EVCLIDIS Megarensis, Philosophi & Mathematici excellentissimi, sex libri priores, de Geometricis principijs, Græci & Latini, una cum demonstrationibus propositionum, absque literarum notis, ueris ac proprijs, & alijs quibusdam, usum earum concernentibus, non citra maximum huius artis studiosorum emolumentum adiectis.

ALGEBRAE PORRO REGULAE, PROPTER NUMErorum exempla, passim propositionibus adiecta, his libris præmissæ sunt, eædemque demonstratæ.

AUTHORE IOANNE SCHEUBELIO, IN inclyta Academia Tubingensi Euclidis professore ordinario.

Cum gratia & priuilegio Cæsario, ad quinquennium.

BASILEAE, PER IOANnem Heruagium.

M. GARBICIVS ILLYRICVS ad Lectorem.

Εὐκλείδου σοφίην πολλοὶ καὶ ἴστορες ἄνδρες
  ἐμματέως μέμασαν πολλάκις ἐκπονέειν,
πολλὰ δὲ εὐφραδέως πολυϊδρείῃσι νόοιο
  ἐκτελέσαν μοῦναξ προσθέμενοί τι πλέον.
ἀλλ' οὐ ἐτεὸν κείνου σοφίη πλείστοισί περ ἔμπης
  ἐξακριβωθ' ἁπλῶς δυσκατάληπτος ἔφυ.
πρόσθε σχεδὸν πάντεσσ' τῶν μὲν λόγοις ἔξοχα πολλή,
  ἠδὲ διαρθρώσεις πίλνατ' ἐπασσυτέρη.
τῷ δὲ Σχειβέλιος τοῖς πρόσθεν πόλλ' ἐπιπροσθεὶς,
  πολλά τ' ἀναρθρώσας θῆκ' ἀριτρανώτερα.
πάντα δ' ἀπήρτισσ' ἐν ἀραρῶς παραδείγμασι πυκνοῖς,
  ὥστ' ἔμμεναι τούτων δύσπορον οὐδὲν ἔτι.
τοῖς δ' ἄρα προσλιπτῶν μετρικῆς τὰ πλεῖστα διδάσκει,
  οὐκ ἔτι γ' ὡς τὸ πάρος κεῖν' ἀκίχητα λαχών.

IOAN. SAMBVCVS PANNONIUS Tirnauiensis.

Hactenus Algebræ latuit quia regula multos,
  Et summis tantum est illa adamata uiris:
Explicat hanc noster tanta Scheubelius arte,
  Quilibet ut paucis perdidicisse queat.
Sex quoq; demonstrat libros Megarensis abunde:
  Ingenium quare, Lector amice, probes.

NOBILIBVS, ERVDITIONE AC VIRTVTE VIRIS ORNATISSIMIS, FVGGERIS, ANTONIO NATV SEniori, ac fratris sui P. M. Reimundi filijs, Ioanni Iacobo, Georgio, Christophoro, Vdalrico, & Reimundo, fratribus, Kirchpergæ & Vueissenhorni dominis, Mœcenatibus suis perpetuò colendissimis,

IOANNES SCHEVBELIVS S.

CVM inter liberalia studia, quæ à liberis & ingenuis hominibus disci debent, Geometria etiam numerari meruerit, Euclidis uerò, μαθηματικῶν ἡγεμὼν καὶ κορυφαῖος, geometria in omnibus ferè publicis scholis proponi cõsueuerit, quo illam laudatissimam consuetudinem meo etiam conatu iuuarem, cum omnes ipsius libros uno tempore tradere, propter multa impedimenta, difficile sit, priores sex, tanquam potiores, unà cum Algebræ regulis, ad hos summè necessarijs, demonstrandos & declarandos suscepimus. At quoniam hic noster tradendi modus ab aliorum traditionibus nonnihil uariat, huius diuersitatis caussam, post expositam à nobis geometrię originẽ & usum, declarabimus. Cum Nilus Ægypti fluuius, ut author est Strabo, longe latèque augescẽs, se diffunderet, atque sua exundatione deinde agrorum limites in illa uicinia ita turbaret, ut decrescente, & in suum se alueum recolligente aqua, limites & termini diluuio confusi submouerentur prioribus finibus, quibus designandis significandisque erant constituti, eueniebat sanè ut nullus sui fundi, nec locum nec quantitatem certò assignare posset. Quamobrem ne contentiones inter uicinos orirentur, sed potius ut uera & iusta distributione suum quisque fundum integrum reciperet, ab Ægyptijs, propter summam necessitatem & commoditatem, quam experiebantur metiendis agris, Geometria inuenta est: quemadmodum Phœnices, propter negociationem, Numerorum scientiam primi reperisse dicuntur. Hanc ab Ægyptijs acceptam Græci postea omni studio & diligentia excoluerunt. Non ideo tantùm, ut hac in ædificando aut reliquis artibus mechanicis, magno suo cõmodo uterentur: sed multo magis, ut liberos suos ad philosophiam, omnesque uitæ partes præpararent, ad quas res mensurarum cognitio non leuiter conduceret. Nam primùm quid quæso, in ulla parte philosophiæ sine demonstrandi scientia rectè cognosci potest, aut percipi? At demonstrationum doctrinæ, incredibile est, quantum lucis afferant exempla geometrica, quę sine controuersia sunt omnium maximè & ad docendum, & ad intelligendum illustria & expedita. In oculos namque incurrunt, & ad manifestas menti nostræ rationes referuntur. Deinde constat ex hac ipsa mensurarum noticia, non demonstrationes tantùm longè plurimas, ad doctrinam de natura rerum illustrandam passim accommodatas, sed huius ipsius etiam prima initia ex illa sumpta esse. Ex illa enim non plures mundos, non hunc ipsum in quo uiuimus, aut ullum omnino aliud corpus, infinitum esse ostenditur. Quæ sanè physicæ uera sunt & propria exordia putanda. Quòd hæc ipsa mensurarum ratio & terræ amplitudinem metitur, & coeli ipsius spacia describit: & disciplinę suę, regulis quasi quibusdam, in coelum subuectis mentibus hominum, omnes illos orbium & corporum coelestium ortus, obitus, motusq; demonstrat. Atq; hæc tam multa & minimè contemnenda commoda ijs præcipuè affert, qui in umbra & ocio uiuentes, ueritatem exquirunt. Cum interim neq; pauciora, neq; leuiora ijs etiã præstet, qui ex umbra in solem progrediuntur, & in communi hominũ consuetudine uersantes, priuatam aut publicã rem gerũt. Galenus scribit, sæpe se in incertarum rationum æstu ualde anxium & dubium laborantem, Geometricarum demonstrationum beneficio subleuatum esse, quæ modum & uiam præclarè operandi sibi monstrauerint. Etenim cum animaduerteret rotunda & circularia ulcera tardius quàm longa curari, censuit eius curationis uiam sibi ex Geometria petendam esse. Proinde in lectionem de Isoperimetris incidens, inuenit, quòd circulus quidem omnium Isoperimetrarum figurarum esset capacissimus: nimirum quòd extrema eius undiq; plus à se mutuo, quàm in alijs Isoperimetris figuris, distarent. Hac ratione fretus, in Methodo curandi, ad finem libri tertij scribens, sic inquit:

τὰ μὲν γὰρ ἐγκάρσια διὰ τὸ τὰ χείλη αὐτῶν μᾶλλον διεστηκέναι τε καὶ ἀφεστηκέναι, τῆς συναγωγῆς ἀκριβεστέρας δεῖται, ὥστε καὶ ῥαφαῖς καὶ ἀγκτῆρσιν ἐπὶ τούτων χρηστέον.

Vnde Hippocrates etiam filium suũ Thessalum, in quadam ad ipsum epistola, hortatur, ne uel Geometriam, uel Arithmeticam negligat, inter alia scribens his uerbis:

Ἱστορίας δὲ μελέτω σοι ὦ παῖ, γεωμετρικῆς καὶ ἀριθμήσιος.

Et grauis author Quintilianus, eandem etiam Geometriam oratori suo, Rempub. domi & in pace gubernaturo, necessariam esse, multis & grauibus de caussis ostendit. Ac res ipsa clamat, foris & in bello usum huius non uulgarem existere, cum castris scilicet locus est capiendus, magnæ moles loco mouendæ, machinæ bellicę & tormenta fabricanda, aut trajcienda flumina pontibus, obsidẽda hostium moenia, & huius generis sexcenta alia facienda sunt. Celebratur Archimedis industria, quæ sola & acerrimos summi Imperatoris Marcelli impetus leui sępe momẽto frustrata est, & obsidionem Syracusarũ in longius traxit. Inter ciues aũt & milites magna uis est ordinis, magna cõcordiæ, magna amoris mutui: quas res in primis efficit & conseruat in hominũ societatibus proportio Geometrica. Quare Plato hanc, ut salutarẽ, præcipuè asciscendã esse duxit ciuitatibus, quæ rerum suarum statum optimũ esse uellent, & quàm firmissimum. Vbi enim pro meritis & dignitatẽ, magistratus & imperia

optimis

optimis & prudentissimis mandantur, ubi ordines & discrimina personarum seruantur, ubi melior imperat, paret & obtemperat imprudentior, ibi suas quemq; partes, suum munus, suum officium & intelligere & facere, & ueram ac durabilem æqualitatem esse. Et ex hac deinde mutuam inter ciues concordiam & beneuolentiam gigni, necesse est. Quia ἰσον ἴσῳ φίλον est, id quod equidem in Repub. maximè efficit proportio Geometrica: & ob hanc caussam maximi facienda est Geometria etiam ad Reipub. gubernacula accessuris. Vnde non sine magnis & grauibus caussis existimandum est, Platonem fecisse, ut à sua schola rudes & imperitos huius artis omnes, ipsa etiam inscriptione, arcēdos duxerit. Notus est enim uersiculus, quem scholæ suæ uestibulo inscriptum proposuit:

ΑΓΕΩΜΕΤΡΗΤΟΣ ΟΥΔΕΙΣ ΕΙΣΙΤΩ.

Cum enim se non eos tantum, qui remoti ab administratione Reip. rationem doctrinæ & ueritatis in umbra & ocio exquirerent, sed illos etiam qui quæsitas, & inuentas sapientiæ rationes in lucem ac solem proferrent, & rebus humanis agendo consulerent, institutione sua formare intelligeret, uidit nimirum uir diuinus, ad neutram institutionem idoneos, qui non Geometriæ disciplina exculti accederent. Quare huiusmodi barbara & monstrosa ingenia, quæ ab hac, maximè propria naturæ hominum, disciplina abhorrerent, tanquam inepta percipiendæ doctrinæ suæ, meritò à se repulit. Quod ipsius prudens & necessarium consilium, utinam etiamnum in scholis publicis sequeremur: non minor modo studiorum perturbatio esset, sed ex his ipsis etiam longè maiores fructus Respub. caperet, ad cuius administrationem multo melius instructi homines uenirent. Porrò constat, inter omnia scripta eorum, qui quidem in hoc genere artium elaborauerunt, præcipuo semper loco fuisse Euclidea: è quibus tanquam inexhausto fonte, ferè omnia mathemata profluxere. Itaq; & nos huic authori pro uirili nostra illustrando, operæ aliquid attribuendum duximus: qua in re ab usitata hactenus in scholis uia, non sine grauibus caussis (ut nos quidem opinamur) discessimus. Multos fuisse demonstratores geometriæ Euclidis Megarensis, philosophi ac mathematici, certū est: inter omnes tamen, Græcorū quidē Theonis & Hypsiclis Alexandrinorū philosophorū, Latinorū uerò, Campani Galli & Zamberti Veneti, explicationes in geometriam Euclidis, ut omnium perfectissimæ celebrantur. Quæ sanè tales sunt, ut nihil ferè in illis ad plenam huius authoris intelligentiam desiderari possit. Ita enim singularum propositionum cōclusiones ex suis hypothesibus colligunt, ut animum suum ad utramq; rem diligenter aduertenti, nihil prorsus dubitationis relinquatur. Sed cum literarum figuras in designandis demonstrationum momentis usurpant, id mihi & facere præter ipsius Euclidis institutum uidentur, qui suas in his elementis geometriæ propositiones nudè, & absq; illis literarum figuris scriptas reliquit: & præterea fieri ui-

 detur,

detur, ut quod doctiſſimorum hominum pace dixerim, non ſolum ijs qui docent & labor & moleſtia augeatur, ſed etiam impediatur intelligentia diſcentium. Idq́; ipſe non ſolùm docendis his elementis quotidie experior, ſed etiam de eorum querelis non ſemel cognoui, qui in cognoſcendis his ipſis Euclidis noſtri elementis, tyrocinium quoddam poſuerunt. Nam & hi ſe tam longa ſæpe & multiplici literarum inculcatione, ueluti remoris quibuſdam intelligentiæ ſuæ turbari & impediri confeſſi ſunt: & ego ipſe ſentio quàm moleſtum ſit, & omnino plenum faſtidij, ad eum modũ ſubinde literas, aut in ſermone repetere, aut adſcribere ad figuras. His igitur de cauſſis, uſurpatam ab alijs rationem demonſtrandi per literas omittendam, & aliam quandam uiam, magis, non modò huius noſtri authoris tractationi cõſentaneam, ſed ad intelligendum etiam tyronibus planam & expeditam, ingrediendũ mihi, in his quidem prioribus ſex libris explicandis duxi. In qua & illas literarum ambages remoueo, & quæ ſunt demonſtrationibus oſtendenda, ſuis quæq́; proprijs appellationibus, ut ipſe etiam Euclides ſolet, deſigno. Inq́; eo non compendium modò me conſequi, ſed etiam magis uitare obſcuritatis difficultatisq́; incõmodum arbitror: id quod de ſubiũctis exemplis quiuis facile intelliget. Nam angulus rectus uel maior in operatione ſeu figura oblatus, nulla certè appellatione cõuenientiori exprimi poterit, quàm ut rectus, ut maior, non autem angulus a b c, uel γ δ ε uocetur. In his namq́; prolixa literarum inter ſe collatione res demonſtranda opus habet cum priore illa noſtra uia & ratione rem non modo breuius, ſed, ut ego quidem exiſtimo, clarius, per ſuam ipſius appellationem deſignare poſſim, quæ ſignificatam rei notionem, abſq́; ulla longiore collationis mora, animo auditoris ſtatim cum ipſa proprij nominis uoce affert. An non etiam apertius abſq́; notis literarum ſic aliquis loquatur, Angulus igitur anguſtior ad æqualitatem amplioris, per propoſitionem 23, augeatur: uel, deſcribatur à data recta quadratum, ducatur etiam in eo diameter, & eius generis infinita alia: quàm ſi eadem literis appoſitis reddat magis implicata & obſcura, ſic pronũciando, Angulus igitur a b c ad æqualitatem anguli d e f, per propoſitionem 23, augeatur. Vel, ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς α β τετράγωνον τὸ α β γ δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ β δ, καὶ τὰ λοιπά: Quid obſecro his ambagibus literarum à ſolida & erudita demonſtrationis explicatione magis eſt alienum? Nam hic primùm diſcenti recurrendum ad figuram eſt, & in illa multiplici ac inter ſe implicata literarum uarietate diu quærendum, ubi ſint illæ ipſæ literarum notæ a b c, d e f, & ubi his ipſis deſignati anguli. Nec minore cura id quoque quærendum, ubi in quadrato β δ literæ, & ab his ipſis ducenda linea cuiuſmodi futura ſit. His & conſimilibus ambagibus in illa noſtra ratione nihil opus eſt, cũ ſcilicet ſingula ſuis proprijs nominibus enuncientur. Quod quidem ut in explicando Euclide facerem, non meo tantùm iudicio, ſed

corum

eorum quoque hortatu adductus sum, quos in hac demandata mihi ab amplissimo scholæ Tubingensis senatu functione docẽdos susceperam. Hi enim hunc modum docendi & sibi pergratum, & mihi minus molestum fore confirmabant. Quibus equidem gratificandum hac in parte fuit, partim ut huius nostræ rationis aliquod periculum in docendis geometricis faceremus: partim uerò, ne opinione difficultatis eius quam esse in illa altera ratione quærerentur auditores nostri, prorsus auocarentur à studio Geometriæ, quam alioquin hoc nostro tam iniquo literis seculo nimium à plerisque negligi sentiebam. Atque id nostrum consilium discentibus in hac nostra schola non parum profuisse animaduerti. Nec defuerunt boni & docti uiri, qui me ad consilium editionis operæ nostræ in hac parte nauatæ hortarentur: quibus ipsis acquiescendũ duxi, nec ideo quidem, ut me propter hanc ipsam ambitiose apud eruditos ostẽtarem: sed ut rem literariã, & in primis huius honestissimæ disciplinæ studium, pro mea quoque uirili iuuarem. Hos igitur labores qualescunque, nobilissimi uiri, domini & Mœcenates mei omnibus modis colendi, in communem omnium studiosorum utilitatẽ iam olim susceptos, atque nunc etiam Dei auxilio perfectos, in lucem editurus, clarissimo nominis & authoritatis uestrę patrocinio commendatos & defensos, exire uolui. Nam cum multa sint, & non uulgaria liberalitatis in me uestræ beneficia, hoc etiam laboris & operæ nostræ patrocinium non grauatè suscepturos speraui. Quod quidem ut pro uestra uirtute, sapientia, & in omnes studiosos literarum amore, ac studio singulari mihi in hac parte tribuatis, atque me clarissimæ dignitati uestræ commendatum habeatis, etiam atque etiam rogo. Valete. Datæ Calend. April. Anno post Christum natum M. D. L.

De Euclidis cùm tempore quo uixit, tum libris editis, nemo est, quod sciam, inter ueteres scriptores, qui plenius tradiderit, quàm Proclus Diadochus. Is enim libro Cōmentariorum secundo, super primum Euclidis, enumeratis aliquot non paucis, qui ætate Euclidē præcessissent, claris Mathematicis, ueluti sunt (ut nomina tantum eorū breuiter percurrā) Thales, Ameristus Stesichori poetæ frater, Pythagoras, Anaxagoras Clazomenius, Oenopides Chius, Theodorus Cyrenæus, Hippocrates, Plato, Leodamas Thasius, Architas Tarentinus, Theætetus Atheniēsis, Neoclides, Leon, Eudoxus Cnidius, Amyclas, Menæchmus, Denostratus, Theudeus Magnes, Cyzicinus Atheniensis, Hermotimus Colophonius, & Philippus Metensis: postea subiungit, οὐ πολὺ δὲ τούτων νεώτερός ἐστιν Εὐκλείδης, ὁ τὰ στοιχεῖα συναγαγὼν, καὶ πολλὰ μὲν τῶν Εὐδόξου συντάξας, πολλὰ δὲ τῶν Θεαιτήτου τελεωσάμενος. ἔτι δὲ τὰ μαλακώτερον δεικνύμενα τοῖς ἔμπροσθεν εἰς ἀνελέγκτους ἀποδείξεις ἀναγαγών. Nunc quando uixerit, sequitur: γέγονε δὲ (inquit) οὗτος ὁ ἀνὴρ ἐπὶ τοῦ πρώτου Πτολεμαίου (Lagi hic filius fuit, qui, ut tradunt Historici, post mortem Alexandri Macedonis, Aegypto, Aphrica, & magna Arabiæ parte potitus, regnauit) Et paulo pòst: νεώτερος μὲν οὖν ἐστι τῶν περὶ πλάτωνα, πρεσβύτερος δὲ ἐρατοσθένους καὶ ἀρχιμήδους. οὗτοι γὰρ σύγχρονοι ἀλλήλοις, ὥσπερ καὶ φησὶν ἐρατοσθένης. Sed & professionis, qua fuerit, meminit idem, dicens: καὶ τῇ προαιρέσει δὲ πλατωνικός ἐστι, καὶ τῇ φιλοσοφίᾳ ταύτῃ οἰκεῖος, ὅθεν δὴ καὶ τῆς συμπάσης στοιχειώσεως τέλος προεστήσατο, τὴν τῶν καλουμένων πλατωνικῶν σχημάτων σύστασιν. Dehinc alios eius autoris libros mathematicos, magna industria conscriptos, commemorat, subijciens: πολλὰ μὲν οὖν καὶ ἄλλα τοῦ ἀνδρὸς τούτου μαθηματικὰ συγγράμματα, θαυμαστῆς ἀκριβείας καὶ ἐπιστημονικῆς θεωρίας μεστά. τοιαῦτα γὰρ καὶ τὰ ὀπτικὰ, καὶ τὰ κατοπτρικά. τοιαῦται δὲ καὶ αἱ κατὰ μουσικὴν στοιχειώσεις, ἔτι δὲ τὸ περὶ διαιρέσεων βιβλίον. Qui autem ex omnibus his libris eius præcipuam laudem mereatur, respondet idem Proclus, dicens: διαφερόντως δ' ἄν τις αὐτὸν ἀγασθείη κατὰ τὴν γεωμετρικὴν στοιχείωσιν, τῆς τάξεως ἕνεκα, καὶ τῆς ἐκλογῆς τῶν πρὸς τὰ στοιχεῖα πεποιημένων θεωρημάτων τε καὶ προβλημάτων. καὶ γὰρ οὐχ ὅσα ἐνεχώρει λέγειν, ἀλλ' ὅσα στοιχειοῦν ἠδύνατο παρέλαβεν. Sed & alia quædā huius autoris præter mathematica, recenset idem, subiungens: ἔτι δὲ τοὺς τῶν συλλογισμῶν παντοίους τρόπους, τοὺς μὲν ἀπὸ τῶν αἰτίων λαμβάνοντας τὴν πίστιν, τοὺς δὲ ἀπὸ τεκμηρίων ὡρμημένους, πάντας δὲ ἀνελέγκτους καὶ ἀκριβεῖς, καὶ πρὸς ἐπιστήμην οἰκείους. πρὸς δὲ τούτοις τὰς μεθόδους ἁπάσας τὰς διαλεκτικὰς, τὴν μὲν διαιρετικὴν ἐν ταῖς εὑρέσεσι, τὴν δὲ ἀναλυτικὴν ἐν ταῖς ἀπὸ τῶν ζητουμένων ἐπὶ τὰς ἀρχὰς ἀναστροφαῖς. Et paulo pòst: ἐπειδὴ δὲ πολλὰ φαντάζεται μὲν ὡς τῆς ἀληθείας ἀντεχόμενα, καὶ ταῖς ἐπιστημονικαῖς ἀρχαῖς ἀκολουθοῦντα, φέρεται δὲ εἰς τὴν ἀπὸ τῶν ἀρχῶν πλάνην, καὶ τοὺς ἐπιπολαιοτέρους ἐξαπατᾷ, μεθόδους παραδέδωκε καὶ τῆς τούτων διορατικῆς φρονήσεως, ἃς ἔχοντες γυμνάζειν δυνησόμεθα τοὺς ἀρχομένους τῆς θεωρίας ταύτης, πρὸς τὴν εὕρεσιν τῶν παραλογισμῶν, ἀνεξαπάτητοι δὲ διαμένειν. καὶ τοῦτο δὴ τὸ σύγγραμμα, δι' οὗ τὴν παρασκευὴν ἡμῖν ταύτην ἐντίθησι, ψευδαρίων ἐπέγραψε, τρόπους τε αὐτῶν ποικίλους ἐν τάξει διαριθμησάμενος, καὶ καθ' ἕκαστον γυμνάσας ἡμῶν τὴν διάνοιαν παντοίοις θεωρήμασι· καὶ τῷ ψεύδει τὸ ἀληθὲς παραθεὶς, καὶ τῇ πείρᾳ τὸν ἔλεγχον τῆς ἀπάτης συναρμόσαντος. τοῦτο μὲν οὖν τὸ βιβλίον καθαρτικόν ἐστι, καὶ γυμναστικόν. ἡ δὲ στοιχείωσις αὐτῆς τῆς ἐπιστημονικῆς θεωρίας τῶν ἐν γεωμετρίᾳ πραγμάτων ἀνέλεγκτον ἔχει, καὶ τελείαν ὑφήγησιν. Hæc de Euclide & libris eius, ex Proclo.

BREVIS

BREVIS REGVLARVM ALGEBRAE DESCRIPTIO, VNA CVM DEMONSTRATIONIBVS GEOMETRICIS,

AVTORE IOANNE SCHEVBELIO.

QVVM, ut in absolutis numeris naturali quodam ordine maior sequitur minorem, ita quoq; in denominatis proportione aliqua (quorum computationem hoc libro explicare institui) fieri consentaneum sit: primùm ostendam quæ uocabula & signa, & qui ordo talium numerorum, deinde quæ & cuiusmodi sint regulæ Algebræ, rationum ualdè artifitiosarum, planum facere, ac quoad eius fieri potest, breuissimè & perspicuè docere aggrediar. Porrò harum regularũ inuentionem ascribunt Diophanto Græco scriptori, qui, ut autor est Regiomontanus in præfatione Alphragani, libris tredecim eas descripsit, atq; ut Latini REI ET CENSVS, sic Arabes regulas illas uocabulo suo appellare solent ALGEBRAS, id quod obiter indicandum erat.

NVMERATIO. CAPVT I.

CHaracteres uocabulorum seu appellationum, quibus in his regulis numeri naturali quodam ordine proportionis denominantur, sunt, φ, ꝛ, ȝ, ce, ȝȝ, ſȝ, ȝce, bſȝ, ȝȝȝ. cce, ȝſȝ, Tſȝ, ȝȝce, &c̃.

Signa præterea, + & —

CHARACTERVM EXPLICATIO.

φ. Primus character, habet appellationem numeri, sic, ut cuicunq; numero appositus sit, pro simplici is habeatur. Vt 4, apposito charactere φ, sic, 4 φ, effertur quatuor numeri, hoc est, quatuor unitates simplices. Ac præterea 13 φ, 49 φ, 486 φ, tredecim, quadraginta nouem, quadringenta & octoginta sex, item cęteri numeri, unitates simplices significabunt.

ꝛ. Secundus ordine character, appellationem habet Radicis uel Rei, sic, ut cui numero appositus sit, hac ille appellatione exprimatur. Vt 4 ꝛ, denotant quatuor radices uel res. Sic 8 ꝛ, sunt & exprimuntur octo radices.

ȝ. Tertius character, appellationem obtinet Census uel Quadrati, sic, ut numerus cui sit ascriptus talis character, hac appellatione appelletur. Vt 4 ȝ, exprimuntur quatuor census uel quadrati. Sic 87 ȝ, sunt octoginta septẽ census uel quadrati.

ce. Quartus character, repræsentat nobis numerũ cubicum, sic, ut numerus hac nota insignitus, cubi appellationem habeat. Vt 4 ce, exprimũtur quatuor cubi. Sic 49 ce, sunt quadraginta nouem cubi. Haud longe secus exprimendos reliquos characteres, si quibus erunt adiuncti numeris, censendum. Quare eorum tantum appellationibus, quid nimirum singuli significent, figura quadam repræsentatis, ui deinde aut significatione signorum + & — expressa, quorum nimirum illud, Plus & additionem: hoc uerò, Minus & diminutionem significet, quod ad numerationis descriptionem attinet, per hæc quæ hoc loco proponuntur, nunc satis manifestum erit.

A Significat

SIGNIFICANT AVTEM CHARACTERES,

φ quidem, Numerum — ℞, uerò Radicem.
ʒ, Quadratum — ce, Cubum.
ʒʒ, Quadratũ de quadrato. — ʃʒ, Surſolidum.
ʒce, Quadratum de cubo, uel contrà, Cubum de quadrato
Bʃʒ, Biſſurſolidũ ſignificat.
ʒʒʒ, Quadratum de quadrati quadrato, uel contrà, Quadratum quadrati de quadrato
cce, Cubum de cubo
ʒʃʒ, Quadratum de ſurſolido, uel contrà, Surſolidum de quadrato.
Tʃʒ, Terſurſolidum
ʒʒce, Quadratum quadrati de cubo, uel contrà, Cubum quadrati de quadrato.

Quia uerò hæ numerorum appellationes in infinitum ſeſe extendunt, cum ex multiplicatione (ut quę ſemper cõtinuari poſsit) ipſę proueniant, ne imponendis nominibus tandẽ infinitio nobis faciat negociũ, per numeros naturali ordine poſitos, cum & ipſi in infinitum creſcant, ſingulas appellationes nominabimus, ſic, ut primus character. φ: Numeri, Secundus uerò, ℞: Radicis nomẽ habeat. Tertius de de, ʒ. qui cũ ex multiplicatione radicis in ſe producatur, & primo quidem: Prima quantitas, & Pri etiam ſyllaba notata, appelletur. Quartus uerò ce quia ex multiplicatione eiuſdem radicis cum quadrato, hoc eſt, cum prima quantitate, ſecundò producitur: Se ſyllaba notata, Secunda quantitas dicitur. Sic character quintus, ʒʒ, quia ex multiplicatione radicis cum ſecunda quantitate tertiò naſcitur: Ter ſyllaba notata, Tertia etiam quantitas dicitur. Sextus eadem ratione, ſyllaba quar: Quarta. Deniq; reliqui omnes, quo ordine ſinguli naſcũtur, eo etiam ſuæ initialis ſyllabæ numero appellantur.

TYPVS QVO HAEC QVAE IAM DICTA SVNT, ſuis figuris ordine depinguntur.

Numerus	Radix	Cenſus uel Quadratus	Cubus	Quadratus de quadrato	Surſolidus	Quadratus de cubo, uel contra.	Biſſurſolidus.	Quadratus de quadrati quadrato.
φ	℞	ʒ	ce	ʒʒ	ʃʒ	ʒce	bʃʒ	ʒʒʒ
N	Ra.	Pri.	Se.	Ter.	Quar.	Quin.	Sex.	Sep.
Numerus	Radix	Prima	Secunda	Tertia	Quarta	Quinta	Sexta	Septima quantitas.

EXEMPLA NVMERATIONVM PROPOnuntur ſic.

$$44\left\{\begin{matrix}\text{ſʒ}\\ \text{quar.}\end{matrix}\right. + 11\left\{\begin{matrix}\text{ʒ}\\ \text{pri.}\end{matrix}\right. + 31\left\{\begin{matrix}\varphi\\ \text{N.}\end{matrix}\right. - 53\left\{\begin{matrix}\text{℞}\\ \text{ra.}\end{matrix}\right.$$

Exprimitur, uel 44 ſurſolidi, plus (id eſt &) 11 quadrati, plus 31 numeri, minus 53 radices, Vel 44 quartæ, plus 11 primæ plus 31 numeri, minus 53 radices. Similiter

$$25\left\{\begin{matrix}\text{bſʒ}\\ \text{ſex.}\end{matrix}\right. + 13\left\{\begin{matrix}\text{ſʒ}\\ \text{quar.}\end{matrix}\right. + 9\left\{\begin{matrix}\text{ce}\\ \text{ſe.}\end{matrix}\right. - 48\left\{\begin{matrix}\text{ʒ}\\ \text{pri.}\end{matrix}\right. - 11\left\{\begin{matrix}\text{℞}\\ \text{ra.}\end{matrix}\right.$$

Exprimi

Exprimitur 25 bissursolidi, plus 13 sursolidi, plus 9 cubi, minus 48 quadrati, minus 11 radices. Vel 25 sextæ, plus 13 quartæ, plus 9 secũdæ, minus 48 primæ, minus 11 radices.

Proinde harum regularum exempla, cum eodem modo, quo in communi negociatione aliàs monetarum, mensurarum & ponderum, atque etiam quarumlibet aliarum rerum numeri, enuncientur, his duobus exemplis positis, puto iam facile omne propositum exemplum exprimi posse, quare de enunciatione iam satis.

ADDITIO. CAPVT II.

IN additione scribantur numeri cum suis characteribus & signis, non aliter atque in communi numerorum uel physicalium minutiarum tractatione fieri consueuit, linea deinde sub ordinibus ducta, omnes unius characteris, seu appellationis numeri in unum colligantur. Quod si horum summæ tandem, unà cum charactere & signo cuiusque, sub linea, eo quo maximè collectæ sint loco, scriptæ fuerint, additio peracta erit.

EXEMPLA.

Ter.		ra.		N		Quar.		N		Pri
7	+	8	—	5		7	+	8	—	5
3	+	9	—	8		4	+	11	—	5
10	+	17	—	13		11	+	19	—	8

Quod si in uno ordine numerus fuerit, cuius characteri uel appellationi similis in reliquis ordinibus non reperitur, ille cum suo charactere & signo summæ sub linea ascribendus erit. ut,

7 qũar.	+	8	ra.	—	5	N			Item	9	ter.	
4 quar.	+	9	ter.	+	6	ra.				8	ra.	
11 quar.	+	9	ter.	+	14	ra	— 5	N		9	ter.	+ 8 ra.

Item	4	primis	+	9	N	
addendæ sunt	3	primæ	—	4	ra.	
ueniunt 7	pri.	+	9	N	— 4	ra.

Quòd si in signis fuerit aliqua diuersitas, sic quòd numerorum unius appellationis alter +, alter uero signũ — habuerit: maioris super minorem numerũ excessũ per subtractionem cognito, is cum maioris numeri signo & charactere sub linea, quemadmodum alia, scribatur. ut,

Pri.		ra.		Pri.		ra.
6	—	8	Item	6	+	8
4	+	12		4	—	4
10.	+	4		10	+	4

PROBA SEV EXAMEN.

— 2		+ 40	
	+ $2\frac{4}{9}$		+ 48
+ $4\frac{4}{9}$		+ 8	
	+ $2\frac{4}{9}$		+ 48

COMPROBATIO VEL EXAMEN OPERATIONIS.

Vt nunc comprobetur rectè ne an secus in additione operatum sit, necesse erit ut primò præparetur tabula huic negocio deseruiens, hoc modo. Accipiatur ad placitũm numerus, integer uel fractus, eo deinde radicis loco posito, eius, prout quidem exemplorum quæ comprobari debeant characteres requirunt, singulæ quantitates ordine designentur, atque notatis tandem his, unà cum radice posita, tabula, ut sequitur parata erit.

TABVLA COMPROBATIONIS.

Radix poſita.	Prima,	Secun.	Tertia,	Quarta,	Quinta,	Sexta,	Septi.	Octaua quantitas.
2	4	8	16	32	64	128	256	512
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{243}$	$\frac{1}{729}$	$\frac{1}{2187}$	$\frac{1}{6561}$	$\frac{1}{19683}$
$3\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{4}$	$42\frac{7}{8}$	$150\frac{1}{16}$	$525\frac{7}{32}$	$1838\frac{17}{64}$	$6433\frac{119}{128}$	$22518\frac{193}{256}$	$78815\frac{327}{512}$
7	49	343	2401	1637	117649	823543	5764801	40353607

Et quia tabula iam eſt confecta, exemplorum examen, rectène an ſecus computatio ſit facta, hoc modo cognoſcetur. Reſoluantur numeri denominati in ſingulis ordinibus, ſecundum unius numeri ex radicibus poſitis (eius nimirum per quem probatio inſtituitur) quantitates, in numeros abſolutos, ſumptis interim & ijs in ſingulis ordinibus, qui propriè numeri, nempe ſimplices, appellantur. Proinde qui ex additis proueniunt ſimplices numeri, in unum tamen prius collecti, ſi id collectũ, ſiue totus is numerus, ei qui ex inferiori, hoc eſt ex ſumma colligitur, æqualis fuerit: rectè te operatum ſcias, at contra ſi inæqualis: reiterandam eſſe nimirum operationem ipſo errore admoneberis. Atq; in hunc modum, ultimum quidem per radicem poſitam 2. quod uerò exemplum ipſum præcedit, per $\frac{1}{3}$ comprobatum eſſe ſcias.

SEQVITVR EXEMPLVM ALIVD.

	7 quint.		+ 8 ter.		— 4 ra.		+ 8 N			
	7 quint.		+ 5 quar.		— 11 ter.		— 11 ſe.			
14 quint.	+ 5 quar.		— 3 ter.		— 11 ſe.		4 ra.		+ 8 N	

Probatur hoc exemplum per 2.

Numeri ordinis

Primi 576 Secundi 344.

Summa 920. Atq; tot etiam unitates ſimplices, uel tantus numerus ueniet, ubi ſumma ſub linea poſita ſimili modo reſoluta fuerit.

Idem exemplum probatum per

$\frac{1}{3}$		$3\frac{1}{2}$	
$+\ 6\frac{565}{729}$ $-\ \frac{374}{729}$	$+\ 6\frac{191}{729}$	$14062\frac{23}{64}$ $13368\frac{57}{64}$	$27431\frac{1}{4}$
	$+\ 6\frac{191}{729}$		$27431\frac{1}{4}$

SVBTRACTIO CAP. III.

IN ſubtractione id quod ſubtrahitur, ſub eo à quo ſubtractio fieri debet, ordine ſcribatur, ſubducta deinde linea, ſingularum in ſubtrahendo appellationum numeri à numeris appellationum ſimilium, eius à quo ſubtractio fieri debeat, auferatur. Quod ſi tandem reſidui, unà cũ cuiuſq; charactere & ſigno, ſub linea ſuo loco poſiti fuerint, ſubtractio peracta erit. Hic tamen maximè reſpectus habeatur ſignorum + & —. nam per illa quid ſubtrahendũ ſit, & quid non, quantum deinde illud ſit, de quo ſubtractio fieri debeat, quantum fuerit initiò, & quantum ſubtractione nunc ei deſit, cognoſcitur. quæ certè omnia niſi animaduertantur: difficilis erit omnis ſubtractio, contrà uerò: nulla non facilis, ſi obſeruentur.

EXEMPLA.

Pri.		ra.		N		Ter.		ra.
7	+	8	+	14		8	+	7
3	+	5	+	7		5	—	4
4	+	3	+	7		3	+	11

Primum

Primum exemplum est facile, secundum autem, quia in eo non 5 tertiæ totæ & integrę, sed hæ, quatuor radicibus minus subtrahendæ sunt. postquam igitur 5 tertiæ integræ à superioribus subtractæ fuerint, 4 radices residuò reddendæ erunt. Quo fit, ut 11, & non 3 radices, ultra 5 tertias in residuo conspiciuntur. ut

Ter.		pri		pri		N
14	+	9		19	—	5
9	+	12		14	+	14
5	—	3		5	—	19

In his duobus exemplis superiorum memori nulla difficultas occurret. Nam cum aliquid totum & integre subtrahi non posit, nihilominus id quod maximè potest, de summa est detrahendum. quod reliquum deinde est, per diminutionum signum, —, ut communi apprehenditur notione, in debitum ponendum est, quod ipsum in priori exemplo cognosci potest. In posteriori, cum 14 exponi debeant, prius uerò 8 eiusdem appellationis, de summa exposita sint, 22 iam per signum — notanda erunt.

Pri.		N		Pri.		N.
12	—	9		12	—	4
8	—	4		8	—	9
4	—	5		4	+	5

In his duobus exemplis, cum in utroq; non 8 quantitates primæ, sed hæ in uno quidem minus 4, in altero uerò, minus 9 numeris subtrahendæ sint, 8 primis integrè subtractis, residuis tandem id quod plus æquo subtractum est, iure accedere debet. Quare in priori quidem exemplo, loco — 9, cum 4 accedant, tantum — 5, in posteriori uerò loco — 4, cum 9 accedant, + 5 N positum est.

ALIVD EXEMPLVM.

A	1056	primis	—	696	secund.
subtra.	4032	primæ	—	1008	secund.
manent	312	secundę	—	2976	pri.

Proba, sumpto radicis ualore

2		3	
— 1344	— 1344	— 9288	— 9288
+ 8064	— 1344	+ 9072	— 9288
— 9408		— 18360	

Vel facta subtractione

— 1344	— 9408	— 9288	— 18360
+ 8064		+ 9072	
— 9408	— 9408	— 18360	— 18360

Hactenus quæ in signis animaduertenda, ostendimus.

Quod si in uno ordine, uel in eo qui subtrahitur, uel in eo à quo subtrahitur, numerus fuerit, cuius characteri in altero similis non reperitur, in subtrahendo quidem numerus ille cum suo charactere, signo tamen opposito, in altero uerò ordine, omnia, hoc est, numerus, character & signum, sub linea scribantur.

EXEMPLVM.

A	4	quar.	—	5	radi.
subtrahantur	2	quar.	+	9	N
manent	2	quar.	—	9 N — 5	ra.

ALIA DVO.

8 pri.	4 quar.	+ 8 ra.
4 ter.	5 quar.	— 8 N
8 pri. — 4 ter.	1 quar + 8 ra.	+ 8 N

ALIVD EXEMPLVM.

Sep.	sex.	quin.			Ter	se.	primę quan.	
8.	+ 9	+ 11	+ 14 quar.		— 4	— 8	— 4	
5	+ 12	— 9	+ 10 ra.		+ 8	— 4	— 9	— 6 N
3 sep.	— 3 sex.	+ 20 qn.	+ 14 quar.	— 10 ra.	— 12	— 4	+ 5	+ 6 N

PROBAE NVMERVS, AC RADICIS VALOR,

esto 2

+	~~4208~~	+	1894
+	~~2314~~		
		+	1894

COMPROBATIO, VEL EXAMEN OPERATIONIS.

In examine subtractionis utere tabula in additione à nobis proposita, contrario tamen usu, nam quod illic additur, hic subtrahitur. Necesse igitur, ut quantum fuerit numerorum subtrahendi, secundum suorum characterum appellationem resolutione facta, tantundem de alterius ordinis numeris, eodem modo resolutis, subtrahatur. Quod si tandem quod relinquitur residui numeri sub linea solutioni responderit, ut in hoc ultimo præmisso exemplo apparet, non est quod te hallucinatum fuisse subtractione existimes.

Idem ultimum exemplum examinatum, radicis ualore existente $3\frac{1}{2}$

Singulorum characterum numeri, pro ualore radicis positę soluti, sunt, in ordine

quidem à quo subtrahitur,		$\frac{512}{6561}$	—	$\frac{64}{81}$
subtrahendo uerò	+	$3\frac{2876}{6561}$	—	$7\frac{17}{81}$
residuo deinde	+	$6\frac{4206}{6561}$	—	$3\frac{460}{729}$

hoc est,

—	$\frac{4672}{6561}$	+	$3\frac{66}{6561}$
—	$3\frac{4738}{6561}$	—	$\frac{4672}{6561}$
+	$3\frac{66}{6561}$		

Potest proba subtiliori etiam modo institui, ijs nimirum, qui post illud, quo dicitur, Hoc est, ponuntur, numeris neglectis. Sed per hanc iam satis.

MVLTIPLICATIO. CAP. IIII.

IN multiplicatione, scriptis ordinibus, linea item sub ijs ducta, ut solet, multiplicentur numeri singulorum characterum superioris, cum singulis characterum numeris ordinis inferioris, atq; productis posthac singulis legitimè in unum collectis, si cuiq; producto tandem suus proprius character & signum, quæ sic multiplicando sortiuntur numeri, adscripta sint, multiplicatio peracta erit. In hac autem numerorum collectione animaduertendum est, qualem characterem, quale item signum, quilibet productus numerus sortiatur. Quantum igitur ad characterem pertinet, hoc est, ut sciatur, qui character sit ascribendus procreato ex multiplicatione numero, ex hac subiecta tabula intelligi poterit.

TABVLA MVLTIPLICATIONIS, QVANTVM ad characteres.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
N	Ra.	Pri.	Secun.	Ter.	Quar.	Quin.	Sex.	Sep.	Octa.	No.	De-

cima &cæ. quanti.

COMPOSITIO TABVLAE.

Scribantur characteres singuli ordine quo ipsi proueniunt & numerantur, sic, ut character N. primus, locum primũ: Radix uerò character secundus, secundum: reliqui deinde omnes naturali ordine sua loca occupent. Super primo deinde charactere, N scilicet, figura nihili o posita, reliquis omnibus naturali numerorum ordine, ab unitate incipiendo, signatis, tabula confecta erit, cuius usus talis est.

VSVS TABVLAE.

In multiplicatione, duobus duorum characterum numeris inter se multiplicatur, qui super horum numerorum characteribus in prescripta tabula reperiuntur numeri, hi simul aggregati, summa sua characterem producti in tabula ostendent.

Porrò quod ad signa + & — attinet, quale scilicet unicuiq; producto sit adnotandum, communis notitia atq; intelligentia, ex sequentium exemplorum descriptione, expeditam nobis & promptam rationem suppeditabit.

SEQVVNTVR EXEMPLA.

8 pri.	8 N	9 se.	29 quar.
4 N	8 N	8 ra.	9 quar.
32 pri.	64 N	72 ter.	261 No.

Initium ordinis numerorum semper repræsentare plus admonendus est lector.

ALIA EXEMPLA.

		8 pri.	+	9 N
		7 pri.	+	4 N
		32 pri.	+	36 N
56 ter.	+	63 pri.		
56 ter.	+	95 pri.	+	36 N

		8 pri.		9 N
		8 pri.	+	9 N
		72 pri.	+	81 N
64 ter.	+	72 pri.		
64 ter.	+	144 pri.	+	81 N

In his duobus exemplis nulla est difficultas, in utroq; enim omnes superioris cum omnibus numeris ordinis inferioris multiplicandi sunt. Quare sicut signum + ad omnes, tam multiplicandi quàm etiam multiplicantis ordinis, numeros est positũ, ita etiam singuli ex multiplicatione producti numeri ex equo eodem signo + notentur. Hinc regulam colligunt in Algebricis exercitati, Quòd + cum + multiplicatum, + producat, quæ est notanda.

ADHVC ALIA EXEMPLA.

7 pri.	+	4 ra.
		9 ra.
63 se.	+	36 pri.

ALIA EXEMPLA.

7 pri.	—	4 ra.
		9 ra.
63 se.	—	36 pri.

		9 ra.
7 pri.	—	4 ra.
63 se.	—	36 pri.

Primũ exemplum est facile, cũ in eo tam 7 primæ quantitates quàm 4 radices, cum 9 radicibus multiplicari debeant. Secundi autẽ, & tertij exemplorũ ratio, cũ sit paulò inuolutior, explicanda communi quadam (quæ uersatur in huiusmodi rebus) notitia esse uidetur. In secundo, 7 primæ solide ac integre cum 9 radicibus, in tertio,

tertio, 9 radices cum 7 itidem integris primis multiplicentur: hæ tamen integræ cū non sint, sed quandam decesſionem perpeſſę sint priuatiuo signo —, necesse est, ut in multiplicatione tantum decedat, quantum non legitimè acceſſit, priori summæ procreatæ ex multiplicatione: atq; hic quidem, quantum 9 radices cum 4 radicibus: illic uerò, 4 radices cum 9 radicibus multiplicatę producunt, id quod per signū diminutionis — fieri debet, sic, — 36 pri. — 36 pri. Ex quo ratio intelligi potest, propter quam, si multiplicetur + cum —, uel contrà — cum +: non plus, sed minus producatur, quod & ipsum regula quadam proposuerunt in Algebricis exercitati, quæ est notanda.

ALIVD EXEMPLVM.

8	pri.	— 9	N			
8	pri.	— 9	N			
64	ter.	— 72	pri.			
		— 72	pri.	+	81	N
64	ter.	— 144	pri.	+	81	N

3 8 3
cum 3 8 3 produ.
146689
æqu.
146689

Quomodo 8 primæ cum 8 pri. ut totum cum toto multiplicari debet, item quomodo 8 primæ — 9 N. cum 8 primis, Poſtremò 8 primæ etiam cum 8 primis — 9 N. suprà oſtendimus. At uerò cum in hoc exem lo multiplicandi ratio minus sit perſpicua, eam explanare obiter hoc loco uolui, ut intelligatur scilicet cauſſa etiam, propter quam, signo — notatis numeris, non minus, sed plus procreetur, hoc quod diuersum quid, quàm in superioribus hactenus eſt habitum, eſſe solet. Multiplicentur igitur 8 primæ — 9 N. ut dictum eſt, cum 8 primis, & producentur 64 ter. — 72 pri. Sed quia non cum 8 primis integris, uerùm cū ijs, detractione, 9 N. imminutis, multiplicatio instituí debet, plus quàm par erat, priore multiplicatione eſt procreatum, quare ut conueniens producatur numerus, ratione defectus in multiplicante, 8 primæ nouies ex hoc producto subtrahendæ erunt. Atqui rurſum, cum non 8 primæ, sed hæ minus 9 N. multiplicari debeant, 9 N rurſus nouies addendæ sunt. quod tum fit, quando minus multiplicatur per minus (id quod tertiò ratione signorum, + & — in multiplicatione obſeruari debet) Quo demum reddito, uerus productus numerus apparebit.

Tribus igitur regulis his suprà propositis, omnis multiplicatio, ratione quidem signorum + & — abſoluitur: quæ tamen, quia prima & ultima coincidunt, ad duas regulas reduci poſſunt.

Prima.

Si fuerint eadem signa multiplicantis & multiplicandæ quantitatis, procreatus ex multiplicatione numerus notatur signo affirmatiuo +.

Secunda.

Si fuerint signa diuerſa: notatur productus ex multiplicatione numerus signo priuatiuo uel negatiuo —.

POTEST ETIAM ALITER HVIVS EXEMPLI PRAECEdentis multiplicatio institui.

Multiplicentur primò 8 pri. — 9 N cum 8 primis una, poſtea etiam cum 9 N altera quantitate. Subtrahatur deinde, per caput præcedens, poſterius productum à priori, & relinquetur uerus ex multiplicatione productus numerus, ut sequitur.

8 pri.

8 pri. 9 N
cum 8 pri.
64 ter. — 72 pri.

8 pri. — 9 N
cum 9 N
72 pri. — 81 N

Productorum subtractio.

64 ter. — 72 pri.
72 pri. — 81 N
64 ter — 144 pri. + 81 N

SEQVITVR HVIVS REI EXEMPLVM IN NVMEris rationalibus.

17 — 6, hoc est 11
cum 9 — 4 cum 5

153 — 54
— 68 + 24
153 — 122 + 24

hoc est, 55. Et tantum etiam sunt 11. quinquies, uel undecies quinque, ut quidem multiplicatione patet, quod erat ostendendum.

ALIVD MVLTIPLICATIONIS EXEMPLVM.

9 pri. + 8 N — 3 ra.
7 se. — 4 ter. — 8 pri.
63 quar. + 56 se. — 21 ter.
— 36 qn. — 32 ter. + 12 quar.
— 72 ter. — 64 pri. + 24 se.
75 quar. + 80 se. — 36 qui. — 125 ter. — 64 pri.

PROBAE NVMERVS AC RADICIS VALOR sit $\frac{1}{3}$

+ 8
— $5\frac{35}{81}$
— $\frac{55}{81}$
— $5\frac{35}{81}$

Potest etiam, cum iam sciatur, quale signum cuiuis producto sit ascribendum, multiplicatio ad uulgarem modum sic institui.

9 pri. + 8 N — 3 ra.
7 se. — 4 ter. — 8 pri.
— 72 ter. — 64 pri. + 24 se.
— 36 quin. — 32 ter. + 12 quar.
63 quar. + 56 se. — 21 ter.
75 quar. + 80 se. — 36 quin. — 125 ter. — 64 pri.

PROBAE NVMERVS AC RADICIS VALOR sit 2

+ 38
— 40
— 1520
— 1520

COMPROBATIO VEL EXAMEN OPERATIONIS.

Proba hic non aliter instituitur atque in superioribus, nempe per resolutionem denominatorum numerorum. Nec à superiori differt, nisi quòd hic numerus absolutus unus cum altero multiplicetur, cum illic simul additi, uel unus ab altero subtractus sit. Tabula igitur, quam in additione præscripsimus, huc etiam assumenda erit, & ad multiplicationis resolutionem adhibenda.

DIVISIO. CAP. V.

SI numeri diuidendi character ſemper maior eſſet charactere ſui diuiſoris, uno item charactere diuiſor ipſe ſignaretur, ſimpliciſsima & faciliima eſſet omnis diuiſio. Etenim numero uel numeris diuidendi ſingulis in numerum diuiſoris diuiſis, characteris deinde diuiſoris numero (quo ſcilicet in multiplicationis tabula ſignatur) à numero, uel numeris characterũ diuidẽdi ſingulis ſubtracto, diuiſio utiq; peracta eſſet. Diuiſio enim ſic per exeuntes: ipſos numeros, ſubtractio uerò numerorũ, quibus ſignantur in tabula characteres, ubi reſiduus, uel reſidui numeri ſinguli in tabulam multiplicationis miſſi fuerint: horum numerorũ denominationes ſeu characteres offeret.

In ſignis porrò nulla fit planè mutatio. Quæ enim ſigna habet ipſe diuidendus, illa eadem etiam in exeunte ponuntur.

EXEMPLA SVNT.

Diuidantur 9 ra. (exe. 3 ra   Item 10 ſe. (exe. $3\frac{1}{3}$ N
in 3 N   in 3 ſe.

ALIA EXEMPLA.

8 ra. in 9 ra.   Item 10 ſe. in 3 ra.
exeunt $\frac{8}{9}$ N   exeunt $3\frac{1}{3}$ pri.

ADHVC ALIA.

9 pri. + 4 ra. in 3 ra.   Item 18 ter — 12 pri in 4 ra.
exeunt 3 ra + $1\frac{1}{3}$ N   exeunt $4\frac{1}{2}$ ſe. — 3 ra.

Sed quia non rarò contingit, quòd diuiſoris character maior quàm diuidendi character ſit, pluribus etiam characteribus quàm uno, ſignetur. Alia ratione igitur numerus qui proponitur, diuidendus erit. Nam tum diuiſor numerus diuidendo ſubſcribi, ac uirgula interponi atq; interduci oportet.

Vt diuidere uolens, 8 quar. in 2 pri. — 4 N
Item 8 pri. — 9 ra. in 4 ra. + 3 N.

Diuiſores ſuis diuidendis tantum, ut præcipitur, ſubſcribat: ac uirgulis deinde interiectis, diuiſionem abſolutam eſſe ſciat.

EXEMPLA.

Diuiden.   Diuiſor   Diuiden.   Diuiſor
8 quar. in 2 pri. — 4 N   Item 8 pri. — 9 ra. in 4 ra + 3 N

Exiens   Exiens

$\dfrac{8 \text{ quar}}{2 \text{ pri.} — 4 \text{ N}}$ $\dfrac{8 \text{ pri.} — 9 \text{ ra.}}{4 \text{ ra.} + 3 \text{ N}}$

ALIA EXEMPLA.

9 N in 3 ra.   8 ra. in 4 pri.

exeunt $\dfrac{3 \text{ N}}{1 \text{ ra.}}$ exeunt $\dfrac{8 \text{ ra.}}{4 \text{ pri.}}$ uel $\dfrac{2 \text{ N}}{1 \text{ ra.}}$

Afferri autem huc neceſſe eſt tabulam, in multiplicatione, pro characteribus productorum habendis, expoſitam. Nam quemadmodum in multiplicatione, numeri characterum eorum qui inter ſe multiplicantur, pro characteribus productorum habendis, addendi: ſic in diuiſione iam, ut habeatur character exeuntis unius, diuiſoris ſcilicet character de numero characteris ipſius diuidendi ſubtrahi debet. Per reſiduum enim numerum ſtatim, in tabula illa, exeuntis character manifeſtabitur: cum is nimirum ſit, cui eſt numerus reſiduus ſuprà poſitus. Et hæc de integris hactenus pro inſtituto noſtro ſatis nos dixiſſe opinor.

Sequuntur

SEQVVNTVR REGVLAE QVAS OBSERVARI IN FRACTIONIBVS oportet.

ENVNCIATIO. CAP. I.

QVantum ad enunciationem fractionum seu minutiarum, nulla est hic difficultas, cum hæ non aliter atque in communi minutiarum tractatione enuncientur, nisi quòd etiam uocabula seu characteres suis appellationibus efferantur, & horum quidem primus, si duo fuerint, numeratorem: alter deinde, ipsum denominatorem sequatur. Quod si unus tantum fuerit minutiæ character, ad minutiæ numeratorem illum pertinere scias. Vt minutia $\frac{3\ \text{N.}}{8\ \text{ra.}}$ enunciatur, tres numeri diuisi in octo radices. Item $\frac{7}{9}$ pri. sunt septem primæ diuisæ in 9. Simili modo alias minutias omnes efferri oportet.

ADDITIO ET SVBTRACTIO. Caput II.

PRo additione, addantur fractiones, prout communis earum tractatio requirit. Qui deinde characteres numeratoris & denominatoris collectæ minutiæ sint, ostendet tabula in multiplicatione de integris exposita. Idem usuuenit etiam in subtractione, in qua itidem una minutia de alia subtracta, characteres residuæ minutiæ tabula integrorum suprà proposita offeret.

EXEMPLA ADDITIONIS.

$$\begin{array}{ccc} & 31\ \text{pri.} & \\ \hline 15\ \text{pri.} & & 16\ \text{pri} \\ \frac{3\ \text{N}}{4\ \text{ra.}} & \text{ad} & \frac{4\ \text{ra.}}{5\ \text{pri.}} \\ \hline & 20\ \text{se.} & \end{array} \qquad \text{Item} \qquad \begin{array}{ccc} & 15\ \text{pri.} + 14\ \text{ra.} & \\ \hline 15\ \text{pri.} & & 14\ \text{ra.} \\ \frac{5}{6}\ \text{pri.} & \text{ad} & \frac{7}{8}\ \text{ra.} \\ \hline & 18\ \text{N} & \end{array}$$

ALIVD EXEMPLVM.

$$\frac{48\ \text{N}}{7\ \text{pri.}} \quad \text{ad} \quad \frac{48\ \text{N}}{12\ \text{ra.} - 3\ \text{pri.}} \quad \text{uen} \quad \frac{192\ \text{pri.} + 576\ \text{ra.}}{84\ \text{se.} - 21\ \text{ter.}}$$

ADHVC ALIVD.

$$\frac{4}{9}\ \text{N} \quad \text{ad} \quad \frac{1}{9}\ \text{pri.} \quad \text{ue.} \quad \frac{1\ \text{pri.} + 4\ \text{N}}{9}$$

ALIVD.

$$\frac{9\ \text{ra.} + 2\ \text{pri.}}{36\ \text{se.}} \quad \text{ad} \quad \frac{21\ \text{ter.} - 8\ \text{pri.}}{36\ \text{se.}} \quad \text{ue.} \quad \frac{21\ \text{ter.} + 9\ \text{ra.} - 6\ \text{pri.}}{36\ \text{se.}}$$

Vel in minimis, quantum ad numeros & characteres, ueniunt.

$$\frac{7\ \text{se.} + 3\ \text{N} - 2\ \text{ra.}}{12\ \text{pri.}}$$

EXEMPLA SVBTRACTIONIS.

$$\begin{array}{c} 15\ quar. \\ \hline \dfrac{\dfrac{16\ quar.}{4\ ra.}}{5\ pri.}\quad de\quad \dfrac{\dfrac{31\ quar.}{31\ se.}}{20\ ter.} \\ \hline 20\ quin. \end{array} \qquad Item\ \dfrac{15\ pri.}{\frac{5}{6}\ pri.}\ de\ \begin{array}{c} 14\ ra. \\ \hline \dfrac{15\ pri. + 14\ ra.}{\dfrac{15\ pri. + 14\ ra.}{18\ N}} \\ \hline 18\ N \end{array}$$

Vel in minimis, &cæ.

$$\frac{3\ N}{4\ ra.} \qquad - \qquad \frac{7}{9}\ ra.$$

ALIVD EXEMPLVM.

$$\frac{48\ N}{12\ ra. - 3\ pri.}\quad de\quad \frac{232\ ra. + 576\ N}{84\ pri. - 21\ se.}\quad uel\ de\quad \frac{48\ N}{7\ pri.}$$

Sunt duæ ſubtractiones, manent autem, ratione quidem prioris

$$\frac{6912\ ra. + 312\ se. - 2976\ pri.}{63\ qr. + 1008\ se. - 504\ ter.}\quad poſte.\ uerò\quad \frac{576\ ra. - 480\ pri.}{84\ se. - 21\ ter.}$$

Vel manet ratione prioris

$$\frac{576\ N - 104\ ra.}{84\ pri. - 21\ se.}\quad quod\ probari\ poteſt.$$

OPERATIO SVBTRACTIONIS PRIORIS.

$$\begin{array}{c} 6912\ ra. + 312\ se. - 2976\ pri. \\ \hline 4032\ pri. - 1008\ se. \qquad 1056\ pri. + 6912\ ra. - 696\ se. \\ \hline \dfrac{48\ N}{12\ ra. - 3\ pri}\quad de\quad \dfrac{232\ ra. + 576\ N}{84\ pri. - 21\ se.} \\ \hline 63\ quar. + 1008\ se. - 504\ ter. \end{array}$$

Poſterioris ſubtractionis calculus quia eſt facilis, ideo etiam relinquitur.

ALIVD EXEMPLVM.

$$\frac{8\ pri. + 4\ ra.}{9\ se}\quad de\quad \frac{9\ se.}{8\ pri. - 4\ ra.}\quad ma.\quad \frac{81\ quin. - 64\ ter. + 16\ pri.}{72\ quar. - 36\ ter.}$$

ADHVC ALIVD.

$$\frac{9\ pri. + 8\ ra.}{2\ se. - 6\ N.}\quad de\quad \frac{11\ se. + 16\ pri. +}{2\ se. - 6\ N}\ 8\ ra.\quad ma.\quad \frac{11\ se. + 7\ pri}{2\ se. - 6\ N}$$

MVLTIPLICATIO ET DIVISIO.

Caput III.

PRo multiplicatione, multiplicentur numeri, numeratores ſcilicet & denominatores, prout in communi tractatione id fieri ſolet, inter ſe: productorum deinde characteres, quem quiſq; ſortiatur, dabit tabula ſuperius pro hac re expoſita. Idem fit etiam in diuiſione, ubi itidem una minutia in aliam primò, ut moris eſt, diuiſa, numerorum exeuntium characteres ex ſuperioribus petendi erunt.

EXEMPLA MVLTIPLICATIONIS

$$\frac{2\ ra.}{5\ pri.}\ cum\ \frac{8\ N}{9}\qquad Item\qquad \frac{6\ pri. + 8\ N}{9\ ra.}\ cum\ \frac{15\ ra.}{8\ N}$$

$$produ.\ \frac{16\ ra.}{45\ pri.}\qquad pro.\ \frac{15\ pri. + 20\ N}{12\ N}$$

ALIVD EXEMPLVM.

$$\frac{7\ se. - 8\ pri.}{3\ ra. + 4\ N.}\quad cum\quad \frac{4\ ter. + 5\ ra.}{7\ se. - 8\ pri.}$$

produ

producuntur $\frac{4\ ter. + 5\ ra.}{3\ ra. + 4\ N.}$

ADHVC ALIVD.

$$\overline{28\ sex. + 35\ ter. - 32\ quin. - 40\ se.}$$

$$\frac{7\ se. - 8\ pri.}{3\ ra. + 4\ N} \quad de \quad \frac{4\ ter. + 5\ ra.}{5\ se. - 8\ pri.}$$

$$\underline{\quad 15\ ter. - 4\ se. - 32\ pri. \quad}$$

ALIVD.

$$\frac{7\ ter. + 12\ N}{8\ pri.} \quad cum \quad \frac{7\ ter. - 12\ N}{8\ pri.}$$

$$produ.\ \frac{49\ sep. - 144\ N}{64\ ter.}$$

ADHVC ALIA.

$\frac{7\ pri.}{8\ ter}$ cũ 4 ra. 8 — N. Item $\frac{7\ pri. + 8\ ra.}{5\ se. - 12.\ N}$ cum $\frac{4\ ra.}{5\ pri.} - 8\ N.$

produ. $\frac{7\ se. - 14\ pri.}{2\ ter.}$ pro. $\frac{32\ pri. - 280\ ter. - 292\ se.}{25\ quar. - 60\ pri.}$

Est huius secundæ multiplicationis duplex operatio. Vna quidem, ut ante multiplicationem, — 8 N in multiplicante, ad eandem cum 4 radicibus reducantur denominationẽ. Eritq; tum multiplicationis huius modus, qui est superiorum exemplorũ. Altera uerò, ut sicut duę sunt in multiplicante diuersæ inter se quantitates, sic etiam duę instituantur multiplicationes. Vna quidem cum $\frac{4\ ra.}{5\ pri.}$, altera deinde cũ — 8 N, & quod secũdò producetur, id à priori subtrahatur, & residuum producta ex multiplicatione minutiam manifestabit: id quod quiuis ex communi notitia deprehendere potest.

EXEMPLA DIVISIONIS.

Diuidan. $\frac{2\ N}{3\ ra.}$ in $\frac{8\ ra.}{9\ pri.}$ uel cont. $\frac{8\ ra.}{9\ pri.}$ in $\frac{2\ N}{3\ ra.}$

exeunt in minimis $\frac{3}{4}$ N, exit $1\frac{1}{3}$ N

ALIVD EXEMPLVM.

$\frac{15\ se. + 20\ ra.}{12\ ra.}$ diuidantur in $\frac{6\ pri. + 8\ N}{9\ ra.}$

exeunt $\frac{45\ se. + 60\ ra.}{24\ pri. + 32\ N}$

ALIVD EXEMPLVM.

$\frac{7\ se. \quad 14\ pri.}{2\ ter.}$ in $\frac{7\ pri.}{8\ ter.}$ exe. 4 ra. — 8 N

Sic $\frac{7\ se. - 14\ pri.}{2\ ter.}$ in 4 ra. — 8 N

exe. $\frac{7\ se. - 14\ pri.}{8\ qr. - 16\ ter.}$ hoc est $\frac{7\ se}{8\ ter.}$ uel in minimis $\frac{7\ N}{8\ pri.}$

REGVLA PROPORTIONVM.

Regulam de proportionibus, quæ nunc recto ordine sequi deberet, cum quiuis partim ex communi ipsius descriptione, partim ex ijs quæ hactenus sunt commemorata, quomodo hæc in *integris* atq; etiã in fractionib. tractari debeat, facilè cognoscat: Lectori satis me facturũ uno duntaxat atq; altero exemplo sum opinatus.

EXEMPLA AVTEM SVNT huiusmodi.

Primum, 6 N alicuius rei ualent 3 primis aureorum, quanti 7 ra. + 1 pri. eiusdem rei.

Facit $\frac{7 \text{ se.} + 1 \text{ ter.}}{2\ N}$

Secun. 6 ra. ualent 9 pri. aureorum, quantum emitur 4 se. — 2 ra. au.

Facit $\frac{8 \text{ pri.} - 4\ N}{3\ N}$

Tertium, 3 ra. + 4 N ualent 8 se. + 4 pri. quanti 8 ter. — 4 ra.

Facit $\frac{64 \text{ sex.} + 32 \text{ quin.} - 32 \text{ ter.} - 16 \text{ se.}}{3 \text{ ra.} + 4\ N}$

Vel quantum emitur 8 ter. — 4 ra. aure.

Facit $\frac{6 \text{ ter.} + 8 \text{ se.} - 3 \text{ ra.}}{2 \text{ pri.} + 1 \text{ ra.}} - 4\ N$

HVIVS EXEMPLI EXAMEN.

Quantitates proportionales, quantum ad partem priorem,

Prima,	secunda,	tertia,	quarta,
3 ra. + 4 N ,	8 se. + 4 pri. ,	8 ter. — 4 ra. ,	$\frac{64 \text{ sex.} + \&c.}{3 \text{ ra.}}$

RESOLVTAE SECVNDVM VALORES QVANTITATVM.

9600

2) 10 80 120 960

9600

$-\frac{2000}{2187}$

3) $+5$ $+\frac{20}{27}$ $-\frac{100}{81}$ $-\frac{400}{2187}$

$-\frac{2000}{2187}$

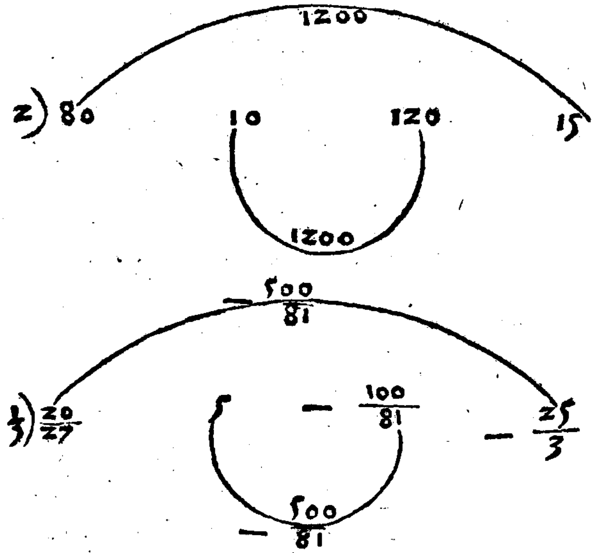
Quan-

Quantitates proportionales, quantum ad partem posteriorem.

Prima, secunda, tertia, quarta,

8 ſe. + 4 pri. , 3 ra. + 4 N , 8 ter. — 4 ra. , $\frac{6 \text{ ter.} + 8 \text{ ſe. \&cæ.}}{2 \text{ pri.} + 4 \text{ ra.}}$

RESOLVTAE SECVNDVM VALORES QVANTITATVM.



PROBATIO SEV EXAMEN.

Probantur huius regulę exempla per numerũ loco radicis pro arbitrio ſumptũ, ſi per eius quantitates, ſingulæ propoſiti exempli quantitates ſolutæ fuerint. Hoc autem apparet in exemplo præmiſſo ultimo, cuius quidem numeros characterum ſingulos, primò per numerum binarium, ſecundò deinde per tertiam unitatis partem ſolutos fuiſſe uides.

SIMILI MODO ET IN FRACTIONIBVS EXEMPLA proponi poſſunt.

$\frac{3}{4}$ ra. ualent $\frac{4}{5}$, quanti $\frac{1}{3}$ ſe. Facit $\frac{16 \text{ N}}{45 \text{ pri.}}$

$\frac{2}{3}$ ra. ualent $\frac{4}{9}\frac{\text{pri.}}{\text{N}}$ quan. $\frac{9}{13}\frac{\text{N}}{\text{ſe.}}$ Facit $\frac{6}{13}\frac{\text{N}}{\text{pri.}}$

NVNC DE AEQVATIONIBVS,

QVAE IN SOLVENDIS EXEMPLIS, MVLTIfariam ſeſe offerunt, dicendum erit.

AEquatio, ut hoc loco ſumitur, prout etiam ipſius uocabuli ἔτυμον indicat, eſt, ubi duæ res uel quantitates inter ſe æquales eſſe proferuntur. Et quoniam per has Algebræ regulas obſcura numerorum explicantur ænigmata, quæ quidem ubi ſecundum conditiones ſuas atq; hypotheſes, per has regulas examinata fuerint, accidit tandem, ut aliquot quantitates, unà cũ ſuis numeris, inter ſe æquentur. Quæ quantitatum collatio

collatio, cum prima fronte obscura & minus perspicua appareat, ut planius, & clarioribus uerbis, tanquam ob oculos, ponatur, necesse erit.

Proinde multæ licet sint æquationes ac infinitæ quodammodo, cum diuersæ propositorum ænigmatum supputationes subinde aliam atque aliam postulent, tres nihilominus tamen ex his, priores atque etiam præcipuas (cum quod nostra tractatio non plures requirat, tum etiam quod tribus ijs perceptis ac cognitis, facile reliquas etiam constituere, & ijs cõmodè uti quispiam posit) in præsentia ordine describemus. EST ITAQVE PRIMA AEQVATIO in qua unius quantitatis uel characteris numerus unius characteris numero æquatur. SECVNDA VERO ET TERTIA AEQVATIONES sunt, ubi tribus characteribus consignatis numeris, illic quidẽ naturali eorũ ordine, hic uerò iam uno, iam duobus uel pluribus, obseruato ordine interrupto, omissis characteribus, numeri duorum uni, uel contrà, unius characteris numerus duobus ęquatur. Et de his tribus nunc deinceps ordine dicemus, & primò quidem de processu ęquationis primæ.

AEQVATIO PRIMA.

Prima æquatio est, ubi duæ quantitates uel duo numeri, diuersis characteribus signati, inter se æquales esse proferuntur. Diuiditur in hac, ut regula de proportiõibus pręcipit, minoris uel debilioris characteris numerus, in numerũ characteris maioris seu potentioris. Quia autẽ numerus exiens modò ipsius radicis, modò quantitatis cuiusdã ualorem exprimit, ubi radicis ualorẽ expresserit, quæstioni tũ statim satisfactũ erit, atque omnia peracta. Quod si fuerit ualor cuiusdã quãtitatis, numeri exeuntis radix inuestiganda, atque per inuestigatam illam tandem quæstioni respondendum erit. Huius autem æquationis demonstratio & fundamentum est ipsa de Proportionibus regula, Radicum deinde inuentionis tractatio, ut quę ambo in communi numerorum supputatione plerumque demonstrari solent.

SEQVVNTVR EXEMPLA.

8 radices		16 N.			2
9 primæ	æquantur	18 ra.	quot unitatibus æquatur		2
6 secundæ		24 pri.	una radix.	Facit	4
4 quintæ quantitates.		12 quar.			3

Hæc nunc per resolutionem examinari poterunt.

ALIA EXEMPLA.

8 primæ		32 N		2
9 se.	æquantur	36 ra.	Facit una radix	2
6 ter.		384 ra.		4
4 sex.		108 ter.		3

ADHVC ALIA.

$8\frac{1}{2}$ pri.		34 N		2
$9\frac{1}{2}$ se.	æquantur	38 ra.	Facit una radix	2
$6\frac{3}{4}$ ter.		432 ra.		4
$4\frac{2}{3}$ sextæ.		126 ter		3

Sic alia huius æquationis exempla præscribi possunt atque solui etiam, ut præcipitur.

Sequuntur

SEQVVNTVR NVNC QVAEDAM AENIGMATA SEV QVAESTIONES, QVORVM solutiones tandem hanc primam æquationem requirunt.

Primum. Inueniendus eſt numerus, à quo primò eius $\frac{1}{4}$, de reſi duo deinde $\frac{2}{5}$ ſubtractis, 13 tandem, uel 27 maneant.

Facit $28\frac{8}{9}$ uel 60

PRO HVIVS ATQVE ETIAM OMNIVM SEQVENtium, ac aliorum quæ fortè proponi poſſunt, exemplorum tractatione, ſequitur Canon quidam generalis.

In omnibus exemplis quæ per has Algebræ regulas ſolui debent, ὡς καθόλου, loco eius qui quæſtioni ſatisfacere debeat numeri, Radix ſeu una res, tanquam aliquid id eſſe de quo quæritur ſignificans, ponenda eſt: ea deinde, ac ſi uerus ſolutionis numerus eſſet, ſecundum exempli hypotheſes examinata, in fine tandem id quod uenire debeat, numerus ſcilicet quæſtionis uerus, ſeſe offeret, quare duo æqualia inter ſe. Sed quia hoc quod ultimò uenit, cum propter inuſitatos huius regulæ characteres quibus exprimitur, non tam perſpicuum ſit, ut promptè intelligi poſsit, ulteriori operatione opus erit, quæ nimirum per diuerſos operationum canones abſoluitur. Cuius rei exemplum eſto tale.

Quis eſt numerus, cuius una tertia quater ſumpta, 11 faciat?

Hoc exemplum talem habet ſupputationem. Loco numeri, ut dictum eſt, cuius una tertia, & reliqua, ponatur 1 radix. Et quia exemplum habet, cuius una tertia quater ſumpta, 11 faciat, de radice poſita una tertia accipienda, atq; accepta, mox ea quater ſumenda erit. Veniunt autem ſic $\frac{4}{3}$ ra. quæ cum ex hypotheſi 11 eſſe debeant, erit unum alteri æquale, ex quo dicta eſt æquatio. Cadit autem in æquationem illam quæ iam deſcripta à nobis eſt. Numerus igitur characteris debilioris in numerum ſignificantioris diuidendus, ac per exeuntem tandem quæſtioni reſpondendum erit. Veniunt autem $8\frac{1}{4}$, numerus de quo querebatur. Quod nunc examinari poteſt in hunc modum.

EXEMPLI EXAMEN.

Numerus ille de quo quæſtio erat, ſunt $8\frac{1}{4}$. Et quia eius una tertia, $2\frac{3}{4}$ ſcilicet quater ſumpta, 11 faciunt, operatio bona eſt, uerus etiam numerus inuentus.

PROCESSV IGITVR NVNC, QVI GENERALITER in omnibus exemplis ſeruari debet, præmiſſo, primò poſiti exempli operatio ſic ſe habebit.

Ponatur numerum illum de quo quæritur, eſſe 1. ra. cuius nunc $\frac{1}{4}$,
nimirum $\frac{1}{4}$. ra. ſubtracta
manent $\frac{3}{4}$. ra. atq; de his tandem
$\frac{2}{5}$ eius, quæ ſunt $\frac{3}{10}$ ra. ſubtractis
manent $\frac{9}{20}$ ra.
13 uel 27 N æquales.

Facta igitur diuiſione, ut præceptum eſt, debilioris characteris numeri in numerum characteris ſignificantioris, ueniunt radicum ualores ut poſiti ſunt, $28\frac{8}{9}$ ſcilicet reſpectu 13, 60 deinde reſpectu numeri 27. Quod nunc quidem de utroq; probari ſeu examinari poterit.

EXEMPLVM SECVNDVM.

Diuidantur 40 in tres partes ſecundum rationem Subſuperbipartientem tertias continuatas.

Facit $7\frac{17}{49}$ $12\frac{12}{49}$ $20\frac{20}{49}$.

OPERATIO.

Eſto	1 ra.	prima	
quare	$1\frac{2}{3}$ ra.	ſecunda	
ac	$2\frac{7}{9}$ ra.	deinde, tertia pars erunt.	
Summa igitur	$5\frac{4}{9}$ ra.	æquales	40. N

POTEST OPERATIO ETIAM INSTITVI, INCIPIENDO A' NVMEro ſeu parte proportionali media, uel ultima etiam, ſi placeat, ut ſequitur.

Prima	$\frac{3}{5}$ ra.		$\frac{9}{25}$ ra.		
Secunda	1 ra		$\frac{3}{5}$ ra.		
Tertia pars	$1\frac{2}{3}$ ra.		1 ra.		
Summa	$3\frac{4}{15}$ ra.	uel	$1\frac{24}{25}$ ra.	æqua.	40 N

Tertium, Diuidantur 40 in tres partes,

Vt cum has, primam quidem in 4, ſecundam uerò in 5, ac tertiam deinde in 6 diuiſero, exeuntes numeri in Subſuperbipartiente tertias ratione continuentur.

Facit	partes quidem	$5\frac{15}{29}$	$11\frac{43}{87}$	$22\frac{86}{87}$
	numeri uerò rationis	$1\frac{11}{29}$	$2\frac{26}{87}$	$3\frac{217}{261}$

Vel, ut cum has, primam quidem per 4, ſecundam uero per 5, ac tertiam deinde per 6 multiplicauero, producti numeri in Subſuperbipartiente tertias, ſeu ſi mauelis, in Dupla ratione continuentur.

Facit quantum ad rationem

3/5	partes quidem	$9\frac{63}{113}$	$12\frac{84}{113}$	$17\frac{79}{113}$
	numeri uerò ra.	$38\frac{25}{113}$	$63\frac{81}{113}$	$106\frac{22}{113}$
2/1	partes quidem	$25\frac{25}{47}$	$10\frac{10}{47}$	$4\frac{12}{47}$
	numeri uero ra.	$102\frac{6}{47}$	$51\frac{3}{47}$	$25\frac{25}{47}$

OPERATIO EXEMPLI QVANTVM AD DIVISIONEM.

	Diuiſionis	Rationis		Diuiſionis	Rationis partes,
Prima	1 ra.	$\frac{1}{4}$ ra.		$\frac{6}{25}$ ra.	$\frac{3}{50}$ ra.
Secunda	$2\frac{1}{12}$ ra.	$\frac{5}{12}$ ra.	uel	$\frac{1}{2}$ ra.	$\frac{1}{10}$ ra.
Ter. pars.	$4\frac{1}{6}$ ra.	$\frac{25}{36}$ ra.		1 ra.	$\frac{1}{6}$ ra.
	$7\frac{1}{4}$ ra.	uel		$1\frac{37}{50}$ ra.	Aequales 40 N. &cæ.

OPERATIO EXEMPLI QVANTVM AD MVLTIPLICATIONEM.

Ratio

	Ratio $\frac{3}{5}$		Ratio $\frac{2}{1}$	
Prima	1	4	1	4
Secun.	$1\frac{1}{3}$ ra.	$6\frac{2}{3}$ ra.	$\frac{2}{5}$ ra.	2 ra.
Ter.pars	$1\frac{23}{27}$	$11\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	1

Et ueniunt

$4\frac{5}{27}$ ra. æqua. 40 N. uel $1\frac{17}{30}$ ra. æqua. 40 N.

4. Groſſus ualet 10 nummulis, 24 uerò groſsi florinum conſtituunt. Aliquis nunc florinum permutans, tot pro eo groſſos, quot nummulos cupiens, quæritur quantum utriuſq; recipiat.

Facit, utriuſq; recipiet & habebit $21\frac{9}{11}$

OPERATIO.

Vna radix groſs. & 1 ra. num. &cæ.

Veniunt, facta operatione, $\frac{11}{10}$ ra. æqua. 24 N.

5. Eſt area quædam quadrangularis, continens in ſuperficie 588 areolas, inter ſe & toti ſimiles. Quia autem huius areæ longitudo ad latitudinem eſt, ut 4 ad 3: quanta ipſius longitudo, latitudo item ſit, quæritur.

Facit longitudo quidem 28, latitudo uerò 21.

OPERATIO.

Longitudo	1 ra.	uel	$1\frac{1}{3}$ ra.	
Latitudo	$\frac{3}{4}$ ra.		1 ra.	&cæ.
ueniunt	$\frac{3}{4}$ pri.	uel	$1\frac{1}{3}$ pri.	æqua. 588 N.

6. Dux in caſtris ſuo ſub imperio habet aliquot mille milites. Quoniam autem exercitum quadrata figura tantę amplitudinis, quanta fieri poſsit, inſtruere conatur, primaq; inſtructione ſpecie quadrata perfecta, reſidui manent 284 *milites*: quòd ſi in ſingulos ordines unum duntaxat militem adieciſſet, tum ei 25 ad abſoluendam quadratam aciem defuiſſent. Quæritur igitur, quot ſub ſe dux ille milites habuerit.

Facit 24 mille milites.

OPERATIO.

1 ra.		1 ra. + 1 N
1 pri.		1 pri + 2 ra. + 1 N
+ 284 N		— 25
1 pri. + 284 N	æquales	1 pri. + 2 ra. — 24 N.

ADMONITIO.

Hìc, licet duorum characterum numeri, tribus trium characterum numeris æquentur, ſed quia characteres in diuerſis ordinibus unius ſunt appellationis, per illas duas communes notitias, quarum una quidem eſt: Si æqualibus æqualia adijciantur, quòd & tota æqualia ſint. altera uerò: Si ab æqualibus æqualia auferantur, quòd & reliqua ſint æqualia: per additionem & ablationem huic ſuccurritur. Erit itaq;, hoc facto, huius æquationis exemplum, ut ſequitur.

308 N equales 2 ra.

Vna igitur radix, numerus ſcilicet militum unius ordinis in prima acie, 154. quare uniuerſus militum numerus 24000, qui erat inueniendus.

Potest huius exempli operatio, si placet, etiam sic institui.

	1 ra. in se.		1 ra. — 1 N in se.
	1 pri.		1 pri. + 1 N — 2 ra.
	— 25 N		+ 284 N
quare	1 pri. — 25 N	æqua.	1 pri. + 285 N — 2 ra.

7. Est numerus unus ad alterum sesquiquartus. Quoniam autem de maiori 8 ablatis, minori uerò numero 8 uel 4 additis, collectum ad residuum $2\frac{1}{2}$ rationem constituit, quinam sint illi duo numeri, quæritur.

Facit, ubi quidem addun-tur $\begin{cases} 8, \\ 4 \end{cases}$

8,	$16\frac{8}{17}$ maior,	$13\frac{3}{17}$	uerò minor
4 uerò,	$14\frac{2}{17}$	$11\frac{5}{17}$	

OPERATIO.

Numeri rationis		residuum	colle.
1 ra.	$\frac{4}{5}$ ra.	1 ra. — 8 N.	$\frac{4}{5}$ ra. + $\begin{cases} 8 \\ 4 \end{cases}$ N

Quantitates proportionales,

$\frac{4}{5}$ ra + $\begin{cases} 8 \\ 4 \end{cases}$ N, 1 ra. — 8 N ut 5, 2. Quare

$1\frac{3}{5}$ ra. + $\begin{cases} 16 \\ 8 \end{cases}$ N ęqual. 5 ra. — 40 N

8. Numerus in tres partes diuisus est. Quoniam autem prima pars respectu diuisi, subsequialteram: secunda uero, subduplam: ac tertia deinde, & ipsa respectu diuisi, postquam tamen 4 aliunde acceperit, subsesquitertiam rationem constituit, quantus sit ipse totus numerus, quantę etiam singulæ partes, quęritur.

Facit, Imposibile, cum tertia pars nihil sit, propterea quòd duabus prioribus totum & plus etiam conueniat.

Vel facit	Totus quidem numerus			$4\frac{4}{11}$
		prima	secun.	tertia
	Partes uerò	$2\frac{10}{11}$	$2\frac{2}{11}$	— $\frac{8}{11}$

Id quod examinari potest in hunc modum:

Totus diuisus	Partes uerò prima	secunda	tertia
$4\frac{4}{11}$	$2\frac{10}{11}$	$2\frac{2}{11}$	— $\frac{8}{11}$

Pars prima	totus diui.	pars secun.
$2\frac{10}{11}$	$4\frac{4}{11}$	$2\frac{2}{11}$
cum 3	cum 2	bis
$8\frac{8}{11}$	$8\frac{8}{11}$	$4\frac{4}{11}$

Aequales numeri, bene igitur. Totus diuisus, bene igitur.

— 8

— $\frac{8}{11}$ Tertia pars.

+ 4

sunt 3, $3\frac{3}{11}$ $4\frac{4}{11}$ Totus diuisus.

cum 4 cum 3

produ. $13\frac{1}{11}$ produ. $13\frac{1}{11}$. Aequales numeri.

Igitur bene operatum.

Quod si loco rationis quam habet secunda pars ad totum, Subduplæ scilicet, Subquadrupla posita fuerit.

Veniet facta operatione,

Totus quidem numerus 6

	Prima	secun.	tertia.
Partes uero	4	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

OPERATIO PARTIS PRIORIS.

Totus diuisus.	Prima	secunda	tertia pars.
1 ra.	$\frac{2}{3}$ ra.	$\frac{1}{2}$ ra.	$\frac{3}{4}$ ra. — 4 N

Quare $1\frac{11}{12}$ ra. — 4 N æquales 1 radici.

Vel additis & subtractis, ueniunt $\frac{11}{12}$ ra. æqua. 4 N, &cæ.

Potest etiam operatio aliter institui, si radix una loco alicuius partis ponatur, sic.

Partes		Partes	
1 ra.		$1\frac{1}{3}$	
	Totus		Totus
$\frac{3}{4}$ ra.	$1\frac{1}{2}$ ra.	1 ra.	2 ra.
$1\frac{1}{8}$ ra. — 4 N		$1\frac{1}{2}$ ra. — 4 N	

Aequatio.

$1\frac{3}{8}$ ra. æqua. 4 N. Item $1\frac{5}{8}$ ra. æqua. 4 N.

OPERATIO PARTIS POSTERIORIS.

Totus diuisus	$\frac{2}{3}$ ra.		1 ra.	Totus diui.
1 ra.	$\frac{1}{4}$ ra.	Vel	$\frac{3}{8}$ ra.	$1\frac{1}{2}$ ra.
	$\frac{3}{4}$ ra — 4 N		$1\frac{1}{8}$ ra. — 4 N.	

9. Sunt tres numeri, quorum primus & tertius noti, 48 & 11, medius ignotus, Quia uerò, quam rationem habent primus & tertius inter se, illa eadem est & excessus primi super medium, ad excessum medij super numerum tertium, quantus ergo medius numerus sit, quæritur.

Facit $17\frac{53}{59}$ quod probari potest.

OPERATIO.

Primus	medius	tertius.
48	1 ra.	11

48 N — 1 ra. 1 ra. — 11 N.

Consideratò iam, quæ sint quantitates proportionales, quæ deinde proportionalium quantitatum proprietas, ueniunt ultimò.

59 ra. equa. 1056 N, &cæ.

Sic inter	42		30		35
	$8\frac{2}{5}$	&	6	medius est	7
	$\frac{8}{9}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{16}{29}$
	21		14,		$16\frac{4}{5}$

Sunt autem numeri medietatis Harmonicæ.

10. Sunt tres numeri, quorum primus & tertius noti, 48 & 11, uel 24 & 12, medius ignotus. Quia uerò, quam rationem habent primus & tertius inter se, illa eadem eſt differentiæ medij & tertij ad differentiam primi & medij, quantus ergo medius numerus ſit, quæritur.

Facit $41\frac{6}{59}$ uel 20. quod probari poteſt.

11. Diuidantur 61 in 9 uel 6 partes Arithmeticæ progreſsionis, & eſto quòd prima pars, uel primus ac minimus numerus ſint 6, qui ſunt octo, uel quinq; reliqui?

Facit reſpectu quidem diuiſionis

in	nouem	$6\frac{7}{36}$.	$6\frac{7}{18}$.	$6\frac{7}{12}$.	$6\frac{7}{9}$.	$6\frac{35}{36}$.	$7\frac{1}{6}$.	$7\frac{13}{36}$.	$7\frac{5}{9}$.
	ſex uerò	$7\frac{2}{3}$	$9\frac{1}{3}$	11	$12\frac{2}{3}$	$14\frac{1}{3}$			

OPERATIO.

6 N	minimus nu.		6 N	minimus
1 ra.	exceſſus communis	uel	1 ra.	max. nu.
6 N + 8 ra.	numerus ul.		1 ra + 6 N	aggregati dimidium.
&cæ.				

Sic numerus 49 diuiſus, facta operatione ueniunt, reſpectu quidem diuiſionis eius in partes.

nouem	Impoſsibile				
in ſex uerò	$6\frac{13}{15}$.	$7\frac{11}{15}$.	$8\frac{3}{5}$.	$9\frac{7}{15}$.	$10\frac{1}{3}$.

12. Eſt quidam rex, ſunt & principes, comites & milites, quot autem rex ſub poteſtate ſua habet principes, in duplo plures ſub ſe comites habēt ſinguli principes: in quadruplo uerò plures ſub ſe habent milites ſinguli comites. Quia uerò militibus numeratis, inuenitur, quòd ducenteſima eorum pars nouencuplam rationem ad numerum principum conſtituat: quot igitur nunc principes fuerint, quot item comites ac milites deinde, in dubium uocatur.

	Principes	Comites	Milites.
Facit	15	450	27000

Quod ſecundum ænigmatis hypotheſes examinari poterit.

OPERATIO.

	Principum	Comi.	Mili.
Ponatur	1 ra.	& erunt 2 pri.	8 uerò ſecundæ

atq; tandem

$\frac{1}{25}$ ſe. æqualis 9 ra.

13. Eſt ædificium quoddam παραλλήλως ſecundum quatuor eius latera extructum,

ra extructum, cuius altitudo cum ad ſuam longitudinem Superbipartientem tertias, ad latitudinem uero, Duplam ſeſquialteram conſtituat rationem, altitudine deinde cum longitudine, ac producto tandem cum latitudine multiplicato, numerus 39930. ulnarum producatur, quantæ huius ædificij ſingulę dimenſiones fuerint, quęritur,

Facit 55 Altitudo, 33 Longi. & 22 Latitudo.

OPERATIO.

Altitudo	1 ra.		$1\frac{2}{3}$		$2\frac{1}{2}$
Longi.	$\frac{3}{5}$	uel	1 ra.		$1\frac{1}{2}$
Latitu.	$\frac{2}{5}$		$\frac{2}{3}$	Vel	1 ra.

Facta multiplicatione ut præcipitur, ueniunt

$\frac{6}{25}$ ſe. uel $\frac{10}{9}$ ſe. uel $\frac{15}{4}$ ſe. æquales 39930 N.

14 Murus, cuius longitudo quidem in $3\frac{1}{2}$ ad latitudinem, altitudo uerò in quincupla ratione ad longitudinē cōſtructus eſt, ab Artifice tandē 980 coronatis redimitur. Quoniā autē, cū pro ſingulis uirgis, ut dicitur, extruēdis, tot coronati, quot ipſe murus in latitudine uirgas habet, expoſiti ſint, quę'nā huius muri altitudo ſit, lōgitudo itē, ac latitudo etiā, quęritur.

Facit 35 Altitudo, 7 Longi. & 2 Latitudo.

OPERATIO.

Altitudo	5	uel	1 ra.		$17\frac{1}{2}$
Longi.	1 ra.		$\frac{1}{5}$		$3\frac{1}{2}$
Latitudo	$\frac{2}{7}$		$\frac{2}{35}$	uel	1 ra.
	$\frac{10}{7}$ ſe.		$\frac{2}{175}$		$\frac{245}{4}$

Nunc quantum ad ſolutionem, dicendum eſt

Corona.

Vlna 1 $\left\{\begin{array}{l}\frac{2}{7}\\ \frac{2}{35}\text{ ra.}\\ 1\end{array}\right.$ quanti $\left\{\begin{array}{l}\frac{10}{7}\\ \frac{2}{175}\text{ ſe.}\\ \frac{245}{4}\end{array}\right.$ Facit $\left\{\begin{array}{l}\frac{20}{49}\\ \frac{4}{6125}\text{ ter. æ. 980 N}\\ \frac{245}{4}\end{array}\right.$

15. Diuidantur 72 in quatuor partes, quarum prima ſit una ſeptima ſecundæ & tertiæ, ſecunda uero $\frac{1}{5}$ tertię & quartę, tertia autem $\frac{1}{2}$ quartę & primę, quęritur de partibus. Facit.

Prima	ſecunda	tertia	quarta pars,
$4\frac{1}{2}$	$11\frac{1}{4}$	$20\frac{1}{4}$	36

OPERATIO.

Ponatur primam partem eſſe 1 radicem, erunt ergo ſecunda & tertia partes ſimul 7 radices, ac quarta deinde id quod eſt reliquum, nimirum 72 N — 8 ra. ſic.

Prima	ſecunda & tertia	quarta.
1 ra.	7 ra.	72 N — 8 ra.

Et quoniam ex hypotheſi, ſecunda pars eſt tertiæ & quartæ partium una quinta: partes coniungendo, erit hæc eadem ſecunda omnium trium, hoc eſt ſecundæ tertiæ & quartæ partium, una ſexta. Ex harum igitur aggregato, quod eſt 72 N — 1 ra, una ſexta ſumpta, per eam quanta ſecunda pars ſola ſit, manifeſtabitur.

Quæ

Quæ quidem cum sit iam nota, & tertia per subtractionem nota erit. Partes igitur singulæ, ut sequitur.

Prima	secunda	tertia	quarta.
1 ra.	12 N — $\frac{1}{6}$ ra.	$7\frac{1}{6}$ ra. — 12 N	72 N — 8 ra.

Rursus quoniam etiam, & id ex hypothesi, tertia pars ipsarum quartæ & primæ partium dimidium est: sequitur hanc eandem tertiam bis sumptam, quartæ & primæ partibus simul sumptis, uel si mauis, hanc tertiam solùm, eius quod ex quarta & prima colligitur dimidio, æqualem esse. Aequatio igitur, ut sequitur.

$14\frac{1}{3}$ ra. — 24 N æqual. 72 N. — 7 ra.
in minimis $21\frac{1}{3}$ ra. æqual. 96 N.

uel $7\frac{1}{6}$ ra. — 12 N æqual. 36 N — $3\frac{1}{2}$ ra.
in minimis $10\frac{2}{3}$ ra. æqual. 48 N.

Sic 90, unitas, ac quilibet numeri alij, Fractiones etiam, eadem ratione diuidi possunt.

Sunt autem partes, respectu quidem

	Prima	secunda	tertia		quarta.
90	$5\frac{5}{8}$	$14\frac{1}{16}$	$25\frac{5}{16}$	&	45
Vnitatis uero, $\frac{1}{16}$	$\frac{5}{32}$		$\frac{9}{32}$	&	$\frac{1}{2}$

16. Tres negociatores societatẽ ineuntes, contulerunt 170 aureos. Primus itaq; cum sua pecunia collata huic contractui interesse uult 3 mensibus, secundus 6, tertius 8. Nunc si hac communi pecunia, tantùm hoc temporis spacio lucrifecerint, ut sors cum lucro perficiat summam 375 aureorum, atque primo 75, secundo uerò 200 aurei, & tertiò deinde quod reliquum est tribuatur, quæritur quanta nam uniuscuiusq; sors, siue à singulis collata pecunia fuerit. Facit

Primi 60. secundi 80. tertij 30. aurei.

OPERATIO.

	Tempus	accepta	collata pecunia.
Primi	3.	75	1 ra.
Secundi	6.	200	$1\frac{1}{3}$ ra.
Tertij	8.	100	$\frac{1}{2}$ ra. atq;

tandem $2\frac{5}{6}$ ra. æquales 170 N.

17. Propositum est diuidere 91, 27 uel 118 in quatuor partes.

Primò, secundum rationes $1\frac{1}{2}$, duplam & subsesquitertiam, quæritur quæ nam sint partes futuræ.

OPERATIO		91	27	118
1 ra.	Facit	$37\frac{5}{22}$	$11\frac{1}{22}$	$48\frac{2}{11}$
$\frac{2}{3}$		$24\frac{9}{11}$	$7\frac{4}{11}$	$32\frac{2}{11}$
$\frac{1}{3}$		$12\frac{9}{22}$	$3\frac{15}{22}$	$16\frac{1}{11}$
$\frac{4}{9}$		$16\frac{6}{11}$	$4\frac{10}{11}$	$21\frac{5}{11}$
$2\frac{4}{9}$ ra.	æqua.	91,	27 uel	118 N.

Vel

Vel ſecundo, ſecundum rationem $1\frac{1}{2}$ ſeu $2\frac{1}{2}$ continuatam,

		91	27	118
Facit ſecundum rationem,	$1\frac{1}{2}$ quidẽ	$37\frac{4}{5}$	$11\frac{14}{65}$	$49\frac{1}{65}$
		$25\frac{3}{5}$	$7\frac{31}{65}$	$32\frac{44}{65}$
		$16\frac{4}{5}$	$4\frac{64}{65}$	$21\frac{51}{65}$
		$11\frac{1}{5}$	$3\frac{21}{65}$	$14\frac{34}{65}$
	$2\frac{1}{2}$ uerò	$58\frac{18}{803}$	$17\frac{173}{803}$	$75\frac{191}{803}$
		$21\frac{609}{803}$	$6\frac{366}{803}$	$28\frac{172}{803}$
		$8\frac{128}{803}$	$2\frac{238}{803}$	$10\frac{466}{803}$
		$3\frac{48}{830}$	$0\frac{729}{803}$	$3\frac{277}{803}$

OPERATIO

1 ra.				AEQVATIO			91
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{8}$						
$\frac{4}{9}$ ra.	$\frac{6}{64}$ ra.	$2\frac{11}{27}$ ra.	uel	$1\frac{291}{512}$ ra.	æqua.		27 N.
$\frac{8}{27}$	$\frac{27}{512}$						118

Vel tertiò, ut primę parti 4, ſecundæ deinde 3 additis, à tertia uerò parte, 2, ac quarta deinde, unitate ſubtracta, aggregati tandem & reſidui numeri ſubduplam rationem continuatam, uel ſubduplam, ſubquadruplam, & $1\frac{1}{3}$ rationes habeant. Quęritur &cæ. Facit

quantum ad rationem ſubduplam continuatam,

Reſpectu quidem	91	27 uerò,		ac 118 deinde
Prima pars	$2\frac{1}{3}$		$-1\frac{14}{15}$	$4\frac{2}{15}$
Secunda	$9\frac{2}{3}$	Impoſsibi-	$1\frac{2}{15}$	$13\frac{4}{15}$
Tertia	$27\frac{1}{3}$	le, uel	$10\frac{4}{15}$	$34\frac{8}{15}$
Quarta deinde	$51\frac{2}{3}$		$17\frac{8}{15}$	$66\frac{1}{15}$

Quantum ad rationes ſubduplam, ſubquadruplam, & $1\frac{1}{3}$

Reſpectu quidem	91	27		118
Prima pars	$1\frac{10}{17}$		$-2\frac{3}{17}$	$3\frac{3}{17}$
Secunda	$8\frac{3}{17}$	Impoſsibile	$+0\frac{11}{17}$	$11\frac{6}{17}$
Tertia	$46\frac{12}{17}$	uel	$+16\frac{10}{17}$	$59\frac{7}{17}$
Quar. deinde	$34\frac{9}{17}$		$+11\frac{16}{17}$.	$44\frac{1}{11}$

OPERATIO.

Sit prima pars	1 ra.	Vel	1 ra.
ſecunda igitur	2 ra. + 5 N		2 ra. + 5 N
tertia uerò	4 ra. + 18 N		8 ra. + 34 N
ac quarta deinde	8 ra. + 33 N		6 ra. + 25 N

Aequatio igitur quantum ad

primum 15 ra. + 56 N

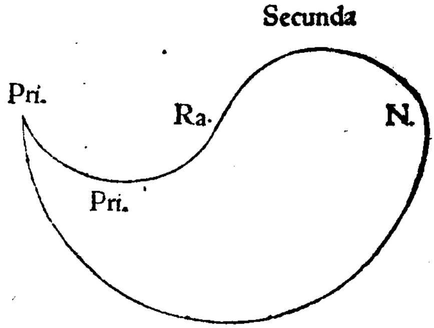
æqual. 91. 27. 118 N.

ſecun. 17 ra. + 64 N

AEQVATIO SECVNDA.

Secunda æquatio est, ubi tres numeri tribus diuersis, continuatis tamen, characteribus signati, duo uni, uel unus item duobus ęqualis esse profertur. Hæc æquatio quia tripliciter uariari potest, cum aut duo maiores minimo, aut duo minores maximo, aut uerò maximus & minimus, medio characteri, ut præsens figura habet, ęquentur.

FIGVRA AEQVATIONVM.



Ideo ne in generali huius descriptione confundi lectorem contingat, pro eo ut tripliciter uariatur, ita etiam triplici eam regula uel canone ordine describemus.

CANON HVIVS AEQVATIONIS PRIMVS.

Vbi nimirum maiores duo, minimo characteri ęquentur, utpote prima quantitas & radix, numero, sic.

Pri. + ra. æquales. N.

Huiusmodi exēplo proposito, erit maximę quātitatis numerus, aut unitas, aut nō. Quod si unitas fuerit, tū ad quadratū dimidij numeri characteris medij, numerus characteris minimi addi, à radice deinde huius collecti quadrata, dimidiū characteris medij subtrahi debet. quo facto, quæsiti numeri cōpos aliquis erit, cū uidelicet per id quod relinquitur, radicis ualor exprimatur. Quòd si uerò nō sit unitas maximi characteris numerus in exēplo aliquo proposito, quia nō pluriū, sed unius tātum radicis ualor desideratur, in maximi characteris numerum, aut fractionem, uel quicquid tandem fuerit, singuli singulorum trium characterum numeri diuidendi, & diuisorum loco exeuntes, ut eorum submultiplices, sumendi & ponendi sunt. Erit autē sic exemplū æquationis aliud, quod licet dissimile uideatur priori posito, nihilominus tamen, cum multiplicium & submultiplicium una & eadem sit ratio, non ab eo diuersum erit. Reductione igitur hac ad unitatem maximi characteris numeri, procedendum deinde, prout suprà canone est traditum.

CANON HVIVS AEQVATIONIS SECVNDVS.

Vbi nimirum duo minores, radix scilicet & numerus, æquentur primę, characteri maximo, sic.

Ra. + N æquales pri.

Et in huiusmodi exemplis maximi characteris numerus, aut unitas erit, aut non. Quod si fuerit unitas, tum ad quadratum dimidij numeri characteris medij, ut in præcedenti canone factum, numerus characteris minimi addi: ad radicem deinde huius collecti quadratam, dimidium characteris medij summi debet, & perfecta erit æquatio. Quod si uerò non sit unitas maximi characteris

 racteris

racteris numerus in exemplo aliquo proposito, huic tum (quemadmodum in præcedenti traditum) diuisione, ut ad unitatem redigatur, succurrendum erit.

CANON HVIVS AEQVATIONIS TERTIVS.

Vbi nimirum maximus & minimus, ut est prima quantitas & numerus, medio characteri, radici scilicet, æquentur, sic.

Pri. + N Aequales ra.

In huiusmodi exemplis, ubi maximi characteris numerus unitas fuerit, statim à quadrato dimidij numeri characteris medij, contra ut iam in præcedentibus est factum, numerus characteris minimi subtrahi: radix deinde huius residui quadrata, ut libuerit, ac prout rationi magis consentaneum fuerit, uel à dimidio numeri characteris medij subtrahi, uel eidem addi oportebit. atque utrum horum factum fuerit, cum tam per id quod hic colligetur, quàm etiam quod illic relictum fuerit, radicis ualor indicetur, exemplo satisfactum erit.

SEQVVNTVR NVNC HVIVS SECVNDAE AEQVAtionis secundum præscriptos tres canones exempla.

CANONIS PRIMI.

1 pri. + 8 ra. 65 N.
4 in se. 16 + 65
ueniunt 81. Huius radix,
sunt 9, minus 4,
manent 5.

SECVNDI.

13 ra. + $1\frac{3}{4}$ N 1 pri.
$\frac{3}{2}$ in se. $\frac{9}{4}$ + $1\frac{3}{4}$
ueniunt 4. Huius radix,
sunt 2 plus $1\frac{1}{2}$
ueniunt $3\frac{1}{2}$

Atque tantus est radicis ualor: quod quidem resolutione facta nunc probari potest.

EXEMPLVM CANONIS TERTII.

1 pri. + 12 N equales 8 ra.
4 in se. 16 minus 12
manent 4. Huius radix quadrata

sunt 2 $\left\{\begin{array}{l}\text{de}\\ \text{ad}\end{array}\right.$ 4, & manent 2, uel proueniunt 6.

Vterque radicis ualor, ac probationi conueniens numerus.

SEQVVNTVR EXAMINA.

Primùm autem numerorum canonis primi, radicis ualore existente 5.

1 pri. + 8 ra. æquales 65 N
5 in se, cum 5
25 40
65 Atque tot sunt etiam numeri, ut apparet: bene igitur.

Examen numerorum canonis secundi, radicis ualore existente $3\frac{1}{2}$

3 ra. + $1\frac{3}{4}$ N æquales 1 pri.
cum $3\frac{1}{2}$ $3\frac{1}{2}$
$10\frac{1}{2}$ + $1\frac{3}{4}$ in se.
$12\frac{1}{4}$ æquales $12\frac{1}{4}$ bene igitur.

Examen numerorum canonis tertij, radicis ualore existente 2.

1 pri	+	12 N	æquales	8 ra.	
2 in se.				bis	
4	+	12			
	16		æquales numeri	16: bene igitur.	

Eodem modo instituatur nunc examinis operatio, radicis ualore existente 6

1 pri	+	12 N	ęquales	8 ra.
6 in se				sexies
36	+	12		
48			æquales numeri	48 &cæ.

ALIVD EXEMPLVM.

PRIMI CANONIS.					SECVNDI CANONIS.				
Pri.		ra.		N	ra.		N		pri.
4	+	3	ęquales	217	3	+	175	æqu.	4

Hic, quia maximi characteris numerus non est unitas, diuisione, ut dictum est, ei succurri debet. Veniunt autem facta diuisione,

prí.	ra.	N		ra.	N	prí.
1 +	$\frac{3}{4}$ æqu.	$\frac{217}{4}$		$\frac{3}{4}$ +	$\frac{175}{4}$ ęqu.	1
$\frac{3}{8}$ in se, $\frac{9}{64}$	+	$\frac{217}{4}$		$\frac{3}{8}$ in se. $\frac{9}{64}$ +	$\frac{175}{4}$	
ueni.	$\frac{3481}{64}$. Huius ra.			ueni.	$\frac{2809}{64}$: Huius ra.	
sunt $7\frac{3}{8}$ minus	$\frac{3}{8}$			sunt $6\frac{5}{8}$ plus	$\frac{3}{8}$	
manent	7			ueniunt	7	
radicis ualor.				radicis ualor.		

ALIVD TERTII CANONIS EXEMPLVM.

3 pri. + 217 N æquales 52 ra.

Et hic, quia maximi characteris numerus non est unitas, diuisione ei succurrendum erit. Veniunt autem hoc facto,

1 prí. + $\frac{217}{3}$ N æquales $\frac{52}{3}$ N

$\frac{26}{3}$ in se. $\frac{676}{9}$, minus $\frac{217}{3}$, manet $\frac{25}{9}$

Huius ra. qua. est $1\frac{2}{3}$ $\left\{\begin{array}{l}\text{de}\\ \\ \text{ad}\end{array}\right.$ $8\frac{2}{3}$, & manent 7, uel proueniunt $10\frac{1}{3}$. Vterq; radicis ualor, quod examinari potest.

Porrò ne quis opinetur huius ęquationis tractationem rationibus ac demonstrationibus carere, is sciat: Primi quidem canonis operationē ex propositione 4 libri Euclidis secundi, Secundi uerò ex sexta, ac tertij deinde canonis ex quinta propositione eiusdem secundi libri desumptam esse. Eò itaq; cum peruentum fuerit, horum demonstrationes ac similitudines quas cum rationibus illarum propositionum habent, indicabimus.

SEQVVNTVR NVNC QVAEDAM
AENIGMATA, SEV QVAESTIONES, QVORVM solutiones tandem hanc æquationem requirunt.

Primum. Quærantur duo numeri in ratione $3\frac{1}{4}$, ut si unus cum altero

altero multiplicatus, producto deinde ambo numeri additi fuerint, $142\frac{1}{2}$ colligantur.

Facit $19\frac{1}{2}$ & 6

HVIVS EXEMPLI OPERATIO HAEC EST.

Esto primus numerus, & maior quidem, 1 radix, Et quia ratio, ex hypothesi, constituta est Tripla sesquiquarta, hoc obseruato, Regula Proportionũ (dicendo 13 dant 1 ra. quid 4) erit numerus secundus $\frac{4}{13}$ ra. Quia uerò multiplicatio huiusmodi numerorum, unius cum altero, unà cum his ipsis numeris simul additis, $142\frac{1}{2}$ constituere debet, & id ex hypothesi: 1 radix igitur cum $\frac{4}{13}$ ra. multiplicari, producto deinde ambo numeri, 1 radix scilicet & $\frac{4}{13}$ ra. addi debent, & colliguntur tandem

$\frac{4}{13}$ pri. + $1\frac{4}{13}$ ra. æquales $142\frac{1}{2}$ N

Quoniam autem est huius secundæ æquationis exemplum primum, hæc uero ipsa æquatio cum praxim habeat aliquanto quàm præcedens prima difficiliorem, ne alicui fortè hac descriptione nõ satis me fecisse uidear, quod descriptione regulæ proposuimus, illius eiusdem etiam iam calculum subiungere uisum fuit. Esto itaq;

numerus Maior 1 ra. Minor $\frac{4}{13}$ ra. Produ. $\frac{4}{13}$ pri.

Numerorum additione facta,

ueniunt $\frac{4}{13}$ pri. + $1\frac{4}{13}$ ra. æquales $142\frac{1}{2}$ N.

uel diuisione, secundum superiorem regulam, maximi characteris numero ad unitatem reducto,

ueniunt 1 pri. + $4\frac{1}{4}$ ra. æquales $463\frac{1}{8}$ N.

Est autem exemplum canonis primi. Facta igitur nunc operatione, ut præcipitur, ueniunt numeri $19\frac{1}{2}$ & 6, ut suprà indicatum.

ALIA HVIVS EXEMPLI OPERATIO.

Vt in præmissa operatione radix posita numerum rationis maiorem significabat, ita nunc, initio sumpto à minore, esto quòd radix posita significet numerum rationis minorem, cum sic regula proportionum (dicendo 4 dant 1 ra. quid 13) maior numerus sit $3\frac{1}{4}$ ra. multiplicatione & additione peractis, ueniunt

$3\frac{1}{4}$ pri. + $4\frac{1}{4}$ ra. æquales $142\frac{1}{2}$ N.

Vel, reductione facta, &cæ.

1 pri + $\frac{17}{13}$ ra. æquales $\frac{570}{13}$ N.

Secundum. Proficiscitur aliquis peregrè, uadit autem primo die $1\frac{1}{2}$ miliare, secundi deinde diei atq; deinceps sequentium ordine omnium itinera, arithmetica medietate absoluit, iter cuiusq; sequentis super præcedentis diei iter in miliaris una sexta augens. Nunc uero cum ille secundum hanc medietatem iter quoddam 1370 uel 2955 miliariorum absoluendum & perambulandum sibi instituerit, in quanto tempore id facere possit, quæstio erit.

Facit quantum ad $\begin{cases} \text{primum quidem, in 17 septimanis, \& 1 die.} \\ \text{secundum uerò, in semestri, minus 2 diebus.} \end{cases}$

OPERATIO.

Ponatur 1 radix dierum, quo illud iter absoluat, et erit 1 ra. — 1 N, excessuũ numerus. Et quia $\frac{1}{6}$ miliaris, excessus communis, erit 1 ra. — 1 N, excessuũ summa. Et quia etiam $1\frac{1}{2}$ miliaris, primus numerus, 6

$\frac{1 \text{ ra.} + 17\text{N}}{6}$ igitur, ultimus numerus erit

Atq; sic $\frac{1 \text{ ra.} + 17\text{N}}{6}$, ex primo & ultimo aggregatũ, & tandem multiplicatione facta, $\frac{1 \text{ pri.} + 17 \text{ ra.}}{12\text{ N}}$ æquales 1370 uel 2955 N, &cæ.

3 Numerus in duo diuisus est, in 4 scilicet, partem notam, & alium deinde numerũ, partẽ scilicet ignotam. Quoniã autem parte ignota multiplicata primò in se, deinde cum parte etiam illa nota, 117 colliguntur,

quantus fuerit totus numerus?	Facit	13
quanta item ignota pars?		9

OPERATIO.

Ponatur 1 ra. numerus diuisus. Et quia 4, una & nota pars, atq; sic 1 ra. — 4 N, pars ignota, ultimò tandem, multiplicatione scilicet facta, 4 ra. + 117 N uni primę æquales erunt.

Est autem exemplum canonis secundi, &cæ.

ALIA OPERATIO.

4 pars data ex hypothesi,
1 radix, non data, quare tandem
1 pri. + 4 ra. æqual. 117 N. Exemplum canonis primi.

4. Sunt tres numeri continuè proportionales, unus autem extremorum cum sint $20\frac{1}{4}$, alter uerò & duplum medij, 22 faciant, quantus uterq; sit, medius scilicet & alter extremorum, quæritur.

Facit	medius quidem	9
	alter uero extre.	4

OPERATIO.

$20\frac{1}{4}$
1 ra.
22 N — 2 ra.

uel

$20\frac{1}{4}$
11 N — $\frac{1}{2}$ ra.
1 ra.

Facta multiplicatione, ueniunt ultimò

N		pri	ra.	ra.		pri.	N
$445\frac{1}{2}$	æquales	1 +	$40\frac{1}{2}$	125	æqua.	1 +	484

Exemplum canonis primi — Canonis tertij.

5. Propositum est diuidere numerum 8 in duas partes, quarum secundæ quantitates, unà cum primis, & his ipsis numeris, 199 faciant, quæritur, &cæ.

Facit 5 & 3.

OPERATIO.

1 ra. 1 pri. 1 se.
8 N — 1 ra. 64 N — 16 ra. + 1 pri. 512 N — 192 ra. + 24 pri. — 1 se.
584 N — 208 ra. + 26 pri. æquales 194 N

Vel additis & subtractis æqualibus,
ueniunt 26 pri. + 390 N æquales 208 ra.

Est

Est autem exemplum canonis tertij, atque radicis ualor 3 uel 5, ut lubet, prior pars. Quare posterior 8 minus, &cæ.

6. Duo habent mercis cuiusdam libras uel ulnas 11. Quoniam autem, cum quot ulnas primus habet, tot secundus uno coronato uendere soleat, primus deinde, quia uno coronato tantum exponit, quanta est $\frac{1}{6}$ earum ulnarum quas secundus habet, atque cum sic ambo 6 coronatos, uno sextante minus, acceperint, quot ulnas seorsim uterque habuerit, quot deinde ulnas uno coronato uendiderit, quæritur.

Facit $\left\{\begin{array}{ll}\text{primus} & 2 \text{ ul.}\\ \text{secund.} & 9 \text{ ul.}\end{array}\right.$ Vendidit autem uno corona. $\left\{\begin{array}{l}1\frac{1}{2} \text{ ul.}\\ 2 \text{ ul.}\end{array}\right.$

OPERATIO.

Primus	1 ra.	Accipiunt	$\dfrac{6 \text{ ra.}}{11 N - 1 \text{ ra.}}$
secundus	$11 N - 1$ ra.	autem	$\dfrac{11 N - 1 \text{ ra.}}{1 \text{ ra.}}$

Quare $\dfrac{121 N + 7 \text{ pri.} - 22 \text{ ra.}}{11 \text{ ra.} - 1 \text{ pri.}}$ æqua. $5\frac{5}{6}$ N

In integris deinde & ultimò

ueniunt 77 pri. + 726 N æqual. 517 ra.

Est autem exemplum canonis tertij, atque facta operatione, radicis ualor 2 pro negociatore primo. Quantum nunc secundus habuerit, quot deinde uterque ulnas uno coronato uendiderit, facili calculo hæc ex ipsa positionis solutione, seu exempli huius hypothesibus haberi possunt.

Esto nunc quòd ambo acceperint 7 coronatos, ulnæ uero $24\frac{1}{2}$ fuerint, cæteris manentibus.

Operatione igitur instituta, ueniunt quòd primus habuerit $3\frac{1}{2}$ ulnas. Quare sic secundus reliquas 21. & quod uterque uno coronato ulnas $3\frac{1}{2}$ exposuerit.

7. Habent duo sericum, unus quidem 40, alter uerò 90 ulnas. Quoniam autē, cum primus in triente ulnæ plus, uno coronato det quàm ipse secundus, atque deinde in medium collatis pecunijs, 42 coronatos numerent, quot uterque ulnas uno coronato exposuerit, quæritur.

Facit $\left\{\begin{array}{ll}\text{primus} & 3\frac{1}{3}\\ \text{secundus} & 3\end{array}\right.$

OPERATIO.

	ul.			
in triente +. 42 coro. &cæ.	40 Pri.	1 ra. + $\frac{1}{3}$ N	Accepta pec.	$\dfrac{120 N}{3 \text{ ra.} + 1 N}$
	90 se.	1 ra.		$\dfrac{90 N}{1 \text{ ra.}}$

Ad regulam proportionum quantitates positæ.

ulnæ	coro.	ulnæ	
$\dfrac{3 \text{ ra.} + 1 N}{3}$	uno	40	Facit &cæ.
1 ra.	uno	90	

Facta

Facta additione, ueniunt

$$\frac{390 \text{ ra.} + 90 \text{ N}}{3 \text{ pri.} + 1 \text{ ra.}} \quad \text{æquales} \quad 42 \text{ N}$$

Sub una denominatione deinde atq; ultimò, in minimis item

$$58 \text{ ra.} + 15 \text{ N.} \quad \text{æquales} \quad 21 \text{ pri.}$$

Est autem exemplum canonis secundi, atq; operatio sic instituenda,

$$\frac{58}{21} \text{ ra.} + \frac{15}{21} \text{ N} \quad \text{æquales} \quad 1 \text{ pri.}$$

$\frac{29}{21}$ in se, $\frac{841}{441}$. + $\frac{15}{21}$, ueniunt $\frac{1156}{441}$

cuius radix qua. $\frac{34}{21}$ & $\frac{29}{21}$ (quæ simul, 3 constituunt) numerus est ulnarum, quot secundus pro uno coronato exposuit.

Primi igitur $3\frac{1}{3}$

ALIA HVIVS EXEMPLI OPERATIO.

Esto quòd uno coronato uendat

uln.		uln.		coro.
40.	Primus quidem	1 ra.	accepta pecunia	$\frac{40 \text{ N}}{1 \text{ ra.}}$
90.	quare secun.	1 ra. — $\frac{1}{3}$ N		$\frac{270 \text{ N}}{3 \text{ ra.} - \text{N}}$

Facta additione acceptorum, ueniunt

$$\frac{390 \text{ ra.} - 40 \text{ N}}{3 \text{ pri.} - 1 \text{ ra.}} \quad \text{æquales} \quad 42 \text{ N}$$

In integris ueniunt

$$390 \text{ ra.} - 40 \text{ N} \quad \text{æquales} \quad 126 \text{ pri.} - 42 \text{ ra.}$$

Vltimo uerò & in minimis.

$$216 \text{ ra.} \quad \text{æquales} \quad 63 \text{ pri.} + 20 \text{ N}$$

Est autem exemplum canonis tertij, unde operatio sic instituenda.

$$\frac{216}{63} \text{ ra. uel } \frac{24}{7} \text{ ra.} \quad \text{æqua.} \quad 1 \text{ pri.} + \frac{20}{63} \text{ N}$$

$\frac{24}{7}$, $\frac{12}{7}$ in se, $\frac{144}{49}$, minus $\frac{20}{63}$

manent $\frac{1156}{441}$. Huius radix $\frac{34}{21}$ $\left\{\begin{array}{l}\text{de}\\ \\ \text{ad}\end{array}\right.$ $\frac{12}{7}$ uel $\frac{36}{21}$

manent $\frac{2}{21}$, non uerus: uel ueniunt $3\frac{1}{3}$, uerus numerus. Id quod nunc examinari potest.

AEQVATIO TERTIA.

TErtia æquatio est ferè eadem cum secunda: nam & hæc tres numeros tribus diuersis characteribus signatos requirit. Sunt tamen in hac numerorum characteres non continui, uerùm semper inter quosq; duos sibi proximos, iam unus, iam uerò duo uel plures omissi: ac duo tandem uni, uel unus character cum suo numero duobus æqualis esse profertur. Quapropter ut secundæ, ita & huius tertiæ æquationis est operatio, nisi quod postquam ad finem operationis peruentum fuerit, ubi iam radicis ualor expectandus esset, cum non radicis, uerùm alterius cuiusdam characteris ualor sese offerat, illius characteris secundum sui exigentiam (prout quidem unus uel plures characteres sint omissi) radix, ut in prima æquatione factum quærenda, atq; per eam

eam tandem inuentam, radicis ualor exprimendus erit. Hæc nullam requirit demonstrationem, cum ex præcedentibus duabus (quarum demonstrationes unde peti debeant, indicauimus) composita sit.

SEQVVNTVR EXEMPLA.

Primum. 9 Ter. + 5 pri. æquales 294 N

$\frac{5}{9}$ $\frac{294}{9}$

$\frac{5}{18}$ in se, $\frac{25}{324}$, plus $\frac{294}{9}$, ueniunt $\frac{10609}{324}$. Huius radix $\frac{103}{18}$ minus $\frac{5}{18}$ manent $\frac{98}{18}$ uel $\frac{49}{9}$. Atq; is esset numerus solutionis. sed quia utrinq; unus character negligitur, huius igitur numeri, ut primæ quantitatis, radix, $2\frac{1}{3}$ scilicet, numerus solutionis erit.

Secundum. $14\frac{7}{8}$ sec. + $1200\frac{1}{2}$ N æqua. 1 Quin.

$7\frac{7}{16}$ in se, $\frac{14161}{256}$ plus $1200\frac{1}{2}$, ueniunt $\frac{321489}{256}$. Huius ra. $\frac{576}{16}$, plus $7\frac{7}{16}$, ueniunt $\frac{686}{16}$ uel $\frac{343}{8}$. Atq; is esset numerus solutionis. sed quia utrinq; duo characteres negliguntur, huius igitur numeri secundæ quantitatis radix, $3\frac{1}{2}$ scilicet, numerus solutionis erit.

Tertium. 1 sep. + 2401 N æquantur 2402 ter.

1201 in se, 1442401, minus 2401, manent 1440000. Huius radix quadrata, sunt 1200, $\left\{\begin{array}{l}\text{de}\\ \text{ad}\end{array}\right.$ 1201, & colliguntur hic quidem 2401, illic uerò 1 manet, uterq; solutionis numerus. Sed quia utrinq; omittuntur tres characteres, non ij igitur numeri, sed horum numerorũ, ut tertiarum quantitatum, radices, quæ sunt 1 & 7, solutionis numeri erunt.

His certe tribus exemplis uidere Lector poterit, quàm planè idem sit huius ac præcedentis secundæ æquationis processus. nisi quòd in hac ultimò, prout quidem characteres plures uel pauciores intermissi fuerint, radix quærenda sit. Vno igitur atq; altero pro hac æquatione exemplo posito, ad alias huius regulæ præceptiones pergendum erit.

SEQVVNTVR NVNC QVAEDAM

AENIGMATA, SEV QVAESTIONES, QVOrum solutiones tandem hanc æquationem requirunt.

Primum. Propositum est inuenire duos numeros, quorum multiplicatio quidem unius cum altero 24, secundæ uero illorum quantitates simul iunctę 280, uel 539 constituant: quęritur, quinam sint illi duo numeri.

Facit 4 & 6, uel 3 & 8.

OPERATIO.

Numeri		Secundæ quantitates, primi	secundi numeri.
1 ra	$\frac{24\ N}{1\ ra.}$	1 se.	$\frac{13824\ N.}{1\ se.}$

E Quan-

Quantitatibus secundis simul iunctis, ueniunt

$\frac{1 \text{ quin.} - 13824 \text{ N}}{1 \text{ se.}}$ æquales 280 uel 539 N.

In integris quantum ad numerum 280.

1 Quin. + 13824 N æquales 280 se.

140 in se, 19600, minus 13824; manent 5776. Huius radix quadrata

76 $\left\{\begin{array}{l}\text{de}\\ \text{ad}\end{array}\right.$ 140. medieta. medij, manent 64, uel proueniunt 216, radicis quidem ualores ac quæstionis numeri, si characteres continui essent. Sed quia utrinque duo characteres neglecti sunt, non igitur hi, sed horum numerorum, ut secundarum quantitatum radices, 4 scilicet & 6, quæstionis numeri erunt. Id quod nunc probari potest, ut sequitur.

Quantum ad numerum

priorem		280	posteriorem		539
Numeri propositi		Secun. quanti.	Numeri propos.		Secundæ quautitates
4	16	64	3	9	27
6	36	216	8	64	512
24		280	24		539

Secundum. Propositum est inuenire numerum, cuius quadratum post quam primò acceperit 8, secundo uerò 3 amiserit, ut multiplicatio tandē collecti cum residuo 6942 producat.

Facit 9

OPERATIO.

1 ra.	1 pri. + 8 N
1 pri.	1 pri. — 3 N

1 ter. + 5 pri. — 24 N æquales 6942 N.

Vel additis quæ sunt addenda, nimirum — 24 N, parti utrique, ueniunt

1 ter. + 5 pri. æqua. 6966 N.

Est autem in secunda æquatione exemplum canonis primi, quare secundum illius præceptionem operatio instituenda est. Veniunt autem operatione absoluta 81, tanquam radicis ualor. Sed quia unus character utrinque inter duos proximos est neglectus, non igitur ipse numerus, sed eius radix quadrata, 9 scilicet, radicis ualor & numerus quęsitus erit, id quod nunc examinari poterit.

Tertium. Propositum est inuenire numerum, cuius quadratum, postquam primò acceperit 8, numerus uerò ipse 3 amiserit, ut multiplicatio tandem collecti cum residuo 534 producat.

Facit 9

Sequuntur

SEQVVNTVR NVNC ALIAE HVIVS REGVLAE PRAECEPTIONES, ALGORITHMI NIMIRVM, VT VOCANT, DE SVRDIS QVADRATORVM, CVBICORVM, & id genus, Binomiorum item & Residuorum, per singulas species tractatio.

NVMERI igitur surdi sunt, quorum radices desideratæ, numero certo expressæ, inueniri nequeunt. Vt numerus 5, quia non 5, sed ex ipso quantitatis cuiusdam radix expetitur, licet per se rationalis sit numerus, tamen ratione illius defectus, iam irrationalis & surdus appellatur. Eadem ratione 17. 13. 21. 346, multi item numeri alij, pro surdis haberi solent. Notantur autem, ut in sequentibus apparet, huiusmodi surdi, prout radix alia atque alia desideratur, suis proprijs notis. Quod ipsum ideo fit, ut nimirum eorum à rationalibus numeris discrepantia (qui absque signo & absolutè proferuntur) cognosci possit. Quia autem uariæ sunt numerorum secundum quantitates appellationes, cũ alij primæ quantitatis, alij uerò secundæ, tertiæ, quartæ, uel decimæ, ac deinceps quarumuis aliarum quantitatum appellationem habeant, uarios etiam horum surdorum numerorum Algorithmos, seu tractationes esse, necessariò sequitur. Atque de his nunc ordine dicendum erit. & primò quidem:

DE SVRDIS NVMERORVM PRIMAE QVANTITATIS, SEV, VT VOCANT, Quadratorum.

NVMERATIO VEL ENVNCIATIO. Caput I.

ENunciatio est facilis. Primò enim character, uel syllaba, quæ numero præscripta est, per quam etiam numerum propositum, Surdum esse significamus, mox deinde numerus ipse exprimitur. Vt exempli gratia. ra. 29 exprimitur, Radix uiginti nouem: uel, ut sit enunciatio planior, Radix numeri uiginti nouem. Intelligitur autem radix quadrata, cum in præsentia sit quadratorum tractatio. In cubicis uerò, de quibus erit tractatio sequens, cubica uel secundæ quantitatis radix consideratur. Atque in genere, cuiuscunque sanè quantitatis tractatio fuerit, eius conditio per notam radicis, Ra. significatur, ac deinde etiam exprimitur. Solent tamen multi, & bene etiam. has desideratas radices, suis punctis cum linea quadam à dextro latere ascendente, notare, atque sic pro radice quidem quadrata, ubi hæc in aliquo numero desideratur, notam $\surd$: pro cubica uerò, $\surd\!\!\!\cdot\!\cdot\!\cdot$: ac radicis radice deinde, $\surd\!\!\cdot\!\cdot$ præponunt: de quo obiter admonere Lectorem uolui.

MVLTIPLICATIO. CAP. II.

VLtiplicatio surdorum in genere, est radicis unius surdi numeri toties, quot sunt unitates in radice surdi alterius, coaceruatio. Hæc autem perficitur, multiplicatione unius numeri rationalis (neglecto charactere) cum numero rationali altero. Nam statim tandem radix producti, id quod ex multiplicatione radicis unius cum radice surdi alterius prouenerit, indicabit.

EXEMPLA SVNT.

ra. 7 cum ra. 8 — Item — ra. 24 cum ra. 54

produ. ra. 56 — produ. 36

Quod autem in his duobus exemplis, multiplicatio in uno quidem, Surdum: in altero uerò, rationalem numerũ produxerit, mirandũ non est. posse enim id fieri in multiplicatione surdorũ, docetur propositionibus 19 & 21 decimi libri Euclidis.

SEQVVNTVR EXEMPLA ALIA.

ra. 6 cum ra. 24 — Item — ra. $12\frac{1}{2}$ cum ra. $4\frac{1}{2}$

produ. 12 — produ. $7\frac{1}{2}$

ADHVC ALIA.

3 cum $\sqrt{8}$ — Item — $4\frac{1}{2}$ cum $\sqrt{14}$

produ. $\sqrt{72}$ — produ. $\sqrt{283\frac{1}{2}}$

In his duobus exemplis, cum unus numerus surdus, alter uerò rationalis sit, numerus rationalis, ad similem ipsius surdi quantitatis appellationem, multiplicatione reducendus erit. Nam semper unius appellationis esse numeros in surdorum tractatione, cùm hac in regula, tum in sequentibus necesse est. Ex quo nunc sequitur, cum una surdorum debeat esse quantitatis appellatio: quod duplare quidem hoc loco, per 4, hoc est, per binarij quadratum: triplare uerò & quadruplare, ac præterea si quæ sint multiplicationes aliæ, per illorum numerorum quadrata, 9 scilicet & 16, atque ordine deinceps, perficiendæ sint, ac fieri debeant.

SEQVVNTVR EXEMPLA.

ra. 8 bis — ra. 8 ter. — ra. 8 quater.

produ. ra. 32 — produ. ra. 72 — produ. ra. 128

Est autem huius tractationis tanquam examen, ipsa diuisio, quæ iam sequitur.

DIVISIO. CAP. III.

Diuisio surdorum in genere, est inuentio numeri, cuius radix tot habeat unitates, quoties radix diuidẽs continetur, in ipsa radice diuidenda. Hæc autẽ perficitur, diuisione unius numeri rationalis (neglecto charactere) in numerum rationalem alterum. Nam statim tandem exeuntis radix id, quod ex diuisione radicis unius in radicem surdi alterius exiuerit, indicabit.

EXEMPLA SVNT.

ra. 56 in ra. 8 — Item — ra. 72 in ra. 8

exit ra. 7 — exeunt 3

ALIVD EXEMPLVM.

ra. $457\frac{1}{3}$ in ra. 21, exit ra. $21\frac{7}{9}$.

ALIA.

$\sqrt{7\frac{1}{3}}$ in $\frac{2}{3}$ — Item — $\frac{2}{3}$ in $\sqrt{\frac{3}{4}}$

exit $\sqrt{16\frac{1}{2}}$ — exit $\sqrt{\frac{16}{27}}$

Diuidatur radix numeri 8 in

2, exit $\sqrt{2}$ — in 3, exit $\sqrt{\frac{8}{9}}$ — in 4, exit $\sqrt{\frac{1}{2}}$

Id quod ex præmissis patet.

Huius tractationis tanquam examen, est ipsa multiplicatio, quæ paulo antè descripta est.

Additio

ADDITIO. CAP. IIII.

ADditio surdorum in genere, est radicum propositorum surdorum in unam summam collectio. Hæc autem ex 4 propositione secundi Euclidis perficitur hoc modo. Sumantur surdorum, tanquam partium alicuius totius (lineæ, seu numeri) in partes diuisi, quadrata: una deinde parte uel numero, cum altero multiplicato, is qui producitur numerus, quum allegata propositio dicat bis, duplicetur: hoc est, per 4, ut in multiplicatione dictum est, multiplicetur. Quia uerò hęc omnia, partium uidelicet totius, hoc est, numerorum surdorum, quadrata, & quod producunt illi surdi inter se multiplicati bis, ex allegata propositione, totius numeri quadrato ęqualia sunt: his igitur omnibus in unum collectis, radice deinde quadrata collecti quęsita, per eam tandem radicum summa datorum surdorum indicabitur.

EXEMPLA SVNT.

ra. 12 ad ra. 20	Item ra. 15 ad ra 17
12 20	15 17
ra. 240	ra. 255
bis per 4	bis per 4.
ra. 960	ra. 1020.

Facta additione, ueniunt

32 + ra. 960   32 + ra. 1020

quadratum totius.

Radix igitur huius collecti, uel totius, quadrata, quæ est

Radix collecti 32 + √ 960   ra. col. 32 + √ 1020

surdorum propositorum summa radicum erit.

Adduntur huiusmodi numerorum surdorum radices commodius per particulam illam Plus, uel per eius signum +, quod idem est, sic

ra. 20 plus ra. 12   Item   ra. 17 + ra. 15

Quòd si uno surdo cum altero multiplicato, producti radix assignari queat, tum loco illius producti radix assumenda, ac binario deinde ea duplanda est. Quo facto, & breuior & expeditior erit operatio.

EXEMPLA SVNT.

ra. 27 ad ra. 12	Item	ra. 18 ad ra. 32
27 12		18 32
ra. 324		ra. 576
18		24
bis		bis
36		48
75	Omnium productorum summa	98
ra. 75	Radicum summa.	ra. 98

Atq; is est generalis additionis surdorum canon. Sed quia numerorum surdorũ, alij compositi, seu, ut uocant, commensurabiles inter se sunt, alij deinde incompositi & incommensurabiles: Ac commensurabiles quidem sunt, qui alicuius communis numeri diuisione, ad quadratos reduci possunt, ut sunt ra. 6 & ra. 54, item ra. 27 & ra. 12: Incommensurabiles uerò, qui nullo communi numero, diuidendo, ad quadratos reduci possunt, ut sunt ra. 7 & ra. 13, itẽ ra. 12 & ra. 20: Qui commensurabiles inter se sunt surdi, alia & breuiori uia, quàm in generali regula traditum est, addi possunt, in hunc modum.

Reducantur primò surdi hi commensurabiles ad numeros quadratos, quadratorum deinde radices simul addantur, & quod colligitur, huius quadratum cum communi surdorum commensurabilium numero multiplicetur. quo facto, producti radix propositorum surdorum radicum summam indicabit, quod per duo exempla præmissa sequenti calculo cernere licebit.

ra. 27 ad ra. 12
com. 9 quadrata 4
nu. 3 3 radices 2
5 in se,
25
com. numerus 3
75
Summa radicũ √ 75

Item ra. 18 ad ra. 32
com. 9 quadra. 16
nu. 2 3 ra. 4
7 in se
49
com. numerus 2
98
Summa radicum √ 98

Simili modo cum alijs exemplis omnibus, hæc, siue per numeros integros, siue per fractiones, seu per integros & fractiones exposita fuerint, procedendum erit.

EXEMPLA.

ra. $5\frac{1}{3}$ ad ra $6\frac{3}{4}$
Facit ra. $24\frac{1}{12}$.

Item ra. $26\frac{2}{3}$ ad ra. $33\frac{3}{4}$
Facit ra. $120\frac{5}{12}$

ALIVD EXEMPLVM.

3 ad ra. 8. Facit radix collecti 17 + √ 288. Vel 3 + √ 8.

Est autem huius tractationis tanquam examen ipsa subtractio, quæ iam sequitur.

SVBTRACTIO. CAP. V.

Subtractio surdorum in genere, est radicis unius propositi surdi de radice alterius subtractio. Hæc autem ex propositione 7. secundi Euclidis, perficitur hoc modo. Sumantur quadrata amborum, hoc est, eius à quo debet fieri subtractio, ut totius: atq; etiam radicis subtrahendæ, ut unius partis lineæ, uel numeri diuisi. Et quia hęc simul collecta, ex allegata propositione, ęqualia sunt numero, quem producit totum cum dicta parte, hoc est, una radix cũ altera multiplicata bis, & quadrato alterius partis, hoc est, quadrato radicis residuæ. Ab illo igitur quadratorum collecto, numerus quem producunt radices inter se multiplicatę bis, subtrahendus, residui deinde radix quęrenda: qua inuenta, subtractio absoluta erit, cum per hanc ipsam remanentis seu residui radix indicabitur.

EXEMPLA SVNT.

ra 12. de ra. 20
12 20
ra. 240
bis per 4
ra. 960

Item ra. 15 de ra. 17
15 17
ra. 255
bis per 4
ra. 1020

Facta subtractione manent

32 — ra. 960 32 — ra. 1020

remanentis uel residuæ radicis quadratum.

Radix igitur huius residui quadrata, quę est

radix residui 32 — √ 960 radix residui 32 — √ 1020

remanentis surdi radix quadrata erit,

Subtra-

Subtrahuntur huiusmodi numerorum surdorum radices commodius per particulam illam Minus, uel per eius signum —, quod idem est, sic,

ra. 20 minus ra. 12 Item ra. 17 — ra. 15.

ALIA EXEMPLA.

ra. 27 de ra. 75.		Item	ra. 32 de ra. 98	
27	75		32	98
102			130	
2025			3136	
45			56	
bis			bis	
90			112	
12		quadratum residui	18	
ra. 12 igitur		radix residui.	ra. 18 igitur	

Quia uerò & in hac specie, quemadmodum in præcedenti, aliàs commensurabilium, aliàs incommensurabilium surdorum fit subtractio: ubi commensurabiles fuerint propositi, hi eodem, quod in additione traditum est, compendio, unus ab altero subtrahi poterit: nisi quod hic radix à radice subtrahenda, cum illic una alteri addenda sit. Residuæ deinde radicis quadrato, ut in additione aggregati ex radicibus quadrato, cum numero, quo scilicet propositi surdi ad quadratos reducti sunt, multiplicato, ex producto tandem radice quęsita, subtractio peracta erit. Quod per duo exempla præmissa sequenti calculo cernere licebit.

ra. 27 de ra. 75				Item	ra 32 de ra. 98			
com. nu.					com. nu.			
3	9	quadra.	25		2	16	quadra.	49
	3	radices	5			4	ra.	7
			2 in se					3 in se
			4					9
communis nume.			3		com. numerus			2
			12					18
Radix residua $\surd$ 12					Radix residua $\surd$ 18			

Simili modo cum alijs exemplis omnibus, hæc siue per numeros integros, siue per fractiones, seu per integros & fractiones, exposita fuerit, procedendum erit.

EXEMPLA.

ra. $6\frac{3}{4}$ de ra. $8\frac{1}{3}$ manet ra. $\frac{1}{12}$ Item ra. $\frac{3}{8}$ de ra. $\frac{2}{3}$ ma. ra. $\frac{1}{24}$

ALIVD EXEMPLVM.

ra. $26\frac{2}{3}$ de ra. $33\frac{3}{4}$ ma. ra. $\frac{5}{12}$.

ADHVC ALIVD.

ra. $6\frac{3}{4}$ de ra. $12\frac{1}{12}$, manet radix residui $18\frac{5}{6}$ — $\surd$ $326\frac{1}{4}$.

Hæc autem est, ut quidem suo loco cognoscetur, $\surd$ $12\frac{1}{12}$ — $\surd$ $6\frac{3}{4}$ id quod examinari potest.

Huius tractationis tanquam examen, est ipsa additio, quæ paulo ante descripta est.

Sequitur

SEQVITVR ALGORITHMVS DE SVRDIS NVMERORVM SECVNDAE QVANTITATIS, seu, ut uocant, de surdis Cubicorum.

NVMERATIO, VEL ENVNCIATIO. Caput I.

ENunciatio est, sicut in iam absoluta de surdis quadratorum tractatione exposita est. Vt ra. 29, hæc quantitas, quia uersamur in tractatione cubica: ideo etiam non radix quadrata, sed radix cubica, uel secundæ quantitatis radix, numeri 29 exprimitur. Sic in cæteris exemplis agendum. Solet tamen plerumque syllabæ, Ra. propter confusionem uitandam, addi syllaba, cu. præsertim quidem, ubi extra tractationem alibi scriptę fuerint ac inueniantur, sic:

Ra. cu. 11. Item radix se. 11, 24, uel alterius numeri.

MVLTIPLICATIO ET DIVISIO. Caput II.

VLtiplicatio & Diuisio eodem modo hic, quo superius in tractatione surdorum quadratorum, perficiuntur: nisi quòd ultimò, loco radicis quadratæ, quæ ex multiplicationis producto & diuisionis exeunte illic eliciebatur, in præsentia nunc, cum sit tractatio cubica, ex ijsdem radix cubica quærenda sit,

SEQVVNTVR EXEMPLA, ET PRIMO DE multiplicatione.

Ra. cu. 7 cum ra. cu. 11 — produ. ra. cu. 77. Item ra. $7\frac{2}{3}$ cum ra. $\frac{3}{4}$ — produ. ra. $5\frac{3}{4}$.

ALIA.

ra. $\frac{9}{16}$ cum ra. $\frac{16}{27}$ — produ. $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ Item $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ cum $\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$ — producuntur $\frac{2}{3}$.

ALIVD.

ra. cu. $3\frac{3}{8}$ cum 6, producuntur 9.

ALIA.

ra. cu. 9 bis — pro. ra. cu. 72. $\sqrt[3]{9}$ ter. — pro. $\sqrt[3]{243}$ ra. cu. 9 quater, — pro. ra. 576.

Hæc tria aut quatuor exempla, licet in se habeant aliquid obscuritatis, tamen qui priorum memor fuerit, nullam horum planè requiret explicationē ulteriorem.

SEQVVNTVR EXEMPLA DIVISIONIS.

Diuidatur ra. cu. 16 in ra. cubicum 4, exit radix cu. numeri 4.

Item $\sqrt[3]{24}$ in $\sqrt[3]{3}$, exeunt 2. Similiter ra. 20 in ra. 6. exit ra. $3\frac{1}{3}$

Item diuidatur $\sqrt[3]{240}$ in 6, uel contrà 6 in $\sqrt[3]{240}$, exeunt, hic quidem ra. cu. $\frac{9}{10}$, illic uerò ra. cu. $1\frac{1}{9}$

Medietas radicis cubicæ numeri 48, est radix cubica numeri 6.

Sic tertia pars eiusdem, numeri 48, est radix cubica numeri $1\frac{7}{9}$

compro-

Comprobantur autem hæ duę species, multiplicatio scilicet & diuisio, alternis, ut aliàs fieri consueuit.

ADDITIO ET SVBTRACTIO. Caput III.

SVnt & hic considerandi duplices surdi, cum, quemadmodum in superiori tractatione, alij commensurabiles inter se sint, alij incommensurabiles. Ac commensurabiles quidem, ut ra. cu. 4, & ra. cu. 32, radices item cubicæ numerorũ 24 & 81. Incommensurabiles uerò, ut ra. cu. 24 & ra. cu. 54, radices itẽ cubicæ numerorũ 20 & 12, uel 21 & 13, atq; id genus. Qui igitur commensurabiles inter se sunt surdi, illorũ radices non aliter adduntur, uel una ab altera subtrahitur, atq; in surdorum quadratorum tum additione, tum subtractione suprà traditum est, nisi quod illic quadratè, hic uerò cubicè omnia agantur. Quare uno atq; altero exemplo posito, res satis dilucida erit. Qui uerò incommensurabiles, & planè surdi sunt, illorum additio & subtractio percommodè signo affirmatiuo, +, & negatiuo, —, absoluuntur.

EXEMPLA PARTIS PRIORIS.

Additio		Subtractio
Ra. cu. 24 ad ra. cu. 81	Item	ra. 24 de ra. 81
3 8 27		3 8 27
2 3		2 3
5		1
125		1
com. numerus 3		com. numerus 3
375		3
ra. cu. 375, radicum summa.		ra. cu. 3, radix residua.

ALIA EXEMPLA.

$\sqrt[3]{10\frac{2}{3}}$ ad $\sqrt[3]{4\frac{1}{2}}$ Item $\sqrt[3]{4\frac{1}{2}}$ de $\sqrt[3]{10\frac{2}{3}}$

In integris & sub una denominatione, sexta scilicet

$\sqrt[3]{64}$ ad $\sqrt[3]{27}$	Item	$\sqrt[3]{27}$ de $\sqrt[3]{64}$
4 3		3 4
7		1
343 in 6 diuisa,		1 in &cæ.
exeunt $57\frac{1}{6}$. Quare		exit $\frac{1}{6}$. Quare
$\sqrt[3]{57\frac{1}{6}}$ radicum sum.		$\sqrt[3]{\frac{1}{6}}$ ra. ra.

EXEMPLA PARTIS POSTERIORIS.

Additio		Subtractio
$\sqrt[3]{24}$ ad $\sqrt[3]{32}$	Item	$\sqrt[3]{24}$ de $\sqrt[3]{32}$
uenit $\sqrt[3]{32} + \sqrt[3]{24}$		ma. $\sqrt[3]{32} - \sqrt[3]{24}$

ALIA.

$\sqrt[3]{9}$ ad $\sqrt[3]{27}$	Item	$\sqrt[3]{9}$ de $\sqrt[3]{27}$
uenit $\sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{9}$		ma. $\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{9}$

SIMILITER ALIA.

$\sqrt[3]{8\frac{1}{3}}$ ad $\sqrt[3]{9\frac{1}{7}}$	Item	$\sqrt[3]{8\frac{1}{3}}$ de $\sqrt[3]{9\frac{1}{7}}$
uenit $\sqrt[3]{9\frac{1}{7}} + \sqrt[3]{8\frac{1}{3}}$		ma. $\sqrt[3]{9\frac{1}{7}} - \sqrt[3]{8\frac{1}{3}}$

Est & alia addendi & subtrahendi ratio, quę quidem, ubi surdi commensurabiles fuerint, locum habet.

Surdis commenſurabilibus propoſitis, hi primùm communi eorum menſura uel numero, quem habent, ad cubos rationales reducendi, deinde tam cuborum radices, quàm etiam radicum quadrati, ponendi ſunt. Hoc facto, utriuſq; radix cum triplo quadrati radicis alterius multiplicari: hæc duo producta deinde unà cũ duobus cubis, ſi quidem additio inſtituitur, coniungi: uel pro ſubtractione abſoluenda, maioris radicis productum maiori, minoris uerò productum minori cubo addi, atq; ab illo deinde hoc collectum ſubtrahi debet. quo facto, tam quòd illic colligitur, quàm hic relinquitur, utrunq; cum communi commenſurabilium ſurdorum numero multiplicatum, per radicem producti tandẽ cubicam cùm additioni, tum ſubtractioni etiam ſatisfactum erit.

Ra. cu. 40	ad	ra. cu. 135	Item	∛ 40	de	∛ 135
5	8	27		5	8	27
	2	3			2	3
	4	9			4	9
	12	27			12	27
	54	36			54	36

Summa omnium
125
com. numerus 5
625. quare
ra. cu. 625 radicum ſumma

Id quod relinquitur,
1
com. numerus 5
5. quare
∛ 5 radix reſidua.

SEQVITVR ALGORITHMVS DE SVRDIS NVMERORVM TERTIAE QVANTITATIS,

ſeu, ut uocant, de ſurdis quadratorum de quadratis.

NVMERATIO, VEL ENVNCIATIO.

Caput I.

ENunciatio eadem eſt quæ in præcedentibus, niſi quòd character, qui numero aſcribitur, pro ſuo ualore & natura exprimatur. Vt ra. ra. 29 Radicis radix, uel radix tertiæ quantitatis, numeri 29, exprimitur. Sic reliqua huius generis exẽpla omnia exprimi debẽt. Præponitur autẽ huiuſmodi ſurdis duplex ra. eo quòd bis ex eis radix quadrata elicienda ſit, ſemel quidem ex ijs ipſis ſurdis, ſecundò uerò ex eorum radicibus inuentis, quod obiter annotare libuit. Breuitatis uerò, atq; compendij gratia, (ut ſuprà etiam indicauimus) ſolent huiuſmodi numeri notari & repræſentari duplici puncto & cæ. ſic ∜, ut ∜ 29, quod & ipſum notandum eſt.

MVLTIPLICATIO ET DIVISIO.

Caput II.

PErficiuntur hę duæ ſpecies, multiplicatio & diuiſio, eodem modo quo in ſuperioribus traditum eſt: niſi quòd ultimò, ratione appellationis, tam de multiplicationis producto, quàm etiam diuiſionis exeunte, radix tertię quantitatis, hoc eſt radix quadrata de radice quadrata elici debeat.

EXEMPLA MVLTIPLICATIONIS SVNT.

ra. ra. 21 cum ra. ra. 12
produ. ra. ra. 252.

Item ∜ 27 cum ∜ 12
produ. √ 18.

Alia

ALIA EXEMPLA.

$\sqrt{162}$ cum $\sqrt{32}$ — produ. $\sqrt{72}$ Item ra. ra. $7\frac{1}{5}$ cum ra. ra. $\frac{4}{5}$ — produ. ra. $2\frac{2}{5}$

ADHVC ALIA.

$\sqrt{24}$ cum 6 uel contra. — produ. $\sqrt{31104}$ Item $\sqrt{45}$ cum $4\frac{1}{3}$ — produ. $\sqrt{15867\frac{2}{9}}$

EXEMPLA DIVISIONIS.

$\sqrt{84}$ in $\sqrt{7}$ — exit $\sqrt{12}$ Item ra. ra. 48 in ra. ra. 12 — exit ra. 2.

ALIA EXEMPLA.

$\sqrt{573}$ in $\sqrt{97}$ — exit $\sqrt{3}$ Item $\sqrt{66}$ in $\sqrt{8}$ — exit $\sqrt{8\frac{1}{2}}$

ALIA EXEMPLA.

$\sqrt{5\frac{1}{7}}$ in $\sqrt{3\frac{1}{5}}$ — exit $\sqrt{\frac{28}{45}}$ $\sqrt{12\frac{1}{2}}$ in $\sqrt{4\frac{1}{2}}$ — exit $\sqrt{1\frac{2}{3}}$ $\sqrt{12}$ in $\sqrt{8\frac{1}{3}}$ — exit $\sqrt{1\frac{1}{5}}$

APPENDIX AD EA QVAE HACTENVS, CVM IN HOC, tum etiam in præmissis algorithmis, de multiplicationibus & diuisionibus surdorum commemorata sunt, cognitu necessarius.

Cum hactenus tantum, quomodo similium appellationum surdi inter se, surdus item cum rationali numero, uel contrà, per has duas species tractari debet, traditum sit, haud raro autem accidere soleat, quòd etiam diuersarum appellationũ surdi inter se his regulis tractandi occurrant, & illorum tractatio nunc, ne quid in pręmissa de surdis descriptione desiderari possit, paucis pręscribetur.

Si duos igitur diuersarum appellationum surdos inter se multiplicare, aut unum in alterum diuidere propositum sit, utriusq; appellationis numerus secundum appellationem numeri alterius multiplicandus est. quo facto, producuntur duo numeri alij, alia etiam, & una quidem, horum productorum appellatio: quibus postea, uel uno cum altero multiplicato, uel uno in alterum diuiso, res confecta erit. Quam uerò hi producti numeri sortiuntur appellationẽ, in additis & diminutis, circa multiplicationem dudum iam traditum est.

EXEMPLA HVIVS SVNT.

ra. 24			ra. cu. 16
ra. 72	cum,	uel in	ra. ra. 32
ra. cu. 32			ra. ra. 8

Producuntur, ratione quidem multiplicationis,

Primò, Radix quintę quãtitatis, hoc est, radix quadraticubica, numeri 3538944.

Secundò, Radix tertiæ quantitatis, hoc est, radicis radix, numeri 165888.

Tertiò, Radix undecimæ quantitatis, hoc est, radix cubica de quadrati quadrato, uel contra, numeri 536870912.

Ratione uerò diuisionis, exeunt ijsdem quantitatibus denominati numeri,

Primò quidem 54, secundò uerò 162, ac tertiò deinde 2048. & cæ.

ALIA EXEMPLA IN RATIONALIBVS.

$\sqrt{4}$		$\sqrt[3]{8}$		4		1
$\sqrt{9}$	cum uel in	$\sqrt{\sqrt{16}}$	pro.	6	uel ex.	$1\frac{1}{2}$
$\sqrt[3]{27}$		$\sqrt{\sqrt{81}}$		9		1

APPENDICIS COMPENDIVM.

Habet hæc operatio ſuum quoq; compendium, in exemplis nimirum, ubi aliqua eſt in appellationibus numerorum conuenientia & ſimilitudo. Vt ſi, exempli gratia, hi duo ſurdi, ra. 6 & ra. ra. 12, unus cum altero multiplicari, uel in alterũ diuidi debeat, numerus 6 quadratè tantum multiplicari, 12 uerò prout ſunt, ita abſq; immutatione relinqui debent. Producitur autem multiplicatione quidẽ, ra. ra. 432, diuiſione uerò exit ra. ra. 3. Sic radice quadrata de radice cubica, uel contrà radice cubica de radice quadrata aliquis numerus notatus, ſi cum numeri alterius radice cubica, uel radice quadrata multiplicari, ſeu in eam diuidi debeat, numerus multiplicans ſeu diuidens, ratione quidem cubi, in ſe tantum quadratè, ratione uerò quadrati, in ſe tantum cubicè multiplicandus erit.

ADDITIO ET SVBTRACTIO. CAP. III.

Q Vinetiã hac tractatione ſurdi aliàs cõmenſurabiles ſunt, aliàs uerò incõmenſurabiles. Qui igitur cõmenſurabiles inter ſe ſunt ſurdi, ad ſuæ appellationis rationales, hoc eſt, ad tertię quantitatis numeros reducendi ſunt, ac ſi quidem additio inſtituitur, radices horum addi: quod ſi uerò ſubtractio, una radix ab altera ſubtrahi debet. Quo facto, utriuſq;, hoc eſt, tam eius quod ex additione colligitur, quàm etiam eius quod per ſubtractionem relinquitur, tertia quantitas, cum communi numero multiplicetur, & erit eius quod producitur, Radicis radix, ſeu tertiæ quantitatis radix: hic quidem radicis radix reſidua, illic uerò harum ſumma. Quòd ſi incommenſurabiles & planè ſurdi ſunt, tũ illorũ additio & ſubtractio percõmodè ſigno affirmatiuo, +, & negatiuo, —, abſoluuntur.

EXEMPLA PARTIS PRIORIS.

Additio				Subtractio.		
ra. ra. 32	ad	$\sqrt{\sqrt{162}}$	Item	ra. ra. 32	de	$\sqrt{\sqrt{162}}$
2 16		81		2 16		81
2		3		2		3
	5				1	
	625				1	
	2		communis numerus		2	
	1250				2	
ra. ra. 1250, radicum ſumma				ra. ra. 2, radix reſidua.		

ALIA EXEMPLA.

$\sqrt{\sqrt{5\frac{1}{16}}}$ ad $\sqrt{\sqrt{39\frac{1}{16}}}$ Item $\sqrt{\sqrt{5\frac{1}{16}}}$ de $\sqrt{\sqrt{39\frac{1}{16}}}$

In integris ſub una denominatione, ſedecima nimirum.

$\sqrt{\sqrt{81}}$	ad	$\sqrt{\sqrt{625}}$	Item	$\sqrt{\sqrt{81}}$	de	$\sqrt{\sqrt{625}}$
3		5		3		5
	8	in ſe, & cæ.			2	in ſe
	4096				16,	
$\cancel{3}$					diuiſa in	
$\cancel{283}$					16.	
$\cancel{4496}$						
Facit $\sqrt{\sqrt{\frac{256}{16}}}$		id eſt 4			exit ſeu manet 1	

Eſt autem hoc exemplum in numeris rat onalibus expoſitum.

Sequitur

Sequitur iam simile in irrationalibus.

$\surd\, 266\frac{7}{9}$ ad $\surd\, 1350\frac{9}{16}$ Item $\surd\, 266\frac{7}{9}$ de $\surd\, 1350\frac{9}{16}$

In integris sub una denominatione, 144

$\surd\, 38416$ ad $\surd\, 194481$ Item $\surd\, 38416$ de $\surd\, 194481$

16 81	16 81
2 3	2 3
5	1
in se, &cæ.	in se
625	1
cum 2401	cum 2401
pro. 1500625 in 144 diui.	pro. 2401 in 144 diuisa,
exeunt $\surd\, \frac{1500625}{144}$	exeunt $\surd\, \frac{2401}{144}$
Radicum igitur summa,	Radix igitur residua,
radix quadrata numeri $102\frac{1}{12}$	ra. quadrata numeri $4\frac{1}{12}$

EXEMPLA PARTIS POSTERIORIS.

$\surd\, 18$ ad $\surd\, 24$ Item $\surd\, 18$ de $\surd\, 24$

ueniunt $\surd\, 24 + \surd\, 18$ ma. $\surd\, 24 - \surd\, 18$

ALIA.

$\surd\, 7\frac{2}{3}$ ad $\surd\, 12\frac{1}{2}$ Item $\surd\, 7\frac{2}{3}$ de $\surd\, 12\frac{1}{2}$

ueniunt $\surd\, 12\frac{1}{2} + \surd\, 7\frac{2}{3}$, ma. $\surd\, 12\frac{1}{2} - \surd\, 7\frac{2}{3}$

SEQVITVR ALGORITHMVS DE BINOMIIS ET RESIDVIS.

Est autem Binomium seu ex binis nominibus linea, ut eã Euclides, per 36 decimi libri propositionem, definit, linea irrationalis, quã duæ rationales, potentia tantum cõmensurabiles, in directum sumptæ, constituunt. ut $4 + \surd\, 7$, $\surd\, 12 + 3$, $\surd\, 27 + \surd\, 15$, $4 + \surd\, 8$, $\surd\, 12 + 2$, $\surd\, 27 + \surd\, 18$. & si quæ sunt alia. Residuum uerò seu Apotome, ut idẽ Euclides id per 73 decimi propositionẽ definit, linea irrationalis, quã duæ rationales, potentia tantum commensurabiles, quarum una ab altera si ablata fuerit, tandem relinquunt. ut $4 - \surd\, 7$, $\surd\, 12 - 3$, $\surd\, 27 - \surd\, 15$ $4 - \surd\, 8$, $\surd\, 12 - 2$, $\surd\, 27 - \surd\, 18$, & id genus alia multa.

ENVNCIATIO. CAP. I.

HAbet hæc Binomiorum & residuorum tractatio, nihil ferè difficultatis, cum illorum operationes omnes suis regulis superius descriptæ sint. Et quia Enunciatio est facilis, cum ex præcedentibus constet & intelligatur: Sequitur igitur

ADDITIO. CAP. II.

IN additione binomiorum & residuorum, qui unius sunt appellationis numeri, addantur simul, absoluti scilicet absolutis, & denominati denominatis, ut superius traditum est, ratione interim signorum + & — habita.

SEQVVNTVR EXEMPLA, ET PRIMO DE BINOMIIS.

4 + ra. 7	ra. 27 + ra. 15
4 + ra. 8	ra. 27 + ra. 18
8 plus radix binomij	ra. 108 plus radix binomij
$15 + \surd\, 224$	$33 + \surd\, 1080$
Vel 8 plus $\surd\, 7 + \surd\, 8$	Vel $\surd\, 108$ plus $\surd\, 15 + \surd\, 18$.

F 3 Alia

ALIA EXEMPLA.

ra. 12 + 3
ra. 12 + 2
ra. 48 + 5

8 + ra. 28
4 + ra. 7
12 + ra. 63.

SEQVITVR SECVNDO EXEMPLVM DE RESIDVIS.

4 — ra. 7
4 — ra. 8
8, minus radix binomij. 15 + ra. 224
Vel 8, minus radix 7, minus item ra. 8

ALIA EXEMPLA.

ra. 48 — 6
ra. 3 — 1
ra 75 — 7

ra. 3 — ra. 2
3 — ra. 5
3 + ra. 3 — ra. 2 — ra. 5

ALIVD EXEMPLVM.

ra. 1620 — 18
54 — ra. 1620
Summa 36.

SEQVVNTVR TERTIO EXEMPLA DE BINOmijs & residuis.

4 + ra. 7
4 — ra. 8
8, minus radix residui
15 — ra. 224
Vel ma. 8 + √7 — √8

4 + ra. 8
4 — ra. 7
8, plus radix residui
15 — ra. 224
Vel ma. 8 + √8 — √7.

ALIA DVO EXEMPLA.

ra. 12 + 3
ra. 12 — 3
ra. 48

4 — ra. 7
3 + ra. 28
7 + ra. 7

SVBTRACTIO. CAP. III.

Quemadmodum in additione, unius appellationis numeri addendi: ita nunc, ut subtractio perficiatur, unus ab altero, absolutus scilicet numerus ab absoluto, & denominatus à denominato subtrahendus est. Quòd si interea, quid cum signis + & — fieri debeat, non oscitanter obserues, nihil est quod ultra desiderare possis.

SEQVVNTVR EXEMPLA, ET PRIMO DE Binomijs.

ra. 12 + 3
ra. 12 + 2
manet 1

12 + ra. 63
8 + ra. 28
4 + ra. 7

ALIVD EXEMPLVM.

4 + ra. 8
4 + ra. 7
manet radix residui 15 — √224, uel ma. √8 — √7.

Exemlpa

EXEMPLA SECVNDO DE RESIDVIS.

4 — ra. 7	4 — ra. 8
4 — ra. 8	4 — ra. 7
manet	Impossibile, uel ma.
ra. residui 15. — √ 224	minus radix resi. 15. — √ 224

ALIA DVO EXEMPLA.

ra. 60 — ra. 20	ra. 12 — 6
ra. 20 — ra. 15	6 — ra. 12
ma, ra. 135 — ra. 80	ma. ra. 48 — 12

ALIA EXEMPLA.

6 — ra. 24	ra. 108 — 9
3 — ra. 6	ra. 48 — 4
3 — ra. 6	ra. 12 — 5

SEQVVNTVR TERTIO EXEMPLA DE BINOMIIS ET RESI.

4 + ra. 7	ra. 27 — 8
4 — ra. 7	ra. 3 + 4
ma. ra. 28	ma. ra. 12 — 12

ALIVD EXEMPLVM.

24 + ra. 24 Vel 24 + ra. 12.
16 — ra. 12 16 — ra. 24
manent utrobiq;, 8 plus radix bino. 36 + √ 1152

ADHVC ALIVD EXEMPLVM.

24 — ra. 24 24 — ra. 12
24 + ra. 12 24 + ra. 24
manent utrobiq;, 8 minus radix bino. 36 + √ 1152.

MVLTIPICATIO. CAP. IIII.

Multiplicētur singularū appellationū numeri multiplicātis, cū singularū appellationū numeris ipsius multiplicādi, pductis deinde singulis cū suis signis debito modo additis, multiplicatio absoluta erit. Hoc tamē curabitur sēper, ut singuli duo numeri, qui inter se multiplicari debēt, unius sint denominationis. quòd si sic, facilis erit omnis multiplicatio. Sin minus, multiplicatione, ut una & eadē sit eorū denominatio, efficiendū est.

SEQVITVR EXEMPLVM.

4 + ra. 7
4 + ra. 8
pro. 16 + ra. 128 + ra. 112 + ra. 56.

ALIA DVO EXEMPLA.

18 + ra. 20	ra. 12 + 3
12 + ra. 20	ra. 12 + 2
164 + ra. 11520	18 + ra. 300

ALIVD EXEMPLVM.

6 — ra. 5
6 — ra. 5
— ra. 180 + 5
+ 36 — ra. 180
produ 41 — ra. 720

ALIA DVO EXEMPLA.

ra. 12 + 6	ra. 12 — 6
6 + ra. 12	6 — ra. 12
ra. 1728 + 48	ra. 1728 — 48

Adhuc

ADHVC ALIA DVO.

4 + ra. 7	ra. 12 + 6
4 — ra. 7	6 — ra. 12
produ. 9	produ. 24.

DIVISIO. CAP. V.

IN diuisione binomiorum & residuorum, cum diuisor aut numerus absolutus, aut denominatus, aut binomium seu residuum esse possit, ad diuisionem commodius absoluendam, distinctione quadam opus erit. Diuisor itaq; si numerus absolutus uel denominatus fuerit, in eum singuli ipsius diuidendi numeri, ut dictum est, diuidatur. etenim exeuntibus deinde cum suis signis simul collectis, diuisio peracta erit. Quòd si fuerit binomium, seu residuum: tunc tam diuisor, quàm etiam diuidendus, per diuisoris contrariũ nomen, hoc est per residuum, si binomium ipse fuerit: uel per binomium. si residuum fuerit, multiplicari debet: nam productis deinde (cum hæc ex 17 propositione Euclidis lib. septimi, eandẽ quam ipsi multiplicati, hoc est, diuidendus & diuisor propositi, rationem custodiant) illo scilicet quem diuidendus dederit in alterum, diuisis, diuisio peracta erit.

EXEMPLA PARTIS PRIORIS.

8 + ra. 20 in 2	Item	ra. 24 — 8 in 3
exeunt 4 + ra. 5		exit ra. $2\frac{2}{3}$ — $1\frac{2}{3}$

ALIA PRIORIS PARTIS EXEMPLA.

8 + ra. 20 in ra. 5	Item	ra. 24 — 8 in √ 6
exit ra. $12\frac{4}{5}$ + 2		exeunt 2 — ra. $10\frac{2}{3}$

EXEMPLVM PARTIS POSTERIORIS.

Diuidatur ra. 72 + ra. 32 in √ 10 + √ 8

Multiplicetur igitur uterq; numerus per √ 10 — √ 8, diuisoris residuũ, contrarium scilicet nomen, & producuntur ra. 2000 — 40, diuidendus. 2 uerò, numerus diuisor, diuisione deinde facta, erit exiens ra. 500 — 20, quod quidem multiplicatione eius cum diuisore primò posito, ut sequitur, probari poterit.

ra. 500 — 20
ra. 10 + ra. 8
+ ra. 4000 — ra. 3200.
ra. 5000 — ra. 4000

produ. ra. 5000 — ra. 3200, atq; tantus est etiam diuidendus primò positus, ra. 72 + ra. 32, id quod subtractione tandem & additione patebit.

SEQVVNTVR ALIA EXEMPLA.

Diuidantur 9 in residuum 4 — ra. 7, uel in binomium 4 + ra. 7

Exeunt hic quidem 4 — ra. 7, illic uerò 4 + ra. 7.

Diuidatur binomium 23 + ra. 448 in 4 + ra. 7

Exeunt 4 + ra. 7.

Quæritur

Quæritur autem huius diuisionis diuidendus numerus sic,

Multiplicentur

$23 + \surd 448$

cum $4 - \surd 7$

$92 - \surd 3136$

$- \surd 3703$

$+ \surd 7168$

produ. $36 + \surd 567$
diuidendus

Subtrahatur

$\surd 3703$ de $\surd 7168$

7 | 529 | 1024

23 | 32

9 in se

81

7

$\surd 567$. Cætera nunc sunt facilia.

Diuidantur $48 +$ ra. $432 +$ ra. $384 +$ ra. 72, in binomium $8 +$ ra. 12. exeunt $6 +$ ra. 6, id quòd multiplicatione diuisoris cum exeunte probari potest.

Diuidatur ra. $448 +$ ra. 336 in ra. ra. $252 +$ ra. ra. 28.
Exit ra. ra. $252 +$ ra. ra. 28.

DE EO QVOMODO DISCREPANTIA BINOMIORVM ET RESIDVORVM COGNOscatur, quomodo deinde ex eis radices quadratæ elici debeant. Caput 6.

Quid sit Binomium in genere, quid item Residuum, ab initio huius Algorithmi dictum est. Et quia sex sunt tantum binomiorum uarietates seu species, quæ sit cuiusque propria definitio, nunc subiungere uisum est.

EST IGITVR BINOMIVM, SEV EX BINIS NOMININIBVS

Prima, secunda, tertia, Quarta, quinta uel sexta, irrationalis quædam, ex duabus rationalibus, potentia tantum commensurabilibus composita, recta linea, quarum longior breuiori maius potest in quadrato lineæ, longiori longitudine

- commensurabili, cuius item
  - longior / breuior / neutra — portio propositæ rationali longitudine commensurabilis existit, sicut est ex binis nominibus
    - Prima, ut $6 + \sqrt{20}$
    - secũda, ut $\sqrt{18} + 4$
    - tertia, ut $\sqrt{24} + \sqrt{18}$
- incommensurabili, cuius item
  - longior / breuior / neutra — portio propositæ rationali longitudine commensurabilis existit, sicut est ex binis nominibus
    - Quar. ut $6 + \sqrt{24}$
    - quinta, ut $\sqrt{18} + 3$
    - sexta, ut $\sqrt{24} + \sqrt{12}$

Et tantum quidem de binomiorum definitionibus. Residua porrò per aphæresin eodem modo se habent, quare

RESIDVVM SEV APOTOME

Prima, secunda, tertia. Quarta, quinta uel sexta. est irrationalis quædam, ex duabus rationalibus, potentia tantum commensurabilibus, ubi quidem una ab altera ablata fuerit tandem relicta, cuius tota ablata maius potest in quadrato lineæ, ipsi toti longitudine

- commensurabili, cuius item
  - Tota / ablata / neutra — expositæ rationali longitudine commensurabilis existit, sicut est apotome
    - Prima, ut $6 - \sqrt{20}$
    - secũda, ut $\sqrt{18} - 4$
    - tertia, ut $\sqrt{24}$ $\sqrt{18}$
- incommensurabili, cuius item
  - Tota / ablata / neutra, — expositæ rationali longitudine commensurabilis existit, sicut est apotome
    - Quar. ut $6 - \sqrt{20}$
    - quinta ut $\sqrt{18} - 4$
    - sexta, ut $\sqrt{24} - \sqrt{18}$

Exhis

Ex his nunc patet, tam binomia quàm etiam residua, licet aliquid commune habeant, nimirum quòd omnia in genere irrationales sint lineæ, duas item rationales, potentia tantum commensurabiles, rectas lineas ad earum constitutionem requirant, in triplici esse differentia, quarum prima quidem est. Quòd licet in omnibus binomijs, longioris portionis quadratum, quadrato breuioris portionis maius sit, tamen in prioribus tribus, primo scilicet secundo & tertio, binomijs, quadratum longioris breuioris portionis quadrato maius est, in quadrato lineæ, longiori longitudine commensurabili: in posterioribus uerò, maius est in quadrato lineę, longiori longitudine incommensurabili. ut, 12 + ra. 23, ra. 45 + 5 & ra. 20 + ra. 15. Item 12 + ra. 24, ra. 45 + 6 & ra. 20 + ra. 14. Secunda uerò, quòd binomium primum & quartum, longiorem portionem rationalem, breuiorem uerò irrationalem: & contra, binomium secundum & quintum, breuiorem rationalem, longiorem uerò irrationalem habeant. ut, 18 + ra. 35, est binomium primum, 18 + ra. 38, quartum. Sic ra. 48 + 6, secundum, sed ra. 48 + 5, quintum. Ac tertia deinde, quòd binomium tertium & sextum. neutram portionem rationalem, sed utramque irrationalem habeant. ut ra. 60 + ra. 45, quod est tertium, at, ra. 60 + ra. 35, sextum binomium est. Atque secundum has differentias nunc facilè erit cuiuis, qualecunque binomium propositum fuerit, cuiusnam ordinis binomium sit, indicare.

ET QVIA IAM VNVMQVODQVE BINOMIVM, PER CONSEQVENS ETIAM VNVMQVODquè residuum, cuiusnam ordinis binomium uel residuum sit, intelligi potest, ad alterum huius capitis punctum, quomodo scilicet ex eis radices quadratæ elici debeant, accedendum erit.

Quòd omne binomium posit esse radix quadrata alterius cuiusdam binomij, ex eo perspici potest, quòd aliàs in absolutis numeris accidere consueuit, multiplicatione scilicet sui in se. Quòd item contrà, omne binomium sit quadratum, seu radicem quadratam habeat, cum Euclides in senario decimi libri quarto, cuius initium est propositio 54: finis uerò 59, singulorum binomiorum radicibus propria nomina imponat, nisi hæ inueniri possent, ineptè fecisset, si rebus, quæ non sunt, nomina & appellationes imposuisset. Ex hoc igitur quarto decimi Euclidis senario, commodè & uerè infertur, omnia binomia quadrata esse, atque sic etiam radices quadratas habere, licet de numero absoluto illud idem non concedatur. Dicit autem Euclides in prima huius senarij propositione, quod Areolam, hoc est, spaciũ sub rationali, atque ex binis nominibus prima comprehẽsum, potens, Irrationale sit, Ex binis item nominibus linea una uocetur. Vnde nunc, cum rationale id Vnitas etiam esse posit, unitas insuper in quemcunque numerum, uel quantitatem ducta, eandem producat: rectam lineam, ex binis nominibus primam potentem, hoc est, primi binomij tetragonicum latus, binomium esse, facile colligitur. Eodem modo ex sequentibus huius senarij propositionibus ordine habetur. Secundi binomij radicem quadratam, esse lineam irrationalem, atque Ex binis medijs primã, Tertij: lineam irrationalem, atque Ex binis medijs secundam, Quarti: lineam irrationalem, atque Maiorem. Quinti uerò: lineam irrationalem, atque Rationale & medium potentem. Sexti deinde: lineam irrationalem, atque Duo media potentem. Hæc ille. Et quia iam satis constat, singula binomia radices quadratas habere, hæ quomodo nunc ex singulis elici debeant, per canonem quendam generalem tradetur.

PRO ELICIENDIS BINOMIORVM RADICI bus quadratis, canon quidam generalis.

Binomio proposito, subtrahatur minoris quadratum de quadrato nominis maioris, atque in residui quarta parte, ubi radix quadrata quæsita ac inuēta fuerit, ea medietati maioris nominis adijciatur: & erit eius quod inde colligetur radix quadrata, una inueniendæ radicis portio. Porrò si collectū hoc, de toto maiori nomine subtrahatur, tū radix residui quadrata, alterā portionē ostēdet. Vtrisque igitur portionibus per signū + copulatis, tota binomij propositi radix quadrata, sese exhibebit.

SEQVVNTVR NVNC PRO SINGVLIS BINOmijs singula exempla.

23 + ra. 448 binomium primum,
529 maioris nominis quadratum,
448 minoris nominis quadratum,
81 residuum, $81\frac{}{4}$ residui quarta pars
$4\frac{1}{2}$ quartæ partis radix, ad $11\frac{1}{2}$ medietatem maioris,
ueniunt 16, collectū: 4 deinde collecti radix, & una inueniendę radicis portio.
23 totum maius nomen,
16 collectum,
7 residuum: ra. 7 deinde,
residui radix, & altera inueniendæ radicis portio.
Tota igitur binomij propositi radix quadrata,
4 + ra. 7, quæ erat inuenienda.

Est autem, ut habet propositio huius iam commemorati senarij prima, linea irrationalis, & Ex binis nominibus una. Quòd porrò sit uera binomij radix, id multiplicatione sui in se probari potest.

ALIA DVO EXEMPLA, DE BINOMIO secundo, tertio,

secundo,	tertio,
ra. 448 + 14	ra. 448 + ra. 336
448	448
196	336
252	112
63	28
ra. 63 ad ra. 112, ueniunt	ra. 28 ad ra. 112, ueniunt
ra. 343, de ra. 448, ma. ra. 7	ra. 252 de ra. 448, ma. ra. 28
ergo √ 343 + √ 7	ergo √ 252 + √ 28

radix quadrata est binomij propositi.

Linea itē irrationalis, & respectu quidē binomij secundi, Ex binis medijs prima, ut habet propositio secunda. Consideratione uerò binomij tertij, linea irrationalis, & Ex binis medijs secunda, ut habet propositio tertia. Quòd porrò uerę binomiorū radices quadratę inuentę sint, id multiplicatione, ut sequitur, examinari potest.

EXAMEN

binomij secundi,	binomij tertij,
ra. ra. 343 + ra. ra. 7	√ 252 + √ 28
ra. ra. 343 + ra. ra. 7	√ 252 + √ 28
ra. 343 + ra. 7	√ 252 + √ 28
ra. ra. 2401 uel 7	√ 7056
ra. ra. 2401 uel 7	√ 7056
Summa productorum.	
ra. 448 + 14	√ 448 + √ 336
binomia	proposita

Aliud

ALIVD EXEMPLVM DE BINOMIO QVARTO.

24 + ra. 448

576 maioris nominis quadratum,

448 minoris nominis quadratum,

128 Residuum,

32, residui quarta pars,

ra. 32, quartæ partis radix, ad 12, medietatem maioris, colliguntur 12 + ra. 32, cuius radix quadrata, Radix binomij 12 + ra. 32, una &cæ. portio.

24, Totum maius nomen,

12 + ra. 32, id quod collectum est,

manet 12 — ra. 32, cuius radix quadrata, quæ est, Radix residui 12 — √ 32, portio altera.

Tota igitur binomij propositi radix quadrata est, Radix utriusque tam scilicet binomij 12 + √ 32, quàm etiam residui 12 — √ 32

Est autem linea irrationalis, & Maior uocatur, ut dicit propositio huius senarij quarta. Quòd porrò sit uera propositi binomij radix, multiplicatione, ut sequitur, probari potest.

Radix binomij 12 + √ 32, et radix resi. 12 √ 32

Radix binomij 12 + √ 32, et radix resi. 12 — √ 32

12 + √ 32, + 12 — √ 32

ra. 112

ra. 112

Summa productorũ 24 + ra. 448, binomium scilicet propositum, bene igitur.

ALIA DVO EXEMPLA DE BINOMIO

quinto,	sexto,
ra. 448 + 12	ra. 448 + ra. 352
448 ma. nominis qua.	448 ma. no. quadratum
144 mi. nominis qua.	352 mi. no. quadratum
304	96
76	24
ra. 76 ad ra. 112,	ra. 24 ad ra. 112,
colligitur ra. 112 + ra. 76.	colligitur ra. 112 + ra. 24.
Huius nunc radix quadrata, nimirum radix bino-	
mij ra. 112 + ra. 76,	mij ra. 112 + ra. 24
una portio	una portio
ra. 448 Totum ma. no.	ra. 448 Totum &cæ.
ra. 112 + ra. 76. Id quod col.	ra. 112 + ra. 24 Id
ma. ra. 112 — ra. 76.	ma. ra. 112 — ra. 24.
Huius nunc radix quadrata, nimirum Radix re-	
sidui ra. 112 — ra 76.	sidui ra. 112 — ra. 24
pars altera.	pars altera.
Binomij igitur propositi radix est	
Radix utriusque	Radix utriusque
binomij scilicet √ 112 + √ 76	bino. scilicet √ 112 + √ 24
& residui √ 112 — √ 76	& residu. √ 112 — √ 24
Est autem linea irrationalis, & uocatur	
Rationale mediumque potens,	Duo media potens,
ut quidem dicit propositio huius senarij	
quinta	sexta

PROBA BINOMII QVINTI.

Radix binomij $\surd$ 112 + $\surd$ 76 et ra. residui $\surd$ 112 — $\surd$ 76

Radix binomij $\surd$ 112 + $\surd$ 76 et ra. residui $\surd$ 112 — $\surd$ 76

$\surd$ 112 + $\surd$ 76 . & $\surd$ 112 — $\surd$ 76

+ 6

+ 6

Summa productorum ra. 448 + 12, & bene.

PROBA BINOMII SEXTI.

Radix binomij $\surd$ 112 + $\surd$ 24 et ra. residui $\surd$ 112 — $\surd$ 24

Radix binomij $\surd$ 112 + $\surd$ 24 et ra. residui $\surd$ 112 — $\surd$ 24

$\surd$ 112 $\surd$ 24 & $\surd$ 112 — $\surd$ 24

ra. 88

ra. 88

Summa productorum ra. 448 + ra. 352&, bene.

Et hęc quidem de binomiorum radicibus inueniendis dicta sufficiant. Simili modo iam agendum est cum Residuis, cum & ipsa quadrata esse, atq; ita radices quadratas habere, ex propositione 91, & ordine sequentibus quinq; eiusdem decimi Euclidis manifeste pateat. Quare pro ijs eodem modo operatione instituta. Primi residui, quod est 23 — ra. 448, radix quadrata inuenitur esse, 4 — ra. 7. Est autem & ipsa Residuum, & irrationalis linea, ut habet propositio huius senarij prima. Secundi uerò, quod est ra. 448 — 14, radix quadrata inuenitur, ra. ra. 343 — ra. ra. 7. Quæ est linea irrationalis, & Mediæ residua prima, ex propositione 92. Tertij autem, quod est ra. 448 — ra. 336, radix quadrata inuenitur, ra. ra. 252 — ra. ra. 28, quæ est linea irrtionalis & Medię residua secunda, ex propositione 93. Quarti deinde, quod est 24 — ra. 448 radix quadrata inuenitur, Radix binomij 12 + ra. 32, minus, radix residui 12 — ra. 32. quę est linea irrationalis, & Minor uocata, ex propositione 94. Quinti itē, quod est ra 448 — 12, radix quadrata inuenitur, Radix binomij ra. 112 + ra. 76, minus radix residui ra. 112 — ra. 76. quę est linea irrationalis, & Cum rationali medium totum conficiens linea, ex propositione 95. Sexti tandem, quod est ra. 448 — ra. 352, radix quadrata inuenitur, Radix binomij ra. 112 + ra. 24 minus radix residui ra. 112 — ra. 24. quę est linea irrationalis, & Cum medio medium totum conficiens linea, ex propositione huius senarij ultima 96.

Et licet satis iam superque, quomodo ex binomijs, residuis item, radices quadratæ inueniri debeant, traditum sit, ne quid tamen huius artis studiosi habeant, quod conquerantur unius atq; alterius exempli praxim, pro utroq; subiungere placuit. Sit itaq; propositum inuenire radicem quadratam,

ex binomio	ex residuo
72 — $\surd$ 2880	72 + $\surd$ 2880
5185	5188
2880	2880
2304	2304
576	576
24 ad 36	24 ad 36
ueniunt 60 de 72	ueniunt 60 de 72
manent 12	manent 12
ergo $\surd$ 60 + (quia bino.)	ergo $\surd$ 60 — (quia resi.)
$\surd$ 12, propositi binomij	$\surd$ 12, propositi residui

radix quadrata erit.

Sic

SIT NVNC PROPOSITVM HARVM INVENTARUM radicum, ut quæ sunt binomium & residuum sextum, radices quadratas inuenire.

ra. 60 + ra. 12	ra. 60 — ra. 12
60	60
12	12
48	48
12	12
$\sqrt{}$ 12 ad $\sqrt{}$ 15	$\sqrt{}$ 12 ad $\sqrt{}$ 15
ueniunt $\sqrt{}$ 15 + $\sqrt{}$ 12	ueniunt $\sqrt{}$ 15 + $\sqrt{}$ 12
de ra. 60	de ra. 60
ma. $\sqrt{}$ 15 — $\sqrt{}$ 12.	ma. $\sqrt{}$ 15 — $\sqrt{}$ 12.
Propositi igitur binomij	Propositi igitur residui

radix quadrata est

Radix utriusque binomij scilicet $\sqrt{}$ 15 + $\sqrt{}$ 12 & residui $\sqrt{}$ 15 — $\sqrt{}$ 12.	Radix binomij $\sqrt{}$ 15 + $\sqrt{}$ 12, minus radix re. $\sqrt{}$ 15 — $\sqrt{}$ 12.

SEQVITVR PROBA, INSTITVTA PRO residuo.

radix bi. $\sqrt{}$ 15 + $\sqrt{}$ 12 minus ra. re. $\sqrt{}$ 15 — $\sqrt{}$ 12

radix bi. $\sqrt{}$ 15 + $\sqrt{}$ 12 minus ra. re. $\sqrt{}$ 15 — $\sqrt{}$ 12

$\sqrt{}$ 15 + $\sqrt{}$ 12 plus $\sqrt{}$ 15 — $\sqrt{}$ 12

minus $\sqrt{}$ 3

minus $\sqrt{}$ 3

Summa pro. $\sqrt{}$ 60 — $\sqrt{}$ 12 Residuum propositum, bene igitur operatum.

EST PORRO QVIDAM CANON GENERALIS ALIVS, per quem iuxta Algebræ regulas binomiorum & residuorum radices inueniuntur, qui sic se habet.

Binomio uel Residuo aliquo proposito, recipiatur dimidium portionis, uel nominis minoris, maiore deinde portione iuxta Algebræ regulas in duas partes sic diuisa, ut harum multiplicatio, unius scilicet cum altera tantùm, quantùm nimirum quadratum medietatis minoris fuerit, producat, res peracta erit, cum tandem binomij uel residui propositi radix, per harum partium radices simul collectas, ratione binomij: uel una ab altera subtracta, si residuum propositum fuerit, significetur. Hunc autem canonem infrà, ubi res & similitudo postulauerint, tractabimus.

Hactenus de radicibus, binomiorum & residuorum inueniendis. Ne quis autem terreatur, quòd in hac tractatione decimi libri Euclidis subinde mentionem facimus, cum uidelicet illa sine decimi libri cognitione intelligi nequeant, ac prius cognosci librum hunc oporteat, quàm harum explicatio regularum suscipiatur. Quod ipsum sanè uerum esset, si perfectam & integram horum quis cognitionem requireret, sed tantum de eis intelligere, ut quæ iam sequuntur, planiora sint, etiam si nullas planè adduxissemus propositiones, res satis descripta esset. Quare eas hanc ob caussam solùm propositas à nobis esse existimet quispiã, ut nimirum earum operationes certis rationibus fundari persuasum sibi haberet: ansam deinde etiam, his nunc perceptis, arriperet, subtilius ista exquirendi, cum iam sint aliquo modo descripta, & quodammodo primis lineamentis adumbrata.

Sequuntur

SEQVVNTVR NVNC AD AEQVATIONES SVPRA TRADITAS, AD EA ETIAM quæ hactenus de surdis exposita sunt, commodius exercenda, exempla alia.

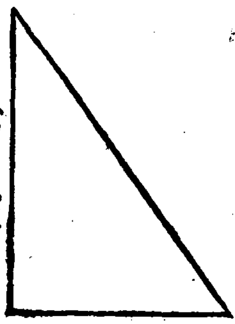
Primum. Esto triangulum rectangulum, atque cathetus eius $8 - \sqrt{32}$, basis uerò & hypotenusa simul, $16 - \sqrt{128}$, quanta erit utraque, basis scilicet & hypotenusa, linea seorsim, quæritur. Facit

Basis quidem	$6 - \sqrt{18}$
Hypotenusa uerò	$10 - \sqrt{50}$

OPERATIO.

Cathetus ex hypotesi,	sunt	$8 - \sqrt{32}$
Sit autem nunc basis		1 ra.
Hypotenusa igitur, erunt		$16 - \sqrt{128}$ N minus 1 ra.

$8 - \sqrt{32}$



Et quia quadratum hypotenusæ in triangulo rectangulo, ex propositione 47 primi, quadratis catheti & basis linearum æquale est. Singularum igitur linearum quadratis acceptis, de eo etiam quod ab hypotenusa describitur, catheti uel basis, utro uoles, quadrato, subtracto, id quod relinquitur, ex communi illa notitia, Si ab æqualibus æqualia subtrahantur, &cæ. alterius, basis quidem, ubi catheti, catheti uerò, ubi basis quadratum subtractum fuerit, quadrato æquale erit.

SEQVITVR NVNC DICTORVM calculus.

$8 - \sqrt{32}$ N Cathetus	1 radix Basis
$8 - \sqrt{32}$	1 ra.
$96 - \sqrt{8192}$ quadratum	1 pri. quadratum

$16 - \sqrt{128}$ N minus 1 ra. Hypotenusa,
$16 - \sqrt{128}$ N minus 1 ra.

$256 + 128$ N plus 1 pri.
$- \sqrt{32768}$ N bis
minus $16 - \sqrt{128}$ radi. bis

$384 - \sqrt{131072}$ N, plus 1 pri. minus $32 - \sqrt{512}$ ra.

quadratum hypotenusæ. A quo primò quadratum catheti, deinde etiam quadratum basis subtrahendum est, & relinquuntur tandem, ratione quidem subtractionis prioris,

$288 - \sqrt{73728}$ N plus 1 pri. minus $32 - \sqrt{512}$ ra.

æquales uni primæ,

ratione uerò subtractionis posterioris,

$384 - \sqrt{131072}$ N minus $32 - \sqrt{512}$ ra.

æquales $96 - \sqrt{8192}$ N

Et

Et ultimò, iuxta illam communem notitiam, Si æqualibus æqualia adijciantur, &cæ. Si item ab æqualibus æqualia subtrahantur &cæ. ueniunt.

$288 - \sqrt{73728}$ N æqua. $32 - \sqrt{512}$ ra.

Est prima æquatio. Diuisione igitur numeri quantitatis debilioris in numerum quantitatis potentioris, radicis ualor cognoscendus: per eum deinde, Basis quantitas exprimenda est.

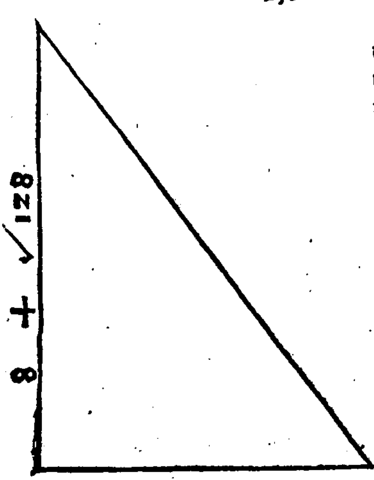
Quoniam autem huius diuisionis diuidens quantitas est residuum, per suum igitur binomium, quod est $32 + \sqrt{512}$, alia diuidenda, alia item quantitas diuidens, multiplicatione, inuenienda est, ut sequitur.

$288 - \sqrt{73728}$
cum $32 + \sqrt{512}$
$9216 - \sqrt{6144}$
$- \sqrt{73728}$
$+ \sqrt{41472}$
$3072 - \sqrt{4608}$ { millies uicies quater
Quantitas diuidenda

$32 - \sqrt{512}$
cum $32 + \sqrt{512}$
$1024 - 512$
hoc est,
512
diuidens

INSTITVATVR NVNC DIVISIO.

4
0
224
Diuidantur ~~3072~~ $- \sqrt{}$ ~~4608~~ millies uicies &cæ.
exeunt $6 + \sqrt{18}$, & tanta est basis quantitas.
in 512 ~~512~~, quinquagies decies bis.
256



Et quia iam basis quantitas nota est, quanta hypotenusa sola fuerit, cum hæ duæ quantitates simul, ex hypothesi, $16 - \sqrt{128}$ sint, subtractione manifestabitur.

ALIVD EXEMPLVM simile.

Triangulũ esto rectangulum, atq; cathetus eius $8 + \sqrt{128}$, basis uerò & hypotenusa simul, $16 + \sqrt{512}$, quanta erit utraq;, basis scilicet & hypotenusa, linea seorsim, quæritur. Facit

Basis quidem $6 + \sqrt{72}$
Hypote. uerò $10 + \sqrt{200}$

OPERATIO.

Cathetus, ex hypothesi sunt $8 + \sqrt{128}$
Sit autem nunc basis 1 radix
Hypotenusa igitur erunt $16 + \sqrt{512}$ minus 1 ra.
Multiplicatione quærantur quadrata laterum, & erunt
Catheti quidem $192 + \sqrt{32768}$
Basis uerò 1 pri.
ac hypotenusæ deinde,
$768 + \sqrt{524288}$ N, plus 1 pri. minus $32 - \sqrt{2048}$

Quare

Quare, iuxta penultimam propositionem primi,

$768 + \sqrt{524288}$ N, plus 1 pri. minus $32 - \sqrt{2048}$

æquales $192 + \sqrt{32768}$ N. + 1 pri.

Atque ultimò tandem, iuxta communes notitias additione & subtractione facta, ueniunt

$576 + \sqrt{294912}$ N æqua. $32 + \sqrt{2048}$ ra.

Est autem prima æquatio. Numerus igitur characteris N, tanquam debilioris, in numerum characteris potentioris, ra. diuidendus est, ut sequitur.

Quæratur primò nouus diuidendus, nouus item diuisor, per multiplicationem utriusque cum diuisoris contrario nomine, residuo nimirum $\sqrt{2048} - 32$.

	$\sqrt{294912} + 576$		$\sqrt{2048} + 32$
cum	$\sqrt{2048} - 32$	cum	$\sqrt{2048} - 32$
	$24576 - 18432$		$2048 - 1024$
	$-\sqrt{301989888}$		hoc est
	$+\sqrt{679477248}$		
	$6144 + \sqrt{75497472}$		1024
	Diuidendus		Diuisor.

~~2~~
~~9~~ ~~2~~
~~2~~ ~~0~~ ~~7~~ ~~2~~ ~~0~~
~~2~~ ~~2~~ ~~6~~ ~~3~~ ~~2~~ ~~5~~ ~~5~~
~~6~~ ~~2~~ ~~4~~ ~~4~~ + $\sqrt{}$ ~~7~~ ~~5~~ ~~4~~ ~~9~~ ~~7~~ ~~4~~ ~~7~~ ~~2~~

$6 + \sqrt{72}$ basis. Quæ si à

1 0 2 4 . 1 0 4 8 5 7 6

basis & hypotenusæ aggregato subtrahatur,

relinquuntur $10 + \sqrt{200}$, hypotenusæ quantitas, ut suprà.

Calculus porrò subtractionis præcedentis sic instituatur.

	$\sqrt{301989888}$	de	$\sqrt{679477248}$
8	37748736		84934656
4	9437184		21233664
	3072	de	4608
	manent 1536 in se		
	produ. 2359296		
	communis nu. 32		
	75497472		

Porrò triangulorum areæ sunt, prioris quidem $36 - \sqrt{1152}$, posterioris uerò $72 + \sqrt{4608}$. Id quod ex propositione 41 primi, & canone quodam generali, in eodem primo libro exposito, facile colligetur.

OPERATIO TRIANGVLI PRIORIS per canonem.

Latera		Excessus
$10 - \sqrt{50}$		$2 - \sqrt{2}$
$8 - \sqrt{32}$		$4 - \sqrt{8}$
$6 - \sqrt{18}$		$6 - \sqrt{18}$
$24 - \sqrt{288}$	Medietas	$12 - \sqrt{72}$

$12 - \sqrt{128}$ primum, $108 - \sqrt{10368}$ secundum,

$2448 - \sqrt{5971968}$ tertium productum.

Huius

Huius igitur radice ut sequitur quæsita,

	$2448 - \sqrt{5971968}$.	
	5992704	maioris quadratum,
	5971968	minoris quadratum,
	20736	residuum,
	5184	residui quarta pars,
	72	quartæ partis radix, ad 1224,
ueniunt	1296,	unius portionis quadratum, de 2448
manent	1152,	alterius portionis quadratum.

Radix igitur, ac per consequens trianguli propositi area, $36 - \sqrt{1152}$

OPERATIO TRIANGVLI ALTERIVS.

Latera		Excessus
$10 + \sqrt{200}$		$2 + \sqrt{8}$
$8 + \sqrt{128}$		$4 + \sqrt{32}$
$6 + \sqrt{72}$		$6 + \sqrt{72}$
$24 + \sqrt{1152}$	Medietas	$12 + \sqrt{288}$

$24 + \sqrt{512}$ primum $216 + \sqrt{41472}$ secundum

Porrò $9792 + \sqrt{95551488}$, tertium productum. Atque area deinde trianguli $72 + \sqrt{4608}$, id quod sequenti calculo manifestabitur.

	9792	+	$\sqrt{95551488}$		
	95883264	maioris	95551488	minoris quadratum,	
	331776	residuum,	82944	residui quarta pars,	
	288	quartæ partis radix,	ad	4896,	
ueniunt	5184	unius portionis, &cæ.	de	9792,	
manent	4608,	alterius portionis quadratum,		quare	
	$72 + \sqrt{4608}$	radix binomij, &cæ.			

EXEMPLUM SECUNDUM.

Sunt 12 diuisa in duas partes. Quoniam autem partium multiplicatio, unius quidem cum altera, 20 uel 28 producit, quanta erit utraque pars?

			minor	maior
Facit quantum ad	20	sunt	2	10
	28		6 — ra. 8,	6 + ra. 8

Tertium. Sunt 12 diuisa in partes duas. Quoniam autem partium quadrata simul 90 uel 100 faciunt, partes igitur quantæ sunt?

Respondetur respectu

			minor	maior
quidem	90	sunt	3	9
uerò	100		$6 - \sqrt{14}$,	$6 + \sqrt{14}$

SEQVITVR OPERATIONIS EXAMEN.

Sumantur numeri secundò inuenti,

$6 - \surd 14$ minor	$6 + \surd 14$ maior
$6 - \surd 14$	$6 + \surd 14$
$36 + 14$	$36 + 14$

100. & bene.

Quartum. Numerus in duo diuisus est, quoniam autem partium differentia sunt 6; qui uerò ex multiplicatione unius cum altera producitur numerus, 27 uel 36, quantus sit ipse diuisus, quantę deinde etiam partes, quæritur. Facit

diuisus quidem 12 uel ra. 180

Partes deinde, respectu

		minor	maior
quidem	27	3	9
uerò	36	ra. $45 - 3$	ra. $45 + 3$

Vel, qui uerò ex partium quadratis colligitur numerus, 50 sunt, uel 72, quantus &cę.

Facit diuisus quidem 8 uel ra. 108

Partes uerò, respectu

		minor	maior
quidem	50	1	7
uerò	72	ra. $27 - 3$	ra. $27 + 3$

OPERATIO PARTIS PRIORIS, QVANTVM ad multiplicationem partium,

ponatur	1 ra.	totus diuisus.
Et quia	6 N,	partium differentia, ex hypothesi,
erit	$\frac{1}{2}$ ra. $-$ 3 N	minor,
&	$\frac{1}{2}$ ra. $+$ 3 N	maior pars.

Quare quantum ad multiplicationem, uenit

$\frac{1}{4}$ pri. $-$ 9 N æqual. 27 uel 36 N.

Quantum uerò ad partium quadrata, uenit

$\frac{1}{2}$ pri. $+$ 18 N æqual. 50 uel 72 N.

ALITER INSTITVTA HVIVS EXEMpli operatio.

Quærantur primò partes, deinde etiam ipse totus numerus. Sit itaque

1 ra. maior, uel 1 ra. minor,

1 ra. $-$ 6 N pars minor. 1 ra. $+$ 6 N maior.

uenit

uenit, multiplicatione facta,

ratione quidem productorum, $\frac{1\ \text{pri.} - 6\ \text{ra.}}{1\ \text{pri.} + 6\ \text{ra.}}$ æqual. 27, uel 36 N.

quadratorum uerò, $\frac{1\ \text{pri. æqua. } 6\ \text{ra.} + 7\ \text{N, uel} + 18\ \text{N.}}{1\ \text{pri.} + 6\ \text{ra.}}$ æqual. 7, uel 18 N.

EXEMPLVM QVINTVM.

Sunt 12, uel 19 diuisa in duas partes.

Quoniam autem una parte cum altera multiplicata, producto deinde in partium differentiam diuiso: $17\frac{1}{2}$ exeunt, quantę partes sint, quęritur.

	maior	minor pars.
Facit	7	5
	ra. $396\frac{1}{2} - 8$	$27 -$ ra. $396\frac{1}{2}$

Vel, Quoniam autem partium quadrata simul iuncta, atque id quod colligitur, in partium differentiam diuisum: 37 exeunt, quantę partes sint quęritur.

	maior	minor pars
Facit	7	5
	$28 -$ ra. 252,	ra. $252 - 9$

OPERATIO PARTIS PRIORIS.

		uel		
1 ra.	Maior,		1 ra.	Minor,
12 N — 1 ra.	minor.		12 N — 1 ra.	maior.
12 ra. — 1 pri.	produ.		12 ra. — 1 pri.	productum,
2 ra. — 12 N	differentia		12 N — 2 ra.	differentia.

AEQVATIO IGITVR

$$\frac{12\ \text{ra.} - 1\ \text{pri.}}{2\ \text{ra.} - 12\ \text{N}}\ \text{æqua.}\ 17\tfrac{1}{2}\ \text{N} \qquad \frac{12\ \text{ra.} - 1\ \text{pri.}}{12\ \text{N} - 2\ \text{ra.}}\ \text{æqua.}\ 17\tfrac{1}{2}\ \text{N}$$

SIC ETIAM INSTITVATVR OPERATIO cum numero 19, & uenit

1 pri. + 16 ra. æquales $332\frac{1}{2}$ N   1 pri. + $332\frac{1}{2}$ N æquales 54 ra.

Posterioris partis operatio ex priore nunc est facilis.

EXEMPLVM SEXTVM.

Sunt tres numeri, quorum primus cum aliquo alio, quarto scilicet, ad reliquos duos simul sumptos, sit $\frac{1}{3}$. Secundus uerò cum eodem quarto, ad reliquos, sit in ratione $\frac{4}{5}$, Ac tertius deinde, & ipse cum eodem quarto numero, reliquis duobus æqualis sit. cum sic ille quartus numerus, ex hypothesi, 8 esse ponatur, quanti nunc hi tres numeri esse debeant, quęritur.

	Primus,	secundus,	tertius numerus.
Facit	24	40 &	56

OPERATIO.

Primus	secundus & tertius.	Quartus alius,
Ponatur 1 radix,	& erunt 3 ra. + 24 N,	atque 8.

Et quoniam secundus cum dato, tertij & primi numerorum tres quintæ sunt: tota igitur omnium summa ad eosdem, tertium & primum, numeros, in ratione, ut 8 ad 5, uel octo quintæ erunt. Per regulam ergo proportionum, dicendo 8 dant 5, quid 4 ra. + 32 N: primi & tertij numerorum summa manifestabitur. Quoniam autem primus numerus notus est, cum is sit 1 radix posita, eodem primo de hac summa subtracto: tertius, hoc tertio deinde de tertij & secundi numerorum summa subtracto: secundus etiam numerus manifestabitur. Ponuntur itaque numeri singuli seorsim sic.

Primus	secundus	tertius	quartus.
1. ra.	$1\frac{1}{2}$ ra. + 4 N	$1\frac{1}{2}$ ra. + 20 N	8

Et quoniam etiam tertius cum quarto numeris primo & secundo æqualis est, tertius igitur quarto, secundus uerò numero primo additus, quæ colliguntur,

$1\frac{1}{2}$ ra. + 28 N & $2\frac{1}{2}$ ra. + 4 N

inter se æquales erunt. Radix igitur, hoc est, primus numerus 24, secundus 44, & tertius 56 uenient, quod probari potest.

Septimum. Sunt tres numeri, quorum primus cum aliquo alio, quarto scilicet, ad reliquos duos simul sumptos: sesquialteram, secundus uerò cum eodem quarto ad reliquos: ut 3 ad 5. ac tertius deinde, & ipse cum eodem quarto numero: æqualitatis rationem constituit, cum ille quartus numerus iuxta propositum 9 uel 24 aut unitas esse ponatur, quanti hi tres numeri esse debeant, quæritur.

Facit, quantum ad numerum

		Primus	secundus	tertius
rum	9	$13\frac{14}{19}$	$5\frac{4}{19}$	$9\frac{18}{19}$
	24	$36\frac{12}{19}$	$13\frac{17}{19}$	$26\frac{10}{19}$
	unitatẽ	$1\frac{10}{19}$	$0\frac{11}{19}$	$1\frac{2}{19}$

Octauum. Diuidantur 132 in tres partes sic, ut prima multiplicata per 3, producat tres quartas minus 3, secundæ partis diuisæ in 2, Et iterum prima multiplicata per 4, producat tres quintas minus 1, tertiæ partis diuisæ in 7, quæritur, &cæ.

	prima	secunda	tertia pars
Facit	2	24	105

OPERATIO.

Esto prima pars 1 radix, hæc multiplicata per 3, producuntur 3 ra. Et quoniam hæ ex hypothesi, in ternario minus sunt, quàm tres quartæ partis secundæ, diuisæ in duo, hoc est, quàm tres quartæ dimidij secundæ partis, ad 3 ra. igitur 3 N addendi, eius deinde quod colligitur, (cum illud tres quartæ tantũ sint) integrum regula proportionum, dicendo $\frac{3}{4}$ sunt 3 ra. + 3 N, quid unum, quærendum est. Veniunt autem sic 4 ra. + 4 N, ipsum integrũ, ac per consequens, secunda pars in duo diuisa, eodẽ igitur integro bis sumpto, secunda pars, 8 ra. + 8 N erunt.

Non

Non aliter iuxta exempli hypotheſes, & tertia pars quærenda erit. Quo facto, partes erunt.

Prima 1 ra. ſecunda 8 ra. + 8 N
Tertia $46\frac{2}{3}$ ra. + $11\frac{2}{3}$ N, Atq;
ultimò tandem $55\frac{2}{3}$ ra. æqua. $111\frac{1}{3}$ N.

Nonum. Diuidantur 36 in tres partes ſic, ut prima multiplicata per 6, producat ſeſquialterum plus 9, ſecundę partis diuiſę in 5. :et ſecunda diuiſa in 8, ſtatuat ſeſquiquartum minus 4, tertię partis multiplicatę per 3, quęritur &cę.

Facit $3\frac{14}{325}$ $30\frac{56}{65}$ $2\frac{31}{325}$

PONITUR AD OPERATIONEM SIC.

Prima	1 ra.
ſecunda	20 ra. — 30 N
tertia	10 ra. + 1 N

15

Summa partium $21\frac{2}{3}$ ra — $29\frac{14}{15}$ N æqua. 36 N.

Eodem modo 45 in tres partes diuiſa,

	Prima	ſecunda	tertia
exeunt partes	$3\frac{149}{325}$	$39\frac{11}{65}$	$2\frac{121}{325}$

Id quod probari poteſt, ut ſequitur.

Prima	ſecunda pars
$3\frac{149}{325}$	$39\frac{11}{65}$
cum 6	in 8
$20\frac{244}{325}$	$4\frac{233}{260}$
minus 9	plus 4
$11\frac{244}{325}$. Dic	$8\frac{233}{260}$. Dic
3 dant $11\frac{244}{325}$, quid 2,	5 dant $8\frac{233}{260}$, quid 4
Facit $2\frac{546}{325}$	Facit $2\frac{313}{325}$
cum 5	in 3
produ. $39\frac{11}{65}$, ſecunda	exeunt $2\frac{121}{325}$, tertia pars. bene igitur.

Decimum. Propoſitum eſt, numerum 6, 12, 8 uel 21, ſeu quemcunq; alium numerum, diuidere in duas portiones, quarum maioris quadratum tantum faciat, quantum numerus ipſe, cum ſua portione minore multiplicatus, producit.

Facit ratione numeri

	Maior	minor portio
6,	ra. 45 — 3	9 — ra. 45
12	ra. 180 — 6.	18 — ra. 180
8	ra. 80 — 4	12 — ra. 80
21	ra. $551\frac{1}{4}$ — $10\frac{1}{2}$	$31\frac{1}{2}$ — ra. $551\frac{1}{4}$

Similem

Similem diuisionem lineæ alicuius datæ proponit Euclides in secundo, per undecimam: in sexto deinde, per propositionem 30, quod obiter indicare libuit.

OPERATIO NVMERI VNIVS, 6 SCILICET, sit instar omnium. Esto itaq;

1 ra. maior, uel 1 ra. minor,

erunt 6 N — 1 ra. minor. 6 N — 1 ra. maior.

Quadrata deinde portionum maiorum,

1 pri. 36 N — 12 ra. + 1 pri.

Producta uerò, &cæ.

36 N — 6 ra. 6 ra.

Atq; tandem æquatio ultima,

1 pri. + 6 ra. æqua. 36 N, uel 1 pri + 36 N æqua. 18 ra.

Procedatur nunc secundum canones secundæ æquationis primum & tertium, & ueniet ut positum

SEQVITVR PROBA INSTITVTA PRO numero primo 6.

54 — √ 1620

Totus	Maior portio	minor
6	ra. 45 — 3	9 — ra. 45

facit

54 — √ 1620

PROPONVNTVR HVIVSMODI EXEMPLA etiam sic.

Diuidantur 24 in duas portiones inæquales, ut, cum maiorem in seipsam, totum uerò numerum 24 cum minore portione multiplicauero, æquales numeri producantur, Facit

Maior		Minor portio
ra. 720 — 12	&	36 — ra. 720

In hunc modum radice numeri 48 diuisa,
exeunt partes, Maior quidem ra. 60 — ra. 12, minor uerò ra. 108 — ra. 60, quod probari potest.

Vndecimũ. Et quia numero in duas portiones diuiso, quarũ maioris quadratũ tantũ faciat, quantũ totus diuisus numerus cũ minori sua portione multiplicatus producit, quantus fuerit ipse totus numerus, minor item portio, cum maior portio ex hypothesi sit ra. 80 — 4, uel ra, 45 — 3

quæritur. Facit $\left.\begin{matrix}8\\6\end{matrix}\right\}$ totus $\left.\begin{matrix}12 — \text{ra. } 80\\9 — \text{ra. } 45\end{matrix}\right\}$ minor portio.

OPERATIO.

	Maior		Minor portio.
Totus	√ 80 — 4		√ 80 — 4
1 ra.		quare 1 radix, minus	
	√ 45 — 3		√ 45 — 3

Atq;

Atq; facta multiplicatione, ueniunt

$\frac{96 - \sqrt{5120}}{54 - \sqrt{1620}}$ N, æqua. 1 pri. minus $\frac{\sqrt{80} \;\; 4}{\sqrt{45} - 3}$ ra.

Vel ex communi quadam notitia,

$\frac{\sqrt{80} - 4}{\sqrt{45} - 3}$ ra. + $\frac{96 - \sqrt{5120}}{54 - \sqrt{1620}}$ N, æqua. 1 pri.

Est autem exemplum canonis æquationis secundæ secundi, atq; eius solutio talis.

Quantitates æquationis quantum ad primum, sunt

Media	minima	maxima quantitas
$\sqrt{80}$ — 4 ra.	+ 96 — $\sqrt{5120}$ N	æqua. 1 pri.

$\sqrt{20}$ — 2, in se, 24 — $\sqrt{320}$, plus 96 — $\sqrt{5120}$
ueniunt 120 — $\sqrt{8000}$. Huius radix
sunt 10 — $\sqrt{20}$
plus $\sqrt{20}$ — $\sqrt{2}$ &cæ.

Cum quantitatibus æquationis secundi, eodem modo operatione instituta, æque etiam feliciter succedet.

EXEMPLVM DVODECIMVM.

Duobus numeris inæqualibus, 34 & 30 datis, propositũ est, maiorem in duas portiones ita diuidere, ut inter eas medietas minoris sit medio loco proportionalis, uel, quod idẽ est, ut qui sub portionibus, una cum altera multiplicata, continetur numerus, æqualis sit quartæ parti quadrati, numeri minoris,

Facit 25. & 9.

OPERATIO.

Maior	Minor	Medietas minoris
34	30	15

Quantitates ex hypothesi proportionales

1 ra. 15 34 N — 1 ra.

quare 34 ra. — 1 pri. æqua. 225 N &cæ.

ALIA HVIVS DIVISIONIS EXEMPLA.

Numeri propositi maior,	minor	Medietas minoris	Partes diuisionis	
117	108	54	81	36
65	56	28	49	16
49	27	$13\frac{1}{2}$	$24\frac{1}{2} + \sqrt{418}$	$24\frac{1}{2} - \sqrt{418}$
30	18	9	27	3
25	24	12	16	9
13	12	6	9	4
5	4	2	4	1
$8\frac{1}{3}$	8	4	$5\frac{1}{3}$	3
$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8} + \sqrt{\frac{17}{576}}$	$\frac{3}{8} - \sqrt{\frac{17}{576}}$

Posuimus huius diuisionis exempla plura, cum eorum usus in decimo Euclidis libro requiratur.

NVNC PRO RADICIBVS BINOMIORVM ET RESIDVORVM INVENIENDIS, CVM eadem sit illas eliciendi, quæ est propositæ diuisionis, operatio, unum atq; alterum exemplum subijciemus.

Sit binomium ra. 448 + 14, uel residuum ra. 448 — 14, atq; propositum, radicem eius quadratam elicere.

OPERATIO.

Duæ huius binomij uel residui portiones, seu nomina inæqualia,

	maius		minus		medietas, mi.
sunt	ra. 448	&	14,	atq;	7.

Quantitates proportionales,

1 radix   7   √ 448 N — 1 ra.

Facta multiplicatione, uenit

√ 448 radicum — 1 pri. æqua. 49 N

Vel, ex communi illa notitia, Si æqualibus æqualia addantur,

√ 448 radi. æqua. 1 pri. + 49 N.

Est autem exemplum canonis tertij æquationis secundæ, atq; eius solutio, ut sequitur.

Numerus characteris medij √ 448, huius dimidium √ 112, dimidij uerò huius quadratũ 112, minus 49, manent 63, cuius radix quadrata, √ 63, de medietate radicũ, √ 112, subtracta, uel ei addita, colligitur hic quidẽ √ 343, una desideratæ radicis portio, manet uerò illic √ 7, portio altera. Et quia est binomiũ propositũ: per radices portionum aggregatas, ut √√ 343 + √√ 7, Binomij, uel, quia est residuum propositum: per id quòd relinquitur, postquam minoris radix de radice portionis maioris subtracta est, nimirum √√ 343 — √√ 7, residui propositi radix indicabitur, id quod examinari poterit.

SEQVVNTVR HVIVS REI DVO EXEMPLA alia, unum quidem pro binomio tertio, alterum uerò pro sexto residuo expositum.

Binomium tertium   √ 448 + √ 336

Maius	minus nomen	Minoris me.
√ 448	√ 336	√ 84

Quantitates proportionales

1 radix   √ 84   √ 448 N — 1 radice.

Facta multiplicatione, uenit ultimò

√ 448 radicum æqua. 84 N + 1 pri.

√ 112 in se, 112, minus 84, manent 28. Huius radix quadrata, √ 28, de √ 112 subtracta, uel ad √ 112 addita, manet √ 28, uel uenit √ 252. Harum partium radices simul iunctæ, ut √√ 252 + √√ 28. Binomij, radice uerò unius de alterius portionis radice subtracta: per id quod relinquitur, nimirum √√ 252 — √√ 28, Residui propositi radix indicabitur.

Residuum sextum $\sqrt{448} - \sqrt{352}$

Maius	minus nomen	Minoris medietas
$\sqrt{448}$	$\sqrt{352}$	$\sqrt{88}$

Quantitates proportionales,

1 radix $\sqrt{88}$ $\sqrt{448}$ N — 1 ra.

Facta multiplicatione, uenit ultimò

$\sqrt{448}$ radicum æqua. 88 N + 1 pri.

atque partes deinde,

maior quidem	minor uerò
$\sqrt{112} + \sqrt{24}$	$\sqrt{112} - \sqrt{24}$

Totius tandem residui radix,

Radix binomij $\sqrt{112} + \sqrt{24}$ minus ra. residui $\sqrt{112} - \sqrt{24}$.

Nominis uerò contrarij, Binomij scilicet, radix est

Radix utriusque, hoc est,

& binomij $\sqrt{112} + \sqrt{24}$, atque etiam residui $\sqrt{112} - \sqrt{24}$.

EXEMPLVM DECIMVM TERTIVM.

Diuidantur 10 in duas portiones, quarum una cum altera multiplicata, 15, 20, 24, 1 uel $\frac{3}{4}$, &cæ. producuntur.

Facit ratione nume-

ri		maior	minor portio
	15,	$5 + \sqrt{10}$	$5 - \sqrt{10}$
	20,	$5 + \sqrt{5}$	$5 - \sqrt{5}$
	24,	6	4
	1,	$5 + \sqrt{24}$	$5 - \sqrt{24}$
	$\frac{3}{4}$,	$5 + \sqrt{24\frac{1}{4}}$	$5 - \sqrt{24\frac{1}{4}}$.

OPERATIO.

Sit 1 radix, una, & 10 N — 1 ra. altera portio.

Et ueniunt facta multiplicatione,

10 ra. — 1 pri. æqua. 15, 20, 24, &cæ. N.

Decimum quartum. Sint tres numeri, & esto quòd primus cum 6, secundi $\frac{2}{3}$: secundus uerò cum 4, ipsum tertium bis, & eius $\frac{1}{4}$: ac tertius deinde minus 9, primi numeri tres quartas contineat, quęritur de numeris.

	Primus	secundus	tertius
Facit	$48\frac{1}{3}$	$81\frac{1}{2}$	38

OPERATIO.

1 ra. Pri. $\frac{3 \text{ ra.} + 81 \text{ N}}{2}$ secun. $\frac{6 \text{ ra.} + 52 \text{ N}}{9}$ Ter.

quare $\frac{6 \text{ ra.} - 29}{9}$ N æqua. $\frac{2}{3}$ ra.

Decimum quintum. Detur numerus quadratus, cuius radicis quadruplo 21 additis, quod inde colligitur, ad ipsum quadratum se habeat in ratione $3\frac{2}{3}$ uel $2\frac{1}{4}$, uel ęqualitatis, &cæ. quęritur.

Facit 9, uel $10\frac{24}{81} + \sqrt{31\frac{6529}{6561}}$, uel 49.

OPERATIO.

1 radix 1 pri. 4 ra. + 21 N.

Proportionalitates.

$$4\ \text{ra.} + 21\ N \quad \text{ad} \quad 1\ \text{pri.} \quad \text{ut} \left\{ \begin{array}{c} 11 \\ 9 \\ 1 \end{array} \right. \quad \text{ad} \quad \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 1. \end{array}$$

Multiplicatione facta, ueniunt

$$\left. \begin{array}{l} 12\ \text{ra.} + 63\ N \\ 16\ \text{ra.} + 84\ N \\ 4\ \text{ra.} + 21\ N \end{array} \right. \quad \text{æquales} \quad \left\{ \begin{array}{l} 11\ \text{pri.} \\ 9\ \text{pri.} \\ 1\ \text{pri.} \end{array} \right. \quad \text{\&cæ.}$$

SEQVITVR HVIVS EXEMPLI EXAMEN.

Sumatur ad examinandum numerus ſecundus.

$$10\frac{74}{81} \quad + \quad \sqrt{31\frac{6529}{6561}}$$

Huius radix quadrata, $\sqrt{\frac{820}{81}} + \frac{8}{9}$, quater ſumpta, uenit $\sqrt{161\frac{79}{81}} + 3\frac{5}{9}$

Additis 21, colliguntur $\sqrt{161\frac{79}{81}} + 24\frac{5}{9}$. Et quoniam hæc ſumma ad ipſum quadratum, $10\frac{74}{81} + \sqrt{31\frac{6529}{6561}}$, ſe, ut poſitum eſt, habere debet, ſicut 9 ad 4. Facta igitur multiplicatione primæ cum quarta, ſecundæ deinde cum quantitate uel numero tertio, cum idē numerus, nimirum, $\sqrt{2591\frac{49}{81}} + 98\frac{2}{9}$, utrinq; producatur: quòd hoc inuento numero, exemplo ſatisfactum ſit, ex poſteriori parte propoſitionis decimæ ſextæ ſexti Euclidis tandem infertur. Vel, facta igitur diuiſione utriuſq; antecedentis in ſuum conſequens, cum æquales inter ſe ſint numeri exeuntes: ſimiles etiam rationis numeros, ſummam ſcilicet, quadratum, 9 & 4, eſſe conſtabit. Eſt autem communis exiens $2\frac{1}{4}$.

Decimum ſextum. Sunt tres numeri, primus quidem ad ipſum tertium, triplus: ſecundus uerò ad eundum tertium, ut 3 ad 4. Quoniam autem 6 de primo ſubtractis, tribus uerò ſecundo numero additis, ac reſiduo deinde cum collecto multiplicato: nouencuplus, uel quadruplus ſeſquitertius, ad tertium numerum producitur. Quanti igitur illi tres numeri ſinguli ſeorſim ſint, in dubium uenit.

Facit, quantum ad rationem

	Primus	ſecundus	tertius,
nouen.	12	3	4
$4\frac{1}{3}$ uerò,	$\sqrt{\frac{5833}{81}} - \frac{1}{9}$,	$\sqrt{\frac{5833}{1296}} - \frac{1}{36}$,	$\sqrt{\frac{5833}{729}} - \frac{1}{27}$

OPERATIO.

Primus	1 ra.	1 ra. — 6 N	reſiduum
ſecun.	$\frac{1}{4}$ ra.	$\frac{1}{4}$ ra. + 3 N	collectum
tertius	$\frac{1}{3}$ ra.	Facta multiplicatione,	

producitur $\frac{1}{4}$ pri. + $1\frac{1}{2}$ ra. — 18 N æqua. 3 uel $1\frac{4}{9}$ ra.

Et ultimò tandem in integris

1 pri. æquales 6 ra. + 72 N.

9 pri. + 2 ra. æquales 648 N.

Quare radicis ualor, & primus numerus 12. uel $\sqrt{72\frac{1}{81}} - \frac{1}{9}$, ut dictum eſt. Secundum porrò & tertium dat ipſa poſitionis ſolutio.

SEQVITVR ALIA HVIVS EXEMPLI POSITIO.

Primus	4	4 ra. — 6 N	reſiduum
ſecundus	1 ra.	1 ra. + 3 N	collectum
tertius	$1\frac{1}{3}$ ra.		

Facta multiplicatione, ueniunt ultimò

4 pri. æquales 6 ra. + 18 N

4 pri. + $\frac{2}{9}$ ra. æquales 18 N

Adhuc

ADHVC ALIA POSITIO.

Primus	3		3 ra. — 6 N	residuum
secun.	$\frac{3}{4}$		$\frac{3}{4}$ ra. + 3 N	collectum
tertius	1 ra.	Facta multiplicatione, ueniunt ultimò,		

$2\frac{1}{4}$ pri. æquales $4\frac{1}{2}$ ra. + 18 N

$2\frac{1}{4}$ pri. + $\frac{1}{6}$ ra. æquales 18 N

SEQVITVR NVNC OPERATIONIS EXAMEN.

Sumantur ad examinandum numeri inuenti secundò, qui sunt

$\sqrt{\frac{5833}{81}} — \frac{1}{9}$, $\sqrt{\frac{5833}{1296}} — \frac{1}{36}$, $\sqrt{\frac{5833}{729}} — \frac{1}{27}$

Primò diuidatur numerus primus in 3, uel si placet, multiplicetur tertius cum 3: & apparebit, primum numerum ad tertium triplum esse, id quod est ex hypothesibus primum. Quærantur deinde tres quartæ tertij, uel ad ipsum secundũ addatur sui una tertia. Et quoniã hic, tertius: illic uero, numerus secũdus apparet: & id quod in exemplo dicitur, nimirum, secundum ad tertium tres quartas esse, apparebit. Subtrahantur ultimò 6 de primo, 3 uerò ad secundum numerum addantur. Et quoniam residuo cum collecto, tertio deinde numero cum $4\frac{1}{3}$ multiplicato, æquales numeri producuntur, cum sic tandem omnes exempli hypotheses hi numeri habeant, eos ueros esse nemo dubitet.

DECIMVM SEPTIMVM.

Desideratur quadratus numerus, cuius $\frac{2}{3}$ ductæ in se, producant duodecuplum radicis, uel radicis uigincuplum.

Facit 9, uel ra. cubica 2025.

OPERATIO.

1 ra. 1 pri. $\frac{2}{3}$ pri. in se, producuntur $\frac{4}{9}$ tertiæ quantitatis æqua. 12 uel 20 radicibus.

Decimum octauum $\frac{1}{24}$ quadrati ducta in se, producit triplum, uel septencuplum radicis, quæritur &cæ.

Facit numerus 12 uel $\sqrt{}$ 4032
quadra. 144 $\sqrt{}$ 16257024

Examen numeri secundi.

Numerus uel quadrati radix est	$\sqrt{}$ 4032,
quadratum uerò ipsum	$\sqrt{}$ 16257024
Porrò huius quadrati $\frac{1}{24}$ pars	$\sqrt{}$ 1176
in se multiplicata, producuntur	$\sqrt{}$ 1382976.

Atque tantundem etiam producitur, ipsa radice, $\sqrt{}$ 4032, cum 7 multiplicata. Quare bene operatum.

Decimum nonum. Sunt duo numeri. Quoniam autem quadratum prioris ad posteriorem, $1\frac{1}{3}$: posterioris contrà ad numerum priorem: $4\frac{1}{2}$ rationem constituit, qui nam illi duo numeri sint, quæritur.

Facit, 2: numerus prior, 3 uerò: posterior.

VICESIMVM.

Numerus 12 in duo diuisus est,
Quoniam autem ex multiplicatione totius cum differentia, & minoris quadrato: 64 colliguntur, Vel,
Quoniam autem ex multiplicatione totius cum differentia, & maioris quadrato: 112 colliguntur, Vel,

Quoniam autem quadrata partium, & quod ex multiplicatione totius cum differentia colligitur: 128 constituunt,. Vel

Quoniam autem hęc duo simul, quod scilicet ex multiplicatione totius cum differentia, quodq́ ex una parte cum altera multiplicata producitur: 80 constituunt, &cę.

Partes diuisionis quantæ erunt? Facit 8 & 4

OPERATIO.

Totus numerus 12

	1 ra. maior uel	1 ra. minor
	12 N — 1 ra. mi.	12 N — 1 ra. ma.
	2 ra. — 12 N differentia.	12 N — 2 ra. diffe.
Productum ex toto cum diff.	24 ra. — 144 N.	144 N — 24 ra.
Minoris quadratum	144 N + 1 pri. — 24 ra.	1 pri.
Maioris quadratum	1 pri.	144 N + 1 pri. — 24 ra.
Productum ex una parte, cum altera multiplicata,		12 ra. — 1 pri.

Aequationes,

Prima	uel
1 pri. æqua. 64 N	1 pri. + 80 N æqua. 24 ra.
Secunda	uel
1 pri. + 24 ra. æ. 256 N.	1 pri. + 176 N æqua. 48 ra.
Tertia	uel
1 pri æqua. 64 N	1 pri. + 80 N æqua. 24 ra.
Quarta	uel
1 pri. + 224 N æqua. 36 N	1 pri. + 12 ra. æqua. 64 N

ARITHMETICA PROBLEMATA EX 1. LIB. GRAECORVM EPIGRAM.

Πρῶτον.

Παλλὰς ἐγὼ τελέθω σφυρήλατος, αὐτὰρ ὁ χρυσὸς
Αἰζηῶν πέλεται δῶρον ἀοιδοπόλων.
ἥμισυ μὲν χρυσοῖο Χαρίσιος, ὀγδοάτην δὲ
Θέσπις, καὶ δεκάτην μοῖραν ἔθηκε Σόλων.
Αὐτὰρ εἰκοστὴν Θεμίσων, τὰ δὲ λοιπὰ τάλαντα
Ἐννέα, καὶ τέχνη, δῶρον Ἀριστοδίκου.

DE PALLADIS STATVA, QVOTNAM ILLA AVRI talenta appendit.

Pallas ego sum, malleo hunc in modum fabrefacta: sed aurum munus est iuuenum, qui in studio uersantur poetices. dimidiã quidem auri partem: cõtulit Charisius, octauam uerò: Thespis, decimam dehinc: Solon, & uigesimam: Themison. Reliqua autem nouem & mercedem item quę artifici debebatur pro opera, contulit Aristodicus.

Quæstio hinc oritur de toto ipsius statuæ pondere.

Facit 40 talen.

Quantum etiam auri ad hanc fabricandam singuli tribuerint.

Facit	Charisius	20,	Thespis	5
	Solon	4	Themison	2 talenta.

Præterea 9 talenta reliqua, ut ponitur, munus est Aristodici.

Operatio

OPERATIO.

Ponatur pondus auri, fuisse, 1 radix talentorum

cuius	Charisius	$\frac{1}{2}$ ra.	dedit
	Thespis	$\frac{1}{8}$ ra.	
	Solon	$\frac{1}{10}$ ra.	
	Themison	$\frac{1}{20}$ ra.	
	Aristodicus	9 talenta.	

Summa partium & 9 talentorum,

sunt $\frac{31}{40}$ ra. + 9 N, æquales radici positæ,

Est prima æquatio, hinc radicis ualor, pondus scilicet auri, 40 talentorum. Porrò quantum singuli, ad hanc statuam extruendam, contulerint, ex ipsa positionis solutione, iuxta radicis ualorem, facile cognoscitur.

Δεύτερον.

Αυγείην ἐρέεινε μέγα σθένος Αλκείδαο.
Πληθὺν βουκολίων διζήμενος, ὃς δ᾽ ἀπαμείβετο,
Αμφὶ μὲν Αλφειοῖο ῥοὰς φίλος ἥμισυ τῶνδε,
Μοίρῃ δ᾽ ὀκδοάτῃ ὄχθον κρόνου ἀμφινέμονται.
Δωδεκάτῃ δ᾽ ἀπάνευθε Ταραξίπποιο παρ᾽ ὄρον,
Αμφὶ δ᾽ ἄρ Ηλιδα δῖαν ἐεικοστῇ νεμέθοντι.
Αυτὰρ ἐν Αρκαδίῃ τριηκοστὴν προλέλοιπα,
Λοιπὰς δ᾽ αὖ λεύσσεις ἀγέλας τόδε πεντήκοντα.

DE ANGEAE ARMENTIS, QVOTNAM boues fuerint.

Augeam interrogauit generosus Hercules, de multitudine armentorum. cui ille respondit: Media horum pars, amice, circa fluuium Alpheum pascitur: octaua autem, circa Saturni collem: Cęterum duodecima, procul hinc iuxta loca Taraxippi extrema: at uigesima eorum pars, circa Elidem pascitur: trigesimam uerò in Arcadia ego reliqui: reliqua autem, quinquaginta numero armenta, uideas ipse. Quæritur: Facit 240.

OPERATIO.

Ponatur boues fuisse 1 radix

circa	Alpheum igitur fluuium sunt	$\frac{1}{2}$	ra.
circa	collem Saturni	$\frac{1}{8}$	
iuxta	Taraxippi extremum	$\frac{1}{12}$	
circa	Elidem montem	$\frac{1}{20}$	
in	Arcadia	$\frac{1}{30}$	

Summa partium unà cum 50 bobus

sunt $\frac{19}{24}$ ra. + 50 N æqua. radici positę.

Est prima æquatio, atque radicis ualor, armentorum scilicet numerus, 240.

Porrò quot nunc in singulis locis uagentur boues, quiuis ex positionis solutione facile cognoscet.

Τρίτον.

Χάλκεός εἰμι λέων, κρουνοὶ δέ μοι ὄμματα δοιὰ
Καὶ στόμα σὺν δὲ θέναρ δεξιτέροιο ποδός.
Πλήθει δὲ κρατῆρα δύ' ἤμασι δεξιὸν ὄμμα,
Καὶ λαιὸν τριασοῖς, καὶ πισύρεσσι θέναρ.
Ἄρκιον ἓξ ὥραις πλῆσαι στόμα. ἐν δ' ἅμα πάντα,
Καὶ στόμα, καὶ γλῆναι, καὶ θέναρ, εἰπὲ πόσον;

LEONIS CANALES.

Æneus ego ſum Leo, canales uerò mihi ſunt oculi duo, & os cũ palma dextri pedis. Implent autem craterem eundem: dexter quidem oculus, duobus: ſiniſter uerò, tribus diebus: & quatuor, palma. Porrò ſex horis, os implere eum poteſt. Hæc igitur ſimul omnia, & os & oculi & palma, dic quanto tempore eundem craterem impleant.

Facit $\frac{12}{61}$ diei, uel 4 horis $\frac{44}{61}$ &cæ.

OPERATIO.

		dies		horæ
Oculus	dexter	2	uel	48
	ſiniſter	3		72
	Palma	4		96
	Os	$\frac{1}{4}$		6

Ponatur tempus, intra quod omnes canales ſimul aqua fluentes craterem impleant, quòd ſit una radix, uel diei, uel horarum, atq; dicatur

dies		horæ		die.		horarum
2	uel	48		$\frac{1}{2}$	ra. uel	$\frac{1}{48}$
3		72	dant 1 impletionem,	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{72}$
4		96	quid 1 ra. Facit	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{96}$
$\frac{1}{4}$		6		4		$\frac{1}{6}$
			Summa partium	$5\frac{1}{12}$	uel	$\frac{61}{288}$

Quare $5\frac{1}{12}$ ra. dierum uel $\frac{61}{288}$ ra. horarum radici poſitæ hoc eſt, 1 N, æqualis.

Eſt prima æquatio, atque radicis ualor ut ſuprà poſitum, quod probari poteſt.

Τέταρτον.

Ἄμφω μὲν ἡμεῖς εἴκοσι μνᾶς ἕλκομεν,
Ζῆθός τε χ' ὠ ξύναιμος, ἢν δέ μου λάβῃς
Τρίτον, καὶ τετράτον τε τοῦδ' Ἀμφιόνος
Ἐξ πάντ' ἀνευρὼν, μητρὸς εὑρήσεις σταθμόν.

DE STATVIS ZETHI, AMPHIONIS AC MAtris ipſorum Antiopes.

Ambo quidem nos uiginti minas appendimus, Zethus pariter & meus conſanguineus. At ſi de mea, tertiam: Amphionis uerò, quartam partem

partem sumpseris: sex in summa inuentis, matris pondus inuenies.

Quanti igitur nunc ponderis & Zethi & Amphionis statura fuerit, quæritur.

Facit Zethi quidem 12 Amphionis uerò 8 minarum.
Antiope autem mater, ut habet hypothesis, pondus obtinet 6 minarum.

OPERATIO.

Zethus	20 mi.	1 ra.	uel	20 N — 1 ra.
Amphion		20 N — 1 ra.		1 ra.

Collectis nunc partibus ueniunt

uel 5 N + $\frac{1}{12}$ ra. uel 6 $\frac{2}{3}$ N — $\frac{1}{12}$ ra. æquales 6 N &cæ.

Vltimò tandem per communes noticias, Si ab æqualibus æqualia &cæ.
Si item æqualibus æqualia,

$\frac{1}{12}$ ra. æquales 1 N uel $\frac{2}{3}$ N æquales $\frac{1}{12}$ ra.

Εὐκλείδου Γεωμετρικόν.

Ἡμίονος καὶ ὄνος φορέουσαι οἶνον ἔβαινον,
Αὐτὰρ ὄνος στενάχιζεν ἐπ᾽ ἄχθει φόρτου ἑοῖο.
Τὴν δὲ βαρυστενάχουσαν ἰδοῦσ᾽ ἐρέεινεν ἐκείνη.
Μῆτερ τί κλαίουσ᾽ ὀλοφύρεαι ἠΰτε κούρη,
Εἰ μέτρον ἕν μοι δοίης: διπλάσιον σέθεν ἦρα.
Εἰ δὲ ἓν ἀντιλάβοις, πάντως ἰσότητα φυλάξεις.
Εἰπὲ τὸ μέτρον ἄριστε Γεωμετρίης ἐπιίστορ.

EVCLIDIS GEOMETRICVM.

Ibant mulus & asina uinum portantes, asina autem ex dolore ponderis sui ingemiscebat. Qua re uisa, mulus grauiter ingemiscentem asinam sic interrogauit: Mater, cur ita lamentaris, cur puellę instar lachrymas fundis? Mensuram mihi unam si dederis, duplo quàm tu plus sustulero: sin uerò tu à me unam acceperis, idē planè quod ego pondus feres. Mensuram itaque peritissime Geometer dicas uolo.

Facit Muli pondus, 7: Asinæ uerò tantum 5 mensurarum.

OPERATIO.

Mulus	1 ra.		Mulus	1 ra. + 2 N
Asina	$\frac{1 \text{ ra.} + 3 \text{ N}}{2}$	uel	Asina	1 ra.

Et ueniunt tandem

$\frac{1 \text{ ra.} + 5 \text{ N}}{2}$ æqua. 1 ra. — 1 N Vel 1 ra. + 3 N æqua. 2 ra. — 2 N.

Hactenus ex Græcis epigrammatibus.

SEQVITVR EXEMPLVM IN ORDINE uicesimum primum.

Est qui peregrinationē instituit hoc modo, ut uidelicet plures abesse dies nolit, quàm aureos secū domo efferat: eo nimirū consilio, ut si fortè minus prosperè cedat, in singulos dies singuli suppetant ipsi aurei. Et quoniam

niam Mercurio duce, singulis diebus tot aurei accedunt illi, quot eo mane cum domo egrederetur, habuerat, tandem reuersus domum ac numerans pecuniam, 52 aureos & $\frac{1}{2}$, uel 63 inuenit, Queritur ergo, quot initio profectionis aureos habuerit.

Facit { 3 & dodrantem
3 & $\surd\, 8\frac{7}{8}$ — 2.

EXPLICATIO.

Si commune & uulgi quispiam in huius exempli computatione iudicium sequi uoluerit, inueniet certe, quarto die hominem illũ reuertentem domũ, non integros quatuor aureos habuisse antequam iter ingrederetur: & tertio die idem si reuerti dicatur, tres aureos in ea summa quam primo die secum tulerat desiderari. Et quia plus tribus, minus autem quàm quatuor aureos secum primo die habuit, ponendum igitur, quòd ultra 3 aureos adhuc 1 radicem, hoc est, in summa, 3 N + 1 ra. aureorum habuerit. Et quoniam, iuxta exempli hypothesim, tot dierum iter confecit, atq; singulis diebus, & id ex hypothesi, illam quam tunc secum habet pecuniam, duplicauit: tertio tandem finito die domum rediens, 24 N + 8 ra. aureorum habet, quod est notandum.

Rursum quandoquidem quartum quoq; diem non integrum, sed eius partem tantum aliquam, nimirum 1 radicem positam, perambulat: non igitur 24 N + 8 ra. aureorum, sed huius summæ partem proportionalem illa radice dierum acquirit. quare dicendum,

dies		aureorum		diei
1	integer acquirit	24 N + 8 ra.	quid	1 ra.

Facit 24 ra. + 8 pri. Quæ nunc, si pecuniæ tertiæ diei addita fuerint, ueniunt

8 primæ + 32 ra. + 24 N, æqua. { $52\frac{1}{2}$ / 63 } N. &cæ.

Radicis igitur ualor, facta operatione æquationi conueniens: dodrans, uel $\surd\, 8\frac{7}{8}$, — 2 aurei erunt. Tres igitur aureos & dodrantem, uel 3 aureos & $\surd\, 8\frac{7}{8}$ — 2. aure. initio profectionis habuit. Atq; tot etiam dierum iter confecit, quod nunc probari potest.

Instituatur probari seu examinari numerus irrationalis
3 plus $\surd\, 8\frac{7}{8}$ — 2
Numerus aureorum quos primò ille habuit, sunt 3 plus $\surd\, 8\frac{7}{8}$ — 2
Atq; tot etiam diebus peregrè profectus fuit

3 plus	$\surd\, 8\frac{7}{8}$	— 2	Initio profectionis.		
		bis			
6 plus	$\surd\, 35\frac{1}{2}$	— 4	primi	diei	aurei.
		bis			
12 plus	$\surd\, 142$	— 8	secundi	diei	aurei.
		bis			
24 plus	$\surd\, 568$	— 16	tertij	diei	aurei.

Iam dicendum

die inte.		aurei		die.
1	acquiruntur	24 plus $\surd\, 568$ — 16,	quid	$\surd\, 8\frac{7}{8}$ — 2,

Facit, ut quidem sequenti multiplicatione ostendetur 55 — $\surd\, 568$.

Quibus summa, uel aurei, quos tertio die noctu secum tulerat, ut sequitur, additi, 63 aurei colliguntur, quòd erat ostendendum.

Sequitur

SEQVITVR MVLTIPLICATIO.

24 plus √ 568 — 16
√ $8\frac{7}{8}$ — 2

— 48 + 71 + 32
+ √ 5112 — √ 2272
— √ 2272

55 — √ 568

SEQVITVR ADDITIO.

24 plus √ 568 — 16
55 — √ 568

Summa 63 aurei, ut suprà.

Alia additio, quæ in hoc exemplo locum habet.

	+ ra. 5112	ad	— ra. 9088
4	1278		2272
2	639		1136
71	9		16
	+ 3		— 4

— 1 quater
— 4 bis
— 8 septuagies semel
— 567

Summa radicum — √ 567 &cæ.

EXEMPLVM VIGESIMVM SECVNDVM.

Quidã certa aureorũ summa negociatus, huius trientẽ, uno aureo & $\frac{1}{2}$ minus, lucratus est. quare deinde cũ sorte & lucro negocians, huius alterã partem, plus 8 aureis lucratur. Id nunc tertiò faciens, similem, aut meliorem sortẽ, fortunam speraturus, eius quod habet iacturam facit in quadrante. Vel si placet, eius quod habet quadrantẽ lucrifacit. Quia autem nunc retentã cũ numeret pecuniã, uel aureos, inuenit, hic quidẽ 232 plus $\frac{3}{16}$, illic uerò 100 — $\frac{1}{16}$, quęritur quòtnã aureos ipse primò habuerit.

Facit, quantum ad { Iacturam quidem 63 aure. & dodrantem
Lucrum uerò 90 aureos.

OPERATIO.

Ponatur		1 radix, quam primò habuit,	
quare	$\frac{1}{3}$ ra. — $1\frac{1}{2}$ N,	Id quod lucratur primò	
atq; sic	$1\frac{1}{3}$ ra. — $1\frac{1}{2}$ N	Sors & lucrum simul	
Huius $\frac{1}{2}$,	$\frac{2}{3}$ ra. — $\frac{3}{4}$ N	Lucrum	
	+ 8	Lucrum & id	
	$\frac{2}{3}$ ra. + $7\frac{1}{4}$ N	quod lucratur secundò	
	2 ra. + $5\frac{3}{4}$ N	Sors & lucrum simul	
Huius $\frac{1}{4}$,	$\frac{1}{2}$ ra. + $1\frac{7}{16}$ N	Iactura uel lucrum	
manent	$1\frac{1}{2}$ ra. + $4\frac{5}{16}$ N	æqua.	100 — $\frac{1}{16}$ N
uel uen.	$2\frac{1}{2}$ ra. + $7\frac{3}{16}$ N	æqua.	232 + $\frac{3}{16}$ N &cæ.

23. Sit unus numerus notus, nimirũ 28, 63 uel 42, quatuor deinde alij ignoti: & esto quod ignotorum primus cũ reliquorũ trium altera parte, secundus uerò cum reliquorum tertia parte, tertius autem cum reliquorum quarta, ac quartus deinde cum reliquorum parte quinta, ipsum notum positum æquent: Quęritur de numeris ignotis.

Facit ratione nume.

		Primus	secundus	tertius	quartus numerus,
si	28	$\frac{28}{37}$	$14\frac{14}{37}$	$18\frac{34}{37}$	$21\frac{7}{37}$
	63	$1\frac{26}{37}$	$32\frac{13}{37}$	$42\frac{21}{37}$	$47\frac{25}{37}$.
	42	$1\frac{5}{37}$	$21\frac{21}{37}$	$28\frac{14}{37}$	$31\frac{29}{37}$

SEQVITVR HVIVS EXEMPLI EXAMEN.

Sumantur ad examinandum numeri primi,

qui sunt $\frac{28}{37}$, $14\frac{14}{37}$, $18\frac{34}{37}$ $21\frac{7}{37}$. & 28

Numerus		Partes requisitæ				
primus	$\frac{28}{37}$	$7\frac{7}{37}$	$9\frac{17}{37}$	$10\frac{22}{37}$	Summa singulorum cum suis partibus,	æquales
secun.	$14\frac{14}{37}$	$6\frac{34}{111}$	$7\frac{7}{111}$	$\frac{28}{111}$		28
tertius	$18\frac{34}{37}$	$5\frac{11}{37}$	$\frac{7}{37}$	$3\frac{22}{37}$		
quar.	$21\frac{7}{37}$	$\frac{28}{185}$	$2\frac{162}{185}$	$3\frac{29}{37}$		

EXEMPLVM VLTIMVM, ET SIMILE præcedenti.

Fundus quidam inscribitur 375 coronatis, quod ubi unus rescíscit, ipsius autem fortunę multo minores quàm ut eum emere posſit, re igitur infecta, discedit. Hoc idem & alijs cuidam, ac deinde etiam tertio accidit. Veruntamen si is qui primo loco fundū est licitatus, dimidiā pecuniæ partem à reliquis: is uerò qui secundo, dodrantē à reliquis: is autē qui tertio, bessem à reliquis acciperet, singulorum tandem pecunię eo modo auctę, sufficerent ad emendum fundum. Quare nunc quęstio oritur, quot coronatos seorsim quisq; habuerit.

Facit

Primus	Secundus	Tertius.
$267\frac{6}{7}$	$53\frac{4}{7}$	$160\frac{5}{7}$

Quod examinari poterit.

Et hæc quidem sunt optime Lector, quæ paucis tibi pro regularum Algebræ declaratione communicare uoluimus. Cæterum qui plura requirit, his nunc instructus, ab alijs harum regularum scriptoribus petat. Nunc uerò ad Euclidem ipsum.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

EVCLIDIS ELEMENTORVM GEOmetricorum liber primus.

Est hic liber primus totus ferè elementarius, non tantum ad reliquos sequentes huius Operis libros, sed etiam ad aliorum Geometrarum scripta intelligenda necessarius. Nam in hoc libro communium uocabulorum, quę subinde in geometria uersanti occurrunt, definitiones continentur. Pręceptiones deinde ducendi perpendicularem, quomodo item Trilaterę figurę, secundum latera uel angulos diuersæ, & Quadrilateræ, formari debeant. Figura item aliqua proposita, quomodo illa in alterius formæ figuram permutanda sit, præceptiones, ut diximus, traduntur. Cum igitur talia doceantur, & plura etiam alia, quàm hoc loco commemorare uoluimus, facile erit cuiuis, non solum quàm sit necessarius, sed etiam ad reliqua perdiscenda liber iste quàm utilis, perspicere.

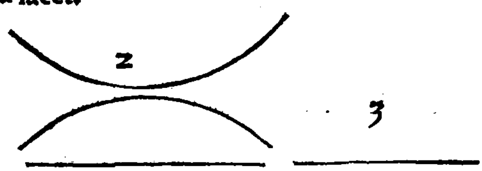
ΟΡΟΙ.

Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν. Γραμμὴ δὲ, μῆκος ἀπλατές. Γραμμῆς δὲ πέρατα, σημεῖα. Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

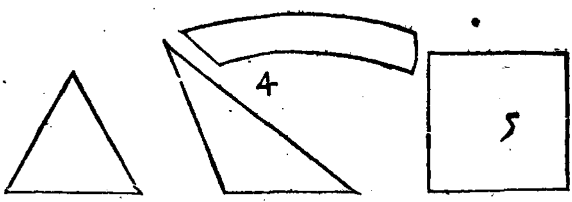
DEFINITIONES.

Punctum est, cuius pars nulla. 2. Linea uerò, longitudo latitudinis expers. Lineę autem termini puncta. 3. Recta linea est, quę ęquabiliter inter sua puncta iacet.

Prima defini.

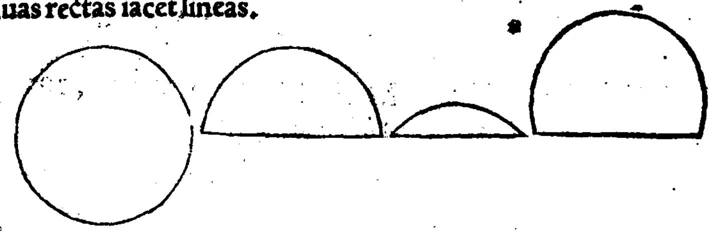


Ἐπιφάνειά ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει. Ἐπιφανείας δὲ πέρατα, γραμμαί. Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.



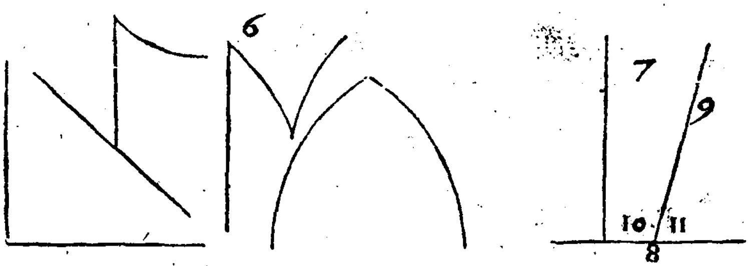
4. Superficies est, quę longitudinem & latitudinem tantum habet.

Superficiei uerò termini, lineæ. 5. Plana superficies est, quæ æquabiliter inter suas rectas iacet lineas.



Ἐπίπεδος γωνία ἐστὶν, ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων, πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ, εὐθεῖαι ὦσιν, Εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα, τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, Ὀρθὴ ἐστιν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν. Καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα, Κάθετος καλεῖται, ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν. Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν, ἡ μείζων ὀρθῆς. Ὀξεῖα δὲ, ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.

6. Planus angulus, est in plano duarum linearum se mutuo tangentium, & non in directum iacentium, mutua inclinatio. 7. Quando uerò comprehendentes angulum lineæ, rectæ fuerint, Rectilineus uocatur ille angulus. 8. Quando autem recta super rectam consistens lineam, deinceps se habentes angulos æquales inter se fecerit, Rectus est uterque æqualium angulorum. 9. Et insistens recta linea, Perpendiculum: hoc est, Perpendicularis linea uocatur, illius super quam steterit. 10. Obtusus angulus est, qui maior recto. 11. Acutus uerò, qui minor est recto.



Ὅρος ἐστὶν, ὅ τινός ἐστι πέρας. Σχῆμά ἐστι, τὸ ὑπό τινος ἢ τινῶν ὅρων περιεχόμενον.

12. Terminus est, quod cuiusque extremum est.

Vt, Lineæ termini sunt, puncta: Superficiei, lineæ: Corporum uerò, superficies, quemadmodum suprà indicatum est.

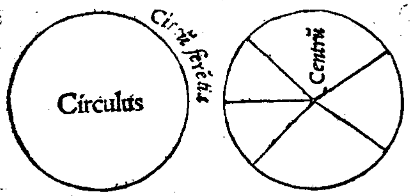
13 Figura est, quæ sub aliquo aut aliquibus terminis comprehenditur.

Vt sunt omnia, quæ uel sub lineis, uel sub superficiebus comprehenduntur, spacia.

Κύκλος, ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον, ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον, ἣ καλεῖται Περιφέρεια, πρὸς ἣν ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων,

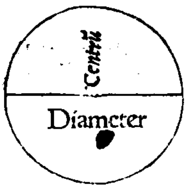
πᾶσαι

πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου, τὸ σημεῖον καλεῖται.



14. Circulus, est figura plana, una lineà compræhensa, quæ Circumferentia appellatur, ad quã ab uno quodã puncto eorum, quæ intra figurã sunt posita, omnes cadentes rectæ lineę inter se sunt ęquales. 15. Punctum uerò hoc, Centrum circuli appellatur.

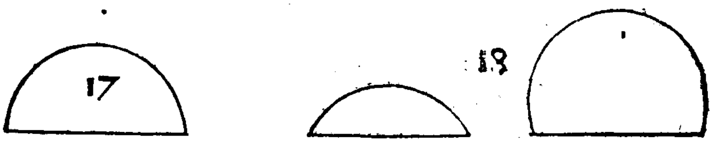
Διάμετρος τοῦ κύκλου, ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.



16 Diameter circuli, est recta quędam linea per centrum ducta, & ex utraqꝫ parte in circuli circumferentiam terminata, & quæ circulum bifariam secat.

Ἡμικύκλιον δέ ἐστι, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς διαμέτρου, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας. Τμῆμα δὲ κύκλου, ἐστὶ τὸ περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας, καὶ κύκλου περιφερείας.

17. Semicirculus, est figura, quę sub diametro, atqꝫ de circuli circumferentia ablata portione comprehenditur. 18. Sectio uerò circuli, est figura quę sub recta linea, et circuli circumferentia compræhenditur.

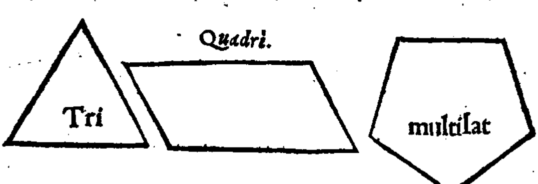


Εὐθύγραμμα σχήματά ἐστι, τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα.

Τρίπλευρα μὲν, τὰ ὑπὸ τριῶν. Τετράπλευρα δὲ, τὰ ὑπὸ τεσσάρων. Πολύπλευρα δὲ, τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.

19. Rectilineæ figuræ sunt, quæ sub rectis lineis compræhenduntur.

20. Trilateræ quidem, quæ sub tribus. 21. Quadrilaterę uerò, quę sub quatuor. 22. Multilaterę autem, quæ sub pluribus quàm quatuor rectis lineis compræhenduntur.



Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων,

Ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι, τὸ τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς. Ἰσοσκελὲς δὲ, τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς. Σκαληνὸν δὲ, τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς.

Trilaterarum porrò figurarum,

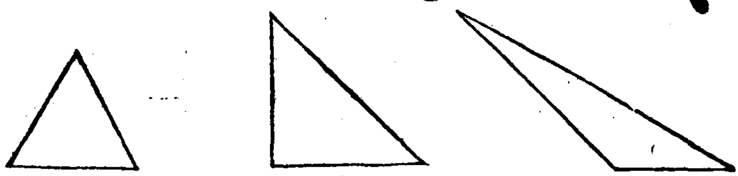
23. Aequilaterum quidẽ triangulum eſt, quod tria latera habet æqualia. 24. Iſoſceles uerò, quod duo tantum latera habet æqualia. 25. Scalenum autem, quod tria inæqualia habet latera.

Ἔτι τε τῶν τριπλεύρων σχημάτων,

Ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι, τὸ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν. Ἀμβλυγώνιον δὲ, τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν. Ὀξυγώνιον δὲ, τὸ τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.

Amplius trilaterarum figurarum,

26. Rectangulum quidem triangulum eſt, quod habet rectũ angulum. 27. Obtuſiangulum uerò, quod habet obtuſum angulum. 28. Acutiangulum autem, quod tres acutos angulos habet.



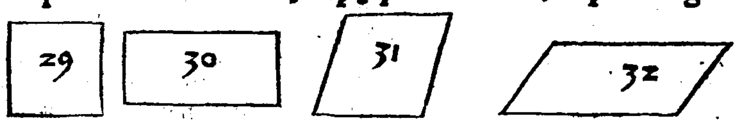
23 & 28 24 & 26 25 & 27

Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων.

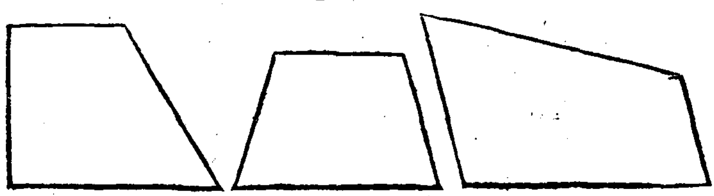
Τετράγωνον μέν ἐστιν, ὃ ἰσόπλευρόν τε ἐστι, καὶ ὀρθογώνιον. Ἑτερόμηκες δὲ, ὃ ὀρθογώνιον μὲν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ. Ῥόμβος δὲ, ὃ ἰσόπλευρον μὲν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ. Ῥομβοειδὲς δὲ, τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν, οὔτε ὀρθογώνιον.

Figurarum autem quadrilaterarum,

29. Quadratum quidem eſt, quod & ęquilaterum eſt, & rectangulum. 30. Altera parte longius uerò, quod rectangulũ quidem, at ęquilaterum non eſt. 31. Rhombus autem, qui æquilaterus, ſed rectangulus non eſt. 32. Rhomboides deinde, quod ex oppoſito & latera & angulos æquales inter ſe habens, neq; ęquilaterum eſt, neq; rectangulum.



Τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα, τραπέζια καλείσθω.

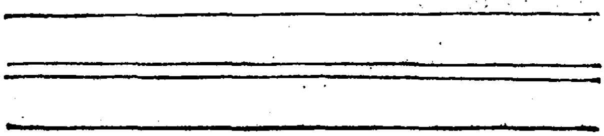


33. Præter

33. Pręter has uerò, quę reliquæ sunt figuræ quadrilaterę, Mensulæ appellantur.

Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵ τινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, καὶ ἐκβαλλόμεναι ἐπ' ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

34. Parallelæ, sunt rectæ lineæ, quæ in eodem plano existentes, & ex utraque parte in infinitū eiectæ, in neutram inter se mutuo coincidunt.

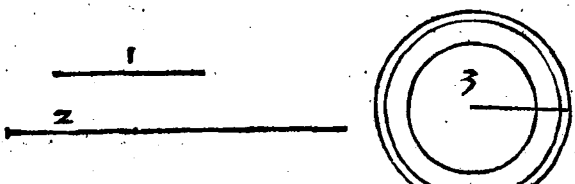


AITHMATA.

Ἠιτήσθω, Ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον, εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν, κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβάλλειν. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι, κύκλον γράφεσθαι.

Postulata.

Petatur, & primò quidem, Ab omni puncto ad omne punctum, rectam lineam ducere posse. Secundò uerò, Terminatam rectam lineam, secundum continuationem, in rectum eijcere. Tertiò tandem, Omni centro & interuallō, circulum describere.

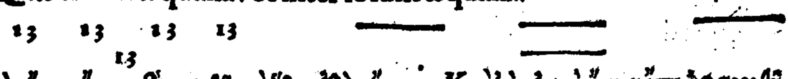


KOINAI ENNOIAI.

Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

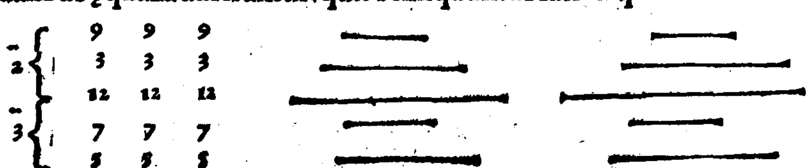
COMMVNES NOTITIAE.

1 Quæ eidem æqualia: & inter se sunt æqualia.



Ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.

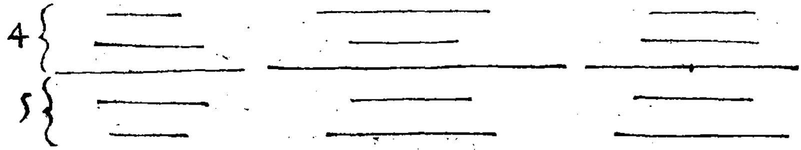
2 Si æqualibus æqualia adijciantur: tota sunt æqualia. 3 Et si ab ęqualibus ęqualia auferantur: quæ relinquuntur sunt æqualia



Ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἀνίσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ λοιπά ἐστιν ἄνισα.

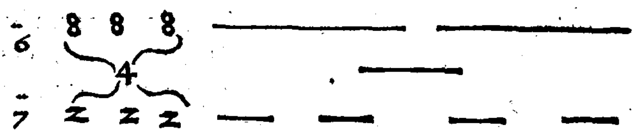
4 Si inæqualibus æqualia adijciantur: tota sunt inæqualia. 5. Et si ab inæqualibus æqualia auferantur: reliqua sunt inæqualia.

	9	16	7		17	24	15
4	8	8	8	5	7	7	7
	17.	24.	15		10	17	8



Τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

6 Quæ eiusdem duplicia: æqualia inter se sunt. 7 Et quæ eiusdem dimidia: æqualia inter se sunt.



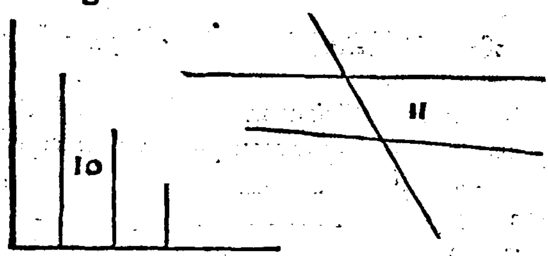
Τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζον ἐστί.

8 Quæ congruunt inter se: æqualia inter se sunt.

9 Et totum parte sua maius est.

Πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τὰς ἐντὸς, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλόμεναι αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι ἐπ' ἄπειρον συμπεσοῦνται ἀλλήλαις, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες γωνίαι.

10 Omnes recti anguli: æquales inter se sunt. 11 Et si in duas rectas recta linea incidens, internos, & in eadem parte angulos, duobus rectis minores fecerit: illas ambas productas infinitè, necesse est coincidere, ea in parte, qua duo isti anguli fuerint duobus rectis minores.



Καὶ δύο εὐθεῖαι, χωρίον οὐ περιέχουσιν.

12 Et duæ rectæ lineæ: spacium non compræhendunt.

ΠΡΟΤΑ-

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

ΠΡΩΤΗ. Α.

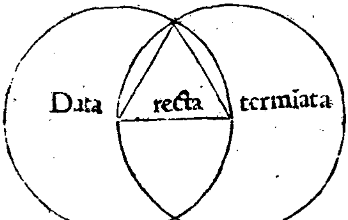
Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης, τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

PROPOSITIONES.

PRIMA. I.

Super data recta linea terminata, triangulũ æquilaterum conſtituere.

Terminata recta linea data, propoſitum eſt, ſuper ea triangulum æquilaterum conſtituere. Officio igitur circini, ſecundum interuallum rectæ datæ, ex utraq; illius extremitate, per tertium poſtulatũ, circulus deſcribatur: atq; ubi alter alterum ſupra lineam ſecat, inde ad utranq; extremitatem datæ recta quędam linea demittatur, & propoſitioni ſatiſfactum erit, cum hæ duæ demiſſæ & recta terminata data, triangulum quale petitur comprehendant: id quod facile ex ſtructura & circuli definitione, bis uſurpata, atq; illa communi noticia, Quæ uni ſunt æqualia, & inter ſe ſunt æqualia, demonſtrari poterit. Super data igitur recta terminata linea, triangulum æquilaterum conſtitutũ eſt, quod feciſſe oportuit.



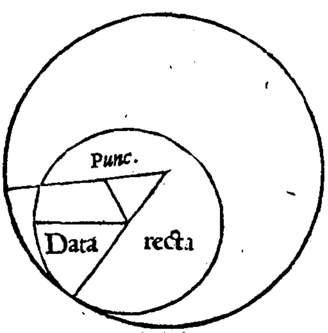
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β.

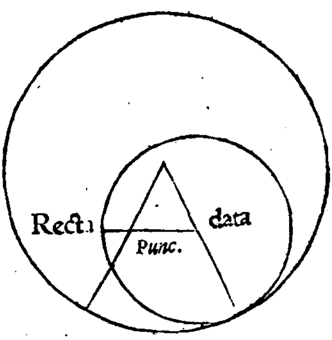
Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

PROPOSITIO II.

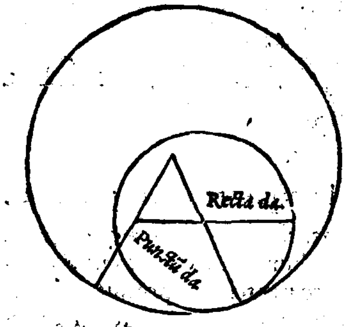
Ad datum punctũ, datæ rectæ lineæ, ęquadem rectam lineã ponere.

Puncto & recta linea data, deſcribatur primò circulus, cuius ſemidiameter ſit recta data: altera ipſius extremitate, utra fuerit, centri loco ſumpta. Quo facto, à centro circuli iam deſcripti, ad punctum datum, linea quadam recta, per primum po-





ſtulatum ducta, ſuper ea, per propoſitionem præcedentem, triangulum æquilaterum conſtituatur: atq; id latus, quod ad centrum tendit, ad circumferentiam uſq; producatur. Poſtea uerò ſecundum hanc ipſam continuatã, ex illa quoq; extremitate, quam cum latere trianguli altero communem habet, circulus deſcribatur, & ubi tandem latus trianguli alterum uſq; ad circumferentiam continuatum fuerit, confectum erit negocium. A dato enim puncto linea, datæ æqualis, educta eſt: id quod adiectæ figuræ indicant. atque in hunc modum demonſtrari poteſt. Cum enim in maiori circulo, quæ ex ipſius centro egrediuntur rectæ lineæ, ex definitione, inter ſe æquales ſint cumq; etiam ſuper recta, quam centrum circuli minoris et



punctum datum terminant, triangulum æquilaterum constitutum sit, huius uerò trianguli duo latera duarum maioris circuli semidiametrorum partes sint, partibus illis æqualibus ab æqualibus semidiametris subtractis, & quæ relinquuntur rectæ lineæ, ex communi quadam noticia inter se æquales erunt. Sed quia una harum, ex definitione circuli, datæ rectæ est æqualis: & altera, quæ nimirum ex dato puncto egreditur, ex communi quadam noticia, eidem rectæ datæ ęqualis erit. Ad datum igitur punctum, datæ rectæ lineæ ęqualis recta posita est, quod fecisse oportuit.

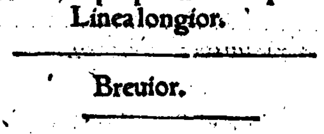
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων, ἀπὸ τῆς μείζονος, τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

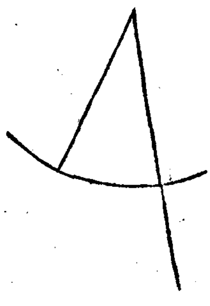
PROPOSITIO III.

Duabus datis rectis lineis inęqualibus, à longiori, breuiori ęqualem rectam lineam abscindere.

Est huius propositionis triplex operatio, seu fabrica. Prima, ut officio circini quãtitas breuioris accipiatur: ea deinde in longiore, ab extremitate una incipiendo, puncto aliquo signetur: & factum erit negotiũ, id quod per cõmunem illam noticiã, Quæ uni sunt æqualia, et inter se sunt æqualia, demonstrari poterit.



Secunda est, ut lineæ propositæ duabus suis extremitatibus utcunq; coniungantur, secundum quantitatem deinde, uel interuallũ breuioris, ex coniunctionis puncto, per tertium postulatum, circulus, uel arcus tantum circuli loco, qui tamen longiorem rectã secat, describatur: & idem effectum erit. Huius autem demonstratio est ipsa circuli definitio supra tradita, cum lineæ à centro in circumferentiam cadentes, per eandem, inter se sint æquales.

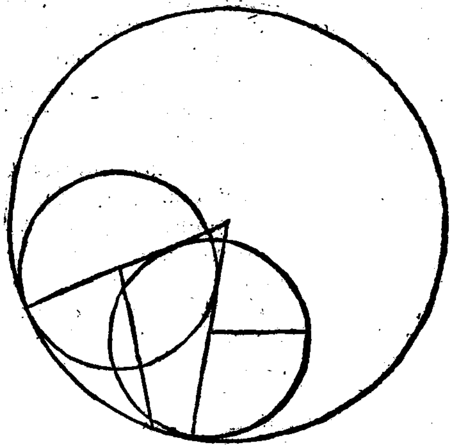


Tertia huius operatio est, ut, per præcedentem propositionem secundam, primò ab extremitate longioris alterutra, tanquam à puncto aliquo dato, linea breuiori ęqualis educatur: atq; huic deinde à longiore, prout secunda huius propositionis operatio exigit, æqualis abscindatur, & tertiò, quod uolebat propositio, factum erit.

FIGVRA

FIGVRA OPERATIONIS TERTIAE.

Linea longior. Breuior.



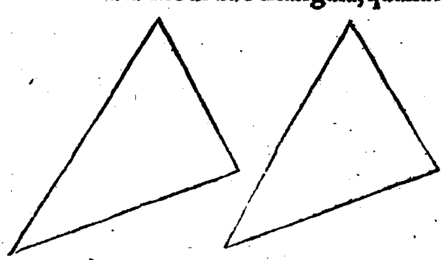
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

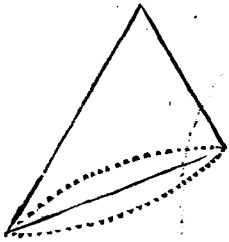
PROPOSITIO IIII.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus ęqualia habuerint, utrunque utrique, habuerint uerò & angulum angulo ęqualem, eum qui sub ęqualibus rectis lineis comprehenditur: & basim basi ęqualem habebunt, & triangulum triangulo ęquale erit, ac reliqui anguli reliquis angulis ęquales erunt, uterq; utriq;, sub quibus ęqualia latera subtenduntur.

Sumit hęc quarta propositio suā demonstrationē ab impossibili. Duplex enim est, ut norunt dialectici, demonstrationis genus. Vnum, quod ex ueris & concessis procedit, & directum dicitur. Alterum uerò, quod cum directè non possit obtineri, ab impossibili aliquo & absurda cōclusione suam demonstrationē cōfirmat, quod paucis tantum hic monere uoluimus. Nunc quantum ad propositionē. Pręscribantur huiusmodi duo triangula, qualia hęc propositio requirit, quorum nimirum unius duo latera, duobus lateribus alterius æqualia sint: atq; angulus deinde sub ęqualibus lateribus unius, angulo sub ęqualibus trianguli alterius comprehenso ęqualis: dico quod & horum triangulorum bases, ipsa quoq; triāgula tota, atq; reliqui anguli reliquis angulis utrinque inter se ęquales sint. Huius rei nunc accedere deberet ocularis quędam demonstratio: sed quia ad sensum quasi ita sese habere res apparet, & euidens est, tan-



quam uera atq; omnibus nota relinquitur, cum statim, hoc si quis negare uelit, oppositum eius, ad extremum, Quod duę rectæ spacium comprehendant, ut sequitur, fateri cogatur, reductione ad absurdum. Superponatur triangulum unum alteri, sic ut anguli eorum ęquales, unus super altero iaceat, unum etiam ęqualium laterum unius, super suo ęquali alterius triãguli latere ponatur. Et quia hęc duo, & reliqua etiam duo ex altera parte latera, ex hypothesi inter se æqualia sunt, ab ęqualibus etiam angulis descendunt: horum applicatorum laterum extremitates, reliqua etiam ex altera parte latera omnino conuenire atq; coincidere oportet. Quia uerò iam basiũ extremitates (ut quæ eædem sunt quæ descendentium laterũ,) conueniunt: basis igitur basi aut congruet, aut duæ rectæ lineæ cõprehendent superficiẽ. Posterius nõ conceditur, cum nimirum id, ex communi quadam noticia, pro absurdo habeatur. Congruẽt ergo bases: æquales igitur inter se, ex cõmuni illa noticia, Quæ congruunt inter se, æqualia inter se sunt. Congruet sic & triangulũ triangulo: quare & ipsa æqualia inter se, per eandẽ. Deniq; quia etiam reliqui duo anguli reliquis duobus angulis congruunt, uterq; utriq;: & illi tandem eo modo quo conueniunt, inter se æquales erunt. Cum igitur duo triangula duo latera duobus lateribus ęqualia habuerint, utrunq; utriq;, habuerint uerò & angulũ angulo ęqualem, eum qui sub æqualibus rectis comprænenditur: & basim basi ęqualem habebunt, & triangulum triangulo ęquale, ac reliqui anguli reliquis angulis ęquales erunt, uterq; utriq;, sub quibus ęqualia latera subtenduntur, quod demonstrari oportuit.



ADMONITIO.

Per puncta in figuris, repræsentatur ratio ducens ad absurdũ, ut qui facilis nõ esset in concedendo id quod uerum est, tandem cõuincatur reductione quadam ad impossibile, ut hac offensione absurditatis quodammodo resiliat ad confessionem ueri. Quod ut hoc loco, ita etiam alijs locis à me factum reperient Lectores, designatione punctorum.

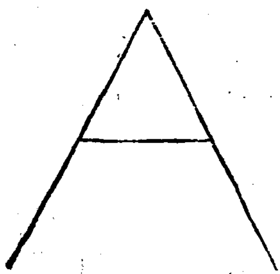
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε.

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων, αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

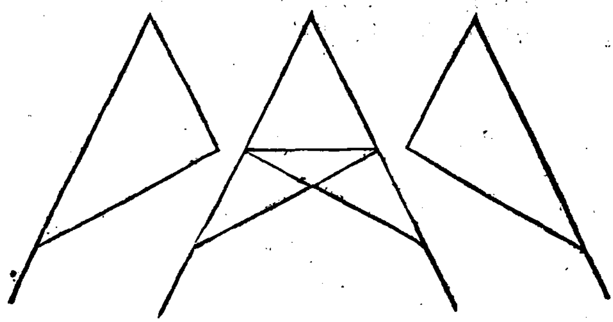
PROPOSITIO V.

Isoscelium triangulorum: qui ad basim anguli, ęquales inter se sunt. Et ęqualibus rectis ulterius productis: qui sub basi anguli, ęquales inter se erunt.

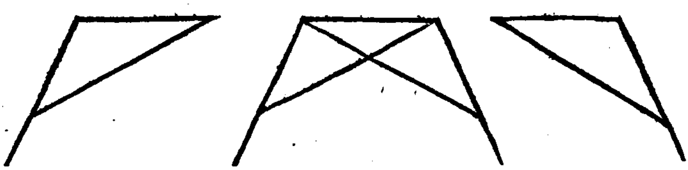
Sunt huius propositionis duæ partes, quarum prior quidem est, quòd in triangulis duũm æqualium laterum, anguli ad basim, hoc est ad reliquum latus tertium, sint inter se ęquales. Posterior uerò, si in huiusmodi triangulis ęqualia duo latera ultra triangulum producantur: quod & sub basi, qui sic fiunt anguli, inter se æquales sint. Fiant latera ultra triangulum producta, per 3, inter se æqualia, horum deinde ęqualium extremitates cũ basis extremitatibus, duabus rectis, quæ sese mutuo secent iunctis, demõstratio ex 4 pręcedenti, bis usurpata, & communi tandem illa noticia, Si ab ęqualibus æqualia auferantur, & quæ relinquuntur, &cæ. sic colligetur. Quoniã enim inferius ad



rius ad Isoscelis basim posita triangula (sumpto tamē ad utrūq; Isosceli descripto) duo latera ex hypothesi & structura, duobus lateribus æqualia, angulum preterea

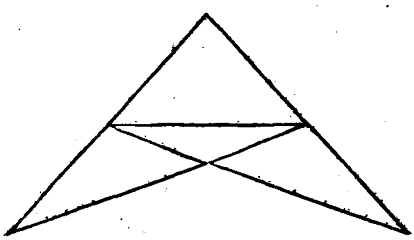


inter æqualia latera, angulo equalē habent: per precedentem quartā, & basim basi, hoc est, secantes sese mutuo sub Isoscelis basi lineas, ac reliquos duos angulos reliquis duobus angulis equales habebunt: quod est notandum. Rursus quoniam eadem duo inferius ad Isoscelis basim posita triangula, propter structuram quidem, & ea insuper, quæ iam demonstrata sunt, ex propositione 4 huius, inter se æqualia sunt, angulos etiam equales habent: iam statim posterior huius propositionis pars, quod scilicet sub basi anguli inter se æquales sint, manifesta erit. Quòd deinde quātum ad partem priorē, ad basim etiam positi anguli inter se equales sint, ex cōmuni



illa noticia, Si ab æqualibus æqualia auferantur, &cæ. & id tandē manifestabitur. Constat itaque sic tota propositio. Isoscelium igitur triangulorum: qui ad basim sunt anguli, inter se equales erunt. Productis item æqualibus lateribus: & qui sub basi anguli, inter se æquales erunt, quod demonstrari oportuit.

SEQVITVR FIGVRA ALIA.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ς.

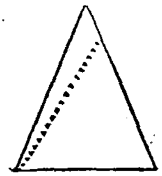
Εὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

PROPOSITIO VI.

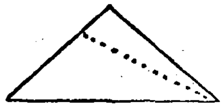
Si trianguli duo anguli equales inter se fuerint; & sub equalibus angulis subtensa latera, equalia inter se erunt.

Esto

Esto triangulum, cuius duo anguli sint inter se æquales: dico & latera illis equalibus angulis subtensa, inter se æqualia esse. Si enim non sunt equalia: erit alterum eorum longius. ab eo ergo quod est longius, breuiori equale auferatur, iuxta illum angulum, qui est alteri æqualis, incipiendo, & claudatur triangulum. Et quoniam



Vel



duo triangula, quæ nimirum latus, quod equis angulis interiacet, cõmune habent, huiusmodi sunt, qualia propositio precedens quarta requirit, cum per hanc quartam, et basis basi, totum deinde triãgulum toti triangulo, ac reliqui anguli reliquis angulis equales sint: partiale triangulum suo totali æquale erit, pars toti, quod est impossibile: partialis etiam angulus, ex communi illa noticia. Quæ uni sunt æqualia, & cæt. suo totali æqualis, quod & ipsum impossibile. Latus igitur unum alteri, propter hec inconuenientia, non inequale, sed æquale erit. Si igitur trianguli alicuius duo anguli equales inter se fuerint, & horum equaliũ angulorum subtentensa latera inter se æqualia erunt. quod demonstrasse oportuit.

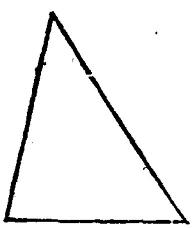
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι, ἑκατόρα ἑκατόρᾳ, οὐ συσταθήσονται, πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.

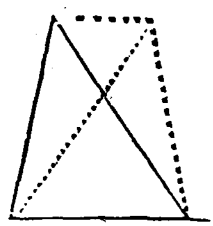
PROPOSITIO. VII.

Super eadem recta, duabus eisdem rectis lineis alię duæ rectę equales, utraq; utriq;, nõ constituentur, ad aliud atq; aliud punctum, ad easdẽ partes, eosdemq; terminos cum duabus initiò ductis rectis lineis habentes.

Sentẽtia est propositionis: Si super alicuius rectæ lineæ extremitatibus, à pũcto uno, extra lineã sumpto, duæ rectæ demissæ fuerint, quòd tũ à puncto quodã alio, in eadẽ qua prius parte constituto, ad extremitates datæ, aliȩ duȩ rectæ, quȩ essent priorib. ductis equales, utraq; suȩ cõterminali, demitti possint, hoc impossibile est. Si enim possibile, detur recta, à pũcto etiã extra datã sumpto, ad utranq; extremitatẽ recta linea ducat. Sumat deinde, ut ita aduersario, uel minus credẽti, mos geratur, in eadem qua prius parte, punctum aliud, à quo & ipso duæ ad extremitates datȩ rectæ tandem demittentur lineȩ.



Recta data.

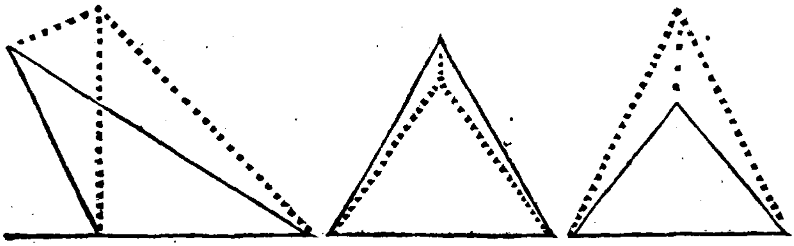


Recta data.

Et quia in hũc modum descripta figura, ex posterioribus una priorum unã secet aut non secet, utrum nunc contigerit, pũcta semper, per primũ postulatum, recta quadã linea coniungẽda sunt. Quòd si una unã secet, cũ hic appareãt duo triangula, quorũ utrũq; Isosceles, qui in Isosceliũ triãgulorũ uno, per priorẽ partem quintæ, anguli sunt inter se equales, mox uni equalium unus angulus, quẽ nimirum habet à latere, additus, de altero uerò unus ablatus: qui sic ueniũt anguli inequales, per eandem priorem quintæ partem, ratione alterius Isoscelis, inter se equales erunt. quod est impossibile. Esto autem nunc, quod non secet una unam, tum post punctorum coniunctionem, unius Isoscelis trianguli equalia latera ultra basim producantur. Et quoniã qui, ex posteriore parte quintȩ, anguli sunt inter se equales, si uni unus additus, de altero uerò unus ablatus fuerit, ex priore parte eiusdem quintȩ idem

quod

quod prius inferri poteſt. Sequitur ergo nunc, quomodocunq; hoc tentabitur, incaſſum laborari, cum nec intra nec extra demiſſas rectas punctũ aliud ſumi poſ-



Recta data. Recta data.

ſit. Super eadẽ igitur recta, duabus eiſdẽ rectis, & reli. quod demõſtraſſe oportuit.

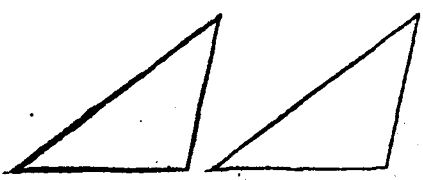
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην· καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

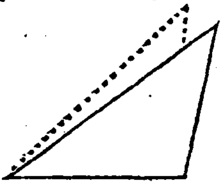
PROPOSITIO VIII.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus ęqualia habuerint, utrũque utriq;, habuerint uero & baſim baſi ęqualem: & angulum angulo æqualem habebunt, eum qui ſub ęqualibus lateribus comprehenditur.

Deſcribantur huiuſmodi duo triangula, qualia hæc propoſitio requirit: dico & angulos, qui ſub æqualibus amborum triangulorum lateribus comprehenduntur, inter ſe ęquales eſſe. Colligit ſuam demonſtrationem hęc propoſitio ex ſeptima, ut



pręcedens ſexta ex quinta, ab impoſſibili hoc modo. Superponat᷑ triangulum unum alteri, ſic ut baſis baſim, latera etiam latera, unumquodq; ſuum ęquale, reſpiciant: ac poſita baſi ſuper baſi, una item extremitate unius in uno, ſuper una baſis extremitate in triangulo altero, cum ipſę baſes inter ſe ſint, ex hypotheſi, ęquales: duę harum extremitates reliquæ coincident. atq; ſic etiam ipſæ baſes, cum alias, ubi uidelicet una baſis extra uel intra triangulũ caderet, duæ rectę lineæ ſuperficiẽ clauderent, id quod per communem quandam notitiam fieri poſſe negatum eſt: cõgruunt igitur baſes. Et quia baſes congruunt: latera ſic lateribus aut congruent, aut non. Si prius: & angulus angulo congruet, & ei ęqualis erit, quod erat demonſtrandum. Eſto uero quòd non congruant latera baſibus congruentibus, ſed differant, hoc eſt, in diuerſa puncta cadant, cum ſuper unius rectæ extremitatibus duæ rectæ, ab uno pun-



cto deductæ, prius conſtitutæ ſint, iam uerò aliæ duæ, ſuper eiſdem rectæ extremitatibus poſitæ, uerſus eandem partem tendentes, in aliud punctum concurrant, contra propoſitionem prǽmiſſam ſeptimam id agi manifeſtum eſt. id quod fieri non ſolet: cum uidelicet Geometrę inde corum nimis atq; turpe eſſet, ſi demõſtratæ antea propoſitionis ueritatem & conſtantiam eandem non tueretur. Propter illud igitur inconueniens, congruentibus baſibus: et reliqua latera, cũ ſint, ex hypotheſi, inter ſe æqualia, congruere: atq; ſic angulos, quos dicta latera comprehendunt, inter se ęquales esse, necesse erit. Si igitur duo triangula, duo latera duobus &cæ. quod demonstrasse oportuit.

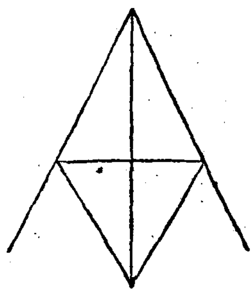
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ.

Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα τεμεῖν.

PROPOSITIO IX.

Datum angulum rectilineum: bifariam secare.

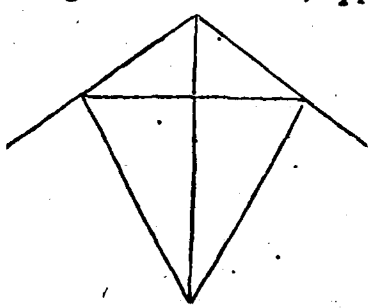
Angulus rectilineus datus.



Sit angulus rectilineus datus, atq; propositũ, eum bifariam secare. Officio igitur circini, ex rectis datum angulum continentibus, ab earũ contactu incipiẽdo, portiones sumant̃ equales: quarum fines deinde linea quadam recta, ut Isosceles triangulũ fiat, iuncti, super illa, ex altera parte, triangulum ęquilaterum constituat̃. Quòd si tandem linea quadam recta alia angulus datus cum sibi opposito copuletur, propositioni iam satisfactum erit: id quod propositionis κατασκευὴ & propositio octaua manifestabunt.

ALIA DEMONSTRATIO HVIVS.

Sit angulus rectilineus datus, atq; propositum, eum bifariam secare. Signetur igitur in uno anguli latere pũctũ aliquod, huic deinde portioni, quę inter pũctũ hoc et angulũ iacet, ęqualis ab altero anguli latere, ab ipso angulo incipiẽdo, per propositionem tertiam auferatur, et connectantur harum portionum fines tertia quadam recta linea. Porrò super hac tertia, ex altera parte, per primam propositionem huius, triangulo ęquilatero cõstituto, angulis insuper, quos hæc recta in diuersis triangulis subtendit, recta quadam linea alia iunctis, confectum erit negocium, cum hæc ipsa recta angulum propositum bifariam secet: id quod, ut prius, ostendi poterit.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

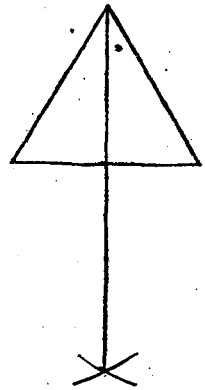
Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.

PROPOSITIO X.

Datam rectam lineam terminatam: bifariam secare.

Sit recta linea terminata data, atq; propositum, eam bifariam secare. Super illa igitur triangulum æquilaterum constituatur: angulo deinde, quem hæc recta terminata subtendit, linea quadam recta alia, per propositionem nonam præcedentẽ, bifariam diuiso, factum erit negocium. Nam quæ angulum, ea ipsa, continuata tamen, & terminatam rectam lineam datam bifariam secet: cuius quidem rei demonstratio, ipsa structura & propositio quarta erunt. Data igitur recta terminata linea, bifariam secta est: quod fieri oportuit.

SEQVITVR FIGVRA.



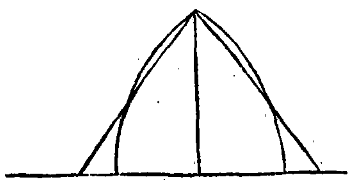
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ.

Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

PROPOSITIO XI.

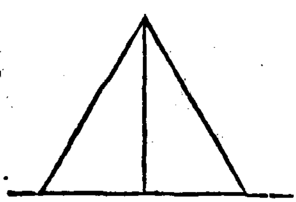
Data recta linea, à puncto in ea dato, ad angulos rectos lineam rectam excitare.

Sit recta linea data, *in ea etiam* punctũ datum, atq; propositum, ex puncto hoc ipsius rectæ lineæ datæ, lineam rectam ad rectos angulos educere. Signentur ex utraq; parte puncti in linea, circini officio, æquales portiones. ex harum finibus deinde, circino prius ulterius expanso, duo circuli, uel arcus tantum, circulorum loco, sese mutuo secantes describantur. A' mutua tandem duorum arcuum intersectione linea recta ad punctum in linea datum si demissa fuerit: illam demissam à puncto in linea ad rectos angulos eductã esse, sic obtinebitur. Ducatur à communi arcuum intersectione ad utranq; illorum cũ recta data intersectionẽ, quædam recta linea.



Et quoniã hic sunt duo triangula, qualia propositio octaua præcedens requirit, cũ illi anguli, quos recta data, & quæ ab arcuum intersectione demissa est linea, ἐφεξῆς constituunt, per eandem octauam, æquales inter se sint, atq; ob id deinde recti, ex definitione: hæc demissa ad angulos rectos educta erit, id quod fieri oportuit.

ALIA DEMONSTRATIO HVIVS.



Sit recta linea data, & quæ sequuntur. Signentur ex utraque parte puncti in linea æquales portiones, una quidem ad placitum, altera uero per propositionem tertiam præmissam. Super his deinde duabus portionibus, tanquam una linea, triangulo æquilatero per propositionẽ primam constituto, ad angulũ quem hæc tota subtendit, à puncto in linea sumpto, recta quædam linea ducatur. Erit autem hęc recta, ea quę petebatur, ad rectos scilicet angulos à puncto in linea dato educta: id quod, ut modo, mediante structura, ex propositione octaua, & definitione anguli recti, facile demonstrari poterit.

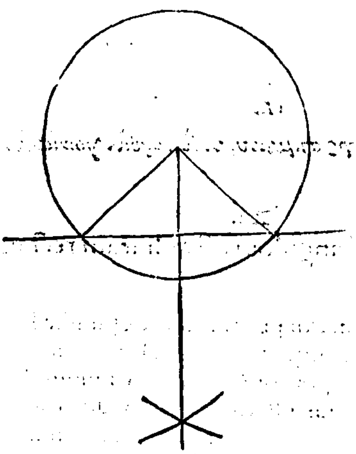
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

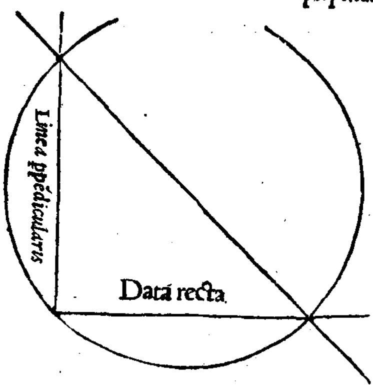
PROPOSITIO XII.

Super datam rectam lineam infinitam: à dato puncto quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit recta linea satis longa data, extra eam etiam punctum datum, atque propositum, à puncto super rectam, perpendicularem rectam lineam demittere. Suscipiatur ex alterutra parte rectæ, per punctum diuisæ, punctum aliud, utcunque, ac centro quidem, puncto dato: interuallo uerò eo, quod à duobus punctis intercipitur, circulus, per 3 postulatum describatur. Vel, Ex puncto dato describatur primò circulus tātus, ut rectam datam in duobus locis intersecet, à quo eodem puncto deinde ad *intersectionū* loca duabus rectis lineis ductis, secetur uel angulus ad centrum, quem hæ duæ rectæ includunt: per nonam, uel latus eundem angulum subtendens, si magis placet: per propositionē 10, bifariam. Dico ergo quod hec, uel angulū uel latus, secans linea, ea sit quæ petitur. Quoniam enim ad rectam hanc, quæ datæ rectæ insistit, angulos æquales esse ipsa κατασκευή, et propositio 4, si angulus: uel & propositio 8, si linea data, seu latus *bifariam diuisum* fuerit, demonstrabūt. Et quoniam sunt anguli deinceps se habentes, Quando autem recta rectæ insistens, deinceps se habentes angulos æquales inter se fecerit: uterque æqualium angulorum ex definitione, rectus est, ac insistens, Perpendicularis uocatur, cum hæc recta ex puncto etiam dato procedat, propositioni iam satisfactū erit. Super datā igitur rectam lineā satis longā, à dato puncto quod in ea non erat, Perpendicularis educta est, quod fieri oportuit.



ALIVS MODVS DVCENDI *perpendicularem lineam.*

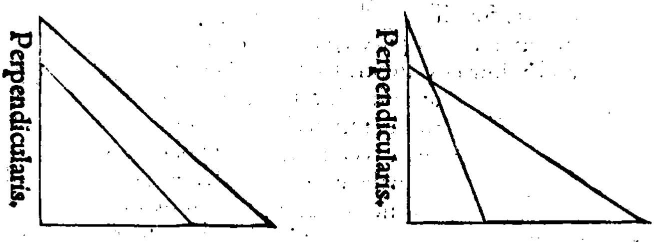


Est & tertius modus ducendi perpendicularem lineam, ex prima parte propositionis 31, tertij libri sequentis desumptus, eò spectans, si quando forte ab alicuius rectæ extremitate ea ducenda esset. Huius itaque delineationem huc ponere libuit, maximè ob id, quod præter hos modos, non puto præterea alium esse modum erigendi perpendicularem lineam.

APPENDIX.

Ex præmissis duabus propositionibus discetur, quomodo triangulum orthogonium formari debeat, Posteaquam enim perpendicularis ad rectam ducta est, si deinde

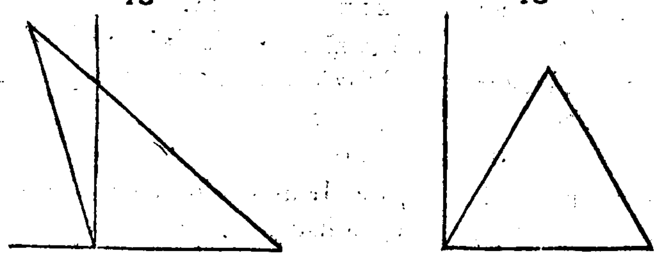
deinde huius extremitas, uel punctum aliquod in ea, cum data recta, uel similiter eius puncto aliquo, coniungatur: triangulum rectangulum descriptum erit, sic:



De Obtusiangulo autem & Acutiangulo, quomodo formentur, si illorum angulos, à quibus denominata sunt, quis animaduerterit, non erit laboriosum facere, cum nullam singularem industriam hæ delineationes requirant, id quod ex sequenti cuiusque descriptione apparet.

Triangulum

Amblygonium Oxygonium



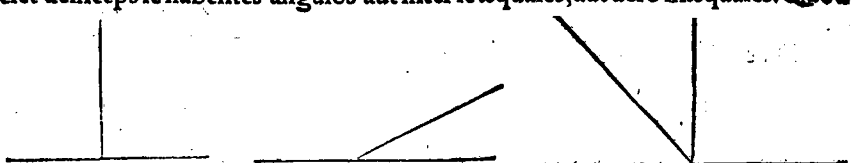
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ.

Ὡς ἂν εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα, γωνίας ποιῇ, ἤτοι δύο ὀρθὰς, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει.

PROPOSITIO XIII.

Cũ recta linea super rectam consistens lineã, angulos fecerit: aut duos rectos, aut duobus rectis æquales faciet.

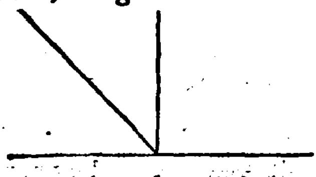
Consistat recta super rectam lineam, angulos faciens: dico illos esse, aut utrunque rectum, aut ambos simul duobus rectis æquales. Nam linea insistens rectæ alij, faciet deinceps se habentes angulos aut inter se æquales, aut uerò inæquales. Quòd



si ęquales: uterque ex definitione, rectus erit, id quod uult propositio. Sin uerò inæquales, quia tamen unus tanto interuallo rectum excedit, quanto alter recto minor est (id quod linea à puncto in recta sumpto, πρὸς ὀρθὰς educta commonstrabit) propter excessus & defectus æqualitatem, iam hi duo anguli, licet non recti per se, tamen duobus rectis æquales sunt, id quod & ipsum habet propositio. Vnde sic patet ipsa tota. Si recta igitur linea super rectam consistens lineam angulos fecerit, aut duos rectos, aut duobus rectis angulis æquales faciet: quod demonstrasse oportuit.

ALIA EIVS QVO IN PROPOSITIONE *dicitur, Aut duobus rectis æquales, demonstratio.*

Quòd si recta insistẽs rectæ alij, angulos deinceps se habẽtes inęquales fecerit, tũ ex cõmuni linearum contactu, tanquã ex puncto in linea dato, per propositionẽ 11 huius, ad angulos rectòs linea excitetur. Et quoniam ex utraq; parte semper unus



angulus, hic quidem per lineam πρὸς ὀρθὰς ductam: illic uero, per alteram insistentem, in duos angulos diuisus est: singuli duo partiales suo totali angulo æquales erunt. atq; his deinde illis æqualibus additis, sicut duo uni, & unus duobus angulis accedat: tres anguli tribus æquales erunt, uno tandem communi angulo, qui nimirum sub perpendiculari & alia insistente comprehẽditur, hic & illic ablato: duo anguli duobus æquales erunt. Quia autem duo ex una parte recti sunt: ex altera parte duo, quos nimirum recta, non ad rectos angulos ducta, & ea cui insistit, compręhendunt, duobus rectis angulis ęquales erunt. Si recta igitur linea super rectã cõsistens angulos fecerit, & cęt. quod demõstrari oportuit.

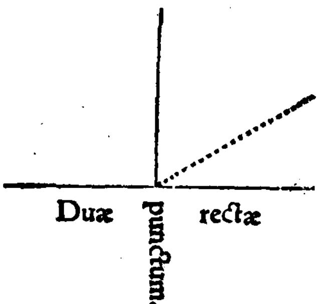
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ.

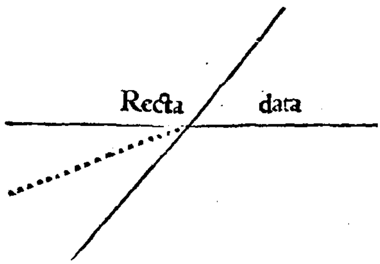
Ἐὰν πρός τινι εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

PROPOSITIO XIIII.

Si ad aliquam rectam lineam, atq; ad eius punctum duæ rectę lineæ, nõ ad easdem partes ductæ, deinceps se habentes angulos duobus rectis æquales fecerint: in directum erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.

Sit quædam recta linea, ad eius etiam unum aliquod punctum, duæ rectæ lineę non ad easdem partes ductæ, sic tamen, ut cum priori recta, angulos duobus rectis æquales faciant: dico quòd, quæ ad punctũ sunt ductæ rectæ lineę, ad amussim una alteri iuncta sit. Colligit suam demonstrationem hæc propositio ex propositione 13 precedẽti ab impossibili, sic. Nisi enim hæ duæ rectæ, ad punctum prioris rectæ sic ductæ, una linea sint, si fortè ab aliquo minus credente, atq; subtili nimis homine, una ductarũ suo modo secundum continuationem in rectum eiecta fuerit,





per præcedẽtem 13, & illam deinde communem noticiam, Si ab æqualibus æqualia, uel aliquod commune (quod idem est) subtrahatur, & cæ. inferri posset, partialẽ æqualem esse angulo suo totali. Sed quia hoc est contra rationem & notitiam quandam communem, quæ sonat, Totum esse qualibet sua parte maius. Non igitur continuari potest iuxta hoc punctũ in directũ aliter, neq; illa, cum qua iam hoc tẽtatũ est, neq; etiã ducta recta altera: quare hæ duæ in directũ iunctæ sunt. Si ad aliquã

igitur

igitur rectam lineam, atq; ad eius punctum, duæ rectę lineæ, non ad easdem partes ductæ, deinceps se habentes & cæ. quod demonstrari oportuit.

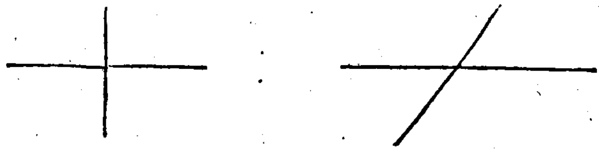
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας· τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιήσουσι.

PROPOSITIO XV.

Si duę rectę lineæ sese mutuo secuerint: ad uerticem angulos æquales inter se faciunt.

Sint duæ rectę lineæ sese mutuo secantes: dico, quòd anguli ad uerticem sint inter se æquales. Est huius propositionis demonstratio, propositio 13 præcedens, cũ per eam recta rectę lineę insistens, semper duos angulos aut rectos, aut duobus re



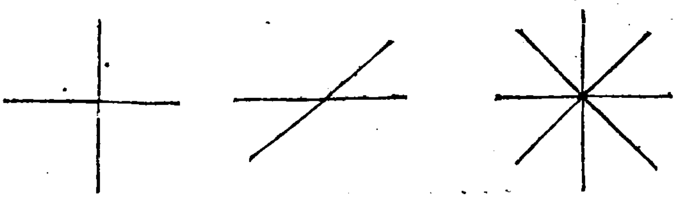
ctis ęquales faciat. Quare hac propositione bis usurpata, Cum quę uni ęqualia: illa & inter se ęqualia sint, communi angulo ab his ęqualibus ablato: anguli tandem κατὰ κορυφὴν ęquales manebũt. Si duę igitur rectę lineę sese mutuo secuerint: ad uerticem angulos ęquales inter se faciunt, quod demonstrasse oportuit.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν· ὅτι καὶ ὅσαι δήποτ᾽ οὖν εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας· τὰς πρὸς τῇ τομῇ γωνίας τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσουσι.

COROLLARIVM.

Hinc manifestum est, Quotquot rectas lineas, in eodẽ plano sese mutuo intersecantes: angulos efficere quatuor rectis ęquales.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙϚ.

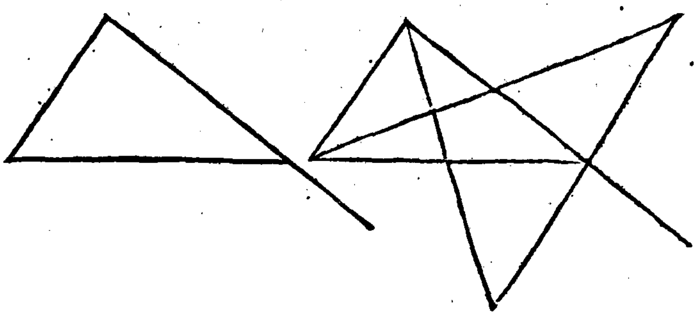
Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν ἐκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς, καὶ ἀπεναντίον, μείζων ἐστίν.

PROPOSITIO XVI.

Omnis trianguli uno latere producto: externus angulus utroq; interno, & opposito, maior est.

Sit triãgulum, productum etiam ulterius unum eius latus: dico, qui sic fit externus angulus, eum utroq; interno, & ex opposito constituto, maiorem esse. Secentur duo latera trianguli, quę sunt ad angulũ externũ, bifariam, deinde per diuisionũ puncta, ab angulis, quos hęc eadem latera subtendunt, lineæ rectę ultra triangulũ ducantur,

ducantur, sic, ut utriusque externa, suæ sit internæ portioni æqualis. Extremitatibus



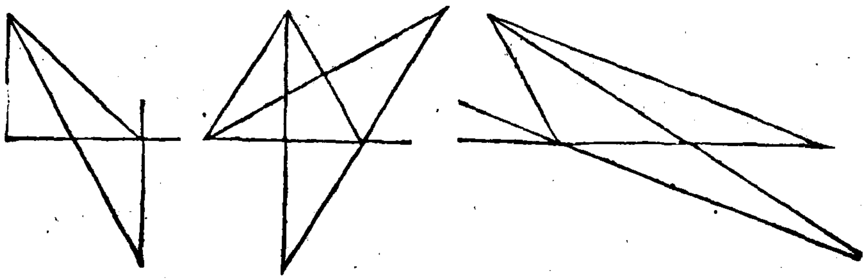
tandem harum rectarum cum puncto, quod est duarum diuisarum communis terminus, duabus rectis lineis cõnexis, demonstrationis figura parata erit. Qua nunc diligenter perspecta, propositionum decimæ quintæ & quartæ memor, rem ita sese habere facile perspiciet.

ADMONITIO.

Oportet autem, ut pro utroque interno & opposito angulo, quo nimirum externus maior esse demonstrari debeat, duo partialia triangula sumantur, quorum alterum quidem angulum illum, de quo agitur, integrum habet: alterum deinde, quod huic ad uerticem iunctum est, tum demum propositionibus allegatis res successum habebit, quod indicare necesse erat.

SEQUITUR GEOMETRICA FIGURA alia, pro triangulo

orthogonio & isosc. oxygonio & æquilat. amblygonio & scaleno.



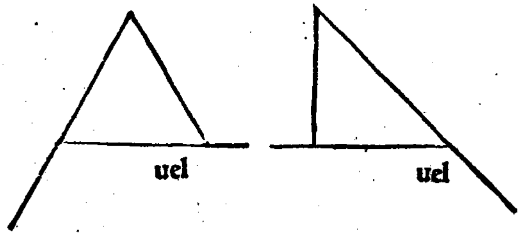
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ.

Παντὸς τριγώνου, αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

PROPOSITIO XVII.

Omnis trianguli, duo anguli duobus rectis minores sunt, omnifariam sumpti.

Proposito triãgulo qualicunque: dico, quoslibet eius duos angulos, duobus rectis minores esse. Producatur quoduis eius unũ latus ulterius. Et quoniã ex iam præmissa 16 propositione, angulus externus utroque interno & opposito maior est, & rursus quoniam ex communi quadam notitia, *Si inæqualibus æqualia, uel aliquod commune adiectũ fuerit, ipsa tota inæqualia sunt*: priorũ inæqualiũ utrique angulus, qui est externo est externo ἐφεξῆς adiectus, & tota tandem inter se inæqualia esse conueniet: atque illud quidem maius, ubi scilicet est externus angulus: alterum uerò, duo nimi-



rum interni anguli, minus. Maius autem, cum ex propositione 13, duobus rectis angulis ęquale sit: alterum nūc, ut qui sunt duo interni anguli, propter angustiam, duobus rectis angulis minus erit. Et quoniam hoc nūc de duobus ad placitū sumptis angulis, quod ipsi duobus rectis minores sint, demonstratum est: de singulis duobus amplius nullum dubium erit, quin & ipsi duobus rectis minores sint, subinde tamen alio atq; alio latere ulterius producto. Omnis igitur trianguli duo anguli, & quæ sequuntur, quod demonstrasse oportuit.

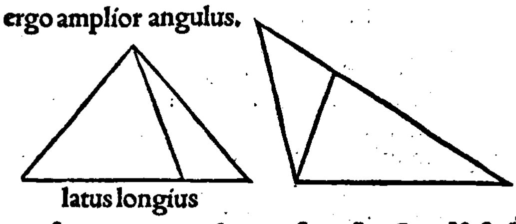
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ.

Παντὸς τριγώνου, ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.

PROPOSITIO XVIII.

Omnis trianguli, longius latus ampliorem angulum subtendit.

Sententia est propositionis. Quòd latus alicuius trianguli est longius: illius etiā angulum quem subtendit, breuioris subtendentis angulo ampliorem esse. Describatur igitur triangulum, duum æqualiū, uel trium inęqualium laterum: dico quòd, cuius anguli est latus longius, illum etiā ampliorem esse. Duorum angulorū latera, cum ex hypothesi, unum eorum longius, alterū uero breuius sit, abscindatur de longiori, per propositionē 3 huius, portio breuiori æqualis, ac triangulo formato, demonstratio ex propositionibus 5 et 16 præmissis sic colligetur.



Quoniam formatū triangulū cum sit ex structura Isosceles: erunt ipsius ad basim anguli inter se æquales. sed quia unus horū æqualiū, est alterius cuiusdā triāguli externus, unde sic utroq; interno eiusdē triāguli & opposito, maior: & alter ęqualium eodē interno angulo maior erit. Alter autem cum sit eius, quem longius latus subtendit anguli pars, internus uerò is qui à breuiori latere subtenditur, argumento à maiori uel fortiori sumpto, si pars maior illo est: multo fortius igitur ipsum totum. Omnis igitur trianguli, longius latus ampliorem angulum subtendit: quod demonstrari oportuit.

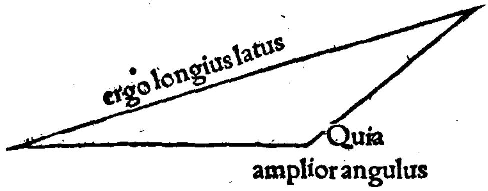
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ.

Παντὸς τριγώνου, ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.

PROPOSITIO XIX.

Omnis trianguli, amplior angulus sub longiori latere subtenditur.

Sententia est propositionis. Qui angulus alicuius trianguli est amplior: illius etiam subtensum latus angustiorem angulum subtendente latere longius esse. Nam si non fuerit longius illud, de quo dicit, latus, erit id reliquorũ uni aut ęquale, aut uno breuius. Quòd si uni ęquale fuerit: angulus quem subtendit, atq; amplior est, ex hypothesi, ex priore parte propositionis 5, sibi alium æqualem angulum habebit: nõ ergo amplior. Quòd si uero uno breuius, cum latus longius, ex pręcedente, ampliorem angulum subtendat: angulus qui positus est amplior, iã uno eorũ, illo scilicet cuius longius est subtensum latus, angustior erit. Sed quia non est: neq; etiam eius latus alio breuius erit: longius ergo. In omni igitur triangulo amplior angulus longius latus requirit, seu sub longiori latere subtenditur, quod demonstrasse oportuit.



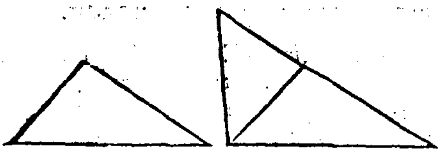
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

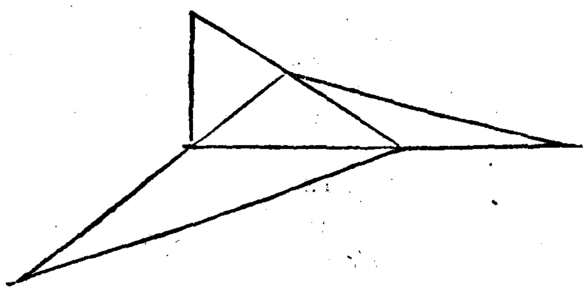
PROPOSITIO XX.

Omnis trianguli, duo latera reliquo longiora sunt, omnifariã sumpta.

Esto triangulum qualecunq;: dico, quòd eius qualitercunq; sumpta duo latera simul, tertio reliquo longiora sint. Horum duorum laterum, quæ demonstrari debeant, quòd tertio reliquo longiora sint, unum ad longitudinem lateris alterius, ex illa parte ubi est communis eorum copula, ultra triangulum continuatur, quę deinde hæc duo æqualia, uel hæ duæ ęquales rectæ lineæ comprehẽdũt angulum, is tertia quadam linea recta, ut triãgulum fiat, claudatur. Et quoniam illi duo anguli, qui ratione trianguli Isoscelis, ex priore parte quintę, inter se ęquales sunt, mox ubi uni eorum, partiali nimirum, altera pars accessit: totus nũc altero æqualiũ maior erit. Sed quoniã qui maior & amplior est in triangulo angulus, longiorẽ ex propositione 19 subtensam requirit: illa etiã quę ex duobus dati trianguli lateribus cõtinuata est, ea linea, id est, tertio reliquo latere longior erit. Omnis igitur trianguli duo latera reliquo longiora sunt, omnifariam sumpta, quod demonstrasse oportuit.



SEQVITVR FIGVRA GENERALIS PRO *singulis binis lateribus exposita.*



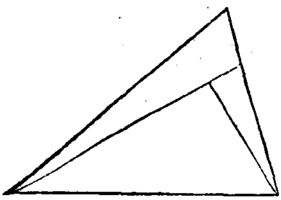
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑ.

Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν· αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάττονες μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσι.

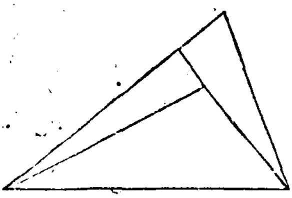
PROPOSITIO XXI.

Si super trianguli uno latere ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interius constitutæ fuerint: hę constitutæ reliquis trianguli duobus lateribus breuiores quidem erunt, ampliorem autem angulum comprehendent.

Esto triangulum, duæ etiam rectæ lineę, in ipso concurrentes, super unius lateris extremitatibus constitutæ: dico, quòd constitutæ hæ reliquis duobus trianguli lateribus breuiores sint, ampliorem autem angulũ compræhendunt. Sunt huius propositionis duæ partes. Prior, quod interiores duæ rectæ exterioribus breuiores sint, id quod patet ex pręcedenti bis usurpata, cum per eam, duo quælibet latera uniuscuiusque trianguli, tertio longiora sint, & communi tandem illa notitia, Si ab æqualibus æqualia, uel aliquod commune, subtrahatur &cæ.



Oportet tamen, ut prius ex interioribus lineis alterutra in continuum et rectum, ad latus usque exterius producatur, utꝙ triangula illa duo partialia, quorum unius quidem unum latus, linea exterior: alterius uero trianguli unum, alterius exterioris lineæ pars, latus unum fuerit, sumantur, & succedet demonstratio. Posterior nunc, quod angulus sub interioribus eo, quem exteriores rectæ lineæ comprehendunt, maior sit, ex propositione 16, & illa bis usurpata, uera esse cõuincitur. Super uno igit̃ alicuius trianguli latere ad extremitates eius duę rectæ interius cõstitutę: reliquis duobus trianguli lateribus breuiores quidem sunt, ampliorem autem angulum comprehendunt, quod demonstrasse oportuit.



ALIA PRIORIS PARTIS DEMONSTRATIO.

Vsurpatis triangulis partialibus, quæ prius. Et quoniam, ex præcedenti 20, duo quælibet latera omnis trianguli, tertio latere longiora sunt, & quoniam etiam, Inæqualibus æqualia si adijciantur: tota, ex communi quadã notitia, inæqualia sunt, utroq; bis (uno tamen post alterum) usurpato, per id demũ quod dicitur, Longo breuius, lõgiore multo fortius breuius esse, argumento nimirum à maiori sumpto, concluditur tandẽ propositum, Interiores scilicet duas exterioribus duabus, siquidem secundum propositionis hypotheses constitutæ sint, breuiores esse. quod demonstrari oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒ.

Ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις, τρίγωνον συστήσασθαι. Δεῖ δὴ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντῃ μεταλαμβανομένας, διὰ τὸ καὶ παντὸς τριγώνου τὰς δύο πλευρὰς, τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντῃ μεταλαμβανομένας.

PROPOSITIO XXII.

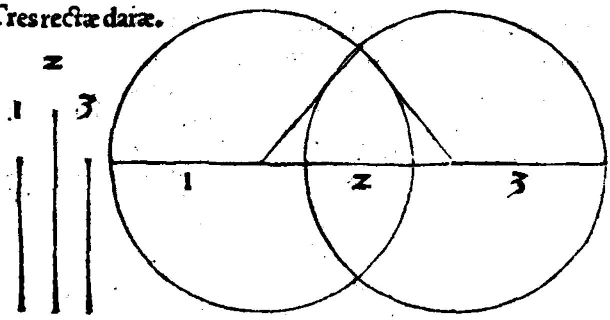
Ex tribus rectis lineis, quæ sunt tribus datis rectis lineis ęquales, triangulum constituere.

CAVTIO.

Oportet autem duas reliqua longiores esse, omnifariam sumptas, propterea quod uniuscuiusque triãguli duo latera, reliquo longiora esse oporteat, omnifariam sumpta.

Datis tribus rectis lineis, quarum quæque duę reliqua tertia longiores sint, propositum est, ex aliis tribus rectis, quæ sunt datis tribus æquales, triangulum constituere. Ducatur igitur linea recta satis longa, ut quæ propositas rectas, adamussim cõ-

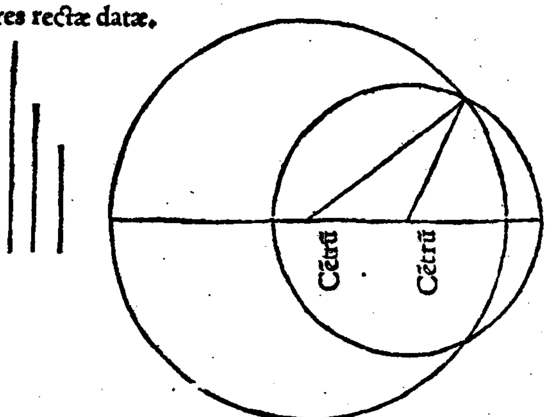
Tres rectæ datæ.



tinuatas, longitudine excedat. Hoc facto, portiones in ea, tribus datis rectis, singulæ singulis, æquales, ordine quo maxime placuerit, per 3 propositionem huius, separatim punctis signentur, ex pũctis deinde duobus intermediis, tanquam ex duobus centris, secundum extremarum portionum quantitates seu interualla, duo circuli describantur, atque à puncto tandem intersectionis ad dicta centra duabus rectis lineis ductis, propositioni satisfactum erit, ut quidem hoc ex definitione circuli & illa communi notitia, Eidem æqualia, & inter se sunt æqualia, facile colligetur. Ex tribus igitur rectis lineis, quæ sunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum constitutum est, quod fecisse oportuit.

ALIA GEOMETRICA FIGVRA, PRO *triangulo scaleno constituendo.*

Tres rectæ datæ.



APPENDIX.

Ex hac propositione addiscuntur trium triangulorũ, Aequilateri scilicet, Isoscelis & Scaleni, delineationes: cum prima unius tantum, Aequilateri scilicet, formationem nobis proposuerit. Habentur ergo sic omnium triangulorum delineationes, hic quidem hic quidem, eorum qui secundum diuersitatem laterum nomina sua sortiuntur: illic uerò, nimirum circa 11 & 12 propositiones, ubi de Perpendiculari ducenda sermo erat, prout considerantur hæc, & nomina sua habent ab angulis, quod obiter dicere uolui.

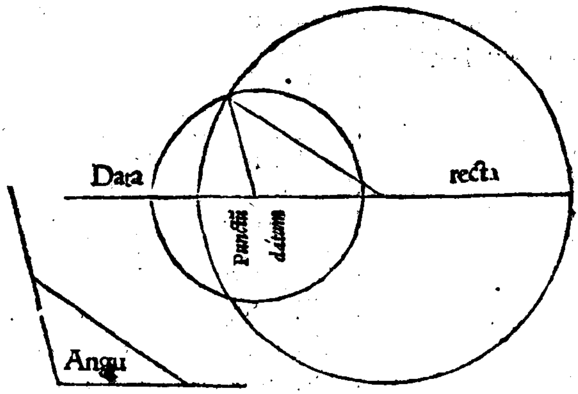
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ, ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.

PROPOSITIO XXIII.

Ad datam rectam lineam, datumque in ea punctum, dato angulo rectilineo, æqualem angulum rectilineum constituere.

Sit recta linea data, punctum etiam in ea datum: sitque deinde & angulus quidam rectilineus datus, atque propositum, ad id punctum ad hanc item rectam lineam, dato rectilineo æqualem rectilineum angulum constituere. Subtendatur primò dato angulo recta quædam linea, quomodocunque hoc fiat, ut appareat triangulum, ad



datam rectam deinde, secundum quantitatem trium rectarum, quæ sunt tribus formati iam trianguli lateribus æquales, triangulum, per propositionem 22 præmissam, constituatur, sic tamen, ut quę datum angulum comprehendunt latera, eorum portiones uel lineæ æquales, in data recta iuxta punctum signentur, et factum erit. Colligitur autem huius rei demõstratio ex structura, communi illa noticia, Eidem æqualia, & inter se sunt æqualia, propositione tandem octaua huius, quod indicandum erat. Ad datam igitur rectam lineam, datumque in ea punctum dato angulo rectilineo, æqualis angulus rectilineus constitutus est. quod fieri oportuit.

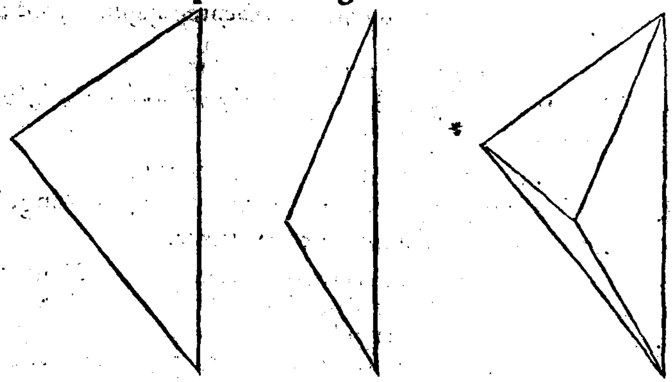
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΔ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει.

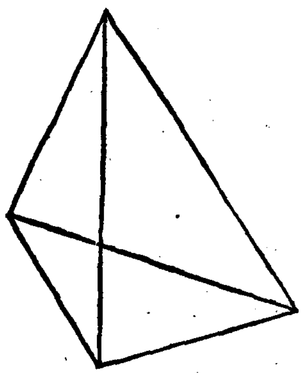
PROPOSITIO XXIIII.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus ęqualia habuerint, utrunque utrique, habuerint uerò angulum angulo ampliorem, eum qui sub æqualibus rectis comprehenditur: & basim basi longiorem habebunt.

Sint huiusmodi qualia hæc propositio requirit, duo triãgula: dico basim illius trianguli, quod sub ęqualibus rectis ampliorem cõprehendit angulum, alterius trianguli basi longiorem esse. Cum enim, ex hypothesi, angulus inter æqualia latera in uno amplior sit angulo, itidem inter æqualia latera, in triangulo altero, ille qui mi-

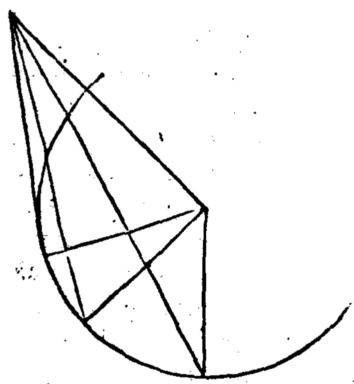


nor est, per propositionem 23 præcedentē, ut sit ampliori angulo æqualis, augeatur, ab angulo lineam, proximæ rectæ æqualem, educendo. Huic deinde angulo



totali iam facto, recta linea subtensa: erit triangulum hoc, per propositionem 4, alij posito æquale. Formetur nunc triangulum aliud, duas æquales rectas suis extremitatibus recta quadam linea coniungendo. Et quia triangulum, ex structura, est Isosceles: erunt anguli ad basim, ex priori parte propositionis quintæ, inter se æquales. Per additionem nunc & subtractionē angulorum qui his æqualibus angulis adhærent, cum ex decima nona ampliori angulo longius latus subtendatur, propositum tandem, ubi æqualis pro ęquali linea sumitur, inferri poterit: Amplioris scilicet anguli in uno, basim longiorem esse, quàm sit basis in altero triãgulo anguli angustioris, quod demonstrasse oportuit.

SEQVITVR FIGVRA PRO TRIANGVLIS TRIbus *exposita, necnon ex tertio Euclidis libro desumpta.*



APPENDIX.

Potuisset etiam econtrario, maior angulus, in structura, & id per propositionem uigesimam

uigesimam tertiam præcedentem, ad æqualitatem minoris formari, & idem fuisset.

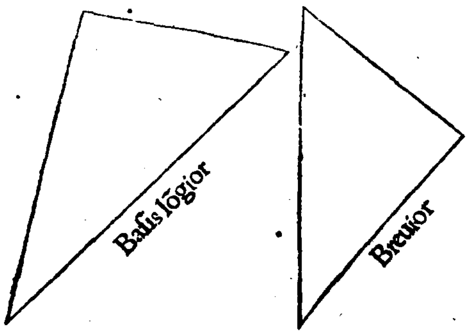
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν βάσιν δὲ τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ· καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

PROPOSITIO XXV.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus ęqualia habuerint, utrũque utrique, habuerint uerò basim basi longiorem: & angulum angulo ampliorem habebunt, eum quem æquales rectæ lineæ comprehendunt.

Sint huiusmodi, qualia hæc propositio requirit, duo triangula: dico, cuius trianguli basis est longior, illius etiam angulum, quem æquales rectæ comprehendunt, ampliorem esse. Nam æquales ne sint anguli, uetat hoc propositio 4, cum sic & bases, per eam, contra hypothesim, inter se æquales esse deberent. Ampliorē deinde positũ angustiore minorem, uel contrà, Angustiorem positum ampliore esse maiorem, per propositionē præcedentē nō admittitur. Quare ampliorē positum in uno, propter longiorē basim, illo in triangulo altero, cuius est basis breuior, ampliorem esse necesse est, quod demonstrari oportuit.



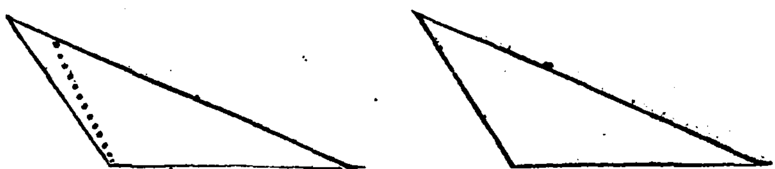
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.

PROPOSITIO XXVI.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, utrunque utrique, unũque latus uni lateri æquale, siue id quod est inter ęquales illos angulos, seu quod uni ęqualium angulorum subtenditur: & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, utrunque utrique, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

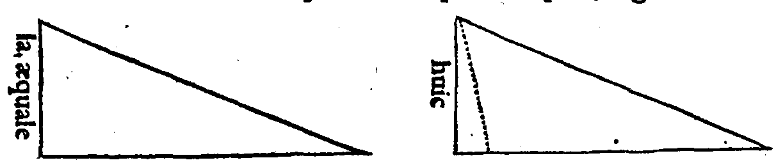
Sint huiusmodi, qualia hæc propositio requirit, duo triangula, ubi scilicet duo



anguli unius, duobus angulis alterius sint æquales, latus item unius unũ, lateri uni

alterius

alterius trianguli, siue id quod ęqualibus angulis interijcitur, siue reliquorum alterum fuerit, æquale: dico quòd & reliqua latera reliquis lateribus, utrunque utrique, atque etiã reliquus angulus reliquo angulo æqualis sit. Quantũ ad primum, ubi scilicet ęquale latus ęqualibus angulis interiectum est, si alterutrum ex reliquis non concedatur suo correspondenti lateri in altero triangulo esse ęquale, ut ei inęquale sit, certe concedendum erit. à longiori igitur (ut quidem suo modo fieri poterit) ex parte reliqui tertij anguli, per propositionem tertiam, portio, breuiori lateri ęqualis, abscindatur: & à puncto tãdem sectionis ad angulum cui hoc latus subtensum est, linea recta ducatur. Describitur autem sic triangulum quoddam partiale aliud, quod, quia suo totali triangulo superponitur, per propositionẽ deinde quartã, alij posito triangulo ęquale est, infertur tandem per illam communem noticiam, Quæ uni ęqualia &cę. partialẽ angulum suo totali, uel contrà, totalẽ suo partiali angulo esse ęqualem, quod est impossibile. Alterum igitur reliquum latus in uno, alteri reliquo lateri in triangulo altero æquale est. Quoniam autem iam duò sunt quartæ propositionis triangula, cum tertium latus, per hanc quartam, tertio ęquale sit: reliqua duo latera reliquis duobus lateribus, utrunque utrique, ut infertur, ęqualia erunt. Quantum ad secundum, ubi ęquale latus uni ęqualium angulorum subtenditur: & hic reliqua duo latera & angulus in uno, reliquis duobus lateribus & angulo in triangulo altero ęqualia esse colligetur. Quod si concedatur, non erit opus ullam demonstrationem adducere. Sin minus, erit alterutrũ è duobus in uno, suo correspõdenti latere in altero triangulo lõgius: quod & ipsum, sicut in priori parte huius factũ, ad ęqualitatem alterius si ponatur, atque deinde triangulũ formetur, contra propositionem decimam sextam, quarta tamen prius usurpata, angulũ externum suo



interno opposito æqualẽ esse, ei qui hoc contradicit, obijciet. Quare qua sanè ratione, quantũ ad latera, cõtrariũ quis inferre tentauerit, irridendũ se exponet. Quòd pręterea & angulus reliquus reliquo angulo sit ęqualis, id ex propositione 4 uel 8 habetur. Si igitur duo triangula duos angulos duobus angulis ęquales habuerint, utrunque utrique, unumque latus, uni lateri, & reliqua, quod demonstrasse oportuit.

ADMONITIO.

Necesse autem uidetur, ut primò quidem ea, quæ inter æquales angulos posita sunt, latera, ęqualia inter se esse, atque tum demum reliquorum duorum laterum, angulos nimirum ęquales subtendentium, æqualitas demonstretur. Nam aliàs, si fortè hæc quæ ęquales angulos subtendunt latera, primò æqualia inter se esse demonstrare quis conaretur, res fortè tardius successura esset: id quòd obiter duxi indicandum. Idem ferè usuuenit in propositione septima libri sexti, ubi non duorum reliquorum, hoc est tertiorum in triangulis angulorum, uerùm eorum qui inter proportionalia latera positi sunt, angulorum æqualitas, primò demonstranda est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΖ.

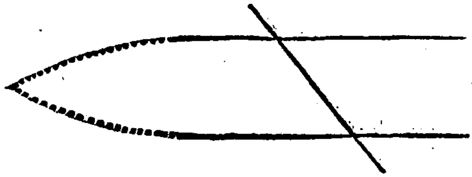
Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ· παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

PROPOSITIO XXVII.

Si in duas rectas recta linea incidens, alternatim angulos æquales inter se fecerit: parallelæ erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.

Cadat

Cadat in duas rectas recta linea alia, esto etiam quòd anguli qui sic fiũt alternatim, sint inter se ęquales: dico has duas rectas inter se parallelas esse. Nam si non: productæ hę et continuatæ, in aliqua parte concurrent, unde sic angulus externus formati trianguli, per propositionẽ 16, interno opposito æqualis. Hoc autem quia est cõtra propositionis hypothesim, non concurrũt ergo. Quę autem in eodem plano existentes rectæ lineæ, in neutra parte concurrunt, si eiectæ & continuatæ fuerint, cum, ex definitione, parallelæ sint: parallelæ sunt & istæ ductę. Si in duas igitur rectas recta linea incidens alternatim angulos ęquales inter se fecerit: parallelæ erunt inter se ipsæ rectę lineæ: quòd demonstrasse oportuit.



DEFINITIO ANGVLORVM ἘΝΑΛΛΑΞ.

Porro anguli ἐναλλὰξ positi, quos Alternatim uertimus, sunt, quos incidens recta cum rectis datis interius, in diuersis partibus, atq; ex opposito constituit & cõprehendit.

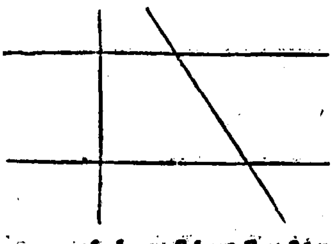
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΗ.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῇ· παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

PROPOSITIO XXVIII.

Si in duas rectas recta linea incidens, externum angulũ interno & opposito, & ad easdem partes æqualem fecerit, aut internos & ad easdem partes duobus rectis æquales: parallelæ erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.

Habet hęc propositio duas partes, quarum utraq; ex sua propria hypothesi, duas illas lineas, in quas nimirum tertia cadit, parallelas esse infert. Prior autem patet ex pręcedenti, angulis, qui per propositionem 15 inter se sunt ęquales, inter se mutatis. Posterioris nunc demonstratio sic habetur. Quoniã enim recta rectę insistens alij, et angulos faciens, ex propositione 13 aut duos rectos, aut duobus rectis ęquales angulos facit, & quoniam etiam, ex pręsenti hypothesi, interni illi qui ad easdem partes sunt anguli, duobus rectis ęquales sunt, cũ: ã illi duo, quos nimirum incidens cum alterutra rectarũ facit, quàm etiam hi, qui interius ex una & eadẽ parte appareãt anguli, duobus rectis, tanquã uni cuidam ęquales sint: ex cõmuni quadã noticia, & illi duo his duobus angulis ęquales erũt: atq; de utroque deinde, eo angulo, quem hęc duo ęqualia cõmunem habent, subtracto: & qui relinquuntur anguli, ex communi quadam noticia, inter se ęquales erunt. Quia autem reliqui hi aut ἐναλλὰξ anguli sunt, aut uerò ad easdem partes unus externus & alter internus oppositus; si ἐναλλὰξ fuerint: ex præcedenti 27: si uerò unus externus, alter internus, ex priore parte propositionis huius, tandem concluditur propositum, has scilicet rectas, in quas alia eo modo, ut dictum est, cadit, parallelas esse. Si igitur in duas rectas recta linea incidens, externum angulum interno, & opposito, & ad easdem partes æqualem fecerit: aut internos & ad easdem partes, duobus rectis ęquales: parallelæ erunt inter se hæ duæ rectæ lineæ, quod demonstrasse oportuit.



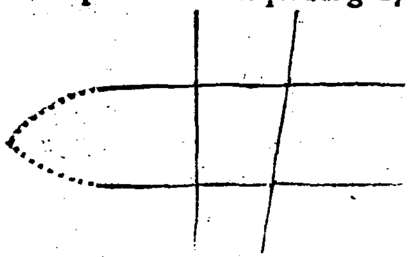
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ.

Η εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα· τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ· καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην· καὶ τὰς ἐντὸς, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

PROPOSITIO XXIX.

In parallelas rectas recta linea incidens: et alternatim angulos inter se æquales efficit: & externum interno & opposito, & ad easdem partes æqualem: & internos, & ad easdem partes, duobus rectis æquales facit.

Sunt huius propositionis partes tres, quarum singulæ parallelas rectas lineas, & rectam deinde aliam, quę in illas parallelas utcunq; cadat, requirunt. Hinc itaq; prima quidem pars, angulos alternatim positos æquales: secunda uerò, externũ interno, & opposito atq; ad easdem partes, æqualem: tertia autem, ipsos internos ad easdem partes, duobus rectis angulis ęquales esse asserit. Prima pars ab impossibili sic patet. Esto enim quòd anguli ἐναλλὰξ sint inter se inæquales. Et quoniã inęquales sunt anguli ἐναλλὰξ, alter nimirum altero amplior, angulo igitũ eo qui ampliori est ἐφεξῆς, ex æquo inæqualibus illis angulis addito: & ipsa tota, ex cõmuni quadam noticia, inter se æqualia erunt. Quia autem unũ eorum, maius scilicet, per propositionem 13, duobus rectis est æqualis, alterum quod minus est, duobus rectis angulis minus erit: ex illa igitur parte ubi minores duobus rectis sunt anguli, hæ duæ rectæ, ex communi quadam noticia concurrent. Non concurrunt autem, cum sint ex hypothesi, rectæ parallelæ: neq; anguli etiam illi ἐναλλὰξ inęquales inter se erunt: æquales igitur eos esse, ut prima pars asserit, concedendum est. Quo nunc concesso, cum per propositionem 15 ad uerticem anguli sint inter se æquales, ęquali nunc pro ęquali angulo sumpto, uel illa cõmuni noticia, Quæ eidem æqualia, & inter se ęqualia sunt: etiam angulus externus interno opposito, atq; in eadem parte sumpto, ęqualis erit, quod est secundũ. Non aliter per propositionem 13, & hic æquali pro ęquali angulo sumpto, tertię propositionis parti satisfieri poterit. In parallelas igitur rectas recta linea incidens, & quę sequuntur, quod demonstrasse oportuit.

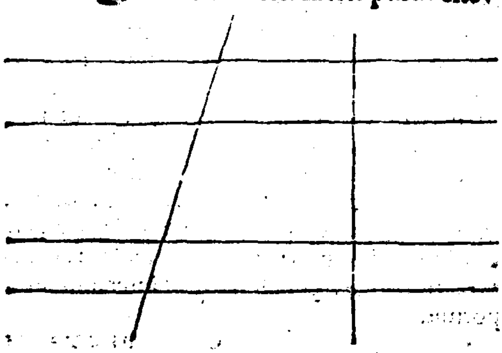


ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι· καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.

PROPOSITIO XXX.

Quæ eidem rectæ lineæ parallelæ: & inter se sunt parallelæ.



Sint, duæ uel plures rectæ uni alicui rectæ lineæ parallelæ: dico, illas & inter se parallelas esse. Quod quidem facile, ex propositionibus 29 & 27, uel 29 & 28, si recta prius alia in propositas rectas lineas utcunq; inciderit, demonstrari potest.

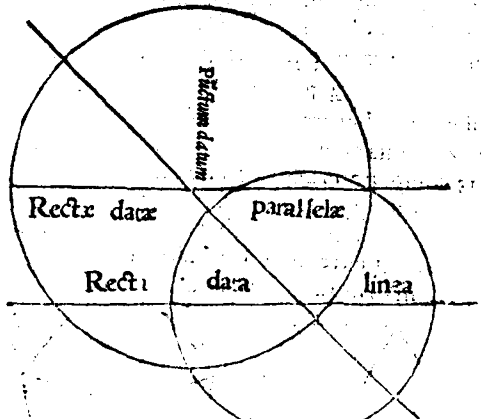
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΑ.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

PROPOSITIO XXXI.

A' dato puncto, datæ rectæ lineæ: parallelam rectam lineam ducere.

Sit punctum datum, recta etiam linea data, atque propositum, à dato puncto educere rectam lineam, datæ rectæ parallelam. Signetur igitur in recta data punctum ubicunque, à quo deinde ad punctum datum, recta quadam linea ducta, ad hanc lineam atque ad punctum datum, angulorum modo descriptorum uni, uter is fuerit & eligatur, per propositionem 23, angulus æqualis constituatur. Quòd si tandem hæc ultimò ducta recta linea, uersus alteram partem in rectum, prout quidem hoc propositio 14 requirit, continuata fuerit: propositioni satisfactũ erit; cùm hæc quæ iam ducta est linea, ipsa sit quæ quærebatur.



Demonstratio sumitur ex ipsa figuræ structura, si anguli, inter se æquales facti, ἐναλλὰξ positi esse considerentur, id quod admonuisse oportuit.

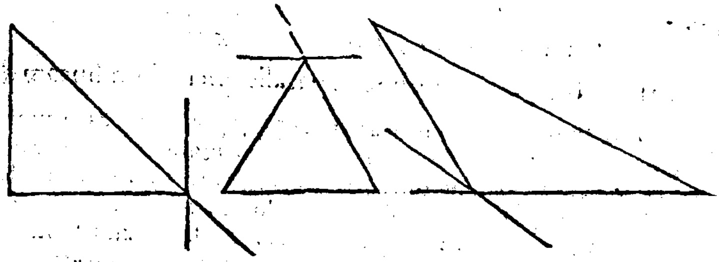
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΒ.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστί. Καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

PROPOSITIO XXXII.

Omnis trianguli uno latere producto: externus angulus duobus internis & oppositis æqualis est. Et trianguli tres interni anguli, duobus sunt rectis æquales.

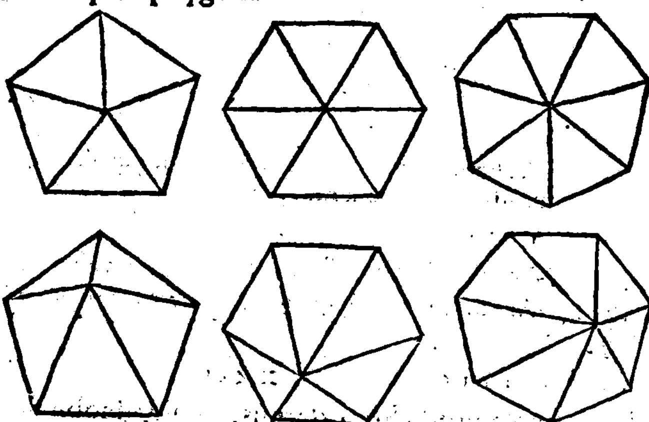
Sit triangulum, productum etiam ulterius unum eius latus: dico, quòd angulus qui sic fit externus, duobus internis & oppositis angulis æqualis sit. Et quod etiam ratione corollarij, ex hac ipsa & tredecima propositione desumpti, Trianguli tres anguli interni, duobus rectis æquales sint. Ducatur per angulum externum linea, trianguli tertio lateri parallela. Et quoniã in parallelas rectas lineas recta incidens, tam alternatim positos angulos, ex prima parte propositionis 29, inter se æquales, quàm etiam externum interno opposito, atque in eadem parte constituto æqualem facit, ex secunda parte propositionis eiusdem, cum æqualia æqualibus additis, tota etiam, ex communi quadam noticia, inter se æqualia sint: ipsi propositio-



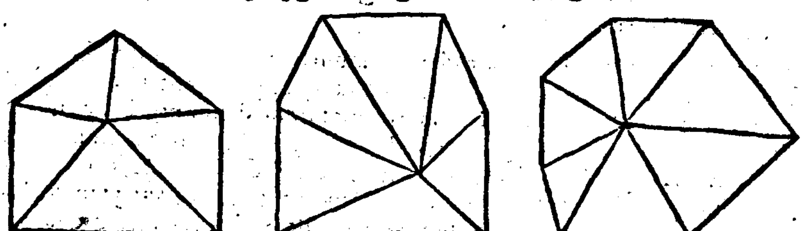
ni iam satisfactum erit. Corollarij uerò demonstratio, ex hac ipsa, & propositione præcedenti 13, unde nimirum illud desumptũ est, intelligi potest, si interim ad horum duorum ęqualium utrunq;, tertium angulum interiorem reliquum, qui nimirum est externo ἐφεξῆς, aliquis assumpserit. Omnis igitur trianguli uno latere producto: externus angulus duobus internis & oppositis ęqualis est. Et trianguli tres interni anguli, duobus sunt rectis ęquales: quod demonstrasse oportuit.

APPENDIX.

Et quia, ut corollarium habet, tres anguli interni omnis trianguli, duobus rectis angulis sunt æquales, & quia etiam, ut quidem ex corollario propositionis 15, uel ipsa propositione 13 colligi potest, circa omne punctum, unde nimirum rectæ aliquot lineę egrediuntur, qui apparent anguli, uniuersi simul, quatuor rectis sunt æquales, cum unumquodq; Polygonum, ubi ad punctũ aliquod, in ea ubiuis sumptum, ab angulis ipsius singulis rectę lineæ ductę fuerint, in tot triangula quot nimirum ipsum polygonum in suo ambitu latera habuerit, subdiuidi posit, sequitur, quòd omnes anguli uniuscuiusq; Polygoni simul, tot rectis angulis sint æquales, quot unitates habuerit numerus, quę quidẽ duplum laterũ eorũ, demptis inde quatuor, indicat. Hoc aũt ex sequentibus figuris et cernere & intelligere licebit.

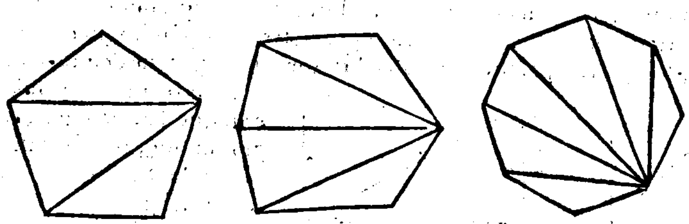


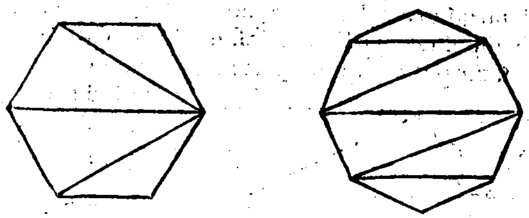
Idem in polygonis irregularibus intelligendum.



Subdiuiduntur

Subdiuiduntur etiam polygona in sua triangula, ubi ab uno propositi polygoni angulo ad omnes reliquos, præter eos quos à latere habet, angulos rectæ lineæ ductæ fuerint. Vel alio quodam modo, pro alicuius industria, in sua triangula subdiuidi polygona possunt. Primus tamen modus, cum ex demonstratione procedat, reliquis preferendus erit.





Atque hæc, de Polygonorum in sua triangula diuisione dicta, sufficiant.

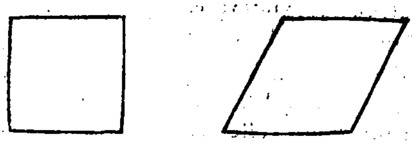
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΓ.

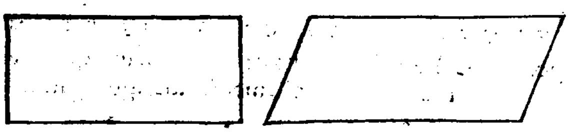
Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι· καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

PROPOSITIO XXXIII.

Aequales & parallelas ad easdem partes rectæ lineæ coniungentes: & ipsæ æquales & parallelæ sunt.

Sint æquales & parallelæ rectę duę lineę, suis etiam extremitatibus utrinque duabus rectis lineis alijs coniunctę: dico, quòd et ipsę rectę lineæ alię, ęquales inter se et parallelę sint. Ducta enim in figura diametro, cum ex prima parte propositionis 29, anguli alternatim positi sint inter se ęquales: quòd & coniungentes rectę inter se ęquales sint, ex propositiõe 4 intelligi poterit. Quòd uerò eędem rectę sint etiã parallelę, cum ex allegata propositione 4, anguli qui alternatim ponuntur, inter se ęquales sint: et id tandẽ, ex propositione 27, manifestabitur. Aequales igitur & parallelas ad easdem partes rectę lineę coniungentes, & ipsę equales & parallelę sunt: quod demonstrari oportuit.





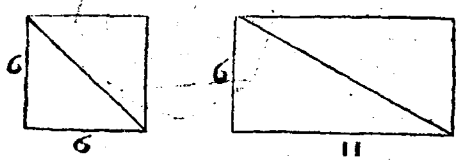
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΔ.

Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων καὶ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.

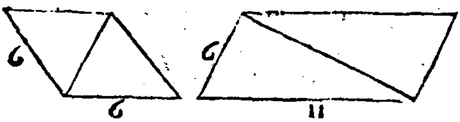
PROPOSITIO XXXIIII.

Parallelogrammorum locorum. & latera & anguli opposita, æqualia inter se sunt. Et diameter ea bifariam secat.

Parallelogrammum, ut uocabuli ἔτυμον indicat, est figura, sub parallelis rectis lineis comprehensa. Fit autem seu describitur parallelogrammum, per ductam rectam lineam, punctumque extra eã sumptum, si ex hoc puncto, per propositionem 31 & 3, rectę ductę parallela æqualis ducatur, utriusque rectæ deinde extremitates, duabus rectis lineis iungantur: & erit, quod sic describitur, parallelogrammum, propterea quòd posteriores ductæ, ęque ut priores duæ rectæ, ex propositione 33 præcedenti, parallelæ & inter se ęquales lineæ sint.



Talium igitur parallelogrammorum locorum, seu talium figurarum, & latera & anguli opposita, æqualia inter se sunt. Ducatur in figura diameter. Et quoniã anguli alternatim positi, ex prima parte propositionis 29, inter se ęquales sunt, unde sic duo triangula, qualia propositio 26 requirit, apparent, quòd latera opposita inter se ęqualia sint, angulus item unus suo opposito ęqualis, per hanc 26 propositionem



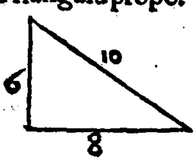
inferri potest. Et rursus quoniam, Si ęqualibus æqualia adijciãtur, ex cõmuni quadam notitia, ipsa tota ęqualia sunt: huius sententiæ memor, alterum etiam suo opposito angulo ęqualem esse, facile concedet. Patet itaque prior propositionis pars. Posterior nunc, quòd scilicet diameter ipsum parallelogrammum bifariam secet, si quis suspicetur id nondum esse demonstratum, per propositionẽ quartam id deprehendet. Parallelogrammorum igitur locorum & latera & anguli opposita, æqualia inter se sunt. Et diameter ea bifariam secat, quod demonstrari oportuit.

APPENDIX.

Quoniam autem hęc propositio 34, & multę etiam sequentes, *in numeris*, quantitate nimirum discreta, non minus atque in quantitate continua, ueræ esse reperiuntur, quo id ostendamus commodius, canonem quendam generalem, per quẽ omnis generis triangulorum (modo latera eorum nota fuerint) areæ inueniri possent, subijcere necesse fuit, his uerbis.

Trianguli, cuius aream propositum est inuenire, latera primò *in unum colligã*tur, à medietate deinde huius *collecti* singula *trianguli* latera subtrahantur. Relinquuntur autem tres numeri, qui unà cum medietate *collecti* ex lateribus, tanquam numero quarto, si *inter se multiplicati fuerint*, primus scilicet cum secundo, productum hoc cum tertio, quodque iam producetur cum numero quarto (nec refert quo ordine numeri sumantur, qui ue pro primo, secundo, tertio uel quarto reputetur) tũ *huius ultimi producti* radice quadrata, quanta propositi trianguli area fuerit, manifestabitur.

SEQVVNTVR HVIVS CANONIS EXEMPLA.

Triangulũ propo.	Latera trianguli		Excessus uniuscuiusque lateris respectu medietatis, aggregati ex lateribus.
	10		2
	8		4
	6		6
	24	laterum summa,	Quatuor numeri
	12	laterum mediet.	2 4 6 12

Instituantur nunc multiplicationes.

prima	secunda	tertia
12	6	24
2	4	24
24 primum	24 secun.	576 ultimũ productũ

Quadra. 576 (Radix 24. Tanta igitur est trianguli, cuius latera sunt 10 8 6, area.

EXEMPLVM IN IRRATIONALIBVS.

Latera	Excessus
$\sqrt{180}$	$9 - \sqrt{45}$
12	$\sqrt{45} - 3$
6	$\sqrt{45} + 3$
Sum. $18 + \sqrt{180}$	Medietas $9 + \sqrt{45}$

Quatuor numeri.

$9 - \sqrt{45}$ $\sqrt{45} - 3$ $\sqrt{45} + 3$ $9 + \sqrt{45}$

36 primum 36 secundum productum

Tertiò multiplicentur 36
cum 36
producuntur 1296, cuius radix
quadrata 36. area est trianguli.

ABBREVIATIO CANONIS PER COMPENDIVM.

Cum tertiæ multiplicationis numeri, qui nimirum ex prima & secunda multiplicatione proueniunt, inter se fuerint æquales, id quod sæpe contingit, in his item duobus exemplis euidens est, eadem tertia multiplicatio negligitur, nec etiã extractione radicis quadratæ tum opus erit. Verùm statim per alterutrum productorum, primum uel secundum, trianguli area indicabitur.

EXEMPLVM CANONIS ALIVD.

Est autem in hac 34 propositione triangulum figuræ primæ.

Latera	Excessus
$\sqrt{72}$	$6 - \sqrt{18}$
6	$\sqrt{18}$
6	$\sqrt{18}$
Sum. $12 + \sqrt{72}$	Meditas $6 + \sqrt{18}$.

Primum productum sunt 18, secundum tantundem, tertium deinde 324. huius postea radix 18, area est trianguli, atq; medietas etiam parallelogrammi uel figuræ primæ, quod hoc canone ostendere oportuit.

Potuisset ex cõpendio iam præscripto, tertia multiplicatio negligi, ac statim per 18 uel 18, primum scilicet uel secundum productum, quæstioni responderi, quod idem fuisset.

SEQVITVR TRIANGVLVM FIGVRAE SECVNDAE.

Latera	Excessus
$\sqrt{157}$	$\frac{17}{2} - \sqrt{\frac{157}{4}}$
11	$\sqrt{\frac{157}{4}} - \frac{5}{2}$
6	$\sqrt{\frac{157}{4}} + \frac{5}{2}$
Sum. $17 + \sqrt{157}$	Meditas $\frac{17}{2} + \sqrt{\frac{157}{4}}$

Quatuor

Quatuor numeri.

33 primum

$\frac{17}{2} - \sqrt{\frac{157}{4}}$, $\sqrt{\frac{157}{4}} - \frac{5}{2}$ $\sqrt{\frac{157}{4}} + \frac{5}{2}$ $\frac{17}{2} + \sqrt{\frac{157}{4}}$

33 ſecundum productum

Et quia tertiæ multiplicationis numeri inter ſe æquales ſunt, ideo ea omittitur, nec etiam, extractione radicis quadratæ, ut ſuperius dictũ eſt, opus erit. Trianguli igiť propoſiti, hoc eſt parallelogrammi medietas, area, ſunt 33, quę erat inueniēda.

SEQVITVR TRIANGVLVM FIGVRAE TERTIAE.

Latera	Exceſſus
6	$\sqrt{15} - \sqrt{3}$
6	$\sqrt{15} - \sqrt{3}$
$\sqrt{60} - \sqrt{12}$	6 minus $\sqrt{15} - \sqrt{3}$
Sum. 12 plus $\sqrt{60} - \sqrt{12}$	Meditas 6 plus $\sqrt{15} - \sqrt{3}$

Quatuor numeri.

$\sqrt{15} - \sqrt{3}$ $\sqrt{15} - \sqrt{3}$ 6 minus $\sqrt{15} - \sqrt{3}$ 6 plus $\sqrt{15} - \sqrt{3}$

Primum 18 — $\sqrt{180}$ ſecundum 36 minus 18 — $\sqrt{180}$

Tertium productum 144. Atq; huius nunc radix quadrata, nimirum 12, area eſt trianguli.

SEQVITVR TRIANGVLVM FIGVRAE QVARTAE.

Latera	Exceſſus
radix qua. reſidui 157 — $\sqrt{9680}$	$8\frac{1}{2}$ minus ra. qua. re. $39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$
11	ra. qua. re. $39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$ minus $2\frac{1}{2}$
6	ra. qua. re. $39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$ plus $2\frac{1}{2}$
17 plus ra. qua. re. 157 — $\sqrt{9680}$	Me. $8\frac{1}{2}$ plus ra. qua. re. $39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$

Inſtituantur nunc multiplicationes.

Prima.

Radix qua. reſidui $39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$ plus $2\frac{1}{2}$

Radix qua. reſidui $39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$ minus $2\frac{1}{2}$

producuntur $39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$ minus $6\frac{1}{4}$.

Secunda.

$8\frac{1}{2}$ plus radix qua. reſidui $39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$

$8\frac{1}{2}$ minus radix qua. reſidui $39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$

producuntur $72\frac{1}{4}$ minus $39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$.

Tertia.

$39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$ minus $6\frac{1}{4}$

$72\frac{1}{4}$ minus $39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$

$2835\frac{13}{16} - \sqrt{\frac{50530205}{16}}$ item $245\frac{5}{16} - \sqrt{\frac{378125}{16}}$

minus $2145\frac{9}{16} - \sqrt{\frac{59650580}{16}}$

minus $451\frac{9}{16}$

Summa productorum.

plus $3081\frac{1}{8} - \sqrt{\frac{59550580}{16}}$

minus $2597\frac{1}{8} - \sqrt{\frac{59650580}{16}}$.

Facta ſubtractione, manent 484, cuius radix, 22, area eſt trianguli.

Vel,

Vel, quæsitis productis, primo scilicet & secundo, calculo exquisitiore, ueniūt

$33 - \sqrt{605}$ primum

$\sqrt{605} - 33$ secundum.

Quibus nunc inter se multiplicatis, producuntur 484, ut prius: cuius etiam radix, ut prius, 22, trianguli aream representabit.

SIMILE EXEMPLVM PER RATIONALES, PERinde ac si irrationales essent numeri, expositum.

Latera.

6

Radix qua. lineæ ex binis nominib. $40 + \sqrt{576}$, hoc est. 8,

10

Excessus.

Radix quadrata binomij $10 + \sqrt{36}$ plus, 2 hoc est 6

8, minus radix, qua. binomij $10 + \sqrt{36}$ hoc est. 4.

Radix quadrata binomij $10 + \sqrt{36}$ minus, 2 hoc est 2.

Med. 8, plus radix qua. binomij $10 + \sqrt{36}$ hoc est, 12.

Instituantur multiplicationes.

Prima.

Radix qua. binomij $10 + \sqrt{36}$, plus 2, hoc est 6

Radix qua. binomij $10 + \sqrt{36}$, minus 2, hoc est 2

producuntur $10 + \sqrt{36}$ minus 4, hoc est 12.

Secunda.

8, minus radix qua. binomij $10 + \sqrt{36}$. hoc est, 4.

8, plus radix qua. binomij $10 + \sqrt{36}$. hoc est, 12.

64 minus $10 + \sqrt{36}$, hoc est 48.

Cruciformes multiplicationes, cum æquales sint numeri, negliguntur. Productorum igitur summa in utraque multiplicatione, ut apparet.

Tertia multiplicatio.

$10 + \sqrt{36}$ minus 4 hoc est, 12.

64 minus $10 + \sqrt{36}$ hoc est, 48.

$640 + \sqrt{147456}$ item $40 + \sqrt{576}$

minus $136 + \sqrt{14400}$

minus 256

pro. $680 + \sqrt{166464}$, minus $392 + \sqrt{14400}$

Hoc est,

$288 + \sqrt{82944}$, uel 576 ultimum productum.

Huius itaq; radix quadrata, nimirū 24, area est trianguli.

EST ET ALIVD TERTIAE FIGVRAE TRIANGVlum, ratione diametri longioris consideratum, atq; huius quidem latera sunt 6, 6, $\sqrt{60} + \sqrt{12}$

P Laterum

Laterum summa 12, plus $\surd 60 - \surd 12$.

Excessus igitur, atque deinceps quatuor numeri,

$\surd 15 + \surd 3$ $\surd 15 + \surd 3$ 6 minus $\surd 15 + \surd 3$ 6 plus $\surd 15 + \surd 3$

Primum secundum productum

$18 + \surd 180$ 36 minus $18 + \surd 180$.

Tertium productum.

$648 + \surd 233280$ minus $504 + \surd 233280$

hoc est, 144. Area igitur trianguli 12, ut prius.

ALIVD ITEM TRIANGVLVM FIGVRAE quartæ, cuius quidem

Latera sunt	Excessus igitur
Ra.qua.bi. $157 + \surd 9680$	$8\frac{1}{2}$ minus ra.qua.bi. $39\frac{1}{4} + \surd 605$
11	ra.qua.bi. $39\frac{1}{4} + \surd 605$ minus $2\frac{1}{2}$
6	ra.qua.bi. $39\frac{1}{4} + \surd 605$ plus $2\frac{1}{2}$
17 plus ra.qua.bi. $157 + \surd 9680$	$8\frac{1}{2}$ plus ra. qua. bi. $39\frac{1}{4} + \surd 605$

Producta,

primum secundum

$72\frac{1}{4}$ minus $39\frac{1}{4} + \surd 605$ $39\frac{1}{4} + \surd 605$ minus $6\frac{1}{4}$

Inuentio producti tertij.

$72\frac{1}{4}$ minus $39\frac{1}{4} + \surd 605$

$39\frac{1}{4} + \surd 605$ minus $6\frac{1}{4}$

$2835\frac{13}{16} + \surd \frac{50530205}{16}$ item $245\frac{5}{16} + \surd \frac{378125}{16}$

minus $451\frac{9}{16}$

minus $2145\frac{9}{16} + \surd \frac{59650580}{16}$

Summa productorum.

plus $3081\frac{1}{8} + \surd \frac{59650580}{16}$

minus $2597\frac{1}{8} + \surd \frac{59650580}{16}$.

Hoc est, facta subtractione, 484.

Huius nunc tertij producti radix quadrata, nimirum 22, area est trianguli. Atque hactenus dicta de triangulorum areis inuestigandis sufficiant. Sequitur

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΕ.

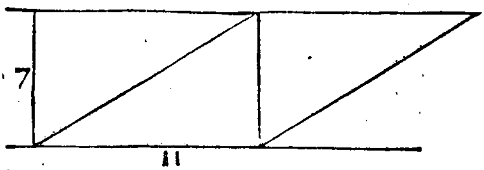
Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

PROPOSITIO XXXV.

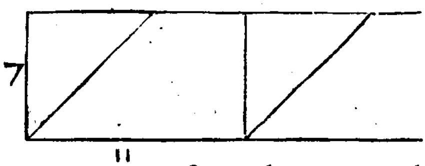
Parallelogramma super eadem basi constituta, atque in eisdem parallelis: æqualia inter se sunt.

Potest huius propositionis figura geometrica tripliciter uariari. Aut enim parallelogrāmis super una, & eadem basi, inter easdem item parallelas positis, alterum unius latus est diameter alterius, aut ea breuius, aut longius. Si primum, cum ex corollario propositionis præcedentis, Omne parallelogrammū à sua ipsius diametro bifariam

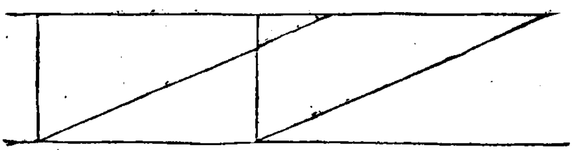
bifariam fecetur, cumq́ etiam ex cõmuni quadam noticia, Eiuſdem duplicia, inter ſe æqualia ſint, hoc quod propoſitio concludit, iam manifeſtum erit. Quòd ſi fuerit



ea breuius, cum parallelogrammorum locorum latera oppoſita inter ſe ęqualia ſint, hoc ipſo uſurpato bis: duo duorũ parallelogrãmorum latera, ex communi quadam noticia, inter ſe æqualia exiſtent: deinde uerò communi portione ab illis æqualibus lateribus ſubtracta, & reſiduæ lineæ inter ſe æquales erũt. Sed quia illæ, ut quidem ſecunda pars propoſitionis 29, & ipſa propoſitio quarta



demonſtrant, ęqualium triangulorum latera ſunt, his ęqualibus triangulis cõmune trapezium ſi addatur: & producta, parallelogramma ſcilicet propoſita, inter parallelas & ſuper una eademq́ baſi conſtituta, per communem quandam noticiam, inter ſe æqualia erunt, quod demonſtraſſe oportuit. Si uerò alterum unius latus fuerit diametro alterius parallelogrammi longius, oportet ut media inter æquales lineas portio, ex ęquo illis æqualibus lineis addatur, quæ productæ, cũ



et ipſę ęqualium triangulorum ſint latera, illis ęqualibus triangulis, primò id quod commune habent, ſubtrahi, reſiduis deinde trapezijs commune quoddam triangulum aliud addi oportet: & tum etiam ſecundum tertiæ figurę deſcriptionem, propoſitioni ſatisfactum erit. Quacunq́ igitur ratione parallelogramma illa, (ſeruatis tamen hypotheſibus) deſcripta fuerint, propoſitio uera eſſe cognoſcetur. quod demonſtrari oportuit.

PER NVMEROS HAEC NVNC, VT PRAECEdens, *tractari poteſt: id quod uno tantum exemplo indicabimus.*

Latera		Exceſſus
$\sqrt{533}$		$5\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{170}{4}} - \sqrt{\frac{533}{4}}$
$\sqrt{170}$		$5\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{170}{4}} + \sqrt{\frac{533}{4}}$
11		$\sqrt{\frac{533}{4}} + \sqrt{\frac{170}{4}} - 5\frac{1}{2}$
$\sqrt{533} + \sqrt{170} + 11$	Me.	$\sqrt{\frac{533}{4}} + \sqrt{\frac{170}{4}} + 5\frac{1}{2}$

Inſtituantur multiplicationes.

prima	ſecunda
$5\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{170}{4}} - \sqrt{\frac{533}{4}}$	$\sqrt{\frac{533}{4}} + \sqrt{\frac{170}{4}} - 5\frac{1}{2}$
$5\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{170}{4}} + \sqrt{\frac{533}{4}}$	$\sqrt{\frac{533}{4}} + \sqrt{\frac{170}{4}} + 5\frac{1}{2}$
$30\frac{1}{4} - 42\frac{1}{2} - 133\frac{1}{4}$	$133\frac{1}{4} + 42\frac{1}{2} - 30\frac{1}{4}$
$+ \sqrt{\frac{90610}{4}}$	$+ \sqrt{\frac{90610}{4}}$
$\sqrt{\frac{90610}{4}} - 145\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{90610}{4}} + 145\frac{1}{2}$

Tertia multiplicatio.

$$\sqrt{\tfrac{90610}{4}} \quad + \quad 145\tfrac{1}{2}.$$

$$\sqrt{\tfrac{90610}{4}} \quad - \quad 145\tfrac{1}{2}$$

producuntur $\frac{5929}{4}$, tertium productum.

Area igitur trianguli, ratione Trapezij in figura prima, eſt $38\frac{1}{2}$. Quare trapezij integrum 77. Et quia tantũ etiam faciunt 11 ſepties, alterum ſcilicet parallelogrãmum: & in numeris iam propoſitioni ſatisfactum erit, quod quidem fieri oportuit.

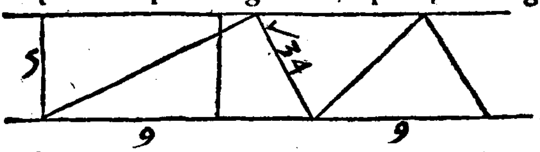
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λς.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις· ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

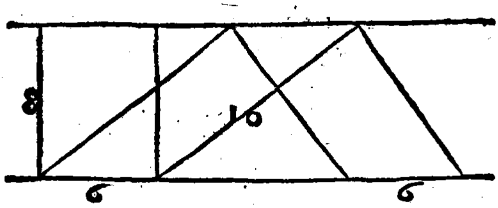
PROPOSITIO XXXVI.

Parallelogramma ſuper æqualibus baſibus conſtituta, atq; in eiſdem parallelis: æqualia inter ſe ſunt.

Hæc propoſitio licet per ſe iam ſatis conſtare deberet, cum idem ſit æqualiũ atq; earundem linearum intellectus, quo tamen dilucidius hęc appareat, poſtquam deſcripta fuerint parallelogramma, ut præcipitur, anguli ſuperiores duo unius, cum



duobus inferioribus alterius parallelogrammi angulis, duabus rectis lineis, ſic ut altera alteram nõ ſecet, copulentur. Deſcribitur aũt ſic, ut ex propoſitione 33 colligitur, parrallelogrammum aliud, quod nunc, quia cum utroque poſito, & inter lineas parallelas, & ſuper una atq; eadem baſi conſtitutum eſt: utrunq; poſitum huic deſcripto parallelogrammo alij, per propoſitionem præmiſſam, atq; illa tandem etiam inter ſe, per hanc communem noticiam, Quæ eidem æqualia, & inter ſe æqualia ſunt, æqualia eſſe oſtendũtur. Parallelogramma igitũ ſuper ęqualibus baſibus & in eiſdem parallelis conſtituta: inter ſe ſunt æqualia, quod demonſtraſſe oportui.



NVNC QVANTVM AD PRAXIM NVMERORVM.

Latera	Exceſſus
13	$\sqrt{\frac{17}{2}} - 2$
9	$\sqrt{\frac{17}{2}} + 2$
$\sqrt{34}$	$11 - \sqrt{\frac{17}{2}}$
$22 + \sqrt{34}$	$11 + \sqrt{\frac{17}{2}}$

primum	ſecun.	ter. pro.	Area trian.
$4\frac{1}{2}$	$112\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{2025}{4}}$	$22\frac{1}{2}$.

ALIVD

ALIVD TRIANGVLVM EX SECVNDA FIGVRA.

Latera	Excessus
$\surd 208$	$8 - \surd 52$
10	$\surd 52 - 2$
6	$\surd 52 + 2$
$16 + \surd 208$	$8 + \surd 52$
Tertium pro. 576	Area trianguli 24.

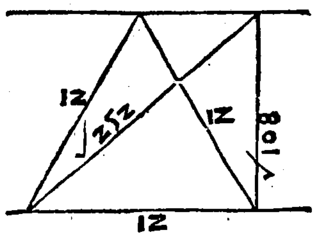
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΖ.

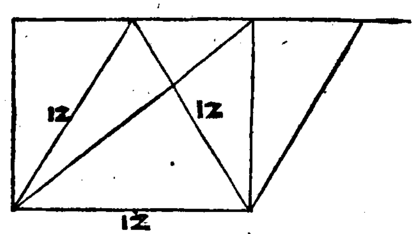
Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις· ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

PROPOSITIO XXXVII.

Triangula super eadem basi cõstituta, atq; in eisdem parallelis: ęqualia inter se sunt.

Sint inter lineas parallelas, super una & eadem basi constituta duo uel plura triangula: dico, illa inter se esse æqualia. Continuetur ea, quæ triangulorum uertices coniungit recta linea in utranq; partem, quantum satis fuerit, fiant etiam ex propositis triangulis parallelogramma, ducendo in unoquoq; triangulo, ab eius uno angulo, eorum qui ad basim sunt, lineam, lateri quod hunc eundem angulum sub-





tendit, per propositionem 31, parallelam. Et quoniam descripta parallelogramma, cum super eadem basi, atq; in eisdem parallelis constituta sint, inter se æqualia esse, ex propositione 35 notum est. Et rursus quoniam, quæ eiusdem dimidia, ex communi quadam noticia æqualia inter se sunt: descriptorum parallelogrammorum medietates, triangula scilicet posita, inter se ęqualia erunt. Triangula igitur super eadem basi constituta, atq; in eisdem parallelis: æqualia inter se sunt; quod demonstrari oportuit.

NVNC QVANTVM AD NVMERORVM PRAXIM.

Latera	Excessus
12, 12, 12	6
Summa 36	Medietas 18
Tertium productum 3888.	Area $\surd 3888$ uel $62\frac{44}{125}$ fere.

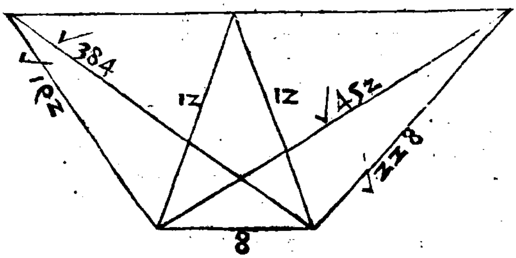
ALTERVM TRIANGVLVM HABET

Latera	$\surd 252$	12	$\surd 108$
Excess.	$\surd 27 + 6 - \surd 63$	$\surd 27 - 6 + \surd 63$	$\surd 63 + 6 - \surd 27$

Summa lat. $\sqrt{252} + 12 + \sqrt{108}$ Med. $\sqrt{63} + 6 + \sqrt{27}$

Primum	secundum	ter. productum
$\sqrt{9072} - 72$	$\sqrt{9072} + 72$	3888 &cæ.

ALIA FIGVRA.



Habet hæc figura tria triangula, quę, ut geometricè, ita et per numeros sequēti calculo inter se ęqualia esse ostenduntur.

Communis basis.

Quantum igitur ad triangulum primum, cuius quidem

Latera sunt	Excessus igitur
$\sqrt{384}$	$4 + \sqrt{48} - \sqrt{96}$
$\sqrt{192}$	$4 - \sqrt{48} + \sqrt{96}$
8	$\sqrt{96} + \sqrt{48} - 4$
$\sqrt{384} + \sqrt{192} + 8$	$\sqrt{96} + \sqrt{48} + 4$
Vltimum pro.	Area trianguli
2048	$\sqrt{2048}$. uel $45\frac{23}{91}$ ferè.

Porrò triangulum secundum habet

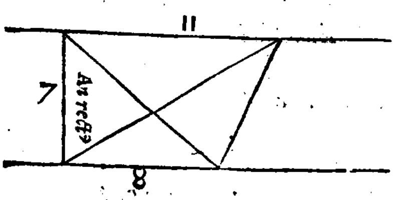
Latera 12 12 8. Excessus 4 4 8.

Summa lat. 32. Medietas 16. Primum productū 16.

secun. 128, tertium pro. 2048. Area trian. $\sqrt{2048}$.

Sequitur triangulum tertium, cuius quidem

Latera sunt	Excessus igitur
$\sqrt{452}$	$4 + \sqrt{57} - \sqrt{113}$
$\sqrt{228}$	$4 - \sqrt{57} + \sqrt{113}$
8	$\sqrt{113} + \sqrt{57} - 4$
$\sqrt{452}$ $\sqrt{228} + 8$	$\sqrt{113} + \sqrt{57} + 4$
Vltimū pro. 2048.	Area trianguli ut suprà.



Area utriusq; trianguli, sunt 28. ęquales igitur inter se.

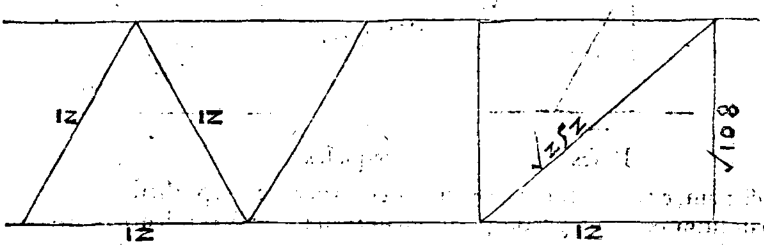
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΗ.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.

PROPOSITIO XXXVIII.

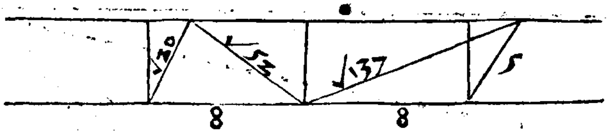
Triangula ſuper æqualibus baſibus conſtituta, atq; in eiſdem paralle- lis: æqualia inter ſe ſunt.

Propoſitis triangulis, ut præcipitur, eadem huius quæ præcedentis κατασκευὴ



atq; demonſtratio erit, ſi loco propoſitionis triceſimæ quintæ illic ſumptæ, hîc triceſima ſexta ſumatur.

ALIVD HVIVS PROPOSITIONIS EXEMPLVM.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΘ.

Τὰ ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

PROPOSITIO XXXIX.

Aequalia triangula, ſuper eadem baſi, atque ad eaſdem partes conſtituta: & in eiſdem ſunt parallelis.

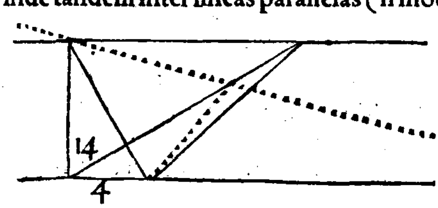
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Μ.

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

PROPOSITIO XL.

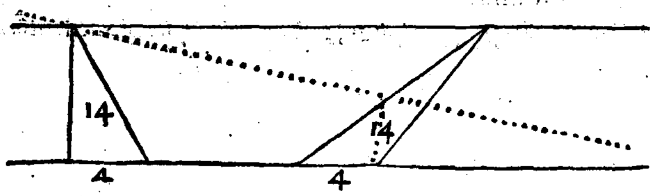
Aequalia triangula, ſuper æqualibus baſibus, atq; ad eaſdem partes conſtituta: & in eiſdem ſunt parallelis.

Requirunt hæ duæ propoſitiones æqualia, eiuſdem uel æqualium baſium triangula, & inde tandem inter lineas parallelas (ſi modo ad eaſdem partes fuerint cõſtituta) ea poſita eſſe inferunt. Triangulis itaq; huiuſmodi deſcriptis, propoſitionum demõſtrationes ab impoſsibili illo, Partem ſuo toti æqualem eſſe, colligentur. Nam recta quadã linea triangulorum uerticibus copulatis, ſi quis præter hanc aliam ab unius trianguli uertice, tanquam à puncto ſignato, baſi parallelam ſtatuere uelit, faciat ſanè hoc, ſi poterit. Et quoniam fit, quod hæc ducta parallela alterutrius



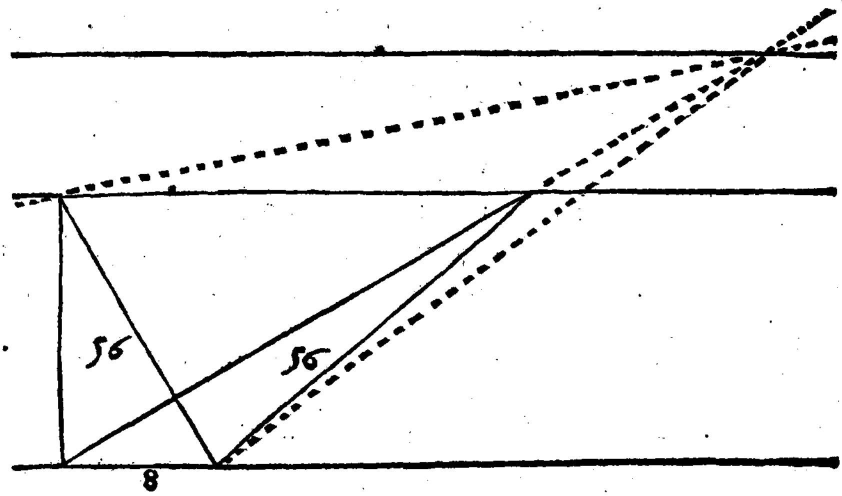
Baſis eadem

utrius trianguli, latera secet, aut non secet. Si primum, coniungatur punctum sectionis in uno latere, recta quadam linea, cum sibi opposita basis extremitate. Et quoniam duo triangula apparent, quorum unum quidem cum secundum aduersarij



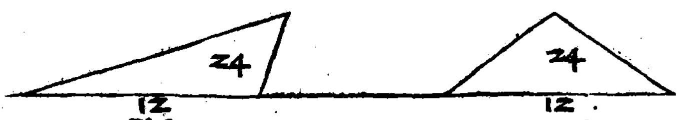
Bases aequales

structuram, ex propositione 35, uni: alterum uero, ex hypothesi, eidem triangulo equale sit: mox illi, aut per propositionem 37, si unam & eandem basim habuerint: aut uerò per propositionem 38, si separatæ, æquales tamen inter se, bases illorum fuerint, inter se æqualia erunt, partiale totali, quod est impossibile. Esto igitur iam



Basis eadem

quòd non secet parallela hæc alterius trianguli latera, tum huius trianguli unum latus ultra uerticem usque ad parallelam continuari, punctum deinde contactus cum opposita basis extremitate, ut modò, coniungi debet: & idẽ quod prius, partiale scilicet triangulum suo totali æquale esse, per allegatas propositiones inferetur. Hoc



Bases aequales

autem, quia ex communi illa noticia, Totum parte sua maius est, impossibile existit, propositionibus consentiendum erit. Aequalia igitur triangula, siue super eadẽ seu æqualibus basibus, atque ad easdem partes constituta: & in eisdem parallelis erunt, quod demonstrasse oportuit.

SEQVITVR NVMERORVM PRAXIS.

Prioris trianguli figuræ ultimæ

Latera sunt $\sqrt{212}$, 12, $\sqrt{20}$

Laterum

Laterum summa $\sqrt{212} + 12 + \sqrt{20}$ Medietas $\sqrt{53} + 6 + \sqrt{5}$

Excessus igitur, ac per consequens quatuor numeri.

$\sqrt{5} + 6 + \sqrt{53}$ $\quad 5 - 6 + \sqrt{53}$ $\quad \sqrt{53} + 6 - \sqrt{5}$ $\quad \sqrt{53} + 6 + \sqrt{5}$

Instituantur multiplicationes.

Prima	Secunda
$\sqrt{5} + 6 - \sqrt{53}$	$\sqrt{53} + 6 + \sqrt{5}$
$\sqrt{5} - 6 + \sqrt{53}$	$\sqrt{53} + 6 - \sqrt{5}$
pro. $\sqrt{7632} - 84$	pro. $\sqrt{7632} + 84$

Tertia multiplicatio.

$\sqrt{7632} + 84$

$\sqrt{7632} - 84$

producuntur $7632 - 7056$, hoc est 576 tertium productum. Area igitur trianguli 24.

Triangulum posterius habet

Latera	Excessus igitur
12	$\sqrt{52} - 6$
$\sqrt{52}$, $\sqrt{52}$ }	6
$\sqrt{208} + 12$	$\sqrt{52} + 6$. Area 24.

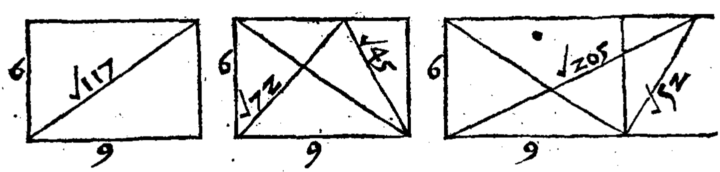
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΑ.

Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ· διπλάσιον ἔσται τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου.

PROPOSITIO XLI.

Si parallelogrammum cum triangulo basim habuerit eandem, atque in eisdem parallelis fuerit: duplum erit parallelogrammum ipsius trianguli.

Statuantur parallelogrammum & triangulum super eadem basi, esto etiã quòd sint inter lineas parallelas: dico quòd parallelogrammum ad triangulum, duplũ sit. Hoc quòd ducta in parallelogrammo diametro, ex 37 & secunda parte proposi-



tionis 34, cum per hanc quidem triangulorum unumquodque sui parallelogrammi dimidium esse, per illam uerò, triangula quorũ eadem est basis et eadem altitudo, æqualia esse demonstratum sit, facile colligetur.

NVMERORVM PRAXIS.

Et primo quidem trianguli, cuius latera sunt 9 $\quad \sqrt{72}$ $\quad \sqrt{45}$

Laterum summa $9 + \sqrt{72} + \sqrt{45}$ Medietas $4\frac{1}{2} + \sqrt{18} + \sqrt{11\frac{1}{4}}$

Excessus, ac per consequens quatuor numeri.

Primus $\sqrt{11\frac{1}{4}} + \sqrt{18} - 4\frac{1}{2}$ secundus $\sqrt{11\frac{1}{4}} - \sqrt{18} + 4\frac{1}{2}$

Q tertius

tertius $4\frac{1}{2}$ $\sqrt{18}$ $\sqrt{11\frac{1}{4}}$ quartus $4\frac{1}{2} + \sqrt{18} + \sqrt{11\frac{1}{4}}$

Primum	secundum	tertium pro.
$\sqrt{1458} - 27$	$\sqrt{1458} + 27$	$729.$

Area trianguli 27. Et tanta etiã est medietas parallelogrammi, cum 6 nouies, uel contrà 9 sexies, 54 constituant.

Aliud triangulum.

Latera	Excessus
$\sqrt{117}$	$7\frac{1}{2} - \sqrt{29\frac{1}{4}}$
9	$\sqrt{29\frac{1}{4}} - 1\frac{1}{2}$
6	$\sqrt{29\frac{1}{4}} + 1\frac{1}{2}$
$15 + \sqrt{117}$	$7\frac{1}{2} + \sqrt{29\frac{1}{4}}$

Productum primum 27, secundum 27, Area trianguli 27.

Tertium triangulum.

Latera	Excessus
$\sqrt{205}$	$\sqrt{13} + 4\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{205}{4}}$
9	$\sqrt{13} - 4\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{205}{4}}$
$\sqrt{52}$	$\sqrt{\frac{205}{4}} + 4\frac{1}{2} - \sqrt{13}$
$\sqrt{205} + 9 + \sqrt{52}$	$\sqrt{\frac{205}{4}} + 4\frac{1}{2} + \sqrt{13}.$

Instituantur multiplicationes.

Prima	secunda
$\sqrt{13} + 4\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{205}{4}}$	$\sqrt{\frac{205}{4}} + 4\frac{1}{2} - \sqrt{13}$
$\sqrt{13} - 4\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{205}{4}}$	$\sqrt{\frac{205}{4}} + 4\frac{1}{2} + \sqrt{13}$
$13 - 20\frac{1}{4} - 51\frac{1}{4}$	$51 + 20\frac{1}{4} - 13$
$+ \sqrt{4151\frac{1}{4}}$	$+ \sqrt{4151\frac{1}{4}}$
producuntur $\sqrt{4151\frac{1}{4}} - 58\frac{1}{2}$	prod. $\sqrt{4151\frac{1}{4}} + 58\frac{1}{2}$

Tertia multiplicatio.

$$\sqrt{4151\frac{1}{4}} + 58\frac{1}{2}$$

$$\sqrt{4151\frac{1}{4}} - 58\frac{1}{2}$$

producuntur 729. Quare Area trianguli 27

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΒ.

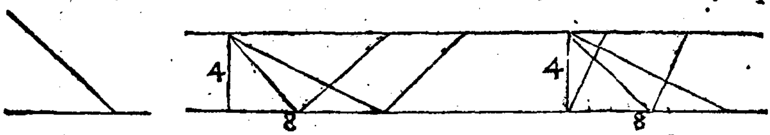
Τῷ δοθέντι τριγώνῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.

PROPOSITIO XLII.

Dato triangulo: æquale parallelogrammum constituere, in dato angulo rectilineo.

Petit hæc propositio triangulũ, atq; huic deinde æquale iubet formari seu descri bi parallelogrammum, cuius quidem unus angulus, alij cuidam rectilineo angulo dato, æqualis sit, quod sic fiet. Continuetur trianguli basis in utramlibet partem. huic deinde basi per trianguli uerticem, prout habet propositio 31, recta parallela ducatur. Hoc facto, diuidatur basis, per 10 propositionem, bifariam, & ad punctũ illud

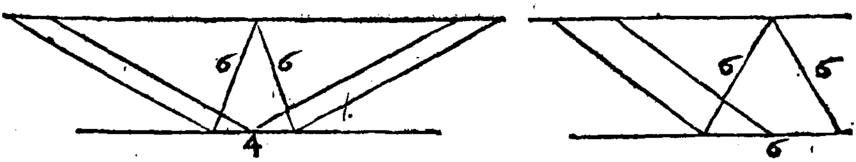
illud diuisionis, atque ipsam basim, angulus dato æqualis, ex propositione 23 constituatur, cuius deinde latus alterum, si usque ad lineam, quæ per uerticem trianguli ducta est, continuatum, ei etiam ab alterutra basis extremitate, tanquam à puncto aliquo dato, per propositionem 31, recta parallela ducta fuerit, ubi tandem hæc usque ad lineam, per uerticem transeuntem continuabitur, res confecta erit, id quod



sic demonstrabitur. De parallelogrammo, quin dato unũ angulum æqualem habeat, nullum est dubium, cum id in structura ex propositione 23 præuisum sit. Quòd uerò idem parallelogrammum dato triangulo æquale sit, postquam à trianguli uertice ad punctum basis medium linea recta ducta fuerit: & id ex propositionibus 38 & 41, atque communi tandem illa noticia, Quæ eiusdem duplicia, &cæ. facile perspicietur. Dato igitur triangulo, æquale parallelogrammum, in dato rectilineo angulo constitutum est, quod fecisse oportuit.

ADMONITIO.

Quòd si angulus datus fuisset acutior, obtusior, uel omnino rectus, tũc linea hęc, ut latus futuri parallelogrammi, à puncto diuisionis in basi, secũdum huius anguli quantitatem ducenda fuisset. Hæc enim 23, de angulo formando, propositio, in genere proposita est, sic ut nihil referat, quocunque modo rectilineus angulus fuerit propositus.



Area trianguli figuræ ultimæ, ut sequens calculus indicat, est √ 243. Atque tanta est etiam parallelogrammi constituti area. Bene igitur,

Latera	Excessus	
6	3	
6	3	Vltimum productum 243
6	3	Area igitur trianguli √ 243.
Sum. 18	Med. 9	

ALIVD AEQVILATERVM TRIANGVLVM, laterum irrationalium.

Latera	Excessus			
√ 48			primum	12
√ 48	√ 12	pro.	secundũ	36
√ 48			tertium	432
√ 432	√ 108		Area trianguli	√ 432.

ALIVD EXEMPLVM.

Latera trianguli sunt

	6		6
8	√ 4,	hoc est	6
Rádix binomii 20 + √ 256			6
			Q 2 Summa

Summa laterum 14 — $\surd$ 4, plus radix binomij 20 + $\surd$ 256 hoc est 18

Huius medietas 7 — $\surd$ 1, plus radix binomij 5 + $\surd$ 16 9

Excessus, ac per consequens quatuor numeri

Radix binomij 5 + $\surd$ 16 plus 2 — $\surd$ 1 3
Radix binomij 5 + $\surd$ 16 minus $\surd$ 1 — 2 hoc est 3
7 — $\surd$ 1 minus radix binomij 5 + $\surd$ 16 3
7 — $\surd$ 1 plus radix binomij 5 + $\surd$ 16 9

Instituantur multiplicationes.

Prima.

Radix binomij 5 + $\surd$ 16 plus 2 — $\surd$ 1
Radix binomij 5 + $\surd$ 16 minus $\surd$ 1 — 1
producuntur 5 + $\surd$ 16 minus $\surd$ 4 — 2
hoc est 9

Secunda.

7 — $\surd$ 1 minus radix binomij 5 + $\surd$ 16
7 — $\surd$ 1 plus radix binomij 5 + $\surd$ 16
pro. 50 — $\surd$ 196 minus 5 + $\surd$ 16
hoc est 27

Tertia multiplicatio est 27 secundi
cum numero 9 producto primo.
& producuntur 243, ultimo.
Area igitur trianguli $\surd$ 243.

VEL ALITER.

Summa laterum 6 plus 8 — $\surd$ 4, plus radix bin. 20 + $\surd$ 256. hoc est 18

Huius medietas 3 plus 4 — $\surd$ 1 plus radix bin. 5 + $\surd$ 16 9

Excessus, & per consequens quatuor numeri.

Radix binomij 5 + $\surd$ 16 minus 3 plus 4 — $\surd$ 1
Radix binomij 5 + $\surd$ 16 plus 3 minus 4 — $\surd$ 1
3 plus 4 — $\surd$ 1 minus radix binomij 5 + $\surd$ 16
3 plus 4 — $\surd$ 1 plus radix binomij 5 + $\surd$ 16

Instituantur multiplicationes.

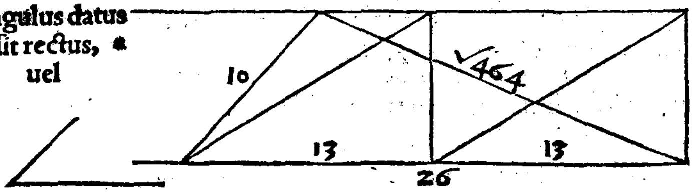
Prima. Radix binomij 5 + $\surd$ 16 minus 3 plus 4 — $\surd$ 1
Radix binomij 5 + $\surd$ 16. plus $\surd$ 3 minus 4 — $\surd$ 1
producuntur 5 + $\surd$ 16 minus 9 minus 17 — $\surd$ 64
hoc est 9.

Secunda. 3 plus 4 — $\surd$ 1 minus radix binomij 5 + $\surd$ 16
3 plus 4 — $\surd$ 1 plus radix binomij 5 + $\surd$ 16
9 plus 17 — $\surd$ 64 minus 5 + $\surd$ 16
plus 12 — $\surd$ 9, bis
Summa productorum, sunt 27. &c.

ALIA

ALIA FIGVRA GEOMETRICA.

Angulus datus sit rectus, uel



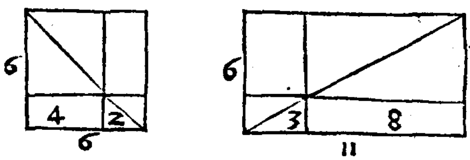
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΓ.

Παντὸς παραλληλογράμμου, τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

PROPOSITIO. XLIII.

Omnis parallelogrammi, eorum quæ circa diametrum ſunt parallelogrammorum ſupplementa, inter ſe ſunt æqualia.

Sit parallelogrammum, ducta etiam in eo diameter, puncto deinde in uno aliquo parallelogrammi latere ubiuis ſumpto, ex hoc ad oppoſitũ uſq; latus reliquis



duobus parallela ducta, ubi hæc diametrum ſecuerit, per hoc ſectionis punctum prioribus lateribus ſimiliter parallela ducenda eſt, & figura parata erit: dico igitur nunc, quòd ipſius parallelogrammi ſupplementa, hoc eſt, ea per quæ diameter non tranſit, parallelogramma, inter ſe æqualia ſint. Nam cum diameter parallelogrammum, ut auditum eſt, bifariam ſecet, ſubtractis ab æqualibus triangulis, medietatibus ſcilicet parallelogrammi, æqualibus triangulis bis, quæ tandem relinquuntur, ex communi quadam notitia, æqualia erunt. Quia autem reliqua hæc ea ſunt, quæ circa diametrum conſiſtunt parallelogrammorum ſupplementa: ergo. Omnis igitur parallelogrammi, eorum quæ circa diametrum ſunt parallelogrammorum ſupplementa, inter ſe ſunt æqualia. quod demonſtraſſe oportuit.

Diameter $\sqrt{108}$. Diameter $\sqrt{223}$.

SEQVITVR TRIANGVLORVM CALCVLVS.

primi		secundi	
Latera	exceſſus	Latera	exceſſus
$\sqrt{108}$	$6 - \sqrt{27}$	$\sqrt{223}$	$8\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{223}{4}}$
6	$\sqrt{27}$	11	$\sqrt{\frac{223}{4}} - 2\frac{1}{2}$
6	$\sqrt{27}$	6	$\sqrt{\frac{223}{4}} + 2\frac{1}{2}$
$12 + \sqrt{108}$	$6 + \sqrt{27}$	$17 + \sqrt{223}$	$8\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{223}{4}}$

Primum productum 9. ſecun. 27 tertium 243. Area $\sqrt{243}$

Pri. pro. $16\frac{1}{2}$ ſecun. $49\frac{1}{2}$ ter. $\frac{3267}{4}$. Area $\sqrt{816\frac{3}{4}}$

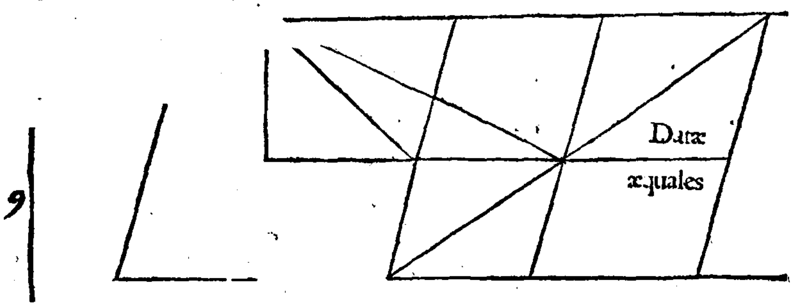
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΔ.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

PROPOSITIO XLIIII.

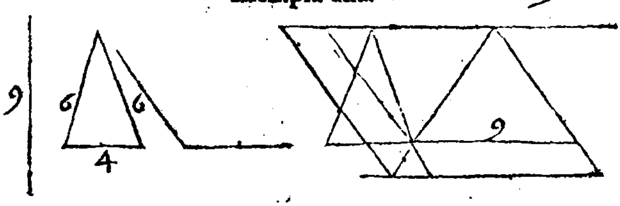
Ad datam rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum ponere, in dato angulo rectilineo.

Requirit hæc propositio rectam lineam datam, triangulum datum, atque etiam angulum rectilineum datũ. Proponit autem, quomodo ad datam rectam lineam, parallelogrammum, quod & triangulo dato æquale sit, angulum etiam dato angulo æqualem habeat, constituendum sit. Est huius propositionis structura facilis, propter hypotheses, quas cum propositione præcedente 42. communes habet. Primo enim parallelogrammum, quod dato triangulo æquale sit, angulum insuper angulo æqualem habeat, per eandem 42. constituendum est. Et quoniam dicit propositio, ad datam rectam lineam, altero igitur iam descripti parallelogrammi latere, eorum quæ angulum, dato æqualem compræhendũt, ultra parallelogrammum ad longitudinem rectæ datæ, per secundũ postulatum, prolongato, secundũ pro-



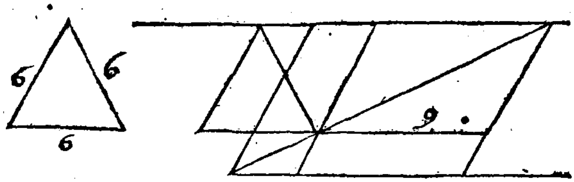
longatam illam portionem & parallelogrãmi latus, quod cũ portione prolongata angulum facit, aliud cum sua diametro parallelogrammũ describatur. Et quoniam hæc diameter, ex una eius parte continuata, & latus parallelogrammi alterum, similiter continuatum, propter incidentem lineam, quæ (ut facile ex tertia parte propositionis 29 colligitur) in una & eadem parte, duos interiores angulos duobus rectis minores facit, ex communi quadam notitia concurrunt, continuetur utrunque horum, diameter scilicet & latus illud alterum, donec concurrant, atque ex triangulo formato, cuius quidem latus unum est hæc tota diameter, compleatur parallelogrammum. Quòd si tandem partialis iuxta diametrum, linea, usque ad oppositum in parallelogrammo latus continuatũ fuerit, cum supplementorum utrunque dato triangulo æquale sit, ex his uerò alterum super datam rectam constitutum: propositioni satisfactum erit, id quod ex structura facile demonstrari potest. Ad datam igitur rectam lineam, in dato angulo rectilineo parallelogrammum dato triangulo æquale positum est, quod fieri oportuit.

SEQVVNTVR NVNC HVIVS PROPOSITIONIS exempla alia.

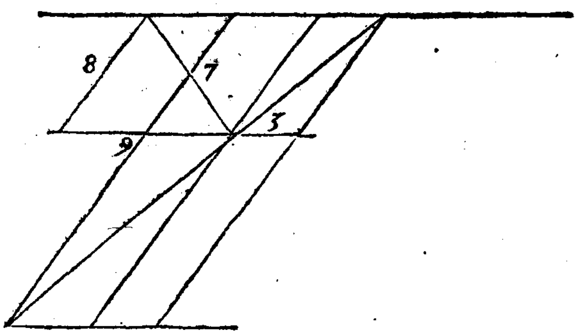


Idem

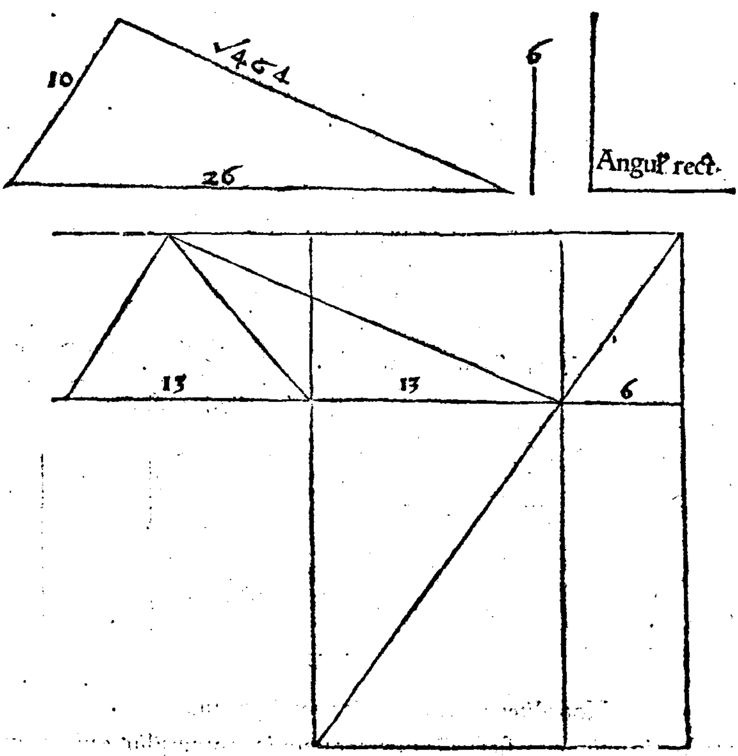
Idem exemplum, mutato tamen Isosceli in triangulum æquilaterum.



Adhuc aliter, triangulum autem esto Scalenum, linea uerò data 3 punctorum.



ALIVD EXEMPLVM.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ

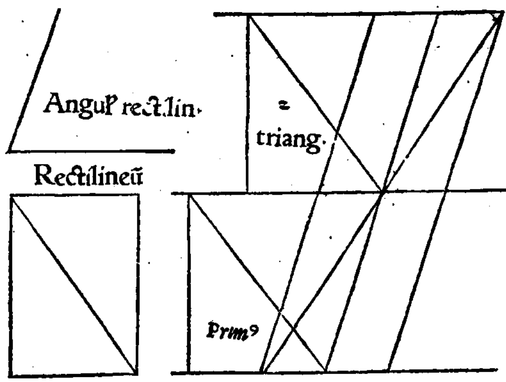
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΕ.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.

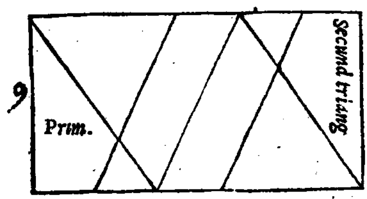
PROPOSITIO XLV.

Dato rectilineo, æquale parallelogrammum constituere, in dato angulo rectilineo.

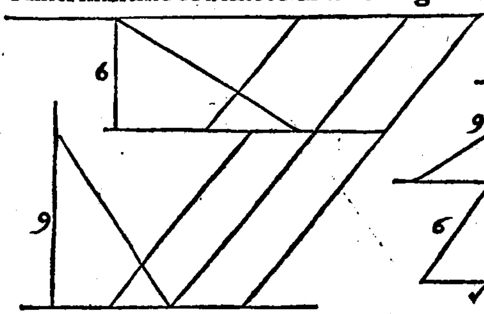
Quod præcedens 42 de triangulo tantū proposuit, petit uel iubet hæc fieri cum omni rectilineo. Estq; hæc præsens quàm superior magis generalis, & latius patet. Sit itaq; datum rectilineum qualecumque, gratia tamen exempli, & propter faciliorem operationem, Quadrilaterum altera parte longius. Illud primò in duo triangula, per diametrum ductam, soluendum: parallelogrammum deinde, quod angulum dato æqualem habeat, triangulo uni æquale, per propositionem 42, cōstituendum est. Quòd si iam ad unum huius parallelogrāmi latus, tanquam ad rectam lineam datā, per propositionem 44 præcedentem, alteri triangulo æquale parallelogrammum, quod & ipsum angulum dato æqualem habuerit, cōstituatur, satisfactum propositioni erit.



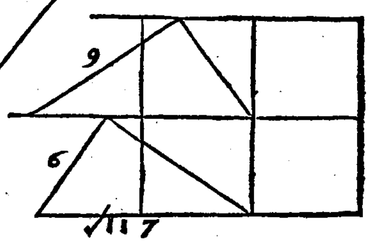
ALIA FIGVRAE DISPOSITIO.



Aliter manente eodem rectilineo & angulo.



Præterea aliter, manente rectilineo, sed mutato angulo in rectum.

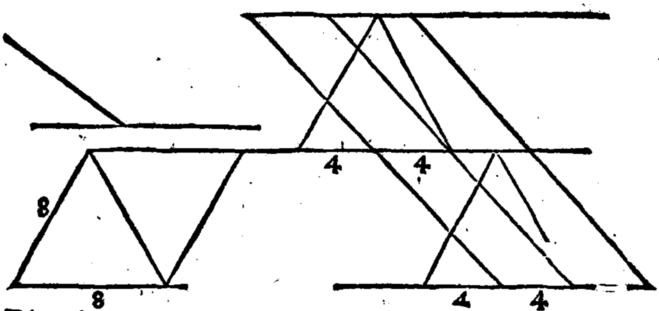


Non aliter cum quadratis agendum erit.

Demonstratio huius cum sit facilis, præter operationem amplius quicquam addere

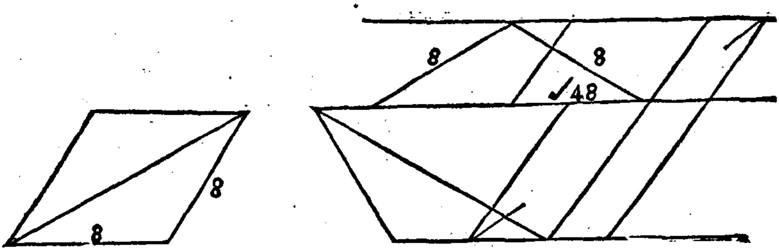
dere nolui, copiosum tantum, propter difficilem huius praxim, in exemplis me uarijs ostendens.

DE RHOMBO.

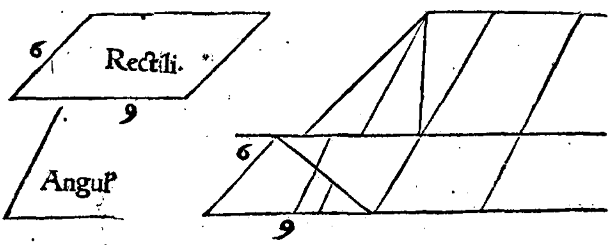


Rhombus datus.

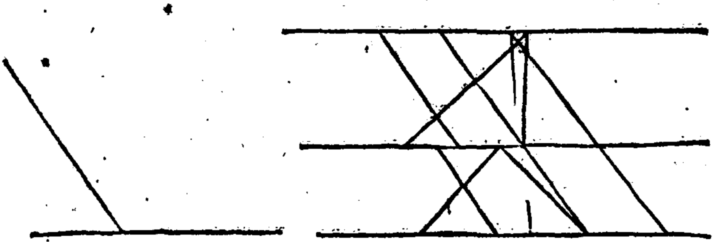
De eodem Rhombo, aliter tamen in triangula soluto.



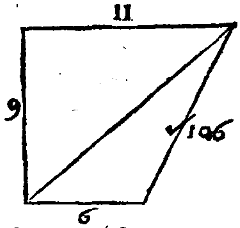
SIC ETIAM QVADRILATERVM, QVOD RHOMBoides appellatur, uariari poterit, ut sequitur.



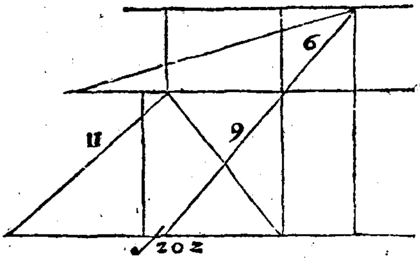
Idem aliter, mutato acuto in angulum obtusum.



EXEMPLVM DE QVADRILATERO IRREGVLARI.

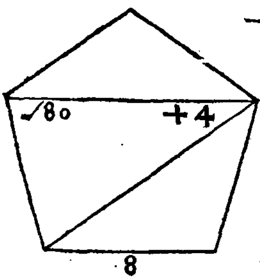


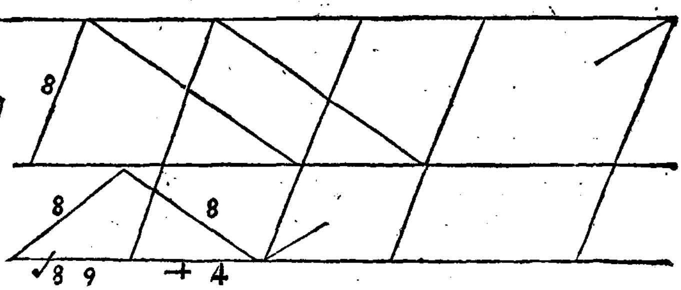
Angulus autem sit rectus



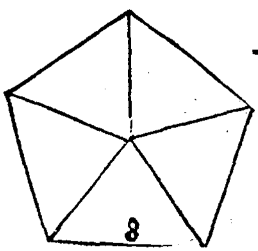
Proinde quemadmodum hactenus in quadrilateris, secundo triangulo æquale parallelogrammum, per propositionem 44. ad rectam datam constitutum est, ita eodem modo nunc, ubi quidem rectilineũ propositum pentagonũ fuerit, eo in sua triangula soluto: & triangulo tertio per eandem propositionem æquale parallelogrammũ addi poterit, atq; sic deinde etiam absolui triangulũ quartum in Hexagonis, & quintũ in Heptagonis, ac ordine deinceps. Quomodo autem unumquodq; propositum polygonum, uel rectilineum in sua triangula solui debeat, id per appendicem quandam propositionis 32, iam traditum atq; ostensum est.

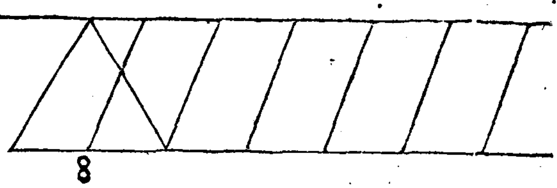
SEQVITVR EXEMPLVM DE PENTAGONO REGVLARI.



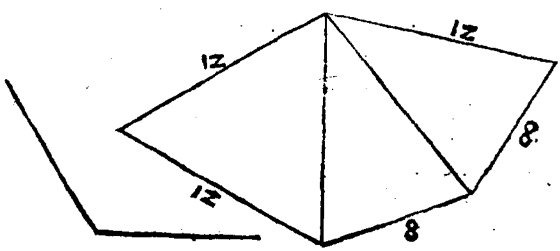


Aliud de Pentagono exemplum.



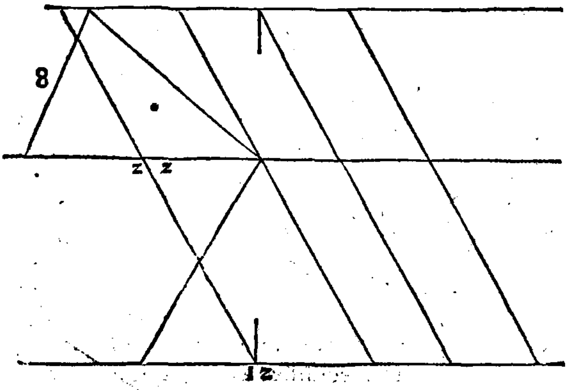


Exemplum, de Pentagono irregulari.

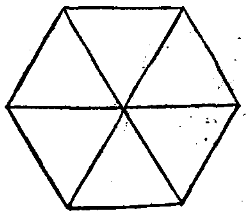


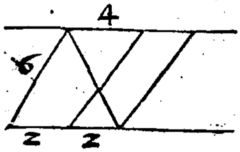
Constitutio

Constitutio huius pentagoni irregularis.



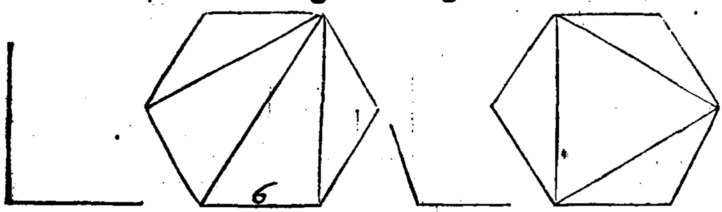
EXEMPLVM HEXAGONI REGVLARIS.

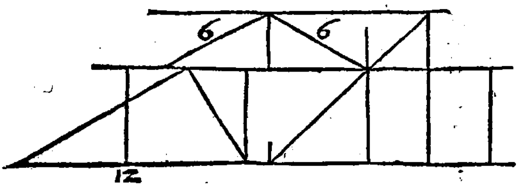




Hoc nũc sexies (cum sex sint triangula inter se æqualia) hexagono parallelogrãmũ æquale, in dato angulo rectilineo cõstitutum erit.

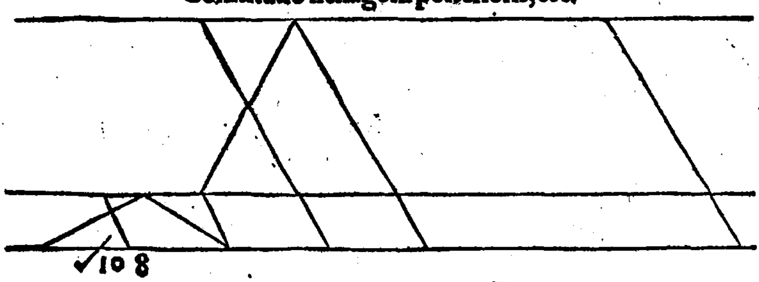
Vel sit illa hexagoni in triangula diuisio.



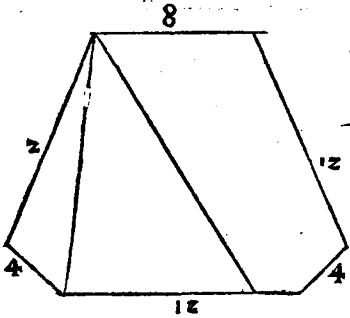


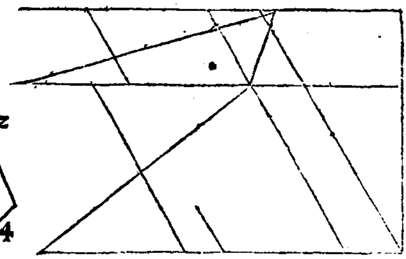
Constitutio hexagoni prioris in paralellogrãmũ, quod dato rectilineo angulo æqualem angulum habeat.

Constitutio hexagoni posterioris, &c.



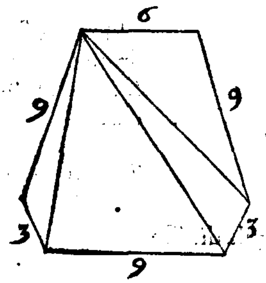
EXEMPLVM HEXAGONI IRREGVLARIS.



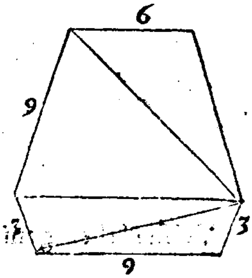


Hoc nunc totum bis, ratione alterius parallelogrammi: exoritur totũ parallelogrammum, toti rectilineo æquale. quod erat faciendum.

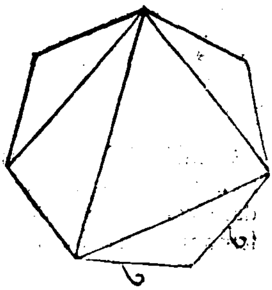
Aliter, similis formæ hexagonum irregulare, in sua triangula solutum.

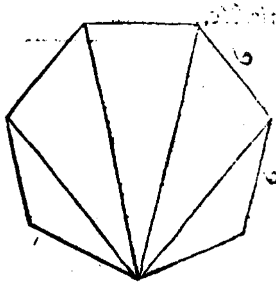


vt sic

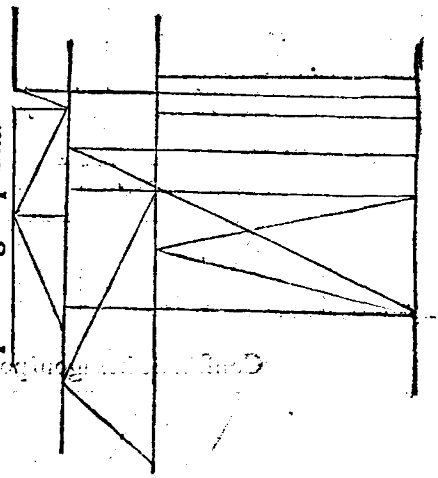


EXEMPLVM DE HEPTAGONO REGVLARI.





Operatio figuræ primæ.



Secundæ figuræ eadem erit operatio.

Quod

Quòd si à puncto heptagoni medio, hoc est à centro, septem ad ipsius angulos rectæ ductæ fuissent lineæ, cum sic heptagonum in septem inter se æqualia triangula resolutum sit, uni eorum æquali parallelogrammo constituto, eo deinde septies sumpto, res confecta erit. Sic cum irregulari heptagono & reliquis multorum laterum figuris omnibus, postquam hæ in triangula resolutæ fuerint, agendum erit.

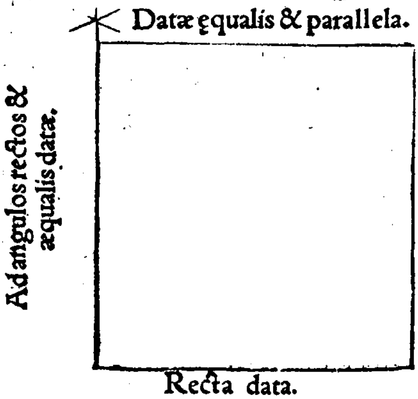
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Μϛ.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας, τετράγωνον ἀναγράψαι.

PROPOSITIO. XLVI.

A' data recta linea, quadratum describere.

Sit data recta linea, atque propositum, ab ea, hoc est secundum eius quantitatem, quadratum describere. Ab una igitur rectę extremitate, tanquam à puncto in linea



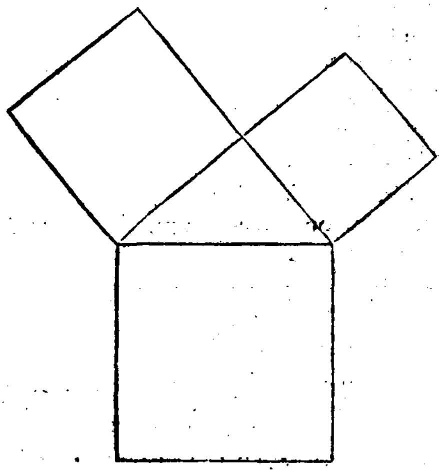
sumpto, per propositionem 11. ad angulos rectos linea excitetur: atque hac, per propositionem 3. ad æqualitatem datæ posita, ab eius extremitate altera, & libera adhuc, tanquam à puncto dato, datæ rectæ ęqualis & parallela ducatur. Quòd si tandem altera ductæ parallelæ extremitas, cum altera datæ extremitate, recta linea cõiungatur, propositioni satisfactum erit. Demonstrationem huius, qui eorum quæ in structura facta sunt, eorum item quæ hactenus tradita recordabitur, ex definitione tandẽ quadrati facile colligere poterit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΖ.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις· τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

PROPOSITIO XLVII.

In rectangulis triangulis: quadratum quod à latere rectum angulum subtendente describitur, æquale est eis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur quadratis.



Sit triangulum rectangulum, quadrata etiam à singulis lateribus, per propositionem præcedentem, descripta: dico, quadratum lateris subtendentis angulum rectum, tantum esse, quanta sunt quadrata, quæ à reliquis duobus lateribus, angulum rectum comprehendentibus, describuntur. Demittatur ab angulo trianguli recto, tanquam à puncto dato, super suam subtensam, per propositionem 12. linea perpendicularis, atque hæc ad latus usq; oppositum per quadratum cõtinuetur, & erit quadratum lateris, angulum rectum subtendentis, in duo parallelogramma diuisum, quorum unum quidem uni, alterum uerò alteri reliquorum laterum quadrato æquale esse, sic demonstrabitur. Quoniam enim triangulum ex hypothesi rectangulum est, singuli etiam quadratorum anguli, ex definitione, recti sunt: angulus in orthogonio rectus cum utroq; eorum qui sunt ei ἐφεξῆς, duobus rectis angulis æquales erunt. Illud igitur utriusq; quadrati latus, quod quidem extra triangulum est positum, illi trianguli lateri, cui applicatum est, ex propositione 14, adamussim iunctum, & cum eo una linea erit, quod est notandum. Præterea, quoniam anguli recti, ex communi quadam noticia, inter se sunt æquales, & quoniam etiam, Si æqualibus æqualia, uel aliquod commune adijciatur, quæ inde colliguntur æqualia sunt: per hęc duo, bis usurpata, erunt ex utraque parte rectanguli, circa acutos angulos, duo duobus angulis æquales, quod & ipsum notandum. His igitur nunc demonstratis, propositionis ueritas tali, ut sequitur, linearum ductu haberi potest. Demittantur ab angulo triãguli recto, ad remotiores ab eo duos quadrati iam diuisi angulos, duo rectæ lineæ. Et quoniam his duabus rectis duo triangula descripta sunt, cum hæc eadem triangula, atq; ipsorum parallelogramma, unam & eandem basim habeant, in eisdem etiam parallelis constituta sint: triangula parallelogrammorum dimidia, uel contrà, hæc ad illa duplicia esse, per propositionem 41. iamdudum conclusum est. Ducantur ultimò, etiam ab acutis rectanguli trianguli angulis duæ rectę lineę, quarum utraq; per latus eundem angulum subtendens, usq; ad angulum quadrati illum, cui idem acutus hactenus non est cõiunctus, continuetur. Describuntur autem sic duo triangula alia, quæ similiter suorum parallelogrammorum, hoc est, quadratorum à lateribus duobus descriptorũ, dimidia sunt, cum sic ęqualia etiam sint ex propositione 4, bis usurpata, triangulis prioribus descriptis, utrunq; suo: ad illa priora triangula, eadem quadrata duplicia erunt. Sed quia ad illa priora duplicia etiam sunt, ut quidem demonstratũ est, duo partialia diuisi quadrati parallelogramma: per cõmunem igitur noticiam, Quæ eiusdem duplicia, æqualia inter se sunt, parallelogramma partialia, quadratum nimirum lateris, angulum rectum subtendentis, reliquorum duorum laterum quadratis æquale erit. In rectangulis igitur triangulis, quadratum quod à latere rectum angulum subtendente describitur, æquale est eis, quę à lateribus rectum angulũ continentibus describuntur quadratis, quod demonstrari oportuit.

APPENDIX.

Porrò ex Apollodoro refert Laertius, hanc olim propositionem à Pythagora, Italicę philosophiæ principe, inuentam fuisse, sic inquiẽs. φησὶ δὲ Ἀπολλόδωρος ὁ λογιστικὸς, ἑκατόμβην θῦσαι αὐτὸν, εὑρόντα ὅτι τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα πλευρὰ ἴσον δύναται ταῖς περιεχούσαις. Καὶ ἔστιν ἐπίγραμμα οὕτως ἔχον.

Ἡνίκα Πυθαγόρης τὸ περικλεὲς εὕρατο γράμμα
Κεῖν' ἐφ' ὅτῳ κλεινὴν ἤγαγε βουθυσίην.

Hæc in Latinum sermonem è Græco uersa, sic sonant.

Refert autem Apollodorus supputator, hecatomben illum immolasse, cum inuenisset, quòd trianguli rectanguli hypotenusa tantum posset, quantum ea quę rectum angulum continerent latera. Et est epigramma sic se habens,

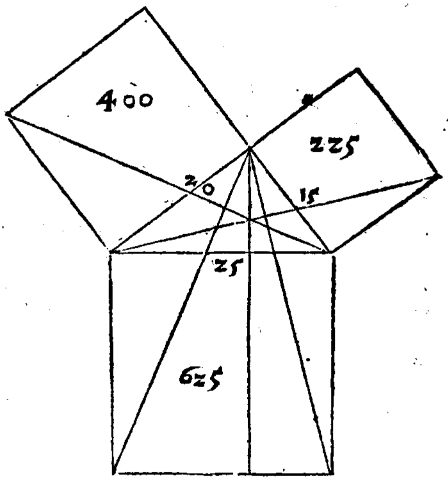
Postquam à Pythagora est præclara reperta figura,
Tunc centum ille boum sacra peregit ouans.

Hoc idem attribuit Pythagoræ etiam L. Vitruuius Pollio, libro nono, capite quarto suæ architecturæ: atque huncl ocum uidere Lector poterit.

Citauimus autem hęc libenter, cùm propter uetustatem, tum etiam propter honorificam

norificam & Pythagoræ & propositionis huius mentionem, cum illius in omnibus ferè rationibus nō sit mediocris usus. Hinc eo maiori studio & diligentia perdiscenda, memoriæq; commendanda est.

SEQVITVR HVIVS PROPOSITIONIS FIGVRA GEOmetrica alia, unà cum numeris explicata.



OPERATIO TRIANGVLORVM QVANTVM AD areas inueniendas.

Triangulum unum, cuius

Latera quidem sunt	Excessus uerò
$\sqrt{1450}$	$20 - \sqrt{\frac{1450}{4}}$
25	$\sqrt{\frac{1450}{4}} - 5$
15	$\sqrt{\frac{1450}{4}} + 5$
Summa $40 + \sqrt{1450}$	Medietas $20 + \sqrt{\frac{1450}{4}}$

Quatuor numeri.

$20 - \sqrt{\frac{1450}{4}}$. $\sqrt{\frac{1450}{4}} - 5$. $\sqrt{\frac{1450}{4}} + 5$. $20 + \sqrt{\frac{1450}{4}}$.

Productum pri. $37\frac{1}{2}$, secundum $337\frac{1}{2}$, tertium $\frac{50625}{4}$ atq; area tandem trianguli $112\frac{1}{2}$. Et tanta est etiam medietas parallelogrammi partialis, uel quadrati, quod est à parte dextra.

Triangulum alterum, quod habet

Latera	Excessus itaq;
$\sqrt{1625}$	$\frac{45}{2} - \sqrt{\frac{1625}{4}}$
25	$\sqrt{\frac{1625}{4}} - 2\frac{1}{2}$
20	$\sqrt{\frac{1625}{4}} + 2\frac{1}{2}$
$45 + \sqrt{1625}$	$\frac{45}{2} + \sqrt{\frac{1625}{4}}$

Productum primum 100, secundum 400, tertium 40000, atq; tandem trianguli area, 200. medietas scilicet alterius partialis parallelogrammi, uel quadrati partis sinistræ. Quare, &c.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

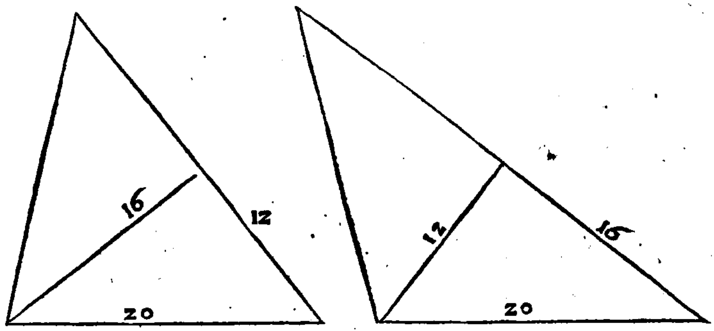
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΗ.

Ἐὰν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον, ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις· ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν, ὀρθή ἐστι.

PROPOSITIO XLVIII.

Si quod ab uno laterum trianguli deſcribitur quadratum, æquale fuerit eis quæ à reliquis trianguli duobus lateribus deſcribuntur quadratis: angulus cõprehenſus ſub reliquis trianguli duobus lateribus, rectus eſt.

Sit triangulum, cuius quadratum, quod ab uno latere deſcribitur, reliquorum duorum laterum quadratis ęquale ſit: dico, angulum quem illud latus ſubtendit, rectum eſſe. id quod ſic demonſtratur. Ab angulo illo, qui, quòd rectus ſit, demonſtrari debet, atq; à latere huius recti uno, tanquam à puncto in recta dato, linea, per propoſitionem 11, πρὸς ὀρθὰς ducatur, ea deinde, per propoſitionem 3, lateri circa hunc rectum alteri, æquali poſita, per id quod petitione quadam permiſſum eſt, nimirum quòd ab omni puncto ad omne punctum linea recta duci poſſit, claudatur tandem triangulum. Et quoniam duæ lineæ, latus ſcilicet trianguli unum, & extra triangulum πρὸς ὀρθὰς ducta, ſunt, ex ſtructura, inter ſe æquales: quod quadra-



ta, ab his æqualibus deſcripta, inter ſe æqualia ſint, manifeſtum eſt. Hinc æqualibus his quodam communi, quadrato ſcilicet lateris alterius, ad quod nimirum extra triangulum linea πρὸς ὀρθὰς ducta eſt, addito: & producta iam, uel collecta, inter ſe æqualia erunt. Quoniam autem utrunq; horum, unum quidem ex hypotheſi, alterum uerò ex propoſitione præcedenti, unius lateris quadrato æquale eſt: & horum duorum quadratorum latera inter ſe æqualia erunt. Igitur, cũ iam duo, qualia ipſa 8. propoſitio requirit, triangula appareãt: angulus ille quem propoſiti trianguli latus, quod in reliqua duo poteſt, ſubtendit, per eandem octauam, rectus erit. Si igitur ab uno alicuius trianguli latere quadratum deſcriptum, à reliquorum duorum laterum deſcriptis quadratis æquale fuerit: angulus ille, quem hoc latus ſubtendit, rectus erit, quod demonſtraſſe oportuit.

FINIS LIBRI PRIMI.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

EVCLIDIS ELEMENTORVM GEOmetricorum liber secundus.

SVmit ex hoc libro secundo Arithmeticus pulchra sui calculi compendia, multæ item regularum Algebræ æquationes; & nonnulla etiam harum regularum fundamenta, per huius secundi libri propositiones demonstrare solet. Habet prę terea is liber propositiones duas, unam quidem pro Amblygonio, alteram deinde pro Oxygonio triangulo. illæ uerò quantum utilitatis, si in re astronomica ad penultimam propositionem primi, de Orthogonio triangulo expositam, referantur, afferre soleant, nor unt qui in hac disciplina aliquandiu uersati sunt. Quare si nullum alium præterea usum haberet, ob has duas saltem propositiones præsens hic liber maximopere amplectendus & perdiscendus esset.

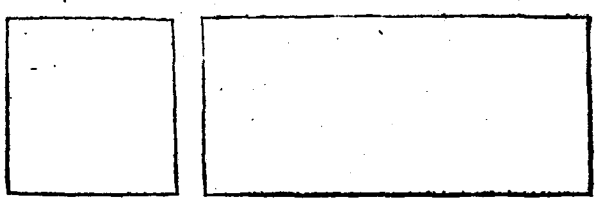
ΟΡΟΙ.

Πᾶν παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον περιέχεσθαι λέγεται, ὑπὸ δύο, τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν

DEFINITIONES.

Prima. Parallelogrammum rectangulum quid.

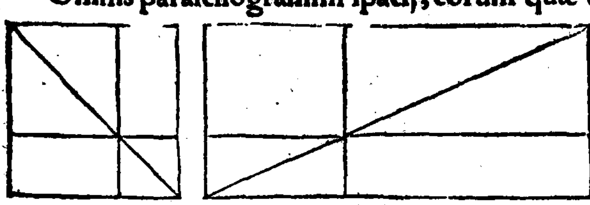
Omne parallelogrammum rectangulum sub duabus, rectum angulum comprehendentibus, rectis lineis dicitur contineri.



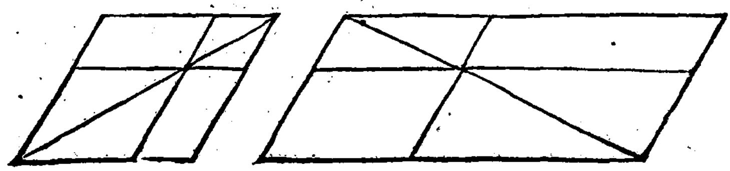
Παντὸς δὲ παραλληλογράμμου χωρίου, τῶν περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ ἓν παραλληλογράμμων ὁποιονοῦν, σὺν τοῖς δυσὶ παραπληρώμασι, Γνώμων καλείσθω.

Secunda. Gnomon quid.

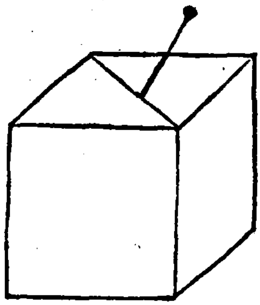
Omnis paralellogrammi spacij, eorum quæ circa diametrum illius sunt parallelogrãmorum unumquodque, cum duobus supplementis, Gnomon uocetur.



Sententia definitionis est, Omnis parallelogrammi, quod quidem per ductam ipsius diametrum, ac duas deinde in eo rectas, quæ sese mutuo in communi quodam diametri puncto secant, lineas ductas, in quatuor partialia parallelogramma alia diuisum est, utrunque eorum, per quæ diameter transit, cum reliquis duobus parallelogrammis, quæ extra diametrum sunt posita, atque supplementa uocata, Gnomonem nominari.



Est hæc Gnomonis definitio generalior, quàm quæ à Vitruuio est posita, cum hæc rectum tantum angulum, illa uerò cuiuscunque generis angulos, modo parallelogrammum fuerit spacium, consideret. Definit autem ferè his uerbis Gnomonem Vitruuius, lib. 9. cap. 7. Architecturæ, eum esse ac formari, quando ex medio planiciei linea πρὸς ὀρθὰς erigitur.



ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

ΠΡΩΤΗ. Α.

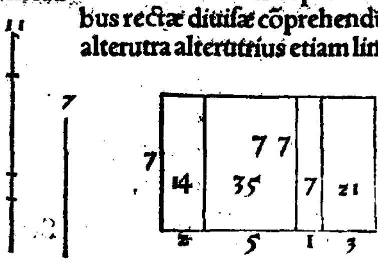
Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὅσα δήποτουν τμήματα, τὸ
περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν, ἴσον ἐστὶ, τοῖς ὑπό τε τῆς ἀτμή-
του καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις.

PROPOSITIONES.

PRIMA I.

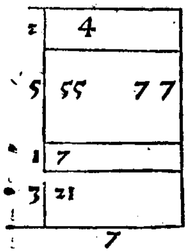
Si fuerint duæ rectæ lineæ, seceturque altera ipsarum in quotcunque segmenta: rectangulum comprehensum sub duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ ab insecta & quolibet segmentorum rectangulis comprehenduntur.

Sint duæ rectæ lineæ, harum etiam altera in partes quotcunque diuisa: dico, rectangulum sub duabus datis rectis cõprehensum, eis, quæ sub indiuisa & singulis partibus rectæ diuisæ cõprehendũtur rectangulis, æquale esse. Excitetur ex alterutra alterutrius etiam lineæ extremitate, per propositionem 11. primi, ad angulos rectos linea, eaque per tertiam eiusdem, ad æqualitatem alterius posita, ex eius altera extremitate, lineæ, ad quam πρὸς ὀρθὰς linea posita est, parallela, eique æqualis, recta linea ducatur, & claudatur superficies. Quòd si

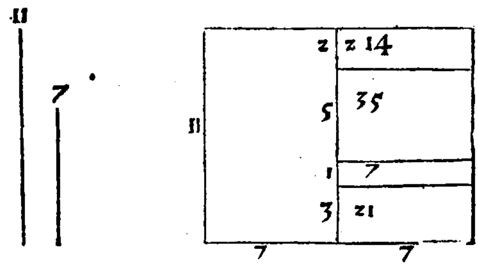


iam

iam ex singulis diuisæ lineæ punctis, lineæ rectę, eis quæ ab extremitatibus eiusdem diuisæ modò eductæ sunt, per 31 primi, parallelæ, ad latus usq; oppositum tendentes, ductę fuerint, hac structura tandem propositio sic retinebitur. Quoniam enim totale ipsis partialibus parallelogrammis, ut apparet, æquale est, totale autem cum sub duabus rectis datis, ęquali pro æquali linea sumpta, partialia item singula sub indiuisa & singulis partibus diuisę, & hic æquali subinde pro æquali linea sumpta, contineantur: sub duabus igitur datis comprehensum rectangulū eis quæ sub indiuisa & singulis partibus diuisæ continētur rectangulis, æquale erit. Si fuerint igitur duæ rectę lineæ, quarum altera quidem in segmenta quotcunq; secetur: rectangulum sub duabus rectis lineis comprehensum, ęquale est eis, quæ ab insecta & quolibet segmentorum rectangulis comprehenduntur. quod demonstrari oportuit.



POTEST FIGVRA ETIAM SIC INSTITVI.



Quia uerò omnes huius secundi libri propositiones generaliter & de lineis & de numeris intelligi, atq; per ea declarari possunt, ideo etiam, ut quæq; propositio suos proprios numeros, suas etiam conuenientes & debitas lineas haberet, diligenter curauimus. id quod boni consulere Lector uelit.

APPENDIX.

Solent Arithmetici nō rarò in multiplicationē, numerum unum eorum, qui inter se multiplicari debent, in partes aliquot distribuere: alterum deinde, cum partibus distributi singulis multiplicare, ac multiplicationis tandem productum, per horum partialium productorum summam repręsentare: atq; id certe compendio quodam, quod ex hac propositione desumptum est, facere eos, studiosi sciant.

EXEMPLVM SIT.

Indiuisus	diuisus in par.	Aliàs multiplicatione sic,
74	37	74
1480	20	37
740	10	518
370	5	222
148	2	2738
2738	ijdem numeri	

Huius compendij frequens usus est circa multiplicationem in regula Proportionum.

Quòd si uerò numeri illi propositi æquales inter se fuerint, utuntur pro hac prima, sequenti propositione secunda, ut quæ idem sub una recta linea, uel numero, bis tamen eo repetito, proponit, atq; in hoc prima à secunda propositione differt.

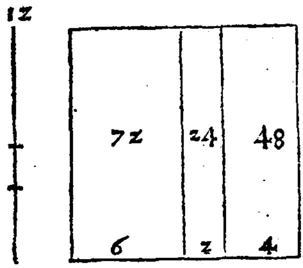
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὰ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενα ὀρθογώνια, ἴσα ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ.

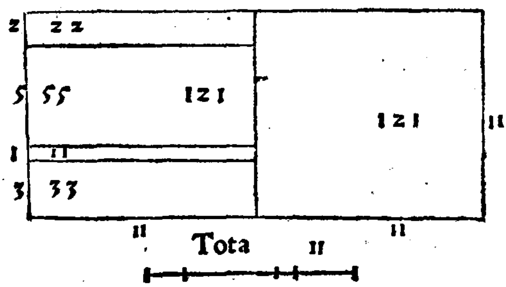
PROPOSITIO II.

Si recta linea ſecetur utcunq;: quę ſub tota & utroq; ſegmentorum rectangula comprehenduntur, æqualia ſunt ei quod à tota fit quadrato.

Sit recta linea in partes utcunq; diuiſa: dico, quæ ſub tota & utroq; ſegmentorum rectangula comprehenduntur, æqualia eſſe ei quadrato, quod à tota deſcribitur. Deſcribatur à recta data quadratũ, ex puncto deinde uel punctis diuiſionum ſingulis (nam & plurium ſegmentorum lineam hęc propoſitio ferre poteſt) ad angulos rectos lineæ, uel ſi magis placet, utriq; eorum, quæ diuiſæ datæ ad rectos inſiſtunt, laterum parallelæ, uſque ad oppoſitum latus ducantur. Et quoniam partialia per ductas parallelas deſcripta parallelogramma, ei quod à recta diuiſa deſcriptum eſt, quadrato, per propoſitionem pręcedẽtem æqualia ſunt, interiores etiam à punctis ductæ rectæ lineæ, & quadrati latera ſingula, uel hoc ſolum, cui interiores ductę inſiſtũt, omnes ſunt lineæ inter ſe ęquales, æquali ſubinde pro æquali linea ſumpta: hęc ut præcedens tandem manifeſta erit. Si recta igitur linea ſecetur utcunq;: quæ ſub tota & utroq;, uel quolibet ſegmentorum rectangula comprehenduntur, æqualia ſunt ei quod à tota fit quadrato. quod demonſtrari oportuit.



POTEST FIGVRA ETIAM SIC INSTITVI.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχε, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ.

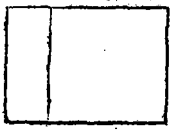
PROPOSITIO III.

Si recta linea ſecetur utcunq;: rectangulum ſub tota & uno ſegmentorum comprehenſum, ęquale eſt ei quod ſub ſegmentis comprehenditur rectangulo, atq; ei quod à prædicto ſegmento deſcribitur quadrato.

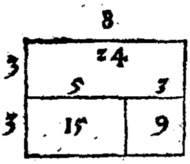
Sit recta linea ſecta utcunq;: dico, rectangulum quod ſub tota & uno eius ſegmentorum cõprehenditur, id ęquale eſſe rectangulo ſub ſegmentis comprehenſo,

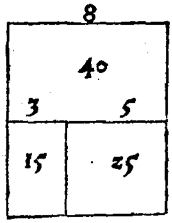
cum

cum quadrato prędicti segmenti. Descripta figura ut requiritur, demonstratio ex propositione prima sumi poterit, segmento illo in quod tota diuisa ducta est, pro altera linea sumpto. Erunt enim sic duæ rectæ, una diuisa, ipsa scilicet exposita, & altera indiuisa, dictum nimirum segmentum, de quo unumquemque admonitum esse uolui.

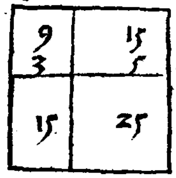


Alia dispositio.





Sunt hic compendio quodam, duo exempla simul iuncta.



ALIA HVIVS REI DEMONSTRATIO.

Describatur ab uno segmentorum, utrum hoc fuerit, quadratum: latere deinde quadrati eo, quod diuisæ rectę opponitur, ad quantitatem segmenti alterius secundum continuationem in rectum eiecto, à termino illo, tanquam à puncto dato, reliquis duobus quadrati lateribus, per propositionem 31. primi, parallela ducatur. Et quoniam, quod sic descriptum est totum, duobus, quadrato scilicet descripto, & rectangulo cuidam, ęquale est, totum autẽ cum sub tota recta & linea quadam uni segmentorum æquali comprehendatur, alia uerò duo, unum quidem sub segmentis diuisę comprehensum, alterum uerò ex priori segmento quadratum descriptũ esse appareat, id quod uolebat propositio, iam sic se habere manifestè patet. Si recta igitur linea secetur utcunque: rectangulũ sub tota & uno segmentorum comprehensum, ęquale est ei, quod sub segmentis comprehenditur rectangulo, atque ei, quod à prædicto segmento describitur quadrato. quod demonstrasse oportuit.

Est autem huius textus figura geometrica ea, quæ ex superioribus est in ordine prima.

HAEC PROPOSITIO IN NVMERIS SIC SE HABET.

partes
Totus { 8
14
14 { 6
8
112 æquales 112

8 8
6 8
48 64

partes
Totus { 12
29
29 { 17
12
348 æquales 348

17 12
12 12
204 144

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

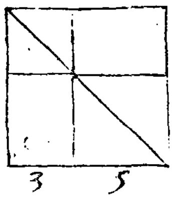
PROPOSITIO IIII.

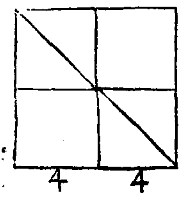
Si recta linea secetur utcunque: quadratũ quod à tota describitur, ęquale est quadratis, quæ fiunt à segmentis, & ei quod bis sub segmentis comprehenditur rectangulo.

Sit recta quædam linea data, in duo etiam segmenta utcunque diuisa: dico, quòd

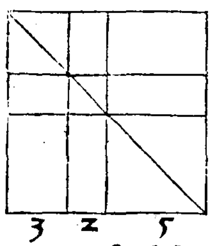
 quadratum

quadratum à tota descriptũ, æquale sit quadratis quæ à segmentis fiunt, & ei quod sub segmentis comprehenditur bis. Est hæc quarta nihil aliud quàm tertia propositio repetita bis, id quod cuilibet manifestabitur, qui quadratum totius (mutato nomine) duo rectangula esse, quæ sub tota & duobus segmentis comprehenduntur, perceperit. Quare cum iam tertia demonstrata sit, hanc quartam demonstrare non erit necesse. Quia uerò non mediocris est, in Arithmeticis præsertim, huius propositionis usus, propriam eius demonstrationem adducere libuit in hunc modum. Describatur à recta data quadratum, ducatur etiam in eo diameter à puncto deinde, uel punctis (nam ut præcedens, ita & hæc de pluribus segmentis intelligi potest) diuisionum singulis, lineis, quę à latere sunt, parallelæ ad oppositum usq; latus ducantur, ubi tandem hæ diametrum secant, per puncta illa, reliquis lateribus parallelis ductis, figura parata erit: dico ergo ut suprà.





Quantum ad demonstrationem, primò demonstrandũ erit, parallelogramma illa, per quæ nimirum diameter transit, quadrata esse, & hoc quidem tali modo. Ex data recta descriptum est quadratum, cuius latera cum, ex definitione, inter se sint æqualia: qui in utraq; parte ad diametrum ponuntur anguli partiales, ex priore parte propositionis 5. primi, inter se ęquales erunt. Et quia cuilibet partiali, ut interno est æqualis, ex secunda parte propositionis 29. primi alius externus, æqualibus pro æqualibus angulis sumptis, singuli duo in quolibet per quod diameter transit parallelogrãmo, anguli inter se æquales erunt: quare & latera cuiusq; trianguli, quæ illos æquales angulos subtendunt, ex propositione 6. primi æqualia: atq; tandem æqualium laterum, ex 34. & communi illa noticia, Quæ eidem sunt æqualia, & inter se sunt æqualia, hæc ipsa parallelogramma, quod est notandum. Ad hæc, quia etiam ex parte tertia propositionis 29 primi, atq; ipsa 34 eiusdem, facile rectangula esse ostenduntur, cum per illam quidem, anguli horum parallelogrammorũ interiores, ex eadem parte sumpti, duobus rectis ęquales sint, per hanc uerò, angulos oppositos ęquales inter se habeant: quadrata igitur ex definitione rectangula illa, atq; segmentorum etiam, rectæ diuisæ quadrata erunt, quod primò demonstrandum erat. Nunc uerò, quoniam horum quadratorum, hoc est parallelogrammorum supplementa, ex propositione 43. primi, inter se ęqualia sunt, atq; unum quidem eorum, propter linearum æqualitatem, id quod sub segmentis diuisæ comprehenditur: & alterum quoq; simili se modo habebit. Ambo igitur simul ei, quod sub segmentis comprehenditur bis, æqualia erunt. Hinc quatuor illa, duo nimirum quadrata, & duo supplementa, duorum segmentorum quadratis, atq; ei quod sub segmentis comprehenditur bis, æqualia erunt. Sed quia quatuor priora, totius rectæ diuisæ quadrato, ut apparet, atq; etiam ex tertia præcedenti usurpata bis, manifestum est, ęqualia sunt: & posteriora tandem, ex communi quadã noticia, eidem quadrato æqualia erunt. Si recta igitur linea secetur utcunq;: quadratum quod à tota describitur, æquale est quadratis quæ fiunt à segmentis, & ei quod bis sub segmentis comprehenditur rectangulo. quod demonstrasse oportuit.

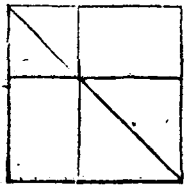


Ἑτέρα δεῖξις. Aliter idem ostendere.

Maneat prior dispositio. Et quoniam quadratorũ latera, ex definitione, inter se ęqualia sunt: anguli ad diametrum partiales, ex utraq; parte, per priorem partẽ propositionis quintæ primi, inter se ęquales erunt. Et rursus quoniam quadratorum

anguli

anguli sunt recti, & id ex definitione: uterque æqualium angulorum in utroque triangulo, ex corollario propositionis 32. primi medietas recti erit. Hinc sicut partialium triangulorum unumquodque, ex secunda parte propositionis 29. primi, angulum rectum habet, ita etiam uniuscuiusque tertium angulum medietatem recti esse, manifestū erit. Singula igitur triangula, ex propositione 6. primi, Isoscelia, Quadrilatera insuper, ex propositione 34. & illa communi noticia, Quæ eidem æqualia, &c. æquilatera erūt. Et quia unumquodque etiam rectum angulum unum, cum totius rectæ diuisæ quadrato communē habet, unum deinde ex secunda parte propositionis 29 primi: & reliqui, illis scilicet rectis oppositi, singuli recti erunt: quadrata igitur sunt ea, per quæ diameter transit, quadrilatera: atque illis etiam, quæ à segmentis diuisæ fiunt, æqualia. Reliqua nunc, ut in priori, demonstrantur.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτων φανερόν ἐστιν, Ὅτι ἐν τοῖς τετραγώνοις χωρίοις, τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα, τετράγωνα ἐστίν.

COROLLARIVM.

Ex hoc sanè manifestum est, Quòd in quadratis spacijs circa diametrum parallelogramma, quadrata sint.

APPENDIX.

Hac propositione non rarò utuntur Logistici in regulis Algebræ. per eas enim numerorum irrationalium additionem, Aequationem deinde, in qua, tribus quantitatibus, naturalis ordinis uel æqualibus medijs, propositis, duæ maioris appellationis, tertiæ, cui minor est appellatio, adæquantur, & alia quædam demonstrare solent.

PRIMO QVANTVM AD ADDITIONEM.

Addituri $\surd 18$ ad $\surd 32$ uel id genus, irrationalium numerorum, addunt primò illorum irrationalium quadratos, uno deinde cum irrationali altero multiplicato, numerum qui producitur, propter duo supplementa, bis sumunt. Postremò huius quartę propositionis memores, quæ dicit, Quadratum lineæ, uel numeri, ὡς ἔτυχε diuisi, tantum esse, quantum ex quadratis partium illius, cum eo quod ex una parte cum altera multiplicata bis sumpto, efficitur: omnia hæc, tam quadrata partium, quàm etiam duo supplementa, quę nimirum ex multiplicatione unius partis diuisi numeri cum altera, bis repetita nascuntur, simul iungunt, idque propterea quidē, ut totius compositi seu in partes diuisi numeri quadratum habeāt, per huius tandem quadrati radicem, quantum sit ipsum latus uel totus numerus, enuncient.

SEQVITVR CALCVLVS.

50
$\surd 18$ ad $\surd 32$
$\surd 576$, bis
$\surd 2304$
hoc est 48. duo
supplementa

Addantur nunc 50, partium quadratis
48, duo supplementa
ueniunt 98, quadratum totius
quare $\surd 98$ ipsum latus,
hoc est partium seu surdorum
propositorum summa.

ALIVD EXEMPLVM.

Addantur $\surd 13$ ad $\surd 21$
$\surd 273$, bis
$\surd 1092$, duo supplementa
34, quadrata partium,
quare $34 + \surd 1092$, quadratum totius compositæ lineæ uel numeri.

numeri. Huius igitur radix quadrata, quæ est

Radix collecti 34 + $\surd$ 1092, uel $\surd$ 21 + $\surd$ 13, numerus ipse.

Quomodo autem uera radix posita, utpote $\surd$ 21 + $\surd$ 13, ex hoc collecto, quod Ex binis nominibus prima dicitur, inueniri debeat, id iamdudum traditum est.

SEQVITVR QVAESTIO.

Est numerus quidam diuisus in duas partes, partes autem cum sint 13 & 21, quantus ipse totus numerus sit, quæritur. Facit 34.

Id quod per additionem partium ad se, facile deprehenditur.

Quòd si quis exercendi ingenij gratia altius hoc quærere uelit, ad quartā huius secundi libri propositionem confugiat necesse est, atq; sic operetur.

Partes propositæ sunt 13 & 21, Partium quadrata 169 & 441, Quod fit, una parte cum altera multiplicata, 273

	273
	bis
duo supplementa	546
Partium quadrata	610
quadratum igitur totius	1156, atq; tandem
ipse totus numerus,	34, qui quærebatur.

ALIA QVAESTIO.

Partes alicuius numeri sunt 49 & 36, quantus est ipse totus. Facit 85.

Nam quadrata partium sunt 2401, & 1296. multiplicatio uerò unius partis cum altera bis, producit 3528. Omnia hæc simul iuncta, ueniunt 7225, quare huius radix quadrata, 85, ipse totus numerus, qui ex additione datorum constituitur. Atq; hæc de additione dicta sufficiant. Sequitur

AEQVATIO.

Tradidimus in regularum Algebræ descriptione tres æquationes, tanquam potiores, quibus subinde, per has regulas ænigmata soluere cupientes opus habent. Quoniam uerò secundam æquationem per tres canones descripsimus, primus autem eorum ex hac quarta propositione est desumptus, atq; nihil aliud ferè esse uidetur, cum idipsum sic sese habere manifestauerimus, propositio etiā paulo ante demonstrata sit. & hunc canonē tandē demonstratū & fundatum esse, nemo dubitet.

Porrò canonis huius tractatio, est de tribus naturalis ordinis quantitatibus, quando uidelicet maiores duę, id est harum numeri, minimæ quantitatis seu characteris numero æquantur. ut est

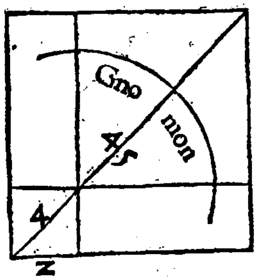
Prima + radix Numero.

Tum ad quadratum (ut paucis repetantur priora) dimidij numeri characteris medij, numerus characteris minimi addi, à radice deinde huius collecti quadrata, dimidium characteris medij subtrahi debet: quo facto, quęsiti numeri compos aliquis erit, cū uidelicet per id quod relinquitur, radicis ualor exprimatur. ut Esto quòd per alicuius exempli operationem eò peruentum sit, ut 1 prima + 4 radix æquales sint 45 N. huius geometrica solutio uel demonstratio talis erit.

Quoniam enim, ut canon habet, ad quadratum dimidij numeri characteris medij, numerus characteris minimi addi, à radice deinde huius collecti quadrata dimidium numeri characteris medij subtrahi debet, hoc certe si quis propositionem hanc quartam, ac canonem etiam altius perpenderit, unam rem esse, alijs tamen atque alijs expressam uerbis, asseret. Nam ultimum quadratum, pro quadrato alicuius totius, puta numeri in partes diuisi habebit: dimidium uerò radicis characteris medij, alteram huius diuisi partem: numeros deinde additos, cum ipsorum additio

ditio quadratum efficiat, Gnomonem, ut quem, ex definitione, utrunq; circa diametrum parallelogrammum, & duo supplementa cõstituunt, exponet. Hac expositione tandem, huius quartæ propositionis memor, ex toto quadrato radicem eliciet. Et quia hæc ex partialium quadratorum radicibus composita est, cum unius partialis quadrati radix, dimidium scilicet numeri characteris medij, nota sit: & altera tandem, radix nimirum propositi in exemplo quadrati, subtractione nota erit, id quod pro declaratione huius canonis dicendum erat.

SEQVITVR HVIVS REI FIGVRA GEOMETRICA.



49 quadratum ultimum & totius diuisi.

Quadratum medietatis medij.

Est demonstratio uel expositio geometrica, puerilis quidem illa, sed quæ rem fidelissime explicat.

SEQVITVR QVAESTIO CVM CANONI, TVM etiam propositioni accommoda.

Diuidatur numerus in partes duas, quarum quadrata simul, unà cum numero, quem producunt partes inter se multiplicatæ bis 1764 constituant. Vna autem pars cum sit 13 (atq; tantam esse medietatem quantitatis mediæ intelligendum est) quanta fuerit altera quæritur.

Facit 29.

ACCEDIT ET TERTIVS HVIVS QVARTAE PROpositionis, quem habet in Numeris, usus.

In radicibus eliciendis cum semper inuenti numeri quadratum inuestigandum sit, ille uerò numerus subinde, quàm diu sanè durat huiusmodi operatio, una figura crescat, ne totus inuentus semper in se multiplicandus sit, ubi propositionem hanc quartam intellexerint Arithmetici, compendiosius inuentorum quadrata assequentur, per hunc modum. Habito de numero iam inuento, tanquam de una parte totius, quadrato, recipiatur etiam quadratum de numero uel parte altera: una deinde parte cũ altera multiplicata, is qui producitur numerus bis sumatur. Quòd si tandem hoc duplum prioribus duobus partium quadratis cõiungetur, per id collectum tandem commodè, iuxta hanc quartam propositionem, quadratum totius inuenti numeri exprimi poterit.

Huius rei tale sumatur exemplum.

Inuenta est radix ex aliquo numero 6. cuius quadratum quidẽ 36. accedit autem huic radici seu inuento numero, cum nondum ad finem hæc radicis extractio perducta sit, figura alia, nimirum 4, atq; sic aucta est prior inuẽta radix: creuit enim à 6 in 64, atq; huius totius iam desideratur quadratũ, uel quadratus numerus. Prioris igitur figuræ uel inuenti numeri, tanquam unius partis radicis diuisæ, quadrato habito, accipiatur & quadratum alterius, secundò scilicet inuenti numeri, 4, quod erit 16. Et quia numerus primò inuentus, 6. secundum iam locum occupat, unde ratione loci sic, non sex amplius, sed sexaginta significat, ipsius igitur quadrato, 36 ſcilicet duæ figuræ nihili proponendæ ſunt. Poſtremò una cum altera parte multiplicata bis, producuntur 480. Hæc omnia ſi in unam ſummam colligantur, quantum ſit quadratum de 64, apparebit.

SEQVITVR PRAXIS.

	Partes	partium quadra.	Aliàs multiplicatione ſic
Tota radix uel numerus 64	60	3600	64
	4	16	cum 64
Quod producitur, una parte cum altera multiplicata bis		480	256
			384
Summa productorum		4096	4096

Quòd ſi uerò adhuc una figura acceſſerit, 8 ſcilicet, operatio ſic inſtituatur.

	Partes	partium quadrata	Multiplicatione ſic
Totus numerus 648	640	409600	648
	8	64	cum 648
Ex partium multiplicatione repetitum bis		10240	&c.
Summa omnium, & quadratum totius		419904	

Atq; hactenus de propoſitione quarta. ſequitur

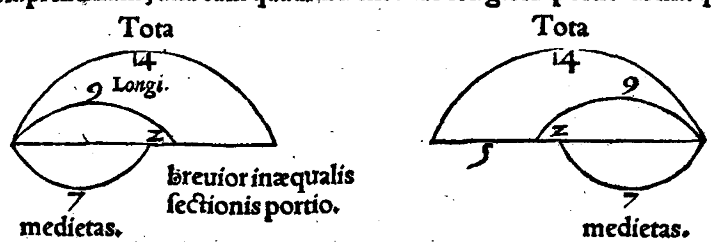
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα· τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ.

PROPOSITIO V.

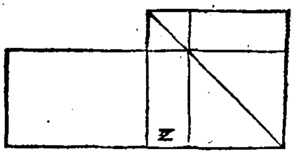
Si recta linea ſecetur in æqualia & non æqualia: rectangulum, quod ſub inæqualibus ſegmentis totius comprehenditur, unà cum quadrato eo quod à medio ſectionũ fit, æquale eſt ei quod à dimidio fit quadrato.

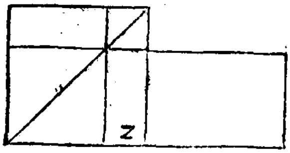
Sit recta quædam linea propoſita, atq; hæc primũ in duo æqualia, deinde etiam in duo inæqualia diuidatur: dico, rectangulum ſub portionibus inæqualis diuiſionis comprehenſum, unà cum quadrato exceſſus longioris portionis inæqualium



ſuper medietatem lineæ, æqualia eſſe quadrato medietatis. Deſcribatur à dimidia illa, in qua eſt punctum inæqualis diuiſionis, quadratum, cuius diameter cum una datæ extremitate copuletur, atq; ab inæqualis diuiſionis puncto, per diametrum ad latus uſq; oppoſitum, reliquis duobus quadrati lateribus parallela ducatur. Et quia hæc diametrum ſecat, ubi ex puncto interſectionis, utriſq;, hoc eſt, & rectæ datę, & lateri ei oppoſito, altera parallela, datæ æqualis, ducta, ea deinde per tertiam parallelam, cum extremitate datæ, quę adhuc libera eſt, copulata fuerit, figura parata

parata erit. Dico ergo nunc, ut suprà. Quoniam enim supplementa omnis parallelogrammi inter se æqualia sunt, his nunc æqualibus quadrato breuioris portionis, tanquam communi addito: & quæ colliguntur, ex cõmuni quadam noticia, æqua-





lia erunt. Sed quia unum ex his alij cuidam, cum quo nimirum æqualem basim habet, atq; in eisdem est parallelis, ex propositione 36. primi, est æquale: & alterum, ex communi quadam noticia, eidem æquale erit. His igitur æqualibus nunc, ut tandem concludatur, si utriq; id quod alterum ęquale ad complendum medietatis quadratum requirit, addatur: & producta, hoc est rectangulum sub portionibus inæqualibus comprehensum, cum quadrato quod ab intermedia portione describitur, & quadratum medietatis, inter se æqualia erunt. Si igitur recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: rectangulũ quod sub inæqualibus segmentis totius comprehenditur, unà cum quadrato eo quod à medio sectionum fit, æquale est ei quod à dimidio fit quadrato. quod demonstrasse oportuit.

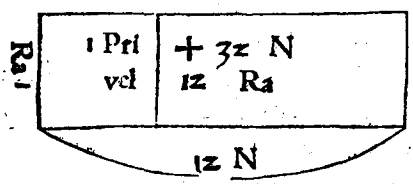
APPENDIX.

Habet & hæc propositio suum in Numeris locum, cum per eam tertius secundæ æquationis canon, (quo nimirum maximi & minimi characterum numeri, medij characteris numero ęquales esse proferũtur) demonstrari soleat in hunc modũ.

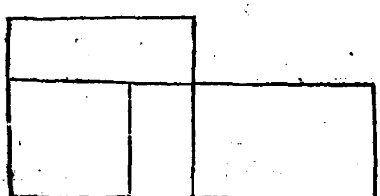
Esto exempli gratia, quòd

1 prima + 32 N æquales sint 12 rad.

Describatur igitur primò quadratum, propositæ æquationis unam primam repræsentans. huic deinde quadrato, ex una eius parte, eiusdem altitudinis rectangulum, numeros in æquatione uni primę adhærentes significans applicetur. Et quoniam hoc totum rectangulum, ex hypothesi, 12 radicibus ęquale est, cum breuius eius latus ratione quadrati, sit una radix: eius latus longius, 12 unitates erunt. Eo igitur longiori latere, ut canon præcipit, bifariam diuiso, erit hoc idem longius latus, linea, qualem propositio hæc quinta requirit, ἐς ἴσα scilicet καὶ ἄνισα diuisa, quod est notandum.



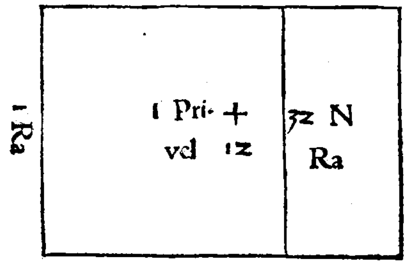
Describatur nunc ab una medietate diuisæ quadratum, compleaturq; figura. Et quoniam medietatis quadrato, rectangulum numerorum cum quadrato lineæ, qua rectanguli longius latus medietatem diuisæ excedit, ex hac quinta, æquale est, ubi horum æqualium uni rectangulum numerorum: alteri uerò id, quod rectangulo numerorum, ex propositionibus quadragesima tertia & tricesima sexta primi, ac communi illa noticia, Si ęqualibus ęqualia adijciantur, etc. æquale est, ablatum fuerit: & quæ relinquuntur tandem, ex communi quadam

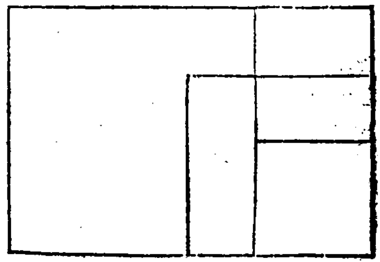


portio
quæ à dimidio characteris medij subtrahi debet.

 noticia,

noticia, inter se æqualia erunt. Quia autem ex utraque parte unum & idem parallelogrammum, quadratum scilicet circa diametrum alterum, relinquitur, quadratum uerò illud notum est, cum uidelicet totum, hoc est quadratum medietatis, & subtractum deinde, hoc est, parallelogrammum uel rectangulum numerorum, nota sint: & eius radix nota erit. Ea igitur (ut quidem habet descriptio figurarum prima) à radice totius quadrati, quod uidelicet à medietate numeri characteris medij descriptum est, subtracta: Vel ea, (ut habet descriptio figurarum secunda) radici eiusdem





Portio quæ dimidio characteris medij addi debet.

totius quadrati, addita: alterius quadrati, quod in æquatione propositum est, radicem notam relinqui necesse erit: id quod pro huius canonis demonstratione, uel pro eius ad hanc propositionem applicatione, dicendum erat.

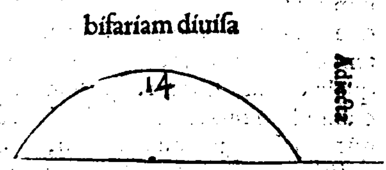
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ.

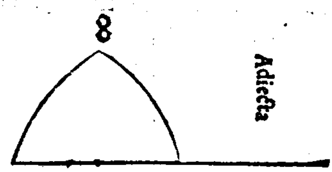
Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα, ἐπ' εὐθείας· τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης, ὡς ἀπὸ μιᾶς, ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

PROPOSITIO VI.

Si recta linea bifariam secetur, adijciaturque aliqua ei in rectũ recta linea: rectangulum comprehensum sub tota cũ apposita & apposita, unà cum quadrato dimidiæ lineæ, æquale est ei quod à coniuncta ex dimidia & apposita, tanquam ab una, describitur quadrato.

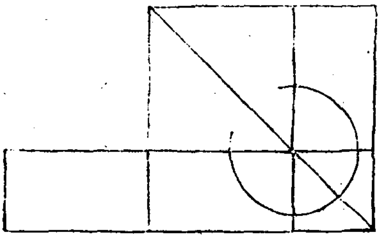
Sit recta linea proposita, qua bifariam diuisa, alia ei in rectum linea iungatur, rectangulo deinde & quadratis secundum suas lineas descriptis: dico, rectangulum sub tota, ex recta data scilicet & adiecta composita, & adiecta comprehensum, unà cum quadrato quod à medietate diuisæ describitur, quadrato à medietate diuisæ

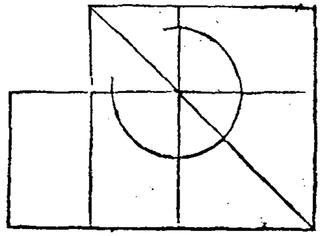




& adiecta, tanquam ab una linea, descripto æquale esse. Ducatur in quadrato eo, quod à medietate diuisæ cum adiecta descriptũ est, diameter, sic ut per quadratum etiam, à medietate diuisæ descriptum, tanquam diameter transeat, deinde latus quadrati eius, quod à medietate descriptum est alterum, usque ad oppositum rectanguli latus continuetur. Et quoniam super æqualibus basibus, atque in eisdem parallelis constituta

constituta parallelogramma, ex propositione 36. primi inter se æqualia sunt. Et rursus, quoniam etiam parallelogrammorum supplementa omnis parallelogrãmi spacij, ex propositione 43 eiusdem primi, æqualia, cum duo uni æqualia esse appareant, illa deinde inter se, ex cõmuni quadã nóticia ęqualia sint, horum æqualium utriq; parallelogrammo eo quod ad rectam, ex dimidia & apposita cõpositam, ponitur addito: & quę fiunt rectangulũ scilicet sub tota & adiecta comprehensum, &





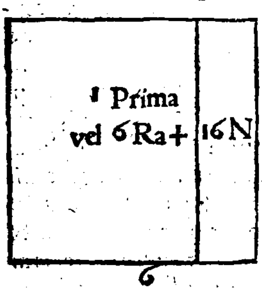
Gnomon, qui quadrato medietatis circumscribitur, inter se æqualia erunt. Ipsum igitur medietatis quadratum, ubi his æqualibus adiectum fuerit, iuxta propositionis tandem conclusionem, id quod sub tota, ex data scilicet & adiecta composita, & adiecta comprehenditur rectangulum, unà cum quadrato medietatis diuisæ, ei quod à linea ex medietate & adiecta, constituta descriptum est, quadrato, æquale erit. Si recta igitur linea bifariã secetur, adijciaturq; aliqua ei in rectum recta linea: rectangulum comprehensum sub tota cum apposita & apposita, unà cum quadrato dimidiæ lineæ, æquale est ei quod à coniuncta ex dimidia & apposita, tanquam ab una describitur quadrato. quod demonstrasse oportuit.

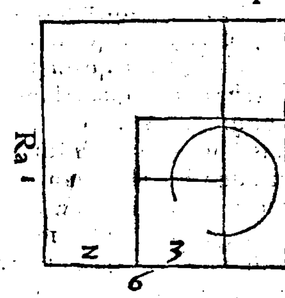
APPENDIX.

Vtuntur hac propositione Logistici in regulis Algebræ, pro demonstratione canonis secundi in æquatione secunda.

Conferuntur in hoc canone duo minorum characterum numeri, cum numero characteris maximi, dicendo, 6 radices + 16 numeris, sunt æquales uni primæ, ubi tum geometricè sic agendum erit.

Describatur primò quadratum, quod propositæ æquationis primam repręsentet. Et quoniam id ex hypothesi, 6 radicibus & 16 N. æquale est, pro rectangulo numerorum parte aliqua ab eodẽ resecta, quod relinquitur tandem rectangulum, radicibus solum æquale erit. Describantur nunc duo quadrata, quorum quidem





unius latus sit propositarum radicum medietas, alterius uerò, hæc eadem radicum medietas, unà cum rectanguli numerorum latere ei in rectũ iuncto. Et quoniam rectangulum numerorũ, tanquã id quod sub tota composita et adiecta seu apposita comprehenditur, unà cum quadrato dimidiæ lineæ, per hanc sextam propositionem, ei quod à recta ex dimidia & adiecta composita, tanquam ab una linea describitur, quadrato æquale est, unum autem horum, rectangulum scilicet numerorum cum quadrata dimidię, notum cum sit: & alterum, quadratum ſcilicet lineæ, à dimidia & adiecta compoſitæ, iam notum erit: quare & ipſius latus notum. Id autem cum à latere quadrati primò deſcripti, in dimidia diuiſæ lineæ altera deficiat, per additionem igitur huius ad latus notum: & ipſius tandem primò deſcripti quadrati latus, hoc eſt radicis ualor notus erit: id quod paucis, quomodo ex hac propoſitione geometricè is canon declarari ac retineri poſſit, indicare uoluimus. Atq; hæc quidem, pro demonſtratione canonũ ſecundæ æquationis in regulis Algebræ dicta, ſufficiant. Quas uerò ſubtiliores illi demonſtrationes habent, eas ſuo tempore peculiari quodam libello Lectori communicabimus.

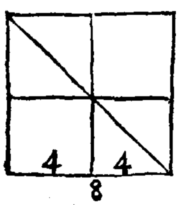
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

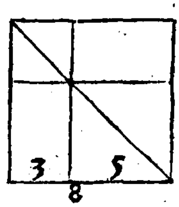
Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ' ἑνὸς τῶν τμημάτων, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

PROPOSITIO VII.

Si recta linea ſecetur utcunq;: quod à tota, quodq; ab uno ſegmentorum, utraq; ſimul quadrata, æqualia ſunt ei, quod bis ſub tota & dicto ſegmento comprehenditur rectangulo, & ei quod à reliquo ſegmento fit quadrato.

Sit recta linea ſecta utcunq;, hoc eſt, in ęqualia uel non æqualia: dico, quòd quadratum totius & quadratum alterutrius ſegmenti æqualia ſint rectangulo ſub tota & ſumpto ſegmento comprehenſo bis, cum alterius ſegmenti quadrato.





Formetur ex recta data figura, prout ipſa propoſitio exigit, & prout habet propoſitio huius quarta: & ducatur diameter. per ſingula quadrata tranſiens. Et quoniam ex propoſitione quarta huius, quadratũ totius quadratis partium, & ei quod cõprehenditur ſub partibus bis, æquale eſt, æqualibus nunc æquali, quadrato ſcilicet unius ſegmenti, ex æquo addito: mutatis deinde appellationibus, propoſitioni ſatisfactum erit.

ALIA HVIVS, ET CLARIOR DEMONSTRATIO.

Ex linea, ut quidem propoſitio requirit, figura formata, cum παραπληρώματα omnis parallelogrammi ſpacij inter ſe ſint æqualia, cumq; etiam æqualia, uel aliquod commune, ut hoc loco eſt dicti ſegmenti quadratum, æqualibus additum, quæ inde colliguntur æqualia ſint: hæc duo æqualia ſimul ſumpta, ad utrunq; æqualium dupla erunt. Sed quia ad utrunq; eorũ duplum etiã eſt, quod ſub tota & dicto ſegmento comprehenditur bis, cum ex communi quadam noticia, Eiuſdem duplicia, inter ſe æqualia ſint: & hæc duo, hoc eſt, Gnomon cum quadrato dicti ſegmenti, & quod ſub tota ac dicto ſegmento comprehenditur bis, inter ſe æqualia erunt. atque hæc tandem, ſi alterius ſegmenti quadratum ex æquo acceperint: cum ſic & collecta æqualia ſint, conſtat tandem propoſitum. Si recta linea igitur ſecetur utcunque, quod à tota, quod'que ab uno ſegmentorum, utraq; ſimul quadrata, æqualia ſunt ei, quod bis ſub tota & dicto ſegmento comprehenditur rectangulo, & ei quod à reliquo ſegmento fit quadrato, quod demonſtrari oportuit.

APPENDIX

APPENDIX.

Habet & hæc propositio suum in Arithmeticis usum, cum per eam modus subtrahendi radices quadratorum irrationales retineatur.

Quo ingenio Arithmetici radices quadratorum irrationales, unam ab altera solent subtrahere, ex hac propositione didicerunt. Postquam enim per eam quadratum alicuius rectæ diuisæ, cum quadrato alterutrius segmenti, ei quod sub tota & dicto segmento continetur bis, cum eo quod à reliquo segmento describitur quadrato, æquale esse cognouerunt, facilis illis fuit omnis subtractio. Nam mutatis numerorum appellationibus, numerum scilicet à quo subtrahitur, totum: subtrahendum deinde, unum segmentum: residuum porro, alterum diuisę rectæ segmentum esse considerantes, statim hac propositione freti, quadrata numerorum, eius scilicet à quo subtrahitur, atque etiam subtrahendi, in unum colligunt. Et quia collectum id ex hac propositione, tanto maius est quadrato residui, quantum sub his duobus numeris, toto scilicet & uno segmento, cõtinetur bis, ut de quadrato residui, deque ipso residuo illis constaret, mox illud comprehensum bis de quadratorũ collecto subtrahunt. quod quidem obiter circa hanc propositionem indicandum erat.

SEQVITVR HVIVS REI EXEMPLVM.

A $\surd 75$ debet subtrahi $\surd 27$, instituitur ergo operatio sic,

Numerus subtrahendus, hoc est, unum segmentum,		numero à quo subtrahitur, hoc est, à toto,
$\surd 27$	à	$\surd 75$

102 Totius & subtrahendi quadratum
90 Quod sub toto & subtrahendo bis
12 Quadratum residui numeri
Quare $\surd 12$, ipse residuus numerus.

SEQVITVR QVAESTIO.

De numero 34 subtracta sunt 13, quæritur de residuo. Facit 21.

Id quod per subtractionem 13 à toto numero, facile deprehenditur.

Quòd si quis, exercendi ingenij gratia, hoc altius quærere uelit, ad septimam huius secundi libri propositionem confugiat necesse est, atque sic operationem suam instituat.

	Vnum segmentum			toto
Subtrahantur	13	à	numero	34
quadrata	169			1156

Quadratorum summa 1325
minus 884, hoc est, eo quod sub toto, & dicto segmento continetur bis.
manent 441, quadratum residui
Quare 21, numerus residuus.

ALIA QVAESTIO.

Sunt duo numeri. Quoniam autem unius numeri quadrato 49. continentur, compositus uerò ex illis cum quadratum habeat 121, quantus sit numerus alter, quæritur. Facit 4.

121 49
170
minus 154
manent 16
Quare 4 &c.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

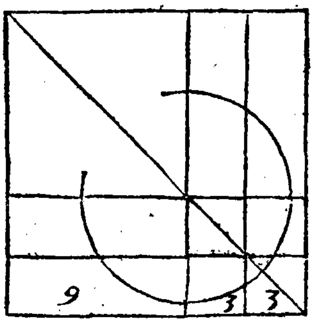
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ, τῷ τε ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

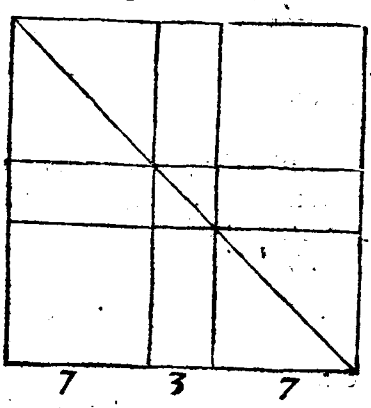
PROPOSITIO VIII.

Si recta linea secetur utcunque: rectangulum quod sub tota & uno segmentorum comprehenditur quater, cum eo quadrato quod à reliquo segmento describitur, æquale est ei quod à tota & dicto segmento, tanquam ab una linea describitur quadrato.

Sit recta linea secta: utcunque dico, quòd rectangulum, sub tota & uno segmentorum comprehensum, quater, unà cum quadrato alterius segmenti, æquale sit quadrato, quod à tota & dicto priori segmento, tanquam ab una recta, describitur. Describatur primò quadratum, cuius latus sit ipsa recta data, cum alterutra eius portione sibi adamussim iuncta: à punctis deinde, coniunctionis scilicet uno, & diuisionis altero, duæ per quadratum hoc tendentes ad angulos rectos lineæ excitentur, quadrati tandem diametro ducta, ubi hæc duas ad rectos ductas lineas secuerit, per ea puncta, tanquã à pũctis datis, reliquis duobus quadrati lateribus, per propositionem 31 primi, parallelæ ducantur, & erit huius propositionis figura parata. quam quidem si quis diligenter inspexerit, atque τῆς κατασκευῆς, necnon eorum etiam quæ in propositionibus 36 & 43 primi tradita sunt, memor fuerit, facili opera propositioni, ex quarta huius, satisfacere poterit.



Diuisa	Vnum segmentorum.
12	
9 3	3
12	12
3	& 3
36	15
quater	cum 15
144	75
81	15
225	225



Diuisa	Vnum segmentorum.
10	
in 7 & 3	7
10	10
7	& 7
70	17
quater	cum 17
280	119
9	17
289	289

numeri æquales.

ALIA

ALIA HVIVS ET CLARIOR DEMONSTRATIO.

Sit recta data, ea etiam utcunque diuisa: dico &c. Quoniam recta in duo diuisa est, segmento ei quod in collatione cum tota diuisa sumitur, ad partem etiam ubi ponitur, æqualis recta alia adamussim iungatur, quadrato deinde ab hac tota composita per 46 primi descripto, dupla figura describatur. Et quoniam rectæ diuisæ alia recta, uni segmentorũ æqualis, adamussim iuncta est, cum parallelogrammorum latera opposita, ut in primo libro demonstratum est, inter se ęqualia sint: illæ etiam quas hæ duæ rectæ, hoc est segmentum id, & recta ei æqualis, lineas sibi ęquales habent, inter se æquales erunt, super ijs deinde parallelogramma posita, cum hęc etiam æquealta sint, ex propositione 36 primi inter se æqualia. Sed quoniam supplementa omnis parallelogrammi, ut iam sępe dictum, inter se æqualia sunt: & hæc quatuor parallelogramma, quæ super illo segmento & sua æquali, atque alijs duabus, his æqualibus, rectis constituta sunt, ex communi quadam noticia, inter se ęqualia erunt, atque deinde horum quatuor aggregatũ, ad id quod super idem segmentum est positum parallelogrammum, quadruplum. Pari ratione & reliqua quatuor, circa uel extra diametrum posita parallelogramma, inter se æqualia, ac totum deinde ad id quod supra alterum diuisæ segmentum est positum, quadruplũ. Illud igitur prius cum hoc aggregato, quæ ambo simul Gnomonis figuram referunt, ad rectangulum, sub tota & uno segmentorum comprehensum, quadruplum erit. Quare alterius segmenti quadrato ex ęquo illis apposito: gnomon cum illo alterius segmenti quadrato, hoc est, totius composite, ut unius lineæ, quadratum, ei quod sub tota & dicto segmento comprehenditur quater, cum eodem alterius segmenti quadrato, ęquale erit. Si recta igitur linea secetur utcunque: rectangulũ, quod sub tota & uno segmentorum comprehenditur quater, cum eo quadrato quod à reliquo segmento describitur, ęquale est ei quod à tota & dicto segmẽto, tanquam ab una linea describitur quadrato. quod demonstrari oportuit.

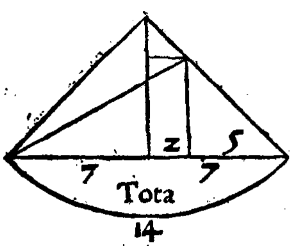
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα· τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας, καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου.

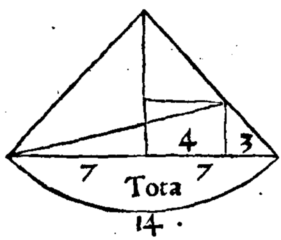
PROPOSITIO .IX.

Si recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: quæ ab inæqualibus segmentis totius fiunt quadrata, dupla sunt eius quod à dimidia, & eius quod à medio sectionum fit quadratorum.

Sit recta linea, in duo æqualia, in duo etiam inæqualia diuisa: dico, quadrata inæqualium segmentorum simul sumpta, dupla esse quadratorũ, quorum unum quidem à medietate lineæ, alterum uerò ab ea quæ diuisionum punctis interiecta est linea, describitur. Excitetur ex puncto æqualis diuisionis in linea, per propositionem 11. primi, ad angulos rectos linea, eaque per 3 eiusdem, ad æqualitatem medietatis diuisæ posita, ab eius altera extremitate duæ ad rectæ diuisæ extremitates lineæ demittantur. Describuntur autem sic duo triangula, rectangula, & Isoscelia, ut patet ex structura. Excitetur rursus ex puncto inæqualis diuisionis, alia ad angulos rectos linea, uel si mauis, priori ad rectos ductę linea parallela, eaque ad latus usque oppositum continuata, ab huius & lateris oppositi contactu, ad priorem in triangulo πρὸς ὀρθὰς ductam linea diuisę parallela ducatur. Et describuntur alia duo triangula,



quæ & ipſa, ut patebit, rectangula ſunt, & iſoſcelia. Quòd ſi tandem à communi horum duorum triangulorum copula, ad illam rectæ diuiſæ extremitatem, quæ huic quodammodo è regione poſita eſt, linea recta ducatur, huius propoſitionis figura conſtituta erit, cuius quidem explicatio & demonſtratio talis. Quoniam ad punctum æqualis diuiſionis conſtitutorum triangulorum utrunq; iſoſceles eſt, ex ſtructura, & orthogonium, cum anguli eorum ad baſim, per priorem partem propoſitionis quintæ primi, inter ſe æquales ſint, uterq; in utroq; triangulo angulus, primò, ex corollario propoſitionis 32 primi, medietas rẽcti: angulus deinde integer, quem recta diuiſa ſubtendit: rectus erit. Ad hæc, cum linea ex communi partialium triangulorum copula ueniens, ut habet propoſitionis ſtructura, diuiſæ rectæ ſit parallela, deinde uerò alia quædam recta, quæ uidelicet ex puncto ęqualis diuiſionis in recta data πρὸς ὀρθὰς excitata eſt, in illas parallelas incidat: angulus externus, ex ſecunda parte propoſitionis 29 primi, ſuo interno & oppoſito æqualis eſt. Quia uerò rectus eſt ipſe internus, ex ſtructura: & externus ſic rectus erit. rectangulũ igitur eſt illud partiale triangulum, atq; deinde per corollarium propoſitionis 32 primi, & ſextam propoſitionem eiuſdem, idem etiam iſoſceles. In hunc modum, & alterum partiale triangulum, ut rectangulum & iſoſceles ſit, demonſtrabitur. Nunc autem cum trianguli rectanguli & iſoſcelis, eius quidem, cuius latera ſunt, ſubtenſa indiuiſa, medietas rectæ indiuiſa, & perpendicularis, medietati diuiſæ ęqualis, quadratũ lateris rectum angulum ſubtendentis, reliquis duorum laterum, quadratis, per propoſitionem 47 primi, æquale ſit: erit propter æqualitatem laterum, illud ad utrunq; eorum duplum. Eſt itaq; quadratum hypotenuſæ huius rectanguli, quadrato medietatis rectæ diuiſæ duplũ, quod eſt notandum. Pari ratione etiam in triangulo rectãgulo & Iſoceli partiali ſuperiori, cuius nimirum alterũ circa rectũ angulũ latus, pars eſt perpendicularis, ex ęqualis diuiſionis puncto excitatæ, quadratum ſubtenſæ angulo recto, ad quadratum lineæ, quæ ex communi partialium triangulorum copula, medietati rectæ diuiſæ eſt ad æquediſtantiã ducta, duplum erit: quare etiam ad quadratum ſuæ ęqualis, lineæ ſcilicet, quę inter diuiſionis puncta iacet, duplum. Cum aũt iam duæ lineæ ſint, quarum utriuſq; quadratũ, ad alterius lineæ quadratum duplum eſt, & illarum quadrata ſimul ſumpta, ad harũ ſimul ſumpta quadrata dupla erunt. Sed illarum linearum quadrata, quæ ſunt ad alia dupla, æqualia ſunt, quadrato lineę, ex communi partialium triangulorum copula ad angulum oppoſitum ductæ, cuius quadrato etiam (cum hæc linea duorum orthogoniorum triangulorum rectos ſubtendat) ſi ęqualis pro æquali linea ſumatur, ſegmentorum inæqualis diuiſionis quadrata æqualia ſint, per communem tandem illam noticiam: Quę eidem ęqualia, & inter ſe ſunt æqualia, propoſitum inferri poterit, nimirum. Si igitur recta linea ſecetur in æqualia & non æqualia: quæ ab inæqualibus ſegmentis totius fiunt quadrata, dupla ſunt eius quod à dimidia, & eius quod à medio ſectionum fit quadratorum. quod demonſtraſſe oportuit.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

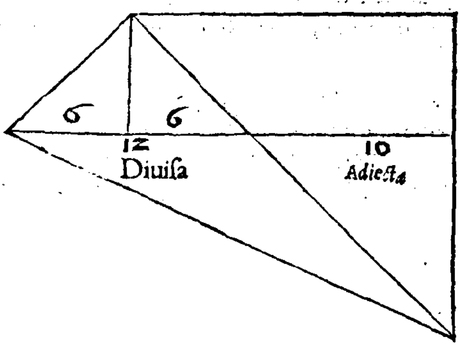
Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας· τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης τὰ συναμφότερα τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας, καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντος τετραγώνου.

PROPOSITIO

PROPOSITIO X.

Si recta linea secetur bifariam, adijciaturq; aliqua ei adamussim recta linea: quod à tota cum apposita, & quod ab apposita, utraq; simul quadrata, dupla sunt eius quod à dimidia, & eius quod ab adiacente ex dimidia & adiecta, tanquam ab una, descriptorum quadratorum.

Sit recta linea proposita, ea etiam bifariam diuisa, atq; alia deinde ei adamussim adiecta: dico, duo quadrata, compositæ scilicet lineæ & adiectæ, dupla esse ad quadrata linearum, unius quidem, quæ est medietas rectæ datæ, alterius uerò, quæ ex medietate altera atq; ei adiecta est composita. Erigatur ex puncto æqualis diuisionis ad angulos rectos linea, atq; ea ad æqualitatem medietatis rectæ diuisæ posita, altera eius extremitas duabus rectis, cum duabus extremitatibus rectæ diuisę coniungantur, rectam illam, quæ per coniunctionis punctum transierit, ulterius continuando. Fiant autem duo triangula, rectangula atq; Isoscelia, in quorum utroque uterq; angulorum ad basim, ex structura & propositione 32 primi, medietas recti est, quod est notandum. Porrò secundum quantitatem ad rectos ductæ, atq; eius quæ ex medietate rectæ diuisę & adiecta composita est, lineæ, parallelogrammum rectangulum describatur, latus illud eius, quod ad rectos ductæ lineę oppositum est & parallelum, ultra adiectam rectam cōtinuando. Et quia hanc continuatam, cum illa, quæ per coniunctionis punctum transit, propterea quòd in eas alia recta cadens, ex illa parte duos angulos duobus rectis minores facit, ex cōmuni quadam noticia in libro primo exposita, concurrere necesse est, continuentur igitur ambę ut triangulum fiat: & erūt quæ sic apparēt duo triangula, tam totale quàm partiale, ex structura & secunda parte propositionis 29 primi, rectangula & Isoscelia, quod & ipsum notandum. Vltimò ducatur & alia recta, cuius termini sint reliquę extremitates datæ & continuatę linearum, & erit figura, unde nunc huius propositionis demonstratio elici poterit, hoc modo parata.



Et quoniam quadratum lineæ ultimò ductæ, per propositionem 47 primi, quadratis linearum, compositę nimirum ex data & adiecta, & ipsius adiectæ, ęquale est, idem etiam quadratum, cum ipsius latus duorum orthogoniorum triangulorum rectos subtendat, ęquale, per eandem 47, quadratis duarum linearū, quę ab extremitate ad rectos ductę altera, per extremitates rectæ diuisæ descendunt: per hanc communem noticiam, Quæ eidem æqualia, &cæ. quadrata priora, compositæ scilicet & additę lineæ, descendentium linearum quadratis ęqualia erunt. Sed quia descendentium quadrata, ratione suorum triangulorum, quę & rectangula & Isoscelia sunt, ad quadrata, medietatis diuisę & compositæ deinde ex altera medietate & adiecta, dupla sunt: propter ęqualitatem quadratorum, descendentium scilicet linearum, compositæ deinde & adiectę, constabit propositum. Compositę scilicet & adiectę linearum quadrata, dupla esse quadratorum, medietatis lineæ diuisę, & eius quæ ex medietate & adiecta composita est. Si recta igitur linea secetur bifariam, adijciaturq; aliqua ei adamussim recta linea: quod à tota cū apposita, & quod ab apposita, utraq; simul quadrata, dupla sunt eius quod à dimidia, & eius quod ab adiacente ex dimidia & adiecta, tanquam ab una, descriptorū quadratorum. quod demonstrari oportuit.

SEQVITVR EXEMPLVM IN NVMERIS.

Totus 14		Adiectus
7	7	9

Operatio.

Totus & adie.	Adiectus	Dimidius	Dimidius & adie.
23	9	7	16
529	81	49	256

$\underbrace{529 \quad 81}_{610}$ duplus $\underbrace{49 \quad 256}_{305}$

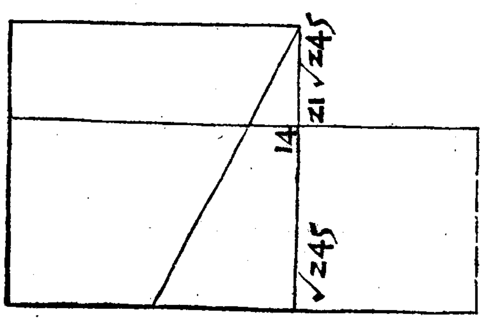
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

PROPOSITIO XI.

Datam rectam lineam secare, ut quod sub tota & altero segmento comprehenditur rectangulum, æquum sit ei, quod fit à reliquo segmento quadrato.

Sit recta linea data, atque propositum eam in duo secare sic, ut quod sub tota & uno segmento, breuiori scilicet, comprehenditur rectangulum, æquale sit ei, quod ab altero, hoc est longiori segmento describitur quadrato. Describatur à recta data quadratum, sicuti docet propositio in primo 46, illorum deinde laterum, quæ re-



ctæ datæ insistunt, altero bifariam diuiso, à diuisionis puncto linea quædam recta usque ad alteram datæ extremitatem ducatur, & describitur triangulum rectangulum. Porrò medietas lateris diuisi, quæ à puncto diuisionis & angulo huius trianguli recto intercipitur, eousque prolongetur, donec lateri, in triangulo rectum angulum subtendenti, æqualis fiat. & ubi deinde secundum quantitatem partis prolongatę exterioris, quadratum ad ipsam descriptum, latus item huius quadrati, quod exteriori parti oppositum est, per quadratum primò descriptum continuatum fuerit, propositioni tandem satisfactum erit. Id quod, cum tam quadratorum, ex definitione, quàm etiam parallelogrammorum opposita latera, ex propositione 34 primi, inter se ęqualia sint, sexta propositio huius & penultima primi, ęqualibus subinde pro æqualibus sumptis, ab æqualibus item eodem communi subtracto, clarè manifestabunt.

SEQVITVR

SEQVITVR EXAMEN HVIUS DIVISIO-
nis in numeris.

Totus	Longius segmen.	Breuius
14	$\sqrt{245} - 7$	$21 - \sqrt{245}$

in se

cum

$21 - \sqrt{245}$	$\sqrt{245} - 7$
cum 14	$\sqrt{245} - 7$

Producuntur

$294 - \sqrt{48020}$,	$294 - \sqrt{48020}$
Id quod continetur sub toto & breuiori.	Quadratum segmenti longioris.

Numeri, uel producta æqualia.

APPENDIX.

Hanc lineæ diuisionem requirit propositio nona libri quarti, quę nimirum proponit, quomodo Isosceles triangulum, cuius uterq; angulorum ad basim ad tertium reliquum duplus sit, formari debeat, id quod absq; huius diuisionis cognitione aliàs absolui nequit. Quas deinde proprietates habet hęc eadem sic diuisa linea, quid item conducat, aliquo modo ostendit liber Euclidis tredecimus, cuius obiter Lectorem admonendum esse duximus.

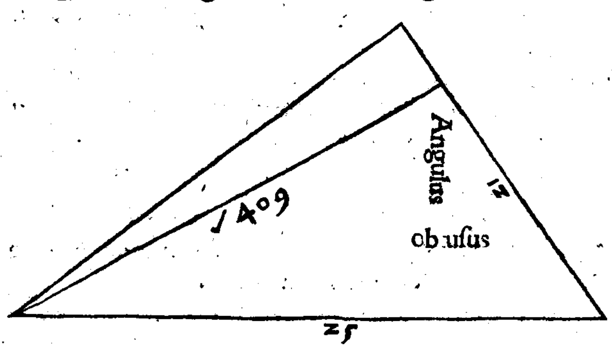
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ.

Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον, μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς, ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ἐφ᾽ ἣν ἐκβληθεῖσαν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ.

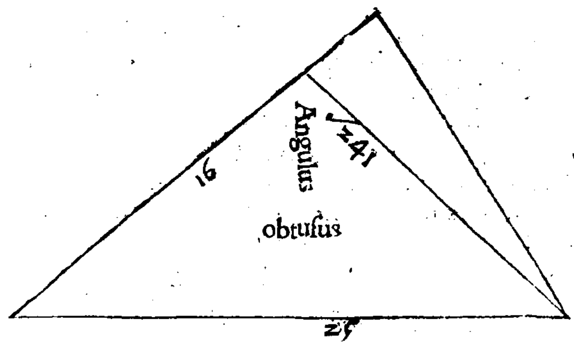
PROPOSITIO XII.

In obtusiangulis triangulis: quod ab obtusum angulum subtendente latere fit quadratum, maius est quadratis, quæ fiunt à lateribus obtusum angulum comprehendentibus, comprehenso bis sub uno eorum quæ sunt circa obtusum angulum, in quod, cum protractum fuerit, perpendicularis cadit, atq; assumpta extra sub perpendiculari ad obtusum angulũ.

Obtusiangulo triangulo exposito, uno etiam eorum quę circa obtusum sunt angulum latere, ex parte illius anguli, adeò ultra triangulum continuato, ut in id ab



angulo trianguli acuto, opposito quodammodo, perpendicularis commodè cadere possit, atq; hæc postea ducta, figura descripta erit: dico ergo, quadratum, quod à latere obtusum angulū subtendente describitur, maius esse, quàm sunt quadrata, quæ ab ijs quæ circa obtusum angulum sunt, lateribus describuntur, eo quantum est id, quod bis cōprehenditur sub uno latere eorum, quæ circa obtusum angulum sunt, atq; eo, quod à dicto latere, si illud ultra obtusum angulum prius protractum fuerit, & demissa ab angulo, quem hoc latus subtendit, perpēdiculari intercipitur. Demonstratio huius, quia est facilis, cum ex propositione penultima primi, usurpa



ta bis, quarta tamen huius, propter sumptionem æqualium pro æqualibus interposita, procedat, Lectori eam ut inde colligat commendabimus. In obtusiangulis igitur triangulis: quadratum lateris subtendentis angulū obtusum, tanto maius est reliquorū duorū laterum quadratis, quantum est id, quod bis comprehenditur sub alterutro reliquorum, & portione eidem alteri extra triangulum in directū adiecta, quæ à perpendiculari ab angulo huic lateri opposito demissa, & angulo obtuso intercipitur, quod demonstrasse oportuit.

APPENDIX.

Quomodo uerò, amblygōnio triangulo, cuius tria latera nota sint, exposito, portionis exterioris quantitas, quanta deinde sit perpendicularis, in numeris inueniri debeat, sequenti calculo manifestabitur.

Quantum ad figuram priorem.

Trianguli latera	25	√ 409	12
Laterum quadrata	625	409	144

625
553 Et tantum est quod sub latere ultra triangulum continuato, & portione
72 exteriori comprehenditur bis. Huius igitur dimidio 36 in latus notum
12 diuiso: & portio illa exterior nota fiet. Porrò perpendicularis nunc quanta sit, penultima propositio primi sequenti calculo manifestabit.

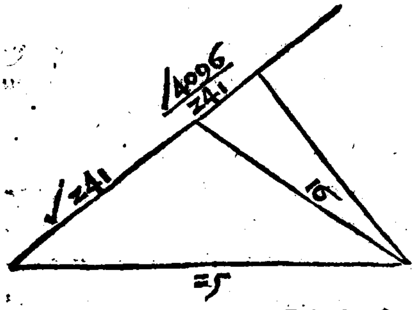
3	√ 409	Latera
9	409	Quadrata

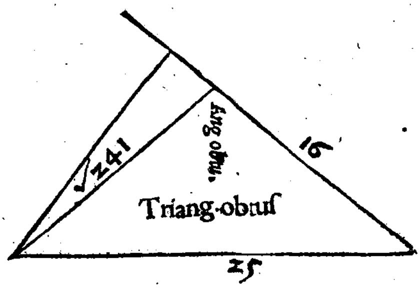
400 Quadratum perpendicularis.

Perpendicularem igitur ipsam, huius quadrati radix, quæ est 20, manifestabit.

SEQVVNTVR

SEQVVNTVR HVIVS PROPOSITIONIS DVAE figurae aliae.



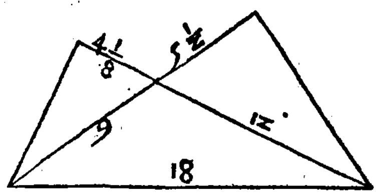


Calculus figurae posterioris.

Trianguli latera	25	16	√ 241
Laterum quadrata	625	256	241

Facta subtractione, manent 128, id quod sub latere ultra triangulum continuato, & portione exteriori comprehenditur bis, cuius dimidio 64 in latus notum 16 diuiso, exeũt 4, portio exterior. Perpendicularis igitur 15, quod examinari potest.

ALIA FIGVRA, IN QVA DVO EXEMPLA simul exposita sunt.



Examen illius in numeris.

Latera

Subtendens angulum obtusum	Includentia angulum obtusum	
18	9	12
Qua- 324 dra-	81 ta	144
225	225	
99		

99 duplum rectanguli, quare $49\frac{1}{2}$, rectangulum ipsum, quod nimirum sub alterutro circa obtusum angulum latere, 9 aut 12, & sua exteriori prolongata portione, ab eodẽ angulo & ipsa perpendiculari intercepta comprehenditur, id quod sequens calculus claremanifestabit.

Latus alterum	9		Latus alterum	12
Intercepta portio	$5\frac{1}{2}$		Intercepta portio	$4\frac{1}{8}$
	45			48
	$4\frac{1}{2}$			$1\frac{1}{2}$
	$49\frac{1}{2}$ re-	uel		$49\frac{1}{2}$ re-

ctangulum comprehensum sub alterutro latere & intercepta portione, ut suprà ostensum est. Quare &c.

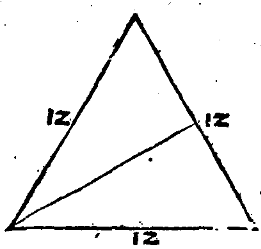
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ.

Ἐν τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον, ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν, ἐφ᾽ ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ.

PROPOSITIO XIII.

In acutiangulis triangulis: quod ab acutum angulum subtendente latere describitur quadratum, minus est eis quæ ab acutum angulũ comprehendentibus lateribus fiunt, quadratis, comprehenso bis sub uno eorum, quæ sunt circa acutum angulum in quod perpendicularis cadit, atq; assumpta interius sub perpendiculari ad acutum angulum.

Sit triangulum acutiangulum, atq; in eo acutus angulus sumptus, ab utrouis deinde ex reliquis angulo ad suum subtensum latus, per propositionem 12 primi, recta perpendiculari ducta: dico, quadratum quod à latere rectum angulum subtendente describitur, minus esse quàm sunt quadrata, quæ à lateribus circa acutum angulum describuntur, eo quantũ est id quod sub uno latere eorum quæ circa acutum angulum sunt, in quod scilicet perpẽdicularis cadit, atq; sub intercepta, à perpendiculari & acuto angulo, portione comprehenditur bis. Cum enim unum circa acutum angulum latus per demissam perpendicularem utcunq; diuisum sit: erunt quadrata, quæ à diuiso illo latere & intercepta à perpendiculari anguloq; acuto, portione describuntur, ei quod sub tota & dicta portione comprehenditur bis cum quadrato alterius portionis, per 7 huius æqualia: atq; his æqualibus communi quodam, quadrato scilicet perpendicularis, addito: illa tria quadrata his tribus, rectangulo nimirũ bis sumpto & duobus quadratis æqualia erunt. Sed quia utrobiq; duobus quadratis, ratione anguli recti, ex penultima primi unius lineæ quadratum æquale est, mutatione æqualium facta, loco scilicet duorum quadratorum laterum circa rectos angulos, ex utraq; parte, rectos angulos subtendentiũ, quæ scilicet non diuisa sunt, quadratis sumptis: & quadrata laterum quæ sunt circa acutum angulum, ei quod sub diuiso latere & intercepta portione comprehenditur bis, atq; quadrato lateris, angulum acutum subtendentis, æqualia erunt: quadratum igitur lateris, acutum angulum subtendentis, solùm quadratis eorum, quæ circa acutum angulum sunt, laterũ minus erit in rectangulo, quod sub diuiso latere, atq; intercepta a perpendiculari & acuto angulo portione, comprehẽditur bis. In oxygonijs igitur triangulis, quadratum lateris subtendentis angulum acutum tanto minus est reliquorum laterum quadratis, quantum est id quod bis comprehenditur sub altero illorum, in quod nimirum perpendicularis cadit, & portione a perpendiculari anguloq; acuto intercepta. quod demonstrasse oportuit.

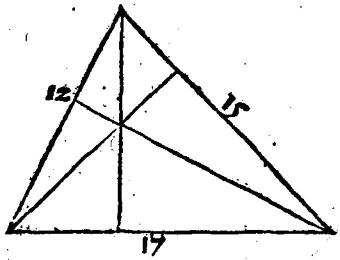


APPENDIX.

Quam uim habeant hæ duæ propositiones, 12 scilicet de Amblygonio, & 13 de Oxygonio, unà cum penultima primi de triangulo Orthogonio, experietur is, qui aliquando in triangulorum tractationem, in qua semper ex tribus notis ad reliquorũ trium notitiam, mediante arcuum & chordarũ tabula, peruenitur, inciderit.

TRIA

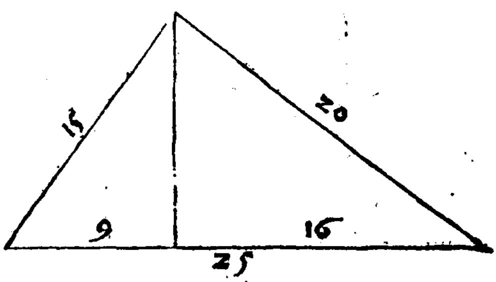
TRIA EXEMPLA VNA FIGVRA EXPOSITA.



ADMONITIO.

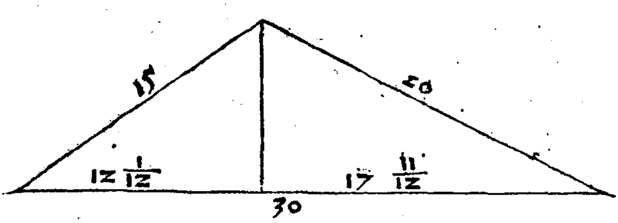
Non autem est necesse, ut omnes trianguli propositi anguli acuti sint, ut quidem id Acutianguli trianguli definitio requirit. Sed generaliter (cum nullum triangulum sit, quod non acutum angulum habeat) de omnibus, cuiuscunque generis fuerint, triangulis, hæc propositio intelligi, per ea insuper declarari potest, id quod per sequentia duo exempla manifestabitur.

PRO TRIANGVLO RECTANGVLO.



In hoc triangulo rectãgulo, quindecies 15, ratione unius acuti anguli, tanto minus sunt quàm uicies quinquies 25, & uicies 20, quantum est quod sub 20 & 20, uel quod sub 25 & 16 continetur bis. Sic ratione alterius acuti, cuius subtensum latus sunt 20, ubi uicies 20, tanto minus sunt quàm uicies quinquies 25, & quindecies 15, quantum est quod sub 15 & 15, uel quod sub 25 & 9 continetur bis. id quod multiplicatione cernere licet.

PRO TRIANGVLO OBTVSIANGVLO.



Similiter etiam in triangulo obtusiangulo, quindecies 15, ratione unius acuti anguli, minus sunt quàm tricies 30 & uicies 20, quantum est quod sub 30 & $17\frac{11}{12}$ continetur bis. Sic ratione alterius acuti anguli, cuius subtensum latus sunt 20, ubi uicies 20 tanto minus sunt quàm tricies 30 & quindecies 15, quantum est quod sub 30 & $12\frac{1}{12}$ continetur bis. id quod examinari potest.

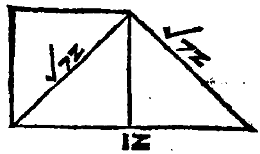
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ.

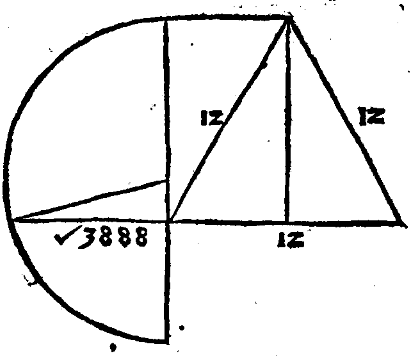
Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

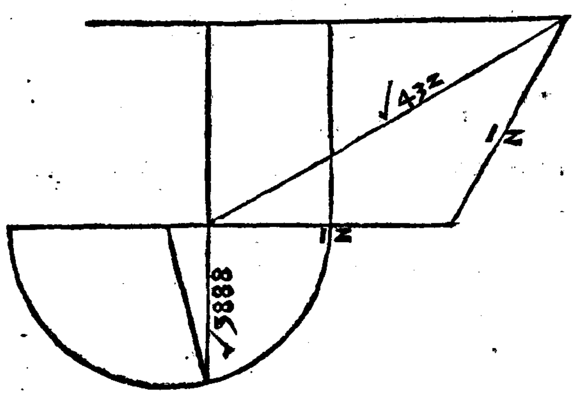
PROPOSITIO XIIII.

Dato rectilineo, æquale quadratum constituere.

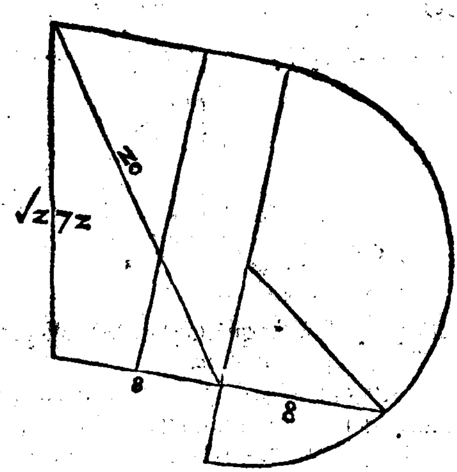
Sit rectilineum datum qualecunq;, atq; propositum, quadratum ei æquale constituere. Quia uerò rectilineum datum, uel triangulum, uel plurium laterum rectilineum esse potest. Igitur si triangulum fuerit, ei ex propositione 42 primi: si uerò plurium laterum rectilineum, ex 45 eiusdem primi æquale parallelogrammum constituendum est. Quòd si quadratum fuerit hoc constitutum parallelogrammum, factum erit propositum. Sin minus, ex duobus huius parallelogrammi lateribus, ijs quidem quæ sunt iuxta unum & eundem angulum, alterum alteri adamussim adijciatur, utrouis scilicet huius anguli latere, secundum quantitatem alterius, longiore facto. Deinde secundum hanc totam, ex duobus lateribus compositam lineam, tanquam diametrum, ex eius medio, quod quidem per propositionem 10 primi haberi potest, semicirculus describatur. Quòd si tandem per punctum coniunctionis laterum ea, quæ ad idem punctum terminatur, linea usque ad circumferentiam continuata fuerit: propositioni satisfactum erit. Nam hæc continuata portio ea linea est, cuius uidelicet quadratum rectilineum referre debet, id quod per lineam, à centro ad intersectionem circumferentiæ cũ iam inuenta, rectam ductam, ex quinta huius & penultima primi, æquali interim pro æquali linea sumpta, ab æqualibus etiam deinde æquali, uel eodem communi ablato, facile demonstrabitur. Dato igitur rectilineo, æquale quadratum constitutum est. quod fieri oportuit.







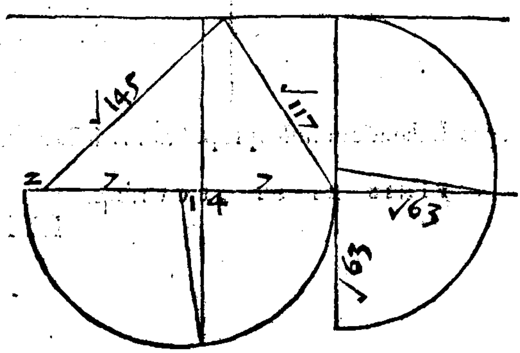
SEQVITVR HVIVS PROPOSITIONIS GEOmetrica figura alia.



PORRO CALCVLVS TRIANGVLI DATI IN hac figura, sic se habet.

Latera	Excessus			
20	√68 — 6		Primum	32
√272	14 — √68	Productum	secund.	128
8	√68 + 6		tertium	4496.
28 + √272	14 + √68			

atque huius radix quadrata 64, Trianguli, Parallelogrammi & Quadrati area. Quoniam autem unum parallelogrammi latus est notum, 4 scilicet, area etiam nota, nimirum 64: & alterum latus, diuisione, notum erit. Est autem illud 16.

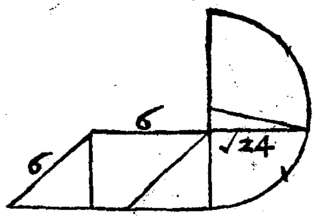


Inuentio areae trianguli, cuius

Latera sunt	Excessus uerò
14	$\sqrt{\frac{117}{4}} + \sqrt{\frac{145}{4}} - 7$
√145	$\sqrt{\frac{117}{4}} - \sqrt{\frac{145}{4}} + 7$
√117	$7 + \sqrt{\frac{145}{4}} - \sqrt{\frac{117}{4}}$
14 + √145 + √117	$7 + \sqrt{\frac{145}{4}} + \sqrt{\frac{117}{4}}$

Primum	secundum productum
$\sqrt{4241\frac{1}{4}} + 16\frac{1}{2}$	$\sqrt{4241\frac{1}{4}} - 16\frac{1}{2}$
Tertium prod. 3969	Area trianguli 63

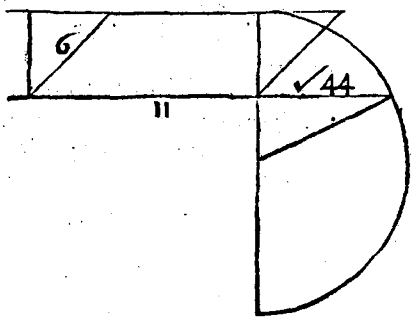
ALIVD EXEMPLVM DE RHOMBO.



Declaratio propositionis quintæ, hoc loco allegatæ, per numeros.

Totus numerus est 10, diuisus in partes, æquales quidem 5 & 5. in inæquales uerò 6 & 4. Medium itaq; sectionum, hoc est excessus longioris portionis respectu medietatis lineę uel numeri diuisi 1. Rectangulum porrò sub partibus inæqualibus comprehensum, sunt 24, cum quadrato unitatis, ueniunt 25. & tantum est etiam quadratum numeri 5, hoc est medietatis diuisi. quod ostendere libuit.

ALIA ET VLTIMA HVIVS PROPOSITIONIS GEOmetrica figuratio de Rhomboide.



Atq; hæc pro declaratione huius propositionis dicta sufficiant.

FINIS LIBRI SECVNDI.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙ ΧΕΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

EVCLIDIS ELEMENTORVM GEOmetricorum *liber tertius.*

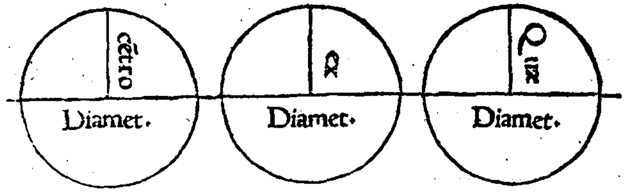
HActenus Euclides prosecutus demonstrationum euidentissimis rationibus, proprietates simplicissimas recti linearum figurarum, superioribus duobus libris: nunc in tertio, quæ circuli sunt propria πάθη (quod ad doctrinam elementorum pertinet, quæ planè Geometrica & abstracta est) explanare aggreditur. Non enim quę cœlestium, aut quæ aliorum proprietas sit circulorum consideratur hoc loco, nam subiectis cum rebus nihil commune habet geometria sincerior, quippe cōcretione atq; adiunctione certorum subiectorum, mox in aliarum scientiarum titulos cum degeneret, ut Astronomiæ, Architectonicæ, Opticæ, & similium, quarum ipsa sibi scientiam non arrogat quidem, uerùm illas tamen absq; geometria intelligi non posse aut addisci, nemo mediocriter etiam eruditus ignorat. Liber præsens uel hoc nomine præstat præcedentibus, quòd nimirum hic de proprietatibus tractat perfectissimæ figuræ, nempe de Circulo, siquidem pro natura subiectarum rerum scientię aliæ alijs sunt pręponendæ. Vtilis porrò est ad cognitionem Chordarum, & arcuū pręcisionem in circulis, quippe cum quæ est angulorum, eadem sit quoq; arcuum & chordarum inter se ratio. Præterea de circulis cōtingentibus & sese mutuo secantibus, quòd illud quidem uno, hoc uerò duobus tantum punctis fiat. Quinetiam ostendit, Contingentiæ angulum, omniū acutorum rectilineorum angulorum esse minimū: Diametrum item, omnium rectarum linearum in circulo longissimam. & id genus multa complectitur hic liber tertius. Docet præterea, tribus punctis signatis (modo non fuerint in una recta linea) circulus per illa transiens, quo pacto describatur. Quomodo deinde in corpore aliquo solido, sphæricum seu parallelepipedum illud fuerit, duo puncta opposita, ut quæ in sphęricis Poli nomen habeant, inueniantur. Quæ ambo in instrumentorum compositionibus quàm summè sint necessaria, nullis non qui hoc in genere scientiæ uersati sunt, & se in eo aliquantum exercuerunt, manifestum est.

ΟΡΟΙ.

Ἴσοι κύκλοι εἰσίν, ὧν αἱ διάμετροι εἰσὶν ἴσαι.
ἢ ὧν αἱ ἐκ τῶν κέντρων, ἴσαι εἰσίν.

DEFINITIONES.

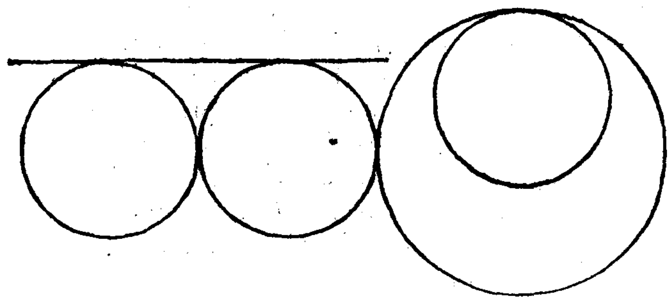
1 Aequales circuli sunt, quorum diametri sunt æquales. Aut, quorum quæ ex centris, æquales sunt.



Εὐθεῖα κύκλου ἐφάπτεσθαι λέγεται, ἥτις ἁπτομένη τοῦ κύκλου, καὶ ἐκβαλλομένη, οὐ τέμνει τὸν κύκλον. Κύκλοι ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται, οἵτινες ἁπτόμενοι ἀλλήλων, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλων.

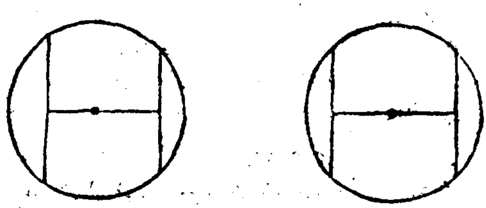
2 Recta linea circulum tangere dicitur, quæ tangens circulum, & eiecta, circulum non secat.

3 Circuli tangere sese mutuo dicuntur, qui sese mutuo tangentes, sese mutuo non secant.



Ἐν κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν τοῦ κέντρου εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ' αὐτὰς κάθετοι ἀγόμεναι, ἴσαι ὦσι. Μεῖζον δὲ ἀπέχειν λέγεται, ἐφ' ἣν ἡ μείζων κάθετος πίπτει.

4 In circulo æqualiter distare à centro rectæ lineæ dicuntur, cum à centro in eas perpendiculares ductæ, æquales fuerint. Plus uerò distare dicitur, in quam longior perpendicularis cadit.



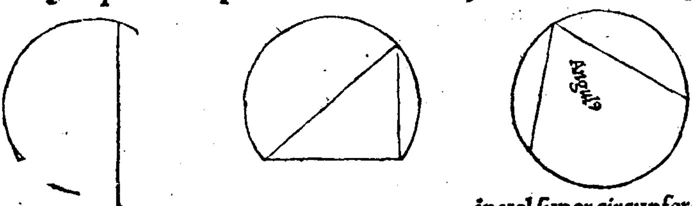
Τμῆμα κύκλου, ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα, ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

Sectio

5 Sectio circuli, est figura comprehensa sub recta linea, & circuli circunferentiã.

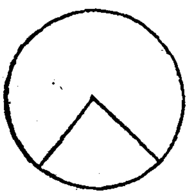
Τμήματος γωνία, ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας. Ἐν τμήματι δὲ γωνία ἐστίν, ὅταν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τμήματος ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας, ἥτις ἐστὶ βάσις τοῦ τμήματος, ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν εὐθεῖαι ἀπολαμβάνωσί τινα περιφέρειαν, ἐπ' ἐκείνης λέγεται βεβηκέναι ἡ γωνία.

6 Sectionis angulus est, qui sub recta linea, & circuli circũferentia comprehenditur. 7 In sectione uerò angulus est, cũ in sectionis circunferentia punctum aliquod sumptum, atq; de illo ad rectę lineæ fines, quę est sectionis basis, rectæ lineę ductæ fuerint, comprehensus sub coniunctis rectis angulus. 8 Quando autem comprehendentes angulum rectæ lineę aliquam suscipiunt circũferentiam, in illa dicitur esse angulus.



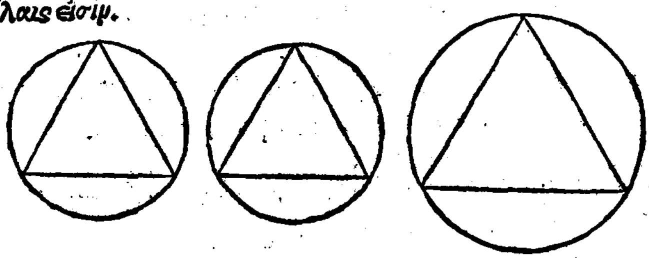
in uel super circunferentia.

Τομεὺς κύκλου ἐστίν, ὅταν πρὸς τῷ κέντρῳ αὐτοῦ τοῦ κύκλου σταθῇ ἡ γωνία, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῶν τὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῶν περιφερείας.



9 Sector circuli est, cum ad centrum circuli steterit angulus, comprehensa figura sub angulum comprehendentibus rectis lineis, & assumpta sub eis circunferentia.

Ὅμοια τμήματα κύκλου, ἐστὶ τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας. ἢ, ἐν οἷς αἱ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.



Similes

10 Similes ſectiones circuli ſunt, quæ angulos æquales ſuſcipiunt, Aut, in quibus anguli inter ſe æquales ſunt.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

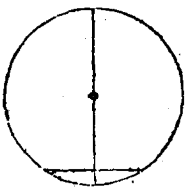
ΠΡΩΤΗ. Α.

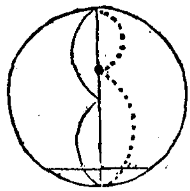
Τοῦ δοθέντος κύκλου, τὸ κέντρον εὑρεῖν.

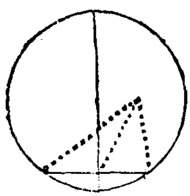
PRIMA I.

Dati circuli, centrum inuenire.

Sit circulus datus, atque propoſitum, illius centrum inuenire. Ducatur in circulo recta quædam linea utcunq;, ita tamen, ut utraq; eius extremitas in circuli ſit circumferentia, hac deinde recta, per propoſitionem 10 primi biſariam diuiſa, à puncto diuiſionis huius ad angulos rectos linea, quæ ſimiliter utrāq; extremitatē in circunferentia habeat, per 11 eiuſdem, excitetur. Quòd ſi tandem hæc ad rectos ducta biſariam diuiſa fuerit: punctum huius diuiſionis centrum circuli erit. Id quod ab impoſſibili, ubi aliud quoddam, præter hoc, centrum ſignatum fuerit, demonſtrari poterit, hoc modo. In hac ipſa per mediæ diuiſionis punctum tranſeunte linea, centrum aliud nullum ſtatui poteſt: alioqui ſequeretur ſtatim, ex ſtructura, & circuli definitione, æquali pro æquali linea ſumpta, Partialem ſua totali linea eſſe longiorem: uel contrà, Totalem ſua partiali breuiorem, quod eſt impoſſibile. Statuatur ergo nunc extra πρὸς ὀρθὰς ductam punctum loco centri aliud, à quo etiam tres lineæ rectæ, una quidem ad communem duarum linearum interſectionem, reliquæ deinde duæ ad duas primò ductæ extremitates, ducantur. Et quia triangula quæ ſic fiunt, huiuſmodi ſunt, qualia propoſitio in primo octaua requirit: anguli qui à duabus ſemidiametris ſubtenduntur, per eandem, inter ſe æquales erunt: ex definitione igitur uterq; rectus. Quia autem, ut habet cōmunis quædam noticia. Omnes recti anguli inter ſe ſunt æquales, ea mediante, & quia prius etiā ex hoc communi duorum rectorum angulorum puncto πρὸς ὀρθὰς linea educta eſt, infertur tandem, ampliorem angulum anguſtiori: uel contrà, anguſtiorem angulo ampliori eſſe æqualem, quod cum & ipſum abſurdum ſit: operationem conſtare punctum deinde in linea πρὸς ὀρθὰς ducta, medium, centrū circuli eſſe, nemini dubium erit. Ὁμοίως δὴ δείξομεν: Simili modo demonſtrabitur, quòd nullum punctum aliud, præter hoc quod in medio huius ductæ ſignatum eſt, centrum circuli eſſe poſſit. Dati igitur circuli centrum inuentum eſt, quod fieri oportuit.







ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, Ὅτι ἐὰν ἐν κύκλῳ τὶς εὐθεῖα εὐθεῖάν τινα δίχα, καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ· ἐπὶ τῆς τεμνούσης ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

COROLLARIVM.

Ex hoc ſanè manifeſtum eſt, Quòd, ſi in circulo recta quædam linea rectam quandam lineam biſariam, & ad angulos rectos ſecet: in ſecante ſit centrum circuli.

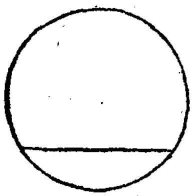
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β.

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα· ἡ ἐπὶ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα, ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

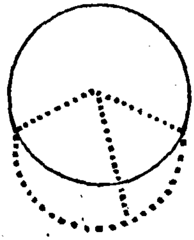
PROPOSITIO II.

Si in circuli circumferentia duo puncta utcunq; accepta fuerint: ad ipsa puncta ducta recta linea, intra ipsum circulum cadet.

Sit circulus, duo etiam puncta in ipsius circumferentia utcunq; signata: dico, si



hæc puncta linea quadam recta coniungentur, hanc rectam intra circulum cadere oportere. Colligitur huius propositionis demonstratio ab impossibili. Nisi enim intra circulum cadat recta hæc, statim contrà illam communem noticiam, quæ dicit, Totum parte sua maius esse, inferri potest, quòd pars suo toto maior sit, hoc nimirum modo. Linea illa recta, qua cum puncta, in circunferentia accepta, copulantur, si intra circulum non cadat, extra circulum aut in ipsam circuli circunferentiam, cadere eam oportet. Cadat ergo primò extra, si fieri potest, & quæratur per propositionem præmissam, circuli centrum, à



quo etiam duæ rectæ ad duo in circunferentia accepta puncta ducantur. Et quoniam hæ duæ rectæ, ex definitione circuli, sunt inter se æquales: triangulū igitur quod sic descriptum est, ἰσοσκελὲς erit, habens ad basim positos angulos, ex priore parte propositionis quintæ primi, inter se æquales. Ducatur præterea & alia recta quædam linea, à centro circuli utcunq;, per circunferentiam usq; ad basim trianguli isoscelis, eam continuando. Et quia per hanc rectam isosceles triangulum in duo partialia triangula diuiditur, quorum cum utriusq; unū latus ulterius productum fuerit ex propositione 16 primi, utriusq; externus angulus suo interno & opposito, uno scilicet æqualium, maior: quare & altero æqualium maior erit. Cum autem iam, ut tandem concludatur, triangulum appareat, unum habens angulum reliquorum altero maiorem, maior uerò angulus, ut testatur propositio in primo 19, longius latus requirat, hac ipsa propositione hic usurpata, æquali deinde linea pro æquali sumpta, infertur tandem, partialem sua totali linea esse longiorem, quod est impossibile. Non ergo extra circulum cadit puncta copulans recta linea. Similiter etiam, quòd non in ipsam circunferentiam cadat, demonstrabitur: cadet itaq; intra ipsum circulum. In circuli igitur circūferentia, ad duo puncta, utcunq; accepta, linea recta ducta, in circulum eam cadere necesse est, quod demonstrasse oportuit.

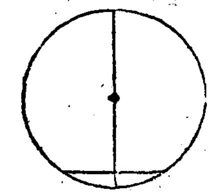
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ.

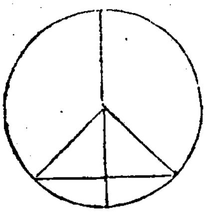
Ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθεῖάν τινὰ μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνῃ· καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τεμεῖ. Καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνῃ· καὶ δίχα αὐτὴν τεμεῖ.

PROPOSITIO III.

Si in circulo recta quædam linea per centrum extensa, quandam non per centrum ductam rectam lineam bifariam secet: & ad angulos rectos eam secabit. Et si ad angulos rectos eam secet: & bifariã quoq; eam secabit.

Præparetur figura, qualem scilicet requirit hæc propositio, hoc est, describatur circulus, in quo etiam duæ rectæ, una quidem per centrum transiens, altera uerò præter illud, à priori tamen, uel bifariam, uel ad angulos rectos secta, ducatur: dico, si bifariam: & ad angulos rectos, si uerò ad angulos rectos: & bifariam etiam per centrum ductam alteram secare oportere. Quantum ad partem priorem, coniungantur extremitates eius, quæ non per centrum transit rectæ lineæ, cum centro circuli duabus rectis. Et quoniam hæ duæ rectæ, ut duorũ triangulorum latera, ex definitione circuli, inter se æquales sunt, cum quoq; reliqua duo unius ex structura, reliquis duobus alterius trianguli lateribus æqualia sint: anguli etiam, quos rectæ, à centro circuli ad extremitates ductæ, subtendunt, per propositionem 8 primi, inter se æquales erunt. Quoniã uerò recta linea rectæ insistens lineæ, quando deinceps se habentes angulos æquales inter se facit, uterq; ex definitione quadam in primo exposita, rectus est: anguli etiam illi duo, quos scilicet propositio 8 demonstrauit esse inter se æquales, recti erunt. Præter centrum igitur ducta ab illa altera per centrum transeunte recta linea, cũ ex hypothesi bifariam ab ea secta sit, ad angulos etiam rectos secabitur, atq; hæc pro parte propositionis priore. Posterioris uerò partis demonstratio, eadem structura manente, ex 26 primi sic colligi poterit. Cum enim duo partialia triangula, ex structura, rectangula sint, ipsum uerò totum, ex definitione circuli, isosceles: habebunt hæc partialia triangula duos angulos duobus angulis, utrunq; utriq; æquales. Et quia etiam latus unum lateri uni, uel descendentes à centro rectas lineas, uel perpendicularis portionem ambobus communem, æquale habent: & reliqua, per allegatam ex primo propositionem, reliquis æqualia habebunt. Quare recta non per centrum transiens linea, ab altera quæ per centrum in eam ad angulos rectos cadit, bifariam diuisa est. Si in circulo igitur, recta quædam linea per centrum extensa, quandam non per centrum ductam rectam lineam bifariam secet: & ad angulos rectos eam secabit. Et si ad angulos rectos eam secet: & bifariam quoq; eam secabit. quod demonstrasse oportuit.





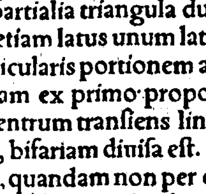
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι· οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

PROPOSITIO IIII.

Si in circulo duæ rectæ lineæ, non per centrum extensæ, sese mutuo secuerint: sese mutuo bifariam non secabunt.

Describatur circulus, ducantur etiam in eo duæ rectæ lineæ, quorum neutra per centrum transeat, altera tamen alteram secet: dico rectas has bifariam sese mutuo non secare. Sumit hæc propositio suam ab impossibili demonstrationem per præcedentis tertiæ partem priorem, bis quidem, cum duæ sint rectæ lineæ, usurpatam, & communem illam noticiam, quæ dicit, Omnes rectos angulos inter se esse æquales, cum per hæc, si mutuo una alteram bifariam secaret, statim ubi linea à centro ad communem ductarum intersectionem ducta esset, minorem angulum maiori æqualem esse inferretur.



ferretur.

ferretur. Hoc autem quia nemini intelligenti persuaderi potest: per inæqualia igitur, & non æqualia, sese huiusmodi lineæ, ut uult propositio, secabunt. Si in circulo igitur duæ rectæ lineæ, non per centrum extensæ, sese mutuo secuerint: sese mutuo bifariam non secabunt. quod demonstrasse oportuit.

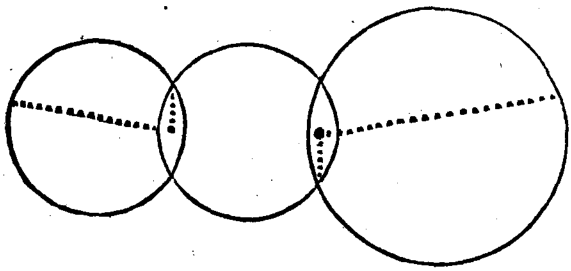
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε.

Ἐὰν δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

PROPOSITIO V.

Si duo circuli sese mutuo secent: non erit eorum idem centrum.

Sint duo circuli sese mutuo secantes, dico quòd eorum non sit idem centrum. Et huius propositionis, ut præcedentis, demonstratio ab impossibili sumitur. Si enim centrum unum & idem habuerint illi sese mutuo secãtes circuli, cum centrum non extra, sed in circulo sedem suam habeat, in nullo loco alio, quàm in portione, utrique circulo communi, id esse poterit. eo igitur in loco illo cõstituto, inde ad communem circulorum intersectionem linea recta ducatur, & erit hæc utriusque circuli semidiameter. Ducatur & alia recta ab eodem centro posito, per communem portionem usque ad circunferentiam utriuslibet circuli cõtinuata. Et quoniam hęc tota,



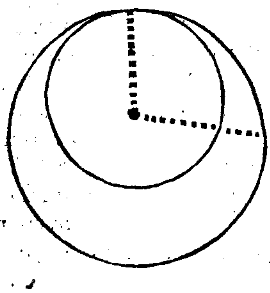
unius: pars uerò eius, alterius circuli est semidiameter: erit utraque, pars uidelicet & ipsa tota, primò ductæ rectæ, quæ & ipsa utriusque circuli semidiameter est, æqualis. unde sic etiam, per communem quandam noticiam, ipsæ inter se æquales, pars uidelicet toti, quod est impossibile. Punctum ergo id quod sumptum est, aut si aliud quoddam sumeretur, centrum circulorum esse, haudquaquam potest. Duorum igitur sese mutuo secantium circulorum, unum & idem centrum non erit. quod demonstrari oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ς.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

PROPOSITIO VI.

Si duo circuli sese mutuo interius tetigerint: nõ erit eorũ idem centrũ.



Sint duo circuli, qui sese interius mutuo tangant: dico, eorum non idem esse centrum. Sed esto sanè idem, si fieri potest, & connectatur id cum circulorum contactu, atque postea ab eodem communi centro posito ad exterioris circuli circũferentiam, ubicunque hoc fuerit, alia recta linea ducta, quòd neque hoc, neque aliud ullum punctum, horum tangentium circulorum centrum esse possit, ab impossibili, ut in præcedenti, demonstrabitur. Si duo circuli igitur, sese mutuo interius tetigerint: non erit eorum idem centrum. quod demonstrasse oportuit.

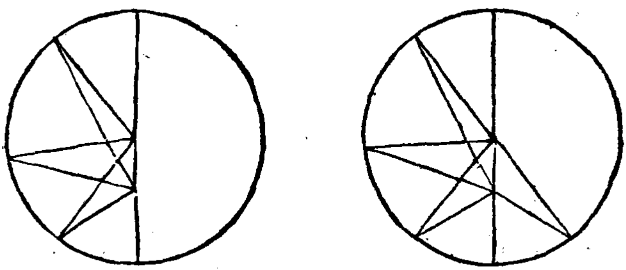
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ληφθῇ τι σημεῖον, ὃ μή ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσιν εὐθεῖαί τινες πρὸς τὸν κύκλον· μεγίστη μὲν ἔσται, ἐφ' ἧς τὸ κέντρον, ἐλαχίστη δὲ, ἡ λοιπή. Τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἔγγιον, τῆς διὰ τοῦ κέντρου, τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστί. Δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι, ἴσαι, ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

PROPOSITIO VII.

Si in diametro circuli aliquod sumatur punctum, quod non sit centrum circuli, ab eoque puncto rectæ quædam lineæ in circulum cadãt: longissima quidem erit, in qua centrum: breuissima uerò, reliqua. Aliarum uerò, semper propinquior ei quæ per centrum protenditur, remotiore longior est. Duæ autem solùm rectæ lineæ æquales, ab eodem puncto in circulum cadunt, ad utrasque partes breuissimæ.

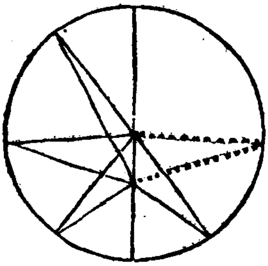
Sit circulus, in eo etiam ducta diameter, in qua præter centrum aliud sumatur punctum: dico primò, quotquot ab hoc puncto usque ad circunferentiam rectæ lineæ ductæ fuerint, illarum omnium eam quæ per centrum transierit, longissimam, diametrum uerò perficiens, omnium breuissimam esse. Ex alijs autem, semper propinquior ei quæ per centrum transit, remotiore longior extabit. Postremò, quòd duæ tantùm inter se æquales rectæ lineæ, ab hoc puncto, ex utraque parte breuissimæ, in circuli circunferentiam cadere possint. Habet hæc propositio quatuor partes, quæ in hunc modum ordine demonstrari poterunt. Connectantur in circulo ductarum extremitates, quas habent in circunferentia, singulæ, cum centro circuli,



singulis rectis lineis. Et quoniam duo quælibet latera omnis trianguli, ex propositione 20 primi, reliquo tertio longiora sunt, tertio porrò longiora duo latera, in præsentia, ex definitione circuli & illa communi noticia, Si æqualibus æqualia addantur, &c. uni rectæ alij æqualia sunt, cum hæc alia centrum circuli contineat: quod in propositione primò proponitur, iam manifestum erit. Rursus quoniam ex eadẽ propositione 20 primi, quælibet duo trianguli latera reliquo tertio longiora sunt, tertium porrò latus ex definitione circuli, uni rectæ alij æquale est: & tertio longiora duo latera eadem recta alia longiora erunt. Cum autem hæc alia per punctum, præter centrum in diametro acceptum, transeat, communi ex æquo de illis inæqualibus portione ablata: & quod in propositione secundò proponitur manifestum erit. Tertium nũc patet ex propositione 24 primi. Porrò ut quartum etiam retineatur, ducenda est, per propositionem 23 primi, ex centro recta linea, quæ

cum

cum semidiametro per punctum transeunte, angulum faciat, illi angulo, qui ex altera parte sub eadem semidiametro, atq; ex centro ductarum linearum una continetur, æqualem, eaq; ad circunferentiam usq; continuata, ab ipsius in circunferentia extremitate ad punctum recta linea ducatur. Et quoniam duo triangula, qualia propositio in primo 4 requirit, apparent: bases igitur illorum, hoc est, lineæ illæ, quæ ad utrasque partes breuissimæ sunt positæ, à puncto item in diametro præter centrum accepto egrediuntur, per hanc 4, inter se æquales erunt. Nec alia etiam, in illa eadem parte, ab hoc puncto ei quæ in altera parte est posita, æqualis educi potest. Nam si fortè ab aliquo minus credẽti hoc tentaretur, qui rectam aliam



alteri æqualem duceret, dum cui hæc sic ducta ex communi illa noticia, Quæ uni sunt æqualia &c. æqualis esse deberet, mox per 3 partem propositionis huius, eadem longior esse ostendi potest: id quod fieri nequit. Potest etiam aliter hæc quarta pars demonstrari in hunc modum. Ducatur alia, si ita possibile uidetur, recta linea, ei quæ ex altera parte breuissimæ posita est, rectæ ęqualis, cuius in circũferentia extremitas cum recta quadam linea iuncta, demonstratio sic colligetur. Quoniam anguli ex utraq; parte ad centrũ positi, ex propositione 8 primi, inter se æquales sunt, unus uerò partialis angulus alterius trianguli totali, ut iam ex 4 primi demonstratum, æqualis: ille partialis tandem angulus, ex communi illa noticia, Quę uni sunt æqualia &c. suo totali angulo æqualis erit, quod est impossibile. Duæ igitur solùm rectę lineæ æquales, ab eodem puncto in circulum cadunt ad utrasq; breuissimæ lineæ partes. Si in circuli igitur diametro punctum aliquod sumatur, quod non sit centrum circuli, ab eoq; puncto rectæ quędam lineæ in circulum cadant: longissima quidem erit, in qua centrum: breuissima uerò, reliqua. Aliarum uerò, semper propinquior ei quæ per centrum protenditur, remotiore longior est. Duæ autem solùm rectæ lineæ, æquales, ab eodem puncto in circulum cadunt, ad utrasque partes breuissimę. quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

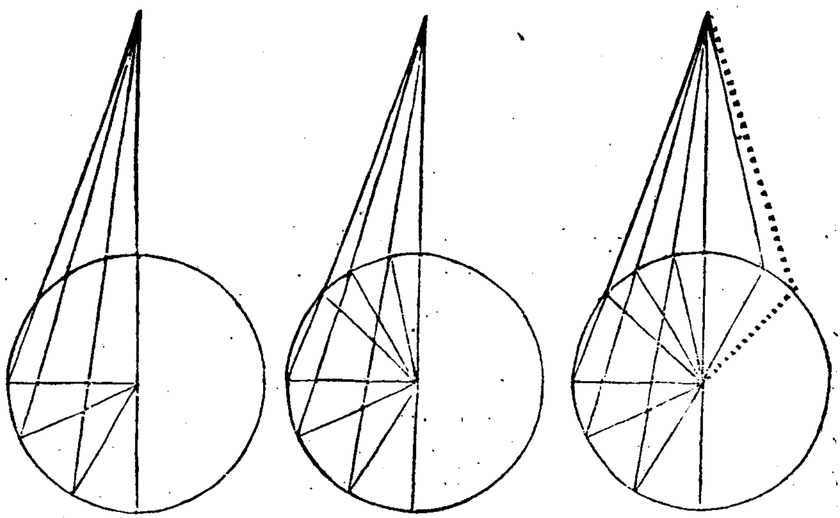
Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεῖαί τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοιπαὶ ὡς ἔτυχε· τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν, μεγίστη μὲν, ἡ διὰ τοῦ κέντρου· τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστί. τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν, ἐλαχίστη μέν ἐστιν, ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου. τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάττων. Δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι ἴσαι προσπεσοῦνται ἀπὸ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

PROPOSITIO VIII.

Si extra circulum aliquod sumatur punctum, ab hoc uerò puncto ad circulum percurrant rectæ quædam lineæ, quarum una quidem per centrum, reliquæ uerò ut accidit: in concauam circũferentiam cadentium linearum, longissima quidem est quæ per centrum currit. Aliarum autem, semper propinquior ei quæ per centrum, remotiore longior erit. In conuexam uerò circumferentiam cadentium linearum, breuissima quidem est,

dem est, quæ inter punctũ & diametrum, aliarum aũt, semper breuissimę propinquior, remotiore breuior est. Duæ autem solũ rectæ lineæ, æquales, cadunt ab hoc puncto in circulum ad utrasq; partes breuissimæ.

Sit circulus, extra illum etiam punctum acceptum, à quo aliquot rectæ lineæ, per circulum currentes, usq; ad concauam circunferentiam ducantur. Esto autem quòd ductarum una per centrum, aliæ uerò utcunq; transeant. Dico itaq;, in concauam circunferentiam cadentium linearum longissimã esse, quæ per centrum transit. Ex alijs autem, semper propinquiorem ei, quę per centrum transit, remotiore longiorem. Linearum uerò partialium, extra in conuexam circunferentiam circuli cadentium, quę puncto & diametro interiacet, illam omnium breuissimam. Ex alijs autem, semper breuissimæ propinquiorem, remotiore breuiorem esse. Ad hæc dico etiam, duas tantum ab hoc puncto rectas lineas, quæ ex utraq; parte breuissimæ, in circulum cadunt, æquales educi posse. Habet hæc propositio quinque partes, quarum prima & secunda, ubi prius à contactibus, pręter centrum ductarum & circunferentiæ, ad centrum rectæ lineæ ductę fuerint, illa quidem ex propositione 20 primi, per quam duo quælibet latera in triangulo, tertio longiora sunt, recta una pro duabus sibi ęqualibus sumpta, hæc uerò ex 24 eiusdem primi retineri poterunt. Quòd si & ab intersectionibus iam, præter centrum ductarum cum circunferentia, rectæ lineę ad centrum ductæ fuerint: tertiæ quoque &



quartæ partibus per easdem primi propositiones, ab inæqualibus tamen interim æqualibus subtractis, satisfieri poterit. Superest igitur nunc ut quintæ parti, quæ uidelicet duas solùm rectas lineas, ab hoc puncto æquales, ex utraq; parte breuissimæ, in circulum cadere asserit, satisfaciamus: quod quidem ab impossibili hoc modo fieri debet. Ducatur per 23 primi, ex centro recta linea, quæ cum semidiametro per circũferentiam ad punctum continuata, angulũ faciat, illi angulo, qui ex altera parte sub eadem semidiametro atq; ex centro ductarum linearum una continetur, æqualẽ, & connectatur huius ductæ extremitas quam habet in circunferentia, per primum postulatum in primo, cum puncto extrà sumpto, recta quadam linea, quòd nunc hæc recta ei, quæ ex altera parte diametri ad punctum continuata est, ęqualis sit, & sola etiam, sic ut nulla æqualis alia ex hoc puncto egrediatur, utrunq; non

non aliter, quàm in pręcedenti quarta pars, retinebitur. Si extra circulum igitur aliquod sumatur punctum, ab hoc uerò puncto ad circulum percurrant rectæ quædam lineæ, quarum una quidem per centrum, &cę. quod demonstrari oportuit.

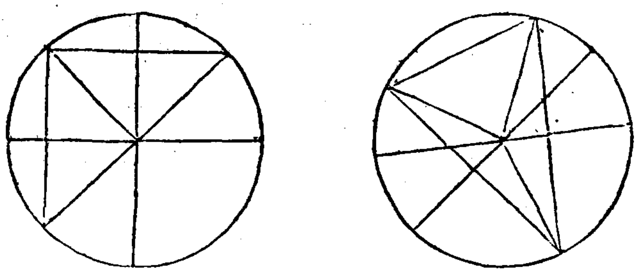
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐντὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσιν πλείους ἢ δύο εὐθεῖαι ἴσαι· τὸ ληφθὲν σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου.

PROPOSITIO IX.

Si in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, ab hoc uerò puncto ad circulum cadant plures quàm duę rectæ lineæ æquales: acceptum punctum centrum est ipsius circuli.

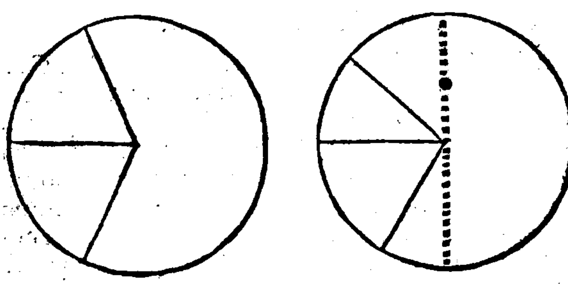
Sit circulus, in eo etiam punctum signatum sic, ut plures quàm duę rectæ lineæ inde usq; ad circumferentiam ductę inter se æquales sint: dico, signatum punctum centrum circuli esse. Coniungantur ductarum extremitates, quas habēt in circumferentia singulæ, singulis rectis quibusdam lineis, coniungentium deinde duabus, uel omnibus si placet, bifariam diuisis, à punctis harum diuisionum rectæ lineę ad signatum in circulo punctum ducantur, continuenturq; ex utraq; parte usq; in cir-



cumferentiam. Et quoniam circa quamlibet ultimò iam ductarum linearum duo triangula sunt, quorum anguli ad illam, κατὰ τὴν κατασκευὴν & propositionem 8 primi, inter se æquales sunt, & quia deinde ex definitione 8 eiusdem, etiam recti: erit in harum ductarum qualibet, ex corollario primæ huius, centrum circuli. Hoc autem cū ita sese habeat, nullibi potius fuerit, quàm in puncto uel intersectione omnium communi, quod scilicet est punctum signatum.

ALITER HOC IDEM AB ABSVRDO OSTENDI POTEST.

Esto circulus, in eo etiam punctum acceptum, sic ut, si fortè inde plures quàm duæ rectæ lineæ usq; ad circūferentiam ductæ fuerint, illæ inter se æquales sint: dico acceptum punctum centrum circuli esse. Sed negetur sanè, non esse centrum circuli punctum id, & si placet, sumatur aliud, atq; per illud acceptumq; prius punctum recta linea ducta ea ex utraq; parte in circūferentiam continuetur. Et quoniam in circuli diametro præter cētrum acceptum est punctum aliud, unde etiam plures rectæ ad circumferentiam ductæ sunt, cum illa in qua est centrum circuli, ex prima



parte

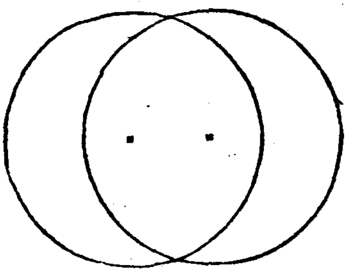
parte propositionis septimæ huius, omnium sit longissima, ex reliquis uerò, centro propinquior, ex 3 parte eiusdem, remotiore longior existat, contra hypothesim hoc inducitur, cum per eam, ex puncto ductæ rectæ inter se positæ sint æquales. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, & reli. Similiter etiam ostendemus, quòd nullum aliud præter id quod acceptum fuerit, punctum, centrum circuli esse possit. Punctum igitur in circulo acceptum, unde plures quàm duæ inter se æquales rectæ lineæ ad circumferentiam ductæ sunt, centrum circuli erit. quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ I.

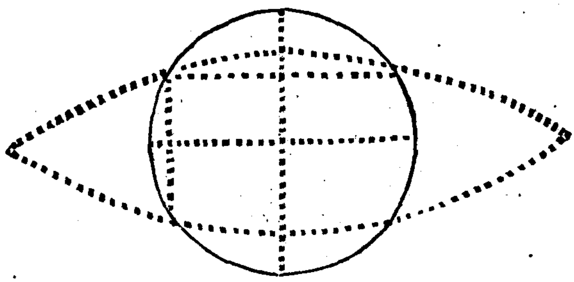
Κύκλος οὐ τέμνει κύκλον κατὰ πλείονα σημεῖα, ἢ δύο.

PROPOSITIO X.

Circulus non secat circulum in pluribus punctis, quàm duobus.



Sit circulus unus, alius deinde priorem secans: dico, quòd hæc sectio duobus tantum punctis contingat. Quòd si negetur hoc, atque affirmaret aliquis, pluribus duobus punctis, quatuor scilicet, circulum secare circulū, describatur sanè si fieri potest, in hunc modum figura: una deinde harum intersectionum puncto, cū duobus collateralibus duabus rectis lineis iuncto, his postea rectis bifariam diuisis, ex punctis diuisionum lineæ ad angulos rectos ducantur. Et quoniam unum & idem punctum, cōmunis nimirum ad rectos ductarum sectio,

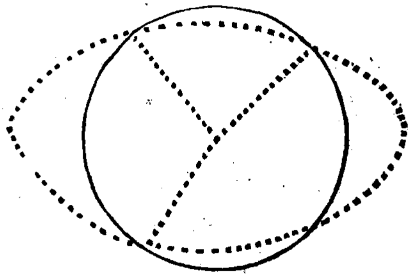


ex corollario propositionis primæ huius, bis usurpato, utriusq; circuli centrum esse demonstratur, cum id propositioni quintæ præmissæ maximè aduersetur, infertur tandem ueram esse propositionem, nimirum, Si circulus circulum secet, non in pluribus duobus locis id fieri, quod demonstrasse oportuit.

ALIA HVIVS REI DEMONSTRATIO.

Secat rursus circulus circulum in pluribus punctis quàm duobus, &cę. Quæratur, per propositionem primam huius, prioris descripti circuli centrum, cum eo deinde tribus rectis lineis tria intersectionum puncta copulentur. Et quoniam intra circulum, posteriorem scilicet, acceptum est punctum quoddam, à quo cum plures duabus ad illius circumferentiam rectæ egrediantur ęquales: erit illud punctum, per pręcedentem propositionem huius, eiusdem posterioris circuli centrum, atq; sic centrum duorum, mutuo sese secantium circulorum, id quod per propositionem quintam est impossibile. Non igitur circulus circulum in pluribus punctis quàm duobus secat. quod demonstrari oportuit.

HVIVS AVTEM REI GEOMETRICAE FIguratio talis est.



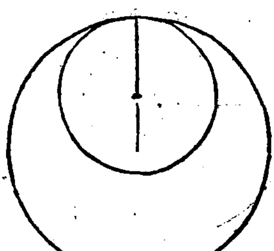
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ.

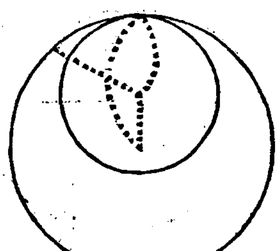
Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς, καὶ ληφθῇ αὐτῶν τὰ κέντρα· ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα καὶ ἐκβαλλομένη, ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται τῶν κύκλων.

PROPOSITIO XI.

Si duo circuli ſeſe mutuo intus tetigerint, atq; accepta fuerint eorum centra: ad eorum centra ducta recta linea & eiecta, in contactum circulorum cadit.

Sint duo circuli, quorum unus alterum intus tangat, & quærantur centra amborum: dico, ſi per hæc centra ducta fuerit recta quædam linea, atq; cōtinuata ulterius, hāc in contactū circulorum cadere, id quod facile ab abſurdo, ut ſequitur, demonſtrari poteſt. Recta à centro ad centrum circuli ducta, quia hęc per centrū maioris circuli continuata, ſubinde contra cōcluſionem, magis ac magis à circulorum contactu recedit, cum ab authore non ſit determinatum, ex qua parte recta continuari debeat, illa parte, tanquam fruſtra inde producturus lineam, poſthabita, continuationem rectæ per minoris circuli centrum inſtituenda eſt. Inſtituatur ergo ſic. Quòd ſi ita factum, non contingat in contactum cadere hanc rectam, in alium certè circumferentiæ locum eam cadere neceſſe erit. Sit ſanè, & ducatur ab utriuſq; circuli centro ad eorum contactum recta linea. Et quoniam ex tribus rectis lineis, una



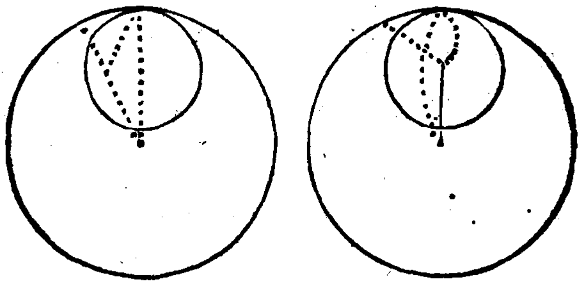


quidem, quæ à centris circulorum intercepta eſt, duabus uerò quæ à centris ad contactum circulorū rectę ductę ſunt, triangulum conſtitutū eſt, cum omnis trianguli duo quælibet latera, ut iam ſæpe demonſtratum eſt, tertio latere longiora ſint: & in propoſito triangulo intercepta à centris linea, & ea quæ à centro interioris ad contactum ducta eſt, ut duo trianguli latera, reliquo tertio, ea nimirum linea, quæ à centro exterioris egreditur atq; ad contactum ducta eſt, longiora erunt. Quare longiora

giora etiam ea quæ huic tertio lateri, ex definitione circuli, est linea æqualis. Atque communi ab inæqualibus ablato, intercepta scilicet à centris linea: remanentium partium una, à centro scilicet interioris ad contactum ducta, reliqua, altera scilicet, quę à centris per circulum continuata est, longior. Sed quia illa, ex definitione circuli, huius parti æqualis est: & partialis tandem sua totali linea longior erit, quod fieri nullo modo potest. Si igitur per centra duorum circulorum, quæ sese mutuo intus tangunt, recta quędam linea ducta, atque eiecta fuerit, in circulorum contactum ea cadet. quod demonstrari oportuit.

Ὁμοίως κἂν ἐκτὸς ᾖ τοῦ μικροῦ κύκλου τὸ κέντρον τοῦ μείζονος κύκλου, δείξομεν τὸ ἄτοπον.

Similiter etiam, Si extra paruum circulum centrum maioris circuli fuerit, absurditatem ostendemus.



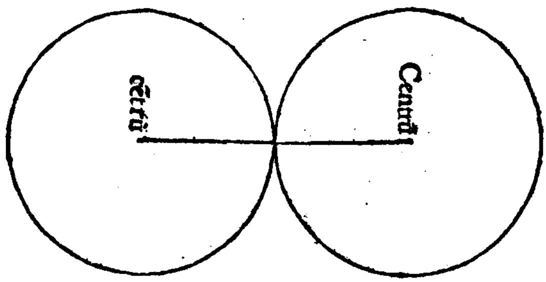
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐκτὸς, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη, διὰ τῆς ἐπαφῆς ἐλεύσεται.

PROPOSITIO XII.

Si duo circuli sese mutuo exterius tetigerint: ad centra eorum applicata recta linea, per contactum transibit.

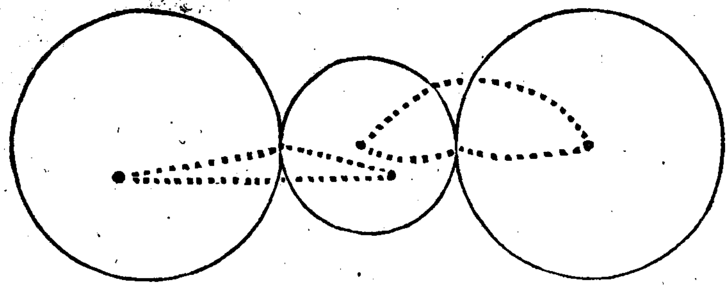
Sint duo circuli, quorum unus alterum extra tangat, & quęrantur centra amborum: dico, si per hæc centra ducta fuerit recta quædam linea, eam per circulorum



contactum transire. Quòd si hoc fortè negetur, aliò eam certè inclinare concedendum erit. Sit sanè, & ducatur ab utriusque circuli centro ad eorum contactum recta linea. Et quoniam quæ ex centro ad circumferentiam ducuntur rectæ lineæ, sunt, ex definitione circuli, inter se æquales, eadem definitione bis usurpata, æqualibus item lineis æqualibus additis: duæ à centris ad contactum ductæ rectæ lineæ, reliquis duabus, quæ & ipsæ à centris ad suas circumferentias ductę sunt, rectis lineis æquales erunt. Ipsa igitur totali, quæ à centro ad centrum ducta est, ut tertio triangu-

guli

guli latere, breuiores, quod est contra propositionem quandã in primo expositam, qua dicitur, quòd Omnis trianguli duo quælibet latera adamussim sumpta, reli-



quo tertio longiora sint. Si duo igitur circuli extrà sese mutuo tetigerint: ad centra eorum applicata recta linea, per contactum transibit. quod demonstrasse oportuit.

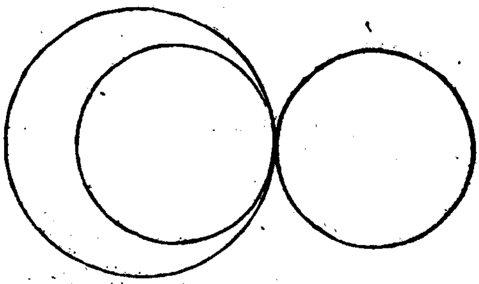
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ.

Κύκλος κύκλου οὐκ ἐφάπτεται πλείονα σημεῖα ἢ καθ' ἕν, ἐάν τε ἐντὸς, ἐάν τε ἐκτὸς ἐφάπτηται.

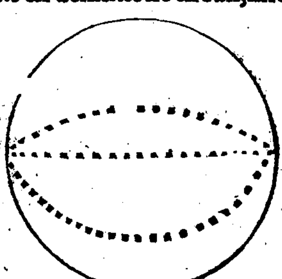
PROPOSITIO XIII.

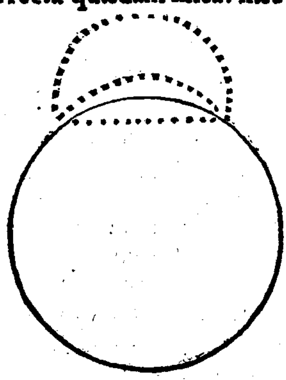
Circulus circulum non tangit in pluribus punctis uno, siue intus siue extra tangat.

Describatur circulus, dico impossibile esse alium describi posse circulum, qui descriptum priorem uel intus, uel extra etiam, in pluribus punctis quàm in uno



tangat. Quòd si uideatur possibile, sit sane: tangat autem hunc primò intus in duobus locis, & ducatur per centra circulorum recta quædam linea: hæc autem in utranq; partem continuata, cum ex propositione 11 huius, in circulorum cõtactum cadat, quæ ex definitione circuli, lineæ sunt in-

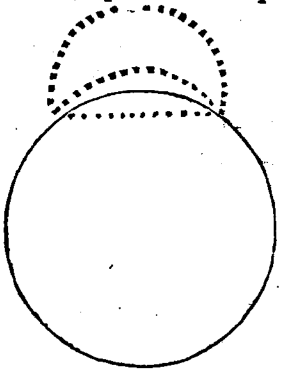




ter se æquales, mox intercepta à centris portione, uni earum addita, ab altera uerò

 hac

hac eadem ablata, quæ sic fiunt lineæ inæquales, ex eadem circuli definitione, secundò usurpata, inter se æquales erunt: id quod rationi minime est consentaneum.



Circulus igitur circulum intus tangens, uno tantum puncto hoc faciat necesse est. Quantum ad secundum. Esto quòd extrà, circulus circulum in duobus locis tangat, atque ducta à contactu in contactum recta quadam linea, cum hæc, ex propositione 2 huius, intra utrunque circulum cadat, atque id fieri hic nullo modo possit, propterea quod nullius circuli aliqua pars in altero sit: exterius circulus circulum in pluribus punctis uno non tanget. Et quia neque etiam interius, ut auditum est. Circulus igitur circulum tangens, in uno tantum puncto hoc fiat necesse erit, & non in pluribus, interius siue exterius hoc accidat, quod demonstrari oportuit.

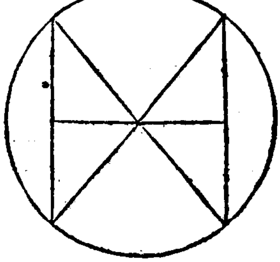
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ.

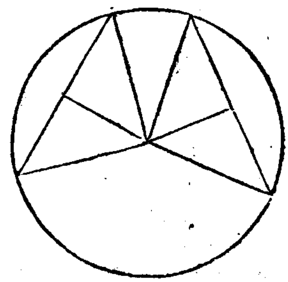
Ἐν κύκλῳ αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου. Καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

PROPOSITIO XIIII.

In circulo æquales rectæ lineæ: æqualiter distant à centro. Et æqualiter distantes à centro: æquales inter se sunt.

Describatur circulus, in eo etiam rectæ quædam lineæ æquales ducantur. Et quia æquales: pro priore propositionis parte dico, eas etiam æqualiter à centro distare. Quòd si rectæ in circulo ductæ in æquali à centro distantia fuerint: & lineas has, ratione partis posterioris, inter se æquales esse conueniet. Quæ quidem ambæ propositionis partes sic retineri poterunt. Coniungantur extremitates ductarum





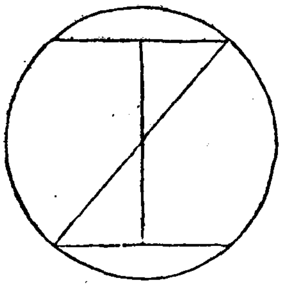
cum circuli centro quatuor rectis lineis. Et quoniam duo triangula descripta sunt, quorum anguli, quos ex una & eadem parte in circumferentia habent, quia per propositionem 8 primi, sunt inter se æquales, postquam super æquales in circulo ductas lineas, à centro, per propositionem 12 primi, perpendiculares ductæ fuerint, cum illæ per has, ex posteriore parte propositionis 3 huius, æqualiter secentur: & ipse perpendiculares tandem, ex 4 eiusdem primi, inter se æquales erunt: in quas deinde hæ cadunt rectæ lineæ, ex 4 definitione huius, æqualiter à centro distabunt: quod est primum, uel prior propositionis pars.

ALIA HVIVS PRIORIS PARTIS DEMONSTRATIO.

Maneat eiusdem dispositionis figura, nisi quod duæ, ex una parte ab extremitatibus ad centrum ductę, rectę lineæ possint omitti, prioris partis demonstratio

etiam

etiam sic colligi poterit. Quoniam enim recta linea in circulo per centrum extensa, rectam lineam in circulo ductam aliam, quæ non per centrum transit, ad angulos rectos secans, ipsam, ex posteriore parte propositionis tertiæ huius, bifariam secat, hac eadem parte bis usurpata, & quia etiam rectæ in circulo ductæ, ex hypothesi sunt inter se æquales: quæ de his in circulo ductis æqualibus lineis per perpendiculares abscinduntur lineę, inter se æquales erunt. Sed sunt etiam ęquales inter se, ex definitione circuli à centro ductæ lineæ, quæ cum harum æqualium extremitatibus coniunctæ sunt: per penultimam igitur propositionem primi, atque illis duabus communibus notitijs, Quę uni sunt æqualia, &c. & item, Si ab æqualibus æqualia subtrahantur, & reliqua, res tandem cōcluditur. Lineas scilicet ad illas à centro perpendiculares, eo quod quadrata, inter se ęqualia habeāt, ęquales esse, id quod nunc est æqualis ipsarum à centro distantiæ argumentū. Sed esto iam, quantum ad partem posteriorē, quòd rectę ductę æqualiter à centro distent: dico ipsas ductas inter se æquales esse, & hac quidem demonstratione. Cadant ad ęqualiter ductas à centro perpendiculares, coniungatur etiam alterutra utriusque æqualiter distantium extremitas cum centro circuli. Et quoniam perpendiculares ductæ, ex definitione Linearū ęqualiter à centro distātium, inter se sunt æquales, cum ab æqualibus rectis non possint describi diuersa quadrata: & harum æqualium rectarum quadrata æqualia erunt. Iis igitur perpendicularium quadratis à subtendentium rectos, quę & ipsę, ex definitione, inter se ęquales sunt, quadratis subtractis: & residua quadrata, per 47 primi, inter se æqualia erunt: atque tandem sic etiam æqualium quadratorū latera ęqualia. Sed quia utrunque ex 2 parte propositionis 3 huius, rectę ductæ est medietas: & ipsæ ductę inter se æquales erunt, quod est secundum. In circulo igitur æquales rectæ lineæ, æqualiter, & re. quod demonstrasse oportuit.



ALIA EIVS QVOD IN HAC PROPOSITIONE SEcundò proponitur, demonstratio.

Cadant ad æqualiter ductas à centro perpendiculares, coniungatur etiam alterutra utriusque æqualiter distantium extremitas cum centro circuli. Et quoniam quę ex centro ad circumferentiam ducuntur rectę lineę, inter se æquales sunt: quadratum igitur unius quadrato alterius ex centro ductę lineę, æquale erit. Rursus quoniam utriusque ex centro ductæ quadrato, duarum linearum quadrata, ex 47 primi æqualia sunt: etiam quæ ab illis duabus describuntur quadrata, harum duarum linearum quadratis, ex cōmuni illa noticia, Eidem æqualia &c. bis usurpata æqualia erunt. Porrò ab utroque æqualium illo quadrato quod à perpendiculari utrobique describitur, subtracto, cū ipsæ perpēdiculares (ut ex hypothesi & definitione quadam colligere licet) una alteri ęqualis sit, & residua quadrata, ex communi quadam noticia, inter se æqualia erunt. Quare & horum ęqualium quadratorum latera, æqualia. At uerò horum æqualium laterum, duplices sunt, ex posteriore parte propositionis tertię huius, rectę in circulo ductæ: & ipsæ ductę tandem ex illa cōmuni noticia. Eiusdem duplicia &c. inter se æquales erunt. In circulo igitur æquales rectę lineæ, æqualiter distant à centro. Et æqualiter distantes à centro, æquales inter se sunt. quod demonstrari oportuit.

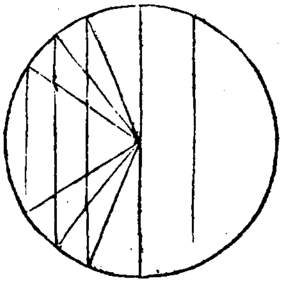
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ.

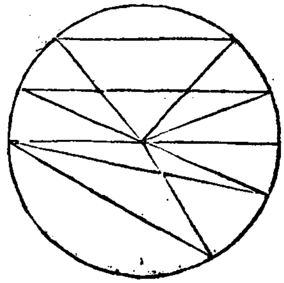
Ἐν κύκλῳ, μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ διάμετρος. τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἔγγιον τοῦ κέντρου, τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν.

PROPOSITIO XV.

In circulo, longissima quidem est diameter. Aliarum uerò, semper propinquior centro, remotiore longior est.

Sit circulus, in eo etiam aliquot rectę lineæ ductæ. Esto autem quòd una harum per circuli centrum, reliquæ uerò utcunque transeant: dico, per centrum transeuntem ex ductis omnium longissimam, aliarum uerò quamlibet centro propinquiorem, remotiore longiorem esse. Vtrisque enim omnium præter centrum ductarum extre-

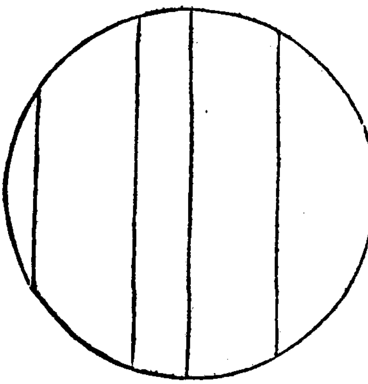


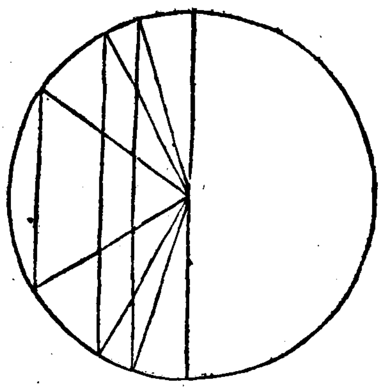


mitatibus, rectis lineis cum centro copulatis, prior propositionis pars ex propositione 20 primi, una tamen recta subinde pro duabus alijs sibi ęqualibus sumpta, demōstrabitur. Posterior deinde ex 24 eiusdē retineri potest, quod indicasse oportuit.

APPENDIX.

Oportet autem, ut omnes rectæ ductę ex una diametri parte appareant, & quidem ideo ut cognoscatur, quæ linea ex reliquis diametro uel centro propinquior, quæ item ab eo remotior sit. Quare si una, uel plures etiam ex altera diametri parte





conspiciantur rectæ lineę, in qua parte pauciores fuerint, eius lineæ ad alteram partem traducendę sunt hoc modo. Continuentur in rectum singularum ductarum, quibus in altera parte æquales ducendę sunt, perpendiculares ad suarum ipsarum longitudinem ultra centrum: deinde ab extremitatibus harum, tanquam rectarum datarum, per 11 primi, ad angulos rectos lineæ, ex utraque parte usque ad circūferentiam continuatæ excitentur. Et quoniam hæ singulę, rectis in priori parte ductis, ex definitione Rectarum in circulo æqualiter à centro distantium, æquales sunt, quæque sue, æquali nunc uel ęqualibus pro ęqualibus usurpatis, demonstratio ut pręmissa est absoluatur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

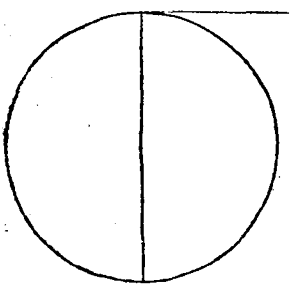
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ις.

Ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη, ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. Καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας, ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται. Καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία, ἁπάσης ὀξείας γωνίας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν· ἡ δὲ λοιπή, ἐλάττων.

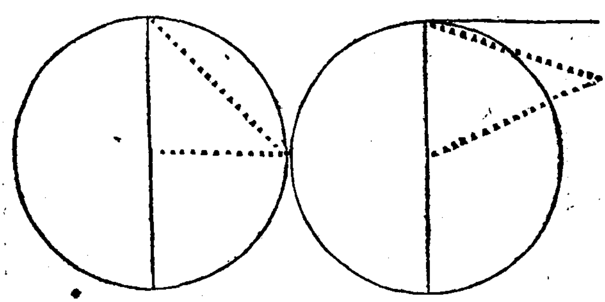
PROPOSITIO XVI.

Quæ à diametri circuli extremitate ad angulos rectos ducitur, extra ipsum circulum cadet. Et in locum, inter ipsam rectam lineam & circumferentiam, altera recta non cadet. Et semicirculi quidem angulus, omni acuto rectilineo angulo amplior est. Reliquus autem, angustior.

Describatur circulus, ducatur in eo etiam diameter, dico primùm, si quę linea ab alterutra diametri extremitate ad rectos excitetur angulos: extra circulum eam cadere oportere, neq; ex angulo, sub ipsa & circũferentia comprehenso, aliam rectam



educi posse. Angulum præterea semicirculi, qui sub diametro & circumferentia continetur, omnium acutorum rectilineorum maximũ: qui uerò sub circumferentia & ad rectos excitata, omnium acutorum minimum esse. Habet hæc propositio quatuor partes, quę ordine sic demonstrari possunt. In ipsam circumferentiam, cum sit latitudinis expers omnis linea, ad rectos excitata cadere non potest, cadet ergo intra uel extra ipsam circumferentiam. Quod si intra cadere sumptũ fuerit, mox, si possibile sit, ea ducta, & ad circumferentiam usq; continuata, clauso item triangulo, extremitate huius ad rectos ductæ altera, recta quadam linea cum centro copulata. Et quoniam triangulum quod sic describitur ex definitione circuli, isoscelis est: duo igitur ipsius anguli quos ad basim habet, inter se æquales erunt. Quia uerò unus eorũ est rectus, ratione ductæ ad rectos angulos lineæ: & alter sic rectus erit, quod est contra propositionẽ in primo 17, quæ dicit, Omnis trianguli duos angulos, quomodocunq; sumptos, duobus rectis minores esse. Vel contra corollarium propositionis in primo 32, quod quidem dicit, Omnis trianguli non duos tantùm, sed tres eius internos angulos, duobus rectis æquales esse. Ab extremitate igitur



diametri ad angulos rectos ducta linea, intra circulum non cadet. Et quia neq; in ipsam etiã circumferentiam, ut dictum est: extra circulum ergo, ut uult propositio, ea cadet, id quod primò erat demonstrandum. Quòd uerò inter ductam & circumferentiam cadere nulla alia possit, impediunt propositio in primo 19, atq; deinde circuli definitio. Alia enim quadam interposita, si ad ipsam deinde à centro, per 12 primi, perpendicularis ducatur, cum rectus in triangulo angulus utroq; reliquo amplior sit, ex propositione etiam 19 primi, ampliori angulo longius latus subtendatur: statim ex definitione circuli, æquali tamen pro æquali linea sumpta, partialem sua totali linea longiorem esse, inferri potest: quod est impossibile. Patet itaq; id quod secundò demonſtrandum erat. Et quia hoc nunc cõſtat: angulum igitur illũ, quem diameter & circumferentia continent, omnium acutorum rectilineorum maximũ: reliquum deinde, ſub circũferentia & ad rectos angulos excitata comprehenſum minimum eſſe, ſequi neceſſe eſt, cum aliàs ſi ſtatueretur unus angulus illo maior, alius deinde hoc reliquo minor: ex loco inter circumferentiam atq; ad rectos angulos ductam, cõtra ſecundam partem huius, alia recta educi poſſet. Hoc autem cum demonſtratum ſit eſſe impoſſibile: quod igitur tertiò & quartò propoſitũ eſt, iam demonſtratum erit. Conſtat itaq; tota propoſitió, quod erat demonſtrandum.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτων φανερόν. Ὅτι ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ᾽ ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου. Καὶ ὅτι εὐθεῖα κύκλου καθ᾽ ἓν μόνον ἐφάπτεται σημεῖον.

COROLLARIVM.

Ex hoc ſanè manifeſtum eſt, Quòd à diametri circuli extremitate ad rectos angulos ducta: ipſum circulum tangat. Et quòd recta linea circulum in uno tantum puncto tangat.

Ἔτι δή που Quoniam rectam lineam, duobus in circuli circumferentia punctis comprehenſam, intra ipſum cadere, ex 2 propoſitione huius oſtenſum eſt. quod admonuiſſe oportuit.

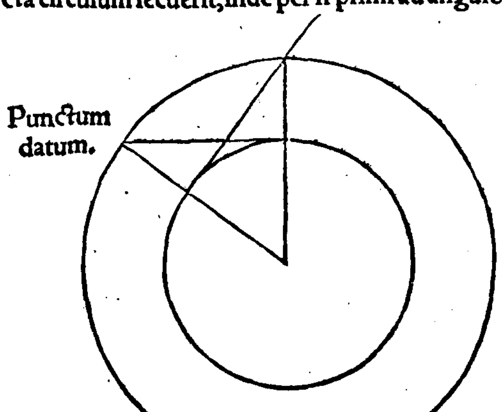
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, τοῦ δοθέντος κύκλου, ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

PROPOSITIO XVII.

A dato puncto, dato circulo, contingentem rectam lineam ducere.

Sit punctum datum, circulus item datus, atq; propoſitũ, à puncto ad circulum contingentem rectam lineam ducere. Ipſum igitur punctum cum centro circuli, (quod quidem ſemper, ubi ignotum id fuerit, ex propoſitione prima huius inueniri licet) per poſtulatum primum, recta quadam linea coniungatur, atq; ubi hæc recta circulum ſecuerit, inde per 11 primi ad angulos rectos linea excitetur. Porrò hac



eadem recta, qua cum pũctum datum & centrũ circuli iuncta ſunt, loco ſemidiametri ſumpta ex dati circuli cẽtro alius deſcribatur circulus, atq; ubi is ad rectos angulos ductam ſecat, ex hoc puncto alia ad centrum recta linea ducatur, à cuius interſectione tandem cum circulo dato, poſtquam linea recta ad datum punctum ducta fuerit, cum hæc recta ea ſit quæ maximè petitur propoſitioni ſatisfactum erit, id quod hoc modo demõſtrabitur. Quoniã enim hac præparatione duo triangula deſcripta ſunt, quorum duo latera unius duobus lateribus trianguli alterius, ex definitione circuli, bis uſurpata, æqualia

æqualia ſunt, angulum etiam inter æqualia latera, angulo equalem habent, cum uidelicet ille ſit, qui ad centrum ponitur, bis ſumptus: ex propoſitione igitur 4 primi, & reliquum tertium latus reliquo tertio lateri: anguli inſuper reliqui angulis reliquis: ac totum triangulum toti triangulo æquale erit. Quia autem unus angulus ex reliquis in triangulo uno, is nimirū quem ad rectos ducta, & una dati circuli ſemidiameter comprehendunt, eſt rectus: & in altero qui huic, propter æqualitatē ſubtenſarum, eſt æqualis, linea item ad rectos ductam ſecante, & altera dati circuli ſemidiametro includitur. rectus angulus erit. Hoc igitur cum ita ſit: ſecans hæc, ut diximus, ex priore parte corollarij propoſitionis 16 huius, circulum datum tangere dicitur. Et quia hæc ſecans à puncto dato etiam egreditur: factum igitur quod maxime uolebat propoſitio. A dato ſcilicet puncto, dato circulo contingens recta linea ducta eſt. quod fieri oportuit.

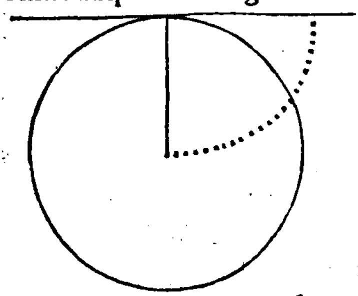
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζευχθῇ τις εὐθεῖα· ἡ ἐπιζευχθεῖσα, κάθετος ἔσται ἐπὶ τὴν ἀπτομένην.

PROPOSITIO XVIII.

Si circulum tetigerit recta quædam linea, à centro uerò in contactum ducta fuerit recta quædam linea alia: ducta, in contingente perpendicularis erit.

Deſcribatur circulus, eum etiam tangens recta linea ducatur: dico igitur, ſi à centro ad punctum contactus recta quedam linea ducta fuerit, quòd hæc recta ad contingentem ſit perpendicularis. Si uerò non, ducatur per propoſitionem 12 primi, à centro ad ipſam contingentem recta perpendicularis alia. Et quoniam perpendicularis hæc, propter æqualem & erectum ſitum, angulos cum contingente ἐφεξῆς, æquales inter ſe facit, unde ſic uterq; eorum, ex quadam definitione, rectus eſt: ratione recti huius, qui nimirū eſt in triangulo, uterq; ex reliquis eiuſdem trianguli angulis, recto angulo minor erit. Quia uerò ampliori angulo omnis trianguli, ex propoſitione 19 primi, longius latus ſubtenditur: ex definitione igitur circuli, æquali tamen pro æquali linea ſumpta, partialis linea ſua totali longior erit, cum tamen contrà Totalis, ex cōmuni quadam noticia, linea ſua partiali longior eſſe debeat. Quare præter contactum à centro in contingētem ducta, ad ipſam perpendicularis non erit. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδ' ἄλλη τις πλὴν τῆς & reliqua. Simili quoq; ratione oſtenditur, quod nulla etiam alia, præter eam, quæ à centro ad contactum tendit, ad contingentem perpendicularis eſſe poſſit. Quare hæc ipſa quæ à centro ad contactum ducitur recta linea, in cōtingentem perpendicularis erit. Si igitur circulum tetigerit recta quædam linea, à centro uerò in contactum ducta fuerit recta quędam linea alia: ducta, in contingente perpendicularis erit. quod demonſtraſſe oportuit.



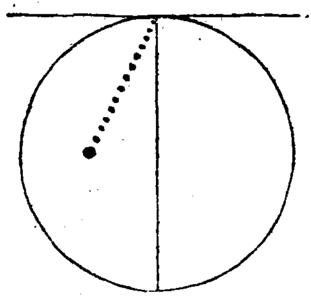
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ· ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

PROPOSITIO XIX.

Si circulum tetigerit recta quædam linea, à contactu uerò ipſi tangenti ad angulos rectos recta linea ducta fuerit: erit in ducta centrum circuli.

Describatur circulus, eum etiam tangens linea recta ducatur: dico, si à contactu, tanquam à puncto in contingente dato, per 11 primi, ad rectos angulos linea per circulum ducta fuerit, in ea centrum circuli esse. Quod si non, erit id necessariò extra eam alibi. Eo igitur alibi constituto atque signato, inde etiam recta quadam linea ad punctum contactus ducta, cum hæc, per præmissam 18, ad contingentem perpendicularis existat: angulus minor maiori, uel partialis suo totali, ex definitione, qua omnes rectos æquales inter se esse intelligitur, æqualis erit: quod est impossibile. Punctum igitur extra perpendicularem alibi constitutum, centrum circuli non erit: in ipsa ergo contingentis per circulum ducta perpendiculari id esse necesse est. Si circulum igitur recta quędam linea tetigerit, à contactu uerò &c. quod demonstrasse oportuit.



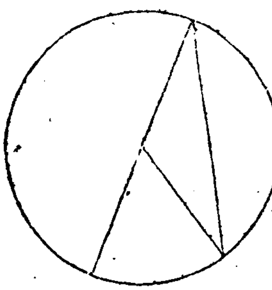
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ.

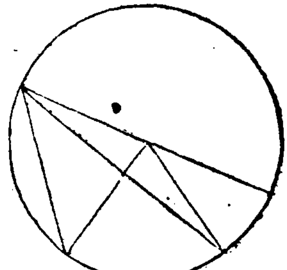
Ἐν κύκλῳ, ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία, διπλασίων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν αἱ γωνίαι.

PROPOSITIO XX.

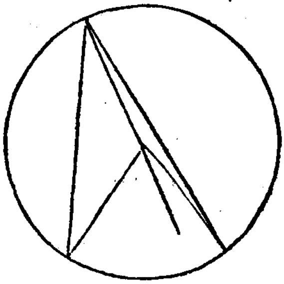
In circulo, qui ad centrum angulus, duplus est eius qui ad circumferentiam, quando eandem circumferentiam basim habuerint ipsi anguli.

Describatur circulus, in eo etiam duo ponantur anguli, unus quidem ad centrum, alter uerò ad circumferentiam, sic ut ambos unus & idem circumferentiæ arcus subtendat: dico, ad centrum positum angulum, duplum esse eius, qui ad circumferentiam ponitur. Huius propositionis figuratio quia tripliciter uariari potest, triplici etiam demonstratione hic opus erit. Aut enim ad centrũ anguli alterũ latus anguli in circũferentia alteri lateri coniungetur, aut non. Si primum, cum ex





definitione circuli à centro ad circumferentiam exeuntes lineæ, inter se æquales sint, unde sic triangulum isosceles appareat. qui anguli, ex priore parte propositionis 5 primi, sunt inter se æquales, hi simul sumpti, ad utrunque ęqualium dupli erunt. Sed quia his simul, ut duobus internis & oppositis trianguli angulis, æqualis est, ex propositione 32 primi, angulus ad centrum positus, ut eiusdem trianguli angulus externus: & ad utrunque æqualium idem externus, ad centrum positus angulus duplus erit, quod ostendisse oportuit. Sed esto iam quòd nõ coniungantur latera: quia uerò tum accidit, quòd unum latus unius, latus unũ alterius anguli secet, aut non secet. Si secet, diametro ab angulo qui est ad circumferentiam per centrum ducta, cum cta, cum tam totalis quàm etiam partialis ad centrum externus trianguli angulus, per easdē propositiones primi bis usurpatas, suo interno opposito angulo duplus sit, partialibus ab ipsis totalibus subtractis, cum hi & illi eodem modo sese habeāt: & residui anguli, unus ad alterum, circa centrum quidem ad eum qui est ad circumferentiam duplus erit. Quòd si unū unius, unum latus alterius anguli non secet, ducatur ab angulo qui est ad circumferentiam, per angulum ad centrum recta quædam linea, & demonstratio (partialibus tamen utriusq; anguli simul sumptis) ut modò succedet, angulum scilicet ad centrum eius, qui est ad circumferentiam, duplum esse. Angulus igitur qui ad centrum in circulo ponitur, duplus est eius qui ad circumferentiam, qualitercunque sanè hi, modo una & eadem circumferentia subtenduntur, descripti fuerint. quod demonstrasse oportuit.

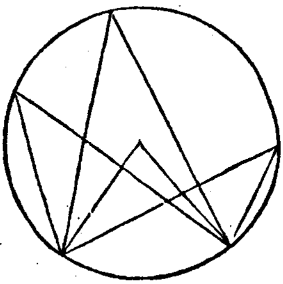


ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑ.

Εν κύκλῳ, αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

PROPOSITIO XXI.

In circulo, qui in eodem segmento sunt anguli, æquales inter se sunt.



Describatur circulus, in eo etiam aliquot super uno & eodem segmento anguli: dico, illos angulos inter se æquales esse. Quod quidem, ductis à segmenti terminis ad centrum duabus rectis lineis, per præcedentem 20 & communem illam noticiam, Quæ eiusdem dimidia, æqualia inter se sunt, manifestum fiet.

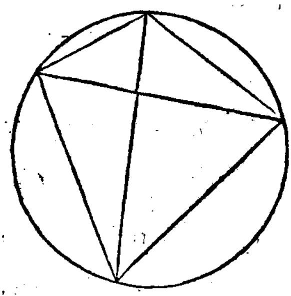
ΠΡΟΤΑΣΙΣ. ΚΒ.

Τῶν ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων, αἱ ἀπεναντίον γωνίαι, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

PROPOSITIO XXII.

Quadrilaterorum in circulis anguli, qui ex opposito, duobus rectis sunt æquales.

Describatur circulus, in eo etiam quadrilaterum qualecunq;, æqualium uel inęqualium laterum: dico, angulos quosq; oppositos duobus rectis ęquales esse. Ducantur in quadrilatero duę diametri. Et quoniam omnis trianguli tres anguli interiores, ex corollario propositionis 32 primi, duobus rectis æquales sunt. Et rursus, quoniam etiam æquales inter se sunt, ex præmissa 21, qui in eodem segmento sunt anguli, eo quod prius dicitur, semel: altero uerò, bis usurpato, bis insuper angulo pro ęquali alio sumpto: quantum ad duos oppositos in quadrilatero angulos ratione oppositionis unius, propositioni satisfactum erit. Porrò eodē ordine, demonstratione pro alijs duobus



oppositis in quadrilatero angulis instituta, quòd & illi duobus rectis angulis æquales sint, manifestè patebit. Quadrilaterorum igitur in circulis anguli, qui ex opposito, duobus rectis sunt æquales. quod demonstrasse oportuit.

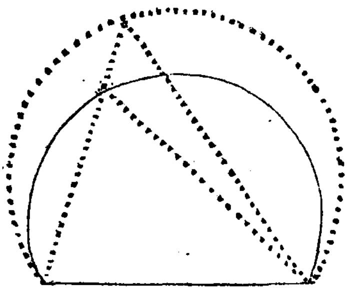
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα, οὐ συσταθήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

PROPOSITIO XXIII.

Super eadem recta linea, duæ sectiones circulorum similes & inæquales, non constituentur ad easdem partes.

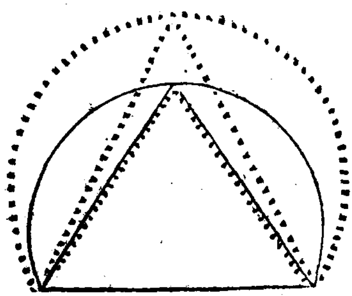
Describatur circuli sectio: dico, quòd super eius recta impossibile sit, aliam, descriptæ similem & inæqualem, ad eandem etiam partem, posse cõstitui sectionem. Quòd si uideatur hoc posse fieri, constituatur sanè super hac recta linea sectio alia, ut quæ positæ similis sit & inæqualis, ad illam eandem etiam partem, & extendatur, per primum postulatum primi, recta quædam linea, ab una rectæ extremitate per arcus utriusque sectionis transiens, atque ubi hæc sectionum arcus secuerit, inde etiam, per postulatum eiusdem primi secundum, rectæ lineę ad alteram rectæ extremitatem ducantur. Et quoniam sectiones sunt, ex hypothesi aduersarij, inæquales, atque etiam similes, cum similitudo sectionũ circuli ab æqualitate angulorum,

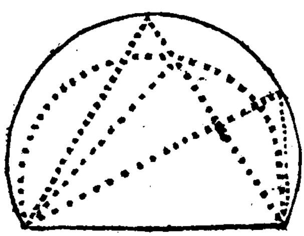


quos illæ sectiones suscipiunt, definiatur: anguli illi quos secundò ductæ cum prima in sectione comprehendunt, externus & internus oppositus unius trianguli, inter se ęquales erunt. Sed quia non sunt, ut quidem hoc propositio in primo 16 testatur, neque sectiones etiam, ut ponitur, inter se inæquales & similes erunt. Super eadem igitur recta linea, duæ sectiones circulorum similes & inæquales, non constituentur ad easdem partes. quod demonstrasse oportuit.

APPENDIX.

Potest etiam figura huius propositionis describi, ut super sectionibus constitutorum angulorum uterque sua propria latera habeat, utque latera unius ab alterius sectionis laterib. includantur. Quòd si ad hunc modũ figura descripta fuerit, tum quia angulus interioris angulo sectionis exterioris, per propositionem 21 primi, maior est, descripti igitur arcus similes non erunt, id quod est contra propositionis hypothesim.





Item licet uterque angulorum sua propria latera habeat, accidit tamen aliquando, ut unum latus unius, unum alterius sectionis latus secet. Quòd si sic, tum propter demonstrationem faciliorem, ab intersectione arcus interioris, & lateris unius anguli sectionis exterioris alia ad extremitatem rectę linea recta ducenda est. Et quoniam in eodem segmento anguli, ex propositione 21 huius, inter se sunt ſe ſunt æquales, cum unus eorum alio quodam alterius ſegmenti angulo, ut externus ſuo interno, ex propoſitione 16 primi, maior ſit: & alter, propter æqualitatem, eodem maior erit: non æquales igitur anguli, neq; etiã ſimiles ſectiones, quod eſt contra hypotheſim. Super eadem igitur recta linea, duæ ſectiones circulorum ſimiles & inæquales, nõ conſtituẽtur, ad eaſdẽ partes. quod demõſtrari oportuit.

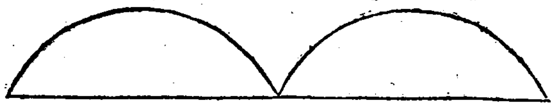
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΔ.

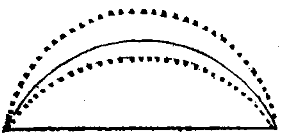
Τὰ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.

PROPOSITIO XXIIII.

Super æqualibus rectis lineis ſimiles circulorum ſectiones, æquales inter ſe ſunt.

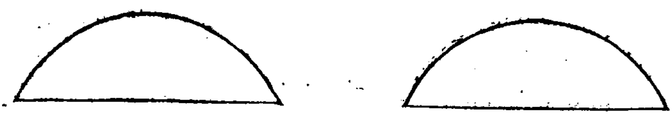
Sint duæ uel plures rectæ lineæ æquales, ſuper ĩjs etiam ſimiles circulorum ſectiones cõſtitutæ: dico, illas ſectiones inter ſe ęquales eſſe. Eſt huius propoſitionis demonſtratio præcedens 23. Nam congruente uel ſuperpoſita una ſectione alteri, cum earum rectæ, ex hypotheſi, ſint inter ſe æquales, una extremitate unius ſuper una ſectionis alterius poſita, & in alteram huius altera extremitas illius coincidet, quare ſic & arcus ſectionum coincidere oportet. aliàs ſequeretur, Similes & inæquales circulorum ſectiones ſuper una & eadem recta deſcribi poſſe, quod eſt contra propoſitionem præcedentem. Coincidunt ergo, ac propterea æquales etiam inter ſe, ex communi quadam noticia, quę in primo his uerbis expoſita eſt, Quę congruunt, & reliqua.

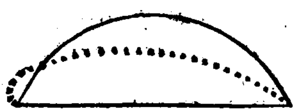




DEMONSTRATIO ALIA.

Superponatur una ſectio alteri, ita ut unius extremitas una ſuper alterius ſectionis unam extremitatem ac recta ſuper rectam collocetur. Et quoniam ęquales ſunt ipſæ rectæ: altera extremitas unius cum altera alterius ſectionis extremitate coincidet: atq; hinc linea lineæ congruit. Quòd ſi ſectio ſectioni cõgruat: eas inter ſe æquales eſſe, ut uult propoſitio, ex noticia quadam communi concluditur, Si igitur &cæ. Eſto autem quòd non congruant ſectiones baſibus congruentibus, ſed diſferant, atq; in diuerſa loca cadant. Quoniam enim circulus, ut uult propoſitio 10 huius, in pluribus punctis quàm duobus circulum alium non ſecat, cum hic in tribus punctis fiat circulorum ſectio, propoſitioni citatæ contrarium fieri apparet, quod non conceditur. Quare congruente linea lineæ, nõ poteſt non ſectioni quoque ſectio congruere. Super æqualibus igitur rectis ſimiles circulorum ſectiones conſtitutæ: & ipſæ ſectiones inter ſę æquales erunt. quod demonſtraſſe oportuit.





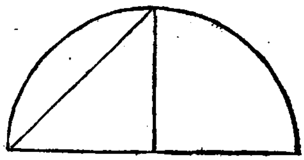
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΕ.

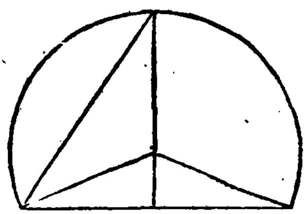
Κύκλου τμήματος δοθέντος, προσαναγράψαι τὸν κύκλον οὗπερ ἐστὶ τμῆμα.

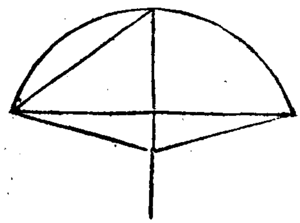
PROPOSITIO XXV.

Circuli sectione data, describere circulum cuius est sectio.

Sit sectio circuli data, atq; propositum, circulum eius describere, hoc est, sectionem hanc, ut circulus tandē sit, perficere & complere. Diuidatur igitur recta, super quam est constituta sectio, per propositionem 10 primi, bifariam, atq; à puncto diuisionis huius ad angulos rectos linea excitetur, ad arcum usque, & ultra etiam lineam rectam, quantum nimirum necessarium fuerit, eam prolongando. Erit autem in ea ad rectos ducta linea, ut testatur corollarium propositionis primæ huius, centrum circuli. Ducta igitur ab huius πρὸς ὀρθὰς ductæ & arcus intersectione ad angulum sectionis alterutrum recta quadam linea, si ad hanc anguli inter se æquales sint, ubi hæc eadem πρὸς ὀρθὰς ducta rectam arcus secat, ibi centrum circuli: ipsam uerò sectionem, Semicirculum esse pronuncies. Eo igitur ex hoc puncto circini officio completo, nona propositione huius adiuuante, propositioni satisfactum erit. Quòd si dicti anguli fuerint inter se inæquales, angulo ei qui sub recta hac, atq; ea super qua est constituta sectio, cōprehenditur, per 23 primi, ut alteri angulo æqua-



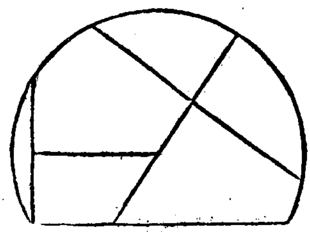


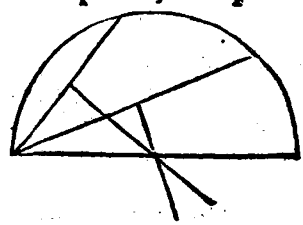


lis fiat, rectæ cuiusdam lineæ ductu succurrendum erit. Quo facto, ubi hæc ad rectos ductam tetigerit, centrum circuli ibi esse pronūciabis. id quod sic demonstrari potest. Ducatur ex hoc puncto ad alterā arcus extremitatē recta quędam linea. Et quoniam hæc, & aliæ duæ, quæ ex hoc eodem puncto ad circumferentiam concurrunt rectæ lineæ, ex propositionibus 6 & 4 primi æquales inter se sunt: quòd tandem id punctum, de quo iam agitur, eius, cuius est data sectio, circuli centrum sit, ex propositione 9 huius manifestum erit. Eo igitur nunc secundum unius æqualium linearum interuallum, per 3 postulatum primi, inde descripto, cum per reliquarum etiam æqualium extremitates transeat, proposito satisfactum erit. Circuli igitur sectioni datæ, circulus ipse descriptus atq; cōpletus est: quod fieri oportuit.

EST ET ALIA HVIVS PROPOSITIONIS DEMONSTRATIO.

In data sectione, cuius circulus compleri debet, ducantur duæ rectæ lineæ. Vel, ut sit operatio certior. Sumantur tria in sectione puncta, utcunq;: hæc duabus re-

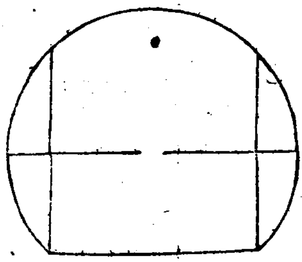




ctis lineis copulentur, & erunt, ut supra, duæ in sectione rectę lineæ ductæ. Harum nunc

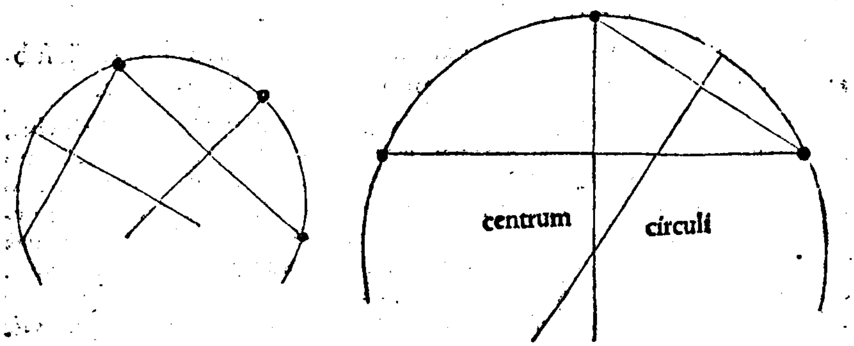
nunc utraque bifariam diuisa, à puncto diuisionis utriusque ad angulos rectos linea, per propositionem 11 primi excitetur, ubi tandem hæ duæ ad rectos ductę sese mutuo secant, ibi per corollarium primæ huius, bis usurpatum, circuli, qui sectionẽ datam sua descriptione comprehendit, centrum esse pronunciabitur.

Quod si ad rectos ductæ sese mutuo non secuerint, id quòd aliquando, ubi in circulo ductæ rectæ lineæ parallelę sunt, accidere poterit, quia tùm ad rectos ductę coincidunt, atque simul una recta linea sunt, ea bifariam diuidenda, per punctum deinde hoc, centrum quæsiti circuli exprimendum erit.



APPENDIX.

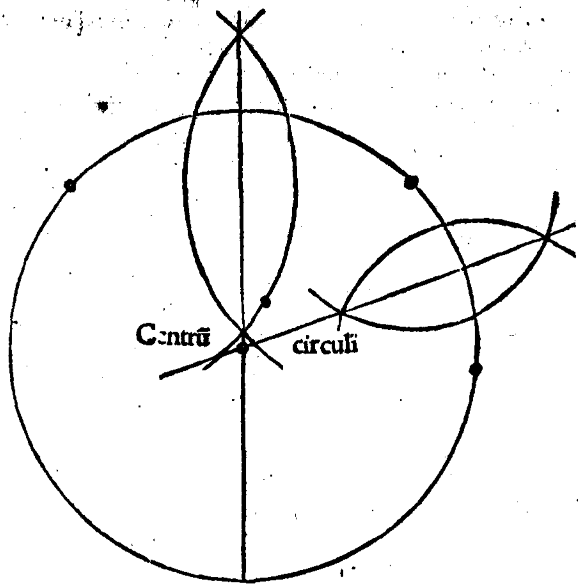
Vtuntur hac propositione, qui centrũ trium punctorum, cum opus sit, quærere, hoc est circulum, per data tria puncta transeuntem, describere solent. Nam cum circulus per data puncta transire debeat, sectionem quandam circuli per puncta data occultè ductam sibi imaginantur. Quòd deinde ex tribus illis punctis (uno ta



men bis repetito) tanquam ex tribus centris, officio circini, ultra medietatem spacij, per quod arcus describi debet, semper extensi, quatuor circulorum arcus describant, ita ut semper bini & bini sese mutuo secent, per puncta tandem intersectionum duas rectas uersus unam & eandem partem ducãt, nihil certè aliud est, quàm dicta puncta duabus rectis coniungere, à media deinde harum, ad angulos rectos lineas excitare. Id quod cuilibet, propositionẽ 11 primi altius intuenti, perspicuum erit. Atque huius hoc loco Lectorem admonere uoluimus.

SEQVITVR HVIVS TRACTATIONIS PRO CENtro trium punctorum inueniendo figura geometrica alia.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ



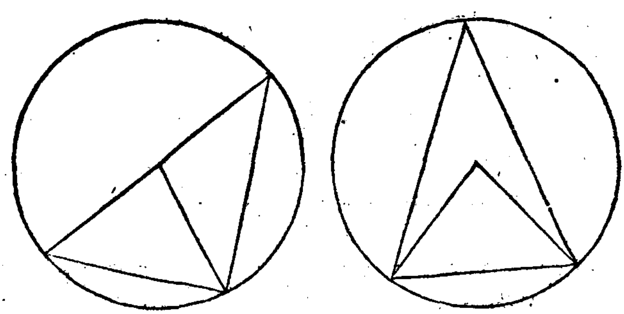
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις, αἱ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασι, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.

PROPOSITIO XXVI.

In æqualibus circulis, æquales anguli in æqualibus circũferentijs subtenduntur, siue ad centra, seu ad circumferentias deducti fuerint.

Describantur ęquales circuli, quod nimirum una circini expansione fieri debet, in ijs etiam, tam ad centra quàm ad ipsas circumferentias, æquales anguli, in uno quidem primò ad placitũ illis descriptis, in altero uerò uel alijs, si plures quàm duo circuli fuerint, uno cuiusq; anguli latere ducto, per propositionem in primo 23 describendi sunt: dico igitur, quòd illi anguli, tam ad centra quàm ad circumferentias positi, subtensos arcus æquales habeant. Quoniã enim angulus ad centrum unius est æqualis, ex hypothesi, angulo, similiter ad centrum posito, circuli alterius, & rursus quoniam à centris ad circumferentias lineæ rectæ ductæ, propter æquales ex



hypothesi circulos, inter se æquales sunt, in singulis tertio latere ducto: & hæc tertia latera tia latera per propositionem 4 primi, circumferentiæ deinde uel circulorum sectiones, propterea quòd angulos, ex hypothesi, inter se æquales suscipiant, per definitionem similium sectionum, & propositionem 24 huius, inter se æquales erunt. Subtractis igitur nunc æqualibus arcubus ab æqualibus circulis, cùm & residui arcus, à quibus scilicet æquales in æqualibus circulis anguli subtenduntur, ex communi quadam noticia inter se æquales sint, propositioni satisfactum erit. Aequales igitur anguli in æqualibus circulis, ab æqualibus circumferentijs subtenduntur, siue ad centra, seu ad circumferentias deducti fuerint. quod demonstrasse oportuit.

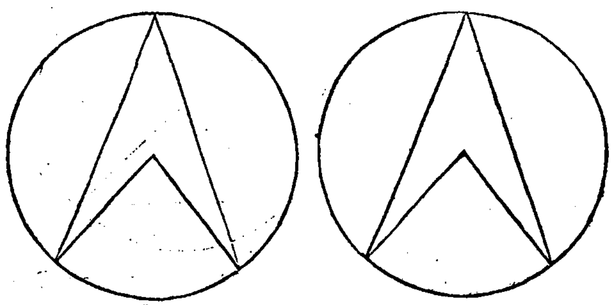
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΖ.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις, αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.

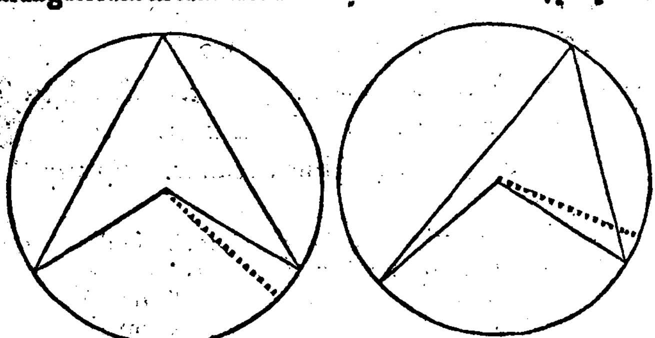
PROPOSITIO XXVII.

In æqualibus circulis, qui super æquales circumferentias deducuntur anguli, æquales inter se sunt, siue ad centra, seu ad circumferentias deducti fuerint.

Describantur æquales circuli, ponantur etiam in ijs super æquales circumferentias anguli: dico igitur, quòd illi anguli, tam ad centra quàm ad circumferentias positi, inter se æquales sint. Quoniam enim qui ad centra ponuntur anguli, sunt aut



inter se æquales, aut non. Si æquales: & qui ad circumferentias ponuntur anguli, cum hi, ex propositione 20 huius, sint ad centrum positis dimidia, inter se æquales erunt, quod est propositum. Quòd si fuerint inæquales, succurratur uni ex his, per 23 primi, siue maiori siue minori angulo, ut alteri æqualis fiat, quo facto, & illorum æqualium angulorum circumferentiæ uel arcus subtendentes, per præmissam, in-



ter se æquales erunt. Sed quia uni illorum æqualis etiam est, ex hypothesi, mutati

 anguli

anguli subtendens: per hanc igitur communem noticiam, Quæ eidem sunt æqualia & reli. infertur tandem, partialem totali subtendenti circumferentiæ æqualem esse, quod est impossibile. Inæquales igitur non sunt ad centrum positi anguli, sed æquales. Et quia æquales: etiam ad circumferentias positi cum sint horum dimidij, ut dictum est, inter se æquales erunt. Aequales igitur circumferentiæ uel arcus, in æqualibus circulis, æquales angulos subtendunt, siue ad centrum, siue ad circumferentias positi fuerint, quod demonstrasse oportuit.

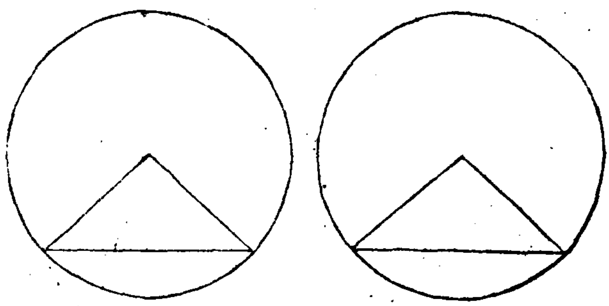
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΗ.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι, τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι, τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι.

PROPOSITIO XXVIII.

In æqualibus circulis, æquales rectæ lineę, æquales circumferentias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem uerò minori.

Describantur æquales circuli, in ijs etiam æquales rectæ ducantur: dico igitur, per illas rectas æquales etiam in circulis auferri circumferentias, maiorem scilicet maiori, & minorem circumferentiæ minori. Nam ductis ab extremitatibus rectarum ad centra rectis lineis, cũ circuli ex hypothesi sint inter se æquales, & hæ rectæ



ductæ ex definitione æqualium circulorum, inter se æquales erunt. Quare & anguli ad centrum positi per propositionem 8 primi, æquales, atq; insuper arcus uel circumferentiæ, quæ hos æquales angulos subtendunt, per 26. huius, æquales, quod est unum. Porrò quia circuli ex hypothesi sunt æquales, ab his igitur si æquales circumferentiæ ablatę fuerint, & quę relinquuntur circumferentię, ex communi quadam noticia, inter se æquales erunt. In circulis igitur æqualibus, æquales rectę lineę æquales circumferentias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem uerò minori. quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΘ.

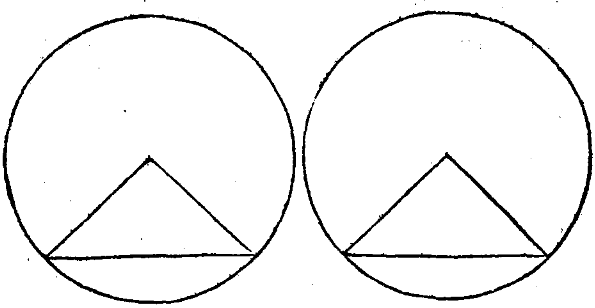
Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις, ὑπὸ τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν.

PROPOSITIO XXIX.

In æqualibus circulis, sub æqualibus circumferentijs æquales rectæ lineæ subtenduntur.

Vt præcedens 28, per æquales rectas in æqualibus circulis ductas, æquales circumferentias auferri asserit: sic quoq; hæc uicesima nona, ubi in æqualibus circulis per lineas quasdam rectas, æquales circũferentię ablatæ fuerint, illas rectas æquales esse infert. Describantur igitur æquales circuli, in ijs etiam æquales sumantur circumferentiæ: dico igitur, & illarum æqualium circumferentiarum rectæ subtensæ

tensæ inter se æquales sint. Ducantur ab extremitatibus subtensarum ad centra rectæ lineæ. Et quoniam hæ rectæ ductæ, propter æqualitatem circulorum ex hy-



pothesi, ex definitione prima huius, inter se æquales sunt, anguli insuper ad centra, sub illis æqualibus ductis comprehensi ex 27 huius, æquales: & lineę his æqualibus angulis subtensæ, quæ etiam sub circumferentijs æqualibus subtenduntur, per propositionem 4 primi, inter se æquales erunt. In circulis igitur æqualibus, sub æqualibus circumferentijs æquales rectæ lineæ subtenduntur, quod demonstrasse oportuit.

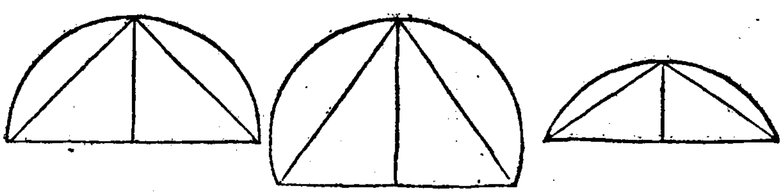
ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Λ.

Τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν, δίχα τέμνειν.

PROPOSITIO XXX.

Datam circumferentiam, bifariam secare.

Sit circumferentia data, atque propositum eam bifariam secare. Datæ igitur circūferentiæ extremitates recta quadam linea coniungantur, hac deinde recta bifariam diuisa, à puncto diuisionis ad rectos angulos linea uersus circumferentiam excitetur: & erit hæc, ipsa quæ circumferentiam bifariam secabit, quod sic demon-



stratur. Ducantur à sectionis puncto in circumferentia ad eius extremitates duæ rectę lineę. Et quoniā hæ duæ rectę, ex propositione 4 primi, inter se ęquales sunt, & rursus quoniam in circulis æqualibus æquales rectæ lineæ, per propositionem 28 huius, circumferentias æquales auferunt, maiorem maiori, & minorem minori: cum quod de circulis æqualibus, illud ipsum etiam de uno & eodem dici posse & uerùm esse cōstet, demonstratio absoluta erit. Data igitur circumferentia bifariam diuisa est. quod fecisse oportuit.

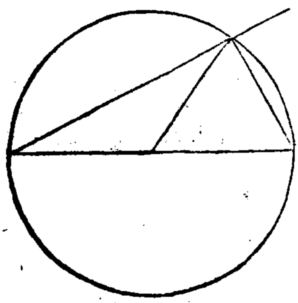
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΑ.

Ἐν κύκλῳ, ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐλάττων ὀρθῆς. ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι μείζων ὀρθῆς. Καὶ ἔτι, ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς, ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς.

PROPOSITIO XXXI.

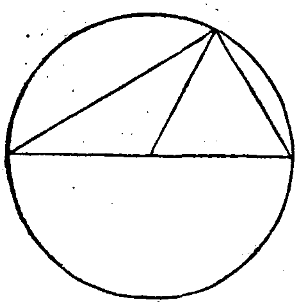
In circulo, angulus qui in ſemicirculo eſt: rectus eſt, qui uerò in maiori ſegmento: minor recto, qui autem in minori ſegmento: maior eſt recto. Et inſuper, angulus maioris ſegmẽti: rectò quidem maior, minoris uerò ſegmenti angulus: minor eſt recto.

Habet hæc propoſitio quinq; partes, puta quòd in ſemicirculo angulus: rectus ſit, in maiori ſegmento quàm eſt ſemicirculus: minor recto, in minori autem: maior recto. Prætereà ſegmentorum angulos, ſemicirculo quidem maioris: recto minorem, quod uerò eſt ſegmentum ſemicirculo minus: eius angulum recto maiorem eſſe oporteat. Hæc nũc ſingula ordine ſic demõſtrari poſſunt. Deſcribatur circulus cum ſua diametro, ducãtur etiam à diametri extremitatibus ad punctum aliquod, in circumferentia ubiuis ſumptum, duæ rectę lineę: dico, has duas rectas angulum rectum continere. quod quidem, ſi altera ductarum ultra circumferentiam ſecundum continuationem in rectum eiecta, ex hoc ipſo angulo deinde recta quædam linea ad centrum ducta fuerit, ſic demonſtrari poterit. Quoniam enim totalis in circulo trianguli unum latus ulterius productum eſt: externus qui ſic deſcribitur angulus, duob. internis oppoſitis, ex propoſitione 32 primi ęqualis erit. Sed quia his internis, ex definitione circuli & priore parte propoſitionis quintę primi, bis uſurpatis, æqualis etiam eſt angulus, quem duę in ſemicirculo rectę lineę includunt: eidem igitur in ſemicirculo angulo dictus externus ęqualis erit. quare, ex definitione 10 primi, uterq; rectus. In ſemicirculo igitur angulus, rectus eſt. quod demonſtraſſe oportuit.



POTEST HOC IDEM ETIAM ALITER DEMONSTRARI in hunc modum.

Ducta ab angulo in ſemicirculo ad centrum recta linea, cum partialium angulorum uterque, uni totalis trianguli angulo, ex definitione circuli & priore parte propoſitionis quintæ primi, ſit æqualis, atq; hac ratione & communi illa noticia, Si ęqualibus æqualia adijciantur, &c. idem totalis duobus in triangulo reliquis æqualis: utrunque æqualium, reſpectu totalis trianguli, ex corollario propoſitionis 32 primi, duorum rectorum medietas, atq; tandem utrunque per ſe uni recto æqualis erit, id quod demonſtraſſe oportuit.



Ἄλλη ἀπόδειξις τοῦ ὀρθὴν εἶναι τὴν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνίαν.

Alia demonſtratio iſtius quod in propoſitione dicitur, Angulum in ſemicirculo rectum eſſe.

Cum ex propoſitione 32 primi, Omnis trianguli uno latere ulterius producto, externus angulus duobus internis oppoſitis ęqualis ſit, cumq; etiã ex priore parte propoſi-

propositionis 5 primi, isosceliũ triangulorũ qui ad basim sunt anguli inter se æquales sint, hac & illa bis usurpata: qui ad centrũ sunt anguli, uterq; ad alterius trianguli angul, ũ in circumferentia existentem, duplus erit. Sed quia ad centrum positi anguli, ex propositione 13 primi, duobus rectis sunt æquales: eorum medietas igitur, ut est in semicirculo angulus, duorum rectorum medietati, hoc est uni recto, æqualis erit. Hinc colligitur

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν τριγώνου ἡ μία γωνία δυσὶν ἴση ᾖ· ὀρθή ἐστι. Διὰ τὸ καὶ τὴν ἐκείνης ἐφεξῆς ταῖς αὐταῖς ἴσην εἶναι. Ὅταν δὲ αἱ ἐφεξῆς γωνίαι ἴσαι ὦσιν· ὀρθαί εἰσιν.

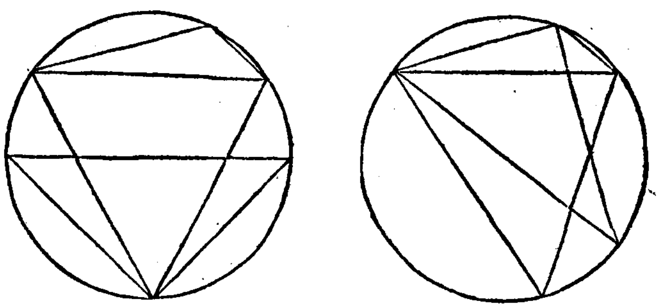
COROLLARIVM.

Ex hoc sanè manifestum. Quando trianguli unus angulus duobus, reliquis scilicet, æqualis fuerit: illum rectum esse.

Propterea quòd ille deinceps se habens, eisdem duobus reliquis æqualis sit. Quando autem deinceps se habentes, anguli æquales fuerint: recti erunt ambo.

Nunc quantum ad secundam ac tertiam propositionis partem.

Describatur circulus, ducatur in eo etiam recta quædam linea, non per centrum transiens, puncto deinde in utriusque segmenti circumferentia sumpto, ad utrunq; eorum duæ ab extremitatibus ductæ rectæ ducantur lineæ: dico igitur, eum angulum qui est in maiori segmento, recto minorem: illum uerò qui est in segmento minori, recto maiorem esse. Ducatur in circulo diameter, quomodocunq;, ad huius



extremitates deinde ab angulo, qui quòd talis sit qualis proponitur, demonstrari debet, duæ rectę lineę, uel una tantum si suffecerit. Et quoniam angulus in semicirculo, per primam partem propositionis huius, rectus est, cum angulus qui est in maiori segmento, sit recti anguli pars, contrà uerò, anguli illius qui est in minori segmento, ipse angulus rectus pars: qui igitur in maiori segmẽto fuerit angulus, ut pars, recto minor, in minori uerò, ut totum, recto angulo maior erit. Vel, probato uno, quòd aut in segmento maiori angulus, recto minor sit: aut alter, recto maior, cũ Omnis quadrilateri, in circulo descripti, anguli ex opposito, per propositionem 22 huius, duobus sint rectis æquales: statim tandem & alterum inferri potest. Quarto igitur iam, quòd in propositione dicitur, angulum maioris segmenti, recto maiorem: ac ultimò tandem, minoris segmenti, recto minorem esse, sic demonstretur. Descripto circulo, in eo etiam præter centrum recta quadam linea ducta: dico, &c. Ducatur in circulo diameter sic, ut eius una extremitas uni ductæ extremitati copuletur, altera deinde ductæ cum altera extremitate diametri recta quadam alia iuncto, ubi hæc eadem recta ultra circumferentiam cõtinuata fuerit, demonstrationis

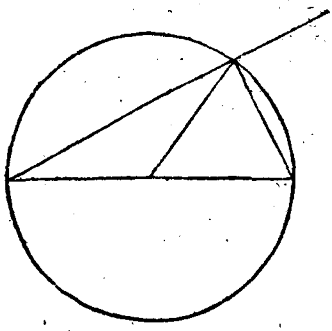


figura parata erit. Et quoniam maioris segmenti angulus, ut apparet, eo angulo qui ex prima parte propositionis huius, rectus est, maior existit, angulorum porrò in hac figura deinceps se habentiũ uterq;, ex corollario præmisso rectus est: qui igitur maioris segmenti est angulus, ut totum, recto maior: contrà, qui minoris, ut pars, angulo recto minor erit. In circulo igitur qui quidem, & reliqua, quod demonstrasse oportuit.

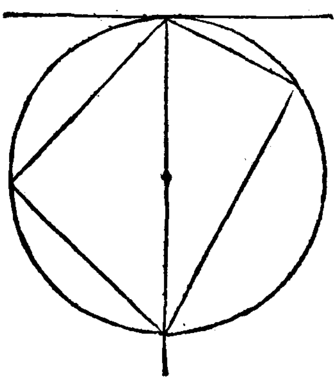
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΒ.

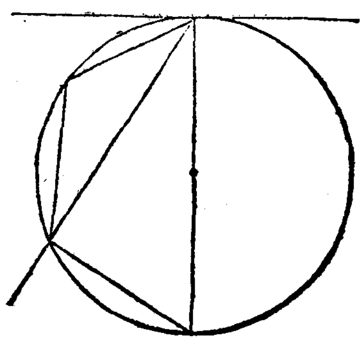
Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς εἰς τὸν κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον· ἃς ποιεῖ γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ, ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίαις.

PROPOSITIO XXXII.

Si circulum tetigerit recta quædam linea, à contactu uerò extendatur quædam recta linea circulum secans: anguli quos facit ad contingentem, æquales erunt ijs, qui alternatim in circuli segmentis consistunt, angulis.

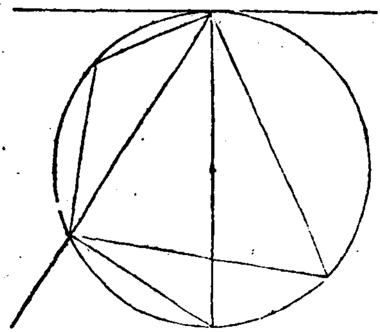
Describatur circulus, ducantur etiam duæ rectæ lineæ, quarum una circulum tangat, altera uerò à puncto contactus, per circulum transiens, eum secet: & erit circulus per secantem quidem in duo segmenta diuisus. Statuatur nunc in utroq; segmento angulus, per binas & binas rectas lineas ductas. His itaque descriptis: dico, quòd à secante & contingente circulum uterq; comprehensus angulus, ei, qui ex altera parte in segmento ponitur, æqualis sit. Potest in descriptione figuræ, uel quæ per circulum extenditur, uel illa quæ in uno segmento angulum constituit recta linea, uel neutra harum per centrum circuli transire. Quantum ad primum, Cum in segmentis angulorum uterq;, ex prima parte propositionis 31, rectus sit, cumq;





etiam ipsa secans ad tangentem, ex 18, sit perpendicularis, atque ita uterq; angulorum qui sic fiunt, rectus: illis mediantibus, per communem illam noticiam, qua omnes recti anguli æquales inter se sunt, propositioni tandem satisfactum erit. Quantum

tum ad secundum. Cum triangulum appareat, cuius in semicirculo angulus ex prima parte propositionis 31 huius, rectus est, cumq; etiam Omnis trianguli tres anguli interiores, ex corollario propositionis 32 primi, duobus rectis æquales sint: reliqui duo eiusdem trianguli anguli, uni recto æquales erunt. Sed quia unus, rectus etiam est ex 18 huius, angulus quem nimirum ex eadem parte contingens ac per centrum transiens recta linea comprehendunt: per hanc communem noticiam, Quæ uni sunt æqualia, &c. illi duo uni huic angulo æquales erunt: communi igitur illo angulo quem habent, ablato, quantum ad unum angulum iam propositio constabit. De reliquo tandem, cum tam quadrilaterorum in circulis anguli, qui ex opposito sunt, ex 22 huius, quàm etiam qui à contingente & per centrum transeunte recta linea cõprehenduntur, ex propositione 13 primi, duobus rectis æquales sint: ex communi quadam noticia, duo priores posterioribus duobus angulis æquales erunt. ab æqualibus igitur his, angulis qui iamdudum æquales inter se esse demonstrati sunt, subtractis: & de altero iam angulo, quod ille ex altera parte in segmento posito angulo æqualis sit, dubium amplius non erit. Quantum ad tertium, ubi scilicet neutra rectarum, neque circulum secans, neq; etiam illa quę in segmento angulum constituit, per centrum circuli transeat. Quòd si hoc modo figura descripta fuerit, tum à puncto contactus, per 11 primi, ipsi tangenti ad rectos angulos linea excitanda est. Erit autem hæc, cum ex propositione 19 huius, centrum circuli contineat, diameter circuli. Coniungatur porrò diametri altera extremitas cũ extremitate secãtis. Et quia angulus qui sic describitur, eo quòd in semicirculo existat, rectus est: reliqui duo in hoc triangulo anguli, uni recto æquales erunt.



Sed quia angulus etiam ad contactum totalis ex illa parte, ratione ad rectos angulos excitatę lineæ, est rectus: idem totalis prioribus duobus æqualis erit. Subtracto igitur ab illis æqualibus angulo quodam illis communi, cum in omni circulo qui in eodem segmento sunt anguli, inter se æquales sint, de eo qui nimirum in illa parte sub tangente & secante comprehenditur angulo, quòd ille ex altera parte in segmento angulo æqualis sit, tandem constabit. De altero nunc angulo nullum erit dubium, quin & ipse in altero segmẽto angulo æqualis sit. Nam cum quadrilaterum in circulo descriptũ, duos angulos oppositos duobus rectis ęquales habeat, cumq; insuper illi, qui à tangente & secante circulum comprehenduntur anguli, duobus rectis æquales sint, per cõmunem illam noticiam, Eidem æqualia &c. illis duobus in quadrilatero angulis, quos secans cum contingente facit, duo anguli æquales erunt. Quia aũt unus, ut iam ostensum, est uni ęqualis: & alter tandem, per subtractionem æqualium ab æqualibus, alteri angulo æqualis erit. Si circulum igitur tetigerit recta quædam linea, à contactu, &c. quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΓ.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας γράψαι τμῆμα κύκλου, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

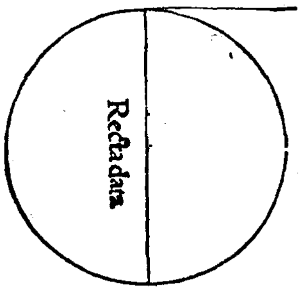
PROPOSITIO XXXIII.

Super data recta linea describere sectionem circuli, capientem angulum æqualem dato angulo rectilineo.

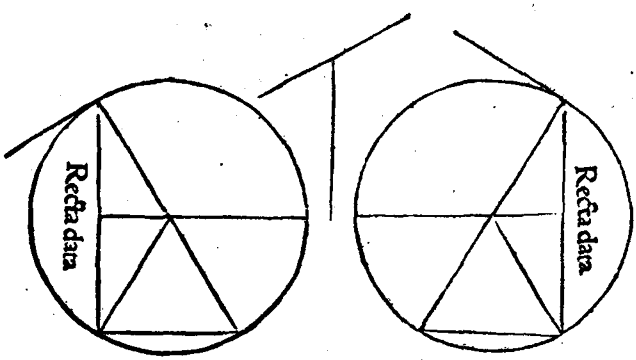
Requirit

Requirit hæc propositio rectam lineam datam, angulum item rectilineum datum, proponit autē, quomodo super data recta sectio, quæ dato rectilineo angulo ęqualem angulum capiat, describatur. Angulus datus potest esse rectus, aut non rectus. Si rectus, data recta bifariam diuidenda, super ea deinde ex puncto diuisionis semi circulus describendus est, & factum erit propositum: id quod ex prima parte propositionis 31 huius demonstrari poterit. ALITER. Si rectus fuerit angulus propositus, constituatur ad alterutram rectæ datæ extremitatem, atq; ad ipsam rectam lineam, per 23 primi, angulus, dato angulo ęqualis, recta deinde bifariam diuisa, ex puncto hoc, secundum alteram eius medietatem describatur circulus. Et

Angulus datus, rectus.



quoniam angulus quem applicata ad rectam datam constituit, ex structura, rectus est: rectę datæ applicata circulū illum, ex corollario propositionis 16 huius, tanget. Et quoniam etiam, ut habet propositio præcedens, angulus quem hę duę rectę comprehendunt, in segmento angulo ex aduersa parte est ęqualis, illo igitur descripto, cū ex cōmuni quadā noticia, Eidem æqualia, illa & inter se æqualia sint: de recto iam angulo constat propositū. Quòd si angulus datus nō fuerit rectus, erit is maior illo, aut minor. utrum horum fuerit, ad rectam datam & ad alteram eius extremitatem, angulus dato æqualis, per 23 primi, rectæ cuiusdam lineę ductu constituatur. Recta deinde data bifariam diuisa, tam ex hoc diuisionis puncto ipsi datæ, quàm etiam ex modò usurpata datæ extremitate ipsi ductę, ad angulos rectos linea excitetur: & erit communis



harum ad rectos ductarum sectio, centrum futuri circuli. quod in hunc modum demonstrabitur. Ducatur ab hoc centro ad alteram datę extremitatem recta quædam linea. Et quoniam hæc, ex structura & propositione 4 primi, lineę ei, quę ipsi ductę ad rectos angulos insistit, ęqualis est: circulus igitur ex cētro posito, ad unius æqualium interuallum, per 3 postulatum primi, descriptus, per terminum etiam alterius æqualis transibit. Describatur ergo is, altera etiam semidiametro, illa nimirum, quæ ab angulo, dato æquali, ducta est, in diametrum continuata, eius in circumferentia extremitas cum altera datæ extremitate iungatur. Et quoniam hæc recta, quæ cum data angulum dato æqualem comprehendit, propterea quòd ab extremitate diametri ad rectos angulos egrediatur, ex priore parte corollarij propositionis 16 huius, ipsum descriptum circulum tangit, cum angulus segmenti, quod ex altera parte super data recta descriptum est, angulo, ad contingentem, dato æquali to æquali descripto, ex 32 huius æqualis sit: super data igitur recta sectio, angulo dato æqualem capiens angulum, descripta est, quod fieri oportuit.

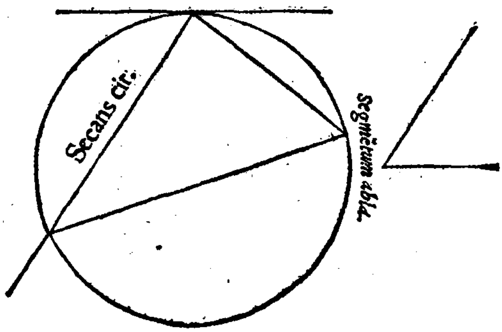
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΔ.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος κύκλου τμῆμα ἀφελεῖν, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

PROPOSITIO XXXIIII.

A' dato circulo segmentum abscindere, capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

Sit circulus datus, angulus item rectilineus datus, atque propositum, à circulo portionem, quæ capiat angulum dato æqualem, abscindere. Ducatur primò per 17. huius, recta quędam linea circulum tangens, à puncto deinde contactus, per 23



primi, alia recta circulum secans, quæ cum tangente angulum dato æqualem faciat, ducatur, & propositioni satisfactum erit, cum per hanc ipsam secantem huiusmodi sectio de circulo nunc sit abscissa. Puncto igitur in circumferentia, huic angulo opposita, ubiuis sumpto, si ab eo duæ rectæ lineæ ad extremitates circulum secantis ductæ fuerint, quem hæ rectæ angulum incluserint, dato rectilineo angulo æqualem esse, propositio huius 32, & communis illa noticia, Quæ eidem sunt æqualia & reliqua, commonstrabunt. A' dato igitur circulo segmentum, quod angulum dato rectilineo angulo æqualem capiat, abscissum est, quod fieri oportuit.

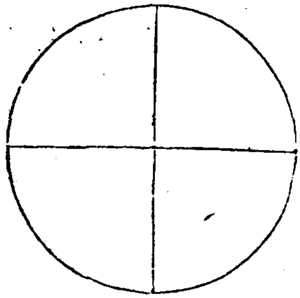
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΕ.

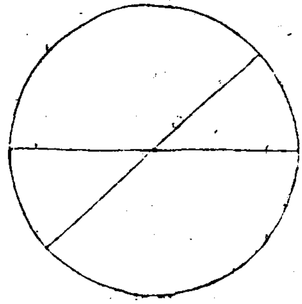
Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας· τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

PROPOSITIO XXXV.

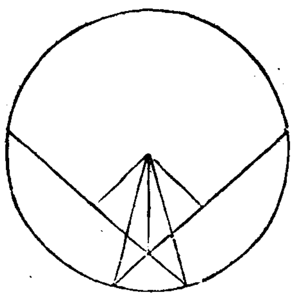
Si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secuerint: quod sub sectionibus unius comprehenditur rectangulum, æquum est ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur rectangulo.

Describatur circulus, in quo etiam duæ rectæ lineæ, sese mutuò secantes, ducantur: dico, rectangulum comprehensum sub partibus unius, æquale esse ei, quod sub alterius rectæ partibus continetur, rectangulo. Rectarum in circulo ductarum ſectio fit, aut in ipſo circuli centro, aut extra. Fiat igitur primò in circuli centro. Et quoniam quæ ex centro ad circumferentiam egrediuntur rectę lineę, ex de-





finitione circuli, inter ſe æquales ſunt, cum ſub æqualibus lineis, æqualia rectangula contineri manifeſtum ſit: & quæ ſub ſectionibus in circulo ſecantium linearum rectangula comprehenduntur, inter ſe æqualia erunt. Quòd ſi extra centrum, in circulo ductæ ſeſe mutuo ſecent, tum ad utramque ſecantem ab ipſo circuli centro, tanquam à puncto in linea minimè exiſtente, per propoſitionem 12 primi, perpendicularis linea ducenda, centrum deinde cum interſectione ſecantium communi, atque alterutra utriuſque ſecantis extremitate, tribus rectis lineis coniungendum erit, & demonſtratio ſic colligenda. Quoniam utraque ſecantium per ſuam perpendicularem lineam, iam quidem bifariam ſeu æqualiter, ex ſecunda parte propoſitionis tertiæ huius, diuiſa eſt, cum prius per punctum interſectionis communis inęqualiter etiam diuiſæ ſint, rectangulorum ſub inæqualis ſectionis portionibus comprehenſorum utrunque, unà cũ quadrato portionis interceptę, per propoſitionem quintam ſecũdi bis uſurpatam (ſunt enim duæ ſecantes) quadrato medietatis æquale erit, atque communi deinde, quod ſcilicet à perpendiculari ſecantis utriuſque deſcribitur, quadrato adiecto: rectangulorum utrunque cum duobus quadratis, interceptæ ſcilicet portionis uno, & perpendicularis ſuæ altero, duobus quadratis, quę nimirum à dimidio lineæ & perpendiculari deſcribuntur, æquale erit. Quia uerò in triangulis rectangulis id quod à latere rectum angulum ſubtendente deſcribitur quadratum, reliquorum duorum laterum quadratis per penultimam propoſitionem primi, æquale eſt, hac ipſa propoſitione bis uſurpata: utrunque rectangulum cum quadrato lineę, à centro ad interſectionem ſecantium ductæ, quadrato ſemidiametri ęquale erit. Semidiametri autem unius circuli, cum ſint inter ſe æquales, atque hinc etiam earundem quadrata æqualia: ipſa inſuper rectangula cum ſuis quadratis, uel cum quadrato eo quod commune habent, inter ſe ęqualia erunt. Illo igitur communi iam ablato: & ipſa rectangula ſola, quæ ſub ſecantium ſegmentis comprehenduntur, inter ſe æqualia erunt. Si in circulo igitur duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecuerint: quod ſub ſectionibus unius comprehenditur rectangulum, æquum eſt ei, quod ſub ſegmentis alterius comprehenditur rectangulo, quod demonſtraſſe oportuit.

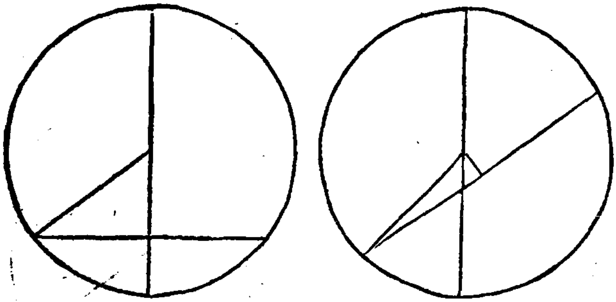


APPENDIX.

Facta autem eſt mentio duarum perpendicularium, trium deinde linearum aliarũ, quę pro huius propoſitionis ſtructura ducẽdę ſunt. Quòd ſi uerò, ratione quidem

ductarum

ductarum in circulo, una uel plures duci non possint, reliquis tamē ductis, demonstratio ut prius, non tamen tam sæpe singula repetendo succedet. Huius autem rei exempla sunt, ut sequitur.



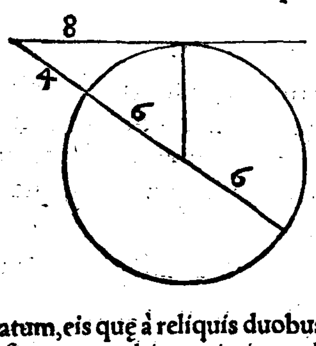
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Λϛ.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτηται· ἔσται τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης, μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνῳ.

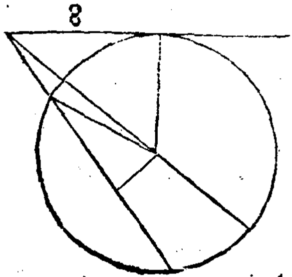
PROPOSITIO XXXVI.

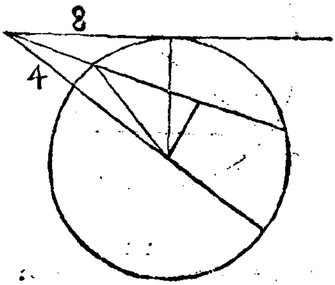
Si extra circulum sumatur aliquod punctum, ab eoq; in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum una quidem circulū secet, altera uerò tangat: erit quod sub tota secante, & exterius, inter punctum & conuexam circumferentiam, sumpta comprehenditur, ei quod à tangente describitur quadrato, æquale.

Describatur circulus, ducantur etiam à puncto, extra circulum sumpto, duæ rectæ lineę, una quidem circulum secans, altera uerò, per propositionem 17 huius, eum tangens: dico, rectangulum sub tota secante & eius externa portione comprehensum, æquale esse quadrato contingentis, quod in hunc modum demonstrabitur. Aut enim circulum secans per centrum transierit, aut non. Si transierit, ducatur à contactu ad centrum recta quædam linea. Et quoniam linea, ut est diameter circuli uel secantis rectæ interna portio, bifariam diuisa est, eiq; alia quædam recta linea, externa nimirum eiusdem secātis portio, in rectum adiecta est: comprehensum sub tota secante & externa portione rectangulum cum quadrato medietatis diuisæ, quadrato eius, quæ ex dimidia atq; adiecta constituitur, lineę, per propositionem 6 secundi, æquale est. Et quoniā etiam quæ ex dimidia & adiecta constituitur linea, ei in triangulo angulo, qui ex 18 huius rectus est, subtēditur, atq; hinc ab ea descriptum quadratum, eis quę à reliquis duobus trianguli lateribus describūtur quadratis, ex propositione penultima primi æquale: æqualium iam mutatione facta, loco unius scilicet lateris quadrati, duorum, contingentis scilicet, & eius quæ à contactu ad centrū ducta est, quadratis sumptis: & rectangulū cum dicto quadrato, eis quę à reli-



quis duobus lateribus describuntur, æquale erit æqualibus igitur quadratis, quæ nimirum à lineis, ex definitione circuli, æqualibus descripta sunt, ab his æqualibus subtractis, relinquitur tandem, sub tota secante & externa portione comprehēsum rectangulum, ei quod à contingente describitur quadrato æquale esse, quod erat obtinendum. Quòd si circulum secans per centrum non transierit, tum ab eodem extra circulum sumpto puncto, recta linea circulum secans alia, quæ per centrum transeat, ducenda est. Et quia de hac nullum est amplius dubium, quin sub tota illa





& parte sua exteriori comprehensum rectangulum, lineæ contingentis quadrato æquale sit, duabus à centro rectis lineis ductis, una quidem quæ priori secanti perpendicularis sit, altera uerò ad eiusdem prioris secantis cum circulo intersectionem tendens: & de illa, quæ per centrum non transierit secante linea, cum per suam ad rectos ductam lineam, ex secunda parte propositionis 3 huius, bifariam diuisa sit, ex propositionibus sexta secundi & penultima primi, interim tamen communi quodam, ad rectos scilicet ductæ quadrato, addito, æqualibus item ab æqualibus subtractis, nemo dubitabit. Si extra circulum igitur sumatur aliquod punctum, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum una quidem circulum secet, & reli. quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΖ.

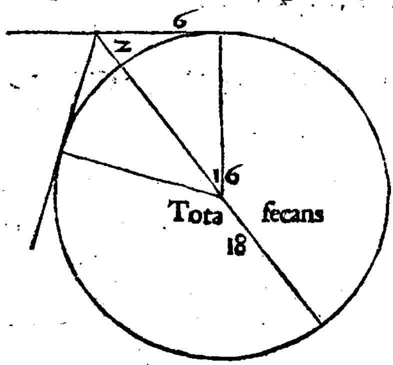
Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ προσπίπτῃ, ᾖ δὲ τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης τεμνούσης, καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης, μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς προσπιπτούσης· ἡ προσπίπτουσα, ἐφάψεται τοῦ κύκλου.

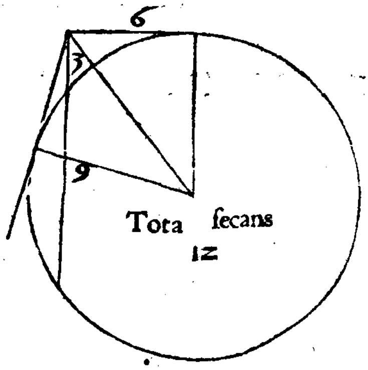
PROPOSITIO XXXVII.

Si extra circulum sumatur aliquod punctum, à puncto uerò in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum una quidem circulum secet, altera uerò incidat, quod item sub tota secante, & exterius inter punctū & conuexam circumferentiam sumpta, comprehenditur, æquale sit ei, quod à cadente describitur: cadens ipsa circulum tanget.

Describatur circulus, ducantur etiam à puncto extra circulum sumpto, in ipsum circulum, duæ rectæ lineæ, una quidem circulum secans, altera uerò quæ in ipsum tantùm cadat. Esto autem quòd rectangulum, sub tota secante & eius externa portione comprehensum, æquale sit quadrato in circulum cadentis lineæ: dico igitur, ipsam cadentem rectam circulum tangere. Ducatur à puncto extra circulum sumpto, per 17 huius, linea circulum cōtingens, à centro deinde circuli ad tria puncta, quæ

quæ sunt punctum contactus, id quod extra circulum sumptum est, & tertium deinde, ea cadentis extremitas qua cum in circulum cadit, tres rectæ lineæ ducantur. Et quoniam circulum tangentis quadratum, rectangulo, sub tota secāte & eius





externa portione comprehenso, ex propositione precedenti equale est, cum eidem rectangulo, ex proposito, æquale etiam sit quadratum lineę in circulum cadentis: cadens in circulum linea, & eum tangens, cum æqualia quadrata ab eis describantur, lineę inter se æquales erunt. Præterea, quoniam etiam in circulo ex centro usque ad ipsam circumferentiam continuatę rectæ lineę, inter se sunt æquales, cum iam duo appareant triangula, quorum duo latera unius duobus lateribus alterius ęqualia sint, bases etiam eorum, cum sit una & eadem linea illis communis, ęquales: & angulus inter æqualia latera in uno, angulo, inter æqualia latera in altero triangulo, per propositionem 8 primi, ęqualis erit. Sed quia unus eorum, ex 18 huius, est rectus: & alter sic, propter æqualitatem, rectus erit. In circulum igitur cadens, hypothesibus illis mediantibus, eum etiam tangere, ex priore parte corollarij propositionis 16 huius concluditur. Si extra circulum igitur punctum aliquod sumatur, à puncto etiam in circulum cadant duæ rectę lineę, quarum una quidem circulum secet, altera uerò eum tangat, quod item sub tota secante, & exterius inter punctum & conuexum circumferentiæ sumpta portione comprehenditur, æquale sit ei, quod à tangente describitur, quadrato: cadens recta linea circulum tanget, quod demonstrasse oportuit.

FINIS LIBRI TERTII.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

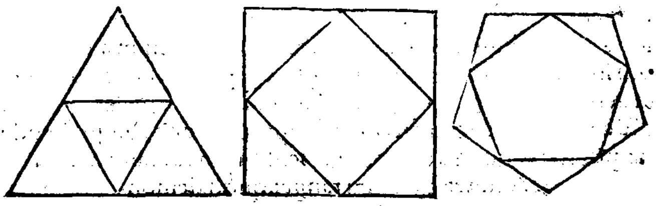
EVCLIDIS ELEMENTORVM GEOmetricorum liber quartus.

EST huius libri quarti tractatio de inscriptionibus & circumscriptionibus figurarum rectilinearum, uel planorum. Docet enim, quomodo una figura alij inscribi, uel ab alia circumscribi debeat. Quia uerò alia est huius quàm præcedentium librorum tractatio, alijs etiam in eo uocabulis utitur: atque ea, ut sequentia deinde planius intelligi possint, singula ordinè definit.

ΟΡΟΙ.

Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς σχῆμα εὐθύγραμμον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη τῶν τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος γωνιῶν ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται ἅπτηται.

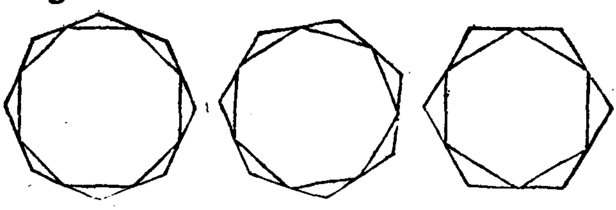
Σχῆμα δὲ ὁμοίως περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἑκάστης γωνίας τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται ἅπτηται.



DEFINITIONES.

1 Figura rectilinea in figura rectilinea describi dicitur, quando unusquisque inscriptæ figuræ angulus, unumquodque, latus eius in qua describitur, tangit.

2 Figura autem similiter circa figuram describi dicitur, quando unumquodque latus circumscriptæ, unumquemque angulum eius circa quam describitur, tangit.



Ex his duabus definitionibus colligitur, Inter illas tantum figuras, posse unam alteri

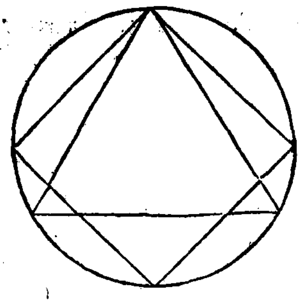
alteri inſcribi uel circumſcribi, quæ lineas numero æquales habent. Nunquã enim triangulum quadrato, pentagono uel hexagono, inſcribitur aut circũſcribitur, cum illius pauciores ſint anguli, quàm horum latera. Et econtrario. Sed triangulum triangulo, quadratum quadrato, & quælibet ſuę ſpeciei figuræ, & inſcribi & circumſcribi poteſt.

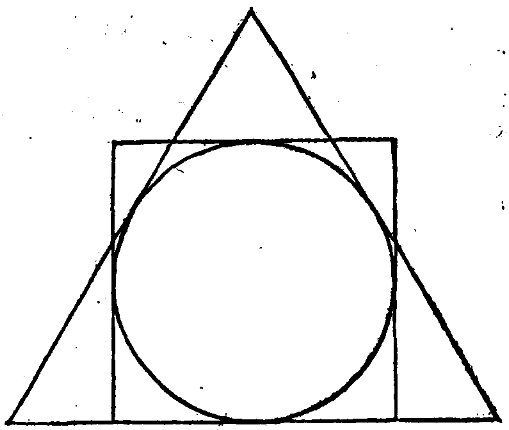
Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς κύκλον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη γωνία τοῦ ἐγγραφομένου ἅπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον περὶ κύκλον περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας τοῦ περιγραφομένου ἐφάπτηται.

3 Figura rectilinea in circulo deſcribi dicitur, quando unuſquiſque angulus inſcriptæ circuli circumferentiam tangit.

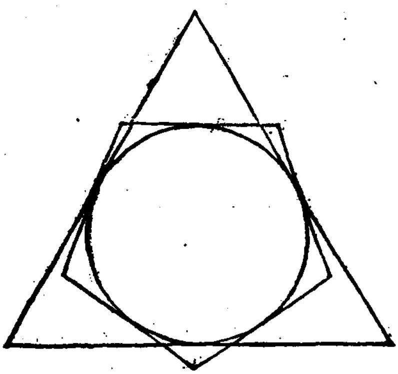
4 Figura uerò rectilinea circa circulum deſcribi dicitur, quando unumquodque latus circumſcriptæ, circuli circumferentiam tangit.





Requirit utraque definitiò circulum, cui deinde figura rectilinea per priorẽ quidem inſcribitur, per poſteriorem uerò ei circumſcribitur.

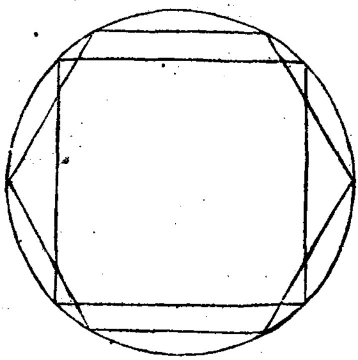
Κύκλος ὁμοίως εἰς σχῆμα ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια, ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται ἅπτηται.



5 Circulus ſimiliter in figura deſcribi dicitur, quando circuli circumferentia, unumquodque latus eius in qua deſcribitur, tangit.

Κύκλος

Κύκλος δὲ περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης γωνίας τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται ἅπτηται.

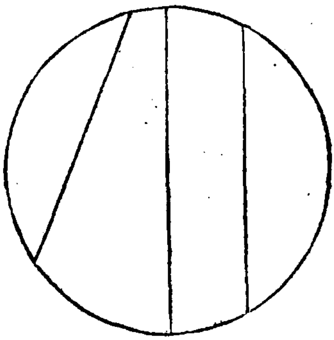


6 Circulus uerò circa figuram deſcribi dicitur, quãdo circuli circumferentia unumquemq; eius circa quam deſcribitur, angulum tangit.

Requirunt hæ duæ definitiones figuram rectilineam, cui deinde circulus per quintam inſcribitur, per ſextam uerò circulus circumſcribitur.

Εὐθεῖα εἰς κύκλον ἐναρμόζεσθαι λέγεται, ὅταν τὰ πέρατα αὐτῆς ἐπὶ τῆς περιφερείας ᾖ τοῦ κύκλου.

7 Recta linea in circulum coaptari dicitur, quando eius extrema in circuli circumferentia fuerint.



ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

ΠΡΩΤΗ. Α.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου, ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι.

PROPOSITIONES.

PRIMA I.

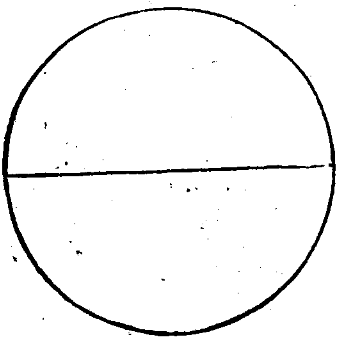
In dato circulo datæ rectæ lineæ, quæ minime longior ipſa circuli diametro exiſtat, æqualem rectam lineam coaptare.

Requirit hæc propoſitio circulum, rectam inſuper lineam datam. Monet autem expreſſe, ne hæc recta circuli diametro longior ſit. Nam ſi data fuerit diametro longior, cum hęc inter ductas in circulo rectas lineas, ex præcedentis tertij propoſitione 15, ſit omniũ longiſsima: nunquam in circulo data illa coaptari poſſet, ſed ipſum

potius

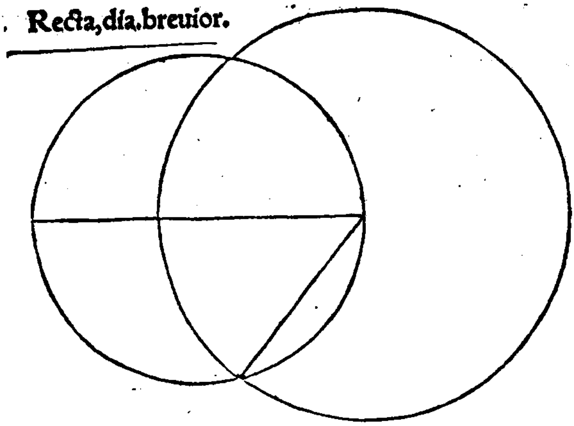
potius suis extremitatibus excederet & secaret. Quare necesse est, ut sit diametro

Recta, diametro æqualis.



breuior, aut ei æqualis. Sit ergo primò ei æqualis: erit diameter ipsa linea, id quod ex sua ipsius definitione satis manifestum est. Quòd si uerò recta data fuerit diametro breuior, cũ iam duæ inæquales sint rectæ lineę, à longiore, per 3 primi, portio breuiori æqualis abscindatur, secundum quam deinde ex altera sua, quam habet in circumferentia, extremitate circulo descripto, centroq; huius cum communi circulorum intersectione recta linea iuncto: per hanc eandem rectam tandem propositioni satisfa-

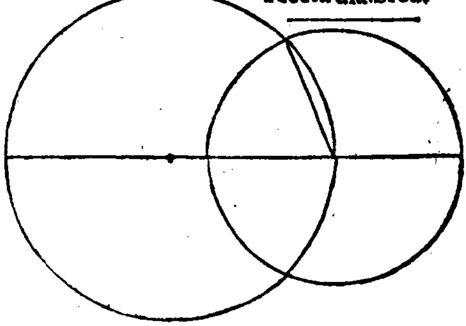
Recta, dia. breuior.



ctum erit, quod & ipsum ex definitione circuli, communi deinde illa noticia, Quæ eidem sunt æqualia &c. facile demonstrari poterit. In dato igitur circulo, datæ rectę lineę, quæ minime longior ipsa circuli diametro existat, ęqualis recta linea coaptata est. quod fecisse oportuit.

ALIA ALTERIVS HVIVS PARTIS DEMONSTRAtio, in qua scilicet, recta, cui æqualis in circulo coaptanda est, breuior diametro esse debet.

Recta dia. breu.



Huic rectæ datæ ad alterutram ipsius diametri extremitatem, per propositionem 2 primi, æqualis ponatur: secũdum quam positam, ex sumpta diametri extremitate, circulo descripto, recta deinde alia ex hoc centro ad punctum intersectionis huius & primò descripti circuli ducta, cum hæc tandem illa sit quæ petebatur recta linea, res confecta erit, id quod ex structura & definitione, ut modò factum est, demonstrari potest.

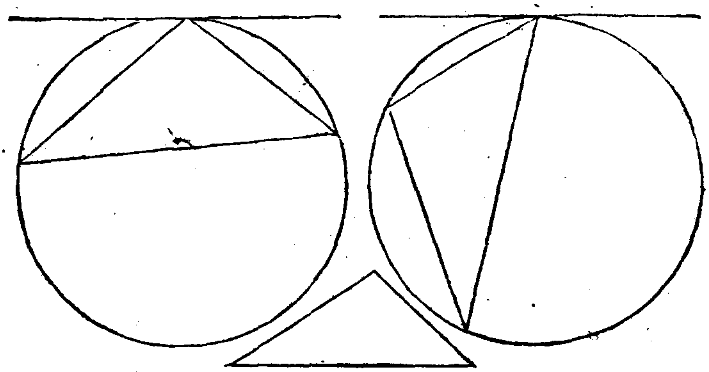
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, τῷ δοθέντι τριγώνῳ, ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι.

PROPOSITIO II.

In dato circulo, dato triangulo, æquiangulum triangulum describere.

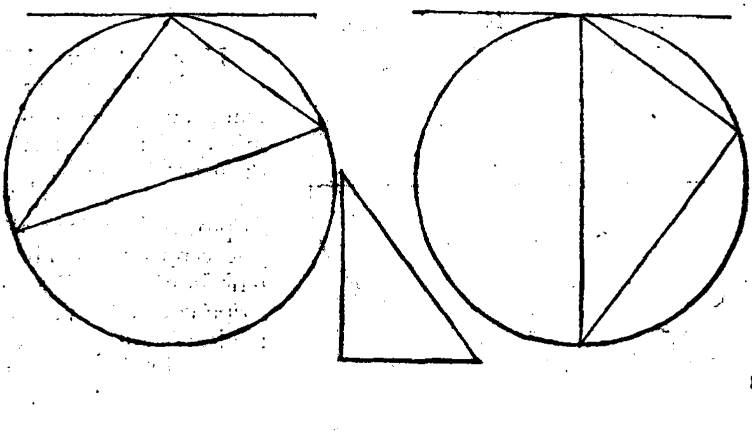
Esto circulus datus, triangulum etiam datum, atq; propositum, in circulo triangulum dato æquiangulum describere. Circulo igitur & triãgulo datis, ducatur per propositionem 17 tertij, linea circulum contingens atq; à puncto contactus duę rectę, per circulum transeuntes, quarum anguli, quos cum contingente ex utraq; parte faciunt (uel quarum anguli, quos hæ ductæ, una quidem cum cõtingente, altera uerò cum priore ducta faciunt) duobus in triangulo angulis uterq; utriq;, æquales sint, per propositionem 23 primi demittantur, his tandem rectis, suis quas habent in circumferentia, extremitatibus, tertia quadam recta linea copulatis: propositioni satisfactum erit. Cum enim duo anguli, qui à secantibus & contingente linea



continentur, duobus quidem in triangulo angulis, ex structura, duobus uerò in alternis sectionibus, ex propositione 32 tertij, sint æquales: duo in triangulo, duobus in sectionibus circuli angulis, ex communi quadam noticia, æquales erunt: quare & tertius angulo tertio æqualis.

VEL QVANTVM AD ALTERAM CONSTRVCTIONEM

Cum duo anguli, quorum unus quidẽ à contingente & una ductarũ, alter uerò ab ipsis ductis continetur, duobus in triangulo dato angulis, ex structura, duobus



Item

item in triangulo, circulo nunc inscripto, unus quidẽ, ut apparet, alter uerò, ex propositione 32 tertij, æquales sunt. Cumq; etiam ex corollario propositionis 32 primi, omnis trianguli tres interni anguli duobus sint rectis æquales: & tertius sic angulo tertio, in his duobus triangulis, æqualis erit. Aliàs enim, ubi inæquales essent, tres anguli in uno duobus rectis non æquiualerent, quod non conceditur: æqualis igitur tertius angulo tertio. In circulo igitur descriptum triangulũ, cum dato æquiangulum erit. Quare in dato triangulo, & reli. quod fieri oportuit.

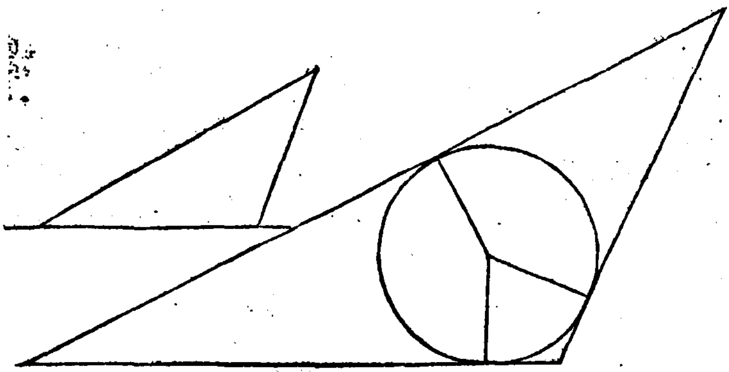
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον, τῷ δοθέντι τριγώνῳ, ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.

PROPOSITIO III.

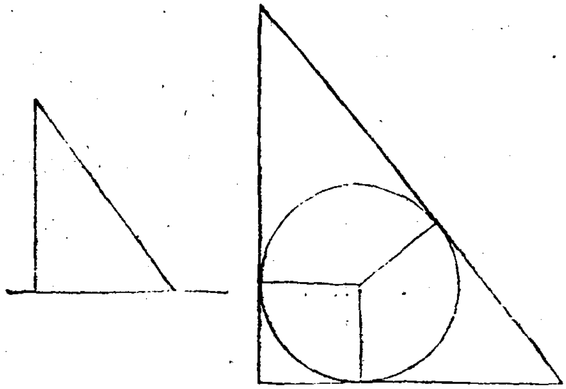
Circa datum circulum, dato triangulo, æquiangulum triangulum describere.

Sit datus circulus, datum etiam triangulum, producatur autem ipsius trianguli unum latus ulterius ex utraq; parte: & erunt qui fiunt anguli externi, suis internis oppositis, per propositionem in primo 32, æquales. Ducatur insuper à centro cir-



culi, quod quidem per primam tertij, si ignotum id fuerit, acquiritur, recta linea usq; ad circumferentiam utcunq;, atq; ad huius alteram extremitatem, quod centrum circuli est, tanquam ad punctum datum, per 23 primi bis usurpatam, duo anguli, ex utraq; parte unus, duobus externis trianguli angulis ęquales, uterq; utriq;, constituantur. Vltimò, per puncta contactus, trium à centro exeuntium linearum cum circulo, tres rectæ circulum contingentes, ex utraq; parte eousq; prolongatæ, donec una cum altera concurrat, ducãtur: & propositioni satisfactum erit, cum hæ tandem rectæ triangulum, quale petebat propositio, constituant. Sed ne quis forte dubitare posset, de contingentium continuatarum inter se concursu: igitur priusquam propositionis demonstrationem aggrediamur, quòd harum cõtingentium singulæ duæ lineę cõcurrant, paucis demonstrabimus. Imaginetur ab uno puncto contactus ad alterum recta quædam linea. Et quoniã hæc imaginaria recta in alias duas, contingentes scilicet continuatas rectas, incidens, internos & in eadem parte positos angulos, duobus rectis minores facit: has cõtingẽtes ea in parte, qua duos angulos incidens duobus rectis minores efficit, ex communi quadam noticia, in primo exposita, concurrere necesse erit, quod erat demonstrandum. Nunc ad triangulum propositionis, circa datum circulum descriptum, quòd nimirum illud dato triangulo æquiangulum sit, hoc sic colligetur. Quoniam enim anguli, à contingentibus & ab earum contactuum punctis ad centrum deductis rectis lineis comprehensi, singuli, per propositionem libri præcedentis decimam octauam, recti sunt.

Et rursus, quoniam omnis quadrilateri, quatuor anguli quatuor rectis angulis sunt æquales, propterea quòd per ductam ab uno ipsius angulo in oppositum, rectam lineam, in duo triangula diuidatur: duobus in quolibet quadrilatero rectis



angulis, quos habet, subtractis, duo qui relinquuntur in quolibet quadrilatero anguli, duobus rectis æquales erunt. Sed quia in triangulo, cuius unum latus ulterius productum fuerit, angulus externus cum suo deinceps se habente interno, per propositionem 13 primi, similiter duobus rectis æqualis est: illi igitur duo priores, ex communi quadam noticia, his duobus æquales erunt. Quare iam subtractis æqualibus ab angulis ęqualibus, propositum tandem inferri potest. Circa datum igitur circulum, dato triangulo, æquiangulum triangulum descriptum est. quod fecisse oportuit.

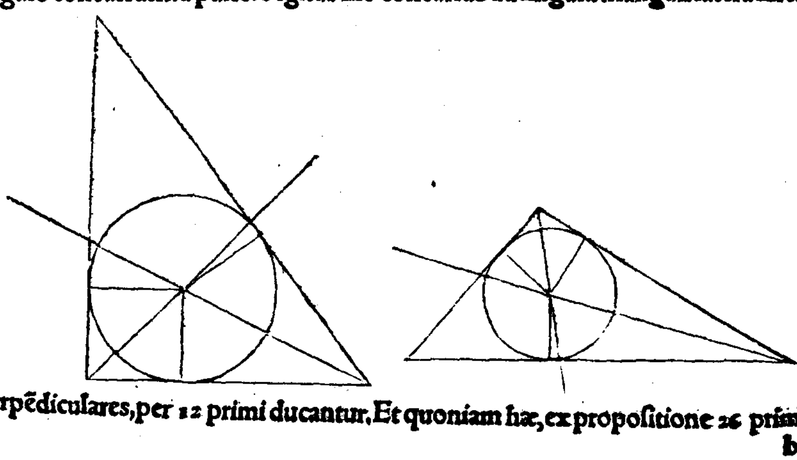
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ.

Εις τὸ δοθὲν τρίγωνον, κύκλον ἐγγράψαι.

PROPOSITIO IIII.

In dato triangulo, circulum describere.

Sit datum triangulum, atque propositum, circulũ in eo describere. Duo igitur in triangulo anguli, quomodocunque sumpti, ex prop. 9 primi, per duas rectas lineas bifariã secentur. Et quoniam hæ duæ rectæ, ex propositione 17 primi, & cõmuni illa noticia, Si in duas rectas recta linea incidens, internos, & in eadem, &c. in triangulo concurrunt: à puncto igitur illo concursus ad singula trianguli latera lineæ



perpẽdiculares, per 12 primi ducantur. Et quoniam hæ, ex propositione 26 primi, bis

bis usurpata, & illa cõmuni noticia, Quæ eidem æqualia, &c. inter se æquales sunt, ubi ex hoc puncto concursus, tanquam ex centro posito, secundum unius harum æqualium linearum interuallum, circulus describatur, propositioni tandem satisfactum erit: id quod prior pars corollarij propositionis decimę sextæ tertij, & definitio huius libri quinta sic demonstrant. Quoniam enim, ut quidem demonstratum est, ductæ ad latera perpendiculares inter se ęquales sunt, ex uno insuper puncto eductę: ex eodem igitur puncto circulus, secundum unius ęqualium interuallum descriptus, per omnium aliarum extremitates transire necesse erit: unde sic etiam singulæ descripti circuli semidiametri existent, & tanget singula trianguli latera circulus descriptus ex priore parte corollarij propositionis 16 tertij: quare eidem etiam triangulo, ex definitione, circulus inscriptus est. In dato igitur triangulo, circulus descriptus est, quod fecisse oportuit.

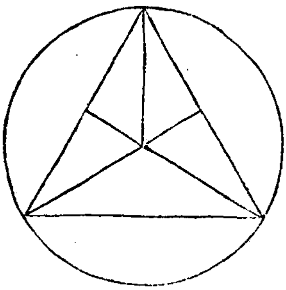
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε.

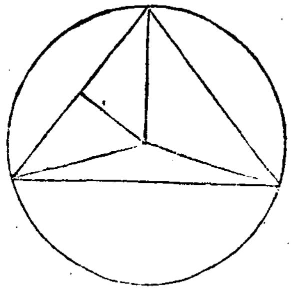
περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον, κύκλον περιγράψαι.

PROPOSITIO V.

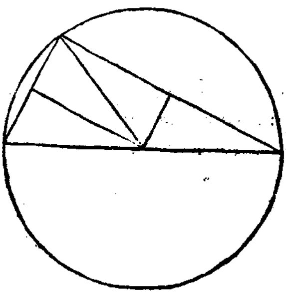
Circa datum triangulum, circulum describere.

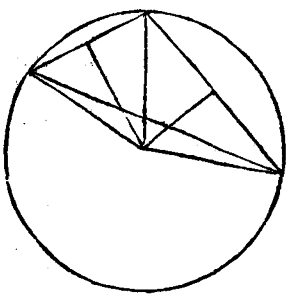
Quemadmodum præcedentis propositionis operatio duorũ angulorum ęquales requirebat diuisiones, ita in hac, ut trianguli dati, duo latera, quomodocunque sumpta, sicuti docet propositio in primo 10 bifariam diuidantur, necesse erit. Hoc autem facto, à punctis mediarum diuisionum ad angulos rectos lineæ, uersus eam partem, ubi maximè uidetur esse centrum describendi circuli, educantur. Et quo-





niam hæ continuatæ, ex propositione 17 primi, & communi illa noticia, Si in duas rectas recta linea incidens, internos, & in eadem parte angulos, &cę. concurrunt, ubi ex hoc puncto, tanquam ex centro posito, secundum interuallum spacij, inter hoc punctum & angulorum quemuis intercepti, circulus describatur, res confecta erit. Nam is erit circulus, propositi trianguli circumscriptioni cõueniens, quod





certè tribus rectis lineis ex hoc puncto, quod centrum esse ponitur, ad tres angulos ductis, cum hæ ex propositione 4 primi, bis usurpata, & communi illa noticia, Eidem æqualia, &c. æquales inter se esse demonstrentur, per 9. propositionem tertij facile conceditur. Circa datum igitur triangulũ circulus descriptus est, quod fieri oportuit.

APPENDIX.

Est autem hic modus generalis, ad omnia triangula, quomodocunque sane illa, secundum latera uel angulos considerata, nominabuntur. Quare quòd nõnulli ad pleniorem huius propositionis declarationem, pro triangulorum, quantum ad angulos, uaria distinctione, uarios canones tradiderunt, cum is unus omnis generis triangulis satisfaciat, illorum traditiones hoc loco consulto prætermisimus.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ φανερὸν, Ὅτι ὅτε μὲν ἐντὸς τοῦ τριγώνου πίπτει τὸ κέντρον τοῦ κύκλου· ἡ ὑπὸ β α γ γωνία, ἐν μείζονι τμήματι τοῦ ἡμικυκλίου τυγχάνουσα, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. Ὅτε δὲ ἐπὶ τῆς β γ· ἐν ἡμικυκλίῳ τυγχάνουσα, ὀρθὴ ἔσται. Ὅταν δὲ ἐκτὸς τῆς β γ εὐθείας τὸ κέντρον πίπτῃ· ἡ ὑπὸ β α γ ἐν ἐλάττονι τμήματι ἡμικυκλίῳ τυγχάνουσα, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. Ὥστε καὶ, ὅταν ἐλάττων ὀρθῆς τυγχάνῃ ἡ διδομένη γωνία· ἐντὸς τοῦ τριγώνου συμπεσοῦνται, αἱ δ ζ, ε ζ. Ὅταν δὲ ὀρθή· ἐπὶ τῆς β γ. Ὅταν δὲ μείζων ὀρθῆς· ἐκτὸς τῆς β γ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

COROLLARIVM.

Et manifestum est, quòd quando intra triangulum cadit centrum circuli: angulus in maiori quàm est semicirculus segmẽto existens, recto minor sit. Quando uerò in rectam lineam, hoc est in latus, cadit, cũ sic angulus in semicirculo existat: ille rectus erit. Cum uerò extra rectam lineam, hoc est extra triangulum, centrum circuli ceciderit, quia tum in maiori quàm est semicirculus segmẽto angulus existit: maior recto erit. Et econtrario, cum minorem recto contingat esse angulum: ad rectos ductæ intra ipsum triangulum concurrent. Quando uerò rectum: in aliquod trianguli latus. Si uerò maiorem recto: extra ipsam rectam lineam, hoc est, extra ipsum triangulum concurrent. quod admonuisse oportuit.

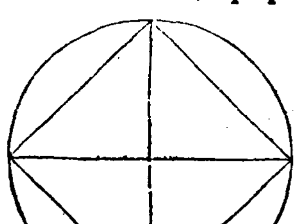
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, τετράγωνον ἐγγράψαι.

PROPOSITIO VI.

In circulo dato, quadratum describere.

Sit circulus datus, atque propositum, quadratum in eo describere. Ducantur igitur in circulo duæ diametri, ad angulos rectos sese mutuo secãtes, quarum extremitates tandẽ si quatuor rectis lineis copulentur, per eas propositioni satisfactum erit, quod sic patet. Primò, quòd hęc quatuor linearum figura sit circulo inscripta, declarat ipsius rei definitio. Secundo, quòd sit quadratum, hoc est, æqualium laterũ & rectorum angulorum, quantum ad rectos angulos, cũ omnes eius anguli sint in semicirculo: ex prima parte propositionis 31 tertij hoc cõstabit. Quantũ uero ad latera, potissimũ hoc ex propositione 4 primi, quoties opus fuerit ea usurpata, & com-



& communi illa notitia, Quæ uni sunt æqualia, &c. colligetur. Rectangulũ igitur & æquilaterum: quare & quadratũ ex definitione, & describitur in circulo. In circulo igitur dato quadratum descriptum est, quod fecisse oportuit.

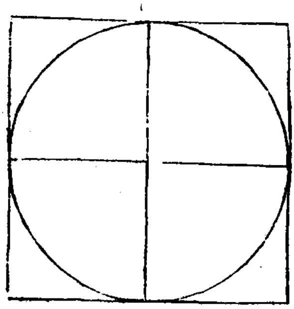
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον, τετράγωνον περιγράψαι.

PROPOSITIO VII.

Circa datum circulum, quadratum describere.

Sit circulus datus, atque propositum, quadratum circa ipsum describere. Quem admodum præcedens, ductis in circulo duabus diametris, harum extremitates ut quatuor rectis coniungerentur lineis requisiuit, ita hæc, postquã circulus datus, in eo etiam duę ad rectos angulos diametri ductæ fuerint, ut per harum extremitates singulas, ex 17 propositione libri præcedentis, quatuor lineæ circulũ contingentes ducãtur, necesse erit. Et quoniam hæ si in utramq; partẽ continuatæ fuerint, semper duæ & duę, ex propositione 18 tertij, & cõmuni quadam notitia, concurrunt, continuentur itaq; omnes, in utramq; etiã partem, donec una cũ altera concurrat, & propositioni satisfactum *erit, cũ uidelicet* sub *illis ipsis lineis* huiusmodi quadratum cõtineatur, quod sic patet. Primò quòd circũscriptio debita facta sit, ex definitione habetur. Quòd insuper sit quadratũ, id sic colligetur. Quoniam enim contingentiũ quęlibet duæ oppositæ, suæ diametro, ex secunda parte propositionis 28 primi, ipsæ deinde inter se ex propositione 30 eiusdem, æquedistantes sunt: quod sub his contingentibus, quæq; etiam sub contingentium unaquaq; & diametro sua parallela cõprehẽduntur, rectilinea, singula, ex definitione, parallelogramma erũt. Hęc autem quoniam ex propositione 34 primi, latera opposita æqualia habent: contingentes oppositæ primò, ex communi illa notitia, Quæ uni æqualia &c. omnes deinde inter se, propter diametrorum æqualitatẽ, æquales erunt. Aequilaterum igitur est circa circulum descriptum parallelogramum. Quòd uerò sit etiam rectorum angulorum, cum qui ad centrum ponuntur anguli, singuli, ex structura, recti sint, cumq; etiam, Omnis parallelogrammi latera & anguli oppositi, ut sæpe dictum, æquales sint, patet etiam illud. Factũ est ergo quod fieri oportuit, descriptum nimirum circa datum circulum quadratum, quod erat propositum.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

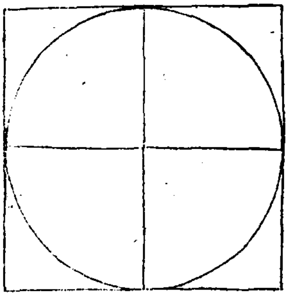
Εἰς τὸ δοθὲν τετράγωνον, κύκλον ἐγγράψαι.

PROPOSITIO VIII.

In dato quadrato, circulum describere.

Sit datum quadratum, atq; propositum, circulũ in eo describere. Duo igitur circa unum in quadrato angulum latera, per propositionẽ 10 primi, bifariam diuidantur, à punctis deinde illis medijs, perpendiculares, ad latera usq; opposita peruenientes, lineæ educantur: & erit punctum illud, quod est communis harum duarum perpendicularium sectio, centrum futuri circuli. Nam cum hæ ductæ ex suis punctis perpendiculariter egrediantur: utraq;, ex posteriore parte propositionis 28 primi, suis collateralibus quadrati lateribus æquedistans erit. Omnes igitur figuræ rectilineę, quotcunq; in hac dispositione colligi possunt, parallelogramma, horum

horum deinde latera oppoſita, ex propoſitione 34 primi, æqualia inter ſe erũt. Sed cum linearum æqualium, æquales ſint etiam medietates, ut ratione colligitur: infertur tandem ex hac communi noticia, Eidem æqualia, &c. & illas quatuor in medio lineas inter ſe æquales eſſe. Punctum igitur, communis nimirum perpendicularium ſectio, ut dictum eſt, ex propoſitione 9 tertij: centrum eſt circuli. Quare eo ſecundum unius harum æqualium quantitatem deſcripto, cum is propter linearum æqualitatem, per aliarum etiam extremitates tranſeat, hæ uerò extremitates ſingulæ in lateribus quadrati exiſtãt, cum per propoſitionem 16 tertij intra circulum non cadant, per corollariũ deinde eiuſdem ipſum circulum tangant: ex definitione tandem, qua dicitur, Circulus ſimiliter in figura deſcribi, &c. circulum in dato quadrato deſcriptum eſſe concluditur. quod fieri oportuit.



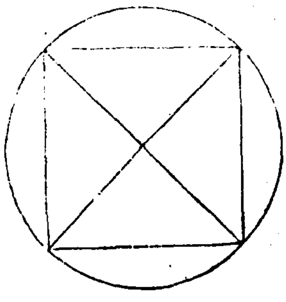
ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Θ.

Περὶ τὸ δοθὲν τετράγωνον, κύκλον περιγράψαι.

PROPOSITIO IX.

Circa datum quadratum, circulum deſcribere.

Sit datum quadratum, atq; propoſitum, circulum circa ipſum deſcribere. Ducantur in quadrato duæ diametri, quæ ſeſe mutuò ſecent: & erit communis illarum ſectio, locus, unde circulus, ad circumſcribendum quadratum propoſitum conueniens, deſcribi debet. Quoniam enim ſumptis duobus triangulis, quæ nimirum ſunt quadrati medietates, cum anguli partiales ſinguli, per propoſitio. 8. primi, inter ſe æquales ſint, atq; ſic uterq; ſemper medietas anguli recti, cumq; etiam ipſi recti inter ſe æquales: & horum rectorum medietates ſingulæ, partiales nimirum anguli omnes, inter ſe æquales erũt. Quare per propoſitionem 6 primi quater ſumptam, & horum partialium angulorum latera, quatuor nimirum partiales diametrorum lineę, inter ſe ęqualia erunt. Punctum igitur illud, centrũ eſt circuli. Poteſt etiã loco octauę, propoſitio quinta uſurpari, hoc modo. Cũ quadratũ per diametros in triangula quatuor reſolutũ ſit, hæc uerò triangula omnia, æqualia crura habeant, latera nimirum quadrati propoſiti: infertur per propoſit. 5 primi, & ipſos ad baſim angulos inter ſe æquales eſſe. quilibet igitur illorum, per propoſitionem 32 eiuſdem primi, medietas eſt recti. Tertius enim angulus, ratione quadrati, per ſe unus rectus eſt. Quia autem omnes recti anguli, ex communi quadam noticia, inter ſe ęquales ſunt: ſequitur, quòd etiam inter ſe æquales ſint omnes partiales (de quibus facta eſt mentio) anguli. Igitur & diametrorum partes, per propoſitionem 6 primi, inter ſe æquales. unde tandem, id commune punctum, per 9 tertij, centrum circuli erit: quo nunc ſecundum quantitatem unius æqualium linearum deſcripto, cum is per reliquarum etiam æqualium extremitates tranſeat, propoſitioni tandem ſatisfactum erit, circa datum nimirum quadratum circulus deſcriptus. quod feciſſe oportuit.



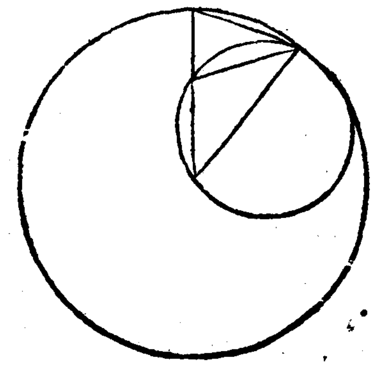
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι.

Ἰσοσκελὲς τρίγωνον συστήσασθαι, ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς.

PROPOSITIO X.

Duum ęqualium laterum triangulum constituere, habens utrunque eorum, qui ad basim sunt, angulorum, duplum reliqui.

Sententia est propositionis, triangulũ isosceles, cuius uterque angulorũ qui ab æqualibus lateribus subtenduntur, ad tertium reliquum duplus sit, describere. Ducatur igitur linea recta, longa uel breuis, ad placitum. hac recta deinde, ut quidem habet propositio secundi undecima, in duas portiones diuisa, ex pũcto hoc, quod est communis terminus diuisæ & portionis longioris, secundum interuallum rectæ datæ circulus describatur. Hoc facto, longiori portioni, quæ nimirum est diametro circuli breuior, æqualis recta in circulo, per propositionem primam huius, coaptetur. Quòd si tandem extremitas huius, longiori portioni æqualis, altera cum centro & diuisionis puncto duabus rectis lineis copuletur: propositioni satisfactum erit. Nam id demũ triangulum, cuius duo latera à centro usque ad circumferentiam continuata sunt, erit quod quærebatur, cuius quidem demonstratio ut sequitur. Circa triangulũ partiale, cuius unus angulus ad cẽtrum ponitur, per propositionẽ 5 huius, circulus describatur. Et quoniã tam quadrato longioris portionis ex structura, uel propositione 11 secundi, quàm etiam quadrato rectę in circulo coaptatę, huic longiori portioni ęquali, rectangulum sub prioris circuli semidiametro & breuiori eius portione compræhẽsum, ęquale est: longiori æqualis posita recta linea, per propositionem 37 tertij, minorem circulum contingens erit. Et rursus quoniã hæc recta circulum minorem contingit, à puncto item contactus alia quædã, eundem circulum secãs, ducta est, illa nimirum quæ in diametro ad punctũ diuisionis terminatur: angulus igitur, quẽ hæ duæ rectæ cõtinent, partialis, angulo alterni segmẽti, qui ad centrum ponitur, ex propositione 32 tertij ęqualis erit. unde totalis postea, si partialis alter ex æquo his æqualibus adijciatur, duobus æqualis. Sed quia duobus his, ut trianguli huius partialis internis, angulus ille, qui in alio partiali ad diuisionis punctum ponitur, externus, ex propositione 32 primi, est æqualis: & eidẽ externo ille totalis, ex communi quadam notitia, æqualis erit. Et quia etiam totalis, illi qui sub diametro atque circulum minorem tangente recta linea continetur, ex definitione circuli & priori parte propositionis quintæ primi, æqualis est: & qui sub istis lineis continetur angulus, dicto externo æqualis erit. Tres igitur anguli inter se æquales, unum etiam triangulum partiale, cum duo ex æqualibus angulis in eo sint positi, ex propositione 6 primi, Isosceles, hoc est duûm æqualium laterum erit. Sed quia uni eorum, coaptatæ scilicet in circulo lineæ, æqualis est, ex structura, longior diuisæ semidiametri portio, & alteri lateri hæc eadem longior portio æqualis erit: quare Isosceles, triangulum etiam partiale alterum. Hoc autem quia, ex propositione 5 primi, duos ad basim angulos inter se æquales habet, & quia etiam illis æqualibus, angulus huius Isoscelis externus æqualis est, unde sic ad utrunque, ac per consequens, ad eum qui ad centrum ponitur duplus: & illorum qui huic externo æquales sunt, uterque



ad eundem ad centrum positum angulum, duplus erit, et sunt etiam in hoc ipso, in quo ille scilicet, totali triangulo. Triangulum igitur Isosceles, cuius uterque eorum qui basim sunt angulorum, ad reliquum tertium duplus sit, constitutum est, quod quidem fecisse oportuit.

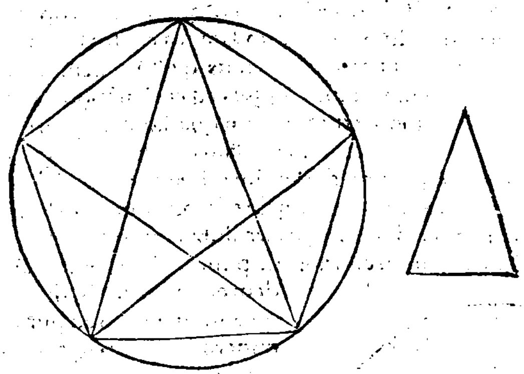
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

PROPOSITIO XI.

In dato circulo, pentagonū & æquilaterū & æquiangulū describere.

Sit datus circulus, atque propositum, pentagonum in eo æquilaterum & æquiangulum describere. Circulo igitur dato, primò Isosceles triangulum, cuius uterque æqualium angulorum ad tertium duplus sit, per propositionem præcedentem 10 formari, huic deinde æquiangulum triãgulum in dato circulo, per propositionem 2 huius describi, debet. Postea utroque eorum, qui ad tertiũ dupli sunt, angulorum, recta quadam linea, per prop. 9 primi, bifariam diuiso, quinque iam anguli inter se



æquales erunt. Quòd si tandem rectæ hæ, per quas ad tertium dupli anguli bifariam diuisi sunt, ad circunferentiam usque continuatæ fuerint, cum hi quinque in una sint circũferentia anguli, atque æquales etiam inter se: & eorũ arcus à quibus subtenduntur, per prop. 26 tertij: horũ deinde arcuum rectæ lineę, per 29 eiusdem, æquales erunt, quare pentagonũ æquilaterũ. Quod uerò sit etiam æquiangulum, id sic patet. Quoniã enim singuli huius pentagoni arcus, ut quidẽ demonstratũ est, inter se sunt ęquales, sumptis duob. quibus uidelicet nullus est cõmunis terminus, si utrique eorũ duo hi, quos interceptos habent, arcus additi fuerint: & collecti sic arcus, ex communi quadam notitia, inter se æquales erunt, Quare etiam ęquales, ex propositione 27 tertij, qui ab his æqualibus arcubus subtenduntur, anguli. Constat igitur sic æqualitas de angulis duobus. Quia autem sicut de duobus, ita etiam de omnibus, hoc nimirum processu toties, quot fuerint anguli, minus uno, usurpato, constare manifestum est: pentagonum igitur hoc æquiangulum esse concluditur, & quia etiam æquilaterum. In dato igitur circulo æquilaterum & æquiangulum pentagonum descriptum est. quod fecisse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ.

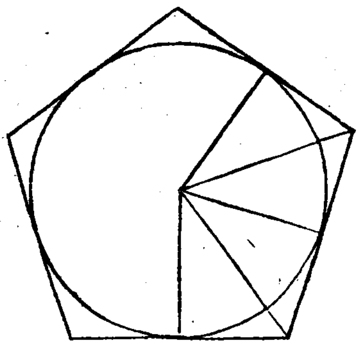
Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον, πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

PROPOSITIO XII.

Circa datum circulum, pentagonum æquilaterum & æquiangulum describere.

Sit

Sit datus circulus, atq; propositum, pentagonum circa eum æquilaterum & æquiangulum describere. Diuidatur igitur circuli dati circunferentia, per præcedentem, in quinque partes æquales, à punctis deinde diuisionum sigulis per propositionem 17 tertij lineæ, ipsum circulum contingentes ducantur, hæ tandem, si in utranq; partem, donec altera alteri occurrat, continuatæ fuerint: propositioni satisfactum erit. Nam illæ ipsæ circulum contingentes rectæ lineæ pentagonum, quale propositio hæc requirit, comprænhendunt, quod sic demonstrari potest. Primò à tribus quibuslibet, proximis tamen inter se, contactuum punctis demittantur ad circuli centrum tres rectæ lineæ. Et quoniam hæ singulæ ex propositione 18 tertij, ad suas contingentes perpendiculares sunt: omnes igitur illi qui sic fiunt anguli, recti erunt: quod est oseruandũ. Ducantur porrò à duobus pentagoni angulis ijs, qui ab his tribus lineis continentur, aliæ duæ ad centrum rectæ lineæ. Describuntur autem sic quatuor triangula, quorum quæq; duo extrema, per penultimam primi, laterum æqualium: per propositionẽ deinde 8 & 4 eiusdem, æqualium angulorum esse demõstrantur. Et quia sic est: tam illi igitur, qui ad cẽtrum sub perpendicularib. cõtinentur anguli, ad suos partiales, quàm etiã ipsius pentagoni anguli ad suos, dupli erunt. Et rursus quoniam ad cẽtrum anguli super æquales, circunferentias deducuntur, cum ijdem anguli, ex propositione 27 tertij, inter se æquales sint: & illorum dimidij omnes, quemadmodum & ipsi toti inter se æquales erunt. Et quia iam sunt duo triangula, quorũ nimirum latus quod habent commune, perpendicularis linea est, quę cũ duos angulos duobus angulis æquales habeant, utrunq; utriq;, unum item latus uni lateri æquale: & reliqua latera reliquis lateribus, atque etiam reliquum angulũ reliquo angulo, per propositionem 26 primi æqualia habebunt. Circulum igitur contingentium linearum unaquæq; per suam perpendicularem bifariam diuisa est, quare & ipsæ ad utranq; partem, tanquam ad suas medietates, duplæ. Partes uero cum sint inter se æquales, ut iamdudum demonstratum est: & ipsas totas contingentes rectas lineas inter se æquales esse conueniet. Pentagonum igitur æquilaterum. Quod uerò sit etiam æquiangulum, cum ipsius pentagoni anguli æqualium sint angulorum dupli: patet & illud. Circa datum igitur circulum, æquilaterum & æquiangulum pentagonum descriptum est, quod fecisse oportuit.

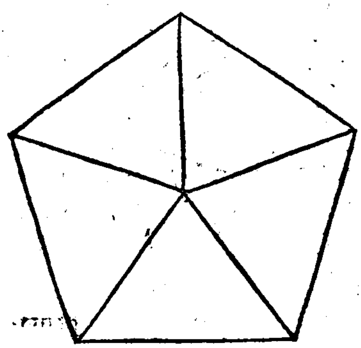


ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ.

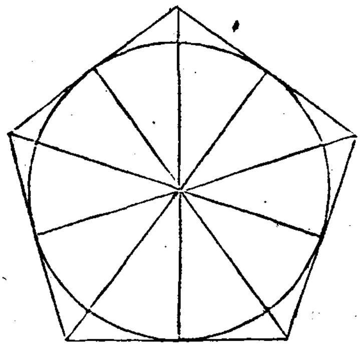
Εἰς τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον ἐγγράψαι.

PROPOSITIO XIII.

In dato pentagono, quod est æquilaterum & æquiangulum, circulum describere.



Sit datum pentagonum, æquilaterum existens & æquiangulum, atq; propositum, circulum in eo describere. Pẽtagoni igitur dati duo quilibet proximi anguli, duabus rectis, per propositionem 9 primi, bifariam diuidantur: & erit punctum concursus harum rectarum in pentagono: centrum circuli qui petitur, cuius hæc sit demonstratio. Ducantur à tribus indiuisis pentagoni angulis, ad punctum illud concursus, tres rectæ lineæ. Et quoniam duo ipsius pentagoni anguli, suis rectis ductis bifariam diuisi sunt: quæq; duo circa illos diuisos posita triangula, inter se æqualia esse, per 4 primi, demonstrantur. Quia uerò ad unum angulum in utroq; triangulo, angulus suus totalis duplus est: propter æqualitatem, totalium quidem ex hypothesi, ac partialium deinde, ut modo ostensum est, inter se: & in utroq; triangulo angulus totalis ad suũ partialem: singuli item totales, hac operationem, ad singulos suos partiales angulos. Dupli erunt. Quare unumquemq; sic bifariam diuisum esse, manifestum erit.



Porrò pro ulteriori demonstratione, demittantur à puncto concursus ad singula pentagoni latera perpendiculares. Hæ autem quoniam facili opera per propositionem 26 primi, æquales inter se esse demonstrantur: punctum igitur illud concursus, ut dictum est, ex propositione 9 tertij, centrum circuli erit. Eo igitur nunc secundum unius, harum æqualium perpendicularium interuallũ, descripto, cum is, propter æqualitatem, per singularum extrema puncta transeat unumquodq; insuper pentagoni latus, ex priore parte corollarij prop. 16 tertij, circulũ tangat (alias enim si scilicet unum ex his secaretur, circulum contingens in ipsum cadere contra allegatam propositionem conuinceretur) propositioni ut oportuit satisfactum erit, In pentagono nimirum ęquilatero & æquiangulo circulus descriptus est, quod fieri oportuit.

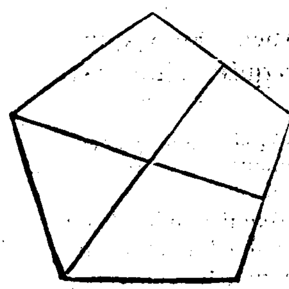
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ.

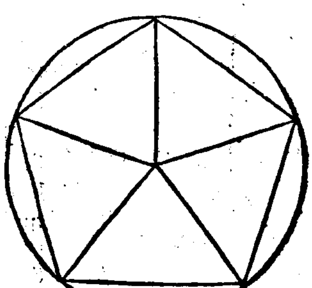
περὶ τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον περιγράψαι.

PROPOSITIO XIIII.

Circa datum pentagonum, quod est æquilaterum & æquiangulum, circulum describere.

Sit datum pentagonum quale requiritur, atq; propositum, circulũ circa ipsum describere. Diuidantur, ut in præcedenti factum est, duo inter se proximi in pentagono anguli, per propositionem 9 primi, duabus rectis bifariam: & erit punctum concursus harum rectarum, centrum futuri circuli qui hoc datum pentagonum circumscribet, id quod ex propositione 4, toties quoties opus fuerit eam repetendo, atq; ex nona deinde tertij, hoc modo demonstrabitur. Ducantur à tribus indiuisis pentagoni angulis, ad punctum illud concursus tres rectæ lineæ. Et quoniam in





penta-

pentagono duo anguli, ex structura, bifariam diuisi sunt, cum pentagonum sit ex hypothesi æquiangulum, ubi bis aut ter duo triangula, quorum unum quidem unam, alterū uerò alteram bifariam diuisi anguli medietatem sibi uendicat, sumpta fuerint, & reliqui tres pentagoni anguli ex propositione 4 primi, bifariam diuisi erunt. Quare, ut ipsi totales, ex hypothesi, ita nunc ex demonstratione, per allegatam quartam sumpta, partiales anguli omnes, ductæ insuper à centro hoc ad angulos pentagoni rectæ lineæ, inter se æquales erunt. Quoniam autem hæ rectæ plures quàm duæ sunt, circuli igitur per harum æqualium extremitates, ut quæ sunt in pentagoni angulis, transeuntis centrum, per propositionem 9 tertij, hoc punctum erit. Eo igitur inde descripto, propositioni tandem satisfactum erit, circa pentagonum uidelicet, æquilaterum & æquiangulum, circulus descriptus. quod fecisse oportuit.

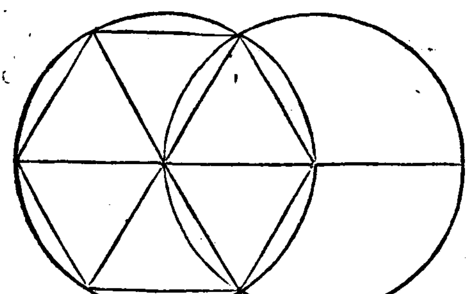
ΠΡΟΤΑΣΙΣ. ΙΕ.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

PROPOSITIO XV.

Indato circulo, hexagonum æquilaterum & ęquiangulum describere.

Sit datus circulus, atque propositum, hexagonum in eo æquilaterum & æquiangulum describere. Circulo igitur dato, diametro etiam in eo ducta, alterutra eius extremitate loco centri sumpta, alius ad prioris dati quantitatem circulus describatur, atque ubi hi duo circuli sese mutuo secāt, ab illis sectionum punctis per centrum circuli prioris, usque ad eius circumferentiam, aliæ duæ rectæ extendantur. Erunt autem sic in circulo dato puncta sex, quæ tandem sex etiam rectis lineis continuata suis quodque punctis proximis, confectum erit negocium. Quoniam enim cum à centris circulorum, tanquam à medijs punctis, ad circumferentias deductæ rectæ lineæ, ex definitione, inter se sunt æquales: utrunque eorum, quæ in portione circulorum communi descripta sunt, triangulorum, ex hac circuli definitione bis usurpata, illa deinde communi noticia, Eidem æqualia, &c. æquilaterum, atque mox deinde etiam, per priorē partem propositionis quintę primi, æquiangulum erit. Quoniam autem interni tres anguli omnis trianguli, ex corollario propositionis 32 primi, duobus rectis sunt æquales: unusquisque horum duorum triangulorum angulus unum duorum rectorum tertium erit, duo igitur ad centrum prioris uel dati circuli positi anguli, duobus duorum rectorum tertijs sunt ęquales. Quia uerò illi duo cum eo quem ex utraque parte habent ἐφεξῆς, per propositionem 13 primi, duobus rectis angulis sunt æquales: & hunc ἐφεξῆς angulum, cum tres tertiæ unum integrum faciant, unum duorū rectorum tertium esse necesse est, hi tres igitur anguli inter se æquales erunt. Sed quia his ęquales etiam sunt, ex propositione 15 primi, anguli quos singuli ad uerticem habent: sex igitur ad centrum deducti anguli inter se æquales erunt. quare & illorum arcus à quibus subtenduntur ex propositione 26 tertij, & arcum deinde rectæ lineæ, ex 29 eiusdem, æquales erunt. Hexagonum igitur æquilaterum. Quòd uerò sit etiam æquiangulum, id sic patet. Quoniam enim singulæ huius hexagoni laterum circumferentiæ uel arcus, ut quidem demonstratum est, inter se sunt æquales, sumptis duobus quibus uidelicet nul



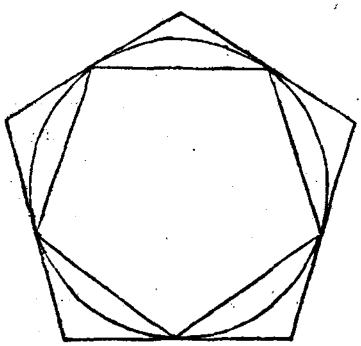
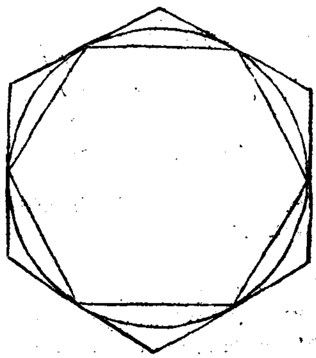
lus est communis terminus, si utrique eorum tres illi qui ab his duobus intercipiuntur, additi fuerint: & collecti sic arcus, ex communi quadam noticia, inter se æquales erunt: quare etiam æquales, ex propositione 27 tertij, qui ab his æqualibus arcubus subtenduntur anguli. Constat igitur sic æqualitas de duobus. Quia autem sicut de duobus, ita etiam de omnibus, hoc nimirum processu toties quot fuerint anguli minus uno, usurpato, constare manifestum est: hexagonum igitur hoc æquiangulum esse concluditur, & quia etiam æquilaterum. In dato igitur circulo, æquilaterum & æquiangulum hexagonum descriptum est. quod fecisse oportuit.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Εκ δὴ τούτου φανερόν, Οτι ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ, ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου. Καὶ ἐὰν διὰ τῶν α β γ δ ε ζ σημείων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν· περιγραφήσεται περὶ τὸν κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, ἀκολούθως τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις. Καὶ ἔτι διὰ τῶν ὁμοίων τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις, εἰς τὸ δοθὲν ἑξάγωνον κύκλον ἐγγράψομεν. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

COROLLARIVM.

Ex hoc quidem manifestum est. Quòd uidelicet hexagoni latus, æquale sit ei, quæ ex centro circuli producitur, rectæ lineæ. Et si per sex angularia hexagoni puncta contingentes circulum deduxerimus, quod tum circa circulum, æquiangulum & æquilaterum hexagonum descriptum sit, perinde atque pentagonum quoque, ut antè dictum est. Insuper in dato hexagono, uel circa datum hexagonum, per ea quæ similiter de pentagono dicta sunt, circulum describemus. quod admonuisse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ.

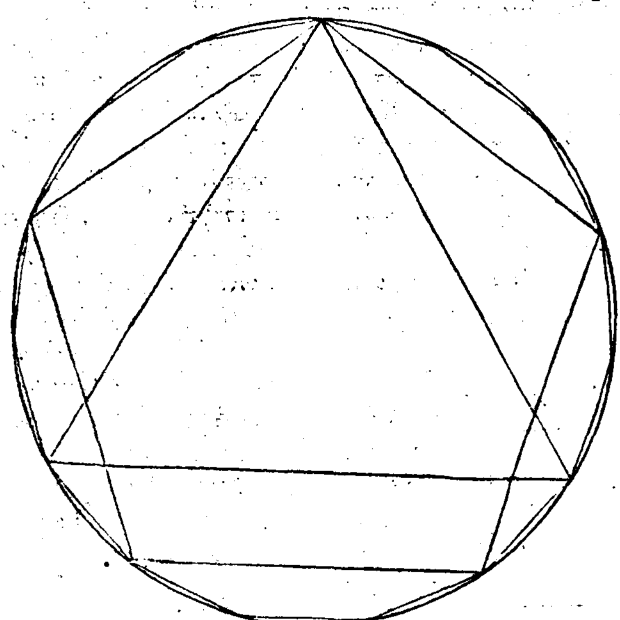
Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

PROPOSITIO XVI.

In dato circulo, quindecagonum æquilaterum & æquiangulum describere.

Sit datus circulus, atque propositum, quindecagonum in eo, æquilaterū & æquiangulum describere. Circulo igitur dato, primùm in eo triangulum æquilaterum, & deinde æquilaterum pentagonum, illud quidem ex propositione 2, hoc uerò ex 11 huius

huius describatur. Curetur tamen, ut unus trianguli & unus pentagoni angulus, unum in circumferentia punctum commune sortiantur. Et quoniam, quindecagonum æquilaterum & æquiangulum in circulo dato describere propositum est, cum circumferētia ideo in quindecim partes æquales diuidenda sit, infertur, ut qualium tota circumferentia fuerit æqualium partium quindecim: talium tertiam eius partem, quæ à trianguli latere subtenditur, quinq;: quintam uerò, quam pentagoni la-



tus subtendit, tres esse debere. Excessus igitur arcus illius super hunc taliũ duarum, qualium tota circumferentia est quindecim, partium erit. Quare eo, per propositionem 30 tertij, bifariam diuiso, quantum dati circuli quindecagoni latus fuerit, alterutra ipsius excessus medietas indicabit. Quo habito, si id quindecies circulo ordine, per primam propositionem huius, coaptatum fuerit, propositioni tandem satisfactum erit, In circulo nimirum, quindecagonum ęquilaterum & æquiangulum descriptum. quod fecisse oportuit. Demonstratio neglecta est, cum ex structura hæc clara sit.

APPENDIX.

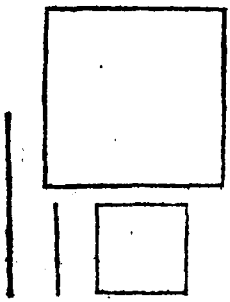
Porrò circulo dato, quomodò circa ipsum quindecagonum æquilaterum & æquiangulum: Insuper, quomodo circa quindecagonum datum, circulus describendus sit, licet illa ab Euclide non tradantur, nemini tamen difficile erit, si modò eorum quæ in hoc libro ad 12 & 13 propositiones de pentagono dicta sunt, meminerit. Atq; hactenus de inscriptionibus & circumscriptionibus figurarum inter se, cuius quidem tractatio in hoc quarto libro erat proposita.

FINIS LIBRI QVARTI.

ΣΧΟΛΙΟΝ

ΣΧΟΛΙΟΝ ΕΙΣ ΤΟ Ε. ΑΔΗΛΟΥ.

Σκοπὸς τῷ ε βιβλίῳ περὶ ἀναλογιῶν διαλαβεῖν. Κοινὸν γὰρ τοῦτο τὸ βιβλίον γεωμετρίας τε καὶ ἀριθμητικῆς, καὶ μουσικῆς, καὶ πάσης ἁπλῶς μαθηματικῆς ἐπιστήμης. Τὰ γὰρ ἐν αὐτῷ ἀποδεικνύμενα οὐ μόνον γεωμετρικοῖς ἁρμόζει θεωρήμασιν, ἀλλὰ καὶ πᾶσι τοῖς ὑπὸ μαθηματικὴν τεταγμένοις ὡς προείρηται ἐπιστήμαις. Ὁ μὲν οὖν σκοπὸς, οὗτος. Τὸ δὲ βιβλίον, Εὐδόξου τινὸς εὕρεσιν εἶναι λέγουσι, τοῦ Πλάτωνος διδασκάλου. Ἐπεὶ οὖν σκοπὸς περὶ ἀναλογιῶν, ἡ δὲ ἀναλογία λόγων τινῶν σχέσις· ἀναγκαῖον γνῶναι πρότερον τίνες οἱ τοιοῦτοι λόγοι. Δεῖ γὰρ τὰ ἁπλᾶ πρότερον γνῶναι τῶν συνθέτων. Ἐὰν τοίνυν τινὰ συγκέηται πρὸς ἄλληλα, φέρε εἰπεῖν δύο μεγέθη, αὐτὰ μὲν Ὅροι καλοῦνται· ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ἐπὶ τὸ ἕτερον μετάστασις, Διάστημα· ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου πρὸς τὸ ἕτερον σύγκρισις, Σχέσις, ἣν ἐκάλεσαν οἱ παλαιοὶ λόγον. Τὴν δὲ τούτου τοῦ λόγου πρὸς ἄλλον λόγον, καθ' ὁμοιότητα σύγκρισιν, ἤτοι σχέσιν, Ἀναλογίαν προσηγόρευσαν, ἵνα μὴ ὡς τόδε τὸ μέγεθος συγκέηται, ἀλλ' ὡς ὅδε ὁ λόγος πρὸς τόνδε τὸν λόγον. αὕτη δὲ ἡ σύγκρισις. Λόγου λέγεται λόγος· οἷον ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, ὧν ἡ ἑτέρα πρὸς τὴν λοιπὴν διπλασίονα λόγον ἔχει· τὸ ἀπὸ τῆς τὴν διπλασίονα λόγον ἐχούσης τετράγωνον, τετραπλασίονα λόγον ἕξει πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς λοιπῆς τετράγωνον, ἤπερ ἡ μείζων εὐθεῖα πρὸς τὴν εὐθεῖαν. Τὰ γὰρ μήκει διπλάσια, δυνάμει τετραπλάσια. Ὁ τοίνυν λόγος τῶν τετραγώνων, τετραπλάσιος ὢν διπλασίου ὄντος τοῦ λόγου τῶν εὐθειῶν διπλάσιός ἐστι· Καλεῖται δὲ οὗτος, ὁ λόγου λόγος. Ἀλλ' εἰ καὶ οὗτος ἀπὸ τοῦ ποσοῦ. διττὸς γὰρ ὁ λόγος, ὁ μὲν ἐν ἀξίᾳ, ὁ δὲ ἐν ποσῷ. καὶ τοῦ μὲν ἐν ἀξίᾳ οὐδὲν ἐστιν εἶδος πρὸς τὴν παροῦσαν χρείαν, τοῦ δὲ κατὰ τὸ ποσὸν εἴδη ἐστὶν ε. Ὁ μὲν γάρ ἐστι Πολλαπλάσιος· ὡς τοῦ γ ὁ ς. ὁ δὲ Ἐπιμόριος· ὡς τοῦ γ ὁ δ. ὁ δὲ Ἐπιμερής· ὡς τοῦ γ ὁ ε. Καὶ οὗτοι μὲν Ἁπλοῖ, τούτων δὲ ἔτι ἁπλούστερος, ὁ πολλαπλάσιος. Ἕτεροι δὲ ἐκ τῆς τούτων συνθέσεως γίνονται β, ὅτε Πολλαπλασιεπιμόριος· ὡς τοῦ γ ὁ ζ. καὶ ὁ Πολλαπλασιεπιμερής· ὡς τοῦ γ ὁ η.



Ὑπόλογοι δὲ εἰσιν οἱ ἐλάσσονες τῶν μειζόνων, Ὑποπολλαπλάσιοι, ὑπεπιμόριοι, ὑπεπιμερεῖς, καὶ ἑξῆς ὁμοίως. Ἰστέον δὲ, ὡς τὸ βιβλίον διχῆ διῄρηται, καὶ περιέχει τὰ μὲν πρῶτα τὴν τῶν ἁπλουστέρων διδασκαλίαν, τουτέστι, τὴν τῶν πολλαπλασίων, τὰ δὲ δεύτερα καθολικώτερα περὶ πάντων τῶν λόγων. Δεῖ γὰρ ἐπὶ παντὸς, ὡς εἴρηται, πράγματος τὴν τῶν ἁπλῶν ἡγεῖσθαι διδασκαλίαν. Τῶν δὲ τοῦ βιβλίου διαιρέσεως τρόπων, καὶ ἡ τῶν ὅρων γεγένηται διαίρεσις. οἱ μὲν γὰρ πρότεροι περὶ τῶν πολλαπλασίων, οἱ δὲ ἑξῆς καθολικώτεροι περὶ πάντων τῶν λόγων.

BREVIS INTERPRETATIO
HVIVS QVINTI LIBRI, INCERTI AVTORIS.

Scopus huius quinti libri est is, ut tractetur de proportionib. Pertinet enim liber iste & ad geometriã, ac arithmeticam & musicã, omnesq́ alias quæ simpliciter mathematicæ disciplinæ uocãtur. Etenim quę in ipso tra duntur, non geometricis solum contemplationibus cõueniũt, illisq́ propria existũt, sed & omnib. quę sub mathematica ipsa cõprehenduntur, & ut prius dixi, disciplinis. Sit igitur hic libri scopus. Cæterùm librũ ipsum cuiusdã Eudoxi inuentũ esse asserunt, discipuli Platonis. Cũ igitur sit scopus de proportionib. proportio aũt sit rationũ quarundã habitudo: quę sint illæ rationes, prius cognoscendum erit necessariò. Oportet enim simpliciũ cognitionẽ præcedere, q̃ de cõpositis dicatur aliquid. Itaq; si quædam inter se cõparentur (sumamus aũt duas magnitudines) illæ quidem Termini appellabũtur, transmutatio aũt siue trãsitus ab uno in alterũ, Interuallum dicitur. Cõparatio uerò alterius ad alterũ, Habitudo uocatur, quam ueteres Rationẽ nominauerũt. Collationem uerò huiuscemodi rationis ad aliã rationẽ, quæ fit similitudine quadã, aut eiuscemodi habitudinem, appellarũt Proportionẽ, nõ perinde quasi magnitudo illa cõpareť, sed ut illa ratio ad illã rationẽ: quæ deinde collatio, Rationis ratio dicitur. ut si duæ fuerint rectæ lineę, quarũ una alterius respectu duplam habeat rationem: quadratum quod ab ea linea est descriptum, quæ duplam rationem habet, quadruplã quoq; rationẽ habebit, respectu uidelicet eius quadrati, quod ab altera est descriptũ, siquidẽ collatio habeať longioris lineæ ad breuiorẽ rectã. Quæ enim lõgitudine dupla sunt: ea potẽtia quadrupla existũt. Ratio igitur quadratorũ quadrupla existens, duplæ rationis existentiũ rectarũ dupla est. Talis aũt uocať Rationis ratio. Sed fuerit illa in quãtitate. duplex enim est ratio, una in dignitate, altera uerò quantitatis. ac dignioris quidẽ nulla species uidetur esse ad pręsentẽ usum accommodata: huius uerò rationis, quæ secundũ quantitatẽ dicitur, species sunt quinq;. Alia enim ratio Multiplex appellatur: cuiusmodi est 6 ad 3: alia Superparticularis, ut 4 ad 3: alia uerò Superpartiens, ut 5 ad 3. atq; hæ quidẽ sunt Simplices, quarũ tamen omnium rationũ magis simplex est Multiplex. Reliquæ uerò duę species ex harũ nascũtur cõpositione, Multiplex superparticularis scilicet, ut 7 ad 3: & Multiplex superpartiens, ut 8 ad 3. Sub rationes aũt uocãtur, cum minores maiorib. cõferuntur: Submultiplices, Subsuperparticulares, Subsuperpartiẽtes, & sic deinceps. Sciendum aũt, diuidi hunc librũ in duas partes, et initiò quidẽ simpliciũ cõtinet doctrinã, hoc est, eam quę de multiplicib. tractat, deinde uniuersaliora de omnib. rationib. tradũtur. Oportet enim, ut iã ostẽsum est, in omni re simpliciũ doctrinã pręcedere. Si quis aũt cõsideret modũ diuisionis, terminorum etiã diuisio facta erit. Nã priores quidẽ, scilicet termini, Multiplices: qui autem deinceps sequuntur uniuersaliores, de omnibus rationibus.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

EVCLIDIS ELEMENTORVM GEOmetricorum liber quintus.

Est hic quintus liber Euclidis περὶ τοῦ λόγου καὶ τῆς ἀναλογίας, hoc est, de ratione & proportione. Quæ igitur ad hanc tractationem requiruntur uocabula, primò, ut in præcedentibus etiam factum est, ordine definit.

ΟΡΟΙ.

Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους, τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον.

DEFINITIONES.

1 Pars est quantitas quantitatis, minor maioris, quando minor metitur maiorem.

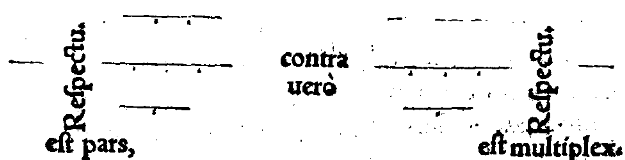
μέγεθος) Licet hac uoce continua tantum quantitas, sub qua nimirum lineæ, superficies & corpora comprehensa sunt, intelligatur, unde sic quidem magnitudinis significationem habet: tamen quia omnia, quæ in hoc libro, tam per definitiones quàm etiam propositiones, ab authore nobis præscribũtur, per numeros æque ut per lineas ostendi possunt: non magnitudinis, sed quantitatis uoce, sub quã, tanquam uocabulo generali, numeri etiam cõprehenduntur, in uersione usi sumus, id quod Lector æquo animo ferat, præsertim cũ in hoc autori nihil detrahatur, cumque etiam singula numeris declarauerimus.

Καταμετρεῖν) autem est metiri, atque hoc loco diuidere aliquid integrè, & quasi ad libellam, ut dicitur, sic quòd nõ maneat, ultima subtractione facta, aliquid minore minus, sed nihil omnino, ad mensurandum amplius relinquatur.

Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος.

2 Multiplex est, quantitas quantitatis, maior minoris, quando maior mensuratur à minore.

Harum definitionum de parte & multiplici exempla sunt.



Exempla per numeros exposita.

3 respectu scilicet { 6, 9, 12, 15, 21 } est pars, Contra uerò { 6, 9, 12, 15, 21 } respectu 3, multiplex

Λόγος

Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν, ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις.

3 Ratio, eſt duarum quantitatum eiuſdem generis, aliquatenus inter ſe quædam habitudo.

Duæ requiruntur, ut ex definitione colligitur, ad rationem cõſtituendam, quantitates, atq; ea deinde inter illas habitudo, quanta nimirũ una reſpectu alterius fuerit. hoc inquam, uel illa conſideratio, ſiue reſpectus, ratio dicitur. Exempla ſunt,

———————————— ad ——————

——————— ad ———————————

uel ——————————— ad ——————————

Exempla per numeros expoſita.

25	ad	25 5 24, 17 3 7	uel contra	25 5 24 17 3 7	ad	25,	eſt	ratio,

hoc eſt, quidam reſpectus, ut ratione primi exempli in utroq; ordine, numeri ſeſe mutuo æqualiter reſpiciunt. Ratione ſecundi, in priori quidem, eſt prior quantitas numerus poſterioris quincuplus, in poſteriori uerò ſubquincuplus, & ſic ordine deinceps. Illa autem conſideratio quantitatum inter ſe, unius ad alteram, dicitur ratio. Et ſicut lineæ ac numeri, ita quoq; ſuperficies, corpora, ac quæq; res aliæ inter ſe conferri poſſunt.

Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.

4 Rationem habere inter ſe quantitates dicuntur, quæ poſſunt multiplicatæ inuicem excedere.

Exempla ſunt.

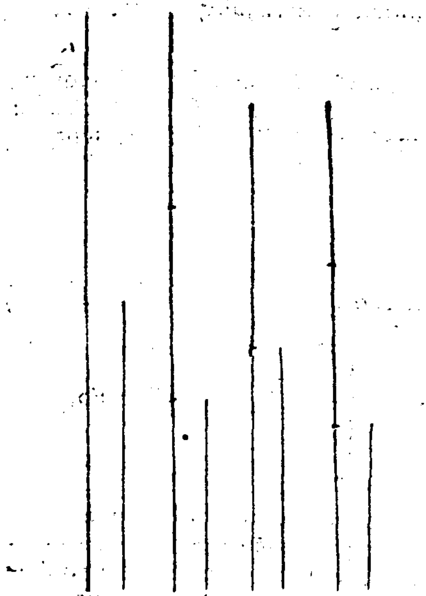
27	18	12	12	18	27
9	6	4	4	6	9
36	36	36	27	30	22
9	9	9	9	5	11

Sic per lineas exempla præſcribi poſſunt.

Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι, πρῶτον πρὸς δεύτερον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων καθ᾽ ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέρου, ἢ ἅμα ἐλλείπῃ, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ὑπερέχῃ, ληφθέντα κατάλληλα.

5 In eadem ratione quantitates dicuntur eſſe, prima ad ſecundam, & tertia ad quartam, quando primæ & tertiæ æquè multiplicia à ſecundæ & quartæ æquè multiplicibus, iuxta quamuis multiplicationem utrun-

que ab utroque, uel unà deficiunt, uel unà æqualia ſunt, uel unà excedunt, ſumpta inter ſe.



pri- ma ſe- cun. ter- tia quarta quantitas.

Dicit definitio. Quarum rationum antecedentes uno aliquo numero, uno item, ſiue illo priori uel quouis numero alio, & conſequentes quantitates multiplicatæ fuerint, multiplex inſuper primæ ſimili modo à multiplici ſecundæ defecerit, ei æquale fuerit, uel idem exceſſerit. ſicut multiplex tertiæ deficit, æquale eſt, uel excendit multiplex quantitatis quartæ: in eadem ratione dicuntur eſſe hæ quantitates. Oſtendit autem hoc in quatuor quantitatibus autor, & dicit, In eadem ratione quantitates, &c.

Exempla in numeris ſunt.

Multi.	24	18	12	9	exceſſus
	24	24	12	12	æqualitas
	16	18	8	9	defectus.
Quantita.	8 prima	6 ſecun.	4 tertia	3 quar.	

Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα μεγέθη λόγον, ἀνάλογον καλείσθω.

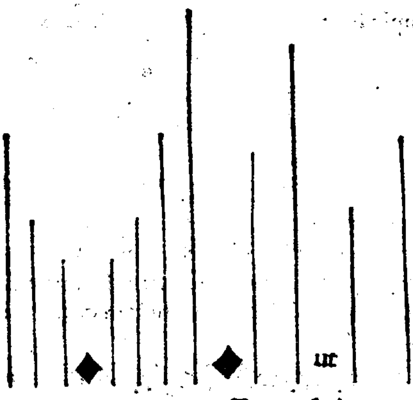
6 Eandem autem habentes rationem quantitates, proportionales uocentur.

Huius definitionis exempla ſunt, quæ ex definitionibus præcedentibus, quarta & quinta, colliguntur.

Ὅταν δὲ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων, τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον μὴ ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου· τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.

7 Quando uerò æquè multiplicium, multiplex primæ exceſſerit multiplex ſecundę, ipſum uerò multiplex tertiæ non exceſſerit multiplex quartæ: tunc prima ad ſecundam maiorem quàm tertia ad quantitatem quartam rationem habere dicitur.

Cohæret



Cohæret hæc definitio cum præcedentibus duabus, quinta & sexta. Quando uerò dicit, æquè multiplicium, tum primæ & tertiæ, secundæ item & quartæ quantitatum, intelligendum est.

uel contrà

Exempla in numeris sunt.

16	8	18	18	24	20	27	45
8	4	9	9	8	4	9	9

Aliud exemplum.

16	20	18	45
8	4	9	9

Sunt hic tria exempla, quorum primum & secundum patent. In tertio autem, licet multiplex primæ in nullo multiplex secundæ excedat, cum tamen id minus à multiplici secundæ, quàm tertiæ multiplex à multiplice quantitatis quartæ deficiat: erit àdhuc primæ ad secundã maior, quàm tertiæ ad quartam quantitatẽ ratio.

Alia exempla.

22		12		14		18		21		18		15		24
11	ad	2	&	7	ad	3	Item	7	ad	3	&	5	ad	4

APPENDIX.

Cum quis uelit inter duas rationes iudicare, utra maior sit, commodissimè per hanc definitionem id expedire poterit.

Ἀναλογία δὲ ἐστιν ἡ τῶν λόγων ὁμοιότης.

8 Proportio uerò est, rationum similitudo.

ADMONITIO.

Similes siue eædem, & dissimiles sunt rationes, quantitates uerò æquales & inæquales inter se, quod hic annotare libuit.

Ἀναλογία δὲ ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστη ἐστίν.

9 Proportio autem in tribus terminis minima est.

Hoc est, ad constituendam proportionem requiruntur ad minus tres quantitates. Cum enim proportio sit rationum similitudo, & non rationis: singulæ uerò rationes duabus quantitatibus, antecèdente scilicet & consequente, constent: sequitur proportionem, duabus rationibus præscriptam, quatuor terminos requirere. Sed quia non rarò solet contingere, ut unius rationis unus terminus bis repetatur, semel quidem ut sit consequens prioris, postea uerò ut sit posterioris rationis antecedens, constat, tres terminos, ut proportio constituatur, aliquando sufficere, pauciores uerò nunquam.

Exempla sunt.

9 6 4 16 12 9 16 20 25

Alia.

9 ad 4 ut 27 ad 12 32 ad 24 ut 12 ad 9

Similiter alia.

27 18 ut 12 8 64 80 ut 100 125

Adhuc aliud.

12 ad 15 ut 8 ad 10, atque ut 4 ad 5

Cæterùm, maximam proportionem quot termini constituant, hoc non definit Autor, cum ea semper quoad quis uoluerit, ut habet propositio in octauo secunda, per unum terminum augeri possit.

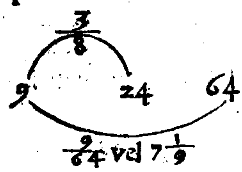
Ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ· τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον.

10 Quando uerò tres quantitates proportionales fuerint: prima ad tertiam duplicatam rationem habere dicitur, quàm ad secundam.

Ἀνάλογον ᾖ, hoc est, continuè unam & eandem rationem habuerint.

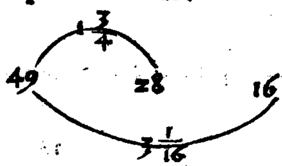
Exempla sunt.

Denominatio uel ratio primæ ad secun.



Denominatio uel ratio primæ ad tertiam.

Denominatio uel ratio primæ ad secun.



Denominatio primæ ad tertiam, &c.

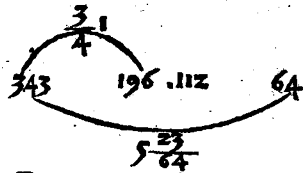
Est autem respectu prioris duplicata, hoc est bis sumpta.

Exempla huius definitionis alia, sunt numeri uel quantitates, quas examinat definitio præcedens quarta.

Ὅταν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ· τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον. Καὶ ἀεὶ ἑξῆς ἑνὶ πλείων, ἕως ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ.

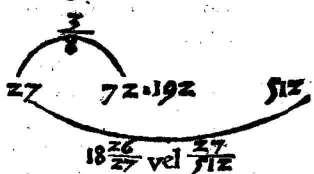
11 Quando autem quatuor quantitates proportionales fuerint: prima ad quartam triplicatam rationem habere dicitur, quàm ad secundam. Et semper ordinatim una plus, prout quidem proportio extensa fuerit.

Ratio primæ ad secun.



Ratio primæ ad quartam.

Ratio primæ ad secun.



Ratio primæ ad quartam.

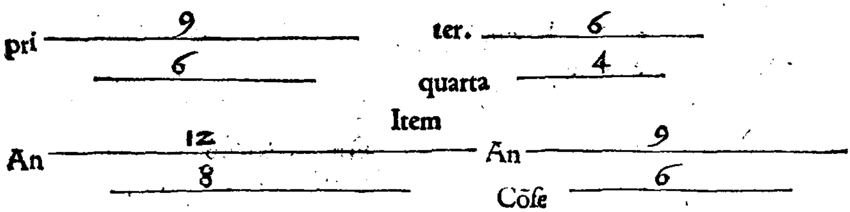
Est autem respectu primæ collationis triplicata, hoc est, ter sumpta.

Ὁμόλογα

Ὁμόλογα μεγέθη λέγεται εἶν, τὰ μὲν ἡγούμενα τοῖς ἡγουμένοις, τὰ δὲ ἑπόμενα τοῖς ἑπομένοις.

12 **Similis rationis quantitates dicuntur esse, antecedentes quidem antecedentibus, & consequentes consequentibus.**

Est hæc definitio modus quidam & canon, per quem, sicuti ex præcedenti quinta, quæ quantitates proportionales sint, cognoscitur, atque huius sensus talis. Quatuor aut pluribus quantibus, pari numero propositis, quarum semper duæ & duæ inter se conferuntur, si quidem antecedentes illam inter se, quam ipsæ consequentes, eodem ordine sumptæ, rationem habuerint: similis rationis hæ quantitates esse dicuntur.



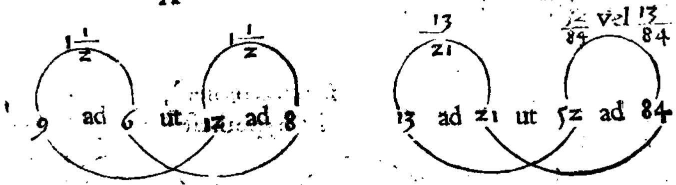
Quia prima & tertia, hoc est antecedentes, illam quam consequentes, quæ sunt secunda & quarta quantitates, inter se habent rationes: similis igitur rationis prima, secunda, tertia & quarta quantitates erunt. Sic de pluribus idem intelligitur.

Ἐναλλὰξ λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον, καὶ τοῦ ἑπομένου πρὸς τὸ ἑπόμενον

13 **Permutata ratio, est acceptio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.**

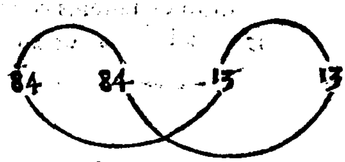
Similis rationis quantitatibus positis: erit, ex permutata ratione, antecedens ad antecedentem, hoc est prima ad tertiam, sicut consequens ad consequentem, secunda nimirum ad quantitatem quartam.

Ex hypoth. Ex hypot.



Ergo ex permutata ratione,

Aliud exemplum in ratione æqualitatis.



ἐκ τοῦ ἐναλλὰξ λόγου.

APPENDIX.

Est huius, & proximè sequentium quatuor definitionum, generalis hypothesis, ut uidelicet quantitates similis rationis habeant.

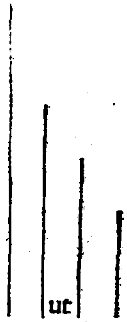
Ἀνάπαλιν λόγος, ἐστὶ λῆψις τοῦ ἑπομένου ὡς ἡγουμένου, πρὸς τὸ ἡγούμενον ὡς ἑπόμενον.

14 Conuersa ratio, est acceptio consequentis tanquam antecedentis, ad antecedentem tanquam ad consequentem.

Vt si fuerit proportionalium quantitatum prima ad secundam, ex hypothesi, ut tertia ad quartam: erit contrà ex conuersa ratione, secunda ad primam, nimirum consequens ad antecedentem, sicut quarta ad tertiam, similiter consequens ad antecedentem.

Exemplum est,

geometricum quidem



in numeris uerò

9 ad 6 ut 12 ad 8

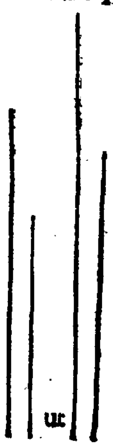
6 9 ut 8 12

Σύνθεσις λόγου, ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου μετὰ τοῦ ἑπομένου, ὡς ἑνός, πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

15 Compositio rationis, est acceptio antecedentis cum consequente, sicut unius, ad eandem consequentem.

Exemplum est,

geometricum quidem



in numeris uerò,

Ex hypothesi

9 ad 6 ut 12 ad 8

Ergo ex rationis compositione

15 ad 6 ut 20 ad 8.

Διαίρεσις

Διαίρεσις δὲ λόγου, ἐστὶ λῆψις τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου, πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

16 Diuiſio rationis, eſt acceptio exceſſus, quo excedit antecedens ipſam conſequentem, ad eandem conſequentem quantitatem.

Exemplum eſt.

Quia	9	ad	6	ut	12	ad	8	ex hypo.
quare	3	ad	6	ut	4	ad	8	ex diuiſa ra.

Ἀναστροφὴ λόγου, ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὴν ὑπεροχήν, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου.

17 Conuerſio rationis, eſt acceptio antecedentis ad exceſſum, quo excedit antecedens ipſam conſequentem quantitatem.

Exemplum eſt.

Cum ex hypotheſi fuerint 9 ad 6 ut 12 ad 8: erunt ex conuerſionis ratione 9 ad 3 ut 12 ad 4

SEQVITVR EXEMPLVM GENERALE, QVINQVE præmiſſas proportionis proprietates declarans.

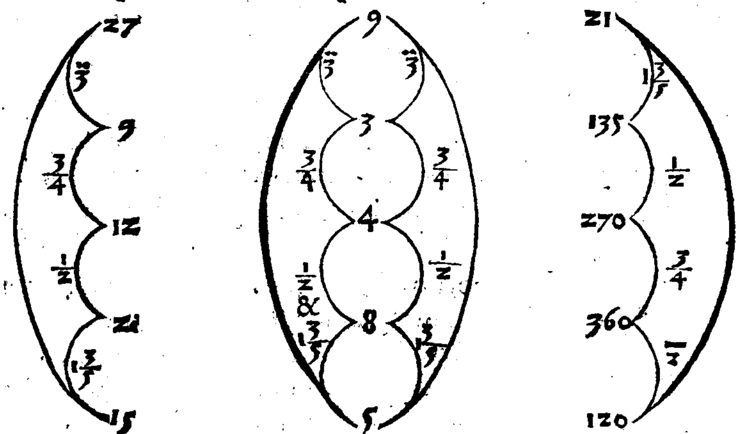
Quia 15 ſunt ad 8 ut 45 ad 24 ex hypotheſi,

igitur	15	erunt ad	45	ut	8	ad	24,	ex permutata ratione
	8		15		24		45,	ex conuerſa ratione
	23		8		69		24,	ex rationis compoſitione
	7		8		21		24,	ex rationis diuiſione
	15		7		45		21,	ex rationis conuerſione.

Δι' ἴσου λόγος ἐστί, πλειόνων ὄντων μεγεθῶν, καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος, σὺν δύο λαμβανομένων, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὅταν ᾖ, ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσι, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσι, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον. Η ἄλλως· Λῆψις τῶν ἄκρων, καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων.

Ordo

prior posterior



uel ordo prior ordo poſterior.

18 Æqua ratio eſt, pluribus exiſtentib. quantitatibus, & alijs eis æqualibus multitudine, cũ duabus ſumptis, & in eadem ratione, quando fuerit, ſicut in prioribus quantitatibus, prima ad ultimam: ſic in poſterioribus quantitatibus, prima ad ultimam. Vel aliter. Æqua ratio, eſt acceptio extremarum, per ſubtractionem mediarum.

Τεταγμένη ἀναλογία ἐστὶν, ὅταν ᾖ, ὡς ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἡγούμενον πρὸς τὸ ἑπόμενον, ᾖ δὲ καὶ ὡς ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι, οὕτως ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι.

19 Ordinata proportio eſt, quando fuerit, ſicut antecedens ad conſequentem ſic antecedens ad conſequentem, ſicutq; conſequens ad aliud quiddam ſic conſequens ad aliud.

Vult definitio. Ordinatis tribus quantitatibus, & alijs deinde totidem, quando fuerit prima priorum ad ſuam ſecundam, ſicut prima poſteriorum ad ſecundam, illarum deinde ſecundam ad tertiam, ut ſecunda harũ ad tertiam, atq; ſic ordine deinceps, ſi plures quàm tres, ex utraq; parte, quantitates fuerint: infertur ut in præcedenti, quòd ſcilicet tandem extremorum utrinq; ſit æqua ratio.

Exemplum eſt,

$4\frac{1}{2}$	Antecedens		9	18		Antecedens	$4\frac{1}{2}$
		$1\frac{4}{5}$			$1\frac{4}{5}$		
	Conſequens		5	10		Conſequens	
		$2\frac{1}{2}$			$2\frac{1}{2}$		
	Aliud		2	4		Aliud	

Poteſt hæc definitio, atq; etiam proximè ſequens ſe extendere, & intelligi de pluribus quantitatibus, quemadmodum ipſa præcedens, ut patet.

Ordo		Ordo	
prior	poſte.	prior	poſte.
27	9	16	64
9	3	8	32
12	4	5	20
24	8	9	36
15	5	3	12

Τεταραγμένη δὲ ἀναλογία ἐστὶν, ὅταν τριῶν ὄντων μεγεθῶν, καὶ ἄλλων ἴσων αὐτοῖς τὸ πλῆθος, γίνεται, ὡς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν, ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον· ὡς δὲ ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν, ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἄλλο τι πρὸς ἡγούμενον.

20 Perturbata uerò proportio eſt, quando tribus exiſtentibus quantitatibus, & alijs eis æqualibus multitudine, fit, ſicut quidem in prioribus quantitatibus antecedens ad conſequentem, ſic in poſterioribus quantitatibus antecedens ad conſequentem: ſicut autem in prioribus quantitatibus, conſequens ad aliud quiddam, ſic in poſterioribus quantitatibus, id aliud ad antecedentem.

Exemplum

Exemplum est,

Tripla	Antecedens	9	
	Consequens	6	
	Quid aliud	3	

6	Quid aliud	Tripla	
3	Antecedens		
2	Consequẽs		

Alia duo exempla

Anteced.	9	9	Quid aliud	Antec.	7	8	Quid aliud
Conseq.	3	24	Antecedens	Conseq.	4	14	Antecedens
Quid aliud	8	8	Consequens	Quid al.	7	8	Consequens

Exemplum pro quinq; quantitatibus in utroq; ordine.

Ordo

prior			posterior		
Tripla	$2\frac{1}{4}$	9	60	$\frac{2}{3}$	Tripla
	$\frac{4}{5}$	4	90	$2\frac{1}{2}$	
	$2\frac{1}{2}$	5	36	$\frac{4}{5}$	
	$\frac{2}{3}$	2	45	$2\frac{1}{4}$	
		3	20		

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

ΠΡΩΤΗ. A.

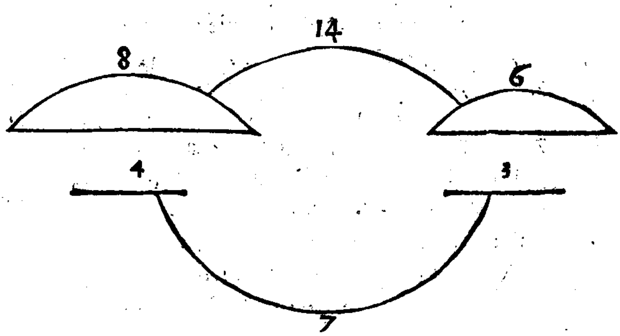
Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη, ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον· ὁσαπλάσιόν ἐστιν ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνός, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων.

PROPOSITIONES.

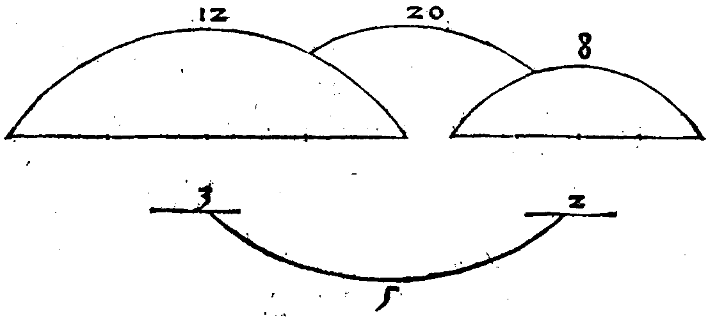
PRIMA. I.

Si fuerint quotcunq; quantitates, quotcunq; quantitatum æqualium numero, singulæ singularum æquè multiplices: quàm multiplex est una quantitas unius, tam multiplices erunt omnes omnium.

Sint quotcunq; quantitates, siue duæ, tres, quatuor aut plures, aliarum totidem æque multiplices, quæq; recto ordine suæ, dico, quàm multiplex est una multiplicium respectu suæ inferioris, tam multiplices esse multiplices omnes, simul sumptas, omnium inferiorum simul sumptarum. Est huius propositionis demonstratio



potissimum illa communis noticia, Si æqualibus equalia addantur, &c. Cum enim inferiores æqualiter, ex hypothesi, in suis multiplicibus contineantur: sequitur, ut quot portiones una inferiorum in sua multiplici æquales habuerit, totidem etiam & reliquarum quæque habeat. Diuisis ergo multiplicibus, unaquaque scilicet in suas portiones, quot in una earum portiones sunt suæ inferiori uel parti æquales, tot & in unaquaque alia erunt: atque insuper quemadmodũ primæ portiones multiplicium suis inferiorib. sunt equales, ita ordine quæque alię. Aequalibus igitur æqualibus additis, erunt multiplicium portiones eiusdem ordinis, primi scilicet secundi uel tertij & reliqui, si tot fuerint, simul sumptæ, ipsis inferiorib. simul sumptis æquales. Quare si primis secundæ multiplicium portiones additæ fuerint, aggregata ad partes



duplicia erunt. Quod si tertiæ his adiectæ fuerint: triplicia. Quia autem, ut ex hypothesi habetur, in una multiplici non plures portiones sunt suæ inferiori æquales, quàm in alia: quoties igitur multiplex una suã inferiorem uel submultiplicem continet, toties & multiplicium aggregatum, id quod ex inferioribus, hoc est multiplicibus, colligitur, cõtinere necesse est. Si fuerint igitur quotcunque quantitates, quotcunque quantitatum, &c. quod demonstrasse oportuit.

Sequitur exemplum pro quatuor.

99

Multipli.	24	18	21	36	superiores
	8 8 8.	6 6 6.	7 7 7.	12 12 12	
Submulti.	8	6	7	12	inferiores

33

Potest & huiusmodi exemplum proponi.

	14				28	[illegible]	
Superiores	7	7	Item	9	19		9
Inferiorés	7	7		9	18		9
	14				28	[illegible]	

In his duobus exemplis, quemadmodum nec prima, secunda, neque etiam tertia ex superioribus suæ inferioris est multiplex, sed ei æqualis: ita etiam superiorum aggregatum, eius quod ex inferioribus colligitur, non multiplex, sed æquale est. Sed ad propositum nihil, uel parum, cum de æque multiplicibus, & non æqualibus quantitatibus hæc intelligenda sit.

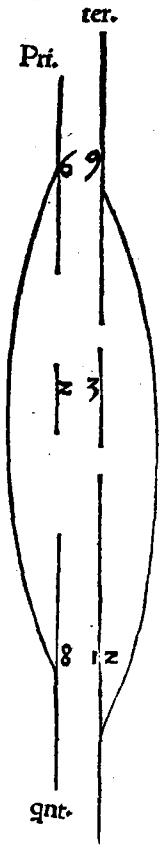
ΠΡΟΤΑΣΙΣ

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β.

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον τετάρτου, ᾖ δὲ καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις πολλαπλάσιον, καὶ ἕκτον τετάρτου· καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον, δευτέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τετάρτου.

PROPOSITIO II.

Si prima ſecundæ æquè fuerit multiplex, & tertia quartæ, fuerit autem & quinta ſecundæ ęquè multiplex, & ſexta quartæ: & compoſita, prima ſcilicet & quinta, ſecundæ æquè erit multiplex, & tertia & ſexta quartæ.



Sint ſex quantitates, & eſto quòd prima ſecundæ, ut tertia quartæ, ſit multiplex: atq; etiam quinta eidem ſecundæ, ut ſexta quartæ: dico ergo, & compoſitam ex prima & quinta ipſi ſecundæ, ut eſt compoſita ex tertia & ſexta ipſi quartæ, multiplicem eſſe. Quoniã enim prima ſecundæ & tertia quartæ, ex hypotheſi æquè multiplex eſt: quot igitur portiones ſibi æquales habet ſecunda in prima, tot haber & quarta in ipſa tertia: atq; eadẽ ratione, quot in quinta ſecunda, tot etiã in ſexta portiones ſibi ęquales habet ipſa quarta. Quare quoties ſecunda in ipſa prima & quinta reperitur, toties etiã quarta in quantitatib. tertia & ſexta. Quàm multiplex igitur eſt cõpoſita ex prima & quinta ſecundæ, tam multiplex eſt & cõpoſita ex tertia et ſexta ipſius quartę. Aequè igitur multiplices ſunt, compoſita ex prima & quinta ſecundæ, & compoſita deinde ex tertia & ſexta ipſius quartæ. Quare ſi prima ſecundę æquè fuerit, &c. quod demonſtraſſe oportuit.

ALIA HVIVS REI DEMONSTRATIO.

Sint quantitates, quot & quales propoſitio requirit, &cæ. Quoniam enim ſecunda in prima & quinta, ex hypotheſi, to

quinquies		quinquies	
Ter	bis	ter	bis
12	8	9	6
4		3	

ſexta ties continetur, quoties quarta in quantitatibus tertia & ſexta, ſi iam ad ęquales, priorum multiplicium portiones denominantes numeros, poſteriorum multiplicium portiones denominantes æquales numeri addantur: ipſi toti, denominantes multiplicium portiones numeri, ex communi illa noticia, Si æqualibus æqualia addantur, &c. inter ſe æquales erunt. atq; unus quidem, qui quoties ſecunda in compoſita ex prima & quinta, alter uerò quoties quarta in tertia & ſexta ſimul ſumpta continetur, oſtendit. Quare ſic compoſita ex prima & quinta, multiplex eſt ſecundæ: ita & quæ ex tertia & ſexta conſtituitur quantitas, ad ipſam quartã multiplex erit. Si prima igitur ſecundæ æquè fuerit multiplex, & tertia quartæ, fuerit autem & quinta ſecundæ æquè multiplex, & ſexta quartæ: & compoſita, prima ſcilicet & quinta, ſecundæ æquè erit multiplex, & tertia & ſexta quartæ, quod demonſtraſſe oportuit.

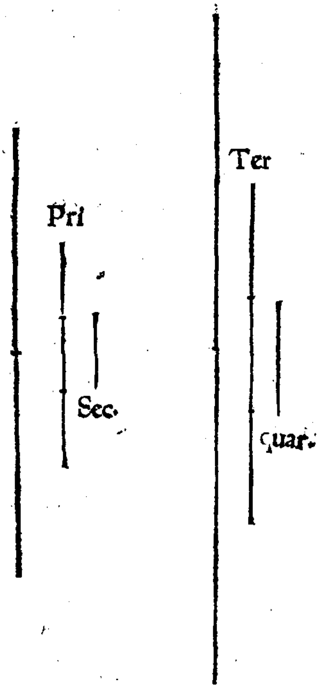
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ.

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον τετάρτου, ληφθῇ δὲ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ πρώτου καὶ τρίτου· καὶ δι᾽ ἴσου τῶν ληφθέντων ἑκάτερον ἑκατέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, τὸ μὲν τοῦ δευτέρου, τὸ δὲ τοῦ τετάρτου.

PROPOSITIO III.

Si prima ſecundæ æquè fuerit multiplex, & tertia quartæ, ſumantur autem æquè multiplices primæ & tertiæ: & æqualiter ſumptarum utraq; utriuſque æquè multiplex erit, illud quidem ſecundæ, hoc uerò ipſius quartæ.

Sint quatuor quantitates, & eſto quòd prima ſecũdæ & tertia quartæ ſint æquè multiplices. Sint etiam duæ quantitates aliæ, quæ & ipſæ, una quidem primæ, altera uerò tertiæ, ſint æquè multiplices: dico igitur, quòd etiam multiplex primæ ipſi ſecundæ, tertiæ deinde multiplex ipſi quantitati quartæ æquè multiplices ſint. Eſt huius propoſitionis demonſtratio ſecunda præmiſſa, ſi toties ea, quoties prima in quinta continetur, minus uno, repetatur. Hoc autem apparet, ſi quinta quanti-



Exemplum in numeris.

	63	84	
prima	9	12	tertia
ſecunda	3	4	quarta quantitas

Aliud

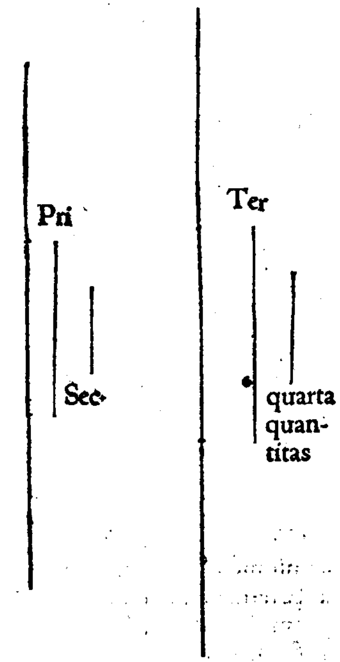
		24			30	
8	8	8		10	10	10
prima	8		tertia	10		
ſecun.	4		quar.	5		

tas & ſexta in portiones, primæ & tertiæ quantitatibus æquales, diſtribuantur, loco primæ deinde & tertiæ quantitatum, æquales ex quinta & ſexta portiones ſumantur, quod indicaſſe oportuit.

ALIA ET PLANIOR HVIVS PROPOSITIOnis demonſtratio.

Sint quatuor quantitates, &c. Quoniam enim primæ & tertiæ æquè ſunt, ex hypotheſi, aſſignatæ multiplices: quot igitur portiones ſibi æquales in ſua habet ipſa prima, tot & tertiam in ſua habere neceſſe erit. quare utraq; multiplici in portiones ſuæ inferiori æquales diſtributa: erit utiq; æqualis multitudo portionum unius, ſicut

cut & multiplicis alterius. Quia uerò æquè multiplex est prima quātitas secundæ, & tertia quartæ, loco primæ & tertiæ quantitatum, portionibus, quas in ipsarum multiplicibus æquales habent, singulis ordine sumptis: & ipsæ portiones quantitatum secundæ & quartæ æquè multiplices erunt. Ordinatis ergo iam sex quantitatibus, quarū prima quidem & quinta sint priores duæ, quas habet prima in sua multiplici æquales, portiones, secunda deinde sit ipsa secunda, ac quarta ipsa quarta. Tertia uerò & sexta quantitates sint duæ portiones in multiplici quantitatis tertię, & ipsæ priores. Et quoniam hæ sex quantitates huiusmodi sunt, quales propositio præcedens secunda requirit, erit per hanc, ex prima & quinta composita ita multiplex secundæ, ut ex tertia & sexta composita multiplex est ipsius quartæ. Igitur, si in multiplicibus non plures quàm duæ, primæ & tertię quātitatibus ęquales portiones fuerint: iam statim constat ipsa propositio. Quòd si plures fuerint, maneant secunda & quarta quantitates, prima uerò & tertia esto priorum duarum in multiplicibus portionum aggregata, quinta deinde & sexta sint tertiæ in multiplicibus portiones. Et quoniam etiam iam quales propositio præcedens secunda requirit, sex quantitates apparent: idem etiam quod prius per eam inferri potest. Constat itaq; propositio, ubi quidem tres fuerint in multiplicibus portiones, suis inferioribus æquales. Non aliter procedendum erit, ubi portiones quatuor, quinq; aut plures etiam fuerint, id quod pro pleniore huius propositionis declaratione dicere libuit.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ.

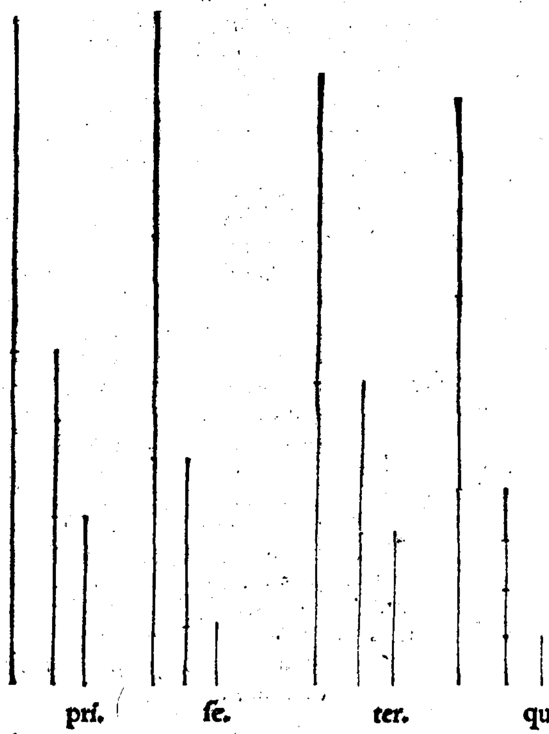
Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον· καὶ τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ τε πρώτου καὶ τρίτου πρὸς τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου, καθ᾽ ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ληφθέντα κατάλληλα.

PROPOSITIO IIII.

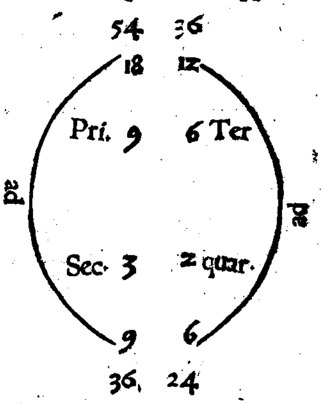
Si prima ad secundam, eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: & primæ & tertiæ æquè multiplices, ad æquè multiplices quantitatum secundæ & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem, eandem habebunt rationem, ad se sumptæ.

Sint quatuor quantitates, & esto quòd prima ad secundam eam habeat rationem, quam tertia ad quartam. Sint etiam æquè multiplices primæ & tertiæ, æquè insuper multiplices, iuxta quamuis multiplicationem, quantitatum secundæ & quartæ: dico igitur, & ipsas primæ & tertiæ æquè multiplices, ad æquè multiplices

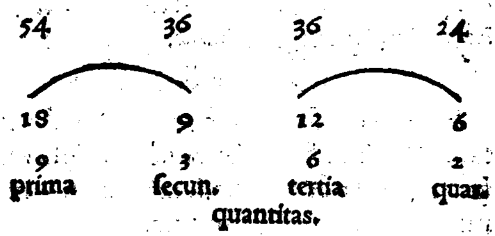
ces quantitatum secundæ & quartæ, eandem habere rationem, id quod sic colligitur. Quoniam ex hypothesi, primæ & tertiæ æquè sunt multiplices assignatæ, qui-



bus si aliæ æquè assignentur multiplices: erunt illæ ultimò assignatæ, per propositionem præmissam tertiam, etiam ipsarum primæ & tertiæ æquè multiplices. Per eandem insuper, cum secunda & quarta suas æquè multiplices, ex hypothesi, habeant, si ipsis aliæ æquè multiplices assignentur: & illæ aliæ, secundæ & quartæ quantitatum æquè multiplices erunt. Quoniam autem quantitates, prima, secunda, tertia & quarta, ex hypothesi, sunt proportionales: multiplices igitur, de quibus



Possunt numeri etiam sic ordinari.



iam sermo fit, ex conuersione definitionis quintæ huius, in defectu, æqualitate, & excessu æqualiter sese habebunt; atque deinde, cum hæ eædem multiplices, aliarum etiam

etiam, primarum ſcilicet quantitatum, multiplices ſint: & illę aliæ tandem ex quinta definitione ipſa, ordine, quo ſolent, proportionales erunt. Si prima igitur ad ſecundam & tertia ad quãtitatem quartam eandem rationem habuerint: & primæ &c. quod demonſtraſſe oportuit.

ΛΗΜΜΑ.

Ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὅτι εἰ ὑπερέχει τὸ κ τοῦ μ, ὑπερέχει καὶ τὸ λ τοῦ ν, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. Δῆλον ὅτι, καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ μ τοῦ κ, ὑπερέχει καὶ τὸ ν τοῦ λ, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. Καὶ διὰ τοῦτο ἔσται καὶ ὡς τὸ η πρὸς τὸ ε, οὕτως τὸ θ πρὸς τὸ ζ.

LEMMA, VEL ASSVMPTVM.

Quoniam igitur demonſtratum eſt, Si multiplex primæ quantitatis multiplicis excedat multiplicem multiplicis tertiæ: & multiplex multiplicis ſecundæ excedet multiplicem multiplicis quantitatis quartæ. Quòd ſi æqualis: æqualis. Si uerò minor fuerit: minor etiam erit. Manifeſtum autem eſt, Si multiplicis tertiæ quantitatis multiplex, excedat multiplicem multiplicis quantitatis primæ: quod tum & multiplex quartæ quantitatis multiplicis, multiplicem multiplicis quantitatis ſecundæ excedet, & ſi ſit æqualis: æqualis, ſi uerò minor: minor etiam ſit. Atque ideo etiam multiplex ſecundę ad multiplicem primę, ſicut multiplex quartæ ad multiplicem quantitatis tertiæ ſeſe habebit.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀνάπαλιν ἀνάλογον ἔσται.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt, quòd ſi quatuor quantitates in proportione ſint, & permutatim etiam illas proportionales eſſe.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε.

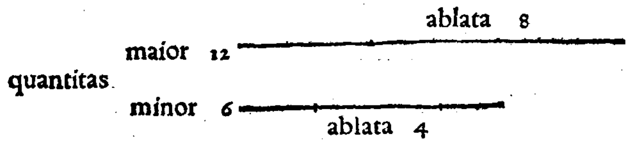
Ἐὰν μέγεθος μεγέθους ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν ἀφαιρεθέντος, καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ λοιποῦ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ὅλον τοῦ ὅλου.

PROPOSITIO V.

Si quantitas quantitatis multiplex fuerit, quemadmodum ablatum ablati: & reliquum reliqui, ut totum totius multiplex erit.

Sint duæ quantitates, quarum una ſit alterius multiplex auferatur autem ab utraq; harum portio aliqua, quarum ſimiliter una alterius, ſicut tota totius, ſit multiplex: dico, & reliquarum quantitatum, ut tota totius, unam alterius multiplicem eſſe. Sicut ablatum maioris multiplex eſt, ex hypotheſi, ablati quantitatis minoris, ita multiplex eſto, ex ſtructura, maioris reſiduum quãtitatis alterius quartę: & erit ex propoſitione prima huius, maior quantitas aggregati, quod ex quarta quantitate & maioris ablato naſcitur, ſicut ablatum de maiore minoris quantitatis ablati, multiplex. Sed quia ita etiam, ex hypotheſi, multiplex eſt maior quantitas ipſius minoris: æquè igitur eſt multiplex maior quantitas utriuſq; ipſorum, aggregati ſcilicet iam commemorati, & minoris quantitatis: quare ęqualia inter ſe, aggregatum

& minor quantitas. Dempto igitur eo quod est eis commune, ablato scilicet minoris, ex utraq; parte: & reliqua, quarta scilicet quantitas, atq; residuum minoris, ex



communi quadam noticia, inter se æqualia erunt. Quare quemadmodum, ex structura, æque est multiplex ablatum maioris ipsius minoris quantitatis ablati, & residuum maioris ipsius quartæ quantitatis: ita nunc propter æqualitatem, loco scilicet quartæ quantitatis residuo minoris sumpto, & residua, quemadmodum ablata, inter se multiplicia erunt. Sed quia ut ablatum ablati, sic ex hypothesi, & maior quantitas ipsius minoris: quare & ablatum ablati, ut ipsæ quantitates, unum alterius multiplex erit. Si quantitas igitur quãtitatis multiplex fuerit, quemadmodum ablatum ablati: & reliquum reliqui, ut totum totius multiplex erit. quod demonstrasse oportuit.

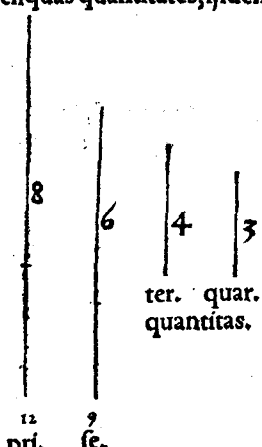
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ.

Ἐὰν δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τινὰ τῶν αὐτῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια· καὶ τὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς, ἤτοι ἴσα ἐστὶ, ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια.

PROPOSITIO VI.

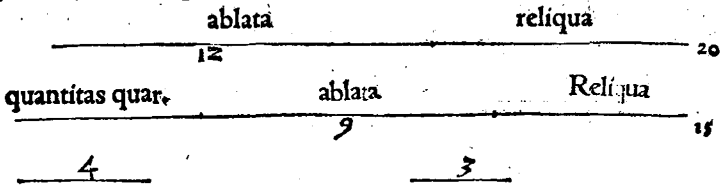
Si duæ quantitates duarum quantitatum æquè fuerint multiplices: & ablatæ quædam earundem æquè fuerint multiplices: reliquæ eisdem aut æquales sunt, aut æquè ipsarum multiplices.

Sint duarum quantitatum æquè multiplices, sint etiam portiones quædam, de multiplicibus ablatæ, ad easdem duas æquè multiplices: dico, multiplicium reliquas quantitates, iisdem duabus aut ęquales, utranq; utriq;, aut uerò earũ ęquè multiplices esse. Minores non possunt esse reliquæ ipsis quantitatibus positis, propterea quòd multiplices eis æqualiter assignatæ sint. Esto igitur primò quòd prioris multiplicis reliqua suæ quantitati æqualis sit: dico sanè, & posterioris multiplicis reliquam suæ quantitati æqualem esse, id quod hoc modo demonstrabitur. Sumatur ipsi posteriori æqualis quantitas alia. Et quoniam portiones ablatæ, ex hypothesi, ipsarum quantitatum, primæ scilicet & secundæ, sunt æquè multiplices, cum quantitati priori, suæ multiplicis reliqua, ex hypothesi, posteriori uerò alia quędam quantitas, ex structura, æqualis sit, si reliqua multiplicis suæ prioris ablatæ, sumpta deinde quantitas posterioris multiplicis ablatæ accesserint: & hæ compositæ earundem quantitatũ æquè multiplices erunt. Sed quia etiam una compositarum, quæ est prior multiplex, ipsius prioris, quemadmodum posterior posterioris, est multiplex, cum duę quantitates uni sint æquè multiplices: illas ex communi quadam noticia inter se æquales esse, concluditur. Communi igitur portione, quæ est ablata multiplicis posterioris quantitas, ab illis seiuncta, & quæ relinquuntur, ex communi quadam noticia: atq; deinde, cum una reliqua posteriorẽ quantitatem ęqualem habeat, & illa



eadem

eadem posterior quantitas & reliqua ipsius, & id ex communi quadam noticia, inter se æquales erũt. Sicut igitur prioris multiplicis reliqua quãtitas ipsi priori quan



titati, ex hypothesi, æqualis est: ita & posterioris reliquam ipsi posteriori quantitati æqualem esse necessariò sequitur. ὁμοίως δὴ δείξομεν, Similiter ostẽdemus, si prioris multiplicis reliqua suæ quantitatis multiplex sit, quòd & posterior ad suam tam multiplex esse debeat. Si duę igitur quantitates duarum quantitatum æquè fuerint multiplices, & ablatæ quædam earũdem æquè fuerint multiplices: reliquæ eisdem aut æquales sunt, aut æquè ipsarum multiplices. quod demonstrasse oportuit.

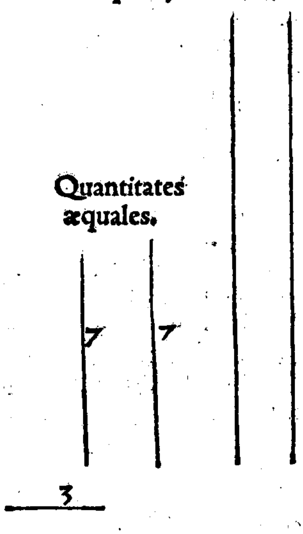
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

Τὰ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· Καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.

PROPOSITIO VII.

Æqualia ad idem, eandem habent rationem. Et idem, ad æqualia.

Sint duæ quantitates æquales, ad aliam tertiã, quantamcunq;, relatæ: dico, neutram æqualium diuersam ab alia cum tertia illa constituere rationem. Colligit hæc propositio suam demonstrationem ex definitione 5 huius, in hunc modũ. Sumantur æqualium quantitatum æquè multiplices, & erunt hæ, ex communi quadam noticia, inter se æquales. Sumatur & ipsius quantitatis tertię aliqua utcunq; multiplex, & ordinentur quantitates, ut scilicet æqualium una, prima: alia, tertia: alia deinde, ubi plures essent, quinta: ac cæteræ deinceps prout naturalis imparium numerorum ordo requirit, uocentur. Illa tertia uerò, ut quæ æqualium omnium est communis consequens, à paribus numeris, secundæ, quartæ & sextæ, &cæ. nomen habeat. Et quoniam, quantum ad priorem partem, primæ & tertiæ, ac cæterarum, quarum impar est appellatio, quantitatum, æquè assignatæ multiplices, secundæ & quartæ, ac reliquarum deinde, ut quæ à pari numero nominantur, quantitatum æquè multiplices ęqualiter excedunt, uel eis omnino æquales, uel minores ijs sunt: infertur, ex definitione 5 huius, ipsas quantitates, primam nimirum ad secundã, & tertiam ad quartam, ac reliquas deinde omnes, quamlibet ad suam, in eadem esse ratione: quare sic patet pars prior. Posterior uerò. Manentibus ijsdem quantitatibus, alio tamen ordine dispositis, ita nimirum, ut quæ in priori secundæ & quartæ quantitatis nomen habuit, iam primæ & tertiæ appellationem sortiatur. Prima uerò quæ prius, secunda nunc: & secunda deinde, quarta iam uocetur. Sicq; per eandem definitionem quintam: & posterior huius propositionis pars obtinebitur, primam scilicet, hoc est illam, quæ iam est communis æqualium omnium antecedens, ad secun-



dam, unam ex æqualibus, eſſe, ut eadem prima ad æquales omnes. Aequales igitur ad eandem, eandem habent rationem, &c. quod demonſtrari oportuit.

Multiplices						Multiplices				
30	12	6								6
30	12	6	ad 5	15	30	uel contrà	5	ad		6
30	12	6								6
		quanti. æquales.								quanti. æquales.

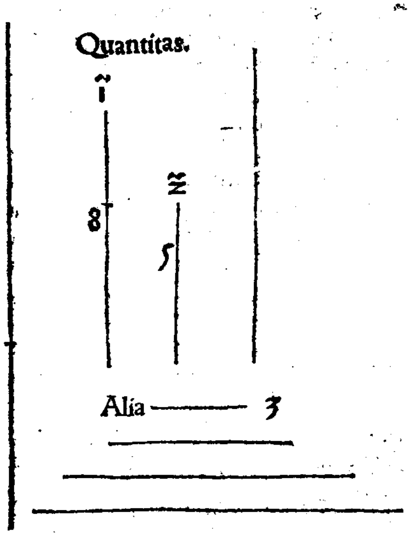
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

Τῶν ἀνίσων μεγεθῶν, τὸ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἔλαττον. Καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ μεῖζον.

PROPOSITIO VIII.

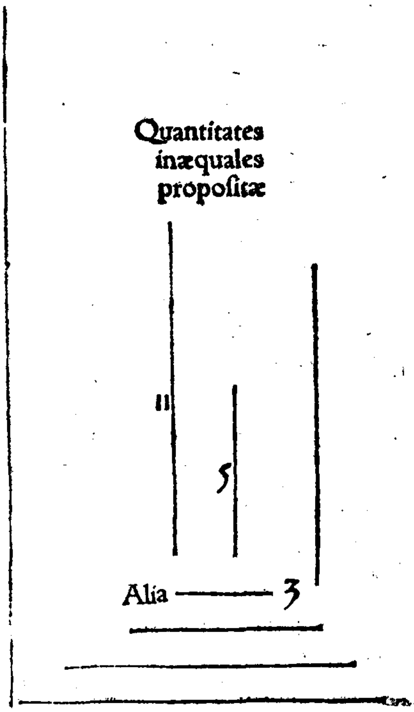
Inæqualium quantitatum, maior ad eandem, maiorem rationem habet, quàm minor. Et eadem ad minorem, maiorem habet rationem, quàm ad maiorem.

Sint quantitates quotcunq;, in præſentia autem, pro faciliori exemplo, duæ ſufficiant, & eſto quòd ex æquo ad unam & eandem quantitatem conferantur: dico igitur, quòd maior inæqualiũ: maiorem, minor uerò ad eandem: minorem, & contra, hæc eadem ad minorem inæqualium, maiorem, quàm ad maiorem, habeat rationem. Sumatur ex inæqualium maiori portio, quæ ſit minori æqualis: & erit altera quæ relinquitur portio, breuiori ſignatę aut æqualis, aut inæqualis. Si inæqualis, utra breuior fuerit, illius multiplex, quæ communi omnium conſequente maior ſit, accipiatur, quàm multiplex deinde hæc eadem ſumpta quantitas ſuæ inferioris fuerit, tam multiplex eſto etiam quantitas alia portionis in maiori maioris, alia inſuper ipſius minoris quantitatis. His multiplicib. tali ordine ſumptis, ipſius tandem omnium conſequentis dupla, tripla, atq; deinde quadrupla quantitas accipienda eſt, ac deinceps iuſta ſerie ad multiplices quãtitates alias tamdiu progrediendum, donec ipſa, quæ minoris quantitatis multiplice maior ſit, occurrat. Sit autem, pro operatione faciliori, conſequentis quadrupla, primò ipſa minoris quantitatis multiplice maior: quę igitur dictæ conſequentis tripla quantitas fuerit, hæc eadem minor is multiplice primò minor erit: quare contrà, minoris multiplex eadem conſequentis tripla quantitate maior. Et quoniam quantitatum, reliquæ ſcilicet in maiori, & minori in ea æquali poſitæ, æque ſunt aſſignatæ multiplices, cum quàm multiplex ſit una unius, tam multiplices etiam, ex



propoſitione prima huius, omnes omnium ſint: maioris quantitatis & breuioris in ea portionis æquè multiplices erunt. Sed cum ut breuioris portionis ita etiam, ex ſtructura minoris quantitatis multiplex ſumpta ſit: minoris & maioris quantitatum

tum æquè multiplices erunt, quod est obseruandũ. Rursus quoniam quantitatum, positæ scilicet in maiori minori æqualis, & ipsius minoris, æquè sunt, ex structura assignatæ multiplices: sequitur, ut quemadmodũ quantitates, ita & ipsarum æquè multiplices inter se æquales sint: atque insuper, sicut una, multiplex scilicet minoris, quàm consequentis tripla quantitas, ex structura, maior est, ita & altera, multiplex scilicet positæ in maiori quantitati minori æqualis, propter æqualitatem, eadem consequentis tripla maior erit. Maior autem est, similiter ex structura, breuioris in maiori quantitate portionis multiplex ipsa consequente: tota igitur totius maioris quãtitatis multiplex, simul utrisque, consequente scilicet & tripla eius, maior erit: quare etiam & eadem totius maioris multiplex, propter æqualitatem, consequentis quadrupla maior erit: unde sic ipsum etiam excedit. Sed quoniam multiplex minoris consequentis quadruplam non excedit, ut patet ex structura: maior igitur maiorem ad communem omnium consequentẽ, quàm ipsa minor quãtitas ad eandẽ, ex definitione 7 huius, ratione habebit. Atque hæc est prior huius propositionis pars. Porrò mox deinde, cõsequentibus loco antecedentiũ, & antecedentibus loco consequentiũ sumptis, per eandem allegatam 7 definitionem, consequentis ad minorem, rationem maiorem, quàm ad maiorem quantitatem habebit. Esto uerò nunc altera, quæ relinquitur, portio, breuiori signatæ æqualis, quia quantitates uel portiones in maiori æquales sunt, tum utriusuis portionis multiplex, quæ communi omnium consequente maior sit, quantitas sumenda est. nam structura deinde & demonstratione ipsa, ut in priori, instituta, res successum habebit. Si igitur inæqualium quantitatum ad unam & eandem collatio facta fuerit: maior maioris, quàm minoris quantitatis ad eam ratio erit. Contra uerò, eiusdẽ ad minorem maior, quàm ad maiorem quantitatem ratio. quod demonstrasse oportuit.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ.

Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. Καὶ πρὸς ἃ τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, κἀκεῖνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

PROPOSITIO IX.

Quæ ad idem eandem habent rationem: æqualia inter se sunt. Et ad quæ idem eandem rationem habet: & illa æqualia inter se sunt.

Habeant quotcunque quantitates ad unã eandemque eandem rationem. Aut contrà, esto quòd unius eiusdemque ad quotcunque sit una & eadem ratio: dico, utrum positum fuerit, illas quantitates inter se æquales esse. Hoc autem demonstratione ad incommodum ducente, ex propositione octaua præcedenti, sic patet. Nisi enim essent æquales quantitates illæ: sequeretur, per partem præcedentis priorem, illas ad unam & eandem: hæc deinde eadem, per partem eiusdem propositionis posteriorem, ad illas, diuersas constituere rationes. Hoc autem cum sit contra propositionis nostræ hypothesim, illas quantitates æquales esse inter se, tam ad priorem quam etiam ad posteriorē partem, ex hac prop. 8 obtinebitur. Quæ igitur ad eandem, eandem habent rationem quantitates, &cę. quod demonstrasse oportuit.

vel

7	7	7	Item	9	9	9	9	9
	ad					ad		
uel con.	5			uel contra		13		
	ad					ad		
7	7	7		9	9	9	9	9

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 1.

Τῶν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων, τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον· ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστι. Πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει· ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστι.

PROPOSITIO X.

Ad eandem rationem habentium, maiorem rationem habens: illa maior est. Ad quam autem eadem maiorem rationem habet: illa minor est.

Conferantur quotcunque quantitates ad unam eandemque: dico, quòd illa, quæ ex his maiorem ad communem earum consequentem habuerit rationem, maior sit: dico etiam, ad quam ipsa consequens quantitas maiorem rationem habuerit, eam contrà minorem esse. Nam si maiorem habens rationem, ad aliam non reputetur esse maior, erit illa alij aut æqualis, aut alia minor. Si æqualis, cum æqualium ad idem, ex priore parte propositionis septimæ huius, eadem sit ratio, harū uerò quantitatum, ex hypothesi, ratio diuersa, cōtra nostram illam hypothesim agetur, quod non permittitur. Esto autem nunc, quòd maiorem rationem habens ad aliam, minor sit, &c. Et quoniam, per priorem partem propositionis 8 huius, Inæqualium quantitatum maior ad eandem, maiorem rationem habet, quàm minor, erit id contra propositionis hypothesim. Constat itaque propositionis prior pars. Posterior eodem modo, ex posterioribus allegatarum propositionum partibus, retinebitur. Ad eandem igitur, &c. quod demonstrasse oportuit.

vel

Exemplum in numeris.

Antecedentes	7	6	4	9
Consequens	5	uel	9	
	una & eadem quantitas.			

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

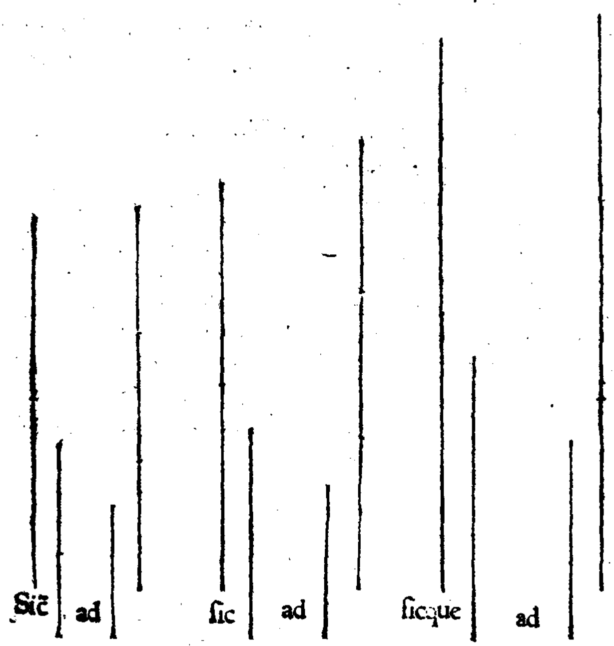
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ.

Οἱ τῷ αὐτῷ λόγοι οἱ αὐτοὶ· καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί.

PROPOSITIO XI.

Quæ eidem sunt eædem rationes: & inter se sunt eædem.

Quæ in primo libro, inter communes notitias, autor de quantitatibus in genere his uerbis, Quæ uni sunt æqualia, &c. proposuit, in eodem etiam libro idem, per propositionem 30, in lineis æquedistantibus, uerum esse demonstrauit, id quoque iam in ipsis rationibus similiter sese habere, proponit, & hoc quidem per definitionis quintæ huius conuersionem atque ipsam quintam, hac structura. Sint rationes, exempli gratia, duæ qualescunque, alij tertiæ cuidam similes & eædem: dico, eas & inter se similes easdemque esse. Sumantur antecedentium quantitatũ æquè multiplices, similiter & cõsequentium. Et quoniam utraque duarum rationum, quæ sunt ter-



tiæ similes, antecedens quantitas, est ad suam consequentẽ, ex hypothesi, ut antecedens tertiæ rationis ad suam cõsequentem, & rursus, quoniam tam antecedentium quàm etiam consequentium, ex structura, æquè sunt assignatæ multiplices: sequitur per conuersionem definitionis quintæ huius, bis repetitam (sunt enim duæ rationi uni similes positæ) multiplices antecedentium, hoc est primæ & tertiæ quantitatum, in addendo, minuendo, uel æqualitate, respectu suarum consequentium æqualiter sese habere. Quemadmodum igitur se habet multiplex antecedentis in tertia ratione, ad multiplicem suæ consequentis: ita etiam sese habebunt multiplices antecedentium reliquarum duarum rationum, ad suarum cònsequentium multiplices. Cum res igitur ita sese habeat: per hanc ipsam quintam definitionem huius concluditur propositum, illas scilicet duas rationes inter se similes esse & easdem. Quæ igitur eidem sunt eædem rationes, & inter se sunt eædem. quod demonstrasse oportuit.

Exemplum

Exemplum in numeris.

	6		12	18	24
Sint rationi	3 ad 2	eædem, rationes	6 ad 4	9 ad 6 &	12 ad 8
	4		8	12	16
	6		12	18	24
	8		16	24	32

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ.

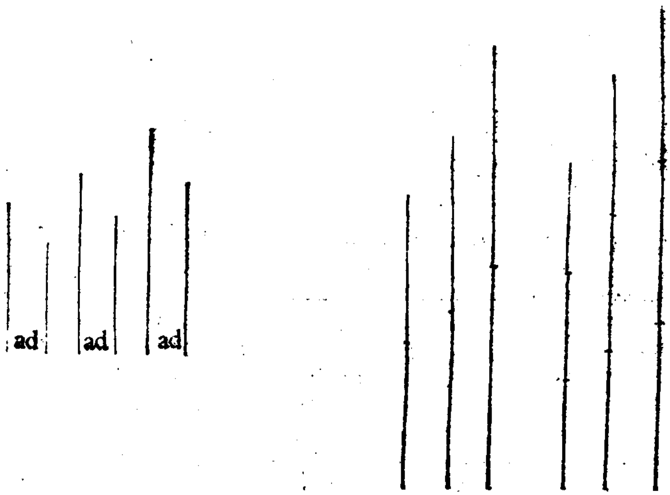
Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον· ἔσαι ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα.

PROPOSITIO XII.

Si fuerint quotcunq; quantitates proportionales: erit, ſicut una antecedentium ad unam conſequentium, ſic omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

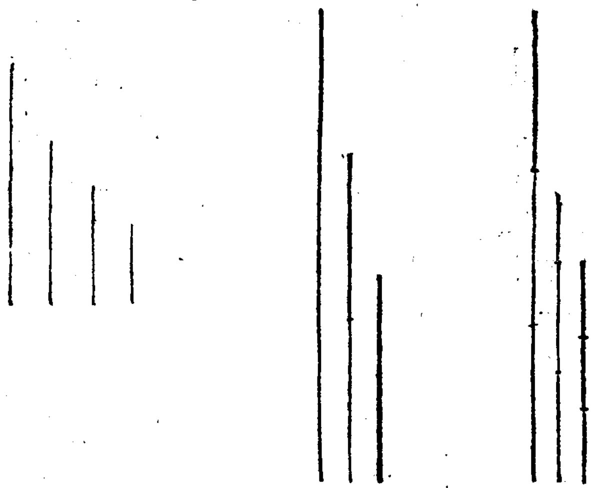
Simile autor propoſuit in propoſitione libri huius prima, de multiplicibus. Itaq;, quanto ipſa multiplice ratio eſt generalior, tanto etiam hæc præſens propoſitio, quàm ipſa pręcedens prima, latius ſeſe extēdit. Sint igitur quantitates quotcunq;, continuè uel non continuè proportionales: dico, quam rationem habet una antecedens ad ſuam conſequentem quantitatem, eandem & aggregatum antecedentium ad aggregatum ex conſequentibus habere. Sumptis enim æquè multiplicibus ad antecedentes, æquè item utcunq; multiplicibus ad conſequentes quantitates, cum ſit, ex hypotheſi, ut antecedens una ad ſuam conſequentem, ſic ſingulæ ad ſingulas: ſequitur ex conuerſione definitionis 5 huius, toties quoties opus fuerit eam repetendo, ut ſicut unius antecedentis multiplex à ſuæ conſequentis multiplice defecerit, uel ei æqualis ſit: ſiue uerò eandem exceſſerit, ſic & ſingulæ antecedentium ad conſequentium ſingulas multiplices ſeſe habere. Igitur ſi primæ quantitatis

Multiplices
antecedentium. conſequen.



titatis multiplex à ſuæ conſequentis multiplice defecerit, aut ei æqualis ſit, uel eandem exceſſerit: ſequitur, ut antecedentium multiplices ſingulæ, eodem modo ſuarum conſequentium multiplices reſpiciant. Quare, ſicut una ſuæ inferioris eſt multiplex, ita omnes omnium. Per primam igitur propoſitionem huius, bis repetitam, quàm multiplex eſt una unius, tam multiplex etiam aggregatum antecedentium, ad cõſequentium aggregatum erit. Ordinentur ergo iam quantitates, ſic, ut unius rationis antecedens ſit prima: ſua deinde conſequens, ſecunda: aggregatum uerò antecedentium, tertia, & conſequentium poſtea aggregatum, quantitas quarta. Et quia quantitatum, primæ & tertiæ, æquè ſunt aſſignatæ multiplices, ſecundæ inſuper & quartæ ſimiliter: infertur, ex definitione quinta, tandem id quod maximè uolebat propoſitio. Si fuerint igitur quotcunq; quantitates proportionales: erit ſicut una antecedentium ad unam conſequentium, ſic omnes antecedentes ad omnes conſequentes. quod demonſtraſſe oportuit.

Exemplum rationis ſeſquialteræ, continuæ, in quantitatibus quatuor



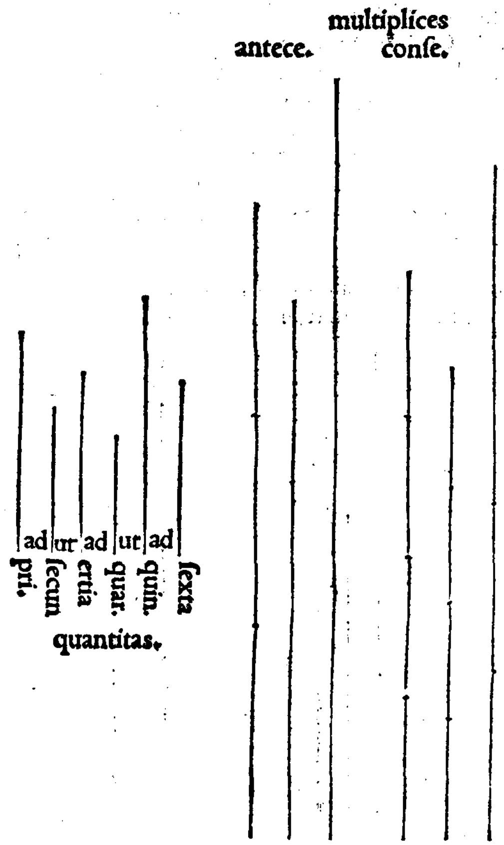
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχῃ ἢ πέμπτον πρὸς ἕκτον· καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἕξει ἢ πέμπτον πρὸς ἕκτον.

PROPOSITIO XIII.

Si prima ad ſecundam eam habuerit rationem quam tertia ad quantitatem quartam, tertia uerò ad quartam maiorem rationẽ habuerit quàm quinta ad ſextam: & prima ad ſecundam maiorem rationẽ habebit quàm quinta ad ſextam.

Sint ſex quantitates, & eſto quòd primæ ad ſecundam & tertiæ ad quartam ſit una & eadem ratio, quam uerò tertia ad quartã habet rationem, ea ſit ratione quintæ ad ſextam maior: dico igitur, quod & primæ ad ſecundam maior quàm quintæ ad ſextam ſit ratio. Quoniam enim tertię ad quartam maior eſt ratio, ex hypotheſi, quàm quintæ ad ſextam, ſumantur ipſarum tertiæ & quintæ æquè multiplices, quartæ deinde & ſextæ ſimiliter, ſic tamen, quòd multiplex tertiæ excedat multipli cem quartæ, non autem excedat multiplex quintæ ipsius sextæ quantitatis multiplicem. Sumantur etiã ipsarum primę & secundę secundum multiplicitatem tertię & quartæ æque multiplices. Et quoniam prima quantitas est ad secundam, sicut tertia ad quartam, primæ uerò & tertiæ, ut antedẽtibus, secundæ insuper & quartæ, ut consequentib. æque sunt ex structura, assignatæ multiplices: primæ igitur & tertiæ multiplices, ad multiplices secundæ & quartæ quantitatum, ex conuersione definitionis 5 huius, in minuendo, æqualitate, & addendo æqualiter sese habebunt. Cũ igitur, & id ex structura, multiplex tertiæ excedat multiplicem quartæ, multiplex uerò quintæ non excedit multiplicem sextæ quantitatis: propter similitudinem rationum, & primæ quantitatis multiplex, ad secundæ quantitatis multiplicem cõferendo, id faciet: maior igitur est ex definitiõe 7 huius, ad secundam, quàm quintæ quantitatis ad sextam ratio. Si prima igitur ad secũdam eam habuerit rationẽ quam tertia ad quantitatem quartam, tertia uerò ad quartam maiorem rationem habuerit quàm quinta ad sextam: & prima ad secundam maiorem rationem habebit quàm quinta ad sextam. quod demonstrasse oportuit.



Exemplum in numeris sic ponitur.

18		16		9		8		12		12	
				maior				minor ratio			
6	ad	4	ut	3	ad	2		4	ad	3	
pri.		secun.		ter.		quar.		quin.		sex.	numerus

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ.

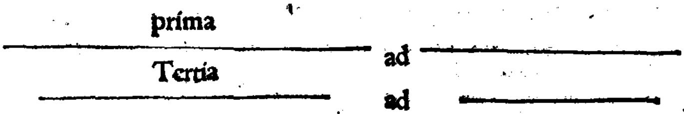
Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ· καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλασσον, ἔλασσον.

PROPOSITIO XIIII.

Si prima ad secundam eam habuerit rationem, quam tertia ad quartam, prima uerò ipsa tertia maior fuerit: & secunda quarta maior erit, quòd si æqualis: æqualis, si uerò minor: minor.

Sint

Sint quatuor quantitates, prima ad secundam ut tertia ad quartam: dico, quemadmodum prima maior est quàm tertia, uel ei æqualis, siue minor ea, ita & secunda erit respectu quantitatis quartę. Cum enim, ex hypothesi, prima maior sit quàm tertia: sequitur ex priore parte propositionis octauæ huius, quòd prima maiorem quàm tertia ad secundam quantitatem, habeat rationem. Quoniam autem, quem-



admodum prima est ad secundam, ita est & tertia, ex hypothesi, ad quartam: propter illam rationum similitudinem, & tertiæ ad quartam maior quàm eiusdem tertiæ ad secundam ratio erit. Ad quam autem una & eadem quantitas maiorem habet rationem, illa, ut posterior pars propositionis 10 huius testatur, minor esse censetur: minor igitur est quarta ipsa secunda, quare contrà secunda quàm quarta maior, quod demonstrasse oportuit. Ὁμοίως δὴ δείξομεν. Similiter etiam ostendemus, quòd secunda quartæ æqualis, uel ea minor sit, prout quidem prima respectu tertię posita fuerit. Si prima igitur ad secundam eam habuerit rationem quam tertia ad quartam, prima uerò ipsa tertia maior fuerit: & secunda quarta maior erit, quòd si æqualis, æqualis, si uerò minor: minor, quod demonstrasse oportuit.

Exemplum in numeris sic se habet.

	15	ad	9	ut	5	ad	3
Vel	27		18		12		8

Quantitas		ratio			ratio		quan.
prima 27	ad secun. 18	maior	mutatis nunc terminis uel quantitat.	12 ad 8	ma.	quare	minor
tertia 12		minor		12 ad 18	mi.		maior.

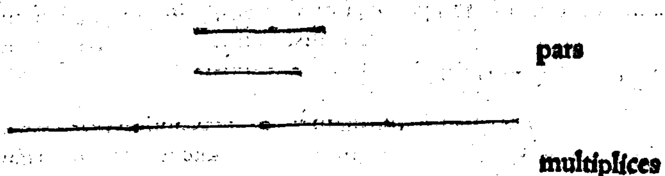
ΠΡΟΤΑΣΙΣ. ΙΕ.

Τὰ μόρια τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ληφθέντα κατάλληλα.

PROPOSITIO XV.

Partes eodem modo multiplicium, eandem habent rationem, ad se sumptæ.

Sint duæ uel plures quantitates, quarum unaquæque sit alterius cuiusdam quantitatis, tanquam suæ multiplicis, pars: esto tamen, ut quota pars est una unius, tota sint etiam singulæ singularum: dico ergo, quòd quam ipsæ partes, illam eandem & multiplices inter se rationem habeant. Distribuantur multiplicium una-



quæque in portiones suæ inferiori uel parti æquales. Et quoniam æquè sunt parti-

 bus,

bus, ex hypothesi, assignatæ multiplices: erunt in una tot portiones suæ parti æqua les, quot & in altera. Rursus quoniam portiones cuiusque multiplicis inter se sunt æquales: erit singularum portionum ad portiones singulas, una & eadem ratio, & illa quidem, quæ est partis ad partem. Quare, sicut est una unius multiplicis portio, uel æqualibus pro æqualibus sumptis, sicut est una pars ad portionem alterius, uel partem, sic, ex propositione 12 huius, aggregatum illorum, hoc est antecedentium, ad consequentium aggregatum. Quam igitur æquè multiplicium partes, illam eandem & ipsæ multiplices inter se habent rationem. quod demonstrari oportuit.

28 12 28

7 7 7 7   3 3 3 3   7 7 7 7   quare sicut 7 ad 3, sic 24 ad 12

7   3   3 3 3 3

12

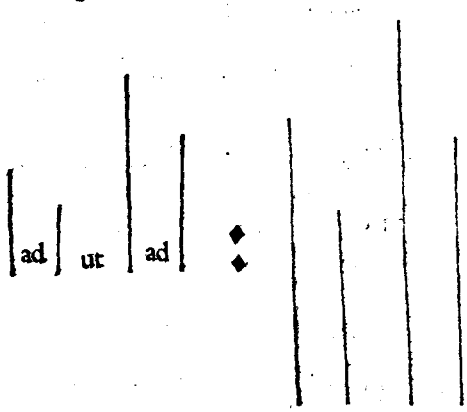
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ις.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσται.

PROPOSITIO XVI.

Si quatuor quantitates proportionales fuerint: & permutatim hæ proportionales erunt.

Sint quatuor quantitates in ratione una: dico, quòd & permutatim, uel permutata ratione, hoc est, prima ad tertiam & secunda ad quartam, in una ratione sint. Sumantur primæ & secundæ quantitatum æquè multiplices, atque insuper tertiæ & quartę: & erunt hæ, ex præmissa, bis usurpata, in ea qua sunt ipsæ partes ratione: atque deinde, ex propositione 11 huius simili ratione bis pro simili sumpta, in una etiam & eadem ratione, prima scilicet multiplex ad secundam, & tertia ad multiplicem quartam. Sed cum fuerint quatuor quantitates proportionales, prima ad secundam ut tertia ad quartam, prima uerò ipsa tertia maior, uel ei æqualis, uel minor ea sit, & secunda quartam, ex propositione 14 huius, sic respiciet. Quatuor igitur iam quantitatibus ordinatis, prima scilicet & quarta, ut prius, secunda uerò in tertium, ac tertia deinde in secundum locum positis, cum huius ordinationis primæ & tertiæ quantitatum æquè multiplices æqualiter se habeant, in addendo, minuendo uel æqualitate, ad secundæ & quartæ quantitatum æquè assignatas multiplices, ex definitione tandem huius quinta concluditur propositum: primæ scilicet ad tertiam eam esse, quę est secundæ ad quartam quantitatem ratio. Si igitur quatuor quantitates proportionales fuerint: & permutatim hæ proportionales erunt. quod demonstrasse oportuit.



Exemplum

Exemplum in numeris.

21		9		56		24		21		9
							pri.	7	ter.	3
7	ad	3	ut	28	ad	12	se.	28	quar.	12
								56		24

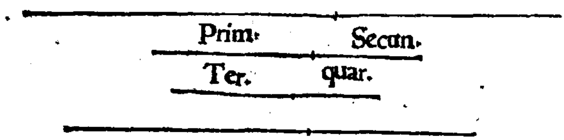
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ.

Ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

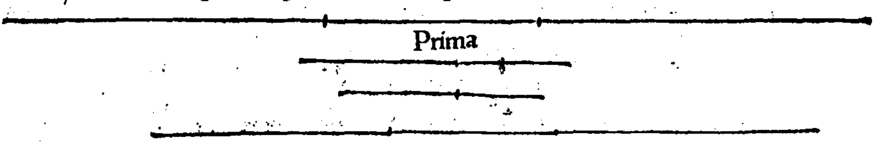
PROPOSITIO XVII.

Si compositæ quantitates proportionales fuerint: & diuisæ hæ proportionales erunt.

Sint quatuor quantitates, atque esto, quòd hæ, compositæ, hoc est prima cum secunda ad secundam, & tertia cum quarta ad quartam, in una & eadem ratione sint: dico igitur, & diuisim, uel diuisionis ratione, quod idem est, illas quantitates in una & eadem ratione esse. Colligitur huius rei demonstratio potissimum ex pro



positionibus prima & secunda huius. Sumptis enim quatuor quantitatum, primæ scilicet, secundæ, tertiæ & quartæ æquè multiplicibus: erit, ratione primæ & secundæ quantitatum, ut quàm multiplex est una unius, tam multiplices etiam sint, per propositionem primam huius, omnes omnium, atque deinde hoc idem, per eandem etiam propositionem, ratione quantitatum tertiæ & quartæ locum habet, ac tandem, cum ex hypothesi, æquè sint quatuor quantitatum assignatæ multiplices, commutatione facta primæ & secundæ, ut unius, tertiæ item & quartæ, & harum ut unius quantitatis æquè multiplices erunt, quod est notandum. Sumantur rursus secundæ & quartæ, utcunque aliæ æquè multiplices, cum prius etiam ipsarum secundæ & quartæ quantitatum æquè multiplices assignatæ sint, modò



sumptæ ipsis prioribus multiplicibus iunctæ, earundem secundæ & quartæ quantitatum, ex propositione 2 huius, æquè multiplices erunt. Quoniam autem quantitates, prima cum secunda, secunda, tertia cum quarta, & ipsa quarta, ex hypothesi proportionales sunt, primæ uerò & tertiæ, atque secundæ & quartæ quantitatum æquè multiplices assignatæ: primæ & tertiæ quantitatum multiplices, ipsas secundæ & quartæ quantitatum multiplices, ex conuersione definitionis quintæ huius in minuendo, æqualitate uel addendo æqualiter respiciunt. Quare si multiplex primæ, hoc est ex prima & secunda compositæ, à multiplice secundæ quantitatis defecerit, ei æqualis fuerit, uel hanc eandem excesserit: & multiplex tertiæ, quæ scilicet ex tertia & quarta composita est, ad multiplicem quartæ conferendo, sic se habebit; ac portionibus deinde illis, quas ex utraque parte communes habent, ablatis atque neglectis, cum de residuis multiplicibus, ex communi quadam noticia, quòd hæ etiam ad ſuas inferiores ſic ſeſe habeant, nullum dubium ſit: ex definitione tandem 5 huius, id quod maximè uolebamus concluditur, primę ſcilicet ad ſecundam eſſe, ut eſt tertiæ ad quartam quantitatem ratio. Si compoſitæ igitur quantitates proportionales fuerint: & diuiſę hę proportionales erũt, quod demonſtraſſe oportuit.

Exemplum in numeris.

	30		40
18	12	24	16
9	6	12	8
15		20	

	30			30	
18	40	12	12	6	18
9	20	6	16	8	24
	15			40	

30	30	40	40
12	12	16	16
18	18	24	24
9	6	12	8

Idem exemplum, aliis multiplicibus expoſitum.

45		60	
27	18	36	24
9	6	12	8
	12		16
15		20	

	45			30	
27	60	18	18	6	12
9	20	6	24	8	16
	15			40	

45	30	60	40
18	18	24	24
27	12	36	16
9	6	12	8

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ.

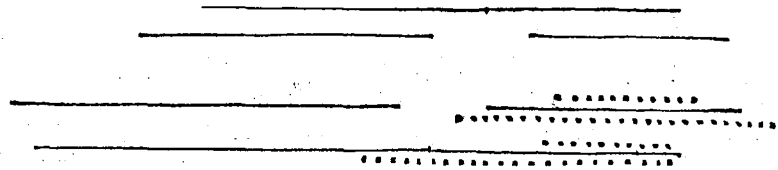
Ἐὰν διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ· καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

PROPOSITIO XVIII.

Si diuiſæ quantitates proportionales fuerint: & compoſitæ hæ proportionales erunt.

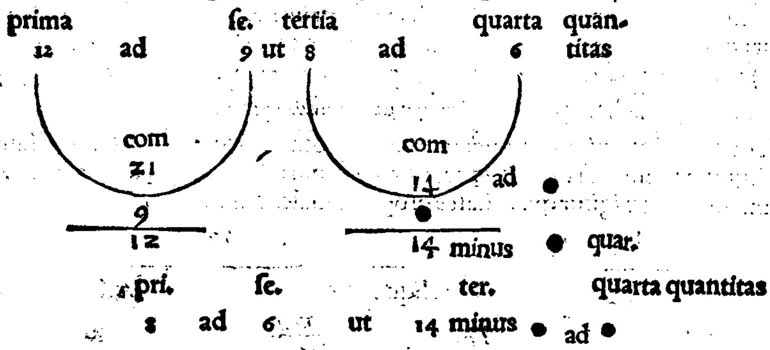
Sint

Sint quatuor quantitates disiunctæ proportionales, prima ad secundam, & tertia ad quartam: dico igitur, & compositionis ratione eas proportionales esse. Nam si non, sumatur loco quartæ quantitas alia, ad quam nimirum se habeat tertia cum quarta, sicut prima cum secunda ad secundam. Et quoniam hæc sumpta, quantitati quartæ minime æqualis esse potest (nam si æqualis esset, retineretur illa: atque statim pateret propositũ) erit aut minor illa, aut maior. Vtrum nunc horum ponitur, con-



trarium semper infertur, sumptam scilicet, maiorem esse ipsa quarta, ubi posita fuerit minor, uel contrà, eandem sumptam, ipsa quarta maiorem positam, hac eadem minorem esse, hoc modo. Quoniam enim composita ex prima & secũda ad secundam, in ea est ratione, ex structura, in qua est altera ex tertia & quarta composita quantitas, ad ipsam sumptam, cum sit σύνθεσις λόγου, ipsæ eædem, si separatæ à sese fuerint, per præmissam 17 proportionales erunt, prima scilicet ad secundam, ut tertia cum defectu uel excessu quantitatis sumptæ respectu quartæ, ad quantitatem sumptam. Sed quia sic etiam est ex hypothesi, tertia ad quantitatem quartam, cum quæ eidem sunt eædem rationes, per 11 huius, inter se etiam eædem sint: per primam tandem partem propositionis 14 huius quantitatem sumptam ipsa quarta maiorem esse infertur, cum tamen sit minor ea posita. Vel, per tertiam partem eiusdem 14, minor, cum sit posita maior. Quorum sanè utrunque cum nullo modo esse possit, quod nimirum una & eadem quantitas iam sit alia quadam minor, atque mox deinde etiam maior, uel contrà, concluditur uerum esse propositum. Si diuisæ igitur quantitates proportionales fuerint: & compositæ hæ proportionales erunt, quod demonstrasse oportuit.

Sint pro exemplo quatuor hæ quantitates.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ.

Ἐὰν ᾖ ὡς ὅλον πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθέν· καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἔσται, ὡς ὅλον πρὸς ὅλον.

PROPOSITIO XIX.

Si fuerit sicut totum ad totum, sic ablatum ad ablatum: & reliquum ad reliquum, ut totum ad totum erit.

Sint

Sint duæ quantitates, portio etiam aliqua ab utraq; quantitate ablata sic, ut ablatæ portiones eam inter se quam ipsæ totæ habeant rationem: dico, quòd & reliquæ eandem cum totis rationem habeant. Cum enim, ex hypothesi, tota sit ad quantitatem totam, ut portio ablata ad ablatam: ex permutata ratione, tota ad ablatam, ut

To. ______________________ ______________________

Ablata ______________ ______________

Reliqua ________ ________

tota ad ablatam erit. Quoniam autem est cõpositio rationis, quantitates uerò compositæ proportionales, cùm hæ, ex propositione 17 præcedenti, diuisæ etiam proportionales sint, hoc considerato: reliqua ad ablatam in ratione reliquæ ad ablatam erit: atq; reliqua deinde ad reliquam, ex permutata ratione, ut ablata ad ablatam erit. Quia uerò ut ablata ad quantitatem ablatam, ita etiam est, ex hypothesi, tota quantitas ad totam: reliqua igitur quantitas ad reliquam, ex propositione 11 huius ut tota ad totam erit. *Si fuerit igitur sicut totum ad totum sic ablatum ad ablatum: & reliquum ad reliquum, ut totum ad totum erit.* quod demonstrasse oportuit.

Exemplum huius in numeris.

Totum	15		totum	10	est ex hypothesi
ut ablatum	9	ad	abla.	6,	Igitur
& reliqua	6		reli.	4	ut

totum ad totum erit.

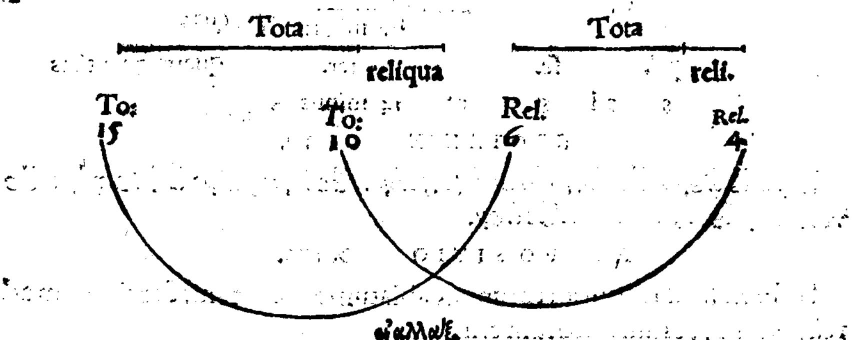
To.		to.		Ab.		ab.	Re.		ab.		Re.		ab.
15	ad	10	ut	9	ad	6	6	ad	9	ut	4	ad	6

ex permutata ratione

Ergo per 11 propositionem huius, cùm duæ rationes, totorum scilicet & reliquorum, uni, ablatorum nimirum, sint eædem: erunt illæ & inter se eædem. Reliquum igitur ad reliquum ut totum ad totum erit. quod demonstrasse oportuit.

Καὶ ἐπεὶ δὴ ἐδείχθη, ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν γδ, οὕτως τὸ εβ πρὸς τὸ ζδ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ αβ πρὸς τὸ βε, οὕτως τὸ γδ πρὸς τὴν ζδ· συγκείμενα ἄρα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν.

Et quoniam ostensum est, quemadmodum totum ad totum, ita etiam reliquum ad reliquum: conuersa uerò ratione, cum sit totum ad reliquum, ut totum ad reliquum: compositæ igitur quantitates proportionales erunt.



Ἐδείχθη δὲ, ὡς τὸ α β πρὸς τὸ α ε, οὕτως τὸ γ δ πρὸς τὸ γ ζ. εἰ γὰρ ὡς ἡγούμενον τὸ α β πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτοῦ ἧ ὑπερέχει τοῦ ἑπομένου τοῦ ε β· καί ἐστιν ἀναστρέψαντι.

Demonstratum est autem, nimirum ex propositionis huius hypothesi & permutata ratione, sicuti totum ad ablatum, sic totum ad ablatum, cum sit ut antecedens ad id quo ipsum excedit suum consequens, ad reliquum scilicet: & rationis conuersione quantitates proportionales erunt.

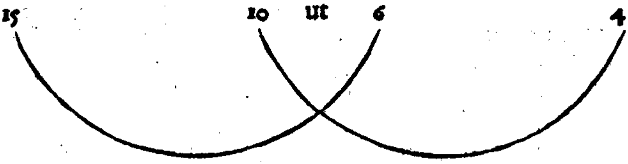
Tota Tota

ablata reliqua ablata reli.

Ex propositionis hypothesi

To. To. Abla. Abla.

15 10 ut 6 4



suum consequens ἐναλλάξ

6 4

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ· καὶ ἀναστρέψαντι ἀνάλογον ἔσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, Si compositæ quantitates proportionales fuerint: & conuersione rationis eas proportionales esse. quod demonstrasse oportuit.

Γεγόνασι δὲ οἱ λόγοι, καὶ ἐπὶ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων, καὶ ἐπὶ τῶν ἀναλογιῶν. Ἐπειδὴ γὰρ ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου· ἔσται, καὶ ὡς τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον, οὕτως τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον. οὐκ ἔτι δὲ, καὶ ἀντιστρέφει. Ἐὰν γὰρ ᾖ ὡς τὸ πρῶτον πρὸς δεύτερον, οὕτως τρίτον πρὸς τέταρτον, οὐ πάντως ἔσται, ὃ μὲν πρῶτον τοῦ δευτέρου ἰσάκις πολλαπλάσιον, τὸ δὲ τρίτον τοῦ τετάρτου, καθάπερ ἐπὶ τῶν ἡμιολίων ἢ ἐπιτρίτων λόγων ἢ τῶν τοιούτων, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Locum quoque habent rationes in æqualiter multiplicibus. Quando enim ut primum secundi, sic tertiũ quarti fuerit multiplex: erit etiam, ut primum ad secũdum, sic tertium ad quartum, non autem conuertendo. Si enim fuerit sicut primum ad secundum, sic tertium ad quartum: non omnino erit, neque primum secundi: neque uerò tertium quarti æquè multiplex, quemadmodum hoc in sequialteris, sesquitertijs, atque huius generis superparticularibus alijs manifestum est. quod demonstrasse oportuit.

Exemplum prioris partis, ubi quantitates sunt multiplices, atque sic etiam proportionales.

Vt	9	3	6	2
item	36	9	12	3
uel	16	4	8	2, &c.

Exemplum partis posterioris, ubi, licet quantitates sint proportionales, tamen non contra omnino æque multiplices.

Vt	6	4	3	2
	4	3	12	9
	5	3	15	9

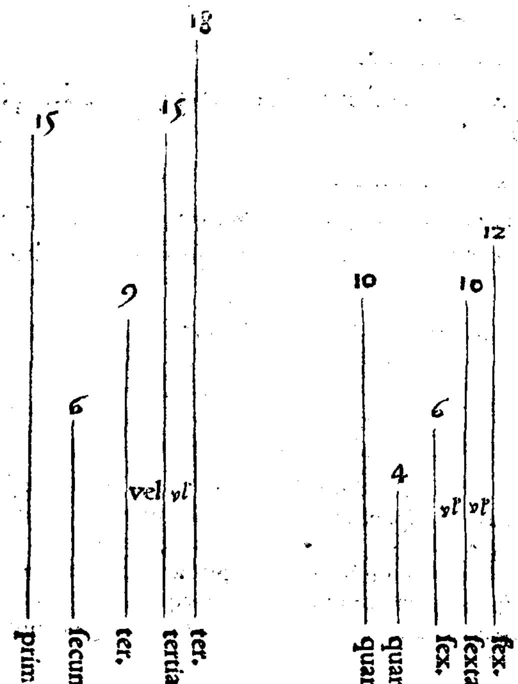
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ· καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται. κἂν ἴσον ἴσον· κἂν ἔλασσον ἔλασσον.

PROPOSITIO XX.

Si fuerint tres quantitates, & aliæ eisdem æquales multitudine, in eadem cum duabus sumptis ratione, ex æquali autẽ prima tertia maior fuerit: & quarta sexta maior erit, & si æqualis: æqualis si uerò minor: minor.

Sint tres quantitates, totidem insuper aliæ, quæ eas quas priores, eo etiam ordine, inter se habeant rationes: dico, si prima priorum maior fuerit ipsa sua tertia, uel ei æqualis, siue eâ minor: & primam posteriorũ ipsa sua tertia maiorem, ei æqualem, uel minorem ea esse. Quoniam enim prioris ordinis prima, ex hypothesi, maior ponitur, quàm ipsa tertia: erit illius ad mediã, ex priore parte propositionis octauæ, maior quàm huius ad eandem mediam ratio. Sed quia rationes in utroque ordine sunt inter se similes & eædem, prior scilicet priori, posterior uerò ratio posteriori: & posterioris ordinis prima ad mediam, maiorem quàm ipsa tertia rationem habebit: quare etiã, per priorem partem decimæ, prima posterioris, hoc est quarta, eadem sua tertia, hoc est sexta quãtitate maior erit. Eodem modo, si prima quàm tertia minor fuerit, per easdẽ propositionum partes propositum inferri poterit. Quod si prima & tertia prioris ordinis quantitates æquales inter se fuerint, cũ, per priorem partem septimæ, una & eadem sit harum ad mediam quantitatem ratio, propter rationum similitudinem, quæ in utroq; ordine esse præsupponitur: & in posteriori ordine prima ipsa tertiæ ex priori parte proportioni nonæ æqualis erit, quod demonstrasse oportuit.



APPENDIX.

APPENDIX.

Eadem ratio & in hac, & proximè sequenti propositione concludi potest, si quatuor aut plures etiam in uno ordine, totidem quoque similium rationum in altero quantitates positæ fuerint, si prima prioris maior sit sua ultima, ei æqualis uel minor ea: quòd & tum prima posterioris ordinis, respectu suæ ultimæ, similiter sese habeat.

Exemplum in numeris, ubi prima est

	maior ultí.		ultimæ æqualis		minor ultima	
Prima	9	6	9	6	9	12
	6	4	6	4	6	8
	15	10	15	10	15	20
ultima	3	2	9	6	12	16
quant.	prior	poster.	prior	post.	prior	posterior ordo

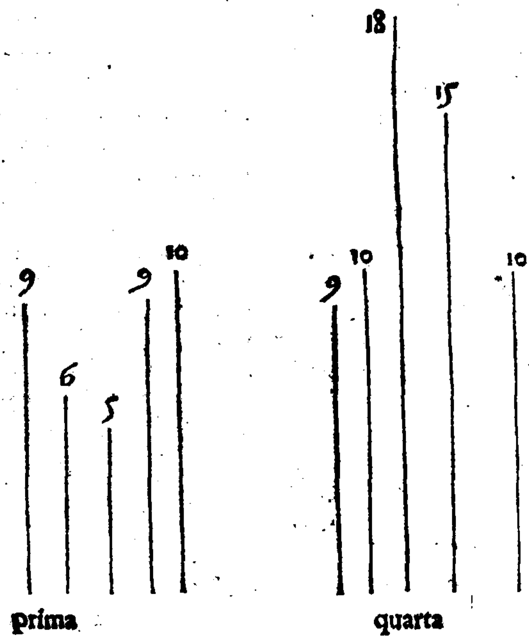
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑ.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ· καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσαι κἂν ἴσον· ἴσον, κἂν ἔλασσον· ἔλασσον.

PROPOSITIO XXI.

Si fuerint tres quantitates, & aliæ eisdem æquales multitudine, in eadem cum duabus sumptis ratione fuerit autem perturbata earum proportio, ex æquali autem prima ipsa tertia maior fuerit: & quarta sexta maior erit, & si æqualis: æqualis, si uerò minor: minor.

Sint tres quantitates, totidem insuper aliæ, quæ eas quas priores inter se habeāt rationes, sit tamen perturbata earum proportio: dico, si prima priorū maior fuerit ipsa sua tertia, uel ei æqualis, siue ea minor: & primam posteriorum ipsa sua tertia maiorem, ei æqualem, uel minorem ea esse. Quoniam enim prioris ordinis prima, ex hypothesi, maior ponitur quàm ipsa tertia: maiorem etiam ad secundā prima quàm ipsa tertia, ex priore parte propositionis 8 huius, habebit rationē. Quoniam autem quæ primæ ad secundā in priori, ea etiam est, ex hypothesi, ratio secundę ad tertiā in ordine posteriori: secūdæ igitur



 ad

ad tertiam in ordine posteriori: secūdæ igitur ad tertiam ordinis posterioris, maior quàm tertiæ ad secūdam in ordine priori ratio erit, unde sic maior etiā quàm in eodem posteriori secundę ad primam, eo quod eiusdē secundę ad primā, ex nostra hypothesi & conuersa ratione, sit ut in priori tertiæ ad secundam ratio. Quare ex posteriore parte propositionis decimę huius, concluditur propositū, primam scilicet in ordine posteriori ipsa sua tertia, hoc est, quartam sexta quantitate maiorem esse. Simili modo, æqualitatem: & quod etiam quantitas quarta quàm sexta minor sit, si prima tertiæ æqualis uel minor ea ponatur, inferemus. Si fuerint igitur tres quantitates, & alię eisdem æquales multitudine, in eadem cum duabus sumptis ratione. fuerit autem perturbata earum proportio, ex æquali autem prima ipsa tertia maior fuerit: & quarta sexta maior erit, & si æqualis: æqualis, si uerò minor: minor. quod demonstrasse oportuit.

Exemplum in numeris, ubi prima.

	tertia maior		tertię æqualis		minor tertia	
prima	9	24	9	16	6	16
	8	18	8	18	8	18
tertia	6	16	9	16	9	24

Aliud exemplum.

	9		16	24	12
	8			18	
9	6	12		16	

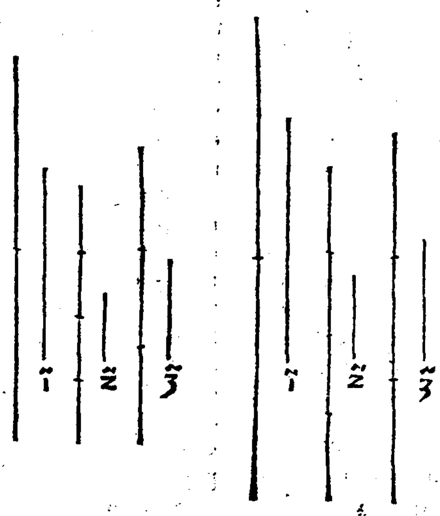
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒ.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

PROPOSITIO XXII.

Si fuerint tres quantitates, & aliæ eisdem æquales multitudine, in eadem cum duabus sumptis ratione: & ex æquali in eadem ratione erunt.

Sint tres quantitates, totidem insuper aliæ, quæ eas quas priores, eo etiam ordine, inter se habeant rationes: dico, quòd & ex æquali primæ ad tertiam prioris ea sit, quę primę ad tertiam ordinis posterioris, ratio. Sumptis enim primarum, hoc est, primæ prioris & primæ posterioris ordinis, quantitatum æquè multiplicibus, secundarum item ijsdem, seu utcunque alijs æquè multiplicibus positis, etiā tertiarū deinde quantitatum æquè assignentur multiplices. Et quoniā semper quatuor proportionalium, primę & tertię, secundæ item & quartæ, æquè reperiantur



quantitas.

reperiantur esse assignatę multiplices: erunt igitur ex propositione 4 huius, toties eam, quot in utroque ordine quantitates reperiuntur, minus tamen uno, repetendo; & ipsæ multiplices, eodem ordine sumptæ, inter se proportionales. Quoniam autem tres sunt quantitates, prioris scilicet ordinis multiplices, aliæ deinde ipsis ęquales numero, multiplices scilicet quantitatum ordinis posterioris, cum duabus sumptis, & in eadem ratione, cum sicut prima prioris sua ultima uel maior, ei æqualis, uel minor ea fuerit, sic & primã posterioris suam ultimã ex propositione 20 huius respicere oporteat: per 5 definitionem huius tandem concluditur propositum, primam scilicet prioris ordinis ad suam ultimam sese habere, ut se habeat prima posterioris ad suam ultimam. Si fuerint igitur tres quantitates, & aliæ eisdẽ æquales multitudine, in eadem cũ duabus sumptis ratione: & ex æquali in eadem ratione erunt. quod demonstrasse oportuit.

APPENDIX.

Hæc propositio cum proximè sequenti, quemadmodum præmissæ duæ, non de tribus tantum, uerumetiam de pluribus quantitatibus intelligi potest, si modò in uno tot, quot & in altero ordine, quantitates constituantur.

Exemplum in numeris sit.

27	9	27	81
26	13	39	78
35	7	21	105
32	8	24	96

27	32		81	96
9	8	ut	27	24

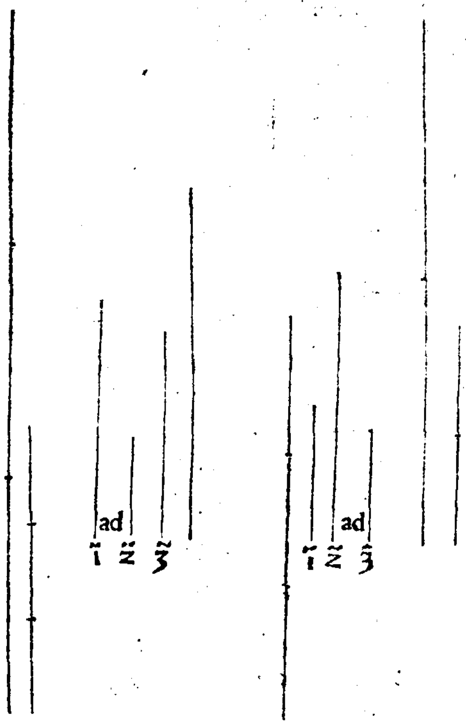
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία· καὶ δι᾽ ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

PROPOSITIO XXIII.

Si fuerint tres quantitates, & aliæ eisdem æquales multitudine, in eadem cum duabus sumptis ratione, fuerit autem perturbata earum proportio: & ex æquali in eadem ratione erunt.

Sint tres quantitates, atque totidem etiam aliæ, quæ eas quas priores, perturbato tamen ordine, inter se habent rationes: dico, quod & ex æquali primæ ad tertiam prioris, ea sit, quæ primæ ad tertiam ordinis posterioris, ratio. Sumptis enim primæ & secundæ in priori, & primæ in posteriori ordine quantitatis æquè multiplicibus, etiam reliquarum trium, tertiæ scilicet in priori, & secundę ac tertiæ in posteriori ordine æquę multiplices assignentur. Et quoniam, quæ ipsarum partium seu submultiplicium, illa eadem est, ex 15 huius, etiam multiplicium ratio, & quoniam etiam, quæ eidem sunt eædem rationes, ipsæ inter se sunt eædem, utraque propositione bis usurpata, semel quidem ratiõne multiplicium primæ & secundæ prioris, ac deinde etiam ratione multiplicium secundæ quantitatis & tertiæ ordinis posterioris: quam priores inter se habent rationem, illam eandem & posteriores multiplices habebunt. Simili modo, cum secunda prioris ad suam tertiam, ex hypothesi, sit, ut prima ad secundam in ordine posteriori ac deinde, ex permutata ratione hæ nominatæ quantitates proportionales ſint: & ſecunda prioris ad primam poſterioris ut tertia illius, ad ſecundam huius, & multiplices quantitatum, ſecundę ſcilicet prioris & primæ poſterioris ordinis, per eaſdem decimam quintam & undecimam propoſitiones huius eã, quam multiplices tertiæ prioris, & ſecundę quantitatis ordinis poſterioris, habebunt rationem: atq; ex permutata deinde ratione, multiplices ſecundę & tertię prioris, ut multiplices primæ & ſecundæ quãtitatum ordinis poſterioris erunt. Oſtenſum autem eſt prius, quòd & multiplices quantitatum prioris ordinis, primæ & ſecundæ, in eadem ſint ratione, in qua ſunt multiplices ſecundę & tertiæ quantitatum ordinis poſterioris. Quoniam aũt tres ſunt quantitates, atq; totidem etiã aliæ, in eadem cum duabus ſumptis ratione, eſtq; earum perturbata ratio: quemadmodũ igitur prima maior tertia, uel ei æqualis ſiue minor ea fuerit, ita ex propoſitione 21 huius, & quarta reſpectu ipſius ſextæ erit. Quare per definitionem 5, huius concluditur tandem, ut quam in priori ordine prima ad tertiam habet rationem, illam eandem in poſteriori ordine prima ad tertiam habeat. Si fuerint igitur tres quãtitates, & aliæ eiſdem æquales multitudine, in eadem cum duabus ſumptis ratione, fuerit autem perturbata earum proportio: & ex æquali in eadem ratione erunt. quod demonſtraſſe oportuit.



Exemplum in numeris ſit.

Ordo

prior			posterior		
	15	5	5	15	
	6	2	10	20	
	8	4	4	8	

15 6 ut 20 8   6 15 ut 8 20

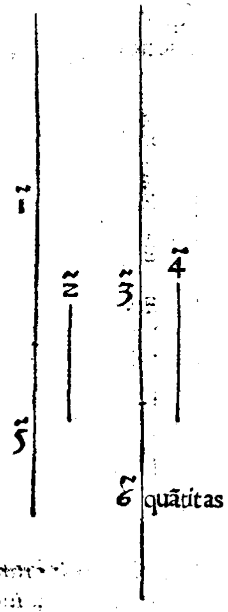
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΔ.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχῃ δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον· καὶ συντεθὲν, πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον.

PROPOSITIO XXIIII.

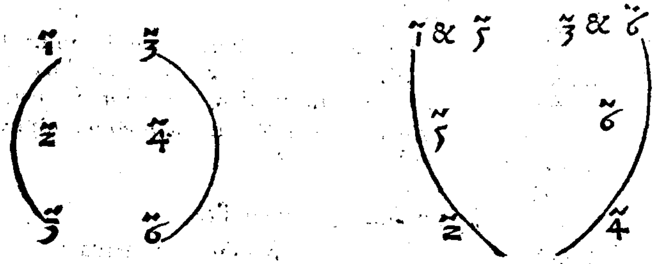
Si prima ad secundam eam habuerit rationem quam tertia ad quartam habuerit autem & quinta ad secundam eam rationem quam sexta ad quartam: & composita, prima & quinta, ad secundam eam habebit rationem, quam tertia & sexta ad quartam.

Sint sex quantitates, & esto quòd prima ad secundam sit ut tertia ad quartã, similiter quinta ad eandem secundam, ut sexta ad quartam: dico ergo, & compositam ex prima & quinta, ad secundam, eam quæ est compositæ ex tertia & sexta ad quartam, rationem habere. Quoniam enim prima ad secundam, ex hypothesi, est, ut tertia ad quartam, & rursus, quoniam quinta ad secũdam, similiter ex hypothesi, est ut sexta ad quartam, ex conuersa ratione uerò, secunda ad quintam ut quarta ad quantitatem sextam: & prima ad quintam, iuxta ordinatam proportionem, ex æquali, per propositionem 22 huius, ut tertia ad sextam erit. Est autem diuisio rationis, unde ex rationis compositione, ut testatur propositio 18 huius, hæ quantitates proportionales erunt: prima igitur & quinta ad quintam, sicut tertia & sexta ad quantitatem sextã. Quoniam aũt quinta ad secundam, ex hypothesi, est ut sexta ad quartã: quare rursus per eandẽ ordinatam rationem, cũ duo iam quantitatum ordines appareant, cuiusmodi scilicet hæc proportio requirit, infertur tandem propositũ, primam scilicet & quintam coniunctim ad secundam se habere, ut se habent tertia & sexta, & ipsæ coniunctæ ad quantitatem quartam. Si prima igitur ad secundam eam habuerit rationem quam tertia ad quartam, habuerit autem & quinta ad secundam, &c. quod demonstrasse oportuit.



Exemplum huius in numeris sic.

	prima		secunda		tertia		quarta
	7	ad	9	ut	21	ad	27
quinta	6			sexta	18		
	13				39		



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΕ.

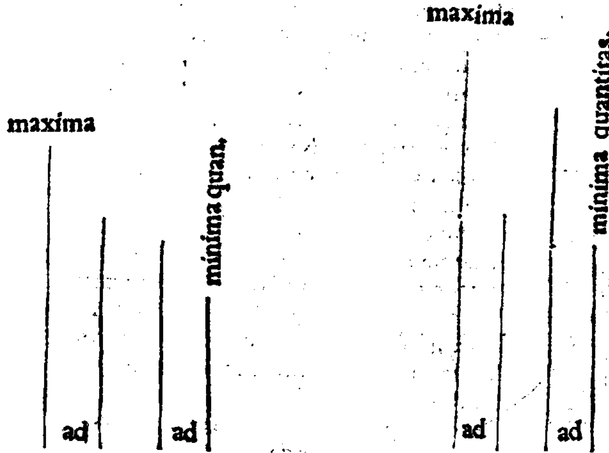
Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ· τὸ μέγιστον καὶ τὸ ἐλάχιστον, δύο τῶν λοιπῶν μείζονά ἐστι.

PROPOSITIO

PROPOSITIO XXV.

Si quatuor quantitates proportionales fuerint, maxima & minima duabus reliquis maiores sunt.

Sint quatuor eiusdem generis quantitates proportionales, qualitercunque, modò non sint in ratione æqualitatis, ut dicitur. nam hic nulla apparet quantitas maxima uel minima, quod nunc est contra propositionis hypothesim: dico, maximam cum minima reliquis duabus quãtitatibus maiorem esse. Ponantur in maioribus quantitatibus portiones, ex propositione 3 primi, suis minoribus æquales. Et quoniam quantitates maiores, aut ex hypothesi statim, aut permutata ratione etiam usurpa-



ta, primò illam, quam ipsæ minores, secundò deinde, ubi quidem loco minorum, portiones, quas ipsæ minores in maioribus signatæ æquales habent, sumptæ fuerint, quam ipsæ portiones inter se habent rationem, cum iam totum sit ad totum, sicut ablatum ad ablatum: & reliquum ad reliquum, ex propositione 19 huius, ut totum ad totum erit. Quia autem ex maioribus una, necessariò altera maior esse debet: & reliqua illius ex prima parte propositionis 14 sola, uel eadem ipsa parte, premissa tamen permutata ratione, huius reliqua maior erit. Et quia etiam utraque minor suæ ablatæ est æqualis, si æqualibus æqualia addãtur: & quæ proueniunt quantitates, utraque uidelicet minor cum alterius ablata, inter se æquales erunt. Quòd si ijsdem æqualibus inæqualia, reliqua scilicet, addita fuerint, utrunque suo, ac debito ordine: & producta iam, ex communi quadam noticia, inter se inæqualia erunt. Illud quidem maius, quod plus acceperit, alterum deinde minus. Cum igitur id quod maius est, ex maxima & minima, quod uerò minus, ex duabus quantitatibus reliquis compositum sit, propositio tandem constabit. Si quatuor igitur quantitates proportionales fuerint, maxima & minima duabus reliquis maiores sunt. quod demonstrasse oportuit.

Exemplum in numeris sit.

Maximus			Minimus numerus	
27	21	ut	9	7
9	7	portiones minoribus æquales, & ablatæ ex totis.		
18	14	Reliqui numeri.		

Reliqua

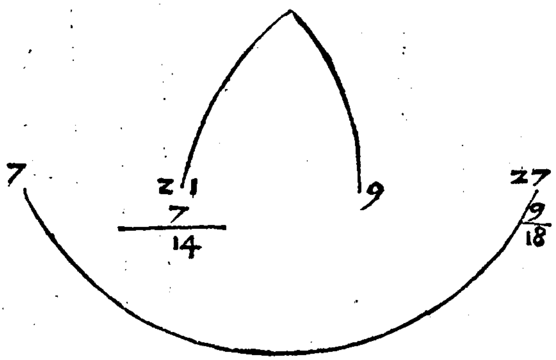
Reliqua			Tota	
18	14	ut	27	21

Minor 9
ablata alte. 7
16
14
30 minus, quia minus accepit

Minor 7
ablata alterius 9
16
18
34 productum maius: quia maius acce.

Sequitur hoc idem exemplum, numeris tamen aliter positis.

30
minor.



maior 34 numerus

27	21,	ut 18	14

Minores
7
9
16
14
30

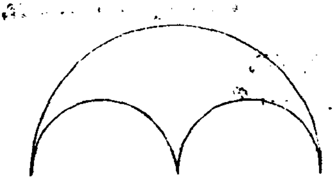
Ablatæ por.
7
9
16
18
34 &c.

FINIS LIBRI QVINTI.

ΣΧΟΛΙΟΝ ΕΙΣ ΤΟ ς,

ΑΔΗΛΟΥ.

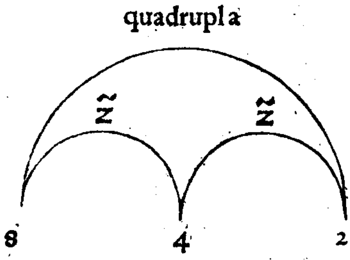
Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν πηλικότητες τινῶν λόγων πολλαπλασιαζόμεναι ποιῶσι λόγον. Ἐκεῖνος ὁ λόγος συγκεῖσθαι ἐκ τῶν λόγων ἐκείνων λέγεται, ὧν αἱ πηλικότητες ποιοῦσιν αὐτόν. Πηλικότητας δὲ λέγει, ἀφ' ὧν ὀνομάζονται· ὡς ἀπὸ τοῦ δύο ὁ διπλάσιος. Ἔστω λόγος τοῦ κ πρὸς τὸν δ διπλασίων, καὶ αὐτοῦ δ πρὸς τὸν β διπλασίων, καὶ αὐτὸς ὁ τετραπλάσιος ὢν λόγος τοῦ κ πρὸς τὸν β συγκεῖσθαι λέγεται ἐκ τῶν δύο λόγων, τοῦ τε κ πρὸς τὸν δ, καὶ τοῦ δ πρὸς τὸν β, ὅτι αἱ πηλικότητες αὐτῶν ποιοῦσιν αὐτὸν οὕτως.



Ἐπεί, ὡς εἴρηται, πηλικότητες οἱ ἀριθμοὶ λέγονται, ἀφ' ὧν αἱ σχέσεις ὀνομάζονται· οἷον ἀπὸ τοῦ δύο καὶ τρία καὶ τέσσαρα, ὁ διπλάσιος, καὶ τριπλάσιος, καὶ τετραπλάσιος λόγος. ὀνομάζεται δὲ καὶ τὸ ἥμισυ ἀπὸ τοῦ ἑνός. ἔστι δὲ ὁ δύο τοῦ τέσσαρα ἥμισυς. λαμβάνω τὸ ἥμισυ τῆς μονάδος, ἀφ' ἧς ὁ δύο τῶν τεσσάρων ἥμισυς λέγεται, ὧν λεπτῶν πρῶτον λ λαμβάνω, καὶ ἕτερον ἥμισυ μονάδος, ἀφ' ἧς πάλιν ὁ δ ἥμισυς λέγεται τοῦ κ, καὶ πολλαπλασιάζω τὰ λ πρῶτα λεπτὰ ἐπὶ τὰ λ πρῶτα, καὶ αὐτὰ λεπτά, καὶ γίνονται δεύτερα λεπτά, ἐννακόσια. ταῦτα ἀναβιβάζω ἤτοι μοιράζω, γίνονται δέκα καὶ πέντε πρῶτα λεπτά, ἅ τινα δεκαπέντε πρῶτα λεπτὰ τέταρτόν εἰσι μονάδος. τετράκις γὰρ ιε ξ. Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὁ μέσος τοῦ β, καὶ κ, ὁ μ. καὶ ἐπεὶ τὰ δύο τοῦ μ, εἰκοστόν ἐστιν, λαμβάνω τὸ εἰκοστὸν τῆς μονάδος ὅ ἐστι λεπτῶν τριῶν. Ἐπεὶ πάλιν ὁ μ, πενταπλάσιός ἐστι τοῦ κ μόριος τοῦ μ ὁ κ λέγεται, πολλαπλασιάζω τὰ τρία τὸ εἰκοστὸν τοῦ ξ, ἐπὶ τὰ τοῦ ε, ἀφ' οὗ πέμπτον μόριος ὁ κ τοῦ μ λέγεται, καὶ γίνονται ιε λεπτά, ἅπερ ἐστὶ τέταρτον μονάδος. καὶ οὕτως πάλιν ὁ β τοῦ κ, τέταρτός ἐστι. Ἔστω πάλιν μεταξὺ τῶν δ καὶ ιβ, ὁ κ. ἐπεὶ ὁ δ ἥμισύς ἐστι τοῦ κ, ὁ δὲ κ ὑφημιόλιος τοῦ ιβ. λαμβάνω τὰ λεπτὰ λ τὸ ἥμισυ τῆς μονάδος, καὶ ποιῶ τὰ μ λεπτὰ τοῦ ὑφημιόλιον τῆς μονάδος, καὶ ποιῶ τὰ λ ἐπὶ τὰ μ, καὶ γίνονται χίλια διακόσια, δεύτερα λεπτά, ἀναβιβάζω ταῦτα, γίνονται πρῶτα λεπτὰ κ. τὰ κ τρίτον εἰσὶ μονάδος, καὶ ὁ δ ὢν τρίτον ἐστὶ τοῦ ιβ. Ἔστω μεταξὺ τοῦ β καὶ τοῦ ιβ ὁ δ. καὶ ἐπεὶ ὁ δύο τοῦ δ ἥμισύ ἐστιν, ὁ δὲ δ τοῦ ιβ ὑποτριπλάσιος, λαμβάνω τὰ λ λεπτά, τὸ τῆς μονάδος ἥμισυ· καὶ τὰ κ, τὸ τρίτον αὐτῆς. ἀπὸ γὰρ τοῦ τρία ὁ τριπλάσιος ὠνόμασται. καὶ ποιῶ τὰ λ ἐπὶ τὰ κ, γίνονται ἑξακόσια δεύτερα λεπτά. ταῦτα ἀναβιβάζω, καὶ γίνονται δέκα πρῶτα, τὰ δέκα, ἕκτον μονάδος, καὶ ὁ β ἕκτον τοῦ ιβ. Πάλιν ἔστω μεταξὺ τοῦ δ καὶ ε, ὁ κ. καὶ ἐπεὶ ὁ δ ὑποπενταπλάσιός ἐστι τοῦ κ, ὁ δὲ κ τετραπλάσιος τοῦ ε, λαμβάνω τὸ τῆς μονάδος πέμπτον, τὰ ιβ, καὶ τοῦ δ, ἐφ' οὗ ὁ ε τετραπλάσιον λέγεται τοῦ κ, καὶ ποιῶ τὸ τέταρτον ποιεῖ τὸ δωδέκατον, γίνονται μη ὑποεπιτέταρτος τῆς μονάδος. καὶ ὁ δ τοῦ ε, ὑποεπιτέταρτός ἐστιν. Ἔστω πάλιν μεταξὺ τοῦ β, καὶ δ ὁ γ. καὶ ἐπεὶ ὁ δ τοῦ γ ἐπίτριτός ἐστιν, ἐπεὶ ἔχει αὐτὸν καὶ τὸ τρίτον αὐτοῦ ὅ ἐστι μονάς. λαμβάνω τὴν μονάδα,

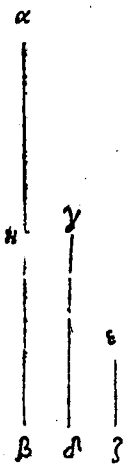
ἥ τις

Ratio ex rationibus cōponi dicitur, quādo rationum quantitates, hoc est denominationes, multiplicatæ, rationē cōstituunt. Ratio ex rationib. cōposita dicit, quā uidelicet rationum denominationes cōponunt. Quantitates uerò, hoc est denominationes rationū, dicunt, à quib. rationes denominātur, ut à duob. dicitur dupla. Sit ratio octonarij ad quaternarium dupla, atq; etiā ipsius quaternarij ad binariū dupla & ipsa: quadrupla igitur ratio, octonarij ad binarium, cōponi dicit ex duab. rationib. octonarij scilicet ad quaternariū, & quaternarij ad binariū. ambarū etenim rationū denominationib. cōposita hęc denominatio cōstituit. Quoniā ergo, ut dictū modò est, quātitates, seu denominatiões rationū numeri dicuntur, à quib. habitudines nominātur, describūtur ac referunt inter se, ueluti à binario ternario ac quaternario: dupla, tripla ac quadrupla ratio. Nominat

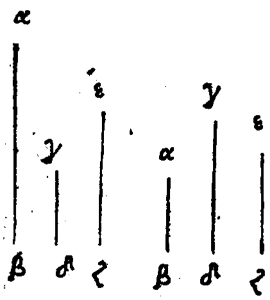


uerò & dimidiū ab uno, sunt aūt duo ipsius quaternarij dimidiū. Capio igitur dimidiū unius (integri scilicet, ut numeri 60 cū is cōmodissimè distribui in minutias possit) à q̄ duo ipsius quaternarij dimidium dicit, quarū acceptarū partiū, 30 accipio: & alterū dimidiū illius unius, à q̄ iterū quaternarius octonarij medietas dicitur. & multiplico 30 prima minu. ad, hoc est cū 30 min. & fiūt secūda min. 900, hęc in 60 scilicet traduco seu diuido, fiūt 15, prima min. q̄ sanè 15 prima mi. quarta pars sunt unius, seu integri. quater .n. 15, sexaginta scilicet cōtinent. Proinde esto binarij & octonarij medius 40. Et q̄niā 2 ipsius 40 uigincuplū sunt, accipio uigincuplum, unius seu integri, nēpe tria minu. At uerò rursus 40 quincuplū sunt octonarij: pars ipsius 40 octonari⁹ dicit, multiplico 3 uigincuplā partē ipsius 60, cū 5 denominante octonariū in 40, & fiunt 15 min. quarta pars integri, 60, s. q̄ denominatio q̄q; est inter 2 et 8, positos num. Esto rursus inter ipsos 4 & 12 octon. q̄niā 4. dimidiū sunt octonarij, 8 uerò ipsius duodenarij subsesquialter: accipio mi. 30, dimidiū integri, & facio 40 min. subsesquialterꝝ integri, & facio 30 ad 40, & fiunt 1200 secun. mi. quib. diuisis, fiunt prima mi, 20 & uiginti tertiū sunt integri: et quatuor igit tertium sunt duodenarij. Esto inter binariū & 12 quaternarius, & q̄niam binarius quaternarij dimidiū est, quaternar. v̄ò duodenarij subtriplus, accipio 30 min. unitatis seu integri dimidiū: 20 deinde, tertiū ipsius. à ternario enim tripla denominat, & facio 30 cū 20, fiunt 60 secun. min. quib. in integrꝝ diuisis, fiunt 10 prima, q̄ 10 sexta pars sunt integri: & 2 sexta pars est duodenarij. Rursus, sit inter 4 & 5 num. 20. & q̄niā quaternar. subq̄ncuplus est ipsius 20, numerus v̄ò 20 ad 5 quadruplus, accipio integri 5 partē, nimirꝝ 12, & quaterna. à q̄ quinarius quadruplus dicit ipsius 20, & facio quadruplū, ad 12, fiunt 48, subsesq̄quartū integri: & 4 ipsorꝝ 5 subsesq̄quartū est. Esto rursus inter 2 & 4 ternarius. Et quoniam 4 ad ternarium est sesquitertius, cū ipsum & tertium ipsius, quæ est unitas, habeat, accipio integrꝝ, ἥτις ἐστὶ λεπτὰ ξ. ἀφ᾽ ἧς, μονάδος τρίτης οὔσης τοῦ τρία, ὁ δ ἐπίτριτος αὐτοῦ λέγεται. λαμβάνω καὶ τὸ λ, τὸ γὰρ μονάδος ἥμισυ, διὰ τὸ τρία ἡμιόλιον εἶναι τοῦ β. ὀνομάζεται δὲ τὸ ἡμιόλιον ἀπὸ τοῦ ἡμίσεως. καὶ ποιῶ τὸ λ ἐπὶ τὴν μονάδα, ἤγουν ξ λεπτά, καὶ γίνονται χίλια ὀκτακόσια, δεύτερα λεπτά. ταῦτα ἀναβιβάζω, καὶ γίνεται λ πρῶτα λεπτά, ταῦτα ἥμισυ μονάδος. καὶ ὁ β τοῦ δ ἥμισύς ἐστιν.

Λόγος ἐκ δύο λόγων ἢ καὶ πλειόνων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες, πολυπλασιασθεῖσαι, ποιῶσί τινα πηλικότητα λόγου. ἐχέτω γὰρ τὸ α β, πρὸς τὸ γ δ λόγον δεδομένον, οἷον διπλάσιον ἢ τριπλάσιον, ἤ τινα ἄλλον. καὶ τὸ γ δ πρὸς τὸ ε ζ καὶ αὐτὸ δεδομένον. λέγω ὅτι ὁ τοῦ α β, πρὸς τὸ ε ζ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ α β πρὸς τὸ γ δ, καὶ τοῦ γ δ πρὸς τὸ ε ζ, ἤγουν ὅτι ἐὰν ἡ τοῦ α β, πρὸς τὸ γ δ λόγου πηλικότης πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὴν τοῦ γ δ πρὸς τὸ ε ζ λόγου πηλικότητα, ποιεῖ τὴν τοῦ α β πρὸς ε ζ. Ἔστω γὰρ πρότερον τὸ μὲν α β τοῦ γ δ μεῖζον, καὶ τὸ γ δ τοῦ ε ζ. Καὶ ἔστω τὸ μὲν α β τοῦ γ δ διπλάσιον, τὸ δὲ γ δ τοῦ ε ζ τριπλάσιον. Ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν γ δ τοῦ ε ζ τριπλάσιόν ἐστι, τοῦ δὲ γ δ διπλάσιον τὸ α β, τὸ ἄρα α β τοῦ ε ζ, ἐστὶ ἑξαπλάσιον. ἐπεὶ δὴ ἐὰν τὸ τριπλάσιον τινὸς διπλασιάσωμεν, γίνεται αὐτοῦ ἑξαπλάσιον. τοῦτο γάρ ἐστι κυρίως σύνθεσις. ἢ οὕτως, ἐπεὶ τὸ α β τοῦ γ δ ἐστὶ διπλάσιον, διῃρήσθω τὸ α β εἰς τὰ τῷ γ δ ἴσα, καὶ ἔστω ταῦτα, τὰ α η η β. καὶ ἐπεὶ τὸ γ δ τοῦ ε ζ ἐστὶ τριπλάσιον, ἴσον δὲ τὸ α η τῷ γ δ, καὶ τὸ α η ἄρα, τοῦ ε ζ ἐστὶ τριπλάσιον. ὅλον ἄρα τὸ α β τοῦ ε ζ ἐστὶ ἑξαπλάσιον. ὁ ἄρα τοῦ α β πρὸς τὸ ε ζ λόγος, συνῆπται διὰ τοῦ γ δ μέσου ὅρου, συγκείμενος ἔκ τε τοῦ α β πρὸς γ δ, καὶ τοῦ γ δ πρὸς ε ζ λόγου.

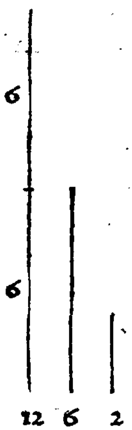


Ὁμοίως δὲ κἂν ἔλαττον ᾖ τὸ γ δ ἑκατέρου, τῶν α β ε ζ, συναχθήσεται. Ἔστω γὰρ πάλιν τὸ μὲν α β, τοῦ γ δ τριπλάσιον, τὸ δὲ γ δ ἥμισυ τοῦ ε ζ. Καὶ ἐπεὶ τὸ γ δ ἥμισυ ἐστὶ τοῦ ε ζ, τοῦ δὲ γ δ τριπλάσιον τὸ α β, τὸ α β ἄρα ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ ε ζ. ἐὰν γὰρ τὸ ἥμισυ τινὸς τριπλασιάσωμεν, ἕξει αὐτὸ ἅπαξ καὶ ἡμισάκις. Καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν α β τοῦ γ δ ἐστὶ τριπλάσιον, τὸ δὲ γ δ τοῦ ε ζ ἐστὶ ἥμισυ, οἵων ἐστὶ τὸ α β ἴσων τριῶν γ δ τριῶν, τοιούτων ἐστὶ τὸ ε ζ δύο, ὥστε τὸ ἡμιόλιόν ἐστι τὸ α β τοῦ ε ζ. ὁ ἄρα τοῦ α β πρὸς τὸ ε ζ λόγος, συνῆπται διὰ τοῦ γ δ μέσου ὅρου, συγκείμενος ἔκ τε τοῦ α β πρὸς γ δ, καὶ τοῦ γ δ πρὸς ε ζ λόγου. Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἔστω τὸ γ δ ἑκατέρου τῶν α β ε ζ μεῖζον. καὶ ἔστω τὸ μὲν α β τοῦ γ δ ἥμισυ μέρος, τὸ δὲ γ δ τοῦ ε ζ ἐπίτριτον. Ἐπεὶ οὖν, οἵων ἐστὶ τὸ α β δύο, τοιούτων ἐστὶ τὸ γ δ τεσσάρων. οἵων δὲ τὸ γ δ τεσσάρων, τοιούτων τὸ ε ζ καὶ γ δ πέντε. καὶ οἵων ἄρα τὸ α β δύο, τοιούτων ε ζ τριῶν. συνῆπται ἄρα πάλιν ὁ τοῦ α β πρὸς ε ζ λόγος, διὰ τοῦ γ δ μέσου ὅρου, ὁ τῶν δύο πρὸς τὰ τρία. Ὁμοίως δὴ καὶ ἐπὶ πλειόνων, καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν πτώσεων. καὶ δῆλον ὅτι ἐὰν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου λόγου εἷς ὁποιοσοῦν τῶν συντιθέντων ἀφαιρεθῇ, ἑνὸς τῶν ἁπλῶν ἀφανισθέντος, οἱ λοιποὶ τῶν συντιθέντων καταλειφθήσονται.

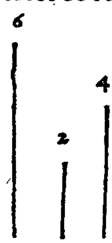


quod est 60 min. à q̃ integro tertiũ existente ternarij, quaternarius sesq̃tertium ipsius dicit̃. accipio & 30, integri dimidiũ, per quæ 3 ad 2 sesquialterꝫ erit. nominat̃ uerò sesquialterꝫ à dimidio, & facio 30 ad integrum, utpote 60 min. & fiunt 1800, secunda min. his diuisis, & fiunt 30 prima min. hæc dimidium sunt integri: quare & binarius ipsius quaternarij dimidiũ est.

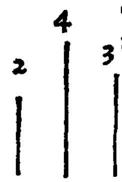
Ratio ex duab. siue ex plurib. rationib. cõponi dicitur, quando rationũ quãtitates, hoc est denominationes, multiplicatę, aliquã rationis quãtitatẽ cõstituunt. Habeat igit̃ primũ ad secundũ, rationẽ datã, ueluti duplã, aut triplã, siue aliquã aliã, habeat & secundũ ad tertiũ, rationẽ, & ipsam datã: dico ꝙ primi ad tertiũ ratio, ex primi ad secundũ, & secũdi ad tertiũ rationibus, cõposita sit. Aut, quando primi ad secundũ rationis quantitas cum secundi ad tertium rationis quãtitate multiplicata fuerit, quantitatẽ primi ad tertiũ cõstituit. Sit igit̃, et primò quidẽ, primũ maius secundo, secundũ



itẽ maius tertio, esto etiã, q̃d primũ quidẽ ad secundum duplã, secundũ ꝟò ad ipsum tertiũ triplã rationẽ habeat. Quoniã eñ secundũ triplũ est ipsius tertij, ipsius uerò secundi duplũ ipsum primũ: primũ igit̃ ipsi⁹ tertij sexcuplũ erit. qm̃. n. si triplũ alicui⁹ duplicauerimus, ipsius sexcuplũ ꝓducitur: hoc enim est ꝓpriè cõpositio. Aut sic, qm̃ primũ secundi duplũ est, subdiuidat̃ primũ in partes ipsi secundo æquales: uocẽtur aũt hæ prior & posterior. Et qm̃ secundũ ipsius tertij triplũ est, æqualis uerò est prior primi pars ipsi secundo: & hęc eadẽ pars, ut ipsum secundũ, tertij tripla erit. primũ igit̃ ipsius secundi est sexcuplũ. q̃ igitur primi ad tertiũ ratio (cõiuncta ꝑ secundũ, mediũ terminũ) ex primi ad secundũ & secundi ad tertiũ ratione, cõposita est. Similiter ꝟò & si minus fuerit secundũ utrisq; ipsorꝫ, primo scilicet & tertio, cõtrahẽtur illa. Esto eñ iterꝫ primũ quidẽ secundi triplum,



secundu ꝟò tertij dimidiũ. Et qm̃ secundũ est tertij dimidiũ, secundi ꝟò triplũ est ipsum primũ: primũ igit̃ ipsius secũdi sesq̃alterꝫ erit. qm̃. n. si dimidiũ alicuius triplicauerimus, habet̃ ipsum semel & dimidiũ. Et qm̃ primũ secũdi triplũ, secundũ ꝟò ipsius tertij dimidiũ est: qualiũ primũ est trium secundo æqualiũ, talium est & tertiũ duorꝫ, quaꝓpter sesquialterꝫ est primũ ipsius tertij. primi igit̃ ad tertiũ ratio (ut q̃ per secundũ, mediũ eius terminum cõiuncta est) ex primi ad secundum et secundi ad tertium ratione cõposita est. Sed rursus, sit secundũ utrisq; illorꝫ, primo & tertio, maius,



& sit quidẽ primũ secũdi dimidia pars, secundũ ꝟò tertij sesq̃tertiũ. Quoniã igit̃ quantũ est primi dimidiũ, tãta est secũdi quarta: quãta ꝟò est secundi q̃rta pars, tãta est primi cũ tertio una quinta: dimidia igit̃ primi, tertia deinde tertij, inter se æqualia erunt. Primi igitur ad tertium, nimirꝫ 2 ad 3, ratio, ꝑ secundum, mediũ eius terminum, cõiuncta est. Similiter etiã & in plurib. in reliq̃s etiã casib. Et manifestum est, ꝙ si à cõposita ratiõe una qualiscunq; cõpositarꝫ auferat̃, una simpliciũ sublata, reliq̃ ratiões cõpositarꝫ cõprehẽdant̃.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙ ΧΕΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

EVCLIDIS ELEMENTORVM GEOmetricorum liber sextus.

ΟΡΟΙ.

Ὁμοῖα σχήματα εὐθύγραμμά ἐστιν, ὅσα τάς τε γωνίας ἴσας ἔχει κατὰ μίαν, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς, ἀνάλογον.

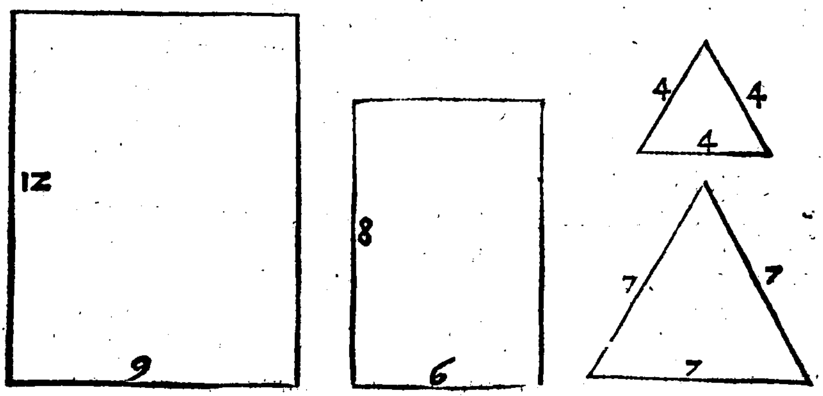
Ἀντιπεπονθότα δὲ σχήματά ἐστιν, ὅταν ἐν ἑκατέρῳ τῶν σχημάτων ἡγούμενοί τε καὶ ἑπόμενοι λόγοι ὦσιν.

DEFINITIONES.

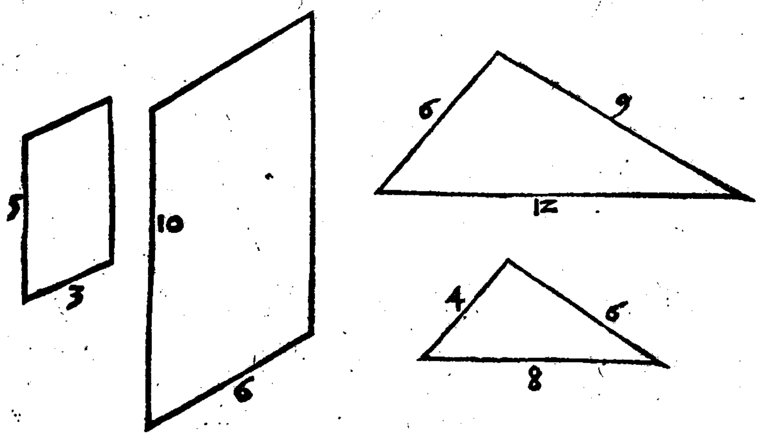
1 Similes figuræ rectilineæ sunt, quæ & angulos æquales habent ad unum, & quæ circa angulos æquales latera, proportionalia.

2 Reciprocæ autem figuræ sunt, quando in utraque figura antecedentes & consequentes termini rationales fuerint.

Exempla definitionis primæ.



Exempla definitionis secundæ.



Ἄκρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖα τετμῆσθαι λέγεται, ὅταν ᾖ ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα, οὕτως τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλασσον.

3 Secundum extremam & mediam rationem recta linea diuidi dicitur, quando fuerit, sicut tota ad maius segmentum, sic maius ad segmentum minus.

Tota 12		Tota 8	
$\sqrt{180} - 6$	$18 - \sqrt{180}$	$\sqrt{80} - 4$	$12 - \sqrt{80}$
maius segmentum	minus	maius	minus

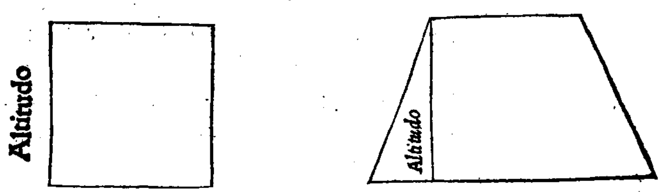
12 ad $\sqrt{180} - 6$ ut $\sqrt{180} - 6$ ad $18 - \sqrt{180}$

Similiter 8 $\sqrt{80} - 4$ $\sqrt{80} - 4$ 12 $\sqrt{80}$

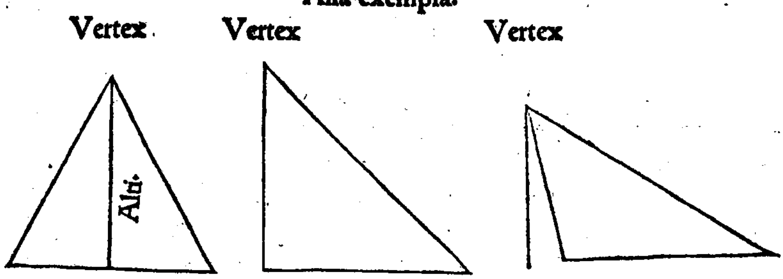
Ὕψος ἐστὶ παντὸς σχήματος, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀγομένη.

4 Altitudo uniuscuiusque figuræ est, à uertice ad basim ducta perpendicularis.

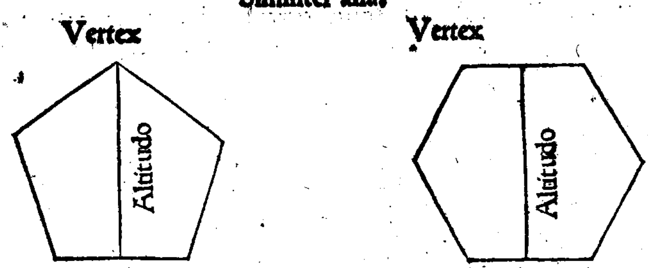
Sunt autem huius definitionis exempla hæc.



Alia exempla.



Similiter alia.



Λόγος

Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι, ποιῶσί τινα λόγον.

5 Ratio ex rationibus componi dicitur, quando rationum quantitates multiplicatæ inter se, aliquam effecerint rationem.

Vt rationẽ duplam, cuius quantitas est 2, componunt & constituunt rationum sesquialteræ & sesquitertiæ, quantitates, $1\frac{1}{2}$ & $1\frac{1}{3}$, multiplicatæ inter se, ut sequitur.

Componentes		Composita ratio		
$\frac{3}{1\frac{1}{2}}$	$\frac{4}{1\frac{1}{3}}$	12	uel	2
		6		1
Sesquialtera	Sesquitertia		Dupla	

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

ΠΡΩΤΗ. Α.

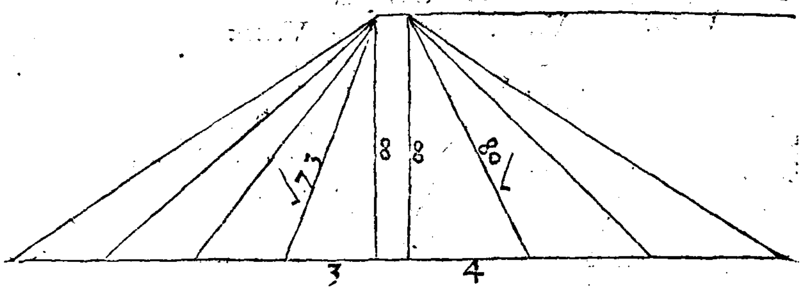
Τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, πρὸς ἄλληλα ἐστιν ὡς αἱ βάσεις.

PROPOSITIONES.

PRIMA. I.

Triangula & parallelogramma, quæ sub eodem sunt uertice: ad se sunt ut bases.

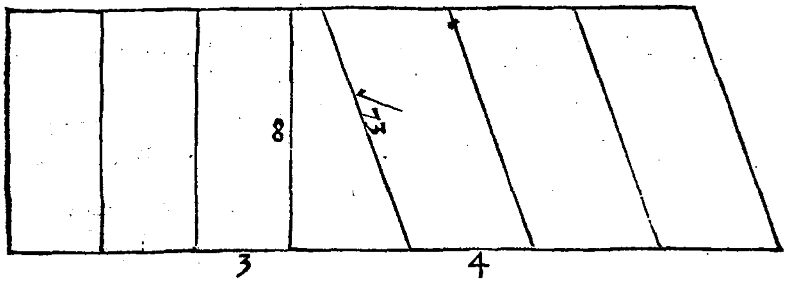
Describantur sub una altitudine aliquot triangula, uel parallelogramma: dico, utra descripta fuerint, illorum eam inter se esse rationem, quæ est basium. Prolongentur in utranq; partem ultra figuram bases, unicuiq; deinde basi in sua continuata portione, aliquot portiones (siue uni basi tot quot alij, siue pauciores) sibi sumantur æquales, atq; tandem, si quidẽ triangula proposita fuerint, extremitatibus por-



tionum singulis cũ uertice illius trianguli, cuius basi hæ portiones sunt æquales, rectis lineis iunctis: Vel, si parallegrãma fuerint, tot, quot portiones sunt, parallelogrammis, secundum portionum atq; descriptorum parallelogrammorum laterum quantitatem descriptis, figura demonstrationis perfecta erit. Quare nunc ad demonstrationem ipsam. Triangula siue parallelogrãma cũ, ex hypothesi, sint æquealta, utrinq; etiam æquales bases habeant: erunt tam hæc, ex 36, quàm illa, ex propositione 38 primi, inter se æqualia, Quàm multiplex igitur est utriusque basis basiũ aggregatum, tam multiplex etiam erit utriusq; trianguli uel parallelogrammi, id quod ex triãgulis uel parallelogrammis colligitur. Quod si forte iam basium aggregatum in una, ex structura, æquale fuerit basium aggregato in collatione al-

tera:

tera & ipsa tota triangula, ex 38, seu parallelogramma, ex propositione 36 primi, ex utraque parte inter se æqualia erunt. Quòd si uerò unum alterum excesserit, uel ab

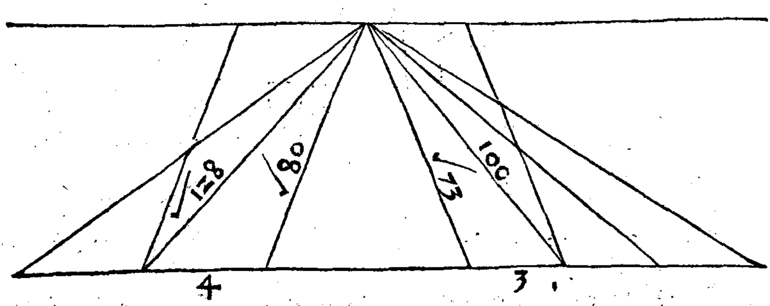


eo defecerit: & triangula seu parallelogrãma tum eodẽ modo sese habebunt. Quatuor igitur nunc quantitatib. toties quidẽ prout multa uel pauca triangula seu parallelogramma proposita fuerint, ordinatis, quarum prima & secũda sint bases triangulorum seu parallelogrammorum positorum, tertia uerò quantitas & quarta basibus his superposita triangula seu parallelogramma, cum iam primæ & tertiæ, secundæ item & quartæ æque sint assignatæ multiplices: infertur tandem, per definitionem 5 quinti, id quod uolebat propositio: Triangula scilicet & parallelogramma, si sub uno & eodẽ uertice fuerint, in suarum basium ratione esse. quod demonstrari op ortuit.

8	9	32	36	12	9	72	96
4	3	16	12	4	3	24	32
Triangulorum bases		Ipsa triangula		Parallelogrammorum bases		Ipsa parallelogramma.	

APPENDIX.

Potest hæc res de triangulis tantũ demonstrari, ut scilicet sit (cũ de uno dicatur) in demonstrando facilior progressus. Quo facto, cum parallelogrammum & triangulum, ubi eandẽ basim habuerint, atque etiã inter lineas æquedistantes fuerint, per propositionem 41 primi, illud ad hoc duplum sit, cumque etiam partes eodem modo multiplicium, per propositionem 15 quinti, eandem habeant rationem: & alterum, de parallelogrammis, tandem sic se habere infertur. quod admonuisse oportuit.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β.

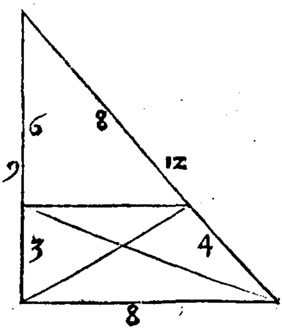
Ἐὰν τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα παράλληλος· ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς. Καὶ ἐὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν.

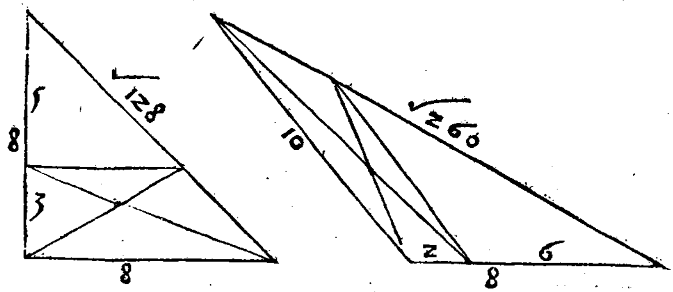
τμηθῶσιν· ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα παρὰ τὴν λοιπὴν ἔσται τοῦ τριγώνου πλευρὰν παράλληλος.

PROPOSITIO II.

Si ad unum trianguli latus ducta fuerit recta quædam linea parallela: proportionaliter hæc secat trianguli latera. Et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint: quę ad sectiones iungitur recta linea, ad reliquum tertium latus parallela erit.

Describatur triangulum, ducatur in eo etiam, ab uno latere ad reliquorũ utrumlibet, recta quædam linea, reliquo tertio trianguli lateri parallela: dico, quantum ad partem priorem, latera illa per ductam parallelam ἀναλογικῶς, hoc est proportionaliter, secta esse, sic scilicet, quemadmodum se habet superior unius secti lateris pars ad suam inferiorem, uel contrà, inferior ad superiorem, ita in altero superior uel inferior pars ad reliquam se habeat. Porrò si recta in triangulo ducta linea, duo eius latera proportionaliter secet: hæc ducta, quantum ad partem posteriorem, lateri tertio parallela erit. Quantum igitur ad partem priorem. Cum triangulum per ductam parallelam, ut apparet, in quadrilaterum & triangulũ diuisum sit, ductis in quadrilatero duabus diametris: erunt quæ sic fiunt triangula, propterea quòd unam & eandẽ lineam, ductam scilicet perpendicularẽ, pro basi habeant, in eisdem item parallelis sint, ex propositione 37 primi, inter se æqualia: eorum igitur, ad reliquum ultra quadrilaterum triangulum, per priorem partem propositionis 7 quinti, una & eadem ratio. Cumq; etiam horum duorum æqualium triangulorum utrunq;, cum tertio reliquo æquealtum sit, atq; sic, ex præmissa prima bis usurpata, eam, quã bases, inter se habeant rationẽ. cum quæ eidẽ sint eædem rationes, ex propositione 11 quinti, hæ inter se etiã eædem sint, hæc propositione bis usurpata, prior pars tandẽ manifestabitur. Sequitur posterior. Maneat eadem figuræ dispositio. Et quoniam latera, per ductam in triangulo lineam, ἀναλογικῶς ex hypothesi secta sunt, & quoniam etiam triangula, ad has portiones uel laterum





partes constituta, eam quam bases, inter se habent rationem: & triangulorum inter tertium latus & ductam in triangulo lineam comprehẽsorum, ad tertium reliquũ, per propositionem 11 quinti, una & eadem ratio erit: unde sic etiam, per priorem partem nonæ eiusdem quinti, eadem triangula inter se æqualia: atq; tandem, per propositionem 39 primi, inter lineas æquedistantes. Ducta ergo in triangulo hæc

recta

recta linea, tertio lateri æquedistans erit. In triangulo igitur si ad unum eius, &c. quod demonstrasse oportuit.

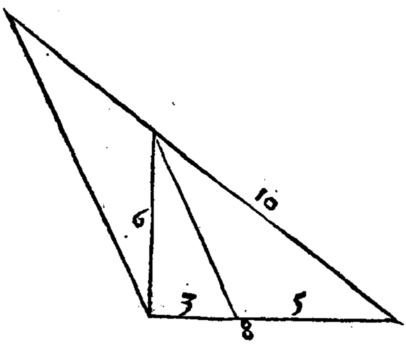
ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Γ.

Ἐὰν τριγώνου γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνῃ καὶ τὴν βάσιν· τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς. Καὶ ἐὰν τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς· ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα, δίχα τέμνει τὴν τοῦ τριγώνου γωνίαν.

PROPOSITIO III.

Si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta linea secet & ipsam basim: basis segmenta eandem habebunt rationem reliquis ipsius trianguli lateribus. Et si basis segmenta eandem habuerint rationem reliquis ipsius triãguli lateribus: à uertice ad sectionem ducta recta linea, bifariam secat ipsius trianguli angulum.

Describatur triangulum qualitercunque, ducatur etiam ab uno eius angulo ad latus suum subtendens recta linea, quæ, per propositionem 9 primi, ipsum angulum bifariam, latus uerò eius utcunque secet: dico, quantum ad partem priorem, secti lateris segmenta eam, quam duo reliqua latera, inter se habere rationem. Excitetur ex alterutra secti lateris extremitate linea per propositionẽ 31 primi, rectæ latus unum secanti, parallela, hæc deinde, latus insuper illud: quod ab altera secti lateris extremitate egreditur, usque dum concurrant, prolongentur. Et quoniam in has duas parallelas recta quædam linea, unum scilicet trianguli latus incidit: erit angulus, medietas scilicet una diuisi, per primam partem propositionis 29 primi, suo coalterno angulo æqualis, atque mox deinde & altera, per illam communem noticiã; Quæ uni sunt æqualia; &c. eidẽ coalterno æqualis erit. Sed quia hæc altera diuisi medietas, ut angulus externus, per secundam partem eiusdem 29, suo interno, qui scilicet sub παραλλήλως ducta, ac producti lateris portione exteriori continetur, est æqualis: & illi duo anguli, ad παραλλήλως ductã positi, per eandem



communem noticiam, inter se æquales erũt: triangulum igitur, per propositionem 6 primi, isosceles. Quòd si quis propositionis 2 huius sententiæ recordabitur, æquali pro æquali linea sumpta: quod prius sumptum erat, tandem inferri poterit. Posterius nunc, quod scilicet, si ab aliquo trianguli angulo recta linea ad suam subtẽsam demissa fuerit, sic ut huius subtensæ uel basis segmenta eam quam reliqua latera, inter se habeant rationem, angulus ille bifariam diuisus sit, hoc sic patet. Maneat eadem figuræ dispositio. Et quoniam duo reliqua latera, ex hypothesi, illud deinde quod ulterius protractum est latus, & exterior portio, per propositionem 2 huius, eam, quam ipsę diuisi lateris partes, inter se habent rationem, quia duę rationes uni sunt eædem: illæ ex 11 quinti, & inter se eædem erunt. Hæ duæ igitur lineæ, portio scilicet exterior, & alterum trianguli latus, per secundam partem propositionis nonæ quinti, inter se æquales erunt. sicque triangulum isosceles, cuius anguli ad basim, lineam scilicet παραλλήλως ductam, per priorem partem quintæ primi, inter se sunt

 æquales;

æquales. Quia uerò unus, ex prima parte propositionis 29 primi, uni: alter uerò, ex secunda parte eiusdem, alteri diuisi anguli parti est æqualis: ut ipsi isoscelis ad basim anguli, ex priore parte quintæ primi: sic propter æqualitatem iam, & diuisi anguli partes inter se æquales erunt, quare bifariam diuisus. Si igitur trianguli angulus bifariam secetur, &c. quod demonstrasse oportuit.

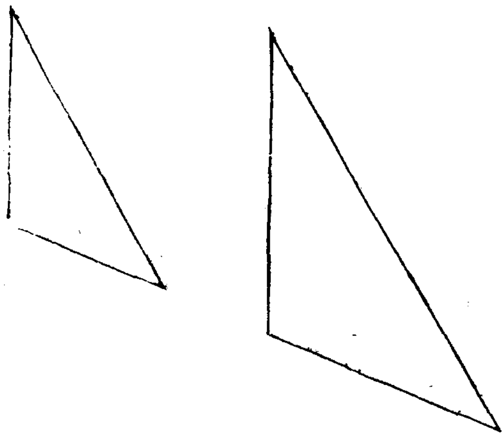
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ.

Τῶν ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὁμόλογοι, αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραί.

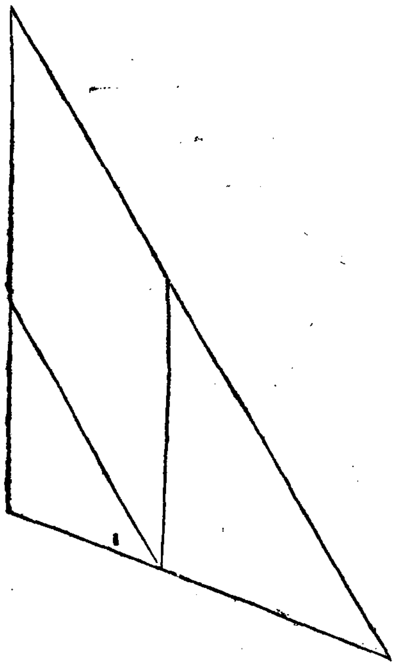
PROPOSITIO IIII.

Æquiangulorum triangulorum: proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos: & similis rationis latera, quæ subter æquales illos angulos subtenduntur.

Fiant duo triangula, qualia propositio hæc quarta requirit, hoc modo. describatur primò unum qualitercunque, ducta deinde recta linea ad eius unam extremitatem per propositionem 23 primi, unus angulus uni, ad alterã deinde, uersus illam, & eandẽ partem, alius alij trianguli angulo ęqualis constituatur, ac continuatis duab. illis rectis donec concurrant, triangulũ hoc, ei quod prius descriptũ est, æquiangulum erit. Dico ergo nunc, cum sint triangula ęquiãgula, quòd & illorũ quæ sunt circa æquales angulos, latera, proportionalia sint: eiusdemque & similis rationis latera, quæ sub æquali bus angulis subtenduntur. Solent huius propositionis conclusionem alij aliter interpretari. Sunt enim, qui prioris rationis terminos, antecedentẽ puta & consequentem, in uno, posterioris uerò, in altero triangulo accipiunt, in hæc uerba. In qua ratione sunt quælibet duo latera circa unum angulum in uno: in eadem sunt etiam duo, circa angulum sumpto æqualem, latera, in triangulo altero. Præterea sunt, qui antecedentes in uno, in altero uerò triangulo consequentes rationum terminos accipiunt, hoc modo. In qua ratione sunt quælibet duo latera, duos in duobus triangulis æquales inter se angulos subtendentia: in eadem sunt etiam singula reliqua ad sua singula. Cuius sanè conclusionis duplex interpretatio, cũ in scholis recepta sit, utriusque etiam demonstrationem adducendam duximus. Prioris igitur talis esto. Coniungentur triangula sic, ut unum unius & alterum latus trianguli alterius sit linea una: utque anguli etiam, ad hęc latera exteriores, ipsis medijs, uterque suo remotiori, sint æquales. Et quoniam in duas rectas, quę sunt extrema horum triangulorum latera, ex duobus lateribus composita recta linea incidit, cum qui sic describuntur anguli, ex structura & propositione 17 primi (æquali tamẽ pro æquali angulo sumpto) duobus rectis angulis minores sint: in eadem parte hæc duo latera, uel has duas rectas continuatas cõcurrere, ex quadam communi noticia, necesse est. Continuentur ergo ut cõcurrant. Et quoniã id quod sic describitur, ex prima parte propositionis



positionis 28 primi, bis usurpata, parallelogrammũ esse cõstat, parallelogrammi insuper latera opposita, ex propositione 34 primi, inter se ęqualia sunt: per propositionem 2 huius & permutatam rationem utroque bis usurpato, æquali subinde pro æquali linea sumpta, ex æqua ratione, quantum ad priorem conclusionis interpretationem, pro positioni satisfactum erit. Vel, per propositionem secundam huius, bis usurpatam, cum duæ rationes uni eædem sint, atq; illæ sic, ex propositione 11 quinti, inter se eædem: & posterior conclusionis interpretatio manifesta erit. Aequiangulorum igitur triangulorum, proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos: & similis rationis latera, quæ subter æquales illos angulos subtenduntur. quod demonstrasse oportuit.



APPENDIX.

Et licet utraq; cõclusionis interpretatio, ut diximus, in scholis recepta sit, tamen cum non conueniat ex unius propositionis hypothesibus duplicem conclusionis colligere interpretationem, quòd ex nostra sententia, prior posteriori interpretationi præferenda sit, lectorem scire uolumus. Habet tamen & posterior suam defensionem, cum sit, ut coniÿcere licet, ex propositione 14 huius petita.

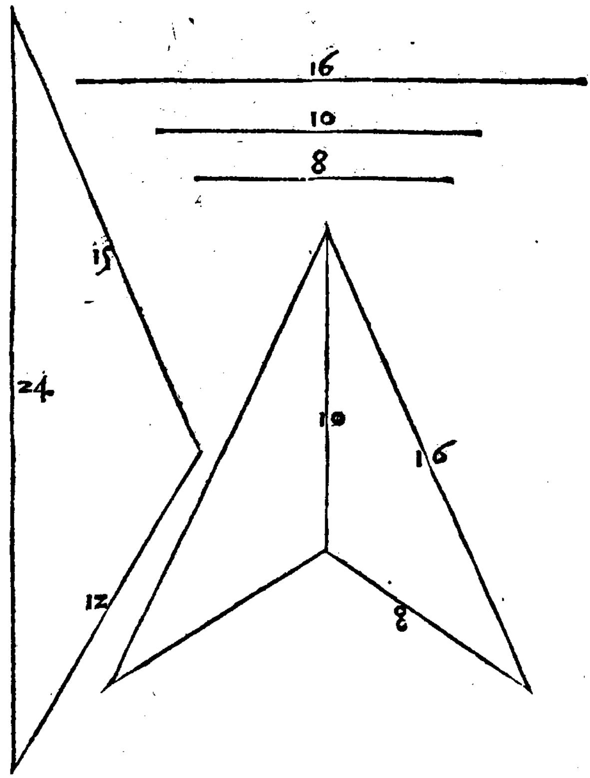
ΠΡΟΤΑΣΙΣ E.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ· ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα· καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ᾽ ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

PROPOSITIO V.

Si duo triangula latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triangula: & æquales habebunt angulos, sub quibus similis rationis latera subtenduntur.

Describatur primò triangulum qualitercunq;, ex tribus deinde rectis lineis aliÿs quæ eas inter se quas descripti trianguli latera, rationes habent, aliud triangulum, per propositionem 22 primi, constituatur. Erunt autem descripta duo triangula, qualia propositio hæc quinta requirit: quare dico; quòd ea etiam æquiangula sint, angulos item qui sub similis rationis lateribus subtendũtur, æquales habeant. Constituantur ad unum utriusuis trianguli latus, atq; ad eiusdem lateris extremitates, ex illa parte quæ est extra triangulũ, per propositionem 23 primi, duo anguli, ad utrãq; nimirum extremitatem unus, duobus in altero triangulo angulis æquales. Et quoniam per continuationem linearum, illo triangulo clauso; tertius angulus huius, tertio alterius triãguli angulo, ex corollario propositionis 32 primi, est æqualis: hæc duo triangula primò æquiangula, atq; inde, ex propositione 4 huius, late-



rum etiam proportionalium erunt. Duo igitur simul composita triangula, per propositionem 11 quinti, & nonam eiusdem, utroq; bis sumpto, æquilatera, per octauam deinde & 4 primi, uel octauam solũ, ter repetitam, etiam æquiangula erunt. Quare per communem illam notitiam, Quæ uni sunt æqualia, &c. quantum satis fuerit ea repetita, infertur tandem conclusio, triangula scilicet talia proposita, inter se etiam æquiangula esse: atq; insuper, quod anguli in utroq;, sub quibus similis rationis latera subtenduntur, æquales sint. Si duo igitur triangula latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triangula: & æquales habebũt angulos, sub quibus similis rationis latera subtenduntur. quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ς.

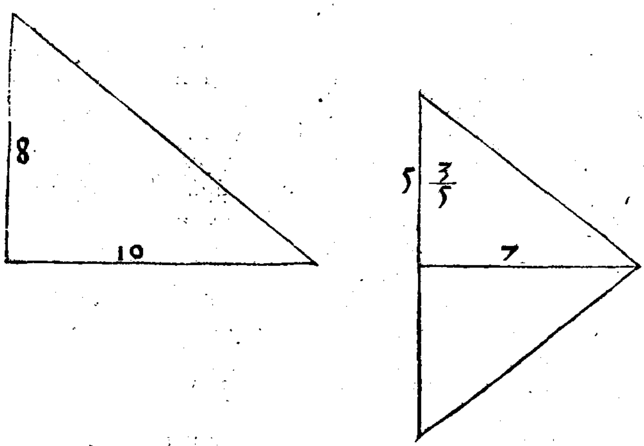
Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον· ἰσογώνια ἔσαι τὰ τρίγωνα· καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ᾽ ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

PROPOSITIO VI.

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualẽ, circa item æquales angulos latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triangula: & æquales habebunt angulos, sub quibus similis rationalis latera subtenduntur.

Describatur

Describatur primò triangulum, ducatur etiam recta quædam linea, ad cuius extremitatem deinde alteram, per propositionem 23 primi, angulo, qui sit uni ex triangulo æqualis, constituto, fiat ut hæ rectæ eam, quam in triangulo, circa sumptum angulum latera, inter se habeant rationem, & coniunctis extremitatibus tertia quadam linea, quod sic describitur triangulum, & prius descriptum, huiusmodi qualia hæc propositio requirit, triangula erunt: dico ergo nunc, quòd & æquiangula sint hæc eadem triangula: angulos item, qui sub similis rationis lateribus subtenduntur, æquales habeant. Constituantur ad unum utriusuis trianguli latus, atque ad eiusdem lateris extremitates, ex illa parte quæ est extra triangulum, per 23 primi, duo anguli, duobus in triangulo altero angulis æquales. Et quoniam per continuatio-



nem linearum illo triangulo clauso, tertius angulus huius, tertio alterius trianguli angulo, ex corollario propositionis 32 primi, est æqualis: hæc duo triangula primò æquiangula, atque deinde ex propositione 4 huius, laterum etiam proportionalium erunt Sed quia rationũ quantitatibus inter se collatis, inde, atque etiã ex propositionis hypothesi, duæ rationes eidem eædem sunt, cum hæ duæ, ex propositione undecima quinti, etiam inter se eædem sint, unam deinde uel antecedentem uel consequentem (pro ut quidem instituta collatio fuerit) quantitatem habeant: duo illa simul composita triangula, per propositionem 9 quinti, quartam deinde primi, & æquilatera & æquiangula erunt. Quia uerò unum ex his uni ex datis, per structuram est æquiangulum, & alteri datorum idem æquiangulum erit: quare sic & ipsa inter se, per communem quandam noticiam: proportionalium igitur laterum, ex propositione 4. Si igitur, &c. quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

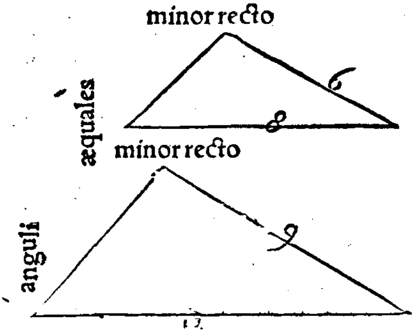
Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα, ἤτοι ἐλάσσονα, ἢ μὴ ἐλάσσονα ὀρθῆς· ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας περὶ ἃς ἀνάλογόν εἰσιν, αἱ πλευραί.

PROPOSITIO VII.

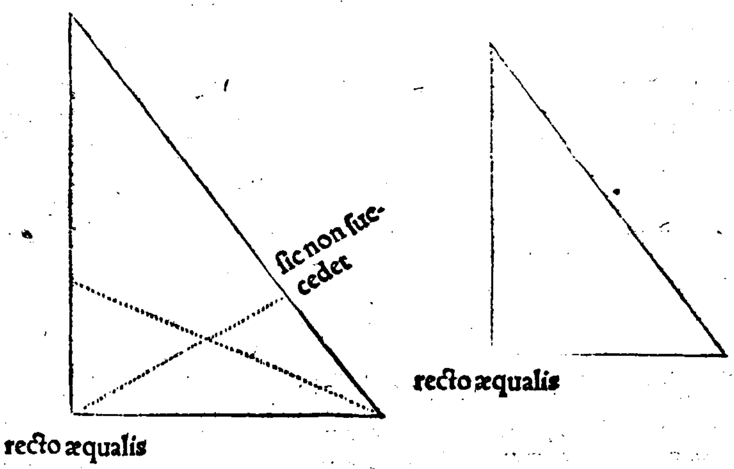
Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem, circa autẽ alios angulos latera proportionalia habuerint; reliquorum uerò utrunque simul aut minorem, aut non minorem recto: æquiangula erunt triangula, &

& æquales habebunt angulos,circa quos proportionalia ſunt latera.

Deſcribatur triangulum, ducatur etiam recta quædam linea, ad cuius alteram extremitatem angulus,uni ex triangulo æqualis,per 23 primi conſtituatur. Ex duobus deinde trianguli lateribus,quæ ſunt circa alium,quàm cui æqualem poſuimus angulum,proportionales partes deſumptæ, una in alterutra linea, ab angulo iam



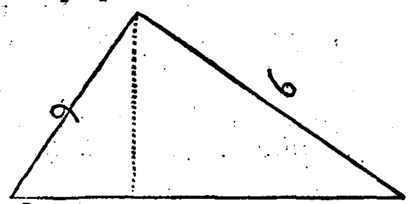
formato incipiendo, ſignetur: altera uerò pars,ex hoc puncto,angulo formato ſubtendatur: quæ ubi alterā lineam attigerit, quanta ipſa,ut tertium trianguli latus,eſſe debeat,apparebit. Danda autem eſt opera in hac alterius proportionalis partis applicatione, ut quemadmodum tertius in triangulo, primò deſcripto, angulus minor uel non minor recto eſt, ita & in altero, quod iam formatur, triangulo,tertius angulus exiſtat. Erunt autem iam deſcripta duo triangula,qualia propoſitio hæc ſeptima requirit: dico igitur,ſiue uterque ex reliquis horum duorum triangulorum angulis,minor recto,æqualis, ſeu maior recto,fuerit:æquiangula eſſe huiuſmodi triangula,atque eos qui ſub ſimilis rationis lateribus ſubtenduntur,angulos æquales habere. Primò igitur, aut enim illi duo, inter proportionalia latera anguli, ſunt inter ſe æquales, aut inæquales. Si æquales fuerint,cum propoſita duo triangula duos etiam angulos,ex hypotheſi, inter ſe æquales habeant,tertius item tertio,ex corollario propoſitionis 32 primi, æqualis ſit: huiuſmodi triangula iam æquiangula eſſe cōcluditur. Quod ſi ijdem inter proportionalia latera anguli,inæquales inter ſe fuerint,tum,ſiue reliquorum uterque ſimul, aut minor,aut non minor recto fuerit,maiori angulo,ut minori æqualis fiat,per re-



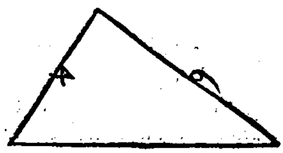
ctam quandam lineam,quemadmodum docet propoſitio in primo 23, ſuccurrendum eſt.Et quoniam duo triangula ſunt, partiale unum, & alterum poſitum,quorum duo anguli unius,duobus alterius trianguli angulis æquales ſunt, unus quidem uni, ex hypotheſi, alter uerò alteri, ex ſtructura per propoſitionem 23 primi, cum & tertius nunc tertio angulo, ex corollario propoſitionis 32 primi, æqualis ſit:triangula hæc,partiale ſcilicet & alterum poſitum, æquiangula, hinc etiam ex

propoſi-

propositione 4 huius, laterum proportionalium erunt. Quoniam autem rationum quantitatibus inter se collatis, inde, atque etiam ex propositionis hypothesi, duæ rationes eidem eædem sunt, cum hæ duæ ex prop. 11 quinti, etiã inter se eædem sint, unam insuper quantitatem communem habeant: quæ reliquæ duæ harũ similium rationum quantitates sunt, alterius nimirum partialis trianguli duo latera, ex propositione nona quinti inter se æquales erunt. Triangulum igitur isosceles, habens angulos, qui ad basim sunt, ex priore parte propositionis quintæ primi, inter se æquales, id quod in genere obseruandum est. Quòd si iam ex proposito receptum sit, utrunque reliquorum non minorem recto esse, cum sic propter æqualitatem, & alter huius isoscelis angulus, non minor, hoc est rectus uel maior recto existat: duo in triangulo anguli, non minores duobus rectis existentes, collocentur. Id autem, cum obstante propositione in primo 17, per quam omnis trianguli duo quilibet anguli, duobus rectis minores sunt, nullo modo esse possit: neque etiam inæquales, sed æquales inter se inter proportionalia latera anguli erunt. Quare, &c. Sed esto iam ex proposito utrunque reliquorum minorem recto esse: cum sic alter, huius iso-



recto minor



recto minor

scelis, ad basim positus angulus, recto minor sit, ac per consequens huius isoscelis angulus exterior, per prop. 13 primi, recto maior: & ille qui in triangulo altero, ex corollario allegato, eidem exteriori est æqualis, similiter recto angulo maior erit, cum tamen sit positus recto minor, quod nunc est impossibile, unum & eundem angulum, iam minorem, atque deinceps angulo recto maiorem esse. Illos igitur sub proportionalibus lateribus comprehensos angulos, non inæquales, sed æquales inter se esse oportet: quare reliquus angulus reliquo, ex corollario, ęqualis erit. Aequiangula igitur triangula huiusmodi proposita. Si duo igitur triangula unum angulum uni angulo æqualem, circa autem alios, &c. quod demonstrasse oportuit.

APPENDIX.

Præcepimus autem in structura, maiori angulo, ut minori æqualis fieret, succurrendum esse, & rectè quidem. Quòd si contrà aliquis, minorem ad æqualitatem maioris, per eandem propositionem 23 primi, augere uellet, tam facili opera propositionis demonstrationem inde colligere posset.

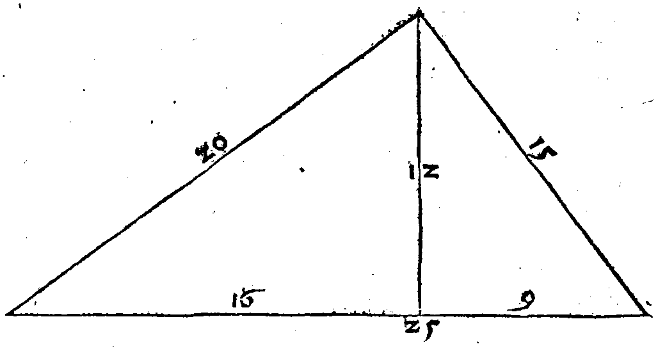
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

Ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ· τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα, ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

PROPOSITIO VIII.

Si in rectangulo triangulo ab angulo recto in basim perpendicularis ducta fuerit: quæ ad perpendicularem triangula, cùm toti triangulo, tum ipsa inter se similia sunt.

Describatur triangulum rectangulum, demittatur etiam ab eius angulo recto, per propositionem 12 primi, ad suam subtensam linea perpendicularis: dico quòd partialia illa triangula, totali, atque etiam sibi ipsis, similia sint. Cum enim, ex quadam communi noticia, omnes recti anguli inter se æquales sint, partialium insuper



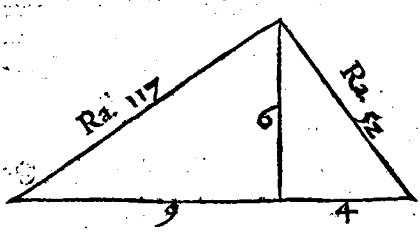
triangulorum utrunque, ut apparet, unum angulum cum totali triangulo communem habeat: hæc tria triangula, totale & duo partialia, primò ex corollario propositionis 32 primi, æquiangula: statim deinde, ex propositione 4 huius, laterum proportionalium: atque tandem, ex similium figurarum definitione, etiam similia erunt. Si in rectangulo igitur triangulo, ab angulo recto in basim perpendicularis ducta fuerit: quæ ad perpendicularem triangula, cùm toti triangulo, tum ipsa inter se similia sunt. quod demonstrasse oportuit.

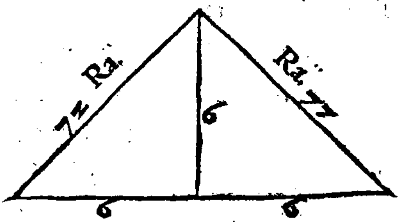
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν· ὅτι, ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ· ἡ ἀχθεῖσα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μέση ἀνάλογόν ἐστι. Καὶ ἔτι τῆς βάσεως καὶ ἑνὸς ὁποτερουοῦν τῶν τμημάτων, ἡ πρὸς τῷ τμήματι πλευρά, μέση ἀνάλογόν ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, si in rectangulo triangulo ab angulo recto in basim perpendicularis ducta fuerit: hanc ductam inter basis segmenta mediam proportionalē esse. Et insuper, inter ipsam basim, & utrunque segmentum, latus, quod ad idē segmentum ponitur, mediū proportionale.





Numeri uel quantitates proportionales.

9	6	4	6	6	6
13	√ 117	9	12	√ 72	6
13	√ 52	4	12	√ 72	6

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ.

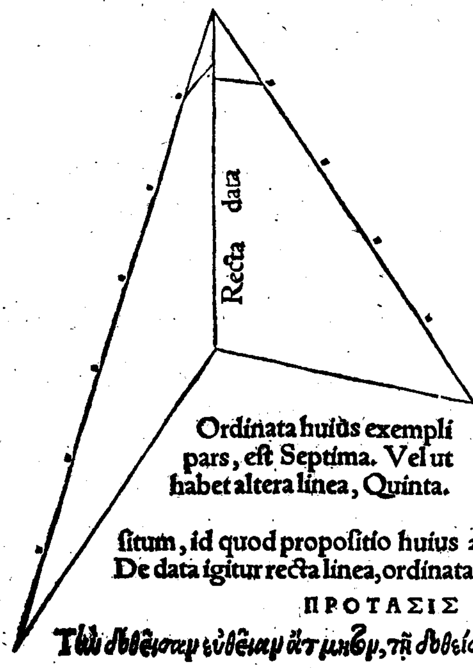
Τῆς δοθείσης εὐθείας, τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφελεῖν.

PROPOSITIO

PROPOSITIO IX.

De data recta linea, ordinatam partem abſcindere.

Sit data recta linea, atq; propoſitum, ordinatam ab ea partem, utpote ſeptimam, tertiam, tredecimã, uel aliam quamcunq;, abſcindere. Alia igitur recta, ſatis longa, lineæ rectæ datæ angulariter applicetur, in qua officio circini, utcunq; extenſi, ab angulo deſcendẽdo, ſeptem uel tredecim, hoc eſt tot, quot quidem ordinatæ partis, quæ abſcindi debet, denominatio requiſiuerit, æquales partes ſignentur, finis deinde ſeptimæ (ſi quidẽ illa pars ordinata fuerit) cum altera datæ extremitate, linea quadam recta, ut triangulum fiat, iungatur. Quòd ſi iam à fine primæ partis, huic ultimò ductæ rectæ, tanquam uni trianguli lateri, per propoſitionem 31 primi, parallela ducta, eaq; ad datam rectam uſque continuata fuerit, factum iam erit propoſitum, id quod propoſitio huius 2 & compoſita ratio demonſtrabũt. De data igitur recta linea, ordinata pars abſciſſa eſt, quod fieri oportuit.



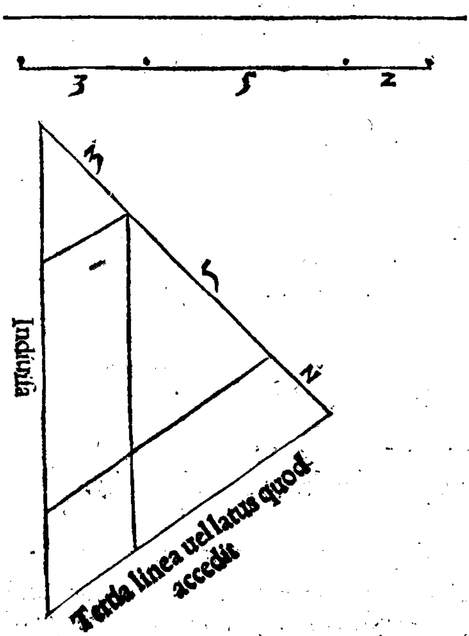
Ordinata huius exempli pars, eſt Septima. Vel ut habet altera linea, Quinta.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ I.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄτμητον, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τετμημένῃ ὁμοίως τεμεῖν.

PROPOSITIO X.

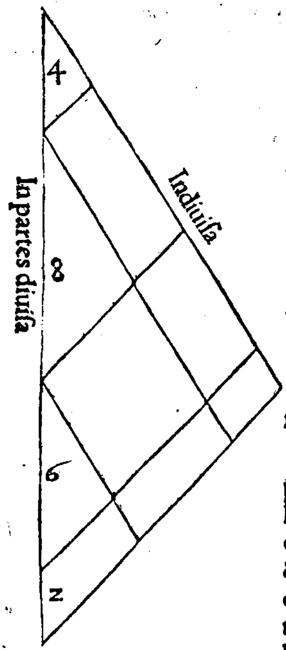
Datam rectam lineam non ſectam, datæ rectæ lineæ ſectæ ſimiliter ſecare.



Sint duæ rectæ lineæ datæ, una quidem indiuiſa, altera uerò in partes, quot & qualitercunq; diuiſa, atq; propoſitum, indiuiſam in partes ſecũdum rationes partium diuiſæ diuidere. Applicentur lineæ angulariter, accedat etiam tertia linea, qua liberæ datarum extremitates, ut triangulum fiat, iungantur, à punctis tandem diuiſionũ ſingulis, tertiæ lineæ parallelæ ductæ, atq; ad indiuiſam lineam uſq; continuatæ: propoſitioni ſatisfactũ erit, atq; demonſtratio talis. Ducantur à punctis diuiſionum ſingulis, illo tantum, quod eſt tertiæ lineæ proximum, dempto, indiuiſæ lineæ parallelæ,

Nn 2 atq;

atque hæ ad tertiam usque lineam, ut parallelogramma fiant, continuentur. Et quoniam parallelogrammorum locorum latera opposita, per propositionem 34 primi, inter se æqualia sunt: triangula etiam hic appareant, quorum duo latera, per lineam tertio lateri parallelam, diuisa sunt: per propositionem 2 huius, toties, quoties secta diuisa fuerit, uno minus, eam repetendo, æqualibus subinde pro æqualibus lineis sumptis, constabit propositum. Linea enim indiuisa ad rationẽ diuisę diuisa est. quod fieri oportuit.



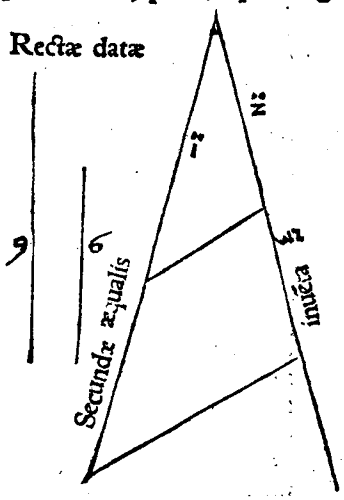
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

PROPOSITIO XI.

Duabus datis rectis lineis, tertiam proportionalem inuenire.

Sint duæ rectæ datæ, atque propositum, tertiam proportionalem, ad quam scilicet se habeat secũda, sicut ad hanc secundam linea prima, inuenire. Connectantur rectæ datæ, ut angulum qualemcunque comprehendant, & claudatur triangulum recta quadam linea alia. Productis deinde uel continuatis rectis datis, ex parte tertij lateris, quæ est linea modò ducta, ultra triangulum, uni earum, in continuata parte lineæ alterius, per propositionem 3 primi, æqualis signetur, ab huius fine postea, ubi per propositionem 31 primi, tertio trianguli lateri parallela ducta fuerit, cũ hæc eadem in altera prolongata per suam intersectionẽ tertiæ proportionalis quantitatem ostendat, propositioni satisfactum erit. Quoniam enim ad unum totalis trianguli latus recta parallela ducta est, cum hæc parallela reliqua nominati trianguli duo latera, per propositionem 2 huius, proportionaliter secet: æquali pro æquali linea sumpta, statim concluditur propositum: Duabus scilicet datis rectis lineis, tertiam proportionalem inuentam esse. id quod fieri oportuit.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ.

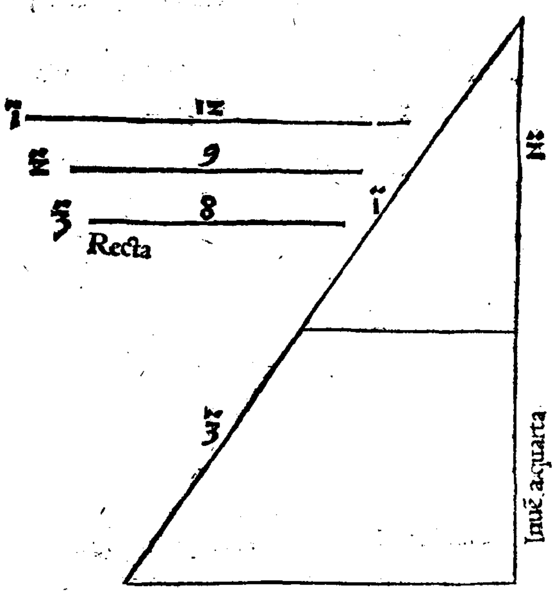
Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

PROPOSITIO XII.

Tribus datis rectis lineis, quartãm proportionalem inuenire.

Sint tres rectæ datæ, atque propositum, quartam proportionalem inuenire. Iungantur prima recta & tertia, ut angulum qualemcunque faciant, & claudatur triangulum.

gulum. Secunda deinde, uel alia, secundæ æqualis, primæ ad amussim iuncta, tertia uerò ultra triangulum continuata, à fine huius secundæ, ad continuatam usq;, ter-



tio trianguli lateri, per propositionem 31 primi, parallela ducatur: & erit portio, rectæ tertiæ & huic sectioni interiacens, linea illa quæ quæritur. Hoc autem patet ex 2 propositione huius, æquali pro æquali linea sumpta. Tribus igitur datis rectis lineis, quarta proportionalis inuenta est. quod fecisse oportuit.

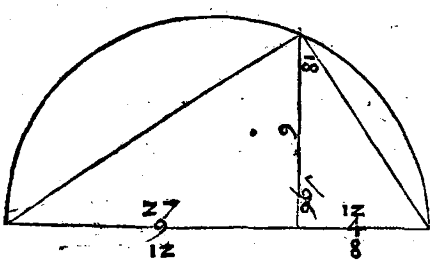
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν.

PROPOSITIO XIII.

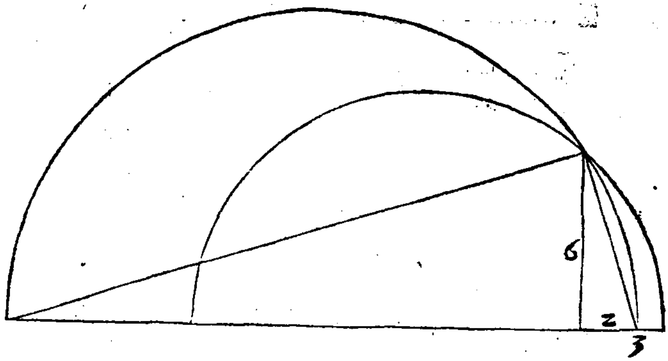
Duabus datis rectis lineis, mediam proportionalem inuenire.

Sint duæ rectæ datæ, atq; propositum, mediam ipsarum proportionalem, ad quam scilicet se habeat una ex datis, sicut hæc ipsa media ad alteram, inuenire. Coniungātur ad amussim duæ rectæ datæ: ex his deinde cōposita bifariā diuisa, ex puncto diuisionis super ipsam totam, ad interuallum alterutrius medietatis, semicirculus describatur. Quòd si tandem à puncto coniunctionis datarum, tanquam à puncto in hac recta dato, ad angulos rectos linea ad circumferentiam usque ducta fuerit: quòd hæc ducta, media datarum proportionalis sit, sic demonstrabitur.

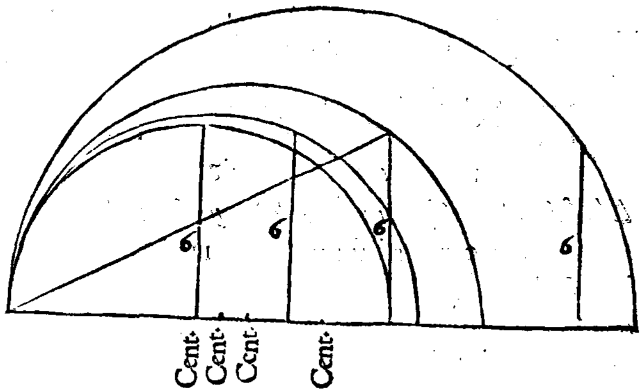


Iungantur extremitates rectæ, ex duabus compositæ, cum intersectione ad rectos ductæ & semicircūferentiæ, duabus rectis lineis. Et quoniā angulus in semicirculo, ex prima parte propositionis 31. tertij, rectus est, cum ab eo ad basim perpendicularis recta demissa sit: ex priore parte corollarij propositionis 8 huius, res tandem demonstrata erit, lineam scilicet illam, quam diximus, mediam inter datas proportionalem esse. Duabus igitur datis rectis lineis, media proportionalis inuenta est. quod fieri oportuit.

Alia huius tredecimæ propositionis figuratio.
Sunt autem exempla duo.



Similiter alia, quatuor exemplis ornata.



Datæ autem rectæ lineæ sunt,

6 & 6

9 & 4

12 & 3

18 & 2

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ.

Τῶν ἴσων τε, καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν παραλληλογράμμων· ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. Καὶ ὧν παραλληλογράμμων, μίαν

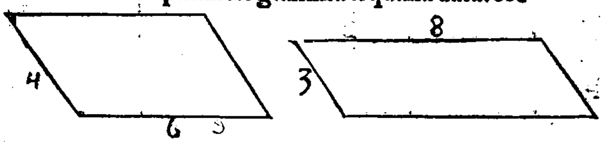
μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

PROPOSITIO XIIII.

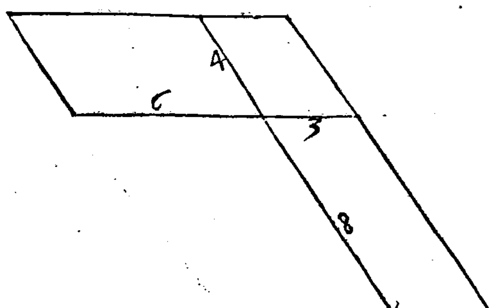
Æqualium, & unum uni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum: reciproca ſunt latera, quæ ſunt circa æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum unum angulum uni æqualem habentium, reciproca ſunt latera, quæ ſunt circa æquales angulos: æqualia ſunt & illa.

Sint duo parallelogramma æqualia: & eſto, quòd unus angulus unius, ſit uni alterius parallelogrammi angulo ęqualis: dico, horum parallelogrammorum latera, circa æquales angulos, reciproca eſſe. Reciproca autem dico ea parallelogramma,

Duo parallelogramma æqualia data. &c.

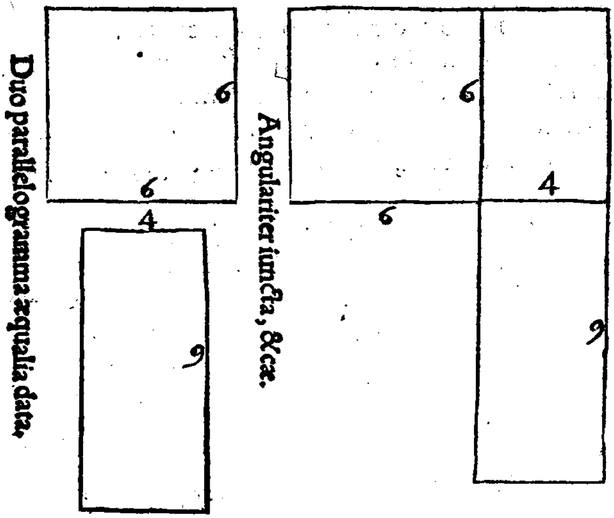


quorum unius longitudo ad latitudinem alterius eam, quam longitudo alterius ad latitudinem prioris, habet rationem. Coniungantur igitur parallelogramma, ut angulum faciant, utq; anguli illorum æquales, ſint circa unum punctum, longitudo inſuper unius & latitudo parallelogrammi alterius adamuſſim unam lineam conſtituant. Quibus ſic coniunctis, & reliqua duo circa æquales angulos latera, una linea erunt, ſequeretur enim aliàs, ſi alterutrum horum cõtinueretur, ſiue per propoſitionem 15 primi, & communem illam noticiam, Eidem æqualia, &c. ſeu per propoſitionem 13 eiuſdem primi bis uſurpatam, & communem illam noticiam, Si ab



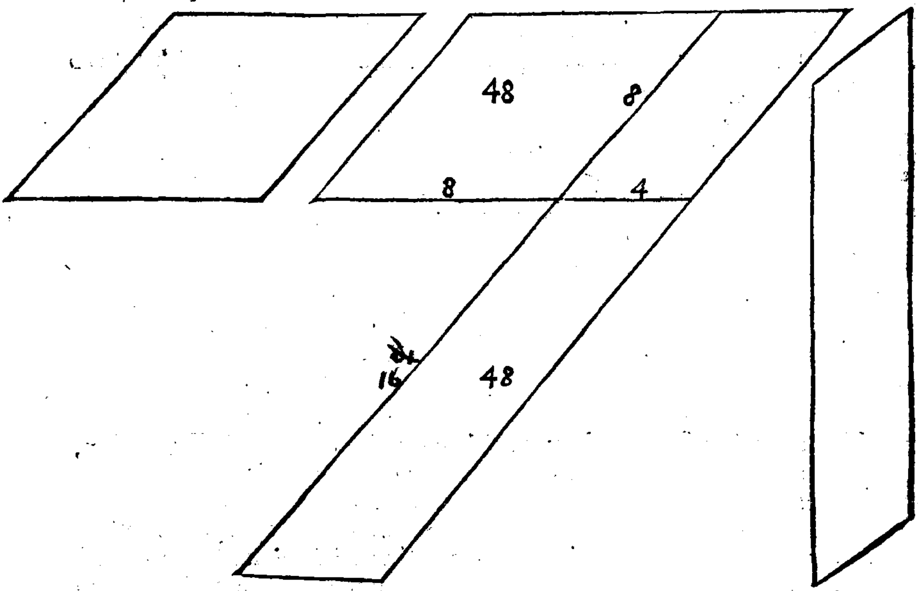
æqualibus æqualia auferantur, &cæ. partialem angulum ſuo totali eſſe æqualem, quod fieri non poteſt. Sunt igitur & reliqua duo horum angulorum latera, adamuſſim linea una. Compleatur parallelogrammum tertium, ſecundum quantitatem laterum anguli utriuſuis exterioris: eritq; demõſtrationis figura parata. Et quoniam duo, primò deſcripta, parallelogramma, ex hypotheſi, ſunt inter ſe æqualia: erit eorum ad tertium, per priorem partem propoſitionis 7 quinti, una & eadem ratio. Et rurſus, quoniam etiam parallelogrammorum, quæ ſub eodem uertice ſunt poſita, in eadem qua ipſæ baſes, per primam huius, ſunt ratione, hac prima propoſitione, deinde 11 quinti, utraq; bis uſurpata, prior pars manifeſtabitur. Quòd nunc etiam, quantum ad partem poſteriorem, parallelogramma, quæ unum angulum uni æqualẽ, latera etiã circa illos ęquales angulos reciproca habeãt: inter ſe æqualia ſint,

sint, cum, ex eadem prima huius, bis usurpata, & 11 propositione quinti, parallelogramma posita cum tertio unam & eandem rationem habeant: per priorem par-



tem propositionis 9 quinti, id tandem retinebitur. Aequalium igitur & unum uni æqualem habentium angulum, &c. quod demonstrasse oportuit.

Tertia huius propositionis geometrica figuratio.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ.

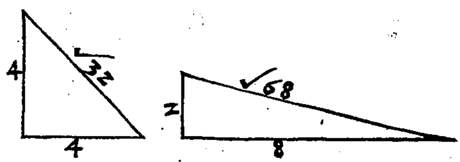
Τῶν ἴσων, καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων· ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. Καὶ ὧν μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

PROPOSITIO XV.

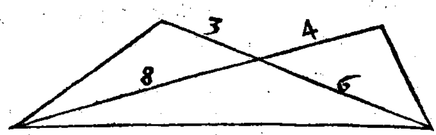
Æqualium, & unum uni æqualem habentium angulum, triangulorum: reciproca sunt latera, quæ sunt circa æquales angulos. Et quorum triangulorum unum angulum uni æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ sunt circa æquales angulos: æqualia sunt & illa.

Sint duo triangula æqualia, & esto quod unus angulus unius sit uni alterius trianguli angulo æqualis: dico, horum triangulorum latera, circa æquales angulos, reciproca esse. Coniungantur triangula, ut angulum faciant, utque anguli illorum æquales, quemadmodum in præmissa, sint circa unum punctum, antecedens insuper in uno & suum consequens in triangulo altero, ad amussim unam lineam

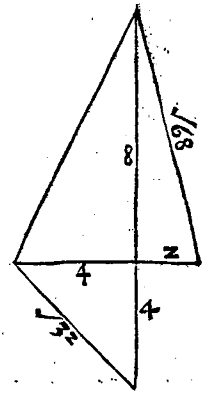
Triangula æqualia data.



Angulariter iuncta, &c.



uel



faciant: adamussim igitur sic, superiori ratione, & reliqua duo latera erunt. Describatur triangulum tertium, per lineam quandam rectam, ab uno angulo unius ad alterum, in eadem parte alterius trianguli angulum, ductam, eritque demonstrationis figura parata. Et quoniam duo, primò descripta, triangula, ex hypothesi, sunt inter se æqualia: erit eorum ad tertium, per priorem partem propositionis septimæ quinti, una & eadem ratio. Et rursus, quoniam etiam triangulorum quæ sub eodem uertice sunt posita, in eadem qua ipsæ bases, per propositionem primam huius, sunt ratione: per eandem igitur primam & propositionem 11 quinti, utranque bis usurpatam, prior pars manifestabitur. Quòd nunc etiam, quantum ad partem posteriorem, ex unius illorum anguli æqualitate, & reciprocis circa illos æquales angulos lateribus, æqualitas inferatur, non aliter atque posterior præcedentis propositionis pars, de parallelogrammis id retinebitur. Aequalium igitur & unum uni æqualem habentium angulum, triangulorum: reciproca sunt latera, quæ sunt circa æquales angulos. Et quorum triangulorum unum angulum uni æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ sunt circa æquales angulos: æqualia sunt & illa. quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ. ιϛ.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι· τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ, τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Καὶ ἐὰν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

PROPOSITIO XVI.

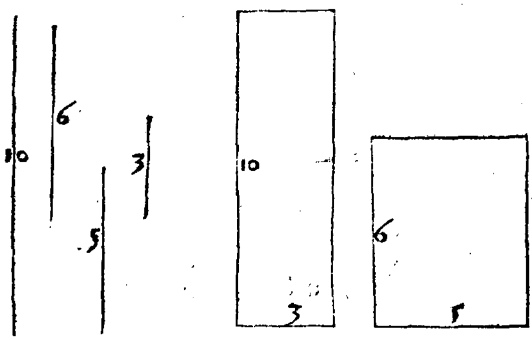
Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: quod sub extremis

comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod sub medijs comprehenditur rectangulo. Et si sub extremis comprehensum rectangulum, æquale fuerit ei quod sub medijs comprehenditur rectangulo: quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ lineę proportionales, prima scilicet ad secundam ut tertia ad quartam: dico rectangulum sub prima & quarta comprehensum, ei quod sub secunda & tertia comprehenditur rectangulo æquale esse. Describãtur ex quatuor rectis proportionalibus duo rectangula, utrunq; ex suis lineis. Et quoniam primæ ad secundam, lateris scilicet unius ad latus rectanguli alterius, ex hypothesi, est ut tertiæ lineæ ad quartam, lateris nimirum huius ad latus illius: hæc duo rectangula, cum circa æquales angulos (omnes enim recti inter se ęquales sunt) latera reciproca habeant, ex propositione 14 huius, inter se æqualia erunt: quę est pars prior. Posterior iam, lineis scilicet quatuor rectis propositis, si rectangula sub prima & quarta, sub secũda item & tertia, cõprehensa, ex hypothesi inter se æqualia sint: illas tum lineas proportionales esse, sic patet. Cum rectangula, ex hypothesi, inter se æqualia sint, cumq; etiam omnes anguli recti inter se æquales: ipsa rectangula primò æquiangula erunt, atque deinde circa æquales angulos, ex priore parte propositionis 14 huius, latera reciproca habebunt, quæ est pars posterior. Si quatuor igitur rectæ lineæ proportionales fuerint: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod sub medijs comprehenditur rectangulo. Et si sub extremis comprehensum rectangulum, æquale fuerit ei quod sub medijs comprehenditur rectãgulo: quatuor rectæ lineæ proportionales erũt. quod demonstrasse oportuit.

Rectæ quatuor proportionales

Rectangula ex suis lineis descripta



ALIA HVIVS PROPOSITIONIS DEMONSTRATIO.

Quatuor rectis lineis expositis, dico, si hæ rectæ, ex hypothesi, proportionales fuerint, prima scilicet ad secundam ut tertia ad quartam: & quæ sub prima & quarta, sub secunda item & tertia linea comprehenduntur rectangula, inter se æqualia esse. Quòd si harum rectarum rectangula, quæ sub prima & quarta, subq; secunda & tertia comprehenduntur, ex hypothesi, inter se æqualia sint: & ipsas rectas proportionales esse oportere. Quantum igitur ad partem priorem, excitentur à duabus, primæ & secundæ, rectarum extremitatibus, utræ hæ fuerint, per propositionem 11 primi, duæ ad angulos rectos lineę: de priori deinde excitata, à cõmuni puncto incipiendo, recta quartæ æqualis, ab altera uerò, tertiæ datæ æqualis recta, per propositionẽ 3 primi, abscindatur, cõpleanturq; parallelogrãma. Et quoniam prima ad secundam, ex hypothesi, est ut tertia ad lineam quartam, cùm lineis tertiæ & quartæ æquales aliæ in parallelogrammis positæ sint, æqualibus illis pro tertia & quarta sumptis: descriptorum parallelogrammorum circa æquales angulos latera reciprocè proportionalia erunt: unum igitur parallelogrammum, ex priori parte propositionis 14 huius, alteri æquale. Quare cum unũ sub prima & alia quadam

recta

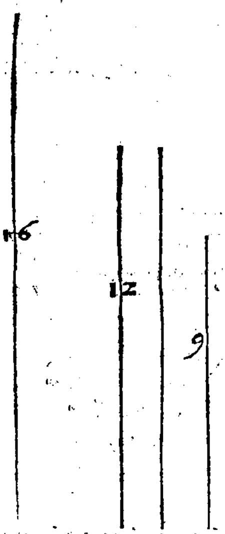
recta, quartæ æquali: alterum uerò sub secunda & alia, tertiæ æquali, recta linea contineatur, æquali pro æquali linea habita atque usurpata: prior pars nunc manifesta erit. Esto autem iam, quantum ad partem posteriorem, quòd sub prima & quarta comprehensum rectangulum, ei quod sub secunda & tertia cõprehenditur rectangulo, æquale sit: dico, quòd quatuor rectæ propositæ illo ordine proportionales sint. Eisdem namq; constructis, quoniam quod sub prima & quarta comprehenditur rectangulum, ex hypothesi, sub secunda & tertia comprehenso, æquale est: hæc descripta rectangula, cum unum quidem sub prima & alia quadam recta, quartæ æquali, alterum uerò sub secundæ æquali & tertia linea contineatur, æqualitas insuper linearum nullam uarietatem inducat, inter se æqualia erunt, atq; æquiangula etiam, propterea quòd omnes recti anguli inter se sunt æquales. Aequalia uerò & æquiangula parallelogramma, cum ex priore parte propositionis 14 huius, latera circa æquales angulos reciprocè proportionalia habeant: iam statim propter æqualitatem linearum, superiori ratione, & posterior huius propositionis pars manifesta erit. Si igitur quatuor rectæ lineæ, &c. quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι· τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ. Καὶ ἐὰν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ᾖ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ· αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

PROPOSITIO XVII.

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei quod à media quadrato. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale fuerit ei, quod à media quadrato: tres rectæ lineæ proportionales erunt.



prima se. tertia

Sint tres rectæ lineæ proportionales, prima scilicet ad secundam, ut hæc ipsa secunda ad tertiam: dico, rectangulum sub prima & tertia comprehensum, ei quod à media describitur quadrato, æquale esse. Quoniam enim ad secundam linea prima, hæc deinde eadem secunda ad tertiam lineam confertur, pro secunda collatione, puncto inter secundam lineam & tertiam ad placitum sumpto, ad id per propositionem 2 primi, linea recta secundæ æqualis ponatur, & erit ex priore parte propositionis 7 quinti, secundæ, & suæ æqualis ad lineam tertiam una & eadem ratio. Quatuor igitur cum sint lineæ proportionales, duarum item æqualium eadem sit quæ est unius, bis sumptæ, lineæ consideratio prior propositionis pars, ex præcedentis propositionis parte priore concludi poterit, atq; deinde etiam, ex posteriore ipsa posterior. Si igitur tres rectæ lineæ proportionales fuerint: quod sub extremis, &c. quod demonstrasse oportuit.

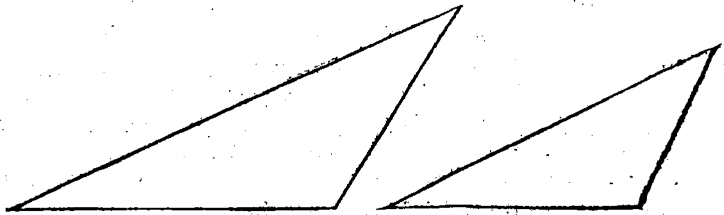
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.

PROPOSITIO XVIII.

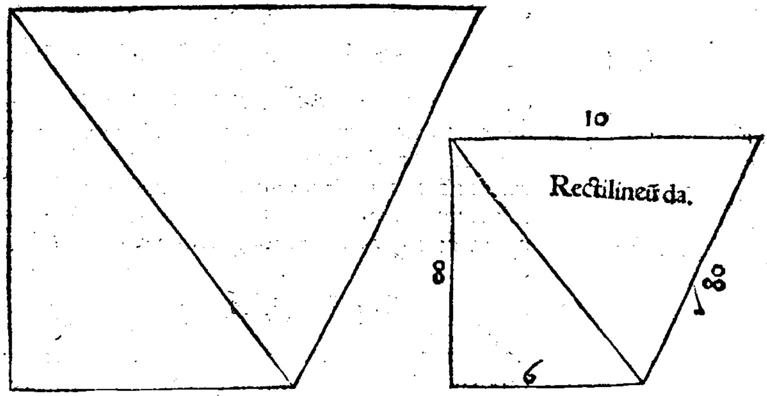
A' data recta linea, dato rectilineo, simile similiterq; positum rectilineum describere.

Sit recta linea data, rectilineum item datum, atq; propositum, à recta data ipsi dato rectilineo simile, similiterq; propositum rectilineum describere. Rectilineum illud datum aut erit Trilaterum, quadrilaterum, aut multilaterũ. Si trilaterum, hoc est triangulum, fuerit rectilineum datum, ad unam extremitatem datæ, per propo-



Recta data Trilaterum rectilineum datum

sitionem 23 primi, unus angulus uni, ad alteram deinde, uersus illam & eandem partem, per eandem etiam propositionem, alius alij trianguli angulo æqualis constituatur, & continuatis lineis, donec altera alteri occurrat, cum tertius sic tertio trianguli angulo æqualis sit: hæc duo triangula iam æquiangula, deinde etiam per propositionem 4 huius, laterum proportionalium erunt. Quare ex definitione rectilinearum similium, à data recta dato rectilineo trilatero, simile trilaterum descriptum est. Quòd si iam unum, minus scilicet, alteri quod maius est, trilatero, uel triangulo applicetur sic, ut unum angulum ambo cõmunem habeant: tum hæc etiam similiter posita erunt. Quare factum est, quod propositio requirebat. Sed esto iam quòd rectilineum datum sit quadrilaterum, uel multilaterum, tunc primò id in sua



Recta data

triangula soluendum, & cum uno eorum ac recta linea data, ut iam auditum est, pergendum erit, & uidendum deinde, quam in hoc triangulo angulus, qui est uni integro in rectilineo angulo æqualis, subtensam habeat, ut scilicet, ea cognita, ad ipsius extremitates alterius in rectilineo trianguli, quod scilicet primò absoluto cohæret, duo anguli æquales collocentur, atq; continuatis lineis donec concurrant, cum tertius sic tertio huius alterius trianguli angulo æqualis sit: triangula hæc, ex structura æquiangula erunt, deinde etiam, ex 4 huius, laterum proportionalium,

atq;

atque tandem ex definitione, inter se etiam similia. Non aliter cum tertio, ac reliquis rectilinei triangulis singulis agendum erit. Et quoniam rectilineum, quale propositum erat, eo modo tandem describitur, propositioni igitur satisfactū erit, quod sic demonstrari potest. Quoniam enim rectilinei, super recta data descripti, tot triangula sunt, quot ipsius rectilinei dati: ex structura igitur & communi illa noticia, Si æqualibus æqualia addantur, &c. hæc duo rectilinea iam æquiangula erunt. Et quia ex propositione 4 huius, propter proportionalitatē laterum ipsorum triangulorum, euidenter apparet, illa etiam proportionalium laterum esse: per definitionem tandem similium superficierum concluditur propositum.

APPENDIX.

Est hoc loco notandum, postquam primum iam triangulum absolutum, ac cum alijs deinde operari cœptum fuerit, ut partiales anguli singulorum, debito ordine suis partialibus æqualibus, & non temere quilibet cuilibet, coniungantur. Nam hoc animaduerso, non erit laboriosum, neque etiam molestum, qualicunque rectilineo, regulari uel irregulari, multorum item uel paucorum laterum, dato, simile similiterque positum à data recta linea rectilineum describere.

APPENDIX II.

Quoniam propositio mentionem facit rectilinei, & rursus quoniam sub rectilineo, ut quidem ex definitione patet, omnes rectarum linearum figuræ, siue trilateræ hæ, quadrilateræ uel multilateræ fuerint, comprehendantur: in genere de omnibus rectarum linearum figuris hanc propositionem intelligendā colligimus. Hinc etiam factum, quòd per triangula, tanquam rectarum linearum figuram primam, hanc propositionem primò declarauimus.

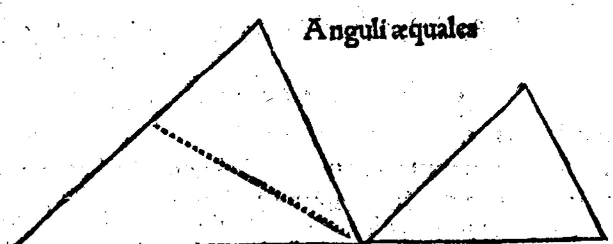
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ.

Τὰ ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστί, τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

PROPOSITIO XIX.

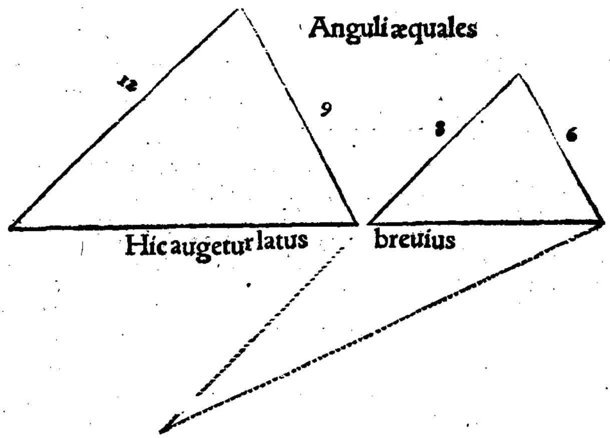
Similia triangula: inter se in dupla ratione sunt, similis rationis laterū.

Describantur duo triangula, unum quidem qualitercunque, alterum uerò per propositionem præcedentem, huic simile: dico igitur, triangula hæc duplicatam inter se habere rationem, quam habet latus unius ad similis rationis latus trianguli alterius. Lateribus illis, quorum rationem duplicatam inter se ipsa triangula habere debeant, tanquam duabus rectis datis, per propositionem 11 huius, tertia continuè proportionalis quærenda est, & id quidem uel longiori latere abbreuiato, uel



breuiori aucto. atque ex hoc puncto deinde, seu inuentæ proportionalis termino, ad angulum quem abbreuiatum uel auctum latus subtendit, linea recta ducenda.

Fiunt autem ſic duo triangula, quorum alterum, cuius ſcilicet tertia proportionalis eſt unum latus, alteri integro adhuc, ex poſteriore parte propoſitionis 15 huius, eſt æquale: id quod nulli nō, hypotheſiū propoſitionis ac rationis permutatę, quodq; rationes uni eædē, per propoſitionem 11 quinti, etiā inter ſe eædem ſint, memori,



occurrere poterit. Rurſus, quoniam tres ſunt lineę proportionales, duo ſcilicet propoſitorum duorum triangulorum latera, & tertia ad ea proportionalis inuēta, cum ſic prima ad tertiam, ex quadam definitione in quinto expoſita, ſit in ratione eiuſdem primæ ad lineam ſecundam duplicata, triangula deinde (quorum baſes ſunt prima & tertia lineæ) per propoſitionem primam huius, in ſuarum ſint baſium ratione, ſimilium rationum quantitatibus alijs pro alijs ſumptis: & hæc ipſa triangula primæ lineæ ad ſecundam rationem duplicatam habebunt. Quia uerò prima & tertia lineæ ſunt expoſitorum ſimilium triangulorum ſimilis rationis latera, triangula porrò ipſa, unum quidem uni ex datis, alterum uerò alteri datorum æqualis: hoc conſiderato, propoſitum iam concludi poteſt. Similium igitur triangulorum ratio, &c. quod demonſtraſſe oportuit.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι κἂν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν· ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης τρίγωνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, ὅμοιον, καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον.

Ἐπείπερ ἐδείχθη, ὡς ἡ γ β πρὸς τὴν β η, οὕτως τὸ α β γ τρίγωνον, πρὸς τὸ α β η τρίγωνον, τουτέστι τὸ δ ε ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt, Quando tres rectæ lineæ proportionales fuerint, quòd ſit, ſicut prima ad tertiam, ſic quod à prima fit triangulum, ad id quod à ſecunda deſcriptū fuerit ſimile, ſimiliterq; poſitū triangulum.

Quoniam oſtenſum eſt, ſicut prima recta linea, hoc eſt unum unius trianguli latus, ad tertiam proportionalem inuentam: ſic & harum primę & tertiæ linearum triangula, hoc eſt (æquali nimirum pro æquali triangulo ſumpto) triangulum primæ ad triangulum lineæ ſecundæ, quod erat demonſtrandum.

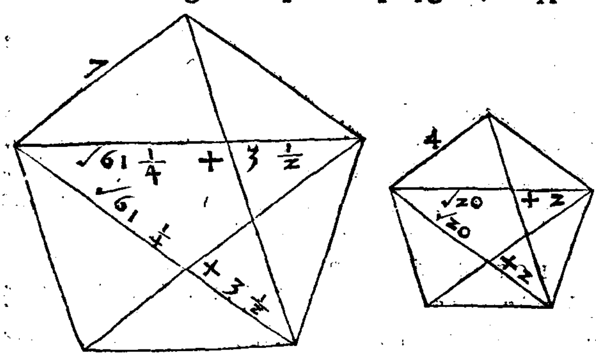
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ.

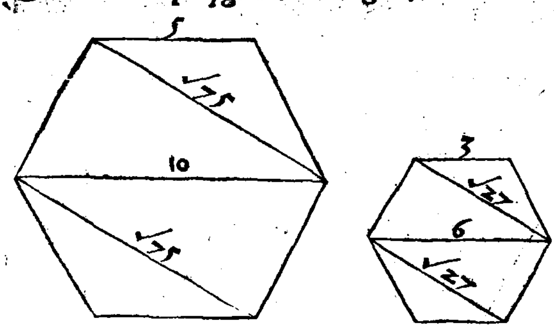
Τὰ ὅμοια πολύγωνα εἰς τὰ ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται, καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος, καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις. Καὶ τὰ πολύγωνα διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

PROPOSITIO XX.

Similia polygona: in similia triangula diuiduntur, & æquali numero, & simili ratione totis. Et polygona duplicatam rationem habent, quam similis rationis ad similis rationis latus.

Describantur duo polygona, unum quidem qualitercunque, alterum uerò per propositionem 18, huic simile: dico igitur, quòd hæc polygona in similia, & numero æqualia triangula subdiuidantur, & quòd etiam triangula cum polygonis eandem rationem habeant. Polygonorum insuper ratio ea sit, quæ est lateris unius ad similis rationis latus polygoni alterius duplicata. Diuidantur polygona per lineas rectas in sua triangula. Et quoniam polygona, ex hypothethi, sunt similia, similes porrò figuræ rectilineę, ut ex definitione patet, æquales angulos ad unum, & quæ circa æqua les angulos sunt latera, proportionalia habent, iam statim aliquot: subtractis uerò subinde æqualib. ab angulis æqualibus, partialibus nimirum ab ipsis totis, singula unius singulis triangulis polygonij alterius per propositionem 6 huius, æquiangula erunt: quare per propositionem 4 huius, & similium figurarum definitionem, etiam similia. Polygona igitur descripta in similia, & æquali numero, triangula subdiuisa sunt, quod est primum. Quantum ad secundũ, quòd scilicet triangula illam, quam polygona, inter se habeant rationem. Quoniam enim polygonorum triãgula, ut demonstratum est, inter se similia sunt: erit illorum, per propositionem præcedentem, ratio, quę est lateris unius ad similis rationis latus trianguli alterius duplicata. Hoc nunc toties, quot in utrouis polygono triangula reperiuntur, usurpato, cum quæ eidem eædem sunt rationes, ipsæ, per propositionem 11 quinti, & inter se eædem sint: per propositionem 12 tandem eiusdem, id quod in hac propositione, de simili ratione triangulorum cum totis polygonis, secundò proponitur, concludi potest. Quantum igitur ad tertium, Quoniam triangula, ut demonstratum est, cum sint similia, in dupla ratione sunt similis rationis laterum: cum, quam triangula, illam eandem & ipsa polygona inter se habeant rationem: & polygona similis rationis laterum duplicatam rationem habebunt.





habebunt. Similia igitur polygona, in similia triangula diuiduntur, &cæ. quod demonstraſſe oportuit.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

Ὡσαύτως δή, καὶ ἐπὶ τῶν ὁμοίων τετραπλεύρων δειχθήσεται, ὅτι ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων. Ὥστε καθόλου, τὰ ὅμοια εὐθύγραμμα σχήματα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Καὶ ἐὰν τῶν α β, ζ η τρίτην ἀνάλογον λάβωμεν, τὴν ξ. ἡ β α πρὸς τὴν ξ, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ α β πρὸς τὴν ζ η. ἔχει δὲ καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον (ὅμοιον) καὶ τὸ τετράπλευρον πρὸς τὸ τετράπλευρον, διπλασίονα λόγον, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον, τουτέστιν ἡ α β πρὸς τὴν ζ η. ἐδείχθη δὲ τοῦτο καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων.

COROLLARIVM.

Similiter etiam in ſimilibus quadrilateris demonſtrari poterit, quòd hæc in dupla ratione ſint ſimilis rationis laterum. Id autem & in triangulis demonſtratum eſt. Proinde in uniuerſum, Similes rectæ lineæ figuræ inter ſe in dupla ratione ſunt ſimilis rationis laterum.

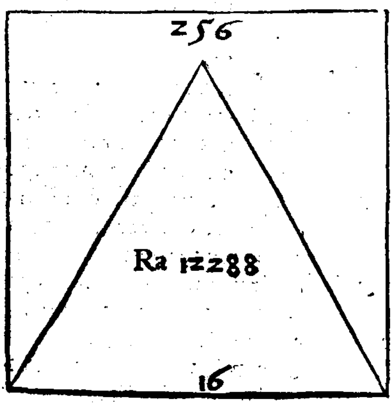
Nam ſi duarum linearum proportionalis tertia capiatur: ipſa prima ad tertiam duplam, quàm ad ſecundam, habebit rationem. Habent autem & Polygona ſimilia, quadrilatera item duplam rationem, quam ſimilis rationis latus ad ſimilis rationis latus hoc eſt, quam prima ad lineam ſecundam. Demonſtratum uerò hoc eſt & in triangulis, hinc.

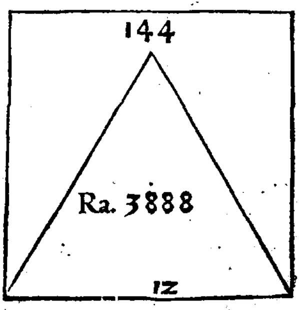
ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

Ὥστε καὶ καθόλου φανερόν, ὅτι ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν· ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

COROLLARIVM II.

Proinde etiam in uniuerſum manifeſtum eſt, Quòd ſi tres rectæ lineæ proportionales fuerint: erit, ſicut prima ad tertiam, ſic quæ à prima ſpecie ad eam quæ à ſecunda ſimilis & ſimiliter deſcripta eſt. quod demonſtraſſe oportuit.





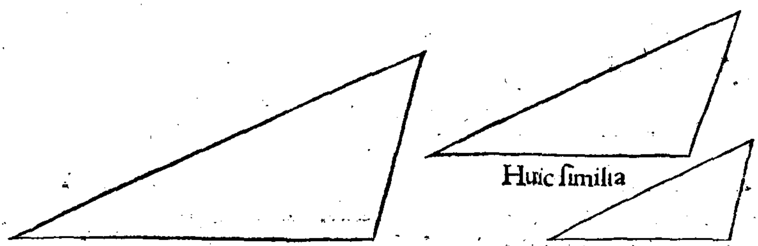
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑ.

Τὰ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια.

PROPOSITIO XXI.

Quæ eidem rectilineo ſimilia, & inter ſe ſunt ſimilia.

Deſcribatur primò rectilineum unum qualitercunq; ad placitum, per propoſitionem deinde 18 huius, duo uel plura alia deſcripto ſimilia: dico, illa & inter ſe ſimilia eſſe. Quoniam enim ſingula, per propoſitionem 18 deſcripta, rectilinea, ei quod



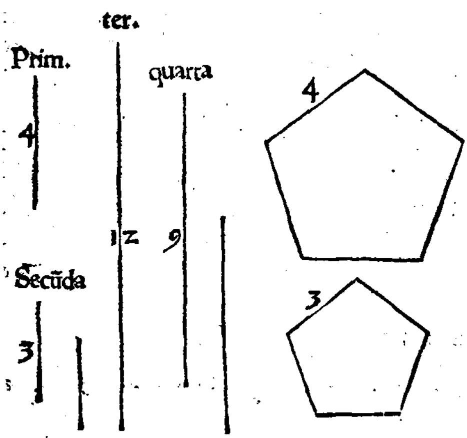
primò deſcriptum eſt, ſimilia ſunt: cum ſic ſingula etiam cum eodē primo, ex conuerſione definitionis ſimilium figurarum, æquiangula ſint, ac circa æquales angulos latera proportionalia habeant: porrò eidem æqualia, illa ex communi quadam noticia, & inter ſe æqualia: quæ inſuper eidem eædem ſunt, rationes, illæ ex propoſitione 11 quinti, inter ſe eædem ſint; per definitionem tandem, & illa ſecundò deſcripta rectilinea, inter ſe ſimilia erunt. Quæ igitur eidem rectilineo, &cæ. quod demonſtraſſe oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒ.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν· καὶ τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν εὐθύγραμμα, ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα, ἀνάλογον ἔσται. Κἂν τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν εὐθύγραμμα, ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα, ἀνάλογον ᾖ· καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

PROPOSITIO XXII.

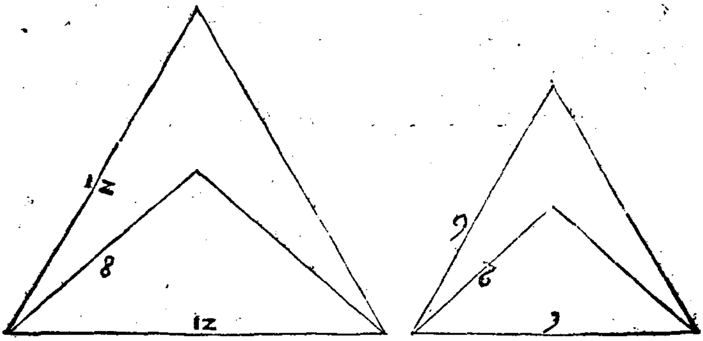
Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: & ab ipſis rectilinea, ſimilia ſimiliterq; deſcripta, proportionalia erunt. Et ſi à rectis lineis ſimilia ſimiliterq; deſcripta rectilinea, proportionalia fuerint: & ipſæ rectæ lineæ proportionales erunt.



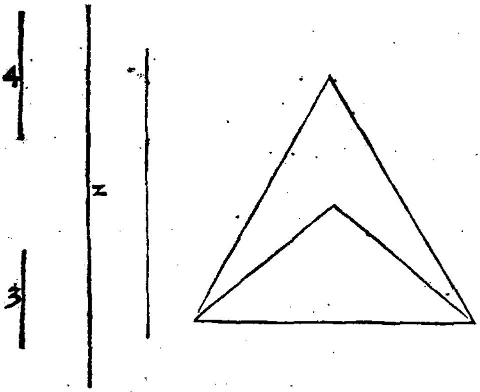
Sint quatuor rectæ lineæ, atque eſto quòd hæ ex hypotheſi proportionales ſint: dico ergo rectilinea, ab ipſis ſimilia, ſimiliterq; deſcripta, proportionalia eſſe. Deſcribantur à prima & ſecunda rectis lineis per 18 præcedentem, ſimilia ſimiliterq; poſita rectilinea, hoc idē fiat cum rectis lineis tertia & quarta per eandem, primę deinde et ſecundæ, tanquam duabus rectis datis,

per

per propositionem 11 huius, tertia proportionalis inueniatur, atq; hoc idem contingat lineis tertia & quarta. Et quoniam prima ad secundam est, ex hypothesi, ut tertia ad lineam quartam, secunda uerò ad aliam quandam, ex structura, sicut quarta



ta ad aliam: ex æqua ratione, & extrema unius in alterius ordinis extremorum ratione erunt: per corollarium igitur secundum propositionis 20 huius, patebit prior pars. Sed esto iam, quòd à rectis quatuor datis rectilinea descripta, similia similiterq; posita sint: quòd tum ipsæ rectæ proportionales sint, sic retinetur. Inueniatur per 12 huius, primæ, secundæ & tertiæ, tanquam tribus rectis lineis datis, quarta proportionalis: ab hac deinde quarta, per propositionem 18 huius, rectilineum, tertio rectilineo simile similiterq; positum, describatur. Et quoniam prima, secunda, tertia, & iam inuẽta, quatuor sunt, ex structura, lineæ proportionales, à prima uerò & secunda, à tertia item & ipsa inuenta, similia similiterq; posita rectilinea descripta sunt, cum ipsa recti linea eo ordine, ex priore parte propositionis huius, proportionalia sint: rectilineum primæ ad rectilineum lineæ secundę, sicut tertiæ ad inuentę rectilineũ erit. Sed quia sic etiã est, ex hypothesi, rectilineũ tertiæ, ad rectilineũ lineę quartę: rectilinea igĩt quartæ & iam inuentæ linearum, per proposi. 11 quinti, & posteriorem partem propositionis nonæ eiusdem, inter se æqualia erunt. Et quia per propositionem 21 præcedentem, inter se etiam similia, cum similia similiterq; posita, & inter se æqualia, rectilinea, ab inæqualibus lineis describi non possint: inuenta & quarta posita, lineæ inter se æquales erunt, tertiæ igitur ad eas, ex posteriori parte propositionis nonæ quinti, una & eadem ratio, & illa quidem quæ est primæ ad lineam secundam. Atq; hæc est pars posterior. Si quatuor igitur rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. quod demonstrasse oportuit.



ΛΗΜΜΑ.

Ὅτι δὲ ἐὰν εὐθύγραμμα ἴσα καὶ ὅμοια ᾖ, αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, δείξομεν οὕτως.

ASSVMPTVM.

ASSVMPTVM.

Quòd uerò, si rectilinea æqualia fuerint, & similia, similis rationis latera ipsorum æqualia inter se sunt, sic demonstrabimus.

Sint æqualia & similia rectilinea, ea nimirum, quæ à quarta & inuenta linea descripta sunt, cum hæc, ex definitione similium figurarum, latera habeāt circa æquales angulos proportionalia: dico, illorum similis rationis latera inter se æqualia esse, id quod ab imposibili sic demonstrari potest. Esto quòd inæquales inter se sint, quarta & inuenta (propter illas enim id assumptum est) æqualium ac similium rectilineorum lineæ. Et quoniam æqualia ac similia sunt hæc rectilinea, cum quæ circa æquales angulos habent latera, ex definitione proportionalia sint, sicut quidem prima maior tertia uel minor fuerit, ita ex propositione 14 quinti, secūda linea respectu quartæ erit, duæ igitur rectæ cum sint duabus rectis alijs longiores, utraq; utraq;: & rectilineū sub prioribus comprehēsum altero rectilineo maius erit, cum tamen ipsa, ex hypothesi, sint posita inter se æqualia. Non sunt igitur inæquales inter se, sed æquales, quarta & inuenta lineæ. quod demonstrasse oportuit.

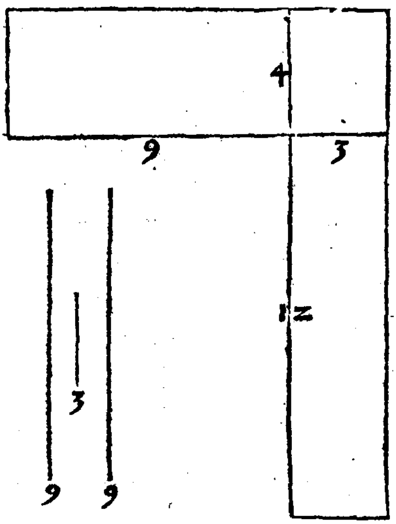
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ.

Τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα, πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

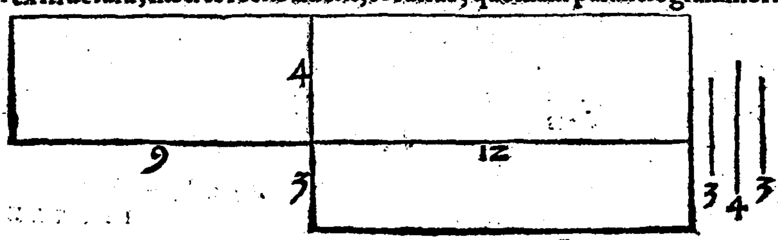
PROPOSITIO XXIII.

Æquiangula parallelogramma, inter se rationem habent eam, quæ ex lateribus componitur.

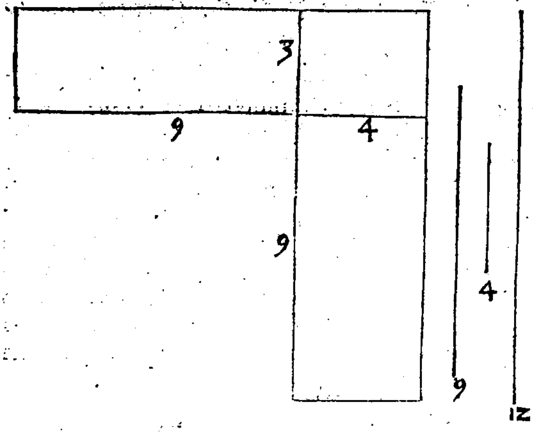
Sint duo parallelogramma æquiangula: dico illorum inter se rationem, ex laterum suorum, quę sint circa æquales angulos, rationibus compositam esse. Coniungantur parallelogramma cum angulis suis, quos habent æquales inter se, angulariter sic, ut unum latus unius, uel parallelogrammi uel anguli, uni lateri, alterius sit in directum una linea: & erunt, ex propositione 14 primi, & reliqua duo circa illos angulos latera in directum iuncta. describatur etiam secundum alterutrius anguli externi, & laterum ipsius quātitatem, parallelogrammū tertiū, quas uerò rationes habent circa ęquales angulos latera, in ijsdem rationibus continuo ponantur. iam tres rectæ lineæ aliæ, prima quidē ad placitum ducta, secunda uerò & tertia ex propositione 12 huius, primæ adiungantur. Et quoniam quas habent latera parallelogrammorum inter se rationes, illas habēt



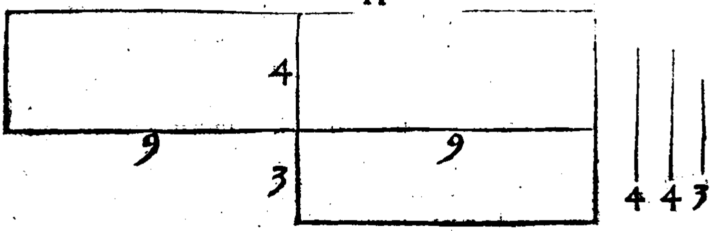
iam ex structura, hæ tres rectæ ductæ, & rursus, quoniam parallelogrammorum,



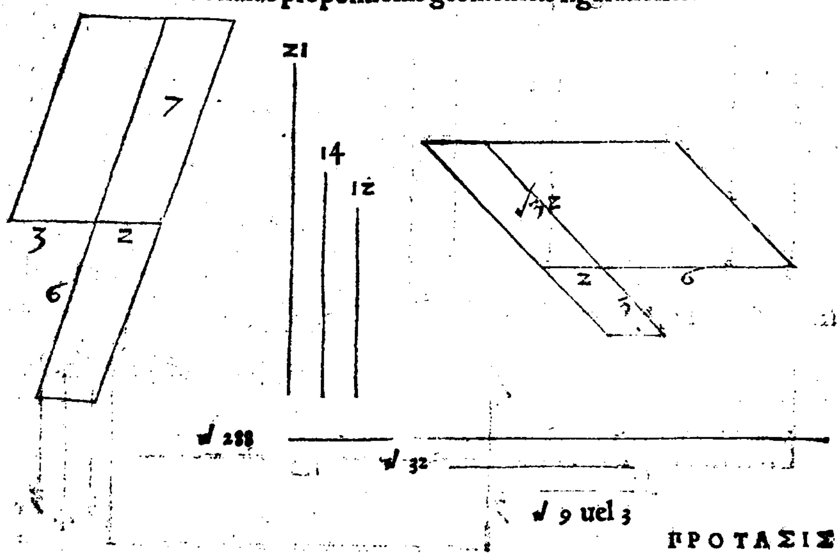
quorum unus & idem uertex fuerit, ex prima propositione huius, in suarum basium sunt ratione, hac ipsa prima, propositione deinde 11 quinti, utraque bis usurpata, & hæc tria parallelogramma, primum scilicet, tertium & secundum, in ductarum trium linearum ratione erunt, unde ex æqua ratione sicut prima ducta ad tertiam, sic & primum parallelogrammum ad secundum erit. Sed quoniam primæ lineæ ad tertiam ratio, ex primæ ad secundam, & secundæ ad lineam tertiam, hoc est ex datorum parallelogrammorum laterum, rationibus composita est: & parallelogrammum igitur prius ad posterius, rationem ex laterum rationibus compositam habebit. Aequiangula igitur parallelogramma, &cæ. quod demonstrasse oportuit.



Possunt huius secundæ figurationis parallelogramma etiam sic applicari.



Aliæ duæ huius propositionis geometricæ figurationes.



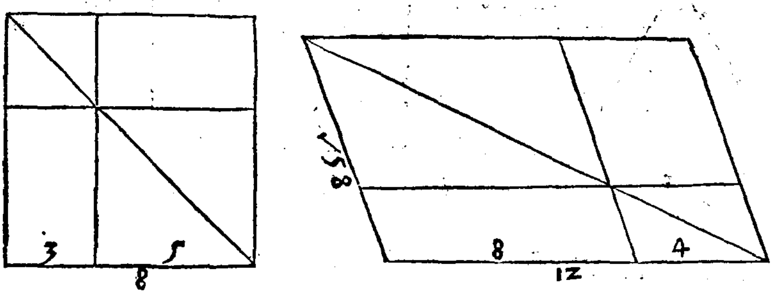
ΠΡΟΤΑΣΙΣ. ΚΔ.

Παντὸς παραλληλογράμμου, τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα, ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ, καὶ ἀλλήλοις.

PROPOSITIO XXIIII.

Omnis parallelogrammi, quę circa diametrum parallelogramma, tam toti quàm ipsa inter se similia sunt.

Describatur parallelogrammum, cum sua diametro, lineæ deinde rectæ duæ, sese mutuò in diametro secantes, quarum una quidem duobus, altera uerò reliquis duobus parallelogrammi lateribus parallela sit, ducantur, & figura parata erit: dicò ergò iam, quòd partialia, per quæ scilicet totius parallelogrammi diameter transit, parallelogramma, & toti, & sibijpsis inter se, similia sint. Quoniam enim in utroq; triangulo, duabus scilicet totius parallelogrammi medietatibus, ducta est linea, tertio in triangulo lateri parallela, cum sic reliqua duo latera in utroq; triangulo, ex propositione secunda huius, per ductam parallelam proportionaliter secta sint, hac propositione bis usurpata (sunt enim duo triangula:) & parallelogrammi latera per has duas, sese mutuò in diametro secantes rectas lineas, ex propositione 11



quinti, proportionaliter secta erunt. Quia autem diuisæ quantitates proportionales, hæ compositæ etiã, ex propositione 18 quinti, proportionales sunt: partialium igitur parallelogrammorum utrunq;, ex permutata ratione cum ipso totali parallelogrammo laterum proportionalium erunt. Præterea, quoniam lineæ, in diametro parallelogrammi sese mutuo secantes, oppositis suis lineis, ex structura parallelæ sunt: triangula partialia singula suis totalibus, ex secunda parte propositionis 29 primi, toties eam, quoties opus fuerit, repetendo, æquiangula; atq; statim etiã totale parallelogrammum utriq; partiali parallelogrammo æquiangulum erit: proportionalium deinde laterum, ex 4 huius, eorum quæ circa ęquales angulos. Et quia proportionalium laterum: simile igitur utrunq; ipsi toti per definitionem, quod est notandum. Sed quoniam, quę eidem rectilineo similia, illa & inter se similia esse, propositio 21 huius testatur, & hæc ipsa partialia parallelogramma, eadem ratione, inter se similia erunt, quod & ipsum notandum. Constat autem sic tota propositio. Omnis igitur parallelogrammi, quæ circa diametrum parallelogramma, tam toti quàm ipsa inter se similia sunt. quod demonstrasse oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ. ΚΕ.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ὅμοιον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον, τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.

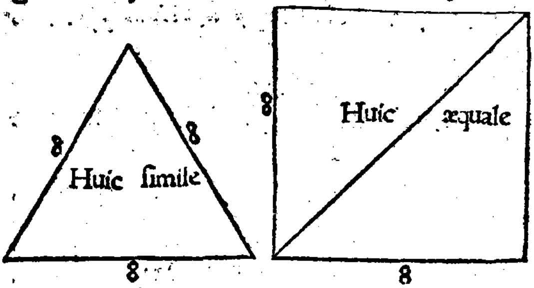
PROPOSITIO XXV.

Dato rectilineo, simile, & alij dato æquale, idem constituere.

Duobus rectilineis datis, propositum est, tertium, quod uni quidem ex datis simile, alteri uerò rectilineo æquale sit, describere. Rectilineorum utroq; in sua trian

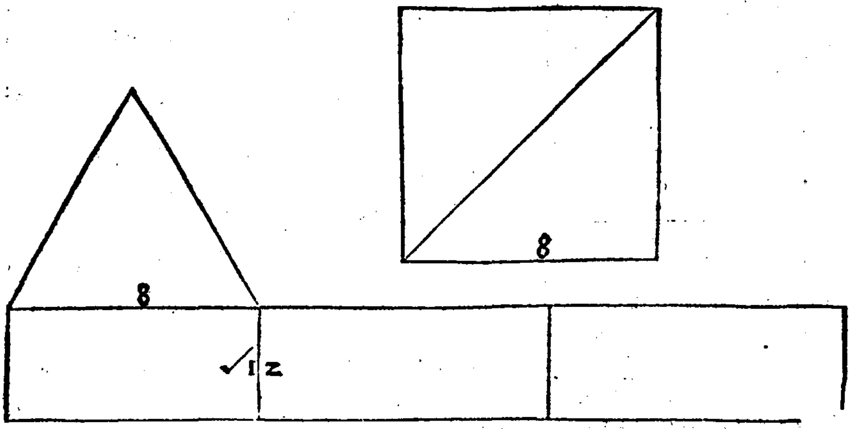
 gula

gula soluto, ad unum latus illius rectilinei, cui debet fieri tertium simile, tanquamq ad rectam lineam datam, per propositionem 44 primi, in dato alterius rectilinei uno angulo, tot parallelogramma, in quot triangula idem prius rectilineum solutum est, unicuiq scilicet triangulo unum æquale, ordine prætendantur, et erit totum compositũ toti priori rectilineo æquale. Eodem modo ad

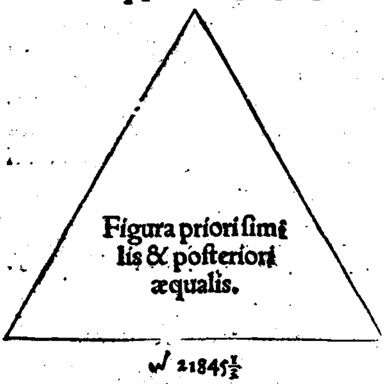


Vel contra, inueniatur, &c.

unum huius totius compositi rectilinei latus, quod scilicet lateri, in rectilineo sum-



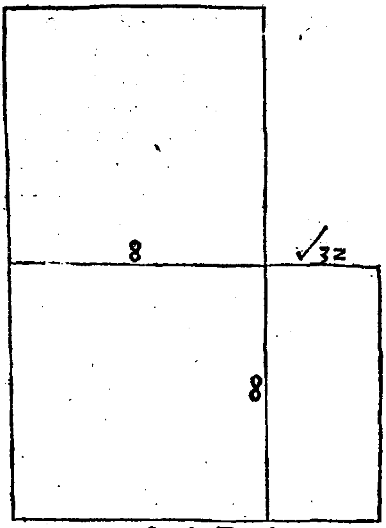
pto, minimè est oppositum, per eandem 44 propositionem, tot parallelogramma, in quot triangula alterum rectilineum diuisum est, unicuiq scilicet unũ æquale, in priori rectilineo angulo, prætẽdantur. Erit aũt sic illud huius totius parallelogrãmi latus, atq prioris parallelogrãmi descripti, quod scilicet in rectilineo sumptũ est, ex prop. 14 primi adamussim una linea. Media igitur proportionali, inter dicta latera, per prop. 13 huius, inuenta, ab ea tandem rectilineũ, quod sit priori rectilineo simile, similiterq positum, per propositionem 18 huius describatur: & propositioni satisfactum erit, quod sic demonstratur. Quoniam tres sunt lineæ proportionales, duorum nimirum parallelogrammorum, quæ duobus rectilineis, utrunq utriq, æqualia sunt, duo latera, & media inter ea linea proportionalis inuenta, cum ab harum prima, atq etiam secunda, similia, similiterq posita rectilinea descripta sint: prima ad lineam tertiam erit, ex corollario propositionis uicesimæ secundo, ut quod à prima, ad id quod à secunda similiter descriptum est rectilineũ. Et rursus, quoniam parallelogramma, quæ sub eodem uertice sunt posita, ex prima huius, in suarum basium sunt ratione: quam



rationem igitur habet rectilineum primum, ad id quod ex propositione 18 iam de-

scriptum

scriptum est, illam eandem habet etiam, ex propositione undecima quinti (duæ enim rationes uni sunt eædem) parallelogrammum, priori rectilineo æquale, ad id quod posteriori rectilineo æquale est, parallelogrammum, atque ex permutata ratione deinde, per propositionem 16 quinti, rectilineum ad parallelogrammum ut rectilineum ad parallelogrammum. Sed quia rectilineum in priori collatione, est suo parallelogrammo, ex structura æquale: & in posteriori sic, propter rationum similitudinem, rectilineum suo pa-



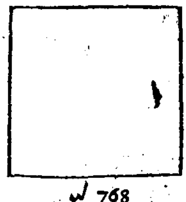


Figura posteriori similis & priori æqualis.

rallelogrammo æquale erit. quare & rectilineo alteri, huic parallelogrammo æquali, idem rectilineum æquale erit. Est autem & priori simile. Duobus igitur rectilineis descriptis, tertiũ iam, uni quidem simile, alteri uerò æquale, idem rectilineum descriptum est. quod fecisse oportuit.

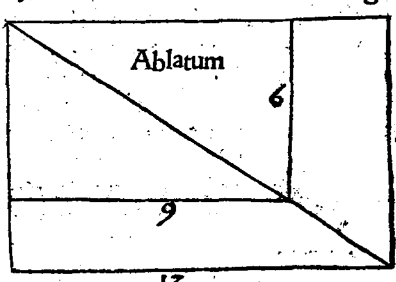
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ.

Ἐὰν ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ, ὅμοιόν τε τῷ ὅλῳ καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ· περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τῷ ὅλῳ.

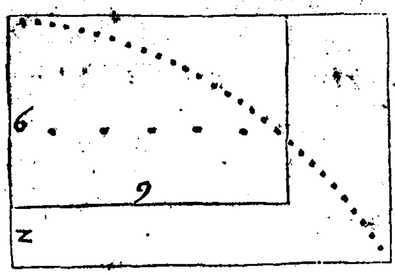
PROPOSITIO XXVI.

Si à parallelogrammo parallelogrammum auferatur, & simile toti & similiter positum, communem angulum habens ei: circa eandem diametrum est toti.

Describatur parallelogrammum, ab eo deinde aliud, sibi simile similiterque positum, communem etiam cum totali angulum habens, parallelogrammum auferatur: dico, ablatum circa totalis parallelogrammi diametrum consistere. Sumit hæc propositio suam demonstrationem ab absurdo illo, Partem suo toti, uel contrà, Totũ suæ parti æqualem esse, hoc modo. Ducatur ablati parallelogrammi diameter, ab angulo, quem cum totali communem habent incipiendo. Quod si hæc, ulterius continuata, diameter etiam parallelogrammi totalis fuerit: uerum est quod dicit propositio. Si uerò non, ducatur ab eodem communi angulo, si possibile sit, linea recta alia, quæ sit totalis parallelogrammi diameter: puncto deinde intersectionis, huius diametri & lateris parallelogrammi ablati, linea, quæ per ablatum parallelogrammum transeat, & insuper duobus



bus totalis parallelogrammi lateribus, parallela sit, per propositionem 31 primi, excitetur. Et quoniam parallelogrammorum utrunque, ablatum quidem, ex hypothesi, quod uerò *iam* formatum est ex propositione 24 huius, totali parallelogrammo simile est: utriusque igitur circa æquales angulos latera, ex definitionis similium figurarum conuersione bis usurpata, atque propositione 11 quinti inter se proportionalia erunt. Quia autē una & eadem linea, illa scilicet quæ utrisque est latus commune, ad duo reliqua horum parallelogrammorum latera, uel contrà (prout quidem in demōstratione processum fuerit) hæc duo ad commune illud latus, unam & eandem rationem habent: hæc duo reliqua latera, ex priore uel posteriore parte propositionis nonæ quinti, inter se æqualia erūt, longius breuiori, uel contrà, quod est impossibile. Propter illud absurdum igitur hæc duo parallelogramma, ablatum scilicet & totale, his propositionis hypothesibus, circa eandem diametrum consistere necesse erit. Si à parallelogrammo igitur parallelogrammum auferatur, &c. quod demonstrasse oportuit.



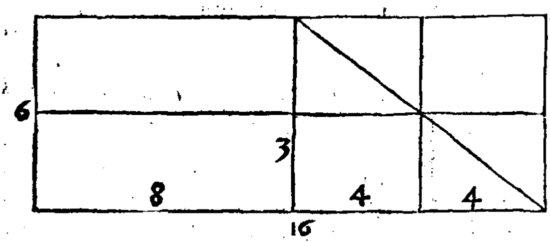
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΖ.

Πάντων τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις, ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις, τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένῳ· μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλόμενον παραλληλόγραμμον, ὅμοιον ὂν τῷ ἐλλείμματι.

PROPOSITIO XXVII.

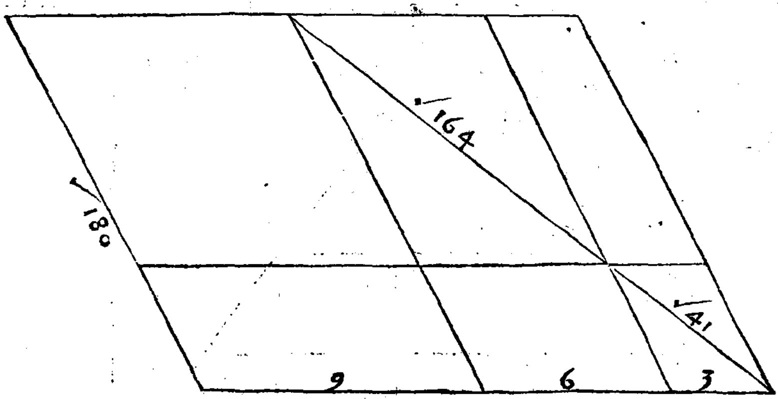
Omnium, circa eandem rectam lineam proiectorum parallelogrammorum, eorum quæ specie deficiunt parallelogrammis, similibus, similiterque positis ei, quod à dimidia linea describitur: si deficientia conferantur, erit quod ad dimidium proiectum est, & simile sumpto existit, omnium maximum.

Sensus propositionis est. Si eidem rectæ lineæ applicentur aliquot parallelogramma, unum quidem ad ipsius rectæ medietatem, alia deinde ad ipsam rectam utcunque, quæ tamen singula, ad completionem rectæ, deficiant in parallelogrammis, specie similibus & similiter positis, ei quod ab altera medietate descriptum est: quòd tum medietati applicatū parallelogrammum omnium maximum sit. Recta igitur linea data, ea primū bifariam secanda, atque ab una eius medietate, parallelogrammum utcunque describendum est. Ab altera deinde rectæ medietate parallelogrammum unum, duo uerò uel plura parallelogramma alia, à uarijs, ad placitum sumptis, diuisæ lineæ partibus, quæ sint medietate ipsius rectæ uel longiores uel breuiores describantur. esto tamē quòd singulę in parallelogrammis ei, quod primò ab una medietate diuisæ descriptum est, similibus, deficiant. Di



co igitur,

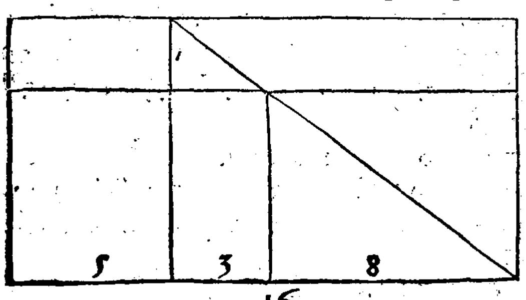
co igitur, quod tum, si deficientia conferantur, id quod à media descriptum est parallelogrammum, omnium maximum sit. Cum enim illa, in quibus ad rectam posita parallelogramma deficiunt, similia inter se, alterum item alterius sit ablatum, unum deinde angulum communem habeant: circa eandem diametrũ hæc, ex præcedenti propositione 26, consistunt. qua igitur ducta, figura item descripta, ut scilicet παραπληρώματα appareant, demonstratio sic succedet. Quoniam supplementa omnis parallelogrammi inter se æqualia sunt, æqualia insuper uel aliquod commune æqualibus additum, æqualia proueniunt. Et rursus, quoniam quæ sub eodem uertice sunt parallelogramma, si æquales bases habuerint, æqualia inter se sunt, eo



ordine procedendo, cum duo uni æqualia sint, æqualium uno pro altero sumpto, unum supplementum tandem cum altero simili, partiali ei, quod ad medietatem rectæ ponitur, parallelogrammo, æquale erit. Illis igitur æqualibus altero supplemento adiecto: ipse gnomon, qui scilicet, propter æqualitatem parallelogrammorum, pars est eius, quod à medietate altera descriptum est, parallelogrammi, alteri parallelogrammo æquale erit: totum igitur eo maius. Omnium igitur circa eandem diametrum, &c. quod demonstrasse oportuit.

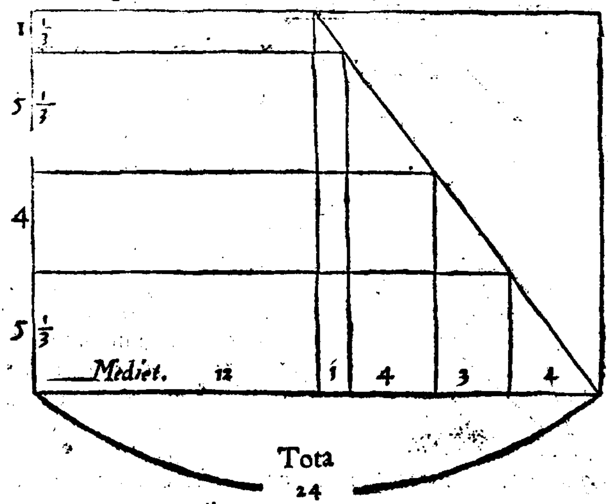
ALITER.

Sit rursus à rectæ lineæ medietate descriptum parallelogrammum, in medietatẽ altera deficiens, ab ipsa recta uerò parallelogrammum aliud, quod deficiat in parallelogrammo simili ei, in quo à medietate descriptum defecerat. esto autem quòd illud alterum sit priori descripto parallelogrammo altius: dico ergo adhuc, id quod à medietate rectæ descriptum est parallelogrammum, maius esse, &c. Quoniam enim illa, in quibus ad rectam lineam posita parallelogramma deficiunt, ut in superiori figuratione sese habent, ducta diametro, alia etiam recta linea propter supplementa accedente, demonstratio sic succedet. Parallelogramma, quorum unum est parallelogrãmi spacij supplementum, habẽs pro latere, lineam medietati rectæ æqualem, alterum uerò quod huic continuatum est, cum æquales bases habeant, æquè etiam alta sint: erunt illa, ex 36 primi, inter se æqualia. Et quia



etiam parallelogrammorum supplementa omnis parallelogrammi spacij, inter se æqualia sunt, cum duo uni æqualia, illa & inter se æqualia esse, ex quadam communi noticia receptum sit, ab horum ęqualium uno parallelogrammum, per quod diameter transit, ablatum : id quod relinquitur, alteri æqualiũ inæquale erit. Quòd si tandem his inæqualibus id, quod alterum eorum ad complendum parallelogrammum, à medietate diuisæ descriptum, desiderat, ex æquo adiectum fuerit, cum quæ sic proueniant, ex communi quadã noticia inter se inæqualia sint, maius autem eorum, id quod à medietate descriptum est, parallelogrammum, minus uerò alterum à recta data, &c. descriptum, concluditur propositum. Omnium igitur circa eandem rectam lineam proiectorum parallelogrammorum, eorum quæ specie deficiunt, &c. quod demonstrasse oportuit.

Figura huius propositionis geometrica alia.



Habet hæc figura quatuor rectilinea, unum quidem ad medietatem ductæ proiectum, tria deinde alia, ut oportuit, ad aliquam datæ partem. Et quia singula ad totius datæ rectæ completionẽ in aliquo rectilineo deficiunt toti simili, dico igitur, quod ad medietatẽ comparatum est rectilineum, unoquoq; ex reliquis maius esse. Id quod præter geometricam rationem uel in numeris patet, atque ob id etiam hæc figura posita est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΗ.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι.

Δεῖ δὴ τὸ διδόμενον εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παραβαλεῖν, μὴ μεῖζον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλομένου ὁμοίων ὄντων τῶν ἐλλειμμάτων, τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας, καὶ ᾧ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν.

PROPOSITIO XXVIII.

Ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum comparare deficiens specie parallelogrammo, quod simile existat rectilineo dato.

CAVTIO.

Oportet autem datum rectilineum, cui æquale comparandum est, non

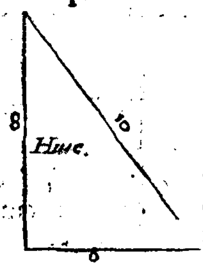
non maius esse eo, quod ad dimidiam comparatur similibus uidelicet existentibus, deficientibus specie, inter se, eo nimirum, quod ad dimidiam comparatur, ei quod simile specie deficit, existente simili.

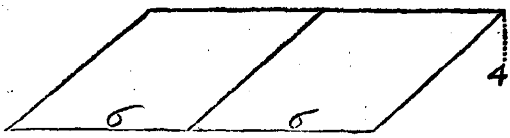
Quoniam enim, ut habet propositio præcedens 27, si quæ parallelogramma ad rectam quandam lineam comparata fuerint, quæ singula ad completionem rectæ lineæ deficiunt specie parallelogrammis, similibus similiterq́ue positis ei, quod à dimidia describitur, cum quod ad medietatem rectæ comparatur, ex propositione præcedenti 27 omnium maximum sit: hinc ergo factum est, quod huic 28 propositioni hæc cautio tanquam obseruatu digna adiecta sit. Nunc igitur quantum ad propositionem. Requirit hæc propositio primò rectam lineam, deinde uerò duo rectilinea: proponit autem, quomodo ad datam rectam comparãdum sit parallelogrammum, uni rectilineo æquale, quod minime maius existat ad medietatem rectæ comparato, similibus existentibus sumptis, sic ut ad completionem rectæ, specie parallelogrammo deficiat, alteri rectilineo existente simili. Recta igitur linea ac rectilineis datis, ipsa recta primùm bifariam secetur, ab alterutra deinde rectæ medietate rectilineo, quod alteri ex dato simile existat, per propositionem 18 huius descripto, à quo id deficiet ad completionem rectæ, etiam cõpleatur: & erit ille defectus alteri rectilineo, διὰ τὸν διορισμόν, aut æquale, aut eo maius. Si æquale, factum erit propositum: parallelogrammum nimirum ad rectam datam, uni rectilineo dato æquale, deficiens specie parallelogrammo, quod alteri dato rectilineo simile est, comparatum. Quòd si defectus ille altero rectilineo maior fuerit: & quod à rectæ medietate, per propositionem 18 descriptum est rectilineum, propter æqualitatem, eodem altero rectilineo maius erit. In quò igitur excedit, tali excessui parallelogrammum, quod etiam ut ipsum totum alteri dato simile sit, per propositionem 25 huius describatur, & erit illud cũ rectilineo dato uno, iam toti parallelogrammo æquale: toti etiam per se, ex propositione 21 huius, simile: laterum igitur, quæ habet circa æquales angulos, proportionalium. Et quoniã huic toti, quod scilicet dato uni rectilineo simile, ad medietatem etiam rectæ positum est, alteri rectilineo cum iam descripto parallelogrammo æquale est: erit contrà, hoc totum parallelogrammũ iam descripto solo maius: quare & illius, quàm huius, latera longiora. In longioribus igitur breuioribus æqualibus signatis, compleatur parallelogrammum: eritq́ue illud ei, quod per propositionem 25 descriptum est, parallelogrammo æquale: ipsi insuper toti ex propositione 21 huius, simile: circa eandem

Rectilinea data

æquale

simile



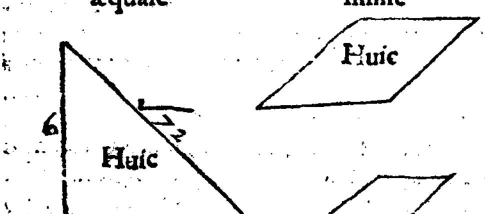


12

Rectilinea data

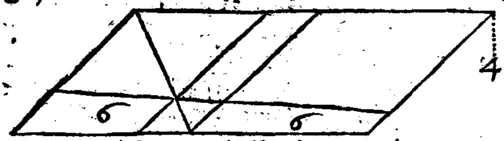
æquale

simile



Excessus, &c.

igitur diametrum hæc, partiale nimirum & totale parallelogrammum ex 26 huius



consistunt. Ducatur ergo diameter, & describatur figura. Et quoniam totum hoc parallelogrammum rectilineo uni, & excessui æquali descripto parallelogrammo, est æquale, assignatum uerò in eo parallelogrammum, excessui ęquale, cum ex communi quadam noticia, si ab æqualibus æqualia subtrahantur: & ea quę relinquuntur æqualia sint: subtractione igitur facta, gnomon, qui ex una parte relinquitur, rectilineo cuidam, ex altera parte relicto, æqualis erit. Sed quia ipsi gnomoni, ut ex primo libro facile colligitur, æquale est ad rectam comparatum parallelogrammum: quare ex communi quadam noticia, eidem relicto rectilineo hoc parallelogrammum æquale erit, deficitq; specie parallelogrammo, ad complendum totum, eo quod est alteri rectilineo dato simile. Ad datam igitur rectam lineam, dato rectilineo, &c. quod fieri oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΘ.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ, ὁμοίῳ τῷ δοθέντι.

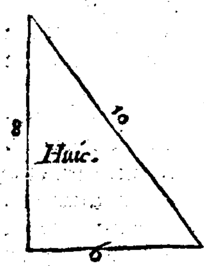
PROPOSITIO XXIX.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum comparare, excedens specie parallelogrammo, simili dato.

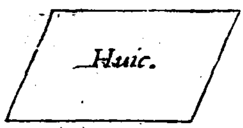
Et hæc propositio, ut præcedens 28 duo rectilinea, & rectam lineam datam requirit. Proponit autem, quomodo ad datam rectam comparandum sit parallelogrammum, quod quidem ipsum esset uni rectilineo æquale: excessus uerò ipsius, qui est ultra rectam lineam, alteri specie similis. Recta igitur linea ac rectilineis datis, ipsa recta primum, ut in præcedente, bifariam secetur: ab alterutra deinde rectæ medietate parallelogrammo, uni ex dato rectilineo simili, per propositionem 18 huius, descripto, aliud deinde, quod & ipsum sumpto rectilineo simile sit, iam uerò descripto cum rectilineo dato altero

Rectilinea data

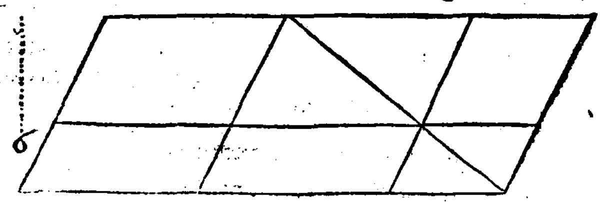
æquale



simile



æquale existat, per propositionem 25 huius describatur: hęc igitur, quod scilicet iam descriptum est, & prius positum, cum uni sint rectilineo similia, ex structura, inter se etiam, per prop. 21, similia erunt, ac similis rationis latera circa æquales angulos habebunt. Et quoniam unum altero parallelogrãmo, ut totum suo parte, maius est: & latera illius quàm huius parallelogrammi latera longiora erunt. Breuioribus igitur ad suarum longiorum quantitatẽ continuatis, parallelogrãmo etiã deinde cõpleto: quod sic describitur, ei, cuius longiora sunt latera, æquale, atq;



etiam simile erit: quare & alteri descripto, cuius nimirum latera continuata sunt,

ex

ex 21 huius simile: circa eandem igitur hæc duo parallelogramma diametrum, ex propositione 26, consistunt. Ducatur igitur diameter, & describatur figura. Et quoniam totum hoc parallelogrammi spacium, suo gnomoni & alteri parallelogrammo ad medietatem rectæ comparato, ut suis partibus, est æquale, æquale etiam ex communi quadam noticia, huic alteri parallelogrammo & uni rectilineo, ablato de illis communi: & reliquus gnomon, ex una parte, rectilineo æqualis erit. Cum igitur supplementa omnis parallelogrāmi spacij, ex propo. 43 primi. cumque etiam parallelogramma, super æqualibus basibus in eisdem item parallelis constituta, ex 36 eiusdem, inter se æqualia sint: huius memor, æquali pro æquali, hoc est, loco gnomonis ipso rectilineo, sumpto, res tandem concludetur. Ad datā igitur rectam lineam dato rectilineo, &c. quod fecisse oportuit.

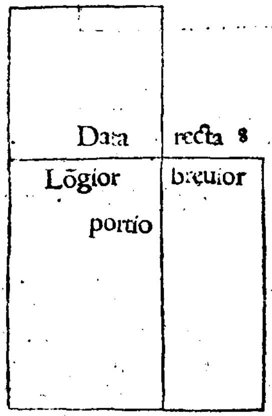
ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Λ.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

PROPOSITIO XXX.

Datam rectam lineam terminatam, per extremam ac mediam rationem secare.

Proponit hæc propositio idem quod in secundo propositio decima, sub alijs tamen uerbis. Sit igitur recta linea terminata data, atque propositum, eam per extremam & mediam rationem secare. Describatur igitur, per propositionem 46 primi, à recta data quadratum, ad lineam deinde, rectæ datæ πρὸς ὀρθὰς insistentem, alterutram, parallelogrammum, quod ipsi quidem quadrato æquale: ultra uerò quadratum de eo proiectum, eidem quadrato etiam simile sit, per propositionem 29 comparetur. Et quia per huius parallelogrammi alterum latus, quod scilicet per quadratum transit, recta data, ut iussum, diuisa est: propositioni igitur satisfactum erit: demonstratio deinde hoc modo colligenda. Quoniam enim à recta data descriptū, quadratum est ex structura: quadratum igitur est & id, propter similitudinem, quod ultra quadratum de parallelogrammo porrigitur. Et rursus, quoniam parallelogrammum, ad latus, rectæ datæ conterminale, per propositionem 29 applicatum, æquale est, ex structura, rectæ datæ quadrato: igitur eo quod hæc duo æqualia commune habent, de ijs ablato, & quę relinquuntur, per communem quandam noticiam, inter se ęqualia erunt. Sed quia sunt etiam æquiangula: latera igitur eorum circa æquales angulos, ex priore parte propositionis 14 huius, reciprocè proportionalia erunt. Quare, cum quadratorum latera ex definitione, inter se æqualia sint, parallelogramma insuper latera opposita, ex propositione 34 primi, æqualia inter se habeant: ex definitione lineæ, extrema & media ratione diuisæ, iam infertur propositum, quod scilicet recta data, extrema & media ratione diuisa sit, quod fieri oportuit.



Portio lon. $\sqrt{80} - 4$
breuior $12 - \sqrt{80}$

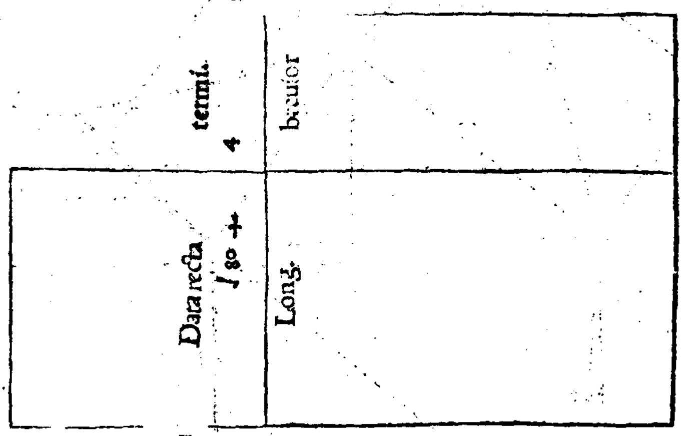
Exemplum in numeris.

Sit totus numerus

10 18 24 39 52 &c.

Portio maior	minor
$\sqrt{125} - 5$	$15 - \sqrt{125}$
$\sqrt{205} - 9$	$27 - \sqrt{205}$
$\sqrt{718} - 12$	$36 - \sqrt{718}$
$\sqrt{1901\frac{1}{4}} - 19\frac{1}{2}$	$58\frac{1}{2} - \sqrt{1901\frac{1}{4}}$
$\sqrt{3380} - 26$	$78 - \sqrt{3389}$

Exemplum geometricum aliud.



Portio longior 8
breuior $\sqrt{8} - 4$

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΑ.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἶδος, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.

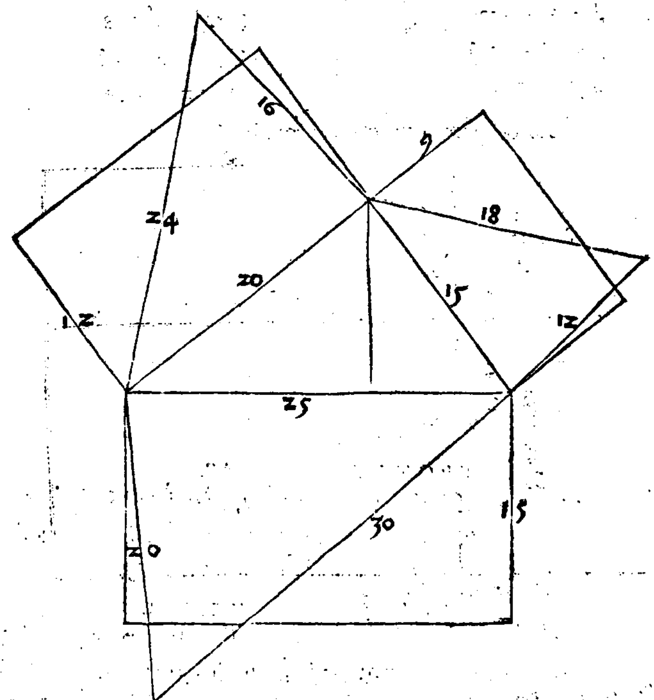
PROPOSITIO XXXI.

In rectangulis triangulis: quæ, ab rectum angulum ſubtendente, latere ſpecies deſcripta fuerit, ea æqualis eſt eis, quæ ſimiles ſimiliterq́ poſitæ à lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur.

Eſt hæc propoſitio aliquanto generalior, & latius ſe extendit quàm quæ eſt in primo quadrageſima ſeptima, cum hæc de quadratis tantùm, illa uerò de omnis generis rectarum linearum figuris, modò ſimilis delineationis fuerint, intelligatur. Sit igitur triangulum rectangulum, ab illius etiam unoquoque latere rectilineum deſcriptum, primum quidem à latere uno, ut lubet, à reliquis deinde reliqua, quemadmodum docet propoſitio 18: dico ergo, rectilineum lateris quod ſubtendit angulum rectum, reliquis duorum laterum rectilineis æquales eſſe. Ducatur ab angulo trianguli recto, per propoſitionem 12 primi, ad baſim perpendicularis. Et quoniam partialia deſcripta triangula, per propoſitionem 8 huius, & toti, & ipſa inter ſe ſimilia ſunt: æquiangula igitur hæc, & latera circa æquales angulos proportionalia habebunt. ſcilicet, ſicut ſe habet ſubtendens rectū totalis trianguli, ad utrunq; circa rectum angulum latus, ſic & in utroq; partiali triangulo, recto angulo ſubtenſa, ad utrunq; alterum. Sed quoniam tribus rectis lineis proportionalibus exiſtentibus, cum, per corollarium ſecundum propoſitionis 20 huius, prima ſit ad tertiam,

ut

ut quæ à prima ad illam, quę à secunda, similis similiterq́ posita species describitur, ratio, eodem corollario bis usurpato, conuersa insuper ratione & illa bis sumpta, cum sex quantitates appareant, quarum prima quidem ad secundam est ut tertia

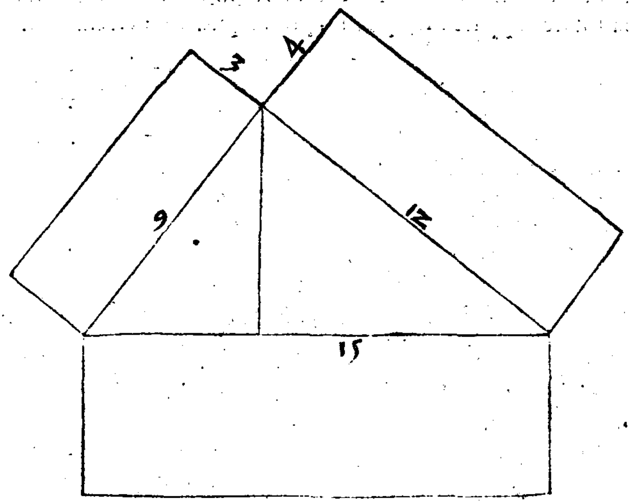


ad quartam, quinta uerò ad eandem secundam ut sexta ad quartam, atq; ita, per propositionem 24 quinti, prima cum quinta ad secundam, sicut tertia cũ sexta ad quantitatem quartam: sicut prima cum quinta secundæ, ita & tertia cum sexta quartæ quantitati æqualis sit, hinc propositioni satisfactũ erit. In triangulis igitur rectangulis, quæ ab rectum angulum subtendente latere species descripta fuerit, ea æqualis est eis, quæ similes similiterq́ positæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur. quod demonstrasse oportuit.

ALITER.

Figuræ, à rectanguli trianguli lateribus descriptæ, sunt, ex hypothesi, inter se similes: & quoniam similes figuræ, ex corollario propositionis 20 huius secundo, in duplicata ratione sunt similis rationis laterum, habet uerò & quadratum ad quadratum suorum laterum duplicatam rationem: & rectilinei igitur ad rectilineum, ex propositione 11 quinti, ut quadrati ad quadratum ratio erit. Hæc sit omnia bis usurpata, cum etiam iam sex quantitates, quales propositio 24 quinti requirit, appareant, per eandem & propositionem quadragesimam septimam primi, de triangulis rectangulis expositam, infertur tandem propositum.

Alia huius propositionis figuratio.



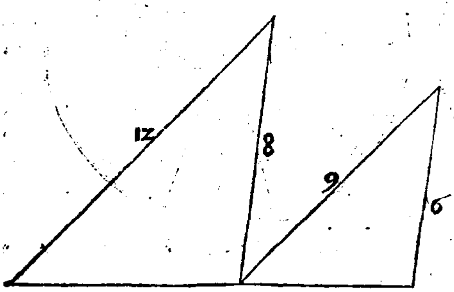
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΒ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα συντεθῇ, κατὰ μίαν γωνίαν, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι· αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ ἐπ' εὐθείας ἔσονται.

PROPOSITIO XXXII.

Si duo triangula, duo latera duobus lateribus proportionalia habentia, secundum unum angulum composita fuerint, sic ut proportionalia illorum latera parallela sint: tum reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineam erunt.

Sint duo triangula qualia hæc propositio requirit, quorum unius duo latera illam, quam duo alterius trianguli latera rationem constituant. Hęc autem applicentur secundum unum eorum angulum sic, ut latera rationis in uno, duobus lateribus rationis in triangulo altero sint parallela: dico, quod tertium unius, & tertium latus trianguli alterius, adamussim unam lineam constituant. Quoniam enim latera rationis in uno, lateribus rationis in triangulo altero, ex hypothesi, sunt lineæ parallelæ, cum in eas etiam cadat recta quædam linea alia, unum scilicet ex parallelis latus: αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι, ex prima parte propositionis 29 primi, inter se æquales erunt. Eadem igitur parte bis usurpata: & anguli qui in utroque triangulo inter proportionalia latera continentur, ex communi quadam noticia, inter se æquales erunt: atque deinde triangula ipsa, ex priore parte propositionis 6 huius æquiangula, tandem duo anguli ad tertium unius, duobus angulis ad tertium latus trianguli alterius, æquales erunt. Duobus igitur æqualibus his, utri hi fuerint, angulis, anguli coalterni, qui & ipsi, ut iam



demon-

demonstratum est, inter se æquales sunt, additi: & duo duobus, duo inquam anguli in uno triangulo, duobus extra illud æquales erunt. Addito insuper his æqualibus angulo quodam communi, tertio scilicet huius trianguli angulo: tres in triangulo anguli tribus alijs æquales erunt. Sed cum omnis trianguli tres anguli interiores, ex corollario propositionis 32 primi, duobus rectis æquales sint: & alij tres duobus rectis angulis æquales erunt. Quoniam autem ad aliquam rectam lineam quæ est, unum ex parallelis latus, atq; ad eius punctum, quod est commmunis triangulorum copula, duæ rectæ lineæ, tertia nimirum duorum triangulorum latera, non ad easdem partes ductæ, deinceps se habentes angulos duobus rectis æquales faciunt: in directum igitur, ex propositione 14 primi, hæc duo tertia latera una linea erunt. Si duo igitur triangula, duo latera duobus lateribus proportionalia habentia, &c. quod demonstrasse oportuit.

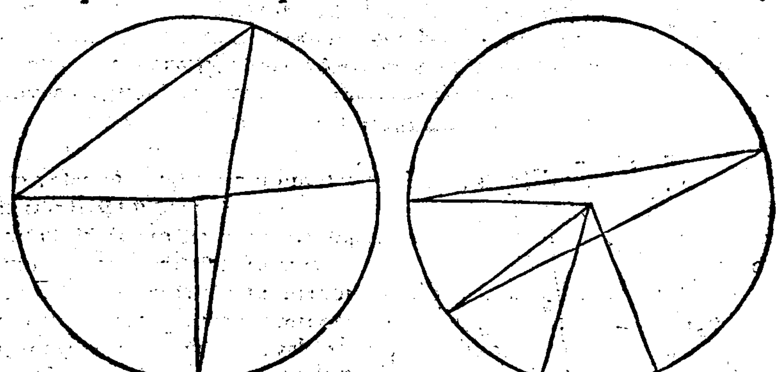
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΓ.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις, αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι ταῖς περιφερείαις ἐφ' ὧν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι. Ἔτι δὲ καὶ οἱ τομεῖς, ἅτε πρὸς τοῖς κέντροις συνιστάμενοι.

PROPOSITIO XXXIII.

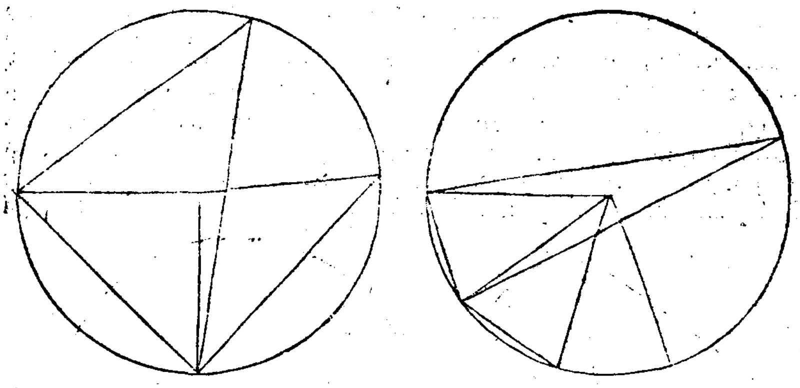
In æqualibus circulis, angulis eandem habent rationem ipsis circumferentijs super quibus constituuntur, illi siue ad centrum siue ad circumferentias constituti sunt: Insuper uerò & sectores, ad centra constituti.

Habet hæc propositio partes duas, requirit circulos æquales, & dicit: Si in æqualibus circulis anguli positi fuerint, illos eandem quam ipsæ circumferentiæ à quibus deducuntur rationem habere, siue ad centra illi; seu ad circumferentias positi fuerint. Insuper quod etiam sectores ad centra, illam, quam uel anguli uel circumferentiæ, rationem habeant. Describantur igitur æquales circuli, duo uel plures, in ijs etiam anguli ponantur, ad centra siue ad circumferentias deducti: dico, quam ipsæ circumferentiæ, illam eandem & angulos, ad centra siue ad circumferentias deductos, rationẽ habere: dico insuper, & sectores, qui ad centra positi sunt, illam eandem, quam uel circumferentiæ uel anguli, habere rationem. Signentur in uno circulo ordine quotcunque circumferentiæ, ei quæ subtendit angulum in circulo constitutum, æquales: & hoc quidem, ex propositione 28 tertij, officio circini, eo secundum quantitatem rectæ quam eadem circumferentia, si subtendi debeat, requi



rit, extenso, atq; extremitatibus harum singulis, rectis lineis cum centro iunctis; hoc idem, secundum illam uel aliam multitudinem, fiat etiam in circulis alijs. Et quoniam æquales sunt, ex structura, circumferentiæ inter se, æquales autem circumferentiæ;

cumferentiæ, ex propositione 27 tertij, in æqualibus circulis, æquales angulos subtendunt: & ipsi anguli sic inter se æquales erunt. Sicut igitur in unoquoque circulo, circumferentiarum aggregatum ad unam, illam scilicet, quæ in eodem circulo angulum subtendit, est multiplex: sic & angulorum aggregatum ad illũ eundem angulũ multiplex erit. Quare si circumferentiarum aggregatum in uno, æquale fuerit aggregato circumferẽtiarum in alio circulo, uel maius uel minus eo: & angulorum aggregata eodem modo sese habebunt. Sunt autem iam quatuor quantitates, duo scilicet anguli ad centra positi, horum deinde angulorum circumferentiæ subtensæ, quarum cum primæ & tertiæ assignatæ multiplices æqualiter se habeant, in addendo, minuendo & æqualitate, respectu multiplicium, quæ ipsis secundæ & quartæ assignatæ sunt: erunt illæ quantitates, ex definitione 5 quinti, in eadem ratione, prima scilicet ad secundam, ut tertia ad quartam, circumferentiarum nempe, ut angulorum ad centra positorum, ratio. Quoniam autem ad centra deductorum angulorum ratio, ea est ex 20 tertij, & propositione 15 quinti, quæ est angulorum qui ad circumferentias deducti sunt, cum duæ rationes eidem eædem, ipsæ ex 11 quinti inter se eædem sint: prior propositionis pars iam manifesta erit. Posterior nunc, quòd & sectorum ad centra, ut circumferentiarum sit ratio, sic demonstrari potest. Maneat prior dispositio, linearum deinde ipsorum sectorum extremitates, quas habent, uterque in sua circumferentia, lineis rectis coniungantur. Hoc idem fiat ex altera parte cum sectoribus proximis, & signentur in quatuor istis circumferentijs uel arcubus, quatuor puncta utcunque, atque ab ijs ad eorum arcuum fines rectæ lineæ ducantur. Et quoniam quæ ex centro circuli ad circumferentiam usque egrediuntur rectæ lineæ, ex definitione circuli, inter se sunt æquales, cum sic in utroque circulo duo triangula appareant, quorum duo latera unius, duobus lateribus in triangulo altero sunt æqualia, angulus etiam inter illa, angulo, ut iam ostensum est, æqualis: & tertium latus tertio lateri: totum deinde triangulum toti triangulo, ex proposi-



tione 4 primi, æquale erit. Et quia tertia horum triangulorum latera inter se æqualia sunt, æquales uerò rectilineæ in æqualibus circulis, ex propositione 28 tertij, æquales circumferentias auferunt, maiorem maiori, & minorem minori, si in utroque circulo, utriusque etiam rectæ lineæ arcus à toto circulo subtrahatur: quæ relinquuntur circumferentiæ, per hanc eandem propositionem, inter se æquales erunt: quare & anguli, qui super illas circumferentias deducuntur, ex propositione 27 tertij, inter se æquales. Sectiones igitur, ex definitione, similes: atque deinde etiam, cum super æqualibus rectis constitutæ sint, ex 24 tertij, inter se æquales. Est autem & triangulum triangulo æquale: totus igitur sector toti sectori æqualis, atque ideo & sectores in utroque circulo tandem omnes, inter se æquales erunt. Quotuplex igitur est in utroque circulo circumferentiarum aggregatum ad unam, illam scilicet, quæ in eo-

dem

dem circulo sectorem subtendit, tam multiplex est etiaam sectorum aggregatum ad illum eundem sectorem. Ergo sicut se habet prima ex illis quatuor, ad tertiam, in addendo, minuendo, uel æqualitate: ita & secũda erit, resp ectu quantitatis quartę. Sunt autem iam quatuor quantitates, duo scilicet sectores ad centra positi, horum deinde sectorum circumferentiæ subtensæ, quibus cum primæ & tertiæ, secundæ item & quartæ æquè sint assignatæ multiplices, erunt illæ quantitates, ut suprà, in eadem ratione: prima scilicet ad secundam, ut tertia ad quartam: hoc est, Sectorum ut circumferentiarum, uel propter similitudinem, ut angulorum ratio. In circulis igitur æqualibus, eadem ratio angulorum est, quę circumferentiarum super quibus constituuntur, siue ad centra siue ad circumferentias constituti sint. Itidemq; sectores, qui ad centra consistunt. quod demonstrasse oportuit.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

Καὶ δῆλον, ὅτι καὶ ὡς ὁ τομεὺς πρὸς τὸν τομέα, οὕτω καὶ ἡ γωνία πρὸς τὴν γωνίαν.

COROLLARIVM.

Et manifestum est, quòd sicut sector ad sectorem: ita & angulus ad angulum.

FINIS LIBRI SEXTI.

IOANNES SCHEVBELIVS candido Lectori S.

Habes ita, candide Lector, sex libros geometriæ Euclidis priores, ex traditione nostra, unà cum regulis Algebræ. Quod si fortè in aliquibus locis hallucinati sumus (id quod in hoc hactenus inusitato ac lubrico demonstrationis genere facile accidere potuit) quia tamen passim multa inuenientur, quibus oblectare sese studiosus harum rerum poterit, lapsus in hac re nostri apud te facile, ut spero, ueniam merebuntur. Quòd si candorem & iudicium non iniquum his adhibitum animaduertero, posteriores etiam nouem libros pari studio illustrare conabor, tecumq; communicare fideliter.

BASILEAE, PER IOANNEM Heruagium, Anno salutis humanæ M. D. L. Mense Septembri.