circa æquales angulos, reciproca esse. Reciproca autem dico ea parallelogramma,

Duo parallelogramma æqualia data. &c.

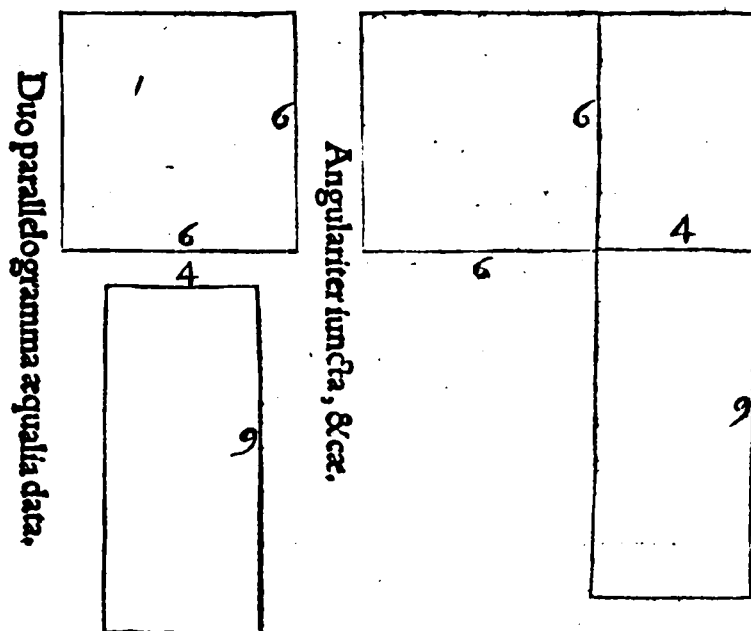


quorum unus longitudo ad latitudinem alterius eam, quam longitudo alterius ad latitudinem prioris, habet rationem. Coniungantur igitur parallelogramma, ut angulum faciant, utq; anguli illorum æquales, sint circa unum punctum; longitudo insuper unus & latitudo parallelogrammi alterius ad amussim unam lineam constituent. Quibus sic coniunctis, & reliqua duo circa æquales angulos latera, una linea erunt, sequeretur enim aliàs, si alterutrum horum cōtinueretur, siue per propositionem 15 primi, & communem illam noticiam, Eidem æqualia, &c. seu per propositionem 13 eiusdem primi bis usurpatam, & communem illam noticiam, Si ab



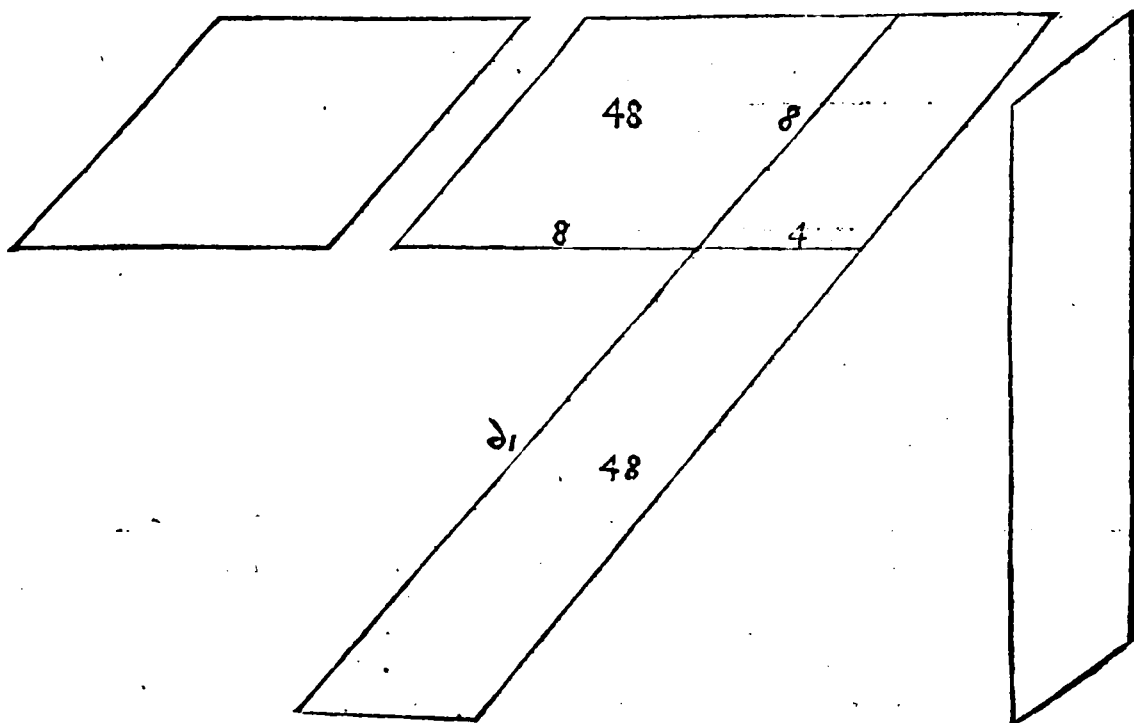
æqualibus æqualia auferantur, &cæ. partialem angulum suo totali esse æqualem, quod fieri non potest. Sunt igitur & reliqua duo horum angulorum latera, ad amussim linea una. Compleatur parallelogrammum tertium, secundum quantitatem laterum anguli utriusvis exterioris: eritq; demonstrationis figura parata. Et quoniam duo, primò descripta, parallelogramma, ex hypothesi, sunt inter se æqualia: erit eorum ad tertium, per priorem partem propositionis 7 quinti, una & eadem ratio. Et rursus, quoniam etiam parallelogrammorum, quæ sub eodem uertice sunt posita, in eadem qua ipsæ bases, per primam huius, sunt ratione, hac prima propositione, deinde 11 quinti, utraq; bis usurpata, prior pars manifestabitur: Quod nunc etiam, quantum ad partem posteriorem, parallelogramma, quæ unum angulum uni æqualē, latera etiā circa illos æquales angulos reciproca habeāt, inter se æqualia sunt,

sint, cum, ex eadem prima huius, bis usurpata, & 11 propositione quinti, parallelogramma posita cum tertio unam & eandem rationem habeant: per priorem par-



tem propositionis 9 quinti, id tandem retinebitur. Aequalium igitur & unum uni aequalem habentium angulum, &c. quod demonstrasse oportuit.

Tertia huius propositionis geometrica figuratio.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ.

Τῶν ἴσων, καὶ μίαν μὲν ἴσῳ ἔχοντων γωνίων τριγώνων· ἀντιπεπνθασιν αἱ πλοῦσαι, αἱ ποδὶ τὰς ἴσας γωνίας. Καὶ ὅν μίαν μὲν ἴσῳ ἔχοντων γωνίαν ἀντιπεπνθασιν αἱ πλοῦσαι, αἱ ποδὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα δὲ τὴν ἐκείνα.

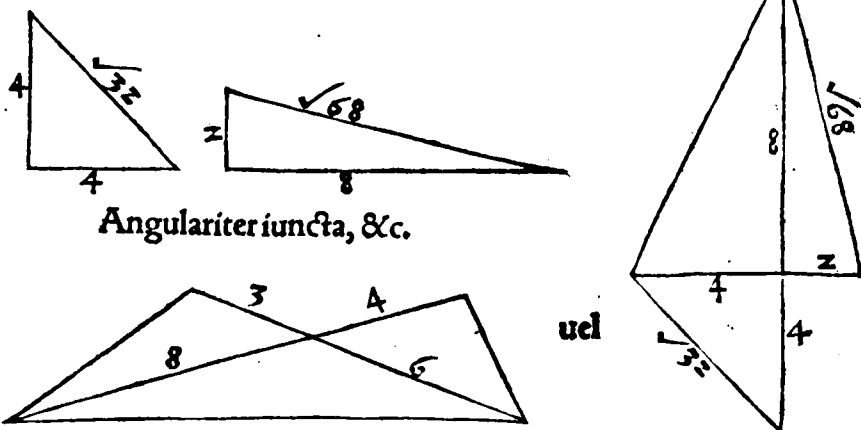
PROPOSITIO

PROPOSITIO XV.

Æqualium, & unum uni æqualem habentium angulum, triangulorum: reciproca sunt latera, quæ sunt circa æquales angulos. Et quorum triangulorum unum angulum uni æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ sunt circa æquales angulos: æqualia sunt & illa.

Sint duo triangula æqualia, & esto quod unus angulus unius sit uni alterius trianguli angulo æqualis: dico, horum triangulorum latera, circa æquales angulos, reciproca esse. Coniungantur triangula, ut angulum faciant, utq; anguli illorum æquales, quemadmodum in præmissa, sint circa unum punctum, antecedens insuper in uno & suum consequens in triangulo altero, ad amussim unam lineam

Triangula æqualia data.



faciant: ad amussim igitur sic, superiori ratione, & reliqua duo latera erunt. Describatur triangulum tertium, per lineam quandam rectam, ab uno angulo unius ad alterum, in eadem parte alterius trianguli angulum, ductam, eritq; demonstrationis figura parata. Et quoniam duo, primò descripta, triangula, ex hypothesi, sunt inter se æqualia: erit eorum ad tertium, per priorem partem propositionis septimæ quinti, una & eadem ratio. Et rursus, quoniam etiam triangulorum quæ sub eodem vertice sunt posita, in eadem qua ipsæ bases, per propositionem primam huius, sunt ratione: per eandem igitur primam & propositionem 11 quinti, utranq; bis usurpatam, prior pars manifestabitur. Quòd nunc etiam, quantum ad partem posteriorem, ex unius illorum anguli æqualitate, & reciprocis circa illos æquales angulos lateribus, æqualitas inferatur, non aliter atq; posterior præcedentis propositionis pars, de parallelogrammis id retinebitur. Æqualium igitur & unum uni æqualem habentium angulum, triangulorum: reciproca sunt latera, quæ sunt circa æquales angulos. Et quorum triangulorum unum angulum uni æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ sunt circa æquales angulos: æqualia sunt & illa. quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ.

15.

Εὰν τεσσαρεσ εὐθεῖαι ἀνάλογον ὡς: ἡ ὑπὸ τῷ ἄκρῳ πρὸς ἐξ ἑκὼν ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῇ ὑπὸ τῷ μέσῳ πρὸς ἐξ ἑκὼν ὀρθογώνιῳ. Καὶ ἐὰν ἡ ὑπὸ τῷ ἄκρῳ πρὸς ἐξ ἑκὼν ὀρθογώνιον, ἴσον ᾖ τῇ ὑπὸ τῷ μέσῳ πρὸς ἐξ ἑκὼν ὀρθογώνιῳ, αἱ τεσσαρεσ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἴσονται.

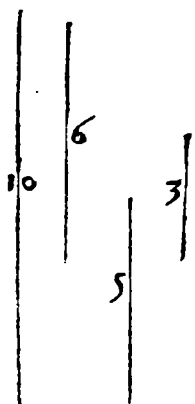
PROPOSITIO XVI.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: quod sub extremis
Oo compre

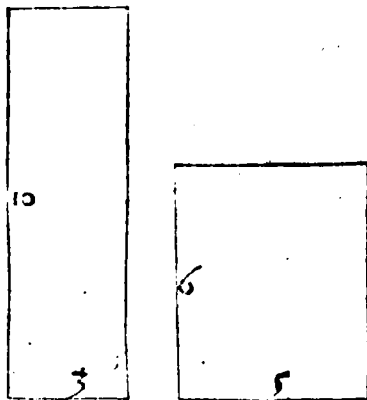
comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod sub medijs comprehenditur rectangulo. Et si sub extremis comprehensum rectangulum, æquale fuerit ei quod sub medijs comprehenditur rectangulo: quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales, prima scilicet ad secundam ut tertia ad quartam: dico rectangulum sub prima & quarta comprehensum, ei quod sub secunda & tertia comprehenditur rectangulo æquale esse. Describātur ex quatuor rectis proportionalibus duo rectangula, utrunq; ex suis lineis. Et quoniam primæ

Rectæ quatuor
proportionales



Rectangula ex suis li-
neis descripta



ad secundam, lateris scilicet unius ad latus rectanguli alterius, ex hypothesi, est ut tertiæ lineæ ad quartam, lateris nimirum huius ad latus illius: hæc duo rectangula, cum circa æquales angulos (omnes enim recti inter se æquales sunt) latera reciproca habeant, ex propositione 14 huius, inter se æqualia erunt: quæ est pars prior. Posterior iam, lineis scilicet quatuor rectis propositis, si rectangula sub prima & quarta,

sub secunda item & tertia, cōprehensa, ex hypothesi inter se æqualia sint: illas tum lineas proportionales esse, sic patet. Cum rectangula, ex hypothesi, inter se æqualia sint, cumq; etiam omnes anguli recti inter se æquales: ipsa rectangula primò æquiangula erunt, atque deinde circa æquales angulos, ex priorē parte propositionis 14 huius, latera reciproca habebunt, quæ est pars posterior. Si quatuor igitur rectæ lineæ proportionales fuerint: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod sub medijs comprehenditur rectangulo. Et si sub extremis comprehensum rectangulum, æquale fuerit ei quod sub medijs comprehenditur rectangulo: quatuor rectæ lineæ proportionales erūt. quod demonstrasse oportuit.

ALIA HUIUS PROPOSITIONIS DEMONSTRATIO.

Quatuor rectis lineis expositis, dico, si hæ rectæ, ex hypothesi, proportionales fuerint, prima scilicet ad secundam ut tertia ad quartam: & quæ sub prima & quarta, sub secunda item & tertia linea comprehenduntur rectangula, inter se æqualia esse. Quod si harum rectarum rectangula, quæ sub prima & quarta, subq; secunda & tertia comprehenduntur, ex hypothesi, inter se æqualia sint: & ipsas rectas proportionales esse oportere. Quantum igitur ad partem priorem, excitentur à duobus, primæ & secundæ, rectarum extremitatibus, utræ hæ fuerint, per propositionem 11 primæ, duæ ad angulos rectos lineæ: de priori deinde excitata, à cōmuni puncto incipiendo, recta quartæ æqualis, ab altera uerò, tertiæ datæ æqualis recta, per propositionē. 3 primæ, abscindatur, cōpleanturq; parallelogrāma. Et quoniam prima ad secundam, ex hypothesi, est ut tertia ad lineam quartam, cum lineis tertiæ & quartæ æquales aliæ in parallelogrammis positæ sint, æqualibus illis pro tertiæ & quarta sumptis: descriptorum parallelogrammorum circa æquales angulos latera reciproce proportionalia erunt: unum igitur parallelogrammum, ex priorē parte propositionis 14 huius, alteri æquale. Quare cum unū sub prima & alia quadam recta

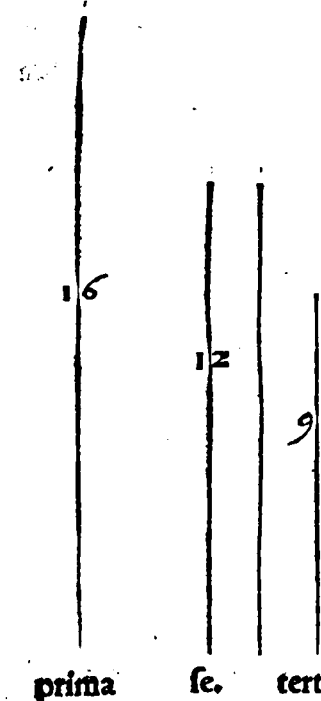
recta, quartæ æquali: alterum uerò sub secunda & alia, tertie æquali, recta linea contineatur, æquali pro æquali linea habita atque usurpata: prior pars nunc manifesta erit. Esto autem iam, quantum ad partem posteriorem, quòd sub prima & quarta comprehensum rectangulum, ei quod sub secunda & tertia cōprehenditur rectangulo, æquale sit: dico, quòd quatuor rectæ propositæ illo ordine proportionales sint. Eisdem namq; constructis, quoniam quod sub prima & quarta comprehenditur rectangulum, ex hypothesi, sub secunda & tertia comprehenso, æquale est: hæc descripta rectangula, cum unum quidem sub prima & alia quadam recta, quartæ æquali, alterum uerò sub secundæ æquali & tertia linea contineatur, æqualitas insuper linearum nullam uarietatem inducat, inter se æqualia erunt, atq; æquiangula etiam, propterea quòd omnes recti anguli inter se sunt æquales. Aequalia uerò & æquiangula parallelogramma, cum ex priore parte propositionis 14 huius, latera circa æquales angulos reciproce proportionalia habeant: iam statim propter æqualitatem linearum, superiori ratione, & posterior huius propositionis pars manifesta erit. Si igitur quatuor rectæ lineæ, &c. quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 12.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾦσι· ἡ ὑπὸ τῆς ἀκροῦς περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ. Καὶ εἰ ἡ ὑπὸ τῆς ἀκροῦς περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ· αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἴσονται.

PROPOSITIO XVII.

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei quod à media quadrato. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale fuerit ei, quod à media quadrato: tres rectæ lineæ proportionales erunt.



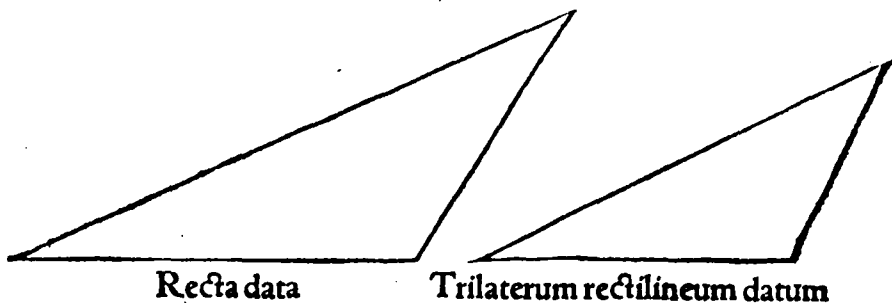
prima se. tertia
runt: quod sub extremis, &c. quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 13.

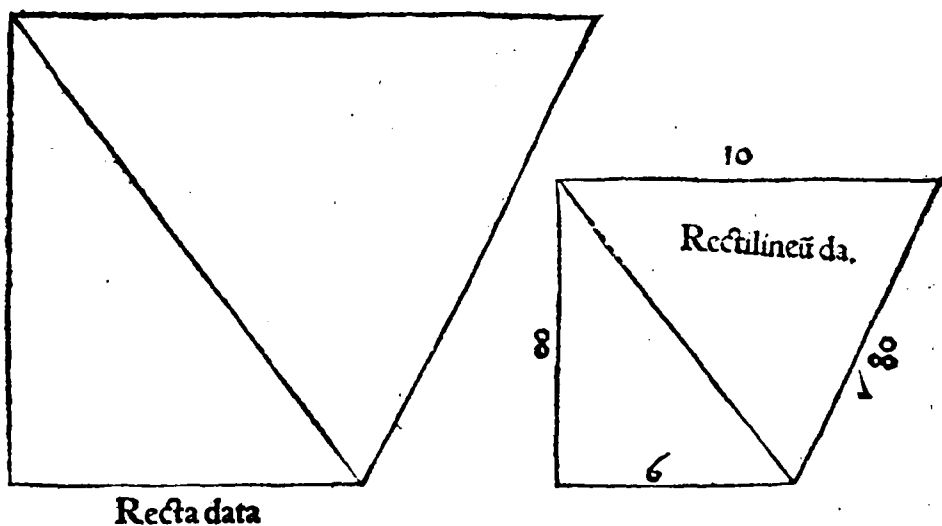
Ἀπὸ τῆς διθείσης εὐθείας τῷ διθεῖντι ἐνθύγραμμο, ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον ἐνθύγραμμοι ἀναγράφαι.

A data recta linea, dato rectilineo, simile similiterq; positum rectilineum describere.

Sit recta linea data, rectilineum item datum, atq; propositum, à recta data ipsi dato rectilineo simile, similiterq; propositum rectilineum describere. Rectilineum illud datum aut erit Trilaterum, quadrilaterum, aut multilaterū. Si trilaterum, hoc est triangulum, fuerit rectilineum datum, ad unam extremitatem datæ, per propo-



sitionem 23 primi, unus angulus uni, ad alteram deinde, uersus illam & eandem partem, per eandem etiam propositionem, alius alij trianguli angulo æqualis constitutatur, & continuatis lineis, donec altera alteri occurrat, cum tertius sic tertio trianguli angulo æqualis sit: hæc duo triangula iam æquiangulara, deinde etiam per propositionem 4 huius, laterum proportionalium erunt. Quare ex definitione rectilinearum similium, à data recta dato rectilineo trilatere, simile trilaterum descriptum est. Quòd si iam unum, minus scilicet, alteri quod maius est, trilatere, uel triangulo applicetur sic, ut unum angulum ambo cōmunem habeant: tum hæc etiam similiter posita erunt. Quare factum est, quod propositio requirebat. Sed esto iam quòd rectilineum datum sit quadrilaterum, uel multilaterum, tunc primò id in sua



triangula soluendum, & cum uno eorum ac recta linea data, ut iam auditum est, pergendum erit, & uidendum deinde, quam in hoc triangulo angulus, qui est uni integro in rectilineo angulo æqualis, subtensam habeat, ut scilicet, ea cognita, ad ipsius extremitates alterius in rectilineo trianguli, quod scilicet primò absoluto coheret, duo anguli æquales collocentur, atq; continuatis lineis donec concurrant, cum tertius sic tertio huius alterius trianguli angulo æqualis sit: triangula hæc, ex structura æquiangulara erunt, deinde etiam, ex 4 huius, laterum proportionalium, atq;

atq; tandem ex definitione, inter se etiam similia. Non aliter cum tertio, ac reliquis rectilinei triangulis singulis agendum erit. Et quoniam rectilineum, quale propositum erat, eo modo tandem describitur, propositioni igitur satisfactum erit, quod sic demonstrari potest. Quoniam enim rectilinei, super recta data descripti, tot triangula sunt, quot ipsius rectilinei dati: ex structura igitur & communi illa noticia, Si æqualibus æqualia addantur, &c. hæc duo rectilinea iam æquiangula erunt. Et quia ex propositione 4 huius, propter proportionalitatem laterum ipsorum triangulorum, euidenter apparet, illa etiam proportionalium laterum esse: per definitionem tandem similium superficierum concluditur propositum.

APPENDIX.

Est hoc loco notandum, postquam primum iam triangulum absolutum, ac cum alijs deinde operari coeptum fuerit, ut partiales anguli singulorum, debito ordine suis partialibus æqualibus, & non temere quilibet cuilibet, coniungantur. Nam hoc animaduerso, non erit laboriosum, neq; etiam molestum, qualicunque rectilineo, regulari uel irregulari, multorum item uel paucorum laterum, dato, simile similiterq; positum à data recta linea rectilineum describere.

APPENDIX II.

Quoniam propositio mentionem facit rectilinei, & rursus quoniam sub rectilineo, ut quidem ex definitione patet, omnes rectarum linearum figurae, siue trilateræ hæc, quadrilateræ uel multilateræ fuerint, comprehendantur: in genere de omnibus rectarum linearum figuris hanc propositionem intelligendam colligimus. Hinc etiam factum, quod per triangula, tanquam rectarum linearum figuram primam, hanc propositionem primò declarauimus.

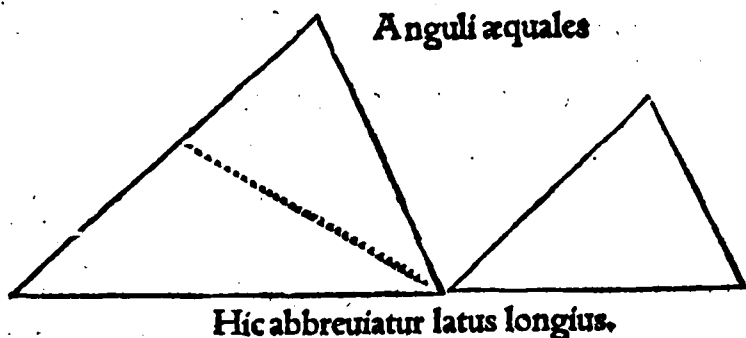
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ.

Τὰ ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἀλλήλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἔσι, τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

PROPOSITIO XIX.

Similia trianguia; inter se in dupla ratione sunt, similis rationis laterum:

Describantur duo trianguia, unum quidem qualitercunq;, alterum uerò per propositionem præcedentem, huic simile: dico igitur, trianguia hæc duplicatam inter se habere rationem, quam habet latus unius ad similis rationis latus trianguli alterius. Lateribus illis, quorum rationem duplicatam inter se ipsa trianguia habere debeant, tanquam duabus rectis datis, per propositionem 11 huius, tertia continue proportionalis quaerenda est, & id quidem uel longiori latere abbreviato, uel

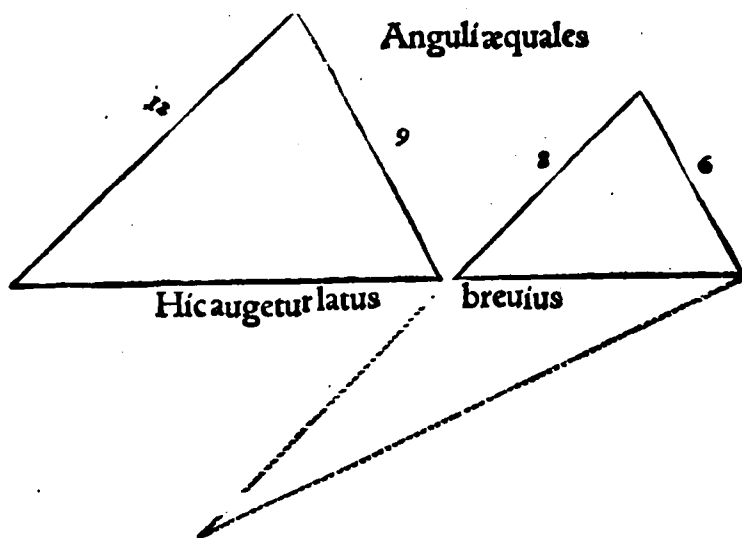


breuiori aucto. atque ex hoc puncto deinde, seu inuenta proportionalis termino; ad angulum quem abbreviatum uel auctum latus subtendit, linea recta ducenda.

Οο 3

Fiunt

Fiunt autem sic duo triangula, quorum alterum, cuius scilicet tertia proportionalis est unum latus, alteri integro adhuc, ex posteriore parte propositionis 15 huius, est æquale: id quod nulli nō, hypothesiū propositionis ac rationis permutatæ, quodq; rationes uni eadē, per propositionem 11 quinti, etiā inter se eadem sint, memon,



occurrere poterit. Rursus, quoniam tres sunt lineę proportionales, duo scilicet propositorum duorum triangulorum latera, & tertia ad ea proportionalis inuēta, cum sic prima ad tertiam, ex quadam definitione in quinto exposita, sit in ratione eiusdem primæ ad lineam secundam duplicata, triangula deinde (quorum bases sunt prima & tertia lineæ) per propositionem primam huius, in suarum sint basium ratione, similium rationum quantitatibus alijs pro alijs sumptis: & hæc ipsa triangula primæ lineæ ad secundam rationem duplicatam habebunt. Quia uerò prima & tertia lineæ sunt expositorum similium triangulorum similis rationis latera, triangula porro ipsa, unum quidem uni ex datis, alterum uerò alteri datorum æqualis: hoc considerato, propositum iam concludi potest. Similium igitur triangulorum ratio, &c. quod demonstrasse oportuit.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Εκ δὲ τούτου φανερὸν, ὅτι καὶ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν· ἴσιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως ἡ ἀπὸ ΓΖ πρὸς τὴν τρίτην τριγώνον, πρὸς ἡ ἀπὸ ΓΖ δὲ δεύτερας, ὁμοίον, καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον.

Επεὶ πρὸς εἰδείχθη, ὡς ἡ γ β πρὸς τῆς β η, ὅπως ἡ α β γ τρίγωνον, πρὸς δὲ α β η τρίγωνον, τέπειτα δὲ ε ζ. ἐπὶ εἰδείχθη.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est, Quando tres rectæ lineæ proportionales fuerint, quòd sit, sicut prima ad tertiam, sic quod à prima fit triangulum, ad id quod à secunda descriptū fuerit simile, similiterq; positū triangulum.

Quoniam ostensum est, sicut prima recta linea, hoc est unum unius trianguli latus, ad tertiam proportionalem inuentam: sic & harum primæ & tertiæ linearum triangula, hoc est (æquali nimirum pro æquali triangulo sumpto) triangulum primæ ad triangulum lineæ secundæ, quod erat demonstrandum.

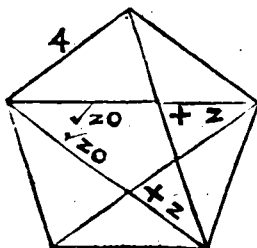
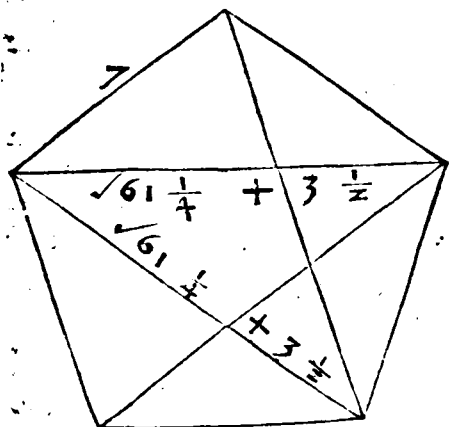
Τὰ ὅμοια πολύγωνα εἰς τὰ ὅμοια τρίγωνα διαίρεται, καὶ ἐς ἴσα ὅπλα διαιρεῖται, καὶ ὁμολογαίς ὄλοις. Καὶ τὰ πολύγωνα διπλασίονα λόγον ἔχουσι, ἢ ὑπὸρ ἢ ὁμόλογος πλοῦρά πρὸς τὴν ὁμόλογον πλοῦράν.

PROPOSITIO XX.

Similia polygona: in similia triacula diuiduntur, & æquali numero, & simili ratione totis. Et polygona duplicatam rationem habent, quam similis rationis ad similis rationis latus.

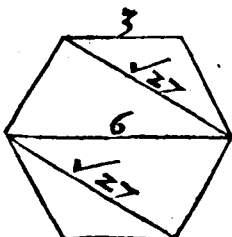
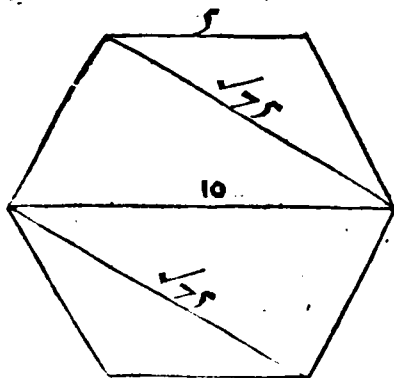
Describantur duo polygona, unum quidem qualitercunque, alterum uerò per propositionem 18, huic simile: dico igitur, quòd hæc polygona in similia, & numero æqualia triacula subdiuidantur, & quòd etiam triacula cum polygonis eandem rationem habeant. Polygonorum insuper ratio ea sit, quæ est lateris unius ad similis rationis latus polygoni alterius duplicata. Diuidantur polygona per lineas rectas in sua triacula. Et quoniam polygona, ex hypothethi, sunt similia, similes

porrò figuræ rectilineæ, ut ex definitione pater, æquales angulos ad unum, & quæ circa æquales angulos sunt latera, proportionalia habent, iam statim aliquot: subtractis uerò subinde æqualibus, partialibus nimirum ab ipsis totis, singula unius singulis triangulis polygoni alterius



per propositionem 6 huius, æquiangula erunt: quare per propositionem 4 huius, & similium figurarum definitionem, etiam similia. Polygona igitur descripta in similia, & æquali numero, triacula subdiuisa sunt, quod est primum. Quantum ad secundum, quòd scilicet triacula illam, quam polygona, inter se habeant rationem. Quoniam enim polygonorum triacula, ut demonstratum est, inter se similia sunt:

erit illorum, per propositionem præcedentem, ratio, quæ est lateris unius ad similis rationis latus trianguli alterius duplicata. Hoc nunc toties, quot in utrovis polygono triacula reperiuntur, usurpato, cum quæ eidem eadem sunt rationes, ipsæ, per propositionem 11 quinti, & inter se eadem sint: per propositionem 12 tan-



dem eiusdem, id quod in hac propositione, de simili ratione triangulorum cum totis polygonis, secundò proponitur, concludi potest. Quantum igitur ad tertium, Quoniam triacula, ut demonstratum est, cum sint similia, in dupla ratione sunt similis rationis laterum: cum, quam triacula, illam eandem & ipsa polygona inter se habeant rationem: & polygona similis rationis laterum duplicatam rationem habebunt.

habebunt. Similia igitur polygona, in similia triangula diuiduntur, & cæ. quod demonstrasse oportuit.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

Ωσαύτως δ' ἡ, καὶ ὑπὸ τῶν ὁμοίων τετραπλῶν δειχθήσεται, ὅτι ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλῶν. Εἰδείχθη δὲ καὶ ὑπὸ τῶν τριγώνων. Ως ἐκβάλλει, τὰ ὁμοία διθύγραμμα σχήματα πρὸς ἀλλήλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλῶν.

Καὶ ἐὰν Γ α β, ζ η τρίτω ἀνάλογον λάβωμεν, πλὴν ξ. ἢ β α πρὸς πλὴν ξ, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἢ πρὸς ἢ α β πρὸς πλὴν ζ. ἔχει δ' καὶ τὸ πλῶν πρὸς τὸ πλῶν (ὁμοιον) ἢ δ' πρὸς πλῶν πρὸς δ' πρὸς πλῶν, διπλασίονα λόγον, ἢ πρὸς ἢ ὁμολόγον πλῶν πρὸς πλὴν ξ, καὶ ὁμοίως. καὶ ὡς τῶν τριγώνων.

COROLLARIUM.

Similiter etiam in similibus quadrilateris demonstrari poterit, quod hæc in dupla ratione sint similis rationis laterum. Id autem & in triangulis demonstratum est. Proinde in uniuersum, Similes rectæ lineæ figuræ inter se in dupla ratione sunt similis rationis laterum.

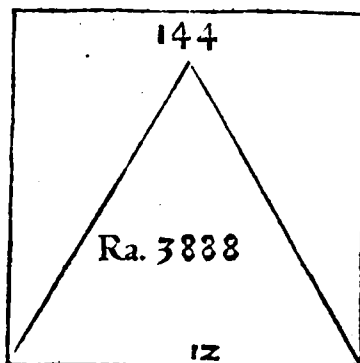
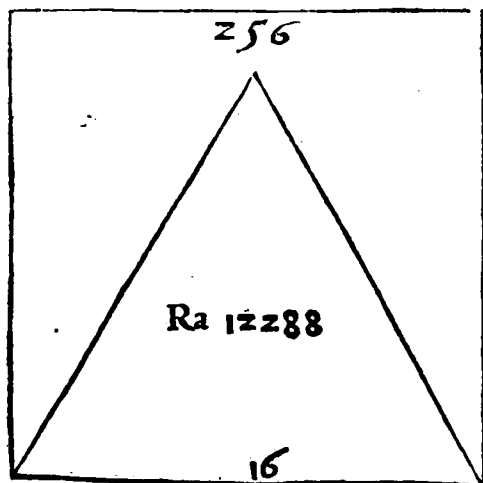
Nam si duarum linearum proportionalis tertia capiatur : ipsa prima ad tertiam duplam, quàm ad secundam, habebit rationem. Habent autem & Polygona similia, quadrilatera item duplam rationem, quam similis rationis latus ad similis rationis latus hoc est, quam prima ad lineam secundam. Demonstratum uerò hoc est & in triangulis, hinc.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

Ως καὶ ἐκβάλλει φανερὸν, ὅτι ἐὰν τρεῖς διθείαι ἀνάλογον ὡσιν· ἔσαι ὡς ἢ πρῶτη πρὸς τρίτην, οὕτως ἢ ἀπὸ τῆς πρώτης εἰς τὴν πρῶτην πρὸς τὴν ἀπὸ τῆς τρίτης εἰς τὴν τρίτην.

COROLLARIUM II.

Proinde etiam in uniuersum manifestum est, Quod si tres rectæ lineæ proportionales fuerint : erit, sicut prima ad tertiam, sic quæ à prima specie ad eam quæ à secunda similis & similiter descripta est. quod demonstrasse oportuit.



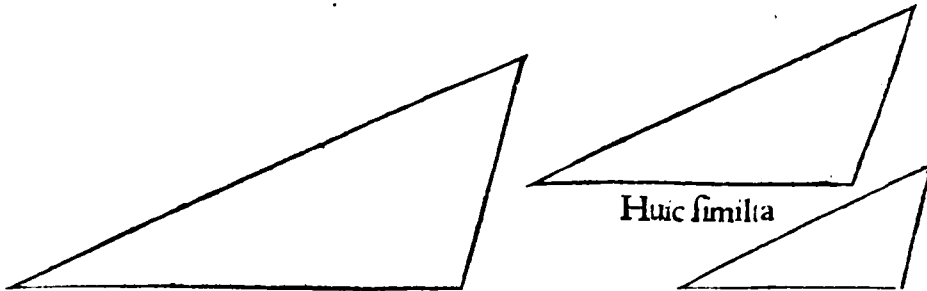
ΠΡΟΤΑΣΙΣ

Τὰ πρὸ αὐτῶ εὐθύγραμμα ὅμοια, καὶ ἀλλήλοις ὁμοία.

PROPOSITIO XXI.

Quæ eidem rectilineo similia, & inter se sunt similia.

Describatur primò rectilineum unum qualitercunq; ad placitum, per propositionem deinde 18 huius, duo uel plura alia descripto similia: dico, illa & inter se similia esse. Quoniam enim singula, per propositionem 18 descripta, rectilinea, ei quod



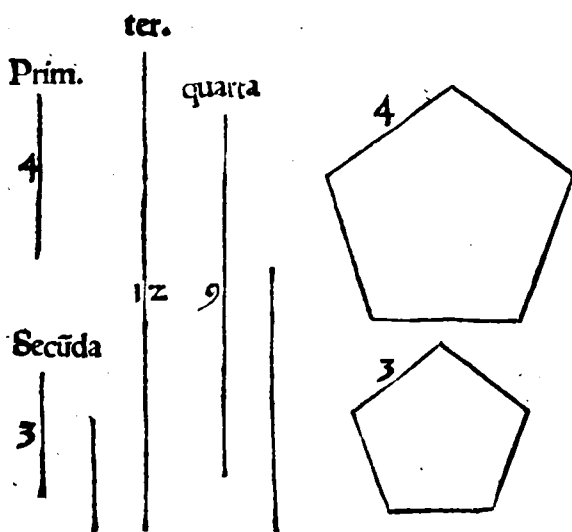
primò descriptum est, similia sunt: cum sic singula etiam cum eodē primo, ex conversione definitionis similium figurarum, æquiangula sint, ac circa æquales angulos latera proportionalia habeant: porro eidem æqualia, illa ex communi quadam noticia, & inter se æqualia: quæ insuper eidem eadem sunt, rationes, illæ ex propositione 11 quinti, inter se eadem sint: per definitionem tandem, & illa secundò descripta rectilinea, inter se similia erunt. Quæ igitur eidem rectilineo, & cæ. quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒ.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὡσιν· καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶ εὐθύγραμμα, ὅμοια τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα, ἀνάλογον ἔσται. Καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶ εὐθύγραμμα, ὅμοια τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα, ἀνάλογον ἢ ἐν αὐτῶ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

PROPOSITIO XXII.

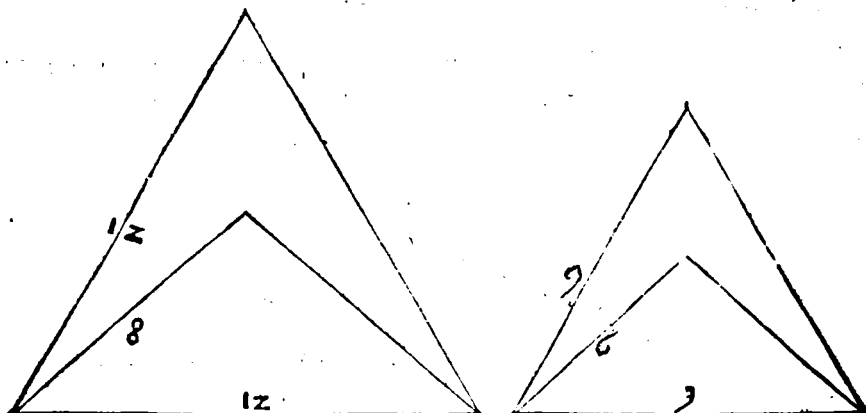
Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: & ab ipsis rectilinea, similia similiterq; descripta, proportionalia erunt. Et si à rectis lineis similia similiterq; descripta rectilinea, proportionalia fuerint: & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.



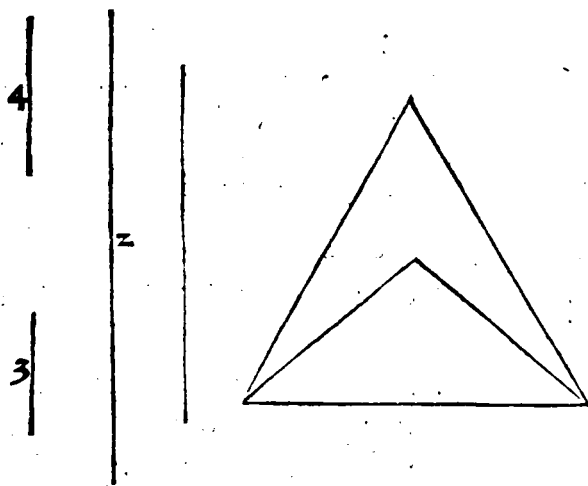
Sint quatuor rectæ lineæ, atque esto quòd hæ ex hypothesi proportionales sint: dico ergo rectilinea, ab ipsis similia, similiterq; descripta, proportionalia esse. Describantur à prima & secunda rectis lineis per 18 præcedentem, similia similiterq; posita rectilinea, hoc idē fiat cum rectis lineis tertia & quarta per eandem, primè deinde et secundæ, tanquam duabus rectis datis;

P p per

per propositionem 11 huius, tertia proportionalis inueniatur, atq; hoc idem contingat lineis tertia & quarta. Et quoniam prima ad secundam est, ex hypothesi, ut tertia ad lineam quartam, secunda uero ad aliam quandam, ex structura, sicut quar



ta ad aliam: ex æqua ratione, & extrema unius in alterius ordinis extremorum ratione erunt: per corollarium igitur secundum propositionis 20 huius, patebit prior pars. Sed esto iam, quod à rectis quatuor datis rectilinea descripta, similia similiterq; posita sint: quod tum ipsæ rectæ proportionales sint, sic retinetur. Inueniatur per 12 huius, primæ, secundæ & tertiæ, tanquam tribus rectis lineis datis, quarta proportionalis: ab hac deinde quarta, per propositionem 18 huius, rectilineum, tertio rectilineo simile similiterq; positum, describatur. Et quoniam prima, secun-



da, tertia, & iam inuēta, quatuor sunt, ex structura, lineæ proportionales, à prima uero & secunda, à tertia item & ipsa inuenta, similia similiterq; posita rectilinea descripta sunt, cum ipsa rectilinea eo ordine, ex priore parte propositionis huius, proportionalia sint: rectilineum primæ ad rectilineum lineæ secundæ, sicut tertiæ ad inuentæ rectilineū erit. Sed quia sic etiā est, ex hypothesi, rectilineū tertiæ, ad rectilineū lineæ quartæ: rectilinea igitur quartæ & iam inuentæ linearum, per propo. 11 quinti, & postero-

rem partem propositionis nonæ eiusdem, inter se æqualia erunt. Et quia per propositionem 21 præcedentem, inter se etiā similia, cum similia similiterq; posita, & inter se æqualia, rectilinea, ab inæqualibus lineis describi non possint: inuenta & quarta posita, lineæ inter se æquales erunt, tertiæ igitur ad eas, ex posteriori parte propositionis nonæ quinti, una & eadem ratio, & illa quidem quæ est primæ ad lineam secundam. Atq; hæc est pars posterior. Si quatuor igitur rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. quod demonstrasse oportuit.

ΛΗΜΜΑ.

Οπ δὲ ἴαυ εὐθύγραμμα ἴσα καὶ ὁμοία ἢ, αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν πλοῦσαι ἴσαι ἀμείλαις εἰσὶ, δείξομεν οὕτως.

ASSUMPTVM.

ASSVMP TV M.

Quòd uerò, si rectilinea æqualia fuerint, & similia, similis rationis latera ipsorum æqualia inter se sunt, sic demonstrabimus.

Sint æqualia & similia rectilinea, ea nimirum, quæ à quarta & inuenta linea descripta sunt, cum hæc, ex definitione similium figurarum, latera habeant circa æquales angulos proportionalia: dico, illorum similis rationis latera inter se æqualia esse, id quod ab impossibili sic demonstrari potest. Estoque inæquales inter se sint, quarta & inuenta (propter illas enim id assumptum est) æqualium ac similium rectilineorum lineæ. Et quoniam æqualia ac similia sunt hæc rectilinea, cum quæ circa æquales angulos habent latera, ex definitione proportionalia sint, sicut quidem prima maior tertia uel minor fuerit, ita ex propositione 14 quinti, secunda linea respectu quartæ erit, duæ igitur rectæ cum sint duabus rectis alijs longiores, utraq; utraq; & rectilineum sub prioribus comprehensum altero rectilineo maius erit, cum tamen ipsa, ex hypothesi, sint posita inter se æqualia. Non sunt igitur inæquales inter se, sed æquales, quarta & inuenta lineæ, quod demonstrasse oportuit.

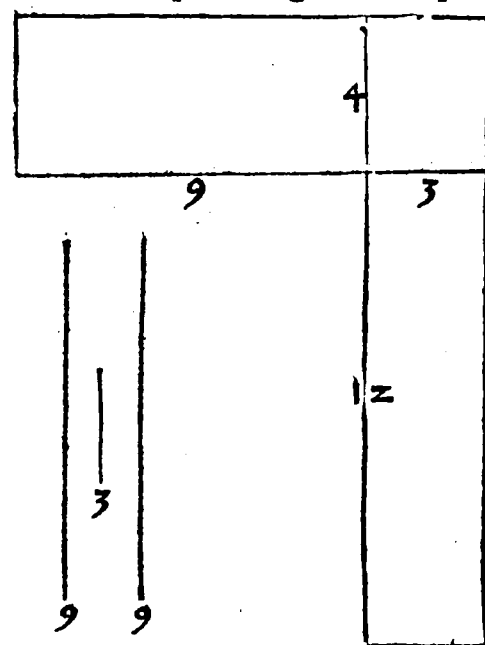
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ.

Τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα, πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχου ἔμμετρα.

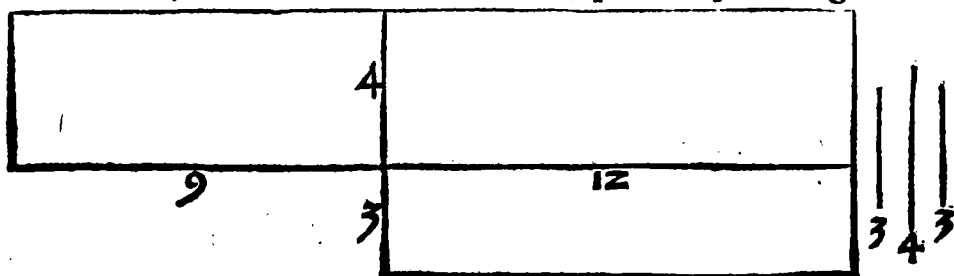
PROPOSITIO XXIII.

Æquiangula parallelogramma, inter se rationem habent eam, quæ ex lateribus componitur.

Sint duo parallelogramma æquiangula: dico illorum inter se rationem, ex laterum suorum, quæ sunt circa æquales angulos, rationibus compositam esse. Coniungantur parallelogramma cum angulis suis, quos habent æquales inter se, angulariter sic, ut unum latus unius, uel parallelogrammi uel anguli, uni lateri, alterius sit in directum una linea: & erunt, ex propositione 14 primi, & reliqua duo circa illos angulos latera in directum iuncta, describatur etiam secundum alterutrum angulum externi, & laterum ipsius quantitatem, parallelogrammum tertiū, quas uerò rationes habent circa æquales angulos latera, in istis dem rationibus continuo ponantur. iam tres rectæ lineæ aliæ, prima quidē ad placitum ducta, secunda uerò & tertia ex propositione 12 huius, primæ adiungantur. Et quoniam quas habent latera parallelogrammorum inter se rationes, illas habet



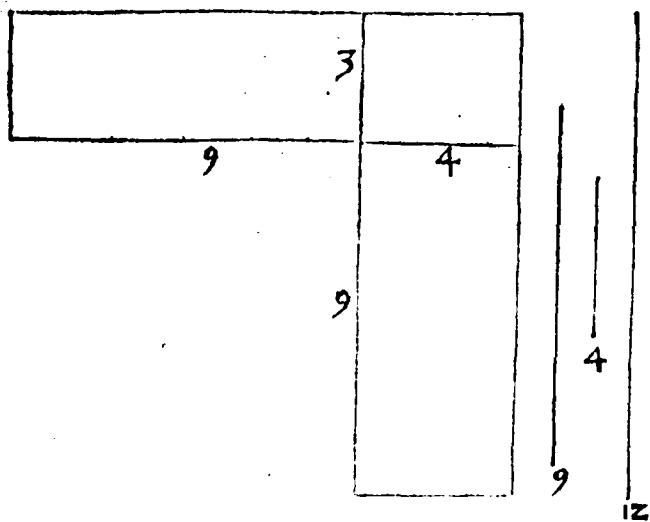
iam ex structura, hæc tres rectæ ductæ, & rursus, quoniam parallelogrammorum,



P p 2

quorum

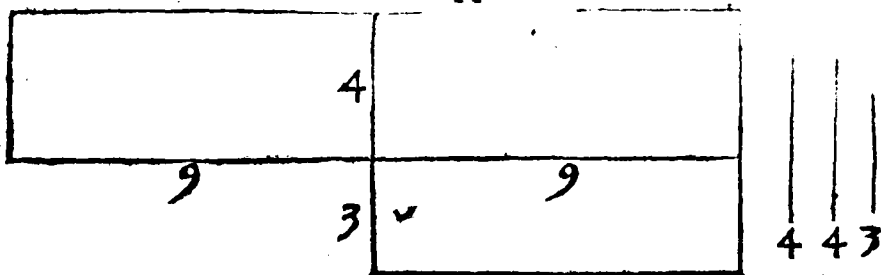
quorum unus & idem uertex fuerit, ex prima propositione huius, in suarum ba-



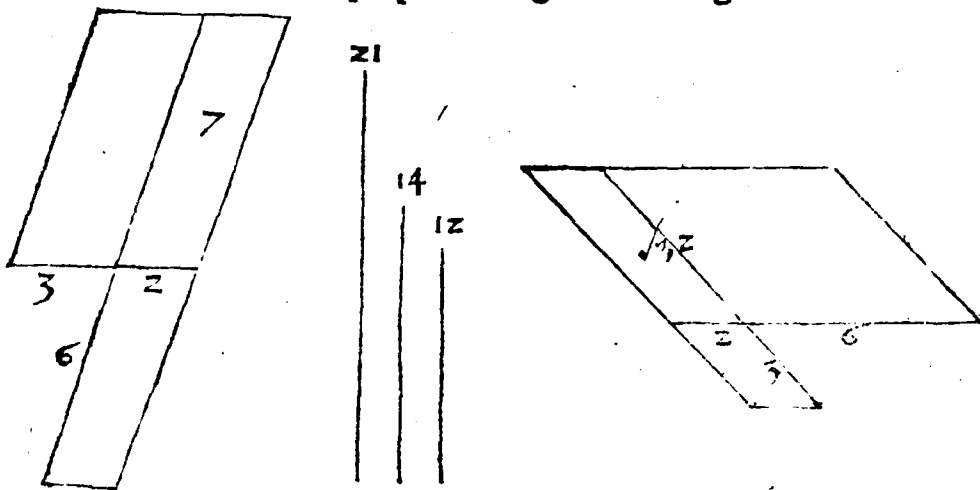
sium sunt ratione, hac ipsa prima, propositione deinde quinti, utraq; bis usurpata, & hæc tria parallelogramma, primum scilicet, tertium & secundum, in ductarum trium linearum ratione erunt, unde ex æqua ratione sicut prima ducta ad tertiam, sic & primum parallelogrammum ad secundum erit. Sed quoniā primæ lineæ ad tertiam ratio, ex primæ ad secundam, & secundæ ad lineam tertiam, hoc est ex datorum parallelogrammorum laterum, rationibus, composita

est: & parallelogrammum igitur prius ad posterius, rationem ex laterum rationibus compositam habebit. Aequiangula igitur parallelogramma, & cæ, quod demonstrasse oportuit.

Possunt huius secundæ figuratiōis parallelogramma etiam sic applicari.



Aliæ duæ huius propositionis geometricæ figuratiōes.



√ 288

√ 32

√ 9 uel 3

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

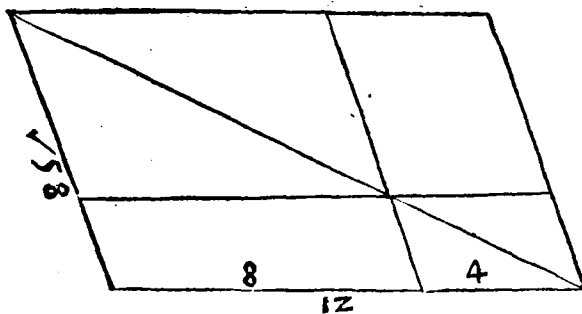
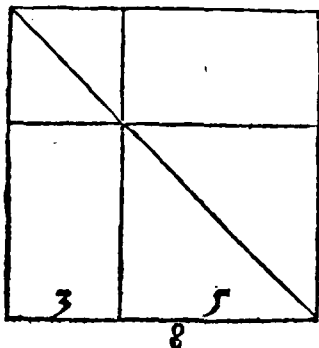
Πάντες παραλληλογράμμοι, τὰ πρὸς τῇ διαμέτρῳ παραλληλόγραμμοι, ὅμοιοι ὅστις ὅλῳ, καὶ ἀλλήλοις.

PROPOSITIO

XXIII.

Omnis parallelogrammi, quæ circa diametrum parallelogramma, tam toti quàm ipsa inter se similia sunt.

Describatur parallelogrammum, cum sua diametro, lineæ deinde rectæ duæ, sese mutuo in diametro secantes, quarum una quidem duobus, altera uerò reliquis duobus parallelogrammi lateribus parallela sit, ducantur, & figura parata erit: dico ergo iam, quòd partialia, per quæ scilicet totius parallelogrammi diameter transit, parallelogramma, & toti, & sibi ipsis inter se, similia sint. Quoniam enim in utroque triangulo, duabus scilicet totius parallelogrammi medietatibus, ducta est linea, tertio in triangulo lateri parallela, cum sic reliqua duo latera in utroque triangulo, ex propositione secunda huius, per ductam parallelam proportionaliter secta sint, hac propositione bis usurpata (sunt enim duo triangula:) & parallelogrammi latera per has duas, sese mutuo in diametro secantes rectas lineas, ex propositione 11



quinti, proportionaliter secta erunt. Quia autem diuisæ quantitates proportionales, hæ compositæ etiã, ex propositione 13 quinti, proportionales sunt: partialium igitur parallelogrammorum utrunque, ex permutata ratione cum ipso totali parallelogrammo laterum proportionalium erunt. Præterea, quoniam lineæ, in diametro parallelogrammi sese mutuo secantes, oppositis suis lineis, ex structura parallelæ sunt: trianguula partialia singula suis totalibus, ex secunda parte propositionis 29 primi, toties eam, quoties opus fuerit, repetendo, æquiangula, atque statim etiã totale parallelogrammum utriusque partiali parallelogrammo æquiangulum erit: proportionalium deinde laterum, ex 4 huius, eorum quæ circa æquales angulos. Et quia proportionalium laterum: simile igitur utrunque ipsi toti per definitionem, quod est notandum. Sed quoniam, quæ eidem rectilineo similia, illa & inter se similia esse, propositio 21 huius testatur, & hæc ipsa partialia parallelogramma, eadem ratione, inter se similia erunt, quod & ipsum notandum. Constat autem sic tota propositio. Omnis igitur parallelogrammi, quæ circa diametrum parallelogramma, tam toti quàm ipsa inter se similia sunt. quod demonstrasse oportuit.

Τὸ διδόντι εὐθυγράμμῳ, ὁμοίον, καὶ ἄλλῳ τῷ διδόντι ἴσον, ὃ αὐτὸ συστήλαται.

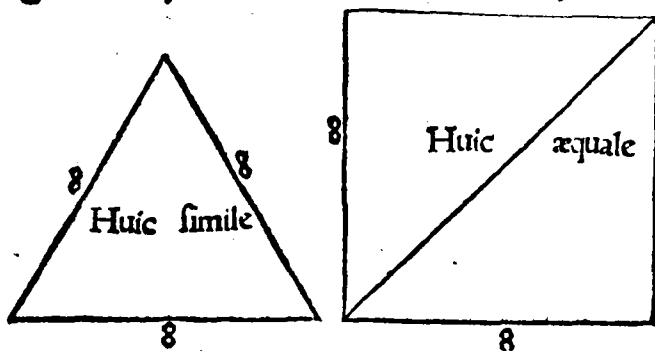
PROPOSITIO

XXV.

Dato rectilineo, simile, & alijs dato æquale, idem constituere.

Duobus rectilineis datis, propositum est, tertium, quod uni quidem ex datis simile, alteri uerò rectilineo æquale sit, describere. Rectilineorum utroque in sua trian-

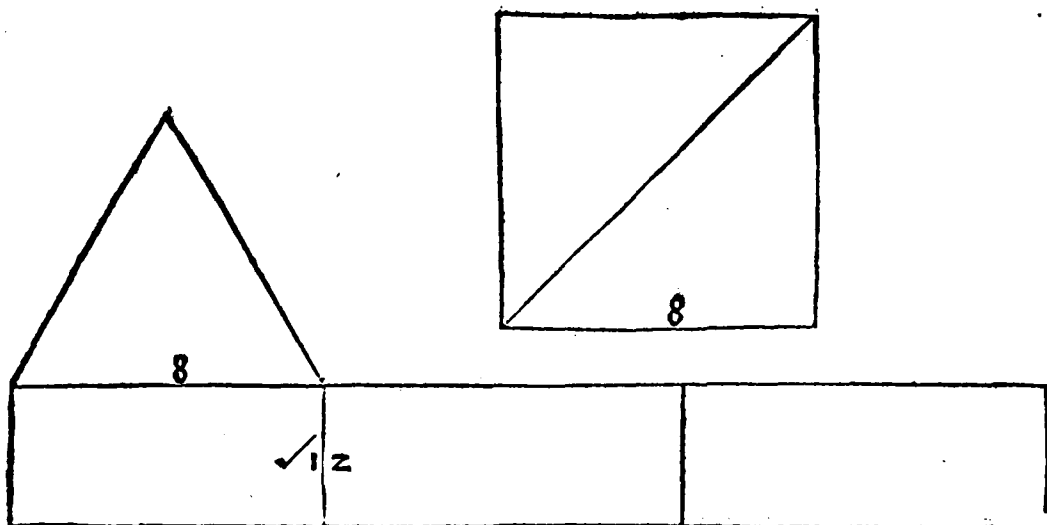
gula soluto, ad unum latus illius rectilinei, cui debet fieri tertium simile, tanquamq



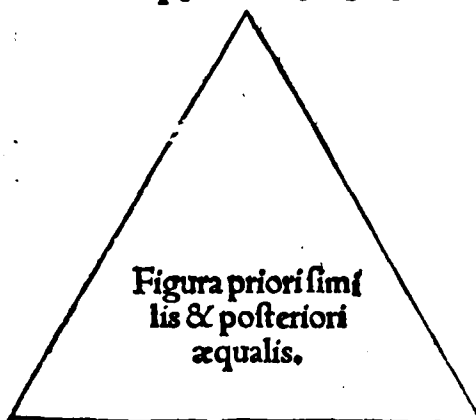
Vel contra, inueniatur, &c.

utrum huius totius compositi rectilinei latus, quod scilicet lateri, in rectilineo sum-

ad rectam lineam datam, per propositionem 44 primi, in dato alterius rectilinei uno angulo, tot parallelogramma, in quot triangula idem prius rectilineum solutum est, unicuiq; scilicet triangulo unum æquale, ordine præ tendantur, et erit totum compositum toti priori rectilineo æquale. Eodem modo ad



pto, minimè est oppositum, per eandem 44 propositionem, tot parallelogramma, in quot triangula alterum rectilineum diuisum est, unicuiq; scilicet unum æquale, in priori rectilineo angulo, prætedantur. Erit aut sic illud huius totius parallelogrammi latus, atq; prioris parallelogrammi descripti, quod scilicet in rectilineo sumptum est, ex prop. 14 primi adamussim una linea. Media igitur proportionali, inter dicta latera, per prop. 13 huius, inuenta, ab ea tandem rectilineum, quod sit priori rectilineo simile, similiterq; positum, per propositionem 18 huius describatur: & propositioni satisfactum erit, quod sic demonstratur. Quo-

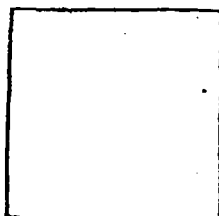


✓ 21845½

rationem igitur habet rectilineum primum, ad id quod ex propositione 18 iam descriptum

niam tres sunt lineæ proportionales, duorum nimirum parallelogrammorum, quæ duobus rectilineis, utrunq; utriq; æqualia sunt, duo latera, & media inter ea linea proportionalis inuenta, cum ab harum prima, atq; etiam secunda, similia, similiterq; posita rectilinea descripta sint: prima ad lineam tertiam erit, ex corollario propositionis uicesimæ secundo, ut quod à prima, ad id quod à secunda similiter descriptum est rectilineum. Et rursus, quoniam parallelogramma, quæ sub eodem uertice sunt posita, ex prima huius, in suarum basium sunt ratione: quam

8		✓ 32
	8	



✓ 768

rallelogrammo æquale erit. quare &
rectilineo alteri, huic parallelogrammo
æquali, idem rectilincum æquale erit. Est
tilineis descriptis, tertium iam, uni quidemi
m descriptum est, quod fecisse oportuit.

autem & priori simile. Duobus igitur rectilineis descriptis, tertium iam, uni quidem simile, alteri uero æquale, idem rectilineum descriptum est, quod fecisse oportuit.

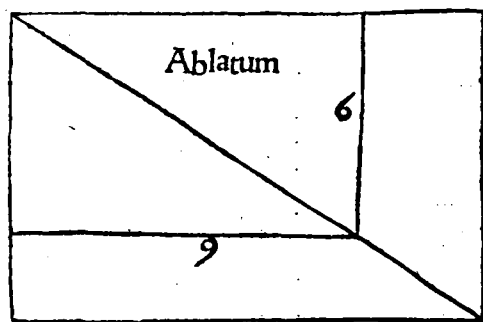
Κς.

Εὰν ἀπὸ πᾶλληλογράμμου πᾶλληλόγραμμοι ἀφαιρεθῇ, ὁμοίον τε τῷ
 ὅλῳ ἔ' ὁμοίως κείμινον, κρινὼν γωνίαι· ἔχον αὐτῶ· ποδὶ τῶν αὐτῶν διαμέ-
 τρου ὅστις τῷ ὅλῳ.

X X V I.

Si à parallelogrammo parallelogrammum auferatur, & simile toti & similiter positum, communem angulum habens ei: circa eandem diametrum est toti.

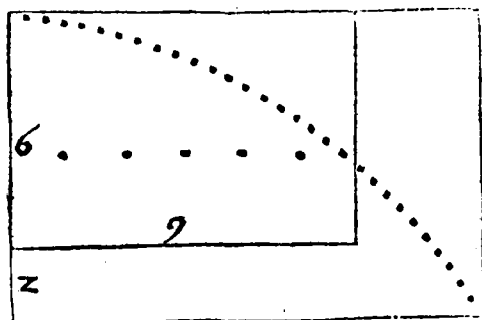
Describatur parallelogrammum, ab eo deinde aliud, sibi simile similiterq; positum, communem etiam cum totali angulum habens, parallelogrammum auferat.



tur: dico, ablatum circa totalis parallelogrammi diametrum consistere. Sumit hæc propositio suam demonstrationem ab absurdo illo, Partem suam toti, uel contrà, Totum suæ parti æqualem esse, hoc modo. Ducatur ablati parallelogrammi diameter, ab angulo, quem cum totali communem habent incipiendo. Quod si hæc, ulterius continuata, diameter etiam pa-

parallelogrammi totalis fuerit: uerum est quod dicit propositio. Si uerò non, ducatur ab eodem communi angulo, si possibile sit, linea recta alia, quæ sit totalis parallelogrammi diameter: puncto deinde intersectionis, huius diametri & lateris parallelogrammi ablata. linea, quæ per ablatum parallelogrammum transeat, & insuper ducatur

bus totalis parallelogrammi lateribus, parallela sit, per propositionem 31 primi, ex-



8

citetur. Et quoniam parallelogrammorum utrunq, ablatum quidem, ex hypothesi, quod uerò iam formatum est ex propositione 24 huius, totali parallelogrammo simile est: utriusq, igitur circa æquales angulos latera, ex definitionis similium figurarum conuersione bis usurpata, atq, propositione 11 quinti inter se proportionalia erunt. Quia autē una & eadem

līnea, illa scilicet quæ utrisq, est latus commune, ad duo reliqua horum parallelogrammorum latera, uel contrā (prout quidem in demonstratōne processum fuerit) hæc duo ad commune illud latus, unam & eandem rationem habent: hæc duo reliqua latera, ex priore uel posteriore parte propositionis nonæ quinti, inter se æqualia erūt, longius breuiori, uel contrā, quod est impossibile. Propter illud absurdum igitur hæc duo parallelogramma, ablatum scilicet & totale, his propositionis hypothesibus, circa eandem diametrum consistere necesse erit. Si à parallelogrammo igitur parallelogrammum auferatur, &c. quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

KZ.

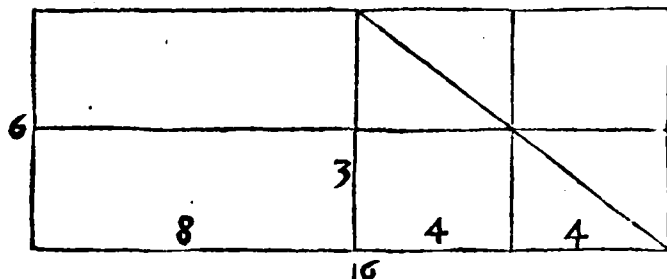
Πάντα τῶν πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθείαν πρὸς ἀλλομνήων πρὸς ἀλλήλων γράμματα, καὶ ἐκλεινόντων εἶδεναι πρὸς ἀλλήλων γράμμασις, ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις, τῶν ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφόμενων· μέγιστον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας πρὸς ἀλλομνήων πρὸς ἀλλήλων γράμματον, ὁμοίον ὅν τῶν ἐκλεινόντων.

PROPOSITIO

XXVII.

Omniū, circa eandem rectam lineam proiectorum parallelogrammorum, eorum quæ specie deficiunt parallelogrammis, similibus, similiterq, positis ei, quod à dimidia linea describitur: si deficientia conferantur, erit quod ad dimidium proiectum est, & simile sumpto existit, omnium maximum.

Sensus propositionis est. Si eidem rectæ lineæ applicentur aliquot parallelogramma, unum quidem ad ipsius rectæ medietatem, alia deinde ad ipsam rectam utcunq, quæ tamen singula, ad completionem rectæ, deficient in parallelogrammis, specie similibus & similiter positis, ei quod ab altera medietate descriptum est: quòd tum medietati applicatū parallelogrammum omnium maximum sit. Recta

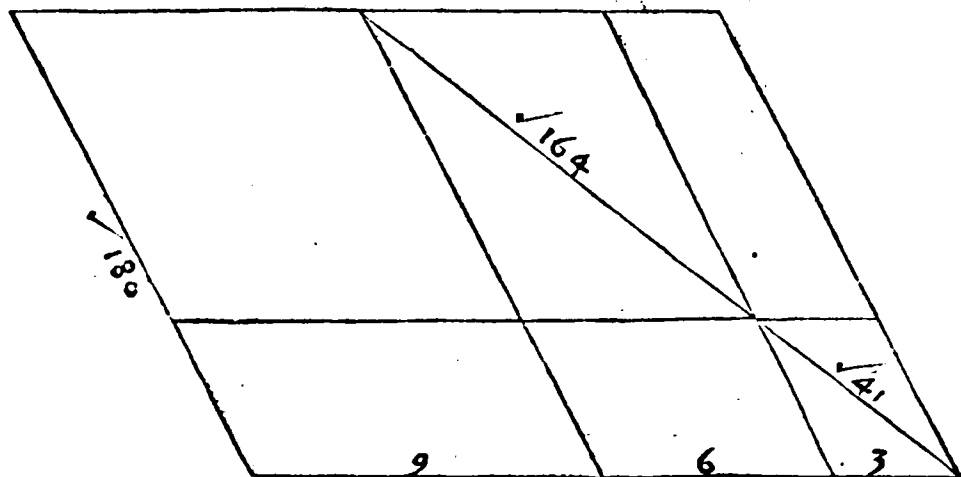


igitur linea data, ea primū bifariam secanda, atq, ab una eius medietate, parallelogrammum utcunq, describendum est. Ab altera deinde rectæ medietate parallelogrammum unum, duo uerò uel plura parallelogramma alia, &

uarijs, ad placitum sumptis, diuisæ lineæ partibus, quæ sint medietate ipsius rectæ uel longiores uel breuiores describantur. esto tamē quòd singule in parallelogrammis ei, quod primò ab una medietate diuisæ descriptum est, similibus, deficient. Di-

co igitur,

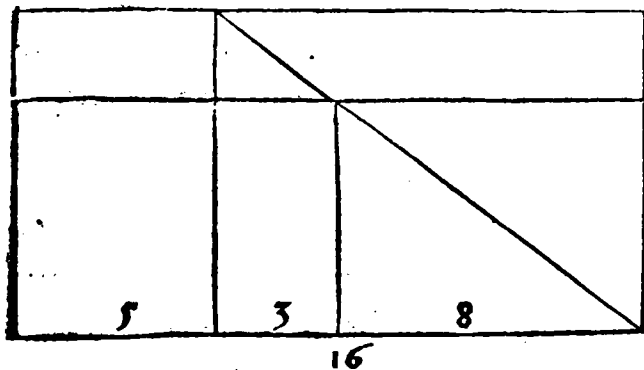
co igitur, quod tum, si deficientia conferantur, id quod à media descriptum est parallelogrammum, omnium maximum sit. Cum enim illa, in quibus ad rectam posita parallelogramma deficient, similia inter se, alterum item alterius sit ablatum, unum deinde angulum communem habeant: circa eandem diametrum hæc, ex præcedenti propositione 26, consistunt. qua igitur ducta, figura item descripta, ut scilicet $\pi\alpha\pi\lambda\iota\rho\omicron\mu\alpha\tau\alpha$ appareant, demonstratio sic succedet. Quoniam supplementa omnis parallelogrammi inter se æqualia sunt, æqualia insuper uel aliquod commune æqualibus additum, æqualia proueniunt. Et rursus, quoniam quæ sub eodem uertice sunt parallelogramma, si æquales bases habuerint, æqualia inter se sunt, eo



ordine procedendo, cum duo uni æqualia sint, æqualium uno pro altero sumpto, unum supplementum tandem cum altero simili, partiali ei, quod ad medietatem rectæ ponitur, parallelogrammo, æquale erit. Illis igitur æqualibus altero supplemento adiecto: ipse gnomon, qui scilicet, propter æqualitatem parallelogrammorum, pars est eius, quod à medietate altera descriptum est, parallelogrammi, alteri parallelogrammo æquale erit: totum igitur eo maius. Omnium igitur circa eandem diametrum, &c. quod demonstrasse oportuit.

A L I T E R.

Sit rursus à rectæ lineæ medietate descriptum parallelogrammum, in medietate altera deficiens, ab ipsa recta uerò parallelogrammum aliud, quod deficiat in parallelogrammo simili ei, in quo à medietate descriptum defecerat. esto autem quod illud alterum sit priori descripto parallelogrammo altius: dico ergo adhuc, id quod à medietate rectæ descriptum est parallelogrammum, maius esse, &c. Quoniam enim illa, in quibus ad rectam lineam posita parallelogramma deficient, ut in superiore



reriori figuratione sese habent, ducta diametro, alia etiam recta linea propter supplementa accedente, demonstratio sic succedet. Parallelogramma, quorum unum est parallelogrammi spacij supplementum, habes pro latere, lineam medietati rectæ æqualem, alterum uerò quod huic continuatum est, cum æquales bases

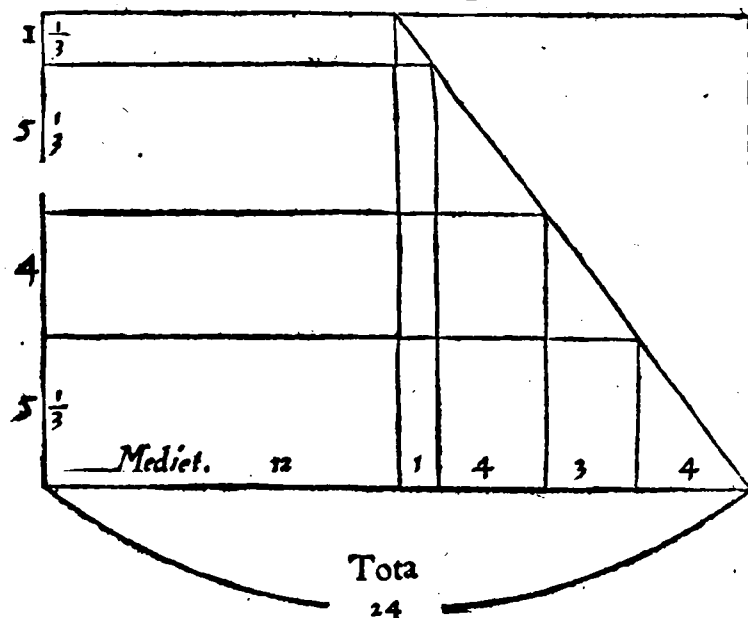
habeant, æquæ etiam alta sint: erunt illa, ex 36 primi, inter se æqualia. Et quia

Qq

etiam

etiam parallelogrammorum supplementa omnis parallelogrammi spaciū, inter se æqualia sunt, cum duo uni æqualia, illa & inter se æqualia esse, ex quadam communi noticia receptum sit, ab horum equalium uno parallelogrammum, per quod diameter transit, ablatum: id quod relinquitur, alteri æqualiū inæquale erit. Quod si tandem his inæqualibus id, quod alterum eorum ad complendum parallelogrammum, à medietate diuisæ descriptum, desiderat, ex æquo adiectum fuerit, cum quæ sic proueniant, ex communi quadā noticia inter se inæqualia sint, maius autem eorum, id quod à medietate descriptum est, parallelogrammum, minus uerò alterum à recta data, &c. descriptum, concluditur propositum. Omnium igitur circa eandem rectam lineam proiectorum parallelogrammorum, eorum quæ specie deficiunt, &c. quod demonstrasse oportuit.

Figura huius propositionis geometrica alia.



Habet hæc figura quatuor rectilinea, unum quidem ad medietatem ductæ projectum, tria deinde alia, ut oportuit, ad aliquam datæ partem. Et quia singula ad totius datæ rectæ completionē in aliquo rectilineo deficiunt toti simili: dico igitur, quod ad medietatē comparatum est rectilineum, unoquoque ex reliquis maius esse. Id quod præter geometricam rationem uel in numeris patet, atque ob id etiā hæc figura posita est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΗ.

Παρά τινι διθείσῃ ἐνθείᾳ τῷ διθύνῃ ἐνθύγραμμῳ, ἴσον πᾶσιν ἀλλήλοισιν ὑποβασίταις, ἢ ὑπερβαίειν, ἢ ὑποβασίταις, ὁμοίῳ ὄντι τῷ διθύνῃ.

Δεῖ δὲ τὸ διθύνον ἐνθύγραμμον, ὡς δεῖ ἴσον ὑποβασίταις, μὴ μείζον εἶναι τὰ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ὑποβασίταις ὁμοίῳ ὄντων τῶν ὑπερβάτων, τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας, καὶ ὡς δεῖ ὁμοίον ὑπερβαίνειν.

PROPOSITIO XXVIII.

Ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum comparare deficiens specie parallelogrammo; quod simile existat rectilineo dato.

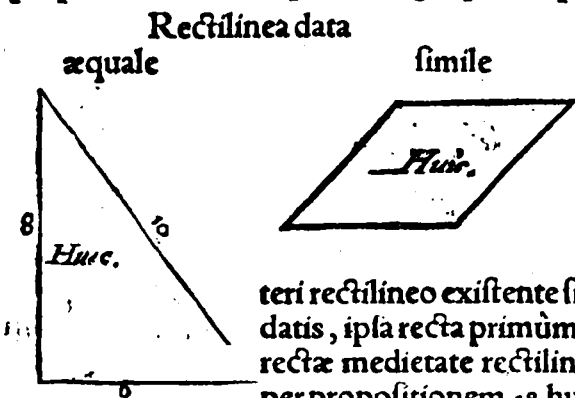
CAVTIO.

Oportet autem datum rectilineum, cui æquale comparandum est,

non

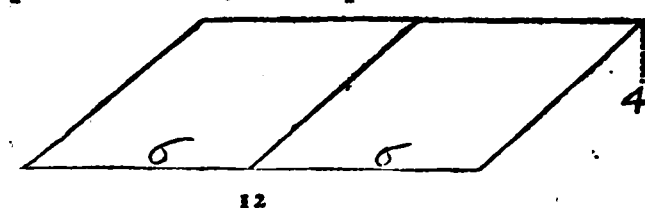
non maius esse eo, quod ad dimidiam comparatur simili^{bus} uidelicet existentibus, deficientibus specie, inter se, eo nimirum, quod ad dimidiam comparatur, ei quod simile specie deficit, existente simili.

Quoniam enim, ut habet propositio præcedens 27, si quæ parallelogramma ad rectam quandam lineam comparata fuerint, quæ singula ad completionem rectæ lineæ deficient specie parallelogrammis, similibus similiterq^{ue} positis ei, quod à dimidiâ describitur, cum quod ad medietatem rectæ comparatur, ex propositione præcedenti 27 omnium maximum sit: hinc ergo factum est, quod huic 28 propositioni hæc cautio tanquam obseruatu digna adiecta sit. Nunc igitur quantum ad propositionem. Requirit hæc propositio primò rectam lineam, deinde uerò duo



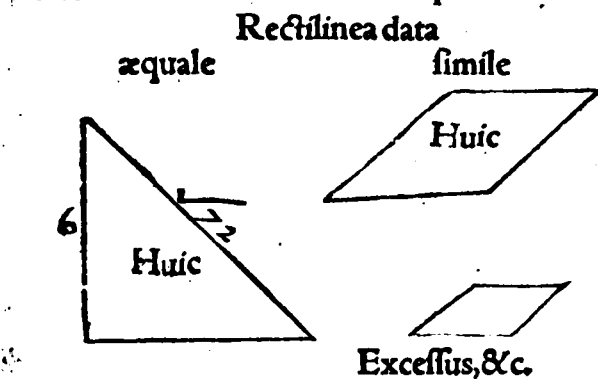
rectilinea: proponit autem, quomodo ad datam rectam comparandum sit parallelogrammum, uni rectilineo æquale, quod minime maius existat ad medietatem rectæ comparato, similibus existentibus sumptis, sic ut ad completionem rectæ, specie parallelogrammo deficiat, al

teri rectilineo existente simili. Recta igitur linea a rectilineis datis, ipsa recta primò bifariam secetur, ab alterutra deinde rectæ medietate rectilineo, quod alteri ex dato simile existat, per propositionem 18 huius descripto, à quo id deficiet ad com



pletionem rectæ, etiam cõpleatur: & erit ille defectus alteri rectilineo, aut æquale, aut eo maius. Si æquale, factum erit propositum: parallelogrammum nimirum ad rectam datam, uni rectilineo dato æquale, deficiens specie parallelo-

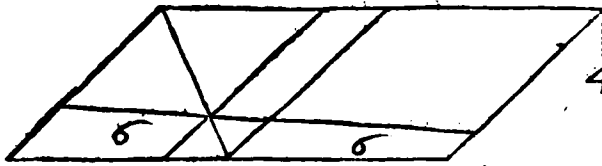
grammo, quod alteri dato rectilineo simile est, comparatum. Quòd si defectus ille altero rectilineo maior fuerit: & quod à rectæ medietate, per propositionem 18 de scriptum est rectilineum, propter æqualitatem, eodem altero rectilineo maius erit. In quo igitur excedit, tali excessui parallelogrammum, quod etiam ut ipsum totum alteri dato simili sit, per propositionem 25 huius describatur, & erit illud cū rectilineo dato uno, iam toti parallelogrammo æquale: toti etiam per se, ex propositione 21 huius, simile: laterum igitur



tur, quæ habet circa æquales angulos, proportionalium. Et quoniã huic toti, quod scilicet dato uni rectilineo simile, ad medietatem etiam rectæ positum est, alteri rectilineo cum iam descripto parallelogrammo æquale est: erit contrà, hoc totum parallelogrammū iam descripto solo maius: quare & illius, quàm huius, latera longiora. In longioribus igitur brevioribus æqualibus signatis, compleatur parallelogrammum: eritq^{ue} illud ei, quod per propositionem 25 descriptum est, parallelogrammo æquale: ipsi insuper toti ex propositione 21 huius, simile: circa eandem

igitur

igitur diametrum hæc, partiale nimirum & totale parallelogrammum ex 16 huius



consistunt. Ducatur ergo diameter, & describatur figura. Et quoniam totum hoc parallelogrammum rectilineo uni, & excessui æquali descripto paralle-

ἡ πρῶτα σῖς κθ.

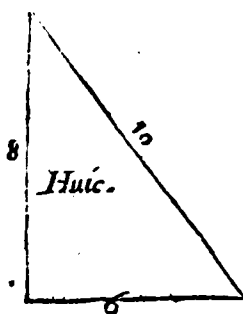
Παρά τῳ δοθεῖσαι εὐθεῖαν, τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ἴσον πᾶν κληρόγραμ-
μον πᾶσα βαλεῖν, ὡς οὐράνιον εἶδει πᾶν κληρογράμμῳ, ὁμοίῳ τῷ δοθέντι.

PROPOSITIO XXIX.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum
comparare, excedens specie parallelogrammo, simili dato.

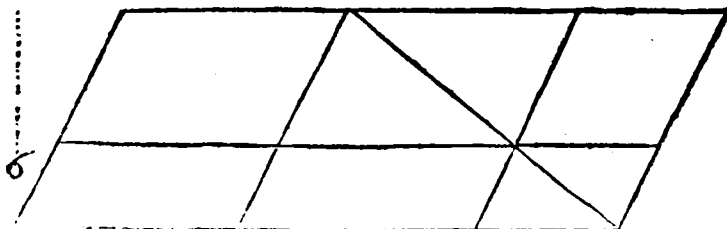
Ethæcpropositio, ut præcedens 28 duo rectilinea, & rectam lineam datam requirit. Propōnit autem, quomodo ad datam rectam comparandum sit parallelogrammum, quod quidem ipsum esset uni rectilineo æquale: excessus uero ipsius, qui est ultra rectam lineam, alteri specie similis. Recta igitur linea ac rectilineis da-

Rectilinea data
æquale simile.



tis, ipsa recta primum, ut in præcedente, bifariam secetur: ab alterutra deinde rectæ medietate parallelogrammo, uni ex dato rectilineo simili, per propositionem 18 huius, descripto, aliud deinde, quod & ipsum sumpto rectilineo simile sit, iam uerò descripto cum rectilineo dato altero

Huic.  α quale existat, per propositionem 25 huius describatur: hec igitur, quod scilicet iam descriptum est, & prius positum, cum uni sint rectilineo similia, ex structura, inter se etiam, per prop. 21, similia erunt, ac similis rationis latera circa α quales angulos habebunt. Et quoniam unum altero parallelogramo, ut totum sua parte, maius est: & latera illius quam huius parallelogrammi latera longiora erunt. Breuioribus igitur ad suarum longiorum quantitatem continuatis, parallelogramo etiam deinde completo: quod sic describitur, ei, cuius longiora sunt latera, α quale, atque



etiam simile erit: quare & alteri descripto, cuius nimirum latera continuata sunt.

ex 21 huius simile: circa eandem igitur hæc duo parallelogramma diametrum, ex propositione 26, consistunt. Ducatur igitur diameter, & describatur figura. Et quoniam totum hoc parallelogrammi spacium, suo gnomoni & alteri parallelogrammo ad medietatem rectæ comparato, ut suis partibus, est æquale, æquale etiam ex communi quadam noticia, huic alteri parallelogrammo & uni rectilineo, ablato de illis communi: & reliquus gnomon, ex una parte, rectilineo æqualis erit. Cum igitur supplementa omnis parallelogrammi spacij, ex propo. 43 primi. cumq; etiam parallelogramma, super æqualibus basibus in eisdem item parallelis constituta, ex 36 eiusdem, inter se æqualia sint; huius memor, æquali pro æquali, hoc est, loco gnomonis ipso rectilineo, sumpto, res tandem concludetur. Ad datā igitur rectam lineam dato rectilineo, &c. quod fecisse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ.

Λ.

Τὴν πρὸς ἑαυτὴν ἐκτεταμένην περὶ τὴν μέσην λόγον τεμνέειν.

PROPOSITIO

XXX.

Datam rectam lineam terminatam, per extremam ac mediam rationem secare.

Proponitur hæc propositio idem quod in secundo propositio decima, sub alijs tamen uerbis. Sit igitur recta linea terminata data, atq; propositum, eam per extremam & mediam rationem secare. Describatur igitur, per propositionem 46 primi, a recta data quadratum, ad lineam deinde, rectæ datæ πρὸς ἑαυτὴν insistentem, alter-

Data	recta 8
Lōgior portio	brevior

Portio lon. / 80 — 4
brevior 12 — / 80

utram, parallelogrammum, quod ipsi quidem quadrato æquale: ultra uerò quadratum de eo proiectum, eidem quadrato etiam simile sit, per propositionem 29 comparetur. Et quia per huius parallelogrammi alterum latus, quod scilicet per quadratum transit, recta data, ut iussum, diuisa est: propositioni igitur satisfactum erit: demonstratio deinde hoc modo colligenda. Quoniam enim a recta data descriptū, quadratum est ex structura: quadratum igitur est & id, propter similitudinem, quod ultra quadratum de parallelogrammo porrigitur. Et rursus, quoniam parallelogrammum, ad latus, rectæ datæ conterminale, per propositionem 29 applicatum, æquale est, ex structura, rectæ datæ quadrato: igitur eo quod hæc duo æqualia commune habent, de ijs ablato, & quæ relinquuntur, per communem quandam noticiam, inter se equalia erunt. Sed quia sunt etiam æquiangula: latera igitur eorum circa æquales angulos, ex priore parte propo-

sitionis 14 huius, reciproce proportionalia erunt. Quare, cum quadratorum latera ex definitione, inter se æqualia sint, parallelogramma insuper latera opposita, ex propositione 34 primi, æqualia inter se habeant: ex definitione lineæ, extrema & media ratione diuisæ, iam infertur propositum, quod scilicet recta data, extrema & media ratione diuisa sit, quod fieri oportuit.

Exemplum in numeris.

Sit totus numerus

10

18

24

39

52 &c.

Qq 3

Portio

Portio maior

minor

$\sqrt{125} - 5$

$15 - \sqrt{125}$

$\sqrt{205} - 9$

$27 - \sqrt{205}$

$\sqrt{718} - 12$

$36 - \sqrt{718}$

$\sqrt{1901\frac{1}{4}} - 19\frac{1}{2}$

$58\frac{1}{2} - \sqrt{1901\frac{1}{4}}$

$\sqrt{3380} - 26$

$78 - \sqrt{3380}$

Exemplum geometricum aliud.

termi. 4	breuior
Data recta $\sqrt{80} +$	Long.

Portio longior 8

breuior $\sqrt{8} - 4$

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

ΑΑ.

Εν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις ὅ ἀπὸ τῆς πρὸς ὀρθῶν γωνίας ὑποτείνουσας πλευρᾶς εἰδῶς, ἴσην ὅτι τοῖς ἀπὸ τῆς πρὸς ὀρθῶν γωνίας πρὸς ἑαυτῶν πλευρᾶς εἰδῶς, τοῖς ὁμοίοις καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.

PROPOSITIO

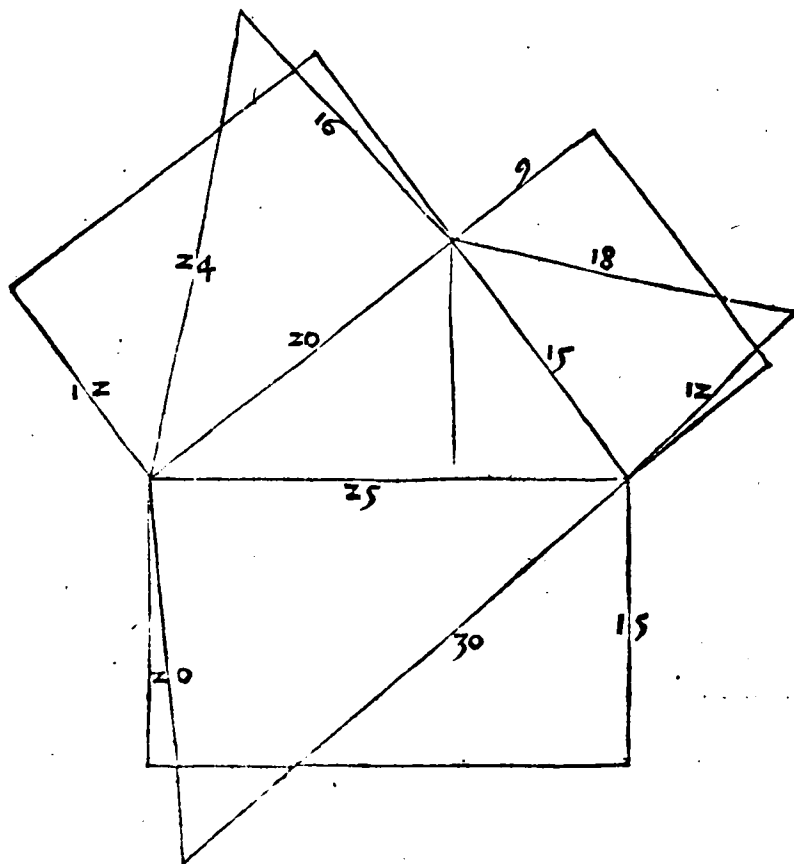
XXXI.

In rectangulis triangulis: quæ, ab rectum angulum subtendente, latere species descripta fuerit, ea æqualis est eis, quæ similes similiterq; positæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

Est hæc propositio aliquanto generalior, & latius se extendit quàm quæ est in primo quadragesima septima, cum hæc de quadratis tantum, illa uerò de omnis generis rectarum linearum figuris, modò similis delineationis fuerint, intelligatur. Sit igitur triangulum rectangulum, ab illius etiam unoquoque latere rectilineum descriptum, primum quidem à latere uno, ut lubet, à reliquis deinde reliqua, quem admodum docet propositio 18: dico ergo, rectilineum lateris quod subtendit angulum rectum, reliquis duorum laterum rectilineis æquales esse. Ducatur ab angulo trianguli recto, per propositionem 12 primi, ad basim perpendicularis. Et quoniam partialia descripta triangula, per propositionem 8 huius, & toti, & ipsa inter se similia sunt: æquiangula igitur hæc, & latera circa æquales angulos proportionalia habebunt. scilicet, sicut se habet subtendens rectum totalis trianguli, ad utrumq; circa rectum angulum latus, sic & in utroq; partiali triangulo, recto angulo subtensa, ad utrumq; alterum. Sed quoniam tribus rectis lineis proportionalibus existentibus, cum, per corollarium secundum propositionis 26 huius, prima sit ad tertiam,

ut

ut quæ à prima ad illam quæ à secunda, similis similiterq; posita species describitur, ratio, eodem corollario bis usurpato, conuersa insuper ratione & illa bis sumpta, cum sex quantitates appareant, quarum prima quidem ad secundam est ut tertia



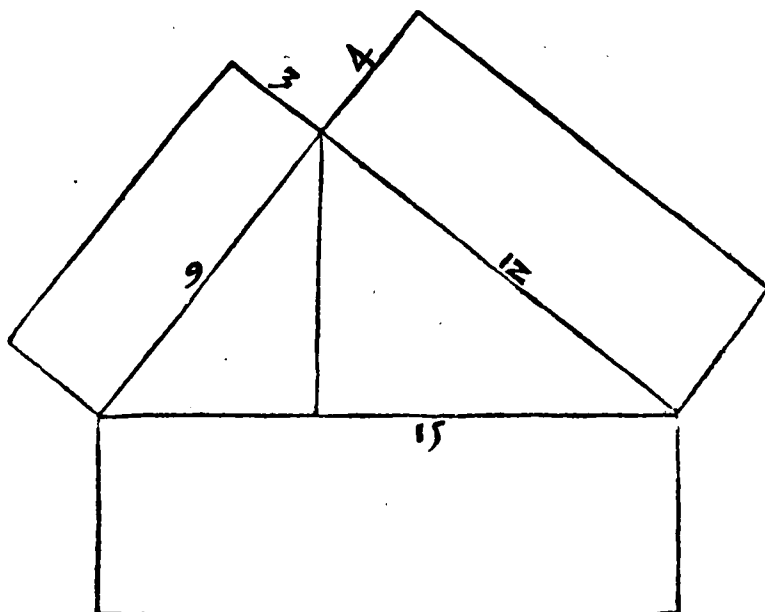
ad quartam, quinta uerò ad eandem secundam ut sexta ad quartam, atq; ita, per propositionem 24 quinti, prima cum quinta ad secundam, sicut tertia cū sexta ad quantitatē quartam: sicut prima cum quinta secundæ, ita & tertia cum sexta quartæ quantitati æqualis sit, hinc propositioni satisfactū erit. In triangulis igitur rectangulis, quæ ab rectum angulum subtendente latere species descripta fuerit, ea æqualis est eis, quæ similes similiterq; positæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur, quod demonstrasse oportuit.

ALITER.

Figuræ, à rectanguli trianguli lateribus descriptæ, sunt, ex hypothesi, inter se similes: & quoniam similes figuræ, ex corollario propositionis 20 huius secundo, in duplicata ratione sunt similis rationis laterum, habet uerò & quadratum ad quadratum suorum laterum duplicatam rationem: & rectilinei igitur ad rectilineum, ex propositione 11 quinti, ut quadrati ad quadratum ratio erit. Hæc sic omnia bis usurpata, cum etiam iam sex quantitates, quales propositio 24 quinti requirit, appareant, per eandem & propositionem quadragessimam septimam primi, de triangulis rectangulis expositam, inferitur tandem propositum.

Qq 4

Alia



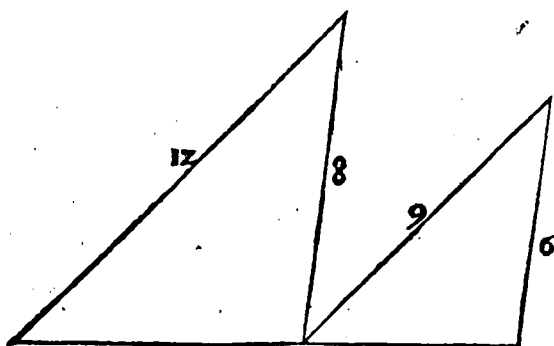
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΑΒ.

Εὰν δύο τρίγωνα συντεθῇ, καὶ μίαν γωνίαν, τὰς δύο πλευρὰς τὰς διὰ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ ὑπὲρ εὐθείας ἴσονται.

PROPOSITIO XXXII.

Si duo triacula, duo latera duobus lateribus proportionalia habentia, secundum unum angulum composita fuerint, sic ut proportionalia illorum latera parallela sint: tum reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineam erunt.

Sint duo triacula qualia hæc propositio requirit, quorum unius duo latera illam, quam duo alterius trianguli latera rationem constituent. Hæc autem applicentur secundum unum eorum angulum sic, ut latera rationis in uno, duobus lateribus rationis in triangulo altero sint parallela: dico, quod tertium unius, & tertium latus trianguli alterius, adamussim unam lineam constituent. Quoniam enim latera rationis in uno, lateribus rationis in triangulo altero, ex hypothesi, sunt lineæ parallela, cum in eas etiam cadat recta quædam lineæ alia, unum scilicet ex parallelis la-



tus: αἱ ἀλλὰξ γωνίαι, ex prima parte propositionis 29 primi, inter se æquales erunt. Eadem igitur parte bis usurpata: & anguli qui in utroque triangulo inter proportionalia latera continentur, ex communi quadam noticia, inter se æquales erunt: atque deinde triacula ipsa, ex priore parte propositionis 6 huius æquiangula, tandem duo anguli ad tertium unius, duobus angulis ad tertium latus trianguli alterius, æquales erunt. Duobus igitur æqualibus his, utri hi fuerint, angulis, anguli coalterni, qui & ipsi, ut iam demon-

stratum est, sunt æqualiter, utriusque anguli coalterni, qui & ipsi, ut iam demon-

demonstratum est, inter se æquales sunt, additi: & duo duobus, duo inquam anguli in uno triangulo, duobus extra illud æquales erunt. Addito insuper his æqualibus angulo quodam communi, tertio scilicet huius trianguli angulo: tres in triangulo anguli tribus alijs æquales erunt. Sed cum omnis trianguli tres anguli interiores, ex corollario propositionis 32 primi, duobus rectis æquales sint: & alijs tres duobus rectis angulis æquales erunt. Quoniam autem ad aliquam rectam lineam quæ est, unum ex parallelis latus, atq; ad eius punctum, quod est communis triangulorum copula, duæ rectæ lineæ, tertia nimirum duorum triangulorum latera, non ad easdem partes ductæ, deinceps se habentes angulos duobus rectis æquales faciunt: in directum igitur, ex propositione 14 primi, hæc duo tertia latera una linea erunt. Si duo igitur triangula, duo latera duobus lateribus proportionalia habentia, &c. quod demonstrasse oportuit.

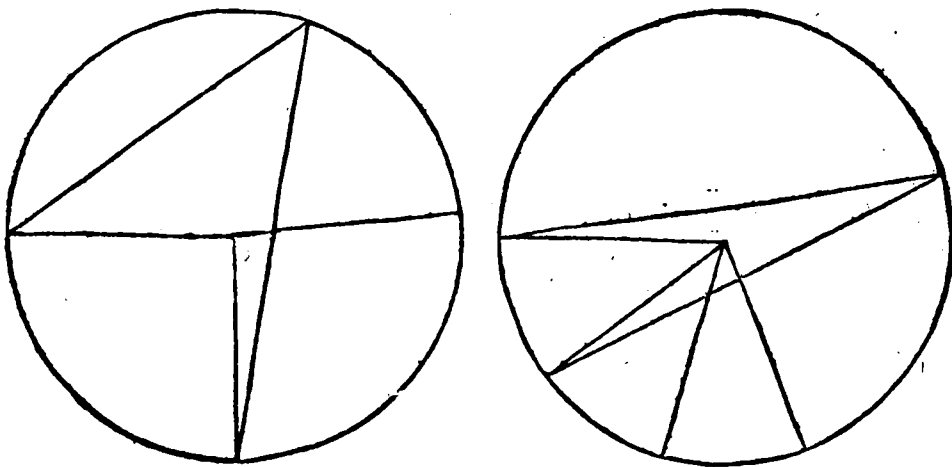
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΑΓ.

Εν τοῖς ἰσοῖς κύκλοις, αἱ γωνίαι τῶν αὐτῶν λόγων ἔχουσι τοῖς περιφερείαις ἐφ' ὧν βεβήκασι, ἰσὺν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἰσὺν τε πρὸς τοῖς περιφερείαις ὥς βεβήκασι. Ἐπὶ δὲ καὶ οἱ ὁμοῖοι, ἅ τε πρὸς τοῖς κέντροις συνιστάμενοι.

PROPOSITIO XXXIII.

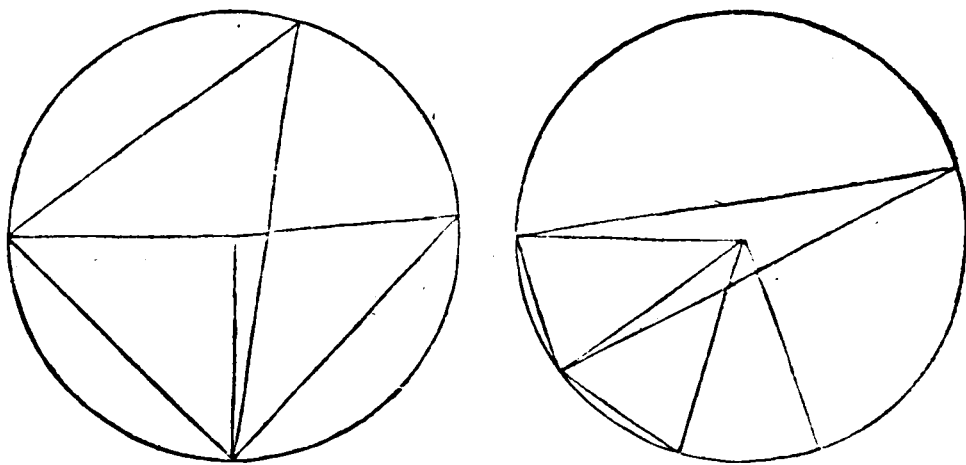
In æqualibus circulis, angulis eandem habent rationem ipsis circumferentijs super quibus constituuntur, illi siue ad centrum siue ad circumferentias constituti sunt: Insuper uerò & sectores, ad centra constituti.

Habet hæc propositio partes duas, requirit circulos æquales, & dicit: Si in æqualibus circulis anguli positi fuerint, illos eandem quam ipsæ circumferentiæ à quibus deducuntur rationem habere, siue ad centra illi, seu ad circumferentias positi fuerint. Insuper quod etiam sectores ad centra, illam, quam uel anguli uel circumferentiæ, rationem habeant. Describantur igitur æquales circuli, duo uel plures, in ijs etiam anguli ponantur, ad centra siue ad circumferentias deducti: dico, quam ipsæ circumferentiæ, illam eandem & angulos, ad centra siue ad circumferentias deductos, rationē habere: dico insuper, & sectores, qui ad centra positi sunt, illam eandem, quam uel circumferentiæ uel anguli, habere rationem. Signentur in uno circulo ordine quotcunque circumferentiæ, ei quæ subtendit angulum in circulo constitutum, æquales: & hoc quidem, ex propositione 21 tertij, officio circini, eo secundum quantitatem rectæ quam eadem circumferentiæ, si subtendi debeat, requi-



rit, extenso, atq; extremitatibus harum singulis, rectis lineis cum centro iunctis, hoc idem, secundum illam uel aliam multitudinem, fiat etiam in circulis alijs. Et quoniam æquales sunt, ex structura, circumferentiæ inter se, æquales autem circumferentiæ,

cumferentiæ, ex propositione 27 tertij, in æqualibus circulis, æquales angulos subtendunt: & ipsi anguli sic inter se æquales erunt. Sicut igitur in unoquoque circulo, circumferentiarum aggregatum ad unam, illam scilicet, quæ in eodem circulo angulum subtendit, est multiplex: sic & angulorum aggregatum ad illū eundem angulū multiplex erit. Quare si circumferentiarum aggregatum in uno, æquale fuerit aggregato circumferentiæ in alio circulo, uel maius uel minus eo: & angulorum aggregata eodem modo sese habebunt. Sunt autem iam quatuor quantitates, duo scilicet anguli ad centra positi, horum deinde angulorum circumferentiæ subtense, quarum cum primæ & tertiæ assignatæ multiplices æqualiter se habeant, in addendo, minuendo & æqualitate, respectu multiplicium, quæ ipsis secundæ & quartæ assignatæ sunt: erunt illæ quantitates, ex definitione 5 quinti, in eadem ratione, prima scilicet ad secundam, ut tertia ad quartam, circumferentiarum nempe, ut angulorum ad centra positorum, ratio. Quoniam autem ad centra deductorum angulorum ratio, ea est ex 20 tertij, & propositione 15 quinti, quæ est angulorum qui ad circumferentias deducti sunt, cum duæ rationes eidem eadem, ipsæ ex 11 quinti inter se eadem sint: prior propositionis pars iam manifesta erit. Posterior nunc, quod & sectorum ad centra, ut circumferentiarum sit ratio, sic demonstrari potest. Maneat prior dispositio, linearum deinde ipsorum sectorum extremitates, quas habent, utroque in sua circumferentiâ, lineis rectis coniungantur. Hoc idem fiat ex altera parte cum sectoribus proximis, & signentur in quatuor istis circumferentijs uel arcubus, quatuor puncta utcunque, atque ab ijs ad eorum arcuum fines rectæ lineæ ducantur. Et quoniam quæ ex centro circuli ad circumferentiâ usque egrediuntur rectæ lineæ, ex definitione circuli, inter se sunt æquales, cum sic in utroque circulo duo triângula appareant, quorum duo latera unius, duobus lateribus in triângulo altero sunt æqualia, angulus etiam inter illa, angulo, ut iam ostensum est, æqualis: & tertium latus tertio lateri: totum deinde triângulum toti triângulo, ex propo-



tionem 4 primi, æquale erit. Et quia tertia horum triángulorum latera inter se æqualia sunt, æquales uerò rectilineæ in æqualibus circulis, ex propositione 28 tertij, æquales circumferentias auferunt, maiorem maiori, & minorem minori, si in utroque circulo, utriusque etiam rectæ lineæ arcus à toto circulo subtrahatur: quæ relinquuntur circumferentiæ, per hanc eandem propositionem, inter se æquales erunt: quare & anguli, qui super illas circumferentias deducuntur, ex propositione 27 tertij, inter se æquales. Sectiones igitur, ex definitione, similes: atque deinde etiam, cum super æqualibus rectis constitutæ sint, ex 24 tertij, inter se æquales. Est autem & triângulum triângulo æquale: totis igitur sector toti sectori æqualis, atque ideo & sectores in utroque circulo tandem omnes, inter se æquales erunt. Quotuplex igitur est in utroque circulo circumferentiarum aggregatum ad unam, illam scilicet, quæ in eodem

dem circulo sectorem subtendit, tam multiplex est etiam sectorum aggregatum ad illum eundem sectorem. Ergo sicut se habet prima ex illis quatuor, ad tertiam, in addendo, minuendo, uel æqualitate: ita & secunda erit, respectu quantitatis quartæ. Sunt autem iam quatuor quantitates, duo scilicet sectores ad centra positi, horum deinde sectorum circumferentiæ subtensæ, quibus cum primæ & tertiæ, secundæ item & quartæ æquæ sint assignatæ multiplicæ, erunt illæ quantitates, ut supra, in eadem ratione: prima scilicet ad secundam, ut tertia ad quartam: hoc est, Sectorum ut circumferentiarum, uel propter similitudinem, ut angulorum ratio. In circulis igitur æqualibus, eadem ratio angulorum est, quæ circumferentiarum super quibus constituuntur, siue ad centra siue ad circumferentiâs constituti sint. Itidemque sectores, qui ad centra consistunt, quod demonstrasse oportuit.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ δὴλον, ὅτι ὡς ὁ βρεῖνς πρὸς τὸ βρέα, οὕτω καὶ ἡ γωνία πρὸς τὴν γωνίαν.

COROLLARIUM.

Et manifestum est, quod sicut sector ad sectorem: ita & angulus ad angulum.

FINIS LIBRI SEXTI.

IOANNES SCHEVBELIUS

candido Lectori S.

Habes ita, candide Lector, sex libros geometriæ Euclidis priores, ex traditione nostra, unâ cum regulis Algebræ. Quod si fortè in aliquibus locis hallucinati sumus (id quod in hoc hætenus inusitato ac lubrico demonstrationis genere facile accidere potuit) quia tamen passim multa inuenientur, quibus oblectare sese studiosus harum rerum poterit, lapsus in hac re nostri apud te facile, ut spero, ueniam merebuntur. Quod si candorem & iudicium non iniquum his adhibitum animaduерtero, posteriores etiam nouem libros pari studio illustrare conabor, tecumque communicare fideliter.

BASILEÆ, PER IOANNEM

Hæruagium, Anno salutis humanæ M. D. L.

Mense Septembri.

M. Iodocus Naß.

Anno M D LXIII.

